OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

11



Matematika

tankönyv

Matematika

11.



Oktatási Hivatal

A kiadvány 2022. március 3-tól 2027. augusztus 31-ig tankönyvi engedélyt kapott a TKV/129-7/2022. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára (Matematika) és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára (Matematika) megnevezésű kerettanterv előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kondor Lászlóné

Tananyagfejlesztők: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona Helén

Kerettantervi szakértők: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztő: Vépy-Benyhe Judit

Fedél: Slezák Ilona terve alapján Győrfi Blanka, Bánáti János

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók: © Shutterstock Képügynökség, Thinkstock, iStock, © MTI/MTVA, © CULTiRiS / AKG-Images, Hungart © 2024

A könyvben felhasználtuk a Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemen-Kiss Ilona Helén, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 11. tankönyv című művet. Raktári szám: FI-503011101

A nyersanyagként felhasznált tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

© Oktatási Hivatal, 2022

A kötet megjelenését a Belügyminisztérium támogatta.

Belügyminisztérium

ISBN 978-963-436-280-7

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: OH-MAT11TA
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Grafikai szerkesztő: dr. Valaczka Bence
Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 35 (A/5) ív, tömeg: 746,18 gramm
1. kiadás, 2024

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomtatta:
Felelős vezető:
Munkaszám:

A könyv témakörei

1. TRIGONOMETRIA

- Derékszögű háromszögek nem csak nevezetes szögekkel.
  Milyen meredek? Milyen magas? Mekkora palló kell?
- Számoljunk területet!
  Új területképlet a háromszöghöz. Szabályos és szabálytalan sokszögek területe.
- Háromszögeljünk! Ismerd meg a GPS-rendszer alapjait!
  Milyen távol van? Mekkora szögben illeszkedik? Mekkora területű?

2. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

- Állítsuk sorba! Válasszuk ki!
  Fagyi, zenelejátszás, kártya, lottó, jelszavak… Variáljunk, kombináljunk!
- Hányféleképpen lehet?
  Nem mindegy, hogy számít-e a kiválasztás sorrendje.
- Ábrázoljuk gráfokkal!
  Rajzoljuk a megoldást!

3. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

- Negyedik gyök? Hányados a kitevőben? Mi az értelme?
- Exponenciális folyamatok.
  Osztódás, népesedés, vírusok, radioaktivitás.
- Mi áll a kitevőben?
  Kamatozás, az információ mérése, pH-érték.

4. SZÁMELMÉLET

- Számhalmazok.
  Bent marad vagy kivezet? Hogyan épülnek egymásra a számhalmazok?
- Prímszámok, osztók és többszörösök.
  Tudod, mi a titkos kódok alapja? Hallottál már Erathosztenész szitájáról?
- Számrendszerek.
  Hogyan számol a számítógép? Nem csak 10 lehet a váltószám.

5. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

- Adatsokaságok és jellemzőik.
  Hogyan választanak baseballjátékost? A Big Data különleges világa.
- Táblázatok és diagramok.
  Láthatóvá és átláthatóvá tesszük az adatsokaságot.
- Lehet, hogy lehetetlen, vagy biztos, hogy lehetséges? Mennyire valószínű?
  Véletlen? Dobókockák, sorsolások, játékok, hibás és hibátlan termékek.

6. KOORDINÁTAGEOMETRIA

- Vektorokról régit és újat.
  Több hatás egy időben: hogyan száll le a repülőgép?
- Vektorok és koordináták.
  Nem csak a pontoknak vannak koordinátái.
- Körök és egyenesek a koordináta-rendszerben.
  A számítógép is érti a geometriát? ☺

Bevezetés

BEVEZETŐ

A matematika az élet számos területéhez kapcsolódik. Például a természethez, a szaktudományokhoz, a művészethez, a játékokhoz, a sporthoz. Ebben a tanévben sok ilyen alkalmazást, problémát vizsgálunk majd meg, és megtanuljuk, hogy ezek modellezéséhez, megoldásához milyen matematikai eszközök állnak rendelkezésünkre. Szeretettel kívánunk neked kitartást, sikert és sok örömet az idei tanévhez!

A leckék ELMÉLET részeiben találod majd a matematikai fogalmak, tételek leírását és rendszerezését. Sok folyamatábra illusztrálja, hogy milyen lépésekből épül fel egy matematikai feladatmegoldás.

Egy-egy KIDOLGOZOTT FELADAT mutatja be az új ismeretek, módszerek alkalmazását.

A sok-sok FELADAT között több korábbi érettségi feladat is található. Ha tartós tankönyved van, akkor ne írj a táblázatokba, ábrákba, hanem dolgozz a füzetedben! Segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb (post-it), abból tegyél egy öntapadós lapot a táblázat vagy ábra mellé, és arra írhatod az eredményeket.

A HÁZI FELADATOK részben található feladatokat elsősorban otthoni, egyéni munkára, ismétlésre szántuk.

Néhány lecke végén RÁADÁS is található, érdekességekkel, kiegészítésekkel. Ezek a feladatok általában nehezebbek, mint az órai feladatok. Ha hamar végzel az órai feladatokkal, érdemes megpróbálkoznod ezekkel is.

A témakörök végén lévő TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY sok további feladatot tartalmaz.

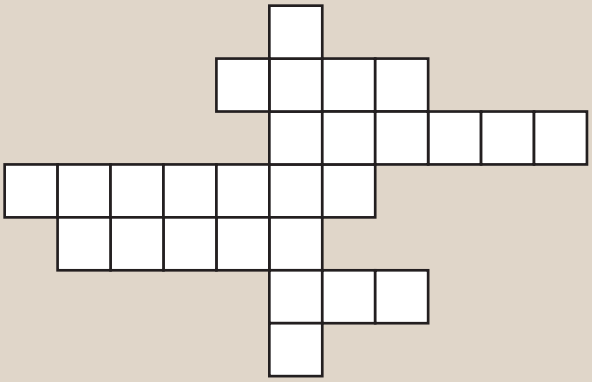
A tankönyv a középszintű érettségi vizsgára készít fel. Az emelt szintű matematikaérettségi ezenkívül további ismereteket, mélyebb alkalmazásokat és összetettebb feladatokat is tartalmaz, ezeket a tankönyvcsalád másik könyvében találod.



FELADAT

1. Határozd meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! A helyes válaszhoz tartozó szavakat írd a keresztrejtvény megfelelő sorába! A rejtvény függőleges oszlopa egy kis magyar falu nevét rejti. Miről híres ez a település?

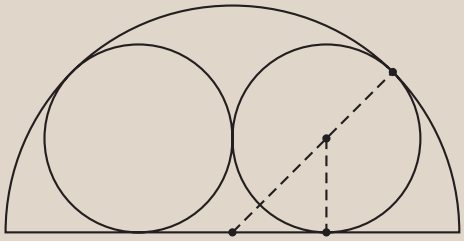
	Igaz	Hamis
Minden másodfokú egyenletnek van megoldása a valós számok halmazán.	EGÉSZ	OSZTÓ
Van olyan másodfokú függvény, amelynek grafikonja egy egyenes.	VEKTOR	LOGIKA
Ha két háromszög szögei páronként egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.	PONT	SZÖG
Ha két háromszög hasonló, akkor szögeik páronként egyenlők.	HASONLÓ	MŰVELET
A szabályos háromszög magasságának hossza az oldalhosszának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese.	KÖR	FOK



2. Egy félkörbe két egybevágó kis kört rajzoltunk az ábrán látható módon. A kis körök érintik egymást is, a félkörívet is, és a félkört határoló átmérőt is.

a) Mekkora a félkörív sugara, ha a kis körök sugara 5 cm?

b) Mekkora a kis körök sugara, ha a félkörív sugara 10 cm?



Megjegyzés: Ismert gótikus díszítőelem az egy körbe rajzolt négy egybevágó, egymást és a nagy kört érintő kis kör. A feladatban szereplő ábra ennek a gótikus díszítőelemnek a fele.



HÁZI FELADAT

1. Elevenítsd fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét! Határozd meg az $5x^2 + 17x - 12 = 0$ egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!

2. Az ABC derékszögű háromszögben a befogók hossza 5 cm és 12 cm. A hozzá hasonló EFG háromszögben az átfogó hossza 6,5 cm. Milyen hosszúak az EFG háromszög befogói és a körülírható körének sugara?

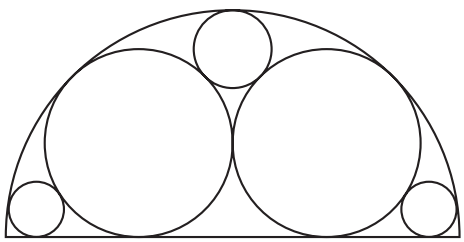
RÁADÁS

Az órai 2. feladat ábráját három további kis körrel egészítettük ki, melyek az ábra szerint érintik a korábbi köröket, illetve a félkört határoló átmérőt. A félkör sugara 10 cm.

a) Mekkora az újonnan berajzolt felső kör sugara?

b) Emelt szintű feladat a két legkisebb kör sugarának meghatározása. Mekkorák ezek a sugarak?

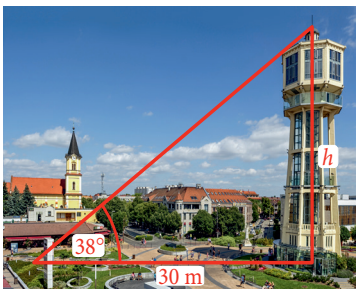
c) Szerkeszd meg az ábrát szerkesztőprogram segítségével (például *GeoGebra*)!



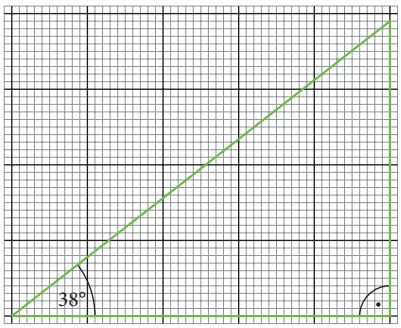
1 Hegyesszög tangense

BEVEZETŐ

Hogyan lehet meghatározni egy víztorony magasságát, ha tudjuk, hogy a toronytól 30 m távolságra lévő helyről 38°-os emelkedési szögben látjuk a legfelső pontját?



Kicsinyítéssel és méréssel dolgozunk. Milliméterpapírra rajzolunk egy derékszögű háromszöget, amelynek az egyik hegyesszöge 38°-os. Ha a szög melletti befogó hossza 30 mm, akkor ahány mm a szöggel szemközti befogó hossza, annyi méter a víztorony magassága. Pontosabb értéket kapunk, ha nagyobb háromszöget veszünk fel. Rajzunkon a szög melletti befogó 50 mm, a szöggel szemközti befogó 39 mm hosszúságú. Ez azt jelenti, hogy a 38°-os szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hosszának aránya 39 : 50, azaz 0,78.



Hasonló háromszögek esetén a megfelelő oldalak aránya egyenlő. Ezért ez minden olyan derékszögű háromszögben igaz, amelynek van 38°-os hegyesszöge, hiszen ezek a derékszögű háromszögek mind hasonlók egymáshoz.

A torony magassága tehát $30 \cdot 0{,}78 = 23{,}4$, azaz közelítőleg 23 méter.

Megfigyelés

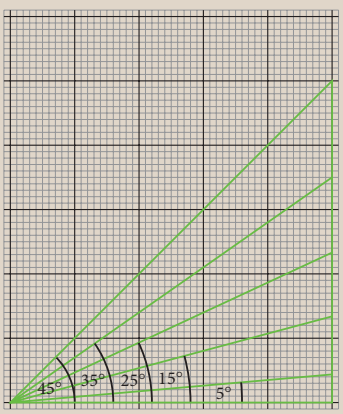
Egyetlen derékszögű háromszög segítségével sokféle problémát megoldhatunk. Milyen derékszögű háromszögekre vonatkoznak ezek? Olyanokra, amelyekről tudjuk, hogy van 38°-os szögük, vagy azt tudjuk, hogy a két befogójuk aránya 0,78.

Például:

Ha egy derékszögű háromszög befogóinak hosszúsága 7,8 cm és 10 cm, akkor a kisebbik hegyesszöge 38°-os.

FELADAT

1. Olyan derékszögű háromszögeket rajzoltunk milliméterpapírra, amelyeknek szintén 50 mm az egyik befogójuk. Olvasd le a másik befogó hosszát, és számítsd ki a két befogó arányát! Töltsd ki a táblázatot!

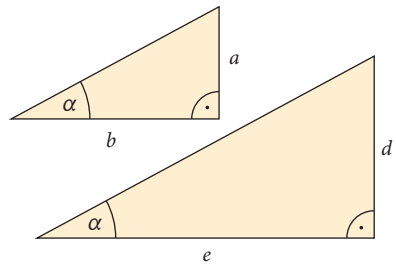


Hegyesszög	Szemközti befogó (mm)	Szög melletti befogó (mm)	Arányuk	
5°	4,5	50	4,5 : 50	0,09
15°		50		
25°	23,5	50	23,5 : 50	0,47
35°		50		
45°	50	50	50 : 50	1

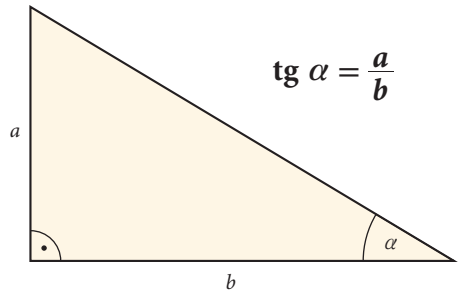
ELMÉLET

Hegyesszög tangense

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő. Két derékszögű háromszög hasonló, ha egyik hegyesszögük nagysága egyenlő, ezért ekkor a megfelelő befogók hosszának aránya egyenlő.
Az ábrán például $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$. Adott α hegyesszög esetén ez az arány minden α szögű derékszögű háromszögben ugyanekkora, azaz egy konkrét szám. Ezt a számot nevezzük az α hegyesszög tangensének.



Definíció: hegyesszög tangense
Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor a vele szemben lévő befogó és a mellette lévő befogó hosszúságának a hányadosát az α **tangensének** nevezzük. Jelölése: tg α.

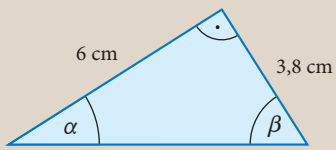


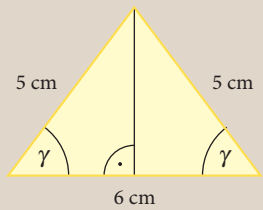
FELADAT

2. Az 1. feladatban készített táblázat felhasználásával válaszolj a következő kérdésekre!
- **a)** Egy derékszögű háromszög egyik szöge 35°-os, az egyik befogója 5 cm hosszú. Mekkora lehet a másik befogója?
- **b)** Egy téglalap oldalai 23,5 cm és 50 cm hosszúságúak. Hány fokos szöget alkot az átlója az oldalakkal?

3. Mely szögek tangense olvasható le az 1. feladat táblázatáról? Írd fel ezeket az új jelöléssel (például: tg 25° = 0,47)!

4. A kék háromszög derékszögű, a sárga háromszög egyenlő szárú. Mennyi az α, β, γ szögek tangense?



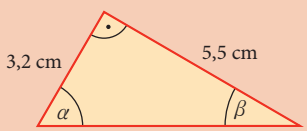


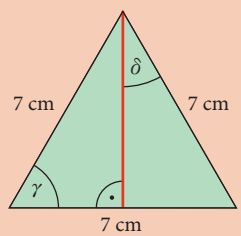
5. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 12 cm hosszú. Ezzel a befogóval szemközti szög tangense 0,75.
- **a)** Készíts ábrát!
- **b)** Számítsd ki a háromszög ismeretlen oldalainak hosszát!
- **c)** Számítsd ki a háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hosszát!

HÁZI FELADAT

1. Az 1. feladatban készített táblázat felhasználásával válaszolj a következő kérdésekre!
- **a)** Hány fokosak annak a derékszögű háromszögnek a szögei, amelynek az egyik befogója 10 cm, a másik 4,7 cm hosszú?
- **b)** Egy téglalap hosszabbik oldalai 35 cm-esek, és 35°-os szöget zárnak be az átlóval. Mekkorák a téglalap rövidebb oldalai?

2. A sárga háromszög derékszögű, a zöld egyenlő oldalú. Mennyi az α, a β, a γ és a δ szög tangense?





3. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének tangense 0,55. Ezen hegyesszög melletti befogó hossza 1,6 cm.
- **a)** Készíts ábrát!
- **b)** Számold ki a háromszög többi oldalának hosszát!

2 Számolás szögek tangensével

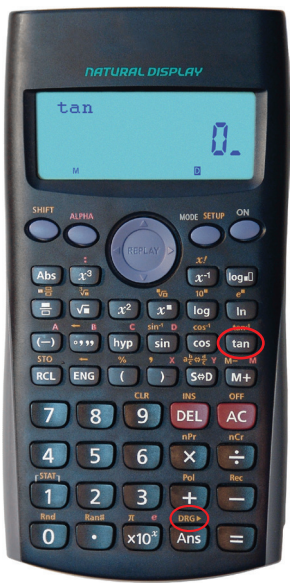
BEVEZETŐ

A hegyesszögek tangensét zsebszámológéppel is kiszámíthatod, a tan gomb segítségével. A legtöbb szög esetén ez közelítő érték lesz.

1. Adjuk meg a következő szögek tangensét számológép segítségével: 64°; 14° 24′.

Megoldás

A zsebszámológépek képesek a szögek tangensének nagy pontosságú megadására. Figyelni kell azonban arra, hogy a szögek mérése nem csak fokban történhet, más mértékegységek is használatosak. A számolás előtt ezért először be kell állítani a zsebszámológépen, hogy mi fokokban számolunk. Ennek közlésére sok gépen a DRG gomb szolgál, amelynek többszöri megnyomásával legtöbbször a kijelző legfelső sorában váltakozva a D, illetve DEG (degree = fok), R, illetve RAD (radián) vagy G, illetve GRAD (gon; gradián) jelenik meg. Más gépek esetében ez a MODE gomb megnyomása után a megfelelő számbillentyű leütésével, megint más gépeken külön menüben állítható be.



A 64° tangensének kijelzéséhez tehát állítsuk be a D jelzést a kijelzőn, majd nyomjuk meg a tan gombot, utána pedig írjuk be a 64-et. Ezután az = gombot megnyomva 2,050303842 jelenik meg a kijelzőn, vagyis
tg 64° ≈2,0503.



Számológéptől függően előfordulhat, hogy előbb kell a 64-et beírni és csak utána megnyomni a tan gombot (ez főleg egysoros kijelzőjű számológépeknél fordul elő), más gépeknél zárójel használatát is kérheti a gép.

A 14° 24′ tangensének kiszámítása a 64° tangenséhez hasonló módon történhet. A legegyszerűbb, ha a 14° 24′-et 14,4°-ra váltjuk át, és így írjuk be: tan 14,4. Eredményül 0,25675636 ≈ 0,2568 adódik. Van olyan számológép, amelyen közvetlenül beírható a tan 14° 24′ is. Tanulmányozd a géped használati útmutatóját!



2. Melyik az a szög, amelynek a tangense
- **a)** 0,2308;
- **b)** 5?

Megoldás

a) Ha ismert egy szög tangensének értéke, akkor a zsebszámológépen a $\tan^{-1}$ funkció segítségével határozhatjuk meg annak a hegyesszögnek a nagyságát, amelynek ez a tangense.
Számológéppel a következő gombok megnyomásával kaphatjuk meg a választ: 2ndf tan 0,2308 =. Ha a kijelző D állást jelez, akkor fokban kapjuk a választ: 12,99629059. Tehát a kérdezett szög megközelítőleg 13°.



A 2ndf helyett a vele azonos hatású SHIFT billentyű található egyes gépeken.

b) A 2ndf tan 5 = billentyűk használatával kapjuk az eredményt: 78,69°.

ELMÉLET

Hegyesszög tangense a zsebszámológépen

Ellenőrizd, hogy a zsebszámológéped fokokban számoljon!
(DRG funkcióban a D vagy DEG módot kell választani (degree = fok))

- tan billentyű
  adott szög nagyságához meghatározza a szög tangensét
- $\tan^{-1}$ funkció
  a szög tangensének ismeretében megadja a megfelelő hegyesszög nagyságát

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy osztály tanulói egy torony magasságát szeretnék megmérni. Gondosan kijelölnek egy pontot 30 méterre a torony talpától, majd többször is megmérik, mekkora emelkedési szögben látható a kijelölt pontból a torony csúcsa. Elég pontos a mérőeszközük, így a méréseik eredménye 36° és 38° között szóródik.

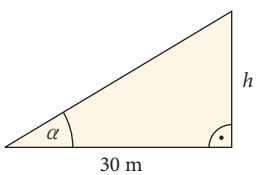
a) Mit mondhatnak a torony magasságáról?

b) Mi lenne a válasz, ha a mérési eredmények 36,5° és 37,5° között szóródnának?

Megoldás

Ha a torony magassága h és a mért szög α, akkor

$\frac{h}{30} = \operatorname{tg}\alpha$, vagyis $h = 30 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.



a) Ha $\alpha = 36°$, akkor
$h = 30 \cdot \operatorname{tg} 36° \approx 21{,}8$ méter,
ha $\alpha = 38°$, akkor
$h = 30 \cdot \operatorname{tg} 38° \approx 23{,}4$ méter.
Tehát 21,8 m és 23,4 m között van a torony magassága.

b) Ha $\alpha = 36{,}5°$, akkor
$h = 30 \cdot \operatorname{tg} 36{,}5° \approx 22{,}2$ méter,
ha $\alpha = 37{,}5°$, akkor
$h = 30 \cdot \operatorname{tg} 37{,}5° \approx 23{,}0$ méter.
Tehát 22,2 m és 23,0 m között van a torony magassága.

Megfigyelés

A hétköznapok során a szögmérésnél nem számít ritka eseménynek 1-2 foknyi eltérés a mérési eredmények között. Nincs értelme ilyen esetben a számológép által kijelzett sok tizedesjegy kiírásának. Látható, hogy még egy kisebb távolság esetében is akár 1 méteres bizonytalanság lehet az eredményben.

A csillagászok nagyon pontosan mérnek szöget, ám a fényévekben mérhető hatalmas távolságok miatt ők akár több millió kilométert is tévedhetnek; mérésüket mégis elég pontosnak mondják.



FELADAT

1. Add meg négy tizedesjegyre kerekítve a következő szögek tangensét számológép segítségével!
1,2°; 12°; 24,6°; 59,9°; 78,3°; 88,4°; 89,9°

2. Hány fokos az a hegyesszög, amelynek a tangense: 94,5; 29,2; 8,4; 3,2; 1; 0,28?

3. Az egyik csillagász egy galaxis távolságát 15,047 fényévnek mérte, míg egy másik csillagász ugyanennek a galaxisnak a távolságát 15,046 fényévnek. A két mérést a „sok tizedesjegy miatt" pontosnak érezzük. Vajon hány km eltérés van közöttük? (A fény 1 másodperc alatt 300 000 km-t tesz meg.)

4. Egy téglalap alakú kert egyik oldalának hossza 25 méter. Az adott oldal és a kert átlója által bezárt szög mérésekor 39,5 és 40,5 fok közötti értékeket kaptunk. Mekkora lehet a kert területe?

5. Megmértük, hogy egy magas hegytetőn álló kilátó teteje mekkora emelkedési szögben látható. A mérések 26° és 28° közötti eredményeket adtak. Térképen megmértük, hogy a hegycsúcs és a mi helyzetünk távolsága éppen 1 cm, ami a valóságban 1 km-nek felel meg.

a) Milyen magasan lehet a hegycsúcs a mérést végző személy szintje felett?

b) Változtat-e a válaszod „pontosságán", ha nem a hegytetőn álló kilátó tetejére vonatkozó szög szerepel adatként, hanem a hegy „valódi csúcsa"? Érvelj az állításod mellett!

6. A lejtős utak *meredekségét* „százalékban" adják meg. A 9%-os *meredekség* azt jelenti, hogy az úton 100 méternyi vízszintes elmozduláshoz 9 m függőleges elmozdulás tartozik. Ezt most már úgy is kifejezhetjük, hogy a lejtő vízszintessel alkotott hegyesszögének tangense 0,09. Mivel ez az érték az 5°-os szög tangense, ezért a lejtő 5°-os szöget zár be a vízszintessel.

a) Hány százalékos emelkedésű az a lejtő, amely a vízszintessel 15°-os szöget alkot?

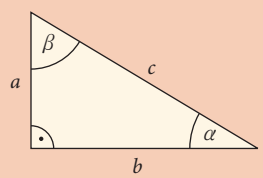
b) Egy 15°-os emelkedésű egyenes úton bizonyos távolságot biciklizve az indulási helyünknél 30 m-rel magasabban fekvő helyre jutottunk. Hány métert bicikliztünk ezen az úton?

c) Egyenletesen emelkedő úton biciklivel 250 m-t lefelé gurulva 23 méterrel lejjebb kerültünk a kiindulási szinthez képest. Hány százalékos lejtőn gurultunk? Hány fokos szöget zár be a vízszintessel a lejtős út?

d) Hány fokos emelkedőt jelentene a 100%-os meredekség?

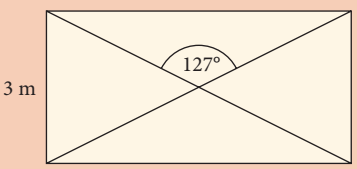
HÁZI FELADAT

1. Készíts táblázatot a füzetedben, és töltsd ki az ábra alapján! Az oldalak hosszát cm-ben adtuk meg.



	a	b	c	α	β
1. háromszög		5,8		25,4°	
2. háromszög	12,3				72,1°
3. háromszög	2	5			
4. háromszög		12	13		

2. Egy téglalap alakú virágoskertet az átlóival négy részre osztottunk az ábra szerint.



a) Mekkorák a téglalap ismeretlen oldalai?

b) Mekkora egy-egy rész területe?

c) Mekkorák a téglalap átlói?

3. Milyen hosszú az árnyékod, amikor a napsugarak **a)** 57°-os; **b)** 45°-os; **c)** 37°-os; **d)** 20°-os szöget zárnak be a vízszintes talajjal?

RÁADÁS

A függvénytáblázat használata

A számológépek megjelenése kiszorította azokat a táblázatokat, amelyeket több évszázados munkával állítottak össze matematikusok, csillagászok, „megszállottak". A hatalmas munka eredménye ma egy apró szerkezetbe van zárva, a kért értékek „gombnyomásra" megjeleníthetők. Sőt, olyan pontossággal írja ki a számológép az eredményeket, amelyről a táblázatok készítői álmodni sem mertek.

Szögek tangense

tg 0°–45° →

tg	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875
5°	0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763
10°	1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679
15°	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057

1. Hogyan határozható meg a táblázat segítségével például tg 14° 24′?
Igen egyszerűen, ahogyan azt a rajz segítségével könnyen leolvashatjuk: 0,2568. Természetesen ez egy négy tizedesjegyre kerekített érték, ahogyan azt a függvénytáblázat neve (Négyjegyű függvénytáblázatok) is sugallja.

2. Melyik hegyesszög tangense a 0,1370? Ezt is könnyen leolvashatjuk: 7° 48′ = 7,8°.

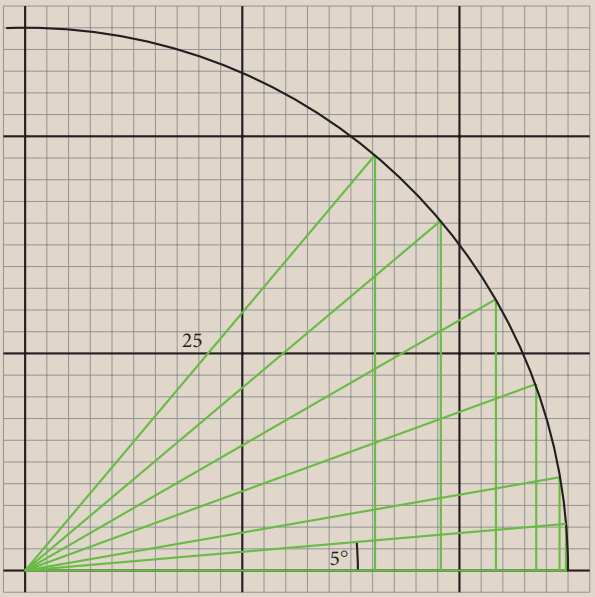
3. Ha olyan szöget keresünk, amely nem olvasható le a táblázatból, akkor *közelítéssel* tudjuk csak megadni az eredményt. *Például:* Mennyi tg 11,55°?

Megoldás
11,55° = 11° 33′. A táblázatból látjuk, hogy tg 11° 30′ = 0,2035 és tg 11° 36′ = 0,2053.
Amíg a szög 6′-et nő, addig a tangense 0,2053 − 0,2035 = 0,0018-del növekszik. Egy szögpercnövekedésre ezért (ha egyenletesnek képzeljük a növekedést) 0,0018 : 6 = 0,0003 növekedés „jut". Így 3′ növekedésre 0,0003 · 3 = 0,0009 növekedés jut. Ezért tg 11,55° = tg 11° 33′ ≈ 0,2035 + 0,0009 = 0,2044. A számológépünk által kijelzett tg 11,55°-ot négy tizedesjegyre kerekítve az előbb kiszámított értéket kapjuk.
A leírt közelítő eljárást *lineáris interpolációnak* nevezik. Ennek jelentését és pontosságát csak a *tangensfüggvény* megismerése után érdemes kutatni.

3 Hegyesszög szinusza, koszinusza

FELADAT

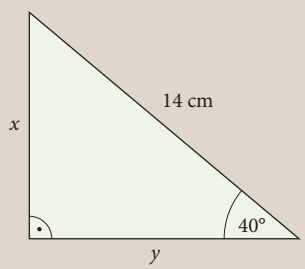
1. Olyan derékszögű háromszögeket rajzoltunk milliméterpapírra, amelyeknek 25 mm az átfogójuk. Olvasd le a két befogó hosszát, és mindkét befogó esetén számítsd ki a befogó és az átfogó arányát! Töltsd ki a táblázatot!
(Számíts rá, hogy a leolvasásod pontatlan!)

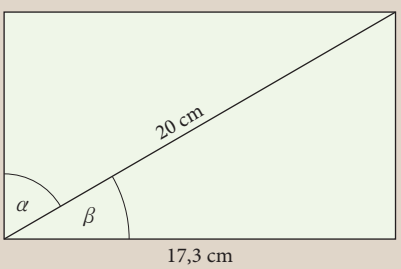


Hegyesszög	Szöggel szemközti befogó (mm)	Szög melletti befogó (mm)	Átfogó (mm)	Szöggel szemközti befogó és átfogó aránya	Szög melletti befogó és átfogó aránya
5°	2	25	25	0,08	1
10°	4,5	24,5	25	0,18	0,98
20°		23,5	25		
30°	12,5	21,6	25		
40°	16		25		
50°		16	25		

2. Az előző feladatban készített táblázat felhasználásával válaszolj a következő kérdésekre!

a) Egy derékszögű háromszög egyik szöge 40°-os, az átfogója 14 cm hosszú. Mekkorák a befogói?

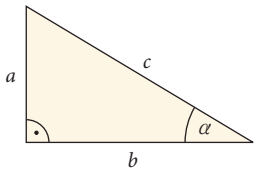




b) Egy téglalap átlója 20 cm, egyik oldala 17,3 cm hosszúságú. Hány fokos szöget alkot az átló az oldalakkal?

ELMÉLET

1. **Definíció:** Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor
   - a szöggel szemben lévő befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosát az α **szinuszának** nevezzük, jelölése: sin α;
   - a szög mellett lévő befogó és az átfogó hosszúságának a hányadosát az α **koszinuszának** nevezzük, jelölése: cos α.



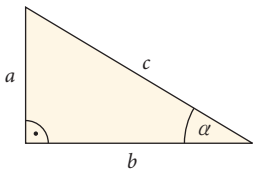
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

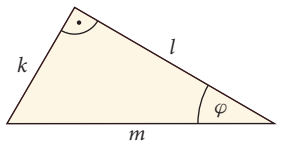
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

A szögek szinuszát, koszinuszát és tangensét a szögek **szögfüggvényeinek** nevezzük.

2. A háromszög elhelyezkedése és betűzése sokféle lehet. A szögfüggvények használatakor mindig jelöld be, hol van a derékszög, és melyik a feladatban szereplő hegyesszög! Gondosan azonosítsd be, hogy melyik oldal az átfogó, melyik a hegyesszöggel szemközti befogó, melyik a hegyesszög melletti befogó!
Az ábra szerinti derékszögű háromszögekben:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
$\sin\varphi = \frac{k}{m}$	$\cos\varphi = \frac{l}{m}$	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{l}$





3. Hegyesszög szögfüggvényei a zsebszámológépen
Először ellenőrizd, hogy a zsebszámológéped fokokban számoljon! (D vagy DEG)

sin billentyű	A szög szinuszának meghatározása (a szög ismeretében)		$\sin^{-1}$ funkció	A hegyesszög értékének meghatározása (a szög szinuszának ismeretében)
cos billentyű	A szög koszinuszának meghatározása (a szög ismeretében)		$\cos^{-1}$ funkció	A hegyesszög értékének meghatározása (a szög koszinuszának ismeretében)

FELADAT

3. 500 m hosszú egyenes út vezet fel a turistaháztól a hegycsúcsra. Az út a vízszintessel közelítőleg 15°-os szöget zár be.
- **a)** Mekkora szintkülönbség van a kiindulási és érkezési hely között?
- **b)** Mekkora távolságot mérhetünk a kiindulási helyünket jelző pont és a hegycsúcsot jelző pont között az 1 : 8000 arányú turistatérképen?

4. Indokold meg, miért nincs olyan hegyesszög, amelynek a szinusza vagy a koszinusza nagyobb 1-nél!

5. Egy egyenlő szárú háromszögben a szárak hossza 14 cm, és a két szár 44°-os szöget zár be egymással.
- **a)** Milyen hosszú a háromszög alapja?
- **b)** Milyen hosszúak a háromszög magasságai?

HÁZI FELADAT

1. Egy építkezésen egy 0,5 m magas platóhoz egy körülbelül 2 m hosszú pallót támasztottak, hogy azon tolják fel a talicskákat. Körülbelül mekkora szöget zár be a palló a vízszintessel?

2. Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 1,8 cm, átfogója 4,7 cm hosszú. Határozd meg a háromszög hegyesszögeinek szinuszát, koszinuszát és tangensét!

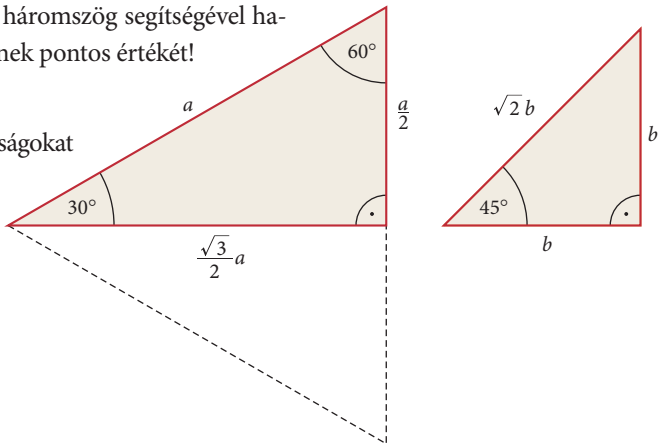
3. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 25 cm, az egyik hegyesszöge 35°-os. Mekkorák a háromszög befogói, és mekkora az átfogóhoz tartozó magassága?

4. Egy egyenlő szárú háromszög szárai 28 cm hosszúak, alapja pedig 10 cm hosszú. Mekkorák a szögei?

4 A szögfüggvények tulajdonságai

KIDOLGOZOTT FELADAT

A szabályos háromszög, valamint az egyenlő szárú derékszögű háromszög segítségével határozzuk meg a nevezetes szögek (30°, 45°, 60°) szögfüggvényeinek pontos értékét!



Megoldás

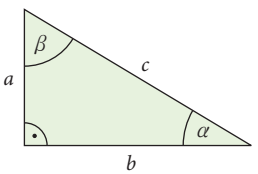
A szögfüggvények értékét megkapjuk, ha a megfelelő oldalhosszúságokat elosztjuk egymással. Pl. $\sin 45° = \frac{b}{\sqrt{2}\,b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

ELMÉLET

A szögfüggvények tulajdonságai

1. Pótszögek szögfüggvényei



Az ábra jelöléseivel: $\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha$ és $\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha$.

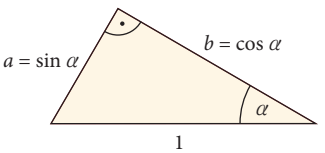
Vagyis hegyesszög szinusza egyenlő pótszögének koszinuszával.

2. A tangens szögfüggvény kifejezése a szinusz és koszinusz szögfüggvényekkel

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

3. Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, melynek az egyik hegyesszöge α, és átfogójának hossza 1 egység.



$\sin\alpha = \frac{a}{1}$; ebből $a = \sin\alpha$; $\cos\alpha = \frac{b}{1}$; ebből $b = \cos\alpha$.

Írjuk fel erre a derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt!

$a^2 + b^2 = 1$, azaz $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Ha $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ értékét négyzetre emeljük, azt így jelöljük: $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Ennek az összefüggésnek a segítségével egy hegyesszög szinuszának ismeretében kiszámíthatjuk a szög koszinuszát és viszont.

4. Milyen értékeket vehetnek fel a hegyesszögek szögfüggvényei?

A hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense a definíció szerint két hosszúság hányadosa, ezért biztosan pozitív. A derékszögű háromszög befogója mindig kisebb, mint az átfogója. Ezért a hegyesszög szinusza és koszinusza is kisebb, mint 1.

Ha α hegyesszög, akkor
- $0 < \sin\alpha < 1$
- $0 < \cos\alpha < 1$
- $0 < \operatorname{tg}\alpha$

FELADAT

A feladatok megoldásához használj számológépet! Ügyelj arra, hogy a számológéped fokokban számoljon (D vagy DEG állásban legyen)!

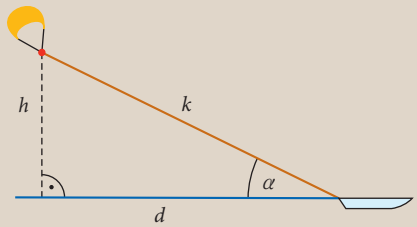
1. Egy Spanyolországról szóló útikönyvben olvastuk: „A Montserrat hegységben van a világ legmeredekebb drótkötélpályás felvonója. Emelkedése 82°-os, hossza 680 méter, és útja során 535 méter szintkülönbséget győz le.”

a) Készíts rajzot!

b) Mutasd meg, hogy ezek az adatok nincsenek összhangban egymással! Mi lehet a magyarázat?

2. Ellenőrizd a nevezetes szögekre a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosságot!

3. A motorcsónakos siklóernyőzés *(parasailing)* során egy motorcsónakhoz rögzített kötél segítségével emelkedik magasba az ejtőernyős. Mikor száll magasabban a siklóernyős, amikor 80 méteres a kötél és 35°-os az emelkedési szög, vagy amikor 50 méteres a kötél és 58°-os a szög?



4. Egy hegyesszög szinusza 0,8. A $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság segítségével határozd meg a szög koszinuszának és tangensének pontos értékét!

5. Mennyi $\sin^2 37° + \sin 37° - \cos 53° + \sin^2 53°$? Ne használj számológépet!

HÁZI FELADAT

1. A Budavári Siklót gróf Széchenyi Ödönnek – gróf Széchenyi István fiának – kezdeményezésére építették. 1987 óta az UNESCO világörökségi listáján szerepel. Pályája a Lánchíd budai hídfőjétől a budavári palota bejáratáig tart. A két végpont szintkülönbsége 50 méter. A sikló pályájának hossza 95 méter.



Mekkora szöget zár be a vízszintes síkkal a sikló pályája?

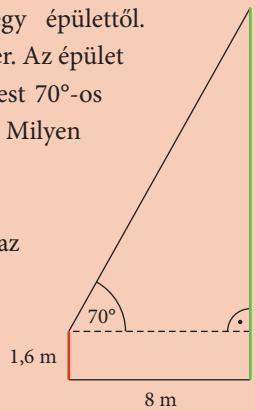
2. Folytasd a lecke órai 1. feladatát!

a) Mekkora lenne a függővasút emelkedési szöge, ha egyenletes emelkedéssel érné el 680 méteres úton az 535 méteres emelkedést?

b) Mekkora utat tenne meg a függővasút, ha 82°-os egyenletes emelkedéssel 535 méter szintkülönbséget győzne le?

c) Mekkora szintkülönbséget győzne le a függővasút, ha 82°-os egyenletes emelkedéssel haladna 680 méteres úton?

3. Sándor 8 méterre áll egy épülettől. A szemmagassága 1,6 méter. Az épület tetejét a vízszinteshez képest 70°-os emelkedési szögben látja. Milyen magas az épület?



4. Egy 20 m hosszú medence az egyik végénél 120 cm mély, a másik végénél 160 cm mély, és közben egyenletesen mélyül. Mekkora szöget zár be a vízszintessel a medence alja?

5 Hosszúságok és szögek kiszámítása

BEVEZETŐ

Tanácsok hosszúságok és szögek kiszámításához

Keress derékszögű háromszöget! → **Jelöld be, hol van a derékszög!** → **Jelöld be, mely szögek szerepelnek a feladatban!** → **Azonosítsd be az oldalakat! (átfogó, szög melletti befogó...)**

Legfontosabb ismeretek a hegyesszögek szögfüggvényeiről

$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{szög melletti befogó hossza}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 12 cm hosszú, a háromszög szárához tartozó magasság 10,8 cm.

a) Mekkorák a háromszög szögei?

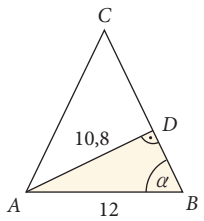
b) Mekkorák a háromszög szárai?

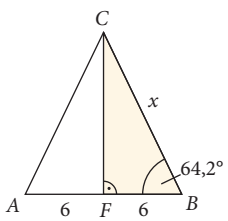
Megoldás

a) Használjuk az ábra jelöléseit! Az ABD derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemben fekvő AD befogó és az AB átfogó hosszát is ismerjük. Ebből arra következtetünk, hogy $\sin\alpha = \frac{10{,}8}{12} = 0{,}9$. Számológéppel kapjuk: $\alpha \approx 64{,}2°$.

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő két szöge egyenlő, ezért a szárszöge:

$ACB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 64{,}2° = 51{,}6°$.





b) A szárak hosszának kiszámításához másik derékszögű háromszöget választunk: megrajzoljuk az alaphoz tartozó magasságot (ez felezi az alapot). A BFC derékszögű háromszögben ismerjük a B-nél fekvő szöget (64,2°) és a szög melletti BF befogó hosszát (6 cm). Ezek ismeretében kell a BC átfogó hosszát (x cm) kiszámítanunk.

$\cos 64{,}2° = \frac{6}{x}$.

Ebből $x \cdot \cos 64{,}2° = 6$, vagyis $x = \frac{6}{\cos 64{,}2°}$.

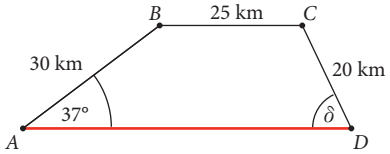
Számológéppel kapjuk, hogy $x \approx 13{,}8$.

A háromszög szárai közelítőleg 13,8 cm hosszúak.

Megjegyzés

- A b) feladat megoldásában használhattuk volna a BFC derékszögű háromszög C csúcsánál fekvő szöget is (25,8°).
- Használhattuk volna az ABD és CFB háromszögek hasonlóságát is a megoldás során.

2. Az A településről eddig csak a B és a C településen keresztül lehetett eljutni a D településre az ábra szerint. A BC út párhuzamos a tervezett új AD úttal.



a) Hány km-rel rövidebb az új út, mint az eredeti $A - B - C - D$ útvonal?

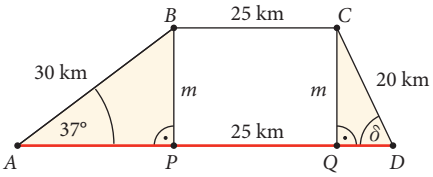
b) A-ból és D-ből egyszerre kezdik el megépíteni az új utat. Mekkora legyen a $CDA\sphericalangle$?

Megoldás

A két kérdésre a választ együttesen is megadhatjuk.

Rajzoljuk meg a trapéz két magasságát az ábra szerint! Így két derékszögű háromszögre és egy téglalapra bontottuk a trapézt.

Az APB derékszögű háromszögből: $\sin 37° = \frac{m}{30}$, vagyis $m = 30 \cdot \sin 37° \approx 18{,}05 \approx 18{,}1$ (km), ebből a Pitagorasz-tétel alapján az AP szakasz hossza közelítőleg 24 km.



A CQD derékszögű háromszögből $\sin \delta = \frac{m}{20}$, ahonnan $\delta \approx 64{,}5°$; $QD = 20 \cdot \cos \delta \approx 8{,}6$ (km).

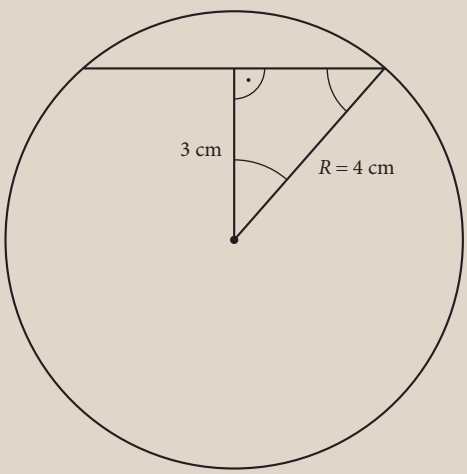
Az AD szakasz hossza: $24 + 25 + 8{,}6 = 57{,}6$ (km), azaz közelítőleg 58 km.

a) Az A-ból B-n és C-n keresztül D-be vezető út hossza $30 + 25 + 20 = 75$ (km), tehát az új út megépítésével körülbelül 17 km-rel rövidebb út vezet A-ból D-be.

b) Az új út megépítését D-ből úgy kell megkezdeni, hogy a $CDA\sphericalangle$ 64,5°-os legyen.

FELADAT

1. Melyik ábrához melyik szögfüggvény tartozik? Párosítsd a képleteket a hozzájuk tartozó ábrával, majd jelöld a szögeket a megfelelő görög betűkkel!



$\sin \alpha = \frac{3}{4}$

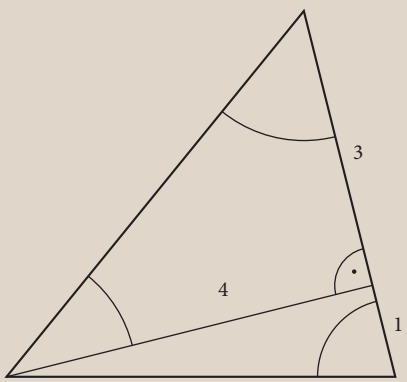
$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$

$\operatorname{tg} \gamma = 4$

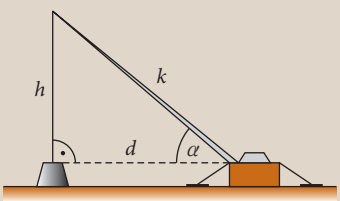
$\operatorname{tg} \delta = \frac{4}{3}$

$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{4}$

$\cos \varphi = \frac{3}{4}$



2. Egy emelődaru teleszkópos karjának (gémnek) a hossza (k) 4 m és 12 m között változhat, a karnak a vízszintessel bezárt szöge (α) pedig 10° és 60° között állítható be.



a) Legfeljebb mekkora távolságra (d) lehet a darutól a felemelendő tárgy?

b) Mekkora távolságra van a darutól az a legközelebbi tárgy, amelyet a daru fel tud emelni?

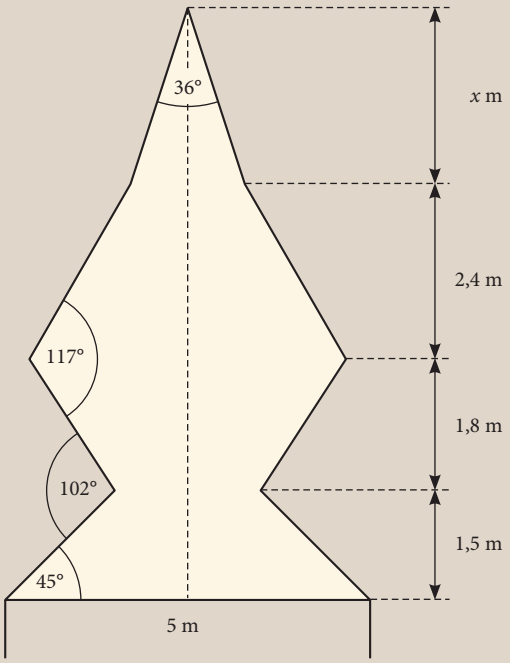
c) Legfeljebb mekkora magasságba (h) lehet ezzel a daruval felemelni a tárgyakat?

d) Mekkora magasságba emelheti a tárgyat a daru, ha a gém a legrövidebb állásban van?

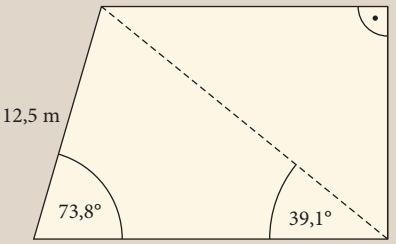
FELADAT

3. Egy templom tetejére díszes sisakot terveztek. A tervrajzon a toronysisak forgástengelyén átmenő síkmetszete látható. Milyen magas a díszítő toronysisak?





4. Egy derékszögű trapéz alakú telek méreteit mutatja az ábra.



a) Hány méter kerítéssel lehet bekeríteni a telket?
b) Mekkora a telek területe?

5. A Szabadság-szobor New Yorkban egy 47 m magas talapzaton áll, a szobor maga 46 m magas. A talapzattól 70 m távolságból nézünk a szoborra, a talapzat aljával azonos magasságban.



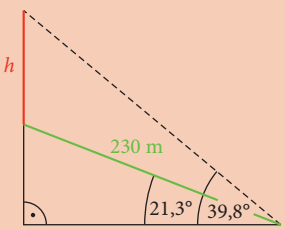
a) Mekkora szögben látható a szobor alja?
b) Mekkora szögben látható a szobor teteje?
c) Mekkora szögben látható maga a Szabadság-szobor? (Vagyis mekkora az a) és b) pontban kiszámolt két szög különbsége?)

HÁZI FELADAT

1. Egy 712 m magas hegy tetején állva nézzük a szomszédos hegy csúcsát. A vízszinteshez képest lefelé nézünk, és a látósugár 6°-os szöget zár be a vízszintessel. A két hegycsúcs távolsága légvonalban 435 m. Milyen magas a szomszédos hegy?

2. Egy húrtrapéz 8,4 cm hosszúságú alapján fekvő szögei 113°-osak, a trapéz magassága 10,2 cm.
a) Számítsd ki a szárak és a másik alap hosszát!
b) Számítsd ki a trapéz területét!

3. Egy toronyantennához 230 m hosszú egyenes út vezet, melynek emelkedési szöge 21,3°. Az út elejéről az antenna csúcsa 39,8° emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?

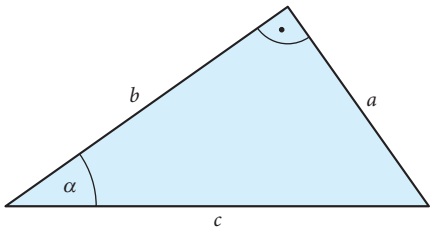


RÁADÁS

Hegyesszög kotangense, a kotangens szögfüggvény

1. **Definíció:** Ha egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, akkor a mellette lévő befogó és a vele szemben lévő befogó hosszúságának hányadosát az α **kotangensének** nevezzük. Jele: ctg α.

   Az ábra jelöléseivel: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$



2. Tulajdonságok

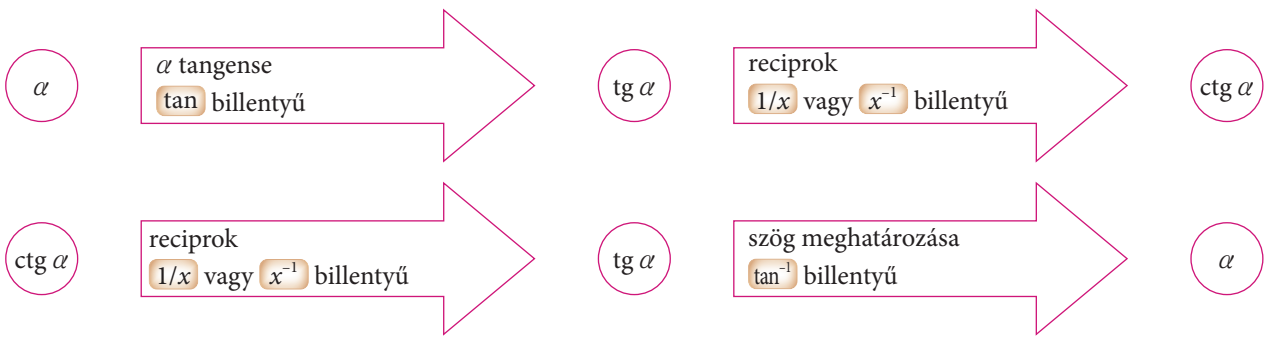
   – Hegyesszög kotangense egyenlő tangensének reciprokával. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

   – Hegyesszög kotangense egyenlő koszinuszának és szinuszának hányadosával. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

   – Hegyesszög kotangense egyenlő pótszögének tangensével. $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

3. A kotangens szögfüggvény értékének számolása zsebszámológéppel
   A szög kotangensének számolására a legtöbb zsebszámológépen nincs külön billentyű. Meghatározásához azt érdemes felhasználni, hogy értéke a szög tangensének reciproka.

   Ellenőrizd, hogy a zsebszámológéped fokokban számoljon! (D vagy DEG üzemmód)



FELADATOK

1. A következő kifejezésekben az α hegyesszöget jelöl. Kösd össze azokat a kifejezéseket, amelyek minden hegyesszög esetén egyenlőek! Az egyik kifejezésnek nincs párja, azt írd fel egyszerűbb alakban!

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$ $\quad (1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$ $\quad \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$ $\quad \frac{1}{\cos^2\alpha}-1$ $\quad (\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$

$\operatorname{tg}\alpha$ $\quad \sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}^2\alpha$ $\quad \sin^2\alpha$

2. Egy hegyesszög szinusza 0,55. A szög meghatározása nélkül számold ki a szög koszinuszát és tangensét!

3. Egy hegyesszög tangense 4. A szög meghatározása nélkül számold ki a szög szinuszát és koszinuszát!

6 Új területképlet

KIDOLGOZOTT FELADAT

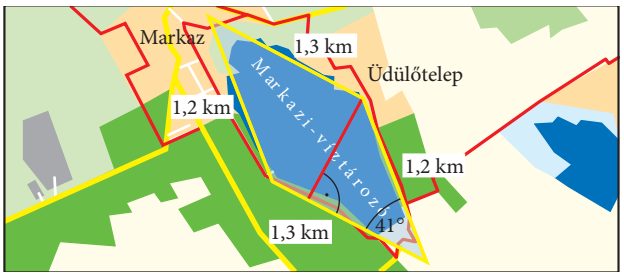
Egy víztározóban lévő víz mennyiségét kell megbecsülnünk. A térképen a tározó alakja egy olyan paralelogrammával közelíthető, amelynek oldalai 1,2 km, illetve 1,3 km hosszúak, a paralelogramma hegyesszöge pedig 41°-os. A tározóban a víz átlagos mélysége 2,5 m.



Megoldás

A víz mennyiségét egy olyan hasáb térfogatával becsülhetjük, amelynek alaplapja a megadott paralelogramma, magassága pedig 2,5 méter. A hasáb térfogatát a paralelogramma területének és a víztározó mélységének a szorzata adja meg. Figyelnünk kell arra, hogy egyforma hosszúságegységet használjunk a területszámításnál és a mélység mérésénél.

A paralelogramma területét egy oldalának és az ehhez az oldalához tartozó magasságának szorzataként számíthatjuk: $T = 1{,}3 \cdot m$ (ábra).



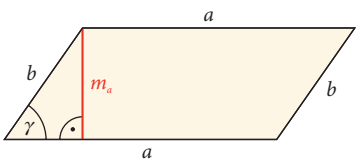
Az ábra szerint az 1,3 km hosszú oldalhoz megrajzolt magasság egy derékszögű háromszög egyik befogója. Tehát $\frac{m}{1{,}2} = \sin 41°$, amiből $m = 1{,}2 \cdot \sin 41°$. A paralelogramma területe $T = 1{,}3 \cdot m = 1{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot \sin 41°$.

Számológéppel kapjuk, hogy $T \approx 1$ (km^2).

A víztározó mélysége méterben van megadva, ezért a területet is négyzetméterben fejezzük ki. Mivel 1 km^2 = 10^6 m^2, ezért a tározóban körülbelül $2{,}5 \cdot 10^6$ m^3 (két és fél millió köbméter) víz van. Ez 25 millió hektoliter.

ELMÉLET

1. Ha egy paralelogramma két szomszédos oldala a, illetve b hosszúságú, és az általuk közrefogott hegyesszög γ, akkor az ábra jelöléseit használva, a paralelogramma magassága $m_a = b \cdot \sin \gamma$, és a paralelogramma területe $T = a \cdot m_a = a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

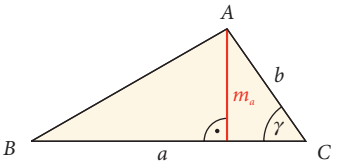


$T = ab \sin \gamma$

2. Ha egy háromszögnek két oldala a, illetve b hosszúságú, és az általuk közrefogott hegyesszög γ, akkor az ábra jelöléseit használva, a háromszög a oldalához tartozó magassága $m_a = b \cdot \sin \gamma$, és a háromszög területe $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$.

Például:

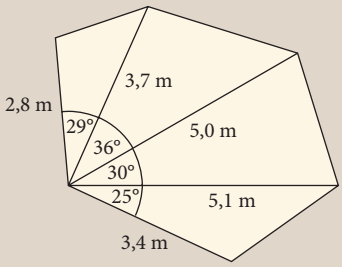
Ha $a = 4{,}5$ cm, $b = 2{,}8$ cm és $\gamma = 73°$, akkor $T = (4{,}5 \cdot 2{,}8 \cdot \sin 73°) : 2 \approx 6{,}0$ cm^2.



$T = \frac{ab \sin \gamma}{2}$

FELADAT

1. Egy különös alakú szoba alaprajzát láthatod az ábrán.



a) Számítsd ki a szoba alapterületét!

b) A valódi távolságok a megadott mérési eredményektől legfeljebb ±1%-kal térhetnek el. Hány négyzetméteres (és hány százalékos) bizonytalanságot okozhat ez a szoba alapterületének kiszámításában? (Használd a hasonló sokszögek területének arányáról tanultakat!)

2. Egy 18 cm sugarú körön felvettük az A és a B pontot úgy, hogy a távolságuk 30 cm.

a) Mekkora az $AKB\sphericalangle$, ha K a kör középpontja?

b) Mekkora ívekre bontja a kört a két megadott pontja?

c) Mekkora az AKB körcikkek területe?

d) Mekkora az AKB háromszög területe?

3. **a)** Egy paralelogramma területe 45 cm^2, két oldalának hossza 8 cm és 7,5 cm. Mekkora a paralelogramma hegyesszöge?

b) Egy paralelogramma hegyesszöge 40°-os, területe 0,3214 m^2, kerülete 3 m. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

4. **a)** Becsüld meg, mekkora területen fekszik a Pentagon (ez az USA védelmi minisztériumának épülete Washingtonban)! Használd a megadott méretskálát!

b) Mekkora a Pentagon „udvarának” területe?



HÁZI FELADAT

1. **a)** Egy konvex deltoid két oldalának hossza 7 cm, illetve 14 cm, és ezek 82,2°-os szöget zárnak be. Számítsd ki a deltoid területét!

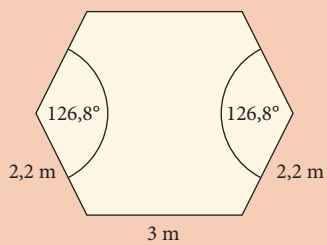
b) Egy konvex deltoid két oldalának hossza 7 cm és 14 cm, és az egyik átló hossza is 7 cm. Számítsd ki a deltoid szögeit, területét és a másik átló hosszát!

2. **a)** Mekkora annak a körnek a sugara, amelyben a 132,6°-os középponti szöghöz 12 cm hosszú húr tartozik?

b) Milyen messze van ez a húr a kör középpontjától?

c) Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a területe, melynek alapja ez a húr, harmadik csúcsa pedig a kör középpontja?

3. Számítsd ki az alábbi ábrán látható, középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus hatszög területét úgy, hogy három paralelogrammára bontod fel!

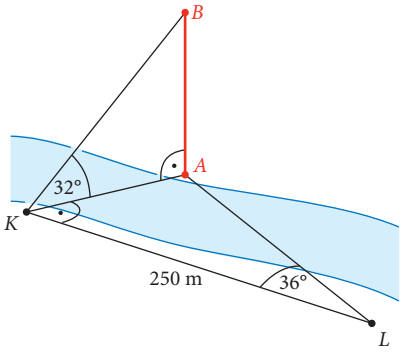


Ráadás

Milyen magas a torony?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Sík vidéken, egy folyó közelében álló torony magasságát (AB) szeretnénk megállapítani, de csak a folyó túlsó partján tudunk méréseket végezni.



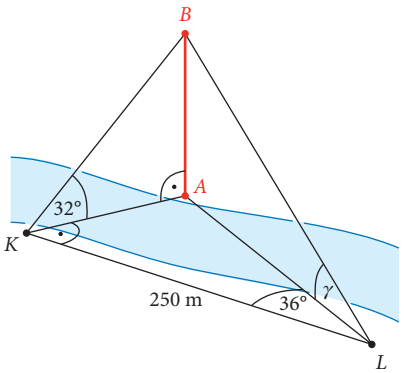
Megoldás

Megállunk a toronnyal szemközti parton egy K pontban, megmérjük az AKB szöget: 32°. Az ABK derékszögű háromszögről leolvashatjuk, hogy $AB = AK \cdot \operatorname{tg} 32°$.

Tehát először az AK szakasz hosszát kell meghatároznunk. A folyó innenső partján az AK-ra merőlegesen elmegyünk 250 méternyire, az L pontba, megmérjük az ALK szöget: 36°.

Az ALK derékszögű háromszögről leolvashatjuk, hogy $AK = 250 \cdot \operatorname{tg} 36° \approx 182$ (méter), tehát $AB = AK \cdot \operatorname{tg} 32° \approx 182 \cdot \operatorname{tg} 32° \approx 114$ (méter).

2. Mekkora szögben látjuk a tornyot az L pontból?



Megoldás

Az AB *függőleges*, ezért minden *vízszintes* egyenesre merőleges, így az AL egyenesre is. Az LAB háromszög tehát derékszögű. Ennek a háromszögnek az L csúcsánál fekvő hegyesszögét kell kiszámítanunk.

Az AKL háromszögből kiszámítjuk az AL szakasz hosszát:

$\cos 36° = \frac{250}{AL}$, amiből $AL = 250 : \cos 36° \approx 309$ méter,

azután pedig az LAB derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{AL} \approx \frac{114}{309} \approx 0{,}369$.

Ebből $\gamma \approx 20°$. Az L pontból 20°-os szögben látjuk a tornyot.

FELADAT

1. **a)** Mekkora szögben látjuk a kidolgozott feladatban szereplő tornyot a KL szakasz felezőpontjából?

b) Milyen messzire menjünk a parton K-tól a KL egyenesen, hogy onnan a tornyot 15°-os szögben lássuk?

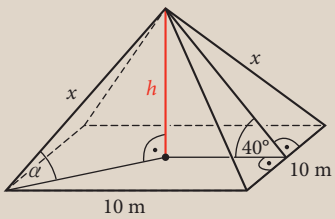
2. Egyre jobban elterjednek hazánkban is az energiatakarékos fényforrások, köztük azok, amelyeket LED-lámpának neveznek. (A LED betűszó a *fénykibocsátó dióda* kifejezés angol nevére utal). Ezeknek a csomagolásán általában feltüntetik az úgynevezett „világítási szöget” (lásd az ábrát).



a) Két lámpát vásároltunk: az egyik világítási szöge 40°, a másiké 110°. A lámpákat egy asztal lapja fölé, a laptól 40 cm magasságban rögzítjük, és a fényüket függőlegesen lefelé irányítjuk. Mekkora átmérőjű körlapot világít meg az egyik, illetve a másik LED-lámpa?

b) Legalább mekkora világítási szögű LED-lámpát kell a 80 cm átmérőjű kerek asztal lapjától 0,6 m magasságban felszerelni, hogy teljesen megvilágítsa az asztallapot?

3. Egy 10 m × 10 m-es alap fölé szabályos négyoldalú gúla alakú háztetőt emeltek. A tető oldallapjai 40°-os szöget alkotnak a vízszintes síkkal (lásd az ábrát).



a) Milyen magas a tető (h)?

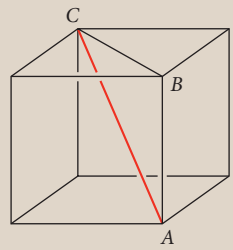
b) Hány m^2-t kell cseréppel befedni?

c) Milyen hosszúak az oldalélgerendák (x), és mekkora szöget alkotnak a vízszintes síkkal (α)?

d) Mekkora szöget zár be két szomszédos oldalélgerenda? És a két szemközti?

4. Egy téglatest oldalai 3,2 m; 6,9 m és 8,4 m hosszúak. Mekkora szöget zár be a téglatest egyik testátlója az oldallapokkal?

5. Mekkora szöget alkot a kocka pirossal rajzolt testátlójának egyenese a fedőlap síkjával?



a) Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!

b) Mekkorák az ABC háromszög oldalai, ha a kocka éle 3,2 cm hosszú?

c) Igazold, hogy az ACB szög adja meg a piros egyenes és a fedőlap szögét!

d) Számítsd ki az ACB szöget!

6. A szabályos tetraédert négy egybevágó szabályos háromszöglap határolja.
Tekintsük a szabályos tetraéder egyik lapját (nevezzük ezt most alaplapnak), és egy olyan élét, amelyik nem illeszkedik erre a lapra (oldalélét)!

a) Mekkora szöget zár be a tetraéder oldaléle az alaplaphoz tartozó magassággal?

b) Mekkora szöget zár be a tetraéder oldaléle az alaplappal?

HÁZI FELADAT

1. Ha Péter kinéz az ablakukon, akkor a szemmagassága 6 méterrel van a járda fölött. A szemközti hatalmas fa alját 10°-os depressziószögben (más néven: lehajlási szögben), a tetejét 22°-os emelkedési szögben látja. Milyen magas a fa? (A depressziószög a megfigyelőtől egy nála alacsonyabban fekvő pontra irányuló látósugárnak a vízszintes síkkal bezárt szöge.)

2. **a)** Egy 76°-os világítási szögű spotlámpát egy gerendára rögzítettek 260 cm magasan, és pontosan függőlegesen lefelé irányítottak. Mekkora a padlón megvilágított terület?

b) Milyen magasan legyen a lámpa, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb egy 8 m^2-es területet világítson be?

3. A 5. feladatban szereplő kocka A csúcsát kösd össze a BC oldal felezőpontjával (ezt jelöljük F-fel)!

a) Mekkora szöget zár be AF egyenese a kocka fedőlapjával?

b) Mekkora szöget zár be AF egyenese a kocka alaplapjával?

c) Mekkora szöget zár be AF egyenese a kocka jobb oldali oldallapjával?

4. Határozd meg a folyó túlsó partján álló torony magasságát (AB-t), ha a folyó innenső partján lévő K pontból 28°-os szögben látszik, a K-tól 250 m-re lévő L pontból 18°-os szögben látszik! Tudjuk továbbá, hogy AKL szög derékszög, ahol A a torony talppontja.

RÁADÁS

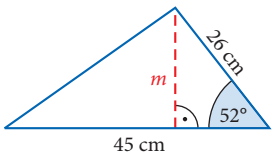
Mekkora távolságból látszik a legnagyobb szögben a New York-i Szabadság-szobor? Az adatokat az 5. lecke 5. feladatában találod.

7 A tompaszög és a derékszög szinusza

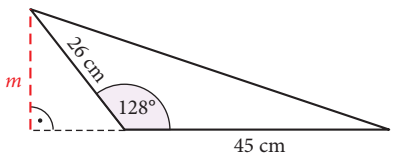
KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek két oldala 26 cm, illetve 45 cm, az általuk közbezárt szög pedig

a) 52°;



b) 128°?



Megoldás

a) A 45 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza $m = 26 \cdot \sin 52°$, ezért a háromszög területe:

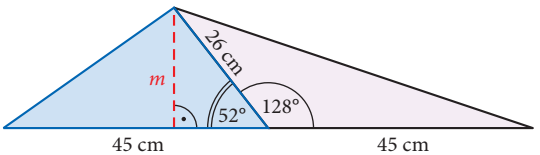
$$T_a = \frac{45 \cdot 26 \cdot \sin 52°}{2} \approx 461 \text{ cm}^2.$$

b) A tompaszögű háromszögben a 45 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza a háromszöghöz toldott derékszögű háromszögben számolható ki. Itt a magassággal szemben fekvő hegyesszög a 128°-os szög mellékszöge. Ennek a nagysága $180° - 128° = 52°$. Tehát a tompaszögű háromszögnek ez a magassága ugyanakkora, mint az a) feladatbeli háromszögé: $m = 26 \cdot \sin 52°$. Ezért ennek a tompaszögű háromszögnek a területe ugyanakkora, mint az a) feladatban szereplő hegyesszögű háromszög területe:

$$T_b = T_a = \frac{45 \cdot 26 \cdot \sin 52°}{2} \approx 461 \text{ cm}^2.$$

Megjegyzés

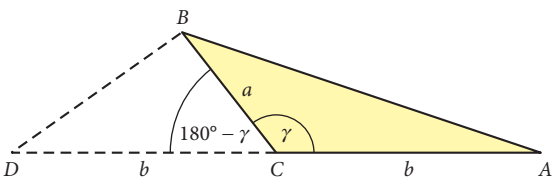
A fenti két háromszög az alábbi ábra szerint is elhelyezhető egymás mellett.



Ebben az elrendezésben sokkal szemléletesebb a két háromszög adatai közötti kapcsolat.

ELMÉLET

1. Az ábra szerinti ABC és CBD háromszögek területe egyenlő, hiszen az AC és CD oldalak hossza egyenlő, és a hozzájuk tartozó magasság hossza is egyenlő. Értelmezzük úgy a tompaszögek szinuszát, hogy tompaszögű háromszög esetén is alkalmazható legyen a $T = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$ területképlet!



A CBD háromszögre: $T = \frac{ab \cdot \sin(180° - \gamma)}{2}$.

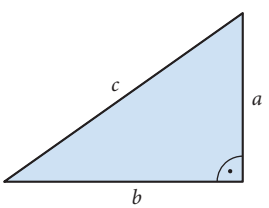
Az ABC háromszögre $T = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$.

A területek egyenlők. Akkor teljesül az ABC tompaszögű háromszögre felírt területképlet, ha γ tompaszög szinuszát a következő módon értelmezzük: $\sin \gamma = \sin(180° - \gamma)$.

Definíció: Tompaszög szinusza egyenlő kiegészítő szögének szinuszával.

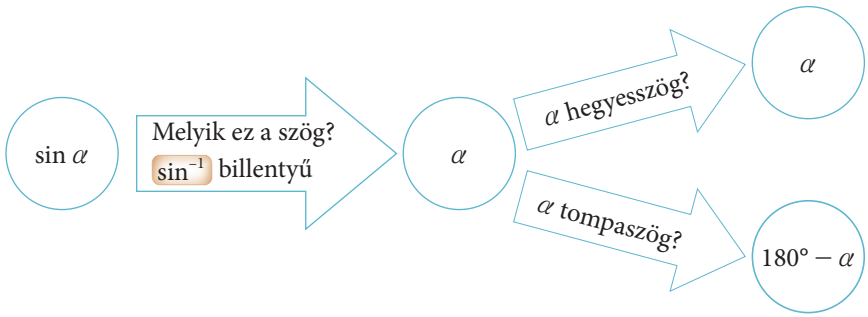
2. Az ábra szerinti derékszögű háromszög területe $T = \frac{ab}{2}$.

Ahhoz, hogy erre a háromszögre is teljesüljön a $T = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$ területképlet, a derékszög szinusza legyen 1.



Definíció: Derékszög szinusza 1, azaz $\sin 90° = 1$.

3. A zsebszámológép [sin] gombja megadja a tompaszög és a derékszög szinuszát.
Vigyázni kell azonban, amikor a szinusz értékhez keressük a megfelelő szöget! A [$\sin^{-1}$] funkció hegyesszöget ad meg. Ha tompaszöget keresünk, akkor ennek kiegészítő szöge a megoldás.



FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

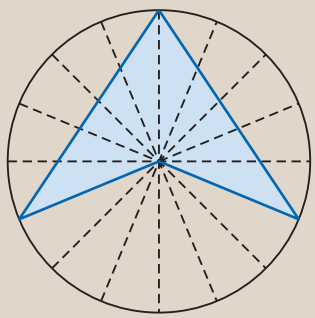
	1. háromszög	2. háromszög	3. háromszög	4. háromszög	5. háromszög
a	38 cm	19 cm		49 mm	
b	29 cm		17 km	54 mm	8 m
γ	142°	150°	30°		90°
T		80,75 cm^2	80,75 km^2	1323 mm^2	48 m^2

2. Dóri figyelmetlenül válaszolta meg az előző feladatban a 4. háromszögre vonatkozó kérdést. A megadott oldalhossz ($a = 49$ mm) helyett $a = 94$ mm-rel számolt, és így a következő eredményre jutott:

$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 1323}{94 \cdot 54} \approx 0{,}5213$.

A számológépe segítségével azt kapta, hogy $\gamma \approx 31{,}4^\circ$. Hiánytalanul oldotta-e meg Dóri a feladatot a megváltoztatott adatokkal? Indokolj!

3. Az ábrán látható „nyílhegyet” úgy rajzoltuk meg, hogy egy 4 cm sugarú kört 16 egyenlő részre osztottunk, és néhány osztópontot összekötöttünk egymással, illetve a kör középpontjával. Mekkora a nyílhegy kerülete és területe?



HÁZI FELADAT

1. Egy vitorlás hajó egyik vitorlájának alakja olyan háromszög, amelynek egyik oldala 9 m, egy másik oldala 4,4 méter hosszú, az általuk bezárt szög pedig 93°-os. A vitorla azonban nem lapos, hanem enyhén domború, ezért a vitorlakészítő mester a sík háromszöghöz képest 12%-kal több anyagot használt fel. Hány m^2 anyagra volt szükség a vitorla elkészítéséhez?

2. **a)** Egy hegyesszögű háromszög két oldala 10 cm, illetve 12 cm hosszú, az általuk közrezárt szög 37°-os. Számítsd ki a háromszög területét!

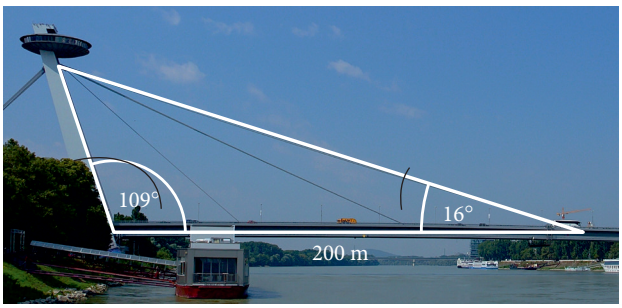
b) Egy háromszög két oldala 10 cm, illetve 12 cm hosszú, a területe 36,1 cm^2. Lehet-e ez a háromszög tompaszögű? Ha igen, számítsd ki egy lehetséges tompaszögének nagyságát!

3. Mekkora a paralelogramma területe, ha
a) oldalainak a hosszúsága 36 mm, illetve 54 mm, a két oldal által bezárt szög pedig 145°;
b) átlóinak a hosszúsága 36 mm, illetve 54 mm, az átlók által bezárt szög pedig 35°-os?

8 A szinusztétel

BEVEZETŐ

Pozsony egyik nevezetessége az Új Híd (Nový Most), amely a világ egyik legnagyobb egypilléres kábelhídja. A pillér kb. 109°-os szögben dől hátra, hogy megtartsa a híd pályatestét. A pillér lábától kb. 200 méterre van a leghosszabb tartókábel rögzítési helye. A kábel kb. 16°-os szöget alkot a híddal. Milyen hosszú lehet ez a kábel?

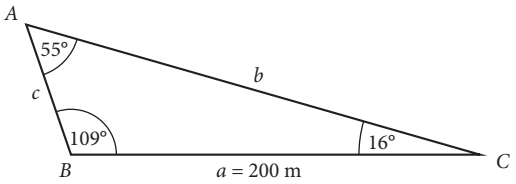


Megoldás

Ismerjük egy háromszög egyik oldalának hosszát (200 m) és a háromszög szögeit (109°, 16° és 55°). Keressük (a jobb felső ábra jelölésével) a b oldal hosszát.

A háromszög területét kétféleképpen is felírjuk:

$T = \frac{200 \cdot c \cdot \sin 109^\circ}{2}$, illetve $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin 55^\circ}{2}$.



Ebből a $\frac{b \cdot c \cdot \sin 55^\circ}{2} = \frac{200 \cdot c \cdot \sin 109^\circ}{2}$ kétismeretlenes egyenlethez jutunk.

Ha mindkét oldalt megszorozzuk 2-vel, és elosztjuk a pozitív c számmal, akkor már csak egy ismeretlen marad: $b \cdot \sin 55^\circ = 200 \cdot \sin 109^\circ$.

Mindkét oldalt elosztva $\sin 55^\circ$-kal megkapjuk, hogy $b = \frac{200 \cdot \sin 109^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 231$ (m).

A tartókötél hossza kb. 231 méter lehet.

Megjegyzés

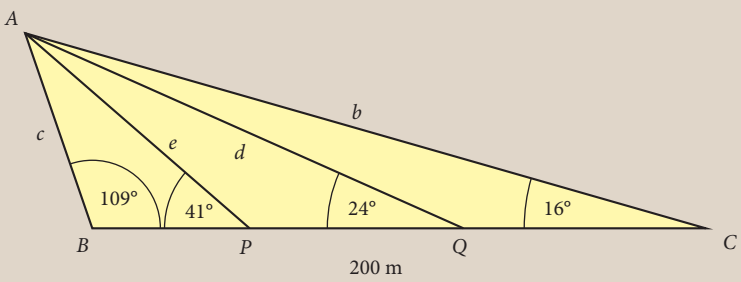
A $b \cdot \sin 55^\circ = 200 \cdot \sin 109^\circ$ egyenletet rendezve a $\frac{b}{200} = \frac{\sin 109^\circ}{\sin 55^\circ}$ összefüggéshez jutunk.

Azt tapasztaljuk, hogy a háromszög két oldala hosszának hányadosa (aránya) egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának hányadosával (arányával).

FELADAT

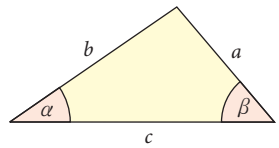
1. Számítsd ki, milyen hosszú lehet a bevezető feladatban említett Új Híd pillérén a feladat megoldásában c-vel jelölt szakasz!

2. Számítsd ki a bevezető feladatban említett Új Híd másik két tartókötelének (e, d) hosszát, továbbá a BP, PQ és QC távolságokat is!



ELMÉLET

Szinusztétel: A háromszögben két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemben lévő szögek szinuszának az arányával. Az ábra jelöléseivel: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.



$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Bizonyítás

Írjuk fel kétféleképpen a vizsgált háromszög területét:

$\frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$.

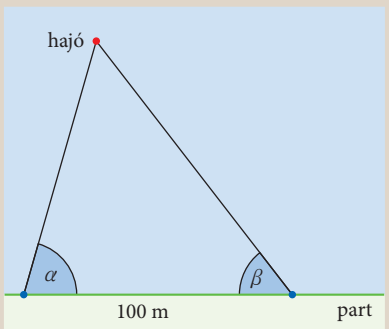
Ha az egyenlet mindkét oldalán lévő kifejezést megszorozzuk 2-vel, utána pedig elosztjuk $(bc\ \sin\beta)$-val, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

A szinusztételt általában akkor használjuk, ha

- ismerjük egy háromszög két szögét és egy oldalhosszúságát, és egy másik oldal hosszúságát keressük;
- ismerjük egy háromszög két oldalának a hosszúságát és az egyik oldallal szemközti szöget, és a másik oldallal szemközti szöget keressük. (Vigyázat, egy szinuszérték hegyesszöghöz és tompaszöghöz is tartozhat!)

FELADAT

3. Egy hajó a nyílt vízen horgonyoz. A parti őrség önkéntesei ki akarják számítani, hány méterre van a hajó a parttól.
Kijelölnek a parton egy 100 méteres szakaszt. Mérésük szerint $\alpha \approx 74°$ és $\beta \approx 52°$. Mekkora a hajó és a part távolsága?



4. Egy háromszög két oldalhosszának összege 20 cm. E két oldallal szemközti szögek nagysága 67° és 48°.

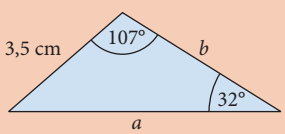
a) Mekkorák a háromszög oldalai?

b) Mekkora a háromszög területe?

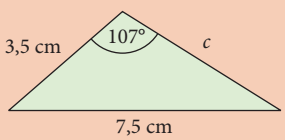
HÁZI FELADAT

1. Számítsd ki a háromszög ismeretlen oldalhosszúságait és szögeit!

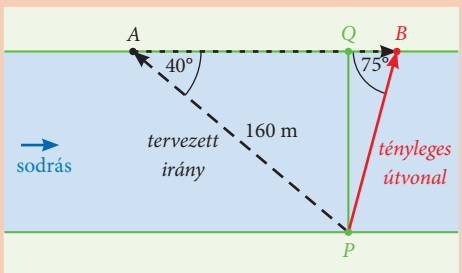
a)



b)



2. Pista evezős csónakkal a folyó melletti P pontból a túlsó partra, a vele szemben lévő Q pontba akart átjutni. Tudta, hogy a víz sodrása miatt nem pont a partra merőlegesen kell eveznie, ezért irányzéknak kinézett egy magas nyárfát a túlsó parton, kissé feljebb (a rajzon a fát az A pont jelöli). A sodrás azonban a vártnál erősebbnek bizonyult, így végül sokkal lejjebb, a B pontban tudott csak kikötni.



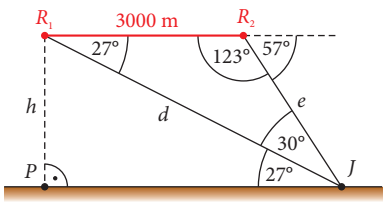
a) Mekkora utat tett meg a csónak?

b) Milyen széles a folyó?

9 Alkalmazások

BEVEZETŐ

Egy repülőgép vízszintes sík terep felett repül állandó magasságban. A gép a repülőtér közelében telepített földi jeladó műszert egy adott pillanatban 27°-os depressziószög (lehajlási szög) alatt „látja”, további 3000 m repülés után pedig 57°-os depressziószög alatt. A két észlelés között a gép nem repült át a jeladó felett, továbbá a repülőgép és a jeladó mindvégig ugyanabban a függőleges síkban volt.



a) Mekkora távolságra volt a repülőgép a jeladó toronytól az első, illetve a második alkalommal?

b) Mekkora magasságban repült a gép?

A repülőgép modern fedélzeti műszerei a távolságokat és szögeket igen pontosan mérik, ezért a távolságokat tíz méterre kerekítve adjuk meg!

Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!

a) Az R_1R_2J háromszögben szinusztétellel dolgozhatunk.

$$\frac{d}{3000} = \frac{\sin 123^\circ}{\sin 30^\circ}, \text{ amiből}$$

$$d = 3000 \cdot \frac{\sin 123^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 5030 \text{ (m)}.$$

$$\frac{e}{3000} = \frac{\sin 27^\circ}{\sin 30^\circ}, \text{ amiből}$$

$$e = 3000 \cdot \frac{\sin 27^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 2720 \text{ (m)}.$$

b) A h repülési magasságot az R_1PJ derékszögű háromszögből célszerű kiszámítani, felhasználva, hogy a J-nél fekvő hegyesszög 27°-os (váltószöge az R_1-nél fekvő 27°-os szögnek).

$$h = d \cdot \sin 27^\circ \approx 5030 \cdot \sin 27^\circ \approx 2280 \text{ (m)}.$$

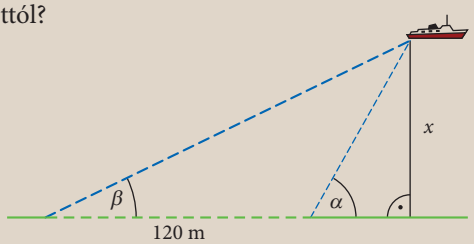


FELADAT

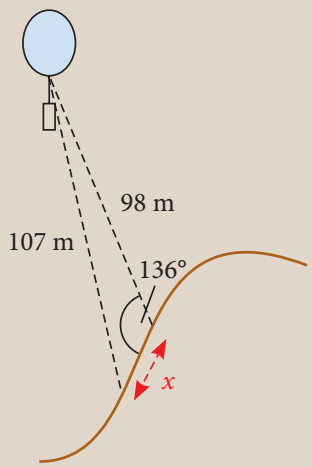
1. Egy hajó bent áll a tengeren. A parti őrség önkéntesei kiszámítják, hány méterre van a hajó a parttól (x). A parton kimért 120 m-es távolság két végén megmérik az α és a β szöget. Azt kapják, hogy $\alpha \approx 73°$ és $\beta \approx 52°$.

a) Számítsd ki a szaggatottan rajzolt háromszög két ismeretlen oldalának hosszát!

b) Hány méterre van a hajó a parttól?



2. Az ábrán látható meteorológiai léggömböt egy 98 és egy 107 méteres drótkötél rögzíti a domboldalhoz. A rövidebbik kábel a domboldallal 136°-os szöget zár be. Mekkora a két rögzítési pont között mért x távolság?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 4{,}5$ cm, $b = 6$ cm és az a oldallal szemben lévő α szög 45 fokos. Lehetséges-e, hogy ez a háromszög

a) hegyesszögű? **b)** tompaszögű?

Ha a válasz igen, akkor adjuk meg a háromszög szögeit!

Megoldás

Azt tudjuk, hogy ha van megfelelő háromszög, akkor abban a 6 cm-es oldallal szemben lévő szögnek 45°-nál nagyobbnak kell lennie. Az azonban egyáltalán nem biztos, hogy van a megadott adatokhoz megfelelő háromszög.

a) Ha van megfelelő háromszög, akkor abban a b oldallal szemben fekvő β szögre a szinusztétel miatt fennáll, hogy $\frac{\sin\beta}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{4{,}5}$.

Ebből $\sin\beta = \frac{6 \cdot \sin 45^\circ}{4{,}5} \approx 0{,}9428$.

Van olyan hegyesszög, amelynek 0,9428 a szinusza. Ez a szög közelítőleg 70,53°-os.

Ha $\beta \approx 70{,}53°$, akkor a háromszög harmadik szöge:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 64{,}47°$.

Tehát van megfelelő hegyesszögű háromszög.

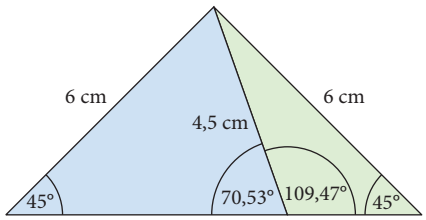
b) Ha van megfelelő háromszög, akkor a szinusztétel szerint mindenképpen igaz, hogy $\sin\beta \approx 0{,}9428$, ám ebből nem következik, hogy a β szög csak hegyesszög lehet. Ha β tompaszög, akkor a szinusza megegyezik a $180° - \beta$ hegyesszög szinuszával. Az a) részben láttuk, hogy ez a hegyesszög közelítőleg 70,53°-os, ezért $180° - \beta \approx 70{,}53°$, amiből azt kapjuk, hogy $\beta \approx 180° - 70{,}53° = 109{,}47°$.

Ha $\beta = 109{,}47°$, akkor a háromszög harmadik szöge: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 25{,}53°$.

Tehát van megfelelő tompaszögű háromszög is.

Megfigyelés

Két lényegesen különböző (nem egybevágó) háromszög is van, amelynek oldalai 4,5 cm, illetve 6 cm, és a kisebb oldallal szemben lévő szög 45°-os. Az ábrán egymás mellé illesztettük ezt a két háromszöget.



2. Van-e olyan háromszög, amelyben a szokásos jelölésekkel

a) $a = 2$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 68°$;

b) $a = 6{,}5$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 68°$;

c) $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 68°$?

Ha van, akkor hány ilyen (nem egybevágó) háromszög van, és mekkorák a szögei?

Megoldás

a) Ha van ilyen háromszög, akkor teljesül rá a szinusztétel. Ez alapján $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$. Ebből $\sin\beta = \sin 68° \cdot \frac{7}{2} \approx$ $\approx 3{,}24$. De a szinusz szögfüggvény értéke nem lehet nagyobb, mint 1, ezért ilyen szög nem létezik. Így ilyen háromszög nincs.

b) A fentiekhez hasonló gondolatmenettel

$\sin\beta = \sin 68° \cdot \frac{7}{6{,}5} \approx 0{,}9985$.

Ez a szinusz szögfüggvényérték a 86,9°-os hegyesszöghöz és a 93,1°-os tompaszöghöz tartozik. Két megoldás van, és mindkettő létezik. A háromszög szögei lehetnek: 68°, 86,9°és 25,1°; illetve 68°, 93,1°és 18,9°.

c) $\sin\beta = \sin 68° \cdot \frac{7}{8} \approx 0{,}811$. Ez a szinuszérték az 54,2°-os hegyesszöghöz és a 125,8°-os tompaszöghöz tartozik. De ha $\alpha = 68°$ és $\beta = 125{,}8°$, akkor a szögek összege nagyobb, mint 180°, ami nem lehetséges. Ezért ez az eset nem valósul meg.

Egyetlen megoldás van, s ennek szögei 68°, 54,2° és 57,8°.

FELADAT

3. Van-e olyan háromszög, amelyben a szokásos jelölésekkel

a) $a = 6$ cm, $b = 4{,}5$ cm és $\alpha = 45°$;

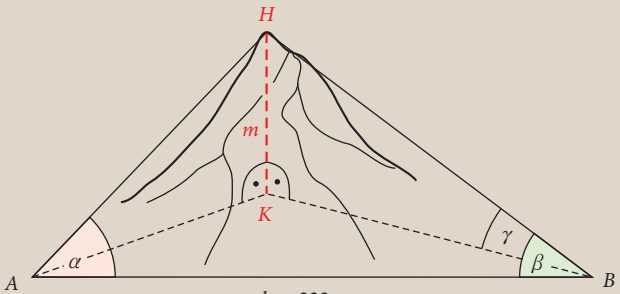
b) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm és $\alpha = 30°$;

c) $a = 6$ cm, $b = 7{,}5$ cm és $\alpha = 65°$;

d) $a = 6$ cm, $b = 7{,}5$ cm és $\alpha = 30°$?

Ha van megfelelő háromszög, akkor hány ilyen (nem egybevágó) háromszög van, és mekkorák a szögei?

4. Egy cserkészcsapat egy hegy magasságát szeretné meghatározni. Ehhez a hegy lábánál, vízszintes réten méréseket végeznek. Kijelölnek két pontot, A-t és B-t.



$h = 223$ m

Több mérés átlagolásával azt kapják, hogy az AB szakasz h hosszúsága 223 méter, az ABH háromszög két szöge: $\alpha = 74°$, illetve $\beta = 51°$, a BKH háromszög B-nél lévő szöge: $\gamma = 11°$.

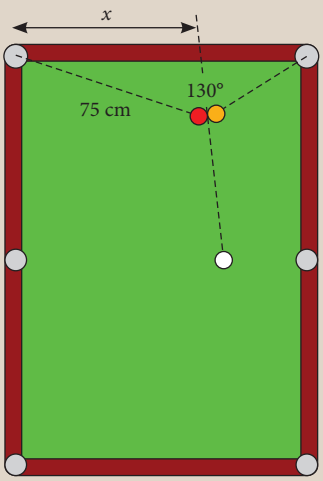
A szintkülönbséget m-mel jelölik.

a) Egyikük szerint ha a BH hosszát kiszámítják, akkor a BKH háromszögből már az m is kiszámítható. Vajon hogyan?

b) Keress olyan háromszöget, amelyből BH hossza meghatározható! Mekkora a BH távolság?

c) Milyen magasan van a hegycsúcs a rét felett?

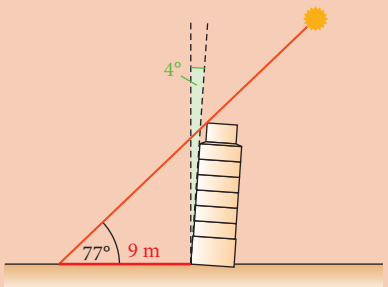
5. Egy biliárdasztal egyik sarokzsebétől 75 cm távolságra egymás mellett áll két egyforma golyó. Úgy szeretnénk meglökni őket egy harmadikkal, hogy a két golyó 130°-os szögben szétszaladva pontosan a 120 cm-es oldalú asztal két szomszédos sarokzsebébe guruljon. Tudjuk, hogy ilyen lökéshez a harmadik golyót a 130°-os szög felezőjének irányában kell megcélozni. Mekkora legyen a rajzon x-szel jelölt távolság, hogy sikerüljön a mutatvány? (A golyókat tekintsük pontszerűnek.)



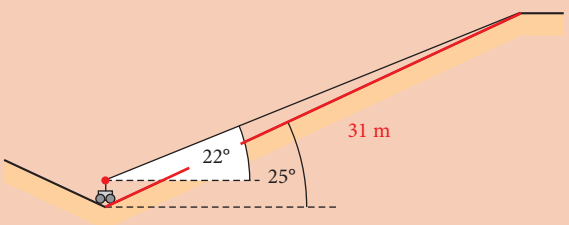
120 cm

HÁZI FELADAT

1. A 2001-ben befejeződött stabilizációs program óta a pisai ferde torony a függőlegeshez képest közelítőleg 4°-kal dől, majdnem pontosan déli irányba. Milyen magas lenne „kiegyenesítve” a torony? Amint az ábra is mutatja, a torony dél felől tűző, 77°-os emelkedési szögű napsugarak esetén 9 méter hosszú árnyékot vet.



2. Egy Mars-szonda véletlenül éppen egy kráter fenekén landolt. A szonda radarjának mérései alapján a kráter lejtője 31 méter hosszú, és a marsbeli vízszinteshez képest 25°-os szögben emelkedik. A szonda ezután felemelte a radart, hogy újra bemérje a kráter peremét. A radarsugár vízszintessel bezárt szöge ezúttal már csak 22° volt. Milyen távolságra volt ekkor a radar a kráter aljától?



3. Töltsd ki a táblázat üres helyeit! Vedd figyelembe az összes lehetséges háromszöget!

	a	b	c	α	β	γ
1. háromszög	6 cm	13 cm			48°	
2. háromszög		15 cm	9 cm			26°

RÁADÁS

Háromszögek szerkeszthetősége és a szinusztétel

Legyen adott – a szokásos jelölésekkel – a háromszög a oldala, b oldala, valamint a β szög ($0° < \beta < 180°$).

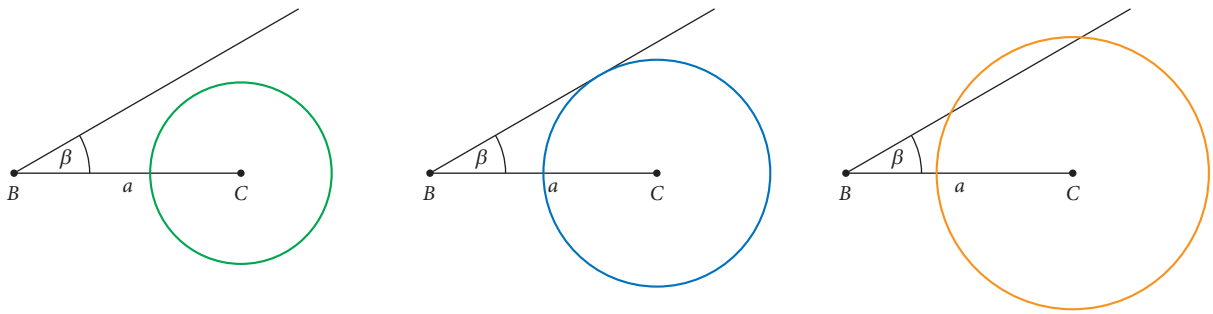
a) Vizsgáljuk meg, hogy milyen adatok mellett van olyan ABC háromszög, amely ezekből az adatokból szerkeszthető!

Legyen az 1. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_1 = 4$ cm;
a 2. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_2 = 5$ cm;
a 3. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_3 = 6$ cm.

A szerkesztés menete:

– Vegyük fel az a szakaszt, melynek végpontjai B, illetve C pontok!
– Szerkesszük meg a B csúcsban a β szöget, melynek egyik szögszára BC!
– Szerkesszük meg a C középpontú, b sugarú kört!
– Határozzuk meg a kapott körív, valamint a β szög BC szárától különböző szárának metszéspontját!

A b_1 esetén nem jön létre metszéspont, azaz nincs a feltételeknek megfelelő háromszög.
A b_2 esetén egy közös pont adódik, azaz egyetlen olyan háromszög létezik, mely az adatokkal megszerkeszthető (ez a háromszög derékszögű, mivel egyik oldalegyenese a kör érintője, másik oldala az érintési pontba húzott sugár).
A b_3 esetén két metszéspont jön létre, azaz az adatok két, nem egybevágó háromszöget határoznak meg.



b) Határozzuk meg számítással a fenti adatok mellett a háromszög ismeretlen szögeinek, illetve oldalainak hosszát!

Az 1. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_1 = 4$ cm.
A 2. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_2 = 5$ cm.
A 3. esetben $a = 10$ cm; $\beta = 30°$ és $b_3 = 6$ cm.

A szinusztétel értelmében

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{a}{b_1}, \qquad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{a}{b_2}, \qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3} = \frac{a}{b_3},$$

melyekből átrendezéssel következik, hogy

$$\sin\alpha_1 = \frac{a\sin\beta_1}{b_1}, \qquad \sin\alpha_2 = \frac{a\sin\beta_2}{b_2}, \qquad \sin\alpha_3 = \frac{a\sin\beta_3}{b_3}.$$

Az adatok helyettesítésével arra jutunk, hogy

$$\sin\alpha_1 = \frac{5}{4}, \qquad \sin\alpha_2 = 1, \qquad \sin\alpha_3 = \frac{5}{6}.$$

Ezekből következik, hogy

– nem létezik ilyen α_1 szög, azaz nincs az 1. esetbelinek megfelelő háromszög;
– $\alpha_2 = 90°$, azaz a 2. esetbeli adatokkal egy háromszög rendelkezik;
– a 3. esetben $\alpha_3 \approx 56{,}44°$ vagy $\alpha_3 \approx 123{,}56°$, azaz ilyen adatokkal két egymástól különböző háromszög is létrejön.

A háromszögek ismeretlen szögeinek nagysága, oldalainak hossza kiszámítható a szinusztétellel.

10 A tompaszög és a derékszög koszinusza

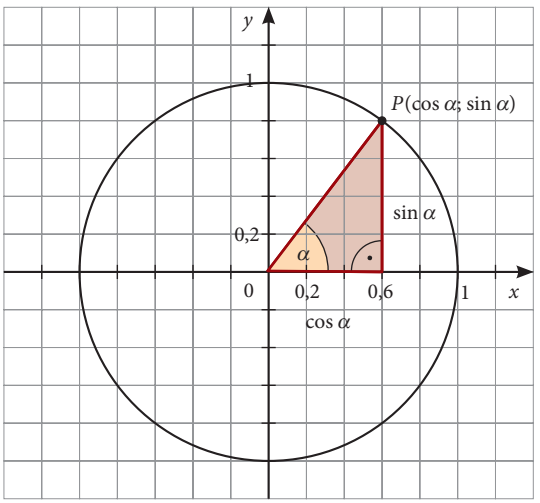
BEVEZETŐ

A hegyesszögek mindegyikének van szinusza és koszinusza is, és már értelmeztük a derékszög és a tompaszög szinuszát is. A tompaszög és a derékszög koszinusza is értelmezhető úgy, hogy illeszkedjen az eddig tanultak sorába.

a) Helyezzük el az α hegyesszöget a következő módon a derékszögű koordináta-rendszerben!

Vegyünk fel egy P pontot az I. síknegyedben úgy, hogy az OP távolság 1 egység, és az OP szakasz α szöget zár be az x tengely pozitív félegyenesével. Ekkor α egy hegyesszög, és a P pont rajta van az origó középpontú, 1 egység sugarú körön. Az ábrán látható derékszögű háromszög befogóinak hossza megegyezik a P pont x és y koordinátájával. A befogók hossza (azaz x és y) meghatározható az α szögfüggvényei és az átfogó hosszának segítségével.

$\sin\alpha = \frac{y}{1}$, ezért $y = \sin\alpha$ és $\cos\alpha = \frac{x}{1}$, ezért $x = \cos\alpha$. Vagyis a P pont koordinátái: $(\cos\alpha; \sin\alpha)$.



b) Definiáljuk a tompaszög koszinuszát hasonlóképpen!

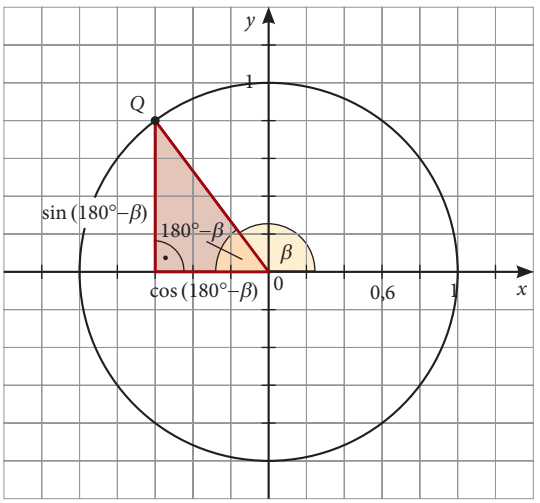
Vegyünk fel egy Q pontot a II. síknegyedben úgy, hogy az OQ távolság 1 egység legyen, az OQ szakasz pedig β szöget zárjon be az x tengely pozitív félegyenesével. Ekkor β tompaszög.

Legyen cos β egyenlő a Q pont x koordinátájával, sin β pedig a Q pont y koordinátájával!

Q pont koordinátái: $(\cos\beta; \sin\beta)$

Az ábra alapján az is látható, hogy:

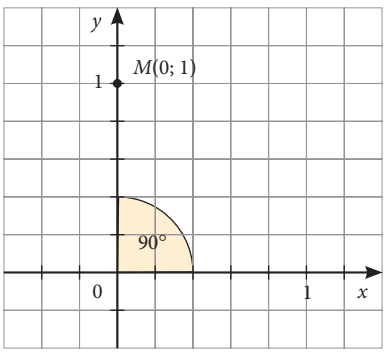
ha β tompaszög, akkor
- $\cos\beta = -\cos(180° - \beta)$
- $\sin\beta = \sin(180° - \beta)$



c) Derékszög koszinusza az ábra szerinti M pont koordinátái alapján legyen 0.

Így ismét teljesül, hogy M pont koordinátái (cos 90°; sin 90°). Ebből adódik, hogy

cos 90° = 0; sin 90° = 1.



d) Ez a gondolatmenet tovább is folytatható tetszőleges nagyságú szögre, illetve forgásszögre. Fontos, hogy az a pont, amelynek a koordinátáit figyeljük, 1 egység távolságra legyen az origótól, és figyelembe kell venni a forgásszög irányát is.

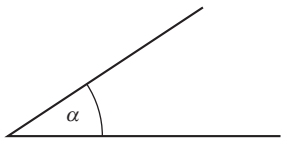
ELMÉLET

Definíció: Tompaszög koszinusza egyenlő kiegészítő szöge koszinuszának ellentettjével. Vagyis ha α tompaszög, akkor $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$.

Definíció: Derékszög koszinusza 0, vagyis $\cos 90° = 0$.

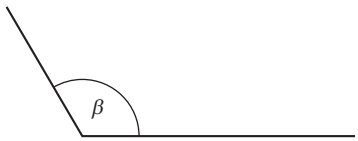
Az α akár hegyesszög, akár derékszög, akár tompaszög, teljesül, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

α hegyesszög



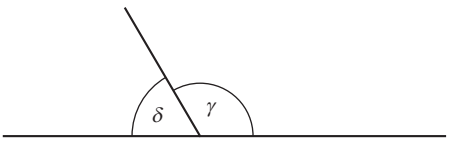
$0 < \sin\alpha < 1$
$0 < \cos\alpha < 1$

β tompaszög



$0 < \sin\beta < 1$
$-1 < \cos\beta < 0$

γ és δ kiegészítő szögek



$\sin\gamma = \sin\delta$
$\cos\gamma = -\cos\delta$

A zsebszámológép megadja egy tompaszög koszinuszát a cos billentyű használatával. Visszafelé is egyszerű a dolgunk: ha negatív koszinusz szögfüggvényértéket adunk meg, akkor a zsebszámológép meghatározza az ehhez tartozó tompaszöget a $\cos^{-1}$ funkció segítségével.

FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres helyeit a számológéped segítségével!

α	92°	102°	112°	122°	132°	142°	152°	162°	172°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									

2. **a)** Egy háromszög két szögének koszinusza 0,5 és 0. Mekkora a harmadik szögének a koszinusza és a szinusza?

b) Egy háromszög két szögének koszinusza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $-0{,}5$. Mekkora a harmadik szögének a koszinusza és a szinusza?

3. Mennyi lehet $\cos\alpha$, ha $\sin\alpha$ értéke

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **b)** 0,7355?

4. Egy egyenlő szárú háromszögben

a) az egyik szög koszinusza –0,777; **b)** az egyik szög koszinusza 0,726; **c)** az egyik szög szinusza 0,428.

Mekkora lehet a többi szög szinusza és koszinusza?

HÁZI FELADAT

1. A számológép szerint hány fokos szög az α, ha a koszinusza

a) 0,7924; **c)** 0,5; **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

b) –0,5; **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2. Egy paralelogramma egyik szögének a koszinusza –0,591. Mekkora a többi szögének a szinusza és a koszinusza?

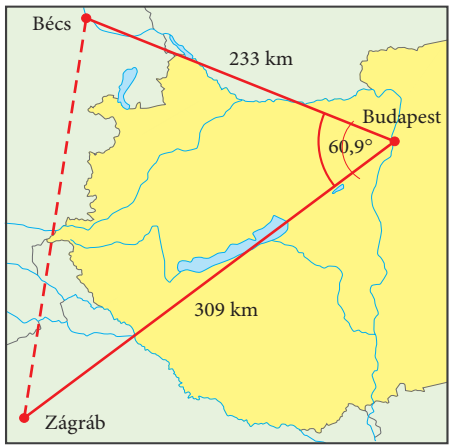
3. Mennyi lehet $\cos\alpha$, ha $\sin\alpha$ értéke

a) 0,5; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** 0,472?

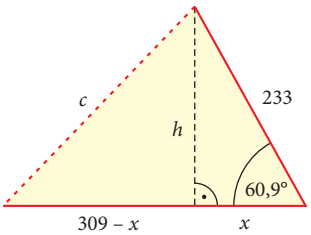
11 A koszinusztétel

BEVEZETŐ

Két kisrepülőgép Budapestről felszállva egyenesen Bécs, illetve Zágráb felé indul. Budapest és Bécs között a fel- és leszállóhely távolsága légvonalban 233 km, a Budapest–Zágráb-vonalon ez a távolság 309 km. A pilóták az iránytűről azt is leolvasták, hogy a két gép útiránya között 60,9° az eltérés.
Állapítsd meg ezekből az adatokból, hogy mekkora a Bécs–Zágráb-távolság (ugyancsak légvonalban)!



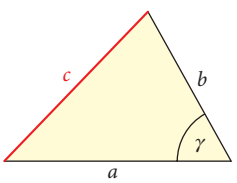
Megoldás
Bontsuk fel a térképre rajzolt háromszöget az egyik magassága segítségével két derékszögű háromszögre!



A bal oldali derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján
$c^2 = h^2 + (309 - x)^2 = h^2 + x^2 + 309^2 - 2 \cdot 309 \cdot x$.
Ha felhasználjuk, hogy
$h^2 + x^2 = 233^2$ és $x = 233 \cdot \cos 60{,}9°$,
akkor azt kapjuk, hogy
$c^2 = 233^2 + 309^2 - 2 \cdot 309 \cdot 233 \cdot \cos 60{,}9°$. $\Rightarrow c \approx 282$ km.
Ez az utóbbi összefüggés azt mutatja meg, hogyan számíthatjuk ki a háromszögben egy oldal hosszát a két másik oldal hosszának és a közbezárt szögük nagyságának az ismeretében.

ELMÉLET

Koszinusztétel: Ha a, b és c egy háromszög oldalainak hossza, γ pedig a c oldallal szemközti szög nagysága, akkor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Megjegyzések
- A koszinusztétel igaz minden háromszögre, függetlenül attól, hogy a γ hegyesszög, derékszög vagy tompaszög.
- Ha a γ derékszög, akkor $\cos \gamma = 0$, ezért ebben az esetben a koszinusztétel nem más, mint a Pitagorasz-tétel: $c^2 = a^2 + b^2$. A koszinusztétel tehát a Pitagorasz-tétel általánosítása.
- A koszinusztételt akkor célszerű használni egy háromszögben, ha
  - ismerjük két oldalának hosszát és az általuk közbezárt szög nagyságát, és a harmadik oldalhosszat keressük;
  - ismerjük mindhárom oldal hosszát, és a háromszög szögeinek nagyságát keressük; ebben az esetben célszerű a leghosszabb oldallal szemközti szöget koszinusztétellel kiszámítani, egy további hegyesszöget pedig szinusztétellel érdemes meghatározni.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Folytassuk a Bevezető feladatot! Mekkora szöget zárna be a repülőgépek útiránya, ha mindkettő Bécsből szállna fel Budapest, illetve Zágráb felé?



Megoldás

Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$309^2 = 282^2 + 233^2 - 2 \cdot 282 \cdot 233 \cdot \cos\alpha$. Ebből:

$\cos\alpha = \frac{282^2 + 233^2 - 309^2}{2 \cdot 282 \cdot 233} \approx 0{,}292$, amiből $\alpha \approx 73°$.

Megjegyzés

Figyeld meg a földgömbön, hogy sokkal nagyobb földrajzi távolságok esetén miért lesz pontatlan ez a számolás! Vajon milyen irányban van a „legközelebb" a Föld felszínén például Budapest és San Francisco?

FELADAT

1. Egy háromszög két oldalának hosszúsága 53 mm, illetve 71 mm. Mekkora a harmadik oldala, ha a két adott oldal által bezárt szög nagysága

a) 60°; **b)** 147°?

2. Egy háromszög oldalainak hossza

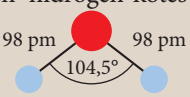
a) 5 cm, 6 cm, 7 cm;

b) 27,2 mm, 51,0 mm, 57,8 mm;

c) 13,2 m, 14,1 m, 24,5 m.

Számítsd ki a háromszög legnagyobb szögének nagyságát!

3. Egy vízmolekulában a két oxigén–hidrogén-kötés által bezárt szög (kötésszög) 104,5°, a távolság az oxigén- és a hidrogénatommagok között 98 pm (pm = pikométer, 1 pm = 10^{-12} m).



Hány pm távolságra van egymástól a két hidrogénatommag?

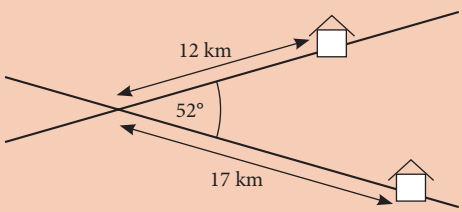
4. Egy paralelogramma oldalainak hosszúsága 24 cm és 32 cm, a hosszabbik átlója 42 cm-es.

a) Mekkorák a paralelogramma szögei?

b) Mekkora a rövidebbik átlója?

HÁZI FELADAT

1. Két vasúti sínpár 52°-os szögben keresztezi egymást. A kereszteződéshez legközelebb fekvő megállók helyzetét az ábra mutatja. Milyen messze esik egymástól légvonalban ez a két megálló?



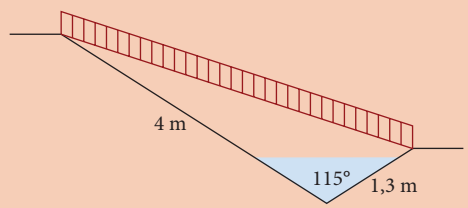
2. Egy háromszög oldalainak hossza

a) 4,1 cm; 5,3 cm; 9,9 cm;

b) 14 m; 33,6 m; 36,4 m.

Számítsd ki a háromszög szögeinek nagyságát!

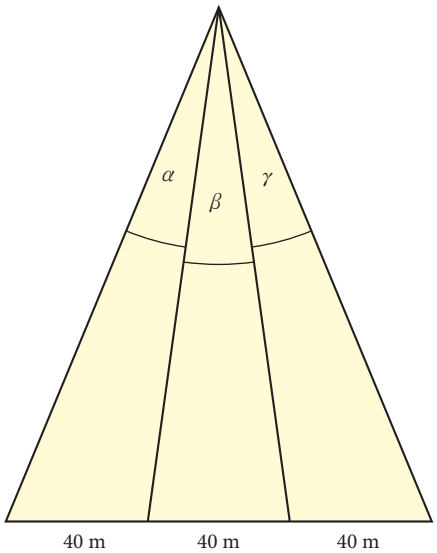
3. Egy kis patak két partja nem azonos magasságú. A magasabbik oldalon a patakpart lejtője 4 méteres, míg az alacsonyabbik oldalon csak 1,3 m. A két part a patakmederben 115°-os szögben találkozik. Milyen hosszú legyen a két partot összekötő fahíd?



12 Sokszögek és szögfüggvények

CSOPORTMUNKA

1. Egy egyenlő szárú háromszög 42°-os szárszögét α, β és γ szögekre bontottuk. A szögszárak 40 m-es részekre osztják a 120 m-es alapot.

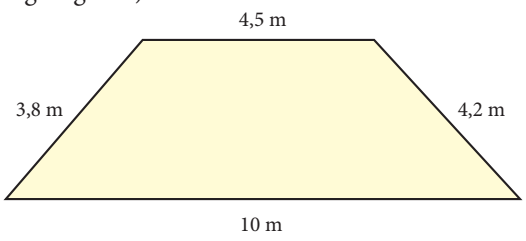


a) Mekkorák a háromszög alapon fekvő szögei, és mekkorák a szárai?

b) Igazold, hogy $\alpha = \gamma$!

c) Mekkora α és β?

2. Egy vasúti töltés keresztmetszete trapéz alakú. A korona szélessége 4,5 m, a rézsű 3,8 m, illetve 4,2 m hosszú, a töltés alapja 10 m széles. (Azonosítsd be a használt elnevezéseket az ábrán jelölt hosszúságok segítségével!)

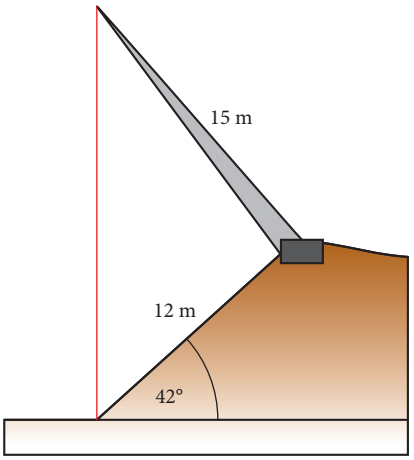


a) Mekkora a rézsű emelkedési szöge a meredekebb, illetve a lankásabb oldalon?

b) Milyen magas a töltés?

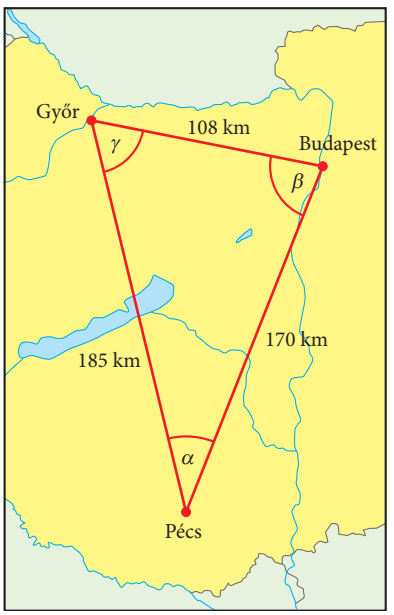
(*Útmutatás:* egy lehetséges megoldási módszer, ha a trapézt felbontjuk egy paralelogrammára és egy háromszögre.)

3. Az ábrán egy kavicsbánya daruja látható. A daru karja 15 m hosszú. A domb rézsűje 12 m, és 42°-os emelkedési szöget zár be a vízszintessel. Milyen hosszú legyen a daruról függőlegesen lefelé lógó drótkötél, ha le kell érnie a domb aljáig?



4. **a)** Számítsd ki a Pécs–Budapest–Győr „háromszög” szögeinek nagyságát!

b) Számítsd ki az a)-beli háromszög területét, és azt is, hogy hány százaléka ez a terület Magyarország területének! (Magyarország területe 93 030 km^2.)



ELMÉLET

Tompaszög tangense

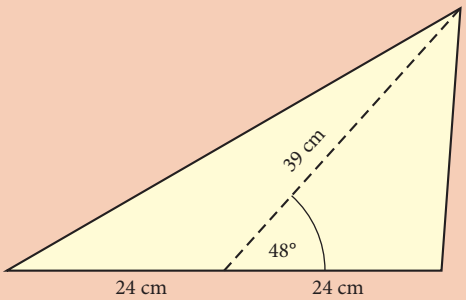
Az α hegyesszögre teljesül, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

A tangens szögfüggvény kiterjesztéséhez ezt a képletet alkalmazzuk. Vigyázni kell azonban, hogy ez derékszög esetén nem vezet eredményhez, mert $\cos 90° = 0$, és 0-val nem lehet osztani. Ezért a 90°-nak nincs tangense.

