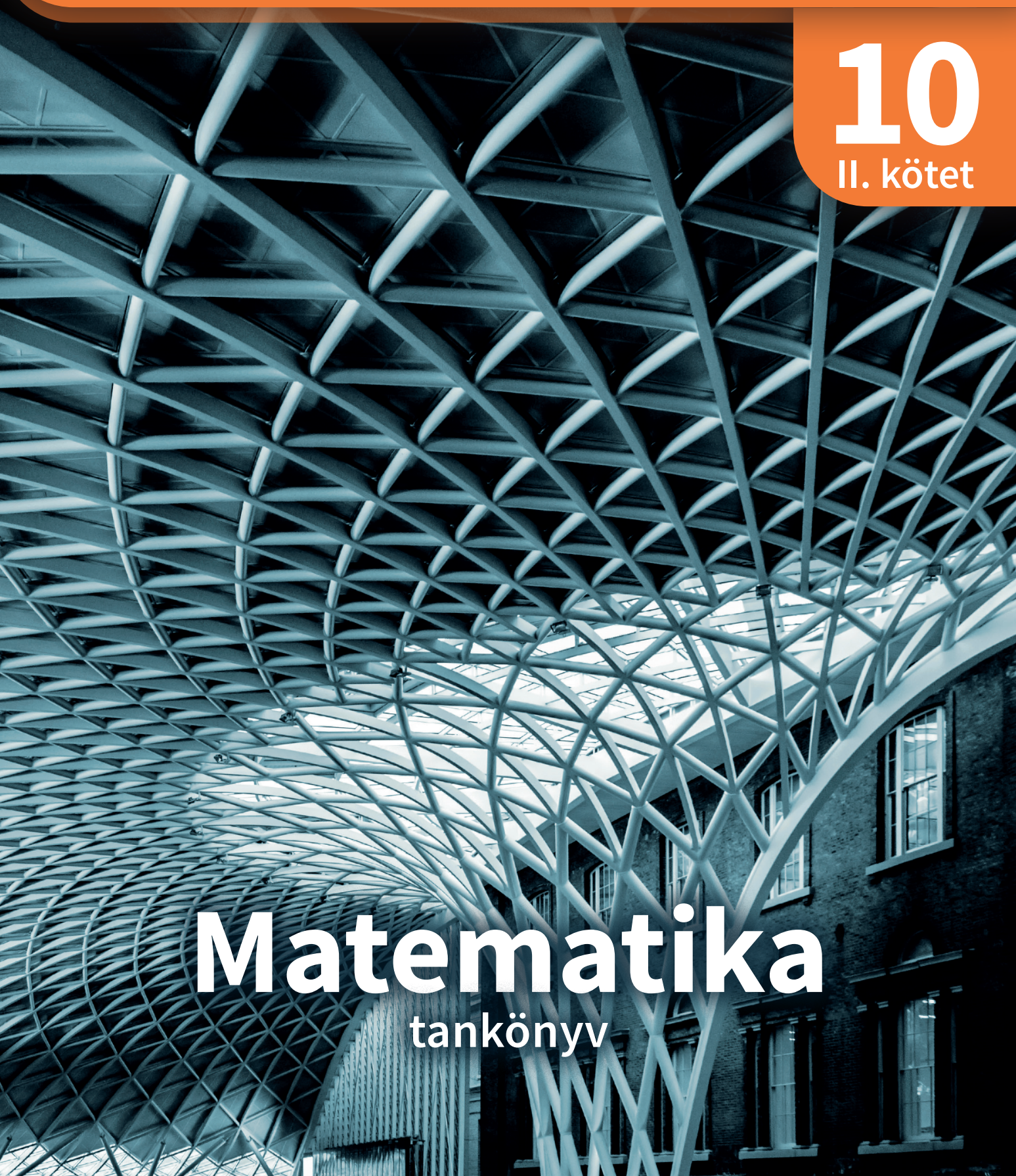
OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

10

II. kötet



Matematika

tankönyv

Matematika

MÁSODIK KÖTET

10.

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2021. 02. 11-től 2026. 08. 31-ig tankönyvi engedélyt kapott a TKV/267-7/2021. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára (Matematika) és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára (Matematika) megnevezésű kerettanterv előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztők: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona

Kerettantervi szakértők: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolány József, dr. Vancsó Ödön

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztő: Csajági Sándor, dr. Wintshe Gergely

Fedél Schlezák Ilona terve alapján: Győrfi Blanka, Bánáti János

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

IIlusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók: © Shutterstock, © Cultiris
28. oldal: Google Maps kép: Brondby
80. oldal: Bhászkara: Lilavati
102. oldal: Jacques Louis David: Antoine Laurent Lavoisier és Marie Anne Lavoisier (1788, Metropolitan Museum of Art (New York))
116. oldal: Gyulai Várfürdő: Lovarda tetőszerkezete (Fajzi Építész Stúdió)
134. oldal: Jan Vermeer van Delft: Tejet öntő nő (1660, Rijksmuseum, Amszterdam)
134. oldal: Leonardo da Vinci: Angyali üdvözlet (1472, ©CULTiRiS/AKG-Images/Rabatti-Domingie, Uffizi Képtár, Firenze)
A könyvben található további képek: Shutterstock Képügynökség: 6., 10., 11., 13., 16., 22., 23., 34., 35., 36., 39., 48., 49., 57., 58., 63., 70., 75., 83., 93., 103., 108., 109., 122., 133., 135. oldal.
Shutterstock szerkesztői: 63. oldal: berni0004, 135. oldal: Shoriful Chowdhury

A könyvben felhasználtuk a Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 10. Második kötet tankönyv című művet. Raktári szám: FI-503011002/1

A nyersanyagként felhasznált tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

© Oktatási Hivatal, 2021

ISBN 978-615-6256-45-4

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: OH-MAT10TA/II
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél • Grafikai szerkesztő: Győrfi Blanka
Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 18,54 (A/5) ív, tömeg: 399,81 gramm • 1. kiadás, 2022

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomtatta:
Felelős vezető:
Munkaszám:

ELŐSZÓ – A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

Segítségképpen a kötet elején újból bemutatjuk, milyen típusú részekből épül fel a tankönyv.

BEVEZETŐ: Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején, a BEVEZETŐben.

KIDOLGOZOTT FELADAT: Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET: Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai fogalmakat (definíciók) és állításokat (tételek) is.

FELADATOK: Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint szinteztük. A témakörhöz kapcsolódó érettségi feladatokat is bemutatunk. Korábbi kompetenciamérésekből is találhatsz feladatokat.

CSOPORTMUNKA: Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADAT: 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁADÁS: Itt matematikai érdekességeket, ötletes és izgalmas feladatokat találsz.

EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

6. Egybevágóság, kör

– EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK
A részletek megegyeznek. Az egész is ugyanaz?
– KÖRÖK ÉS KÖRCIKKEK
Gördül vagy forog, ívesen hajlik és körbeér...
A kör vagy annak egy része sokféle tárgy, eszköz kialakításban felfedezhető.

7. Statisztika és valószínűségszámítás

– HOGYAN KEZELJÜNK SOK-SOK ADATOT?
Középső adat, leggyakoribb adat, átlag. Így már áttekinthetőbb!
– VÉLETLEN?
Lehet, hogy lehetetlen, vagy biztos, hogy lehetséges...
Mennyire valószínű?

8. Egyenletek és egyenlőtlenségek

– NÉGYZETGYÖKÖS EGYENLETEK
Nemcsak az énekszó lehet hamis, hanem a gyök is. Nem árt az óvatosság!
– ALAKÍTSD SZORZATTÁ!
Most is segít a megoldóképlet.

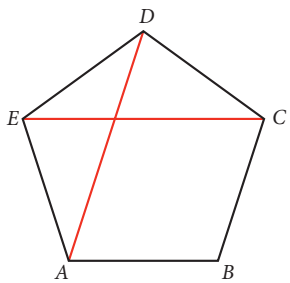
9. Hasonlóság

– NAGYÍTÁS, KICSINYÍTÉS
Nemcsak síkban, térben is. Nagyítunk sokszögeket, köröket és gúlákat.
– NEMCSAK HASONLÍT, DE HASONLÓ
Fényképek és tervrajzok
– HASONLÓ RÉSZLETEK
Kiegészítjük a trapézt, felosztjuk a háromszöget. A hasonlóság ott bújik a részletekben.

41 HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK ALAPESETEI

KIDOLGOZOTT FELADAT

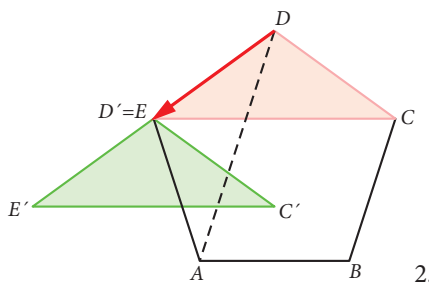
Egy szabályos ötszögnek az ábra szerint berajzoltuk két átlóját. Igazoljuk, hogy ez a két átló egyenlő hosszú!



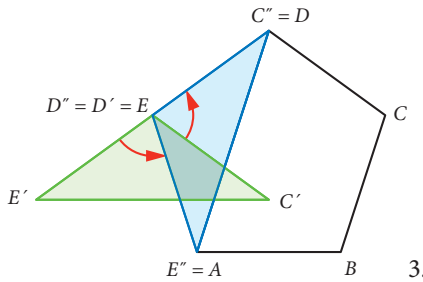
1. ábra

I. Megoldás

A rózsaszínű ECD háromszöget toljuk el a $\overrightarrow{DE}$ vektorral, így kapjuk az $E'C'D'$ háromszöget *(2. ábra)*. A kapott zöld háromszöget forgassuk el az E pont körül, így kapjuk az $E''C''D''$ háromszöget *(3. ábra)*. Mivel az ötszög oldalai és szögei egyenlők, ezért miután az ECD háromszöget eltoljuk majd elforgatjuk, valóban fedésbe kerül az ADE háromszöggel. Az ECD háromszög tehát egybevágó az ADE háromszöggel, ezért $AD = EC$.



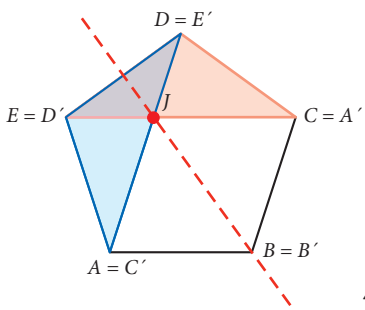
2. ábra



3. ábra

II. Megoldás:

Tükrözzük az ötszöget a B csúcson átmenő szimmetriatengelyére *(4. ábra)*. Az ötszög tükörképe az $A'B'C'D'E'$ ötszög lesz, amely egybeesik az eredeti ötszöggel. A CDE háromszög tükörképe éppen az AED háromszög lesz. Tehát igaz, hogy $AD = CE$.



4. ábra

Az ábrázolás megoldható a *GeoGebra* program segítségével is.

FELADAT

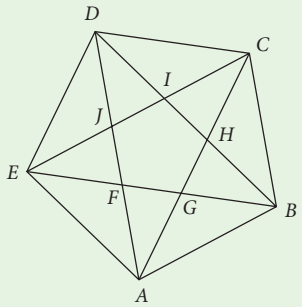
1 Mekkorák a *4. ábrán* látható kis háromszögek, a kék EAJ és a rózsaszínű JCD háromszögek szögei? Igaz-e, hogy a rózsaszínű háromszög is egyenlő szárú?

2 Mekkorák a *4. ábrán* a fehér négyszög szögei és oldalai, ha a szabályos ötszög oldalai 4 cm-esek?

3 Megrajzoltuk egy szabályos ötszög átlóit.

a) Hányféle háromszög látható az ábrán? Mindegyikre adj egy-egy példát!
(Két háromszög egybevágó, ha egybevágósági transzformációval egymásba vihető.)

b) Mekkorák a háromszögek szögei?



ELMÉLET

A 9. osztályban foglalkoztunk egybevágósági transzformációkkal és egybevágó alakzatokkal. Idézzük fel, amit akkor tanultunk!

- Két alakzatot *egybevágónak* mondunk, ha van olyan egybevágósági (vagyis távolságtartó) transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át.
- Alakzatok egybevágóságának jelölésére a $\cong$ szimbólumot használjuk.
- Egybevágó sokszögek megfelelő oldalai egyenlő hosszúak, megfelelő szögei egyenlők.
- Az eltolás, a (tengelyes, pontra vonatkozó, síkra vonatkozó) tükrözés, a (pont körüli és az egyenes körüli) forgatás is egybevágósági transzformáció.

Például a kidolgozott feladatban: $CDE\triangle \cong ADE\triangle$, mert egy tengelyes tükrözés segítségével egymásba átvihetők.

Háromszögek egybevágóságáról bebizonyítható a következő tétel:

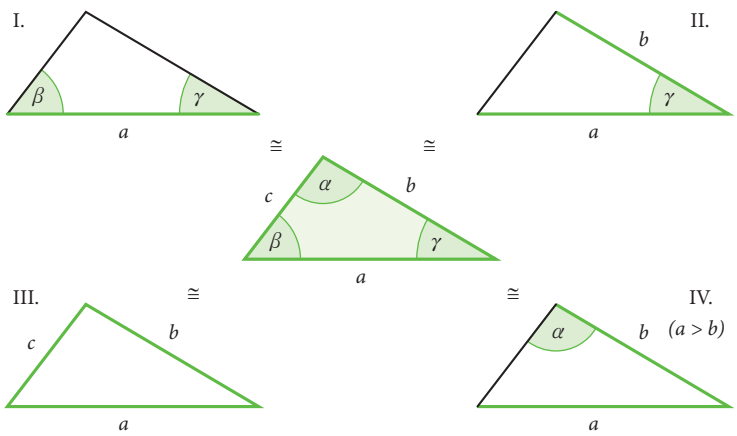
Tétel: háromszögek egybevágóságának alapesetei:

I. Ha két háromszögben egy-egy oldal és az ezeken fekvő két-két szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

II. Ha két háromszögben két-két oldal és az általuk közbezárt szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

III. Ha két háromszögben a három oldal páronként egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

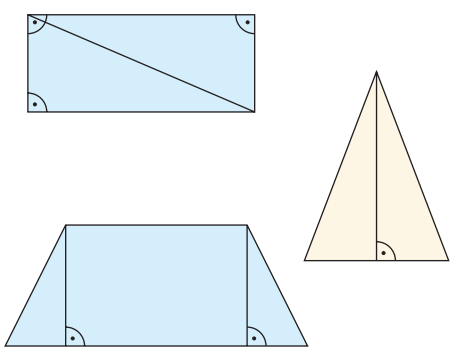
IV. Ha két háromszögben két-két oldal és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.



Az előbb felsorolt négy feltétel mindegyike szükséges és elegendő a háromszögek egybevágóságához.

Például

- a téglalapot (a paralelogrammát) az átlója két egybevágó háromszögre bontja, mert a létrejövő háromszögek oldalai páronként egyenlők (III. alapeset);
- az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó háromszögre bontja, mert a két keletkező háromszögnek egyenlő két oldala és a hosszabbik oldalakkal szemben fekvő szöge (IV. alapeset);
- ha egy húrtrapézból az ábra szerinti két magassággal levágunk két háromszöget, akkor ezek egybevágók, mert egyenlő egy oldaluk (a trapéz két szára) és az azon az oldalon fekvő két szögük (I. alapeset).



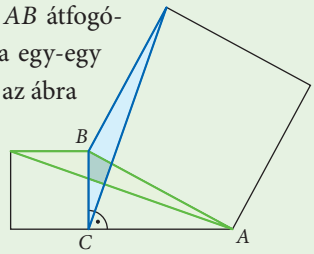
FELADAT

4 Egy négyszög csúcsai rendre: A, B, C és D. Tudjuk, hogy két-két szomszédos oldaluk egyenlő, azaz $AB = BC$ és $CD = DA$.

a) Készíts ábrát!

b) Igazold, hogy a négyszög A-nál és C-nél lévő szöge egyenlő! Melyik alapesettel indokolható az állítás?

5 Az ABC háromszög AB átfogójára és BC befogójára egy-egy négyzetet állítottunk az ábra szerint.



Mutasd meg az I–IV. alapeset valamelyikének felhasználásával, hogy a kék és a zöld háromszög egybevágó! Adj meg olyan egybevágósági transzformációt, amely a kék háromszöget a zöld háromszögbe viszi át!

6 Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszodat indokold!

a) Ha két szabályos háromszög egy-egy oldalának hossza egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

b) Ha két derékszögű háromszög átfogójának hossza megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó.

c) Ha két szabályos háromszögnek ugyanakkora a területe, akkor a két háromszög egybevágó.

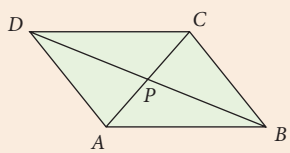
d) Ha két egyenlő szárú derékszögű háromszögnek ugyanakkora az átfogója, akkor a két háromszög egybevágó.

e) Ha két egyenlő szárú háromszög egy-egy oldalának hossza és két szöge egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.



HÁZI FELADAT

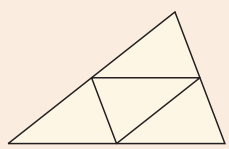
1 Megrajzoltuk egy paralelogramma két átlóját. A rajzon nyolc háromszög látható, közöttük 4 olyan pár van, amelyet két-két egybevágó háromszög alkot.



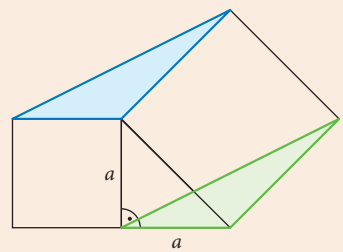
a) Add meg az egybevágó párokat a csúcspontok segítségével, és indokold is, hogy miért egybevágó a párt alkotó két háromszög!

b) Hány különböző területű háromszög van a nyolc háromszög között?

2 Összekötöttük egy háromszög oldalfelező pontjait. Mutasd meg, hogy a három szakasz négy egybevágó háromszögre bontja az eredeti háromszöget!



3 Egy egyenlő szárú, derékszögű háromszög egyik befogójára és az átfogójára egy-egy négyzetet állítottunk az ábra szerint.

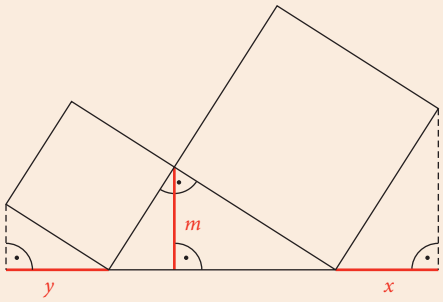


a) Igazold, hogy a kék és a zöld háromszög egybevágó! Melyik alapesettel tudod indokolni?

b) Adj meg olyan egybevágósági transzformációt, amely a kék háromszöget a zöld háromszögbe viszi át!

1

4 Derékszögű háromszög két befogójára egy-egy négyzetet állítottunk az ábra szerint. Igazold, hogy $m = x = y$!



A *GeoGebra* programmal is ellenőrizheted az állítás helyességét.

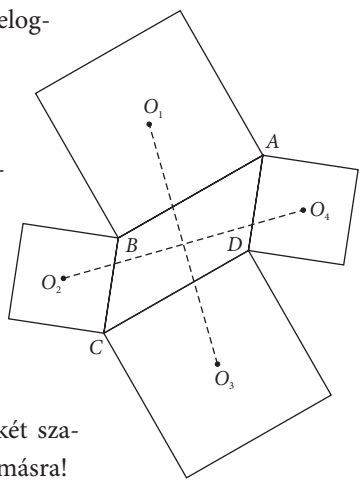
EMELT SZINT

ELMÉLET

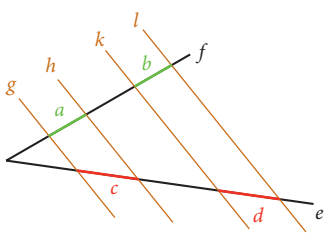
Két sokszög egybevágóságához szükséges, hogy a megfelelő oldalaik és szögeik páronként egyenlők legyenek.
Két sokszög egybevágóságához elégséges, hogy a megfelelő oldalaik és szögeik páronként egyenlők legyenek.

FELADAT

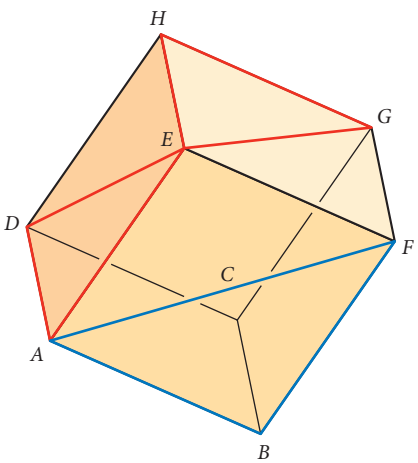
1 Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira az ábra szerint egy-egy négyzetet rajzoltunk. A négyzetek középpontja O_1, O_2, O_3, O_4. Igazold, hogy az O_1O_3 szakasz hossza egyenlő az O_2O_4 szakasz hosszával, és ez a két szakasz merőleges egymásra!



2 Igazold, hogy ha $g \parallel h \parallel k \parallel l$ és $a = b$, akkor $c = d$!



3 Egy kocka 8 csúcsát jelöljük az A, B, C, D, E, F, G és H betűkkel. Ha a csúcsok közül kiválasztunk hármat, azok egy háromszöget határoznak meg.



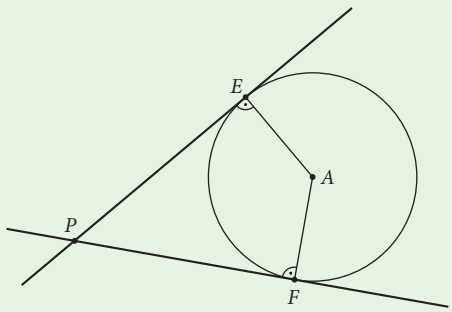
a) Bizonyítsd be, hogy 56 db háromszöget kaphatunk!

b) Melyek lesznek ezek közül egybevágók? Ha az egybevágó háromszögeket ugyanolyan háromszögnek tekintjük, akkor hány különböző háromszöget kaphatunk?

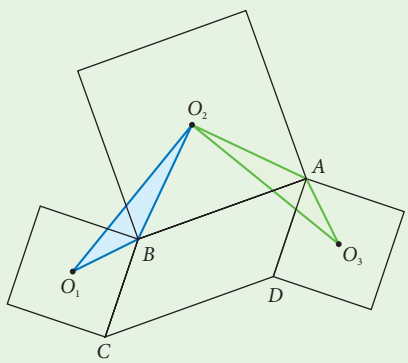
42 EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK

FELADAT

1 Egy körhöz egy külső P pontból meghúztuk a két érintőjét. Igazold, hogy az érintő szakaszok egyenlők! Melyik alapesetet használhatod az indokláshoz?
(Emlékeztetőül: érintő szakasznak hívjuk az érintőn a külső pontot az érintési ponttal összekötő szakaszt; az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.)



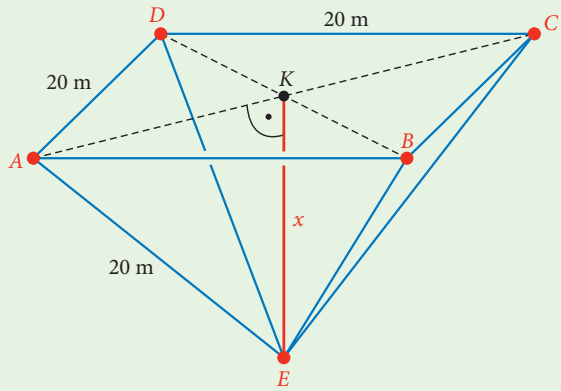
2 Az $ABCD$ paralelogramma három oldalára az ábra szerint egy-egy négyzetet állítottunk.



a) Igazold, hogy $O_1BO_2 \triangle \cong O_3AO_2 \triangle$!
(O_1, O_2, O_3 egy-egy négyzet középpontja.)

b) Igazold, hogy az $O_1O_2O_3 \triangle$ egyenlő szárú és derékszögű!

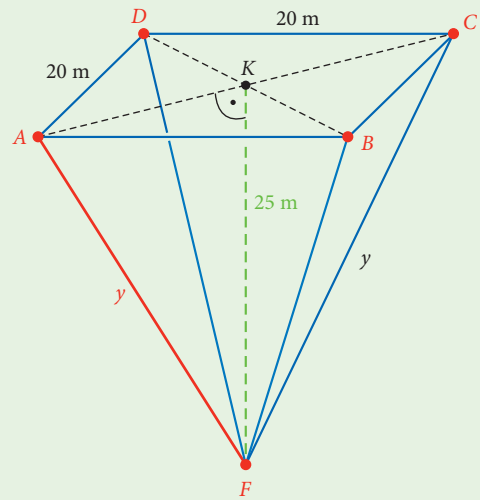
3 Búvárok végeztek méréseket egy tóban. 4 piros bója jelezte a merülési területet. A bóják egy 20 m-es oldalú négyzet csúcsaiban helyezkedtek el.



a) Az egyik búvár a négyzet K középpontjában függőlegesen merült le úgy, hogy ekkor az E pontban, az A jelű bójától 20 m volt a távolsága.
Mit mutatott a búvár mélységmérője az E pontban? (a keresett távolságot az ábrán x-szel jelöltük)

b) Milyen mértani testtel írhatjuk le ezt a problémát? Ennek mely alkotórészeit ismerjük? Melyik alkotórészét számítottuk ki?

4 Egy másik búvár is a K pontból indult, de ő 25 m mélyre merészkedett. Milyen távol volt az egyes bójáktól?

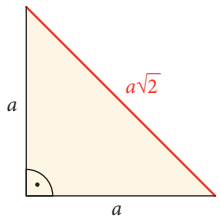


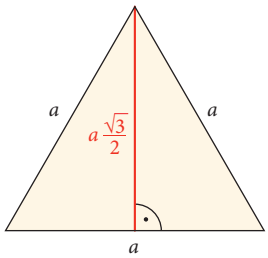
ELMÉLET

A Pitagorasz-tétel tárgyalásakor a 9. osztályban már megfigyeltük, hogy könnyen megjegyezhető kapcsolatok vannak egyes speciális háromszögekben lévő szakaszok között:

– az a befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $a\sqrt{2}$ hosszúságú;

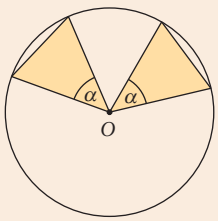
– az a oldalú, szabályos háromszög magassága: $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.





HÁZI FELADAT

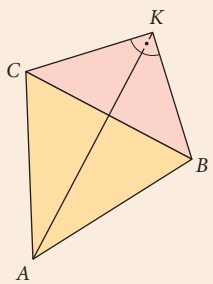
1 Egy körbe az ábra szerint felveszünk két olyan háromszöget, melyeknek egyik csúcsa a kör O középpontja, többi csúcsuk a körvonalra illeszkedik, és az O-nál lévő szögük egyenlő. Igazold, hogy a két háromszög egybevágó!



a) Melyik alapesetet használhatod?

b) Adj meg olyan egybevágósági transzformációt, amely egyik háromszöget a másikba viszi!

2 Az ABC szabályos háromszög BC oldalára az ábra szerint egy egyenlő szárú, derékszögű háromszöget illesztettünk.



a) Igazold, hogy az AK szakasz két egybevágó háromszögre vágja szét az $ABKC$ négyszöget!

b) Milyen hosszú az AK átló, ha a BC oldal hossza 2,5 cm?

c) Mekkora a négyszög területe?

3 A 3. feladatban szereplő búvár a merülés befejezése után nem függőlegesen emelkedett, hanem az AB szakasz H felezőpontjában bukkant a felszínre.

a) Igazold, hogy felbukkanásakor ugyanolyan távol volt C-től, mint D-től!

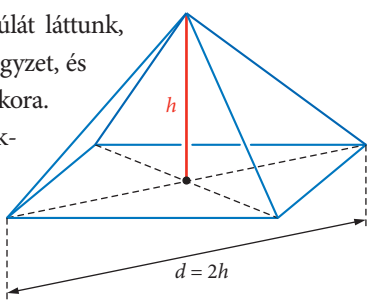
b) Mekkora a HC távolság?

c) Mekkora utat tett meg az emelkedés során (feltéve, hogy egyenes vonal mentén emelkedett)?

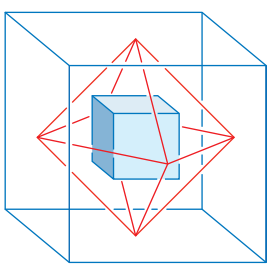
d) Milyen nevezetes szakasz a HE az ABE háromszögben?

RÁADÁS

A 3. feladatban olyan gúlát láttunk, amelynek az alaplapja négyzet, és mindegyik éle ugyanakkora. Keress egybevágó derékszögű háromszögeket, és ezeknek a felhasználásával igazold, hogy az ilyen gúlákban d, az alapnégyzet átlója, kétszerese a h-nak, a gúla magasságának! Ha papírból elkészítjük két ilyen egybevágó gúla modelljét, és azokat az alaplapjuknál összeragasztjuk, érdekes test, **szabályos oktaéder** keletkezik. Ezt 8 egybevágó szabályos háromszög határolja (innen ered a neve: „nyolclapú”), 6 csúcsa és 12 egyenlő hosszú éle van.



Ilyen testet határoznak meg például a kocka lapközéppontjai is. Még érdekesebb: a szabályos oktaéder lapközéppontjai pedig egy kockát határoznak meg. Ezért ezt a két testet egymás duálisának nevezzük.



43 A KÖR KERÜLETE ÉS TERÜLETE

BEVEZETŐ

A patchwork (foltvarrás, foltmozaik) olyan kézimunka-technika, mely során különböző színű és különböző textúrájú szövetdarabok összevarrásával újabb ruhákat, használati tárgyakat készíthetünk. Környezettudatos szemléletünket bizonyítja, ha az újabb darabok elkészítéséhez használt ruhákat, újrahasznosított alapanyagot használunk fel.
A boltokban kapható anyagokat mindig téglalap alakú formában tudjuk megvenni.
Mennyi anyagot vásároljunk összesen a 170 cm szélességű, különböző mintájú textilekből, ha egy olyan kör alakú foltmozaik asztalterítőt szeretnénk készíteni, melynek sugara 1,5 méter?

Mennyi díszítőszalagot vásároljunk ugyanehhez a terítőhöz, ha annak teljes kerületét (határoló vonalát) szeretnénk a szalaggal beszegni?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Határozd meg méréssel kör alakú tárgyak átmérőjének és kerületének hosszát! A kerület meghatározásához használj cérnát vagy madzagot, majd mérd meg a hosszát vonalzóval!

Megoldás
A táblázat néhány tárgyra vonatkozó mérési adatot tartalmaz:

	átmérő (cm)	kerület (cm)	a kerület és az átmérő hányadosa
biciklikerék-felni	62	198	3,19
8 személyes étkezőasztal	172	539,5	3,14
fürdőszobaszőnyeg	140	435	3,11
arctisztító korong	7,5	23,5	3,13
focipálya-kezdőkör	1830	5749	3,14

Határozd meg az általad mért adatok esetében is a kerület és az átmérő hányadosának értékét!

Azt tapasztaljuk, hogy a kör alakú tárgyak kerületének és átmérőjének hányadosa a mérési hibáktól eltekintve minden esetben egy 3-nál nagyobb, 3,2-nél kisebb valós számként adódik.

ELMÉLET

Bizonyítható, hogy a kör kerületének és átmérőjének hányadosa állandó, azaz a kör kerülete és átmérője között egyenes arányosság van. Az arányszámot – a XVIII. század óta, Euler jelölése alapján – a görög perimetrosz, periféria (kerület) szavak kezdőbetűje miatt a görög π betűvel jelöljük.

A **kör kerülete** a kör átmérőjének π-szerese, vagyis ha a kör átmérőjét d-vel, sugarát r-rel, kerületét pedig K-val jelöljük, akkor $K = d\pi$, másképp $K = 2r\pi$.

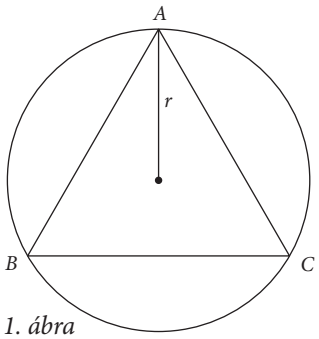
A π irracionális szám, tehát végtelen nem szakaszos tizedestört.
Számolási feladatok esetén használhatjuk a számológépben található π értéket, vagy számolhatunk a 3,14 két tizedesjegyre kerekített értékkel. Megadhatjuk a választ π többszöröseként is, pl. egy 3,2 méter sugarú kör kerülete $6{,}4\pi$ méter.

ELMÉLET

Szabályos sokszögnek nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeknek minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő nagyságú. Mint minden n oldalú sokszögnek, a szabályos sokszögnek is n csúcsa, n belső szöge, n külső szöge van, ahol $n \in \mathbf{N}$; $3 \leq n$ lehet.

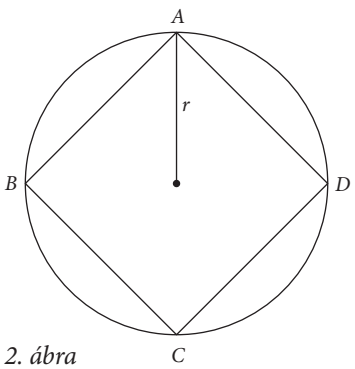
KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Szerkessz három darab 5 cm sugarú kört!
Szerkessz rendre a körökbe szabályos háromszöget, szabályos négyszöget, szabályos hatszöget!
Határozd meg méréssel a körökbe írt szabályos sokszögek oldalainak hosszát!
Számítsd ki a mérés alapján a szabályos sokszögek területét, majd határozd meg a területek és a sugár négyzetének hányadosát!
Ellenőrizd a kapott eredményeket az alábbi táblázat alapján!



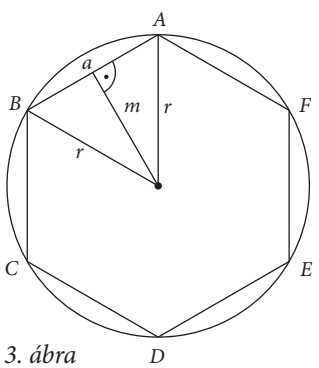
1. ábra

Ha a körökbe újabb szabályos sokszögeket írunk, akkor az oldalak számának függvénye lesz az oldalhossz és a terület.
Az alábbi táblázat az 5 cm sugarú körbe írható néhány szabályos sokszög bizonyos adatait tartalmazza kerekítve.



2. ábra

a sokszög oldalainak száma n	a sokszög egy oldalának hossza (cm) a	a keletkező egyenlő szárú háromszög magassága (cm) m	a sokszög területe (cm^2) $T_{\text{sokszög}} = n \cdot T_{\text{háromszög}}$	a sokszög területének és a sugár négyzetének hányadosa $\frac{T_{\text{sokszög}}}{r^2}$
3	8,66	2,5	32,48	2,598
4	7,07	3,54	50	2,828
6	5,00	4,33	64,95	3,000
8	3,83	4,55	70,71	3,106
12	2,59	4,83	75	3,108
18	1,74	4,92	76,95	3,126
60	0,52	4,99	78,40	3,140
100	0,31	4,998	78,49	3,141



3. ábra

A táblázatba írt értékeket a háromszögre, a négyszögre és a hatszögre ellenőrizd számolással is!
A szabályos hatszög területét úgy határozhatod meg, hogy a *3. ábrán* lévő *a* alapú, *m* magasságú háromszög területét hatszorozod. (Hasonlóan járhatunk el minden szabályos sokszög esetén.)

ELMÉLET

Észrevehetjük, hogy a beírt szabályos sokszög oldalszámának növelése során egyre nagyobb lesz a beírt sokszög területe. A sokszög területe ugyanakkor nem haladhatja meg a **kör területé**nek nagyságát, mivel a sokszöget teljes terjedelmében tartalmazza a kör.
Minél jobban megnöveljük a beírt szabályos sokszög oldalainak számát, a sokszög területe annál inkább megközelíti a kör területének értékét.

A számolások alapján látható, hogy $\frac{T_{\text{nagy oldalszámú szabályos sokszög}}}{r^2} \approx \frac{T_{\text{kör}}}{r^2} \approx 3{,}14$.

Bizonyítható, hogy a kör területének és sugara négyzetének hányadosa állandó, és az arányossági tényező π.
Az *r* sugarú kör területe $T = r^2\pi$ összefüggéssel számolható.

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Határozd meg a BEVEZETŐ-ben szereplő kör alakú terítő kerületét és területét!

Megoldás

A kör sugara $r = 1{,}5$ m. (A könnyebb számolás kedvéért ne vegyük figyelembe a varrás során keletkező hulladékot!) A kör kerülete $K = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \pi$ (m) $\approx 9{,}42$ (m); a kör területe $T = 1{,}5^2 \cdot \pi$ (m^2) $\approx 7{,}07$ (m^2).

A körbeszegéshez 9,42 méter szalag szükséges (de a boltban jobban örülnek, ha 9,5 métert kérünk).

Mivel a kör területére, vagyis a szükséges anyagmennyiségre 7,07 m^2 adódik, ezért a téglalap alakú 170 cm = 1,7 m széles anyagból $\frac{7{,}07\ \text{m}^2}{1{,}7\ \text{m}} \approx 4{,}16$ m hosszúságút kell vásárolnunk (de a kereskedő szívesebben mér 420 centimétert).

FELADAT

1 Határozd meg a kör kerületét centiméterben és a kör területét négyzetcentiméterben, ha a kör átmérőjének hossza

a) 2,6 cm

b) 4,28 dm

c) 53 mm.

Eredményeidet két tizedesjegy pontossággal add meg!

2 Tudjuk, hogy egy kör kerülete

a) 628 cm

b) 842 mm

c) 0,93 m.

Add meg a kör területét négyzetcentiméterben, két tizedesjegyre kerekítve!

3 Egy kör területe

a) 314 dm^2

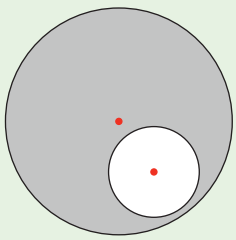
b) 113,1 cm^2

c) 1,826 m^2.

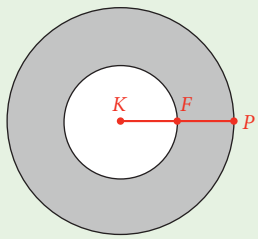
Add meg a kör kerületét deciméterben, három tizedesjegyre kerekítve!

4 Egy körlapból kivágtuk a fehérrel jelzett síkidomokat. Határozd meg az egyes ábrákon lévő szürkével színezett területek nagyságát a megadott adatok segítségével!

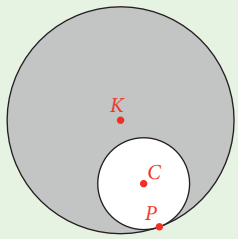
a) A nagyobb kör sugara 5 egység hosszú, a kisebb kör sugara 1 egység hosszú.



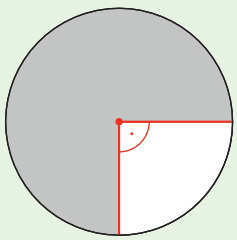
b) A nagyobb kör átmérője 4,6 cm hosszú és $KF = FP$.



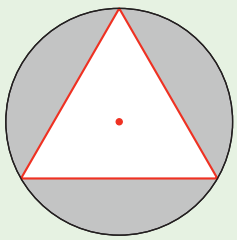
c) A kisebb kör átmérője 68 mm hosszú; P a két kör egyetlen közös pontja; a két kör középpontjának távolsága $KC = 50$ mm.



d) A kör kerülete 125,66 dm.

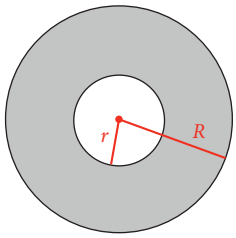


5 Egy 6 cm sugarú körlapból kivágtunk egy szabályos háromszöget. Határozd meg az ábrán szürkével színezett terület nagyságát!



ELMÉLET

Két koncentrikus körvonal által határolt síkidom a **körgyűrű**.
Ha a körök sugara r és R, ahol $r < R$, akkor a körgyűrű területe $T = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.



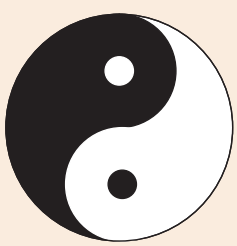
HÁZI FELADAT

1 A nemzetközi π-napot (1988 óta) március 14-én ünneplik, mivel az aznapi dátum (03.14.) számjegyei két tizedesjegyig megegyeznek a π értékével.
Ezen a napon van a születésnapja egy híres, Nobel-díjas fizikusnak is, akinek nevét megtudhatod, ha jól oldod meg az alábbi feladatot.
Döntsd el mindegyik állításról, hogy igaz vagy hamis, és a válaszodnak megfelelő „kóddal" keresd ki a betűket tartalmazó táblázatból a megfelelőket. A betűk helyes sorba rendezésével megtudhatod a fizikus nevét. Nézz utána, melyik évben született, és milyen eredményért részesült Nobel-díjban!

	igaz	hamis
Van olyan kör, amely kerületének és területének mérőszáma megegyezik egymással cm-ben illetve cm^2-ben számolva.	a2	e4
Ha a kör területe 20π, akkor sugara nagyobb 5 egységnél.	b1	b4
Ha a kör átmérője 5 cm, akkor kerülete 10π cm.	b7	b6
Ha egy körből kivágunk egy azzal azonos középpontú, feleakkora sugarú kört, akkor a maradék terület az eredeti kör területének felével egyenlő.	d5	c3
Ha egy kör átmérőjét feleakkorára csökkentjük, akkor területe negyedakkorára csökken.	f7	a6
Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója mint átmérő fölé emelt félkör területe nagyobb a háromszög területénél.	d8	c5
Ha egy kör kerülete 200π cm, akkor a területe 1000π dm^2.	f3	e5
Ha egy kör leghosszabb húrja 30 cm hosszú, akkor a kör területe kisebb, mint egy 28 cm oldalú négyzet területe.	e8	c4

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	F	E	A	S	L	F	O	R
b	A	B	K	N	T	I	M	S
c	E	C	E	D	M	L	T	P
d	O	P	T	D	K	R	V	I
e	H	U	M	C	N	B	K	S
f	N	Q	L	U	L	J	T	A

2 A Jin és Jang (Yin Yang) ősi kínai szimbólum, mely a kettős életfelfogást, az ellentéteket, ugyanakkor ezek egységbe fonódását, így a teljességet jelképezi.



A szimbólum megrajzolásához köríveket használnak.

a) Szerkeszd meg a szimbólumot, melyben a nagy kör átmérője 8 cm, a másik két kör középpontja a nagy kör egyik sugarának felezőpontja és a legkisebb körök átmérője 1 cm hosszúságú.

b) Határozd meg a két, feketével színezett síkidom területének nagyságát külön-külön!

(Ha a hagyományoknak megfelelő, tökéletes rajzot szeretnél, akkor keress az interneten „How to Draw a Perfect Yin Yang" leírást vagy videót!)

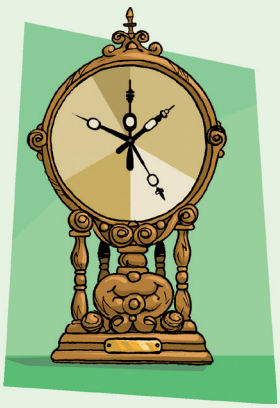
44 KÖZÉPPONTI SZÖG, KÖRÍV, KÖRCIKK

FELADAT

1 A Harry Potter-könyvekben szerepel egy óra, amely nem az időt mutatja, hanem azt, hogy melyik családtag hol tartózkodik éppen. A mutatókon szerepelnek a családtagok, a „számlapon” pedig a lehetséges helyszínek, mint *iskola, munkahely, otthon, útközben, életveszélyben* stb. (Akadt olyan lelkes olvasó, aki GPS és mobiltelefonok segítségével készített egy ilyen szerkezetet a saját családjához.)
Egy ilyen óra kerülete legyen 48 cm. Az óra „számlapja” 5 db, körcikk alakú területre van bontva. Az *iskola* rész 12 órától 4 óráig tart (amennyiben egy hagyományos óra számlapjához viszonyítjuk), a *munkahely* rész 4 órától 6 óráig, az *útközben* rész 6-tól 8 óráig, az *otthon* rész 8-tól 11 óráig, az *életveszélyben* rész pedig 11-től 12 óráig.

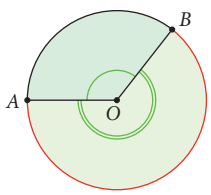
a) Milyen hosszú körívek tartoznak az egyes részekhez az óra „számlapjának” kerületén?

b) Mekkora az egyes tartományokban az a szög, amelyet a tartományokat határoló sugarak zárnak közre?



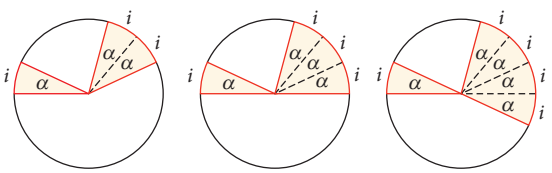
ELMÉLET

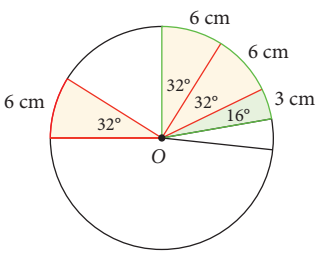
Rajzoljuk meg egy kör két sugarát, az *OA*-t és az *OB*-t!
Így a körvonalat két **körívre**, a körlemezt két **körcikkre** bontottuk.
Két olyan szöget is látunk, amelyeknek *O* a csúcsa, az *OA* és az *OB* félegyenes pedig a két szára. Ezeket a szögeket az adott körben a megfelelő körívhez vagy körcikkhez tartozó **középponti szögeknek** nevezzük.
A körbe rajzolt két sugár két olyan középponti szöget ad meg, amelyeknek az összege egy teljesszög.



Tétel: Egy körben
- egyenlő nagyságú középponti szögekhez egyenlő hosszúságú körívek és egybevágó körcikkek tartoznak;
- egyenlő hosszúságú körívekhez egyenlő nagyságú középponti szögek és egybevágó körcikkek tartoznak;
- egybevágó körcikkekhez egyenlő nagyságú középponti szögek és egyenlő hosszúságú körívek tartoznak.

Tétel: Egy körben a középponti szögek nagysága, a hozzájuk tartozó körívek hosszúsága és a hozzájuk tartozó körcikkek területe egyenesen arányos.

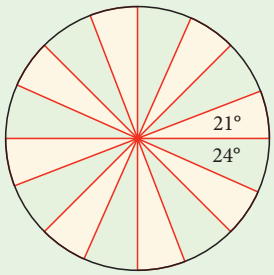




Például az ábrán megadott kör esetében: a 80°-os középponti szög 2,5-szer akkora, mint a 32°-os, ezért 2,5-szer olyan hosszú (15 cm-es) körív és 2,5-szer akkora területű körcikk tartozik hozzá, mint a 32°-oshoz.
Fordítva: a 15 cm hosszú körívhez 2,5-szer akkora középponti szög tartozik, mint a 6 cm hosszúhoz (valóban, $15 : 6 = 80 : 32 = 2{,}5$).

FELADAT

2 Az ábrán látható szerencsekerék „nyert” mezői (az ábrán rózsaszínnel jelölve) 21°-os középponti szögű körcikkek, „nem nyert” mezői 24°-os középponti szögű körcikkek. A kerék sugara a valóságban 50 cm. A táblázat kitöltésével válaszolj a kérdésekre! A füzetedben dolgozz!



a) Mekkora körív tartozik egy „nyert” feliratú mezőhöz, és mekkora egy „nem nyert” feliratúhoz?

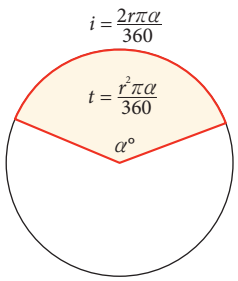
b) Mekkora egy nyerő és egy nem nyerő körcikk területe?

Középponti szög fokban	Körív hossza cm-ben	Körcikk területe cm^2-ben
360°		
1°		
21°		
24°		

ELMÉLET

Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög α°-os, akkor a hozzá tartozó **körív hossza** a körkerület 360-ad részének az α-szorosa. Ha ennek a cm-ben mért hosszúságát i-vel jelöljük, akkor $i = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180}$ (cm).

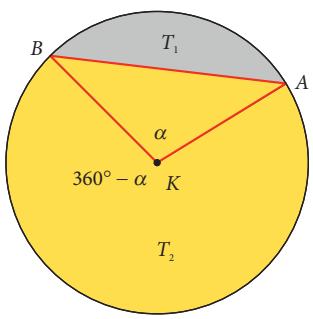
Ugyanebben a körben egy α°-os középponti szöghöz tartozó **körcikk területe** a körterület 360-ad részének az α-szorosa. Ha ennek a cm^2-ben mért nagyságát t-vel jelöljük, akkor $t = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ (cm^2).



A körlapot a kör egy húrja két **körszelet**re bontja.

Másképp: A **körszelet** olyan síkidom, melyet az adott kör egy íve és az ív végpontjait összekötő húr határol.

A körszelet területét meghatározhatjuk a körszelethez tartozó körcikk és háromszög területének ismeretében. Legyen T_1 és T_2 a K középpontú kör két körszeletének területe (az ábrán rendre szürke, illetve sárga színnel jelölve).



Az ábrán látható szürke körszelet területe: $T_1 = T_{\text{körcikk}(\alpha)} - T_{ABK\triangle}$

Az ábrán látható sárga körszelet területe: $T_2 = T_{\text{körcikk}(360° - \alpha)} + T_{ABK\triangle}$

Mindezek mellett teljesül, hogy $T_1 + T_2 = T_{\text{kör}}$.

FELADAT

3 Mekkora az 1. feladatban szereplő „órán” az egyes részek területe?

4 Oldd meg a következő feladatokat! Készíts vázlatot a körcikkekről!

a) Mekkora a 12 cm sugarú körben annak a körívnek a hossza és körcikknek a területe, amelynek a középponti szöge 107°?

b) Mekkora a 181,5 mm ívhosszúságú, 200°-os középponti szögű körcikk területe?

c) Mekkora a 10 m sugarú körben a 10 m ívhosszúságú körcikk középponti szöge és területe?

FELADAT

5 Egy 12 cm átmérőjű kör két egymással párhuzamos húrjának hossza 6 cm és $6\sqrt{2}$ cm.

a) Határozd meg a körív azon darabjainak hosszát, melyet a két húr végpontja hoz létre a körvonalon!

b) Határozd meg a körlap két húr közé eső darabjának a területét!

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg a következő feladatokat! Készíts vázlatot a körcikkekről!

a) Mekkora annak a 100 cm ívhosszúságú körcikknek a területe, melynek középponti szöge 286,5°? Mekkora annak a körnek a sugara, amelyből a körcikket kivágtuk?

b) Mekkora a 42°-os középponti szögű, 450 m^2 területű körcikk ívhosszúsága?

c) Mekkora a középponti szöge és a területe egy 15 cm sugarú kör 45 cm hosszú ívéhez tartozó körcikkének?

d) Egy körcikk területe 24π cm^2, a hozzá tartozó körív hossza 6π cm. Mekkora a középponti szöge?

2 Mekkora annak a körszeletnek a területe, melyet egy 8 cm sugarú körben egy 120°-os középponti szöghöz tartozó körív és a körív végpontjait összekötő húr határol?

3 Egy 41 cm átmérőjű pizzán négyen osztozkodnak. Albert egy olyan cikket kap, melynek középponti szöge 54°, Béla olyan cikket, melynek területe (valójában egy hengerszerű test alapterülete) 528 cm^2. Csanád része olyan körcikk, melyben a körív hossza 32,2 cm. Dénes az előbbi részek levágása után maradt részt kapja.

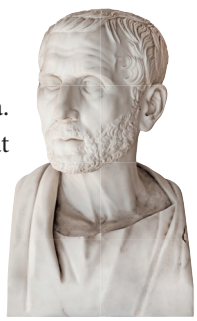


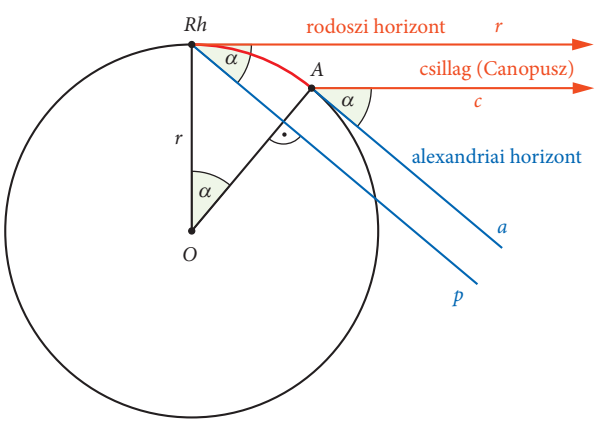
a) Mekkora az egyes cikkek területe és mekkora a hozzájuk tartozó középponti szögek nagysága?

b) Kinek hány forintot kell fizetnie, ha a pizza ára 4280 Ft, és a fiúk részarányosan fizetik az adagjukat?

RÁADÁS

1 A görög Poszeidóniosz „megmérte” a Föld kerületét, ehhez a jól látható Canopus csillagot használta. Úgy vélte, hogy Rodosz és Alexandria azonos hosszúsági körön fekszik, és a két település távolságát az utazók számításai alapján 5000 sztadionnak vette.





Amikor Rodoszban a horizonton (r) éppen meg lehet pillantani a Canopust, akkor Alexandriában a csillagot az ottani horizonthoz (a) képest a teljesszög 48-ad részének megfelelő szög (α) alatt lehet látni. A Canopushoz Rodoszból és Alexandriából húzott „látósugarakat” (r és c) a csillag nagyon nagy távolsága miatt párhuzamosnak tekinthetjük. (Figyeld az ábrát! Az ábrán megjelenő távolságok nem méretarányosak, az α is jóval nagyobb az ábrán, mint a valóságban.) A horizont mindig merőleges a sugárra, így ha meghúzzuk az alexandriai horizontegyenessel párhuzamos p egyenest, amely „Rodoszon megy át”, akkor a rodoszi horizont egyenesének és

ennek az utóbbi egyenesnek a szöge szintén α (egyállású szögek miatt). Ebből következik, hogy az 5000 sztadion hosszú körívhez tartozó középponti szög is α (merőleges szárú hegyesszögek miatt).
Poszeidóniosz az előbbi adatokból kiszámította, hogy hány sztadion a Föld „kerülete”.

a) Számítsd ki a Föld „kerületének” (az Egyenlítőnek) a hosszát a megadott adatokból!

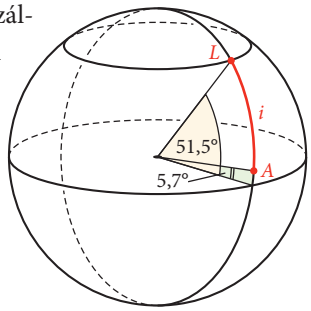
b) A kör kerületének képletéből számítsd ki, hány sztadionnak mérhette Poszeidóniosz a Föld sugarát!

c) A kapott eredmény alapján számítsd ki, mennyit tévedett az ókori tudós (add meg százalékban is)! (1 sztadion körülbelül 157,5 m.)

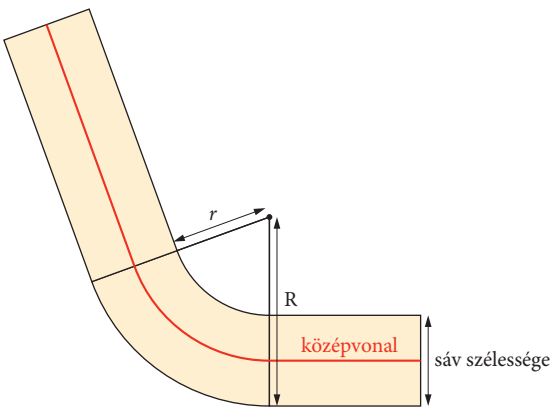
d) Mi lehetett az oka annak, hogy Poszeidóniosz számítása ennyire eltért a ma már közismert értékektől?

Megjegyzés
Néhány évvel ezelőtt – német középiskolások kezdeményezésére – megismételték a mérést. A svájci és német diákok együttműködése alapján elkészült eredmény valamivel több mint 5% eltérést mutatott.

2 Körülbelül hány km-t repül az a repülőgép, amely Londonból Accrába (Ghána) tart (leszállás nélkül)? A londoni repülőtér a 0°-os hosszúsági és 51,5°-os északi szélességi körön fekszik, az accrai repülőtér pedig szintén (megközelítőleg) a 0°-os hosszúsági és 5,7°-os északi szélességi körön fekszik. (A Föld sugarát vedd 6370 km-nek!)



3 Egy út egyik szakasza két téglalap alakú részből és egy körgyűrű egy darabjából áll (ld. ábra).
Bizonyítsd be, hogy az útszakasz területe kiszámítható úgy is, hogy a középvonal hosszát megszorozzuk a sáv szélességével!





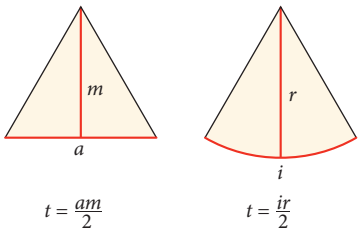
45 GYAKORLÁS

ELMÉLET

Az ívhosszat megadó $i = \frac{2r\pi\alpha}{360}$ és a körcikk területét megadó $t = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ képletek jobb oldalán szereplő két törtben több közös tényezőt látunk. Ha az első törtet megszorozzuk r-rel és elosztjuk 2-vel, éppen megkapjuk a másodikat.

Ez azt jelenti, hogy $\boldsymbol{t = \frac{ir}{2}}$, ami nagyon hasonlít a háromszög területképletéhez.

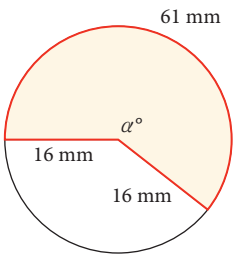
Ha például tudjuk, hogy egy 24 cm^2 területű körcikk egy 6 cm sugarú körben van, akkor ebből fejben is kiszámíthatjuk, hogy a hozzá tartozó ívhossz 8 cm.



$t = \frac{am}{2}$ $\quad$ $t = \frac{ir}{2}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora középponti szög tartozik egy 16 mm sugarú körben a 61 mm hosszú körívhez? Mekkora az ugyanehhez a középponti szöghöz tartozó körcikk területe?



Megoldás

Ha a középponti szög $\alpha°$-os, és a körcikk területét t-vel jelöljük, akkor az ívhosszúság képlete szerint

$2 \cdot 16 \cdot \pi \cdot \alpha : 360 = 61, \qquad \alpha = 61 \cdot 180 : (16\pi) \approx 218,$

vagyis ez a középponti szög közelítőleg 218°-os.

A körcikk területe: $t = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{61 \cdot 16}{2} = 488$ mm^2.

FELADAT

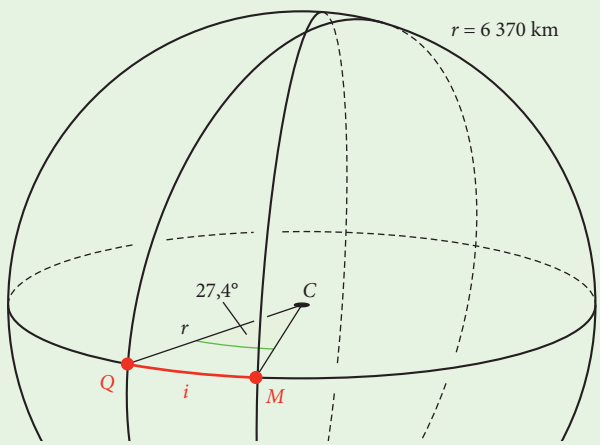
1 Egy 5,4 cm sugarú körlemezt a kör négy sugara olyan körcikkekre bontja, amelyek területének aránya

a) 5 : 8 : 1 : 4;

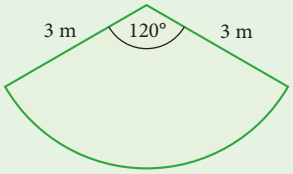
b) 2 : 3 : 4 : 5.

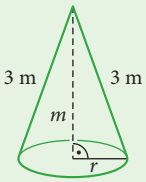
Mekkora középponti szögek, mekkora körívek, mekkora területű körcikkek keletkeztek?

2 Körülbelül mekkora a Quito (Ecuador) és Macapá (Brazília) közti repülőút hossza? Mindkét város az Egyenlítő közelében fekszik, Quito a 78,5°-os, Macapá pedig az 51,1°-os nyugati hosszúsági körön.



3 Körcikk alakú ponyvából sátrat formázunk.





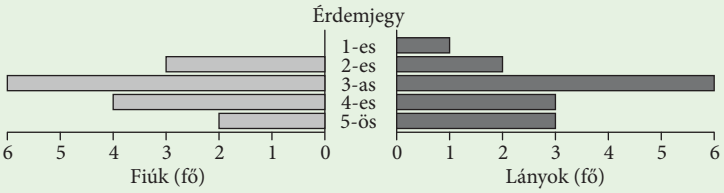
a) Mekkora körív tartozik a ponyvához?

b) Mekkora lesz a sátor alaplapjának sugara, ha tudjuk, hogy az alaplap egy olyan kör, melynek kerülete megegyezik a körcikk ívhosszával?

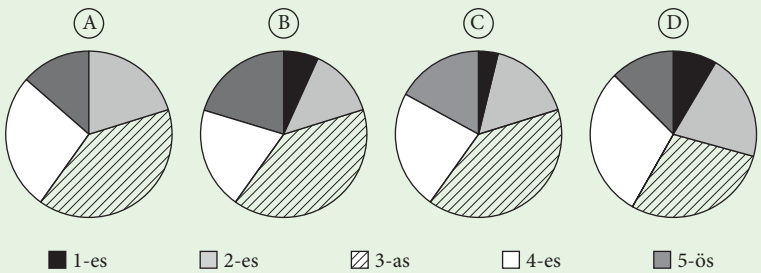
c) Milyen magas lesz a sátor?

4 A statisztikában a kördiagramok készítésekor és elemzésekor is felhasználjuk a körcikkek középponti szöge és a körcikkek területe közötti egyenes arányosságot. (Kompetenciamérés, 2016)

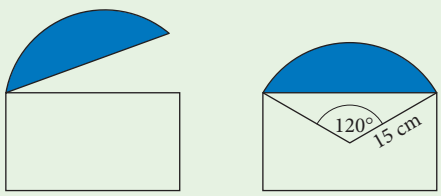
A következő diagram azt mutatja, hogyan oszlanak meg egy dolgozat érdemjegyei a fiúk és a lányok között egy 30 fős osztályban.



Melyik kördiagram mutatja helyesen a dolgozatra kapott érdemjegyek megoszlását az osztályban? Válaszd ki a helyes ábra betűjelét!



5 Egy ládikó keresztmetszetének vázlata látható az ábrán, először nyitva, utána csukva. A felső vonal egy 120°-os középponti szöghöz tartozó körív. A kör sugara 15 cm.



a) Mekkora az ábrán a kék rész területe (mely a láda tetejéhez tartozik)?

b) Mekkora a kék rész kerülete?

