OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

9



Matematika

I. kötet

tankönyv

Matematika

ELSŐ KÖTET

9.

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2020. 06. 12-től 2025. 08. 31-ig tankönyvi engedélyt kapott a TKV/3173-7/2020. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára (Matematika) és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára (Matematika) megnevezésű kerettanterv előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztő: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztő: Bosznai Gábor Zoltán

Fedél: Slezák Ilona terve alapján Orosz Adél, Bánáti János

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók:
Shutterstock; Pixabay; Flickr; Wikipedia; 123rf; Kováts Borbála, Létai Márton, Orosz Adél

A könyvben felhasználtuk a Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 9. Első kötet tankönyv című művet. Raktári szám: FI-503010901/1

A nyersanyagként felhasznált tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

© Oktatási Hivatal, 2020

ISBN 978-615-6178-19-0

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001. számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

1. Kombinatorika, halmazok

– ÖSSZESZÁMLÁLÁS SOK KONKRÉT FELADATTAL

Érdekel, mire érdemes fogadni; hányféleképpen alakulhat egy verseny végeredménye; mennyi lehetőség adódik a nyertes számok kiválasztására?

– HALMAZOK ÉS HALMAZMŰVELETEK MINDENFÉLE TÉMAKÖRBŐL

Itt és most rendbe szedjük a számokat; egyesítünk, közös részt és különbséget képezünk; s még az is kiderül, hogy a semmi is valami…

2. A számok világa

– SZÁMOLÁS, HATVÁNYOZÁS EGYRE BIZTOSABBAN

Rutinos számolóvá válhatsz, ha megismered és megtanulod a hatványokban rejlő lehetőségeket…

– SZÁMOLÁS NAGYON NAGY SZÁMOKKAL

Birokra kelhetsz az óriásokkal a számok világában

– SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

Ha érdekel az árleszállítás… ha a pénzedet szeretnéd majd bankban kamatoztatni… ha fontos, hány ponttól ötös az ötös… akkor mélyedj el ebben a témában!

3. Egyenletek és azonosságok

– NEVEZETES AZONOSSÁGOK

Nevezetességek az algebrában. Hát, ezt be kell vágni…

– OLDJUNK MEG EGYENLETEKET!

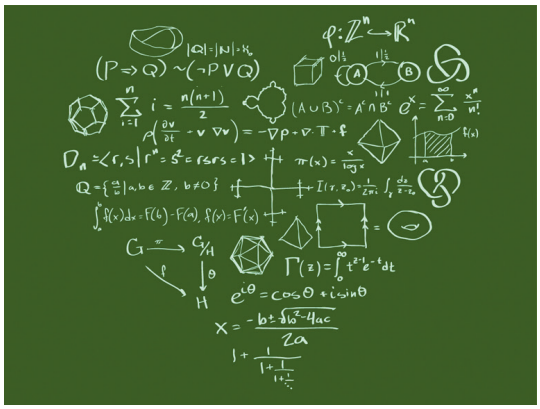
Csak mérlegelni kell tudni…

– SZÖVEGES FELADATOK

Hány éves a kapitány? Utoléri-e Tom Jerryt? Mennyi idő alatt telik meg a medence? És hasonló kérdések...

HOGYAN ÉPÜL FEL EZ A TANKÖNYV?

BEVEZETŐ



Sok szeretettel köszöntünk az új tanévben!

Ebben a leckében azt szeretnénk bemutatni, hogyan használd ezt a tankönyvet. Szeretnénk, ha örömöd lelnéd és sikereket érnél el a matematika tanulásában. Ehhez kínálunk a tankönyvben változatos témakörökből sok érdekes feladatot, számos gyakorlati példát és kapcsolódási pontot, a matematika felfedezéséhez pedig magyarázatokat, elméleti rendszerezéseket és összefoglalókat. A leckék szerkezete azonos részekből épül fel, ezekkel fogunk most megismertetni.

ELMÉLET

Az egyes leckékben a következő típusú részekkel találkozhatsz:

BEVEZETŐ Hogyan kapcsolódik a matematika a mindennapokhoz? Sok esetben egyszerű gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat, megtalálod a pontos matematikai fogalmakat (definíciókat) és állításokat (tételeket) is.

FELADAT Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe. (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

HÁZI FELADAT 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁADÁS, **EMELT SZINT** Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Sok matematikai érdekesség, ötletes és izgalmas feladat, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

CSOPORTMUNKA Munkaformaként csoportmunkát vagy pármunkát javaslunk a megoldáshoz, ha

- olyan sok adat vagy olyan sok lépés van, hogy érdemes megosztani egymás között a munkát;
- arra szeretnénk biztatni titeket, hogy beszéljétek meg a feladatok előtt és a megoldás során ötleteiteket, gondolataitokat;
- érdemes lenne több irányból végiggondolni egy problémát;
- sokféle ötletet és gondolatot kell összegyűjteni a feladat keretében;
- azt szeretnénk, hogy együttműködés keretében jussatok el egy megoldáshoz.

Amikor saját gondolataidat szavakba öntöd és elmagyarázod, mélyebben megértheted a matematika rendszerét. Amikor a társad mondatait figyeled, rácsodálkozhatsz az ő gondolataira. Sokszor kifejezetten nehéz, ugyanakkor izgalmas feladat kilépni a te gondolataidból, és egy másik ember gondolati lépéseit követni és megérteni. Nehéz, de megéri!

CSOPORTMUNKA

Oldjátok meg pármunkában az alábbi feladatokat!



1 Magyarországon az országgyűlési képviselőket 1990 óta négyévente választják. A köztársasági elnököt ötévente választják, legutóbb 2017-ben volt elnökválasztás.

a) Legközelebb mikor tartjuk mindkét választást ugyanabban az évben?

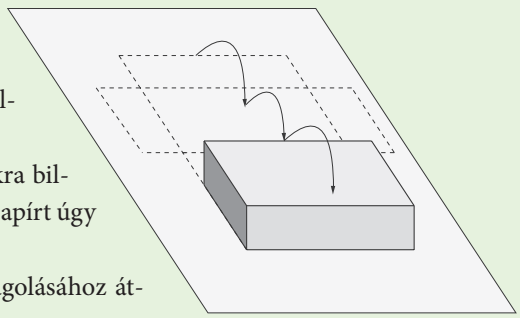
b) Az Európai Parlament képviselőit is öt évre választják meg. Magyarország először 2004-ben küldhetett képviselőket. Legközelebb mikor lesz olyan év, amikor magyar országgyűlési képviselőket és európai parlamenti képviselőket is választunk?

2 Mekkora darabot vágjunk le egy ív csomagolópapírból, ha egy $40 \times 30 \times 20$ cm-es dobozt akarunk belecsomagolni?

Ha nem akarjuk összevissza hajtogatni a csomagolópapírt próbálgatás közben, akkor tegyük a következőt:

Hengergessük végig a dobozt a papíron egyik oldaláról a másikra billentve. Ezzel létrehozunk egy képzeletbeli „hálót". A csomagolópapírt úgy kell vágni, hogy ez a háló kiférjen rá.

Minimum mennyi csomagolópapír kell a fenti doboz becsomagolásához átfedés nélkül?



3 Magyarország népessége 1999-ben kereken 10 millió, a népesség életkor szerinti megoszlása pedig a következő volt: 0–14 éves: 20%, 15–39 éves: 35%, 40–59 éves: 25%, 60 év fölötti: 20%.

a) Ábrázoljuk a kor szerinti százalékos megoszlást diagramon!

b) Hány fő tartozott az egyes korcsoportokhoz 1999-ben?

Készítsetek többféle diagramot a feladathoz!

HÁZI FELADAT

1 Négy darab egyforma négyzetlapunk van, melyek oldalai 3 cm hosszúak. Rakj ki síkidomot mind a négy négyzetlap felhasználásával a következő szabályok szerint:

1. pontosan egy síkidom keletkezik;
2. semelyik két négyzetlap között nincs átfedés;
3. szomszédos (közös oldallal rendelkező) négyzetlapok mindig teljes oldalaikkal illeszkednek.

a) Hányféle síkidomot kaphatsz?

b) Melyik síkidomnak mekkora a területe és a kerülete? Mit veszel észre?

c) Gondold végig, miért fontosak az egyes szabályok! Mutass olyan síkidomokat, melyek esetén a három szabály közül kettő teljesül, de a harmadik nem!

2 Számold ki a következő kifejezés értékét!

a) $12 \cdot \left(\frac{26}{3} - \frac{25}{6}\right) : \frac{9}{5}$

b) $\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} - \frac{2}{3} : \frac{3}{4} + 6 \cdot \left(\frac{11}{2} - \frac{11}{3}\right)$

3 Készíts halmazábrát a következő halmazokról:

A = {páros számok}

B = {pozitív számok}

C = {azok a számok, melyeknek négyzete kisebb, mint 5}

Helyezd el az ábrában a -5-nél nagyobb, és $+5$-nél kisebb egész számokat!

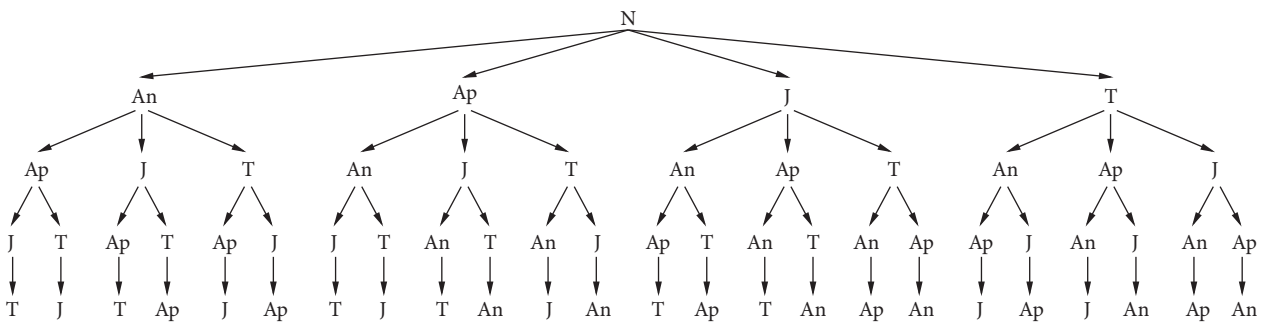
1 HÁNYFÉLEKÉPPEN LEHET?

BEVEZETŐ

A dédmama születésnapjára érkezik az öttagú család: apa, anya és három gyerekük, azaz Juli, Tamás és Nóri. Tamással eljött a barátnője is. Hányféle sorrendben köszönthetik fel a dédmamát a családtagok, ha Nóri szeretne első lenni a virágcsokorral?



Első megoldás: Készítsük el a lehetőségeket ábrázoló gráfot!



Az ábráról leolvasható, hogy 24-féle sorrend lehetséges.

Második megoldás: Gondoljuk végig, hogy az egyes helyekre hányféle lehetőség közül választhatunk!
Nóri az első.
Nóri után 4-féleképpen választhatjuk ki, hogy ki a második.
A 3. helyen álló ünneplőt már csak 3-féleképpen, mert 2 ember már szerepelt. Mind a 4 korábbi kiválasztást folytathatjuk 3-féleképpen, ez eddig összesen $4 \cdot 3$ lehetőség.
A 4. helyen állót már csak 2-féleképpen választhatjuk, ez $4 \cdot 3 \cdot 2$ lehetőség, s az utolsó felköszöntő pedig már egyértelmű.

Nóri:
1-féle 1 1.
4-féle 4 2.
3-féle 3 3.
2-féle 2 4.
1-féle 1 5.

Összesen: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

FELADAT

1 a) Hányféle sorrendben köszönthetik fel a dédmamát, ha nem csak Nóri lehet az első?
b) Hányféle sorrend lehetséges, ha nem öttagú a család, hanem héttagú, és a köszöntők bármely sorrendben követhetik egymást?
c) Hányféleképpen alakulhat az öttagú családban az első három köszöntő sorrendje?

2 Egy futóversenyen 6 gyerek indul.
a) Hányféle végeredmény lehetséges, ha nem alakul ki holtverseny?
b) Hányféle kiosztása lehet az arany-, ezüst- és bronzéremnek (a többiek helyezését nem figyeljük, és nincs holtverseny)?
c) Hányféle sorrend lehetséges, ha tudjuk, hogy Jocó lett az ötödik, és Ferkó a hatodik? Ábrázold a lehetőségeket gráffal!

KIDOLGOZOTT FELADAT

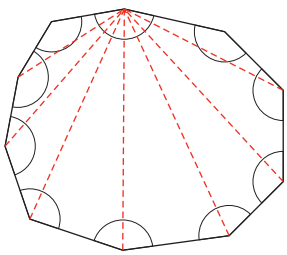
1. Egy 10 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hány kézfogás történt?



Megoldás

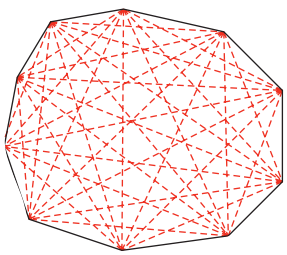
Emese 9-szer nyújtotta a kezét, ugyanígy a többiek is. Ez összesen 90 kéznyújtás. Egy kézfogás 2 kéznyújtás eredménye, ezért minden kézfogást kétszer számoltunk. A kézfogások száma tehát $90 : 2 = 45$.

2. Hány átlója van az ábrán látható tízszögnek? (Az egyik csúcsból kiinduló átlókat már berajzoltuk.)



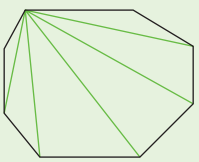
Megoldás

Minden egyes csúcsból 7 átló indul ki, mert önmagához és a két szomszédos csúcshoz nem vezet átló. A 10 csúcsból ez összesen $10 \cdot 7 = 70$ átló lenne, de mivel minden átlót két csúcsnál is figyelembe vettünk, ennek a fele a megoldás. A tízszögnek tehát 35 átlója van összesen.



FELADAT

3 Hány átlója van összesen az ábrán látható nyolcszögnek? (Az egyik csúcsba futó átlókat már berajzoltuk.)



4 Az iskolai röplabdabajnokságban kilenc csapat versenyez. Minden csapat minden csapattal játszik egy mérkőzést (nincsenek visszavágók). Összesen hány meccset fognak lejátszani?

FELADAT

5 Öt nagyvárost közvetlen repülőjáratok kötnek össze, azaz bármelyikből bármelyikbe egyetlen repülőúttal el lehet jutni. Hány repülőjárat van összesen az öt város között, ha az *A* városból *B* városba, és a *B* városból A városba tartó repülő ugyanaz a járat?

6 Négyen jutottak az evezős verseny döntőjébe. Döme és Karesz osztoztak az első két helyen, Pali és Norbi a 3. és 4. helyezésen. Hányféle sorrend alakulhatott ki, ha nem volt holtverseny? Készíts ábrát (gráfot) a lehetőségekről!

ELMÉLET

Sorba rendezünk különböző elemeket

Ha van 4 különböző elemünk, és azokat sorba rendezzük, akkor a lehetőségek száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Általánosan: ha van n különböző elemünk, és azokat sorba rendezzük, akkor a lehetőségek száma

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ennek a szorzatnak a felírására egy egyszerű jelölést használunk. Például a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ szorzatot úgy jelöljük, hogy 4! (úgy olvassuk, hogy „négy faktoriális"). Általában:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Négy lány (Anna, Bogi, Cili és Dóri) és négy fiú (Elek, Feri, Gábor és Henrik) táncolni mennek. Hányféleképpen alakíthatnak négy táncoló párt, ha minden párban egy lány és egy fiú táncol?

Megoldás

Állítsuk egymás mellé a négy lányt: Anna Bogi Cili Dóri.

Tegyük fel, hogy először Anna választ a fiúk közül párt magának. Ezt négyféleképpen teheti meg. Ha Bogi a második választó, akkor ő három fiú közül választhat, hiszen Anna választottját nem választhatja. Ha a harmadik választó Cili, akkor neki két fiú közül kell választania, ugyanis két fiút már előzőleg kiválasztottak. Dórinak már csak egy fiú marad táncpartnernek. A lehetőségek száma tehát $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Könnyen meggondolható, hogy ugyanerre az eredményre jutnánk akkor is, ha a lányok nem ebben a sorrendben választhatnának, hanem például Dóri kezdené a választást, másodiknak Anna, harmadiknak Cili választhatna.

A lehetőségek száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

(Ez a feladat megoldható úgy is, hogy rendszerezetten felsoroljuk az összes esetet, majd megszámoljuk azokat.)

FELADAT

7 Öt lány és öt fiú táncolni mennek.

a) Hányféleképpen alakíthatnak öt táncoló párt, ha minden párban egy lány és egy fiú táncol?

b) Hányféleképpen alakíthatnak öt táncoló párt, ha közülük Anna csak Ferivel táncol?

8 Öt férfi és négy nő lép be egy terembe.

a) Hányféle sorrendben jöhetnek be az ajtón?

b) Hányféle sorrendben jöhetnek be, ha először a nők jönnek, és ha minden nő bejött, akkor utánuk a férfiak?

c) Hányféle sorrendben jöhetnek, ha először a férfiak jönnek, és utánuk a nők?

d) Hányféle sorrendben jöhetnek be, ha felváltva jönnek, először férfi, utána nő, majd megint férfi, és így tovább?

HÁZI FELADAT

1 A család autóba ül. Elöl ül anya és apa, hátul a három gyerek. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a kocsiban, ha anyának és apának is van jogosítványa?

2 A születésnapi ebédnél a család nyolc tagja egy asztal köré ült. Hány különböző módon ülhettek le, ha dédmama az asztalfőn foglalt helyet, jobbján Csilla, balján pedig Hajni ült?

3 Hat település mindegyikéből pontosan három másik településre lehet eljutni közvetlen, egyenes műúton. Hány közvetlen út vezet a települések között? Rajzolj egy lehetséges esetet!

4 Hány átló húzható egy konvex 16 szögben?

5 Számítsd ki, hogy mennyi!

$4!$; $5!$; $6!$; $7!$; $\frac{5!}{3!}$; $\frac{8!}{6!}$

RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés, 2009)

Dóra számítástechnika órán a szövegszerkesztés alapjait tanulja. A feladata az volt, hogy tervezze meg a ballagási meghívóját. A meghívó a következő szöveget tartalmazza.

„Ballagási meghívó

Sok szeretettel meghívlak június 15-én délután 3-kor tartandó ballagásomra: Dóra”

A meghívók nyomtatását végző nyomda csak a következő feltételeknek megfelelő szövegek nyomtatását vállalja.

A betű típusa	Times New Roman	A betű színe	fekete, piros, arany, ezüst
	Arial	A betű változata	normál, **félkövér**, *dőlt*, aláhúzott
	Calisto MT	Egyéb megjegyzés	A teljes szöveg azonos típusú, színű és
	Lucida Sans		változatú betűkből álljon!

A nyomda lehetőségeit figyelembe véva hány különböző lehetőség közül választhat Dóra a meghívó tervezésekor?

3^4 4^3 $3 \cdot 4$ 3 4

2. Egy megadott jelszót egy bizonyos rendszer 16 biten tárol (egy bit értéke 0 vagy 1 lehet).

Pl. ez is lehet egy jelszó:

0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1

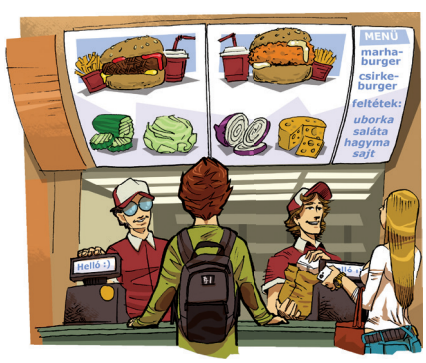
a) Hány különböző jelszó adható meg ebben a rendszerben?

b) Hány olyan különböző jelszó van, amely 0-ra, 1-re, 11-re, illetve 10-ra végződik?

c) Egy gyors kódfeltörő program másodpercenként 600 000 próbálkozást végez. Legfeljebb mennyi idő kell a programnak a jelszó feltöréséhez (ha „tudja”, hogy 16 bites a jelszó)?

3. Egy büfében a hamburgert kétféle alappal kínálják. Választhatunk csirkeburgert vagy marhahúsos hamburgert. Mindkettőt kiegészíthetjük extra feltétekkel, ezek közül akár többet is választhatunk, a feltétek sorrendje nem számít. Négyféle extra feltétet kínálnak: sajt, hagyma, paradicsom, saláta.

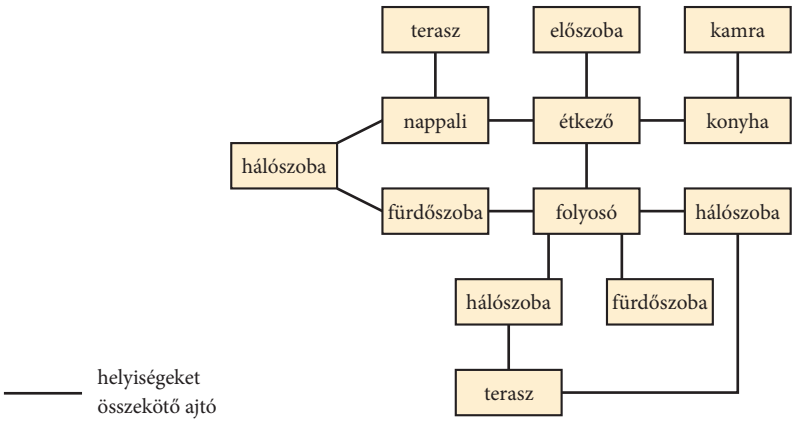
Gabi kiválasztotta az egyik alapot, majd két extra feltétet rendelt. Hányfélét rendelhetett? Készítsetek ábrát (gráfot) is a feladathoz!



2 GRÁFOK

KIDOLGOZOTT FELADAT

(Kompetenciamérés feladata nyomán, 2017)
Egy házaspár új házat tervez. „Úgy szeretném – mondja a feleség -, hogy az előszobából az étkezőbe lehessen belépni, onnan nyíljon egyik irányba a konyha, másik irányba a nappali.” Végül a beszélgetésük nyomán a férj egy vázlatot készített arról, hogyan nyíljanak egymásból a helyiségek.



a) Hány helyiséget szeretnének a két terasszal együtt?
b) A bejárati ajtón kívül hány ajtó lesz a házban?
c) Melyik helyiségből nyílik a legtöbb ajtó?
d) Tervezd meg a házat úgy, hogy a feleség minden elképzelése megvalósuljon!

Megoldás
a) Az ábrán a kis téglalapok felelnek meg a helyiségeknek, összesen 13 van belőlük.
b) A téglalapokat összekötő szakaszok jelentik az ajtókat, ezekből 14 van.
c) A legtöbb összekötő szakasz a folyosóról indul, ott lesz a legtöbb ajtó, összesen 5.

ELMÉLET

Gráfokkal szoktunk ábrázolni elemeket, ha azt is szeretnénk az ábrában megjeleníteni, hogy mely elemek között van kapcsolat. A gráf **pontjai** (vagy más szóval **csúcsai**) jelölik a különböző elemeket, és a pontokat összekötő vonalak (vagy más szóval **élek**) jelölik a kapcsolatot. Az ábrában nem számít az összekötő vonalak hossza, és nem számít, hogy egyenes vonalakat rajzolunk vagy görbéket. A gráffal a kapcsolatok hálózatát szeretnénk szemléltetni.

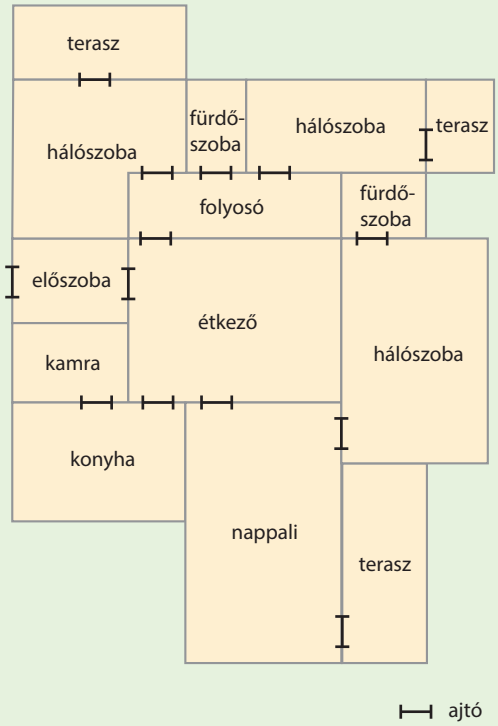
Vannak olyan gráfok, amelyekben az elemek közötti kapcsolatok iránya is fontos, ilyenkor az összekötő vonalakat nyilakkal egészítjük ki (**irányított gráf**).

Ábrázolhatunk gráffal például közlekedési hálózatot, családfát, ismeretségeket, sportbajnokságot, munkafolyamatot. Sorolj fel te is néhány példát a hétköznapi életből! Nagyon nagy gráfok is vannak, pl. a közösségi oldalak vagy maga az internet is értelmezhető gráfként.

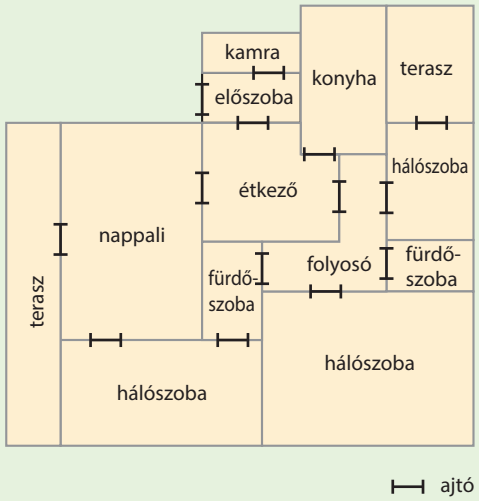
FELADAT

1. Melyik alaprajz felel meg a Kidolgozott feladatban leírt elképzelésnek?

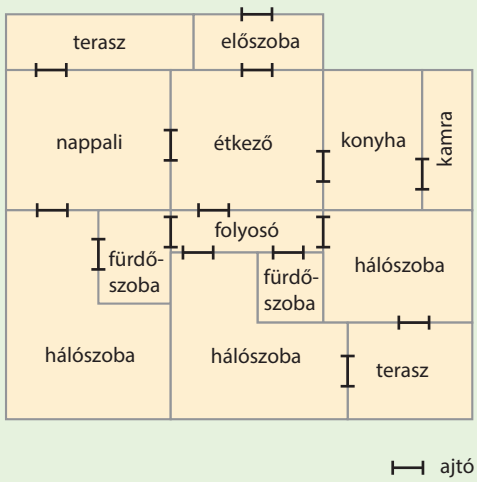
a)



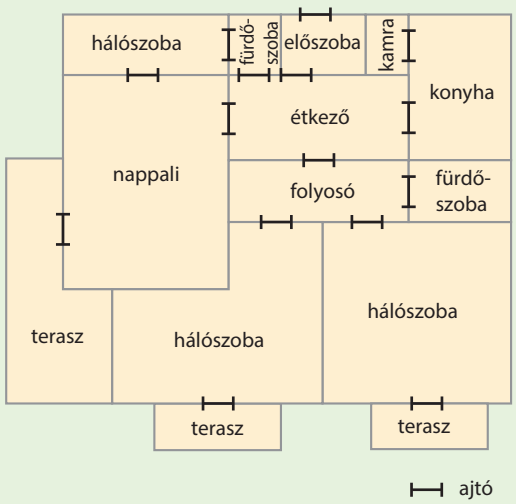
c)



b)



d)



2. (Érettségi feladatok)

a) Egy találkozóra öt üzletember érkezik, akik a többi résztvevő közül rendre 1, 2, 2, 2, 3 másikat ismernek (az ismeretségek kölcsönösek). Szemléltesd gráffal az ismeretségeket!

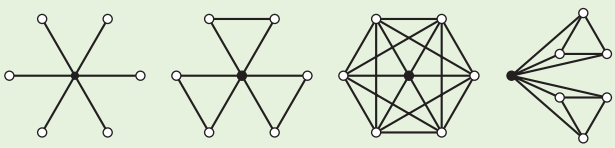
b) Józsefnek 3 gyermeke volt: Andor, Mátyás és Dávid. Mátyásnak 3 fia született, Andornak 1, Dávidnak egy sem. Szemléltesd gráffal az apa-fiú kapcsolatokat! Hány csúcsa és hány éle van ennek a gráfnak?

c) Szemléltesd gráffal azt a vasúthálózatot, amelyben szereplő hét településről a következőket tudjuk: az *A* várost *B*, *C* és *D* városokkal vasútvonal köti össze, a *B* városból *C* és *E* városokba, valamint *D* városból *F* és *G* településekhez közvetlen vasútvonal megy!

3 (Kompetenciamérés feladata nyomán, 2013)
Egy számítógép-hálózat a következők szerint van beállítva:

- a rendszergazda (●) minden felhasználóval (○) tud kommunikálni,
- a felhasználók a rendszergazdával és pontosan két másik felhasználóval tudnak kommunikálni.

a) Melyik ábra szemléltet egy olyan hálózatot, melyben mind a két feltétel teljesül?



b) Rajzold fel másképp a rendszergazda és a felhasználók kapcsolatát!

4 Egy kézilabdatornán 16 csapat indul. A csapatokat 4 csoportba sorsolják, minden csoportba 4 csapat kerül. A csoportokon belül körmérkőzést játszanak, azaz a csoporton belül minden csapat minden csapattal pontosan egy meccset játszik. Ezután minden csoportból az első két helyezett jut tovább.

Innentől egyenes kieséses rendszerben folytatódik a torna. A továbbjutó csapatokat összepárosítják, és a nyertesek jutnak tovább az elődöntőkbe, majd onnan a nyertesek a döntőbe. A döntő előtt az elődöntők vesztesei a harmadik helyért játszanak.

Hány mérkőzésből áll a kézilabdatorna?

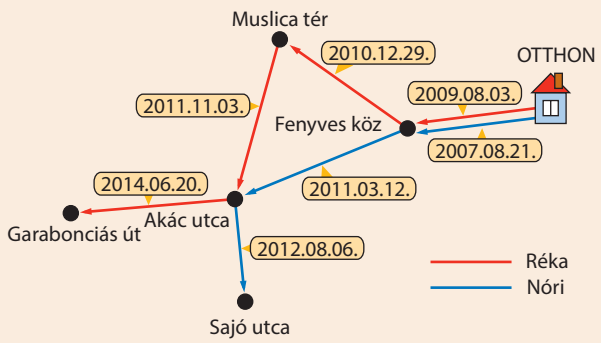
5 Egy iskolában focibajnokságot rendez a kilencedik évfolyam öt osztálya. Táblázatba foglaltuk az eddig lejátszott mérkőzések eredményeit.

mérkőzés	eredmény
9. a – 9. c	2 - 4
9. b – 9. d	1 - 0
9. b – 9. c	3 - 2
9. a – 9. e	1 - 0
9. b – 9. e	1 - 2

a) Melyik osztály csapata rúgta eddig a legtöbb gólt?
b) Készíts irányított gráfot, amely szemlélteti az eddig lejátszott mérkőzéseket úgy, hogy a nyíl mindig a győztes felé mutat!
c) Hány mérkőzés van hátra, ha a bajnokságban minden csapat minden csapattal pontosan egy meccset játszik?

HÁZI FELADAT

1 (Kompetenciamérés, 2017)
Nóri és húga, Réka ugyanabban a városban jártak egyetemre. Nóri 2007-ben költözött a városba, Réka két évvel később követte őt. Egy ideig közös albérletben laktak, majd mindketten többször költöztek. Az ábra azt mutatja, hogy melyikük mikor költözött új albérletbe.



a) Hol lakott Nóri 2011. október 17-én?
b) Melyik albérletben lakott Réka a leghosszabb ideig 2009 és 2014 nyara között?
c) Melyik években laktak együtt szilveszterkor?
d) Összesen hány hónapot laktak együtt?

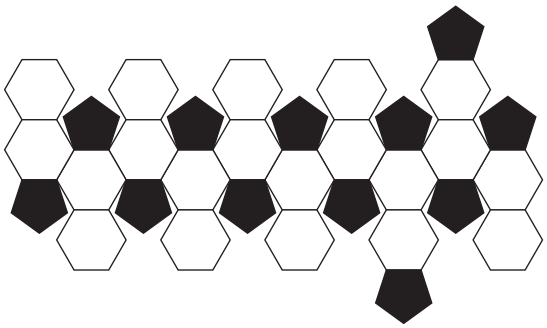
2 Egy gráfnak 7 csúcsa van, és minden csúcsból minden másik csúcsba pontosan egy él vezet. Hány éle van a gráfnak?

3 **a)** Hány mérkőzésre kerül sor hat csapat között, ha minden csapat minden csapattal pontosan egy meccset játszik?
b) Hány mérkőzés van a hat csapat között, ha a következőképpen zajlik a verseny?
A csapatokat először két darab hármas csoportba soroljuk, a csoportokon belül mindenki játszik mindenkivel. Ezután a két csoportelső játszik az első és a második helyért, a csoportmásodikok a harmadik és a negyedik helyért, a csoportharmadikok az ötödik és a hatodik helyért.

RÁADÁS

1. A klasszikus focilabdát fekete szabályos ötszögekből és fehér szabályos hatszögekből készítik. A 12 db ötszög minden éle egy hatszög egyik élével határos.



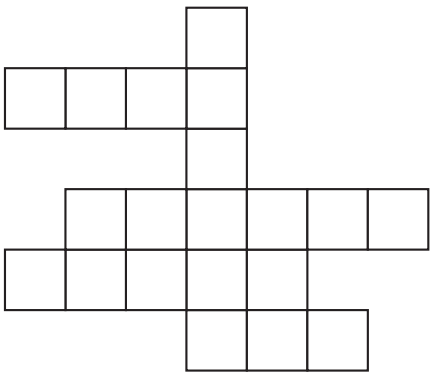


a) Mennyi a hatszögek száma?

b) Szemléltesd gráffal az ötszögek és hatszögek hálózatát! A gráf csúcsai jelentsék az ötszögeket és a hatszögeket, az élek pedig azt, hogy melyik lapok szomszédosak!

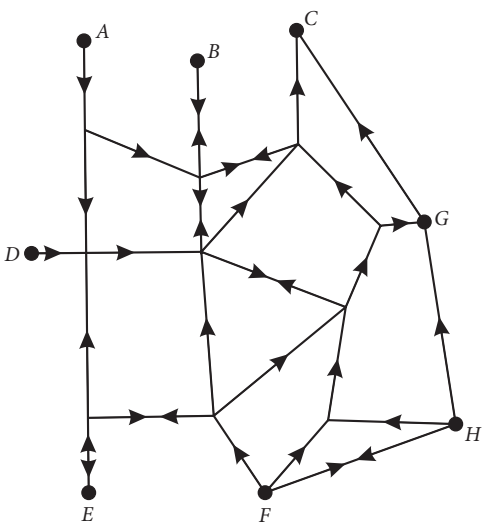
2. Igaz vagy hamis? A helyes válaszhoz tartozó szót írd be a rejtvényábra megfelelő vízszintes sorába. A függőleges oszlop egy magyar zeneszerző vezetéknevét rejti. Melyik a hiányzó két betű?

	Igaz	Hamis
Ha egy 6 fős társaságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer kezet fog, akkor összesen 18 kézfogás történik.	VÉGES	VALÓS
4 ember 4-szer annyiféleképpen állhat sorba, mint 3 ember.	KITEVŐ	ÖSSZEG
Egy konvex ötszögnek több mint kétszer annyi átlója van, mint egy paralelogrammának.	KÖR	TÍZ
6 induló esetén egy verseny első három helyezettje 30-féleképpen alakulhat, ha nincs holtverseny.	GRÁF	ÁBRA



3. (Kompetenciamérés, 2018)

Az alábbi ábra egy kalandpark kötélpályarendszerét mutatja. A betűk a lehetséges kiindulópontokat / célállomásokat jelzik, a vonalak a kötelek (utak) helyét mutatják. A metszéspontok pihenőállomások egy-egy fán kiépítve. A nyilak a haladás irányát jelzik. Amelyik szakaszon mindkét irányba mutat nyíl, ott mindkét irányban lehet haladni.



a) El lehet-e jutni
- *A*-ból *F*-be?
- *A*-ból *B*-be?
- *F*-ből *C*-be?
- *E*-ből *B*-be?
- *B*-ből *E*-be?

b) Keress minél hosszabb „kör”-t a pályán, azaz olyan utat, amely visszatér a kiindulópontba!

3 SZÁMZÁRAK

FELADAT



1 A számzáras lakat négy kereke egymástól függetlenül elforgatható. Mindegyik kerékken 10 számjegy van 0-tól 9-ig.

a) Hány különböző számnégyes állítható be ezen a záron?

b) Hány olyan számnégyes állítható be, amelyben mind a négy számjegy különböző?

c) Hány olyan számnégyes állítható be, amelyben három számjegy egyforma?

d) Hány olyan számnégyes állítható be, amely egyben egy négyjegyű természetes szám?



2 Egy széfet elektronikus számzárral védenek. A számzáron beállítható számkombináció 6, 7, 8, 9 vagy 10 számjegyből állhat.

a) X úr babonás, ezért csak a szerencseszámai, a 3-as és a 7-es számjegyek fordulhatnak elő az ő kódjában. Ráadásul a kód is csak 7 számjegyű lehet. Hány lehetősége van?

b) Hány tízjegyű kód állítható be a záron, ha mind a 10 számjegyet felhasználjuk a kód elkészítéséhez?

c) Az összes tízjegyű kód hányadrészében végződik a kód 7-esre?

d) Összesen hányféle kód állítható be az elektronikus záron?



3 Az elektronikus számzárat biztonsági megoldásokkal is fel lehet vértezni az illetéktelen behatolással szemben. Egy ilyen megoldás a reteszelés, ami azt jelenti, hogy ha rossz kóddal próbálkoznak, akkor az elektronika bizonyos ideig nem enged újabb számbevitelt.

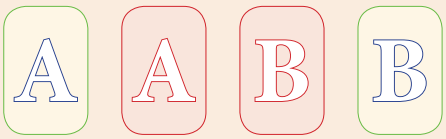
A következő részlet egy elektronikus számzár használati útmutatójából való.

„Amennyiben 3 egymás utáni esetben rossz kódot adott meg, 1 perces reteszelési idő lép életbe (piros LED villog). Minden további hibás kódbevitel esetén duplázódik a reteszelés ideje (max. 16 perc). Amennyiben a reteszelési idő lejárt, a helyes kóddal a szokott módon nyitható a széf."

Mennyi ideig tartana véletlenszerű próbálkozással egy 3 számjegyű kóddal védett széfet kinyitni, ha az összes lehetőséget végigpróbálva az utolsó próbálkozás lenne sikeres? (Eltekintünk a kódok beírásához szükséges időtől.)

HÁZI FELADAT

1 Az 5 éves Csilla szeretne jelszót készíteni, amit testvérének Bencének kell kitalálnia. Csilla csak az A és a B betűt ismeri fel biztonságosan, ezért a következő négy betűkártyát használja:



a) Hányféle jelszót készíthet Csilla, ha csak a betűk sorrendje számít, és akkor, ha a színek megkülönböztetik őket?

b) Bence azt mondja, hogy a jelszó BABA. Mekkora az esélye annak, hogy eltalálta a betűk sorrendjét?

2 Kerékpárunkat olyan számzárral védjük, melynek mind a 4 kerekén 10 számjegy van 0-tól 9-ig. Biztonságban van-e a kerékpár, ha 3 órán keresztül őrizetlenül hagyjuk, tudván azt, hogy egy gyakorlott zárfeltörő percenként kb. 50 lehetőséget is meg tud vizsgálni?



3 Zoli nevének betűiből (*z*, *o*, *l* és *i*) állít össze egy 5 betű hosszúságú jelszót.

a) Hányféle jelszót rakhat ki, ha minden betű különböző?

b) Hányféle jelszót rakhat ki, ha a betűk többször is előfordulhatnak?

c) Hányféle jelszót rakhat ki, ha a betűk többször is előfordulhatnak, de azt már eldöntötte, hogy az első betűnek az *i* betűt választja?

RÁADÁS

1. **a)** Hányféleképpen tudod kiolvasni az alábbi képen a VARIÁCIÓ szót? (A kiolvasást a bal felső sarokban kell kezdened és a betűket balról jobbra vagy fentről lefelé haladva kell egymás után összeolvasnod.)

V A R I Á C I Ó
A R I Á C I Ó
R I Á C I Ó
I Á C I Ó
Á C I Ó
C I Ó
I Ó
Ó

b) Készíts hasonló táblázatot más betűszámú szavakkal! Figyeld meg, hogy hogyan változik a lehetséges kiolvasások száma a betűk számának függvényében! Mit tapasztalsz? Próbáld meg bizonyítani is a sejtésedet!

2. Az osztály szalagavatóra készül. Szerencsére éppen 15 fiú és 15 lány jár az osztályba, így az osztályfőnök kérésének eleget téve senki sem hoz magával külsőst, mindegyik fiú-lány pár az osztályból kerül ki.

a) Hányféleképpen alakulhat a keringőpárok listája? (Nem számít, hogy a listán melyik pár hanyadik helyen áll, de az igen, hogy ki kivel táncol.)

b) Hányféleképpen alakulhat a lista, ha Dzsenifer és Patrik mindenképpen együtt szeretnének táncolni?

c) Hányféleképpen alakulhat a lista, ha Dzsenifer és Patrik semmiképpen sem szeretnének együtt táncolni?

3. (Kompetenciamérés, 2013)
A mobiltelefonok bekapcsolásakor a SIM kártya PIN kódját (négyjegyű számkódot) kell megadni, melyet csak a tulajdonosa ismer, így illetéktelenek nem tudják használni a telefont.
A négy számjegyből álló PIN kód számjegyei bármilyenek lehetnek.
2011-ben Magyarországon a SIM kártyák száma 11,69 millió volt. Közülük legalább hányhoz tartozott egyforma PIN kód?

4 FOLYTATJUK AZ ÖSSZESZÁMLÁLÁST

KIDOLGOZOTT FELADAT

Zoli új jelszót állít be a számítógépén. Kitalálta, hogy a jelszava a *z*, *o*, *l*, *i* betűkből és a 3-as számból fog állni.

a) Hányféle lehetőség közül választhat, ha mind az öt karaktert pontosan egyszer szeretné felhasználni, de nem akar számjeggyel kezdeni?

1. megoldás

Az 1. karakter	A 2. karakter	A 3. karakter	A 4. karakter	Az 5. karakter
4-féle	4-féle	3-féle	2-féle	1-féle

lehet, ezért az összes lehetőség száma: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

2. megoldás

Gondoljuk végig, hány olyan eset van, amelyre NEM teljesül az állítás, s ezt vonjuk ki az összes eset számából!

Összesen az 5 karaktert $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féleképpen állíthatjuk sorba. Ezek közül a hármas számjeggyel kezdődő jelszavak száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, mert a hármas után 4-féleképpen, majd utána 3-féleképpen, majd utána 2-féleképpen, majd végül 1-féleképpen folytathatjuk a jelszót.

Azoknak az eseteknek a száma tehát, amelyek NEM hármassal kezdődnek: $120 - 24 = 96$.

b) Hányféle lehetőség közül választhat, ha mind az öt karaktert pontosan egyszer szeretné felhasználni, de ezen kívül úgy gondolja, hogy a számjegy vagy a jelszó közepére, vagy a végére kerüljön?

Megoldás

A lehetséges jelszavakat most két **jól elkülönülő** csoportra lehet szétválasztani. Nagyon fontos, hogy olyan csoportokat keressünk, amelyekben egy jelszó csak egyszer fordul elő, de mindegyik benne van valamelyik csoportban. Mindkét csoport elemeit külön összeszámoljuk, s az eredményeket összeadjuk.

Az egyik csoportot azok a jelszavak alkotják, amelyekben a hármas számjegy a középső, és a többi 4 betűt a maradék 4 helyre helyezem el. Ezt az elrendezést megtehetjük $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen. A másik csoportot azok a jelszavak alkotják, amelyekben a hármas számjegy az utolsó. Ilyen jelszó is 24-féle lehet, ekkor az első 4 helyre kell besorolni a 4 betűt.

Összesen $24 + 24 = 48$ lehetőség van.

c) Hányféle lehetőség közül választhat, ha mind az öt karaktert pontosan egyszer szeretné felhasználni, és az utolsó karakternek vagy a „z”-t, vagy a „3”-at akarja választani?

Megoldás

Ezúttal is érdemes két **jól elkülönülő** csoportra választani a jelszavakat.

Az első csoportot azok a jelszavak alkotják, amelyekben a hármas számjegy az utolsó. Az első 4 helyre a többi 4 betűt 24-féleképpen helyezhetjük el. (A korábbiakhoz hasonlóan.) A másik csoportot azok a jelszavak alkotják, amelyekben a „z” betű az utolsó. Most tehát a 3 maradék betűt és a hármas számot kell elhelyeznünk az első 4 helyre. Ebbe a csoportba is $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség tartozik. Összesen tehát $24 + 24 = 48$ különböző lehetőség van.

FELADAT

Dolgozzatok párokban!

1 Hajnit születésnapján felköszöntik a barátai. Heten jönnek el a születésnapi vendégségbe: Klári, Detti, Luca, Pali, Jocó, Isti és Ádám.

a) Hányféle sorrendben köszönthetik fel Hajnit, ha Luca nem akar első lenni a sorban?

b) Hányféle lehet a sorrend, ha Luca ragaszkodik hozzá, hogy ő legyen a negyedik?
c) Hányféle lehet a sorrend akkor, ha Luca inkább úgy dönt, hogy vagy negyedik, vagy utolsó lesz?
d) Hányféle sorrend van, ha Luca ahhoz ragaszkodik, hogy ő következzen Detti után?

2 a) Hány darab hatjegyű természetes szám van?
b) Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amelynek minden számjegye különböző?
c) Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amelyben nem szerepel az 5-ös számjegy?
d) Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amely 10-zel osztható?
e) Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amelynek minden számjegye páratlan?
f) Hány olyan hatjegyű természetes szám van, amelyben 7-es az első vagy az utolsó számjegy (lehet mindkettő is hetes)?
g) Hány olyan természetes szám van, amely legfőljebb hatjegyű?

3 Négy számkártya van az asztalon. Az egyiken egyes, a másikon hármas, a harmadikon hatos, a negyediken hetes szerepel. Csilla a négy kártyával egy négyjegyű számot rakott ki.



a) Hány különböző négyjegyű számot tud kirakni?
b) A lehetséges számok hanyadrésze páratlan, páros, illetve néggyel osztható?
c) Vajon hány olyan szám van ezek között, amelyik nyolccal osztható?
d) Csilla felírta egy papírra az összes így kapott számot. Mennyi ezeknek a számoknak az összege? Keress többféle ötletet, hogyan lehetne ezt kiszámolni!

4 Egy társasjáték egyik szerencsekártyáján ez olvasható: *„Dobj újra! Ha egyest dobsz, nyertél egy aranyat. Ha kettest, vesztettél egy aranyat. Ha hármast, nyertél három aranyat. Ha négyest vagy ötöst vagy hatost, akkor dobj újra addig, amíg végül egyest, kettest vagy hármast nem dobsz!”*
Hajninak háromszor kellett dobnia. Mit dobhatott elsőre és másodikra?
Bencének négyszer kellett dobnia, s végül vesztett egy aranyat. Hányféle dobássorozata lehetett?
Csilla is kihúzta ezt a szerencsekártyát. Ő csak háromszor dobott, végül nyert. Hányféle dobássorozata lehetett?

HÁZI FELADAT

1 Bence és két barátja egy csocsóbajnokságon mérik össze ügyességüket. Hányféle végeredmény alakulhatott ki, ha tudjuk, hogy nincs holtverseny, és nem Bence lett az első? Hány mérkőzésre került sor, ha mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott?

2 Csupa páratlan számjegyből szeretnénk négyjegyű számokat alkotni. Hány különböző számot alkothatunk?
Ezek közül hány olyan van, amely nem osztható öttel?
Hány olyan van közöttük, amely nem osztható öttel, és amelynek minden számjegye különböző?
A csupa páratlan számjegyből álló négyjegyű számok hányadrésze végződik 7-re, illetve 77-re?
Mekkora az esélye annak, hogy a szám csupa egyforma számjegyből áll?

3 Egy társasjáték táblája úthálózatot ábrázol. A csomópontok egy-egy kisvárost jelentenek. Az a feladat, hogy mindenki húz öt különböző várost, és a kiinduló helyéről tetszőleges sorrendben mind az öt városba el kell jutnia a játék folyamán. Bencének nagy szerencséje van, mert az egyik város szomszédos az indulási helyével. Van ezen kívül még két másik, de nem szomszédos az előző kettővel. Ezért elhatározza, hogy elsőként az indulási helyével szomszédos városba lép, s a másik két szomszédost pedig majd a játék folyamán egymás után fogja teljesíteni. Így hányféle sorrendben járhatja be az általa húzott öt várost?

5 GYAKORLÁS

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok 3-4 fős csoportokban! Mindegyik csoport megoldhatja mind a három feladatot, de kooperatív módszerrel, például szakértői csoportok* létrehozásával is feldolgozhatjátok az anyagot.
A vastagon szedett feladatok több számolást vagy gondolkodást igényelnek a korábbiaknál.

1 Telefonszámok

Egy 2008-as újságcikkből idézünk:

„Jelenlegi formájukban pontosan nyolcvan év óta léteznek a vonalas telefonszámok. Igaz, akkor még lényegesen kevesebb számjegyből álltak.

– A bevezetéskor a fővárosban öt-, vidéken négyjegyűek voltak […] vidéken 1964-től lett öt-, míg 1990-től hatjegyű a telefonszám.

[…] A körzetszámokat az óramutató járásával megegyező irányba osztották ki az országban, hasonlóan az irányítószámokhoz. Budapesté az 1-es, míg ha például Miskolcot akarjuk hívni, a 46-os körzetszámot kell tárcsáznunk. […] Soproné a 99-es körzet.

[…] Az egyes szolgáltatóknak kiadható tartomány egyébként 200-000-tól 999-999-ig terjed."

/delmagyar.hu/

a) A budapesti vonalas telefonszámok 7 jegyűek, és nem kezdődhetnek 0-val és 1-gyel. Hány ilyen telefonszám képzelhető el?

b) A vonalas telefonszámok a körzetszámmal együtt tehát 8-jegyűek. Körzetszámnak nem osztották ki az összes lehetőséget, mert megtartottak sokat különleges szolgáltatásokra, vagy például a mobilszolgáltatóknak. 53 kétjegyű (vidéki) körzetszámot osztottak ki. A hatjegyű (vidéki) hívószámok sem kezdődhetnek 0-val vagy 1-gyel. Hány különböző 8-jegyű (körzetszámmal együtt felírt) vonalas telefonszám létezik ezekkel a feltételekkel?

c) A mobiltelefon-számok a budapestiekhez hasonlóan hétjegyűek, és ugyanúgy nem kezdődhetnek 0-val vagy 1-gyel. Hány hívószám adható ki a három legnagyobb mobiltelefon-szolgáltató által összesen?

d) **Egy 7-jegyű (körzetszám nélküli) budapesti telefonszámról a következőt tudjuk: 2-essel kezdődik, a második számjegy ettől különböző és összesen kétféle számjegyből áll. Hányféle ilyen telefonszám létezik?**

2 Rendszámok

1958-ban hatkarakteres rendszámokat vezettek be Magyarországon, amely két betűből és négy számjegyből állt. A kezdőbetűk utaltak a jármű típusára, illetve a tulajdonosára. A betűk nem tartalmaztak ékezetet.

a) Ha a magyar abc minden (ékezet nélküli) egyjegyű betűje, minden megkötés nélkül szerepelhetett volna a rendszámokban, és a számjegyekre sem lett volna semmi kikötés, hány különböző rendszám készülhetett volna?

Bizonyos kezdőbetűket csak az idő előrehaladtával hoztak forgalomba. Például 1984-től vezették be azokat a magánautó-rendszámokat, melyek G betűvel kezdődtek. (A második betű bármi lehetett.)

b) Hány olyan rendszám lehetett volna, amely G-vel kezdődik (ha nem lett volna más megkötés)?

c) 1990-től három betűből és három számból álló sorozatot bocsátottak ki. Elméletileg hány da-

* Szakértői csoport létrehozása és működése:
- Minden csoportban ki kell osztanunk az A, B, C, D betűjeleket az egyes tanulóknak.
- Az azonos betűjelűek ugyanazt a feladatot kapják. Mindenki elolvassa a saját feladatát.
- Az azonos betűjelűek egy-egy „szakértői" csoportba gyűlnek, és a feladatukat közösen megoldják. A megoldásról a szakértői csoport mindegyik tagja vázlatot készít.
- Mindenki visszamegy az eredeti csoportjába, és megtanítja a többieknek a saját feladatát.

rab rendszám adható így ki (ha nincs más megkötés)?