Definíció: Az α **tompaszög tangense**: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

HÁZI FELADAT

1. Egy háromszög 48 cm-es oldala a hozzá tartozó 39 cm-es súlyvonallal 48°-os szöget alkot.



a) Mekkora a háromszög területe?

b) Mekkora a háromszög másik két oldala és a legnagyobb szöge?

2. Egy háromszög területe 60 cm^2, két oldalának hosszúsága 15 cm, illetve 16 cm.

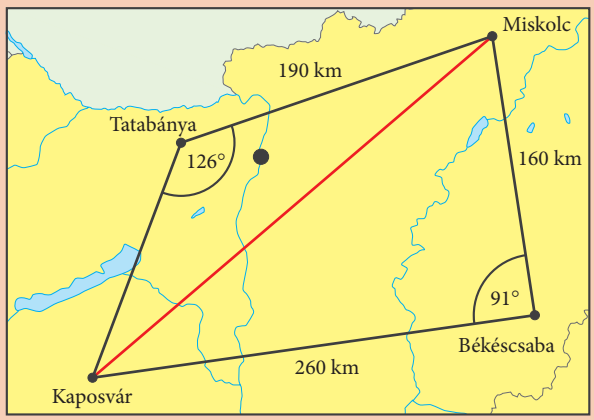
a) Mekkorák a szögei? (Két eset van!)

b) Mekkora a harmadik oldala?

3. a) Számítsd ki a térkép adatainak felhasználásával, hogy mekkora a Kaposvár–Miskolc-távolság légvonalban! Egész kilométerre vagy inkább 10 kilométerre kerekítve célszerű megadni ezt a távolságot?

b) Mekkora a Kaposvár–Tatabánya-távolság légvonalban?

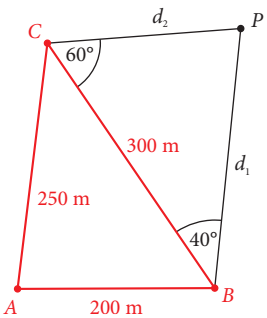
c) Számold ki a földrajzi atlaszban található térkép segítségével is (a térkép méretarányának felhasználásával) az a) és a b) feladatban kérdezett távolságokat! Hasonlítsd össze a kétféle úton kapott eredményeket!



RÁADÁS

A szinusztétel és a koszinusztétel alapvető jelentőségű a helymeghatározásban. Ez a két tétel adja a geodéziai mérések és számítások, a térképkészítés elméletének egyik alapját (háromszögelés), és (az időméréssel kiegészítve) gyakorlatilag ezen a két tételen alapul a jelenleg legmodernebb helymeghatározó rendszer, a GPS működése is.

A helymeghatározás lényegét egy egyszerű példával is megvilágíthatjuk.



Sík terepen vegyünk fel három alappontot, amelyeknek ismerjük a páronkénti távolságát, legyen például $AB = 200$ m, $BC = 300$ m, $AC = 250$ m.

Ha a BC szakasz két végpontjából szögmérés útján meghatározzuk a P tereptárgy helyzetét (ez az ún. *előremetszés*), akkor számolással meghatározható a P pontnak az alappontoktól való távolsága. B és C pontoktól való távolsága például szinusztétellel számolható:

$$d_1 = 300 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 264 \text{ (m)}, \quad d_2 = 300 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 196 \text{ (m)}$$

13 A kör és a szabályos sokszögek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Gyakran látni az autók kerekein olyan dísztárcsákat, amelyeknek a korábban jellemző 6 helyett 7, 9, 10, 11, 13 küllője van. Ha képzeletben összekötjük a küllők szomszédos „csúcspontjait", szabályos sokszögeket kapunk.
Az ábrán látható, szabályos kilencszöget formáló dísztárcsa *OA* sugara 17,5 cm.



a) Mekkora az ábrán jelölt *AOB* középponti szög?
b) Mekkorák ennek a szabályos kilencszögnek az oldalai?
c) Mekkora a szabályos kilencszög területe?

Megoldás

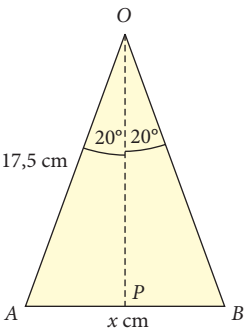
a) $360° : 9 = 40°$.

b) *Első módszer*
Használjuk a koszinusztételt!
$x^2 = 17{,}5^2 + 17{,}5^2 - 2 \cdot 17{,}5 \cdot 17{,}5 \cdot \cos 40°$.
$x \approx 12$ (cm).

Második módszer
Az *APO* derékszögű háromszögből:
$x = AB = 2 \cdot AP = 2 \cdot (17{,}5 \cdot \sin 20°) \approx 12$ (cm).

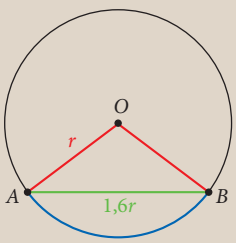
c) Az *AOB* háromszög területe:
$T = \frac{1}{2} \cdot 17{,}5^2 \cdot \sin 40° \approx$
$\approx 98{,}4$ (cm^2).

A kilencszög területe ennek a 9-szerese, vagyis közelítőleg 886 cm^2.



FELADAT

1. Egy 8,4 cm sugarú körben az *AB* húr 1,6-szer akkora, mint a sugár.

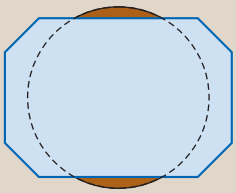


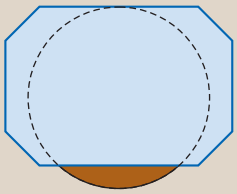
a) Mekkora az *AOB* szög?
b) Mekkora az *AOB* háromszög területe?
c) Mekkora a keletkezett kisebbik körív hossza?
d) Mekkora a keletkezett nagyobbik körív hossza?
e) Mekkora területű körcikkekre vágja a kört a két piros sugár?
f) Mekkora az *AB* húr által létrehozott két körszelet területe?

2. Az Angliában használatos 50 pennys érme olyan egyenes hasábnak tekinthető, amelynek az alaplapja szabályos hétszög. (Valójában az élei nagyon enyhén domborúak, hogy ne akadjon meg az automatákban.) Számítsd ki, hogy körülbelül hány gramm fémötvözet szükséges egy ilyen érme elkészítéséhez, ha a hétszög köré írható kör átmérője 27,3 mm, az érme vastagsága 1,8 mm, és az elkészítéséhez használt nikkel-réz ötvözet sűrűsége 8,7 $\frac{g}{cm^3}$!



3. Egy 140 cm széles és 160 cm-nél hosszabb terítőt az ábra szerint egy olyan kerek asztalra tettünk, amelynek az átmérője 160 centiméter.





a) Az asztallapnak mekkora része marad fedetlen, ha a terítő és az asztallap szimmetria-középpontja azonos?

b) Mekkora a fedetlen rész területe, ha a jobb oldali ábra szerint teszik rá az asztalra a terítőt?

4. Egy 5,7 cm sugarú kör A pontjából két húr indul. Hosszúságuk 6,5 cm és 8,3 cm.

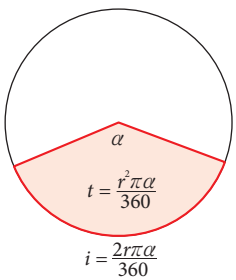
a) Készíts rajzot!

b) Mekkora területű részekre oszthatja a körlemezt ez a két húr?

ELMÉLET

1. Körív és körcikk

Egy körben a középponti szögek nagysága, a hozzájuk tartozó körívek hosszúsága és a megfelelő körcikkek területe egyenesen arányos.



Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög fokokban mért értéke α, akkor a hozzá tartozó **körív hossza** a körkerület 360-ad részének az α-szorosa. Ha ennek a cm-ben mért hosszúságát i-vel jelöljük, akkor $i = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180}$.

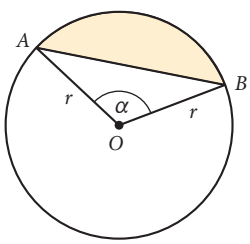
Ugyanebben a körben az α középponti szöghöz tartozó **körcikk területe** a körterület 360-ad részének az α-szorosa. Ha ennek a cm^2-ben mért nagyságát t-vel jelöljük, akkor $t = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

A körcikk területe kiszámolható a körív hosszából és a kör sugarából is: $t = \frac{ir}{2}$.

2. Körszelet területe

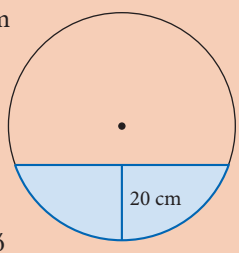
Az ábrán látható körszelet területe kiszámítható úgy, hogy az α középponti szögű körcikk területéből kivonjuk az AOB háromszög területét.

Az AOB háromszög területének meghatározásához érdemes a szinuszos területképletet alkalmazni: $T = \frac{r \cdot r \cdot \sin\alpha}{2}$.



HÁZI FELADAT

1. Egy 60 cm átmérőjű, 2,6 m hosszúságú, vízszintes helyzetű csőszakaszban 20 cm magasan áll a víz. Az ábra a cső keresztmetszetét mutatja.



a) Mekkora középponti szög tartozik a vízfelszínt jelölő húrhoz?

b) Mekkora a kék körszelet területe?

c) Mennyi víz van ebben a csőszakaszban?

d) A cső térfogatának hány százalékát foglalja el a víz?

2. Egy szabályos ötszög alakú terítő csúcsai 70 cm-re vannak az ötszög középpontjától.

a) Legfeljebb mekkora átmérőjű kör alakú asztallap fedhető le teljesen ezzel a terítővel?

b) A terítő szélein díszzsinórt akarnak végigvezetni. Mekkora hosszúságú zsinórra van szükség?

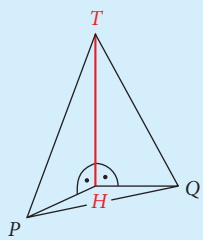
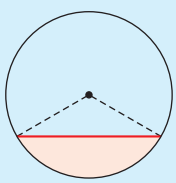
c) Mekkora az ötszög átlóinak hossza?

14 Csoportverseny

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

1. Oldjátok meg a 6 kijelölt feladatot, a 6. feladat eredményét írjátok fel a táblára! Az a csoport nyer, amelyik először írja fel a jó eredményt. A verseny addig tart, amíg mindegyik csoport felírja eredményét a táblára. Ez alatt az idő alatt mindegyik csoport egyszer javíthat.
Jótanács: érdemes egy kicsit gondolkozni, mielőtt nekiugrotok a formális számolásnak!

1. feladat Egy paralelogramma átlóinak hossza 30 mm és 50 mm, az általuk közrefogott tompaszög pedig 120°-os. Számítsátok ki mm-ekre kerekítve, hogy mekkorák ennek a paralelogrammának az oldalai! Ezeknek a kerekített számoknak a segítségével állapítsátok meg, hány mm a paralelogramma kerülete!	*A mm-ben megkapott kerület egy 3 jegyű szám. A számjegyeinek összegét jelöljétek A betűvel!*
2. feladat Hány mm^2 annak a paralelogrammának a területe, amelynek az oldalai 10 mm és 70 mm hosszúak, a két oldal által bezárt szög pedig 150°-os?	*A terület értéke egy 3 jegyű szám. A számjegyeinek szorzatát jelöljétek B betűvel!*
3. feladat Hány méter magas a torony? A PQ szakasz hossza 15 m, $PQH\sphericalangle = 42°$, $QPH\sphericalangle = 53°$, $TQH\sphericalangle = 72°$. 	*Kerekítsétek egészekre a torony méterben kifejezett magasságát, a mérőszámot jelöljétek C betűvel!*
4. feladat Egy háromszögnek ismerjük két oldalát és az egyikkel szemközti szögét: $a = 50$ mm, $b = 74$ mm és $\alpha = 37°$. Hány fok a b-vel szemközti β két lehetséges értékének összege?	*Jelöljétek a kapott számot D betűvel!*
5. feladat Egy 20 cm sugarú kört két körszeletre vágunk. A középponti szög 110°-os. Hány cm^2 a kisebbik körszelet területe? (Kerekítsetek egészekre!) 	*Jelöljétek a kapott számot E betűvel!*
6. feladat Számítsátok ki, mennyi a $\left(15 \cdot A - \frac{D}{2}\right) \cdot C - B^2 + E$ értéke!	*A kapott számot írjátok fel a táblára! Zárójelben tüntessétek fel a felírás időpontját!*

2. Az első 3 helyezett csapat bemutatja, milyen egyszerű módszereket alkalmazott (például melyik feladatnál nem kellett számolni).

HÁZI FELADAT

1. Egy trapéz alapjainak hossza 57 cm és 41 cm, a hosszabb alapon fekvő egyik szöge 73 fokos. Ezen szög melletti szár 38 cm hosszú. Számítsd ki az átlók és a másik szár hosszát!

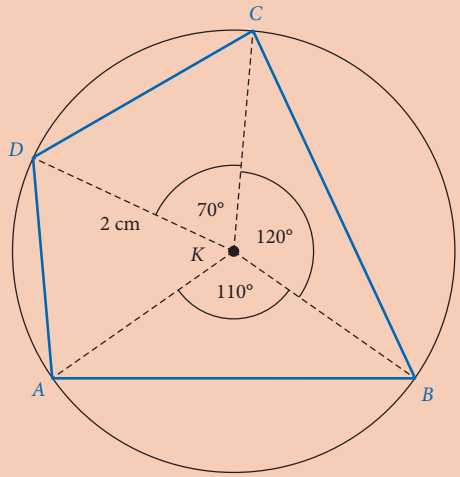
2. Az ábra szerinti kör középpontja a K pont, sugarának hossza 2 cm.

a) Mekkora az $ABCD$ húrnégyszög két-két szemközti szögének összege?

b) Mekkora a négyszög kerülete és területe?

c) Mekkora területű körszeleteket vágnak le a körből a húrnégyszög oldalai?

d) Számítsd ki a négyszög átlóinak hosszát!



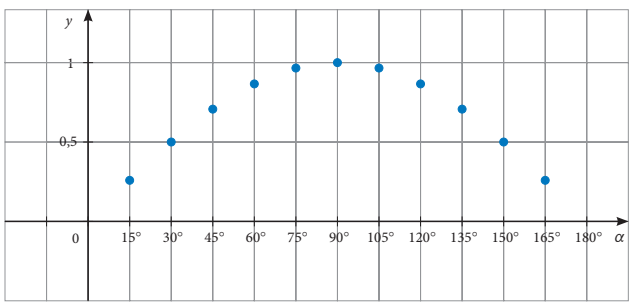
RÁADÁS

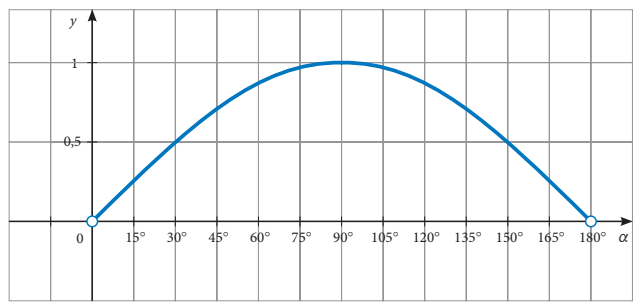
A szinuszgörbe

Ábrázoljuk azt a függvényt, amely a 0°-nál nagyobb és 180°-nál kisebb szögekhez hozzárendeli a szög szinuszát!
A zsebszámológép segítségével készítsünk táblázatot!

α	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\sin\alpha$	0,2588	0,5	07071	0,866	0,9659	1	0,9659	0,866	0,7071	0,5	0,2588

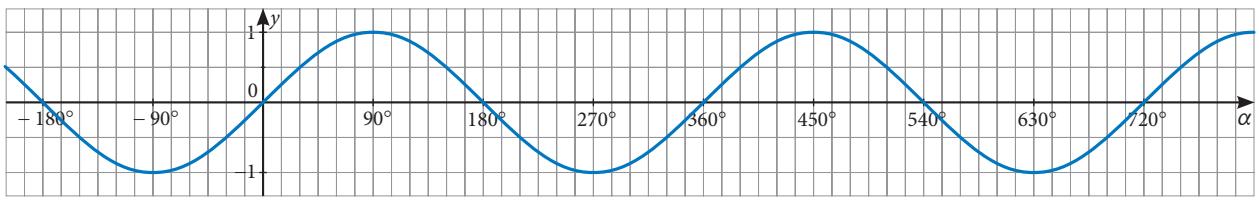
Ábrázoljuk az összetartozó értékeket!





Végezzétek el milliméterpapíron az ábrázolást, még több ponttal!
Ha még több értéket berajzolunk, egyre pontosabban kirajzolódik annak a görbének egy darabja, amit a matematikában szinuszgörbének neveznek.

Fizikatanulmányaid során már találkozhattál a szinuszgörbével, hiszen például a rezgőmozgást, illetve a váltakozó áramot jellemző fizikai mennyiségek időbeli változását ilyen függvény segítségével lehet ábrázolni és jellemezni.



15 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. **a)** Add meg egy olyan derékszögű háromszög oldalainak hosszát, amelyben az egyik hegyesszög szinusza 0,6.

b) Mekkora ennek a szögnek a koszinusza és a tangense?

c) Mekkora a derékszögű háromszög másik hegyesszögének a szinusza, a koszinusza és a tangense?

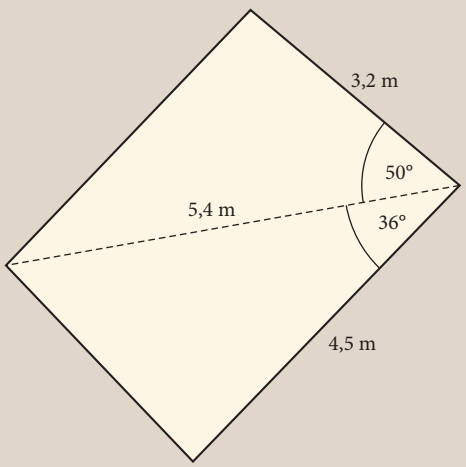
2. Egy háromszög egyik szögének szinusza 0,7642.

a) Mekkora lehet ez a szög?

b) Mennyi lehet a szög koszinusza?

c) Mennyi lehet a szög tangense?

3. Tünde megmérte egy négyszög alakú helyiség egyik sarkánál a négyszög belső szögét. Többszöri mérés után arra jutott, hogy a mért szög 86°-os.
– Ez a helyiség biztosan nem téglalap alakú – gondolta –, mégis meg tudom állapítani az alapterületét. Az ábra szerinti három szakasz és két szög nagyságát többszöri gondos mérés után jegyezte fel.



a) Mekkora a helyiség alapterülete?

b) Vajon paralelogramma-e a négyszög? Igazold számítással a válaszodat!

4. Egy 3,4 cm sugarú kör két érintője 56°-os szöget alkot egymással.

a) Mekkora távolságra van az érintők metszéspontja a kör középpontjától?

b) Mekkora annak a konvex síkrésznek a területe, amelyet a kör egy íve és a két érintő fog közre?

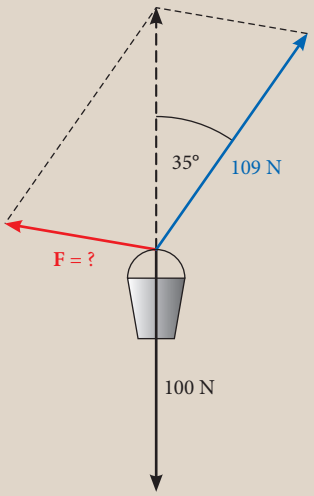
5. Az $ABCD$ konvex négyszög A csúcsnál lévő szöge 104°-os, C csúcsnál lévő szöge 95°-os, az AC átlója 22 cm hosszú. Az AC átló a négyszöget két háromszögre bontja, ezek közül az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő szög 60°-os, a C csúcsnál lévő szög 40°-os.

a) Készíts ábrát!

b) Számítsd ki a négyszög oldalainak hosszát!

c) Számítsd ki a négyszög területét!

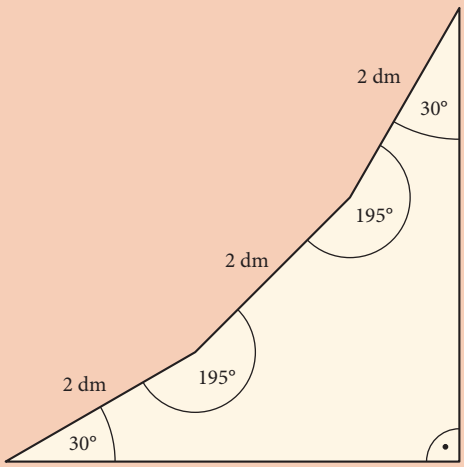
6. Egy apa és a fia együtt cipelnek egy vízzel teli vödröt. A vödörre ható gravitációs erő 100 N nagyságú, az apa által kifejtett erő 109 N nagyságú, és az apa karja (az erő iránya) a függőlegessel 35°-os szöget zár be. Mekkora F erővel tartja a fia a vödröt, és mekkora szöget zár be a fiú karja (az erő iránya) a függőlegessel, ha a vödröt így kiegyensúlyozva tudják vinni?



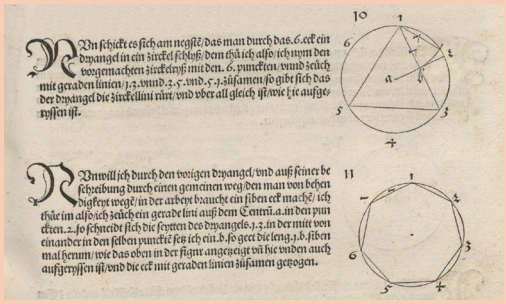
HÁZI FELADAT

1. Milyen magas a Kristályszálló, ha 12 méter távolságból és 1,6 méter szemmagasságból 65°-os emelkedési szögben látjuk a vízszinteshez képest a szálloda tetejét?

2. Az ábrán látható ötszögnek két 30°-os, két 195°-os és egy 90°-os szöge van.
A három rövidebb oldal 2 dm-es. Mekkora a két hosszabb oldala?



3. Albrecht Dürer, a XV-XVI. sz. fordulóján élt német reneszánsz mester az oltárképei és vallásos témájú festményei mellett elsősorban rézkarcairól és fametszeteiről ismert. Emellett behatóan foglalkozott matematikával is. A szabályos hétszög oldalhosszúságát például az ugyanakkora körülírt körbe rajzolható szabályos háromszög oldalának feleként adja meg.



Számítsd ki egy 1 m sugarú körbe írt szabályos hétszög oldalhosszúságát, illetve az ugyanabba a körbe írt szabályos háromszög oldalának felét! Mekkorát tévedett Dürer?

4. Egy paralelogramma átlóinak hossza 25 cm és 30 cm. Az átlók által bezárt szög nagysága 46°.

a) Milyen hosszúak a paralelogramma oldalai?

b) Mekkorák a paralelogramma szögei?

c) Mekkora a paralelogramma területe?

RÁADÁS

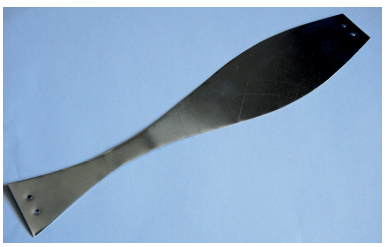
A szinuszgörbe a mindennapokban

Bármilyen meglepő, de hétköznapi tárgyak, eszközök is kapcsolatba hozhatók a szinuszgörbével.



Ha egy hengert ferde síkkal vágunk el, és utána a palástját kiterítjük a síkba, akkor a palást határoló vonala éppen egy szinuszgörbe. Varrónők szabásmintáin látni ilyet, ott, ahol egy ingujjat kell hozzászabni az inghez. Ha egy ferdén elvágott szaláminak lehúzod a héját, és kiteríted a síkba, ugyanezt tapasztalod. A bádogosok az ereszcsatornák illesztésénél találkoznak ezzel a görbével.





Ezt vágja ki a bádogos, és a középső cikkelyek hajlíthatók belőle

TUDÁSPRÓBA I. (könnyebb)

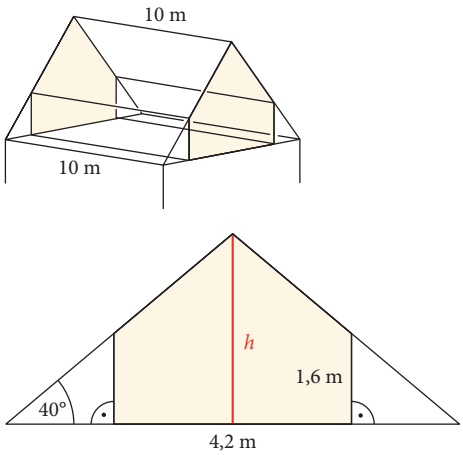
1. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 70 fokosak, szárai 15 cm hosszúak.

a) Készíts ábrát!

b) Mekkora az alaphoz tartozó magassága?

c) Milyen hosszú a háromszög alapja?

2. Tetőtér-beépítési terv vázlata látható a mellékelt rajzon. A tető alatt beépítendő tér ötszög keresztmetszetű, a legalacsonyabb falmagasság 1,6 m, a helyiség szélessége pedig 4,2 méter. A tető síkja a vízszintes síkkal mindkét oldalon 40°-os szöget zár be.



a) Milyen széles a tető alapja?

b) Milyen magas a tető (h)?

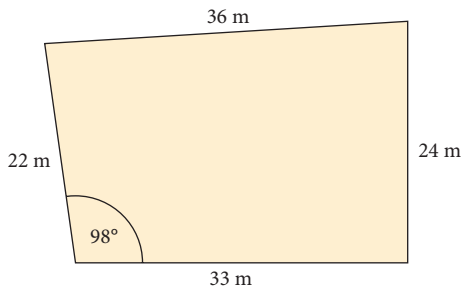
c) Mekkora az ötszög alakú keresztmetszet területe?

d) Hány légköbméteres lesz a beépített rész, ha a ház hossza 10 m?

3. Egy 12 cm sugarú kört egy 16 cm hosszú húrja két körszeletre bontja. Mekkora ezek közül a kisebbik körszeletnek a területe?

4. Az ABC háromszög AB oldala 17 cm hosszú. Az A csúcsnál lévő szöge 78°-os, a B csúcsnál lévő szöge 36°-os. Számítsd ki a háromszög másik két oldalának hosszát!

5. Egy telek füvesítéséről szól az alábbi feladat. A telek négyszög alakú, méretei a rajzon láthatók. A telken áll egy ház, valamint fáskamra és szerszámoskamra is. Így aztán 130 m^2-nyi részt nem kell füvesíteni.



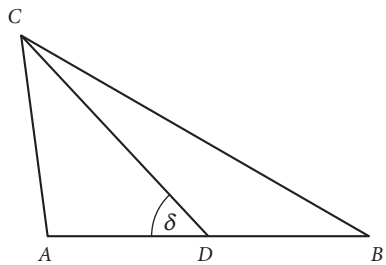
a) Hány m^2-es területre kell fűmagot vásárolni?

b) Számítsd ki, hogy mekkora szöget zár be a telek 33 méteres és 24 méteres oldala egymással!

RÁADÁS

1. (Érettségi feladat, 2013)

Az ábrán látható ABC háromszögben a D pont felezi az AB oldalt. A háromszögben ismert: $AB = 48$ mm, $CD = 41$ mm, $\delta = 47°$.



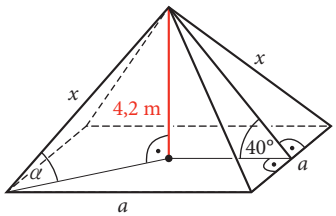
a) Számítsd ki az ABC háromszög területét!

b) Számítással igazold, hogy (egész milliméterre kerekítve) a háromszög BC oldalának hossza 60 mm!

c) Számítsd ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szög nagyságát!

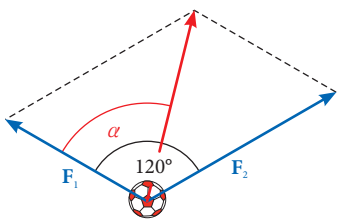
TUDÁSPRÓBA II. (nehezebb)

1. Egy négyzet alakú alap fölé 4,2 méter magas szabályos négyoldalú gúla alakú háztetőt emeltek. A tető oldallapjai 40°-os szöget alkotnak a vízszintes síkkal (lásd az ábrát).



a) Mekkora a tető alapéle (a)?
b) Hány m^2-t kell cseréppel befedni?
c) Milyen hosszúak az oldalélgerendák (x), és mekkora szöget alkotnak a vízszintes síkkal (α)?
d) Mekkora szöget zár be két szomszédos oldalélgerenda? És a két szemközti?

2. Egy futball-labdába két játékos ugyanabban a pillanatban rúgott bele az ábra szerinti erőkkel:
$F_1 = 1500$ N és $F_2 = 2000$ N.



Mekkora és milyen irányú a labdára ható két erő eredője? Az irányt az ábrán jelölt α szög kiszámításával add meg!

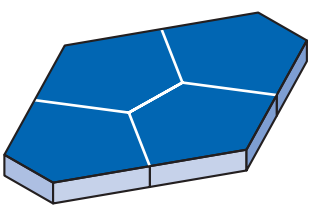
3. (Egy 800 éves feladat alapján.) Két torony áll egymástól 60 könyök távolságra. A két torony között, mindkét torony csúcsától egyenlő távolságra, áll egy kút. Az egyik torony magassága 50 könyök, ez a kúttól 69°-os szögben látszik.
a) Milyen messze van ez a kút a két torony alapjától?
b) Mekkora szögben látszik a másik torony a kúttól?
c) Milyen magas a másik torony?

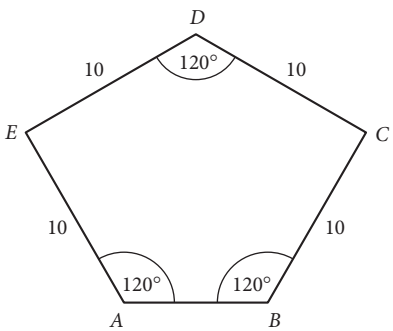
4. Egy paralelogramma 34 mm-es oldala a 38 mm-es átlóval 56°-os szöget alkot.
a) Mekkora a paralelogramma többi oldala?
b) Mekkorák a paralelogramma szögei?
c) Mekkora a másik átló?
d) Mekkora a paralelogramma területe?

5. Egy tompaszögű háromszög területe 6,65 dm^2, két oldalának hossza 4,62 dm és 3,08 dm.
a) Mekkora lehet a két adott oldal által közbezárt szög?
b) Mekkora lehet a harmadik oldal?
c) Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei?
d) Hányféle háromszög felel meg az adatoknak?

RÁADÁS

2. (Érettségi feladat, 2020)
Egy sétálóutca díszburkolatát ötszög alapú, egyenes hasáb alakú kövekkel készítik el. (Az ábrán négy ilyen követ lehet látni a burkolaton megfigyelhető elrendezésben.)





a) Számítással igazold, hogy az AED és a BCD háromszög derékszögű!
b) Számítsd ki az $ABCDE$ ötszög területét!

Témazáró feladatgyűjtemény

1. Határozd meg a következő szögek tangensét!
12°; 38°; 82°; 73°

2. Határozd meg a következő szögek tangensét!
16,8°; 33,24°; 88,92°; 71,45°

3. Hány fokos az a hegyesszög, melynek tangense:
a) 0,2; **c)** 17;
b) 2; **d)** 78?

4. Hány fokos az a hegyesszög, melynek tangense:
a) 0,33; **c)** 13,5;
b) 2,76; **d)** 85,3?

5. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 72°-os. A mellette fekvő befogója 5,2 cm hosszú.
a) Mekkora a másik befogója?
b) Mekkora az átfogója?

6. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 27°-os. A szemközti befogója 34 mm hosszú.
Milyen hosszú a másik befogó?

7. Egyenes létrát támasztunk egy egyenes (függőleges) fához. A létra alja 48 cm-re van a fa aljától, a létra felső vége 208 cm magasan van. Mekkora szöget zár be a létra a talajjal?

8. Egy kétágú létrát szétnyitunk és felállítunk. Ekkor a legmagasabb pontja 185 cm magasan van. A létra két szára 78 fokos szöget zár be a talajjal. Milyen hosszúak a létra szárai?

9. Határozd meg a következő szögek szinuszát és koszinuszát, három tizedesjegyre kerekítve!
12°; 38°; 82°; 73°

10. Hány fokos az a hegyesszög, melynek szinusza:
a) 0,33; **c)** 0,811;
b) 0,76; **d)** 0,985?

11. Hány fokos az a hegyesszög, melynek koszinusza:
a) 0,122; **c)** 0,611;
b) 0,276; **d)** 0,885?

12. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 17°-os, átfogója 23 cm hosszú. Mekkorák a befogók?

13. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 31°-os, vele szemközti befogója 4,9 cm hosszú. Milyen hosszú a másik befogó?

14. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 27°-os, a szög melletti befogó 3,8 cm hosszú. Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magasság?

15. Egy téglalap oldalai 46 mm és 79 mm hosszúak. Mekkora szöget zárnak be egymással a téglalap átlói?

16. Egy derékszögű háromszög 26 cm-es befogóján 32°-os szög nyugszik. Mekkora a háromszög köré írt körének sugara? Hányszorosa a kör területe a háromszög területének?

17. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 5 cm hosszú. A magasság az átfogóból egy 12 centiméteres szakaszt vág le. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

18. Az egyenlő szárú háromszög alapja 14 cm, az alaphoz tartozó magasság 12 cm hosszú. Mekkorák a háromszög szögei? Mekkora a háromszög területe?

19. Egy húrtrapéz hosszabbik alapja 28 cm hosszú, a trapéz hegyesszögei 60°-osak, a szárak hossza 6 cm. Mekkora a trapéz kerülete és területe?

20. Egy húrtrapéz alapjai 32, illetve 10 egység hosszúak, a trapéz magassága 5 egység hosszú. Mekkorák a trapéz szögei? Mekkora a trapéz kerülete?

21. Egy lejtős út hossza 246 méter, a vízszintessel alkotott hajlásszöge 6,8°. Milyen magasra visz a lejtő?

22. Egy kétágú létra szárainak hossza 2,3 méter. A biztonságos használathoz legalább 34°-ra kell nyitni a szárakat. Legalább milyen távol van ekkor a két láb végpontja a talajon? Eléri-e a létráról egy 170 cm magas ember a 3 méter magasan lévő villanykörtét?

23. Egy rombusz alakú kert kerülete 200 méter, az átlók hosszának aránya 3 : 4. Hány fokos szögben látja a rövidebb átlót Bálint gazda, ha a kert valamely csúcsából szemlélődik? Hány forintot kell a gazdának palántákra költenie, ha négyzetméterenként 64 darab palántát ültet el, és a palánták darabja 140 forintba kerül?

24. Az ABC háromszög A csúcsból húzott magassága 36 cm hosszú. A magasság az α szöget 10,5° és 52°-os szögekre bontja. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

25. Egy deltoid átlói egyenlő hosszúak, egyik átlója a másikat 3 : 5 arányban osztja. A deltoid területe 144 cm^2. Mekkora a deltoid kerülete?

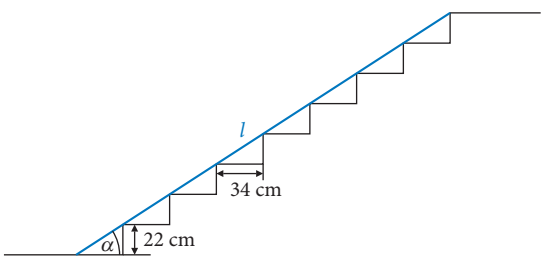
26. Egy ablak mérete: 82 cm × 140 cm. Mekkora szöget zárnak be az ablakra ragasztott, átlósan haladó egyenes ragasztószalagcsíkok egymással?

27. Egy 16 cm sugarú körhöz egy külső P pontból húzott érintők 48,5° nagyságú szöget zárnak be egymással. Mekkora távolságra van a P pont a kör középpontjától, és mekkorák az érintőszakaszok?

28. Egy hegycsúcsra egyenes út vezet fel, ennek hossza 240 m és emelkedése 15° (15°-os szöget zár be az út a vízszintessel). A hegy tetején áll egy 32 m magas kilátó. Mekkora szögben látszik a kilátó teteje a hegyre vezető út aljából?

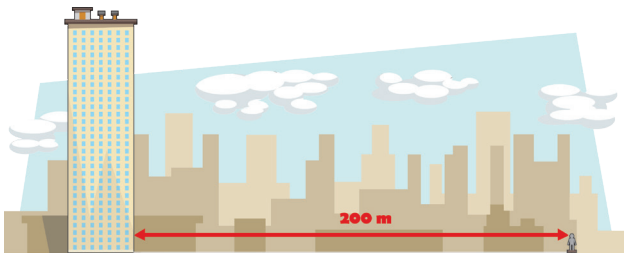
29. Mekkora szögben látszik a 3,6 cm sugarú kör középpontjából a kör 4,9 cm hosszú húrja?

30. Akadálymentesítés miatt egy lépcsőre rámpát terveznek. A lépcsők magassága 22 cm, hosszuk 34 cm. A járdaszinttől a bejáratig nyolc lépcső vezet. Milyen hosszú legyen a rámpa? Mekkora szöget zár be a járdával?

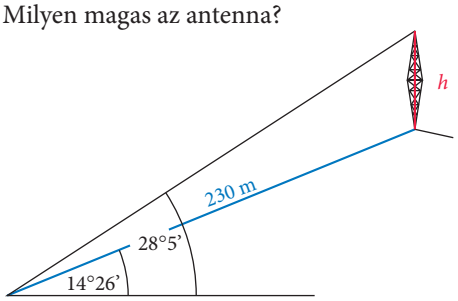


31. Milyen messze van tőlünk az a 32 m magas épület, amely 6,3 fokos emelkedési szögben látszik, ha a mérést egy 1,5 m magas teodolitállvánnyal végezzük?

32. Egy 30 emeletes toronyházból figyeljük a talajon, a háztól 200 méterre álló szobrot. Mekkora depressziószögben (lehajlási szögben) látszik a szobor talapzatának alja a hetedik, illetve huszonnyolcadik emeleti ablakból, ha egy emelet magassága 340 cm?



33. Egy toronyantennához olyan 230 m hosszú egyenes út vezet, melynek emelkedése 14°26′. Az út elejéről az antenna csúcsa 28°5′ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?



34. Egy repülő állandó magasságban repül egy autópálya egyenes szakasza felett, a pályával párhuzamosan. Az utat átívelő felüljáró 23°-os lehajlási szögben látszik. A repülő továbbhalad a pályával párhuzamosan 1250 m-t, és ekkor a felüljáró 32°-os lehajlási szögben látszik. Készíts ábrát! Milyen magasan halad a repülő?

35. Mekkora szöget zár be egymással a kocka egy csúcsából kiinduló testátlója és lapátlója?

36. Egy hegy tetejét 26°-os emelkedési szög alatt látjuk. Ha 145 m-rel közelebb megyünk, akkor 29°-os emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a hegycsúcs?

37. Egy háztető alakja szabályos négyoldalú gúla. Az alapélei 12,3 m hosszúak, az oldalélei 9,8 m hosszúak.

a) Milyen magas a tető?

b) Mekkora szöget zárnak be az oldalélek a vízszintes síkkal?

c) Mekkora szöget zárnak be a tető oldallapjai a vízszintes síkkal?

d) Hány m^2 cseréppel lehet befedni a tetőt?

38. Egy háromszög két oldalhosszának összege 15 cm, és e két oldallal szemközti szögek nagysága 49° és 73°. Mekkorák a háromszög oldalai?

39. Egy háromszög két oldalhosszának különbsége 7 dm. Az ezen oldalakkal szemközti szögek nagysága 30° és 50°. Mekkorák a háromszög oldalai, és mekkora a háromszög területe?

40. A táblázat egy-egy sora egy-egy háromszög adatait tartalmazza a szokásos jelölésekkel (az oldalak mértéke cm). Számítsd ki a hiányzó adatokat!

	a	b	c	α	β	γ
a)	6	9			62°	
b)		37	22			30°
c)			14	25°	43°	
d)	5,4	12,3				83°
e)	6	8	13			

41. Egy háromszög egyik szöge 94° nagyságú, a vele szemközti oldal 25 cm hosszú. A háromszög egy másik oldalának hossza 10 cm. Mekkora a hiányzó oldal hossza és a szögek nagysága? Van-e a feladatnak több megoldása?

42. Egy paralelogramma oldalainak hossza 10 cm és 16 cm, egyik szögének nagysága 100°. Mekkorák a paralelogramma átlói, és mekkora a területe?

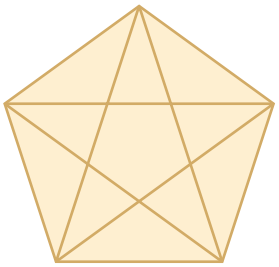
43. Egy háromszög alakú kert egyik oldalának hossza 50 méter, másik oldalának hossza 80 méter. Mekkora lehet a kert kerülete, ha ismert, hogy a területe 1000 m^2?

44. Egy háromszög kerülete 800 m, két szögének nagysága 30° és 50°. Mekkorák az oldalai?

45. Egy trapéz hosszabbik alapja 24 cm, az egyik szára 14 cm hosszú. Az ismert szár és a hosszabbik alap hajlásszöge 52 fokos, az alapon fekvő másik szög 65 fokos. Mekkorák a trapéz ismeretlen szögei és oldalai?

46. Határozd meg annak az általános négyszögnek az oldalhosszait, melynek BD átlója 38 cm hosszú, és ez az átló a B-nél lévő β szöget egy 49°-os és egy 37°-os részre, a D-nél lévő δ szöget pedig egy 51°-os és egy 29°-os részre bontja úgy, hogy a 49°-os és az 51°-os szög az átló azonos oldalán van!

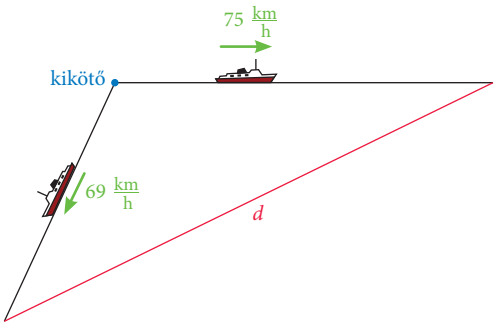
47. Szabályos ötszög alakú, 24 cm oldalhosszúságú terítőre – díszítésként – aranyhímzést készítünk. A hímzést az oldalak mentén és az átlók mentén helyezzük el. Hány órán keresztül készül el a teljes munka, ha 10 cm hímzéshez átlagosan 30 perc munkaidő szükséges?



48. Egy háromszög két oldala 18 cm és 24 cm hosszú, közbezárt szögük 68 fokos. Milyen hosszú a 18 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal?

49. Egy háromszög egyik oldala 20 cm hosszú, a másik két oldal hosszának különbsége 4 cm. A 20 cm-es oldallal szemben lévő szög nagysága 120°. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

50. Egy kikötőből két hajó indul azonos időpontban. Az egyik kelet felé halad 75 $\frac{km}{h}$ sebességgel, míg a másik pontosan délnyugati irányba 69 $\frac{km}{h}$ sebességgel. Milyen távol lesznek egymástól 80 perc múlva?



51. A toronyóra kismutatójának hossza 32 cm, nagymutatójának hossza 46 cm. Milyen távolságban van az óra két mutatójának végpontja egymástól
a) 3 órakor; **b)** fél 8-kor; **c)** 11 óra 20 perckor?



52. Egy trapéz két párhuzamos oldala 46 cm és 34 cm hosszú. Az egyik szár 52 cm-es. Ennek a nagyobbik alappal bezárt szöge 48 fokos. Határozd meg a trapéz negyedik oldalát és a trapéz ismeretlen szögeit!

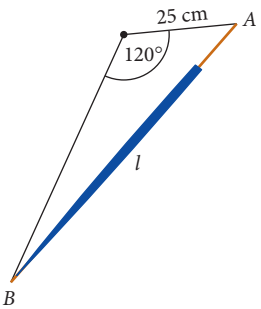
53. Mekkora szöget zár be egymással a kocka két különböző testátlója?

54. Igazold, hogy az r sugarú körbe írt szabályos 12-szög területe $3r^2$!

55. Egy háromszög alakú kertet szeretnénk felásni, melynek oldalai 20, 48 és 60 méter hosszúságúak. Tudjuk, hogy öt négyzetméter felásása fél órába telik. Hány órán keresztül kell dolgoznunk a kert teljes felásásával?

56. A paralelogramma átlója 16 cm hosszú. Ez az átló a paralelogramma egyik szögét 27 és 38 fokos szögekre bontja. Mekkorák – egész számra kerekítve – a paralelogramma szögei, oldalai, kerülete és területe?

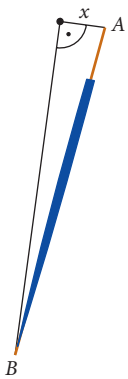
57. (Érettségi feladat, 2006)
Az ábrán látható AB végpontú esernyőt falra akasztjuk a következő módon: a zsineg szárai 120°-os szöget zárnak be egymással, a zsineg teljes hossza 85 cm, és a felfüggesztési pont az A végponttól 25 cm-re van.



a) Hány cm hosszú (egész számban mérve) az esernyő?

Ugyanezt az esernyőt egy másik alkalommal úgy függesztettük fel, hogy a zsineg szárai derékszöget zárjanak be.

b) Milyen távolságra van ekkor a derékszögű csúcs az esernyő A végpontjától? (Az eredményt cm pontossággal adja meg!)



58. Egy kör sugara 8 cm hosszú. Határozzuk meg annak a húrjának a hosszát, melyhez tartozó középponti szög nagysága 84°! Mekkora a húr által a körvonalból kimetszett íveknek a hossza?

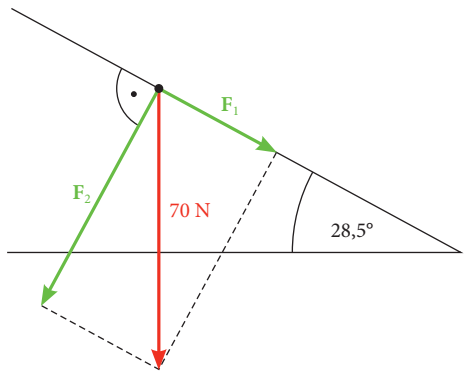
59. Egy 41 egység sugarú körbe berajzoltunk egy 18 egység hosszúságú húrt. Mekkora területű részekre bontja ez a húr a kör területét?

60. Egy körhöz egy külső P pontból meghúzzuk az érintőket. A két érintő egymással 54°-os szöget zár be. Az érintőszakaszok hossza 7,4 cm. Mekkora a két érintő és az érintési pontok közötti rövidebbik körív által határolt síkidom területe?

61. Mekkora a 10 cm sugarú körbe írt szabályos 30-szög kerülete, területe? Hány százalékkal kisebb ez a kör kerületénél, illetve területénél?

62. Egy 6 cm sugarú körbe szabályos ötszöget rajzolunk.
a) Mekkora az ötszög oldala?
b) Mekkora az ötszög területe?
c) Mekkora a beírható kör sugara?

63. A lejtőre helyezett test mozgásának vizsgálatához gyakran célszerű a test súlyát megadó vektort két olyan vektor összegeként előállítani, amelyek egyike a lejtővel párhuzamos, a másik pedig a lejtőre merőleges.
Hány newton nagyságú az $\mathbf{F}_1$, illetve $\mathbf{F}_2$, ha a test 70 newton súlyú, a lejtő a vízszintes síkkal 28,5°-os szöget zár be?



64. Egy lejtő hajlásszöge 42 fokos. A lejtőre helyezünk egy 89 N súlyú testet. Bontsd fel a súlyerőt lejtőirányú és lejtőre merőleges összetevőkre (azaz a 89 N nagyságú, függőleges vektort bontsd fel két olyan vektor összegére, melyek közül egyik párhuzamos a lejtővel, másik merőleges rá)!
a) Készíts ábrát!
b) Mekkora a súlyerő két összetevője?

65. Melyik állítás igaz, melyik hamis?
a) Ha α hegyesszög, akkor $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.
b) Ha α tompaszög, akkor $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.
c) Ha $\alpha + \beta = 180°$, akkor $\sin\alpha = \sin\beta$.
d) Ha $\alpha + \beta = 180°$, akkor $\sin\alpha + \sin\beta = 0$.
e) Ha α tompaszög, akkor $0 < \sin\alpha < 1$.

16 Jelszavak

BEVEZETŐ

Nemcsak a lakások, a székek, de a számítógépek és az internet világának számos területe is megköveteli jelszavak készítését. A sok jelszó miatt olykor bajba is kerülhetünk, mert elfelejthetjük őket. Bendi az egyik számítógépes dokumentumát egy háromkarakteres jelszóval védte le. A jelszót elfelejtette, de arra pontosan emlékszik, hogy a jelszó a $\{B; e; n; 1; 7\}$ karakterekből épül föl. Hány különböző jelszó létezik, ha

a) tudja, hogy három különböző karaktert használt a jelszó elkészítéséhez?

b) nem tudja, hogy a három karakter között voltak-e egyformák?

Megoldás

a) Az esetek összeszámlálását jól szemléltethetjük, ha a jelszó elemeinek egy-egy „rekeszt” feleltetünk meg. Hívhatjuk ezeket tálcáknak, fiókoknak, celláknak, helyeknek is, az a fontos, hogy rögzített sorrendjük van. Az első „rekesz” tartalmát (vagyis az első karaktert) 5-féleképpen választhatjuk ki. Bármit választottunk az első rekeszbe, a másodikba már csak 4-féle elem kerülhet, hiszen azt nem választhatjuk, ami az első rekeszben van. Bármit választottunk az első két helyre, a harmadik rekeszbe hasonló okokból már csak 3-féle elem kerülhet.

5-féle	4-féle	3-féle
1. karakter	2. karakter	3. karakter

Az első karakter minden lehetséges választásához 4-féle második karakter társulhat. Mivel 5-féle első karakter lehet, ez így már $5 \cdot 4$ eset. De minden ilyen esethez, azaz minden rögzített első és második karakterhez újabb 3-féle harmadik karakter társulhat, így a lehetséges jelszavak száma összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

b) Most a második és a harmadik karakter is 5-féle lehet, bármit választottunk előtte. A „rekeszekkel” szemléltetve:

5-féle	5-féle	5-féle
1. karakter	2. karakter	3. karakter

Összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ ilyen jelszó létezik.

FELADAT

1. Hajni a $\{H; a; j; n; i; 1; 9\}$ halmaz elemeiből 4 karakteres jelszavakat készít. Hányféle jelszót gyárthat, ha

a) a 4 karakter között nincs két egyforma?

b) a 4 karakter között lehetnek egyformák is?

2. Csilla más módszert választott: minden jelszava 10 karakter hosszú, és a karakterek a $\{C; a\}$ halmaz elemei közül kerülnek ki. Hány különböző jelszót készíthet Csilla?

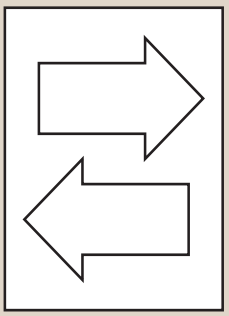
3. Egy teszt 6 kérdésből áll. Minden kérdésnél az A, B, C és D betűk közül kell egyet bekarikázni. Hány különböző kitöltése van a tesztnek,

a) ha minden kérdésre bekarikázzuk valamelyik választ?

b) ha az is lehet, hogy valamelyik (vagy akár az összes) kérdésre nem karikázunk be semmit?

4. Egy üzemi étteremben 4-féle főétel és 3-féle desszert közül lehet választani. Hányféle leves szerepel a kínálatban, ha egy 3 fogásos ebédre a lehetőségek száma több mint 50 és kevesebb mint 80?

5. Egy informatikai cégnek az ábra szerinti logót tervezik. A logón lévő 3 tartomány mindegyikét a piros, sárga, kék, zöld, narancssárga és lila színek valamelyikével színezik ki.



a) Hányféle színezése lehet a logónak, ha mindegyik tartomány más színű?

b) Hány színezés közül választhatunk, ha a két nyíl akár egyforma színű is lehet?

ELMÉLET

Az előző példákban n darab különböző elemből választottunk valahányat úgy, hogy fontos volt a kiválasztás sorrendje.

Ekkor a lehetőségek száma

ha minden elemet legfeljebb egyszer választhatunk: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots$

ha az elemek ismétlődhetnek: $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots$

1. Mit jelent az, hogy számít a kiválasztás sorrendje?
   Azt, hogy a kiválasztott elemek valamilyen szempontból különböző „szerepbe” kerülnek. Például:
   - sorrendjük van (jelszó, sorban állás, többjegyű számot alkotunk, teszt kitöltése);
   - más feladatra választjuk ki azokat, máshová kerülnek;
   - különböző dolgokkal párosítjuk őket (különböző nyeremények, táncpartnerek);
   - érdemes egy alkalmas sorrendben végrehajtani döntéseket.
2. Sok feladatban alkalmazható ez az összeszámlálási módszer („rekeszekkel”, „tálcákkal”) azzal a kiegészítéssel, hogy van valamilyen megkötés. Hogy milyen számot írjunk az egyes helyekre, azt a konkrét feladat dönti el. Például:
   - ha számot készítünk, akkor az első számjegy nem lehet 0;
   - kiköthetik, hogy valamelyik helyre konkrétan melyik elem kerül, vagy két elemnek egymás mellé kell kerülnie;
   - megtehetjük, hogy nem az első helyen álló „rekeszt” töltjük ki először.

FELADAT

6. Melyik feladathoz melyik számolás tartozik? Párosítsd a feladat betűjelét az ábra betűjelével! Az egyik feladatnak nincs párja – készítsd el a hiányzó ábrát!

a) Hány négyjegyű szám van?

Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben

b) minden számjegy különböző?

c) a számjegyek ismétlődhetnek, és a harmadik számjegy a nyolcas?

d) minden számjegy különböző, és a harmadik számjegy a négyes?

e) a számjegyek ismétlődhetnek, és minden számjegy páros?

f) minden számjegy különböző, és minden számjegy páros?

A $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

B $8 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 7$

C $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10$

D $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

E $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

HÁZI FELADAT

1. A budapesti telefonszámok hétjegyűek és nem kezdődhetnek 0-val. Hány ilyen telefonszám létezhet?

2. A 26 betűből álló angol ábécé betűiből (nincsenek hosszú magánhangzók, sem kettős betűk) hány jelszó készíthető, ha a jelszó 6 karakter hosszúságú,

a) és a karakterek között nincs ismétlődés?

b) és a karakterek között lehet ismétlődés?

3. Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek minden számjegye különböző, és nem szerepel benne a hetes számjegy?

4. 5 darab különböző sportszert sorsolunk ki 20 tanuló között. Hány különböző eredménye lehet a sorsolásnak, ha

a) egy tanuló legfeljebb egy sportszert kaphat;

b) egy tanuló több sportszert is kaphat (akár mind az 5-öt);

c) Konrád egy darab sportszert kap, a többiek pedig legfeljebb egy sportszert kaphatnak?

17 Sorba rendezés

BEVEZETŐ

A cirkuszban 5 vadállat vonul szorosan egymás után: egy tigris, egy oroszlán, egy párduc, egy leopárd és egy elefánt.



a) Hány különböző sorrendben vonulhat az 5 vadállat?

b) Hány olyan sorrend van, amelyben a tigris és az oroszlán közvetlenül egymás után következik a sorban?

c) Hány olyan sorrend van, amelyben a tigris és az oroszlán nem egymás után következik a sorban?

d) Hány különböző sorrendben vonulhatnak fel, ha körbevonulnak, és semelyiküket nem tekintjük „elsőnek”?

Megoldás

a) A különböző sorrendek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

b) Ha az oroszlán közvetlenül a tigris után áll a sorban, akkor kettőjüket tekinthetjük egy „objektumnak”. Rajtuk kívül még 3 „objektum” van, tehát összesen 4 „objektumot” kell sorba rendezni. Ezt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ módon tehetjük meg ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$). A sorban az oroszlán lehet közvetlenül a tigris előtt is, ez ugyancsak $4! = 24$ lehetőség. Összesen tehát $2 \cdot 4! = 48$ olyan sorrendben vonulhat az 5 állat, amelyben a tigris és az oroszlán közvetlenül egymás után állnak.

c) Ha az összes lehetséges sorrendből levonjuk azoknak a sorrendeknek a számát, amelyekben a tigris és az oroszlán közvetlenül egymás után következik, akkor megkapjuk azoknak a sorrendeknek a számát, amelyekben ez nem teljesül. A megfelelő sorrendek száma tehát: $5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72$.

d) Az öt állat 120-féle sorrendben haladhat egymás mögött. A T-O-P-L-E sor azonban ezúttal ugyanaz, mint az O-P-L-E-T; a P-L-E-T-O; az L-E-T-O-P; valamint az E-T-O-P-L sorrend. Hasonlóan belátható, hogy minden esetnek további négy, attól lényegében nem különböző változata van. Eszerint a 120 esetben minden esetet ötször is megszámoltunk. Az egymástól nem különböző esetek száma tehát $120 : 5 = 24$.

ELMÉLET

1. Sorba rendezés

Ha sorba rendezünk n darab különböző elemet, akkor a lehetséges sorrendek száma $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.
Ezt a szorzatot így jelöljük: $n!$ (kiolvasva: n faktoriális).
A faktoriálist technikai okokból 0-ra is értelmezzük: $0! = 1$.

2. Sorba rendezés megkötésekkel

Vannak olyan feladatok, amikor az n különböző elem nem minden sorba rendezése megfelelő. Néhány ilyen esetet – és a megoldást segítő ötletet – sorol fel az alábbi táblázat.

Ha néhány elem helye meg van határozva:	➡	Ezeket rögzítjük, és a többi elemet sorba rendezzük a megmaradt helyekre.
Ha két elemnek egymás mellé kell kerülnie:	➡	Ezeket egy elemnek tekintjük. Sorba rendezzük az eggyel kevesebb elemet, majd figyelembe kell venni, hogy a két elem sorrendje kétféle lehet.
Ha két elem nem kerülhet egymás mellé:	➡	Az összes eset számából vonjuk ki azon esetek számát, amikor a kérdéses elemek egymás mellé kerülnek.

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2015)
Az öttusa lovaglásszámában, egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugratnia. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: *A*, *B* vagy *C* típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab *A*, majd a négy darab *B*, végül a három darab *C* típusú akadályon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható. Számítsd ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt!

2. Testnevelésórán 10 tanuló ül egy tornapadon.

a) Hányféle sorrendben lehetséges ez?

b) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Csilla és Panni egymás mellett akarnak ülni?

c) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Zoli és Gábor nem akarnak egymás mellett ülni?

d) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Csilla és Panni egymás mellett akarnak ülni, de Zoli és Gábor nem szeretnének egymás mellé kerülni?

3. Angolóra után 12 tanuló egyesével kimegy a teremből.

a) Hányféleképpen lehetséges ez?

b) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Csilla és Panni szeretne lenni a „két utolsó”?

c) Hányféleképpen lehetséges ez, ha Zoli, Gábor és Peti szeretne lenni az „első három”?

4. Három fiú és három lány úgy ülnek le egymás mellé a nézőtéren, hogy az első helyre lány ül, a másodikra fiú, a harmadikra lány ül, a negyedikre fiú, az ötödikre megint lány, a hatodikra pedig fiú. Hány különböző módon tehetik ezt meg?

5. Tíz kártyára felírtuk a számjegyeket: mindegyik kártyára egyet, mindegyik kártyára más számjegyet.

a) Hány különböző módon rakhatjuk sorba a tíz számjegykártyát?

b) Az a)-beli sorrendek között hány olyan van, amelyikben a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást?

c) Hány olyan van az a)-beli sorrendek között, amelyik tízjegyű számot határoz meg?

d) Hány olyan van a c)-beli tízjegyű számok között, amelyik osztható 10-zel?

e) Hány olyan van a c)-beli tízjegyű számok között, amelyik osztható 3-mal?

6. Egy tánciskolában 7 fiú és 7 lány vesz részt az egyik próbán. Hányféleképpen alkothatnak 7 táncoló párt? (Minden lány fiúval táncol, és két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan résztvevő, akinek más a párja.)

HÁZI FELADAT

1. **a)** A tornateremben 9 tanuló áll egy sorban. Hány különböző módon lehetséges ez?

b) A 9 tanuló úgy áll sorba, hogy András a sor bal szélén, Bence pedig a sor jobb szélén van. Hány különböző módon lehetséges ez?

2. (Érettségi feladat nyomán, 2005)
Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a bal oldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre?

b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek?

c) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla nem egymás mellett ülnek?

3. Egy külvárosi gyorsvasúthálózatnak 35 állomása van. A fizetendő viteldíj attól függ, hogy melyik két állomás között utazunk, ezért a vonaljegyekre rányomtatják a kiinduló- és a célállomást is.

a) Hányféle jegy létezik ebben a gyorsvasúthálózatban?

b) Legfeljebb hány különböző árú jegy lehetséges? (A kiinduló- és a célállomás sorrendjétől nem függ a fizetendő díj.)

4. Számítsd ki a számológépeddel!

a) $0!$ **c)** $\frac{11!}{5! + 6!}$ **e)** $\frac{19!}{20!}$

b) $\frac{11!}{5! \cdot 6!}$ **d)** $\frac{10!}{9!}$ **f)** $(5!)^2$

18 Amikor nem számít a kiválasztás sorrendje

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hány 4 elemű részhalmaza van a $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ halmaznak?

Megoldás

H-nak 9 eleme van. Hányféleképpen választhatjuk ki ezek közül sorban a 4 elemet?

$$\underbrace{9}_{\text{1. hely}} \cdot \underbrace{8}_{\text{2. hely}} \cdot \underbrace{7}_{\text{3. hely}} \cdot \underbrace{6}_{\text{4. hely}}$$

A lehetőségek száma $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Egy halmaz (részhalmaz) esetében azonban nem számít az elemek kiválasztásának sorrendje. Az imént megadott lehetőségek között szerepel az 1-3-2-4 és a 4-2-3-1 eset is. Emiatt egy részhalmazt többször is számoltunk. Az {1; 2; 3; 4} részhalmazt például annyiszor számoltuk, ahányféleképpen sorba tudjuk rendezni ezt a 4 számot, azaz $4! = 24$-szer. Mivel minden részhalmazt $4! = 24$-szer számoltunk, a 4 elemű részhalmazok száma $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126$.

ELMÉLET

Az *n* elemű halmaz *k* elemű részhalmazainak száma

Az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a számát (n és k pozitív egész számok, $n \geq k$) megkapjuk, ha:

– a halmaz elemei közül kiválasztunk egy első, egy második, …, egy k-adik elemet. Az elsőt n, a másodikat $n - 1$, a harmadikat $n - 2$, …, a k-adikat $n - (k - 1) = n - k + 1$ elem közül választjuk, ezért ezt megtehetjük $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$-féleképpen;

$$\underbrace{n}_{\text{1. hely}} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\text{2. hely}} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\text{3. hely}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(n-k+1)}_{k\text{-adik hely}}$$

– majd ezt a szorzatot elosztjuk azoknak a lehetőségeknek a számával, ahányféleképpen sorba rendezhetjük a kiválasztott k elemet, vagyis a $k!$-sal.

Például:

Egy 10 elemű halmaz 3 elemű részhalmazainak száma $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$.

Erre külön szimbólumot vezetünk be.

		jele:	így olvassuk:
10 elemű halmaz 3 elemű részhalmazainak száma:	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$	$\binom{10}{3}$	10 alatt a 3
12 elemű halmaz 4 elemű részhalmazainak száma:	$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!}$	$\binom{12}{4}$	12 alatt a 4
Általánosan: n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma:		$\binom{n}{k}$	***n* alatt a *k***.

FELADAT

1. Az {A; n; d; o; r} halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely

a) 1 elemű; **b)** 2 elemű; **c)** 3 elemű; **d)** 4 elemű?

2. Hány 3 elemű részhalmaza van a B halmaznak, ha B elemeinek száma

a) 3; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 6?

3. A röplabdabajnokságra hat csapat nevezett. Minden csapat minden csapattal pontosan egy meccset játszik. Hány mérkőzésre kerül sor?

4. A nagyszülők egyhetes kempingezésre hívták meg 9 unokájukat. Azt kérték, hogy közülük hárman jöjjenek két nappal korábban, hogy a bevásárlásban, csomagolásban, a táborhely előkészítésében segítsenek.

a) Hányféleképpen választható ki ez a 3 unoka, ha mindegyikük más feladatban segédkezik?

b) Hányféleképpen választható ki a 9 unoka közül az a 3, aki a kempingben első este megfőzi a vacsorának szánt paprikás krumplit?

5. Apa a képen látható öt lapot tartja a kezében, Csilla egyszerre kettőt kihúz a lapok közül. Hányféle lehet a kihúzott két lap, ha a lapok sorrendje nem számít?



6. Egy 12 fős társaság érkezik egy lifthez, amelyben egyszerre csak 4 személy utazhat.

a) Hányféle lehet az első utazó négyes?

b) Ha már felment az első 4 ember, akkor a többiek közül hányféleképpen választhatják ki, hogy ki utazzon a második menetben?

c) Ha már a második menet is elment, akkor hányféleképpen választhatják ki, hogy kik utaznak a harmadik menetben?

d) Hányféleképpen utazhat az emeletre a 12 fős társaság 3 menetben?

7. Két nyereményt sorsolnak ki egy parti 90 résztvevője között. Hányféle lehet a sorsolás végeredménye, ha

a) két ugyanolyan nyeremény van, és mindenki legfeljebb csak egy nyereményt nyerhet?

b) két különböző nyeremény van, és mindenki csak egyet nyerhet?

c) két különböző nyeremény van, és akár ugyanaz a résztvevő is megnyerheti mindkét nyereményt?

d) két ugyanolyan nyeremény van, és akár egy ember is nyerheti mindkettőt?

HÁZI FELADAT

1. **a)** Egy tárgyalás megkezdése előtt a hét résztvevő mindegyike kezet fogott mindenkivel. Összesen hány kézfogás történt?

b) Hány összekötő szakasz (átló vagy oldal) rajzolható egy konvex hétszög csúcsai közé?

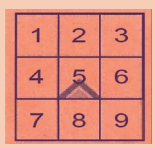
2. Egy 25 fős osztály 3 tagból álló küldöttséget szeretne kijelölni egy vetélkedőre. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha

a) az egyik küldött az irodalom-, a másik a történelem-, a harmadik pedig a földrajzvetélkedőn indul;

b) mindhárman a matematikavetélkedőn indulnak?

3. Egy 8 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely legfeljebb 3 elemű?

4. A lyukasztóval működő buszjegyrendszerben a jegyet az utasok a buszon lévő lyukasztógépbe helyezték, amely néhány szám helyén kilyukasztotta a jegyet. A jegyen 9 szám szerepel.



a) Hány olyan lyukasztás van, amely során 3 lyukat vág a gép?

b) Hány olyan lyukasztás van, amely során 4 lyukat vág a gép?

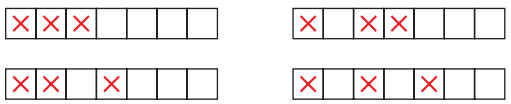
19 Binomiális együtthatók

BEVEZETŐ

Anita sálat köt ajándékba. Tudja, hogy *sima* és *fordított* szemek váltogatásával sokféle mintát kialakíthat. Hétszemenként ismétlődő mintát választ. Úgy dönt, hogy ezek közül 3 *sima,* 4 pedig *fordított* lesz.
Hányféle minta közül választhat?



Megoldás
Anita 7 kis rekeszt rajzol, s elképzeli, melyik háromban lesznek a sima szemek:



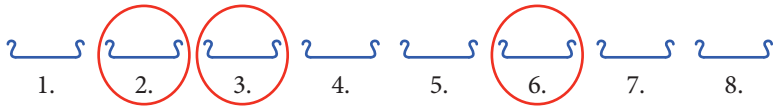
Így gondolkodik:
– Ez ugyanolyan, mint amikor kalapból húzunk ki neveket, csakhogy most nem a nevek vannak a kalapban, hanem a rekeszek sorszáma, és azt kell ezek közül „kihúzni”, hogy hová tegyünk sima szemet. Az a kérdés, *hányféleképpen választhatunk ki a 7 hely közül 3-at,* ahová a sima szemet kell kötni. Ez pedig $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \binom{7}{3} = 35$-féle lehet.

ELMÉLET

1. Ha n darab különböző elem közül kiválasztunk k darabot ($n, k \in \mathbf{N}^+$, $n \geq k$) úgy, hogy
– minden elemet legfeljebb egyszer választhatunk,
– nem számít a kiválasztás sorrendje,
akkor a lehetőségek száma $\binom{n}{k}$.

Megjegyzés
Mit jelent az, hogy nem számít a kiválasztás sorrendje?
Az előfordulhat, hogy az elemeknek van sorszáma vagy valamiféle sorrendje (pl. nézőtéri helyek). A kiválasztást ugyanakkor legtöbbször úgy végezzük, hogy egyesével kijelölünk ezek közül néhányat, például rámutatunk sorban néhányra, vagy megjelölünk néhányat. Nem számít, hogy a kiválasztás során milyen sorrendben jelöljük ki az elemeket. Ugyanazt az esetet kapjuk, ha például először választjuk A-t és utána B-t, mint amikor először választjuk B-t és másodszor A-t. Ilyen helyzetek például:
– részhalmazt választunk ki;
– két elemet választunk ki, és az elemek közötti kapcsolatban nincs jelentősége a sorrendnek (pl. kézfogás, szakasz végpontjai, két szám, amiknek csak az összege érdekes);
– a kiválasztott elemek ugyanolyan „szerepbe” kerülnek.

2. Kétféle elem sorba rendezése
Például:
Kétféle elemünk van, 3 darab egyforma piros és 5 darab egyforma sárga, és sorba rendezzük ezeket. Hányféle sorrend lehetséges? Minden eset egy 8 hely hosszúságú sorozat, amelyben 3 helyen piros elem áll, a többi helyen sárga. Hányféleképpen választhatjuk ki azokat a helyeket, ahová piros elemet rakunk?



A 8 helyből kiválasztunk 3 helyet. A helyeknek ugyan van sorszáma, az azonban nem számít, hogy hányadikként választunk ki egy helyet. A 3-2-6 helyek kiválasztása ugyanazt eredményezi, mintha 6-2-3 sorrendben választottuk volna ugyanezeket a helyeket. A kiválasztás sorrendje nem számít, a lehetőségek száma tehát $\binom{8}{3} = 56$.

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a 8 hely közül azt az 5 helyet választjuk ki, ahová a sárga elemeket rakjuk. Ez $\binom{8}{5} = 56$. Azt kaptuk tehát, hogy $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$.

FELADAT

1. Kamillának az idén 11 tantárgya van az iskolában. A hétfői napon 6 tantárgyból van egy-egy órája.

a) Hányféleképpen választható ki a 6 tantárgy?

b) Hány különböző órarendje lehetne Kamillának hétfőn?

2. Melyiket számolhatjuk $7 \cdot 6$-ként, és melyiket $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2}$-ként? Írd a feladatok betűjelét a megfelelő cellába!

A 7 ember közül mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történik?

B 7 ember közül mindenki mindenkinek küld egy SMS-t. Összesen hány üzenetet küldenek?

C 7 kosárlabdacsapat között minden csapat minden csapattal pontosan egy meccset játszik. Hány mérkőzésre kerül sor?

D Felveszünk egy körvonalon 7 különböző pontot, és mindegyiket összekötjük mindegyikkel. Hány szakaszt rajzolunk?

E 7 ember közül választunk egy titkárt és egy jegyzőt. Hányféleképpen tehetjük meg?

F 7 különböző kártyalap közül osztanak nekünk kettőt. Hányféleképpen alakulhat, hogy melyik két lapot kapjuk?

G Egy ország 7 szigetből áll. Egyik reggel minden szigetről minden másik szigetre indul egy hajó. Hány hajó indul aznap reggel a szigetek között?

$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2}$	$7 \cdot 6$

ELMÉLET

1. Binomiális együtthatók

Az $\binom{n}{k}$ kifejezéseket ($k, n \in \mathbf{N}, n \geq k$) binomiális együtthatóknak nevezzük. Az $\binom{n}{k}$ megadja:

- egy n elemű halmaznak hány darab k elemű részhalmaza van,
- hányféleképpen választhatunk ki n különböző elem közül k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje.

Az $\binom{n}{k}$ értelmezhető akkor is, ha $k = 0$, illetve ha $n = 0$.

$\binom{5}{0}$	Egy ötelemű halmaznak hány 0 elemű részhalmaza van?	1 db ➡	$\binom{5}{0} = 1$
$\binom{n}{0}$	Egy n elemű halmaznak hány 0 elemű részhalmaza van?	1 db ➡	$\binom{n}{0} = 1$
$\binom{0}{0}$	Egy 0 elemű halmaznak hány 0 elemű részhalmaza van?	1 db ➡	$\binom{0}{0} = 1$

2. Binomiális együtthatók számítása zsebszámológéppel



Sok zsebszámológépen külön funkció van az $\binom{n}{k}$ kiszámítására, az nCr funkció.

Például $\binom{11}{6}$ így számolható: 11 nCr 6.



3. Binomiális együtthatók egy kicsit másként

Bővítsük a $\binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6!}$ törtet úgy, hogy a számlálóban 11-től 1-ig minden természetes szám megjelenjen tényezőként, mert akkor felírhatjuk a számlálót 11! alakban. Ehhez $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$-sal kell bővítenünk.

$$\binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11!}{6! \cdot 5!}$$

Általánosan is felírható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

4. Milyen kapcsolat van $\binom{11}{6}$ és $\binom{11}{5}$ között?

Ha 11 gyerek közül kiválasztunk 6 gyereket, aki kimegy a teremből, ezt úgy is megtehetjük, hogy kiválasztjuk azt az 5-öt, aki bent marad a teremben. Ezért $\binom{11}{6}$ és $\binom{11}{5}$ egyenlő.

Általánosan is felírható: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

FELADAT

3. **a)** Számítsd ki, hogy egy 7 elemű halmaznak hány 0 elemű, hány 1 elemű, hány 2 elemű, hány 3 elemű, hány 4 elemű, hány 5 elemű, hány 6 elemű és hány 7 elemű részhalmaza van!

$\binom{7}{0} =$	$\binom{7}{1} =$	$\binom{7}{2} =$	$\binom{7}{3} = 35$
$\binom{7}{7} =$	$\binom{7}{6} =$	$\binom{7}{5} =$	$\binom{7}{4} =$

b) Igaz-e, hogy egymás alatt egyenlő számok vannak? Miért?

c) Összesen hány részhalmaza van egy 7 elemű halmaznak?

4. **a)** A 32 lapos magyar kártyából 3 lapot osztanak nekünk. Hányféleképpen alakulhat ez a kezdő 3 lap?

b) Örömmel látjuk, hogy remek lapunk van: piros ász, piros felső és makk király. A maradék pakliból újabb két lapot húzunk. Hányféle lehet ez a további két lap?

5. Hány 4 jegyű pozitív egész szám írható fel a következő számjegyek felhasználásával:

a) 5 db egyes és 1 db kettes;

b) 4 db egyes és 2 db kettes;

c) 3 db egyes és 3 db kettes;

d) 2 db egyes és 4 db kettes?

6. (Kompetenciamérés alapján, 2011)

A következő táblázat azt mutatja, hogy egy adott napon az egyes órákban hány látogató érkezett a Földrajzi Múzeumba, és hány látogató távozott onnan. A múzeum 10 órakor nyitott, és ezen a napon 15:30-kor zárt, ezért 15 óra után már nem engedtek be új látogatót.

Óra	Érkezők száma	Távozók száma
10.00–11.00	22	2
11.01–12.00	30	10
12.01–13.00	35	45
13.01–14.00	40	36
14.01–15.00	37	43

Egy riporter rövid riportot készített a múzeum néhány látogatójával. A riport még szerkesztésre került, ezért a készítésekor nem számított, hogy a riporter milyen sorrendben szólította meg a látogatókat. Hányféleképpen választhatta ki a riportalanyokat, ha

a) 3 embert választott ki azok közül, akik 14 órakor a múzeumban tartózkodtak;

b) 4 embert kérdezett meg azok közül, akik az utolsó fél órában vagy záráskor hagyták el a múzeumot?

HÁZI FELADAT

1. Kamillának kedden a 11 tanult tantárgy közül csak 5 tantárgyból van egy-egy órája.

a) Az 5 keddi tantárgy vagy a kimaradó 6 tantárgy kiválasztására van több lehetőség? Miért?

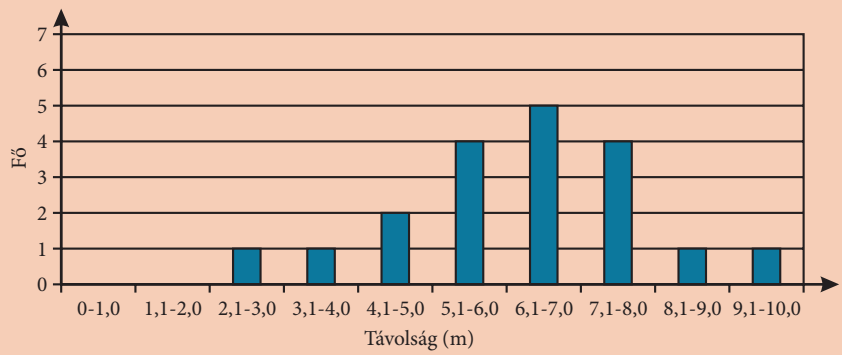
b) Több vagy kevesebb keddi órarendet lehet készíteni az 5 kiválasztott tantárgyból, mint a hétfői 6-ból? Hányat?

2. Csilla karkötőket készít gyöngyökből. 15 színből vannak gyöngyei, mind a 15 színből nagyon sok. Hajninak 4 színű karkötőt készít. Hány különböző módon választhatja ki a 15 színből a 4-et?

3. Csilla lila és sárga gyöngyöket választott a karkötőhöz. A karkötő minden sora 6 lila és 3 sárga gyöngyből áll. Hányféle sort állíthat össze Csilla 6 lila és 3 sárga gyöngyből?

4. (Kompetenciamérés alapján, 2014)

Gergőék osztályában testnevelésórán a medicinlabda-hajítást mérték. A dobott távolságot 10 cm-es pontossággal mérték le. A következő oszlopdiagram az elért eredményeket mutatja.



Hányféleképpen választhatunk ki a medicinlabdák elpakolásához

a) 3 olyan tanulót, akik több mint 5 métert dobtak?

b) 4 olyan tanulót, akik kevesebb mint 6,1 métert dobtak?

20 Gyakorlás

BEVEZETŐ



Mekkora valószínűséggel lesz Bencének egyetlen kitöltött lottószelvénnyel telitalálata az ötös lottón?

Az ötös lottón 90 számból kell megjelölni 5-öt. Nem számít az, hogy melyik számot jelöltük meg először, melyiket másodszor, csak az, hogy melyik a megjelölt 5 szám. Vagyis a kiválasztás sorrendje nem számít. A 90 szám közül az 5 nyerő számra $\binom{90}{5}$-féleképpen lehet tippelni. Mivel $\binom{90}{5} = 43\ 949\ 268$, ezért ha egy szelvénnyel játszik Bence, akkor annak a valószínűsége, hogy telitalálata lesz, körülbelül $1 : 44\ 000\ 000$, vagyis körülbelül 0,000 000 023. Még hét tizedesjegyre kerekítve is éppen annyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel telitalálatot ér el, mintha egyáltalán nem tölt ki szelvényt.

FELADAT

1. Ha Bence a hatos lottóval próbálkozna, akkor mekkora esélye lenne a telitalálatra, feltéve, hogy egy szelvénnyel játszik? A hatos lottóban 45 szám közül 6-ra kell tippelni.

2. Egy nappaliba 7 lámpatestet szereltek fel. Mindegyik külön-külön kapcsolható. Hányféleképpen valósulhat meg, hogy legalább 5 lámpa világít?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hányféle szabályosan kitöltött 3 találatos lottószelvény létezik az ötös lottón egy adott héten?

Megoldás

Egy lottószelvény akkor 3 találatos, ha 3 számot eltaláltunk, és ugyanekkor 2 számot nem találtunk el. Ez úgy lehetséges, hogy az 5 kihúzott számból jelöltünk meg 3-at, ezt megtehetük $\binom{5}{3}$-féleképpen, és ugyanekkor a 85 nem kihúzott szám közül jelöltünk meg 2-t, ezt megtehettük $\binom{85}{2}$-féleképpen. Mivel bármely 3 eltalált számot bármely 2 nem eltalált számmal párosíthattuk, a lehetőségek száma

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 35\ 700.$$

FELADAT

3. A diáknapi vetélkedő zsűrijébe 6 személyt kell kiválasztanunk 5 tanár és 8 diák közül. Hányféle különböző módon állíthatjuk össze a zsűrit, ha

a) a tanár–diák létszámarány közömbös a kiválasztás szempontjából;

b) a zsűriben 3 tanárnak és 3 diáknak kell helyet foglalnia?

4. Egy 15 fős baráti társaság egy 4 személyes, egy 5 személyes és egy 6 személyes bérelt autóval megy kirándulni. Hányféle ülésrend lehetséges, ha mindenki tud vezetni, és

a) az egyes autókban az ülésrend lényegtelen;

b) nemcsak az számít, hogy ki melyik autóba ül, hanem az is, hogy pontosan melyik ülésre?

c) Oldd meg úgy is a feladatot, hogy a 15 fő három darab 5 személyes autóba ül! Az autók között nem teszünk különbséget (csak az számít, hogy ki kivel ül egy autóban), és az is mindegy, hogy az autón belül ki hol ül.

5. Az ötös lottón 90 számból kell 5 darabot kiválasztani, ezért $\binom{90}{5}$ különböző szelvényt lehetne kitölteni. Egy adott héten ezek között hány olyan van, amelyen a találatok száma 5, 4, …, 0? Töltsd ki a táblázatot!

Találatok száma	5	4	3	2	1	0
Szelvények száma						

6. Egy 10 fős csoportban két jutalomtárgyat osztunk ki. Hányféleképpen tehetjük meg az egyes esetekben? Kösd össze a feladatokat a hozzájuk tartozó helyes válaszokkal! (Az egyik válaszhoz nincs feladat.)

a) a jutalmak különbözők, és egy ember csak egy jutalmat kaphat

b) a jutalmak különbözők, de egy ember akár több jutalmat is kaphat

c) a jutalmak egyformák, és egy ember csak egy jutalmat kaphat

d) a jutalmak egyformák, de egy ember akár több jutalmat is kaphat

$10 \cdot 10$

$10 + 9$

$10 \cdot 9$

$10 + \frac{10 \cdot 9}{2}$

$\frac{10 \cdot 9}{2}$

7. **a)** Egy 9 elemű halmaz esetében melyikből van több: olyan részhalmazból, amelynek az elemszáma páros vagy olyan részhalmazból, amelynek az elemszáma páratlan? (Figyelj rá: a 0 is páros szám, ezért az üres halmaz is páros elemszámú részhalmaz.)

b) Egy 10 elemű halmaz esetében melyikből van több: olyan részhalmazból, amelynek az elemszáma páros vagy olyan részhalmazból, amelynek az elemszáma páratlan?

c) Egy n elemű halmaz esetében melyikből van több: olyan részhalmazból, amelynek az elemszáma páros vagy olyan részhalmazból, amelynek az elemszáma páratlan (n pozitív egész szám)? Válaszodat indokold!

HÁZI FELADAT

1. Van olyan lottójáték is, amelynél 35 szám közül 7-re kell tippelni.

a) Egy szelvénnyel játszva mekkora a valószínűsége a telitalálatnak?

b) Hány olyan kitöltés létezik egy adott héten, amelyik 6 találatos?

2. Bence és Dönci 32 lapos magyar kártyával játszanak. Először Döncinek osztanak 5 lapot.

a) Hányféle lehet Dönci lapja?

Dönci után Bencének osztanak 5 lapot.

b) Hányféle lehet Bence lapja, ha tudjuk, hogy már Döncinél van a négy király és a makk alsó?



3. Mikulás reggelén Panni 4 zselés és 10 marcipános szaloncukrot talált a cipőjében. Elhatározta, hogy beosztja, és a következő két hét során naponta egyet eszik meg ezek közül. Hányféleképp választhatja ki azokat a napokat, amikor zseléset eszik?

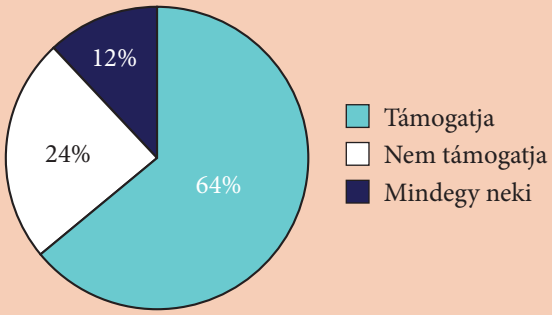
4. (Kompetenciamérés alapján, 2012)
Az *A* falut és *B* falut összekötő út mellé szemétégetőt szeretnének telepíteni. A szemétégető felépítéséhez azonban a két falu lakóinak beleegyezésére van szükség, ezért szavazást írnak ki. Akkor építik meg a szemétégetőt, ha azt a két falu szavazóinak együttesen több mint 50%-a támogatja. Az oldalsó diagramok mutatják a szavazás végeredményét.

a) Megépülhet-e a szemétégető?

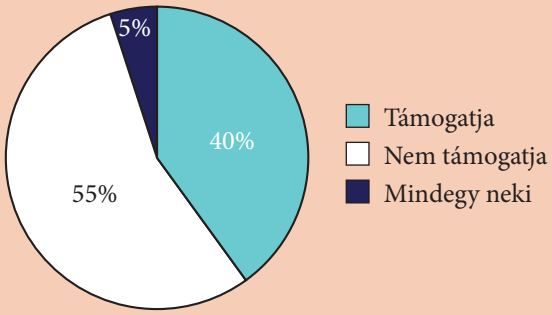
b) Hányféleképpen alakíthatnak egy 4 fős csoportot azok, aki nem támogatják a szemétégetőt?

c) Hányféleképpen alakíthatnak ki a szavazók egy olyan 6 fős csoportot, amelyben 3 fő van a támogatók és 3 fő az ellenzők közül?

A falu – 1250 szavazó



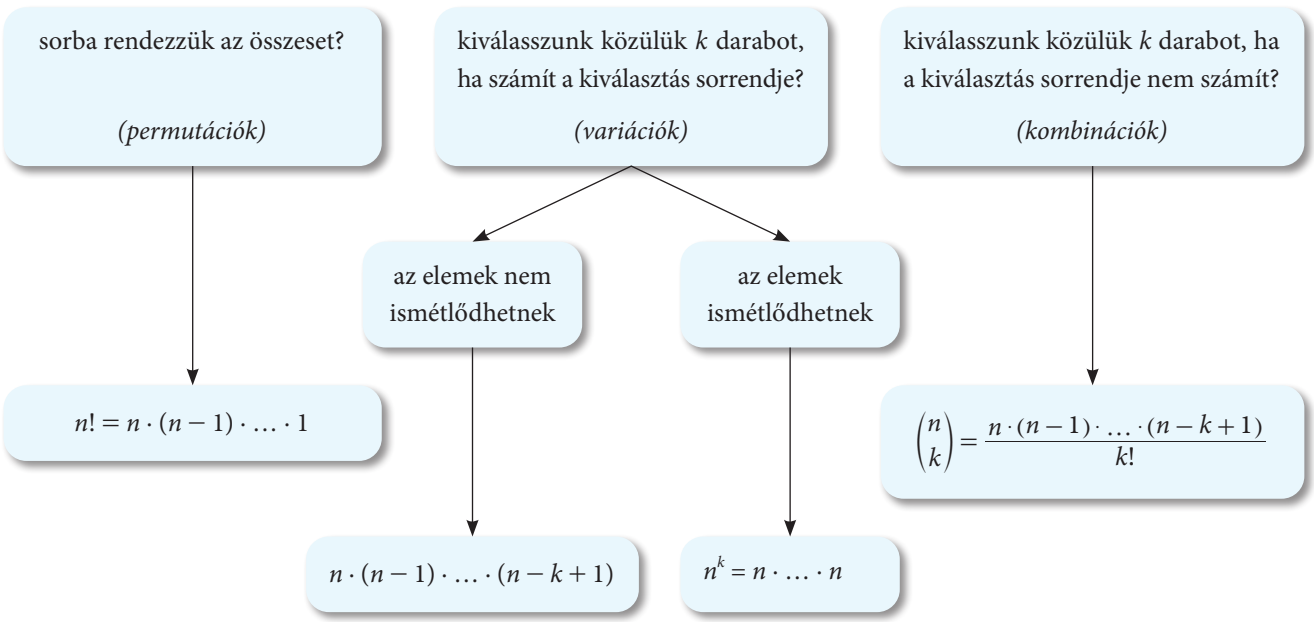
B falu – 2600 szavazó



RÁADÁS

Alapesetek az összeszámlálás során

Van n darab különböző elemünk ($n, k \in \mathbf{N}$, $n \geq k$). Hányféle lehetőség van arra, hogy…



Megjegyzés
Az n^k esetben *(ismétléses variációk)* az is előfordulhat, hogy $k > n$. Ugyanis ha egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor nemcsak n tagú sorozatot állíthatunk elő, hanem akár hosszabbat is. Ilyen eset lehet egy teszt feladatlap kitöltése, például amikor 4 elem; az *A*, *B*, *C* és *D* közül választunk mindegyik helyre pontosan egy elemet.

FELADAT

1. Hányféleképpen tudjuk kiolvasni az alábbi képen a TÉGLALAP szót? (A kiolvasás betűnként balról jobbra vagy fentről lefelé haladva történik.)

T	É	G	L	A
É	G	L	A	L
G	L	A	L	A
L	A	L	A	P

I. megoldás

A felső sor betűihez csak egyféleképpen juthatunk el, akárcsak a bal szélső sor betűihez. A második sor második oszlopában található „G” betűhöz a felső és a tőle balra lévő „É” betűből is eljuthatunk. Mivel mindkét „É” betűhöz 1-1 út vezetett, így a „G” betűhöz 2 vezet. A harmadik oszlop második sorában található „L” betűhöz a tőle balra és a fölötte található „G”-ből is eljuthatunk. Ez előbbibe 2 út vezetett, utóbbiba 1, így az „L” betűhöz összesen háromféle módon találhatunk el. Ezt a gondolatmenetet folytatva kitölthetünk egy táblázatot, amelyben mezőről mezőre (a tőle balra és a fölötte lévő számokat összegezve) megkapjuk, hogy hány út vezet a bal felső sarokból a jobb alsóba. Összesen tehát 35-féleképpen olvasható ki a TÉGLALAP szó.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

II. megoldás

Ahhoz, hogy kiolvassuk a TÉGLALAP szót, összesen 7 lépést kell tennünk. A 7 lépésből 4-et jobbra és 3-at lefelé kell megtennünk, bármilyen sorrendben. Így egyedül azt kell eldöntenünk, hogy melyik az a 4 lépés, amit jobbra teszünk meg. (Pl. az első, második, ötödik és hatodik lépésben lépünk jobbra, a többiben lefelé.) 7 dologból kell tehát 4-et kiválasztanunk, amit $\binom{7}{4} = 35$-féleképpen tehetünk meg.

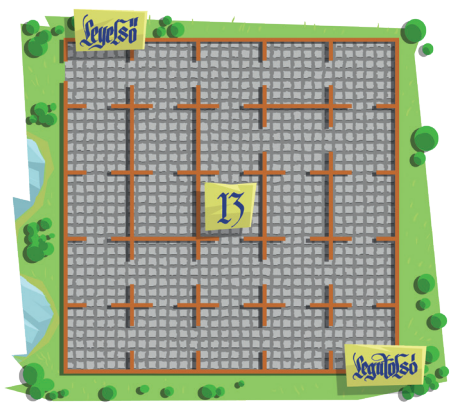
Megjegyzés: Természetesen mindegy, hogy a 7 lépésből a 4 jobbra lépést vagy a 3 lefelé lépést választjuk ki: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$.

2. Hányféleképpen olvasható ki a MATEMATIKA szó az alábbi képekről, ha a bal felső sarokból indulva minden lépésben vagy egyet jobbra vagy egyet lefelé léphetünk?

M	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A

M	A	T			
A	T	E			
T	E	M			
		A	T	I	K
		T	I	K	A

3. – Járhatsz-kelhetsz a kastélyban, a legelsőtől a legutolsóig bejárhatod az összes termet, de a 13. terembe be ne tedd a lábad! – mondta a királylány a szegényember legkisebb fiának. Fogta magát hát a szegénylegény, és elsétált a legelső teremtől a legutolsóig, de kihagyta a 13. szobát. A térképen nézve csak lefelé vagy jobbra haladt egyik teremből a másikba. Hányféle útvonalon juthatott el a legelső szobától a legutolsóig?



21 Esetszétválasztás

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hányféleképpen osztható ki 3 egyforma jutalom 12 diák között, ha egy diák akár több jutalmat is kaphat?

Megoldás

Az első jutalmat 12-féleképpen oszthatjuk ki. A második és a harmadik díjat is kaphatja bármelyik diák, ezért ezeket is 12-féleképpen oszthatjuk ki. Mivel azonban a jutalmak azonosak, van olyan eset, amit többször számoltunk. Sajnos azonban nem minden esetet számoltuk ugyanannyiszor: van, amit egyszer (amikor mindet ugyanannak a diáknak adtuk), van, amit kétszer (amikor egy ember egyet, valaki más kettőt kapott), és van, amit $3! = 6$-szor (amikor mindegyiket más kapta). Ezért ez az összeszámlálás nem célravezető.

Válasszuk külön az eseteket!

1. eset: Mindegyik jutalmat ugyanaz kapja: ez 12 lehetőség.

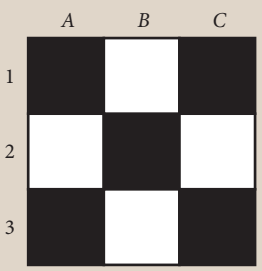
2. eset: Egy diák egy jutalmat kap, egy másik diák pedig két jutalmat. Ekkor 12-féleképpen választhatjuk ki, hogy ki kapjon egyet, majd a többi 11 diák közül választhatjuk mellé, hogy ki kapjon kettőt. Mivel a kiválasztott diákok különböző módon lesznek jutalmazva (egyik egyet kap, másik kettőt), számít a sorrendjük. Ez $12 \cdot 11 = 132$ lehetőség.

3. eset: Három diák kapja a 3 azonos jutalmat. Ez $\binom{12}{3} = 220$ lehetőség, mivel a kiválasztás sorrendje nem számít.

Az esetek egyszerre nem következhetnek be, ezért a lehetőségek száma $12 + 132 + 220 = 364$.

FELADAT

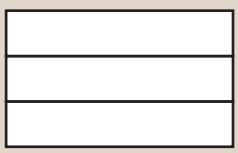
1. Hányféleképpen lehet elhelyezni az ábra szerinti 3×3-as tábla egy-egy mezőjébe



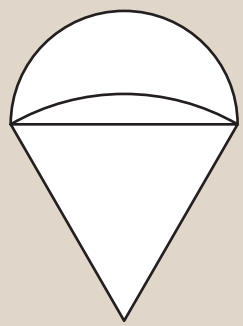
a) egy fehér és egy fekete bástyát úgy, hogy ne legyenek azonos sorban vagy azonos oszlopban (azaz ne üssék egymást)?

b) két egyforma bástyát úgy, hogy ne legyenek azonos sorban vagy azonos oszlopban?

2. Hányféleképpen lehet kiszínezni az ábra szerinti 3 sávos zászlót a piros, sárga, zöld és kék színekkel, ha a szomszédos tartományok különböző színűek, és piros szín csak a legfelső sávba kerülhet?



3. (Érettségi feladat, 2010)



Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzője látható. Ezt a lapot fogják tartományonként színesre festeni. Hányféle módon festhető színesre a kitűző, ha minden tartományt a piros, sárga, zöld és kék színek valamelyikére festenek a következő két feltétel együttes figyelembevételével:

– szomszédos tartományok nem lehetnek azonos színűek;
– piros és sárga színű tartomány nem lehet egymás mellett. (Szomszédos tartományoknak van közös határvonala.)

4. Egy társasjátékban 22 lépésre állunk a céltól. Ha még legalább 22-t lépünk, akkor célba érünk. Szabályos dobókockával dobunk, és annyit lépünk előre, amennyit a kocka mutat. Hányféle dobássorozat esetén sikerül 4 dobással célba érni?

5. (Érettségi feladat, 2005)
A 4 × 100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.

a) Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik?

b) A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze?

6. (Érettségi feladat, 2015)
Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztőprogramba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I. háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II. a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III. mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV. egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik elhelyezésben.)

HÁZI FELADAT

1. Egy 10 fős társaság tagjai között 3 egyforma csokoládét sorsolunk ki. Hányféle lehet a sorsolás eredménye,

a) ha egy ember nyeri mindegyik csokit;
b) ha ketten nyernek csokoládét;
c) ha mindegyik csokit más nyeri;
d) ha nincs semmi kikötés?

2. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 5-tel, és minden számjegye különböző?

3. Kösd össze azokat a feladatokat, amelyeknek ugyanaz a szám a megoldása! Határozd meg a közös megoldást! Az egyiknek nincs párja – ehhez találj ki olyan feladatot, amelynek ugyanannyi a megoldása!

A) Hányféleképpen rendezhetünk sorba 6 egyforma almát és 3 egyforma körtét?	F) Hányféleképpen választhatjuk egy 6 fős csoportból, hogy ki legyen az elnök, ki a titkár és ki a jegyző?
B) Hány 3 betűs jelszó állítható össze a MATEK szó betűiből, ha a betűket többször is felhasználhatjuk?	G) Hányféleképpen állhat sorba 7 gyerek, köztük Zsuzsi, ha tudjuk, hogy Zsuzsi áll elölről a harmadik helyen?
C) Egy 6 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely 2 vagy 3 elemű?	H) Hányféleképpen választhatjuk egy 9 fős csoportból, hogy ki legyen az a 3 fő, akik képviselik a csoportot?
D) A dobókockával háromszor dobtunk. Minden dobás különböző lett. Hányféle dobássorozat történhetett?	I) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek mindegyik számjegye páratlan?
E) Hányféleképpen rakhatók sorba a MODERN szó betűi?	J)

22 Gyakorlás

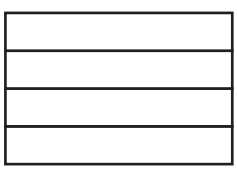
BEVEZETŐ

Melyik a helyes válasz? Juss el a bal felső sarokból a jobb alsóba úgy, hogy mindig a helyes válasz irányába lépsz tovább!

	1		2		3
A	Egy 10 elemű halmaznak hány 4 elemű részhalmaza van?	210	Hányféle 7 karakteres kód képezhető a 0; 1 számjegyekből?	64	Hányféleképpen állhat sorba 5 gyerek?
	220 / 128		49 / 144		125
B	Egy dobókockával 3-szor dobunk. Hányféle dobássorozatot kaphatunk?	216	Hányféleképpen állíthatunk sorba 3 fehér és 4 piros bábut?	70	Hányféleképpen választhatunk ki 10 gyerek közül egy titkárt és egy jegyzőt?
	729 / 35		504 / 900		90
C	A 8 fős döntőben hányféle lehet az első 3 helyezett, ha nincs holtverseny?	336	Hány 3 jegyű pozitív egész szám létezik?	27	

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hányféleképpen színezhetjük ki az ábra szerinti négysávos zászlót a piros, fehér, zöld, kék, sárga, narancssárga színek segítségével kétszínűre úgy, hogy két-két sáv azonos színű legyen? (A szomszédos sávok akár azonos színűek is lehetnek.)



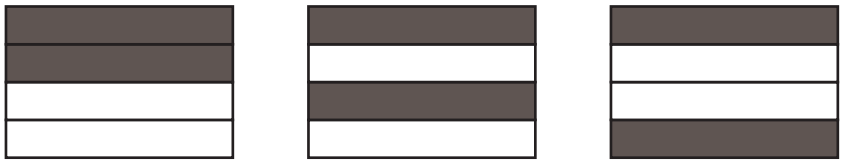
Megoldás

Kövessük nyomon, hogy milyen választások, döntések vezetnek egy konkrét színezéshez!

Egy lehetséges gondolatmenet a következő:

1. Döntsük el, melyek legyenek azonos színű sávok!	➡	Válasszuk ki, melyik sáv színe legyen megegyező a felső sávval!	➡	3 lehetőség

A kiszínezhető zászlók ilyenek lehetnek:



2. Színezzük ki a kiválasztott zászlót!	A szürke sávokra választhatunk 6-féle színt.	A fehér sávokra választhatunk 5-féle színt.	$6 \cdot 5 = 30$ lehetőség

Mivel minden elrendezést 30-féleképpen színezhetünk ki, a lehetőségek száma $3 \cdot 30 = 90$.

ELMÉLET

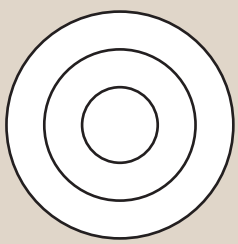
Ötletek az összeszámláláshoz

Bontsd fel az eseteket olyan csoportokra, amelyek jól összeszámolhatók, és nincs köztük azonos!	Esetszétválasztás: a különálló csoportokban lévő lehetőségek számát össze kell adni.
Gondold végig, milyen lépések, milyen döntések vezetnek *egy konkrét* eset összeállításához!	Ha egy lépésben minden döntést ugyanannyiféleképpen folytathatsz, akkor a lehetőségek számát össze kell szorozni.
A kedvező vagy a kimaradó eseteket könnyebb összeszámolni?	„Jó” esetek száma = = összes eset száma − „rossz” esetek száma.
A tárgyakhoz válasszuk az embereket, vagy az emberekhez a tárgyakat?	Néha érdemes nézőpontot váltani. A „rekeszek” feliratát te választhatod ki.
Csak kevés számú eset fordul elő.	Jól rendszerezve sorold fel az összeset, és számold össze.
Sok-sok elem szerepel a feladatban.	Gondold végig, hogyan oldanád meg a feladatot, ha csak kevesebb elem szerepelne.

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2012)

Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható.



A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.

a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos?

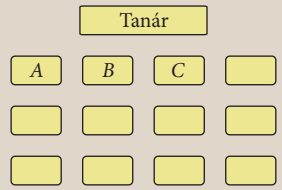
b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető?

2. (Érettségi feladat, 2014)

A szökőkútban hat egymás mellett egy vonalban elhelyezett kiömlőnyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék). Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha a vízsugaraknak csak a színe változik?

3. (Érettségi feladat, 2018)
Egy fagylaltozóban hatféle ízű fagylalt kapható: vanília, csokoládé, puncs, eper, málna és dió. Andrea olyan háromgombócos fagylaltot szeretne venni tölcsérbe, amely kétféle ízű fagylaltból áll. Hányféle különböző háromgombócos fagylaltot kérhet, ha számít a gombócok sorrendje is? (Például a dió-dió-vanília más kérésnek számít, mint a dió-vanília-dió.)

4. (Érettségi feladat, 2018)
Egy iskolában az írásbeli érettségi vizsgát olyan teremben tartják, amelyben 12 egyszemélyes pad négy egymás melletti oszlopba van rendezve. Mindegyik oszlopban három egymás mögötti pad áll. Julcsi és Tercsi jó barátnők, elhatározzák, hogy a vizsgán két egymás melletti padba ülnek. (Például ha Julcsi a *B*-vel jelölt padban ül, akkor Tercsi az *A* vagy *C* jelű padot foglalja el.)



Hányféleképpen ülhet le a 12 vizsgázó a teremben úgy, hogy Julcsi és Tercsi valóban két egymás melletti padban üljön?

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Hány olyan 3 jegyű szám van, amelyben szerepel a kilences számjegy? Állapítsd meg, hogy hol a hiba az alábbi gondolatmenetekben!

a) Az első számjegy legyen a kilences. A következő kettő helyre ekkor bármelyik számjegy kerülhet, hiszen mindenképpen van benne kilences. Ezért a lehetőségek száma $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$. $1 \cdot 10 \cdot 10$

b) Az első számjegy 9-féle lehet, hiszen nem lehet 0. A második számjegy bármi lehet, ez 10 lehetőség. A harmadik számjegynek bele kell tennünk a 9-est, hogy biztosan szerepeljen benne kilences. Ezért a lehetőségek száma $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$. $9 \cdot 10 \cdot 1$

c) Bontsuk három esetre! Először tegyük a kilencest az első helyre, ekkor a másik két helyre bármelyik számjegy kerülhet. Második lehetőség az, amikor a második helyre tesszük a kilencest, ekkor az első helyre 9, az utolsó helyre 10 számjegy kerülhet (hiszen az első helyen nem állhat 0). Harmadik eset, amikor az utolsó helyre tesszük a kilencest, ekkor az első helyre 9-, a másodikra 10-féle számjegy kerülhet. Ezért a lehetőségek száma $1 \cdot 10 \cdot 10 + 9 \cdot 1 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 1 = 280$.

$$1 \cdot 10 \cdot 10 + 9 \cdot 1 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 1$$

d) Először válasszuk ki, hogy hová tesszük a kilencest. Három helyre tehetjük, ez három lehetőség. Oda tegyünk egy kilencest. Ekkor a többi helyre bármelyik számjegy kerülhet, hiszen a kilences már megvan. Nem jók azonban azok a számhármasok, amelyek 0-val kezdődnek, ezért ezek számát le kell vonni. Ezért a lehetőségek száma $3 \cdot 10 \cdot 10 - 1 \cdot 10 \cdot 10 = 200$.

Megoldás

a) Nem számoltuk azokat a számokat, amelyekben az első számjegy nem kilences, de a második vagy a harmadik számjegy kilences. Például 291, 319, 599.

b) Ha az első két számjegy között szerepel a kilences, akkor nem kellett volna azzal befejezni. Így nem számoltuk azokat a számokat, amelyek nem kilencesre végződnek, de mégis van bennük kilences. Például 913, 290.

c) Többször számoltuk azokat a számokat, amelyekben több kilences van. Például a 299-et számoltuk akkor, amikor a második helyre tettünk kilencest és a többi helyre bármely számjegy közül választottunk, és számoltuk akkor is, amikor a harmadik helyet választottuk az elején, oda tettünk kilencest, majd a többi helyre bármit.

d) Többször számoltuk azokat a számokat, amelyekben több kilences van. Például a 299-et számoltuk akkor, amikor a második helyet választottuk először, és utána a többi helyre bármely számjegy közül választottunk, és számoltuk akkor is, amikor a harmadik helyet választottuk az elején. Másrészt a nullával kezdődő számok miatt nem 100-at kellett volna

levonni. Az elsőnek összeállított 300 darab számhármasban valóban szerepelnek olyanok, amelyek nullával kezdődnek, de csak olyanok, amelyekben van kilences, hiszen első lépésben valahová kilencest tettünk.

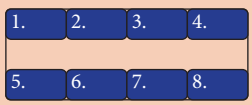
Megjegyzés

– A feladat legegyszerűbben a „rossz esetek” összeszámlálásával oldható meg. Háromjegyű számból $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ darab van. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekben nincs kilences? Ekkor az első helyre 8-féle, a másik két helyre 9-féle számjegyet írhatunk, vagyis ezek száma $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$.
  A „jó esetek” (kilencest tartalmazó háromjegyű számok) száma tehát $900 - 648 = 252$.
– Egy másik megoldás, ha esetszétválasztást alkalmazunk. A kilencesek száma lehet 1, 2 vagy 3.
  - Az 1 darab kilences állhat az első helyen, ekkor a második és harmadik számjegy 9-féle lehet (hiszen kilences már nem kerülhet oda), ez összesen $1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$ lehetőség.
  - Az 1 darab kilences állhat a második helyen, ekkor az első helyre 8-féle, a harmadik helyre 9-féle számjegy marad. Ez $8 \cdot 1 \cdot 9 = 72$ lehetőség.
  - Az 1 darab kilences állhat a harmadik helyen, ez is $8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$ lehetőség.
  - A 2 darab kilences állhat az első és a második helyen, ekkor a harmadik helyre 9 számjegy közül választhatunk (hiszen oda már nem jut kilences, abból most pontosan 2 darab van). Ez $1 \cdot 1 \cdot 9 = 9$ lehetőség.
  - A 2 darab kilences állhat az első és a harmadik helyen, ez is 9 lehetőség.
  - A 2 darab kilences állhat a második és a harmadik helyen. Ekkor az első helyre 8 számjegy marad, mert sem kilences, sem 0 nem kerülhet oda. Ez 8 lehetőség.
  - 3 darab kilencessel egyetlen szám alkotható, a 999, ez 1 lehetőség.
  - Összesen: $81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252$ lehetőség van.

HÁZI FELADAT

1. Hányféleképpen helyezkedhet el 3 házaspár egy sorban úgy, hogy minden férj a felesége mellett álljon?

2. Egy vasúti fülkében egymással szemben van 4-4 ülés. Hányféleképpen ülhetnek le az ülésekre egy 8 tagú társaság tagjai úgy, hogy köztük Juci és Piri vagy egymás mellé, vagy egymással szemben szeretnének ülni? (Az ülések számozottak, ezért mind különbözők.)



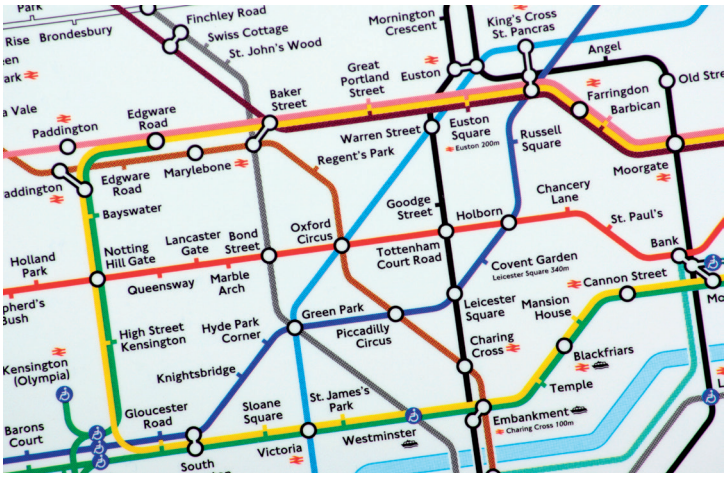
3. Egy bajnokságban 8 csapat vesz részt. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy meccset játszik. Hányféle lehet az első forduló beosztása? (Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan csapat, aminek más az ellenfele.)

4. A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy híres magyar költő neve rakható ki. Ki ő?

Hányféleképpen alakíthat 4 fiú és 4 lány 4 táncoló párt, ha minden fiú lánnyal táncol, és a párok sorrendje nem számít?	Z 576	L 96	R 24
Hány 3 jegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye páros?	O 90	N 100	É 50
7 csapat körmérkőzést játszik: minden csapat minden másik csapattal pontosan egy meccset játszik. Hány mérkőzésre kerül sor?	Y 21	S 13	I 42
Hány olyan részhalmaza van a pozitív egyjegyű számok halmazának, amely legfeljebb 3 elemű?	K 120	Á 84	A 130
Zoli kivett egy ládából 7 almát. Köztük 2 hibás volt, a többi hibátlan. Hányféleképpen alakulhatott, hogy hányadikra húzta a hibásakat?	Ú 42	T 49	A 21

23 Gráfok jellemzői

BEVEZETŐ



Amikor 1931-ben a londoni metrótársaság egy fiatal mérnöke, Harry Beck megmutatta metrótérképét a társaság vezetőinek, először egyértelmű visszautasításra talált. Hogyan lehetne egy térkép olyan, hogy nem a valós távolságokat tükrözi? Hogyan lehetne olyan, hogy nem mutatja az igazi várostérképet? Beck azonban kitartó volt. 1933-ban kísérleti jelleggel kinyomtatták a térképét 500 példányban. Egy óra alatt elfogyott. A cég vezetői ekkor ismerték fel, hogy Beck valami igazán zseniálisat alkotott. Felismerte, hogy a föld alatt utazva az emberek nem arra kíváncsiak, hogy pontosan merre halad a metró, hogyan helyezkednek el az utcák és a terek. Hanem csak arra, hogy hol kell átszállni, hányadik megállónál kell leszállni. A londoni metrótérkép sémája elterjedt az egész világon, és London egyik ikonjává vált.

ELMÉLET

A gráfok jellemzői

A **gráfok** olyan helyzetek szemléltetésében vagy olyan feladatok megoldásában segíthetnek, amikor az a fontos, hogy egy halmaz mely elemei között van kapcsolat. Például:

- ismeretségek: rokoni, baráti, munkatársi kapcsolatok; közösségi oldalak, családfa;
- térképek és utak, repülőjáratok;
- munkafolyamatok; logisztikai és szállítmányozási problémák;
- mérkőzések, bajnokságok;
- kémiai kötések;
- színezési problémák.

Fogalmak:

Csúcsok	a gráf pontjai, ezek jelzik a halmaz elemeit
Élek	a csúcsokat összekötő vonalak, ezek szemléltetik az elemek közötti kapcsolatokat
Csúcs fokszáma	az adott csúcsból kiinduló élek száma

Megjegyzések

- Egy gráf sokféle módon lerajzolható. Az élek lehetnek szakaszok, de lehetnek görbe vonalak is, csak az a fontos, hogy melyik csúcs melyik csúccsal van összekötve. Érdemes olyan elrendezést választani az ábrázoláskor, hogy szemléletes és áttekinthető legyen.
- Az él mindig csúcstól csúcsig tart. Nem lehet olyan, hogy egy él valamelyik vége nem egy csúcsba érkezik.
- Ha egy él kezdő- és végpontja azonos (hurokél), akkor az adott csúcs fokszámát 2-vel növeli.

FELADAT

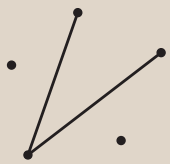
1. Használd a Bevezetőben látható metrótérképet!

a) Az Embankmenttől el tudsz-e jutni a Marylebone megállóba egy 5 megállóra érvényes jeggyel?

b) A Baker Streetről milyen útvonalon érdemes menni a Victoria megállóba, ha minél kevesebbszer akarsz átszállni?

c) Ha két megálló közötti út átlagosan 3 perc, egy átszállás pedig 7 perc, akkor merre a leggyorsabb a Leicester Square-ről a High Street Kensingtonra utazni?

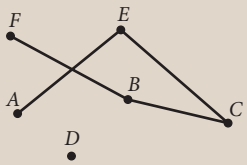
2. (Érettségi feladat, 2008)



Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzold be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!

3. (Érettségi feladat, 2010)

Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzolj be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki!

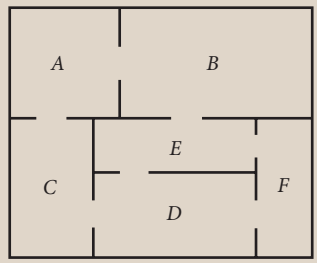


4. (Érettségi feladat, 2009)

Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltess gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.)

5. (Érettségi feladat alapján, 2019)

Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.)



a) Rajzold fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot!

b) Keress olyan útvonalat, amikor minden termen végighaladsz, de mindegyikbe pontosan egyszer lépsz be!

c) Keress olyan útvonalat, amikor minden ajtón áthaladsz, de mindegyiken pontosan egyszer! Melyik teremből indulhatsz ehhez?

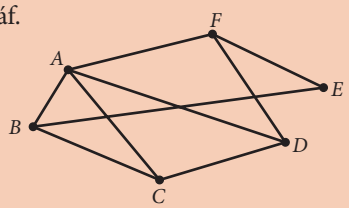
HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2005)

Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük egy versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesd gráffal az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!

2. (Érettségi feladat, 2005)

Az iskolák közötti labdarúgó-bajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a gráf.



Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban?

3. Rajzolj egy olyan gráfot, amelynek 6 csúcsa van, és

a) a fokszámok összege 16;

b) a fokszámok rendre 1, 1, 1, 2, 3, 4;

c) 7 éle van, és minden pont fokszáma legfeljebb 3.

4. (Érettségi feladatok, 2006, 2013, 2020)

Rajzolj egy olyan öt csúcspontú gráfot,

a) amelyben a csúcsok fokszáma 4, 3, 3, 2, 2;

b) amelyben a csúcsok fokszámának összege 12;

c) amelynek 7 éle van, és minden pont fokszáma legfeljebb 3.

24 Kombinatorika és gráfok

KIDOLGOZOTT FELADAT

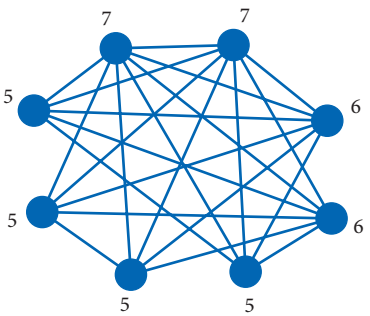
Egy asztalitenisz-bajnokságban 8 versenyző vesz részt, mindenki mindenkivel egyetlen mérkőzést játszik. Megkérdeztük a résztvevőket, hogy hány meccset játszottak idáig. Ketten azt válaszolták, hogy hetet, ketten azt, hogy hatot és négyen azt, hogy ötöt. Hány mérkőzés van hátra?

Megoldás

Ha összeadjuk a versenyzők válaszait, akkor minden lejátszott mérkőzést kétszer számolunk, ezért megkapjuk a lejátszott mérkőzések számának kétszeresét. $2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 46$, ezért 23 mérkőzés zajlott le.

Hány mérkőzésből áll a teljes bajnokság? Összesen annyi meccsből, ahányféleképpen kiválaszthatunk a 8 versenyzőből 2-t, ha nem számít a kiválasztás sorrendje. Ez $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. A hátralévő mérkőzések száma tehát $28 - 23 = 5$.

A feladatban szereplő helyzet többféle módon előállhat. Egy ilyen helyzetet szemléltet az oldalsó gráf. A csúcsok mellé odaírtuk a csúcs fokszámát is.



ELMÉLET

1. **Teljes gráf**

   Egy gráf **teljes gráf**, ha a gráf bármely két csúcsa között pontosan egy él fut.

   Az n pontú teljes gráf ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$) éleinek száma annyi, ahányféleképpen kiválaszthatunk az n csúcs közül kettőt úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Ez $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

2. **A fokszámok összege**

   Tétel: A gráf fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

   fokszámok összege = 2 · élek száma

   Megjegyzések

   – A tétel egyik következménye, hogy a fokszámok összege mindig páros.