HÁZI FELADAT

1 Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 20 cm. A háromszög befogóinak aránya $1 : \sqrt{3}$. Mekkora területű részekre bontja a háromszög köré írható körét a háromszög legkisebb oldala?

2 A Veszprém megyei Tapolcán, a Malom-tó partján forgó malomkerék egy közeli hotel részleges energiaellátását is biztosítja. A kerék átlagos vízhozam esetén 0,75 perc alatt fordul egy teljes kört.

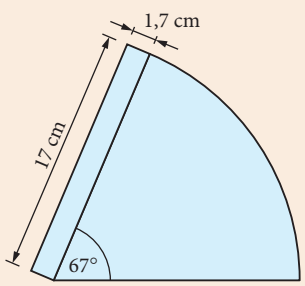
a) Hány fokot fordul el a kerék 10 másodperc alatt?

b) Mennyi idő alatt fordul el a kerék 144°-ot?

c) Mekkora ívet fut be a kerék kerületén lévő pont 25 másodperc alatt, ha tudjuk, hogy a kerék „magassága”, azaz átmérője 6 méter?

3 A fagyitölcsér teljes beburkolásához szükséges fólia két részből tehető össze: egy 17 cm sugarú, 67° középponti szögű körcikkből és egy 1,7 cm széles, 17 cm hosszú téglalap alakú részből.

Számítsd ki, hogy 10 000 db fagyi gyártásához hány m^2 fólia szükséges, ha a kivágás miatt keletkező selejttel nem számolunk!



ELMÉLET

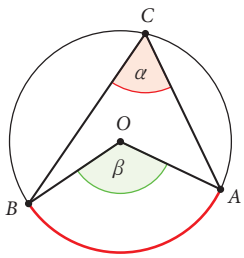
1. Kerületi szögek

Definíció

Az olyan konvex szöget, amelynek a csúcsa egy körvonalon van, a szárai pedig tartalmazzák e kör egy-egy húrját, erre a körre nézve **kerületi szög**nek nevezzük.

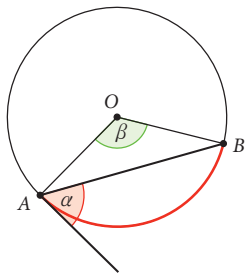
A kerületi szög a szóban forgó körnek ahhoz az ívéhez tartozik, amely a szögtartományára illeszkedik.

Egy körben egy ívhez egy középponti szög és végtelen sok kerületi szög tartozik.



Definíció

Ha egy konvex szög csúcsa egy körvonalon van, az egyik szára illeszkedik e kör egy húrjára, másik szára pedig e kör egy érintőjére, akkor ezt **érintő szárú kerületi szög**nek nevezzük. Az érintő szárú kerületi szög a szóban forgó körnek azon ívéhez tartozik (az ábrán a pirossal jelölt *AB* ív), amely a szögtartományára illeszkedik. Egy körben egy ívhez *két* érintő szárú kerületi szög tartozik (az ábrán a másik kerületi szög csúcsa a *B* pont).



2. A középponti és kerületi szögek tétele

Tétel: A középponti szög kétszer akkora, mint a vele azonos ívhez tartozó bármelyik kerületi szög.

Bizonyítás

A kerületi szög szárainak elhelyezkedése szerint:

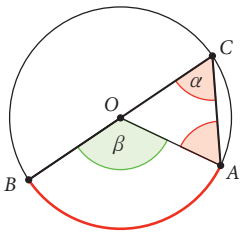
A) a kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik szárára;

B) a kör középpontja a kerületi szög szögtartományának belső pontja;

C) a kör középpontja a kerületi szög szögtartományán kívül esik;

D) a kerületi szög egyik szára a kör érintője.

E négy esetre külön-külön bizonyítjuk be a tételt. Legyen az *AB* ívhez tartozó kerületi szög α, az *AB* ívhez tartozó középponti szög β.



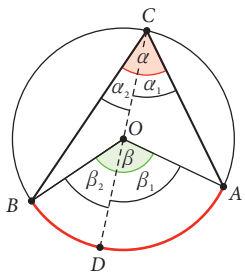
A) eset:

Az $ACO\triangle$ egyenlő szárú, ezért $OAC\sphericalangle = \alpha$.

A β középponti szög az $ACO\triangle$-nek külső szöge, ezért β a nem mellette fekvő két belső szög összegével egyenlő:

$\beta = \alpha + OAC\sphericalangle = \alpha + \alpha$.

Tehát $\beta = 2\alpha$.

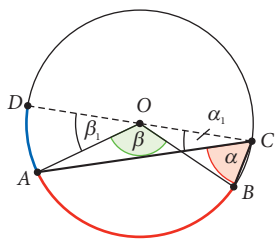


B) eset:

Az A) eset szerint az *AD* ívre nézve: $\beta_1 = 2\alpha_1$ és a *BD* ívre nézve: $\beta_2 = 2\alpha_2$.

Tehát $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$,

$\beta = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$.



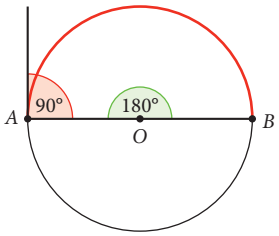
C) eset:

Az A) eset szerint az *AD* ívre nézve: $\beta_1 = 2\alpha_1$ és a *BD* ívre nézve:

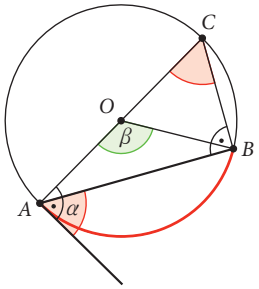
$\beta + \beta_1 = 2(\alpha + \alpha_1) = 2\alpha + 2\alpha_1$.

Tehát $\beta + \beta_1 = 2\alpha + \beta_1$, azaz $\beta = 2\alpha$.

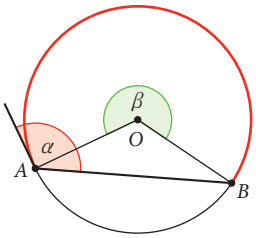
D) eset:



A) Ha az érintő szárú kerületi szög egy félkörre támaszkodik:
$180° = 2 \cdot 90°$.



B) A $BCA\sphericalangle$ és az α merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlők (az A csúcsnál az érintő tulajdonsága, a B csúcsnál a Thalész-tétel miatt van derékszög).
Tehát $\beta = 2 \cdot BCA\sphericalangle = 2\alpha$.



C) Az előző eset alapján:
$360° - \beta = 2(180° - \alpha) = 360° - 2\alpha$,
vagyis $\beta = 2\alpha$.

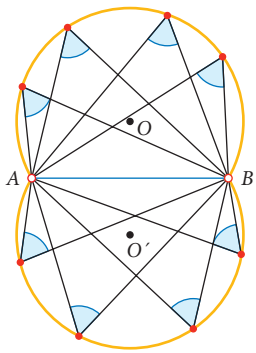
Az állítást mind a négy esetre bizonyítottuk, tehát igaz a középponti és kerületi szögek tétele.

3. A kerületi szögek tétele

Tétel: Egy körben vagy egyenlő sugarú körökben az egyenlő ívre támaszkodó kerületi szögek egyenlők.
Igaz ennek a tételnek a megfordítása is: Egy körben az egyenlő kerületi szögekhez tartozó körívek egyenlő hosszúak.

4. A látókörív

Legyen adott a síkon az AB szakasz és a konvex α szög. Keressük a sík azon pontjainak halmazát, amelyekből az AB szakasz α szögben látszik.
A keresett alakzat két olyan egybevágó körív pontjainak halmaza, amelyeknek A és B a végpontjai, és amelyek az AB egyenesére nézve egymás tükörképei. Az alakzathoz az A és a B pont nem tartozik hozzá.



Az így keletkezett alakzatot az adott szakaszhoz és az adott szöghöz tartozó **látókörívnek** is nevezzük (az ábrán narancssárgával rajzolt ívek).
Az AB szakasz a látóköríven belüli pontokból nagyobb, az azon kívüli pontokból kisebb szögben látszik, mint a látókörív pontjaiból.

FELADAT

1 Vegyél fel egy derékszögű háromszöget, melynek befogói 8 cm és 10 cm hosszúak. Szerkeszd meg a háromszög belsejében azt a pontot, amelyből mindkét befogó 120°-os szögben látszik!

2 Az ABC hegyesszögű háromszög szögei legyenek rendre α, β és γ. A háromszög körülírt köréhez húzz érintőket a háromszög csúcsaiban! Legyen az A csúcson át húzott érintő e, a B csúcson át húzott érintő f, a C csúcson át húzott érintő g. Jelöld az e és f egyenesek metszéspontját C'-vel, az f és g egyenesek metszéspontját A'-vel, a g és e egyenesek metszéspontját B'-vel! Mekkorák a keletkezett $A'B'C'$ háromszög, valamint az ABC'; $AB'C$; $A'BC$ háromszög szögei?

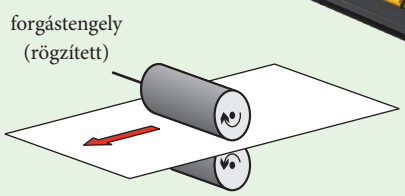
3 *GeoGebra* program segítségével vizsgáld a következő feladatot:
- Vegyél fel egy kört és benne egy, a körbe írt ABC háromszöget!
- Szerkeszd meg az ABC háromszög beírható körének K középpontját!
- Futtasd a C pontot az AB köríven! (Azon az íven, amelyen eredetileg is volt a C pont.)
- Milyen mértani helyet fut be a beírható kör K középpontja?
- Bizonyítsd be az állításodat!

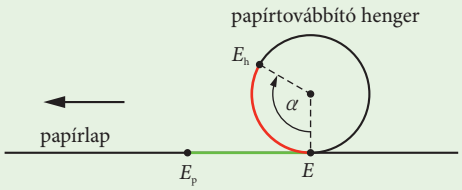
46 KÖRÍVEK, KÖRCIKKEK A MINDENNAPOKBAN

FELADAT

1 A mindennapok során gyakran előforduló technikai feladat egy papírlap egyenletes mozgatása (például számítógéphez csatlakozó nyomtatók, pénztárgépek nyomtatóegységei, írógépek). A mechanikus megoldások igen egyszerű alapelven működnek: a papírtovábbítást forgó henger (hengerek) segítségével oldják meg. A papírlaphoz tapadó henger forgása közben mozgásba hozza („tolja") a papírlapot.







Ha a papírlap nem csúszik meg, akkor az EE_h ív hossza egyenlő az EE_p szakasz hosszával (előző ábra). A nyomtatókban a henger forgását elektronika szabályozza.

Egy nyomtatóban a papírtovábbító henger átmérője 15,6 mm. A papíron 10 kinyomtatott sor és 10 sorköz együtt 49 mm.

a) Hány fokos szögelfordulásra ad parancsot az elektronika, ha egy sor kinyomtatásának befejezése után a következő sor nyomtatását kell megkezdeni?

b) Az A/4-es papírlap hossza 297 mm. Hány fokot fordul el a papírtovábbító henger, amíg a teljes lapot továbbítja? Hány teljes fordulatot tesz meg?

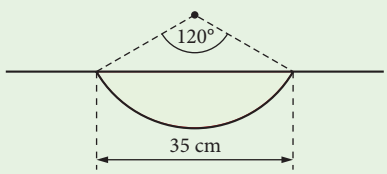
c) Az első sor nyomtatásának megkezdésétől számítva hányadik sor kinyomtatásakor lesz a papírtovábbító henger elfordulása összesen 540°?

d) Egy másik nyomtatóban a papírtovábbító henger átmérője 20,4 mm. Hány mm-rel tolta előre ez a henger a papírt, amíg 154°-ot fordult el?

(A fent leírt elv alapján működnek még a szállítószalagok és a mozgólépcsők is. Ezeknél a továbbító henger állandó, egyenletes forgása a követelmény.)

2 Majd 100 éves paradicsompasszírozó látható a fényképen. Ennek a tartályát 24 cm széles, téglalap alakú, lyukacsos fémlapból hajlították úgy, hogy végül hengerfelületet formázzon.





a) Körülbelül hány centiméter hosszúságú téglalapra volt szükség az ábrán megadott méretű passzírozó szerkezet fémlapjának kialakításához?

b) Mekkora területű a passzírozó körszelet alakú oldalfala?

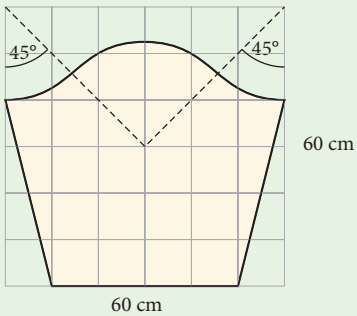
3 A Föld Nap körüli keringésének pályáját közelítsük egy olyan 150 millió km sugarú körrel, amelynek középpontjában a Nap áll! Tegyük föl továbbá, hogy a Föld egyenletes sebességgel halad a Nap körül.

a) Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Föld?

b) Mekkora ívet fut be egy óra alatt a Föld?

c) Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körcikk területe?

4 Hajni egy 60 cm × 60 cm-es, négyzet alakú szövetdarabra szabásmintarészletet tervezett. A mintát egyenes szakaszokból és 3 körívből szerkesztette.



a) Hány százalék hulladék keletkezik, ha kivágja a mintát az anyagból?

b) Hajni be akarja szegni ezt a darabot. Hány cm-t kell beszegnie?

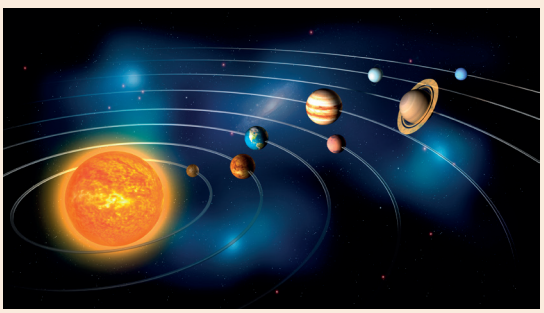


HÁZI FELADAT

1 Egy híd egyik vége rögzítve van, másik vége két egyenlő sugarú hengeren nyugszik. A hőmérséklet változásakor a híd hossza változik. Hány fokos szöggel fordulnak el a 12,4 cm átmérőjű görgők, ha a híd hossza hőtágulás miatt 8 cm-rel megnő?



2 A Hold pályáját közelítsük egy Föld középpontú, 384 ezer km sugarú körrel! A Hold keringési ideje 27,3 nap, és feltesszük, hogy a keringési sebesség állandó.

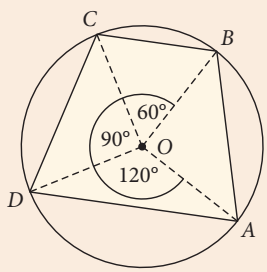


a) Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Hold?

b) Mekkora ívet fut be egy óra alatt a Hold?

c) Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körcikk területe?

3 Egy 250 cm^2 területű körlapból az ábra szerint kivágtuk az *ABCD* négyszöget.



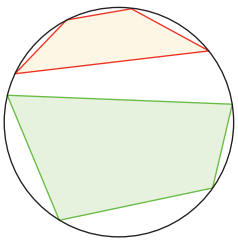
a) Mekkora a négyszög területe?

b) Hány százalék hulladék keletkezett?

c) Igazold, hogy az *ABCD* négyszög trapéz!

ELMÉLET

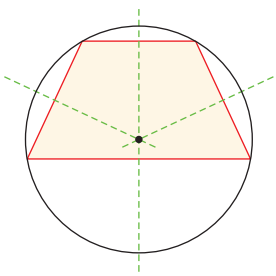
1. A húrnégyszögek

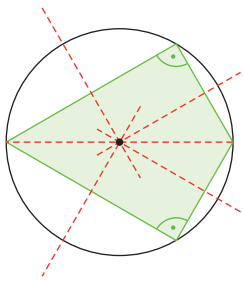


Definíció

Azt a négyszöget, amelyhez található egy olyan kör, amelyre minden csúcsa illeszkedik, **húrnégyszög**nek nevezzük.

Megjegyzés: a húrnégyszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a közös pont a húrnégyszög körülírt körének középpontja.





Például:

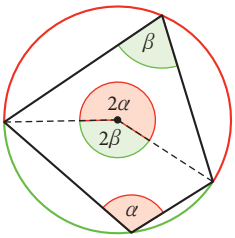
a speciális négyszögek közül húrnégyszög

- minden olyan tengelyesen szimmetrikus trapéz, amelynek szimmetriatengelye az alapokra merőleges, köztük a téglalapok is;
- minden derékszögű deltoid.

A húrnégyszögek tétele

Tétel: Egy négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha két-két szemközti szögének az összege 180°.

E tétel egy szükséges és elégséges feltételt fogalmaz meg, ezért két állítást tartalmaz, amelyek egymás megfordításai.

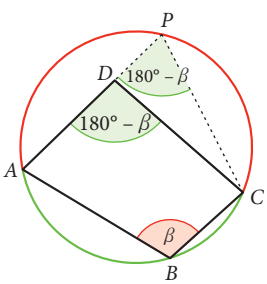


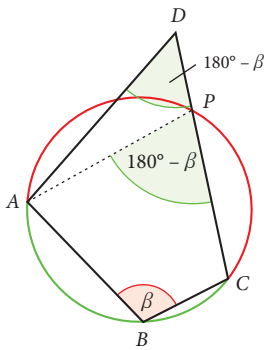
1. állítás: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor a két szemközti szögének az összege 180°.

Bizonyítás:

Az ábra jelöléseivel: $2\alpha + 2\beta = 360°$, ezért a középponti és kerületi szögek összefüggése miatt $\alpha + \beta = 180°$.

2. állítás: Ha egy síknégyszög két szemközti szögének az összege 180°, akkor húrnégyszög.





Bizonyítás:

A feltétel miatt a négyszög konvex. Az $ABCD$ négyszög B csúcsnál lévő belső szöge legyen β, a szemközti D csúcsnál lévő belső szöge δ, melyekre a feltétel miatt igaz, hogy $\beta + \delta = 180°$, vagyis $\delta = 180° - \beta$. Azt kell bebizonyítanunk, hogy D illeszkedik az ABC háromszög köré írt körre.

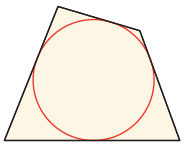
D nem lehet a körön belül (bal oldali ábra), mert így a CDP háromszög P csúcsnál lévő belső szöge és D csúcsnál lévő külső szöge egyenlő lenne, ami nem lehetséges.

D nem lehet a körön kívül sem (jobb oldali ábra), mert így az ADP háromszög D csúcsnál lévő belső szöge és P csúcsnál lévő külső szöge egyenlő lenne, ami szintén nem lehetséges. Így beláttuk, hogy a negyedik csúcspont csakis a köríven lehet.

2. Az érintőnégyszögek

Definíció

Azt a négyszöget, amelyhez található mind a négy oldalát érintő kör, **érintőnégyszög**nek nevezzük.

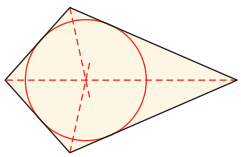


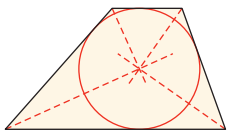
Megjegyzés

Az érintőnégyszög olyan konvex négyszög, amelynek belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. A szögfelezők közös pontja a négyszög beírt körének középpontja.

Például:

a speciális négyszögek közül érintőnégyszög minden konvex deltoid (köztük a rombuszok is), de található érintőnégyszög a trapézok között is.



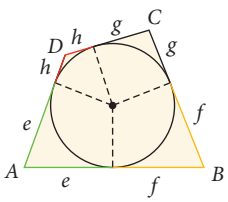


Az érintőnégyszögek tétele

Tétel: Egy konvex síknégyszög akkor és csakis akkor érintőnégyszög, ha két-két szemközti oldala hosszának az összege egyenlő.

E tétel két állítást tartalmaz, amelyek egymás megfordításai.

1. állítás: Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor két-két szemközti oldalának az összege egyenlő.



Bizonyítás:

Felhasználjuk azt a tételt, hogy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. E tételnek megfelelően az ábrán az A-ból, a B-ből, a C-ből, illetve a D-ből induló érintőszakaszok hosszát e-vel, f-fel, g-vel, illetve h-val jelöltük.

Az ábráról leolvasható, hogy az AB és a CD oldal hosszának az összege: $(e+f)+(g+h)$, a BC és az AD oldal hosszának az összege: $(f+g)+(h+e)$. Mindkét összeg egyenlő $e+f+g+h$-val, vagyis az 1. állítás igaz.

2. állítás: Ha egy konvex négyszög két-két szemközti oldalának az összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnégyszög.

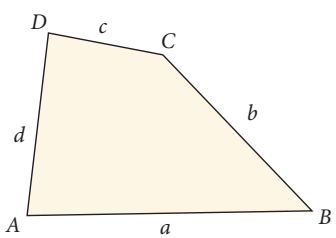
Bizonyítás:

Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen (az ábra szerint) $a+c=b+d$. Két eset lehetséges.

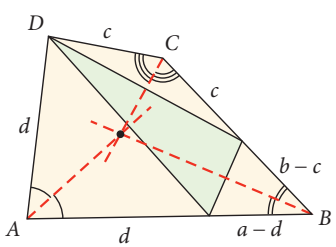
Első eset: $a=d$. Ekkor $a+c=b+d$ miatt $b=c$ is igaz, tehát a négyszög egy konvex deltoid. A deltoid tengelyesen szimmetrikus síkidom, a szimmetriatengely felezi a deltoid két szemközti szögét. A tengelyes szimmetria miatt a másik két szemközti szög felezője a szimmetriatengelyen metszi egymást, vagyis a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást. Ez a pont a beírt kör középpontja. A konvex deltoidnak tehát van beírt köre, ezért az állítás ebben az esetben igaz.

Második eset: $a \neq d$; legyen pl. az ábra szerint $a > d$. Ekkor $c < b$ is igaz, ellenkező esetben ugyanis nem teljesülhetne, hogy $a+c=b+d$.

Mérjük fel a d és c hosszúságú szakaszt az ábra szerint az A, illetve a C csúcsból, és a kapott pontokat kössük össze egymással és a D ponttal! Az $ABCD$ négyszög konvex, ezért ezt most négy háromszögre bontottuk. Közülük a három „külső barackszínű” „háromszög” egyenlő szárú, hiszen $a+c=b+d$ miatt $a-d=b-c$ is igaz. A „belső zöld” háromszöget a három egyenlő szárú háromszögnek az alapjai határolják.



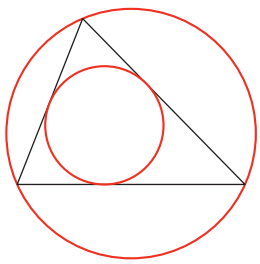
Rajzoljuk meg a három egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyét! Ezek a „belső” háromszög oldalfelező merőlegesei, ezért egy pontban metszik egymást. Ez a három egyenes azonban egyúttal az adott négyszög egy-egy szögfelezője is, tehát az $ABCD$ négyszög három szögfelezője egy pontban metszi egymást. A szögfelezők tulajdonsága miatt ez a közös pont egyenlő távolságra van a négyszög négy oldalától. E pont körül tehát lehet olyan kört írni, amely a négyszög oldalait érinti. A vizsgált állítás tehát ebben az esetben is igaz, a bizonyítást befejeztük.



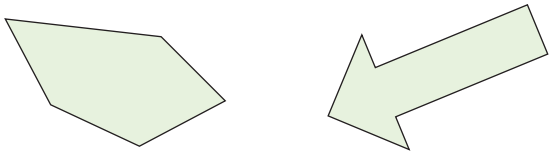
47 SOKSZÖGEK ÉS KÖRÖK

BEVEZETŐ

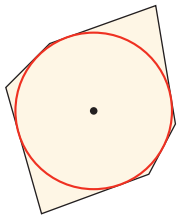
Korábban láttuk, hogy minden háromszögnek van **körülírt és beírt köre.**



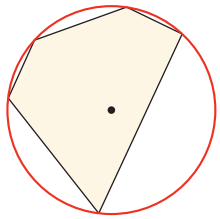
Vizsgáljuk meg a négyszögeknek és más sokszögeknek a körrel való viszonyát!
Könnyen látható, hogy ez a tulajdonság, amellyel minden háromszög rendelkezik, nem teljesül minden sokszög esetében. Vannak olyan sokszögek, amelyeknek sem beírt, sem körülírt körük nincs.



Vannak olyan sokszögek, amelyeknek csak beírt vagy csak körülírt körük van.

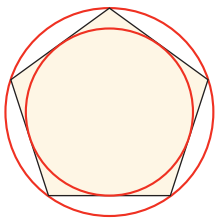


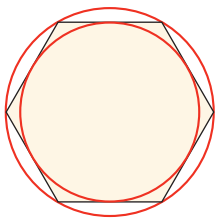
csak beírt köre van



csak körülírt köre van

Vannak olyan sokszögek, melyeknek van beírt és körülírt körük is.



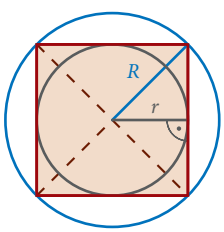


ELMÉLET

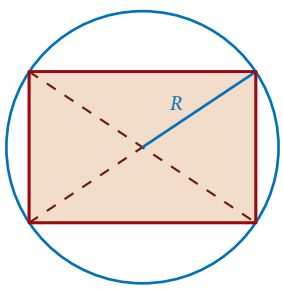
A síkban egy konvex **sokszögnek** van **beírható köre**, ha létezik a síknak olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a sokszög minden oldalától. Ez a távolság a beírható kör sugara. (Ebben az esetben a sokszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, a sokszög oldalegyenesei a kör érintői.)

A síkban egy konvex **sokszögnek** van **körülírható köre**, ha létezik a síknak olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a sokszög minden csúcsától. Ez a távolság a körülírható kör sugara. (Ebben az esetben a sokszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, a sokszög oldalai a kör húrjai.)

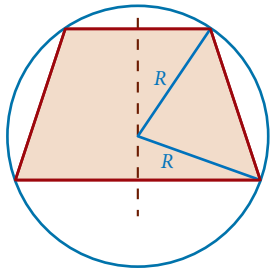
A rajzokon r a négyszögbe írt kör sugarát, R a négyszög körülírt körének sugarát jelenti.



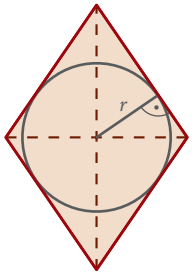
négyzet



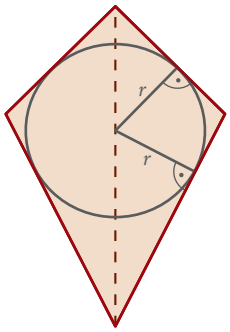
téglalap



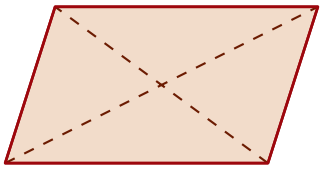
egyenlő szárú trapéz (húrtrapéz)



rombusz



konvex deltoid



paralelogramma

Speciális négyszögek esetén:

	beírt köre	a beírt kör középpontja	körülírt köre	a körülírt kör középpontja
négyzet	van	az átlók metszéspontja	van	az átlók metszéspontja
téglalap	általában nincs, speciális esetben van (négyzet)	–	van	az átlók metszéspontja
rombusz	van	az átlók metszéspontja	általában nincs, speciális esetben van (négyzet)	–
paralelogramma	általában nincs, speciális esetben van (rombusz)	–	általában nincs, speciális esetben van (téglalap)	–
egyenlő szárú trapéz (húrtrapéz)	általában nincs, speciális esetben van (ha a szemközti oldalak hosszának összege egyenlő)	–	van	a szimmetriatengely egy pontja
konvex deltoid	van	a szimmetriatengely egy pontja	általában nincs, speciális esetben van (ha a szemközti szögek összege 180°)	–

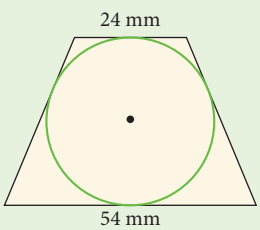
FELADAT

1 Határozd meg a 7 cm oldalhosszúságú négyzetből kivágható legnagyobb sugarú kör kerületét és területét!

2 Mekkora a rombuszba írt körnek a sugara, ha a rombusz átlóinak hossza 10 cm és 24 cm?

3 Egy 4,1 dm átmérőjű körre illeszkedik egy olyan téglalap négy csúcsa, melynek egyik oldala 9 cm hosszúságú. Mennyivel nagyobb a kör területe a téglalap területénél?

4 Egy húrtrapéz alapjainak a hosszúsága 24 mm és 54 mm. A trapéznak mind a négy oldala érinti a zöld kört.

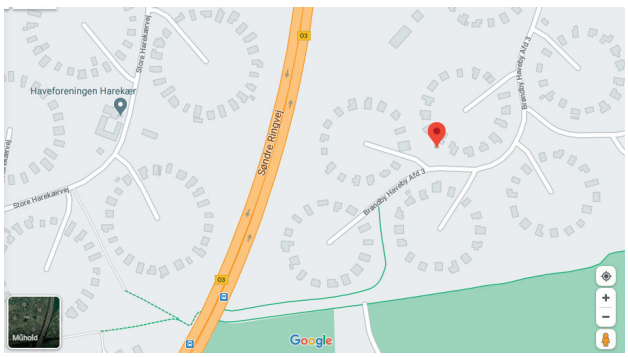


a) Mekkorák a trapéz csúcsaiból a körhöz húzott érintőszakaszok?
b) Mekkorák a trapéz szárai?
c) Mekkora a trapéz magassága?
d) Mekkora a zöld kör sugara?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A Google Maps egy ingyenes internetes térképszolgáltatás, melynek segítségével a szobánkból is felfedezhetjük a világot.

Érdekes kép tárul elénk, ha rákeresünk Koppenhága Brondby nevű külvárosára az 55°38′10.2″N 12°24′11.6″E koordináták segítségével. Ez a külváros olyan „körváros”, melyben egy-egy köríven – a kör sugarától függően – 16, illetve 24 házat építettek fel.



Tegyük fel, hogy az egy-egy ilyen körben lakók szeretnének egymással kommunikálni. Képzeljük el, hogy mindenkinek két lehetőséget biztosítanak a kényelmes, közvetlen kommunikációra. Az egyik lehetőség a tőszomszéddal a „kerítéskapcsolat” (kerítés egyik és másik oldalán állva beszélgethetnek), a másik lehetőség a hálózati kapcsolat, melyet minden, egymással nem tőszomszéd hozhat létre. (A kapcsolatok házanként értendők, függetlenül az egy házban lakók számától. Minden kapcsolathoz két fél szükséges.)

Egy tetszőleges házban lakók hány „kerítéskapcsolatot” és hány hálózati kapcsolatot fognak létrehozni, ha 16 házas egységben laknak?

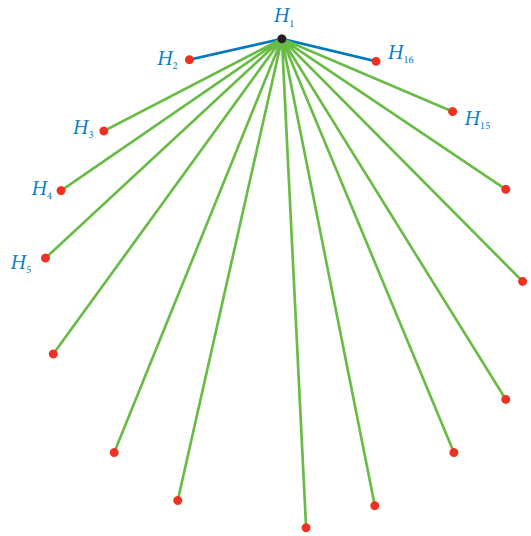
Hány „kerítéskapcsolatot” és hány hálózati kapcsolatot hoznak létre összesen, ha mindenki mindenkivel szeretne közvetlenül kommunikálni a 16 házas egységben?

Válaszold meg az előbbi kérdéseket a 24 házas egységekre vonatkozóan is! (A házak közötti ívek nem feltétlenül egyenlő hosszúak.)

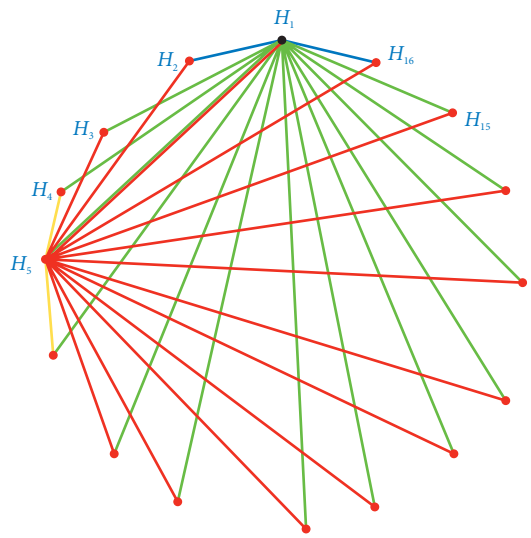
Megoldás

Mivel minden házhoz két „kerítéskapcsolat” rendelhető, ezért 16 házhoz összesen $16 \cdot 2$ jön létre, de mivel így minden kapcsolatot mindkét fél részéről „beszámítottunk”, ezért az összes „kerítéskapcsolat” száma az előbbi szorzat fele, azaz $\frac{16 \cdot 2}{2} = 16$.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha elindulva pl. a H_1 háztól az óramutató járásával ellentétes irányba (ezt nevezzük pozitív forgásiránynak) rendre összeszámláljuk az egymást követő házak közötti „kerítéskapcsolatot”.



1. ábra



2. ábra

Az *1. ábrán* kékkel jelöltük a H_1 tetszőlegesen kiválasztott ház két „kerítéskapcsolatát” és zölddel a hálózati kapcsolatait. Mivel egyik ház sem létesít hálózati kapcsolatot önmagával és két közvetlen szomszédjával (vagyis összesen 3 házzal), ezért hálózati kapcsolatainak száma $16 - 3 = 13$.

A *2. ábra* az *1. ábra* kiegészítése, melyen jelöltük egy másik, tetszőlegesen kiválasztott (H_5) ház kapcsolatait is. Sárgával a kerítés-, pirossal a hálózati kapcsolatokat.

Mivel minden házhoz 13 hálózati kapcsolat rendelhető, ezért 16 házhoz összesen $16 \cdot 13$ jön létre, de mivel így minden kapcsolatot mindkét fél részéről számoltunk (pl. a H_1 és H_5 közötti zöld és piros kapcsolat), ezért az összes hálózati kapcsolat száma az előbbi szorzat fele, azaz $\frac{16 \cdot 13}{2} = 104$.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy 24 ház esetén:

- egy ház „kerítéskapcsolatainak” száma 2, hálózati kapcsolatainak száma 21;
- az összes „kerítéskapcsolat” száma 24;
- az összes hálózati kapcsolat száma $\frac{24 \cdot 21}{2} = 252$.

Vegyük észre, hogy az előbbi feladatban egy olyan modellt használhattunk, melyben a házak csúcsokat, a „kerítéskapcsolatok” oldalakat, a hálózati kapcsolatok átlókat jelentenek egy 16, illetve 24 oldalú konvex sokszögben.

ELMÉLET

Konvex sokszögek tulajdonságai:

Az n oldalú **konvex sokszög egy csúcsából induló átlóinak száma** $n - 3$.

Az n oldalú **konvex sokszög átlóinak száma** $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

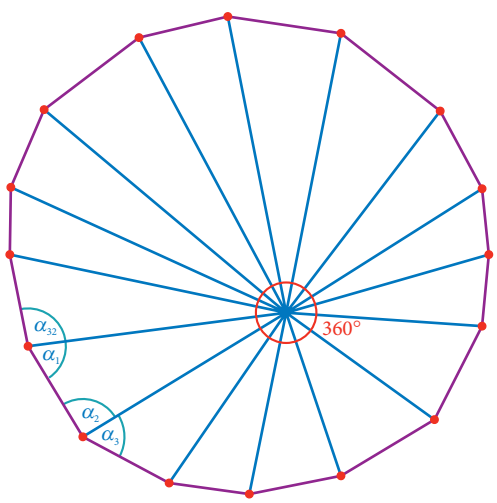
2. **a)** Határozzuk meg a belső szögek összegét egy 16, illetve 24 oldalú konvex sokszögben!

b) Határozzuk meg a külső szögek összegét egy 16, illetve 24 oldalú konvex sokszögben!

Megoldás

a) Ötletet adhat a feladat megoldásához az előbbi külváros képe, ahol a főtérből induló utak közelítőleg háromszögekre bontják a városrészt.

Tekintsük a 16 oldalú sokszög egy belső pontját, kössük ezt össze a sokszög minden csúcsával. Az így keletkező 16 darab háromszög belső szögeinek összege összesen $16 \cdot 180°$.



A sokszög belső szögeinek összegét az ábrán jelölt α_1; α_2; α_3; …; α_{31}; α_{32} szögek összege adja.

Mivel a belső szögek összegéhez nem tartozik hozzá az a teljesszög, melynek a kijelölt belső pont a csúcsa, ezért a sokszög belső szögeinek összege

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31} + \alpha_{32} = 16 \cdot 180° - 360° =$
$= 16 \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (16 - 2) \cdot 180° =$
$= 14 \cdot 180° = 2520°$

Ehhez hasonlóan a 24 oldalú konvex sokszögre a belső szögek összege:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{47} + \alpha_{48} = 24 \cdot 180° - 360° =$
$= 24 \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (24 - 2) \cdot 180° = 3960°$

b) Mivel minden belső szögnek kiegészítő szöge a hozzá tartozó külső szög, ezért összegük 180°.

A 16 oldalú konvex sokszögnek 16 darab belső- és külsőszög-párja van, ezek összesen $16 \cdot 180°$ nagyságú szöget hoznak létre. A külső szögek összegét megkapjuk, ha ebből a szögösszegből levonjuk a belső szögek összegét, így:

$16 \cdot 180° - 14 \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$.

Ehhez hasonlóan a konvex 24 oldalú sokszögre:

$24 \cdot 180° - 22 \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$.

Tehát mindkét sokszög külső szögeinek összege 360°.

ELMÉLET

Konvex sokszögek általános tulajdonságai:
Az n oldalú **konvex sokszög belső szögeinek összege** $(n-2)\cdot 180°$, **külső szögeinek összege** 360°.

A konkáv sokszögek is felbonthatók háromszögekre, de nem minden esetben egy csúcsból induló átlókkal. Belátható, hogy az n oldalú sokszögeket átlók segítségével $n-2$ darab háromszögre lehet bontani, ezért a konkáv sokszög belső szögeinek összege is $(n-2)\cdot 180°$.

FELADAT

5 Hány átlója van egy olyan konvex sokszögnek, melyben a belső szögek összege 2160°?

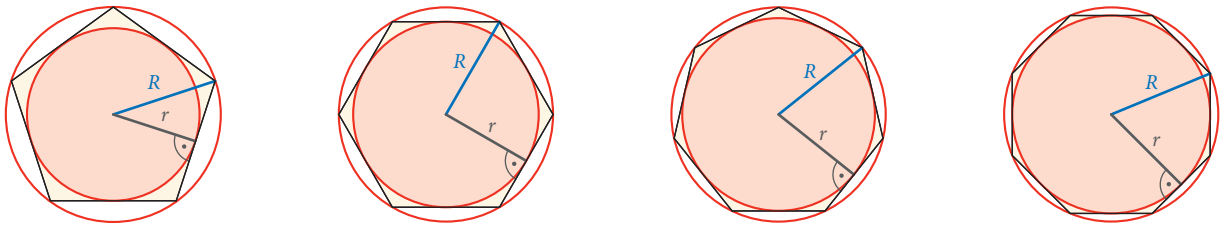
6 Mennyi a belső szögek összege egy olyan konvex sokszögben, melyben az átlók száma 27?

ELMÉLET

Az n oldalú szabályos sokszög tulajdonságai (ahol $n \in N$; $3 \leq n$):
Minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő nagyságú.

Egy belső szögének nagysága $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

Kerülete $K = n \cdot a$, ahol a a sokszög oldalának hosszát jelöli.
Van beírható és körülírható köre.



Bármely n oldalú szabályos sokszög felbontható n darab egybevágó, egyenlő szárú háromszögre. Egy ilyen háromszög alapja a sokszög oldala (a), az alaphoz tartozó magasság pedig a sokszög beírható körének sugara (r).
Ha az egyenlő szárú háromszög területét $T_{\triangle}$ jelöli, akkor az n oldalú **szabályos sokszög területe**

$T = n \cdot T_{\triangle} = n \cdot \frac{a \cdot r}{2}$.

A *GeoGebra* programmal tetszőleges n-re rajzoljunk szabályos sokszögeket!

FELADAT

7 Egy szabályos hatszög oldala 1 cm hosszú.
- **a)** Számítsd ki a hatszög területét, továbbá a beírt és a körülírt kör területét is!
- **b)** Hány százaléka a hatszög területének a két kör területének különbsége?

HÁZI FELADAT

1 Mekkora a 24 cm kerületű szabályos
a) háromszög; **b)** négyszög; **c)** hatszög
köré írt kör sugara?

2 Egy 8 cm oldalú rombusz egyik szöge 60°-os.
- **a)** Mekkora a rombusz területe?
- **b)** Mekkora a rombusz beírt körének sugara?

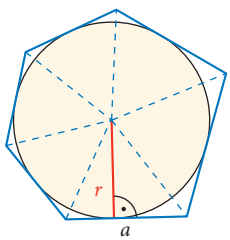
3 a) Milyen négyszög az a paralelogramma, amelynek van körülírt köre?
b) Milyen négyszög az a deltoid, amelynek van körülírt köre?
c) Milyen négyszög az a paralelogramma, amelynek van beírt köre?
d) Milyen négyszög az a téglalap, amelynek van beírt köre?
e) Milyen négyszög az a deltoid, amelynek van beírt köre?
f) Milyen négyszög az a rombusz, amelynek van körülírt köre?

4 Egy deltoid két szemközti szöge derékszög. Hosszabb átlója 6 cm, rövidebb átlója 5 cm hosszú. Mekkora a deltoid köré írható kör sugara?

5 Mennyi a belső szögek összege abban a sokszögben, melyben egy csúcsból 10 átló indul ki?

RÁADÁS

Tétel: Minden érintősokszög területe kiszámítható úgy, hogy a sokszög kerületének a felét (s) megszorozzuk a beírt kör sugarával, r-rel: $t = rs$.



Bizonyítás
Ha a kör középpontját összekötjük a sokszög csúcsaival, akkor a sokszög olyan háromszögekre bomlik, amelyek egyik oldala a sokszögnek is oldala, és az ezekhez tartozó magasság éppen r.

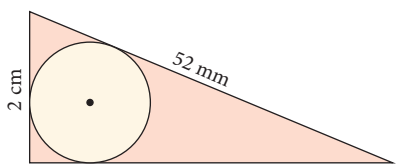
Egy ilyen háromszög területe: $\frac{a \cdot r}{2}$, azaz az oldalhosszúság $\frac{r}{2}$-szerese.

Az összes háromszög területének összege pedig az oldalhosszúságok összegének (vagyis a sokszög kerületének) $\frac{r}{2}$-szerese. Ha a sokszög területét t-vel és a kerületét $2s$-sel jelöljük (hiszen a félkerület s), akkor

$$t = 2s \cdot \frac{r}{2} = rs.$$

FELADAT

1 Mekkora annak a körnek a sugara, amit egy olyan derékszögű háromszögbe írunk, amelynek az átfogója 52 mm, az egyik befogója 2 cm hosszú?



2 Mekkora a 10 cm-es oldalú szabályos nyolcszög
a) beírt körének a sugara; b) területe?

3 Egy szabályos tízszög oldalai 8 cm hosszúak, a köré írt kör sugara körülbelül 13 cm. Mekkora
a) a beírt körének a sugara; b) a területe?

4 Egy szabályos hatszög területe 17,56 cm^2. Mennyi hulladék keletkezik, ha
a) a köré írható körből kivágjuk a hatszöget;
b) a hatszögből kivágjuk a beírható kört?

48 GYAKORLÁS

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy szimmetrikus trapéz alapjainak hossza 30 cm, illetve 14 cm, magassága 44 cm. Határozd meg a trapéz körülírható körének sugarát!

Megoldás

Az adatok alapján $AB = 30$ cm, $DC = 14$ cm, $PQ = 44$ cm, ahol P pont az AB oldal, illetve Q a DC oldal felezőpontja.

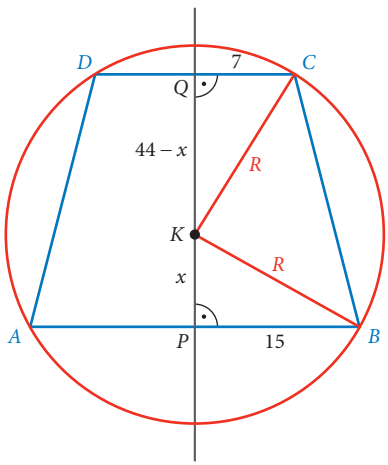
A körülírható kör középpontja az oldalfelező merőleges egyenesek metszéspontja, mely a trapéz tengelyes szimmetriája miatt a szimmetriatengelyen van.

A körülírható kör sugara $R = KA = KB = KC = KD$.

Jelöljük a KP szakaszt x-szel, ekkor $KQ = 44 - x$.

A PBK és KCQ derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz-tétel alapján:

$x^2 + 15^2 = R^2$ és $(44 - x)^2 + 7^2 = R^2$.



1. ábra

Az egyenletek jobb oldalának egyenlősége miatt fennáll a bal oldalak egyenlősége, melyből az $x^2 + 15^2 = (44 - x)^2 + 7^2$ egyenlőséget kapjuk.

A zárójel felbontása után

$x^2 + 225 = 1936 - 88x + x^2 + 49$,

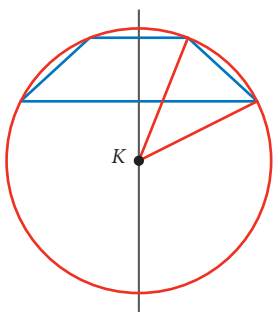
amelyből $x = 20$ adódik.

Ezt visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe $R = 25$ cm-t kapunk.

Tehát a trapéz körülírható körének sugara 25 cm.

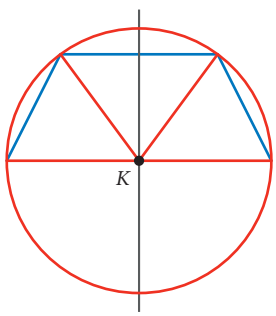
Megjegyzés:

Ha a két Pitagorasz-tételből kapott egyenletrendszer megoldása során az x értékére negatív szám adódik, akkor a kör középpontja a trapézon kívül helyezkedik el *(2. ábra)*, de az R értékének meghatározását visszahelyettesítéssel az előbbihez hasonlóan elvégezhetjük.



2. ábra

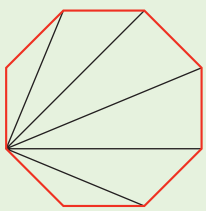
Ha a két Pitagorasz-tételből kapott egyenletrendszer megoldása során az x értékére nulla adódik, akkor a kör középpontja a trapéz hosszabb alapjának felezőpontja *(3. ábra)*, és a kör átmérője a trapéz hosszabb alapja.



3. ábra

FELADAT

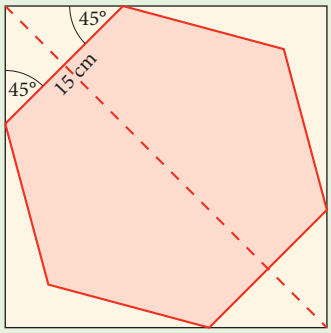
1 Egy szabályos nyolcszög egyik csúcsából meghúzzuk az összes átlót.



a) Hány háromszög keletkezik?
b) Hány egybevágó háromszög van közöttük?
c) Melyik háromszögnek mekkorák a szögei?
d) Vannak-e merőlegesek a megrajzolt átlók között?

2 Egy $R > 8$ egység sugarú körben a $2R - 2$ egység hosszúságú húr a kör középpontjától $R - 8$ egység távolságra van. Számold ki a kör kerületét és területét!

3 A 15 cm oldalú szabályos hatszög az ábra szerint helyezkedik el egy négyzetben.

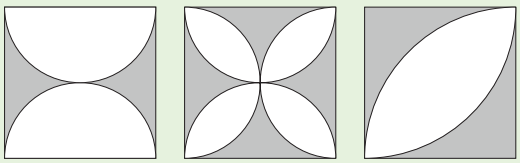


a) Számítsd ki a négyzet (berajzolt) átlójának hosszát, majd a négyzet oldalának hosszát is!

b) Hány százaléka a hatszög területe a négyzet területének?

4 Két konvex sokszög közül az egyiknek 5-tel több csúcsa és 60-nal több átlója van, mint a másiknak. Határozd meg a sokszögek belső szögeinek összegét!

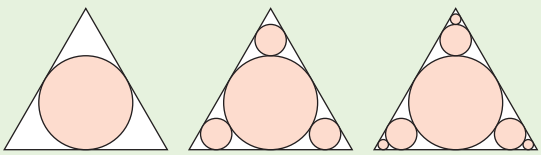
5 Szerkessz 4 cm oldalhosszúságú négyzetet, és hozzá az ábráknak megfelelően felrajzolt köríveket! A köríveket tartalmazó körök középpontja minden esetben a négyzet csúcsa vagy oldalfelezőpontja, és minden körívre pontosan két négyzetcsúcs illeszkedik. Számolással határozd meg a beszínezett területek nagyságát!



6 A szabályos háromszögek oldala 9 cm hosszú.

a) Mekkora a színezett körlapok sugara?

b) Mekkorra részét színeztük be a háromszögeknek?



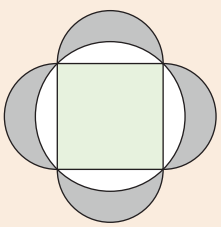
HÁZI FELADAT

1 Három kör páronként érinti egymást. Határozd meg a körök között lévő, körvonalak által határolt terület nagyságát, ha a körök sugara 4 cm!

2 **a)** Egy szabályos sokszögnek egy belső szöge 160° nagyságú. Hány oldala és hány átlója van ennek a sokszögnek?

b) Egy szabályos sokszög egy külső szögének nagysága 36°. Hány oldala és hány átlója van ennek a sokszögnek?

3 Egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet köré kört, valamint az oldalaira kifelé félkört írunk.



a) Határozd meg a négyzet oldala és a körív által határolt fehér részek területét!

b) Határozd meg a félkörívek és a körív által határolt szürke részek területét!
(Ezeket a négyszög oldalai fölé rajzolt, körívekkel határolt síkidomokat – egy ókori görög matematikus tiszteletére – Hippokratész holdacskái néven szokás emlegetni.)

c) Igaz-e, hogy a négyzet területe megegyezik a szürke részek területének összegével? Válaszod számolással igazold!

4 Mekkora a 8 dm átmérőjű körlapból kivágható legnagyobb oldalhosszúságú szabályos hatszög oldalainak hossza? Mekkora a hatszög és a kör területének aránya?

RÁADÁS

1. A π szám története

A π szám története, vagyis a kör kerületének és átmérőjének arányára vonatkozó számítás több ezer éves múltra tekint vissza.

– Már az egyik legrégebbi matematikai iratban, az egyiptomi Rhind-papiruszon is szó esik róla egy henger térfogatának kiszámítása kapcsán. Eszerint kb. 3600 évvel ezelőtt az egyiptomiak a π-t (mai írásmóddal) $\left(\frac{16}{9}\right)^2$-ként adták meg. Ez közelítőleg 3,16, ami a ma ismert értéktől 0,02-nál kevesebbel tért el.

– Kr. e. 240 táján Arkhimédész a szabályos sokszögek és a kör vizsgálata során a $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ becslést állította fel. Ez a becslés már két tizedesjegy pontosságú, azaz az első két tizedesjegy megegyezik π első két tizedesjegyével.

– A Kr. u. V. században élt kínai matematikusok a π értékét $\frac{355}{113}$-ban határozták meg. Ez tizedes tört alakban 3,14159292…, ami első 6 tizedesjegyében megegyezik a ma ismert értékkel.

– 1579-ben François Viète francia matematikus Arkhimédész módszerét felhasználva 393 216 oldalú szabályos sokszöggel közelítette a kört, ezzel a π értékét 9 tizedesjegy pontossággal adta meg. (1593-ban egy akkoriban újnak számító módszerrel, ún. végtelen sorokkal is próbálta közelíteni a π-t.)

– 1610-ben Ludolph van Ceulen (Ludolf fan Kölen) olyan szabályos sokszöget használt a közelítéshez, amelynek 2^{62} oldala volt, ezzel a π első 35 tizedesjegyét pontosan ki tudta számítani. Felfedezésére annyira büszke volt, hogy ezt a számot vésette a síremlékére. Tiszteletére a π-t „Ludolph-féle szám”-ként is emlegetik.

– A XVII. században a matematika a differenciál- és integrálszámítással új fordulatot vett. Az új módszerekkel John Machin angol matematikus 1706-ban már a π első 100 tizedesjegyét is megadta.

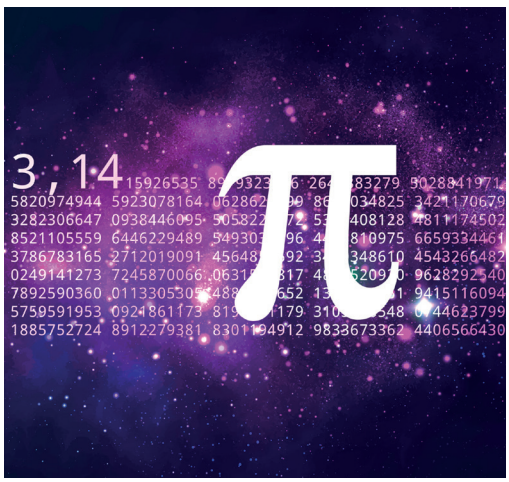
– 1761-ben Johann Heinrich Lambert bebizonyította, hogy a π irracionális, vagyis tizedes tört alakja végtelen és nem ismétlődő. 1885-ben Ferdinand Lindemann kimutatta, hogy a π transzcendens szám (ezért körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető π hosszúságú szakasz), véget vetve ezzel a kör négyszögesítésével kapcsolatos két évezredes vitának.

– 1873-ban, 15 év munka után, William Shanks 707 jegy pontossággal közölte a π értékét, ámbár később kiderült, hogy csak az első 527 jegy volt helyes.

– 1947-ben Neumann János a π kiszámítását javasolta a világ első számítógépe, az ENIAC tesztelése céljából. A gép 70 óra munkával 2037 tizedesjegyet számított ki.

– A számítógépek fejlődésével a π ismert tizedesjegyeinek száma is rohamosan nőtt: 1961-ben 100 000, 1973-ban 1 000 000 jegyet ismertünk. 2002-ben Jaszumasza Kanada professzor szuperszámítógépek segítségével 1 241 100 000 000 tizedesjegy pontosságig adta meg a π értékét.

$\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862 8…

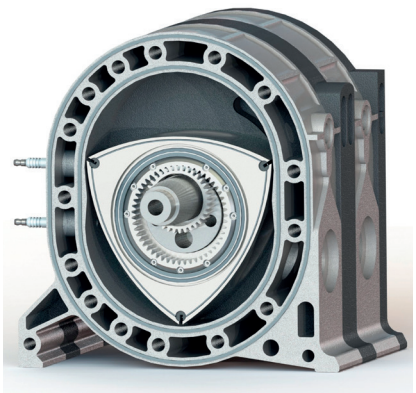


A π jegyeinek memorizálására régóta használatosak az ún. „pí-versek”, amelyekben az egyes szavak betűinek száma rendre a π soron következő számjegyeit adják.

Magyar nyelven az egyik legismertebb „pí-vers” Szász Páltól (1901–1978, matematikaprofesszor) származik.

Nem	a	régi	s	durva	közelítés	mi	szótól	szóig	így	kijön	betűiket	számlálva.
3,	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9
Ludolph	eredménye	már,	ha	itt	végezzük	húsz	jegyen.					
7	9	3	2	3	8	4	6					
De	rendre	kijő	még	tíz	pontosan	azt	is	bízvást	ígérhetem.			
2	6	4	3	3	8	3	2	7	9			

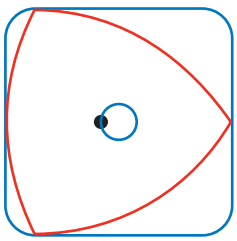
2. A Reuleaux-háromszög



A belső égésű motorok egyik fajtája a Wankel-motor (fotó). A motor „dugattyújának” alakja a hagyományos henger alaktól eltérően inkább az úgynevezett Reuleaux-háromszögre hasonlít (ejtsd: röló háromszög).
Ezt a „háromszöget” úgy kaphatjuk, ha egy szabályos háromszög mindegyik csúcsa körül írunk egy-egy olyan kört, amelynek sugara a háromszög oldalhosszával egyenlő.

Ennek az alakzatnak egy másik érdekes felhasználása, hogy segítségével négyzetes furat készíthető. Vajon hogyan tud a fúrógép kör helyett négyzet alakú lyukat készíteni? Bár a négyzetes furat nem teljesen négyzet alakú, hanem a sarkainál lekerekített négyzet, akkor is meglepő, hogy forgó mozgást végző fúrófejjel tudunk ilyet készíteni. Annak a fúrófejnek, amely négyzetes furatot készít, Reuleaux-háromszög alakja van. Ugyanis ha egy ilyen síkidomot forgatunk a középpontja körül úgy, hogy közben a középpontot egy kis sugarú körpályán mozgatjuk, akkor az alakzat egy lekerekített négyzet kerületi pontjain gördül végig.

Az interneten nagyon szép videók találhatók ennek a mozgásnak a bemutatására.



A Reuleaux-háromszög a képzőművészeket, formatervezőket is megihlette.

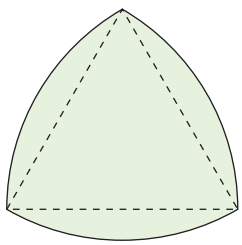




FELADAT

a) Számítsd ki annak a Reuleaux-háromszögnek a kerületét és területét, amelynek a kiindulási háromszöge egy 4,2 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög!

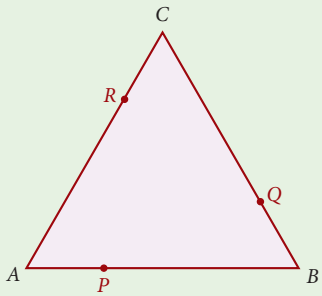
b) Hány százalékkal nagyobb a Reuleaux-háromszög kerülete, illetve területe a származtatásához felhasznált szabályos háromszögénél?



49 ISMÉTLÉS

FELADAT

1 Egy 7 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög minden oldalát oszd 2 : 5 arányban két részre az ábra szerint.



Kösd össze az osztópontokat!

a) Igazold, hogy az ábrán keletkezik három egybevágó háromszög! Melyik egybevágósági alapesetet lehet alkalmazni?

b) Igazold, hogy a *PQR* háromszög szabályos!

2 Egy szabályos sokszög egy külső szögének nagysága negyedakkora, mint a sokszög egy belső szögének nagysága.

a) A belső szögek összege hányszorosa a teljes szögnek?

b) Ha a sokszög átlóit rendre kék, fehér, zöld színekkel rajzoljuk meg, akkor milyen színű lesz az utolsóként berajzolt átló?

3 Két konvex sokszögről tudjuk, hogy az egyiknek 15-tel több csúcsa van, mint a másiknak. A belső szögek összegének hányadosa másfélszerese az oldalszámok hányadosának. Határozd meg az egyes sokszögek oldalainak és átlóinak számát!

4 Használj földgömböt!

A Földön a Baktérítő sugara körülbelül 5860 km. Körülbelül mekkora utat tesz meg az az óceánjáró az Atlanti-óceánon, amely Namíbiából indulva a Baktérítő mentén haladva eljut Rio de Janeiróba? (Rio de Janeiro a 42°-os nyugati hosszúsági kör közelében fekszik, a Baktérítő a namíbiai partot a 14°-os keleti hosszúsági kör közelében éri el.)



5 Egy kert alakja szimmetrikus trapéz. Ennek rövidebbik alapja és a szárai is 32 m hosszúak, hosszabbik alapja 36 m. A kertnek mind a négy sarkába elhelyezünk egy-egy locsoló berendezést, amely 16 m sugarú körcikk locsolására képes.

a) A kert hány százalékát tudjuk így meglocsolni?

b) Sajnos az a két locsoló, amelyik a hosszabbik alapra illeszkedő sarkokon van, meghibásodott. Ekkor mekkora területet tudunk öntözni a másik két locsolóval?

(A trapéz hosszabbik alapon fekvő szögei körülbelül 86,5°-osak.)

HÁZI FELADAT

1 Adott egy konvex sokszög. Ha csúcsainak számát kétszeresére növeljük, akkor átlóinak száma 198-cal nő. Határozd meg az eredeti sokszög belső szögeinek összegét!

2 Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Válaszod indokold!

a) Van olyan konvex sokszög, amelyben a belső szögek összege 1350°.

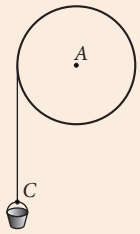
b) Van olyan szabályos sokszög, amelynek nincs átlója.

c) Adott sugarú körbe írható szabályos háromszög oldalának hossza kétszer akkora, mint az ugyanezen körbe írható szabályos hatszög oldalának hossza.

d) Ha egy konvex sokszög csúcsainak számát hárommal növeljük, akkor hárommal növekszik az átlók száma is.

e) Ha adott körben egy középponti szög nagyságát háromszorosára növeljük, akkor háromszorosára növekszik a középponti szöghöz tartozó körcikk területe is.

3 Egy 84 cm átmérőjű hengerre tekerünk fel egy kötelet, amin egy vödör lóg. (A henger a tengelyénél van rögzítve.)



a) Hány centiméterrel emeltük fel a vödröt, ha a henger 210°-ot fordult el közben?

b) Mekkora szöggel kell elfordítani a hengert, hogy a vödör két métert emelkedjen?

4 Egy körcikkből kúp alakú süveget hajtunk. Az elkészült kúp alapkörének kerülete, mely megegyezik a körcikk ívének hosszával, 46 cm, magassága 36 cm.

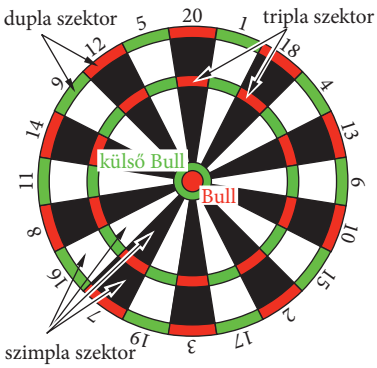
a) Mekkora sugarú körből származik a körcikk?

b) Mekkora középponti szög tartozik a körcikkhez?

c) A süveget csillámpapírral borítjuk. Hány cm^2 csillámpapír kell a borításhoz, ha a veszteségek miatt 15%-kal több anyagot számolunk, mint a kúp palástjának a területe?