Az 1990-ben indított sorozatban később azt a megkötést hozták, hogy az utolsó betű nem lehet I, O, vagy Q. (Ezek ugyanis könnyen összetéveszthetők számokkal.) A középső betű pedig nem lehet Q, mert összetéveszthető O-val. Ez alól a szabályozás alól kivételt képeznek a budapesti tömegközlekedésben használt BPI és BPO rendszámok, valamint azok, amiket a szabályozás előtt kibocsátottak. 35 olyan sorozat volt ekkor, amit már kiadtak, nem felelt meg a szabályozásnak, de nem vonták vissza.

d) A fentieket figyelembe véve (más megkötés nélkül) hányféle rendszám készíthető?

3 Totó

A Totóban 13 kérdésre és egy extra (+1 jelű) kérdésre kell három lehetséges válasz (1, 2 vagy X) közül egyet megjelölni.

a) Összesen hányféleképpen adhatunk választ a 14 kérdésre?

b) Egy szelvény kitöltésekor azt a „biztos” információt kapjuk, hogy az első három kérdésre ugyanaz a válasz, valamint az utolsó kérdésre „biztosan” nem X. Hányféle kitöltés lehetséges, ha elfogadjuk ezeket a „biztos” tippeket?

c) Az emelt szintű fizika érettségi első része 15 tesztkérdésből és 3 feladatból áll. A tesztkérdésekre négyféle válasz (A, B, C, D) adható. Mekkora az esélye, hogy az első nyolc kérdésre adott, véletlenszerűen beírt A, C, D, C, A, B, B, A tippünk helyes?

d) Egy kezdő vállalkozó 13 kérdéses Totót ad ki, amit azzal reklámoz, hogy már 5 helyes válaszért is értékes jutalom (a szelvény árának ötszöröse) jár. Mutassuk meg, hogy ez a játék igencsak veszteséges a vállalkozónak, hiszen akár három szelvény kitöltésével is biztos nyereményhez juthatunk!

HÁZI FELADAT

1 Egy hétjegyű telefonszámról azt tudjuk, hogy 2-essel kezdődik, az utolsó két számjegye 51, és csak ez a három számjegy található meg benne. Hány ilyen telefonszám létezik?

2 Nézz utána az interneten, hogy Magyarországon milyen rendszámokat adhatnak ki a lakossági személygépjárművekre! Számold össze, hogy hányféle lehetséges (három betűből és három számból álló) variációt jelent ez!

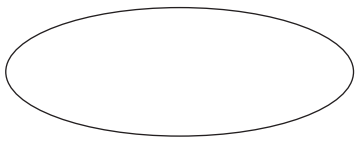
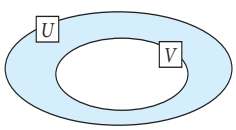
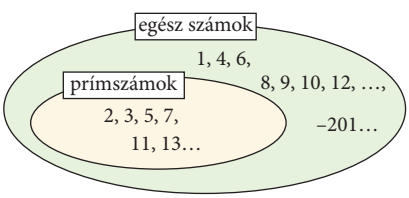
3 A kaliforniai rendszámok 1990-től napjainkig egy 3 és 7 közötti számjeggyel kezdődnek, majd három betűből, végül pedig három számjegyből állnak. Hány ilyen rendszám létezhet? (A kezdő számjegy lehet 3 és 7 is. Az angol ABC 26 betűből áll.)

4 Lehet-e minden embernek különböző fogsora, ha csak azt vesszük figyelembe, hogy a 32 (16 felső és 16 alsó) fogból melyik fog van meg és melyik nincs? (Tételezzük fel, hogy minden embernek potenciálisan létezhet ez a 32 foga.)



6 HALMAZOK

BEVEZETŐ

Akkor mondjuk, hogy **megadtunk egy halmazt,** ha minden dologról, személyről, fogalomról pontosan el lehet dönteni, hogy a halmazhoz tartozik-e vagy nem. A halmazhoz tartozó, azaz a halmazban lévő dolgok a **halmaz elemei.**	*Például:* *a természetes számok* **halmazt alkotnak,** *osztályod tanulói* **halmazt alkotnak,** *a Naprendszer bolygói* **halmazt alkotnak.** **De:** *a szép őszi napok* **nem alkotnak halmazt,** *a nagy számok* **nem alkotnak halmazt** (mert nem lehet egyértelműen eldönteni, melyik őszi nap szép vagy melyik szám nagy), a MATEMATIKA szó betűinek a halmaza: {A; E; I; K; M; T}.
Azt a halmazt, melynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük.	*Például:* a –6-nál kisebb természetes számok halmaza **üres halmaz.**
Egy halmazt **véges halmaznak** mondunk, ha elemeinek száma megadható egy természetes számmal. Az üres halmaz is véges halmaz.	*Például:* egy téglalap csúcsainak a halmaza véges (4 elemű) halmaz; az üres halmaz elemszáma 0, az egyjegyű prímszámok elemszáma pedig 4. 
Ha egy halmaz nem véges, akkor **végtelen halmaznak** nevezzük.	*Például:* egy körvonal pontjainak a halmaza végtelen halmaz.  Azt mondjuk, hogy a végtelen halmaz elemeinek száma végtelen.
Halmaz megadása történhet a halmaz elemeinek felsorolásával (véges halmaz esetén). Megadhatjuk szavakkal vagy jelekkel, hogy milyen tulajdonságú elemek tartoznak a halmazba. Szemléltethetjük a halmazt **Venn-diagrammal.**	Halmaz megadása az elemek felsorolásával: {Anikó, Kriszti, Béla, Zsombor, Dóri}. Szemléltetés halmazábrával:  Péterék kerékpárjainak a halmaza (4 elemű halmaz)  Sanyiék kerékpárjainak a halmaza (0 elemű halmaz)
Két halmazt egyenlőnek mondunk, ha ugyanazok az elemeik.	*Például:* az egyjegyű prímszámok halmaza **egyenlő** a {2; 3; 5; 7} halmazzal. Üres halmazból egy van – bár sokféle módon megadható.
Ha egy halmaz mindegyik eleme benne van egy másik halmazban, akkor ezt a halmazt a másik halmaz **részhalmazának** nevezzük. **Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.**	*Például:* a prímszámok halmaza **részhalmaza** az egész számok halmazának; az osztályod tanulóinak halmaza **részhalmaza** az iskolád tanulóiból álló halmaznak. 
Ha egy A halmaz részhalmaza egy B halmaznak, de $A \neq B$, akkor A-t a B **valódi részhalmazának** mondjuk.	*Például:* a prímszámok halmaza **valódi** részhalmaza az egész számok halmazának; a {2; 3; 5; 7} **nem valódi** részhalmaza az egyjegyű prímszámok halmazának (egyenlő a két halmaz). 

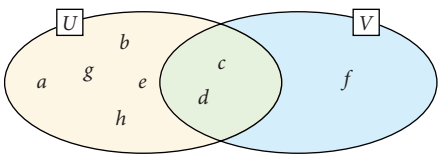
Jelölések:

x eleme a H halmaznak	$x \in H$
x nem eleme a H halmaznak	$x \notin H$
üres halmaz	$\emptyset$ vagy $\{\ \}$
H halmaz elemszáma (számossága)	$\lvert H \rvert$
H halmaz elemszáma végtelen	$\lvert H \rvert = \infty$
V részhalmaza U-nak	$V \subseteq U$
V valódi részhalmaza U-nak	$V \subset U$

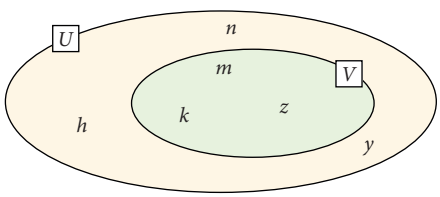
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Olvassuk le az ábráról, mely betűk az U halmaz elemei, és mely betűk a V halmaz elemei!

a)



b)



Megoldás

a) Az U elemei: a, b, c, d, e, g, h; azaz $U = \{a; b; c; d; e; g; h\}$;
a V elemei: c, d, f; azaz $V = \{c; d; f\}$.

b) Az U elemei: h, k, m, n, y, z; azaz $U = \{h; k; m; n; y; z\}$;
a V elemei: k, m, z; azaz $V = \{k; m; z\}$.

A b) esetben a V mindegyik eleme benne van az U-ban is, tehát a V részhalmaza az U-nak: $V \subseteq U$.

Az U halmaznak azok az elemei, amelyek nincsenek benne a V-ben: $\{h; n; y\}$ halmaz.

2. Soroljuk fel az $\{a; b; c; d\}$ halmaz részhalmazait!

Megoldás

1 elemű részhalmazok: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ (4 db).
2 elemű részhalmazok:
$\{a; b\}, \{a; c\}, \{a; d\}, \{b; c\}, \{b; d\}, \{c; d\}$ (6 db).
3 elemű részhalmazok:
$\{a; b; c\}, \{a; b; d\}, \{a; c; d\}, \{b; c; d\}$ (4 db).
4 elemű részhalmaz: $\{a; b; c; d\}$ (1 db).
Ez 15 részhalmaz. Rajtuk kívül még az üres halmaz is részhalmaza az adott halmaznak, vagyis van még egy 0 elemű részhalmaz is: $\{\ \}$ (1 db).
Tehát az $\{a; b; c; d\}$ halmaznak 16 részhalmaza van.

FELADAT

1 Legyen $A = \{m; a; t; e; k\}$.
Hány kételemű részhalmaza van ennek a halmaznak?
Hány háromelemű részhalmaza van?
Milyen kapcsolatot fedezel fel a háromelemű és a kételemű részhalmazok között?

2 Melyik véges, melyik végtelen halmaz?

a) A tanteremben lévő vízmolekulák halmaza.

b) Az egész számok halmaza.

c) A Föld 8950 méternél magasabban fekvő hegycsúcsainak halmaza.

d) A 100-zal osztható pozitív egész számok halmaza.

e) A 0 és az 1 közötti racionális számok halmaza (beleértve a 0-t és az 1-et is).

f) A Naprendszer összes bolygójának halmaza.

g) Azoknak az embereknek a halmaza, akik a 2008. évi pekingi olimpia 100 méteres férfi gyorsúszás döntőjét televízión keresztül, elejétől a végéig látták.

FELADAT

3 Szotyi kutyát sétáltatni kell. Ez a feladat Hajnira, Bencére és apára vár. Ha nagyon csúnya az idő, akkor persze Szotyi otthon marad. Van úgy, hogy mindhárman együtt sétálnak Szotyival, van, hogy ketten, és van, hogy egyetlen sétáltatója van csak. Hányféleképpen alakulhat a sétáltatók csapata? Add meg az összes lehetőséget!

4 Van-e olyan halmaz, és ha igen, hány elemű az a halmaz, amelynek

a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4

részhalmaza van?

ELMÉLET

Kiegészítő halmaz

Legyen A egy halmaz, és H ennek egy részhalmaza. Azoknak az A-beli elemeknek a halmazát, amelyek nem elemei a H-nak, a H halmaz A-ra vonatkozó **kiegészítő** vagy **komplementer halmazának** nevezzük.	*Például* az {1; 2; 4; 5; 7} halmaznak a {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} halmazra vonatkozó kiegészítő halmaza a {0; 3; 6} halmaz; *a páros számok halmazának* az egész számok halmazára vonatkozó kiegészítő halmaza *a páratlan számok halmaza.*
Itt az A halmazt **alaphalmaznak** is mondjuk.	 Alaphalmaz értelmezése nélkül nincs értelme a komplementer halmaz képzésének!

Jelölés: A H halmaz komplementerét (mindig egy adott alaphalmazra nézve) így jelöljük: $\overline{H}$.

HÁZI FELADAT

1 Halmazt adunk-e meg a következő meghatározásokkal?

a) Az idei iskolai szünnapok.
b) A múlt év legszebb hónapja.
c) Az Arany család tagjainak születésnapja.
d) Az idei holdtölték napja.

2 Egy gazdaság 128-féle terméke közül 74-félét kizárólag hazai fogyasztásra gyárt. 32-féle terméket szállítanak Horvátországba, 33-félét Szlovákiába. Más országokkal nem állnak üzleti kapcsolatban. Hányféle árut szállítanak Horvátországba is, és Szlovákiába is?

3 Az egyjegyű prímszámok is, és az egyjegyű összetett számok is halmazt alkotnak. Sorold fel mindkét halmaznak a 3 elemű és a 4 elemű részhalmazait!

4 Rajzolj egy koordináta-rendszert!

a) Színezd kékre azokat a pontokat, amelyek az x tengelytől 4 egység távolságra vannak!
b) Színezd zöldre azokat a pontokat, amelyek az y tengelytől 4 egység távolságra vannak!
c) Színezd pirosra azokat a pontokat, amelyek mindkét tengelytől 4 egység távolságra vannak!
d) Melyik ponthalmaz véges és melyik végtelen?

RÁADÁS

Állítsuk párba a pozitív egész számok halmazának az elemeit és a pozitív páros számok halmazának az elemeit!

A pozitív egész számok: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …,
a pozitív páros számok: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, … .
Az egymás alatti számokból alkotjuk a párokat:
(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8), (5; 10), (6; 12), (7; 14), (8; 16), (9; 18), (10; 20), (11; 22), … .

Érdekes: azt gondolnánk, hogy kétszer annyi pozitív egész szám van, mint ahány pozitív páros szám, a két halmaz elemei mégis párba állíthatók. Ilyesmi csak végtelen halmazoknál lehetséges, végeseknél nem.

ELMÉLET

Ekvivalens halmazok

Ha két halmaz elemei között létezik olyan párba állítás, melyben az egyik halmaz minden elemének pontosan egy párja van a másik halmazból és viszont, akkor ezeket **ekvivalens** halmazoknak nevezzük.

Másként fogalmazva A és B halmaz **ekvivalens**, ha létezik olyan $A \to B$ hozzárendelés, amely különböző A-beli elemekhez különböző B-beli elemeket rendel, és amelyre minden B-beli b elemhez létezik A-beli a elem, hogy a képe b.

EMELT SZINT

FELADAT

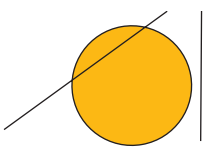
1. A-val jelöljük a kétjegyű pozitív egész számok halmazát, B-vel a 65-nél nagyobb egész számok halmazát, C-vel a 150-nél kisebb pozitív egész számok halmazát. Hány olyan szám van, amely

a) A-nak is, B-nek is és C-nek is eleme;
b) A, B, C közül legalább az egyikben benne van;
c) A-ban és C-ben benne van, de B-ben nincs benne;
d) A-ban benne van, de B-ben és C-ben nincs benne?

2. Állítsd párba a pozitív egész számokat és a pozitív négyzetszámokat!

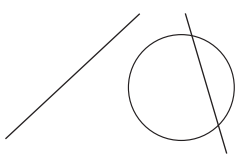
3. Helytálló-e az alábbi okoskodás?
A kilencjegyű számokból pontosan annyi van, mint a tízjegyűekből. Állítsuk ugyanis párba őket a következő módon:
100 000 000 – 1 000 000 000
100 000 001 – 1 000 000 001
100 000 002 – 1 000 000 002
…
999 999 999 – 9 999 999 999

4. Lehet-e egy körlemez és egy egyenes közös pontjainak a halmaza



a) véges halmaz;
b) végtelen halmaz?

5. Lehet-e egy körvonal és egy egyenes közös pontjainak a halmaza



a) véges halmaz;
b) végtelen halmaz?

6. Meglepő, de az is bizonyítható, hogy az egész számok halmaza ekvivalens a pozitív egész számok halmazával. Hogyan kellene „sorba rakni” az egész számokat és a pozitív egész számokat, hogy az állítás igazsága látható legyen?

7 HALMAZOK UNIÓJA, METSZETE, KÜLÖNBSÉGE

BEVEZETŐ

Anna és Csilla Identikit társasjátékot játszanak. A játék lényege, hogy a játékosok a megadott 24 személy tulajdonságaira kérdeznek rá egymástól, így próbálják egyre szűkíteni a kört, és végül kitalálni, hogy melyik személyre gondolt a másik játékos. Az nyer, akinek ez kevesebb kérdésből sikerül.

Csilla már jó sokat kérdezett, és így csak hét személy maradt, de most már türelmetlen, és egyszerre két kérdést is feltesz:

– Férfi? Fekete a haja?

– Igen, férfi, és igen, fekete a haja, de egyszerre csak egyet szabad kérdezni!

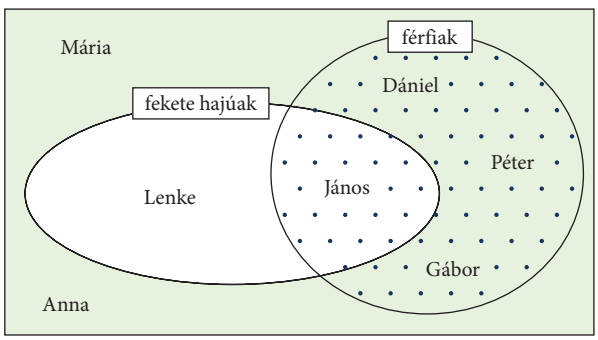
Vajon kire gondolt Anna, és vajon számít-e, hogy melyik kérdést teszi fel Csilla először?

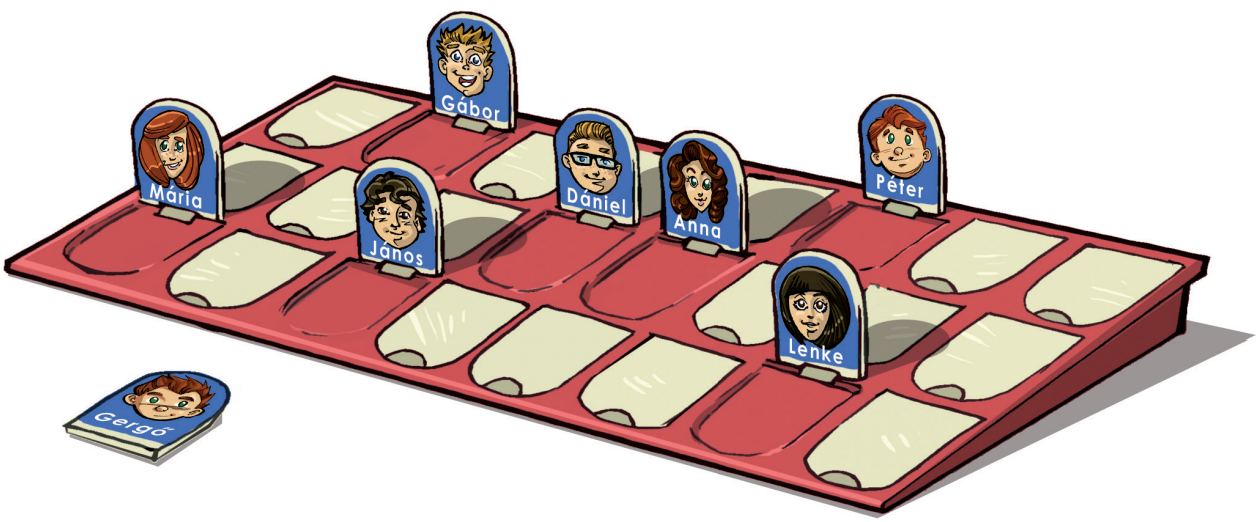
Rendezzük csoportokba (halmazokba) a még szóba jöhető személyeket:

Láthatóan mindegy, hogy először a fekete hajúakat „karikázzuk be” és aztán a férfiakat, vagy fordítva, az eredmény mindenképpen ugyanaz. Egyetlen férfi van a fekete hajúak között: János, és egyetlen fekete hajú van a férfiak között: ugyancsak János. Úgy is mondhatjuk, hogy a fekete hajúak és a férfiak halmazának metszetében egyetlen elem található.

Vajon ha a kitalálandó személy férfi, de nem fekete a haja, akkor is egyértelmű lenne-e, hogy kiről van szó?

Ebben az esetben a férfiak halmazának és a nem fekete hajúak halmazának a metszetében már három elem áll, ezért nem tudjuk egyértelműen eldönteni, hogy Anna kire gondolt.





FELADAT

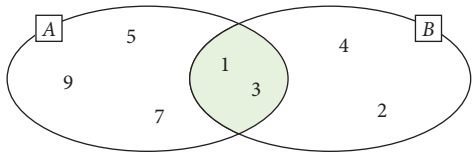
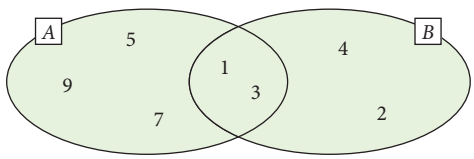
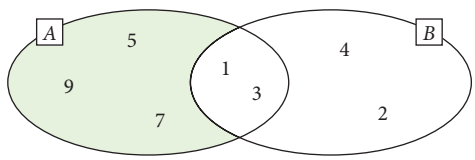
1 Kitalálható-e, hogy ki a keresett személy, ha azt tudjuk, hogy:

a) fekete hajú, de nem férfi;

b) nem fekete hajú, és nem is férfi?

ELMÉLET

Halmazműveletek

Két halmaz **metszete** (**közös része**) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindkét halmazban elemei. Az A és a B halmaz metszetének a jele: $A \cap B$. $A \cap B = B \cap A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$	*Például* ha $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ és $B = \{1; 2; 3; 4\}$, akkor $A \cap B = \{1; 3\}$ (színezett rész). 
Két halmaz **uniója** (**egyesítése**) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. Az A és a B halmaz uniójának a jele: $A \cup B$. $A \cup B = B \cup A,\ A \cup \emptyset = A$	*Például* ha $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ és $B = \{1; 2; 3; 4\}$, akkor $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$ (színezett rész). 
Az A és a B halmaz **különbséghalmazának** nevezzük azoknak a dolgoknak a halmazát, amelyek az A-nak elemei, de a B-nek nem elemei. Az A és a B különbséghalmazának a jele: $A \setminus B$. $A \setminus B \neq B \setminus A,\ A \setminus \emptyset = A,\ \emptyset \setminus A = \emptyset$	*Például* ha $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ és $B = \{1; 2; 3; 4\}$, akkor $A \setminus B = \{5; 7; 9\}$ (színezett rész) és $B \setminus A = \{2; 4\}$. 

Ha két halmaznak nincs közös eleme – vagyis a metszetük üres halmaz – akkor azt mondjuk, hogy **diszjunkt halmazok.**

FELADAT

2 Hajni szoknyát vásárol. A kedvenc boltjában nagy a választék. Tetszik neki a zöld szín, ilyen szoknyából az ő méretében 20 darab is van az üzletben. Szeretné, ha kedvére való rövid szoknyát találna. Rövid szoknyából 34 darab jöhet számításba, amik között 8 zöld szoknya van, és ezek tetszenek is Hajninak.

a) Szemléltesd halmazábrával a Hajninak megfelelő szoknyaválasztékot!

b) Hány szoknya közül választhat Hajni, ha csak azok a szoknyák érdeklik, amelyek zöldek vagy rövidek?

c) Hajni végül egy hosszú zöld szoknyát vett meg. Hány hosszú szoknya közül választotta ki a neki megfelelőt?

3 Egy osztályban 31 tanuló van. Közöttük 9 szőke és 13 kék szemű, a kék szeműek között 9 szőke.
Legyen az osztály tanulóinak halmaza U, az osztály szőke tanulóinak halmaza S, a kék szeműeké pedig K.

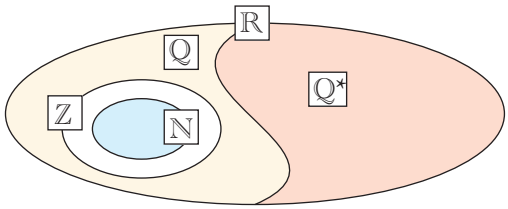
a) Készíts halmazábrát az U, S, K halmazokról!

b) Hány eleműek a következő halmazok?
$S \cup K$; $K \cap S$; $K \setminus S$; $S \setminus K$;
$U \cap K$; $U \setminus S$; $K \setminus U$.

c) Fogalmazd meg, kik tartoznak a K halmaz U halmazra vonatkozó komplementer halmazába!

4 Anna néni színházba hívta két unokáját, Sárit és Dórit a barátnőikkel együtt. Sári 2 barátnőjét, Dóri pedig 3 barátnőjét hívta meg. Hányan mentek színházba, ha a meghívottak mindannyian elfogadták a meghívást?

ELMÉLET



N a természetes számok halmaza (0 és a pozitív egész számok),
Z az egész számok halmaza,
Q a racionális számok halmaza (amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként),
Q* az irracionális számok halmaza (amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként),
R a valós számok halmaza.

Ezek mind végtelen halmazok. A halmazábra mutatja, hogy melyik számhalmaz melyiknek részhalmaza.

FELADAT

5 Melyik halmaz véges, melyik végtelen? Amelyik véges, annak hány eleme van?
$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}^*$.

6 Mely számok alkotják
- **a)** a természetes számok halmazának az egész számok halmazára vonatkozó kiegészítő (komplementer) halmazát;
- **b)** a racionális számok halmazának a valós számok halmazára vonatkozó kiegészítő (komplementer) halmazát;
- **c)** az irracionális számok halmazának a valós számok halmazára vonatkozó komplementer halmazát;
- **d)** a valós számok halmazának a valós számok halmazára vonatkozó komplementer halmazát?

HÁZI FELADAT

1 $A = \{a; k; á; c\}$, $B = \{r; a; k; á; s\}$.
- **a)** Add meg elemeik felsorolásával a következő halmazokat!
  $A \cap B$; $B \setminus A$; $A \setminus B$; $A \cup B$;
  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $(A \cap B) \setminus (A \cup B)$.
- **b)** Add meg a $B \setminus A$ halmaznak a B halmazra vonatkozó kiegészítő (komplementer) halmazát!

2
- **a)** Rajzold meg egy derékszögű koordináta-rendszerben az ABC és DEF háromszögeket, ha $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(2; 4)$, $D(2; 6)$; $E(-3; 2)$ és $F(2; 2)$!
- **b)** Színezd a két háromszöglap unióját és metszetét, add meg e két ponthalmaz határoló sokszögének csúcsait a koordinátáikkal!

3 Igaz vagy hamis minden A és B halmaz esetén? Válaszodat szemléltesd halmazábrával!
- **a)** $A \cup B \subset A$
- **b)** $A \cap B \subset B$
- **c)** $A \cup B \subset B$
- **d)** $A \cap B \subset A$

4 Milyen legyen a kakaó? Az étterem reggelizőasztalára sokféle ki van készítve. Van forró és langyos, van cukorral és cukor nélkül is. Írd le halmazműveletekkel az egyes óhajoknak megfelelő kakaók halmazát! Legyen az összes kikészített kakaó halmaza T, a forró kakaók halmaza F, a cukorral édesítetteké pedig C.
- **a)** Cukorral, de ne legyen meleg!
- **b)** Ne legyen benne cukor!
- **c)** Nekem mindegy, csak gyorsan megkapjam!
- **d)** Forrón és cukorral kérem!
- **e)** Csak forró ne legyen!
- **f)** Ki nem állhatom a langyos kakaót!
- **g)** Forrón és keserűn kérem!
- **h)** A kakaó cukor nélkül és langyosan a legjobb!

FELADAT

1 Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmaznak pontosan annyi k elemű részhalmaza van, mint amennyi $(n-k)$ elemű! $(k \leq n)$

2 Adott az $\{a; b; c; d; e\}$ halmaz. Hány 0 elemű, 1 elemű, 2 elemű, 3 elemű, 4 elemű, illetve 5 elemű részhalmaza van? Ez hány részhalmaz összesen?

3 Oldjuk meg a 2. feladatot más elemszámú halmazokra is! Mit veszünk észre? Próbáld meg igazolni is a sejtésedet!

ELMÉLET

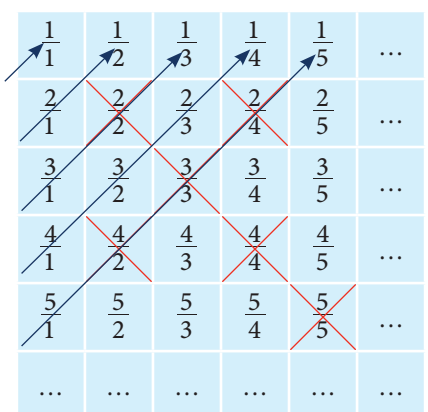
Meglepően hangzik, de megmutatható, hogy a racionális számok is éppen ugyanannyian vannak, mint a pozitív egész számok. Ehhez egy olyan párosítást kell létrehoznunk, amely minden pozitív egész számhoz egyértelműen párosít egy racionális számot. Az egyszerűség kedvéért csak a pozitív racionális számokról fogjuk megmutatni, hogy párosíthatók, de a módszer kiterjeszthető minden racionális számra.

Tétel: A pozitív racionális számok halmaza kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető a pozitív egészek halmazához.

Bizonyítás: Írjuk fel a pozitív racionális számokat az alábbi módon, egy „végtelen nagy” táblázatban:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	…
$\frac{2}{1}$	~~$\frac{2}{2}$~~	$\frac{2}{3}$	~~$\frac{2}{4}$~~	$\frac{2}{5}$	…
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	~~$\frac{3}{3}$~~	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	…
$\frac{4}{1}$	~~$\frac{4}{2}$~~	$\frac{4}{3}$	~~$\frac{4}{4}$~~	$\frac{4}{5}$	…
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	~~$\frac{5}{5}$~~	…
…	…	…	…	…	…

Ahogy látható, az összeírást úgy csináltuk, hogy az oszlopokban a nevezőt, a sorokban pedig a számlálót növeltük egyesével. Így a végtelen nagy táblázatunk minden racionális számot tartalmaz, de mindegyiket többször is, hiszen az összes bővített alak szerepelni fog a táblázatban. Ennek kiküszöbölésére az egyszerűsíthető törteket egyszerűen kihúztuk a táblázatból. (Ezt láthatjuk pirossal az ábrán.) Ezután minden megmaradt cellának sorszámot adunk úgy, hogy a bal felső cellából indulva, átlósan indulunk el az összeszámlálásban, vagyis kék nyilakkal jelzett irányba. Így minden cellának garantáltan lesz egy egyértelmű sorszáma (az üres cellákat természetesen kihagyjuk a számozásból) és minden sorszámhoz egyértelműen tartozik majd egy cella. A sorszámok éppen a pozitív természetes számok, a cellák az összes racionális számot tartalmazzák (ezúttal már csak egyszer), így elkészítettük a párosítást a két számhalmaz között.



Definíció: Az mondjuk, hogy egy végtelen halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen, ha létezik kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a halmaz és pozitív egész számok halmaza között.

A megszámlálhatóság a fenti bizonyításban is szereplő sorszámozhatóságra utal. A természetes számok, az egész számok, a racionális számok halmaza megszámlálható, de megszámlálható a koordináta-rendszer rácspontjainak száma, vagy megszámlálhatóan végtelen egyenes összes metszéspontjainak száma is.

Vannak nem megszámlálható végtelen halmazok is. Ilyen a sík összes pontjainak halmaza, de a valós számok halmaza is. Ilyen értelemben tehát meglepő, de azt szoktuk mondani, hogy a racionális számok „ugyanannyian vannak”, mint az egész számok, de a valós számok „többen vannak” náluk.

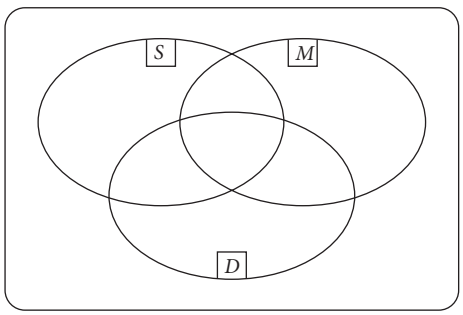
A fenti bizonyítást, valamint az irracionális számok megszámlálhatatlanságára vonatkozó bizonyítást Georg Cantor (1845–1918 ; ejtsd: georg kantor) német matematikus nevéhez kapcsolhatjuk. Cantor volt a modern halmazelmélet egyik megalapítója és kidolgozója.

8 A SZITAFORMULA

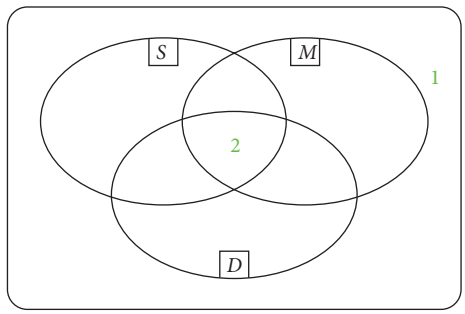
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy baráti társaságban kilencen szeretik a Star Warst, heten a Marvel-filmeket és heten a Disney-rajzfilmeket. A Star Warst és a Marvel-filmeket 5-en, a Disney-rajzfilmeket és a Marvel-filmeket 2-en, a Star Warst és a Disney-rajzfilmeket pedig négyen szeretik. Ketten vannak, akik mindegyiket szeretik, és egy valaki van, aki egyiket sem.
Rajzoljunk Venn-diagramot a társaságról, és adjuk meg, hányan vannak összesen a baráti társaságban!

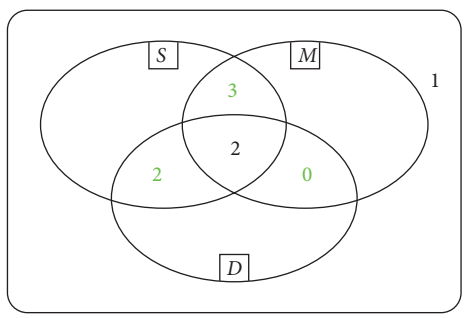
Megoldás
Legyen az alaphalmazunk a baráti társaság, ezen belül pedig három halmazunk a Star Wars-t, a Marvel-filmeket és a Disney-rajzfilmeket szeretők halmaza. Ezeket a halmazokat jelölje S, M és D. Mivel van közös része ezen halmazoknak, célszerű az ábrát így elkészíteni:



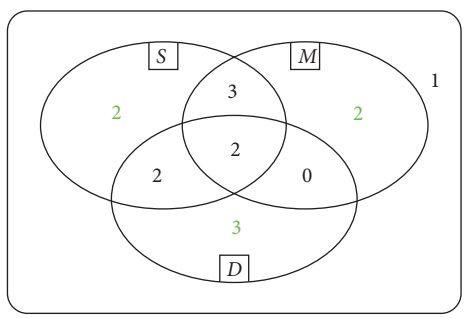
Ahelyett, hogy az egyes elemeket írjuk be a halmazokba, írjuk be az egyes diszjunkt (egymással nem fedésben lévő) halmazrészekbe (ezeket szokás elemi celláknak is nevezni) azt, hogy hány elemet tartalmaznak!
Célszerű a közös résszel kezdeni, a feladat szövege alapján ez 2 elemet tartalmaz. A három halmazon kívül eső részben (a három halmaz uniójának komplementer részében) 1 elem van. (Aki egyik filmet sem szereti.)
Az $S \cap M$ számossága 5, de ebből 2 elem a három halmaz közös metszetében található, a hiányzó 3-at kell tehát az $S \cap M$ másik felében elhelyezni.



Az $M \cap D$ halmaz számossága 2. Mivel a közös metszet is tartalmazott 2 elemet, ezért a metszet hiányzó részében már nem található elem.
Az $S \cap D$ halmaz számossága 4, a közös metszet 2 elemet tartalmazott, tehát az $S \cap D$ hiányzó fele tartalmazza a maradék 2 elemet.



Az S halmaz számossága 9, ebből a megfelelő helyeken már megtalálható $3 + 2 + 2 = 7$ elem, tehát a hiányzó részbe kerül a maradék 2 elem.
Az M halmaz számossága 7, ebből már $3 + 2 = 5$ elemet elhelyeztünk, tehát a hiányzó részbe kerül a maradék 2 elem.



A D halmaz számossága 7, ebből $2 + 2 = 4$ elemet elhelyeztünk, tehát a hiányzó részbe kerül a maradék 3 elem.
Így tehát összeszámolhatjuk, hogy összesen 15 fő tartozik a baráti társaságba.

2. Adjuk meg halmazjelöléssel az előző feladatból azt a halmazt, amely a csak a Star Wars-filmeket szeretőket tartalmazza!

Megoldás:
Az S halmazból ki kell vonnunk azokat, akik az M vagy a D halmazban is benne vannak. Ezt megtehetjük úgy is, hogy az S halmazból az M és D halmaz unióját vonjuk ki. Így tehát az $S \setminus (M \cup D)$ halmazműveletet kaptuk.

Megjegyzés: Ugyanezt kapjuk akkor is, ha csak a metszeteket vonjuk ki az S halmazból:
$S \setminus ((M \cap S) \cup (D \cap S))$.

Eszerint a két halmazművelet, bár formailag másképp néz ki, egymással egyenlő.

Ugyanezt a halmazt így is fel lehet írni: $S \cap \overline{(M \cup D)}$.

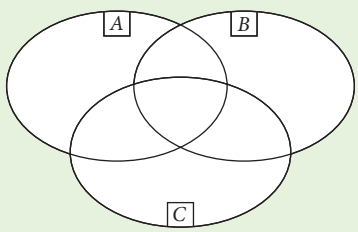
FELADAT

1 A feladatok az 1. kidolgozott feladat társaságára vonatkoznak:
- **a)** Adjuk meg halmazműveletek segítségével azok halmazát, akik csak a Star Wars- vagy Marvel-filmeket szeretik, a Disney-rajzfilmeket nem!
- **b)** Adjuk meg a halmazműveletek segítségével azok halmazát, akik legalább két filmtípust szeretnek a háromból!

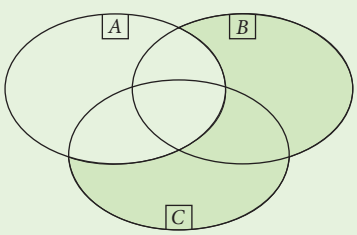
2 (Érettségi feladat, 2008)
Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek.
Hány hibát talált Anett és Berta összesen? Készíts halmazábrát a feladatról!

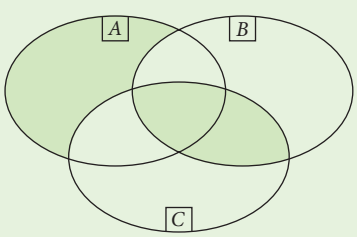
3 A matekcsoportba 17-en járnak. Közülük 7-en szeretik az AC/DC (A) együttest, 8-an a Black Sabbath-ot (B), 6-an pedig Miley Cyrust (C). 4 diák kedveli az A-t és B-t is, két tanuló B-t és C-t, 3 pedig A-t és C-t. Egyetlen diák van, aki mindhármat kedveli. Hányan vannak a csoportban, akik egyiket sem szeretik?

4 Ábrázold Venn-diagramon a következő halmazokat!
- **a)** $A \cup (B \cap C)$
- **b)** $(A \cup B) \cap C$
- **c)** $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **d)** $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$
- **e)** $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$
- **f)** Vannak-e az ábrázolt halmazok között azonosak?



5 Add meg minél egyszerűbb halmazjelölésekkel az alábbi Venn-diagramon sötétebb színnel jelölt halmazokat!

a)


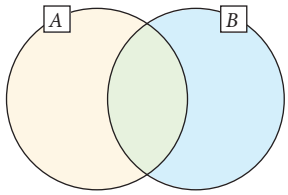
b)


ELMÉLET

A szitaformula

Két véges halmaz uniójának elemszámát megkapjuk, ha a halmazok számosságát összeadjuk, és kivonjuk ebből a metszetük számosságát, hiszen a metszetben lévő elemeket az összeadás során kétszer is számoltuk.

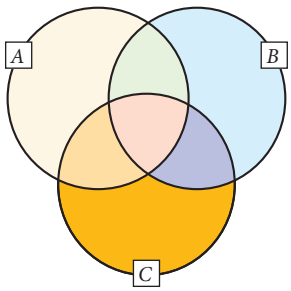
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Három véges halmaz uniója elemszámának vizsgálatakor még körültekintőbben kell eljárnunk:

- összeadjuk a három halmaz számosságát;
- majd kivonjuk ebből a kettős metszetek számosságát, hiszen az azokban szereplő elemeket kétszer számoltuk az előző összeadásnál;
- végül hozzáadjuk a hármas metszet számosságát, hiszen az abban szereplő elemek számát háromszor számoltuk első lépésben, majd háromszor kivontuk a másodikban.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



Ezeket az összefüggéseket együttesen **szitaformulának** nevezzük.

FELADAT

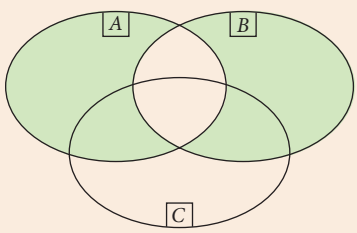
6 (Érettségi feladat, 2013)
Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője?

7 (Érettségi feladat, 2015)
Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló bioló-giateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladatai közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni. Hány olyan kérdés volt, amelyre Gergő helyesen válaszolt?

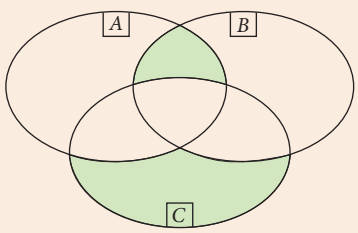
HÁZI FELADAT

1 Add meg minél egyszerűbb halmazjelölésekkel az alábbi Venn-diagramon zöld színnel jelölt halmazokat!

a)

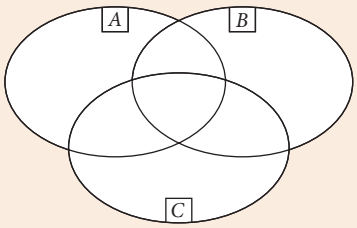


b)



2 Ábrázold Venn-diagramon a következő halmazokat!

a) $A \cap (B \cup C)$ **b)** $(A \cap B) \cup C$ **c)** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



3 Egy kísérleti űrállomáson zsiráfokat génmódosítanak. A zsiráfok közül 10-en hegedülnek, 7-en röplabdáznak és 9-en beszélnek angolul. 3-an vannak, akik angolul is tudnak és a röplabdázáshoz is értenek, 5 hegedűs beszél angolul és 4 hegedűs röplabdázik. A telep sztárja Bob, a hegedűművész röplabdabajnok nyelvzseni (zsiráf), aki egyedülálló módon mindhárom területen jól teljesít. A telep fekete bárónya (zsiráfja) Willy, aki meglepő módon se hegedülni, se röplabdázni, se angolul nem tud, a tudósok legnagyobb döbbenetére ő egész nap csak kérődzik. Hány zsiráfot kell kiszabadítania annak a hajószakácsokból álló titkos különítménynek, amelynek célja az űrállomás teljes zsiráfállományának megmenekítése és visszaszállítása eredeti helyükre, a szerző ködös, elborult képzeletvilágába? (Leszámítva Willyt, persze, akit Afrikába vinnének vissza.)

RÁADÁS

1. (A 2014. évi érettségi nyomán) Egy érettségi előtt álló 32 fős osztály a ballagásra készül. A ballagási meghívó színéről egy szavazáson döntöttek, amelyen minden tanuló részt vett. A szavazólapon három szín (sárga, fehér, bordó) szerepelt, ezek közül mindenki egyet vagy kettőt jelölhetett meg. A két színt választók közül a sárgát és a fehéret 4-en, a fehéret és a bordót 3-an választották. A sárgát és a bordót együtt senki nem jelölte meg. A szavazatok összeszámolása után kiderült, hogy mindegyik szín ugyanannyi szavazatot kapott. Hány olyan diák volt, aki csak a sárga, csak a fehér, illetve csak a bordó színt jelölte meg a szavazólapon?

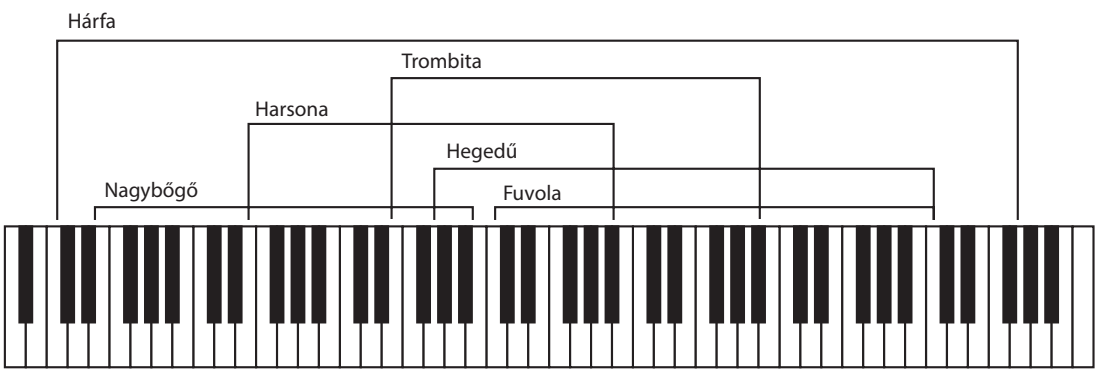
2. Legyen H az alaphalmazunk, amelynek részei A és B. Ábrázold Venn-diagramon a következő halmazokat!

a) $\overline{A \cup B}$ **b)** $\overline{A} \cup \overline{B}$ **c)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **d)** $\overline{A \cap B}$

e) Melyek egyenlők a fenti négy halmazból?

A tapasztalt azonosságokat **de Morgan-azonosságoknak** nevezzük, a nevüket Augustus de Morgan angol matematikusról kapták (noha már William Ockham is feljegyezte azokat *Summa Logicae* című művében).

3. (A 2013. évi kompetenciamérés nyomán)
A zeneszerzőknek figyelembe kell venniük, hogy minden hangszernek más a hangterjedelme, azaz más hangokat képes megszólaltatni. Az ábra azt mutatja, hogy hat különböző hangszer milyen hangterjedelemmel rendelkezik. A hangokat a zongorabillentyűk jelölik.



a) Döntsd el, melyik igaz, melyik hamis a következő állítások közül!

A Van olyan hang, amelyet mind a hat hangszer meg tud szólaltatni.

B Minden, harsona keltette hangot le tud játszani a trombita vagy a nagybőgő.

C Egy fuvola keltette hangot hárfán és hegedűn is le tudunk játszani.

D Minden, hegedűvel megszólaltatott hang vagy fuvolán, vagy harsonán, vagy mindkettőn lejátszható.

b) Melyik két hangszer hangterjedelme két diszjunkt halmaz?

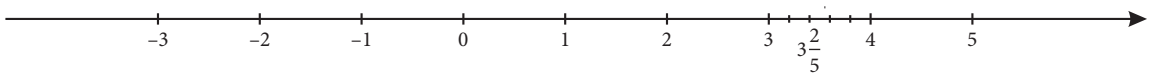
c) Melyik halmaz számossága nagyobb:
a trombita hangjai halmazának és a harsona hangjai halmazának metszete vagy a hegedű hangjai halmazának és a trombita hangjai halmazának különbsége?

9 INTERVALLUMOK

BEVEZETŐ

A számegyenes

Mindegyik valós számnak megvan a helye a számegyenesen, és a számegyenes minden pontjának megfelel egy valós szám.



Például a $3\frac{2}{5}$ helyét így kapjuk meg: a 3 és a 4 közötti szakaszt 5 egyenlő részre bontjuk, és a 3-at jelölő ponttól számítva a második osztópontot választjuk.

ELMÉLET

Számok abszolút értéke

Minden pozitív szám abszolút értéke önmaga, a 0 abszolút értéke önmaga, minden negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje.	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geq 0 \\ -a, \text{ ha } a < 0 \end{cases}$

Két szám különbségének abszolút értéke a két szám távolságát is jelenti a számegyenesen. Például $|3 - 5| = 2$, ez éppen a 3 és az 5 távolsága. $|3 - (-5)| = |3 + 5| = 8$, ez pedig 3 és -5 távolsága.

FELADAT

1 Hány olyan egész szám van, amelynek az abszolút értéke

a) 12;
b) kisebb, mint 12;
c) nagyobb, mint 12;
d) egyjegyű prímszám?

2 Melyik egész számot jelölheti a c betű, ha

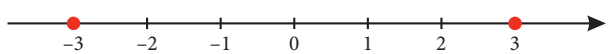
a) $|c - 5| = 0$;
b) $|c - 5| = -2$;
c) $|c - 5| = 2$?

KIDOLGOZOTT FELADAT

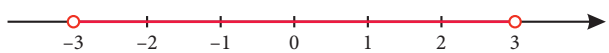
1. Jelöljük meg a számegyeneseken azokat a számokat, amelyek abszolút értéke

a) 3; **b)** kisebb 3-nál; **c)** nem nagyobb 2-nél; **d)** nagyobb 2-nél; **e)** 2 és 3 közötti szám!

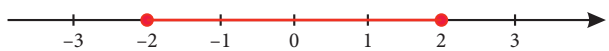
Megoldás

a) 

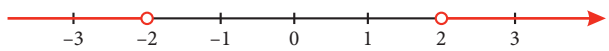
Megoldás: $\{-3; 3\}$.

b) 

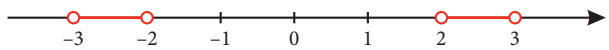
Megoldás: a $]-3; 3[$ **nyílt intervallum**.

c) 

Megoldás: $[-2; 2]$ **zárt intervallum**.

d) 

Megoldás: $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.

e) 

Megoldás: a $]-3; -2[$ és a $]2; 3[$ **intervallumok uniója**.

ELMÉLET

Intervallumok

Ha $a < b$, akkor a közöttük lévő számok halmazát ***a, b* nyílt intervallumnak** nevezzük. Jele: $]a; b[$.
Ha ehhez az a-t és a b-t is hozzávesszük, akkor ezt a halmazt ***a, b* zárt intervallumnak** nevezzük. Jele: $[a; b]$.
Ha az $[a; b]$-ből elhagyjuk az a-t, illetve a b-t, akkor az $]a; b]$ -vel jelölt **balról nyílt, jobbról zárt intervallumot,** illetve az $[a; b[$-vel jelölt **balról zárt, jobbról nyílt intervallumot** kapjuk.

Például:
Az alábbi ábrán a $[-3; 0]$ **zárt** intervallumot és az $[1; 4[$ **balról zárt, jobbról nyílt** intervallumot szemléltettük.



Az intervallumok számhalmazok, ezért uniójuk, metszetük, különbségük értelmezhető.

Például:
a számegyenesen megjelölt számhalmazt többféle módon leírhatjuk. Megadunk két leírást:



$[2; 7] \setminus \{5\} = [2; 5[\cup]5; 7]$

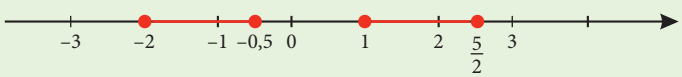
FELADAT

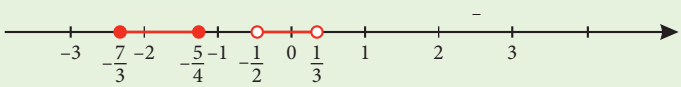
3 Jelöld meg egy számegyenesen azokat a valós számokat, amelyeknek az abszolút értéke
- **a)** 2 és 5 közötti szám;
- **b)** kisebb, mint 4;
- **c)** nagyobb, mint 12.

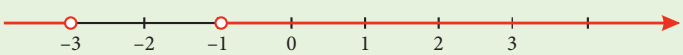
Melyik halmaz véges és melyik végtelen?
Melyik halmazt tudod felírni intervallum alakjában?

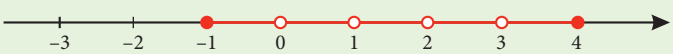
4 Ábrázold számegyenesen, s írd fel intervallum alakban az összes olyan x valós szám halmazát, amelyekre igaz, hogy
- **a)** $-1 < x \leq 3$;
- **b)** $-\frac{8}{3} \leq x \leq -\frac{2}{5}$.

5 Add meg intervallumokkal a számegyenesen megjelölt halmazt! Keress többféle leírást!

a)


b)


c)


d)


KIDOLGOZOTT FELADAT

2. A cukorkászacskón ez áll: tömege 100 g ±2 g. Ha a zacskó tömege x gramm, akkor az alábbi kijelentések közül melyik fejezi ki matematikai formában ugyanezt az információt?

a) $98 \le x \le 102$ **c)** $|x| \le 102$

b) $x \ge 98$ **d)** $|x - 100| \le 2$

Megoldás

A cukorkászacskó felirata azt fejezi ki, hogy a cukorka tömege legalább 98 gramm, de legfeljebb 102 gramm. Más szavakkal kifejezve: a zacskó tömegének a 100 grammtól való eltérése legfeljebb 2 gramm lehet.

Az a) kijelentés és a d) kijelentés is pontosan ezt jelenti, a b) és a c) kijelentés nem.

A b) kijelentés ugyanis azt mondja, hogy a cukorka tömege legalább 98 gramm, azaz akár 260 gramm is lehetne; a c) kijelentés pedig azt állítja, hogy a cukorka tömege –102 gramm és 102 gramm között van, tehát akár 0 gramm is lehetne.

3. Oldjuk meg az $|x - 3| < 5$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

Megoldás

Használjuk az abszolút érték távolságokra vonatkozó definícióját! Az $|x - 3|$ kifejezést úgy is kiolvashatjuk, hogy „x távolsága a 3-tól”. Az egyenlőtlenségünk tehát így hangzik: „x távolsága 3-tól kisebb, mint 5”. Vagyis a számegyenes 3 pontjától 5 egységnél közelebb lévő egész pontjai lesznek a megoldások.