   – Szemléletesen ez a tétel azt jelenti, hogy minden él kétszer számít bele a fokszámok összegébe: annál a két elemnél, amit összeköt.

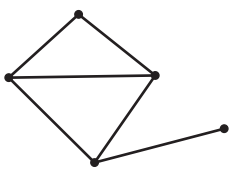
   – A tétel minden gráfra teljesül, olyanokra is, amelyek tartalmaznak hurokélt.

3. **Kiválasztási feladatok gráfokban**

   Gráfokhoz kapcsolódó kombinatorikai feladatokban gondosan figyeld meg, hogy a csúcsokra vagy az élekre vonatkozik a feladat. A csúcsok közül választunk ki néhányat vagy az élek közül?

   Például:

   A gráf 5 települést ábrázol a köztük lévő utakkal.

   Hányféleképpen választhatunk ki 2 települést? ⇒ az 5 település közül választunk

   Hányféleképpen választhatunk ki 2 utat? ⇒ a 6 út közül választunk

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2020)
Egy nemzetközi konferencia 5 résztvevője áll egy asztal körül a kávészünetben (jelölje őket A, B, C, D, illetve E). Tudjuk, hogy A ismer mindenkit az asztalnál, B nem ismeri E-t, de a többieket ismeri. C két résztvevőt ismer, D pedig hármat.

a) Ábrázold az ötfős társaság tagjai közötti ismeretségeket egy gráffal, és add meg, hogy kiket ismer az asztalnál az E-vel jelölt személy! (Minden ismeretség kölcsönös.)

b) Hány koccintás történik, ha mindenki mindenkivel pontosan egyszer koccint?

2. Van-e olyan gráf, amelyre teljesül a következő leírás? Ha van, akkor rajzolj egy ilyet, ha nincs, akkor indokold meg, hogy miért nincs!

a) 5 csúcsa, 7 éle van, és a fokszámok összege 12;

b) 6 csúcsa van, és a fokszámok 1, 2, 2, 2, 3, 3;

c) 7 csúcsa van, és minden csúcs fokszáma 3;

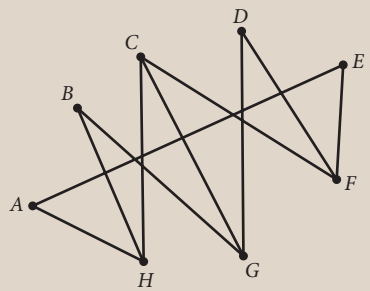
d) 7 csúcsa van, és minden csúcs fokszáma egyenlő.

3. Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben

a) az élek száma 36;

b) a fokszámok összege 156?

4. A következő gráf azt szemlélteti, hogy egy kistelepülés 8 cége közül melyek között történt megbízási szerződés egy adott évben.



Az adóhatóság úgy dönt, hogy ezek közül 4 szerződés teljesülését fogja ellenőrizni majd az év végén.

a) Hányféleképpen választhatja ki az adóhatóság azt a 4 szerződést, amelyet ellenőriz?

b) Ki tudja-e választani az adóhatóság a 4 szerződést úgy, hogy mindegyik cég érintett legyen valamelyik szerződésben?

5. Egy eljegyzési ünnepségen a Tóth családból öten, a Lengyel családból nyolcan vesznek részt. Az ünnepség során mindenki mindenkivel pontosan egyszer koccint. Hány koccintás történik

a) a Tóth család tagjai között;

b) a Lengyel család tagjai között;

c) a két különböző család tagjai között?

HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2021)
Egy új közösségi oldalon Anna, Bence, Cili, Dénes, Edit és Feri már regisztrálta magát. Ahhoz, hogy két regisztrált felhasználó ismerős legyen az oldalon, kölcsönösen be kell jelölniük egymást. A 6 fő között Anna már csak Bencével *nem ismerős*, a többiekkel igen. Cili (Annán kívül) Ferivel, Bence pedig csupán Edittel *ismerős*. Dénes, Edit és Feri még *nem ismerősei* egymásnak az oldalon.

a) Szemléltesd gráffal, hogy a 6 fő közül ki kivel *ismerős* ezen a közösségi oldalon, és add meg, hány olyan „pár” van közöttük, akik még *nem ismerősei* egymásnak!

b) Hányféleképpen választhatunk ki egy olyan párost, akik ismerik egymást?

2. (Érettségi feladat, 2018)
Hét csapat körmérkőzést játszik, azaz minden csapat minden másik csapattal egyszer mérkőzik meg. Eddig összesen 9 mérkőzést játszottak le.

a) Hány mérkőzés van hátra?

b) Hányféleképpen választhatunk ki az eddig lezajlott mérkőzések közül hármat, hogy azok alapján készítsünk statisztikai elemzést a bajnokságról?

3. Egy teljes gráfnak 120 éle van. Hányféleképpen választható ki

a) a gráf csúcsai közül 4 csúcs, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

b) a gráf élei közül 4 él, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

25 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy olyan magyar település neve rakható ki, amely egy hungarikumhoz kapcsolódik. Melyik ez a hungarikum?

Hányféle sorrendben ülhet egy padra 8 gyerek, ha közülük Zsófi ül a pad egyik szélén?	T 1440	G 5040	R 10 080
A {p; a; l; i; 1; 2; 3} halmaz elemeiből 7 karakterből álló jelszót készítünk, melyben 3 betű áll elöl, és 4 számjegy követi. Hányféle lehet ez a jelszó?	S 2401	E 5184	J 6912
Hány négyjegyű páros szám van, amelyben nem szerepel a hetes számjegy?	O 1296	Z 2520	D 3240
Hányféleképpen választható ki november hónapban három nap, amikor gyümölcsnapot tartunk?	L 87	E 4060	A 12 180
Egy gráfnak 5 csúcsa és 7 éle van. Mennyi a fokszámok összege?	M 10	N 14	K 15
Hány éle van egy 8 pontú teljes gráfnak?	H 28	A 48	I 56

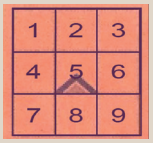
2. 2022-ig a magyar autók rendszáma 3 betűből (B) és 3 számjegyből (Sz) állt: BBB-SzSzSz. 2022-ben új rendszámokat vezettek be, melyek már 7 karakterből állnak, és felépítésük BB-BB-SzSzSz. Mindkét esetben a betűk 26 karakter közül, a számok pedig a 0; 1; 2; … ; 9 számjegyek közül kerülhetnek ki.



Melyik felépítésű rendszámból lehet a legtöbb különböző rendszámot készíteni, ha egy rendszámon belül a betűk és a számok is ismétlődhetnek? Melyik esetben hányszorosa a lehetséges rendszámok száma a 2022-ig fennálló BBB-SzSzSz típusú rendszámok számának?

a) B-Sz-B-Sz-B-Sz **b)** BB-BB-SzSz **c)** BB-SzSz-SzSz **d)** BB-BB-SzSzSz

3. Az ábra szerinti, 9 számjegyet tartalmazó buszjegy esetében hány olyan lyukasztás létezik,



a) amikor a lyukak száma legalább 2 és legfeljebb 5,

b) amikor középpontosan szimmetrikusan 5 lyuk keletkezik?

4. (Érettségi feladat, 2017)

Egy születésnapi összejövetelen egy 7 fős társaság tagjai közül néhányan koccintottak egymással. Lehetséges-e, hogy az egyes résztvevők 1; 2; 2; 3; 3; 6; 6 másik résztvevővel koccintottak? Válaszodat indokold!

5. (Érettségi feladat, 2005)

Egy álláshirdetésre négyen jelentkeztek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Kiderült, hogy közülük hárman: Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri, ők régebben egy kosárlabdacsapatban játszottak.

a) Szemléltesd az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

b) Hányféleképpen választhatunk ki négyük közül két embert, akik korábban már ismerték egymást?

c) Az ismeretlenek kézfogással bemutatkoznak egymásnak. Közöttük hány kézfogás történik?

TUDÁSPRÓBA I.

1. Hatan pingpongbajnokságot játszanak.

a) Hány mérkőzésre kerül sor, ha mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszik?

b) Hány mérkőzésre kerül sor, ha két háromfős csoportot csinálnak, egy csoporton belül mindenki játszik mindenkivel, majd végül a csoportelső a másik csoportelsővel, a második a másodikkal és végül a harmadik a harmadikkal játszik?

2. (Érettségi feladat, 2014)
Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázold a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt!

b) Hány kézfogás történt összesen?

3. Hányféleképpen választhatja ki a tanár a három felelőt egy 17 fős csoportban, ha

a) írásban felelnek és ugyanazt a feladatot kapják;

b) szóban felelnek és mindenki más feladatot kap?

4. Hajni, Bence és két barátjuk együtt mentek moziba. A négy jegy egymás mellé szólt, de Hajni és Bence nem akart egymás mellé ülni. Hány különböző módon ülhettek le?

5. A személyi igazolványok okmányazonosítója hat számjegyből és két betűből áll, ebben a sorrendben. A számjegyek mindegyike 0, 1, …, 9 lehet, a betűk pedig nem lehetnek ékezetes, kettős, illetve hármas betűk, tehát csak az angol ábécé 26 karaktere használható.

a) Igaz-e, hogy mindegyik személyi igazolványban egy hatjegyű szám áll?

b) Hány különböző 6 jegyű szám van?

c) Hány különböző, hat számjegyből álló jelsorozat képezhető a tíz számjegyből?

d) Hányféle lehet a személyi igazolványokban szereplő betűpár?

e) A fenti szabályok szerint lehet-e 10 millió magyar embernek más-más igazolványszáma?

TUDÁSPRÓBA II.

1. Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben

a) minden csúcs fokszáma 8;

b) az élek száma 171;

c) a fokszámok összege 210?

2. Egy közlekedésbiztonsági napon 10 kérdésből álló tesztet kell kitölteni a résztvevőknek. Minden kérdésre 4 válasz közül kell megjelölni az egyetlen helyes válasz betűjelét. A kitöltés során a résztvevők minden kérdésre bekarikáznak egy betűt, egyetlen kérdést sem hagynak „üresen”.

a) Hány különböző kitöltése van a tesztnek?

b) Hány olyan kitöltés van, amelyben az első 5 kérdésre helyesen válaszolunk, a második öt kérdésre hibásan válaszolunk?

c) Hány olyan kitöltés van, amelyben pontosan egy hibás válasz van, a többi válasz mind helyes?

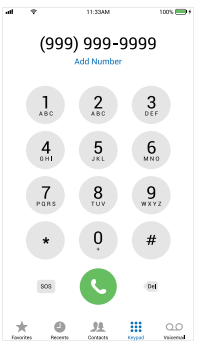
3. Péterék osztályában 27-en vannak, közülük 15 lány. Öttagú küldöttséget kell választaniuk az iskola diákönkormányzatának ülésére.

a) Hányféleképpen állítható össze az öttagú küldöttség?

b) Hányféleképpen állítható össze az öttagú küldöttség úgy, hogy legyen fiú a küldöttségben?

4. A pozitív egész számok között hány hatjegyű páros szám van, amelyben előfordul a 0 számjegy?

5. (Érettségi feladat alapján, 2011)
Zsuzsi hétjegyű mobiltelefonszáma különböző számjegyekből áll, és az első számjegy nem nulla. Amikor Ildikó felhívta Zsuzsit, feltűnt neki, hogy a mobiltelefonján megjelenő három számoszlop közül csak kettőre volt szükség. Ezekre is úgy, hogy először az egyik oszlopban lévő számokat kellett valamilyen sorrendben megnyomni (megérinteni), azután pedig a másik oszlop számai következtek valamilyen sorrendben. Hány ilyen telefonszám lehetséges?



Témazáró feladatgyűjtemény

1. **a)** Hány különböző, 8 számjegy hosszúságú kód készíthető a 0 és 1 számjegyekből?
b) Hány olyan 8 számjegy hosszúságú kód készíthető a 0 és 1 számjegyekből, amely egyessel kezdődik?

2. Bence osztályából egy négyfős csapat indult a robotikavetélkedőn: Bence, Dönci, Kató és Juli. A vetélkedőn háromféle feladatot kell megoldaniuk, egy időben, egymással párhuzamosan dolgozva. Egyikük tölti a tesztet, másikuk egy számítási feladatot old meg, s ketten egy modellt kell összeállítsanak.
a) Hányféleképpen oszthatják ki egymás között a három feladatot?
b) Hányféleképpen oszthatják ki a feladatokat, ha nem a két fiú állítja össze a modellt?

3. Hány hatjegyű szám írható fel az 1, 3 és 8 számjegyekkel? Ezek között mennyi páratlan?

4. Hány 6 jegyű szám írható fel a 0, 3 és 8 számjegyekkel? Ezek között mennyi páratlan?

5. **a)** Hány nyolcjegyű jelszó készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből és az x, y, z, v betűkből, ha a jelszóban lehetnek számjegyek is, betűk is tetszőleges sorrendben, s akár ismétlődhetnek is?
b) Ugyanezekből a karakterekből olyan nyolcjegyű jelszót kell készíteni, amelyben az első 4 karakter betű, a második 4 karakter számjegy. Ekkor hány különböző megoldást találhatunk?
c) Ugyanezekből a karakterekből olyan nyolcjegyű jelszót kell készíteni, amelyben az első 4 karakter betű, a második 4 karakter számjegy, és minden karaktere különböző. Ekkor hány különböző megoldást találhatunk?

6. (Érettségi feladat, 2008)
Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
a) amelyik öt azonos számjegyből áll;
b) amelyik páros;
c) amelyik 5-tel osztható?

7. A Mastermind egy kétszemélyes logikai társasjáték. 8 színben találhatók benne a „gombok”. Ezekből rak ki az egyik játékos egy 4 gombból álló titkos kódot. A másik játékos találgat. Az első játékos értékeli a társa tippjeit: annyi fekete „gyufaszálat” rak, ahány tipp jó helyen van, s annyi fehér „gyufaszálat”, ahány gombra igaz, hogy az előbbieken kívül megfelelő a színe, de nincs jó helyen. Ezen információk alapján kell kitalálni a titkos kódot.
a) Hányféle kód rakható ki a 8 színből?
b) Hányféle kód rakható ki, ha a gombok között nem lehet több azonos színű?
c) Ha kitaláltuk a négy színt, akkor a négy színből hányféle kód rakható ki, ha egy szín nem fordulhat elő többször?
d) Ha kitaláltuk a négy színt (piros, kék, zöld, sárga), hányféle négyszínű kód rakható ki, amelyben a piros gomb nincs a kék mellett?

8. (Kompetenciamérés, 2013)
A mobiltelefonok bekapcsolásakor a SIM-kártya PIN-kódját (négyjegyű számkódot) kell megadni, melyet csak a tulajdonosa ismer, így illetéktelenek nem tudják használni a telefont. A négy számjegyből álló PIN-kód számjegyei 0-tól 9-ig bármilyenek lehetnek. 2011-ben Magyarországon a SIM-kártyák száma 11,69 millió volt. Legalább hány azonos PIN-kód volt ekkor Magyarországon?

9. Balázs, Erzsi, Gellért, Klári és Sanyi sorban állnak a mozi pénztára előtt.
a) Hányféleképpen állhatnak sorba?
b) Hányféleképpen állhatnak a sorban, ha tudjuk, hogy Gellért az első?
c) Hányféle lehet a sorrend, ha tudjuk, hogy felváltva állnak sorban a fiúk és a lányok?

10. Hajni osztályából hatan arra vállalkoztak, hogy színpadra visznek egy jelenetet. A 4 lány és a 2 fiú olyan darabot választottak, amelyben 4 női és 2 férfi szereplő van. Hány különböző szereposztás alkotható, ha a fiúk férfiszerepet, a lányok női szerepet játszanak?

11. Számold ki!

a) $4! + 6!$ $\quad 3! + 7!$ $\quad 2! + 5!$

b) $\frac{3! + 4!}{3!}$ $\quad \frac{4! + 5! + 7!}{3!}$ $\quad \frac{6! + 8!}{5!}$

12.

a) Hányféleképpen állhat sorba Hajni és 8 osztálytársa, ha tudjuk, hogy Hajni és Juli egymás mellett állnak?

b) Hányféleképpen állhatnak sorba ők kilencen, ha tudjuk, hogy Hajni a harmadik?

c) Hányféleképpen állhatnak sorba, ha Hajni nem az utolsó?

13. Számold ki:

a) $\binom{5}{4}$, $\binom{9}{2}$, $\binom{11}{10}$, $\binom{320}{318}$, $\binom{5110}{1}$;

b) $\binom{6}{3}$, $\binom{8}{5}$, $\binom{10}{3}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{11}{7}$.

14. Hány 0 elemű, hány 1 elemű, hány 2 elemű, hány 3 elemű részhalmaza van

a) egy 3 elemű halmaznak;

b) egy 4 elemű halmaznak;

c) egy 5 elemű halmaznak?

15.

a) A 32 lapos magyar kártyából 3 lapot osztanak nekünk. Hányféleképpen alakulhat ez a kezdő 3 lap?

b) Örömmel látjuk, hogy remek lapunk van: piros ász, piros felső és makk király. A maradék pakliból újabb két lapot húzunk. Hányféle lehet ez a további két lap?

16. Egy városban azon gondolkodnak, hogy újfajta buszjegyeket vezetnek be. Az új buszjegy nem 3×3-as formátumú lesz, hanem 4×4-es: 1-től 16-ig szerepelnek rajta a számok, az ábra szerint.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

a) Ha ezek közül pontosan hármat lyukaszt ki a lyukasztó, akkor hány különböző lyukasztás történhet?

b) Ha két vagy három lyukat lyukaszt a gép, akkor hányféle lyukasztás történhet?

17. Egy közvélemény-kutatáson egy teszt 10 kérdésére kell válaszolni, mindegyikre igent vagy nemet.

a) Hányféle különböző kitöltése lehet ennek a tesztnek?

b) Hány olyan kitöltése van a tesztnek, amelyben pontosan 8 igen válasz szerepel?

18. (Kompetenciamérés, 2018)

A következő táblázat egy országos futóversenyre jelentkezők legjobb idejét mutatja.

Nevezési idő (perc:másodperc)	Fő
$\leq$ 1:25	8
1:26 – 1:30	15
1:31 – 1:35	17
1:36 – 1:40	20
1:41 – 1:45	8
1:46 – 1:50	27
1:51 $\leq$	31

a) Mennyi legyen a versenyen való elinduláshoz szükséges szintidő, ha a versenyre 60 főt szeretnénk meghívni?

b) Hányféleképpen választhatunk ki egy 4 futóból álló csapatot úgy, hogy mindegyikük szintideje kisebb vagy egyenlő legyen, mint másfél perc, ha a csapaton belül mindenkinek azonos lesz a feladata?

19. Egy dolgozat 5 feladatát tetszőleges sorrendben lehet megoldani.

a) Lehetséges-e, hogy a 112 fős évfolyam minden tanulója más-más sorrendben oldja meg a feladatokat?

b) Andrásnak 3 feladata lett jó, a többi hibás. Azon gondolkodik, melyek lettek jók. Hányféle lehetőség van?

c) Az első feladatban az évfolyam 25%-a követett el kisebb-nagyobb hibát. Hányféleképpen választhatunk ki a matematikaversenyre egy 4 fős csapatot azok közül, akik az első feladatot hibátlanul oldották meg?

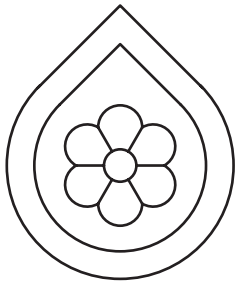
20. Egy nyolctagú társaság érkezik az épületbe. Négyszemélyes lifttel szeretnének felmenni az ötödik emeletre.

a) Hányféleképpen választhatják ki azt a négy embert, akik először mennek fel?

b) Hányféleképpen rendeződhetnének két négyes csoportba, ha a csoportok sorrendje nem számít?

c) Hányféleképpen mehetnek fel az emeletre a négyszemélyes lifttel, ha az is számít, hogy ki megy az első menetben, és ki megy a második menetben? (A lifttel mindkét menetben négy ember megy fel.)

21. (Érettségi feladat, 2019)



Az ábrán egy környezetvédő szervezet logójának ki nem színezett terve látható. A logó kilenc tartományát három színnel (sárga, kék és zöld) szeretnénk kiszínezni úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Két tartomány szomszédos, ha a határvonalaiknak van közös pontja. Egy-egy tartomány színezéséhez egy színt használhatunk.) Hányféleképpen lehet a logót a feltételeknek megfelelően kiszínezni?

22. A totóban 13 + 1 mérkőzés esetén megtippelhetjük, hogy ki nyeri a meccset. Háromféle tipp jelölhető meg. 1: a hazai csapat; 2: a vendégcsapat; x: döntetlen.

a) Hányféle különböző kitöltése lehet egy totószelvénynek?

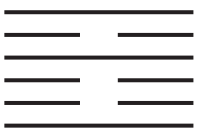
b) Hányféle kitöltés lehetséges, ha az első 6 mérkőzés esetén nem véletlenszerűen tippelünk, hanem győztesként megjelöljük a bajnokságban előrébb álló csapatot, és a többi mérkőzés esetén véletlenszerűen választunk?

23. (Kompetenciamérés, 2006)

A kínai bölcsek a *Változások könyvében* két őserőt különböztetnek meg: a Jint és a Jangot. A Jint egy megszakított vonallal, a Jangot egy összefüggő vonallal ábrázolták:



A könyvben található valamennyi jelük 6 vonásból tevődik össze. Ezek mindegyike vagy Jin, vagy Jang. Például az egyik jelük neve Si Ho, ebben 3 Jin és 3 Jang szerepel a következő sorrendben:



a) Hányféle jel lehet, amelyben csak 1 Jin szerepel?

b) Hányféle jel lehet, amelyben pontosan 3 Jang szerepel?

c) Hányféle jel lehet, amelyben legalább 4 Jang szerepel?

d) Hányféle jel lehet, amelyben páros számú Jin szerepel?

e) Hányféle jelük létezhet összesen?

24. A morzeábécé két karaktert használ a betűk és számok megjelenítésére: pontot és vonalat. Hány különböző jelet lehet készíteni, ha egy jel legfeljebb 5 karakter hosszúságú lehet? Elegendő-e ennyi jel a magyar ábécé egyjegyű betűinek, az írásjeleknek (pont, vessző, pontosvessző, kérdőjel és felkiáltójel) és a tíz számjegynek a megjelenítéséhez?

25. Hányféleképpen színezhetünk ki egy háromsávos zászlót a piros, fehér, zöld színekkel kétféle színűre úgy, hogy piros sávok lehetnek egymás mellett, de más színű sávok nem lehetnek egymás mellett?

26. Hányféle 5-tel osztható, háromjegyű szám rakható ki a 0, 1, 2, 5 számkártyákból?

27. Hány olyan hatjegyű szám alkotható a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, amelynek minden számjegye különböző? Ezek között hány olyan van, amelyik osztható 5-tel?

28. Hány olyan 5 dobásból álló dobássorozat van szabályos dobókockával, amelyben a dobások összege 7?

29. Egy gyártási folyamat során három fázison megy keresztül a termék. Az első fázisban négy marógép dolgozik egymással párhuzamosan, melyek ugyanazt a feladatot végzik. A második fázisban egy finommechanikai gép végez egy rövid műveletet, ezt csak egy gép végzi. A harmadik fázisban három csomagológép dolgozik egymással párhuzamosan a terméken.

a) Hányféle különböző gyártási úton készülhet el a termék, ha tudjuk, hogy egy marógép dolgozik rajta, majd a finommechanikai gép, majd egy csomagológép? Szemléltesd gráffal a gyártási folyamatot!

b) Hányadrészére csökken a gyártási utak száma, ha egy marógép és egy csomagológép is meghibásodik?

c) Hányadrészére csökkenhet a gyártási utak száma, ha valamelyik két gép meghibásodik (de nem tudjuk, hogy melyik)?

30. Egy gráfnak öt csúcsa van, és minden csúcs fokszáma egyenlő. Adj meg olyan gráfot, melyre ez a fokszám:

a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4.

31. Rajzolj olyan egyszerű gráfot, amelynek 6 csúcsa van, és a csúcsok fokszámai:

a) 1; 1; 2; 2; 3; 3;

b) 0; 0; 3; 3; 3; 3;

c) 1; 1; 1; 2; 2; 2;

d) 1; 1; 2; 2; 2; 6.

32. Adj meg olyan egyszerű gráfot, melynek 8 csúcsa van, és a csúcsok fokszáma:

a) 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2;

b) 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 4.

33. Egy ötfős társaságban Anna ismeri Pétert, Balázst és még valakit. Balázs Annán kívül ismeri Zolit és Gábort. Zoli a társaságból csak Balázst ismeri. Gábor viszont mindenkit, kivéve Zolit.

a) Szemléltesd gráffal, hogy ki kinek az ismerőse!

b) Hány ismerőse van Péternek?

34. Rajzolj olyan 7 csúcsú egyszerű gráfot, melyben a csúcsok fokszámai:

a) 0; 0; 0; 1; 2; 2; 3;

b) 1; 2; 3; 3; 3; 3; 3;

c) 1; 2; 3; 3; 3; 3; 4.

35. Hány éle van annak a gráfnak, melyben a fokszámok a következők?

a) 1; 2; 3; 3; 4; 7

b) 2; 4; 4; 4; 5; 5

36. Igazold, hogy nincs olyan egyszerű gráf, melyben a csúcsok fokszámai a következők:

a) 1; 2; 3; 3;

b) 1; 2; 3; 4;

c) 0; 1; 2; 3.

37. Egy hattagú társaságban mindenkinek pontosan 3 ismerőse van. Szemléltess gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert (az ismeretségek kölcsönösek)!

38. **a)** Hány éle van annak a teljes gráfnak, amelynek 10 csúcsa van?

b) Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek 190 éle van?

39. Hányféleképpen választhatunk ki a 8 csúcsú teljes gráf élei közül hatot, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

40. Egy kisebb irodaházban 6 vállalkozás működik. Bármely két vállalkozás között legfeljebb egy közös ügylet történik havonta. Megkérdeztük a vállalkozások képviselőit, hogy az elmúlt hónapban hány céggel volt közös ügyletük az irodaházon belül. Az első öt válasz ez volt: 5, 4, 3, 2, 1.

a) Ábrázold gráffal a hat céget és a köztük a múlt hónapban létrejött ügyleteket!

b) Mi volt a hatodik válasz?

c) Hányféleképpen választhat ki az adóhatóság 4 ügyletet az irodaházon belül a múlt hónapban megvalósult ügyletek közül, amit ellenőrizni fog a következő héten? (Két kiválasztás különböző, ha van olyan ügylet, ami szerepel az egyikben és nem szerepel a másikban.)

41. (Érettségi feladat alapján, 2013)

Egy iskola asztalitenisz-bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

a) Rajzold le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!

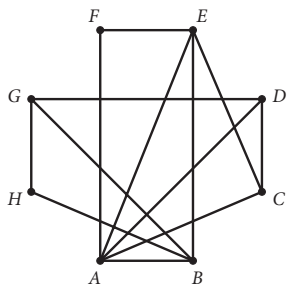
b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta?

c) Hányféleképpen választhatunk ki a lejátszott mérkőzések közül hármat, amiről összefoglalót készítünk az iskolaújságba, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

d) Hányféleképpen választhatjuk ki, hogy a résztvevők közül melyik három tanulót keressük fel a riporthoz, ha a riportalanyok sorrendje nem számít?

42. (Érettségi feladat alapján, 2021)

Egy nyolccsapatos jégkorongbajnokságban minden csapat minden másikkal egyszer mérkőzik meg. Az ábrán látható gráf az eddig lejátszott mérkőzéseket szemlélteti. A pontok a csapatokat jelképezik, és két pont között pontosan akkor van él, ha a két csapat már játszott egymással.



A bajnokságból 5 fordulót már megrendeztek, ám néhány mérkőzés elmaradt. (Egy fordulóban – ha nincs elmaradó mérkőzés – mindegyik csapat egy mérkőzést játszik.)

a) Add meg három olyan csapat betűjelét, melyek közül bármely kettő már lejátszotta az egymás közötti mérkőzéseit! Fogalmazd meg, hogy ez milyen módon jelenik meg az ábrán!

b) Hány mérkőzés maradt el az első 5 fordulóban?

c) Hányféleképpen alakulhat majd a bajnokság első három helyezettje, ha nincs holtverseny?

d) A bajnokság végeztével, miután már minden meccset lejátszottak, a sportújságírók arról is szavaznak majd, hogy melyek voltak a bajnokság legérdekesebb mérkőzései. Hányféleképpen alakulhat a szavazás során az első három legérdekesebb mérkőzés, ha nincs holtverseny?

26 Hatványozás – ismétlés

BEVEZETŐ



Egy szabadulószoba kulcsát egy lakattal zárt láda rejti. A lakat egy háromjegyű számkóddal nyitható.

A játékosok rendelkezésére áll íróeszköz és papírlap. A titkos kód megfejtéséhez a következő instrukciókat kapják:

1. Adjátok meg az I. táblázatba beírt számokat 2 hatványaként, és írjátok azokat a II. táblázat megfelelő rubrikáiba!
2. Töltsétek ki a II. táblázat hiányzó helyeit 2 hatványaival úgy, hogy bűvös négyzetté váljon, azaz az egyes sorokban, oszlopokban és átlókban ugyanannyi legyen a számok szorzata!
3. A II. táblázatban kapott 2 alapú hatványok kitevőit írjátok a III. táblázat megfelelő helyeire!
4. A III. táblázatban lévő számok angol elnevezését írjátok a IV. táblázat megfelelő helyeire!
5. Írjátok be az V. táblázat megfelelő rubrikáiba a IV. táblázatban szereplő szavak betűinek számát! Ellenőrizzétek, hogy az V. táblázat ismét bűvös négyzet-e, azaz minden egyes sorában, oszlopában, átlójában ugyanannyit ad-e a beírt számok összege! (Ha igen, akkor lépjetek a következő pontra, ha nem, akkor gondoljátok újra végig az eddigi feladatokat!)
6. A titkos számkódot megkapjátok, ha az V. táblázatban szereplő számok számjegyei összegének kiszámoljátok a –1-edik hatványát, és annak a tizedes tört alakjából veszitek a tizedesvessző után lévő első 3 számjegyet!
(A négyzetek jobb felső sarkában lévő rubrikát mintaként kitöltöttük.)

I.

	4^{11}	512^{2}
	32^{3}	
	16^{2}	

II.

		2^{18}

III.

		18

IV.

		eigh-teen

V.

		8

Megoldás: a lecke végén.

ELMÉLET

1. Egész kitevőjű hatvány értelmezése

– Ha a egy valós szám és n egy 1-nél nagyobb természetes szám, akkor a^n olyan n tényezős szorzat, melynek minden tényezője a.

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n darab tényező)

– Bármely valós szám első hatványa maga a valós szám.

$a^1 = a$

– Bármely 0-tól különböző valós szám nulladik hatványa 1.
(0^0 nem értelmezett)

$a^0 = 1$

– Egy 0-tól különböző valós szám negatív egész kitevős hatványát úgy képezzük, hogy az alap reciprokát a kitevő ellentettjére emeljük.
$a \in \mathbf{R};\ a \neq 0$ és $n \in \mathbf{N}$

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

2. Hatványazonosságok

$a, b \in \mathbf{R}$ és $m, n \in \mathbf{Z}$ esetén, ha a kifejezésekben szereplő hatványok mindegyikének értelme van, akkor teljesül:

– azonos alapú hatványok szorzata: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

– azonos alapú hatványok hányadosa (ha $a \neq 0$): $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

– hatvány hatványa: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

– szorzat hatványa: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

– hányados hatványa (ha $b \neq 0$): $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(Az azonosságokat pozitív egész kitevők esetén bizonyítottuk, majd kiterjesztettük egész kitevőjű hatványokra.)

FELADAT

1. Számológép használata nélkül döntsd el, hogy melyik nagyobb!

a) 2^{-3} vagy 3^{-2}

b) 5^{-2} vagy -5^2

c) 3^{-2} vagy $(-3)^2$

d) $(-2)^{-2}$ vagy $(-3)^{-2}$

e) -5^{-1} vagy -1^{-5}

f) 7^0 vagy 0^7

2. Írd fel 2 hatványaként!

a) $2^3 \cdot (2^{-2})^{-5}$

b) $\frac{(2^{-3})^{-1}}{(2^{-4})^{-3}}$

c) $4^3 \cdot 8^{-5}$

d) $\left(\frac{32}{2^{-3}}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{1024^{-24}}{512^{-12}}\right)^{-2}$

3. Add meg két egész szám hányadosaként!

a) $3^{-1} - \frac{3^{-2}}{3}$

b) $2^0 - \frac{2-2^{-2}}{2-2^{-3}}$

c) $\frac{5-5^{-1}}{5^{-3}-5} \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^{-2}$

4. Add meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét közönséges tört alakban, ha $a = 123\,456$ és $b = 56\,789$.

a) $\frac{a \cdot (a^2)^{-1} \cdot a^{-3}}{(a^{-3})^{-2} \cdot a^{-9}}$

b) $\frac{(b^2)^3}{(b^3)^2} - \frac{b^0 + b^{-2} - 1}{b^{-3} \cdot b^2}$

c) $\frac{(a \cdot b^{-1})^2 \cdot a^3}{(a^{-2} \cdot b)^{-3}}$

5. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi számokat! A megoldáshoz ne használj számológépet!

$A = (-7)^{80}$ $\quad B = (-3)^{75}$ $\quad C = 5^{-10}$ $\quad D = (2^3)^{80}$ $\quad E = (-3)^{-75}$ $\quad F = (-3)^{-10}$

HÁZI FELADAT

1. A 3-nak hányadik hatványával szorozzuk meg az alábbi számokat ahhoz, hogy eredményül 3^8-t kapjunk?

a) $3^4 \cdot (3^{-2})^{-1}$

b) $\frac{(3^{-1})^5}{(3^{-3})^{-3}}$

c) $9^2 \cdot 27^{-6}$

d) $\left(\frac{3}{81^{-2}}\right)^{-4}$

e) $\left(\frac{27^{-4}}{9^{-1}}\right)^{-3}$

2. Add meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét közönséges tört alakban, ha $a = 0{,}4$ és $b = \frac{1}{3}$.

a) $\frac{(a^3)^{-2} \cdot a^{-2}}{(a^4)^{-2} \cdot a^{-1}}$

b) $\frac{(b^{-1})^2}{(b^0)^4} - \frac{b^{-1} + b^{-2} - 2}{b^{-3} \cdot b^2}$

c) $\frac{(a \cdot b)^{-1} \cdot b^3}{(a \cdot b^{-2})^{-2}}$

3. Melyik az a valós szám (vagy melyek azok a valós számok), amelynek

a) harmadik hatványa $\frac{8}{27}$;

b) mínusz egyedik hatványa $\frac{1}{5}$;

c) negyedik hatványa $\frac{16}{81}$;

d) mínusz második hatványa $\frac{4}{9}$;

e) nulladik hatványa 1;

f) hatodik hatványa $-\frac{1}{64}$;

g) mínusz tizedik hatványa 1024?

4. Igaz vagy hamis?

a) Van olyan pozitív valós szám, amelynek második hatványa nagyobb a harmadik hatványánál.

b) Minden negatív szám negyedik hatványa nagyobb a szám harmadik hatványánál.

c) Egy negatív szám negatív kitevős hatványa lehet pozitív.

d) Van olyan valós szám, amelynek (-1)-edik hatványa egyenlő magával a számmal.

e) A 2-nek minden páros kitevős hatványa felírható a 4 hatványaként.

f) Van olyan negatív valós szám, amelynek végtelen sok, különböző kitevőjű hatványa egyenlő.

RÁADÁS

1. A bevezetőben lévő feladat megoldása:

I.

	4^{11}	512^{2}
	32^{3}	
	16^{2}	

II.

2^{5}	2^{22}	2^{18}
2^{28}	2^{15}	2^{2}
2^{12}	2^{8}	2^{25}

III.

5	22	18
28	15	2
12	8	25

IV.

five	twenty-two	eighteen
twenty-eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty-five

V.

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Az V. táblázatban lévő számok számjegyeinek összege 45. Ennek (-1)-edik hatványa $45^{-1} = \frac{1}{45} = 0{,}0\dot{2}$, tehát a tizedesvessző után lévő 3 számjegy: 022. Így a titkos kód: 022.

2. Bűvös négyzetek:

A bűvös négyzet olyan szabályszerűséget mutató számelrendezés, amelyben – egy négyzet $n \times n$ darab négyzetre bontásával kapott mezőkben – minden sorban, minden oszlopban, illetve minden átlóban megegyezik a beírt számok összege vagy esetleg a szorzata.

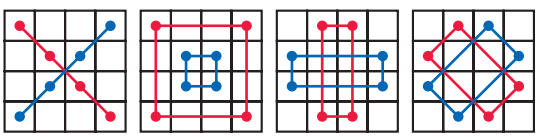
Az egyik leghíresebb 4×4-es bűvös négyzet a magyar származású Albrecht Dürer (1471–1528) német festő és grafikus alkotása, amely a művész *Melankólia* című I. rézmetszetén található.

Keresd meg az eredeti alkotást az interneten!

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

A négyzetben elhelyezett számok soronkénti, oszloponkénti és átlók szerinti összege minden esetben 34, ugyanakkor az alsó sor középső két mezőjében felfedezhető a készítés éve, 1514.

Ha tüzetesebben megvizsgáljuk a beírt számokat, azt láthatjuk, hogy nemcsak a sorokban, oszlopokban, átlókban szereplő számok összege egyezik meg, hanem bizonyos szimmetriák szerint elhelyezkedő számnégyeseké is. Ilyenek például



Az indiai matematikazseni, Srinivasa Ramanujan (1887–1920) olyan 4×4-es bűvös négyzetet alkotott, melynek első sorában szerepel születési dátuma, 1887. 12. 22., ugyanakkor minden sorban, oszlopban és átlóban 139 a négy szám összege.

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

Az alábbi két bűvös négyzet „hatványozottan” is bűvös négyzet.
Az elsőben szereplő minden szám négyzetszám, a bűvös összeg 8515.

4624	841	1681	1369
289	961	6241	1024
3481	784	529	3721
121	5929	64	2401

A másodikban minden szám köbszám, éppen az első 18 pozitív egész és az első 18 negatív egész köbét tartalmazza. A bűvös összeg a 0.

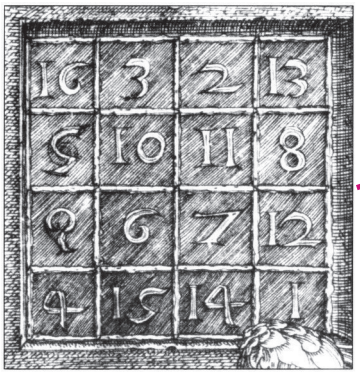
5832	27	−2179	2179	−27	−5832
1	−2744	−512	−1	2744	512
−1000	4913	−64	64	−4913	1000
−4096	−125	3375	−3375	125	4096
−729	−343	729	−216	343	216
−8	−1728	−1331	1331	1728	8

A következő négyzet duplán bűvös, mert nemcsak bűvös összeget, hanem bűvös szorzatot is alkotnak a sorokban és oszlopokban lévő számhatosok. Ha nem hiszed, járj utána!

27	25	156	48	84	20
75	144	18	56	52	15
24	12	45	117	50	112
16	65	21	30	108	120
140	72	40	9	60	39
78	42	80	100	6	54

FELADAT

Próbálj meg olyan bűvös négyzetet alkotni, melyben szerepelnek születési dátumod számjegyei!





Dürer: Melankólia I.

27 Számok *n*-edik gyöke

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. a) Egy kocka felszíne 294 cm^2. Mekkorák az élei?
b) Egy kocka térfogata 64 cm^3. Mekkorák az élei?

Megoldás

a) A kocka felszíne felírható az $A = 6a^2$ összefüggés segítségével, ahol az a pozitív valós szám a kocka élének hosszát jelenti centiméterben. Ezért $294 = 6a^2$, amiből $a^2 = 49$ adódik, vagyis azt a pozitív valós számot keressük, amelynek négyzete 49. Ez a szám a 7, tehát a kocka éle 7 cm hosszúságú.

b) A kocka térfogata felírható a $V = a^3$ összefüggés segítségével, ahol az a pozitív valós szám a kocka élének hosszát jelenti centiméterben. Ezért $64 = a^3$, amiből $a^3 = 64$ adódik, vagyis azt a pozitív valós számot keressük, amelynek köbe (harmadik hatványa) 64. Rövid fejszámolás után rájöhetünk, hogy ez a szám a 4, tehát a kocka éle 4 cm hosszúságú.

2. a) Egy kocka alakú doboz egy rétegben való kibéleléséhez 102 cm^2 anyag szükséges. Mekkorák az élei?
b) Egy kocka alakú üvegtartályba 45 cm^3 víz fér. Mekkorák az élei?

Megoldás

a) Az 1. feladatban leírtakhoz hasonlóan: $102 = 6a^2$, amiből $a^2 = 17$ adódik, vagyis azt a pozitív valós számot keressük, amelynek négyzete 17. Ezt a számot fejben számolással nem, de számológéppel meg tudjuk határozni. A négyzetgyök definíciójának ismeretében tudjuk, hogy ha a keresett szám négyzete a 17, akkor a keresett szám a $\sqrt{17}$, tehát a kocka éle $\sqrt{17}$ cm $\approx 4{,}12$ cm hosszúságú.
Megjegyzés: Igazolható, hogy a $\sqrt{17}$ irracionális szám, vagyis nem írható fel két egész szám hányadosaként.

b) Az 1. feladatban használt összefüggés szerint $45 = a^3$, amiből $a^3 = 45$ adódik, vagyis azt a pozitív valós számot keressük, amelynek köbe (harmadik hatványa) 45. A keresett szám értékéről megállapíthatjuk, hogy nagyobb 3-nál és kisebb 4-nél, mivel $3^3 < 45 < 4^3$, valamint kiszámolható, hogy nagyobb 3,5-nél és kisebb 3,6-nél, mivel $3{,}5^3 < 45 < 3{,}6^3$.

A négyzetgyök definíciójához hasonlóan értelmezhetjük a köbgyököt, vagyis ha a keresett szám köbe a 45, akkor a keresett szám a $\sqrt[3]{45}$. A számoláshoz használjuk a számológép $\sqrt[3]{\square}$ gombját. Tehát a kocka éle $\sqrt[3]{45}$ cm $\approx 3{,}56$ cm hosszúságú.
Megjegyzés: Igazolható, hogy a $\sqrt[3]{45}$ irracionális szám, vagyis nem írható fel két egész szám hányadosaként.



3. A népességstatisztika az ország népességszámának alakulásáról, nem, életkor és családi állapot szerinti összetételéről ad képet. Az évenkénti átlagos szaporodás, illetve fogyás (az alábbi képletben az r) százalékos értéke – általában két népszámlálási időpont közötti időszakra – a $P_n = P_0(1 + r)^n$ képlettel számolható. Az összefüggésben P_0 a népesség száma az időszak elején, P_n a népesség száma az időszak végén, n pedig az időszak hosszának években kifejezett értéke.
Magyarország népessége 2001-ben közelítőleg 10,2 millió fő, míg 2021-ben közelítőleg 9,7 millió fő volt.
Határozzuk meg az eltelt időszakban az évenkénti átlagos fogyás mértékét!

Megoldás

A képletbe helyettesítve a meglévő adatokat
$9{,}7 \cdot 10^6 = 10{,}2 \cdot 10^6(1 + r)^{20}$
adódik, melyből rendezéssel:
$\frac{9{,}7 \cdot 10^6}{10{,}2 \cdot 10^6} = (1 + r)^{20}$,
$0{,}95 = (1 + r)^{20}$.
Azt kell tehát megtudnunk, hogy melyik az a pozitív valós szám, amelynek 20. hatványa 0,95-dal egyenlő.

A megoldáshoz vezető műveletet 20. gyökvonásnak nevezzük, vagyis 0,95 annak a pozitív valós számnak a 20. hatványa, amely megegyezik 0,95-nak a 20. gyökével.

Jelöléssel: $\sqrt[20]{0{,}95} = 1 + r$.

Azt a számot, amelynek a huszadik hatványa 0,95, így jelöljük: $\sqrt[20]{0{,}95}$. Ennek közelítő értékét sok zsebszámológépen az $\sqrt[x]{\ }$ gomb segítségével kaphatjuk meg a 2 0, $\sqrt[x]{\ }$, 0 , 9 5 jelsorozattal.

(*Megjegyzés:* Egyes számológépek a $\sqrt[x]{\ }$ gomb helyett – a későbbiekben majd kiderül, hogy mi miatt – az $x^{1/y}$ gombot használják. Ezeken a 0 , 9 5, $x^{1/y}$, 2 0 jelsorozatot kell begépelni.)

A számológéppel kapott eredmény:

$\sqrt[20]{0{,}95} \approx 0{,}9974$,

így $0{,}9974 = 1 + r$,

$-0{,}0026 = r$,

ami azt jelenti, hogy a népesség átlagos évenkénti fogyása a kijelölt időszakban 0,26% (ez például 10 millió ember esetén 26 000 embert jelent).

ELMÉLET

A hatványozás során láttuk, hogy

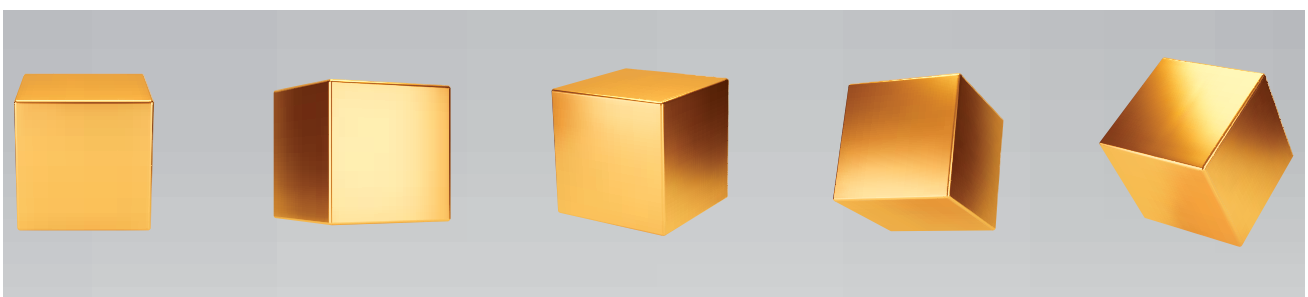
- minden valós szám páros kitevőjű hatványa nemnegatív, ezért páros kitevőjű gyököt nemnegatív valós számokra értelmezünk;
- minden valós szám páratlan kitevőjű hatványa olyan előjelű, amilyen maga a szám, ezért páratlan kitevőjű gyökvonást minden valós számra értelmezünk.

Az *n*-edik gyök fogalma

- Ha az a nemnegatív valós szám, és n 1-nél nagyobb páros természetes szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, melynek n-edik hatványa az a.
  Például:
  $\sqrt[4]{81} = 3$, mert $3^4 = 81$,
  $\sqrt[6]{0{,}015625} = 0{,}5$, mert $0{,}5^6 = 0{,}015625$.
- Ha az a tetszőleges valós szám, és az n 1-nél nagyobb páratlan természetes szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a valós számot, melynek n-edik hatványa az a.
  Például:
  $\sqrt[3]{-216} = -6$, mert $(-6)^3 = -216$,
  $\sqrt[5]{-0{,}03125} = -0{,}5$, mert $(-0{,}5)^5 = -0{,}03125$,
  $\sqrt[7]{128} = 2$, mert $2^7 = 128$.

Megjegyzések

- Az $\sqrt[n]{a}$ kifejezésben a az alap, n a gyökkitevő. ($n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$)
- A $\sqrt[2]{64}$ (második gyök 64) jelölés helyett a megszokott négyzetgyökjelet használjuk: $\sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = 8$.
- A $\sqrt[3]{64}$ -et harmadik gyök 64-nek olvassuk, de elterjedt a „köbgyök” 64 szóhasználat is: $\sqrt[3]{64} = 4$.
- A 0 pozitív egész kitevőjű gyökét is értelmezzük, mégpedig így: $\sqrt[n]{0} = 0$ ($n > 1$).



FELADAT

1. Add meg a definíció alapján a következő számokat!

a) $\sqrt{100}$; $\sqrt[3]{-1000}$; $\sqrt[3]{1\,000\,000}$; $\sqrt[6]{1\,000\,000}$

b) $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt[10]{1024}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

2. Add meg a zsebszámológéped segítségével a következő számok közelítő értékét két tizedesjegyre kerekítve!

a) $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{60}$; $\sqrt[3]{120}$; $\sqrt[3]{920}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{10\,000}$

b) $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[4]{60}$; $\sqrt[4]{120}$; $\sqrt[4]{920}$; $\sqrt[4]{1000}$; $\sqrt[4]{10\,000}$

3. A bűvös kocka térfogata 216 cm^3. Mekkora a felszíne?

4. Egy víztorony (hidroglóbusz) gömb alakú tartályának teljes térfogata 113 m^3.

a) Mekkora a gömb sugara?

b) Hány m^2 alumínium szükséges a burkolat elkészítéséhez?

(Az R sugarú gömb térfogatát a $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, felszínét az $A = 4\pi R^2$ képlettel számíthatjuk ki.)



5. Európa legnagyobb népsűrűségű országa Hollandia, ahol a szárazföldi területekre számolt népsűrűség közel 500 $\frac{\text{fő}}{\text{km}^2}$. A 3. kidolgozott feladatban megismert képlet alapján határozd meg az átlagos évenkénti népszaporodást az alábbi időszakokra, ha ismert, hogy

a) az ország népessége 1950-ben 10 millió fő volt, 2013-ban 16,78 millió fő;

b) az ország népessége 2014-ben 16,83 millió fő volt, 2021-ben 17,26 millió fő!

6. Az alábbi táblázat a Központi Statisztikai Hivatal demográfiai adatait mutatja, de néhány hiányzik.

Év	Népesség (ezer fő)	A növekedés/csökkenés átlagos évi mértéke %-ban, az előző adathoz viszonyítva
1910	7 612	
1920		0,482
1930	8 685	0,841
1941	9 316	0,64
1949	9 205	−0,15
1960		0,72
1970	10 322	0,357
1980	10 709	
1990	10 375	−0,316
2001	10 200	−0,1545

a) Határozd meg a hiányzó értékeket a beírt adatok ismeretében!

b) Beszélgessetek róla, mi lehet a magyarázata a népesség ilyen módon való alakulásának! Mi történik, ha ez a trend folytatódik?



HÁZI FELADAT

1. Add meg a definíció alapján a következő számokat!

a) $\sqrt{0{,}49}$ **c)** $\sqrt[3]{27}$ **e)** $\sqrt[3]{1}$

b) $\sqrt[4]{256}$ **d)** $\sqrt[5]{3^4 \cdot 3^6}$

2. Egy kocka térfogata 42 cm^3. Válaszd ki az alábbiak közül a kocka felszínét!

a) $6 \cdot \sqrt{42}$ cm^2

b) $6 \cdot \sqrt[3]{42}$ cm^2

c) $6 \cdot (\sqrt[3]{42})^2$ cm^2

3. (Érettségi feladat nyomán, 2014)
Vízi élőhelyek – az akváriumtól a Balatonig – egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat. Egy kerti tóban minden nap ugyanannyiszorosára növekedett az algával borított terület nagysága, míg végül a kezdetben 1,5 m^2-en észlelhető alga egy hét alatt teljesen beborította a 27 m^2-es tavat. Számítsd ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület!

RÁADÁS

Egy szám négyzetgyökének meghatározása tetszőleges pontossággal (számológép használata nélkül)

Számoljuk ki a 3346 négyzetgyökét!

1. Daraboljuk fel a számot „hátulról”, az egyes helyi értéktől kezdve kétjegyű számokra: **33 46**.
2. Az első vizsgálandó szám a **33**. Keressük meg azt a legnagyobb számot, amelynek négyzete nem nagyobb, mint *33*. Az *5* négyzete *25*, így kapjuk a fenti szám négyzetgyökének első számjegyét: *5*.
3. Vonjuk ki a *33*-ból az $5^2 = 25$-öt, eredményül 8 adódik, ez kerül a következő csoport két számjegye elé: ***846***.
4. Vegyük az előbb megkapott első számjegy dupláját, ami $2 \cdot 5 = 10$, és határozzuk meg azt a lehetséges legnagyobb ***n*** számjegyet, melyre az $\overline{10n}$ háromjegyű szám és az ***n*** szám szorzata nem nagyobb, mint *846*. Így $n = 7$ adódik. Ez lesz az eredeti szám négyzetgyökének második számjegye. (Mivel ennek a csoportnak a vizsgálatával eljutottunk az egyes helyi értékig, a kapott számjegy után kitesszük a tizedesvesszőt.)
5. Képezzük a $846 - 107 \cdot 7 = 97$ különbséget (ha ez a különbség *0*-nak adódik, akkor az eredeti szám négyzetgyöke egész szám)! Az eredményül kapott *97* kerül a következő csoport két számjegye elé: ***9700***.
6. Vegyük az eddig megkapott számjegyekből álló kétjegyű szám, az *57* dupláját, ami $2 \cdot 57 = 114$, és határozzuk meg azt a lehetséges legnagyobb *n* számjegyet, melyre az $\overline{114n}$ háromjegyű szám és az ***n*** szám szorzata nem nagyobb, mint *9700*. Ebből $n = 8$ lesz, így az eredeti szám négyzetgyökének következő (a tizedesvessző utáni első) számjegye ($57{,}8^2 = 3340{,}84$).

Ezt követően a lépések sorozata (az algoritmus) tetszőleges számjegyig folytatható a kívánt pontosságig.
Határozd meg a következő számjegyet az előbbi táblázat utolsó sorának kitöltésével!

Lépés	Csoport	Maradék és csoport	Duplázás, kivéve az első sorban	Szorzat képzése	A végeredmény számjegyei	Maradék
1.	**33**	**33**	$5^2 = 25$	–	5	$33 - 25 = 8$
2.	**46**	**846**	$2 \cdot 5 = 10$	$107 \cdot 7 = 749$	7	$846 - 749 = 97$
3.	**00**	**9700**	$2 \cdot 57 = 114$	$1148 \cdot 8 = 9184$	8	$9700 - 9184 = 516$
4.	**00**	**51 600**				

28 Racionális számok a kitevőben I.

BEVEZETŐ

Egy korábbi tanulmány szerint a világ népessége 2011. június végén közelítőleg 6,98 milliárd fő volt, és ez a szám évente körülbelül az 1,1%-ával növekedett akkor. Így az ENSZ becslései szerint a Föld lakosainak száma 2011. október végén lépte át a 7 milliárdot.

Ha t-vel jelöljük a 2011. június vége óta eltelt egész évek számát, akkor a világ népességét az $N(t) = 6{,}98 \cdot 1{,}011^t$ képlettel számolhatjuk (milliárd főben).

2011. június végétől 2011. október végéig azonban csak 4 hónap, azaz $\frac{1}{3}$ év telik el. Vajon használható-e a képlet a $t = \frac{1}{3}$ esetén? Mit jelenthet az, hogy $1{,}011^{\frac{1}{3}}$?



KIDOLGOZOTT FELADAT

A Bevezetőben említett modell szerint egyenlő időtartamok alatt ugyanannyiszorosára változik a népesség. Ha egy év alatt 1,011-szeres a növekedés, akkor hányszoros a növekedés $\frac{1}{3}$ év alatt?

Megoldás

Jelöljük x-szel, hogy hányszorosára nő a népesség $\frac{1}{3}$ év alatt. Ekkor a kezdeti népesség $\frac{1}{3}$ év múlva x-szeres, további $\frac{1}{3}$ év múlva már $(x \cdot x)$-szeres, és még további $\frac{1}{3}$ év múlva már $(x \cdot x \cdot x)$-szeres. Egy év alatt háromszor telik el az $\frac{1}{3}$ év, ezért a kezdeti népesség az x^3-szeresére nő.

Ezt kaptuk: $x^3 = 1{,}011$; és ebből: $x = \sqrt[3]{1{,}011} \approx 1{,}0037$.

Megjegyzés

A modell szerint tehát 2011. október végén a Föld népessége $6{,}98 \cdot 1{,}0037 \approx 7{,}006$ (milliárd fő) volt.

A gondolatmenet alapján értelmet adhatunk az $1{,}011^{\frac{1}{3}}$ kifejezésnek: $1{,}011^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}011} \approx 1{,}0037$.

Ez azt is jelenti, hogy $\left(1{,}011^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 1{,}011$.

ELMÉLET

Definíció: Ha a egy nemnegatív valós szám, és n egy 1-nél nagyobb természetes szám, akkor $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Például: $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$; $6{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$; $0{,}0016^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{0{,}0016} = 0{,}2$; $0^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{0} = 0$.

FELADAT

1. Számológép nélkül határozd meg a hatványok értékét! Töltsd ki a táblázatot!

$16^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$1000^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{2}}$	$81^{\frac{1}{4}}$

2. Add meg az alábbi hatványok és gyökös kifejezések értékét!

a)

$4^{\frac{1}{2}}$	$0{,}04^{\frac{1}{2}}$	$(8^2)^{\frac{1}{2}}$	$1024^{\frac{1}{10}}$	$0{,}125^{\frac{1}{3}}$

b)

$\sqrt{0{,}01}$	$\sqrt[3]{0{,}008}$	$\sqrt{0{,}81}$	$\sqrt[4]{0{,}0001}$	$\sqrt{1{,}21}$

3. A kerti tavacska felszínét tavirózsák is díszítik. Egy matematikai modell szerint, ha kezdetben 8 m^2-es felületet fednek be a tavirózsa levelei, akkor ez a terület hetenként mindig ugyanannyiszorosára, 1,3-szeresére növekszik.

a) Ha a megfigyelés kezdete óta eltelt hetek számát h-val jelöljük, akkor melyik összefüggés felel meg a fentiekben leírt modellnek?

A) $F(h) = 8 \cdot 1{,}3 \cdot h$; C) $F(h) = 8 \cdot (1{,}3 \cdot 7)^h$;

B) $F(h) = 8 \cdot 1{,}3^h$; D) $F(h) = 8 + 1{,}3^h$.

b) Egészítsük ki a modellt azzal a feltételezéssel, hogy a levelek által befedett terület minden nap a k-szorosára növekszik! Ezt figyelembe véve töltsd ki a következő táblázatot a füzetedben!

Eltelt napok száma	0	1	2	3	4	5	6	7
Befedett terület (m^2)	8	$8 \cdot k$						$8 \cdot 1{,}3 =$

c) Mennyi a táblázatban szereplő k értéke?

d) Mekkora a befedett terület a hét egyes napjain?

4. Egyes hangszerek esetében az egymást követő félhangok magasságának (frekvenciájának) hányadosa állandó. Egy adott alaphang frekvenciájának a nála egy oktávval, azaz 12 félhanggal magasabb hang frekvenciája éppen kétszerese.

a) Hányszorosa az alaphang frekvenciájának a rá következő félhang frekvenciája?

b) Hányszorosa az alaphang frekvenciájának az ún. kvint frekvenciája, ha a kvint 7 félhanggal magasabb az alaphangnál?

5. Add meg az alábbi hatványok értékét!

$(7^4)^{\frac{1}{2}}$	$(11^6)^{\frac{1}{3}}$	$(17^2)^{\frac{1}{2}}$	$(23^3)^{\frac{1}{3}}$	$(2^{12})^{\frac{1}{4}}$

HÁZI FELADAT

1. Számológép használata nélkül add meg az alábbi hatványok értékét!

a) $64^{\frac{1}{3}}$ **c)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ **e)** $\sqrt[10]{9^5}$

b) $0{,}027^{\frac{1}{3}}$ **d)** $(\sqrt{10})^4$ **f)** $1024^{\frac{1}{5}}$

2. Egy egyszerű modell szerint Magyarország népessége a 2000-es évek első évtizedében minden évben az előző évi népesség 0,2%-ával csökkent. A 2011-es népszámlálás adatai alapján 2011. október 1-jén, a népszámlálás „eszmei időpontjában” kerekítve 9 982 000 fő volt.

a) Mutasd meg, hogy a népszámlálástól számított x év elteltével a népesség $9982 \cdot 0{,}998^x$ ezer fő lesz!

b) Feltételezve, hogy a fenti tendencia folytatódott, számítsd ki az ország lakosainak számát 2013. január 1-jén (ezer főre kerekítve)!

3. Bizonyos sípokat megfújva azt hallhatjuk, hogy az alaphangon túl egy vagy több sokkal magasabb hang, az úgynevezett felharmonikus hangok is megszólalnak. (Az alaphangot szokás első felharmonikusnak nevezni.) Az egyvonalas zenei C hang frekvenciája közelítőleg 261,6 Hz. A hozzá tartozó második felharmonikus hang frekvenciája ennek kétszerese, azaz 523,2 Hz, a harmadik felharmonikus hang frekvenciája pedig háromszorosa, azaz körülbelül 784 Hz. Számold ki a számológéped segítségével, hogy hány félhang távolságra található ez a felharmonikus az alaphangtól! Használd az órai 4. feladat eredményét!

29 Racionális számok a kitevőben II.

BEVEZETŐ

Az előző órán láttuk, hogy a Föld népességét az $N(t) = 6{,}98 \cdot 1{,}011^t$ képlettel számolhatjuk ki (milliárd főben), ahol t-vel jelöltük a 2011. június vége óta eltelt évek számát. Vajon mit mutat ez az összefüggés a 2012. február végi, a 2011. június óta eltelt $\frac{2}{3}$ év utáni népességszámról? Mit jelenthet a $1{,}011^{\frac{2}{3}}$ kifejezés? Hányszorosára nőtt a modell szerint a Föld népessége 2012. február végére, $\frac{2}{3}$ év elteltével?

Foglaljuk táblázatba, hogyan alakult a világ népessége 2011. június vége és 2012. június vége között!

Időpont	2011. június	2011. október	2012. február	2012. június
Népesség (milliárd fő)	6,98	$6{,}98 \cdot x$	$6{,}98 \cdot x^2$	$6{,}98 \cdot x^3 = 6{,}98 \cdot 1{,}011$

Láttuk, hogy $x = 1{,}011^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}011}$. Február végére tehát x^2-szeresére, azaz $\left(\sqrt[3]{1{,}011}\right)^2$-szeresére nőtt a népesség. A modell szerint ezt a szorzótényezőt jelöljük a $1{,}011^{\frac{2}{3}}$ hatványalakkal. Ezt kaptuk: $1{,}011^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{1{,}011}\right)^2$.

ELMÉLET

Definíció: Ha $0 < a$, p és q pedig pozitív egész szám, de $q \neq 1$, akkor az $a^{\frac{p}{q}}$ hatványt így értelmezzük: $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Vagy másképp: $a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

Például: $32^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$.

Értelmezzük a negatív törtkitevőjű hatványokat is! Figyeld meg a következő átalakítást: $32^{-\frac{3}{5}} = \left(32^{\frac{3}{5}}\right)^{-1} = \frac{1}{32^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{8}$.

Definíció: A negatív törtkitevőjű hatvány egyenlő az ellentett kitevőjű hatvány reciprokával.

Például: $81^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{9}$.

FELADAT

1. Számítsd ki a következő hatványokat a törtkitevőjű hatványra adott értelmezés alapján!

a) $25^{\frac{3}{2}}$ **b)** $64^{\frac{3}{2}}$ **c)** $9^{\frac{3}{2}}$ **d)** $27^{\frac{2}{3}}$ **e)** $8^{\frac{5}{3}}$ **f)** $125^{\frac{4}{3}}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Igazoljuk, hogy

a) $28^{\frac{1}{3}} \cdot 28^{\frac{1}{3}} = 28^{\frac{2}{3}}$; **b)** $28^{\frac{2}{3}} \cdot 28^{\frac{4}{3}} = 28^2$.

Megoldás

a) $28^{\frac{1}{3}} \cdot 28^{\frac{1}{3}} = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^2$, ami a definíció miatt valóban $28^{\frac{2}{3}}$-nal egyenlő.

b) A törtkitevőjű hatványok definíciója miatt:
$28^{\frac{2}{3}} \cdot 28^{\frac{4}{3}} = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^4$.

Egy a szám egész kitevőjű hatványairól tanultuk, hogy $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$.

Most $a = 28^{\frac{1}{3}}$.

Ezért $\left(28^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^4 = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^{2+4} = \left(28^{\frac{1}{3}}\right)^6$.

Ez pedig – szintén a definíció miatt – valóban $28^{\frac{6}{3}}$-nal, vagyis 28^2-nel egyenlő.

ELMÉLET

Az egész kitevőjű hatványokra már megfogalmaztuk (és pozitív egész kitevőjű hatványok esetén bizonyítottuk is) a hatványozás azonosságait.
Bizonyítható, hogy ezek változatlan formában érvényben maradnak a pozitív számok racionális kitevőjű hatványai esetében is (azaz érvényesül az úgynevezett **permanenciaelv**).
Tehát ha a, b pozitív valós számok, továbbá m és n racionális számok, akkor

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Például:
$8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{5}{3}} = 2^5 = 32$ vagy $6{,}25^{\frac{1}{3}} \cdot 6{,}25^{\frac{1}{6}} = 6{,}25^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 6{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

FELADAT

2. Írd fel egyetlen hatványként!

a) $(\sqrt[3]{10})^6$; $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6$; $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$; $16^{\frac{3}{2}} \cdot 16^{-1}$

b) $\left(4^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{6}{7}}$; $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{5}{7}} \cdot 5^{-\frac{5}{7}}$; $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$

3. Figyeld meg a következő átalakításokat:
$\sqrt[15]{7^6} = (7^6)^{\frac{1}{15}} = 7^{\frac{6}{15}} = 7^{\frac{2}{5}} = (7^2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$.
Ennek mintájára írd fel kisebb gyökkitevővel a $\sqrt[8]{6^2}$; $\sqrt[20]{3^{10}}$; $\sqrt[36]{7^{54}}$ számokat!

4. Mutasd meg, hogy az alábbi műveletek eredménye egész szám! A feladat megoldásához ne használj számológépet!

$27^{\frac{4}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $36^{0,4} \cdot 36^{0,6}$; $5^{1,8} \cdot 25^{-0,4}$

5. Írd a kifejezéseket egyetlen törtkitevős hatványalakba!

a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{10^3} \cdot \sqrt[3]{10}$ **c)** $\left(\sqrt[6]{3^{\frac{2}{5}}}\right)^{10}$

b) $2^{\frac{-4}{5}} \cdot 4^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt[10]{0{,}5^4}$

HÁZI FELADAT

1. A hatványozás azonosságainak felhasználásával végezd el a következő számításokat!

a) $7^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{8}{5}}$ **c)** $(225 \cdot 196)^{\frac{1}{2}}$ **e)** $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$

b) $\frac{0{,}5^{\frac{9}{4}}}{0{,}5^{\frac{5}{4}}}$ **d)** $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ **f)** $4^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$

2. Végezd el a következő számításokat, és az eredményt írd egyetlen hatvány formájában!

a) $\sqrt[18]{3^6}$ **d)** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^9$

b) $\sqrt[4]{3^8}$ **e)** $\left(\sqrt[5]{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt[5]{7^2} \cdot 7^{\frac{1}{5}}$ **f)** $\left(\sqrt[4]{8}\right)^{\frac{2}{3}}$



30 Gyakorlás

FELADAT

1. Zsebszámológép használata nélkül döntsd el, melyik a nagyobb!

a) $4^{0,5}$ vagy $2^{0,25}$

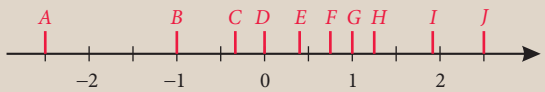
b) $3^5 \cdot 3^{-8}$ vagy $\frac{1}{27^2}$

c) $25^{\frac{3}{2}}$ vagy $27^{\frac{2}{3}}$

d) 3^{-2} vagy $16^{-\frac{3}{4}}$

2. Az alábbiak közül melyik számot jelölik az egyes betűk a számegyenesen?

A számegyenesen lévő egyik betűhöz nem tartozik szám a felsoroltak közül. Írd fel a hiányzó számot hatványformában úgy, hogy az alap és a kitevő is negatív előjelű legyen!



a) $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}$

b) -3^0

c) $\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[10]{1024}}$

d) $49^{\frac{1}{6}}$

e) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{2^{-4}}$

f) $\sqrt{16 \cdot 10^{-2}}$

g) $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^{-1}$

h) $\pi^0 - 2^4 \cdot 4^{-2}$

i) $\frac{7^{3,5} \cdot 7^{-5}}{\sqrt{7^{-3}}}$

3. A 2-nek hányadik hatványával egyenlő?

a) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt{2^{-3}}$

b) $32^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{-128}\right)^{-1}$

c) $\frac{3^6 \cdot 9^{-3}}{\pi^0}$

d) $\frac{4^{1,5} \cdot 8^{-2}}{\sqrt{2^{-1}}}$

4. Ha $5^k = 3$, akkor mennyi a pontos értéke az alábbi kifejezéseknek?

a) 5^{-k}

b) 5^{2k}

c) 5^{k+1}

d) 5^{3k-2}

e) $5^{\frac{k}{2}-2k}$

5. Ha $7^k = 4$ és $7^m = 5$, akkor mennyi a pontos értéke az alábbi kifejezéseknek?

a) 7^{k+m}

b) 7^{k-m+2}

c) 7^{3k-2m}

d) $7^{\frac{m}{2}-k}$

e) $7^{\frac{2k-m}{3}}$

HÁZI FELADAT

1. Zsebszámológép használata nélkül döntsd el, melyik a nagyobb!

a) 3^5 vagy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$

b) $4^7 \cdot 8^{-6}$ vagy $4^6 \cdot 8^{-7}$

c) $\frac{3^7}{9^{-2}}$ vagy $\frac{27^4}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{5^7 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[4]{125^{-3}}}$ vagy $\frac{25^3 \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{5^{-2}}}$

2. Írd fel negatív hatványkitevők és gyökjelek használata nélkül az alábbi kifejezéseket! ($a \in \mathbf{R}^+$)

a) $a^{-1} + a^{-2}$

b) $a^2 \cdot a^{-1} \cdot a^{-3} \cdot \sqrt[5]{a^{-2}}$

c) $\frac{a^4 \cdot a^{-6}}{\sqrt[3]{a}}$

d) $\frac{a^3 \cdot a^{-3} \cdot \sqrt[6]{a^{-5}}}{a^5 \cdot a^{-3} \cdot \sqrt[3]{a^{-2}} \cdot \sqrt[3]{a}}$

3. Írd fel egyetlen gyökös kifejezésként! ($b \in \mathbf{R}^+$)

a) $b^5 \cdot b^{-2,5} \cdot \sqrt[3]{b^{-2}}$

b) $\dfrac{b^{0,4} \cdot b^{-1}}{\sqrt[5]{b}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{b^{-1}\sqrt[4]{b}}}{\sqrt[3]{b}}$

d) $\dfrac{\sqrt[6]{b^{-1}\sqrt[3]{b}}}{(b^{1,2} \cdot b^{-2})^{0,5}}$

4. Ha $10^k = 7$, akkor mennyi a pontos értéke az alábbi kifejezéseknek?

a) 10^{k+3}

b) 10^{4k}

c) 10^{-2k}

d) $10^{\frac{1}{2}-k}$

e) $10^{\frac{k-2}{5}}$

RÁADÁS

1. Adottak az

$A = (-2)^{3^4}$, $C = (-2^3)^4$, $E = -2^{(-3)^{-4}}$, $G = (2^3)^{-4}$

$B = 2^{3^4}$, $D = 2^{(-3)^4}$, $F = 2^{3^{(-4)}}$,

számok.

Számológép használata nélkül állítsd a számokat növekvő sorrendbe!

2. Számológép használata nélkül határozd meg, hogy

a) a 3-nak hányadik hatványa a $(3^3)^3$ köbgyöke;

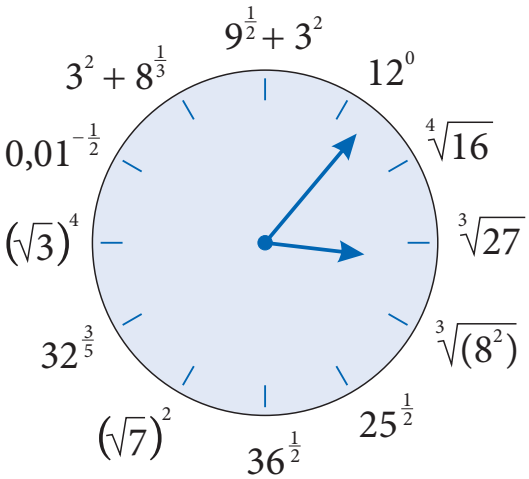
b) a 3-nak hányadik hatványa a 3^{3^3} köbgyöke;

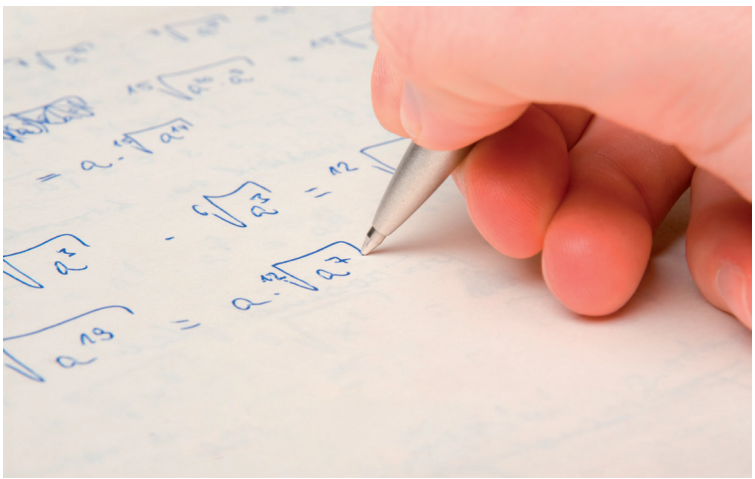
c) a 3-nak hányadik hatványa az $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$ köbgyöke;

d) a 2-nek hányadik hatványa a $(2^4)^8$ negyedik gyöke;

e) a 2-nek hányadik hatványa a 2^{4^8} negyedik gyöke;

f) a 2-nek hányadik hatványa az $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{8}}$ negyedik gyöke!





31 Pénzügyi számítások

BEVEZETŐ

Egy családban a nagyszülők unokájuk jövőjéről gondolkoznak:
– Most még csak 8 éves lesz, de egyszer majd lesz 18 is!
– Igaz, és ha segíteni akarjuk, azt jobb most rögtön elkezdeni. Ha 500 000 forintot betennénk a bankba 6%-os kamatos kamatra, akkor 10 év alatt talán meg is duplázódna a betett pénzösszeg!
Számítsuk ki, hány forint lenne a lejáratkor a bankbetéten, ha 500 000 forintot évi 6%-os kamatos kamatra és 10 éves futamidőre kötnénk le! Valóban megduplázódna az összeg?

Megoldás
Az évi 6%-os kamatos kamat azt jelenti, hogy a betét év eleji értékéhez minden év végén hozzáadják a 6%-át. Ezt a megnövelt értéket úgy is megkaphatjuk, hogy az év eleji értéket megszorozzuk 1,06-dal.
Ki kell tehát számítanunk az

$$500\,000 \cdot \underbrace{1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot \ldots \cdot 1{,}06}_{10 \text{ tényező}} = 500\,000 \cdot 1{,}06^{10}$$

értéket, ami egész forintra kerekítve 895 424 Ft.
Az eredeti összeg tehát nem duplázódna meg.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Legalább mekkora kamatláb esetén duplázódna meg 10 év alatt a kezdeti 500 000 Ft-os tőke?

Megoldás
Meg kell oldanunk az $500\,000 \cdot x^{10} = 1\,000\,000$ vagy az ezzel egyenértékű $x^{10} = 2$ egyenletet.
Ha az x pozitív valós szám tizedik hatványa 2, akkor az x értékét gyökvonással kaphatjuk meg:
$x = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$.
Tehát azt kapjuk, hogy évi kb. 7,2%-os kamatos kamat mellett duplázódik meg a kezdeti összeg 10 év alatt.

2. Számológép segítségével adjunk becslést arra, hogy évi 6%-os kamatláb mellett legalább hány év alatt duplázódna meg a kezdeti 500 000 Ft-os tőke!

Megoldás
Meg kell oldanunk az $500\,000 \cdot 1{,}06^x = 1\,000\,000$ vagy a vele egyenértékű $1{,}06^x = 2$ egyenletet. Egyelőre ezt csak próbálgatással tudjuk megoldani. Az x értéke nyilvánvalóan egy 10-nél nagyobb egész szám. $1{,}06^{11} \approx 1{,}898$, $1{,}06^{12} \approx 2{,}012$, azaz 11 év alatt még nem, de 12 év alatt már több mint duplájára nőne az eredeti összeg.

ELMÉLET

Bankbetétek esetében a tőke, a kamatláb és az idő játszik szerepet.

Ha A forintot n évre (ciklusra) kötünk le p%-os évi kamatláb esetén, akkor a megnövekedett összeget az $A_n = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ képlettel számíthatjuk ki.

Ha A-t és p-t ismerjük, akkor itt egyszerű hatványozási és szorzási feladatról van szó. Ha azonban az n-et keressük, akkor egyelőre a próbálgatás módszerére kell szorítkoznunk.

FELADAT

1. A benzin árát 5-ször egymás után felemelték úgy, hogy az új ár minden alkalommal az előző ár 106%-a lett.
a) Hányszorosára nőtt a benzin ára az első áremelés előtti árhoz viszonyítva?
b) Hány százalékkal nőtt a benzin ára az első áremelés előtti árhoz viszonyítva?

2. 600 ezer forintot fektettünk be 3 évre, évi 6,5%-os kamatos kamatra.

a) Három év után mennyivel nőtt a befektetett pénzünk?

b) A 3 év eltelte után kivesszük a pénzünket, s ekkor 15% kamatadót számolnak fel. Ez azt jelenti, hogy a kamat (növekmény) 15%-át adóként kell befizetni az államnak. Ezt csak akkor számolják fel, amikor kivesszük a pénzt, addig a kamatozást nem befolyásolja. Mennyi pénzt kapunk kézhez, ha nincs más költség?

3. Hány százalékos kamatos kamat esetén nőne 10 év alatt az eredeti tőke

a) a másfélszeresére;

b) a kétszeresére;

c) a háromszorosára?

4. Tóth úr egy 3,5 millió forintos új autó vásárlását fontolgatja.

a) Hány forintot veszít az értékéből 3 év alatt az autó, ha elfogadjuk, hogy értéke minden évben az előző évi értékének 20%-ával csökken?

b) Ha Tóth úr egy 4 éves használt autót venne 2,5 millió forintért, akkor ennek hány forinttal csökkenne az értéke 3 év alatt (feltételezve, hogy az autó értéke minden évben az előző évi értékének 12%-ával csökken)?

c) Mennyi lehetett a b)-beli használt autó értéke új korában, ha 3 éves koráig évente 20%-kal, majd azt követően évente 12%-kal csökkent az értéke, s jelenlegi ára 2,5 millió Ft?

5. (Érettségi feladat, 2011)
Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint. Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés?

HÁZI FELADAT

1. Befektettünk 1,5 millió forintot.

a) Ha minden évben 18%-os gyarapodást érünk el az előző évi állományhoz képest, akkor 5 év alatt mennyire szaporodik fel a tőkénk?

b) Legalább hány százalékos éves gyarapodás esetén garantált az, hogy 5 év alatt megduplázódik a tőkénk? Használd a számológépedet!

c) Ha minden évben 18%-os gyarapodást érünk el, akkor hány év kell ahhoz, hogy a tőkénk megháromszorozódjék? Számológéped segítségével keresd meg a választ!

2. **a)** Hány év alatt nőne kétszeresére a pénzünk éves 7,5%-os kamatláb esetén?

b) Ha a pénzünk kivételekor a kamatra számított 16% kamatadót kell fizetni az államnak, akkor hány év után duplázódna meg a pénzünk éves 7,5%-os kamatláb esetén?

3. Egy ravasz üzlettulajdonos a kezdetben 1000 Ft-os nadrág árát hetente az előző heti ár 5%-ával növeli, gondolván, hogy ezt úgysem veszik észre. Az alább megadott táblázat segítségével vizsgáld meg, hogy hányszorosára nőtt, illetve mennyivel nőtt a nadrág ára az eredeti 1000 forintos árhoz képest!

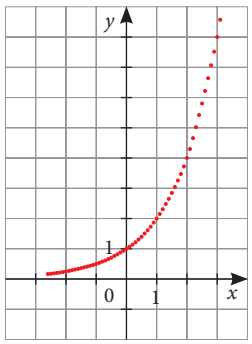
Ennyi hét után	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Ennyiszeresre nőtt az ár				≈ 2,65						
Ennyivel nőtt az ár (Ft)		≈ 630								

32 Exponenciális függvények

BEVEZETŐ

Számológép segítségével ábrázoltuk azt az $x \mapsto 2^x$ hozzárendelési szabályú függvényt, amelynek értelmezési tartománya a $\{-2{,}6; -2{,}5; -2{,}4; \ldots; 3{,}1\}$ halmaz.

A grafikon 58 pontból áll. A függvény szigorúan monoton növekvő, értékkészlete 58 elemű halmaz, amelynek a legkisebb eleme a $2^{-2,6} \approx 0{,}165$, a legnagyobb eleme pedig a $2^{3,1} \approx 8{,}574$.



Ha az $x \mapsto 2^x$ hozzárendelési szabállyal másik értelmezési tartományon értelmezett függvényt tekintünk, akkor az előbb megfogalmazott jellemzők közül biztosan nem változik meg az, hogy a kapott függvény szigorúan monoton növekvő lesz.

Az eddig értelmezett műveletek csak azt teszik lehetővé, hogy az $x \mapsto 2^x$ hozzárendelési szabályhoz a racionális számok halmazának valamely részhalmazát (esetleg magát a racionális számok halmazát) válasszuk értelmezési tartományként.

Felsőbb matematikai ismeretek birtokában a **hatvány fogalma** irracionális kitevőkre egyértelműen kiterjeszthető úgy, hogy a kiterjesztés megőrzi a szigorú monotonitást, és az ismert azonosságok érvényben maradnak.

Például:

Tudjuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám, és $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ igaz.

A $2^{\sqrt{2}}$ hatványt úgy kell értelmezni, hogy $2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$ igaz legyen, azaz $2{,}665 < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}667$ teljesüljön.

Természetesen nemcsak a példánkban megemlített határokra, hanem bármely két racionális számra is teljesülnie kell, hogy ha $r_1 < \sqrt{2} < r_2$ igaz, akkor $2^{r_1} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{r_2}$ is teljesül.

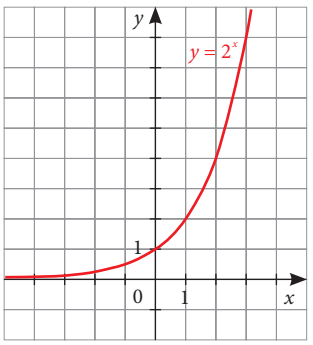
Számold ki számológép segítségével $2^{\sqrt{2}}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal!

ELMÉLET

A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2^x$ függvényt kettes alapú **exponenciális függvénynek** nevezzük. A bevezetésben említett értelmezés következménye, hogy ennek a függvénynek a grafikonja folytonos vonallal rajzolható.

A kettes alapú exponenciális függvény legfontosabb tulajdonságai a következők:

- értelmezési tartománya a valós számok halmaza ($D_f = \mathbf{R}$);
- értékkészlete a pozitív valós számok halmaza ($R_f = \mathbf{R}^+$);
- szigorúan monoton növekvő;
- nincs szélsőértéke, azaz nincs legnagyobb és nincs legkisebb értéke;
- nincs zérushelye.



FELADAT

1. Ábrázold 10-10 pont megadásával a következő függvényeket, és add meg a legfontosabb (elméleti részben felsorolt) tulajdonságaikat is!

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3^x$ **b)** $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 0{,}5^x$ **c)** $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 1{,}5^x$

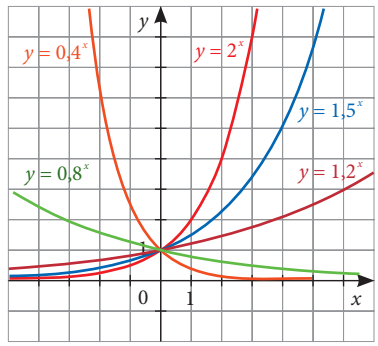
d) Az ábrázolt függvények segítségével határozd meg, melyik két egész szám közé esnek a következő számok! Zsebszámológéppel ellenőrizd az eredményeket! $3^{\frac{7}{8}}$; $3^{-\frac{3}{5}}$; $0{,}5^{-\frac{5}{4}}$; $1{,}5^{\frac{3}{2}}$

ELMÉLET

Definíció: Ha a pozitív szám, de nem egyenlő az 1-gyel, akkor a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvényt a **alapú exponenciális függvénynek** nevezzük. (Az exponens latin szó jelentése: hatványkitevő; a függvény exponenciális, ha a független változó a hatványkitevőben van.)

Az a alapú exponenciális függvény legfontosabb tulajdonságai:

- értékkészlete a pozitív valós számok halmaza ($R_f = \mathbf{R}^+$);
- szigorúan monoton függvény: ha $1 < a$, akkor az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, ha $0 < a < 1$, akkor szigorúan monoton csökkenő;
- nincs szélsőértéke;
- nincs zérushelye.



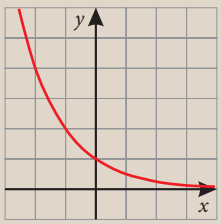
Megjegyzés

Az $x \mapsto 1^x$ függvény mindegyik függvényértéke 1, tehát konstans függvény. Az exponenciális függvények szinte minden lényeges tulajdonságukban különböznek ettől a függvénytől. Emiatt – bár formailag elfogadható lenne – ezt a függvényt nem soroljuk az exponenciális függvények közé.

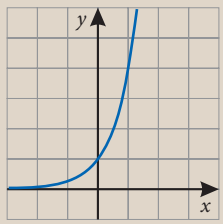
FELADAT

2. Az ábrákon exponenciális függvények grafikonja látható. Add meg a függvények hozzárendelési szabályát, ha a rajzokon a négyzetháló négyzeteinek oldalhossza 1 egység!

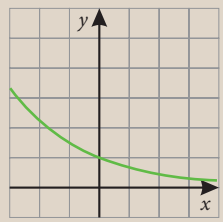
a)



b)



c)



3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^x$, $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$, $k\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$

HÁZI FELADAT

1. Adott az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 0{,}25^x$.

a) Számítsd ki a következő függvényértékeket!
$f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(-5)$, $f(5)$.

b) Milyen kapcsolat van az $f(a)$ és az $f(-a)$ függvényértékek között?

c) Ábrázold az f függvényt!

d) Olvasd le a függvénygrafikonról a $0{,}25^x = 3$ egyenlet megoldását! Ellenőrizd a megoldásodat számológép segítségével!

2. Adottak az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3^x$,
$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 9^x$
exponenciális függvények.

Az előbbiek közül melyiknek a grafikonjára illeszkednek az alábbi pontok?

$P_1\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ $P_3\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ $P_5(9; 1)$ $P_7\left(\frac{1}{3}; \sqrt[3]{3}\right)$
$P_2\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ $P_4(1; 0)$ $P_6(0; 1)$ $P_8(-2; 9)$

3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a megadott exponenciális függvényeket!

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 5^x$, $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 5^{-x}$

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \left(\frac{1}{5}\right)^x$,

Megoldásaidat függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

33 Exponenciális folyamatok

BEVEZETŐ

A korábbiakban vizsgáltuk, hogy a bankba tett pénzünk értéke hogyan „függ az időtől”, illetve megnéztük azt is, hogyan változik a Föld népessége „az idő függvényében”. Az időben lejátszódó folyamatok matematikai leírásakor általában olyan függvényeket alkalmazunk, amelyeknek az értelmezési tartománya a folyamat lejátszódása közben eltelt idő mérőszámát tartalmazza.

Például ha a bankba tett 250 ezer forint évi 4%-os kamatos kamattal gyarapszik, akkor t év múlva a bankszámlánkon lévő pénz mennyisége $250 \cdot 1{,}04^t$ ezer forint lesz. Ebben az esetben a $t \mapsto 250 \cdot 1{,}04^t$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényről van szó, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmazának egy részhalmaza.

Mivel a szóban forgó függvénynél az $x \mapsto 1{,}04^x$ növekedő exponenciális függvény a kiindulási alap, ezért azt szoktuk mondani, hogy a bankba tett pénz az idő múlásával exponenciálisan növekszik (ha a kamatfeltételek nem változnak).

ELMÉLET

Ha egy mennyiség időbeli változását a $t \mapsto N_0 \cdot k^t$ (N_0 és k pozitív valós számok, $k \neq 1$, t valós szám) hozzárendelési szabálynak megfelelő függvény adja meg, akkor azt mondjuk, hogy a mennyiség exponenciálisan változik az időben. Ha a függvény növekedő, akkor a vizsgált mennyiség exponenciálisan növekszik, ha a függvény csökkenő, akkor exponenciálisan csökken az időben.

Az N_0 számot **kezdeti érték**nek is szokás nevezni, ez adja meg ugyanis a $t = 0$ helyen (például időbeli változások felírásakor a vizsgálat kezdetén) felvett értéket. A k számot **növekedési tényező**nek szoktuk nevezni, ez időbeli változások esetén szemléletesen azt adja meg, hogy egységnyi idő elteltével hányszorosára változik a vizsgált mennyiség.

Ha $1 < k$, akkor a fenti hozzárendeléssel megadott exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő.
Ha $0 < k < 1$, akkor a fenti hozzárendeléssel megadott exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő.

Például:
$E(t) = 0{,}38 \cdot 1{,}22^t$ egy exponenciálisan növekvő folyamatot jellemez.
$F(t) = 5{,}67 \cdot 0{,}79^t$ egy exponenciálisan csökkenő folyamatot jellemez.
$G(t) = 3{,}8 \cdot 1{,}25^{-t}$ egy exponenciálisan csökkenő folyamatot jellemez, ugyanis $1{,}25^{-t} = (1{,}25^{-1})^t = 0{,}8^t$.

FELADAT

1. Exponenciálisan növekvő vagy csökkenő folyamatot írnak le a következő hozzárendelések? Mennyi a növekedési tényező?

a) $t \mapsto 4^t$
b) $t \mapsto 4^{-t}$
c) $t \mapsto 4^{2t}$
d) $t \mapsto 4^{\frac{t}{2}}$

2. Exponenciálisan növekvő vagy exponenciálisan csökkenő folyamatot írnak le a következő hozzárendelések? Mennyi a kezdeti érték és a növekedési tényező?

a) $t \mapsto 6{,}2 \cdot 1{,}15^t$
b) $t \mapsto 6{,}2 \cdot 1{,}15^{-2 \cdot t}$
c) $t \mapsto 10^{23} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot t}$
d) $t \mapsto 6 \cdot 10^{23} \cdot 2^{3 \cdot t}$
e) $t \mapsto 3{,}8 \cdot 0{,}8^{-t}$
f) $t \mapsto 2{,}1 \cdot 5^{-1{,}2 \cdot t}$

3. Az osztódással szaporodó baktériumok száma – rövid alkalmazkodási periódus után, és mindaddig, amíg ezt a környezet lehetővé teszi – exponenciális növekedést mutat.



Egy 1 ml-es laboratóriumi mintában a kutatók egy adott időpontban körülbelül 120 millió baktériumot számoltak, egy óra múlva 180 milliót.

a) Írj fel egy olyan képletet, amely az első mérés idejétől eltelt idő függvényében megadja a baktériumok számát!

b) Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés után 3 órával, illetve fél órával?

c) Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés előtt 3 órával?

4. Bár Magyarország lakosainak számáról a 2001-es és a 2011-es népszámlálás közötti időszakban nem állt rendelkezésünkre teljesen pontos adat, egy modell szerint szerint az ország lélekszáma az adott időszakban minden évben az előző évi szám 0,2%-ával csökkent. Az alábbi állítások közül válaszd ki az(oka)t, amely(ek) elméletileg helyesen becsüli(k) a 2006-os adatot! A helytelen számítások esetében magyarázd meg, mi a hiba!

A) 2001-től 2006-ig a népesség évente 0,2%-kal, azaz összesen 1%-kal csökkent.

B) A népesség minden évben az előző évi 0,998-szerese, a 2006-os lélekszám tehát a 2001-es adat $0{,}998^5$-szerese.

C) A 2006-os adatot a 2011-esből $0{,}998^{-5}$-nel való szorzással kaphatjuk meg, mivel 2006 öt évvel 2011 előtt volt.

D) Egy adott évben a népesség a következő évi népesség 100,2%-a, ezért a 2006-os lélekszám a 2011-esnek $1{,}002^5$-szerese.

HÁZI FELADAT

1. Exponenciálisan növekvő vagy csökkenő folyamatot írnak le a következő hozzárendelések? Mennyi a kezdeti érték és a növekedési tényező?

a) $t \mapsto 2{,}25 \cdot 5^{-t}$

b) $t \mapsto 3 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}4^{-t}$

c) $t \mapsto 0{,}0134 \cdot 0{,}5^{2t}$

d) $t \mapsto 1270 \cdot 0{,}3^{\frac{t}{2}}$

2. Egy exponenciális folyamatban a kezdeti érték 360 000, egy óra múlva ez a mennyiség 345 000.

a) Írj fel egy hozzárendelési szabályt, amely leírja a folyamatot, és amelyben az időt (t) órában mérjük!

b) A kezdeti értéktől számítva 3,5 óra múlva mekkora értéket mérhetünk?

3. Egy város lakossága 1900-ban 20 ezer fő volt, majd 2000-ig a $t \mapsto 20 \cdot 1{,}026^t$ szabálynak megfelelően exponenciálisan növekedett (itt t az 1900 óta eltelt évek számát jelöli).

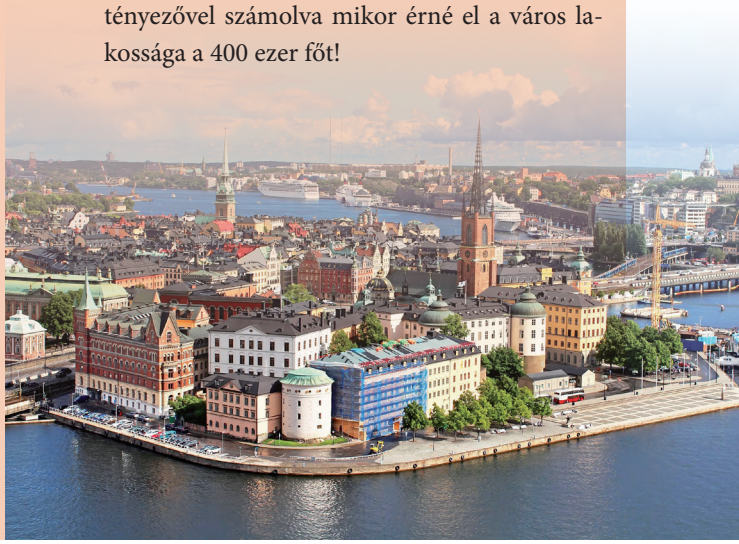
a) Mennyi lett a lakosság 2000-ben?

b) Hány lakosa volt ennek a városnak 1920-ban, 1940-ben, 1960-ban és 1980-ban?

c) Mennyi lett volna a város lakossága 1920-ban, 1940-ben, 1960-ban és 1980-ban, ha a lakosság száma lineáris növekedéssel érte volna el az a)-ban kiszámított értéket?

d) Készíts táblázatot és grafikont a b) és a c) feladat eredményei alapján!

e) Akár a grafikon, akár a számológéped segítségével becsüld meg, hogy ezzel a növekedési tényezővel számolva mikor érné el a város lakossága a 400 ezer főt!



34 Felezési idő

BEVEZETŐ

Apa egyik reggel belázasodott. A háziorvos tanácsára délben bevett egy lázcsillapítót. Este a nagyszülők érkeztek vendégségbe a családhoz, Gyula papa egy üveg bort hozott a felnőtteknek.
– Nem lehet, sajnálom, pedig szívesen megkóstolnám – mondta apa. – Délben bevettem egy lázcsillapítót, és arra nem szabad alkoholt inni.
– Meddig nem ihatsz bort? – kérdezte kíváncsian a fia.
– Amíg ki nem ürül a gyógyszer a szervezetemből.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A szervezetünkbe juttatott bizonyos gyógyszerek mennyisége az idő függvényében exponenciálisan csökken. A csökkenés mértéke a gyógyszertől, de a szervezettől is függ.
Egy kísérlet során megállapították, hogy a lázcsillapító hatóanyagának mennyisége a bevételtől számított t óra múlva az $m(t) = m_0 \cdot 0{,}83^t$ függvénnyel írható le, ahol m_0 jelenti a kezdeti mennyiséget. (Az adott lázcsillapítónál egy darab tabletta esetén ez 500 mg metamizol-nátrium.)

a) Vizsgáljuk meg, hogy az 500 mg hatóanyagot tartalmazó tabletta hány óra elteltével veszíti el a hatóanyag-mennyiség felét!

b) Vizsgáljuk meg ugyanezt abban az esetben is, ha a tablettát eltörve csak egy 300 mg hatóanyagot tartalmazó darabot szedünk be!

Megoldás

a) Írjuk fel a problémát egyenlet formájában!
A vizsgált függvény: $m(t) = m_0 \cdot 0{,}83^t$. Azt a t értéket keressük, amelyre igaz, hogy a kezdeti 500 mg hatóanyagból már csak 250 mg maradt meg.
Tehát: $250 = 500 \cdot 0{,}83^t$.
Mindkét oldalt 500-zal osztva: $0{,}5 = 0{,}83^t$.
Határozzuk meg t értékét minél pontosabban!
Néhány t értéket behelyettesítve:
$0{,}83^2 \approx 0{,}689$; $0{,}83^3 \approx 0{,}572$; $0{,}83^4 \approx 0{,}474$;
azaz 4 óra után már csak valamivel kevesebb mint a hatóanyag fele marad a szervezetünkben. 3 óránál több és 4 óránál kevesebb idő elteltével feleződik tehát a hatóanyag mennyisége.
Ennél pontosabb eredményt kaphatunk, ha t helyére nem kizárólag egész számokat, hanem az előző becsléshez közeli racionális számokat helyettesítünk be. Erről egy táblázatot is készíthetünk:

t	3,5	3,6	3,7	3,8
$0{,}83^t$	0,521	0,511	0,502	0,493

A táblázat alapján nagyjából 3,8 óra a feleződéshez szükséges idő. További közelítést is végezhetünk:

t	3,71	3,72	3,73
$0{,}83^t$	0,501	0,500	0,499

Tehát három jegy pontossággal azt mondhatjuk, hogy a bevételtől számítva 3,72 óra elteltével ürül ki a szervezetből a hatóanyag fele.

b) A kezdeti érték ezúttal 300 mg. A megoldandó egyenlet: $150 = 300 \cdot 0{,}83^t$. Az egyenlet mindkét oldalát 300-zal osztva ismét a $0{,}5 = 0{,}83^t$ egyenlethez jutunk. Az előző részben felírt táblázatból adódik, hogy $t \approx 3{,}72$ óra a megoldás.
Vegyük észre, hogy a $0{,}5 = 0{,}83^t$ egyenlet közvetlenül is felírható a feladatból. A függvény hozzárendelési szabályában a $0{,}83^t$ érték éppen azt jelenti, hogy ennyiszeresére változott t idő elteltével a kezdeti hatóanyag mennyisége. Mi azt a t értéket keressük, amikor ez a változás feleződés, tehát 0,5-szeres változás. Ezt fejezi ki a fent leírt egyenlet.
Kijelenthetjük tehát, hogy függetlenül a kezdeti érték mennyiségétől a hatóanyag feleződéséhez szükséges idő 3,72 óra. Ezt az időtartamot a hatóanyag **felezési idejének** szoktuk nevezni.

FELADAT

1. A Bevezetőben leírt példa, valamint a kidolgozott feladat adatainak figyelembevételével add meg a választ az alábbiakra!

a) Számold ki, hogy ha apa pontban délben vette be a lázcsillapítót, akkor a hatóanyag hány %-a volt még a szervezetében este hét órakor!

b) Hány óra elteltével csökken a hétórai mennyiséghez képest felére a hatóanyag?

c) Körülbelül mikor marad 5 mg-nál kevesebb hatóanyag a szervezetben?

d) Az eredeti, 500 mg mennyiségű hatóanyaghoz viszonyítva mennyi idő alatt csökken a hatóanyag mennyisége a nyolcadára, tizenhatodára?

2. Egy szerszámgép értéke exponenciálisan csökken, az érték felezési ideje 4,5 év. Hány év alatt csökken az értéke az eredetinek a 12,5%-a alá?

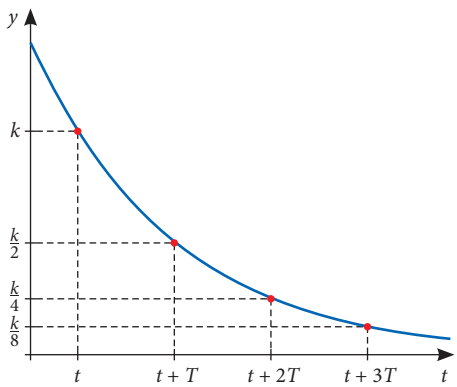
ELMÉLET

Az időben exponenciálisan csökkenő mennyiségeknél gyakran használt fogalom a **felezési idő**. Ez azt az időtartamot jelenti, amely alatt a vizsgált mennyiség értéke a kezdeti érték felére csökken. A felezési időt legtöbbször T-vel jelölik. Tanulmányozd a mellékelt grafikont!

Megjegyzések

– A T a vizsgált folyamatra jellemző állandó szám, vagyis nem függ a kezdeti értéktől.

– A felezési idő fogalma fontos és gyakran használatos a radioaktivitás vizsgálatakor.



FELADAT

3. Adott néhány exponenciális folyamatot leíró hozzárendelési szabály. A képletekben t jelöli az első méréstől eltelt időt, órában mérve. Állapítsd meg, menynyi a felezési idő!

a) $f(t) = 340 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

b) $g(t) = 2{,}4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

c) $h(t) = 54 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}$

4. Az elhalt szerves anyagokban a radioaktív szénatomok (^{14}C) száma az időben exponenciálisan csökken. A radioaktív (szén) ^{14}C izotóp felezési ideje 5730 év. A kezdetben $6 \cdot 10^{12}$ számú ^{14}C atomot tartalmazó anyagban körülbelül hány év alatt csökken a radioaktív szénatomok száma $3{,}75 \cdot 10^{11}$ körüli értékre?

HÁZI FELADAT

1. Egy mennyiség időbeli változását az $M(t) = 58 \cdot 0{,}9^t$ képlet írja le. Mennyi a kezdeti érték (vagyis a $t = 0$-hoz tartozó $M(0)$ értéke), és körülbelül mennyi a felezési idő ebben a folyamatban?

2. A 2011. március 11-i fukushimai atomerőmű-balesetben nagy mennyiségű radioaktív jód (^{131}I) és cézium (^{137}Cs) került ki a környezetbe. Ezek az izotópok stabilabb, már nem radioaktív leányelemekre bomlanak. A bomlás folyamata exponenciális. A jód felezési ideje körülbelül 8 nap, míg a céziumé 30 év.

a) Számold ki, hogy hány nap, illetve hány év elteltével marad meg a kezdeti jód és cézium mennyiségének kevesebb mint 0,5%-a!

b) Hány százaléka maradt meg a kezdeti jód- és céziummennyiségnek négy év elteltével?

3. Egy mennyiség időbeli változását az $M(t) = 28{,}9 \cdot 2^{-\frac{t}{8}}$ képlet írja le. Mennyi a kezdeti érték [$M(0)$] és a felezési idő ebben a folyamatban?

35 A logaritmus fogalma

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x = 5^6$ **b)** $y^7 = 2187$ **c)** $2^z = 128$

Megoldás

Mindhárom feladat a hatványfogalomhoz kapcsolódik.

Az egyenlet	$x = 5^6$	$y^7 = 2187$	$2^z = 128$
A probléma szavakban: *Az ismeretlen az a valós szám,…*	*… amely 5-nek a 6. hatványa.*	*… amelynek a 7. hatványa 2187.*	*… amelyre a 2-t emelve 128-at kapunk.*
Az ismeretlen szerepe a hatványban	hatványérték	hatványalap	hatványkitevő
A megoldáshoz használt művelet	hatványozás	gyökvonás	**logaritmus**
Az egyenlet megoldása fejben vagy írásban számolással	$x = 15\,625$	$y = 3$	$z = 7$
Az egyenlet megoldása szimbólumokkal leírva	$x = 15\,625$	$y = \sqrt[7]{2187}$ $y = 3$	$\boldsymbol{z = \log_2 128}$ $z = 7$

A harmadik egyenlet megoldásában tehát $\log_2 128$ (így olvassuk: *kettes alapú logaritmus* 128) jelenti azt a valós kitevőt, amelyre a 2-t emelve 128-at kapunk. A logaritmus művelet segítségével a hatványkitevőket tudjuk kifejezni.

Például:

$\log_5 25$ jelenti azt a kitevőt, amelyre az 5-öt emelve 25-öt kapunk, ezért $\log_5 25 = 2$.

$\log_3 \frac{1}{9}$ jelenti azt a kitevőt, amelyre a 3-at emelve $\frac{1}{9}$-et kapunk, ezért $\log_3 \frac{1}{9} = -2$.

$\log_{49} 7$ jelenti azt a kitevőt, amelyre a 49-et emelve 7-et kapunk, ezért $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$.

$\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ jelenti azt a kitevőt, amelyre a 2-t emelve $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$-t kapunk, ezért $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{3}$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $7x = 5^{\frac{2}{3}}$ **b)** $y^7 = 923$ **c)** $2^z = 412$

Megoldás

Az egyenletek típusa rendre azonos az 1. kidolgozott feladatban lévőkkel, de a számértékek miatt a fejben vagy írásban számolást nem tudjuk elvégezni, ezért az egyenletek gyökeinek pontos értékét a tanult műveletekre vonatkozó szimbólumok segítségével tudjuk megadni. Az ismeretlenek közelítő értékét számológéppel határozhatjuk meg.

Az egyenlet	$7x = 5^{\frac{2}{3}}$	$y^7 = 923$	$2^z = 412$
A probléma szavakban: *Az ismeretlen az a valós szám,…*	*… amelynek 7-szerese 5-nek a $\frac{2}{3}$. hatványa.*	*… amelynek a 7. hatványa 923.*	*… amelyre a 2-t emelve 412-t kapunk.*
Az ismeretlen szerepe a hatványban	hatványérték	hatványalap	hatványkitevő
A megoldáshoz használt művelet	hatványozás	gyökvonás	**logaritmus**
Az egyenlet megoldása szimbólumokkal leírva	$x = \frac{1}{7} \cdot \sqrt[3]{25}$	$y = \sqrt[7]{923}$	$\boldsymbol{z = \log_2 412}$
Az ismeretlenek közelítő értéke 2 tizedesjegyig	$x \approx 0{,}42$	$y \approx 2{,}65$	$z \approx 8{,}69$

ELMÉLET

A logaritmus fogalma

Definíció: Legyenek a és b pozitív valós számok és $a \neq 1$,
ekkor $\log_a b$ jelenti azt a kitevőt, amelyre az a számot emelve a b számot kapjuk.
Az $\log_a b$ (így olvassuk: a alapú logaritmus b) kifejezésben az a szám a logaritmus alapja, a b hatványérték a logaritmus argumentuma (régies elnevezése szerint: numerusa).

Megjegyzések

1. A logaritmus tehát minden esetben hatványkitevőt jelöl, a hatvány alapja a logaritmus alapjával azonos.
2. Az $a^x = b$ egyenlet megoldása tehát $x = \log_a b$.
3. A definíció ezzel a képlettel is megadható: $a^{\log_a b} = b$.
4. Miért kellett a-ra és b-re szűkítő feltételeket adnunk?
   - Az 1 számnak minden hatványa 1, ezért az 1-es alapú logaritmust nem értelmezzük.
   - Nem értelmeztük a 0 negatív hatványait és a nulladik hatványát sem. Emiatt a 0 alapú logaritmust sem értelmezzük.
   - Nem értelmeztük a negatív számok racionális, illetve irracionális hatványait sem, ezért negatív szám sem lehet a logaritmus alapszáma.

A logaritmus alapszáma csak pozitív szám lehet, és nem lehet 1. Tehát: $a > 0$ és $a \neq 1$.

Pozitív szám minden hatványa is pozitív, ezért a b szám is csak pozitív lehet: $b > 0$.

FELADAT

1. Írd fel logaritmusjelöléssel is az alábbi egyenletek megoldását!
Például $2^x = 0{,}25$, tehát $x = \log_2 0{,}25 = -2$.

a) $2^x = 32$

b) $2^x = \frac{1}{16}$

c) $2^x = \sqrt[3]{2}$

d) $10^x = 100\,000\,000$

e) $10^x = \sqrt[7]{100}$

f) $10^x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

2. Melyek a hiányzó számok?
Minta: $6{,}25 = 2{,}5^2$, tehát $\log_{2,5} 6{,}25 = 2$.

a) $169 = 13^2$, tehát $\log_{13} \ldots = 2$

b) $343 = 7^3$, tehát $\log_{\ldots} 343 = \ldots$

c) $4 = 16^{\frac{1}{2}}$, tehát $\log_{\ldots} \ldots = \frac{1}{2}$

d) $8 = 2^{\ldots}$, tehát $\log_2 \ldots = 3$

e) $0{,}25 = \ldots^{-1}$, tehát $\log_4 \ldots = \ldots$

f) $\ldots = \ldots^{\ldots}$, tehát $\log_5 625 = 4$

3. Mennyi

a) $\log_3 1$; $\log_3 3$; $\log_3 9$; $\log_3 27$; $\log_3 81$;

b) $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{9}$; $\log_3 \frac{1}{27}$; $\log_3 \frac{1}{81}$?

4. Írd át az alábbi egyenleteket hatványalakba, és számítsd ki, melyik számot jelöli a k betű!

a) $\log_k 25 = 2$

b) $\log_5 k = 3$

c) $\log_4 4 = k$

5. Mennyi

$2^{\log_2 5}$;

$7^{\log_7 8}$;

$9^{\log_9 0{,}6}$;

$0{,}4^{\log_{0,4} 7}$?

6. Számítsd ki!

a) $\log_2 2 + \log_2 4 + \log_4 2 + \log_4 4$

b) $\log_{0,5} 2 + \log_{0,5} 4 + \log_{0,5} 8$

c) $\log_3 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_3 1$

HÁZI FELADAT

1. Van-e értelme a $\log_2 a$ kifejezésnek, és ha van, akkor mennyi az értéke?

a	-8	-2	0	1	2	8	32	64	128	256	1024	2048
$\log_2 a$												

2. Melyik számnak a 3-as alapú logaritmusa a 0, az 1, a 3, a 9?

3. Számítsd ki számológép nélkül!

a) $\log_4 4$ $\log_4 1$ $\log_4 2$ $\log_4 \frac{1}{4}$

b) $\log_9 3$ $\log_9 \frac{1}{3}$ $\log_9 9$ $\log_9 1$ $\log_9 81$

c) $5^{\log_5 3}$ $6^{\log_6 \frac{2}{3}}$ $0{,}5^{\log_{0,5} 8}$

4. Számítsd ki számológép nélkül!

a) $\log_4 64 + \log_5 \frac{1}{25}$ **b)** $\log_{64} 4 - \log_{25} 5$

A logarléc

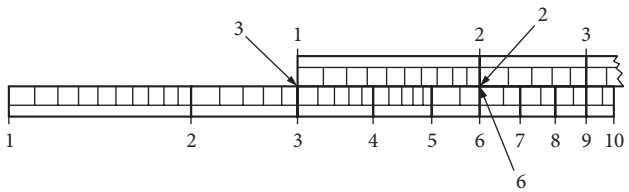
„A technika álláspontjáról nézve a világ egyszerűen nevetséges; az emberek egymás közötti viszonyai a lehető leggyakorlatiatlanabbak, módszereik nem gazdaságosak, nem egzaktak; és aki hozzászokott, hogy ügyeit-dolgait logarléccel intézze, egyszerűen nem tudja komolyan venni az emberi kijelentéseknek legalább a felét. A logarléc számok és vonalkák két hallatlan éleselméjűséggel egymásba dolgozott rendszere; két egymásba csusszanó rudacska, melyek segítségével a legbonyolultabb feladatokat is szemvillanás alatt megoldhatjuk, és egyetlen gondolatot sem tékozlunk el közben; kis szimbólum a logarléc, ott hordjuk a kabátunk belső zsebében, és mintha kemény, fehér vonás szelné keresztül a szívünket: ha van logarlécünk, és valaki nagy dolgokat állít, vagy roppant érzelmekről szónokol, annyit mondunk csupán: Bocsánat, egy pillanatra, előbb számítsuk ki mindezeknek a hibahatárát és legvalószínűbb értékét!”

(Robert Musil: A tulajdonságok nélküli ember – 1931)

Robert Musil sorai kíváncsivá teszik az olvasót: Mi lehet az a szerkezet, ami a XX. század első évtizedeiben élő modern ember életében ilyen fontos szerepet töltött be? Egy olyan egyszerű felépítésű mechanikus számológép, amely lehetővé teszi különböző matematikai műveletek gyors elvégzését. Az író szavaiban érezhető némi túlzás és irónia, azt mégis le kell szögeznünk, hogy a logarléc olyan eszköz, amely könnyű kezelhetőségénél fogva a számításokat gyakran végző embereknek nélkülözhetetlen segédeszköze volt.

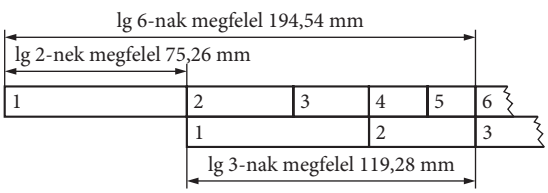
Az 1620-as évek elején Edmund Gunter angol matematikus skálára vitte a nemrég megjelent logaritmustáblázat adatait, és két skála egymás mellé helyezésével készített egy számolásra alkalmas eszközt. 1630-ban a cambridge-i William Oughtread készített egy körlogarlécet, majd találmányát egyesítette Gunter eszközével, ezzel létrejött a mai értelemben vett logarléc.

Nézzük meg egy egyszerű példán keresztül, hogyan kezeljük a lécet két szám összeszorzásánál! Határozzuk meg a 2 és a 3 szorzatát! *(1. ábra)* Az alsó skálán megkeressük a 3-t, és ide helyezzük a nyelv skálájának 1 jelét. A nyelv skálájának 2 jele alatt az alsó skálán leolvassuk az eredményt: a 6-ot.



1. ábra

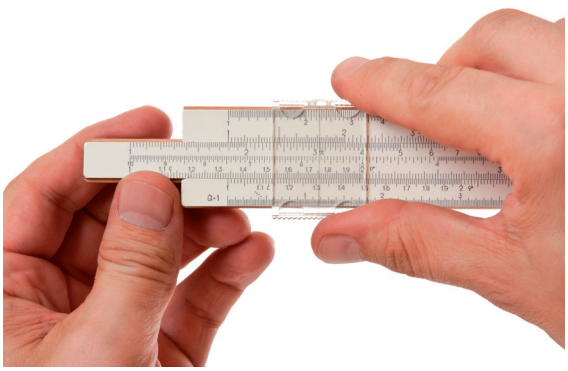
A logarléc működésének elve a logaritmus azonosságain alapul: számok szorzatát a számok logaritmusának összegzésével, a számok hányadosát a számok logaritmusának különbségével számolhatjuk ki.



2. ábra

A léceken távolságokat tudunk szemléltetni, a lécek egymás mellett történő mozgatásával pedig távolságokat adunk össze és vonunk ki egymásból. Például $\lg (2 \cdot 3) = \lg 2 + \lg 3 = 75{,}26 \text{ mm} + 119{,}28 \text{ mm} = 194{,}54 \text{ mm} = \lg 6$, tehát a lécek mozgatásával a két szám szorzása helyett a logaritmusuknak megfelelő hosszakat adtuk össze. *(2. ábra)*

A logarléc igen hosszú életű számolási segédeszköz volt. A tizedes törtekkel, több számjegyű számokkal való számolásnál a skálák leolvasása már nagy figyelmet és gyakorlatot igényelt. Az évszázadok során folyamatosan újabb funkciókkal bővült. A különböző szakmák egyedi céljainak megfelelően speciális logarléceket is készítettek, így például létezett mérnököknek, bankoknak szánt logarléc. A XIX. században a mérnöki számítások túlnyomó részét logarléc segítségével végezték. Jelentőségét mutatja, hogy az Apollo-programban részt vevő űrhajósok még használtak logarlécet küldetésük során. Az 1980-as években a zsebszámológépek megjelenése a múzeumba száműzte az emberiség kultúrájának e kiemelkedő találmányát.



36 A tízes alapú logaritmus használata

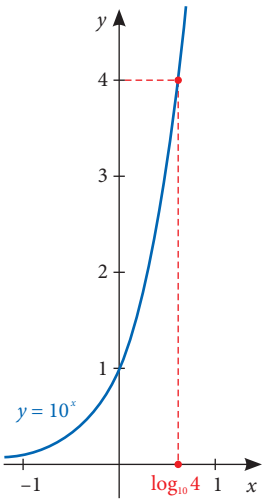
BEVEZETŐ

Minden pozitív szám felírható a 10 hatványaként, hiszen a tízes alapú exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza.

Ha például a 4-et akarjuk a 10 hatványaként megadni, akkor szükségünk van a 4-nek a tízes alapú logaritmusára, arra a kitevőre, amelyre a 10-et hatványozva 4-et kapunk:

$4 = 10^{\log_{10} 4}$.

A zsebszámológép segítségével egyszerűen meghatározhatjuk egy pozitív szám tízes alapú logaritmusát a log vagy a lg billentyű segítségével.



A számológépen a log 4 = billentyűkombináció után a kijelzőn megjelenő szám: 0,60205999…, tehát $\log_{10} 4 \approx 0{,}60206$ vagy hatványalakban: $4 \approx 10^{0{,}60206}$.

A tízes alapú logaritmusra – a gyakori használat miatt – külön jelölést vezetünk be: a $\log_{10}$ helyett az lg szimbólumot használjuk. Például $\log_{10} 4 = \lg 4 \approx 0{,}60206$.



FELADAT

1. Zsebszámológéped segítségével töltsd ki a táblázat üres helyeit! Az eredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsd!

a)

k	2	572	4933
$\lg k$			

b)

p	0,0092	0,083	0,836
$\lg p$			

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hány év alatt háromszorozódik meg az évi 15%-os kamatos kamattal gyarapodó tőke?