RÁADÁS

1 Részlet a dartsjáték szabályzatából (a darts angol eredetű játék és sport, melynek során apró nyilakat dobnak egy kör alakú céltábla különböző pontértékű szektoraira): „A dartstábla méretei a következők legyenek: a dupla és a tripla gyűrűk szélességének mérete 8 mm, a 25 pontot érő külső Bull nevű gyűrű átmérője 31,8 mm, az 50 pontot érő körlap, a Bull átmérője 12,7 mm. A dupla gyűrű külső széle a középpontig 170 mm. A tripla gyűrű külső széle a középpontig 107 mm …”



a) Hány mm^2 a „Bull’s eye” (röviden: „Bull”), illetve a „külső Bull” területe? („Bull’s eye” angolul „bikaszemet” jelent.)

b) Hány mm^2 az egyes körcikkek területe?

c) Hány mm^2 egy dupla szektor, illetve egy tripla szektor területe?

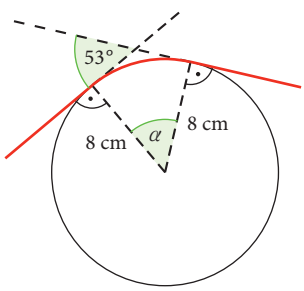
d) Hány mm^2 a szimpla szektor területe a dartstáblán?

e) Írd fel a teljes dartstábla területének felosztását a következő módon (minden területet mm^2-ben mérve)!

$T_{Bull} + T_{külső\ Bull} + T_{szimpla\ szektorok} + T_{dupla\ szektorok} + T_{tripla\ szektorok}$

Számítsd ki, hogy az egyes területek mekkora részei a dartstábla területének!

2 Egy elektromosan töltött részecske egyenes vonalú pályán halad. A részecskét mágneses mezőn vezetik át, ahol egy 8 cm sugarú köríven halad tovább. A megfelelő pillanatban a mágneses mezőt megszüntetik, így a részecske ismét egyenes vonalú pályára tér (ábra). Így végül a részecske az eredeti haladási irányától 53°-os szögben térül el.



a) Mutasd meg, hogy az ábrán jelzett α szög 53°-os!

b) Számítsd ki, mekkora a töltött részecske mágneses mezőben megtett útjának hossza!

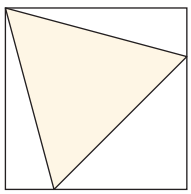
c) Számítsd ki a 8 cm sugarú kör 53°-os középponti szögű körcikkének területét!

50 TUDÁSPRÓBA

TUDÁSPRÓBA I.

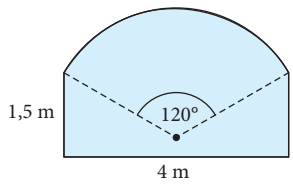
1 Egy negyedkör területe 36,1 cm^2. Mekkora körív tartozik ebben a körben egy 117°-os középponti szöghöz?

2 Az ábrán megadott háromszögnek mindegyik oldala egyenlő hosszú, csúcsai rajta vannak a négyzet megfelelő oldalain. Bizonyítsd be, hogy a négyzetből levágott 3 háromszög közül kettő egybevágó, a harmadik pedig egyenlő szárú!



3 Ha egy szabályos sokszög minden oldalát és az egyik csúcsából induló átlók mindegyikét különböző színnel szeretnénk megrajzolni, akkor a 12 darabos színesceruza-készletből mindössze egyféle színt nem kell használnunk.
Hány különböző színt használunk az oldalak megrajzolásánál?
Mekkora a sokszög egy szögének nagysága?

4 Az ábrán egy fóliasátor keresztmetszetének tervét látod. (A téglalap fölötti ív egy teljes körív harmada.)



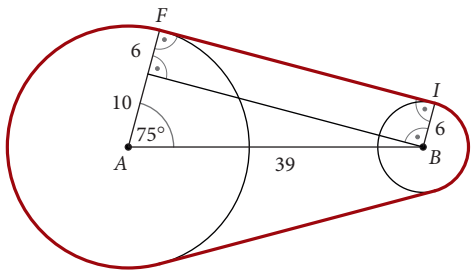
Elég-e az előlap lefedésére a 4 méter széles fóliából 2,2 méter?

5 Egy síjáttétel vázlatát láthatod az ábrán.
A körök középpontjainak távolsága: $AB = 39$ cm.
A nagyobbik kör sugara: $AF = 16$ cm.
A kisebbik kör sugara: $BI = 6$ cm.

a) Milyen hosszúak a szíj íves darabjai?

b) Milyen hosszúak a szíj egyenes darabjai?

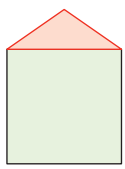
c) Milyen hosszú a szíj?



TUDÁSPRÓBA II.

1 Egy negyedkör területe 36,1 cm^2. Mekkora középponti szög tartozik ebben a körben egy 7 cm-es körívhez?

2 Egyenlő szárú háromszöget helyeztünk a négyzetre. Bizonyítsd be, hogy a háromszög „felső” csúcsa egyenlő távol van a négyzet két „alsó” csúcsától!



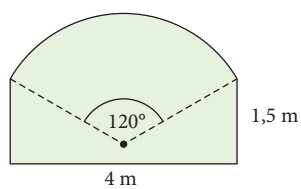
3 Egy fa kirakós játékban pontosan annyi fapálcikát szeretnénk elhelyezni, hogy abból éppen egy szabályos nyolcszöget lehessen kirakni úgy, hogy megjelenjen minden oldala és minden átlója.

a) Hányféle hosszúságú pálcikát kell a dobozba tenni?

b) A különböző méretű pálcikákból hány darabot rakjunk a dobozba?

c) Mekkora lesz a létrehozott szabályos nyolcszög egy külső szöge?

4 Az ábrán egy fóliasátor keresztmetszetének tervét látod. (A téglalap fölötti ív egy teljes körív harmada.) A fóliasátor 6 méter hosszú lesz. Leborítható-e a sátor oldala és a teteje 6 méternyi 8 méter széles fóliával?

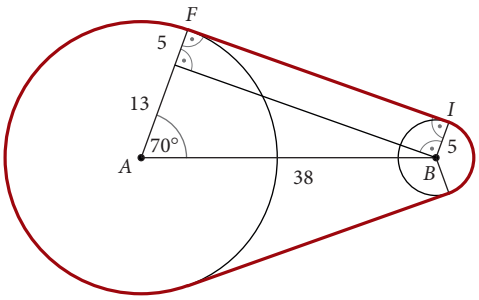


5 Egy szíjáttétel vázlatát láthatod az ábrán.
A körök középpontjainak távolsága: $AB = 38$ cm.
A nagyobbik kör sugara: $AF = 18$ cm.
A kisebbik kör sugara: $BI = 5$ cm.

a) Milyen hosszúak a szíj íves darabjai?

b) Milyen hosszúak a szíj egyenes darabjai?

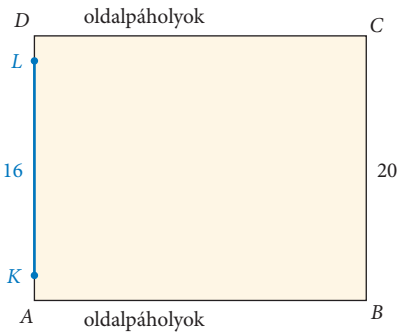
c) Milyen hosszú a szíj?



EMELT SZINT

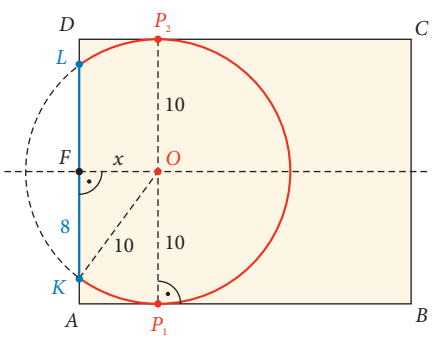
FELADAT

Melyik oldalpáholyból lehet legnagyobb szögben látni az ábrán megadott (téglalap alapú) moziteremben a 16 m széles vetítővásznat?

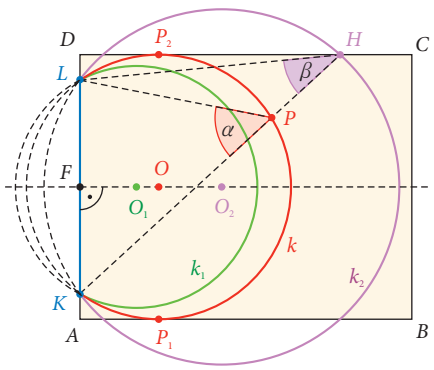


Megoldás

A 16 méteres vetítővászonhoz (KL) mint húrhoz azt a *legkisebb* kört kell megkeresnünk, amelynek van pontja a terem AB (és CD) oldalán. E kör átmérője 20 m, a keresett páholy és az AD oldal távolságát az OFK háromszögből a Pitagorasz-tétellel kapjuk meg: $x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, vagyis az AB oldalon a legjobb páholy (P_1) 6 m-nyire van az A ponttól, illetve a CD oldalon (P_2) a D ponttól.



Ha a piros k kör helyett a nála kisebb sugarú k_1-et vennénk (ábra), akkor a rajta lévő „páholyok” nem érnék el a falat. Ha pedig nagyobb lenne a kör (k_2), akkor a CD páholysorral való metszéspontjaiból (pl. H-ból) kisebb szögben látszana a mozivászon, mint P_2-ből (az LPH háromszögnek külső szöge α, így $\beta < \alpha$).





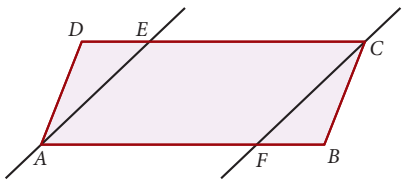
TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Egy háromszög csúcsai legyenek A, B és C. Rajzold meg az A csúcsból a belső szögfelezőt. Ennek a BC oldallal való metszéspontja legyen M. M-nek az AB oldalegyenesre eső merőleges vetülete legyen P, az AC oldalegyenesre eső merőleges vetülete legyen Q.

a) Készíts ábrát!

b) Bizonyítsd be, hogy AMP háromszög egybevágó az AMQ háromszöggel! A háromszögek egybevágóságának melyik alapesetét lehet alkalmazni?

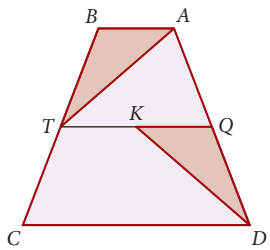
2 Az $ABCD$ paralelogramma két szemközti csúcsán húzzunk két, egymással párhuzamos egyenest, az ábra szerint. Bizonyítsd be, hogy az AED háromszög egybevágó a BCF háromszöggel!



a) A háromszögek egybevágóságának melyik alapesetét lehet alkalmazni?

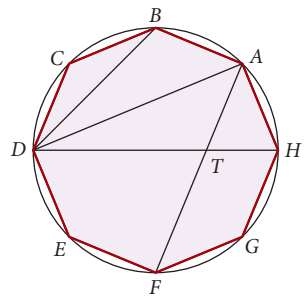
b) Melyik egybevágósági transzformáció viszi egymásba a két háromszöget?

3 Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja háromszor akkora, mint a rövidebbik alapja. Megrajzoltuk a trapéz középvonalát, ennek a szárakkal való metszéspontjai T és Q, a TQ szakasz felezőpontja pedig K (ld. ábra). Bizonyítsd be, hogy az ABT háromszög egybevágó a DQK háromszöggel! A háromszögek egybevágóságának melyik alapesetét lehet alkalmazni?



4 Egy szabályos nyolcszögnek berajzoltuk néhány átlóját.

a) Bizonyítsd be, hogy az ABD háromszög egybevágó az ATD háromszöggel!



b) Igazold, hogy az ATH háromszög és a TDF háromszög egyenlő szárú!

5 **a)** Hány átlója van egy konvex sokszögnek, ha belső szögeinek összege 3960°?

b) Mennyi a belső szögek összege abban a konvex sokszögben, amelyben egy csúcsból 14 átló húzható?

6 Egy szabályos sokszöget az egyik csúcsából induló átlók 10 darab háromszögre bontanak.

a) Hány oldala és hány átlója van ennek a sokszögnek?

b) Határozd meg a sokszög belső és külső szögeinek nagyságát!

7 A gabonakörök érdekes alakzatok, melyek a gabonatáblákon a gabonaszálak megdőlésével jönnek létre. Egy alkalommal két olyan gabonakört találtak, amelyek egy-egy körbe írt konvex sokszöget mintáztak.

a) Az egyikről megállapították, hogy a konvex sokszög átlóinak száma úgy aránylik az oldalak számához, mint 21 : 2. Mekkora lehetett a gabonakörben lévő konvex sokszög belső szögeinek összege?

b) A másikról megtudták, hogy a belső szögek összege úgy aránylik a teljes szöghöz, mint 19 : 2. Hány átlója volt a létrehozott sokszögnek?

8 A mandala az ázsiai spirituális művészetben használt szimbólum. A mandala készítéséhez kijelölünk néhány pontot egy körvonalon. A felvett pontok mindegyikét vonalzó mentén összekötjük az összes többi ponttal.

a) Hány pontot vettünk fel a körvonalon, ha összesen 136 szakaszt rajzoltunk?

Egy másik mandala készítéséhez ugyancsak kijelölünk néhány pontot egy körvonalon, és a felvett

pontok mindegyikét vonalzó mentén összekötjük az összes többi ponttal. Ebben az esetben az egymással szomszédos pontokat piros, a nem szomszédos pontokat kék vonallal kötjük össze.

b) Hány pontot vettünk fel a körvonalon összesen, ha végül a kék vonallal húzott szakaszok száma 75-tel több, mint a piros szakaszok száma?

9 Egy szabályos sokszög oldalainak hossza 8,2 dm, körülírható körének átmérője 16,4 dm.

a) Hány átlója van a sokszögnek?

b) Számold ki a sokszög területét! Válaszod dm^2-ben, két tizedesjegy pontossággal add meg!

10 Ha egy konvex sokszög csúcsainak számát kettővel növeljük, akkor az így kapott konvex sokszög átlóinak száma 13-mal nagyobb lesz, mint az eredeti sokszög átlóinak száma.

a) Hány oldalú volt az eredeti sokszög?

b) Mekkora az eredeti sokszög egy belső szögének nagysága, ha a sokszög szabályos?

11 Egy szabályos sokszögről tudjuk az alábbiakat:
– kevesebb átlója van, mint oldala;
– beírható körének sugara 1 egység hosszú.

a) Hány oldala van a sokszögnek?

b) Határozd meg a sokszög oldalainak hosszát!

c) Számold ki a sokszög területét!

12 Egy kör sugara 12 cm.

a) Milyen hosszú a 42°-os középponti szöghöz tartozó körív?

b) Mekkora a 72°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területe?

13 Egy 8 cm sugarú körvonalat 1 : 2 : 3 : 4 arányban négy részre osztunk.

a) Készíts ábrát!

b) Mekkora középponti szögek tartoznak az egyes ívekhez?

c) Milyen hosszúak az egyes körívek?

14 A 32 cm átmérőjű pizzából mekkora területű az a szelet, amelyhez 100°-os középponti szög tartozik?

15 Egy kör alakú szerencsekerék sugara 36 cm. A körlap 17 körcikkre van felosztva. Felváltva 23°-os és 20°-os körcikkek követik egymást négyszer, a 23°-os körcikkek „Nem nyert”, a 20°-os körcikkek „Nyert” felirattal. Az utolsó, kilencedik körcikk felirata: „Pörgess újra!”.

a) Készíts ábrát!

b) Mekkora az egyes körcikkek területe?

c) Mennyi az esélye, hogy az első pörgetés után nyer valaki?

16 Az ugandai főváros, Kampala az Egyenlítő közelébe esik, körülbelül a 29,7°-os keleti hosszúsági körre. Ugyancsak az Egyenlítő közelében fekszik a Kongói Demokratikus Köztársaság Butembo városa, a 17,8°-os keleti hosszúsági körön. Légvonalban mekkora a távolságuk? (A Föld sugara 6370 km.)

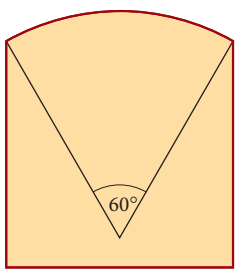
17 Egy 25 cm sugarú körlapból kivágunk egy 205°-os középponti szögű körcikket. Ebből a körcikkből kúppalástot hajtunk.

a) Mekkora a körcikk kerülete?

b) Mekkora a keletkező kúp alapkörének kerülete és sugara, ha tudjuk, hogy a körcikk íve megegyezik a kúp alapkörének kerületével?

18 Egy 20 cm átmérőjű körbe berajzolunk két egymást nem metsző, egymással nem párhuzamos húrt. Az egyik húr hossza 10 cm, a másik húr hossza $10\sqrt{2}$ cm. A két húr a kört három síkidomra bontja. Határozd meg az egyes részek kerületének és területének nagyságát!

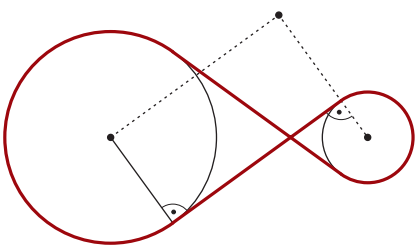
19 Egy kertkapu formáját úgy alakították ki, hogy egy négyzet alakra egy 60°-os középponti szögű körívet illesztettek. A négyzet oldalai 1,4 m hosszúak.



a) Milyen magas a kertkapu a legmagasabb pontján?

b) Mekkora a kertkapu területe?

20 Egy szíjáttételt látsz az ábrán.

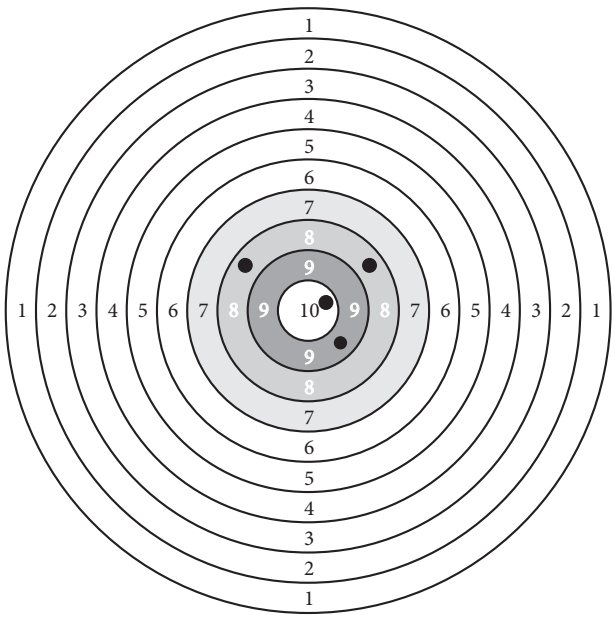


A körök középpontjaiban vannak a tengelyek, ezek távolsága 68 cm.
A nagyobbik kör sugara 28 cm, a kisebbik kör sugara 12 cm. A hajtószíjak keresztbe mennek, így megfordítják a forgás irányát. Középen a hajtószíjak (és a közös érintők) szöge 72°. Milyen hosszú a szíj?

51 ÁTLAG, SZÁMTANI KÖZÉP

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. (Kompetenciamérés, 2011)
Feri lövészversenyen vesz részt. A versenyzőknek öt lövést kell leadniuk. Az ábra Feri első négy találatát mutatja. Ahhoz, hogy Feri megszerezze a győzelmet, az öt lövésből 8,6-nél magasabb találati átlagot kell elérnie. Legalább hány pontos találatot kell elérnie Ferinek az utolsó lövésekor a győzelemhez?



Megoldás
Feri eddig két darab 8-as, egy-egy darab 9-es és 10-es találatot ért el. Az utolsó körben elért találatát jelöljük x-szel! A találatok átlaga: $\frac{8+8+9+10+x}{5}$. A következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$\frac{8+8+9+10+x}{5} > 8{,}6$$
$$\frac{35+x}{5} > 8{,}6$$
$$35+x > 43$$
$$x > 8$$

A győzelemhez 8-asnál nagyobb, tehát legalább 9 pontos lövés kell.

2. Kata 20-szor dobott egy szabályos dobókockával, majd a dobásairól táblázatot készített. Add meg a hiányzó értéket, majd számold ki Kata dobásainak átlagát!

Dobott szám	1	2	3	4	5	6
Dobás gyakorisága	2	2	4	4	5	

Megoldás
A hatos dobás gyakoriságát megkapjuk, ha a többi dobás számát levonjuk 20-ból: $20-(2+2+4+4+5)=3$, tehát 3 dobás eredménye volt hatos. A dobások átlaga a gyakoriságok segítségével így számolható:

$$\frac{2\cdot 1+2\cdot 2+4\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5+3\cdot 6}{20}=\frac{77}{20}=3{,}85\,.$$

ELMÉLET

Átlag vagy más szóval **számtani közép**

Adott n darab valós szám: a_1, a_2, …, a_n. Ezen számok **átlagát** vagy más szóval **számtani közepét** megkapjuk, ha az összegüket osztjuk n-nel, vagyis a számok darabszámával: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Ha az adatok gyakorisága ismert, akkor egyszerűbbé tehetjük a számolást: a számok összegét úgy számoljuk ki, hogy az adatokat megszorozzuk a gyakoriságukkal, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ekkor azt mondjuk, hogy **súlyozott számtani közepet** számoltunk.

FELADAT

1 Elveszett egy adat. Mi az ismeretlen szám, ha tudjuk, hogy a számok átlaga 32?
a) 28; …. **b)** 28; … ; 32 **c)** 28; 38; … ; 40?

2 Mennyi az osztályzatok átlaga?
A táblázat azt mutatja néhány tanuló esetében, hogy hány darabot szerzett az egyes osztályzatokból, és mennyi az osztályzatok átlaga. Egészítsd ki a hiányzó adatokat! A füzetedben dolgozz!

Ötösök száma	Négyesek száma	Hármasok száma	Kettesek száma	Egyesek száma	Jegyek átlaga
4	3	5	1	1	$\frac{4\cdot 5+3\cdot 4+5\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1}{14}\approx 3{,}57$
5	5	2	0	0	
4	4	3		1	$\approx 3{,}833$
5		3	2	1	$= 3{,}6875$

3 Az első félév utolsó matematikadolgozata következik. A tanár 3,51-os átlagtól adja meg félévkor a négyest. Legalább hányasra kell megírni ezt a dolgozatot a négyeshez,

a) ha a diák eddigi jegyei: 4; 3; 3; 5; 5; 3;

b) ha a diák eddigi jegyei: 4; 2; 3; 3; 5; 5; 3;

c) ha a diák eddigi jegyei: 4; 2; 3; 2; 3; 5; 3?

4 (Kompetenciamérés, 2006)
Gergő kosárlabdázik. Az utolsó előtti mérkőzésig 73 pontot dobott összesen, és a mérkőzésenkénti pontátlaga 14,6 volt. Az utolsó mérkőzésén 20 pontot dobott.

a) Hány meccset játszott összesen?

b) Mennyi lett így a mérkőzésenkénti pontátlaga?

5 Egy gyógyszer elkészítéséhez az egyik összetevőből pontosan 24 grammra van szükség. Az előre csomagolt anyagot analitikai mérlegen tízszer megmérik, és kiszámítják a kapott tíz tömeg átlagát. Ha ez az átlag 0,5%-nál többel tér el a szükséges mennyiségtől, akkor nem fogadható el az előre csomagolt anyag. A táblázat tartalmazza a mérések eredményét.

Mért tömeg (gramm)	Gyakoriság
23,78	4
24,09	2
24,31	3
24,50	1

a) Mennyi a tíz mérésből kiszámítható átlagos tömeg? (Számolj súlyozott számtani középpel!)

b) Elfogadható-e az előre csomagolt anyag?

HÁZI FELADAT

1 Mennyi az n értéke, ha

a) a 100; 101; 103; n számok átlaga 102;

b) a 100; 101; 103; n számok átlaga 103;

c) az 1000; 1002; 1003; n; $n+2$ számok átlaga 1002?

2 Anna fizetése januártól májusig havi 160 ezer Ft volt, majd a következő hónapban 15%-kal megemelték, s ez maradt az év végéig. Mennyi volt az átlagfizetése?

3 Egy mérési feladat eredményeit tartalmazza a táblázat. (A füzetedben dolgozz!)

mérési eredmény (mm)	gyakoriság	eredmény eltérése az átlagtól
23,4	1	
23,6	4	
23,7	10	
23,8	11	
23,9	12	
30,0	8	
30,2	1	

Mennyi a mérési eredmények átlaga?
A táblázat utolsó oszlopába írd be, hogy az a mérési eredmény mennyivel tér el az átlagtól! (Két tizedesjegy pontossággal dolgozz!) Mennyi ezen eltérések átlaga?

Ráadás

SZÁMTANI KÖZÉP, MÉRTANI KÖZÉP

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Januárban Antal és Benő is 150 ezer forint nettó bért kapott, márciusban pedig mindketten 216 ezer forintot. Antal bére februárban és márciusban is ugyanannyival növekedett, Benő bére pedig mindkét hónapban ugyanannyiszorosára nőtt. Melyikük kapott több bért februárban?

Megoldás

Antal februári bére *annyival* több a januári bérénél, *amennyivel* a márciusi bére több a februárinál. Ha tehát a februári bére x Ft, akkor $x - 150 = 216 - x$. Ebből $2x = 150 + 216$, vagyis Antal februári bére $x = \frac{150 + 216}{2} = 183$ ezer forint.

Ez éppen a januári és a márciusi bérének a **számtani közepe**.

Benő februári bére *annyiszorosa* a januári bérének, *ahányszorosa* a márciusi bére a februárinak. Ha a februári bére y Ft, akkor $\frac{y}{150} = \frac{216}{y}$. Ebből $y^2 = 150 \cdot 216$, vagyis $y = \sqrt{150 \cdot 216} = 180$ ezer forint.

Antal több bért kapott februárban, mint Benő.

Megjegyzés

A $\sqrt{150 \cdot 216} = 180$ számot a 150 és a 216 **mértani (geometriai) közepének** nevezzük. A 150 és a 216 számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük.

2. Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza a cm és b cm. Hány cm annak a négyzetnek az oldala, amelynek a téglalapéval megegyező

a) a kerülete, **b)** a területe?

Megoldás

a) Legyen a keresett négyzet oldala x cm. A téglalap kerülete $(2a + 2b)$ cm, a négyzet kerülete $4x$ cm. A kerületek egyenlők: $4x = 2a + 2b$. A négyzet oldala tehát $x = \frac{a + b}{2}$ cm hosszú, azaz a téglalap két szomszédos oldala hosszának **számtani közepe**.

b) Legyen a keresett négyzet oldala y cm. A téglalap területe $(a \cdot b)$ cm^2, a négyzet területe y^2 cm^2. A területek egyenlők: $y^2 = a \cdot b$. Melyik pozitív számnak a négyzete az $a \cdot b$? A $\sqrt{a \cdot b}$-nek. Tehát $y = \sqrt{a \cdot b}$.

Eszerint a négyzet oldala $\sqrt{a \cdot b}$ cm hosszúságú.

ELMÉLET

1. Két valós szám **számtani közepe**

   Definíció: Ha a és b valós szám, akkor az $\frac{a + b}{2}$ számot a és b **számtani közepének** nevezzük.

2. Két pozitív valós szám **mértani közepe**

   Pozitív számok esetén definiáljuk a számok mértani közepét is.

   Definíció: Ha az a és b pozitív valós szám, akkor a $\sqrt{a \cdot b}$ számot a és b **mértani közepének** nevezzük.

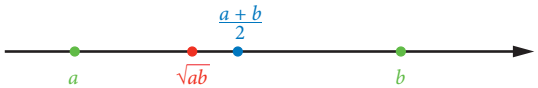
3. **Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség**

   Tétel: Ha a és b pozitív valós számok, akkor számtani közepük nagyobb vagy egyenlő, mint mértani közepük. Számtani és mértani közepük akkor és csak akkor egyenlő, ha $a = b$.

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \qquad (a, b \text{ pozitív valós számok})$$

– Ha $a = b$, akkor a és b számtani és mértani közepe egyenlő $\left(\frac{a+a}{2} = a \text{ és } \sqrt{a \cdot a} = a\right)$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani és mértani közepe egyenlő, akkor maguk a számok is egyenlők.

– Ha $a \neq b$, akkor a és b számtani közepe nagyobb, mint a mértani közepük: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Az állítás megfordítása is igaz: ha két pozitív szám számtani közepe nagyobb a mértani közepüknél, akkor a két szám nem egyenlő.

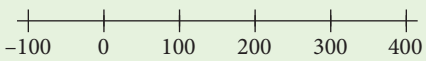


Például:
a 8 és a 98 számtani közepe: $(8 + 98) : 2 = 106 : 2 = 53$, a mértani közepük: $\sqrt{8 \cdot 98} = \sqrt{784} = 28$.
Látjuk, hogy a számtani közép nagyobb a mértani középnél: $53 > 28$.

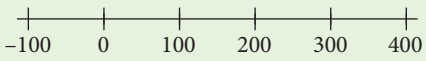
FELADAT

1 Határozd meg a következő számok számtani és mértani közepét! Ábrázold számegyenesen a számokat és a hozzájuk tartozó középértékeket!

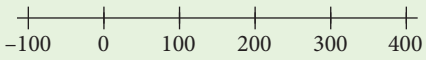
a) 100; 400



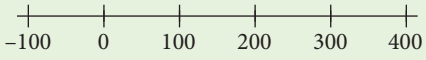
b) 121; 361



c) 169; 225



d) 200; 200



2 Keressük azt a számot amelyet ha az 5400 helyébe és a 24 helyébe egyaránt beírunk, akkor

a) az $5400 + 24$ összeg nem változik meg;

b) az $5400 \cdot 24$ szorzat nem változik meg!

3 Egy téglalap két szomszédos oldalának hossza 27 cm és 12 cm.

a) Egy négyzet kerülete ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkorák ennek a négyzetnek az oldalai?

b) Egy négyzet területe ugyanakkora, mint az adott téglalapé. Mekkorák ennek a négyzetnek az oldalai?

c) Az a) és a b) feladatban kapott két négyzet közül melyiknek nagyobb a területe?

4 Melyik két pozitív szám esetén teljesül?

a) számtani közepük 125, mértani közepük 44

b) számtani közepük 127,5, mértani közepük 126

5 10 millió Ft-os tőkénk az első évben 1,21-szorosára nőtt, a második évben a megnövekedett érték tovább nőtt az 1,69-szorosára.

a) Hány forint lett a második év végére a tőke?

b) Hány forinttal nőtt a tőke az első évben és hány forinttal a második évben?

c) Átlagosan hány forinttal nőtt évenként a tőkénk?

d) Egy másik esetben a 10 millió Ft-os tőkénk x-szeresére nőtt az első évben, majd a megnövekedett érték is x-szeresére nőtt a következő évben. A második év végére azonban ugyanannyi pénzünk lett, mint az eredeti feladatban. Hányszoros volt az éves növekedés? Mennyi volt forintban kifejezve az első éves és a második éves növekedés?

HÁZI FELADAT

1 Januárban Vígh úr üzletében és Bíró úr üzletében is 25 000 Ft volt a télikabát, márciusban mindkét üzletben 16 000 Ft. Bíró úr februárban és márciusban is ugyanannyival csökkentette a kabát árát, Vígh úr pedig februárban ugyannyi százalékkal csökkentette a januári árat, mint ahány százalékkal márciusban a februárit.
Melyikük üzletében volt olcsóbb a kabát februárban?

2 **a)** Melyik eset a kedvezőbb: ha két hónapban egymás után kétszer 5%-os nettó bérnövekedést érünk el, vagy ha az első hónapban 8%-os, a második hónapban újabb 2%-os nettó bérnövekedést?

b) Két egymást követő évben ugyanannyi százalékos béremelést értünk el. Így ugyanannyival nőtt a bérünk, mintha az első évben 10%-kal csökkent, a második évben pedig 60%-kal nőtt volna. Hány százalékos béremelést értünk el?

3 Készítsd el a füzetedben és töltsd ki a táblázatot pozitív egész számokkal!

a	b	a és b számtani közepe	a és b mértani közepe
96	150		
375			225
	8	68	
50			50
		10	6
		109	60

RÁADÁS

Honnan ered a számtani közép és a mértani közép elnevezés?

Valaha régen két szám különbségére azt mondták, ez a számok *számtani aránya.*	Két szám hányadosára azt mondták, ez a számok *mértani aránya.*
Például a 9 és a 6 számtani aránya $9 - 6 = 3$, a mértani arányuk pedig $9 : 6 = 1{,}5$ volt.	
Ha két számtani arány egyenlő volt, akkor = jellel is felírták őket, így kaptak egy *számtani aránypárt.* Például $9 - 6 = 35 - 32$, ez egy számtani aránypár. Itt a két középső szám (a két belső tag) összege éppen annyi, mint a két szélső szám (a két külső tag) összege.	Ha két mértani arány egyenlő volt, akkor = jellel is felírták őket, így kaptak egy *mértani aránypárt.* Például $9 : 6 = 21 : 14$, ez egy mértani aránypár. Itt a két középső szám (a két belső tag) szorzata éppen annyi, mint a két szélső szám (a két külső tag) szorzata.
Különösen érdekesnek találták azokat a számtani és mértani aránypárokat, amelyeknél ugyanaz a szám állt az egyenlőségjel mellett a két oldalon, vagyis a két belső tag egyenlő volt.	
Például ilyen a $9 - 6 = 6 - 3$ számtani aránypár. Itt a 6-ot a 9 és a 3 *számtani középarányosának* nevezték.	Például ilyen a $9 : 6 = 6 : 4$ mértani aránypár. Itt a 6-ot a 9 és a 4 *mértani középarányosának* nevezték.
Ha a két egyenlő belső tagot x-szel, a két külső tagot pedig a-val és b-vel jelölték, akkor	
az $a - x = x - b$ számtani aránypárban az x számra mondták, hogy ez az a és a b *számtani középarányosa.* Az $a - x = x - b$ egyenletből: $x = \frac{a+b}{2}$.	az $a : x = x : b$ mértani aránypárban az x számra mondták, hogy ez az a és a b *mértani középarányosa.* Az $a : x = x : b$ egyenletből: $x = \sqrt{ab}$.
A régi elnevezések vége lekopott, így maradt meg a *számtani közép* és a *mértani közép* elnevezés.	

Bizonyítsuk be a következő tételt!

Tétel: Két pozitív szám számtani közepe nagyobb vagy egyenlő, mint a mértani közepük. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $(a, b \in \mathbf{R}^+)$. Számtani és mértani közepük akkor és csak akkor egyenlő, ha $a = b$.

Bizonyítás

Ha a és b pozitív valós szám, akkor a számtani közepük is pozitív és a mértani közepük is pozitív. Tudjuk továbbá, hogy két pozitív szám közül az a nagyobb, amelynek a négyzete nagyobb.

Azt állítjuk tehát, hogy a és b számtani közepének négyzete nagyobb vagy egyenlő a mértani közepük négyzeténél, vagyis $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$.

E helyett az egyenlőtlenség helyett egyszerűbb, vele ekvivalens egyenlőtlenségeket keresünk:

$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab$; $\quad a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$; $\quad a^2-2ab+b^2 \geq 0$; $\quad (a-b)^2 \geq 0$.

Az utoljára kapott egyenlőtlenség igaz, mert minden valós szám négyzete nemnegatív szám, ezért igaz a vele ekvivalens eredeti állítás is.

Ezzel beláttuk, hogy az összehasonlított két pozitív szám közül a számtani közép négyzete nagyobb vagy egyenlő a mértani közép négyzeténél. Ezért maguk között a számok között is ez a nagyságviszony áll fenn. Az utolsó alak azt is megmutatja, hogy itt egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

FELADAT

1 Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív valós szám, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$!

Megoldás

Az a és az $\frac{1}{a}$ számtani közepe: $\frac{a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)$, a mértani közepe pedig $\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 1$.

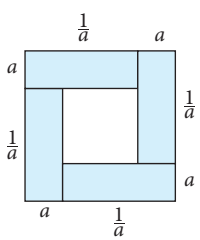
A számtani közép nem kisebb a mértani középnél, vagyis $\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right) \geq 1$, és ebből 2-vel szorozva megkapjuk a bizonyítandó állítást: $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = \frac{1}{a}$, vagyis ha $a = 1$.

Megjegyzés

Fentiekből – például (-1)-gyel való szorzás útján – az is következik, hogy egy -1-től különböző negatív számnak és a reciprokának összege kisebb -2-nél.

2 Olvasd le erről a rajzról, hogy ha a pozitív valós szám, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$!



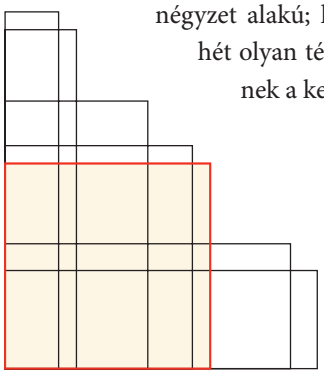
3 Legfeljebb mekkora lehet annak a téglalap alakú teleknek a területe, amelyet 52 m hosszú kerítéssel tudunk körbekeríteni?

Megoldás

Legyen a telek két szomszédos oldalának hossza a méter, illetve b méter. Ekkor $2a + 2b = 52$, vagyis $a + b = 26$, $\frac{a+b}{2} = 13$. Tudjuk azt is, hogy a telek területe ab négyzetméter.

Mivel $169 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, ezért a telek területe nem lehet nagyobb 169 m^2-nél. Ha $a = b = 13$, vagyis négyzet alakú a telek, akkor a területe éppen 169 m^2.

Tehát az 52 méter hosszú kerítéssel legfeljebb 169 m^2 területű, téglalap alakú telek keríthető körbe (a telek ekkor négyzet alakú; lásd az ábrát is). [Az ábrán hét olyan téglalap (is) látható, amelyeknek a kerülete egyenlő.]

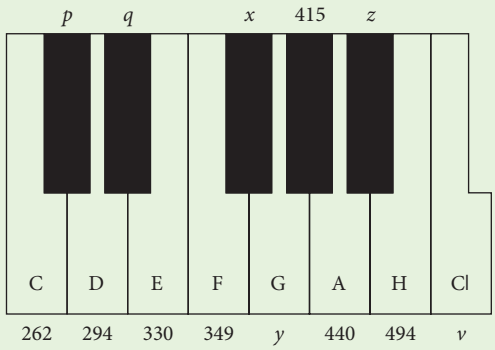


4 Legalább mekkora annak a téglalap alakú teleknek a kerülete, amelynek területe 100 m^2?

52 VÁLTOZÁSOK

FELADAT

1 A zongora fehér billentyűinek szokásos elnevezése és a hozzájuk tartozó hangfrekvenciák az ábrán láthatók. Egy fekete billentyű leütésekor megszólaló hang frekvenciája a szomszédos két fehér billentyűhöz tartozó frekvenciák



frekvenciájának mértani közepe. Ha egy fehér és egy fekete billentyű fog közre egy fehér billentyűt (pl. E, F vagy H), akkor az ehhez tartozó frekvencia a két közrefogó billentyű frekvenciájának mértani közepe. (A frekvenciát hertzben mérjük. Például a fenti ábrán megadott A hang frekvenciája 440 Hz.)



a) Számítsd ki az ismeretlen frekvenciákat!

b) Hányszorosa a C hang frekvenciájának az egy oktávval magasabban megszólaló C′ hang frekvenciája?

c) A C hangtól elindulva sorra leütjük mindegyik billentyűt. Mit mondhatunk az egymás után megszólaló hangok frekvenciájának arányáról (az arányokat századra kerekítve)?

2 10 millió Ft-os tőkénk az első évben 1,5 millió Ft-tal, a második évben 3,5 millió Ft-tal nőtt. Átlagosan mennyit nőtt a tőkénk évente?

3 Egy kerékpártúrán az első napon 62 km-t tettek meg. A második napon 15%-kal többet, mint az első napon. A harmadik napon 15%-kal kevesebbet, mint a második napon. A negyedik napon 14 km-rel többet, mint a harmadik napon. Az ötödik napon 14 km-rel kevesebbet, mint a negyedik napon.

a) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	összesen
62 km					

b) A második napon 15%-kal növelték, majd a következőn 15%-kal csökkentették a távot. Több vagy kevesebb a napi táv a harmadik napon, mint az elsőn? Miért?

c) A negyedik napon 14 km-rel növelték, majd az ötödik napon 14 km-rel csökkentették a napi távot. Több vagy kevesebb a napi táv az ötödik napon, mint a harmadikon? Miért?

d) Mennyit tekertek átlagosan egy nap alatt?

4 Egy új autó vételára 4,2 millió forint. Az első évben 20%-kal, a második évben újabb 15%-kal csökken az autó értéke.

a) Mennyit ér az autó a megvásárlása után egy, illetve két évvel?

b) Hány százalékot veszít eredeti értékéből (vételárából) két év alatt az autó?

c) A 20% és a 15% számtani közepe 17,5%. Ha mindkét évben 17,5%-ot veszített volna az autó az előző évi értékéből, akkor mennyi lenne két év után az értéke?

d) Egy 4,2 millió forintért vásárolt céges autó értékét évente ugyanannyi százalékkal csökkentették. A vétel után 2 évvel az autó értéke 2,856 millió forint. Hány százalékos volt az éves értékcsökkenés?

HÁZI FELADAT

1 Egy ország 5 milliós népessége 1900-tól 1950-ig 21%-kal nőtt, majd 2000-ig újabb 44%-kal.

a) Mennyi lett 2000-ben a népesség?

b) Átlagosan hány fővel nőtt 50 évente ebben a 100 évben az ország népessége?

c) Ha 50 évente mindig ugyanannyi százalékot növekedve érte volna el az ország lakossága a 2000. évi népességszámot, akkor hány lakosa lett volna az országnak 1950-ben?

2 A háromnapos, 240 km hosszú kerékpártúra második és harmadik napján is 10 km-rel többet tettünk meg, mint az előző napon.

a) Hány km-t tettünk meg az egyes napokon?

b) Hány százalékkal tettünk meg többet a második, illetve a harmadik napon, mint az előtte lévőn?

3 Egy baromfitelepen 10 000 csirke volt. Számuk egy év alatt 1,22-szorosára nőtt, a következő évben az előző évhez viszonyítva csak 1,01-szorosára.

a) Hány csirke lett 2 év után ezen a telepen?

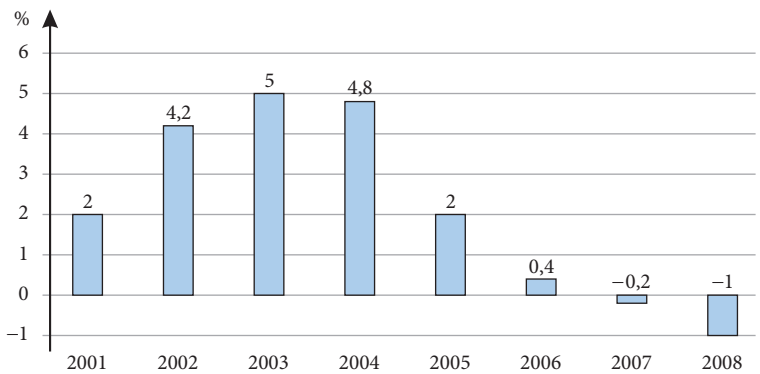
b) Mennyi az éves átlagos szaporulat?

c) Hány csirke lenne 2 év után a telepen, ha mindkét évben $\sqrt{1{,}22 \cdot 1{,}01}$ -szoros lett volna a növekedés?

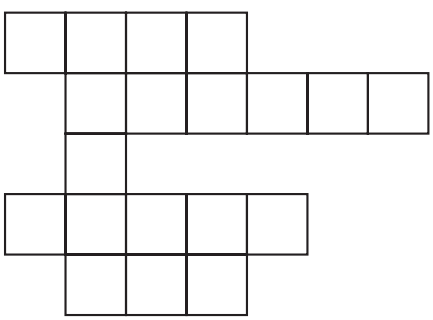
d) Hány százalékos éves növekedésnek felel meg a $\sqrt{1{,}22 \cdot 1{,}01}$ -szoros növekedés? Több, kevesebb vagy ugyanannyi ez, mint a 22% és az 1% számtani közepe (átlaga)?

RÁADÁS

A következő diagram azt ábrázolja, hogy 2001 és 2008 között évente hány százalékkal változott egy város lakossága az előző évihez képest.
Igaz vagy hamis? A helyes logikai értékhez tartozó szót írd a táblázat megfelelő hosszúságú sorába! A megoldás a függőleges oszlopban egy szép magyar település neve.



	Igaz	Hamis
2004-gyel kezdődően csökkent a város lakossága.	OSZTÁS	ÖSSZEG
A város lakossága 2001-ről 2004-re 15%-kal nőtt.	TAG	SOK
A város lakossága 2005-ben ugyanannyi fővel változott, mint 2001-ben.	SZÁM	ADAT
A város lakossága 2003-ban több fővel változott, mint 2004-ben.	ÁTLAG	KÖZÉP





53 SZÁMSOKASÁGOK STATISZTIKAI JELLEMZŐI

BEVEZETŐ

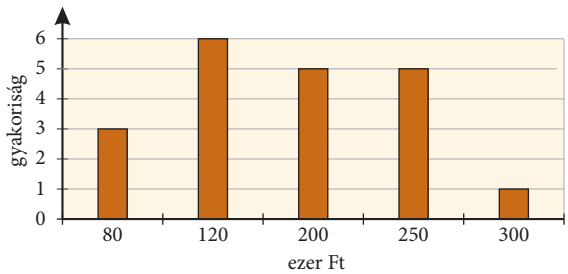
Egy cégnél 2001-ben 20-an dolgoztak és 5-féle fizetést kaptak. Az igazgató 300 ezer forintot, 5 főmunkatárs 250 ezret, 5 tisztviselő 200 ezret, 6 adminisztrátor 120 ezret, 3 részmunkaidőben dolgozó takarító 80 ezret keresett havonta. Mit olvashatunk ki ezekből az adatokból?

Megoldás

A fizetések jegyzéke 20 adatot tartalmaz.

Ezek az adatok (ezer forintokban kifejezve) növekvő sorrendben a következők:

80, 80, 80, 120, 120, 120, 120, 120, 120, 200, 200, 200, 200, 200, 250, 250, 250, 250, 250, 300.



Legtöbbször a 120 fordul elő, ez a számsokaság **módusza**.

A felsorolásban középen, a 9. és a 10. helyen 200 áll, ezeknek az átlaga szintén 200, ami a számsokaság **mediánja**.

A fizetéseket gyakorisági grafikonon (diagramon) is ábrázolhatjuk. A legmagasabb oszlop a 120-hoz tartozik, a legalacsonyabb a 300-hoz.

A számsokaság **terjedelme** a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége: $300 - 80 = 220$.

A terjedelem a grafikon vízszintes tengelyén olvasható le.

Számítsuk ki a fizetések **átlagát**! Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy a 20 szám összegét elosztjuk 20-szal. Mivel sok egyenlő adat van, érdemes súlyozott átlagot számolni: $(300 + 5 \cdot 250 + 5 \cdot 200 + 6 \cdot 120 + 3 \cdot 80) : 20 = 3510 : 20 = 175{,}5$.

A 20 dolgozó fizetésének átlaga 175 500 forint. 11-en ennél többet keresnek, 9-en ennél kevesebbet.

Az átlagtól kevéssel tér el az 5 tisztviselő fizetése, de az igazgató és a takarítók fizetése nagyon messze van az átlagtól. Azt is mondhatjuk, hogy nagy a fizetések **szóródása**.

ELMÉLET

Egy véges számsokaság legfontosabb **statisztikai jellemzői**:

	Leírása
Átlag	a sokaság elemeinek az összegét elosztjuk az elemek számával
Módusz	a legtöbbször előforduló elem (lehet több módusz is)
Medián	a nagyság szerinti felsorolásban páratlan elemszám esetén a középen álló szám, páros elemszám esetén a középen álló két szám átlaga
Terjedelem	a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége

Ha az adatok gyakorisága ismert, akkor az átlag kiszámolható úgy, hogy a számokat megszorozzuk a gyakoriságukkal, ezeknek a szorzatoknak az összegét elosztjuk a gyakoriságok összegével. (Ezt az eljárást nevezik **súlyozott számtani közép** számolásának.)

FELADAT

1 Add meg a következő számsokaságok főbb statisztikai jellemzőit!

a) 8, 9, 3, 5, 9, 4 **b)** 80, 90, 30, 50, 90, 40

2 Egy 30 számból álló adathalmaznak ismerjük a terjedelmét, átlagát, mediánját és móduszát. A négy közül melyik az a statisztikai jellemző, amelyiknek az értéke biztosan szerepel az adathalmaz elemei között?

3 Adott négy szám: 5, −2; −1; 0. Adj meg egy ötödik számot úgy, hogy

a) az öt szám mediánja 0 legyen!

b) az öt szám átlaga 0 legyen!

c) az öt szám mediánja és egyetlen módusza megegyezzen!

d) az öt szám átlaga és mediánja megegyezzen!

e) az öt szám átlaga és egyetlen módusza megegyezzen!

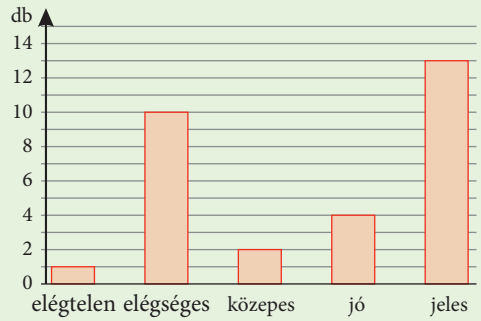
4 Tizenegy tanuló olyan tesztdolgozatot írt, amelyben 100 pontot lehetett elérni.

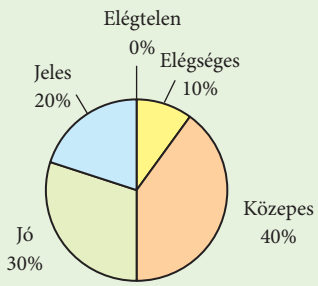
A tanulók elért pontszámai: 100; 100; 100; 63; 62; 60; 12; 12; 6; 2; 0.

a) Add meg az elért pontszámok főbb statisztikai jellemzőit!

b) A csoportban az a vélemény van többségben, hogy nehéz volt a teszt. Tudsz-e érvelni a többség véleménye mellett a statisztikai mutatókra támaszkodva?

5 A két diagram a félév végi kémiaosztályzatokat mutatja egy iskola 10.A, illetve 10.B osztályában.





a) Határozd meg, hogy mennyi a félévi kémiaosztályzatok terjedelme, módusza, mediánja és átlaga az egyes osztályokban!

b) Fogalmazd meg, hogy az egyes statisztikai jellemzők milyen módon olvashatók le a diagramokról!

c) Szerinted melyik osztályban lettek jobbak az eredmények? Milyen érvek szólnak az egyik, milyen érvek a másik osztály mellett?

HÁZI FELADAT

1 Egy szabálytalan dobókockát egymás után 120-szor feldobtunk, a dobott számokat pedig sorban feljegyeztük:

Pontszám	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	21	18	4	45	22	10

a) Mennyi a dobott számok átlaga?

b) Mennyi a 120 számból álló számsokaság módusza, mediánja, terjedelme?

c) Hány pont lehet a kocka három pontot tartalmazó lapjával szemközti lapon?

2 Egy röplabdacsapat pályán lévő 6 játékosának átlagmagassága 172 cm. Egyik játékosukat lecserélik, így az átlagmagasság 174 cm-re változik. Mennyivel magasabb az új játékos annál, akit lecseréltek?

3 Adj meg öt pozitív egész számot úgy, hogy mediánjuk 5, átlaguk 4 legyen!

4 Egy adatsokaság hét eleméről a következőket tudjuk. Az adatsokaság egyetlen módusza 42. Az átlag 48, ez megegyezik a mediánnal, és kétszer is szerepel az adatok között. Az adatok terjedelme 16. Határozd meg az adatsokaság elemeit!

54 OSZTÁLYBA SOROLÁS, ÁTLAGOK ÁTLAGA

BEVEZETŐ

A táblázatban ezresekre kerekítve megadták egy város lakóinak életkor és nem szerinti megoszlását. A város legidősebb embere 93 éves.

Életkor	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–93
Nők (ezer fő)	7	9	10	10	12	11	10	12
Férfiak (ezer fő)	8	10	11	10	10	8	7	7

a) Hány nő és hány férfi él ebben a városban?
b) Készítsünk az adatok alapján oszlopdiagramot!
c) Számítsuk ki a város lakosai életkorának átlagát!

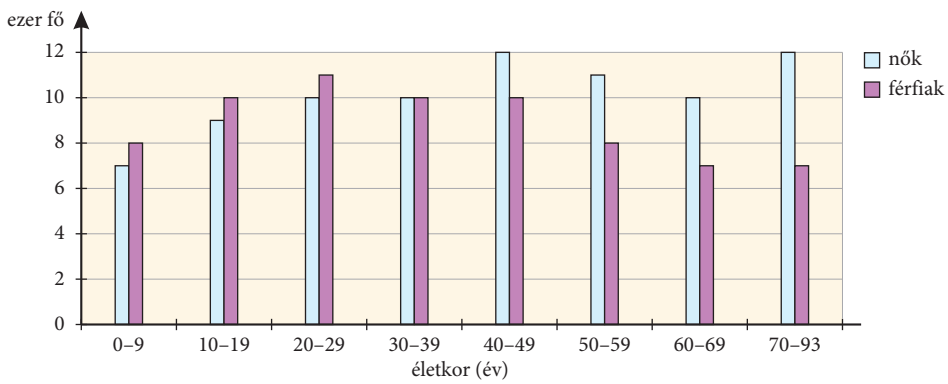
A táblázat életkoruk szerint nyolc osztályba sorolta a város lakosait. Az első osztály határai a 0 és a 9, a második osztály határai a 10 és a 19, végül a nyolcadik osztály határai a 70 és a város legidősebb lakosának életkora, azaz 93.

(A hivatalos felmérésekben az ilyen típusú osztályba sorolás úgy történik, hogy például 9 éves az, akinek a felmérés évében van a tizedik születésnapja, 25 éves az, akinek a felmérés évében van a 26. születésnapja és így tovább.)

Megoldás

a) A nők száma $7 + 9 + 10 + \ldots + 12 = 81$ ezer, a férfiaké $8 + 10 + 11 + \ldots + 7 = 71$ ezer. (Ezek természetesen kerekített értékek.)

b) A diagram vízszintes tengelyén az osztályokat, függőleges tengelyén az adott osztályba tartozó lakosok számát tüntetjük fel.



c) Az átlag kiszámításánál gyakran használt (közelítő) módszer az, hogy az egyes emberek valódi életkora helyett **osztályközepekkel** számolunk. Az **osztályközép az adott osztály két határának a számtani közepe**.
Az átlag kiszámításához tehát ezt a gyakorisági táblázatot használjuk:

Életkor	4,5	14,5	24,5	34,5	44,5	54,5	64,5	81,5
Lakosok száma (ezer fő)	15	19	21	20	22	19	17	19

Az életkorok súlyozott számtani közepe:

$$\frac{4{,}5 \cdot 15 + 14{,}5 \cdot 19 + 24{,}5 \cdot 21 + 34{,}5 \cdot 20 + 44{,}5 \cdot 22 + 54{,}5 \cdot 19 + 64{,}5 \cdot 17 + 81{,}5 \cdot 19}{15 + 19 + 21 + 20 + 22 + 19 + 17 + 19} = \frac{6207}{152} \approx 40{,}8 \text{ (év)}.$$

A város lakosai életkorának átlaga tehát körülbelül 41 év.

Megjegyzések

1. Feladatunkban egy város lakosságát osztályokba sorolták. Vegyük észre: **minden lakos benne van az egyik osztályban, de egyik lakos sincs benne két különböző osztályban**!
2. Az osztályba sorolt adatok átlagának kiszámítása természetesen nem feltétlenül adja ugyanazt, mintha minden egyes ember életkorát megkérdeztük volna, majd a 152 ezer szám összegét elosztottuk volna 152 ezerrel.
   A statisztika olykor megelégszik a kevésbé pontos értékekkel is, főleg ha
   – a pontos értékek meghatározása túlságosan időigényes (például azért, mert a 152 ezer számot be kell gépelni a számítógépbe) vagy
   – túl sokba kerül, és nem „térül meg” a pontossággal nyert többletinformáció.

FELADAT

1 Egy gyűjtő rendezte a bélyeggyűjteményét, és közben feljegyezte, milyen értékű bélyegei vannak. Az alábbi táblázatot készítette el.

Érték (Ft)	500–1000	1000–1500	1500–2500	2500–5000
Darab	42	47	36	7

Az 1000 Ft értékű bélyegeket a második, az 1500 Ft értékűeket a harmadik, a 2500 Ft értékűeket a negyedik osztályba sorolta.

a) Hány bélyegből áll a gyűjtemény?

b) Készíts oszlopdiagramot a bélyegek értékéről!

c) Mennyit ér a bélyeggyűjtemény a gyűjtő szerint, ha az általa létrehozott osztályok osztályközepével számol? (Az osztályközép most is az osztály két határának számtani közepe.)

d) A gyűjtő kiszámította a bélyegek értékének átlagát. Van-e olyan bélyeg a gyűjteményében, amelynek pontosan ennyi az értéke?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bencének az egyik házi feladatában ki kellett számítania az 5, 7, 2, 3, 4 számok átlagát. Bence jó fejszámoló, ezért így „gyorsította meg” a megoldást:

Az 5 és a 7 átlaga 6 (mert $\frac{5+7}{2} = 6$), a 2, 3, 4 számok átlaga pedig 3 (mert $\frac{2+3+4}{3} = 3$). Tehát az 5, 7, 2, 3, 4 számok átlaga 4,5 (mert a 6 és a 3 átlaga $\frac{6+3}{2} = 4{,}5$).

Az iskolában meglepődve tapasztalta, hogy másoknak nem ugyanez „jött ki”. Jó-e Bence „gyors módszere”?

Megoldás

Bence gyors munkája sajnos hibás volt.

Ki kellett volna számolnia az $\frac{5+7+2+3+4}{5}$ tört értékét, ami $\frac{21}{5} = 4{,}2$.

Ehelyett Bence ezt számolta ki: $\left(\frac{5+7}{2} + \frac{2+3+4}{3}\right) : 2$.

Ezt közös nevezőre hozás után így írhatjuk:

$$\frac{3\cdot 5+3\cdot 7+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4}{12} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2} = 4{,}5,$$

és ez nem egyenlő az $\frac{5+7+2+3+4}{5}$ törttel.

Bence az öt szám átlaga helyett az öt számból képzett két csoport **átlagának átlagát** számította ki, így hibás eredményt kapott.

Akkor kapott volna helyes eredményt, ha az átlagok súlyozott átlagával számolt volna, tehát figyelembe vette volna, hogy 2 db szám átlaga volt 6, és 3 db szám átlaga volt 3:

$$\frac{2\cdot 6+3\cdot 3}{5} = \frac{21}{5} = 4{,}2.$$

FELADAT

2 Egészségügyi szűrővizsgálat során megmérték a 10. évfolyamon a tanulók testmagasságát.

	10. A-s fiúk	10. A-s lányok	10. B-s fiúk	10. B-s lányok
létszám	14	18	15	19
magasságok átlaga	176 cm	170 cm	172 cm	168 cm

Mennyi a teljes évfolyamon a magasságok átlaga?

3 Egy cég 50 dolgozójának átlagkeresete 358 400 Ft. Közülük a 40 éves vagy annál idősebb dolgozók átlagkeresete 380 000 Ft, a 40 évnél fiatalabbaké 320 000 Ft. Hány 40 évnél fiatalabb dolgozó van a cégnél?

4 Egy cég dolgozói között az átlagéletkor egy tizedesjegyre kerekítve 42,4 év. A férfiak átlagéletkora 46,4 év, a nők átlagéletkora 40,2 év.

a) Női vagy férfi dolgozóból van több ennél a cégnél?

b) Mennyi a férfi és a női dolgozók számának aránya?

5 Egy városban összesítették a 10. osztályos tanulók testmagasságának mérési eredményeit. (A 150 cm magas tanulókat a 150-160 közöttiek közé, a 160 cm magas tanulókat a 160–170 közöttiek közé sorolták és így tovább.)

testmagasság (cm-ben)	140–150	150–160	160–170	170–180	180–190	190–196
létszám (fő)	12	67	146		31	6

Az osztályközepek segítségével meghatározták a testmagasságok átlagát: ez (kerekítve) 168,6 cm.
Hány tanuló esik a 170 – 180 közötti kategóriába?

6 (Érettségi feladat, 2014, emelt szint)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészre kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérletek hány százaléka volt sikeres.)

Számítsd ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen!

HÁZI FELADAT

1 A minőségellenőr a gyártósorról lekerült, kész izzók élettartamát vizsgálta. Mérési eredményeit táblázatban rögzítette. A véletlenszerűen kiválasztott és megvizsgált izzók osztályba sorolásakor az első osztályba azok kerültek, amelyeknek az élettartama elérte a 950 órát, de az 1000 órát már nem. A második osztályba azok az izzók kerültek, amelyeknek az élettartama elérte az 1000 órát, de az 1050 órát már nem és így tovább.

Élettartam	950–1000	1000–1050	1050–1100	1100–1150	1150–1200
Gyakoriság	28	40	61	45	26

A megvizsgált izzók mindegyike legalább 950 órát világított, és nem volt olyan, amelynek az élettartama elérte volna az 1200 órát.

a) Hány izzót vizsgált meg a minőségellenőr?

b) Készíts gyakorisági diagramot a táblázathoz!

c) Egészítsd ki a táblázatot a relatív gyakoriságokkal! A vizsgált izzók hány százaléka felelt meg a „legalább 1000 órás üzemidő” követelménynek?

d) Számítsd ki az izzók élettartamának átlagát az osztályközepek segítségével!

2 (Érettségi feladat alapján)

Egy együttes több vidéki városban koncertezett. Az eladott jegyek számát, a jegyek árát és a jegyekből származó bevételt az alábbi táblázat tartalmazza.

város	eladott jegyek száma	egy jegy ára (Ft)	bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)
Debrecen	3250		6825
Győr	2760		6348
Kecskemét		1800	4410
Miskolc	2940	1600	
Pécs		2200	6820

a) Mennyi volt az összes eladott jegy átlagos ára?

b) Mennyi volt a jegyek árának terjedelme, módusza és mediánja?

3 Figyeld meg a következő gondolatmenetet!

„Alig van olyan matematikadolgozat, amely esetén az osztályátlag nem 3. A legtöbbször ugyanis van közöttük ötös, négyes, hármas, kettes és egyes is. Az ötös osztályzatok átlaga nyilván 5, a négyes osztályzatok átlaga nyilván 4, a hármasoké 3, a ketteseké 2, az egyeseké pedig 1. Ennek az öt számnak az átlaga adja az osztályátlagot, ami tehát $\frac{5+4+3+2+1}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

Helyesnek találod-e az átlagszámítás ilyen módját? Válaszod indokold!

4 Egy osztály 25 tanulójának testmagassága cm-ben mérve a következő: 151, 156, 158, 158, 164, 164, 164, 164, 164, 166, 166, 168, 168, 168, 170, 170, 171, 171, 171, 171, 172, 173, 174, 176, 182.

a) Mennyi a 25 adat módusza és mediánja?

b) Végezd el a 25 adat osztályba sorolását! Legalább 4, legfeljebb 6 osztályt alkoss!

c) Számold ki az osztályközepek segítségével a testmagasságok átlagát, majd számítsd ki a 25 szám átlagát is! Hasonlítsd össze a két számot!

A házi feladat elkészítéséhez, ellenőrzéséhez *táblázatkezelő programot* is használhatsz.