A megoldáshalmazunk tehát: $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

(A -2 és a 8 éppen 5 távolságra vannak 3-tól, ezek tehát nem lesznek megoldások.)

FELADAT

6 Az osztály mind a 30 tanulója mérőszalaggal megmérte a tanterem szélességét. A legkisebb mérési eredmény 523 cm, a legnagyobb 531 cm volt. Ha a tanterem valódi szélessége s cm (és ez a két fenti mérési eredmény közé esik), akkor hogyan lehetne matematikai formába önteni a tanulók mérésének eredményét egyenlőtlenség, illetve abszolút érték segítségével?

HÁZI FELADAT

1 Melyik kijelentés igaz és melyik hamis?

a) Minden természetes szám egész szám.

b) A nulla természetes szám.

c) A –6,4 racionális szám.

d) Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként is.

e) Minden egész szám felírható két egész szám hányadosaként is.

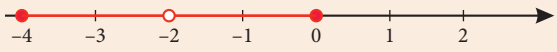
2 Csapszegeket csomagolnak dobozokba, és ezt írják a dobozra: átmérő 2,5 mm ± 0,03 mm. Írd fel ennek a kijelentésnek a matematikai megfelelőjét egyenlőtlenségek, illetve az abszolút érték használatával! A csapszeg átmérőjét jelöld d-vel!

3 Add meg a számegyenesen megjelölt halmazt intervallumokkal!

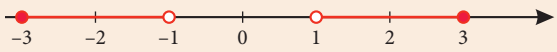
a)



b)



c)



4 Kösd össze azokat, amelyek ugyanazt fejezik ki! Melyik a kakukktojás?

$-7 \le x \le 7$	$\lvert x - 7\rvert \le 7$
$-5 \le x \le 9$	$\lvert x - 2\rvert \le 7$
$0 \le x \le 14$	$\lvert x\rvert \le 7$
$7 \le x \le 14$	$\lvert x - 27\rvert \le 7$
$20 \le x \le 34$	

5 **a)** Hány megoldása van az $|x - 3| = 2$ egyenletnek a természetes számok halmazán, az egész számok halmazán, illetve a racionális számok halmazán?

b) Hány megoldása van az $|x - 3| \leq 2$ egyenlőtlenségnek a természetes számok halmazán, az egész számok halmazán, illetve a racionális számok halmazán?

RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés alapján, 2013)
Egy osztály tanulói között úszóversenyt rendeztek. A versenyen három csapat indult váltóban, a csapatok 4 főből álltak. Minden csapatból akkor indulhatott a következő versenyző, ha a csapattársa beért a célba. Az alábbi táblázat azt mutatja, melyik versenyző mennyi idő alatt úszta le a távot.

	A csapat	*B* csapat	*C* csapat
1. versenyző	1 perc 54 másodperc	1 perc 30 másodperc	1 perc 10 másodperc
2. versenyző	59 másodperc	1 perc 5 másodperc	1 perc 8 másodperc
3. versenyző	1 perc 2 másodperc	1 perc 18 másodperc	1 perc 5 másodperc
4. versenyző	1 perc 5 másodperc	45 másodperc	55 másodperc

a) Amikor a *B* csapat 4. versenyzője kezdett úszni, az *A* csapatból hányadik versenyző úszott?

b) A *C* csapat 4. versenyzője melyik másik versenyzőkkel úszott egyidőben? Mennyi ideig úszott párhuzamosan ezekkel a versenyzőkkel?

c) Ábrázold 3 számegyenesen a 3 csapat úszását intervallumokkal!

2. (Kompetenciamérés, 2018)
Egy rövidfilmfesztiválon két teremben zajlanak a vetítések. A filmeket egymás után, szünet nélkül adják. A filmek sorrendjét és hosszát az alábbi táblázat mutatja.

Kezdés	Nagyterem	Kisterem
17:00	**1. Az éjszaka** (15 perc) **2. Kitörés** (28 perc) **3. Az elefánt** (19 perc) **4. Potpourri** (16 perc)	**1. Kosár a vonaton** (27 perc) **2. A zöld kanapé** (12 perc) **3. Miért ők?** (22 perc) **4. Sanyi nyakkendője** (5 perc) **5. Kopogó cipők** (14 perc)

a) Meg tudja-e nézni Márk a következő két filmet az elejétől a végéig:
- *Kitörés* és *Miért ők?* című filmek
- *Az elefánt* és *Sanyi nyakkendője* című filmek
- *Miért ők?* és a *Potpourri* című filmek?

b) Ábrázold számegyenesen intervallumokkal az a)-beli filmpárosítások vetítésének idejét!

3. (Kompetenciamérés alapján, 2015)
Virág úr egy nemzetközi cégnél dolgozik Budapesten, amelynek Abu-Dzabiban és Buenos Airesben is vannak partnerei. Konferenciabeszélgetésen tudnak tárgyalásokat folytatni, amikor mindhárom fél egyszerre van telefonos kapcsolatban.
A következő ábra azt mutatja, hány óra van az egyes városokban, mikor Budapesten 16.35 van.

Buenos Aires	**Budapest**	**Abu-Dzabi**
12:35	**16:35**	**19:35**

Budapesti idő szerint mikor tudnak megtartani egy 1 órás konferenciabeszélgetést úgy, hogy az mindhárom városban helyi idő szerint 10 és 18 óra között legyen?
Vegyél fel egy számegyenest! Mutassa ez a budapesti helyi időt! Jelöld a számegyenesen, hogy a másik két városban mikor járunk 10 és 18 óra között!

4. Szemléltesd számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldásainak halmazát, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza! Írd fel a megoldáshalmazt intervallumok segítségével!

a) $|x| \leq 2$ **b)** $|x - 3| \leq 2$ **c)** $|x + 3| \leq 2$

10 GYAKORLÁS

BEVEZETŐ

Az egyik egyetemen a tanulmányi ösztöndíj mértéke háromféle lehet: havi 40 000 Ft, havi 25 000 Ft vagy 10 000 Ft. A 4,5-es átlag felett teljesítő diákok kapják a legmagasabb összeget. Akik nem érik el a 3,5-es átlagot, nem kapnak tanulmányi ösztöndíjat. Azok kapnak 25 000 Ft-ot havonta, akiknek az átlaga legalább 4,0, és legfeljebb 4,5. Akik elérik a 3,5-et, de a 4,0-t nem, azok 10 000 Ft-os ösztöndíjat kapnak. Táblázatban:

Átlag	Ösztöndíj
3,5 alatt	0 Ft
3,5–3,99	10 000 Ft
4,0–4,5	25 000 Ft
4,5 felett	40 000 Ft

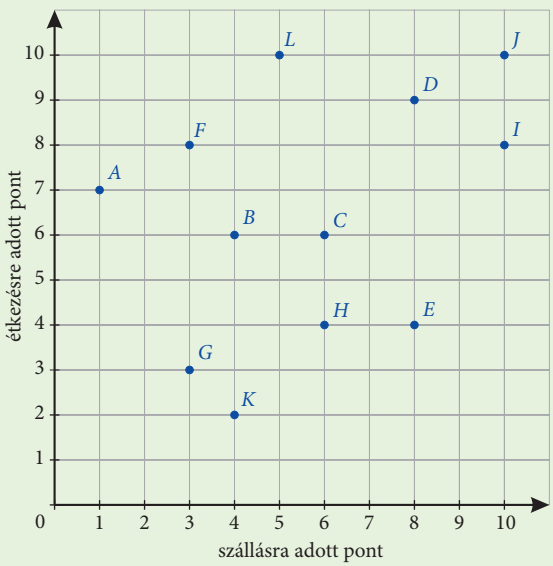


Egy ilyen elosztás során a diákokat jól meghatározott csoportokba, **osztályokba sorolják**. Halmazok nyelvén azt mondjuk, hogy a diákok halmazát **diszjunkt**, azaz közös elem nélküli részhalmazokra osztják: minden elem beletartozik egy részhalmazba, és semelyik két részhalmaznak nincs közös eleme.

FELADAT

1 Adott az A halmaz: $A = \{0; 1; 20; 21; 30; 31; 50; 51; 52; 1000; 1001; 1002\}$
Sorold az A halmaz elemeit 4 osztályba! Keress több megoldást!

2 Egy tábor zárásakor internetes kérdőívet töltöttek ki a résztvevők. 10-es skálán kellett értékelniük a szállást és az étkezést. A válaszok alapján a számítógép egy diagramot készített. Minden gyerekhez tartozik egy pont, melynek első koordinátája a szállásra, második koordinátája az ellátásra adott értékelés.



A szervezők szeretnék az értékeléseket valamilyen módon osztályokba sorolni. Ehhez különböző módszereket dolgoznak ki. Állapítsd meg, hogy melyik osztályba melyik elemek kerülnek a következő esetekben!

a) András szerint öt osztályba érdemes sorolni az értékeléseket a két pontszám összege alapján.

elégtelen	$\text{összeg} \leq 8$
elégséges	$8 < \text{összeg} \leq 11$
közepes	$11 < \text{összeg} \leq 14$
jó	$14 < \text{összeg} \leq 17$
kiváló	$17 < \text{összeg}$

b) Bence három osztályba sorolná a válaszokat:
jó, ha mindkét érték nagyobb, mint 5;
közepes, ha az egyik érték nagyobb, mint 5, a másik érték kisebb vagy egyenlő, mint 5;
gyenge, ha mindkét érték kisebb vagy egyenlő, mint 5.

c) Cili szerint minden résztvevőtől a két érték közül a kisebbet vegyék figyelembe, és ez alapján 5 osztályt hozzanak létre:

elégtelen	*kisebb érték* ≤ 2
elégséges	$2 <$ *kisebb érték* ≤ 4
közepes	$4 <$ *kisebb érték* ≤ 6
jó	$6 <$ *kisebb érték* ≤ 8
kiváló	$8 <$ *kisebb érték*

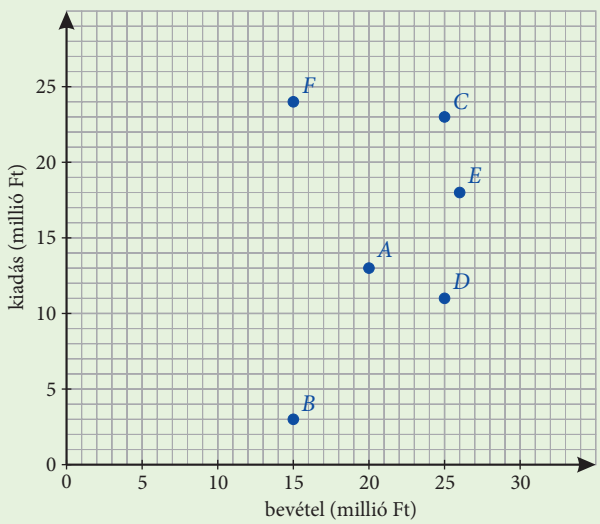
d) Hol helyezkednek el azok a gyerekek a grafikonon, akik szerint jobb volt az étkezés, mint a szállás?

e) Találj ki másfajta osztályba sorolást!

f) Melyik értékelést használnád? Miért? Érvelj a választásod mellett!

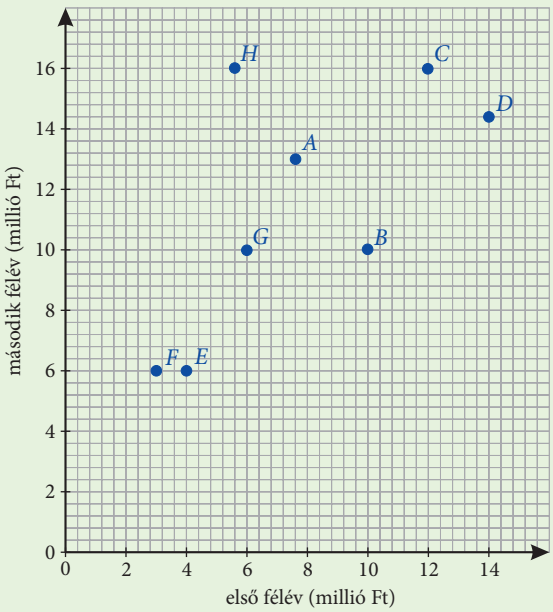
3 Egy statisztikai felmérés során a térségben lévő kisvállalkozásokról készítettek kimutatást. A felmérés során megkérdezték a vállalkozásokat az előző éves kiadásukról és az előző éves bevételükről is.
Válaszaik alapján a vállalkozásokat elhelyezték egy-egy koordináta-rendszerben. Az ábrákon néhány vállalkozás adatai láthatók.

a) A vízszintes tengelyen a bevételt, a függőleges tengelyen a kiadást ábrázoltuk millió forintban. (Például az *A* cég éves bevétele 20 millió Ft, éves kiadása 13 millió Ft volt.)



Először azonos osztályba sorolták azokat a vállalkozásokat, amelyeknek közel megegyezett a nyeresége: a bevétel és a kiadás különbsége. Az öt közül melyek kerülnének szerinted azonos osztályba? Hogyan jelenik meg a grafikonon ez az osztályba sorolás?
Hol helyezkednek el a veszteséges vállalkozások? A hat közül melyik vállalkozás termelte a legnagyobb nyereséget?

b) Egy másik évben végzett felmérés során megkérdezték a kisvállalkozásokat az első féléves, illetve a második féléves forgalmukról is.
Ebben az esetben a vízszintes tengelyen az első féléves, a függőleges tengelyen a második féléves forgalmat ábrázoltuk.
(Például az *A* cég első féléves forgalma 8 millió Ft, második féléves forgalma 13 millió Ft volt.)



Egy osztályba sorolhatjuk azokat a vállalkozásokat, amelyeknek közel megegyezett az éves forgalmuk, vagyis a két féléves forgalom összege. A nyolc közül melyik vállalkozások kerülnének nálad ebbe az osztályba? Hogyan jelenik meg a grafikonon ez az osztályba sorolás? Melyik félévben volt a grafikonon ábrázolt cégeknek nagyobb bevétele jellemzően? Mi lehet ennek az oka?

4 Egy baráti társaság pingpong bajnokságot rendez. Négy csoportra osztják a résztvevőket, az alapján, hogy ki melyik évszakban született. Egy csoporton belül mindenki játszik mindenkivel pontosan egy mérkőzést. Majd a négy csoportgyőztes is körmérkőzést játszik: mindenki játszik mindenkivel pontosan egy mérkőzést.

A résztvevők közül négyen születtek télen, hatan tavasszal, négyen nyáron és öten ősszel.

a) Hány mérkőzésre kerül sor?

b) Változik-e (és ha igen, hogyan) a lejátszandó mérkőzések száma, ha az egyik tavasszal született résztvevő a verseny előtt visszalép, és egy nyáron született versenyzővel bővül a csapat?

5 A bankok az ügyfeleiket minősítési osztályokba sorolják az alapján, hogy mennyire hitelképesek. Ennek megállapításához többféle szempontot vesznek figyelembe.

Egy zedországi bank a következő szempontok szerint vizsgálja azt, aki hitelt szeretne felvenni: a kérelmező életkora, a kérelmező éves jövedelme, a házastárs éves jövedelme, milyen értékű ingatlannal rendelkezik a kérelmező.

A válaszokra járó pontszámokat összeadják, és ez alapján döntik el, hogy a bank mekkora és milyen kamatozású hitelt tud nyújtani az ügyfélnek.

a) A táblázatok alapján döntsd el, hogy melyik kategóriába sorolták az utolsó táblázatban szereplő ügyfeleket!

Életkor	Pontszám
0–20 év	0
21–30 év	10
31–40 év	20
41–50 év	40
51–60 év	30
60 év felett	10

Éves jövedelem (zed)	Pontszám
0–10 000	0
10 001–15 000	80
15 001–20 000	110
20 001–25 000	150
25 000 felett	200

Házastárs éves jövedelme (zed)	Pontszám
0–10 000	0
10 001–15 000	60
15 001–20 000	75
20 001–25 000	100
25 000 felett	130

Ingatlan értéke (zed)	Pontszám
0–100 000	0
100 001–300 000	40
300 001–400 000	70
400 001–500 000	100
500 000 felett	120

Összpontszám	Minősítési besorolás
400 –	A
350 – 395	B
250 – 345	C
150 – 245	D
0 – 145	E

Név	Életkor	Éves jövedelem (zed)	Házastárs éves jövedelme (zed)	Ingatlan értéke (zed)	Minősítési besorolás
K.A.	32	23 000	–	280 000	
T.L.	45	18 000	22 000	–	
S.M.	53	35 000	19 000	340 000	

b) Adj meg olyan adatokat (életkor, jövedelem), amelyek esetén egy kérelmező az A minősítési kategóriába esik!

c) Ha valaki nem rendelkezik ingatlannal, akkor milyen besorolásba kerülhet?

d) Melyik a legfontosabb szempont a minősítésben? Szerinted mi lehet ennek a magyarázata?

HÁZI FELADAT

1. (Kompetenciamérés, 2018)
A következő táblázat egy országos futóversenyre jelentkezők legjobb idejét mutatja.

Nevezési idő (perc:másodperc)	Fő
< 1:25	8
1:26 – 1:30	15
1:31 – 1:35	17
1:36 – 1:40	20
1:41 – 1:45	8
1:46 – 1:50	27
1:51 <	31

Szintidőnek nevezzük azt az időtartamot, amely alatt minden indulónak teljesítenie kell a távot. Mennyi legyen a versenyen való induláshoz szükséges szintidő, ha a versenyre legfeljebb 65 főt szeretnének meghívni?

2. A 20-nál kisebb pozitív egész számok halmazát diszjunkt részhalmazokra bontjuk az alapján, hogy mennyi a szám maradéka 3-mal osztva. Hány eleműek a kapott részhalmazok? (Ezeket a részhalmazokat **maradékosztályok**nak nevezzük.)

3. (Érettségi feladat, 2007)
Egy atlétika szakosztályban a 100 m-es síkfutók, a 200 m-es síkfutók és a váltófutók összesen 29 fős csoportjával egy atlétaedző foglalkozik. Mindegyik versenyző legalább egy versenyszámra készül. A 100 m-es síkfutók tizenöten vannak, hét versenyző viszont csak 100 m-re edz, négy versenyző csak 200 m-re, hét versenyző csak váltófutásra.

a) Készíts a feladatnak megfelelő halmazábrát!

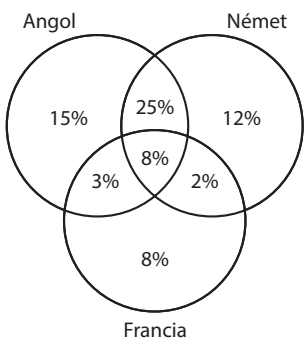
b) Azt is tudjuk, hogy bármelyik két futószámnak pontosan ugyanannyi közös tagja van. Mennyi ez a szám?

RÁADÁS

1. Mennyi lehet a megadott halmazok számossága? A helyes válaszhoz tartozó betűket megfelelő sorrendbe rendezve egy magyar feltaláló vezetéknevét kapod megfejtésül. Ki ő?

$\lvert A\rvert = 8$ és $\lvert B\rvert = 6$.	Legfeljebb mennyi az $A \cup B$ számossága?	K	6	Z	8	I	14
$\lvert A\rvert = 13$ és $\lvert B\rvert = 3$.	Legalább mennyi az $A \cup B$ számossága?	O	10	D	13	A	16
$\lvert K\rvert = 4$ és $\lvert L\rvert = 9$.	Legfeljebb mennyi a $K \cap L$ számossága?	E	4	I	5	Á	9
$\lvert K\rvert = 5$ és $\lvert L\rvert = 10$.	Legalább mennyi a $K \cap L$ számossága?	L	0	S	5	N	10
$\lvert C\rvert = 7$ és $\lvert D\rvert = 9$.	Legfeljebb mennyi a $C \setminus D$ számossága?	R	2	J	7	Y	9
$\lvert C\rvert = 11$ és $\lvert D\rvert = 1$.	Legalább mennyi a $C \setminus D$ számossága?	B	0	C	1	K	10

2. (Kompetenciamérés nyomán, 2006)
Egy nyelvtagozatos iskola nyolcadik évfolyamán a diákok maguk választhatták ki, hogy melyik idegen nyelvet akarják tanulni a kilencedik évfolyamon. Az alábbi ábra azt mutatja, hogy a diákok milyen százalékban választották az angol, a német és a francia nyelvet, illetve ezek kombinációit. A százalékos értékeket egész számra kerekítették.



A diákok hány százaléka választott angolt is, és németet is?
Hányan választottak az angoltól, a némettől és a franciától különböző nyelvet, ha összesen 140 diák volt a nyolcadik évfolyamon?
Hányszorosa az angolosok száma a franciások számának?
Mennyivel többen tanulnak németül, mint franciául?

11 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Péter egy retró partira készül. A 70-es és 80-as évek legjobb slágereiből válogatott össze 12-t.

a) Hányféle sorrendben játszhatja le ezeket a számokat?

b) A partin két blokkban hangoznak majd el a számok: 6 szám az első blokkban, és 6 szám a második blokkban. Péter kiválasztott négy számot, hogy azok kerülnek majd a blokkok elejére, illetve végére, de még nem döntötte el, hogy melyik hová. Így hányféle sorrendje van a 12 dalnak?

2 Van öt pár Star Wars-zoknim, amin Boba Fett, C-3PO, Darth Vader, egy Rohamosztagos és Yoda vannak. Minden nap felemás zoknit hordok, de Yodát nem hordom együtt a Rohamosztagossal, Darth Vadert pedig vagy Boba Fettel vagy Yodával hordom együtt. A Rohamosztagost csak C-3PO-val együtt viselem. Ezeket a feltételeket leszámítva bármilyen más párosítást felveszek.

a) Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak!

A: Yodát és Boba Fettet sosem párosítom össze.

B: C-3PO-t hordhatom együtt Boba Fettel.

C: Több mint hat lehetséges párosítást szoktam hordani.

b) Az összes (10 darab) zoknit hétfőtől péntekig egy-egy napig hordom a fenti szabályok szerint. Sorold fel, hogy milyen párosításokban hordtam őket! (Azt nem kell megmondanod, hogy melyik párosítást melyik nap hordtam.)

3 A családi házban 5 lány él, 4 ember szemüveges, és 6-nak kék a szeme. 3 szemüvegesnek kék a szeme, 2 lány szemüveges, és 4 kékszemű lány él a házban. A szemüveges lányok mind kékszeműek. Hány szemüveges fiúnak nem kék a szeme?

4 Egy kvízjátékon 10 kérdést tesznek fel, mindegyikre 5 lehetséges válasz adható, ezek közül viszont csak egy helyes.

a) Hányféleképpen alakulhatnak a lehetséges helyes válaszok?

b) A játékos „biztos forrásból” megtudja, hogy az első kérdésre az „A” válasz a helyes, a másodikra pedig „biztosan nem a D”. Hányféleképpen alakulhatnak a lehetséges helyes válaszok, ha hiszünk a forrásnak?

5 Hány olyan hatjegyű szám van, amely a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyeket tartalmazhatja, és

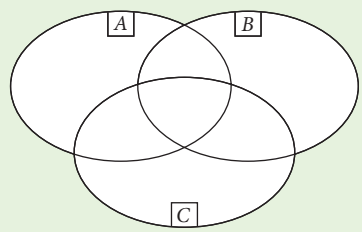
a) mindegyiket csak egyszer tartalmazza;

b) mindegyiket többször is tartalmazhatja;

c) mindegyiket csak egyszer tartalmazza, és osztható 5-tel;

d) mindegyiket többször is tartalmazhatja és osztható 5-tel?

6 Ábrázold Venn-diagramon az $A \cap (B \setminus C)$ halmazt és az $(A \cap B) \setminus C$ halmazt! Egyenlő-e a két halmaz?



7 Ábrázold a számegyenesen a $[0; 4[\cup [2; 5[$, a $[0; 4[\cap [2; 5[$, valamint a $[0; 4[\setminus [2; 5[$ halmazokat!

8 Hány megoldása van az $|x + 1| = 2$ egyenletnek a természetes számok halmazán, illetve az egész számok halmazán?

TUDÁSPRÓBA I.

(Könnyebb tipusfeladatok)

1 Egy szabályos tizenkétszög minden csúcsából megrajzoltunk 7 átlót.

a) Összesen hány átlót rajzoltunk?

b) Először az A csúcsból rajzolunk átlókat. Hányféle sorrendben húzhatjuk meg az A csúcsból induló első három átlót?

2 A 3, 4, 6, 9, 0 számjegyekből négyjegyű számokat képezünk úgy, hogy minden számjegyet csak egyszer használunk fel.

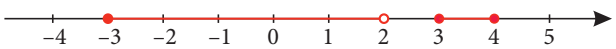
a) Hány ilyen szám alkotható?

b) Ezek közül hány lesz osztható 3-mal?

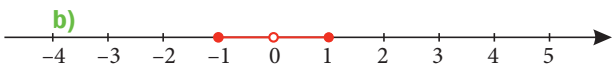
3 A színjátszó körbe kilencen járnak végzősök és 11-en lányok. Az alsóbb éves fiúk hatan, az alsóbb éves lányok 11-en vannak. Hányan vannak a végzős fiúk és hányan járnak összesen a színjátszó körbe?

4 Add meg intervallum-jelölések és halmazműveletek segítségével az alábbi intervallumokat!

a)



b)



5 Definiáljuk az A, B, C halmazokat a következőképpen:

$A = \{$azon egész számok halmaza, melyekre $|x - 1| < 2\}$

$B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$C = \{$pozitív egyjegyű prímszámok$\}$

a) Ábrázold Venn-diagramon a három halmazt és helyezd el a halmazábrában az összes elemüket!

b) Mely számokat tartalmazza az $A \cup (B \setminus C)$ halmaz?

TUDÁSPRÓBA II.

(Nehezebb tipusfeladatok)

1 Egy szabályos sokszög minden csúcsából megrajzoltunk 5 átlót. Így összesen 40 átlót rajzoltunk meg.

a) Hány oldalú a sokszög?

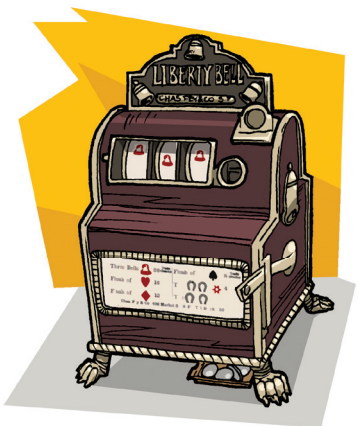
b) Hány átlója van összesen?

c) Először az A csúcsból rajzolunk meg öt átlót. Hányféleképpen tehetjük ezt meg sorrendben, ha az AC átlót mindenképpen meg szeretnénk rajzolni?

2 Az 1890-es években jelent meg az Egyesült Államokban a Liberty Bell nevű szerencsejátékgép, amely három forgótárcsából állt. Mindhárom tárcsa véletlenszerűen pörgetett ki egyet-egyet a lehetséges öt szimbólum közül. Ezeket összeolvasva derült ki, hogy nyert-e valamit a játékos.

a) Összesen hányféle jelhármas jöhet ki a játékban? Ha (a sorrendtől függetlenül) két patkót és egy harmadik szimbólumot pörgettünk ki (ami akár egy harmadik patkó is lehetett), már „ingyen” italt nyerhettünk.

b) Hányféleképpen jöhet ki olyan jelhármas, amelyik legalább két patkót tartalmaz?



3 Superman 14 szuperképességgel rendelkezik, Wonder Woman 13-mal, Flash pedig 7-tel. Supermannek és Flashnek csupán két közös szuperképessége van, Flashnek és Wonder Womannek 3, Wonder Womannek és Supermannek pedig 9. A három szuperhősnek összesen 21 szuperképessége van. Hány olyan szuperképesség van, amellyel mindhárman bírnak?

4 Ábrázold számegyenesen az alábbi intervallumokat!

a) $]-2; 4[\setminus [0; 4[$ **b)** $[0; 7] \cap ([1; 3] \setminus]2; 3[)$

5 Definiáljuk az A, B, C halmazokat a következőképpen:

$A = \{$páros kétjegyű négyzetszámok halmaza$\}$

$B = \{$9-cel osztható, 100-nál kisebb számok halmaza$\}$

$C = \{$azon egész számok halmaza, melyekre $|x + 5| < 45\}$

Elemeinek felsorolásával add meg a következő halmazokat!

a) $A \cap (B \cup C)$ **b)** $C \setminus (A \cap B)$

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Egy úszóverseny döntőjében 8 résztvevő indul. Hányféle lehet a verseny végeredménye, ha csak az első három helyezés számít, és nincs holtverseny?

2 Öt fiú versenyt fut. Hányféle lehet a verseny végeredménye, ha tudjuk, hogy nincs holtverseny, és hogy Béni elesett menet közben, ezért most ő lett az utolsó?

3 Egy tíztagú társaságban mindenki mindenkinek küld egy SMS-t.

a) Hány SMS-t kap egy ember?

b) Összesen hány SMS-t indítottak?

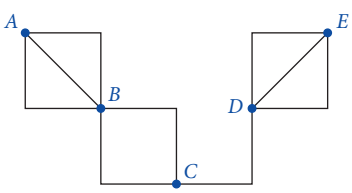
4 Tombola sorsoláson három nyereményt sorsoltak ki: egy digitális képkeretet, egy MP4 lejátszót, és egy hordozható hangszórót. A sorsoláson 32 résztvevő vett részt. Hányféle végeredmény születhetett, ha egy ember csak egy tombolatárgyat nyerhetett?

5 Egy futóversenyen 8 résztvevő indult. Hányféleképpen alakulhatott a 4., 5. és 6. helyezett, ha nem lett holtverseny?

6 A bál végéig még 4 zeneszámra maradt idő. A lemezlovas 7 szám közül választja ki, hogy melyik legyen ez a 4. Hányféleképpen teheti meg ezt, ha semelyik számot sem teszi már be kétszer?

7 Hányféleképpen ülhet be Tamás, Jocó, Henrik és Gábor egyszerre egy négyüléses csónakba? Két elhelyezkedést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egyikük másik ülésen ül. (Egy ülésre egy fő ülhet, és csak az ülésekre szabad ülni.)

8 Az ábra szerinti úthálózaton el szeretnénk jutni *A*-ból *E*-be. Minden várost csak egyszer érinthetünk. Hányféle út közül választhatunk?



9 Hányféleképpen juthatunk el *A* városból *B*-n majd ezután *C*-n keresztül *D* városba, ha *A*-ból *B*-be 4 lehetőség közül, *B*-ből *C*-be 3 lehetőség közül, *C*-ből *D*-be pedig 5 lehetőség közül választhatunk? Készíts ábrát is a feladathoz!

10 A Mastermind játékban 6-féle színű pöcök van. Az egyik játékos egymás mellé leszúr 4 pöcköt a játéklap egyik végén lévő lyukakba, majd eltakarja azokat. A másik játékosnak az a feladata, hogy kitalálja, milyen színűek az eltakart pöckök, és milyen sorrendben helyezkednek el. Hányféle állást rejthet el az első játékos, ha

a) 4 különböző színű pöcköt kell elrejtenie?

b) egy színt többször is felhasználhat?

c) akár üresen is hagyhat egy vagy több lyukat, és egy színt többször is felhasználhat?



11 Egy röplabdabajnokságban mindenki mindenkivel megmérkőzik. Hány mérkőzésre kerül sor, ha 15 csapat indult, és

a) mindenki mindenkivel oda-vissza megmérkőzik, azaz a saját pályáján és a másik csapat pályáján is játszik?

b) mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik?

12 Egy úszóverseny döntőjében 8 versenyző indult. A verseny eredményhirdetésére késve értünk oda. Csak azt hallottuk, hogy ki lett a 2. és ki az 1. helyezett. Hányféleképpen alakulhatott a döntő végeredménye, ha nem lett holtverseny?

13 Hány átlója van egy
- **a)** szabályos tizenegyszögnek?
- **b)** nem szabályos, de konvex tizenegyszögnek?

14 A kilencedik osztálytól azt kérték, hogy a gólyabál során úgy vonuljon be, hogy először a lányok, majd mögöttük a fiúk lépnek a terembe, egymás után, sorban. Hányféle sorrendben mehetnek be, ha a 31 fős osztályba 14 fiú jár?

15 Hány olyan négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely 5-tel osztható?

16 Tomi és Miki kártyáznak. Miki háromszor egymás után kiválaszt egy kártyát az 52 lapos franciakártyapakliból, Tominak pedig ki kell találnia, hogy melyik a választott lap. Miki úgy dönt, hogy mindhárom alkalommal valamelyik figurát ábrázoló lapot (bubit, dámát vagy királyt) fogja kiválasztani. (Ezekből összesen 12 darab van.)



- **a)** Hányféleképpen választhatja ki Miki a három kártyát egymás után, ha egy kártyát csak egyszer választhat ki? (A kiválasztás sorrendje számít.)
- **b)** Hányféleképpen választhatja ki Miki a három kártyát egymás után, ha egy kártyát többször is kiválaszthat?
- **c)** Tomi elsőre a kőr dámát, másodikra a pikk bubit, harmadikra pedig ismét a kőr dámát tippeli. Mekkora az esélye, hogy eltalálta a helyes sorrendet, ha Miki az a), illetve a b) feladatban szabott feltételekkel játszik?

17 Hány olyan hétjegyű szám alkotható a tízes számrendszerben, amely
- **a)** minden számjegyet csak egyszer tartalmaz;
- **b)** minden számjegyet csak egyszer tartalmaz és 5-tel osztható?

18 Hány olyan kilencjegyű szám alkotható a tízes számrendszerben, amely
- **a)** egy számjegyet többször is tartalmazhat;
- **b)** egy számjegyet többször is tartalmazhat és 4-gyel osztható?

19 Hány olyan négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amelynek
- **a)** minden számjegye páros?
- **b)** minden számjegye páratlan?
- **c)** az első és harmadik számjegye páros, a második és negyedik számjegye páratlan?

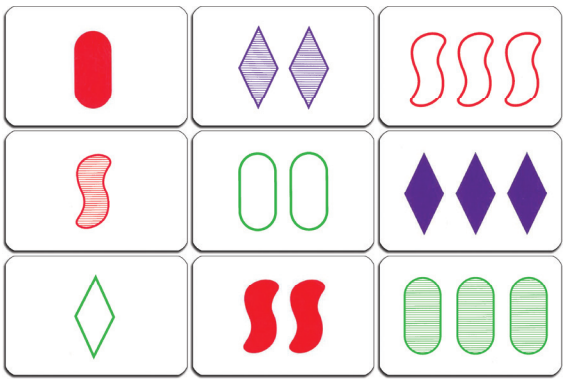
20 Hány olyan ötjegyű szám van a tízes számrendszerben, amelyben előfordul egymás után az 123 számhármas, ilyen sorrendben?

21 Hány olyan hatjegyű szám van a tízes számrendszerben, amelyben nem fordul elő a 0 számjegy, és
- **a)** minden számjegye különböző?
- **b)** egy számjegy többször is előfordulhat?

22 Egy feleletválasztós tesztben 8 kérdés van, és minden kérdésnél négy válasz, az A, B, C és D közül lehet választani.
- **a)** Hány különböző kitöltése van a tesztnek, ha minden kérdésnél megjelölünk egy betűt?
- **b)** Hány különböző kitöltése van a tesztnek, ha üresen is hagyhatjuk a kérdéseket, nem kell választ megjelölni?
- **c)** Hány olyan kitöltés van, amikor pontosan egy választ nem jelöltünk meg, és a többi hetet mind eltaláltuk?
- **d)** Hány olyan kitöltés van, amikor hét választ eltaláltunk, egyet pedig elhibáztunk?

23 Szabályos dobókockával négyszer egymás után dobunk és sorban egymás után leírjuk, hogy hányast dobtunk. Így egy négyjegyű számot kapunk.
- **a)** Hányféle számot kaphatunk?
- **b)** Melyik ezek közül a legkisebb, és melyik a legnagyobb?
- **c)** Hány olyan van ezek között, amelyben mind a négy számjegy különböző?

24 A SET nevű játék kártyáin ábrák vannak. Minden kártyán 1, 2, vagy 3 ábra van. Egy kártyán az ábrák alakja azonos, de ez lehet rombusz, ovális, vagy hullámvonal alak. Egy kártyán az ábrák színe azonos, de ez lehet háromféle: zöld, piros és lila. Az ábrák pedig egy kártyán vagy mind belül üresek, vagy mind csíkosak, vagy mind be vannak színezve. (Így egy kártyának négyféle tulajdonsága van: a rajta lévő ábrák száma, színe, alakja és színezettsége.) Hány kártyából áll a játék, ha minden lehetőség előfordul a kártyák között, de nincs két egyforma kártya?



25 Hány olyan magyar autórendszám képzelhető el a 3 betű – 3 számjegy típusú rendszámok között, amelyben minden betű és minden számjegy különböző, ha a 26 betű és 10 számjegy mindegyike használható, más megkötés nélkül?

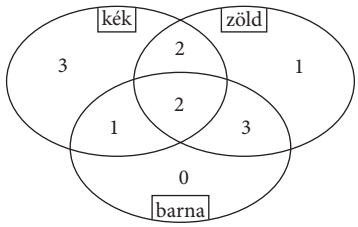
26 Hány olyan magyar autórendszám képzelhető el a 3 betű – 3 számjegy típusú rendszámok között, amelyben csak (rövid, ékezet nélküli) magánhangzó és csak páros számjegy szerepel, és más megkötés nincs?

27 Hány olyan magyar autórendszám képzelhető el a 3 betű – 3 számjegy típusú rendszámok között, amelyben mind a betűk, mind a számok úgy helyezkednek el, hogy az első és a harmadik megegyezik, a középső pedig ezektől különböző, és nincs más megkötés a rendszámra (26 betű és 10 számjegy használható)?

28 **a)** Egy 6 elemű halmaznak hány két elemű részhalmaza van?

b) Ennek a 6 elemű halmaznak hány 4 elemű részhalmaza van?

29 Rajzszakkörön a tanár a kék, a zöld, és a barna tubusokat vette elő. A diákok ez alkalommal csak ezekkel a színekkel dolgozhattak. Mindenki egy képet készített. Venn-diagramon ábrázoltuk, hány gyerek használta az adott színeket.



a) Hányan vettek részt a foglalkozáson?

b) Véletlenszerűen kiválasztottunk egy képet. Mennyi az esélye, hogy a képen van barna szín?

c) Egy véletlenszerűen kiválasztott képről látjuk, hogy nincs rajta kék. Mennyi az esélye, hogy van rajta zöld szín?

30 Egy csoportból tízen rendeltek levest, 15-en második fogást. Hatan vannak, akik mindkettőt.

a) Hányan vannak a csoportban, ha mindenki rendelt valamit, levest, második fogást vagy mindkettőt?

b) Véletlenszerűen kiválasztunk valakit, s megtudjuk róla, hogy rendelt levest. Mennyi az esélye, hogy második fogást is rendelt?

c) Véletlenszerűen kiválasztunk valakit, s megtudjuk róla, hogy csak egyfélét rendelt. Mennyi az esélye, hogy második fogást rendelt?

31 A városban három mozi működik: a Kupfer Filmszínház, a Szejli Mozi és a Bálint Odú. Mindhárom moziban 10-10 filmet játszanak a héten, de csak 3 olyan film van, amit mind a három moziban játszanak. Olyan film nincs, amit csak a Kupferben és a Szejliben játszanak, viszont összesen csak 7 olyan film van, amit csupán két mozi játszik.

a) Hány filmet játszanak összesen a városban?

b) Eldönthető-e egyértelműen, hogy hány olyan film van, amit csak a Bálint Odúban játszanak?

c) Eldönthető-e egyértelműen, hogy hány olyan film van, amit csak a Kupfer Filmszínházban játszanak?

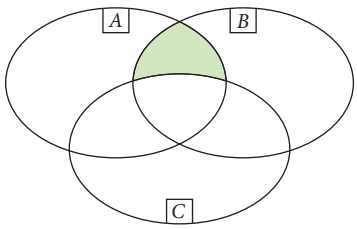
32 Az A halmaz elemei legyenek azok a négyszögek, amelyeknek van szimmetriatengelye, a B halmaz elemei pedig azok a négyszögek, amelyeknek a szemközti oldalaik párhuzamosak.

a) Milyen négyszögek alkotják az $A \cap B$ halmazt?

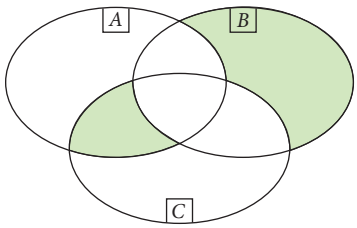
b) A C halmaz elemei legyenek azok a négyszögek, amelyeknek van derékszöge. Milyen négyszögek alkotják az $A \cap B \cap C$ és az $A \cap B \setminus C$ halmazokat?

33 Halmazműveletek segítségével add meg a lehető legegyszerűbben a Venn-diagramon zöld színnel ábrázolt halmazrészeket!

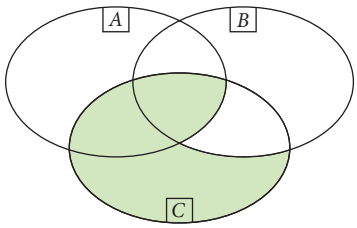
a)



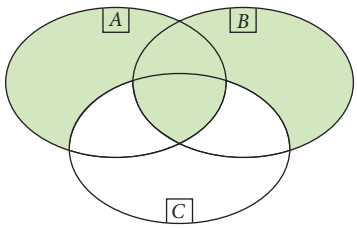
b)



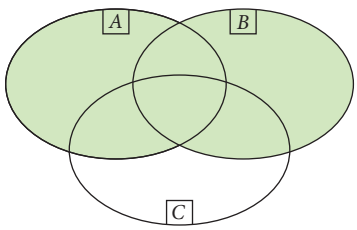
c)



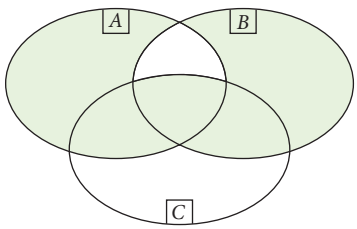
d)



e)



f)



34 Fejezd ki intervallummal, abszolút értékkel és számegyenesen jelölve azt, hogy mit jelent egy tábla csokoládé tömegére (m) nézve, ha azt olvassuk a csomagoláson: „*Nettó tömeg: 250 g ± 1 g*”.

35 Oldd meg az $|x - 3| < 7$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
A megoldást ábrázold számegyenesen és írd fel intervallumként is!

36 **a)** Oldd meg az $|-2 - x| < 10$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

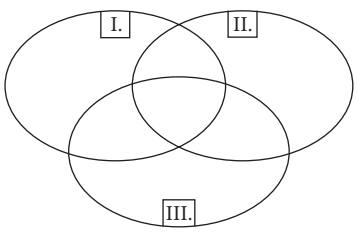
b) Legyen az A halmaz az a) feladat megoldáshalmaza, a B halmaz pedig az egyjegyű prímszámok halmaza. Elemeinek felsorolásával add meg az $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!

c) Igaz-e, hogy $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$?

37 (Érettségi feladat, 2010)
Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg: I. Diákok Hangja, II. Iskolaélet, III. Miénk a suli! Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében. A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.

a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt?

b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írd be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát!



c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt?



12 MŰVELETEK SZÁMHALMAZOKBAN

KIDOLGOZOTT FELADAT

Nagymama egy ebédküldő szolgálatnál fizet be az ebédre. Hetenként megkapja az étlapot, onnan választ kedve szerint. Holnap kell befizetni a jövő hétre. Keddre és csütörtökre az unokáival is számol. Nagymama felírja, miket akar rendelni:

Hétfő	Nyugdíjas menü (húsleves, szilvalekváros gombóc)	495 Ft	1 adag
Kedd	Zöldborsófőzelék vagdalt hússal	510 Ft	1 adag
	Sztrapacska	535 Ft	3 adag
Szerda	Nyugdíjas menü (zöldségleves, magyaros csirkemell tarhonyával)	495 Ft	1 adag
Csütörtök	Babgulyás	325 Ft	1 adag
	Somlói galuska	270 Ft	3 adag
Péntek	Kanászpecsenye párolt rizzsel	595 Ft	1 adag

Mennyit kell fizetni ezen a héten az ebédrendelésért?

Megoldás

Anya a legjobb fejszámoló. Így gondolkodik:

500 – 5
500 + 10
500 – 5
300 + 25
600 – 5
2400 + 20 = 2420.

$535 \cdot 3 + 270 \cdot 3 = (535 + 270) \cdot 3 = 805 \cdot 3 = 2415$;

2420 + 2415 = 4835 (Ft).

Tehát a heti ebédrendelés összege 4835 forint.

ELMÉLET

Ismételjük át a műveletek legfontosabb tulajdonságait!

Ha a, b és c valós számok, akkor

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	felcserélhetőség (kommutativitás)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	csoportosíthatóság (asszociativitás)
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		széttagolhatóság (disztributivitás)

Zárójelek felbontása, elhagyása

Ha csak összeadás és kivonás szerepel a műveletek között:

$12 + (7 - 9 - 16) = 12 + 7 - 9 - 16 = 19 - 25 = -6$

$12 - (7 - 9 - 16) = 12 - 7 + 9 + 16 = 37 - 7 = 30$

Ha csak szorzás és osztás szerepel a műveletek között:

$64 \cdot (7 : 32 \cdot 10) = 64 \cdot 7 : 32 \cdot 10 = 64 : 32 \cdot 7 \cdot 10 = 2 \cdot 7 \cdot 10 = 14 \cdot 10 = 140$

$64 : (10 \cdot 32 : 7) = 64 : 10 : 32 \cdot 7 = 64 : 32 \cdot 7 : 10 = 2 \cdot 7 : 10 = 14 : 10 = 1{,}4$

Összeadás (vagy kivonás) és szorzás (vagy osztás) is szerepel a műveletek között:

$12 - 3 \cdot (4 - 22) = 12 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 22 = 12 - 12 + 66 = 66$

(A zárójelet nem kötelező felbontani. Az is helyes, ha a zárójelben lévő műveletet végezzük el először.)

FELADAT

1 Számolj fejben! Írd le zárójelek használatával, milyen sorrendben végezted el a műveleteket!

a) 19,7 + 2,3 + 5,8 **c)** 19,7 + 6,8 – 2,7

b) 19,7 + 2,9 + 5,4

2 Számolj fejben! Írd le zárójelek használatával, hogyan gondolkodtál!

a) 72 + 93 + 28 **c)** 67 · 24 + 33 · 24

b) 25 · 63 · 4 **d)** 48 · 26 : 24 : 13 · 22

3 Vettem a piacon 2,5 kg krumplit, kilóját 120 forintért, 1,5 kg narancsot, amelynek szintén 120 Ft volt kilója, és vettem még 2 kg hagymát is, ennek is 120 Ft/kg volt az egységára. Mennyit fizettem összesen? Hogy lehet a leggyorsabban kiszámolni a fizetendő összeget fejben?

4 Bontsd fel a zárójeleket, majd csoportosítsd újra a műveleteket úgy, hogy fejben is könnyen kiszámítható legyen az eredmény!

a) $128 \cdot \left(\frac{3}{4} : 64\right)$ **c)** $\frac{11}{7} : \left(\frac{22}{9} : 7\right)$

b) $128 : \left(\frac{2}{5} \cdot 64\right)$ **d)** $99 \cdot \left(\frac{16}{3} : \frac{11}{4}\right)$

5 Számold ki fejben!

a) $(49{,}5 + 50{,}5) : \frac{2}{3}$ **b)** 157,2 : (0,6 · 52,4)

6 Számold ki a kifejezések értékét! Mely zárójelek hagyhatók el a műveleti jelek megváltoztatása nélkül?

a) (3,18 – 4,18) – (5,18 – 6,18)

b) ((3,18 – 4,18) – 5,18) – 6,18

c) ((14,51 – 2,51) : 6) – (3,52 – 6,52)

d) 300 : (4 · 25) · ((42 : 7) + 2)

7 Melyik az a szám, amely $\frac{2}{3}$ részének $\frac{4}{5}$-szeresét $\frac{6}{7}$-del osztva $\frac{8}{9}$-et kapunk? (Fejben is ki tudod számolni?)

HÁZI FELADAT

1 Számolj fejben! Jelezd zárójelekkel, milyen sorrendben végezted el a műveleteket!

a) 23,46 – 2,39 + 17,04 – 18,11

b) 5 · (3,56 – 4,2 + 1,64) · 20

2 Számolj fejben! Jelezd zárójelekkel, milyen sorrendben végezted el a műveleteket!

a) 27,8 + 39,7 + 22,2 + 10,3

b) 32,8 · 44,9 + 32,8 · 55,1

c) 24 : (17 · 8) · (34 : 3)

3 Melyik a nagyobb?

2,15 · 3,2 + 4,8 · 2,15 vagy (4,25 + 4,45) · (4,36 – 2,35)

4 Egy iskolában négy párhuzamos osztály van. Az *A* osztályba járó 32 tanuló $\frac{3}{8}$ része fiú, a *B* osztály 30 tanulója közül $\frac{3}{5}$ rész fiú, a *C* osztály 36 tanulója közül $\frac{5}{6}$ rész lány, a *D* osztályba járó 33 tanuló $\frac{1}{3}$ része lány. Az évfolyam hányadrésze fiú?

RÁADÁS

Valutaárfolyam

Mei Ling megtudta, hogy a szingapúri dollár (SDG) és a dél-afrikai rand (ZAR) közötti átváltási arány a következő: 1 SGD = 4,2 ZAR , ha SDG-t váltunk ZAR-ra, és 1 ZAR = 0,235 SDG, ha ZAR-t váltunk SDG-ra. Mei Ling 3000 szingapúri dollárt váltott dél-afrikai randra ezen a valutaárfolyamon.

a) Mennyi pénzt kapott Mei Ling dél-afrikai randban?
Amikor Mei Ling 3 hónap után visszatért Szingapúrba, még maradt 3900 ZAR-ja. Ezt visszaváltotta szingapúri dollárra és észrevette, hogy a valutaárfolyam megváltozott: 1 SGD = 4,0 ZAR.

b) Mennyi pénzt kapott Mei Ling szingapúri dollárban?

c) Kedvezett-e Mei Lingnek, hogy a valutaárfolyam 4,2 ZAR helyett 4,0 ZAR lett, amikor dél-afrikai randját visszaváltotta szingapúri dollárra? Válaszodat indokold!

13 SZÁMOLÁS TÖRTEKKEL

BEVEZETŐ – ISMÉTLÉS

Törtek összeadása és kivonása $\frac{7}{9}+\frac{3}{2}=\frac{14}{18}+\frac{27}{18}=\frac{41}{18}$ $\frac{7}{9}-\frac{3}{2}=\frac{14}{18}-\frac{27}{18}=-\frac{13}{18}$	Először közös nevezőre hozzuk a törteket, azután végezzük az összeadást vagy a kivonást a számlálókkal.
Tört szorzása egész számmal $\frac{3}{4}\cdot 5=\frac{15}{4}$	A számlálót szorozzuk az egész számmal, a nevező változatlan marad.
Tört osztása egész számmal $\frac{3}{4}:5=\frac{3}{20}$ $\frac{35}{4}:5=\frac{7}{4}$	A nevezőt szorozzuk az egész számmal, a számláló változatlan marad. VAGY (ha lehet) A számlálót elosztjuk az egész számmal, a nevező változatlan marad.
Tört szorzása törttel $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{21}$	A számlálót szorozzuk a számlálóval, a nevezőt szorozzuk a nevezővel.
Osztás törttel $5:\frac{3}{4}=5\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$ $\frac{2}{7}:\frac{5}{3}=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$	Az osztó reciprokával szorozzuk az osztandót.

Tört egyszerűsítése

A tört számlálóját és nevezőjét egyszerre elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.

Például

$\frac{915}{48}=\frac{305}{16}$ (itt 3-mal egyszerűsítettünk)

Tört bővítése

Egy tört számlálóját és nevezőjét egyszerre megszorozzuk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal.

Például

$\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$ (itt 3-mal bővítettünk)

Ezen eljárások során a tört értéke nem változik.

FELADAT

1 Egyszerűsítsd a következő törteket!

$\frac{44}{32}$; $\frac{56}{28}$; $\frac{210}{60}$; $\frac{13\,500}{9500}$

2 Végezd el a műveleteket! Ahol lehet, egyszerűsíts!

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{7}{6}-\frac{6}{7}\right)$ b) $\frac{10}{7}:\frac{12}{17}\cdot\frac{42}{5}:\frac{34}{9}$

3 Számold ki az emeletes tört értékét!

a) $\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=$ b) $\frac{1+\frac{2}{3}}{3-\frac{5}{6}}=$

ELMÉLET

Számok reciproka

Egy nullától különböző x valós szám **reciproka** az a valós szám, mellyel az x-et megszorozva 1-et kapunk. Az x szám reciproka $\frac{1}{x}$. Például: 3 reciproka $\frac{1}{3}$, a 0,4 reciproka 2,5, hiszen $1 : 0{,}4 = 2{,}5$, valamint $0{,}4 \cdot 2{,}5 = 1$.