Megoldás

Ha a tőke értéke $A \neq 0$, és x év alatt a háromszorosára gyarapszik, akkor $A \cdot 1{,}15^x = 3 \cdot A$.

Meg kell oldanunk az $1{,}15^x = 3$ egyenletet, vagyis meg kell határoznunk, hogy melyik az a valós szám, amelyre 1,15-ot emelve 3-at kapunk, vagyis azt, hogy mennyi a $\log_{1{,}15} 3$ kitevő értéke.

Írjuk fel az 1,15-ot és a 3-at is 10 hatványaként!

$1{,}15 = 10^{\lg 1{,}15}$ és $3 = 10^{\lg 3}$. Ezeket az eredeti egyenletbe írva azt kapjuk, hogy $(10^{\lg 1{,}15})^x = 10^{\lg 3}$.

A hatvány hatványára vonatkozó azonosságot alkalmazva: $10^{x \cdot \lg 1{,}15} = 10^{\lg 3}$.

A bal oldalon és a jobb oldalon is a 10 egy-egy hatványa áll. Mivel a 10-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, ezért az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha a kitevők is egyenlők: $x \cdot \lg 1{,}15 = \lg 3$.

Ebből $x = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}15} \approx 7{,}86$.

Tehát a tőke 8 év alatt háromszorozódik meg.

Megjegyzés

A feladat megoldásából adódik, hogy

$\log_{1,15} 3 = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}15} \approx 7{,}86$, vagyis $1{,}15^{7,86} \approx 3$.

ELMÉLET

Tetszőleges (pozitív, 1-től különböző valós szám) alapú logaritmust kiszámíthatunk 10-es alapú logaritmus alkalmazásával is.

Ha a és b pozitív valós számok, $a \neq 1$, akkor belátható, hogy $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$.

Például:

$\log_3 20 = \frac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2{,}7268$, tehát $3^{2,7268} \approx 20$;

$\log_{0,2} 15 = \frac{\lg 15}{\lg 0{,}2} \approx -1{,}6826$, tehát $0{,}2^{-1,6826} \approx 15$.

FELADAT

2. Tízes alapú logaritmus segítségével számold ki zsebszámológéppel! Az eredményeket 2 tizedesjegyre kerekítsd!

$\log_2 5$; $\log_{1,05} 0{,}2$; $\log_6 703$; $\log_{4,5} 21$

3. Zsebszámológép nélkül határozd meg a pontos értéket!

a) $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_{25} 5$, $\log_{\frac{1}{5}} 5$, $\log_{\frac{1}{5}} 25$;

b) $\log_4 \frac{1}{64}$, $\log_4 1$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$, $\log_{\frac{1}{4}} 1$.

4. Korábban közelítéssel oldottuk meg a $0{,}83^t = 0{,}5$ egyenletet. Oldjuk meg logaritmus segítségével!

a) Fejezd ki az egyenletből a t ismeretlent 0,83 alapú logaritmussal!

b) Alakítsd át a kapott eredményt úgy, hogy csak 10-es alapú logaritmusok szerepeljenek!

c) Add meg az egyenlet gyökét ezredre kerekítve!

5. Rendezd az egyenleteket olyan alakba, hogy a bal oldalon csak egy hatványalak szerepeljen, majd logaritmus segítségével oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $8{,}5 \cdot 10^x = 212{,}5$

b) $4{,}55 \cdot 1{,}2^x = 3{,}64$

c) $4{,}2^{-2x} = 5{,}3$

d) $6^{x+2} = 30$

HÁZI FELADAT

1. Számológéped segítségével számítsd ki az alábbiakat! Az eredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsd!

a) $\log_{100} 50$ **c)** $\log_5 8{,}7$

b) $\log_{0,1} 2$ **d)** $\lg 5 + \lg 2$

2. Korábban az $1{,}06^x = 2$ egyenletet közelítéssel oldottuk meg.

a) Fejezd ki az egyenletből az x-et 1,06 alapú logaritmussal!

b) Alakítsd át a kapott eredményt úgy, hogy csak 10-es alapú logaritmusok szerepeljenek benne!

c) Add meg az egyenlet gyökét ezred pontossággal!

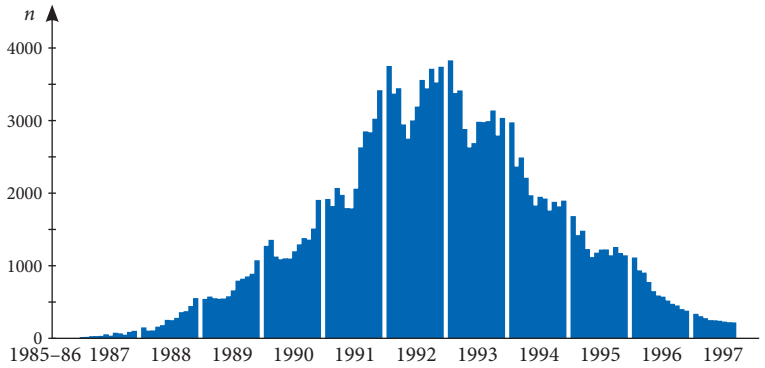
3. Az M mennyiség időben exponenciálisan csökken; a folyamatot az $M(t) = 10^5 \cdot 1{,}24^{-t}$ összefüggéssel írhatjuk le. Számítsd ki, mennyi ebben a folyamatban a kezdeti érték – az $M(0)$ –, és mennyi a felezési idő!

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

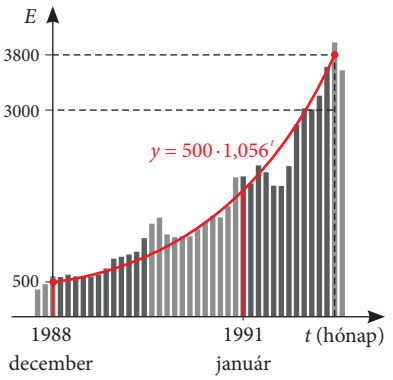
a) $10^{3x} = 8{,}4$ **b)** $2^{-x} = 17$

37 Hatvány, gyök, logaritmus

KIDOLGOZOTT FELADAT



Idézet egy cikkből, az angliai marhavészről:
„A történet 1985-ben kezdődött, amikor az első 17 állat megbetegedését jelentették az angol állat-egészségügyi hatóságok. […] Ekkor még nem gyanakodtak az egész szigetországra kiterjedő járványra, az esetek száma azonban 1988-tól exponenciálisan emelkedni kezdett. […] A diagramon a szivacsos agysorvadásban (BSE) megbetegedett szarvasmarhák számának alakulása látható Nagy-Britanniában a járvány kezdetétől (1985–86) 1997-ig. A függőleges oszlopok havi bontásban adják meg a diagnosztizált új esetek számát." (Forrás: A cikk a *Természet Világa* folyóiratban jelent meg.)



A havonta diagnosztizált új esetek számát 1988 vége és 1992 eleje között a matematikusok által megállapított exponenciális függvénnyel, az $E(t) = 500 \cdot 1{,}056^t$ összefüggéssel modellezhetjük. Itt a $t = 0$ esetnek az 1988. decemberi szám felel meg, és t legfeljebb 37 lehet (az említett időszakban 37 hónap telt el).

a) A modell szerint hány új esetet diagnosztizáltak 1991 januárjában?

b) A modell szerint melyik hónapban diagnosztizáltak 3000 új megbetegedést?

Megoldás

a) 1988 decemberétől 1991 januárjáig 25 hónap telt el, tehát $E(25) = 500 \cdot 1{,}056^{25} \approx 1950$. A modell szerint 1991 januárjában közelítőleg 1950 új esetet diagnosztizáltak.

b) Meg kell oldanunk a $3000 = 500 \cdot 1{,}056^t$ exponenciális egyenletet.
Egyenletrendezés (leosztás) után: $1{,}056^t = 6$, amiből $t = \log_{1{,}056} 6$.
Számológéppel: $\log_{1{,}056} 6 = \dfrac{\lg 6}{\lg 1{,}056} \approx 33$.
A matematikai modell szerint 1988 decemberétől számítva közelítőleg 33 hónap után, vagyis 1991 szeptemberében érhette el a 3000-et az adott hónapban diagnosztizált új megbetegedések száma.

FELADAT

1.

a) A kidolgozott feladatban megadott matematikai modell szerint az exponenciális szakaszban hány százalékkal nőtt havonta az újonnan diagnosztizált esetek száma?

b) A kidolgozott feladat grafikonja szerint 1992-ben megállt az új esetek számának növekedése. Hány új megbetegedés diagnosztizálását jósolná a matematikai modell 1992 decemberére, 1993 decemberére, illetve 1994 decemberére, ha nem vennénk figyelembe a modell érvényességi körét ($0 \le t \le 37$)?

c) A kidolgozott feladat matematikai modellje szerint melyik hónapban érte el az újonnan regisztrált esetek száma az 1500-at? Hasonlítsd össze a diagramról leolvasható értéket és a kapott eredményt!

2. (Érettségi feladat, 2017)
A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon-előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig?

b) 1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg:
$f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.
A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén?

c) A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig). Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egyhavi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót?

HÁZI FELADAT

1. A kidolgozott feladatban az $E(t) = 500 \cdot 1{,}056^t$ képlet szerint számítottuk ki a t-edik hónapban újonnan diagnosztizált megbetegedések számát. Hányszorosára nőtt ez a szám az alkalmazott modell szerint

a) 1989 januárja és decembere között;

b) 1990 januárja és decembere között;

c) 1989 januárja és 1990 decembere között?

2. A kidolgozott feladat diagramjának 1992 decemberétől 1996 decemberéig terjedő szakaszát, exponenciálisan csökkenőnek feltételezve a folyamatot, a $B(t) = 3800 \cdot 0{,}945^t$ összefüggés írja le.

a) Hány új megbetegedést regisztráltak 1995 szeptemberében a modell szerint?

b) Mennyi ebben a folyamatban a „felezési idő”?

3. Magyarország népessége 1980-ban 10,71 millió fő volt, 2010-ben pedig 10 millió. Tételezzük fel, hogy a népesség exponenciálisan csökken (vagyis használhatsz a folyamat leírására az előző feladatokban szereplő összefüggésekhez hasonlót).

a) Évente hányszorosára változik a népesség, és ez hány százalékos csökkenést jelent?

b) Ha ilyen ütemben csökken a népesség, várhatóan melyik évben éri el a 9 millió főt?

RÁADÁS

Nézzük meg, hogyan lehet létrehozni egy – feltételezhetően exponenciálisan terjedő – járvány modellezését matematikai összefüggés segítségével az esetszámok ismeretében:
A kidolgozott feladat diagramja alapján az 1988. végi közel havi 500-ról 1992 elejére – azaz 37 hónap alatt – közel havi 3800-ra növekedett az újonnan diagnosztizált esetek száma. Az exponenciális növekedés azt jelenti, hogy minden egyes hónapban az előző havinak ugyanannyiszorosára változott az új esetek száma.
Jelöljük ezt a növekedési tényezőt q-val! Ha az 1988. végi állapot felel meg a $t = 0$ helyzetnek, akkor $E(t) = 500 \cdot q^t$, ahol a t változót hónapokban adjuk meg.

$E(37) = 3800 = 500 \cdot q^{37}$, rendezve: $q^{37} = 7{,}6$. Ebből $q = 7{,}6^{\frac{1}{37}} = \sqrt[37]{7{,}6} \approx 1{,}056$.
A havonta diagnosztizált új esetek számát tehát valóban modellezhetjük az $E(t) = 500 \cdot 1{,}056^t$ összefüggéssel. A képletben a t az 1988 vége óta eltelt hónapok számát jelenti.

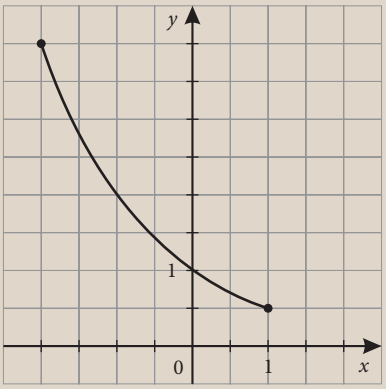
38 Gyakorlás

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2013)
Az ábrán az $f\colon [-2; 1] \to \mathbf{R}$; $f(x) = a^x$ függvény grafikonja látható.

a) Add meg az f függvény értékkészletét!

b) Határozd meg az a szám értékét!



2. **a)** (Érettségi feladat, 2007)
Oldd meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelöld a számegyenesen az egyenlet megoldását!

b) (Érettségi feladat, 2012)
Add meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $\log_2 x^2 = 4$. Válaszod indokold!

3. (Érettségi feladat, 2016)
Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszod három tizedesjegyre kerekítve add meg!

$$2^x = 10$$

4. (Érettségi feladat, 2015)
Egy bomlási folyamatban a radioaktív részecskék száma kezdetben $6 \cdot 10^{23}$, amely érték percenként az előző érték századrészére csökken. Számítsd ki a radioaktív részecskék számát 10 perc elteltével!

5. (Érettségi feladat nyomán, 2006)
A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál a születéskor várható élettartam kiszámítására használják a következő tapasztalati képletet: $É = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$.
A képletben $É$ a születéskor várható átlagos élettartam években, G pedig az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva az USD 1980-as árfolyamára.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 USD volt?

b) Mennyivel változhatott ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra a G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?

c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva az USD 1980-as árfolyamára)?



6. (Érettségi feladat, 2011)

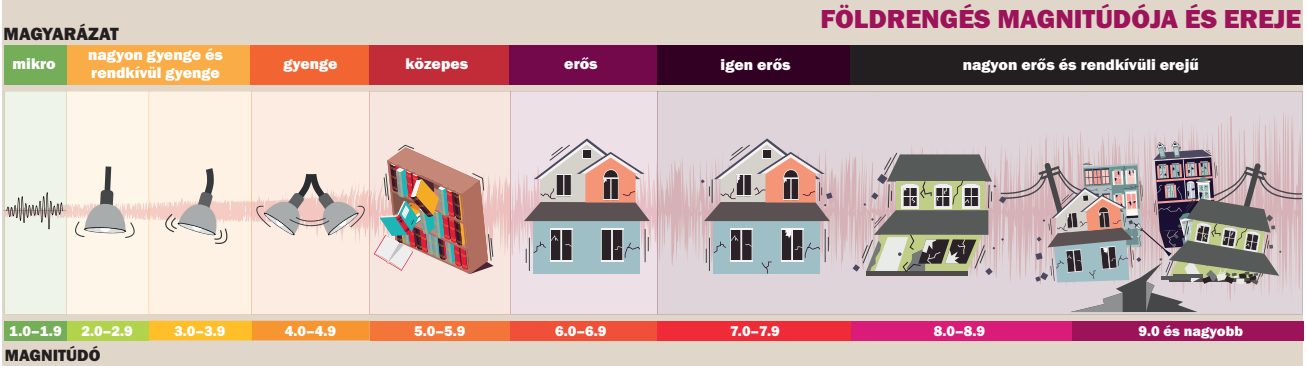
Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”* A földrengés Richter-skála szerinti erőssége és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4{,}42 + \frac{2}{3}\lg E$. Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nemnegatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagaszakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1{,}344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel?

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia?

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban?

FÖLDRENGÉS MAGNITÚDÓJA ÉS EREJE



HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2009)

Add meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét!

2. (Érettségi feladat, 2014)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2 (3 - x)$ kifejezés?

b) Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_2 (3 - x) = 0$$

3. (Érettségi feladat, 2018)

Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! Válaszod tizedes tört alakban add meg!

$$4^x = 8$$

4. (Érettségi feladat nyomán, 2019)

Péter olyan matematikai modellt alkotott, amely az elektromos autók számát exponenciálisan növekedőnek tekinti. Eszerint ha a 2012 óta eltelt évek száma x, akkor az elektromos autók számát (millió darabra) megközelítőleg az $f(x) = 0{,}122 \cdot 2^{0{,}822x}$ összefüggés adja meg.

A modell alapján számolva melyik évben érheti el az elektromos autók száma a 25 millió darabot?

5. (Érettségi feladat, 2011)

Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a

$$\lg p_m = 0{,}8 \cdot \lg p_v + 0{,}301$$

összefüggés áll fenn.

A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?

b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?

39 Exponenciális egyenlőtlenségek

KIDOLGOZOTT FELADAT

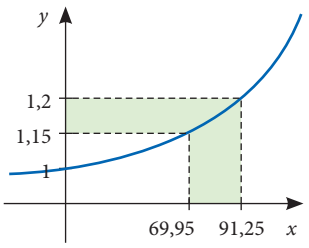
Tőzsdei elemzők megállapították, hogy az egyik cég részvényének értéke az elmúlt időszakban exponenciálisan növekedett, és ez a tendencia várhatóan egy ideig még folytatódik. Jelen pillanatban a részvény értéke 2000 Ft, ebből pedig a részvény értékének alakulását az $f(x) = 2000 \cdot 1{,}002^x$ képlettel modellezik, ahol x az eltelt napok számát jelöli.
Egy szakértő szerint 2300–2400 Ft közötti áron már érdemes eladni a részvényt, mert ezután a növekedés nagy valószínűséggel csökkenésbe fog átfordulni.
A modell segítségével számítsuk ki, hogy legalább és legfeljebb hány napot várjunk az eladással!

Megoldás

Meg kell találnunk a $2300 < 2000 \cdot 1{,}002^x < 2400$ feltételnek eleget tevő x értékeket. Egyszerűbb egyenlőtlenségeket vizsgálhatunk, ha 2000-rel osztjuk a kettős egyenlőtlenség mindhárom részét: $1{,}15 < 1{,}002^x < 1{,}2$.
Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 1{,}002^x$ függvényt! Mivel pontos adatokat nem a grafikonról fogunk leolvasni, egy egyszerű vázlat is elég.

A következő megfigyeléseket tehetjük:
1. Az $x \mapsto 1{,}002^x$ függvény szigorúan növekvő, mert az exponenciális függvény alapja 1-nél nagyobb szám.

2. Ahhoz, hogy megállapíthassuk, az x-nek melyik értéke esetében lesz a függvény értéke éppen 1,15, meg kell oldanunk az $1{,}002^x = 1{,}15$ egyenletet.



Használjuk a logaritmus definícióját és a tízes alapra áttérés képletét:

$$x = \log_{1{,}002} 1{,}15 = \frac{\lg 1{,}15}{\lg 1{,}002} \approx 69{,}95;$$

$$x = \log_{1{,}002} 1{,}2 = \frac{\lg 1{,}2}{\lg 1{,}002} \approx 91{,}25.$$

Tehát a függvény értéke megközelítőleg $x = 69{,}95$ esetén lesz egyenlő 1,15-dal, valamint $x = 91{,}25$ esetén lesz egyenlő 1,2-del.

3. A grafikonról most már leolvashatjuk, hogy az eladásig 69,95 napnál több, de 91,25 napnál kevesebbnek kell eltelnie.

4. Figyelembe véve, hogy egész napokról szól a feladat, $2300 < 2000 \cdot 1{,}002^x < 2400$ pontosan akkor teljesül, ha $70 \leq x \leq 91$, tehát legkorábban a 70. napon, legkésőbb pedig a 91. napon kell eladnunk a részvényt, ha a modell „jóslata” szerint akarunk cselekedni.



FELADAT

1. Ábrázold a koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 1{,}2^x$ függvényt! Olvasd le a grafikonról, mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

a) $1{,}2^x \geq 1{,}44$; **b)** $1{,}2^x < 1$.

2. Egy webáruház üzemeltetői a létrehozás utáni első hónapban úgy tapasztalták, hogy a napi vásárlások száma az eltelt idővel exponenciálisan növekedett, nagyjából az $N(x) = 10 \cdot 1{,}08^x$ függvény szerint, ahol N az adott napi vásárlások száma, x pedig a nyitás óta eltelt napok száma.

a) Számítsd ki, hogy a nyitás utáni hányadik napon lépte át először a vásárlások száma a napi 100-at!

b) Az exponenciálisan növekedő szakasz után a vásárlások napi száma más hasonló boltok tapasztalatai alapján várhatóan 1250 és 1750 között fog állandósulni. Számítsd ki, hogy ezek alapján legalább és legfeljebb hány napig tarthat az exponenciálisan növekedő szakasz!

3. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán az exponenciális függvény tulajdonságainak felhasználásával!

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$ **b)** $1 \leq 1{,}5^x \leq 10$

4. Egy ország 40 évesnél idősebb, de 75 évesnél fiatalabb lakosainak kor szerinti megoszlását a $P(x) = 50 \cdot 0{,}94^x$ függvénnyel modellezték, ahol x az életkor (években), $P(x)$ pedig az adott korú lakosok száma (millió főben).

Például az 53 évesek száma (millió főben):

$P(53) = 50 \cdot 0{,}94^{53} \approx 1{,}88$,

a 70 éveseké pedig

$P(70) = 50 \cdot 0{,}94^{70} \approx 0{,}66$.

Számítsd ki, hogy hány évesek a 40 évesnél idősebb emberek azon korosztályai, amelyeknek a modell szerint egymilliónál több tagjuk van!

HÁZI FELADAT

1. A ^{14}C radioaktív szénizotóp felezési ideje 5730 év. Legfeljebb milyen régi az a csontmaradvány, amelynek ^{14}C-tartalma még több mint 15%-a az eredeti értéknek?

Add meg a választ években!



2. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket az exponenciális függvény tulajdonságainak felhasználásával!

a) $3^x \leq 2187$ **b)** $0{,}06 < 0{,}6^x < 6$

3. (Érettségi feladat, 2015)

Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkező években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsd ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest!

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken?

40 Gyakorlás

FELADAT

1.

a) Számológép nélkül állapítsd meg, hogy mennyi $\left(\log_3 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-1}$.

b) Mennyi $\lg \sqrt[3]{10} - \frac{2}{3} \cdot \lg 0{,}0001$?

c) Melyik két szomszédos egész szám közé esik a k, ha $1{,}065^k = 3{,}45$?

2.

A Földön a légnyomás a tengerszint feletti magasságtól (is) függ. A tengerszint felett x km magasságban a légnyomást a $p(x) = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 1{,}133^{-x}$ (Pa) összefüggés adja meg.

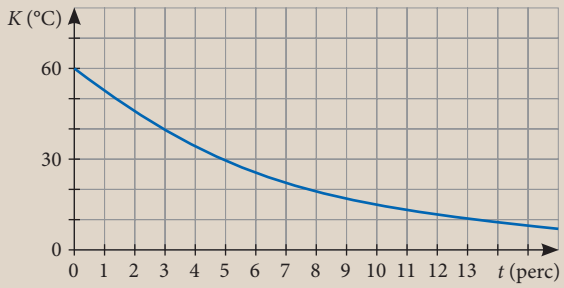
a) A képlet szerint mekkora a légnyomás a Kékestetőn, a Mont Blanc-on, illetve a Csomolungmán?

b) A képlet szerint mekkora magasságban lesz a légnyomás 80 000 Pa?

c) Mekkora a légnyomás „felezési magassága”, azaz hány km-enként csökken az előző magasságon mért érték a felére?

3.

A Newton-féle hűlési törvény értelmében egy test és a környezetének hőmérséklete közötti különbség (K) időben exponenciálisan csökken. Egy 20 °C hőmérsékletű szobában az asztalon hagyott, kezdetben 80 °C hőmérsékletű csésze kávé hűlése modellezhető a $K(t) = 60 \cdot 0{,}87^t$ függvénnyel, ahol K a kávé és a szoba hőmérséklete közötti különbség, t pedig az eltelt idő percekben mérve. Kezdetben a hőmérséklet-különbség 80 − 20 = 60 (°C), azaz $K(0) = 60$.



a) Negyedóra eltelte után hány fok lesz a hőmérséklet-különbség a kávé és a szoba hőmérséklete között?

b) Negyedóra elteltével hány fok lesz a kávé hőmérséklete?

c) Mennyi idő alatt csökken a felére az eredetileg 60 °C-os hőmérséklet-különbség?

d) Milyen forró lehetett a kávé a mérés kezdete előtt 5 perccel?

e) Hány perc alatt hűl a kávé hőmérséklete 21 °C alá?

4.

Az információ olyan alapfogalom, ami nem vezethető vissza további fogalmakra. Az információt egy jelkészlet elemeiből kirakott jelsorozat hordozza – ezzel a megközelítéssel elérhető, hogy mérhető mennyiségként értelmezzük.

A Claude Shannon és Ralph Hartley által kidolgozott matematikai elmélet szerint egyetlen p valószínűségű elemi esemény I információtartalma a Shannon-képlet szerint:

$I = -\log_2 p$.

Egy N elemű jelkészletből kirakott n hosszúságú jelsorozat (feltéve, hogy a jelek előfordulási valószínűsége egyforma) H információértéke a Hartley-formula alapján:

$H = n \cdot \log_2 N$.

a) Határozd meg annak az eseménynek az információtartalmát, amelynek előfordulási valószínűsége $\frac{1}{8}$, valamint annak az eseménynek, amelynek valószínűsége $\frac{3}{7}$.

b) Mekkora az információértéke a 24 betűs ábécéből kirakott, 10 karakterből álló jelsorozatnak?

c) Mekkora az információértéke egy 4 számjegyből álló PIN-kódnak?

HÁZI FELADAT

1. **a)** Mennyi $\log_2 64 \cdot (\log_4 8 - \log_8 4)$?

b) Hányadik hatványa a 3-nak a $\left(6 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{16}}\right)^8$?

c) Oldd meg a $2{,}4^x = 5{,}76$ egyenletet!

2. (Érettségi feladat, 2011)
A 2000 eurós tőke évi 6%-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldásod részletezd!

3. Oldd meg az egyenleteket és az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $3^{x+1} = 81$

b) $4^{3x-1} = 0{,}5$

c) $\left(\frac{7}{8}\right)^{5x-4} < \frac{8}{7}$

4. Add meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$

b) $\log_7(3x+16)$

RÁADÁS

A XVI–XVII. században, a nagy földrajzi felfedezések korában a hosszú tengeri utak során a navigáció létfontosságú eszközei voltak a csillagászati táblázatok. E táblázatok elkészítéséhez azonban elképesztő mennyiségű számítás – elsősorban szorzások és osztások – elvégzésére volt szükség. Nem csoda hát, hogy a kor matematikusai és csillagászai fáradhatatlanul keresték a módszereket, amelyek e műveletek elvégzését felgyorsítanák.

Az első komoly eredményt a trigonometriai azonosságokra épülő ún. *Prosthaphaeresis-módszer* hozta, majd 1614-ben John Napier skót matematikus közzétette *Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Csodálatos logaritmustáblázat leírása)* című munkáját, amelyben módszerének magyarázata mellett egy 90 oldalas logaritmustáblázatot is közölt. Bár e táblázat használata még meglehetősen nehézkes volt, 1617-ben Napier kollégája, az angol Henry Briggs kiadta az első könnyen kezelhető, tízes alapú logaritmustáblázatot.

A Napier által kidolgozott eljárás, melyet többek között Tycho Brahe és Johannes Kepler is használt, a sokjegyű számok szorzását és osztását a táblázatból kikeresett logaritmusok összeadására és kivonására egyszerűsítette, majd az így kapott összeg, illetve különbség alapján újra csak a táblázat segítségével lehetett visszakeresni az eredeti művelet végeredményét. A logaritmusokon alapuló számítási módszer sikerességét jellemzi, hogy a táblázat csak a XX. század utolsó évtizedeiben elterjedő elektronikus zsebszámológépekkel tűnt el végleg a mindennapok matematikájából.


MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; *ut etiam in*
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſsimi, Facillimi, &
expeditiſsimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopólæ, cIↃ. DC. XIV.

Napier logaritmustáblázatának borítólapja

41 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. Egy város lakosainak száma 1997 és 2010 között exponenciális növekedést mutatott. 1997. január 1-jén 130 300 lakosa volt a városnak, 2001. január 1-jén 132 000.

a) Hányszorosára nőtt egy év alatt a város lakosainak száma?

b) Írj fel hozzárendelést, mely megmutatja, hogy t évvel 1997 után hány lakosa volt a városnak!

c) Hány lakosa volt a városnak 2010. január 1-jén?

2. Az egyik radioaktív ólomizotóp felezési ideje 27 perc.

a) Írj fel hozzárendelést, amely megmutatja, hogy egy kezdetben 3 mol ólomizotópot tartalmazó mintában t perc múlva hány el nem bomlott ólomrészecske van!

b) A bizmut felezési ideje 19,7 perc. Egy mérés kezdetekor ugyanannyi bizmut- és ólomizotóp van egy mintában. Mennyi idő múlva lesz ólomból tízszer annyi darab, mint bizmutból?

3. (Érettségi feladat, 2013)

A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer ($2 \cdot 10^{-6}$ m), átmérője 0,5 mikrométer ($5 \cdot 10^{-7}$ m).

a) Számítsd ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításaid eredményét m^3-ben, illetve m^2-ben, normálalakban add meg!

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $B(t) = 3\,000\,000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszod egészre kerekítve add meg!

4. A táblázat egy olyan Kossuth- és József Attila-díjas magyar író vezetéknevét rejti, aki érettségi után matematika–fizika egyetemi szakra iratkozott be, majd Fejér Lipót tanítványaként szerzett végbizonyítványt. Nézz utána, milyen regényeket írt!

Eljuthatsz a megoldáshoz, ha a táblázat első oszlopában jelzett tulajdonságoknak megfelelő számokat kiválasztod a megfelelő sorokból, majd a helyes válasz mellett lévő betűket fölülről lefelé haladva összeolvasod.

a legnagyobb	$(-2)^3$	M	-2^4	P	-2^{-3}	E	$(-2)^{-4}$	O
a legkisebb	$\log_3 5$	S	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$	Ó	$\log_8 \frac{1}{2}$	T	$\log_7 \sqrt[5]{\frac{1}{7}}$	E
egész szám	2^{-3}	A	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$	R	$\log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9}$	T	$\frac{2^0}{3}$	L
páros szám	$\sqrt{81}$	I	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$	L	$\log_2 8$	Ő	$\sqrt{2}$	G
nemnegatív szám	$-0{,}5^6$	C	$\log_5 \frac{3}{7}$	Y	$\log_{\frac{3}{7}} 1$	I	$(\sqrt[3]{-8})^{-1}$	F
irracionális szám	$\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$	I	$\log_{\frac{3}{7}} \frac{49}{9}$	Z	$\left(\sqrt[7]{\frac{54}{43}}\right)^{\lg 1}$	L	$\log_5 10$	K

TUDÁSPRÓBA I.

1. Írd fel egyetlen hatványként!

$2^{-4} \cdot 4^{0,5}$; $(3^{1,5})^2$; $\sqrt[7]{8^2}$; $(\sqrt[5]{10})^{\frac{10}{3}}$

2. Add meg a következő kifejezések értékét!

a) $\log_3 1 =$ $\log_4 \frac{1}{2} =$

b) $6^{\log_6 5} =$ $3^{\log_3 4} =$

3. Írd hatványalakban az alábbi kifejezéseket, majd határozd meg az ismeretlenek értékét!

a) $\log_8 k = \frac{4}{3}$

b) $\log_{0,5} 4 = m$

c) $\log_a 243 = 5$

4. Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{4}{9}$

5. A polónium radioaktív izotópjának száma egy mintában 1 hónap alatt 1 molról ($6 \cdot 10^{23}$-ról) $5{,}16 \cdot 10^{23}$ db atomra csökkent. A radioaktív bomlás exponenciális folyamat.

a) Hányadrészére csökken a polóniumizotópok száma fél év alatt?

b) Mennyi idő alatt csökken 20% alá a polóniumizotópok száma?

c) Mennyi a folyamat felezési ideje?

6. A Kovács gyerekek kedvet kaptak a befektetéshez. Hajni egy olyan bankot talált, ahol évi 8%-ot adnak, ha három évre leköti a pénzét. Csilla egy másik banknál havi 0,7%-os kamatot kapna, de neki csak 34 hónapra kellene lekötnie a pénzét. Ki mennyi pénzhez jutna a futamidő végén, ha 50 000 Ft-ot tudnak befektetni fejenként? Kinek a befektetése érné meg jobban?

TUDÁSPRÓBA II.

1. Írd fel egyetlen hatványként!

$3^{-4} \cdot 3^7$; $(2^{0,5})^8$; $\sqrt[7]{6^3}$; $(\sqrt[4]{5})^{\frac{2}{3}}$

2. Add meg a következő kifejezések értékét!

a) $\log_2 0{,}5 =$ $\log_7 \sqrt[3]{7} =$

b) $7^{\log_7 4} =$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 12} =$

3. Írd hatványalakban az alábbi kifejezéseket, majd határozd meg az ismeretlenek értékét!

a) $\log_{27} k = \frac{2}{3}$

b) $\log_{0,5} 8 = m$

c) $\log_a 128 = 7$

4. Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$0{,}64 < 0{,}8^x$

5. Bankba fektetjük a pénzünket, 350 000 Ft-ot. Az éves kamat 4,5%. A pénzt és az év végén hozzáírt kamatot bent hagyjuk a bankban, így a tőkénk kamatos kamattal gyarapodik. Hány év alatt érjük el, hogy 350 000 Ft helyett 30%-kal több pénzünk legyen a bankszámlánkon?

6. Az ólom egyik izotópja radioaktív, azaz folyamatosan elbomlik, más atommá alakul. A bomlást az jellemzi, hogy azonos időtartamonként ugyanannyiad részére csökken az ólom részecskeszáma. A folyamatot a következő egyenlet írja le:

$N(t) = 4{,}2 \cdot 10^{24} \cdot 0{,}97^t$,

ahol az egyenletben az időt (t) percben mérjük; $N(t)$-vel jelöljük, hogy a mérés kezdete után t perccel hány radioaktív ólomrészecske van még az anyagban.

a) Mennyi ólomizotóp volt az anyagban a mérés kezdetekor?

b) Mennyi idő elteltével lesz a radioaktív ólomizotóp részecskeszáma egy mol, azaz $6 \cdot 10^{23}$?

c) Mennyi a folyamatban a felezési idő?

Témazáró feladatgyűjtemény

1. Számítsd ki!

a) $\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[6]{15\,625}$

b) $\sqrt[3]{0{,}001}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{243}$

c) $\frac{\sqrt[3]{-343}\cdot\sqrt{225}}{\sqrt[4]{10\,000}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}{\sqrt{\frac{1}{225}}}$

2. Írd át az n-edik gyököt hatvány alakba!

a) $\sqrt[3]{18}$

b) $\sqrt[4]{25}$

c) $\sqrt[5]{3^4}$

d) $\sqrt[6]{a^8}$

e) $\sqrt[7]{\frac{1}{4^3}}$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{5^7}}$

g) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}$

3. Írd fel 3 hatványaként!

a) $\sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[5]{3^2}$

c) $\sqrt[6]{\frac{1}{3^7}}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{3^8}}$

e) $\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{3^5}$

f) $\frac{\sqrt[3]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{9^2}}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^5}}\cdot\sqrt{3}$

4. Írd át a hatványokat gyökös alakba!

$3^{\frac{1}{5}}$; $2^{\frac{3}{7}}$; $5^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}}$; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $(-3)^{\frac{2}{3}}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{7}{2}}$

5. Melyik nagyobb? Ne használj számológépet!

a) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ vagy $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-0{,}5}$ vagy $0{,}75^{\frac{3}{5}}$

6. Írd növekvő sorrendbe! Ne használj számológépet!

a) $\sqrt[5]{2}$; $2^{-\frac{3}{4}}$; $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$; $2^{\frac{1}{3}}$; $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$; $2^{-\frac{2}{3}}$

b) $5^{-\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{5}$; $5^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[4]{5^3}$; 5^{-2}; $\sqrt{\frac{1}{5^3}}$

7. Számítsd ki! Ne használj számológépet!

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{8^4}$;

$\left(\sqrt{7}\right)^6$; $0{,}0016^{\frac{1}{4}}$; $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; $\sqrt[5]{3^{-10}}$

8. Írd fel kisebb gyökkitevővel! Írd fel hatványalakban!

a) $\left(\sqrt[15]{5}\right)^6$

b) $\sqrt[8]{15^6}$

c) $\sqrt[10]{3^5}$

d) $\sqrt[27]{\left(\frac{1}{3}\right)^{45}}$

e) $\sqrt[26]{5^{13}}$

f) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{16}$

g) $\left(\sqrt[18]{0{,}7}\right)^{24}$

9. Írd fel egy gyökjellel! (Írd át először hatványalakba!)

a) $\sqrt[5]{13}\cdot\sqrt[7]{13}$

b) $\sqrt{\frac{1}{5}}:\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[3]{0{,}1}:\sqrt[5]{0{,}1}$

d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{5}}$

f) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}:\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^4}$

10. Igaz-e, hogy a következő műveletek eredménye egész szám? Ha igen, melyik egész szám? Ne használj számológépet!

$81^{\frac{5}{4}}$; $0{,}01^{-\frac{2}{3}}$; $36^{2{,}5}$; $49^{\frac{1}{3}}$; $64^{-\frac{5}{6}}$; $64^{\frac{5}{6}}$; $3^{\frac{2}{3}}\cdot3^{-\frac{4}{6}}$;

$225^{0{,}5}$; $9^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{10}{3}}$; $27^{\frac{5}{4}}:3^{\frac{3}{4}}$; $100^{\frac{2}{3}}\cdot100^{\frac{3}{2}}$

11. Ábrázold közös koordináta-rendszerben, és jellemezd a függvényeket!

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2^x$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto\left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

12. A hatványozás azonosságainak alkalmazásával végezd el a számításokat!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) $\frac{3^{\frac{4}{9}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}}$

c) $(625\cdot256)^{\frac{3}{4}}$

d) $\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}$

e) $\left(\frac{216}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$

13. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^{5x-3}=81$

b) $3^{3x-5}=729$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-2}=81$

d) $2^{-4x}=\frac{1}{8}$

e) $7^{-2x+5}=0$

f) $\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$

14. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $5^{2x+1} \geq 25$

b) $3^{2x+1} \geq \frac{1}{9}$

c) $7^{-2x+1} < 49$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leq \frac{1}{3}$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+5} \leq \frac{3}{5}$

f) $4^{\frac{x+1}{x}} > 2$

15. Add meg a következő kifejezések értékét! A kapott eredményt ellenőrizd számológéppel!

$\lg 1$; $\lg 10$; $\lg 100$; $\lg 10^5$; $\lg 0{,}1$; $\lg 10^{-3}$

16. Írd fel logaritmusjelöléssel is! Add meg x értékét!

a) $3^x = 729$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}125$

d) $5^x = \frac{1}{625}$

e) $5^x = \sqrt[4]{5^3}$

f) $10^x = \sqrt[5]{1000}$

g) $10^x = 5^0$

17. Írd fel hatványalakban!

a) $\lg 1000 = 3$; $\lg 2 = 0{,}3010$; $\lg 10^{-2} = -2$; $\log_5 \sqrt{5^5} = 2{,}5$; $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$;

b) $\lg 0{,}01 = -2$; $\lg \sqrt{5} = 0{,}3495$; $\lg 5^0 = 0$; $\lg 15^0 = 0$; $\log_3 55^0 = 0$; $\log_3 81 = 4$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$.

18. Add meg a következő kifejezések értékét! Ne használj számológépet!

a) $\log_5 1 =$ $\log_5 5 =$ $\log_5 25 =$ $\log_5 \frac{1}{25} =$ $\log_5 \frac{1}{625} =$ $\log_5 0{,}2 =$

b) $\log_5 \sqrt{5} =$ $\log_5 \sqrt[6]{5^4} =$ $\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} =$ $\log_{25} 5 =$ $\log_{25} \frac{1}{5} =$ $\log_{25} \sqrt[3]{5^5} =$

19. Számítsd ki! A megoldáshoz ne használj számológépet!

a) $\log_2 8 + \log_3 \frac{1}{9} =$

b) $\log_{25} 5 - \log_8 2 =$

c) $\frac{1}{4}\log_3 27 - \log_{16} 4 =$

d) $\log_4 \frac{1}{16} + 3 \cdot \log_5 \frac{1}{625} =$

20. Írd át 10-es alapú logaritmusra, és számológép segítségével add meg a három tizedesjegyre kerekített értékét!

$\log_3 5 =$ $\log_{18} 36 =$ $\log_{\frac{1}{3}} 13 =$

$\log_{0{,}5} 24 =$ $\log_{0{,}8} 3{,}56 =$ $\log_{0{,}35} \frac{1}{3} =$

21. Oldd meg a valós számok halmazán számológép segítségével a következő egyenleteket! Két tizedesjegyre kerekíts!

a) $3{,}5 \cdot 10^x = 38{,}3$

b) $5 \cdot 3^x = 19$

c) $\frac{5^{3x}}{4} = 1{,}56$

d) $\frac{4^{-2x}}{5^3} = 0{,}75$

22. Végezd el a számításokat a logaritmus definíciójának felhasználásával!

$5^{\log_5 7}$; $4^{\log_2 5}$; $2^{\log_4 5}$; $0{,}5^{\log_4 5}$; $0{,}25^{\log_4 5}$

23. Mely valós számokra értelmezhetők a kifejezések?

a) $\log_3 (x-3)$

b) $\log_5 (-2x+9)$

24. Oldd meg az egyenleteket! Két tizedesjegyre kerekíts!

a) $3{,}5 \cdot 4{,}7^{3x+5} = 20$

b) $3250 \cdot \frac{1}{5^{-4x+1}} = 5630$

c) $1000 = 526 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{x}{3}+2}$

25. Nagymama idősödik, már nem bírja a hatalmas veteményes gondozását. Nagypapa úgy döntött, hogy minden évben befüvesíti a veteményeskert $\frac{1}{5}$ részét, hiszen füvet nyírni egyszerűbb. Hány év múlva csökken az eredeti veteményes a 10%-ára?

26. Kovács apuka év végi jutalmat kapott a cégtől, ahol dolgozik. Azon gondolkodik, hogyan fektesse be a pénzt. Végül két ajánlat tetszik neki a legjobban. Az egyik évi 10% kamatot garantál, a másik félévente 5%-ot. Ha nem veszi fel a kamatot, azt is az alaptőkéhez írják. Melyik befektetést válassza, ha öt évre akarja lekötni a pénzét?

27. Egy új hitelkártyát ajánlottak Szabó anyukának, aki már évek óta szerette volna felújítani a konyháját. Úgy számolta, 550 000 Ft elég is lenne. Igazán kedvezők a feltételek: csak havi 2,3% a kamat, és egy évig nem kell elkezdeni törleszteni. Gimnazista gyereke rögtön utánaszámolt, mennyi pénzzel is fognak tartozni egy év múlva. Mennyi lenne a tartozás? Ez hány százalék éves kamatot jelent? Tényleg kedvezők a feltételek?

28. A bizmut radioaktív izotópjának bomlása során a t nap múlva még el nem bomlott részecskék számát a következő egyenlet írja le: $N(t) = N_0 \cdot 0{,}87^t$, ahol N_0 a mérés kezdetekor a bizmutizotópok száma.

a) Ha kezdetben $4{,}2 \cdot 10^{25}$ darab bizmutizotóp volt egy mintában, akkor mennyi bizmutizotóp lesz a mintában 3 hét után?

b) Mennyi a folyamat felezési ideje?

42 Számhalmazok

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. **a)** Ábrázold Venn-diagramon a racionális számok (**Q**), az egész számok (**Z**) és a természetes számok (**N**) halmazát! Helyezd el a halmazábrán az alábbi számokat:

$2{,}3;\ \frac{12}{2};\ -4;\ \frac{8}{7};\ -9;\ \frac{54}{45};\ \sqrt{48};\ 0;\ -46{,}071;\ \frac{-5}{5};\ \frac{-17}{100};\ 3;\ \sqrt{5};\ -13;\ -\frac{8}{4};\ \frac{7}{7};\ \frac{897}{250};\ \frac{-10}{-5};\ \frac{3}{5}.$

b) Válassz ki a halmazokba írt számok közül (ha lehet)

– két természetes számot úgy, hogy azok összege és szorzata is természetes szám legyen;
– két természetes számot úgy, hogy valamelyikből kivonva a másikat ne természetes számot kapjunk eredményképpen;
– két egész számot úgy, hogy azok összege és szorzata ne egész szám legyen;
– két különböző előjelű egész számot úgy, hogy hányadosuk egész szám legyen!

c) Igaz vagy hamis?

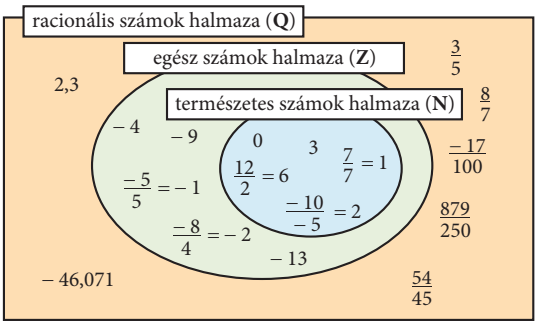
A) Bármely két egész szám szorzata egész szám.
B) Bármely két természetes szám különbsége egész szám.
C) Bármely két racionális szám összege racionális szám.
D) Bármely két, nullától különböző egész szám hányadosa egész szám.

Megoldás

a) Nem eleme egyik halmaznak sem: $\sqrt{48}$; $\sqrt{5}$.

b) – bármelyik két természetes szám kiválasztása jó;
– pl.: 1 és 3, mert $1-3=-2$ nem természetes szám;
– nem lehet ilyeneket kiválasztani;
– pl.: -9 és 3, mert $-9:3=-3$ egész szám.

c) A) igaz;
B) igaz;
C) igaz;
D) hamis (pl.: $\frac{3}{-2}=-1{,}5$ nem egész szám).



ELMÉLET

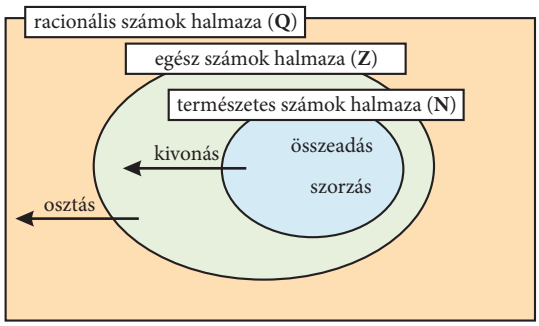
A természetes számok, az egész számok és a racionális számok halmazán vizsgáljuk a négy alapműveletet: az összeadást, a kivonást, a szorzást és az osztást.

- Bármely két természetes szám összege és szorzata természetes szám. Ezt másképpen úgy mondhatjuk, hogy a **természetes számok halmaza zárt** az összeadásra és szorzásra nézve.
- A kivonás művelete **kivezet** a természetes számok halmazából (mert két tetszőleges természetes szám különbsége nem biztos, hogy természetes szám).

  Azoknak a számoknak az összessége, melyek felírhatók két természetes szám különbségeként, az **egész számok halmaza**.
- Bármely két egész szám összege, szorzata és különbsége egész szám. Ezt másképpen úgy mondhatjuk, hogy az **egész számok halmaza zárt** az összeadásra, a szorzásra és kivonásra nézve.

- Az osztás művelete **kivezet** az egész számok halmazából (mert két tetszőleges egész szám hányadosa nem biztos, hogy egész szám).

  Azoknak a számoknak az összessége, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, a **racionális számok halmaza**.
- Bármely két racionális szám összege, szorzata, különbsége és hányadosa racionális szám. Ezt másképpen úgy mondhatjuk, hogy a **racionális számok halmaza zárt** az összeadásra, a szorzásra, a kivonásra és az osztásra nézve.



KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Lujza új számológépével próbaszámításokat végez. A számítások eredményéről így számol be testvérének, Félixnek:

– Ha meghatározom azoknak a közönséges törteknek a tizedes tört alakját, amelyeknek a számlálója 2 és a nevezője rendre az egyjegyű pozitív egészek értéke, akkor 5 esetben kapok véges tizedes törtet és 4 alkalommal végtelen szakaszos tizedes törtet.

Ha hasonlóan járok el 3-as számlálóval, …

– Akkor – vág közbe Félix – csak háromszor kapsz végtelen szakaszos tizedes törtet. Ha 4 a számláló, akkor újra 4-szer lesz végtelen szakaszos tizedes tört az eredmény.

Lujza meglepődik bátyja szavain, és azon kezd el töprengeni, hogy vajon hogyan tudta ezt a testvére számolás nélkül megállapítani, majd pár perc múlva felkiált:

– Tudom már! – és anélkül, hogy számológépet használna, elmondja a helyes következtetéseket az 5, a 6, a 7 számlálójú törtekre vonatkozóan.

Próbáld meg kitalálni a testvérek gondolatmenetét!

Határozd meg az alábbi törtek tizedes tört alakját számológép segítségével!

A kapott eredmények alapján helyezd el az eredeti közönséges törteket (valamint azok tovább már nem egyszerűsíthető alakját) a táblázat megfelelő oszlopában! Figyeld meg, milyen számok szorzataként írható fel a különböző oszlopokban szereplő, tovább már nem egyszerűsíthető törtek nevezője!

$\frac{3}{10}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{13}{8}$; $\frac{10}{12}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{2111}{990}$; $\frac{21}{28}$; $\frac{49}{32}$; $\frac{113}{5}$; $\frac{17}{11}$

tizedes tört alakja: véges tizedes tört	tizedes tört alakja: végtelen szakaszos tizedes tört

Megoldás

$\frac{3}{10} = 0{,}3$;

$\frac{4}{9} = 0{,}\dot{4}$;

$\frac{13}{8} = 1{,}625$;

$\frac{10}{12} = 0{,}8\dot{3}$;

$\frac{7}{25} = 0{,}28$;

$\frac{2111}{990} = 2{,}1\dot{3}\dot{2}$;

$\frac{21}{28} = 0{,}75$;

$\frac{49}{32} = 1{,}53125$;

$\frac{113}{5} = 22{,}6$;

$\frac{17}{11} = 1{,}\dot{5}\dot{4}$.

tizedes tört alakja: véges tizedes tört	tizedes tört alakja: végtelen szakaszos tizedes tört
$\frac{3}{10}$; $\frac{13}{8}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$; $\frac{49}{32}$; $\frac{113}{5}$	$\frac{4}{9}$; $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; $\frac{2111}{990}$; $\frac{17}{11}$



ELMÉLET

Minden racionális szám tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos.

Véges tizedes tört alakba írhatók azok a közönséges törtek, amelyeknek a tovább már nem egyszerűsíthető alak nevezőjének prímtényezős felbontásában csak a 2 vagy 5, illetve 2 és 5 prímtényezők szerepelnek, tehát ezek a nevezők bővíthetők 10 különböző hatványaira.

Például: $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{13}{8} = \frac{1625}{1000} = 1{,}625$; $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28$;

$\frac{3}{60} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0{,}05$; $\frac{63}{35} = \frac{9}{5} = \frac{180}{100} = 1{,}8$.

Végtelen szakaszos tizedes tört alakba írhatók azok a közönséges törtek, amelyeknek a tovább már nem egyszerűsíthető alak nevezőjének szorzat alakjában nem csak a 2 és az 5 szerepel tényezőként (tehát ezek a nevezők nem bővíthetők 10 különböző hatványaira).

Például: $\frac{4}{9} = 0{,}\dot{4}$; $\frac{5}{6} = 0{,}8\dot{3}$; $\frac{17}{11} = 1{,}\dot{5}\dot{4}$; $\frac{18}{14} = \frac{9}{7} = 1{,}\dot{2}85714\dot{}$.

Jelölés: 0,833333… így írható: $0{,}8\dot{3}$; 2,132323232… így írható: $2{,}1\dot{3}\dot{2}$.

Megjegyzés

Van olyan végtelen szakaszos tizedes tört, melynek értéke egyenlő egy véges tizedes törttel.
Megmutatjuk például, hogy $0{,}\dot{9} = 1$.

Mivel $0{,}\dot{9} = 9 \cdot 0{,}\dot{1} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$, ezért az egyenlőség fennáll.

FELADAT

1. Írd fel az alábbi törtek tovább már nem egyszerűsíthető alakját, majd állapítsd meg zsebszámológép használata nélkül, hogy a tört tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos-e!

$\frac{13}{20}$; $\frac{3}{105}$; $\frac{45}{72}$; $\frac{21}{16}$; $\frac{25}{15}$; $\frac{137}{37}$; $\frac{39}{52}$

2. Van-e olyan racionális szám, amelyre igaz az alábbi négy tulajdonság:
- pozitív,
- tizedes tört alakja véges,
- közönséges tört alakjában a nevezője olyan egyjegyű természetes szám, amely 2-vel nagyobb a számlálójánál,
- közönséges tört alakja tovább egyszerűsíthető?

Melyek azok a racionális számok, amelyek az előbbi feltételek mindegyikét teljesítik?

3. Hányféleképpen bontható fel a 40
- **a)** két különböző természetes szám összegére (a tagok sorrendjétől eltekintve);
- **b)** két természetes szám szorzatára (a tényezők sorrendjétől eltekintve);
- **c)** két egész szám összegére (a tagok sorrendjétől eltekintve);
- **d)** két különböző előjelű egész szám hányadosára?

4. Írj a ∇ helyére olyan számjegyet, hogy teljesüljenek a törtek mellé írt tulajdonságok! Keresd meg az összes lehetséges megoldást!
- **a)** $\frac{62}{1\nabla}$ 5-nél nagyobb értékű, tovább egyszerűsíthető, végtelen szakaszos tizedes tört;
- **b)** $\frac{53}{4\nabla}$ véges tizedes tört;
- **c)** $\frac{77}{\nabla 8}$ 1-nél kisebb értékű, végtelen szakaszos tizedes tört;
- **d)** $\frac{217}{3\nabla}$ egyszerűsíthető tört, véges tizedes tört.

HÁZI FELADAT

1. Írj a négyzetek helyére olyan számjegyet, hogy teljesüljenek a törtek mellé írt tulajdonságok! Keresd meg az összes lehetséges megoldást!

a) $\frac{123}{2\blacksquare}$ egyszerűsíthető tört, véges tizedes tört;

b) $\frac{47}{3\blacksquare}$ végtelen szakaszos tizedes tört;

c) $\frac{42}{\blacksquare 8}$ 1-nél nagyobb értékű, véges tizedes tört;

d) $\frac{\blacksquare 2}{1\blacksquare}$ 4-nél kisebb értékű, tovább nem egyszerűsíthető, végtelen szakaszos tizedes tört.

2. Igaz vagy hamis? Válaszod indokold!

A: Egy természetes szám és egy egész szám összege mindig természetes szám.
B: Két racionális szám összege és szorzata is lehet természetes szám.
C: Egy egész szám és egy racionális szám szorzata nem lehet egész szám.
D: Két végtelen szakaszos tizedes tört összege lehet véges tizedes tört.
E: Két negatív szám összege kisebb a két szám szorzatánál.

3. Írj minden téglalapba egy racionális számot úgy, hogy teljesüljenek a jelölt relációk, és mindegyik szám megfeleljen az adott téglalap alatt olvasható tulajdonságnak!

a legkisebb természetes szám	felírható két természetes szám különbségeként	véges tizedes tört alakba írható közönséges tört	$\frac{72\,000\,000\,000}{36\,000\,000\,000}$	felírható két egész szám szorzataként	$\frac{1}{3}$ reciproka	közönséges tört, számlálója 20, tizedes tört alakja végtelen szakaszos	10-nél kisebb racionális szám

RÁADÁS

Módszer a végtelen szakaszos tizedes törtek közönséges tört alakba való átírására:

Írjuk fel közönséges tört alakban a következő számokat!

a) $A = 24{,}\dot{7}$ **b)** $B = 24{,}17\dot{3}2\dot{6}$

Megoldás

a) Ha $A = 24{,}\dot{7}$, akkor $10A = 247{,}\dot{7}$.
Ekkor az előbbi két szám különbsége $10A - A = 247{,}\dot{7} - 24{,}\dot{7}$, amiből $9A = 223$, így $A = \frac{223}{9}$ adódik.

b) Ha $B = 24{,}17\dot{3}2\dot{6}$, akkor $100B = 2417{,}\dot{3}2\dot{6}$, $100\,000B = 2417326{,}\dot{3}2\dot{6}$.
Ez utóbbi két szám különbsége $100\,000B - 100B = 2\,417\,326{,}\dot{3}2\dot{6} - 2417{,}\dot{3}2\dot{6}$, amiből $99\,900B = 2\,414\,909$,
így $B = \frac{2\,414\,909}{99\,900}$ adódik.

A fenti módszer lényege, hogy az eredeti szám olyan többszöröseit hozzuk létre, amelyekben a tizedesjegyek megegyeznek, és ezért a képzett számok különbsége egész szám.

FELADAT

Írd fel közönséges tört alakban az alábbi számokat!

$K = 6{,}\dot{4}$; $L = 13{,}5\dot{3}$; $M = 71{,}8\dot{1}4\dot{6}$

43 Osztó, többszörös

BEVEZETŐ

a) Egy karitatív egyesület takarógyűjtést szervezett rászorulók számára. Az adományozó cégektől és magánszemélyektől összesen 81 darab takaró gyűlt össze. Hány menedékhelyet tudott megsegíteni az egyesület, ha azok között azonos mértékben osztották szét a takarókat?

b) Egy másik alkalommal élelmiszercsomagokkal próbáltak segíteni az átmeneti szállásokon élőknek. Ekkor 196 darab azonosan összeállított csomagot osztottak szét úgy, hogy minden helyre ugyanannyi csomagot vittek. Hány átmeneti szállásra szállíthattak élelmiszercsomagot?

(Statisztikai adat: 2015-ben éjjeli menedékhelyet 12 447 különböző ember, átmeneti szállást 9035 különböző ember vett igénybe, hajléktalanok otthonában összesen 606 különböző ember élt. Forrás: KSH.)

Megoldás

a) A 81 darab takaró egyenlő módon való elosztása 1; 3; 9; 27 vagy 81 menedékhely esetén történhet meg. Ezek a számok a 81 osztói.

b) A 196 darab élelmiszercsomag egyenlő módon való elosztása 1; 2; 4; 7; 14; 28; 49; 98 vagy 196 hajléktalanszálló esetén történhet meg. Ezek a számok a 196 osztói.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Határozd meg az 1; 7; 20; 30; 81; 143; 196; 349; 455 számok pozitív osztóit, majd foglald azokat táblázatba! Válaszolj az alábbi kérdésekre! Ha kell, használd a táblázat tapasztalatait!

a) Melyik az a szám, amely a felsoroltak mindegyikének osztója?

b) Mit tudsz megállapítani a táblázatban egymás mellé írt osztókról?

c) Lehet-e egy szám osztóinak száma páratlan?

d) Melyek azok a számok, amelyeknek biztosan többszöröse egy adott pozitív egész szám?

e) Keress olyan egyjegyű pozitív egészeket, amelyeknek pontosan két osztójuk van!

f) Igaz-e, hogy egy pozitív egész számnak annál több osztója van, minél nagyobb a szám értéke?

Megoldás

A megoldást táblázatba foglaljuk:

A szám	1	7	20	30	81	143	196	349	455
A szám pozitív osztói	1	1; 7	1; 20 2; 10 4; 5	1; 30 2; 15 3; 10 5; 6	1; 81 3; 27 9	1; 143 11; 13	1; 196 2; 98 4; 49 7; 28 14	1; 349	1; 455 5; 91 7; 65 13; 35

Válaszok:

a) Az 1.

b) Szorzatuk megadja az eredeti számot, ezeket **osztópároknak** nevezzük.

c) Igen, abban az esetben, ha egy osztónak önmaga az osztópárja. Ez akkor fordul elő, ha a szám négyzetszám.

d) Az 1-nek és önmagának.

e) Ilyen a 2, a 3, az 5 és a 7.

f) Nem igaz. (Pl.: $30 < 349$, és a 30-nak 8 darab, a 349-nek 2 darab pozitív osztója van.)

ELMÉLET

1. Osztó, többszörös

Az oszthatóság fogalmát a pozitív egész számok halmazán értelmezzük.

Definíció: A b pozitív egész szám **osztható** az a pozitív egésszel, ha van olyan c pozitív egész szám, amellyel az a-t megszorozva b-t kapunk, azaz $a \cdot c = b$. Ekkor az a szám a b szám **osztója**, valamint b szám az a szám **többszöröse**.

Jelölés: $a|b$

Például a 81 osztható 27-tel (jelekkel: $27 \mid 81$), mert van olyan pozitív egész szám, a 3, amellyel a 27-et megszorozva 81-et kapunk.

Például a 20 nem osztható 13-mal (jelekkel: $13 \nmid 20$), mert nincs olyan pozitív egész szám, amellyel a 13-at megszorozva 20-at kapunk.

Szóhasználat:

$a|b$ ⟺ b osztható a-val ⟺ a osztója b-nek ⟺ b többszöröse a-nak

2. A pozitív egész számok csoportosítása az osztóik száma szerint

Minden pozitív szám osztható 1-gyel és önmagával.

nem valódi osztók: az 1 és maga a szám,

valódi osztók: a szám minden olyan pozitív osztója, ami nem 1 és nem maga a szám.

– Az 1-nek egyetlen osztója van, az 1.

– A **prímszámok** azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan két pozitív osztójuk van. *Például:* 2, 3, 37, 43.

A prímszámok definíciója alapján egyetlen páros prímszám van, a 2.

– Az **összetett számok** azok a természetes számok, amelyeknek kettőnél több pozitív osztójuk van.
Például: 4, 6, 12, 3000.

Az 1 nem prímszám és nem összetett szám.

Bebizonyítható, hogy végtelen sok prímszám van.

3. *Megjegyzés* – az oszthatóság kiterjesztése a 0-ra

Ha az oszthatóságot kiterjesztjük a természetes számokra, akkor az alábbi megállapításokat tehetjük még:

– 0 osztható 0-val, a 0 többszöröse a 0-nak;

– a 0-nak minden természetes szám osztója (azaz a 0 minden természetes számnak többszöröse, vagyis a 0-nak végtelen sok osztója van).

Fontos: az oszthatóság egy **matematikai reláció** (két természetes szám viszonya), nem tévesztendő össze az osztás műveletével! (Így a 0-val való oszthatóság nem azonos a 0-val való osztás műveletével!)

4. Tétel: Minden összetett szám **felbontható prímszámok szorzatára,** és ez a felbontás egyértelmű, ha a tényezők sorrendjét nem vesszük figyelembe. Ezt a felírást nevezzük a szám **prímtényezős felbontásának**.

Más szavakkal: egy összetett számot bárhogyan írunk is fel prímszámok szorzataként, mindegyik szorzatban **ugyanazok a prímtényezők** fordulnak elő, és mindegyik prím pontosan **ugyanannyiszor** szerepel az egyik szorzatban, mint a másikban.

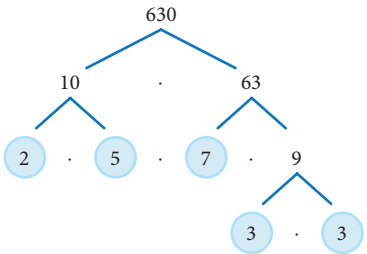
KIDOLGOZOTT FELADAT

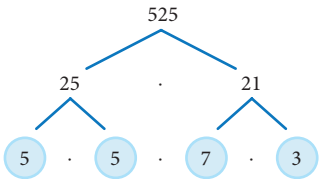
2. Egyszerűsítsük a $\frac{630}{525}$ törtet!

Megoldás

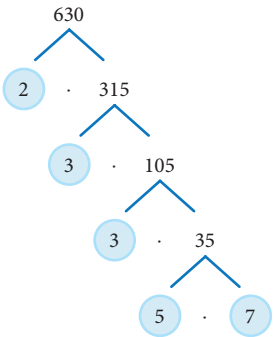
Bontsuk fel a 630-at és az 525-öt prímszámok szorzatára!

Egyik módszer: (tetszőleges tényezőkre bontást végzünk minden lépésben)



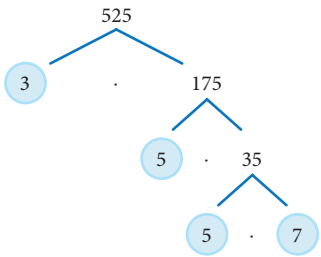


Másik módszer: (az egyik tényező minden lépésben prímszám)



ugyanez a módszer más formában írva:

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	



ugyanez a módszer más formában írva:

525	3
175	5
35	5
7	7
1	

Mindkét módszerrel arra jutottunk, hogy $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, valamint $525 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Így a tört egyszerűsítése: $\frac{630}{525} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$.

FELADAT

1. Bontsd fel prímszámok szorzatára a következő összetett számokat!

a) 700 **c)** 873

b) 990 **d)** 1221

2. Bontsd fel a számlálót és a nevezőt prímtényezők szorzatára, majd egyszerűsítsd a következő törteket!

a) $\frac{483}{1827}$ **b)** $\frac{10\,450}{19\,125}$

3. Egy 24 cm × 23 cm-es téglalapot azonos méretű téglalapokra kell szétvágni oldalaival párhuzamos egyenesekkel úgy, hogy a téglalapok oldalainak hossza csak egész cm hosszúságú lehet. Sorold fel az összes különböző lehetőséget!

4. Néhány számot prímszámok szorzataként írtunk fel. A szorzatok egyik tényezője egy ismeretlen, a szorzatban szereplő prímszámoktól eltérő p prímszámot jelöl. Add meg az alábbi állítások igazságértékét (igaz vagy hamis)!

a)	$3^2 \cdot 5 \cdot p$	Biztosan páratlan szám.
b)	$2 \cdot p \cdot 7$	Értéke legalább 30.
c)	$2 \cdot p \cdot 5 \cdot 7$	Biztosan 0-ra végződik.
d)	$p^2 \cdot 5 \cdot 3$	Lehet, hogy négyzetszám.
e)	$2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot p$	Lehet, hogy 32 többszöröse.

5. Bontsd fel prímtényezők szorzatára a 450-et! Sorold fel az osztóit prímtényezős alakban! Keresd meg mind a 18 osztóját!

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Bontsuk fel a 211-et prímtényezők szorzatára!

Megoldás

Ha nem akarunk véletlenszerűen találgatni, akkor 2-vel kezdve elkezdjük próbálgatni a prímszámokat, vajon melyik lesz osztója a 211-nek. 211 nem osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel, 11-gyel, 13-mal… Felmerül a kérdés: meddig érdemes próbálkozni? Ha ugyanis a 211 prímszám, akkor úgysem találunk valódi osztót, hiába keresünk.

Kezdetnek vizsgáljunk egy kisebb összetett számot, a 72-t, hogy lássuk, milyen szabályosságokat találunk az osztói között! A 72-t az ábrán látható módon két-két pozitív egész szám szorzatára bontjuk.

$72 = 1 \cdot 72$
$2 \cdot 36$
$3 \cdot 24$
$4 \cdot 18$
$6 \cdot 12$
$8 \cdot 9$
$9 \cdot 8$
$12 \cdot 6$
$18 \cdot 4$
$24 \cdot 3$
$36 \cdot 2$
$72 \cdot 1$

Vegyük észre, hogy a növekvő (illetve csökkenő) rendben felírt szorzótényezőkkel felsorolt szorzat alakokban a $8 \cdot 9$ után ugyanazokat a tényezőpárokat kapjuk, csak fordított sorrendben.

Ha két pozitív szám nagyobb (kisebb) a $\sqrt{72}$-nél, akkor a szorzatuk nagyobb (kisebb) a 72-nél.

Tehát ha egy pozitív egész számot két tényező szorzatára bontunk, akkor vagy mindkét tényező a szám négyzetgyöke (pl. $64 = 8 \cdot 8$), vagy az egyik nagyobb, a másik kisebb a négyzetgyöknél (pl. $72 = 6 \cdot 12$).

Alkalmazzuk az előbbi gondolatot a 211 prím osztóinak kereséséhez!
$\sqrt{211} \approx 14{,}5$. Mivel nem találtunk 14,5-nél kisebb prím osztót (2, 3, 5, 7, 11, 13 egyike sem volt osztója a 211-nek), ezért 14,5-nél nagyobb prím osztót sem fogunk találni. A 211-nek tehát nincsenek valódi osztói, a 211 prímszám.

HÁZI FELADAT

1. Bontsd fel prímszámok szorzatára az alábbi összetett számokat!

a) 240
b) 231
c) 435
d) 10 000
e) 75 000
f) 315 000

2. Bontsd prímszámok szorzatára a számlálókat és a nevezőket, majd egyszerűsítsd a következő törteket!

a) $\frac{4851}{594}$
b) $\frac{680}{1071}$

3. Sorold fel az 1485 osztóit prímtényezős alakban! Keresd meg mind a 16 osztóját!

4. Csilla talált egy 180 cm hosszú, 1 cm széles szalagot. Olyan 1 cm szélességű, egyforma téglalapokra akarja szétdarabolni, amelyek másik oldala is egész cm hosszúságú. Sorold fel az összes lehetőséget (beleértve azt is, hogy Csilla mégsem darabolja fel a szalagot)!

RÁADÁS

A modern titkosítás (pl. az internetes vásárlások biztonsága) azon alapul, hogy egy olyan összetett szám esetén, amely két nagyon nagy prímszám szorzata (nagyobbak, mint 10^{100}), nagyon hosszadalmas lenne megtalálni a szám osztóit. Ha azonban valaki ismeri az egyik prímszámot, akkor a másikat egy egyszerű osztással gyorsan megkaphatja. Ez olyan fontos alkalmazása a számelméletnek, hogy emiatt a prímszámok kutatása rendkívül aktuális problémakör. A jelenleg ismert legnagyobb prímszám 24 862 048 számjegyből áll. Ezt 2018 decemberében találta meg egy prímkereső szoftver segítségével a Great Internet Mersenne Prime Search (nagy prímszámok megtalálására alapított közösség) munkatársa. Az első, százmilliónál is több számjegyből álló prímszám felfedezéséért 150 ezer dolláros jutalmat tűztek ki.

44 Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

BEVEZETŐ

Egy 240 cm széles és 320 cm hosszú szobát akarunk kitapétázni. A tapétát azonos szélességű függőleges csíkokban szeretnénk feltenni minden falra. Maximum milyen széles csíkokat vágjunk, hogy minden falra pontosan egész számú tapétacsík férjen ki?

Megoldás

Soroljuk fel 240 és 320 osztóit, és karikázzuk be azokat, amelyek mindkét felsorolásban megtalálhatók!

A 240 osztói: (1), (2), 3, (4), (5), 6, (8), (10), 12, 15, (16), (20), 24, 30, (40), 48, 60, (80), 120, 240.

A 320 osztói: (1), (2), (4), (5), (8), (10), (16), (20), 32, (40), 64, (80), 160, 320.

Mint látható, a legnagyobb ilyen szám a 80. Tehát 80 cm széles csíkokat kell vágnunk.

ELMÉLET

Definíció: Ha az a pozitív egész szám osztója a b és a c pozitív egész számnak, akkor az a-t a b és a c **közös osztójának** nevezzük.

Bármely két pozitív egész számnak van közös osztója, az 1, de természetesen lehet más közös osztójuk is. Két pozitív egész számnak véges sok közös osztója van, és nem lehet olyan közös osztója, amely nagyobb, mint a két szám bármelyike.

Definíció: Két vagy több pozitív egész szám közös osztói közül a legnagyobbat a számok **legnagyobb közös osztójának** nevezzük. Jelölés: Az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztója: $(a; b)$.

Definíció: Ha az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztója 1, akkor az a és b relatív prímek egymáshoz.
Jelölés: $(a; b) = 1$

Például

a 18 és a 120 közös osztói: 1, 2, 3, 6; legnagyobb közös osztója: $(18; 120) = 6$.

a 22 és a 75 egyetlen közös osztója az 1; ezek tehát relatív prímek; $(22; 75) = 1$.

Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját a számok prímtényezős felbontásából (vagy ha valamelyik szám prímszám, akkor annak az értékéből) úgy határozzuk meg, hogy összeszorozzuk a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon. (Ha bármelyik prímtényezőt nem a legkisebb hatványon vennénk, akkor lenne olyan az eredeti számok között, amelynek ez a hatvány már nem lenne osztója.)

Az 1 és bármely pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1.

Például: $4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$; $528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$; $(4536; 528) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

A **legnagyobb közös osztó** meghatározásához szorozzuk össze a számok prímtényezős felbontásában szereplő

közös prímtényezőket	az előforduló **legkisebb** hatványon.

FELADAT

1. Határozd meg a legnagyobb közös osztójukat!

a) 675 és 495

b) 1176 és 252

c) 288; 528 és 936

d) $7^3 \cdot 13^4 \cdot 23^2$; $3^2 \cdot 7 \cdot 13^7 \cdot 19$ és $3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^6$

2. Egyszerűsítsd a törteket a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával!

$\frac{477}{318}$; $\frac{618}{1545}$

3. Egy pozitív egész számról, c-ről tudjuk, hogy nem prímszám. Keress példákat, mi lehet c, ha tudjuk, hogy

a) $(240; c) = 10$;

b) $(240; c) = 1$;

c) $(240; c) = 240$?

d) Az a), b), illetve c) pontok esetén melyik a legkisebb ilyen c?

4. Bencének egy 84 cm × 126 cm-es téglalapot egyforma méretű négyzetekre kell felosztania úgy, hogy a négyzetek oldala is csak egész cm hosszúságú lehet.

a) Add meg az összes felosztási lehetőséget!

b) Mennyi a legtöbb és mennyi a legkevesebb négyzet, ami a felosztás során keletkezhet?

KIDOLGOZOTT FELADAT

A madarak és fák napja alkalmából fotópályázatot szervez a művelődési központ. Még nem döntötték el előre, hogy 6, 8 vagy 10 képet fognak majd (ugyanakkora összeggel) díjazni, a költségvetést azonban most kell elkészíteni. Ezért úgy gondolják, annyi pénzt különítenek el díjakra, hogy akár 6, akár 8, akár 10 díjazott lesz, mindenképpen lehessen ennyi egyenlő részre osztani az összeget.

a) Mekkora a legkisebb összeg, amellyel ez megoldható, ha a díjak ezerrel oszthatóak?

Megoldás

Az összegnek oszthatónak kell lennie 6-tal is, 8-cal is és 10-zel is.

Elkezdhetjük felsorolni 6 többszöröseit, 8 többszöröseit és 10 többszöröseit, és megkereshetjük ezek között azokat, amelyek mindhárom felsorolásban előfordulnak.

Gyorsabb módszer, ha 8 és 10 közös többszöröseit írjuk fel előbb. Ezek: 40, 80, 120, 160, 200, 240, … . Ezek között a 6-nak is többszörösei: 120; 240, … . Közülük a legkisebb a 120. Tehát 120 000 Ft a legkisebb ilyen összeg. Ekkor 6 díj esetén 20 000 Ft, 8 díj esetén 15 000 Ft, 10 díj esetén 12 000 Ft jut egy embernek.

b) Maximum 200 000 Ft-ot lehet szánni a díjakra. Mekkora az a legnagyobb összeg, amely akár 6, akár 8, akár 10 részre eloszthatóa, ha nem fontos, hogy ezerrel oszthatóak legyenek a díjak?

Megoldás

A 6; 8 és 10 közös többszörösei: 120; 240; 360; … . Melyik ezek közül a legnagyobb, amely még kisebb, mint 200 000? Az egyéneknek adható lehető legnagyobb összeget úgy kapjuk, ha a teljes díjazásra szánt pénzösszeget a lehetséges legkisebb számmal (ebben az esetben a legkisebb közös többszörössel) osztjuk. 200 000 : 120 ≈ 1666,7. Ezért $1666 \cdot 120 = 199\,920$ a legnagyobb ilyen szám 200 000-ig. Ha 199 920 Ft-ot különítünk el, akkor 6 díj esetén 33 320 Ft, 8 díj esetén 24 990 Ft, 10 díj esetén 19 992 Ft jut egy főre. (Bár 19 992 Ft-ot készpénzben nem tudunk odaadni, átutalni azonban lehet ekkora összeget is.)

ELMÉLET

Definíció: Ha az a pozitív egész szám többszöröse a b és a c pozitív egész számnak is, akkor az a-t a b és c **közös többszörösének** nevezzük.

Közös többszörös például a két szám szorzata. Bármely két pozitív egész számnak végtelen sok közös többszöröse van. Mivel a pozitív egész számok bármely részhalmazának van legkisebb eleme, ezért a közös többszörösök között mindig van legkisebb.

Definíció: Két vagy több pozitív egész szám közös pozitív többszörösei közül a legkisebbet a számok **legkisebb közös többszörösének** nevezzük.
Jelölés: $[a; b]$

Például: 18 és 120 közös többszörösei: 360, 720, 1080, … ; $[18; 120] = 360$.

Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét a számok prímtényezős bontásából (vagy ha valamelyik szám prímszám, akkor annak az értékéből) úgy határozzuk meg, hogy összeszorozzuk a számokban szereplő összes prímtényezőt az előforduló legnagyobb hatványon. (Ha bármelyik prímtényezőt nem a legnagyobb hatványon vennénk, akkor lenne olyan az eredeti számok között, amelynek az így kapott szorzat már nem lenne többszöröse.)

Például: $4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$; $528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$; $[4536; 528] = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11 = 99\,792$.

Az 1 és bármely pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse az adott pozitív egész szám.

A **legkisebb közös többszörös** meghatározásához szorozzuk össze a számok prímtényezős felbontásában szereplő

minden prímtényezőt

az előforduló **legnagyobb** hatványon.

FELADAT

5. Határozd meg a következő számok legkisebb közös többszörösét!

a) 36 és 180

b) 15 és 22

c) 600; 1260 és 2340

d) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 11^2$; $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ és $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3$

6. Keresd meg a nevezők legkisebb közös többszörösét, és vond össze a törteket úgy, hogy az legyen a közös nevező!

a) $\frac{15}{242} + \frac{5}{99}$ **b)** $\frac{8}{15} + \frac{4}{63} - \frac{13}{70}$

7. Hány olyan közös többszöröse van 16-nak, 20-nak és 24-nek, amelyek 1000 és 2000 közé esnek? Melyik ezek közül a legkisebb? Melyik a legnagyobb?

8. Egy pozitív egész számról, c-ről tudjuk, hogy nem prímszám. Keress példákat, mi lehet c, ha tudjuk, hogy

a) $[20; c] = 60$;

b) $[20; c] = 20$;

c) $[20; c] = 220$.

d) Melyik a legkisebb ilyen c az a), b), illetve c) pontok esetén?

9. Bencének 84 cm × 126 cm-es téglalapokból egy négyzetet kell kiraknia úgy, hogy a téglalapok hosszabb oldalai mind párhuzamosak legyenek.

a) Mennyi a legkevesebb téglalap, amellyel megoldható a feladat?

b) Mekkora a legkisebb kirakható négyzet oldala?

c) Adj meg két másik lehetőséget is!

HÁZI FELADAT

1. Határozd meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

a) $2^3 \cdot 5^7$ és $2^5 \cdot 3 \cdot 5^8$

b) $2^3 \cdot 5^7$ és $3^2 \cdot 11 \cdot 19^4$

c) $2^3 \cdot 5^7$; $2^2 \cdot 5^3$; $2^4 \cdot 5^8$

2. Határozd meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

a) 740 és 63

b) 39 és 351

c) 12, 36 és 144

3. Adj meg egy olyan számot, amelynek a 24-gyel vett
- **a)** legnagyobb közös osztója 6;
- **b)** legkisebb közös többszöröse 72;
- **c)** legnagyobb közös osztója 8 és legkisebb közös többszöröse 48!

4. Internetes aukciós oldalakon rendszerint megadhatjuk, hogy az egyes meghirdetett árucikkek mennyi ideig legyenek elérhetőek. Beállíthatjuk azt is, hogy ha a megadott időtartam alatt nem kel el a termék, akkor a rendszer újra hirdesse meg azt, ugyanolyan időtartamra. Tegyük fel, hogy egyszerre hirdetjük meg a régi kenyérpirítónkat 8 napos ciklussal és a megunt számítógépes játékunkat 6 napos ciklussal. Legközelebb hány nap múlva indul egyszerre a két aukció, ha közben egyiket sem vették meg?

5. Egy 3,3 m × 4,2 m-es, téglalap alakú helyiség padlóját azonos méretű, négyzet alakú járólapokkal szeretnénk burkolni úgy, hogy a lehető legkevesebb darab járólapra legyen szükség. Mekkorának válasszuk a járólap méreteit, ha az oldalhossza csak egész számú cm lehet? (A járólapok hézagmentesen illeszkednek egymáshoz.)

RÁADÁS

1. Már Pitagorasz és követői (a pitagoreusok) is különleges jelentőséget tulajdonítottak a számoknak, azokat sokszor hétköznapi elnevezésekkel illették, emberi vagy akár mágikus tulajdonságokkal ruházták fel.
A természetes számok körében beszéltek szűkölködő, bővelkedő és tökéletes számokról.
Azt mondták, hogy egy természetes szám
- **szűkölködő** (vagy hiányos), ha a számnál kisebb osztóinak összege kisebb a számnál,
  például: $8 > 1 + 2 + 4$;
- **bővelkedő** (vagy gazdag), ha a számnál kisebb osztóinak összege nagyobb a számnál,
  például: $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$;
- **tökéletes,** ha felírható a számnál kisebb osztóinak összegeként,
  például: $6 = 1 + 2 + 3$.

Nem tudjuk, hogy létezik-e páratlan tökéletes szám, és azt sem, hogy létezik-e végtelen sok tökéletes szám.

2. A pitagoreusoktól származik a barátságos számok fogalma is.
Azokat a számpárokat, amelyekre igaz, hogy az egyik szám önmagánál kisebb osztóinak összege a másik számmal egyenlő és fordítva, **barátságos számok**nak hívjuk.
Például:
a 220 és 284 barátságos számpárt alkot, mivel $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, ahol 220 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; valamint $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$, ahol 284 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 4, 71, 142.
Nem tudjuk, hogy végtelen sok barátságos számpár van-e, ahogy azt sem, hogy lehet-e egy páros-páratlan számpár barátságos, vagy lehet-e egy barátságos számpár két tagja egymáshoz relatív prím.

FELADATOK

1. Mutasd meg, hogy a 28, valamint a 496 tökéletes szám!

2. Vizsgáld meg, hogy a 12; 34; 100; 1024 számok a szűkölködő, bővelkedő kategóriák melyikébe tartoznak!

3. Mutasd meg, hogy az 1184 és az 1210 barátságos számpárt alkot!

45 Oszthatósági szabályok, osztási maradékok

BEVEZETŐ

Részlet egy részvénytársaság osztalékelsőbbségi joggal rendelkező részvényeinek törzsrészvénnyé való átalakításáról született határozatából:

„A társaság alaptőkéje összesen 11 385 db, azaz tizenegyezer-háromszáznyolcvanöt darab 100 Ft, azaz Száz Forint névértékű, névre szóló dematerializált részvényből áll, melyből összesen 11 385 db, azaz tizenegyezer-háromszáznyolcvanöt darab 100 Ft, azaz Száz Forint névértékű névre szóló dematerializált formában előállított törzsrészvény lesz.”

Szét tudják-e osztani 2; 9 vagy 25 tag között egyenlő mértékben a 11 385 db azonos értékű részvényt?

Ahhoz, hogy az oszthatósággal kapcsolatos problémákat megoldjuk, nem fontos minden esetben részletes, hosszadalmas számolásokat végeznünk, ha ismerünk oszthatósági szabályokat.

ELMÉLET

Oszthatóság 2-vel, 4-gyel, 8-cal:

Egy természetes szám osztható

- 2-vel, ha a szám utolsó számjegye osztható 2-vel (0; 2; 4; 6; 8 az utolsó számjegy);
- 4-gyel, ha a szám utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható 4-gyel;
- 8-cal, ha a szám utolsó három jegyéből álló háromjegyű szám osztható 8-cal.

Oszthatóság 5-tel, 25-tel, 125-tel:

Egy természetes szám osztható

- 5-tel, ha a szám utolsó számjegye osztható 5-tel;
- 25-tel, ha a szám utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható 25-tel;
- 125-tel, ha a szám utolsó három jegyéből álló háromjegyű szám osztható 125-tel.

Oszthatóság 3-mal, 9-cel:

Egy természetes szám osztható

- 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal;
- 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.

Szám felírása ismeretlen számjegy esetén

Jelölés: – az $\overline{123a5}$ olyan ötjegyű számot jelöl, amelyben a 4. számjegyet nem ismerjük, azt a-val jelöljük.

– az $\overline{abab}$ olyan négyjegyű számot jelöl, amelyben az első és a harmadik számjegy azonos, valamint a második és a negyedik számjegy azonos.

Megjegyzés

Egy 10-es számrendszerbeli egész szám osztható 10^n egy osztójával, ha az utolsó n számjegyből álló szám osztható az adott osztóval.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Válaszoljunk a Bevezetőben feltett kérdésre!

Megoldás

11 385 darab részvény nem osztható szét egyenlő mértékben sem 2, sem 25 részre, viszont szétosztható így 9 részre.

Ugyanis:

$2 \nmid 11\,385$, mert $2 \nmid 9$;

$9 \mid 11\,385$, mert $9 \mid 1 + 1 + 3 + 8 + 5 = 18$;

$25 \nmid 11\,385$, mert $25 \nmid 85$.

FELADAT

1. Hány olyan négyjegyű szám képezhető a 2; 5; 7; 8 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával, amely osztható

a) 2-vel; **c)** 25-tel;

b) 9-cel; **d)** 4-gyel?

2. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Válaszod indokold!

a) $3 \mid (10^4 + 24)$

b) $5 \mid (30^7 + 15)$

c) $8 \mid (20^6 + 1920)$

d) $9 \mid (10^4 + 26)$

3. Az alábbi ötjegyű számokban néhány számjegyet kitakartunk.

$A = \overline{4\blacksquare 13\blacksquare}$ $C = \overline{104\blacksquare\blacksquare}$

$B = \overline{\blacksquare 6\blacksquare 52}$ $D = \overline{5\blacksquare 283}$

a) Melyik számról tudod biztosan eldönteni, hogy osztható 4-gyel, 3-mal, 125-tel?

b) Pótold a D számban a hiányzó számjegyet úgy, hogy osztható legyen 9-cel!

c) Írd fel a B szám összes lehetséges esetét úgy, hogy osztható legyen 8-cal!

d) Melyek lehetnek a C és a D számban a hiányzó számjegyek, ha a $C + D$ összeg osztható 25-tel?

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Egy szeptemberi iskolai kirándulásra 9. osztályosok (Gólyák) és 12. osztályosok (Végzősök) mennek. A diákokat évfolyamtól függetlenül, a jelentkezés sorrendjében csoportokba osztották, melyek létszáma 15; 13; 12; 14; 16; 19 fő. Az egyik csoportvezető megfigyelte, hogy a sajátján kívüli többi csoportban lévő diákok között összesen éppen kétszer annyi a Gólya, mint a Végzős. Melyik csoport vezetője tette ezt a megállapítást?

Megoldás

Ha a többi csoportban összesen kétszer annyi Gólya van, mint Végzős, akkor az azokban lévő diákok száma 3-mal osztható természetes szám (mivel ha a Végzősök számát tekintjük 1 egységnyinek, akkor a Gólyák száma 2 egységnek felel meg, így összesen 3 egységnyi emberről beszélhetünk, azaz számuk 3 többszöröse). Az egyes eredeti csoportokban lévő diákok számának 3-mal való osztási maradéka rendre: 0; 1; 0; 2; 1; 1. Ahhoz, hogy a többi csoportbeli diákok számának összege 3 többszöröse legyen, szükséges, hogy az említett csoportvezető csoportján kívül megmaradt öt csoport 3-mal való osztási maradékainak összege osztható legyen 3-mal. Ez csak akkor lehetséges, ha a csoportvezető csoportja 14 fős, így a többi csoportban lévők között 50 Gólya és 25 Végzős lesz.

ELMÉLET

1. Maradékos osztás

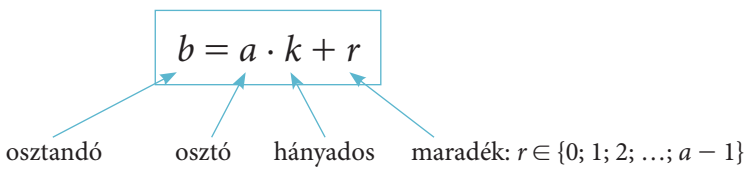
Legyenek a és b természetes számok.

– a osztója b-nek: az a maradék nélkül megvan b-ben ⇨ 0 a maradék;

– a nem osztója b-nek ⇨ a maradék 0-tól különböző pozitív egész szám.

A maradékos osztás matematikai formában:

$b = a \cdot k + r$, ahol k természetes szám, és az r maradék az a értékénél kisebb természetes szám.



Például: Ha 1200 forintból szeretnénk minél több 350 forintos csokit, akkor megtehetjük, hogy veszünk 3 darabot, és megmarad 150 forintunk. Ezt matematikai formában így írhatjuk: $1200 = 3 \cdot 350 + 150$.

2. Maradékosztályok

A maradékos osztás vizsgálatakor az osztási maradékoknak megfelelően úgynevezett maradékosztályok jönnek létre. Egy pozitív egész számmal való oszthatóság esetén éppen annyi maradékosztály van, amennyi a természetes szám értéke.

Például:

1. Egy természetes szám 5-tel osztva adhat 0; 1; 2; 3; 4 (vagyis ötféle) maradékot. Két szám ugyanabba a maradékosztályba tartozik, ha megegyezik az 5-tel való osztási maradéka.
   Az 5-tel való oszthatósága szempontjából minden természetes szám felírható az
   $5k$ $5k+1$ $5k+2$ $5k+3$ $5k+4$ alakok valamelyikében, ahol k természetes szám.

2. Egy természetes szám 7-tel osztva adhat 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 (vagyis hétféle) maradékot. Két szám ugyanabba a maradékosztályba tartozik, ha megegyezik az 7-tel való osztási maradéka. (k természetes szám.)

$7k$	$7k+1$	$7k+2$	$7k+3$	$7k+4$	$7k+5$	$7k+6$
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
…						

Megjegyzés

Ha tudjuk a hónapok napjainak számát, és azt, hogy az adott év szökőév vagy sem, akkor a 7-tel való osztási maradék alapján meg tudjuk határozni, hogy az év mely dátumai esnek ugyanolyan napra.

A szökőévekben a napok száma 366, ekkor a február 29 napból áll.

Nézz utána az interneten a szökőévekkel kapcsolatos érdekességeknek (pl. miért van szükség a szökőév alkalmazására; hogyan határozzák meg, hogy melyik év legyen szökőév; melyik nap a szökőnap; olimpiák dátumai)!

FELADAT

4. Adj meg olyan számot, amely

a) nagyobb, mint 30, kisebb, mint 40, és 8-cal való osztási maradéka 3;

b) kétjegyű, 0-ra végződik, és 4-gyel való osztási maradéka 2;

c) háromjegyű, és 40-nel való oszthatási maradéka 37;

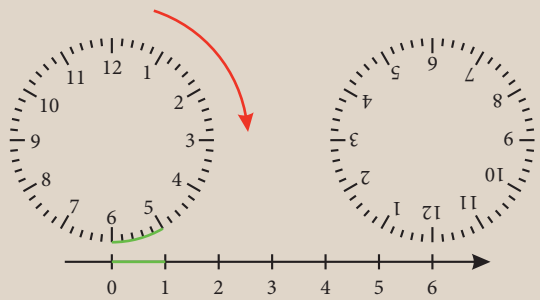
d) 6-tal osztva 1, valamint 7-tel osztva 2 maradékot ad!

5.

a) Ha ma kedd van, akkor milyen nap lesz 100 nap múlva?

b) Ha egy szökőévben január 1. szombatra esik, akkor milyen nap lesz április 1.?

6. Egy számegyenes mentén gördítsünk végig az ábrán látható módon egy óralapot. A kör kerülete a számegyenes egységeiben mérve 12 egység hosszúságú (tehát az ábrán jelölt zöld ív és zöld szakasz hossza egyenlő).



a) 8 teljes kör megtétele után a számegyenes melyik számával érintkezik az óralap?

b) A számegyenesen mely számokra illeszkedhet az óralap 11-es száma?

c) Az óralapon lévő mely számok illeszkedhetnek a számegyenesen a 10, a 24, a 37, az 59, a 100, a 2021 számokra?

HÁZI FELADAT

1. Az $\overline{1x687y}$ egy hatjegyű számot jelöl. Mit írhatunk az x és y helyére, hogy a szám osztható legyen

a) 4-gyel; **c)** 8-cal;
b) 3-mal; **d)** 9-cel?

2. Hány olyan négyjegyű természetes szám van, amely

a) 6-tal osztva 5; **b)** 7-tel osztva 6 maradékot ad?

3. Milyen maradékot ad

a) $10^{32} + 342$ 3-mal osztva;
b) $50^{50} + 4567$ 5-tel osztva;
c) $40^{98} + 98$ 8-cal osztva;
d) $10^{32} + 2222$ 9-cel osztva?

4.

1.	2.		3.
4.			
	5.		

Vízszintes
1. ezt a számot 98-cal osztva a maradék 11
4. prímszám
5. négyzetszám

Függőleges
1. (105; 175)
2. [54; 144]
3. ezt a számot 72-vel osztva a maradék 21

RÁADÁS

1. A 7-tel való oszthatóság ellenőrzése

Háromjegyű számokhoz jó módszer a következő: hagyjuk el az egyesek helyén álló számjegyet, majd az így kapott kétjegyű számból vonjuk le az elhagyott számjegy kétszeresét.

Ha az eredményül kapott szám egy egész szám 7-szerese, akkor az eredeti háromjegyű szám is az; ha nem, akkor az eredeti sem.

E szabály alapján állapítsd meg, hogy az alábbi számok közül melyik osztható 7-tel!

352, 805, 959, 410

2. Oszthatóság 11-gyel

A következő számok mind oszthatók 11-gyel: $10 + 1$, $100 - 1$, $1000 + 1$.

a) Folytasd a megkezdett sorozatot, és ellenőrizd számológéppel, igaz marad-e a 11-gyel való oszthatóság!

b) Melyik osztható 11-gyel? $10^4 + 1$; $10^4 - 1$; $10^5 + 1$; $10^5 - 1$; $10^9 + 1$; $10^9 - 1$

c) Ellenőrizd, hogy helyes-e a következő gondolatmenet!

$247 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 = 2 \cdot 99 + 2 + 4 \cdot 11 - 4 + 7$.

Tehát $247 = 2 \cdot 9 \cdot 11 + 4 \cdot 11 + 2 - 4 + 7 = 22 \cdot 11 + (2 - 4 + 7)$.

Mivel $2 - 4 + 7 = 5$, ezért a 247-et 11-gyel elosztva 5 maradékot kapunk. A 247 tehát nem osztható 11-gyel.

d) Vizsgáljuk az 572-t a 11-gyel való oszthatóság szempontjából! Mivel $5 - 7 + 2 = 0$, a c) feladat alapján azt gondolhatjuk, hogy $11 \mid 572$.

Mutasd meg, hogy helyes a sejtés (írd fel az 572-t úgy, ahogyan a c)-ben a 247-et)!

e) Számológép és a 11-gyel való osztás elvégzése nélkül mutasd meg, hogy a következő számok mind oszthatók 11-gyel!

352, 3190, 5599, 6391

Egy pozitív egész szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeit váltakozó előjellel összeadva olyan számot kapunk, amely egy egész szám 11-szerese.

46 Oszthatóság és logika

KIDOLGOZOTT FELADAT

a) Írd a piros téglalapokba a megfelelő halmazok betűjelét úgy, hogy helyes legyen a felrajzolt Venn-diagram!

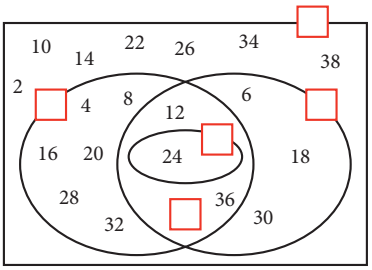
A = {4-gyel osztható, 40-nél kisebb pozitív egészek}

B = {6-tal osztható, 40-nél kisebb pozitív egészek}

C = {2-vel osztható, 40-nél kisebb pozitív egészek}

D = {24-gyel osztható, 40-nél kisebb pozitív egészek}

E = {12-vel osztható, 40-nél kisebb pozitív egészek}



b) Döntsd el, hogy igazak vagy hamisak az alábbi kijelentések! Válaszod indokold!

A_1: A 6 nem páros szám.

A_2: Van olyan páros szám, amely nem osztható 4-gyel.

A_3: Ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor osztható 24-gyel.

A_4: Ha egy szám többszöröse a 24-nek, akkor többszöröse a 12-nek is.

A_5: A 12 minden többszöröse osztható 4-gyel és 6-tal.

A_6: Ha egy szám osztható 2-vel és 4-gyel, akkor osztható 6-tal.

A_7: A fenti halmazábrán 3 olyan szám van, ami osztható 4-gyel és 6-tal.

A_8: A fenti halmazábrán 12 olyan szám van, ami osztható 4-gyel vagy 6-tal.

Megoldás

b) A_1: hamis, mert a 6 többszöröse a 2-nek. ($6 \in C$)

A_2: igaz, pl. a 2. ($2 \in C$ és $2 \notin A$)

A_3: hamis, pl. a 12 osztható 4-gyel és 6-tal, de nem osztható 24-gyel. ($12 \in A \cap B$ és $12 \notin D$)

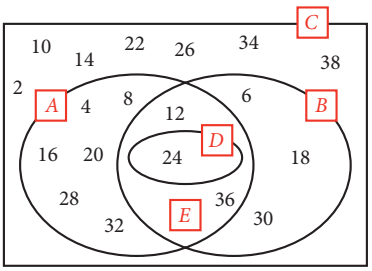
A_4: igaz, mert a 24 többszöröse a 12-nek. ($D \subset E$)

A_5: igaz, mert a 12 többszöröse a 4-nek és a 6-nak is. ($E = A \cap B$)

A_6: hamis, pl. a 4 osztható 2-vel és 4-gyel, de nem osztható 6-tal.

A_7: igaz, mert az „és” kötőszó miatt az $A \cap B$ halmaz elemeit kell figyelembe venni.

A_8: igaz, mert a „vagy” kötőszó miatt az $A \cup B$ halmaz elemeit kell figyelembe venni.



Megjegyzés

A kidolgozott feladatban nemcsak az oszthatósággal kapcsolatos fogalmakat és szabályokat kellett megfelelően használni, hanem figyelnünk kellett a halmazokban elhelyezkedő elemek kapcsolatára, valamint a megfogalmazott állításokban szereplő kötőszavakra is.

ELMÉLET

1. A matematikai logika alapfogalmai

A matematikai logika a matematikának az az ága, amely állításokkal, következtetésekkel, és ok-okozati kapcsolatok vizsgálatával foglalkozik.

Állítás (vagy **kijelentés** vagy **ítélet**)	kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy **igaz** vagy **hamis**
Az állítás logikai értéke	**igaz / hamis**

2. Logikai műveletek I. (A táblázatban a zöld szín igaz állítást, a piros szín hamis állítást jelöl.)

A művelet megnevezése	**„nem” művelet,** vagyis **tagadás** *(negáció)*	**„és” művelet** *(konjunkció)*	**„vagy” művelet, megengedő vagy** *(diszjunkció)*	**„vagy-vagy” művelet,** azaz **kizáró vagy**
A művelet logikai értéke	igaz, ha az eredeti állítás hamis, hamis, ha az eredeti állítás igaz	igaz, ha mindkét kijelentés igaz, minden más esetben hamis	igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, más esetben hamis	igaz, ha a két kijelentés közül kizárólag (pontosan) az egyik igaz, más esetben hamis
Példa	*A 6 páros szám.* (igaz) tagadása: (hamis) *Nem igaz, hogy a 6 páros szám.* *A 6 nem páros szám.* *A 6 páratlan szám.* *Az 1 prímszám.* (hamis) tagadása: (igaz) *Nem igaz, hogy az 1 prímszám.* *Az 1 nem prímszám.*	*A 7 páratlan szám* ***és*** *a 6 páros szám.* (igaz) *A 7 páratlan szám* ***és*** *az 1 prímszám.* (hamis) *A 6 páratlan szám* ***és*** *az 1 prímszám.* (hamis)	*A 12 osztható 3-mal* ***vagy*** *a 2 prímszám.* (igaz) *A 7 páratlan szám* ***vagy*** *az 1 prímszám.* (igaz) *A 6 páratlan szám* ***vagy*** *az 1 prímszám.* (hamis)	*Vagy a 7 páratlan szám,* ***vagy*** *az 1 prímszám.* (igaz) *Vagy a 6 páratlan szám,* ***vagy*** *az 1 prímszám.* (hamis) ***Vagy*** *a 12 osztható 3-mal,* ***vagy*** *a 2 prímszám.* (hamis)

Megjegyzések

- A **de** kötőszó „és” műveletet fejez ki.
- Az „és” művelethez hasonló jelentéssel bíró „és” kapcsolattal találkoztunk már a halmazok metszetének definiálása során: $A \cap B$ jelenti azon elemek összességét, amelyek az A és B, azaz **mindkét halmaznak elemei**.
- A „megengedő vagy” művelethez hasonló jelentéssel bíró „vagy” kapcsolattal találkoztunk már a halmazok uniójának definiálása során: $A \cup B$ jelenti azon elemek összességét, amelyek az A **vagy** B, azaz **legalább az egyik halmaznak elemei**.
- A negáció logikai művelet halmazelméleti megfelelője a komplementerképzés.

3. Minden / Van olyan

Az oszthatóság kapcsán (és a matematika egyéb területein) úgy fogalmazunk meg szabályokat, tételeket, hogy az azokban használt szavakból kiderül, hogy **általános érvényű** a kijelentés, vagy csak **előfordulnak (léteznek)** olyan számok, melyekre a kijelentés igaz.

Például: Minden kétjegyű prímszám páratlan. (**általános érvényű** tulajdonság a kétjegyű prímekre)

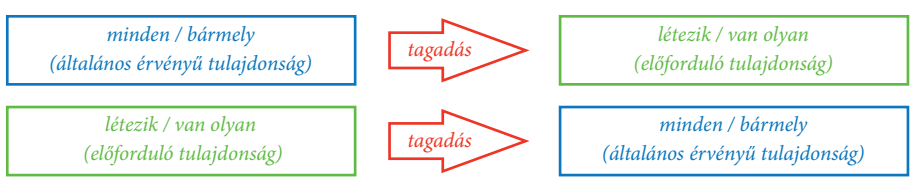
Az általános érvényű (univerzális) kijelentések tagadásakor azt fejezzük ki, hogy van olyan szám, amelyre nem érvényes a kijelentésben megfogalmazott tulajdonság.

Az előbbi állítás tagadása: *Van olyan kétjegyű prímszám, ami nem páratlan* (vagy másképp: *Van kétjegyű páros prím*). (Hamis a logikai értéke, mivel az eredeti állítás igaz.)

Például: Van olyan prímszám, ami páros. (bizonyos tulajdonsággal bíró szám **létezését** fogalmazza meg)

A létezést, előfordulást (egzisztenciát) megfogalmazó kijelentések tagadásakor azt fejezzük ki, hogy csakis olyan szám van, amelyre nem érvényes a kijelentésben megfogalmazott tulajdonság.

Az előbbi állítás tagadása: *Minden prímszám nem páros.* (vagy másképp*: Minden prímszám páratlan.*) (hamis a logikai értéke, mivel az eredeti állítás igaz)



FELADAT

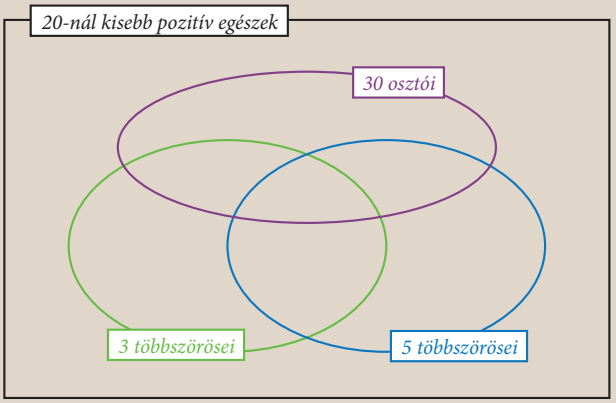
1. Döntsd el, hogy kijelentések-e az alábbi mondatok, azaz egyértelműen eldönthető-e, hogy igazak vagy hamisak!
Amelyik kijelentés, annak add meg a logikai értékét, és fogalmazd meg a tagadását is!

a) A 11 páratlan szám.
b) A 9571 többszöröse a 3-nak.
c) Az oszthatósági szabályok könnyen megjegyezhetők.
d) Az 5 relatív prím a 6-hoz.
e) Végtelen sok prímszám van.
f) A 13 szerencsés szám.
g) A 12-nek legalább 5 osztója van.

2. Fogalmazd meg az alábbi kijelentések tagadását!

a) Van olyan szám, amelynek pontosan 5 pozitív osztója van.
b) Minden prímszámnak pontosan 2 osztója van.
c) Bármelyik természetes számnak végtelen sok többszöröse van.
d) Létezik olyan természetes szám, ami osztható 0-val.

3. Helyezd el a 20-nál kisebb pozitív egész számokat a halmazábrában, majd válaszolj a kérdésekre! Melyik 20-nál kisebb pozitív egész számokra teljesül, hogy



a) a 3-nak többszöröse és a 30-nak osztója;
b) az 5-nek többszöröse vagy a 30-nak osztója;
c) vagy a 3-nak többszöröse, vagy a 30-nak osztója;
d) nem osztója a 30-nak, de többszöröse az 5-nek?

ELMÉLET

4. Logikai műveletek II. (A táblázatban a zöld szín igaz állítást, a piros szín hamis állítást jelöl.)

a művelet megnevezése	**„ha…, akkor” művelet, következtetés;** *(implikáció)*	**„akkor és csak akkor” művelet** *(ekvivalencia)*
a művelet logikai értéke	**hamis,** ha az **előtag igaz és az utótag hamis** minden más esetben igaz	akkor **igaz**, ha a két kijelentés (előtag és utótag) **logikai értéke megegyezik** más esetekben hamis
példa 	Ha ez az autó egy Ferrari, akkor Olaszországban gyártották. (igaz) Ha ez az autó egy Ferrari, akkor Magyarországon gyártották. (hamis) Ha ez az autó egy Suzuki, akkor Olaszországban gyártották. (igaz, mivel nem Suzuki) Ha ez az autó egy Suzuki, akkor Magyarországon gyártották. (igaz, mivel nem Suzuki)	*Egy autó akkor és csak akkor Ferrari, ha az olasz Ferrari-gyárban gyártották.* (igaz) *Egy autó akkor és csak akkor Ferrari, ha Olaszországban gyártották.* (hamis, mert lehet más márkájú is)

Egy **„ha…, akkor”** típusú állítás hamis, ha létezik **ellenpélda**: van olyan eset, amikor az előtag igaz és az utótag hamis (így a következtetés nem teljesül).

„ha…, akkor” állítás hamis ⇨ van **ellenpélda**!

5. Állítás és megfordítása

Egy „ha *A*, akkor *B*” típusú állítás megfordításán a „ha *B*, akkor *A*” állítást értjük, vagyis felcseréljük a feltételt és a következményt.

Az állítást és megfordítását egyben megfogalmazhatjuk „*A* akkor és csak akkor *B*” formában.

Egy igaz állítás megfordítása nem biztos, hogy igaz.

Például:

1. Állítás: *Ha egy egész szám osztható 4-gyel, akkor páros.* (igaz)
   Az állítás megfordítása:
   Ha egy egész szám páros, akkor osztható 4-gyel. (hamis, ellenpélda például a 6)
   Az előbbiek miatt:
   Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha páros. (hamis)

2. Állítás: *Ha egy egész szám osztható 3-mal, akkor számjegyeinek összege osztható 3-mal.* (igaz)
   Az állítás megfordítása:
   Ha egy egész szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, akkor osztható 3-mal. (igaz)
   Az előbbiek miatt:
   Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. (igaz)

FELADAT

4. Írd le az alábbi kijelentések megfordítását, majd add meg az eredeti kijelentés és a megfordítás logikai értékét!

a) Ha egy természetes szám osztható 3-mal, akkor osztható 9-cel.

b) Ha egy természetes szám osztható 12-vel, akkor osztható 4-gyel.

c) Két prímszám összege mindig páros.

d) Ha egy számpár tagjai különböző összetett számok, akkor relatív prímek.

5. Igazak-e az alábbi kijelentések? Válaszod indokold!

a) Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 5.

b) Egy természetes szám akkor és csak akkor prímszám, ha pontosan 2 osztója van.

c) Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha osztható 8-cal.

d) Két pozitív egész szorzata akkor és csak akkor páros, ha mindkét szám páros.

e) Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel.

HÁZI FELADAT

1. **a)** (Érettségi feladat nyomán, 2010)
Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

I. Minden prímszám páratlan.
II. Létezik páratlan prímszám.
III. Minden egész szám racionális szám.
IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként.
V. Nem létezik páros prímszám.

b) Fogalmazd meg az a) feladatrészben leírt kijelentések tagadását!

2. **a)** (Érettségi feladat, 2020)
Add meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Ha egy pozitív egész szám osztója 24-nek, akkor osztója 12-nek is.

B: Ha egy pozitív egész szám osztható 12-vel, akkor osztható 6-tal is.

C: Ha egy pozitív egész szám osztható 2-vel és 4-gyel, akkor osztható 8-cal is.

b) Írd le az a) feladatrészben leírt minden kijelentés megfordítását, és határozd meg azok igazságértékét!

47 Oszthatósági feladatok

BEVEZETŐ

Vizsgáljuk 765-nek és 2900-nak a 45-tel való oszthatóságát! Mivel $45 = 5 \cdot 9$, ezért elegendő az 5-re és a 9-re tanult oszthatósági szabály segítségével azt vizsgálnunk, hogy 765, valamint 2900 többszöröse-e az 5-nek, valamint a 9-nek.

A 765 megfelel mindkét oszthatóságnak, ezért osztható 45-tel. A 2900 nem osztható 9-cel, ezért nem osztható 45-tel sem.

ELMÉLET

Összetett oszthatósági szabályok

Ha szorzattá alakítással vagy Venn-diagrammal ábrázolva vizsgáljuk a megfelelő többszörösök halmazát, könnyen belátható az alábbi szabályok:

Egy természetes szám akkor és csak akkor

– osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal;
– osztható 10-zel, ha osztható 2-vel és 5-tel (vagyis ha 0-ra végződik);
– osztható 10-zel, 100-zal, 1000-rel …, ha 0-ra, 00-ra, 000-ra… végződik;
– osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel;
– osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel.

Hasonlóan megfogalmazhatunk oszthatósági szabályokat újabb összetett számokra. Vegyük észre, hogy az oszthatóságot mindig egymással relatív prím számpárok (vagy számhármasok stb.) oszthatóságára tudjuk visszavezetni.

osztható a-val **és** osztható b-vel **és** a és b relatív prímek ⇒ akkor osztható $(a \cdot b)$ -vel

CSOPORTMUNKA

1. Bontsd fel az 1260-at prímtényezők szorzatára, és a prímtényezőkből állítsd össze az 1260 összes osztóját! Sikerült megtalálnod mind a 36 osztót?

2. Az x és y két egyjegyű pozitív egész szám. Az $\overline{xy}$ az a kétjegyű szám, amelynek első jegye x, második jegye y; a $\overline{3xy}$ pedig az a háromjegyű szám, melyben az első számjegy 3, a második x, a harmadik y. Mely számokra teljesül, hogy $(\overline{3xy}\,;\,\overline{xy}) = 3$? Keresd meg az összes lehetőséget!

3. Igazak-e az alábbi állítások? Válaszodat indokold!

a) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor a négyzete is osztható 3-mal.

b) Ha egy természetes szám négyzete osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.

c) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor a négyzete osztható 9-cel.

d) A 10 minden 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványa osztható 25-tel.

e) Bármely három egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 6-tal.

f) Bármely öt egymást követő pozitív egész szám szorzata 0-ra végződik.

g) Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor az azt követő második legkisebb páros szám is osztható 4-gyel.

h) Ha egy összetett szám osztható 3-mal, akkor azt tetszőleges módon két pozitív egész tag összegére bontva e tagok is oszthatók lesznek 3-mal.

i) Ha egy összetett szám osztható 3-mal, akkor azt tetszőleges módon két pozitív egész tényező szorzatára bontva e tényezők is oszthatók lesznek 3-mal.

4. Magyarországon az országgyűlési képviselőket 1990 óta négyévente választják. A köztársasági elnököt ötévente választják, ilyen volt például 2017-ben is.

a) 2017-et követően legközelebb mikor tartjuk mindkét választást ugyanabban az évben?

b) Az Európai Parlament képviselőit is öt évre választják meg. Magyarország először 2004-ben küldhetett képviselőket. Legközelebb mikor lesz olyan év, amikor magyar országgyűlési képviselőket és európai parlamenti képviselőket is választunk?



c) Ha nem történik változás, legközelebb mikor fogjuk ugyanabban az évben tartani mindhárom választást?

5. Az A, B és C három különböző pozitív egész szám. Képezzük belőlük ezeket a számokat!

a) $(A; [B; C])$ **c)** $[(A; B); C]$

b) $([A; B]; C)$ **d)** $[B; (A; C)]$

Van-e ezek között két olyan, amelyekről azt állíthatjuk, hogy az egyik biztosan osztója a másiknak?

Adj példát olyan A-ra, B-re és C-re, hogy ezek közül kettő egyenlő!

Számold ki az értéküket, ha $A = 48$; $B = 60$; $C = 75$.

6. Közös végállomásról két buszjárat indul. Az egyiket 6.00 órától 8.00 óráig 8 percenként indítják, utána 14.00 óráig 9 percenként, majd 20.00 óráig újból 8 percenként, s végül 22.00 óráig 12 percenként. A másikat is 6.00 órától indítják, de ezt 9.00 óráig 5 percenként, utána 16.00 óráig 11 percenként. Ekkor nem várják meg, hogy leteljen a 11 perc, hanem 16.00 órától 21.00 óráig 7 percenként indítják, és 21.00 után már nem indul újabb járat. A nap folyamán mikor indul egy időben a két buszjárat a végállomásról?

7. Pierre Fermat francia jogász és matematikus 1636-ban fogalmazta meg a később róla elnevezett „kis Fermat-tétel”-t: Ha p prímszám, a pedig tetszőleges pozitív egész, akkor az $a^p - a$ szám osztható p-vel. Ellenőrizd az állítás helyességét a következő esetekben!

$a = 2$ és $p = 3$ $\quad$ $a = 2$ és $p = 5$

$a = 3$ és $p = 3$ $\quad$ $a = 3$ és $p = 5$

$a = 4$ és $p = 3$ $\quad$ $a = 4$ és $p = 5$

Számológéppel ellenőrizd az állítást néhány nagyobb számra is!

$a = 4$ és $p = 7$

$a = 5$ és $p = 13$

$a = 8$ és $p = 11$

HÁZI FELADAT

1. Páros vagy páratlan

a) két páros szám összege;

b) két páratlan szám összege;

c) egy páros és egy páratlan szám összege;

d) két páratlan szám szorzata;

e) két páros szám szorzata;

f) egy páratlan és egy páros szám szorzata?

2. Két szám legkisebb közös többszöröse 48, legnagyobb közös osztója 6. Melyik lehet ez a két szám?

3. Állítsd nagyság szerint sorba!

$(3575; 3125)$; $(5120; 4480)$; $[72; 15]$; $[75; 40]$

4. Egy áruházlánc központi raktárában $4 \times 16 \times 20$ (cm) méretű bonbonos dobozokat szeretnének nagy kartondobozokba csomagolni. A bonbonos dobozoknak teljesen ki kell tölteniük a kartondobozokat, függetlenül attól, hogy melyik lapjukra állítva kezdték berakni őket. Minden dobozt ugyanolyan állásban helyeztek el, mint a legelsőt.

a) Legalább mekkora legyen a kartondoboz hosszúsága, szélessége és magassága?

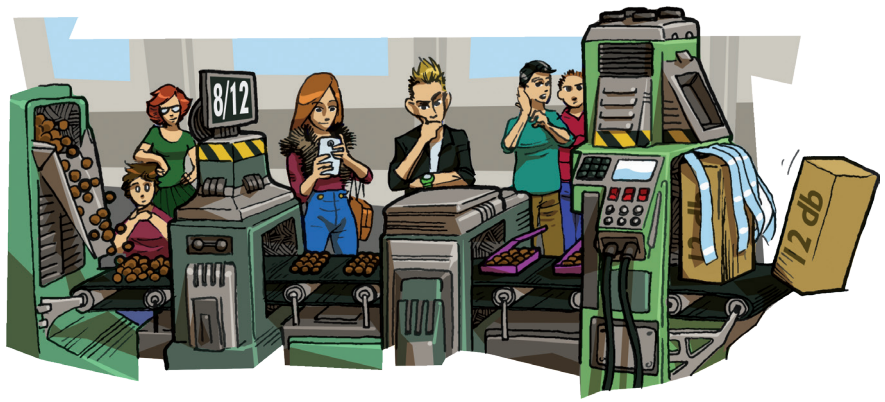
b) Hány doboz fér el a legkisebb megfelelő dobozban?

c) Mekkora a második legkisebb megfelelő doboz, és ebben hány bonbonos doboz fér el?

48 Számrendszerek I.

BEVEZETŐ

Bencéék az osztálykiránduláson ellátogattak egy csokigyárba. Bencének nagyon tetszett egy automata csomagológép. Sokáig figyelte, hogyan működik. A gép 12 csokoládébonbont tett egy kisebb díszdobozba, majd 12 díszdobozt egy nagyobb kartondobozba. A gépen egy számláló jelezte, hogy hány bonbon érkezett (az előző munkafázis után) a csomagológépbe.



Bence megfigyelte, hogy a kijelző azt mutatja, hogy 1347 szem bonbon került aznap reggel a csomagológépbe. Hány díszdoboz és hány kartondoboz telt meg ezekkel a bonbonokkal?

12 bonbon tesz ki egy tucatot, 12 díszdoboz (egy karton) pedig egy nagytucatot. A nagytucatban $12 \cdot 12 = 144$ bonbon van. $1347 : 12 = 112$, tehát a gép 112 díszdobozba tett 12-12 bonbont, és maradt még 3 bonbon.

Hány kartondoboz telt meg a díszdobozokkal?
$112 : 12 = 9$, tehát megtelt **9 karton**, és maradt **4 díszdoboz**.
4

Az 1347 bonbon kitett **9** kartont, **4** díszdobozt és **3** bonbont.
Másképp: 1347 bonbon = **9** nagytucat + **4** tucat + **3** darab.