EMELT SZINT

FELADAT

1 Keress példát olyan tíz elemből álló adatsokaságra, amelyet ki lehet egészíteni egy újabb elemmel az alábbi módon:

a) a módusz nem változik, de az átlag igen;

b) az átlag nem változik, de a módusz igen;

c) a medián nem változik, de az átlag igen;

d) az átlag nem változik, de a medián igen.

2 Egy számsokasághoz hozzáveszünk egy újabb számot, a 60-at, így az átlag 1-gyel megnő. Majd még egy számot hozzáveszünk, az 54-et, így az átlag további 0,5-del megnő. Eredetileg hány számot tartalmazott a számsokaság, és mennyi volt a számok átlaga?

3 A piacon öt helyen árulnak őszibarackot. Az egyik helyen 720 Ft-ba kerül 1 kg, a következő helyen 800 Ft-ba, a harmadik helyen 580 Ft-ba, a negyedik helyen 700 Ft-ba. Mennyibe kerül az ötödik helyen, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az árak között, és az adatok egyetlen módusza nem egyenlő a mediánjukkal?

4 Egy természetes számokból álló, hételemű adathalmazról a következőket tudjuk. A medián és a terjedelem is 55, az adathalmaznak két módusza van, az 52 és az 58. Az adathalmaz átlaga szerepel a móduszok között. Határozd meg a számokat!

55 VÉLETLEN? – RELATÍV GYAKORISÁG

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban!

1 **a)** Minden pár dobjon fel 50-szer egy szabályos pénzdarabot! Számoljátok össze a fejek gyakoriságát, majd számítsátok ki a fejek relatív gyakoriságát!

Dobások száma	Fejek **gyakorisága** 50 dobásból	Fejek **relatív gyakorisága** 50 dobásból
50		

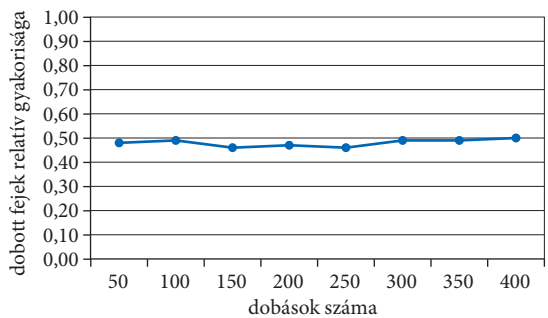
b) A többi pár eredményét figyelembe véve készítsetek egy összesítő táblázatot 50, 100, 150, ... , 400 dobás esetén a fejek gyakoriságáról! Számítsátok ki az eredményekhez tartozó relatív gyakoriságokat!

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek **gyakorisága**	Fejek **relatív gyakorisága**
1.	50		
2.	100		
3.	150		

c) Készítsetek diagramot arról, hogyan változott az összesítés során a dobott fejek számának relatív gyakorisága!

d) Egy iskolai tanulócsoportban a következő összesített táblázat és diagram született.

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek **gyakorisága**	Fejek **relatív gyakorisága**
1.	50	24	0,48
2.	100	49	0,49
3.	150	69	0,46
4.	200	93	0,47
5.	250	116	0,46
6.	300	148	0,49
7.	350	172	0,49
8.	400	201	0,50



e) Mit fejez ki az a hétköznapi kijelentés, hogy ha egy szabályos pénzérmét feldobunk, akkor 0,5 annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye fej lesz? Hogyan támasztja alá a kísérlet ezt a kijelentést?

ELMÉLET

Ha egy kísérletet, megfigyelést n-szer végeztünk el, és k-szor kaptunk meg egy eredményt, akkor azt mondjuk, hogy ennek az eredménynek a **gyakorisága** k, a **relatív gyakorisága** pedig $\frac{k}{n}$.

(Itt az n pozitív egész szám, a k nemnegatív egész szám, és $k \leq n$.)

A relatív gyakoriság jobban jellemzi az eseményt, mint a gyakoriság, mert azt mutatja meg, hogy az esetek *hányadrészében* kaptuk meg a vizsgált eredményt.

CSOPORTMUNKA



2 **a)** Minden pár dobjon fel 50-szer 3 különböző pénzdarabot (pl. egy 5 forintos, egy 10 forintos és egy 20 forintos érmét), és minden dobás után húzzon egy vonást a megfelelő cellába! Az első betű az 5 forintoson, a második a 10 forintoson, a harmadik betű pedig a 20 forintoson látható képet jelzi, ez minden esetben fej (F) vagy írás (I) lehet.

FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III	Összesen

b) Készítsetek összesítő táblázatot az 50 dobás eredményéről:

A kísérlet kimenetele	FFF	FFI	FIF	IFF	FII	IFI	IIF	III
Gyakoriság								
Relatív gyakoriság								

c) Készítsetek diagramot a 8 lehetséges kimenetel relatív gyakoriságáról!

d) Feldobunk egy 5 forintos, egy 10 forintos és egy 20 forintos érmét. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az 5 forintoson fej, a 10 forintoson és a 20 forintoson pedig írás lesz a dobás után? A kísérlet eredménye mennyire van ezzel összhangban?

e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy három különböző érmével dobva egy fej és két írás lesz a dobás eredménye? Hogyan támasztja alá a kísérlet a kérdésre adott választ?

f) Mekkora annak a valószínűsége, hogy három egyforma érmét feldobva egy fej és két írás lesz a dobás eredménye? Tibor szerint 4 eset van:

– mindhárom érmén fej;
– két érmén fej és egy érmén írás;
– mindhárom érmén írás;
– két érmén írás és egy érmén fej lesz a dobás után.

Tehát $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye egy fej és két írás lesz. Igaza van-e Tibornak?

HÁZI FELADAT

1 Végezz el 50 dobást egy szabályos dobókockával, és írd fel sorban a kapott pontszámokat!

a) Hányszor kaptál 6-ost az első 10, az első 20, az első 30, az első 40 és az 50 dobásból?

b) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

	10 dobás	20 dobás	30 dobás	40 dobás	50 dobás
6-os dobásának gyakorisága					
6-os dobásának relatív gyakorisága					

2 Számítógéppel generáltunk 850 véletlen kockadobást. Egészítsd ki a táblázatot!

A dobás eredménye	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	126	180	152		138	119
Relatív gyakoriság						

3 Az előző feladat táblázata alapján számítsd ki, mennyi a gyakorisága, illetve a relatív gyakorisága annak, hogy a gép

a) prímszámot dobott;

b) összetett számot dobott;

c) legalább 5-öt dobott!

56 MEGISMERHETŐ VÉLETLEN

CSOPORTMUNKA



Dolgozzatok párokban!

1 **a)** Dobjatok egyszerre két, egy fekete és egy fehér dobókockával, majd jegyezzétek fel a két kockán dobott pontok összegét! Minden pár végezzen el 50 kísérletet!

b) Számítsátok ki minden lehetséges kimenetel relatív gyakoriságát is!

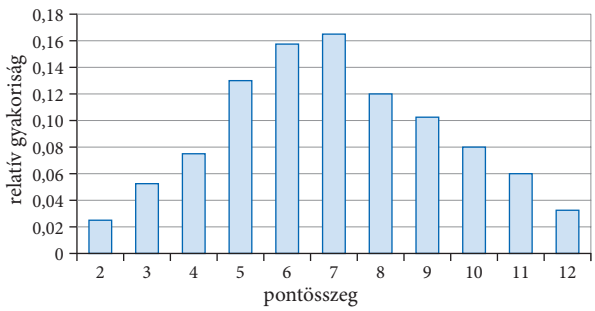
Pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Összesen
Vonások												
Gyakoriság												50
Relatív gyakoriság												1

c) Készítsetek relatív gyakorisági diagramot a táblázat eredményei alapján!

d) Egy tanulócsoportban 8 pár összesen 400 kísérletet végzett el. Összesített táblázatuk és relatív gyakorisági diagramjuk a következőképpen alakult:

Pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Összesen
Gyakoriság	10	21	30	52	63	66	48	41	32	24	13	400
Relatív gyakoriság	0,025	0,0525	0,075	0,13	0,1575	0,165	0,12	0,1025	0,08	0,06	0,0325	1

Hasonlítsátok össze a táblázatot és a diagramot a saját kísérletetekkel!



2 Zsombor szerint két dobókockával dobva ugyanolyan valószínűséggel dobhatunk 7-et, mint 8-at. Kijelentését a következőképpen indokolja:

$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ és

$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$.

Mivel mindkét szám háromféleképpen bontható fel, ezért egyforma a 7 és a 8 pontösszeg dobásának esélye.

a) Alátámasztják-e az előző kísérlet eredményei Zsombor okoskodását?

b) Szerinted körülbelül mekkora a valószínűsége a 7, illetve a 8 pontösszeg dobásának?

c) Mi okozhatja az eltérést?

ELMÉLET

Véletlen jelenség, véletlen kísérlet

A valószínűségszámítás véletlen jelenségekkel, helyzetekkel foglalkozik. Amikor egy ilyen véletlen jelenséget megfigyelünk (és feljegyezzük annak kimenetelét), akkor **véletlen kísérlet**et végzünk.

Például:

Két dobókocka feldobása egy véletlen jelenség. Véletlen kísérletet végzek, amikor konkrétan feldobok egy fehér és egy fekete dobókockát, és megfigyelem a dobás eredményét. A kísérlet kimenetele, hogy mennyit dobtam a fehér, és mennyit dobtam a fekete kockával.

Elemi események

Egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.

Például:

Egy fehér és egy fekete dobókockával dobva egy elemi esemény, ha a fehér kockával 3-ast, a fekete kockával 4-est dobunk. Ebben a véletlen kísérletben 36 különböző elemi esemény következhet be.

Véletlen kísérletek és relatív gyakoriság

Azt tapasztaljuk, hogy ha a véletlen kísérletet nagyon sokszor, azonos körülmények között végezzük el, akkor egy konkrét kimenetel relatív gyakorisága egy jól meghatározott érték közelében ingadozik.

Például:

Ha egy pénzérmét nagyon sokszor feldobunk, akkor annak a relatív gyakorisága, hogy a dobás eredménye fej, várhatóan 0,5 közelében lesz.

Valószínűség

Ha egy véletlen esemény során az elemi események egyformán valószínűek (és a lehetséges elemi események száma véges), akkor az esemény **valószínűségét** úgy számolhatjuk, hogy a kedvező elemi események számát elosztjuk az összes elemi esemény számával.

A valószínűség jele P (a latin *probabilitas* szó kezdőbetűje, ami valószínűséget jelent).

Például:

– Két pénzérmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét érmén fej látható? Azt gondolhatnánk, hogy 3 kimenetel van: mindkét érmén fej, mindkét érmén írás, illetve egyiken fej és másikon írás, így a valószínűség $\frac{1}{3}$. De ezek nem egyformán valószínű elemi események! Az „egyik fej, másik írás” kimenetel kétféle módon valósulhat meg: lehet az első fej és a második írás, és lehet fordítva, az első írás és a második fej. Akkor írunk fel egyenlően valószínű elemi eseményeket, ha ezeket megkülönböztetjük. Egyenlően valószínű elemi események tehát: FF, FI, IF II, ez összesen 4 lehetőség. Ebből 1 a kedvező, ezért a valószínűség $\frac{1}{4}$. Ha a kísérletet nagyon sokszor elvégezzük, akkor azt tapasztaljuk, hogy a relatív gyakoriság is 0,25 közelében lesz. Az előző két modell között az a különbség, hogy az egyikben a két pénzérmét egyformának gondoljuk, a másikban megkülönböztethetőnek. A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy megkülönböztethetők. Így a valóságot a második modell írja le.

– Két dobókockával dobva 3 olyan elemi esemény van, amikor a dobott számok összege 10 (fehér hatos és fekete négyes, fehér ötös és fekete ötös, fehér négyes és fekete hatos). Ezért annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 10, úgy számolható, hogy a kedvező elemi események számát (3) osztjuk az összes elemi esemény számával (36). A valószínűség: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ha az elemi események egyformán valószínűek



$$\text{egy esemény valószínűsége} = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$$

FELADAT

1 **a)** Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy két dobókockával dobva mennyi a két dobás összege. Az első sor mutatja a fekete dobókockával dobott számot, az első oszlop pedig a fehér dobókockával dobott számot. Írd be az üres mezőkbe a két dobás összegét! Néhány mezőt már kitöltöttünk.

	1	2	3	4	5	6
1			4			
2		4				
3				7		
4						10
5	6					
6					11	

b) Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fekete kockán 4, a fehér kockán pedig 1 pont lesz egy dobás után?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy dobásnál a dobott pontok összege 12 lesz?

e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 7? Alátámasztja-e ezt a pármunkában végzett kísérlet eredménye?

f) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 8? Alátámasztja-e ezt a kísérlet eredménye?

g) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege kisebb 5-nél? Alátámasztja-e ezt a kísérlet eredménye?

2 Mekkora annak a valószínűsége, hogy két (színre és méretre is) egyforma szabályos dobókockával dobva a dobott pontok összege

a) 7; **b)** 11; **c)** 6 lesz?

ELMÉLET

Két dobókocka

Egy fekete és egy fehér dobókockával dobva az elemi események száma 36, ami egy 6×6-os táblázatban ábrázolható. Meglepő módon azonban két fekete dobókockával dobva az elemi események száma ugyanúgy 36. Akkor kapunk egyenlően valószínű elemi eseményeket, ha a két „ugyanolyan” dobókockát is megkülönböztetjük, például az egyiket gondolatban megjelöljük. (Fizikai valójában a két dobókocka sohasem teljesen ugyanolyan, mindig megkülönböztethető.)

Például:

Két kockával dobva a dobások összege 2, 3, 4, …, 11 vagy 12 lehet, azaz 11-féle. Azt gondolhatnánk ez alapján, hogy $\frac{1}{11}$ annak a valószínűsége, hogy a dobások összege 7. A dobások összege azonban sokféle módon lehet 7. ($1 + 6$, $2 + 5$, $3 + 4$, $4 + 3$, $5 + 2$, $6 + 1$). Míg például a dobások összege csak egyféle módon lehet 2 ($1 + 1$). Ezek tehát nem azonos valószínűségű elemi események. Akkor kapunk a valószínűségre helyes, azaz a tapasztalat által alátámasztható eredményt, ha a két fekete dobókockát megkülönböztetjük, és 6×6-os táblázatban ábrázoljuk az elemi eseményeket.

FELADAT

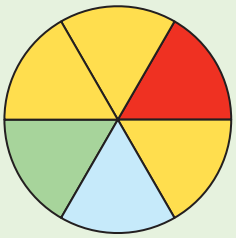
3 (Kompetenciamérés, 2010)

Máté egy korongot sárga, zöld, kék és piros színű körcikkekre osztott. A korong közepére forgó mutatót szerelt. Ha a mutatót jó erősen megpördíti, akkor az néhányszor körbefordul, majd lelassul és megáll az egyik körcikknél. Máté a mutatót 100-szor megpördítette, és minden forgás után feljegyezte, hogy milyen színű körcikknél állt meg. Az eredményeket egy táblázatban összesítette.

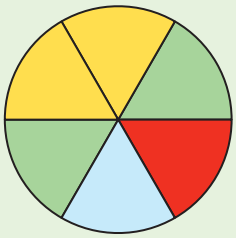
Szín	Találat
Piros	32
Kék	16
Zöld	34
Sárga	18

a) Legnagyobb valószínűséggel melyik lehet Máté korongja a táblázat adatai alapján?

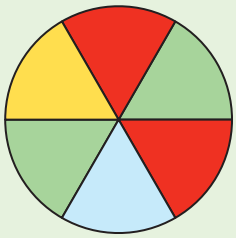
A



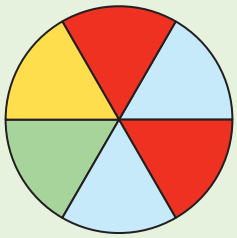
B



C



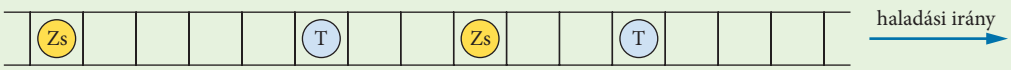
D



b) Számold ki, hogy Máté 100 kísérlete esetében mennyi az egyes színek relatív gyakorisága! Határozd meg a hozzá tartozó korongon az egyes színek valószínűségét! Mennyi az egyes színek esetében a valószínűség és a relatív gyakoriság különbsége?

Szín	Relatív gyakoriság	Valószínűség	Eltérés
Piros			
Kék			
Zöld			
Sárga			

4 Egy társasjátékban Zsófinak is, Tamásnak is két bábuja van még a pályán. A soron következő játékos mindig két kockával dob, majd kiválasztja egyik bábuját, és azzal lelépi a dobott számok összegét. Ha lépése végén olyan mezőre érkezik, ahol az ellenfél bábuja áll, akkor kiüti azt a bábut. Zsófi következik. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő lépésben Zsófi kiütheti Tamás valamelyik bábuját?

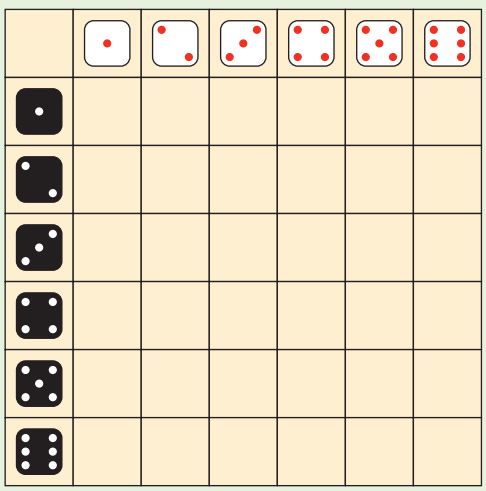


5 Egy társasjáték szerencsekártyáján a következő szöveg olvasható:
„Dobj mindkét kockával! Ha a dobások értéke megegyezik, akkor lépj annyit, mint a két szám szorzata. Ha a két dobás különbözik, akkor a nagyobb számot lépd le.”

a) Töltsd ki a táblázatot úgy, hogy azt mutassa, melyik esetben mennyit kell lépni!

b) A bábunk előtt 4 mezővel áll az ellenfél egyik bábuja. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 4 mezőt lépünk előre, és így ki tudjuk ütni?

c) A bábunk 5 mezőre van a céltól. A beérkezéshez elég áthaladni a célvonalon, nem kell pontosan a célmezőre érkezni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő lépésben legalább 5 mezőt tudunk előre haladni?



HÁZI FELADAT

1 Két különböző dobókockával dobunk. Használd az órai feladat táblázatát!

a) Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét kocka azonos számot fog mutatni?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számok összege nagyobb lesz, mint 9?

c) Minek van nagyobb valószínűsége: annak, hogy az összeg nagyobb, mint 9, vagy annak, hogy kisebb, mint 4?

2 Feldobtunk két különböző színű kockát, a dobott pontok szorzatát pedig táblázatba foglaltuk.

a) Készítsd el a 6×6-os táblázatot, amely megadja, hogy melyik elemi esemény esetén mennyi a dobott számok szorzata!

b) Hány elemi esemény esetén lesz a dobott pontok szorzata 6, és melyek ezek az elemi események? Mekkora *„a dobott pontok szorzata 6”* esemény valószínűsége?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok szorzata négyzetszám (1, 4, 9, …) lesz?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok szorzata nagyobb lesz 10-nél?

3 Egyszerre dobunk fel egy 5, egy 10 és egy 20 Ft-ost.

a) Hányféle kimenete lehet ennek a véletlen kísérletnek?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom pénzérme „írást” fog mutatni?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom érme ugyanazt fogja mutatni?

d) Mennyi a valószínűsége, hogy csak egy érme mutat „írást”, a másik kettő „fejet”?

RÁADÁS

1 Szandra és Juli „kő-papír-olló” játékot játszanak.

a) Készíts a két dobókockás táblázathoz hasonló táblázatot, amely a játék egy körének lehetséges kimeneteleit tartalmazza! Minden rubrikába írd be, hogy az adott eset döntetlen-e, illetve ha nem, akkor melyik tanuló nyer!

b) Mekkora az esély a döntetlenre?

c) Alátámasztja-e a táblázat, hogy ez egy „fair” játék, azaz mindkét játékosnak egyenlő esélye van a győzelemre?

Kő, papír, olló

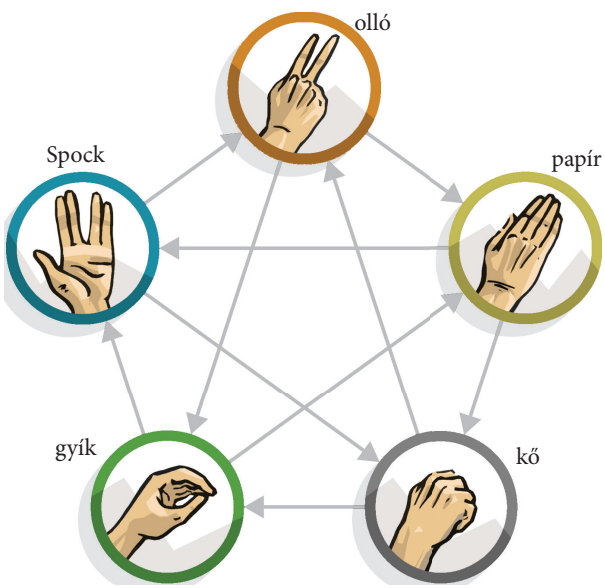
Ketten játszotok: jobb kezetekkel egyszerre mutatjátok a kő, a papír vagy az olló jelét.

- A kő legyőzi az ollót, mert kicsorbítja.
- Az olló legyőzi a papírt, mert elvágja.
- A papír legyőzi a követ, mert becsomagolja.

d) Mekkora a döntetlen esélye a kő-papír-olló-gyík-Spock játékban?

Kő, papír, olló, gyík, Spock

Az olló elvágja a papírt, a papír bevonja a követ. A kő agyonüti a gyíkot, a gyík megmarja Spockot, Spock eltöri az ollót. Az olló lefejezi a gyíkot, a gyík megeszi a papírt, a papír cáfolja Spockot, Spock feloldja a követ, és a kő eltöri az ollót.

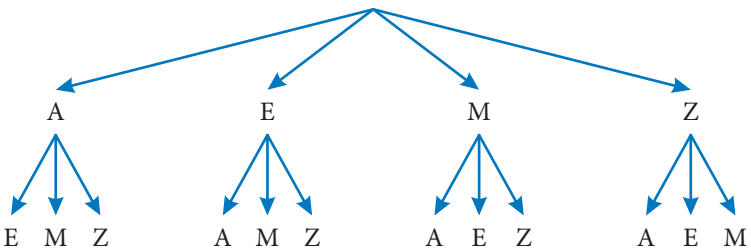


2 Négy kártyalapon a következő betűk szerepelnek:

A	E	M	Z

Véletlenszerűen húztunk a kártyákból egyet, majd visszatevés nélkül, a megmaradt kártyákból még egyet. A kártyákat a húzás sorrendjében letettük egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy értelmes magyar szót raktunk ki?

Megoldás:
Ábrázoljuk gráf segítségével a lehetséges kimeneteleket!



A gráfról leolvasható, hogy 12 elemi esemény van. Ezek egyformán valószínűek, ezért elég azt összeszámolnunk, hogy a 12 lehetőség közül melyek azok, amikor értelmes szót kapunk. Ez 3 esetben történik, értelmes szavak a következők: AZ, EZ, MA. A valószínűség tehát: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

3 Egy dobozban 5 különböző színű golyó van: barna, fehér, kék, piros, sárga. Egymás után két golyót húzunk ki úgy, hogy az elsőnek kihúzott golyót **nem tesszük vissza**.

a) Hány elemi esemény van ebben a véletlen kísérletben? Szemléltesd gráffal!

Mekkora a valószínűsége, hogy

b) az első golyó kék színű lesz;

c) az első golyó nem kék színű lesz;

d) a két kihúzott golyó között nincs piros;

e) a két kihúzott golyó között van piros;

f) az egyik kihúzott golyó sárga, a másik pedig fehér?

4 Oldd meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a második húzás előtt az elsőnek kihúzott golyót **visszatesszük**!

5 Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) az első dobásunk hatos;

b) a második dobásunk lesz az első hatos;

c) a harmadik dobásunk lesz az első hatos;

d) a három dobás összege 6?



57 BIZTOS, LEHETETLEN, VÉLETLEN

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két különböző színű, szabályos dobókockával dobva
a) a dobott pontok összege 16-nál kisebb lesz;
b) a dobott pontok összege 12-nél nagyobb lesz;
c) a dobott pontok összege 5 lesz?

Megoldás

a) Ez az esemény mindenképpen bekövetkezik, vagyis **biztos esemény**. A valószínűsége 1.

b) Ez az esemény egyetlen alkalommal sem következhet be, tehát **lehetetlen esemény**. A valószínűsége 0.

c) Ez az esemény négyféleképpen is bekövetkezhet: *„a dobott pontok összege 5”* esemény négy elemi esemény esetén valósul meg. Mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért a keresett valószínűség 4-szer ekkora, azaz $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2. Egy dobozban 5 különböző színű golyó van: barna, fehér, kék, piros, sárga. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva
a) a golyó piros lesz;
b) a golyó nem piros lesz;
c) a golyó barna vagy kék lesz?

Megoldás

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek száma 5, és ezek mind egyenlően valószínűek. Tehát mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{5}$.

a) A piros golyó húzása elemi esemény, tehát $\frac{1}{5}$ a valószínűsége.

b) Most 4 kedvező elemi esemény van. Ennek az eseménynek a valószínűsége tehát $\frac{4}{5}$.

c) A kedvező elemi események száma 2, ezért az esemény bekövetkezésének valószínűsége $\frac{2}{5}$.

ELMÉLET

1. A **biztos esemény** mindig bekövetkezik, valószínűsége 1.

2. A **lehetetlen esemény** sohasem következik be, valószínűsége 0.

3. Ha az elemi események egyformán valószínűek, és számuk véges, amit jelöljünk n-nel, akkor
   – egy elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége $\frac{1}{n}$;
   – ha k darab olyan elemi esemény van, amikor bekövetkezik az A esemény, akkor az A esemény valószínűsége az elemi esemény valószínűségének k-szorosa: $P(A) = \frac{k}{n}$.

4. Ha két esemény olyan kapcsolatban van egymással, hogy egyszerre sohasem következnek be, ugyanakkor közülük az egyik biztosan bekövetkezik, akkor ezeket **egymást kiegészítő eseményeknek** vagy **komplementer** eseményeknek nevezzük. Ha egy esemény valószínűsége p, akkor komplementer eseményének valószínűsége $1 - p$.
   Például:
   – A *„dobott szám hatos”*, a *„dobott szám nem hatos”*: ezek komplementer események.

FELADAT

1 A 10. a osztályba 22 lány jár és 13 fiú. Egy sorsolás során mindegyikük nevét beleteszik egy kalapba, majd véletlenszerűen 5 nevet húznak. Az első négy név négy lánynak a neve. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó kihúzott név
a) egy fiúnak a neve lesz; **b)** egy lánynak a neve lesz?

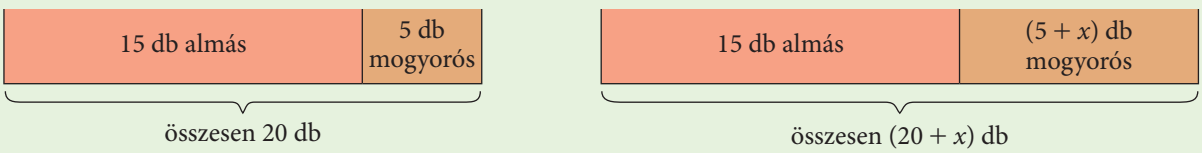
2 Egy dobozban gyöngyök vannak. Ezeknek $\frac{1}{6}$ része fehér, 25%-a piros, $\frac{1}{2}$ része zöld, a többi sárga. A dobozból véletlenszerűen húznak egy gyöngyöt. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a kihúzott gyöngy sárga;
b) a kihúzott gyöngy kék;
c) a kihúzott gyöngy piros vagy zöld;
d) a kihúzott gyöngy nem fekete?



3 Egy zacskóban müzliszeletek vannak. Közülük 15 almás, 5 mogyorós. (Amelyik almás, az nem mogyorós, és fordítva.) Véletlenszerűen kihúzunk egyet.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy mogyorósat húzunk?
b) Mennyi mogyorósat tegyünk a zacskóba, hogy annak a valószínűsége, hogy mogyorósat húzunk, $\frac{2}{5}$ legyen?



4 Az 1; 2; 3 számkártyákból véletlenszerűen kirakunk egy háromjegyű számot. Mennyi a valószínűsége, hogy ez a szám páratlan?

5 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe az alábbi eseményeket a valószínűségeik szerint! (A dobókockák szabályosak, a pénzérméken csak azt figyeljük, hogy *Fej* vagy *Írás* látható.)

A	Egy dobókockával dobunk. Annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye osztója 5-nek.
B	Egy dobókockával dobunk. Annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye kisebb, mint 5.
C	Két kockával dobunk. Annak a valószínűsége, hogy a dobások összege 5.
D	Két kockával dobunk. Annak a valószínűsége, hogy a dobások összege kisebb, mint 5.
E	Két pénzérmét feldobunk. Annak a valószínűsége, hogy mindkét érmén *Fej* látható.
F	Két pénzérmét feldobunk. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik érmén *Írás* látható.
G	Két pénzérmét feldobunk. Annak a valószínűsége, hogy az egyik érmén *Fej*, a másikon *Írás* látható.
H	Három pénzérmét feldobunk. Annak a valószínűsége, hogy mindhárom érmén más látható.

HÁZI FELADAT

1 Egy repülőgépjárat 200 utasa közül 94-en magyar állampolgárok, 72-en angolok, 20-an hollandok és 14-en németek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utas állampolgársága

a) magyar;
b) holland vagy német;
c) nem angol;
d) kínai?

2 Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szabályos dobókockával dobva a dobás eredménye

a) osztója 60-nak?
b) osztható 60-nal?

3 Egy dobozban 60 golyó van, egy részük fehér, másik részük fekete. Véletlenszerűen húzva egy golyót a fehér golyó húzásának valószínűsége 0,4, a fekete golyó húzásának valószínűsége 0,6.

a) Hány fehér golyó van a dobozban?
b) Hány fehér golyót kellene még beletenni a dobozba, hogy a helyzet megforduljon, és a fehér golyó húzásának valószínűsége legyen 0,6?
c) Hány fekete golyót kellene kivenni a dobozból (az eredeti 60 golyó közül), hogy a helyzet megforduljon, és a fehér golyó húzásának valószínűsége 0,6 legyen?

58 VALÓSZÍNŰSÉG A GYAKORLATBAN

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 36 fős osztályban 9 diák tanulja emelt szinten a matematikát, 18 a történelmet, s ezek közül 3 diák mindkét tantárgyat. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák

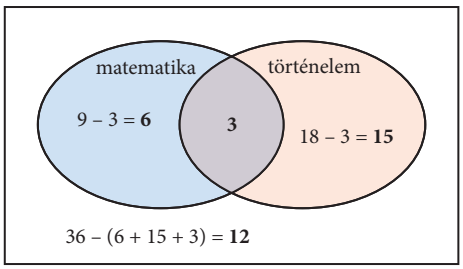
a) emelt szinten tanulja a történelmet;
b) mindkét tárgyat emelt szinten tanulja;
c) egyik tantárgyat sem tanulja emelt szinten;
d) csak a történelmet tanulja emelt szinten;
e) csak az egyik tantárgyat tanulja emelt szinten, a másikat nem?

Megoldás

a) Ha harminchat diákból 18 tanulja emelt szinten a történelmet, akkor a keresett valószínűség $\frac{18}{36} = 0{,}5$.

b) $\frac{3}{36} \approx 0{,}083$.

c) Először tudnunk kellene, hogy pontosan hány diák nem tanulja emelt szinten egyik tantárgyat sem. Ehhez készíthetünk Venn-diagramot, vagy használhatjuk a „logikai szita” módszert is: a 36 diák közül zárjuk ki azokat, akik valamelyik tantárgyat emelt szinten tanulják: $36 - 9 - 18 = 9$; azokat, akik mindkét tárgyat emelt szinten tanulják, kétszer zártuk ki, holott csak egyszer kellett volna. A helyes válasz így: $9 + 3 = 12$.



Tehát 12 diák nem tanulja egyik tantárgyat sem emelt szinten, így a keresett valószínűség $\frac{12}{36} \approx 0{,}333$.

d) Használjuk az előző feladat ábráját! A valószínűség $\frac{18-3}{36} = \frac{15}{36} \approx 0{,}417$.

Ebben a feladatban máshogy is gondolkodhattunk volna: annak a valószínűsége, hogy egy diák emelt szinten tanulja a történelmet, az a) feladat szerint $\frac{18}{36}$, de ebbe beleszámoltuk azt a $\frac{3}{36}$ valószínűséget is, hogy a diák mindkét tantárgyat emelt szinten tanulja. Annak valószínűsége tehát, hogy csak a történelmet tanulja emelt szinten, a maradék: $\frac{18}{36} - \frac{3}{36} = \frac{15}{36} \approx 0{,}417$.

e) A Venn-diagram alapján: $\frac{6+15}{36} = \frac{21}{36} \approx 0{,}583$. Vagy valószínűségekkel: $\frac{6}{36} + \frac{15}{36} = \frac{21}{36} \approx 0{,}583$.

FELADAT

1 Egy biztosítótársaság felmérést készített 1000 véletlenszerűen kiválasztott ügyfele bevonásával. Az 1000 ügyfél közül 611-nek gépjármű-biztosítása, 389-nek lakásbiztosítása és 96-nak mindkétféle biztosítása van a társaságnál.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezen 1000 ügyfél közül egyet véletlenszerűen kiválasztva ennek az ügyfélnek

a) van gépjármű-biztosítása a társaságnál;
b) a kétféle biztosítás közül egyik fajtával sem rendelkezik;
c) a kétféle biztosítás közül legalább az egyik fajtával rendelkezik;
d) csak az egyik fajta biztosítása van, a másik nincs?

2 Az alábbi táblázat egy vérellátó központ nyilvántartása arról, hogy a legutóbbi véradó akciójuk során hány egységet kaptak az egyes vércsoportokból a különböző donoroktól (1 egység = 4,5 deciliter).

	Vércsoport			
	0	A	B	AB
Rh-pozitív	161	73	44	14
Rh-negatív	30	14	8	2

Véletlenszerűen kiválasztva egy donort mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) a donor AB-s vagy B-s vércsoportú;

b) a donor 0-s vércsoportú vagy Rh-pozitív;

c) a donor nem AB vércsoportú, és nem is Rh-negatív?

3 Öt barátnő érkezik az előadóterembe, köztük Anna és Kati. Véletlenszerű sorrendben, egyesével lépnek a terembe. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) Anna lép be elsőnek?

b) Anna és Kati valamilyen sorrendben egymás után lépnek be?

c) Anna és Kati nem egymás után lépnek be?

4 Ha történelemből veled együtt már csak hatan nem feleltetek, és a mai órán két ember felel egymás után, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) te leszel az első felelő;

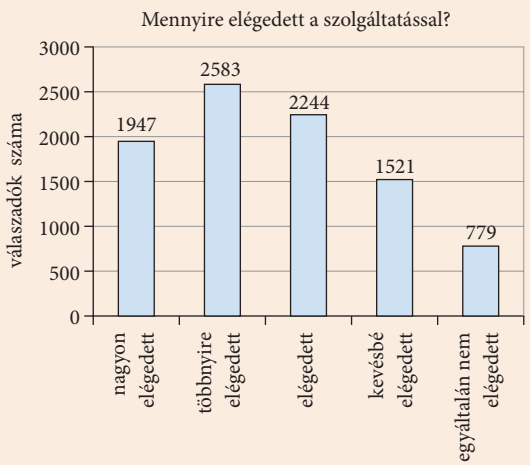
b) te leszel a második felelő;

c) felelni fogsz a mai órán;

d) te nem fogsz felelni a mai órán?

HÁZI FELADAT

1 Egy internetszolgáltató társaság nagyszámú ügyfél körében elvégzett, reprezentatívnak mondható felmérést készített arról, hogy ügyfeleik mennyire elégedettek a szolgáltatásaikkal. Az eredményeket a grafikon szemlélteti.



Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ügyfél

a) nagyon elégedett a szolgáltatással;

b) csak kevésbé vagy egyáltalán nem elégedett?

2 Egy egyetem 860 elsőéves hallgatója közül 312-en gazdasági szakra járnak, és az elsőévesek között 452 nő van. Az elsőéves hallgatónők közül 195-en járnak gazdasági szakra. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott elsőéves egyetemista

a) gazdasági szakra jár;

b) gazdasági szakra járó hallgatónő;

c) nem gazdasági szakra járó férfi hallgató;

d) gazdasági szakra járó férfi hallgató?

3 A táblázat egy repülőtér különböző parkolóiban álló autók számát mutatja.

	1. zóna	2. zóna	3. zóna	4. zóna
A parkoló	43	19	18	5
B parkoló	65	41	23	2
C parkoló	39	22	15	11

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő autó, amelyik elhajt a parkolóból

a) az A parkoló 1. zónájából jön;

b) a B parkolóból jön;

c) nem a 4. zónából jön;

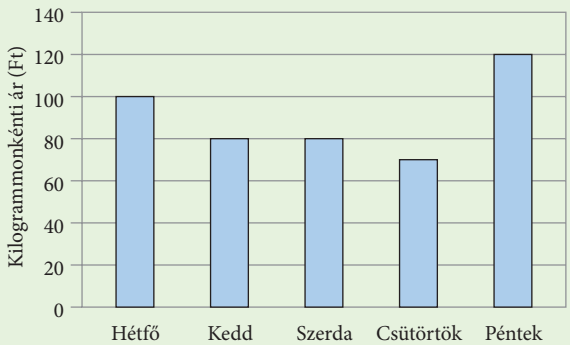
d) a C parkolóból vagy a 3. zónából jön?

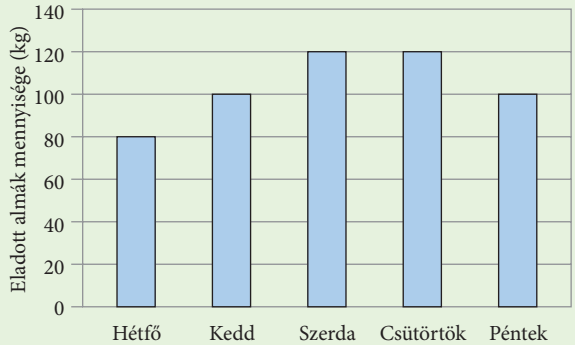
59 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 (Kompetenciamérés, 2016)

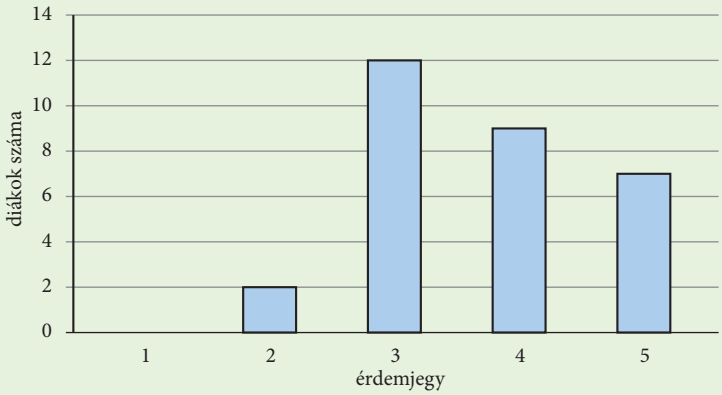
Jánosék almát árulnak a piacon. Az első diagram azt mutatja, hogy az egyik héten melyik napon hány forintért árulták az alma kilóját, a második diagram pedig azt, hogy az adott napon hány kilogramm almát adtak el.





Mennyi volt ezen öt nap alatt a napi bevételük átlaga?

2 (Érettségi feladat, 2017)



Egy 30 fős osztály matematika érettségi vizsgájának érdemjegyei olvashatók le az alábbi diagramról. Add meg az osztály matematika érettségi érdemjegyeinek átlagát, mediánját és móduszát!

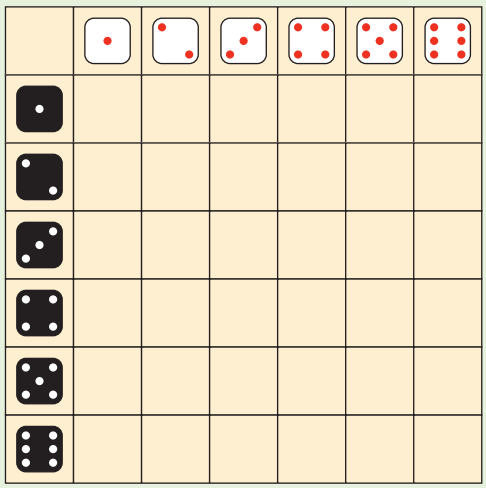
3 (Érettségi feladat, 2009)

Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett szám

a) négyzetszám;

b) számjegyei megegyeznek;

c) számjegyeinek összege legfeljebb 9?



4 Egy cég 10 600 kg terméket gyárt az egyik évben. A második évben 410 kg-mal többet termelnek.

a) Hány kg terméket kellene gyártani a következő évben, hogy ugyanannyival nőjön a termelés?

b) Hány kg terméket kellene gyártani a következő évben, hogy ugyanannyiszorosára nőjön a termelés?

5 15 szám átlaga 4,2. Hozzávettünk még egy számot, így az új átlag már 5. Melyik számot vettük hozzá?

6 Véletlenszerűen kiválasztunk egy pozitív, háromjegyű egész számot. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) osztható 5-tel;

b) kisebb, mint 500;

c) négyzetszám?

7 (Kompetenciamérés, 2008)
Egy kiállítás bejáratánál véletlenszerűen megkérdeztek 300 kilépő vendéget, hogy mi a véleményük a kiállításról. A válaszokat az alábbi táblázat foglalja össze.

Korcsoport	Tetszett	Nem tetszett	Nem gyakorolt rá különösebb hatást
25 évesnél fiatalabbak	55	30	15
legalább 25, legfeljebb 46 évesek	41	39	20
46 évesnél idősebbek	32	60	8

Ha ebből a 300 vendégből véletlenszerűen kiválasztunk egyet, akkor mi a valószínűsége, hogy

a) tetszett neki a kiállítás?

b) 46 évesnél idősebb?

c) 46 évesnél nem idősebb és nem tetszett neki a kiállítás?

TUDÁSPRÓBA

1 Egy ellenőrzés során megmérték 20 csomag rizsnek a tömegét. A mérések eredményeit a következő táblázat tartalmazza:

mérési eredmény (g)	981	985	997	998	1001	1002	1007
darabszám	1	2	5	3	3	5	1

Mennyi a mérési eredmények átlaga?

2 Ismert egy társaság hét tagjának életkora:
14, 15, 15, 16, 19, 20, 20
Egészítsd ki a 7 adatot még egyetlen adattal úgy, hogy a 8 adat

a) módusza 15 legyen!

b) mediánja 17 legyen!

c) átlaga 17,5 legyen!

3 Egy matematika versenyen a Csorba utcai iskola indulóinak átlagpontszáma 34 lett, a Konkoly utcai iskola indulóinak átlagpontszáma pedig 42. A két iskola tanulóinak együttes átlagpontszáma 36 volt.

a) Melyik iskolából indultak többen?

b) Mennyi induló volt ezekből az iskolákból, ha 40-nel többen indultak az egyik iskolából, mint a másikból?

4 Két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a dobott számok összege 8;

b) a dobott számok összege nagyobb, mint 8;

c) a dobott számok összege legalább 8?

5 Táblázatba foglaltuk, milyen könyvek sorakoznak egy iskolai könyvtár egyik könyvespolcán.

magyar szerző				külföldi szerző			
modern		klasszikus		modern		klasszikus	
krimi	regény	krimi	regény	krimi	regény	krimi	regény
12	11	5	14	43	38	21	16

Véletlenszerűen kiválasztunk egy könyvet. Mennyi a valószínűsége, hogy ez egy

a) modern könyv;

b) regény;

c) nem klasszikus és nem regény?

FELADAT

1 Melyik két pozitív valós számról van szó, ha
a) számtani közepük 15, mértani közepük 12;
b) számtani közepük 22,5, mértani közepük 18?

2 Egy kamarakórus tagjai közül mindenki legalább 40 éves. A kórus legidősebb tagja 54 éves. Az átlagéletkor 43 év. Az egyik próbára csak a korelnök nem tudott eljönni, s ekkor az átlagéletkor 42 év volt. (Az életkorok mind egész számok.)
a) Hányan vannak a kórusban?
b) Legfeljebb hány éves a második legidősebb kórustag?
c) Legalább hány éves a második legidősebb kórustag?

3 A Mikulás zsákjában 12 mogyorós csoki és még valamennyi marcipános csoki lapult. Ha még 6 marcipános csokit tesz a Mikulás a zsákba, akkor $\frac{1}{15}$-del csökken annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen húzva a zsákból mogyorósat választ. Hány mogyorós csoki van a Mikulás zsákjában?

4 Egy játékos vetélkedőn nyolc résztvevő van: öt lány és három fiú. A soron következő feladatra véletlenszerűen kisorsolnak három játékost. Mennyi a valószínűsége, hogy a kisorsolt játékosok között van fiú?

5 Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Az eredményeket a dobások sorrendjében felírjuk egymás után, így egy háromjegyű számot kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott háromjegyű szám
a) osztható 4-gyel;
b) számjegyei csökkenő sorrendben állnak egymás után?

6 Egy kollégista fiú arról panaszkodott édesanyjának, hogy folyton elvész fél pár zoknija. Ezért édesanyja vett neki 9 pár egyforma kék csíkos zoknit és 6 pár egyforma fekete zoknit. Ezeket a fiú egy közös zoknizsákban tartotta.
a) Első reggel a fiú véletlenszerűen belenyúl a zsákba és kivesz két zoknit. Mennyi a valószínűsége, hogy azonos színű zoknikat húz ki?
b) Ha az első nap egy pár kék csíkos zoknit használt (és azt nem tette vissza a zsákba), akkor mennyi a valószínűsége, hogy másnap két különböző zoknit húz?



7 (Érettségi feladat, 2010)
Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak; és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levélben egy fényképet is.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?
b) Az alábbiak közül melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége?
A) Senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt.
B) Pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel.

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Mennyi az ismeretlen szám, ha a számok átlaga 44?

a) 35; x **c)** 33; 44; 45, x

b) -2; y **d)** -2; -2; 105, 105; x

2 (Kompetenciamérés, 2004)

A táblázat azokat a pontokat tartalmazza, amelyeket Miklós öt szergyakorlatára kapott a három pontozóbírótól egy tornaversenyen.

Szer	1. bíró	2. bíró	3. bíró
Ugrás	7,8	7,8	8,1
Talaj	9,2	8,2	8,1
Korlát	9,1	8,5	9,1
Ló	8,7	8,3	7,3
Gyűrű	7,4	7,6	7,5

Határozd meg, hogy az egyes szereken mennyi lett Miklós átlagpontszáma!

3 (Kompetenciamérés, 2019)

Zedváros főutcáján, az iskola előtti gyalogátkelőnél forgalomszámlálást végeztek. A következő táblázatban összesítették az adatokat.

Óra	Autó	Teherautó és busz	Kerékpár
7.00 – 8.00	1200	150	500
8.00 – 9.00	1000	200	300

a) Akkor tesznek lámpát az iskola előtti gyalogátkelőhöz, ha a 7.00 és 8.00 óra között áthaladó járművek (személyautó, teherautó, busz és kerékpár) számának percenkénti átlaga meghaladja a 30 járművet. Tesznek-e lámpát a gyalogátkelőhöz?

b) Percenként átlagosan hány kerékpár haladt át a gyalogátkelőnél 7.00 és 9.00 óra között?

4 (Kompetenciamérés, 2019)

Marci a számára legkedvezőbb mobildíjcsomagot szeretné kiválasztani, ezért néhány hónapon át megfigyelte telefonálási, SMS-ezési és mobilinternet-használati szokásait. Ezt mutatja a következő táblázat.

	Január	Február	Március
Telefonálás (perc)	75	45	100
SMS-küldés (db)	52	78	43
Mobilinternet (GB)	1,7	0,8	1,4

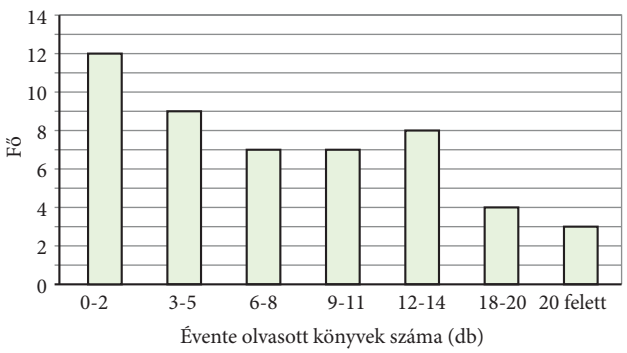
A TELE-NET Mobil Társaságnál a következő csomagokból lehet választani.

	A csomag	B csomag	C csomag	D csomag
Telefonálás (perc)	100	70	150	90
SMS (db)	50	70	90	60
Mobilinternet (GB)	1	1,5	2	3
Ár (Ft)	3500	4000	4500	5000

Melyik csomagot válassza Marci, ha azt szeretné, hogy minden szempontból többet tartalmazzon a háromhavi átlagnál, és a lehető legolcsóbb legyen?

5 (Kompetenciamérés, 2011)

Egy felmérés során ötven 14 éves fiatalt kérdeztek meg arról, hogy évente körülbelül hány könyvet olvasnak el. A felmérés eredményét szemlélteti a diagram.



A megkérdezett fiatalok hány százaléka olvas el havonta átlagosan legalább egy könyvet?

6 A Kis Boltban komoly vita alakult ki egy most bevezetésre kerülő „sikertermék” jövőbeni árának alakításáról.

Az üzletvezető azt javasolta, hogy az alacsony „bevezető” árat két hónap múlva emeljék fel 20%-kal, majd újabb két hónap múlva további 10%-os emelést hajtsanak végre. Az üzletvezető-helyettes szerint inkább mindkét alkalommal az „átlagos”, 15%-os áremelést hajtsák végre. Szerinte így is ugyanaz lesz négy hónap után a termék ára. Tegyél igazságot a vitában!

7 Árpási úr fizetése egyik hónapban 262 ezer Ft volt. A következő hónapban ennél 8%-kal többet kapott. A harmadik hónapban pedig 8%-kal kevesebbet, mint a második hónapban. Mennyi volt ebben a három hónapban az átlagfizetése?

8 Tóth úr jövedelme januártól júniusig nettó 268 ezer Ft volt. Ekkor fizetésemelést kapott: 12%-kal megnőtt a bére. Majd szeptemberben megint emeltek a fizetésén, ekkor 5%-kal. Mennyi volt ebben az évben az átlagfizetése?

9 A két szám mértani közepe 30. Mennyi az ismeretlen szám?

a) 25; x **b)** y; 30 **c)** z; 9 **d)** 0,1; w

10 Bankban lekötöttünk 100 000 Ft-ot. Két év múlva 110 000 Ft volt a számlánkon.
Mekkora összeg volt a számlánkon félidőben, az első év elteltével, ha mindkét évben ugyanannyiszorosára nőtt a befektetett összeg?

11 Egy téglalap oldalai 2,7 cm és 7,5 cm.

a) Mekkorák annak a négyzetnek az oldalai, melynek a kerülete ugyannyi, mint a téglalap kerülete?

b) Mekkorák annak a négyzetnek az oldalai, melynek a területe ugyannyi, mint a téglalap területe?

12 Egy kenyérgyár új keverőgépet szerez be. A gép vételára 3,2 millió Ft. A gép értéke az első évben 16%-kal, a második évben újabb 5%-kal csökken.

a) Mennyit ért a gép egy, illetve két év elteltével?

b) Hány százalékot veszített eredeti értékéből a gép 2 év alatt?

c) Egy dagasztó gép értéke ugyancsak 3,2 millió Ft volt, majd a két év elteltével is megegyezett az értéke a keverőgép értékével. De a dagasztógép értéke a két évben egyenlő százalékkal csökkent. Mennyi volt az értéke az első év elteltével?

13 Az elektronikus naplóban többféle súlyozás állítható be az osztályzatok értékelésére. Az egyik lehetőség szerint a dolgozatra adott jegy kétszeres súllyal szerepel. Egy diák jegyei matematikából a következők: 5; 4; 5; 3; 5; 5; 4. Ezek közül a két négyes az, amit dolgozatra kapott. Számítsd ki a jegyek súlyozott átlagát 2 tizedesjegy pontossággal!

14 (Kompetenciamérés, 2015)
Balázs biológia szakos hallgató az egyetemen. A sejtbiológia tantárgy félévi jegyének a meghatározásához a következő átlagot számítják ki:

$$\text{Átlag} = \frac{\text{házi dolgozat jegye} + 2 \cdot \text{zárthelyi dolgozat jegye} + 3 \cdot \text{vizsgadolgozat jegye}}{6}.$$

Balázs a házi dolgozatára hármas, a zárthelyi dolgozatára kettes érdemjegyet kapott, a vizsgadolgozat még hátravan. Az a diák kap félévkor négyest, akinek az átlaga nagyobb vagy egyenlő, mint 3,51 és kisebb, mint 4,51. Lehet-e még négyes Balázs félévi jegye?

15 Egy diák angol jegyeinek átlaga 4,375. Még egy dolgozatot fognak írni. Ahhoz, hogy jelest kapjon angolból, a tanár legalább 4,5-es átlagot vár el. A diák kiszámolta, hogy sajnos akkor ő már nem érheti el a jelest. Legalább hány jegye van eddig angolból?

16 (Érettségi feladat, 2016, emelt szint)
Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ± 10 dkg". (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőségellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak 8 csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. (Az adatok átlagos abszolút eltérése azt jelenti, hogy az 5 kg-tól vett eltérések abszolútértékének az átlagát számoljuk ki.) A mérések eredménye a következő:

a mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

A mérések alapján engedélyezik-e az almák árusítását?

17 Melyik két pozitív valós számról van szó, ha

a) számtani közepük 15, mértani közepük 15;

b) számtani közepük 17, mértani közepük 15?

18 Két szám számtani közepe 8,5. Melyik számot vegyük hozzá harmadiknak, hogy a három szám számtani közepe az előző számtani középhez képest

a) ne változzon;

b) 1,5-del nagyobb legyen;

c) 1,5-szeresére változzon?

19 Két szám számtani közepe 10. Az egyik számot megnöveljük 8-cal. Hogyan változik meg a számtani közép?

20 Két pozitív szám különbsége 20. Számtani közepük 2-vel nagyobb, mint a mértani közepük. Melyik ez a két szám?

21 (Kompetenciamérés, 2011)
A következő táblázat az aranylabdás portugál labdarúgó, Luis Figo karrierjének néhány adatát tartalmazza az 1995 és 2005 közötti időszakról.

Klub	Szezon	Mérkőzések száma	Rúgott gólok száma
FC Barcelona	1995–96	53	9
	1996–97	53	7
	1997–98	46	6
	1998–99	50	9
	1999–00	47	16
Real Madrid	2000–01	49	14
	2001–02	44	11
	2002–03	48	12
	2003–04	55	13
	2004–05	43	7

a) Átlagosan hány meccsen játszott Figo évente, ebben az időszakban, ebben a két csapatban?
b) Melyik szezonban lett a legjobb az egy meccsre jutó gólátlaga?
c) Az egy szezon alatt rúgott gólok számának mennyi a mediánja, módusza és átlaga ebben a 10 évben?

22 Ha egy nyolcoldalú dobó-oktaéderrel dobunk, az eredmény egy 1 és 8 közötti egész szám. Egy dobássorozat: 2, 4, 4, 6, 4, 1, 7, 8, 7, 3, 1, 3, 5, 5, 8. Határozd meg a dobások átlagát, móduszát, mediánját!

23 12 szám módusza 3, átlaga 4. Hozzávettünk még egy számot, így az átlag 5-re növekedett. Melyik számot tettük a számsokasághoz? Mit mondhatunk az új számsokaság móduszáról?

24 (Érettségi feladat, 2006)
Egy márciusi napon öt alkalommal mérték meg a külső hőmérsékletet. A kapott adatok átlaga 1 °C, mediánja 0 °C. Adj meg öt ilyen lehetséges hőmérsékletértéket!

25 Táblázatba foglaltuk egy kirándulócsoport tagjainak életkorát.

életkor	14	15	16	17	18	20	21
gyakoriság	3	8	7	3	2	1	1

Add meg az adatok móduszát, mediánját, terjedelmét és átlagát!

26 Egy 32 fős osztályban mindenki tanul idegen nyelvet. Összesen 16 diák tanul egy, 11 diák kettő, a többiek pedig 3 idegen nyelvet.
a) Készíts gyakorisági táblázatot arról, hogy hányan tanulnak 1, 2, illetve 3 idegen nyelvet!
b) Átlagosan hány idegen nyelvet tanulnak az osztály tanulói?
c) A tanult idegen nyelvek számából álló adatsornak mennyi a módusza és a mediánja?

27 Adj meg 10 pozitív egész számot úgy, hogy egyetlen móduszuk 4, mediánjuk 5, terjedelmük 9, átlaguk 5,1 legyen!

28 Egy hat elemből álló adathalmaz minden eleme egy természetes szám. A minta mediánja 10,5, módusza 11, terjedelme 6, átlaga pedig 10,5. Határozd meg az adathalmaz elemeit!

29 (Érettségi feladat, 2013, emelt szint)
Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a {0; 1; 2} halmaznak.
a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32?
b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,4?
c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza 1, ha az átlaguk 0,62?

30 Szabályos dobókockával dobunk egyszer. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám
a) prímszám;
b) osztója 6-nak;
c) többszöröse 3-nak?

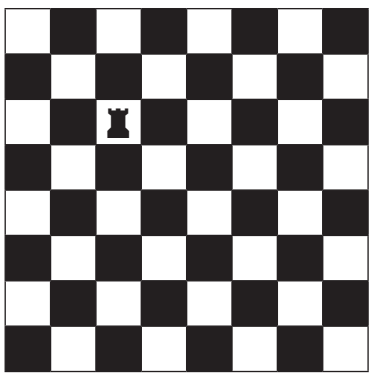
31 A pozitív kétjegyű egész számokból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám
a) páratlan;
b) négyzetszám;
c) kisebb, mint 50?

32 Egy háromjegyű pozitív egész számot véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy 3-mal osztható lesz?

33 (Érettségi feladat, 2007)
A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható?

34 Egy mérkőzés szünetében sorsolást tartanak. Két nézőtéri helyet húznak egy kalapból (visszatevés nélkül), és a kihúzott helyen ülő két néző ingyen jegyet kap egy következő mérkőzésre. Az első húzás során nem azt a helyet húzzák ki, ahol Tamás ül.
Tamás erre ezt mondja: – „Nem baj, most még nagyobb az esélyem, hogy az én helyemet húzzák ki, mint az első húzásnál volt."
Igaza van-e Tamásnak?

35 A sakktáblán az ábra szerint elhelyezünk egy bástyát.



a) Ha véletlenszerűen elhelyezünk a tábla valamelyik üres mezőjére egy másik bábut, mennyi a valószínűsége, hogy úgy tettük le, hogy ütésben áll?
b) Hogyan változik ez a valószínűség, ha eredetileg máshová helyeztük a bástyát?

36 Mennyi a valószínűsége, hogy két dobókockával dobva
a) a dobott számok összege 1?
b) a dobott számok összege 2?
c) a dobott számok összege 3?
d) a dobott számok összege 7?
e) a dobott számok összege 2 vagy 7?

37 A Catan telepesei című társasjátékban két dobókockával dobunk egyszerre. Ha a dobott pontok összege hét, akkor senki sem jár jól, hanem a szerencsétlenséget okozó „rabló" nevű bábut kell mozgatni. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobás után a „rabló" lép?

38 A társasjátékban Bence bábuja 5 mezővel áll Dönci bábuja mögött.
a) Két kockával dobhat, s a dobott pontok összegét leléphetni. Mennyi a valószínűsége, hogy megelőzi Döncit?
b) Két kockával dobhat, s bármelyik dobása eredményét leléphetni, de csak az egyiket, nem az összegüket. Mennyi a valószínűsége, hogy megelőzi Döncit?

39 Két dobókockával dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy a második kockával ugyanazt dobjuk, mint az elsővel?

40 Mennyi annak a valószínűsége, hogy két kockával dobva a dobott számok különbsége több, mint 3 (egyenlők esetén a különbség 0, egyébként a nagyobb dobásból vonjuk ki a kisebbet)?

41 Egy társasjátékban a lépések számához nem dobókockát használnak, hanem szerencsekereket. A megpörgetett szerencsekerék 7-félét mutathat, az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok valamelyikét, mindegyiket egyforma valószínűséggel.
a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pörgetés eredménye 2 vagy 7?
b) Kétszer egymás után megpörgetjük a kereket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két pörgetés különbsége páros?
c) Kétszer egymás után megpörgetjük a kereket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem lesz mind a két pörgetés hetes?

42 Egy dobozban 42 fehér korong van. Mennyi pirosat tegyünk mellé, hogy annak a valószínűsége, hogy fehéret húzunk, 0,84 legyen?

43 Egy dobozban 18 mentolos és 25 savanyú cukor volt. Karcsi megevett néhány mentolosat, így annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva savanyú cukrot választ, $\frac{5}{8}$ lett. Hány cukrot evett meg Karcsi?

44 Színes gyöngyök vannak egy zsákban. Ezeknek $\frac{1}{6}$ része fehér, 30%-a piros, $\frac{1}{3}$ része zöld, a többi sárga. A zacskóból véletlenszerűen húzunk egy gyöngyöt. Mennyi a valószínűsége, hogy
a) a kihúzott gyöngy sárga;

b) a kihúzott gyöngy lila;
c) a kihúzott gyöngy piros vagy fehér;
d) a kihúzott gyöngy nem piros?

45 Tombolasorsoláson 125 szám közül húznak ki 10-et. Az első kilenc kihúzott számmal nem nyertünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő húzással nyerünk, ha mindenki csak egy szelvénnyel játszik?

46 A 32 lapos magyar kártyában osztottak nekünk két lapot, egy tök ászt és egy makk felsőt. Maradt a pakliban 30 lap. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő lap, amit kapunk, az tök? (A 32 lapos magyar kártyában négyféle „szín" van: piros, zöld, makk és tök. Mindegyik színből 8 különböző lap van.)

47 Egy osztály tanulói közül véletlenszerűen választva egy felelőt $\frac{1}{3}$ a valószínűsége, hogy a tanár fiút választ. Hétfőn hiányzik 4 lány, így ha a tanár a jelenlévők közül véletlenszerűen választ egy felelőt, akkor $\frac{3}{8}$ a valószínűsége, hogy fiú felel. Hányan vannak az osztályban?

48 Hat gyerek, köztük Tibi és Nóri, cirkuszba mennek. Egymás mellé kapnak hat jegyet. Ha véletlenszerűen ülnek le a helyekre, akkor mi a valószínűsége, hogy
a) Tibi ül a jobbról a harmadik helyen;
b) Nóri ül valamelyik szélső helyen;
c) Tibi és Nóri egymás mellett ülnek;
d) Tibi és Nóri nem ülnek egymás mellett?