Közönséges tört reciprokát úgy kapjuk, hogy a számlálót és a nevezőt felcseréljük. Például: $\frac{3}{5}$ reciproka $\frac{1}{\frac{3}{5}} = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

A zsebszámológépeken a következő billentyűk adják meg egy szám reciprokát: $\frac{1}{x}$ vagy x^{-1}. A számológép azonban sokszor csak közelítő eredményt ad meg.

Számok törtrésze

Egy szám $\frac{2}{7}$ részét úgy számoljuk ki, hogy a számot megszorozzuk $\frac{2}{7}$-del. $\frac{2}{7}$ rész = $\frac{2}{7}$-szeres.

Például: 28-nak a $\frac{2}{7}$ része $28 \cdot \frac{2}{7} = 8$. A 45-nek a $\frac{4}{9}$ része $45 \cdot \frac{4}{9} = 20$.

FELADAT

4 Számold ki a kifejezések értékét! Mely zárójelek hagyhatók el a műveleti jelek megváltoztatása nélkül? (Próbáld meg fejben kiszámolni!)

a) $\left(6 - 3 \cdot \frac{5}{6}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)$ b) $12 \cdot \left(\frac{1}{7} : \frac{3}{14}\right) : \frac{4}{5}$

c) $\frac{4}{3} \cdot \left(16 - 2 \cdot \left(5 + \frac{3}{2}\right)\right)$

5 A cukrászsiskola vizsgájára előkészítettek 2,5 kg mazsolát. Ennek $\frac{1}{12}$ részét Klári dolgozza fel, majd Andi kapja a maradék $\frac{3}{11}$ részét. Ami még ezután maradt, annak az $\frac{1}{4}$ részét Zsolt használja fel, amit ő hagyott, annak a $\frac{2}{3}$ része kell Emese tortáihoz. Hányadrésze maradt meg a mazsolának?

6 A kétjegyű számokban az azonos jelek azonos számjegyeket jelentenek. Melyik számjegyet helyettesítik a jelek?

a) $\left(\frac{17}{2\forall} + \frac{19}{6\forall}\right) \cdot \frac{3\forall}{5\forall} = \frac{7}{1\forall}$

b) $\frac{\partial}{5} : \left(\frac{2}{\partial 5} + \frac{1\partial}{21}\right) = \frac{6\partial}{71}$

7 Összeöntöttünk három oldatot. Az egyik oldat $\frac{2}{5}$ része volt ecetsav, a többi víz. A másik oldat $\frac{1}{10}$ része volt ecetsav, a többi víz. A harmadiknak $\frac{2}{3}$ része volt ecetsav a többi víz. Az elsőből 1,5 liter, a másodikból 2,5 liter, a harmadikból 6 deciliter oldatunk volt. A kapott oldatot még hígítottuk 1,4 liter vízzel. Hányadrésze lett ecetsav a végső oldatnak?

HÁZI FELADAT

1 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{11}{15} - \frac{13}{35}$

b) $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{24}{5} + \left(\frac{7}{20} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{30}{7}$

c) $\left(\frac{11}{6} - \frac{3}{8}\right) : \frac{16}{21} - 20 \cdot \left(\frac{13}{20} - \frac{5}{12}\right)$

2 Számold ki a kifejezések értékét! Mely zárójelek hagyhatók el?

a) $\left(8 - 8 \cdot \frac{7}{4}\right) - \left(5{,}5 - \frac{11}{2}\right)$

b) $1{,}1 \cdot \left(\frac{1}{9} : \frac{11}{35}\right) : \frac{7}{18}$

c) $\frac{4}{34} \cdot \left(6{,}5 - 2 \cdot \left(\frac{17}{6} + \frac{13}{4}\right)\right)$

3 3,7 liter oldat $\frac{1}{10}$ része vegyszer, a többi víz. 2,3 liter oldat $\frac{2}{15}$ része ugyanaz a vegyszer, a többi víz. Összeöntjük a két oldatot. Hányadrésze lesz vegyszer, és hányadrésze víz?

14 RACIONÁLIS ÉS IRRACIONÁLIS SZÁMOK

ELMÉLET

Definíció: Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, **racionális számok**nak nevezzük. (Az osztó természetesen nem lehet nulla.)
A racionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}$.

Az egész számok is racionális számok, mert felírhatók két egész szám hányadosaként, pl. $-5 = -\frac{15}{3}$.

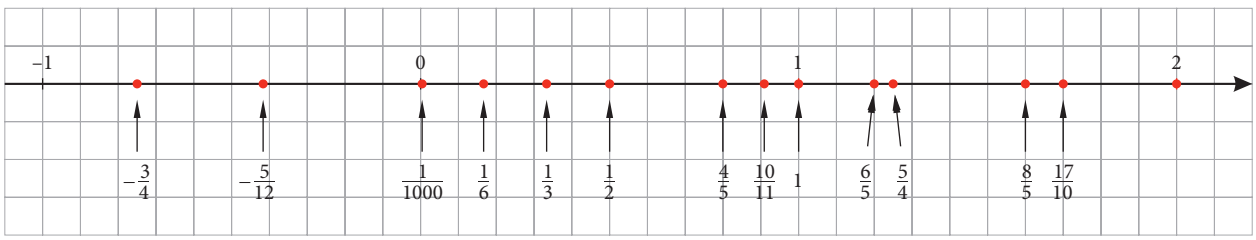
A racionális számok felírhatók közönséges **tört alak**ban, pl. $\frac{2}{3}; -\frac{7}{4}$.

A racionális számok felírhatók **tizedes tört alak**ban is:

- ha a számláló többszöröse a nevezőnek, akkor egész számként;
- ha nem többszöröse, akkor **véges tizedes tört** vagy **végtelen szakaszos tizedes tört** alakban.
- ha a lehetséges egyszerűsítések után a tört nevezőjének prím osztói között szerepel más prím, mint a 2 és az 5, akkor végtelen szakaszos tizedestört; ha nem szerepel más prím, akkor véges tizedes tört.

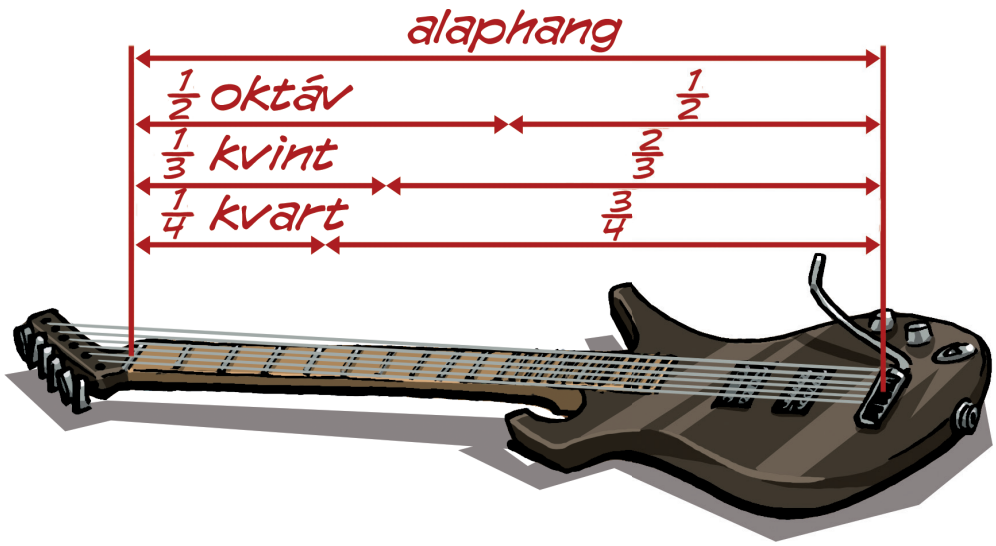
  Például: $\frac{7}{4} = 1{,}75$; $\frac{23}{37} = 0{,}621621621\ldots = 0{,}\dot{6}2\dot{1}$.

Minden racionális számnak megvan a helye a számegyenesen, de ezek nem töltik ki a teljes számegyenest.



Műveletek racionális számokkal

- Racionális számok összege, különbsége, szorzata mindig racionális.
- 0-tól különböző osztó esetén két racionális szám hányadosa is mindig racionális.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Írd fel két egész szám hányadosaként az 5,378 véges tizedes törtet!

Megoldás: $5{,}378 = 5\frac{378}{1000} = \frac{5378}{1000}$

FELADAT

1 Melyik szám tizedes tört alakja véges, melyiké végtelen?

a) $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{-5}{6}$; $\frac{9}{-6}$; $\frac{10}{6}$

b) $\frac{23}{25}$; $\frac{39}{15}$; $\frac{-43}{125}$; $\frac{35}{20}$; $\frac{100}{160}$; $\frac{-5}{9}$

2 Kösd össze az egyenlőket! Van olyan szám, amelyiknek nincs párja. Ezt írd fel más alakban!

$3\frac{2}{5}$ $\quad \frac{225}{100}$ $\quad 1{,}8\dot{3}$ $\quad \frac{68}{20}$ $\quad \frac{34}{10}$ $\quad \frac{11}{6}$

$\frac{9}{4}$ $\quad 3{,}4$ $\quad 2\frac{1}{4}$ $\quad 1\frac{5}{6}$ $\quad 2{,}25$ $\quad \frac{17}{6}$

3 Írd fel közönséges tört alakban a tizedes törteket, majd végezd el a műveleteket!

a) $\left(3{,}5 - \frac{2}{3}\right) \cdot 0{,}25$ **b)** $\left(0{,}01 + \frac{1}{7}\right) : 1{,}07$

4 Egy utazó a 120 km-es út első hatodát biciklin tette meg. Ott elromlott a biciklije, egy teherautó visszavitte a 2 km-rel korábban látott szervizbe. Sajnos ott kellett hagynia a biciklijét, ezért tömegközlekedéssel folytatta útját. A hátralévő út $\frac{5}{12}$ részén autóbusszal utazott. Másfél kilométert gyalogolt tovább előre a vasútállomásig, majd a hátralévő út felét vonattal tette meg. Hány kilométerre volt ekkor a céljától?

5 Igazak-e a következő állítások?

a) Ha egy tört nevezője osztója az 1000-nek, akkor annak a törtnek a tizedes tört alakja véges.

b) Ha egy tört tizedes tört alakja véges, akkor a nevezője osztója az 1000-nek.

c) Ha egy tört nevezője osztója a 10 valamelyik hatványának, akkor annak a törtnek a tizedes tört alakja véges.

d) Ha egy tört tizedes tört alakja véges, akkor annak a törtnek a nevezője osztója a 10 valamelyik hatványának.

ELMÉLET

Elképzelhető-e olyan végtelen tizedes tört, amely nem szakaszos?
Hogyne! Ilyen számot kapunk például, ha mindig eggyel több 0-t írunk az 1-esek után:
0,1**01 001 000** 1**00 001 000 001 00**…,
vagy ha a tizedesvessző után növekedő sorrendben felsoroljuk a természetes számokat:
6,012 345 678 910 111 213 141 516 171 819 202 122 23….
Az ilyen számok **nem lehetnek racionális számok**, hiszen a racionális számok egész szám, véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban írhatók fel.
A végtelen nem szakaszos tizedes törtek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

Definíció: Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, **irracionális számok**nak nevezzük. Az irracionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}^*$.

Minden irracionális számnak megvan a helye a számegyenesen. A racionális és irracionális számok együtt töltik ki a számegyenest.
A valós számok halmazának jele: $\mathbb{R}$. Tehát $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$ és $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$.

HÁZI FELADAT

1 Írd fel két egész szám hányadosaként!
4,71; –0,12; –0,00035

2 Írd fel tört alakban a tizedes törteket, majd végezd el a műveleteket!

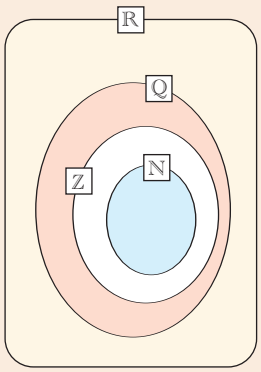
a) $\left(\frac{2}{3} - 2{,}5\right) : 1{,}1$ **b)** $\left(\frac{5}{11} - 0{,}07\right) : 4{,}23$

3 Gábor és Pali 56 km-re laknak egymástól. Elhatározták, hogy találkoznak. Gábor felajánlotta, hogy elindul biciklivel, és az út $\frac{2}{5}$ részénél található pihenőnél megvárja barátját. Pali inkább tömegközlekedéssel megy. A lakásától a pihenőig tartó út $\frac{19}{20}$-át meg tudja tenni autóbusszal. Hány km-t kell gyalogolnia?

4 Helyezd el a színes halmazábrán a következő számokat! A füzetedben dolgozz!

a) –6; $\frac{2}{3}$; 19 928; 0; –0,775

b) $-6 \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{5}{7} + \frac{9}{7}$; 28 : (–4); –21 : (–7)



RÁADÁS

1. **A számok írása**

A ma használatos helyiértékes számírásunk indiai eredetű. Indiából perzsa közvetítéssel jutott el az arabokhoz, akiktől a X. század folyamán jutott el Spanyolországba, majd Európa más részeire. Innen erednek az „arab számírás”, „arab számjegyek” elnevezések.

Elterjedésének nagy lendületet adott a XV. században a könyvnyomtatás feltalálása, első magyarországi felbukkanása is erre az időszakra tehető.

A korábban elterjedt római számokkal szemben újdonság volt a 0 önálló számként való megjelenése és a helyi értékek használata, ami lehetővé tette, hogy összesen tíz jel (0, 1, 2, …, 9) használatával gyakorlatilag bármelyik természetes számot ábrázolni lehessen. A helyi értékes írásmód a műveletek elvégzését is jelentősen egyszerűsítette.

2. Kompetenciamérések feladatai alapján

a) (2004) Egy autó fogyasztásán a 100 km hosszú út megtétele során elhasznált üzemanyag mennyiségét értjük. Kováts úr szeretné figyelemmel követni az autója benzinfogyasztását, ezért a benzinkútnál felírja a kilométeróra állását és azt, hogy mennyi benzint tankolt az adott napon. Mindig teletankolja az autóját.

Dátum	A kilométeróra állása	A tankolt benzin mennyisége (liter)
márc. 31.	12 638	36
ápr. 10.	13 191	36
ápr. 19.	13 797	37
ápr. 25.	14 297	36
máj. 5.	14 525	17

Számítsd ki az autó fogyasztását az egyes időszakokban! Töltsd ki a táblázatot!

Időszak	Fogyasztás (liter/km)
márc. 31. – ápr. 10.	
ápr. 10.- ápr. 19.	
ápr. 10. – máj 5.	

b) (2016) Péter bankkártyával szokott vásárolni. Minden vásárlás után SMS-t kap a vásárlás összegéről és arról, menynyit költött összesen az adott hónapban. Péter épp külföldön tartózkodik, és egy boltban vásárol. A következő SMS-t kapja:
01.20. 11:30

Vásárlás összege: 8,5 euró. A hónapban felhasznált összeg: 53 450 Ft.

Péter megnézte az előző vásárláskor kapott SMS-ét, abban ez állt:
01.16. 16:51

Vásárlás összege: 12 560 Ft. A hónapban felhasznált összeg: 50 730 Ft.

Hány forintot számolt a bank 1 euróért, ha a két vásárlás között nem változott a számlán lévő összeg?

c) (2006) Péter Londonból hazafelé jövet a repülőgépen a következőket olvasta a Times című újság sportrovatában: „Jonathan Edwards angol atléta a Göteborgban zajló világbajnokságon kereken 60 lábra javította a hármasugrás világcsúcsát. A korábbi világcsúcsot szintén Edwards tartotta 58 láb és $4\frac{3}{4}$ inch-es eredménnyel."
Péter tudta, hogy 1 láb = 12 inch, és ennek alapján sikerült kiszámítania, hogy Edwards mennyivel javította meg saját korábbi rekordját. Melyik eredményt kapta a következők közül?

1 láb $5\frac{1}{4}$ inch 1 láb $7\frac{1}{4}$ inch 7 láb $\frac{1}{4}$ inch 1 láb $4\frac{3}{4}$ inch

EMELT SZINT

1. Figyeld meg a következő műveletet! $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3}$.
Hasonló módon írd fel két különböző nevezőjű tört különbségeként! $\frac{18-13}{18\cdot 13}$

2. Határozd meg a kifejezés értékét számológép használata nélkül: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$!

3. Az ókori Egyiptomban a 0 és 1 közötti racionális számokat olyan különböző törtek összegeként adták meg, melyek számlálója 1, nevezője egy pozitív egész szám. Például: $\frac{29}{40}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$. Azokat a törteket, melyeknek a számlálója 1, nevezője egy pozitív egész szám, egyiptomi törteknek nevezik.
Írd fel különböző egyiptomi törtek összegeként a következő számokat! $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{24}$

15 KIT CSAPNAK BE A SZÁMOK?

BEVEZETŐ

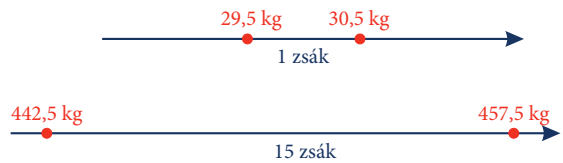
Az iskolai konyhára egy megbízható gazdától vásároltunk burgonyát. 15 zsákkal vettünk, zsákonként 30 kg-ot. Bevezették a raktárkönyvbe: „450 kg burgonya”. A raktáros ellenőrizni akarta a mennyiséget, megmérte együtt a 15 zsákot. A mérleg 456 kg-ot mutatott. Vajon a gazda tévedett a zsákok mérésénél?

Megoldás

A mérési eredmények közelítő értékek. Ha nem közlik a mérés pontosságát, akkor a 30 kg-ot tekinthetjük kerekített értéknek, ami azt jelenti, hogy a tömeg 29,5 kg és 30,5 kg közötti érték.

Mennyi tehát a 15 zsák együttes tömege?

Legalább $29{,}5\text{ kg} \cdot 15 = 442{,}5\text{ kg}$, és legfeljebb $30{,}5\text{ kg} \cdot 15 = 457{,}5\text{ kg}$.



Ha a 15 zsák burgonya tömege 442,5 kg és 457,5 kg közötti érték, akkor lehetséges, hogy mindegyik zsáknak 30 kg a (kg-okra kerekített) tömege.

Nem a gazda tévedett, hanem az, aki azt hitte, hogy a 15 zsák együtt pontosan 450 kg-ot nyom!

FELADAT

Használd a saját számológépedet!

1 Megmértük a lakás egyik szobájának a hosszát: 435 cm, és a szélességét: 405 cm. Hány m^2 lehet a szoba alapterülete, ha

a) a méréshez mérőszalagot használtunk, így a hosszmérésnél ± 2 cm körüli hibát követhettünk el?

b) a méréshez iskolai vonalzót használtunk (30 cm-es hosszúságú), így a mérésnél ± 5 cm hibát követhettünk el?

2 Egy eladó lakás egyik szobájának méretei a hirdetés szerint 5,2 m × 4,5 m. A lakás négyzetméterét 250 ezer forintért kínálják. „Mennyit érhet” ez a szoba, ha a vételárat csak tízezer forintra kerekítve van értelme megadni?

3 Zsuzsa kerékpározik. A kerékpárra szerelt digitális óra szerint a megtett távolság 3,8 km, az átlagsebesség pedig 16,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. (A digitális óra a távolságot a biciklikerék kerületéből számolja. Ezt a kerületet a kerékpárosnak kell megmérnie, majd beírnia az óra setup [beállító] programjában. A sebességet az óra a megtett útból és az eltelt időből számítja ki.)

a) Hány percig tartott Zsuzsa útja?

b) Bence számológéppel gyorsan kiszámította, hogy Hajni 814,2857143 másodperc alatt tette meg a 3,8 km-es távolságot. Mit gondolsz erről a kijelentésről?

4 Öten beültek egy autóba. Egyikük szerint az ő „súlya” (tömege) 67,8 kg, másikuk szerint az ő saját „súlya” (tömege) 73,4 kg, a többi három szerint az ő tömegük pontosan 79,3 kg. Mit mondhatunk az öt ember együttes tömegéről, ha a tömegméréshez használt mérlegek mérési pontossága $\pm 1\%$?

5 Fizikaórán egy fémkocka sűrűségét kellett kiszámítani, és azt $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ egységben megadni. Bence a kocka élét 15 mm-nek, a kocka tömegét pedig 9 grammnak mérte. A távolság mérésekor $\pm 0{,}5$ mm lehetett a hiba, a tömegmérésnél $\pm 0{,}1$ gramm. A számolást Bence számológéppel végezte. Mit írhat mérési eredményként a jegyzőkönyvébe?

ELMÉLET

Számok kerekítése

Ha az első elhagyott számjegy 5 vagy 5-nél nagyobb, akkor felfelé kerekítünk, ha 5-nél kisebb, akkor lefelé.

A 3,1506 ezredekre kerekítve 3,151, századokra kerekítve 3,15, tizedekre kerekítve 3,2, egyesekre kerekítve 3, tízesekre kerekítve 0.

Kerekített számok összeadásakor először elvégezzük az összeadást, majd az összeget a legnagyobb helyi értékű kerekített számjegynek megfelelően kerekítjük.

Például: 42,769 + 108,2 + 0,219 + 0,8983 = 152,0863 ≈ 152,1. A tagok között a 108,2-ben volt a legnagyobb helyi értékű kerekített számjegy, ezért az összeget ehhez „igazítottuk”.

FELADAT

6 Végezd el a műveleteket zsebszámológéppel, majd az eredményt kerekítsd 2 tizedesjegy pontosságra!

a) $(12{,}456 - 3{,}012) \cdot 2$

b) $\dfrac{48{,}52 + 32{,}71}{3{,}22}$

c) $4{,}65^2$

d) $0{,}034 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9}$

7 (Kompetenciamérés, 2013) Rolandnak egy évben 26 nap fizetett szabadság jár a munkahelyén. Augusztus 1-jén új munkahelyen kezd dolgozni, ahová az éves szabadságának csak a hátralévő hónapok számától függő időarányos részét viheti magával. Ha az így kapott napok száma nem egész, akkor azt az értéket a matematika szabályai szerint egész számra kerekítik.

Hány nap szabadsága lesz Rolandnak az új munkahelyén ebben az évben?

HÁZI FELADAT

1 Egy téglalap alakú telek egyik oldalát 13,2 m-nek, másik oldalát 24,5 m-nek mértük. Mekkora lehet a téglalap valódi területe? (Tegyük fel, hogy a telek valóban téglalap alakú!)

2 Az alábbi részlet egy digitális fogyasztásmérő és költségellenőrző készülék leírásából való.

„Üzemi feszültség 230 V ±10%; hatásos teljesítménymérési tartomány: 10–3000 W között; pontosság ±5%.”

a) Mekkora az a legkisebb, illetve legnagyobb üzemi feszültség, amelyen a készülék üzemeltethető?

b) A készülék azt jelzi, hogy a pillanatnyi teljesítmény 1480 W (watt). Hány watt lehet a teljesítmény valódi értéke a leírás szerinti pontossággal számolva?

3 A kerékpár digitális órája azt jelzi, hogy Hajni 1 óra 27 percet kerékpározott és 18,7 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ volt az átlagsebessége. Mindkét érték utolsó számjegye kerekített. Számold ki, hány km a legkevesebb, illetve legtöbb, amelyet Hajni megtehetett a kerékpárjával!

16 ARÁNYOSSÁG

BEVEZETŐ

A villanyóra felirata szerint 1 kilowattóra elektromos energia elfogyasztása esetén a mérőóra korongja 600-szor fordul körbe.



a) Hányszor fordul körbe a korong egy hónap alatt, ha a villanyszámla szerint 192 kWh (kilowattóra) volt az elektromosenergia-fogyasztás?

b) Mekkora elektromosenergia-fogyasztás tartozik a korong 1,5 millió fordulatához?

Megoldás

a) 192-szer annyi energia elfogyasztásához 192-szer annyi fordulat tartozik, tehát $192 \cdot 600 = 115\,200$ fordulat.

b) Az 1,5 millió fordulat $\frac{1\,500\,000}{600} = 2500$-szorosa a 600 fordulatnak. Ezért 2500-szor annyi energiafogyasztás tartozik hozzá, mint a 600 fordulathoz, azaz 2500 kWh.

ELMÉLET

Egyenes arányosság

Definíció: Akkor mondjuk, hogy **két mennyiség egyenesen arányos**, ha teljesül, hogy ahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiszorosára változik a másik.
Egyenesen arányos mennyiségeknél az összetartozó értékpárok *hányadosa* (aránya) egyenlő.

FELADAT

1 Egyik energiatakarékos izzónk naponta átlagosan 4,5 órán keresztül működik, eközben 36 Wh (wattóra) energiát fogyaszt.

a) Ha csak ez az egy izzó működik, akkor hányat fordul a mérőóra korongja a 4,5 óra alatt?

b) Mennyi az izzó fogyasztása 24 órás működés esetén?

2 A folyón lefelé halad egy motoros hajó, állandó sebességgel. Percenként 52 m-t tesz meg. A folyón felfelé viszont egy motorcsónak halad, ugyanúgy állandó sebességgel, és percenként 34 m-t tesz meg.

a) Milyen messze kerültek egymástól, ha 1 perc telt el azóta, hogy találkoztak?

b) A találkozástól számítva mennyi idő telt el, ha 7,5 km-re vannak egymástól?

3 (Kompetenciamérés, 2015)
Egy cég egyhavi vízdíja 18 693 Ft volt. Ebből 3436 Ft az alapdíj, a többi a vízfogyasztással arányosan fizetendő díj.
Hány m^3 vízfogyasztást tartalmaz a számla, ha a víz díja 803 $\frac{Ft}{m^3}$?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy újságcikkből vett idézet:
„…az úgynevezett előfizetéses, vagy más néven mágneskártyás gázóra. Ennek az a lényege, hogy a fogyasztó előre kifizetne egy bizonyos összeget, amelyet egy mágneskártyán írna jóvá a szolgáltató. Amikor elfogy a kártyán lévő összeg, akkor megszűnik a szolgáltatás. Éppúgy, mint a kártyás telefonok esetében…”

Ha a gáz köbmétere 200 tallér, akkor a „gázkártya” 140 köbméter gáz felhasználását engedi meg. Hány köbméter gázt használhatnánk fel ugyanezzel a kártyával 250 talléros köbméterenkénti ár mellett?

Megoldás
A gázkártya értéke az elfogyasztható gázmennyiség és a gáz egységárának szorzata (28 000 tallér). Ez a feladat szövege szerint nem változott meg, ezért ha a gáz ára $\frac{250}{200} = 1{,}25$-szorosára nőtt, akkor csak $140 : 1{,}25 = 112$ köbméter gázt tudunk felhasználni.

ELMÉLET

Fordított arányosság

Definíció: Akkor mondjuk, hogy **két mennyiség fordítottan arányos**, ha teljesül, hogy ahányszorosára nő az egyik mennyiség, annyiad részére csökken a másik, illetve ahányad részére csökken az egyik, annyiszorosára nő a másik.
Fordítottan arányos mennyiségeknél az összetartozó értékpárok *szorzata* egyenlő.

FELADAT

4 Egy család költségvetésében mindig ugyanakkora összeg szerepel a havi benzinköltség mellett. A benzin literje eddig 30 tallér volt, így 135 litert tudtak egy hónapban megvenni. Árváltozás miatt a benzin ára
a) 27; **b)** 33
tallér lett. Hány liter benzint vehet a család a havi benzinpénzből az árváltozás után?

5 Ha a tervezett üdülés napi költsége 7500 forint, akkor a félretett pénzünkből hat napig pihenhetünk. Hány napos üdülésre elegendő ugyanennyi pénz, ha a napi költség 11 250 forint?

HÁZI FELADAT

1 Ha 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel tervezzük az utunkat a nyaralás helyszínére, akkor 12 órát kell autóznunk. Mennyi ideig tartana az utazás, ha sikerülne 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel megtenni az utat?

2 Energiatakarékos izzókat szeretnénk vásárolni. Többféle is van a kiválasztott teljesítményűek között. Az X típusból 9 darabot vehetünk a vásárlásra szánt összegből.
Hány darabot vehetünk ugyanekkora összegért abból a típusból,
a) amelynek darabja 1,5-szer annyiba kerül, mint az X típusú;
b) amely darabjának ára csak háromnegyede az X típusú darab árának?

3 Van-e egyenes vagy fordított arányosság a következő esetekben az egyes mennyiségek között:
a) a lakásban lévő izzók (villanykörték) száma és a havi villanyszámla összege;
b) a piac egyik árusától vásárolt krumpli tömege és az érte fizetett pénz;
c) az internetezésre fordított idő és a megszerzett tudás?

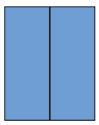
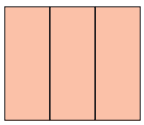
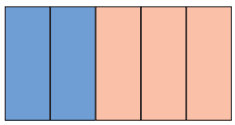
17 ARÁNYOS OSZTÁS

KIDOLGOZOTT FELADAT

Apának, Katinak és Zolinak egy 150 négyszögöl nagyságú területet kell felásniuk. Úgy tervezik, hogy mindhárman ugyanannyi ideig dolgoznak. Fél óra alatt Zoli másfélszer akkora résszel végez, mint Kati, Apa pedig akkora területet ás fel, mint a két gyerek együttvéve. Kire hány négyszögölnyi terület jut?

Megoldás

A fél óra alatt felásott területek:

Kati: 2 rész  Zoli: 3 rész  Apa: 5 rész 

A 150 négyszögölet fel kell osztani 2 : 3 : 5 arányban: 2 + 3 + 5 = 10, ezért a 150 négyszögölet 10 egyenlő részre osztották, 2 részt kapott Kati, 3 részt Zoli, 5 részt Apa.

150 : 10 = 15, ezért

Kati része: 2 · 15 négyszögöl = 30 négyszögöl,
Zoli része: 3 · 15 négyszögöl = 45 négyszögöl,
Apa része: 5 · 15 négyszögöl = 75 négyszögöl.

ELMÉLET

Arányos osztás

Ha egy A mennyiséget adott arányok szerint kell több személy között szétosztanunk, akkor az A mennyiséget elosztjuk az arányszámok összegével, így megkapunk egy részt; mindegyik személy annyi részt kap, amennyit az ő arányszáma mutat.

Például a 2 : 3 : 5 esetben az arányszámok összege 2 + 3 + 5 = 10.

FELADAT

1 Az elkészült nyerstészta tömege 1,8 kg. A liszt, a zsiradék, valamint az egyéb adalékanyagok tömegének aránya 6 : 2 : 1. Mennyi lisztet, zsiradékot és egyéb összetevőt tartalmaz a tészta?



2 Két szám aránya 3 : 5. Melyik ez a két szám, ha
a) összegük 1500;
b) szorzatuk 1500?

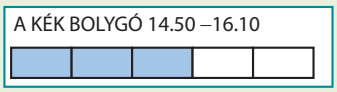
3 (Kompetenciamérés alapján, 2013)
A mozi büféjében a következő akciót hirdették.

PÁROS MENÜ		csak 1680 Ft
ÜDÍTŐ	+	POPCORN
3 dl + 5 dl		1,5 l + 2,5 l

Hogyan ossza el két barátnő a Páros menü árát, ha egyikük mind az üdítőből, mind a kukoricából a kisebbet választotta, és mindenki a rá eső részt fizeti?

4 (Kompetenciamérés, 2013)
Klára a konyhája falát lila színűre szeretné festeni. A lila festéket három színből: kékből, pirosból és sárgából keverik ki számára. A keverékben a kék, piros és sárga színek aránya 4 : 5 : 1.
A raktárban 6 liter kék, 9 liter piros és 2 liter sárga festéket találtak. Legfeljebb hány liter lila színű festéket lehet kikeverni a raktárban lévő készletekből?

5 (Kompetenciamérés, 2012)
Egy televízió információs oldala a filmek kezdési és befejezési időpontja mellett azt is mutatja, hogy az épp futó film hányad részénél tart.



Ha a fenti képet látjuk az információs oldalon, hány perc van még hátra a filmből?

6 Egy 4 napos kirándulás során első nap megtettük a teljes táv $\frac{1}{5}$-öd részét. A következő három napon megtett távok aránya 5 : 4 : 3.
Mekkora távokat tettünk meg az egyes napokon, ha a teljes táv 72 km?

HÁZI FELADAT

1 (Kompetenciamérés, 2016)
Miklós interneten tölt ki egy kérdőívet. Az ábrán szürke szín jelzi, hogy a kérdések hányadrészét töltötte ki.



Hány kérdés van még hátra, ha eddig 15 kérdésre felelt?

2 Anya csalamádét készít, melyben a paprika, az uborka és a káposzta aránya 2 : 2 : 3.
a) Mennyi káposztára van szükség, ha 5 kg uborka kerül bele?
b) Mennyi káposztára van szükség, ha összesen 10,5 kg a hozzávaló zöldségek együttes tömege?

3 Egy család havi nettó bevétele 276 ezer forint. Az étkezésre, lakhatási költségekre, számlákra, valamint egyéb kiadásokra fordítható összegek aránya rendre 10 : 4 : 3 : 6. Hány forintot lehet költeni az egyes kiadási tételekre?

4 Két szám aránya 5 : 6. Melyik ez a két szám, ha
a) összegük 110;
b) szorzatuk 120;
c) különbségük 130?

RÁADÁS

1. Szende és Vidor egy kör alakú pályán, egymással szemben futva edzést tartanak. Nem egyszerre indulnak: amikor Vidor elindul a starthelyről, akkor Szende már a pálya $\frac{1}{10}$-ét megtette. Amikor Vidor megteszi a pálya $\frac{3}{7}$-ét, akkor szembetalálkozik Szendével. Ekkor Vidor rákapcsol. Hányszorosára kell növelnie a sebességét, hogy Szendével egyszerre érjen vissza a kiindulási pontba?

2. (Kompetenciamérés, 2012)
A hajózásban a sebességet nem km/órában, hanem csomóban mérik. A csomó az egy óra alatt megtett tengeri mérföldek száma (1 tengeri mérföld = 1852 m).
Hány km/óra sebességgel halad az a hajó, amelynek hajózási sebessége 18 csomó?

Ráadás

ARÁNYOSSÁGOK A BICIKLI KÖRÜL

BEVEZETŐ

Ma már szinte minden kerékpáron „szériatartozék” a sebességváltó. De hogyan is működik valójában, és hány „sebességes” egy átlagos bicikli?



A kerékpár haladási sebessége adott méretű keréknél attól függ, hogy hányat fordul a kereke 1 másodperc alatt. Ha nem csúsznak a kerekek, akkor az első kerék ugyanannyit fordul, mint a hátsó. A hátsó kerék pedig annyit fordul, ahányat az a hátsó fogaskerék, amelyen a biciklilánc fut éppen. A hátsó fogaskerék fordulatszáma pedig attól függ, hogy hány fog van az első (hajtó) és hány a hátsó (hajtott) fogaskeréken.



Ha például a lánc olyan első fogaskeréken fut, amelynek 24 foga van, akkor a fogaskerék **egy körülfordítása alatt** a lánc 24 szemet halad. Ha ez a lánc egy 24 fogú hátsó fogaskeréken fut, akkor a 24 láncszem azon is pontosan egyet fordít.



KIDOLGOZOTT FELADAT

27"-os (27 colos; 1 col kb. 2,54 cm) kerekű kerékpáron ülve másodpercenként 1 teljes fordulatot tekerünk a pedállal, azaz az első fogaskerék másodpercenként egy teljes fordulatot végez. A lánc a 24 fogú első és az ugyancsak 24 fogú hátsó fogaskeréken fut. Mekkora sebességgel haladunk?

Megoldás

Mivel a két fogaskerék egyforma nagy, a pedál egy körülfordítása alatt a hátsó kerék is egyet fordul. Így a kerékpár 1 másodperc alatt akkora utat tesz meg, amekkora a 27" átmérőjű kerék kerülete, azaz $27" \cdot \pi \approx 215$ cm-t. A kerékpár sebessége tehát

$$2{,}15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}15 \cdot 3{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 7{,}7 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A kerékpár sebessége attól függ, hányat fordul a **hátsó** fogaskereke másodpercenként.

Hogyan lehetne növelni a bicikli sebességét, miközben a pedálozás tempója állandó marad?

Első módszer

Szereljünk előre nagyobb fogaskereket! Ha pl. a hajtó fogaskeréknek nem 24, hanem 48 foga volna, akkor egy fordulatra 48 szemet hajtana a láncon, ez viszont a 24 fogú hátsó kereket pont kétszer fordítaná meg ugyanannyi idő alatt.

Első (hajtó) fogaskerék fogszáma	24 fogú hátsó fogaskerék fordulatainak száma egy „pedáltekerés” alatt
24	1
48	2
12	$\frac{1}{2}$
36	$\frac{3}{2}$

A táblázatban az összetartozó értékpárok hányadosa állandó: $\frac{24}{1} = \frac{48}{2} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{36}{\frac{3}{2}} = \ldots = 24$.

Ha a hátsó fogaskerék fogainak száma változatlan és a tekerés sebessége nem változik, akkor a bicikli sebessége egyenesen arányos az első (hajtó) fogaskerék fogainak számával.

Második módszer

Ugyanezt a hatást úgy is elérhetjük, ha hátulra kisebb fogaskereket szerelünk. Ha pl. az első fogaskerék fogainak száma 24, a hátsóé viszont csak 12, akkor az első kerék egy fordulata (24 láncszem) a hátsón kettőt fordítana.

Ebben a táblázatban az összetartozó értékpárok szorzata állandó:

$24 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 8 \cdot 3 = 16 \cdot \frac{3}{2} = \ldots = 24.$

Hátsó fogaskerék fogszáma	Hátsó fogaskerék fordulatainak száma a 24 fogú első fogaskerék egyszeri körülfordítása alatt
24	1
12	2
8	3
16	$\frac{3}{2}$

Ha az első fogaskerék fogainak száma változatlan, akkor **a bicikli sebessége fordítottan arányos a hátsó (hajtott) fogaskerék fogainak számával!**

Mindkét módszerrel ugyanarra az eredményre jutunk: az első fogaskerék egyszeri körülfordítása alatt a hátsó fogaskerék annyit fordul, ahányszor annyi foga van az első fogaskeréknek, mint a hátsónak, vagyis amíg egyet tekerünk a pedállal, addig

a hátsó biciklikerék fordulatainak száma = $\frac{\text{első fogaskerék fogainak száma}}{\text{hátsó fogaskerék fogainak száma}}$.

Látható, hogy a fogaskerekek fogszámának változtatásával tudjuk változtatni a bicikli hátsó kerekének fordulatszámát – és így végső soron a kerékpár sebességét.

FELADAT

1 27"-os kerekű kerékpáron ülve 1 másodpercenként 1 teljes fordulatot tekerünk a pedállal. A lánc a 48 fogú első és a 14 fogú hátsó fogaskeréken fut. Mekkora sebességgel haladunk? (1" ≈ 2,54 cm)

Fogak száma elöl	Fogak száma hátul	Fordulatszám
48	14	3,43
	16	3,00
	18	2,67
	21	2,29
	24	2,00
	28	1,71
38	14	2,71
	16	2,38
	18	2,11
	21	1,81
	24	1,58
	28	1,36
28	14	2,00
	16	1,75
	18	1,56
	21	1,33
	24	1,17
	28	1,00



Az egyik legelterjedtebb sebességváltó-rendszer esetében a pedállal hajtott tengelyen három fogaskerék van (fogszámuk 28-38-48), a hátsó tengelyen pedig hat (fogszámuk 14-16-18-21-24-28). Az ilyen bicikliket általában „18-sebességesként" reklámozzák, de vajon tényleg ennyi különböző sebességfokozatuk van?

Számítsuk ki a hátsó tengely fordulatainak számát egy pedáltekerés alatt (mialatt az első fogaskerék egyet fordul) az összes lehetséges esetben, és foglaljuk táblázatba ezeket az értékeket!

A táblázatban rózsaszínnel jelölt kapcsolásokat nem javasolt használni, ezekben az esetekben ugyanis a lánc „keresztben" fut a szélső fogaskerékpárok között.

Az összekapcsolt értékek elég közel vannak egymáshoz (különösen a barna vonallal összekötöttek), így a táblázat alapján megállapítható, hogy valójában csak kb. 10 lényegesen különböző sebességfokozat van.

Azt a – gyakorlatból jól ismert – tényt is megerősíti a táblázat, hogy átlagos biciklizéshez nagyjából elég a három első fogaskerék közül a középsőt használni.

A legkisebb fogszámú első fogaskerékre (lassú fokozatra) „leváltani" csak a hátsó fogaskoszorú két legnagyobb fogszámú fogaskerekének használatához van értelme (pl. hegyre feljutáshoz).

A legnagyobb fogszámú első fogaskerékre (gyors fokozatra) „felváltásnak" csak a hátsó fogaskoszorú két legkisebb fogszámú fogaskerekének használatához van értelme (pl. sík országúti kerékpározáshoz).

FELADAT (pármunka)

2 Van-e egyenes vagy fordított arányosság (és ha van, milyen) a következő mennyiségek között?

a) A biciklikerék fordulatszáma – a bicikli által adott idő alatt megtett út.

b) A biciklikerék fordulatszáma – a kerék sugara.

c) A bicikli sebessége – a bicikli által adott idő alatt megtett út.

d) A biciklikerék sugara – a bicikli sebessége (adott fordulatszám mellett).

e) A sebességfokozatok száma – adott típusú bicikli ára.

3 A házunktól az iskoláig általában 30 percig tart az út biciklin. Ma azonban késve indultunk, 20 perc alatt oda kell érnünk. A megszokottnál hányszor nagyobb sebességgel kell bicikliznünk?

4 A biciklik sebessége a kerekek fordulatszámán kívül a kerékátmérőtől is függ (logikus: nagyobb kerék egy-egy fordulattal többet halad előre). Hányszorosára nő az egy fordulattal megtett út hossza, ha a kerékátmérőt 1,2-szeresére növeljük?

5 24"-os (24 colos – 1 col kb. 2,54 cm) kerékátmérőjű biciklinkről áttettük a sebességmérőt egy 27"-os kerekű gépre. Meglepődve tapasztaljuk, hogy – habár a műszer végig 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s sebességet jelzett, mégis – több mint 20 km-t tettünk meg egy óra alatt. Mennyivel többet? (Pontosan emiatt kell a sebességmérőket mindig az adott kerékpárhoz beállítani.)

HÁZI FELADAT

1 Számítsd ki, hányat fordul a hátsó kerék egy perc alatt az alábbi esetekben!

a) Az első fogaskerék fogainak száma 48, a hátsóé 21, és az első fogaskerék másodpercenként 1-et fordul.

b) Az első fogaskerék fogainak száma 48, a hátsóé 21, és az első fogaskerék másodpercenként 1,5-et fordul.

c) Az első fogaskerék fogainak száma 38, a hátsóé 28, és az első fogaskerék másodpercenként 2-t fordul.

2 Mekkora a 20"-os, a 26"-os és a 28"-os kerék kerülete? (1" ≈ 2,54 cm)

3 Mekkora sebességgel halad a 20"-os, a 26"-os, illetve a 28"-os kerékpár, ha mindegyik kerék kettőt fordul másodpercenként? Igaz-e, hogy a sebességük aránya 10 : 13 : 14?

4 Létezik 30-42-52 fogszámú első lánckerék is. Az első fogaskerék 1-et fordul. Másold be a táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki a hiányzó mezőit a füzetedben! (A „keresztbe váltás”-nak megfelelő esetek nem szerepelnek a táblázatban.)

Első fogaskerék fogszáma	Hátsó fogaskerék fogszáma	Hátsó fogaskerék fordulatainak száma
	14	3,71
	16	3,25
42	14	
	18	2,89
42	16	
	21	2,48
42	18	
	24	2,17
	21	2,00
30	16	
42	24	
30	18	
42		1,50
30	21	
30	24	
30		1,07

ELMÉLET

Két szám hányadosát más szóval a két szám **arányának** is mondjuk.

Például

a 30 és a 45 aránya e két szám hányadosa: 30 : 45, vagy törtben felírva: $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

Itt a törtet 15-tel egyszerűsítettük. Azt látjuk, hogy a 30 és a 45 aránya ugyanannyi, mint a 2 és a 3 aránya, vagyis 30 : 45 = 2 : 3.

Ha két egyenlő arányt az = jellel kötünk össze, **aránypárt** kapunk.
Az = jel melletti számok a **belső tagok**, a másik kettő a két **külső tag**.

Például

a 30 : 45 = 2 : 3 egy aránypár. Így olvassuk: a 30 úgy aránylik a 45-höz, mint a 2 a 3-hoz. Itt a 45 és a 2 a belső tagok, a 30 és a 3 a külső tagok.

Az aránypárban a két belső tag szorzata ugyanannyi, mint a két külső tag szorzata.

Például

a 30 : 45 = 2 : 3 aránypár esetében
a két belső tag szorzata: 45 · 2 = 90,
a két külső tag szorzata: 30 · 3 = 90.

FELADATOK

1. (Kompetenciamérés, 2012)
Gábor autót szeretne vásárolni. Egy angol autókkal kereskedő cég honlapján a meghirdetett autók néhány fontos adata angol mértékegységekben van megadva. A Gábor által kiválasztott autó átlagfogyasztása 41,3 $\frac{\text{mérföld}}{\text{gallon}}$, vagyis 1 gallon üzemanyaggal 41,3 mérföldet tud megtenni.
Váltsd át ezt a mértékegységet a Magyarországon használatos mértékegységre (liter/100 km)!
1 gallon megközelítőleg 4,55 liternek, 1 mérföld körülbelül 1,6 km-nek felel meg.

2. (Kompetenciamérés nyomán, 2009)
Egy emberre a Földön átlagosan 1,8 hektár terület jut, ennyi terület adott átlagosan egy ember energia- és élelmiszer-szükségletének kielégítéséhez. Ehhez képest az egyes ember az átlagosnál sokkal többet vagy lényegesen kevesebbet használ fel a Föld javaiból attól függően, hogy melyik országban és milyen körülmények között él. Azt a földterületet, amelyet egy ember saját energia- és életszükségleteinek a kielégítéséhez igénybe vesz, ökológiai lábnyomnak nevezzük. A következő táblázat hét ország átlagos lakóinak ökológiai lábnyomát tartalmazza.

Ország	Ökológiai lábnyom
Egyesült Arab Emírségek	12 hektár
Amerikai Egyesült Államok	9,6 hektár
Finnország	7,6 hektár
Magyarország	3,5 hektár
Banglades	0,5 hektár
Szomália	0,4 hektár
Afganisztán	0,1 hektár

a) Hány „Föld”-re lenne szükség, ha minden ember az Egyesült Arab Emírségekben élőkhöz hasonló mértékben használná a Föld javait?

b) Hány „Föld”-re lenne szükség, ha az emberiség fele a Bangladesben élőkhöz, egynegyede a Magyarországon élőkhöz, és egynegyede a Finnországban élőkhöz hasonló mértékben használná a Föld javait?

3. (Kompetenciamérés, 2017)
Egy külföldi turista Magyarországon vásárolt, és euróval fizetett. A számla végén a következő állt.

SZÁMLA

Ennyi pénzt kell fizetnie. → Fizetendő: 2500 Ft
Ennyi pénzt adott a pénztárosnak. → Készpénz: 10 euró

Hány forintot kapott vissza, ha a bolt 1 euro = 305 forintos árfolyamon váltotta az eurót?

18 SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

A következő feladatok az 1920-as évek hangulatát idézik.

KIDOLGOZOTT FELADAT



1. Egy bádogos ajánlatot nyújt be egy hirdetett munkára. Bánatpénzül 8,5%-ot kell az ajánlathoz mellékelnie. Mennyi ez a bánatpénz, ha a vállalt összeg 3130 pengő? (A bánatpénzt a bádogos fizeti előre, s ha mégsem végzi el a vállalt munkát, akkor ezt elveszíti. Ha elvégzi a munkát, akkor visszajár neki.)

Megoldás

A 3130 pengő 1%-a (egy századrésze) 31,3 pengő, ezért a 3130 pengő 8,5%-a a 31,3-nek a 8,5-szerese: $31{,}3 \cdot 8{,}5 = 266{,}05$ pengő. A bádogosnak tehát 266,05 pengő bánatpénzt kellett az ajánlatához mellékelnie.

ELMÉLET

Egy számnak az 1%-a az egy századrészét jelenti.	A 129-nek az 1%-a: $129 : 100 = 1{,}29$.

Ha egy A számnak keressük a p%-át, akkor az A-t **alapnak**, a p-t **százaléklábnak**, az eredményt (s) **százalékértéknek** nevezzük.

A százalékszámításnál használható képletek

Százalékérték kiszámítása: $s = \frac{A}{100} \cdot p$. Százalékláb kiszámítása: $p = \frac{s}{A} \cdot 100$. Alap kiszámítása: $A = \frac{s}{p} \cdot 100$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Egy ipari vállalat, amely 24 600 pengő befektetéssel dolgozik, az üzleti év végén 4182 pengő nyereséget mutat ki. Hány százalék ez a nyereség?

Megoldás

Az 1%-os nyereség $24\,600 : 100 = 246$ pengő lenne. Azt kell tehát megállapítanunk, hogy a 4182 pengő hányszorosa a 246 pengőnek. $4182 : 246 = 17$, tehát a vállalat 17%-os nyereséget ért el.

3. Az 5%-ra kihelyezett tőke 1 év alatt 160 pengő kamatot hoz. Mekkora ez a kihelyezett tőke?

Megoldás

*(A használatba adott pénzt **tőkének** nevezzük, a használatért járó díjat pedig **kamatnak**. A pénz használatáért járó díj megadásakor a százalékláb helyett a **kamatláb** kifejezés is gyakori.)*

A kihelyezett tőke 5%-a 160 pengő, ezért a tőke 1%-a $\frac{160}{5} = 32$ pengő. A kihelyezett tőke ennek a 100-szorosa, azaz 3200 pengő.

FELADAT

1 Mennyi kamatot kell fizetnünk, ha 18 ezer forintot kértünk kölcsön egy évre, és a kamatláb évi
a) 12%; **b)** 10%?

2 Kölcsönkértünk egy évre 25 ezer forintot. Mennyi a kamatláb, ha az év végén
a) 2750; **b)** 1250
forint kamatot kell fizetnünk?

3 Mekkora összeget kértünk kölcsön, ha
a) a kamatláb 12%, és egy évre 3600 forint volt a kamat;
b) a kamatláb 9,5%, és egy évre 4750 forint volt a kamat?

4 Egy ács munkát vállalt 739,5 pengőért. Úgy gondolja, hogy a munkán 12% haszna lesz. Mennyi haszonra számít? (A vállalt összeg tartalmazza a tervezett hasznot.)

5 Egy malom elad 1 vagon (10 tonna) lisztet, tonnánként 512 pengőért. A bizományos (forgalmazó) a vételárból levon 28,5 pengő költséget, 0,1% alkuszdíjat és 0,75% jutalékot. Mennyi pénzt küld az eladónak?

6 Helyes-e az alábbi okoskodás? Válaszod számítással indokold!
Ha a benzin ára 20%-kal csökkenne, akkor 20%-kal több benzint vehetnénk, mint eddig, persze ugyanannyi pénzért.

HÁZI FELADAT

1 Egy alkusz (mai szóval: ingatlanközvetítő) 76 500 pengőért adott el egy birtokot, amiért 0,35% alkuszdíjat kapott. Mennyi ez a díj?

2 Egy kereskedő 250 pengőért vett áruját 300 pengőért adta el. Ez hány százalékos haszon?

3 A cukorrépából 5% nyerscukrot nyernek. Mennyi cukorrépa szükséges 1 vagon (10 tonna) nyerscukor előállításához?

4 Mennyi volt a vételár, ha a 4% engedmény leszámítása után 816 pengőt fizettünk?

RÁADÁS

Igaz vagy hamis? Karikázd be a helyes válaszhoz tartozó betűt! A helyes válaszokhoz tartozó betűkből egy magyar feltaláló nevét rakhatod ki. Találmányát te is sokat használod ☺!