Kartondobozok száma	Díszdobozok száma, amelyek nem kerültek kartonba	Bonbonok száma, amelyek nem kerültek dobozba
9	4	3

A táblázat alapján Bence ezt írta fel: 943_{12}. Miért?
Bence **12-es számrendszerben** adta meg a bonbonok számát. A szám megadásakor jelezte a csoportosítás **alapszámát**: ez a 12.
A 943_{12} tehát a következőt jelenti: 3 bonbon maradt, amely nem tett ki egy díszdobozt, a kartondobozokon kívüli díszdobozokban pedig $4 \cdot 12$ bonbon van. Egy kartondobozban összesen $12 \cdot 12 = 12^2$ bonbon van, a 9 kartonban összesen $9 \cdot 12^2$. Bence tehát a $9 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 3$ összeget írta fel így: 943_{12}.

10-es számrendszerben (ahol a megfelelő csomagolás az lenne, hogy a gép 10 csokoládébonbont tesz egy kisebb díszdobozba, majd 10 díszdobozt egy nagyobb kartondobozba) a bonbonok számát így írjuk le: 1347.
Ezt mi így értjük: $1347 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7$.
Vagyis 7 egyes, 4 tízes, 3 százas és 1 ezres csomagban van összesen annyi bonbon, ami a gépbe eddig bekerült.
Ennyi bonbont jelent a 943_{12} jelölés is, ezért $943_{12} = 1347$.

FELADAT

1. Egy másik fajta bonbonból 8 kerül egy díszdobozba, és 8 díszdoboz egy kartonba. Bence a bonbonok számát így adta meg: 725_8.

Hány bonbont jelzett a számláló? A bonbonok számát add meg 10-es és 12-es számrendszerben is!

ELMÉLET

A tízes számrendszer és más számrendszerek

A pozitív egész számokat **helyi értékes rendszerben**, a **tízes számrendszer** szerint szoktuk felírni. Ehhez 10 jelet használunk: a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 **számjegyeket**.

Mi a tízes számrendszer lényege?
Ha sok megszámlálni való „dolog” van, akkor azokat **tízesével csoportosítjuk**, és feljegyezzük, hány darab maradt ki a csoportosításból.
Például:

$66 = \mathbf{6} \cdot 10 + \mathbf{6}$

$15\,823 = \mathbf{1} \cdot 10\,000 + \mathbf{5} \cdot 1000 + \mathbf{8} \cdot 100 + \mathbf{2} \cdot 10 + \mathbf{3} = \mathbf{1} \cdot 10^4 + \mathbf{5} \cdot 10^3 + \mathbf{8} \cdot 10^2 + \mathbf{2} \cdot 10 + \mathbf{3}$

Hasonló a többi számrendszer alapelve is. Minden számrendszerben annyi számjegyre van szükség, amennyi a számrendszer alapszáma.

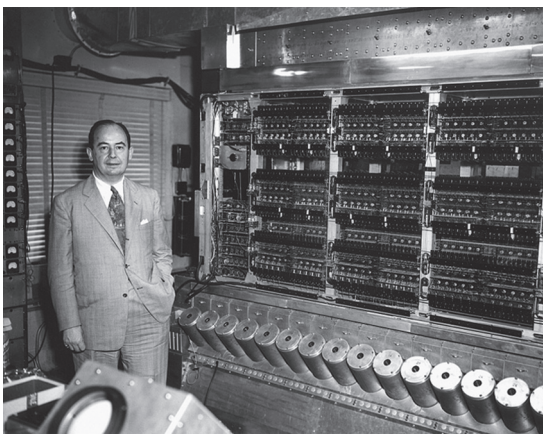
Például:
A **kettes** számrendszerben **két számjegyre** van szükség. Ezek a 0 és az 1.
A **nyolcas** számrendszerben **nyolc számjegyre** van szükség: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7. A tizenkettes számrendszerben tizenkét számjegyre van szükség: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, míg további számjegyek híján az újabbakat az ábécé betűivel pótoljuk: $10 = A$; $11 = B$.

Ha egy számot a 10-estől eltérő számrendszerben írtunk fel, azt a számjegyek után jobb alsó indexben, egy kisebb számmal jelöljük.

Például:
A 20123_4 azt jelenti, hogy itt egy 4-es számrendszerben felírt számról van szó.



A kettes számrendszer technikai alkalmazása *Neumann János* (1903–1957) világhírű matematikus nevéhez fűződik. Ő alkotta meg a számítógépek alapjául szolgáló elveket, melyek egyike a kettes számrendszer használata. Élete nagy részét Németországban és az Egyesült Államokban töltötte, de Budapesten doktorált. A matematika számos ágával foglalkozott kiemelkedő eredménnyel, tudásával a gyakorlati életet kívánta szolgálni.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Írjuk át a 20123_4 számot 10-es számrendszerbe!

Megoldás

Készítsünk helyiérték-táblázatot, ebbe írjuk be az adott számjegyeket!

Helyi érték	4^4	4^3	4^2	4	1
Alaki érték	2	0	1	2	3
Valódi érték	$2 \cdot 4^4 = 512$	$0 \cdot 4^3 = 0$	$1 \cdot 4^2 = 16$	$2 \cdot 4 = 8$	3

$20123_4 = 2 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 512 + 0 + 16 + 8 + 3 = 539$

2. Írjuk át az $1A7B_{12}$ számot 10-es számrendszerbe!

Megoldás

$1A7B_{12} = 1 \cdot 12^3 + A \cdot 12^2 + 7 \cdot 12^1 + B \cdot 12^0 = 1 \cdot 12^3 + 10 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 = 1728 + 1440 + 84 + 11 = 3263$

Megjegyzés

Az $1A7B_{12}$ írható $1(10)7(11)_{12}$ alakban is.

FELADAT

2. Írd fel a következő számokat a tízes számrendszerben!

2113_4; 3114_5; 6142_7; 6142_8

3. Állítsd nagyság szerint sorba a számokat!

43_6; 43_7; 43_8; 34_6; 34_7; 34_8

4. Mennyi a következő számok összege az ötös számrendszerben?

a) 1000_5 100_5 10_5 1_5

b) 20000_5 3000_5 20_5 3_5

5. Végezd el a következő összeadásokat! Az eredményt ugyanabban a számrendszerben add meg, amelyben az összeadandókat is megadtuk!

a) $111_2 + 1_2 =$ **c)** $555_6 + 1_6 =$

b) $222_3 + 1_3 =$ **d)** $999 + 1 =$

6. Bonifác élménybeszámolót tart a nyári matematikatáborról: „Összesen 1000 diák volt, közülük 143 lány és 302 fiú. Ki tudjátok találni, hogy mindezt milyen számrendszerben fejeztem ki?” Határozd meg te is, milyen számrendszerben fogalmazhatta meg Bonifác a létszámot!

HÁZI FELADAT

1. A csomagológép különböző fajta bonbonokat különböző csoportosítás szerint dobozol. Hány bonbont csomagolt összesen, ha Bence így jegyezheti le: $1000_6 + 100_8 + 10_{12}$?

2. Igazak-e a következő kijelentések?

a) $100 = 144_8$ **b)** $100 = 1100100_2$ **c)** $100 = 84_{12}$

3. A legnagyobb „8 bites szám” az 11111111_2. Mennyi ez a 10-es számrendszerben felírva?

4. Írd fel a számokat tízes számrendszerben!

5714_9 4226_7 40013_5 9073_{11}



RÁADÁS

1. A 362 egy másik számrendszerben felírva olyan szám, amelynek
a) utolsó számjegye 2; **b)** első számjegye 2.
Melyik lehet ez a számrendszer?

2. Hány olyan pozitív egész szám van a hatos számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző?

3. Fogalmazz meg oszthatósági szabályokat a hatos számrendszerben!

Számrendszerek az informatikában I.

Ha n 1-nél nagyobb egész szám, akkor létezik n-es számrendszer. Ebben n jelet használunk. Ha $n < 10$, akkor általában a 0, 1, 2, 3, 4, …, $n - 1$ számjegyeket használjuk. Ha $n > 10$, akkor a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeken kívül még más jeleket is be kell vezetni. Például a 10-et A-val, a 11-et B-vel, a 12-t C-vel, … jelölhetjük.

Az informatikában az adatokat 1-esek és 0-k sorozataként kezelik. Erre azért van szükség, mert a számítógépek csak két állapotot ismernek fel: a „van jel” (1) és a „nincs jel” (0) állapotát. Az információ tárolása is ilyen módon történik; például a mágneslemez megfelelő szakasza vagy mágnesezett (1), vagy nem (0). A CD/DVD-lemez tükörfelülete vagy visszaveri a lézersugarat az érzékelőbe (1), vagy nem (0).
Különböző számokat a kettes számrendszer segítségével tudunk 1-esek és 0-k sorozatára átírni.

Mennyi az 10011010_2 szám a tízes számrendszerben felírva?

Helyi érték	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2	1
Alaki érték	1	0	0	1	1	0	1	0
Valódi érték	128	0	0	16	8	0	2	0

Ez a szám a tízes számrendszerben: $128 + 16 + 8 + 2 = 154$.

A kettes számrendszerben felírt számokkal az a legnagyobb probléma, hogy **nagyon hosszúak**.
Írjunk fel egy olyan, viszonylag nem túl nagy számot, mint a 6700, a kettes számrendszerben!
$6700 = 4096 + 2048 + 512 + 32 + 8 + 4$.
Tehát $6700 = 1101000101100_2$.
Ez **13** számjegy!

Elterjedt ezért egy másik, a 16-os (hexadecimális) számrendszer használata is. Ebben a számrendszerben a hagyományos 10 számjegynél többre van szükség, így az ábécé betűit is segítségül hívták:
A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.
6700-at a 16 hatványaival felírva a következőt kapjuk:
$6700 = 1 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 12 \cdot 1$.
Helyiérték-táblázattal:

Helyi érték	16^3	16^2	16^1	1
Valódi érték	$1 \cdot 4096$	$10 \cdot 256$	$2 \cdot 16$	$12 \cdot 1$
Alaki érték	1	A	2	C

Tehát $6700_{10} = 1A2C_{16}$. Ez mindössze 4 számjegy!

A témában újabb ismereteket szerezhetsz a következő lecke Ráadás részében.

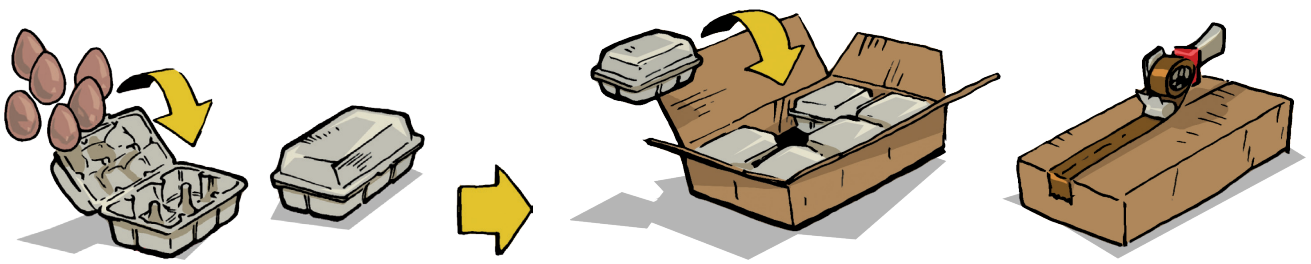
49 Számrendszerek II.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Írjuk fel a 315-öt 6-os számrendszerben!

Megoldás

Képzeljük el, hogy 315 tojást hatosával csomagolunk. 6 tojás kerül egy tojástartóba, majd 6 teli tojástartó egy dobozba, s 6 teli doboz lefóliázva egy kis méretű raklapra. Így egy dobozban $6^2 = 36$, egy raklapon $6^3 = 216$ tojás lesz. Hány raklap és hány doboz telik meg?

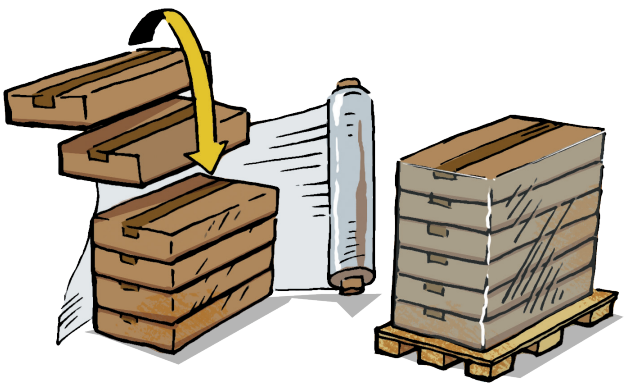


Első módszer

$315 = 52 \cdot 6 + \mathbf{3}$, tehát 52 teli tojástartónk lesz, és kimarad **3** tojás.

$52 = 8 \cdot 6 + \mathbf{4}$, tehát 8 doboz telik meg, és kimarad **4** tojástartó.

$8 = 1 \cdot 6 + \mathbf{2}$, tehát 1 raklap lesz, és kimarad **2** doboz.



216-os	36-os	6-os	1-es
1	2	4	3

Tehát

$315 = 1 \cdot 216 + 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 3 = \mathbf{1} \cdot 6^3 + \mathbf{2} \cdot 6^2 + \mathbf{4} \cdot 6 + \mathbf{3}$,

vagy röviden: $315 = \mathbf{1243}_6$.

Második módszer

Megtöltünk **1** raklapot 216 tojással, marad $315 - 216 = 99$ tojás.

$99 = 2 \cdot 36 + 27$, ezért a 99 tojással **2** dobozt tölthetünk meg, és marad 27 tojás.

$27 = 4 \cdot 6 + 3$, ezért **4** tojástartót rakhatunk tele, és marad **3** tojás.

A vastagon írt számokat egymás mellé helyezzük. Így kapjuk meg, hogy $315 = \mathbf{1243}_6$.



FELADAT

1. **a)** Melyik a nagyobb? A legnagyobb négyjegyű szám a hármas számrendszerben vagy a legkisebb háromjegyű szám a négyes számrendszerben?

b) Melyik tartalmaz több egyes számjegyet: a 40 kettes számrendszerbeli vagy hármas számrendszerbeli alakja?

2. **a)** Írd fel az 1011101111_2 számot 10-es számrendszerben!

b) Írd fel a 491-et kettes számrendszerben!

c) Írd át az 542-t hatos, hetes és nyolcas számrendszerbe!

3. A 12-es számrendszerben 12 számjegyre van szükség. Ezek a következők: tíz számjegy 0-tól 9-ig (a szokásos jelentéssel), továbbá A és B a tíz és a tizenegy jelölésére.

a) Írd át tízes számrendszerbe!

ABA_{12}; BAB_{12}; $BABA_{12}$; $ABBA_{12}$

b) Írd át tizenkettes számrendszerbe!

420; 1848; 287

c) Igaz-e, hogy $BAB_{12} = 1000_{12} - 11_{12}$?

4. Egy 4-es számrendszerben felírt négyjegyű szám első számjegye 3, második számjegye 1. Milyen lehet ennek a számnak a tízes számrendszerbeli alakja?

5. Peti készített 5 számkártyát, és azt mondja Pistának: „Gondolj egy 31-nél nem nagyobb számra, mondd meg, milyen betűjelű kártyákon szerepel, és én kitalálom a gondolt számot!” Magyarázd meg, hogyan gondolkodik Peti! Próbáld ki a játékot te is egy osztálytársaddal!

A

1	3	5	7
9	11	13	15
17	18	21	23
25	27	29	31

B

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

C

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

D

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

E

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

HÁZI FELADAT

1. Írd át a 768-at 4-es, 7-es és 9-es számrendszerbe!

2. A számítógép összeadásokat végez. Melyik két 10-es számrendszerbeli számot adta össze, és mi lett az összeadás eredménye? Jól számolt a gép?

a) $10001_2 + 10010_2 = 100011_2$

b) $101010_2 + 100111_2 = 1010001_2$

3. **a)** A *77 magyar népmese* című könyvet ki lehetne-e ezzel a címmel is adni: $140_{\square}$ magyar népmese?

b) „A $145_{\square}$ kiskutya”. Melyik számrendszerben írták fel a kedves rajzfilm címét?

c) Hány éjszaka az 1001 éjszaka, ha a felírt jelsorozat kettes számrendszerben értendő?

4. Melyik a legnagyobb négyjegyű szám a négyes számrendszerben? Számold át ezt tízes számrendszerbe és kettes számrendszerbe!

5. Az alábbi szorzást az ötös számrendszerben végezték el. Sajnos az egyik számjegyet nem jól állították be, azt nem ismeri fel a számítógép, és # jelet ír helyette. Mi az ismeretlen számjegy?

$4\#20_5 \cdot 30_5 = 224\#00_5$

Számrendszerek az informatikában II.

A kettes számrendszerben felírt hosszú számok az emberek számára nehézkesen kezelhetők. Ezért is van nagy jelentősége annak, hogy ezeket a számokat meglehetősen könnyű a jóval kevesebb jegyű négyes, nyolcas vagy éppen 16-os számrendszerbe felírni. Ez utóbbit kedvelik a programozók is. Nézzük, hogyan lehetségesek az átváltások!

Figyeljük meg a táblázatban mutatkozó szabályosságot!

Kettes számrendszer				Négyes számrendszer	
			0		0
			1		1
		1	0		2
		1	1		3
	1	0	0	1	0
	1	0	1	1	1
	1	1	0	1	2
	1	1	1	1	3
1	0	0	0	2	0
1	0	0	1	2	1
1	0	1	0	2	2
1	0	1	1	2	3
1	1	0	0	3	0
1	1	0	1	3	1
1	1	1	0	3	2
1	1	1	1	3	3

A kettes számrendszerben felírt szám számjegyeit jobbról elindulva kettes csoportokba osztjuk. A kettes csoportban látható kétjegyű számnak a négyes számrendszerben 0 vagy 1 vagy 2 vagy 3 felel meg.
Semmi mást nem kell tennünk a négyes számrendszerre való áttéréshez, mint ezeket a számjegyeket rendre egymás mellé írni:

Kettes	1	0	1	1
Négyes	2		3	

Tehát $1011_2 = 23_4$.

A módszer természetesen visszafelé is működik.

Négyes	1		2	
Kettes	0	1	1	0

Tehát $12_4 = 110_2$ (a kezdő 0-t nem írtuk ki).

Hosszabb, kettes vagy négyes számrendszerben felírt számra is ugyanígy használható a módszer.

Kettes	1	1	0	0	0	0	1	1	1
Négyes	1	2		0		1		3	

Tehát $110000111_2 = 12013_4$.

Négyes	3		0		1		2	
Kettes	1	1	0	0	0	1	1	0

Tehát $3012_4 = 11000110_2$.

A nyolcas számrendszerre való átváltáshoz („hátulról kezdve") hármasával kell csoportosítani a kettes számrendszerben felírt számot, a 16-os számrendszerhez pedig négyesével.
Például írjuk fel az 1110111100010101_2 számot 8-as és 16-os számrendszerben is!

2-es	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
8-as	1		6			7			4			2			5	

2-es	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
16-os		E			F			1				5				

Tehát $1110111100010101_2 = 167425_8 = EF15_{16}$.
(Itt E-vel a 14-et, F-fel a 15-öt jelöltük.)

A módszer visszafelé is működik. Például:

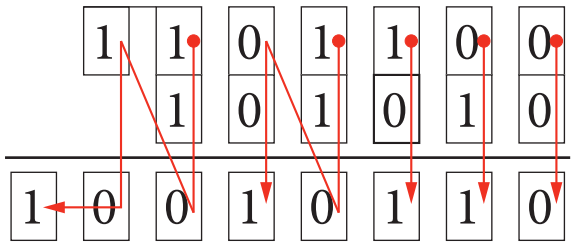
16-os	7			A			D					
2-es	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1

Tehát $7AD_{16} = 11110101101_2$ (a kezdő nullát, nullákat nem írjuk le). (A = 10 és D = 13.)
A kettes számrendszerben dolgozó számítógépek egyszerre csak két számot képesek összeadni, és ezt az összeadást úgy végzik, ahogyan mi a tízes számrendszerben papíron összeadunk.
Az egyesek helyén álló számjegyeket összeadjuk (az összeadás eredménye 0 és 18 között lehet), az eredmény utolsó számjegyét leírjuk. Ha elértük vagy átléptük a 10-et, akkor a következő oszlop összeadásának eredményéhez hozzáadunk 1-et (az összeg tehát 0 és 19 között lehet). Az utolsó jegyet ismét leírjuk és így tovább az előbbiekhez hasonlóan.

$$\begin{array}{r} 828 \\ +253 \\ \hline 1081 \end{array}$$

A számítógép is így ad össze, csak kettes számrendszerben az összeadás meglepően gyorsan megy. Ha egy helyi

értéken két 0-t kell összeadni, akkor az eredmény is 0. Ha egy 0-t és egy 1-et adunk össze, akkor az eredmény 1. Ha pedig két 1-est adunk össze, akkor az 2, ami a kettes számrendszerben **az adott helyi értéken 0-t, az eggyel nagyobb helyi értéken pedig +1-et jelent (akárcsak a 10 a tízes számrendszerben)**.



(Ez az összeadás a tízes számrendszerbeli
108 + 42 = 150 műveletnek felel meg.)



FELADAT

1. A tizenhatos számrendszerben melyik a
a) legkisebb kétjegyű szám;
b) legnagyobb kétjegyű szám;
c) legnagyobb háromjegyű szám?
Írd föl ezeket tízes számrendszerben!

2. A tizenhatos számrendszerben hány
a) kétjegyű szám van;
b) háromjegyű szám van;
c) négyjegyű szám van?

3. Állapítsd meg az alábbi számokról, hogy párosak vagy páratlanok!
a) 10110_2 **b)** 4324_5 **c)** 20121_3 **d)** 4531_6

4. Melyik az a legkisebb, 5-nél nagyobb egész szám, amely 7-es, 8-as és 9-es számrendszerben felírva is ötösre végződik? Melyik a következő ilyen szám?

5. Gondold át, hogyan szorzunk a tízes számrendszerben, és ez alapján végezd el a szorzásokat!
$2301_5 \cdot 11_5$; $2301_5 \cdot 21_5$; $1403_6 \cdot 22_6$; $501_6 \cdot 23_6$

6. Az ötös számrendszerben felírtuk az összes olyan számot, amely ötjegyű és minden számjegye különböző.
a) Hány számot írtunk fel?
b) Ezek hány százaléka osztható kettővel?
c) Fogalmazz meg oszthatósági szabályt az ötös számrendszerben a kettővel való oszthatóságra!

7. Milyen alapú számrendszerben igaz, hogy
$12_\square + 112_\square + 1112_\square = 1241_\square$?

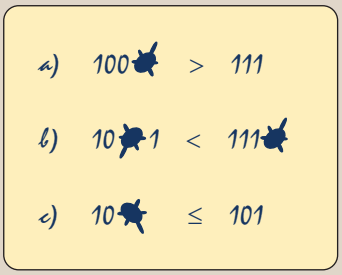
8. Hány tízes számrendszerbeli pozitív egész számra teljesül, hogy az ötös számrendszerben $\overline{a0b}$, a hetes számrendszerben pedig $\overline{b0a}$ alakúak?

9. Legyen m a legkisebb pozitív egész szám, amely n alapú számrendszerben kétjegyű, p pedig a legnagyobb pozitív egész, amely q alapú számrendszerben még háromjegyű.
Mennyi az $n \cdot q$, ha $m \cdot p = 130$?

50 Gyakorlás

FELADAT

1. Egy régi iskolai füzetben ráakadtunk egy olyan feladat megoldására, amelyben a kettes számrendszerben felírt számpárok között kellett megállapítani, hogy melyik a nagyobb, a kisebb, illetve kisebb vagy egyenlő. Sajnos azonban néhány számjegyet (minden esetben pontosan egyet) eltakar egy tintapaca. Jól oldotta-e meg a feladatot annak idején a diák? Válaszod indokold!



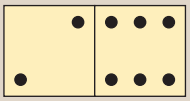
2. Adott az $a = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2$ természetes szám. Milyen természetes számokat írhatunk a k; l; m; n; p betűk helyére a $b = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \cdot 7^n \cdot 11^p$ természetes szám szorzat alakjában ahhoz, hogy

a) $(a; b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ legyen;
b) $[a; b] = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^6$ legyen;
c) $a \cdot b = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^5$ legyen;
d) $a \cdot b$ négyzetszám legyen;
e) b osztható legyen 720-szal?

3. Természetvédelmi program keretében egy területen facsemetéket ültetnek. A programot szponzoráló kertészet az első héten 500-nál kevesebb csemetét tud biztosítani. Az ültetésben részt vevő önkéntes középiskolások kiszámolták, hogy ha soronként 8; 9; 10 vagy 12 facsemetét helyeznek el, akkor az utolsó sorra minden esetben 5 csemete jut.

a) Hány csemetét kaptak a kertészettől?
b) Hogyan végezzék a telepítést, ha azt szeretnék, hogy minden sorban ugyanannyi fa legyen és soronként legalább 5, de kevesebb, mint 10 fa kerüljön oda?

4. (Érettségi feladat, 2018)
Anna dominókészletében a dominókövek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken a pöttyök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet. A készletben minden lehetséges pöttyözésű dominóból pontosan egy darab van.
Az ábrán a 2-6-os (6-2-es) dominó látható.



Hány olyan dominó van a készletben, amelyen a két részen lévő pöttyök számának szorzata prímszám?

5. Legyen $p = 86\,420$; $q = 13\,579$; $r = 123\,456$. Határozd meg a műveletek elvégzése nélkül a következő számok kettes, hármas, négyes és ötös osztási maradékait!

a) $p + q$
b) $p + q + r$
c) $p + 4q$;
d) $p \cdot q$;
e) $q^2 \cdot r$

6. Igaz-e, hogy

a) $9 \mid (10^{2021} - 1)$;
b) $12 \mid (10^{2022} + 632)$;
c) $75 \mid (10^{2022} - 55)$;
d) $72 \mid (10^{1024} + 101\,024)$?

Válaszod részletesen indokold!

7. Gondolj egy kétjegyű számra! Az eredeti számból vond ki a két számjegy összegét! A következő oldal tetején lévő ábrán keresd meg, hogy milyen szimbólum van az eredményed mellett!

a) Lapozz a tankönyvben a 155. oldalra, és nézd meg a lap alján lévő képet!
Milyen ábrát látsz? Hogy lehet ez? A jövőbe látott a feladat írója?
b) Magyarázd el, mi alapján lehet előre tudni, hogy a végeredményhez melyik jel tartozik!

1	б	12	б	23	⊙	34	ς	45	ʁ	56	ʃ	67	⊙	78	ʁ	89	⊙
2	ʁ	13	ʃ	24	ʃ	35	ψ	46	ψ	57	ς	68	φ	79	ξ	90	ʁ
3	з	14	⊙	25	ξ	36	ʁ	47	ς	58	ξ	69	ς	80	ɣ	91	φ
4	ξ	15	б	26	φ	37	з	48	ʁ	59	ɣ	70	ɤ	81	ʁ	92	ɣ
5	ɤ	16	ʁ	27	ʁ	38	ɣ	49	¥	60	з	71	ɣ	82	¥	93	з
6	ʁ	17	ψ	28	ξ	39	ʃ	50	б	61	ψ	72	ʁ	83	щ	94	з
7	⊙	18	ʁ	29	ʁ	40	щ	51	ʃ	62	φ	73	з	84	ʃ	95	ʃ
8	ʃ	19	φ	30	ʁ	41	з	52	⊙	63	ʁ	74	ξ	85	ʁ	96	ψ
9	ʁ	20	з	31	Ω	42	Γ	53	ψ	64	ʃ	75	ς	86	⊙	97	ξ
10	ɤ	21	ψ	32	¥	43	б	54	ʁ	65	ψ	76	⊙	87	б	98	ξ
11	⊙	22	ʁ	33	б	44	ʃ	55	ɤ	66	¥	77	щ	88	ς	99	ʁ

HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2012)

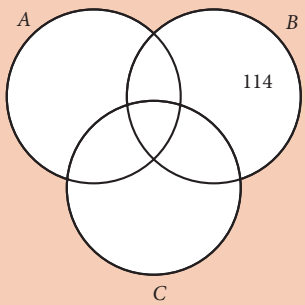
Tekintsük a következő halmazokat:

A = {a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok};

B = {a 300-nál nem nagyobb, 3-mal osztható pozitív egész számok};

C = {a 400-nál nem nagyobb, 4-gyel osztható pozitív egész számok}.

Töltsd ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írd be az 52; 78; 124; 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába!



	A halmaz	B halmaz	C halmaz
114	nem eleme	eleme	nem eleme
52			
78			
124			
216			

2.

a) Egy hajó egész méterekben mért hosszának, a hajóskapitány egész évei számának és a hajóskapitány gyermekei számának szorzata 25 756. Hány éves a kapitány?

b) Egy hajó egész méterekben mért hosszának, a hajóskapitány egész évei számának és a hajóskapitány gyermekei számának szorzata 6401. Hány éves a kapitány?

3. „ – Mit kapsz, ha megszorzod a hatot kilenccel? – Hatszor kilenc. Negyvenkettő. – Ennyi. Ennyi az egész. – Mindig is tudtam, hogy valami alapvető gond van a világban."

(Részlet Douglas Adams: *Galaxis útikalauz stoppososoknak* c. művéből – Ford és Arthur párbeszéde)

Határozd meg, hogy milyen számrendszerben lehet igaz a számítás!

4. (Érettségi feladat, 2007, 2013)

Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal.

b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan.

c) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.

d) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.

e) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1.

5. Melyik helyes az alábbi következtetések közül? Válaszod részletesen indokold magyarázattal vagy ellenpéldával!

a) Ha $6 \mid b$ és $9 \mid b$, akkor $54 \mid b$.

b) Ha $29 \mid b$, akkor $29 \mid 17b$.

c) Ha $3 \mid b$ és $7 \mid b$, akkor $10 \mid b$.

d) Ha $72 \mid b$, akkor $9 \mid b$ vagy $16 \mid b$.

51 Racionális számok, irracionális számok

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Helyezd el az alábbi számítások végeredményeként kapott számokat a számhalmazokra vonatkozó Venn-diagramban!

a) 12-nek az $\frac{5}{2}$ része

b) 8-nak a nulladik hatványa

c) $\frac{1}{4}$ négyzetgyöke

d) 82-nek a 25 százaléka

e) 7 ellentettje

f) a téglalap átlójának hossza, ha a téglalap oldalainak hosszúsága 5 egység, illetve 12 egység

g) $\frac{1}{5}$-nél $\frac{2}{3}$-dal kisebb szám

h) a kör területe, ha a kör sugarának hossza 4 egység

i) az 1 egység oldalhosszúságú négyzet átlójának hossza

Megoldás

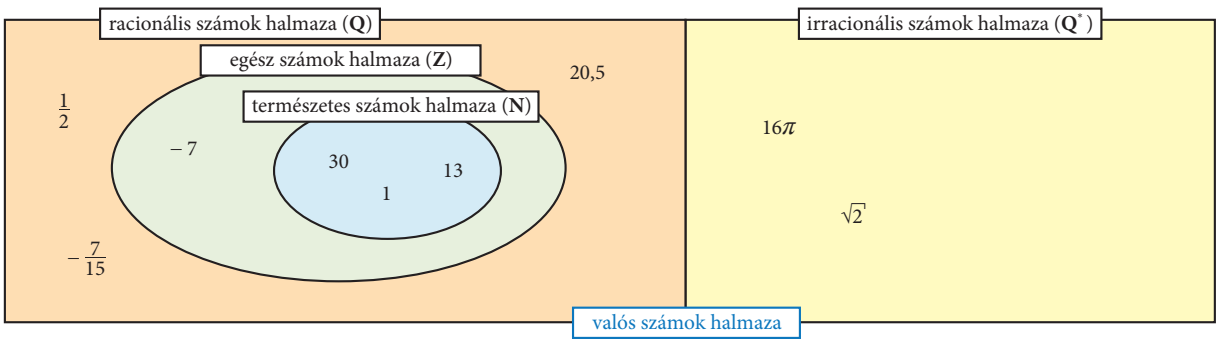
a) $12 \cdot \frac{5}{2} = 30$ b) $8^0 = 1$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ d) $82 \cdot \frac{25}{100} = 20{,}5$ e) -7

f) Pitagorasz tétele alapján: $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

g) $\frac{1}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{15}$

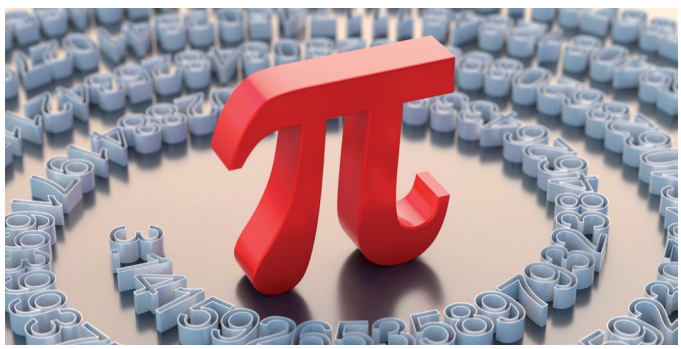
h) $T = 4^2 \cdot \pi = 16\pi \approx 50{,}2654824574367\ldots \approx 50{,}27$

i) Pitagorasz tétele alapján: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41411356373 \approx 1{,}41$



A számítások elvégzéséhez a négy alapműveletet és a gyökvonást használtuk. A végeredményként kapott számok között az eddig megismert számhalmazok (természetes, egész, racionális) elemeit egyértelműen el tudjuk helyezni a Venn-diagramon.

Adódtak olyan számok, például a négyzetgyökvonás után, melyek közelítő értékének meghatározásakor azt sejthetjük, hogy a tizedes tört alak nem véges, illetve nem ismerhető fel olyan szakasz a számjegyekben, mely ismétlődne. (Persze léteznek olyan racionális számok, melyben az ismétlődő szakasz hossza meghaladja a számológép által kiírt tizedesjegyeknek a számát.)



ELMÉLET

A nemnegatív racionális számokra alkalmazott négyzetgyökvonás művelete az egyik olyan művelet, amely kivezet a racionális számok halmazából. Vagyis egy nemnegatív racionális szám négyzetgyöke nem biztos, hogy racionális.

Azok a valós számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, az **irracionális számok**.

Az irracionális számok tizedes tört alakja **végtelen, nem szakaszos** tizedes tört.

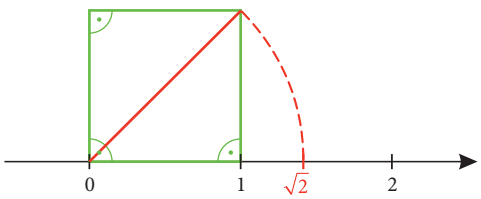
Végtelen sok irracionális szám van. Irracionális számok például a következők:

1. $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; … (Vigyázat! A $\sqrt{4}$ nem irracionális. Akkor kapunk pozitív egész szám gyökeként irracionális számot, ha a gyökjel alatt nem négyzetszám áll.)
2. π; 2π; …
3. Megadhatunk olyan szabályt, amely segítségével végtelen, nem szakaszos tizedes tört képezhető.
   Például:
   a tizedesvessző után különböző (pl. kétféle) számjegyekből egyre nagyobb számút írunk,
   pl.: 0,12112211122211112222…

   Tegyük fel, hogy racionális, akkor szakaszos tizedes tört. Legyen a szakasz hossza k. Mivel a képzési szabály miatt egyre több 1-est írunk le egymás mellé, ezért egyszer elérjük, hogy k db 1-est írtunk le. Ez viszont azt jelenti, hogy a szakasz k darab 1-esből áll. Ellentmondást kaptunk, hiszen végtelen sok 2-es is előfordul a tizedesjegyek között.

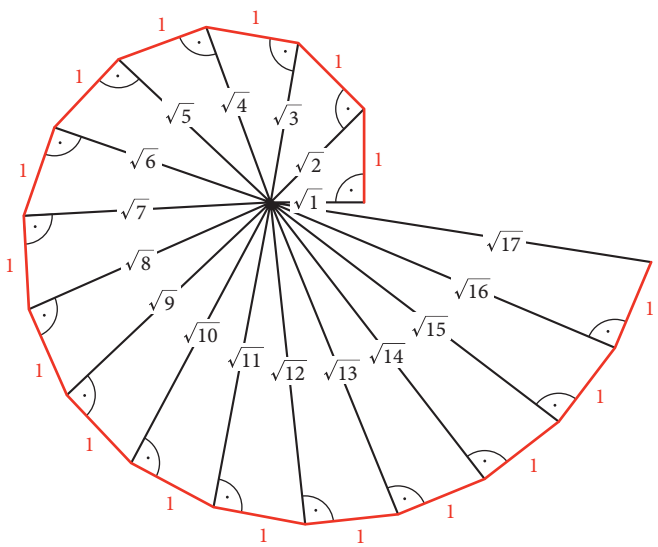
Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen. Közelítő értéke felírható úgy, hogy ebből kerekítünk.
Pl.: $\pi \approx 3{,}14$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.

Bizonyos irracionális számok helyét a számegyenesen szerkesztéssel meghatározhatjuk.
Például az 1. kidolgozott feladat i) pontjában végzett számítás alapján:



A Pitagorasz-tétel felhasználásával újabb irracionális számmal egyenlő hosszúságú szakaszok szerkeszthetők.
Például: $\sqrt{5}$ hosszúságú egy olyan derékszögű háromszögnek az átfogója, amely befogóinak hossza 2, illetve 1 egység.

Egyszerűen eljuthatunk bármely pozitív egész szám négyzetgyökének megszerkesztéséhez, ha ismerjük az úgynevezett Theodorus-spirál (más néven négyzetgyök-spirál; Einstein-spirál; Pitagorasz-spirál) alakzatot.



(De nem szerkeszthető például π hosszúságú szakasz. A π pontos értékének megszerkesztéséhez – egy megoldhatatlan matematikai módszerre – a kör négyszögesítésére, vagyis adott kör kerületével egyenlő kerületű négyzet euklideszi szerkesztésére lenne szükség.)

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Igaz vagy hamis? Állapítsd meg az alábbi kijelentések igazságértékét! Válaszod indokold!

A: Bármely két irracionális szám összege irracionális szám.

B: Vannak olyan irracionális számok, amelyek szorzata racionális szám.

C: Két irracionális szám hányadosa lehet irracionális vagy lehet racionális.

D: A 6 felírható két irracionális szám összegeként.

E: Bármely két irracionális szám különbsége racionális.

Megoldás

A: Hamis. *Például:* $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

B: Igaz. *Például:* $\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=2\cdot 3=6$

C: Igaz. *Például:* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4}=2$; $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$

D: Igaz. *Például:* $\sqrt{2}+(6-\sqrt{2})=6$

E: Hamis. *Például:* $8\pi-5\pi=3\pi$

3. Igaz vagy hamis? Állapítsd meg az alábbi kijelentések igazságértékét! Válaszod indokold!

A: Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig racionális szám.

B: Egy racionális és egy irracionális szám szorzata lehet racionális szám.

C: Egy irracionális és egy racionális szám hányadosa lehet irracionális szám.

D: Egy racionális és egy irracionális szám szorzata lehet irracionális szám.

Megoldás

A: Hamis. *Például:* $0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$

B: Igaz. *Például:* $0\cdot\sqrt{3}=0$

C: Igaz. *Például:* $\frac{8\pi}{2}=4\pi$

D: Igaz. *Például:* $5\cdot\pi=5\pi$

ELMÉLET

Az irracionális számok halmaza nem zárt a négy alapműveletre, vagyis nem teljesül, hogy bármely két irracionális szám összege, különbsége, szorzata vagy hányadosa irracionális.

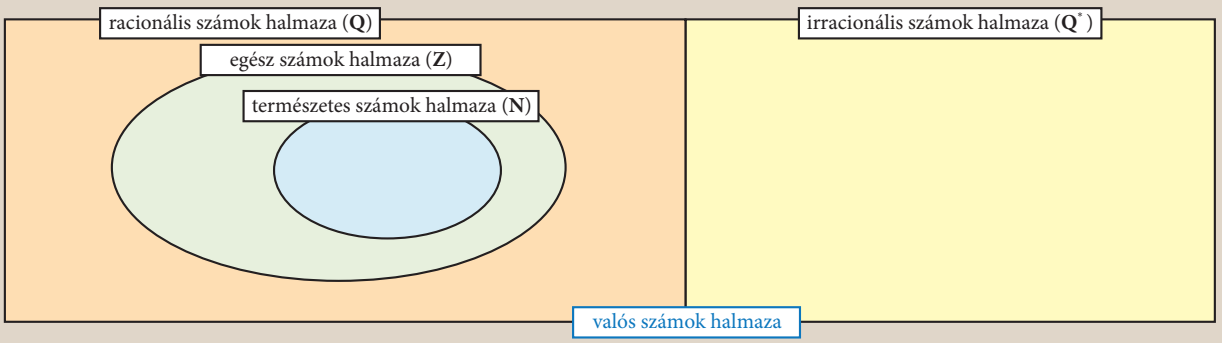
A racionális és irracionális számok halmazának uniója a valós számok halmaza. Ez a halmaz zárt mind a négy alapműveletre nézve.

A tanult jelölésekkel: $\mathbf{Q}\cup\mathbf{Q}^*=\mathbf{R}$.

FELADAT

1. Helyezd el a halmazábrában a következő számokat!

$\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; 0; $-\frac{73}{5}$; $-\frac{75}{5}$; $0{,}\dot{1}3\dot{5}$; $0{,}13\dot{5}$



2. Adj meg legalább két irracionális számot tizedes tört alakban! Fogalmazd meg egyértelműen a képzési szabályt!

3. Határozd meg szerkesztéssel a számegyenesen a $\sqrt{13}$ helyét! Próbálj meg minél kevesebb lépésből álló szerkesztést használni!

4. Mondj két-két példát olyan valós számra, amely

a) racionális és eleme a $]-3; -2[$ intervallumnak;

b) irracionális és eleme a $[-2; -1]$ intervallumnak;

c) természetes szám, többszöröse 7-nek és eleme a $[100; 120]$ intervallumnak;

d) természetes szám, 6-tal osztva 2 maradékot ad, és eleme a $[120; 140]$ intervallumnak;

e) racionális szám, de a háromszorosa természetes szám!

5. Végezd el az alábbi halmazműveleteket!

$\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Q}^* =$ $\quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{Q}^* =$ $\quad \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^* =$

$\mathbf{R} \cup \mathbf{Q}^* =$ $\quad \mathbf{Q} \setminus \mathbf{R} =$ $\quad \mathbf{Z} \cap \mathbf{Q}^* =$

6. Tekintsük a $P = 5\pi + 2$ irracionális számot.

a) Adj a P-hez egy valós számot úgy, hogy végeredményként racionális számot kapj!

b) Szorozd meg a P-t egy valós számmal úgy, hogy végeredményként irracionális számot kapj!

c) Oszd el a P-t egy irracionális számmal úgy, hogy végeredményként racionális számot kapj!

d) Vonj ki a P-ből egy racionális számot úgy, hogy végeredményként irracionális számot kapj!

HÁZI FELADAT

1. Igaz vagy hamis? Válaszod indokold!

A: Minden egész szám racionális szám.

B: $\sqrt{2}$ reciproka racionális szám.

C: Bármely két különböző racionális szám által meghatározott nyitott intervallumban van racionális szám.

D: Van olyan irracionális szám, amelynek abszolút értéke negatív.

E: Minden irracionális számnál van nagyobb racionális szám.

2. Csoportosítsd az alábbi számokat aszerint, hogy négyzetgyökük racionális vagy irracionális!

$a = [2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7;\ \ 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11]$

$b = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3;\ \ 2^4 \cdot 3 \cdot 7)$

$c = \dfrac{700}{1575}$

$d = 2^{13} \cdot 5^{32} \cdot 7 \cdot 2^{51} \cdot 7^3 \cdot 11^2$

$e = \sqrt{81 \cdot 225}$

$f = \pi^4$

3. **a)** Keress olyan racionális számot, amelyre igaz az alábbi négy tulajdonság:

– előjele negatív;

– tizedes tört alakja végtelen szakaszos;

– közönséges tört alakjában a nevezője olyan egyjegyű természetes szám, amely 3-mal nagyobb a számlálójánál;

– közönséges tört alakja tovább egyszerűsíthető!

Hány ilyen racionális szám van?

b) Keress olyan irracionális számot, amelyre igaz az alábbi három tulajdonság:

– előjele negatív;

– értéke nagyobb -1-nél;

– négyzete legfeljebb 0,5!

52 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. Adott a $K = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ és az $L = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ természetes szám.

a) Mennyi $(K; L) + [K; L]$?

b) Adj meg egy olyan M számot prímtényezős alakban, amellyel L-et megszorozva négyzetszámot kapunk!

c) Adj meg egy olyan N számot prímtényezős alakban, amely esetén $[K; N] = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$ teljesül!

2. Írj az n helyére 30-nál kisebb természetes számot úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság! Keresd meg az összes lehetőséget!

a) $4 \mid (132\,457 + n)$

b) $9 \mid (3471 - 2n)$

c) $5 \mid (15^{16} + 7n)$

d) $15 \mid (6n - 42)$

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis? Válaszod indokold!

a) Ha egy számpár tagjai különböző prímszámok, akkor relatív prímek is.

b) Bármely 5 egymást követő természetes szám szorzata osztható 10-zel.

c) Ha egy számpár egyik tagja prím, másik tagja összetett, akkor relatív prímek.

d) Az első 10 prímszám összege páros szám.

e) Van olyan szám, amelynek páratlan darab pozitív osztója van.

4. Határozd meg a b természetes szám prímtényezős alakját, ha

$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$;

$[a; b] = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11$;

$(a; b) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$;

ahol $(a; b)$ a legnagyobb közös osztóját, $[a; b]$ a legkisebb közös többszörösét jelenti az a és a b természetes számoknak!

5. Adottak az alábbi kijelentések:

p: Az 53 kettes számrendszerbeli alakja 110101.

q: A hármas számrendszerben 27 darab 3 jegyű szám van.

r: Van olyan számrendszer, amelyben $16 \cdot 5 = 106$.

s: Ha egy számrendszer alapja n, akkor abban a legnagyobb lehetséges számjegy az $n - 1$.

a) Add meg a kijelentések logikai értékét!

b) Tagadása-e a p kijelentésnek az alábbi mondat? Az 53 kettes számrendszerbeli alakja 101011.

c) Mi az alábbi kijelentések logikai értéke?
p vagy q; p és r; q és s; q vagy s

d) Írd le az s kijelentés megfordítását! Igaz-e ez a kijelentés?

6. Adottak az alábbi közönséges törtek, ahol A; B; C; D pozitív egész számok: $\frac{12}{A}$; $\frac{B}{18}$; $\frac{51}{C}$; $\frac{72}{D}$.

a) Milyen egyjegyű számot írhatunk az A helyére ahhoz, hogy az első tört tizedes tört alakja végtelen szakaszos legyen?

b) Hány olyan 20-nál kisebb összetett szám van, amely esetén a második tört egyszerűsíthető?

c) Melyik kétjegyű prímszám dupláját írhatjuk a C helyére ahhoz, hogy a harmadik tört tizedes tört alakja véges legyen?

d) Milyen egyjegyű prímszámot írhatunk a D helyére ahhoz, hogy a negyedik tört értéke egész szám legyen?

e) Milyen egyjegyű számot írhatunk az A helyére ahhoz, hogy az első tört tizedes tört alakja véges legyen?

f) Melyik két tört szorzata lesz biztosan egyszerűsíthető?

TUDÁSPRÓBA I.

1. A $\overline{3A407B}$ egy hatjegyű számot jelöl. Mit írhatunk az A és B helyére, hogy a szám osztható legyen

a) 4-gyel; **b)** 15-tel?

2. Egy szombati napon véletlenül összetalálkozott 3 régi ismerős a gyógyfürdőben, ahol nagy örömmel társalogni kezdtek. A beszélgetésük során kiderült, hogy egyikük 45 naponta, a másik 18 naponta, a harmadik ember pedig minden 30. napon látogat el ebbe a fürdőbe. „Akkor legközelebb egy pénteki napon van esélyünk újra összefutni" – mondta az egyik barát. Igaza volt-e? Válaszod részletesen indokold!

3. Add meg

a) az 1201 hármas számrendszerbeli szám tízes számrendszerbeli,

b) az 53 tízes számrendszerbeli szám kettes számrendszerbeli

alakját!

4. Igaz-e, hogy

a) minden természetes szám prímszám vagy összetett szám?

b) az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű számok mindegyike osztható 3-mal?

c) van olyan négyjegyű szám, amelynek osztója minden egyjegyű prímszám?

d) bármely két természetes szám legnagyobb közös osztója legfeljebb akkora, mint a két szám közül a kisebbik?

e) egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha osztható 5-tel?

Válaszod indokold!

5. Egy központi raktárban 2100 doboz csempe, 450 darab faléc és 735 zsák cement van. A raktár kiürítését tervezik úgy, hogy a benne lévő építőanyagot teljes egészében elszállítják néhány kisebb lerakatba. Legfeljebb hányfelé tudják szétosztani a raktárkészleten lévő árut, ha minden számításba jövő lerakatba azonos mennyiséget szállítanak az egyes termékekből? Hány doboz csempét, hány darab falécet, hány zsák cementet kapnak külön-külön a lerakatok?

TUDÁSPRÓBA II.

1. Határozd meg a b természetes szám prímtényezős alakját, ha

$a = 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3$; $(a; b) = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$; $[a; b] = 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3$;

ahol $(a; b)$ a legnagyobb közös osztóját, $[a; b]$ a legkisebb közös többszörösét jelenti az a és a b természetes számoknak!

2. Az $\overline{A138B2}$ egy hatjegyű számot jelöl. Mit írhatunk az A és B helyére, hogy a szám osztható legyen

a) 4-gyel; **b)** 24-gyel?

3. Egy sportklub tagjai felsorakoznak, és beállnak téglalap alakzatba úgy, hogy minden sorba ugyanannyi sportoló áll. Ha kettesével, hármasával, négyesével, ötösével vagy hatosával állnak egy sorba, akkor minden esetben kimarad 1 fő. Viszont ha egy sorba 11 ember áll, akkor létre tudják hozni a kívánt alakzatot. A sportklub hány tagja vesz részt a formáció kialakításában?

4. Írd át az 11021 hármas számrendszerbeli számot a kettes számrendszerbe!

5. Adottak az alábbi kijelentések:

A: A $\frac{38}{22}$ végtelen szakaszos tizedes tört.

B: Ha egy természetes szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal.

C: Végtelen sok olyan természetes szám van, amelynek pontosan 2 osztója van.

D: Bármely két prímszám összege páros szám.

E: Van olyan prímszám, amelyik relatív prím minden összetett számhoz.

a) Add meg a kijelentések logikai értékét!

b) Fogalmazd meg a B kijelentés megfordítását, és add meg a megfordítás logikai értékét!

c) Fogalmazd meg a D kijelentés tagadását kétféleképpen!

d) Mi a logikai értéke az A vagy D, valamint a C és E kijelentéseknek?

Témazáró feladatgyűjtemény

1. **a)** Hány olyan szám van 1 és 100 között, amelyik osztható 6-tal?
b) Hány olyan szám van 1 és 100 között, amelyik osztható 4-gyel és 6-tal is?

2. **a)** Miért nem lehet egy természetes szám számjegyeinek a szorzata 111?
b) Miért nem lehet három egymást követő pozitív egész szám összege 1999?

3. (Érettségi feladat, 2008)
Add meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak a halmazát!

4. (Érettségi feladat, 2010)
Sorold fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok!

5. (Érettségi feladat, 2015)
Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói.
Add meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldásod részletezd!

6. (Érettségi feladat, 2016)
Írd fel a 38-at két különböző prímszám összegeként!
Érdekesség:
A Goldbach-sejtés szerint minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.
Ez a sejtés egyike azoknak a matematikai állításoknak, melyekről a matematikusok túlnyomó többsége azt gondolja, hogy minden valószínűség szerint igaz. Ellenpéldát nem találtak rá, tehát megcáfolni nem tudták, de általános érvényű bizonyítása sem létezik.

7. (Érettségi feladat, 2017)
Az A halmaz elemei a 12 pozitív osztói.
A B elemei a 15-nél kisebb (pozitív) prímszámok.
Add meg elemei felsorolásával az A, a B és az $A \setminus B$ halmazt!

8. (Érettségi feladat, 2019)
Adj meg egy olyan összetett számot, amely relatív prím a 6-hoz!

9. (Érettségi feladat, 2011)
Adottak a következő számok:
$a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$.
Írd fel az a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni.

10. Határozd meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!
a) 320 és 48 72 és 610 342 és 442
b) 60, 70 és 80 120, 345 és 1000
c) $11^4 \cdot 13^5 \cdot 17^6$ és $13^2 \cdot 17^3 \cdot 19^4$

11. Határozd meg a következő számok legkisebb közös többszörösét!
a) 320 és 48 72 és 60 34 és 44
b) 60, 70 és 80 120, 35 és 1000
c) $11^4 \cdot 13^5 \cdot 17^6$ és $13^2 \cdot 17^3 \cdot 19^4$

12. Határozd meg!
a) $[(24; 30); 60]$
b) $(216; [45; 88])$
c) $(2^5 \cdot 5^6 \cdot 7^4; [3^4 \cdot 5^4; 2^3 \cdot 7^5])$

13. 24 és 36 közös többszörösei közül
a) melyik a legkisebb, amely nagyobb, mint 350?
b) melyik a legnagyobb, amely kisebb, mint 470?
c) hány darab van 300 és 600 között?

14. Összesen hány közös osztója van 500-nak és 1600-nak? A közös osztók között
a) hány prímszám van?
b) hány négyzetszám van?
c) hány összetett szám van?

15. Melyik pozitív egész szám lehet k értéke, ha
a) $(k, 3k) = 60$;
b) $[k, 5k] = 120$;
c) $(30, k) = 15$ és $[2k, 3] = 90$?

16. Számítsd ki a kifejezés értékét, ha $A = 72$ és $B = 90$.

a) $[B; 15]$ **c)** $(A + 2; A - 2)$

b) $\left(B; \frac{B}{2}\right)$ **d)** $[5A; 2B]$

17. (Érettségi feladat, 2006)
A pozitív egészeket növekvő sorrendbe állítjuk. Melyik szám nagyobb: a hetedik 13-mal osztható pozitív egész vagy a tizenharmadik 7-tel osztható pozitív egész?

18. (Érettségi feladat, 2005)
Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726■. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszod indokold!

19. (Érettségi feladat, 2015)
Milyen számjegy állhat az X helyén, ha a négyjegyű $\overline{361X}$ szám 6-tal osztható?

20. (Érettségi feladat, 2017)
Milyen számjegyeket írhatunk a c helyére, hogy a $\overline{64c9c}$ hatjegyű szám osztható legyen 3-mal? Válaszát indokolja!

21. (Érettségi feladat, 2019)
Az alábbi hat szám közül válassza ki az összes olyan számot, amely osztható 3-mal, de nem osztható 5-tel!
895; 1222; 1458; 1526; 1848; 1990

22. Milyen számjegyeket írhatunk az A helyére, hogy az 1327 és a $\overline{34A5}$ számok összege osztható legyen 9-cel?

23. Adottak az
$A = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11^2$;
$B = p^2 \cdot q^5 \cdot r^9$;
$C = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^6$;
$D = p^4 \cdot q^6 \cdot r^8$
természetes számok, ahol p; q és r prímszámokat jelölnek.

a) Melyek négyzetszámok a felsoroltak közül?

b) Legalább mennyivel kell szorozni az egyes számokat, hogy az adott számok köbszámok legyenek?

24. Írd fel a következő számokat tízes számrendszerben!
30_7; 675_9; 553355_6; 1002001_3; $B0A_{12}$

25. Írd fel 8-as számrendszerben a számokat!
44; 79; 145; 3410; 76850

26. Végezd el az összeadást!

a) $3430_5 + 2211_5$

b) $71120_8 + 3434_8$

c) $1001111_2 + 10111001_2$

27.

a) Mutasd meg, hogy ha egy (tízes számrendszerbeli) háromjegyű számot kétszer egymás mellé írunk, akkor 13-mal osztható számot kapunk!

b) Bizonyítsd be, hogy ha egy háromjegyű számot 6-tal megszorzunk, majd az eredeti számot a szorzat jegyei után írjuk, akkor olyan hat- vagy hétjegyű számot kapunk, amelyik osztható 353-mal!

28. Igazold, hogy a $34567^{76543} + 123^{123}$ összeg osztható tízzel!

29. Igaz-e, hogy a $10^{2016} + 2016$ összeg osztható

a) néggyel;

b) hárommal;

c) 12-vel?

Válaszod indokold!

30. Az alábbi táblázatba a megfelelő számok alá osztathatósági tulajdonságaiknak megfelelően írd az alábbi betűket!

- prímszám: P
- 4-gyel osztható: N
- 9-cel osztható: K
- minden egyjegyű prímszámmal osztható: M
- egyik tulajdonság sem igaz az eddig felsoroltak közül: E
- a táblázat egyik betűjét megadtuk: L

$10^{20} - 1$	221	210	163
105	joker	$10^{50} - 25$	$30^{22} + 972$
	L		

Ha jól dolgoztál, akkor a beírt betűkből kiolvashatod egy magyar tudós, sokoldalú tehetség családnevét.

Nézz utána, milyen különleges találmányai voltak ennek a sokoldalú tehetségnek!

53 Adatrendezés – statisztikai jellemzők

BEVEZETŐ

Egy kisváros tűzoltóparancsnoka összesítést készített, hogy az előző hónapban naponta hány riasztáshoz vonultak ki:

A napi riasztások száma	0	1	2	4	6	14
Hány napon fordult elő?	1	11	6	8	4	1

– 93 eset 31 nap alatt, ez naponta átlagosan három riasztás – elemezte a táblázatot a parancsnok.
– Csak azért, mert volt egy nap, amikor szokatlanul sok dolgunk akadt! – válaszolta az egyik társa. – Valójában jobb a helyzet, hiszen a hónap több mint felében maximum kétszer vonultunk, én inkább ezt gondolnám tipikusnak.
– Szerintem meg a legjellemzőbb esetszám az egy, hiszen ilyen napból volt a legtöbb – szólt közbe egy harmadik.
Kinek van igaza?



Megoldás
Egy adatsokaságot egyetlen „legjellemzőbb” számmal leírni többféle módon is lehet. Így mindhárom tűzoltónak igaza lehet.
– A napi riasztások számának **átlaga** (számtani közepe) valóban 3, mert a 31 adat összege 93. A számtani közepet azonban most jelentősen növeli az egyetlen kiugróan nagy adat, a 14 (nélküle csak körülbelül 2,63 lenne a többi 30 adat átlaga).
– Ha az adatokat nagyság szerint sorba rendezzük, a kiugróan kicsi és nagy értékek a sor elejére, illetve a végére kerülnek, a sor közepén álló adat (a **medián**) pedig éppen a 2 lesz.
– Természetesen az is igaz, hogy a leggyakoribb esetszám (a **módusz**) az 1, mert ennek a gyakorisága 11.

ELMÉLET

Egy (számokból álló) véges **adatsokaság** legfőbb **statisztikai jellemzői**:

Átlag	a számsokaság elemeinek az összegét elosztjuk az elemek számával
Módusz	a legtöbbször előforduló adat; ha több ilyen van, akkor a móduszok halmazáról beszélünk
Medián	a nagyság szerinti felsorolásban középen álló szám, vagy páros számú elem esetén a két középső szám átlaga
Minimum	a legkisebb szám
Maximum	a legnagyobb szám
Terjedelem	a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége

Az átlag-, módusz- és mediánértékeket szokás a számsokaság **statisztikai középértékeinek** is nevezni.

FELADAT

1. Egy város középiskolájában 4 évfolyamos gimnáziumi és 3 évfolyamos szakiskolai osztályok vannak. A gimnáziumi osztályok betűjele: A, B, C és D; a szakiskolai osztályoké E, F és G. Az osztálylétszámokat a táblázat mutatja:

	A	B	C	D	E	F	G
9. évfolyam	36	36	34	36	25	38	26
10. évfolyam	35	29	30	31	27	33	20
11. évfolyam	30	31	36	33	21	26	12
12. évfolyam	27	29	34	31	–	–	–

a) Mennyi az átlagos létszám az egyes évfolyamokon?

b) Készíts oszlopdiagramot az a) feladathoz!

c) Jelöld K-val a 16 gimnáziumi osztály átlagos létszámát, L-lel pedig a 9 szakiskolai osztály átlagos létszámát! Számítsd ki, mennyi a K és mennyi az L!

d) Mit ad meg a $\frac{16K+9L}{25}$ szám?

2. Az 1. feladatban az osztálylétszámok egy 25 számból álló számsokaságot alkotnak.

a) Melyik szám ennek a számsokaságnak a módusza?

b) Mennyi a számsokaság mediánja?

c) Mennyi a számsokaság minimuma, maximuma és terjedelme?

3. Megadunk egy számsokaságot:
32, 18, 20, 18, 20, 24, 15, 18, 55, 10.

a) Mennyi az átlaga, a módusza, a mediánja?

b) Adj meg öt számot úgy, hogy ennek a számsokaságnak ugyanaz legyen a módusza és a mediánja, mint az adott számsokaságé, de az átlaga kétszer akkora legyen!

c) Adj meg öt számot úgy, hogy ennek a számsokaságnak ugyanaz legyen az átlaga és a mediánja, mint az adott számsokaságé, de a módusza 3-mal kisebb legyen!

4. (Érettségi feladat, 2017)
Egy 20 fős társaság tagjai közül kilencen olvastak szépirodalmi könyvet az elmúlt hónapban. Tőlük azt is megkérdezték, hogy hány darab szépirodalmi könyvet olvastak az elmúlt hónapban. A kilenc válasz egyetlen módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2. Add meg ezt a kilenc számot!

5. (Érettségi feladat, 2021)
A 2020-as Balaton-átúszáson az indulók 36%-a volt nő, átlagéletkoruk 35 év. Az indulók 64%-a volt férfi, átlagéletkoruk 38 év. Mennyi volt ebben az évben az összes induló átlagéletkora?

HÁZI FELADAT

1. Egy osztály történelemdolgozatot írt. Az érdemjegyeket mutatja a táblázat.

Osztályzat	1	2	3	4	5
Gyakoriság	0	9	8	6	5

a) Ábrázold az osztályzatok gyakoriságát oszlopdiagramon!

b) Add meg az osztályzatokat tartalmazó adathalmaz terjedelmét, móduszát, mediánját és átlagát!

c) Add meg az egyes érdemjegyek relatív gyakoriságát!

d) Ábrázold a c) feladatban kapott relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon!

2. Egy osztályban 25-en írtak történelemdolgozatot. A dolgozatokat a tanár az 1, 2, 3, 4, 5 érdemjegyek valamelyikével minősítette. Az osztályzatok átlaga 3,16 lett.

a) Számítsd ki, hogy mennyi a dolgozatokra írt érdemjegyek összege a 25 dolgozat esetében!

b) Adj meg egy lehetséges jegyeloszlást, amelyben 3 az érdemjegyek módusza!

c) Adj meg egy olyan lehetséges jegyeloszlást, amelyben 2 az érdemjegyek mediánja!

d) Elképzelhető-e olyan jegyeloszlás, amelyben az érdemjegyek módusza az 5? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

e) Elképzelhető-e, hogy csak 3-as és 4-es osztályzatok születtek? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

3. Bence beteg volt, de a háziorvosa szerint hétfőn már mehet iskolába. Bence vasárnap ötször is megmérte a lázát. A mérések átlaga 36,8 °C lett. Elképzelhetők-e a következő esetek? Ha igen, adj meg egy lehetőséget, ha nem, válaszodat indokold!

a) Bence egész nap láztalan volt, azaz mind az ötször 37,5 °C-nál kevesebbet mért.

b) Bencének kétszer is 37,8 °C volt a láza.

c) A mért hőmérsékletek módusza 37 °C volt.

d) A mért hőmérsékletek mediánja 36,6 °C volt.

54 Diagramok

FELADAT

1. (Kompetenciamérés, 2013)
Tünde egy szimfonikus zenekarban csellózik. A következő táblázat a zenekar összetételét mutatja.

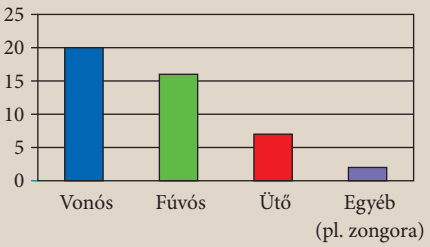
Hangszertípusok	Fő
Vonós hangszerek	20
Fúvós hangszerek	16
Ütős hangszerek	7
Egyéb (pl. zongora)	2

A következő diagramok közül melyik NEM ábrázolja helyesen a zenekar összetételét?

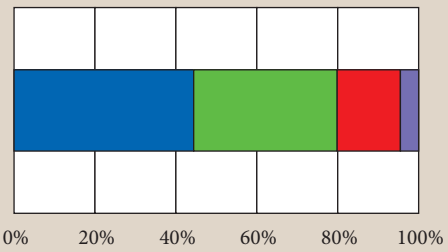
A)



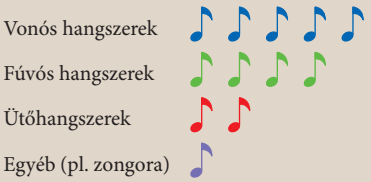
B)



C)



D)

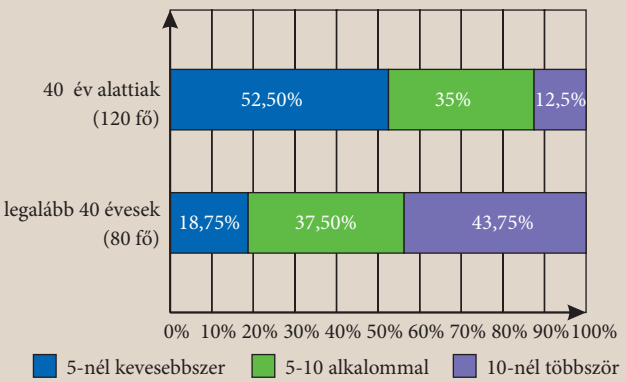


2. (Érettségi feladat, 2011)
Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) a mellékelt diagram szemlélteti.

a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban?

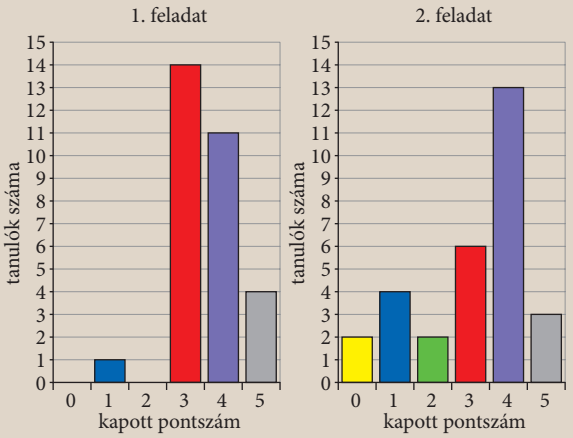
b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba?

Évente hány alkalommal jár színházba?



3. (Érettségi feladat, 2011)
Egy iskolai tanulmányi verseny döntőjébe 30 diák jutott be, két feladatot kellett megoldaniuk. A verseny után a szervezők a mellékelt oszlopdiagramokon ábrázolták az egyes feladatokban szerzett pontszámok eloszlását:

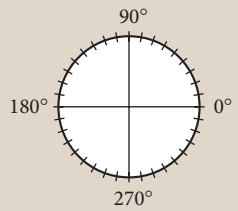
a) A diagramok alapján töltsd ki a táblázat üres mezőit! Két tizedesjegyre kerekíts!



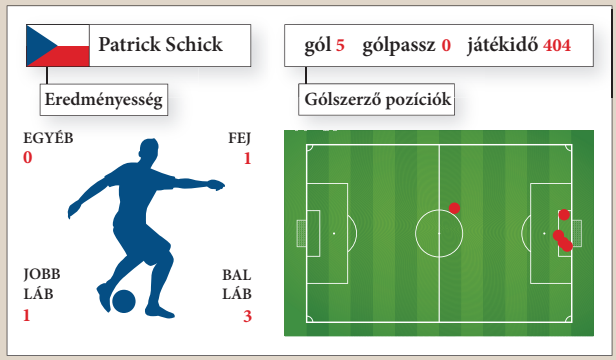
	1. feladat	2. feladat
Pontszámok átlaga		
Pontszámok mediánja		

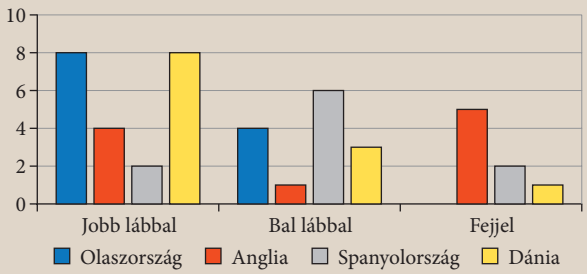
b) Ábrázold kördiagramon a 2. feladatra kapott pontszámok eloszlását! Mekkora középponti szögek tartoznak az egyes tartományokhoz?

c) A versenyen minden tanuló elért legalább 3 pontot. Legfeljebb hány olyan tanuló lehetett a versenyzők között, aki a két feladat megoldása során összesen pontosan 3 pontot szerzett?



4. A 2021-ben rendezett labdarúgó-Európa-bajnokságon a cseh Patrick Schick 5 gólt lőtt. (Talán a legemlékezetesebb közülük, amikor 45 és fél méterről a kapus fölött átívelve talált a kapuba.) Ő egyike volt annak a három játékosnak, aki jobb lábbal is, bal lábbal is és fejjel is szerzett gólt.
Oszlopdiagramon ábrázoltuk, hogy az első négy helyen végzett ország játékosai hány gólt lőttek jobb lábbal, bal lábbal, illetve hányat szereztek fejjel.





a) Mennyi a jobb lábbal lőtt gólok számának módusza?

b) Mennyi a bal lábbal lőtt gólok számának a mediánja?

c) Mennyi a fejelt gólok átlaga a négy országra nézve?

d) Mennyi az Olaszország, Anglia, Spanyolország és Dánia által elért gólok számának a terjedelme és a mediánja?

e) Olaszország 13 góllal, Anglia 11 góllal, Spanyolország 13 góllal zárta a bajnokságot. Mennyivel térnek el ezek az eredmények a diagramon ábrázolt eredményektől? Vajon mi lehet a különbség oka?

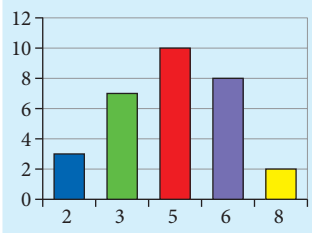
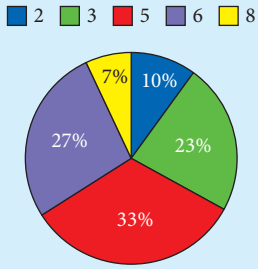
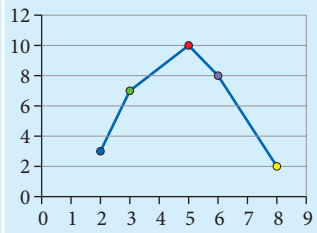
ELMÉLET

1. Súlyozott átlag, súlyozott számtani közép

Ha ismerjük az adatsokaságban szereplő elemek gyakoriságát, akkor az adatsokaság átlaga kiszámolható a következő módon:

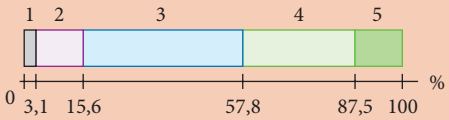
az adatok összege	az elemeket megszorozzuk a gyakoriságukkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk
az adatok darabszáma	a gyakoriságok összege
átlag (súlyozott átlag)	a fenti két érték hányadosa: az összeget osztjuk a darabszámmal

2. Diagramok

oszlopdiagram	kördiagram	sávdiagram	vonaldiagram
			

HÁZI FELADAT

1. Egy iskola 320 tanulójának év végi matematikaosztályzatairól készült a mellékelt sávdiagram.



a) Készíts relatív gyakorisági, illetve gyakorisági táblázatot az osztályzatokról!

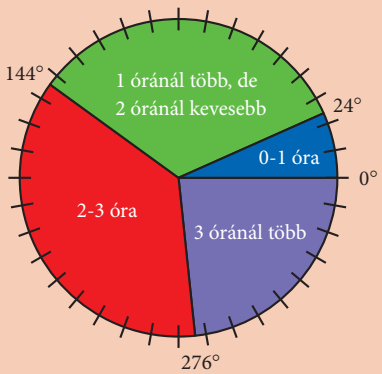
b) Mennyi a 320 adat terjedelme, módusza, mediánja és átlaga?

c) A b) kérdésben megadott mutatók közül melyek olvashatók le egyszerűen a sávdiagramról?

d) Készíts kördiagramot az osztályzatokról!

2. (Érettségi feladat, 2018)

Egy 30 fős osztályban felmérést készítettek a diákok internetezési szokásairól. Az egyik kérdés az volt, hogy naponta átlagosan ki hány órát használja az internetet a szabadidejében. A válaszok alapján az itt látható kördiagram készült.



a) Hány olyan diák van az osztályban, aki naponta legalább 2 órát használja az internetet a szabadidejében?

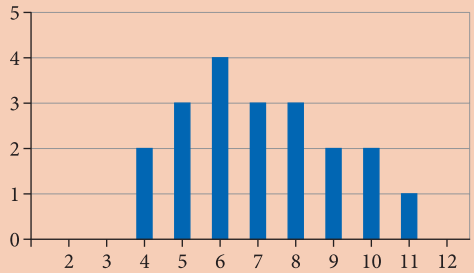
Egy másik kérdés az volt, hogy a mobiltelefon, a laptop, illetve a táblagép (tablet) közül melyiket használják internetezésre. A mobiltelefont mind a 30-an, a laptopot 24-en, a táblagépet 16-an jelölték meg. A felmérésből az is kiderült, hogy a mobiltelefon, a laptop és a táblagép közül pontosan kétféle eszközt 14 diák használ.

b) Hányan használják mind a háromféle eszközt internetezésre?

3. Két dobókockával dobtunk 20-szor, és minden alkalommal feljegyeztük a dobások összegét. Oszlopdiagramon ábrázoltuk, hogy melyik értéket hányszor kaptuk meg.

a) Mennyi a kapott értékek módusza és mediánja?

b) Mennyi a kapott értékek átlaga?



RÁADÁS

1. Az IMDb internetes filmadatbázis felhasználói pontozhatják az adatbázisban található filmeket. 2015-ben a toplista első helyezettje *A remény rabjai* című 1994-es filmalkotás volt, 9,2 átlagos pontszámmal (a 10-ből), a második pedig – ugyancsak 9,2 átlagos pontszámmal – *A Keresztapa* (Francis Ford Coppola 1972-es remekműve).

Az IMDb-n a filmek pontszáma ugyanakkor nem azonos a filmre adott szavazatok átlagos értékével. Ennek oka, hogy az oldal üzemeltetői igyekeznek kiküszöbölni a film rajongóinak és ellenzőinek elvakult (10 és 1 pontos) értékeléseit. (Ettől persze még jogos maradhat, hogy a filmet valaki 10 vagy akár 1 pontra értékelje.) Ennek részleteibe az oldal szándéka szerint nem nyerünk bepillantást.

A mellékelt táblázat részletezi az egyik filmre leadott szavazatokat.

a) Határozd meg az egyes értékelések relatív gyakoriságát!

Szavazatok száma	Értékelés
544 471	10
237 026	9
113 042	8
45 465	7
17 664	6
10 310	5
5 215	4
4 175	3
4 226	2
31 369	1

b) Készíts sávdiagramot az értékelésekről! (Ilyen diagramokat az IMDb honlapján is találhatsz.)

c) Számítsd ki az értékelések átlagát! (A 10 és 1 pontos értékeléseket is számold az átlagba!)

d) Hány maximális (10 pontos) értékelésre lenne szükség ahhoz, hogy a film átlagos értékelése 9,2 legyen?

2. A *Big Voice* című 2015-ös musical 9,8 pontot kapott az IMDb-n. Ez mégsem elegendő a toplistára kerüléshez, ugyanis ez az átlag 8 darab szavazó értékeléséből származik. Ők egytől egyig 9 vagy 10 ponttal értékelték a filmet.

a) Hányan adtak 10 és hányan 9 pontot? (A 9,8-es átlag egy kerekített érték, ilyen kevés szavazónál pedig az IMDb rendszere nem korrigálja az előző feladatban leírtak szerint az eredményt.)

Hat szavazatról a honlap részletesebb leírást is közöl:

	Szavazatok száma	Átlag
Férfiak	3	9,70
Nők	3	9,70
18–29 év közöttiek	1	10,00
ebből férfi	1	10,00
30–44 év közöttiek	4	9,80
ebből férfi	2	9,50
nő	2	10,00
45 év fölöttiek	1	9,00
ebből nő	1	9,00
USA-szavazók	5	9,80
USA-n kívülről szavazók	1	9,00

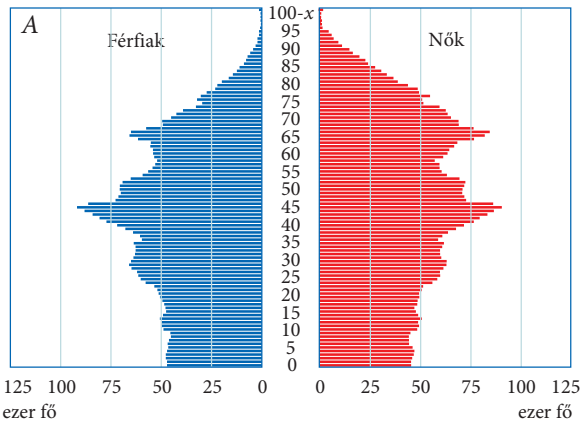
A táblázat alapján válaszolj a kérdésekre:

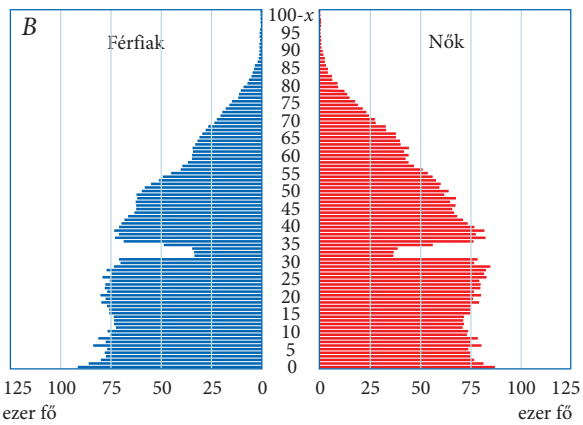
b) Eldönthető-e az USA-n kívülről szavazó neme?

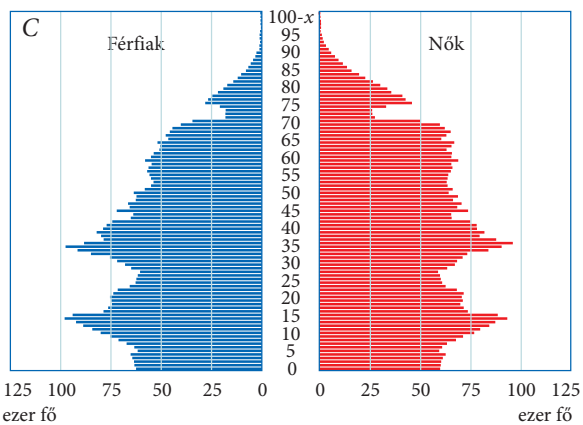
c) Eldönthető-e az USA-n kívülről szavazó korosztálya, ha tudjuk, hogy férfi volt?

d) Eldönthető-e az USA-n kívülről szavazó korosztálya, ha tudjuk, hogy nő volt?

3. A következő három diagram Magyarország korfáját mutatja 1950-ben, 1990-ben és 2020-ban, de nem ebben a sorrendben. Rakd időrendi sorrendbe a diagramokat! Milyen tendenciát fedezel fel? Mi lehet ennek az oka?

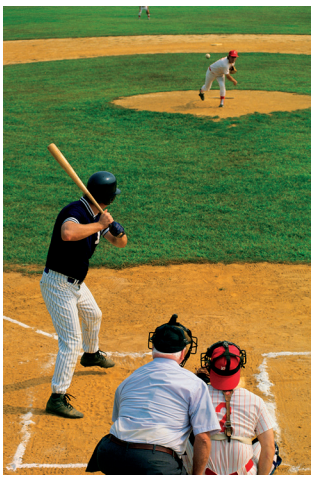






55 A dobozdiagram

BEVEZETŐ



A *Pénzcsinálók* (Moneyball, 2011) című film remekül mutatja be azt a szemléletváltást, ahogyan a sport világában elkezdték tudatosabban értelmezni és használni a sportolók mérhető adatait és ezzel a statisztikát. Rávilágít többek között arra, hogy

- a számok néha mást mutatnak, mint a „megérzések”. Például egy olyan játékos is hozhat stabilan jó eredményeket, aki elsőre meglepő módon mozog a pályán.
- nem mindig a sztárok segítenek egy csapaton. A mutatók alapján meg lehet keresni olyan (olcsóbb) játékosokat, akiknek a képességeik, erősségeik jól kiegészítik egymást.
- a statisztikai előrejelzésekkel elsősorban az átlagos viselkedést lehet megjósolni. Emiatt a selejtezők segítségével, amikor rengeteg mérkőzésre kerül sor, sokkal inkább megjelennek a statisztika által számolt mutatók, mint az egyenes kieséses rendszerben. Az egyenes kieséses rendszerben egy-egy meccs dönti el a továbbjutást, ilyenkor nagyobb a szerepe a kiemelkedő teljesítményre képes kulcsjátékosoknak.

Nézzétek meg a filmet, beszélgessetek róla!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A táblázat azt tartalmazza, hogy mekkora volt a legnagyobb sebessége a magyar csapat játékosainak a 2021-ben rendezett labdarúgó-Európa-bajnokság mérkőzései alatt. A magyar csapat leggyorsabb játékosa Nego volt, és az általa elért 33,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyben az EB-n mért legnagyobb sebesség is, amit rajta kívül még egy játékos ért el, az olasz Spinazzola.

Botka Endre	31,5	Willi Orbán	28,8
Cseri Tamás	25,6	Sallai Roland	29,2
Fiola Attila	31,5	Schäfer András	29,9
Gulácsi Péter	19,0	Schön Szabolcs	27,4
Kleinheisler László	30,8	Sigér Dávid	25,0
Loïc Nego	33,8	Szalai Ádám	26,1
Lovrencsics Gergő	29,7	Szalai Attila	31,3
Nagy Ádám	28,1	Varga Kevin	26,3
Nikolić Nemanja	29,0	Varga Roland	23,8

Egy számítógépes labdarúgószimulátor-program a futási teljesítmény alapján négy kategóriába osztja a játékosokat: a leglassúbb 25% a „Lassú”, a következő 25% a „Közepes”, a következő 25% a „Gyors” és a leggyorsabb 25% a „Villám” kategóriába kerül egy válogatotton belül.

a) Melyik sebesség mentén válik el egymástól a magyar csapatban a „Közepes” és a „Gyors” minősítés?

b) Milyen sebesség kell a magyar csapatnál a „Közepes” kategóriába kerüléshez?

c) Kik kapnak „Villám” minősítést?

d) Vajon miért Gulácsi Péter sebessége a legkisebb?

Megoldás

Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe a sebességeket!

19,0	23,8	25,0	25,6	26,1	26,3	27,4	28,1	28,8	29,0	29,2	29,7	29,9	30,8	31,3	31,5	31,5	33,8

A bejelölt vonalak mentén adhatjuk meg a kérdésekre választ adó értékeket.

a) A medián (28,8 és 29,0 átlaga) egy ilyen érték: 28,9 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Az alsó „fél” mediánja: 26,1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A Közepes kategóriába az kerül, akinek a sebessége legalább 26,1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és kisebb, mint 28,9 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

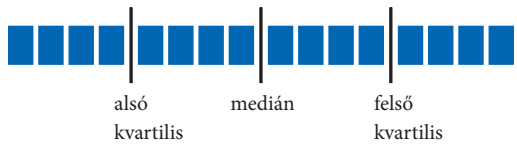
c) A felső „fél” mediánja: 30,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. „Villám” minősítést kapnak az ennél gyorsabbak: Botka, Fiola, Nego és Szalai Attila. (A határon lévő Kleinheisler besorolása a konkrét programtól függ: 18 játékos esetén 4 vagy 5 játékos esik az egyes tartományokba.)

d) Ő a kapus.

ELMÉLET

1. Kvartilisek

A medián olyan statisztikai mutató, amely úgy osztja ketté az adatsokaságot, hogy az adatok fele kisebb vagy egyenlő, fele nagyobb vagy egyenlő, mint a medián. A kvartilisek segítségével folytatjuk ezt a bontást: ekkor már négy, körülbelül ugyanannyi elemet tartalmazó csoportra bontjuk az adatokat, így pontosabb képet nyerhetünk az adatokról, mint önmagában a mediánnal.



Az **alsó kvartilis** az a szám, amelynél az adatoknak (közelítőleg) a negyede kisebb vagy egyenlő. Jele: Q_1.
A **felső kvartilis** az a szám, amelynél az adatoknak (közelítőleg) a negyede nagyobb vagy egyenlő. Jele: Q_3.
Az alsó és felső kvartilisek értékének meghatározása:

Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe az adatokat!

páros elemszám esetén	→	a mediánnal kettéosztjuk az adatsokaságot	→	külön-külön vesszük a kapott két adatsokaság mediánját
páratlan elemszám esetén	→	a mediánnal kettéosztjuk az adatsokaságot és a mediánt elhagyjuk	→	külön-külön vesszük a kapott két adatsokaság mediánját

Páratlan elemszám esetén a kettéosztás során csak azt az egyetlen elemet hagyjuk el, amelyik a középső elem. Az előtte álló elemek az adatsokaság „alsó felébe” kerülnek, köztük azok is, amelyek esetleg egyenlők a mediánnal. A mögötte álló elemek az adatsokaság „felső felébe” kerülnek, köztük azok is, amelyek esetleg egyenlők a mediánnal.

Például:

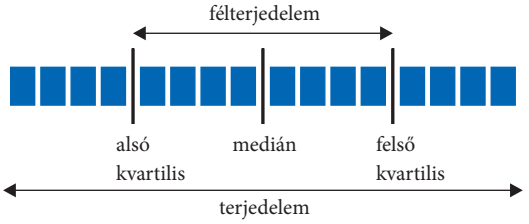
	adatok	alsó kvartilis	medián	felső kvartilis
8 adat	1 2 | 3 3 | 4 5 | 6 6	2,5	3,5	5,5
9 adat	1 2 | 3 3 | 4 5 5 | 6 6	2,5	4	5,5
10 adat	1 2 | 3 3 4 | 5 5 | 6 6 7	3	4,5	6
11 adat	1 2 | 3 3 4 | 5 5 | 6 6 7 8	3	5	6

Megjegyzések

– A kvartilisekre több meghatározás is létezik. A táblázatkezelő programok (pl. MS Excel) által számolt értékek eltérhetnek a fenti eljárással kapott értékektől. Nagyszámú adatsokaság esetén azonban a különbség nem játszik szerepet. Mindegyik meghatározás esetén jellemző az a tulajdonság, hogy a kvartilisek negyedelik az adatsokaságot.

– A kvartilisekhez hasonlóan használnak más felosztásokat is. A decilisek például úgy osztják fel az adatsokaságot, hogy az adatok (közelítőleg) 10%-a esik az egyes tartományokba, a percentilisek esetében pedig az adatok 1%-a. A percentilis fogalmát használják például a védőnők a kisbabák fejlődésének vizsgálatakor.

2. Terjedelem, félterjedelem



Terjedelem: a legnagyobb és a legkisebb elem különbsége.

Félterjedelem: a felső kvartilis és az alsó kvartilis különbsége: $Q_3 - Q_1$.

- Az elemek (közelítőleg) 50%-a a félterjedelem sávba esik.
- Vigyázat, a félterjedelem rendszerint nem egyenlő a terjedelem felével!
- A félterjedelem az adatok szóródásáról ad információt. Ha például az adatok nagy része egy szűk tartományba esik, akkor a félterjedelem kicsi. Ha van néhány kiugró adat, akkor a félterjedelem több információt mutat meg az adatsokaságról, mint a terjedelem.

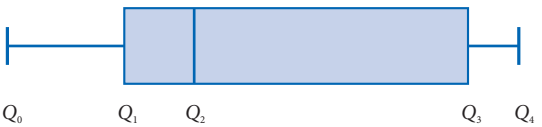
Megjegyzés

A negyedelés határait jelentő 5 értéket szokás Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4-gyel jelölni. Ezzel a jelöléssel:

minimum	alsó kvartilis	medián	felső kvartilis	maximum
Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4

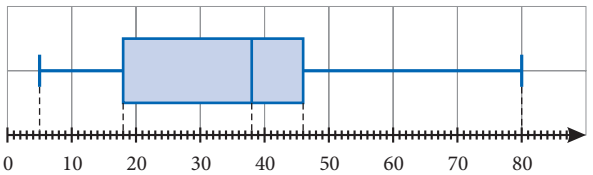
3. A dobozdiagram

A kvartilisek segítségével készül a **dobozdiagram** (más néven **box-plot diagram** vagy **sodrófadiagram**).



A doboz két széle az alsó, illetve a felső kvartilisnél, azaz Q_1-nél és Q_3-nál jelenik meg. A dobozon belül egy vonal jelzi a medián, azaz Q_2 helyét. A dobozból kiinduló vonalak a minimumig (Q_0), illetve a maximumig (Q_4) tartanak.

Például

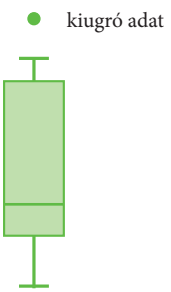


minimum	alsó kvartilis	medián	felső kvartilis	maximum
5	18	38	46	80

terjedelem	félterjedelem
80 – 5 = 75	46 – 18 = 28

Megjegyzések

- A dobozdiagram lehet akár vízszintes, akár függőleges.
- Szokás még **kiugró adatokról** beszélni. Kiugró adat az, amely az alsó kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresével kisebb, illetve a felső kvartilisnél legalább a félterjedelem másfélszeresével nagyobb. Lehet ez például mérési hiba eredménye, de felhívhatja a figyelmet egy szélsőséges helyzetre. A kiugró adatot a dobozdiagram esetén sokszor külön ponttal jelölik. Ha van kiugró adat, akkor a dobozból kiinduló vonalak nem a minimumig, illetve a maximumig tartanak, hanem a legkisebb, illetve legnagyobb olyan adatig, ami még nem számít kiugró adatnak.



4. A dobozdiagram készítése (ha nincs kiugró adat)

Állítsd növekvő sorrendbe az elemeket! → Határozd meg a minimumot, a maximumot és a mediánt! → Határozd meg az alsó és felső kvartiliseket! (Ne felejtsd el, hogyan járunk el páros, illetve páratlan elemszám esetén!) → Jelöld számegyenesen: minimum, alsó kvartilis, medián, felső kvartilis, maximum! → Rajzold be a dobozt és az alsó kvartilistől a minimumig, illetve a felső kvartilistől a maximumig érő szakaszokat!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Ábrázold dobozdiagramon a gyakorisági táblázattal megadott adatokat!

adat	4	5	7	8	10	12
gyakoriság	1	2	1	4	2	1

Megoldás

Soroljuk fel az adatokat növekvő sorrendben! A felsorolásban vegyük figyelembe a gyakoriságot is, azaz minden adatot annyiszor soroljunk fel, amennyi a gyakorisága!

4, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 12

A minimum 4, a maximum 12. Az adatsokaság 11 elemből áll. A 11 páratlan szám, ezért a medián a középső elem, most nagyság szerint a hatodik elem: 8.

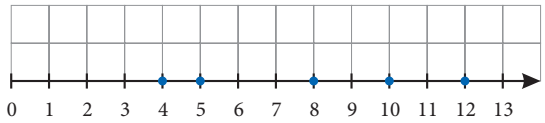
Osszuk ketté a mediánnál az adatsokaságot! (Több nyolcas van, az adatsokaságot a középső elemnél osztjuk ketté, ami most a második nyolcas.)

4, 5, 5, 7, 8, | 8, 8, 8, 10, 10, 12

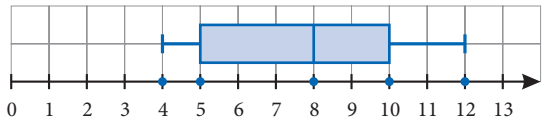
A medián előtt 5 elem áll, ezek mediánja lesz az alsó kvartilis: $Q_1 = 5$.

A medián után 5 elem áll, ezek mediánja a felső kvartilis: $Q_3 = 10$.

Jelöljük be számegyenesen a kiszámított statisztikai mutatókat!



Rajzoljuk meg a segítségükkel a dobozt és a vonalakat!

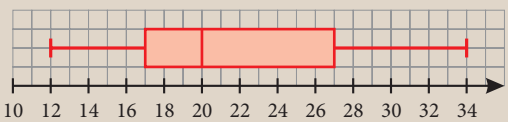


Megjegyzés

- Az adatokból egyértelműen elkészíthető a dobozdiagram, visszafelé azonban ez nem teljesül. A dobozdiagram alapján nem lehet felsorolni az adatokat, csak az adatok „összességéről” nyerünk információt.
- Figyeld meg, hogy bár a kvartilisek olyan értékek, amelyek négy (körülbelül) egyforma részre osztják a nagyság szerint sorba rendezett adatsokaságot, nem teljesül azonban, hogy az adatok negyede kisebb, mint az alsó kvartilis, vagy hogy az adatok fele nagyobb, mint a medián. Ennek oka, hogy lehetnek olyan adatok, amelyek egyenlők valamelyik kvartilissel vagy a mediánnal. A példában az egyik nyolcas a medián, egy darab nyolcas a medián előtt és két darab nyolcas a medián után szerepel a felsorolásban.

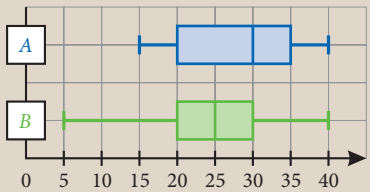
FELADAT

1. A dobozdiagram alapján határozd meg az ábrához tartozó adatsokaság jellemzőit!



minimum		maximum	
alsó kvartilis		terjedelem	
medián		félterjedelem	
felső kvartilis			

2. Az alábbi dobozdiagramok az *A* és *B* adatsokaságokra vonatkoznak. Jelöld a táblázatban X-szel a helyes válaszokat!



	A	*B*
Melyik adatsokaságban szerepelhet a 12?		
Melyik adatsokaságban szerepelhet a 25?		
Melyik adatsokaság terjedelme a nagyobb?		
Melyik adatsokaság félterjedelme a nagyobb?		
Melyik adatsokaság mediánja a kisebb?		
Melyik adatsokaság középső 50%-ában szerepelhet 30-nál nagyobb adat?		
Melyik adatsokaságra teljesül, hogy elemeinek fele nagyobb, mint a másik adatsokaság felső kvartilise?		

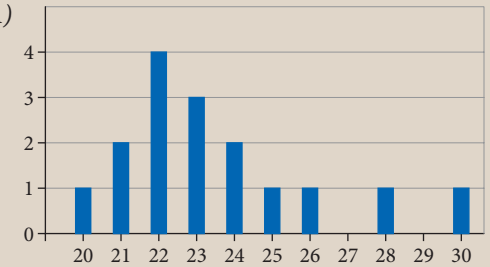
3. A Rubik-kocka-versenyeken többféle versenyszám létezik. Az egyik versenyszám az, hogy ki tudja kevesebb forgatással kirakni a megkevert kockát. (Érdekes tény, hogy a kocka 20 lépéssel mindig kirakható.)
A 2019-ben Budapesten rendezett nemzetközi bajnokságon 21 forgatással nyerte Balog Dávid ezt a versenyszámot. A döntőben a következő 44 eredmény született:

forgatás száma	21	24	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	45	46	47	49	51	53
gyakoriság	1	1	1	2	2	2	1	2	5	2	4	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1	2

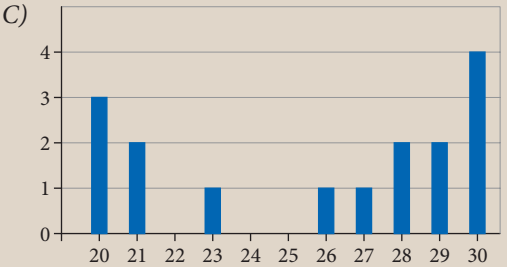
Készíts dobozdiagramot a versenyen elért eredményekről!

4. Párosítsd azokat a diagramokat, amelyek azonos adatsokasághoz tartozhatnak!

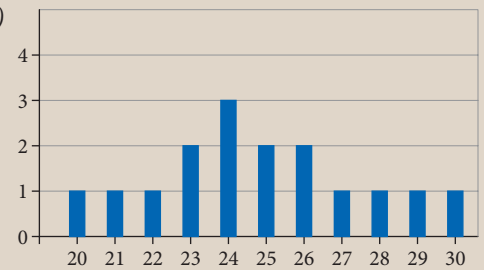
A)



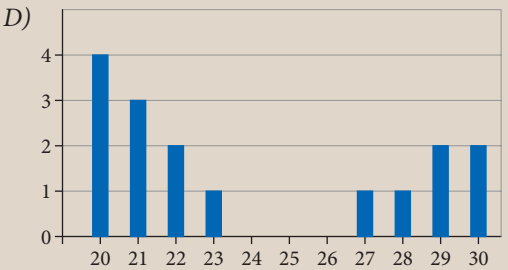
C)



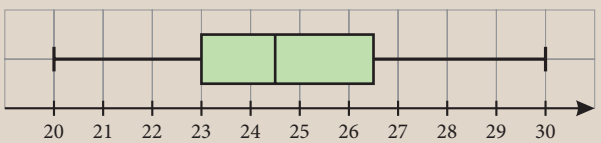
B)



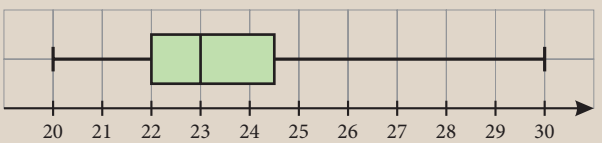
D)



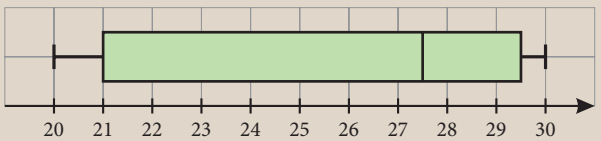
1.



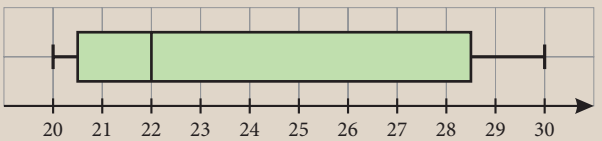
3.



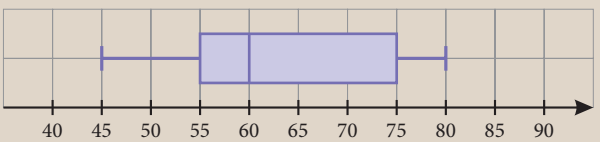
2.



4.



5. A következő dobozdiagram 13 adat alapján készült, de az egyik adat véletlenül törlődött. Mi lehetett a hiányzó adat az alábbi esetekben?



a) 46, 53, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 73, 77, 78, 80

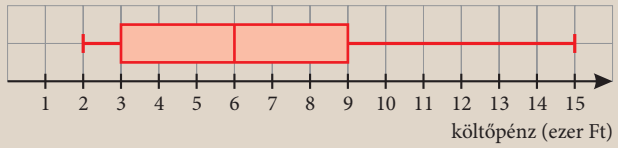
b)

adat	45	55	75	80
gyakoriság	1	5	4	2

c)

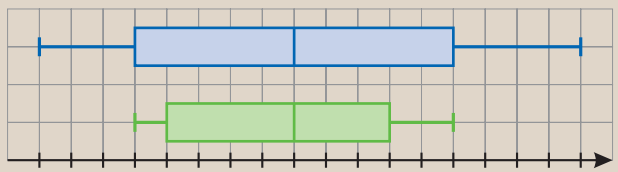
adat	45	50	60	65	70	80
gyakoriság	1	2	4	1	1	3

6. Egy osztálykirándulás után dobozdiagramon ábrázolták, hogy ki mennyi költőpénzt vitt a kirándulásra. Eldönthető-e a diagram alapján a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak? Tégy X-et a megfelelő cellába!



	Igaz	Hamis	Az ábra alapján nem lehet eldönteni
A gyerekek felénél legfeljebb 6000 Ft volt.			
Átlagosan 8500 Ft volt a gyerekeknél.			
A gyerekek 75%-ánál legalább 9000 Ft volt.			
Volt olyan gyerek, akinél 12 000 Ft volt.			
A gyerekek kb. felénél volt legalább 3000 és legfeljebb 9000 Ft közötti összeg.			

7. Egy gazda kétféle tápoldatot használt az almatermesztéshez. Az itt látható dobozdiagramok az alapján készültek, hogy az egyes tápoldatok után mekkora tömegű almák termettek a fákon.



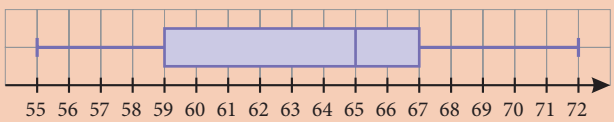
a) Hasonlítsd össze a kétféle módon termesztett almákat a diagramok alapján!

b) A dobozdiagramok alapján melyik típust lenne érdemes termesztenie a gazdának?

c) Mit gondolsz, milyen szempontok alapján választhat a gazda? Tudsz-e olyan szempontot mondani, ami alapján megváltoztatnád a b) feladatrészben adott javaslatodat?

HÁZI FELADAT

1. Egy adatsokaság elemeit dobozdiagramon szemléltették. A diagram alapján válaszolj a kérdésekre!



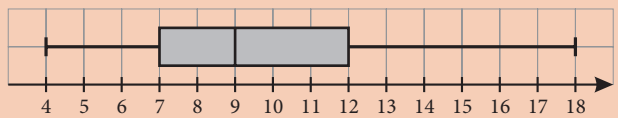
a) Mekkora az adatsokaság legnagyobb eleme?

b) Add meg azt az értéket, amelynél az adatok közel 50%-a nagyobb!

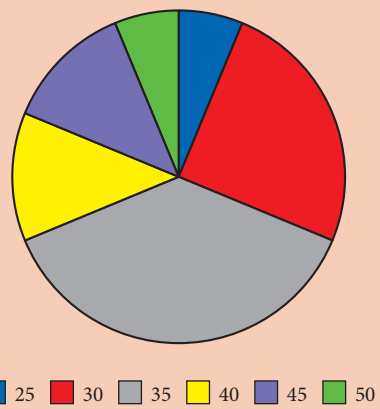
c) Add meg azt az értéket, amelynél az adatok közel 25%-a kisebb!

d) A növekvő sorba rendezett adatsokaság utolsó negyedrészéből kiválasztunk 2 elemet. Legfeljebb mekkora lehet ezek között a különbség?

2. Adj meg 10 olyan pozitív egész számot, amelyekből mint adatsokaságból a következő dobozdiagram készíthető!



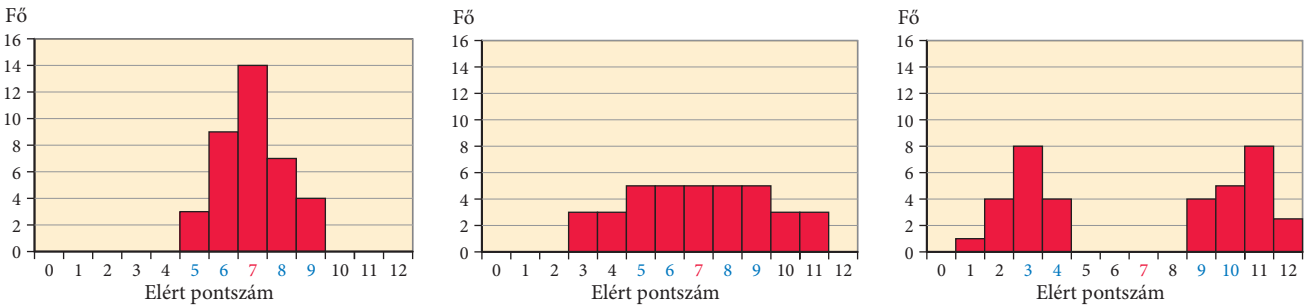
3. Ábrázold dobozdiagramon a kördiagramon megadott adatsokaságot!



56 Adatsokaság szórása

BEVEZETŐ

Egy iskola több osztályában is megíratták ugyanazt az évfolyamdolgozatot. A dolgozat 12 kérdésből állt, a helyes válasz minden kérdésre egy pontot ért. Az alábbi grafikonok néhány osztály eredményeit szemléltetik:



Mindhárom osztályban azonos a pontszámok átlaga: 7. Mégis lényeges különbségeket mutat a grafikon. Az első grafikonhoz tartozó osztályban a tanulók felkészültségében nem mutatkozott nagy különbség. A második esetben az eredmények már jobban szóródtak. A harmadik esetben két jól elkülönülő csoport alakult ki, és senki sem írt átlagos pontszámú dolgozatot. Keresünk egy olyan mutatót (számszerű jellemzőt), amely ezeket a különbségeket jeleníti meg. Az adatok szóródását leíró egyik statisztikai mutató a szórás.

ELMÉLET

1. **Adatok szóródásának jellemzése**

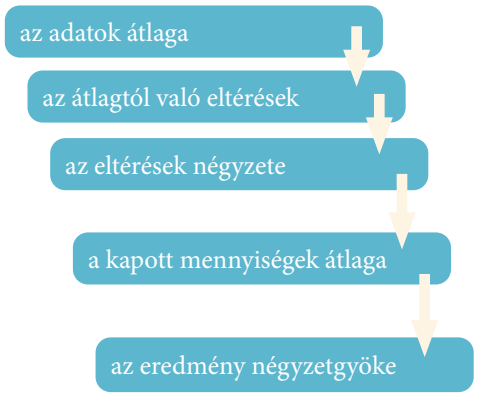
   Nagyszámú adat esetén az adatok átlaga kevés információt hordoz az adatsokaságról. Szükség van olyan jellemzőre, amely azt mutatja, hogy az adatok mennyire szóródnak. Lehetséges például, hogy az adatok nagy része az átlag körüli szűk tartományba esik, de lehetséges az is, hogy az adatok között sok olyan van, amely jelentősen eltér az átlagtól.
   Több szóródási mutató létezik, ezek egyike a szórás. A szórás az adatok átlagtól való eltérését veszi alapul. Az adatok átlagtól való eltérését négyzetre emeljük – ezáltal nem számít, hogy az eltérés pozitív vagy negatív. A szórás értéke egy nemnegatív valós szám. Ha minden adat egyenlő, akkor a szórás 0.

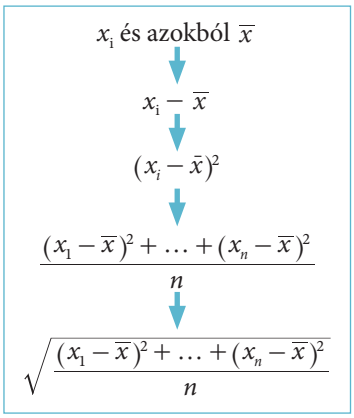
2. **Adatsokaság szórása**

   Definíció: Ha egy véges adatsokaság adatait $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelöli, és ezek átlaga $\overline{x}$, akkor az
   $\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$
   számot az adatsokaság **szórásnégyzetének**, ennek a négyzetgyökét pedig az adatsokaság **szórásának** nevezzük.
   A szórást általában a görög szigma (σ) betűvel jelöljük.

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

A szórás kiszámítása





Az előbbi eljárásban sokat segít, ha egy táblázat első sorában soroljuk fel az adatokat, ezekből kiszámoljuk az átlagot, majd a táblázat második sorába beírjuk az átlagtól való eltéréseket $(x_i - \bar{x})$, következő sorba pedig az átlagtól való eltérések négyzetét: $(x_i - \bar{x})^2$.

Ha ismert az elemek gyakorisága, akkor segít a számolásban, ha (az átlagszámításhoz hasonlóan) súlyozzuk az eltérés négyzetét a gyakoriságaikkal.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Mennyi a 33, 33, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 48 adatsokaság szórása?

Megoldás

Az adott 10 szám átlaga: $\frac{2 \cdot 33 + 6 \cdot 45 + 46 + 48}{10} = 43.$

Töltsük ki a táblázatot!

Adat (x_i)	33	45	46	48
gyakoriság	2	6	1	1
$x_i - 43$	–10	2	3	5
$(x_i - 43)^2$	100	4	9	25

A szórás:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot (-10)^2 + 6 \cdot 2^2 + 3^2 + 5^2}{10}} = \sqrt{\frac{258}{10}} = \sqrt{25{,}8} \approx 5{,}1.$$

FELADAT

1. Egy cinkelt dobókockát egymás után 120-szor feldobtunk. A dobott pontok gyakoriságát táblázattal adjuk meg:



Pontszám	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	21	18	4	45	22	10

a) Ábrázold az adatsokaság gyakoriságeloszlását oszlopdiagramon!
b) Mennyi a 120 dobás átlaga?
c) Melyik szám a medián?
d) Van-e ennek a számsokaságnak módusza? Ha van, melyik szám az?
e) Mennyi itt a terjedelem?
f) Mennyi a 120 adatból álló adatsokaság szórása?

2. A –10; 0; 10; 15; 35 számsokaság esetén
a) számítsd ki az átlagot és a terjedelmet!
b) számítsd ki a szórást!

3. (Érettségi feladat alapján, 2014)

Kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően. Két csoport véleményét kérték ki úgy, hogy a terméket egy 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatokban látható.

Pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
Gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

Számítsd ki zsebszámológéped használatával, hogy mennyi a két csoportban az adott pontszámok

a) átlaga; **b)** szórása!

c) Készíts dobozdiagramot a két csoportban adott pontszámokról, külön-külön!

d) Milyen kapcsolatot tudsz megfogalmazni a dobozdiagram alakja és az adatok szórása között?

HÁZI FELADAT

1. Tekintsük a 2, 3, 4, 5, 2, 4, 4, 6, 8, 2, 6, 9, 2, 3, 7 adatsokaságot!

a) Rendezd az adatokat növekedő sorrendbe!

b) Ábrázold az adatok relatív gyakoriságát diagramon!

c) Mennyi az adatsokaság terjedelme?

d) Mennyi az adott számok átlaga?

e) Számítsd ki az adatsokaság szórását!

2. (Érettségi feladat alapján, 2020)

A 2016-os nyári olimpiai játékok női súlylökés versenyszámának döntője alapján készült az alábbi, hiányosan kitöltött táblázat, amely az első öt helyezett dobásainak hosszát mutatja. Egy adott versenyző eredménye az érvényes dobásai közül a legnagyobb. A táblázatban az X az érvénytelen dobást jelzi.

Név (ország)	1. dobás (m)	2. dobás (m)	3. dobás (m)	4. dobás (m)	5. dobás (m)	6. dobás (m)	Eredmény (m)	Helyezés
Valerie Adams *Új-Zéland*	19,79	20,42	19,80	×	×	20,39		
Michelle Carter *Egyesült Államok*	19,12	19,82	19,44	19,87	19,84	20,63		
Kung Li-csiao *Kína*	18,98		19,18	×	×	×	19,39	
Márton Anita *Magyarország*	17,60	18,72	19,39	19,38	19,10	19,87		
Raven Saunders *Egyesült Államok*	18,88	×	×	×	×	19,35		

a) Töltsd ki a táblázat tíz üres mezőjét!

b) Hányadik helyen állt Márton Anita az ötödik sorozat végén?

c) Számítsd ki Márton Anita hat dobásának átlagát és szórását!

RÁADÁS

Oszlopdiagram és az adatok szórása

Két izzógyár versenyez a vevőkért. Mindkét gyár terméke olyan izzó, amely a gyártó szerint átlagosan 1000 órán keresztül világít. Ezt az állítását mindkét gyár ezer-ezer izzó élettartamának megvizsgálásával támasztja alá. A minőség-ellenőrzés során a megvizsgált izzók élettartamát 10 órára kerekítették és táblázatba foglalták.

Élettartam (óra)	800	820	850	880	910	980	990	1000	1010	1030	1050	1070	1100	1400	1570
1. gyár izzóinak száma	5	10	8	12	24	75	130	190	333	120	70	14	8	0	1
2. gyár izzóinak száma	10	29	46	48	59	98	107	153	192	112	45	41	26	19	15

a) Elemezzük mindkét adathalmazt a terjedelem, módusz, medián és átlag segítségével!

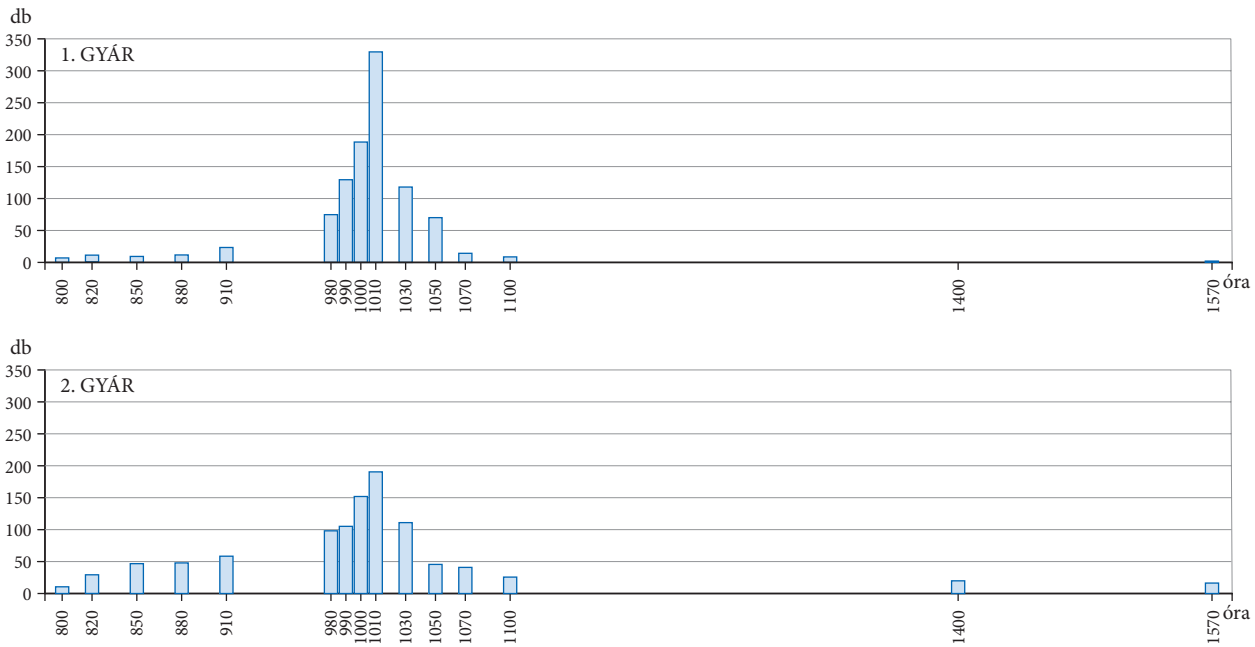
b) Hogyan vélekedünk a gyárak termékeiről, melyik gyár ígéretét tartjuk megbízhatóbbnak?

Megoldás

a) Táblázatba foglalva áttekinthetőbbek az egyes jellemzők:

	Terjedelem	Módusz	Medián	Átlag
1. gyár	770	1010	1010	1002
2. gyár	770	1010	1000	1001

b) Ha nem látnánk az 1000-1000 mérés eredményét, akkor pusztán a fenti statisztikai jellemzők alapján azt gondolhatnánk, hogy a két gyár termékei között nincs lényeges minőségi különbség. Ábrázoljuk oszlopdiagramon a gyakoriságokat!



Azonnal szembeötlő különbség mutatkozik a két gyár termékei között. Az első diagram azt mutatja, hogy az 1. gyárban az izzók több mint 80%-ának valóban 1000 órához közeli volt az élettartama (980 és 1050 óra között). Vizuálisan ez úgy jelenik meg a diagramon, hogy a „jelentős magasságú” oszlopok egy viszonylag szűk (mintegy 70 óra „szélességű”) tartományban vannak.

A 2. gyár esetében a diagram „szétterül”. Ha itt is ki akarunk jelölni a vízszintes tengelyen egy olyan szakaszt, amelyikben az adatoknak körülbelül a 80%-a megtalálható, akkor ehhez már egy legalább 160 óra szélességű tartományra van szükségünk (például 910 és 1070 óra között). Ennek az adatsornak jóval nagyobb a szórása, mint az előzőnek.

A gyakorlat számára ez igen jelentős információ az 1000 adatból álló adathalmazra nézve. Az 1. gyár ígéretét megbízhatóbbnak gondoljuk, a legtöbb esetben valóban 1000 órához közel lesz a tőlük vásárolt izzók élettartama.

Ráadás Statisztikai számítások zsebszámológéppel

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy városi közlekedési vállalat 20 járatot üzemeltet. Szeretnék a hálózatot a megváltozott közlekedési igények szerint átszervezni. Ennek első lépéseként összeírták, hogy az egyes járatok jelenleg hány megálló hosszúságú szakaszokon közlekednek. Az adatokat (a megállók számát) és ezek gyakoriságát (a járatok számát) a mellékelt táblázat foglalja össze.

A zsebszámológép statisztikai üzemmódjának használatával számítsuk ki az adatok átlagát és szórását!



Megállók száma	Járatok száma
4	1
8	3
11	5
13	4
14	3
15	2
16	1
17	1

Megoldás

– Állítsuk a számológépünket *statisztikai üzemmódba*.
Ez a beállítás számológépenként különböző módon végezhető el. Az egysoros kijelzőjű számológépnél a legtöbb esetben van egy STAT feliratú nyomógomb (legtöbbször a nyomógomb második funkciójával aktiválható). Ha ezt az üzemmódot aktiváltuk, akkor a kijelzőn megjelenik a STAT felirat. (A drágább, általában többsoros kijelzőjű gépek esetében a statisztikai üzemmód a MODE vagy a SETUP feliratú billentyű megnyomása után választható ki, ami esetleg az SD-mód kiválasztását jelenti.)



– Először ellenőrizzük, nincsenek-e korábban bevitt adatok a gépben. Ha vannak, ezeket törölnünk kell. A törléshez nem elegendő a C, esetleg a CA gomb megnyomása, hanem általában a 2*nd* (más gépeknél: SHIFT) billentyű és egy másik gomb megnyomása (Scl, CS, …) szükséges.