49 Ha 10 gyerek, köztük Bence és Dönci sorba áll, menynyi a valószínűsége, hogy ők ketten nem kerülnek egymás mellé?

50 Egy tálra 6 marcipános, 5 vaníliás és 4 csokoládés bonbon van kirakva. Három gyerek véletlenszerűen választ fejenként egy bonbont a tálról. Mennyi a valószínűsége, hogy három ugyanolyan ízűt választanak?

51 (Kompetenciamérés, 2014)
Ildikó és Judit mindketten felírják 1-től 4-ig a számokat egy-egy papírdarabra. Ezután mindketten kihúznak egyet-egyet a számaik közül. Aki nagyobb számot húz, az mosogat aznap. Ha ugyanazt a számot húzzák, akkor megosztják a munkát. Mekkora a valószínűsége, hogy valamelyikük egyedül fog mosogatni?

52 Egy tálban kétféle gyümölcs van, alma és körte. Ha véletlenszerűen kiveszünk egyet, akkor 0,4 annak a valószínűsége, hogy körtét választunk. Ha azonban 3 körtét még a tálra teszünk, és utána húzunk egyet véletlenszerűen, akkor 0,5 annak a valószínűsége, hogy körtét választunk. Eredetileg hány alma és hány körte volt a tálon?

53 Egy zacskóban piros, valamint kék papírba csomagolt cukrok vannak, összesen 50 szem. Ha még öt szem pirosat beletennénk a zacskóba, akkor annak a valószínűsége, hogy elsőre pirosat húzunk, $\frac{4}{100}$-dal megnőne. Hány piros és hány kék cukor van a zacskóban?

54 A francia kártya egy paklijából a négy ászt (pikk, kőr, káró és treff ászt) véletlenszerű sorrendben letesszük sorban egymás mellé az asztalra.



a) Összesen hány különböző sorrendben helyezkedhet el a négy ász?
b) Hány olyan sorrend van, amelyben a pikk és a kőr ász egymás mellett van?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy az ászokat véletlenszerűen lerakva a pikk és a kőr ász egymás mellé kerül?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy az ászokat véletlenszerűen lerakva a pikk és a kőr ász nem kerül egymás mellé?

55 Egy dobozban mogyorós és epres müzliszeletek vannak, mindegyik csakis az egyik ízesítéssel rendelkezik, összesen 50 darab. Ha kiveszünk 2 db mogyorósat és 3 db epreset, akkor annak a valószínűsége, hogy epreset húzunk, feleannyi lesz, mint annak a valószínűsége, hogy mogyorósat húzunk. Eredetileg hány szelet volt mogyorósból és hány szelet volt epresből?

56 Egy zacskóban háromszor annyi zselés szaloncukor van, mint nugátos. Ha még 22 szem nugátosat hozzárakunk, akkor $\frac{9}{25}$ lesz annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen húzva nugátosat húzunk. Mennyi szaloncukor volt eredetileg a zacskóban?

60 EKVIVALENS EGYENLETEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hasonlítsuk össze az egyenleteket! Ugyanazok-e a megoldásaik a valós számok halmazán?

a) $x^2 = 4$; $x^2 - 4 = 0$; $|x| = 2$

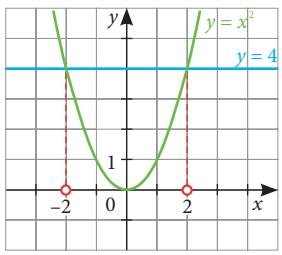
b) $x + 3 = 7$ és $(x + 3)^2 = 49$

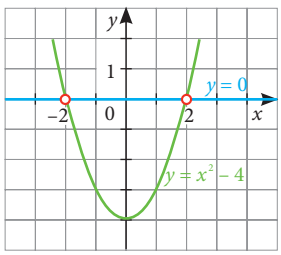
Megoldás:

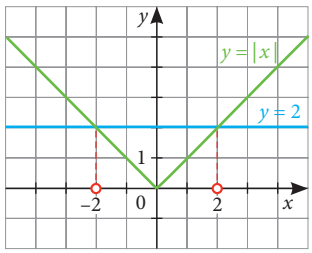
a) $x^2 = 4$; $x^2 - 4 = 0$; $|x| = 2$

Mindegyik egyenletnek két gyöke van: a 2 és a -2.

Ábrázoltuk grafikonon is az egyenleteket:







Az egyenletek gyökei megegyeznek. Azt mondjuk erre, hogy ezek az egyenletek **ekvivalensek** a valós számok halmazán.

b) $x + 3 = 7$ és $(x + 3)^2 = 49$

Az első egyenlet megoldása $x = 4$. Ez természetesen megoldása a második egyenletnek is, de annak van egy másik megoldása is!

$(x + 3)^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad x + 3 = 7$ vagy $x + 3 = -7$.

Ebből: $x = 4$ vagy $x = -10$.

Ez a két egyenlet **nem ekvivalens** egymással a valós számok halmazán.

FELADAT

1 Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképletéből kimaradt néhány szám. Melyek a hiányzó számok? $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \square ac}}{\square a}$

2 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán, majd vond ki a nagyobbik gyökből a kisebbiket! A különbséghez tartozó betűkből egy magyar város neve rakható ki. Melyik ez a város?

$x^2 - 9x + 8 = 0$	6 Á	7 R	8 Ő
$x^2 - 7x - 30 = 0$	13 I	14 E	15 P
$4x^2 + 16x - 65 = 0$	7 E	8 P	9 Z
$4x^2 + 20x - 11 = 0$	5 A	6 C	7 G

ELMÉLET

Ha két egyenletnek ugyanazon az alaphalmazon ugyanaz a megoldáshalmaza, akkor ezeket az egyenleteket **ekvivalensnek** mondjuk a tekintett alaphalmazon. Az *ekvivalens* szó latin eredetű, magyarul egyenértékűt jelent.

Ha olyan átalakításokat végzünk egy egyenlet megoldásakor, amely során nem változnak meg az egyenlet gyökei, akkor azt mondjuk, hogy **ekvivalens átalakításokat** végeztünk. Például ilyen átalakítás lehet a mérlegelv alkalmazása.

Figyelnünk kell azonban az egyenletek rendezése közben:

1. Ha négyzetre emeljük egy egyenlet mindkét oldalát, akkor lehetséges, hogy az új egyenletnek már több gyöke van az alaphalmazon, mint az eredeti egyenletnek. Ebben az esetben tehát hamis gyököket kaphatunk.
   Behelyettesítéssel ellenőrizni kell, hogy a kapott gyökök megoldásai-e az eredeti egyenletnek.

2. Ha az $(f(x))^2 = (g(x))^2$ egyenlet helyett az $f(x) = g(x)$ egyenletet vizsgáljuk, akkor lehetséges, hogy az új egyenletnek kevesebb gyöke van, mint az eredetinek, és nem találjuk meg így a feladat összes megoldását. Ilyenkor tehát gyököket veszíthetünk.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Oldjuk meg a $\sqrt{x} = x - 2$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

1. Mi az egyenlet értelmezési tartománya?
   A gyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $x \geq 0$.
2. Oldjuk meg az egyenletet!
   A megoldáshoz emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!
   $x = (x-2)^2$
   Bontsuk fel a zárójelet, és hozzuk olyan alakra az egyenletet, amelynél a megoldóképlet alkalmazható.
   $x = x^2 - 4x + 4$.
   $x^2 - 5x + 4 = 0$.
   Megoldóképlettel: $x = 4$ vagy $x = 1$.
3. Behelyettesítéssel ellenőrizzük az eredményeket:
   4-et behelyettesítve: $\sqrt{4} = 4 - 2$.
   De 1-et behelyettesítve: $\sqrt{1} \neq 1 - 2$.
   Az egyenletnek csak egy gyöke van, a 4.

FELADAT

3 Megegyeznek-e a két egyenlet gyökei a valós számok halmazán?

a) $3(2-x)+7 = \frac{5x+13}{4}$ és
$12(2-x)+28 = 5x+13$

b) $(x+8)^2 = (4-3x)^2$ és $x+8 = 4-3x$

4 Ekvivalens-e az **R** alaphalmazon

a) az $\frac{x^2+2x}{x} = 2$ egyenlet és az $x^2+2x = 2x$ egyenlet;

b) az $5x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ egyenlet és az $5x = 0$ egyenlet;

c) az $\frac{(x-3)(x+5)}{(x+2)(x+5)} = -\frac{2}{3}$ egyenlet és a $3(x-3) = -2(x+2)$ egyenlet?

5 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x} = 6 - x$ b) $\sqrt{2x} = 4 - x$

6 Ekvivalens-e az **R** alaphalmazon a két egyenlet?

a) $\sqrt{x} = 2 - x$ és $x = (2-x)^2$

b) $\sqrt{x} = x + 10$ és $x = x^2 + 20x + 100$

HÁZI FELADAT

1 Ekvivalens-e egymással az **R** alaphalmazon a következő két-két egyenlet?

a) $\sqrt{x^2-16} = 0$ és $x^2 - 16 = 0$

b) $\frac{3x}{x^2+4} = 0$ és $3x = 0$

2 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x} = x - 6$

b) $\sqrt{3x} = 6 - x$

3 A három egyenlet közül kettő ekvivalens egymással a valós számok halmazán, a harmadik nem. Mely egyenletek ekvivalensek?

a) $|2x-1| = 5$
$(2x-1)^2 = 25$
$\sqrt{2x-1} = 25$

b) $\sqrt{x+8} = 3x$
$x + 8 = 9x^2$
$9x^2 - x - 8 = 0$

61 GYÖKÖS EGYENLETEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{x+3}+1=3x$

Megoldás

1. Először határozzuk meg az értelmezési tartományt. A négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $x+3\geq 0$, vagyis $x\geq -3$.
2. Ha négyzetre emeljük a $\sqrt{x+3}+1$ kifejezést, akkor a nevezetes azonosság alapján ezt kapjuk:
   $(\sqrt{x+3}+1)^2=(x+3)+2\cdot\sqrt{x+3}+1$.
   Ebben a kifejezésben ugyanúgy található négyzetgyökös tag, mint az eredetiben. Ezért négyzetre emelés előtt rendezzük át az egyenletet: $\sqrt{x+3}=3x-1$.
3. Ha két szám egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő. Ezért ha egy szám megoldása az egyenletnek, akkor megoldása annak az egyenletnek is, melyet úgy kapunk, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük.
   $(\sqrt{x+3})^2=(3x-1)^2$
   Végezzük el a négyzetre emelést, és rendezzük az egyenletet!
   $x+3=9x^2-6x+1$
   $0=9x^2-7x-2$
   A megoldóképlet alapján az egyenlet gyökei: $x_1=1$ és $x_2=-\frac{2}{9}$.
4. Mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, hiszen nagyobbak, mint -3. Ellenőrizzük a megoldásokat az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel!
   $x_1=1$ $\qquad \sqrt{1+3}+1=3\cdot 1$
   $x_2=-\frac{2}{9}$ $\qquad \sqrt{-\frac{2}{9}+3}+1\neq 3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$
   Az ellenőrzésből kiderült, hogy csak az egyik megoldás helyes: egyetlen megoldás van, az $x=1$.

ELMÉLET

Ha két valós szám egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő: $A=B \quad \Rightarrow \quad A^2=B^2$.

Ezért ha egy szám megoldása az egyenletnek, akkor megoldása annak az egyenletnek is, melyet úgy kapunk, hogy az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük.

Visszafelé azonban nem teljesül ez az állítás. Ha két szám négyzete egyenlő, akkor lehet, hogy a számok különbözők voltak: nevezetesen egymás ellentettjei.

$A^2=B^2 \quad \Rightarrow \quad A=B$ vagy $A=-B$.

Ezért a négyzetre emelés általában nem ekvivalens átalakítás. A négyzetre emelés után kapott egyenletnek több megoldása lehet, mint az eredeti egyenletnek. Kaphatunk **hamis gyököt,** azaz olyan értéket, amely eleme ugyan az értelmezési tartománynak, de az eredeti egyenletnek nem megoldása.
Ezért a négyzetre emelés után nagyon fontos az ellenőrzés.

Négyzetgyökös egyenletek megoldása:

Határozzuk meg az értelmezési tartományt! — Négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám.

→ Oldjuk meg az egyenletet! — Négyzetre emelés előtt, ha lehet, rendezzük úgy, hogy a gyökös tag önmagában álljon!

→ Ellenőrizzünk! — Vigyázat! Kaphatunk hamis gyököt! Helyettesítsünk be az eredeti egyenletbe!

FELADAT

1 Oldd meg a $\sqrt{x+3}+9=2x$ egyenletet a valós számok halmazán!

a) Állapítsd meg az egyenlet értelmezési tartományát!

b) Rendezd át az egyenletet úgy, hogy ha négyzetre emeled az egyenlet két oldalán álló kifejezést, akkor ne maradjon benne négyzetgyök!

c) Végezd el a négyzetre emelést!

d) Oldd meg a keletkező másodfokú egyenletet! Benne vannak-e a kapott gyökök az egyenlet értelmezési tartományában?

e) A másodfokú egyenlet gyökei közül melyik gyöke az eredeti egyenletnek, és melyik nem?

2 Ebben a feladatban egy-egy négyzetgyökös egyenlet megoldásának részleteit láthatod. Először állapítsd meg az egyenlet értelmezési tartományát! Utána figyeld meg a megoldás és egyenletrendezés során felírt egyenleteket! Döntsd el minden egyenletről, hogy ekvivalens-e a valós számok halmazán a fölötte lévő egyenlettel!

a)
$\sqrt{x+14}+x=16$
$\sqrt{x+14}=16-x$
$x+14=(16-x)^2$
$x^2-33x+242=0$

b)
$x=\sqrt{3x-2}+4$
$x-4=\sqrt{3x-2}$
$(x-4)^2=3x-2$
$x^2-11x+18=0$

3 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3-2x}-x=6$

b) $\sqrt{x+3}+2x=4$

c) $x-\sqrt{2x}=4$

4 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}$

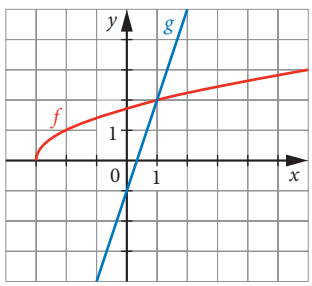
b) $\sqrt{2x+4}+\sqrt{4-x}=0$

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán, grafikus úton! $\sqrt{x+3}=3x-1$

Megoldás

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f(x)=\sqrt{x+3}$ és a $g(x)=3x-1$ függvényeket! Az f függvény értelmezési tartománya $[-3;\infty[$, a g függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}$.

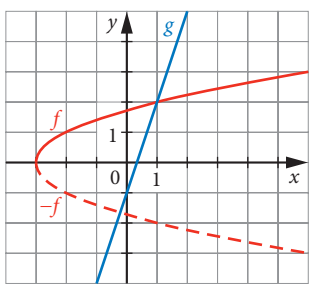


Az f függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az $x\mapsto\sqrt{x}$ függvény grafikonját eltoljuk az x tengellyel párhuzamosan balra (negatív irányban) 3 egységgel.

Az ábráról leolvasható, hogy egyetlen metszéspont létezik, s ennek első koordinátája $x=1$. Mivel a leolvasás lehet pontatlan, fontos behelyettesítéssel ellenőriznünk. $x=1$ esetén $\sqrt{4}=3-1$ teljesül, ezért egy megoldás van: $x=1$.

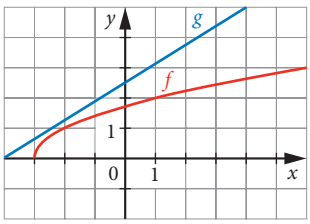
ELMÉLET

Hol rejti el a grafikon az algebrai megoldás során keletkező hamis gyököt?

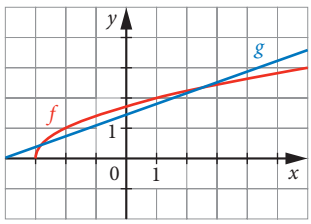


A négyzetre emelés után nemcsak azokat a gyököket keressük, amelyek esetén a függvényértékek egyenlők, hanem azokat is, amelyek esetén a függvényértékek egymás ellentettjei, hiszen ezek négyzete is egyenlő. Tehát nemcsak azokat a helyeket, ahol a g függvény grafikonja metszi az f függvény grafikonját, hanem azokat a helyeket is, ahol a g függvény grafikonja metszi a $-f$ függvény grafikonját. Az ábrán látható, hogy ez még egy metszéspontot jelent. Ennek a pontnak az első koordinátája felel meg az algebrai levezetésben kapható hamis gyöknek.

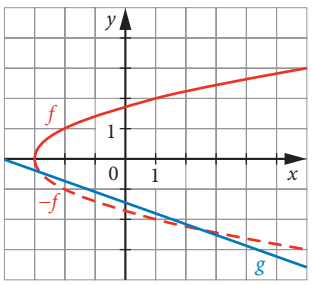
A grafikus út azt is megmutatja, hogy sokféle helyzet előállhat. Lehet 0; 1 vagy 2 megoldás, és ezek között a hamis gyökök száma is lehet 0; 1 vagy 2.



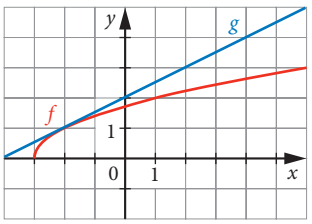
nincs gyök



két gyök van,
nincs hamis gyök



két hamis gyök



egy gyök van,
nincs hamis gyök

A négyzetre emelés a valós számok halmazán nem ekvivalens művelet. A nemnegatív számok halmazán azonban igen. Ezért ha négyzetre emelés előtt ellenőrizzük, hogy milyen alaphalmaz esetén lesz nemnegatív az egyenlet mindkét oldala, és leszűkítjük erre az értelmezési tartományt, akkor nem fogunk hamis gyököt kapni. Ezt az eljárást nevezzük értékkészlet-vizsgálatnak.

Például: $\sqrt{x+3} = 3x-1$

Az egyenlet bal oldala nemnegatív. Ezért az egyenlet jobb oldala is nemnegatív: $3x-1 \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha $3x \geq 1$, azaz $x \geq \frac{1}{3}$. Ezért szűkítsük le az értelmezési tartományt, a továbbiakban legyen $x \geq \frac{1}{3}$.

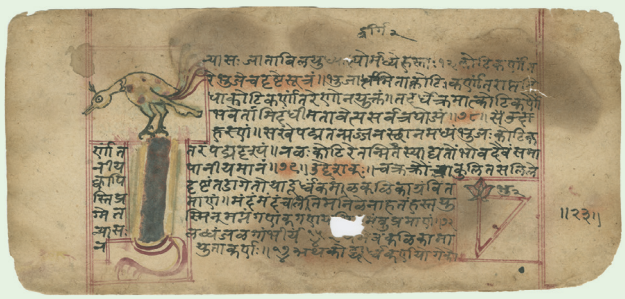
FELADAT

5 Oldd meg grafikus úton az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+2} = -\frac{1}{2}x+3$

b) $\sqrt{x-1} = 2x-8$

6 *Bhászkara* hindu tudós több mint 800 évvel ezelőtt írt egy könyvet a leánya számára, *Lilavati* (elbűvölő) címmel, abból való ez a feladat:
Melyik az a szám, amely 3-mal szorozva, azután a szorzat háromnegyed részével növelve, 7-tel osztva, a harmadrészével csökkentve, önmagával szorozva és 52-vel csökkentve, azután belőle négyzetgyököt vonva, hozzáadva 8-at, és elosztva 10-zel, 2-t ad?
Jelöld a keresett számot egy betűvel, és írd fel, hogyan kapod ebből a 2-t! Ezután *lebontogatással* (lépésről lépésre visszafelé haladva) megkaphatod azt a bizonyos számot. Sőt két számot is: a 28-at és a (−28)-at. Ha csak a 28-at találtad meg, akkor úgy jártál, mint annak idején maga *Bhászkara*.



HÁZI FELADAT

1 Vannak-e ekvivalensek az egyenletpárok között?

a) $x^2 = 16$ és $x = -4$

b) $\sqrt{x-1} = 5$ és $x-1 = 25$

c) $3x-1 = 5$ és $(3x-1)^2 = 25$

d) $\frac{4}{3x-6} = \frac{3}{5x-10}$ és $\frac{3x-6}{4} = \frac{5x-10}{3}$

2 Oldd meg grafikus módszerrel és algebrai úton is a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x} = x$

b) $\sqrt{x} = -x$

c) $\sqrt{x} = 2x - 6$

d) $\sqrt{x+1} = x - 1$

3 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{5x - 9} = 3 - x$

b) $\sqrt{13 - 6x} = 5 - 3x$

c) $\sqrt{5x} + 23 = x - 7$

d) $5\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x} + 18$

EMELT SZINT

1 Melyik valós számot jelölheti az x, ha

a) $\sqrt{4x + 8} = 2 + \sqrt{3x - 2}$;

b) $\sqrt{5 - 8x} = 4 - \sqrt{3x - 4}$?

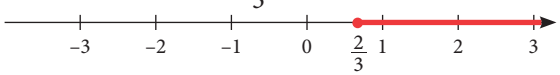
Megoldás

a) Először vizsgáljuk meg, mely valós számok esetén van értelmük a gyökös kifejezéseknek! A négyzetgyökjel alatt nem lehet negatív szám, ezért $4x + 8$ is és $3x - 2$ is pozitív vagy 0.

– A $(4x + 8)$ akkor és csakis akkor nemnegatív, ha $4x \geq -8$, vagyis $x \geq -2$.



– A $(3x - 2)$ akkor és csakis akkor nemnegatív, ha $3x \geq 2$, vagyis $x \geq \frac{2}{3}$.



Mindkét feltétel pontosan akkor teljesül, ha $x \geq \frac{2}{3}$.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$(\sqrt{4x + 8})^2 = (2 + \sqrt{3x - 2})^2$;

$4x + 8 = 4 + 4\sqrt{3x - 2} + 3x - 2$;

$4\sqrt{3x - 2} = x + 6$.

Úgy rendeztük az egyenletet, hogy ha most ismét négyzetre emelést végzünk, akkor már ne legyen az új egyenletben négyzetgyök.

$(4\sqrt{3x - 2})^2 = (x + 6)^2$;

$16(3x - 2) = x^2 + 12x + 36$;

$48x - 32 = x^2 + 12x + 36$;

$x^2 - 36x + 68 = 0$.

Az $x^2 - 36x + 68 = 0$ egyenletre alkalmazzuk a megoldóképletet. Ennek gyökei: $x_1 = 34$; $x_2 = 2$.

Mindkét szám nagyobb $\frac{2}{3}$-nál, tehát szóba jöhet megoldásként. Behelyettesítve x_1-et:

Ha $x = 34$, akkor a $\sqrt{4x + 8} = 2 + \sqrt{3x - 2}$ egyenletből a következőt kapjuk:

$\sqrt{4 \cdot 34 + 8} = 2 + \sqrt{3 \cdot 34 - 2}$;

$12 = 2 + 10$, ezért $x_1 = 34$ valóban gyöke az egyenletnek.

Majd $x_2 = 2$ behelyettesítésével:

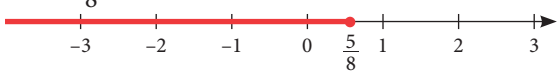
$\sqrt{4 \cdot 2 + 8} = 2 + \sqrt{3 \cdot 2 - 2}$;

$4 = 2 + 2$, ezért $x_2 = 2$ is gyöke az egyenletnek.

b) A négyzetgyökjel alatt nem lehet negatív szám, ezért kell, hogy $5 - 8x$ is és $3x - 4$ is pozitív vagy 0 legyen.

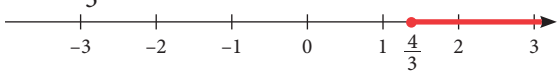
– Ha $5 - 8x \geq 0$, akkor $8x \leq 5$, vagyis

$x \leq \frac{5}{8} = 0{,}625$.



– Ha $3x - 4 \geq 0$, akkor $3x \geq 4$, vagyis

$x \geq \frac{4}{3} \approx 1{,}33$.



Azt tapasztaljuk, hogy *nincs* olyan szám, amely szóba jöhetne, mert ha egy szám kisebb 0,625-nél, akkor nem lehet nagyobb $\frac{4}{3}$-nál. Itt tehát kár lett volna hozzáfogni az egyenlet megoldásához, mert biztosan nincs megoldása.

2 Oldd meg a valós számok halmazán a

$\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 3} = 2$

egyenletet!

Érdemes $\sqrt{x + 3}$-at adni az egyenlet mindkét oldalához az első négyzetre emelés előtt.

3 Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4 - 3x^2} = 3$

b) $\sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{5 - x^2} - x$

Ráadás

LABORATÓRIUMI FEJLESZTÉSEK

FELADAT

Arany Miklós gazdasági tanácsadó. Egy nagy nemzetközi kozmetikai cég – a MyCream☺ – magyarországi laboratóriumának vezetője kérte fel egy munkára. Tájékoztatta, hogy

- az elmúlt három negyedévben rendre 525 millió, 566 millió, illetve 486 millió forint volt a MyCream☺ bevétele,
- a bevétel egy részét a laboratórium kapja, ebből kell fedeznie a rezsit, a bérköltséget, és ebből képezhet tartalékot a laboratórium fejlesztésére,
- az előző negyedévekben a bérköltség mindig a MyCream☺ bevételének 2%-a volt,
- mindegyik negyedévben 125 millió forint volt a laboratórium rezsije,
- az elmúlt három negyedévben rendre 9,50 milliót, 9,68 milliót, illetve 9,28 milliót tudtak tartalékolni fejlesztési célokra.

A vezető a következő pontokban fogalmazta meg kérését, illetve kérdéseit:

A) Arany úr készítsen olyan matematikai modellt, amely megmutatja, hány millió forint tartalék jut negyedévenként a laboratórium fejlesztésére a bevétel függvényében!

B) Mekkora negyedéves bevétel esetén lesz ez a tartalék 10 millió forint?

C) Elérhető-e – Arany úr modellje szerint – a negyedévenkénti 15 milliós tartalékképzés?

Arany úr munkához látott. Kövesd nyomon gondolatait és számításait!

1 **a)** Először kiszámolta, mennyi maradt a cég bevételéből a 125 milliós rezsi kifizetése után. Aztán megnézte, mennyi a laboratóriumi bérköltség és a tartalék összege. Kitöltött egy táblázatot, ekkor kapcsolatot fedezett fel a két kiszámított összeg között. Milyen kapcsolatot fedezhetett fel Arany úr? A füzetedben dolgozz!

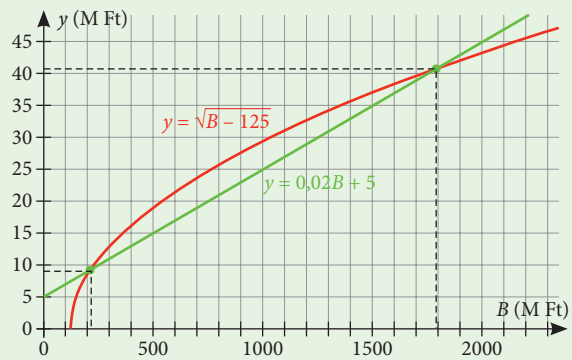
Bevétel (millió Ft)	525	566	486
Bevétel – 125 (millió Ft)			
Bérköltség (millió Ft)			
Bérköltség + tartalék (millió Ft)			
Kapcsolat			

b) A fentiek alapján a következő modellt készítette el: Ha a MyCream☺ bevétele B millió Ft és a laboratórium fejlesztési tartaléka T millió Ft, akkor $\sqrt{B-125} = 0{,}02B + T$.
Ellenőrizd, megfelel-e ez az egyenlet az elmúlt három negyedév adatainak!

2 Ha a következő negyedévben a kereslet hanyatlása miatt csak 400 millió forint bevételt érne el a MyCream☺ Magyarországon, akkor a modell szerint hány millió forintot tehetne a laboratórium fejlesztési tartalékába?

3 Arany úr készített egy grafikont is a modelljéhez. Ezen azt vizsgálta, hogy hány millió forint bevétel esetén érhető el az 5 millió forintos tartalékképzés.

a) Milyen eredményre jutott Arany úr?



b) Ábrázold a 2. feladatban kiszámított tartalékképzéshez tartozó $y = 0{,}02B + T$ félegyenest is ugyanebben a koordináta-rendszerben a füzetedben! Törekedj minél pontosabb ábrázolásra!

c) Igaz-e, hogy növekvő bevételhez növekvő tartalék tartozik?

d) Körülbelül mekkora lehet a legnagyobb tartalék, amely a modell szerint elérhető? Minél pontosabb ábrát készítesz, annál pontosabb lesz a válaszod.

4 Számítsd ki a modell alapján B-t, ha $T = 10$! Fogalmazd meg szavakkal, mit jelent az eredményed! Rajzold meg az előző koordináta-rendszerben a tartalékképzésnek megfelelő félegyenest, és add meg az egyenes egyenletét is!

5 Írd fel a modell alapján az egyenletet, ha $T = 15$, és oldd meg! Fogalmazd meg Arany úr számára a megfigyelésedet! Rajzold meg a tartalékképzésnek megfelelő félegyenest a megadott koordináta-rendszerben!

6 **a)** A $T = 0$ esethez mekkora bevétel tartozik a modell szerint? Mit jelentene a valóságban a laboratórium számára ez a helyzet?

b) Arany úr modellje „nem működik”, ha a bevétel kisebb 125 millió forintnál. Okoz-e gondot a cég szempontjából a modellnek ez a „hiányossága”?

7 Egy új kisvállalat, a Krémvarázs csatlakozott a MyCream☺ kozmetikai céghez. A cég megbízza Arany urat, vizsgálja meg, hogy eléggé jövedelmező-e a kisvállalatnál az arckrémgyártás. A kisvállalat jelenlegi helyzetéről Sima Bianka gyártásvezető így tájékoztatja Arany urat:

– Nagy a kereslet a pattanásokat gyorsan megszüntető Bakfis© krémünk iránt. A legújabb piackutatások szerint havi x kilogramm krém termelése esetén az összes megtermelt krémet értékesíteni tudjuk, mégpedig $(30 - 0{,}02x)$ euró/kg áron. Vagyis az x kg Bakfis© krém eladása esetén a havi árbevételünk $x(30 - 0{,}02x) = 30x - 0{,}02x^2$ (euró) lesz.

Most közbeszól Szigor Lajos művezető:

– Bianka asszony tervei szerint 350 kg krémet kellene havonta gyártanunk, de én meg tudnám szervezni 400 kg gyártását is.

– És mennyi a termelési költség? – érdeklődik Arany úr.

Bianka asszony átad neki egy iratot. Ebből kiderül, hogy havi x kg termelése esetén a termelési költség $0{,}1x^2 - 50x + 10\,000$ (euró).

a) Mekkora árbevételt ér el a kisvállalat, ha Sima Bianka, illetve ha Szigor Lajos javaslatának megfelelő mennyiségű krémet gyártanak (és értékesítenek) havonta?

b) Mekkora a költség, ha Sima Bianka, illetve ha Szigor Lajos javaslatának megfelelő mennyiségű krémet gyártanak (és értékesítenek) havonta?

c) Vázold fel a bevétel és a költség függvényének grafikonját [a $b(x) = 30x - 0{,}02x^2$ és a $k(x) = 0{,}1x^2 - 50x + 10\,000$ hozzárendelési szabályú függvényeket, ha $x \geq 0$]!

d) Hány kg termék eladása esetén a legnagyobb a havi bevétel?

e) Hány kg termék eladása esetén a legkisebb a havi költség?

f) Mekkora a profit (a bevétel és a költség különbsége) akkor, ha Sima, illetve ha Szigor javaslatának megfelelő a gyártás mennyisége?

g) Hány kg havi termelés mellett egyenlő a bevétel a költséggel?

Figyeld meg: a legnagyobb nyereség nem feltétlenül a legnagyobb árbevétel esetében vagy a legkisebb költség esetében lép fel.



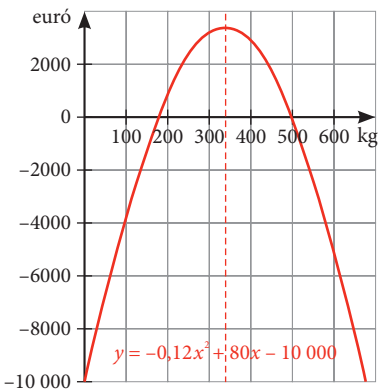
62 MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

A Krémvarázs cégnél arckrémet állítanak elő.
Ha a havi termelés x kg arckrém ($x \geq 0$), akkor az árbevétel (euróban) a $b(x) = 30x - 0{,}02x^2$ képlettel, a költség pedig a $k(x) = 0{,}1x^2 - 50x + 10\,000$ képlettel írható le. Havi hány kg termék előállítása és értékesítése esetén nyereséges a termelés, és mekkora az elérhető legnagyobb nyereség?

Megoldás
A bevétel és a költség különbsége a nyereség, tehát a nyereséget az $n(x) = b(x) - k(x)$ képlet adja meg.
$n(x) = 30x - 0{,}02x^2 - (0{,}1x^2 - 50x + 10\,000) = 30x - 0{,}02x^2 - 0{,}1x^2 + 50x - 10\,000 = -0{,}12x^2 + 80x - 10\,000$.
A termelés akkor nyereséges, ha $n(x) > 0$.
Meg kell tehát oldani a $-0{,}12x^2 + 80x - 10\,000 > 0$ **másodfokú egyenlőtlenséget**.
Azt könnyen meg tudjuk mondani, hogy mely esetben egyenlő a bevétel a költséggel, azaz mikor 0 a nyereség, mert ehhez csak a $-0{,}12x^2 + 80x - 10\,000 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldanunk.

Megoldóképlettel: $x_{1,2} = \dfrac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-0{,}12) \cdot (-10\,000)}}{2 \cdot (-0{,}12)} = \dfrac{-80 \pm 40}{-0{,}24}$; $x_1 = 500$, $x_2 = \dfrac{500}{3} \approx 167$.



Eredményünk azt jelenti, hogy ≈ 167 kg, illetve 500 kg krém gyártása esetén nulla a nyereség (profit) értéke.
A nyereséget leíró $x \mapsto -0{,}12x^2 + 80x - 10\,000$ ($x \geq 0$) függvényre nézve ez azt jelenti, hogy két zérushelye van, az $\dfrac{500}{3}$ (≈ 167) és az 500. Mivel a függvény grafikonja lefelé nyitott parabola (egy íve), ezért ha $\dfrac{500}{3} < x < 500$, akkor a függvényértékek pozitívak.
A $-0{,}12x^2 + 80x - 10\,000 > 0$ másodfokú egyenlőtlenség megoldásai az $\left]\dfrac{500}{3}; 500\right[$ intervallum elemei.

A krémgyártás nyereséges, ha a havonta gyártott mennyiség ≈ 167 kg-nál több, de 500 kg-nál kevesebb.

A nyereséget leíró függvénynek tehát $\approx \dfrac{167 + 500}{2} \approx 333$-nál van maximuma, és ez a maximum
$-0{,}12 \cdot 333^2 + 80 \cdot 333 - 10\,000 \approx 3346$ (euró).

A krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereség kb. 3346 euró, és ez akkor lehetséges, ha kb. 333 kg-ot termelnek.

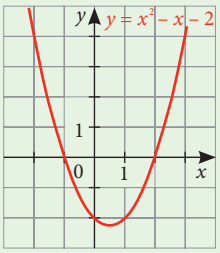
FELADAT

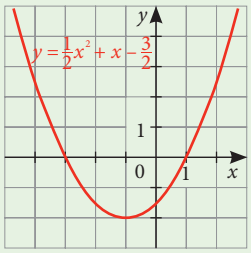
1 Ábrázold a következő függvényeket!
a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$
b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x^2 - 3x$

2 Oldd meg a következő másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
a) $x^2 + 2x < 0$
b) $x^2 + 2x \geq 0$
c) $-x^2 - 3x \leq 0$
d) $-x^2 - 3x > 0$

3 A grafikonok segítségével oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - x - 2 \leq 0$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \geq 0$





4 A megoldóképlettel határozd meg a következő egyenletek gyökeit a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$
b) $x^2 + 3{,}8x - 6 = 0$
c) $-x^2 - 1{,}5x + 1 = 0$

5 Az előző feladat segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 3x - 4 > 0$
b) $x^2 + 3{,}8x - 6 \leq 0$
c) $-x^2 - 1{,}5x + 1 \geq 0$

ELMÉLET

Másodfokú egyenlőtlenség grafikus megoldása

Rendezzük egy oldalra!

- Használjuk a mérlegelvet!
- Ha negatív számmal szorzunk vagy osztunk, meg kell fordítani a relációs jel irányát!

Ábrázoljuk a hozzá tartozó függvényt!

- Mik a zérushelyek? Merre áll a parabola?
- Ha vannak zérushelyek, akkor elég, ha a két zérushelyet bejelöljük, és berajzoljuk, hogy merre áll a parabola.

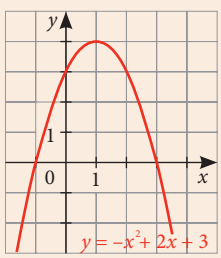
Olvassuk le a grafikonról a megoldást!

- Figyeljük meg, hogy a grafikon melyik része helyezkedik el az x tengely felett, és melyik része alatta!

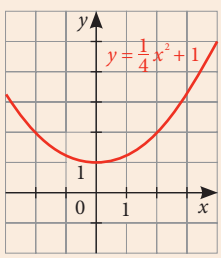
HÁZI FELADAT

1 A grafikonok segítségével oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$



b) $\frac{1}{4}x^2 + 1 \geq 0$



2 Oldd meg a másodfokú egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 5x \leq 0$ **b)** $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ **c)** $-x^2 + 5x \leq 0$ **d)** $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$

Megoldásaidat ellenőrizheted *függvényábrázoló programmal* is.

3 Egy cég havi x kg kenőanyagot termel és ad el, kilogrammonként $(36 - 0{,}03x)$ euróért. A gyártás során felmerülő havi kiadást (költséget) a $0{,}1x^2 - 55x + 13\,000$ összefüggés adja meg, szintén euróban $(x \geq 0)$.
Havi hány kilogramm eladása esetén lesz a cégnek nyeresége a kenőanyag gyártásából?

63 GYAKORLÁS

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Márton tavaly 70 kg tömegű volt, és 170 cm magas. Idén 5 kg-mal „nehezebb” (nagyobb tömegű), testtömegindexe mégis csökkent a tavalyihoz képest. Hány cm-t nőhetett Márton tavaly óta?

Megoldás

A testtömegindexet úgy számítjuk ki, hogy a testtömeget elosztjuk a méterben mért magasság négyzetével. (Ez akkor „normális”, ha 20 és 25 közé esik.) Az adatok szerint tavaly Márton testtömegindexe $\frac{70}{1{,}7^2} = 24{,}2$ volt.

Ha Márton idén x méter magas, akkor a testtömegindexe $\frac{75}{x^2}$. A feladat szerint $\frac{75}{x^2} < 24{,}2$.

Világos, hogy itt $x > 0$, tehát a pozitív számok halmazán keressük a megoldásokat.

Ezt az egyenlőtlenséget mérlegelv alkalmazásával is alakíthatjuk.

Szorozzuk meg mindkét oldalt x^2-tel: $75 < 24{,}2x^2$ (mivel $x > 0$, ezért $x^2 > 0$ is igaz, tehát pozitív számmal szoroztunk), majd osszuk el mindkét oldalt 24,2-del: $3{,}1 < x^2$.

Egy pozitív szám négyzete pontosan akkor nagyobb 3,1-nél, ha maga a szám nagyobb $\sqrt{3{,}1}$-nél, azaz kb. 1,76-nál.

Ez azt jelenti, hogy Márton idén 1,76 méternél magasabb, vagyis több mint 6 cm-t nőtt tavaly óta.

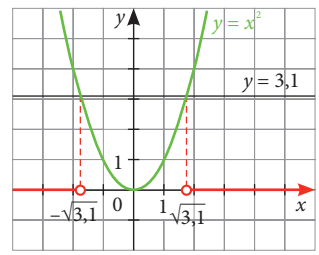
2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\frac{75}{x^2} < 24{,}2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Aki gyorsan azt válaszolja, hogy ugyanaz a megoldása (tehát $x > 1{,}76$) ennek az egyenlőtlenségnek is, mint az 1. feladatbelinek, az hibázik. Az értelmezési tartományba most a negatív valós számok is beletartoznak, csak a 0 nem.

A mérlegelv most is alkalmazható, hiszen $x^2 > 0$ most is igaz. Mérlegelv alkalmazása után ugyanazt kapjuk, mint előbb: $3{,}1 < x^2$.

Melyik valós számokra teljesül, hogy négyzetük nagyobb 3,1-nél? Az ábrán jól láthatjuk, hogy ez nemcsak a $\sqrt{3{,}1}$ -nél nagyobb számokra teljesül, hanem a $(-\sqrt{3{,}1})$-nél kisebb számokra is. Az x tengelyen pirossal jelöltük a megfelelő számokat.



Kerekített értékeket használva a megoldáshalmaz:
$\mathbf{R} \setminus [-1{,}76;\ 1{,}76]$.

FELADAT

1 Oldd meg az egyenlőtlenséget az $\{1; 2; -1; -2\}$ alaphalmazon!

Jó tanács: nem érdemes „levezetni” a feladatot, csak néhány szám esetén kell ellenőrizni, hogy teljesül-e az egyenlőtlenség.

a) $\frac{3}{x^2} \le 2$ **b)** $x^2 + 3 \le (x+1)^2$

2 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 6x \le 0$

b) $x^2 - 6x \le -5$

c) $x^2 - 6x \le -9$

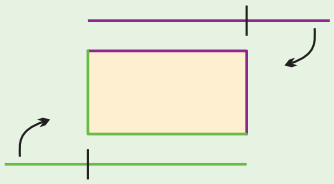
3 Keress olyan számot az egyenlőtlenség jobb oldalára, hogy minden valós szám megoldása legyen az egyenlőtlenségnek! Melyik a legnagyobb ilyen valós szám?

a) $x^2 + 7x \ge \square$ **b)** $2x^2 + 5x \ge \square$

4 Egy cég az egyik termékéből minden hónapban x darabot állít elő. Az előállítás költsége a $k(x) = x^2 + 1176$ összefüggéssel számolható, euróban. Egy terméket 70 euróért tudnak eladni.

Hány termék előállítása esetén lesz nyereséges ez a termék a cégnek?

5 Két egyforma hosszú vékony pálcából téglalap alakú keretet készítünk az ábra szerint.



a) A pálca végétől milyen távolságra legyen a törés helye, ha a pálcák hossza 120 cm, és azt szeretnénk, hogy a téglalap területe nagyobb legyen, mint 20 dm^2?

b) Hol kell eltörnünk a pálcát ahhoz, hogy a lehető legnagyobb területű téglalapot készítsük el? Mekkora a maximális terület?

6 Egy termék árát felemelték p százalékkal, majd pár hónappal később csökkentették az árát az új ár $2p$ százalékával. Hány százalékos volt az első áremelés, ha a végső ár a legelső árnak több, mint 80,5%-a?

HÁZI FELADAT

1 A $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$ halmaz elemei közül melyek elégítik ki a $\sqrt{x^2} = -x$ egyenletet?

2 Oldd meg valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 5x \geq 0$

b) $x^2 - 5x \leq -4$

a) $x^2 - 5x \leq -10$

3 Egy derékszögű útkereszteződésből egyszerre indul két kerékpáros. Az egyik kelet felé, a másik dél felé. A dél felé haladó biciklis sebessége 2 $\frac{km}{h}$-val nagyobb, mint a kelet felé haladó biciklis sebessége. 40 perc múlva a távolságuk légvonalban nagyobb, mint 20 km. Mekkora lehetett a gyorsabb biciklis sebessége?

EMELT SZINT

1 Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{x^2 + 4x - 21}$ **c)** $\sqrt{3x^2 + 4x + 2}$

b) $\sqrt{15 + 4x - 4x^2}$ **d)** $\sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

2 Egy másodfokú egyenletnek a valós számok halmazán akkor van valós megoldása, ha a diszkrimináns nagyobb vagy egyenlő, mint 0.

A p paraméter mely értékei esetén van valós megoldása a másodfokú egyenletnek?

a) $x^2 + px + p + 3 = 0$

b) $x^2 + px + p - 0{,}75 = 0$

c) $x^2 + (p+1)x - (p+1) = 0$

3 A p paraméter mely értékei esetén van az egyenletnek valós megoldása? Figyelj arra, hogy ha a $p = 0$, akkor az egyenlet nem másodfokú, ezért azt az esetet külön meg kell vizsgálni!

a) $px^2 + px + p + 6 = 0$

b) $px^2 + (p+1)x + p = 0$

c) $px^2 + (p+3)x - p - 3 = 0$

RÁADÁS

Jocó tegnap bebizonyította barátainak, Döncinek és Bencének, hogy $3 < 2$. Ezt írta le:

- Ha $x < -3$, akkor $2x < -6 < -5$, tehát $2x < -5$, ez könnyen belátható.
- Adjunk hozzá mindkét oldalhoz x^2-et, $4x$-et és még 9-et: $x^2 + 6x + 9 < x^2 + 4x + 4$.
- Mindkét oldalon teljes négyzet áll, tehát igaz, hogy $(x+3)^2 < (x+2)^2$.
- De akkor nyilván $x + 3 < x + 2$ is igaz.
- Mindkét oldalból elvéve x-et azt kapjuk, hogy $3 < 2$ is igaz, tehát bebizonyítottuk az állításunkat.

Hol van a csalafintaság a levezetésben?

64 POLINOM GYÖKTÉNYEZŐS ALAKJA

KIDOLGOZOTT FELADAT

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2 és 5.

Megoldás

Az $(x-5)(x-2)$ szorzat értéke akkor és csakis akkor nulla, ha $x-5=0$ (ekkor $x=5$) vagy $x-2=0$ (ami azt jelenti, hogy $x=2$). Vagyis az $(x-5)(x-2)=0$ egyenlet gyökei: $x_1=2$ és $x_2=5$.

Beszorozva:

$(x-5)(x-2)=x^2-5x-2x+10=x^2-7x+10$.

Tehát az $x^2-7x+10=0$ egy olyan egyenlet, melynek gyökei: 2 és 5.

Azt mondjuk, hogy az $(x-5)(x-2)$ szorzat az $x^2-7x+10$ polinom **gyöktényezős alakja**.

FELADAT

1 Írj fel olyan másodfokú egyenletet, melynek valós gyökei a következő számok:

a) 1 és 3 **b)** 2 és −4 **c)** 7 és 8 **d)** −6 és −5

ELMÉLET

1. **Összetartozó fogalmak** (a, b, c valós számok, $a \neq 0$)

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$	másodfokú függvény	zérushely
$ax^2+bx+c=0$	másodfokú egyenlet	megoldás vagy gyök
ax^2+bx+c	másodfokú polinom vagy másodfokú kifejezés	gyök

2. **Polinom gyöktényezős alakja**

Ha egy másodfokú polinomnak van valós gyöke, akkor szorzattá alakítható.

A szorzattá alakítás módja:

1. Meghatározzuk a polinom gyökeit a megoldóképlet segítségével.
2. Ha egyetlen valós gyöke van (x_1), akkor $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.
3. Ha két valós gyöke van (x_1 és x_2), akkor $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Ezt az alakot a polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük.

A gyöktényezős alakban szereplő x_1 és x_2 konkrét számok, amelyek a megoldóképlet segítségével kiszámolhatók.

Ha a másodfokú egyenletnek egyetlen valós gyöke van, akkor azt **kétszeres gyöknek** nevezzük. (Ezt az esetet úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a két gyök egybeesik, azaz $x_1=x_2$.)

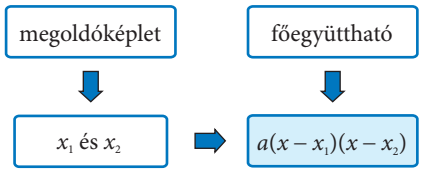
Egy másodfokú polinomot egyértelműen meghatározza a főegyütthatója és két gyöke. Az ax^2+bx+c és az $a(x-x_1)(x-x_2)$ kifejezések értéke ugyanakkor lesz nulla, azaz az $x=x_1$ és az $x=x_2$ esetekben. A főegyüttható és a gyökök egyenlőségéből következik, hogy a helyettesítési értékük bármely x esetén egyenlő.

Például

– A $3x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei 1 és $\left(-\frac{2}{3}\right)$, ezért a $3x^2 - x - 2$ polinom gyöktényezős alakja $3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$.

– A $3x^2 - x + 2 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazában nincs gyöke, ezért a $3x^2 - x + 2$ polinomnak nincs gyöktényezős alakja.

– A $4x^2 - 12x + 9$ polinomnak egy gyöke van, az 1,5; a polinom gyöktényezős alakja $4(x-1{,}5)(x-1{,}5)$.
Az 1,5-et a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet **kétszeres gyökének** nevezzük.



FELADAT

2 Alakítsd szorzattá a gyöktényezős alak segítségével a másodfokú polinomokat!

a) $x^2 + 12x + 27$ **c)** $2x^2 - 9x - 5$

b) $x^2 + 3x - 1{,}75$ **d)** $5x^2 + 13x + 8$

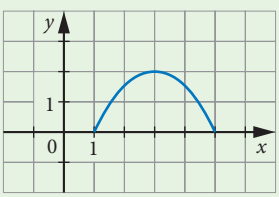
3 A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvénynek két zérushelye van: -1 és 5. Főegyütthatója 1.

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

b) Határozd meg a függvény szélsőértékhelyét és szélsőértékét!

c) Ábrázold a függvény grafikonját!

4 Egy építészmérnök számítógépes ábrát készít egy homlokzat díszítéséről. A homlokzatot egy parabolaív alakú résszel szeretné érdekesebbé tenni. A tervrajzon a parabolaív két legalsó pontja a koordináta-rendszer x tengelyén helyezkedik el, az egyik az (1; 0), a másik az (5; 0) pontban.



Írj fel olyan másodfokú függvényt a valós számok halmazán,

a) melynek zérushelyei 1 és 5;

b) melynek zérushelyei 1 és 5, és grafikonja lefelé nyílik;

c) melynek zérushelyei 1 és 5, továbbá a 3 helyen a helyettesítési értéke 2.

5 Egy egyenlet gyökei a valós számok halmazán $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{5}$.

a) Írj fel egy ilyen egyenletet!

b) Az egyenlet gyökei nem változnak meg, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy 0-tól különböző valós számmal. Ennek segítségével írj fel olyan egyenletet, melynek gyökei $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{5}$, együtthatói pedig egész számok!

6 Adj meg olyan egész együtthatós, másodfokú egyenletet, melynek gyökei

a) $\frac{1}{3}$ és $-\frac{1}{4}$;

b) $\frac{2}{7}$ és $-\frac{4}{9}$.

HÁZI FELADAT

1 Alakítsd szorzattá a gyöktényezős alak segítségével a másodfokú polinomokat!

a) $x^2 - 26x + 120$ **c)** $10x^2 + x - 21$

b) $x^2 - 7x - 18$ **d)** $-5x^2 + 17x - 14$

2 Egy másodfokú függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és két zérushelye van: $-1{,}5$ és $2{,}5$. Főegyütthatója 2.

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

b) Határozd meg a függvény szélsőértékhelyét és szélsőértékét!

c) Ábrázold a függvény grafikonját!

3 Adj meg olyan egész együtthatós polinomot, melynek zérushelyei:

a) $\frac{2}{5}$ és $\frac{7}{11}$;

b) $-\frac{6}{7}$ és $\frac{9}{2}$.

EMELT SZINT

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bence és a barátja, Dönci nekiállt, hogy megoldja az $\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = 2x + 1$ egyenletet. Kövesd végig mindkét gondolatmenetet!

Megoldás

Bence így okoskodott: az $x - 2$ a nevezőben szerepel, ezért az x nem lehet 2, de bármely más valós szám igen. Ezután megszorozta az egyenlet mindkét oldalát $(x - 2)$-vel, elvégezte a kijelölt szorzást, és alkalmazta a mérlegelvet:

$\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = 2x + 1;$

$x^2 - 10x + 16 = (2x + 1)(x - 2);$

$x^2 - 10x + 16 = 2x^2 + x - 4x - 2;$

$x^2 + 7x - 18 = 0.$

A megoldóképlet szerint

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 18}}{2} = \frac{-7 \pm 11}{2}$, vagyis

$x_1 = 2$ és $x_2 = -9$.

Azt már megfigyelte, hogy a 2 nem jöhet szóba (mert akkor a tört nevezője 0 lenne), tehát csak a (-9) lehet az egyenlet gyöke. Behelyettesítéssel megvizsgálta, hogy -9 valóban megoldás.

Bence észrevette, hogy 2 nem megoldása a feladatnak. De azt is megfigyelte, hogy a 2-vel csak az eredeti egyenlet esetében „van baj”, az $(x - 2)$-vel való szorzás után kapott egyenleteknek ez is gyöke.

Dönci gyöktényezős alakban írta fel a tört számlálóját.

$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8).$

Ezért így dolgozott:

$\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 8)}{x - 2} = x - 8,$

vagyis az $\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2} = 2x + 1$ egyenlet helyett veheti a sokkal egyszerűbbet, az $x - 8 = 2x + 1$ egyenletet. Ezt a mérlegelvvel oldotta meg:

$x - 8 = 2x + 1;\ \ x = -9.$

Behelyettesítéssel ellenőrizte, hogy a (-9) az eredeti egyenletnek is gyöke.

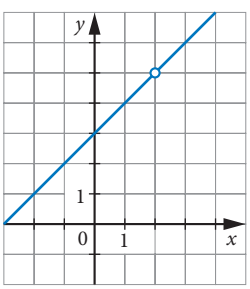
2. Ábrázold a következő függvényt!

$f: (\mathbf{R} \setminus \{2\}) \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Megoldás

A gyöktényezős alak segítségével a tört számlálóját felírhatjuk szorzat alakban: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. A hozzárendelési szabály ezért egyszerűsíthető: $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$, ha $x \neq 2$.

A függvény grafikonja megegyezik az $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $g(x) = x + 3$ függvény grafikonjával, ha $x \neq 2$. Az $x = 2$ helyen pedig nincs értelmezve. Ezért f grafikonja egy „lyukas egyenes”.



FELADAT

1 A gyöktényezős alak segítségével egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

a) $\dfrac{x^2-4x-12}{x-6}$

b) $\dfrac{2x^2+7x+3}{x+3}$

c) $\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2+4x+1}$

2 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán! Figyelj az értelmezési tartományra!

a) $\dfrac{x^2+7x+6}{2x^2+x-1}=0$

b) $\dfrac{x^2-3x-4}{3x^2-10x-8}=2$

3 Ábrázold a következő függvényeket!

$f\colon (\mathbf{R}\setminus\{1\})\to\mathbf{R}, \qquad f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

$g\colon (\mathbf{R}\setminus\{3\})\to\mathbf{R}, \qquad g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

RÁADÁS

1. Másodfokú egyenlet megoldása i. e. 2000 táján

A matematikatörténeti kutatások szerint i. e. 2000 körül Mezopotámiában már meg tudtak oldani olyan feladatokat, amelyek másodfokú egyenletre vezetnek. Nem használták a ma megszokott algebrai jelöléseket, a feladat megoldását bemutató utasításokból következtethetünk a gondolatmeneteikre. Egy ilyen feladat például, hogy számoljunk ki két ismeretlen számot, ha ismert a szorzatuk és az összegük. Legyen most a szorzatuk 352, az összegük 38.

A két ismeretlen bevezetése helyett abból az irányból indultak el, hogy ha ismernénk azt, hogy mennyivel térnek el a keresett számok a két szám átlagától, akkor ismernénk a számokat. A két szám átlaga az összegük fele, azaz 19.

Ma ezt a gondolatmenetet úgy írnánk le, hogy jelöljük d-vel a két számnak a 19-től való eltérését, vagyis a két szám $19+d$ és $19-d$.

A két szám szorzata ekkor $(19+d)(19-d)=19^2-d^2=352$.

Ebből meghatározták d-t, majd 19-hez hozzáadva és levonva megkapták a két számot: 22 és 16.

A megoldóképlet mai formában ismert felírása a XV–XVI. századhoz köthető.

2. Magasabb fokú egyenletek

Egy polinom, illetve egy egyenlet fokát az ismeretlen legnagyobb kitevője szabja meg. Például az $x^3+2x^2+3x=0$ egyenlet harmadfokú, mert benne az x legnagyobb kitevője 3.

Van-e megoldóképlet a magasabb fokú egyenletek megoldására? Érdekes a válasz a kérdésre. Harmad- és negyedfokú egyenletek esetében már felírták a megoldóképletet, ötödfokú és magasabb fokú egyenletek esetén azonban bebizonyították, hogy nem lehet felírni ilyen képletet.

A harmadfokú egyenletek megoldása érdekes történelmi korba vezet minket vissza. A XVI. században szokás volt, hogy a számoló mesterek versenyre, párbajra hívták ki egymást, amely során egyenleteket adtak át egymásnak, és azok megoldását kellett meghatározniuk. Nem csoda, hogy a megoldási eljárást igyekeztek titokban tartani. A harmadfokú egyenlet megoldóképletét *Cardano-formulának* nevezik, mert Girolamo Cardano (1501–1576) jelentette meg 1545-ben megjelent könyvében. A képletet nem ő fedezte fel, hanem egyik vetélytársa, Tartaglia (1500–1557), aki egyik párbajuk után elárulta neki, de megígértette vele, hogy titokban tartja. Nem meglepő, hogy komoly vita alakult ki kettőjük között.

A negyedfokú egyenlet megoldását még ugyanebben az évszázadban meghatározták, mert vissza tudták vezetni a harmadfokú egyenletekre.

Több száz évvel később, 1824-ben Niels Henrik Abel (1802–1829) norvég matematikus bizonyította, hogy ötödfokú egyenletek esetében nem létezik ilyen képlet. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan képlet, amely minden egyenlet esetén alkalmazható lenne. Nem sokkal később, 1832-ben Évariste Galois (1811–1832) azt is megmutatta, hogy ötnél magasabb fokú egyenletek esetén sem írható fel megoldóképlet.

Ráadás

VIÈTE-FORMULÁK

KIDOLGOZOTT FELADAT

Keressünk összefüggést az $x^2 - 10x + 16 = 0$ egyenlet gyökei és együtthatói között!

Megoldás

A megoldóképlet segítségével megkaphatjuk, hogy a két gyök 2 és 8. Használjuk a polinom gyöktényezős alakját!

$(x - 2)(x - 8) = x^2 - 10x + 16$

Végezzük el a bal oldali szorzást:

$(x - 2)(x - 8) = x^2 - 2x - 8x + 2 \cdot 8 = x^2 - (2 + 8)x + 2 \cdot 8$

A másodfokú egyenlet együtthatói ebben a feladatban könnyen megkaphatók a gyökökből: b a két gyök összegének ellentettje, c pedig a két gyök szorzata. Ez máskor is teljesül, ha az egyenlet főegyütthatója: $a = 1$.

ELMÉLET

1. **Másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggések**

   Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) másodfokú egyenletnek van két valós gyöke (x_1 és x_2), akkor a gyökök összege is és a gyökök szorzata is kiszámítható az egyenlet együtthatóiból.

   $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

   Ezen képletek elnevezése: **Viète-formulák**.

2. **Egész együtthatós egyenletek**

   Ha egy másodfokú egyenlet együtthatói egész számok, akkor ha létezik az egyenletnek olyan megoldása, ami egész szám, az csak a konstans tag osztói közül kerülhet ki. (Ez magasabb fokú egyenletek esetén is teljesül.)

   Ennek egy speciális esete, amikor a főegyüttható 1. Ekkor a két gyök szorzata egyenlő a konstans taggal ($x_1 \cdot x_2 = c$), és a két gyök összege egyenlő az elsőfokú tag együtthatójának ellentettjével ($x_1 + x_2 = -b$). Ezért meg lehet próbálni azt, hogy szorzattá alakítjuk a konstans tagot, és ellenőrizzük, hogy van-e olyan osztópár, amikor az osztók összege egyenlő $(-b)$-vel.

   Például

   Az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet esetében a gyökök összege 5 és a szorzatuk 6. Ez a 2-re és a 3-ra igaz, tehát a gyökök 2 és 3.

   Az $x^2 + 8x - 9 = 0$ egyenlet esetében a gyökök összege (-8) és a szorzatuk (-9). Ez az 1-re és a (-9)-re igaz, tehát a gyökök: 1 és -9.

FELADAT

1 Oldd meg fejben a következő másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ $\qquad$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

b) $x^2 - 12x + 20 = 0$ $\qquad$ d) $x^2 + x - 20 = 0$

2 Oldd meg a $6x^2 - 23x + 20 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán megoldóképlettel! Ellenőrizd a Viète-formulákat!

3 A gyökök kiszámítása nélkül válaszolj a kérdésekre a $6x^2 - 7x + 2 = 0$ egyenletről!

a) Hány valós gyöke van?

b) Mennyi a gyökök összege?

c) Mennyi a gyökök szorzata?

4 Egy egyenletről ennyit tudunk: $x^2 + \ldots x + 12 = 0$. Mi lehet a középső tag együtthatója, ha tudjuk, hogy minden együttható egész szám, és az egyenlet gyökei is egész számok?

5 Két szám négyzetének összegét a számok kiszámítása nélkül meghatározhatjuk csak az összegükből és a szorzatukból.
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2(ab)$. Alkalmazd ezt az összefüggést, valamint a Viète-formulákat, és határozd meg az egyenletek gyökeinek négyzetösszegét anélkül, hogy a gyököket kiszámolnád! Érdekesség, hogy ez az eljárás akkor is ad egy eredményt, ha az egyenletnek nincsenek valós gyökei. Ezért mindenképpen ellenőrizd a diszkriminánsos segítségével, hogy vannak-e valós gyökök!
a) $x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $x^2 + 4x - 7 = 0$

6 A $2x^2 + 3x - 7 = 0$ egyenletben határozd meg a gyökök kiszámítása nélkül:
a) a gyökök reciprokának összegét,
b) a gyökök köbeinek összegét!
Ellenőrizd, hogy vannak-e valós gyökök!

7 A $2x^2 - 3x - 7 = 0$ egyenletben határozd meg a gyökök kiszámítása nélkül:
a) a gyökök különbségének négyzetét,
b) a gyökök különbségét,
c) a gyökök négyzeteinek különbségét!
Ellenőrizd, hogy vannak-e valós gyökök!

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg fejben a másodfokú egyenleteket!
a) $x^2 - 25x + 100 = 0$ **c)** $x^2 + 7x - 78 = 0$
b) $x^2 - 5x - 36 = 0$ **d)** $x^2 + 0{,}2x - 0{,}48 = 0$

2 Oldd meg a $12x^2 - 17x + 6 = 0$ egyenletet a megoldóképlettel! Ellenőrizd, érvényesek-e itt a Viète-formulák!

3 A $6x^2 - 11x - 2 = 0$ egyenletben határozd meg a gyökök kiszámítása nélkül a két gyök négyzete reciprokának összegét!
Ellenőrizd, hogy vannak-e valós gyökök!

4 Írj fel olyan másodfokú egyenletet, melynek két gyöke a $4x^2 + 3x - 5 = 0$ egyenlet gyökeinek
a) ellentettje; **b)** reciproka!

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a Viète-formulákat!

Legyen az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet két gyöke x_1 és x_2, jelöljük D-vel a $(b^2 - 4ac)$ diszkriminánst. Ekkor a megoldóképletnek megfelelően $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ és $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. Írjuk fel a gyökök összegét és szorzatát!