	Igaz	Hamis
Ha egy mennyiség 200%-kal nő, akkor a kétszeresére változik.	S	L
Ha egy mennyiség 20%-kal csökken, akkor $\frac{3}{4}$-szeresére változik.	Á	S
Ahhoz, hogy 80-ból 70 legyen, 12,5%-os csökkenés szükséges.	R	D
A 45 a 200-nak 22,5%-a.	Á	I
Ha egy mennyiség 50%-kal csökken, majd újból 50%-kal csökken, akkor nem marad belőle semmi.	K	B
Ha 1 zsák búza 30%-át a legnagyobb fiú kapja, $\frac{3}{8}$-ed részét a középső fiú kapja, akkor a legkisebb fiúnak kevesebb marad, mint 30%.	M	Ó
Ha egy termék ára 40%-kal csökken, majd utána 30%-kal csökken, akkor olcsóbb lesz, mint az eredeti ár 45%-a.	Í	T
Ha a 60 cm-t 60%-ával növeljük, akkor többet kapunk, mint 1 m.	M	L
A 100 több, mint a 110-nek a 90%-a.	Ó	Á
Ha egy mennyiség 20%-kal csökken, majd 15%-kal nő, akkor kevesebb lesz, mintha előbb nő 15%-kal és utána csökken 20%-kal.	N	Z

19 SZÁZALÉK MINDENÜTT

BEVEZETŐ

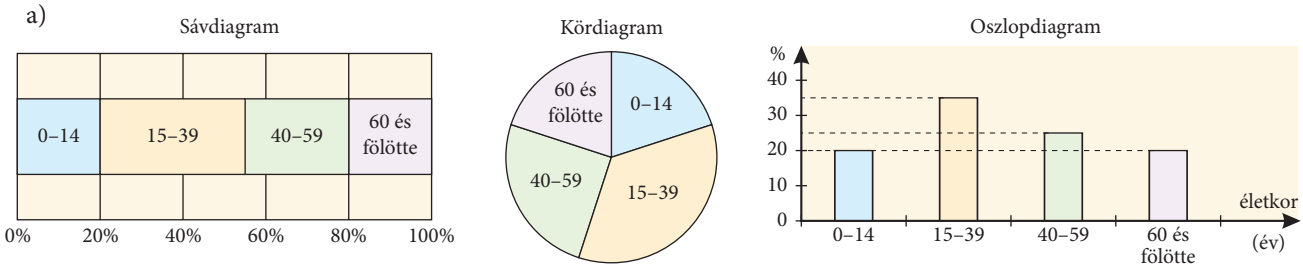
Százalékos megoszlás

Magyarország népessége 1999-ben kereken 10 millió, a népesség korosztály szerinti megoszlása pedig a következő volt: 0–14 éves: 20%, 15–39 éves: 35%, 40–59 éves: 25%, 60 év fölötti: 20%.

a) Ábrázoljuk a kor szerinti százalékos megoszlást diagramon! **b)** Hány fő tartozott az egyes korcsoportokhoz?

Megoldás

a)



b) Az egyes korcsoportok népessége rendre a következő: 2 millió, 3,5 millió, 2,5 millió és 2 millió.

Az ábrákon látható diagramok megfelelő *táblázatkezelő programmal* is megjeleníthetők.

FELADAT

1 Egy 15 000 Ft-os kabát árát először 10%-kal csökkentették, majd az új árból még 20%-os engedményt adtak.

a) Mennyibe került a kabát az egyes árcsökkentések után?

b) Hány százalékkal lett olcsóbb a kabát az eredeti árhoz képest a második árleszállítás után?

2 A 30%-os árleszállítás után 10 500 forintba kerül egy kabát. Mennyi volt az ára az árleszállítás előtt?

3 Egy laptopot reklámozó hirdetésen ez olvasható:
Eredeti ár: 136 890 Ft.
Akciós ár: 126 890 Ft.



a) Hány százalékos engedménnyel árulják a gépet?

b) A 126 890 Ft-os bruttó ár a nettó árnak a 120%-a. Hány forint a nettó ár, és mennyi a nettó árra rakódó forgalmi adó (áfa)?

4 A legutolsó matekdolgozat összpontszáma 80 pont volt. Jelest kapott, aki elérte az összpontszám 85%-át, négyest, aki elérte az összpontszám 70%-át, közepest, aki elérte az 55%-ot és elégségest, aki elérte a 40%-ot.

a) Hány pontot kellett elérni az egyes osztályzatokhoz?

b) A dolgozatok között 5 jeles, 7 négyes, 8 közepes, 3 elégséges és 2 elégtelen volt.
Az összes megírt dolgozat hány százaléka lett jeles, jó, közepes, elégséges, illetve elégtelen?

c) A dolgozatokra kapott osztályzatoknak hány százaléka lett jobb, mint az osztályzatok átlaga?

5 Egy bank az évi 6%-os betéti kamat helyett most érdekes, szokatlan kamatozású betéti lehetőséget kínál. Eszerint a betét első 100 000 forintja után évi 4%-os kamatot, a 100 000 forinton felüli részre pedig évi 8%-ot fizetnek. Az akciós betétek esetén

azonban az év végén, a kamat jóváírása *után*, a kamattal megnövelt összeg 1%-át levonják kezelési költségként.

a) Hány forint lenne az akciós betéti számlán egy év után, ha most 300 000 forintot helyezünk el rajta?

b) Hány százalék *tényleges* kamatot fog hozni ez a 300 000 forint egy év alatt (azaz hány százalékkal nőtt meg a 300 000 forint)?

6 Egy laptop vásárlásakor kapott számlának csak két sora maradt meg (az ábrán látható).

Áfa összesen:	23 183,00
Számla bruttó végösszege:	139 100,00

a) Mennyi volt a készülék nettó ára?

b) A nettó ár hány százaléka az áfa?

c) A bruttó ár hány százaléka az áfa?

HÁZI FELADAT

1 Egy vállalkozó megkapja az elvégzett munka díját és még 20% áfát.

a) Mekkora összegről állít ki számlát a vállalkozó, ha az elvégzett munka díja 150 000 Ft?

b) Mennyi az elvégzett munka díja, ha a kiállított számla 105 000 Ft végösszegű?

2 Az 1999-es statisztikai adatok szerint Magyarországon az ipar szerkezeti megoszlása a következő volt: nehézipar 64%, könnyűipar 21% és élelmiszeripar 15%. Ábrázold oszlopdiagramon és kördiagramon az eloszlást!

3 Egy utazási iroda felemelte az árait 20%-kal. A forgalomcsökkenés miatt egy év múlva ismét az eredeti árakhoz tért vissza. Hány százalékot kellett engednie a felemelt árakból?

4 Egy konténernyi narancs bruttó tömege 3200 kg. Hány kg a narancs nettó tömege, ha a tára (a csomagolás tömege)

a) a bruttó tömeg 20%-a,
(bruttó tömeg = nettó tömeg + tára)

b) a nettó tömeg 15%-a?

RÁADÁS

1. 2007-ben sávos adózás volt Magyarországon. Kovács úr 2007. évi adóköteles éves jövedelme 3 003 402 Ft volt. Az ábrán látható adózási útmutató alapján:

a) döntsd el, hogy jól számolta-e ki Kovács úr az adóbevallásában szereplő 938 449 Ft fizetendő adót;

b) számold ki, hogy Kovács úr egész évi (bruttó) jövedelmének hány százalékát teszi ki a személyi jövedelemadó!

Adótábla
Szja. tv. 30. §
A 2007. évi jövedelmekre érvényes adókulcsok és adósávok

A jövedelem nagysága	Az adó mértéke
0–1 700 000 Ft-ig	18%
1 700 001 Ft-tól 306 000 Ft és az 1 700 000 Ft-on felüli rész	36%-a

KIDOLGOZOTT FELADAT a számított adó kiszámítására:

Az adózó összevont adóalapja …	1 960 000 Ft
Az adó kiszámítása:	
1 700 000 Ft adója……	306 000 Ft
260 000 Ft (1 960 000–1 700 000) 36 %-a	93 600 Ft
1 960 000 Ft adója……	399 600 Ft

2. Melyik sajtféle tartalmaz több zsiradékot?
A 30 dkg tömegű, 40% szárazanyag-tartalmú, 45% zsírtartalmú (mozzarella) sajt, vagy az ugyancsak 30 dkg tömegű, 55% szárazanyag-tartalmú, 30% zsírtartalmú (edami) sajt? (A zsírtartalom azt adja meg, hogy a szárazanyag-tartalom hány százaléka zsír.)

3. (Kompetenciamérés, 2012)
Egy fenyőerdő faállománya jelenleg 8000 fa. Minden évben kivágják az állomány 20%-át, de 800 új fát is ültetnek. Hány fából állt a faállomány 2 évvel ezelőtt?

20 HATVÁNYOZÁS

BEVEZETŐ

Antal bácsi takarékkönyvben helyezett el 160 ezer forintot. Az éves kamat 7%. Azt reméli, hogy négy év múlva legalább 200 ezer forintot kap vissza. Teljesül-e a reménye?

Megoldás

Egy év alatt Antal bácsi pénze 7%-kal nő. Ezért az első év végén a megnövekedett összeg az eredeti 160 000 forint 1,07-szorosa lesz: $160\,000 \cdot 1{,}07$ forint (171 200 Ft). A következő év elején a megnövekedett összeg lesz a tőke, amely 7%-kal nő az év végére. Foglaljuk táblázatba a négyéves folyamatot!

Az első év végén $160\,000 \cdot 1{,}07$, a második év végén $160\,000 \cdot 1{,}07^2$, a harmadik év végén $160\,000 \cdot 1{,}07^3$, a negyedik év végén pedig $160\,000 \cdot 1{,}07^4$ forint lesz Antal bácsi takarékkönyvében. Tehát Antal bácsi pénze jól megszaporodott, több lett 200 ezer forintnál.

	Tőke az év elején (Ft)	Kamattal megnövelt összeg az év végén (Ft)
1. évben	160 000	$160\,000 \cdot 1{,}07 = 171\,200$
2. évben	171 200	$171\,200 \cdot 1{,}07 = 183\,184$
3. évben	183 184	$183\,184 \cdot 1{,}07 \approx 196\,007$
4. évben	196 007	$196\,007 \cdot 1{,}07 \approx 209\,727$

A végeredmény kiszámításához a hatványozás műveletét használtuk:

$160\,000 \cdot 1{,}07^4 \approx 209\,727$.

ELMÉLET

Definíció: Ha a egy tetszőleges valós szám és n egy 1-nél nagyobb egész szám, akkor a^n olyan n tényezős szorzat, amelynek mindegyik tényezője a.

Például: $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$; $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Értelmezzük azt is, hogy $a^1 = a$.

Az a^n kifejezésben a az **alap** (hatványalap), n a **kitevő,** a^n pedig a **hatvány.**

FELADAT

1 Kösd össze az egyenlőket! Az egyik hatványnak nincs párja, annak add meg az értékét!

2^3	2^4	2^5	3^2	3^3	5^3	5^4	10^4	10^6
16	125	10 000	8	27	9	625	1 000 000	

2 Kösd össze az egyenlőket!

6^4	$6^2 \cdot 6$	6^3	$6 \cdot 6 \cdot 6^2$	$6 \cdot 6^2$	$\frac{6^3}{6}$
$6 \cdot 6 \cdot 6$	6^2	$6^2 \cdot 6^2$	$6 \cdot 6$	$6 \cdot 6^3$	$\frac{6^4}{6}$

3 Kösd össze az egyenlőket!

$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{2}{2^4}$
$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	

4 Hány 0-ra végződik a következő szám:

a) $100\,000 : 100$;

b) 100^4?

5 Minden sorban az egyik kifejezés értéke különbözik a többitől. Melyik ez a kifejezés?

a)	$(5^2)^2$	25^2	$25 \cdot 5$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad 5^4$
b)	$(7^2)^3$	$7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2$	49^3	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad 7^6$
c)	$(3^2)^4$	9^3	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$(3^4)^2$ $\quad 3^8$
d)	$(5^1)^2$	5^2	$25 \cdot 25$	$(5^2)^1$ $\quad 5^1 \cdot 5^1$

6 Írd fel a műveletek eredményét egyetlen hatványként: írd be a hiányzó kitevőt!

a) $3^3 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{X}$

b) $(5^2)^4 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^{X}$

c) $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7^{X}$

d) $\frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{X}$

e) $6^4 \cdot 10^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 60 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60 = (6 \cdot 10)^{X}$

ELMÉLET

A hatványozás azonosságai

	Számolási szabályok ha a és b valós szám, az m és az n pozitív egész szám	Példák	
I.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^7 = 2^{10}$	Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.
II.	$a^m : a^n = a^{m-n}$ $a \neq 0$ és, $m > n$.	$3^{10} : 3^6 = 3^4$	Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.
III.	$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$	$\left(2^5\right)^3 = 2^{15}$	Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.
IV.	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$30^5 = 3^5 \cdot 10^5$	Egy szorzat hatványa egyenlő a tényezők hatványának szorzatával.
V.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$	$\left(\frac{2}{7}\right)^4 = \frac{2^4}{7^4}$	Egy hányados hatványa egyenlő a számláló hatványának és a nevező hatványának hányadosával.

Vigyázat: hatványok összeadására és kivonására nincs azonosság!

FELADAT

7 Fejezd ki egyetlen hatványként!

a) $6^3 \cdot 6^4 \cdot 6^5$

b) $7{,}5^4 : 7{,}5^2$

c) $(3^5)^2$

d) $(-9)^4 \cdot (-9)^{11}$

8 Fejezd ki egyetlen hatványként!

a) $4^6 : 3^6$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^7$

c) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)^3$

d) $\left(\left(-\frac{12}{21}\right)^6\right)^3$

HÁZI FELADAT

1 Fejezd ki egyetlen hatványként!

a) $11^4 : 3^4$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6$

c) $\left(\left(\frac{12}{7}\right)^5\right)^7$

d) $\left(\left(-\frac{2}{31}\right)^4\right)^{11}$

2 Melyik a nagyobb?

a) $3^5 \cdot 3^{10}$ vagy $(3^5)^{10}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^6$ vagy $\frac{2^6}{2^8}$

3 Igaz vagy hamis?

a) $5^7 = 25 \cdot 5^5$

b) $5^7 = \frac{1}{25} \cdot 5^9$

c) $\left(3^5\right)^2 = \frac{3^{12}}{3^3}$

d) $2^5 + 2^5 = 2^{10}$

e) $2^6 - 2^5 = 2^5$

21 GYAKORLÁS

KIDOLGOZOTT FELADAT

a) Hányszorosára változik az a oldalú négyzet területe, ha az oldalát 20%-kal csökkentjük?
b) Hányszorosára változik az a oldalú kocka térfogata, ha az oldalát 20%-kal növeljük?

Megoldás

a) Az a oldalú négyzet területe a^2. Ha az oldalát 20%-kal csökkentjük, akkor az oldalai $0{,}8a$ hosszúságúak lesznek, a területe pedig $(0{,}8a)^2 = 0{,}8^2 \cdot a^2 = 0{,}64\,a^2$. A területe tehát 0,64-szorosára változott. (Ez azt jelenti, hogy 36%-kal csökkent.)

b) Az a oldalú kocka térfogata a^3. Ha az oldalát 20%-kal növeljük, akkor az oldalai $1{,}2a$ hosszúságúak lesznek, a térfogata pedig $(1{,}2a)^3 = 1{,}2^3 \cdot a^3 = 1{,}728a^3$. A térfogata tehát 1,728-szeresére változott. (Ez azt jelenti, hogy 72,8%-kal nőtt.)

FELADAT

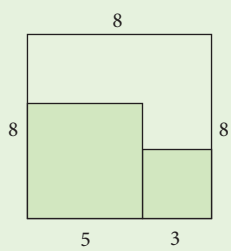
1 Zsolt azt mondja, hogy $(3^{15} \cdot 3^7) : 3^{10}$ kisebb, mint $(3^{19} : 3^{13})^2$. Klári szerint Zsolt téved. Kinek van igaza?

2 Egy négyzet oldalainak hossza 2^6 mm. 2-nek hányadik hatványa
a) a négyzet kerülete (mm-ben mérve);
b) a négyzet területe (mm²-ben mérve)?

3 Hány méter hosszú a $[10^5; 10^6]$ intervallum, ha a számegyenesen a [0; 1] intervallum hossza 1 cm?

4 Melyik nagyobb?
a) $(-1{,}8)^4$ vagy $-1{,}8^4$
b) $(-1{,}8)^5$ vagy $-1{,}8^5$
c) $0{,}7^4$ vagy $0{,}8^4$
d) $0{,}7^4$ vagy $0{,}7^6$

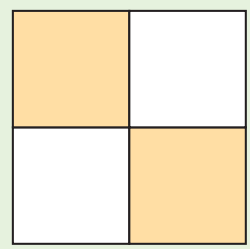
5 Melyik állítást szemlélteti az ábra? Melyik állítás igaz?



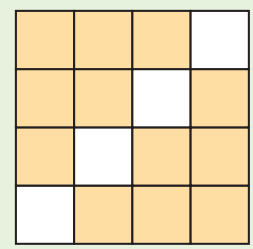
a) $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$
b) $3^2 + 5^2 = (3 + 5)^2$
c) $3^2 + 5^2 > (3 + 5)^2$
d) $3^2 + 5^2 < (3 + 5)^2$

6 Írd fel egy hatványként!
a) $4{,}5^3 \cdot 4{,}5^{71} : 4{,}5^{44}$
b) $(3{,}2^8)^7 \cdot (0{,}5^7)^8$
c) $(5^6)^5 : (0{,}5^2)^{15} + 10^3 \cdot (10^7)^4$

7 (Kompetenciamérés, 2013)
A következő ábra egy négyzet színezését mutatja. Minden egyes lépésben a fehér négyzeteket 4 kisebb négyzetre osztjuk, és közülük 2-t beszínezünk. A következő ábrán az első két lépés látszik.



1. lépés



2. lépés

a) Töltsd ki a táblázatot!

	1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés
Az eredeti négyzet hányadrésze színes?				

b) Az eredeti négyzet hányadrésze színes az n-edik lépés után?

ELMÉLET

Bizonyítsuk be a hatványozás I. és III. azonosságát!

Legyen m és n pozitív egész szám.

Állítás	Bizonyítás
I. $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$	$2^m \cdot 2^n = \overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}^{m \text{ db}} \cdot \overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}^{n \text{ db}} = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{m+n \text{ db}} = 2^{m+n}$ ↑ hatványozás definíciója miatt; ↑ szorzás asszociativitása miatt; ↑ hatványozás definíciója miatt
III. $\left(2^m\right)^n = 2^{mn}$	$\left(2^m\right)^n = \overbrace{2^m \cdot 2^m \cdot \ldots \cdot 2^m}^{n \text{ db}} = 2^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ db}}} = 2^{mn}$ ↑ hatványozás definíciója miatt; ↑ I. azonosság miatt; ↑ szorzás definíciója miatt

Bizonyítsd be a többi azonosságot!

HÁZI FELADAT

1 Írd fel a 6 egész kitevőjű hatványaként annak a kockának a felszínét (cm^2-ben) és a térfogatát (cm^3-ben), amelynek élhossza

a) 6 cm; **b)** 6^4 cm!

2 Válaszd ki az igaz kijelentéseket!

a) $\left(3^4 \cdot 2^5\right)^3 = 3^{12} \cdot 2^{15}$ **c)** $\left(7^3 + 5^3\right)^2 = 7^5 + 5^5$

b) $\left(7^3 + 5^3\right)^2 = 7^6 + 5^6$ **d)** $\left(10^3 + 10^4\right)^2 = 121 \cdot 10^6$

3 Melyik a nagyobb? A választ számológép segítsége nélkül add meg!

a) 2^{10} vagy 2^{11} **c)** $7{,}5^{10}$ vagy $7{,}5^{11}$

b) $0{,}75^{10}$ vagy $0{,}75^{11}$ **d)** $157 \cdot 10^9$ vagy $1{,}47 \cdot 10^{11}$

4 Írd fel egy hatványként!

a) $6{,}5^{10} \cdot 6{,}5^3 : 6{,}5^7$

b) $(0{,}2^4)^5 \cdot 0{,}2^5 : (0{,}2^7)^2$

c) $2^{12} \cdot (5^3)^4 + 10^{15} : 10^5$

RÁADÁS

1. Állítsd nagyság szerint sorba a következő számokat!

a) $22^2; 2^{22}; \left(2^2\right)^2; 2^{\left(2^2\right)}$

b) $33^3; 3^{33}; \left(3^3\right)^3; 3^{\left(3^3\right)}$

c) $44^4; 4^{44}; \left(4^4\right)^4; 4^{\left(4^4\right)}$

d) $55^5; 5^{55}; \left(5^5\right)^5; 5^{\left(5^5\right)}$

2. Melyik az a legkisebb és melyik az a legnagyobb szám, amelyet 4 kettes számjeggyel felírhatunk, ha csak a hatványozás műveletét használhatjuk?

3. Tudjuk, hogy $8 = 2^3$ és $1024 = 2^{10}$.

Igaz-e, hogy $\left[\left(8^3\right)^3\right]^3 : \left[\left(1024^2\right)^2\right]^2 = 2$?

4. Állapítsd meg számológép használata nélkül, hogy melyik szám hány 0-ra végződik!

a) $\left(2^4\right)^3 \cdot 3^7 \cdot \left(5^2\right)^3 + 2^6 \cdot 5^5 \cdot 7^3$

b) $\left(2^2 \cdot 5\right)^8 \cdot 3^7 \cdot 11^3 + \left(2 \cdot 5^2\right)^4 \cdot (2 \cdot 7)^3$

5. Állítsd nagyság szerint sorba a következő számokat! Mennyi a szomszédos számok hányadosa?

$u = \left(0{,}5^{24} \cdot 0{,}5^7\right) : 0{,}5^{15}$

$v = \left(0{,}5^7\right)^7 : 0{,}5^7$

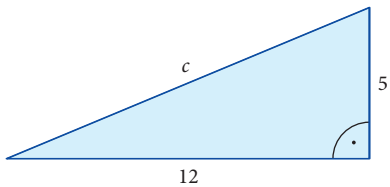
$w = \left(0{,}5^7 \cdot 0{,}5^{77}\right) : \left(0{,}5^7\right)^7$

22 A NÉGYZETGYÖK

BEVEZETŐ

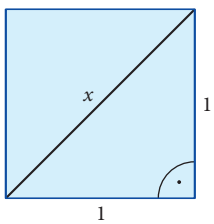
1. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 5 cm és 12 cm. Milyen hosszú az átfogója?

Megoldás



A derékszögű háromszög oldalaira teljesül Pitagorasz tétele. $c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Melyik pozitív szám négyzete 169? Ez a szám a 13, ezért $c = 13$ cm.

2. Egy négyzet oldalainak hossza 1 egység. Milyen hosszú az átlója?



Megoldás

A négyzetet az átlója két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Írjuk fel Pitagorasz tételét ezekre a háromszögekre!

$$1^2 + 1^2 = x^2$$

Ebből: $2 = x^2$.

A négyzet átlójának hossza tehát egy olyan pozitív szám, amelynek négyzete 2. A pozitív egész számok között nem találunk ilyen számot. Keressük a törtek között! $1{,}4^2 = 1{,}96$, tehát 1,4-nél nagyobb számot keresünk. $1{,}5^2 = 2{,}25$, tehát 1,5-nél kisebb számot keresünk. $1{,}41^2 = 1{,}9881$. Ez még mindig valamivel kisebb, mint 2. Viszont $1{,}42^2 = 2{,}0164$, ez már nagyobb. Próbálgatással egyre több tizedesjegyét meghatározhatjuk ennek a számnak, de akármeddig folytatjuk ezt, nem találunk olyan számot, amelynek négyzete pontosan 2.

Ez a szám ugyanakkor nem lesz sem véges tizedestört, sem végtelen szakaszos tizedestört. Értékét tizedestört alakban csak közelítő pontossággal tudjuk megmondani: közelítőleg 1,4142… Azt a pozitív számot, amelynek a négyzete 2, így jelöljük: $\sqrt{2}$.

ELMÉLET

Számok négyzetgyöke

Egy pozitív a szám **négyzetgyöke** az a pozitív szám, amelynek négyzete a. Jele: $\sqrt{a}$.

Például $\sqrt{5}$ az a pozitív szám, amelynek négyzete 5. (Vagyis $(\sqrt{5})^2 = 5$).

$\sqrt{100} = 10$, mert a 10 pozitív szám és négyzete 100.

$\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$, mert 1,5 pozitív szám, és négyzete 2,25. Azaz $(\sqrt{2{,}25})^2 = 1{,}5$.

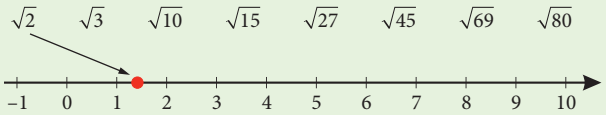
Vannak olyan számok, például a $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, melyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Ezek irracionális számok. Minden esetben igaz, hogy ha a pozitív egész szám, de nem négyzetszám, akkor négyzetgyöke irracionális szám. Az értéke tört alakban csak közelítő értékkel írható fel.

Negatív számoknak nem létezik négyzetgyöke, mert nincs olyan valós szám, melynek négyzete negatív lenne. A 0 négyzetgyöke 0, hiszen $0^2 = 0$.

Definíció: Egy nemnegatív a szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelynek négyzete a.

FELADAT

1 Becsüld meg, hol van a megadott számok helye a számegyenesen!



Számológéppel ellenőrizd a becslésedet!

2 Számológép segítségével határozd meg a számok négyzetgyökét 2 tizedesjegyre kerekítve!

$\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{50}$ $\sqrt{70}$ $\sqrt{500}$

3 Kösd össze az egyenlőket! Írd fel más alakban azokat a számokat, amelyeknek nincs párja!

$\sqrt{81}$ $\sqrt{49}$ $(\sqrt{27})^2$ $(\sqrt{81})^2$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

3 6 9 81 27

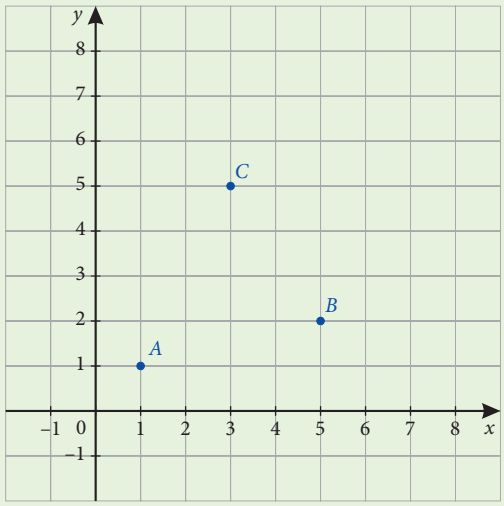
5 Melyik az a pozitív szám, amelynek négyzete 14? Melyik az a pozitív szám, amelynek négyzetgyöke 14?

4 Milyen távol van egymástól a koordináta-rendszerben

a) A és B pont;

b) A és C pont;

d) B és C pont?



KIDOLGOZOTT FELADAT

Számoljunk négyzetgyökös kifejezésekkel! Hozd más alakra!

a) $(\sqrt{2})^2$ **b)** $(\sqrt{2})^3$ **c)** $(\sqrt{5})^4$

Megoldás

a) $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. Jegyezd meg! $(\sqrt{a})^2 = a$, (ahol $a \geq 0$)

b) $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}$.

c) $(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = (\sqrt{5}\cdot\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}) = 5\cdot 5 = 25$.

FELADAT

6 Mennyi a kifejezések értéke? Ne használj számológépet!

a) $(\sqrt{2})^3\cdot\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}}$

c) $(\sqrt{6})^2\cdot(\sqrt{2})^2$

d) $\dfrac{(\sqrt{10})^2}{(\sqrt{5})^2}$

7 Mennyi a kifejezések értéke? Ne használj számológépet!

a) $(3\cdot\sqrt{3})^2$

b) $(\sqrt{7}\cdot 7^2)^2$

c) $(\sqrt{5})^6$

8 a) Egy négyzet területe 18 egység. Mekkora a négyzet oldala?

b) Egy kocka felszíne 18 egység. Milyen hosszú a kocka oldala?

9 (Kompetenciamérés nyomán, 2006)
Az autóbalesetek helyszíni vizsgálatakor a szakértők a féknyomok hosszából becsülik meg a jármű baleset előtti sebességét. A becsléshez az alábbi képletet alkalmazzák: $v = \sqrt{200 \cdot m}$

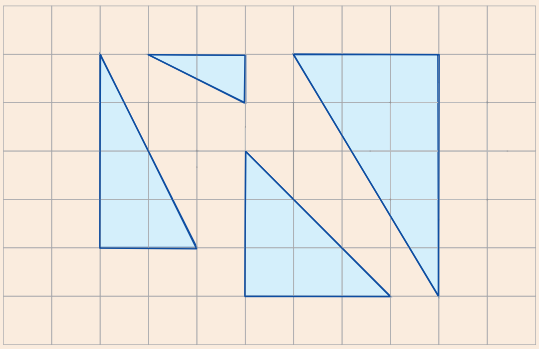
A képletben v a sebességet jelöli $\frac{\text{kilométer}}{\text{óra}}$-ban $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, m pedig a féknyom hosszát méterben.

a) Mekkora sebességgel haladt az autó a balesetet megelőzően, ha a féknyom hossza 14 m?

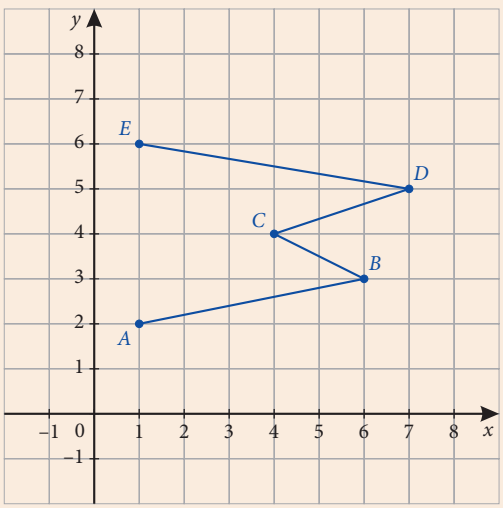
b) Mekkora féknyomot hagy az a jármű, amely a balesetet megelőzően a megengedett 50 km/h sebességgel közlekedett?

HÁZI FELADAT

1 Pitagorasz tétele alapján, négyzetgyök segítségével írd fel a derékszögű háromszögek átfogójának pontos értékét! (Az ábrán a párhuzamos rácsvonalak távolsága 1 egység.)



2 Milyen hosszú a törött vonal?



3 Hozd egyszerűbb alakra! Ne használj számológépet!

a) $(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{5})^2$

b) $(\sqrt{3})^4$

c) $(\sqrt{6})^3 \cdot \sqrt{6}$

4 Mekkora annak a képernyőnek az átmérője, melynek szélessége 31 cm, magassága 16,5 cm?

5 (Kompetenciamérés, 2013)
A Naprendszer eddigi legmagasabb sziklafalát az Uránusz bolygó Miranda nevű holdján fedezték fel. A Miranda felszínén egy szabadon eső test mozgását a

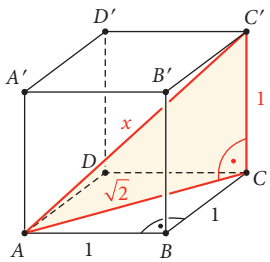
$t^2 = 25 \cdot h$

matematikai összefüggés adja meg, ahol
t = az esés ideje másodpercben,
h = a test által megtett út méterben.
Számítsd ki számológéppel, hány perc alatt éri el egy szabadon eső test a 20 250 m magas sziklafal tetejétől az alját!

RÁADÁS

1. Mekkora az egység oldalú kocka testátlója?

Pitagorasz tétele segítségével ezt is meghatározhatjuk. A testátló egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amely a kocka belsejében van, egyik befogója a kocka egyik oldala, a másik befogója a kocka egyik oldallapjának lapátlója. Mivel a lapátló az egység oldalú négyzet átlója, annak hossza a Bevezetőben leírtak alapján $\sqrt{2}$.



Az AC' testátló hosszát x-szel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján

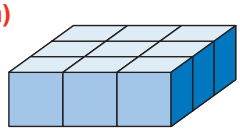
$x^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3.$

Ebből a testátló hossza $\sqrt{3}$ egység.

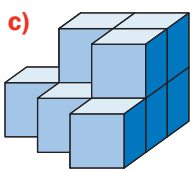
2. Milyen hosszú annak a téglatestnek a testátlója, amelynek élei 2 egység, 4 egység és 5 egység hosszúak?

3. Kilenc egyforma, de feladatonként különböző méretű kis kockából raktunk ki egy testet. Mekkora egy kis kocka oldalhossza, ha a test felszíne 40 egység, és a kirakott test a következő:

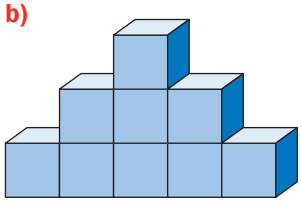
a)



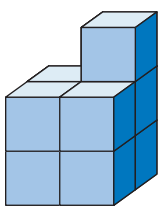
c)



b)



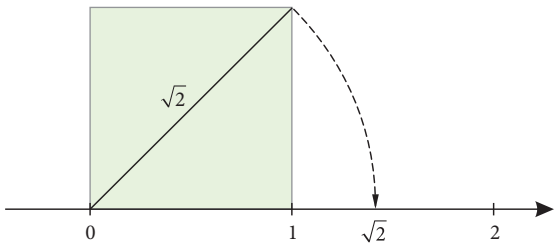
d)



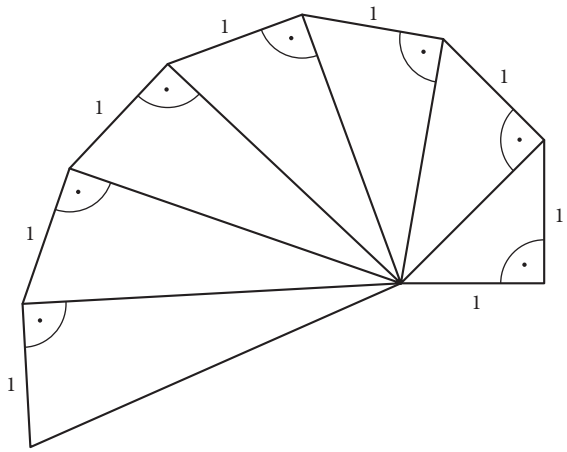
e) Milyen testet rakhattunk ki, ha a test felszíne 40 egységnyi, és a kiskockák oldalhossza is egységnyi?

4. Hogyan szerkeszthető meg a $\sqrt{2}$ helye a számegyenesen?

Az ógörög gondolkodók számára problémát okozott, hogy a $\sqrt{2}$-t nem tudták egész számok arányával leírni pontosan. Ilyen hosszú szakaszt szerkeszteni viszont könnyű, például az egység oldalú négyzet segítségével. A $\sqrt{2}$ helyét a számegyenesen az ábrán látható módon szerkeszthetjük meg.



5. Milyen hosszúak az alábbi, egymásra épített derékszögű háromszögek átfogói?



Az ábra szerinti háromszögeket úgy kapjuk, hogy veszünk egy derékszögű, egyenlőszárú háromszöget, melynek befogói egység hosszúságúak. A második derékszögű háromszög hosszabb befogója egybeesik az első háromszög átfogójával, rövidebb befogója pedig 1 hosszúságú. Ezt az eljárást folytatjuk az ábra szerint. Milyen hosszúak az átfogók?

23 SZÁMOK NORMÁLALAKJA

KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora utat tesz meg a fény 1 év alatt (azaz mekkora az 1 fényév távolság)?

Megoldás

A fény 1 s alatt 300 000 km-t tesz meg. 1 év = 365 nap = $365 \cdot 24$ óra = $365 \cdot 24 \cdot 3600$ s = 31 536 000 s. Tehát a fény 1 év alatt $300\,000 \cdot 31\,536\,000 = 9\,460\,800\,000\,000$ km-t tesz meg. Ez utóbbi számítást papíron, írásban elvégezni nehéz feladat, sőt régebbi, egyszerűbb számológépek sem tudják elvégezni, mert nem tudnak kiírni ilyen nagy számot a kijelzőre.

Egyszerűbb a dolgunk, ha a 300 000 helyett $3 \cdot 10^5$-nel, 31 536 600 helyett pedig $3{,}1536 \cdot 10^7$-nel számolunk:

$3 \cdot 10^5 \cdot 3{,}1536 \cdot 10^7 = 3 \cdot 3{,}1536 \cdot 10^5 \cdot 10^7 = 9{,}4608 \cdot 10^{12}$, azaz egy fényév kb. 9,5 billió km.

Ilyen számolások során tehát a nagy számokat olyan alakban használjuk, ami megkönnyíti a számítást: egy 1 és 10 közötti számot a 10 megfelelő hatványával szorozzuk meg. Ezt nevezzük a szám normálalakjának.

ELMÉLET

Számok normálalakja

Nagy abszolút értékű számok leírásakor sokszor használjuk a szám normálalakját. Egy szám **normálalak**ja egy olyan kéttényezős szorzat, amelyben az egyik tényező abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő 1-nél és kisebb 10-nél, a másik tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa:

$a \cdot 10^k$; ahol $1 \leq |a| < 10$ és k pozitív egész szám.

Például: $34\,520 = 3{,}452 \cdot 10^4$; $\quad -122 = -1{,}22 \cdot 10^2$.

Normálalakban írt számok esetén a hatványozás azonosságai segítenek a szorzás, osztás, hatványozás műveleteinek elvégzésében. Az összeadás és kivonás esetén azonban vigyázni kell, mert ha a tagokban szereplő hatványokban különböző kitevők vannak, azok összevonásához a tagok átalakítása szükséges.

Például: $(4{,}5 \cdot 10^3) \cdot (1{,}2 \cdot 10^8) = 4{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 10^8 = 5{,}4 \cdot 10^{11}$

$(2 \cdot 10^3)^8 = 2^8 \cdot (10^3)^8 = 256 \cdot 10^{24}$

$3{,}6 \cdot 10^4 - 2{,}3 \cdot 10^2 = 36\,000 - 230 = 35\,770$

FELADAT

1 Írd át a számokat normálalakba!

$-934\,000$; $\quad 343{,}56$; $\quad -16\,500\,000$

2 A választ normálalakban add meg!

a) $(6{,}6 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^4)$; $\quad (4{,}5 \cdot 10^{11}) : (1{,}5 \cdot 10^8)$

b) $(1{,}1 \cdot 10^2)^2$; $\quad (7 \cdot 10^{12})^4$

c) $5{,}42 \cdot 10^3 - 3{,}9 \cdot 10^4$

3 A Tejút átmérője kb. 10^{21} m.

a) Mennyi idő alatt tesz meg a fény ekkora távolságot, ha a fény sebessége kb. $3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

b) Melyik válasz helyes az a) kérdésre?

A) $10^{21} \cdot 3 \cdot 10^8$ s $= 3 \cdot 10^{29}$ s

B) $(10^{21} : 3) : 10^8$ s $\approx 3{,}33 \cdot 10^{12}$ s

C) $10^{21} : 3 \cdot 10^8$ m $\approx 3{,}33 \cdot 10^{28}$ s

D) $(10^{21} : 10^8) : 3$ m $\approx 3{,}33 \cdot 10^{12}$ s

4 Egy négyzet oldalainak hossza $5 \cdot 10^4$ méter.

a) Váltsd át az oldal hosszúságát kilométerbe!

b) Számítsd ki a négyzet területét négyzetméterben!

c) Számítsd ki a négyzet területét négyzetkilométerben!

5 A Nap tömege közelítőleg $2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, a Hold tömege kb. $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, a Föld tömege kb. $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Adj közelítő választ az alábbi kérdésekre!

a) A Nap tömege hányszorosa a Hold tömegének?
b) A Föld tömege hányszorosa a Hold tömegének?
c) A Hold tömege hány százaléka a Föld tömegének?

HÁZI FELADAT

1 Írd át normálalakba!
223 150 000; 45 710; −343; 45,6; −1654

2 Végezd el a kijelölt műveleteket! A végeredményt írd fel normálalakban!

a) $(1{,}8 \cdot 10^3) \cdot (3{,}4 \cdot 10^{11})$
b) $(6{,}2 \cdot 10^{15}) : (3{,}1 \cdot 10^9)$
c) $2{,}13 \cdot 10^3 + 3{,}54 \cdot 10^2$
d) $(3{,}2 \cdot 10^3) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{11})$

3 Végezd el a kijelölt műveleteket számológéppel! A végeredményt írd fel normálalakban!

a) $(1{,}1 \cdot 10^4)^3$
b) $(4{,}5 \cdot 10^2)^4$
c) $(2{,}1 \cdot 10^5)^2 + (3{,}5 \cdot 10^3)^3$
d) $(1{,}9 \cdot 10^1)^3 \cdot (6{,}2 \cdot 10^7)^2$

4 Fejezd ki cm-ben! Válaszodat normálalakban is add meg!

a) $2{,}4 \cdot 10^3$ méter
b) $2{,}4 \cdot 10^3$ deciméter
c) $2{,}4 \cdot 10^3$ milliméter

RÁADÁS

FELADATOK

1. Újsághír: „A Nap sugárzó teljesítményének a Földet érő része körülbelül 173 000 000 000 000 000 W, amely több ezerszerese az emberiség jelenlegi energiaigényének. Évente olyan mennyiségű energia érkezik a Napból a Földre, amennyit 60 milliárd tonna kőolaj elégetésével nyernénk. Ha ennek csak egy százalékát csupán ötszázalékos hatékonysággal hasznosítanánk, akkor a világon minden ember annyi energiát fogyaszthatna, mint ma egy amerikai állampolgár.”
(*Megjegyzés:* az újsághír keveri a teljesítmény és az energia fogalmát.)

a) Hány „wattos évi teljesítmény” érhető el 1 tonna kőolaj elégetésével?
b) Hány watt az a teljesítmény, amelyet a Nap sugárzó teljesítménye 1%-ának 5%-os hatásfokkal való hasznosításakor nyernénk? Ez hányszorosa a paksi atomerőmű teljesítményének (ami kb. 1 830 000 000 W)?

2. Melyik szám a nagyobb?
Válaszd ki a két szám közül, hogy melyik a nagyobb! Ne használj számológépet! A nagyobb számhoz tartozó betűkből egy magyar feltaláló neve rakható ki. Kicsoda ő?

B	$2{,}9 \cdot 10^3$	vagy	$8{,}5 \cdot 10^2$	J
E	$9{,}4 \cdot 10^5$	vagy	$9{,}8 \cdot 10^4$	O
Á	$(3 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^2)$	vagy	10^6	U
N	$(4 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^3)$	vagy	10^7	S
Y	$(3 \cdot 10^3) + (2 \cdot 10^2)$	vagy	$4 \cdot 10^3$	I
R	$1{,}95 \cdot 10^3$	vagy	$18{,}5 \cdot 10^2$	N
T	$(2 \cdot 10^{10}) : (6 \cdot 10^2)$	vagy	10^8	Ő
K	$(9 \cdot 10^{12}) : (3 \cdot 10^7)$	vagy	10^4	I
R	$(4 \cdot 10^7)^2$	vagy	10^{15}	Ó

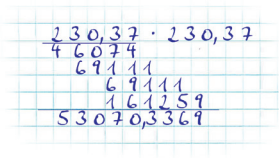
24 SEGÍT A SZÁMOLÓGÉP

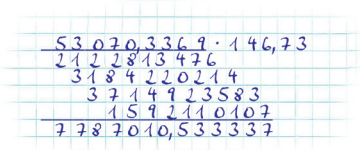
BEVEZETŐ

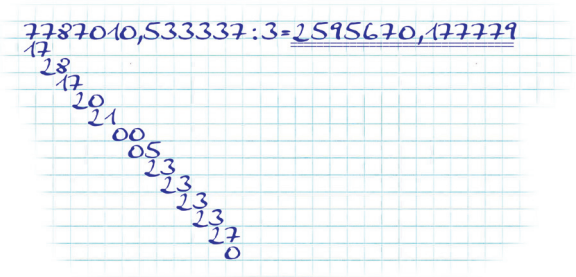
Az ókor hét csodája közül az egyiptomi Kheopsz-piramis az egyetlen, amely még ma is áll. E piramis egy olyan négyzet alapú gúla, amelynek eredetileg 230,37 m-esek voltak az alapélei, a magassága pedig 146,73 m volt.

A 7. osztályos Bence nekiállt, hogy kiszámítsa, hány köbméter lehetett valaha a Kheopsz-piramis térfogata. A $V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$ képletet használta, ahol a az alapél hosszát, h a gúla magasságát jelöli.

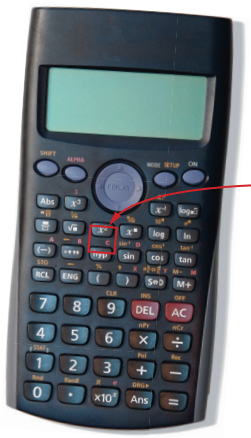
Így számolt Bence:







A végeredmény tehát 2 595 670,177 779 m³. Persze az adatok pontatlansága miatt nincs értelme ilyen sok tizedesjegyre megadni a végeredményt.



Bence végül elmondta nővérének, Hajninak, hogy a piramis teljes térfogata kb. 2 600 000 m³.

Hajni csak a fejét csóválta, amikor meglátta Bence számítását. Elővette a **számológépét**, és ezeket ütötte be sorban egymás után: 230,37 x^2 × 146,73 ÷ 3 =

Az eredmény nála 2 595 670,178 lett. Azért ennyi, mert a legtöbb számológép csak 10 jegy hosszúságú számokat tud kezelni, beleértve a tizedesjegyeket is, a többi jegyet lekerekíti.

Néhány alapszabály a számológépekhez:

1. **LEGYEN** számológéped!
2. Legyen **ITT** a számológéped!
3. **ISMERD** a számológépedet!
4. Számolás előtt **BECSÜLD** meg a feladat eredményét!
5. **HASZNÁLD** a számológépedet!
6. **VESD ÖSSZE** a végeredményt a becsléseddel!

Néhány billentyű, amely egyszerűsíti a számolást:

	billentyű jele	használata	példa
reciprok	x^{-1} vagy $1/x$	a szám reciprokát számolja ki	4 x^{-1} = 0,25
hatványozás	x^y	az x-nek az y-adik hatványát számolja ki	2 x^y 5 = 32
normálalak	EXP EE	a normálalakban a 10 kitevőjét lehet bevinni ezzel a billentyűvel	3 EXP 4 = $3 \cdot 10^4$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Számítsuk ki az $\frac{x^3 y}{z^5}$ kifejezés értékét számológéppel, ha $x = 2 \cdot 10^{13}$, $y = 427^{10}$ és $z = 3{,}813 \cdot 10^3$!

Megoldás

Írjuk le, mit kell kiszámítanunk a számológéppel:

$$\frac{(2 \cdot 10^{13})^3 \cdot 427^{10}}{(3{,}813 \cdot 10^3)^5}$$

Használjuk ki a számológépnek azt a funkcióját, hogy a számokat normál alakban is beírhatjuk!

Az EXP vagy EE billentyű segítségével beírt normál alakot a számológép egyetlen számként kezeli.

Az x szám beírható így: 2 EXP 13. Az x^3 pedig beírható így: 2 EXP 13 x^y 3.

A kifejezést értékét kiszámolhatjuk a következő módon:

2 EXP 13 x^y 3 · 427 x^y 10 : 3,813 EXP 3 x^y 5 =

A kifejezés értéke $\approx 2 \cdot 10^{48}$

FELADAT

1 Figyelj a zárójelek használatára! Mutasd meg a számológéped segítségével, hogy

a) $52{,}8 \cdot 37{,}5 + 27{,}2 \cdot 37{,}5 = (52{,}8 + 27{,}2) \cdot 37{,}5$;

b) $\left(2^5\right)^3 = 2^{15}$;

c) $\left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{9^3}{4^3}$;

d) $78{,}4 - (38{,}9 - 104{,}3) = 78{,}4 - 38{,}9 + 104{,}3$;

e) $38 : (19 : 7) = 38 : 19 \cdot 7$.

2 Használd a számológépedet!

a) $1{,}25^{10}$ c) $1{,}25^{12}$

b) $0{,}8^{12}$ d) $1{,}25^{12} \cdot 0{,}8^{12}$

3 Számítsd ki a $\frac{p^5 q^2}{r^4}$ kifejezés értékét számológéppel, ha $p = -4{,}7$; $q = -93{,}1$; $r = 3{,}7$.

4 Számítsd ki számológéppel!

a) $25 : 16 + 4 =$ c) $\frac{25}{16 + 4} =$

b) $25 : (16 + 4) =$ d) $\frac{25}{16} + 4 =$

5 Mutasd meg számológéppel, hogy

a) $(43{,}8 + 9{,}6)^2 \neq 43{,}8^2 + 9{,}6^2$;

b) $(43{,}8 + 9{,}6)^2 = 43{,}8^2 + 9{,}6^2 + 2 \cdot 43{,}8 \cdot 9{,}6$;

c) $\frac{5}{9 + 6} \neq \frac{5}{9} + \frac{5}{6}$;

d) $\frac{9 + 6}{5} = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}$.

HÁZI FELADAT

1 Számítsd ki számológéppel!

a) $5^4 : (2^7 : 5^3) \cdot 2^{14}$ c) $2^5 + 3^5 + 4^5$

b) $\left(\frac{1}{0{,}0054}\right)^3$ d) $\sqrt{28^2 + 45^2}$

2 Mutasd meg számológéppel, hogy

a) $(5{,}6 - 10{,}9)^2 \neq 5{,}6^2 - 10{,}9^2$;

b) $(5{,}6 - 10{,}9)^2 = 5{,}6^2 + 10{,}9^2 - 2 \cdot 5{,}6 \cdot 10{,}9$!

3 Végezd el a következő számításokat!

a) $(2{,}5 \cdot 10^5) \cdot (6{,}4 \cdot 10^7)$

b) $(4{,}8 \cdot 10^5) : (1{,}6 \cdot 10^7)$

c) $(6{,}25 \cdot 10^5) \cdot (3{,}2 \cdot 10^4)$

d) $(1{,}28 \cdot 10^4) : (5{,}12 \cdot 10^6)$

4 Egy vállalkozó négyzet alapú gúla alakú, tömör fém dísztárgyakat gyárt. Egy kis gúla alapéle 3,6 cm, magassága pedig 2,7 cm. Legalább hány cm^3 anyagot kell beszereznie 1500 db gúla elkészítéséhez? (Használd a lecke bevezetőjében megadott képletet!)

25 SZÁMOLÁS NORMÁLALAKKAL

BEVEZETŐ

Gyorshír: 2007-01-05, 11.23
…A legsúlyosabb helyzet a Yucatán-félszigeten (Mexikó) van, ahol már 700 négyzetkilométeres területen észlelték a sáskajárást. A szakértők szerint a rovarok a szaporodási helyükre tartanak. Egy sáska kétszázezer utódot hoz a világra. Ugyanebben a térségben tavaly is pusztítottak a sáskák, akkor több száz hektárnyi ültetvényt zabáltak fel…



A sáskajárás idején az egy négyzetkilométeren található sáskák száma elérheti a 60 milliót.

a) Megközelítőleg hány sáska lepte el a Yucatán-félszigetet, ha a sáskaraj mintegy 17 négyzetkilométeres kiterjedésű lehetett?

b) Ha a sáskajárás idején a sáskák negyede a gyorshírben közölt maximális számú utódot hozott volna világra, akkor hány sáskával szaporodott volna az állomány, feltéve, hogy az egyedek pusztulása nem jelentős mértékű? Elképzelhető, hogy hiba csúszott a híradásba?

c) Egy sáska tömege megközelítőleg 4 gramm. Hány kilogramm egymilliárd sáska össztömege?

1 millió = 1 000 000 = 10^6 1 milliárd = 1 000 000 000 = 10^9

Megoldás

a) $17 \cdot 6 \cdot 10^7 = 102 \cdot 10^7 = 1{,}02 \cdot 10^9$, azaz kb. egymilliárd sáska lepte el a félszigetet.

b) $0{,}25 \cdot 1{,}02 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^5 = 5{,}1 \cdot 10^{13}$, azaz 51 billió sáskával szaporodna az állomány. Ez elképesztően nagy szám, nézzük, mekkora területen férne el ennyi sáska! Ha egy sáska kb. egy 2 cm · 2 cm-es négyzetben fér el, akkor 51 billió sáska kb. $4 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{13} = 2{,}04 \cdot 10^{14}$ cm² területen férne el. 1 km² = $\left(10^5\right)^2$ cm² = 10^{10} cm², tehát $2{,}04 \cdot 10^{14} : 10^{10} =$ $= 2{,}04 \cdot 10^4 \approx 20\,000$ km², ami Magyarország területének több mint 20%-a. Ez meglehetősen valószínűtlen eredmény, tehát lehetséges, hogy a híradásba hiba csúszott. (Az látszik a legvalószínűbbnek, hogy a hírben szereplő *kétszázezer utód* helyett *kétszáz–ezer utód* állhatott eredetileg, ami megfelel a sáskák szaporodásáról szóló tanulmányoknak).

c) Egymilliárd sáska tömege $4 \cdot 10^9$ gramm, ami $4 \cdot 10^6$ kg (= 4000 tonna).

FELADAT

1 Egy táptalajba 200 sejtet oltanak. A sejtek száma 30 percenként megkétszereződik.

a) Hányszorosára változik a sejtek száma 12 óra elteltével?

b) Körülbelül hány sejt lesz 12 óra múlva, ha közben a sejtpusztulás elhanyagolható mértékű?

A) ≈ 336 millió
B) ≈ $3{,}36 \cdot 10^9$
C) ≈ 33,6 milliárd
D) ≈ $0{,}336 \cdot 10^6$

2 A Naprendszerünkhöz legközelebbi extragalaxisok egyike az Andromeda-spirálgalaxis. Ez körülbelül $2{,}1 \cdot 10^{19}$ km távolságra van. Mennyi idő alatt tesz meg ekkora utat a fény?

3 Figyeld meg, hogyan számítjuk ki egy normálalakban megadott szám négyzetgyökét!

$\sqrt{9 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^3$

mert $(3 \cdot 10^3)^2 = 3^2 \cdot (10^3)^2 = 9 \cdot 10^6$.