– Keressük meg azt a nyomógombot, amelyhez a DATA, DAT vagy DT felirat tartozik. Ennek a megnyomásával a kijelzőn álló számot adatként lehet bevinni a gépbe. Ha egymás után többször megnyomjuk ezt a gombot, akkor ugyanazt a számot annyiszor viszi be a gép adatként, ahányszor megnyomtuk a gombot.



– A példánknál maradva, a STAT üzemmódban először töröljünk minden adatot a kijelzőről és a memóriából is. Ekkor a kijelzőn a 0-nak kell állnia (esetleg az $n = 0$ felirat is látható).

– Ezután írjunk be egy 4-est a gépbe, majd nyomjuk meg a DAT nyomógombot egyszer. (Géptől függően vagy semmi lényegeset nem észlelünk, vagy többsoros kijelző esetén megjelenhet a kijelzőn az $n = 1$ felirat, ami azt jelzi, hogy 1 darab adat van a gépben.)

– Töröljük a kijelzőt, és nyomjuk meg a 8-as számhoz tartozó gombot, majd a DAT gombot 3-szor egymás után. Ha véletlenül 4-szer nyomtuk meg a gombot, akkor a 2nd billentyű és utána a DAT billentyű megnyomásával az utoljára bevitt adatot törölhetjük. Ha pont 3-szor vittük be a 8-at, akkor a kijelzőn (esetleg) az $n = 4$ kijelzés is látható.

– Töröljük a kijelzőt, írjuk be a gépbe a 11-et, majd nyomjuk meg a DAT billentyűt 5-ször egymás után ($n = 9$).

– Miután hasonló módon a többi adatot is bevittük a gépbe, töröljük a kijelzőt. (A kijelző törlése nem törli a bevitt adatokat.)

– Keressük meg a gépen az $\overline{x}$ feliratú billentyűt és nyomjuk meg (ehhez először valószínűleg a 2*nd* billentyűt kell lenyomnunk, esetleg más, a gép használati útmutatójában megadott billentyűt). Ekkor (géptől függően) megjelenik az adatok átlaga (feladatunkban a 12), de előfordulhat, hogy ehhez még az „=” (vagy Enter) billentyűt is meg kell nyomnunk.

– Keressük meg a σ (esetleg σ_x) feliratú billentyűt, és (a 2*nd* billentyű vagy a gép leírásában megadott más billentyű

megnyomása után) nyomjuk meg ezt is. A kijelzőn megjelenik a számológépbe bevitt adatok szórása (feladatunkban a 3,098386677).

– Ha újabb feladatot kell megoldanunk, akkor ne feledjük el törölni a bevitt adatokat.

Megjegyzés: A feladat elvégezhető táblázatkezelő program segítségével is.

FELADAT

Zsebszámológép segítségével vizsgáljunk meg néhány korábban bemutatott adatsokaságot!

1. Egy kisváros tűzoltóparancsnoka összesítést készített, hogy az előző hónapban naponta hány riasztáshoz vonultak ki.

A napi riasztások száma	0	1	2	4	6	14
Hány napon fordult elő?	1	11	6	8	4	1

Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával, hogy mennyi a napi riasztások

a) átlaga; **b)** szórása!

2. Számítsd ki zsebszámológéppel, statisztika-üzemmódban, mennyi volt Márton Anita dobásainak átlaga és szórása a 2016-os olimpián!

	1. dobás	2. dobás	3. dobás	4. dobás	5. dobás	6. dobás
Márton Anita	17,60 m	18,72 m	19,39 m	19,38 m	19,10 m	19,87 m

3. Egy cinkelt dobókockát egymás után 120-szor feldobtunk, a dobott pontok gyakoriságát táblázattal adtuk meg:

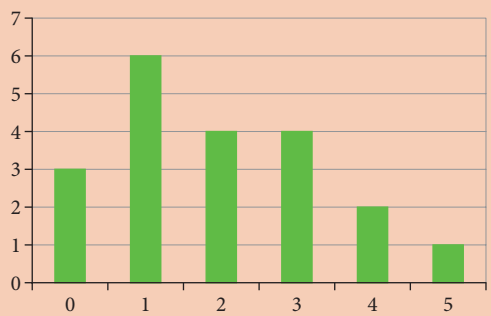
Pontszám	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	21	18	4	45	22	10

Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával, mennyi a dobott pontok

a) átlaga; **b)** szórása!

HÁZI FELADAT

1. Két dobókockával dobtunk 20-szor egymás után, és minden alkalommal feljegyeztük a dobások különbségét (ha a dobások különbözők voltak, akkor a nagyobb dobásból vontuk ki a kisebbet). Oszlopdiagramon ábrázoltuk az eredményeket. Határozd meg a 20 eredmény átlagát és szórását!



2. Számítsd ki zsebszámológéped statisztika-üzemmódjának használatával az adatsokaságok szórását!

a) 33, 45, 46, 48;

b) 33, 33, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 48.

3. Az 55. lecke *Kidolgozott feladatában* találod azt a táblázatot, amely azt tartalmazza, hogy hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt a 2021-ben rendezett labdarúgó-Európa-bajnokságon a pályára lépő magyar játékosok legnagyobb sebessége. Mennyi a sebességek átlaga és szórása?

57 Gyakorlás

BEVEZETŐ

Big Data – azaz rengeteg adat

A 2010-es évekhez kötik a Big Data forradalmát. Ekkor a keletkező, mérhetetlenül sok adat feldolgozása fontos gazdasági tényezővé vált (pl. a Google- vagy a Facebook-típusú internetes óriásvállalatok üzletpolitikája miatt). Ezért olyan informatikai és matematikai módszereket, eljárásokat és eszközöket fejlesztettek ki, amelyek segítségével ebből a mérhetetlenül sok és gyorsan képződő, változatos adatból hatékonyan lehet hasznos következtetéseket levonni. A Big Data alapján működnek például a különböző portálok személyre szabott ajánlórendszerei (YouTube, Netflix), a valós idejű útvonaltervezők és a repülőjegy-árazó eljárások is. De a nagy adatsokaságokban rejlő lehetőségeket használják többek között az egészségügyben, a pénzügyben, a logisztikában, a gyártórendszerek koordinálásában, a mezőgazdaságban és a terrorizmus elleni harcban is.

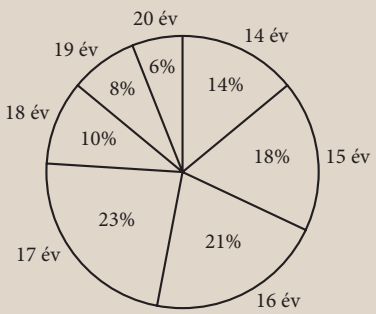
Mára felismerték, hogy a Big Data nem csupán kuriózum, hanem fontos erőforrás, nyersanyag. A gazdasági előny és a tudás lehetőségét hordozza magában. Noha vannak olyan felhasználási területei is, amelyek komoly etikai kérdéseket vetnek fel, a Big Data által nagyszerű lehetőségek nyílnak meg.



FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2020)

Egy több száz fős gimnázium diákjai életkorának eloszlását mutatja az alábbi kördiagram. Állapítsd meg a diákok életkorának terjedelmét, móduszát és mediánját! Szemléltesd dobozdiagrammal is az adatokat!



2. (Érettségi feladat alapján, 2009)

Adott 12 szám: 6; 4; 5; 5; 1; 10; 7; 6; 11; 2; 6; 5. Melyik az a legnagyobb szám a felsorolt 12 szám közül, amelynek elhagyásával a megmaradt 11 szám

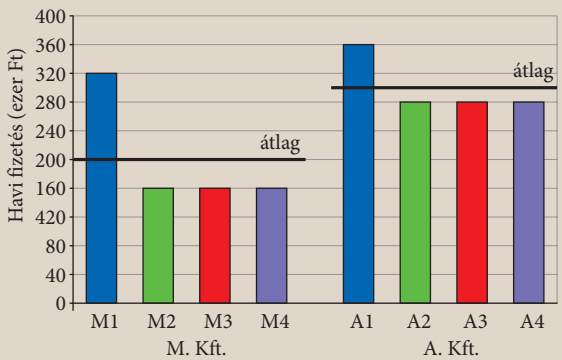
a) mediánja 6;

b) alsó kvartilise 4;

c) felső kvartilise 7?

3. (Érettségi feladat alapján, 2021)

Két fémipari kisvállalkozásnak négy-négy dolgozója van. Az alábbi diagramon az ő havi fizetésüket és ezek (cégen belüli) átlagát ábrázoltuk.



a) Melyik cégnél nagyobb a havi fizetések szórása? Indokolj!

b) Az M. Kft.-hez egy új munkaerőt vettek fel, ugyanakkor nem változott meg a cégen belüli átlagfizetés. Mennyi az új munkaerő havi fize-

tése? Hogyan változott a fizetések szórása az új munkaerő felvétele során: nőtt vagy csökkent? Mennyi lett az új munkaerő felvétele után a fizetések szórása?

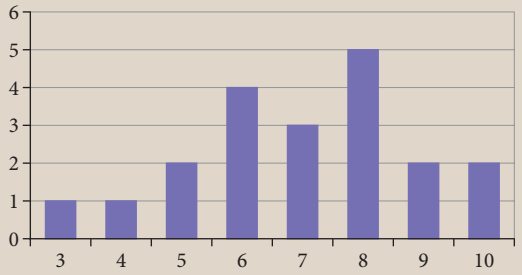
c) Hogyan változik egy adatsokaság szórása, ha az adatokhoz hozzávesszük új adatként az átlagot?

4. 2019-ben Kvangdzsuban az úszó-világbajnokságon egy 10 éve fennálló világcsúcsot döntött meg a 19 éves magyar úszó, Milák Kristóf. Fantasztikus úszással, hihetetlen eredménnyel nyerte a 200 méteres pillangóúszás döntőjét. Táblázatba foglaltuk a részidőket (perc : másodperc.századmásodperc).

	50 m	100 m	150 m	200 m
részidő	24.66	52.88	1 : 21.57	1 : 50.73

Számítsd ki, hogy mennyi idő alatt úszta le Milák Kristóf az 50 m-es szakaszokat, és határozd meg ezen időeredmények szórását!

5. Egy íjászversenyen az egyik versenyzőnek mind a 20 lövése célba talált. Oszlopdiagramon ábrázoltuk a lövések eredményét. (Az olimpiai íjászatban a céltábla koncentrikus körökkel van 10 részre felosztva. A belső körbe érkező lövés 10 pontos, a körötte lévő körgyűrűbe érkező lövés 9 pontos és így tovább. A vonalat érő találat a magasabb pontszámot kapja.)



a) Készíts dobozdiagramot az oszlopdiagramon ábrázolt adatokból!

b) Mennyi volt a versenyző találatainak átlaga?

c) Határozd meg az adatok szórását!



HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2021)
Egy kosárlabdacsapat az előző öt mérkőzésén 77, 60, 83, 73, illetve 90 pontot szerzett. Hány pontot kell szereznie a csapatnak a következő mérkőzésén ahhoz, hogy a hat mérkőzésen szerzett pontjainak átlaga 75 legyen?

2. A következő adatsokaság 9 adatból áll, és tudjuk, hogy az adatsokaság terjedelme 7, mediánja 20, alsó kvartilise 17, felső kvartilise 20,5. Az egyik adat azonban elmosódott.

18, 21, 15, [foltos], 20, 18, 16, 22, 20

a) Mi a hiányzó adat?

b) Készíts dobozdiagramot a kilenc adatból álló adatsokaságról!

c) Számítsd ki az adatsokaság szórását!

3. (Érettségi feladat, 2012)
Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a) Számítsd ki a csapat átlagéletkorát!

b) A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:

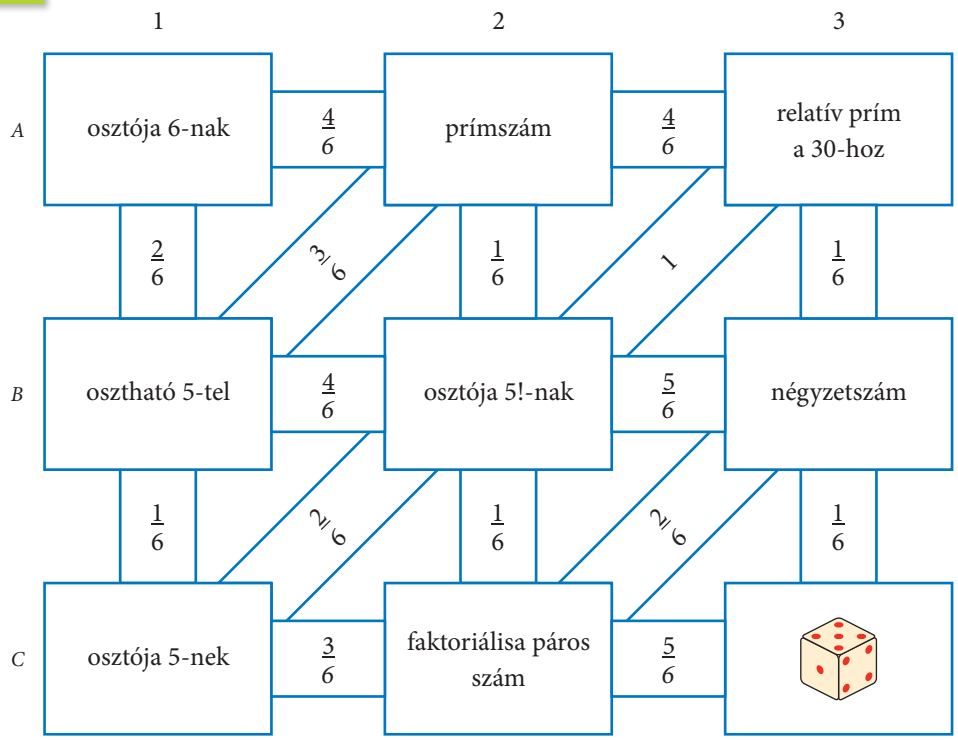
- a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,
- a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,
- a hat játékos életkorának mediánja 23 év,
- a hat játékos életkorának átlaga 24 év.

Add meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát!

58 Valószínűség — ismétlés

BEVEZETŐ

A helyes válaszok mentén juss el a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba!
Szabályos dobókockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott szám:



ELMÉLET

Ha az elemi események egyformán valószínűek, akkor

egy **esemény valószínűsége** = $\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$

A valószínűség szoros kapcsolatban van a relatív gyakorisággal. Ha nagyon sokszor elvégzünk egy véletlen kísérletet, akkor egy esemény relatív gyakorisága az esemény bekövetkezésének valószínűségéhez közeli érték.

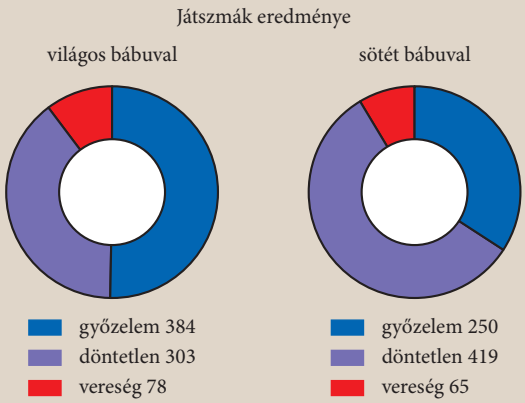
Az A esemény valószínűségének jele: $P(A)$.

Megjegyzések

- A valószínűség értéke legalább 0 és legfeljebb 1. ($0 \leq P(A) \leq 1$)
- Előfordul olyan helyzet, amikor azokat az elemi eseményeket könnyebb összeszámolnunk, amikor az esemény nem következik be. Ezeket nevezzük **komplementer eseményeknek**.
  P(az A esemény bekövetkezik) = 1 – P(nem következik be az A esemény).
- Ha *ugyanolyan* tárgyak, elemek szerepelnek egy valószínűségszámítási feladatban (például 3 db egyforma sárga golyó, 2 db egyforma dobókocka, 3 db ugyanolyan pénzérme), akkor érdemes gondolatban egy jelöléssel megkülönböztetni az egyformákat. (Fizikai valójukban ezek a tárgyak valóban különbözők.)
- Ha két dobókockával dobunk, akkor különböztessük meg a kockákat, és az elemi eseményeket felsorolhatjuk egy 6×6-os táblázatban.

FELADAT

1. Magnus Carlsen norvég sakkvilágbajnok mérkőzéseiről készült a következő kördiagram. A két kördiagram külön mutatja, hogy világos bábukkal játszott mérkőzések, illetve sötét bábukkal játszott mérkőzések esetén Carlsen mennyi meccset nyert, mennyit vesztett, és hányszor lett döntetlen az eredmény. A sakkjátszmában mindig az lép először, aki világosssal van, és a diagram jól szemlélteti, hogy ez némi előnyt jelent a játékosnak.



Véletlenszerűen kiválasztunk a két kördiagramon ábrázolt mérkőzések közül egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) Carlsen világossal játszotta;

b) Carlsen nyert;

c) Carlsen ellenfele sötéttel nyert?

2. Két dobókockával dobunk, és a dobások eredményét összeszorozzuk.

a) Töltsd ki a táblázatot a lehetséges elemi eseményekkel!

					10	

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata

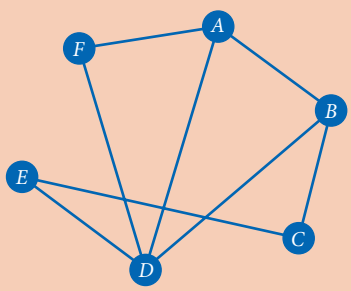
– nagyobb, mint 10; – négyzetszám;

– páros szám; – prímszám?

c) Dobjatok két kockával 100-szor! Mennyi a b)-beli események relatív gyakorisága?

HÁZI FELADAT

1. Gráffal ábrázoltuk, hogy 6 város közül melyek között létezik közvetlen repülőjárat.



Ha ezen közvetlen repülőjáratok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) a C várost köti össze a B várossal;

b) az A várost köti össze egy másik várossal;

c) egyik végállomása sem a D város?

2. Ábrázold Venn-diagramon a következő halmazokat: $A = \{60 \text{ pozitív osztói}\}$ és $B = \{56 \text{ pozitív osztói}\}$.

a) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk 60 egyik osztóját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy 56-nak is osztója?

b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk 56 egyik osztóját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy 60-nak is osztója?

c) Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy pozitív egész számot 56 vagy 60 osztói közül, akkor mennyi a valószínűsége, hogy 56-nak és 60-nak is osztója?

3. Két fiú és két lány véletlenszerűen leül a nézőtéren négy egymás melletti helyre. Mennyi a valószínűsége, hogy a két lány nem ül egymás mellé?

FELADAT

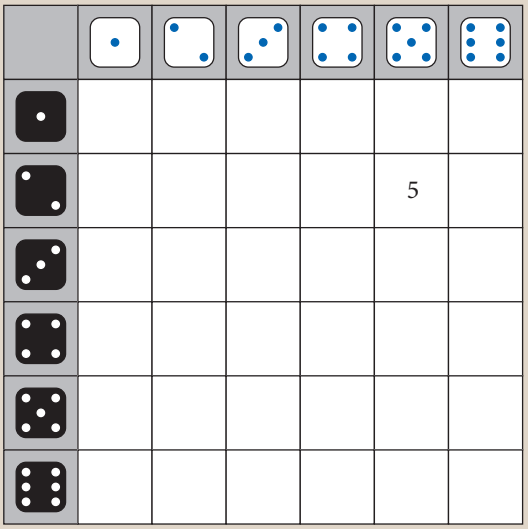
1. A 2020-as tokiói olimpián 13 magyar vívó vett részt. Remekül szerepeltek: Szilágyi Áron egyéniben aranyérmes, Siklósi Gergely ezüstérmes, a férfi kardcsapat (Decsi Tamás, Gémesi Csanád, Szatmári András és Szilágyi Áron) bronzérmes lett. Márton Anna egyéniben negyedik helyezést ért el.
Táblázatba foglaltuk a versenyzők életkorát. Ha véletlenszerűen kiválasztunk közülük egy versenyzőt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) női versenyző;
b) érmet nyert a tokiói olimpián;
c) kevesebb mint 25 éves;
d) több mint 30 éves?

női tőr		női kard	
Kreiss Fanni	32	Márton Anna	26
Kondricz Kata	23	Pusztai Liza	20
Pásztor Flóra	23	Katona Renáta	26
Mohamed Aida	45	Battai Sugár Katinka	18
férfi kard		férfi párbajtőr	
Decsi Tamás	38	Siklósi Gergely	23
Gémesi Csanád	34		
Szatmári András	28		
Szilágyi Áron	31		

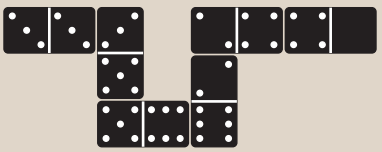
2. Egy területfoglalós társasjátékban a játékos egyszerre két dobókockával dob, és a kockadobás eredménye határozza meg, hogy mennyi a védekező ereje. Ha a két dobás értéke különböző, akkor a nagyobbik dobás értéke számít, ha pedig a két dobás azonos, akkor ez a közös érték lesz a védekező erő. (A védekező erő így az 1, 2, 3, 4, 5, 6 érték valamelyike.)
Írd be a táblázatba, hogy az egyes elemi események esetén mennyi a játékos védekező ereje!
Mennyi a valószínűsége, hogy két dobókockával dobva a játékos védekező ereje

a) 5;
b) legalább 5;
c) 3;
d) kisebb, mint 3?



3. (Érettségi feladat, 2005)
Rakodás során kiborult egy láda jonatán- és egy láda idaredalma, és tartalmuk összekeveredett. A jonatánalma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból 25%-kal több darab fért bele a ládába, mint idaredből. A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz?

4. A hatpontos dominó olyan kövekből áll, melyeknek mindkét oldalán 0 és 6 közötti számú pötty szerepel. Minden párosítás pontosan egyszer szerepel a készletben. A teljes készlet 28 db dominóból áll. A játék során két dominó egymáshoz illeszthető, ha az érintkező részeken ugyanannyi pötty van.



Elsőként kivesszük a készletből az 1 – 5 pöttyös dominót: .
Ha véletlenszerűen választunk a többi dominó közül egyet, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a játékszabály szerint az  dominóhoz illeszthető valamelyik oldalról?

5. Ha véletlenszerűen áll sorba 6 gyerek, köztük Sári és Dóri, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) Sári áll legelöl?

b) nem Dóri áll leghátul?

c) Sári az első és Dóri a második?

d) Sári és Dóri egymás mögött áll valamilyen sorrendben?

6. Az egyjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, jelöljük ezt n-nel. Mennyi a valószínűsége, hogy következő kifejezés értéke természetes szám?

a) 2^n

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

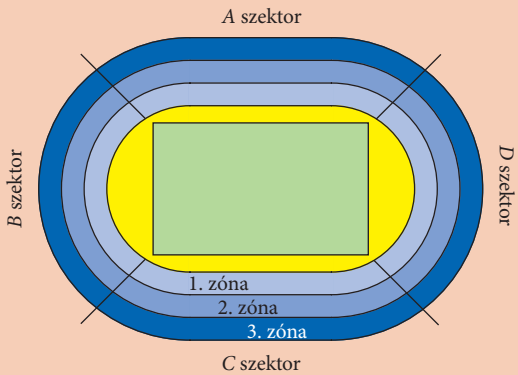
c) $\log_2 n$

d) $\log_{0,5} n$

HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2020)

Egy sportcsarnok nézőtere négy szektorra oszlik: *A*, *B*, *C* és *D*. Mind a négy szektort további három zónára osztották: az 1. zónához a pályához legközelebb eső üléssorok tartoznak, a 2. zónához a nézőtér középső sorai, míg a 3. zónához a legfelső üléssorok.



Az alábbi – hiányosan kitöltött – táblázat az egyes szektorok különböző zónáiba eladott jegyek számát mutatja az egyik mérkőzésen.

	A szektor	*B* szektor	*C* szektor	*D* szektor
1. zóna	69	96	85	
2. zóna	116	99		
3. zóna	102	113		

a) Tudjuk, hogy az 1. zónában szektoronként átlagosan 82 jegyet vásároltak. Hány jegyet váltottak a *D* szektor 1. zónájába?

b) A mérkőzésre összesen 1102 jegyet adtak el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott néző jegye a *C* vagy a *D* szektor valamelyikébe szól?

2. (Érettségi feladat, 2019)

Egy véletlen kísérlet során két szabályos dobókockával dobunk egyszerre. Ezt a kísérletet többször egymás után elvégezzük. Egy-egy dobás után mindig feljegyezzük a két dobott szám összegét, és ezt az összeget tekintjük a kísérlet kimenetelének.

Az első kilenc kísérlet után ezeket az összegeket jegyeztük fel: 9, 3, 5, 4, 11, 6, 9, 10.

Legyen az *A* esemény az, hogy a kísérlet kimenetele 4-nél nagyobb, de 9-nél kisebb.

a) Add meg az *A* esemény relatív gyakoriságát!

b) Számítsd ki az *A* esemény valószínűségét!

3. (Érettségi feladat, 2018)

Molnár úr kulcscsomóján négy ugyanolyan kinézetű kulcs van, amelyek közül az egyik az új telkének kapuját nyitja. Molnár úr általában nem találja el elsőre, hogy melyik kulcs való ebbe a zárba.

Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kapuhoz érve Molnár úr először nem a megfelelő kulccsal próbálja kinyitni a kaput, de a második próbálkozása már sikeres lesz! (Molnár úr két különböző kulcsot próbál a zárba.)



59 Várható érték

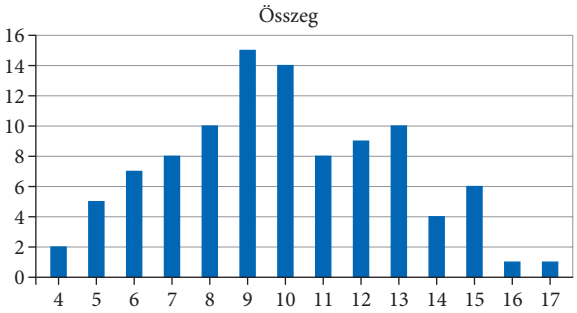
BEVEZETŐ



Egy társasjátékban Zsóka három kockával dobhat, és a dobások összege számít. Négypontonként kaphat egy téglát. (Akkor kap például 2 téglát, ha a dobások összege 8, 9, 10 vagy 11.) Vajon hány téglára számíthat?

Zsóka egy számítógépes programot írt, amely 100 véletlen kockadobást végzett el három kockával. Az egyik számítógépes kísérlet eredményét ábrázolja az oszlopdiagram.

Ebben a kísérletben a 100 dobás módusza a 9 lett. A dobások átlaga 10,55 volt.



Ahogy egyre több dobást végzünk el, az átlag egy jól meghatározott érték körül ingadozik. Ezt az értéket nevezzük várható értéknek. A várható érték kiszámítása az egyes kimenetelek valószínűségén alapszik. Három kockával dobva a dobások összegének várható értéke 10,5 lesz, amit a fenti átlag jól közelít. Érdekesség, hogy sohasem fogunk 10,5-et dobni, hiszen a dobások összege biztosan egész szám. A várható érték a dobások átlagát jellemzi.

ELMÉLET

1. Összetartozó fogalmak a statisztikában és a valószínűségszámításban

Nagyszámú véletlen kísérlet esetén a statisztika és a valószínűségszámítás fogalmai szoros kapcsolatban állnak egymással.

Összetartozó fogalmak:

statisztika		valószínűségszámítás
relatív gyakoriság	⟷	**valószínűség**
átlag, súlyozott átlag	⟷	**várható érték**

2. Várható érték

A várható érték csak olyan esetben értelmezhető, amikor a kísérlet kimenetelét egy valós számmal adjuk meg (pl. pontok összege, osztályzatok, pontok vagy golyók száma, hibás elemek száma). Arról ad információt, hogy nagyszámú kísérlet esetén átlagosan milyen eredményt fogunk elérni. Nem azonos a legvalószínűbb eredménnyel.

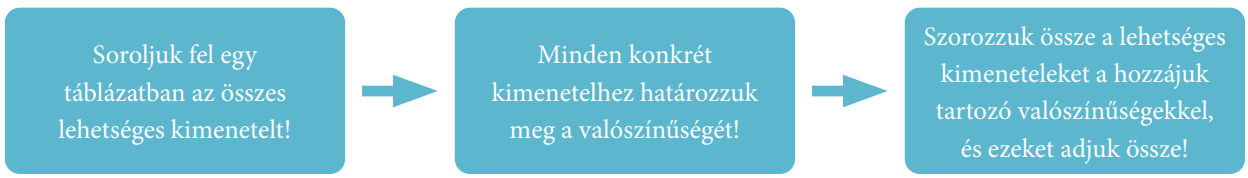
Ha nagyszámú kísérletet végzünk, akkor a kísérletek kimenetelének átlaga egy jól meghatározható érték közelében lesz. Ez az érték a lehetséges kimenetelek valószínűségéből számolható, és várható értéknek nevezzük.

Várható érték = a lehetséges kimeneteleknek a valószínűségekkel súlyozott átlaga.

A várható érték jele: E (de elterjedt az M jelölés is).

Például:
Ha 100 sorsjegy van, köztük 95 nem nyer, 5 pedig 1000 Ft nyereményt jelent, akkor egyetlen sorsjegy esetén 95% az esély, hogy nem nyerünk. Ha azonban sokszor játszunk, akkor időnként lesz egy-egy 1000 Ft-os nyereményünk, ezért a nyeremények átlaga nem lesz 0. Mivel 0,95 valószínűséggel 0 a nyeremény és 0,05 valószínűséggel 1000 Ft, a nyeremény várható értéke $0{,}95 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 1000 = 50$ Ft. Ha a sorsjegyek ára ennél jóval nagyobb, például 100 Ft, akkor „nem éri meg" vele játszani (pénzügyi szempontból). A szerencsejátékok szervezői természetesen mindig nyereségre törekszenek, ezért a sorsjegy árát úgy szabják meg, hogy összességében a szervező járjon jól. Ez persze nem zárja ki azt, hogy valaki egyetlen játékkal is sokat nyerjen. Éppen ez adja a szerencsejátékok izgalmát, és sajnos éppen ezért okoznak ezek a játékok függőséget is.

3. A várható érték számolása



Megjegyzés
Amikor elkészítjük a táblázatot a lehetséges kimenetelekkel és azok valószínűségével, akkor érdemes ellenőrizni, hogy a valószínűségek összege 1-et ad-e.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy kereskedő sorsjegyjátékot indít. Minden vásárló, aki legalább 10 000 Ft értékben vásárol, kap ajándékba egy sorsjegyet, a készlet erejéig. Négyféle sorsjegyet nyomtatnak. Táblázatba foglaltuk, hogy melyik fajtából hány db készült, és melyiknek mi a szövege.

Sorsjegy szövege	Most nem nyertél, de próbáld meg újra!	Nyertél 500 Ft-ot! Gratulálunk!	Nyertél 2000 Ft-ot! Csak így tovább!	Megütötted a főnyereményt! Nyertél 10 000 Ft-ot!
Hány db van belőle?	9800	180	19	1

Mennyi egy sorsjegy nyereményének a várható értéke?

Megoldás
Összesen $9800 + 180 + 19 + 1 = 10\,000$ sorsjegy készült.

Foglaljuk táblázatba a lehetséges nyereményeket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket!

Nyeremény	0	500	2 000	10 000
Valószínűség	$\frac{9800}{10\,000} = 0{,}98$	$\frac{180}{10\,000} = 0{,}018$	$\frac{19}{10\,000} = 0{,}0019$	$\frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

A valószínűségek összege $0{,}98 + 0{,}018 + 0{,}0019 + 0{,}0001 = 1$, vagyis teljes a felsorolás.
A várható értéket megkapjuk, ha a nyeremények értékét összeszorozzuk a hozzájuk tartozó valószínűségekkel, és ezeket összeadjuk – ez nem más, mint a nyeremények valószínűségekkel súlyozott összege.

$E = 0 \cdot 0{,}98 + 500 \cdot 0{,}018 + 2000 \cdot 0{,}0019 + 10\,000 \cdot 0{,}0001 = 13{,}8$.

A nyeremény várható értéke 13,8 Ft. Átlagosan ennyit fizet ki a bolt a vásárlóknak sorsjegyenként.

FELADAT

1. Angéla és Panni a következő játékot játsszák:
Angéla dob egy szabályos dobókockával. Ha ötöst dob, akkor fizet Panninak 50 forintot. Ha a dobás eredménye nem ötös, akkor kap Pannitól 15 forintot.

a) Figyeld meg az első táblázatot, majd ez alapján töltsd ki a második táblázatot!

Angéla szempontjából

dobás eredménye	ötös	nem ötös
ekkor a „nyeremény”	−50	15
ennek valószínűsége	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Panni szempontjából

dobás eredménye	ötös	nem ötös
ekkor a „nyeremény”		
ennek valószínűsége		

b) Határozd meg Angéla, illetve Panni esetében a „nyeremény” várható értékét!

c) Ez a játék nem igazságos. Mikor neveznél egy játékot igazságosnak? Hogyan lehetne módosítani a „nyereményeket”, hogy a játék igazságos legyen?

2. Szabályos dobókockával dobunk. Töltsd ki a táblázatot, majd az alapján számold ki, mennyi egy dobás várható értéke! Értelmezd a feladat végeredményét! Mit jelent a kapott érték?

Dobás eredménye	1	2	3	4	5	6
Valószínűség						

3. Egy iskolai farsangon az iskola mind az 500 tanulója kapott egy-egy tombolaszelvényt. A sorsoláskor 10 tombola számát húzzák ki egy kalapból. A kihúzott szelvény tulajdonosa 1000 Ft-os ajándékutalványt nyer, amit a farsangi büfében költhet el.

a) Mennyi a lehetséges kimenetelek valószínűsége? Töltsd ki a táblázatot!

Lehetőség	1000 Ft nyeremény	0 Ft nyeremény
Valószínűsége		

b) Mennyi a nyeremény várható értéke?

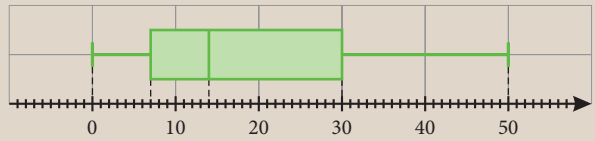
4. Feldobunk 3 db különböző pénzérmét: egy 20 Ft-ost, egy 50 Ft-ost és egy 100 Ft-ost.
A lehetséges 8 elemi esemény a következő:

	Fej	Fej	Fej	Fej	Írás	Írás	Írás	Írás
	Fej	Fej	Írás	Írás	Fej	Fej	Írás	Írás
	Fej	Írás	Fej	Írás	Fej	Írás	Fej	Írás

Töltsd ki a táblázatot, majd az alapján számold ki, hogy 3 érmét feldobva mennyi a fejek számának várható értéke!

Fejek száma	0	1	2	3
Valószínűség				

5. Dobozdiagramon ábrázoltuk, hogy egy adott hónapban hány perccel hamarabb értek ki az emberek egy kisváros vasúti pályaudvarára, mint a menetrendben kiírt indulási idő.



A következő állítások egy véletlenszerűen kiválasztott adatra vonatkoznak a diagramon ábrázolt adatok közül (egy véletlenszerűen kiválasztott személy egyik alkalommal mennyivel ment ki hamarabb, mint az indulási idő). A diagram alapján döntsd el, hogy az állítások igazak, hamisak vagy nem tudjuk megállapítani a logikai értéküket.

	Igaz	Hamis	A diagram alapján nem lehet eldönteni
Legalább 0,25 annak a valószínűsége, hogy az időtartam kisebb, mint 7 perc.			
Legalább 0,25 annak a valószínűsége, hogy az időtartam kisebb, mint 8 perc.			
Legalább 0,5 annak a valószínűsége, hogy az időtartam nagyobb, mint 7 perc és kisebb, mint 30 perc.			
Legalább 0,5 annak a valószínűsége, hogy az időtartam nagyobb, mint 6 perc és kisebb, mint 31 perc.			
Az időtartam várható értéke 40 perc.			
Az időtartam várható értéke egyenlő a mediánnal.			
Az időtartam várható értéke kisebb, mint a medián.			

HÁZI FELADAT

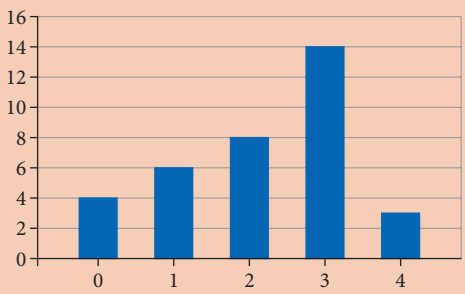
1. Egy részvény árfolyama 4600 Ft. (Ez azt jelenti, hogy ezen az áron lehet eladni, illetve megvenni ezt a részvényt egy adott napon.) Az elemzők szerint a részvény ára egy év múlva 0,6 valószínűséggel 18%-kal emelkedik, és 0,4 valószínűséggel 5%-kal csökken. Határozd meg a részvény jövő évi árfolyamának várható értékét!

2. Egy nyereményjáték tomboláit mutatja a következő táblázat. Töltsd ki a táblázat alsó sorát, majd határozd meg egy véletlenszerűen kiválasztott szelvény nyereményének várható értékét!

Szelvényen olvasható szöveg	Mekkora pech! Ez most nem nyert.	Ez az apró örömök napja. Nyertél 300 Ft-ot!	Ez király! Nyertél 600 Ft-ot!	Ugye el sem hiszed? Nyertél 1500 Ft-ot!	Érezd magad a felhők között! Nyertél 5000 Ft-ot!
Ennyi db készült belőle	1250	200	40	8	2
Valószínűség					

3. Diagramon ábrázoltuk, hogy a kompetenciamérés egyik feladatában egy osztály tanulói hány pontot kaptak az elérhető 4 pontból.
Töltsd ki a táblázatot, majd az alapján határozd meg, hogy ha véletlenszerűen választunk egy dolgozatot, akkor mennyi a várható értéke az ebben a feladatban elért pontszámnak!

Pontszám	0	1	2	3	4
Valószínűség					



60 Két vagy több elemet húzunk egyszerre

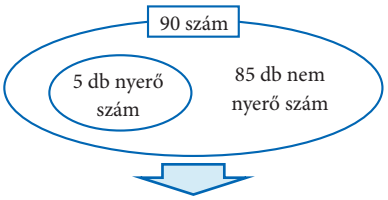
KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ötös lottóban 90 számból kell ötöt megjelölni. Mennyi a valószínűsége a nulla találatos szelvénynek?

Megoldás

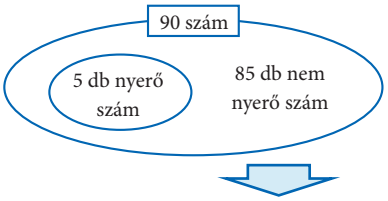
A lottósorsoláskor minden héten kihúznak 5 számot: az lesz az 5 nyertes szám.

Az összes eset számát az adja, hogy hányféleképpen választhatunk ki 90 elem közül 5-öt, ha nem számít a kiválasztás sorrendje. Ez $\binom{90}{5}$.



összes eset: innen (90-ből) választunk 5-öt

A kedvező esetek számát az adja, hogy hányféleképpen választhatunk ki a 85 nem nyerő elem közül 5-öt, ha nem számít az elemek sorrendje. Ez $\binom{85}{5}$ db lehetőség.



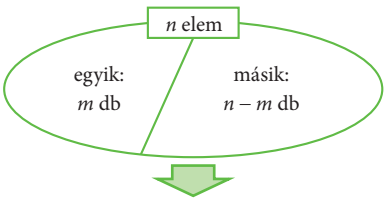
kedvező eset: innen (85-ből) választunk 5-öt

A valószínűség: $\dfrac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} = \dfrac{32\,801\,517}{43\,949\,268} \approx 0{,}746$.

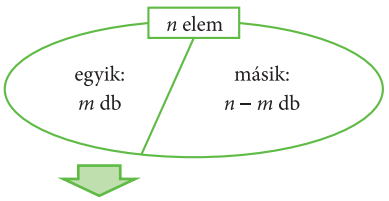
ELMÉLET

1. A valószínűség több elem kiválasztása esetén

- Egy n elemű halmazban kétféle csoportba különülnek el az elemek (pl. nyerő / nem nyerő; egyik osztály / másik osztály; egyik szín / másik szín; hibás / hibátlan).
- Véletlenszerűen kiválasztunk az n közül k db-ot.
- Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott k db elem közül mindegyik az első csoportból kerül ki?



összes eset: n db elemből választunk ki k darabot



kedvező eset: m db elemből választunk ki k darabot

A keresett valószínűség: $p = \dfrac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$,

ahol n = összes elem száma, m = az adott tulajdonságú elemek száma, k = kiválasztott elemek száma.

2. Binomiális együttható: *n* alatt a *k*

Ha n elem közül kiválasztunk k-t, és nem számít a kiválasztás sorrendje, akkor a lehetőségek száma $\binom{n}{k}$. Ennek értékét sok zsebszámológép közvetlenül meghatározza, az nCR paranccsal.

Például:

$\binom{10}{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$, zsebszámológéppel 10 nCR 3 beírásával kapjuk: 120.

FELADAT

1. Kösd össze az egyenlőket! Az egyiket nincs mivel összekötni, annak határozd meg az értékét!

$\binom{10}{3}$	$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}$	$\binom{10}{8}$	$\binom{10}{5}$	$\frac{10\cdot 9}{2}$	$\binom{10}{7}$
$\binom{10}{2}$	$\binom{10}{6}$	$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$	120	$\binom{10}{4}$	210

2. Az egyik iskolában 28 diák jár magyarfakultációra, közülük 15-en vannak a 11. évfolyamból és 13-an a 12. évfolyamból. Ha véletlenszerűen kiválasztunk az iskolában két magyarfaktost, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindketten 11-edikesek;

b) mindketten 12-edikesek?

3. Egy könyvespolcon 14 könyv sorakozik, közülük 10 prózai mű és 4 verseskönyv. Kettő könyv szerzője Dosztojevszkij, ezek mind prózai művek. Ha véletlenszerűen kiválasztunk két könyvet, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindkettő prózai mű;

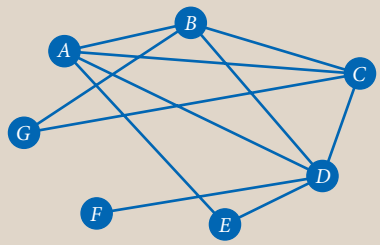
b) egyik sem prózai mű;

c) mindkettőt Dosztojevszkij írta;

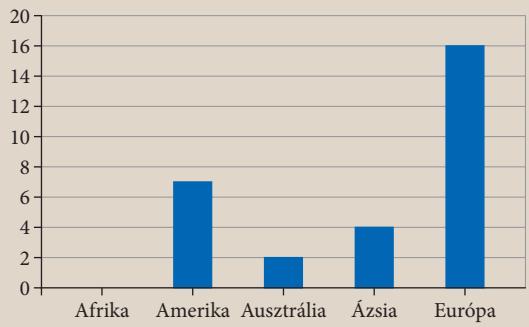
d) mindkettő prózai mű, de egyiket sem Dosztojevszkij írta?

4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötös lottón kihúzott mindegyik szám nagyobb, mint 10?
(Az ötös lottón az 1, 2, 3, …, 90 számok közül húznak ki véletlenszerűen ötöt.)

5. A következő gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztok 2 élt. Mennyi a valószínűsége, hogy az élek a D csúcsban illeszkednek egymáshoz?



6. Oszlopdiagramon ábrázoltuk, hogy a 2021-ben megrendezett tokiói olimpiával bezárólag melyik kontinensen hány nyári olimpiai játékot rendeztek.



A diagram alapján határozd meg, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk 3 nyári olimpiai játékot, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) mind Amerikában volt;

b) mind Ázsiában volt;

c) mindegyik Európán kívül volt!

HÁZI FELADAT

1. Az 1; 2; 3; …; 20 számok közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét szám osztója 20-nak?

2. Egy pakli magyar kártya 32 lapból áll. Négyféle „színe” lehet egy kártyának, a kártyák között 8 db piros, 8 db zöld, 8 db makk és 8 db tök. Ha véletlenszerűen osztanak 3 kártyát, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindegyik makk; **b)** egyik sem makk?

3. Egy osztálykirándulás során a 32 fős osztály vasúti jegyei közül 18 db a 412-es kocsiba szól, a többi a 413-as kocsiba. Négy barátnő: Anna, Barbi, Kati és Detti szeretne együtt utazni. Ha az osztályfőnök véletlenszerűen osztaná ki a vonatjegyeket, akkor mennyi lenne a valószínűsége, hogy

a) mind a 412-es kocsiba kapnak jegyet;

b) mind a 413-as kocsiba kapnak jegyet;

c) mindnyájan ugyanabba a kocsiba kapnak jegyet?

61 Visszatevés nélküli mintavétel

KIDOLGOZOTT FELADAT

Van 4 piros és 6 sárga golyónk, melyeket nem tudunk egymástól tapintással megkülönböztetni. Kihúzunk közülük csukott szemmel, véletlenszerűen 5 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók közül

a) mindegyik sárga; **b)** pontosan 3 darab sárga?

Megoldás

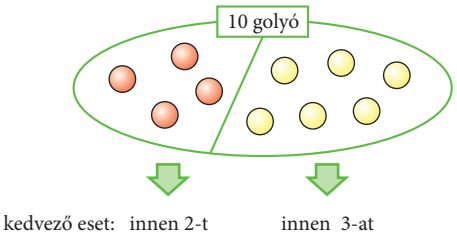
10 golyóból húzunk 5 golyót, és nem számít a kiválasztás sorrendje, ezért az összes lehetőség száma $\binom{10}{5} = 252$.

a) Kedvező esetek, amikor a 6 sárga golyó közül húzunk 5-öt. A lehetőségek száma $\binom{6}{5} = 6$. A valószínűség $\frac{6}{252} \approx 0{,}024$.

b) Pontosan 3 sárga akkor van, ha 3 darab sárga és 2 darab nem sárga (azaz piros) golyót húztunk. Ehhez a 6 sárga közül kellett 3-at húzni – ez $\binom{6}{3} = 20$ lehetőség, és emellé az 5 piros közül kellett 2-t húzni – ez $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség. Mivel a 3 sárga mindegyik esete bármelyik 2 piros húzásával párosítható, a lehetőségek számát össze kell szorozni. A kedvező esetek száma $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 20 \cdot 6 = 120$. A valószínűség $\frac{120}{252} \approx 0{,}476$.

Megjegyzés

A kedvező esethez 3 db sárga és 2 db piros golyó kell. Amikor *és* kötőszót használunk, akkor egyszerre kell teljesülnie a két eseménynek, és ilyenkor rendszerint össze kell szoroznunk a lehetőségek számát.



ELMÉLET

Visszatevés nélküli mintavétel

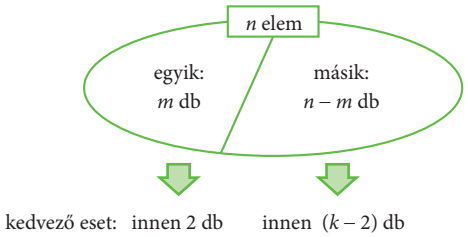
Mintavételről beszélünk, ha kiválasztunk néhány elemet egy halmaz elemei közül. Általában azt vizsgáljuk, hogy a kiválasztott elemek között hány darab rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal (pl. nyerő szám, adott korcsoportba esik, hibás termék).

Visszatevés nélküli mintavétel esetén ha egy elemet már kiválasztottunk, akkor azt nem tesszük vissza, az nem választható ki újra. Ez történhet úgy is, hogy egyszerre veszünk ki több elemet, és történhet úgy, hogy egymás után vesszük ki az elemeket, közben a már kihúzott, kiválasztott elemeket nem tesszük vissza.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott k db elem között az egyik megadott csoportból pontosan 2 db lesz? Ez akkor áll elő, ha ebből a csoportból 2 db és a másik csoportból $k-2$ db lesz.

Kedvező esetek száma: $\binom{m}{2} \cdot \binom{n-m}{k-2}$.

A valószínűséget úgy kapjuk, hogy a kedvező esetek számát elosztjuk az összes eset számával, $\binom{n}{k}$-val.



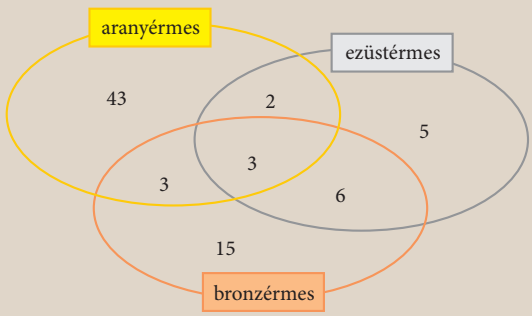
FELADAT

1. Az olimpiák történetében Magyarország 1952-ben, Helsinkiben volt eddig a legeredményesebb. Ekkor 16 versenyszámban aranyérmet, 10-ben ezüstérmet és 16-ban bronzérmet nyertek magyar sportolók, és az országok közötti rangsorban a 3. helyen végeztek. A 189 magyar induló közül 77-en (!) éremmel tértek haza.

aranyérem	16
ezüstérem	10
bronzérem	16

a) Hogyan lehetséges, hogy 77 sportoló nyert érmet, ha az éremtáblázatban 16 aranyérem, 10 ezüstérem és 16 bronzérem szerepel?

b) Venn-diagramon ábrázoltuk, hogy hány sportoló volt a 189 magyar induló közül, aki nyert arany-, ezüst-, illetve bronzérmet.



Ha véletlenszerűen kiválasztunk öt magyar indulót az 1952-es olimpiáról, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

- mindegyikük aranyérmes;
- közöttük pontosan ketten vannak, akik nyertek valamilyen érmet;
- közülük pontosan ketten aranyérmesek?

2. Egy kisváros vonószenekarában 14 hegedűs, 4 brácsás, 4 csellós és 2 nagybőgős van. Ha véletlenszerűen kiválasztunk két zenészt, mi a valószínűsége, hogy

a) mindkettő hegedűs;

b) egyik hegedűs, másik nem;

c) egyik brácsás, másik hegedűs?

3. Sokan a XX. század mérkőzéseként tartják számon az 1953-ban Londonban játszott Anglia–Magyarország futballmérkőzést. Az angolok 90 éven át nem kaptak ki hazai pályán kontinentális csapattól, a londoni Wembley stadionban pedig korábban még soha nem szenvedtek vereséget. Ez a veretlenség szakadt meg azzal, hogy a magyarok 6 : 3-ra legyőzték Angliát.

A mérkőzés során 12 magyar játékos lépett pályára, közülük Hidegkúti Nándor 3 gólt, Puskás Ferenc 2 gólt és Bozsik József 1 gólt lőtt. A 12 játékos közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott 3 játékos közül pontosan 0, 1, 2, illetve 3 van, aki lőtt gólt? Töltsd ki a táblázatot!

a 3 játékos között a gólt rúgók száma	0	1	2	3
valószínűsége				

b) Mennyi a kiválasztott 3 játékos között azok számának a várható értéke, akik rúgtak gólt ezen a mérkőzésen?

HÁZI FELADAT

1. Egy 36 fős osztályban öten vannak, akik gitároznak, a többiek nem tudnak gitározni. Ha véletlenszerűen kiválasztunk 4 gyereket az osztályból, akkor mi a valószínűsége, hogy

a) egyikük gitározik, a többiek nem gitároznak;

b) közülük pontosan 2 gyerek gitározik?

2. Egy osztály 35 tanulója közül 10-nek télen van a születésnapja. Ha véletlenszerűen kiválasztunk 4 tanulót az osztályból, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindegyikük télen született;

b) közülük pontosan hárman születtek télen?

3. 50 db pohár közül 3-nak csorba a széle. Ha véletlenszerűen választunk ki 4 poharat az 50 közül, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindegyik csorba;

b) mindegyik ép;

c) kettő csorba és kettő ép?

62 Ugyanazt többször

KIDOLGOZOTT FELADAT

Özséb a tapasztalatok alapján 10-ből 7 tizenegyesnél eredményes, amit tekinthetünk úgy, hogy egy-egy büntetőt 0,7 valószínűséggel rúg be. Mennyi a valószínűsége, hogy amikor két tizenegyest rúg, akkor

a) mindkettő bemegy;
b) az első bemegy és a második nem;
c) egyik bemegy és a másik nem;
d) egyik sem megy be?

Megoldás

A feladat úgy jellemzi (modellezi) Özséb tizenegyesrúgásait, hogy minden rúgása esetén az előző rúgásoktól függetlenül 0,7 annak a valószínűsége, hogy bemegy, és 0,3 annak a valószínűsége, hogy nem megy be.

a)

	első rúgás bemegy	és	második rúgás bemegy	→	mindkettő bemegy
Valószínűsége:	0,7	·	0,7		$0,7 \cdot 0,7 = 0,49$

b)

	első rúgás bemegy	és	második rúgás nem megy be	→	első bemegy és a második nem
Valószínűsége:	0,7	·	0,3		$0,7 \cdot 0,3 = 0,21$

c) Egyik bemegy és a másik nem – ez kétféleképpen fordulhat elő. Lehetséges, hogy az első bemegy és a második nem (ennek valószínűsége $0,7 \cdot 0,3 = 0,21$), és lehetséges, hogy az első nem megy be és a második bemegy (ennek valószínűsége $0,3 \cdot 0,7 = 0,21$). Vagy az egyik, vagy a másik eset fordul elő, ezek valószínűségét össze kell adni. A válasz: 0,42.

d)

	első rúgás nem megy be	és	második rúgás nem megy be	→	egyik sem megy be
Valószínűsége:	0,3	·	0,3		$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

Az a), c) és d) alpontokhoz tartozó események az összes lehetőséget tartalmazzák, minden lehetőséget pontosan egyszer, ezért a valószínűségek összege $0,49 + 0,42 + 0,09 = 1$.

ELMÉLET

1. Ugyanazt többször

Ha ugyanazt a kísérletet, ugyanazt a helyzetet ismételjük meg többször egymás után, akkor feltehető, hogy a korábbi kísérletek eredménye nincs hatással a soron következő kísérletre. A kísérletek **függetlenek** egymástól. Ilyen például:

- kockával dobunk többször egymás után;
- egy gép állandó hibaszázalékkal dolgozik;
- valaki mindig ugyanolyan valószínűséggel végez el egy tevékenységet.

Ekkor minden alkalommal ugyanaz marad egy konkrét kimenetel, konkrét esemény (pl. a kedvező kimenetel) valószínűsége.

az esemény valószínűsége mindegyik kísérletben: p	→	annak valószínűsége, hogy az esemény nem következik be, mindegyik kísérletben: $1 - p$.

2. Mennyi a valószínűsége, hogy minden alkalommal bekövetkezik az esemény, ha n-szer megismételjük a kísérletet?

	először bekövetkezik	és	másodszorra bekövetkezik	és	…	n-edszerre bekövetkezik	→	minden esetben bekövetkezik
Valószínűsége:	p	·	p	·	…	p		p^n

3. Mennyi a valószínűsége, hogy az első alkalommal bekövetkezik az esemény, a többi esetben nem?

	először bekövetkezik	és	másodszorra nem következik be	és	…	n-edszerre nem következik be	→	csak az első esetben következik be
Valószínűsége:	p	·	$(1-p)$	·	…	$(1-p)$		$p \cdot (1-p)^{n-1}$

4. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egyszer következik be az esemény, többször nem?
Több lehetőség van:

először bekövetkezik, máskor nem	vagy	másodszorra bekövetkezik, máskor nem	vagy	…	vagy	n-edszerre bekövetkezik, máskor nem

Mindegyik esetnek ugyanannyi a valószínűsége, ezért az előző (3.) pontban felírt értéket meg kell szorozni n-nel.
Megjegyzés

– Újdonság, hogy most nem a $\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$ képlettel számítjuk a valószínűséget. Azt használtuk ki, hogy az egyes lépések során külön-külön ismertük az események valószínűségét.
– Fontos feltétel volt, hogy ezek a valószínűségek egymástól függetlenek, vagyis az egyes lépések kimenetele nincs hatással a következőre. (Ez nem teljesül például, ha visszatevés nélkül húzunk néhány elem közül: ekkor egyre kevesebb elemből húzunk, minden lépésben megváltozik a valószínűség. Sok feladatban pedig ez egy egyszerűsített matematikai modell, például a tizenegyesrúgások esetén.)

FELADAT

1. Kató minden alkalommal, amikor kosárra dob, 0,6 valószínűséggel talál a kosárba. Kató ötöt dob egymás után. Töltsd ki a táblázatokat, majd számold ki, mennyi a valószínűsége, hogy Kató

a) minden alkalommal bedobja;
b) egyetlen alkalommal sem dobja be;
c) az első alkalommal bedobja, a többi alkalommal nem;
d) az egyik alkalommal bedobja, de a többi alkalommal nem!

	először bedobja	és	másodszorra bedobja	és	harmadszorra bedobja	és	negyedszerre bedobja	és	ötödszörre bedobja	→	mind bedobja
Valószínűsége:											

	először nem dobja be	és	másodszorra nem dobja be	és	harmadszorra nem dobja be	és	negyedszerre nem dobja be	és	ötödszörre nem dobja be	→	mind kihagyja
Valószínűsége:											

	először bedobja	és	másodszorra nem dobja be	és	harmadszorra nem dobja be	és	negyedszerre nem dobja be	és	ötödszörre nem dobja be	→	elsőt bedobja, többit kihagyja
Valószínűsége:											

2. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindegyik dobás hatos;
b) az első dobás hatos, a többi nem;
c) egyik dobás hatos, a többi nem?

3. Egy gép meghibásodik, és ezért 0,05 valószínűséggel selejtes terméket állít elő. Egyik nap 20 terméket gyárt a gép. Mekkora a valószínűsége, hogy

a) minden termék selejtes;
b) nem készül aznap selejtes termék;
c) a második termék selejtes, a többi mind jó;
d) a harmadik termék selejtes, a többi mind jó;
e) egyetlen termék selejtes, a többi mind jó?

4. Sok társasjátékban számít, hogy ki dob hamarabb hatost. Ha valaki csak ötödik dobásra dob hatost, az azt jelenti, hogy az első négy dobása nem hatos volt, majd az ötödik dobás hatos. Annak a valószínűsége, hogy valaki csak ötödik dobásra dob hatost, tehát így számolható:

	először nem hatos	és	másodszor nem hatos	és	harmadszor nem hatos	és	negyedszer nem hatos	és	ötödszörre hatos	→	ötödik az első hatos
Valószínűsége:	$\frac{5}{6}$	·	$\frac{5}{6}$	·	$\frac{5}{6}$	·	$\frac{5}{6}$	·	$\frac{1}{6}$		$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$

a) Melyiknek nagyobb a valószínűsége: ha már elsőre hatost dobunk, vagy ha a második dobás lesz az első hatos?
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a negyedik dobás lesz először kisebb, mint 5?
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötödik dobás lesz először az ötnek valamelyik osztója?

5. Egy szerencsekeréknek kétféle állása van: NYERT és NEM NYERT. Kétszer megforgatva 0,48 annak a valószínűsége, hogy a két forgatás közül az egyik alkalommal NYERT, a másik alkalommal NEM NYERT feliratnál áll meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szerencsekerék a NYERT feliratnál áll meg, ha egyszer megforgatjuk?

HÁZI FELADAT

1. Szabályos dobókockával négyszer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) egyik dobás sem hatos;
b) elsőre hatost dobunk, a többi alkalommal nem hatost;
c) másodikra hatost dobunk, de a többi alkalommal nem hatost;
d) a négy közül pontosan egyszer hatost dobunk, a többi alkalommal nem hatost?

2. Szabályos dobókockával dobunk addig, amíg hatost sikerül dobni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik dobás lesz az első hatos?

3. Egy szabályos pénzérmét 8-szor egymás után feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindegyik dobás fej;
b) mindegyik dobás írás;
c) pontosan egy dobás fej, a többi írás;
d) pontosan egy dobás írás, a többi fej?



RÁADÁS

Valószínűségi feladatok megoldása gráf segítségével

Egy számítógépes felfedezőjátékban a játékos új mezőkre lépkedve kell feltérképezze a vidéket. Vannak azonban olyan mezők, amelyek – bár kívülről nem látszanak – veszélyesek, mert egy kígyó lapul az egyik kő alatt. (Ha a játékos nem szerzett korábban gyógyfüvet, akkor súlyosan megsebesülhet a kígyómarástól.) Lehet azonban szerencséje, mert egyáltalán nem biztos, hogy az ott lapuló kígyó meg is harapja. A programozó úgy állította be a játékot, hogy a kígyós mezőre lépő játékost a kígyó 0,8 valószínűséggel megmarja.

Egy játékos háromszor lép olyan mezőre, amely kígyót rejt. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) egyszer sem marja meg a kígyó;

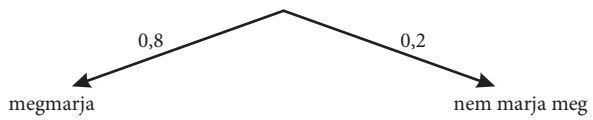
b) pontosan egyszer marja meg a kígyó;

c) pontosan kétszer marja meg a kígyó;

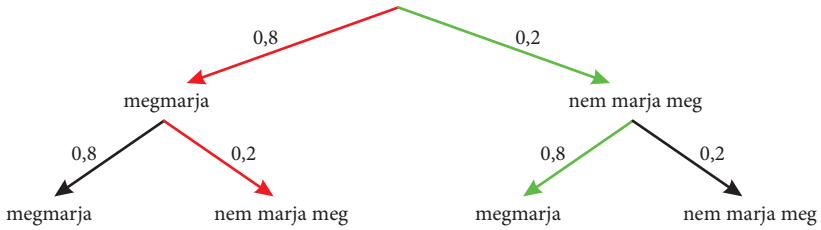
d) mindegyik alkalommal megmarja a kígyó?

Megoldás

Az első kígyós mezőre lépve 0,8 a valószínűsége, hogy a kígyó megmarja, és 0,2 a valószínűsége, hogy nem marja meg a felfedezőt. Ezt ábrázolhatjuk olyan gráffal (irányított fagráffal), amelynek éleire ráírjuk a megfelelő valószínűségeket.



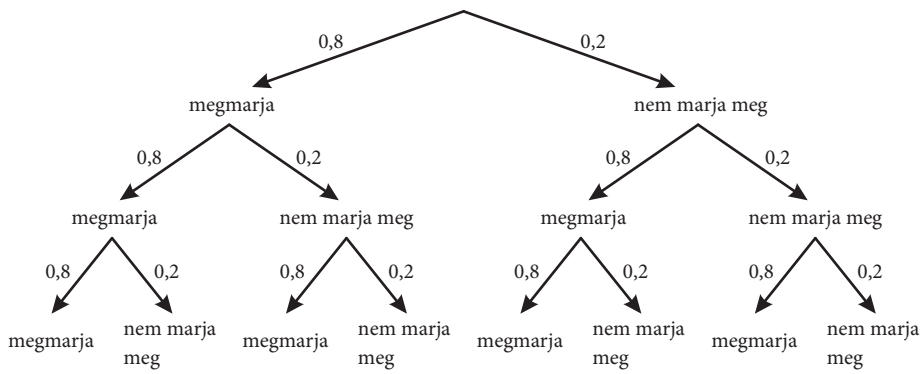
A második kígyós mezőt úgy ábrázolhatjuk, hogy a gráf mindkét „ágát” folytatjuk.



Az az eset, amikor először megmarja, másodszor nem marja meg a felfedezőt a kígyó, a gráf piros „ágának” feleltethető meg. Ennek valószínűsége a piros élekre írt valószínűségek szorzata, azaz $0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$.

Az az eset, amikor két kígyós mező esetén pontosan egy alkalommal történik kígyómarás, a gráfon annak feleltethető meg, hogy a piros vagy a zöld „ágon” megyünk végig. A pirosághoz tartozó eset valószínűsége 0,16, hasonló módon a zöldághoz tartozó eset valószínűsége is 0,16. Annak valószínűsége, hogy a kígyó pontosan egyszer megmar, e két valószínűség összege, azaz 0,32.

A harmadik kígyós mezőt is úgy ábrázolhatjuk, hogy a gráf minden „ágát” ismét folytatjuk.



Valószínűség	$0{,}8^3$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	$0{,}8 \cdot 0{,}2^2$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	$0{,}8 \cdot 0{,}2^2$	$0{,}8 \cdot 0{,}2^2$	$0{,}2^3$
Kígyómarások száma	3	2	2	1	2	1	1	0

Annak valószínűsége, hogy egyszer sem marja meg: $0{,}2^3 = 0{,}008$.

Annak valószínűsége, hogy pontosan egyszer marja meg: $3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}096$.

Annak valószínűsége, hogy pontosan kétszer marja meg: $3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$.

Annak valószínűsége, hogy mindhárom alkalommal megmarja: $0{,}8^3 = 0{,}512$.

Mivel más lehetőség nincs, ezeknek a valószínűségeknek az összege 1 kell legyen. Valóban: $0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1$.

63 Visszatevéses mintavétel

BEVEZETŐ

Hogyan kapják az olyan adatokat, hogy valaki 0,7 valószínűséggel rúgja be a tizenegyest, vagy egy gép 0,02 valószínűséggel selejtet termel? Nagy elemszámú statisztikai minták elemzésével. A statisztika nemcsak azzal kapcsolódik a valószínűségszámításhoz, hogy párhuzamban állnak a megfelelő fogalmak (relatív gyakoriság és valószínűség, átlag és várható érték), hanem azzal is, hogy nagyon sok esetben a statisztika szolgáltatja azokat az értékeket, amelyekkel a valószínűségszámítás dolgozik.

ELMÉLET

1. Visszatevéses mintavétel

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy mintavétel során minden választás pontosan ugyanazok közül az elemek közül történik. Például:

- miután kiválasztottunk egy elemet, visszatesszük azt a halmazba, így a következő alkalommal újból választható;
- a kiválasztott elemet nem vesszük ki, nem emeljük ki a halmazból, csak megvizsgáljuk azt.

Miért alkalmaznak visszatevéses mintavételt? Közvélemény-kutatáskor például sokkal egyszerűbb a kutatást megszervezni, ha nem foglalkoznak azzal, hogy előfordulhat olyan eset, hogy két közvélemény-kutató ugyanazt az embert kérdezi meg. Minőség-ellenőrzés során egy külön művelet beiktatása kell ahhoz, hogy a selejtes terméket máshová tegye a gép, mint a jó terméket. A visszatevéses mintavétel elvégzése sokszor gazdaságosabb, mint a visszatevés nélküli mintavétel megszervezése. Nagy elemszám esetén a két mintavétel eredménye alig különbözik egymástól. Ha például 100 000 elem közül választunk ki 200-at, akkor a két mintavétel során a valószínűségek közel egyenlők.

2. Ugyanazt többször

A visszatevéses mintavétel esetén minden egyes lépésben ugyanaz a kísérlet, ugyanaz a helyzet ismétlődik. Ezért ha ugyanolyan kísérletet végzünk el többször, illetve ha visszatevéses mintavételt végzünk, ezek a helyzetek matematikai megközelítésükben azonosak.

> Egymástól függetlenül ötször elvégzünk egy kísérletet. Minden kísérletben 0,8 a valószínűsége, hogy a kísérlet sikeres. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan háromszor lesz sikeres a kísérlet?

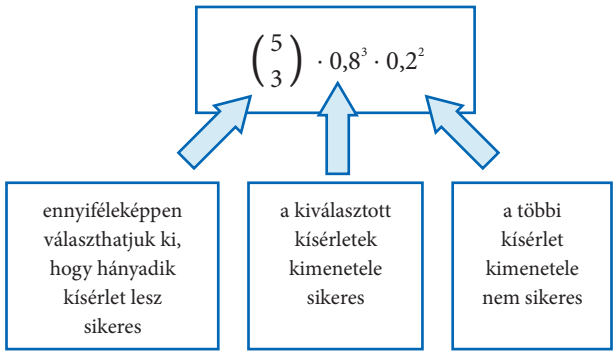
Ha egy kísérletben a sikeres kimenetel valószínűsége 0,8, akkor a sikertelen kimenetel valószínűsége 0,2.
Egyik lehetőség az, amikor az első, a második és a harmadik kísérlet sikeres, a többi sikertelen:

	első sikeres	és	második sikeres	és	harmadik sikeres	és	negyedik nem sikeres	és	ötödik nem sikeres	→	első három sikeres, többi nem sikeres
Valószínűsége:	0,8	·	0,8	·	0,8	·	0,2	·	0,2		$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$

De nem csak így fordulhat elő három sikeres kísérlet, azok más helyeken is állhatnak. Hányféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik lesz a három sikeres kísérlet? Az öt hely közül kell kiválasztanunk hármat, és a kiválasztás sorrendje nem számít, ezért a lehetőségek száma $\binom{5}{3} = 10$.

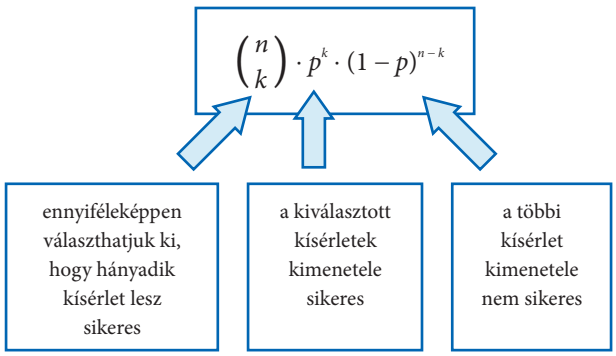
Mind a 10 esetben a valószínűség $0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$, ezért a megoldás $\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}205$.

5 kísérletből pontosan 3 sikeres:



Egymástól függetlenül n-szer elvégzünk egy kísérletet. Minden kísérletben p a valószínűsége, hogy a kísérlet sikeres. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k-szor lesz sikeres a kísérlet?

n db kísérletből pontosan k db sikeres:



Megjegyzés

A binomiális együtthatók megjelenése miatt **binomiális eloszlásnak** nevezik az így felírt valószínűségeket.

Azok az esetek is felírhatók ilyen módon, amikor mindegyik kísérlet sikeres, egyik kísérlet sem sikeres, vagy éppen pontosan 1 kísérlet sikeres. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható esetén értelmeztük azt is, amikor $k = 0$: minden n természetes szám esetén $\binom{n}{0} = 1$.

Például:

5 kísérletből 5 sikeres	a képletben szereplő binomiális együttható $\binom{5}{5}$	$\binom{5}{5} = 1$
5 kísérletből 1 sikeres	a képletben szereplő binomiális együttható $\binom{5}{1}$	$\binom{5}{1} = 5$
5 kísérletből 0 sikeres	a képletben szereplő binomiális együttható $\binom{5}{0}$	$\binom{5}{0} = 1$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ferkó rengetegszer lőtt már a céllövöldében, és átlagban 100 lövéséből 15 talált. Ezt úgy modellezhetjük, hogy Ferkó lövései 0,15 valószínűséggel találnak. Ferkó ötször lő. Mennyi a valószínűsége, hogy az öt lövésből 0, 1, 2, 3, 4, illetve 5 találatot ér el?

Megoldás

Minden lövése 0,15 valószínűséggel talál, ezért 0,85 valószínűséggel nem talál.

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket!

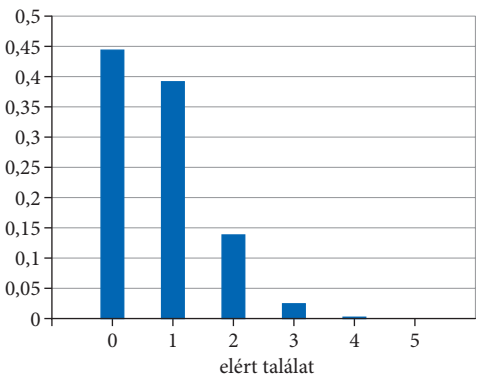
Találatok száma		Valószínűség	
0 találat	minden lövése 0,85 valószínűséggel nem talál	$0{,}85^5$ vagy másként $\binom{5}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^5$	$\approx 0{,}4437$
1 találat	1 lövése 0,15 valószínűséggel talál és 4 lövése 0,85 valószínűséggel nem talál	$\binom{5}{1} \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^4$	$\approx 0{,}3915$
2 találat	2 lövése 0,15 valószínűséggel talál és 3 lövése 0,85 valószínűséggel nem talál	$\binom{5}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^3$	$\approx 0{,}1382$
3 találat	3 lövése 0,15 valószínűséggel talál és 2 lövése 0,85 valószínűséggel nem talál	$\binom{5}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^2$	$\approx 0{,}0244$
4 találat	4 lövése 0,15 valószínűséggel talál és 1 lövése 0,85 valószínűséggel nem talál	$\binom{5}{4} \cdot 0{,}15^4 \cdot 0{,}85$	$\approx 0{,}0022$
5 találat	minden lövése 0,15 valószínűséggel talál	$0{,}15^5$ vagy másként $\binom{5}{5} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^0$	$\approx 0{,}0001$

Mivel minden esetet felsoroltunk, a valószínűségek összege 1.

$$0{,}85^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^3 + \binom{5}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}15^4 \cdot 0{,}85 + 0{,}15^5 = 1$$

A kerekítés miatt fordul elő egy kis eltérés: $0{,}4437 + 0{,}3915 + 0{,}1382 + 0{,}0244 + 0{,}0022 + 0{,}0001 \approx 1$.

Érdemes oszlopdiagramon ábrázolni a valószínűségeket.



A diagram jól szemlélteti, hogy 5 lövés esetén Ferkónak arra van a legnagyobb esélye (44%), hogy egyszer sem talál, de majdnem ugyanekkora az esélye (39%) arra is, hogy egy találata lesz.

FELADAT

1. Tünde palacsintát süt. Szerinte neki 10 palacsintából 8 nem szakad el sütés közben, kettő azonban elszakad. Ezt úgy modellezi, hogy 0,8 valószínűséggel sikerül egy palacsintája, 0,2 valószínűséggel nem sikerül, mert elszakad. Még három palacsinta van hátra. Fejezd be a táblázat kitöltését, és számold ki annak a valószínűségét, hogy Tünde 3 palacsintájából pontosan 0, 1, 2, illetve 3 lesz, ami elszakad!

		Valószínűség	
0 szakad el	minden palacsinta 0,8 valószínűséggel sikerül	$0{,}8^3$	$\approx$
1 szakad el	1 palacsinta 0,2 valószínűséggel elszakad, 2 palacsinta 0,8 valószínűséggel sikerül	$\binom{3}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2$	$\approx$
2 szakad el	2 palacsinta 0,2 valószínűséggel elszakad, 1 palacsinta 0,8 valószínűséggel sikerül		$\approx$
3 szakad el	minden palacsinta 0,2 valószínűséggel elszakad		$\approx$

2. Szabályos dobókockával 8-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan 2 dobás lesz hatos; **b)** pontosan 3 dobás lesz hatos?

3. Egy gép meghibásodik, ezért minden alkalommal 0,03 valószínűséggel selejtes terméket állít elő. Egyik nap 15 terméket állít elő. Mennyi a valószínűsége, hogy a 15 termék közül

a) pontosan 1 termék selejtes; **b)** pontosan 2 termék selejtes; **c)** 1 vagy 2 termék selejtes?

4. Egy szabályos érmét egymás után 10-szer feldobunk. Jocó azt mondja, 0,5 annak a valószínűsége, hogy a fejek és az írások száma ugyanannyi lesz a dobássorozat végére. Azért gondolja így, mert a dobássorozat eredménye kétféle lehet ebből a szempontból: vagy egyenlő a fejek és írások száma, vagy nem. Számítással igazold, hogy hibás Jocó érvelése!

HÁZI FELADAT

1. A következő feladatok megoldásából kimaradt a binomiális együttható. Egészítsd ki a feladatok megoldását a hiányzó binomiális együtthatóval, és számold ki a végeredményeket!

Feladat	Megoldás	Végeredmény
Egy üzemben 0,05 valószínűséggel készül hibás termék. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 termék között pontosan 2 hibás lesz?	$\square \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8$	
Panni minden alkalommal 0,8 valószínűséggel talál célba. Mennyi a valószínűsége, hogy 7 dobásból pontosan 4-szer célba talál?	$\square \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^3$	
Dobókockával 6-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 dobás lesz kettes?	$\square \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$	

2. A rulettjátékban a 37 szám között 18 „piros” szám és 18 „fekete” szám van, továbbá 1 szám, a nullás „zöld”. Ha 6-szor megpörgetik a kereket, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy



a) mindegyik pörgetésnél piros szám jön ki;

b) mindegyik pörgetésnél a 0 jön ki;

c) az első 4 pörgetésnél piros, a következő 2 pörgetésnél pedig fekete jön ki;

d) pontosan 4 pörgetésnél piros jön ki?

64 Gyakorlás

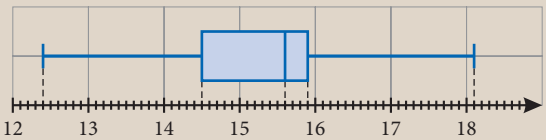
FELADAT

1. Bence nem készült fel rendesen a keddi 6 tanórájára, ezért tart attól, hogy felelni fog. Arra gondol, hogy mindegyik órán körülbelül 0,05 annak a valószínűsége, hogy felel, ezért 0,3 annak a valószínűsége, hogy valamelyik órán felelni fog.

a) Jól gondolkodik-e Bence? Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamelyik órán felelni fog?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább két órán felelni fog?

2. Egy mérést nagyon sokszor elvégeztek, és az eredményeket dobozdiagramon ábrázolták. A további számolásoknál azt veszik figyelembe, hogy egy újabb mérési eredmény 0,25 valószínűséggel kisebb vagy egyenlő, mint az alsó kvartilis, és 0,25 valószínűséggel nagyobb, mint a felső kvartilis.



Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 6 mérés eredménye közül

a) pontosan egyszer kapunk 15,9-nél nagyobbat;

b) legalább egyszer kapunk 15,9-nél nagyobbat;

c) minden mérési eredmény nagyobb, mint 14,5 és kisebb vagy egyenlő, mint 15,9?

3. Egy ezernél is több angol iskolás részvételével 2000-ben lebonyolított nagyszabású kísérletsorozat igazolta, hogy az asztalról leeső vajas pirítós tényleg nagyobb eséllyel esik a vajas felére. A nagyszámú kísérlet eredménye szerint ennek valószínűsége kb. 0,62. (A jelenség fizikai magyarázata, hogy az asztalról lebillenő kenyérszelet megpördül, de egy átlagos magasságú étkezőasztal esetén csak kb. fél fordulatra van idő esés közben.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10 lepottyanó vajas pirítósszelet közül

a) egy sem esik a vajas felére;

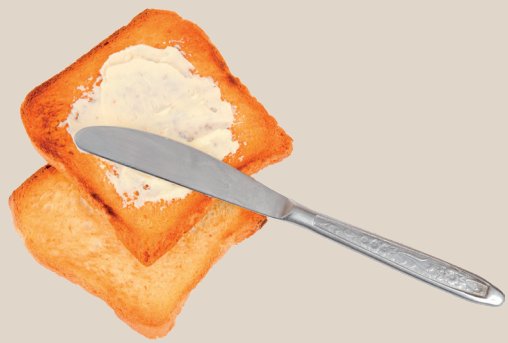
b) mindegyik a vajas felére esik;

c) lesz olyan, amelyik nem a vajas felére esik;

d) pontosan 7 esik a vajas felére;

e) 7-nél több esik a vajas felére;

f) legfeljebb 7 esik a vajas felére?



ELMÉLET

Legalább, legfeljebb

Ha egy kísérletben, feladatban az összes lehetséges kimenetel valószínűségét összeadjuk, akkor 1-et kapunk. Ez sokszor segít, ha például olyan kérdésre kell válaszolni, hogy mennyi a valószínűsége, hogy legalább kétszer bekövetkezik egy esemény.

5-ször végzünk el egy kísérletet. Az esemény bekövetkezésének száma lehet: 0 1 2 3 4 5

Melyek azok az esetek, amikor az esemény legfeljebb kétszer következik be? 0 1 2 3 4 5

Ennek a valószínűségét megkapjuk, ha összeadjuk azon esetek valószínűségét, amikor pontosan 0-szor, egyszer, illetve kétszer következik be.

$$P(\text{legfeljebb } 2) = P(0) + P(1) + P(2).$$

Melyek azok az esetek, amikor az esemény legalább kétszer következik be? 0 1 2 3 4 5

Ennek a valószínűségét úgy a legkönnyebb kiszámítani, ha 1-ből kivonjuk azon valószínűségek összegét, hogy pontosan 0-szor, illetve pontosan egyszer következik be az esemény.

$P(\text{legalább } 2) = 1 - [P(0) + P(1)]$.

Figyeld meg! A „legalább kétszer bekövetkezik az esemény” és a „legfeljebb kétszer bekövetkezik az esemény” nem egymás komplementere. Mindkettő tartalmazza azt az esetet, amikor az esemény pontosan kétszer következik be.

FELADAT

4. Egy járvány egyik időszakában 0,02 annak a valószínűsége, hogy Budapest egy véletlenszerűen kiválasztott lakosa hordozza a vírust. Mekkora annak a valószínűsége, hogy van vírushordozó azon a buszon, amelyen

a) 30 fő utazik;
b) 20 fő utazik;
c) 10 fő utazik?

egy ember vírushordozó 2%
↓ !
30 ember között van vírushordozó 45%

5. (Érettségi feladat, 2020)
A Naprendszer bolygói: Merkúr, Vénusz, Föld, Mars, Jupiter, Szaturnusz, Uránusz és Neptunusz. Egy földrajzdolgozatban a Naptól való távolságuk sorrendjében kell megadni a bolygókat. Judit csak abban biztos, hogy a Föld a harmadik a sorban, a Neptunusz pedig a legutolsó. Ezeket helyesen írja a megfelelő helyre. Emlékszik még arra is, hogy a Naphoz a Merkúr és a Vénusz van a legközelebb, de a sorrendjüket nem tudja, így e két bolygó sorrendjére is csak tippel. Végül a többi négy bolygó nevét véletlenszerűen írja be a megmaradt helyekre.

a) Határozd meg annak a valószínűségét, hogy Judit éppen a helyes sorrendben adja meg a bolygókat!
b) A nyolc bolygó nevét egy-egy cédulára felírjuk, és ezeket beletesszük egy kalapba. Kétszer húzunk a kalapból véletlenszerűen egy-egy cédulát. Visszatevéses vagy visszatevés nélküli húzás esetén nagyobb a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik kihúzott cédulán a Föld neve szerepel?

HÁZI FELADAT

1. 50 darab különböző méretű gyöngy között 10 darab selejtes van (nincs rajtuk furat, amelyen a zsinórt át lehetne fűzni). A minőségellenőr véletlenszerűen kiválaszt egy gyöngyöt, megvizsgálja, feljegyzi, hogy jó-e vagy selejtes, majd a kiválasztott gyöngyöt visszateszi. Összesen 5 alkalommal választ egy-egy gyöngyöt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) nem talál selejtes gyöngyöt ezzel a módszerrel;
b) mindegyik kiválasztott gyöngy selejtes lesz;
c) a kiválasztott gyöngyök között a selejtesek aránya ugyanannyi lesz, mint az 50 gyöngy között a selejtesek aránya?

2. Egy szabályos dobókockát 10-szer feldobva mekkora annak a valószínűsége, hogy

a) egyszer sem dobunk hatost;
b) mind a 10 alkalommal hatost dobunk;
c) legalább 8-szor hatost dobunk;
d) legfeljebb 2-szer dobunk hatost?

3. Egy automata palackgyártó gép 0,08 valószínűséggel állít elő hibás palackot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a gép által gyártott 50 palack között

a) nincs hibás;
b) nincs hibátlan;
c) van hibás;
d) van hibátlan;
e) pontosan 4 hibás van;
f) legfeljebb 4 hibás van?

Ráadás

Visszatevéssel vagy anélkül?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy gép által gyártott 50 munkadarab közül 20 darab selejtes, azaz 40% a selejtesek aránya. A minőség-ellenőrzés során 15 munkadarabot vizsgálnak meg. Azt várjuk, hogy nagy valószínűséggel a 15 megvizsgált munkadarab között is 40% körüli lesz a selejtesek száma, azaz 5, 6 vagy 7.

Mekkora valószínűséggel lesz 5, 6 vagy 7 selejtes a 15 megvizsgált munkadarab között, ha

a) visszatevéssel;

b) visszatevés nélkül végzik a minőség-ellenőrzést?

Megoldás

a) A visszatevéssel végzett minőség-ellenőrzésnél minden alkalommal ugyanazt a véletlen kísérletet hajtjuk végre. Ezért alkalmazhatók a binomiális eloszlásról tanultak. A selejtes munkadarab választásának valószínűsége minden esetben 0,4, a jó munkadarab választásának valószínűsége minden választásnál 0,6. Annak a valószínűsége, hogy a selejtes darabok száma a 15 alkalommal megismételt kiválasztás során 5, 6 vagy 7:

$$\binom{15}{5}\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^{10}+\binom{15}{6}\cdot 0{,}4^6\cdot 0{,}6^9+\binom{15}{7}\cdot 0{,}4^7\cdot 0{,}6^8\approx 0{,}57.$$

b) A visszatevés nélküli mintavétel esetén a $\frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{lehetséges kimenetelek száma}}$ hányadossal határozhatjuk meg a valószínűséget.

Az 50 munkadarab közül $\binom{50}{15}$ különböző módon választható ki a 15 munkadarab (ennyi tehát a lehetséges kimenetelek száma). A 15 kiválasztott között 5, 6 vagy 7 selejtes $\binom{20}{5}\cdot\binom{30}{10}+\binom{20}{6}\cdot\binom{30}{9}+\binom{20}{7}\cdot\binom{30}{8}$ különböző módon lehet. A keresett valószínűség tehát: $\dfrac{\binom{20}{5}\cdot\binom{30}{10}+\binom{20}{6}\cdot\binom{30}{9}+\binom{20}{7}\cdot\binom{30}{8}}{\binom{50}{15}}\approx 0{,}65.$

Látható, hogy van különbség a kétféle mintavétel valószínűsége között, de nem túl nagy. Ez a különbség azonban még kisebb, ha nemcsak 50 munkadarab van, hanem sokkal több.

Megjegyzések

– Ha valamelyik mintavételi eljárás jelentős többletköltséggel jár a másikhoz viszonyítva, akkor nem jelent túl nagy kockázatot az, ha helyette a másik mintavételi eljárást választják.

– Közvélemény-kutatás során jóval nagyobb létszámú a megvizsgálandó halmaz egyedszáma (népesebb a populáció), mert például egy több tízezer lakosú településen vagy akár egy több millió lakosú országban kell kutatást végezni, több száz, esetenként több ezer embert megkérdezni. A felmérés megszervezése sokkal olcsóbb lehet, ha a visszatevéses mintavételt választják. Ekkor persze nincs kizárva, hogy ugyanazt az embert akár többször is megkérdezik, csakhogy a népes populáció miatt *ennek igen kicsi a valószínűsége*. A felmérés végeredménye emiatt gyakorlatilag ugyanaz lesz, mint ha gondosan ügyeltek volna arra, hogy mindenkit legfeljebb egyszer kérdezzenek meg (azaz visszatevés nélküli legyen a mintavétel). Ezzel együtt viszont jóval olcsóbban sikerülhet a felmérést elvégezni.

FELADAT

1. Egy nagyvárosi metróvonalon már igen sok ellenőrzést tartottak, és az eddigi ellenőrzések azt mutatták, hogy körülbelül 0,92 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utasnak van érvényes menetjegye (vagy bérlete).
A vonalon dolgozó ellenőrök egyike azt jelenti a főnökének, hogy 50 utast ellenőrzött, és

a) mindegyiknek volt érvényes menetjegye (bérlete);

b) egyiküknek sem volt érvényes menetjegye (bérlete).

Melyik állítást fogadja el a főnök, ha ő csak a legalább 5%-os valószínűségű eseményről gondolja azt, hogy az valóban megtörténhetett?

2. Egy közlekedési vállalat felmérést készíttet az ellenőrökkel, hogy az utasok hány százaléka utazik tanulóbérlettel. Egy buszon utazó 60 utas közül 12-nek (20%-nak) van tanulóbérlete. Egy ellenőr két megálló között 10 utas jegyét vagy bérletét ellenőrzi. Az utasok a buszban szabadon mozoghatnak. Fontos-e a felmérés hatékonysága szempontjából, hogy figyeljen arra az ellenőr, hogy 10 különböző utast kérdezzen meg?

a) Töltsd ki a táblázatot!

A 10 megkérdezett utas közül ennyi utazik **tanulóbérlettel**	0	1	2	3	4	5	6
Ennek valószínűsége **visszatevéses** mintavétel esetén	0,107		0,302			0,026	
Ennek valószínűsége **visszatevés nélküli** mintavétel esetén			0,330		0,081		0,002

b) „Visszatevéses módszerrel ellenőrizve” mekkora annak a valószínűsége, hogy a buszon utazó Bencétől legfeljebb egyszer kéri az ellenőr a bérletét?

3. Egy internetes cikkben az olvasható, hogy a balkezesek aránya a teljes népesség körében körülbelül 11%.
Bence matematikacsoportjában 17-en vannak, közülük 3 balkezes tanuló. A cikk olvasása után Bence azon gondolkodik, mennyire valószínű az, hogy pontosan 3 balkezes van a csoportban.

a) Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 17 fős csoportban a balkezesek száma pontosan 0, 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6.

b) Ábrázold oszlopdiagramon a valószínűségeket!

c) Milyen következtetésre juthatott Bence?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott 17 fős csoportban a balkezesek száma legalább 1, de legfeljebb 4?

4. Egy vidám társasjátékban a játékosok egy-egy bájitalt állítanak össze úgy, hogy a hozzávalókat véletlenszerűen húzzák egy zsákból.
A játék során Tomi zsákjában éppen a következő összetevők vannak:
4 db csattanó maszlag, 2 db keresztes pók, 2 db tök, 3 db mandragóra, 1 db légyölő galóca.

a) Tomi visszatevés nélkül húz a zsákjából 3 összetevőt. Mennyi a valószínűsége, hogy nincs a kihúzottak között csattanó maszlag?

b) Tomi visszatevéssel húz a zsákjából 4 db összetevőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között van valamennyi csattanó maszlag?

c) Hány légyölő galócát vásároljon még Tomi a zsákjába, hogy annak a valószínűsége, hogy elsőre légyölő galócát húz, nagyobb legyen, mint 0,3?

d) Minek nagyobb a valószínűsége: hogy egyszerre hármat húzva pontosan kettő köztük mandragóra, vagy hogy visszatevéssel hármat húzva legalább kettő köztük mandragóra?

HÁZI FELADAT

1. Egy iskola külföldi diákcsereprogramot szervez. Összesen 24 diák jelentkezett, közülük fogják sorsolással kiválasztani a 3 résztvevőt. A jelentkezők közül 15 tanuló tizenkettedik, 9 tanuló pedig tizenegyedik osztályos.

a) Alkalmazható-e erre a sorsolásra a visszatevéses és a visszatevés nélküli modell is? Ha nem, melyiket kell használni?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom kisorsolt jelentkező tizenkettedikes lesz?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy két tizenkettedikest és egy tizenegyedikest választanak ki?

2. Egy televíziós vetélkedőműsorban a nézőtéren 60 játékosjelölt ül, közülük 12-en ugyanannak a baráti társaságnak a tagjai. A 60 néző közül sorsolással fogják kiválasztani azt az 5-öt, akik játszhatnak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 5 kiválasztott játékos közül

a) pontosan ketten;

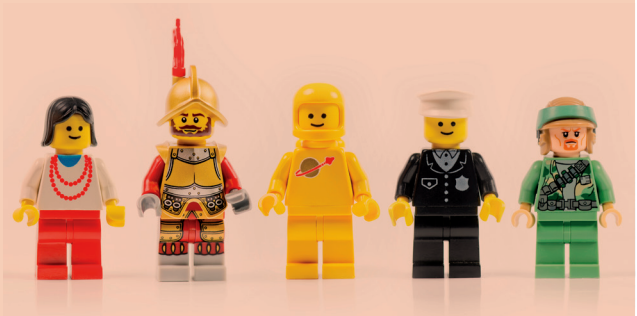
b) legalább ketten

a 12 tagú baráti társaságnak a tagjai, ha mindenki csak egyszer választható játékosnak?

3. A LEGO cég 2010-ben dobta piacra a gyűjthető LEGO minifigura első sorozatát. A teljes gyűjtemény 16 különböző figurából áll, közülük az egyik űrhajós. Ezek mind ugyanolyan – nem átlátszó – csomagolásban kerülnek forgalomba, így csak a figurát rejtő zacskó kinyitása után derül ki, hogy valójában melyik figurát is vásároltuk meg. Egy játékboltban, ahol a 16-féle figura mindegyikéből 4-4 darab van, 64 csomag közül válogathatunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 megvásárolt figura közül

a) pontosan 2 űrhajós lesz;

b) nem lesz űrhajós?



RÁADÁS

Számítógép segítségével nagyobb létszámú populáció esetén is vizsgálható a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavétel.

Például

egy 250 fős összejövetelen a megjelentek 30%-a nyugdíjas korú. A jelenlévők között 20 könyvutalványt sorsolnak ki. Vizsgáljuk meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy a nyertesek között 0, 1, 2, …, 20 nyugdíjas korú van, ha

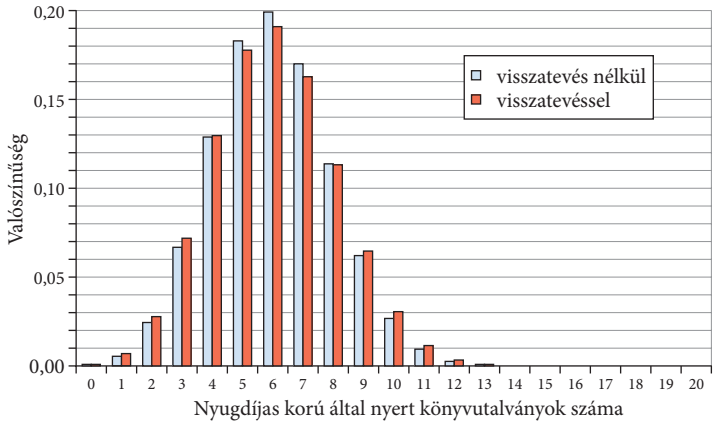
a) mindenki csak egy utalványt nyerhet;

b) mindenki több utalványt is nyerhet!

Az a) esetben *visszatevés nélküli mintavételről* van szó: annak a valószínűsége, hogy k darab könyvutalványt nyugdíjas korú nyer meg: $\dfrac{\binom{75}{k}\cdot\binom{175}{20-k}}{\binom{250}{k}}$.

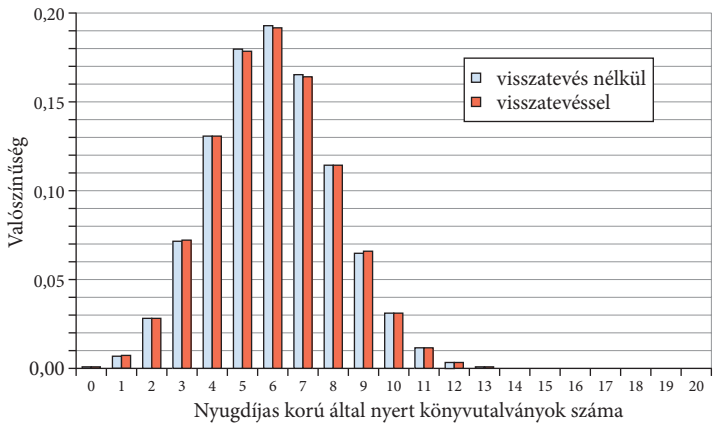
A b) esetben minden egyes könyvutalvány kisorsolásánál 0,3 annak a valószínűsége, hogy nyugdíjas korú nyeri az utalványt, és 0,7 annak a valószínűsége, hogy nem nyugdíjas korú. Annak a valószínűsége, hogy k darab könyvutalványt nyugdíjas korú nyer meg: $\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$.

Oszlopdiagramon ábrázolhatjuk az egyes k értékekhez tartozó valószínűségeket.



Megfigyelhető, hogy már viszonylag kis populációszám (250) esetén sem jelentős az eltérés a kétféle mintavétellel kapott valószínűségek eloszlása között.

Ha a társaság létszáma 250 helyett 2500 lenne, és változatlanul 30% lenne a nyugdíjas korúak aránya, akkor a 20 könyvutalvány kétféle kisorsolására az alábbi valószínűségeloszlást kapnánk:



Láthatóan szinte eltűnik a kétféle sorsolási módszer közötti különbség.



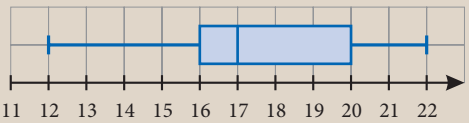
65 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2010)
Egy 17 fős csoport matematika témazáró dolgozatának értékelésekor a tanár a következő információkat közölte:
– Mind a 17 dolgozatot az 1-es, a 2-es, a 3-as, a 4-es és az 5-ös jegyek valamelyikével osztályozta.
– A jegyek mediánja 4, módusza 4, terjedelme 4 és az átlaga (két tizedesjegyre kerekítve) 3,41.
Határozd meg a következő állítások logikai értékét! Indokold a válaszodat!
A: A dolgozatoknak több mint a fele jobb hármasnál.
B: Nincs hármasnál rosszabb dolgozat.

2. Foglalkozzunk olyan adatsokasággal, amelynek mindegyik eleme egyenlő!
a) Ha mind a tizenöt adat 222, akkor az adatok átlaga is 222. Mennyi a módusz, a medián, a terjedelem és a szórás ebben az adatsokaságban?
b) Igaz-e, hogy ha egy adatsokaság mindegyik eleme egyenlő, akkor a szórása 0?
c) Igaz-e, hogy ha egy adatsokaság szórása 0, akkor az adathalmaz mindegyik eleme egyenlő?
d) Igaz-e, hogy ha egy adatsokaság adatainak átlaga 0, akkor az összes adat egyenlő?

3. A dobozdiagram alapján határozd meg az adatsokaság jellemzőit!



minimum	
alsó kvartilis	
medián	
felső kvartilis	
maximum	
terjedelem	
félterjedelem	

4. (Érettségi feladat alapján, 2005)
A fizikaórai tanulókísérlet egy tömegmérési feladat volt. A mérést 19 tanuló végezte el. A mért tömegre gramm pontossággal a következő adatokat kapták: 37, 33, 37, 36, 35, 36, 37, 40, 38, 33, 37, 36, 35, 35, 38, 37, 36, 35, 37.
a) Készítsd el a mért adatok gyakorisági táblázatát!
b) Mennyi a mérési adatok átlaga gramm pontossággal?
c) Mekkora a kapott eredmények mediánja, módusza?
d) Készíts dobozdiagramot a mérési eredményekről!

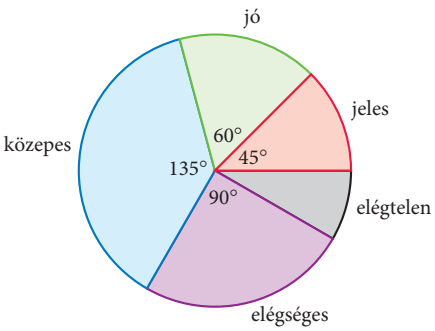
5. Egy részvény árfolyama jelenleg 3200 Ft. A szakértők szerint a részvény ára jövőre 0,2 valószínűséggel nem változik, 0,4 valószínűséggel 15%-kal emelkedik és 0,4 valószínűséggel 10%-kal csökken az idei árhoz képest. Hány Ft a részvény jövő évi várható értéke?

6. Egy 36 fős osztályból 12-en olvasták *A gyűrűk ura* című könyvet, 10-en olvasták az *Alkonyat* című könyvet. Nincs olyan diák, aki mindkettőt olvasta. Készíts Venn-diagramot, majd határozd meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva az osztályból 4 tanulót
a) egyikük sem olvasta e két könyv közül egyiket sem;
b) hárman olvasták *A gyűrűk urát*, és egyikük olvasta az *Alkonyat*ot.

7. (Érettségi feladat, 2019)
Egy iskolai italautomata meghibásodott, és véletlenszerűen ad szénsavas, illetve szénsavmentes vizet. A diákok tapasztalata szerint, ha valaki szénsavmentes vizet kér, akkor csak 0,8 a valószínűsége annak, hogy valóban szénsavmentes vizet kap. Anna a hét mind az öt munkanapján egy-egy szénsavmentes vizet szeretne vásárolni az automatából, így minden nap az ennek megfelelő gombot nyomja meg. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább négy napon valóban szénsavmentes vizet ad az automata?

TUDÁSPRÓBA

1. A kördiagram azt mutatja, hogyan sikerült a 12. B osztály 24 tanulójának a legutóbbi témazáró dolgozata.



a) Töltsd ki a táblázatot!

Osztályzat	5	4	3	2	1
Gyakoriság					
Relatív gyakoriság					

b) Ábrázold sávdiagramon az adatok eloszlását!

c) Változtasd meg a tengelyen az egységet úgy, hogy a b) pontban készített grafikonról a relatív gyakoriságokat olvashassuk le!

d) Mennyi a 24 osztályzat átlaga, módusza, mediánja?

e) Mennyi a vizsgált adatsokaság szórása?

2. Ábrázold dobozdiagramon a következő adatsokaságot!

adat	14	15	16	17	18	19	20
gyakorisága	1	2	3	3	2	1	1

3. Egy társasjátékban olyan dobókockát használnak, amelynek 3 oldalán egy pont, 2 oldalán 3 pont, és egyik oldalán 6 pont látható. Töltsd ki a táblázatot, majd határozd meg, hogy mennyi ezzel a kockával egy dobás várható értéke!

			
Hány oldalon szerepel?	3	2	1
valószínűsége			

4. Az 1; 2; 3; …; 50 számok közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat (visszatevés nélkül). Mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindhárom szám páros;

b) a három szám közül kettő osztható 5-tel, egy pedig nem osztható 5-tel?

5. (Érettségi feladat, 2020)

Egy utcai díszburkolathoz használt kő szürke és sárga színben kapható. A dobozokon matrica jelzi a dobozban lévő kövek színét. Átlagosan minden századik dobozon rossz a matrica: szürke helyett sárga vagy fordítva. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy 0,01 annak a valószínűsége, hogy rossz matrica került a dobozra.) Péter kiválaszt 21 szürke jelzésű dobozt, és ellenőrzi a dobozokban lévő kövek színét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 21 kiválasztott doboz közül legalább 20 dobozban valóban szürke kő van?



Témazáró feladatgyűjtemény

1. (Érettségi feladat, 2021)
Egy diákmunka-közvetítéssel foglalkozó cég 25 állást hirdetett meg. Az állások órabérét és ezek gyakoriságát az alábbi táblázat tartalmazza. Add meg a hirdetésekben szereplő órabérek terjedelmét, móduszát, mediánját és átlagát!

Órabér (Ft)	1000	1200	1500	1600
Állások száma (db)	9	4	5	7

2. (Érettségi feladat, 2005)
Egy dolgozatnál az elérhető legmagasabb pontszám 100 volt. 15 tanuló eredményeit tartalmazza a következő táblázat:

Elért pontszám	A dolgozatok száma
100	3
95	2
91	1
80	2
65	1
31	2
17	2
8	1
5	1

a) Határozd meg az összes dolgozat pontszámának átlagát, móduszát és mediánját!

b) A dolgozatok érdemjegyeit az alábbi táblázat alapján kell megállapítani:

Pontszám	Osztályzat
80–100	jeles
60–79	jó
40–59	közepes
20–39	elégséges
0–19	elégtelen

Ennek ismeretében határozd meg, hogy melyik osztályzatot hány tanuló érte el, majd készíts kördiagramot az osztályzatok megoszlásáról! Add meg a kördiagramon az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek értékét!

3. (Érettségi feladat alapján, 2013)
Egy kis cégnél nyolcan dolgoznak: hat beosztott és két főnök. A főnökök átlagos havi jövedelme 690 000 Ft, a beosztottaké 450 000 Ft. Hány forint a cég nyolc dolgozójának átlagos havi jövedelme?

4. 11 db, nem feltétlenül különböző természetes számról a következőket tudjuk: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme 5. Adj meg 11 db ilyen természetes számot!

5. (Érettségi feladat, 2015)
A 32, c és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$. Határozd meg a c értékét!

6. Ábrázold dobozdiagramon a következő adatsokaságot!

a) 3; 7; 5; 3; 6; 8; 7; 6; 9;

b) 24; 20; 24; 30; 31; 25; 23; 27; 26; 22.

7. Ábrázold dobozdiagramon a következő adatsokaságot!

a)

adat	12,5	13,0	13,2	13,8	14,0
gyakorisága	2	3	5	6	4

b)

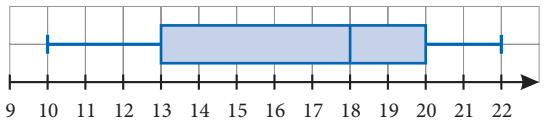
adat	35	36	38	40	41	42
gyakorisága	3	6	5	4	5	1

8. Egy adatsokaságról tudjuk, hogy terjedelme 26, félterjedelme 15, mediánja 40, felső kvartilise 51 és minimuma 32.

a) Készíts dobozdiagramot az adatokról!

b) Adj meg 9 olyan egész számot, amely megfelel a feladatban felsorolt leírásnak!

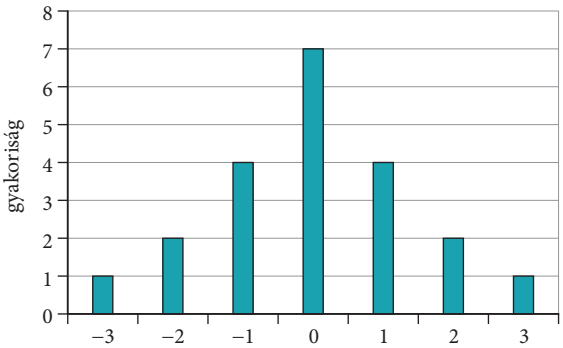
9. A következő dobozdiagram egy 7 adatból álló adatsokaságból készült, amelynek minden adata egész szám. Hányféle lehetett az adatsokaság?



10. Történelemből Bencének hat jegye van. Ezek átlaga 4 és szórása 0. Mik lehetnek Bence osztályzatai történelemből? Mennyi a jegyeinek terjedelme, módusza és mediánja?

11. Egy tízelemű adatsokaság módusza 3, szórása 0. Mennyi az átlaga, mediánja és terjedelme?

12. Adj becslést a diagramon szemléltetett adatsokaság átlagára és szórására, majd számolással ellenőrizd a becslésedet!



13. Egy matematikafeladatra legfeljebb 12 pontot lehetett szerezni. Az egyik 15 fős matematikacsoport pontszámai így alakultak: 11, 6, 11, 7, 3, 8, 11, 11, 11, 10, 11, 9, 11, 10, 7.
Határozd meg a pontszámok átlagát, móduszát, mediánját, terjedelmét és szórását!

14. A matematikaérettségi utolsó három feladata közül kettőt kell megoldani. A 16. feladatot az egyik csoportban 7 tanuló választotta. A feladatra legfeljebb 17 pontot lehetett kapni. A pontszámokról tudjuk, hogy a móduszuk 17, a mediánjuk 16, a terjedelmük 10, és az átlaguk 13,1 és 13,2 között van.

a) Hány pontos lett a leggyengébb megoldás a feladatra?

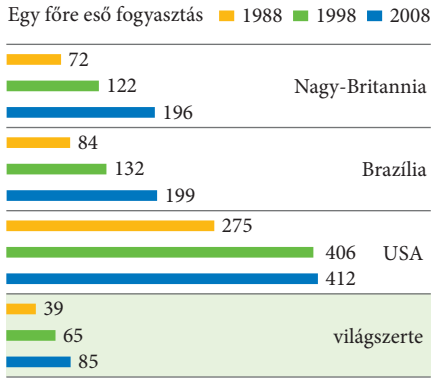
b) Hányan oldották meg hibátlanul a feladatot?

c) Született-e 12 pontos feladat?

15. A C osztályból 11-en emelt szintű érettségit írtak matematikából. Az 5. (választható) feladatot mindannyian választották. A legalacsonyabb pontszám 8 volt, és csupán egy hibátlan, 16 pontos megoldás született. A pontszámok átlaga 12,2 és 12,3 között volt, a mediánja 12, és nem csak egy módusz lett. Tamara és Beni egyaránt 10 pontot szereztek. Adj meg olyan adatsokaságot, amely a fenti feltételeknek megfelel, és számítsd ki az általad megadott számok szórását!

16. Hét darab pozitív számból álló számsokaságról a következőket tudjuk: az átlag 4, a módusz 1, a medián 3, a terjedelem pedig 9. Mik lehetnek a számsokaság elemei? Adj meg egy ilyen sokaságot!

17. A diagram az egyik vezető kólagyártó cég felmérését szemlélteti az egy főre jutó éves kólafogyasztást illetően. A mennyiségek 8 unciás (angolul: ounce, 8 ounce ≈ 2,5 dl) kiszerelésű adagokban értendők.



a) A három közül melyik országban a legnagyobb és a legkisebb arányú a kólafogyasztás növekedése 1988 és 1998, illetve 1998 és 2008 között?

b) A világ kólafogyasztásának hány százaléka köthető ehhez a három országhoz a jelzett években?

Az egyes országok lakossága (millió főben számolva):

	Nagy-Britannia	Brazília	USA	Föld
1988	56,9	141	244,5	5138
1998	58,4	166	275,9	5975
2008	61,2	187	304,4	6754

18. Bálint matematikajegyei az első félévben: 1, 2, 2, 5, 4, 3, 5.

a) Add meg a jegyek terjedelmét, móduszát és mediánját!

b) Számítsd ki a jegyek átlagát és szórását!

c) Bálint javítani szeretne a négyesért. Tanára felhívja rá a figyelmét, hogy 3,5-es átlag alatt nem adja meg a négyest (Bálint év elején alig dolgozott valamit!), ahhoz pedig, hogy kérdés nélkül a jobb jegyet ajánlja meg, az átlagnak el kell érnie a 3,65-ot. Hány ötöst kellene szereznie a fennmaradó két hétben Bálintnak ahhoz, hogy biztosan négyes lehessen félévkor?

19. Véletlenszerűen kiválasztunk egy 25-nél kisebb pozitív egész számot. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) többszöröse 3-nak;

b) osztható 4-gyel;

c) prímszám?

20. (Érettségi feladat, 2007)

A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható?

21. (Érettségi feladat, 2018)

A $\frac{100}{n}$ tört nevezőjében az n helyére véletlenszerűen beírunk egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az így kapott tört értéke egész szám lesz?

22. Egy parkolóban 29 autó parkol, közülük 7 környezetkímélő, azaz zöld rendszáma van. Ekkor néhány újabb autó érkezik, melyek mindegyike környezetkímélő. Hány autó érkezett a parkolóba, ha ezek után véletlenszerűen kiválasztva egy autót, $\frac{1}{3}$ a valószínűsége annak, hogy az környezetkímélő?

23. Ha 10 gyerek, köztük Bence és Dönci sorba áll, menynyi a valószínűsége, hogy ők ketten nem kerülnek egymás mellé?

24. Két dobókockával dobva mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 3?

25. Két dobókockával dobva mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) a dobott számok szorzata osztható 5-tel;

b) a dobott számok összege osztható 5-tel?

26. (Érettségi feladat, 2018)

Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. A dobott számokat (a dobás sorrendjében) egymás után írva egy kétjegyű számot kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 7-tel osztható számot kapunk?

27. Egy sorsjegyből 500 db-ot nyomtattak. 20 sorsjegy 1000 Ft nyereményt jelent, a többi sorsjegy nem nyerő, ha azt húzzuk, akkor nem nyerünk semmit, de nem is veszítünk semmit. Ha véletlenszerűen húzunk egy sorsjegyet, akkor mennyi a nyeremény várható értéke?

28. Egy sorsjegyből 1000 db-ot készítettek. Táblázatba foglaltuk, hogy a sorsjegyekkel mennyit lehet nyerni. Mennyi a nyeremény várható értéke, ha véletlenszerűen kapunk egy sorsjegyet?

Nyeremény	0	100	500	5000
Sorsjegy db-száma	900	70	20	10

29. Egy részvény árfolyama 6800 Ft. A szakértők szerint a következő évben a részvény értéke 0,1 valószínűséggel 18%-kal emelkedik, 0,4 valószínűséggel 10%-kal emelkedik, 0,3 valószínűséggel nem változik, és 0,2 valószínűséggel 20%-kal csökken. Mennyi a részvény várható értéke a jövő évre?

30. Egy zsákban 20 piros és 30 sárga golyó van, amelyeket egymástól tapintással nem lehet megkülönböztetni. Véletlenszerűen húzunk egyszerre két golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) mindkét golyó piros;

b) mindkét golyó sárga;

c) egyik golyó sárga, a másik piros?

31. Véletlenszerűen húzunk hármat visszatevés nélkül a T, T, T, T, T, É, É, É betűk közül. Mennyi a valószínűsége, hogy ki tudjuk rakni belőlük a TÉT szót?

32. Az egyik héten (2015 első játékhetében) azt figyelte meg Bence, hogy a hatos lottón a kihúzott számok között a legkisebb a 37-es volt. Elgondolkodott azon, vajon mennyi annak a valószínűsége, hogy a legkisebb kihúzott szám a 37-es. Majd azon gondolkodott, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy minden szám nagyobb, mint 36. (A hatos lottón 45 számból húznak ki 6 számot.) Mekkorák ezek a valószínűségek?

33. A 32 lapos magyar kártyából 6 lapot húzunk.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 király kerül a kezünkbe?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 király kerül a kezünkbe?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 király kerül a kezünkbe?

34. Egy busztársaság nyilvántartása szerint az elmúlt évben 60 buszuk közül 3-at kellett kisebb-nagyobb motorhiba miatt javítani, 10-en kellett gumihibát ja-

vítani, ráadásul további 2 buszon mindkét hibatípus előfordult.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egyszerre két buszt, akkor

a) mindkettőt gumihiba miatt javították;

b) legfeljebb egynél fordult elő motorhiba?

35. (Érettségi feladat, 2010)

Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közülük kétszer annyian vannak, akik látogatták az iskolanap rendezvényeit, mint akik nem látogatták. Az *Iskolaélet* című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az *Iskolaélet*et. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az *Iskolaélet*et?

36. Egy müzlit gyártó cég reklámja szerint az ő müzlisdobozaik közül „Hétből három ajándékot is rejt!”.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy ilyen müzlisdobozt, mekkora annak a valószínűsége, hogy abban lesz ajándék?

A bolt polcait mindennap újra feltöltik, így a müzlisdobozok sohasem fogynak el.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha a hét minden napján véletlenszerűen vásárolunk egy-egy ilyen müzlit, akkor a hét közül pontosan három dobozban lesz ajándék?

37. A totón 13+1 mérkőzésre lehet tippelni, mindegyikre háromfélét: 1, 2 vagy x.

a) Hány különböző módon tölthető ki a totószelvény?

b) Véletlenszerűen kitöltve a totószelvényt, mennyi a valószínűsége, hogy 13 mérkőzésre tippeltünk helyesen?

c) Véletlenszerűen kitöltve a totószelvényt, mennyi a valószínűsége, hogy 12 mérkőzésre tippeltünk helyesen?

38. Csilla egy kvízjátékot játszik. Élvezi a játékot, pedig még sok kérdésre nem tudja a választ, s ilyenkor véletlenszerűen tippel. Inkább nem kér segítséget. Ha 3 egymás utáni választós kérdésre nem tudja a választ, s ezért véletlenszerűen jelöli meg a négy lehetséges válasz közül az egyiket, mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan két választ eltalál? Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább két választ eltalál?

39. A 2000-es évek első évtizedében évente átlagosan 100-nál is több műholdat állítottak pályára. Ez azonban korántsem kockázatmentes dolog, a statisztikák szerint a műholdak kb. 7%-a már a fellövés során megsemmisül.

Ha elfogadjuk, hogy minden fellövésnél ennyi az esélye a megsemmisülésnek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő 10 műhold közül a fellövésnél

a) pontosan kettő semmisül meg;

b) legfeljebb kettő semmisül meg?

40.

a) Egy tízforintost ötször feldobva mekkora annak a valószínűsége, hogy több lesz a fej, mint az írás?

b) Egy százforintost négyszer feldobva mekkora annak a valószínűsége, hogy több lesz a fej, mint az írás?

41. 25 golyó van egy zsákban, melyek tapintásra egyformák. Közülük 15 zöld és 10 kék. Véletlenszerűen kihúzunk a zsákból 6 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a golyók között pontosan 3 zöld és pontosan 3 kék, ha

a) visszatevés nélkül húzunk;

b) visszatevéssel húzunk?

42. Egy tesztlap készítői 10 különböző kérdést szeretnének feltenni.

a) Hányféle lehet a kérdések sorrendje?

A tesztlap elkészült, kinyomtatták. A 10 kérdés mindegyikére igennel vagy nemmel lehet válaszolni.

b) Hány különböző módon tölthető ki egy kinyomtatott tesztlap?

Dönci nem készült fel a tesztlap kitöltésére, ezért véletlenszerűen válaszol a tíz kérdés mindegyikére.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Döncinek egyetlen jó válasza sem lesz?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Dönci pontosan 5 kérdésre ad jó választ?

A tesztlap alkotói azt szeretnék, hogy csak azokat a tesztlapokat fogadják el sikeresen kitöltöttként, amelyeken legalább 8 jó válasz van.

e) Mekkora a valószínűsége, hogy Dönci sikeresen tölti ki a tesztlapot?

66 Vektorok összeadása

BEVEZETŐ



A hétköznapi életben és a tudomány különböző területein **skalármennyiség**ekkel, valamint **vektormennyiség**ekkel tudjuk leírni a különböző jelenségeket, folyamatokat.

Skalármennyiségek azok a mennyiségek, amelyeket egy számmal és esetenként egy mértékegységgel adunk meg (pl. távolság, tömeg, idő), vektormennyiségek azok, amelyeket az előbbieken kívül az irányuk is jellemez (pl. elmozdulás, sebesség, erő).

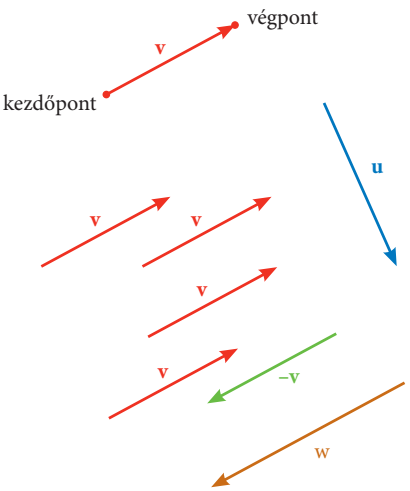
Tekintsük át és bővítsük ki ismereteinket a vektorokkal kapcsolatosan!