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

(François Viète (1540–1603) francia matematikus volt. Az ő nevéhez fűződik a másodfokú egyenlet megoldásainak betűk segítségével történő felírása és a tételben szereplő két összefüggés is. Ő volt az első, aki fel tudta írni a π-t egy sorozat elemeinek szorzataként:

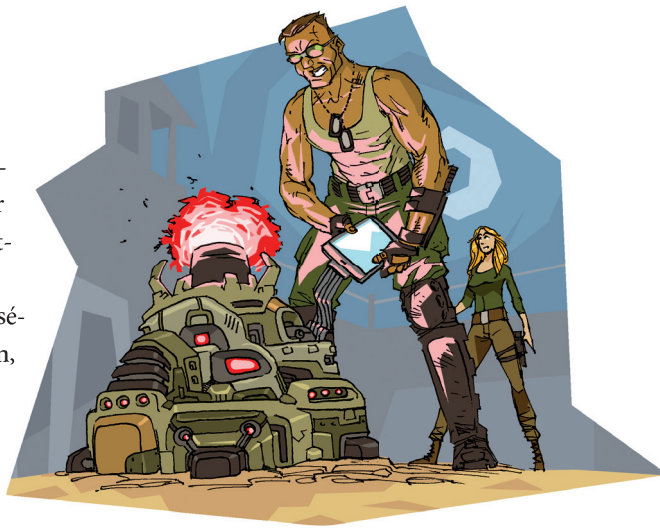
$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdot \ldots$$

Descartes – noha ezt egész életében tagadta – nagy valószínűséggel Viète műveire is alapozta saját algebrai és geometriai munkásságát.)



65 CSOPORTVERSENY

CSOPORTMUNKA



Alkossatok négyfős csoportokat!

1. *X* ügynöknek 30 perce van arra, hogy egy kód segítségével hatástalanítson egy ártalmas szerkezetet. Ha első kísérlete nem sikerül, akkor az ártalmas gép azonnal megkezdi működését. Ez pedig beláthatatlan következményekkel járna…
A kód „szerzője” esélyt adott a súlyos és drámai események elkerülésére, ugyanis pontos leírást helyezett el a szerkezeten arra vonatkozóan, hogy mi a teendő. A hatástalanítás sikeréhez szükség van *X* ügynök matematikatudására is. Segítsetek *X* ügynöknek elhárítani a veszélyt!
Oldjátok meg az 1–5. feladatokat, és hozzátok nyilvánosságra a hatástalanítás módját! Az a csoport, amelyik először írja fel a jó eljárást, jutalomban részesül. Amikor minden csoport nyilvánosságra hozta az eredményét, akkor a mentőakció véget ér. Amíg van olyan csoport, amelyik nem végzett a munkájával, addig a már végzettek egyszer javíthatnak javaslatukon.

1. feladat Melyik szám a $0 \leq -x^2 + 6x - 5$ egyenlőtlenség megoldáshalmazának a legnagyobb eleme a valós számok halmazán?	*Jelöld ezt a számot **A**-val!*
2. feladat Két valós szám összege 4. Ha a nagyobbik szám négyzetéből kivonjuk a kisebbik szám négyzetét, akkor 12-t kapunk. Hányféle lehet a kisebbik szám?	*Az eredményt jelöld a **B** betűvel!*
3. feladat Az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvények között hány olyan van, melynek zérushelyei $-0{,}2$ és 3? $f(x) = -0{,}2(x+1)(x-3)$ $h(x) = (5x+1)(x-3)$ $m(x) = -5(x+0{,}2)(x-3)$ $g(x) = 5(x+1)(x-3)$ $k(x) = -5(x-0{,}2)(x-3)$ $n(x) = -0{,}2(x-1)(x+3)$	*A kapott számot jelöld **C**-vel!*
4. feladat A következő egyenletek között hány olyan van, amelynek a valós számok halmazán pontosan egy megoldása van? $\sqrt{2x+1} = x-1$ $\sqrt{x-1} = x+3$ $\sqrt{2x+1} + 1 = x$ $\sqrt{8x} = -4x$ $\sqrt{x-1} = x-1$ $\sqrt{2x+3} = x+2$	*A kapott számot jelöld **D**-vel!*
5. feladat Helyettesítsd be a következő egyenletbe az *A*, *B*, *C* és *D* betűvel jelölt eredményeket, majd oldd meg a $\sqrt{Ax^2 + D} = Bx + C$ egyenletet a valós számok halmazán!	*Az egyenlet két gyökének a négyzetösszegét jelöld **E**-vel!*
*Billentyűzd be a hatástalanító készülékbe az **ABCDE** ötjegyű számot, és utána nyomd meg a piros gombot! Ha a megfelelő számot írtad be, akkor az ártalmas kódot kivégezted, De Ha Nem …*	

2. Az első 3 helyezett csapat mutassa be, milyen egyszerű módszereket alkalmazott a hatástalanítás érdekében!

HÁZI FELADAT

1 Írd fel a következő kifejezések gyöktényezős alakját!

a) $x^2 + 11x + 24$

b) $5x^2 + x - 6$

2 Egy vegyipari cég havonta x kg terméket állít elő. Egy kg terméket $(32 - 0{,}02x)$ euróért tud eladni. Az előállítás költsége euróban $(0{,}1x^2 - 45x + 12\,000)$.

Hány kg termék előállítása esetén lesz a cégnek nyeresége ebből a termékből, ha feltételezzük, hogy amit előállít, azt el is tudja adni?

3 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sqrt{3x+6} = x - 4$

b) $\sqrt{4x+1} = x - 5$

EMELT SZINT

Paraméteres egyenletek

Paraméteres egyenletről akkor beszélünk, ha az egyenlet valamelyik együtthatója nem ismert. Azon feladatok zömében, amelyekben ilyen típusú egyenletek fordulnak elő, ismert valamilyen összefüggés vagy kapcsolat az egyenletre vagy az egyenlet megoldásaira vonatkozóan. A feladatokban általában azt kell meghatározni, hogy a paraméter mely értékei esetén teljesülnek a megfogalmazott kapcsolatok, összefüggések.

Például

ismert	ekkor felhasználhatjuk
az egyik valós gyök értéke	ezt az értéket behelyettesítve teljesül az egyenlőség
pontosan egy valós gyöke van	a diszkrimináns értéke 0
nincs valós gyöke	a diszkrimináns értéke negatív
két különböző valós gyöke van	a diszkrimináns értéke pozitív
egyik gyöke pozitív, másik negatív	Viète-formulák

Ha a paraméter a főegyütthatóban is szerepel, akkor figyelni kell arra, hogy a paraméternek lehet olyan értéke, amely érték esetén a főegyüttható 0, ezért az egyenlet nem másodfokú.

1 Mely számokat jelölheti a p, ha a $(p-2)x^2 + (2p-7)x + p = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van a valós számok halmazán?

Megoldás

Akkor van ennek az egyenletnek két különböző valós gyöke, ha

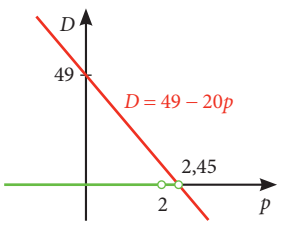
– másodfokú, vagyis $p - 2 \neq 0$ és

– a diszkriminánsa pozitív.

Jegyezzük meg, hogy $p - 2 \neq 0$, vagyis $p \neq 2$, és írjuk fel az egyenlet diszkriminánsát!

$D = (2p-7)^2 - 4 \cdot (p-2) \cdot p = 4p^2 - 28p + 49 - 4p^2 + 8p = 49 - 20p$.

$49 - 20p > 0$, ha $20p < 49$, vagyis $p < 2{,}45$.



Tehát az adott egyenletnek akkor és csakis akkor van két különböző valós gyöke, ha $p < 2{,}45$, de nem egyenlő 2-vel. A p megfelelő értékeit a koordináta-rendszer vízszintes tengelyén zölddel jelöltük.

2 Milyen számokat írjunk a p betű helyére, ha azt akarjuk, hogy a $(p+2)x^2 + 6px + 4p + 1 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazában 1 valós gyöke legyen?

3 Milyen p paraméter esetén lesz két különböző megoldása a következő egyenletnek a valós számok halmazán: $(p^2 - 5p + 4{,}5)x^2 + (3p-1)x + 2 = 0$?

4 A $(p+3)x^2 + (p^2 + 6p + 1)x - 5p = 0$ egyenlet egyik gyöke a valós számok halmazán az 5. Mi lehet a másik gyöke?

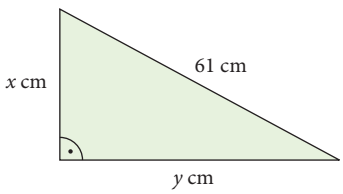
MÁSODFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

EMELT SZINT

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy derékszögű háromszög területe 330 cm^2, az átfogója 61 cm-es. Mekkorák a befogói?

Megoldás



Írjuk fel az x és az y segítségével a háromszög területét és a Pitagorasz-tételt!

$$\left.\begin{aligned}\frac{xy}{2} &= 330\\ x^2+y^2 &= 61^2\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned}xy &= 660\\ x^2+y^2 &= 3721\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből: $y=\frac{660}{x}$. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$x^2+\left(\frac{660}{x}\right)^2=3721;\quad x^2+\frac{435\,600}{x^2}=3721.$$

Az x^2 helyett vezessünk be új ismeretlent, jelöljük u-val!

$$u+\frac{435\,600}{u}=3721;$$

$$u^2+435\,600=3721u;$$

$$u^2-3721u+435\,600=0.$$

Megoldóképlettel: $u_1=3600;\quad u_2=121.$

Az x tehát olyan **pozitív** számot jelöl, amelynek a négyzete 3600 vagy 121. Tehát $x_1=60$ és $x_2=11$.

A másik befogó hosszát az $y=\frac{660}{x}$ egyenletből kapjuk meg:

$$y_1=\frac{660}{x_1}=\frac{660}{60}=11\ \text{ és }\ y_2=\frac{660}{x_2}=\frac{660}{11}=60.$$

Tehát egyféle háromszög felel meg a feladatunk feltételeinek, ennek az egyik befogója 11 cm, a másik 60 cm hosszúságú.

2. Melyik az a kétjegyű pozitív egész szám, amely 18-cal nagyobb a fordítottjánál, és a négyzete 1188-cal nagyobb a fordított szám négyzeténél?

Megoldás

A keresett szám első számjegyét u-val, a másodikat v-vel jelöljük. Ekkor ez a szám $(10u+v)$-vel, a fordítottja $(10v+u)$-val egyenlő.

A feltételek szerint: $\begin{cases}10u+v=10v+u+18\\(10u+v)^2=(10v+u)^2+1188\end{cases}$

Rendezzük át az első egyenletet, és használjuk a mérlegelvet!

$10u+v=10v+u+18;\quad 9u=9v+18;\quad u=v+2.$

Hogyan folytassuk?

Lehet algebrai átalakításokkal továbblépni. De mivel kétjegyű számokról van szó, melyekről most már azt is tudjuk, hogy a második számjegyük 2-vel nagyobb, mint az első számjegyük (ezt jelenti az utolsó egyenletként felírt $u=v+2$), lehet úgy is folytatni, hogy kipróbáljuk a szóba jövő számokat.

Algebrai módszer

a) Egyszerűbb alakra hozzuk a második egyenletet:

$100u^2+20uv+v^2=100v^2+20uv+u^2+1188$

$u^2=v^2+12$

b) Megoldjuk az $\left.\begin{aligned}u&=v+2\\u^2&=v^2+12\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszert.

A második egyenletbe az u helyére beírjuk a $(v+2)$-t.

$(v+2)^2=v^2+12;\quad v^2+4v+4=v^2+12;$

$4v=8;\quad v=2.$

Ha $v=2$, akkor $u=4$, vagyis az egyenletrendszernek egy megoldása van, a (4; 2) rendezett számpár.

Tehát a keresett szám a 42.

Próbálgatás

A szóba jövő kétjegyű számok:

20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

a 20 fordítottja a 2, $20^2-2^2=400-4\neq 1188;$

a 31 fordítottja a 13, $31^2-13^2=961-169\neq 1188;$

a 42 fordítottja a 24, $42^2-24^2=1764-576=1188;$

az 53 fordítottja a 35, $53^2-35^2=2809-1225\neq 1188;$

a 64 fordítottja a 46, $64^2-46^2=4096-2116\neq 1188;$

a 75 fordítottja az 57, $75^2-57^2=5625-3249\neq 1188;$

a 86 fordítottja a 68, $86^2-68^2=7396-4624\neq 1188;$

a 97 fordítottja a 79, $97^2-79^2=9409-6241\neq 1188.$

Tehát a keresett szám a 42.

FELADAT

1 Melyik az a kétjegyű, pozitív egész szám, amely 4-szer akkora, mint a számjegyeinek az összege, és 2-szer akkora, mint a számjegyeinek a szorzata?

2 Egy kétjegyű, pozitív egész szám számjegyeinek összege 5-tel kisebb, mint a számjegyek szorzata. Ez a szám úgy aránylik a fordítottjához, mint a 8 a 3-hoz. Melyik ez a szám?

3 Egy kétjegyű, pozitív egész szám 36-tal nagyobb, mint a fordítottja. A számnak és a fordítottjának a szorzata 1612. Melyik ez a szám?

4 Egy 105 cm hosszú nádszál segítségével rombusz alakú papírsárkányt készítünk. A nádszálat két részre vágjuk, ezek lesznek a rombusz átlói. A sárkánytest kerületének elkészítéséhez 150 cm hosszú spárgára van szükség. Mekkora a sárkánytest területe?

5 Egy deltoid körbe írható, azaz húrnégyszög. Kerülete 56 cm. Hosszabbik átlója 20 cm.

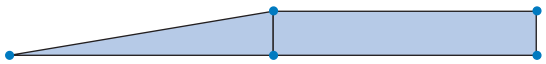
a) Mekkorák a deltoid oldalai?

b) Mekkora a köré írható kör sugara?

c) Mekkora a területe?

d) Mekkora a rövidebbik átlója?

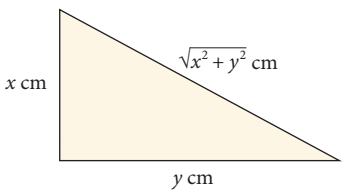
6 Egy ék keresztmetszete látható az ábrán. A keresztmetszet trapéz alakú, egy téglalapból és egy hozzá illeszkedő derékszögű háromszögből áll. A derékszögű háromszög befogói ugyanolyan hosszúak, mint a téglalap megfelelő oldalai.



A trapéz területe 540 mm^2. A trapéz hosszabbik szára 41 mm hosszú.
Milyen hosszú a trapéz többi oldala?

7 Egy derékszögű háromszög területe 420 mm^2, egyik befogójához tartozó súlyvonala 37 mm hosszú.
Milyen hosszúak a háromszög oldalai?

8 Egy derékszögű háromszög területe 180 cm^2, kerülete 90 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?



HÁZI FELADAT

1 Egy kétjegyű, pozitív egész szám 2-szer akkora, mint a számjegyeinek a szorzata. A szám úgy aránylik a fordítottjához, mint a 4 a 7-hez. Melyik ez a szám?

2 Egy kétjegyű, pozitív egész szám számjegyeinek a négyzetösszege 41. A számnak és a fordítottjának a szorzata 2430. Melyik lehet ez a szám?

3 Egy derékszögű háromszög kerülete 12 dm, egyik befogójának hossza 2 dm.

a) Mekkora a háromszög másik két oldala?

b) A háromszög területe hány százaléka a körülírt köre területének?

4 Egy konvex deltoid egyik oldala 13 cm, másik oldala 15 cm hosszú. A deltoid szimmetriatengelyét a másik átló 5 : 9 arányú részekre osztja.

a) Mekkorák a deltoid átlói?

b) Mekkora a deltoid területe?

c) Mekkora a deltoid beírt körének sugara? (Az érintőnégyszög beírt körének sugarát a terület és a kerület felének hányadosaként is kiszámolhatod.)

66 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Adj meg olyan másodfokú egyenletet, melynek két gyöke:

a) 12 és 21;

b) $-\frac{3}{7}$ és $-\frac{17}{10}$!

2 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3x - x^2 < 0$

b) $x^2 - 4{,}5x - 9 < 0$

3 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sqrt{x+3} = \frac{x}{2}$ b) $\sqrt{2x+4} = x+2$

4 Egy derékszögű útkereszteződésből indul két kerékpáros. Az első észak felé halad, és másodpercenként 4,5 m-t tesz meg. A második 5 másodperccel később indul kelet felé, és másodpercenként 5,5 m-t tesz meg.
Hány másodpercig lesznek – légvonalban – 500 m-nél közelebb egymáshoz?

5 Egy, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény két zérushelye -3 és 5, főegyütthatója $-0{,}5$.

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

b) Határozd meg a függvény szélsőértékét, és azt is, hogy hol veszi fel ezt a szélsőértéket!

c) Add meg a függvény értékkészletét!

6 (Érettségi feladat, 2007) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl.: ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez). Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre adott összpontszáma a lehető legtöbb legyen?

7 (Érettségi feladat, 2007)

a) Oldja meg a $7 + x < -2 \cdot (x - 2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

b) Oldja meg az $x^2 + x - 6 \leq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

c) Legyen az A halmaz az a) alatti egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig a b) alatti egyenlőtlenség megoldáshalmaza. Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat!

HÁZI FELADAT

1 Írd fel gyöktényezős alakban a következő kifejezéseket!

a) $2x^2 - 17x - 84$

b) $-3x^2 + 22x + 80$

2 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$\sqrt{3x+1} = x - 1$

3 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $2x - 2 > x^2$ b) $(2x+15)^2 + x - 3 \leq 0$

4 Egy konvex sokszög átlóinak száma nagyobb, mint 50 és kisebb, mint 100.
Hány oldala lehet ennek a sokszögnek?

TUDÁSPRÓBA

1 Írd fel gyöktényezős alakban a következő kifejezéseket!

a) $x^2 - 18x + 72$

b) $10x^2 + 57x - 18$

2 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$\sqrt{5x+1} = x+1$

3 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3x^2 - 2x < 1$

b) $(x-3)^2 > 2x - 7$

4 Egy másodfokú függvénynek két zérushelye van a valós számok halmazán: 3 és 7, főegyütthatója -2.

a) Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!

b) Határozd meg a függvény szélsőértékhelyét és szélsőértékét!

c) Ábrázold a függvény grafikonját!

5 Egy üzemben többféle terméket gyártanak. Az egyik termékükből x darab előállításának költsége $k(x) = x^2 + 3120$ (euró). Ezt a terméket 113 euróért árulják. Hány darab termék gyártása esetén lesz nyereséges ez a termékük? (Feltesszük, hogy el is tudják adni, amit előállítanak.)

EMELT SZINT

1 A gyöktényezős alak segítségével alakítsd szorzattá a számlálót is és a nevezőt is, majd egyszerűsítsd a törteket!

a) $\dfrac{x^2 - 3x - 18}{x^2 + 8x + 15}$

b) $\dfrac{2x^2 + 11x + 15}{2x^2 + 3x - 5}$

a) $\dfrac{10x^2 - 13x - 3}{14x - 8x^2 - 3}$

2 Milyen alakzat lesz a következő függvények grafikonja? Az algebrai átalakítás, egyszerűsítés után ábrázold a függvények grafikonját! Figyelj az értelmezési tartományra!

a) $f\colon (\mathbf{R} \setminus \{3\}) \to \mathbf{R},\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

b) $g\colon (\mathbf{R} \setminus \{2\}) \to \mathbf{R},\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$

3 A p paraméter melyik értéke esetén lesz a következő egyenletnek egyik megoldása az 5? Határozd meg a másik megoldást is!

a) $2x^2 + 8x - p = 0$

b) $3x^2 + px + 12 = 0$

c) $2x^2 + (p+1)x + 7 = 0$

4 (Érettségi feladat, 2020, emelt szint)
Adott az $x^2 - (4p+1)x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazold, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozd meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

5 A p paraméter mely valós értéke esetén lesz a következő egyenletnek két különböző előjelű gyöke?

$x^2 - 5x + p - 1 = 0$

6 A p paraméter mely valós értéke esetén lesz a következő egyenletnek pontosan egy megoldása a valós számok halmazán?

a) $px^2 - (p-1)x + p - 1 = 0$

b) $px^2 - (p+2)x + p = 0$

7 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|x^2 + 4x + 5| = 1$

b) $|x^2 + 4x + 4| = 1$

c) $|x^2 + 4x + 3| = 1$

d) Oldd meg grafikusan is mindegyik egyenletet!

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Ekvivalens-e egymással az **R** alaphalmazon a következő két-két egyenlet?

a) $(x+3)^2=16$ és $x+3=-4$

b) $2x+3\sqrt{x}=3\sqrt{x}-8$ és $2x=-8$

2 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x}=\frac{x}{3}$ **b)** $\sqrt{x}=x-2$

3 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+2}=x-4$ **c)** $\sqrt{2x+2}=x-3$

b) $\sqrt{x+6}=x-6$ **d)** $\sqrt{3x+1}=x-3$

4 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3x+10}-x=0$ **c)** $\sqrt{4x+8}+1=x$

b) $\sqrt{2x}=\frac{x}{2}$ **d)** $\sqrt{5x+1}=5x+1$

5 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $9\sqrt{x-4}=x-26$ **b)** $3\sqrt{2x-6}=x-3$

6 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2-11x\le 0$

b) $x^2-7x>0$

7 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2-11x+30\le 0$

b) $-x^2-3x>0$

c) $-x^2+3x+4>30$

8 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $2x^2-11x-6<0$

b) $-10x^2+21x-9\le 0$

9 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! Mérlegelv segítségével hozd egyszerűbb alakra az egyenlőtlenségeket!

a) $x+3x^2-5\le x^2-x+7$

b) $\frac{x+1}{3}\le\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{3}$

c) $(x+1)^2>(2x+1)^2+x$

10 Oldd meg valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket! Mérlegelv segítségével hozd egyszerűbb alakra!

a) $1+13x\ge 3x-7-2x^2$

b) $\frac{3-2x}{2}\le\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}$

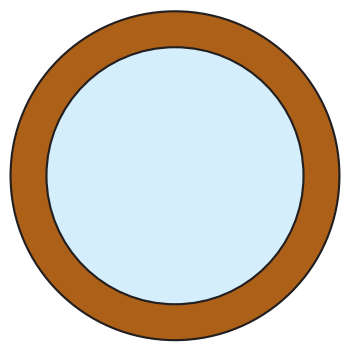
c) $(x+1)^2+(x+2)^2>(x+3)^2$

11 Egy függőlegesen felfelé dobott test x másodperc múlva $h(x)=32x-5x^2$ méter magasságban van. Melyik időtartamban van magasabban, mint 40 méter?

12 Egy cég a következő félévben akkor oszt prémiumot a dolgozók között, ha a nyereség több lesz, mint 2 ezer euró. A cég számításai szerint x db termék forgalmazása esetén a nyereség $f(x)=57x-0{,}3x^2$ euró, és $x\le 95$. Hány terméket kell ahhoz forgalmazni, hogy prémiumot kapjanak a dolgozók?

13 A Coulomb-törvény szerint két, egymástól r távolságra lévő pozitív töltés között a következő nagyságú taszító erő lép fel: $F=k\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$; ahol Q_1 és Q_2 a töltések nagysága, k pedig egy állandó. $\left(k=9\cdot 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\right)$ Mekkora távolságra vannak egymástól a Q_1 és Q_2 töltések ($Q_1=3{,}84\cdot 10^{-6}$ C és $Q_2=2{,}16\cdot 10^{-2}$ C), ha a köztük lévő taszító erő nagyobb, mint 12 N?

14 Egy kör alakú tükörnek 5 cm széles kerete van. A bekeretezett tükör teljes területének kevesebb, mint 20%-a keret. Mekkora a tükör belső átmérője?



15 Egy körlap közepére céltáblát rajzolunk úgy, hogy a céltáblát 3 cm széles sáv veszi körbe. A teljes körlapnak kevesebb, mint 10%-a, de több, mint 9%-a ez a 3 cm széles sáv. Mekkora a céltábla átmérője?

16 Alakítsd szorzattá a polinomokat!

a) $3x^2 - 4x - 7$ **b)** $4x^2 - 16x - 9$

17 Adj meg olyan egész együtthatós másodfokú polinomot, melynek zérushelyei

a) $\frac{2}{9}$ és $\frac{11}{3}$; **b)** $\frac{7}{4}$ és $-\frac{5}{6}$!

18 Írd fel az alábbi polinomokat gyöktényezős alakban!

a) $5x^2 + 3x - 8$ **b)** $0{,}2x^2 - 0{,}1x - 2{,}1$

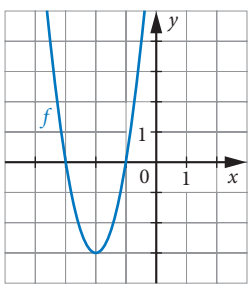
19 Írd fel a polinom gyöktényezős alakját!

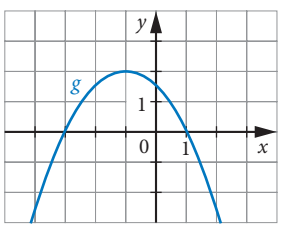
a) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{15}{2}$ **c)** $-2x^2 + x + 28$

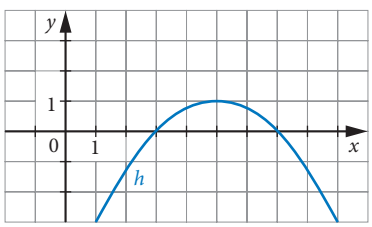
b) $-x^2 - x + \frac{15}{4}$ **d)** $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{21}{2}$

20 Egy valós számokon értelmezett másodfokú függvény két zérushelye 1 és 7, főegyütthatója 1. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát! Határozd meg a függvény szélsőértékhelyét és szélsőértékét!

21 A zérushelyei és a szélsőértéke leolvasásával írd fel a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvények hozzárendelési szabályát!







22 Keress olyan számot az egyenlőtlenség jobb oldalára, hogy minden valós szám megoldása legyen az egyenlőtlenségnek! Melyik a legnagyobb ilyen szám?

a) $x^2 + 4x \geq \square$ **c)** $-x^2 + 6x \leq \square$

b) $2x^2 + 20x \geq \square$

23 Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amelyre teljesül az egyenlőtlenség?

a) $-x^2 + 25x - 144 > 0$

b) $-x^2 + 26x - 165 \geq 0$

c) $2x^2 + 8x - 7 > 0$

d) $-3x^2 + \frac{1}{2}x - 6 > 0$

24 Egy konvex sokszög átlóinak száma több, mint 100 és kevesebb, mint 200. Hány oldalú lehet a sokszög?

25 Egy termék árát felemelték p százalékkal, majd megint felemelték, de most $2p$ százalékkal. Hány százalékos volt az első áremelés, ha a két áremelés után az ár az eredetihez képest több, mint 32%-kal emelkedett?

26 Határozd meg a kifejezés értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{-x^2 + 11x - 24}$

b) $\sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

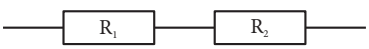
27 Határozd meg a kifejezés értelmezési tartományát és értékkészletét!

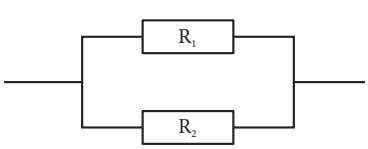
a) $\sqrt{-x^2 + 2x + 48}$

b) $\sqrt{-x^2 + 2x + 35}$

28 Konrád tavaly megmérte a tömegét és a magasságát. Azt tapasztalta, hogy magassága 165 cm, és kiszámította a testtömegindexét, ami 23,8 volt. Mennyit nőtt egy év alatt, ha egy évvel később azt tapasztalta, hogy testtömegindexe több, mint 5 százalékkal csökkent, de közben a tömege 5 százalékkal lett több, mint egy évvel korábban? (A testtömegindexet úgy számolják, hogy a kg-ban mért testtömeget elosztják a méterben mért magasság négyzetével.)

29 Két ellenállást sorosan kapcsolva az eredő ellenállás 6 Ω. Ugyanezeket az ellenállásokat párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállás 1,365 Ω. Mekkorák az ellenállások?
(R_1 és R_2 ellenállásokat sorosan kapcsolva az eredő ellenállás $R_1 + R_2$. Párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.)





67 KÖZÉPPONTOS NAGYÍTÁS, KICSINYÍTÉS

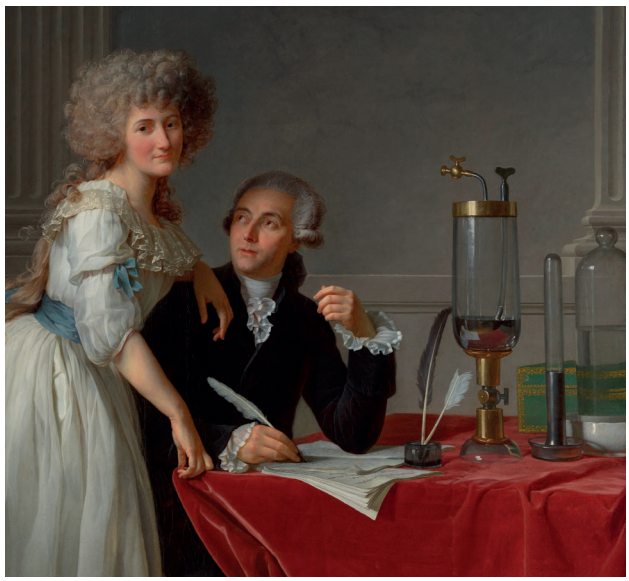
BEVEZETŐ

A Nagyítás című film egyik fontos jelenete a következő: „…Aztán az egyik fotón felfigyel egy apró részletre. **Nagyítást** készít a képről, egészen addig, amíg rá nem döbben arra, hogy egy pisztolyt tartó kezet lát a bokrok között. …” *(Nagyítás, 1966; a filmet Michelangelo Antonioni rendezte)* Keress rá, és nézd meg a filmet, érdemes!

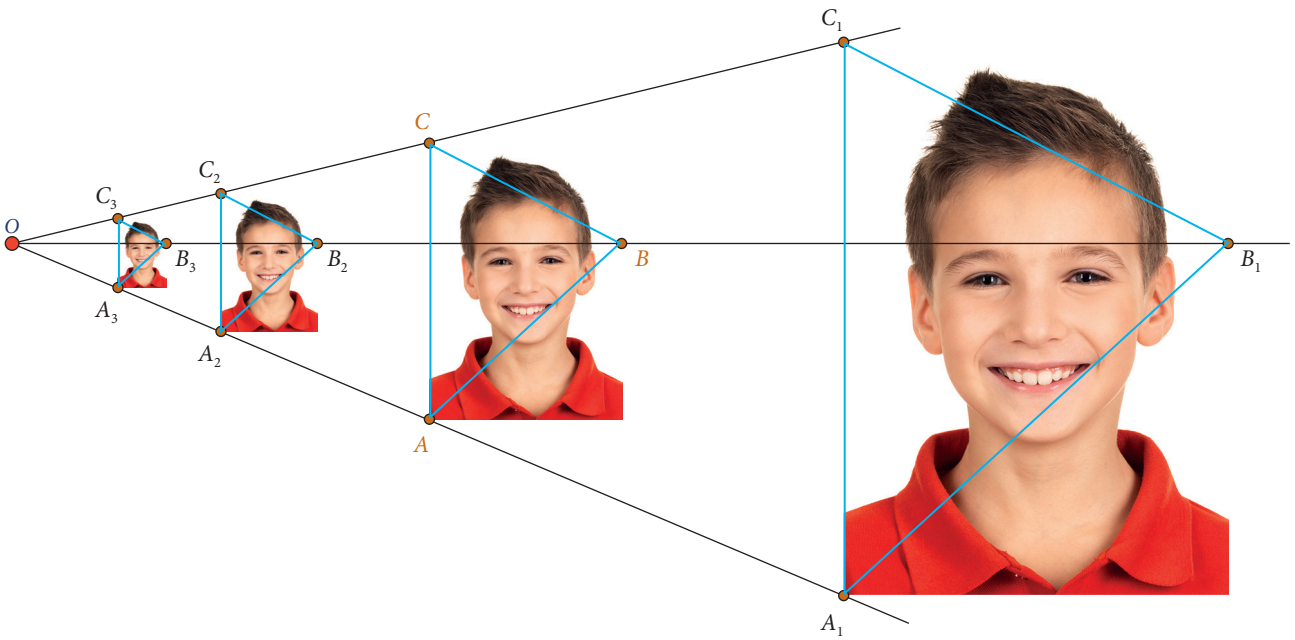
Jacques-Louis David neoklasszikus stílusú francia festő *Laurent Lavoisier és felesége* című festményének egy részletét felnagyítottuk. Az egyre nagyobb arányú nagyítások mindegyikénél olyan kép jön létre, amelyen az eredetileg egyenesnek látszó vonalak továbbra is egyenesnek látszanak, amelyen az eredeti kép távolságainak aránya ugyanakkora marad, amelyen az eredeti képen megmért szögek ugyanakkora szögek maradnak. Egyszóval a formák, az alakok megmaradnak, nem torzulnak a nagyítás során: a kéz kéznek, a papírlap papírlapnak látszik mindegyik nagyításban. A nagyítás során a képen a férfi ujjainak hossza ugyanannyiszorosára nő, mint a papírlap szélessége.

A mai technika világában számítógép segítségével sokszor nagyítjuk, kicsinyítjük a fényképeinket. Kicsinyítjük, ha kisebb méretben szeretnénk beilleszteni egy szövegbe, de fontos számunkra, hogy a teljes fénykép bekerüljön úgy, hogy megtartjuk közben az eredeti fényképen szereplő arányokat. Nagyítjuk, ha egy részletre vagyunk kíváncsiak.









Hogyan lehet nagyítani, kicsinyíteni?

A fotókról optikai úton készülő nagyítások – nagyon leegyszerűsítve – **középpontos nagyítással** készülnek. Ennek lényegét mutatja a mellékelt képsorozat, amely egy kisfiú eredeti képének kétszeresre **nagyított**, valamint felére, illetve negyedére **kicsinyített** változatát mutatja.

Ha az eredeti képen megjelölünk három pontot (A, B, C), akkor láthatjuk, hogy az O középpontú kétszeres nagyításnál: $OA_1 = 2 \cdot OA$, $OB_1 = 2 \cdot OB$, $OC_1 = 2 \cdot OC$. Így van ez az összes többi ponttal is: például a kisfiú orra hegye a nagyított képen kétszer akkora távolságra van az O ponttól, mint az eredetin.

A negyedére kicsinyített kép esetében minden O-tól mért távolság a negyede az eredeti távolságnak, a felére kicsinyített képen pedig ugyanez az arány 1 : 2.

Az egymásnak megfelelő szakaszok párhuzamosak (például $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$), illetve egy egyenesbe esnek, ha a szakasz egyenese átmegy az O ponton (például OA, OA_1, OA_2 és OA_3). Ebből az következik, hogy az ABC háromszög szögei ugyanakkorák, mint a másik három háromszög megfelelő szögei. Ez minden más szögre ugyancsak igaz: bármely szögnek a középpontos nagyítás során kapott képe ugyanakkora, mint az eredeti szög.

Azt is könnyen beláthatjuk, hogy a kétszeres nagyításnál minden szakasz kétszer olyan hosszúvá válik, a negyedére kicsinyítésnél minden szakasz negyedakkora lesz, mint az eredeti képen: például $A_1B_1 = 2 \cdot AB$, $A_3C_3 = \frac{1}{4} \cdot AC$.

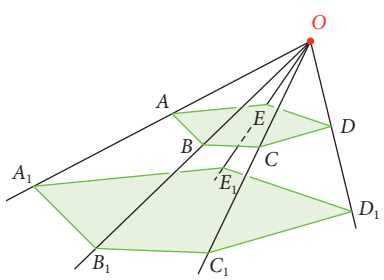
Érthetővé válik ezek alapján, hogy mit jelent a „forma”, az „alak” megmaradása:

- Az ABC háromszög bármelyik két oldalának arányát nézzük, ez ugyanannyi, mint a nagyított, illetve kicsinyített háromszög megfelelő két oldalának aránya; hiszen ha egy háromszög minden oldalának hosszát például kétszeresére változtatjuk, akkor a háromszögoldalak aránya nem változik meg;
- a kisfiú arcának bármely két részletét hasonlítjuk össze az egyik képen, a megfelelő méretek aránya mindegyik képen ugyanakkora lesz.

Megjegyzés

Egy síkbeli alakzat nagyítható a síkjának valamely pontjából, de a síkján kívüli pontból is. A fotók nagyítása általában nem a kép síkjában, hanem térben megvalósuló folyamat.

A mellékelt ábra egy ötszög olyan kétszeres nagyítását szemlélteti, amelynél a nagyítás középpontja (O) nincs benne az ötszög síkjában.



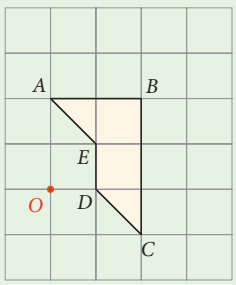
FELADAT

1 Adott a nagyítás középpontja (O) és aránya (k).

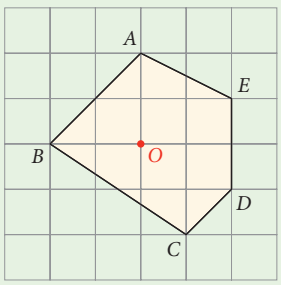
a) A négyzetháló segítségével nagyítsd (kicsinyítsd) a megadott alakzatot a füzetedben!

b) Számold ki az eredeti és a nagyított síkidom kerületét és területét (a hosszúságegység a rács legkisebb négyzetének oldalhossza legyen)! Hányszorosa a nagyított síkidom kerülete, illetve területe az eredetinek? Foglald az eredményeidet táblázatba!

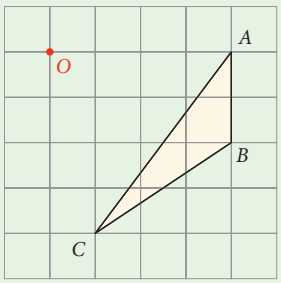
A) $k = 2$



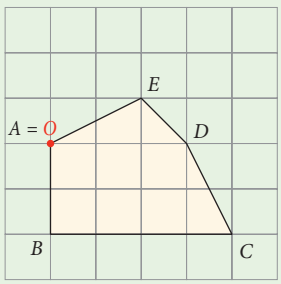
C) $k = \frac{3}{2}$



B) $k = \frac{3}{4}$

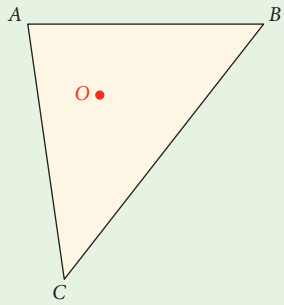


D) $k = 0{,}5$

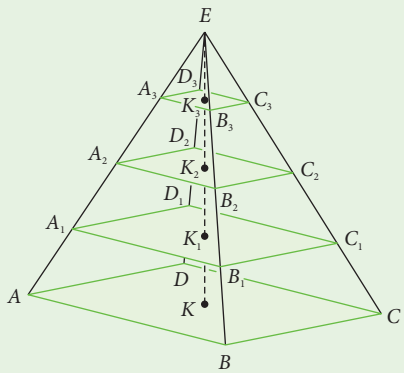


2 Másold le az ábrát! Szerkeszd meg a füzetedben az ABC háromszög O középpontú nagyított vagy kicsinyített képét, ha a hasonlóság aránya

a) $k = \frac{3}{2}$; **b)** $k = \frac{3}{4}$!



3 Az $ABCDE$ tömör, szabályos négyoldalú gúla alapéle 8 cm, magassága 12 cm. A gúlát az alaplapjával párhuzamos három síkkal négy részre vágjuk úgy, hogy a szomszédos párhuzamos síkok távolsága 3 cm legyen.



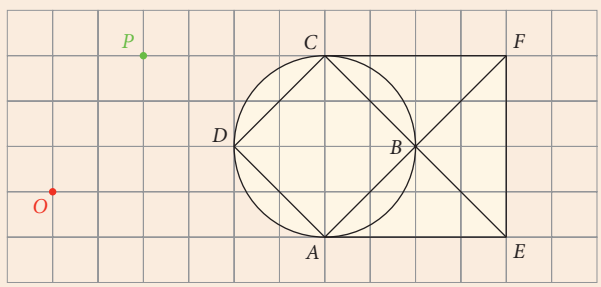
a) Milyen testek keletkeztek a részekre vágás során, milyen sokszögek határolják ezeket a testeket?

b) Mekkora területűek a szétvágásnál keletkező síkmetszetek (a színezett négyszögek, pl. $A_1B_1C_1D_1$)?

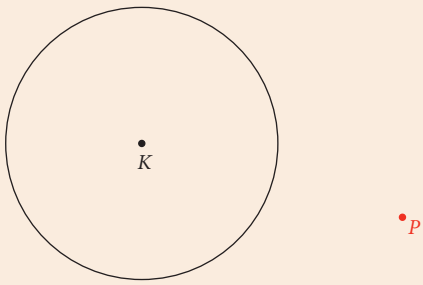
c) A síkmetszetek mindegyike átvihető egy másikba középpontos nagyítással. Válassz ki két síkmetszetet, add meg a megfelelő nagyítás középpontját és arányát!

HÁZI FELADAT

1 Másold át a füzetedbe a jobb oldali ábrát! Nagyítsd a megadott tervrajzot másfélszeresére az O pontból (jelöld a kapott pontokat az eredeti pontoknak megfelelően 1-es indexszel), majd a P pontból (jelöld a kapott pontokat az eredeti pontoknak megfelelően 2-es indexszel)! Igazold, hogy a két nagyított ábra egy eltolással egymásba átvihető! Add meg az eltolást egy vektorral!



2 Kicsinyítsd a kört mindkét megadott pontból (P külső pont, K a kör középpontja) a $\frac{3}{5}$-ére! A füzetedben dolgozz!



3 A Bevezetőben látható, kisfiúról készült képsorozattal kapcsolatosak a következő kérdések:

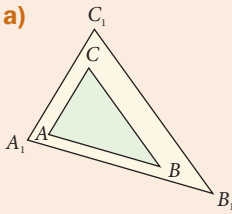
a) Hányszoros nagyítása a legnagyobb kép a legkisebbnek?

b) Mekkora annak az O középpontú kicsinyítésnek az aránya, amelynél az $A_1B_1C_1$ háromszög képe az $A_2B_2C_2$ háromszög?

c) Hányszor akkora területű a legnagyobb kép, mint a legkisebb?

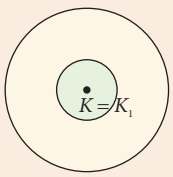
4 Fogalmazd meg, hogy az alábbi esetekben hogyan határozható meg szerkesztéssel a nagyítás középpontja!

a)

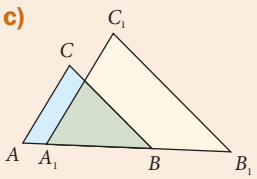


$AB \parallel A_1B_1$
$BC \parallel B_1C_1$
$AC \parallel A_1C_1$

b)

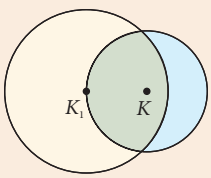


c)



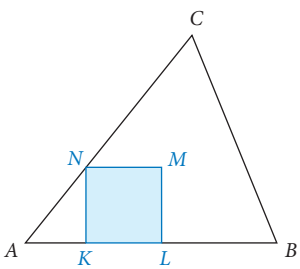
$BC \parallel B_1C_1$
$AC \parallel A_1C_1$

d)



EMELT SZINT

Írjunk az adott ABC háromszögbe olyan négyzetet, amelynek két csúcsa az AB, egy-egy csúcsa pedig az AC, illetve a BC szakaszon van!

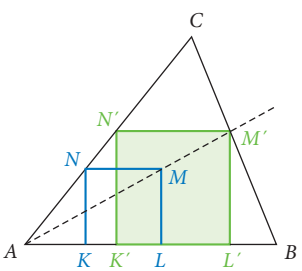


Megoldás

Egy kisebb, $KLMN$ négyzetet a bal oldali ábra szerint úgy helyezünk el, hogy három csúcsa, a K, az L és az N a követelményeknek megfelelően helyezkedjék el.

Az M csúcs az egyetlen, amely még nincs a BC oldalon.

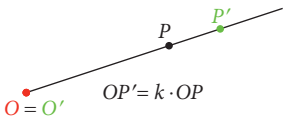
Most az A pontból olyan középpontos nagyítást alkalmazunk, amellyel az M pont M' képe a BC szakaszra kerül. A szerkesztésnél felhasználjuk, hogy a négyzetnek és a képének a megfelelő oldalegyenesei illeszkedők vagy párhuzamosak; a K és az L pont az AB egyenesen, az N pont az AC egyenesen mozdul el. A $KLMN$ négyzet képe, a $K'L'M'N'$ négyzet tehát megfelel a feladat követelményeinek (jobb oldali ábra).



68 KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG

ELMÉLET

A középpontos nagyítás és kicsinyítés összefoglaló neve egy geometriai transzformáció, a **középpontos hasonlóság**.

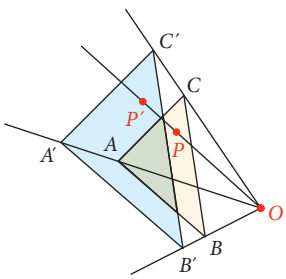


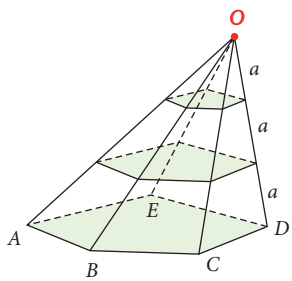
Definíció: Adott egy O pont **(a középpontos hasonlóság középpontja)** és egy k pozitív valós szám **(a hasonlóság aránya)**.
A tér bármely P pontjához hozzárendeljük a P' pontot úgy, hogy
- az O pont képe önmaga (azaz $O = O'$);
- ha $P \neq O$, akkor P' az OP félegyenesének azon pontja, melyre igaz, hogy az OP' szakasz hossza az OP szakasz hosszának k-szorosa.

Ez a hozzárendelés **középpontos nagyítás,** ha $1 < k$, **középpontos kicsinyítés,** ha $k < 1$, egybevágósági transzformáció, ha $k = 1$.
Szokás a középpontos hasonlóságot negatív k-ra is értelmezni, ekkor a transzformáció a $|k|$ arányú, O középpontú középpontos hasonlóság és egy O középpontú tükrözés egymásutánja.

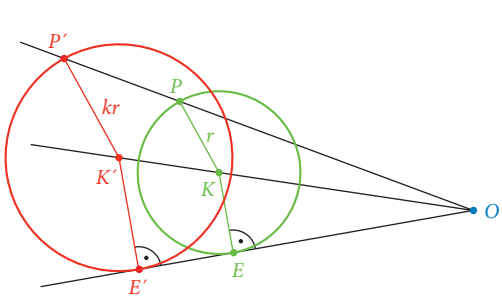
Definíció: Ha két alakzathoz van olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi át, akkor ezeket a alakzatokat középpontosan hasonlóknak mondjuk.

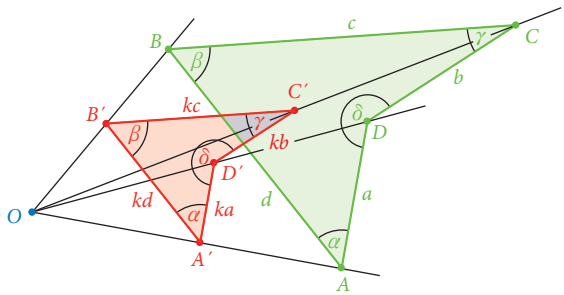
Például az ABC háromszög középpontosan hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz; az $ABCDEO$ gúlához középpontosan hasonló a másik két, szintén O csúcsú gúla (amelyeknek az alaplapja párhuzamos az $ABCDE$ lappal).





Az O középpontú, k arányszámú középpontos hasonlóság esetén:
- pont képe pont;
- egyenes képe egyenes, a kapott egyenes egybeesik az eredeti egyenessel, ha ez az egyenes illeszkedik az O pontra, párhuzamos az eredeti egyenessel, ha ez az egyenes nem illeszkedik az O pontra;
- szög képe vele egyenlő nagyságú szög;
- szakasz képe k-szor olyan hosszú szakasz, mint az eredeti szakasz.





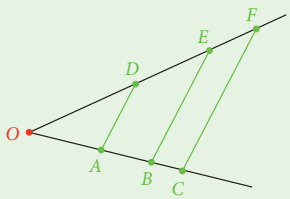
A középpontos hasonlóság további fontos tulajdonságai:
- kör képe kör, melynek sugara az eredeti sugár k-szorosa;
- sokszög képe sokszög, e két sokszög megfelelő szögei egyenlők, megfelelő oldalai párhuzamosak (a pontos matematikai definíció szerint minden egyenes önmagával is párhuzamos), megfelelő oldalaik hosszának aránya k-val egyenlő.

A középpontos hasonlóság tulajdonságai vizsgálhatók a *GeoGebra* programmal is.

FELADAT

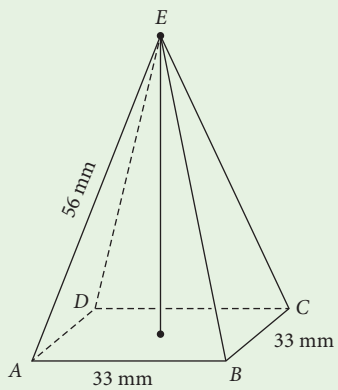
1 Igaz-e, hogy bármely két nem egybevágó
a) négyzet; **c)** egy síkban fekvő kör;
b) kocka; **d)** gömb
középpontosan hasonló?

2 Az O csúcsú szög szárait párhuzamosokkal metszettük. Két-két keletkezett síkidomról azt állítjuk, hogy középpontosan hasonlók. Melyik állítás igaz, melyik hamis, és miért?
a) az OAD háromszög és OBE háromszög;
b) az OCF háromszög és OBD háromszög;
c) az $ABED$ trapéz és $BCFE$ trapéz;
d) az $ABED$ trapéz és $ACFD$ trapéz.



3 Nagyíts középpontosan egy négyzetet, a nagyítás aránya legyen 2! Mennyi a nagyított és az eredeti négyzet kerületének aránya, és mennyi a területük aránya?

4 Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúlát középpontos hasonlósággal nagyítjuk az E pontból. A nagyítás aránya
a) 2; **c)** 100;
b) 8; **d)** $\sqrt{2}$.
Mekkorák a nagyított gúlák alapélei és oldalélei? Mekkora a nagyított gúlák alapterülete? Mekkora a nagyított gúlák oldallapjainak kerülete?



5 Folytasd az előző feladatot! Számítsd ki, hányszorosa a nagyított gúlák alapterülete az $ABCD$ négyzet területének! Hányszorosa a nagyított gúlák oldallapjainak kerülete az ABE oldallap kerületének?

HÁZI FELADAT

1 Vegyél fel a füzetedben egy 5 cm sugarú kört! Kicsinyítsd a kört úgy, hogy a hasonlóság aránya 0,5 legyen, valamint
a) a hasonlóság középpontja legyen a kör középpontjától kétszer akkora távolságra, mint amekkora a kör sugara;
b) a hasonlóság középpontja legyen a körvonalon!

2 Vegyél fel a füzetedben egy 8 cm oldalú szabályos háromszöget! Kicsinyítsd az egyik oldalfelező pontjából úgy, hogy a kicsinyítés aránya 0,5 legyen! Számold ki a kicsinyített és az eredeti háromszög kerületét, területét, majd határozd meg a kerületek arányát és a területek arányát is!

3 Egy gömb sugara 6 cm. Kicsinyítjük a gömböt úgy, hogy a hasonlóság aránya 0,5 legyen. Számold ki a kicsinyített és az eredeti gömb felszínét és térfogatát, majd határozd meg a felszínek arányát és a térfogatok arányát is! (A gömb felszínét az $A = 4\pi r^2$ képlettel, térfogatát a $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ képlettel számolhatod ki.)

69 GEOMETRIAI HOZZÁRENDELÉSEK

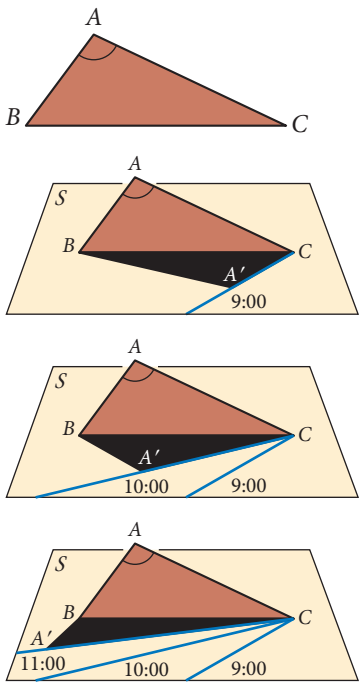
BEVEZETŐ

A napóra egy érdekes geometriai hozzárendelésen alapuló időmérő eszköz. Az eszköz használatakor a Nap mozgását és az ez által létrehozott különböző állású, pillanatnyi árnyék képét figyelik meg, és annak segítségével határozzák meg a helyi időt.

A Nap mérete és a Földtől való távolsága miatt a Napból a Földre érkező sugarakat tekinthetjük egymással párhuzamosnak.

Ha egy térbeli alakzatot egy rögzített képsíkra egy adott iránnyal párhuzamos fénysugarakkal vetítünk, akkor **párhuzamos vetítést** hozunk létre. Ez a leképezés a napóra működési elvének alapja.

Az alábbi rajzok a napóra sematikus képét mutatják.



Az árnyék képzéséhez szükséges ABC háromszöget úgy helyezik el, hogy a háromszög egyik oldala illeszkedjen az S síkra. A kialakuló árnyékháromszög BC oldala egybeesik az eredeti háromszög BC oldalával, ezért hosszuk egyenlő. Az árnyékháromszög többi oldalának hossza és szögeinek nagysága a Nap állásától függően változik.

Az eredeti ABC háromszög képe az adott pillanatban kialakult $A'BC$ háromszög, ezért ez felfogható egy térbeli geometriai leképezésnek. Ez a hozzárendelés azonban nem rendelkezik sem távolságtartó, sem szögtartó tulajdonsággal, és nem érvényes rá a megfelelő szakaszok arányának állandósága sem.

Az i. e. 5. századtól egészen a középkorig a napórák adtak lehetőséget a helyi idő legpontosabb meghatározására nappal, derült időben.

A napóra nem csak az időmérő eszköz, hanem művészeti alkotás, építészeti és műszaki alkotás szerepét is betöltötte az évszázadok során.



ELMÉLET

1. A **geometriai hozzárendelések** (más szóval: geometriai leképezések) olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.
   Ezek közül különösen fontosak azok a hozzárendelések, amelyek kölcsönösen egyértelműek, valamint az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a ponthalmaz. Ezeket **geometriai transzformációknak** nevezzük. Ezek közé tartoznak a tanult egybevágósági transzformációk és a hasonlóság is.

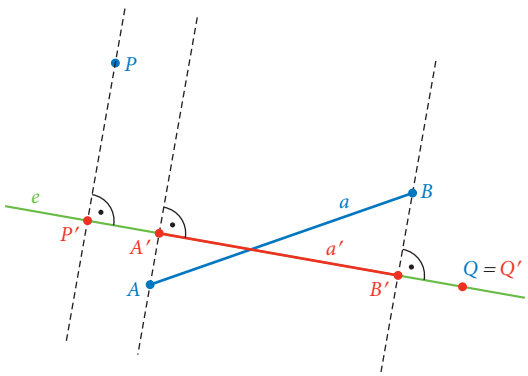
Az egybevágósági transzformációk (tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli elforgatás, párhuzamos eltolás) és a középpontos hasonlóság esetén érvényes, hogy egyenes képe egyenes, szakasz képe szakasz, háromszög képe háromszög, kör képe kör.

Az előbbi tulajdonságok mellett az említett transzformációk mindegyikében speciálisabb tulajdonságokat is megfogalmaztunk az eredeti és a képként kapott alakzatokra vonatkozóan. Az egybevágósági transzformációk esetén például érvényben van a szakasztartó, távolságtartó, szögtartó tulajdonság, míg a középpontos hasonlóság esetén a távolságtartás helyett az aránytartás teljesül.

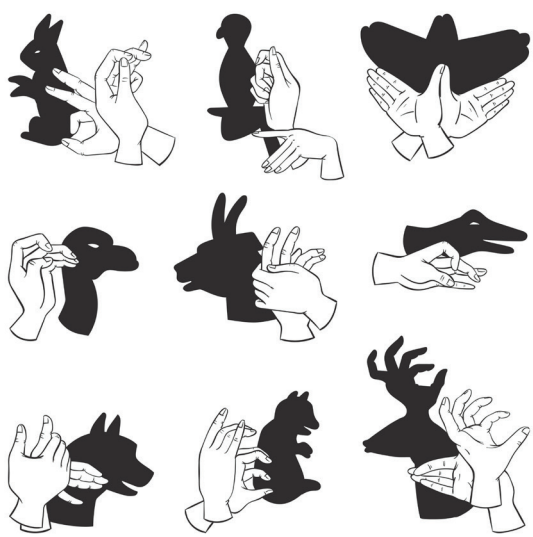
2. Vannak másféle geometriai hozzárendelések is.
A műszaki gyakorlatban például a testek ábrázolására a vetületi ábrázolást használják. Ilyenkor egy térbeli test pontjainak képe egy síkbeli alakzat, vagyis az értelmezési tartomány és az értékkészlet dimenziója nem azonos, a dimenzió csökken: a teret egy síkra képezzük le. Ezek a vetületi ábrázolások legtöbbször sem a távolságot, sem az arányt nem őrzik meg.

A tárgyról merőleges vetítéssel kialakított, síkban fekvő geometriai alakzatokat **vetületnek,** ezt a vetítési módot **merőleges vetítésnek** nevezzük. A sík elhelyezkedésétől függően beszélhetünk elölnézeti, felülnézeti vagy oldalnézeti képről.

A síkbeli merőleges vetítés során a sík pontjait a sík egy egyenesére vetítjük. Ezt szemlélteti az ábra.



3. Kéz árnyéka kéz? Dinoszaurusz alakú árnyképe csak dinoszauruszoknak lehet? Ezt a csalóka illúziót használják ki az árnyjátékot professzionálisan megjelenítő művészek, akik valójában a tér pontjait a tér egy síkjára vetítik le előre elkészített koreográfia alapján.

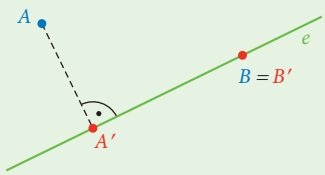




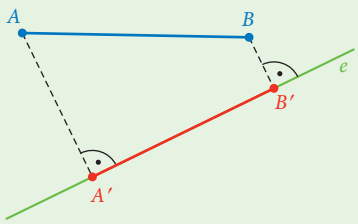
FELADAT

1 Az alábbi ábrákon egy-egy példát látunk a sík egyenesre történő merőleges vetítésére.
Gondoljuk végig az ábrák alapján, hogy miért igazak a következő állítások!

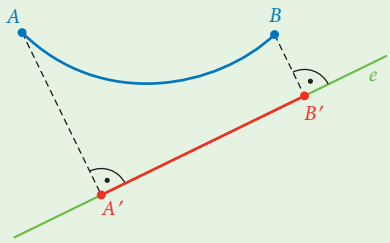
a) Pont képe pont.
b) Szakasz képe lehet pont.
c) Van olyan szakasztól különböző alakzat, amelynek képe szakasz.
d) Egy szakasz merőleges vetülete legfeljebb olyan hosszú, mint az eredeti szakasz.
e) Körvonal képe szakasz.



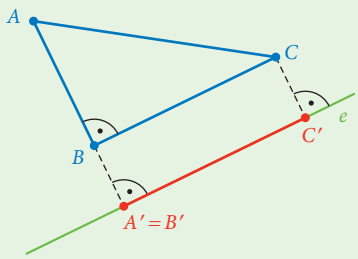
1. ábra



2. ábra

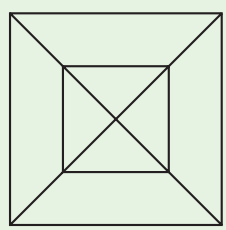


3. ábra

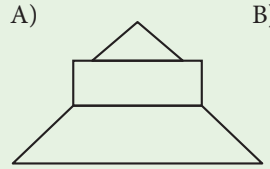


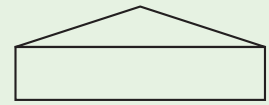
4. ábra

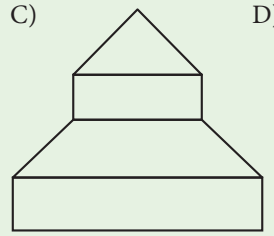
2 (Kompetenciamérés, 2009)
A következő ábrán egy épület felülnézeti képe látható.

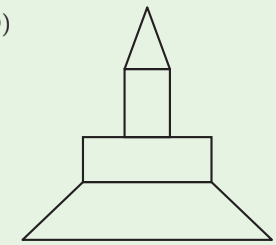


Melyik ábra mutathatja az épület oldalnézeti képét?

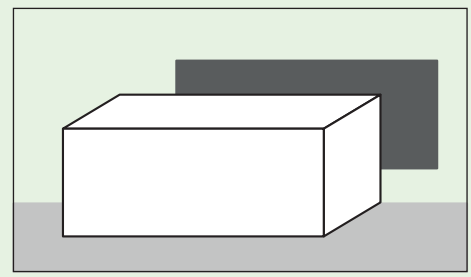
A)


B)


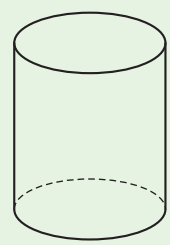
C)


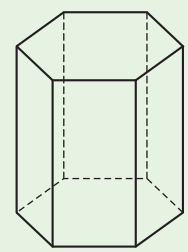
D)


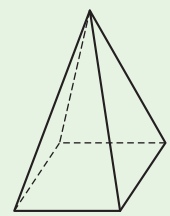
3 (Kompetenciamérés, 2013)
Tomi különböző testeket világított meg, és megfigyelte a falon kirajzolódó árnyékukat.

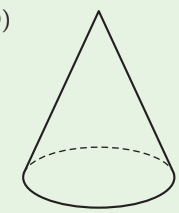


Melyik test NEM adhat árnyékként téglalapot? Válaszd ki a megfelelő ábra betűjelét!

A)


B)


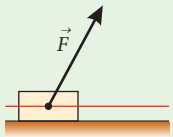
C)


D)


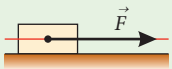
4 A fizikában akkor beszélünk munkavégzésről, ha erő hatására a test elmozdul. Az állandó erő által végzett munka nagyságát úgy számíthatjuk ki,

hogy a test elmozdulásának és az erő elmozdulás irányába eső összetevőjének nagyságát megszorozzuk egymással. Az erő elmozdulás irányú összetevője az erő merőleges vetülete az elmozdulás irányára.
Az alábbi ábrákon pirossal rajzoltuk a test elmozdulásának egyenesét. Másold le az ábrákat a füzetedbe, és szerkeszd meg az egyes esetekben a feketével rajzolt $\vec{F}$ erővektor merőleges vetületét az elmozdulás egyenesére!