$\sqrt{8{,}1 \cdot 10^5} = \sqrt{81 \cdot 10^4} = 9 \cdot 10^2$

mert $(9 \cdot 10^2)^2 = 9^2 \cdot (10^2)^2 = 81 \cdot 10^4 = 8{,}1 \cdot 10^5$.

Kösd össze az egyenlőket! Minden sorban egy-egy értéknek nincs párja. Írd le ezeket a hiányzó párokat! Ne használj számológépet!

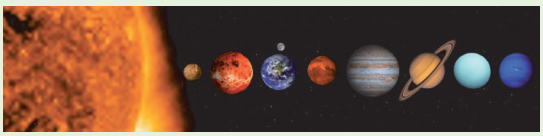
$\sqrt{4 \cdot 10^{10}}$	$\sqrt{10^{32}}$	$\sqrt{2{,}5 \cdot 10^7}$	$\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{11}}$	$\sqrt{10^{34}}$
$5 \cdot 10^3$	10^{17}	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$

4 A számítások elvégzése után, a végeredményben – normálalakban felírva – mennyi lesz a 10 kitevője? Először becsüld meg a kitevőt! Ellenőrizd becslésedet számológéppel!

a) $\sqrt{5 \cdot 10^{14}} \cdot 10^2$ **c)** $\sqrt{3 \cdot 10^6} + 10^2$

b) $\sqrt{8 \cdot 10^{18}} : 10^2$ **d)** $\sqrt{6 \cdot 10^{23}} \cdot 10^2$

5 A Nap sugara kb. 700 000 000 m, a Földé pedig 6 370 000 m. Mekkora lenne a Nap átmérője a Naprendszer egy olyan modelljében, amelyben a Föld focilabda méretű (kb. 20 cm átmérőjű)?



6 Bence kémia-röpdolgozatában az alábbi tesztkérdés szerepelt:

„A 26-os rendszámú, 56-os tömegszámú elem milyen mennyisége tartalmaz $30 \cdot 10^{23}$ db neutront?

a) 1 g-ja **d)** 10^{23} db atom

b) 1 mólja **e)** 5 mólja

c) $6 \cdot 10^{23}$ db atom

Bence helyesen válaszolt, mert tudta, hogy a 26-os rendszámú, 56-os tömegszámú elem egy atomjában $56 - 26 = 30$ neutron van. Mi volt Bence válasza?

HÁZI FELADAT

1 Számítsd ki a $\frac{x^3 \cdot y^4}{z + w}$ kifejezés értékét, ha

$x = 2{,}35 \cdot 10^2$; $y = 6{,}11 \cdot 10^3$;

$z = 7{,}1 \cdot 10^2$; $w = 3{,}4 \cdot 10^1$.

2 Egyetlen szőlőcukor molekulában 6 szénatom, 12 hidrogénatom és 6 oxigénatom van. Egy mól anyagban $6 \cdot 10^{23}$ db részecske van.

a) Hány hidrogénatom van 80 mól szőlőcukorban?

b) Hány mól szőlőcukorban van 10^{30} db hidrogénatom?

Válaszaidat normálalakban add meg!

3 A hozzánk legközelebbi csillag (a Napot nem számítva) a Proxima Centauri, amelyről 4,2 év alatt ér a Földre a fény. Hány km a Földtől való távolsága, ha a fény sebessége $3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$?

4 „…2008. áprilisig összesen 63 db szélerőmű épült Magyarországon, melyeknek az összkapacitása 112 000 000 W.”

a) Átlagosan mekkora teljesítményű egy szélerőmű az adatok alapján? Normálalakkal dolgozz, és az eredményt is normálalakban add meg!

b) Hányszorosa a paksi atomerőmű teljesítménye a 63 szélerőmű együttes teljesítményének? (A paksi atomerőmű körülbelül 1 830 000 000 W teljesítményű volt 2008-ban.)

RÁADÁS

FELADAT

Gondolatban beleöntünk a Balatonba egy gramm (egygyűszűnyi) tintát, majd „jól elkeverjük”.
A Balaton területe 596 km², átlagos mélysége 3 méter, egygyűszűnyi tintában kb. $3 \cdot 10^{22}$ „tintamolekula” van.
Hány tintamolekula lesz az egyenletes elkeveredés után a Balatonból kivett egy pohár (2 dl) vízben?

26 KAMATOS KAMAT

BEVEZETŐ

A hétköznapok során az egyik leggyakoribb pénzügyi művelet a **betét** elhelyezése (befektetés), illetve a **hitel** (kölcsön) igénybevétele. **Más pénzének használatáért használati díjat kell fizetni.** Ha mi adjuk a pénzünket használatba másnak (például bankbetétben helyezzük el vagy értékpapírt vásárolunk), akkor mi kapunk használati díjat. Ha mi használjuk más pénzét (hitelt veszünk igénybe, kölcsönt veszünk fel), akkor mi fizetünk használati díjat.

ELMÉLET

A használatba adott pénzt **tőkének** nevezzük, a használatért járó díjat pedig **kamatnak**.

A kamatot általában a tőke százalékában kifejezve adjuk meg. Ilyen feladatokban a százaléklábat **kamatlábnak** nevezzük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Beteszünk a bankba 200 ezer forintot, évi 6%-os kamatra. Bármikor kivehetjük a pénzünket, a kamat arányos részét megkapjuk. Mennyi kamat jár a pénzünk után

a) egy év múlva;
b) két hónap múlva;
c) öt hónap múlva;
d) fél év múlva?

Megoldás

a) A bank az egyéves pénzhasználatért 6% kamatot fizet, azaz $200\,000 \cdot 0{,}06 = 12\,000$ forintot.

b) Két hónap után az éves kamat hatodrésze jár, tehát a tőke 1%-a, ami 2000 forint.

c) Öt hónap után az éves kamat $\frac{5}{12}$ része jár, ami a tőke 2,5%-a, vagyis 5000 forint.

d) Fél év után az éves kamat fele, 3% jár, vagyis 6000 forint.

2. Hitelre vásároltunk egy új telefont. Három hónap múlva kell fizetnünk, mégpedig a kamattal együtt 84 800 forintot. Az igénybe vett hitel (a telefon vételára, amit a bank fizet ki helyettünk az eladónak) éves kamata 24%. Mennyibe került volna a telefon, ha készpénzzel fizetünk?

Áruvásárlási hitel igénylésekor (nagyon leegyszerűsítve) a következők történnek.
– Szeretnénk megvenni valamit, de nincs rá pénzünk. Ezért egy pénzintézettől (pl. banktól) kérjük, hogy fizesse ki helyettünk az áru vételárát.
– A pénzintézet kifizeti az eladónak a vételárat, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy kölcsönadott nekünk annyi pénzt, amennyibe az áru került.
– Mi használjuk tehát más pénzét, ezért a vételárnál többet kell visszafizetnünk, mégpedig a kamattal megnövelt vételárat. A kamat nagyságát előzetes megállapodásban rögzíti a pénzintézet és a hitelt igénybe vevő (hitelszerződést kötnek).

Megoldás

Ha az éves kamat 24%, akkor 3 hónapra ennek a negyedrésze, 6% jár.

A kölcsönvett összeg 100%, a kamat 6%, ez összesen 106%. Az áru vételára tehát $84\,800 : 1{,}06 = 80\,000$.

Tehát a telefon készpénzes fizetés esetén 80 000 forintba került volna. Ennek az összegnek a háromhavi használatáért mi 4800 forint kamatot fizettünk.

FELADAT

1 Classic betétben szeretnénk elhelyezni 300 000 forintot. Mekkora összeg lesz a számlánkon

a) 1 hónapos lekötés esetén, 1 hónap után,
b) 3 hónapos lekötés esetén, 3 hónap után,
c) 6 hónapos lekötés esetén, 6 hónap után,

ha a mellékelt táblázat szerint lehetséges lekötési idők közül választunk?

Nem akciós lekötött betéti kamatok
CLASSIC BETÉT

Lekötési idő	1 millió forint alatti betét éves kamata
1 hónap	6,50%
2 hónap	6,75%
3 hónap	7,00%
6 hónap	7,00%
12 hónap	7,50%

2 Könnyen lehet hitelhez jutni, csak egy kattintás az egyik online kölcsönigénylést kínáló cég honlapján, és már szinte a zsebünkben érezhetjük a kívánt összeget. Nem árt azonban óvatosnak lenni!
A kölcsön futamideje 54 hét (azaz gyakorlatilag 1 év). Összesen mekkora összeget kellett fizetnünk a 200 000 forint használatáért, és ez hány százaléka a tőkének?



3 Bankba tett pénzünk évi 8,45%-os kamatos kamat mellett 5 év alatt 1,5 millió forintra szaporodott. Hány forint volt a bankban elhelyezett tőke?



4 500 ezer forint tőke 4 éven keresztül évi 6%-os kamatos kamattal növekedett, majd az így megnövekedett tőke további 4 éven keresztül évi 5%-os kamatos kamattal gyarapodott.

a) Mekkora lesz a 8. év végén a megnövekedett tőke (ezer forintban)?

A) $500 \cdot 0{,}06^4 \cdot 0{,}05^4$ C) $500 \cdot 1{,}6^4 \cdot 1{,}5^4$
B) $500 \cdot 1{,}06^4 \cdot 1{,}05^4$ D) $500 \cdot 0{,}11^4$

b) Mekkora éves kamatos kamat esetén érhettünk volna el ugyanakkora növekedést 4 év alatt, mint amennyit a 8 év alatt elértünk?

A) 11,3% C) 5,5% E) $\approx$ 17,4%
B) 30% D) 11%



ELMÉLET

Kamatos kamatszámítás: a periódus leteltével a kamat jóváíródik a tőkéhez, és utána ez a megnövelt tőke kamatozik tovább. Erre használják a *„folyamatos lekötés”* kifejezést.

Általánosan:

Az A forint kezdeti tőke p%-os kamat mellett n periódus alatt $A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ forintra nő.

Az összehasonlíthatóság miatt a kamatlábat éves kivetítésre adják meg. A képletben szereplő p pedig a periódusra eső kamatláb. Például ha az éves kamatláb 12%, és havonta írják jóvá a kamatot, akkor az egy hónapra eső kamatláb $p = \frac{12\%}{12} = 1\%$. Ha negyedévente írják jóvá a kamatot, akkor a negyedévre eső kamatláb $p = \frac{12\%}{4} = 3\%$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Az új autók gyorsan veszítenek az értékükből, évente 20%-ot is elérhet a veszteség.
Mennyit ér 3 évvel a vásárlás után a 3 500 000 forintért vett autó, ha értéke évente 16%-kal csökken az előző évi értékéhez képest?



Megoldás

Az első év végén az új ár 84%-át éri az autó, azaz 3 500 000 · 0,84 forintot.

A második év végén ennek az összegnek a 84%-a, azaz $3\,500\,000 \cdot 0{,}84^2$, a harmadik év végén pedig $3\,500\,000 \cdot 0{,}84^3 \approx 2\,074\,000$ forint lesz az autó értéke (ami az új autó árának mintegy 60%-a csupán).

ELMÉLET

A kamatoskamat-számítási feladatok közé soroljuk a gépek értékcsökkenésével kapcsolatos feladatokat is. Ekkor természetesen nem nő, hanem csökken az érték, az indulóösszeget mindig 1-nél kisebb számmal kell megszorozni.

Általánosan:

Egy A forint árú gép értéke p%-os **értékcsökkenés** esetén n periódus alatt $A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ forintra csökken.

Megjegyzés: Egy termék valós piaci értéke természetesen sok dologtól függ. Autók esetében van például egy eurotax nevű, a piacon objektívnek tekintett rendszer, amelynek alapján a használt autók értékét meghatározzák. Ebben a koron kívül még sok adatot kell megadni a reális érték megbecsléséhez.

FELADAT

5 A használt autók értékcsökkenési folyamata lassúbb, mint az új autóké, az éves csökkenés mértéke általában 7–15%.
Egy 3 éves, jelenleg 2 074 000 forint értékű autó évente 10%-ot veszít az értékéből.

a) Mennyi lesz az autó értéke 3 év múlva, 6 éves korában?

b) A 3,5 millió forintos újkori értékének hány százalékát veszítette el az autó 6 év alatt?

6 Az idő múlásával az amortizáció miatt egy használati tárgy veszíthet az értékéből. Egy jó minőségű nyomdagép értéke minden évben a 9%-ával csökken. Ha eredetileg másfél millió forintért vette a cég, akkor mennyit fog érni 6 év múlva?

HÁZI FELADAT

1 Kölcsönkértünk 120 ezer forintot egy évre. Mennyi a kamat és a kamatláb, ha az év végén a kamattal együtt

a) 130 200; **c)** 138 000;
b) 132 000; **d)** 125 400

forintot kell fizetnünk?

2 Egy új autó értéke 3 millió forint. Az értéke évente 14%-kal csökken.

a) Mennyi lesz az értéke 2 év múlva?
b) Mennyi lesz az értéke 4 év múlva?

3 Beteszünk a bankba 1 millió forintot, évi 7,2%-os kamattal, 3 hónapos folyamatos lekötéssel. Ez azt jelenti, hogy 3 havonta kiszámítják a kamatot, hozzáadják a pénzünkhöz, és ez a felnövekedett összeg kamatozik tovább újabb 3 hónapig, és így tovább. Mennyi pénzt kapunk, ha

a) három hónap múlva; **c)** egy év múlva;
b) fél év múlva; **d)** másfél év múlva

vesszük ki a pénzünket?

4 Betesszük a bankba a 250 ezer forintunkat 2 évre. Mi a jobb, ha 3 hónapos folyamatos lekötést választunk 7%-os kamattal, vagy ha 6 hónapos folyamatos lekötést választunk 7,4%-os kamattal?

RÁADÁS

A bankok betét- és hitelhirdetéseiben gyakran láthatók az EBKM és THM rejtélyes rövidítések. A betűszavak az *egységesített betéti kamatlábmutató*, illetve a *teljes hiteldíjmutató* rövidítései. De mi is rejlik mögöttük valójában?

Az EBKM-et a különböző futamidejű betétek összehasonlíthatóságának érdekében vezették be. Minden betétre – futamidőtől függetlenül – az éves kamatláb mértékét jelzi.

Például:
Legyen a kamatláb 20%. Ha féléves a kamatfizetés, akkor fél év alatt 10% a kamat. Ha folytonos lekötésről van szó (azaz a pénz bennmarad a bankban és tovább kamatozik), akkor egy év múlva már $1{,}1^2 = 1{,}21$-szeresére nőtt a tőke, ami nem 20%, hanem 21%-os hasznot jelent. A kamatláb tehát 20%, az EBKM azonban 21%. Ezért nemcsak azt kell figyelembe venni, hogy mekkora az ígért kamatláb, hanem a kamatozás időbeli lefolyása is nagyon fontos.

Az EBKM a fentieken túl a betétekkel kapcsolatos banki költségeket is figyelembe veszi, így valóban alkalmas a különböző banki ajánlatok összehasonlítására.

A THM hasonló módon a hitelek összehasonlítását segíti. A hitel teljes költségét mutatja meg ugyancsak egy év időtartamra, beleértve a hitel kamatait és a kezelési költséget is. Ha például egy év alatt a felvett összeg kamata 17%, a kezelési költség pedig 3%, akkor a THM: 17% + 3% = 20%.
Az EBKM-től eltérően azonban a THM számításakor nem egyszerű arányosságot használnak, hanem a kamatos kamat korábban már alkalmazott képletét. Ezért a THM kiszámítása – elsősorban az általában havi bontásban jelentkező költségek miatt – összetett matematikai feladat.

27 GYAKORLÁS; TUDÁSPRÓBA

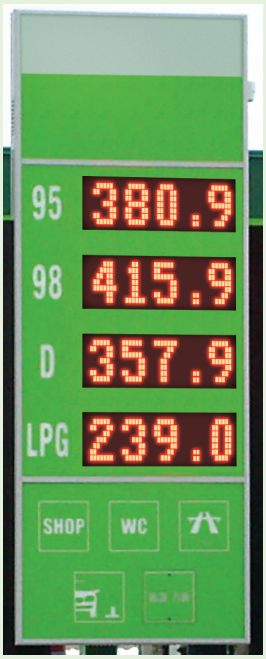
FELADAT

1 Bontsd fel a zárójeleket, majd csoportosítsd újra a műveleteket úgy, hogy fejben is könnyen kiszámítható legyen az eredmény!

a) $66 \cdot \left(\frac{2}{3} : 11\right)$

b) $1{,}7 - (4{,}2 - 0{,}3) + 1{,}2$

2 A képen egy benzinkút ún. „totemoszlop”-a látható, amely a kút árairól tájékoztat.



a) Hány százalékkal drágább a jobb minőségű, 98-es oktánszámú benzin az egyszerű 95-ösnél?

b) Hányszor annyiba kerülne a 98-assal teletankolni az autónkat, mint ha 95-öst tankolnánk?

c) Ugyanannyi pénzért hányszor annyi benzint vehetünk a 98-asból, mint a 95-ösből?

3 Egy gazdaságban 250 állat van, az állatok 98%-a sertés. Eladják a sertések egy részét. Hány sertést adtak el, ha a megmaradt állatok 96%-a továbbra is sertés maradt?

4 Egy 9 m hosszú szalagot úgy vágunk 3 részre, hogy a második rész másfélszer olyan hosszú, mint az első, és a harmadik rész kétszer olyan hosszú, mint a második. Milyen hosszúak az egyes részek?

5 Egy négyzet oldaléle $3{,}56 \cdot 10^2$ m.

a) Mekkora a területe?

b) Hány százalékkal változik a területe, ha az oldalát 30%-kal növeljük?

c) Hány százalékkal változik a területe, ha az oldalát 15%-kal csökkentjük?

6 Egy apa 1 óra 40 perc alatt, felesége 3 óra 20 perc alatt, kisfia 6 óra 40 perc alatt ássa fel a kertjüket.

a) A kert hányadrészét ássa fel az apa negyed óra alatt?

b) Az anya mennyi idő alatt ássa fel a kert háromötöd részét?

c) Mennyi idő alatt készülnek el az ásással, ha mindhárman ásnak?

7 Írd fel a kifejezéseket egyszerűbb alakban!

a) $2^6 \cdot 2^7 : 2^8$

b) $(3^5 \cdot 5^3)^6$

c) $2^5 + 2^6 + 3 \cdot 2^5$

8 Egy kocka oldalélei 1,2 m hosszúak.

a) Milyen hosszú az oldallapok átlója?

b) Hány mm^2 a kocka felszíne?

c) Hány mm^3 a kocka térfogata?

9 Egy tó felületén élő alga kiterjedése a tó felületén minden nap az előző naphoz képest a duplájára nő. A 10. napon beborítja a teljes tavat.

a) A tó felületének hány százalékát borította be a 9. napon?

b) A tó felületének hány százalékát borította be a 6. napon?

TUDÁSPRÓBA

1 Írd fel egyetlen hatványként!

a) $3^5 \cdot (3^2)^4$ **b)** $\frac{2^8 \cdot 7^8}{14^3}$ **c)** $a^4 \cdot (a^4)^2 : a^3$

2 Hány százalék az éves kamat annál a befektetésnél, amelynél 4 hónap múlva 250 ezer forint helyett 257 ezer forintot kaptunk?

3 Egy könyv árát leszállították 30 százalékkal, majd ezt követően pár hét múlva újabb 10 százalékkal.

a) Határozzuk meg, hogy hány forinttal csökkent alkalmanként a könyv ára, ha a második árleszállítás után 2646 forintba kerül!

b) Hány százalékkal csökkent összesen a könyv eredeti ára a leszállítások során?

4 A fény 1 másodperc alatt 300 000 km utat tesz meg.

a) Hány kilométert tesz meg fél óra alatt?

b) Mennyi idő alatt tesz meg $9{,}46 \cdot 10^{12}$ kilométert?

5 Egy csapon keresztül 3 perc alatt 74,8 liter víz áramlik a medencébe.

a) Mennyi víz áramlik 16 perc alatt a medencébe?

b) Mennyi idő alatt tölthetjük félig az 1500 literes medencét ezen a csapon át?

c) Egy másik csapon keresztül 2 perc alatt 98,2 liter víz áramlik a medencébe. Mennyi időre van szükség, hogy ezen a csapon keresztül töltsük félig a medencét?

d) Ha mindkét csapot kinyitjuk, akkor mennyi időre van szükségünk ugyanehhez?

RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés, 2012)
Egy városban egy homokórát szeretnének építeni, amelyben a teljes homokmennyiség 1 év alatt folyik le, vagyis pontosan 365 nap és 6 óra alatt. Másodpercenként 0,06 gramm homok folyik le egy szűk nyíláson keresztül a felső tartályból az alsóba.
Melyik műveletsorral számítható ki, hogy összesen hány gramm homokkal kell feltölteni a homokórát?

A) $0{,}06^2 + 365 \cdot 24 \cdot 60^4 + 6$

B) $0{,}06 \cdot 60^2 \cdot 24 \cdot 365 + 0{,}06 \cdot 60^2 \cdot 6$

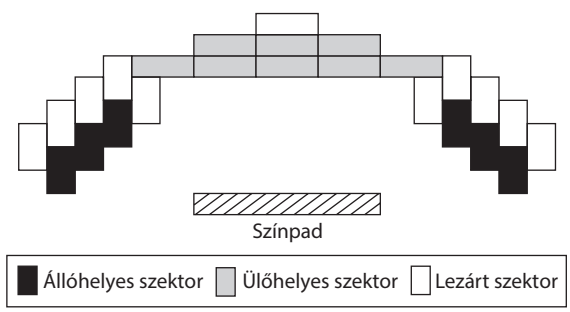
C) $0{,}06 \cdot 60 + 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 0{,}06 \cdot 6 + 60 + 60$

D) $0{,}06 \cdot 60^4 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 365^2$

2. (Kompetenciamérés, 2012)
Egy havonta megjelenő magazin egy száma 745 Ft-ba kerül. A kiadó akciós előfizetési lehetőséget kínál a vásárlóinak. Ha valaki egy évre megrendeli a magazint, és egy összegben kifizeti az árát, akkor 5400 Ft-ba kerül az éves előfizetés. Hány százalékos kedvezményt nyújt a kiadó az éves előfizetőinek a havi árhoz képest?

3. (Kompetenciamérés, 2010)
Színaranyból nem készítenek ékszert, mert az túlságosan lágy ahhoz, hogy tartósan viselhető legyen. Ezért, hogy keményebbé s egyben ellenállóbbá is tegyék, a színaranyhoz más fémet is adnak. A színaranytartalom határozza meg, hogy hány karátos az arany. Az x karátos arany színarany tartalma $\frac{x}{24}$ tömegrész. Az ötvösök rendszerint 14 és 18 karátérték közötti arannyal dolgoznak, ezekben $\frac{14}{24}$ és $\frac{18}{24}$ tömegrész közötti arany van. Egy arany karkötő 12 gramm rezet, 28 gramm aranyat és 8 gramm ezüstöt tartalmaz. Hány karátos ez a karkötő?

4. (Kompetenciamérés, 2011)
A Könnyűzenei Fesztiválon fellépő népszerű Telito-Rock együttes koncertjét a város szabadidőközpontjában rendezték meg. A következő ábra a központ sportarénájának lelátóját szemlélteti. A csak állóhelyeket biztosító szektorokat fekete, a csak ülőhelyekkel rendelkezőket szürke színnel jelöltük. A fehér színnel jelölt szektorokat a rendezőség lezárta a rajongók elől.



Hány rajongónak jutott ülőhely a koncerten, ha összesen 2800 db jegyet adtak el, és egy állóhelyekkel rendelkező szektorban kétszer annyian fértek el, mint egy ülőhelyekkel rendelkezőben?

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Számolj fejben!

a) $109{,}5 + 20{,}5 - 36{,}5 + 78{,}5 - 48{,}5 - 13{,}5$

b) $36{,}8 - 12{,}4 + 27{,}3 - 11{,}8 - 2{,}3 + 2{,}4$

2 Számolj fejben!

a) $\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{17} \cdot \frac{34}{5} : \frac{8}{5}$ **b)** $\frac{11}{4} \cdot \frac{8}{3} + \frac{41}{6} : \frac{1}{2}$

3 Írd fel két egész szám hányadosaként!

$2{,}3$; $-5{,}61$; $0{,}07$; $-11{,}2$; $-9{,}99$

4 Melyik az a szám, amelynek

a) $\frac{2}{3}$ részének $\frac{5}{4}$-szerese $\frac{20}{3}$?

b) $\frac{3}{7}$-szeresének $\frac{8}{9}$ része $\frac{21}{5}$?

5 Számold ki a kifejezések értékét fejben! Mely zárójelek hagyhatók el a műveletek megváltoztatása nélkül?

a) $(11{,}34 - 6{,}34) - (5{,}48 - 6{,}48)$

b) $((8{,}22 - 4{,}12) - 5{,}1) - 16{,}1$

c) $((84{,}63 - 60{,}63) : 6) - (9{,}13+10{,}87)$

d) $48 : \left(9 \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot ((49 : 7) + 2)$

6 A kétjegyű számokban azonos jelek azonos számjegyeket jelentenek. Melyik számjegyet helyettesítik a jelek?

a) $\left(\frac{24}{\forall} + \frac{8}{1\forall}\right) : \frac{32}{\forall} = \frac{\forall}{6}$

b) $\frac{\partial 8}{15} \cdot \left(\frac{3}{\partial} + \frac{1\partial}{8}\right) = \frac{2\partial}{3}$

7 Összeöntöttünk három sósavoldatot. Az egyik oldat $\frac{3}{11}$ része volt sósav, a többi víz. A másik oldat $\frac{2}{7}$ része volt sósav, többi víz. A harmadiknak $\frac{4}{9}$ része volt sósav. Az elsőből 2,4 liter, a másodikból 1,8 liter, a harmadikból 3,5 liter oldatunk volt. Hányadrésze lett sósav a végső oldatnak?

8 Osszuk fel a 120-at

a) 3 : 4 : 5 arányban;

b) 4 : 5 : 6 arányban!

9 Egy biciklitúra tervezésénél úgy gondolták a szervezők, hogy a távot 4 : 6 : 7 : 3 arányban osztják szét a négy napra. A második és harmadik napon így összesen 148,6 km-t kell tekerni. Mekkora a teljes táv?

10 Hányszor jár körbe

a) az óra kismutatója január hónapban?

b) az óra nagymutatója április hónapban?

11 Egy különleges, 24 órás óra mutatója nem fél nap, hanem egy teljes nap alatt teszi meg egyszer a teljes kört.



a) Hány perc telik el, mialatt a teljes kör negyedét teszi meg?

b) Hányszor jár körbe március 15-én 0:00 perc és június 20-án 24:00 között?

12 Ha 22 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel megyünk, akkor 340 s-ig tart az út.

a) Mennyi ideig tartana ugyanennek az útnak a megtétele 24 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel?

b) Mekkora sebességgel kellene mennünk, hogy 290 s alatt tegyük meg ugyanezt az utat?

13 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mentünk 2,4 órán keresztül, majd 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mentünk 1,8 órán át.

a) Mekkora utat tettünk meg?

b) Mekkora sebességgel kellett volna mennünk, hogy végig állandó sebességgel, de összesen ugyanennyi idő alatt tegyük meg ezt az utat?

c) Mekkora sebességre kellett volna kapcsolnunk az út második részében, ha ugyanezt az utat szerettük volna megtenni, és a 2,4 óra után (amikor 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mentünk), rájöttünk, hogy 1,5 óra múlva célba kell érnünk?

14 Egy kerék 49-et fordul, míg a teljes úton végiggurul. Mennyit fordul egy 2,5-szer akkora átmérőjű kerék 3,5-szer akkora úton?

15 Két racionális szám aránya 11 : 23. Melyik ez a két szám, ha

a) összegük 84;

b) szorzatuk 84;

c) különbségük 84?

16 Egy termék ára áfa-val együtt 290 forint. Mennyi az eredeti ár, ha az áfa 16%?

17 Egy árucikk 600 forintba kerül. Egynegyedével leviszik az árát. Hány százalékos drágulás után kapjuk vissza az eredeti árát?

18 Ha összekeverünk 8 darab 60%-os zsírtartalmú és 3 darab 80%-os zsírtartalmú azonos tömegű vajat, hány százalékos zsírtartalmú lesz a keverék?

19 Mennyi az eredeti ára a fényképezőgépnek, ha

a) 20%-os árleszállítás után 32 500 Ft;

b) 4,5%-os áremelkedés után 38 400 Ft az új ára?

20 Egy társasjáték árát egy akció során 18%-kal csökkentették. Hány százalékos áremelés után lesz az ára

a) újból az eredeti ár;

b) az eredeti ár 5%-ával nagyobb?

21 550 000 Ft-ot befektettünk fél éves, folyamatos lekötéssel, évi 8%-os kamatra. Mennyi pénz lesz a számlánkon

a) fél év múlva;

b) három év múlva?

22 Melyik az előnyösebb befektetés:

a) negyedéves, folyamatos lekötés, évi 5%-os kamattal;

b) féléves, folyamatos lekötés, évi 6%-os kamattal?

23 Egy bank sávos kamatozású betétet hirdet. 100 000 Ft-ig 5%, a 100 000 Ft és 200 000 Ft közötti részre 7%, és a 200 000 Ft feletti részre 8 % a kamatláb. (A betét éves kamatozású.)

0–99 999	100 000–199 999	200 000 felett
5%	7%	8%

a) Mekkora összeg lesz a számlánkon egy év múlva, ha 250 000 Ft-ot fektetünk be?

b) Hány százalékkal több ez, mint a befektetett összeg?

24 Végezd el a műveleteket, hozd egyszerűbb alakra!

a) $11^5 \cdot 2^4 \cdot (2 \cdot 11^2)^3$

b) $7^5 \cdot 3^4 \cdot (3 \cdot 7^2)^4$

c) $5^8 \cdot (17^2 \cdot 5)^3 : 5^2$

25 Végezd el a műveleteket!

a) $x^4 \cdot y^2 \cdot (xy)^3$

b) $(a \cdot b^2)^6 \cdot b^5 : (a \cdot b^3)^4$

c) $\dfrac{7^2 \cdot 3^4 \cdot 7^6}{7^8 \cdot 3^3}$

26 Melyik szám nagyobb?

a) $2^8 \cdot 2^6 \cdot (2^4)^3$ vagy $2^7 \cdot (2^5 \cdot 2^3)^2$

b) $2^9 \cdot 3^8 \cdot 6^2$ vagy $6^3 \cdot (6^2)^4$

c) 3^{500} vagy 5^{300}

27 Végezd el zsebszámológép segítségével a műveleteket!

a) $\dfrac{8{,}1 \cdot 10^5 + (1{,}2 \cdot 10^3)^2}{3 \cdot 10^4}$

b) $\dfrac{3{,}14 \cdot 10^4 \cdot (4 \cdot 10^3)^2}{5{,}8 \cdot 10^7}$

28 Írd fel az alábbi számok normálalakját!

372 000; 8 315 000; 142 500 000;

880 000 000 000; –97 750 000; –750 000 000 000

29 Írd az alábbi számokat normálalakból helyiértékes alakba!

$5 \cdot 10^3$; $1{,}25 \cdot 10^6$; $5 \cdot 10^3$; $4{,}5 \cdot 10^2$;

$6{,}123 \cdot 10^7$; $-5{,}333 \cdot 10^5$; $-7{,}89456 \cdot 10^9$

30 Add meg az eredményt normálalakban is!

a) $3{,}12 \cdot 10^3 \cdot 8{,}2 \cdot 10^4 \cdot 5{,}3 \cdot 10^2$;

b) $6{,}8 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}14 \cdot 10^{43} \cdot 7{,}1 \cdot 10^{25}$;

c) $4{,}55 \cdot 10^{23} \cdot 5{,}44 \cdot 10^{14} \cdot 7{,}91 \cdot 10^{26}$

31 Add meg az eredményt normálalakban is!

a) $3{,}12 \cdot 10^3 + 8{,}2 \cdot 10^4 + 5{,}3 \cdot 10^2$

b) $4{,}55 \cdot 10^{23} + 5{,}44 \cdot 10^{21} + 7{,}91 \cdot 10^{22}$

32 Hányszorosa a fény sebessége egy versenyautó sebességének? A fény 1 s alatt 300 000 km utat tesz meg, a versenyautó esetén 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel számolj!

33 Mennyi a kifejezések értéke, ha

$x = 1{,}64 \cdot 10^4$; $y = 2{,}77 \cdot 10^5$ és $z = 8{,}05 \cdot 10^3$?

$\dfrac{x^3 \cdot y^3}{z^4}$; $(2x + 5y)^7 \cdot z^3$

28 A BETŰK SZEREPE A SZÁMOLÁSBAN

BEVEZETŐ

Matematika vagy varázslat?
Időnként megjelenik közösségi oldalakon az alábbihoz hasonló trükkös feladvány.
Járjunk utána a titoknak!

- Írd le a lábad méretét!
- A számot szorozd meg öttel!
- Adj hozzá ötvenet!
- Az eredményt szorozd meg hússzal!
- Add hozzá a jelenlegi évszámot!
- Vond ki a születési évednél ezerrel nagyobb számot!

A kapott négyjegyű szám első két számjegyből álló kétjegyű szám megadja a lábméreted, a következő két számjegyből álló kétjegyű szám megadja az életkorodat.

Hogyan lehetséges ez? Tekintsünk egy konkrét példát: ha idén 2020-at írunk, 40-es a lábméret, 2006 a születési év, akkor $(5 \cdot 40 + 50) \cdot 20 + 2020 - 3006 = 4014$, azaz lábméretre 40, életkorra 14 év adódik valóban.

Keressük meg általános esetben a magyarázatot betűk segítségével:

- jelölje a lábad méretét m kétjegyű szám
- öttel megszorozva: $5m$
- ötvenet hozzáadva: $5m + 50$
- hússzal megszorozva: $20 \cdot (5m + 50) = 100m + 1000$
- jelölje a jelenlegi évszámot j négyjegyű szám, ezt hozzáadva az előbbi eredményhez: $100m + 1000 + j$
- jelölje a születési éved s négyjegyű szám, így az annál ezerrel nagyobb $s + 1000$
  ezt kivonva az előbbi eredményből adódik:
  $100m + 1000 + j - (s + 1000) =$
  $= 100m + 1000 + j - s - 1000 = 100m + j - s$,
  ami a jelenlegi évszám és a születési év különbsége ($j - s$ = életkor) miatt $100m$ + életkor értéket adja, ezért adják meg a számjegyek a személyre szabott adatokat.

Gondold végig! Próbáld ki! Vajon akkor is hasonlóan adódna az eredmény, ha egy 100 évesnél idősebb embert kérnénk fel a játékra! Miért?

ELMÉLET

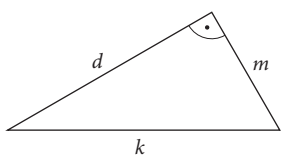
Mikor használunk számok helyett betűket a matematikában?

– Betűk használatával *röviden* írhatunk fel *általános* összefüggéseket. Például:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, minden a, b, c valós szám esetén, mely magában foglal sok konkrét esetet, például:
$(3 + 5) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7$; $(8 - 2) \cdot 3{,}5 = 8 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 3{,}5$.

– A gyakran használt számításokat *képlet*tel adhatjuk meg. Például: az A Ft kezdeti tőke p%-os éves kamat mellett n év alatt $A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ forintra nő.

– Feladatok megoldása során az *ismeretlen számot, mennyiséget* jelölhetjük egy betűvel, mint azt a Bevezetőben tettük.

– Geometriai számításokat és összefüggéseket is sokszor betűkkel írunk le. Például az ábra szerinti háromszög esetén így írható fel a háromszög területe: $T = \frac{d \cdot m}{2}$.



A képletekben szereplő betűket nevezhetjük **változóknak** vagy **ismeretleneknek.** Később majd találkozunk olyan esettel is, amikor a betű valamilyen paramétert jelöl.

A betűs kifejezések használatakor minden esetben fontos megadni, hogy az általunk használt betűk melyik számhalmaz elemeit helyettesítik (például a Bevezetőben j négyjegyű szám). Ezt a kifejezés **alaphalmazának** nevezzük.

Az alaphalmaznak azt a részhalmazát, amelynek elemeivel (VAGY: amelyből vett számokkal) a műveletek elvégezhetők, a kifejezés értelmezési tartományának nevezzük. Például ha a $\frac{2x-1}{x+3}$ kifejezés alaphalmaza a valós számok halmaza, a kifejezés értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$.

Ha a betűs kifejezésben a változók helyére az értelmezési tartományból konkrét számokat helyettesítünk, akkor a műveletek elvégzése után egy számot, a kifejezés **helyettesítési értékét** kapjuk. Például 100 000 Ft-ot elhelyezve a bankban évi 6%-os kamatra, 10 év után $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} = 10^5 \cdot 1{,}06^{10} \approx 179\,085$ Ft-ot vehetünk fel.

FELADAT

1 Válaszodat fejezd ki a szövegben szereplő *betűk (változók)* segítségével!

a) A bodzaszörp üveggel együtt b Ft-ba kerül, az üveg betétdíja $ü$ Ft. Mennyit fizetünk, ha x üveg bodzaszörpöt vásárolunk? Mennyi pénzt kapunk, ha n darab üveget váltunk vissza?

b) Riska tehén x liter tejet ad naponta. A tej $\frac{2}{5}$ részéből túrót csinálnak, a többit eladják. 1 liter tejből $\frac{1}{4}$ kg túró lesz. 1 liter tej ára a forint, a túró kilója b forint.

- Hány liter tejet adnak el naponta, és ebből mennyi bevételük származik?
- Hány kg túrót csinál a gazda, és ezért hány forintot kap?
- Hány forint bevételt hoz a gazdának Riska tehén naponta?
- Válaszolj a kérdésekre, ha tudod, hogy Riska naponta 22 liter tejet ad, a túró ára 400 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$, a tej ára 300 $\frac{\text{Ft}}{\text{liter}}$!

2 Melyik egyenlőség igaz minden esetben, ha a betűk bármely számot jelölhetik?

a) $a^5 \cdot a^3 = a^{15}$

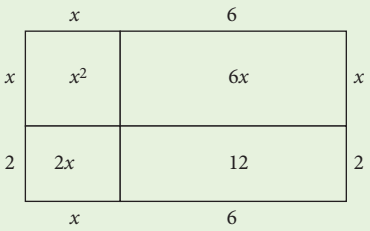
b) $a^5 \cdot b^5 = (ab)^5$

c) $\left(a^4\right)^3 = \left(a^3\right)^4$

d) $a^2 + 5^2 = (a+5)^2$

e) $-a^2 = (-a)^2$

3 **a)** Mekkora a nagy téglalap és a négy kisebb téglalap területe, ha $x = 4$?



b) Melyik egyenlőség tartozik a rajzhoz?

A) $(x+6)+(x+2) = x^2 + 8x + 12$

B) $(x+6)x + 2 = x^2 + 6x + 2x + 12$

C) $(x+6)(x+2) = x^2 + 8x + 12$

D) $x + 6(x+2) = x^7 + 12$

4 Bizonyítsd be, hogy ha három szomszédos egész számot összeadunk, akkor eredményül mindig a középső szám háromszorosát kapjuk!

5 Add meg – betűs kifejezések segítségével – azokat a pozitív egész számokat, amelyek

a) 5-tel osztva 3 maradékot adnak;

b) két nullára végződnek;

c) 23-ra végződnek.

6 Egy kétjegyű számhoz hozzáadtuk számjegyeinek összegét, és így 81-et kaptunk. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?

HÁZI FELADAT

1 Fejezd ki x segítségével a következő mennyiségeket, ahol x pozitív valós szám!

a) Az x számnál 25-tel nagyobb szám köbének a négyzete.

b) Egy kocka összes élének együttes hossza x cm. Mekkora a felszíne?

c) Egy „kutyás találkozón” az állatok és emberek száma 200 volt. Hány lábuk volt a résztvevőknek összesen, ha x kutya volt?

d) Marci heti zsebpénze x Ft. Hétfőn elköltötte zsebpénzének a negyed részét, kedden pedig a maradék kétharmad részét. Mennyi pénze maradt a hét hátralévő napjaira?

2 Bizonyítsd be a következő állításokat algebrai kifejezések segítségével!

a) Ha két szám összegéhez hozzáadjuk a különbségüket, akkor a kisebbítendő kétszeresét kapjuk.

b) Ha két szám összegéből kivonjuk a különbségüket, a kivonandó kétszeresét kapjuk.

3 Melyik az a 3-mal osztható háromjegyű szám, amelynek középső számjegye 0, az első számjegye pedig az utolsónál 1-gyel kisebb?

29 SZÁMOLÁS AZ ALGEBRÁBAN

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $4 \cdot a^2 \cdot b \cdot \frac{5}{8} \cdot a \cdot b^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot a$.

Megoldás

Alkalmazzuk a felcserélhetőség és a csoportosíthatóság tulajdonságát, majd a hatványozás azonosságait:

$$4 \cdot a^2 \cdot b \cdot \frac{5}{8} \cdot a \cdot b^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \left(4 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot (a^2 \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b^3) = \frac{5}{3} a^4 b^4$$

ELMÉLET

Az **algebrai kifejezésekben** a betűk számokat jelölnek. A számok között megismert műveleti szabályokat alkalmazhatjuk rájuk. Ugyanaz a betű ugyanazt a számot jelöli, de különböző betűk is jelölhetik ugyanazt a számot.

A példában szereplő kifejezést **egytagú kifejezésnek** nevezzük. Egytagú algebrai kifejezések azok, amelyekben csak szorzás szerepel. (A hatványozás is szorzás, a számmal való osztás pedig törtszámmal való szorzásként is felírható.) Ezeket célszerű olyan alakra hozni, amelyben egyetlen szám szerepel – mégpedig a kifejezés első tényezőjeként –, a betűk ábécérendben követik egymást, és egy betű csak egyszer fordul elő. Az ilyen alakú kifejezést nevezzük **rendezett egytagú kifejezésnek**. Az ilyen alakú kifejezésben a *számtényezőt* **együtthatónak** nevezzük.

Például: az $\frac{5}{3} a^4 b^4$ kifejezés együtthatója $\frac{5}{3}$; az $a^4 b^4$ vagy az x kifejezések együtthatója 1.

Két egytagú algebrai kifejezés **egynemű,** ha legfeljebb együtthatóikban különböznek.

Például: $-3ab^2$ és $0{,}2ab^2$ egyneműek; $xyyx^2$ és $5x^3y^2$ egyneműek; $6abc^2$ és $6ab^2c$ nem egyneműek.

Egynemű algebrai kifejezések összevonását úgy végezzük, hogy az együtthatóikat összeadjuk a betűs kifejezést változatlanul leírjuk. *Például:* $-3ab^2 + 0{,}2ab^2 = -2{,}8ab^2$

FELADAT

1 Írd fel az alábbi kifejezések rendezett alakját, és állapítsd meg az együtthatójukat!

a) $3 \cdot x \cdot x \cdot x^3$

b) $\frac{2x}{3} \cdot y^2 \cdot x^2$

c) $x^4 \cdot (-1) \cdot x$

d) $\frac{(-1) \cdot x^3 \cdot (-2) \cdot x^2 \cdot y}{-2}$

2 Írd fel az alábbi kifejezések rendezett alakját! Az egyneműeket add össze!

$\frac{1}{5} \cdot y \cdot x \cdot y^2$; $\frac{2 \cdot x^3 \cdot y^2}{7}$;

$y^2 \cdot (-3) \cdot x \cdot y$; $4 \cdot x^2 \cdot y \cdot x \cdot y$

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Végezzük el a kivonást: $(3x^5 - 4x + x^2 - 8) - (15 + 6x^2 - 8x)$!

Megoldás

$$(3x^5 - 4x + x^2 - 8) - (15 + 6x^2 - 8x) = 3x^5 - 4x + x^2 - 8 - 15 - 6x^2 + 8x =$$
$$= 3x^5 + (x^2 - 6x^2) + (-4x + 8x) + (-8 - 15) = 3x^5 - 5x^2 + 4x - 23$$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket, bontsuk fel a zárójeleket!

a) $2x \cdot (3x^2 - 2x + 1)$ **b)** $(y^2 + 3y)(y^2 + y - 2)$

Megoldás

Alkalmazzuk a széttagolási (disztributív) tulajdonságot, a zárójel felbontási szabályait, továbbá az azonos alapú hatványok szorzásáról tanultakat!

a) $2x \cdot (3x^2 - 2x + 1) = 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot (-2x) + 2x \cdot 1 = 6x^3 - 4x^2 + 2x$

b) $(y^2 + 3y)(y^2 + y - 2) = (y^2 + 3y)y^2 + (y^2 + 3y)y + (y^2 + 3y)(-2) = y^4 + 3y^3 + y^3 + 3y^2 - 2y^2 - 6y = y^4 + 4y^3 + y^2 - 6y$

FELADAT

3 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $\frac{3a}{5} - \frac{a}{4} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{2x}{3} - \frac{5x+1}{6}$

c) $(5 - 3x^2 + 8x) + (-2x^3 + x^2 - 9)$

d) $a - b - (a - b) - (2a - b)$

4 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $(-15x^3y) \cdot \left(\frac{3}{5}xy^3\right)$

b) $(2a^2 - 3ab + b^2) + 2ab$

c) $4(5 + y) + 6(2 - y - y^3)$

5 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $p(p^4 - 2) + p(1 - p^4)$

b) $(-7x^2 + 1)(2x - 4)$

c) $(2a - 4)(5 - a^3 - a)$

d) $(2xy - 3x^2)(5x + 4y)$

6 Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat, majd számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét is (a megadott értékek mellett)!

a) $(-3x + 2)4x + 6(1 - x) - 4x(x - 5)$; $x = \frac{3}{4}$

b) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)6x - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right)12y$; $x = -2$, $y = 3$

7 A következő kifejezések közül melyek azok, amelyek a bennük lévő betűk bármely értékénél pozitívok?

$a^2 + b^2$; $a^2 - b^2$; $-a^2b^2$; $(a - b)^2$; $a^2 + 1$; $-a^2 - 1$; $a^3 - 1$

HÁZI FELADAT

1 Írd fel az alábbi kifejezések rendezett alakját, és állapítsd meg az együtthatójukat!

$3x^3 \cdot xy \cdot y^5x$; $\frac{a^4}{4} \cdot b^2 \cdot \frac{4a}{2} \cdot 5b$

2 Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat!

a) $(x + 1) - 2(x + 2) + 3(x + 3) - 4(x - 4)$

b) $x(x + 1) - x^2(x - 2) + x^3(x - 3) - x^4(x - 4)$

c) $5(5 - 3a - 2a^3 + a^2) - 4(7 + 2a^2 - a^3 - a^4)$

3 Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat!

a) $x^2(5 - 2x + 3x^2 - x^3)$

b) $(a^2 + 2a + 4)(a - 2)$

c) $(b^3 + 3b^2 + 3b + 1)(b + 1)$

d) $(3a - 7)(-5a + 3)$

4 Végezd el a kijelölt műveleteket és a lehetséges összevonásokat, majd utána számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét, ha $x = 2$ és $y = -1$!

$(3x - y) \cdot (2y + 1) \cdot (x - 2y)$

30 NEVEZETES SZORZATOK I.

BEVEZETŐ

Végezzük el a kijelölt műveleteket, és figyeld meg, hogy milyen tagok jelennek meg az eredményben a szorzás (vagy négyzetre emelés) és összevonás után!

a) $(2a+3)(2a+3)$ **b)** $\left(\frac{x}{2}+5\right)\left(\frac{x}{2}+5\right)$ **c)** $(y^2+x)(y^2+x)$

Megoldás

a) $(2a+3)(2a+3)=(2a+3)\cdot 2a+(2a+3)\cdot 3=2a\cdot 2a+3\cdot 2a+2a\cdot 3+3\cdot 3=4a^2+6a+6a+9=4a^2+12a+9$

b) $\left(\frac{x}{2}+5\right)\left(\frac{x}{2}+5\right)=\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}+5\cdot\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot 5+5\cdot 5=\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{x}{2}\cdot 5\right)+25$

c) $(y^2+x)(y^2+x)=y^2\cdot y^2+x\cdot y^2+y^2\cdot x+x\cdot x=y^4+2y^2x+x^2$

ELMÉLET

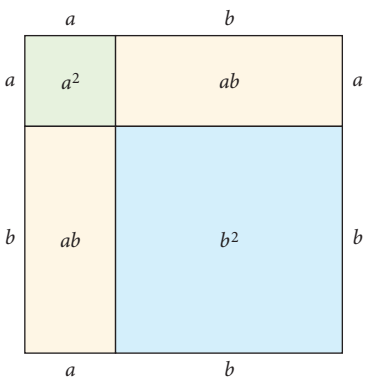
Az olyan algebrai kifejezéseket, amelyek valós számokat, változók pozitív egész kitevőjű hatványait, valamint összeadás, kivonás és szorzás műveleteket tartalmaznak, **polinom**oknak nevezzük.

Egy algebrai kifejezés **többtagú,** ha tartalmaz összeadást vagy kivonást. Pl.: $6a^2b+5b^3$ kéttagú kifejezés; $-x^3+7xy^5-9$ háromtagú kifejezés.

1. Ha a és b két tetszőleges valós szám, akkor
$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=a^2+ba+ab+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$, vagyis

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Két szám összegének négyzete megegyezik az első tag négyzetének, a két szám kétszeres szorzatának és a második tag négyzetének az összegével.



Ha $(a+b)^2$ kifejezést egy $(a+b)$ oldalhosszúságú négyzet területének tekintjük, akkor a fenti azonosságot jól szemlélteti a következő ábra:

A nagy négyzet területe megegyezik az ábra szerinti feldarabolással keletkezett négyzetek és téglalapok területének összegével.

2. Írjuk fel két szám különbségének a négyzetét!
$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=(a-b)\cdot a-(a-b)\cdot b=a\cdot a-b\cdot a-(a\cdot b-b\cdot b)=$
$=aa-ba-ab+bb=a^2-2ab+b^2$

Tetszőleges a és b valós számok esetén:

$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

FELADAT

1 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(a+10)^2$ b) $(2c-5d)^2$

2 Végezd el a következő műveleteket!

a) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{5}a-\frac{1}{4}b\right)^2$

3 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(-3+x)^2$ c) $(-3-x)^2$

b) $-(3+x)^2$ d) $[-(3+x)]^2$

4 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(x^3-1)^2$ b) $(a+2b^3)^2$

5 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(3a^4-2ab^3)^2$ b) $\left(\frac{5}{6}x^3y^2+\frac{3}{5}xy\right)^2$

6 Hány négyzetméterrel kisebb az $x-2$ méter oldalú, négyzet alakú telek területe, mint az $x+2$ méter oldalú, négyzet alakú telek területe (ahol $x>2$)?

a) Fejezd ki a különbséget x segítségével!

b) Mennyi ez a különbség, ha $x=35$?

7 Írd fel a következő háromtagú kifejezéseket kéttagú kifejezések négyzeteként!

a) $a^2-20a+100$ c) $4x^6-12x^3y^2+9y^4$

b) y^4+8y^2+16 d) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$

8 Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy egy kéttagú kifejezés négyzetével legyenek egyenlők!

a) $x^2+14x+\ldots$ c) $9x^6-\ldots+36y^4$

b) $25a^2+\ldots+9b^2$ d) $x^4+x^2+\ldots$

9 Számológép használata nélkül, a tanult nevezetes azonosság felhasználásával végezd el az alábbi számításokat!

a) $42^2=(40+2)^2=\ldots$ vagy $42^2=(50-8)^2=\ldots$

b) $97^2=$

HÁZI FELADAT

1 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(11x-5)^2$ c) $(7x+3)^2$

b) $\left(\frac{3}{2}a+5b\right)^2$ d) $(3a^3+2ab^2)^2$

2 Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy egy kéttagú kifejezés négyzetével legyenek egyenlők!

a) $a^2-5a+\ldots$ c) $100x^{10}+40x^5y^3+\ldots$

b) $16x^2-\ldots+y^2$ d) $b^2+1+\ldots$

3 Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, és számítsd ki a helyettesítési értéküket, ha $x=\frac{1}{2}$ és $a=-10$!

a) $2(3x-2)^2-3(2x+1)^2$

b) $\left(\frac{5}{4}a+3\right)^2-\left(\frac{3}{4}a-2\right)^2$

4 Számológép használata nélkül, a tanult nevezetes azonosság felhasználásával végezd el az alábbi számításokat, majd a kapott eredményt ellenőrizd számológép segítségével!

a) $59^2=$ b) $997^2=$

RÁADÁS

Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza három egymást követő páros szám. Számítsd ki a háromszög oldalhosszúságait!

31 NEVEZETES SZORZATOK II.

BEVEZETŐ

Végezzük el a következő szorzásokat!

a) $(2x-5)(2x+5)$ **b)** $(x^2+1)(x^2-1)$ **c)** $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

Megoldás

a) $(2x-5)(2x+5) = 2x\cdot 2x + 2x\cdot 5 - 5\cdot 2x - 5\cdot 5 = 4x^2 + 10x - 10x - 25 = 4x^2 - 25$

b) $(x^2+1)(x^2-1) = x^2\cdot x^2 + x^2\cdot(-1) + 1\cdot x^2 - 1\cdot 1 = x^4 - 1$

c) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = x^2 + x\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = x^2 - \frac{4}{9}$

Mindegyik feladatban ugyanazon két tagnak az összegét és a különbségét kellett összeszorozni. Figyeld meg, milyen tagokból áll az átalakítások után kapott kifejezés!