ELMÉLET

1. A geometriában egy szakaszt akkor mondunk irányítottnak, ha két határpontjáról megmondjuk, melyiket tekintjük kezdőpontnak és melyiket végpontnak (ez utóbbit nyíllal jelöljük).
Az egymással párhuzamos, azonos irányú, azonos hosszúságú **irányított szakasz**ok ugyanazt a **vektor**t határozzák meg. (Ezt úgy is mondhatjuk, hogy: az egymással párhuzamos, azonos irányú, azonos hosszúságú irányított szakaszok halmaza egy vektor.) Az ábrán a piros színnel rajzolt vektort **v**-vel jelöltük.
A vektor megjelenítésére (reprezentálására) az adott irányított szakaszok közül bármelyiket használhatjuk.

A vektort az **iránya** és az **abszolút értéke (hossza)** jellemzi.

A **v** vektor kezdőpontjának és végpontjának a távolságát a vektor abszolút értékének (a vektor hosszúságának) nevezzük. Jele: $|\mathbf{v}|$.

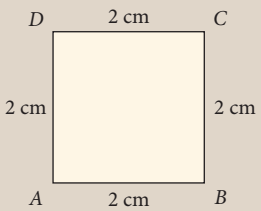


2. Két vektor egymás **ellentettje**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és ellentétes irányúak. Egy **v**-vel jelölt vektor ellentettjének a jele: $-\mathbf{v}$. A $-\mathbf{v}$ ellentettje a **v**.

Megjegyzés
Ha nem okoz félreértést, akkor a vektort reprezentáló irányított szakaszt magát is vektornak nevezzük.

FELADAT

1. Hasonlítsd össze azokat a vektorokat, amelyek a 2 cm oldalú $ABCD$ négyzet valamelyik csúcsából a négyzet egy másik csúcsába mutatnak!



a) Hány ilyen vektor van?

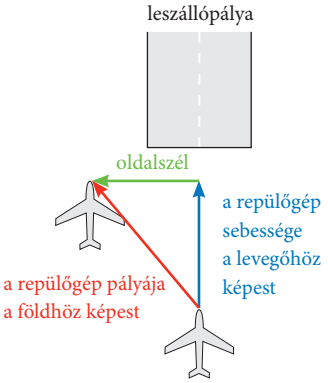
b) Ezek közül hány vektor abszolút értéke egyenlő az $\overrightarrow{AB}$ abszolút értékével? Melyik párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ vektorral?

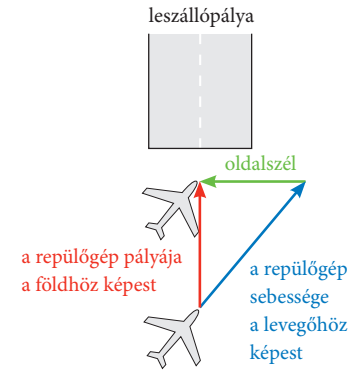
c) Melyik vektor abszolút értéke egyenlő az $\overrightarrow{AC}$ abszolút értékével? Közülük melyik párhuzamos az $\overrightarrow{AC}$ vektorral, és melyik merőleges rá?

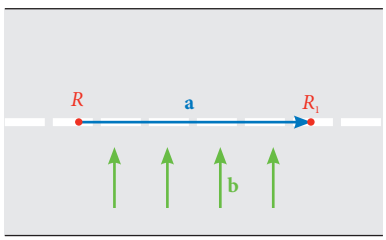
KIDOLGOZOTT FELADAT

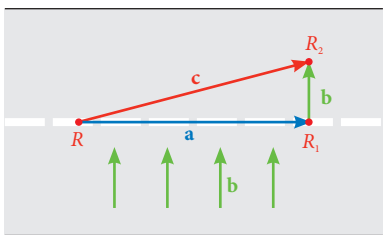
Idézet egy internetes cikkből: „A repülőterek tervezésénél a fő szempont az uralkodó szélirány, mivel az akár 4 km hosszú pályákat úgy kell megépíteni, hogy azok lehetőleg az ott leggyakrabban jellemző szél irányában legyenek használhatóak. […]
Ha a szél nem pontosan pályairányból fúj, vagyis »oldalas«, akkor pályairányra merőleges komponense is van. Ilyenkor a repülőgép oldalirányban lesodródna a pálya tengelyvonalából (jobb oldali felső ábra), amit a pilótának meg kell előznie. … A nagygépes repülésre jellemző módszer a szélre való »rátartás«. Ilyenkor a repülőgép tengelyvonala nem párhuzamos a pályával, vagyis a földről szemlélve olyan, mintha oldalazva, csúszva repülne. Ilyenkor a gép orra kissé a szél felé mutat (jobb oldali alsó ábra és az alábbi fénykép).”











Az ábrán az **a** vektor azt mutatja meg, hogy a vízszintesen repülő, leszálláshoz készülődő repülőgép egy másodperc alatt hogyan mozdul el a leszállópályához képest szélcsend esetén. (A szaggatott fehér vonal a leszállópálya középvonala.)
Egy leszállásnál jobbról erős keresztirányú szél fúj, amely egy másodperc alatt a **b** vektorral mozdítja el a repülőgépet.
Ha a repülőgép pilótája nem változtatna a szélcsendben megszokott leszállási folyamaton, akkor az eredetileg az R pontban lévő repülő hová kerülne egy másodperc alatt az R_1 helyett?

Megoldás
A repülőgép elmozdulását a gép motorja és az oldalszél együttesen alakítja. A gép egy másodperc alatti elmozdulását a **c** vektorral szemléltethetjük. A repülőgép tehát az oldalszél hatására az R_1 helyett az R_2 helyre jutna a pilóta közbeavatkozása nélkül. (A gép rövid idő alatt elsodródna a leszállópályától.)

ELMÉLET

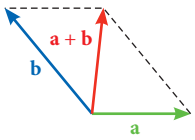
Két vektor összeadása

Ha egy vektor ugyanazt az eltolást hozza létre, mint az **a** vektorral és **b** vektorral való eltolás egymásutánja, akkor ezt a vektort az **a** és a **b** vektor **összegvektorának** nevezzük. Jele: **a** + **b**.
Vektorok **összegvektor**ának meghatározása:
– **Összefűzés** módszere (alkalmazható akár több, akár egymással párhuzamos vektorok esetén; két nem párhuzamos vektor esetén **háromszögmódszernek** is nevezik):

Az egyes vektorokat úgy fűzzük össze, hogy az egyik vektor végpontjába kerüljön a következő vektor kezdőpontja (és így tovább, ha több vektort összegzünk). Az összegvektor az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutat.



– **Paralelogrammamódszer** (két, egymással nem párhuzamos vektor esetén alkalmazható):
A két vektort közös kezdőpontból vesszük fel, és megszerkesztjük az ezek (mint oldalvektorok) által kifeszített paralelogrammát. Az összegvektor a közös kezdőpontból induló paralelogramma átlóvektora.



Kiegészítések

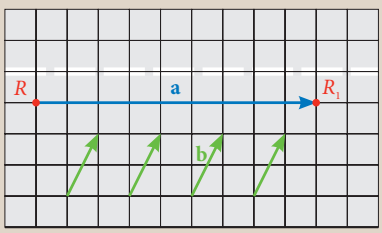
– Ha két olyan vektort adunk össze, melyek egymás ellentettjei, akkor az összegvektor kezdőpontja és végpontja egybeesik, vagyis 0 az összegvektor hosszúsága. A nulla hosszúságú vektort **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor iránya tetszőleges, minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges. A nullvektor jele írásban $\underline{0}$ vagy $\vec{0}$, nyomtatásban **0**.

– A két vektor összeadásának nevezett művelet teljesen eltér a két szám összeadásakor megismert művelettől.
A fizikában két vektor összege helyett a **két vektor eredője** elnevezés (is) használatos, de a művelet jele itt is a valós számok esetén használt + szimbólum.

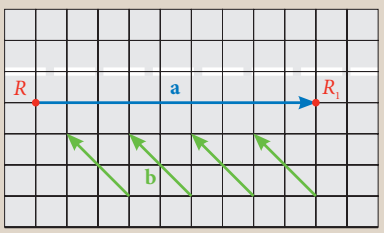
FELADAT

2. Határozd meg a füzetedben, hogy különböző szélirányok és szélerősségek esetén hová kerül az eredetileg az R helyen lévő repülőgép a szélcsendben „szokásos” R_1 helyett! (A megadott vektorok jelentése ugyanaz, mint a példában.)

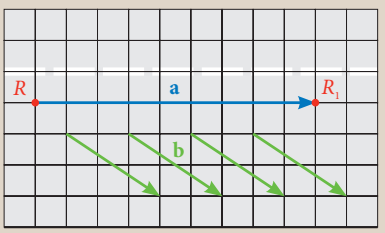
a)



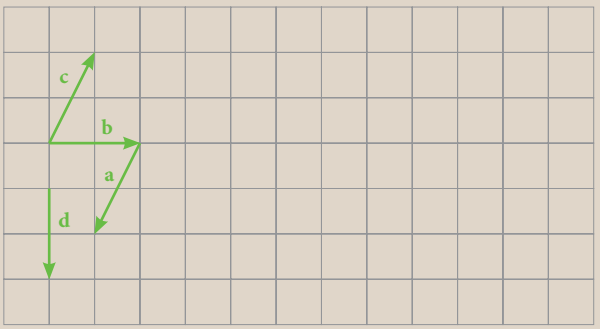
b)



c)



3. Az ábrán megadott vektorok mindegyikének rácspont a kezdőpontja és a végpontja is. A rács legkisebb négyzetének oldalhossza 1 egység.



a) Add meg mindegyik vektor hosszát!

b) Vannak-e a vektorok között egymással párhuzamosak?

c) Rajzold meg a rács segítségével a következő vektorokat a füzetedben:

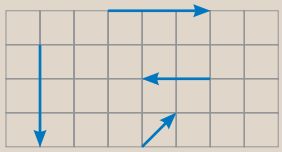
$\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{d}+\mathbf{a}$, $\mathbf{b}+\mathbf{d}$.

d) Mit figyelhetünk meg az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{b}+\mathbf{a}$, valamint a $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{c}+\mathbf{b}$ összegvektorokkal kapcsolatban?

e) Számítsd ki a megrajzolt összegvektorok hosszát!

4. Rajzold meg az egyes ábrákon lévő vektorok összegét a füzetedben!

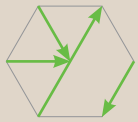
a)



b)

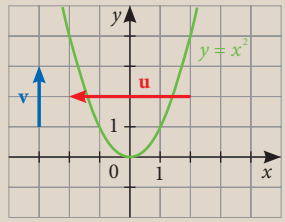


c)



5. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját told el először az **u** vektorral, majd az eltolással kapott grafikont told el a **v** vektorral!

A füzetedben dolgozz!



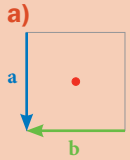
a) Add meg az eltolással kapott grafikonokhoz tartozó függvények hozzárendelési utasítását!

b) Add meg annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amely az eredeti függvény grafikonját a második eltolás után kapott grafikonba viszi át!

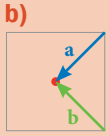
HÁZI FELADAT

1. Rajzold meg a két vektor összegét a füzetedben! (Az ábrán lévő négyzeteknek, illetve hatszögeknek pirossal jelöltük a szimmetriaközéppontját.)

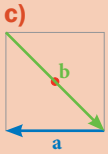
a)



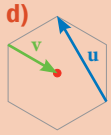
b)



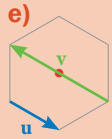
c)



d)



e)



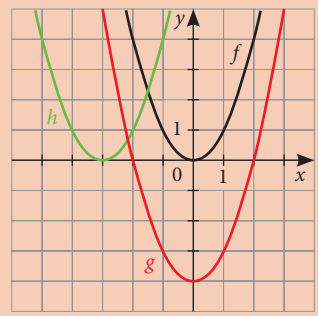
2. Rajzold meg a füzetedben annak az egyetlen eltolásnak a vektorát, amely az egymással egybevágó grafikonok esetén (jobb oldali ábra)

a) a *g* jelű grafikont az *f* jelűbe,

b) az *f* jelű grafikont a *h* jelűbe,

c) a *g* jelű grafikont a *h* jelűbe viszi át!

d) Milyen kapcsolat van az előbbi három esetben megadott eltolásvektorok között?



3. $|\mathbf{a}| = 6$ cm és $|\mathbf{b}| = 2{,}5$ cm, a vektorok iránya tetszőleges.

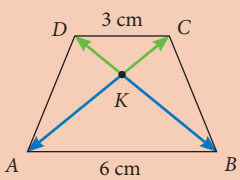
a) Legfeljebb mekkora lehet az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$? Rajzolj egy ilyen esetet!

b) Legalább mekkora az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$? Rajzolj egy ilyen esetet!

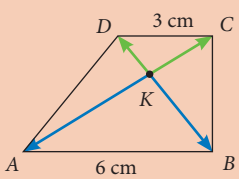
c) Számítsd ki, mekkora az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$!

4. Szerkeszd meg a *K* pontból az *ABCD* trapéz csúcsaiba vezető négy vektor összegét! (*K* a trapéz átlóinak metszéspontja.) Hol van ennek a vektornak a végpontja, ha a kezdőpontját *K*-ba helyezed? A füzetedben dolgozz!

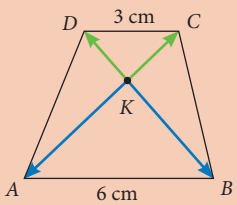
a)



b)



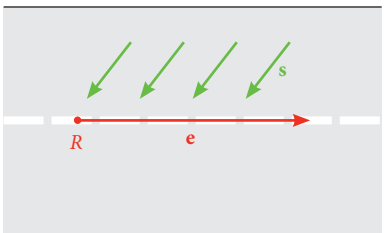
c)



67 Két vektor különbsége

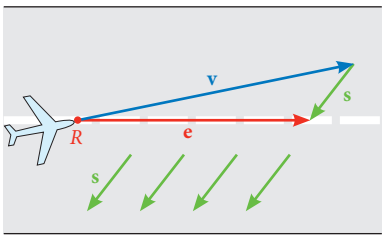
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan válassza meg a pilóta a repülőgépnek a levegőhöz viszonyított sebességét, ha a biztonságos leszálláshoz az előírt sebességgel kell haladnia a földhöz képest, de erős oldalszél fúj? A repülőgép az R pontban van, a leszálláshoz a földhöz képest **e** előírt sebességvektorral kellene repülnie, az oldalszél sebességét az **s** adja meg.



Megoldás

A 66. lecke kidolgozott feladatában láttuk, hogy a földhöz viszonyított sebességvektort megkapjuk, ha a repülőgép levegőhöz viszonyított **v** sebességvektorához hozzáadjuk a szél sebességvektorát. Tehát $\mathbf{e} = \mathbf{v} + \mathbf{s}$. Ennek alapján könnyen szerkeszthető a **v**, hiszen ha az R pontból indítjuk, akkor az utána fűzött **s** végpontja éppen az **e** végpontja kell, hogy legyen.



A **v** vektor az **e** és a $-\mathbf{s}$ vektor összege kell, hogy legyen, mivel a **v** vektor a leendő **e**-hez képest a szél hatását kell, hogy kompenzálja, tehát a szél ellen kell dolgoznia a pilótának, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{e} + (-\mathbf{s})$. A repülőgépnek – az ábra tanúsága szerint – a szélcsendben szokásosnál nagyobb sebességgel kell a földhöz képest haladnia, és „rá is kell fordulnia" a széliránra. Emiatt a repülőgép hossztengelye nem lesz párhuzamos a leszállópálya tengelyével.

Megjegyzés

A **v** vektort az **e** és az **s** különbségvektorának nevezzük, az **s** vektort pedig az **e** és a **v** különbségvektorának.
Jelekkel: $\mathbf{v} = \mathbf{e} - \mathbf{s}$ és $\mathbf{s} = \mathbf{e} - \mathbf{v}$.

FELADAT

1. Adott az ábra szerinti **k**; **m**; **v** vektor. Melyik vektort adjuk hozzá a **v**-hez, hogy

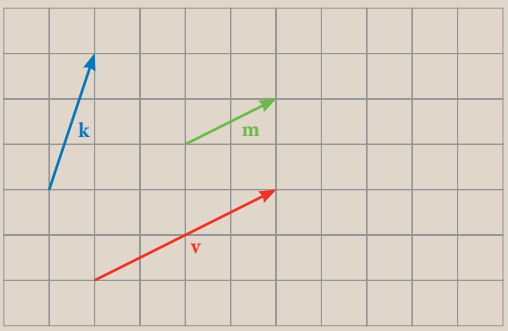
a) a **k**-t; **b)** az **m**-et; **c)** a **0**-t

kapjuk? Rajzold meg a vektorokat a füzetedben!

2. Adott az ábra szerinti **k**; **m**; **v** vektor. Melyik vektort adjuk hozzá a **k**-hoz, hogy

a) a **v**-t; **b)** az **m**-et; **c)** a **0**-t

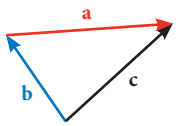
kapjuk? Rajzold meg a vektorokat a füzetedben!



ELMÉLET

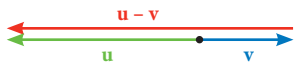
Két vektor kivonása

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor az **a** vektort a **c** és a **b** **különbségvektor**ának mondjuk, és $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ alakban jelöljük. Azt a **műveletet**, amely a **c**-ből és a **b**-ből előállítja a különbségüket, **kivonásnak** nevezzük.



Az ábra szerint $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, és így a különbség definíciója szerint $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$.
A $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ szerkesztése:
A **b** és **c** vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel; a kivonandó vektor (**b**) végpontjából a kisebbítendő vektor (**c**) végpontjába mutató vektor adja a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ különbségvektort.

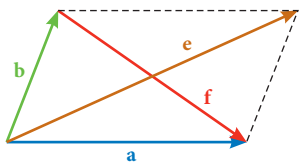
Az eljárás a párhuzamos vektorok esetén is érvényes.



Megjegyzés
Vegyük észre: $\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{b})$, azaz a vektorok különbsége előáll az egyik vektor és a kivonandó vektor ellentettjének összegeként.

KIDOLGOZOTT FELADAT

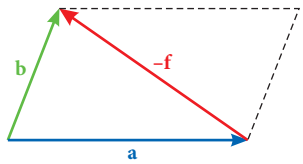
2. Írjuk fel a paralelogramma átlóvektorait a paralelogramma két, közös pontból induló oldalvektora segítségével!



Azt már korábban láttuk, hogy $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, a két vektor különbségénél mondottak szerint pedig $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Ha két nem párhuzamos vektort közös kezdőpontból mérünk fel, akkor a paralelogrammává kiegészített ábrán egyszerre szemlélhetjük a két vektor összegét és különbségét is.

3. Milyen kapcsolat van az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ között?



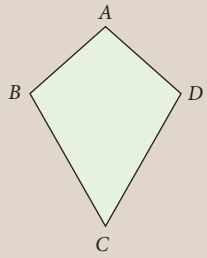
Ha az előző feladatban megadott **f** átlóvektor ellentettjét tekintjük, akkor láthatjuk, hogy ez éppen a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.
Ezek szerint az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ egymás ellentettje:
$-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $-(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

FELADAT

3.
a) Az $ABCD$ téglalapban $AB = 6$ cm, $AD = 2{,}5$ cm. Számítsd ki a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ és a $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ abszolút értékét!
b) Az $ABCD$ rombuszban $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 8$ cm, $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = 6$ cm.
Mekkora az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ hossza?

4. Szemléltesd konkrét példákkal, hogy igazak az alábbi állítások!
a) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$
b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$
c) $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$

5. Adott a konvex $ABCD$ deltoid, amelynek AC a szimmetriaátlója.



a) Rajzold meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ oldalvektorokat!

b) Melyik igaz, melyik hamis a következő kijelentések közül?

I. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;

II. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$;

III. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;

IV. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$;

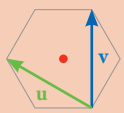
V. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ merőleges $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$ -re;

VI. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

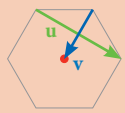
HÁZI FELADAT

1. Rajzold meg az $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ vektort! (Az ábrán lévő hatszögek szabályosak, a piros pont jelöli a szimmetriaközéppontjaikat.)

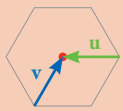
a)



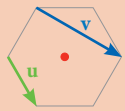
c)



b)



d)



2. Add meg rövidebben a vektorműveletek eredményét!

a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a})$

b) $\mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} + (-\mathbf{c}) - \mathbf{d}$

c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (-\mathbf{a})$

3. Milyen kapcsolat van a nem egyállású $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ között, ha

a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$;

b) az $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ vektor merőleges az $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ vektorra?

RÁADÁS

I. Változások

„Nincs, ami nem változnék, minden vándorol egyre,
Változtat s felforgat a természet keze mindent.”
(*Lucretius* római költő, Kr. e. I. sz.)

Az idő múlása sokszor együtt jár a változással. A változást a hétköznapokban kifejezhetjük szemléletesen („Óh, mennyit nőtt ez a gyerek tavaly óta!”) és pontosabban („Híztam két kilót.”; „Ötezer forinttal többet kaptam, mint a múlt hónapban.”). Minden esetben ugyanarról van szó: egy korábbi állapotot hasonlítunk össze valamilyen szempontból egy későbbi állapottal. Például a tavalyi magasságunkat az ideivel, a múlt heti testtömegünket a jelenlegivel, a múlt havi fizetésünket az e havi fizetésünkkel.

Hogyan fejezzük ki a változást?

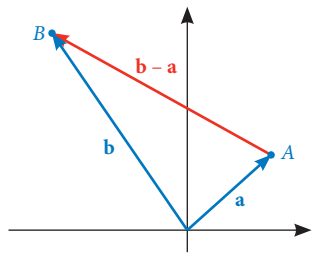
Minden esetben a kivonás művelete segítségével: az idei testmagasságunkból kivonjuk a tavalyi testmagasságunkat, a jelenlegi testtömegünkből a múltkori testtömegünket, az e havi fizetésünkből a múlt havi fizetésünket. A kivonás eredményével, **a különbséggel fejezzük ki a változást**.

Ez nem csak az egyetlen számmal kifejezhető mennyiségek (skalármennyiségek) esetében van így, a fizika minden olyan esetben ezt használja a mennyiségek megváltozásának kifejezésére, amikor a kivonás művelete értelmezve van. Minden esetben ugyanaz a „séma”: **változás = végállapot – kezdőállapot**.

Példa

Egy mozgó test az A pontból a B pontba került. Hogyan változott meg a helyzete?

Kezdetben az origóból induló **a** vektor adta meg a test helyzetét, a végállapotban pedig az origóból induló **b** vektor. Tehát hogyan változott meg a test helyzete?
„változás” = „végállapot” − „kezdőállapot”.
A test helyzetének megváltozását az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ különbségvektor (az elmozdulásvektor) adja meg.



II. Képrejtvény

Lépkedj az alábbi táblán a lehetséges útvonalakon! Minden mezőről az egyik szomszédos mezőre léphetsz tovább, és a lépés irányát a feladat megoldásához tartozó vektor iránya szabja meg. Melyik helyről indulva tudod bejárni a legtöbb mezőt?

A1: A **b** − **a** iránya.

A2: A vásárló elfeledkezett néhány termékről, ezért visszafelé húzza a bevásárlókocsit. Merre mozdul el a kocsi?

A3: Egy nyugalomban lévő (de haladó mozgásra képes) testet egy ló és egy egér húz az ábrán jelölt erőkkel. Merre mozdul el a test?

B1: Egy kétkarú emelő egyik végére erőt fejtünk ki. Merre mozdul el az emelő másik vége?

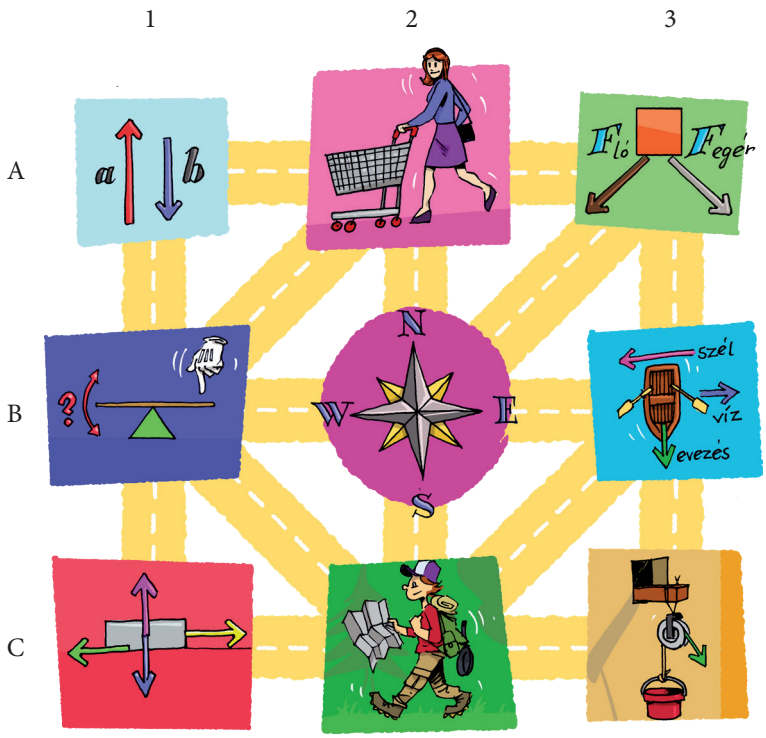
B2: A hajóskapitány arccal a keleti (az ábrán E-vel jelölt, east) irányba néz, és ott a hajókabin tükörsima felületében szemléli a tengert. Melyik égtáj irányába lát a kapitány? Válaszd ki azt a vektort, amelyik a középpontból a kérdezett égtáj felé mutat!

B3: Egy csónak mozog a vízen. Az evezés, a szél és a víz folyásának irányát láthatod a rajzon.
Az előbbi irányok mellett ismert, hogy $v_{\text{szél}} = 8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_{\text{víz}} = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_{\text{evezés}} = 3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Melyik irányba mozog a csónak?

C1: Az ábrán a talajon elhelyezkedő, nyugalomban lévő testre ható erőket és a test által kifejtett nyomóerőt jelöltük. Milyen irányú a testre ható erők eredővektora?
(Newton I. törvényének egy lehetséges megfogalmazása: A nyugalomban lévő vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző testre ható erők eredője mindig zérus.)

C2: Egy turista egy adott helyről túrázni indul, és sík terepen, északnyugati irányba megtesz 12 km-t, majd az érkezési helyen északkeleti irányba fordul, és megtesz így is 12 km-t. Milyen irányú a turista elmozdulásvektora a túra során, ha az az eredeti kiindulási pontból a végső érkezési pontba mutató vektor?

C3: Nagyobb terheket egyszerű gépek, például a képen látható állócsiga segítségével tudnak mozgatni. Merrefelé mozdul a vödör, ha a kötelet az ábrán jelölt irányba húzzuk?



68 Vektorok számszorosa

BEVEZETŐ

1. A kereskedelemben kapható gumiszalagok és gumikötelek (expanderek) alkalmasak a test különböző izomcsoportjainak edzésére, erősítésére. Ezek az eszközök hasonlóan működnek, mint a súlyok, mert növelik az ellenállást az edzés alatt, de hatékonyabbak a súlyoknál, mert a mozgás során állandó feszültséget fejtenek ki. Megfelelő, egyénre szabott gyakorlatok elvégzésével alkalmasak a mellkas, a hát, a vállak, a karok, a has és a lábak erősítésére, valamint különböző gyakorlatok esetén egyszerre akár több izmot is megmozgatnak. Minél nagyobb az ellenállás mértéke, annál nagyobb erőkifejtés kell ahhoz, hogy a gumiszalagot vagy a gumikötelet adott mértékben megnyújtsuk.



A szalagok és a kötelek által kifejtett ellenállás mértékét színekkel, feliratokkal jelzik.



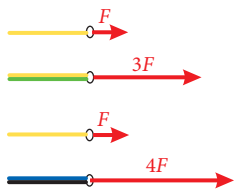
Az eszközökön öt különböző ellenállásszintet jelölnek.

A széles gumiszalagokból az extra könnyű, a könnyű, a közepes, a nehéz és az extra nehéz szint kapható.

A fogóval ellátott expanderen az edzés intenzitása beállítható egy vagy egyszerre több szalag használatával. A képen lévő sárga gumi ellenállásának mértéke 4,5 kg, a kék 7 kg, a zöld gumié 9 kg, a fekete 11 kg, a piros gumi 13,5 kg ellenállást hoz létre. Az összes szalag egyidejű felhelyezése 45 kg ellenállást biztosít. (Ahogy az más esetben is tapasztalható a tömeg mértékegységeivel, ebben az esetben is helytelenül a súly mértékegységeként használják.)

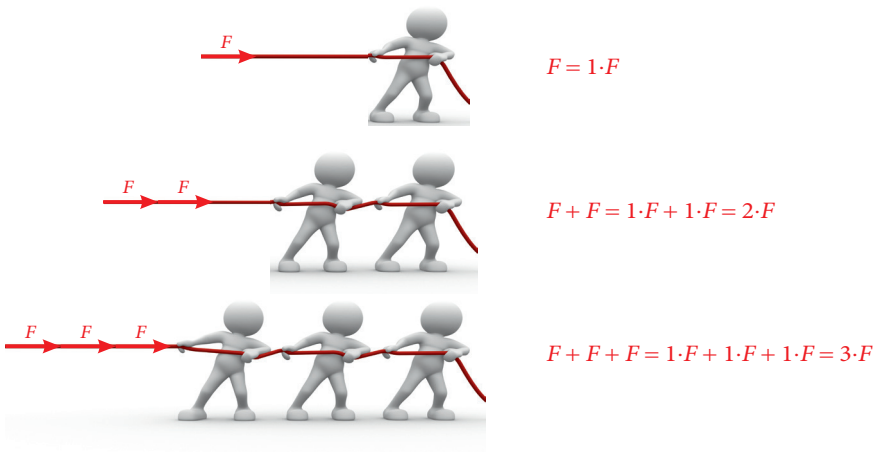
Hányszoros erőt kell kifejtenie az edzést végző személynek, ha a sárga gumikötél használatát követően még a zöld kötelet is felcsatolja a fogóra, és ugyanakkora megnyújtást szeretne létrehozni az eszközön, mint eredetileg a sárga kötéllel?

A sárga gumikötél megnyújtásához szükséges erőnek hányszorosa lesz az az erő, amivel az egyidejűleg felcsatolt kék és fekete gumikötél megnyújtható?



2. **a)** Az egyes esetekben milyen irányú és nagyságú erőt produkálhat az ellenfél, ha döntetlen a kötélhúzás állása?

b) Mekkora lesz a csapat által kifejtett erő nagysága, ha még 2 ugyanilyen képességű tag beáll a versenybe?



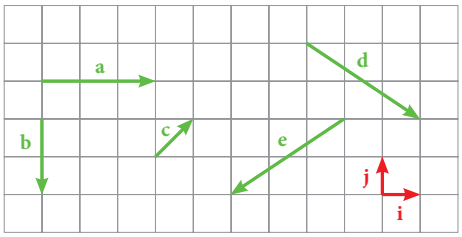
$F = 1 \cdot F$

$F + F = 1 \cdot F + 1 \cdot F = 2 \cdot F$

$F + F + F = 1 \cdot F + 1 \cdot F + 1 \cdot F = 3 \cdot F$

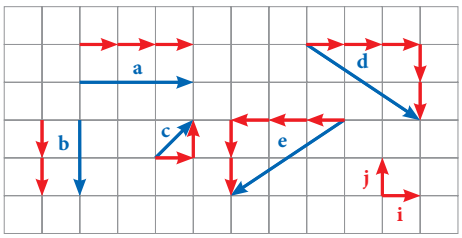
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan fejezhetjük ki az **i** és a **j** segítségével (a vektorösszeadás műveletét alkalmazva) az ábrán látható többi vektort?



Megoldás

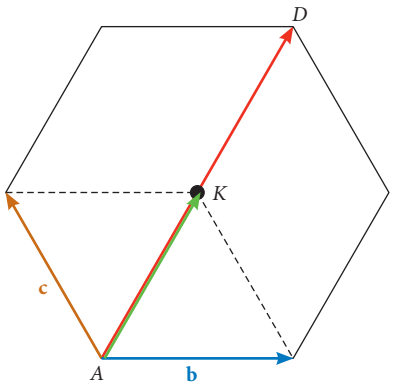
$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \mathbf{i}$,
$\mathbf{b} = (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$,
$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$,
$\mathbf{d} = \mathbf{i} + \mathbf{i} + \mathbf{i} + (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$,
$\mathbf{e} = (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{i}) + (-\mathbf{j}) + (-\mathbf{j})$.



Kiegészítések

- Az **a** vektor párhuzamos és egyirányú az **i** vektorral, és 3-szor olyan hosszú, ezért azt is mondhatjuk, hogy az **a** az **i**-nek a 3-szorosa. Jelöléssel: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$.
- A **b** vektor párhuzamos és ellentétes irányú a **j** vektorral, a hossza pedig kétszerese a **j** hosszának; ezért azt is mondhatjuk, hogy a **b** a **j**-nek a (-2)-szerese: $\mathbf{b} = -2\mathbf{j}$.
- A $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, ezért a fenti jelölések alkalmazásával: $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$.
- Az **e** felírható így: $\mathbf{e} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$. A fentiek miatt $-\mathbf{a} = -3\mathbf{i}$, tehát $\mathbf{e} = -3\mathbf{i} + (-2\mathbf{j})$.

2. Az ábrán egy szabályos hatszög látható. Megadtunk néhány vektort, amelyet a hatszög csúcsai, valamint az átlók metszéspontja határoz meg. Milyen kapcsolatban van az $\overrightarrow{AD}$ a **b** és a **c** összegével?



Megoldás

Az ábra szerint az $\overrightarrow{AD}$ a szabályos hatszög átlóvektora, a **b** és **c** a hatszögnek az A pontból induló két oldalvektora, K a hatszög középpontja.

A szabályos hatszög tulajdonságaiból következik, hogy $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AK}$.

Ez egyirányú az $\overrightarrow{AD}$-vel, és feleolyan hosszú. Ezért azt is mondhatjuk, hogy

$\overrightarrow{AD} = 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ vagy másképp: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

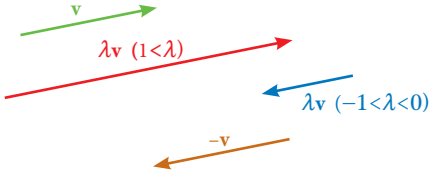
ELMÉLET

Definíció (vektor számszorosa)

A nullvektor bármilyen valós számszorosa nullvektor ($\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$; ahol λ valós szám).
Az **a** vektornak egy λ valós **számmal** (skalárral) **vett szorzatán** értjük azt a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ vektort, amely

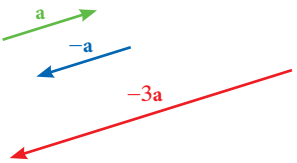
- az **a** vektorral párhuzamos,
- hossza az **a** hosszának $|\lambda|$-szerese,
- iránya:
  - **a** irányával megegyezik, ha $0 < \lambda$,
  - **a** irányával ellentétes, ha $\lambda < 0$,
  - tetszőleges, ha $\lambda = 0$ (ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ nullvektor).

Megjegyzések



1. Ha $1 < |\lambda|$, akkor $\lambda \cdot \mathbf{a}$ hosszabb, mint az $\mathbf{a}$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
   ha $|\lambda| < 1$, akkor $\lambda \cdot \mathbf{a}$ rövidebb, mint az $\mathbf{a}$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
   ha $1 = |\lambda|$, akkor $\lambda \cdot \mathbf{a}$ hossza egyenlő $\mathbf{a}$ hosszával.
2. $\lambda = -1$ esetén $\lambda \cdot \mathbf{a} = -1 \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$, vagyis az **a vektor ellentettje**.
3. Vektor számmal való szorzása
   Most találkoztunk először olyan művelettel, amelyben szereplő két mennyiség – egy szám és egy vektor – nem ugyanolyan jellegű halmazból való. Eddig minden esetben ugyanabból a halmazból választottuk a mennyiségeket: összeadtunk két számot, összeadtunk két vektort, két halmaz unióját vettük, kivontunk egymásból két számot, két vektort, két halmazt stb. Természetesnek vettük, hogy a művelet eredménye is ugyanabból a halmazból való, mint amelyből a két mennyiség.
   A leckében leírt definíció szerint látjuk, hogy a vektor számmal való szorzása eredményeként minden esetben vektort kapunk eredményül, és sohasem számot (vagy valami mást)! Ezért hibás, hogy $0 \cdot \mathbf{a} = 0$, mert a 0 egy szám. Helyesen $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, valamint $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, bármely valós k esetén.

Kiegészítések

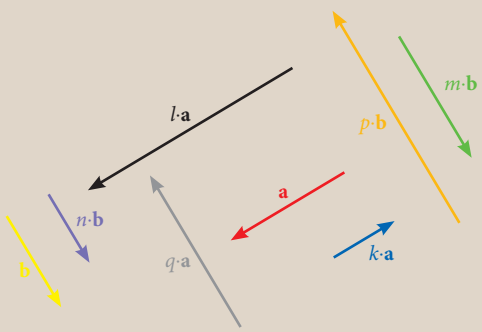


– A következő vektorok egyenlők:
  $(-3)\mathbf{a}$ (ez az $\mathbf{a}$-nak a (-3)-szorosa),
  $3(-\mathbf{a})$ (ez az $\mathbf{a}$ ellentettjének a 3-szorosa),
  $-(3\mathbf{a})$ (ez a $3\mathbf{a}$ ellentettje).
  Tehát $(-3)\mathbf{a} = 3(-\mathbf{a}) = -(3\mathbf{a}) = -3\mathbf{a}$. A $-3\mathbf{a}$ zárójel nélküli jelöléssel az előbbiek bármelyikével megegyezik.
– „Negatív szám és vektor szorzása”, „két vektor különbsége”, „vektor ellentettje”: mindhárom esetben ugyanazt a szimbólumot használjuk: a „−” jelet, de mindhárom esetben teljesen más a jel matematikai tartalma (valós szám előjele, két vektor kivonásának jele, vektor ellentettjének a jele). Ezért például: $\mathbf{a} - (5\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-5)\mathbf{b} = \mathbf{a} + 5(-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

FELADAT

1. Mutasd meg, hogy az 1. kidolgozott feladat ábráján megadott $\mathbf{d}$ és $\mathbf{e}$ összege a $(-4\mathbf{j})$-vel egyenlő, és $\mathbf{d} - \mathbf{e} = 6\mathbf{i}$!

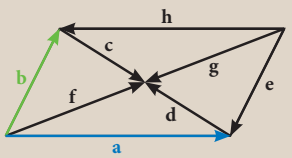
2. Az ábrán egymással párhuzamos, illetve egymásra merőleges vektorok vannak.
Add meg a k; l; m; n; p; q szorzótényezők lehetséges értékét (−1-hez, 0-hoz, 1-hez való relációját) úgy, hogy az ábra helyes legyen!



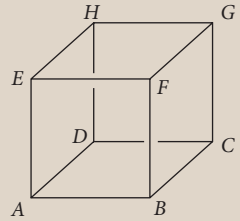
3. Egy paralelogramma két oldalvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. A paralelogrammába berajzoltunk néhány vektort. (A belső vektorok a szimmetria-középpontba mutatnak.) Keresd meg a berajzolt vektorok között az alábbi vektorokat:

$\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; $-\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $-\mathbf{a}$;

$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $-\mathbf{b}$; $\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$!



4. Az ábrán látható kockában legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AE}$. Írd fel ezeknek a vektoroknak a segítségével az alábbi vektorokat:
$\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{DQ}$, ahol Q a BF szakasz felezőpontja!



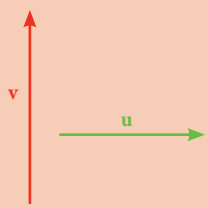
HÁZI FELADAT

1. **a)** Az **a** és a **b** párhuzamos és azonos irányú vektorok, az **a** hossza 24 mm, a **b** hossza 6 mm. Írd fel az **a**-t a **b** számszorosaként és a **b**-t az **a** számszorosaként!

b) Az **a** és a **b** párhuzamos és ellentétes irányú vektorok, az **a** hossza 8 mm, a **b** hossza 10 mm. Írd fel az **a**-t a **b** számszorosaként és a **b**-t az **a** számszorosaként!

c) Az **a** és a **b** párhuzamos vektorok, az **a** hossza 16 mm, a **b** hossza 40 mm. Írd fel az **a**-t a **b** számszorosaként és a **b**-t az **a** számszorosaként! Hány lehetőség van?

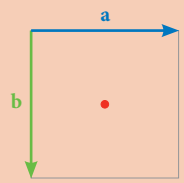
2. Az **u** hossza 24 mm, a **v** hossza 32 mm, a két vektor merőleges egymásra.
Szerkeszd meg a következő vektorokat, és számítsd ki az abszolút értéküket!



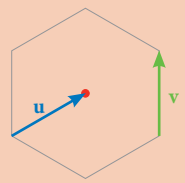
a) $2\mathbf{u}$, $2\mathbf{v}$, $-1{,}5\mathbf{v}$;
b) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$;
c) $4\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, $4\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, $-\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

3. Rajzold meg az adott vektorokra vonatkozó műveletek eredményét az ábrán! (A négyzetnek, illetve hatszögeknek pirossal jelöltük a szimmetria-középpontját.)

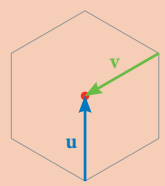
a) $0{,}5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$



b) $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$



c) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$





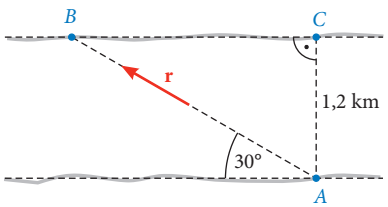
Ráadás

Vektor felbontása összetevőkre

KIDOLGOZOTT FELADAT

Katamarán indul a mesterséges tó egyik partjáról (A). A vízi jármű 1 másodperc alatt 12 m-t mozdul el, az 1 másodperc alatti elmozdulás vektora mindvégig az ábra szerinti ($\mathbf{r}$).



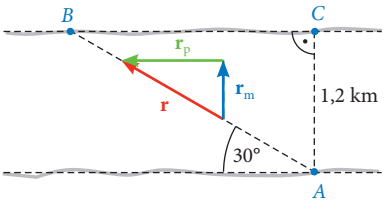


a) Mennyi idő alatt ér át a katamarán az 1,2 km távolságban levő szemközti partra (B-be)?

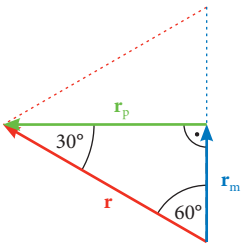
b) A parttal párhuzamosan húzódó úton egy autóra szerelt kamerával filmre veszik a katamarán mozgását. A minél élesebb felvétel érdekében a kamera rögzített állványon van, és az állványon nem mozgatható. Mekkora sebességgel haladjon az autó, hogy a katamarán mindig a partra merőlegesen beállított kamera látómezejének közepén helyezkedjen el?

Megoldás

Az $\mathbf{r}$ elmozdulásvektor megadható két olyan vektor összegeként is, amelyek egyike merőleges a mesterséges tó BC partjára ($\mathbf{r}_m$), a másik pedig párhuzamos vele ($\mathbf{r}_p$). E két vektor jelentése egyszerű: a partra merőleges $\mathbf{r}_m$ nagysága azt mutatja, másodpercenként hány méterrel lesz közelebb a katamarán a túlparthoz, a parttal párhuzamos $\mathbf{r}_p$ nagysága pedig azt mutatja, hogy másodpercenként hány méterrel kerül távolabb az AC egyenestől.



A megfelelő részletet kinagyítva és a szabályos háromszög tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy



$$|\mathbf{r}_m| = \frac{|\mathbf{r}|}{2} \text{ és } |\mathbf{r}_p| = \frac{|\mathbf{r}|\sqrt{3}}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$|\mathbf{r}_m| = 6$ (méter) és $|\mathbf{r}_p| = 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ (méter).

a) A katamarán másodpercenként 6 méterrel kerül közelebb a túlparthoz, azaz 200 másodperc alatt éri el azt.

b) Az elmozdulásvektor parttal párhuzamos összetevőjének nagysága 10,4 m, tehát a parton haladó kamerának másodpercenként ugyanekkora utat kell megtennie. Az autó sebessége $10{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 37{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Megjegyzés: a feladat vektorok alkalmazása nélkül is megoldható, ennek részletezésétől most eltekintünk.

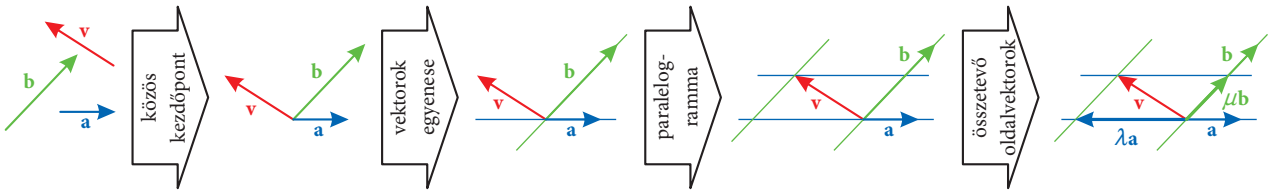
ELMÉLET

Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a síknak két nem párhuzamos vektora!

Ekkor a sík egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre, vagyis $\mathbf{v}$ előáll az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok számszorosainak összegeként.

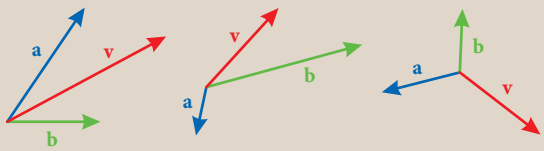
Jelöléssel: $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, ahol $\lambda \in \mathbf{R}$; $\mu \in \mathbf{R}$; $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

A **v** vektor **a** és **b** irányú összetevői megszerkesztésének lépései:



FELADAT

1. Rajzold fel az ábrán szereplő **v** vektor **a** és **b** vektorokkal párhuzamos összetevőit!



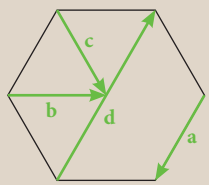
2. Az ábrán egy szabályos hatszögben hoztunk létre vektorokat. A **c** és **b** a hatszög szimmetria-középpontjába mutat. Fel lehet-e bontani a **c** vektort

a) az **a** vektorral és a **b** vektorral;

b) az **a** vektorral és a **d** vektorral;

c) a **b** vektorral és a **d** vektorral párhuzamos összetevőkre?

Ha igen, akkor bontsd fel! Ha nem, akkor indokold meg, hogy miért nem! A füzetedben dolgozz!

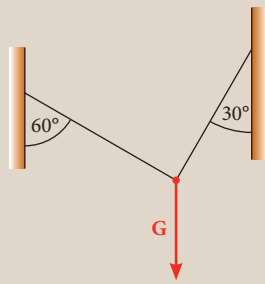


3. Használd a 2. feladat ábráját! Rajzold meg a következő vektorokat!

a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$ **c)** $\mathbf{w} = 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$

b) $\mathbf{v} = 0\mathbf{b} + (-2)\mathbf{c}$

4. Hajlékony fonálra egy 20 newton súlyú tárgyat erősítettek az ábra szerint. Szerkeszd meg a tárgy súlyának (**G**) a tárgyat tartó két fonáldarabbal párhuzamos összetevőit, és számítsd ki ezek nagyságát is! A füzetedben dolgozz!

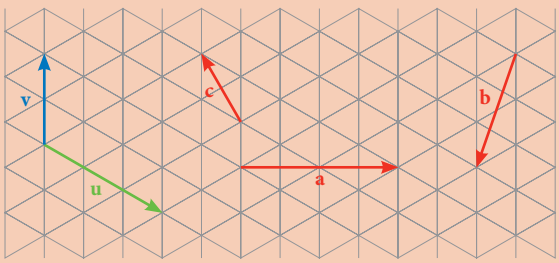


HÁZI FELADAT

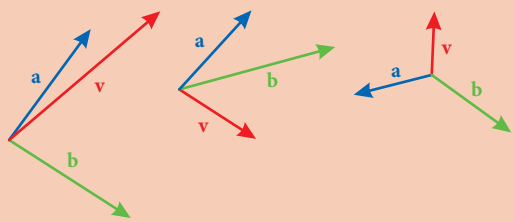
1. Rajzold meg **p**, **q**, **r** és **s** vektorokat! Írd fel **a**, **b** és **c** vektorokat **u** és **v** vektorok segítségével!

a) $\mathbf{p} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + 1\mathbf{v}$ **c)** $\mathbf{r} = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \left(-\frac{3}{2}\right)\mathbf{v}$

b) $\mathbf{q} = -1\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{v}$ **d)** $\mathbf{s} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$



2. Rajzold fel a következő ábrán szereplő **v** vektor **a** és **b** vektorokkal párhuzamos összetevőit!



3. Használd az órai 2. feladat ábráját! Fel lehet-e bontani a **d** vektort

a) az **a** vektorral és a **b** vektorral;

b) az **a** vektorral és a **c** vektorral;

c) a **b** vektorral és a **c** vektorral

párhuzamos összetevőkre?

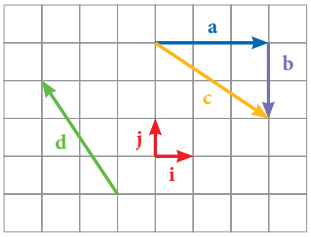
Ha igen, akkor bontsd fel! Ha nem, akkor indokold meg, hogy miért nem!

69 Vektorok a koordináta-rendszerben

BEVEZETŐ

Adott a síkon az **i** és a **j** egymásra merőleges **egységvektor** (olyan vektor, amelynek hossza 1).

Állítsuk elő az ábrán lévő **a**; **b**; **c**; **d** vektorokat az **i** és a **j** vektorokkal párhuzamos összetevők segítségével! (Az ábrán lévő vektorok kezdőpontja és végpontja rácspontban helyezkedik el.)



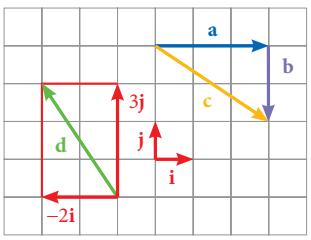
Megoldás

Az **a** és a **b** vektoroknak az **i**, valamint a **j** vektorral való kapcsolata könnyen látható a négyzetrácsban történő elhelyezés miatt:

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{i}$ $\quad \mathbf{a} = 3\mathbf{i}$ $\qquad \mathbf{b} \parallel \mathbf{j}$ $\qquad \mathbf{b} = -2\mathbf{j}$

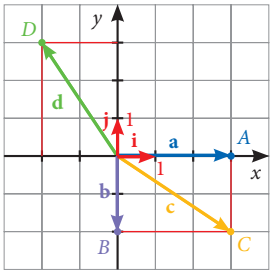
A **c** előáll az **a** és a **b** összegeként, így: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

A **d** előállításához az **i** és a **j** vektort indítsuk a **d** kezdőpontjából!



$\mathbf{d} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Mivel a vektorok a sík tetszőleges pontjából felrajzolhatók, ezért célszerű azok mindegyikét közös kezdőpontból indítani. A rajz alapján látható, hogy az alapul szolgáló **i** és **j** vektorok **(bázisvektorok)** a közöttük lévő 90°-os hajlásszög miatt ráilleszthetők egy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire.



Ha a felbontandó vektorok esetében minden felírásban megjelenítjük az **i** és **j** bázisvektorokat, akkor:

$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, $\quad A(3; 0)$;

$\mathbf{b} = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\quad B(0; -2)$;

$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\quad C(3; -2)$;

$\mathbf{d} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\quad D(-2; 3)$.

Könnyen észrevehetjük, hogy az **i** és a **j** vektorok együtthatói megegyeznek a megfelelő vektorok végpontjának koordinátáival.

ELMÉLET

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben:

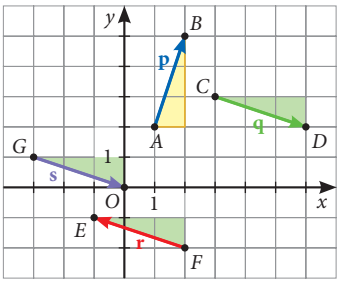
Bázisvektoroknak nevezzük az origóból az (1; 0) pontba mutató **i** és a (0; 1) pontba mutató **j** egységvektorokat.

Azt mondjuk, hogy az **i** és a **j** vektorok bázist (vagy bázisrendszert) alkotnak.

1. Vektor koordinátái:
   - A sík bármely **a** vektora egyértelműen felírható **i** és **j** bázisvektorok számszorosainak összegeként $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ alakban.
   - A felbontásban szereplő együtthatók az **a** koordinátái, $\mathbf{a}(a_1; a_2)$.

2. Helyvektor:
   – Az $A(a_1; a_2)$ pont helyvektora az origóból az A pontba mutató vektor.
3. Pont koordinátái:
   – Egy pont koordinátái megegyeznek az oda mutató helyvektor koordinátáival. Például az $A(a_1; a_2)$ pontba mutató **a** esetén $\mathbf{a}(a_1; a_2)$.

KIDOLGOZOTT FELADAT



a) Olvasd le az ábrán lévő vektorok kezdőpontjainak és végpontjainak koordinátáit! Rajzold meg az egyes vektorokkal egyenlő helyvektorokat a koordináta-rendszerben, és állapítsd meg a helyvektorok koordinátáit!
Milyen kapcsolat van az elsőként, illetve a másodikként meghatározott koordináták között?

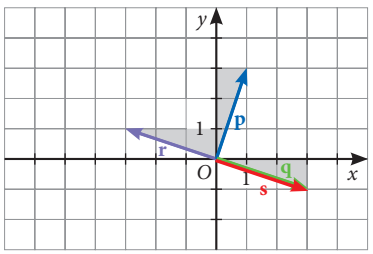
b) Milyen az egymáshoz viszonyított hossza, iránya az egyes vektoroknak? Milyen kapcsolat van helyvektoraik koordinátái között?

c) Rajzold meg a $\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $\mathbf{p} - \mathbf{s}$; $2\mathbf{r}$; $\mathbf{r} - \mathbf{s}$ vektorműveletek eredményét, és határozd meg a kapott vektorokkal egyenlő helyvektorok koordinátáit!
Milyen kapcsolatot veszel észre az eredeti vektorok és a művelet elvégzése után kapott vektorok koordinátái között?

Megoldás

a)

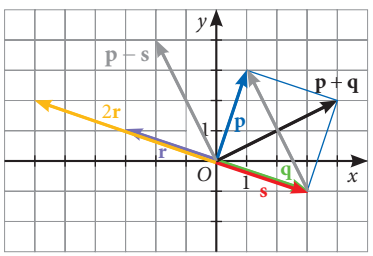
Kezdőpont	$A(1; 2)$	$C(3; 3)$	$F(2; -2)$	$G(-3; 1)$
Végpont	$B(2; 5)$	$D(6; 2)$	$E(-1; -1)$	$O(0; 0)$
Helyvektor	$\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}\,(1; 3)$	$\mathbf{q} = \overrightarrow{CD}\,(3; -1)$	$\mathbf{r} = \overrightarrow{FE}\,(-3; 1)$	$\mathbf{s} = \overrightarrow{GO}\,(-3; 1)$



A vektorok koordinátái megegyeznek a végpont és kezdőpont megfelelő koordinátáinak különbségével.

b) A **p**, **q**, **r**, **s** vektorok hossza megegyezik egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogójának hosszával, amelyben a két befogó hossza 1, illetve 3 egység. A Pitagorasz-tétel alapján a **p**, **q**, **r**, **s** vektorok $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ egység hosszúak.
Egymással párhuzamos a **q**, az **s**, az **r**.
Koordinátáik egymás 1- vagy −1-szeresei.
A **q**, az **s**, az **r** mindegyikére merőleges a **p**.
A **p** koordinátáit megkaphatjuk, ha a **q**, az **s**, az **r** koordinátáit felcseréljük, és az egyik koordináta előjelét megváltoztatjuk.
A **q**-val azonos irányú az **s**, mindkettővel ellentétes irányú az **r**.
A **q** és az **s** koordinátái megegyeznek, az **r** koordinátái az előbbiek ellentettjei.
Az előbbiek miatt $\mathbf{q} = \mathbf{s} = -\mathbf{r}$.

c) $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ koordinátái (4; 2); akkor is ez adódik, ha a **p** és **q** megfelelő koordinátáit összeadjuk;
$\mathbf{p} - \mathbf{s}$ koordinátái (−2; 4); akkor is ez adódik, ha a **p** megfelelő koordinátáiból kivonjuk az **s** megfelelő koordinátáit;
$2\mathbf{r}$ koordinátái (−6; 2); akkor is ez adódik, ha az **r** koordinátáit 2-vel megszorozzuk.



Megjegyzés

A feladatban megadott vektorok egyenlők az azokból képzett helyvektorokkal, ezért hosszaik megegyeznek.

Az AB szakasz egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amely befogóinak hossza 1 és 3. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor hossza a derékszögű háromszög átfogójának a hossza, így a Pitagorasz-tétellel számolva: $|\mathbf{p}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Az $\mathbf{r} = \overrightarrow{FE}\,(-3; 1)$ vektor koordinátáinak megrajzolásával ugyancsak derékszögű háromszöget kapunk, de ebben az esetben a derékszögű háromszög befogóinak hosszát az első koordináta abszolút értéke és a második koordináta adja.

A Pitagorasz-tétel miatt: $|\mathbf{r}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Egy $\mathbf{v}(-2; -7)$ vektor esetén a vektor koordinátáinak megrajzolásával kapott derékszögű háromszög befogóinak hosszát a koordináták abszolút értéke adja, ezért a Pitagorasz-tétel alapján: $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$ adódik.

Az előbbiek alapján látszik, hogy a helyvektor hosszát megadja a koordinátái négyzetösszegének négyzetgyöke.

ELMÉLET

1. $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái

$A(a_1; a_2)$
$B(b_1; b_2)$ ⟶ $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

$\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: a végpont megfelelő koordinátái – a kezdőpont megfelelő koordinátái

2. Műveletek vektorokkal

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok és c valós szám esetén:

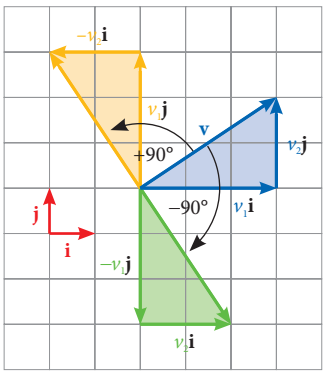
Két vektor összege	$\mathbf{a} + \mathbf{b}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
Két vektor különbsége	$\mathbf{a} - \mathbf{b}\,(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$
Vektor számszorosa	$c \cdot \mathbf{a}\,(c \cdot a_1; c \cdot a_2)$

A koordinátákkal végzett művelet megfelel a vektorokkal végzett műveletnek.

3. Vektor 90°-os elforgatása

Ha egy vektort 90°-kal elforgatunk, akkor a koordinátái felcserélődnek, és az egyik koordináta előjele megváltozik.

$(v_1; v_2)$ +90°-os elforgatottja $(-v_2; v_1)$
$(v_1; v_2)$ −90°-os elforgatottja $(v_2; -v_1)$



4. Vektor hossza (abszolút értéke)

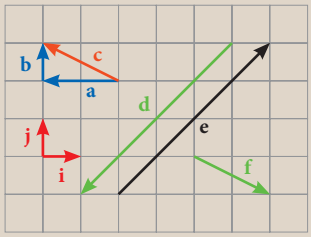
A $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ vektor hossza: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Ha $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$,

akkor $|\mathbf{v}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

FELADAT

1. **a)** Add meg az **i**, **j** bázisrendszerben az ábra mindegyik vektorának koordinátáit!



b) Számítsd ki az ábra mindegyik vektorának a hosszát a megadott koordináták segítségével!

c) Igaz-e, hogy a $\mathbf{g}(-3;\ 1{,}5)$ vektor párhuzamos az ábra egyik vektorával?

d) Igaz-e, hogy $0{,}4\mathbf{e} = 0{,}4\mathbf{d}$?

e) Igaz-e, hogy $|0{,}4\mathbf{e}| = 0{,}4 \cdot |\mathbf{d}|$?

f) Szerkeszd meg a $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ vektort, és add meg a koordinátáit!

g) Forgasd el a **c**-t (+90°)-kal, és add meg az elforgatott vektor koordinátáit!

2. Add meg az összes olyan vektort a koordinátáival az **i**; **j** bázisrendszerben, amely párhuzamos az **u** vektorral, és feleolyan hosszú, mint **u**, ha

a) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i}$; **b)** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

3. Add meg az összes olyan vektort a koordinátáival az **i**; **j** bázisrendszerben, mely merőleges a **v** vektorra, és háromszor olyan hosszú, mint **v**, ha

a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; **b)** $\mathbf{v}\,(-1;\ 2)$.

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ és $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

a) Határozd meg az $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ koordinátáit!

b) Számítsd ki az $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ hosszát!

HÁZI FELADAT

1. Az **i**, **j** bázisrendszerben adottak a következő vektorok: $\mathbf{a}(3;\ -4)$, $\mathbf{b}(12;\ 5)$, $\mathbf{c}(-20;\ -21)$.

a) Számítsd ki a hosszukat!

b) Ábrázold az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ összegvektort és az $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ különbségvektort, és add meg a koordinátáikat!

2. Add meg az összes olyan vektort az **i**, **j** bázisrendszerben, amely párhuzamos az **u**-val, és 2-szer olyan hosszú, mint az **u**, ha

a) $\mathbf{u} = -3\mathbf{j}$; **c)** $\mathbf{u}(4;\ 0)$;

b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; **d)** $\mathbf{u}(1;\ -1)$.

3. Add meg az **i**, **j** bázisrendszer összes olyan vektorát, amely merőleges az **u**-ra, és 2-szer olyan hosszú, mint az **u**, ha

a) $\mathbf{u} = -3\mathbf{j}$; **c)** $\mathbf{u}(4;\ 0)$;

b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; **d)** $\mathbf{u}(1;\ -1)$.

4. Adottak az $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ vektorok.

a) Határozd meg $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $3\mathbf{a}$; $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ koordinátáit!

b) Számítsd ki $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ értékét!

5. Az ábrán lévő minden vektor kezdő- és végpontja a koordináta-rendszer egy-egy rácspontja.

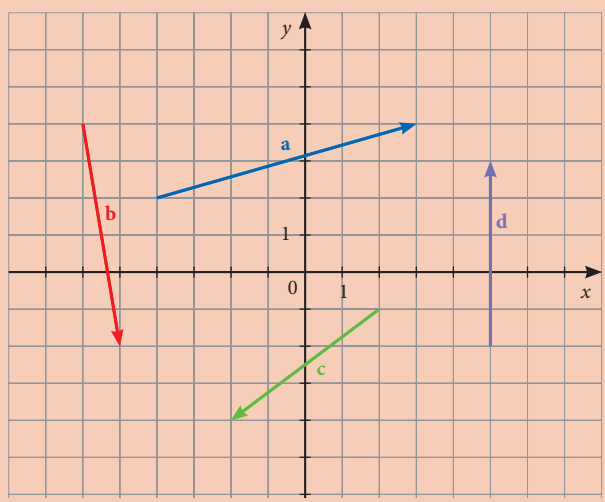
a) Rajzold be az ábrára az egyes vektorokkal egyenlő helyvektorokat!

b) Határozd meg a vektorok koordinátáit!

c) Számítsd ki a vektorok hosszát!

d) Van-e olyan vektor az ábrán, amely párhuzamos a $\mathbf{v}(4;\ 3)$ vektorral?

e) 90 fokos elforgatottja-e valamelyik vektornak az $\mathbf{u}(6;\ -1)$ vektor?

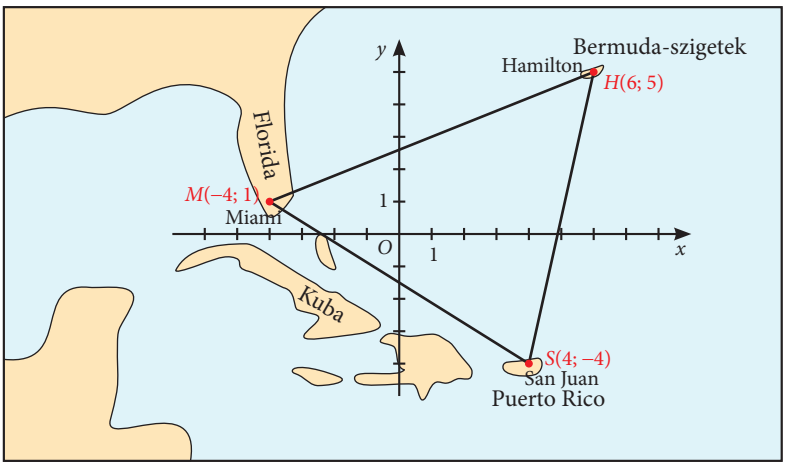


70 Távolság, kerület, terület

BEVEZETŐ

A Bermuda-háromszög az Atlanti-óceán egy háromszög alakú része, ami repülőgépek és hajók különös eltűnéséről vált ismertté. A háromszög csúcsait földrajzilag nagyjából Hamilton (a Bermuda-szigetek fővárosa), Miami (Florida legnépesebb városa) és San Juan (Puerto Rico fővárosa) alkotják.

Határozd meg a Bermuda-háromszög kerületét és területét, ha a térképre illesztett derékszögű koordináta-rendszerben a csúcspontok koordinátái $M(-4; 1)$; $S(4; -4)$ és $H(6; 5)$, valamint tudjuk, hogy a koordináta-rendszerben 1 egység a valóságban 160 km-nek felel meg! Az említett földrajzi helyeket tekinthetjük egy síkban lévőknek, mert a feladat szempontjából a térképen való megjelenítés jó leképezése a valóságos helyzetnek.



A háromszög kerülete a háromszög oldalhosszainak összege.

A háromszög egy oldalának hossza megegyezik az oldalt alkotó két csúcspont távolságával.

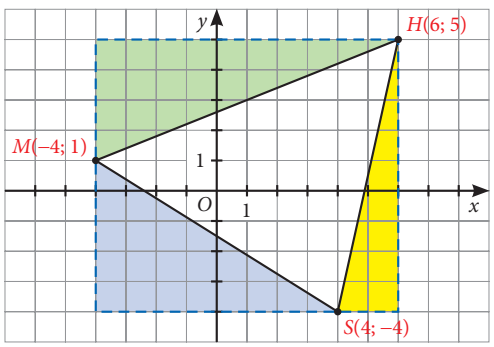
Két pont távolsága a pontok által meghatározott vektor hossza, ezért $MS = \left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{(4-(-4))^2+(-4-1)^2} = \sqrt{89}$.

Hasonlóan adódik $SH = \left|\overrightarrow{SH}\right| = \sqrt{(6-4)^2+(5-(-4))^2} = \sqrt{85}$, valamint

$HM = \left|\overrightarrow{HM}\right| = \sqrt{(6-(-4))^2+(5-1)^2} = \sqrt{116}$.

Tehát a háromszög kerülete $\sqrt{89}+\sqrt{85}+\sqrt{116} \approx 29{,}4$ egység, ezért a Bermuda-háromszög kerülete $29{,}4 \cdot 160$ km ≈ 4700 km.

A háromszög területének meghatározásához eljuthatnánk a tanult területképletek $\left(T = \frac{a \cdot m_a}{2};\ T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}\right)$ segítségével, de az ezekhez szükséges adatok meghatározása túlságosan bonyolult lenne, ezért másképp okoskodunk.



Hozzunk létre egy olyan (lehető legkisebb oldalhosszúságú) téglalapot, amely magában foglalja a háromszöget, és amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!

Az ábra alapján látható, hogy az MSH háromszög területe adódik, ha a felrajzolt téglalap területéből kivonjuk a kék, a sárga és a zöld derékszögű háromszögek területét:

$$T_{MSH\triangle} = 10 \cdot 9 - \frac{8 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 9}{2} - \frac{10 \cdot 4}{2} = 41 \text{ területegység,}$$

tehát a Bermuda-háromszög területe közelítőleg $41 \cdot 160^2$ km^2 $= 1\,049\,600$ km^2.

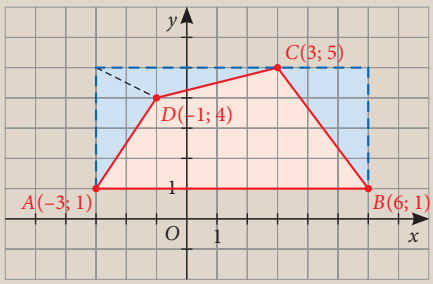
ELMÉLET

Az AB szakasz hossza egyenlő az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok távolságával, ami megegyezik az $\overrightarrow{AB}$ vektor abszolút értékével, ezért
$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

FELADAT

1. Rajzolj egy derékszögű koordináta-rendszert! Jelöld meg az $A(-4; -7)$, $B(8; -3)$, $C(-4; 3)$, $D(0; 3)$, $E(3; -7)$, $F(8; 3)$ pontokat! Számítsd ki
a) az ABD háromszög; **b)** az EFC háromszög kerületét és területét!

2. Számítsd ki az ábrán megadott $ABCD$ négyszög területét!



a) Rajzolj olyan téglalapot, amely magába foglalja a négyszöget, és az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!
b) Mekkora a téglalap területe?
c) Mennyi az $ABCD$ négyszöghöz toldott háromszögek területe?
d) Mennyi az $ABCD$ négyszög területe?

3.
a) Határozd meg a négyzet kerületét és területét, ha két szomszédos csúcsa $A(1; 2)$ és $B(6; -10)$!
b) Határozd meg a négyzet kerületét és területét, ha két szemközti csúcsa $A(7; -3)$ és $C(1; 5)$!
c) Határozd meg a szabályos háromszög kerületét és területét, ha két csúcsa $A(-12; 20)$ és $B(15; -16)$!

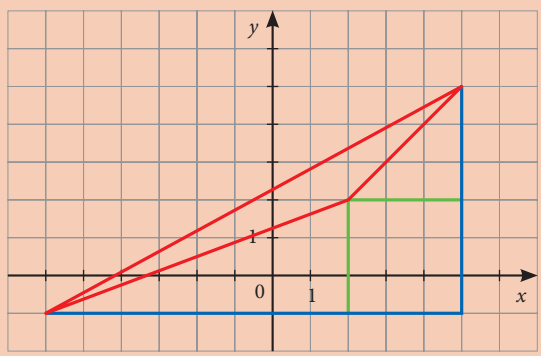
HÁZI FELADAT

1. Határozd meg az ABC háromszög súlyvonalainak hosszát, ha $A(1; -4)$; $B(7; 2)$ és $C(-5; -2)$!

2. Adottak a $P(1; -4)$, $Q(7; 2)$ és $R(-5; -2)$ pontok. Határozd meg a PQR háromszög kerületét és területét!

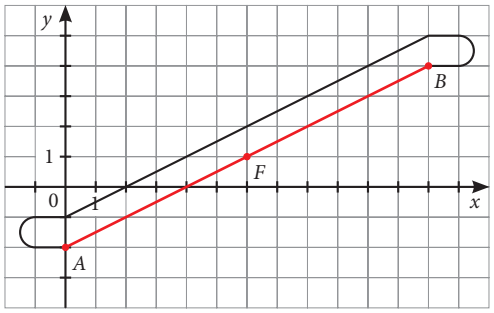
3. Rendezd növekvő sorrendbe az alábbi szakaszhosszakat!
a szakasz: Egy olyan négyzet átlójának hossza, amelynek két szomszédos csúcsa $A(1; 7)$ és $B(-2; 3)$.
b szakasz: Egy olyan szabályos háromszög magasságának a hossza, amelynek két szomszédos csúcsa $C(5; -6)$ és $D(0{,}2; 0{,}4)$.
c szakasz: Egy olyan szabályos hatszög leghosszabb átlójának hossza, amelynek két szomszédos csúcsa $E(8; 7)$ és $F(5; 9)$.

4. Az ábrán lévő háromszög három csúcsa a koordináta-rendszer egy-egy rácspontja. Add meg a csúcspontok koordinátáit! Határozd meg a háromszög területének pontos értékét! Segítségként használd a berajzolt, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú síkidomokat!



71 Felezőpont

BEVEZETŐ



Egy áruház mozgólépcsője az utcaszint alatti 2 méteres mélységből, az $A(0; -2)$ pontból indulva, egyenletes sebességgel 30 másodperc alatt a $B(12; 4)$ pontba viszi fel a lépcsőn álló vásárlókat. Az utcaszinthez képest milyen magasan lesz, illetve hány métert haladt vízszintesen előre a vásárló 15 másodperccel azután, hogy rálépett a mozgólépcsőre?

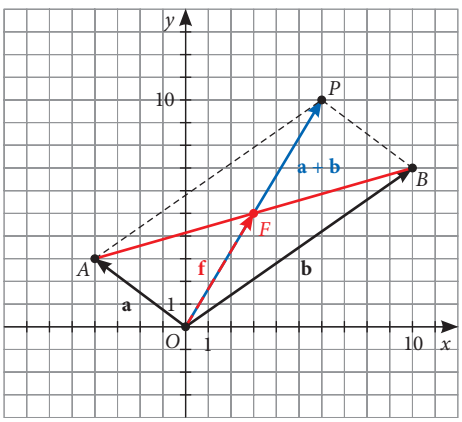
Megoldás

15 másodperc után a vásárló az AB szakasz F felezőpontjában lesz. Az ábráról leolvasható, hogy ez az $F(6; 1)$ pont. Azaz a vásárló 6 métert haladt előre, és az utcaszint felett 1 méter magasságban van.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Határozzuk meg az AB szakasz F felezőpontjának koordinátáit, ha $A(-4; 3)$ és $B(10; 7)$!

Megoldás



Az $\mathbf{a}(-4; 3)$ és a $\mathbf{b}(10; 7)$ oldalvektorokkal megrajzoltuk az $AOBP$ paralelogrammát. Az AB szakasz F felezőpontjának $\overrightarrow{OF}$ helyvektorát jelöljük $\mathbf{f}$-fel!
A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az $\mathbf{f}$ az $AOBP$ paralelogramma $\overrightarrow{OP}$ átlóvektorának fele.

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (-4; 3) + (10; 7) = (6; 10)$, ezért

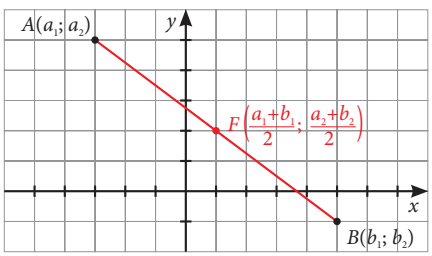
$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(6; 10) = (3; 5)$.

Mivel az $\mathbf{f}$ helyvektor, ezért a vektor F végpontjának koordinátái megegyeznek a vektor koordinátáival: $F(3; 5)$.

ELMÉLET

Felezőpont koordinátái

Ha egy szakasz két végpontja az $A(a_1; a_2)$ és a $B(b_1; b_2)$ pont, akkor a szakasz felezőpontja: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.



FELADAT

1. Adottak a $P(-4; 16)$ és a $Q(20; -2)$ pontok. A PQ szakasz felezőpontját jelöld F-fel, a Q-hoz legközelebb eső negyedelőpontját pedig N-nel!

a) Számítsd ki az F és az N pont koordinátáit!

b) Mekkora az FN szakasz hossza?

2. Adott az $A(-2; 5)$ és a $B(-3; -1)$ pont. Hosszabbítsd meg az AB szakaszt a B ponton túl az eredeti szakasz hosszával, és jelöld C-vel az így kapott szakaszvégpontot! Határozd meg a C pont koordinátáit!

3. Adott a PQ szakasz, ahol $P(7; -4)$ és $Q(-1; 2)$. Tükrözd a szakasz végpontjaira a szakasz felezőpontját, és add meg az így kapott tükörképek koordinátáit!

4. Egy négyzet középpontja $K(7; -8)$, egyik csúcsa $A(-3; 16)$.

a) Határozd meg a négyzet A csúcsával szemközti csúcs koordinátáit!

b) Milyen hosszú a négyzet átlója?

c) Határozd meg a négyzet területét és kerületét!

HÁZI FELADAT

1. Adott az $A(-10; -7)$, $B(10; 3)$ és $C(10; 13)$ csúcsú háromszög.

a) Add meg az oldalfelező pontok koordinátáit!

b) Határozd meg a középvonalakra illeszkedő vektorok koordinátáit!

c) Mekkora a középvonalak hossza?

d) Mekkora az ABC háromszög területe?

2. Kicsinyítsd az A pontból az ABC háromszöget

a) $\frac{1}{2}$ arányban; **b)** $\frac{3}{4}$ arányban;

ha $A(-5; -6)$, $B(16; 0)$ és $C(10; 6)$. Mik a kicsinyítéssel kapott háromszög csúcsainak koordinátái?

3. Az ABC háromszög csúcspontjai: $A(-6; 2)$, $B(2; 0)$, $C(1; 7)$.

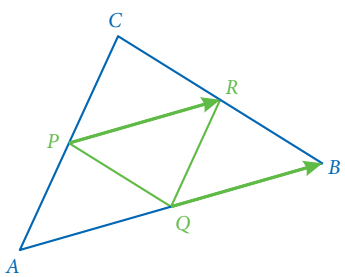
a) Számítsd ki a BC oldal F felezőpontjának koordinátáit!

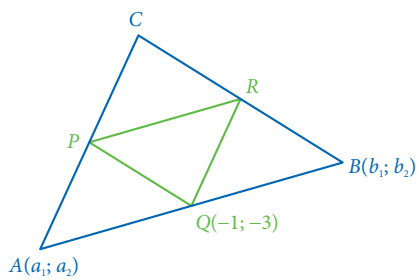
b) Számítsd ki az AF szakasz negyedelőpontjainak koordinátáit!

4. Egy háromszög csúcspontjai $A(-3; 8)$, $B(2; -5)$ és $C(7; 1)$. Nagyítsd a háromszöget 2-szeresére a $P(1; 0)$ pontra mint középpontra nézve! Határozd meg a képháromszög csúcsainak koordinátáit!

RÁADÁS

Egy háromszög oldalfelező pontjai $P(4; -4)$, $Q(-1; -3)$ és $R(-2; -1)$. Határozd meg a háromszög csúcsainak koordinátáit! A két ábra egy-egy megoldási ötletet sugall.





72 Gyakorlás csoportban

CSOPORTMUNKA

2-3 fős csoportokba osztva dolgozzatok!

I. FELADATSOROZAT

1. Adott az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos csúcsa: $A(-4; -3)$, $B(3; -1)$ és a paralelogramma középpontja: $K(-1; 2)$.

a) Add meg a C és a D csúcs koordinátáit!

b) Számítsd ki az AB és AD oldalak hosszát!

c) Add meg a paralelogramma átlóvektorainak koordinátáit!

2. Adottak az $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ vektorok.

a) Add meg a vektorok koordinátáit!

b) Határozd meg a vektorok hosszát!

c) Számítsd ki annak a szakasznak a hosszát, melyet az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjai határoznak meg, ha közös kezdőpontból mérjük fel azokat!

d) Tekintsük az $\mathbf{a}$ helyvektort! Milyen négyszöget határoznak meg az $\mathbf{a}$, az $\mathbf{a}$ origó körüli 90 fokos elforgatottjainak, valamint az $\mathbf{a}$ ellentettjének végpontjai? Add meg a négyszög csúcsainak koordinátáit!

3. Az $ABCD$ négyzet két szemközti csúcsa: $A(-3; 1)$ és $C(0; 6)$.

a) Számítsd ki a négyzet kerületét és területét!

b) Add meg a B és a D csúcs koordinátáit!

4. Az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektorokról tudjuk, hogy $|\mathbf{u}| = 3$ és $|\mathbf{v}| = 4$.

Add meg az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat úgy, hogy igaz legyen:

a) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 5$;

b) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 7$.

II. FELADATSOROZAT

1. Az $ABCD$ négyzet középpontja $K(-4; -2{,}5)$, egyik csúcsa $A(-3; -5{,}5)$.

a) Számítsd ki a négyzet kerületét és területét!

b) Add meg a B, C, D csúcsok koordinátáit!

2. Adott egy paralelogramma három csúcsa: $A(3; -10)$, $B(-3; -6)$ és $C(1; 4)$.

a) Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcsának koordinátáit! Hány eset van?

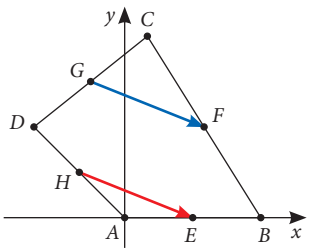
b) Milyen hosszúak a paralelogramma átlói a különböző esetekben?

3. Az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektorokról tudjuk, hogy $|\mathbf{u}| = 3$ és $|\mathbf{v}| = 4$.

Add meg az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat úgy, hogy igaz legyen:

a) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 5$; b) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 1$.

4. Az $ABCD$ négyszög csúcsai: $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(1; 8)$, $D(-4; 4)$.



a) Add meg a négyszög E, F, G, H oldalfelező pontjainak koordinátáit!

b) Igazold, hogy $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$!

c) Milyen tulajdonságai vannak az $EFGH$ négyszögnek? Miért?

HÁZI FELADAT

1. Egy paralelogramma két szomszédos csúcsa $A(5; -12)$, $B(-6; 8)$, és szimmetria-középpontja $K(-1; -4)$.

a) Add meg a másik két csúcs koordinátáit!

b) Határozd meg a paralelogramma átlóinak hosszát!

2. Egy négyzet középpontja az origó, egyik csúcsa $A(5; -12)$.

a) Add meg a másik három csúcs koordinátáit!

b) Határozd meg a négyzet átlóinak hosszát!

c) Számítsd ki a négyzet területét!

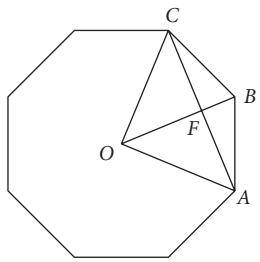
3. Az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektorokról tudjuk, hogy $|\mathbf{u}| = 3$ és $|\mathbf{v}| = 4$.

Add meg az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat úgy, hogy igaz legyen:

a) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 1$; **b)** $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 7$!

RÁADÁS

Egy ásatáson a régészek egy kutat tárnak fel, amelynek kávája szabályos nyolcszög alakú. A méréseiket megkönnyíti, ha egy koordináta-rendszerben helyezik el a kút felülnézeti ábráját. Ebben a koordináta-rendszerben a nyolcszög középpontja az $O(1; 3)$ pont, egyik csúcsa pedig az $A(4; -1)$ pont. A pozitív körüljárás szerint betűzzük a csúcsokat.



a) Add meg a nyolcszög C csúcsának koordinátáit!

b) Add meg a B csúcs koordinátáit! Használd a következő gondolatmenetet:
Mivel az $OABC$ négyszög deltoid, az OB szakasz pontosan felezi az AC átlót.

- Add meg az F felezőpont koordinátáit!
- Írd fel az $\overrightarrow{OF}$ vektort, és számítsd ki a hosszát is!
- Az $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OF}$ vektorok párhuzamosak, és mindkettőnek ismerjük a hosszát ($OA = OB$). Add meg az $\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátáit!
- Add meg a B csúcs koordinátáit!

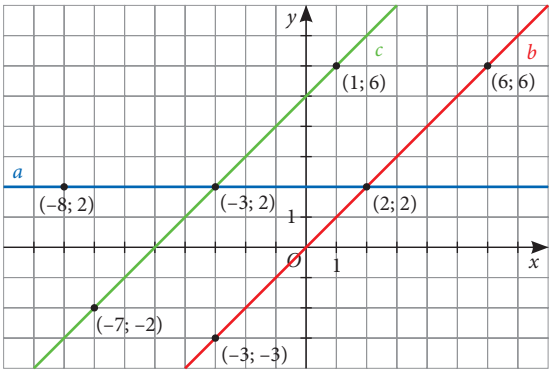


73 Egyenesek a koordináta-rendszerben

A koordinátageometriában szemléltetésre, kísérletezésre, tapasztalatszerzésre, feladatmegoldásra, a megoldások ellenőrzésére is használható a *GeoGebra* program.

BEVEZETŐ

A koordináta-rendszerben a sík minden pontja egyértelműen azonosítható két koordinátája segítségével. Minden síkbeli alakzat pontok egy bizonyos halmaza, ezért a ponthalmazok megadhatók az azokat alkotó pontok koordinátáival, illetve a közöttük lévő olyan összefüggéssel, ami pontosan az alakzat pontjainak koordinátáira igaz.
Nézzünk néhány egyszerűbb esetet!
Hogyan adhatjuk meg az *a*, *b* és *c* alakzatokat alkotó pontokat a koordinátáikkal?



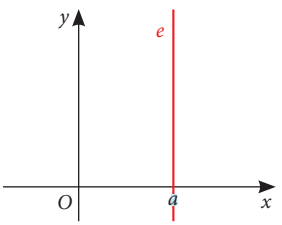
Mindhárom alakzat egyenes.
Az *a* egyenes pontjainak közös jellemzője, hogy – míg az első (azaz *x*) koordinátájuk tetszőleges valós szám lehet – a második (azaz *y*) koordinátájuk minden esetben 2. Az is igaz, hogy ha ebben a síkban egy pont második koordinátája 2, akkor az a pont rajta van az *a* egyenesen. Ezért azt mondjuk, hogy ennek az egyenesnek az egyenlete: $y = 2$.

Vizsgáljuk a *b* egyenest! A két koordinátatengely négy derékszöget alkot. Közülük kettőnek éppen a *b* egyenes a szögfelezője. A szögfelező pontjai egyenlő távolságra vannak a két szár egyenesétől, ezért a *b* egyenes minden pontjának egyenlő a két koordinátája. A síkban több ilyen tulajdonságú pont nincs. Ezért azt mondjuk, hogy a *b* egyenes egyenlete: $y = x$.

A *c* egyenest úgy kapjuk a *b*-ből, hogy eltoljuk a (0; 5) vektorral. Ezért a *c* egyenest a koordinátasík azon pontjai alkotják, amelyek koordinátáira igaz, hogy második koordinátájuk 5-tel nagyobb az első koordinátájuknál, vagyis $y = x + 5$. Ezt az egyenletet a *c* egyenes egyenletének nevezzük. Bármely pont, amelynek koordinátái a fenti egyenlet megoldáshalmazába tartoznak, rajta van a *c* egyenesen. Például: az $A(-2{,}9;\ 2{,}1)$ pont a *c* egyenes pontja, mert $2{,}1 = -2{,}9 + 5$; a $B(4{,}3;\ 9{,}4)$ pont pedig nincs rajta ezen az egyenesen, mert $9{,}4 \neq 4{,}3 + 5$.

ELMÉLET

Egyenesek a koordináta-rendszerben

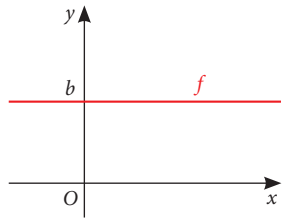


1. Ha a koordináta-rendszer síkjában lévő *e* egyenes merőleges az *x* tengelyre, és azt az $(a;\ 0)$ pontban metszi, akkor
   - az *e* minden pontjának ugyanakkora az első koordinátája, mégpedig *a*.
   - ha a sík egy pontjának az első koordinátája *a*-val egyenlő, akkor ez a pont rajta van az *e* egyenesen.

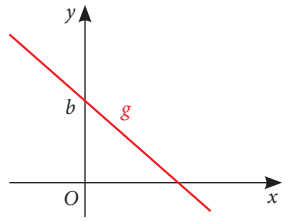
   Más szóhasználattal: Egy pont pontosan akkor van rajta az *e* egyenesen, ha az első koordinátája *a*-val egyenlő.
   Emiatt a kapcsolat miatt azt mondjuk, hogy **az *e* egyenes egyenlete $x = a$.**

2. Ha egy f egyenes merőleges az y tengelyre, és azt a $(0;\ b)$ pontban metszi, akkor
   - az f minden pontjának ugyanakkora a második koordinátája, mégpedig b.
   - ha egy pont második koordinátája b-vel egyenlő, akkor ez a pont rajta van az f egyenesen.

   Más szóhasználattal: Egy pont pontosan akkor van rajta az f egyenesen, ha a második koordinátája b-vel egyenlő.
   Emiatt a kapcsolat miatt azt mondjuk, hogy **az f egyenes egyenlete $y = b$.**



3. Ha az egyenes mindkét koordinátatengelyt metszi, akkor az egyenesre illeszkedő pontok első és második koordinátájának kapcsolatával adható meg az egyenes egyenlete.
   g egyenes egyenlete: $y = ax + b$.

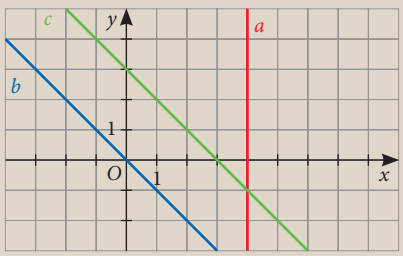


Alakzat egyenlete

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben egy alakzat egyenlete olyan x és y változókat tartalmazó egyenlőség, melyet azoknak és csakis azoknak a $P(x;\ y)$ pontoknak koordinátái tesznek igazzá, amelyek illeszkednek az alakzatra.

FELADAT

1. Az ábrán látható egyenesek mindegyikéhez adj meg egy olyan egyenletet, amelyet éppen az adott egyenest alkotó pontok koordinátái (és csak azok) tesznek igazzá!



2. Rajzold meg a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletekkel jellemezhető egyeneseket!

a) $x = 7$

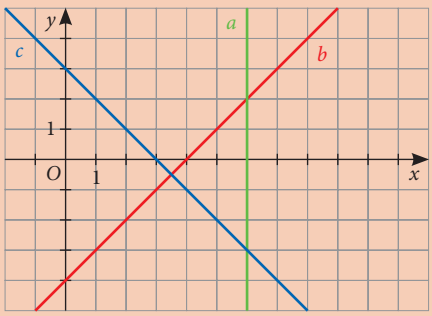
b) $y = x - 3$

c) $y = -x - 5$

3. Döntsd el, hogy az alábbi pontok közül melyek vannak rajta az $y = -x + 1$ egyenletű egyenesen:
$A(-4;\ 5)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 2)$, $D(5;\ -4)$, $E(100;\ -99)$, $F(871;\ -872)$.

HÁZI FELADAT

1. Add meg az ábrán látható egyenesek egyenletét!



2. Rajzold meg a koordináta-rendszerben az alábbi egyenletekkel jellemezhető egyeneseket!

a) $x = -4$

b) $y = x - 4$

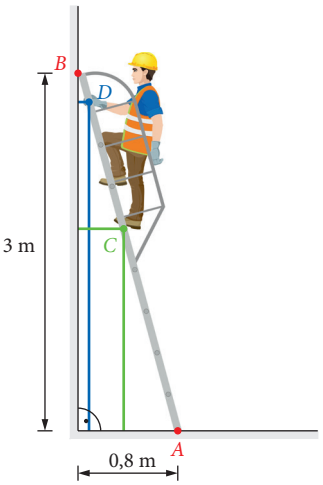
c) $y = -x + 4$

3. Döntsd el, hogy az alábbi pontok közül melyek vannak rajta az $y = x - 5$ egyenletű egyenesen:
$A(-5;\ -9)$, $B(-1;\ -6)$, $C(2;\ -2)$, $D(5;\ 0)$, $E(100;\ 105)$, $F(871;\ -866)$.

74 Az egyenes egyenlete

BEVEZETŐ

A magasban végzett munkákhoz használt támasztólétrákra vonatkozóan az előírt használati szabályokat a biztonságos munkavégzés érdekében be kell tartani. A létrákon csak kisebb munkákat szabad végezni, és a létrát elcsúszás ellen is biztosítva, biztonságosan kell megtámasztani.



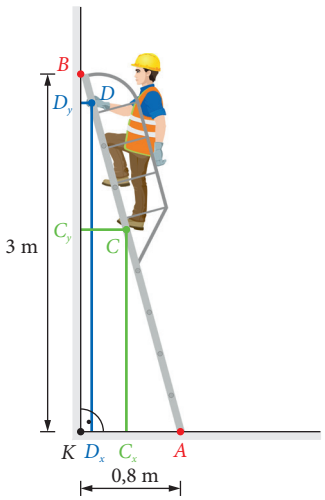
Az ábrán látható ezermester a létra talpát a vízszintes talajon, a faltól 0,8 méterre helyezte el, így a létra legfelső pontja 3 méter magasan támaszkodik a függőleges falhoz.

a) Milyen magasan van az ember talpát tartó létrafok a talajhoz képest, ha ennek a távolsága 0,5 méter a függőleges faltól? (a pontszerűnek tekintett létrafokot a C jelöli)

b) Milyen távol van a függőleges faltól az a létrafok, melybe kapaszkodik (D jelöli az ábrán), ha annak a talajtól mért magassága 270 cm?

Megoldás

I. módszer



A megfelelő szögek egyenlősége miatt a kialakult derékszögű háromszögekre fennáll:

$ABK_{\triangle} \sim ACC_{x\triangle} \sim ADD_{x\triangle} \sim CBC_{y\triangle} \sim DBD_{y\triangle}$.

A hasonlóságokból adódóan:

$$\frac{CC_x}{C_xA} = \frac{BK}{KA},$$

amiből

$$\frac{CC_x}{0{,}8 - 0{,}5} = \frac{3}{0{,}8},$$

így $CC_x = 1{,}125$ m,

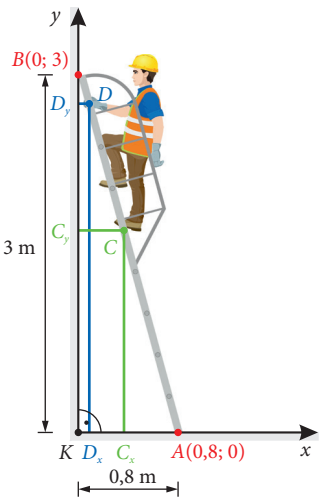
valamint

$$\frac{D_yD}{BD_y} = \frac{KA}{BK},$$

$$\frac{D_yD}{3 - 2{,}7} = \frac{0{,}8}{3},$$

így $D_yD = 0{,}08$ m $= 8$ cm.

II. módszer



Helyezzük el a falat, a talajt és a létrát az ábra szerint egy derékszögű koordináta-rendszerben! Ami a valóságban 1 méter, az itt jelentsen 1 egységet!

Ekkor az $A(0{,}8;\ 0)$ és $B(0;\ 3)$ a koordinátatengelyeken lévő pontok. Ekkor a létra illeszkedik egy olyan egyenesre, melyet az A és B pontok egyértelműen meghatároznak.

Használjuk fel a lineáris függvényekről tanultakat! A létra egyenese egy lineáris függvény grafikonja, melynek hozzárendelési szabálya általános alakban: $f(x) = ax + b$.

A grafikonra illeszkedő pontok koordinátáira teljesül:

$$3 = a \cdot 0 + b, \text{ valamint } 0 = a \cdot 0{,}8 + b,$$

amiből $b = 3$, ezért $0 = a \cdot 0{,}8 + 3$, amiből $a = -\frac{3}{0{,}8} = -3{,}75$.

A hozzárendelési szabály tehát $f(x) = -3{,}75x + 3$.

Erre a függvénygrafikonra illeszkedik a kérdésben szereplő C, valamint D pont, ezért

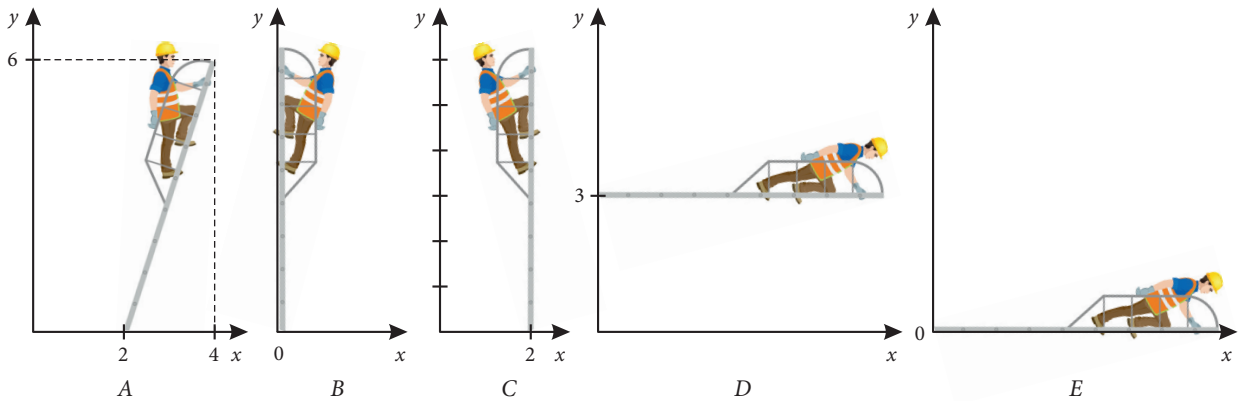
$C_x = 0{,}5$ miatt $C_y = -3{,}75 \cdot 0{,}5 + 3$, így $C_y = 1{,}125$, tehát 1,125 méter magasan van a C pont.

$Dy = 2{,}7$ miatt $2{,}7 = -3{,}75 \cdot D_x + 3$, ebből $D_x = 0{,}08$, tehát 0,08 méter távolságra van a faltól a D pont.

Megjegyzés

A létra – különböző tartószerkezetek kialakításával – többféle módon helyezhető el a felhasználás módjától függően. (Vigyázat! Az ábrákon nem minden elhelyezés szokványos és nem minden eset biztonságos!)

Például:



Az ábrákon a létrák az egyes esetekben olyan egyenes mentén helyezkednek el, amelynek grafikonja az alábbiak szerint adódik.

Az *A* esetben:

illeszkedik a (2; 0) és (4; 6) pontokra, így a hozzárendelési szabálya

$$f(x) = 3x - 6,$$

amit a grafikonra illeszkedő $(x; y)$ pontok koordinátáival úgy is leírhatunk, hogy

$$y = 3x - 6.$$

A *B* esetben:

illeszkedik az y tengelyre, így minden pontjának 0 az első koordinátája, azaz $x = 0$.

A *C* esetben:

párhuzamos az y tengellyel, és minden pontjának 2 az első koordinátája, azaz $x = 2$.

A *D* esetben:

párhuzamos az x tengellyel, és minden pontjának 3 a második koordinátája, azaz $y = 3$.

Az *E* esetben:

illeszkedik az x tengelyre, így minden pontjának 0 a második koordinátája, azaz $y = 0$.

ELMÉLET

Egyenes egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben

A derékszögű koordináta-rendszerben minden egyenes megadható egy olyan egyenlettel (az egyenes pontjainak koordinátáira vonatkozó összefüggéssel), amelyet csakis az egyenesre illeszkedő $P(x; y)$ pontok koordinátái tesznek igazzá.

Minden olyan egyenes egyenlete felírható $y = mx + b$ alakban, amely nem párhuzamos az y tengellyel ($m \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$).
Az egyenletben szereplő együtthatók és változók értékétől függően az egyenes egyenlete lehet
$y = mx$ alakú, ekkor az egyenesre illeszkedik az origó;
$y = b$ alakú, ekkor az egyenes az x tengellyel párhuzamos.

Megjegyzés
Az előbbiek és a függvényekről tanultak alapján láthatjuk, hogy minden lineáris függvény grafikonja egyenes, de a koordináta-rendszerben lévő nem minden egyenes lineáris függvény grafikonja. Például a Bevezető feladat megjegyzésében lévő B és C esetben a létra egyenese nem függvény grafikonja, mert az nem egyértelmű hozzárendelés, vagyis ugyanazon x értékhez nem csak egy y érték tartozik.
A lineáris függvények hozzárendelési szabályát általánosan $f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$) alakban adjuk meg, míg az egyenesek egyenletének felírására az $y = mx + b$ vagy az $x = c$ ($m \in \mathbf{R}$, $b, c \in \mathbf{R}$) alakot használjuk.

FELADAT

1. Ábrázold a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyekre teljesül, hogy második koordinátájuk
a) 3-szorosa az elsőnek;
b) 5-tel nagyobb az elsőnél;
c) első koordinátájuk ellentettje!
Írd fel az előbbi esetekben kapott alakzatok egyenletét!

2. Illeszkedik-e az e egyenesre a P, illetve a Q pont?

a)	$e: y = 1{,}5x - 5$	$P(2; 2)$	$Q(4; 1)$
b)	$e: y = -1{,}7x - 2$	$P(0; -2)$	$Q(1; 3{,}7)$
c)	$e: y = -\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}$	$P\left(6; -\frac{69}{5}\right)$	$Q\left(-3; \frac{36}{5}\right)$
d)	$e: y = \sqrt{3}\,x - 4\sqrt{3}$	$P(4; 0)$	$Q(2; -2\sqrt{3})$
e)	$e: x = 2$	$P(2; 0)$	$Q(0; 2)$

3. Adj meg koordinátákkal két olyan pontot, amely illeszkedik az egyenlettel megadott egyenesekre!
a) $e: y = 4x - 3$
b) $e: y = \frac{1}{3}x + 7$
c) $e: y = -\frac{5}{7}x - \frac{3}{2}$
d) $e: y = \sqrt{2}\,x + 1$
e) $e: y = 9$

4. Hol metszik a koordinátatengelyeket az alábbi egyenlettel megadott egyenesek?
a) $e: y = -6x + 1$
b) $e: y = \frac{2}{5}x - 3$
c) $e: y = -\frac{1}{7}x - 9$
d) $e: y = -3$
e) $e: y = 5$

5. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a megadott P és Q pontokra!

a)	$P(0; 5)$	$Q(0; -1)$
b)	$P(3; -2)$	$Q(3; 3{,}7)$
c)	$P(4; -8)$	$Q(-3; 6)$
d)	$P(-7; -5)$	$Q(2; 0)$
e)	$P(5; 13)$	$Q(-1; 1)$

HÁZI FELADAT

1. Fogalmazd meg szavakban, milyen kapcsolat van azoknak a pontoknak az első és második koordinátája között, amelyek illeszkednek az

a) $y = 0{,}5x$ **b)** $y = x - 2$ **c)** $y = -x + 3$ **d)** $y = -8$ **e)** $x = 11$

egyenlettel megadott egyenesre!

2. Illeszkedik-e az e egyenesre az A, illetve a B pont?

a) e: $x = 15$ $A(15; 0)$ $B(0; 15)$

b) e: $y = -2{,}8x + 2$ $A(-1; -1{,}8)$ $B(2; -7{,}6)$

c) e: $y = \frac{4}{7}x - \frac{2}{3}$ $A\left(-14; -\frac{26}{3}\right)$ $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{18}{21}\right)$

d) e: $y = -8$ $A(1; -8)$ $B(-8; 1)$

3. Add meg az alábbi egyenesek koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjainak (tengelymetszeteinek) a koordinátáit!

a) $y = -6x + 5$ **b)** $y = \frac{5}{4}x - 3$ **c)** $y = -\frac{1}{9}$ **d)** $y = 2x - \sqrt{3}$ **e)** $y = 9{,}7$

4. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a megadott A és B pontokra!

a) $A(-3; 1)$ $B(4{,}7; 1)$

b) $A(-5; 15)$ $B(2; -6)$

c) $A(-2; 7{,}5)$ $B(-2; -13)$

d) $A(4; -7)$ $B(-6; 13)$

e) $A(9; 5)$ $B(-2; -6)$

5. Az ábrán 5 egyenest ábrázoltunk. Mindegyik egyenesen megjelöltünk két rácspontot.
Az alábbi állítások az ábrán lévő melyik egyenesre igazak?

a) Illeszkedik rá a (12; 13) pont.

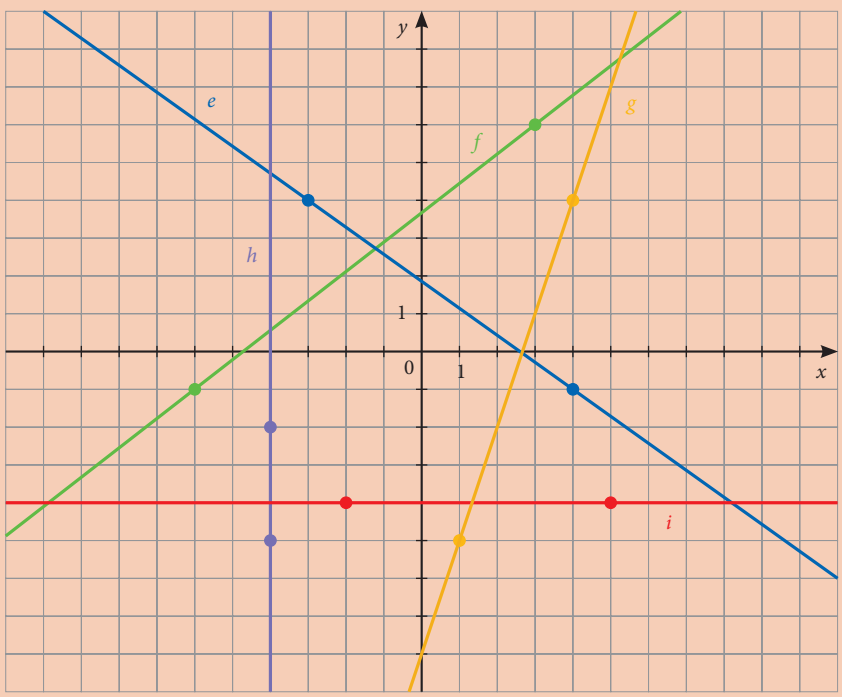
b) Egyenlete $3x - y = 8$.

c) Nincs olyan rá illeszkedő pont, amelynek első koordinátája 0.

d) Illeszkedik rá a $\left(-\frac{5}{2}; \frac{19}{7}\right)$ pont.

e) Van olyan pontja, amelynek második koordinátája -2.

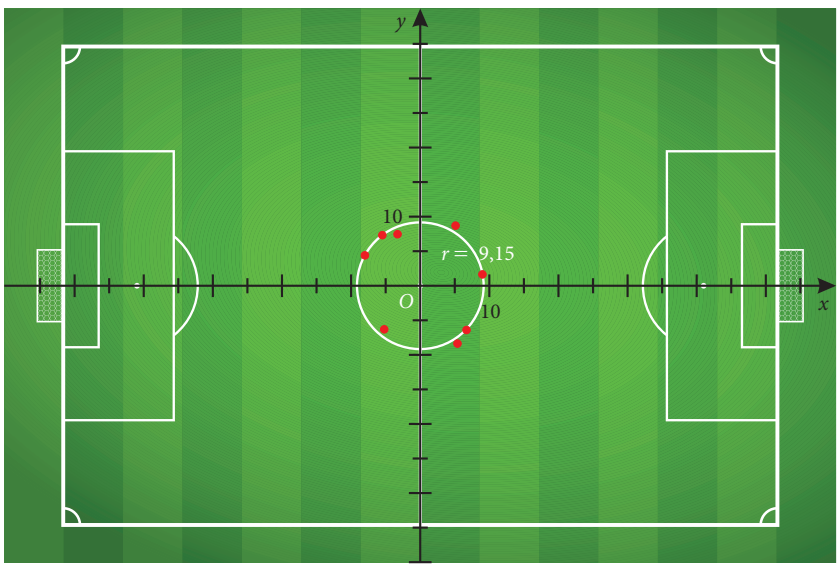
f) Minden pontja 4 egység távolságra van az y tengelytől.



75 A kör egyenlete

BEVEZETŐ

A szabványos focipályán a kezdőkör egy olyan kör,
– amelynek középpontja a felezővonal felezőpontja,
– amely sugarának hossza 9,15 méter,
– amelyen belül az ellenfél egyetlen játékosa sem tartózkodhat, amíg a labdát a kezdőcsapat játékba nem hozza.
(Ismered a pályán lévő egyéb pontok és vonalak elnevezéseit is? Mondd el, és mutasd meg ezeket osztálytársaidnak!)



Rögzítsünk a pályához (az ábra szerint) egy olyan koordináta-rendszert, amelynek origója (O) a kezdőkör középpontja, és tengelyei a pálya szimmetriatengelyei. A koordináta-rendszerben lévő 1 egység feleljen meg a valóságban 1 méternek. (Az ábrán 1 beosztás 5 egységnek, azaz 5 méternek felel meg.)
Képzeljük el, hogy a bírók munkáját a játékosokra rögzített, nagyon pontos adatokat szolgáltató jeladók segítik, melyek segítségével kideríthető, hogy a játékosok a pálya melyik részén helyezkedtek el az adott pillanatban.
A kezdőkörhöz képest hol volt az alábbi néhány játékos a füttyszó elhangzásakor, ha a jeladók szerinti koordinátáik az alábbiak voltak: $A(9; 1{,}65)$, $B(-7; 4{,}4)$, $C(-5{,}49; 7{,}32)$, $D(6{,}7; -6{,}4)$?

Megoldás
Ha a játékos
– a kezdőkörön van, akkor az O origótól mért távolsága 9,15 (méter),
– a kezdőkörön kívül van, akkor az O origótól mért távolsága nagyobb, mint 9,15 (méter),
– a kezdőkörön belül van, akkor az O origótól mért távolsága kisebb, mint 9,15 (méter).
Tetszőleges $P(x; y)$ játékos esetén elegendő megvizsgálnunk, hogy az

$$OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

távolság milyen relációban áll a kezdőkör $r = 9{,}15$ sugarával.

$OA = \sqrt{9^2 + 1{,}65^2} = 9{,}15$ $\qquad$ $OB = \sqrt{(-7)^2 + 4{,}4^2} \approx 8{,}27 < 9{,}15$

$OC = \sqrt{(-5{,}49)^2 + 7{,}32^2} = 9{,}15$ $\qquad$ $OD = \sqrt{6{,}7^2 + (-6{,}4)^2} \approx 9{,}27 > 9{,}15$

Az előbbiek alapján tehát az A és a C játékos a kezdőkörön, a B játékos a kezdőkörön belül és a D játékos a kezdőkörön kívül helyezkedett el.

Megjegyzés

A feladat megoldása során a játékosoknak a kezdőkör középpontjától való távolságát vizsgáltuk. Ha a $P(x; y)$ játékos a kezdőkörön van, akkor koordinátái teljesítik a $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, más alakban írva: $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletet. Ha a játékos nincs a kezdőkörön, akkor koordinátái nem teljesítik az előbbi egyenletet.

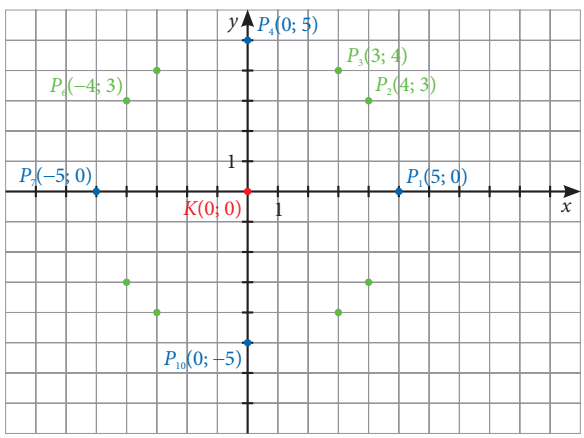
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. **a)** Keress olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek az origótól 5 egység távolságra vannak! Hány ilyen pont van összesen? Add meg legalább 6 pont koordinátáit!

b) Adott a $K'(5; -2)$ pont. Keress olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek a K' ponttól 5 egység távolságra vannak! Hány ilyen pont van összesen? Add meg legalább 6 pont koordinátáit!

Megoldás

a) A sík adott pontjától adott (pozitív) távolságban lévő pontok halmaza kör (vagy körvonal), ezért végtelen sok ilyen pont van.



A koordinátatengelyeken könnyen találhatunk a feltételnek megfelelő (az ábrán kékkel jelölt) pontokat.

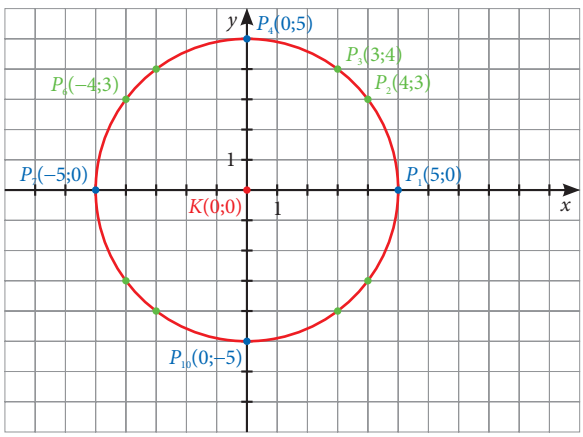
További (a koordinátatengelyekre nem illeszkedő) pontokhoz úgy juthatunk, hogy a pontok első és második koordinátáját – illetve negatív előjelű koordináták esetén azok abszolút értékét – megfeleltetjük egy derékszögű háromszög befogói hosszának.

Az ábrán lévő zöld színű pontok origótól való távolságát olyan derékszögű háromszögekből kapjuk, melyek befogóinak hossza 3, illetve 4 egység, így a Pitagorasz-tétel miatt a keresett távolság 5 egység.

Az origótól 5 egység távolságra lévő tetszőleges $P(p_1; p_2)$ pont koordinátáira fennáll a $p_1^2 + p_2^2 = 5^2$ kapcsolat.

Ez teljesül például $p_1 = 1$ és $p_2 = \sqrt{24}$, vagy $p_1 = \sqrt{11}$ és $p_2 = -\sqrt{14}$, vagy $p_1 = -\sqrt{23}$ és $p_2 = \sqrt{2}$ esetén.

Bárhogyan választjuk meg p_1 értékét a $[-5; 5]$ intervallumban, mindig találunk ahhoz megfelelő p_2 értéket (általában kettőt is). Ebből is látszik, hogy végtelen sok pont van a koordináta-rendszerben, melyek koordinátái teljesítik a fenti kapcsolatot.

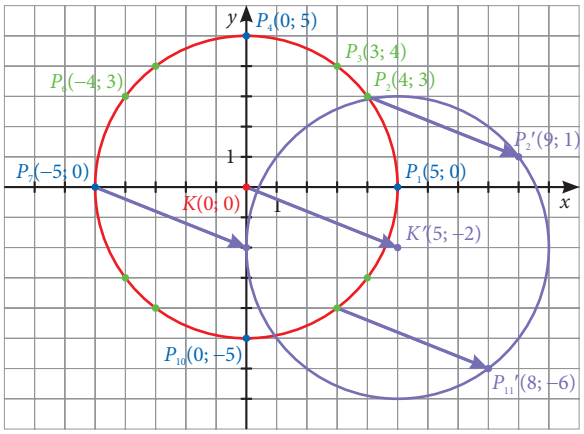


b) A kör definíciója miatt végtelen sok ilyen pont van.

Az azonos sugarú körök egymással egybevágók, párhuzamos eltolással egymásba vihetők.

A K középpontú 5 egység sugarú kör $(5; -2)$ vektorral történő párhuzamos eltolásával a K' középpontú 5 egység sugarú körhöz jutunk, ezért az a) feladatrészben felírt pontok $(5; -2)$ vektorral való eltoltjai illeszkednek a K' középpontú 5 egység sugarú körre. Így például az ábrán lévő $P_2'(9; 1)$ vagy a $P_{11}'(8; -6)$ pontok, vagy a

számítással kapható $(\sqrt{11}+5; -\sqrt{14}-2)$ pont (melyet az a) feladatrészben megkapott $p_1=\sqrt{11}$ és $p_2=-\sqrt{14}$ koordinátájú pont eltolása eredményez).



2. **a)** Rajta van-e a $K(0; 0)$ középpontú 5 egység sugarú körön az $A(3{,}4; -3{,}4)$, a $B\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{91}}{2}\right)$, a $C(2{,}5; 4{,}5)$ pont? Válaszod számítással indokold!

b) Rajta van-e a $K'(5; -2)$ középpontú 5 egység sugarú körön a $D(1; 1)$, az $E(9{,}5; 0)$, az $F\left(\frac{17}{2}; -\frac{20}{3}\right)$ pont? Válaszod számítással indokold!

Megoldás

Egy pont rajta van a körön (körvonalon), ha a középponttól mért távolsága egyenlő a sugár hosszával. Ezért elegendő megvizsgálnunk, hogy az adott pontok középponttól való távolsága milyen relációban áll a sugár hosszával.

a) Az origótól, vagyis a $K(0; 0)$ ponttól való távolság tetszőleges $P(p_1; p_2)$ pont esetén $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ formában írható. Így:

$KA=\sqrt{3{,}4^2+(-3{,}4)^2}<5,$

$KB=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{91}}{2}\right)^2}=5,$

$KC=\sqrt{2{,}5^2+4{,}5^2}>5$

relációk adódnak, amiből következik, hogy az A pont nincs rajta a körön, B pont rajta van a körön, C pont nincs rajta a körön.

Megjegyzés: Az A pont a körvonalon belül van, mert távolsága a kör középpontjától kisebb, mint a sugár hossza; a C pont a körvonalon kívül van, mert távolsága a kör középpontjától nagyobb, mint a sugár hossza.

b) A $K'(5; -2)$ ponttól való távolság tetszőleges $P(p_1; p_2)$ pont esetén $\sqrt{(p_1-5)^2+(p_2+2)^2}$ formában írható, mivel az megegyezik a $\overrightarrow{K'P}(p_1-5; p_2+2)$ vektor hosszával. Így:

$K'D=\sqrt{(1-5)^2+(1+2)^2}=5,$

$K'E=\sqrt{(9{,}5-5)^2+(0+2)^2}<5,$

$K'F=\sqrt{\left(\frac{17}{2}-5\right)^2+\left(-\frac{20}{3}+2\right)^2}>5$

relációk adódnak, amiből következik, hogy a D pont rajta van a körön, az E pont nincs rajta a körön, az F pont nincs rajta a körön.

Megjegyzés: Az E pont a körvonalon belül van, mert távolsága a kör középpontjától kisebb, mint a sugár hossza; az F pont a körvonalon kívül van, mert távolsága a kör középpontjától nagyobb, mint a sugár hossza.

ELMÉLET

A kör egyenlete

Legyen adva a $C(u; v)$ pont és az r pozitív valós szám.