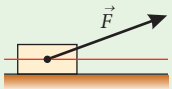
a)



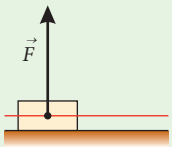
b)



c)



d)



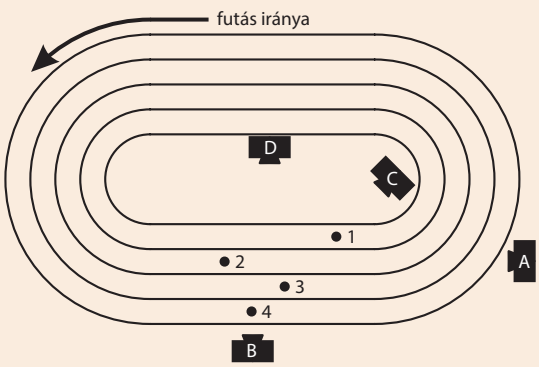
HÁZI FELADAT

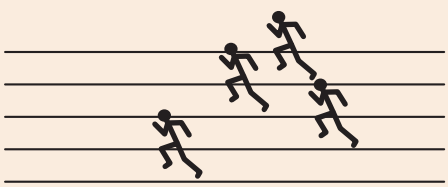
1 Szerkessz egy derékszögű háromszöget, melynek befogói 4 cm és 5 cm hosszúak!

a) Szerkeszd meg a két befogó merőleges vetületét az átfogó egyenesére! Mekkora e két vetület hosszának összege?

b) Szerkeszd meg az átfogó merőleges vetületét az egyik, majd a másik befogó egyenesére! Mekkora a merőleges vetületek hossza?

2 (Kompetenciamérés, 2017)
A zedországi 1500 méteres síkfutást négy kameraállásból rögzíti a televízió. A következő ábra az 1, 2, 3, 4 számokkal jelölt négy futó pozícióját, valamint az A, B, C és D jelű kamerák elhelyezkedését mutatja.





a) Melyik kamera felvétele alapján készült a következő ábra a futók pozíciójáról?

b) Állapítsd meg a felső ábra alapján, melyik versenyzőtársát látja a 3-as számmal jelölt futó, ha balra hátrafelé pillant!

3 (Kompetenciamérés, 2008)
Az alábbi rajz felülnézetből ábrázol egy tömör, azonos méretű kockákból álló testet. Az is leolvasható a rajzról, hogy a felülnézetben látható oszlopok hány kockát tartalmaznak. Ezt az oszlopok tetején lévő szám jelzi.

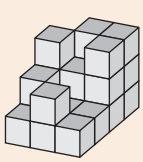
2	3	3
1	2	3
2	1	1
1	2	1

← Oldalnézet

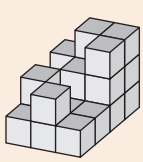
↑ Elölnézet

Melyik alábbi test szerkezetét adja meg a speciális felülnézeti ábra?

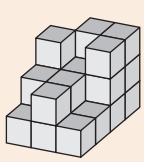
a)



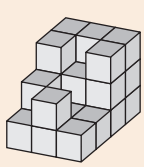
b)



c)



d)



70 HASONLÓSÁG

BEVEZETŐ

Egy mérnök észrevette, hogy egy fontos alkatrész tervrajzát bent hagyta az irodájában a tervezőasztalon. Telefonál az egyik munkatársának, Jánosnak:
– Légy szíves, küldd el nekem a 6-os hengersor rajzát!
János látja, hogy a tervrajz túl nagy ahhoz, hogy beférjen az A/4-es méretű másológépbe (szkennerbe), ezért 1 : 4 arányú középpontos kicsinyítést végez. Az így kapott ábra megfelelő méretű, így beszkenneli, majd egy e-mail mellékleteként gyorsan elküldi a munkatársa számítógépére. A mérnök kinyomtatja a rajzot A/4-es méretben.

Milyen kapcsolat van a kinyomtatott és az eredeti rajz között?

A középpontos hasonlósággal kapott ábrán
– minden szög ugyanakkora, mint az eredetin;
– minden szakasz negyedakkora, mint az eredeti szakasz.

Ezt küldte el János egyik számítógépről a másikra. Eközben sem a szögek nagysága, sem a szakaszok hossza nem változott meg, tehát a megérkezett rajz egybevágó azzal, amit János küldött. A nyomtatás is ezekkel egybevágó rajzot eredményezett.
Tehát a mérnök a 6-os hengersor tervrajzának pontos kicsinyített változatát kapta, ezzel dolgozhat tovább. Azt mondjuk, hogy ez az ábra **hasonló** az irodában lévő eredeti tervrajzhoz. Nemcsak hasonlít hozzá, nemcsak olyasmi, mint az, hanem matematikai szakkifejezéssel: **hasonló**.



Nézzük azt a tervrajzot, amelyet János a másolással kapott! Ez
– az eredeti kicsinyített képe és
– egybevágó azzal a tervrajzzal, amelyet a mérnök kinyomtatott.

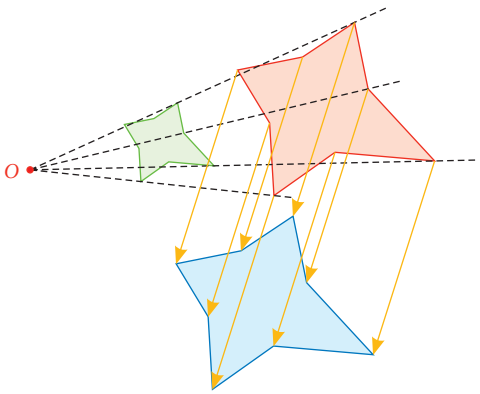
A mérnök által kinyomtatott tervrajz az eredetinek is kicsinyített képe.

ELMÉLET

Ha egy alakzat középpontosan hasonló képét valahova elmozdítjuk és/vagy tükrözzük, akkor a keletkező harmadik alakzatra azt mondjuk, hogy ez **hasonló** az első alakzathoz. A hasonlóság jele: ~
A középpontos hasonlóság aránya egyúttal az itt fellépő hasonlóságnak is aránya.
Ha a hasonlóság aránya 1, akkor egybevágóságról beszélünk. Ez azt jelenti, hogy az egybevágósági transzformációk halmaza valódi részhalmaza a hasonlósági transzformációk halmazának.

Másképp: Két alakzatot hasonlónak mondunk, ha az egyik egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás után való elvégzésével a másikba vihető. Két alakzat **középpontosan hasonló,** ha az egyik létrehozható a másikból középpontos hasonlósági transzformációval.

Például a zöld nyolcszög középpontos nagyítása a rózsaszínű nyolcszög. A nagyítás aránya $\frac{11}{5}$. A rózsaszínű nyolcszög elmozdítható úgy, hogy éppen a kék nyolcszöget kapjuk meg. Ezért azt mondjuk, hogy a zöld és a kék sokszög hasonló. A rózsaszínű sokszög oldalai $\frac{11}{5}$-ször akkorák, mint a zöld sokszög megfelelő oldalai, és ugyanekkorák a kék nyolcszög oldalai is. A három sokszög megfelelő szögei mind egyenlők.



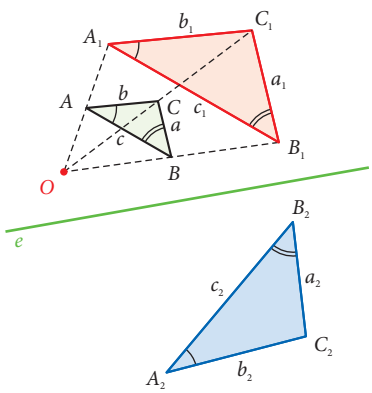
Megjegyzés

A zöld és a rózsaszín nyolcszögre is mondhatjuk, hogy hasonlók. Ezzel kevesebbet állítunk a két sokszögről, mint ami valójában teljesül rájuk, hiszen a középpontos hasonlóság a hasonlóság különleges esete.

A szemléltetés *GeoGebra* programmal is elvégezhető.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az ABC háromszög oldalhosszúságai: 15 mm (a), 19 mm (b) és 26 mm (c). Ezt kétszeresére nagyították az O pontból, majd a nagyított képet tükröztük az e egyenesre. Milyen kapcsolat van a három háromszög között, illetve mekkorák az egyes háromszögek oldalai?



Megoldás

– A nagyítással kapott $A_1B_1C_1$ háromszög középpontosan hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, ezért egyben hasonló is a két háromszög: $A_1B_1C_1\triangle \sim ABC\triangle$. A hasonlóságuk aránya 2. A nagyított háromszög oldalai: $a_1 = 30$ mm, $b_1 = 38$ mm és $c_1 = 52$ mm; szögei ugyanakkorák, mint az ABC háromszög megfelelő szögei.

– Az $A_1B_1C_1$ háromszög és az $A_2B_2C_2$ háromszög egybevágó, hiszen az e egyenesre való tükrözéssel egymásba átvihetők: $A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle$. Oldalaik hossza egyenlő ($a_2 = 30$ mm, $b_2 = 38$ mm és $c_2 = 52$ mm), megfelelő szögeik egyenlők.

(Mondhatnánk azt is, hogy a két háromszög hasonló, és a hasonlóságuk aránya 1.)

– Az $A_2B_2C_2$ háromszög hasonló az eredeti ABC háromszöghöz: $A_2B_2C_2\triangle \sim ABC\triangle$, a hasonlóságuk aránya 2.

Tehát

– mindhárom háromszögnek ugyanakkorák a szögei;

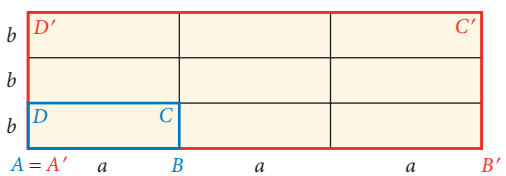
– az eredeti háromszög oldalai hosszának mindkét hozzá hasonló háromszögben kétszer akkora hosszúságú oldal felel meg:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a} = 2, \qquad \frac{b_1}{b} = \frac{b_2}{b} = 2, \qquad \frac{c_1}{c} = \frac{c_2}{c} = 2;$$

– bármelyik háromszög három oldalának arányát nézve ez mindhárom háromszög esetében ugyanannyi: $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = 15 : 19 : 26$.

2. Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza legyen a és b! Alkalmazzunk a téglalapra egy olyan középpontos hasonlósági transzformációt, amelynek középpontja az A csúcs, a hasonlóság aránya $k = 3$!

Határozzuk meg a kapott $A'B'C'D'$ és az eredeti $ABCD$ téglalap kerületének és területének arányát!



Megoldás

A középpontos hasonlóság tulajdonságai alapján $A'B' = 3AB = 3a$, valamint $A'D' = 3AD = 3b$.

A kerületek aránya (ahol K' az $A'B'C'D'$ téglalap, K az $ABCD$ téglalap kerülete):

$$\frac{K'}{K} = \frac{2(AB' + AD')}{2(AB + AD)} = \frac{2(3a + 3b)}{2(a + b)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (a + b)}{2(a + b)} = 3$$

A területek aránya (ahol T' az $A'B'C'D'$ téglalap, T az $ABCD$ téglalap kerülete):

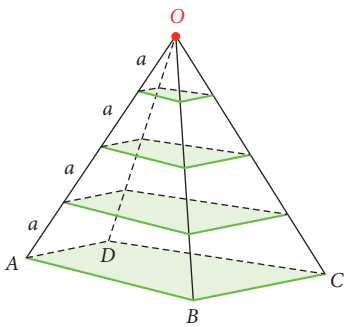
$$\frac{T'}{T} = \frac{A'B' \cdot A'D'}{AB \cdot AD} = \frac{3a \cdot 3b}{a \cdot b} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

ELMÉLET

Ha egy síkidomot k arányú középpontos hasonlósággal transzformálunk, akkor a transzformáció során kapott alakzat kerülete az eredeti alakzat kerületének k-szorosa, területe pedig az eredeti alakzat k^2-szerese.

Például

Az ábra $ABCD$-vel párhuzamos síkú sokszögei kerületének aránya (a legkisebbtől indulva): 1 : 2 : 3 : 4; a területük aránya: 1 : 4 : 9 : 16.



A fenti összefüggések nem csak a középpontosan hasonló alakzatok esetén állnak fenn. Bizonyítható, hogy két **hasonló** sokszög (vagy bármely más síkidom) kerületének aránya a hasonlóságuk arányával (k-val), területének aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével (k^2-tel) egyenlő.

FELADAT

1 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 12 cm, 15 cm és 16 cm. Egy ahhoz hasonló másik háromszög egyik oldala 10 cm-es.

a) Mennyi lehet a hasonlóság aránya?

b) Mekkora lehet a másik háromszög többi oldala?

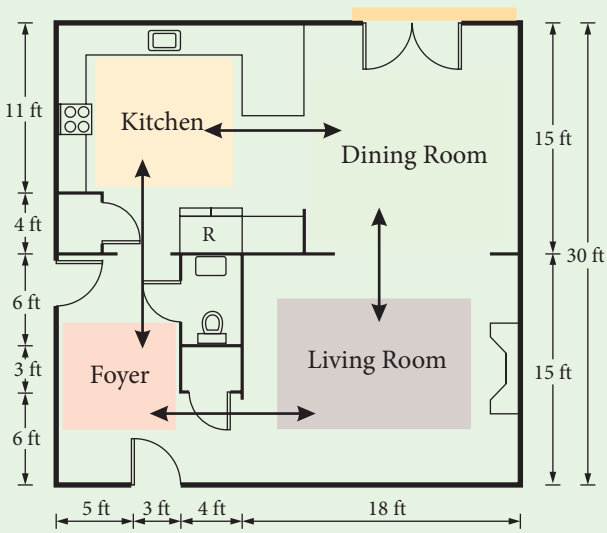
2 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 10 cm, 10 cm és 12 cm. Egy ahhoz hasonló másik háromszögnek

a) a kerülete 16 dm; **b)** a területe 12 cm^2.

Mekkorák a másik háromszög oldalai?

3 Egy külföldi megrendelő többszintes családi házat szeretne építtetni. Az alábbi tervrajz az épület alsó szintjéről készült, melyen az adatokat – az Egyesült Államokban mai napig használatos – láb (angolul foot, rövidítése: ft) mértékegységben tüntették fel. A magyar kivitelező számára olyan tervrajzot szeretnénk készíteni, melyen a méretek méterben szerepelnek. Hivatalosan 1 ft = 0,3048 m, de a feladatban számoljunk 1 ft = 0,3 m átváltással!

A méretarány az a szám, amely megmutatja, hogy a rajzon 1 cm hosszúság a valóságban hány cm-nek felel meg (jelölésére $M = 1$: valóságbeli hossz alakot szokás használni).



a) Milyen széles a valóságban az ábra alsó vízszintes vonalán jelölt bejárati ajtó?

b) Mekkora az a lehető legnagyobb méretarányú rajz, amely elfér egy A2 méretű lapon, ha a lapszélen legalább 1,2 cm széles keretet biztosítunk az adatok megjelenítéséhez?

c) Add meg cm-ben az a) esetben elkészített tervrajzon a living room (nappali) adatait!

HÁZI FELADAT

1 Bármely két négyzet hasonló. Melyik szám lehet a hasonlóság aránya, ha

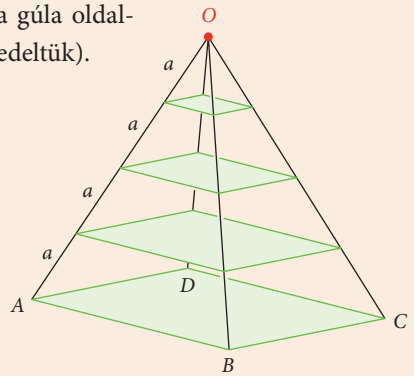
a) az egyik négyzet oldala 24 mm hosszú, a másiknak a kerülete 24 mm;

b) az egyik négyzet oldala 25 mm hosszú, a másiknak a területe 25 cm^2;

c) az egyik négyzet kerülete 25 mm hosszú, a másiknak a területe 25 cm^2?

2 Az *ABCD* téglalap oldalai 3 cm, illetve 12 cm hosszúak. Vágd szét a téglalapot egy egyenessel két téglalapra úgy, hogy az egyik levágott rész hasonló legyen az *ABCD* téglalaphoz! Mekkorák a levágott részek oldalai?

3 Az *ABCDE* gúla alapja 4 cm-es oldalú négyzet, magassága 12 cm hosszú. Három párhuzamos síkkal (amelyek párhuzamosak az *ABCD* négyzet síkjával is) a gúlát négy egyenlő magasságú részre daraboltuk (ekkor a gúla oldaléleit is negyedeltük).



a) Hányszorosa a legkisebb gúla alaplapja területének a másik három gúla alaplapjának területe?

b) Hányszorosa a legkisebb gúla oldallapja területének a másik három gúla oldallapjának területe?

EMELT SZINT

ELMÉLET

Definíció: Hasonlósági transzformáció

Egy (vagy több) középpontos hasonlóság és egy (vagy több) egybevágósági transzformáció egymásutánját **hasonlósági transzformációnak** nevezzük. A hasonlósági transzformációban szereplő középpontos hasonlóság arányát (vagy több középpontos hasonlóság esetén a hasonlósági arányok szorzatát) a **hasonlóság arányának** mondjuk. A hasonlósági transzformáció aránytartó transzformáció.

Minden hasonlóság előáll egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymásutánjaként.

Megjegyzés
Két középpontosan hasonló alakzat egyben hasonló is, hiszen az egybevágósági transzformáció lehet maga a helyben hagyás is.

ELMÉLET

Hasonló alakzatok

A hasonlósági reláció (röviden hasonlóság) definíciója:
Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, ami az egyiket a másikba viszi. A hasonlóság jele: ~

Hasonló alakzatok esetén
- a megfelelő szakaszok hosszának aránya ugyanannyi,
- a megfelelő szögek egyenlők,
- a megfelelő síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével.

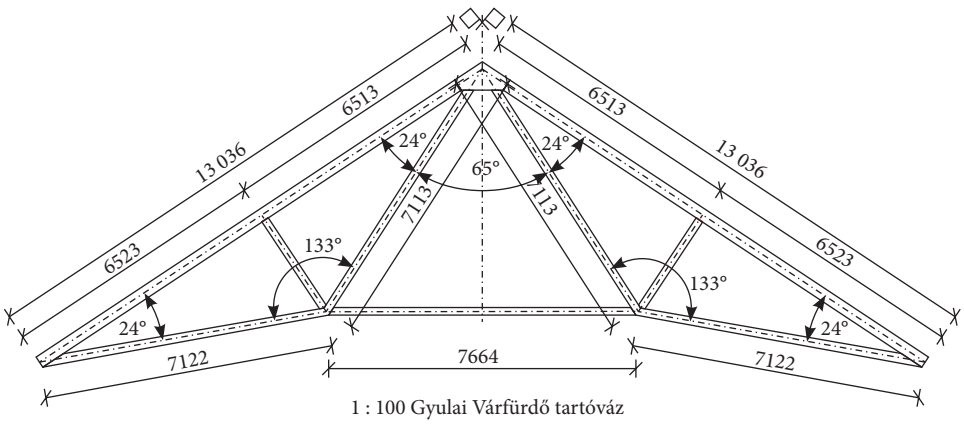
Ráadás

MIT MUTAT A TERVRAJZ?

BEVEZETŐ

A Gyulai Várfürdő egyik épületét (eredeti feladatkörére utalva) Lovardának nevezik. Egy 20 méteres gyógyvizes úszómedence, három kis gyógymedence és egy gyerekpancsoló van benne.
A fényképen látszik, milyen szép faváz tartja belülről az üvegezett tetőt. Az úszómedence fölött 9 párhuzamos, függőleges síkban ugyanolyan háromszögekből álló gerendázat (tartóváz) van. Egy ilyen részlet tervrajzát megkaptuk a tervezőktől (itt kicsinyítve mutatjuk meg):



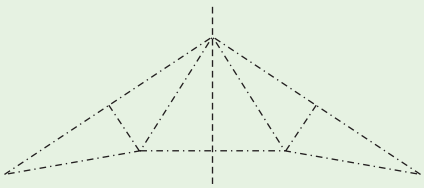


1 : 100 Gyulai Várfürdő tartóváz

a) Mit jelent a tervrajzon az 1 : 100 jelzés?
b) Milyen mértékegységekben tünteti fel a rajz a hosszúságokat?
c) Hogy lehet az, hogy a bal oldali nagy háromszögben a két rövidebb oldal nem egyenlő, a velük szemben fekvő szögek mégis 24°-osnak vannak feltüntetve a tervrajzon?
d) Hogy lehet az, hogy a két nagy háromszögben a belső szögek összege 181°?
e) Mit jelölhetnek a pontozott vonalak?
f) Hány egyenlő szárú háromszög van ebben a tartóvázban?

FELADAT

1 Az ábrán a Bevezető feladatban látható tervrajz egyszerűsített változatát látod.



a) Hány milliméteresek az ábrán azok a szakaszok, amelyek mellé a tervrajzban a 7113 szám van írva?

b) Töltsd ki a táblázat üres helyeit a füzetedben!

	Mértékegység	Mérőszám				
A tervrajzra írt hosszúság		13 036	6523	7113	7122	7664
A tervrajzon mérhető hosszúság	mm					
Az ábrán mért hosszúság	mm					
A valóságos hosszúság	méter	13,036				

c) Mennyi a nagyítási arány az ábra és a tervrajz között?

d) Mennyi a kicsinyítési arány a valóságos hosszúságok és az ábra között?

e) Egész fokra kerekítve mekkorák a háromszögek szögei az ábrán?

2 A Bevezető feladatban látható tervrajz fényképén nem látjuk, mekkora a leghosszabb (szélső) gerendákra merőleges rövid gerenda. Számítsd ki, hány milliméter ez

a) a valóságban, **b)** az eredeti tervrajzon, **c)** a tervrajz fényképén!

Milyen kapcsolat van a kapott három hosszúság között?

3 A Lovarda feszített víztükrű, gyógyvizes úszómedencéje 20 m hosszú, 13 m széles, a mélysége az egyik végénél 120 cm, a másiknál 160 cm, közben egyenletesen mélyül.

a) Készíts erről a medencéről vázlatrajzot!

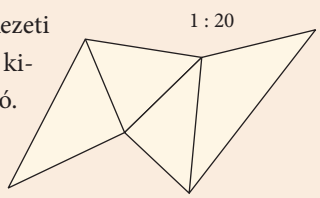
b) Szerkeszd meg 1 : 200 kicsinyítésben a 4 oldallapot! Milyen négyszögek ezek?

c) Mekkorák a medence alaplapjának az oldalai?

d) Bence elképzelte, hogy a medence tele van vízzel. Kijelentette, hogy ez a víztömeg egy egyenes hasábot alkot. Jocó szerint téved, mert az alaplap nem párhuzamos a fedőlappal, sőt nagyobb is. Melyik fiúnak van igaza? Ha Jocó szerint Bence téved, akkor mire gondol Jocó, amikor alaplapot és fedőlapot mond?

HÁZI FELADAT

1 Az ábrán egy szerkezeti elem 1 : 20 arányú kicsinyített rajza látható. Szerkessz a füzetedben



a) a megadottal egybevágó ábrát;

b) olyan ábrát, amely a szerkezeti elem 1 : 10 arányú kicsinyítése!

2 Válaszd ki a Bevezető feladatban megadott tervrajz alapján a Lovarda tetőszerkezetének egy részletét! Készítsd el ennek a vázát a tervrajzon látható méretekkel száraztésztából (spagettiből) vagy hurkapálcából!

3 Készítsd el papírból a Lovarda úszómedencéjének a modelljét! A 20 méteres hosszúság helyett vegyél 12 cm-t!

71 ALKALMAZZUK A HASONLÓSÁGOT!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. **a)** Az 1 : 3000 méretarányú térképen egy téglalap alakú telek oldalainak hossza 3,2 cm és 3,8 cm. Mekkora a telek területe?

b) Az 1 : 3 000 000 méretarányú térképen mekkora Magyarország területe?

Megoldás

a) A valódi téglalap oldalai 3000-szer akkorák, mint a térképen: $3000 \cdot 3{,}2 = 9600$ (cm), illetve $3000 \cdot 3{,}8 = 11\,400$ (cm), vagyis 96 m, illetve 114 m. A téglalap alakú telek valódi területe tehát négyzetméterben számolva: $96 \cdot 114 = 10\,944$. A mérések pontatlansága miatt ez természetesen közelítő érték. Ezért elegendő lehet annyit mondanunk, hogy a telek területe megközelítőleg 11 000 m^2, vagy másképp 1,1 hektár.

b) Magyarország területe megközelítőleg 93 000 km^2. A térképen az ország kicsinyített mását látjuk, a hasonlóság aránya $k = \frac{1}{3\,000\,000}$. Később tanulni fogunk arról, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság négyzetével egyenlő, így a térképen Magyarország területe $93\,000 \cdot k^2$ (km^2).

A „túl nagy” számok miatt célszerű normálalakot használni.

A térképen Magyarország területe: $9{,}3 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^6}\right)^2 = 9{,}3 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{12}} \approx 1{,}03 \cdot 10^{-8}$ (km^2).

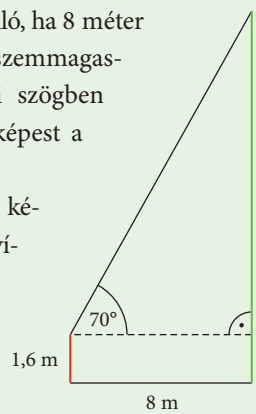
A térkép területét nem szokás négyzetkilométerben megadni, váltsuk át cm^2-be!

Tudjuk, hogy 1 km = 10^5 cm, ezért 1 $km^2 = (10^5)^2$ $cm^2 = 10^{10}$ cm^2. Így $1{,}03 \cdot 10^{-8}$ $km^2 = 1{,}03 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{10}$ $cm^2 = 103$ cm^2.

Magyarország területe a térképen körülbelül 103 cm^2 (≈ 1 dm^2).

FELADAT

1 Milyen magas a Gyöngyszálló, ha 8 méter távolságból és 1,6 méter szemmagasságból 70°-os emelkedési szögben láthatjuk a vízszinteshez képest a szálloda tetejét?



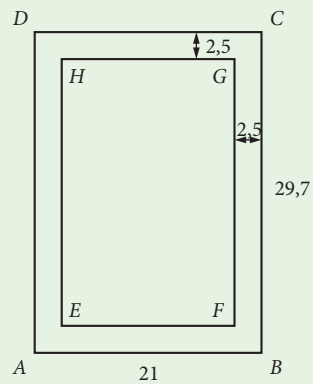
a) Szögmérő segítségével készítsd el az ábra kicsinyített képét, a 8 méter helyett vegyél 4 cm-t!

b) Hány cm-es a rajzodon a szálloda magassága?

c) Milyen magas lehet a Gyöngyszálló?

2 (Érettségi feladat nyomán)

Egy A4-es papírlap méretei: 21 cm × 29,7 cm. A szövegszerkesztő programok általában 2,5 cm-es margóval dolgoznak, vagyis a papírlap minden oldalától számítva egy-egy 2,5 cm-es sáv üresen marad (lásd az ábrát). A lap közepén a szövegnek fennmaradó rész szintén téglalap alakú. Zsófi szerint az *ABCD* és az *EFGH* téglalapok hasonlók.



a) Igaza van-e Zsófinak? Válaszod indokold!

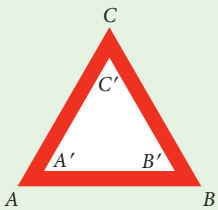
b) Tekintsük a következő állítást:

„Ha két négyszög hasonló, akkor megfelelő szögeik páronként egyenlők.”

Add meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Írd fel az állítás megfordítását, és add meg a megfordítás logikai értékét is! Ez utóbbi válaszod indokold!

3 A közúti közlekedésben a veszélyt jelző táblák (és az „Elsőbbségadás kötelező” tábla) alakja „lekerekített” szabályos háromszög. Tekintsünk most egy ilyen táblát – lekerekítéstől mentesen – egy olyan ABC szabályos háromszögnek, amely oldalának hossza 60 cm, és a festés során kialakított piros szegély szélessége 5 cm. A festés során fehéren maradt rész az $A'B'C'$ szabályos háromszög.





a) Készítsd el a közlekedési tábla 1:10 méretarányú rajzát!

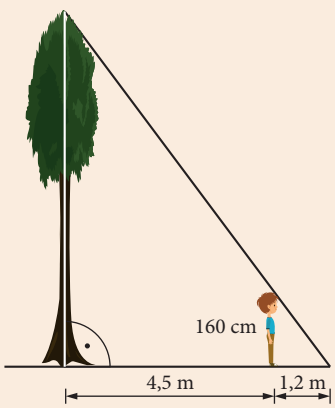
b) Igazold, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egymáshoz hasonlóak!

c) Szerkeszd meg a hasonlósági középpontot, melyre ABC háromszögnek $A'B'C'$ háromszög a képe!

d) Határozd meg az ABC és $A'B'C'$ háromszögek közötti hasonlóság arányát!

HÁZI FELADAT

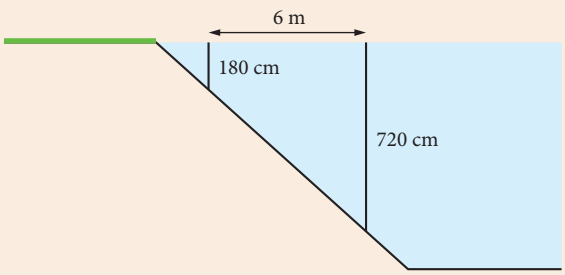
1 A 160 cm magas Péter egy fa árnyékának vonalában úgy áll meg a fától 4,5 méterre, hogy az árnyéka még éppen befér a fa árnyékába. (Ha egy kicsit is előrelépne, akkor árnyéka már kilógna a fa árnyékából.) Milyen magas a fa, ha tudjuk, hogy az árnyékának vége éppen 1,2 méterre van Pétertől?



2 **a)** Milyen méretarányú az a térkép, mely a valóságbeli 4,5 km hosszúságú utat 225 mm hosszúságú szakasszal jelzi?

b) Mekkora a 900 m^2-es telek területe az 1 : 300 méretarányú tervrajzon?

3 Biztonsági okokból egy folyó mélységét jelző táblákat helyeznek ki a folyóparttól különböző távolságokban. A parttól távolodva egy 180 cm mélységet mutató, majd 6 méterrel bentebb egy 720 cm mélységet mutató jelzőtáblát helyeznek el. A parttól mérve milyen távolságokban helyezték el a táblákat, ha tudjuk, hogy a meder lejtése az adott távolságokon belül nem változik?

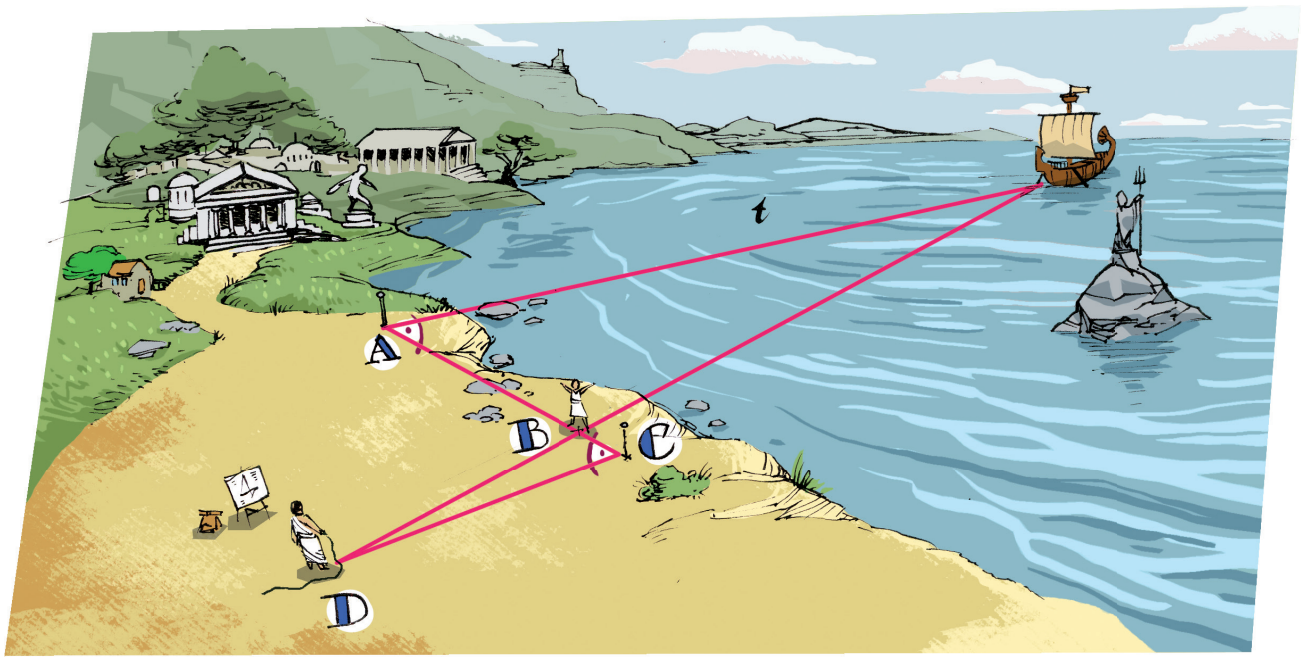


RÁADÁS

Thalész és a hasonlóságok

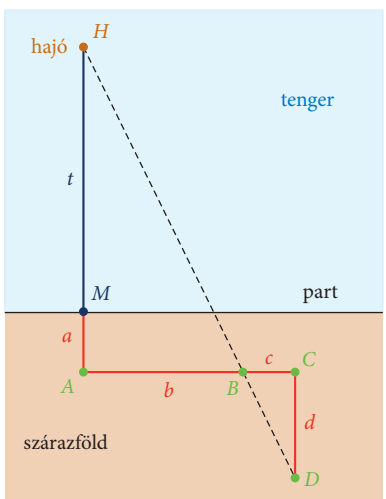
1 Thalész, az ókori hét bölcs egyike ismert egy módszert az ellenséges hajók távolságának meghatározására. Egy régi jegyzetben találtunk a mérés leírására szolgáló feljegyzéseket, de a szövegből csak egy-két szót sikerült beazonosítani. Az alábbi rajzot viszont sikerült rekonstruálni.

a) Fogalmazd meg egész mondatokban, hogyan lehet meghatározni a hajó távolságát! Hogyan mérnéd ki Thalész helyében ezeket a távolságokat? Milyen messze van a hajó a parttól?



Megoldás

Az ábrán látható t távolságot kell meghatároznunk. Mivel a partvonalak nem mindig járhatóak, Thalésznek az ábra A pontjából indulva kellett mérnie, az a szakasz hossza azonban egyszerű méréssel vagy akár becsléssel meghatározható. A hajót az A ponttal összekötő egyenesre merőlegesen haladva elsétált az ábra B pontjáig, ahová beállította egy segédjét. Az $AB = b$ szakasz hossza egyszerű módon (lépésekkel) mérhető volt. Ezután továbbsétált a C pontig, lemérve a c szakaszt. Ügyelt arra, hogy ez a szakasz a b-nél jóval rövidebb legyen, hiszen nyilvánvalóan nem akart akkora távolságot sétálva megtenni, mint amilyen messze van a hajó. Ezután az AC egyenesre merőlegesen elindult befelé, közben rápillantva a hajóra is. Egészen addig sétált (D), amíg azt nem látta, hogy a hajó és a segédje a B pontban egy vonalban vannak. A $CD = d$ szakasz hossza is könnyen mérhető volt.



Az ábrán látható $ABH_\Delta \sim CBD_\Delta$. A megfelelő szakaszok aránya:

$\frac{t+a}{b} = \frac{d}{c}$, ebből t meghatározható: $t + a = \frac{d \cdot b}{c}$, tehát: $t = \frac{d \cdot b}{c} - a$.

b) Igazold, hogy $ABH_\Delta \sim CBD_\Delta$!

c) Osztálytársaiddal próbáljátok ki Thalész módszerét egy utca hosszának vagy egy távoli templomtorony távolságának meghatározására! Ellenőrizzétek a méréseteket a Google Maps segítségével! Méréseteket házi dolgozatként vagy projektként is elkészíthetitek.

d) Thalész korában a görög matematikusoknak még nem álltak ugyanazon algebra eszközei a rendelkezésükre, mint nekünk. A szorzatokat területként fogták fel, az osztás pedig arány volt. Vajon hogyan határozhatták meg a $\frac{d \cdot b}{c} - a$ kifejezés értékét?

2 Egy legenda szerint Thalész a gízai piramisok magasságának meghatározására is ismert egy módszert. Az ábra alapján ismertesd Thalész módszerét! Használd a módszert egy villanyoszlop vagy egy magas ház magasságának meghatározására, és próbáld meg a magasságot más módon is meghatározni!



Ki a legerősebb?

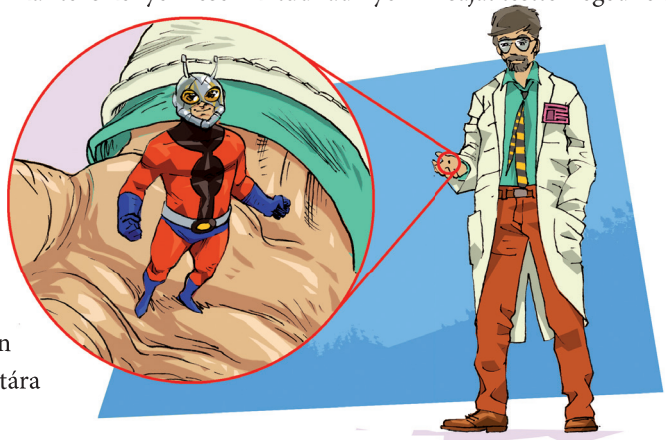


Bizonyára te is hallottál már arról, hogy a hangya a legerősebb állat a világon, hiszen egyes levélvágó hangyafélék saját testtömegüknek akár 40-50-szeresét is elbírják. A mi legjobb súlyemelőink is legfeljebb saját testtömegüknek körülbelül kétszeresét képesek kinyomni, egy átlagember pedig legfeljebb az egyszeresét. Tényleg ennyire esetlenek lennénk a hangyákhoz képest? Valóban pusztán annyi a szerencsénk, hogy a hangyák jóval kisebbek nálunk?

Egy leegyszerűsített modellben szemléltetve a kérdést, azt a választ kapjuk, hogy amennyiben az embert hangyaméretűre kicsinyítenénk le, jóval erősebb lenne a hangyánál. A hangyák kb. 1,5 cm-es magassága mintegy 120-ad része az ember magasságának. Ha az ember magasságát 120-ad részére csökkentjük, a térfogata $\frac{1}{120^3}$-szorosára csökken, ezáltal pedig a tömege is hasonló mértékben csökken.

Ha nagyon egyszerűen modellezzük az ember teherbírását, akkor azt feltételezzük, hogy az az izomrostok vastagságával (keresztmetszetével) arányos. Ez a keresztmetszet is csökken, ha az embert összezsugorítjuk, de „csupán” $\frac{1}{120^2}$-szeresére, hiszen a felületek a hasonlóság arányának négyzetével változnak.

Ha a két változást összehasonlítjuk, azt tapasztaljuk, hogy az embert lecsökkentve a relatív teherbírásunk egyáltalán nem csökken, sőt! Akár te is kényelmesen ki tudnád nyomni saját testtömegednek körülbelül 120-szorosát!



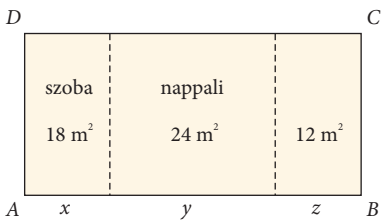
Ezzel a feladattal és még sok más, a hasonlósággal kapcsolatos érdekességgel is találkozhatsz Horváth Gábor, Juhász András és Tasnádi Péter Mindennapok fizikája című könyvében. Olvasd el az *Arányos aránytalanságok a mesében és az élővilágban* című fejezetet! Ebből megtudhatod, hogy a liliputi törpékkel milyen nehéz szót érteni, hogy mennyi élelemre van szüksége egy felnőtt óriásnak, és azt is, hogy hányszor dobban egy elefánt szíve az életében – mindezt csupán a hasonló alakzatok felületére és térfogatára vonatkozó ismeretekből levezetve.

Ráadás

PÁRHUZAMOS SZELŐK TÉTELE

KIDOLGOZOTT FELADAT

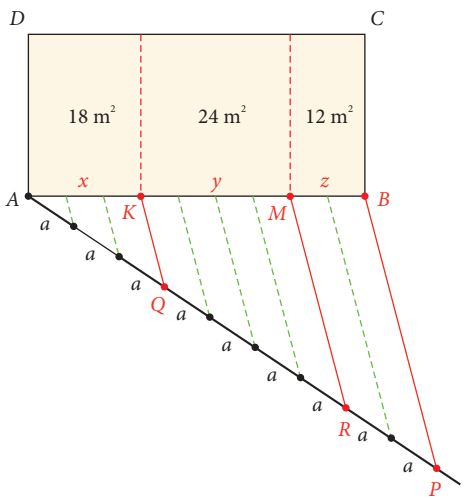
Egy 54 m^2-es lakótelepi lakás alaprajza téglalap. A két elválasztó fal három téglalap alakú részt hoz létre: egy 18 m^2-es szobát, egy 24 m^2-es nappalit és a többi helyiség (előszoba, konyha, fürdőszoba és WC) számára egy 12 m^2-es téglalap alapú helyiséget. A műszaki rajzolónak csak a lakás alaprajzának a vázlatát adta oda a tervező, a megfelelő utasításokkal. A rajzoló feladata megszerkeszteni ezen az ábrán a két elválasztó fal helyét. Hogyan teheti ezt meg?



Megoldás

A három téglalap területének aránya $18 : 24 : 12 = 3 : 4 : 2$, ezért az AB oldalra illeszkedő oldalaik aránya ugyanennyi (hiszen az erre merőleges oldalaik egyenlő hosszúak). A rajzoló feladata tehát az, hogy az AB szakaszt ossza fel szerkesztéssel három részre úgy, hogy a részek hosszának arányára az $x : y : z = 3 : 4 : 2$ összefüggés igaz legyen.

A szerkesztés az alábbi ábrán nyomon követhető:



– Egy A kezdőpontú félegyenest rajzolunk, amelynek egyenesén nincs rajta a B pont.
– A megrajzolt félegyenesre A-tól indulva kilenc egyenlő hosszúságú, egymáshoz csatlakozó szakaszt mérünk fel (mert az arányszámok összege $3 + 4 + 2$, vagyis 9). A kilencedik szakasz A-tól távolabbi végpontja legyen a P pont. Megrajzoljuk a PB szakaszt.
– A harmadik és a hetedik szakasz A-tól távolabbi végpontján (Q-n, illetve R-en) keresztül párhuzamost szerkesztünk a PB-vel. E két párhuzamosnak az AB-vel való metszéspontjai (K, illetve M) adják a keresett osztópontokat az AB szakaszon.

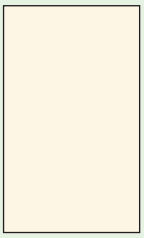
Megjegyzés

Közelítő megoldásnak megfelelne az, hogy a rajzoló megméri az AB szakasz hosszát, majd elosztja ezt 9-cel ($3 + 4 + 2 = 9$). Ezután rendre felmér az AB szakaszra egy 3-szor ilyen hosszú, majd ehhez csatlakozva egy 4-szer ilyen hosszú szakaszt. Egy műszaki rajzoló számára ez a megoldás nem elfogadható, mert rajzeszközeivel ennél az eljárásnál pontosabban tudja megszerkeszteni a kívánt osztópontokat.



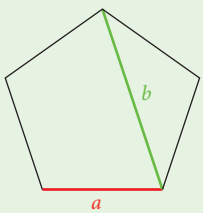
FELADAT

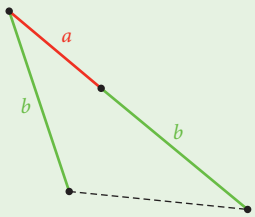
1 **a)** A valóságban egy téglalap alakú telek területe 539 m^2. A telket valamelyik oldalával párhuzamos egyenessel 2 : 5 területarányú két részre kell felosztani. Szerkeszd meg a két lehetséges, lényegesen különböző felosztást a kicsinyített ábrán! A füzetedben dolgozz!



b) A két megszerkesztett egyenes 4 részre vágja a téglalapot. Hány m^2 az egyes részek területe a valóságban?

2 A szabályos ötszög oldala a cm, az átlója b cm hosszúságú. Az átlót két olyan részre kell bontani, amelyek aránya ugyanakkora, mint az $a : b$ arány. Hogyan segít ebben a felbontásban a jobb oldali rajz? Lehet, hogy van még egyszerűbb szerkesztési mód?





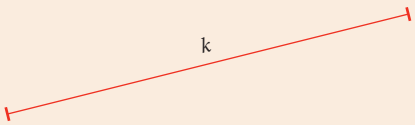
3 Vegyél fel a füzetedben egy 11 cm hosszúságú szakaszt!

a) Szerkessz szabályos háromszöget, melynek kerülete az adott szakasz hosszával egyenlő!

b) Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, melynek kerülete az adott szakasz hosszával egyenlő, és egyik oldala másfélszer olyan hosszú, mint egy másik oldala! Hány megoldást találsz?

HÁZI FELADAT

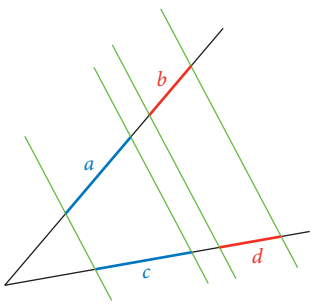
1 **a)** Egy háromszög kerülete akkora, mint a k szakasz, oldalainak aránya 3 : 3 : 4.
Szerkeszd meg ezt a háromszöget!



b) Egy téglalap oldalhosszúságainak aránya 2 : 3, a kerülete akkora, mint a k szakasz.
Szerkeszd meg ezt a téglalapot!

2 Rajzolj egy 8 cm hosszúságú szakaszt, és szerkeszd meg ennek
a) 4 : 2 : 3, **b)** 3 : 1 : 3
arányú osztópontjait!

EMELT SZINT



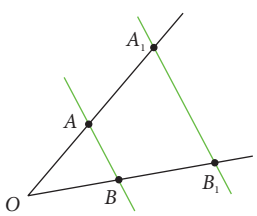
A párhuzamos szelők tétele: Ha egy szög két szárát párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok hosszának az aránya megegyezik a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok hosszának arányával.

Például (az ábra jelöléseivel) $a : b = c : d$.

Megjegyzés
Az aránypár átrendezésével adódik, hogy $a : c = b : d$, ami azt fejezi ki, hogy egy adott szög esetén adott állású párhuzamosokkal csak olyan szakaszokat metszhetünk ki a szögszárakból, amelyek aránya bármely két megfelelő szakasz esetén ugyanannyi.

A párhuzamos szelők tétele fennáll akkor is, ha egyes szakaszok részben fedik egymást, vagy az egyik része a másiknak.

Például itt, a jobb oldali ábrán igaz, hogy $OA_1 : OA = OB_1 : OB$.



72 HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy háromszög két oldala: $a = 3{,}4$ cm, $b = 5{,}2$ cm, az általuk közbezárt szög: $\gamma = 68{,}4°$. Ezt a háromszöget középpontosan nagyítjuk a 2,5-szeresére, majd a nagyított képet tükrözzük egy egyenesre. Hasonlítsuk össze a tükrözés után kapott háromszöget az eredetivel!

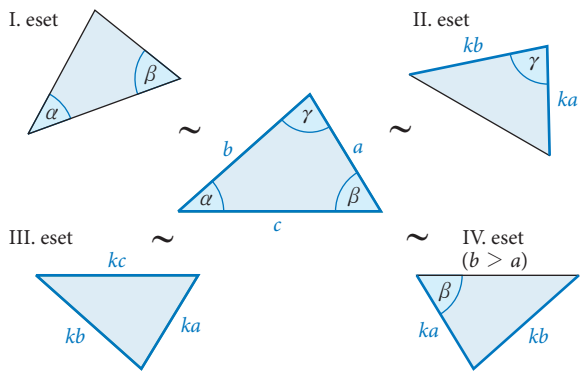
Megoldás

A középpontos nagyítás során kapott háromszög oldalainak hossza és szögeinek nagysága nem változik az egyenesre való tükrözéssel, csak a körüljárási iránya változik meg. Tehát a tükrözés után kapott háromszög oldalainak hossza 2,5-szer akkora, mint az eredeti háromszög oldalaié, a szögei pedig ugyanakkorák, mint az eredeti háromszög szögei. Az eredeti és a tükrözés után kapott háromszög **hasonló**, a hasonlóságuk aránya 2,5.

Tehát $a' = 2{,}5 \cdot 3{,}4 = 8{,}5$ (cm), $b' = 2{,}5 \cdot 5{,}2 = 13$ (cm), $c' = 2{,}5 \cdot c$ (cm), $\gamma' = \gamma = 68{,}4°$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$.

ELMÉLET

Sok feladat megoldását elősegíti a következő négy szükséges és elégséges feltétel, amelyeket a háromszögek hasonlósági alapeseteinek nevezünk. (Az ábra azt mutatja meg, hogy a középső háromszög oldalai, illetve szögei milyen kapcsolatban vannak a körülötte álló háromszögek egyes alkotórészeivel.)



Ha két háromszögben

- két-két szög egyenlő nagyságú, akkor ez a két háromszög hasonló (I. eset);
- két-két oldal hosszának aránya és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (II. eset);
- a három oldal hosszának aránya páronként egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (III. eset);
- két-két oldal hosszának aránya és a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő, akkor ez a két háromszög hasonló (IV. eset).

FELADAT

1 Három matróz egy vízben rekedt, zátonyra futott hajó parttól való távolságát szeretné meghatározni. A cél érdekében mindhárman megmérik az ábrán jelzett α és β szög nagyságát, majd a kapott értékek átlagát figyelembe véve végeznek számításokat.

	1. matróz	2. matróz	3. matróz
α	72°	73°	77°
β	53°	51°	52°

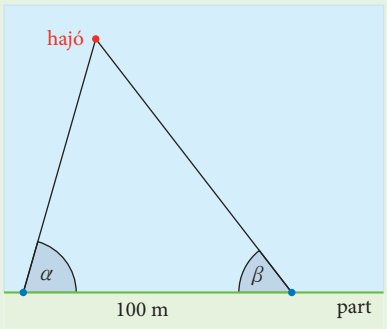
a) Mekkora szögekkel számolnak?

b) Elkészítik a valóságos helyzethez hasonló háromszöget úgy, hogy a valóságban 100 m hosszú szakaszt 10 cm hosszúságúnak tekintik. Készítsd el te is a rajzot!

c) Mekkora a kicsinyítésben a hajó és a part távolsága? Mérd meg!

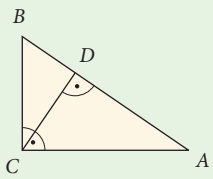
d) Mekkora lehet a hajó és a part távolsága a valóságban?

e) Rajzold meg a kicsinyített háromszöget külön-külön a három matróz adataival!
Milyen eltérés van a d) kérdésre adott válaszban?

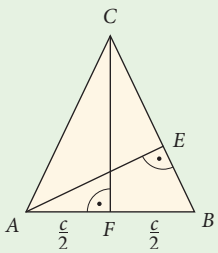


2 Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Indokold, hogy miért hasonlók!

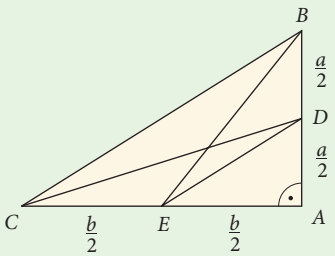
a)



b)



c)

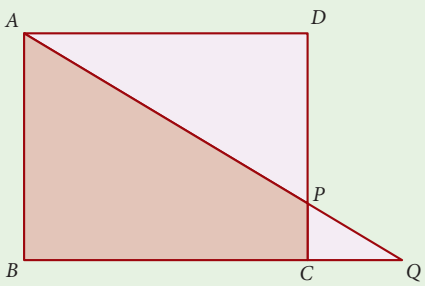


3 Az $ABCD$ téglalapban a P pont a CD oldal C-hez közelebbi negyedelőpontja. Az AB oldal hossza 8 cm, a BC oldal hossza 10 cm.

a) Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Indokold, miért hasonlók, a hasonlóság melyik alapesete teljesül?

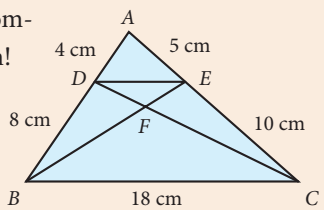
b) Mekkora a CP és mekkora a PD távolság?

c) Mekkora a QC távolság?

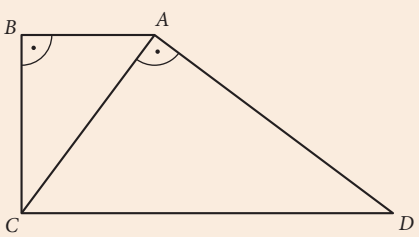


HÁZI FELADAT

1 Keress hasonló háromszögeket az ábrán! Indokold, hogy miért hasonlók, és állapítsd meg a hasonlóságuk arányát is!



2 (Érettségi feladat nyomán)
Két derékszögű háromszöget egy-egy oldalukkal egymáshoz illesztettünk az ábrának megfelelően.



Így az $ABCD$ derékszögű trapézt kaptuk.

a) Igazold, hogy az ABC és a CAD háromszög hasonló!

Legyen $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm.

b) Számítsd ki a trapéz kerületét!

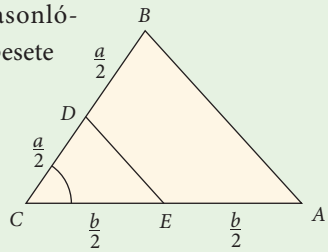
c) Számítsd ki a trapéz területét!

3 (Kompetenciamérés, 2003)
Egy építész egy 280 méter magas épület 1,4 méteres modelljét tesztelte különböző szélerősségek mellett. Arra lett figyelmes, hogy a modell teteje valamelyest rezeg. A modell tengelye a csúcsánál 1 cm-t lengett ki a függőleges irányhoz képest. Ezek alapján mennyi lenne a tesztnek megfelelő időjárási körülmények mellett a valódi épület kilengése?

73 HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALAI ÉS SÚLYVONALAI

FELADAT

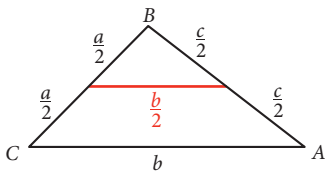
1 A háromszögek hasonlóságának egyik alapesete megmutatja, hogy $ABC\triangle \sim EDC\triangle$.



a) Melyik ez az alapeset?
b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?
c) Mennyi a hasonlóság aránya?
d) Mi következik ebből az AB és a DE szakasz állására és hosszúságára vonatkozóan?
e) A DE szakasz az $ABC\triangle$ két oldalának a felezőpontját köti össze. Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

ELMÉLET

Ha összekötjük egy háromszög két oldalának a felezőpontját, akkor a háromszög egyik **középvonalát** kapjuk meg. Bizonyítható, hogy ez a középvonal párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és feleolyan hosszú, mint ez az oldal.
Minden háromszögnek három középvonala van.



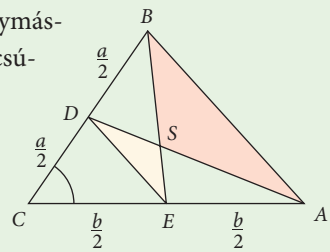
FELADAT

2 **a)** Egy háromszög három oldalhosszának aránya 2 : 8 : 9, legrövidebb középvonalának hossza 17 mm. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

b) Az ABC háromszög középvonalai olyan háromszöget alkotnak, melynek kerülete 255 dm, és oldalainak aránya 5 : 12 : 13. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát! Szögei szerint milyen az ABC háromszög?

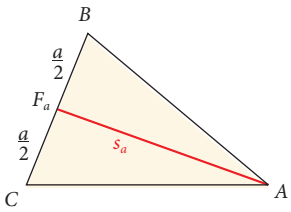
3 A mellékelt ábrán $AB \parallel DE$. A háromszögek hasonlóságának egyik alapesete megmutatja, hogy $ABS\triangle \sim DES\triangle$.

a) Melyik ez az alapeset?
b) Melyek itt az egymásnak megfelelő csúcsok?
c) Mennyi a hasonlóság aránya?



d) Mennyi az AS és a DS szakasz hosszúságának az aránya?
e) Mennyi a BS és az ES szakasz hosszúságának az aránya?
f) Az AD szakasz is és a BE szakasz is az $ABC\triangle$ egyik csúcsát és a vele szemközti oldal felezőpontját köti össze. Mi a neve az ilyen tulajdonságú szakasznak?

ELMÉLET

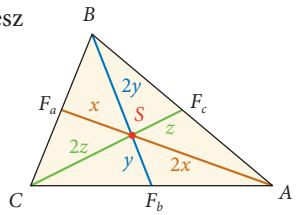


Ha összekötjük egy háromszög egyik csúcsát a vele szemközti oldal felezőpontjával, akkor a háromszög egyik **súlyvonalát** kapjuk meg (az ábrán az A csúcshoz tartozó súlyvonalat rajzoltuk meg). Minden háromszögnek három súlyvonala van.

Igaz a következő két állítás:

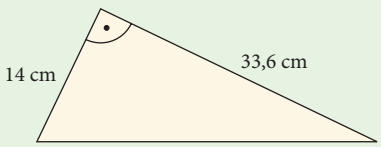
– Két súlyvonal $2:1$ arányban osztja egymást, a hosszabbik rész csatlakozik a csúcshoz.

– Egy háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást. Ezt a közös pontot a háromszög **súlypontjának** nevezzük. A súlyvonal a háromszöget két egyenlő területű részre osztja.



FELADAT

4 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 14 cm és 33,6 cm.



a) Mekkorák a háromszög középvonalai?

b) Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza?

c) Mekkora a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza?

d) Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?

HÁZI FELADAT

1 **a)** Mekkora távolságra van a 3,8 cm oldalú szabályos háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?

b) Mekkora távolságra van a 4,5 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög súlypontja a háromszög oldalaitól?

2 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 mm, szára 29 mm hosszú.

a) Milyen hosszúak a háromszög középvonalai?

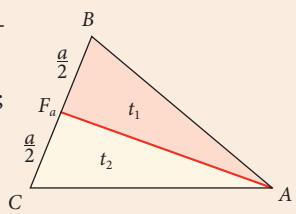
b) Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja az alaptól?

c) A súlypontot összekötjük a háromszög csúcsaival. Mekkora területű háromszögekre bontottuk fel az eredeti háromszöget?

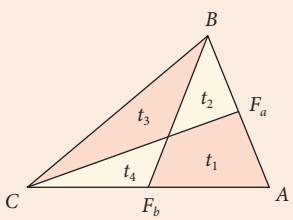
d) Megrajzoljuk a háromszög három középvonalát. Mekkora a középvonalak által meghatározott háromszög területe?

3 Rajzold meg egy háromszögnek

a) az egyik súlyvonalát;



b) két súlyvonalát!



Mennyi az egyes részek területének az aránya?

4 Egy háromszög egyik súlyvonala 6 cm, egy másik 4,5 cm hosszú. Ez a két súlyvonal merőleges egymásra.

a) Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai?

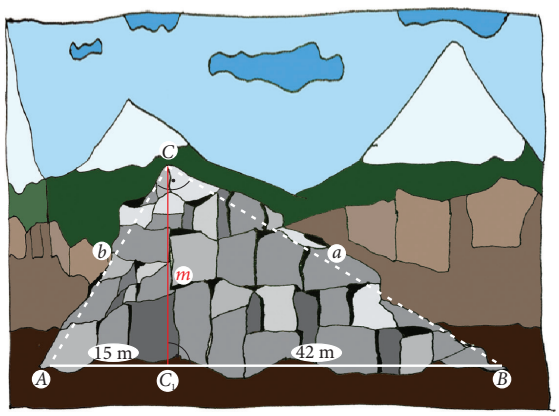
b) Mekkorák ennek a háromszögnek a középvonalai?

Ráadás

MAGASSÁGTÉTEL, BEFOGÓTÉTEL

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy szikla csúcsa nehezen közelíthető meg, ám alkalmas távolságok mérésével kielégítő becslés adható a magasságára.
Számítsuk ki, mekkora a CC_1 magasság, ha ismert az AC_1 és a BC_1 szakaszok hossza, és tudjuk, hogy az AC oldal merőleges a BC oldalra!



Megoldás
Az ábrán három derékszögű háromszög látható: ABC, AC_1C és C_1BC.
A két utóbbi háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt:
$b^2 = m^2 + 15^2$ és $a^2 = m^2 + 42^2$.
Az ABC háromszögre pedig:
$a^2 + b^2 = (42 + 15)^2$
ebből $(m^2 + 42^2) + (m^2 + 15^2) = (42 + 15)^2$
$2m^2 + 42^2 + 15^2 = 42^2 + 2 \cdot 42 \cdot 15 + 15^2$
$m^2 = 42 \cdot 15$
$m = \sqrt{42 \cdot 15} \approx 25{,}1$ (m)

Általánosságban is belátható, hogy a derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság négyzete egyenlő az átfogó két szeletének (vagyis a befogók átfogóra eső merőleges vetületének) a szorzatával, másként: az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó két szeletének a mértani közepe.

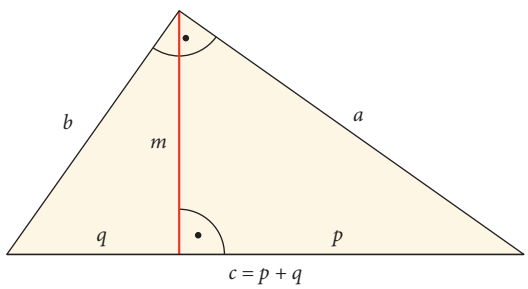
ELMÉLET

Magasságtétel
A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két szakaszra osztja, és az átfogóhoz tartozó magasság hossza a két szelet hosszának mértani közepe. Az ábra jelölései szerint: $m = \sqrt{pq}$.

Befogótétel
A derékszögű háromszög bármelyik befogójának hossza az átfogó hosszának és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának mértani közepe.

Az ábra jelölései szerint: $a = \sqrt{pc}$ és $b = \sqrt{qc}$.

A tételek bizonyításához az ábrán látható derékszögű háromszögek hasonlóságát használhatjuk fel.



FELADAT

1 Egy derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 2 cm és 3 cm hosszú részekre osztja.
a) Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?
b) Mekkora a háromszög hosszabbik befogója?
c) Mekkora a háromszög területe?

2 Egy derékszögű háromszög egyik befogója 30 cm, átfogója 45 cm hosszú.
a) Milyen hosszú a 30 cm-es befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete?
b) Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

3 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 8 cm és 15 cm.

a) Mekkora a háromszög átfogója?

b) Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?

c) Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

4 Az ABC szabályos háromszög AB oldalának hossza 12 cm. Az AB oldal F felezőpontjából állíts merőlegest az AC oldalra! Mekkora szakaszokra osztja a merőleges az AC oldalt? Oldd meg a feladatot a szabályos háromszög ismert tulajdonságainak felhasználásával, majd a befogótétel felhasználásával is!