ELMÉLET

Ha a és b két tetszőleges valós szám, akkor

$(a+b)(a-b) = (a+b)a - (a+b)b = a\cdot a + b\cdot a - (a\cdot b + b\cdot b) = a\cdot a + b\cdot a - a\cdot b - b\cdot b = a^2 - b^2$

Tehát:

$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Két tag összegének és különbségének szorzata egyenlő a két tag négyzetének különbségével.

FELADAT

1 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(t+3)(t-3)$ **c)** $(5b-2a)(5b+2a)$

b) $(2x-5)(2x+5)$ **d)** $(2xy+1)(2xy-1)$

2 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(t-3)(3+t)$ **c)** $(a-1)(1+a)$

b) $(t+3)(3-t)$ **d)** $(3x+2)(2-3x)$

3 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(x^2+3x)(x^2-3x)$

b) $\left(\frac{1}{5}x-7\right)\left(\frac{1}{5}x+7\right)$

c) $(3a^2b+5ab^2)(5ab^2-3a^2b)$

d) $(x^k-y)(x^k+y)$

4 Az eddig megismert nevezetes azonosságok segítségével – számológép használata nélkül – számítsd ki a következő műveletek eredményét!

a) $41\cdot 39$ **c)** $1007\cdot 993$

b) $198\cdot 202$ **d)** $5{,}7\cdot 6{,}3$

HÁZI FELADAT

1 Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $(7y-1)(7y+1)$

b) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$

c) $(x^3-y^3)(y^3+x^3)$

d) $(x^n+y^n)(x^n-y^n)$

2 Két egymást követő egész szám négyzetének különbsége 33. Melyik ez a két szám? Hány megoldása van a feladatnak?

3 A tanult nevezetes azonosságok segítségével – számológép használata nélkül – számítsd ki a következő műveletek eredményét, majd a kapott eredményt ellenőrizd számológép segítségével!

a) $291 \cdot 309$ **b)** $4{,}2 \cdot 5{,}8$

4 Végezd el a kijelölt műveleteket!

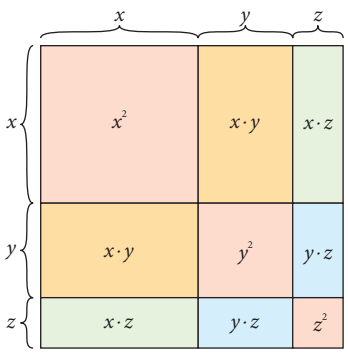
a) $\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y\right)(0{,}25x-0{,}5y)$

b) $(c^2+c-1)(c^2+c+1)$

c) $5(x-2)^2-\frac{2}{5}(10x+1)(10x-1)+5x(3x+4)$

RÁADÁS

1. Mennyivel nagyobb az $x+y+z$ oldalhosszúságú négyzet területe, mint az x, y, z oldalhosszúságú négyzetek területeinek összege?



Megoldás

Az $x+y+z$ oldalhosszúságú négyzet területe:

$(x+y+z)^2=[(x+y)+z]^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2=$

$=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

Ha ebből kivonjuk a három négyzet területét, a különbség: $2xy+2xz+2yz$

2. Kocka alakú tartály élhossza x méter. Mennyivel nő meg a térfogata, ha a kocka éleinek hosszát 2 méterrel megnöveljük? Mekkora ez a különbség, ha $x=5$?

Megoldás

Ha a kocka élhosszúsága x méter, akkor térfogata x^3, ha pedig $x+2$ méter, akkor térfogata $(x+2)^3$ m^3.

$(x+2)^3=(x+2)^2\cdot(x+2)=(x^2+4x+4)(x+2)=x^3+x^2\cdot 2+4x^2+4x\cdot 2+4x+8=x^3+6x^2+12x+8$

A két térfogat közötti különbség $6x^2+12x+8$. Ennek a különbségnek az értéke $x=5$ esetén: $6\cdot 5^2+12\cdot 5+8=218$. Tehát ha egy 5 m élhosszúságú kocka éleit 2 méterrel megnöveljük, a térfogata 218 m^3-rel lesz nagyobb.

3. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ **b)** $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Megoldás

a) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3$

b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3=a^3-b^3$

ELMÉLET

1. Polinomok

Az x változó valamely polinomjának a jelölésére gyakran a $P(x)$, $Q(x)$ … szimbólumokat szoktuk használni.
Például $P(x) = x^5 + 2x^3 - 7 - 4x^5 - 6x + 3x^5$ az x változó polinomja. $P(x)$ az egynemű tagok összevonásával egyszerűbb alakra hozható: $P(x) = 2x^3 - 6x - 7$.
Egy egyváltozós, n-edfokú polinomnak a változó csökkenő hatványai szerint rendezett általános alakja:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,

ahol $n \in \mathbf{N}$; minden együttható (a_i; $i = 1, 2, \ldots, n$) valós szám és $a_n \neq 0$.
Ha figyelembe vesszük, hogy az elsőfokú és a konstans tagot írhatjuk $a_1 x^1 + a_0 x^0$ alakban is, a polinom $a_i x^i$ alakú tagok összegeként írható fel.
A fenti $P(x) = 2x^3 - 6x - 7$ polinom harmadfokú polinom, amelyben $a_3 = 2$, $a_1 = -6$ és $a_0 = -7$. Ebben a polinomban nem szerepel másodfokú tag, ami azt jelenti, hogy $a_2 = 0$.
A **többváltozós** polinomban több változó is szerepel. Kétváltozós polinomok például:
$a^2 + 2ab + b^2$; $\quad 4x^3y - 5xy - 7$.
A polinom **tagjainak fokszáma** a tagban szereplő változók hatványkitevőinek az összege.
Például a $4x^3y - 5xy - 7$ tagjainak fokszáma rendre 4; 2; 0.
A **polinom fokszáma** a polinomban szereplő tagok fokszámai közül a legnagyobb érték.
Például a $4x^3y - 5xy - 7$ polinom fokszáma 4.

2. További nevezetes azonosságok

A kidolgozott feladatban szereplő feladatok megoldása során észrevehettük, hogy az eddig felírt nevezetes azonosságokon kívül további szorzatok *polinom* alakjában is felismerhetünk szabályszerűséget.
Az **1. kidolgozott feladatban** egy háromtagú kifejezés négyzetét kellett kiszámolni, amit polinom alakba írva egy könnyen megjegyezhető kifejezést kaptunk. Ez alapján:

$$\boldsymbol{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

A **2. kidolgozott feladatban** egy kéttagú kifejezés harmadik hatványát kellett felírni. Írjuk ezt fel általánosan!

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Tehát: $\boldsymbol{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$
A fentihez hasonló módon számolhatjuk ki két szám különbségének a köbét is:
$\boldsymbol{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$.

A **3. kidolgozott feladatban** láttuk, hogy
$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$
$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

A **3. kidolgozott feladat** eredményei is általánosíthatók:
Ha a és b valós számok, és az n pozitív egész szám, akkor
$\boldsymbol{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$
Ha a és b valós számok, és az n páros pozitív egész szám, akkor
$\boldsymbol{a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1})}$
Ha a és b valós számok, és az n páratlan pozitív egész szám, akkor
$\boldsymbol{a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})}$

3. A Pascal-háromszög

A háromszög minden sora 1-gyel kezdődik, és 1-gyel végződik. Ebben a háromszög elrendezésben a 2. sortól kezdve a sorok bármely belső száma a felette lévő sorban balról és jobbról álló két számnak az összege.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

a) Ezen számok megegyeznek az $(a+b)^n$ felbontásában szereplő együtthatókkal, az úgynevezett binomiális együtthatókkal:

$(a+b)^0 = \mathbf{1}$ (ezt hívjuk nulladik sornak)
$(a+b)^1 = \mathbf{1}a^1 + \mathbf{1}b^1$ (ezt hívjuk első sornak)
$(a+b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}a^1b^1 + \mathbf{1}b^2$ (ezt hívjuk második sornak)
$(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b^1 + \mathbf{3}a^1b^2 + \mathbf{1}b^3$ …
$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b^1 + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}a^1b^3 + \mathbf{1}b^4$

Feladat: Folytasd a hatványozást! Írd fel a következő két sorban szereplő tagokat!

Hogyan lehetne ezzel a módszerrel felírni két tag tizenhetedik hatványát, századik hatványát, ötszázadik hatványát? Elvi akadálya nincs, hogy tovább számoljuk a Pascal-háromszög újabb sorait a meglévők alapján, de pl. a századik hatvány felírásához kellene ismernünk az összes addigi sort. Létezik más módszer is a binomiális együtthatók felírására, ezt majd a kombinatorika témakörében fogjuk megtanulni.

b) Adjuk össze az egy sorban lévő számokat és figyeljünk meg egy érdekes dolgot, amit aztán be is tudunk látni, ha $a = b = 1$.

Feladat: Olvasd ki a háromszögből, hogy hány három elemű részhalmaza van egy hét elemű halmaznak; és hány öt elemű részhalmaza van egy nyolc elemű halmaznak!

FELADAT

1. Hozd egyszerűbb alakra, majd számítsd ki a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = \frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ és $y = \frac{1}{3}$.

a) $(2+a)^2 - 3(1-a)(a+1) + 2(1-a)^2$
b) $(3x-y)^2 - (2x+3y)(2x-3y) - (x+y)^2$

2. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(a+5)^3$
b) $(x+2)(x^2-2x+4)$
c) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^3$
d) $(1+a+a^2)(1+a)$
e) $(a+1)(a-1)(a^2-1)$
f) $(a-b+c)(a-b-c)$

3. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(x+2y+3z)^2$
b) $(x-2y+z)^2$

4. Határozd meg, hogy a hatványozás és lehetséges összevonások elvégzése után mennyi lesz

a) x^3 együtthatója az $(x+5)^4$
b) x^4 együtthatója a $(3x-1)^6$
c) x^5 együtthatója a $(2x+3)^8$

kifejezésekben!

5. 

Finnország zászlaja (finn nyelven siniristilippu, magyarul kék keresztes zászló) olyan 11 : 18 oldalarányú téglalap, melyet fehér és kék téglalapok alkotnak. A hosszabb oldal mentén 5 : 3 : 10 arányban, a rövidebb oldal mentén pedig 4 : 3 : 4 arányban osztó pontok határozzák meg a „kereszt” elhelyezését. Jelöljük a téglalap rövidebb oldalát x-szel, melyre $0 < x$ teljesül.

a) Írd fel x segítségével a kék kereszt területét!
b) Mennyivel változik a kereszt területe, ha a zászló rövidebb oldalának hosszát $x + 4$-re növeljük? Add meg a különbséget x csökkenő hatványai szerint rendezett polinom alakjában!

6. Egy téglatest éleinek hosszát cm-ben mérjük. Az egy csúcsból induló élek mérőszámainak négyzetösszege 100, az egy csúcsból induló élek mérőszámai összegének négyzete 225. Hány cm^2 a téglatest felszíne?

32 SZORZATTÁ ALAKÍTÁS I.

BEVEZETŐ

Vizsgáljuk a 7917-et az alábbi kérdések szerint!
- Osztható-e 13-mal?
- Többszöröse-e a 11-nek?
- Milyen maradékot ad 29-cel osztva?
- Hány 20-nál nagyobb osztója van?

Számológép használatával lehetséges, de még úgy is hosszadalmas a helyes válaszok megadása.

Sokkal könnyebb lenne a feladatunk, ha a $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$ szorzatra tennénk fel ugyanezeket a kérdéseket.

Vegyük észre, hogy a két feladat ugyanarról a számról szól, csak a második esetben szorzatalakban adtuk meg a 7917-et. Ellenőrizd számolással!

Válaszold meg ennek ismeretében a kérdéseket!

Hasonlóan járhatunk el az algebrai kifejezések esetében is. A matematikai kifejezések bizonyos vizsgálatát (és később majd látni fogjuk, hogy egyenletek megoldását is) megkönnyítheti, ha szorzat formájában írjuk fel azokat.

Vizsgáljuk ezt meg a következő példa segítségével!

Gondoltam egy számot. A szám köbéből kivontam a szám 16-szorosát, így nullát kaptam. Hányféle számra gondolhattam? Mi lehetett a gondolt szám?

Jelöljük a gondolt számot x-szel! Az elvégzett műveletek szerint $x^3 - 16x$ nullával egyenlő.

Két mennyiség különbsége sok esetben adhat nullát, ezért próbálkozzunk más alak létrehozásával.

A kiemelés szerint
$x^3 - 16x = x(x^2 - 16)$.
Nevezetes azonosság alapján
$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$.
Ezért
$x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x + 4)(x - 4)$.

Egy szorzat nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért $x = 0$ vagy $x + 4 = 0$ vagy $x - 4 = 0$ teljesülhet. Ezekből adódik, hogy x értéke 0 vagy -4 vagy 4 lehet, azaz erre a háromféle számra gondolhattunk.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $2xy^3 + 5x^2y^2$ **b)** $x^2 + 3x + xy + 3y$

Megoldás

a) Ha egy összeg tagjainak van közös szorzótényezője, akkor azt az $ab + ac = a(b + c)$ azonosság alapján szorzat alakba tudjuk írni: a szorzat egyik tényezője a közös tényező lesz. Ezt a módszert **kiemelés**nek nevezzük, ami tehát akkor alkalmazható, ha egy összeg minden tagjának van közös tényezője.
A $2xy^3 + 5x^2y^2$ mindkét tagjának az x közös tényezője, ezért az x-et kiemelhetjük: $2xy^3 + 5x^2y^2 = x(2y^3 + 5xy^2)$.
Közös tényezőjük az y^2 is, ezért ha ezt emeljük ki: $2xy^3 + 5x^2y^2 = y^2(2xy + 5x^2)$.
Természetesen xy^2 is kiemelhető: $2xy^3 + 5x^2y^2 = xy^2(2y + 5x)$.
Így a tagokban szereplő összes *közös* tényezőt kiemeltük, a kifejezést már nem tudjuk több tényező szorzatára bontani.

b) Ebben a kifejezésben nincs olyan szorzótényező, amely minden tagban előfordul. Most a tagok ügyes csoportosításával, több lépésben történő kiemeléssel juthatunk eredményre.
$x^2 + 3x + xy + 3y = (x^2 + 3x) + (xy + 3y) = x(x + 3) + y(x + 3) = (x + 3)(x + y)$
Természetesen a tagok más csoportosításával is szorzattá alakíthatunk:
$x^2 + 3x + xy + 3y = (x^2 + xy) + (3x + 3y) = x(x + y) + 3(x + y) = (x + y)(x + 3)$.

FELADAT

1 Alakítsd szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $8x + 24$

b) $8xy + 24y$

c) $8x^2y + 24xy$

d) $24x^2y^3z + 8x^2y^3$

2 Állapítsd meg, hogy melyek a közös tényezők az alábbi kifejezések mindegyikében! Határozd meg azt is, hogy melyik kifejezés hányszorosa a közös tényezőknek!

$A = 12x^3y^2z^2$ $B = 6xy^3z^4$ $C = 3x^2y^3z^2$

$D = 15xy^4z^4$ $E = 9x^3y^3z^3$

3 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $15y^3 - 5y$

b) $a^3 - 2a^2 - a$

c) $7xy - 14x^2y + 21x^2y^2$

d) $\frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x}{3}$

4 Csoportosítással alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x^2 - 5x + xy - 5y$

b) $3y - y^2 + 15 - 5y$

c) $3ax + 4by + 4ay + 3bx$

d) $10a^2 - 21xy + 14ax - 15ay$

5 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x(y - 2) - 3(2 - y)$

Vedd észre, hogy:

$-3(2 - y) = -6 + 3y = 3y - 6 = 3(y - 2)$

b) $x^2 - 5x + 5y - xy$ **c)** $ab - 4a + 8 - 2b$

6 Milyen x, illetve y értékek esetén lehet nulla az alábbi kifejezések helyettesítési értéke? Gondolj a szorzattá alakítási lehetőségekre!

a) $(2x - 1)(7x^2 - 3x^3)$

b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

c) $15xy^4 - 10xy^3$

HÁZI FELADAT

1 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $63y - 9$ **c)** $63y^3 - 7y^2$

b) $63y^2 - 7y$ **d)** $63y^3z^2 - 14yz$

2 Állapítsd meg, hogy melyek a közös tényezők az alábbi kifejezések mindegyikében! Határozd meg azt is, hogy melyik kifejezés hányszorosa a közös tényezőknek!

$A = 12a^2b^2c^5$

$B = 20ab^4c^4$

$C = 8a^2b^3c^3$

$D = 16a^2b^4c^4$

$E = 24ab^3c^2$

3 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $20x^3y - 15x^2y$

b) $7x^2 - 14x + 8xy - 16y$

c) $2ax + 2bx + a + b$

d) $x^2 - 2y - xy + 2x$

e) $x^{n+2} + x^n$

4 Milyen x, illetve y értékek esetén lehet nulla az alábbi kifejezések helyettesítési értéke? Gondolj a szorzattá alakítási lehetőségekre!

a) $3x^2 - 192x$

b) $5x^3y + 10x^2y$

33 SZORZATTÁ ALAKÍTÁS II.

BEVEZETŐ

1. Döntsük el számológép használata nélkül, hogy $2^{16} - 1$ osztható-e 17-tel!

Megoldás

A $2^{16} - 1$ két szám négyzetének a különbsége, így a nevezetes szorzat alapján felírható két szám összegének és különbségének a szorzataként:

$2^{16} - 1 = (2^8)^2 - 1^2 = (2^8 + 1)(2^8 - 1)$.

Ennek a szorzatnak a második tényezője szintén egy nevezetes szorzat:

$2^8 - 1 = (2^4 + 1)(2^4 - 1)$, tehát azt kaptuk, hogy

$2^{16} - 1 = (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1)$.

Ebből már látszik, hogy osztható 17-tel, hiszen $2^4 + 1 = 17$.

2. Hány olyan prímszám van, mely 1-gyel kisebb egy pozitív egész szám négyzeténél?

Megoldás

Írjuk fel általános alakban a vizsgálandó mennyiséget! Jelöljük n-nel a lehetséges pozitív egészeket, így a négyzetüknél 1-gyel kisebb szám $n^2 - 1$. Ennek vizsgálata könnyebben elvégezhető, ha nevezetes azonosság segítségével $(n - 1)(n + 1)$ alakba írjuk. Észrevehetjük, hogy az első tényezőnél a második tényező 2-vel nagyobb, azaz a tényezők egymást követő páratlan vagy egymást követő páros számok. Az ilyen tényezők szorzata csakis akkor lehet prím, ha az egyik (nyilvánvalóan a kisebb) tényező értéke 1. Ez azt jelenti, hogy $n - 1 = 1$, azaz $n = 2$ lehet. Így megállapíthatjuk, hogy egyetlen olyan prímszám van, mely egy 1-gyel kisebb egy pozitív egész szám négyzeténél, és ez a prímszám a $2^2 - 1$, azaz a 3.

3. Egy négyzet oldalának hossza eredetileg x egység. Hány egységgel növeltük meg a négyzet oldalát, ha területe $x^2 + 6x + 9$ nagyságúra növekedett?

Megoldás

Ha észrevesszük, hogy az egyik tanult nevezetes azonosság segítségével a kapott terület nagysága $(x + 3)^2$ alakban is írható, akkor megállapíthatjuk, hogy a változtatással kapott négyzet oldala $x + 3$ egység hosszúságú, azaz az eredeti négyzet oldalának hosszát 3 egységgel növeltük meg.

Már az előző leckében is láttuk, hogy a szorzattá alakítás megkönnyítheti egy feladat megoldását. A Bevezető feladataiban felírt kifejezésekben egy-egy nevezetes azonosságot ismerhettünk fel, ennek segítségével történt a szorzattá alakítás. Lehet, hogy a kifejezésben csak kiemelés után vesszük észre a nevezetes szorzatot, és az is lehet, hogy a szorzattá alakításnál kialakuló tényezőket még további tényezőkre tudjuk bontani.

FELADAT

1. Nevezetes szorzatok segítségével alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x^2 - 49$

b) $1 - a^2$

c) $25a^2 - 36b^2$

d) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2$

2. Nevezetes szorzatok segítségével alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x^2 - 22x + 121$

b) $100x^2 + 20x + 1$

c) $9a^2 - 12ab + 4b^2$

d) $a^4 + 2a^2b + b^2$

3. Kiemeléssel és nevezetes szorzatok segítségével alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $50 - 2x^2$

b) $63y^3 - 7y$

c) $15ab^2 - 30ab + 15a$

d) $-y^2 + 4y - 4$

4. Különböző módszerek alkalmazásával bontsd tényezőkre a következő kifejezéseket!

a) $3a^6 + 18a^4b + 27a^2b^2$

b) $x^2 - y^2 - x - y$

c) $a^4 - b^4$

d) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Két pozitív egész szám négyzetének különbsége 15. Melyik lehet ez a két szám?

Megoldás

Jelöljük a két számot a-val és b-vel, és tegyük fel, hogy $a > b$. Ekkor felírhatjuk, hogy $a^2 - b^2 = 15$.

Az ismert nevezetes szorzat alapján

$(a + b)(a - b) = 15$ (1).

Mivel a és b pozitív egész számok, $a + b$ és $a - b$ is pozitív egészek, tehát a 15-öt két pozitív egész szám szorzataként kell felírni:

$15 = 5 \cdot 3$ (2)

vagy

$15 = 15 \cdot 1$ (3)

Az (1) és (2) egyenletekből kapjuk, hogy

$a + b = 5$ és $a - b = 3$,

az összes lehetséges eset ($a = 1$ $b = 4$; $a = 2$ $b = 3$; $a = 3$ $b = 2$; $a = 4$ $b = 1$) vizsgálatából $a = 4$ és $b = 1$ adódik.

Az (1) és (3) egyenletekből kapjuk, hogy

$a + b = 15$ és $a - b = 1$,

az összes lehetséges eset vizsgálatából $a = 8$ és $b = 7$ adódik.

Ellenőrizzünk behelyettesítéssel!

$4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$; és $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$.

FELADAT

5 Két természetes szám négyzetének különbsége 21. Melyik lehet ez a két szám?

6 Határozd meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre

a) $n^2 - 4n + 4$ prímszám;

b) $n^2 - 4$ prímszám!

HÁZI FELADAT

1 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $4a^2 - 9$ **c)** $25r^2 + 80r + 64$

b) $\frac{25}{49}b^4 - 1$ **d)** $9c^6 - 12c^3d^2 + 4d^4$

2 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $7c^2 + 14cd + 7d^2$ **c)** $3xy^2 + 6xy + 3x$

b) $a^3b - ab^3$ **d)** $-x^2 - 2x - 1$

3 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x^4 - 81$ **c)** $x^2y + 3x^2 - 4y - 12$

b) $x + x^2 - x^3 - x^4$ **d)** $x^2 + 10x + 25 - y^2$

EMELT SZINT

FELADATOK

1. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x^3 - 18x^2 + 108x - 216$ **c)** $x^3 + 27$ **e)** $a^7 - a$ **g)** $x^2 - y^2 - 10y - 25$

b) $125x^3 + 75x^2 + 15x + 1$ **d)** $1 - a^3$ **f)** $4a^2 + 4a + 1 - b^2$ **h)** $x^2 - 6x - 16$

2. Bizonyítsd be, hogy $5^{18} - 1$ osztható 24-gyel és 124-gyel!

3. Bizonyítsd be, hogy $2^{24} - 1$ osztható 15-tel és 17-tel!

34 EGYENLETEK

BEVEZETŐ

Hőmérsékleti skálák

Megszoktuk, hogy Magyarországon a levegő, az anyagok, az emberi test hőmérsékletének meghatározására a mért értékeket Celsius-fokban (rövidítve: °C) adják meg. (A hétköznapi életben – kissé helytelenül – leginkább csak a fok megnevezést szoktuk használni.) Ugyanakkor az USA-ban jelenleg is használatos mértékegység a hőmérséklet leírására a Fahrenheit-fok (rövidítve: °F), valamint a természettudományokban megalkotott törvényekben akkor járunk el helyesen, ha a hőmérsékletet (a nemzetközileg elfogadott mértékegységrendszernek megfelelő) kelvin mértékegységben (rövidítve: K) helyettesítjük a képletekbe. Az előbbiek miatt sok esetben szükség van arra, hogy a különböző mértékegységekben megadott adatokat megfelelően átváltsuk. Az átváltás elvégzéséhez ismernünk kell a különböző hőmérsékleti skálák között felírható kapcsolatot. Néhány összefüggés ezekre vonatkozóan (F a hőmérséklet értékét jelöli Fahrenheit-fokban; K a hőmérséklet értékét jelöli kelvinben; C a hőmérséklet értékét jelöli Celsius-fokban):

$F = \frac{9}{5}C + 32$ $\qquad\qquad$ $K = C + 273{,}16$

a) Várhatóan hány Celsius-fok lesz a levegő hőmérséklete, ha az előrejelzés szerint Boston környékén 77 °F-ra számíthatunk?

A feladatbeli adat segítségével a $77 = \frac{9}{5}C + 32$ **egyismeretlenes egyenlet**hez jutunk.

Az ismeretlen mennyiség értéke olyan valós szám lehet, mely **megfelel a szöveg feltételeinek, igazzá teszi az egyenlőséget.** Célunk az, hogy ezt az értéket (vagy értékeket) megtaláljuk, vagyis meg kell határoznunk **az egyenlet megoldásait (gyökeit).**

A **mérlegelv** segítségével haladhatunk tovább, az egyenlet mindkét oldalából kivonunk 32-t, $45 = \frac{9}{5}C$.

Az egyenlet mindkét oldalát osztjuk $\frac{9}{5}$-del, azaz szorozzuk $\frac{5}{9}$-del, így $25 = C$ adódik, azaz a várható hőmérséklet 25 °C körüli.

Ellenőrzés: A kapott eredményt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe adódik a bal és jobb oldal egyenlősége.

b) Projekt feladatok:

Járj utána,

- mikor éltek azok a fizikusok, akikről az előbb említett hőmérsékleti skálákat elnevezték;
- milyen hőmérsékleti alappontokat és milyen beosztásokat vettek figyelembe a hőmérsékleti skálák megalkotásánál;
- milyen egyéb hőmérsékleti skálák léteznek!

ELMÉLET

Már az általános iskolában is sok egyenletet oldottunk meg. Ezek legtöbbször **egyismeretlenes egyenletek** voltak. Azokat a számokat kerestük, amelyeket az egyenletben szereplő betű helyébe írva fennáll az egyenlőség.

Az egyenletek megoldása során eddig legtöbbször a **mérlegelvet** használtuk. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet gyökeinek a halmaza nem változik meg, ha az egyenlőségjel két oldalán álló kifejezést (számot)

- ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük,
- ugyanazzal a 0-tól különböző számmal vagy kifejezéssel megszorozzuk,
- ugyanazzal a 0-tól különböző számmal vagy kifejezéssel elosztjuk.

A mérlegelv segítségével sok egyenletből kaphatunk olyan egyszerűbb, másik egyenletet, amelynek a gyökei ugyanazok, mint az eredeti egyenlet gyökei.

Az egyenlet rendezése során **ügyelj az előjelekre,**
például ha **zárójel vagy törtvonal előtt** a kivonás jele vagy egy negatív szorzótényező áll!

FELADAT

1 a) Hány Fahrenheit-foknak felel meg 70 Celsius-fok? (Vedd észre, hogy ez egy algebrai kifejezés helyettesítési értékének meghatározását jelenti.)
b) Hány kelvinnek felel meg 100 Fahrenheit-fok?
c) Fejezd ki a kelvint a Fahrenheit-fok segítségével!

2 Melyik számot írhatjuk az x helyébe, hogy igaz legyen a következő egyenlőség?

$$\frac{2x-7}{6}-\frac{4-5x}{10}=x-1{,}7$$

Az egyenlet megoldása során alkalmazd a mérlegelvet!

3 Oldd meg az egyenleteket mérlegelvvel!

a) $\frac{4x-2}{3}=5-\frac{23-6x}{2}$

b) $\frac{x}{8}-\frac{x}{6}=\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{3}{10}$

c) $\frac{2-5x}{8}-2=\frac{10x+3}{9}$

4 Oldd meg az egyenleteket! Figyelj az előjelekre!

a) $\frac{6x-4}{3}-\frac{5x-1}{2}=\frac{3-x}{6}$

b) $(x-2)^2-\frac{2x-5}{2}=(x+3)^2-2(x-1)$

5 Egy üzletben az akciós DVD-kből vettünk kettőt azonos árban, és még egy harmadikat, amely nem volt akciós. Ez utóbbi 3990 Ft-ba került. Összesen 7830 Ft-ot fizettünk. Mennyi az akciós DVD-k eredeti ára, ha a kedvezmény mértéke
a) 20%; b) 200 Ft?
Bence az a) feladathoz az
$(x \cdot 0{,}8) \cdot 2 + 3990 = 7830$,
a b) feladathoz pedig az
$(x - 200) \cdot 2 + 3990 = 7830$ egyenletet állította fel. Szerinte az akciós DVD-k eredeti ára darabonként az a) esetben 2400 Ft, a b) esetben 2120 Ft volt.
Vajon hogyan gondolkozott Bence? Ellenőrizd Bence megoldását!

6 Rendezd át az egyenleteket mérlegelv segítségével úgy, hogy az egyenlőségjel egyik oldalán 0 álljon, majd alakítsd szorzattá a másik oldalon szereplő kifejezést! Mely számok teszik igazzá az egyenleteket?

a) $x^2-5x=6x^2-25x$

b) $x^2+19-2x=10x-17$

c) $x^2-5x+15=7x-2x^2+3$

7 Egy használtautó-kereskedő egy hónap alatt 20 autót adott el. Hogy kicsit fellendítse a forgalmat, elhatározta, hogy a következő hónapban lemond a haszon egy részéről: minden egyes autót 20 000 Ft-tal olcsóbban ad. A következő hónapban 30 autót adott el, és így 200 000 Ft-tal több lett a bevétele, mint az előző hónapban. Mennyiért adott eredetileg átlagosan 1-1 autót?

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg az egyenleteket a mérlegelv alkalmazásával!

a) $(x+4)(x-4)=x^2-2x$

b) $100x-100(27-x)=1100$

c) $\frac{x+3}{12}-\frac{5-x}{12}=\frac{2}{3}$

2 Oldd meg az alábbi egyenleteket a mérlegelv alkalmazásával!

a) $\frac{5x}{4}-\frac{2-7x}{5}=3x-13$

b) $(2x-3)^2-(2x-5)^2=40$

c) $3+\frac{4x-5}{5}-\frac{5x-4}{15}=\frac{15-3x}{10}$

3 A három könyvespolc közül a legalsón kétszer annyi könyv van, mint a legfelsőn, és 20%-kal több, mint a középsőn. A három polcon összesen 70 könyv van. Hány könyv van az egyes polcokon?



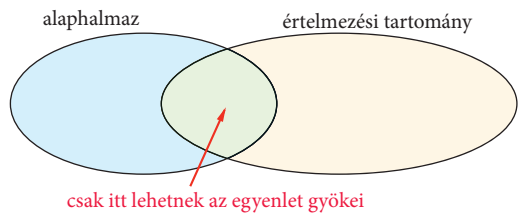
35 PROBLÉMAMEGOLDÁS EGYENLETEKKEL

ELMÉLET

Egy egyismeretlenes **egyenlet értelmezési tartománya** az összes olyan valós számnak a halmaza, amelyeken az egyenletben szereplő összes kifejezésnek értelme van (pl. tört esetén a nevező értéke nem lehet nulla).

Egyenletek megoldásakor sokszor az a feladat, hogy az értelmezési tartomány összes eleme közül keressük meg azokat, amelyeknek a behelyettesítésekor az egyenletből igaz állítást kapunk. Ezek a számok az egyenlet **gyökei (megoldásai)**. Az egyenlet gyökei alkotják az egyenlet **megoldáshalmazát**.

Gyakran előfordul, hogy az egyenlet mellé egy **alaphalmazt** is adunk, és ennek az elemei között keressük a gyököket. **Ebben az esetben csak az értelmezési tartomány és az alaphalmaz közös részéből (metszetéből) kerülhetnek ki az egyenlet gyökei.**



Szöveges feladatok esetében az alaphalmazt a tartalom szabja meg.

Az egyenlet megoldásának megkezdése előtt **célszerű** megvizsgálni az egyenlet értelmezési tartományát. Ezzel a megoldás menete lerövidíthető, és a megoldások ellenőrzése is egyszerűbbé válhat.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hajni füvet nyír, de sajnos csak egy régi, kis teljesítményű fűnyírójuk van. Bence segít neki: „Ez a kert körülbelül 600 m². Ha egyedül csinálod, nem végzel sötétedésig sem. Segítek neked. Kölcsönkérjük a szomszéd szuper fűnyíróját is, így együtt megleszünk 1,5 óra alatt, hiszen a szuper fűnyíróval 2 óra alatt én egyedül is le tudnám nyírni az összes füvet." Mennyi időbe telne a fűnyírás Hajninak egyedül?

Megoldás

Első módszer (egyenlettel)

Foglaljuk táblázatba, mit tudunk Hajni és Bence fűnyírásáról!

	Hajni	Bence
Egyedül a 600 m²-t ennyi óra alatt nyírná le	x óra	2 óra
1 óra alatt ennyi m²-t nyír le	$\frac{600}{x}$	$\frac{600}{2} = 300$
1,5 óra alatt ennyi m²-t nyír le	$1{,}5 \cdot \frac{600}{x}$	$1{,}5 \cdot 300 = 450$

Hajni és Bence együtt 1,5 óra alatt nyírja le az egész kertet, azaz 600 m²-t. Írjuk fel mindezt egyenlettel, a táblázat utolsó sorának felhasználásával!

$$1{,}5 \cdot \frac{600}{x} + 450 = 600 \qquad / -450$$

$$1{,}5 \cdot \frac{600}{x} = 150 \qquad / \cdot x \ \ (x \neq 0)$$

$$1{,}5 \cdot 600 = 150x$$

$$900 = 150x \qquad / :150$$

$$x = 6$$

Tehát Hajni egyedül 6 óra alatt nyírná le a füvet.

Ellenőrzés

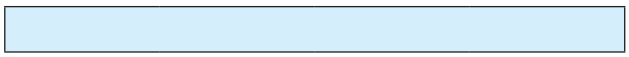
Ha Hajni egyedül 6 óra alatt nyír le 600 m² füvet, akkor 1,5 óra alatt éppen a kert egynegyedét nyírja le, azaz 150 m²-t.

Bence, aki 1 óra alatt végez 300 m²-rel, 1,5 óra alatt ennek a másfélszereséről, 450 m²-ről vágja le a füvet.

Ketten együtt 150 + 450 = 600 m²-nyit vágnak le, azaz éppen végeznek a fűnyírással a teljes kertben.

Második módszer (egyenlet nélkül, szemléletesen)

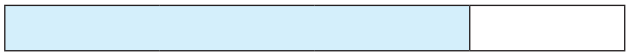
Bence egyedül 2 óra alatt nyírja le a kertet.



1 óra alatt a felét nyírja le.



1,5 óra alatt a $\frac{3}{4}$-ét nyírja le.



Hajni ezt az $\frac{1}{4}$ kertet nyírta le 1,5 óra alatt.



Hajninak a teljes kerthez egyedül 4-szer ennyi időre van szüksége, azaz 6 órára.



FELADAT

1 Egy kezdő gépírót egy hosszú szöveg legépelésével bíznak meg. Segítségül hívja egyik gyakorlott kollégáját, aki egyedül 2 óra alatt tudná legépelni ezt a szöveget. Ketten együtt dolgozva 1 óra 12 perc alatt elkészülnek a munkával. Mennyi ideig tartott volna a hosszú szöveg legépelése a kezdő gépírónak egyedül? Oldd meg a feladatot egyenlettel és egyenlet nélkül is!

2 Pali a matematikaosztályzatainak átlagát számolgatja. Az osztályzatok összege 66. „Érdekes, hogy ha az utolsó három osztályzatomat – egy hármast és két négyest – elhagynám, akkor ugyanannyi lenne a jegyeim átlaga, mint most." Hány osztályzata lehet Palinak? Oldd meg egyenlet nélkül és egyenlettel is!

3 Egy ékszergyárban 100% aranytartalmú (24 karátos) és 25% aranytartalmú (6 karátos) „törtarany" összeolvasztásával 1 kg 75% aranytartalmú (18 karátos) aranyat kaptak.
Hány kilogramm színaranyra volt szükség? Oldd meg a feladatot egyenlettel és egyenlet nélkül is!



4 Egy futballcsapat egy idényben 32 mérkőzést játszott. Kettővel kevesebb meccset vesztettek, mint amennyit nyertek, és feleannyi döntetlent játszottak, mint ahány meccset vesztettek. Hány nyert, hány vesztett és hány döntetlen meccsük volt?

HÁZI FELADAT

1 Egy nagy építkezésen dolgozó cölöpverő gép 5 óra alatt verné le az összes cölöpöt, egy másik gép viszont egyedül dolgozva 3 óra alatt végezne ezzel a munkával. Mennyi idő alatt készülnek el, ha a két cölöpverő együtt dolgozik?

2 Bence 1 óra alatt 20 m^2-t ás fel, Hajni 1 óra alatt 16 m^2-t.

a) Két óra alatt hány m^2-t ásnak fel ketten együtt dolgozva?

b) Hány óra alatt ásnak fel 120 m^2-t együtt?

3 Egy liter (1000 gramm) 5%-os és egy liter 2%-os sóoldatunk van. (A százalékos arányon most tömegszázalékot értsünk!)

a) Hány gramm só van az egyik, illetve a másik oldatban?

b) Összeöntjük a két sóoldatot. Hány százalékos oldatot kapunk?

4 A boltban csak 100%-os és 12%-os gyümölcstartalmú narancslét lehet kapni. A 100%-os nagyon tömény, a 12%-os meg túl vízízű, a kettő között lenne az igazi. Melyikből mennyit keverjünk össze egy kancsóban, hogy 1 liter 34%-os gyümölcstartalmú narancslevet kapjunk?

Ráadás

ALAPHALMAZ, ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY, MEGOLDÁSHALMAZ

BEVEZETŐ

Amikor egyismeretlenes egyenleteket oldunk meg, akkor olyan számokat keresünk, amelyeket az egyenletben szereplő betű helyébe írva fennáll az egyenlőség.

Ha például a $\frac{2x-9}{5} = x$ egyenletbe az x helyébe 2-t írunk, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{4-9}{5} = 2$; $-1 = 2$, ami nem igaz.

De ha az x helyébe (-3)-at írunk, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{-6-9}{5} = -3$; $-3 = -3$, ami igaz.

Akármelyik valós számot írjuk is be a $\frac{2x-9}{5} = x$ egyenletbe az x helyébe, kapunk egy *állítást*, ami vagy igaz, vagy nem igaz. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy ennek az **egyenletnek az értelmezési tartománya** az **R** halmaz. Számításunk azt mutatja, hogy egyenletünknek a -3 a **gyöke** (a -3 beírása **igaz állítást** eredményezett), a 2 viszont **nem gyöke** (a 2 beírása **hamis állításra** vezetett).

Ha a $\frac{2x-9}{5-x} = -3$ egyenlettel van dolgunk, ott is kipróbálhatjuk, mit kapunk, ha az x helyébe valamilyen számot írunk.

Itt azonban *nem választhatjuk bármelyik valós számot*, mert ha például az 5-öt választanánk, akkor 0-val kellene osztanunk, ami lehetetlen.

Azt mondjuk, hogy *ennek az egyenletnek az értelmezési tartománya* az $\mathbf{R} \setminus \{5\}$ halmaz. Ennek a halmaznak már bármelyik elemét behelyettesíthetjük az egyenletbe.

Mit tapasztalunk, ha 2-t vagy (-3)-at írunk az x helyébe?

$\frac{2 \cdot 2 - 9}{5-2} = -3$; $\frac{-5}{3} = -3$; $-1\frac{2}{3} = -3 \rightarrow$ nem igaz,

$\frac{2 \cdot (-3) - 9}{5-(-3)} = -3$; $\frac{-15}{8} = -3$; $-1\frac{7}{8} = -3 \rightarrow$ nem igaz.

A $\frac{2x-9}{5-x} = -3$ egyenletnek sem a 2, sem a -3 nem gyöke.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Melyik számot írhatjuk a $\frac{2x-9}{5-x} = -3$ egyenletbe az x helyébe, hogy igaz állítást kapjunk?

Megoldás

Használjuk a mérlegelvet! Először szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(5-x)$-szel!

$2x - 9 = -3(5-x)$

$2x - 9 = -15 + 3x \qquad / + 15$

$2x + 6 = 3x \qquad / - 2x$

$6 = x$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ha az eredeti egyenletbe az x helyére 6-ot írunk, akkor igaz állítás keletkezik:

$\frac{2 \cdot 6 - 9}{5-6} = -3$; $\frac{3}{-1} = -3$; $-3 = -3 \rightarrow$ igaz.

A mérlegelvvel dolgoztunk, ezért a 6-on kívül más szám nem jöhet szóba.

Tehát a $\frac{2x-9}{5-x} = -3$ egyenletnek **egy gyöke van**, a 6. Az egyenlet **megoldáshalmaza**: {6}.

2. **a)** Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát!

$$\frac{x-3}{2x-1}$$

Megoldás

A nevező értéke 0-tól különböző valós szám lehet (mert a 0-val való osztásnak nincs értelme).

$2x - 1 \neq 0$

A $\neq$ reláció esetén is használhatjuk a mérlegelvet.

$2x \neq 1$

$x \neq \frac{1}{2}$

A kifejezés értelmezhető bármely $\frac{1}{2}$-től különböző valós szám esetén.

Matematikai szimbólumokkal írhatjuk az értelmezési tartományt $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ vagy $\left\{x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{1}{2}\right\}$ alakban.

b) Határozzuk meg az $\frac{x}{x^2-2x}$ kifejezés értelmezési tartományát és számoljuk ki helyettesítési értékét $x=-2;\ 0;\ 2;\ 3$ esetén!

Megoldás

A nevező értéke 0-tól különböző valós szám lehet, azaz

$x^2-2x \neq 0$

$x(x-2) \neq 0$

A szorzat értéke nem nulla, ha egyik tényezője sem nulla, ezért

$x \neq 0$ és $x \neq 2$.

Vagyis az értelmezési tartomány $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$.

Az előbbi szorzattá alakítást felhasználva az eredeti tört felírható

$$\frac{x}{x^2-2x}=\frac{x}{x(x-2)}=\frac{1}{x-2}$$

alakban, azaz a helyettesítési érték számolását elvégezhetjük az egyszerűsített alakba való helyettesítéssel is.

ELMÉLET

VIGYÁZZ! Az eredeti kifejezés értelmezési tartománya $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$, ezért $x=0$ és $x=2$ esetén nem létezik helyettesítési érték.

$x=-2$ esetén $-\frac{1}{4}$ a kifejezés értéke,

$x=3$ esetén 1 a kifejezés értéke.

Emlékeztető: Egy tört **egyszerűsítés**ekor a számlálót és a nevezőt osztjuk ugyanazzal a **nullától különböző** valós számmal vagy kifejezéssel.

FELADAT

1 Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\frac{3}{2x-1}+\frac{x-2}{x+2}-\frac{11}{x^2}$

b) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{3}{x^2-4}-\frac{6x-1}{x-3}$

2 Milyen valós számot írhatunk az egyenletbe, hogy igaz állítást kapjunk?

$\frac{3x-1}{3x+1}+4=6$

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Oldjuk meg az $\frac{x^2}{x-3}=\frac{3x}{x-3}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Ennek az egyenletnek a szövegben megadott alaphalmaza **R**, értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ halmaz. Ezért a megoldáshalmaz csak $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ valamely részhalmaza lehet.

Használjuk a mérlegelvet!

Először szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(x-3)$-mal: $x^2=3x$.

Mindkét oldalból kivonunk $3x$-et:

$x^2-3x=0$, vagy másképp: $x(x-3)=0$.

Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=0$ vagy $x=3$.

A 3 **nem gyöke az eredeti egyenletnek, hiszen nincs benne az értelmezési tartományban**.

Helyettesítsük be a 0-t!

$\frac{0^2}{0-3}=\frac{3\cdot 0}{0-3}$, vagyis $\frac{0}{-3}=\frac{0}{-3}$.

Ez igaz, tehát a 0 gyöke az egyenletnek. Más gyöke nem lehet, ezért az $\frac{x^2}{x-3}=\frac{3x}{x-3}$ egyenlet **megoldáshalmaza**: $\{0\}$.

FELADAT

3 Bence és osztálytársa, Dönci meg akarja oldani az $5x + 10 = x^2 + 2x$ egyenletet. Azon vitatkoznak, hogy melyikük megoldása a helyes.

a) Bence megoldása:

$$5x + 10 = x^2 + 2x$$
$$5(x + 2) = x(x + 2)$$
$$0 = x(x + 2) - 5(x + 2)$$
$$0 = (x + 2)(x - 5)$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{vagy} \quad x - 5 = 0$$
$$x = -2 \quad \text{vagy} \quad x = 5$$

Tehát az egyenlet megoldáshalmaza: $\{-2; 5\}$.

b) Dönci megoldása:

$$5x + 10 = x^2 + 2x$$
$$5(x + 2) = x(x + 2) \qquad / : (x + 2)$$
$$5 = x$$

Tehát az egyenlet megoldáshalmaza: $\{5\}$.

Melyik megoldást tartod jónak, melyiket hibásnak, és miért? Válaszod részletesen indokold!

4 Bence és Dönci az $\frac{5x}{x-2} = \frac{10}{x-2}$ egyenlet megoldása során is más eredményre jutott.

a) Bence megoldása:

$$\frac{5x}{x-2} = \frac{10}{x-2} \qquad / \cdot (x - 2)$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

Tehát az egyenlet megoldáshalmaza: $\{2\}$.

b) Dönci megoldása:

$$\frac{5x}{x-2} = \frac{10}{x-2}$$
$$\frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2} = 0$$
$$\frac{5x-10}{x-2} = 0$$
$$\frac{5(x-2)}{x-2} = 0$$
$$5 = 0$$

Hamis kijelentést kaptunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

Melyik megoldást tartod jónak, melyiket hibásnak, és miért? Válaszod részletesen indokold!

5 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x+2}{3-x} + \frac{3+x}{x-2} = \frac{1}{3-x}$$

6 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = (3x-2) \cdot \frac{4}{x^2-1}$$

7 Add meg az alábbi egyenletek megoldáshalmazát! Figyelj az értelmezési tartományokra!

a) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = 0$ **b)** $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}} = 1$

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{3-x}{5} + \frac{3+2x}{3} = 7 - \frac{2x}{15}$

b) $\frac{5(x+4)}{2x+5} - 6 = \frac{7{,}5}{2x+5}$

c) $\frac{(3x+2)^2}{3x-2} + 3x - 2 = 6x + 2$

d) $\frac{x^2-7x}{x^2} = 0$

2 Állapítsd meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

a) $3 + \frac{5x^2-8}{7}$ **c)** $3 + \frac{5x^2-8}{7x^2-21x}$

b) $3 + \frac{5x^2-8}{7x}$ **d)** $3 : (5+x) + \frac{5x^2-8}{7x^2-14x+7}$

3 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = (3x-2) \cdot \frac{3}{x^2-9}$$

Az április tavaszi hónap. – Ez egy **igaz állítás**.
A november tavaszi hónap. – Ez egy **hamis állítás**.

Írd be valamelyik hónap nevét a következő „nyitott mondatba”, a kipontozott részbe: *A … tavaszi hónap.*

Ha a márciust, az áprilist vagy a májust írjuk be, akkor igaz állítást kapunk, a többi hónap beírása esetében pedig hamisat.

Most a vizsgált nyitott mondathoz a

{január; február; március; április; május; június; július; augusztus; szeptember; október; november; december}

halmazt választottuk **alaphalmaznak**.
A nyitott mondat **igazsághalmaza** a {március; április; május} halmaz.

A logikában azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tartalmuk *igaz* vagy *hamis*, **állításoknak**, más szóval: **kijelentéseknek** nevezzük. Az állítások közé soroljuk azokat a kijelentő mondatokat is, amelyeknek a tartalmát a tapasztalatok alapján igaznak, illetve hamisnak fogadjuk el. Az *igaz*, illetve a *hamis* szó az állítás *logikai értéke*.

Például
A Föld nagyobb, mint a Nap. – hamis állítás
12 · 13 = 156. – igaz állítás
Ma vasárnap van. – igaz vagy hamis állítás aszerint, hogy melyik napon hangzik el
Tilos a dohányzás! – nem állítás, mert nem kijelentő mondat
A legszebb virág a rózsa. – nem állítás, mert nem dönthető el egyértelműen, hogy a tartalma igaz-e (az emberek más-más virágot gondolnak a legszebbnek)

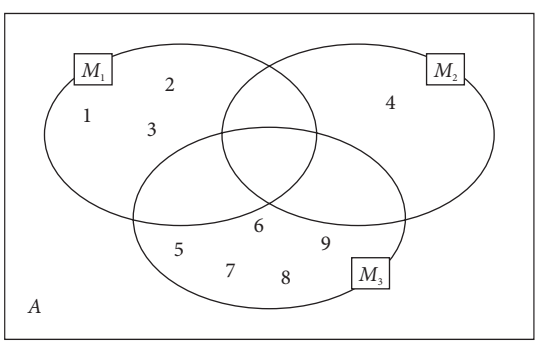
A logika fogalomkörébe beilleszthetők az egyenletek és az egyenlőtlenségek is.

Ha például az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8, 9\}$ alaphalmazon keressük a

$3 \cdot \ldots < 12$; $3 \cdot \ldots = 12$; $3 \cdot \ldots > 12$

nyitott mondatok igazsághalmazát, akkor azt is mondhatjuk, hogy az {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} alaphalmazon meg akarjuk oldani a $3x < 12$ egyenlőtlenséget, a $3x = 12$ egyenletet és a $3x > 12$ egyenlőtlenséget.

A $3 \cdot \ldots < 12$ nyitott mondat igazsághalmaza (és egyúttal a $3x < 12$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza): $M_1 = \{1; 2; 3\}$.
A $3 \cdot \ldots = 12$ nyitott mondat igazsághalmaza (és egyúttal a $3x = 12$ egyenlet megoldáshalmaza): $M_2 = \{4\}$.
A $3 \cdot \ldots > 12$ nyitott mondat igazsághalmaza (és egyúttal a $3x > 12$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza): $M_3 = \{5; 6; 7; 8; 9\}$.



36 EGYENLETEK MEGOLDÁSA

CSOPORTMUNKA

1 Egy papírbolt ügyetlen eladója hasra esett két doboz húsvéti képeslappal, azok szétszóródtak és reménytelenül összekeveredtek.



A dobozokban összesen 1200 képeslap volt, de azt nem tudták, hogy melyikből mennyi. A drágább fajta 180 Ft, az olcsóbb 150 Ft lenne, de a boltvezető úgy határozott, hogy nem vacakolnak a szétválogatással, eladják az egészet $\frac{180+150}{2}$ = 165 forintos „átlagáron”. Az összes képeslap eladása után kiderült, hogy így 1200 forinttal több bevételük lett, mint amennyit eredetileg vártak.

a) Az olcsóbb vagy a drágább képeslapból volt több?

b) Melyik fajtából hány képeslap keveredett össze?

c) Eredetileg mennyi volt az 1200 képeslap darabonkénti átlagára?

2 Egy befektető 2 500 000 forintot fektetett részvényekbe és kötvényekbe. Egy év alatt a részvények 9%-os nyereséget hoztak, a kötvények 7%-ot. Mennyit fektetett részvénybe, illetve kötvénybe, ha év végére összesen 211 000 forint nyereségre tett szert?

3 Egy parkolóórába összesen 13 húsz- és ötvenforintos érmét dobtunk be, hogy kifizessük a 440 forintos parkolási díjat. Melyik érméből hány darabot dobtunk be?



4 Testnevelésórán éppen a diákok rövidtávfutás-idejét mérik. Minden körben ketten futnak a pályán, azonban a sípszónál az egyikük „kissé” beragadt, amivel 2 értékes másodpercet vesztett. Hogy behozza a lemaradását, 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel futotta végig a távot, míg a másik diák csak 4,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-mal. Így egyszerre értek a célvonalhoz.



a) Melyik gyerek hány másodperc alatt futja le a távot?

b) Milyen hosszú a futópálya?

5 Reggelenként Albert kényelmes, 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s tempóval sétál iskolába menet. Lemérte, hogy ha reggel negyed nyolckor indul otthonról, akkor éppen idejében érkezik az iskolába. Ma azonban elaludt, ezért fél nyolc-

kor indult útnak. Így most 7 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s tempót kell végig tartania, hogy a szokásos időpontban érkezzen meg.



a) Általában mennyi idő alatt teszi meg Albert az iskolába vezető utat?

b) Mekkora utat tesz meg Albert otthontól az iskoláig?