Egy tetszőleges $P(x; y)$ koordinátájú pont akkor és csakis akkor van rajta a $C(u; v)$ középpontú r sugarú körön, ha a CP távolság, vagyis a $|\overrightarrow{CP}|$ megegyezik az r értékével.

$|\overrightarrow{CP}|=r$, vagyis $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}=r,$

amit $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ formában is írhatunk.

Ez az összefüggés a $C(u; v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete.

Például:

Ha egy kör középpontja $C(3; 6)$ és sugara 10, akkor a kör egyenlete $(x-3)^2+(y-6)^2=100$.

Ha egy pont $(x; y)$ koordinátáit behelyettesítve teljesül az egyenlőség, akkor a pont rajta van a körön, ha nem teljesül az egyenlőség, akkor nincs rajta a körön.

a kör középpontja: $C(u; v)$
a kör sugara: r

→ a kör egyenlete:
$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

FELADAT

1. Írd fel a C középpontú, r sugarú kör egyenletét!

a) $C(5; 3)$, $r=2$;
b) $C(5; -3)$, $r=4$;
c) $C(-5; 3)$, $r=0{,}5$;
d) $C(0; 0)$, $r=10$.

2. Írd fel annak a C középpontú körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az A pont!

a) $C(4; 2)$, $A(-1; -10)$;
b) $C(-2; 2)$, $A(1; -3)$.

3. A kör megrajzolása nélkül döntsd el, hogy a megadott pontok közül melyik nincs rajta az egyenlettel megadott körön!

a) $(x+4)^2+(y-2)^2=25$,
$A(-1; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-8; 5)$, $D(-2; -3)$;
b) $(x-2)^2+(y+1)^2=10$,
$A(-1; -2)$, $B(1; 2)$, $C(3; -5)$, $D(5; 0)$.

4. Adott egy kör egyik átmérőjének két végpontja: $A(1; -14)$, $B(-15; 16)$.

a) Írd fel a kör egyenletét!
b) Határozd meg a körbe írható négyzet oldalának hosszát!
c) Írd fel a körbe írható négyzet beírható körének egyenletét!

HÁZI FELADAT

1. A megadott pontok közül melyik van 10 egység távolságra a $C(2; -5)$ ponttól?
$A(8; 3)$, $B(-8; 0)$, $C(0; 5)$, $D(10; 1)$, $E(11; -9)$.

2. Számítással döntsd el, hogy a P pont rajta van-e a k körön!

a) k: $(x-6)^2+y^2=100$ $P(-2; 6)$
b) k: $(x+7)^2+(y-1)^2=25$ $P(-3; 2)$
c) k: $(x-5)^2+(y+8)^2=13$ $P(2; -6)$
d) k: $(x-3)^2+(y-1)^2=61$ $P(-2; 7)$

3. Egy négyzet két szemközti csúcsa $A(14; -24)$ és $C(0; 24)$.

a) Írd fel a négyzet köré írható kör egyenletét!
b) Határozd meg a négyzetbe írható körnek a területét!

RÁADÁS

Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogójának két végpontja $A(-2; 4)$ és $B(6; 0)$. Írd fel a háromszög köré írható kör egyenletét! Hány eset van?



76 Körrel kapcsolatos feladatok

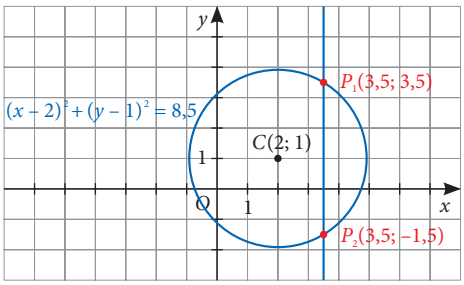
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Melyek az $(x-2)^2+(y-1)^2=8{,}5$ egyenletű körnek azok a pontjai, amelyeknek az első koordinátája 3,5?

Megoldás

A kérdés az, hogyan adjuk meg a $P(3{,}5;\ y)$ pont második koordinátáját úgy, hogy a pont rajta legyen a körön.

Ez pontosan akkor teljesül, ha az y szám megoldása a $(3{,}5-2)^2+(y-1)^2=8{,}5$ egyenletnek.



Elvégezve a négyzetre emeléseket:

$2{,}25+y^2-2y+1=8{,}5$.

A másodfokú egyenletet nullára rendezve:

$y^2-2y-5{,}25=0$.

A megoldóképlet szerint $y=\dfrac{2\pm\sqrt{25}}{2}$, amiből $y=3{,}5$, illetve $y=-1{,}5$ adódik.

A körnek két olyan pontja van, amelynek az első koordinátája 3,5. Az egyik ilyen pont a $P_1(3{,}5;\ 3{,}5)$, a másik pedig a $P_2(3{,}5;\ -1{,}5)$.

Megjegyzések

– A fentiekben egy kör és egy (y tengellyel párhuzamos) egyenes közös pontjait határoztuk meg, körző és vonalzó nélkül.

– A feladat kérdésére az

$$\left.\begin{aligned}(x-2)^2+(y-1)^2&=8{,}5\\ x&=3{,}5\end{aligned}\right\}$$

másodfokú egyenletrendszer megoldása adta meg a választ. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$\{(3{,}5;\ -1{,}5);\ (3{,}5;\ 3{,}5)\}$.

2. Adott az ABC háromszög: $A(-5;\ 2)$, $B(3;\ 1)$, $C(1;\ -2)$.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög derékszögű!

b) Írjuk fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

Megoldás

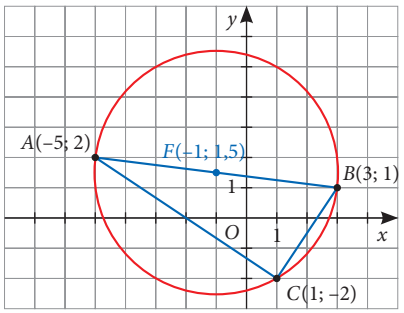
a) A háromszög oldalainak hossza

$\overrightarrow{AB}(8;\ -1)$ $\quad AB=\sqrt{8^2+(-1)^2}=\sqrt{65}$,

$\overrightarrow{AC}(6;\ -4)$ $\quad AC=\sqrt{6^2+(-4)^2}=\sqrt{52}$,

$\overrightarrow{BC}(-2;\ -3)$ $\quad BC=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

A két rövidebb oldal, AC és BC négyzetösszege egyenlő az AB, vagyis a leghosszabb oldal négyzetével. Ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű, átfogója a leghosszabb oldal, az AB, ezért a derékszög a C csúcsnál van.



b) A derékszögű háromszög körülírt körének középpontja a háromszög átfogójának felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó felével egyenlő.

A háromszög körülírt körének középpontja tehát az AB szakasz felezőpontja:

$F\left(\dfrac{-5+3}{2};\ \dfrac{2+1}{2}\right)=F(-1;\ 1{,}5)$,

a kör sugara az AB szakasz felével egyenlő:

$r=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{65}}{2}=\sqrt{16{,}25}$.

Az ABC háromszög körülírt körének egyenlete tehát:

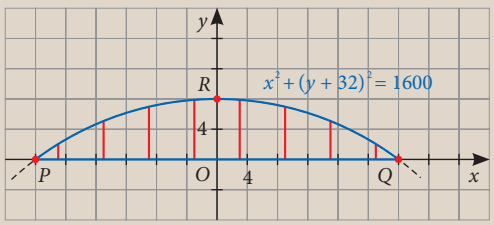
$(x+1)^2+(y-1{,}5)^2=16{,}25$.

FELADAT

1. Egy vasúti híd egyik szerkezeti eleme körív alakú, amelyet függőleges tartóoszlopok erősítenek meg.



A tervrajzon az ábra szerint koordináta-rendszerbe helyezve szerepel a híd íves tartószerkezete. Az ív az $x^2 + (y + 32)^2 = 1600$ egyenletű kör része (a tengelyeken az egységek méterben vannak megadva).



a) Mekkora a körív sugara?

b) Add meg a P, a Q és az R pont koordinátáit!

c) A szomszédos függőleges tartóoszlopok 6 méterre vannak egymástól. Mekkora a leghosszabb és a legrövidebb tartóoszlop magassága?

2. Hány olyan érintője van az
$(x + 1)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 16{,}25$
egyenletű körnek, amely átmegy a $P(-3; 4{,}5)$, a $Q(-5; 1)$, illetve az $S(2; 5)$ ponton? Oldd meg a feladatot az alábbi pontokban leírt lépések alapján!

a) Vizsgáld meg, hogy helyezkednek el az adott pontok a körhöz képest!

b) Add meg a lehetséges érintők számát aszerint, hogy a pont a körön belül, kívül vagy éppen rajta helyezkedik el!

3. Egy kör középpontja a $C(-5; -3)$ pont, és a kör érinti az y tengelyt.

a) Határozd meg a kör sugarát, és írd fel a kör egyenletét!

b) Add meg a kör azon pontjait, amelyeknek a második koordinátája (-6)!

HÁZI FELADAT

1. Adott az ABC háromszög: $A(7; 6)$, $B(-1; -3)$, $C(-3; 2)$.

a) Igazold, hogy a háromszög derékszögű!

b) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

c) Számítsd ki a háromszög hegyesszögeinek nagyságát és a háromszög területét is!

2. A koordinátatengelyek mely pontjaiból látható derékszögben az AB szakasz, ha $A(-1; 0)$ és $B(4; 3)$?

3. A derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-3; 2)$ pont felel meg egy rádióadó jelkibocsátó berendezésének. Az adás hatókörének sugara 15 egység.

Döntsd el az $A(8; -4)$, $B(9; -11)$, $C(6; -10)$, $D(11; 7)$, $E(-9; 16)$, $F(9; 11)$ pontokról ábrázolás nélkül, hogy azokban fogható-e a rádióadás!



77 Meredekség, iránytangens

BEVEZETŐ

Hegyi utakon és hasonló jellegű meredek utakon láthatunk olyan közlekedési táblát, ami jelentősebb emelkedőre *(1. ábra)* vagy lejtőre *(2. ábra)* hívja fel a figyelmünket. A táblán lévő szám a veszélyes útszakasz legnagyobb emelkedésének, illetve lejtésének a százalékos mértékét mutatja. Minél nagyobb a táblára írt szám, annál meredekebb az emelkedő vagy a lejtő.



1. ábra



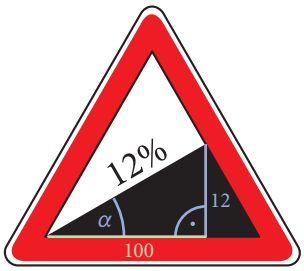
2. ábra

a) Hány fokos szöget zár be a vízszintessel az emelkedő, ha a veszélyt jelző táblán 12% felirat látható?

b) Hány fokos szöget zár be a vízszintessel a lejtő, ha a veszélyt jelző táblán 10% felirat látható?

Megoldás

a)



12% az emelkedés százalékos mértéke, vagyis ez megfelel $\frac{12}{100}$-nak, ami azt jelenti, hogy az emelkedő 100 méter hosszú vízszintes szakaszon 12 métert emelkedik függőlegesen. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy az emelkedő meredeksége $\frac{12}{100}$.

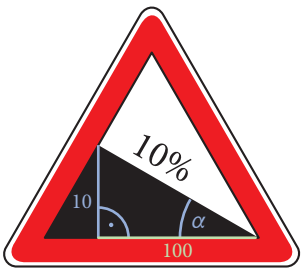
Az ábrán lévő jelölésekkel a derékszögű háromszög befogóinak ismeretében:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{100}$;

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}12$;

ezért $\alpha \approx 6{,}84°$.

b) 10% a lejtés százalékos mértéke, vagyis ez megfelel $\frac{10}{100}$-nak, ami azt jelenti, hogy az út 100 méter hosszú vízszintes szakaszon 10 métert süllyed függőlegesen. A süllyedést, vagyis a magasság csökkenését negatív előjellel fejezhetjük ki, ezért azt is mondhatjuk, hogy a lejtő meredeksége $-\frac{10}{100}$.



Az ábrán lévő jelölésekkel a derékszögű háromszög befogóinak ismeretében:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{100}$;

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$;

ezért $\alpha \approx 5{,}71°$.

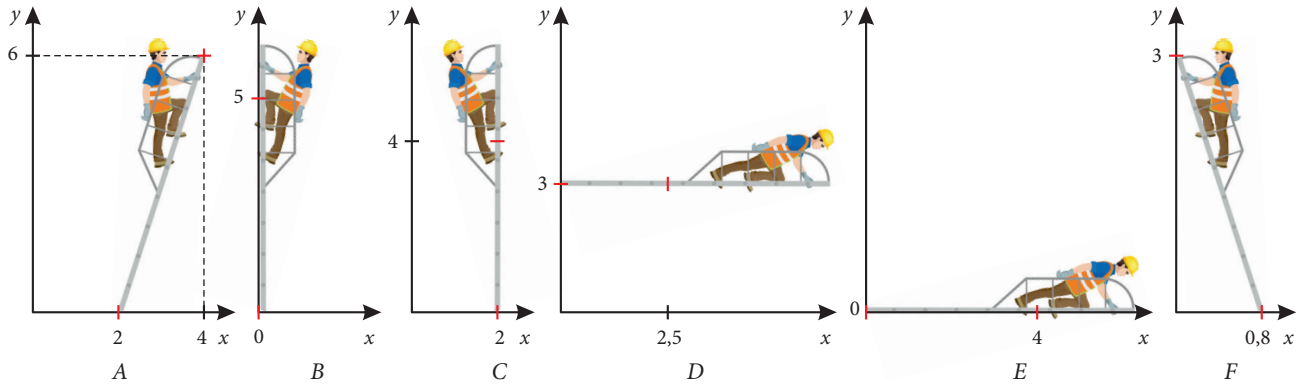
Tehát a lejtő 5,71° nagyságú szöget zár be a vízszintessel, de a süllyedés miatt −5,71°-os szöggel jellemezhetjük az út vízszintestől való eltérését.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Határozzuk meg a következő rajzon lévő adatok ismeretében, hogy az egyes esetekben

a) mekkora a létra egyenesének meredeksége;

b) mekkora a létra egyenesének irányszöge (melynek előjele az alapján alakul, hogy az egyenes emelkedő vagy süllyedő)!



Megoldás

Az egyenes meredeksége meghatározható az alapján, hogy a létra egyik pontjáról indulva hogyan (előjel mutatja) és mennyivel (számérték adja meg) változik a második koordináta az első koordináta növelése mellett, míg az egyenes egy másik pontjára jutunk. (A figyelembe vett pontokat pirossal jelöltük az egyeneseken.)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Második koordináta változása	6	5	4	0	0	-3
Első koordináta változása	2	0	0	2,5	4	0,8
Meredekség (egységnyi első koordinátaváltozásra jutó második koordinátaváltozás)	$\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=3$	nem értelmezhető	nem értelmezhető	$\frac{0}{2,5}=\frac{0}{1}=0$	$\frac{0}{4}=\frac{0}{1}=0$	$\frac{-3}{0,8}=$ $=\frac{-3,75}{1}=-3,75$
A létra egyenesének irányszöge	71,6°	90°	90°	0°	0°	$-75,1°$

Vegyük észre, hogy az egyenes meredeksége megjelenik az egyenes egyenletének y-ra rendezett alakjában az x szorzótényezőjeként.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Meredekség (egységnyi első koordinátaváltozásra jutó második koordinátaváltozás)	$\frac{6}{2}=\frac{3}{1}=3$	nem értelmezhető	nem értelmezhető	$\frac{0}{2,5}=\frac{0}{1}=0$	$\frac{0}{4}=\frac{0}{1}=0$	$\frac{-3}{0,8}=$ $=\frac{-3,75}{1}=-3,75$
A létra egyenesének egyenlete (az előző lecke alapján)	$y=3x-6$	$x=0$	$x=2$	$y=3$ vagy $y=0\cdot x+3$	$y=0$ vagy $y=0\cdot x+0$	$y=-3,75x+3$

2. Idézet a „Támasztólétra használatának szabályai” c. kiadványból:

„… A szükséges hajlásszög függ a létra kialakításától, például egyszerű lépcsőfokos támasztólétránál 60-70°, létrafokos létránál 65-75° között kell lenni. A létra szárának alsó részéhez kell állni, és vízszintesen a könyökünkkel meg kell érinteni a létra fokát. Ekkor megfelelő szögben áll a létra...”

Milyen értékek között van a fent említett esetekben a létra m meredeksége, ha azt emelkedőnek tekintjük?

Megoldás

Az m meredekség az irányszög tangensével egyenlő, így mivel nagyobb hegyesszögnek nagyobb a tangense, ezért

$\operatorname{tg} 60° \le m \le \operatorname{tg} 70°$, illetve $\operatorname{tg} 65° \le m \le \operatorname{tg} 75°$, tehát

$1,73 \le m \le 2,75$, illetve $2,14 \le m \le 3,73$.

Megjegyzés: A hétköznapi életben (például az extrém sportnak számító falmászás esetén) a függőleges falakat, hegyoldalakat tekintik a legmeredekebb képződménynek. Ezzel szemben a matematikában a „függőleges”, vagyis az y tengellyel párhuzamos egyeneseknek nem értelmezzük a meredekségét.



3. Mennyi a $3x - 2y = -6$ egyenes meredeksége?

Megoldás

Az egyenes egyenletét rendezve kapjuk: $y = \frac{3}{2}x + 3$. Az egyenes meredeksége tehát $\frac{3}{2}$.

4. Mekkora szöget alkot az x tengellyel (abszcisszatengellyel) a $3x - 2y = -6$ egyenletű egyenes?

Megoldás

A kérdésre legegyszerűbben a meredekség segítségével válaszolhatunk. Az egyenes egyenletének $y = \frac{3}{2}x + 3$ alakjából látjuk, hogy a meredeksége $\frac{3}{2}$, és az y tengelyt a 3-nál metszi.

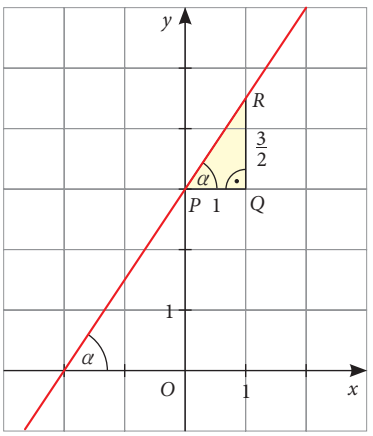
Az ábra PQR derékszögű háromszögének PQ befogója 1 hosszúságú, QR befogójának hossza pedig éppen a meredekség.

Az egyenes az x tengellyel α szöget zár be, ami a PQR háromszög P-nél fekvő hegyesszögével egyenlő.

A derékszögű háromszögben felírva e szög tangensét:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{1},$$

amiből $\alpha \approx 56{,}3°$.



ELMÉLET

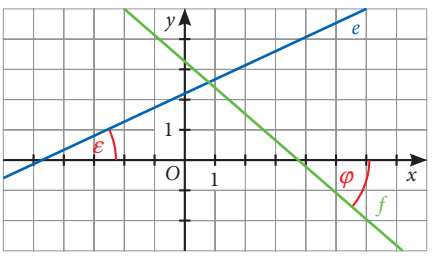
Ha egy egyenes nem merőleges az x tengelyre, akkor az egyenes **irányszögének** nevezzük az egyenesnek az x tengely pozitív félegyenesével bezárt előjeles szöget, melynek nagysága $-90°$-nál nagyobb és $90°$-nál kisebb.

Az y tengellyel párhuzamos egyenesek irányszöge $90°$, de ezeknek az egyeneseknek nincs meredekségük, mert a $90°$-nak nem értelmezzük a tangensét, így nem tudunk felírni $y = mx + b$ alakú egyenletet.

Például:

Az ábrán lévő e egyenes irányszöge $\varepsilon \approx 25°$.

Az f egyenes irányszöge $\varphi \approx -41°$.



Megjegyzések

- A pozitív meredekségű egyenesek irányszöge $0°$-nál nagyobb és $90°$-nál kisebb szög (hegyesszög), a negatív meredekségű egyenesek irányszöge $-90°$-nál nagyobb és $0°$-nál kisebb szög (egy hegyesszög ellentettje); a nulla meredekségű egyenes irányszöge $0°$, az egyenes tehát párhuzamos az x tengellyel.
- Ha egy egyenes párhuzamos az x tengellyel, vagy egybeesik azzal, akkor irányszöge $0°$.
- Ha egy egyenes egyenlete felírható $y = mx + b$ alakban is, akkor az egyenes ***m* meredeksége** az egyenes α irányszögének a tangensével egyenlő: $m = \operatorname{tg}\alpha$.
- Az $m = \operatorname{tg}\alpha$ összefüggés miatt az m számot az egyenes **iránytangensének** vagy **iránytényezőjének** is nevezik.

FELADAT

1. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

Az adott egyenlet:	$3x - 5y = 8$	$4x = y + 2$	$x + 3y + 12 = 0$
Az egyenlet felírva $y = mx + b$ alakban:			
A meredekség, azaz az iránytangens:			
Az egyenes irányszöge:			
Az egyenes és az y tengely metszéspontja:			

2. Egy egyenes egyenlete $y = \frac{4}{5}x + 1$. Add meg a meredekségét és az irányszögét!

3. Egy egyenes iránytangense $-\frac{4}{7}$. Add meg a meredekségét és az irányszögét!

4. Egy f egyenes átmegy az $E(6; 0)$ ponton, és az iránytangense $\frac{2}{3}$.

a) Add meg az egyenes E-től különböző három pontjának koordinátáit!

b) Írd fel az f egyenes egyenletét!

c) Milyen távol van az f egyenes az origótól? (Számításodhoz használhatsz elemi geometriai módszereket.)

HÁZI FELADAT

1. Add meg a következő egyenletekkel megadott egyenesek iránytangensét!

a) $x + 2y = 0$; **c)** $5x - 6y = 9$; **e)** $x + 3y = 12$;

b) $3x + 6y = 5$; **d)** $5x - 2y = 1$; **f)** $4x - 2y = 7$.

2. A k egyenes átmegy a $K(8; 0)$ ponton, és az iránytangense 0,75. Mekkora távolságra van k az origótól? (Számításodhoz használhatsz elemi geometriai módszereket is.)

3. **a)** Egy egyenes meredeksége 2, az y tengelyen lévő pontja $P(0; -5)$. Határozd meg az egyenes további négy pontjának koordinátáit!

b) Egy egyenes meredeksége $-\frac{1}{3}$, az y tengelyen lévő pontja $P(0; 3)$. Határozd meg az egyenes további négy pontjának koordinátáit!

4. **a)** Milyen egész számmal felírt, %-ban kifejezett adatot kell arra a veszélyes emelkedőt jelző táblára írni, amellyel a 14°-os emelkedőt szeretnék jelezni?



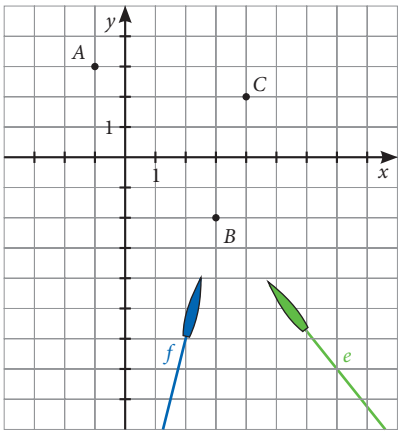
b) Milyen hajlásszögű lehet az a lejtő, amelyet az alábbi táblával jeleznek? Válaszod két tizedesjegyre kerekítve fokban add meg!



78 Egyenesek metszéspontja

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hosszú távú hajóutak tervezésénél a legmegfelelőbb pálya kiválasztása a cél. A főbb pályákat úgy határozzák meg, hogy a jármű állandó útirányt tartva jusson a célba.



Két hajó mozgását a monitoron követve azt látjuk, hogy a *NewSea* az $e: 5x + 4y = 7$, a *DrunkenSailor* pedig az $f: 4x - y = 14$ egyenletű egyenesen mozog. Áthaladnak-e a hajók mozgásuk során az $A(-1; 3)$, a $B(3; -2)$ és a $C(4; 2)$ pontokon?

Megoldás

Az A pont koordinátáit az egyenesek egyenletébe behelyettesítve rendre a következő kijelentéseket kapjuk: $-5 + 12 = 7$, $-4 - 3 = 14$. Az első kijelentés igaz, a második hamis. Ez azt jelenti, hogy az A pont az e egyenesen rajta van, az f egyenesen nincs.

A B pont koordinátáit behelyettesítve: $15 - 8 = 7$, $12 + 2 = 14$. Mindkét kijelentés igaz, tehát a B pont mindkét egyenesnek pontja.

A C pont koordinátáit behelyettesítve: $20 + 8 = 7$, $16 - 2 = 14$. A második kijelentés igaz, az első hamis, tehát a C pont az f egyenesen rajta van, az e egyenesen nincs.

Mivel két különböző egyenesről van szó, ezért a két egyenes metszi egymást, a metszéspontjuk a $B(3; -2)$ pont. Tehát a *NewSea* áthalad az A és B ponton, a *DrunkenSailor* pedig a B és C ponton, vagyis a B pont a pályájuk metszéspontja.

Megjegyzés

A metszéspont koordinátái a két hajó pályájának egyenletéből felírt egyenletrendszer megoldásaként is adódnak. A megoldáshoz a behelyettesítő módszert és az egyenlő együtthatók módszerét is használhatjuk.

ELMÉLET

Két egyenes metszéspontja

Ha ismerjük két síkbeli alakzat egyenletét, akkor a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai éppen a két síkbeli alakzat közös pontjait adják meg.

Például:

1. A $3x + y = -1$ és a $2x - 3y = -19$ egyenletű egyenesek metszéspontját az egyenletekből felírt egyenletrendszer megoldása adja. A feladat megoldható bármelyik tanult módszerrel (behelyettesítő, illetve az egyenlő együtthatók módszere segítségével). Eredmény: $x = -2$, $y = 5$, tehát a két egyenes metszéspontja a $(-2; 5)$ pont.
2. Az $\left.\begin{matrix} 5x + 3y = 4 \\ 15x + 9y = 7 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza az üres halmaz, ami azt mutatja, hogy az egyenleteknek megfelelő két egyenesnek nincs közös pontja.

FELADAT

1. Van-e a következő két egyenesnek közös pontja? Ha van, melyik pont az?

a) $3x - 7y = -7$ és $6x - 7y = -28$

b) $3x - y = 16$ és $2x + 5y = 5$

c) $6x - 10y = 3$ és $-3x + 5y = 2$

d) $x - y = 4$ és $5x - 5y = 20$

2. Adott az e: $-3x + 2y = 10$ egyenletű egyenes. Írd fel egy olyan egyenes egyenletét, amely

a) az e egyenest a $(-3; 0{,}5)$ pontban metszi;

b) ugyanolyan meredekségű, mint az e egyenes, és átmegy az origón;

c) az e egyenest a 2 abszcisszájú pontjában metszi, és meredeksége -3 (ahol az abszcissza a pont első koordinátáját jelenti)!

3. Az ABC háromszög AB oldalegyenesének egyenlete $7x - 3y = -13$, valamint a C csúcsból induló súlyvonal egyenlete $-6x + 2y = 14$. Határozd meg AB oldal felezőpontjának koordinátáit!

HÁZI FELADAT

1. Melyik pontban metszi a $4x - 5y = 13$ egyenletű egyenes a következő egyeneseket?

a) $x + 2y = 0$ **b)** $x + 3y = 2$ **c)** $x + 4y = 4$

2. Adott az f: $5x - 3y = 7$ egyenletű egyenes. Írd fel egy olyan egyenes egyenletét, amely

a) az f egyenest a $(-1; -4)$ pontban metszi;

b) átmegy az origón, és meredeksége az f egyenes meredekségének reciprokával egyenlő;

c) az f egyenest az 1 ordinátájú pontjában metszi, és meredeksége -3 (ahol az ordináta a pont második koordinátáját jelenti)!

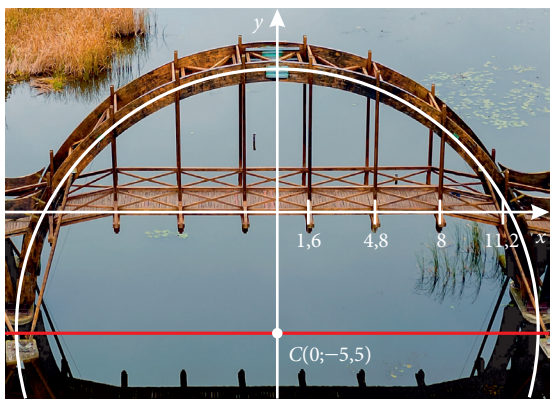
3. Az ABC háromszög B csúcsából induló súlyvonalának egyenlete $2x + 6y = 5$, az A csúcsból induló súlyvonalának egyenlete $x - 5y = 6{,}5$. Határozd meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

RÁADÁS

„A Kányavári-sziget a Kis-Balaton egyetlen szabadon látogatható területe. A sziget megközelítése a kányavári fahídon át lehetséges, amely egyúttal a Kis-Balaton jelképe is. A 80 méteres, 3 × 25 méter nyílású, monumentális fahíd főtartója rétegelt-ragasztott ívszerkezet. A híd tervezője Varga Gellért erdőmérnök volt. A szabályos félkör alakú főtartó nagy ívmagassága jellegzetes megjelenést ad. A híd erőtanilag kedvezőtlen formájú, a félkörnyi főtartók kihasználhatósága alacsony, a nagy magasság miatt pedig a híd oldalirányú stabilitása gyenge, emiatt utólag oldalirányban a magas íveket a partokra kihorgonyozták. …”

(Forrás: Lorászkó Balázs – *Gyalogos hidak Magyarországon*)





Az ábrán lévő adatok felhasználásával oldd meg a feladatokat!

a) Írd fel a hídszerkezetre illeszkedő kör egyenletét!

b) Határozd meg az $x = 1{,}6$, az $x = 4{,}8$ és az $x = 8$ egyenesek és a hídszerkezet ívének megfelelő kör pozitív ordinátájú metszéspontjainak koordinátáit!

c) Milyen hosszúságú a függőleges tartóoszlopok hossza, ha azt a híd vízszintes gerendájától a körívig számoljuk?

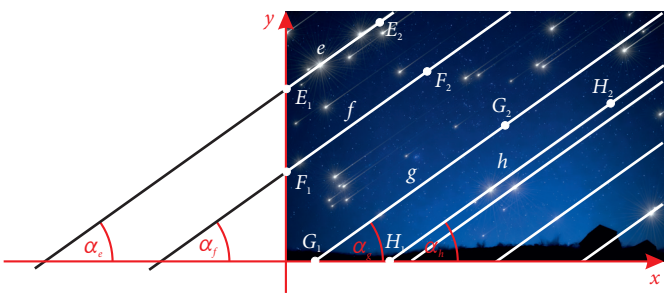
79 Merőleges, párhuzamos egyenesek

BEVEZETŐ



A hullócsillag nem is hullik le, és nem is csillag.
A hullócsillag valójában a meteor hétköznapi elnevezése. Erre az égi jelenségre Arisztotelész használta elsőként a meteor (jelentése: magasban lebegő) kifejezést.
A hullócsillag olyan fényjelenség, amelyet az űrben keringő kisebb kövek, porszemek hoznak létre a légkörben. Ezek a kövek, porszemcsék a nagy sebességük miatt felhevülnek a Föld légkörében, felizzanak, és általában néhány másodperc alatt megsemmisülnek, de a bolygó felszínét csak ritkán érik el.
Minden év augusztusában a rengeteg porszemcséből álló Perseidák meteorrajnak köszönhetjük a sok hullócsillagot. A Perseidák elnevezés abból ered, hogy a meteorok a Perseus csillagkép irányából sugároznak szét.
A Perseidák meteorjai gyakran párhuzamosan száguldva jelennek meg az égen. Fényes, színes és olykor több másodpercen át fénylő nyomot hagynak maguk után a nyári égbolton.

Hogyan tudjuk megállapítani, hogy bizonyos hullócsillagok valóban párhuzamosan haladtak-e az égbolton?
Mivel a jelenség pillanatok alatt zajlik le, ezért a vizsgálatot például az égboltról készült fotó alapján végezhetjük el.
Használjuk fel a koordinátageometriában tanult fogalmakat, módszereket!
A párhuzamosság megállapításához elegendő, ha egyenesek által létrehozott szögek nagyságát, valamint egyenesek meredekségét vizsgáljuk.
Helyezzünk a csillaghullásról készült fotóra egy derékszögű koordináta-rendszert az alábbiak szerint:
Az egyenesek párhuzamosak egymással, ha a sík egy bizonyos egyenesével ugyanakkora szöget zárnak be. Vizsgálhatjuk a meteorpályák egyenesének az irányszögét, vagyis az x tengely pozitív félegyenesével bezárt szögét, de elegendő vizsgálnunk az egyenesek meredekségét is, mivel az irányszögek egyezése esetén az egyenesek meredeksége (ami az irányszög tangense) is egyenlő egymással.



A fotóra helyezett koordináta-rendszerben keressünk olyan pontokat, amelyek illeszkednek a meteoritok e, f, g és h egyenesére.
Minden egyenes esetén elegendő két pont kiválasztása, mivel az egyenest – így az irányát is – egyértelműen meghatározza két különböző pontja.
A kiválasztott pontok koordinátáiból számolható az egyenesek meredeksége, valamint az irányszöge.

ELMÉLET

Az e egyenes esetén $\overrightarrow{E_1E_2}(e_1; e_2)$ koordinátáinak ismeretében az e egyenes meredeksége $m_e = \frac{e_2}{e_1}$.
Hasonlóan meghatározhatjuk az f, g és h egyenesek meredekségét.
Ha

$$m_e = m_f \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_e = \alpha_f \quad \Leftrightarrow \quad e \parallel f.$$

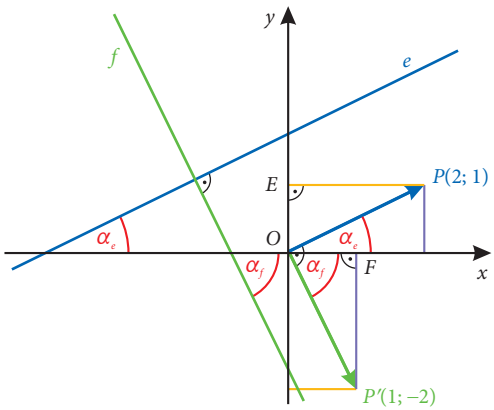
A koordinátasík két olyan egyenese, amely nem párhuzamos az y tengellyel, akkor és csak akkor párhuzamos egymással, ha iránytangenseik (meredekségeik) egyenlők.

Ha az egyenesek az y tengellyel párhuzamosak – egyenletük $x = c$ ($c \in \mathbf{R}$) alakú –, akkor egymással is párhuzamosak.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott az e egyenes, melynek meredeksége $m_e = 0{,}5$.
Határozzuk meg az e egyenesre merőleges f egyenes m_f meredekségét!

Megoldás
Az alábbi ábra jelöléseit használva:



Az e egyenes ugyanolyan nagyságú szöget zár be az x tengely pozitív ágával, mint a vele párhuzamos $\overrightarrow{OP}(2; 1)$ helyvektor. Az $\overrightarrow{OP}$ vektor $-90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{OP}'(1; -2)$, ebből $m_f = -\frac{2}{1}$ adódik.

Láttuk, hogy $e \perp f$ és $m_e = \frac{1}{2}$ esetén $m_f = -2$, amiből adódik az $m_f \cdot m_e = -1$ egyenlőség.

ELMÉLET

Merőlegesség és az egyenesek iránytangenseinek kapcsolata

A koordinátasík két olyan egyenese, melyek közül egyik sem párhuzamos az y tengellyel, akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha iránytangenseik szorzata -1-gyel egyenlő.

Ha az egyenesek valamelyike az y tengellyel párhuzamos – egyenlete $x = c$ ($c \in \mathbf{R}$) alakú –, akkor merőleges az x tengellyel párhuzamos – egyenlete $y = b$ ($b \in \mathbf{R}$) alakú – egyenesek bármelyikére.

FELADAT

1. Az e egyenes egyenlete $-4x + 20y = 12$. Válaszd ki az alábbi egyenletek közül azokat, amelyekhez tartozó egyenesek

a) párhuzamosak az e-vel; **b)** merőlegesek az e-re!

$-x + 5y = 2$
$2x - 10y = -6$
$10x + 2y = -5$
$-40x + 8y = 20$
$-40x - 8y = 20$

c) Hány egyenest határoz meg a feladatban megadott 6 egyenlet?

2. Az e egyenes egyenlete $6x - 15y = 2$. Határozd meg a p valós számot úgy, hogy a $9x + py = 5$ egyenletű egyenes

a) merőleges legyen az e-re;

b) párhuzamos legyen az e-vel!

3. Add meg a $P(5; 2)$ ponton átmenő egyenest, amely
a) párhuzamos az $y = -3$ egyenletű egyenessel;
b) merőleges az $x = 7$ egyenletű egyenesre!

4. Az e egyenes átmegy az origón, és párhuzamos a $\mathbf{v}(5; -2)$vektorral.
a) Határozd meg az e egyenes iránytangensét!
b) Írd fel az e egyenes egyenletét!
c) Írd fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amelyre illeszkedik a $P(0; 2)$ pont, és párhuzamos az e egyenessel!
d) Írd fel annak a g egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az origón, és merőleges az e egyenesre!

HÁZI FELADAT

1. A következő egyenletekkel egyeneseket adunk meg:

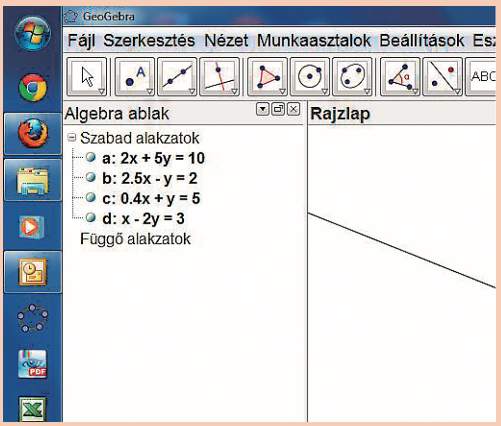
$e: 2x + 5y = -1$; $f: 4x - 3y = 12$; $g: 6x + 8y = 5$;

$h: x - 0{,}4y = 0{,}6$; $i: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$; $j: 0{,}8x = 1 - 2y$.

a) Hány egyenest adtunk meg?
b) Válaszd ki közülük a merőleges egyeneseket!
c) Válaszd ki közülük a párhuzamos egyeneseket!

2. Adott az $ABCD$ négyszög a derékszögű koordináta-rendszerben, ahol $A(-4; -2)$, $B(4; 2)$, $C(8; 10)$ és $D(0; 6)$. Vizsgáld meg, hogy
a) párhuzamosak-e a négyszög szemközti oldalai;
b) merőlegesek-e az átlói!

3. A *GeoGebra* programnak az ábrán látható egyenletekkel adtuk meg egy négyszög oldalegyeneseit. Milyen négyszöget rajzolt a program?



4. Adottak az ABC háromszög csúcspontjai: $A(-3; 2)$, $B(5; -4)$, $C(0; 1)$.
a) Írd fel a háromszög B csúcsából induló magasságvonalának az egyenletét!
b) Írd fel az AB oldal felezőmerőleges egyenesének egyenletét!

RÁADÁS

A közös pontok meghatározására megismert módszer (egyenletrendszer megoldása) teljessé teszi az eszköztárunkat: egyenest és kört egyenletekkel tudunk megadni, és algebrai módszerekkel meg tudjuk határozni alakzatok közös pontjait.
Távolságot és szöget a koordináta-rendszer segítségével megadott algebrai adatokból már korábban megtanultunk kiszámítani, ezért mondhatjuk, hogy a síkgeometria minden eddig megismert feladatát, amely csak körző és vonalzó használatát igényli, meg tudjuk oldani csupán algebrai eszközök használatával. A geometria tehát „művelhető” úgy is, hogy egyetlen pontot sem rajzolunk, egyetlen vonalat sem húzunk meg, csupán számpárokkal, egyenletekkel, egyenletrendszerekkel dolgozunk.



A geometriának ezt a fajta tárgyalását *koordinátageometriának* vagy *analitikus geometriának* nevezik. A koordinátageometria megteremtőjének *René Descartes* (ejtsd: röné dékárt) XVII. századi francia természettudóst, filozófust tartják (ezért szokás Decartes-féle koordináta-rendszerről beszélni). Descartes nevének latin változata Cartesius, és sok nyelvben ebből ered a koordináta-rendszer elnevezése is (pl. angolul Cartesian system), de ez az eredete a fizikából ismert Cartesius-búvárnak, illetve a karteziánus filozófiának is.

Descartes 1637-ben jelentette meg *Értekezés a módszerről* című filozófiai munkáját, melynek legfontosabb elemei a következők:

– előítéletektől mentesen csak a tisztán, világosan felfogható dolgokat kell igaznak elfogadni;
– a problémákat a lehető legtöbb részre kell szétbontani;
– az egyszerűbb tárgytól fokozatosan kell a bonyolultabb felé haladni;
– törekedni kell a probléma teljes körű tárgyalására.

Műve függelékében Descartes három gyakorlati példán mutatja be filozófiáját, ezek egyike, a *La Géométrie* (A geometria) szól a geometria újszerű, algebrai alapokon történő tárgyalásáról.

Habár a mű eredeti formájában hűvös fogadtatásra talált, a későbbi kiegészítésekkel és kommentárokkal ellátva utat nyitott a matematikai analízis felé, amely ma a fizika és a mérnöki tudományok alapja.

HÁZI FELADAT

5. Az alábbi ábrán ábrázoltunk négy egyenest. Jelöltük mindegyik egyenes két rácspontját.

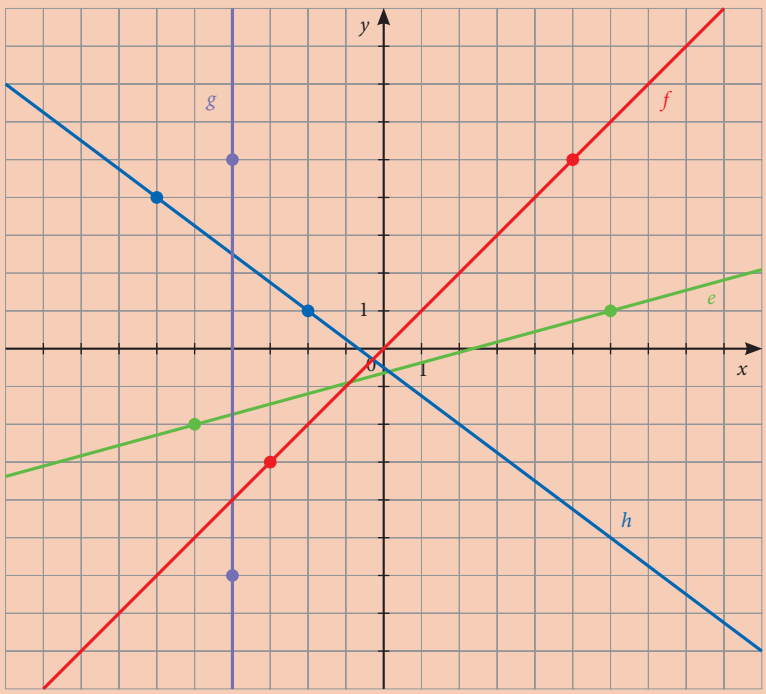
a) Add meg az f egyenessel párhuzamos egyenesek meredekségét!

b) Határozd meg az e egyenesre merőleges egyenesek meredekségét!

c) Van-e az ábrán olyan egyenes, amelyiknek 1-nél nagyobb a meredeksége?

d) Van-e az ábrán olyan egyenes, amelyik párhuzamos a $3x + y = -12$ egyenletű egyenessel? Ha igen, akkor melyik az?

e) Van-e az ábrán olyan egyenes, amelyik merőleges az $5x - 5y = 17$ egyenletű egyenesre? Ha igen, akkor melyik az?



80 Gyakorlás

FELADAT

1. Megadjuk a következő vektorokat: **a**(2; −3), **b**(−2; 3), **c**(4; −6), **d**(6; 4), **e**(10; −2), **f**(−4; −1).
Válassz ki közülük
a) egymással párhuzamos vektorokat;
b) egymásra merőleges vektorokat;
c) egy olyan vektort, amelyik éppen két másiknak az összege;
d) egy olyan vektort, amelyik éppen két másiknak a különbsége;
e) egy olyan vektort, amelyik pontosan valamelyik másiknak a +90°-os elforgatottja!

2. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai $A(4; 1)$, $B(10; 5)$.
a) Hány ilyen háromszög rajzolható a koordinátarendszerben?
b) Add meg a harmadik csúcs koordinátáit!
c) Számítsd ki a háromszög kerületét és területét!
d) Határozd meg a háromszög köré írható körének középpontját!

3. Írd fel annak a körnek az egyenletét,
a) amelyre illeszkedik a $P(-5; 12)$ pont, és középpontja az origó;
b) amely érinti az abszcisszatengelyt, és középpontja a $C(-2; 7)$ pont;
c) amely érinti mindkét koordinátatengelyt, és sugara 3 egység hosszú;
d) amely egyik átmérőjének két végpontja az $A(7; -4)$ és $B(-3; -6)$ pontok!

4. Az f egyenes egyenlete $5x - 12y + 43 = 0$.
a) Írd fel az egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban!
b) Add meg az f iránytangensét!
c) Mekkora szöget alkot az f a koordinátatengelyekkel?
d) Hol metszi az f a koordinátatengelyeket?

5. Adottak az

$e: y = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5}$; $\quad g: -9x + 15y = 10$;

$f: y = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$; $\quad h: 6x - 10y = 14$;

$i: 10x + 6y = -14$

egyenletű egyenesek. Válaszolj az alábbi kérdésekre! Válaszod számolással indokold!
a) Melyik egyenes párhuzamos a g egyenessel?
b) Melyik egyenes esik egybe az e egyenessel?
c) Melyik egyenes merőleges az f egyenesre?
d) Hány egyenes metszi a megadottak közül az i egyenest?
e) Igaz-e, hogy az i és h egyenesek az y (ordináta) tengelyen metszik egymást?

HÁZI FELADAT

1. Adottak az $A(-5; -4)$, $B(2; -7)$, $C(-6; -1)$ pontok és az
$e: 3x - 2y = 2$ $\quad f: 3x + 4y = 14$ $\quad g: x + 3y = -7$
egyenletű egyenesek. Válaszolj a kérdésekre! Válaszaid számolással indokold!
a) Illeszkedik-e az e egyenesre a BC szakasz felezőpontja?
b) Párhuzamos-e az f egyenessel a $\overrightarrow{BC}$?
c) Merőleges-e a g egyenesre a $\overrightarrow{AC}$?
d) Határozd meg az e és f egyenesek metszéspontjának koordinátáit!
e) Számítsd ki annak a derékszögű háromszögnek a területét, amelyet a g egyenes és a koordinátatengelyek határoznak meg!

2. Írd fel annak a körnek az egyenletét,

a) amelyre illeszkedik $P(7; -9)$ pont, és középpontja a $C(4; -5)$ pont;

b) amely érinti az ordinátatengelyt, és középpontja a $C(-5; -6)$ pont;

c) amely érinti mindkét koordinátatengely negatív félegyenesét, és sugara 4 egység hosszú;

d) amely egyik átmérőjének végpontjai az $A(1; -8)$ és $B(-8; 32)$ pontok!

3. Az ábrán egyeneseket (e; f; g) és köröket (k_1; k_2) ábrázoltunk. Megjelöltünk az egyenesekre, valamint a körökre illeszkedő néhány rácspontot (A, B, C, D, E, F, P), és megadtuk a körök K, valamint Q középpontjának koordinátáit.

Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

a) A körök középpontjainak távolsága $4\sqrt{2}$ egység.

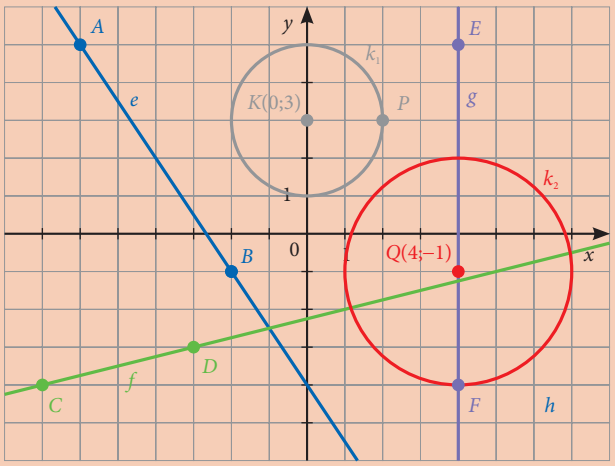
b) A g egyenes meredeksége 1.

c) Az e egyenes egyenlete $3x + 2y = -8$.

d) Az f egyenes irányszöge közelítőleg 14°.

e) A k_2 körre illeszkedik a $(6; 1)$ pont.

f) Az f és g egyenesek metszéspontja a $(4; -1{,}25)$ pont.



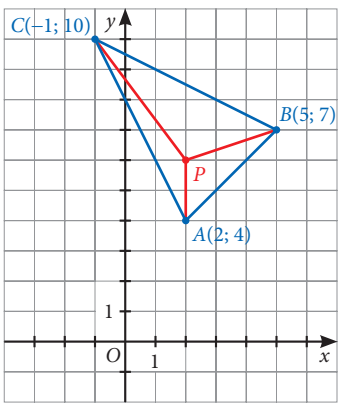
RÁADÁS

Megismerkedtünk a koordinátageometria alapjaival. Láthattuk, hogy a geometria igen szoros kapcsolatba hozható az algebrával. A kapcsolat megmutatását, elemzését a derékszögű koordináta-rendszer és a vektorok számpárok segítségével történő megadása tette lehetővé.

A geometriai feladatok megoldására hatékony módszer lehet a probléma algebrai formába öntése. Erre mutatunk egy példát az alábbiakban.

Adott az ABC háromszög. Határozzuk meg a síkjában azt a P pontot, amelyre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg a legkisebb!

Válasszunk egy alkalmas koordináta-rendszert!



Legyenek a háromszög rögzített csúcspontjai például $A(2; 4)$, $B(5; 7)$ és $C(-1; 10)$, a sík egy tetszőleges pontja $P(x; y)$.
Ekkor $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + (x-5)^2 + (y-7)^2 + (x+1)^2 + (y-10)^2$.
A kérdés, hogy mely számokat írjuk az x, illetve az y helyébe, hogy a helyettesítési érték a lehető legkisebb legyen.
Alakítsuk át algebrai azonosságok alkalmazásával a hattagú összeget:
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3x^2 + 3y^2 - 12x - 42y + 195 = 3(x^2 - 4x) + 3(y^2 - 14y) + 195$. A teljes négyzetté kiegészítés módszerével: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3(x-2)^2 + 3(y-7)^2 + 36$.
Ebből már világos, hogy az összeg pontosan akkor lesz a legkisebb, ha a négyzetes kifejezések értéke 0, azaz $x = 2$ és $y = 7$.
A $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg tehát akkor a legkisebb, ha a P pont koordinátái $(2; 7)$. A legkisebb összeg a 36.

Megjegyzés
Számolással ellenőrizhető, hogy az ABC háromszög súlypontja éppen a $(2; 7)$ pont.
Általánosan is bizonyítható, hogy a minimális négyzetösszeget adó P pont minden esetben a háromszög súlypontjával azonos.

81 Gyakorlás, tudáspróba

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2011)
Adott két egyenes:
$e: 5x - 2y = -14{,}5$, $f: 2x + 5y = 14{,}5$.

a) Határozd meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit!

b) Igazold, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek!

c) Számítsd ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét!

2. (Érettségi feladat, 2012)
Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; -1)$, $B(9; -3)$ és $C(-3; 6)$.

a) Írd fel a BC oldal egyenesének egyenletét!

b) Számítsd ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát!

c) Számítsd ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát!

3. (Érettségi feladat, 2010)
Egy kör az (1; 0) és (7; 0) pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írd fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszod indokold!

4. (Érettségi feladat nyomán, 2007)

a) Ábrázold a koordináta-rendszerben az e egyenest, melynek egyenlete $4x + 3y = -11$. Számítással döntsd el, hogy a $P(100; -36)$ pont rajta van-e az egyenesen!
Az egyenesen levő Q pont ordinátája (második koordinátája) 107. Számítsd ki a Q pont abszcisszáját (első koordinátáját)!

b) Írd fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5; 3)$ és $B(1; -5)$!
Számítással döntsd el, hogy az $S(1; 3)$ pont rajta van-e a körön!

5. (Érettségi feladat, 2015)
Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsd ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

b) Számítsd ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4; -3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7; 1)$ pont.
Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

c) Add meg a P, az R és az S csúcsok koordinátáit!

RÁADÁS

Magyarországon az első érettségi vizsgaszabályzat a XIX. század közepén jelent meg. A kötelező tantárgyak között szerepelt a természetismeret, mely magában foglalta a mennyiségtant (jelenleg matematika) is.
Az érettségi feladatokat az érettségit szervező tanintézmények tanárai tűzték ki. Az alábbi példát – az érintett intézmény és a feladatot kitűző tanár személyének megnevezésével együtt – az eredeti megfogalmazásában láthatod.

Az érettségi vizsgálat tételei az 1893–94. iskolai év végén. Székesfehérvár. Állami főreáliskola.

Adva van két egyenes egyenlete:

$$24y - 16x + 17 = 0$$

$$8y - 40x + 179 = 0$$

Ezen két egyenes metszéspontján keresztül oly egyenes szerkesztendő, mely a cordináta-tengelyek positív részével 28 négyzet egységnyi területű derékszögű háromszöget képez.

Illés Gyula.

(Forrás: Középiskolai Matematikai Lapok 1895. május)

TUDÁSPRÓBA I.

1. Adott az $\mathbf{a}(1;\ 4)$, a $\mathbf{b}(-3;\ 6)$ és a $\mathbf{c}\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ vektor.

a) Határozd meg az $\mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ vektor koordinátáit!

b) Add meg az $\frac{1}{2}\mathbf{b}$ vektor 90°-os elforgatottjainak a koordinátáit!

c) Határozd meg az ABC háromszög BC oldalfelező pontjának koordinátáit, ha a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$!

d) Írd fel az ABC háromszög AB oldalegyenesének egyenletét, ha a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$!

2. Adott a sík három egyenese:
$e: 5x - 2y = -7$, $\quad f: y = 5x - 9$, $\quad g: c \cdot x + 4y = 5$.

a) Mennyi a c valós szám értéke, ha az $A(3; -2)$ pont illeszkedik az g egyenesre?

b) Írd fel a $P(-7;\ 4)$ ponton átmenő, f egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!

c) Milyen c valós szám esetén lesz az e egyenesre merőleges a g egyenes?

d) Hol metszi az e egyenes az y (ordináta) tengelyt?

e) Határozd meg az e és f egyenes metszéspontjának koordinátáit!

3. Adott a síkon az $A(1; -3)$, a $B(-2; -7)$ és a $C(-2;\ 6)$ pont.

a) Határozd meg az $\overrightarrow{AB}$ koordinátáit!

b) Írd fel a BC egyenes egyenletét!

c) Rajta van-e az A pont az $(x-6)^2 + (y-9)^2 = 169$ egyenletű körön?

d) Írd fel annak a C középpontú körnek az egyenletét, amelynek sugara 4 egység!

e) Írd fel annak az A középpontú körnek az egyenletét, amely érinti az y tengelyt!

4. Az $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsa az $A(1;\ 4)$ és a $C(9; -6)$ pont, az AB oldalegyenes egyenlete $13x - 6y = -11$.

a) Írd fel a BD átló egyenesének az egyenletét!

b) Határozd meg a B és a D csúcs koordinátáit!

c) Mekkorák a rombusz oldalai?

TUDÁSPRÓBA II.

1. Adott az $\mathbf{a}(2;\ 4)$, a $\mathbf{b}(-12;\ 3)$ és a $\mathbf{c}\left(-\frac{2}{3};\ \frac{5}{3}\right)$ vektor.

a) Határozd meg az $\mathbf{a} + 6\mathbf{c}$ vektor koordinátáit!

b) Határozd meg az ABC háromszög AC oldalfelező pontjának koordinátáit, ha a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$!

c) Add meg az $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ vektor 90°-os elforgatottjainak a koordinátáit!

d) Írd fel az ABC háromszög AB oldalegyenesének egyenletét, ha a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$!

2. Adott a sík három egyenese:
$e: -3x + 4y = 11$, $\quad f: y = 6x - 13$, $\quad g: k \cdot x + 2y = 1$.

a) Mennyi a k valós szám értéke, ha az $A(5; -2)$ pont illeszkedik a g egyenesre?

b) Írd fel a $P(5; -2)$ ponton átmenő, f egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!

c) Milyen k valós szám esetén lesz az e egyenesre merőleges a g egyenes?

d) Hol metszi az e egyenes az x (abszcissza) tengelyt?

e) Határozd meg az e és f egyenesek metszéspontjának koordinátáit!

3. Adott a síkon a $P(1;\ 7)$, a $Q(1; -4)$ és az $R(-2;\ 5)$ pont.

a) Határozd meg a $\overrightarrow{PR}$ koordinátáit!

b) Írd fel a PQ egyenes egyenletét!

c) Rajta van-e a P pont az $(x-6)^2 + (y+5)^2 = 169$ egyenletű körön?

d) Írd fel annak a Q középpontú körnek az egyenletét, amelynek sugara 3 egység!

e) Írd fel annak a P középpontú körnek az egyenletét, amely érinti az x (abszcissza) tengelyt!

4. Az ABC derékszögű háromszög AB oldalegyenesének egyenlete $3x - 2y = -23$. Az átfogó végpontjai: $A(-3;\ 7)$ és $C(-1;\ 23)$.

a) Írd fel a BC oldalegyenes egyenletét!

b) Add meg a B csúcs koordinátáit!

c) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

Témazáró feladatgyűjtemény

1. Adva van a koordináta-rendszerben az $A(3; 4)$ és a $B(-2; 1)$ pont.

a) Ábrázold az origóból a pontokba mutató vektorok összegét, különbségét!

b) Add meg koordinátákkal az origóból a pontokba mutató vektorok összegét, különbségét!

2. Adva van a koordináta-rendszerben az $A(3; 4)$, a $B(-2; 1)$ és a $C(-1; 5)$ pont.

a) Ábrázold az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok összegét, különbségét!

b) Add meg az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok összegét, különbségét!

3. Adva van egy négyszög négy csúcspontja: $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(-7; 4)$ és $D(-1; 5)$.

a) A paralelogramma definíciója alapján mutasd meg, hogy a négyszög paralelogramma!

b) Mekkorák az oldalai?

c) Add meg az átlóvektorokat!

d) Milyen hosszúak az átlók?

4. **a)** (Érettségi feladat, 2005)
Adottak az $\mathbf{a}(6; 4)$ és az $\mathbf{a} - \mathbf{b}(11; 5)$ vektorok.
Add meg a $\mathbf{b}$ vektort a koordinátáival!

b) (Érettségi feladat, 2008)
Az $A(-7; 12)$ pontot egy $\mathbf{r}$ vektorral eltolva a $B(5; 8)$ pontot kapjuk. Add meg az $\mathbf{r}$ vektor koordinátáit!

5. (Érettségi feladat, 2007)
Fejezd ki az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok segítségével a $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$!

6. Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(-4; 2)$, $B(6; -8)$ és $C(3; 7)$.

a) Add meg az origóból az AB szakasz felezőpontjába mutató vektort!

b) Add meg a C pontból az AB szakasz felezőpontjába mutató vektort!

7. (Érettségi feladat nyomán, 2018)
Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-2; 3)$ és a $K(3; 15)$ pont.
Tükrözzük a P pontot a K pontra. Számítsd ki az így kapott P' pont koordinátáit!

8. Adva van az ABC háromszög, ahol $A(-2; -3)$, $B(-1; 4)$, $C(4; 3)$.

a) Add meg a háromszög három oldalfelező pontját!

b) Add meg a csúcspontokból a szemközti oldalfelező pontokba mutató vektorokat!

c) Add meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA}$ oldalvektorokat!

d) Mekkorák a háromszög oldalai?

e) Mekkora két-két oldalvektor összege és különbsége?

f) Add meg az oldalfelező pontok által meghatározott vektorokat!

g) Milyen hosszúak az oldalfelező pontok által meghatározott vektorok?

9. Adva van egy paralelogramma négy csúcspontja: $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(-7; 4)$ és $D(-1; 5)$.

a) Add meg az átlók metszéspontjának koordinátáit!

b) Add meg az oldalfelező pontok koordinátáit!

c) Milyen négyszöget alkot a négy oldalfelező pont? Miért?

10. Adva van egy négyszög négy csúcsa. $A(1; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(-7; 4)$ és $D(-4; 4{,}5)$.

a) A trapéz definíciója alapján mutasd meg, hogy a négyszög trapéz!

b) Mekkorák az oldalai?

c) Add meg az átlóvektorokat!

d) Milyen hosszúak az átlók?

e) Add meg az oldalak felezőpontjainak koordinátáit!

11. Adva van két pont, $A(3; 4)$, illetve $B(-3; 1)$.

a) Egészítsd ki négyzetté úgy, hogy AB a négyzet egyik oldala legyen! Figyelj, két ilyen négyzet is van!

b) Számítsd ki a négyzet oldalának és átlójának hosszát!

c) Add meg az oldalakat mint vektorokat!

12. Egy háromszög három csúcsa:
$A(3; 4)$, $B(2; 6)$, $C(-2; 5)$.

a) Milyen hosszúak az oldalai?

b) Mekkora a háromszög kerülete?

c) Add meg az oldalakat vektorként!

13. Egy háromszög csúcsai $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 3)$.

a) Igazold, hogy a háromszög egyenlő szárú!

b) Mekkora a szárak hossza?

c) Mekkorák az alapon fekvő szögei?

d) Mekkora az AB oldalhoz tartozó magasság?

e) Mekkora a háromszög kerülete, területe?

14. Egy háromszög csúcsai $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 4)$.

a) Mekkora az oldalak hossza?

b) Mekkorák a szögei?

c) Mekkora az AB oldalhoz tartozó magasság?

d) Mekkora a háromszög kerülete, területe?

15. Egy háromszög csúcsai $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 5)$.

a) Mekkora az oldalak hossza?

b) Mekkorák a háromszög szögei?

c) Mekkora a háromszög kerülete, területe?

d) Add meg a körülírt körének a középpontját és sugarát!

16. Add meg annak a körnek az egyenletét, amelynek

a) középpontja az origó, sugara 5 egység;

b) középpontja a $K(4; 5)$ pont, sugara 5 egység;

c) középpontja a $K(-2; 3)$ pont, sugara $\sqrt{5}$ egység;

d) középpontja a $K(-3; -5)$ pont, sugara 10 egység!

17. (Érettségi feladat, 2014)
Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja $K(-2; 3)$.
Add meg a kör sugarát, és írd fel az egyenletét!

18. Egy kör középpontja $K(2; 3)$, sugara 5 egység.

a) Add meg az egyenletét!

b) Add meg a 2 abszcisszájú pontjaihoz húzott érintőinek az egyenletét!

c) Add meg a 3 ordinátájú pontjaihoz húzott érintőinek az egyenletét!

19. Add meg annak a körnek az egyenletét, amely

a) érinti mindkét tengelyt, és sugara 2 egység;

b) középpontjának abszcisszája 3, és mindkét tengelyt érinti;

c) középpontjának ordinátája -4, és mindkét tengelyt érinti;

d) középpontja rajta van az $y = x$ egyenesen, sugara 5 egység, és érinti mindkét tengelyt!

20. (Érettségi feladat nyomán, 2021)
Egy háromszög csúcsai $K(-1; 5)$, $L(1; 1)$, $M(5; 3)$.

a) Igazold, hogy a háromszög L-nél lévő szöge derékszög!

b) Írd fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

21. **a)** (Érettségi feladat, 2006)
Add meg az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának a koordinátáit!

b) (Érettségi feladat, 2013)
Add meg a $2x + 4y = 4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit!

22. (Érettségi feladat, 2016)
Add meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Az $(1; -1)$ pont rajta van az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenesen.

B: Ha az $A(-2; 5)$ és $B(2; -3)$, akkor az AB szakasz felezőpontja a $(0; 2)$ pont.

C: Az $x + 2y = 7$ és $2x + 4y = 7$ egyenletű egyenesek párhuzamosak.

23. Írd fel az egyenes egyenletét, ha

a) átmegy az $A(2; -5)$ ponton, és meredeksége 3;

b) átmegy az $A(-6; 1)$ ponton, és meredeksége $\frac{2}{5}$;

c) átmegy az $A(3; 0)$ ponton, és irányszöge 45°;

d) átmegy az $A(-7; 13)$ ponton, és irányszöge 90°;

e) átmegy az $A(8; -3)$ ponton, és irányszöge $-60°$!

24. Add meg az egyenes egyenletét, ha

a) átmegy a $P(2; 5)$ és a $Q(-2; 8)$ pontokon;

b) átmegy a $K(-24; 6)$ és $L(-32; -18)$ pontokon!

25. Add meg az egyenes meredekségét, ha az egyenlete

a) $4x + 3y = 18$;

b) $-4x + 3y = 18$;

c) $-4x - 3y = 18$;

d) $4x - 3y = 18$;

e) $y = 3x + 12$;

f) $y = -x + 6$;

g) $y = -0{,}5x - 0{,}5$;

h) $2y - 6 = 3x$;

i) $4x + 8 = 5y$.

26. Tekintsük a 25. feladat egyeneseit! Adj meg egy-egy rájuk merőleges és velük párhuzamos egyenest!

27. Tekintsük a 25. feladat egyeneseit!

a) Hol metszik az egyenesek az x és az y tengelyt?

b) Mekkora az egyenesek irányszöge?

28. Adva van egy háromszög három csúcsa: $A(2; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(-2; -1)$.

a) Add meg az oldalak hosszát!

b) Add meg az oldalegyeneseinek az egyenletét!

c) Add meg az oldalfelező merőlegeseik egyenletét!

d) Határozd meg az oldalfelező merőlegeseik metszéspontját!

29. A 28. feladatban megadott háromszöggel dolgozz tovább!

a) Add meg a magasságvonalainak az egyenletét!

b) Add meg a magasságpontját!

30. **a)** (Érettségi feladat, 2006)
Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(3; -5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel!

b) (Érettségi feladat, 2012)
Írd fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos a $2x - 5y = 5$ egyenletű f egyenessel és átmegy a $P(3; -2)$ ponton!

31. (Érettségi feladat, 2010)
Három egyenes egyenlete a következő (a és b valós számokat jelölnek):
$e: y = -2x + 3$;
$f: y = ax - 1$;
$g: y = bx - 4$.
Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az e és f egyenesek párhuzamosak legyenek? Melyik számot jelöli b, ha a g egyenes merőleges az e egyenesre?

32. Adva van a $P(1; 4)$ pont és a $-2x + 3y = -3$ egyenletű e egyenes.

a) Add meg a P pontból az e egyenesre merőleges egyenes egyenletét!

b) Add meg a két egyenes metszéspontját!

c) Milyen messze van a P pont az e egyenestől?

d) Add meg a P ponton átmenő e egyenessel párhuzamos f egyenes egyenletét!

33. Adva van az $y = -2x + 5$ egyenletű e egyenes és a $P(4; 2)$ pont.

a) Add meg az egyenes meredekségét!

b) Add meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az e egyenesre, és átmegy P-n!

c) Add meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az e egyenessel, és átmegy P-n!

34. (Érettségi feladat, 2006)
Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x = 1$, valamint az $y = 1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a négyzetet, és add meg csúcsainak koordinátáit!

b) Írd fel a négyzet köré írható kör egyenletét!

c) Állapítsd meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének!

d) Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsd ki e részek területének arányát!

35. (Érettségi feladat nyomán, 2017)
Adott két pont a koordinátasíkon: $A(2; 6)$ és $B(4; -2)$.

a) Írd fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!

b) Írd fel az A ponton átmenő, B középpontú kör egyenletét!

36. (Érettségi feladat, 2020)
Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben $A(-8; -12)$, a $B(8; 0)$ és a $C(-1; 12)$.
Az A pontnak a B pontra vonatkozó tükörképe a D pont.

a) Számítsd ki a D pont koordinátáit!

b) Írd fel az ABC háromszög B csúcsán áthaladó magasságvonalának egyenletét!

c) Igazold, hogy az ABC háromszög B csúcsánál derékszög van!

37. (Érettségi feladat, 2010)
Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 5)$.

a) Írd fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

b) Számítsd ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tizedfokra kerekítve add meg!

c) Számítsd ki az ABC háromszög területét!

38. (Érettségi feladat, 2013)
A PQR háromszög csúcsai: $P(-6; -1)$, $Q(6; -6)$ és $R(2; 5)$.

a) Írd fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

b) Számítsd ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát!

39 Az e egyenes átmegy az origón, és merőleges az $y = -\frac{5}{6}x + 8$ egyenesre.

a) Mennyi az e iránytangense és irányszöge?

b) Írd fel az e egyenletét!

40 (Érettségi feladat, 2013)

Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -3)$ és $B(7; -1)$.

a) Írd fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét!

b) Számítással igazold, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ egyenletű k körre, és számítsd ki az AB húr hosszát!

41 (Érettségi feladat, 2014)

Adott az $A(5; 2)$ és a $B(-3; -2)$ pont.

a) Számítással igazold, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x - 2y = 1$ egyenletű e egyenesre!

b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét!

c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti!

42 Teszteld magad! Jelöld meg a helyes válaszokat! (Minden kérdésre pontosan egy helyes válasz van.)

a) Melyik pont a $(-3, 1)$ pont tükörképe az $x = -2$ egyenesre?

A: $(1; -1)$ *C:* $(-1; 1)$

B: $(-3; 5)$ *D:* $(-3; -5)$

b) Az $x = 3$ és $y = 7$ egyenletű egyenesek grafikonjai mely pontban metszik egymást?

A: $(-3; 7)$ *C:* $(3; 7)$

B: $(7; 3)$ *D:* $(3; -7)$

c) Mennyi a k valós szám értéke, ha a $2x - 3y = 11$ egyenletű egyenes merőleges a $3x + ky = -4$ egyenletű egyenesre?

A: –1 *C:* –2

B: 2 *D:* 1

d) Milyen hosszú az $\overrightarrow{AB}$, ha $A(-2; 6)$ és $B(3; -6)$?

A: 1 *C:* 13

B: 12 *D:* 5

e) Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amelynek meredeksége -3, és az x tengelyt a 6-nál metszi?

A: $x = -3y + 6$

B: $18 - 3y = x$

C: $y + 3x = 18$

D: $6x - 3y = 0$

f) Egy egyenes minden pontjának hétszer akkora az első koordinátája, mint a második koordinátája. Mi az egyenes egyenlete?

A: $x = 7y$

B: $x + 7y = 0$

C: $y + 7x = 0$

D: $y = 7x$

g) A P pont origóra vett középpontos tükörképét tengelyesen tükrözzük az y tengelyre, így a $P^*(-5; 2)$ ponthoz jutunk. Mi lehetett az eredeti P pont?

A: $(-5; -2)$ *C:* $(-5; 2)$

B: $(5; -2)$ *D:* $(5; 2)$

h) Mekkora a $(-5; 1)$ és $(-2; 0)$ pontokon átmenő egyenesre merőleges egyenes meredeksége?

A: 3 *C:* -3

B: $-\frac{1}{3}$ *D:* $\frac{1}{3}$

i) Add meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja a $(-4; 7)$ pont, és érinti az y tengelyt!

A: $(x-4)^2 + (y+7)^2 = 16$

B: $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 49$

C: $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 16$

D: $(x-4)^2 + (y+7)^2 = 4$

j) Mennyi a meredeksége annak az egyenesnek, amely az x tengelyt a -3-nál, valamint az y tengelyt a 7-nél metszi?

A: $-\frac{7}{3}$ *C:* $-\frac{3}{7}$

B: $\frac{7}{3}$ *D:* $\frac{3}{7}$

k) Ha két egyenes párhuzamos, akkor meredekségük

A: szorzata 0;

B: összege –1;

C: hányadosa 1;

D: szorzata 1.

NÉHÁNY FELADAT VÉGEREDMÉNYE

Bevezető lecke: 2. a) 12,07 cm. **b)** 4,14 cm.
Ráadás a) 1,717 cm. **b)** 1,24 cm.
1. lecke: 1. Közelítőleg 13,5; 13,5 : 50; 0,27; 35; 35 : 50; 0,70. **2. a)** 7,14 cm vagy 3,5 cm. **b)** 25° és 65°. **3.** közelítőleg tg 5° = 0,09; tg 15 °= 0,27; tg 25° = 0,47; tg 35° = 0,7; tg 45° = 1. **4.** 0,633; 1,58; 1,33. **5. b)** 16 cm és 20 cm. **c)** 9,6 cm.
2. lecke: 1. 0,0209; 0,2126; 0,4578; 1,7251; 4,8288; 35,8006; 572,9572. **2.** 89,39°; 88,04°; 83,21°; 72,65°; 45°; 15,64°.
3. 9460 millió km. **4.** a másik oldal 20,98 m $\pm$ 0,37 m, a terület: 524,5 m^2 $\pm$ 9,25 m^2. **5. a)** 488 m és 532 m között, kb. 500 m. **6. a)** 26,8%. **b)** 116 m. **c)** 9%; 5,28°. **d)** 45°.
3. lecke : 1. Közelítőleg 8,55; 0,34; 0,94; 0,50; 0,87; 19,15; 0,64; 0,77; 19,15; 0,77; 0,64. **2. a)** $x = 8{,}96$ cm, $y = 10{,}78$ cm. **b)** $\beta \approx 30°$ és $\alpha = 60°$. **3. a)** 130 m. **b)** $x \approx 483$ m, 0,06 m = 6 cm. **4.** Mert a befogók hossza kisebb, mint az átfogó hossza. **5. a)** 10,5 cm. **b)** 13,0 cm, 9,74 cm.
4. lecke: 1. b) A feladat szerint: $\sin 82° = \frac{535}{680}$, de ez nem igaz. **3.** Az első esetben. 45,89 $>$ 42,4. **4.** 0,6 és $\frac{4}{3}$. **5.** 1.
5. lecke :1. A kör húrján fekvő szög α, a kör középpontjában lévő szög φ. A háromszög magasságára illeszkedő szöge β, a háromszögben az ábrán felül lévő szög δ, alul lévő szög γ. **2. a)** 11,82 m. **b)** 2 m. **c)** 10,39 m. **d)** 3,46 m. **3.** $\approx$ 8,1 m. **4. a)** 57,6 m. **b)** 198,2 m^2. **5. a)** 33,3°. **b)** 52,7°. **c)** 19,4°.
Ráadás lecke: 1. a) 27,3° (AF = 220,8 m). **b)** 384,6 m. **2. a)** 29,1 cm; 114,3 cm. **b)** 67,4°. **3. a)** 4,2 m. **b)** 130,7 m^2. **c)** 8,2 m és 30,8°. **d)** 75° és 118°. **4.** 16,4°; 37,5°; 47,8°. **5. b)** 3,2 cm; 4,53 cm; 5,54 cm. **d)** 35,3°. **6. a)** 35,3°. **b)** 54,7°.
6. lecke: 1. a) 18 m^2. **b)** $\pm$2%. **2. a)** 112,89°. **b)** 35,48 cm és 77,56 cm. **c)** 319,03 cm^2 és 698,33 cm^2. **d)** 149,2 cm^2. **3. a)** 48,6°. **b)** 1 m és 0,5 m. **4. a)** Körülbelül 310 m oldalhosszúságú szabályos ötszög. 165 000 m^2. **b)** A belső udvar körülbelül 114 m oldalhosszúságú szabályos ötszög: 22 400 m^2.
7. lecke: 1. 19 km; 12 m; 17 cm; 90°; 339 cm^2. **2.** Nem. Tompaszög is lehet: 148,6°. **3.** 14,8 cm^2 és 21,3 cm.
8. lecke: 1. 67,3 m. **2.** d = 157 m; e = 97 m; BP = 51 m; PQ = 70 m; QC = 79 m. **3.** 93,6 m. **4. a)** 8,93 cm és 11,07 cm. **b)** 44,8 cm^2.
9. lecke: 1. a) 264 m és 320 m. **b)** 252 m. **2.** 12 m. **3. a)** 1 db van; 32°és 103°. **b)** 1 db van; 90°és 60°. **c)** nincs. **d)** 2 db van; egyik 39° és 111°; másik 141° és 9°. **4. a)** sin γ segítségével. **b)** ABH háromszög, 262 m. **c)** 50 m. **5.** 68 cm (A rajzon a hegyesszögek 28,6° és 21,4°).

10. lecke: 1. sin α: 0,999; 0,978; 0,927; 0,848; 0,743; 0,616; 0,469; 0,309; 0,139, cos α: –0,035; –0,208; –0,375; –0,530; –0,669; –0,788; –0,883; –0,951; –0,990. **2. a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és 0,5. **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és 0,5. **3. a)** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** $\pm$0,678. **4. a)** 0,334 és 0,943 (a többi szög 19,5°). **b)** 2 eset van. Első: két szög 68,3°-os, ekkor 0,929 és 0,370. Második: az egyik szög 43,4°, a másik szög 93,2°, ekkor a szinusz 0,687 és 0,998, a koszinusz értékek 0,726 és –0,056. **c)** 3 eset van. Első: két szög 25,3°és a harmadik 129,4°. Második: egy szög 25,3° és a másik kettő 77,35°. Harmadik: az egyik szög 154,7° és a másik kettő 12,65°. A szinusz, koszinusz értékek: 0,428 és 0,904; 0,773 és –0,635; 0,976 és 0,219; 0,428 és –0,904; 0,219 és 0,976.
11. lecke: 1. a) 63,9 mm. **b)** 119 mm. **2. a)** 78,5°. **b)** 90°. **c)** 127,6°. **3.** 155 pm. **4. a)** 96,1° és 83,9°. **b)** 38 cm.
12. lecke: 1. a) az alapon fekvő szögek: 69°, szárak: 167,43 m. **b)** szimmetriából adódik. **c)** α = 13,71°; β = 14,58°.
2. a) a meredekebb oldalon 49,7°; a lankásabb oldalon 43,67°. **b)** 2,9 m. **3.** kb. 20 m. **4. a)** α = 35,1°, β = 80,06°, γ = 64,84°. **b)** 9042 km^2; 9,72%.
13. lecke: 1. a) 106°. **b)** 34 cm^2. **c)** 15,5 cm. **d)** 37,2 cm. **e)** 65 cm^2, ill. 156 cm^2. **f)** 31 cm^2, ill. 190 cm^2. **2.** 8 g. **3. a)** 10,5 dm^2. **b)** 14,6 dm^2. **4. b)** 10,28 cm^2, 4,49 cm^2, 87,30 cm^2 vagy 4,49 cm^2, 5,79 cm^2, 91,79 cm^2.
15. lecke: 1. a) pl.: 6 cm, 8 cm és 10 cm. **b)** 0,8; 0,75. **c)** 0,8; 0,6; $\frac{4}{3}$. **2. a)** 49,84° vagy 130,16°. **b)** $\pm$0,6449. **c)** $\pm$1,185. **3. a)** 13,8 m^2. **b)** nem. **4. a)** 7,24 cm. **b)** 45,5 cm^2.
5. b) 14,36 cm, 19,35 cm, 15,47 cm és 18,25 cm.
c) 276,2 cm^2. **6.** 63,4 N és 80,4°.
16. lecke: 1. a) 840. **b)** 2401. **2.** 1024. **3. a)** 4^6. **b)** 5^6. **4.** 5, vagy 6. **5. a)** 120. **b)** 150. **6. a)** *E*. **b)** *A*. **c)** *C*. **d)** *B*. **e)** *F*. **f)** *D*.
17. lecke: 1. 5! · 4! · 3! = 17 280. **2. a)** 10!. **b)** 9! = 725 760. **c)** 2 903 040. **d)** 564 480. **3. a)** 12!. **b)** 2 · 10!. **c)** 3! · 9!. **4.** 36. **5. a)** 10!. **b)** 1. **c)** 9 · 9!. **d)** 9!. **e)** mindegyik. **6.** 7! = 5040.
18. lecke: 1. a) 5. **b)** 10. **c)** 10. **d)** 5. **2. a)** 1. **b)** 4. **c)** 10. **d)** 20. **3.** 15. **4. a)** 504. **b)** 84. **5.** 0,1. **6. a)** 495. **b)** 70. **c)** 1. **d)** 34 650. **7. a)** 4005. **b)** 8010. **c)** 8100. **d)** 4095.
19. lecke: 1. a) 462. **b)** 332 640. **2.** első cellába: *A, C, D, F;* második cellába: *B, E, G*. **3. a)** 1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1. **b)** igaz **c)** 128. **4. a)** 4960. **b)** 406. **5. a)** 5. **b)** 11. **c)** 14. **d)** 11. **6. a)** 5984. **b)** 20 475.
20. lecke: 1. $\frac{1}{8\,145\,060}$ ($\approx$ 0,000000123). **2.** 29. **3. a)** 1716. **b)** 560. **4. a)** 630 630. **b)** 15!. **c)** 126 126. **5.** 1; 425; 35 700; 987 700; 10 123 925; 32 801 517. **6. a)** 10 · 9. **b)** 10 · 10. **c)** $\frac{10 \cdot 9}{2}$. **d)** $10 + \frac{10 \cdot 9}{2}$. **7. a)** egyenlő. **b)** egyenlő. **c)** egyenlő.

21. lecke: 1. a) 36. **b)** 18. **2.** 18. **3.** 26. **4.** 15. **5. a)** 18. **b)** 9. **6.** 100.

22. lecke: 1. a) 60. **b)** 60. **2.** 60. **3.** 90. **4.** 318 400.

23. lecke: 1. a) igen. **b)** sárga vonalon. **c)** a kék majd a sárga vonalon: 7 megálló és 1 átszállás. **3.** *AD* és *DF* élek.

24. lecke: 1. a) *E* ismerősei *A* és *D*. **b)** 10. **2. a)** nincs. **b)** nincs. **c)** nincs. **d)** van. **3. a)** 9. **b)** 13. **4. a)** 210. **b)** igen. **5. a)** 10. **b)** 28. **c)** 40.

25. lecke 2. a) ugyanannyi. **b)** 2,6. **c)** $\frac{10}{26}$. **d)** 26, a felsoroltak közül ebből lehet a legtöbb rendszámot készíteni.

3. a) 372. **b)** 6. **4.** nem: egy gráfban a fokszámok összege nem lehet páratlan. **5. b)** 4. **c)** 2.

26. lecke: 1. a) 2^{-3}. **b)** 5^{-2}. **c)** $(-3)^2$. **d)** $(-2)^{-2}$. **e)** -5^{-1}. **f)** 7^0. **2. a)** 2^{13}. **b)** 2^{-9}. **c)** 2^{-9}. **d)** 2^{-8}. **e)** 2^{264}. **3. a)** $\frac{8}{27}$. **b)** $\frac{1}{15}$. **c)** $\frac{-50}{1573}$. **4. a)** $\frac{1}{123\,456}$. **b)** $\frac{56\,788}{56\,789}$. **c)** $\frac{56\,789}{123\,456}$.

5. $B < E < C < F < A < D$.

27. lecke: 1. a) 10; −10; 100; 10. **b)** 1; −5; 2; 5; 0,1; 1,5; 0,5. **2. a)** 2,15; 3,91; 4,93; 9,73; 10,00; 21,54. **b)** 1,78; 2,78; 3,31; 5,51; 5,62; 10,00. **3.** 216 cm^2. **4. a)** 3 m. **b)** 113 m^2. **5. a)** 0,8%. **b)** 0,36%. **6.** 7987; 9961; 0,37.

28. lecke: 1. 4; 2; 10; 9; 3. **2. a)** 2; 0,2; 8; 2; 0,5. **b)** 0,1; 0,2; 0,9; 0,1; 1,1. **3. a)** B. **b)** $8k^2$; $8k^3$; $8k^4$; $8k^5$; $8k^6$. **c)** 1,038. **d)** 8; 8,3; 8,6; 8,9; 9,3; 9,6; 10; 10,4. **4. a)** $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$. **b)** $\sqrt[12]{2^7} \approx 1{,}498$. **5.** 49; 121; 17; 23; 8.

29. lecke: 1. a) 125. **b)** 512. **c)** 27. **d)** 9. **e)** 32. **f)** 625. **2. a)** 10^2; 5^4; 2^3; 4^1. **b)** 4^2; 5^1; 5^0; 3^3. **3.** $\sqrt[4]{6}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{343}$. **4.** 81; 27; 36; 5. **5. a)** $10^{\frac{5}{2}}$. **b)** $2^{\frac{19}{5}}$. **c)** $3^{\frac{2}{3}}$.

30. lecke: 1. a) $4^{0,5}$. **b)** $3^5 \cdot 3^{-8}$. **c)** $25^{\frac{3}{2}}$. **d)** $16^{-\frac{3}{4}}$. **2. a)** *A*. **b)** *B*. **c)** *J*. **d)** *I*. **e)** *F*. **f)** *E*. **g)** *C*. **h)** *D*. **i)** *G*; például $H = \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^{-2}$. **3. a)** $2^{-\frac{7}{10}}$. **b)** $-2^{-\frac{73}{12}}$. **c)** 2^0. **d)** $2^{-2,5}$. **4. a)** $\frac{1}{3}$. **b)** 9. **c)** 15. **d)** $\frac{27}{25}$. **e)** $\frac{\sqrt{3}}{9}$. **5. a)** 20. **b)** $\frac{196}{5}$. **c)** $\frac{64}{25}$. **d)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **e)** $\sqrt[3]{\frac{16}{5}}$.

31. lecke: 1. a) 1,338-szeresére. **b)** 34%. **2. a)** 124 770 Ft-tal nőtt. **b)** 706 055 Ft. **3. a)** 4,14%. **b)** 7,18%. **c)** 11,61%. **4. a)** 1,7 millió Ft-ot. **b)** 0,8 millió Ft-tal. **c)** 5,55 millió Ft. **5.** 16%.

32. lecke: 1. d) 2 és 3; 0 és 1; 2 és 3; 1 és 2. **2. a)** $x \mapsto 0{,}5^x$. **b)** $x \mapsto 4^x$. **c)** $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

33. lecke: 1. a) növekvő; $k = 4$. **b)** csökkenő; $k = 0{,}25$. **c)** növekvő; $k = 16$. **d)** növekvő; $k = 2$. **2. a)** növekvő; 6,2 és 1,15. **b)** csökkenő; 6,2 és 0,756. **c)** csökkenő; 10^{23} és $\frac{1}{16}$. **d)** növekvő; $6 \cdot 10^{23}$ és 8. **e)** növekvő; 3,8 és 1,25. **f)** csökkenő; 2,1 és $\approx 0{,}145$. **3. a)** $N(t) = 120 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5^t$. **b)** $4 \cdot 10^8$, illetve $1{,}5 \cdot 10^8$. **c)** $3{,}6 \cdot 10^7$. **4.** B; C.

34. lecke: 1. a) 27%. **b)** 3,72 óra. **c)** kb. 1 nap múlva. **d)** 11,2 óra; 14,9 óra. **2.** 13,5 év után. **3. a)** 1 óra. **b)** 3 óra. **c)** 5 óra. **4.** 22 920 év.

35. lecke: 1. a) 5. **b)** −4. **c)** $\frac{1}{3}$. **d)** 8. **e)** $\frac{2}{7}$. **f)** $-\frac{1}{2}$. **2. a)** 169. **b)** 7; 3. **c)** 16; 4. **d)** 3; 8. **e)** 4; 0,25; −1. **f)** 625; 5; 4. **3. a)** 0; 1; 2; 3; 4. **b)** −1; −2; −3; −4. **4. a)** 5. **b)** 125. **c)** 1. **5.** 5; 8; 0,6; 7. **6. a)** 4,5. **b)** −6. **c)** 0.

36. lecke: 1. a) 0,3010; 2,7574; 3,6931. **b)** −2,0362; −1,0809; −0,0778. **2.** 2,32; −32,99; 3,66; 2,02. **3. a)** −2; 0,5; −1; −2. **b)** −3; 0; 3; 0. **4. a)** $= \log_{0,83} 0{,}5$. **b)** $= \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}83}$. **c)** 3,720. **5. a)** 1,3979. **b)** −1,2239. **c)** −0,5810. **d)** −0,1018.

37. lecke: 1. a) 5,6%-kal. **b)** 6840; 13 150 és 25 280. **c)** 1990. aug.–szept. **2. a)** kb. 71%-kal. **b)** kb. 3 041 000. **c)** 1998.

38. lecke: 1. a) [0,5; 4]. **b)** $a = 0{,}5$. **2. a)** $x = 0{,}25$. **b)** $x_1 = 4$; $x_2 = -4$. **3.** 3,322. **4.** 6000. **5. a)** 43,5 év. **b)** 18 év. **c)** 4928 dollár. **6. a)** ≈ 5. **b)** $\approx 3{,}8 \cdot 10^{20}$ (J). **c)** 1000-szer.

39. lecke: 1. a) $2 \leq x$. **b)** $x < 0$. **2. a)** 30. napon. **b)** 63; 68. **3. a)** $]-3; +\infty[$. **b)** $[0; \log_{1,5} 10] \approx [0; 5{,}68]$. **4.** legfeljebb 63.

40. lecke: 1. a) 4. **b)** 3. **c)** 19 és 20. **2. a)** 89 240 Pa; 55 560 Pa; 33 560 Pa. **b)** 1,89 km. **c)** 5,55 km. **3. a)** 7,4 °C. **b)** 27,4 °C. **c)** 5 perc. **d)** erre a kérdésre nem ad hiteles választ ez a képlet. ($t = -5$ esetén az érték 120 °C lenne, ez nem lehet.). **e)** kb. fél óra alatt. **4. a)** 3; 1,22. **b)** 45,8. **c)** 13,3.

41. lecke: 1. a) 1,0032. **b)** $f(t) = 130\,300 \cdot 1{,}0032^t$. c) 135 800. **2. a)** $3 \cdot 0{,}975^t$. **b)** 242 perc. **3. a)** $V \approx 3{,}9 \cdot 10^{-19}$ m^3, $A \approx 3{,}5 \cdot 10^{-12}$ m^2. **b)** 192 millió. **c)** 115 perc.

42. lecke: 1. $\frac{13}{20}$ véges, $\frac{1}{35}$ végtelen, $\frac{5}{8}$ véges, $\frac{21}{16}$ véges, $\frac{5}{3}$ végtelen, $\frac{137}{37}$ végtelen, $\frac{3}{4}$ véges. **2.** $\frac{2}{4}$; $\frac{6}{8}$. **3. a)** 20. **b)** 4. **c)** végtelen. **d)** 0. **4. a)** 2. **b)** 0. **c)** 7 vagy 9. **d)** 1 vagy 5.

43. lecke: 1. a) $3 \cdot 5^2 \cdot 7$. **b)** $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. **c)** $3^2 \cdot 97$. **d)** $3 \cdot 11 \cdot 37$. **2. a)** $\frac{23}{87}$. **b)** $\frac{418}{765}$. **3.** 15 lehetőség van.

4. a) hamis. **b)** igaz. **c)** igaz. **d)** hamis. **e)** hamis. **5.** prímtényezős alak: $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

44. lecke: 1. a) 45. **b)** 84. **c)** 24. **d)** $7 \cdot 13^4$. **2.** $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{5}$. **3. a)** például 10; 70; 130. **b)** például 1; 77; 221. **c)** például 240; 480. **d)** 10; 1; 240. **4. a)** négyzetek oldalhossza: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. **b)** legtöbb: 10 584, legkevesebb: 6. **5. a)** 180. **b)** 330. **c)** 163 800. **d)** $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^3$. **6. a)** $\frac{245}{2178}$. **b)** $\frac{37}{90}$.

7. 4 db. legkisebb 1200, legnagyobb 1920. **8. a)** például 6; 15. **b)** például 1; 4; 10. **c)** például 22; 44; 55. **d)** 6; 1; 22. **9. a)** 6. **b)** 252 cm.

45. lecke: 1. a) 12. **b)** 0. **c)** 4. **d)** 6. **2. a)** hamis. **b)** igaz. **c)** igaz. **d)** igaz. **3. a)** 4: *B* osztható; *D* nem osztható, 3: egyikről sem lehet eldönteni, 125: *A*; *B*; *C*; *D* közül egyik sem osztható. **b)** 0; 9. **c)** Az első négyzet mögött lehet: 1; 2; …; 9 közül bármelyik, a második négyzet mögött lehet: 1; 3; 5; 7; 9 közül bármelyik. **d)** *C*-ben lehet 17; 42; 67 vagy 92. *D*-ben bármelyik számjegy. **4. a)** 35. **b)** 10; 30; 50; 70; 90. **c)** pl.: 117; 157. **d)** pl.: 37. **5. a)** csütörtök. **b)** szombat. **6. a)** 96. **b)** 7; 19; 31. **c)** 10-re: 8; 24-re: 6; 37-re: 5; 59-re: 7; 100-ra: 2; 2021-re: 1.

46. lecke: 1. **a)** igaz, tagadása: A 11 nem páratlan szám. **b)** hamis, tagadása: A 9571 nem többszöröse a 3-nak. **c)** nem kijelentés. **d)** igaz, tagadása: Az 5-nek és a 6-nak van 1-nél nagyobb közös osztója. **e)** igaz, tagadása: Véges sok prímszám van. **f)** nem kijelentés. **g)** igaz, tagadása: A 12-nek 5-nél kevesebb számú osztója van. **2. a)** Minden számnak 5-től különböző számú. **b)** Van olyan prímszám, amelynek nem 2 osztója van. **c)** Van olyan természetes szám, amelynek véges sok többszöröse van. **d)** Egyik természetes szám sem osztható 0-val. **3. a)** 3; 6 ; 15. **b)** 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15. **c)** 1; 2; 9; 12; 18. **d)** nincs ilyen. **4. a)** hamis, igaz. **b)** igaz, hamis. **c)** hamis, hamis. **d)** hamis, hamis. **5. a)** hamis. **b)** igaz. **c)** hamis. **d)** hamis. **e)** igaz.

47. lecke: 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 28, 30, 35, 36, 42, 45, 60, 63, 70, 84, 90, 105, 126, 140, 180, 210, 252, 315, 420, 630, 1260. **2.** 21; 27; 33; 39; 51; 57; 63; 69; 81; 87; 93; 99. **3. a)** igaz. **b)** *B*. **c)** igaz. **d)** igaz. **e)** igaz. **f)** igaz. **g)** igaz. **h)** hamis. **i)** hamis. **4. a)** 2022-ben, 2042-ben, 2062-ben. **b)** 2034-ben, 2054-ben. **c)** Nem fog egybeesni a három választás. **5. a)** 12. **b)** 15. **c)** 300. **d)** 60. biztosan teljesül: $a \mid c$; $a \mid d$; $b \mid c$; $b \mid d$. **6.** 6:00; 6:40; 7:20; 8:00; 8:45; 10:06; 11:45; 13:24; 14:08; 15:36; 16:00; 16:56; 17:52; 18:48; 19:44; 20:12.

48. lecke: 1. 10-es számrendszerben: 469. 12-es számrendszerben: 331_{12}. **2.** 151; 409; 2137; 3170.
3. $34_6 < 34_7 < 43_6 < 34_8 < 43_7 < 43_8$. **4. a)** 1111_5.
b) 23023_5. **5. a)** 1000_2. **b)** 1000_3. **c)** 1000_6. **d)** 1000. **6.** 5-ös számrendszer.

49. lecke: 1. **a)** a legnagyobb négyjegyű szám a hármas számrendszerben nagyobb. **b)** a hármas számrendszerbeli alak. **2. a)** 751. **b)** 111101011_2. **c)** $2302_6 = 1403_7 = 1036_8$. **3. a)** 1582; 1715; 20 590; 19 006. **b)** $2B0_{12}$; $10A0_{12}$; $1BB_{12}$. **c)** igaz. **4.** $208 \leq x \leq 223$.

50. lecke: 1. **a)** helyes. **b)** helyes. **c)** helyes. **2. a)** $k \geq 4$; $l = 2$; $m = 0$; $n \geq 1$; $p = 1$. **b)** $k = 6$; $l \leq 5$; $m = 3$; $n = 3$; $p = 6$. **c)** $k = 6$; $l = 1$; $m = 1$; $n = 1$; $p = 3$. **d)** *k, m* és *p* lehet bármelyik páros szám, *l* és *n* bármelyik páratlan szám. **e)** $k \geq 4$; $l \geq 2$; $m \geq 1$; *n* és *p* lehet bármelyik természetes szám. **3. a)** 365. **b)** soronként 5 fát ültessenek. **4.** 3. **5. a)** 1, 0, 3, 4. **b)** 1, 0, 3, 0. **c)** 0, 0, 0, 1. **d)** 0, 2, 0, 0. **e)** 0, 0, 0, 1. **6. a)** igaz. **b)** igaz. **c)** nem igaz. **d)** igaz.

51. lecke: 3. Például: annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek befogói 2 és 3 egység hosszúak.
5. Q, ∅, **Q**, **R**, ∅, ∅. **6.** például: **a)** $P + (1 - 5)$. **b)** $P \cdot 2$. **c)** $\frac{P}{2P}$. **d)** $P - 3{,}5$.

52. lecke: 1. a) 15 132. **b)** pl. $3 \cdot 7$. **c)** pl. $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$. **2. a)** 3; 7; 11; 15; 19; 23; 27. **b)** 3; 12; 21. **c)** 0; 5; 10; 15; 20; 25. **d)** 2; 7; 12; 17; 22; 27. **3. a)** igaz. **b)** igaz. **c)** hamis. **d)** hamis. **e)** igaz. **4.** $2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11$. **5. a)** *p:* igaz; *q*: hamis; *r*: igaz; *s*: igaz. **b)** nem. **c)** *p* vagy *q* igaz; *p* és *r* igaz; *q* és *s* hamis; *q* vagy *s* igaz. **d)** Ha egy számrendszerben a legnagyobb lehetséges számjegy az $n - 1$, akkor a számrendszer alapja az *n*. Igaz. **6. a)** 7; 9. **b)** 10. **c)** 17. **d)** 2, vagy 3. **e)** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8. **f)** első-második, második-harmadik, második-negyedik.

53. lecke: 1. a) 33; 29,3; 27; 30,3. **c)** $K = 32{,}4$ és $L = 25{,}3$. **d)** az egész iskolában az osztálylétszámok átlagát. **2. a)** 36. **b)** 31. **c)** 26. **3. a)** 23; 18; 19. **4.** 4 db egyes, 3 db kettes, 2 db hármas. **5.** 36,92 év.

54. lecke 1. D. **2. a)** 15. **b)** 36%. **3. a)** átlag 3,57 és 3,10; medián 3,5 és 4. **b)** 156°, 72°, 48°, 36°, 24°. **c)** legfeljebb 3. **4. a)** 8. **b)** 3,5. **c)** 2. **d)** 2 és 11. **e)** öngólok születtek.

55. lecke: 1. 12; 17; 20; 27; 34; 22; 10. **2.** *B; AB; B; A; B; A; A*. **4.** *A*3; *B*1, *C*2; *D*4. **5. a)** 45. **b)** 60. **c)** legalább 60 és legfeljebb 70. **6.** igaz, nem eldönthető, hamis, nem eldönthető, igaz.

56. lecke: 1. b) 3,49. **c)** 4. **d)** 4. **e)** 5. **f)** 1,57. **2. a)** 10; 45. **b)** 15,17. **3. a)** 6 és 6. **b)** 1,3 és 3,7.
Ráadás lecke: 1. a) 3. **b)** 2,7. **2.** átlag 19,01 m, szórás: ≈ 0,72 m. **3. a)** 3,49. **b)** 1,57.

57. lecke: 1. 6 év, 17 év, 16 év. **2. a)** 5. **b)** 11. **c)** 6. **3. a)** az M Kft-nél. **b)** 200 000 Ft, csökkent, 61 970 Ft. **c)** csökken. **4.** 24,66; 28,22; 28,69; 29,16; szórás: 1,776. **5. b)** 7. **c)** 1,84.

58. lecke: 1. a) 0,51. **b)** 0,42. **c)** 0,05. **2. b)** $\frac{17}{36}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{6}$.
Ráadás lecke: 1. a) $\frac{8}{13}$. **b)** $\frac{5}{13}$. **c)** $\frac{5}{13}$. **d)** $\frac{5}{13}$. **2. a)** $\frac{9}{36}$. **b)** $\frac{20}{36}$. **c)** $\frac{5}{36}$. **d)** $\frac{4}{36}$. **3.** $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$. **4.** $\frac{12}{27} \approx 0{,}44$. **5. a)** $\frac{1}{6}$. **b)** $\frac{5}{6}$. **c)** 0,03. **d)** 0,33. **6. a)** 1. **b)** 0. **c)** $\frac{4}{9}$. **d)** $\frac{1}{9}$.

59. lecke: 1. b) Angéla: 4,17. Panni: –4,17. **c)** Például 15 Ft helyett 10 Ft-ot kap Angéla Pannitól, vagy 50 Ft helyett 75 Ft-ot fizet. **2.** Várható érték: 3,5. **3.** Várható érték: 20. **4.** Várható érték: 1,5. **5.** nem eldönthető, igaz, nem eldönthető, igaz, hamis, nem eldönthető, nem eldönthető.

60. lecke: (közelítőleg) **2. a)** 0,28. **b)** 0,21. **3. a)** 0,49. **b)** 0,07. **c)** 0,011. **d)** 0,31. **4.** 0,547. **5.** 0,18. **6. a)** 0,01. **b)** 0,001. **c)** 0,08.

61. lecke: 1. b) 0,001; 0,35; 0,29. **2. a)** 0,33. **b)** 0,51. **c)** 0,2. **3. a)** 0,38; 0,49; 0,12; 0,005. **b)** 0,74.

62. lecke: 1. a) 0,078. **b)** 0,01. **c)** 0,015. **d)** 0,077. **2. a)** 0,0046. **b)** 0,116. **c)** 0,347. **3. a)** $9{,}5 \cdot 10^{-27}$. **b)** 0,358. **c)** 0,019. **d)** 0,019. **e)** 0,377. **4. a)** elsőre hatost dobunk: $\frac{1}{6}$; másodikra hatost dobunk: $\frac{5}{36}$, tehát az valószínűbb, hogy elsőre hatost dobunk. **b)** 0,025. **c)** 0,066. **5.** Vagy 0,6, vagy 0,4.

63. lecke: 1. 0,512; 0,384; 0,096; 0,008. **2. a)** 0,26. **b)** 0,1. **3. a)** 0,29. **b)** 0,06. **c)** 0,36. **4.** A valószínűség 0,246.

64. lecke: 1. a) Nem jól gondolkodik. 0,265. **b)** 0,033. **2. a)** 0,36. **b)** 0,82. **c)** 0,016. **3. a)** 0. **b)** 0,008. **c)** 0,992. **d)** 0,232. **e)** 0,202. **f)** 0,798. **4. a)** 0,45 (45%). **b)** 0,33 (33%). **c)** 0,18 (18%). **5. a)** $\frac{1}{48}$. **b)** visszatevés nélkül nagyobb, $\frac{7}{28} = 0{,}25$, illetve $\frac{15}{64} \approx 0{,}234$.

Ráadás lecke: 1. Egyik állítást sem fogadja el. **2. b)** 0,988. **3. a)** 0,138; 0,290; 0,287; 0,177; 0,077; 0,025; 0,006. **d)** 0,831. **4. a)** 0,25. **b)** 0,802. **c)** 4. **d)** Az első: 0,12, a második: 0,156.

65. lecke: 1. *A*: igaz, *B*: hamis. **2. a)** 222; 222; 0; 0. **b)** igaz. **c)** igaz. **d)** hamis. **3.** 12; 16; 17; 20; 22; 10; 4. **4. b)** 36 (g). **c)** medián 36; módusz 37. **5.** 3264 Ft. **6. a)** 0,017. **b)** 0,037. **7.** 0,737.

66. lecke: 1. a) 8 vektor. **b)** 4 vektor; párhuzamos: $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$. **c)** $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DB}$; párhuzamos: $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CA}$; merőleges: $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DB}$. **3. a)** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{b}| = |\mathbf{d}| = 2$. **b)** **a** és **c** párhuzamos. **c)** 2,24; 2,24; 3,61; 3,61; 0; 4,12; 2,83.

5. a) $x \mapsto (x+4)^2$, ill. $x \mapsto (x+4)^2 + 2$.

67. lecke: 3. a) 6,5 cm mindkettő. **b)** 10 cm. **5. b)** I. igaz, II. igaz, III. igaz, IV. igaz, V. igaz, VI. igaz.

68. lecke: 2. $-1 < k < 0$; $l > 1$; $m > 1$; $0 < n < 1$; $p < -1$; nincs ilyen q. **3. c, g, h, f, e, d. 4. c, c – a, b + c – a, a – b + 0,5c.**

Ráadás lecke: 2. a) igen: **a** + **b**. **b)** nem, mert **a** és **d** egyállásúak, de **c** velük nem egyállású.

c) igen: **b** – 0,5**d** = **b** + (–0,5)**d**. **4.** 10 N; 17,3 N.

69. lecke: 1. a) **a**(–2; 0), **b**(0; 1), **c**(–2; 1), **d**(–4; –4), **e**(4; 4) **f** (2; –1). **b)** 2; 1; $\sqrt{5}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{5}$. **c)** igen. **d)** nem. **e)** igen. **f)** (2; 4). **g)** (–1; –2) **2. a)** (3; 0) és (3; 0). **b)** (1; –2) és (–1; 2). **3. a)** (3; –3), (–3; 3). **b)** (6; 3), (–6; –3). **4. a)** (3; –4), (–1; –6), (1; 6). **b)** 5; $\sqrt{37}$; $\sqrt{37}$.

70. lecke: 1. a) $K \approx 33{,}4$; $T = 52$. **b)** $K \approx 33{,}4$; $T = 60$. **2. b)** 36. **c)** 13. **d)** 23. **3. a)** $K = 52$; $T = 169$. **b)** $K \approx 28{,}3$; $T = 50$. **c)** $K = 135$, $T \approx 876{,}9$.

71. lecke: 1. a) $F(8; 7)$, $N(14; 2{,}5)$. **b)** 7,5. **2.** $C(-4; -7)$. **3.** (11; –7), (–5; 5). **4. a)** (17; –32. **b)** 52. **c)** $T = 1352$, $K \approx 147{,}1$.

72. lecke: I. 1. a) (2; 7) és (–5; 5). **b)** 7,28 és 8,06. **c)** (–8; 6) és (6; 10). **2. a)** **a**(6; –8), **b**(12; 5). **b)** 10 és 13. **c)** $\sqrt{205}$. **d)** négyzet (6; 8), (–8; –6), (–6; 8), (8; 6). **3. a)** 16,5 és 17. **b)** $B(1; 2)$ és $D(-4; 5)$. **4. a)** **u** és **v** merőlegesek. **b)** **u** és **v** párhuzamosak és ellentétes irányúak. **II. 1. a)** 17,9 és 20. **b)** (–1; –1,5), (–5; 0,5) és (–7; –3,5). **2. a)** $D_1(-5; 8)$, $D_2(-1; -20)$, $D_3(7; 0)$, három megoldás van. **b)** $\sqrt{116}$; $\sqrt{52}$; $\sqrt{200}$. **3. a)** **u** és **v** merőlegesek. **b)** **u** és **v** párhuzamosak és ellentétes irányúak. **4. a)** $E(3; 0)$, $F(3{,}5; 4)$, $G(-1{,}5; 6)$ és $H(-2; 2)$. **b)** koordinátáik: (5; –2). **c)** paralelogramma.

73. lecke: 1. a) $x = 4$. **b)** $y = -x$. **c)** $y = -x + 3$. **3.** *A, D* és *E*.

74. lecke: 1. a) $y = 3x$. **b)** $y = -x + 5$. **c)** $y = -x$. **2.** illeszkedik: **a)** *Q*. **b)** *P*. **c)** *P, Q*. **d)** *P, Q*. **e)** *P*. **4. a)** $x = \frac{1}{6}$; $y = 1$. **b)** $x = 7{,}5$; $y = -3$. **c)** $x = -63$; $y = -9$. **d)** x tengelyt nem metszi; $y = -3$. **e)** x tengelyt nem metszi; $y = 5$. **5. a)** $x = 0$. **b)** $x = 3$. **c)** $y = -2x$. **d)** $y = \frac{5}{9}x - \frac{10}{9}$. **e)** $y = 2x + 3$.

75. lecke: 1. a) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$.
b) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$. **c)** $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 0{,}25$.
d) $x^2 + y^2 = 100$. **2. a)** $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 169$.
b) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 34$. **3. a)** *D*. **b)** *C*.
4. a) $(x+7)^2 + (y-1)^2 = 289$. **b)** $\sqrt{578}$.
c) $(x+7)^2 + (y-1)^2 = 144{,}5$.

76. lecke: 1. a) 40 m. **b)** (–24; 0), (24; 0) és (0; 8). **c)** 7,9 és 2,0 m. **2. a)** *P*: belül, *Q*: körön, *S*: kívül. **b)** *P*-n át 0 db; *Q*-n át 1 db; *S*-en át 2 db érintő húzható. **3. a)** 5; $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$. **b)** (–1; –6) és (–9; –6).

77. lecke: 1. $y = \frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$, $\frac{3}{5}$, 31°, (0; –1,6), $y = 4x - 2$, 4, 76°, (0; –2), $y = -\frac{1}{3}x - 4$, $-\frac{1}{3}$, –18,4°, (0; –4). **2.** $m = \frac{4}{5}$, $\alpha \approx 38{,}7°$. **3.** $m = -\frac{4}{7}$, $\alpha \approx -29{,}7°$. **4. a)** pl.: (0;–4), **b)** $-2x + 3y = -12$. **c)** $\approx 3{,}3$.

78. lecke: 1. a) (–7; –2) **b)** (5; –1). **c)** nincs, párhuzamosak. **d)** egy egyenes két egyenlete. **2. a)** pl. $x = -3$. **b)** $y = 1{,}5x$. **c)** $y = -3x+14$. **3.** (–4; –5).

79. lecke: 1. a) $-x + 5y = 2$. **b)** $10x + 2y = -5$, illetve $-40x - 8y = 20$. **c)** 4 db. (azonosak: *e* és $2x - 10y = -6$, illetve $10x + 2y = -5$ és $-40x - 8y = 20$). **2. a)** 3,6. **b)** –22,5. **3. a)** $y = 2$. **b)** $y = 2$. **4. a)** $-\frac{2}{5}$. **b)** $y = -\frac{2}{5}x$. **c)** $y = -\frac{2}{5}x + 2$. **d)** $y = \frac{5}{2}x$.

80. lecke: 1. a) pl. **a** és **c**. **b)** pl. **a** és **d**. **c)** pl. **a** = **b** + **c**. **d)** pl. **b** = **c** – **a**. **e)** pl. **c** és **d**. **2. a)** 4. **b)** $C_1(8; -5)$, $C_2(14; -1)$, $C_3(0; 7)$, $C_4(6; 11)$. **c)** $K \approx 24{,}6$; $T = 26$. **d)** $K_1(5; 6)$, $K_2(9; 0)$. **3. a)** $x^2 + y^2 = 169$. **b)** $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 49$.
c) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$; $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$; $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$; $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.
d) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 26$. **4. a)** $y = \frac{5}{12}x + \frac{43}{12}$. **b)** $\frac{5}{12}$.
c) 22,6° és 67,4°. **d)** (–8,6; 0) és $\left(0; \frac{43}{12}\right)$. **5. a)** *e, h*. **b)** *h*. **c)** *e, g, h*. **d)** *e; g; h*. **e)** nem.

81. lecke: 1. a) $P(-1{,}5; 3{,}5)$. **b)** meredekségek szorzata –1. **c)** 68,2°. **2. a)** $3x + 4y = 15$. **b)** 7,5. **c)** 45°. **3.** (4; 4)
4. a) *P* nincs az egyenesen, *Q* pont első koordinátája: $x = -83$. **b)** $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$. **5. a)** 5. **b)** $5\sqrt{3}$. **c)** $P(-4; 3)$, $R(1; -7)$, $S(12; -9)$.

Tartalom

A könyv témakörei ... 3

Bevezetés. ... 4

TRIGONOMETRIA

1 Hegyesszög tangense ... 6

2 Számolás szögek tangensével. ... 8

3 Hegyesszög szinusza, koszinusza ... 12

4 A szögfüggvények tulajdonságai. ... 14

5 Hosszúságok és szögek kiszámítása ... 16

6 Új területképlet ... 20

Ráadás – Milyen magas a torony? ... 22

7 A tompaszög és a derékszög szinusza ... 24

8 A szinusztétel ... 26

9 Alkalmazások ... 28

10 A tompaszög és a derékszög koszinusza ... 32

11 A koszinusztétel ... 34

12 Sokszögek és szögfüggvények ... 36

13 A kör és a szabályos sokszögek ... 38

14 Csoportverseny ... 40

15 Gyakorlás, tudáspróba ... 42

Témazáró feladatgyűjtemény ... 46

KOMBINATORIKA, GRÁFOK

16 Jelszavak ... 50

17 Sorba rendezés. ... 52

18 Amikor nem számít a kiválasztás sorrendje ... 54

19 Binomiális együtthatók ... 56

20 Gyakorlás ... 60

21 Esetszétválasztás ... 64

22 Gyakorlás ... 66

23 Gráfok jellemzői ... 70

24 Kombinatorika és gráfok ... 72

25 Gyakorlás, tudáspróba ... 74

Témazáró feladatgyűjtemény. ... 76

HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

26 Hatványozás – ismétlés ... 80

27 Számok *n*-edik gyöke ... 84

28 Racionális számok a kitevőben I. ... 88

29 Racionális számok a kitevőben II. ... 90

30 Gyakorlás ... 92

31 Pénzügyi számítások. ... 94

32 Exponenciális függvények ... 96

33 Exponenciális folyamatok ... 98

34 Felezési idő ... 100

35 A logaritmus fogalma ... 102

36 A tízes alapú logaritmus használata ... 106

37 Hatvány, gyök, logaritmus ... 108

38 Gyakorlás ... 110

39 Exponenciális egyenlőtlenségek ... 112

40 Gyakorlás ... 114

41 Gyakorlás, tudáspróba ... 116

Témazáró feladatgyűjtemény ... 118

SZÁMELMÉLET

42 Számhalmazok ... 120

43 Osztó, többszörös ... 124

44 Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ... 128

45 Oszthatósági szabályok, osztási maradékok ... 132

46 Oszthatóság és logika ... 136

47 Oszthatósági feladatok ... 140

48 Számrendszerek I. ... 142

49 Számrendszerek II. ... 146

50 Gyakorlás ... 150

51 Racionális számok, irracionális számok ... 152

52 Gyakorlás, tudáspróba ... 156

Témazáró feladatgyűjtemény ... 158

STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

53 Adatrendezés – statisztikai jellemzők 160
54 Diagramok 162
55 A dobozdiagram 166
56 Adatsokaság szórása 172
Ráadás – Statisztikai számítások zsebszámológéppel 176
57 Gyakorlás 178
58 Valószínűség – ismétlés 180
Ráadás – Gyakorlás 182
59 Várható érték 184
60 Két vagy több elemet húzunk egyszerre 188
61 Visszatevés nélküli mintavétel 190
62 Ugyanazt többször 192
63 Visszatevéses mintavétel 196
64 Gyakorlás 200
Ráadás – Visszatevéssel vagy anélkül? 202
65 Gyakorlás, tudáspróba 206
Témazáró feladatgyűjtemény 208

KOORDINÁTAGEOMETRIA

66 Vektorok összeadása 212
67 Két vektor különbsége 216
68 Vektorok számszorosa 220
Ráadás – Vektor felbontása összetevőkre 224
69 Vektorok a koordináta-rendszerben 226
70 Távolság, kerület, terület 230
71 Felezőpont 232
72 Gyakorlás csoportban 234
73 Egyenesek a koordináta-rendszerben 236
74 Az egyenes egyenlete 238
75 A kör egyenlete 242
76 Körrel kapcsolatos feladatok 246
77 Meredekség, iránytangens 248
78 Egyenesek metszéspontja 252
79 Merőleges, párhuzamos egyenesek 254
80 Gyakorlás 258
81 Gyakorlás, tudáspróba 260
Témazáró feladatgyűjtemény 262

Néhány feladat végeredménye 266

Képjegyzék

A könyvben található szakábrákat Szalóki Dezső készítette.
A könyv illusztrációit Létai Márton készítette.

Fotók
Borító: Shutterstock Képügynökség: Galleria Umberto (Nápoly, Olaszország, épült: 1887–1890., Emanuele Rocco tervezte): egy úgynevezett passzázs.
18. oldal: a Simeons Templom tornya, Koppenhága, Dánia. Public domain/saját mű
43. oldal: Albrecht Dürer: Underweysung der Messung 057 (1525., Nürnberg, Németország) SLUB Dresden/Public domain
74. oldal: magyar rendszámtábla. Public domain
83. oldal: Albrecht Dürer: Melankólia I. (1514) Metropolitan Museum of Art (New York) Public domain
115. oldal: John Napier logaritmustáblázatának borítólapja (1614), Public domain
143. oldal: Neumann János portréja (MTI-Fotóbank/INT)
143. oldal: Neumann János a modern számítógép atyja (Alan W. Richards /Institute for Advanced Study, Princeton University) Public domain, Hungart © 2024
213. oldal: Boeing E-3A repülőgép felszállása. CC3.0/Arcturus/saját mű
235. oldal: Costa Balenae régészeti terület (Riva Ligure, Olaszország) CC3.0/IT1315922/saját mű
256. oldal: Frans Hals: Descartes arcképe (1640) © CULTiRiS / AKG-Images / Erich Lessing
Vépy Judit fotói: 43. jobb alsó, 74., 84. oldal.
Tamás Balázsné fotói: 184., 194. oldal.
A könyvben található további képek: ©Shutterstock Képügynökség: 5., 8., 9., 18., 21., 26., 28., 34., 35., 36., 37., 38., 43., 55., 58., 60., 61., 66., 75., 80., 86., 88., 91., 93., 99., 105., 106., 110., 111., 112., 113., 121., 132., 141.., 144., 149., 152., 160., 178., 179., 183., 186., 199., 200., 212., 220., 224., 238., 239., 242., 247., 249., 250., 253., 254. oldal.
©Shutterstock szerkesztői képek: 5. oldal: Ingus Kruklitis, 6. oldal: Andocs, 15. oldal: LMWH, 70. oldal: Thinglass, 138. oldal: Hetman Bohdan, 176. oldal: Jose HERNANDEZ Camera 51, 204. oldal: seewhatmitchsee
Thinkstock Photos: 99. alsó, 166. oldal.
iStock: 173. oldal.