5 Az ábrán látható jelölésekkel melyik igaz, melyik hamis? (az ábra jelöléseit használva)

a) $m = \sqrt{pq}$

b) $r = \frac{p+q}{2}$

c) $r \geq m$

d) $AC = \sqrt{q(p+q)}$

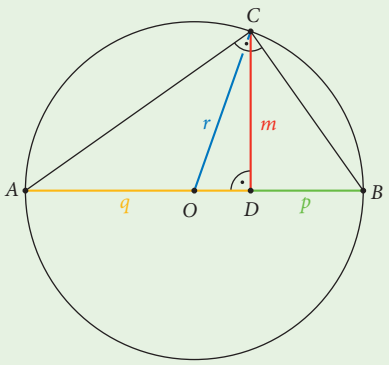
e) $BC^2 = BD \cdot AB$

f) $OD = \frac{|p-q|}{2}$

g) $r^2 = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + pq$

h) $AC + BC = AB$

i) $r - m = OD$



HÁZI FELADAT

1 Egy derékszögű háromszög átfogója 16 cm, egyik befogója 15 cm hosszú.

a) A befogótétel segítségével határozd meg, hogy mekkora részekre osztja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót!

b) A magasságtétel segítségével számold ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

c) Mekkora a háromszög területe?

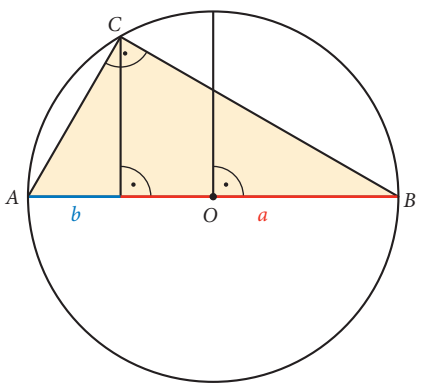
2 Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek az átfogóját a magasság 2 cm és 8 cm hosszú szakaszokra osztja! Számítással határozd meg a magasság és a befogók hosszát, majd ellenőrizd méréssel az eredményeidet!

3 Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság egy 5,4 cm és egy 9,6 cm hosszú szakaszra osztja.

a) A magasságtétel, illetve a befogótétel alkalmazásával számítsd ki, hogy mekkora az átfogóhoz tartozó magasság és mekkorák a befogók!

b) Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

RÁADÁS



Számtani és mértani közép összehasonlítása geometriai úton

Tétel: Két pozitív valós szám mértani közepe legfeljebb akkora, mint ugyanezen két szám számtani közepe.

Bizonyítás:

Ha egy derékszögű háromszög esetében a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek hossza a és b, akkor

– az átfogó hossza $a + b$, ami egyenlő a háromszög köré írható körének átmérőjével. $\frac{a+b}{2}$ tehát egyenlő a köré írható kör sugarával.

– a derékszögű háromszögekre fennálló magasságtétel értelmében az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\sqrt{a \cdot b}$.

Az ábráról leolvasható, hogy az átfogóhoz tartozó magasság hossza kisebb vagy egyenlő, mint a háromszög köré írt kör sugara. Vagyis $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a és b egyenlő, azaz a háromszög egyenlő szárú.

Ezzel geometriai úton bebizonyítottuk a kimondott tételt.

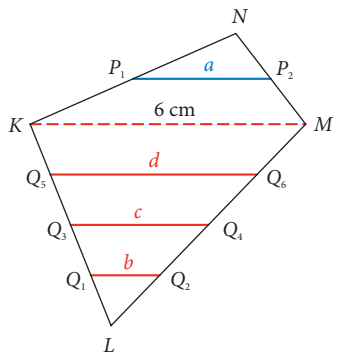
74 GYAKORLÁS

CSOPORTMUNKA

2-3 fős csoportokba osztva dolgozzatok! Ugyanannyi csoport foglalkozzon az I. feladatsorral, mint a II. feladatsorral. A feladatsor megoldása után mindegyik csoport „megtanítja” a saját feladatait egy másik csoportnak, amely nem ugyanazt a feladatsort oldotta meg.

I. FELADATSOR

1 A *KLMN* négyszög két oldalát megfeleztük, két oldalát pedig 4-4 egyenlő részre osztottuk. Két-két osztópontot az ábra szerint összekötöttünk. Megrajzoltuk a *KM* átlót is, amely 6 cm hosszú.

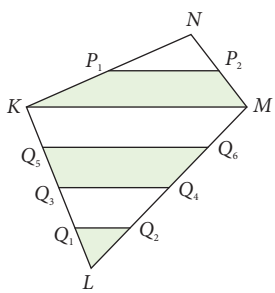


a) Miért párhuzamosak az *a*, *b*, *c*, *d* szakaszok a *KM* átlóval?

b) Számítsd ki az *a*, *b*, *c*, *d* szakaszok hosszát!

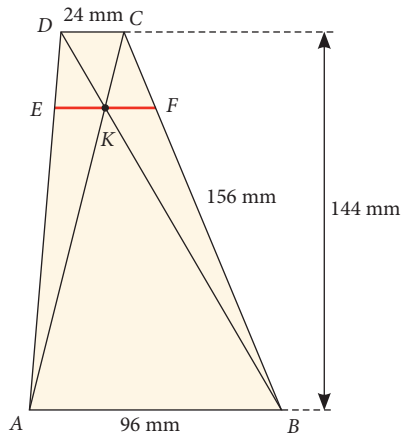
c) Hány olyan trapéz rajzolható az ábrába, amelynek a két alapja az *a*, *b*, *c*, *d* szakaszok közül kerül ki? Ezek között hány paralelogramma van?

2 A *KMN* háromszög területe 6 cm^2, a *KLM* háromszög területe 12 cm^2. Számítsd ki a színezett sokszögek területét! (*KM* = 6 cm)



II. FELADATSOR

1 Az *ABCD* trapéz alapjainak hossza 24 mm és 96 mm, *BC* szárának hossza 156 mm, magassága pedig 144 mm hosszú. Az *EF* szakasz párhuzamos a trapéz alapjaival, és az átlók *K* metszéspontja a szakaszon van.



a) A hasonlóság melyik alapesetével igazolhatjuk, hogy $ABK\triangle \sim CDK\triangle$?

b) Melyek az egymásnak megfelelő oldalak az *ABK* és a *CDK* háromszögekben?

c) Mennyi a hasonlóság aránya az *ABK* és a *CDK* háromszögek között?

d) Hányszor akkora az *AK* szakasz, mint a *KC* szakasz?

e) A hasonlóság melyik alapesetével igazolhatjuk, hogy $AKE\triangle \sim ACD\triangle$?

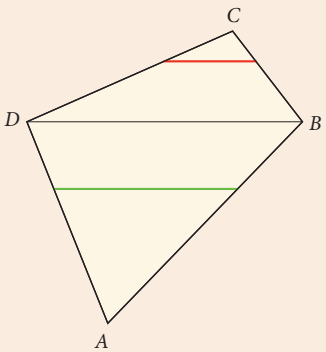
f) Mennyi a hasonlóság aránya az *AEK* és az *ACD* háromszögek között?

g) Hány mm-es az *EK* szakasz?

2 Igazold, hogy az előbbi feladathoz tartozó ábrán a *KF* szakasz ugyanakkora, mint az *EK* szakasz!

HÁZI FELADAT

1 Az ábrán a négyszög két-két szomszédos oldalának (az A csúcstól távolabbi, a C csúcshoz közelebbi) harmadolópontjait kötöttük össze.

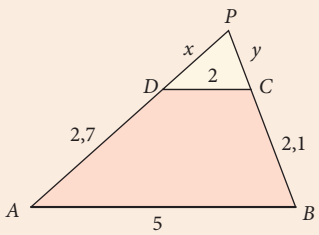


a) Hányszor akkora a BD átló hossza, mint a piros szakasz hossza?

b) Hányszor akkora a BD átló hossza, mint a zöld szakasz hossza?

c) Mennyi a piros és a zöld szakasz hosszúságának az aránya?

2 Az $ABCD$ trapéz kiegészítő háromszöge a DCP háromszög.



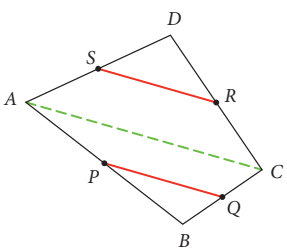
a) Mekkora x és y?

b) Hányadrésze a kiegészítő háromszög területe az ABP háromszög területének, illetve a trapéz területének?

c) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

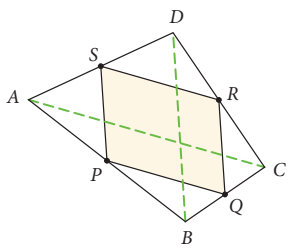
RÁADÁS

Könnyen igazolhatjuk, hogy bármely négyszögben a négy oldalfelező pont egy paralelogrammát határoz meg.



A PQ szakasz középvonal az ABC háromszögben, ezért PQ párhuzamos az AC szakasszal, és feleolyan hosszú, mint az AC. Az SR szakasz középvonal az ACD háromszögben, ezért párhuzamos az AC szakasszal, és feleolyan hosszú, mint az AC. Így a PQ és SR szakaszok egymással párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Hasonlóan bizonyítható, hogy SP és RQ párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Emiatt például a PR szakasz felezőpontjára tükrözve a $PQRS$ négyszög önmagába megy át, vagyis középpontosan szimmetrikus. A $PQRS$ négyszög tehát paralelogramma.

Megjegyzés



– Az oldalfelező pontok által meghatározott paralelogramma oldalai a négyszög átlóival párhuzamosak (lásd ábra), és feleakkorák, mint az átlók. Ezért igazak a következők:
  – Ha egy négyszög átlói merőlegesek, akkor a négyszög oldalfelező pontjai egy téglalapot határoznak meg.
  – Ha egy négyszög átlói egyenlő hosszúak, akkor a négyszög oldalfelező pontjai egy rombuszt határoznak meg.
– A fent bizonyított tétel úgy is kimondható, hogy a négyszög két-két szemközti oldalának felezőpontját összekötő két szakasz kölcsönösen felezi egymást.
– A síknégyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe a négyszög területének pontosan a fele.

Ráadás

SZÉPSÉG ÉS MŰVÉSZET

BEVEZETŐ

Ha a matematika és a művészet kapcsolatát vizsgáljuk, a szimmetria és az arány bizonyára az elsőként felbukkanó matematikai fogalmak között lesznek. A szimmetriáról már szóltunk. Az arányokkal összefüggésben a számtani közép(arányos) és a mértani közép(arányos) sokszor kerül elő festmények, szobrok, épületek bizonyos méreteinek elemzésekor.

A Wikipédia szerint: „A művészetben az arány az egyes részek méretének viszonya az egészhez […] Az arány minden alkalommal jelentkezik, valahányszor valaminek, ami önmagában teljes egész, különböző formájú részei vannak. Erre jó példa az emberi test, vagy pedig ha több tárgy együttvéve összeillő egészet képez, mint például az épületen az oszlopok, pillérek, ívek, gerendák és a szerkezetnek a többi része."

A legegyszerűbb, de a legtöbbet idézett esetben egy szakasz (az egész) két darabra (részre) való felosztásakor keletkező arányok képezik a vizsgálat tárgyát. A két egyenlő részre osztás (azaz 1 : 1 arányú felosztás) „hétköznapi" esetnek számít, inkább a szimmetriához tartozónak érezzük. Vannak ennél sokkal „izgalmasabb" felosztások is.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Osszuk fel a 6 cm hosszú szakaszt két részre úgy, hogy a kisebbik rész és az egész szakasz hosszának számtani közepe a nagyobbik rész legyen!

Megoldás

Ha a kisebbik rész hossza x cm, akkor a nagyobbik rész hossza $(6 - x)$ cm. Az kell, hogy $\frac{6+x}{2} = 6 - x$ teljesüljön.

Most $6 + x = 12 - 2x$, $3x = 6$, $x = 2$.

Tehát a 6 cm-es szakaszt egy 2 cm-es és egy 4 cm-es részre osztva kapjuk a kívánt felosztást.



Megjegyzés

- Ezt a felosztást tekintve elmondhatjuk, hogy amennyivel hosszabb a nagyobbik rész a kisebbiknél, annyival hosszabb az egész szakasz a nagyobbik résznél.
- Bármely szakaszt osztunk két részre a feladatban megadott feltétellel, mindig azt kapjuk, hogy a nagyobb rész az egésznek kétharmad része, a kisebbik rész az egésznek egyharmad része.

2. Osszuk fel a 6 cm hosszú szakaszt két részre úgy, hogy a kisebbik rész és az egész szakasz mértani közepe a nagyobbik rész legyen!

Megoldás

Ha a kisebbik rész hossza x cm, akkor a nagyobbik rész hossza $(6 - x)$ cm. Az kell tehát, hogy $6 - x = \sqrt{6 \cdot x}$ legyen.

Itt nyilván $0 < x < 6$, ezért a négyzetre emelés ekvivalens egyenlethez vezet: $x^2 - 12x + 36 = 6x$, vagyis $x^2 - 18x + 36 = 0$. Ennek az egyenletnek két valós gyöke van: $9 + 3\sqrt{5} \approx 15{,}7$, illetve $9 - 3\sqrt{5} \approx 2{,}3$.

A feladatnak csak ez utóbbi lehet megoldása, tehát a 6 cm-es szakaszt egy ~2,3 cm-es és egy ~3,7 cm-es részre osztva kapjuk a kívánt felosztást.



Megjegyzés

- Ezt a felosztást tekintve elmondhatjuk, hogy ahányszorosa a nagyobbik rész a kisebbik résznek, annyiszorosa az egész (szakasz) a nagyobbik résznek. Másként: a kisebb rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, ahogyan a nagyobbik rész az egészhez.
- Bármely szakaszt osztunk két részre a feladatban megadott feltétellel, mindig azt kapjuk, hogy a nagyobb rész az egésznek körülbelül 0,618-szerese, a kisebbik rész a nagyobbik résznek ugyancsak 0,618-szerese. A kisebbik rész az egésznek körülbelül 0,382-szerese.

ELMÉLET

Az AB szakasznak a 2. kidolgozott feladatban bemutatott felosztási módja igen „nagy karriert futott be” a művészetben, az építészetben, ráadásul még a „valóságos világ” is kedveli az egésznek ezt a fajta felosztását. Egyesek annyira különlegesnek és szépnek, sőt esztétikailag tökéletesnek találták ezt a felosztási módot, hogy külön nevet is adtak neki: **aranymetszésnek** *(sectio aureának)* nevezték el.



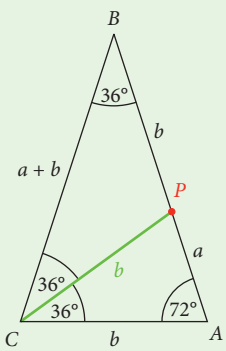
Az aranymetszés

Az AB szakaszt a P pont az aranymetszés szerint osztja két részre, ha
$a : b = b : (a + b)$ (azaz a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint a nagyobbik rész az egészhez).

A 2. kidolgozott feladat gondolatmenetét követve egy másodfokú egyenlet megoldása megadja az aranymetszés arányát:
$\frac{a}{b} = \frac{\text{kisebbik rész}}{\text{nagyobbik rész}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, illetve reciprokát véve: $\frac{b}{a} = \frac{\text{nagyobbik rész}}{\text{kisebbik rész}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$.

FELADAT

1 **a)** A háromszögek hasonlóságának melyik alapesetével igazolhatjuk, hogy $ABC\triangle \sim ACP\triangle$? Melyek az egymásnak megfelelő oldalak a hasonlóságnál?



b) Az $\frac{a}{b}$ arány az $APC\triangle$ alapjának és az $ABC\triangle$ alapjának aránya. Mekkora a két háromszög egy-egy szárának aránya?

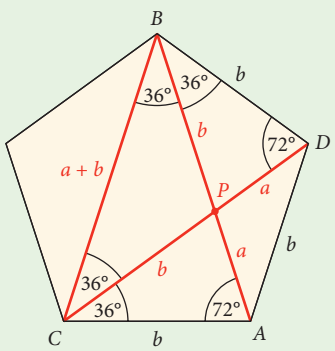
c) A b)-ben felírt két arány egyenlő. Az AB szárnak milyen felosztását adja a P pont?

2 A szabályos ötszögben megrajzoltunk három átlót.

a) Figyeld meg az ABC és az ADB háromszöget, és minél több „érdekességet” mondj el róluk, illetve kölcsönös elhelyezkedésükről!

b) Az AB és CD átlók P metszéspontja milyen arányban osztja két részre ezeket az átlókat?

c) Körülbelül hányszor akkora a szabályos ötszög egy átlója, mint egy oldala? (Figyeld meg a BCP és ADP háromszögeket!)



3 **a)** Vizsgálj meg egy 2 egységnyi oldalhosszúságú szabályos ötszöget!
Igazold, hogy az ábra szerinti jelölést használva $a = \sqrt{5} - 1$, az átló hossza pedig $\sqrt{5} + 1$!

b) Mekkorák az átlói a 3 cm, a 4 cm vagy az 5 cm oldalhosszúságú szabályos ötszögnek?

c) Mekkorák a szabályos ötszög oldalai, ha az átlói 5 cm-esek, 12 cm-esek vagy 26 cm-esek?

Két gyönyörű festmény



4 Itt látható Jan Vermeer van Delft holland barokk festő *Tejet öntő nő* című olajfestménye. Jelenleg az amszterdami Rijksmuseumban van kiállítva, és egyesek szerint a múzeum egyik legszebb kiállítási tárgya.

a) Függőlegesen és vízszintesen is rajzold meg a festményt az aranymetszés arányában két részre osztó egyeneseket (két függőleges és két vízszintes egyenest)! Milyen érdekes egybeeséseket fedeztél fel?

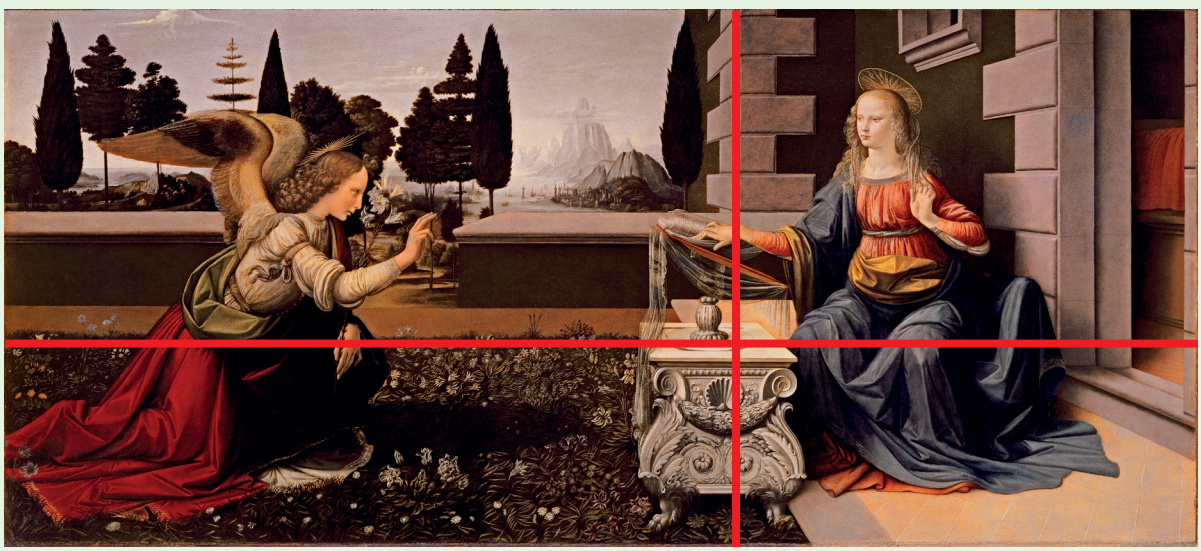
b) Mi lett volna, ha Vermeer valamelyik, az alábbiakban látható módon helyezte volna el festményének főalakját a változatlan méretű vásznon? Legyél műkritikus, beszélj az arányok jelentőségéről, a „hangsúlyokról" is!







5 A képen *Leonardo da Vinci* egyik híres festménye, az *Angyali üdvözlet* látható.



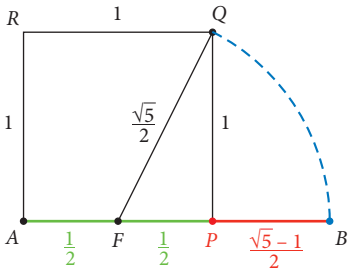
Mi található a piros vonalakkal felosztott képen a bal oldali felső képrész aranymetszeteiben? Hogyan osztható fel a jobb felső képrész? Rajzold be a megfelelő vonalakat és figyeld meg, milyen elvek szerint felelhet meg a kép elrendezése az aranymetszés szabályainak!

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Az 1 egység oldalhosszúságú négyzetből kiindulva szerkesszünk olyan AB szakaszt, amelynek az aranymetszésénél adódó nagyobbik része éppen 1 hosszúságú (és így a kisebbik része $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hosszúságú)!

Megoldás

A szerkesztés menete az ábráról leolvasható:



– A négyzet AP oldalának F felezőpontját összekötjük a négyzet Q (vagy R) csúcsával.

– Az FQ szakasz hossza Pitagorasz-tétellel számítható: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

– F középpontú, FQ sugarú kört rajzolunk, és megjelöljük az AB egyenesével alkotott egyik metszéspontját (B).

– $PB = FQ - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, az AP szakasz hossza 1, tehát az AB szakaszt a P pont az aranymetszés szerint vágja két részre.

HÁZI FELADAT

1. Olvasd el a Wikipédia cikkét a Vitruvius-tanulmányról (angolul: Vitruvian Man)! Keress a tanulmányban olyan aránypárokat, melyek az aranymetszéshez kapcsolhatók!

2. Keress képet Michelangelo Dávid-szobráról, és állapítsd meg, hol található a szobron az aranymetszés!

3. Irodalom és ének-zene tanáraid segítségével gyűjts össze olyan alkotásokat, amelyekben az aranymetszésnek fontos szerepe van. A zenetörténetben Bartók Béla *Kékszakállú*ja és Beethoven 5. *Szimfóniá*ja jó példák lehetnek. A filmtörténetben az olyan népszerű filmek, mint *Az elveszett frigyláda fosztogatói*, a *Batman: A Sötét Lovag*, a *Watchmen*, a *Csillagok háborúja* és a *Wall-E* is dramaturgiailag kulcsfontosságú részleteket helyez el az aranymetszésben. Keresd meg, hogy mi található ezekben a művekben az aranymetszésnél!





75 ISMÉTLÉS, GYAKORLÁS

FELADAT

1 Egy fényképen egy fa 9 cm „magas”, a fa mellett álló 1,80 méter magas fiú pedig 4 cm magasságúnak látszik.

a) Milyen magas a fa?

b) Milyen magasnak látszik a fényképen a fiú mellett álló 1,6 m magas öccse?

c) A fa mellett egy 4 m^2 területű, téglalap alakú reklámtábla is állt, szemben a fényképezőgéppel. Mekkora területűnek látszik a reklámtábla a fényképen?

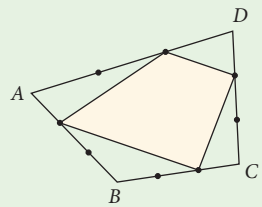
2 Ha egy 1 cm átmérőjű acélgolyóval szemléltetnénk egy protont (a hidrogénatom magját), akkor mekkora lenne egy hidrogénatom egy méretarányos modellben?

Adatok (közelítések): a proton átmérője 10^{-15} m, a hidrogénatom átmérője 10^{-10} m.

a) Az atom átmérője hányszor akkora, mint a magátmérő?

b) Mekkora lenne a modellben a hidrogénatom átmérője?

3 Az *ABCD* négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül négyet az ábrán látható módon kötöttünk össze. Igazold, hogy az összekötő szakaszok trapézt alkotnak, és állapítsd meg a párhuzamos oldalak hosszának arányát!



4 Egy háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól rendre 5 cm, 5,8 cm, 6,2 cm távolságra van.

a) Mekkora a háromszög súlyvonalainak hossza?

b) Mekkorák a háromszög középvonalai által meghatározott háromszög súlyvonalai?

HÁZI FELADAT

1 Jelöld meg egy háromszögben a súlypont és az oldalfelező pontok közötti szakaszok felezőpontjait!

a) Igazold, hogy ez a három pont az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoz meg!

b) Írd fel a két hasonló háromszög területének arányát!

2 Egy kör alakú asztallap átmérője ugyanannyi, mint az asztal magassága. Az asztal közepe fölött, a talajtól 185 cm magasságban van egy pontszerű fényforrás. A talajon az asztal árnyéka egy 70,5 cm sugarú kör.

a) Készíts ábrát!

b) Mekkora az asztallap sugara?

3 Jutka az iskolai kiránduláson 1280 × 960-as felbontású képeket készített, a képeket számítógépére mentette. Barátnője, Julcsi kérésére néhány képet el akar küldeni e-mailben. Egy kép tárolása körülbelül 1,2 MB helyet igényel. A tíz kiválasztott kép együttes mérete túl nagy, ezért Jutka a képeket 640 × 480-as felbontásban küldi el.

a) Hány megabájt lesz a 10 kép együttes „helyigénye”? (Az 1280 × 960-as felbontás azt jelenti, hogy a kép 960 vízszintes sorban, soronként 1280 darab képpontból áll össze. A számítógép minden képpont tárolásához ugyanakkora lemezterületet használ.)

b) Jutka egy 16 cm × 9 cm-es keretben szeretné elhelyezni az egyik jól sikerült képet úgy, hogy minden részlet megmaradjon. Csak olyan képeket tud nyomtatni, amelyek oldalainak aránya 640 : 480. Mekkorák annak a képnek a méretei, amelyik a keretbe illik és a lehető legnagyobb?

4 Hajni a Naprendszer és a Tejútrendszer méretarányos modelljét szeretné elkészíteni. Úgy gondolja, hogy a Napot egy kb. 7 cm átmérőjű teniszlabda szemléltethetné. Reális-e Hajni terve?

Adatok (közelítések): a Nap átmérője 1,4 millió km, a Nap–Föld távolság 150 millió km, a Föld átmérője 12 700 km, a Naprendszer átmérője $1{,}1 \cdot 10^{10}$ km, a Tejútrendszer átmérője $9{,}5 \cdot 10^{17}$ km.

a) Mekkora lenne Hajni modelljében a kicsinyítés aránya?

b) Mekkora lenne a modellben a Föld átmérője?

c) Mekkora távolságra lenne a Föld a Naptól Hajni modelljében?

d) Mekkora lenne ebben a modellben a Naprendszer átmérője?

e) Mekkora lenne ebben a modellben a Tejútrendszer átmérője?

RÁADÁS

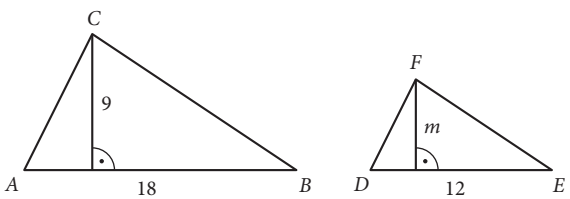
1 (Kompetenciamérés, 2013)

a) Egy 36 cm × 54 cm-es puzzle 120 db közel azonos méretű kis építőelemből áll. Ugyanilyen méretű kis puzzledarabkákból hány darabra van szükség egy 45 cm × 63 cm-es puzzle összeállításához?

b) Edina az osztálytalálkozón fotókat készített digitális fényképezőgépével. A fényképezőgép által megadott nyomtatási méret magassága 76,5 cm, szélessége 99,45 cm. Nyomtatáskor Edina szeretné megőrizni az eredeti arányokat, hogy a nyomtatott kép se függőlegesen, se vízszintesen ne legyen megnyújtva. Edina 10 cm magasságú fényképeket szeretne az albumba tenni. Hány centiméter szélesek lesznek a fényképek?

2 (Kompetenciamérés, 2006)

Az *ABC* háromszög és a *DEF* háromszög hasonló. Mely egyenletek segítségével számolható ki a *DEF* háromszög területe?



A A $\frac{9}{18} = \frac{12}{m}$ és a terület $= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot m$ egyenletek alapján.

B A $\frac{9}{18} = \frac{12}{m}$ és a terület $= 12 \cdot m$ egyenletek alapján.

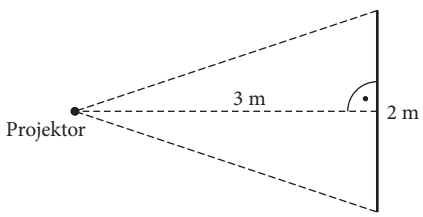
C A $\frac{9}{18} = \frac{m}{12}$ és a terület $= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot m$ egyenletek alapján.

D A $\frac{9}{18} = \frac{m}{12}$ és a terület $= 12 \cdot m$ egyenletek alapján.

3 (Kompetenciamérés, 2016 nyomán)

Endre projektort szeretne vásárolni otthonra. A kiválasztott készülék leírásán az szerepel, hogy 3 m távolságból 2 m szélességű képet vetít.

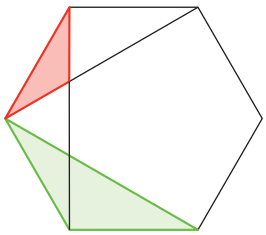
Endre 2,5 m szélességű képet szeretne vele vetíteni az egyik falra. El tudja-e helyezni a projektort megfelelő távolságra a faltól, ha a szemközti fal 4,3 m-re van, és a kivetített kép szélessége arányos a projektor faltól mért távolságával? Válaszodat számítással indokold!



76 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

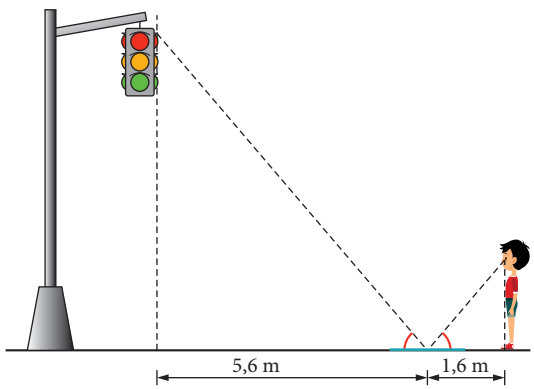
TUDÁSPRÓBA I.

1 Egy szabályos hatszög oldalai 6 cm-esek. Megrajzoltuk három átlóját.



a) Igazold, hogy a zöld és a rózsaszínű háromszög hasonló egymáshoz!
b) Mennyi a hasonlóság aránya?
c) Hasonló-e valamelyik fehér háromszög a zöldhöz? Miért?
d) Mekkora részekre vágják egymást az átlók?

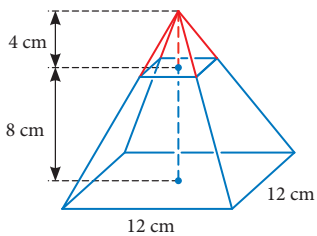
2 Egy járókelő az utcán elhelyezett tükröző felületű térkövön látja az előtte álló közlekedési lámpa legfelső pontjának tükörképét (lásd az ábrán). A fényvisszaverődés törvénye miatt a rajzon jelölt szögek nagysága egymással egyenlő. Milyen magasan van a lámpa legfelső pontja a talajtól, ha az illető szemmagassága 184 cm, és ismerjük az ábrán bejelölt távolságokat?



3 Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!

a) Két derékszögű háromszög hasonló, ha megegyezik egyik hegyesszögük nagysága.
b) Két rombusz hasonló, ha az egyik oldalainak hossza kétszer akkora, mint a másik oldalainak hossza.
c) Ha egy középpontos hasonlóság aránya 0,5, akkor a kapott alakzat az eredeti alakzatnak kicsinyített mása.
d) Két húrtrapéz mindig hasonló.
e) Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha van egyenlő nagyságú szögük.
f) Két háromszög hasonló, ha megegyeznek két szögük nagyságában.
g) Két kör mindig hasonló egymással.

4 Egy szabályos gúla alaplapja 12 cm-es oldalú négyzet, a gúla magassága is 12 cm. A magasság felső harmadolópontján átmenő, az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágjuk a gúlát.

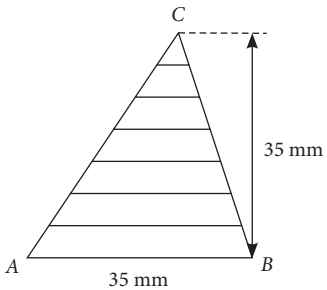


a) Mekkora a keletkezett kis gúla alapélének hossza?
b) Mekkora a kis gúla és a nagy gúla alapterületének aránya?

TUDÁSPRÓBA II.

1 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 14 cm, 28 cm és 35 cm. Egy hozzá hasonló másik háromszög kerülete 7,7 cm. Mekkorák ennek az oldalai?

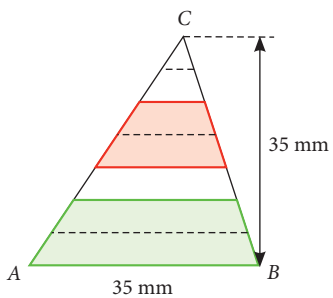
2 Egy háromszög egyik oldala 35 mm hosszú, a hozzá tartozó magasság is ekkora. A háromszög másik két oldalát 7-7 egyenlő részre vágtuk, a megfelelő osztópontokat összekötöttük.



a) Keress az ábrán hasonló trapézokat! Add meg a csúcsaikat és a hasonlóságuk arányát!

b) Mekkora a legkisebb háromszög területe?

c) Mennyi a következő ábrán a zöld és a piros trapéz területének aránya?



3 Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!

a) Két szabályos háromszög mindig hasonló egymáshoz.

b) Két húrtrapéz hasonló, ha megegyeznek szögeik nagyságában.

c) Ha egy középpontos hasonlóság aránya 1,5, akkor az eredeti alakzat a kapott alakzat kicsinyített mása.

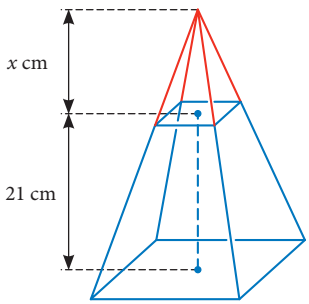
d) Két paralelogramma mindig hasonló.

e) Két derékszögű háromszög mindig hasonló egymáshoz.

f) Két háromszög hasonló, ha megegyeznek két oldalhossz arányában és egy szögük nagyságában.

g) Két négyzet mindig hasonló egymáshoz.

4 Egy csonkagúla alapterülete 400 cm^2, fedőlapjának a területe 64 cm^2, magassága 21 cm. A csonkagúlát kiegészítjük gúlává.



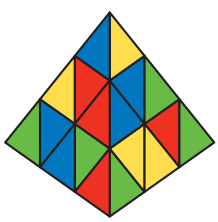
a) Mekkora annak a középpontos nagyításnak az arányszáma, amely a kiegészítő kis gúlát a teljes gúlába viszi át?

b) Számítsd ki a kiegészítő gúla magasságát!

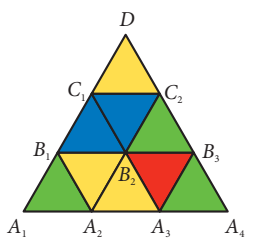
RÁADÁS

A Pyraminx *(1. ábra)* szabályos tetraéder alakú logikai játék lapjainak színezéséhez négy különböző színt használnak. A lapokat színes, szabályos háromszögek fedik. (A játék célja, hogy a forgatás során az egyes lapokon lévő szabályos háromszögek azonos színűek legyenek.)

A *2. ábra* a játék egyik lapját mutatja.



1. ábra



2. ábra

a) Milyen geometriai transzformáció vagy transzformációk elvégzése után lesz az $A_1A_2B_1$ háromszög képe az $A_2B_2B_1$; a $B_2C_2C_1$; az $A_2A_3B_2$; az $A_1A_3C_1$; valamint az $A_2A_4C_2$ háromszög?

b) Milyen geometriai transzformáció elvégzése során lesz az $A_1A_3C_1$ háromszög képe az A_1A_4D háromszög? Írd le a transzformáció jellemző adatait!

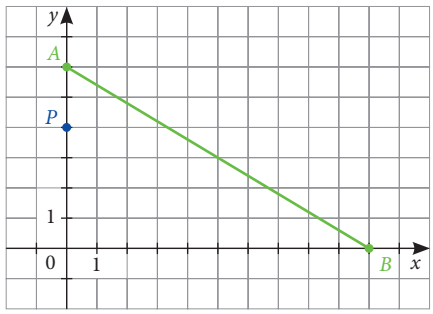
c) Ha a játékot másfélszer akkora élhosszakkal hozzuk létre, mint az eredeti, akkor hányszorosára változik a test egy oldallapjának területe? Hányszorosára változik ekkor a test felszíne?

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

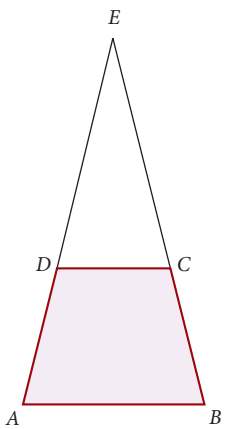
1 Derékszögű koordináta-rendszerben a P ponton át párhuzamost húzunk az AB egyenessel.

a) Milyen hosszú részekre vágja ez az egyenes az OB szakaszt?

b) Az egyenes metszéspontja az x tengellyel legyen Q. Hányadrésze a PQ szakasz hossza az AB szakasz hosszának?



2 Egy szimmetrikus trapéz rövidebbik alapja 5 cm, hosszabbik alapja 8 cm, magassága pedig 6 cm hosszú. Egészítsd ki a trapézt háromszöggé az ábra szerint!



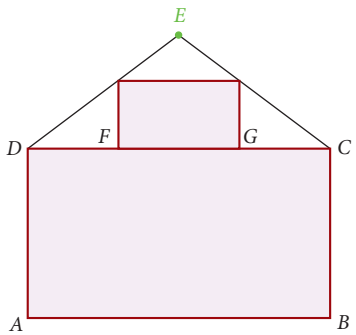
a) Mekkora a háromszög DC oldalhoz tartozó magassága?

b) Mekkorák a háromszög oldalai?

3 Egy kétlábú létra összecsukott állapotban 2 m hosszú. A létra két lábát a három negyedelő pontjánál lánccal kötik össze. Milyen hosszúak ezek a láncok, ha a létra legfelső pontja teljesen szétnyitott állapotban 180 cm-re van a talajtól?

4 Vegyél fel a füzetedben egy egyenest, és az egyik félsíkban egy háromszöget, a másik félsíkban egy O pontot! Keress olyan O középpontú középpontos hasonlóságot, melyet elvégezve a háromszög valamelyik csúcsa az egyenesre esik! Szerkeszd meg a háromszög képét! (Hány megoldást találtál?)

5 Az ábrán a kis téglalap az $ABCD$ téglalap képe egy E középpontú kicsinyítés során.



a) Bizonyítsd be, hogy E, F és A pontok egy egyenesbe esnek!

b) Az F és G pontok harmadoló pontjai a CD oldalnak. Mekkora a kicsinyítés aránya?

c) Hányszorosa a CED egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága az AD oldalnak?

6 Egy kikötőből két hajó indul egyszerre. 20 perc múlva 6,2 km távol vannak egymástól. Milyen távol lesznek egymástól az indulástól számított másfél óra múlva, ha mindkét hajó állandó sebességgel, egyenes irányban halad? Készíts ábrát!

7 Az $ABCD$ téglalap AB oldala kétszer olyan hosszú, mint a BC oldala. Jelöljük P-vel a CD oldal C-hez közelebbi negyedelő pontját!

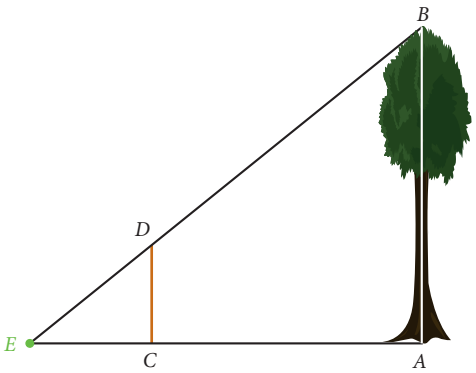
a) Készíts ábrát! Húzd be az ábrán a téglalap oldalait, az AC átlót és a BP szakaszt!

b) Keress két hasonló háromszög-párt! A háromszögek hasonlóságának melyik alapesetével tudod indokolni a hasonlóságokat?

c) Mekkora a hasonló háromszögek területeinek aránya?

8 Egy fa magasságát egy karó segítségével határozzuk meg. Az ábrán AB jelzi a fa helyét, CD jelzi a karó helyét. A karó magassága 1,5 m, a karó és a fa távol-

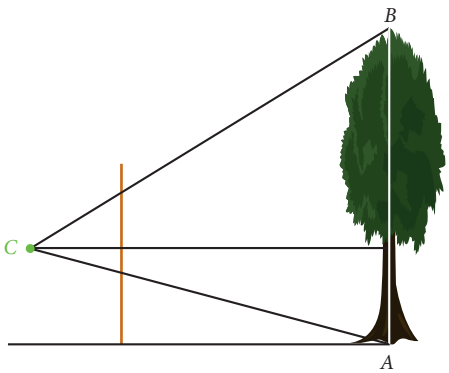
sága 4,2 m, a karó és a talajon meghatározott E pont távolsága 1,8 m. Milyen magas a fa?



9 Egy fa magasságát szeretnénk megmérni. Egy függőleges karót szúrtunk a földbe, a fától néhány méterre. A karó másik oldalán megállunk, a karótól 0,5 m-re. Szemmagasságunk 1,6 m. Bejelöljük a karón azt a két pontot, amely irányban a fa alját és tetejét látjuk. Azt látjuk, hogy a bejelölt pontok a szemmagasság alatt 42 cm-re és a szemmagasság fölött 92 cm-re vannak.

a) Milyen magas a fa?

b) Milyen messze volt a karó a fától?



10 Egy $ABCD$ téglalap oldalai 45 cm és 31 cm hosszúak. A téglalap egy belső P pontját összekötjük a téglalap csúcsaival, majd a PA, PB, PC és PD szakaszoknak kijelöljük a P-hez közelebbi harmadoló pontjait.

a) Milyen síkidomot határoznak meg a harmadoló pontok?

b) Mekkora ennek a síkidomnak a területe?

11 Egy tervrajzon a ház alaprajza 190 cm^2 területű. A valóságban ugyanez az alapterület 142 m^2.

a) Mekkora a tervrajzon az a szoba, amely a valóságban 18 m^2 alapterületű?

b) Milyen széles a valóságban az az ablak, amely a tervrajzon 1,3 cm széles?

c) Hányszoros kicsinyítése a tervrajz a valóságnak?

12 Egy kocka felszíne 121,5 cm^2. Egy másik kocka térfogata 216 cm^3. Mekkora a két kocka hasonlóságának aránya?

13 Egy téglatest éleinek hossza 12 cm, 20 cm és 28 cm. Egy, az előbbihez hasonló téglatest felszíne 142 cm^2. Mekkora annak a középpontos hasonlóságnak az aránya, mellyel az eredeti téglatest az adott felszínű téglatestbe vihető?

14 Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle 4 cm, magassága 13 cm hosszú. Egy az előbbihez hasonló gúla alaplapjának területe 36 cm^2. Mekkora ez utóbbi gúlának az alapéle és a magassága?

15 (Érettségi feladat, 2017)

Az ABC derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm, átfogója 17 cm hosszú.

a) Számítsd ki a háromszög 17 cm-es oldalához tartozó magasságának hosszát!

b) Hány cm^2 a háromszög körülírt körének területe?

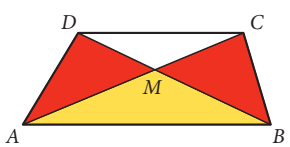
A DEF háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és az átfogója 13,6 cm hosszú.

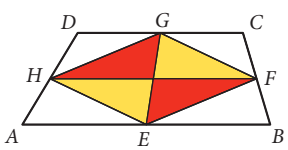
c) Hány százaléka a DEF háromszög területe az ABC háromszög területének?

16 (Érettségi feladat, 2010, emelt szint)

Egy 90 m^2 területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként. Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást (lásd a bal oldali ábrát). Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.

A tavaszi párosításkor (lásd a jobb oldali ábrát) hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?





NÉHÁNY FELADAT VÉGEREDMÉNYE

41. lecke: 1. 36°, 36°, 108°. **2.** 108°, 72°, 4 cm. **3. a)** 5. **b)** 36°, 36°, 108°, 36°, 72°, 72°. **4.** III. alapeset. **5.** II. alapeset, 90°-os elforgatás. **6.** igazak: a) c) d).

42. lecke: 1. IV. alapeset. **2. a)** II. alapeset. **3. a)** ≈ 14 m. **b)** gúla. **4.** ≈ 29 m.

43. lecke: 1. a) 8,17 cm; 5,31 cm^2. **b)** 134,46 cm; 1438,72 cm^2. **c)** 16,65 cm; 22,06 cm^2. **2. a)** 31 384,08 cm^2. **b)** 564,18 cm^2. **c)** 688,27 cm^2. **3. a)** 62,816 dm. **b)** 3,770 dm. **c)** 47,902 dm. **4. a)** 75,40 területegység. **b)** 12,46 cm^2. **c)** 18 535,40 mm^2. **d)** 942,5 dm^2. **5.** 97,51 cm^2.

44. lecke: 1. a) 16 cm, 8 cm, 8 cm, 12 cm, 4 cm. **b)** 120°, 60°, 60°, 90°, 30°. **2. a)** 18,3 cm, 20,9 cm. **b)** 458 cm^2, 523 cm^2. **3.** 61,1 cm^2, 30,55 cm^2, 30,55 cm^2, 45,8 cm^2; 15,3 cm^2. **4. a)** 22,41 cm, 134,46 cm^2. **b)** 4718,37 mm^2. **c)** 57,3°; 50 m^2. **5. a)** egy ív hossza 1,57 vagy 11 cm. **b)** 7 cm^2 vagy 99,56 cm^2.

45. lecke: 1. a) 100°, 160°, 20°, 80°, 169,6 cm, 271,3 cm; 33,9 cm; 135,6 cm; 25,4 cm^2; 40,7 cm^2; 5,1 cm^2; 20,3 cm^2. **b)** 51,4°, 77,1°, 102,9°, 128,6°; 4,8 cm; 7,3 cm; 9,7 cm; 12,1 cm; 13,1 cm^2; 19,6 cm^2; 26,2 cm^2; 32,7 cm^2. **2.** ≈ 3050 km. **3. a)** 6,28 m. **b)** 1 m. **c)** 2,8 m. **4.** C. **5. a)** 138 cm^2. **b)** 57 cm.

46. lecke: 1. a) 36°. **b)** 2182°, 6. **c)** 16. sor. **d)** 27,4 mm. **2. a)** 42-43 cm. **b)** 251 cm^2. **3. a)** ≈ 0,041°. **b)** 107 600 km. **c)** $8{,}1 \cdot 10^{12}$ km^2. **4. a)** 34. **b)** 189.

47. lecke: 1. 21,99 cm; 38,48 cm^2. **2.** $\frac{60}{13}$ cm. **3.** 960,25 cm^2-rel. **4. a)** 12 mm; 27 mm. **b)** 39 m. **c)** 36 m. **d)** 18 m. **5.** 77. **6.** 1260°. **7. a)** 3,6 cm^2; 2,36 cm^2; 3,14 cm^2. **b)** 30,22%.

48. lecke: 1. a) 6. **b)** 3. **c)** 22,5°; 22,5°; 135°, illetve 22,5°; 45°; 112,5°, illetve 22,5°; 67,5°; 90°. **d)** vannak; a két legrövidebb. **2. a)** 81,68 egység; 530,93 területegység. **3. a)** 41 cm; 29 cm. **b)** 69,5%-a. **4.** 1620°; 2520°. **5.** 3,43 cm^2; 6,87 cm^2; 6,87 cm^2. **6. a)** 2,56 cm; 0,866 cm; 0,289 cm. **b)** 60,5%; 80,5%; 82,9%.

49. lecke: 1. a) II. alapeset. **2. a)** 4-szerese. **b)** fehér. **3.** oldalak száma 5, illetve 20; átlók száma 5, illetve 170. **4.** 5760 km. **5. a)** 74%. **b)** 418 m^2 (38,5%).

51. lecke: 1. a) 36. **b)** 36. **c)** 22. **2.** 4,25; 0; 5. **3. a)** 2. **b)** 4. **c)** nem lehetséges. **4. a)** 6. **b)** 15,5. **5. a)** 24,073 g. **b)** Elfogadható.

Ráadás lecke: 1. a) 250; 200. **b)** 241; 209. **c)** 197; 195. **d)** 200; 200. **2. a)** 2712. **b)** 360. **3. a)** 19,5 cm. **b)** 18 cm. **c)** az elsőnek. **4. a)** 8 és 242. **b)** 108 és 147. **5. a)** 20,449 millió Ft. **b)** 2,1 millió Ft és 8,349 millió Ft. **c)** 5,2245 millió Ft. **d)** 1,43-szoros. 4,3 millió Ft és 6,149 millió Ft.

52. lecke: 1. a) $p = 278$; $q = 311$; $x = 369$; $y = 391$; $z = 466$; $v = 524$. **b)** 2-szerese. **c)** Egyenlők. **2.** 2,5 millió Ft. **3. a)** összesen 329,1 km. **b)** kevesebb. **c)** egyenlő. **d)** 65,82 km. **4. a)** 3,36 millió Ft és 2,856 millió Ft. **b)** 32%-ot. **c)** 2,859 millió Ft. **d)** 17,538%.

53. lecke: 1. a) 6,33; 9; 6,5; 6. **b)** 63,33; 90; 65; 60. **2.** módusz. **3. a)** 0 vagy bármely annál nagyobb valós szám. **b)** –2. **c)** 0 vagy –1. **d)** –7. **e)** nincs ilyen. **4. a)** 47; 100; 60; 100. **b)** 8 tanuló írt az 63%-nál rosszabbat. **5. a)** 3,09; 3; 3; 4, illetve 3,6; 3; 3,5; 3.

54. lecke: 1. a) 132. **c)** 188 500 forint. **d)** ≈ 1428 forint (nincs ilyen bélyeg). **2.** 173,0 cm. **3.** 18. **4.** női dolgozóból. **5.** 165. **6.** 44%.

55. lecke: 2. d) 0,125. **e)** 0,375. **f)** Nincs igaza. 0,375 a valószínűsége.

56. lecke: 1. b) 36. **c)** $\frac{1}{36}$. **d)** $\frac{1}{36}$. **e)** $\frac{6}{36}$. **f)** $\frac{5}{36}$. **g)** $\frac{6}{36}$. **2. a)** $\frac{6}{36}$. **b)** $\frac{2}{36}$. **c)** $\frac{5}{36}$. **3. a)** C. **4.** $\frac{8}{36}$. **5. b)** $\frac{1}{36}$. **c)** $\frac{22}{36}$.

57. lecke: 1. a) $\frac{13}{31}$. **b)** $\frac{18}{31}$. **2. a)** $\frac{1}{12}$. **b)** 0. **c)** $\frac{3}{4}$. **d)** 1. **3. a)** $\frac{1}{4}$. **b)** 5. **4.** $\frac{2}{3}$. **5.** H – C – D – E – A – G – B – F.

58. lecke: 1. a) 0,611. **b)** 0,096. **c)** 0,904. **d)** 0,808. **2. a)** 0,197. **b)** 0,931. **c)** 0,803. **3. a)** $\frac{1}{5}$. **b)** $\frac{48}{120}$. **c)** $\frac{72}{120}$. **4. a)** $\frac{1}{6}$. **b)** $\frac{1}{6}$. **c)** $\frac{1}{3}$. **d)** $\frac{2}{3}$.

59. lecke: 1. 9200 Ft. **2.** átlag 3,7, medián 4, módusz 3. **3. a)** $\frac{4}{36}$. **b)** $\frac{6}{36}$. **c)** $\frac{30}{36}$. **4. a)** 11 420 kg. **b)** 11 436 kg. **5.** 17. **6. a)** $\frac{180}{900}$. **b)** $\frac{400}{900} = \frac{4}{9}$. **c)** $\frac{22}{900}$. **7. a)** $\frac{128}{300}$. **b)** $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$. **c)** $\frac{69}{300}$.

60. lecke: 1. 4; 2. **2.** Zirc. **3. a)** igen. **b)** nem. **4. a)** nem. **b)** nem. **c)** igen. **5. a)** 4. **b)** 2. **6. a)** nem. **b)** igen.

61. lecke: 1. a) $x \geq -3$. **b)** $\sqrt{x+3} = 2x - 9$. **d)** 6 és 2,75. **e)** 6, a másik hamis gyök. **2. a)** $x \geq -14$, a második lépés nem ekvivalens. **b)** $x \geq \frac{2}{3}$, a második lépés nem ekvivalens. **3. a)** –3. **b)** 1. **c)** 8. **4. a)** 4. **b)** nincs megoldás. **5. a)** 2. **b)** 5.

Ráadás lecke: 2. T ≈ 8,58 millió Ft. **3. a)** kb. 210 és 1800 millió Ft között. **c)** nem. **d)** kb. 10,4 millió Ft. **4.** 750 millió Ft, $y = 0{,}02B + 10$. **6. a)** 132 millió Ft, 2368 millió Ft. **7. a)** 805 euró, 8800 euró. **b)** 4750 euró, 6000 euró. **d)**750 kg. **e)** 250 kg. **f)** 3300 euró, 2800 euró. **g)** 166,7 kg; 500 kg.

62. lecke: 2. a) $]-2;\ 0[$. **b)** $]-\infty;\ -2]\cup[0;\ \infty[$. **c)** $]-\infty;\ -3]\cup[0;\ \infty[$. **d)** $]-3;\ 0[$. **3. a)** $[-1;\ 2]$. **b)** $]-\infty;\ -3]\cup[1;\ \infty[$. **4. a)** -4 és 1. **b)** 1,2 és -5. **c)** -2 és 0,5. **5. a)** $]-\infty;\ -4[\cup]1;\ \infty[$. **b)** $[-5;\ 1{,}2]$. **c)** $[-2;\ 0{,}5]$.

63. lecke: 1. a) 1 és 2. **b)** 1 és 2. **2. a)** $[0;\ 6]$. **b)** $[1;\ 5]$. **c)** $\{3\}$. **3. a)** -12.25. **b)** $-3{,}125$. **c)** 0. **d)** 2,5. **4.** $28 < x < 42$. **5. a)** $20 < x < 100$ (cm) távol. **b)** a felénél. **6. a)** kevesebb, mint 15%.

64. lecke: 1. Pl.: **a)** $x^2-4x+3=0$. **b)** $x^2+2x-8=0$. **c)** $x^2-15x+56=0$. **d)** $x^2+11x+30=0$.

2. a) $(x+3)(x+9)$. **b)** $(x+3{,}5)(x-0{,}5)$.

c) $2(x+0{,}5)(x-5)$. **d)** $5(x+1)(x+1{,}6)$.

3. a) $f(x)=(x+1)(x-5)=x^2-4x-5$.

b) Minimumhelye: 2; Minimum: –9.

4. a) $f(x)=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$.

b) $g(x)=-x^2+6x-5$. **c)** $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$.

5. a) Pl. $x^2-1{,}1x+0{,}3=0$. **b)** Pl. $10x^2-11x+3=0$.

6. a) $12x^2-x-1=0$. **b)** $63x^2+10x-8=0$.

Ráadás lecke: 1. a) 2 és 4. **b)** 2 és 10. **c)** –2 és –5. **d)** 4 és –5. **2.** 2,5 és $\frac{4}{3}$. **3. a)** 2. **b)** $\frac{7}{6}$. **c)** $\frac{1}{3}$. **4.** 13; 8; 7; –13; –8; –7. **5. a)** nincs gyök. **b)** 30. **6. a)** $\frac{3}{7}$. **b)** $-\frac{153}{8}$. **7. a)** $\frac{65}{4}$. **b)** $\frac{\sqrt{65}}{2}$. **c)** $\frac{3\cdot\sqrt{65}}{8}$.

Ráadás lecke: 1. 36. **2.** 72. **3.** 62. **4.** 13,5 dm^2. **5. a)** 12 cm és 16 cm. **b)** 10 cm. **c)** 192 cm^2. **d)** 19,2 cm. **6.** 40 mm, 9 mm, 80 mm. **7.** 24 mm; 35 mm; 42,4 mm. **8.** 9 cm; 40 cm; 41 cm.

66. lecke: 1. a) pl.: $x^2-33x+252=0$.

b) pl: $70x^2+149x+51=0$. **2. a)** $]0;\ 3[$. **b)** $]-1{,}5;\ 6[$. **3. a)** 6. **b)** 0 és -2. **4.** 73 másodpercig.

5. a) $f(x)=-0{,}5(x+3)(x-5)=-0{,}5x^2+x+7{,}5$. **b)** maximuma 8, maximum helye $x=1$. **c)** $]-\infty;\ 8]$. **6.** 10. **7. a)** $]-\infty;\ -1[$. **b)** $[-3;\ 2]$. **c)** $]-\infty;\ 2];\ [-3;\ -1[;\ [-1;\ 2]$.

67. lecke: 1. b) kerületek aránya 2; 0,75; 1,5 és 0,5; területek aránya 4; 0,5625; 2,25 és 0,25. **3. a)** $AB=BC=CD=DA=$ $=8$ cm; $EK=12$ cm. **c)** 36 cm^2; 16 cm^2; 4 cm^2.

68. lecke: 1. a) nem. **b)** nem. **c)** igen. **d)** igen. **2. a)** igaz. **b)** hamis. **c)** hamis. **d)** hamis. **3.** 2; 4. **4.** oldallapok területe 3532 cm^2, 56 511 cm^2, 883 cm^2, 1766 cm^2. **5.** területekre: 4; 64; 10 000; 2. kerületekre: 2; 8; 100; $\sqrt{2}$.

69. lecke: 2. *C*. **3.** *D*.

70. lecke: 1. a) $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$. **b)** 12,5 cm és 13,3 cm; 8 cm és 10,7 cm; 7,5 cm és 9,38 cm. **2. a)** 5 dm; 5 dm és 6 dm. **b)** 5 cm; 5 cm és 6 cm. **3. a)** 0,9 m. **b)** $1:\frac{250}{11}\approx 1:22{,}7$ (azaz 1 : 22 arányú). **c)** 19,8 cm; 27,76 cm.

71. lecke: 1. b) ≈ 11,8 cm. **c)** ≈ 23,6 m. **2. a)** nincs igaza. **b)** Igaz. A megfordítása hamis. **3. a)** a rajzon $AB=6$ cm; a szegély 0,5 cm. **d)** $\frac{A'B'}{AB}=0{,}7$.

72. lecke: 1. a) 74° és 52°. **c)** ≈ 9–9,5 cm. **d)** ≈ 90–95 m. **e)** Eltérés: 9,1 m. **3. b)** 2 cm; 6 cm. **c)** 3,33 cm.

73. lecke: 1. c) $\frac{1}{2}$. **e)** középvonal. **2. a)** 34 mm; 136 mm; 153 mm. **b)** 204 dm; 85 dm; 221 dm; derékszögű háromszög. **3. a)** I. alapeset. **c)** 2, illetve $\frac{1}{2}$. **d)** 2 : 1. **e)** 2 : 1. **f)** súlyvonal. **4. a)** 7 cm; 16,8 cm; 18,2 cm. **b)** 18,2 cm. **c)** 21,9 cm és 34,3 cm. **d)** 12,1 cm; 14,6 cm; 22,9 cm.

74. lecke: I. 1. b) 3 cm; 1,5 cm; 3 cm; 4,5 cm. **2.** 0,75 cm^2, 3,75 cm^2, 4,5 cm^2. **II. 1. c)** $\frac{1}{4}$. **d)** négyszer. **f)** $\frac{5}{4}$. **g)** 19,2 mm.

75. lecke: 1. a) 4,05 m. **b)** 3,56 cm. **c)** 19,8 cm^2. **2. a)** 100 000-szer. **b)** 100 000 cm = 1 km. **4. a)** 7,5 cm; 8,7 cm; 9,3 cm. **b)** 3,75 cm; 4,35 cm, 4,65 cm.

TÁRGYMUTATÓ

aranymetszés 133
átlag 42
átlók száma 29
befogótétel 128
beírható kör 26
belső szögek összege 30
ekvivalens átalakítás 76
ekvivalens egyenlet 76
elemi esemény 59
érintőnégyszög 25
geometriai transzformáció 108
gyakoriság 56
gyöktényezős alak 88
hamis gyök 78
háromszögek egybevágóságának alapesetei 5
hasonlóság 112
húrnégyszög 24
kerületi szög 20
kétszeres gyök 88
körcikk 14
körgyűrű 13
körív 14
kör kerülete 10
körszelet 15
kör területe 11
körülírható kör 26
középponti szög 14
középpontos hasonlóság 106
középpontos nagyítás, kicsinyítés 103
középvonal 126
külső szögek összege 30
látókörív 21
magasságtétel 128
merőleges vetítés 109
mértani közép 44
medián 50
módusz 50
osztályba sorolás 52
paraméteres egyenlet 95
párhuzamos szelők tétele 123
pí 34
relatív gyakoriság 56
súlyozott átlag 42
súlyvonal 127
szabályos sokszög 11
számtani közép 42
terjedelem 50
valószínűség 59
véletlen jelenség 59
vetület 109
Viète-formulák 92

TARTALOM

Előszó – A tankönyv témakörei. 3

EGYBEVÁGÓSÁG, KÖR

41 Háromszögek egybevágóságának alapesetei . . 4
42 Egybevágó háromszögek 8
43 A kör kerülete és területe. 10
44 Középponti szög, körív, körcikk 14
45 Gyakorlás 18
46 Körívek, körcikkek a mindennapokban 22
47 Sokszögek és körök. 26
48 Gyakorlás 32
49 Ismétlés 36
50 Tudáspróba 38
Témazáró feladatgyűjtemény 40

STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

51 Átlag, számtani közép 42
Ráadás – Számtani közép, mértani közép 44
52 Változások 48
53 Számsokaságok statisztikai jellemzői. 50
54 Osztályba sorolás, átlagok átlaga 52
55 Véletlen? – Relatív gyakoriság. 56
56 Megismerhető véletlen. 58
57 Biztos, lehetetlen, véletlen 64
58 Valószínűség a gyakorlatban 66
59 Gyakorlás, tudáspróba 68
Témazáró feladatgyűjtemény 71

EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

60 Ekvivalens egyenletek 76
61 Gyökös egyenletek 78
Ráadás – Laboratóriumi fejlesztések. 82
62 Másodfokú egyenlőtlenségek 84
63 Gyakorlás 86
64 Polinom gyöktényezős alakja 88
Ráadás – Viète-formulák! 92
65 Csoportverseny 94
Ráadás – Másodfokú egyenletrendszerek 96
66 Gyakorlás, tudáspróba 98
Témazáró feladatgyűjtemény 100

HASONLÓSÁG

67 Középpontos nagyítás, kicsinyítés 102
68 Középpontos hasonlóság 106
69 Geometriai hozzárendelések. 108
70 Hasonlóság 112
Ráadás – Mit mutat a tervrajz? 116
71 Alkalmazzuk a hasonlóságot! 118
Ráadás – Párhuzamos szelők tétele. 122
72 Háromszögek hasonlósága 124
73 Háromszög középvonalai és súlyvonalai 126
Ráadás – Magasságtétel, befogótétel. 128
74 Gyakorlás 130
Ráadás – Szépség és művészet 132
75 Ismétlés, gyakorlás 136
76 Gyakorlás, tudáspróba 138
Témazáró feladatgyűjtemény 140

Néhány feladat végeredménye 142
Tárgymutató 143