6 A hagyományos, 100 wattos izzó ára 90 Ft, az azonos „fényerejű” 20 wattos energiatakarékos izzó viszont már 1050 Ft-ba kerül. 1 kilowattóra elektromos energia ára 40 Ft. (A 100 wattos izzó 10 óra üzemelés alatt éppen 1 kilowattóra elektromos energiát használ el.)



a) Hány üzemóra után lehet azt mondani, hogy gazdaságosabb a 20 wattos izzó működtetése? Napi 4 órás üzemidőt feltételezve, hány nap alatt „térül meg” a drágább izzó vásárlása?

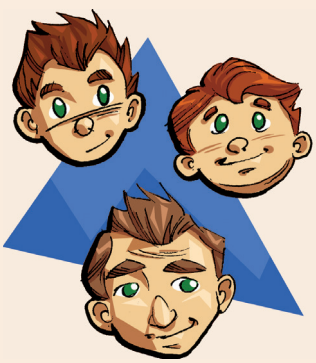
b) A hagyományos izzó élettartama kb. 1000 óra, az energiatakarékosé pedig kb. 6000 óra. Hány forint a megtakarítás egy energiatakarékos izzó élettartama alatt?

c) Mutassátok be grafikus úton is az energiatakarékos izzó előnyét!

HÁZI FELADAT

1 Egy vállalkozó két édességboltot üzemeltet. A két bolt nyitvatartási rendje azonos. A városközpontban álló üzlet naponta átlagosan 12%-kal több bevételt hoz, mint a piactér melletti. Májusban karbantartási munkák miatt három napra be kellett zárni a városközpontban álló boltot; emiatt aztán mindkét boltban ugyanakkora lett a havi összbevétel. Hány napot tartottak nyitva az egyes boltok májusban?

2 Balázs, Máté és az édesapjuk együtt 78 évesek.



6 év múlva az életkoruk aránya 2 : 3 : 7 lesz. Hány éves a két fiú?

3 A diákok sífutóversenyén Anti egyenletes sebességgel síel. Öt perccel Anti indulása után indul Zsombor, aki percenként 90 méterrel többet tesz meg, így 20 perc múlva utoléri Antit.



a) Mekkora volt Zsombor sebessége?

b) Mennyit síelt Anti, amíg Zsombor utolérte?

4 Egy ellipszis alakú, 300 méter hosszúságú versenypályán üldözéses kerékpárverseny folyik. Tóbiás és Döme a pálya két ellentétes pontjáról indul ugyanabba az irányba. A sebességük állandó: Tóbiásé 8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Dömeé 9,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mennyi idő múlva éri utol az egyik a másikat?

37 RÉGI IDŐK MATEKJA

FELADAT

1 Egy lánytól megkérdezték, hány éves. Így felelt:

Annyi vagyok, amennyi,
Anyám kétszer ennyi,
Apám anyámnál öttel több,
Összesen 100 évesek vagyunk.

Hány éves volt ez a lány?



2 Egy apának öt fia volt: 4, 5, 8, 11 és 14 évesek. Megkérdezte tőle a barátja, hogy hány éves. Így felelt:

Éppen annyi idős vagyok, mint az öt fiam együttvéve. De most te mondd meg nekem azt, hány év múlva leszek feleannyi idős, mint a fiaim összesen!

Oldd meg te is ezt a feladatot!

3 Démokritosz, görög bölcs körülbelül 2400 évvel ezelőtt élt.
Vajon hány évesen halt meg? Mi derül ki ebből a versikéből?

Hogy meddig élt Démokritosz
megtudod, ha kutatod.
Életének ötödrészén
gyermekmódra mulatott,
negyedrészét életének
friss ifjúként élte át,
harmadát mint férfiú,
ki sokat gondol, mélyre lát.
És mikor hollófürtjeit
aggkor hava födte be,
tizenhárom évet élt még,
és úgy szállt a sírba le.

(*Megjegyzés:* A versike téved, Démokritosz még a 90. születésnapját is megérte.)



4 A hagyomány szerint Ljubusa cseh fejedelemnő ahhoz a kérőjéhez ment férjhez, aki a leggyorsabban tudta megfejteni a következő rejtvényt: Hány szilva volt abban a kosárban, amelyből az első kérőjének adta a szilva felét és még 1-et, a második kérőjének a maradék felét és még 1-et, a harmadik kérőjének az újabb maradék felét és még 3-at, ha így a kosárban már egyetlen szem sem maradt?

5 Egy réges-régi feladat: Egy ember felfogadott egy munkást, ígért neki egy évre 12 aranyat és egy kaftánt. A munkás 7 hónap után elment, és a bérét kérte. Megkapta a kaftánt és még 5 aranyat. A gazda jól számolt, igazságosan adta ki a bért. Vajon hány aranyat ér a kaftán?

6 Két bokron összesen 25 veréb ült. Az egyik bokorról átrepült a másikra 5, onnan más tájékra szállt 7 veréb. Így a másodikon kétszer annyi veréb lett, mint az elsőn. Hány veréb volt eredetileg az egyik bokron, és hány a másikon?



7 Hány baraczk volt a kosárban, melynek tartalmát 3 gyermekemnek osztottam szét? Az első kapta a baraczkok felét meg egy fél baraczkot; a második a maradék felét meg egy fél baraczkot; végre a harmadik ismét a maradék felét, meg egy fél baraczkot. Maradt ekkor nekem 4 s egy baraczkot sem kellett elvágnom.

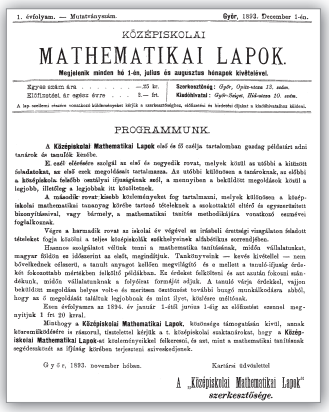
(Forrás: Középiskolai Matematikai Lapok 1894. I. évfolyam 2. szám)

8 Egy kaliczkában nyulak és fáczánok vannak, melyeknek együttesen 35 fejük és 94 lábuk van. Kérdés, hány állat van mindegyik fajtából?

(Forrás: Középiskolai Matematikai Lapok 1894. I. évfolyam 2. szám)

A Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL) a matematika iránt különösen érdeklődő diákok szaklapja, melyet 1893 decemberében Arany Dániel győri főreáliskolai tanár alapított és szerkesztett. A lap a mai napig segíti az érettségire és versenyekre készülő diákok munkáját. A matematikai érdekességek, gyakorlatok, feladatok mellett a kiadvány 1959-ben fizika rovattal bővült, és 2001-től az informatika is önálló részt kapott benne. A problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére 2006-tól már interneten keresztül is van lehetőség az érdeklődő diákok számára a folyóirat online megjelenő változatában, gyakorlatok és teszt feladatsorok segítségével.

A lap arcképcsarnokában felkutathatjuk Hajós György, Erdős Pál, Lovász László és számtalan más magyar tudós diákkori fényképét. Járj utána, hogy az említettek mikor voltak középiskolások! Nézz utána, milyen területen munkálkodtak és alkottak!



1. évfolyam. — Mutatványszám. Győr, 1893. December 1-én.

KÖZÉPISKOLAI

MATHEMATIKAI LAPOK.

Megjelenik minden hó 1-én, julius és augusztus hónapok kivételével.

Egyes szám ára . . . . . —25 kr.
Előfizetési ár egész évre . . . . . 5.— Ft.

Szerkesztőség: Győr, Gyár-utcza 12. szám.
Kiadóhivatal: Győr-Belgut, Hid-utcza 10. szám.

PROGRAMMUNK.

A Középiskolai Mathematikai Lapok első és 65 czikja tartalomban gazdag példatárt adni tanárok és tanulók kezébe.

E czél elérésére szolgál az első és negyedik rovat, melyek közül az utóbbi a kitűzött feladatokat, az első ezek megoldásait tartalmazza. Az utóbbi különösen a tanároknak, az előbbi a középiskola felsőbb osztályai ifjuságának szól, a mennyiben a beküldött megoldások közül a legjobb, illetőleg a legjobbak itt közöltetnek.

A második rovat kisebb közleményeket fog tartalmazni, melyek különösen a középiskolai mathematikai tanaryag körébe tartozó tételeknek a szokottaktól eltérő és egyszerűbbnek bizonyuló tárgyalásával, vagy bármely, a mathematikai tanítás methodikájára vonatkozó észrevétel foglalkoznak.

Végre a harmadik rovat az iskolai év végével az irásbeli érettségi vizsgálaton feladott tételeket fogja közölni a teljes középiskolák szélesebb körének alfabétikus sorrendjében.

Hasonlóképen szolgálatot vélünk tenni a mathematika tanítóinak, midőn vállalatunkat, magyar földön az időszerint az első, megindítjuk. Tanítványaik — kevés kivétellel — nem bővelkednek ollyanban, a tanuló anyagot kellően megvilágító és a mellett a tanuló-ifjuság érdeklő fokozatosabb mértékben ismétlő példákban. Ha érdekét felkérheti és azt szivén fekvőnek ismerendeknek, midőn vállalatunknak a folyóirat formáját adjuk. A tanuló vérje érdekkel, vajjon beküldött megoldása helyes volt-e és mennyiben tanítónak további buzgó munkálkodásra abból, hogy az ő megoldását találtuk legjobbnak és mint ilyet, közlésre méltónak.

Ezen értekezésem az 1894. év január 1-étől junius 1-éig az előfizetési czennsal megnyitjuk 1 frt 20 kral.

Miután hogy a Középiskolai Mathematikai Lapok, közönség támogatásán kivül, annak tárczaellátásáról is részesül, tanulótest kérjük a t. középiskolai szaktanárokat, hogy a Középiskolai Mathematikai Lapok-at közleményeikkel felkeresni, és azt, mint a mathematikai tanításnak segédeszközét az ifjuság körében terjeszteni szíveskedjenek.

Győr, 1893. november hóban.

Kartársi tisztelettel

A „Középiskolai Mathematikai Lapok“ szerkesztősége.

HÁZI FELADAT

1 Egy régiségkereskedő egy festményt és egy értékes sakk-készletet vásárolt 270 ezüstért. A sakk-készletet 25%-kal drágábban adta el, mint amennyiért vette, a festményt pedig másfélszeres áron. Így ezen a két üzleten együtt 40%-ot nyert. Menynyiért vette a sakkot?



2 Egy csapat halász vízre szállt. Eltervezték, hogy ha naponta 6 tonna halat fognak, akkor még a várható vihar előtt kifogják a megrendelt mennyiséget. Jó volt a fogás, naponta 4 tonnával többet fogtak ki a tervezettnél. Így 3 nappal lerövidítették a halászat tervezett időszakát, és még 6 tonnával többet is fogtak, mint amennyit eredetileg akartak. Mennyi halat fogtak?

3 Péter és Pál pénzének aránya 5:7. Ha Péter kap még 2000 forintot és Pál elköl 800 forintot, akkor ugyanannyi pénze lesz a két fiúnak. Hány forintja van Péternek és Pálnak?

4 Egy apa 4-szer annyi idős, mint a fia. 5 évvel ezelőtt 5-ször annyi idős volt, mint a fia. Hány éves most az apa és a fia?

38 GYAKORLÁS; TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!
$(x+3)^2+(x+2)^2-(x-3)^2-(x-2)^2=60$.

2 Oldd meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $3x-x^3=-x$

b) $\frac{x+1}{x}-\frac{2x-4}{3x}=\frac{3x-7}{2x}$

c) $\frac{1}{2x-4}-\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$

3 Két hordóban összesen 160 liter benzin volt. Mindkettőből kivettek 10 liternyit, így az első hordóban maradt benzin negyedrésze ugyanannyi lett, mint a második hordóban maradt benzin harmadrésze. Mennyi benzin volt eredetileg az első hordóban?



4 Egy folyó sebessége 2 km/óra. Folyásirányban („lefelé") evezve óránként 10 km-t teszünk meg. Milyen messzire evezzünk, hogy az oda-vissza út összesen 4 óra hosszat tartson?

5 Egy tört számlálója 6-tal kisebb, mint a nevezője. Ha a számlálójához hozzáadunk 29-et, a nevezőjéhez pedig 11-et, éppen a reciprokával egyenlő törtet kapunk. Melyik ez a tört?

6 Egy építtető gazda egy bizonyos munka elvégzésére felfogadott egy kőművest a következő feltételekkel: Minden nap, amikor dolgozik, 5 ezüstöt fizet a kőművesnek, de ha nem dolgozik, akkor arra a napra a kőműves köteles 7 ezüstöt fizetni. Hány napot dolgozott, és hány napot pihent a kőműves, ha 48 nap alatt készült el a munkával, de egy ezüstöt sem keresett, igaz, nem is vesztett rajta?

TUDÁSPRÓBA I.

1 Egy tört számlálója 6-tal kisebb, mint a nevezője. A tört értéke $\frac{1}{3}$. Mekkora a számláló?

2 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!
$\frac{x-1}{5}-\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{4}-\frac{x-4}{10}=$
$=\frac{x-5}{4}-\left(\frac{x-6}{2}-\frac{x-7}{10}\right)$

3 Oldd meg a negatív egész számok halmazán a következő egyenletet!
$(x+5)^2+(x+5)(x-5)-(x-5)^2=20x+11$.

4 7850 forintot csupa 50 és 100 forintos érmével fizetünk ki. Az érmék száma összesen 100. Hány 50 forintost használtunk fel?

5 Egy üzemben két dolgozót megbíznak egy feladattal, melyet együttes munkával 4 nap alatt kell elkészíteniük. Teljesíthetik-e a feladatot, ha munkatempójukat ismerve tudjuk róluk, hogy külön-külön dolgozva az egyik dolgozó 6 nap alatt, másik 9 nap alatt készülne el ugyanezzel a munkával?

6 Szabó nagymama palacsintát sütött a három unokájának. A legnagyobb Szabó legény megette a palacsinták harmadát, a középső Szabó legény a megmaradt palacsinták harmadát, a legkisebb Szabó legény pedig a megmaradt palacsinták harmadát, és így a tányéron még 8 palacsinta maradt. Hány palacsintát sütött a nagymama?

TUDÁSPRÓBA II.

1 Egy negatív tört számlálója 6-tal kisebb, mint a nevezője. A tört nem írható fel egész szám alakjában. Mi lehet a nevezője?

2 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{2x-1}{3}-\left(\frac{3x-1}{2}-\frac{4x-1}{3}\right)=\frac{5x-1}{2}-\left(\frac{6x-1}{3}-\frac{7x-1}{6}\right)-1$$

3 Határozd meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát! Milyen értéket vesznek fel a kifejezések $x=-2;\ 0;\ 1;\ 2$ esetén?

a) $\frac{x-1}{4x-8}$ **b)** $\frac{3x-7}{2x-x^2}$ **c)** $\frac{x(2x+1)}{x(x^2-4)}$

4 Egy teremben csak négylábú és háromlábú asztalok állnak, és ezeknek összesen 43 lábuk van.

a) Lehet-e 12 asztal a teremben?

b) Lehet-e 10 asztal a teremben?

c) Mennyi a legkevesebb, és mennyi a legtöbb asztal, ami a teremben lehet?

5 (Érettségi feladat, 2005.)

Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt?

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után?

6 Egészségügyi okok miatt nem tanácsos, hogy sportolás közben a pulzusszám túl magas legyen. Régebben azt javasolták, hogy a maximális pulzusszám ne haladja meg a következő képlet szerinti értéket:

megengedett maximális pulzusszám = 220 – életkor.

Az újabb kutatások alapján kissé módosították a képletet:

megengedett maximális pulzusszám = 208 – (0,7 · életkor).

a) Tamás 15 éves. Mekkora a megengedett maximális pulzusszáma a régebbi és az új képlet szerint?

b) Hány éves korban lesz a javasolt maximális pulzusszám kisebb 170-nél az újabb képlet szerint? Ez az életkor magasabb vagy alacsonyabb, mint amennyi a régi képlet szerint adódik?

c) Van-e olyan életkor, amelyhez a régi és az új képlet szerint is ugyanakkora a megengedett maximális pulzusszám? Ha igen, akkor mekkora ez a pulzusszám, ha nem, akkor miért nem?

RÁADÁS

Két borkereskedő érkezik a határhoz. Az egyiknek 64, a másiknak 20 hordó bora van. A határon átvitt bor után vámot kell fizetni, de nincs elegendő készpénzük a kifizetéséhez. Ezért az első kereskedő odaad 5 hordó bort és még 40 ezüstöt, a másik odaad 2 hordó bort, és visszakap 40 ezüstöt. Így már bevihetik árujukat az országba. Mennyit ér egy hordó bor, és mennyi vámot kell utána fizetni?



TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Írd fel az alábbi kifejezések rendezett alakját és állapítsd meg az együtthatójukat!

a) $2 \cdot x^2 : (-2) \cdot y^2$

b) $\frac{3}{2} \cdot y^2 \cdot x : 3 \cdot y \cdot x$

2 Hány változósak, hány tagúak, hányadfokúak az alábbi algebrai kifejezések? Add meg a változókat, a tagok fokszámát és a tagok együtthatóinak értékét!

$3a^4$; $4{,}7x^3y$; $-2{,}45c^4d^2$; $\frac{7}{8}xyz^3$;

$x^5 - 0{,}5x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 2$;

$12a^3b - 5ab^2 + 0{,}1b^3 - 7$

3 Határozd meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = 2$ és $y = -1$.

a) $4(y^3 - x^5)$

b) $xy^2 + 5xy - 7$

c) $\frac{1}{2}x - y + \frac{xy}{x+y}$

d) $x^2 - y^2 + 2y$

4 Határozd meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét $a = 3$ és $b = -\frac{1}{3}$ esetén!

a) $\frac{3a+b}{-1} + \frac{2}{3}b$

b) $a(b+3) - ab^3$

c) $(a^0 - b) \cdot (-3a)$

d) $\frac{ab+1}{7} - \frac{b}{a} + 2b^2$

5 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $x^2 + (2 - 3x - 5x^2) - (x^2 - 7)$

b) $3ab - 4a^2b + 7ab - 2a^2b + 5ab - ab^2$

c) $xy^2 - y^2 + 5y^2x + 2y^2 + 2yx^2$

d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{5}x^2 + y^3 - 2x^2$

6 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $\left(-\frac{3}{4}x^3y^2z\right) \cdot \left(\frac{4}{3}xyz\right)$

b) $\frac{2}{7}x^{k+1} \cdot \frac{7}{2}x^{k-1}$

c) $3x^2y \cdot \frac{1}{3}x \cdot (-5x^3y) \cdot \left(-\frac{7}{2}xy\right)$

d) $(3x^2 - 5y + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)$

7 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $(6x^2 - 3xy + y^2) - (2y^2 + 2xy - x^2)$

b) $(n - 3) - (1 - 2n) + 2(n + 2)$

c) $(8x - 3y) - 5(4x - 3y) + 2(3y - 7x)$

d) $5 \cdot (2{,}4 - 0{,}3x + 0{,}16x^2) - 4 \cdot (0{,}2x^2 + 1{,}5x - 1)$

8 Végezd el a kijelölt műveleteket, az eredményekben vond össze és rendezd a tagokat!

a) $(3x - 5)(5x + 1)$

b) $(3a + 12b)\left(-a - \frac{1}{3}b\right)$

c) $\left(\frac{2}{3}a^2b - 1\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{1}{2}ab - \frac{3}{4}a^2b\right)$

d) $2a\left(-5a + 2\frac{1}{2}b\right) + 5a^2 - 3a(3b - a)$

9 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(x - 10)^2$

b) $(a + 5)^2$

c) $(c + 7)^2$

d) $(2 + y)^2$

10 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(4 - b)^2$

b) $(4x - 1)^2$

c) $(2c + d)^2$

d) $(e - 3f)^2$

11 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(5y - 4x)^2$

b) $(3f + 4h)^2$

c) $(8p - 5q)^2$

d) $\left(\frac{x}{6} + 1\right)^2$

12 Végezd el a következő műveleteket!

a) $\left(\frac{a}{2} - \frac{c}{3}\right)^2$

b) $(y^2 + 1)^2$

c) $(b^3 - 2)^2$

13 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(x+y)(x-y)$

b) $(a+3)(a-3)$

c) $(5-4d)(5+4d)$

d) $(6e+f)(6e-f)$

14 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(2+3x)(2-3x)$

b) $(a^3-1)(a^3+1)$

c) $(4z+5y)(4z-5y)$

d) $\left(\frac{y}{7}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{7}-\frac{1}{2}\right)$

e) $\left(\frac{a}{10}-\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{10}+\frac{b}{3}\right)$

f) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$

15 Írd fel a következő háromtagú kifejezéseket kéttagú kifejezések négyzeteként!

x^2+6x+9

$x^6+x^3+\frac{1}{4}$

16 Végezd el a műveleteket!

a) $(a+b)^2-2ab$

b) $(x-y)^2-x^2-y^2$

c) $5(a^2-b^2)+(a+b)^2$

d) $3(c+d)+6(d-c)$

17 Végezd el a műveleteket!

a) $(y-1)^2+(y-1)$

b) $4(b-c)-(b+c)^2$

c) $(d+1)^2-2(d-3)$

d) $5x-(1-x)^2$

e) $(y-b)(y+b)-(y-b)^2$

18 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $5c+5d$

b) $3y-15x$

c) $6a^2-12$

d) $10x+100xy$

19 Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $\frac{1}{2}abc-\frac{1}{2}abd+\frac{1}{2}bcd$

b) a^2+a

c) $x^5-x^4+x^3-x^2+x$

d) $9b^2+18b$

20 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) x^2-y^2

b) x^2-5^2

c) c^2-25

d) $9-a^2$

e) $100-x^2$

f) $(2y)^2-(3c)^2$

21 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $25a^2-16b^2$

b) $100d^2-81c^2$

c) x^2+6x+9

d) $4a^2-4a+1$

22 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $4b^2+20b+25$

b) $9x^4-24x^2y+16y^2$

c) $\frac{4}{9}x^2-36$

d) $a^2b^2-49y^2$

23 Szorzattá alakítás segítségével egyszerűsítsd a törteket, végezd el a műveleteket!

a) $\frac{15a+30}{10a+20}$

b) $\frac{4a+4b}{2a+2b}$

c) $\frac{6d-12}{d-2}$

d) $\frac{4+2x}{4-x^2}$

24 Szorzattá alakítás segítségével egyszerűsítsd a törteket a változók megengedett értékei mellett!

a) $\frac{y^2-9}{2y-6}$

b) $\frac{b^2-c^2}{4b+4c}$

c) $\frac{36a^2-49b^2}{12a-14b}$

d) $\frac{2x+8}{y^2-25}\cdot\frac{3y-15}{x^2-16}$

e) $\frac{1}{b^2-100}:\frac{b}{2b+20}$

f) $\frac{x}{6x-6y}:\frac{2}{x^2-y^2}$

25 Végezd el a következő műveleteket!

a) $(3x-5)^3$

b) $\left(\frac{3}{5}a^2+5b^3\right)^3$

c) $(x+3)(x^2-3x+9)$

d) $(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$

26 Add meg azoknak a valós számoknak a halmazát, melyre az alábbi kifejezések értéke nulla!

a) $3x(x-5)(x+4)$

b) $(2x+1)(3x-8)(7-4x)$

c) $5x^2-7x$

d) $2x^3-8x$

e) $3x^3-18x^2+27x$

27 A valós számok mely legbővebb részhalmazán van értelme az alábbi kifejezéseknek?

a) $\frac{9x-4}{11x}$

b) $\frac{x^2-3x}{2x}$

c) $\frac{x-9}{x^2-3x}$

d) $\frac{5-2x}{x^2+x}+\frac{7}{x^2-1}$

e) $\frac{x}{x^2-x}+\frac{7+x}{x^2+2x+1}$

f) $\frac{19}{3x^3+6x^2+3x}+\frac{1}{x^3-x}$

28 Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $-7x+14=0$

b) $5\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$

c) $5x-1=9$

d) $-3x+2=-x$

e) $2x+5=2x-1$

f) $2x-2=1-x$

29 Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $(2x-7)+(8+3x)=26$

b) $8x-(5-4x)=6-2(4x+9)$

c) $(6x+3)-3(3x-4)=5(x-4)-(x+1)$

d) $(0{,}4x+1{,}8)-(1{,}5x+1)-5(-4x-0{,}8)=3{,}8$

30 Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-2\left(-x-\frac{1}{2}\right)-12\left(-\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$

b) $3x(x+1)-x(3x-1)=x-7$

c) $4x-2(x-3)-3[x-3(4-2x)+8]=-1$

d) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{7}{12}x-\frac{3}{10}\right)=\frac{29}{5}$

31 Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(2x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$

b) $\frac{6x+4}{5}-\frac{2+5x}{3}=2$

c) $\frac{7x}{3}-\frac{3x+1}{2}=x+1$

d) $\frac{3x-7}{4}+\frac{x-1}{8}-\frac{x-5}{2}=\frac{x+1}{2}-1$

32 Oldd meg a következő egyenleteket szorzattá alakítással!

a) $8x^2-16x=0$

b) $2x^3+10x^2=0$

c) $7(x+1)-x(x+1)=0$

d) $(5-x)(5+x)+(5-x)(2x-1)-$
$-(5-x)(x-6)=0$

e) $2(3x-6)-x(6-3x)-(2x+1)(3x-6)=0$

33 Jelöld a kérdezett mennyiségeket a használt betű segítségével!

a) Két szám összege 45. Ha az egyik szám x, mennyi a másik?

b) Két szám különbsége 72. Ha a kisebbik szám d, mennyi a másik?

c) Két szám hányadosa 7. Ha az egyik szám n, mennyi a másik?

d) Két szám különbsége 4,7. Ha a nagyobbik számot p-vel jelöljük, akkor a másikat hogyan?

e) Két szám szorzata 18. Ha az egyik szám q, mennyi a másik?

f) Egy mennyiség 10%-a f, akkor mennyi a mennyiség 90%-a?

g) Ha egy mennyiség $\frac{2}{5}$ részét k-val jelöljük, akkor a $\frac{7}{5}$ részét hogyan?

h) Ha két szám hányadosa $\frac{8}{3}$, és az egyik számot u-val jelöljük, akkor a másikat hogyan?

34 Gondoltam egy számot, hozzáadtam 8-at, majd az összeget elosztottam 3-mal, így a gondolt szám értékénél 4-gyel kisebbet kaptam eredményül. Melyik számra gondoltam?

35 Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti számnál 63-mal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

36 Egy apa kétszer annyi idős, mint a fia. Tíz évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint a fia. Hány éves lesz öt év múlva az apa és fia?

37 Egy kalózkapitány minden zsákmányolt arany felét megtartotta magának, a maradékot pedig a legénység között az alábbiak szerint osztotta szét: az első kapott 1000 aranyat és a maradék egytizedét, a második kapott 2000 aranyat és a maradék tizedét, a harmadik kapott 3000 aranyat és a maradék tizedét, és így tovább. Így minden kalóz ugyanannyi pénzt kapott. Hány kalóz között osztotta szét az aranyakat a kapitány, és hány aranyat zsákmányoltak összesen?

38 Egy pásztor legelteti a nyáját, amelyben tehenek, juhok és kecskék vannak. A nyáj felét a tehenek teszik ki, a harmadát a juhok, és azt is tudjuk, hogy 25 kecskével van kevesebb, mint juh. Hány állatot legeltet a pásztor mindegyikből külön-külön?

39 Egy kutya 80 m távolságban meglát egy nyulat, és elkezdi üldözni. A két állat egyszerre kezd futni a kutyát és a nyulat összekötő egyenes mentén. A nyúl 10-et, a kutya 9-et ugrik másodpercenként. Mennyi idő alatt éri utol a kutya a nyulat, ha a kutyaugrás 1 m hosszú, a nyúlugrás pedig csak 80 cm.

40 Egy téglalap egyik oldalát 40%-kal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a terület ne változzon? Hány százalékkal változik eközben a téglalap kerülete?

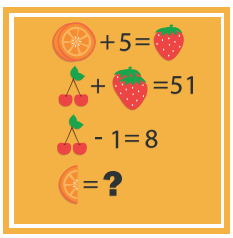
41 10 liter 30%-os és 24 liter 40%-os oldatot keverünk össze. Hány százalékos lesz a keverék?

42 Egy vasútállomásról elindul egy személyvonat 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, majd 45 perc múlva egy gyorsvonat 105 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel ugyanabba az irányba. Mikor éri utol a gyorsvonat a személyvonatot?

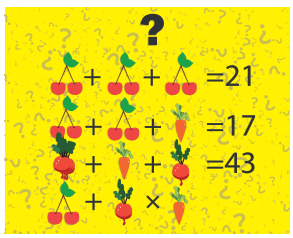
43 Egy medence az egyik csapon át 4,5 óra, a másik csapon át 450 perc alatt töltődik fel. Mennyi idő alatt telik meg, ha mindkettőt megnyitjuk?

44 A közösségi médiában gyakran felbukkannak olyan feladatok, melyek megoldása kommentháborút robbant ki. Ilyenek közül válogattunk. Az előző témakör megértése után biztosan nem okoz számodra nehézséget egyik megoldása sem.

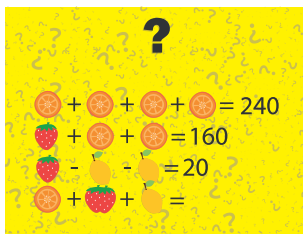
a)



b)



c)



45 Melyik a kakukktojás?
Minden sorban az egyik kifejezés kilóg a sorból: a másik három helyettesítési értéke bármely valós számok esetén megegyezik. Ha a kakukktojásokhoz tartozó betűket helyes sorrendbe teszed, két magyar író vezetéknevét kapod. Kik ők?

$(b-a)^2$ M	$(a-b)^2$ T	b^2+a^2-2ab L	a^2-ab+b^2 A
x^2-y^2 Á	$(x-y)\cdot(y+x)$ É	$(y-x)\cdot(x+y)$ K	$(x-y)\cdot(x+y)$ I
$(d-c)\cdot(c-d)$ Ó	$(d-c)\cdot(-c-d)$ Y	$(-d+c)\cdot(d+c)$ P	c^2-d^2 A
$(-x+3)^2$ R	$(-3-x)^2$ I	$(x-3)^2$ S	$(-3+x)^2$ Z
$4a^2+12ab+9b^2$ E	$(2a+3b)^2$ B	$(3b+2a)\cdot(2a+3b)$ F	$4a^2+6ab+9b^2$ J

A FELADATOK VÉGEREDMÉNYEI

Bevezető lecke: 1. a) 2022-ben majd 2042-ben. **b)** 2034-ben. **2.** 5200 cm^2. **3. b)** 2 millió; 3,5 millió; 2,5 millió; 2 millió.

1. lecke: 1. a) 120. **b)** 5040. **c)** 60. **2. a)** 720. **b)** 120. **c)** 24. **3.** 20. **4.** 36. **5.** 10. **6.** 4. **7. a)** 120. **b)** 24. **8. a)** 9! = 362 880. **b)** 2880. **c)** 2880. **d)** 2880.

2. lecke: 2. b) 8 csúcs, 7 él. **3. a)** 4. ábra. **4.** 32. **5. a)** 9.c. **c)** 5.

3. lecke: 1. a) 10 000. **b)** 5040. **c)** 360. **d)** 9000. **2. a)** 2^7. **b)** 10!. **c)** 0,1. **d)** 11 111 000 000. **3.** 15 903 perc ≈ 11 nap

4. lecke: 1. a) 4320. **b)** 720. **c)** 1440. **d)** 720. **2. a)** 900 000. **b)** 136 080. **c)** 472 392. **d)** 90 000. **e)** 15 625. **f)** 180 000. **g)** 1 000 000. **3. a)** 24. **b)** 0,75; 0,25; 0,25. **c)** 4. **d)** 113 322. **4.** Négyest, ötöst vagy hatost; Bencének 27; Hajninak 18.

5. lecke: 1. a) 8 000 000. **b)** 50 400 000. **c)** 24 000 000. **d)** 288. **2. a)** 6 760 000. **b)** 260 000. **c)** 17 576 000. **d)** 14 987 000. **3. a)** 3^{14}. **b)** 354 294. **c)** 0,00153%.

6. lecke: 1. 10; 10; ugyanannyi. **2.** véges: *a*; *c*; *f*; *g*. **3.** 7. **4. a)** van. **b)** van. **c)** nincs. **d)** van.

7. lecke: 1. a) igen, Lenke. **b)** nem, Anna vagy Mária. **2. b)** 46. **c)** 12. **3. b)** 13; 9; 4; 0; 13; 22; 0. **c)** akik nem kékszeműek. **4.** $6 \leq n \leq 8$. **5.** végtelen; 0; 0; végtelen. **6. a)** negatív egészek. **b)** irracionális számok. **c)** racionális számok. **d)** üres halmaz.

8. lecke: 1. a) $(S \cup M) \setminus D$. **b)** $(S \cap M) \cup (S \cap D) \cup (M \cap D)$. **2.** 42. **3.** 4. **4. f)** a és c. **5. a)** $(B \cup C) \setminus A$. **b)** például $(B \cap C) \cup [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$.

6. 9,33%. **7.** 30.

9. lecke: 1. a) 2. **b)** 23. **c)** végtelen sok. **d)** 8. **2. a)** 5. **b)** nincs ilyen. **c)** 3 és 7. **3. a)** $]-2; -5[\cup]2; 5[$. **b)** $]-4; 4[$. **c)** $]-\infty; -12[\cup]12; \infty[$. mindegyik végtelen. **4. a)** $]-1; 3]$. **b)** $\left[-\frac{8}{3}; -\frac{2}{5}\right]$. **5. a)** például:

$[-2; -0{,}5] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right]$, vagy $\left[-2; \frac{5}{2}\right] \setminus]-0{,}5; 1[$.

b) $\left[-\frac{7}{3}; -\frac{5}{4}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right[$, vagy $\left[-\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right[\setminus \left]-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right]$.

c) $]-\infty; -3[\cup]-1; \infty[$, vagy pl. $\mathbf{R} \setminus [-3; -1]$.

d) $[-1; 4] \setminus \{0; 1; 2; 3\}$. **6.** $523 \leq s \leq 531$; $|527 - s| \leq 4$.

10. lecke: 2. a) elégtelen: A, G, K; elégséges: B, F, H; közepes: C, E; jó: D, L; kiváló: I, J. **b)** jó: C, D, I, J; közepes: A, B, E, F, H, L; gyenge: G, K. **c)** elégtelen: A, K; elégséges: B, E, F, G, H; közepes: C, L; jó: D, I; kiváló: J. **3. a)** legnagyobb nyereség: D. **4. a)** 43. **b)** 1-gyel csökken. **5. a)** D, C, B. **c)** legfeljebb B.

11. lecke: 1. a) 12! **b)** 4! · 8! **2. a)** *A* hamis, *B* igaz, *C* hamis. **b)** *RC*, *DB*, *DY*, *CY*. **3. a)** 5^{10}. **b)** $4 \cdot 5^8 = 1\,562\,500$. **4. a)** 600. **b)** 38 880. **c)** 216. **d)** 12 960. **5.** 1. **6.** igen. **8.** 1; 2.

12. lecke: 1. a) 27,8. **b)** 28. **c)** 23,8. **2. a)** 193. **b)** 6300. **c)** 2400. **d)** 88. **3.** 720 Ft. **4. a)** 1,5. **b)** 5. **c)** 4,5. **d)** 192. **5. a)** 150. **b)** 5. **6. a)** 0. **b)** −12,36. **c)** 5. **d)** 24. **7.** $\frac{10}{7}$.

13. lecke: 1. $\frac{11}{8}$; 2; $\frac{7}{2}$; $\frac{27}{19}$. **2. a)** $\frac{133}{26}$. **b)** $\frac{9}{2}$. **3. a)** $\frac{5}{6}$. **b)** $\frac{10}{13}$. **4. a)** 1. **b)** 10. **c)** 4. **5.** $\frac{1}{6}$-része. **6.** ∀ a 0-t és ∂ a 3-t helyettesíti. **7.** $\frac{5}{24}$-része.

14. lecke: 1. a) véges: $\frac{3}{6}$; $\frac{9}{-6}$. **b)** végtelen: $\frac{-5}{9}$. **2.** $\frac{17}{6}$-nak nincs párja. **3. a)** $\frac{17}{24}$. **b)** $\frac{1}{7}$. **4.** 29 km. **5. a)** igaz. **b)** hamis. **c)** igaz. **d)** hamis.

15. lecke: 1. a) $17{,}4 \leq x \leq 17{,}8$, azaz 17,6 $m^2 \pm 0{,}2$ m^2; **b)** $17{,}2 \leq x \leq 18$, azaz 17,6 $m^2 \pm 0{,}4$ m^2. **2.** 5 730 000 $\leq x \leq$ 5 970 000, azaz 5 850 000 Ft ± 120 000 Ft. **3. a)** ≈ 14 percig. **4.** 400 kg ± 20 kg. **b)** 379,1 kg ± 3,8 kg. **5.** 2390 $\frac{kg}{m^3} \leq x \leq 2980 \frac{kg}{m^3}$. **6. a)** 18,89. **b)** 25,23. **c)** 21,62. **d)** 0,01. **7.** 11 nap.

16. lecke: 1. a) ≈ 22-t. **b)** 192 Wh. **2. a)** 86 km. **b)** ≈ 87 perc. **3.** 19 m^3. **4. a)** 150 l. **b)** 122,7 l. **5.** 4 nap.

17. lecke: 1. 1,2 kg; 0,4 kg; 0,2 kg. **2. a)** 562,5 és 937,5. **b)** 30 és 50. **3.** 630 Ft és 1050 Ft. **4.** 15 liter. **5.** 32 perc. **6.** 14,4 km; 24 km; 19,2 km és 14,4 km.

Ráadás lecke: 1. $\approx 7{,}4 \frac{m}{s} \approx 26{,}6 \frac{km}{h}$. **2. a)** egyenes. **b)** nincs. **c)** egyenes. **d)** egyenes. **e)** nincs. **3.** 1,5-szer. **4.** 1,2-szeresére. **5.** 2,5 km-rel.

18. lecke: 1. a) 2160 Ft. **b)** 1800 Ft. **2. a)** 11%. **b)** 5%. **3. a)** 30 000 Ft. **b)** 50 000 Ft. **4.** 79,2 pengő. **5.** 5048 pengőt. **6.** Helytelen, 25%-kal vehetnénk többet.

19. lecke: 1. a) 13 500 Ft, 10 800 Ft. **b)** 28%. **2.** 15 000 Ft. **3. a)** ≈ 7%. **b)** 105 742 Ft; 21 148 Ft. **4. a)** 68, 56, 44, 32 pont. **b)** 20% jeles, 28% négyes, 32% közepes, 12% elégséges, 8% elégtelen. **c)** 48%-a. **5. a)** 316 800 Ft. **b)** 5,6%. **6. a)** 115 917 Ft. **b)** 20%. **c)** 16,7%.

20. lecke: 1. 2^5-nek nincs párja. **4. a)** 3. **b)** 8. **5. a)** $25 \cdot 5$. **b)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$. **c)** 9^3. **d)** $25 \cdot 25$. **6. a)** 7. **b)** 8. **c)** 3. **d)** 3. **e)** 4. **7. a)** 6^{12}. **b)** $7{,}5^2$. **c)** 3^{10}. **d)** $(-9)^{15}$. **8. a)** $\left(\frac{4}{3}\right)^6$. **b)** $\left(\frac{1}{28}\right)^7$. **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$. **d)** $\left(-\frac{4}{7}\right)^{18}$.

21. lecke: 1. Klárinak. Mindkét kifejezés értéke 3^{12}. **2. a)** 8. **b)** 12. **3.** $(10^6 - 10^5)$ cm $= 9 \cdot 10^5$ cm $= 9000$ m. **4. a)** $(-1{,}8)^4$. **b)** egyenlők. **c)** $0{,}8^4$. **d)** $0{,}7^4$. **5.** d)-t szemléltetik a) és d) igaz. **6. a)** $4{,}5^{30}$. b) $1{,}6^{56}$. **c)** $11 \cdot 10^{30}$. **7. a)** $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$. **b)** $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

22. lecke: 4. a) $\sqrt{17}$. **b)** $\sqrt{20}$. **c)** $\sqrt{13}$. **5. a)** $\sqrt{14}$. **b)** 196. **6. a)** 4. **b)** 2. **c)** 12. **d)** 2. **7. a)** 27. **b)** 7^5. **c)** 125. **8. a)** $\sqrt{18}$. **b)** $\sqrt{3}$. **9. a)** 52,9 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **b)** 12,5 m.

23. lecke: 1. $-9{,}34 \cdot 10^5$; $3{,}4356 \cdot 10^2$; $-1{,}65 \cdot 10^7$. **2. a)** $3{,}3 \cdot 10^{14}$; $3 \cdot 10^3$. **b)** $1{,}21 \cdot 10^4$; $2{,}4 \cdot 10^{51}$. **c)** $-3{,}358 \cdot 10^4$. **3. a)** $\frac{10^{21}}{3 \cdot 10^8} \approx 3{,}3 \cdot 10^{12}$ s $\approx$ 105 699 év. **b)** *B*. **4. a)** $5 \cdot 10^1$ km. **b)** $2{,}5 \cdot 10^9$ m^2. **c)** $2{,}5 \cdot 10^3$ km^2 **5. a)** $2{,}72 \cdot 10^7$-szeres. **b)** 81,4-szeres. **c)** 1,23%.

24. lecke: 1. a) 3000. **b)** 32 768; **c)** 11,390625. **d)** 143,8. **e)** 14. **2. a)** $\approx 9{,}3$. **b)** $\approx 0{,}0687$. **c)** $\approx 14{,}55$. **d)** 1. **3.** $\approx -1{,}06 \cdot 10^5$. **4. a)** 5,5625. **b)** 1,25. **c)** 1,25. **d)** 5,5625. **5. a)** 2851,56 $\neq$ 2010,6. **b)** 2851,56 = 2851,56. **c)** 0,333 $\neq$ 1,3888. **d)** 3 = 3.

25. lecke: 1. a) 2^{24}-szeresére. **b)** *B*. **2.** $\approx 2{,}2 \cdot 10^6$ év. **3.** A hiányzó értékek: 10^{16} és $\sqrt{4 \cdot 10^8}$. **4. a)** 9. **b)** 7. **c)** 3. **d)** 13. **5.** 22 m és 20 cm. **6.** d.

26. lecke: 1. a) 301 625 Ft. **b)** 305 250 Ft. **c)** 310 500 Ft. **2.** 167 200 Ft; 83,6% **.3.** kb. 1 millió Ft. **4. a)** *B*. **b)** *A*. **5. a)** 1 511 946 Ft. **b)** 57%. **6.** kb. 851 800 Ft-ot.

27. lecke: 1. a) 4. **b)** –1. **2. a)** 9,1%. **b)** 1,091-szer. **c)** 0,916-szer. **3.** 125. **4.** 1,64 m; 2,45 m; 4,91 m. **5. a)** $1{,}27 \cdot 10^5$ m^2. **b)** 69%-kal nő. **c)** 27,75%-kal csökken. **6. a)** 0,15 részt. **b)** 2 óra alatt. **c)** kb. 1 óra alatt ($\approx$ 57 perc alatt). **7. a)** 2^5. **b)** $3^{30} \cdot 5^{18}$. **c)** $3 \cdot 2^6$. **8. a)** 1,7 m. **b)** $8{,}64 \cdot 10^6$ mm^2. **c)** $1{,}728 \cdot 10^9$ mm^3. **9. a)** 50%. **b)** 6,25%.

28. lecke: 1. a) $x \cdot b - y \cdot ü$. **b)** bevétel a tejből $\frac{3}{5} \cdot x \cdot a$; túróból $\frac{2}{5}x \cdot \frac{1}{4}b$; összesen $\frac{3}{5} \cdot x \cdot a + \frac{2}{5}x \cdot \frac{1}{4}b$. **2.** igaz: *b*; *c*. **3. a)** nagy téglalap: 60; kisebbek 16; 24; 8; 12. **b)** C. **4.** $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$ miatt osztható hárommal. **5. a)** $5n + 3$; ahol *n* természetes szám. **b)** $100n$, ahol *n* természetes szám. **c)** $100n + 23$, ahol *n* természetes szám **6.** 72.

29. lecke: 1. a) $3x^5$; együttható: 3. **b)** $\frac{2}{3}x^3y^2$; együttható: $\frac{2}{3}$. **c)** $-x^5$; együttható: -1. **d)** $-x^5y$; együttható: -1. **2.** $\frac{1}{5}xy^3$; $\frac{2}{7}x^3y^2$; $-3xy^3$; $4x^3y^2$. Összevonás után $-\frac{14}{5}xy^3$ és $\frac{30}{7}x^3y^2$. **3. a)** $\frac{(7a + 12)}{20}$. **b)** $\frac{(-x - 1)}{6}$. **c)** $-2x^3 - 2x^2 + 8x - 4$. **d)** $-2a + b$. **4. a)** $-9x^4y^4$. **b)** $2a^2 - ab + b^2$. **c)** $-6y^3 - 2y + 32$. **5. a)** $-p$. **b)** $-14x^3 + 28x^2 + 2x - 4$. **c)** $-2a^4 + 4a^3 - 2a^2 + 14a - 20$. **d)** $-15x^3 - 2x^2y + 8xy^2$. **6. a)** $-16x^2 + 22x + 6$; helyettesítési értéke: 13,5. **b)** $3x^2 - 6xy - 6y^2$; helyettesítési értéke: -6. **7.** $a^2 + 1$.

30. lecke: 1. a) $a^2 + 20a + 100$. **b)** $4c^2 - 20cd + 25d^2$. **2. a)** $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{9}y^2$. **b)** $\frac{4}{25}a^2 - \frac{1}{5}ab + \frac{1}{16}b^2$. **3. a)** $x^2 - 6x + 9$. **b)** $-x^2 - 6x - 9$. **c)** $x^2 + 6x + 9$. **d)** $x^2 + 6x + 9$. **4. a)** $x^6 - 2x^3 + 1$. **b)** $a^2 + 4ab^3 + 4b^6$. **5. a)** $9a^8 - 12a^5b^3 + 4a^2b^6$. **b)** $\frac{25}{36}x^6y^4 + x^4y^3 + \frac{9}{25}x^2y^2$. **6. a)** $8x$. **b)** 280. **7. a)** $(a - 10)^2$. **b)** $(y^2 + 4)^2$. **c)** $(2x^3 - 3y^2)^2$. **d)** $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)^2$. **8. a)** 49. **b)** $30ab$. **c)** $36x^3y^2$. **d)** 0,25 vagy $2x^3$. **9. a)** 1764. **b)** 9409.

31. lecke: 1. a) $t^2 - 9$. **b)** $4x^2 - 25$. **c)** $25b^2 - 4a^2$ **d)** $4x^2y^2 - 1$. **2. a)** $t^2 - 9$. **b)** $9 - t^2$. **c)** $a^2 - 1$. **d)** $4 - 9x^2$. **3. a)** $x^4 - 9x^2$. **b)** $\frac{1}{25}x^2 - 49$. **c)** $25a^2b^4 - 9a^4b^2$. **d)** $x^{2k} - y^2$. **4. a)** 1599. **b)** 39 996. **c)** 999 951. **d)** 35,91.

32. lecke: 1. a) $8(x + 3)$. **b)** $8y(x + 3)$. **c)** $8xy(x + 3)$. **d)** $8x^2y^3(3z + 1)$. **2.** Közös tényező: $3xy^2z^2$. Szorzótényezők: $4x^2$, $2yz^2$, xy, $5y^2z^2$, $3x^2yz$. **3. a)** $5y(3y^2 - 1)$. **b)** $a(a^2 - 2a - 1)$. **c)** $7xy(1 - 2x + 3xy)$. **d)** $\frac{1}{3}x(2x^3 - 4x^2 + 1)$. **4. a)** $(x - 5)(x + y)$. **b)** $(3 - y)(y + 5)$. **c)** $(3x + 4y)(a + b)$. **d)** $(2a - 3y)(5a + 7x)$. **5. a)** $(y - 2)(x + 3)$. **b)** $(x - 5)(x - y)$. **c)** $(b - 4)(a - 2)$. **6. a)** 0; $\frac{1}{2}$ és $\frac{7}{3}$. **b)** –3. **c)** $x = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{2}{3}$.

33. lecke: 1. a) $(x + 7)(x - 7)$. **b)** $(1 + a)(1 - a)$. **c)** $(5a + 6b)(5a - 6b)$. **d)** $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)$. **2. a)** $(x - 11)^2$. **b)** $(10x + 1)^2$. **c)** $(3a - 2b)^2$. **d)** $(a^2 + b)^2$. **3. a)** $2(5 + x)(5 - x)$. **b)** $7y(3y + 1)(3y - 1)$. **c)** $15a(b - 1)^2$. **d)** $-(y - 2)^2$. **4. a)** $3a^2(a^2 + 3b)^2$. **b)** $(x + y)(x - y - 1)$. **c)** $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$. **d)** $a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2)$. **5.** 11 és 10; 5 és 2. **6. a)** Nincs ilyen. **b)** 3.

34. lecke: 1. a) 158 °F. **b)** 310,93 K. **c)** K = $\frac{5}{9}$ F + 255,38. **2. a)** 3,5. **b)** 2,4. **c)** $-1{,}2$. **3. a)** -4. **b)** $-0{,}5$. **4. a)** 2400 Ft. **b)** 2120 Ft. **5. a)** 0 és 4. **b)** 6. **c)** 2. **6.** 80 000 Ft.

35. lecke: 1. 3 óra. **2.** 18 osztályzata. **3.** 0,667 kg színarany. **4.** nyert: 14; döntetlen: 6; vesztes: 12.

Ráadás lecke: 1. a) $x \in \mathbf{R}$; $x \neq -2$; 0; 0,5. **b)** $x \in \mathbf{R}$; $x \neq -2$; -1; 1; 2; 3. **2.** -1. **3. a)** jó. **b)** hibás. **4. a)** hibás. **b)** jó következtetésre jutott, de az $x - 2 \neq 0$ feltételt meg kell tenni. **5.** 7. **6.** nincs megoldás. **7. a)** –1,5. **b)** nincs megoldás.

36. lecke: 1. a) olcsóbb fajtából. **b)** 640; 560. **c)** 164 Ft. **2.** 1 800 000 Ft; 700 000 Ft. **3.** 7 db; 6 db. **4. a)** 18 s; 20 s. **b)** 90 m. **5. a)** 35 perc. **b)** $\frac{7}{3}$ km. **6. a)** 300 óra; 75 nap. **b)** 18 690 Ft.

37. lecke: 1. 19. **2.** 14. **3.** 60. **4.** 30. **5.** 4,8. **6.** 11 és 14. **7.** 39 barack. **8.** 12 nyúl és 23 fácán.

38. lecke: 1. 3. **2. a)** 0; 2; –2. **b)** 5. **c)** –0,8. **3.** 90 l. **4.** 15 km. **5.** $\frac{17}{23}$. **6.** 28; 20.

TARTALOM

A tankönyv témakörei 3
Hogyan épül fel ez a tankönyv? 4

KOMBINATORIKA, HALMAZOK

1 Hányféleképpen lehet? 6
2 Gráfok 10
3 Számzárak 14
4 Folytatjuk az összeszámlálást 16
5 Gyakorlás 18
6 Halmazok 20
7 Halmazok uniója, metszete, különbsége 24
8 A szitaformula 28
9 Intervallumok 32
10 Gyakorlás 36
11 Gyakorlás, tudáspróba 40
Témazáró feladatgyűjtemény 42

A SZÁMOK VILÁGA

12 Műveletek számhalmazokban 46
13 Számolás törtekkel 48
14 Racionális és irracionális számok 50
15 Kit csapnak be a számok? 54
16 Arányosság 56
17 Arányos osztás 58
R Arányosságok a bicikli körül 60
18 Százalékszámítás 64
19 Százalék mindenütt 66
20 Hatványozás 68
21 Gyakorlás 70
22 A négyzetgyök 72
23 Számok normálalakja 76
24 Segít a számológép 78
25 Számolás normálalakkal 80
26 Kamatos kamat 82
27 Gyakorlás; tudáspróba 86
Témazáró feladatgyűjtemény 88

EGYENLETEK ÉS AZONOSSÁGOK

28 A Betűk szerepe a számolásban 90
29 Számolás az algebrában 92
30 Nevezetes szorzatok I. 94
31 Nevezetes szorzatok II. 96
32 Szorzattá alakítás I. 100
33 Szorzattá alakítás II. 102
34 Egyenletek 104
35 Problémamegoldás egyenletekkel 106
R Alaphalmaz, értelmezési tartomány, megoldáshalmaz 108
36 Egyenletek megoldása 112
37 Régi idők matekja 114
38 Gyakorlás; tudáspróba 116
Témazáró feladatgyűjtemény 118

A feladatok végeredményei 122

Képjegyzék:

Grafika (Létai Márton): 6., 7., 9., 19., 24., 41., 50., 78., 83., 105., 112., 113.
Flickr: 5., 14., 15., 64., 80., 83., 113., 114.
KöMal-archívum: 115.
Shutterstock: 4., 36., 45., 61., 84., 88., 99.
Pixabay: 13., 14., 20., 43., 56., 58., 60., 66., 78., 81., 86., 112., 113., 117.
Wikimedia: 14., 42., 107., 114.

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: OH-MAT09TA/I
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 16,48 (A/5) ív, tömeg: 326,8 gramm
1. kiadás, 2022

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar
nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG