OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

9



Matematika

tankönyv

II. kötet

Matematika

MÁSODIK KÖTET

9.

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2020. 06. 12-től 2025. 08. 31-ig tankönyvi engedélyt kapott a TKV/3174-7/2020. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára (Matematika) és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára (Matematika) megnevezésű kerettanterv előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztő: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Lektorok: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szerkesztő: Bosznai Gábor

Fedél: Slezák Ilona terve alapján Orosz Adél, Bánáti János

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók: Shutterstock; Pixabay; Flickr; Wikipedia; 123rf; Kováts Borbála, Létai Márton, Orosz Adél

A könyvben felhasználtuk a Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 9. Második kötet tankönyv című művet. Raktári szám: FI-503010902/1

A nyersanyagként felhasznált tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

© Oktatási Hivatal, 2020

ISBN 978-615-6178-20-6

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: OH-MAT09TA/II
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 22,66 (A/5) ív, tömeg: 445,87 gramm
1. kiadás, 2022

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001. számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

4. Bevezetés a geometriába

– DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK ÉS PITAGORASZ TÉTELE

Kíváncsi vagy egy olyan síkidomra, melyről a fennmaradt első írásos emlékek kb. i. e. 2000-ből származnak?

– ALAKZATOK TÁVOLSÁGA

„Messzi-e még a messzi?" Azaz: hogyan értelmezzük a távolságot?

– HÁROMSZÖGEK NEVEZETES PONTJAI ÉS VONALAI

Vonalakból pontok, pontokból körök, körökből… Nem árt ügyelni a háromszögek vonalaira sem.

– DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG A KÖRBEN (THALÉSZ TÉTELE)

Már a görögök is tudták…

5. Függvények

– HOGYAN KEZELJÜNK SOK-SOK ADATOT?

Mennyi szám!? Van értelme? Tanuld meg, hogyan igazodj ki egy adatsokaságban!

– ÁBRÁZOLJUNK FOLYAMATOKAT!

Szigorú és monoton? Olvass az ábrákról! Értelmezd a grafikonokat!

– ALAPFÜGGYVÉNYEK MEGISMERÉSE

Mitől függ? És hogyan?

– SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA FÜGGVÉNNYEL

Szövegből grafikon… Ábrázoljuk! Na látod, hogy látod!

6. Egybevágóság, négyszögek

– SZIMMETRIÁK, TÜKRÖZÉSEK, ELTOLÁSOK

Tükör, biliárdasztal, forgó asztal…

Tudod, hogy mi ezekben a közös? A témakör végén már tudni fogod!

– NEVEZETES NÉGYSZÖGEK ÉS JELLEMZŐIK

Csúcsainak száma négy. Van két egyenlő nagyságú szöge. Átlói merőlegesek egymásra… Mi az?

– TERÜLET ÉS KERÜLET SZÁMÍTÁSA

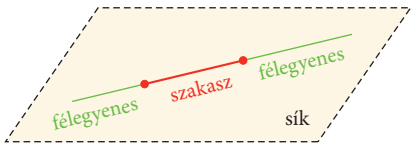
Szeretnél majd házat tervezi, kertet építeni? Ehhez el kell mélyülni a területszámítás témakörébe.

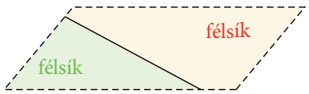
39 A SÍK GEOMETRIÁJA

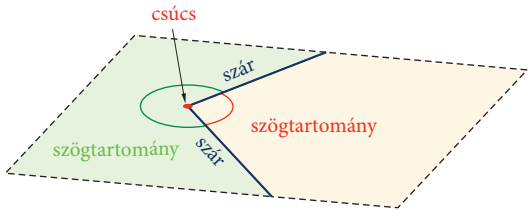
ELMÉLET

A bennünket körülvevő tárgyakat **felületek** határolják. A szekrény oldala, az asztal teteje **síklap**, a virágcserép, a vizesüveg külseje **görbe felület**. A felületdarabok **vonalakban** csatlakoznak egymáshoz. Az asztalláb szomszédos lapjai **egyenes vonalban**, a bögre vagy egy palack alja és oldala **görbe vonalban** metszik egymást. A vonalak is, a lapok is **pontokból** állnak. A valóságos dolgok alapján megalkotott geometriai alapfogalmak: a **pont**, az **egyenes** és a **sík**. Ezeket **térelemeknek** nevezzük. A tér maga is alapfogalom.

Az egyenes és a sík részei:



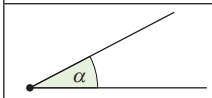
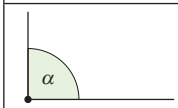
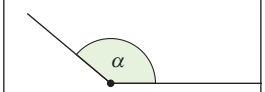
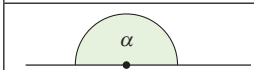
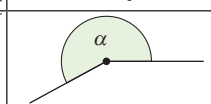
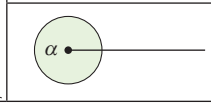




A szögek mérése

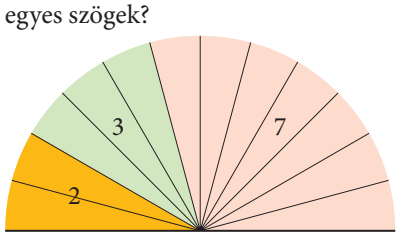
A szög mértékének egyik egysége a teljesszög 360-ad része. Ezt 1°-os szögnek mondjuk. (Másik egységéről később fogunk tanulni.)

A táblázat mutatja, hány fokosak a különféle szögek.

		Ha	akkor
konvex szögek		az α nullszög,	$\alpha = 0°$.
		az α hegyesszög,	$0° < \alpha < 90°$.
		az α derékszög,	$\alpha = 90°$.
		az α tompaszög,	$90° < \alpha < 180°$.
		az α egyenesszög,	$\alpha = 180°$.
konkáv szögek		az α homorú (konkáv) szög,	$180° < \alpha < 360°$.
		az α teljesszög,	$\alpha = 360°$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy egyenesszöget három kisebb szögre osztunk fel. A keletkező szögek aránya 2 : 3 : 7. Mekkorák az egyes szögek?



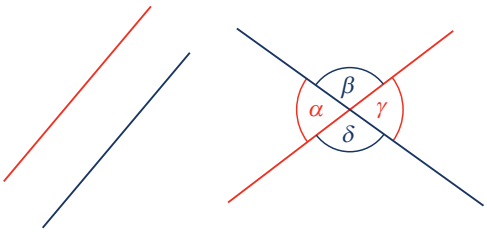
$2 + 3 + 7 = 12$. Az egyenesszög egytizenketted része $180° : 12 = 15°$.

A sárga rész: $2 \cdot 15° = 30°$, a zöld rész: $3 \cdot 15° = 45°$, a rózsaszín rész: $7 \cdot 15° = 105°$.

Ez a három szög valóban úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3 : 7, és az összegük 180°.

ELMÉLET

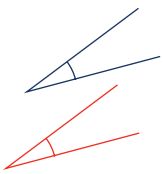
Egy síkban két egyenes VAGY **párhuzamos** (nincs közös pontjuk), VAGY **metszi egymást** (egy közös pontjuk van). (A pontos matematikai definíció szerint minden egyenes önmagával is párhuzamos.)



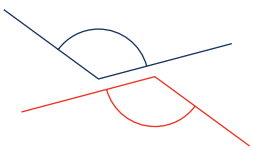
Ha két egyenes metszi egymást, de nem merőleges egymásra, akkor a keletkező *hegyesszöget* nevezzük az **egyenesek szögének**. Ábránkon:
α és γ **csúcsszögek**, β és δ csúcsszögek,
α és β **mellékszögek**, γ és δ mellékszögek.
A csúcsszögek egyenlők, a mellékszögek összege egy egyenesszög.

Nevezetes szögpárok

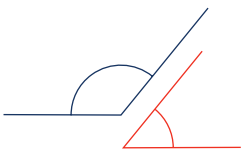
A **párhuzamos szárú szögek** – elhelyezkedésük szerint –, amint az ábrán látható, egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást. Azokat a szögeket, melyek összege 90°, **pótszögek**nek hívjuk.



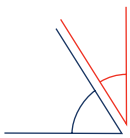
egyállású szögek
(egyenlők)



váltószögek
(egyenlők)



kiegészítő szögek
(180°-ra egészítik ki egymást)



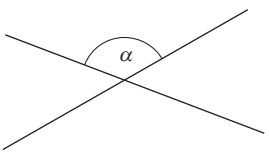
pótszögek
(összegük 90°)

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Az α szög 16°-kal nagyobb a mellékszögénél. Mekkora a csúcsszöge?

Első megoldás, egyenlettel

Az α szög mellékszöge $\alpha - 16°$, a két szög összege egy egyenesszög:



$\alpha + \alpha - 16° = 180°$
$2\alpha - 16° = 180°$
$2\alpha = 196°$
$\alpha = 98°$, és természetesen a csúcsszöge is ugyanekkora.

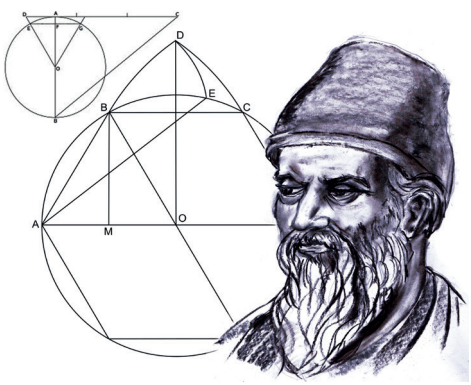
Második megoldás, következtetéssel

Ha két mellékszög különbsége 16°, akkor az egyik 8°-kal nagyobb a 90°-nál, a másik pedig 8°-kal kisebb nála. Tehát a nagyobbik szög 98°-os.
Természetesen ugyanekkora a csúcsszöge is.

ELMÉLET

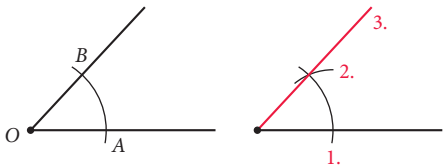
Eukleidész görög matematikus, a „geometria atyja” (i. e. 3. század) szerkesztési feladatokkal is foglalkozott. Ehhez egyélű vonalzót és körzőt használt. Ezek használatát a következőképpen rögzítette.

1. Két ponton át egyenest fektethetünk.
2. Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.
4. Két egyenes metszéspontját meghatározhatjuk.
5. Egyenes és kör metszéspontjait meghatározhatjuk.
6. Két kör metszéspontjait meghatározhatjuk.

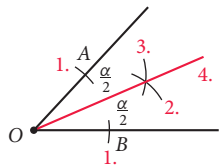


A véges sok ilyen lépésből álló szerkesztést **euklideszi szerkesztésnek** nevezzük, s ezek segítségével elvégezhető a következő alapszerkesztések mindegyike:
(Az ábrákon a sorszámok a szerkesztési lépéseket jelölik.)

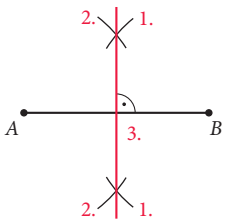
1. szögmásolás



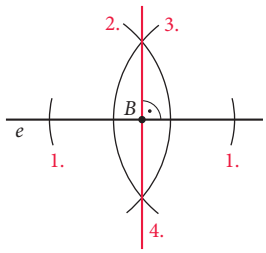
2. szögfelező szerkesztése



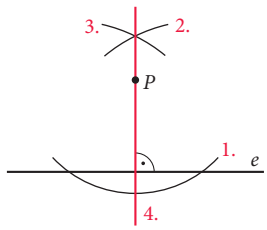
3. szakaszfelező merőleges egyenes szerkesztése



4. merőleges szerkesztése adott egyenesre (e) az egyenes adott pontján át (B)



5. merőleges szerkesztése adott egyenesre (e) az egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül (P)



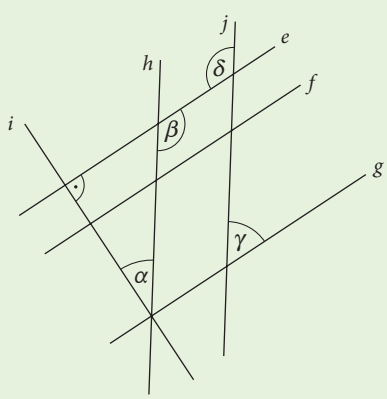
FELADAT

1 Az alábbi nyomtatott nagybetűk melyikében találsz

a) csúcsszögeket
b) tompaszöget
c) váltószögeket
d) homorúszöget
e) kiegészítő szögeket
f) pótszögeket?

A E H K L M N T X Z

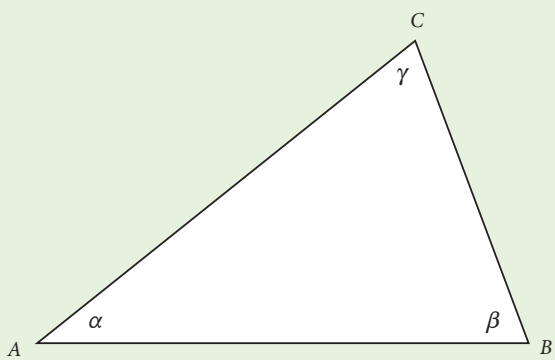
2 Az ábrán látható egyenesekről tudjuk, hogy $e \parallel f$; $f \parallel g$; $h \parallel j$; $i \perp e$.
(A $\parallel$ szimbólum az egyenesek párhuzamosságát, a $\perp$ szimbólum az egyenesek merőlegességét jelzi.)



a) Mely egyenesek között áll még fenn párhuzamosság, illetve merőlegesség?
b) Határozd meg az ábrán görög betűkkel jelölt szögek nagyságát, ha tudjuk, hogy $\alpha = 40°$!

3 Rajzolj egy olyan háromszöget a füzetedbe, melynek méretei közel azonosak az ábrán lévővel!

a) Körző használatával döntsd el, hogy melyik a rajzolt háromszöged legnagyobb, illetve legkisebb szöge! Ne használj szögmérőt!
b) Szerkeszd meg az α szög szögfelezőjének és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontját!



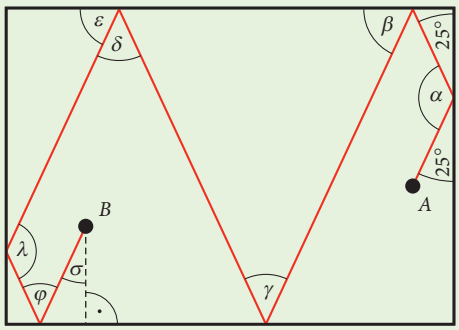
4 Hány fokot fordult el a toronyóra nagymutatója, illetve kismutatója 4 óra 00 perctől 4 óra 40 percig?

5 Tudjuk, hogy egy szög pótszögének és kiegészítő szögének összege 210°-kal nagyobb a szög váltószögének nagyságánál. Hány fokos az eredeti szög?

6 A téglalap alakú biliárdasztalon meglökött A golyó hatszori visszaverődés után találta el a B biliárdgolyót.

a) Számítsd ki a megjelölt szögeket (minden visszaverődés tökéletesen rugalmasnak vehető)!

b) A megadottak közül válassz ki további párhuzamos szárú szögeket: egyállású szögeket, váltószögeket és kiegészítő szögeket!



HÁZI FELADAT

1 Hány fokos szöget alkotnak az óramutatók (a kis- és nagymutató)

a) 5 órakor;

b) 3 óra 20 perckor;

c) 12 óra 30 perckor?



2 Mekkora az a szög, amely

a) a mellékszögének a hetedrésze;

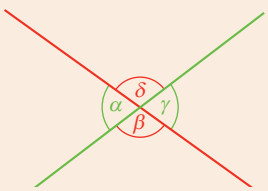
b) a kiegészítő szögével egyenlő;

c) a váltószögével együtt 128°-ot tesz ki?

3 Rajzold meg a füzetedbe az α, a β, a γ és a δ szögfelezőjét!

a) Hány egyenest kaptál?

b) Mekkora ezeknek az egyeneseknek a szöge?



4 Egy egyenesszöget négy részre bontunk úgy, hogy a szomszédos szögek különbsége 10°, és az egymást követő szögek egyre nagyobbak. Mekkorák ezek a szögek?

5 Az ábrán egy biliárdasztalt látunk. Keress párhuzamos szárú szögeket! Vannak-e közöttük

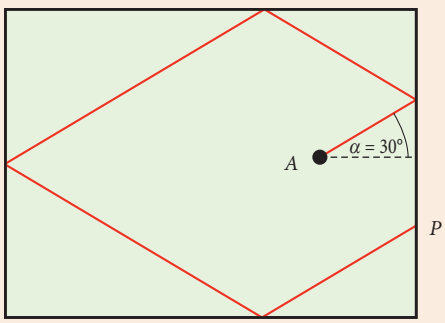
a) egyállású derékszögek (az asztalt határoló egyeneseket is figyelve);

b) 30°-os váltószögek;

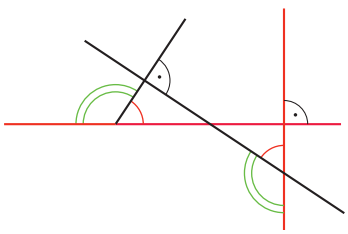
c) egyenlő kiegészítő szögek;

d) nem egyenlő kiegészítő szögek;

e) tompaszögű váltószögek?



RÁADÁS



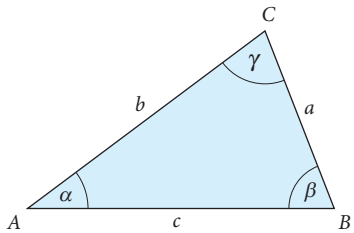
Merőleges szárú szögek

A merőleges szárú hegyesszögek egyenlők, s a merőleges szárú tompaszögek is egyenlők. Ha az egyik hegyesszög, a másik tompaszög, akkor 180°-ra egészítik ki egymást.

40 ÁLTALÁNOS ÉS SZIMMETRIKUS HÁROMSZÖGEK

BEVEZETŐ

Az ABC háromszögek szokásos jelölései:
- az A csúcsnál lévő belső szög α, és a szemközti BC oldalt jelöljük a-val;
- a B csúcsnál lévő belső szög β, és a szemközti AC oldalt jelöljük b-vel;
- a C csúcsnál lévő belső szög γ, és a szemközti AB oldalt jelöljük c-vel.



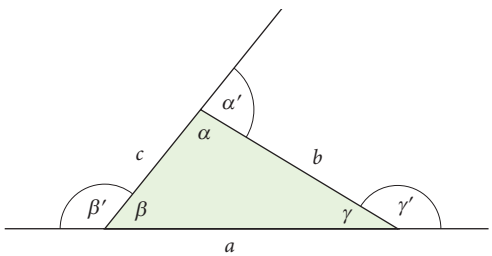
A geometriában a pontok jelölésére általában a latin ábécé nagybetűit, az egyenesek és a szakaszok jelölésére a latin ábécé kisbetűit, a szögek jelölésére a görög ábécé kisbetűit használjuk.

Szokásos, hogy a szakasz (illetve oldal) betűjele a szakasz (illetve oldal) hosszát jelöli. Például a rajzunkon lévő A és B pontok által létrehozott szakasz betűjele c, mely egy számítási feladatban jelentheti a szakasz hosszának nagyságát is. A betű jelentését minden esetben a szövegkörnyezet alapján tudjuk egyértelműen eldönteni.

ELMÉLET

Minden háromszögre igaz, hogy:

a belső szögek összege 180°;	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
minden belső szög és a mellette fekvő külső szög összege 180°;	$\alpha + \alpha' = 180°$; $\beta + \beta' = 180°$; $\gamma + \gamma' = 180°$
mindegyik külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével;	$\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \alpha + \gamma$; $\gamma' = \alpha + \beta$
a külső szögek összege 360°.	$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$



Minden háromszögre igaz, hogy:

bármely két oldal hosszúságának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal;	$a + b > c$; $a + c > b$; $b + c > a$
bármely két oldal hosszúságának a különbsége kisebb, mint a harmadik oldal;	$\lvert a - b \rvert < c$; $\lvert a - c \rvert < b$; $\lvert b - c \rvert < a$

FELADAT

1 Az ABC háromszög α szöge 45°-os, β szöge 75°-os.

Készíts ábrát a füzetedben, jelöld be rajta a háromszög külső és belső szögeit, és töltsd ki a táblázatot!

a háromszög belső szögeinek összege	γ szög nagysága	α külső szögének nagysága	β külső szögének nagysága	γ külső szögének nagysága	a háromszög külső szögeinek összege

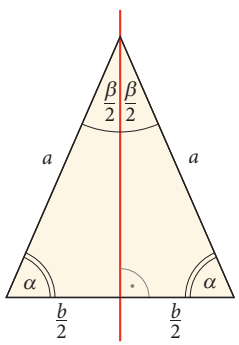
2 Az alábbi állításokról döntsd el, hogy melyik igaz, melyik hamis!

	Igaz	Hamis
1 cm, 2 cm és 3 cm hosszú szakaszokból (mint oldalakból) nem lehet háromszöget alkotni.		
2 cm, 3 cm és 4 cm hosszú szakaszokból (mint oldalakból) nem lehet háromszöget alkotni.		
Van olyan háromszög, melynek egyik belső szöge 80°-os, ugyanakkor van 110°-os külső szöge.		
A külső szögek összege minden háromszög esetén ugyanannyi.		
Minden háromszög külső szögeinek összege 180°.		
Van olyan háromszög, amelynek egyik külső szöge kétszer akkora, mint a másik két csúcshoz tartozó belső szög összege.		
Ha egy háromszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala, akkor van két egyenlő szöge is.		
Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor van két egyenlő hosszúságú oldala is.		

ELMÉLET

Egyenlő szárú háromszögek

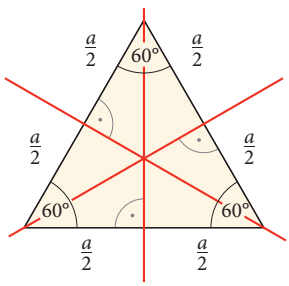
Ha egy háromszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala, akkor ezeket a háromszög **szárainak** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a háromszög **egyenlő szárú**. A harmadik oldal a háromszög **alapja.**

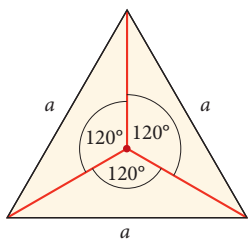


Minden egyenlő szárú háromszögre igaz, hogy:

- van két egyenlő nagyságú szöge (alapon fekvő szögek);
- tengelyesen szimmetrikus;
- szimmetriatengelye a háromszög egyik oldalának (alapjának) felezőmerőlegese, egyben a szárak által meghatározott szög **(szárszög)** szögfelezője is.

Ha egy háromszögnek mindhárom oldala egyenlő, akkor **szabályos háromszögnek** nevezzük.





Minden szabályos háromszögre igaz, hogy:

- minden szöge egyenlő nagyságú, 60°-os;
- tengelyesen szimmetrikus;
- 3 szimmetriatengelye van.

KIDOLGOZOTT FELADAT

A gyümölcsszedéshez két létrát kaptunk kölcsön, ezek azonban nem egyforma hosszúak. Oda lehet-e támasztani a létrákat a fához két oldalról úgy, hogy ugyanolyan magasra érjenek?

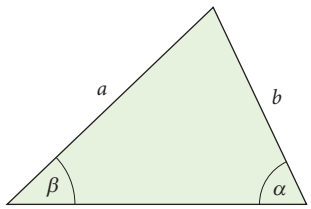
Megoldás

A feladat természetesen könnyedén megoldható, mindössze annyi szükséges, hogy a hosszabb létrát ($a > b$) kisebb szögben támasszuk a fához, mint a rövidebb létrát ($\alpha > \beta$).



ELMÉLET

Ha a háromszögben két oldal nem egyenlő, akkor a nagyobb oldallal szemközti szög nagyobb, mint amelyik a kisebb oldallal van szemben.



És megfordítva:
Ha a háromszögben két szög nem egyenlő, akkor a nagyobb szöggel szemközti oldal nagyobb, mint amelyik a kisebb szöggel van szemben.

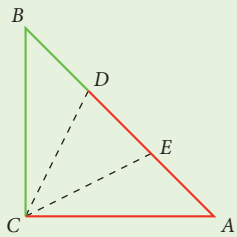
Tehát ha $a > b$, akkor $\alpha > \beta$, és ha $\alpha > \beta$, akkor $a > b$. Összefoglalva: $a > b$, akkor és csak akkor, ha $\alpha > \beta$.

FELADAT

3 Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben $CB = CA$, és fennáll, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$.

a) Mekkorák a rajzon látható hegyesszögek?

b) Igazold, hogy a CDE háromszög egyenlő szárú!



4 (Érettségi feladat, 2015)
Az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szöge 104°-os, B csúcsnál lévő belső szöge 74°-os. Hány fokos a háromszög C csúcsnál lévő külső szöge? Indokolj!

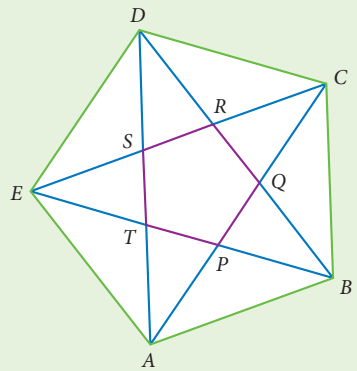
5 A következő ábrán egy ötszög csúcsait kötöttük össze szakaszokkal. Az azonos színű szakaszok hossza egyenlő.

a) Adj meg csúcsaival legalább három olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek szárai zöldek!

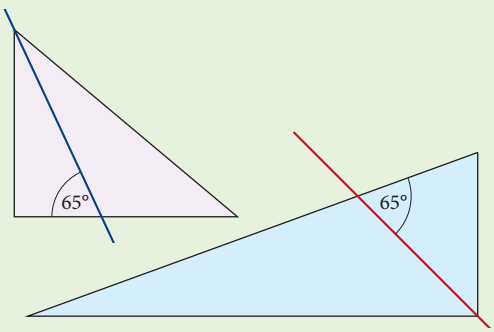
b) Adj meg csúcsaival legalább három olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek alapja zöld!

c) Igazold, hogy az ABD háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge!

d) Határozd meg az **a)**, **b)** és **c)** esetben említett háromszögek szögeinek nagyságát, ha tudjuk, hogy a $PQRST$ ötszög minden belső szögének nagysága 108°!



6 Egy derékszögű háromszög egyik szögfelezője 65°-os szöget alkot a szemközti oldallal. Mekkorák lehetnek ennek a háromszögnek a szögei?



HÁZI FELADAT

1 (Érettségi feladat)
Egy háromszög belső szögeinek aránya 2 : 5 : 11. Hány fokos a legkisebb szög?

2 A 3. feladatban lévő „színes” ábrán keress olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek nincs zöld színű oldala! Add meg csúcsaival az összes ilyen háromszöget!

3 Egy egyenlő szárú háromszög egyik alapszöge 43°-kal kisebb, mint az egyik külső szöge. Mekkorák lehetnek ennek a háromszögnek a szögei?

4 Szerkessz olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapja 4 cm hosszú, és

a) az alapjához tartozó magassága 3 cm hosszú;

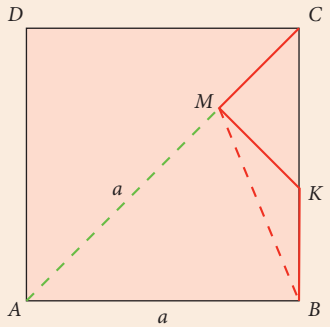
b) szárai 2 cm-rel hosszabbak, mint az alapja

c) az egyik szöge 90°-os;

d) az egyik szöge 60°-os!

5 Az *ABCD* négyzetben $AM = AB$, és az *MK* szakasz merőleges az *AC* átlóra.

a) Mekkorák a rajzon látható hegyesszögek?



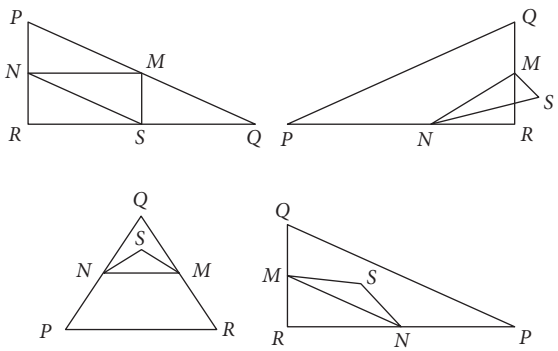
b) Igazold, hogy a *BK*, a *KM* és az *MC* szakasz egyenlő hosszú!

RÁADÁS

(Kompetenciamérés, 2007)

Melyik háromszögre igaz az alábbi leírás?

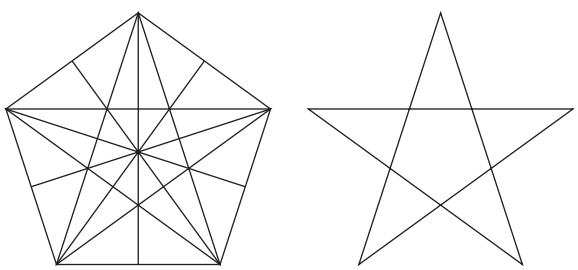
„A *PQR* derékszögű háromszög, amelyben az *R* csúcsnál található a derékszög. Az *RQ* oldal hossza kisebb a *PR* oldal hosszánál. Az *RQ* oldal felezőpontja az *M* pont, az *N* pont pedig a *PR* oldal felezőpontja. Az *S* pont a háromszög belső pontja. Az *MN* oldal hossza nagyobb, mint az *MS* oldalé.”



RÁADÁS

„Püthagorasznak és iskolájának mennyiségtani ismereténél még sokkal érdekesebb geometriai tudománya. Bámulatra méltó az a gondosság és megfigyelési tehetség, melyek segítségével annyi ismeretre tettek szert. Ismerték azt a tételt, hogy a háromszög szögeinek összege 180°, és ezt be is bizonyították, mégpedig úgy, hogy a háromszög egyik csúcspontján át a szemközt fekvő oldallal párhuzamos vonalat húztak, és a keletkezett váltószögek egyenlőségére utaltak. Manapság is még rendesen ezt a bizonyítást használjuk.

Püthagorasz behatóan tanulmányozta a szabályos idomokat és kiválóan azokat, melyeket vagy egyenlő szárú derékszögű vagy mintaháromszögekre lehet bontani. Ennek alapján az összes idomok alapelemének a derékszögű háromszöget tekintette. Azt találta továbbá, hogy a síkot csak szabályos három-, négy- vagy hatszögek tölthetik ki teljesen. A szabályos ötszöggel is foglalkozott, és azt különböző vonalakkal 30 derékszögű háromszögre bontotta.



A vonalak és idomok e sokaságából különösen a csillagötszög bontakozott ki, az ún. pentagramm, melyet a pythagoreusok ismertető jelül használtak és a tökéletesség és titoktartás szimbólumának tekintettek. E jelet utóbb a középkorban is gonosz szellemek ellen alkalmazták.”

(Forrás: *Középiskolai Matematikai Lapok,* 1897. április)

Fejtörő:

Hat (azonos hosszúságú) gyufaszálból rakj ki négy szabályos háromszöget, melyeknek minden oldala egy gyufaszál hosszúságú! Engedd szabadjára fantáziád minden irányban!

41 PITAGORASZ TÉTELE

BEVEZETŐ

1. Be lehet-e tolni összehajtás nélkül egy 15-ször 20 cm-es, téglalap alakú levélrekeszbe egy 25 cm széles borítékot?



Megoldás

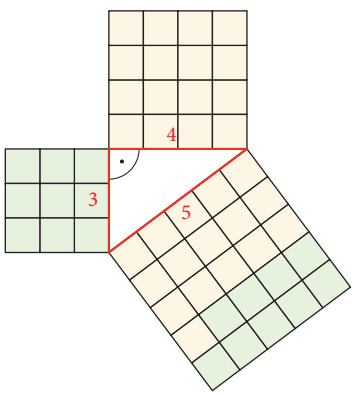
Nyilván a legnagyobb hely átlósan van, ezért így próbáljuk berakni a borítékot. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez éppen sikerül. A 25 cm-es boríték még pontosan belefér a rekeszbe, de ha egy kicsit is szélesebb lenne, már meg kellene hajlítani.

2. Milyen összefüggés áll fenn az előző feladatbeli három szám között?

Megoldás

$15^2 + 20^2 = 25^2$.

Ilyen összefüggés áll fenn a 3 cm, 4 cm és 5 cm oldalú háromszögek oldalai között is.



Ez a háromszög derékszögű:

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Az 5-12-13 számhármasra is hasonló összefüggés igaz.

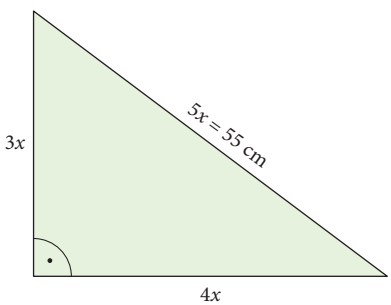
$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

Ez az összefüggés minden *derékszögű* háromszög oldalai között fennáll: a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

3. A tévékészülékek képernyőméretét a képátló hosszával szokták megadni. Figyelembe véve, hogy a régebben használatos készülékek képernyőjének szélesség–magasság aránya 4 : 3, mekkora az a képernyő, amelyet 55 cm-esként hirdetnek?



Megoldás



Itt azt tudjuk, hogy $sz = 4x$, $m = 3x$, tehát ha ez így van, akkor a képátló $5x = 55$.

Ezt a területek alapján felállított képlettel is ellenőrizhetjük:

$(3x)^2 + (4x)^2 = 55^2$

$9x^2 + 16x^2 = 3025$

$25x^2 = 3025$

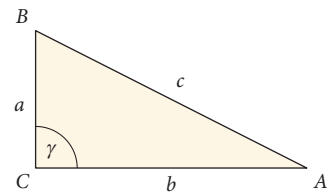
$x^2 = 121$

$x = 11$

$x = 11$, tehát a magasság $3x = 3 \cdot 11 = 33$ (cm), a szélesség $4x = 4 \cdot 11 = 44$ (cm).

ELMÉLET

Pitagorasz tétele Ez a sok ezer éves matematikának a leghíresebb tétele.



$\gamma = 90°$

$\Downarrow$

$a^2 + b^2 = c^2$

A derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.
(Másképp: Ha egy háromszög derékszögű, akkor két befogójának négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.)

Bizonyítás:

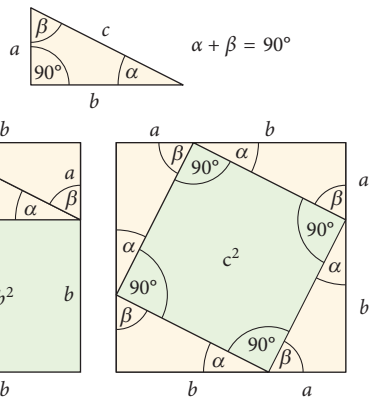
Jelölje a derékszögű háromszög befogóinak hosszát a és b, átfogójának hosszát c.

Állítás: $a^2 + b^2 = c^2$.

Tekintsünk két $a + b$ oldalú négyzetet az ábra szerint!

A két négyzet területe egyenlő.

A bal oldali négyzetet felbontottuk egy a^2 és egy b^2 területű négyzetre (a felosztásából eredő párhuzamosság miatt), továbbá négy olyan derékszögű háromszögre, amelynek befogói a, illetve b. Ezen négy háromszög egybevágó (fedésbe hozható) egymással és az eredeti háromszöggel, tehát területük egyenlő.



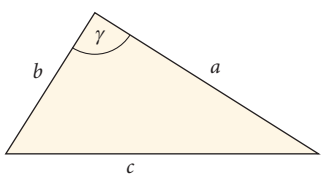
A jobb oldali négyzetben létrehozott derékszögű háromszögek egybevágók (fedésbe hozhatók) egymással és az eredeti háromszöggel is, ezért átfogóik hossza – a középen elhelyezkedő négyszög oldalainak hossza – egyenlő. Ugyanakkor a középen elhelyezkedő négyszög szögei 90°-osak, mivel az egybevágó derékszögű háromszögekben $\alpha + \beta = 90°$. Előbbiekből adódik, hogy a középen lévő négyszög négyzet.

Ha a derékszögű háromszögek átfogója c, akkor a középen lévő négyzet területe c^2.

Mindkét $a + b$ oldalú négyzet területéből kivonva a 4-4 egybevágó háromszög területét, a fennmaradó területek egyenlők lesznek, így $a^2 + b^2 = c^2$.

Ezzel igazoltuk az állítást.

A Pitagorasz-tétel megfordítása:



$a^2 + b^2 = c^2$

$\Downarrow$

$\gamma = 90°$

Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor ez a háromszög derékszögű.
A derékszög a leghosszabb oldallal van szemben.

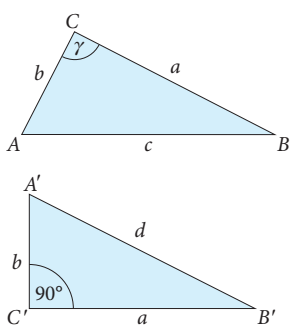
Bizonyítás:

Legyen az ABC háromszög három oldala a, b és c.

Tudjuk, hogy a háromszög oldalaira igaz: $a^2 + b^2 = c^2$.

Állítás: a c oldallal szemben lévő γ szög nagysága 90°.

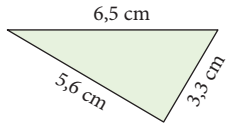
Az a, b szakaszokkal mint befogókkal rajzoljunk egy $A'B'C'$ derékszögű háromszöget, melyre Pitagorasz tétele miatt $a^2 + b^2 = d^2$. Az oldalakra felírt egyenlőségek miatt $c^2 = d^2$, ezért $c = d$, ahol c és d pozitív számok. A háromszöget három oldalának hossza egyértelműen meghatározza, ezért a megfelelő szögeik páronként egyenlők. Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van, nagysága 90°.



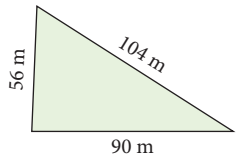
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Derékszögűek-e az alábbi háromszögek?

a)



b)



Megoldás

a) $5{,}6^2 + 3{,}3^2 = 6{,}5^2$

$31{,}36 + 10{,}89 = 42{,}25$

$42{,}25 = 42{,}25$

Ez igaz állítás, tehát (a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint) a háromszög **derékszögű**.

b) $56^2 + 90^2 = 104^2$

$3136 + 8100 = 10\,816$

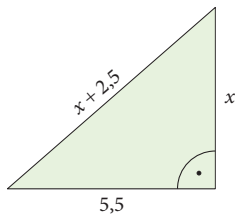
$11\,236 = 10\,816$

Ez hamis állítás, tehát (a Pitagorasz-tétel szerint)a háromszög **nem derékszögű**.

2. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5,5 cm hosszú. Az átfogója 2,5 cm-rel hosszabb, mint az ismeretlen befogó. Milyen hosszú az átfogó?

Megoldás:

Jelöljük az ismeretlen befogó hosszát x-szel. Ekkor az átfogó hossza $x + 2{,}5$.



Írjuk fel a háromszög oldalaira Pitagorasz tételét!

$5{,}5^2 + x^2 = (x + 2{,}5)^2$

A zárójel felbontásakor alkalmazzuk a nevezetes azonosságot!

$(x + 2{,}5)^2 = x^2 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 2{,}5^2 = x^2 + 5x + 6{,}25$

Ezért:

$5{,}5^2 + x^2 = x^2 + 5x + 6{,}25 \quad /- x^2$

$30{,}25 = 5x + 6{,}25 \quad /- 6{,}25$

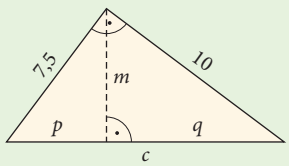
$24 = 5x$

$x = 4{,}8$ (cm)

Az átfogó hossza $4{,}8 + 2{,}5 = 7{,}3$ (cm).

FELADAT

1.



a) Mekkora a derékszögű háromszög területe?

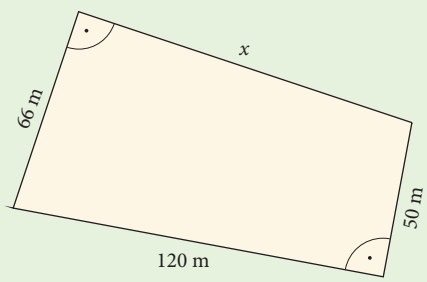
b) Mekkora a háromszög átfogója (c)?

c) Mekkora a háromszög átfogóhoz tartozó magassága (m)?

d) Mekkora szakaszokra bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót (mekkora p és q)?

e) Igaz-e, hogy $m = \sqrt{p \cdot q}$?

2. Számítsd ki a telek ismeretlen oldalhosszát és a telek területét!



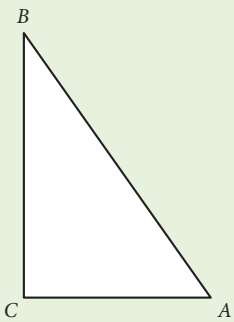
3. Egy háromszög oldalainak hossza

a) 12, 15 és 11; **b)** 40, 41 és 9.

Derékszögű-e a háromszög?

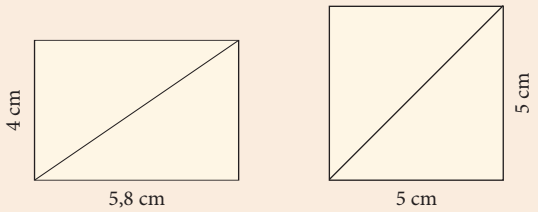
4. Hajózási szakbolt reklámjához vitorlát jelképező, „álló” derékszögű háromszöget szeretnének készíteni neonkábelből, a neonkábel meghajlításával. A cső ($ABCA$ töröttvonal) hossza 126 cm, és a tervezett vitorla szélessége (CA a derékszögű háromszög rövidebb befogója) 28 cm. Az egyik végétől számítva hány cm távolságban hajlítsák meg a neoncsövet ahhoz, hogy elkészüljön a kívánt háromszög? Mekkorák az így kapott „vitorla” oldalai?





HÁZI FELADAT

1 Az alábbiak közül melyik téglalap átlója hosszabb?

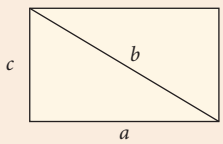


2 Egy hajó nyugat felé indult, és irányváltoztatás nélkül 3 km-t haladt. Ezután délnek fordult, és irányváltoztatás nélkül újabb 5 km-t tett meg. Mekkora távolságra került a kiindulási helyétől?

3 Gazda Géza fakerítéssel szeretné körbevenni téglalap alakú hétvégi telkét. A barkácsboltban veszi észre, hogy otthon hagyta a kert adatairól készített jegyzetét. Arra emlékszik, hogy a kert egyik oldala 33 méter hosszú, és hogy a kert átlósan 9 méterrel hosszabb, mint a kert másik oldala. Rövid fejtörés után magabiztosan lép az eladóhoz. Hány méter kerítésanyagot kell kérnie, ha a gyártás és a szerelés során fellépő veszteség miatt a szükségesnél 10%-kal több anyagot vesz?

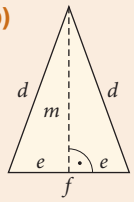
4 Egy téglalapot és egy egyenlő szárú háromszöget rajzoltunk. Melyik kijelentés igaz, melyik hamis?

a)



$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 + c^2 = b^2$
$a + c = b$
$b^2 + c^2 = a^2$
$b^2 - c^2 = a^2$

b)



$d^2 + d^2 = f^2$
$m^2 - e^2 = d^2$
$e^2 + m^2 = d^2$
$e + e = f$
$m^2 + \frac{f^2}{4} = d^2$

RÁADÁS

A „szektavezér”

Valamikor időszámításunk előtt 520 környékén Görögország partjainak közelében egy megkötözött férfi küzdött az életéért, midőn végül belehajították a háborgó tenger hullámai közé. A bűne, mellyel az istenek előtt kellett felelnie, az volt, hogy kimondott egy szörnyű titkot. Az irracionalitás titkát.

A fenti szövegrész nem Pitagoraszról szól, de ha tovább olvasol, többet is megtudhatsz a szörnyű gyilkosságról. Pitagorasz nagy tekintélyű görög filozófus volt, i. e. VI. században élt. Tanítványai, a pitagoreusok a számoknak mágikus erőt tulajdonítottak, azt képzelték, hogy a számokból – ez alatt a természetes számokat értették – ered az élet harmóniája. A számok segítségével próbálták megismerni magát a világot, például a zenei harmóniát.



Ugyan a Pitagorasz-tétel kétségkívül az egyik legnagyobb jelentőségű tantételük volt, arra nincs bizonyítékunk, hogy Pitagorasz maga is ismerte volna ennek a tételnek a bizonyítását. Az bizonyos, hogy a tételt az indiaiak és babiloniak már korábban is ismerték és használták, és az is valószínű, hogy bizonyítást is ismertek hozzá. Az, hogy mégis Pitagorasz nevéhez kapcsoljuk, annak az eredménye, hogy ő és tanítványai játszották a legnagyobb szerepet a tétel elterjesztésében.

A pitagoreus közösségről ugyanakkor fennmaradt néhány – szintén kétes hitelességű – legenda. A leghíresebb ezek közül Hippaszosz esete, akit a történet szerint azért vetettek a tengerbe, mert felfedte az „irracionalitás titkát”, miszerint egy négyzet átlójának hossza nem írható fel az oldalak egész számú többszöröseinek arányával. Ez a felismerés lényegében azt mondja ki, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

42 KÜLÖNLEGES DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK

BEVEZETŐ

1. Írószerboltokban kapható olyan derékszögű háromszögvonalzó, amelynek a két befogója egyenlő hosszú. A skálát rendszerint az egyik befogóra teszik, de az átfogója mentén ennél hosszabb vonalat is húzhatunk vele. Milyen hosszút?

Megoldás

Legyen a vonalzó befogója pl. 1 dm, az átfogója x dm.
Ebből Pitagorasz tétele alapján:

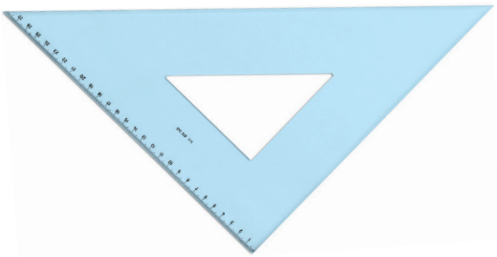
$x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 1 + 1$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$

Az átfogó hossza közelítőleg 1,41 dm hosszú, így ilyen hosszúságú szakasz húzható az átfogó mentén.



Próbáljuk meg egy átlagos, 20 cm-es befogójú vonalzóval is:

$x^2 = 20^2 + 20^2 = 20^2 \cdot 2$

$x = \sqrt{20^2 \cdot 2}$

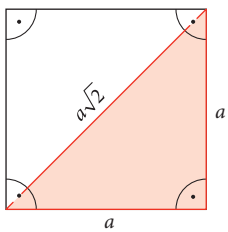
$x = \sqrt{20^2} \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2} \approx 28{,}3$ (cm).

Tapasztalatunk szerint tehát az átfogó $\sqrt{2}$-ször olyan hosszú, mint a befogók. Ez a kapcsolat általánosan igazolható. Végezd el a levezetést!

ELMÉLET

Az a befogójú **egyenlő szárú derékszögű háromszög** átfogójának hossza a befogó hosszának $\sqrt{2}$ -szerese, vagyis $a\sqrt{2}$.

Az a oldalú négyzet átlójának hossza a négyzet oldalának $\sqrt{2}$-szerese, vagyis $a\sqrt{2}$.

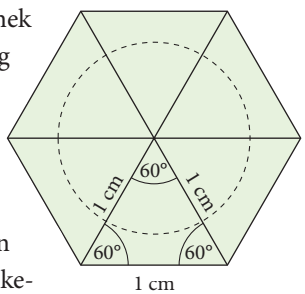


2. Mekkora nyílású villáskulcs szükséges egy olyan anyacsavar meghúzásához, amelyiknek az oldallapja 1 cm széles?

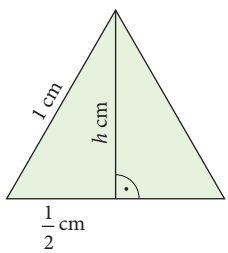


Megoldás

Az anyacsavar felülnézetének körvonala szabályos hatszög alakú. Ez a hatszög a középpontjából kiindulva szabályos háromszögekre bontható. Az ilyen háromszögek oldala éppen a hatszög 1 cm-es oldala, a keresett kulcsnyílás pedig a szabályos háromszögek magasságának kétszerese.



A szabályos háromszöget a magassága két derékszögű háromszögre bontja, alkalmazzuk ezekre Pitagorasz tételét:



$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

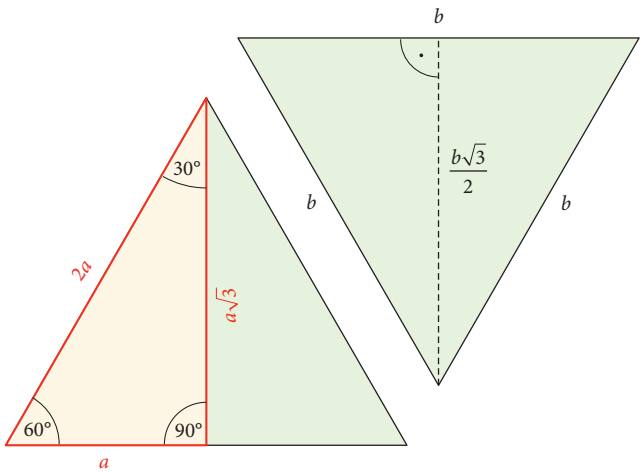
A keresett kulcsnyílás ennek duplája, azaz

$x = 2h = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ cm.

Sok probléma megoldása közben bukkan fel a szabályos háromszög fele. Ennek az egyik szöge derékszög, a másik 30°-os, a harmadik 60°-os.
Általános érvényű összefüggés írható fel a szabályos háromszög oldalának és magasságának hossza között.
Végezd el a levezetést!

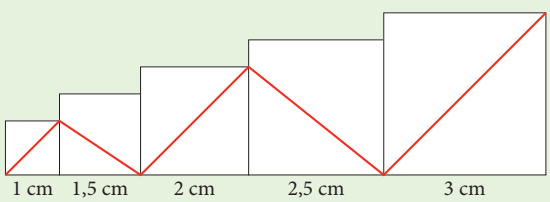
ELMÉLET

A szabályos háromszög magasságának hossza megegyezik a háromszög oldalhosszának $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szeresével.
Ha a szabályos háromszög oldalának hossza b, akkor a magasság $b\frac{\sqrt{3}}{2}$ hosszú.



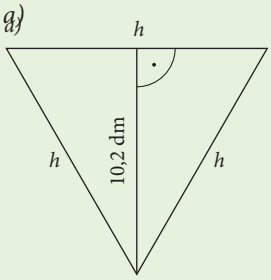
FELADAT

1 Számítsd ki a töröttvonal hosszát, ha az ábrán lévő minden négyszög négyzet!

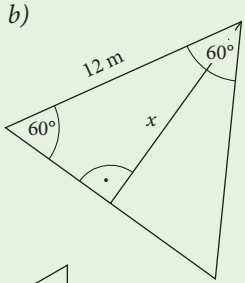


2 Számítsd ki az ismeretlen hosszúságokat!

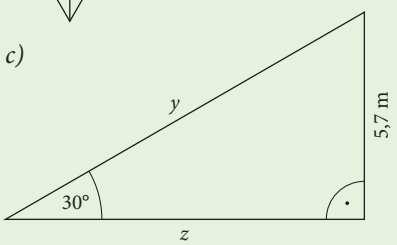
a)



b)



c)



3 Szerkessz a füzetedbe a lap közepére egy 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget! Szerkessz a háromszög minden oldalára kifelé egy újabb 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget!

a) Milyen síkidomot hoz létre az előbb megszerkesztett négy háromszög?

b) Számolással határozd meg a kapott síkidom magasságának hosszát egy tizedesjegyre kerekítve!

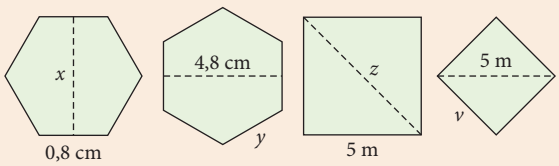
c) Szerkeszd meg a kapott síkidom magasságát!

d) Mérd le a magasság hosszát, és hasonlítsd össze a mérés és a b) feladatrészben elvégzett számolásod eredményét!

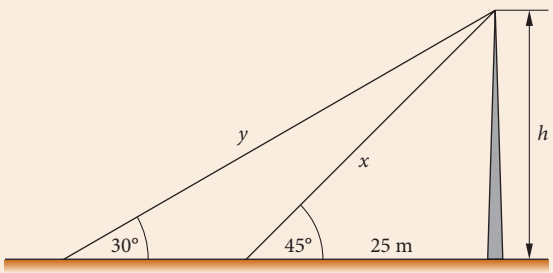
4 Adott az ABC derékszögű háromszög, melyben $CA = CB = 8$ egység. Rajzolj olyan egyenlő oldalú háromszöget, melynek egyik oldala az AB szakasz, és jelöld a háromszög harmadik csúcsát D-vel! Határozd meg a CD távolság pontos értékét! Hány lehetséges megoldás van?

HÁZI FELADAT

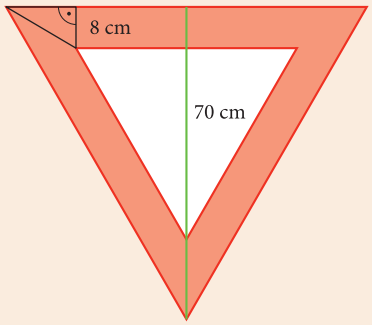
1 Számítsd ki az ismeretlen hosszúságokat! (Az ábrákon két szabályos hatszöget és két négyzetet látsz, a szaggatott vonalak oldalfelező pontokat, illetve csúcsokat kötnek össze.)



2 Milyen magas a torony (h), milyen hosszúak a tartókötelek (x és y), és milyen messze van a toronylábtól a talajon fekvő távolabbi rögzítőpont, ha a közelebbi 25 m-re van?



3 Az „elsőbbségadás kötelező” tábla magassága 70 cm, a szélén levő piros sáv pedig 8 cm széles.

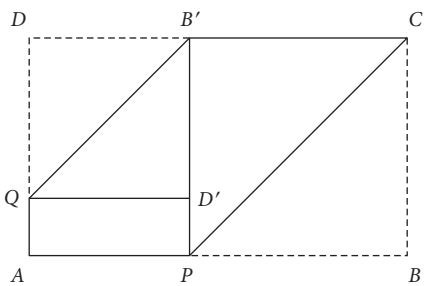


Mekkora a belső, fehéren hagyott szabályos háromszög oldala?
(*Útmutatás:* először a fehér szabályos háromszög magasságát célszerű kiszámítani, majd ennek ismeretében a háromszög oldalát.)

EMELT SZINT

FELADAT

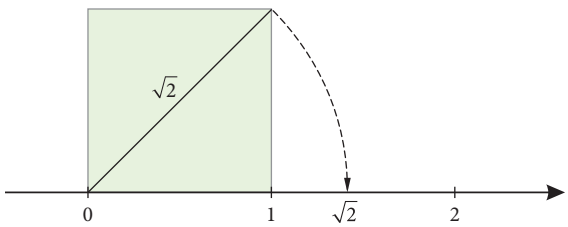
1. Az $ABCD$ téglalap alakú lapot az alábbi ábrán látható módon hajtogattuk.
Első lépésben az eredeti B-vel jelölt csúcsot helyeztük el a téglalap CD oldalán (B') úgy, hogy a felhajtott rövidebb oldal illeszkedjen a téglalap hosszabbik oldalára.
Második lépésben a D-vel jelölt csúcsot illesztettük az előbb kapott „új” $B'P$ szakaszra úgy, hogy egyúttal a $D'B'$ szakasz is illeszkedjen $B'P$ szakaszra.



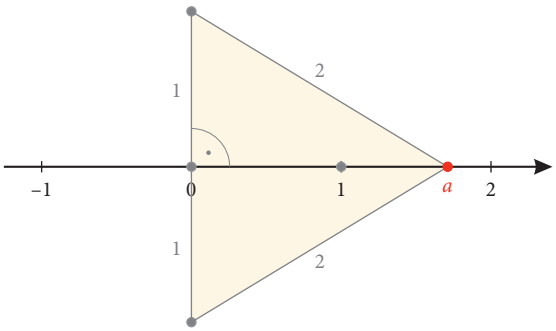
a) Igazoljuk, hogy a PC szakasz párhuzamos a QB' szakasszal!

b) Határozzuk meg az $APCB'Q$ sokszög kerületét és területét, ha a téglalap oldalainak hossza $AB = a$ és $BC = b$ ($a > b$)!

2. A 22. leckében említettük, hogy a számegyenesen a $\sqrt{2}$ helyét a Pitagorasz-tétel segítségével meg lehet szerkeszteni. Az eljárást az ábra mutatja:

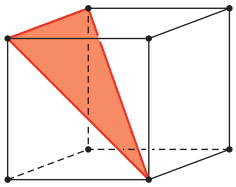


a) Melyik valós szám helyét szerkesztettük meg a számegyenesen?



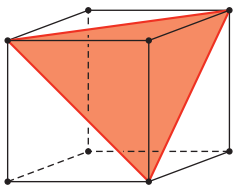
b) Szerkessz $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ hosszúságú szakaszt Pitagorasz-tételének segítségével, ha adott egy egység hosszúságú szakasz!

3. Mekkorák az ábrán jelölt háromszög oldalai, ha a kocka éle egységnyi hosszúságú?



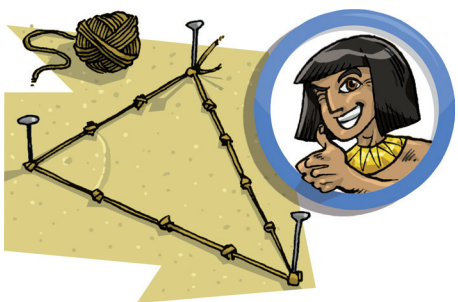
4. **a)** Mekkora az alábbi ábrán látható háromszög területe, ha a kocka élei 6 cm-esek?

b) Készítsd el a kockából a színes háromszög által levágott gúla hálóját, ha a kocka élei 6 cm-esek! Mekkora ennek a gúlának a felszíne?



RÁADÁS

Az ókori Egyiptom földmérői és építészei a derékszögek szerkesztéséhez a következő eljárást használták: egy kötélre azonos távolságokban 13 csomót kötöttek, majd az első és a 13. csomót összefogva úgy feszítették ki a kötelet háromszög alakban, hogy az oldalak 3, 4 és 5 csomóköz hosszúak legyenek. Az így kapott háromszög rövidebb oldalai között mérhető szög pontosan 90°, hiszen Pitagorasz tételének megfordítása értelmében az ilyen háromszög derékszögű.



Pitagoraszi számhármasok

Ha három pozitív egész szám közül kettő négyzetének összege egyenlő a harmadiknak a négyzetével, akkor ezekre azt mondjuk, hogy pitagoraszi számhármast alkotnak. Végtelen sok pitagoraszi számhármas van.

Például

3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 8, 15, 17; 9, 40, 41; 33, 56, 65; 48, 55, 73; 39, 80, 89.

Az ilyen oldalhosszúságú háromszögek derékszögűek.

FELADAT

1. Legyen k és l két pozitív egész szám, és $k > l$. Igazold, hogy $2kl$, $k^2 - l^2$ és $k^2 + l^2$ pitagoraszi számhármast alkotnak!

2. Adj meg olyan pitagoraszi számhármasokat, amelyek egyik tagja 20! Használd az internetet!

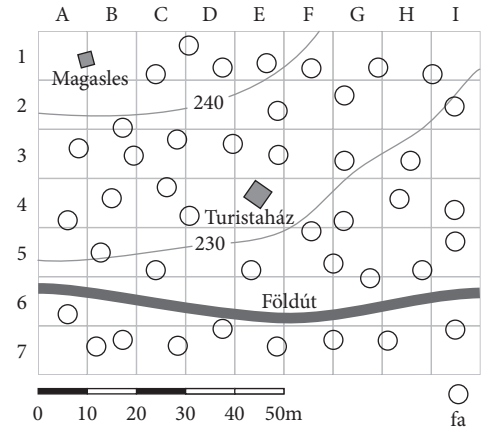
3. Létezik-e olyan derékszögű háromszög, amelynek minden oldala egész hosszúságú, és az egyik oldala 1 egység? Ha létezik, milyen hosszúak az oldalai? Ha nem létezik, miért nem létezhet?

4. Létezik-e olyan derékszögű háromszög, amelynek minden oldala egész hosszúságú, és az egyik oldala 2 egység? Ha létezik, milyen hosszúak az oldalai? Ha nem létezik, miért nem létezhet?

43 TÁVOLSÁGOK

BEVEZETŐ I.

(Kompetenciamérés, 2007)
Az alábbi térképen az azonos tengerszint feletti magasságú helyeket egy úgynevezett szintvonallal kötötték össze. A számértékek a tengerszint feletti magasságot jelzik méterben.



Egy kirándulás vezetői kincsvadászatot rendeznek a térképen ábrázolt területen. A gyerekeknek a fenti térkép és négy információ alapján kell minél hamarabb megtalálniuk a kincset.

- A kincs egy fán van elrejtve.
- A fától 30 m-re egy turistaház található.
- A kincs a földúttól 20 m-re van.
- A keresett hely 233 m tengerszint feletti magasságban van.

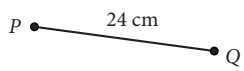
Jelöld meg X-szel a térképen azt a mezőt, ahol a kincs található!
Sikerült megtalálnod a kincset?

ELMÉLET

Az euklideszi geometria **alapfogalmai a pont, az egyenes, a sík, a tér** (közös néven térelemek) **és az illeszkedés.** (Az alapfogalmakat nem definiáljuk, hanem az azokról kialakított szemléletes képet használjuk a geometriai fogalmak megalkotása során.)

Térelemek távolsága

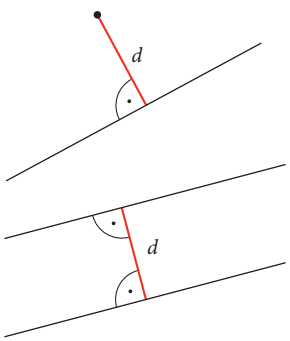
Definíció: Két pont távolsága az általuk meghatározott szakasz hossza. Ha a két pont egybeesik, akkor távolságuk nulla.



A távolság megadása egy nemnegatív valós számmal és egy mértékegységgel történik.
Ha a mértékegység mm, akkor a két pont (P és Q) távolsága 240 mm, ha cm, akkor 24 cm, ha dm, akkor 2,4 dm.

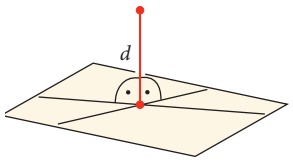
Definíció: Ha két térelemnek van közös pontja, akkor a távolságuk 0. Ha nincs közös pontjuk, akkor a pontjaik közötti távolságok közül a *legkisebbet* nevezzük a **két térelem távolságá**nak. Jele gyakran: d (távolság: latinul distancia).

Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.
Ha a pont illeszkedik az egyenesre, akkor távolságuk nulla.

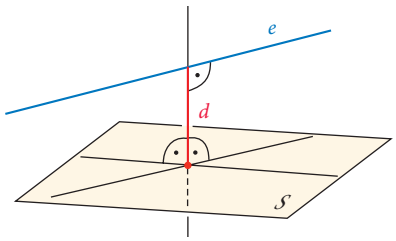


Két különböző egyenes **párhuzamos,** ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk. (A pontos matematikai definíció szerint minden egyenes önmagával is párhuzamos.)
Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága.

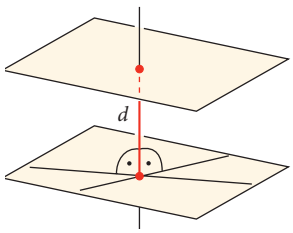
Pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza.
Ha a pont illeszkedik a síkra, akkor távolságuk nulla.



Egy egyenes **merőleges egy síkra,** ha az egyenes merőleges az egyenes és a sík metszéspontjára illeszkedő minden síkbeli egyenesre. Bizonyítható, hogy a merőlegességhez elegendő az is, hogy az adott egyenes a sík két egyenesére merőleges legyen, az ábrának megfelelően.



Egy egyenes és egy sík párhuzamosak, ha nincs közös pontjuk. (A pontos definíció szerint a síkra illeszkedő egyeneseket is párhuzamosnak tekintjük a síkkal.)
Sík és azzal párhuzamos egyenes távolsága az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolsága.

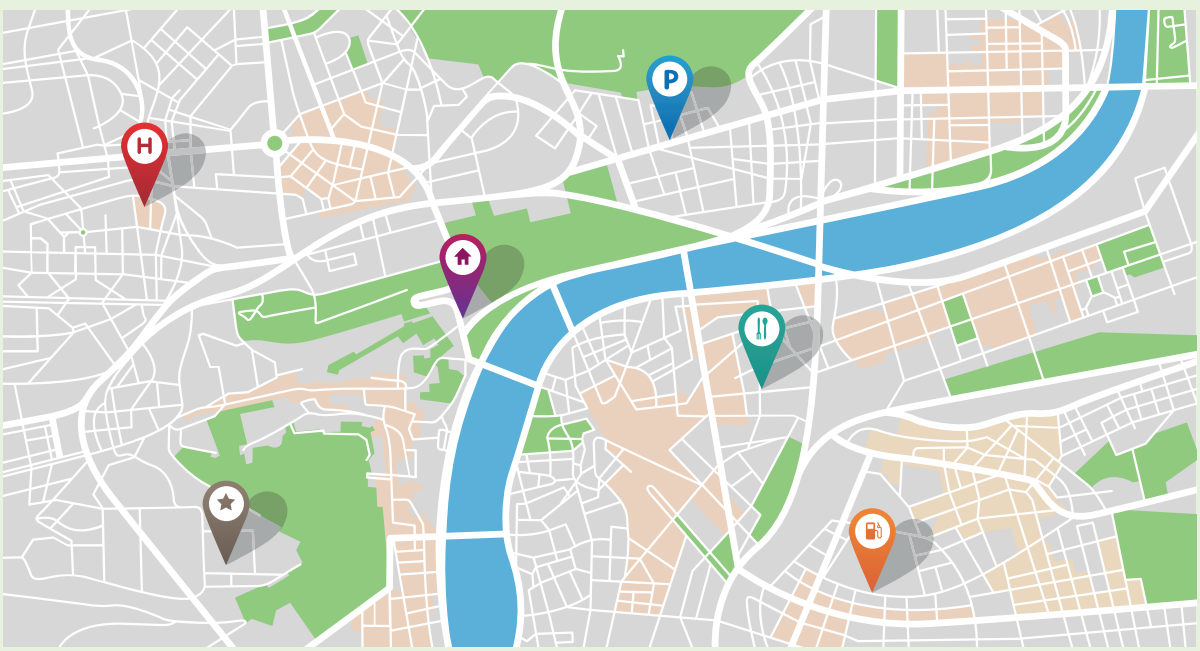


Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk. (A pontos definíció szerint két egybeeső síkot is párhuzamosnak tekintünk egymással.)
Párhuzamos síkok távolsága az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól való távolsága.

A fentiek alapján kimondhatjuk, hogy a távolságot jelentő legrövidebb szakasz mindig az egyenesre vagy síkra állított merőleges egyenesen található.

FELADAT

1 Az alábbi várostérképen megjelöltük egy kórház, egy parkolóház, egy szálláshely, egy étterem, egy benzinkút és egy történelmi nevezetesség helyét.



A térkép méretaránya 1: 20 000.

a) Állapítsd meg, hogy a piktogramok közül melyik mit jelölhet!

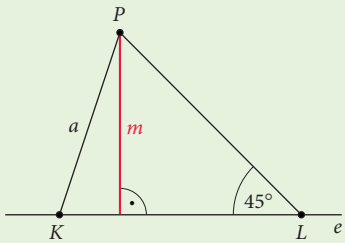
b) Vonalzó segítségével mérd le a kórház és szálláshely, valamint a parkolóház és benzinkút közötti (légvonalban mért) távolságot! A méretarány alapján fejezd ki a valós távolságokat km-ben!

c) Határozd meg, hogy a kijelölt helyektől hány km-t kellene gyalogolnunk „árkon-bokron” keresztül, hogy legrövidebb úton a folyópartra érkezzünk!

d) Keress megfelelő módszert – akár segédeszköz használatával – arra vonatkozóan, hogy hogyan lehet megállapítani annak a folyószakasznak a hozzávetőleges hosszát, amit a térképen látunk! Használd a módszered, határozd meg a kérdezett hosszt!

2 Egy szabályos háromszög oldalai 9 cm hosszúak. Egyik oldalán kijelöljük az oldal egyik harmadoló pontját. Milyen távol van ez a pont a másik két oldalegyenestől? Készíts ábrát!

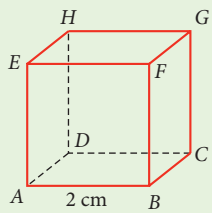
3 Az ábrán a K és L pontok távolsága 8 m, az L és P pontok távolsága 6 m, az LP szakasz 45°-os szöget zár be az e egyenessel. Számítsd ki a P pont és az e egyenes távolságát, majd a P és K pontok távolságát is!



4 Mekkora a kocka éleinek a távolsága

a) a C ponttól; **b)** az AB egyenestől; **c)** a $BCGF$ síktól?

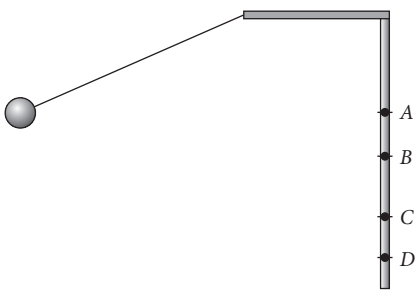
Töltsd ki az alábbi táblázatot, dolgozz a füzetedben!



	0 távolságra van	2 távolságra van	$2\sqrt{2}$ távolságra van
A C ponttól			
Az AB egyenestől			
A $BCGF$ síktól			

BEVEZETŐ II.

A lengőteke (más néven kugli) igen népszerű játék. Lényege, hogy kijelölt távolságból úgy kell meglódítani egy kötélre kötött golyót, hogy az minél több bábut ledöntsön. Péter lengőtekével játszik, de egy ügyetlen mozdulattal úgy engedte el a kötélen lévő golyót, hogy az a játékot tartó rúdnak csapódott. Hová csapódott a golyó, ha közben feszes maradt a kötél? Melyik a helyes válasz betűjele? (Kompetenciamérés, 2009)



A vonalzód, a körződ vagy egy cérnaszál segítségével könnyen kideríthetted, hogy hol van a rúdnak az a pontja, mely ugyanakkora távolságra van a kötél rögzítési pontjától, mint a golyó. Ez alapján a helyes válasz a C.

Az ovisok tudják, hogyan kell elhelyezkedniük, ha körjátékot akarnak játszani.

A kertésznek nem okoz problémát, ha azt kérik tőle, hogy a kerítés vonalától egyenlő távolságra ültesse el a virágpalántákat.

Ha azt halljuk, hogy a Föld ellipszispályán kering a Nap körül, akkor el tudjuk képzelni, mit értsünk ez alatt. (Ha ez mégsem sikerül, akkor keress Kepler I. törvényére vonatkozó képet és leírást az interneten!)

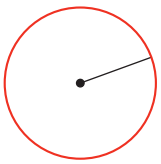
Az előbbi példák is azt mutatják, hogy hétköznapi tapasztalatunk van arról, hogy milyen lehet különböző geometriai alakzatok formája.

ELMÉLET

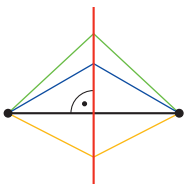
Távolsággal megadható nevezetes ponthalmazok a síkban

A matematikában az adott tulajdonságú pontok összességét **mértani hely**nek, ezek közül a speciális tulajdonsággal rendelkezőket **nevezetes ponthalmaz**nak nevezzük.

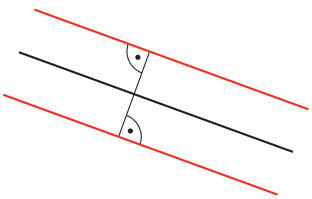
A sík egy adott pontjától adott távolságra lévő pontok halmaza a **körvonal** (röviden kör). Az adott pont a **kör középpontja,** az adott távolság a **kör sugara.**



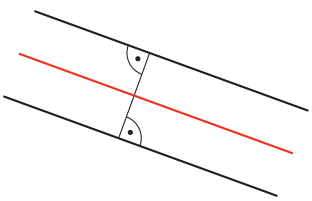
A sík két pontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a két pont által meghatározott **szakasz felezőmerőleges egyenese.** A felezőmerőleges illeszkedik a szakasz felezőpontjára, és merőleges a szakaszra.



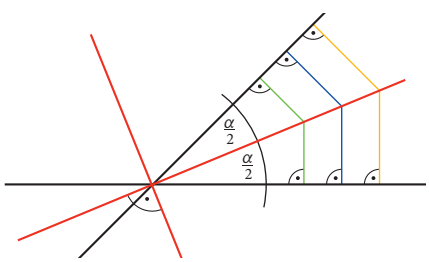
A sík egy egyenesétől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkon két olyan egyenes, melyek párhuzamosak az eredeti egyenessel, és amelyek távolságát felezi az eredeti egyenes.



A sík két párhuzamos egyenesétől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes **középpárhuzamosa.** A középpárhuzamos a két egyenessel párhuzamos és távolságukat felezi.

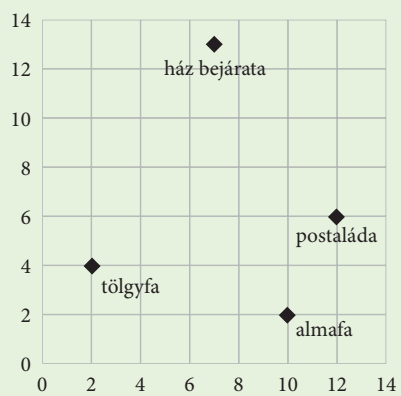


A sík két metsző egyenesétől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes által meghatározott szögek **szögfelező egyenesei,** melyek merőlegesek egymásra.



FELADAT

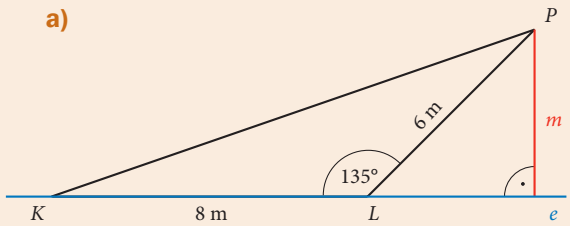
5 (Kompetenciamérés, 2013)
Zsófi egy kincsesládát ásott el a kertjükben, térképet is készített a helyéről. A kincsesládát a tölgyfától és az almafától ugyanolyan távolságra ásta el úgy, hogy egyenlő távolságra legyen a postaládától és a ház bejáratától is. Melyik koordinátájú helyen áshatta el a kincsesládát?



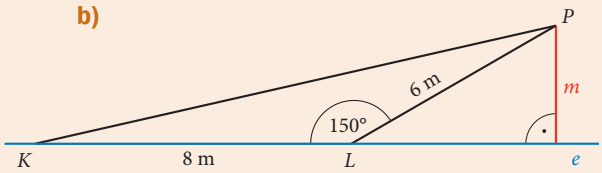
HÁZI FELADAT

1. Számítsd ki a P pont és az e egyenes távolságát, majd a P és K pontok távolságát is!

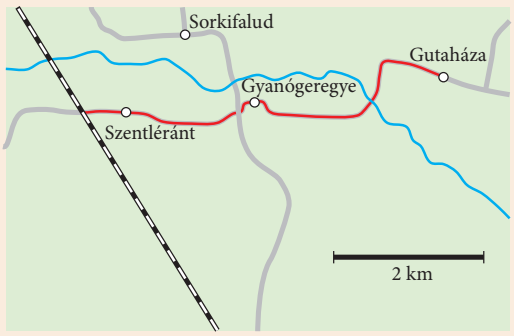
a)



b)



2. Milyen messze van Gutaháza légvonalban a vasútvonaltól? Valójában körülbelül mekkora utat tesz meg az, aki a Gyanógeregyén és Szentlérántonon keresztül vezető úton jut el a vasútvonalhoz? (Menynyire lehetnek pontosak az eredményeid?)



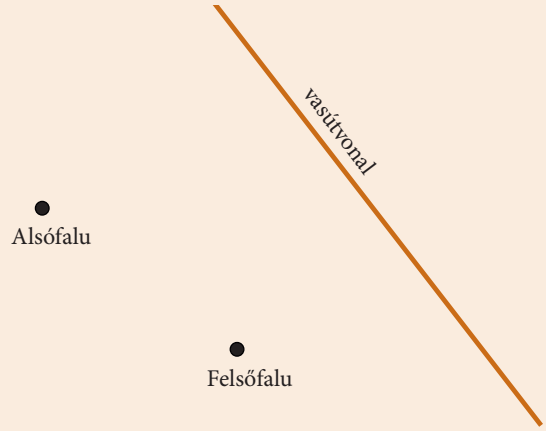
3. Milyen távol van a 6 cm oldalélű kocka középpontja

a) az oldallapoktól;

b) az oldalélektől;

c) a csúcsoktól?

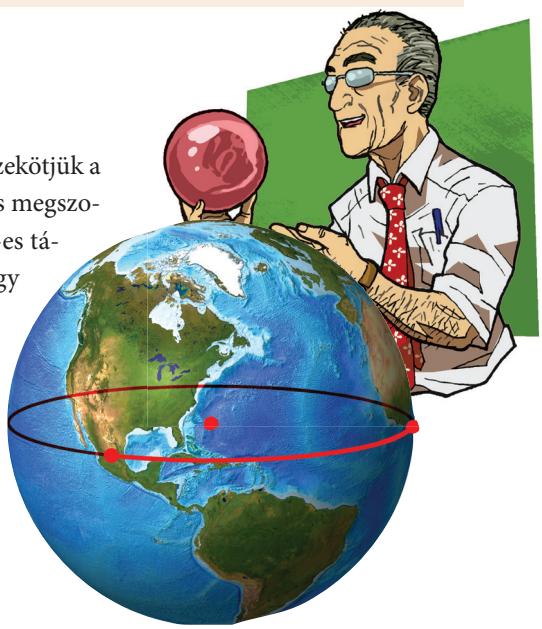
4. Alsófalu és Felsőfalu közös vasútállomást szeretne a vasútvonal mellé úgy, hogy egyenlő távolságra legyen a két helységtől. Szerkeszd meg a vasútállomás helyét a füzetedben!



5. Adott a sík egy P pontja és három, egymással páronként párhuzamos egyenes, az e, az f és a g. Tudjuk, hogy a P pont és az e egyenes távolsága 2 cm, a P pont és az f egyenes távolsága 6 cm, a P pont és a g egyenes távolsága 7 cm. Mekkora lehet az egyenesek távolsága?

RÁADÁS

1. A távolságmérés térképen viszonylag könnyű feladatnak látszik. Csak összekötjük a keresett pontokat, megmérjük vonalzóval az összekötő szakasz hosszát, és megszorozzuk a térkép méretarányával (pl. 1 : 25 000 léptékű térképen egy 5 cm-es távolság a valóságban $5 \cdot 25\,000 = 125\,000$ centiméter, azaz 1250 méter vagy 1,25 km lenne). Nagyobb földrajzi távolságoknál azonban jelentős eltérést okoz, hogy a Föld felszíne nem lapos, hanem többé-kevésbé gömbfelület. Mindez azt jelenti, hogy legtöbbször a térképen sem mérhetünk nagyobb távolságokat egyenes mentén.



A gömbölyű földfelszínen két pont távolságát már nem egyenes, hanem *körív* mentén kell mérnünk, mégpedig olyan kör ívén, amely áthalad a két ponton, középpontja a Föld középpontja, és így sugara a Föld sugarával egyenlő.

2. **Az egyik földrész területe**

Az ábrán az Antarktisz térképe látható.

a) Mekkora a távolság a Menzies-hegy és a Déli-sark között? (A becsléshez használd a térkép méretarányát!)

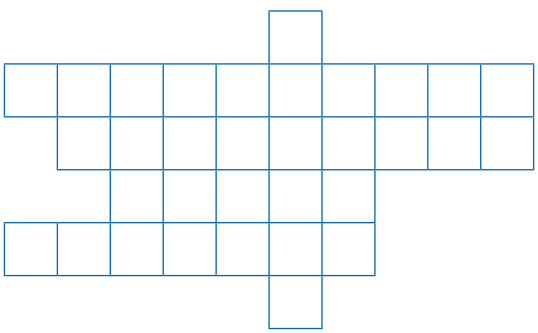
b) Becsüld meg az Antarktisz területét a térképen feltüntetett méretarány segítségével! Írd le a számításaidat és azt, hogyan végezted el a becslést!



3. Biztos? Lehetséges? Lehetetlen?

A megfelelő válaszhoz tartozó szót írd a rejtvényábra megfelelő sorába! A függőleges oszlop egy híres magyar sportoló, háromszoros olimpiai bajnok vezetéknevét rejti. Ki ő?

	Biztos	Lehetséges	Lehetetlen
Egy derékszögű háromszög egyik oldala 3 cm, másik oldala 4 cm hosszú. Biztos, lehetséges vagy lehetetlen, hogy a harmadik oldal 5 cm hosszú?	PITAGORASZ	PONTHALMAZ	SZIMMETRIA
P és Q pontok távolsága 10^2 cm. P és R pontok távolsága 10^3 cm. Biztos, lehetséges vagy lehetetlen, hogy Q és R pontok távolsága 10^5 cm?	DERÉKSZÖG	SZABÁLYOS	MERŐLEGES
Az AB szakaszfelező merőlegese a síkon a t egyenes. Ugyanezen a síkon lévő P pontról tudjuk, hogy ugyanolyan távol van A-tól, mint B-től. Biztos, lehetetlen vagy lehetséges, hogy P a t egyenes egy pontja?	VONALZÓ	EGYENES	HATSZÖG
A t egyenes az egymást metsző e és f egyenesek szögfelezője. A metsző egyenesek síkjában lévő P pont ugyanolyan távol van e-től, mint f-től. Biztos, lehetetlen vagy lehetséges, hogy P a t egyenes egy pontja?	HOSSZ	CSÚCS	MÉRÉS



44 A KÖR

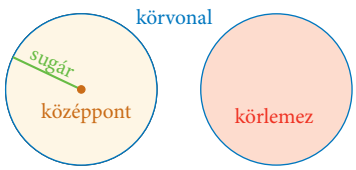
BEVEZETŐ



Hétköznapjaink egyik leggyakoribb formája a kör, vagy annak egy összefüggő része, a körív. Elég, ha közvetlen környezetünkben körülpillantunk, máris szemünkbe ötlik egy pohár, az óra számlapja, egy CD vagy DVD, egy fémpénz, a nyomógombok és így tovább. Az építészetben is kedvelt díszítőelemek a körívek, az érintkező és metsző körök. De körpályán mozognak a rögzített tengely körül forgó testek pontjai is.



ELMÉLET

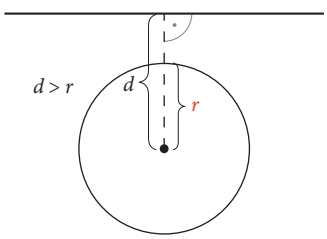


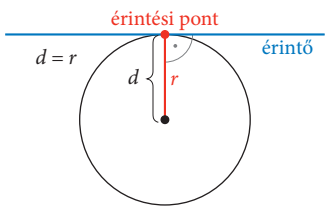
Adott egy kör a középpontjával és a sugarával.
A síknak azok a pontjai, amelyek kisebb távolságra vannak a kör középpontjától, mint amekkora a sugár, **nyílt körlemezt** (körlapot) alkotnak. Ha ehhez hozzávesszük még a körvonalat is, akkor **zárt körlemezhez** (körlaphoz) jutunk. Ha csak egyszerűen *körlemezt* említünk, akkor *zárt körlemezre* gondolunk.

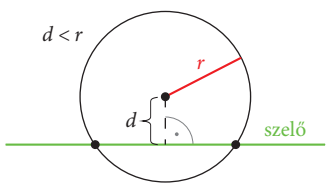
A körnek minden olyan egyenes szimmetriatengelye, amely benne van a síkjában, és átmegy a középpontján.

Egy síkban egy körvonalnak és egy egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet. A közös pontok száma attól függ, mekkora távolságra van az egyenes a kör középpontjától.

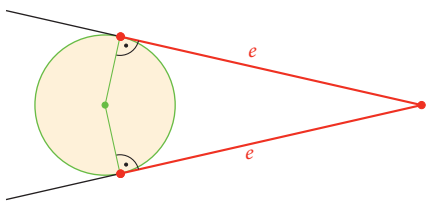
Ha az egyenes és a kör középpontjának a távolsága
– nagyobb a kör sugaránál, akkor nincs közös pontjuk (vagyis 0 a közös pontok száma);
– egyenlő a kör sugarával, akkor 1 közös pont van; az ilyen egyenest a kör **érintőjének** nevezzük;
– kisebb a kör sugaránál, akkor 2 közös pontjuk van; az ilyen egyenest a kör **szelőjének** nevezzük.







Tétel: A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.



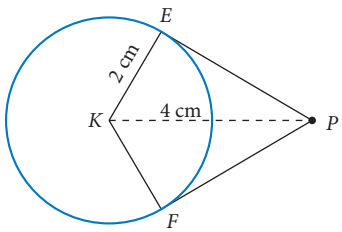
Tétel: Egy körhöz a síkjának egy körön kívüli pontjából két érintő húzható. A körön kívüli pont és az érintési pont által meghatározott két **érintő szakasz** (e) egyenlő hosszúságú.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A KP szakasz hossza 4 cm. A P-ből két érintőt húzunk a K középpontú, 2 cm sugarú körhöz, az érintési pontok E és F.

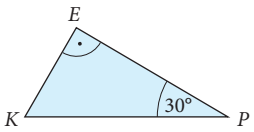
a) Milyen hosszú az EP és az FP érintő szakasz?

b) Mekkora az EF szakasz hossza?



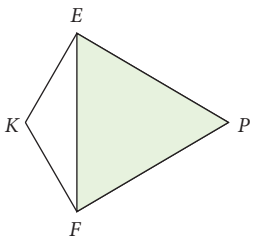
Megoldás

a) Az EKP háromszögnek az E csúcsnál derékszöge van, mert az érintő merőleges az érintési pontba vezető sugárra. Az átfogó kétszer akkora, mint az egyik befogó, tehát *ez egy szabályos háromszög fele*. Ezért a harmadik oldal, az EP érintő szakasz hossza $2\sqrt{3}$ cm. Ugyanekkora az FP érintő szakasz is.



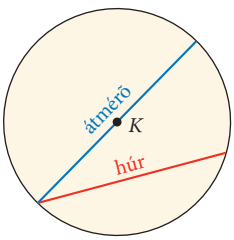
b) Az EKP háromszög P csúcsnál lévő szöge 30°-os. Ugyanekkora a KPF szög is, tehát az EPF szög 60°-os. Az EFP háromszög két oldala egyenlő, a közöttük lévő szög pedig 60°-os. Ez csak úgy lehetséges, ha ez a háromszög egyenlő oldalú, vagyis

$EF = EP = 2\sqrt{3}$ (cm).



ELMÉLET

A szelőnek a körlemezen lévő szakaszát a kör **húrjának** nevezzük. A kör középpontján átmenő húr neve **átmérő**; ez kétszer olyan hosszú, mint a sugár. Az átmérő a kör leghosszabb húrja.



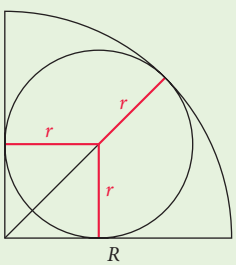
FELADAT

1. Egy 6,5 cm sugarú kör egyik húrja 11,2 cm hosszú. Mekkora távolságra van ez a húr

a) a kör középpontjától;

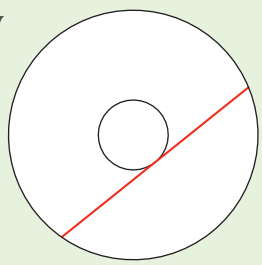
b) a rá merőleges átmérő két végpontjától?

2. Egy negyed körrel határolt körcikkbe olyan kisebb kört rajzoltunk, amely érinti a körcikket határoló körívet és a két sugarat. A körcikket egy R sugarú körből vágtuk ki, a kis kör sugara pedig r.



Mekkora a körcikk R sugara, ha $r = 4$ cm?

3. Egy 7 mm sugarú és egy 25 mm sugarú körnek ugyanaz a középpontja (**koncentrikus körök**). Milyen hosszú a nagyobbik körnek az a húrja, amely érinti a kisebbik kört?



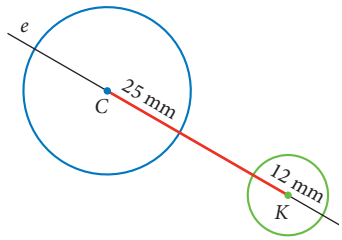
4. Mit alkot az összes olyan pont, amelyből egy 3 cm sugarú körhöz 4 cm hosszúságú érintő szakasz húzható?

KIDOLGOZOTT FELADAT

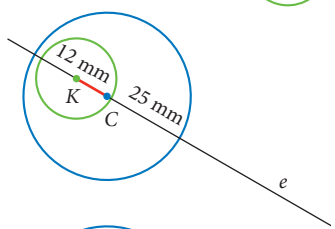
2. A C középpontú kör sugara 25 mm, a K középpontúé 12 mm. Az e egyenes illeszkedik a két kör középpontjára **(centrális egyenes)**. A kisebb sugarú kört mozgatjuk az e egyenes mentén. Hány közös pontja lehet a két körvonalnak?

Megoldás

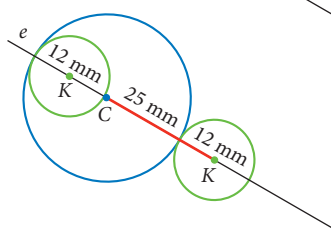
Könnyen látható, hogy ha $CK > 25 + 12 = 37$, akkor a két körvonalnak nincs közös pontja;



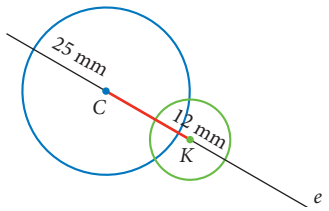
ha $CK < 25 - 12 = 13$, akkor sincs a két körvonalnak közös pontja;



ha $CK = 37$, vagy $CK = 13$, akkor a két körvonalnak egy közös pontja van (érintik egymást);



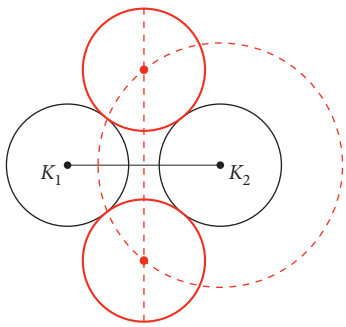
ha $13 < CK < 37$, akkor a két körvonal metszi egymást, két közös pontjuk van.



3. Adott két 1 cm sugarú kör, amelyek középpontja 2,5 cm-re van egymástól. Szerkessz egy 1 cm sugarú harmadik kört, amely mindkettőt érinti!

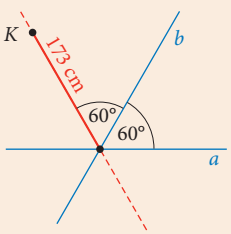
Megoldás

A szerkesztendő harmadik kör középpontja mindkét adott kör középpontjától 2 cm távolságra van. Tehát rajta van a K_1K_2 szakasz felezőmerőlegesén és a K_2 körül 2 cm sugárral írt körön is. E körnek és a felezőmerőlegesnek a közös pontja lehet a szerkesztendő kör középpontja. Mindkét pont megfelel, tehát két 1 cm sugarú, érintő kör szerkeszthető.



HÁZI FELADAT

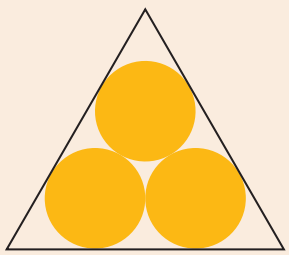
1. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a K pont, és érinti mindkét egyenest (a-t és b-t)? Mekkora távolságra van a K pont ezektől az egyenesektől?



2. Egy 8 cm sugarú körben adott egy 9,6 cm hosszú húr. Mekkora annak a körnek a sugara, amelyik koncentrikus az adott körrel, és érinti az adott húrt?

3. Adott három 1 cm sugarú kör úgy, hogy a középpontjaik nincsenek egy egyenesen. Szerkessz egy kört, amelyik mindhárom adott kört érinti!

4. Egy (szabályos) háromszög alakú ablakkeretet szeretnénk készíteni három színes ablaküveg köré, melyek mindegyike 30 cm sugarú körlap. A körökön kívül eső részt átlátszó üvegből készítjük. Hogyan válasszuk meg a keret oldalainak hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az üveg körlapok (az ábrán látható módon) páronként érintsék egymást, és mindegyik érintse a keret oldalait is? Válaszod cm-ben, egészekre kerekítve add meg!



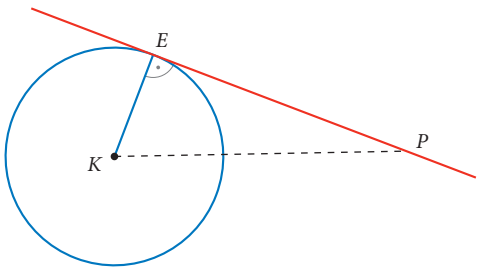
A *GeoGebra* programmal ellenőrizheted a szerkesztéseid helyességét is.

ELMÉLET

Definíció
Egy adott kör síkjában azokat az egyeneseket nevezzük a kör **érintőinek**, amelyeknek egy közös pontjuk van a körrel. A közös pontot **érintési pontnak** nevezzük.

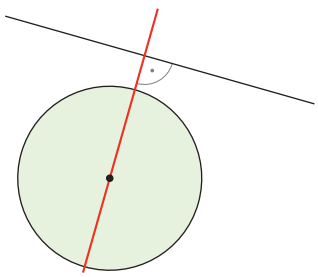
I. tétel

A kör érintője merőleges az érintési pontba vezető sugárra.



Első bizonyítás
Használjuk az ábra jelöléseit!
Az érintő E pontja (az *érintési pont*) sugárnyi távolságra van a kör középpontjától, a többi pontja pedig ennél nagyobb távolságra. Egy pont és egy egyenes pontjai között a legkisebb távolság a merőlegesen mérhető, tehát az EK egyenes merőleges az érintőre.

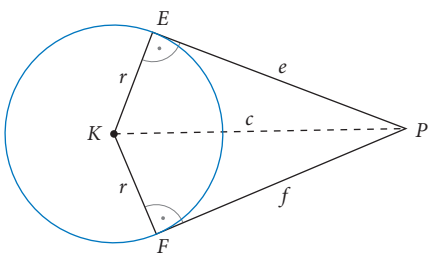
Második bizonyítás
(Ebben a bizonyításban felhasználjuk, hogy ha a kör középpontjából merőleges egyenest állítunk a kör síkjának bármely egyenesére, akkor a merőleges közös szimmetriatengelye lesz a körnek és az egyenesnek.)
Tükrözzük a kör középpontjából az érintőre állított merőleges egyenesre a kört és az érintőt! Ha az érintési pont nem lenne rajta a merőlegesen, akkor a tükörképe is közös pontja lenne a körnek és az érintőnek. Ez azonban lehetetlen, hiszen ezeknek csak egy közös pontjuk van. Tehát az érintési pont rajta van az érintőre állított merőlegesen, vagyis az érintési pontba vezető sugár valóban merőleges az érintőre.



Ez a bizonyítás arra támaszkodik, hogy ha nem lenne igaz a merőlegesség, akkor ellentmondásba kerülnénk az eredeti feltétellel. Az ilyen gondolatmenetet szokás **indirekt bizonyításnak** mondani.

II. tétel

Egy körhöz külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő.



Első bizonyítás
Használjuk az ábra jelöléseit!
Az EKP derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $e^2 = c^2 - r^2$, az FKP derékszögű háromszögben pedig $f^2 = c^2 - r^2$. Tehát $e^2 = f^2$, vagyis $e = f$.

Második bizonyítás
Használjuk az ábra jelöléseit!
Tükrözzük a KP egyenesre a kört és a PE érintő egyenesét! A tükrözés tulajdonságai miatt egy olyan, a P ponton átmenő egyenest kapunk, amely az E pont F tükörképében érinti a kört. A szimmetria miatt tehát a PE érintő szakasz hossza megegyezik a PF érintő szakasz hosszával.

45 A HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI ÉS PONTJAI I.

BEVEZETŐ

A fotókon megjelenő zavaró árnyékok kiküszöbölésére a fényképészetben három fényforrással egyszerre világítják meg a lefényképezni kívánt tárgyat. Ennek az eljárásnak nagyon fontos eleme, hogy a tárgynak a három fényforrás mindegyikétől egyforma távolságra kell lennie. Pontosan hová helyezzük a tárgyat, ha adott a három fényforrás helye?



Megoldás

Tudjuk, hogy egy síkban a sík két pontjától egyenlő távolságra lévő pontok a két pont között húzott szakasz felezőmerőlegesén találhatók. Mivel a tárgynak bármely két lámpától egyforma messze kell lennie, ezért rajta lesz minden olyan szakasz felezőmerőlegesén, amelyet két-két lámpa közé húztunk, azaz az ilyen felezőmerőlegesek metszéspontjában kell lennie.



ELMÉLET

Definíció: A háromszög oldalának felezőmerőleges egyenesét a háromszög **oldalfelező merőlegesének** nevezzük.

Azt a kört, melyre illeszkedik egy adott háromszög mindhárom csúcsa, a **háromszög köré írható körnek** (vagy másként: **körülírt körnek**) nevezzük. Minden háromszög esetén egyetlen ilyen kör található.

Tétel: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást. Ez a pont egyenlő távol van a háromszög csúcsaitól, ezért ez a pont a **háromszög köré írható kör** középpontja.

Bizonyítás

Felhasználjuk, hogy a sík két pontjától egyenlő távol lévő pontok halmaza a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese. (Ez az állítás a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból levezethető.)

Az AB és a BC oldalak felezőmerőlegeseinek metszéspontja legyen K.

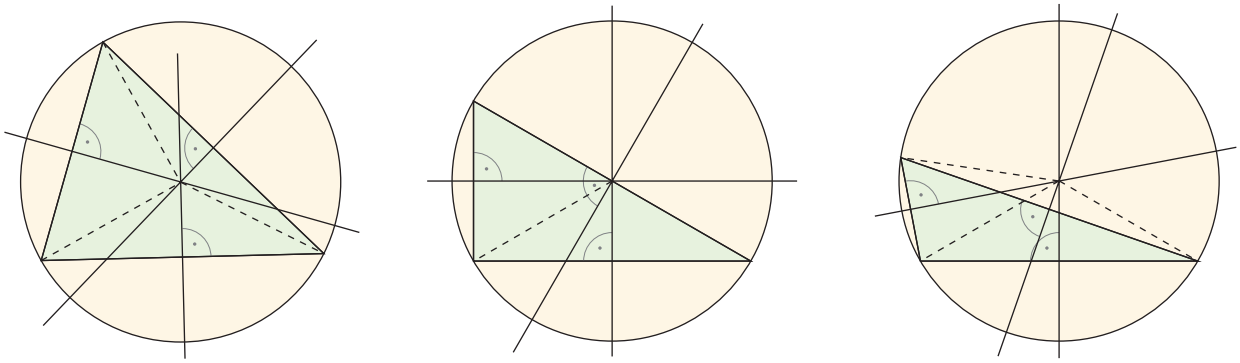
K rajta van az AB oldal felezőmerőlegesén, ezért egyenlő távol van A-tól és B-től: $KA = KB$.

K rajta van a BC oldal felezőmerőlegesén, ezért egyenlő távol van B-től és C-től: $KB = KC$.

$KA = KB$ és $KB = KC$, ezért $KA = KC$.

K egyenlő távol van tehát A-tól és C-től, ezért K rajta van az AC felezőmerőlegesén is. Vagyis AC felezőmerőlegese is átmegy a K ponton. Ezzel beláttuk a tételt.

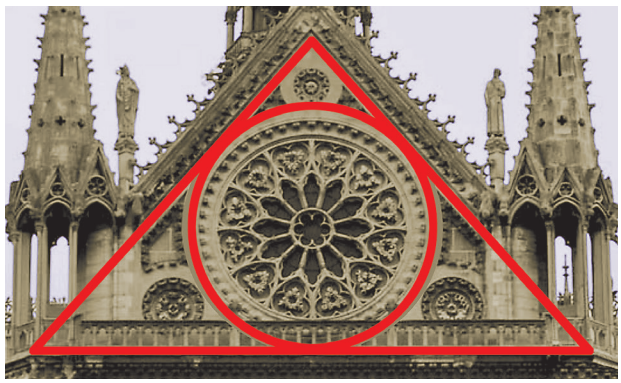
Megjegyzés:



A háromszög köré írható kör középpontja hegyesszögű háromszög esetében a háromszög belsejében, derékszögű háromszög esetében az átfogó felezőpontjában, tompaszögű háromszög esetében a háromszögön kívüli síkrészben van.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ez a fotó a párizsi Notre-Dame egyik ún. „rózsaablakáról" készült. Hogyan kell megszerkeszteni az ablak körének középpontját és sugarát, hogy az „illeszkedjen" a háromszögbe, azaz a háromszög oldalai éppen érintsék a kört?

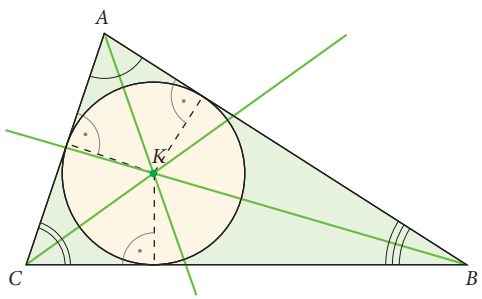


Megoldás

Tudjuk, hogy egy konvex szögtartományban a szög két szárától egyenlő távolságra levő pontok a szögfelező félegyenesen találhatók. Mivel a kör középpontjának bármely két oldaltól egyenlő távol kell lennie, ezért két szögfelezőn is rajta kell lennie, vagyis két szögfelező metszéspontjában van.

ELMÉLET

Definíció: A háromszög belső szögének szögfelező félegyenesét a háromszög **belső szögfelezőjének** nevezzük. (Sokszor így nevezzük a félegyenesnek a háromszög belsejébe eső **szakaszát** is.)



Azt a kört, amely adott háromszög mindhárom oldalát érinti, a **háromszögbe írható körnek** nevezzük. Minden háromszög esetén egyetlen ilyen kör található.

Tétel: A háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást. Ez a pont egyenlő távol van a háromszög oldalegyeneseitől, ezért ez a pont a **háromszögbe írható kör** középpontja.

Bizonyítás

Felhasználjuk, hogy egy konvex szögtartományban a szög két szárától egyenlő távol lévő pontok halmaza a szögfelező félegyenes. (Ez az állítás a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból levezethető.)

A $CAB\sphericalangle$ és az $ABC\sphericalangle$ szögfelezőinek metszéspontja legyen K.

K rajta van a $CAB\sphericalangle$ szögfelezőjén, ezért egyenlő távol van az AB és az AC szögszáraktól.

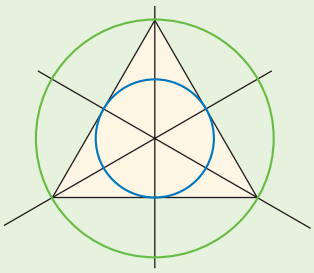
K rajta van az $ABC\sphericalangle$ szögfelezőjén, ezért egyenlő távol van az AB és a BC szögszáraktól.

Ezekből következik, hogy K egyenlő távol van az AC és a BC szögszáraktól is, ezért K rajta van a $BCA\sphericalangle$ szögfelezőjén is.

Vagyis $BCA\sphericalangle$ szögfelezője is átmegy a K ponton. Ezzel beláttuk a tételt.

FELADAT

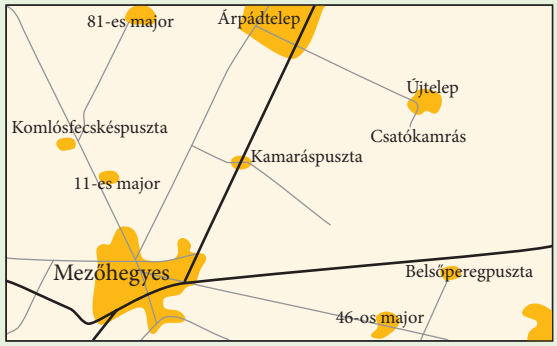
1 Szerkeszd meg egy 4 cm oldalú szabályos háromszög beírt és körülírt körét!



a) Számítsd ki e körök sugarának hosszát!

b) Milyen kapcsolat van e körök sugarainak hossza között?

2 Van-e olyan hely Mezőhegyesen, amelyik egyenlő távolságra van Újtelep, illetve a 81-es és a 46-os major központjától? Válaszod indokold!



3 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 10 cm és 12 cm. Határozzuk meg, milyen hosszú a háromszög beírható körének sugara!

4 Egy háromszög körülírt körének sugara 4 cm, egyik oldalának hossza 7,5 cm, egy másik oldalának hossza 3,5 cm. Szerkeszd meg a háromszöget!

HÁZI FELADAT

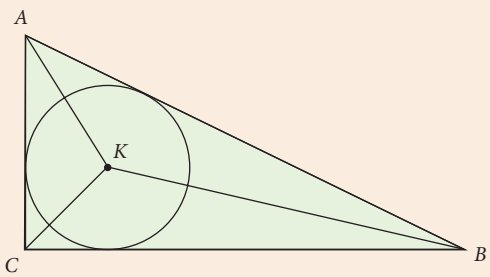
1 Szerkeszd meg egy hegyesszögű háromszög körülírt körét és beírt körét a füzetedben!

2 Szerkessz egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek a körülírt köre 2,5 cm sugarú! Szerkeszd meg ennek a háromszögnek a beírt körét!

A *GeoGebra* programmal ellenőrizheted a gondolatmeneted és a szerkesztéseid helyességét is.

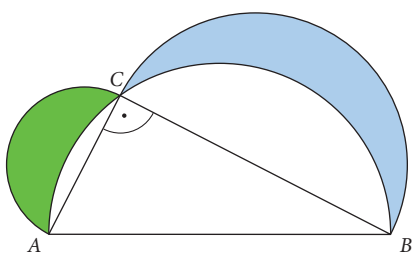
3 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha körülírt körének sugara 3,5 cm, szára pedig 6 cm!

4 Egy derékszögű háromszög egyik szöge 26°-os. A beírható kör középpontját összekötjük a háromszög csúcsaival. Így három háromszöget kapunk. Határozd meg a háromszögek szögeit!



EMELT SZINT

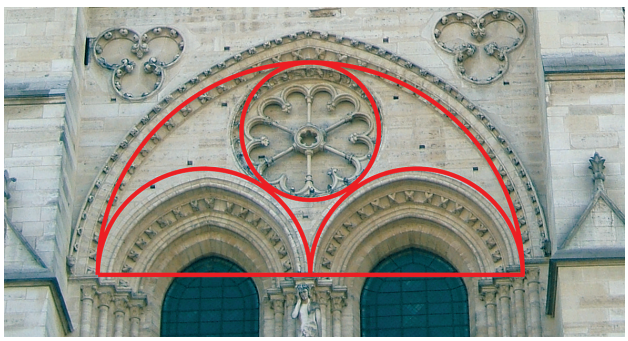
Az ábrán lévő, úgynevezett Hippokratész holdacskáit az *ABC* derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök határolják. Mutasd meg, hogy a két színezett holdacska területének összege a háromszög területével egyenlő!



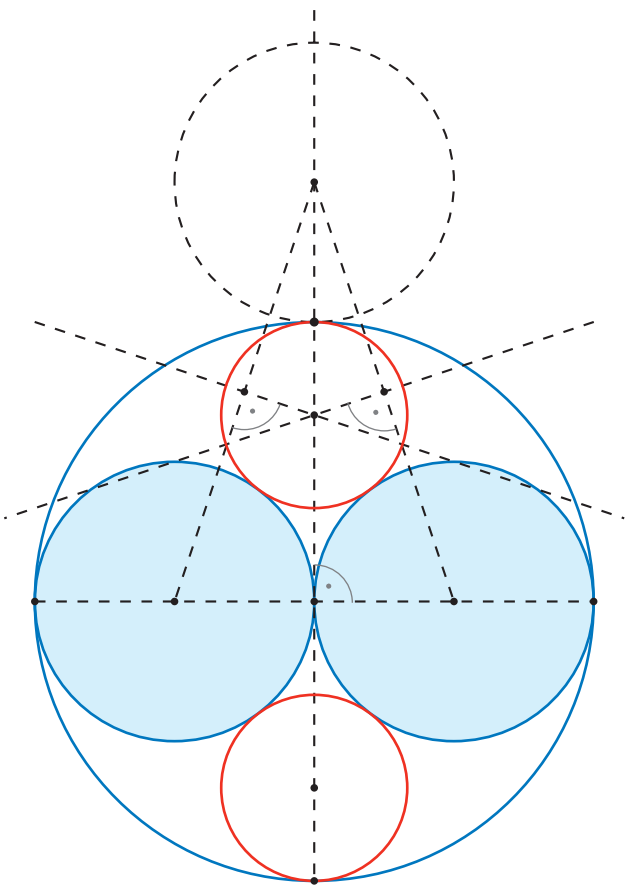
RÁADÁS

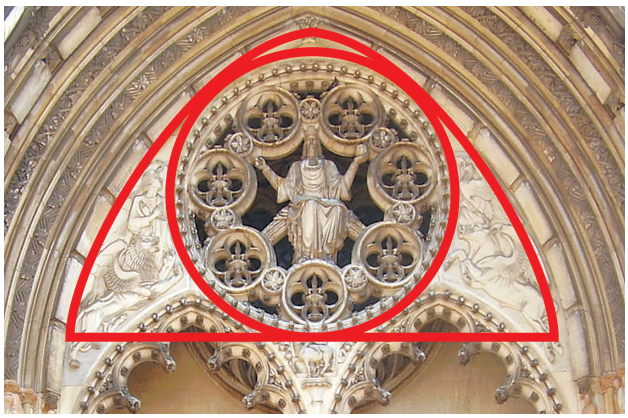
Városnézéseink során könnyen felfedezhetünk olyan díszítőmotívumokat, amelyek egymással érintkező körökből, körívekből épülnek fel.

Ezek közül kettőnek a szerkesztése olyan egyszerű, hogy matematikai ismeretek nélkül is könnyen adhatták tovább a mesteremberek tanítványaiknak. Tanulmányozd az ábrákat, és „fejtsd meg” a mesteremberek „titkát”! Hajtsd végre a szerkesztéseket!

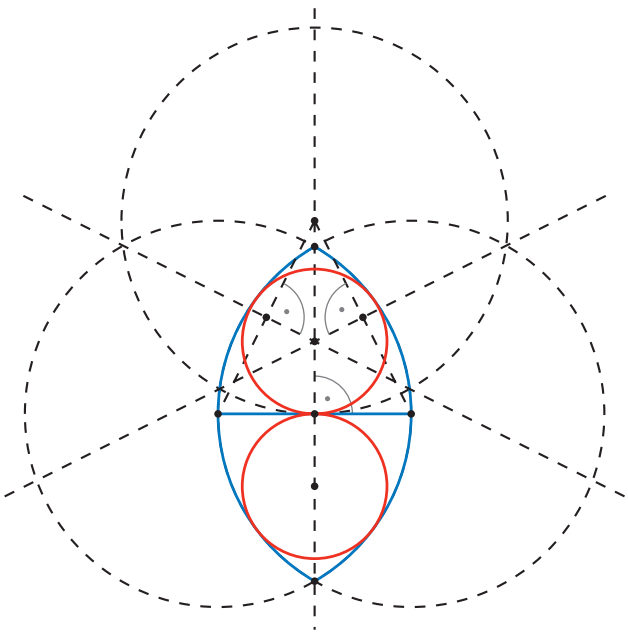


Szerkesztése





Szerkesztése

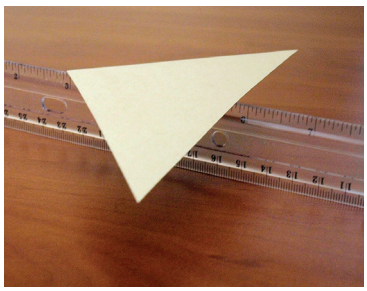


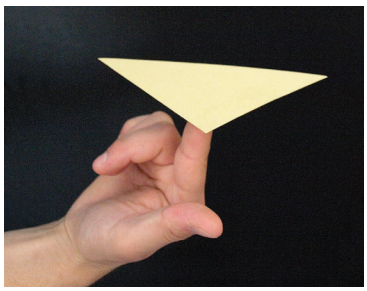
Ha a jó mesterember a „bűvös” Pitagorasz-tételt is ismerte, akkor könnyen kiszámíthatta, hogy a bal oldali ábra legkisebb körének sugara pontosan harmada a legnagyobb kör sugarának, a jobb oldali ábra kis köreinek sugara pedig pontosan háromnyolcada a nagy körök sugarának. Lásd be, hogy jól okoskodtak!

46 A HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI ÉS PONTJAI II.

BEVEZETŐ

Vágj ki kartonpapírból egy tetszőleges háromszöget! Próbáld meg kiegyensúlyozni a vonalzód élén (sőt: akár a kinyújtott tenyered élén!) úgy, hogy az alátámasztás átmenjen az egyik csúcson! Hogyan kell igazítani a háromszöget?
Most próbáld meg kiegyensúlyozni a háromszöget az ujjad hegyén! Hol legyen az alátámasztás?





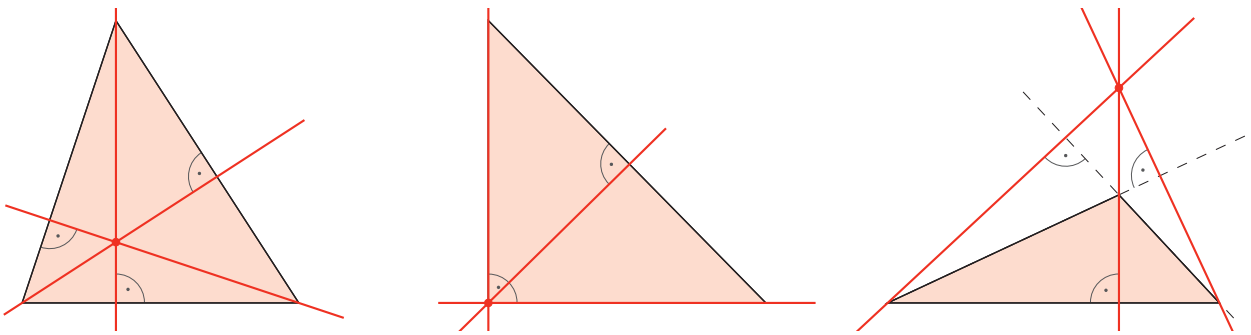
ELMÉLET

Definíció: A háromszög csúcsán átmenő és a szemközti oldal egyenesére merőleges egyenest a háromszög **magasságvonalának** nevezzük. **Magasság**nak nevezzük a magasságvonalnak a csúcs és az oldalegyenes közé eső szakaszát, illetve ennek a szakasznak a hosszát. (Másképp: a háromszög magassága a háromszög egy csúcsának és a csúccsal szemközti oldalegyenesnek a távolsága.)

Tétel: A háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást.

Ezt a pontot a háromszög **magasságpont**jának nevezzük.

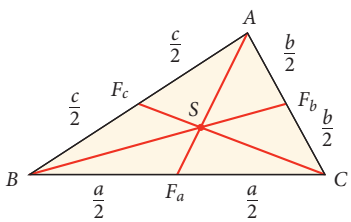
Megjegyzés:



A háromszög magasságpontja hegyesszögű háromszög esetében a háromszög belsejében, derékszögű háromszög esetében a derékszögű csúcsban, tompaszögű háromszög esetében a háromszögön kívüli síkrészben van.

Definíció: A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög **súlyvonal**ának nevezzük.

Tétel: A háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást.

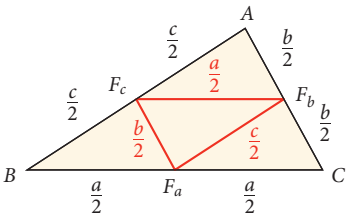


Definíció: A súlyvonalak metszéspontja a **háromszög súlypontja**.
(A bevezető feladat alátámasztási pontja éppen ez a pont!)

Tétel: A súlypont harmadolja, vagyis 1 : 2 arányban osztja két részre a súlyvonalat úgy, hogy a háromszög csúcsától van távolabb, az oldalfelező ponthoz közelebb.

Definíció: A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakasz a háromszög **középvonala**.

Tétel: A háromszögben a középvonal párhuzamos a háromszög harmadik (általa össze nem kötött) oldalával, és feleolyan hosszú.



A *GeoGebra* programmal szemléltethető az állítások érvényessége minden háromszög esetére.

FELADAT

1 Van-e olyan háromszög,
- **a)** amelynek egyik súlyvonala merőleges a felezett oldalra;
- **b)** amelynek egyik súlyvonala egyben szögfelező is;
- **c)** amelynek súlypontja egybeesik a körülírt kör középpontjával;
- **d)** amelynek súlypontja illeszkedik a háromszög egyik középvonalára?

2 Egy szabályos háromszög súlypontja az egyik csúcstól 2,8 cm távolságra van.
- **a)** Mekkora a háromszög magassága?
- **b)** Mekkora a beírható és a köré írható kör sugara?
- **c)** Mekkora a háromszög oldala?

3 Egy derékszögű háromszög átfogója 65 cm, egyik befogója pedig 56 cm hosszú.
- **a)** Számítsd ki a középvonalainak hosszát!
- **b)** Milyen hosszúak a befogókhoz tartozó súlyvonalak?

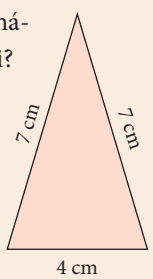
4 Egy háromszög két oldalának a hossza 25 mm, illetve 18 mm, az általuk bezárt szög α. Mekkora a 25 mm-es oldalhoz tartozó magasság, ha
- **a)** $\alpha = 30°$;
- **b)** $\alpha = 45°$;
- **c)** $\alpha = 90°$;
- **d)** $\alpha = 120°$;
- **e)** $\alpha = 135°$?

5 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 cm, szára 29 cm hosszú. Számítsd ki a háromszög középvonalainak és súlyvonalainak hosszát!

HÁZI FELADAT

1 Mekkorák a 4,8 cm oldalú szabályos háromszög középvonalai és súlyvonalai?

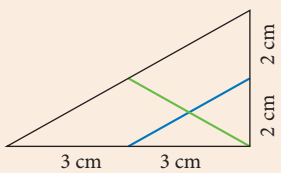
2 Egy háromszög oldalainak hossza 4 cm, 7 cm, 7 cm.



- **a)** Szerkeszd meg a köré írt kör O középpontját, az M magasságpontot és az S súlypontot!
- **b)** Milyen kapcsolatot sejtesz az OS és az SM szakaszok hossza között? Válaszod méréssel indokold!

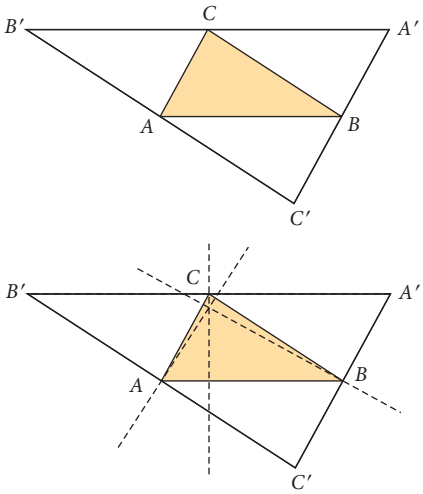
3 Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 5 dm, egyik befogójának hossza 48 cm. Határozd meg a távolságot a háromszög súlypontja és köré írható körének középpontja között, valamint a háromszög súlypontja és magasságpontja között!

4 Az ábra szerinti derékszögű háromszögben a derékszögű csúcsot összekötöttük az átfogó felezőpontjával, és összekötöttük a két befogó felezőpontját is. Mekkora ez a két szakasz?



Bizonyítsuk be a háromszög magasságvonalaira és súlyvonalaira vonatkozó tételeket!

Tétel: A háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást.



Bizonyítás

Felhasználjuk, hogy ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor a négyszög paralelogramma, így a szemközti oldalai egyenlők.

Húzzunk párhuzamost a szemközti oldallal az ABC háromszög minden csúcsán át! Jelöljük a kapott háromszöget az ábra szerint $A'B'C'$-vel.

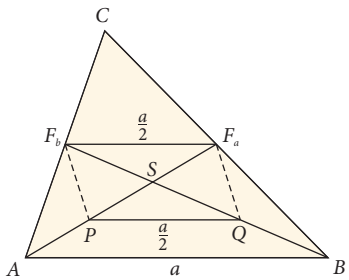
Az így keletkezett $C'BCA$ négyszög paralelogramma, hisz szemközti oldalai párhuzamosak. Ezért $AC' = BC$.

Hasonlóan, az $ABCB'$ négyszög paralelogramma, hisz szemközti oldalai párhuzamosak. Ezért $AB' = BC$.

Azt kaptuk, hogy az A pont felezőpontja a $C'B'$ oldalnak, ezért az ABC háromszögben az A-ból húzott magasságvonal egyben oldalfelező merőleges az $A'B'C'$ háromszögben.

Hasonlóképpen belátható, hogy az ABC háromszög másik két magasságvonala is egyben az $A'B'C'$ háromszög egy-egy oldalfelező merőlegese. A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ezért a három magasságvonal is egy pontban metszi egymást.

Tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.



Bizonyítás

Legyenek F_a és F_b az ABC háromszög oldalfelező pontjai. Az AF_a és BF_b súlyvonalak metszéspontja S, az AS és BS szakaszok felezőpontjai pedig P és Q.

Az F_aF_b szakasz az ABC háromszögben középvonal, ezért párhuzamos az a oldallal, és feleakkora hosszúságú.

A PQ szakasz az ABS háromszögben középvonal, ezért párhuzamos az a oldallal, és feleakkora hosszúságú.

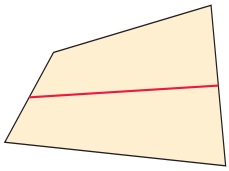
A PQF_aF_b négyszög paralelogramma, hiszen van két párhuzamos és egyenlő hosszú oldala. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért $F_aS = SP$. Ugyanakkor P felezőpont az SA oldalon, ezért $SP = PA$. Ezzel beláttuk, hogy az S pont – és ezzel az s_b súlyvonal is – az s_a súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja.

Ugyanígy belátható, hogy s_c is 2 : 1 arányban osztja az s_a súlyvonalat, ezért az is áthalad az S osztóponton. A három súlyvonal tehát egy pontban metszi egymást.

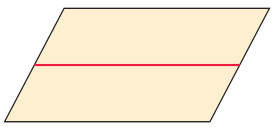
RÁADÁS

1. Négyszögek középvonalai

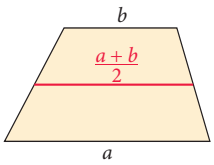
Egy négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakasz a négyszög középvonala.



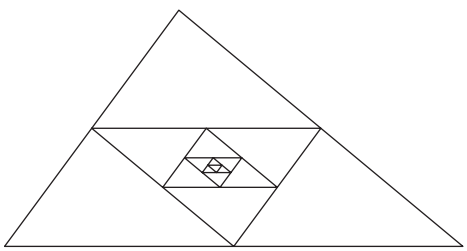
A paralelogramma középvonala párhuzamos és egyenlő hosszú a megfelelő oldalakkal.



A trapéz szárainak felezőpontját összekötő középvonal hossza az alapok összegének fele.

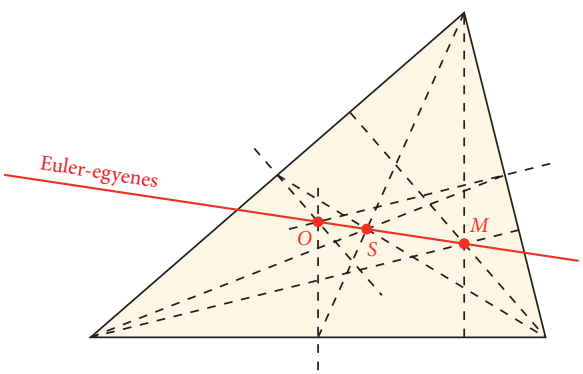


2. Az ábra érdekes kapcsolatot szemléltet.
Egy háromszögbe berajzoltuk a középvonalait, aztán az így kapott háromszögbe ismét, és ezt többször megismételtük.



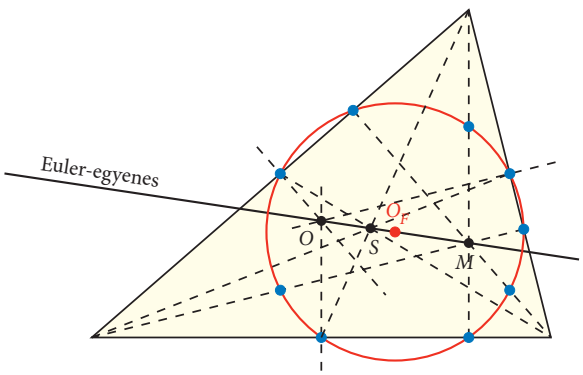
Feladat: Milyen pontot zárnak közre az egyre kisebb és kisebb háromszögek? Miért?

3. Minden háromszögre igaz:
A körülírt kör O középpontja, az M magasságpont és az S súlypont egy egyenesre esik.



Ezt az egyenest a háromszög **Euler-egyenesének** nevezzük. A súlypont a másik két pont között van, kétszer akkora távolságra M-től, mint O-tól.
(*L. Euler* 1707-től 1783-ig élt, svájci születésű tudós volt. Nevét így ejtjük: ajler.)
Megjegyzés: Szabályos háromszög esetében a három nevezetes pont egybeesik, ezért a tétel állítása ebben az esetben is igaz, ámde „semmitmondó”.

4. Minden háromszögre igaz:
A három oldalfelező pont meghatároz egy kört. Ezen rajta van
– a magasságvonalak és az oldalegyenesek három metszéspontja;
– a magasságpont és a csúcsok közötti szakaszok felezőpontja.
Ezt a kört a háromszög **Feuerbach-körének**, más elnevezéssel a kilenc pont körének nevezzük. A Feuerbach-kör középpontja az Euler-egyenesen van, középen, a körülírt kör középpontja és a magasságpont között. A kör sugara feleakkora, mint a háromszög köré írt kör sugara.
(*K. W. Feuerbach* 1800-tól 1834-ig élt, német gimnáziumi tanár volt. Nevét így ejtjük: fajerbah.)



A 3. és 4. feladat állításának általános érvényességét a *GeoGebra* programban is szemléltetni lehet.



47 GYAKORLÁS

FELADAT

1 Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! Válaszod indokold!

a) Van 89°-osnál nagyobb hegyesszög.

b) Ha két hegyesszög egymásnak pótszöge, akkor nagyságuk különböző.

c) Létezik olyan háromszög, mely oldalainak hossza 30 cm; 7 dm; 0,9 m.

d) A háromszög belső szögfelezője mindig felezi a szemközti oldalt.

e) Ha két szög egymásnak csúcsszöge, akkor összegük lehet homorú szög.

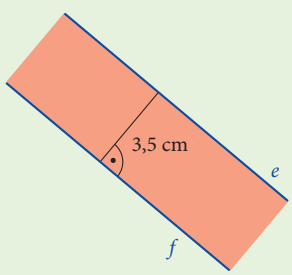
f) A $2a$ oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságának hossza $a\sqrt{3}$.

g) A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a háromszögbe írt kör középpontja.

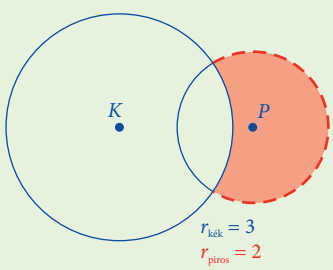
h) A háromszögnek van olyan nevezetes vonala, mely nem halad át a háromszög egyik csúcsán sem.

2 Jellemezd pontoktól és egyenesektől mért távolságokkal az ábrán piros színnel jelölt síkbeli pontokat!

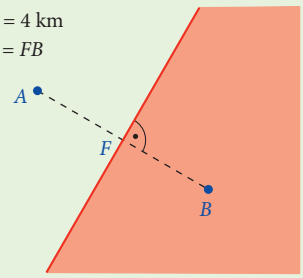
a)



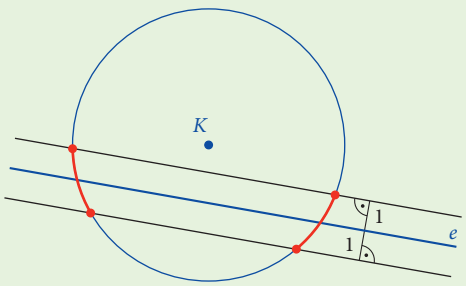
b)



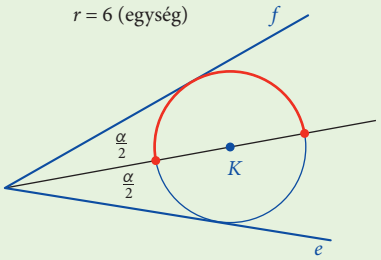
c) $AB = 4$ km, $AF = FB$



d)



e) $r = 6$ (egység)



3 Egy sífelvonó a tengerszint fölött 1100 méterről indul és a tengerszint fölött 1700 méterre érkezik. A felvonóval 1500 méter hosszan tart az út. Mekkora a vízszintesen történő elmozdulás, miközben a felvonó egyenesen eljut az indulási pontból az érkezési pontba?

4 Egy 25 cm sugarú kör két, egymással párhuzamos húrjának hossza 30 cm és 48 cm. Mekkora lehet a két húr távolsága?

5 Adott egy egység hosszúságú szakasz. Szerkessz $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ hosszúságú szakaszokat! Írd le a szerkesztés menetét és azokat az ismereteket, melyekre a megoldást alapoztad!

HÁZI FELADAT

1 Adott a sík egy K pontja és egy f egyenese, melyeknek egymástól való távolsága 4 cm. Szerkeszd meg a síkban azon pontok halmazát, melyekre teljesül, hogy

a) a K ponttól való távolságuk kisebb, mint 4 cm;

b) az f egyenestől mért távolságuk legalább 2 cm;

c) kisebb távolságra vannak az f egyenestől, mint a K ponttól;

d) a K ponttól való távolságuk legalább 3 cm, az f egyenestől mért távolságuk legfeljebb 3 cm!

2 Egy (talajra merőleges) cölöp rögzítéséhez sodronyokat használnak úgy, hogy azok egyik végét a cölöp felső végéhez, másik végét a talajhoz rögzítik. A cölöp magassága 3 méter. Az egyik kifeszített sodronyt a cölöp talpától 7 méterre tudják rögzíteni a talajon, a másik sodronyt a cölöp másik oldalán, a cölöp talpától 4 méterre. Határozd meg egy tizedesjegy pontossággal, hogy milyen hosszú sodronykötélre van szükség összesen ehhez a két rögzítéshez!

3 Keresd meg az alábbi Magyarország-térképen a Békéscsaba, Debrecen, Tatabánya városok helyét jelölő pontokat!

Mérd le a pontok távolságát (légvonal), majd számolás segítségével határozd meg, hogy a három város által alkotott háromszög

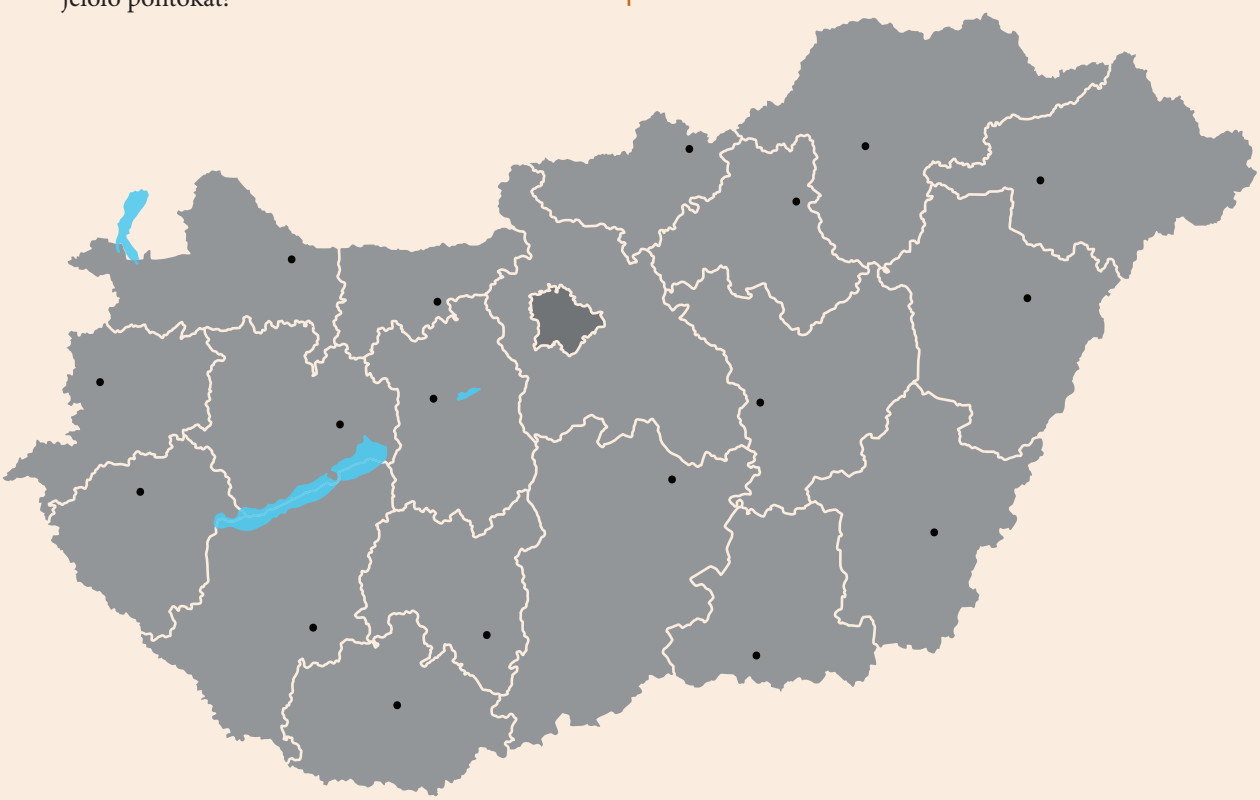
a) (közel) derékszögű-e;

b) mely csúcsánál van a legkisebb szög.

Projektfeladat:

Nézz utána, hogy a valóságban mekkora a Békéscsaba–Debrecen távolság légvonalban, és ez alapján állapítsd meg a térképen használt hozzávetőleges méretarányt!

4 Egy geodéziai mérésekhez használatos mérőberendezés (teodolit) állványának három lábát a vízszintes talajon egy szabályos háromszög három csúcspontjában helyezik el a stabilitás érdekében. A lábak talpainak távolsága egymástól 150 cm, a lábak hossza 190 cm. A talpak által létrehozott háromszög súlypontja fölött milyen távolságban van a talajtól a műszer rögzítési pontja az állványon?

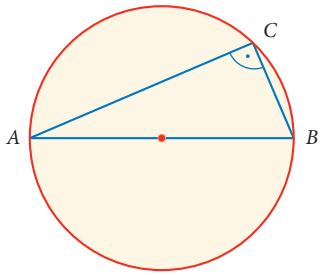


48 THALÉSZ TÉTELE

ELMÉLET

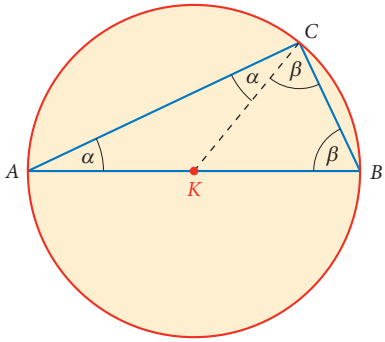
Thalész tétele

Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal egy harmadik pontjával, derékszögű háromszöget kapunk. A harmadik pont lesz a derékszögű csúcs.



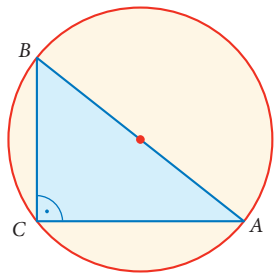
Másképp:
Ha a C pont rajta van az AB átmérőjű körön, de nem esik egybe sem A-val, sem B-vel, akkor a C-ből az AB szakasz „derékszögben látszik”.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy az ABC háromszög AB oldala a háromszög köré írt kör átmérője. Ha a C-t összekötjük a kör K középpontjával, akkor az ABC háromszöget az ACK háromszögre és a BCK háromszögre bontottuk, amelyek mindketten egyenlő szárú háromszögek (a szárak a kör sugarával egyenlők).
Jelöljük az A-nál lévő szöget α-val, a B-nél lévő szöget β-val! Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, ezért
$ACK\sphericalangle = \alpha$ és $BCK\sphericalangle = \beta$.
Tudjuk, hogy a háromszög szögeinek összege 180°.
$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$; $2\alpha + 2\beta = 180°$; $\alpha + \beta = 90°$.
Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszögnek a C csúcsnál derékszöge van.



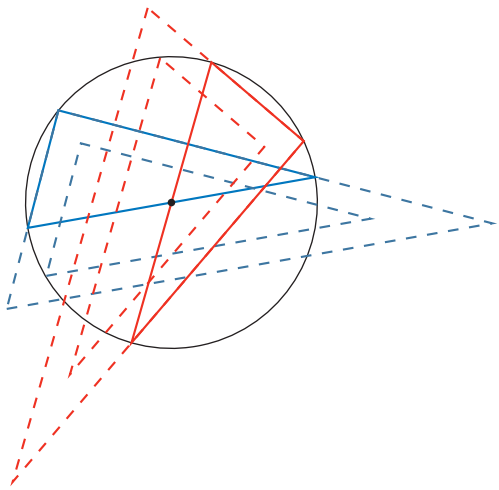
Thalész tételének megfordítása

A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontjában van.
Másképp:
Ha a C pontból az AB szakasz „derékszögben látszik”, akkor C rajta van az AB átmérőjű körön.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan állapítható meg egy kör középpontja, ha csak egy derékszögű vonalzónk van?



Megoldás
Illesszük a derékszögű csúcsot a kör egy tetszőleges pontjához, húzzuk meg a két – egymásra merőleges – húrt, és kössük össze a másik végpontjaikat! Thalész tételének megfordítása értelmében az így kapott derékszögű háromszög átfogója éppen a kör egyik átmérője lesz. Ismételjük meg az előző eljárást egy másik ponttal! A kör középpontja a két átmérő metszéspontja lesz.

ELMÉLET

Milyen kapcsolatban van egymással egy tétel és a **tétel megfordítása**?

Minden tétel két részből áll: a **feltételből** és az **állításból**. Ha a feltételt és az állítást felcseréljük, megkapjuk a **tétel megfordítását.**
Némelyik tételnek a megfordítása is igaz, más tételeké viszont nem feltétlenül.

Például
a Thalész-tételnél:

Feltétel	Állítás	Következik-e a feltételből az állítás?
a háromszög egyik oldala a köré írt kör átmérője	a háromszög derékszögű	igen
a háromszög derékszögű	a háromszög egyik oldala a köré írt kör átmérője	igen

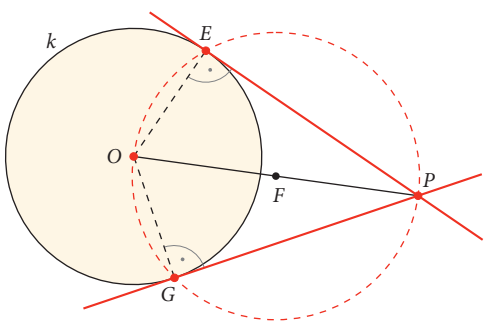
Vizsgáljunk meg egy másik tételt ehhez hasonlóan: *Ha egy négyszög négyzet, akkor a szögei derékszögek.*

Feltétel	Állítás	Következik-e a feltételből az állítás?
a négyszög négyzet	a négyszög szögei derékszögek	igen
a négyszög szögei derékszögek	a négyszög négyzet	nem

Ennek a tételnek a megfordítása (Ha egy négyszög szögei derékszögek, akkor a négyszög négyzet.) nem igaz, mert van olyan négyszög, amely nem négyzet, de a szögei derékszögek. Ilyen minden téglalap, amelynek nem egyenlő hosszúak az oldalai.

KIDOLGOZOTT FELADAT

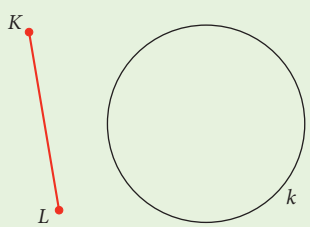
2. Szerkesszünk a k körhöz érintőket a külső P pontból!



Megoldás
Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Ezért olyan pontot keresünk a k körön, melyből az OP szakasz derékszögben látszik. Szerkesszük meg először az OP átmérőjű kört! A két kör az E és G pontokban metszi egymást. Thalész tétele miatt a PEO háromszög derékszögű az E pontnál. Ezért a PE egyenes érinti a k kört.
Hasonlóan látható, hogy a PG egyenes is érinti a k kört.

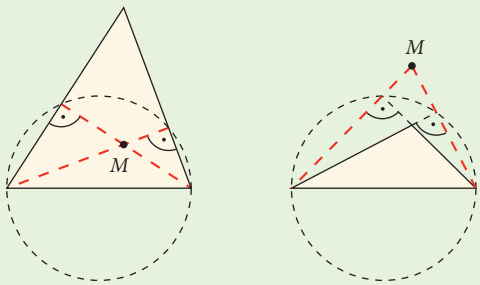
FELADAT

1 Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek az átfogója a KL szakasz, és a harmadik csúcsa a k körön van! Másold le az alábbi ábrát, és a füzetedben dolgozz! Hány megoldást kaptál?



2 Helyezd el úgy a KL szakaszt, hogy az előző feladatnak csak egy megoldása legyen!

3 A háromszög egyik oldala mint átmérő fölé kört szerkesztettünk. Magyarázd meg, hogy a megszerkesztett M pont miért a háromszög magasságpontja!



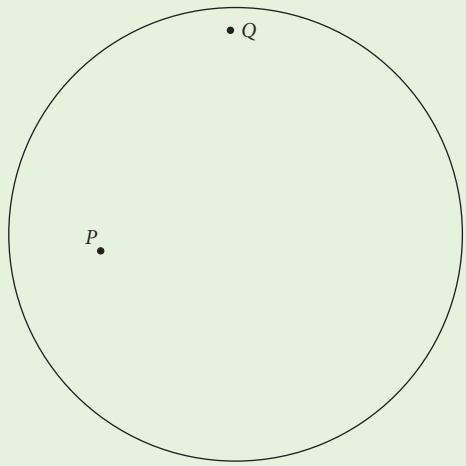
A *GeoGebra* program segítségével is vizsgáld meg a fenti feladatot!

4 Rajzolj egy 2,5 cm sugarú kört!

a) Szerkessz egy olyan pontot a körön kívül, amelyből 1 cm hosszú érintőszakasz húzható a körhöz!

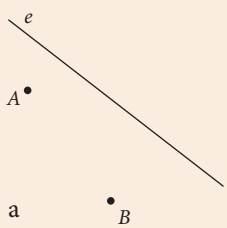
b) Szerkeszd meg az összes olyan pontot, amelyből a körhöz 1 cm hosszú érintőszakasz húzható!

5 Adott egy kör és belsejében két pont: P és Q. Szerkessz a körbe derékszögű háromszöget (ez azt jelenti, hogy a csúcsai illeszkedjenek a körvonalra), amelynek egyik befogója áthalad a P ponton, másik befogója pedig a Q ponton! Másold le az ábrát és a füzetedben dolgozz!

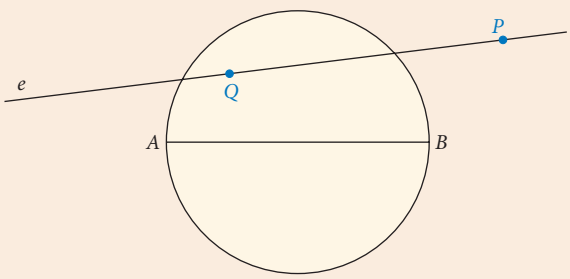


HÁZI FELADAT

1 Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek két csúcsa az A és a B pont, a harmadik csúcsa pedig az e egyenesen van! Másold le az alábbi ábrát és a füzetedben dolgozz! Hány megoldása van a feladatnak?



2 Kösd össze gondolatban az e egyenes mindegyik pontját A-val és B-vel! Vedd fel az ábrát a füzetedben! Válaszolj az alábbi kérdésekre indoklással!



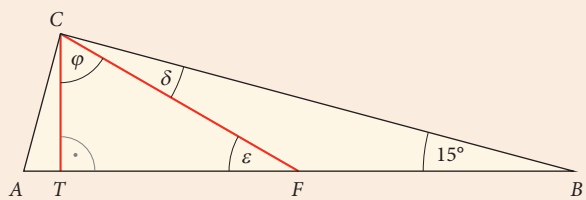
a) Melyik pontokból „látszik” az AB szakasz derékszögben?

b) Milyen szögben „látszik” az AB szakasz a körön kívüli pontokból, például a P-ből?

c) Milyen szögben „látszik” az AB szakasz a körön belüli pontokból, például a Q-ból?

3 Egy derékszögű háromszög átfogója 7,6 cm, átfogóhoz tartozó magassága 3 cm. Szerkeszd meg a háromszöget!

4 Az ABC derékszögű háromszög egyik szöge 15°-os, az AB átfogó 12 cm hosszú.



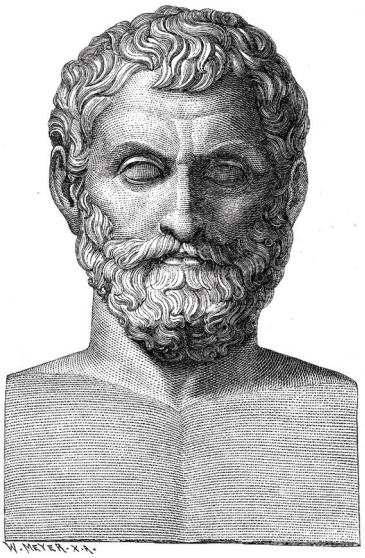
a) Mekkora a CF súlyvonal?

b) Mekkora a δ szög?

c) Mekkora az ε és a φ szög?

d) Mekkora a CT magasság?

RÁADÁS

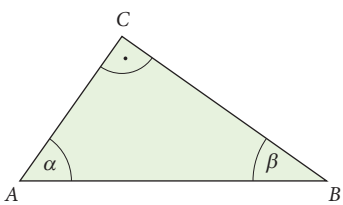


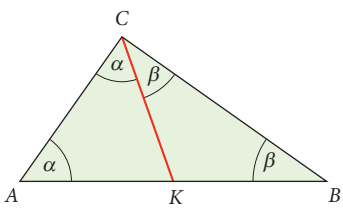
Thalész (Kr. e. 624?–548?) matematikus és filozófus, a hét görög bölcs egyike volt. Sokan a görög filozófia atyjaként emlegetik.
A kis-ázsiai Milétoszban született, föníciai nemesi családban. A tudományok mellett politikával és kereskedelemmel is foglalkozott.
Thalész érdekesen magyarázott egyes természeti jelenségeket; a földrengéseket például úgy, hogy a Föld vízen úszik, és a földrengéseket a víz hullámzása okozza.
Ő volt az első olyan matematikával is foglalkozó tudós, akinek a neve is fennmaradt. Komoly geometriai ismeretekkel rendelkezett, használta a térben elhelyezkedő egyenesek, síkok, testek fogalmát, távolságokkal és szögekkel dolgozott. Megmutatta, hogy a csúcsszögek egyenlők, hogy az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei megegyeznek, és hogy ha két háromszög egy-egy oldala és az azokon fekvő szögek páronként egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó. Bebizonyította, hogy a háromszög belső szögeinek összege akkora, mint két derékszög együtt.
Foglalkozott a hasonló háromszögekkel is, és kutatásai eredményét gyakorlati célokra is felhasználta. Például a hasonló háromszögek segítségével határozta meg a piramisok magasságát, sőt ilyen módszerrel megmérte hajók távolságát a tengeren.
Leghíresebb megállapítása a derékszögű háromszög és a köré írt kör kapcsolatát kimondó tétel, amely máig az ő nevét viseli. Magát az összefüggést az egyiptomi és babiloni papok valószínűleg már Thalész előtt is ismerték, erről azonban nem maradt fenn bizonyíték. A tétel első bizonyítását neki tulajdonítják.

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be Thalész tételének a megfordítását!

Bizonyítás
Most azt tudjuk, hogy az ABC háromszög derékszögű, és C a derékszögű csúcs.
A két hegyesszög összege: $\alpha + \beta = 90°$.
Osszuk két részre a C csúcsnál fekvő derékszöget az ábra szerint!
Az AKC háromszög két szöge egyenlő, ezért ez egy egyenlő szárú háromszög, amelyben $KA = KC$.
A BKC háromszög két szöge egyenlő, ezért ez egy egyenlő szárú háromszög, amelyben $KC = KB$.
Tehát $KA = KC = KB$, vagyis a K pont az átfogó felezőpontja, és ez egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom csúcsától. K tehát a derékszögű háromszög körülírt körének középpontja.

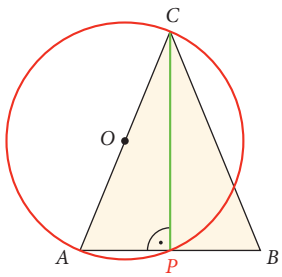




49 A THALÉSZ-TÉTEL ALKALMAZÁSAI

KIDOLGOZOTT FELADAT

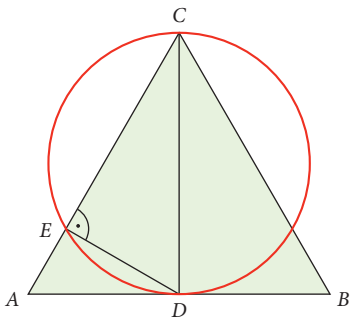
1. Rajzoljuk meg azt a kört, amelynek átmérője az ABC egyenlő szárú háromszög AC szára! Igazoljuk, hogy ez a kör a háromszög AB alapját annak a felezőpontjában metszi!



Megoldás

Az ábrán P a kör és az AB alap metszéspontja. Thalész tételéből következik, hogy az APC szög derékszög. A C-ből AB-re húzott merőleges viszont nem más, mint az ABC háromszög szimmetriatengelye, tehát P az alap felezőpontja.

2. Az ABC szabályos háromszög oldalai 44 mm-esek, az AB oldal felezőpontja D. Mekkora részekre osztja az AC oldalt a CD átmérőjű kör?



Megoldás

Jelöljük a kör és az AC oldal metszéspontját E-vel! Thalész tételéből következik, hogy a CED szög (és így az AED szög is) derékszög. Az AED derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szöge 60°-os, ezért az AE befogó az AD átfogó fele.

Az AD szakasz pedig az AB oldal fele, vagyis 22 mm hosszúságú. Tehát

$$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11 \text{ mm},$$

az AC oldal másik része pedig $AC - AE = 44 - 11 = 33$ mm.

Érdekes: az AC oldal egyik része (az EC szakasz) 3-szor akkora, mint a másik (az AE szakasz).

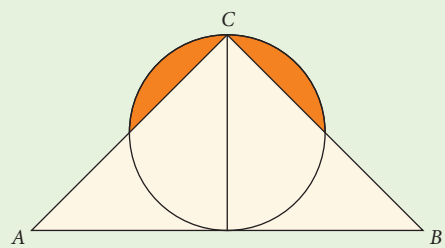
FELADAT

1 Egy kör sugara 3,4 cm, s a középpontjától 4,5 cm távol van egy P pont. Milyen hosszúak a P pontból a körhöz húzható érintőszakaszok?

2 **a)** Vegyél fel két szakaszt! Szerkessz derékszögű háromszöget, ha az egyik szakasz az átfogónak a hosszát és a másik szakasz az átfogóhoz tartozó magasságnak a hosszát adja meg! Hány szerkesztési lehetőség van?

b) Szerkessz háromszöget, ha egyik oldalának hossza 6 cm, valamint egy másik oldalhoz tartozó magassága 4 cm, és súlyvonala 5 cm hosszúságú!

3 Az ABC háromszög egyenlő szárú, derékszögű. Az AB szakasz 100 cm hosszú. A kör átmegy a C-n, és a felezőpontjában érinti az AB átfogót.



a) Mutassuk meg, hogy a kör a befogókat a felezőpontjukban metszi!

b) Határozzuk meg a kör és a befogók metszéspontjainak távolságát a háromszög csúcsaitól!

4 Egy háromszög oldalainak hossza 6; 8 és 9 egység.

a) Igazold, hogy a háromszög hegyesszögű!

b) Határozd meg, hogy milyen távolságban van a 9 egység hosszúságú oldal felezőpontja a másik két oldalhoz tartozó magasságok talppontjaitól!

5 Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának felezőpontját jelölje P, az A csúcsból induló magasság talppontját Q, valamint a B csúcsból induló magasság talppontját R.

a) Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög egyenlő szárú!

b) Igaz-e az állítás derékszögű, illetve tompaszögű háromszög esetén is?

HÁZI FELADAT

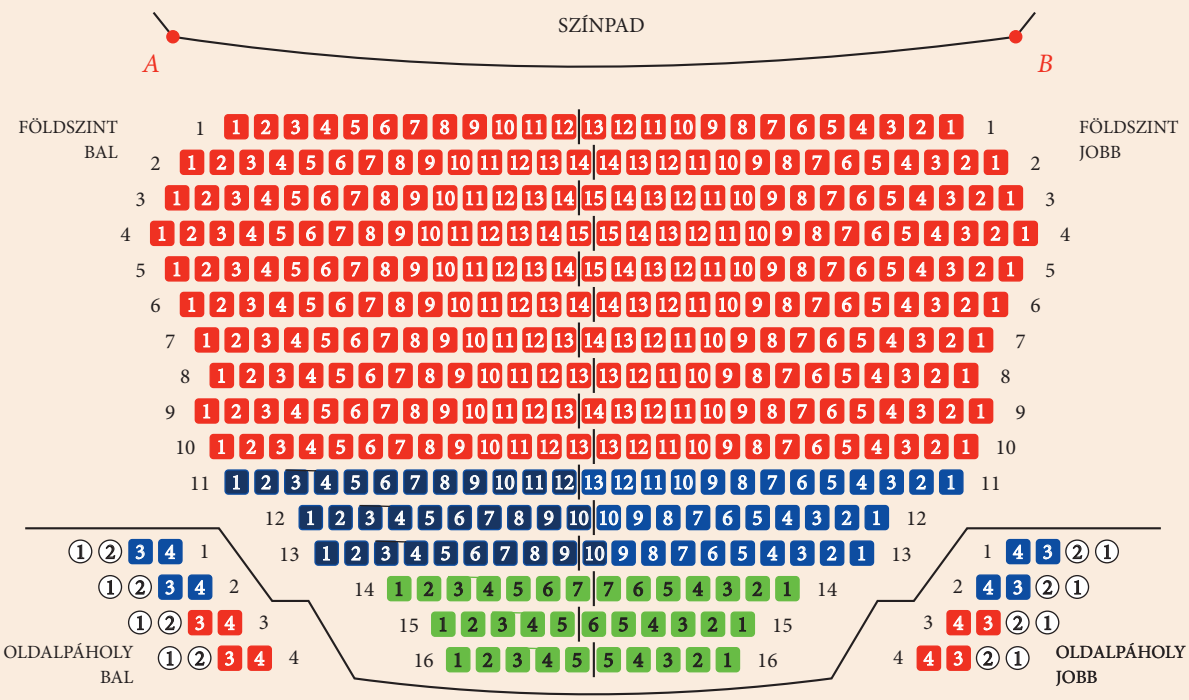
1 Egy téglalap oldalai 3,9 cm és 8 cm hosszúak. Mekkora a köré írható kör sugara?

2 Vegyél fel három szakaszt, legyenek ezek a; m_b; m_c. Szerkessz háromszöget, amelyben az adott szakaszok hossza éppen az egyik oldalnak (a), illetve a másik két oldalhoz tartozó magasságnak (m_b, m_c) a hossza.

3 Másold át másolópapírra (sütőpapírra, zsírpapírra, pauszpapírra) az ábrán lévő színpad széleit jelző A és B pontokat!

Szerkesztéssel határozd meg a papíron azon pontok mértani helyét, melyekből az AB szakasz derékszög alatt látszik!

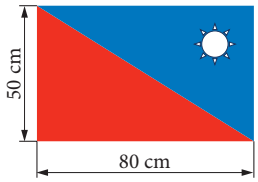
Az ábrára megfelelően visszahelyezve a másolópapírt határozd meg néhány olyan ülőhely „koordinátáit” (sor; szék), melyekből a színpad (azaz az AB szakasz) közelítőleg derékszög alatt látszik!



50 HÁROMSZÖGEK KERÜLETE ÉS TERÜLETE

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az ábrán látható lobogó kék és piros darabját összevarrás előtt szeretnénk beszegni.



a) Milyen hosszú szegélyt vegyünk egy-egy háromszögre?

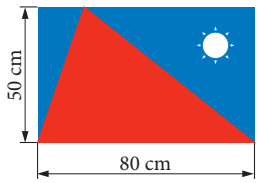
b) Mennyi piros és mennyi kék anyagra lenne szükségünk, hogy az ábra szerinti lobogót elkészíthessük?

Megoldás

a) A piros és a kék háromszög megfelelő adatai megegyeznek, hiszen mindkettő derékszögű háromszög, azonos hosszúságú befogókkal. Ezért nyilván mindkettőre azonos hosszúságú szegély kell. A szegély hossza a háromszög oldalainak összege, azaz a háromszög kerülete. A befogók itt adottak, az átfogót pedig Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk, ez kb. 94 cm. A háromszög kerülete közelítőleg:
50 cm + 80 cm + 94 cm = 224 cm, ennyi tehát az egyes darabokhoz szükséges szegély hossza.

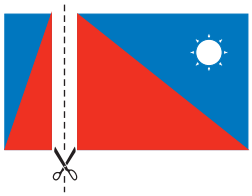
b) Mivel a két háromszög megfelelő adatai megegyeznek, nyilvánvaló, hogy ugyanannyi kék és piros anyag kell, mégpedig mindkettőből éppen a lobogó teljes területének fele: $T = \frac{50 \cdot 80}{2} = 2000\ \text{cm}^2$.

2. Mennyi piros színű anyag kellene az ábrán látható lobogó elkészítéséhez?



Megoldás

Vágjuk szét a lobogót – a rajz szerint – két részre:



Mindkét piros darab a megfelelő lobogórész területének fele, ezért az egyesítésük is a lobogó teljes területének fele lesz. Továbbra is igaz tehát, hogy $T = \frac{50 \cdot 80}{2} = 2000\ \text{cm}^2$.

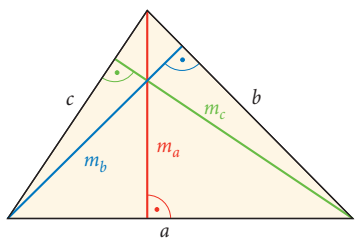
Ebben az esetben az eredeti téglalap egyik oldala a háromszög egyik *oldalával*, míg a téglalap másik oldala a háromszög egyik *magasságával* egyezik meg.

ELMÉLET

A háromszög területe:

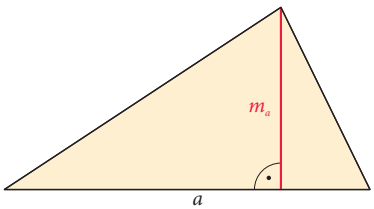
bármely oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele.

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}.$$

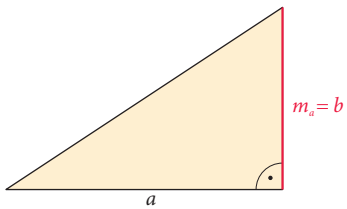


A háromszög területképletét hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek esetén ugyanúgy alkalmazhatjuk:

Hegyesszögű háromszög esetén

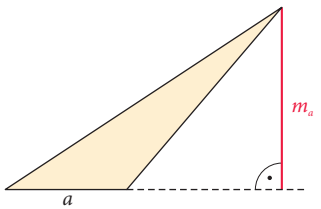


Derékszögű háromszög esetén



Az egyik befogóhoz tartozó magasság éppen a másik befogó.

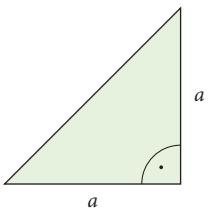
Tompaszögű háromszög esetén



Az *a* oldalhoz tartozó magasságvonal a háromszögön kívül található.

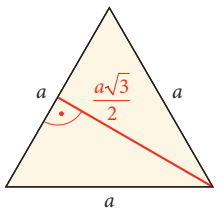
$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$.

Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területe: $\frac{a^2}{2}$.



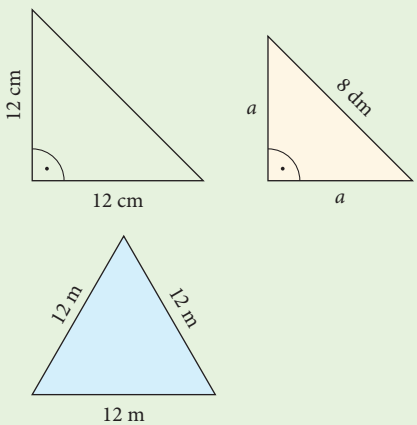
$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Az a oldalú szabályos háromszög területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



FELADAT

1 Számítsd ki a háromszögek területét!



2 Egy derékszögű háromszög befogói 6 cm és 8 cm hosszúak.

a) Milyen hosszúak a befogókhoz tartozó magasságai?

b) Mekkora a területe?

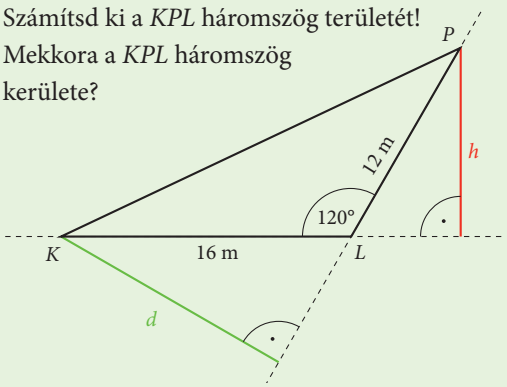
c) Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magassága?

3 Legyen az $ABCD$ négyzet CD oldalának felezőpontja F, az AD oldalának D-hez közelebb eső harmadolópontja H. Számold ki, hogy a HBF háromszög területe hány százaléka az $ABCD$ négyzet területének!

4 **a)** Mekkora távolságra van a K pont a PL szakasz egyenesétől, illetve a P pont a KL szakasz egyenesétől?

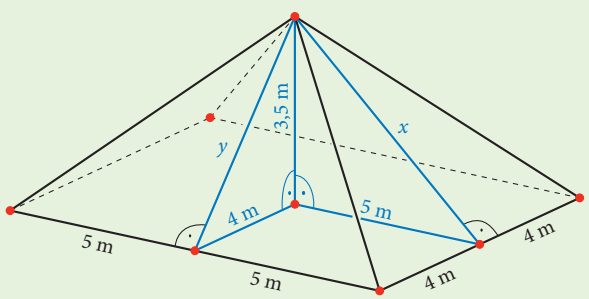
b) Számítsd ki a KPL háromszög területét!

c) Mekkora a KPL háromszög kerülete?



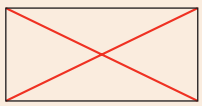
5 Egy 10 m × 8 m-es téglalap alapra 3,5 m magas tetőt készítettek. Hány m²-t kell cseréppel befedni?





HÁZI FELADAT

1 A tortát két vágással négyfelé vágtuk. Mind a négyen egy-egy részt kaptunk. Igazságos volt-e az osztozkodás?



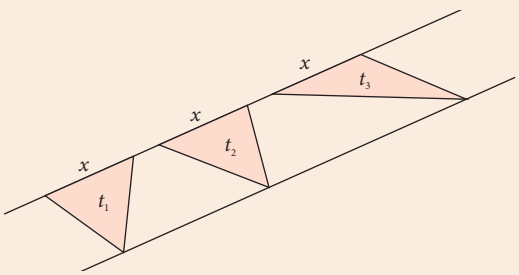
2 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 8 cm, szárai 15 cm hosszúak.

a) Mekkora az alaphoz tartozó magassága?

b) Mekkora a területe?

c) Milyen hosszúak a szárakhoz tartozó magasságok?

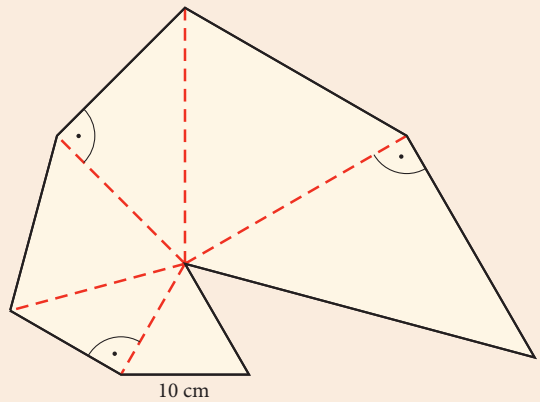
3 A háromszögek csúcsai két párhuzamos egyenesen vannak, és a jelzett oldaluk egyenlő hosszú (x). Melyik állítás igaz a területükre? Válaszod indokold!



A) $t_1 = t_2 = t_3$ C) $t_1 < t_2 < t_3$

B) $t_1 > t_2 > t_3$ D) $t_2 = t_1 > t_3$

4 A minta minden háromszöge szabályos háromszög vagy egyenlő szárú derékszögű háromszög.

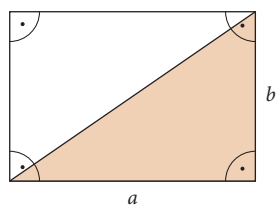


Számítsd ki a határoló nyolcszög kerületét és a területét!

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a háromszög területképletét! Ehhez először egy speciális háromszög, a derékszögű háromszög területét írjuk fel, a téglalap területképletének ismeretében.

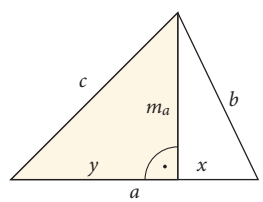
1. A derékszögű háromszög területe



Az a, b befogójú derékszögű háromszög területe $\frac{ab}{2}$,

mert ez egy a, b oldalú téglalap fele.

2. A hegyesszögű és a tompaszögű háromszög területe



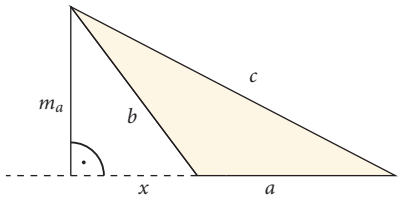
a) *A magasság a háromszög belsejében van.*

A háromszögünk két derékszögű háromszögre bomlik.

$$T = \frac{x \cdot m_a}{2} + \frac{y \cdot m_a}{2} = \frac{(x+y) \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

b) *A magasság a háromszögön kívül halad.*
A háromszögünkhöz hozzátoldunk egy derékszögű háromszöget.

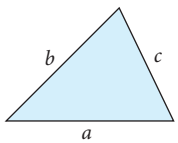
$$T = \frac{(a+x)\cdot m_a}{2} - \frac{x\cdot m_a}{2} = \frac{a\cdot m_a}{2}$$



Más képletek a háromszög területére

1. Héron képlete

Ha a háromszög kerületének felét *s*-sel jelöljük, bizonyítható, hogy területe így is kiszámítható: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

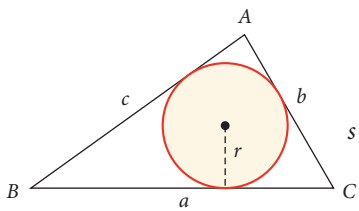


$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Például:
Egy háromszög oldalhosszúságai mm-ben: 13, 20 és 21. Ekkor $K = 54$, tehát $s = \frac{K}{2} = 27$, a háromszög területe pedig:

$$T = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 7^2} = 2\cdot 9\cdot 7 = 126 \text{ mm}^2.$$

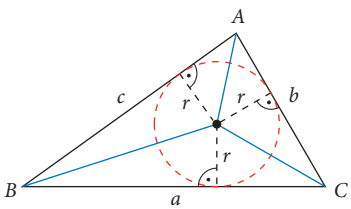
2. Ha a háromszög kerületének felét *s*-sel, a beleírt kör sugarát *r*-rel jelöljük, akkor a háromszög területe így is kiszámítható: $T = r\cdot s$.



$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Bizonyítás
Kössük össze a piros kör középpontját a háromszög csúcsaival! Így az *ABC* háromszöget 3 háromszögre bontottuk. E háromszögek egy-egy oldala *a*, *b*, illetve *c*, a hozzájuk tartozó magasság *r*, és a területük összege megadja az eredeti háromszög területét:

$$T = \frac{a\cdot r}{2} + \frac{b\cdot r}{2} + \frac{c\cdot r}{2} = r\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = r\cdot s.$$

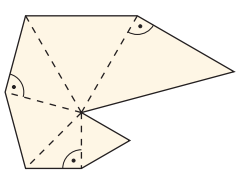


Például:
Az előző példánkban szereplő 13, 20, 21 oldalú háromszögbe írt kör sugara így könnyen kiszámítható: $r = \frac{T}{s} = \frac{126}{27} = \frac{14}{3}$ mm.

FELADAT

A minta minden háromszöge szabályos háromszög vagy egyenlő szárú derékszögű háromszög.

a) Mutasd meg, hogy a határoló szakaszok között vannak párhuzamosak!

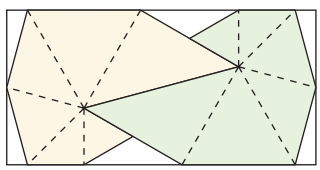


b) Egy téglalapból vágjunk ki két, a 4. házi feladatban adott alakzattal egybevágó alakzatot az ábrán lerajzolt módon! A 4. házi feladatban jelölt oldal hossza legyen 10 cm.

a) Mekkorák a téglalap oldalai?

b) Legalább hány százalék hulladék keletkezik?

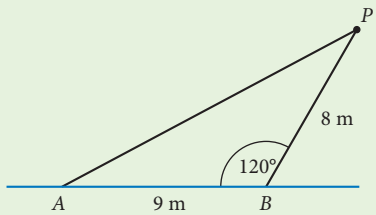
c) Legalább hány százalék a hulladék, ha a jelölt oldal 20 cm?



51 GYAKORLÁS; TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Milyen messze van az ábrán látható P pont az AB egyenestől és az A ponttól?



2 Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságvonala és a derékszög szögfelezője 20°-os szöget zárnak be egymással.

a) Határozd meg a háromszög hegyesszögeinek nagyságát!

b) Mekkora a háromszög köré írható kör sugara, ha az átfogó hossza 16 cm?

3 Mekkorák lehetnek azok a szögek, melyek

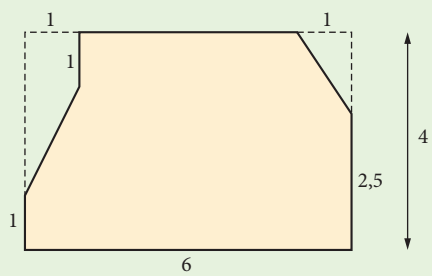
a) egymásnak pótszögei, és az egyik a másiknak 4,5-szerese;

b) egymás mellékszögei és különbségük 42°-os;

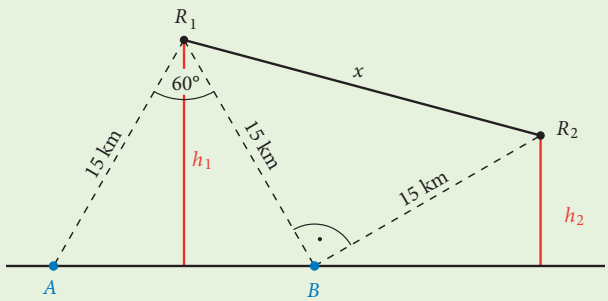
c) egyállású szögek és összegük 170°;

d) váltószögek, és az egyik 12°-kal kisebb, mint a másik?

4 Az ábrán egy téglalap alakú lemezből kivágott alkatrész látható. A feltüntetett hosszúságok cm-ben értendők. Mekkora a lemez területe?



5 A repülőgép az A és a B irányjelzőtől is 15 km távolságban volt az R_1 helyen, amikor gyorsan süllyedni kezdett. Amikor az R_2 helyre ért, a B irányjelzőtől ismét 15 km távolságra volt. (Az ábra mutatja a repülő fedélzeti számítógépe által kiszámított szögeket is.)
(Az A, B, R_1 és R_2 pontok ugyanabban a függőleges síkban vannak.)



a) Mekkora magasságban (h_1) volt a repülőgép az R_1 helyen?

b) Mekkora távolságra (x) van R_2 az R_1 helytől?

c) Hány km-t süllyedt a repülő, amíg R_2-be ért?

d) Mekkora szöget zár be a vízszintessel az R_1R_2 egyenes?

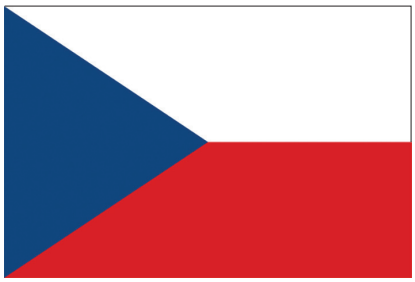
6 Szerkessz olyan ABC háromszöget, amely oldalainak hossza: $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 4$ cm! Jelöld színessel a háromszög oldalain lévő azon pontokat, melyekre teljesül, hogy közelebb vannak a C ponthoz, mint a B-hez, és ugyanakkor az A ponttól való távolságuk legalább 1 cm!

7 Egy K középpontú, r sugarú körhöz (a kör síkjában lévő) P pontból húzott PE érintőszakasz hossza 40 cm. Tudjuk még, hogy $KP + r = 50$ cm. Határozzuk meg a KPE háromszög területét!

8 (Érettségi feladat, 2005)
Kör alakú amfiteátrum küzdőterének két átellenes pontjában, egy átmérő két végpontjában áll egy-egy gladiátor, az uralkodó a pálya szélén ül. A gladiátorok egyenes vonalban odafutnak az uralkodóhoz. Az egyik 20 métert, a másik 1 méterrel többet tesz meg, amíg odaér. Mekkora az amfiteátrum sugara? Készíts ábrát is a megoldáshoz!

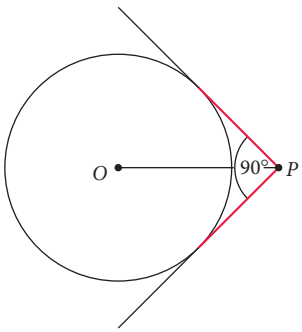
TUDÁSPRÓBA

1 Csehország zászlaja egy szabályos háromszöget tartalmaz, amely éppen a zászló közepéig nyúlik be.



Mekkorák a zászló egyes részeinek területei, ha a zászlót alkotó téglalap rövidebbik (függőleges) oldala éppen 1 m hosszú?

2 Egy O középpontú kör sugara 5 egység. A körhöz egy külső P pontból érintőket húzunk, amelyek éppen 90°-os szöget zárnak be egymással.



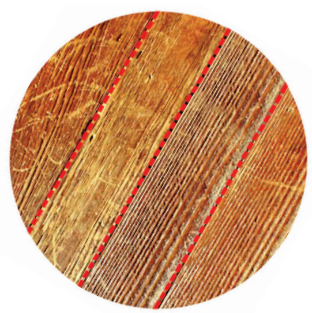
a) Mekkora az OP távolság?
b) Milyen hosszúak a P-ből a körhöz húzott érintő szakaszok?

3 Mekkora szöget zár be egymással a háromszög két-két magasságvonala, ha a háromszög szögei közül az egyik 70°-os és egy másik 30°-os nagyságú?

4 Milyen magas a városháza tornya? Azt tudjuk, hogy amikor a Nap sugarai 30°-os szögben érik a talajt, akkor a torony árnyéka 42 méter.

5 **a)** Szerkessz derékszögű háromszöget, ha átfogójának hossza 6 cm, és az átfogóhoz tartozó magasság 4 cm hosszú!
b) Szerkeszd meg az előbbi derékszögű háromszög beírható körét!

6 A képen látható kerék átmérője 80 cm, és négy egyforma széles deszkalapból faragták, amelyeket azután egymás mellé illesztettek. Milyen hosszúak az egyes illesztések (az ábrán pirossal jelölve).



TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Hány fokos szöget zárnak be egymással az óramutatók

a) 2:45-kor,

b) 16:40-kor?

2 a) Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 40°-os. Mekkorák a háromszög szögei?

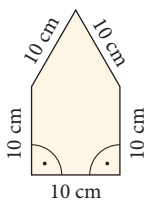
b) Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő egyik szög 80°-os. Mekkorák a háromszög szögei?

c) Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögeinek szögfelezői 150°-os szöget zárnak be egymással. Mekkorák a háromszög szögei?

3 Egy háromszög oldalhosszai centiméterben kifejezve egész számok. Két oldal hossza 3 cm és 7 cm. Hány ilyen háromszög van? Mekkora lehet a háromszögek kerülete?

4 Melyik téglalap átlója hosszabb: amelynek oldalai 3,4 cm és 4,5 cm hosszúak, vagy amelynek oldalai 2,8 cm és 4,9 cm hosszúak?

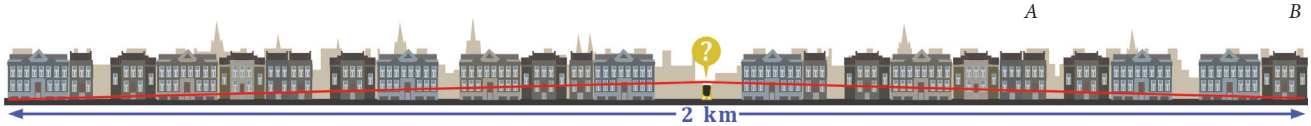
5 Áron azt a feladatot kapta, hogy egy 55 cm hosszú, 29 cm széles, téglalap alakú kartonlapból vágjon ki 10 db egyforma „házikót” az ábra szerinti méretekkel.



a) Számítással mutasd meg, hogy Áron feladata megoldható!

b) Számítsd ki, hány százalék hulladék keletkezett!

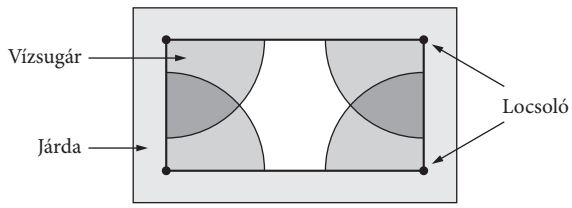
6 Az Andrássy út egyik végétől kiindulva 2000 m hosszan egy kötelet szeretnénk kifeszíteni. A kötél két végét rögzítjük is az egymástól pontosan 2 km távolságra lévő pontok között, de kiderül, hogy a kötél 2001 méter hosszú, ezért nem feszes. Milyen magasra tudnánk felemelni a kötelet, ha a közepénél felemelve kifeszítenénk? Átférne alatta a 4-6-os villamos?



7 Egy téglalap oldalai 7 cm és 9 cm hosszúak. Milyen messze van a téglalap egyik csúcsa a téglalap két átlójától?

8 (Kompetenciamérés, 2013)

Téglalap alakú kertekhez találták ki az olyan locsolót, amely egy negyedkör (derékszögű körcikk) alakú területet locsol meg, így a kert sarkába állítva csak a kertet öntözi, ahogy a következő ábra mutatja. Egy 3 méter széles és 4 méter hosszú (téglalap alakú) virágoskertben milyen legkisebb hatósugarú locsolókra van szükség ahhoz, hogy a kert egész területe meg legyen öntözve?



9 Egy háromszög belső szögeinek aránya 10 : 11 : 15. Hány fokos a legkisebb külső szög?

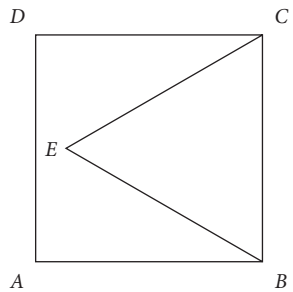
10 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, és két szöge 30°-os.

a) Mekkora az alaphoz tartozó magassága?

b) Mekkora a szárhoz tartozó magassága?

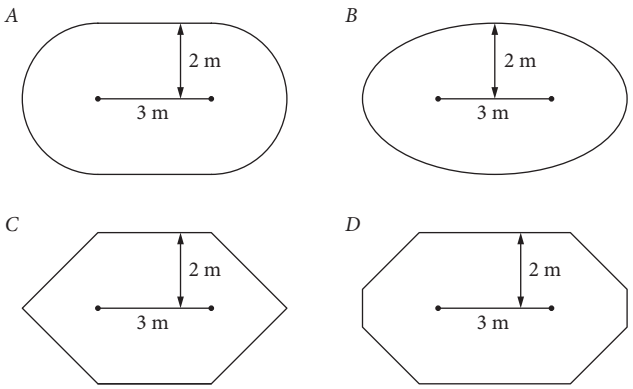
11 (Érettségi feladat, 2019)

Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 12 egység. A négyzet belsejében kijelöltük az E pontot úgy, hogy $BE = CE = 12$ egység legyen (lásd az ábrát). Számítsd ki az A és E pontok távolságát!



12 Egy téglalap átlója az egyik oldal kétszerese. Mekkora az átlóinak a hajlásszöge?

13 (A 2006. évi Kompetenciamérés nyomán)
Egy 3 méter szélességű biztonsági kapu a kapu alapvonalának minden pontjától legfeljebb 2 méter távolságig érzékeli a mozgást. Az alábbi ábrák közül melyik mutatja a kapu által biztosított területet az alapvonal síkjában?



14 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara és az egyik hegyesszöge!

15 Egy háromszög szögei 68° és 76°. Megrajzoljuk a beírható körét, s azt a három pontot, ahol az oldalak érintik a beírható kört. A három érintési pont alkot egy háromszöget. Mekkorák ennek a háromszögnek a szögei?

16 Szerkessz háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara, egyik oldala és az oldalon lévő egyik szög!

17 Szerkessz háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara, egyik oldala és az oldalhoz tartozó súlyvonala!

18 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara és az alapja!

19 Egy háromszöget a középvonalaival négy háromszögre bontunk. Ezek kerületeinek összege 32 cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

20 Egy derékszögű háromszög egyik befogója 7 cm. Milyen távol van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

21 Egy derékszögű háromszög befogói 45 mm és 28 mm hosszúak. Milyen messze van a súlypontja a derékszögű csúcstól?

22 Egy derékszögű háromszög egyik befogója 39 mm, átfogója 89 mm. A súlypontját összekötjük a csúcsaival, így három darab háromszögre bontjuk. Mennyi a keletkező háromszögek kerülete?

23 Vegyél fel a füzetedben három, nem egy egyenesre eső pontot! Jelöld el a pontokat A, B és S betűkkel! Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelynek két csúcsa A és B, súlypontja pedig S!

24 Egy derékszögű háromszög befogói 20 mm és 21 mm. Milyen messze van a befogók felezőpontjától a derékszögű csúcsból húzott magasság talppontja?

25 Egy 2,4 cm sugarú körhöz egy külső P pontból meghúztuk a két érintőt. Az érintők 120°-os szöget zárnak be egymással. Milyen messze van P a kör középpontjától?

26 Egy háromszög oldalai 15 cm, 20 cm és 25 cm. Mekkora a köré írható kör sugara?

27 Egy ABC háromszögben az A-ból, illetve a B-ből húzott magasságok talppontjai legyenek T_a és T_b! Határozzuk meg az AB oldal ismeretében, hogy milyen távol vannak ezek a talppontok az AB oldal felezőpontjától? Indokold a válaszodat!

28 Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy az átfogója négyszerese a hozzá tartozó magasságnak.
a) Készíts ábrát a háromszögről és a hozzá tartozó Thálész-körről!
b) Mekkorák a háromszög szögei?

29 Egyes országok (pl. Salamon-szigetek, Bhután, Namíbia vagy Tanzánia) nemzeti lobogójának alapja az átlósan kettéosztott téglalap. Az ábrán a Salamon-szigetek zászlaja látható.



A téglalap 1 : 2 oldalaránnyal rendelkezik, a középen átívelő sárga csík az oldalak huszadolópontjait köti össze.

Legyen a téglalap rövidebbik oldalhossza 1 egység, a hosszabbik 2 egység.

a) Számítsd ki, hogy mekkora a zöld és a kék háromszögek területe!

b) Számítsd ki a három tartomány kerületét!

30 A képen Namíbia zászlaja látható. A zászló 2 : 3 oldalaránnyal rendelkezik. A fehér csíkok az oldalak $\frac{16}{20}$-a és $\frac{17}{20}$-a közötti szakaszokat kötik össze.



Legyen a téglalap rövidebbik oldala 2 egység, a hosszabbik oldala 3 egység.

a) Számítsd ki a kék és zöld háromszögek területét!

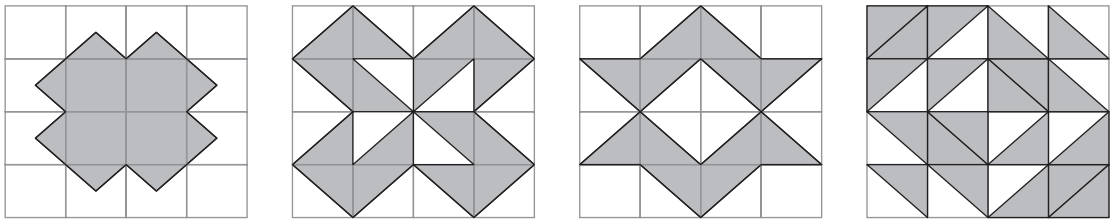
b) Számítsd ki a zöld és a kék háromszög kerületét is!

31 (Kompetenciamérés, 2014)

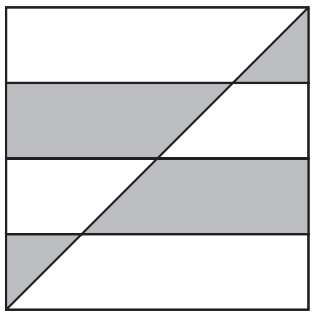
Krisztina ágytakarót szeretne készíteni fehér és sötétkék színű anyagból. Mindkét anyag 2 méter széles, a fehérből egy 1,5 méter hosszú, a sötétkékből egy 2,5 méter hosszú darabja van. Az anyagokat négyzet és háromszög alakú darabokra vágva, majd ezeket összevarrva szeretne összeállítani egy négyzet alakú ágytakarót a következő ábrákon látható minták valamelyike szerint.

Melyik mintát válassza Krisztina, ha az összes anyagot szeretné felhasználni?

Válaszod indokold!



32 (Kompetenciamérés, 2003)

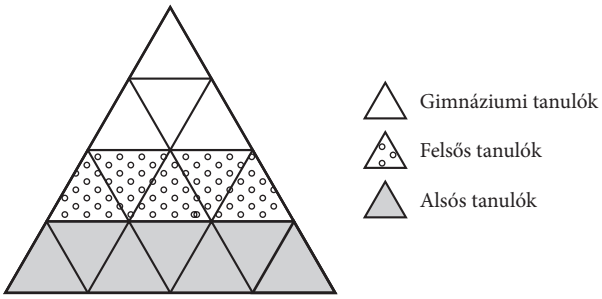


Egy négyzetet az ábrán látható módon, négy azonos méretű (egybevágó) téglalapra osztunk fel, meghúzzuk egyik átlóját, majd az így kapott alakzatokat az ábrán látható módon beszínezzük.

Hányad része a sötéttel színezett rész területe az eredeti négyzet területének?

33 (Kompetenciamérés, 2013)

A következő diagram egy 12 évfolyamos iskola tanulói összetételét mutatja.



A táblázatok közül melyik mutatja helyesen az iskolába járó tanulók összetételét?

A)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	420
Felsős tanulók	375
Gimnáziumi tanulók	120

B)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	315
Felsős tanulók	225
Gimnáziumi tanulók	180

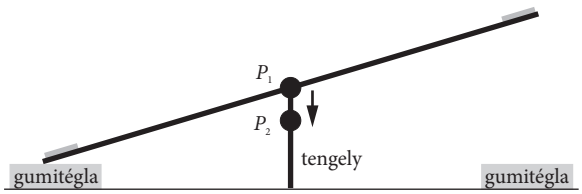
C)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	280
Felsős tanulók	257
Gimnáziumi tanulók	204

D)

Tanulók	Fő
Alsós tanulók	475
Felsős tanulók	395
Gimnáziumi tanulók	305

34. (Kompetenciamérés, 2016)
Egy mérleghinta rögzített pontja 90 cm-es magasságnál található (P_1 pontban), de 60 cm-es magasságra „leengedhető” (P_2 pontba), ahogyan az ábrán látható.



A talajhoz ütközés csillapítására gumitéglát helyeznek el a mérleghinta alatt. Ahol az ülés vége a gumitéglával érintkezik, a gumitégla idővel elkopik, elszíneződik.
Melyik igaz az alábbiak közül?

A Ugyanott kopik a gumitégla a 60 cm és a 90 cm-es beállításnál.

B 60 cm-es rögzítésnél a mérleghinta tengelyéhez közelebb kopik a gumitégla, mint a 90 cm-es rögzítésnél.

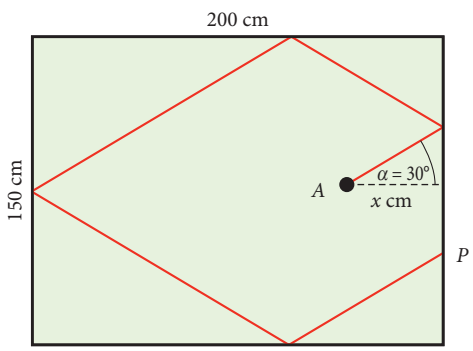
C 60 cm-es rögzítésnél a mérleghinta tengelyétől távolabb kopik a gumitégla, mint a 90 cm-es rögzítésnél.

D Ennyi adatból nem határozható meg, hogyan helyezkedik el egymáshoz képest a két kopásvonal.

35. Az ábrán egy biliárdasztalt látunk. Az A egyenlő távolságra van az asztal hosszabb oldalaitól.

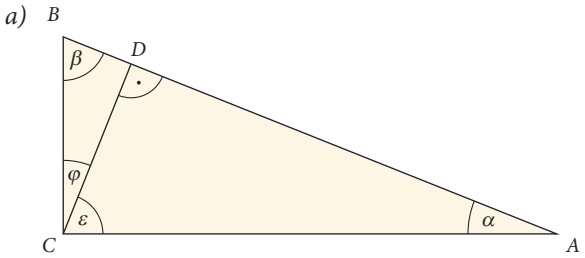
a) Mekkora utat tesz meg a golyó, míg A-ból a P pontba jut, ha $x = 50$ cm?

b) Megválasztható-e az x értéke úgy, hogy a P pontból való visszapattanás után a biliárdgolyó ismét áthaladjon a kiindulási helyén (A)?

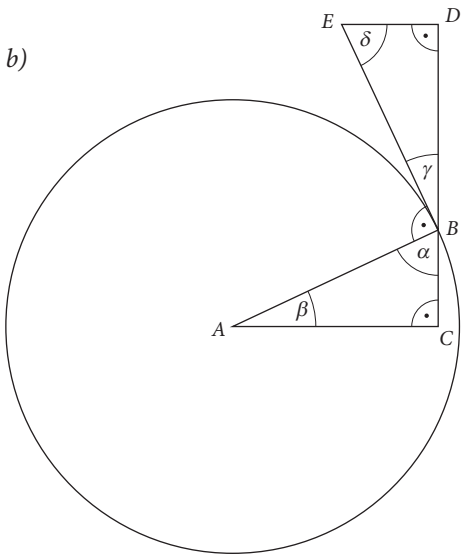


36. Az ABC háromszög C-nél derékszögű. Keress az ábrákon merőleges szárú szögeket!

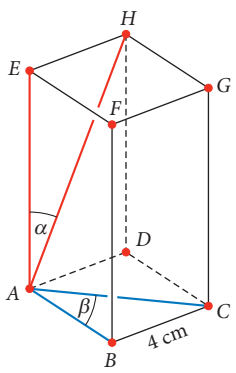
a)



b)



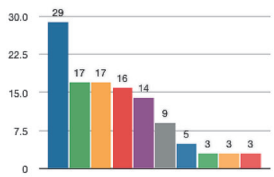
37. Egy négyzetes oszlop felületén bejelöltük az α és β hegyesszöget. Az α szög AE szára merőleges a β szög AC szárára, és az α szög AH szára merőleges a β szög AB szárára. Tehát $\alpha = \beta$.
Helyes-e ez a következtetés? Miért?

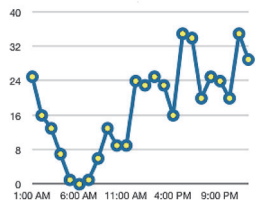


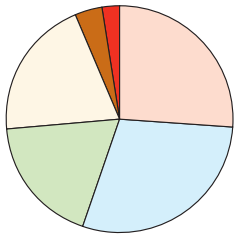
52 TÁBLÁZATOK

BEVEZETŐ

A matematika egyik fontos feladata, hogy nagy mennyiségű összegyűjtött adatból általános következtetéseket vonjon le, ezek segítségével tájékozódjon a jelenben, illetve megpróbálja jövőbeni események lefolyását megjósolni. Az adatok összegyűjtésével, rendszerezésével és elemzésével foglalkozik a statisztika.







KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy rendőrségi traffipax (sebességmérő radar) az autópályán tíz perc alatt a következő sebességeket mérte (az adatok $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban értendők):

130, 130, 128, 128, 120, 115, 130, 127, 127, 125, 130, 130, 132, 140, 132, 127, 125, 128, 130, 127, 130, 125, 128, 132, 130, 130, 127, 128, 162, 130, 135, 132, 130, 120, 125, 127, 130, 128, 132, 128, 127, 125, 130, 130, 128, 130, 125, 130, 132, 128, 128, 130, 140, 135, 130, 130, 120, 130, 130, 127.

Mennyire jellemző az elhaladó autósokra a 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességhatár megszegése?

Megoldás

Az adatok jobban áttekinthetővé, gyorsabban és könnyebben feldolgozhatóvá válnak, ha azokat rendszerezzük, **táblázatba** foglaljuk. A táblázat megmutatja, hogy bizonyos sebességgel hány autós közlekedett. A táblázat alapján könnyen megállapíthatjuk, hogy 11 autó lépte túl a sebességhatárt.

Sebesség (km/h)	115	120	125	127	128	130	132	135	140	162	Összesen:
Autók száma (gyakoriság)	1	3	6	8	10	21	6	2	2	1	60

Más szavakkal: a mérések között a 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-t meghaladó sebességek **gyakorisága** 11 volt.

Önmagában ez a szám nem sokat árul el arról, hogy az autósok általában betartják-e a szabályt, mert nem mindegy, hogy pl. 60 megmért sebesség között volt 11 szabálytalan, vagy mondjuk 22 megmért sebesség között találtak 11-et.

Szemléletesebbé tehetjük a szabálysértések számát úgy, ha megadjuk, hogy a vizsgált esetek mekkora részében voltak szabálytalanok az autóvezetők.

A 11 a 60-nak a $\frac{11}{60}$ része, azaz kb. 18%-a. Ez az arány a 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-t átlépők számának **relatív gyakorisága** a 60 mért sebesség között.

A sebességhatárt jelentősen, azaz 10%-ot meghaladó mértékben túllépők gyakorisága 1, relatív gyakorisága pedig $\frac{1}{60} \approx 0{,}017$ ($\approx$ 1,7%) volt.

ELMÉLET

Ha egy kísérletet, megfigyelést n-szer végeztünk el, és k-szor kaptunk meg egy eredményt, akkor azt mondjuk, hogy ennek az eredménynek a **gyakorisága** k, a **relatív gyakorisága** pedig $\frac{k}{n}$.

Itt az n pozitív egész, a k nemnegatív egész szám és $k \leq n$.

A relatív gyakoriság jobban jellemzi az eseményt, mint a gyakoriság, mert azt mutatja meg, hogy *az esetek hányadrészében* kaptuk meg a vizsgált eredményt.

Az olyan táblázatot, amely az egyes adatok előfordulásának *arányát* mutatja, **relatív gyakorisági táblázatnak** nevezzük.

A relatív gyakoriságot a könnyebb érthetőség kedvéért sokszor százalékban adják meg.

Az ilyen típusú feladatok megoldása során figyelj a kerekítésekre, és ellenőrizd, hogy az egyes sorokban lévő relatív gyakoriságok összege 1-et adjon, a százalékban kifejezett értékek összege pedig 100%-ot!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Egy cipőbolt eladói egy délután statisztikát készítettek a náluk vásárolt cipők méretéről. A táblázatban azt is feltüntették, hogy a vevők milyen arányban vásárolták az egyes méreteket.

A táblázat alapján válaszoljunk a következő kérdésekre!

a) Milyen méretű cipőből vettek a legtöbbet (melyik volt a leggyakoribb eladott méret)?

b) Az összes eladott pár cipő hányadrésze volt 40-es (mekkora volt az eladott cipők között a 40-es méretűek relatív gyakorisága)?

c) Az eladások között mekkora volt a 42-es vagy annál kisebb méretű lábbeli eladásának gyakorisága?

Cipőméret	Vásárlók száma (gyakoriság)	Relatív gyakoriság	
		Arány	% (egészre kerekítve)
38	2	2/60	3
39	3	3/60	5
40	6	6/60	10
41	8	8/60	13
42	11	11/60	18
43	13	13/60	22
44	9	9/60	15
45	8	8/60	13
Összesen:	60	60/60	100

Megoldás

a) A táblázat alapján 43-asból.

b) 60 párból 6, azaz az eladott cipők $\frac{6}{60}$ része volt 40-es.

Megjegyzés: Mivel $\frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1$, válaszunkat így is megfogalmazhatjuk: az eladott cipők 0,1 része (10%-a) volt 40-es.

c) $2 + 3 + 6 + 8 + 11 = 30$.

A relatív gyakoriság kiszámítását *táblázatkezelő programra* is bízhatjuk.



FELADAT

1. Egy osztály tanulói egy 20 pontos röpdolgozatra a következő pontszámokat kapták:
15, 16, 10, 15, 13, 12, 17, 15, 16, 20, 19, 15, 16, 13, 10, 6, 10, 19, 16, 13, 14, 17, 12, 17, 15, 14, 16, 19, 10, 12.
Rendezd az adatokat gyakorisági táblázatba! Add meg az egyes adatok relatív gyakoriságát is!

2 Megkérdeztek 25, harminc év alatti fiatalt, hogy 2019-ben hány alkalommal voltak színházban. A válaszok a következők voltak: 5, 3, 0, 4, 7, 5, 6, 2, 0, 4, 10, 4, 6, 8, 4, 2, 0, 1, 5, 3, 6, 9, 3, 5, 0.

a) Rendezd a válaszokat gyakorisági táblázatba, és add meg az egyes válaszok relatív gyakoriságát is! A füzetedben dolgozz!

b) Az adatok feldolgozásakor megvizsgálták, mennyi a megkérdezettek között azoknak a relatív gyakorisága, akik **legfeljebb** egyszer, **legfeljebb** kétszer, …, **legfeljebb** 10-szer voltak színházban. Töltsd ki a táblázatot te is! A füzetedben dolgozz!

	Gyakorisága	Relatív gyakorisága
Egyszer sem		
Legfeljebb 1-szer		
Legfeljebb 2-szer		
Legfeljebb 3-szor		
Legfeljebb 4-szer		
Legfeljebb 5-ször		
Legfeljebb 6-szor		
Legfeljebb 7-szer		
Legfeljebb 8-szor		
Legfeljebb 9-szer		
Legfeljebb 10-szer		

3 Teri mama szerencseszámai a 3, a 7 és a 13. A hatoslottón a 2000–2007 években 426-szor történt húzás, és minden alkalommal hat számot húztak ki. Az eredményeket összesítve Bence azt látta, hogy Teri mama számait rendre 59, 56, illetve 63 alkalommal húzták ki (a hatoslottón az első 45 pozitív egész szám közül húznak ki 6-ot).

a) Számítsd ki Teri mama szerencseszámainak relatív gyakoriságát a 426 húzás alapján!

b) Ugyanezt a 426 húzást vizsgálva látható, hogy a leggyakrabban kihúzott szám a 35 (69 alkalommal húzták ki), a legritkábban kihúzott pedig a 19 volt (42-szer húzták ki). Mekkora a 35 és a 19 relatív gyakorisága a vizsgált húzások során?

c) Mennyi lenne az egyes lottószámok gyakorisága, illetve relatív gyakorisága a 426 húzás során, ha mindegyiket ugyanannyiszor (vagy legalábbis majdnem ugyanannyiszor) húzták volna ki? Ennek alapján valóban szerencseszámoknak nevezhetőek-e Teri mama kedvenc számai?

HÁZI FELADAT

1 Egy autókereskedő hónapról hónapra feljegyezte az eladott autók számát:

Hónap	Január	Február	Március	Április	Május	Június	Július	Augusztus	Szeptember	Október	November	December
Eladott autók száma	14	16	20	19	11	12	12	18	20	17	11	18

a) Összesen hány autót adott el a kereskedő az év során?

b) Hány autót adott el az első negyedévben?

c) Egészítsd ki a táblázatot egy harmadik sorral, amely azt mutatja, hogy az adott hónap végéig hány autót adott el a kereskedő az év során összesen!
Melyik hónapban lépte át az addig eladott autók száma a 100-at?

d) Melyik hónap folyamán érte el az éves eladás 50%-át?

2 Egy főút mentén 15 percen keresztül forgalomszámlálást végeztek. Az eredmények nyers formában itt láthatók:

Személyautó: 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
Teherautó: 𝍸 𝍸 |
Autóbusz: 𝍸 ||
Motorbicikli: 𝍸 |||
Egyéb jármű: ||

a) Hány jármű haladt el a számláló előtt az egyes fajtákból?

b) Az elhaladó járművek hányadrésze volt teherautó, és mekkora volt az autóbuszok relatív gyakorisága?

c) Készítsd el az adatok gyakorisági és relatív gyakorisági táblázatát!

3 500 készüléket ellenőriznek úgy, hogy véletlenszerűen kiválasztanak közülük harmincat, és megszámolják, hogy hány hibás van közöttük. Ezt a vizsgálatot tízszer végzik el. A táblázat a vizsgálatsorozat eredményét mutatja. Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

Hibás készülékek száma a mintában (db)	Gyakorisága	Relatív gyakorisága
0	1	
1	4	
2	3	
3	2	
4 vagy több	0	

4 A következő táblázat azt mutatja, hogyan sikerült a legutóbbi matematika felmérő dolgozat egy gimnázium három kilencedikes osztályában:

Osztály	A dolgozatjegyek									
	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
	gyakorisága					relatív gyakorisága				
9. A	7	6	4	1	1					
9. B	3	4	10	2	0					
9. C		12				0,083	0,5		0,333	0,083

Mi kerül a táblázat üresen hagyott celláiba? (A füzetedben dolgozz!)

RÁADÁS

A legjobb autó

Egy autósújság az új autók értékeléséhez egy pontrendszert használ, és az Év autója címet annak az autónak adja, amelyik a legtöbb pontot éri el. Öt új autót értékelnek, amelyek pontszámait a mellékelt táblázatban láthatjuk.

Autó	Biztonsági felszereltség (B)	Üzemanyag-felhasználás (Ü)	Külső megjelenés (K)	Belső felszereltség (F)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

A pontszámok jelentése a következő: 3 pont = kitűnő; 2 pont = jó; 1 pont = közepes.

a) Egy autó összpontszámának kiszámításához az újság az alábbi szabályt használja, ami tulajdonképpen az egyes pontszámok súlyozott összesítése:
összpontszám = $(3 \cdot B) + Ü + K + F$.

Számítsd ki mind az öt autó összpontszámát, és rakd az autókat ez alapján sorrendbe! Melyik autó a győztes?

b) A „Ca” autó gyártója úgy gondolja, hogy az összpontszám kiszámításának szabálya nem igazságos.
Írj egy olyan számítási szabályt, amely alapján a „Ca” autó lenne a győztes!
Az általad megadott szabályban szerepelnie kell mind a négy változónak. Úgy add meg a szabályt, hogy az alábbi egyenlet négy pontozott vonalára pozitív számokat írsz! A füzetedben dolgozz!

Összpontszám = ... · B + ... · Ü + ... · K + ... · F.

53 DIAGRAMOK

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy érmét 20-szor feldobva a következő sorozatot kaptuk: F, F, F, I, I, F, I, I, I, I, I, F, I, I, F, I, F, F, I. (Az F azt jelenti, hogy „fejet” dobtunk, az I pedig azt, hogy „írást”.)

a) Mennyi a fej és az írás relatív gyakorisága?

b) Ábrázoljuk a relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon és kördiagramon!

c) Minden egyes dobás után adjuk meg a fej gyakoriságát az addigi dobások közül, és számítsuk ki a fej relatív gyakoriságát is! Az eredményeket foglaljuk táblázatba, majd ábrázoljuk vonaldiagramon a relatív gyakoriság változását!

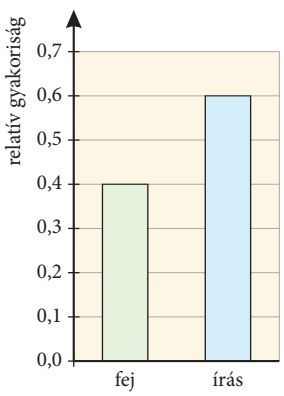
Megoldás

a) A 20 dobásból álló sorozatban a fej gyakorisága 8, az írásé pedig 12. A fej relatív gyakorisága $\frac{8}{20} = 0{,}4$, az írásé pedig $\frac{12}{20} = 0{,}6$.

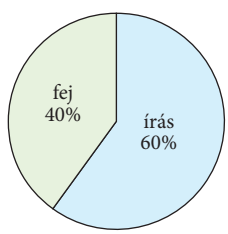
b) A kördiagram elkészítéséhez a 360°-ot 0,4 : 0,6 arányban fel kell osztani. 0,4 : 0,6 = 4 : 6, ezért a 360°-ot 4 + 6 = 10 egyenlő részre kell felosztani (1 rész = 36°), majd ezt az értéket 4-gyel, illetve 6-tal szorozni (144°, 216°). Ugyanezt kapjuk eredményként, ha a 20 dobásnak megfelelő teljes szöget, vagyis a 360°-os szöget osztjuk fel 8 : 12 arányban.

c)

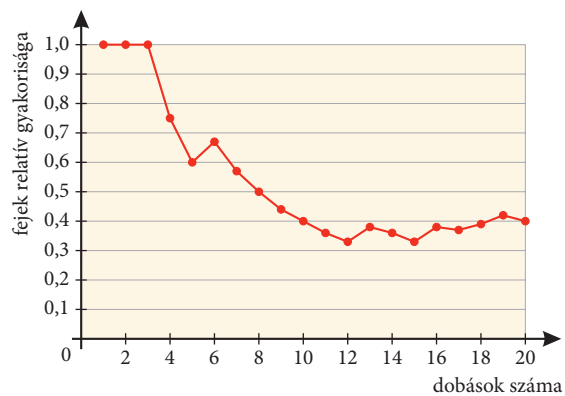
Dobások száma	Fej gyakorisága	Fej relatív gyakorisága
1	1	1
2	2	1
3	3	1
4	3	0,75
5	3	0,60
6	4	0,67
7	4	0,57
8	4	0,50
9	4	0,44
10	4	0,40
11	4	0,36
12	4	0,33
13	5	0,38
14	5	0,36
15	5	0,33
16	6	0,38
17	6	0,35
18	7	0,39
19	8	0,42
20	8	0,40



oszlopdiagram



kördiagram



vonaldiagram

ELMÉLET

A táblázatoknál szemléletesebb az adatok **grafikon**on, **diagram**on való ábrázolása, mert azok látványosabb módon adnak információt, és átláthatóbbá teszik az adathalmazt, az adatok változásának mértékét.

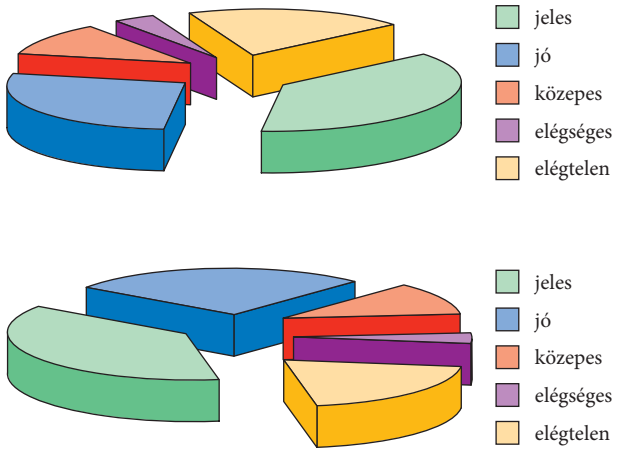
Az **oszlopdiagram**ot azonos szélességű téglalapok alkotják, melyek magassága arányos az ábrázolt adatok értékével. Használata célszerű, ha az adatok változását, egymáshoz való viszonyát akarjuk szemléltetni. Használata nem célszerű, ha van kiugróan nagy adat, vagy ha nagyon kicsi az eltérés az adatok között.

Az oszlopdiagram elkészítésekor fontos a **lépték** helyes megválasztása és **arányos** használata a gyakoriságokat magában foglaló (általában függőleges) tengelyen. Fontos, hogy a tengely számozását 0-val kezdjük, mert a diagram így lesz informatív, és így mutatja korrekt módon (nem megtévesztően) az adatok közötti kapcsolatokat.

A **vonaldiagram** a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt görbe vagy összefüggő töröttvonal. Használata célszerű, ha szemléltetni szeretnénk az adatok egymáshoz való viszonyát, (leginkább időbeli) megváltozását.

Kördiagramon ábrázoljuk az adatokat, ha azok relatív gyakoriságát szeretnénk szemléltetni. A teljes kör (360°-os középponti szögű körcikk) jelenti az adatok egészét (100%-ot). A kört olyan **körcikk**ekre bontjuk, melyek **középponti szög**einek nagysága az ábrázolandó adatok relatív gyakoriságaival egyenes arányban áll. Kördiagram használata nem ideális túl sok adat esetén, vagy ha több kicsi és több nagy adat van a vizsgálandók között.

Vigyázni kell azzal, hogy a kördiagram különböző térbeli megjelenítése rossz következtetésekre adhat okot.



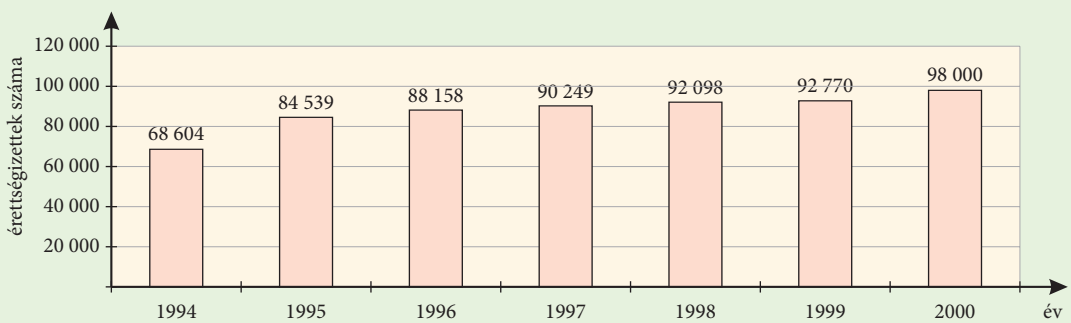
Ugyanazon adatok ábrázolása más szemszögből

FELADAT

1 Ábrázold vonaldiagramon az írások relatív gyakoriságának változását a kidolgozott feladatban!

2 Egy iskola menzáján 270-en ebédelnek. Ezen a héten 150-en választották az A menüt és 120-an a B menüt. Számold ki a kétféle menü választásának relatív gyakoriságát százalékban egy tizedesjegy pontossággal, és ábrázold a kapott értékeket oszlopdiagramon és kördiagramon is!

3 Foglaljuk táblázatba az oszlopdiagramon megjelenített adatokat! Egészítsük ki a táblázatot az érettségizők számának az előző évhez viszonyított változását szemléltető mezőkkel!



4 Egy iskola menzáján 270-en ebédelnek. Ezen a héten 90-en választották az A menüt, 135-en a B menüt, és 45-en a C menüt. Számold ki a háromféle menü választásának relatív gyakoriságát százalékban egy tizedesjegy pontossággal, és ábrázold a kapott értékeket oszlopdiagramon és kördiagramon is!

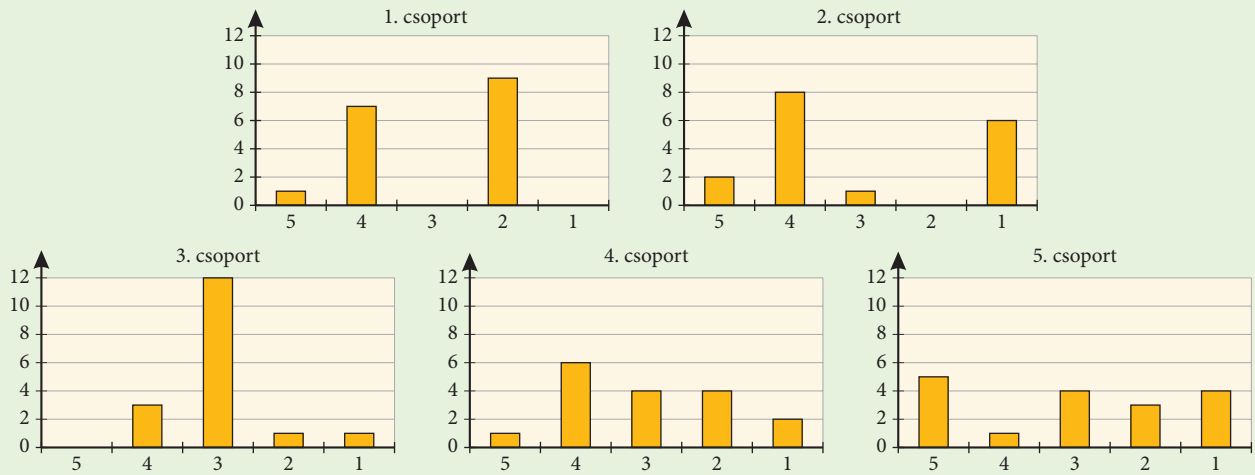
5 Egy iskolában öt 17 fős diákcsoport ugyanazt a témazáró dolgozatot írta matematikából. A diagramok az egyes csoportok eredményét mutatják.

a) Készíts táblázatot az egyes csoportok érdemjegyeinek eloszlásáról (gyakoriságáról)!

b) Egészítsd ki a táblázatot az egyes csoportok átlagosztályzatával!

c) Készíts gyakorisági táblázatot a 85 tanuló osztályzatairól, és számítsd ki a témazáró dolgozatból elért átlagos osztályzatot!

d) Jellemezd az egyes csoportok teljesítményét a saját szavaiddal! Melyik csoport teljesítményét jellemzi jól az átlagos osztályzat, és melyikét nem? Miért?



HÁZI FELADAT

1 Egy osztály tanulói körében a testvérek száma a táblázat szerinti gyakorisággal fordul elő.

Testvérek száma	0	1	2	3
Gyakoriság	7	11	5	2
Relatív gyakoriság				

a) Add meg a testvérek számának relatív gyakoriságát százalékban! Válaszod egy tizedesjegy értékre kerekítve add meg! (A füzetedben dolgozz!)

b) Készíts oszlopdiagramot a relatív gyakoriságokról!

c) Ha az osztály évzáró bulit rendez, amelyre eljön az összes család minden gyereke, akkor hány gyerek lesz a buliban?

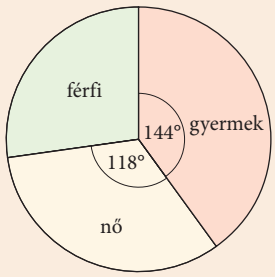
2 Egy iskola menzáján 240-en ebédelnek, és háromféle menü közül választhatnak. A táblázat az egyes menüket választók relatív gyakoriságát mutatja.

	A menüt választók száma	Relatív gyakorisága
„A” menü		0,55
„B” menü		0,3
„C” menü		0,15

a) Számold ki, hányan választották az egyes menüket! (A füzetedben dolgozz!)

b) Ábrázold kördiagramon az egyes menüket választók gyakoriságát!

3 A kördiagram egy 5400 lakosú település lakosságának megoszlását mutatja. Add meg a férfiak, a nők és a gyermekek százalékos eloszlását és létszámát!



4 A következő táblázat azt mutatja, hogyan sikerült a legutóbbi matematika felmérő dolgozat egy gimnázium négy kilencedikes osztályában:

Az osztály		A hiányzók száma	A dolgozatjegyek									
jele	létszáma		5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
			gyakorisága					relatív gyakorisága				
A	33		8			3	2	0,25		0,219		
B		0	7	10		2	2			0,25		
C	29	4							0,32	0,24	0,16	0,08
D	31	1	4	8	13		1					

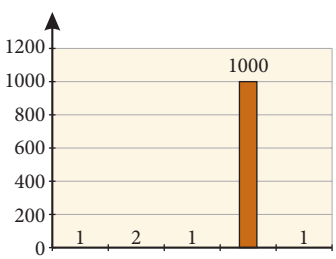
a) Töltsd ki a táblázat üresen hagyott celláit! A füzetedben dolgozz!
b) Ábrázold közös grafikonon más-más színnel a négy osztály jegyeinek relatív gyakoriságát!
c) Készíts táblázatot arról, hányan kaptak az egyes osztályokban legalább egyest, legalább kettest, legalább hármast, legalább négyest, legalább ötöst! Számítsd ki a relatív gyakoriságokat is! Készíts grafikont!

Az ábrázolás megoldható a *Graph* program segítségével is.

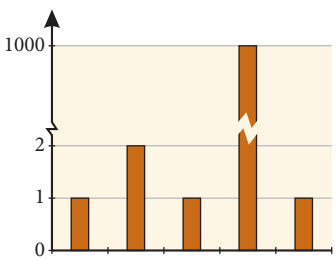
RÁADÁS

A diagramok fő célja, hogy segítségükkel könnyen értelmezhető, áttekinthető formába rendezzük az adatokat. Szemléletes, jó diagramot készíteni azonban sokszor nem is olyan egyszerű feladat.

1. Az adatok ábrázolásának egyik legnagyobb problémája a kiugró (a többi adathoz képest túl nagy vagy túl kicsi) értékek kezelése. Legyenek például az adataink: 1, 2, 1, 1000, 1.



Ha ezeket az adatokat oszlopdiagramon ábrázoljuk, akkor az 1000-es adat oszlopához képest a többi olyan kicsi, hogy nemhogy a köztük lévő különbségeket, de még magukat az oszlopokat sem látjuk.
Ha akkora diagramot rajzolnánk, amelyiken már jól látható a kis adatok közti eltérés, akkor meg az 1000-es oszlop „lógna ki” az ábrából.
Ennek a problémának egy lehetséges – bár nem túl elegáns – megoldása, hogy „megtörjük” a diagramot:

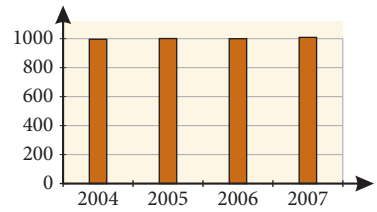


Ezen a diagramon jól megférnek egymással az adatok, csakhogy a figyelmetlen szemlélőnek könnyen úgy tűnhet, hogy a negyedik oszlop csak kb. 4 egység magas. Ezért különösen fontos, hogy a grafikon (és a függőleges tengely) megtörése nyilvánvaló és feltűnő legyen.

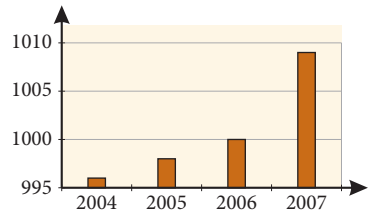
2. Problémát okoz a másik véglet is, amikor az adatok közötti különbségek túl kicsik. Az ilyen diagramokon minden oszlop egyformának tűnik, pont a lényeg – a különbségek – nem láthatók.

Év	2004	2005	2006	2007
Munkanélküliek száma	996	998	1000	1009

Ezen a problémán sokan úgy próbálnak segíteni, hogy kivágják a diagram „tetejét", azaz itt a függőleges tengely beosztása nem nulláról indul. Ez a megoldás sokszor hasznos, azonban néha veszélyes is lehet, mert az eredmény könnyen megtévesztheti a felületes olvasót.
Te milyen diagram segítségével tudnád jobban szemléltetni az előbbi adatokat?

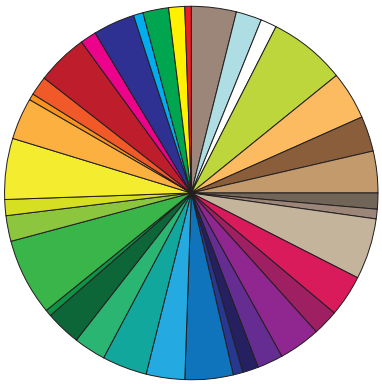


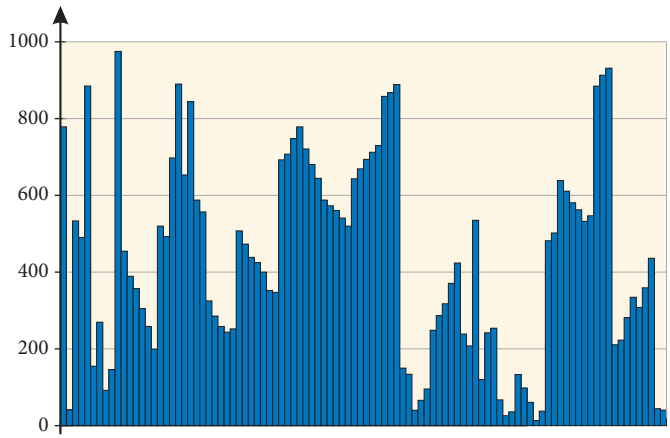
„Városunkban a munkanélküliek száma nem változott jelentősen az elmúlt években."



„Városunkban a munkanélküliség az elmúlt években drasztikusan növekedett"

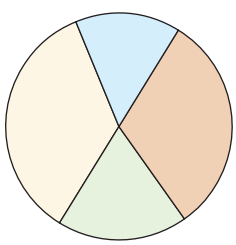
3. Ügyelnünk kell arra is, hogy egy túlzsúfolt grafikonról semmit nem lehet érdemben leolvasni. Nem szabad tehát rengeteg adatot belezsúfolni egyetlen ábrába!

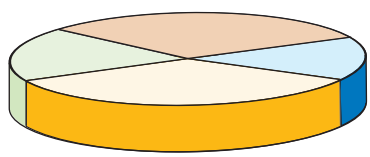


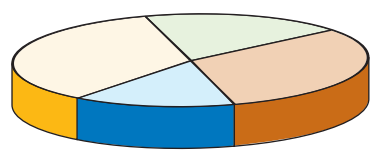


Az ilyen diagramok értelmezhetetlenek. Ha túl sok adatunk van, meg kell próbálnunk csoportokba (ún. osztályokba) sorolni őket. (Felidézheted az osztályba sorolásról tanultakat a 10. lecke alapján.)

4. Ma már a legegyszerűbb számítógépes adatkezelő programok is lehetőséget adnak látványos térbeli diagramok készítésére. A térbeli perspektíva azonban furcsa optikai csalódásokhoz vezethet!
A két alábbi, henger alakú grafikon **ugyanaz** a kördiagram, de különböző szögekből nézve! Az értelmezés mégis teljesen különböző. Ha például egy cég a piaci részesedését szeretné ábrázolni (zöld színnel az adott cég részesedése), akkor a különböző diagramok különböző hatást eredményezhetnek a részesedés mértékét illetően.



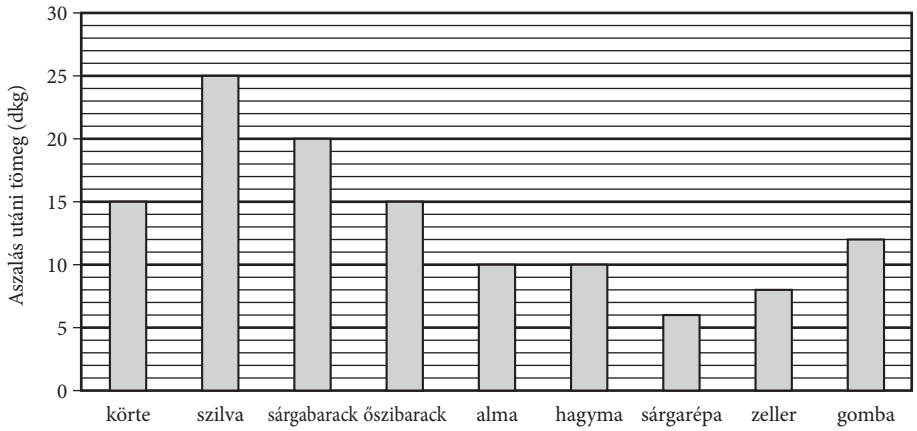

„Piaci részesedésünk alig töredéke a vezető cégek részesedésének"


„Piaci részesedésünk körülbelül a többi cégével azonos arányú"

RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés, 2014)

Aszalás során a növények a vízveszteség miatt veszítenek tömegükből. Az alábbi diagram különböző, 100 dkg tömegű nyers növénynek aszalás utáni tömegét ábrázolja.



a) A diagram adatai alapján döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

A A vizsgált növények aszalás során tömegük kb. 75-94%-át veszítik el.

B A szilva veszíti el tömegének legnagyobb százalékát aszaláskor.

C Ugyanakkora tömegű sárgarépa és gomba aszalása után a sárgarépa tömege feleakkora lesz, mint a gombáé.

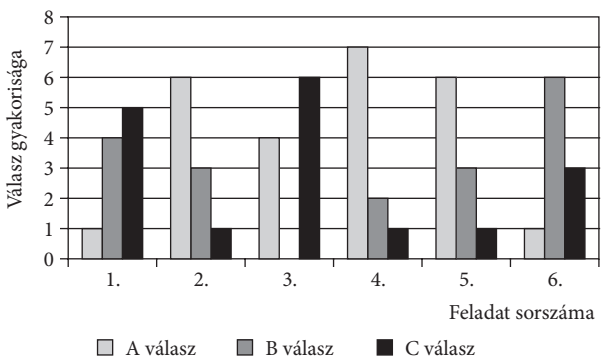
D Az aszalt sárgabarack tömege a nyers gyümölcs tömegének $\frac{1}{5}$-e.

b) Sárgabarackot és őszibarackot aszaltunk. Az aszalás utáni össztömeg 82%-kal volt kevesebb, mint az eredeti tömeg. Az eredeti gyümölcs tömegének hány százaléka volt sárgabarack?

c) Kétszer akkora tömegű almát aszaltunk, mint szilvát. Mi lesz az aszalás után az összetevők tömegének aránya?

2. (2016. évi érettségi feladat nyomán)

Egy hatkérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A; B és C) közül kellett kiválasztani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott válaszok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

Állapítsd meg az alábbi állításokról, hogy biztosan igaz, lehetséges vagy nem igaz állítások. A megfelelő válaszhoz tartozó betűkből egy híres magyar színész vezetéknevét rakhatod ki. Rakd a betűket helyes sorrendbe!

	biztosan igaz	lehetséges	nem igaz
Volt olyan diák, aki nem válaszolt minden kérdésre.	K	M	U
A helyes válaszok száma 5-tel több, mint a helytelen válaszok száma.	A	G	R
Van olyan kérdés, amelyre nem az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be.	T	P	Ó
Van olyan diák, aki az első és az utolsó kérdést egyaránt elhibázta.	I	J	N
Van olyan diák, aki minden kérdésre a jó választ jelölte.	S	O	L
Kevesebb olyan kérdés volt, amelyre a C válasz volt helyes, mint amelyre a B válasz.	B	A	O

54 VÁLTOZÁSOK ÁBRÁZOLÁSA

BEVEZETŐ



A minket körülvevő világ állandóan mozgásban van, folyamatosan változik. Változik az időjárás, a hőmérséklet a nap folyamán, de éves periódusokban is. Változik a boltok kínálata, az árak, változnak az ismerőseink és mi magunk is. Természetesen lehetetlen mindezt együttesen leírni, de bizonyos kiszemelt mennyiségek változását könnyen nyomon követhetjük. Sokszor megkönnyíti a dolgunkat, ha grafikonon ábrázoljuk a folyamatot.

FELADAT

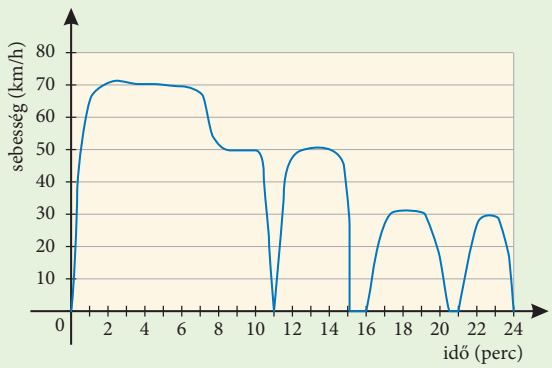
1 A tachográf (menetíró) olyan készülék, amely mozgó járművek – elsősorban buszok, teherautók – sebességadatait jegyzi későbbi ellenőrzés céljából.



Egy helyközi autóbuszjárat egyik utasa zúzódásos sérüléssel jelentkezett a városi kórházban. Állítása szerint a busz hirtelen fékezett, ő pedig elesett. A közlekedési vállalatnál jegyzőkönyvet vettek fel a panaszról, ebben az utas a következőképpen mesélte el a történteket:

„A kövespusztai megálló után egy darabig még úgy 70-nel mehettünk az országúton, aztán a város szélén a busz 50-re lassított. 2-3 perc után a piros lámpánál a vezető fékezett, aztán megállt. A lámpa elég hamar zöldre váltott, mehettünk tovább az alsóvárosi megállóig, ami kb. negyedórányi út a kövespusztaitól számítva. Itt nem volt senki, így a vezető lassítás nélkül, 50-nel ment tovább, egészen a következő jelzőlámpáig. Ott olyan hirtelen állt meg, hogy elestem. A következő megállónál le is szálltam."

Az autóbusz-társaság bekérte a vezetőtől a busz tachográfját, amely a kérdéses időtartamról a következő grafikont rögzítette:



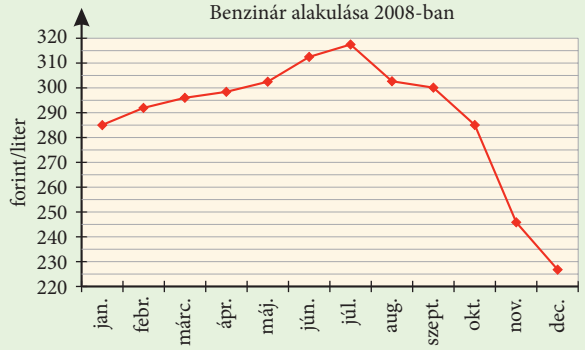
a) Azonosítsd a grafikonon az út szakaszait a panaszos utas beszámolója alapján!

b) A beszámoló melyik részei igazak, és hol állított valótlant az utas?

c) Mi történt valójában azon a szakaszon, amellyel kapcsolatban nem mondott igazat az utas?

d) Tudjuk, hogy a busz a kövespusztai megállótól indulva általában 7-8 perc alatt éri el a városhatárt. Ezt figyelembe véve megszegte-e valahol a busz vezetője a sebességhatárokat? (Az autóbuszok számára megengedett maximális sebesség városban 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, városon kívül 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.)

2 A grafikon a 95-ös oktánszámú benzin árváltozásait mutatja egy benzinkútnál a 2008-as év során.



a) Röviden írd le, mi történt a benzinárakkal az év folyamán! Térj ki arra, hogy melyik időszakban milyen irányú és mértékű a változás, mennyit változott a benzin ára az egyes időszakokban, illetve összesen!

b) Foglald táblázatba a benzinárakat! A növekedést pozitív, a csökkenést negatív számokkal jelöld!

A grafikon és a táblázat alapján válaszolj a következő kérdésekre!

A) Mennyit csökkent a benzin ára
   a) január és december között;
   b) július és december között?

B) Mennyi volt január és július között
   a) a legnagyobb;
   b) a legkisebb;
   c) az átlagos
   havi növekedés?

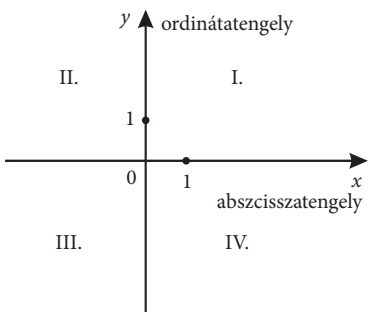
C) Mennyi volt július és december között
   a) a legnagyobb;
   b) a legkisebb;
   c) az átlagos
   havi csökkenés?

D) Megállapítható-e a grafikon alapján, hogy mennyibe került egy liter benzin május 17-én, illetve november 20-án?

ELMÉLET

A grafikonok készítéséhez a **derékszögű koordináta-rendszert** használjuk. Ismételjük át, mit tanultunk erről!

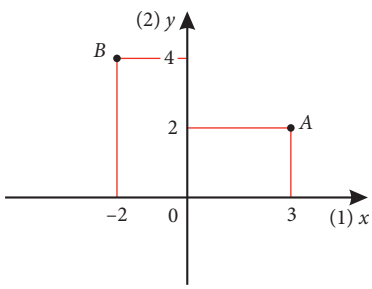
Derékszögű koordináta-rendszert kapunk, ha két számegyenest úgy helyezünk merőlegesen egymásra, hogy a 0 jelzésű pontjuk közös legyen. Ezt a közös pontot **origónak** nevezzük.



Rajzunkon a vízszintes számegyenes az *első tengely (x tengely, vagy más néven abszcisszatengely)*, a függőleges a *második tengely (y tengely, vagy más néven ordinátatengely)*.

A két tengely a síkot *négy negyedre* vágja. Ezek számozását az ábra mutatja.

Ha egy síkban koordináta-rendszert veszünk fel, akkor e sík minden pontját egy *rendezett számpárral* (olyan számpárral, amelyben fontos a számok sorrendje is) jellemezzük.



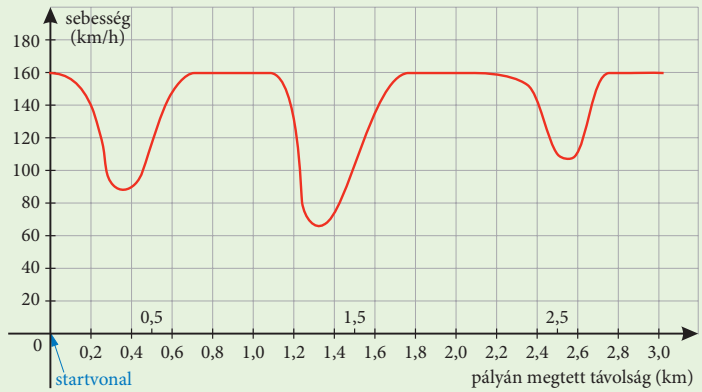
Például:
Az ábránkon lévő *A* pontot a (3; 2) *rendezett számpárral*, a *B* pontot a (–2; 4) *rendezett számpárral*. A rendezett számpárok tagjait a pontok **koordinátáinak** nevezzük.

Az első koordinátát *abszcisszának*, a második koordinátát *ordinátának*, ebből adódóan az első tengelyt *abszcisszatengelynek*, a másodikat pedig *ordinátatengelynek* is nevezzük.

A statisztikai elemzések során készített diagramok tengelyein az adatokra vonatkozó vizsgálati szempontokat (pl. idősor, mennyiség) és tulajdonságokat (pl. testsúly, átlag, egységár, létszám) tüntetjük fel számértékekkel és mértékegységekkel.

FELADAT

3 A grafikon egy versenyautó sebességének változását mutatja, amikor egy 3 kilométeres vízszintes pálya második körét futja.



a) Megközelítőleg mekkora a távolság a startvonal és a pálya leghosszabb egyenes szakaszának kezdőpontja között?

A) 0,5 km C) 2,3 km
B) 1,5 km D) 2,6 km

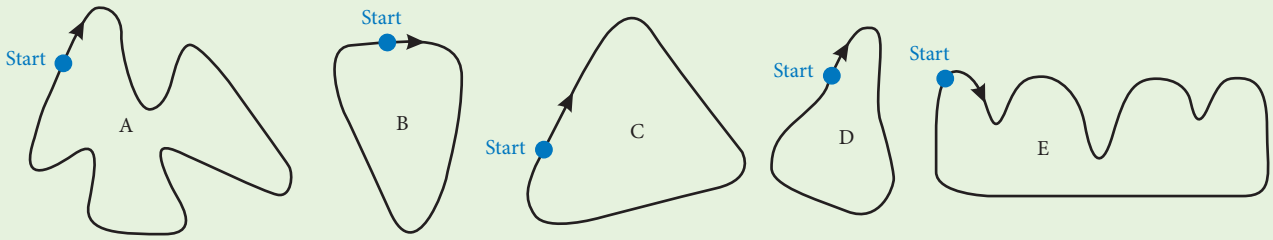
b) A pálya mely pontján mérték a legalacsonyabb sebességet a második körben?

A) a startvonalnál C) kb. 1,3 km-nél
B) kb. 0,8 km-nél D) a pálya felénél

c) Mit lehet mondani az autó sebességéről a 2,6 km és a 2,8 km közötti szakaszon?

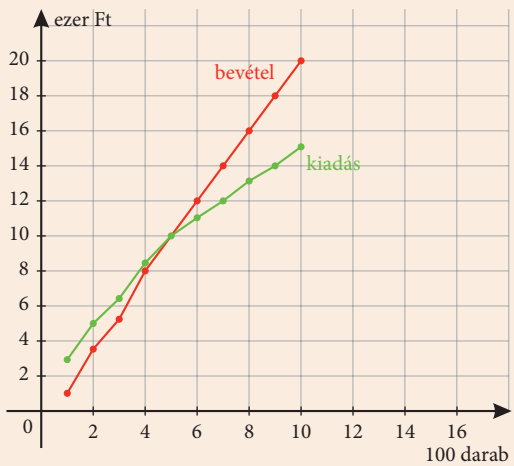
A) Az autó sebessége állandó.
B) Az autó sebessége csökken.
C) Az autó sebessége növekszik.
D) Az autó sebességét nem lehet meghatározni a grafikon alapján.

d) Az alábbi ábrán öt különböző pálya rajza látható. A korábban szereplő sebességgrafikon alapján állapítsd meg, melyik pályán haladt a versenyautó!



HÁZI FELADAT

1 A két grafikon egy cég várható kiadásait és bevételeit szemlélteti a legyártott termékek számának függvényében. (A vízszintes tengelyen 1 egység 100 darabot jelöl, a függőleges tengelyen 1 egység ezer Ft-ot jelöl.)



a) Mivel magyarázható, hogy kisszámú termék esetén a kiadások felülmúlják a bevételeket?

b) Mi az a termékszám, aminél a cég nullszaldós, azaz a bevételek pont fedezik a kiadásokat?

c) Készíts olyan grafikont, amely a cég által termelt profitot (a bevétel és a kiadás különbségét) szemlélteti a legyártott termékek számának függvényében! (Veszteség esetén a profit negatív érték!)

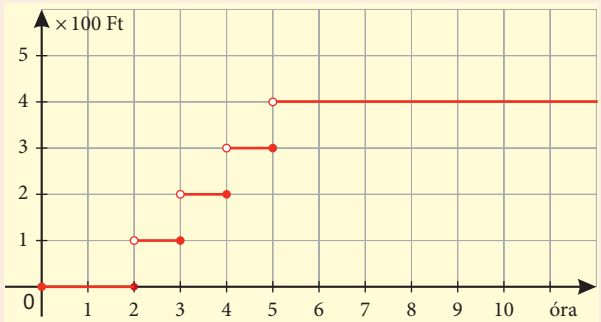
2 Egy üzletház parkolójában az első két óráért nem kell parkolási díjat fizetni, utána viszont minden megkezdett óráért 100 forintot számolnak fel., A maximális díj csak 400 forint lehet.

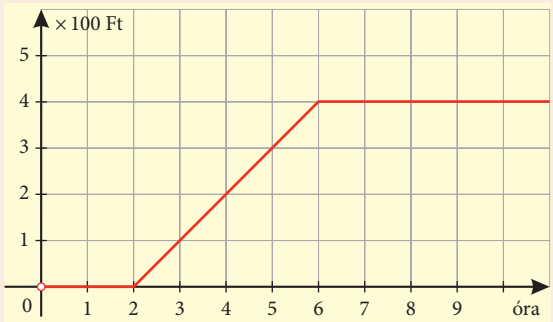


a) Készítsd el a táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki!

Parkolási idő (óra)	1	2	2,5	3	3,8	4,5	6
Parkolási díj (Ft)	0						

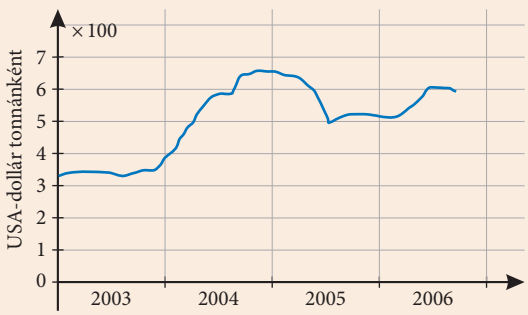
b) Melyik grafikon mutatja helyesen a parkolásért fizetendő összeget?





c) Miért helytelen a másik grafikon? Milyen körülmények között lenne az a helyes?

3 A grafikon az acél világpiaci árának alakulását mutatja. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszodat indokold!



a) 2005-ben az acél ára év végén alacsonyabb volt, mint év elején.

b) Az acél ára 2005-ben folyamatosan csökkent.

c) 2004-ben folyamatosan nőtt az acél ára.

d) 2003-ban volt a legalacsonyabb az acél ára a vizsgált négy évben.

e) Az acél tonnánkénti ára mindvégig 500 USA dollár fölött volt a vizsgált években.

f) A 2004-es év nagyobbik részében az acél tonnánkénti ára 500 USA-dollár fölött volt.

4 Az ábrán egy üzletközpont parkolójában fizetendő díjak láthatók.



Parkolási idő	Parkolási díj
0–1. óra	Ingyenes
2. óra	200 Ft
3. óra	200 Ft
4. óra	250 Ft
5. óra	300 Ft
minden további óra	300 Ft

a) Mennyi a parkolásért fizetendő összeg, ha a parkolási idő

A) 45 perc;

B) 2,5 óra;

C) 4 óra 20 perc;

D) 8 és fél óra?

b) Jelenítsd meg grafikonon a parkolásért fizetendő összeget a parkolási idő függvényében!

c) Lehet-e a (megszakítás nélküli) parkolásért fizetendő összeg 1000 forint?

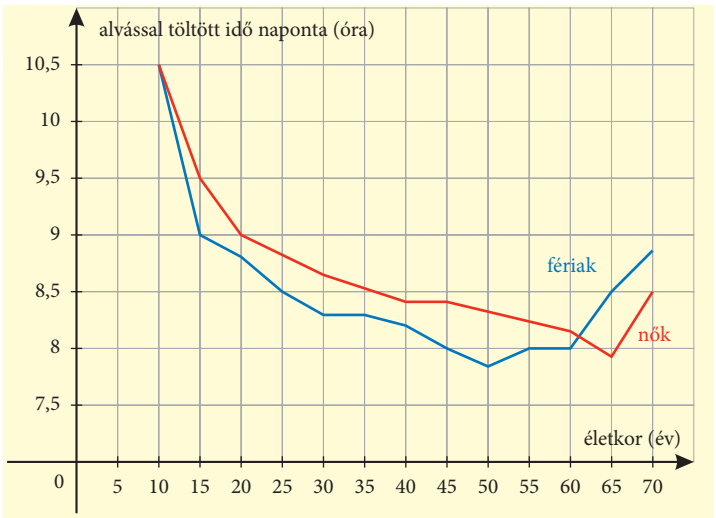
d) Mennyi ideig parkolt (megszakítás nélkül) a jármű, ha a parkolásáért 1550 forintot kellett fizetni?

Ráadás

GRAFIKONOK A MINDENNAPOKBAN

CSOPORTMUNKA

1 Egy felmérésben 1500-1500 véletlenszerűen kiválasztott 10 és 70 év közötti férfi és nő alvással töltött óráinak számát vizsgálták az életkoruk függvényében. Az eredményeket átlagolták, és így a következő grafikont kapták:



a) Az alábbi állítások közül melyik mennyire pontosan írja le a grafikonon látható jelenséget?
- A nők többet alszanak, mint a férfiak.
- A nők kb. 60 éves korukig több órát töltenek naponta alvással, mint a hasonló korú férfiak.
- A fiatal férfiak általában kevesebbet alszanak, mint a hasonló korú nők.
- Az idősebb férfiak kevesebbet alszanak, mint a fiatalok.

b) Magyarázd meg, hogyan jelentkezik a grafikonon az a tény, hogy 40 és 60 éves koruk között a férfiak nagyjából ugyanannyi időt töltenek naponta alvással!

c) Mivel tudnád alátámasztani a következő állítás igazságát? „A nők alvással töltött óráinak száma 10–15 éves korukban jóval erőteljesebben csökken, mint 20–25 éves korban.”

2 Magyarországon a személyi jövedelemadó mértéke 2011 előtt az éves jövedelem nagyságától függően ún. többkulcsos rendszerben változott. Ez azt jelenti, hogy magasabb jövedelmek esetén az adóalap egyre nagyobb és nagyobb százalékát kellett adóként megfizetni. Az adókulcsok szerkezetét 2005-ben módosították jelentősen, ekkor tértek át a korábbi három jövedelmi sávról kettőre.

2004	
0–800 000 Ft	18%
800 001–1 500 000 Ft	144 000 Ft és a 800 000 Ft-on felüli rész 26%-a
1 500 001 Ft-tól	326 000 Ft és az 1 500 000 Ft-on felüli rész 38%-a

2005	
0–1 500 000 Ft	18%
1 500 001 Ft-tól	270 000 Ft és a 1 500 000 Ft-on felüli rész 38%-a

a) 2005 elején Szabó apuka így beszélgetett egy barátjával:

Szabó apuka: „Én jól jártam ezzel a váltással. Évente 1 200 000 forintot keresek, eddig 26%-ot adóztam, most majd csak 18-at fogok, a 8% ennél a fizetésnél 96 000 Ft megtakarítás az év során.”

A barátja: „Én bezzeg jól megjártam! 2004-ben 1 460 000-et kerestem egy évben, 2005-ben 1 520 000-et, ezzel pont átkerültem a 38%-os sávba. Mire levonják az adót, kevesebb marad, mintha nem is emeltek volna.”

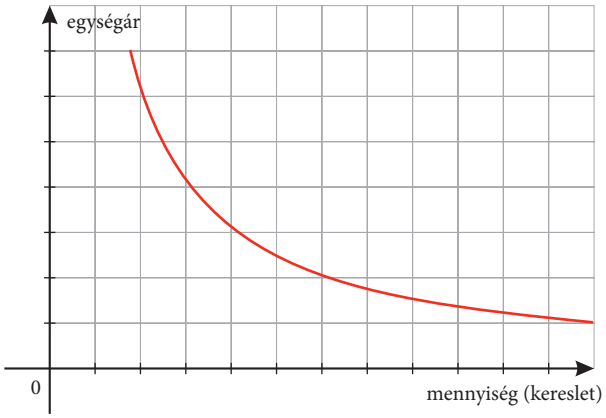
Valójában egyiküknek sincs igaza. Számítsd ki, kinek mennyi adót kellett fizetnie 2004-ben, és mennyit 2005-ben!

b) Ábrázold grafikonon az egyes években fizetendő adó mennyiségét az éves jövedelem függvényében! Hogyan olvasható le a grafikonról, hogy kik jártak jól a változással?

c) Magyarázd meg a grafikon alapján, miért nem lehetséges az, hogy valakinek 2005-ben több adót kelljen fizetnie, mint 2004-ben, miközben a jövedelme változatlan maradt!

d) Mekkora az az éves adóalap, amelynél a változás a legnagyobb különbséget okozta?

3 A grafikon egy bizonyos árufajta egységára és az áru iránti kereslet közötti kapcsolatot szemlélteti.



Melyik kijelentés igaz, és melyik hamis? Indokold a válaszaidat!

a) Ha csökken az áru iránti kereslet, akkor nő a termék ára.

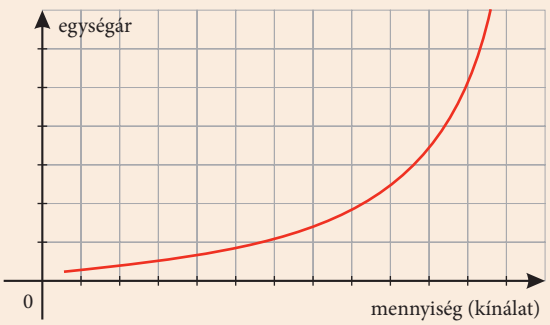
b) Nagyobb kereslethez alacsonyabb ár tartozik.

c) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kereslet egyenesen arányos.

d) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kereslet fordítottan arányos.

HÁZI FELADAT

1 A grafikon egy bizonyos árufajta egységára és az áru piaci kínálata közötti kapcsolatot szemlélteti.



Melyik kijelentés igaz, és melyik hamis? Indokold a válaszaidat!

a) Ha nő a termék ára, akkor nő az áru piacon felkínált mennyisége.

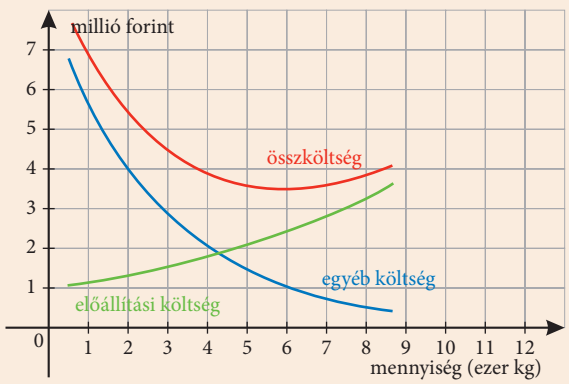
b) Alacsonyabb árhoz nagyobb kínálat tartozik.

c) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kínálat egyenesen arányos.

d) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kínálat fordítottan arányos.

e) Ha az áruért a fogyasztók magasabb árat is hajlandóak fizetni, akkor a piacon nő a kínálat az adott áruból.

2 Egy alapanyagot gyártó cég a gyártás során felmerülő költségeket a gyártott mennyiség függvényében vizsgálja. Az eredményt grafikonon ábrázolják.



a) Hogyan változik az előállítási költség az előállított mennyiség növekedésével?

b) Hogyan változik az egyéb költség az előállított mennyiség növekedésével?

c) Mekkora előállított mennyiség esetén a legalacsonyabb az összköltség, és mennyi ez? Mennyi ebben az esetben az előállítási költség, és mennyi az egyéb költség?

d) Mekkora gyártott mennyiség esetén lesz 4 millió forint az összköltség? Miből tevődik ez össze?

55 A FÜGGVÉNY FOGALMA

BEVEZETŐ

Rajzoljunk be a koordináta-rendszer síkjába 10 olyan pontot, amelynek

a) a második koordinátája 3-mal nagyobb az elsőnél;

b) a második koordinátája az első koordináta abszolút értéke.

Válasszuk első koordinátának a –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 számokat! Töltsük ki a táblázatokat!

a)

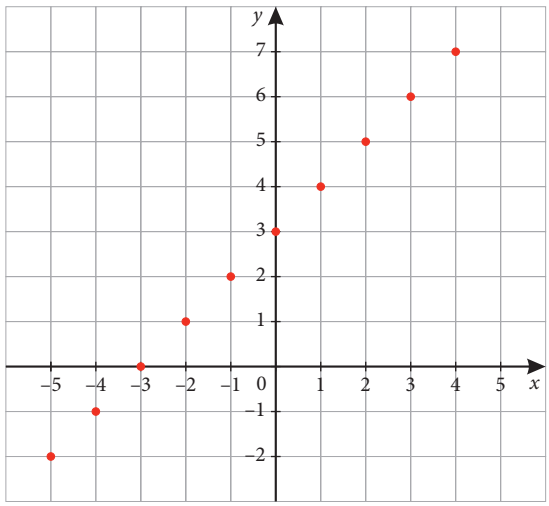
Első koordináta (x)	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Második koordináta (y)	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

Az alsó sorban lévő számok mind *3-mal nagyobbak* a felettük lévő számnál.

A megrajzolt 10 pont egy egyenesre illeszkedik. Ha a pontok első koordinátáját x-szel, a második koordinátáját y-nal jelöljük, akkor itt minden pontnál: $y = x + 3$.

Azt is szoktuk mondani, hogy a táblázat felső számaihoz (**független változó**ihoz) az alattuk lévő számokat (**függő változó**kat) rendeljük hozzá. Ennek a jelölése:

$x \mapsto x + 3$.



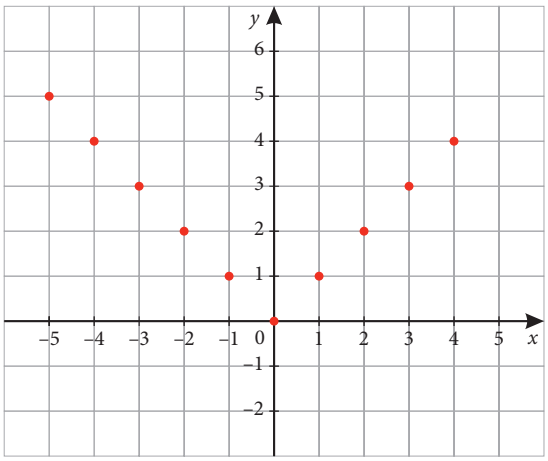
b)

Első koordináta (x)	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Második koordináta (y)	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4

A felső sorban lévő számok alá az *abszolút értéküket* írtuk.

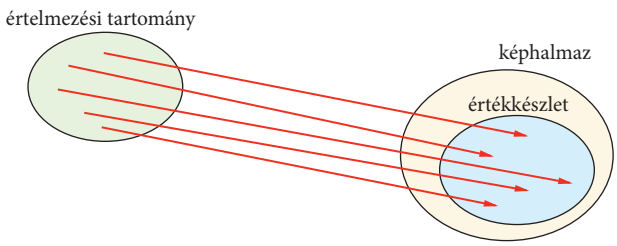
Az ábrán a 10 pont nem esik egy egyenesre. Ha a pontok első koordinátáját x-szel, a második koordinátáját y-nal jelöljük, akkor itt minden pontnál $y = |x|$.

Azt is szoktuk mondani, hogy a táblázat felső sorában lévő számaihoz az alattuk lévő számokat **rendeljük hozzá**. Ennek a jelölése: $x \mapsto |x|$.



ELMÉLET

Definíció: Adott két nem üres halmaz, A és B. Ha A halmaz *minden* eleméhez hozzárendeljük a B halmaz *pontosan* egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést **függvénynek** nevezzük. Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, a B halmaz a függvény **képhalmaza**. A B halmaz azon elemeinek halmazát, melyeket hozzárendeltük valamely értelmezési tartománybeli elemhez, a függvény **értékkészletének** nevezzük.



A függvényeket gyakran egy-egy betűvel jelöljük.
Egy f-fel jelölt függvény értelmezési tartományának a jele: D_f, értékkészletének a jele: R_f.
Ha egy f-fel jelölt függvény esetében $x \in D_f$, akkor az x-hez hozzárendelt elemet a függvény x *helyhez tartozó* **helyettesítési értékének** nevezzük, és így jelöljük: $f(x)$.

A függvény meghatározásakor meg kell adni az értelmezési tartományát, képhalmazát, és valamilyen formában a hozzárendelést is. Sokszor ezt úgy tesszük, hogy megadjuk a **hozzárendelés szabályát**.
Például: Amikor minden egész számhoz az abszolút értékét rendeljük, ezt így írhatjuk:
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R};\ x \mapsto |x|$ vagy $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R};\ f(x) = |x|$

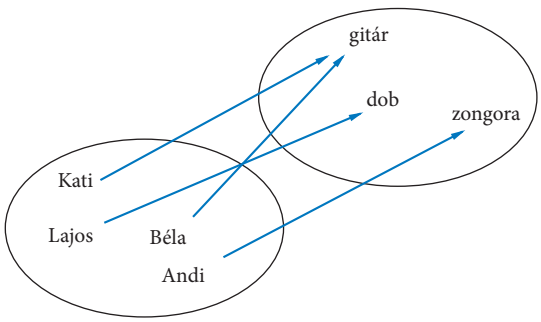
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A halmazábra egy osztályzenekar összetételét mutatja.

a) Mit olvashatunk le az ábráról?

b) Hogyan változna a hozzárendelés, ha Kati zongorázni is tudna?

c) Hogyan változna a hozzárendelés, ha Béla nem játszana az együttesben?



Megoldás

a) Az ábrán egy függvényt adtunk meg. Jelöljük f-fel! Most D_f = {Kati, Lajos, Béla, Andi}, R_f = {zongora, gitár, dob}.
A nyilak azt mutatják, hogy Andi zongorázik, Kati és Béla gitározik, Lajos pedig dobol.
A kapcsolatokat táblázattal is szemléltethetjük:

Kati	Lajos	Béla	Andi
gitár	dob	gitár	zongora

Helyettesítési értékekkel leírva: f(Kati) = gitár; f(Lajos) = dob; f(Béla) = gitár; f(Andi) = zongora.
Itt a **függvényt megadhatjuk** szavakkal, halmazábrával, a helyettesítési értékekkel vagy táblázattal is. Grafikont természetesen nem készíthetünk, mert nem számokról van szó.

b) Ebben az esetben nem beszélhetünk függvényről, mert Katihoz két értéket (gitár, zongora) rendelünk, vagyis nem egyértelmű a hozzárendelés. A függvény minden esetben *egyértelmű hozzárendelés,* azaz *egy* értelmezési tartománybeli elemhez *egyetlen* képhalmazbeli elem tartozhat.

c) Azért érdekes ez az eset, mert ekkor minden hangszerről el tudjuk dönteni, hogy ki játszik rajta. Visszafelé is egyértelmű a kapcsolat, azaz függvény lenne az a hozzárendelés is, ha a hangszerhez rendeljük hozzá, hogy ki játszik rajta. A mindkét irányban egyértelmű hozzárendeléseket **kölcsönösen egyértelmű** hozzárendelésnek nevezzük.

Mondj te is példát a hétköznapi életből vagy más tudományterületről nem egyértelmű, egyértelmű valamint kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésre!

2. Egy függvény minden

a) egész számhoz; **b)** valós számhoz

a nála 3-mal kisebb szám abszolút értékét rendeli hozzá.
Mi az értelmezési tartományuk és értékkészletük?
Add meg a hozzárendelési szabályukat!
Ábrázold a függvényeket koordináta-rendszerben!

Megoldás

a) $D_f = \mathbf{Z}$; $R_f = \mathbf{N}$; $x \mapsto |x - 3|$

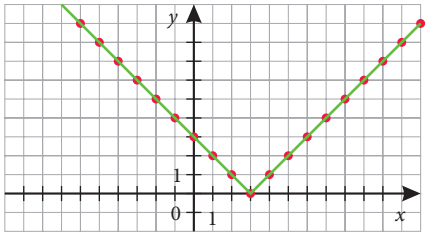
b) $D_g = \mathbf{R}$; $R_g = \mathbf{R}_0^+$ (így jelöljük a nemnegatív valós számokat); $x \mapsto |x - 3|$

Az első f függvény helyettesítési értéke például az 5 helyen $f(5) = |5 - 3| = 2$.

A második függvény helyettesítési értéke például a $-2{,}4$ helyen

$g(-2{,}4) = |-2{,}4 - 3| = 5{,}4$.

Az f függvény grafikonjának pontjait a piros pontok, a g függvény grafikonját a zöld vonal mutatja.



ELMÉLET

Megállapodás

Ha egy függvény értelmezési tartománya a **valós számok halmaza** (**R**), azt nem kötelező kiírni. Ha tehát egy függvény megadásakor csak a hozzárendelési szabályt látjuk, akkor ennek a függvénynek az értelmezési tartománya **R**.

FELADAT

1 Táblázatba foglaljuk, mennyibe kerül 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg, 9 kg, 10 kg savanyú káposzta:

Tömeg (kg)	1	2	3	4	5
Ár (forint)			390		
Tömeg (kg)	6	7	8	9	10
Ár (forint)					

a) Készítsd el a táblázatot a füzetedben, és töltsd ki!

b) Ezzel a táblázattal megadtunk egy függvényt. Mi ennek az értelmezési tartománya, mi az értékkészlete?

c) Készíts a táblázat alapján grafikont!

2 Az alábbi grafikonok ismeretében válaszolj a kérdésekre!

a) Melyik függvénynek mi az értelmezési tartománya?

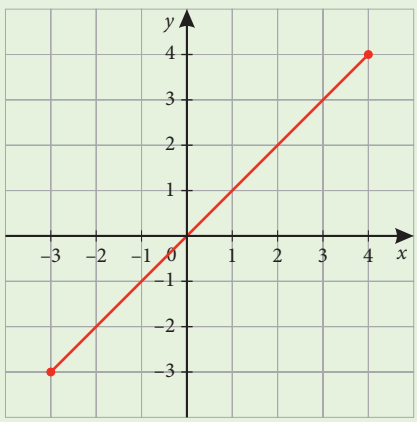
b) Melyik függvénynek mi az értékkészlete?

c) Melyik függvénynek lehet képhalmaza a pozitív számok halmaza?

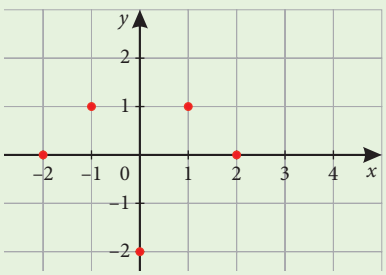
d) Melyik függvénynek lehet képhalmaza az egész számok halmaza?

e) Készíts táblázatot és halmazábrát a B) grafikon alapján!

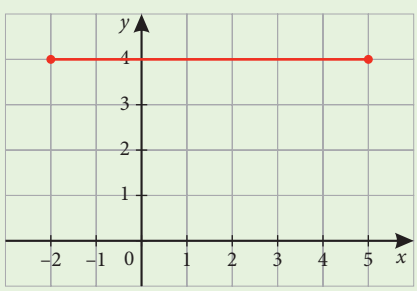
A)



B)



C)



3 Kerékpárral állandó sebességgel tekersz.

a) Töltsd ki a táblázatot arról, mennyi időre van szükséged az egyes távolságok megtételéhez! A füzetedben dolgozz!

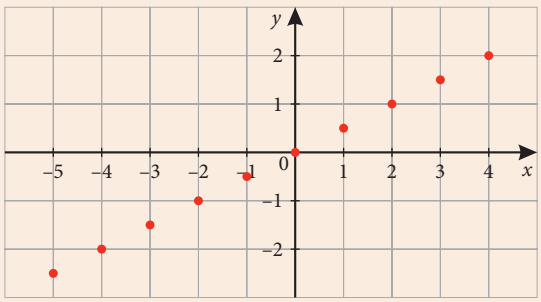
b) Ezzel a táblázattal megadtunk egy függvényt. Mi ennek az értelmezési tartománya, mi az értékkészlete?

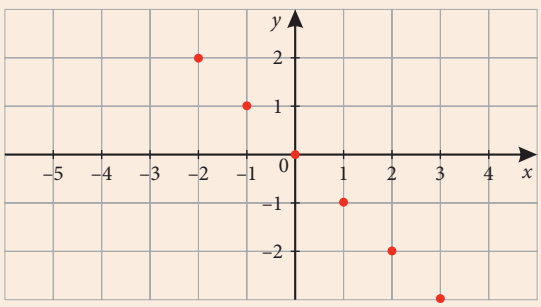
c) Készíts a táblázat alapján grafikont!

Távolság (m)	100	150	250	350	400	500
Idő (s)				70		

HÁZI FELADAT

1 Add meg táblázattal is mindkét függvényt! Add meg a hozzárendelési szabályokat!





2 Az f-fel jelölt függvény grafikonja 5 pontból áll. A pontok: (–4; 1), (5; 1), (0; –1), (1; 0), (–2; 1).

a) Rajzold meg a függvény grafikonját!

b) Add meg a D_f és az R_f halmazt!

c) Mennyi $f(5)$, és mennyi $f(1)$?

d) Melyik számhoz tartozik az 1, és melyikhez a –1 helyettesítési érték?

3 Foglald táblázatba, hány különböző módon lehet sorba állítani x tanulót, ha $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$!
Mi az értékkészlete a táblázattal megadott függvénynek?

4 A g-vel jelölt függvény értelmezési tartománya a $D_g = \{4; 2; 0; -4; -6\}$ halmaz, hozzárendelési szabálya: $x \mapsto 3 - \frac{x}{2}$.

a) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

Értelmezési tartomány	4	2	0	–4	–6
Helyettesítési érték			3		
Megfelelő pont a koordináta-rendszerben					

b) Rajzold meg a függvény grafikonját!

c) Add meg az R_g halmazt!

5 András és Bence kedvenc szabadidős elfoglaltsága a zenehallgatás, Réka a számítógépes játékokkal szeret legjobban játszani, Nóra könyveket olvas, Erzsi pedig úszni szeret.
Ábrázold halmazábrával azt a függvényt, amely mindenkihez a kedvenc szabadidős elfoglaltságát rendeli hozzá! Add meg a függvényt táblázattal is!

RÁADÁS

1. Az A halmaznak 8 eleme van, a B halmaznak 6. Hány különböző függvény készíthető, amelynek

a) értelmezési tartománya A, képhalmaza B;

b) értelmezési tartománya B, képhalmaza A?

2. Az x valós szám egészrészének hívjuk azt az egész számot, amely a nála nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb. Jelölése: $[x]$. Például 4,2 egészrésze 4, illetve 13 egészrésze 13, vagyis $[4{,}2] = 4$, $[13] = 13$. Negatív számok esetén azonban óvatosnak kell lenni: −1,6 egészrésze nem −1, mert az egészrész nem lehet nagyobb, mint a szám. −1,6 egészrésze −2, vagyis $[-1{,}6] = -2$.
Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben azt a függvényt, mely minden valós x-hez hozzárendeli az egészrészét! ($f: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$; $f(x) = [x]$)

56 KÉSZÍTSÜNK GRAFIKONT!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy hosszú és unalmas autóbuszos utazás során Gyula azt számolgatta, hogy milyen gyorsan mehet a busz. Egyszerre figyelve az órája másodpercmutatóját és az út mentén feltűnő kilométertáblákat felírogatta az összetartozó értékpárokat, és ebből próbálta megállapítani a busz sebességét. Néhány kilométertáblánál elbambult, így csak a következő adatokat jegyezte fel.

Km-tábla	Megtett út (km)	Idő (mp)
85	0	0
87	2	120
90	5	303
91	6	360
93	8	481

A táblázatból azt vette észre, hogy érdemes másodpercről percekre kerekíteni, ezzel nem veszít semmit az amúgy is kétséges pontosságból. Az így nyert eredményeket egy grafikonon ábrázolta. A pontok egy egyenesre esnek, ebből arra következtetett, hogy a busz egyenletes tempóban (állandó nagyságú sebességgel) haladt, az eltelt idő és a megtett út egyenes arányos.

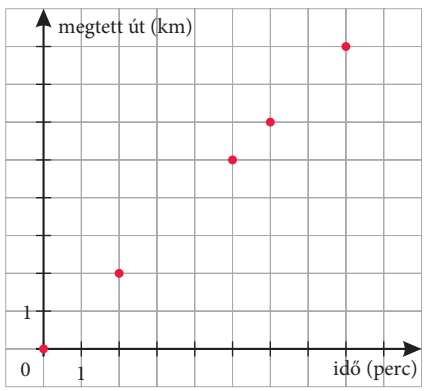
a) Mi az összefüggés az eltelt idő és a megtett kilométerek száma között?

b) Hogyan változik meg a grafikon, ha Gyula nem a megtett utat, hanem a kilométertáblán lévő számot ábrázolja az eltelt percek függvényében? Add meg most is az összefüggést a kilométertáblán lévő számok és az eltelt idő között!

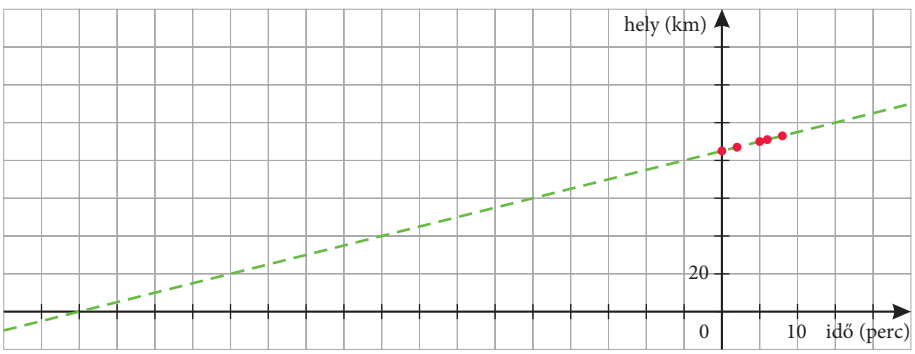
c) Bár pontosan nem tudta leolvasni, Gyula elgondolkozott azon, hol metszheti a pontokra illeszthető egyenes az x tengelyt.

Megoldás

a) A táblázat első két sora alapján hamar megkapta, hogy a busz 2 km-t 120 másodperc, azaz 2 perc alatt tett meg, tehát percenként nagyjából egy kilométert haladt. (Azt is megállapította, hogy a táblázat másik két sorát vizsgálva ugyanerre az eredményre jut.)
Kilométerek száma = percek száma.
Ha az eltelt percek számát x-szel jelöljük, a megtett kilométerek számát pedig y-nal, akkor $y = x$. A busz sebessége pedig 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, hiszen egy óra, azaz 60 perc alatt 60 km-t tesz meg.



b) Gyula sehogy sem tudott átlátható grafikont készíteni, de azt észrevette, hogy az előző egyenest 85 egységgel feljebb kellett tolni, azaz 85-nél metszi az y tengelyt. Ha az eltelt percek számát továbbra is x-szel jelöljük, y-nal a pedig kilométertáblán szereplő számokat, akkor: $y = x + 85$.





c) Rájött, hogy ez a pont a 0 kilométertáblának felel meg. Ha a busz korábban is ugyanezzel az állandó nagyságú sebességgel haladt volna, akkor a 0 kilométertábla mellett 85 perccel korábban haladt volna el. Az imént ábrázolt egyenes tehát az x tengelyt a –85-nél metszi.

ELMÉLET

Definíció: Egy f függvény értelmezési tartományának azon elemeit, amelyekhez a függvény a 0-t rendeli (azaz $f(x) = 0$) az f függvény **zérushely**einek nevezzük.

FELADAT

1 Az, hogy egy fazék víz mennyi idő alatt forr fel a tűzhelyen, alapvetően a víz mennyiségétől függ. Megmértük, hogy különböző nagyságú fazekakat megtöltve meddig tart felforralni a bennük lévő vizet az otthoni gáztűzhelyen. Az adatokat a táblázat mutatja.

Vízmennyiség (liter)	Idő (perc)
0,2	2
1	10
2,5	24
3	29
9,8	102

a) Készítsünk grafikont a táblázat alapján!
b) Körülbelül mennyi vizet lehet felforralni ezen a tűzhelyen 1 perc alatt?
c) Írjunk fel összefüggést a víz mennyisége és a felforraláshoz szükséges idő között!
d) Körülbelül mennyi ideig tartana ezen a tűzhelyen felforralni 1,5 liter vizet?
e) Maximum mennyi vizet szabad a fazékba tölteni, ha 15 perc alatt fel kell forralnunk?

2 Egy taxi utasa időnként a taxiórára pillantva a következő számokat látta a kijelzőn:

km	Viteldíj (Ft)
3	1020
6	1740
8	2220
11	2940

a) Ábrázoljuk az összetartozó értékeket koordináta-rendszerben, és keressük meg azt az egyenest, amelyre ezek a pontok mind illeszkednek!
b) Hol metszi az egyenes az y tengelyt? Mit fejez ki ez az érték?
c) Mi a kapott függvény zérushelye?

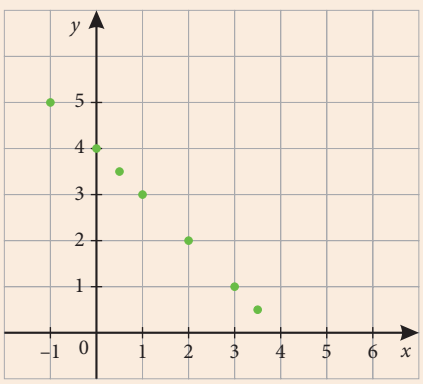
HÁZI FELADAT

1 Egy grafikon pontjait táblázattal adtuk meg. Rajzold meg derékszögű koordináta-rendszerben a pontokat, és keress kapcsolatot/összefüggést a grafikon pontjainak első (x) és második (y) koordinátái között!

Pont neve	A	B	C	D
Első (x) koordinátája	–2	0	1	4
Második (y) koordinátája	0	2	3	6

2 Válaszd ki, a felsoroltak közül melyik képlettel jellemezhetjük a grafikon pontjait! Ha segít, foglald táblázatba a pontok koordinátáit! Vigyázz, több megoldás van!

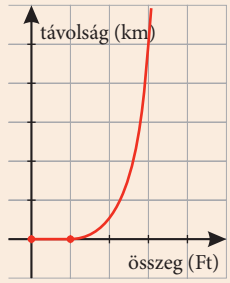
a) $y = 4x$
b) $x = y - 4$
c) $y = 4 - x$
d) $y = |x - 4|$
e) $x = |y - 4|$
f) $5 - y = |x + 1|$

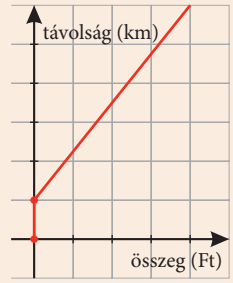


3 A 2. feladatban szereplő díjszabáshoz olyan grafikonvázlatot készítettünk, amelyik azt mutatja meg, hogy egy bizonyos összegből hány km-t utazhatunk taxival. Válaszd ki a megfelelő grafikont! Választásodat indokold!



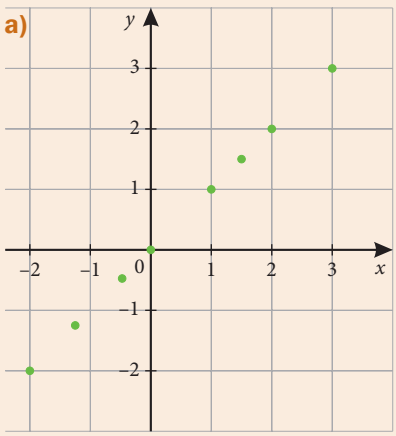




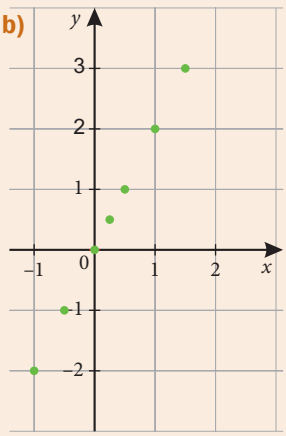


4 Keress kapcsolatot/összefüggést a grafikon pontjainak első (x) és második (y) koordinátái között!

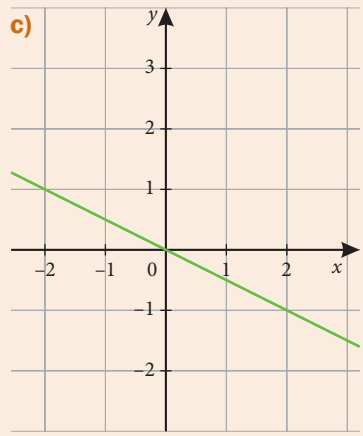
a)



b)



c)



RÁADÁS

A természettudományokban gyakran nevezik a grafikont görbének, még akkor is, ha az egyenes. Most mutatunk néhány példát, amikor a grafikon valóban egy görbe vonal.

1. Nedves, csúszós úton különösen fontos a gépkocsik sebességének mérséklése, hiszen ilyenkor a gumikerekek kevésbé tapadnak az aszfalton. A táblázat azt mutatja, hogy ilyen körülmények között, különböző sebességek mellett körülbelül milyen hosszú lesz a fékút állóra fékezett – blokkolt – kerekekkel.

Sebesség (km/h)	Fékút (m)
30	9
40	16
50	25
60	36
70	49
80	64

Milyen összefüggés áll fenn a sebesség és a fékút között? Ábrázoljuk az adatokat grafikonon!

(Figyelem! Ez csak a fékezés utolsó szakasza! A biztonságos megálláshoz ennél hosszabb út kell, hiszen a kocsi azalatt is halad, amíg észleljük az akadályt és benyomjuk a fékpedált! Ezt a hosszabb utat nevezzük féktávolságnak.)

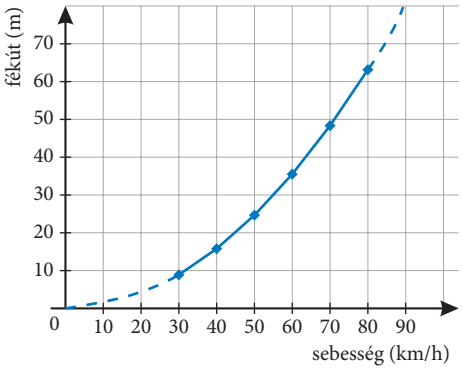


Megoldás

A grafikonon jól látható, hogy ez az összefüggés nem lineáris, azonban még így sem különösebben nehéz kitalálni:

$$\text{Fékút} = \left(\frac{\text{Sebesség}}{10}\right)^2, \text{ vagy Fékút} = \frac{\text{Sebesség}^2}{100},$$

ahol a fékutat méterben, a sebességet pedig km/h-ban mérjük.



Ha a sebességet v-vel, a fékutat s-sel jelöljük, akkor

$$s = \left(\frac{v}{10}\right)^2 \text{ vagy } s = \frac{v^2}{100}.$$

2. Egy nemzetközi telefonhívásokra specializálódott vállalkozás reklámjában az USA-ból Magyarországra irányuló hívásdíjakra a következő táblázatot találtuk:

Beszélgetési idő (perc)	Díj ($)
2	1,70
5	2,00
9	2,40
14	2,90
22	3,70

a) Ábrázold az adatokat grafikonon!

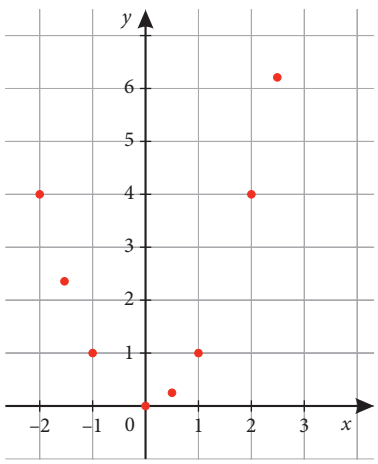
b) Írd fel azt a képletet, amely megadja a fizetendő összeg nagyságát a beszélgetési idő függvényében!

c) Mennyibe kerülne egy hétperces beszélgetés?

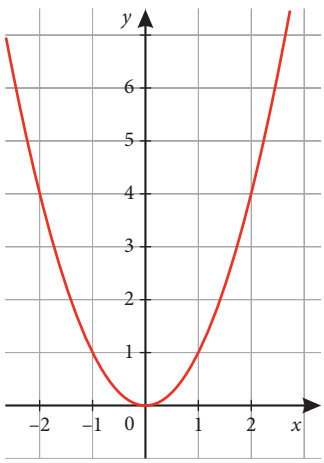
d) Mennyi ideig lehetne három dollárért beszélgetni?

3. Keress kapcsolatot/összefüggést a grafikon pontjainak első (x) és második (y) koordinátái között!

a)

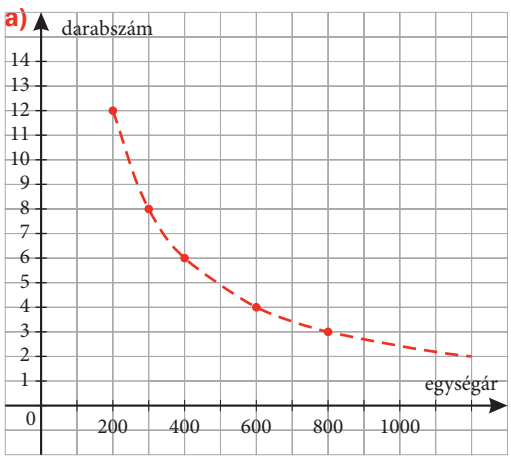


b)

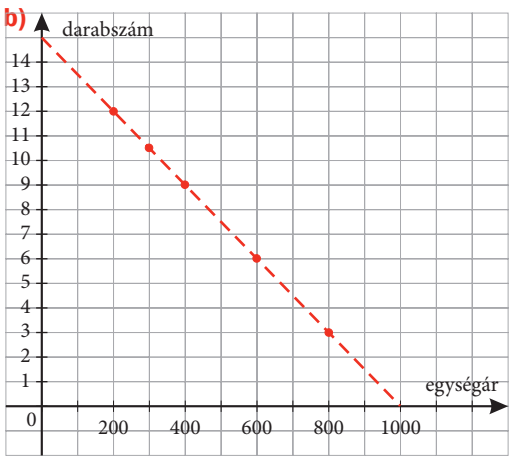


4. Bence írható DVD-lemezt szeretne venni, erre van 2400 Ft-ja. A közeli üzletben ötféle lemezt lehet kapni, ezek egységára 200 Ft, 300 Ft, 400 Ft, 600 Ft és 800 Ft. Melyik grafikon szemlélteti Bence lehetséges választásait, ha csak az egyik fajtából vásárol, és mind a 2400 forintját elkölti?

a)



b)

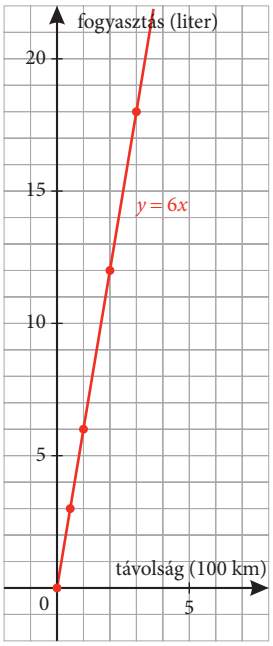


57 AZ EGYENES ARÁNYOSSÁG ÉS A FORDÍTOTT ARÁNYOSSÁG FÜGGVÉNYE

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Magyarországon a gépkocsik üzemanyag-fogyasztását legtöbbször liter/100 km-ben adják meg. Az egyes autók fogyasztása így könnyen összehasonlítható. Az üzemben tartás költségének kiszámításánál ez fontos tényező.
Tapasztalataink alapján kijelenthetjük, hogy – állandó fogyasztást feltételezve – kétszer akkora hosszúságú úton kétszer annyi üzemanyag fogy, háromszor akkora hosszúságú úton háromszor annyi stb. Ez azt jelenti, hogy az elhasznált üzemanyag-mennyiség és a megtett út **egyenesen arányos**, hányadosuk állandó. Ez a hányados az arányossági tényező. (Emlékeztető: Ha két változó mennyiség összetartozó értékeinek a hányadosa [aránya] állandó, akkor a két mennyiség között egyenes arányosság van.)

Vizsgáljuk táblázattal, képlettel és grafikonnal egy 6 liter/100 km jellemzőjű gépkocsi üzemanyag-fogyasztását!



Megoldás
Táblázattal:

Megtett út (100 km) (x)	0,5	1	2	3
Üzemanyag-fogyasztás (liter) (y)	3	6	12	18

Képlettel:
$y = 6x$, ahol x jelöli a megtett út hosszát 100 km-ekben mérve, y pedig az x-hez tartozó, literben mért üzemanyag-mennyiséget.

Az $y = 6x$ egyenlet átírható $\frac{y}{x} = 6$ alakba is. Itt olyan egyenes arányosságról van szó, amelynek arányossági tényezője 6.

A grafikont olyan pontok alkotják, amelyeknek második koordinátája a pont első koordinátájának éppen a 6-szorosa. Az ilyen tulajdonságú pontok egy *origón átmenő egyenesre* illeszkednek. A megtett út csak nemnegatív szám lehet, ezért a grafikon egy origó kezdőpontú félegyenes.

Ez a félegyenes az $x \mapsto 6x \quad (x \geq 0)$ függvény grafikonja.



FELADAT

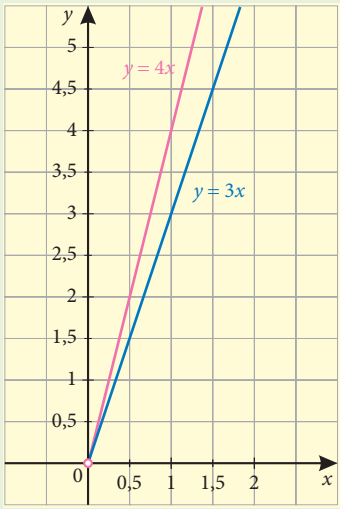
1 A kék félegyenes azt szemlélteti, hány cm az x cm oldalú szabályos háromszög kerülete, a rózsaszínű félegyenes pedig azt, hogy hány cm az x cm oldalú négyzet kerülete. Olvasd le a grafikonról,

a) mekkora az x, ha az x cm-es oldalú négyzet és háromszög kerületének a különbsége 1 cm;

b) mennyivel nagyobb a háromszög oldala, mint a négyzeté, ha mindkettőnek 4 cm a kerülete;

c) mit jelent az, hogy a (0,5; 1,5) pont rajta van a kék félegyenesen;

d) mit jelent az, hogy a (0,5; 2) pont rajta van a rózsaszínű félegyenesen!



2 Az ábrán lévő mindkét félegyenes egy-egy függvény grafikonja. Mindkét függvény egyenes arányosságot ír le. Mi ennek a két függvénynek az értelmezési tartománya és az értékkészlete?

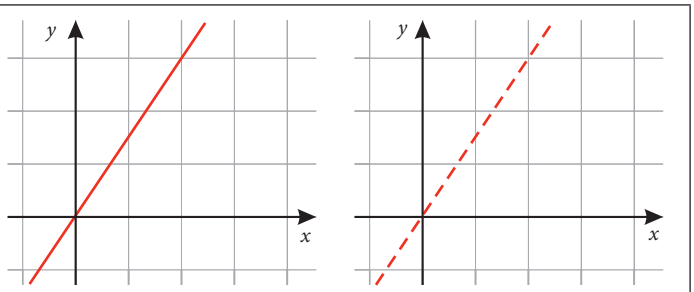
ELMÉLET

Ha egy f függvény értelmezési tartománya valós számokból áll, és a hozzárendelési szabálya $f(x) = ax$ alakba írható (a adott valós szám, de $a \neq 0$), akkor ez a függvény egyenes arányosságot ír le.

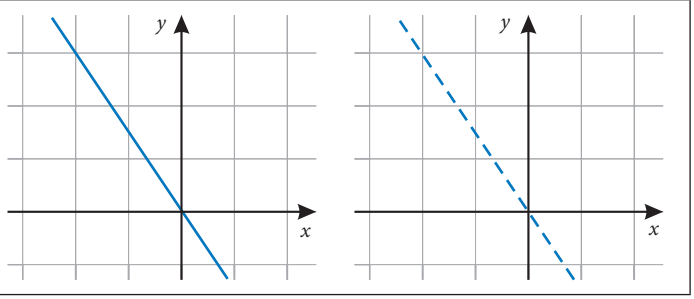
Ha az egyenes arányosságot leíró függvény értelmezési tartománya az **R** halmaz, akkor értékkészlete is az **R** halmaz, grafikonja pedig egy – az origón átmenő – egyenes.

Ha $a > 0$, akkor f **szigorúan monoton növekedő**, a grafikonját alkotó pontok egy „emelkedő” egyenesen helyezkednek el.

(Az egyenes arányosságot leíró függvény értelmezési tartománya a valós számok halmazának részhalmaza, ezért a grafikonja nem feltétlenül egy teljes egyenes. Ezt szemlélteti a két ábra.)



Ha $a < 0$, akkor f **szigorúan monoton fogyó**, a grafikonját alkotó pontok egy „süllyedő” egyenesen helyezkednek el.



Definíció: Egy f függvény **szigorúan monoton növekedő** az értelmezési tartományának egy intervallumán, ha az intervallum bármely két elemére teljesül, hogy a nagyobb elemhez nagyobb függvényérték tartozik: $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

Definíció: Egy f függvény **szigorúan monoton csökkenő (fogyó)** az értelmezési tartományának egy intervallumán, ha az intervallum bármely két elemére teljesül, hogy a nagyobb elemhez kisebb függvényérték tartozik: $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Ha a függvényértékek között az egyenlőség is fennállhat, akkor **monoton növekedő**, illetve **monoton csökkenő** függvényekről beszélünk.

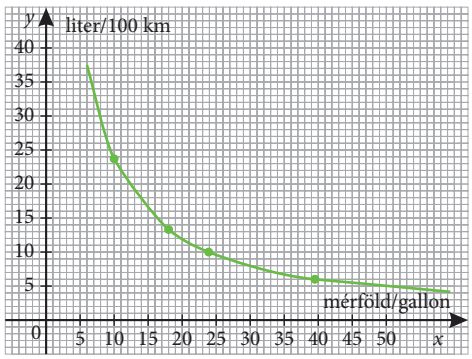
KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Az Egyesült Államokban máshogy számítják ki, mennyit fogyaszt egy autó. Ott az 1 gallon (1 USA gallon = kb. 3,8 liter) üzemanyaggal megtehető mérföldek számát adják meg (1 mérföld = kb. 1,6 km).

Az alábbi táblázat néhány tipikus értékre vonatkoztatva megmutatja, hogy minek felel meg liter/100 km-ben mérve a mérföld/gallonban megadott fogyasztásérték:

Fogyasztás $\frac{\text{mérföld}}{\text{gallon}}$-ban ($x$)	10	15 (SUV terepjárók)	18 (nagyobb amerikai városi kocsik)	23,7	39,5 (kisebb európai városi kocsik)
Fogyasztás $\frac{\text{liter}}{100\text{ km}}$-ben ($y$)	23,7	15,8	13,17	10	6

Grafikonon ábrázolva:
A táblázatból (különösen az első és az utolsó előtti oszlopból) arra következtethetünk, hogy itt az összetartozó értékpárok *szorzata* állandó, mindig 237. A két mennyiség között tehát **fordított arányosság** van, az arányossági tényező 237.
A grafikont olyan pontok alkotják, amelyeknek első (x) és második (y) koordinátája között az $x \cdot y = 237$ összefüggés áll fenn.

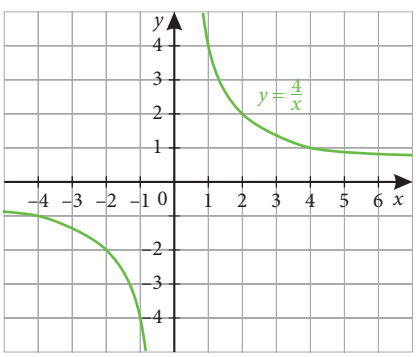


ELMÉLET

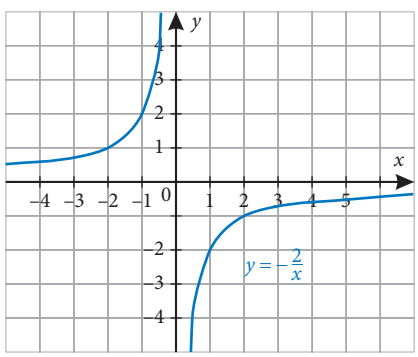
Ha egy függvény értelmezési tartománya 0-tól különböző valós számokból áll, és a hozzárendelési szabálya $x \mapsto \frac{a}{x}$ alakba írható (a valós szám, de $a \neq 0$), akkor ez a függvény **fordított arányosság**ot ír le.

Ha a fordított arányosságot leíró függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, akkor az értékkészlete is az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmaz, grafikonja pedig egy hiperbola.

Például



(az összetartozó értékek szorzata 4)



(az összetartozó értékek szorzata –2)

FELADAT

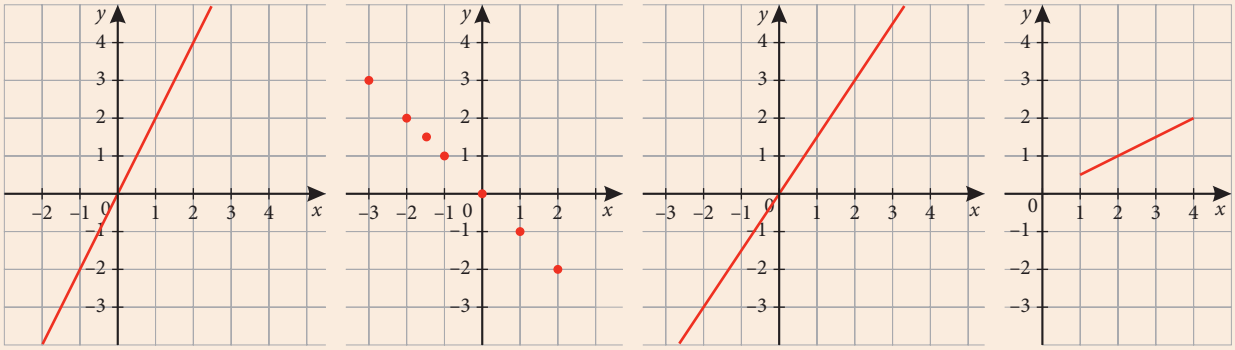
3 Ábrázold az

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$; **b)** $x \mapsto \frac{6}{x}$; **c)** $x \mapsto -\frac{4}{x}$

fordított arányosságot leíró függvények grafikonját, ha az értelmezési tartomány mindegyik esetben $\mathbf{R} \setminus \{0\}$!

HÁZI FELADAT

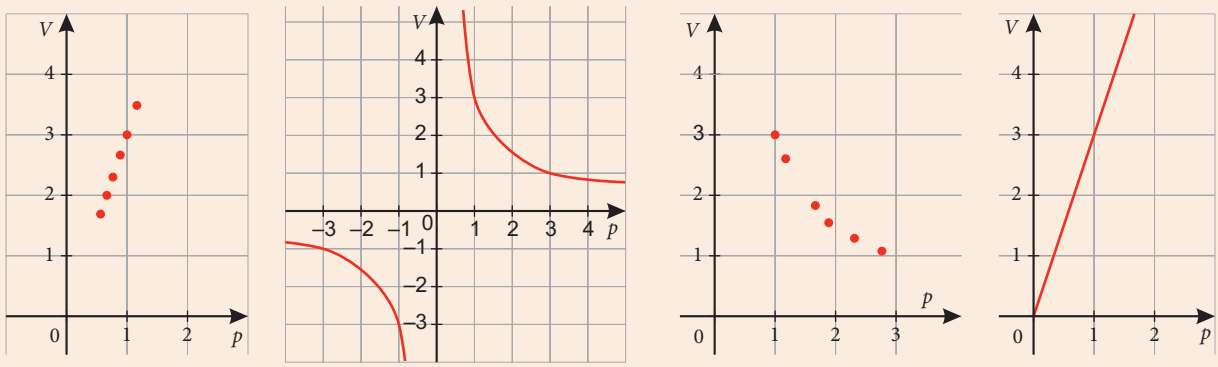
1 Mennyi az ábrázolt egyenes arányosságot leíró függvények esetén az arányossági tényező?



2 Fizikaórán Bence egy elzárt levegőbuborék térfogatának (V) és a buborékban lévő levegő nyomásának (p) kapcsolatát vizsgálta. Azt tapasztalta, hogy az összetartozó térfogat- és nyomásértékek szorzata nagyon jó közelítéssel minden esetben 3 lett (a mértékegységeket Bence nem jegyezte fel).

a) Van-e egyenes vagy fordított arányosság az elzárt levegő nyomása és térfogata között?

b) Melyik grafikont mellékelhette Bence a kísérletről írt jegyzőkönyvéhez?



3 Ábrázold közös koordináta-rendszerben azokat az egyenes, illetve fordított arányosságokat leíró függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya a $]0; 4]$ intervallum, hozzárendelési szabályuk pedig $x \mapsto \frac{1}{4}x$; $x \mapsto -\frac{3}{2}x$; $x \mapsto -\frac{3}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{2x}$!

Ellenőrizd a *Graph* program segítségével, hogy jók-e a grafikonjaid!

RÁADÁS

Egy álló helyzetből induló test sebessége 2 másodpercen át egyenes arányosság szerint nő 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességig, majd fordított arányosság szerint csökkenni kezd. Ábrázold grafikonon a sebességet az idő függvényében! Fogalmazd meg, mit olvashatsz le a test mozgásáról a grafikon alapján! Jellemezd a grafikont a monotonitás szempontjából! Melyik pillanatokra igaz, hogy a test sebessége 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

58 EGYENESEK MEREDEKSÉGE

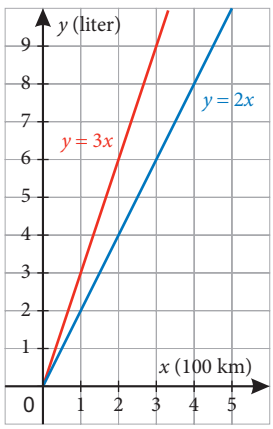
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy robogó üzemanyag-fogyasztása 2 liter/100 km, egy nagyobb motorkerékpáré pedig 3 liter/100 km. Ábrázoljuk a két jármű által felhasznált üzemanyag mennyiségét a megtett út függvényében! (A távolságot 100 km-es egységekben, az elfogyasztott üzemanyag mennyiségét literben fejezzük ki!)





Megoldás



A fogyasztást az $x \mapsto 2x$ és az $x \mapsto 3x$ $(x \geq 0)$ egyenes arányosságot leíró függvények jellemzik, grafikonjuk egyenlete tehát $y = 2x$, illetve $y = 3x$.

Mindkét függvény grafikonja félegyenes. Azt mondjuk, hogy az $y = 3x$ egyenletű egyenes **meredeksége** 3, az $y = 2x$ egyenletű egyenes **meredeksége** pedig 2.

A nagy motorkerékpár grafikonjának egyenese *meredekebben emelkedik,* mint a robogóé.

FELADAT

1 Három izzó energiafogyasztását vizsgálták. Az egyik izzó másodpercenként 0,5 joule energiát fogyaszt, a második 1 joule energiát, a harmadik 1,5 joule energiát, és feltételezhető, hogy az energiafogyasztásuk egyenesen arányos az idővel.

a) Ábrázold közös koordináta-rendszerben az izzók energiafogyasztását az idő függvényében!

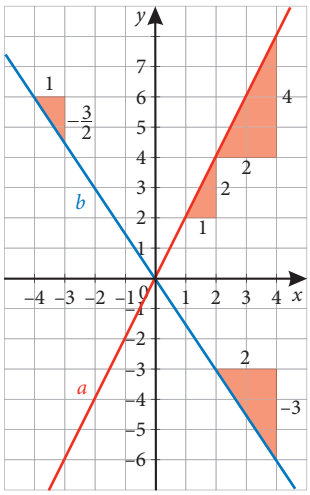
b) Írd fel a grafikonok egyenletét!

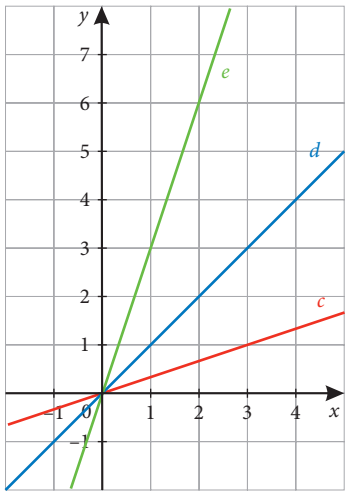
c) Mekkora a grafikonok egyenesének meredeksége?

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. A két ábrán egyenes arányosságokat leíró függvényeket ábrázoltunk. A bal oldali ábrán látható piros (a) egyenes meredeksége 2, a kék (b) egyenesé pedig $-\frac{3}{2}$.

Adjuk meg a jobb oldali ábra c, d, e egyeneseinek meredekségét!





Megoldás

Mit mutat egy **egyenes meredeksége**? Azt, hogy ha az egyenes valamelyik pontjából *1 egységet megyünk* az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányba, akkor *mennyit kell mennünk* az y tengellyel párhuzamosan, hogy újra az egyenes egy pontjához jussunk.

A jobb oldali ábrán a kék (d) egyenes meredeksége 1, a zöld egyenes (e) meredeksége 3.

A piros (c) egyenesnél a (3; 1) pont is, és az origó is rajta van a piros egyenesen, tehát 3 egység „jobbra” haladáshoz 1 egység „emelkedés” tartozik. Ez úgy lehetséges, hogy valójában 1 egység „jobbra” haladáshoz $\frac{1}{3}$ egység „emelkedés” tartozik. Tehát a piros egyenes meredeksége $\frac{1}{3}$.

Ha egy egyenes egy függvény grafikonja, akkor meredeksége m, ha a változó (x) értékét 1-gyel növelve a függvényérték m-mel változik.



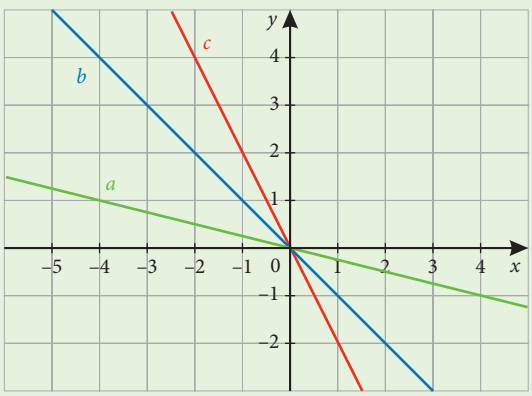
FELADAT

2 **a)** Add meg az ábrán látható három egyenes meredekségét!

b) A három egyenes mindegyike egy-egy függvény képe. Melyik függvény hozzárendelési szabályát találod meg az alábbiak között? Párosítsd a függvények betűjeleit a megfelelő hozzárendelési szabályhoz!

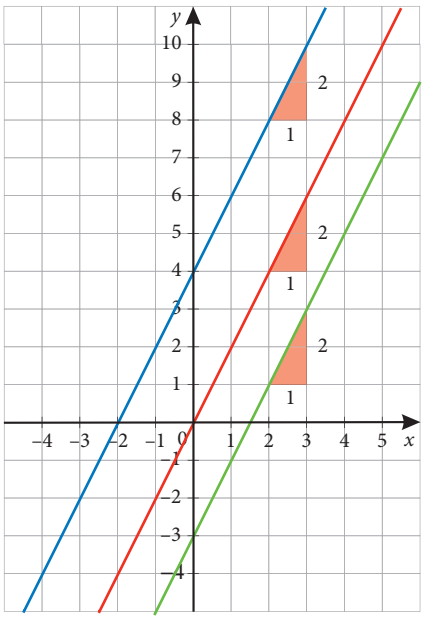
$x \mapsto -x$; $x \mapsto -\frac{1}{2}x$; $x \mapsto -\frac{1}{4}x$; $x \mapsto \frac{1}{4}x$; $x \mapsto -2x$

c) Told el a három egyenest az y tengely mentén 3 egységgel, pozitív irányba! Változik-e az egyenesek meredeksége az eltolás következtében? Fel tudod írni az eltolással kapott függvények hozzárendelési szabályát?

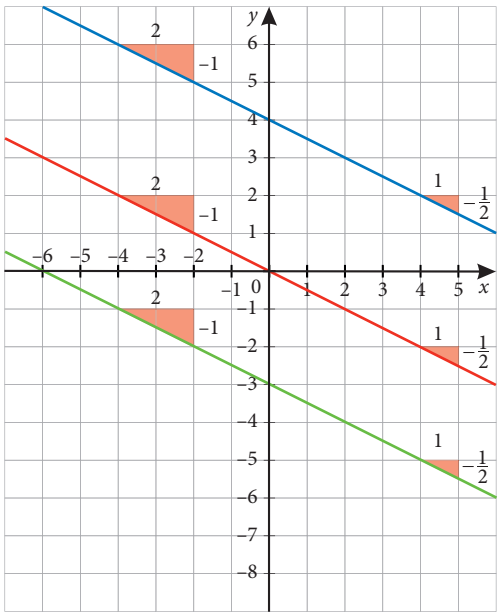


ELMÉLET

Két egyenes meredekségét összehasonlítva könnyen látható, hogy az egyenesek párhuzamosak-e vagy sem.
Ha **két egyenes párhuzamos**, akkor a két egyenes **meredeksége egyenlő**.
Az előbbi **állítás megfordítása** is igaz.
Ha két egyenes **meredeksége egyenlő**, akkor a **két egyenes párhuzamos**.



2 meredekségű egyenesek



$-\frac{1}{2}$ meredekségű egyenesek

A meredekség jelentését vizsgálhatod *GeoGebra* programmal is.

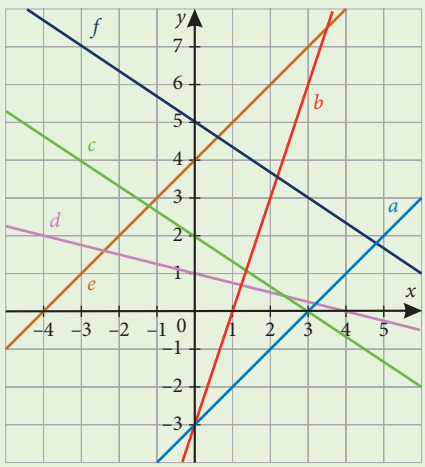
FELADAT

3 Állapítsd meg az ábrázolt egyenesek meredekségét!

a) Vannak-e az egyenesek között párhuzamosak?

b) Melyik egyenes meredeksége a negatív?

c) Melyik egyenes meredeksége a legkisebb?



4 **a)** Egy egyenes áthalad a (3; 1) ponton és az (5; 4) ponton is. Rajzold meg ezt az egyenest, és számold ki a meredekségét!

b) Egy egyenes áthalad a (3; 1) ponton, a meredeksége pedig $\frac{1}{2}$. Rajzold meg ezt az egyenest, és állapítsd meg, hogy áthalad-e a (–7; –4) ponton!

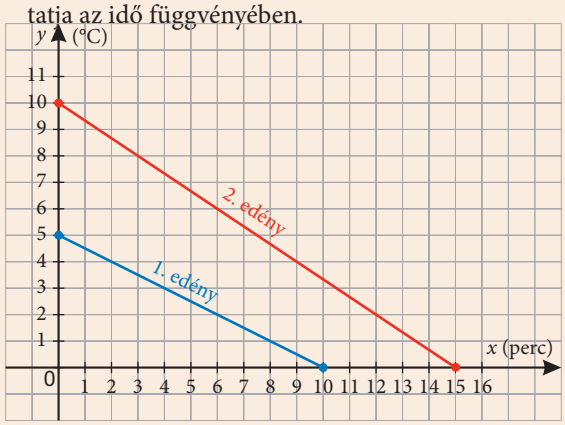
HÁZI FELADAT

1 **a)** Ábrázold a következő egyenes arányosságot leíró függvényeket:
$(\mathbf{R} \to \mathbf{R})$: $x \mapsto -x$; $x \mapsto -\frac{3}{2}x$; $x \mapsto -\frac{4}{3}x$!

b) Írd fel a grafikonok egyenletét!

c) Add meg az egyenesek meredekségét!

2 Két kisebb edényben víz van. A vizet mindkét edényben addig hűtjük, amíg el nem éri a 0 °C hőmérsékletet. Az ábra a hőmérséklet változását mutatja az idő függvényében.



a) Mekkora volt az egyes edényekben a víz hőmérséklete a hűtés kezdetekor?

b) Mennyi a grafikonok egyenesének meredeksége?

c) Hány fokot hűl az első, illetve a második edényben lévő víz percenként?

d) Hány perc alatt hűl 1 °C-ot az első, illetve a második edényben lévő víz?

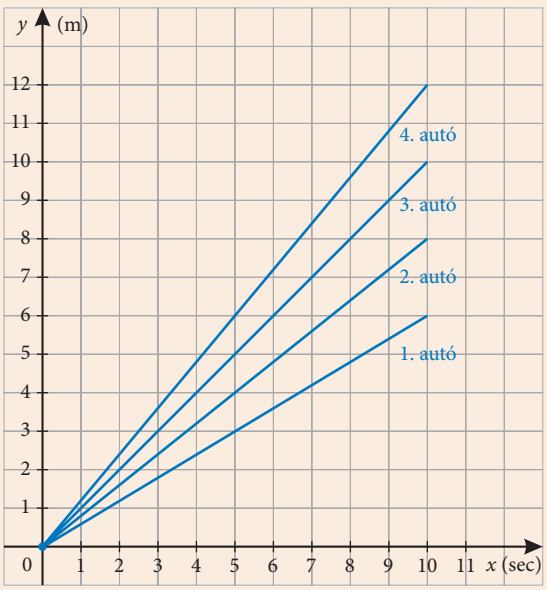
e) Melyik edényben gyorsabb a hűlési folyamat?

3 A $P(1; 3)$ pont rajta van az a, b, c, d egyenesek mindegyikén. A P ponton kívül az a egyenes átmegy a $Q(0; 1)$ ponton, a b egyenes az $R(3; 5)$ ponton, a c egyenes az $S(3; 6)$ ponton, a d egyenes pedig a $T(4; 0)$ ponton.

a) Rajzold meg az egyeneseket egy koordinátarendszerben!

b) Mekkora az egyenesek meredeksége?

4 Távirányítású játékautókat teszteltek. A kocsikat egyenes pályán futtatták és azt mérték, mekkora utat tesznek meg akkor, amikor már elérték a végsebességüket. A mérés mindegyik esetben 10 másodpercig tartott.



a) Írd fel mindegyik grafikon egyenletét!

b) Mennyi a grafikonok egyenesének meredeksége?

c) Mekkora az egyes autók végsebessége $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban, illetve $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban kifejezve $\left(1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$?

RÁADÁS

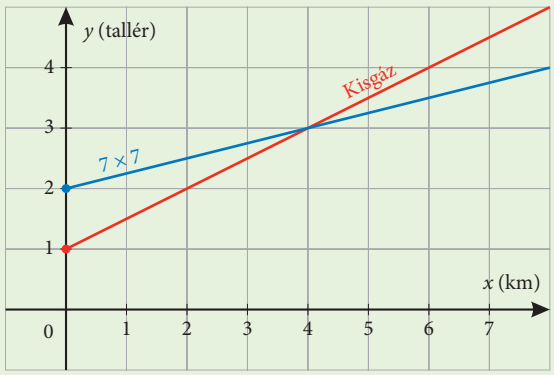
1. Egy egyenesnek ismerjük két pontját: $P(152; -355)$ és $Q(-233; -104)$. Mennyi az egyenes meredeksége?

2. Oldjuk meg az előző feladatot általánosan! Tekintsük a $P(a; b)$ és a $Q(c; d)$ pontokat. Írd fel a betűk segítségével a rajtuk átmenő egyenes meredekségét! Mindig lesz megoldás, vagy lehetnek a változóknak olyan értékei, amikor nem tudjuk felírni a meredekséget?

59 LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

FELADAT

1 Ábránkon a piros és a kék félegyenes azt mutatja, hogy hány tallért kell fizetnünk a megtett út hosszától függően a Kisgáz, illetve a 7 × 7 fuvarozócég taxijába ülve.



a) Mitől függ az, hogy melyik taxit érdemes igénybe vennünk? (Úgy képzeljük, hogy sehol sem kell megállnunk, csak a célállomáson.)

b) Az alapdíjon felül mekkora a megtett kilométerenként fizetendő díj az egyik, illetve a másik cég esetében?

c) Mekkora a grafikonok meredeksége?

d) Összesen hány tallért kell fizetnünk az egyik, illetve a másik cégnél, ha x km-t taxizunk? Add meg képlettel!

e) Számítsd ki a képleteddel, hogy mennyit mutat a taxióra a két cégnél 2,8 km, 4,8 km, 6,8 km megtétele után!

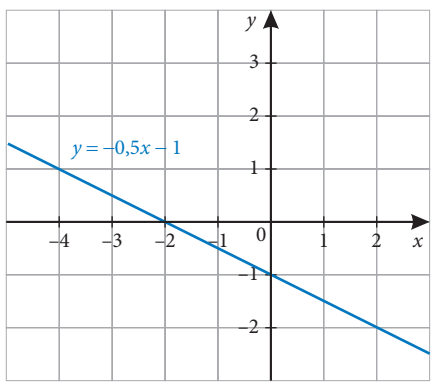
f) Olvasd le a grafikonról, hogy hány km-t taxizhatunk 4 tallérért az egyik, illetve a másik cégnél!

ELMÉLET

Definíció: Egy függvényt **elsőfokú függvény**nek nevezünk, ha
– értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és
– hozzárendelési szabálya $x \mapsto ax + b$ alakú, ahol a és b adott valós szám, $a \neq 0$.

Az $x \mapsto ax + b$ hozzárendelési szabályú elsőfokú függvény grafikonja olyan egyenes, amely mindkét koordinátatengelyt metszi. Ennek az egyenesnek a meredeksége a, az ordinátatengelyt pedig a b második koordinátájú pontban metszi.
Ha a koordináta-rendszer tengelyeit az x és az y betűvel jelöljük, akkor ennek a grafikonnak az egyenlete: $y = ax + b$.

Például
Az $x \mapsto -0{,}5x - 1$ elsőfokú függvény grafikonja egy olyan egyenes, amelynek meredeksége –0,5, az ordinátatengelyt pedig a –1 második koordinátájú pontban metszi. Az egyenes egyenlete: $y = -0{,}5x - 1$.



Az olyan függvényeket, amelyek grafikonja egy egyenes vagy annak egy részhalmaza, **lineáris függvényeknek** nevezzük.

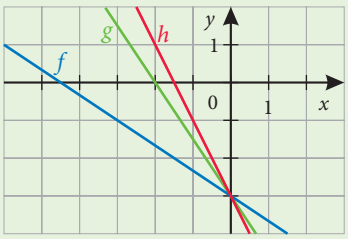
Az a és a b szerepét vizsgálhatod a *GeoGebra* programmal is.

FELADAT

2 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő elsőfokú függvényeket!

$x \mapsto 1{,}5x + 2$; $x \mapsto -x + 2$; $x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$

3 Az ábrákon megadott három egyenes egy-egy elsőfokú függvény grafikonja. Mi a függvények hozzárendelési szabálya?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Van-e olyan elsőfokú függvény, amely a 2-höz 1-et, a 4-hez pedig 5-öt rendel?

Megoldás

A függvény grafikonjából két pontot ismerünk: $P(2; 1)$ és $Q(4; 5)$. Ez a két pont egy egyenest határoz meg.

Az $x \mapsto ax + b$ hozzárendelési szabályú elsőfokú függvény grafikonja egyenes. Az egyenes meredeksége a, és az ordinátatengelyt b-nél metszi.

A grafikonról leolvashatjuk, hogy az egyenes meredeksége 2, és az y tengelyt a -3 pontban metszi. Az egyenlete ezért: $y = 2x - 3$.

A két ismert pontból *számolással* is megkaphatjuk az egyenletet:

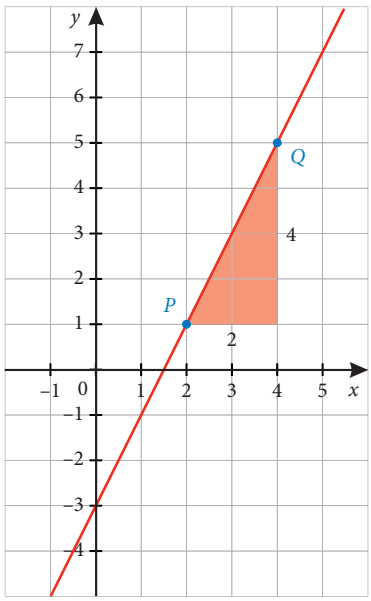
$$\text{Meredeksége} = \frac{\text{második koordináták különbsége}}{\text{első koordináták különbsége}} = \frac{5-1}{4-2} = 2.$$

Miután a meredekséget már kiszámoltuk, így az $y = 2x + b$ egyenletből csak a b-t nem ismerjük. Az adott pontok bármelyikének koordinátái az egyenletbe helyettesítve ki kell elégítsék az egyenletet. $P(2; 1)$ pont esetén $x = 2$ és $y = 1$.

Ezeket behelyettesítve: $1 = 2 \cdot 2 + b$. Ebből $b = -3$.

A keresett elsőfokú függvény tehát: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2x - 3$.

(Ellenőrzés: $2 \mapsto 2 \cdot 2 - 3 = 1$ és $4 \mapsto 2 \cdot 4 - 3 = 5$.)



FELADAT

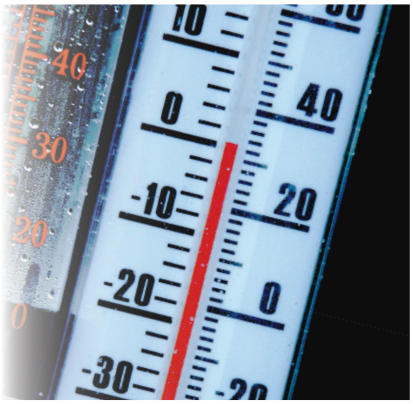
4 Egy elsőfokú függvény grafikonjának két pontja: $A(1; 2)$ és $B(3; 3)$. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. A hőmérsékletet a legtöbb országban – így pl. Kanadában is – Celsius-fokban (°C) mérik. Az Egyesült Államokban és még néhány más országban azonban az úgynevezett Fahrenheit-fokot (°F) használják. Így aztán a kanadai időjárás-jelentésben egészen más számok hangzanak el, mint az egyesült államokbeliben, még akkor is, ha a határ két oldalán, egymástól alig néhány km-re fekvő városokról van szó, ahol nyilvánvalóan ugyanolyan az idő.

Például:

Kanada (°C)	–10	0	20	25
USA (°F)	14	32	68	77



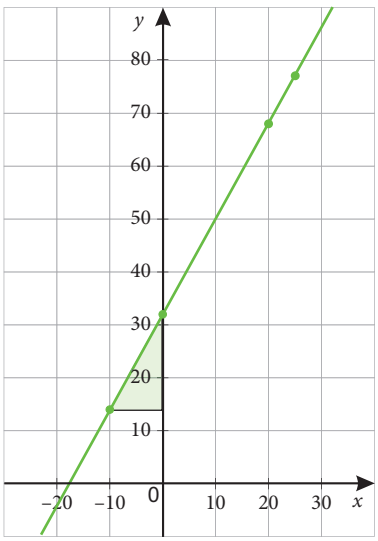
a) Adjuk meg képlettel, milyen összefüggés áll fenn a Celsius- és a Fahrenheit-skála között!

b) Mennyi a jég olvadáspontja Fahrenheit-fokban?

c) A Fahrenheit-skála egyik alappontja eredetileg a 96 °F volt. Mi szolgálhatott alapul ehhez az értékhez? Mennyi Celsius-fokban a 96 °F?

Megoldás

a) Ábrázoljuk az adatokat koordináta-rendszerben:



A pontok egy egyenesen vannak. Ha tehát egy kanadai hőmérőn x °C a hőmérséklet, és ugyanitt, ugyanekkor egy egyesült államokbeli hőmérő y °F-et mutat, akkor $y = a \cdot x + b$.

Az a meredekséget megállapíthatjuk pl. az első két pont alapján:

$a = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$, a b tengelymetszet pedig a táblázat alapján pontosan 32.

Így a keresett képlet: $y = \frac{9}{5} \cdot x + 32$, vagy „beszédes” formában: $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$.

b) A jég olvadáspontja: $\frac{9}{5} \cdot 0 + 32 = 32$ (°F).

c) Az $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ egyenlet átrendezhető a $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$ alakba is, így a két hőmérsékleti skála szerinti bármelyik értéket át tudjuk váltani a másikba.

A 96 °F értéke °C-ban: $\frac{5}{9} \cdot (96 - 32) \approx 36$, ami körülbelül az emberi test hőmérséklete.

Példánkban a kétféle hőmérsékleti skála kapcsolatát egy olyan képlet írja le, amelyhez a koordináta-rendszerben egy egyenes tartozik. Az egyenes latin neve linea. Ennek nyomán *a kétféle hőmérsékleti skála közötti kapcsolatot lineárisnak nevezzük.*

FELADAT

5 **a)** „Fahrenheit 451 fok – az a hőmérséklet, amelynél a könyvnyomó papír tüzet fog és elég. Ha vonalazott papírt tesznek eléd – másra írj.” (Juan Ramun Jiminez) Az idézet Ray Bradbury *Fahrenheit 451* című regényének bevezetője. Hány °C-on fog tüzet a könyvnyomó papír?

b) Ha a kanadai időjárás-jelentésben az hangzik el, hogy a határ menti településeken 10 °C-kal (5 °C-kal, 1 °C-kal) csökken a hőmérséklet, akkor az USA-ban élők hány °F-os csökkenésre számíthatnak?

HÁZI FELADAT

1 Add meg egy olyan lineáris függvény hozzárendelési szabályát,

a) amely a 0-hoz 2,5-et, az 1-hez 4,5-et rendel;

b) amely a 0-hoz 10-et, az 1-hez 8,5-et rendel;

c) amely a 0-hoz 2-t, és az 5-höz is 2-t rendel!

2 Egy elsőfokú függvény grafikonja átmegy a P és a Q ponton. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát, ha

a) $P(-1; 5)$ és $Q(0; 4)$;

b) $P(-3; 1)$ és $Q(3; 5)$!

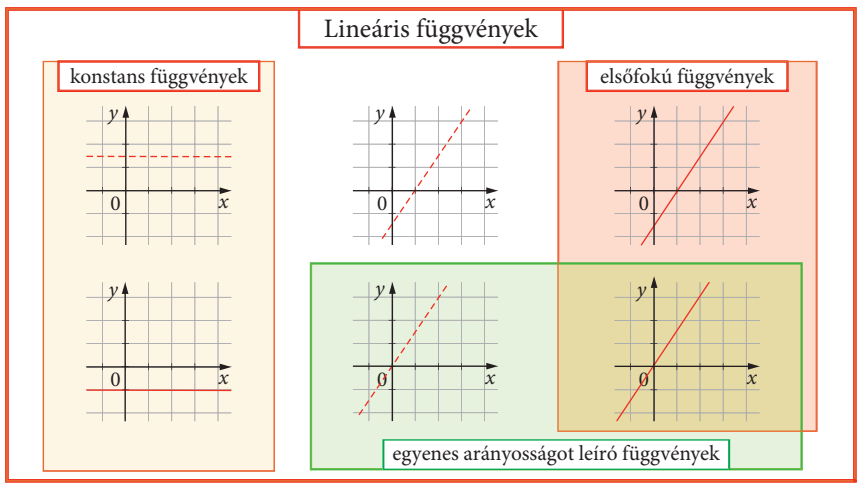
3 Töltsd ki a füzetedben a táblázat üres mezőit, ha $f(x) = -\frac{2}{3}x$ és $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ $(x \in \mathbf{R})$!

x	$f(x)$	Megfelelő pont a grafikonon	$g(x)$	Megfelelő pont a grafikonon
–6	$-\frac{2}{3} \cdot (-6) = 4$	(–6; 4)		
–3				
				(0; 4)
			0	
8				

4 Van-e olyan hőmérséklet, amely °F-ben és °C-ban mérve is ugyanannyi?

RÁADÁS

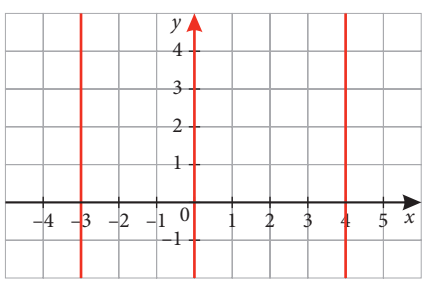
Halmazábrával így szemléltethetjük a lineáris függvények fajtáit:



Emeljük ki azokat a lineáris függvényeket, amelyek értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ezek grafikonja egy egyenes. Táblázatunk megmutatja, mit érdemes megjegyeznünk ezekről a speciális esetekről:

a és b változása	$a = 0$	$a \neq 0$ és $b = 0$	$a \neq 0$ és $b \neq 0$
A hozzárendelési szabály	$x \mapsto b$	$x \mapsto ax$	$x \mapsto ax + b$
Milyen függvény?	konstans függvény	elsőfokú függvény és egyenes arányosságot leíró is	elsőfokú függvény, nem egyenes arányosságot leíró
A grafikon egy egyenes, amely	merőleges az y tengelyre	átmegy az origón, de nem az x és nem az y tengely	metszi az x és az y tengelyt is az origótól különböző pontban

Igaz az is, hogy egy x–y koordináta-rendszer minden egyenese, amely nem merőleges az x tengelyre, egy elsőfokú vagy egy konstans függvénya grafikonja.



Az y tengely egyenese és a vele párhuzamos egyenesek nem függvénygrafikonok. Miért? Mert nem igaz rájuk, hogy mindegyik pontnak más szám az első koordinátája, azaz az így ábrázolt hozzárendelések az értelmezési tartomány egy x értékéhez nem csak egy y értéket rendelnek – így nem lehetnek függvények.

60 ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

BEVEZETŐ

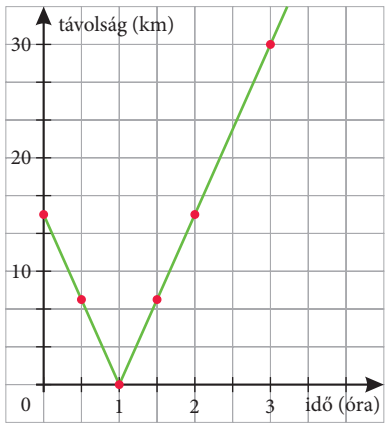
Péter egy egyenes országúton állandó, 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel biciklizik. Egy óra után keresztülhalad egy vonalon, amelyet egy kerékpáros verseny startvonalaként festettek az útburkolatra.
Ábrázoljuk grafikonon Péter távolságát a startvonaltól az idő függvényében!



Megoldás
Péter az első egy órában közeledett a startvonalhoz. Mivel egy óra alatt 15 km-t tekert, 15 km távolról indult, s ez a távolság egyenletesen csökkent: fél óra után már csak 7,5 km volt. 1 óra elteltével a vonaltól mért távolsága 0 km. Ezután megint egyenletesen nőtt a távolság. Az indulástól számítva 1,5 óra múlva 7,5 km, 2 óra múlva 15 km, 3 óra múlva 30 km.
Foglaljuk táblázatba az adatokat:

idő (óra)	0	0,5	1	1,5	2	3
távolság (km)	15	7,5	0	7,5	15	30

Ábrázoljuk grafikonon az adatokat, majd a teljes utazást!



ELMÉLET

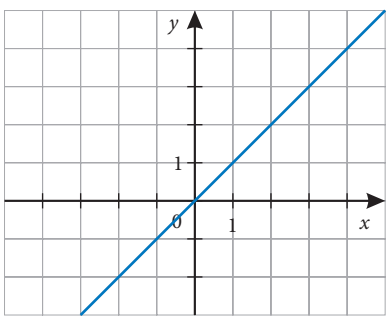
Definíció: Egy valós szám **abszolút értéke** nemnegatív számok esetén maga a szám, negatív számok esetén a szám ellentettje. Jele: $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0 \\ -x, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

(például: $|7| = 7$, vagyis $+7$ abszolút értéke maga a szám, a $+7$; $|-3| = -(-3) = 3$, vagyis -3 abszolút értékét úgy képezzük, hogy vesszük a -1-szeresét)

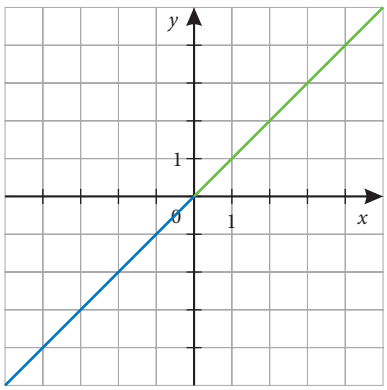
KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk a következő függvényeket:
a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \quad x \mapsto |x|;$ **b)** $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \quad x \mapsto |2x + 2|!$

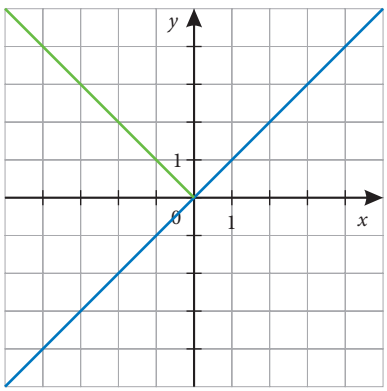


Megoldás
a) Ábrázoljuk először az $x \mapsto x$ függvényt a valós számok halmazán!

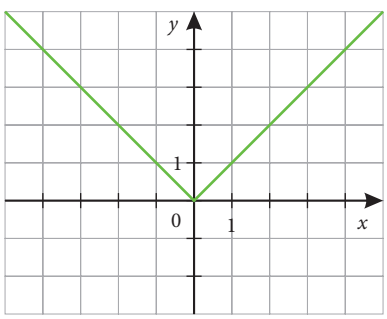
Ha a függvényérték nemnegatív (nulla vagy pozitív értékű), akkor abszolút értéke önmaga, ezért az $x \mapsto x$ függvény grafikonján a nemnegatív függvényértékű pontok illeszkednek az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjára is (azaz az x tengelyre illeszkedő pont és az x tengely fölött lévő pontok helyben maradnak).



Ha a függvényérték negatív, akkor abszolút értéke az eredeti függvényérték ellentettje, ezért az adott helyen nem az $x \mapsto x$ függvény grafikonjának pontjai, hanem azok x tengelyre vett tükörképei illeszkednek az $x \mapsto -x$ függvény grafikonjára.

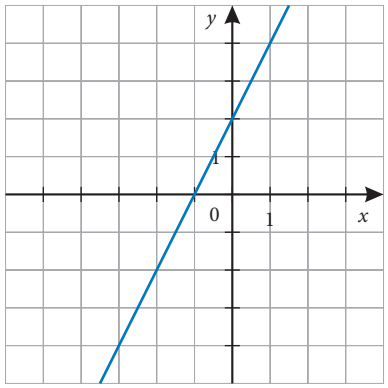


Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |x|$ grafikonja tehát:

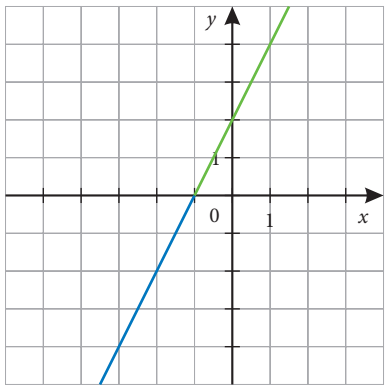


Látható, hogy az $x \mapsto |x|$ függvény mindegyik értéke pozitív vagy 0.

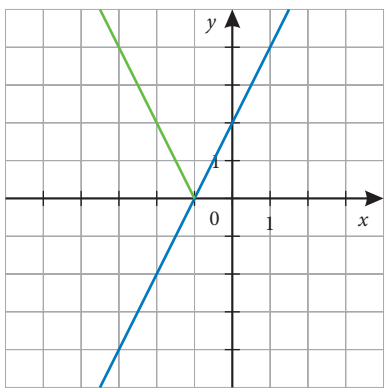
b) Ugyanígy gondoljuk végig g függvény esetében is! Ábrázoljuk az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2x + 2$ függvényt!



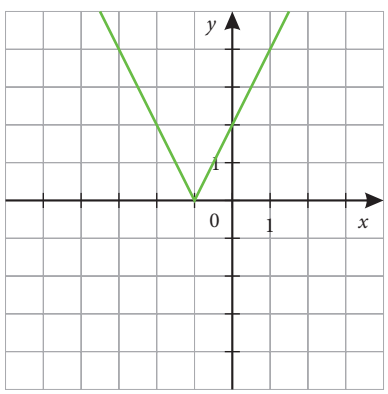
Amikor a függvényértékek nem negatívak, akkor abszolút értékük maguk a függvényértékek, ezért értékük nem változik (a függvény grafikonja helyben marad).



Amikor a függvényértékek negatívak, akkor abszolút értékük az eredeti függvényérték ellentettje, ezért az ábrázoláshoz a negatív értékű függvénypontokat tükrözzük az x tengelyre.



$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |2x + 2|$ grafikonja:



FELADAT

1 Ábrázold a következő függvényeket!

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3x$ és $\mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto |3x|$

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 0{,}5x + 2$ és $\mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto |0{,}5x + 2|$

ELMÉLET

Definíció: Azt a függvényt, amely minden valós számhoz az abszolút értékét rendeli, **abszolútérték-függvény**nek nevezzük.

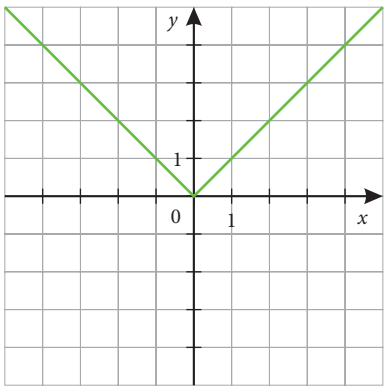
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad x \mapsto |x|;$

Az abszolútérték-függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

Ha $x < 0$; akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő,

ha $x > 0$; akkor a függvény szigorúan monoton növekvő.

Az abszolútérték-függvény $x = 0$ esetén veszi fel az értékkészlet legkisebb elemét, ezt úgy mondjuk, hogy $x = 0$-ban az abszolútérték-függvénynek **minimuma** van. A függvény minimumának értéke $f(0) = 0$.



Definíció: Egy f függvénynek **minimuma** van az értelmezési tartomány egy x_0 helyén, ha a függvény az ott felvett $f(x_0)$ függvényértéknél sehol sem vesz fel kisebb értéket. Ekkor x_0 egy **minimumhely**, $f(x_0)$ pedig a függvény **minimuma.**

Definíció: Egy f függvénynek **maximum**a van az értelmezési tartomány egy x_0 helyén, ha a függvény az ott felvett $f(x_0)$ függvényértéknél sehol sem vesz fel nagyobb értéket. Ekkor x_0 egy **maximumhely**, $f(x_0)$ pedig a függvény **maximuma.**

A minimumot és a maximumot **szélsőértékek**nek is nevezzük.

FELADAT

2 Olvasd le az abszolútérték-függvény grafikonjáról!

a) Melyik számok abszolút értéke 4,5?

b) Melyik szám abszolút értéke egyenlő a nála 3-mal nagyobb szám abszolút értékével?

3 Ábrázold a függvényeket, majd olvasd le a grafikonról, hol veszi fel a függvény a minimumát?

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad f(x) = |1{,}5x + 4|$

b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad g(x) = |3x - 6|$

c) $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad h(x) = |-2x + 2|$

4 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad f(x) = -\frac{2}{3}x$

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad g(x) = |2x + 8|$

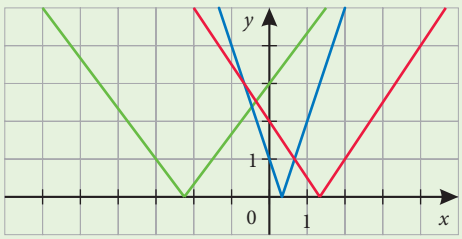
a) Olvasd le a metszéspontok koordinátáit!

b) Mit fejeznek ki a metszéspontok koordinátái?

c) Számolással ellenőrizd, hogy az a) részben leolvasott metszéspont koordináták helyesek-e!

5 Határozd meg, melyik függvény grafikonja látható az ábrán!

a) **b)** **c)**



Írd fel a hozzárendelési szabályokat két különböző módon!

HÁZI FELADAT

1 Ábrázold a következő függvényeket!

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto -0{,}5x + 2$ és

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |-0{,}5x + 2|$

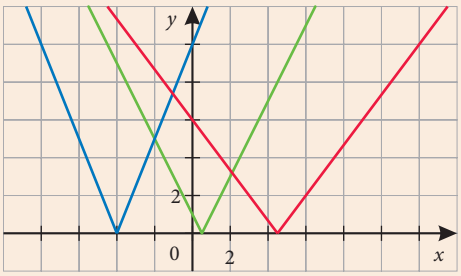
2 Ábrázold a függvényeket, majd olvasd le a grafikonról, hol veszi fel a függvény a minimumát!

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = |4x + 8|$

b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $g(x) = |-3x - 3|$

3 Határozd meg, melyik függvény grafikonja látható az ábrán! Add meg a hozzárendelési szabályokat!

a) **b)** **c)**



RÁADÁS

1. Ha ismerjük egy f függvény grafikonját, akkor hogyan készíthetjük el egyszerűen az $g: g(x) = f(x) - 2$ függvény grafikonját?

a) Ábrázold közös koordinátarendszerben: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |x|$ és $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |x| - 2$!

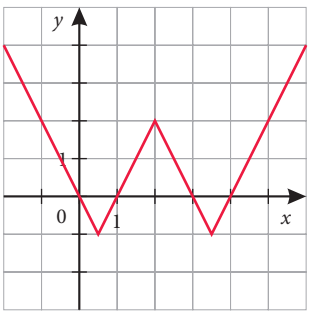
b) Ábrázold közös koordinátarendszerben: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |2x|$ és $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto |2x| - 2$!

2. Ábrázold a következő függvényt!

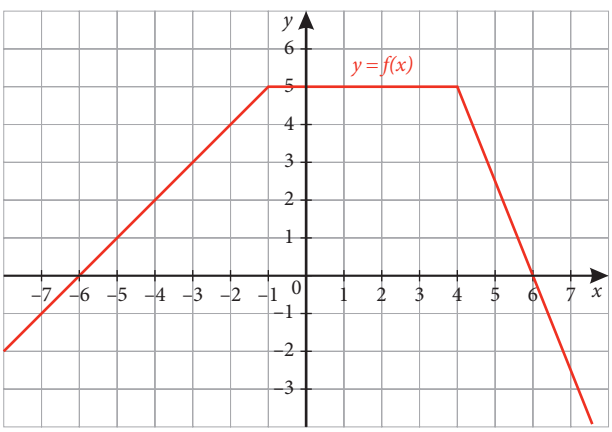
a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \big||2x| - 2\big|$

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \big||x + 3| - 2\big|$

3. Határozd meg, melyik függvény grafikonja látható az ábrán!



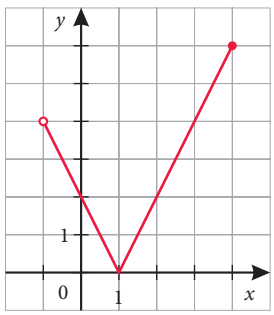
4. Az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonjának ismeretében ábrázoljuk az $f(x) + 1$; $f(x - 3)$; $|f(x)|$ függvények grafikonját!



61 FÜGGVÉNYEK JELLEMZÉSE

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábrán egy f függvény grafikonját látod. Olvasd le a grafikonról a függvény értelmezési tartományát, növekedési viszonyait, szélsőértékeit, zérushelyét és értékkészletét!



Megoldás

A függvény értelmezési tartománya az x tengelyről olvasható le. Mindazok a számok beletartoznak, amelyekhez a függvény rendelt valamit, azaz amelyekhez tartozik függvényérték. Ez most balról nyílt intervallum: a -1-hez már nem rendelt értéket a függvény, de a 4-hez még igen. $D_f =]-1; 4]$.

A függvény a $]-1; 1[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, majd az $]1; 4]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

A grafikonról az is látszik, hogy a függvénynek van legkisebb és legnagyobb értéke. Ezek a függvény szélsőértékei. Minimuma (minimum értéke) 0; minimumhelye 1; maximuma (maximum értéke) 6; maximumhelye 4.

A függvény a 0 értéket az $x = 1$ helyen veszi fel, ezért zérushelye csak egy van: az 1.

Az y tengelyen olvasható le a függvény értékkészlete. Minden 0 és 6 közötti valós számot felvesz valahol a függvény. A függvény értékkészlete: $R_f = [0; 6]$.

Érdekessége, hogy van azonban olyan szám az értékkészletben, amelyet több helyen is felvesz a függvény. Például $f(x) = 3$-hoz kétféle elem is tartozik az értelmezési tartományból: $x_1 = -0{,}5$ és $x_2 = 2{,}5$ (ezért nem kölcsönösen egyértelmű).

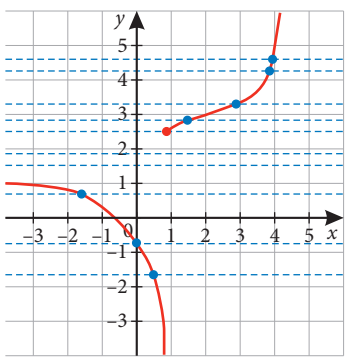
ELMÉLET

Definíció: Egy függvény **kölcsönösen egyértelmű**, ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez a képhalmaz különböző elemeit rendeli.

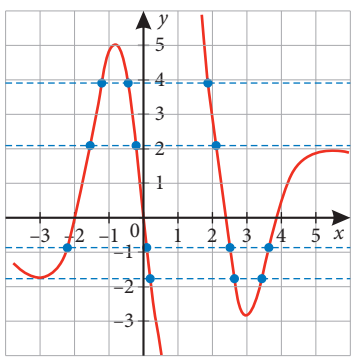
Az ilyen függvény azért is különleges, mert a megfordítása is függvény: az a hozzárendelés, amely az értékkészlet minden eleméhez az *„ősét”* rendeli, azt az elemet, amelyhez eredetileg hozzárendeltük.

Ha egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete számhalmaz, akkor van grafikonja. Akárhol állítunk merőlegest a koordináta-rendszer x tengelyére (az abszcisszatengelyre), annak **legfeljebb egy** közös pontja van ezzel a grafikonnal (ha egynél több közös pontja van, akkor nem függvény; nem egyértelmű a hozzárendelés).

Ha egy függvény olyan, hogy a grafikonjának az y tengelyre (az ordinátatengelyre) állított merőlegesekkel is legfeljebb egy közös pontja van, akkor ez a függvény kölcsönösen egyértelmű.



kölcsönösen egyértelmű függvény

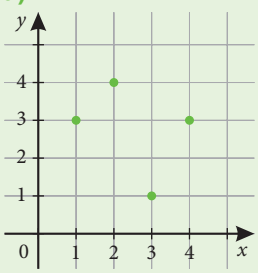


nem kölcsönösen egyértelmű függvény

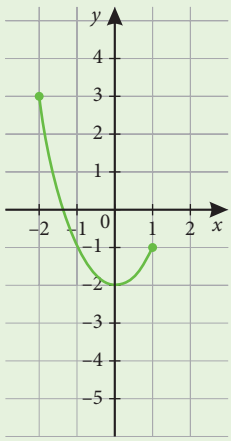
FELADAT

1 Olvasd le a függvények értelmezési tartományát, növekedési viszonyait, szélsőértékeit! Melyik ezek közül kölcsönösen egyértelmű függvény?

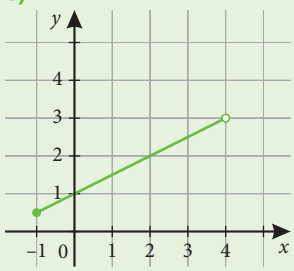
a)



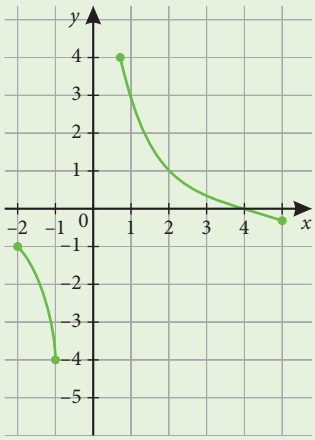
b)



c)



d)



2 Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, értelmezési tartománya pedig a {10; 20; 30; 40; 50} halmaz. Melyik halmaz lehet az f értékkészlete az alábbiak közül?

a) {0; 1; 5; 11; 9} **b)** $\{m\}$ **c)** {–4; –3; 0; 2; 3} **d)** $\{A; B; C; D\}$

3 Biztos-e, lehetséges-e, lehetetlen-e, hogy az f függvény kölcsönösen egyértelmű, ha

a) D_f is és R_f is 5 elemű halmaz;

b) D_f 10 elemű és R_f 7 elemű halmaz;

c) D_f is és R_f is végtelen halmaz?

4 Adj meg egy-egy olyan függvényt, amelynek a hozzárendelési szabálya $x \mapsto |x|$, és a függvény

a) kölcsönösen egyértelmű;

b) nem kölcsönösen egyértelmű!

5 Jellemezd a függvények növekedési viszonyait grafikonjuk alapján!

Emlékeztető:

Ha egy függvény az értelmezési tartomány nagyobb eleméhez

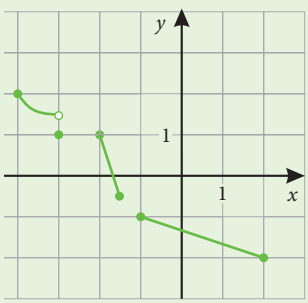
– **nagyobb vagy egyenlő** értéket rendel, akkor **monoton növekvő**;

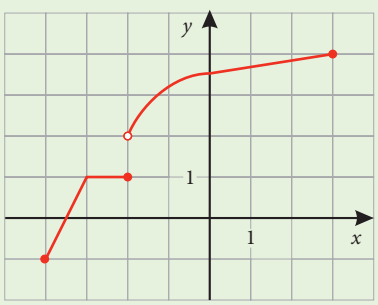
– **nagyobb** értéket rendel, akkor **szigorúan monoton növekvő**;

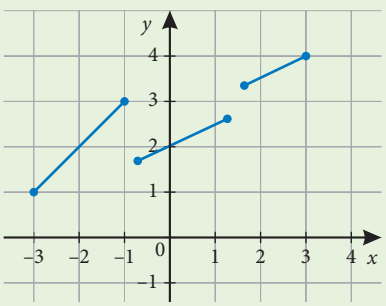
– **kisebb vagy egyenlő** értéket rendel, akkor **monoton csökkenő**;

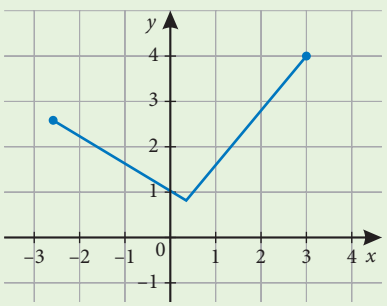
– **kisebb** értéket rendel, akkor **szigorúan monoton csökkenő**

az adott intervallumon.









6 Döntsd el, melyik állítás igaz, ha az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is számhalmaz!

a) Ha az f szigorúan monoton függvény, akkor kölcsönösen egyértelmű.

b) Ha az f kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor f szigorúan monoton.

ELMÉLET

A valós számokon értelmezett függvények vizsgálatakor eddig ilyen kérdésekre kerestük a választ:

- Mi a függvény értelmezési tartománya, képhalmaza és hozzárendelési szabálya?
- Mi jellemzi a függvény növekedési viszonyait?
- Vannak-e szélsőértékei? Mely helyeken?
- Vannak-e zérushelyei, melyek ezek?
- Kölcsönösen egyértelmű-e a függvény?
- Mi az értékkészlete?

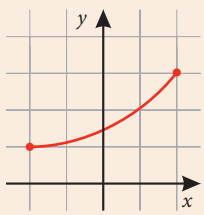
Ezt nevezzük függvényvizsgálatnak.

Sok olyan függvény van azonban, amelyek esetén még nem tudjuk a pontos választ minden kérdésre. Vagy azért, mert még kevés az ismeretünk, vagy azért mert a felsőbb matematika eszközeivel sem lehet pontos választ adni.

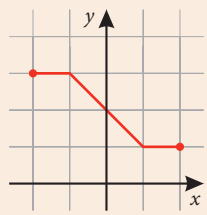
HÁZI FELADAT

1 Grafikonja alapján állapítsd meg, melyik függvény monoton, és melyik nem az! A monoton függvények szigorúan monotonok-e?

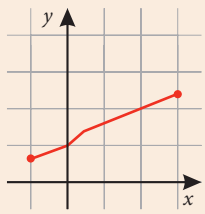
a)



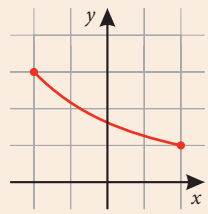
b)



c)



d)



2 Az f függvény értelmezési tartománya az $\{1; 2; 3; 4\}$ halmaz, hozzárendelési szabálya pedig: $x \mapsto \frac{1}{2}x$. Add meg f értékkészletét, és állapítsd meg, igazak-e az alábbi kijelentések!

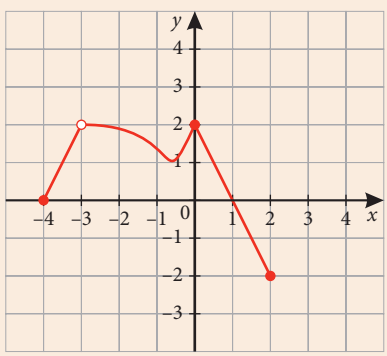
a) Az f monoton függvény.

b) Az f szigorúan monoton növő függvény.

c) Az f kölcsönösen egyértelmű.

3 Hány olyan függvény van, amelynek értelmezési tartománya az $\{1; 2; 3\}$ halmaz, értékkészlete pedig a $\{2; 4; 9\}$ halmaz? Add meg mindegyiket egy-egy táblázattal! Közülük melyik kölcsönösen egyértelmű?

4 Az ábrán egy függvény grafikonját látod. Döntsd el a függvényre vonatkozó alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!



a) a függvény értelmezési tartománya $[-4; 2]$;

b) a függvény szigorúan monoton növekvő, ha $-4 \leq x < -3$;

c) $f(0) = -4$;

d) a függvény értékkészlete $[-2; 2[$;

e) a függvény kölcsönösen egyértelmű;

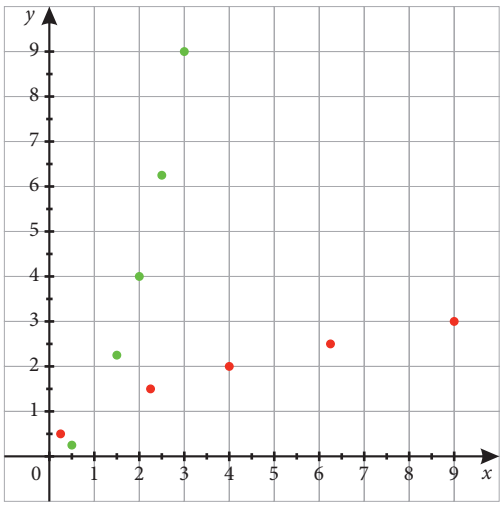
f) a függvény szigorúan monoton csökkenő $x \in [-2; -1]$ esetén;

g) $f(1) = 0$;

h) a függvény legkisebb értéke -2.

ELMÉLET

A függvényt úgy is definiálhatjuk, hogy olyan rendezett párok nem üres halmaza, amelyek első tagja mind különböző.
Ha egy függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor a rendezett párok második tagja is mind különböző. Ebben az esetben akkor is függvényt kapunk, ha mindegyik rendezett párban felcseréljük az első és a második tagot. Ez a függvény az eredetinek az **inverze**.



Például a {(0,5; 0,25); (1,5; 2,25); (2; 4); (2,5; 6,25); (3; 9)} függvény kölcsönösen egyértelmű, mert a rendezett párok első tagja is csupa különböző szám, és a második tagja is csupa különböző szám. Ennek a függvénynek az inverze: {(0,25; 0,5) (2,25; 1,5); (4; 2); (6,25; 2,5); (9; 3)}.

Definíció: Ha az $f : x \mapsto f(x)$ kölcsönösen egyértelmű függvény értelmezési tartománya az A, értékkészlete pedig a B halmaz, akkor azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya a B, értékkészlete pedig az A halmaz, és a B halmaz minden y eleméhez azt az A-beli x elemet rendeli, melyre $f(x) = y$, az f függvény **inverzének** nevezzük. Az inverz függvény jelölése: f^{-1}.

FELADAT

1. Adjunk meg egy olyan kölcsönösen egyértelmű függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, értékkészlete pedig az egész számok halmaza!

Megoldás
Írjuk fel növekvő sorrendben a természetes számokat, alájuk pedig a 0-t és utána felváltva a pozitív és a negatív egész számokat, növekedő abszolút értékek szerint:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	…

Ha mindegyik természetes számhoz hozzárendeljük azt az egész számot, amely a táblázatban alatta van, akkor megkapjuk feladatunknak egy lehetséges megoldását. A hozzárendelési szabályt képlettel is felírhatjuk:

$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{ha } x \text{ páros pozitív egész szám,} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{ha } x \text{ páratlan pozitív egész szám.} \end{cases}$$

Feladatunknak más megoldásait is előállíthatjuk. Cseréljük fel például a táblázat alsó sorában a 3-at és a (–4)-et! Ekkor egy másik függvényt kapunk, de ez is megfelel a feladat követelményeinek.

2. Adj meg olyan kölcsönösen egyértelmű függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, és értékkészlete
a) a negatív egész számok halmaza;
b) a természetes számok halmaza;
c) az 5-nél nagyobb egész számok halmaza!

3. Igaz-e, hogy ha egy függvény szigorúan monoton növekvő, akkor
a) van inverze;
b) az inverze is szigorúan monoton növekedő?

4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az f függvényt és az inverzét, ha $D_f = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ és az f hozzárendelési szabálya: $x \mapsto x^2$. Mi az inverz függvény hozzárendelési szabálya?

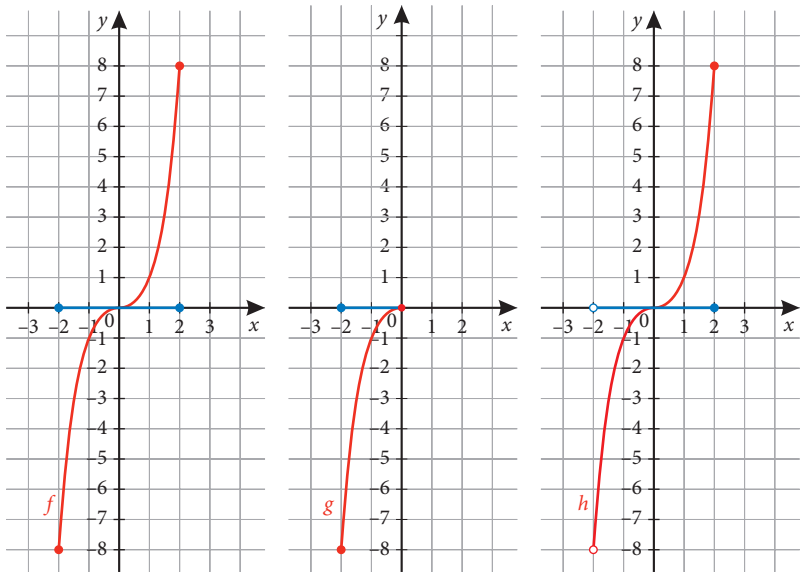
62 SZÉLSŐÉRTÉKEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Három függvénynek, az f-nek, a g-nek és a h-nak ugyanaz a hozzárendelési szabálya, de más-más halmaz az értelmezési tartománya: $D_f = [-2; 2]$, $D_g = [-2; 0]$, $D_h =]-2; 2]$; $f(x) = g(x) = h(x) = x^3$. Van-e a függvények értékkészletének legnagyobb, illetve legkisebb eleme? Ha van, akkor melyik szám az?

Megoldás

Nagyobb számnak nagyobb a köbe is, ezért az $x \mapsto x^3$ hozzárendelési szabályú függvények mind szigorúan monoton növekvők.



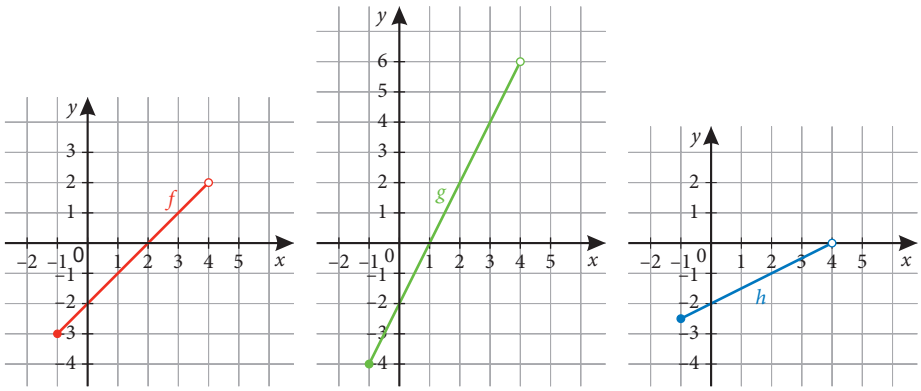
	f	g	h
Legnagyobb érték	8	0	8
Legnagyobb érték helye	2	0	2

	f	g	h
Legkisebb érték	–8	–8	nincs
Legkisebb érték helye	–2	–2	nincs

2. Legyen $D_f = D_g = D_h = [-1; 4[$ és $f(x) = x - 2$, $g(x) = 2x - 2$, $h(x) = 0{,}5x - 2$.

a) Rajzoljuk meg a függvények grafikonját, és adjuk meg f, g és h legnagyobb és legkisebb értékét (ha van)!

Megoldás



	f	g	h
Legnagyobb érték	nincs	nincs	nincs
Legnagyobb érték helye	nincs	nincs	nincs

	f	g	h
Legkisebb érték	–3	–4	–2,5
Legkisebb érték helye	–1	–1	–1

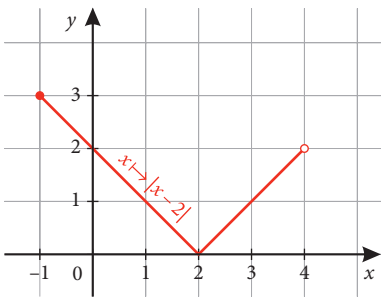
b) Rajzoljuk meg az f, g és a h függvény abszolút értékének grafikonját, és keressük meg az $|f|$, $|g|$, $|h|$ függvények legnagyobb és legkisebb értékét!

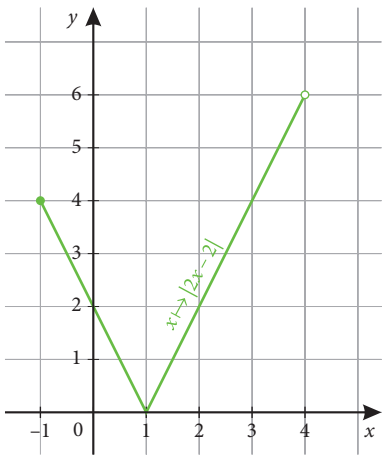
Megoldás

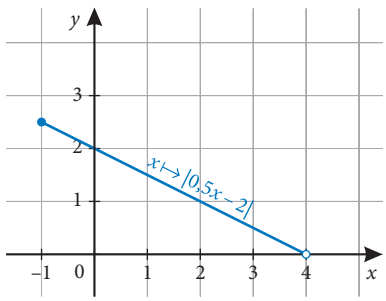
Ha adott az f függvény, akkor az $|f|$ azt a függvényt jelenti, amely az értelmezési tartomány x eleméhez $|f(x)|$-et rendel, vagyis minden esetben az f függvény által hozzárendelt érték abszolút értékét.

Itt a függvények hozzárendelési szabálya: $x \mapsto |x-2|$, $x \mapsto |2x-2|$, $x \mapsto |0{,}5x-2|$.

Az új grafikonokat úgy kapjuk meg, hogy az eredeti grafikonok x tengely „alatti” részét tükrözzük az x tengelyre, a többi részt pedig a helyén hagyjuk.







	$\lvert f\rvert$	$\lvert g\rvert$	$\lvert h\rvert$
Legnagyobb érték	3	nincs	2,5
Legnagyobb érték helye	-1	nincs	-1

	$\lvert f\rvert$	$\lvert g\rvert$	$\lvert h\rvert$
Legkisebb érték	0	0	nincs
Legkisebb érték helye	2	1	nincs

Az intervallumon értelmezett függvények ábrázolásához is használható a *Graph* program.

FELADAT

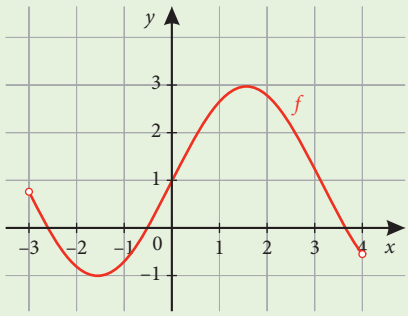
1 Legyen $D_f = [-1; 1]$, $D_g = [-1; 2]$, $D_h =]-2; 1[$; $f(x) = g(x) = h(x) = x^3$. A következő kérdések megválaszolásában segítségként használd a kidolgozott feladathoz tartozó grafikonokat! Van-e a függvények értékkészletének legnagyobb, illetve legkisebb eleme? Ha van, akkor melyik szám az? Hol veszi fel a függvény a legnagyobb, illetve legkisebb értékét?

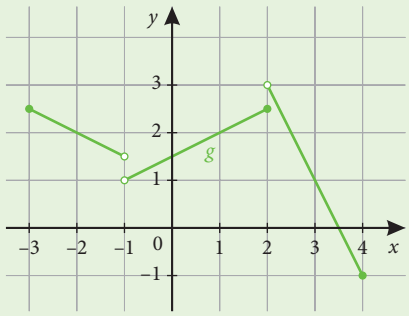
2 Legyen $D_f = D_g = D_h = [-1; 4[$ és $f(x) = -x + 2$, $g(x) = -2x + 2$, $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

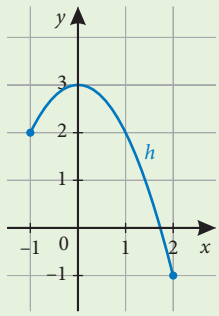
a) Rajzoljuk meg a függvények grafikonját, adjuk meg f, g és h legnagyobb és legkisebb értékét, ha van!

b) Rajzoljuk meg az f, g és a h függvény abszolút értékének grafikonját, és keressük meg az $|f|$, $|g|$, $|h|$ függvények legnagyobb és legkisebb értékét, ha van!

3 **a)** Olvasd le a grafikonokról a függvények legnagyobb és legkisebb értékét, ha ezek léteznek!







b) Vázold a $-f$, $-g$ és $-h$ függvények grafikonját, és állapítsd meg e három függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (A $-f$ jelölés azt a függvényt adja meg, amely az f értelmezési tartományának mindegyik eleméhez az eredeti helyettesítési érték ellentettjét rendeli hozzá.)

c) Mennyi az $|f|$, $|g|$, $|h|$ függvények legnagyobb és legkisebb értéke? Hol veszi fel a függvény a legnagyobb, illetve legkisebb értékét?

HÁZI FELADAT

1 Legyen az f függvény értelmezési tartománya az $[1; 3]$ zárt intervallum, és $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$.

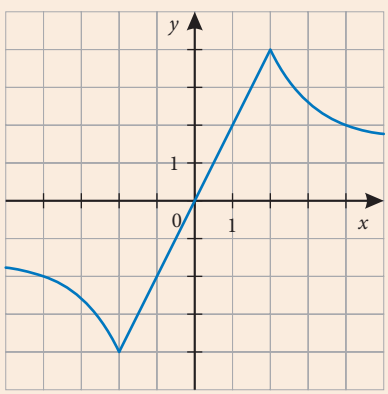
a) Számold ki az $f(1)$, $f(2{,}8)$ és $f(3)$ függvényértékeket!

b) Ábrázold az f függvényt! Állapítsd meg a legnagyobb és a legkisebb függvényértéket!

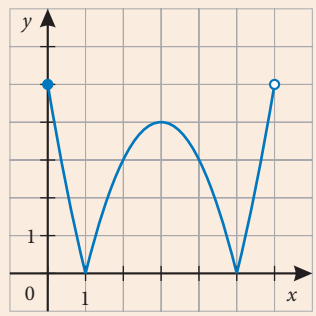
c) Rajzold le a g függvény grafikonját, ha $D_g = [6; 10]$ és $g(x) = \left|\frac{1}{2}x - 4\right|$!

2 Olvasd le a grafikonról a függvények maximumát és minimumát, ha léteznek! Határozd meg a függvények maximumának és minimumának a helyét!

a)



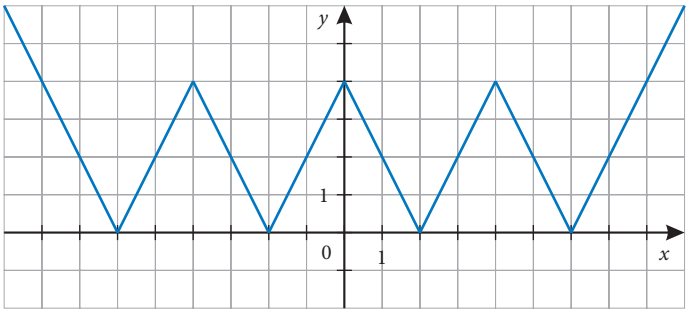
b)



3 Rajzold fel egy olyan f függvény grafikonját a koordináta-rendszerben, melyre teljesülnek a következők: $D_f = [-5; 3]$; $R_f = [-2; 6]$; minimumának helye $x = -1$; maximumának helye $x = 2$.

RÁADÁS

1. Ábrázoltuk egy f függvény grafikonját.



Tekintsük a függvény leszűkítését egy $[a; b]$ intervallumra! Ez azt a függvényt jelenti, amely az $[a; b]$ intervallumon van értelmezve, és az intervallum elemeihez ugyanazt rendeli, mint az eredeti f függvény. (Az $[a; b]$ intervallum az eredeti értelmezési tartomány részhalmaza kell legyen.)

$h : [a; b] \to \mathbf{R}; \quad x \mapsto f(x)$

Add meg a és b értékét úgy, hogy egész számok legyenek, és a h függvénynek

a) 3 maximumhelye és 2 minimumhelye legyen;

b) 2 maximumhelye és 2 minimumhelye legyen;

c) 2 maximumhelye és 1 minimumhelye legyen;

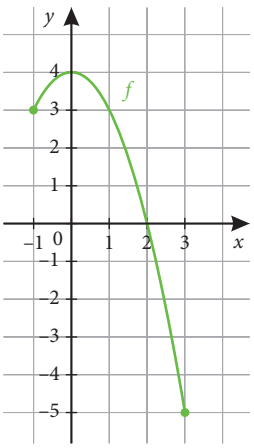
d) 1 maximumhelye és 2 minimumhelye legyen;

e) 1 maximumhelye és 1 minimumhelye legyen!

f) Melyik kérdések azok, amelyekre csak véges számú megoldás van?

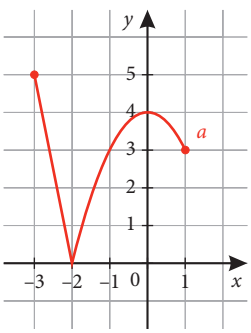
g) Határozd meg a függvények hozzárendelési szabályát!

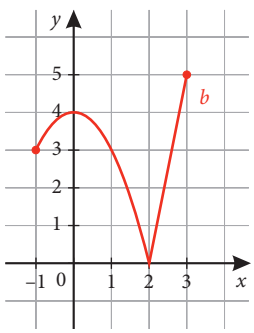
2. Grafikonjával adtuk meg az f függvényt.

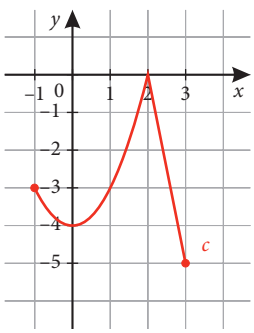


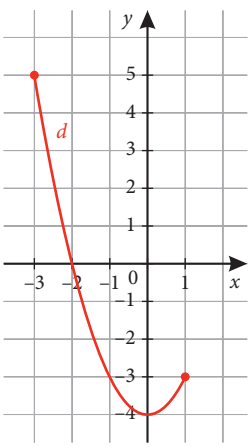
a) Határozd meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és jellemezd a függvényt szélsőértékek szempontjából!

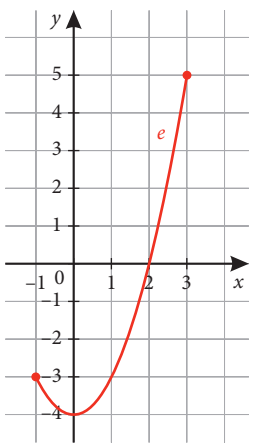
b) Válaszd ki az $|f|$, $-f$, $|-f|$ és $-|f|$ függvény grafikonját a megadottak közül!









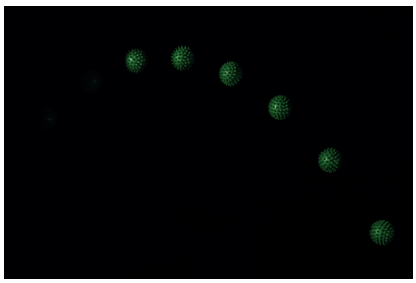


63 MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY ÉS A NÉGYZETGYÖKFÜGGVÉNY

BEVEZETŐ

A szökőkútból kiáramló vízsugár, a ferdén kilőtt rakéta, az eldobott labda egymáshoz hasonló pályát írnak le mozgásuk során. Az említett testek pályája (vagyis az a vonal, melyen a test a mozgást végzi) speciális tulajdonságokkal rendelkező görbe, a **parabola.** Ebben a leckében olyan függvényeket vizsgálunk, melyeknek grafikonja ugyancsak parabola.





KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogy változik a négyzet területe, ha az oldalak hosszúságát egyre növeljük?

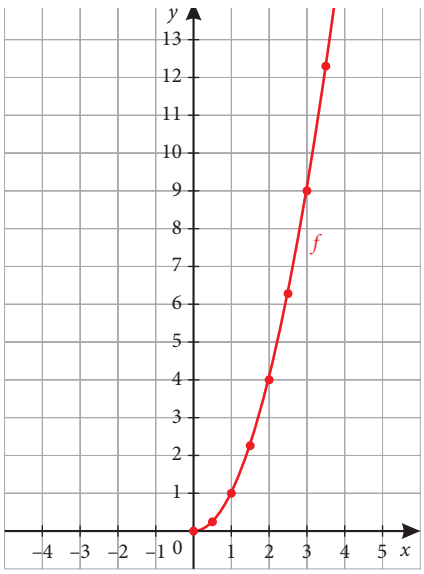
Megoldás

Ha egy négyzet oldala x cm-es, akkor a területe x^2 cm². Itt az x tetszőleges nemnegatív szám lehet. (Most megengedjük, hogy egy négyzet oldala 0 cm, így területe 0 cm² legyen.)

Tehát a változást az a függvény írja le, amelynek az értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza ($\mathbf{R}_0^+$), hozzárendelési szabálya pedig $x \mapsto x^2$. Jelöljük ezt a függvényt f-fel!

Adjunk az x-nek néhány értéket, készítsünk ehhez a függvényhez táblázatot!

Oldalhosszúság (x cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Terület (x^2 cm²)	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25



2. Rajzoljuk meg annak a függvénynek a grafikonját, amely minden valós számhoz a négyzetét rendeli hozzá! Jelöljük ezt a függvényt g-vel!

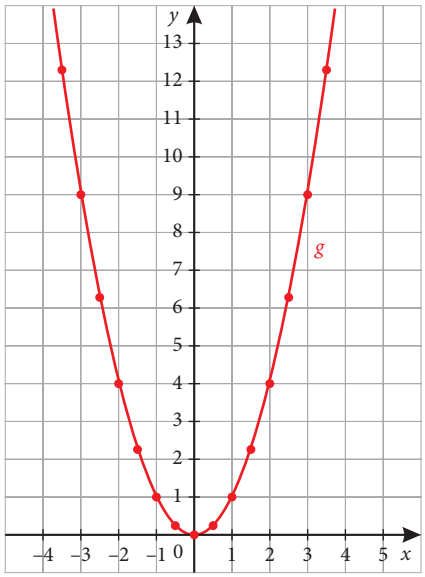
Megoldás

Azt a függvényt kell ábrázolnunk, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza (**R**), hozzárendelési szabálya pedig $x \mapsto x^2$. Ez egy **másodfokú függvény**. Az előző és a mostani függvény hozzárendelési szabálya ugyanaz, értelmezési tartományuk azonban különböző.

Az előző feladatban már láttuk, milyen ennek a grafikonnak a nemnegatív számokhoz tartozó része. Készítsünk most olyan táblázatot, amelyben néhány negatív szám szerepel!

x	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3	−3,5
$g(x) = x^2$	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25

A táblázat alapján megrajzoljuk a grafikon 15 pontját. A pontokat összekötjük. Tengelyesen szimmetrikus görbét, egy **parabolát** kaptunk.



PROJEKTFELADAT: Járj utána az interneten, hogy milyen nevezetes ponthalmaz a parabola! Gondold végig a megfogalmazott definíció alapján, hogyan tudod megszerkeszteni a parabola pontjait!

ELMÉLET I.

Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x^2$ függvény minden valós számhoz a négyzetét rendeli. Ez egy **másodfokú függvény.**
A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.
$x < 0$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő, $x > 0$ esetén szigorúan monoton növekvő.
A függvény zérushelye $x = 0$.
A függvénynek minimuma van. A minimum helye $x = 0$, a minimum értéke $f(0) = 0$.
A függvénynek nincs maximuma.
Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x^2$ függvény grafikonja parabola.
A parabola szimmetriatengelyén lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük.
Az előző feladat esetében a szimmetriatengely az ordinátatengely, a tengelypont pedig az origó.

A függvények ábrázolásához a *GeoGebra* vagy a *Graph* programot is használhatod.

FELADAT

1 **a)** Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; f(x) = x^2$ függvény grafikonjára?
$A(-1{,}1; 1{,}21)$ $B(0{,}2; 0{,}4)$ $C(-1{,}7; 2{,}89)$
$D(16; -4)$ $E\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right)$ $F(-3{,}3; 9{,}9)$

b) Melyik valós számot rendeli az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x^2$ másodfokú függvény a 32-höz, a −8-hoz, a $\frac{3}{5}$-höz?

c) Melyik valós számhoz rendeli az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x^2$ másodfokú függvény a 225-öt, a −1,96-ot, a $\frac{36}{49}$-et?

2 Hány olyan **rácspont** van a derékszögű koordinátarendszerben, melyre teljesül, hogy
a) $1 \leq x \leq 3$ és $0 < y \leq x^2$;
b) $1 < x < 5$ és $0 < y \leq x^2$;
c) $1 < x \leq 6$ és $0 < y \leq x^2$;
(A rácspont olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész szám.)

KIDOLGOZOTT FELADAT

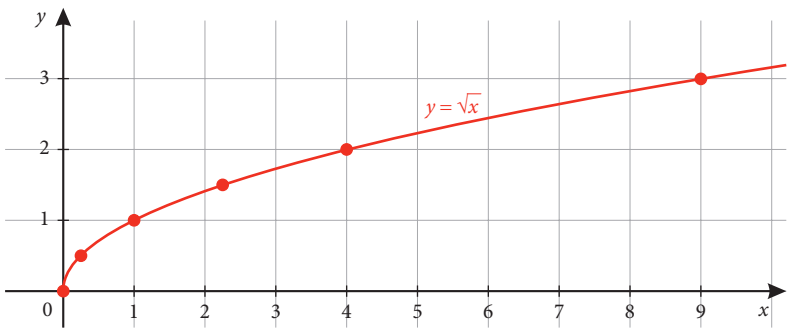
3. Ábrázoljuk azt a függvényt, amely az x m² $(x \geq 0)$ területű négyzethez hozzárendeli a négyzet méterben mért oldalhosszát!

Megoldás

Az x m² területű négyzet oldala $\sqrt{x}$ méter hosszúságú, tehát az $x \mapsto \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvényt kell ábrázolnunk.
Néhány esetben táblázatba foglaljuk az összetartozó számokat:

x	0	0,25	1	2,25	4	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	1,5	2	3
A grafikonra illeszkedő pont koordinátái	(0; 0)	(0,25; 0,5)	(1; 1)	(2,25; 1,5)	(4; 2)	(9; 3)

A grafikon:



Szemléletünk és a grafikon is azt mutatja, hogy ez a függvény szigorúan monoton növekvő (két négyzet közül a nagyobb területűnek nagyobb az oldala).

ELMÉLET II.

Definíció: A nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \sqrt{x}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt **négyzetgyökfüggvénynek** nevezzük. Jelöléssel: $f: \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$. (Az $\mathbf{R}_0^+$ szimbólumot a nemnegatív valós számok halmazának jelölésére használjuk.)

A négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő, értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.

A függvény zérushelye $x = 0$.

A függvénynek minimuma van. A minimum helye $x = 0$, a minimum értéke $f(0) = 0$.

A függvénynek nincs maximuma.

A négyzetgyökfüggvény grafikonja egy olyan parabolának a fele, amelynek a tengelypontja az origó, szimmetriatengelye pedig az abszcisszatengely.

FELADAT

3 a) A megadott pontok közül melyek vannak rajta a négyzetgyökfüggvény grafikonján?
$A(4; 16)$, $B(25; 5)$, $C(100; -10)$, $D(0; 0)$, $E(-64; -8)$, $F(3{,}5; 12{,}25)$, $G(51{,}84; 7{,}2)$

b) Melyik nemnegatív számhoz rendel a négyzetgyökfüggvény 0-t, 2,8-et, 5,1-et, illetve 12-t?

c) Melyik számot rendeli a négyzetgyökfüggvény a 0-hoz, a 2,8-hez, az 5,1-hez, illetve a 12-höz?

4 Határozd meg, melyik két egész szám közé esik $\sqrt{19}$; $\sqrt{57}$; $\sqrt{93}$ értéke! Indokold válaszod a négyzetgyökfüggvény tulajdonságainak ismeretében! Melyik tulajdonságot használtad?

5 Hány olyan pozitív koordinátájú rácspont van a derékszögű koordináta-rendszerben, melyre teljesül, hogy

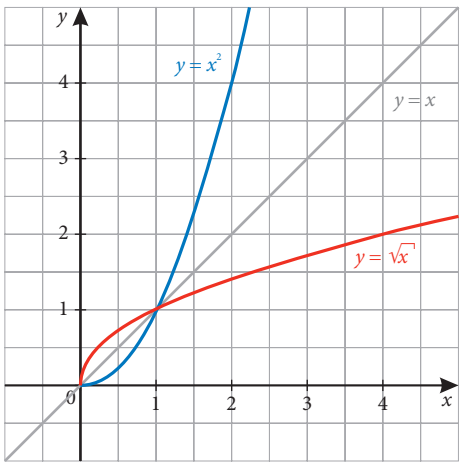
a) $1 \leq x \leq 4$ és $y \leq \sqrt{x}$;

b) $1 < x < 7$ és $y \leq \sqrt{x}$;

c) $0 \leq x \leq 10$ és $y \leq \sqrt{x}$?

KIDOLGOZOTT FELADAT

4. **a)** Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f: \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^2$ és $g: \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonját!



b) Add meg néhány, az f és g függvény grafikonjára illeszkedő pont koordinátáit!

Az f függvény grafikonjára illeszkedik például:

$F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, $F_3(2; 4)$, ezen pontok koordinátái az ábráról leolvashatók;

$F_4(1{,}3; 1{,}69)$, $F_5(7; 49)$, $F_6(33; 1089)$, ezen pontokról számolással igazolható az illeszkedés.

A g függvény grafikonjára illeszkedik például:

$G_1(0; 0)$, $G_2(1; 1)$, $G_3(4; 2)$, ezen pontok koordinátái az ábráról leolvashatók;

$G_4(1{,}69; 1{,}3)$, $G_5(49; 7)$, $G_6(1089; 33)$, ezen pontokról számolással igazolható az illeszkedés.

c) Milyen különleges kapcsolatot veszel észre az f, valamint g függvény grafikonjára illeszkedő pontok koordinátái között?

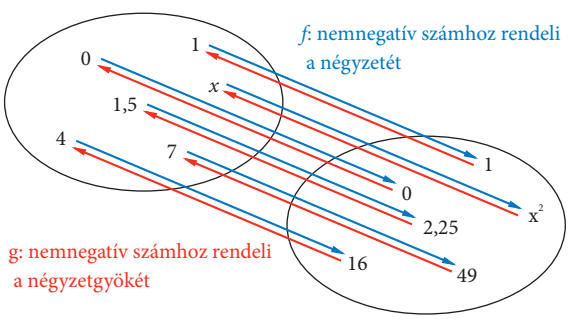
Ha egy pont rajta van az f függvény grafikonján, akkor a koordinátái felcserélésével adódó pont illeszkedik a g függvény grafikonjára, és ez fordítva is igaz.

Például:

$F_4(1{,}5; 2{,}25)$ rajta van az f függvény grafikonján, mert 1,5-hez a négyzetét rendeli, ami $1{,}5^2 = 2{,}25$. A koordináták felcserélésével kapott (2,25; 1,5) koordinátájú pont illeszkedik a g függvény grafikonjára, mert 2,25-hoz a négyzetgyökét rendeli, és $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

Belátható az is, hogy az f és a g függvények grafikonjai tengelyesen szimmetrikusak a $y = x$ függvény grafikonjára nézve – amint az ábra mutatja.

d) Ábrázoljuk Venn-diagram segítségével az f, valamint g függvénynek megfelelő hozzárendelést!



HÁZI FELADAT

1 Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ függvény, illetve a $g: \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonjára?

$A(-6; 36)$ $B(25; -5)$ $C(-2{,}2; 4{,}84)$

$D(0{,}01; 0{,}1)$ $E(-\frac{1}{25}; 0{,}2)$ $F(\frac{81}{16}; -2{,}25)$

$G(\frac{2}{5}; 0{,}16)$

2 **a)** Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$ függvény grafikonját!

b) Add meg az f függvény grafikonjának két különböző pontját koordinátáival (legyenek ezek P és Q pontok), majd írd le a koordináták felcserélésével kapott pontokat a koordinátáikkal (legyenek ezek P' és Q' pontok)!

c) Írd fel annak a lineáris g függvénynek a hozzárendelési szabályát, melyet a b) részben létrehozott P' és Q' pontok határoznak meg!

d) Ábrázold a c) feladatban felírt g függvény grafikonját is ugyanabban a koordináta-rendszerben! Milyen összefüggést figyelsz meg az f és a g grafikonja között?

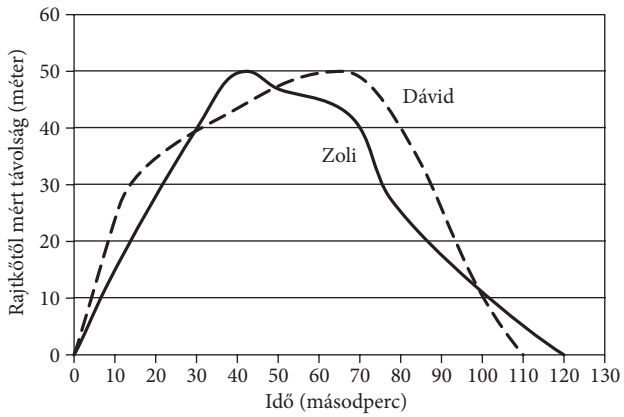
3 Ábrázold az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ függvény, illetve a $g: \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját a koordináta-rendszerben!
Képezd az adott függvények abszolút értékét! Milyen kapcsolatot veszel észre a függvények és abszolút értékeik között? Mi lehet ennek a magyarázata?

RÁADÁS

1. Melyik a nagyobb?
A pozitív számokon értelmezett $f(x) = \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedő. Vajon mit mondhatunk monotonitás szempontjából a pozitív számokon értelmezett $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvényre?
Legyen x_1 és x_2 két pozitív valós szám, melyre $0 < x_1 < x_2$.
Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül? Ha a nagyobb értékhez tartozó betűket helyes sorrendbe rakod, akkor egy világhírű magyar sportoló, ötszörös olimpiai bajnok vezetéknevét kapod. Ki ő?

V	$\sqrt{x_1}$	vagy	$\sqrt{x_2}$	R
E	$\frac{1}{\sqrt{x_1}}$	vagy	$\frac{1}{\sqrt{x_2}}$	C
S	$-\sqrt{x_1}$	vagy	$-\sqrt{x_2}$	Y
H	$(\sqrt{x_1})^2$	vagy	$(\sqrt{x_2})^2$	E
T	$\sqrt{x_1} - 1$	vagy	$\sqrt{x_2} - 1$	I
G	$1 - \sqrt{x_1}$	vagy	$1 - \sqrt{x_2}$	M
E	$\frac{\sqrt{x_1} + 1}{\sqrt{x_1}}$	vagy	$\frac{\sqrt{x_2} + 1}{\sqrt{x_2}}$	Á
N	$1 - \frac{1}{\sqrt{x_1}}$	vagy	$1 - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$	G
A	$(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2$	vagy	$(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})^2$	Z

2. (Kompetenciamérés, 2017)
Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében úszóversenyt rendeztek. 100 méteres úszásnál a versenyzők féltávnál elérik a medence szemközti falát, majd megfordulnak, és visszaúsznak a rajtkőhöz. Az alábbi diagram Dávid és Zoli úszását mutatja egy 100 m-es távon.



Mi történt az 50. másodpercben?
A Zoli megelőzte Dávidot.
B Dávid megelőzte Zolit.
C Egymás mellett úsztak.
D Egymással szemben úsztak.

3. Hány olyan pozitív koordinátájú rácspont van a derékszögű koordináta-rendszerben, melyre teljesül, hogy $1 \leq x \leq 2020$ és $y \leq x^2$?

A feladat megoldásában segít, ha használod az **első *n* négyzetszám összegére** felírt alábbi összefüggést:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ahol $n \in \mathbf{Z}^+$.

4. Adott egy függvény az alábbi hozzárendelés szerint:

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Ábrázold a függvény grafikonját a koordináta-rendszerben!
b) Határozd meg a függvény értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékeinek helyét és értékét!
c) Jellemezd a függvény monotonitását!
d) A fenti hozzárendelés neve szignumfüggvény.
Jelölése $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; f(x) = \operatorname{sgn} x$.
Járj utána, miért nevezik így a függvényt, mi a signum (szignum) szó jelentése!

64 GYAKORLATI FELADATOK

FELADAT

1 A Spedor nevű fuvarozócég a következő képlettel számítja ki a szállítási díjat egy teherautó igénybevétele esetén: $f(x) = 2{,}5x + 8$. A képletben x jelöli a szállítás során megtett utat km-ben ($x \geq 0$), $f(x)$ pedig az érte fizetendő összeget tallérban.

a) Hány tallérba kerül a szállítás 12 km távolságra [azaz mennyi az $f(12)$]?

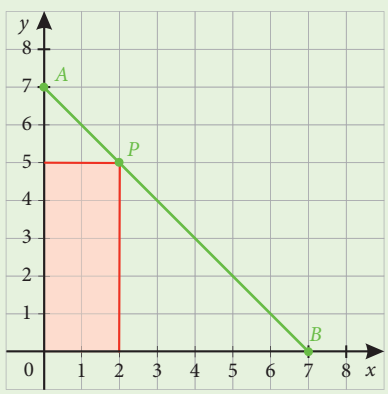
b) Mennyi a kiállási díj (amit a megrendelőnek akkor is meg kell fizetnie, ha végül nem veszi igénybe a szolgáltatást)?

c) Hány km-t számlázott a Spedor, ha 53 tallért kellett fizetnünk?

d) Ábrázold az $f\colon x \mapsto 2{,}5x + 8,\ x \geq 0$ függvényt!

e) A Padlógáz nevű konkurens szállítócég így adja meg az ajánlatát: egy teherautó igénybevétele esetén, ha x km a megtett út, akkor az érte fizetendő összeg $3x$ tallér. Mekkora távolságok esetén kedvezőbb a Padlógáz ajánlata?

2 $A(0; 7)$, $B(7; 0)$, és a P pont az AB szakasz pontja.

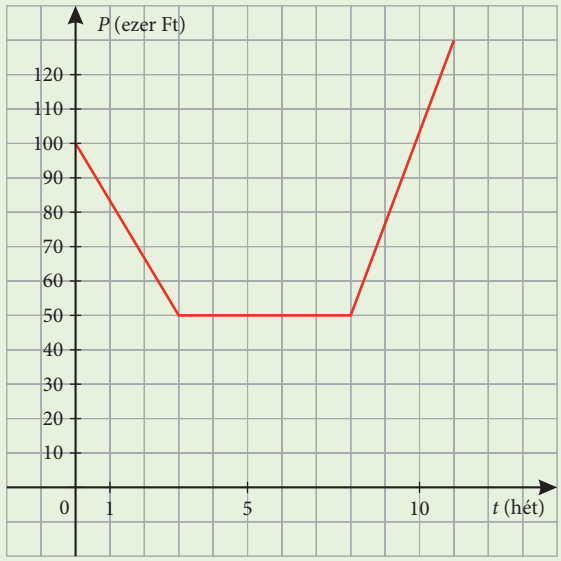


a) Írd fel azt a hozzárendelési szabályt, amellyel a zöld grafikon pontjait jellemezhetjük!

b) Ha P első koordinátája x, akkor a második koordinátája az a) pontban talált szabállyal felírható. Írd fel ekkor a rózsaszín téglalap területét!

c) Jelöld ki az AB szakaszon lévő valamennyi rácspont segítségével létrehozható téglalapot, és számítsd ki ezek területét! Melyik téglalap a legnagyobb területű az előbbiek közül?

3 A grafikon egy bankszámlán lévő összeg alakulását mutatja az idő függvényében.



a) Mekkora a hetenkénti növekedés az utolsó szakaszban?

b) Mi az itt szereplő függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és hozzárendelési szabálya?

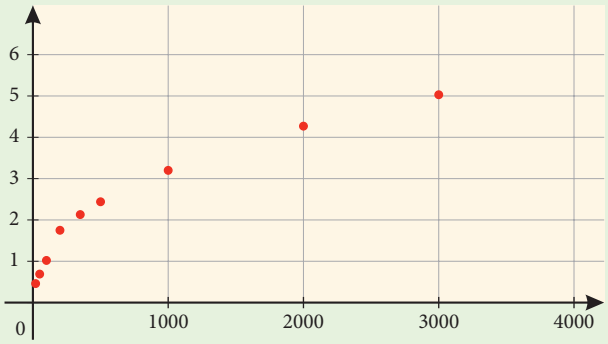
c) Lineáris-e a bankszámlán lévő összeg és a számlára helyezés óta eltelt idő kapcsolata?

4 Zedországban a postai díjak a küldemények tömegétől függnek a mellékelt táblázat szerint:

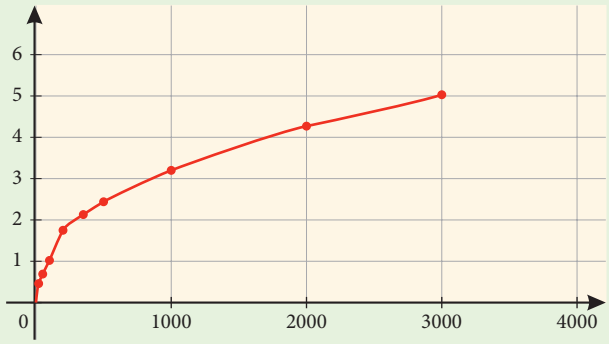
Tömeg (egész grammra kerekítve)	Díj
20 g-ig	0,46 zed
21 g–50 g	0,69 zed
51 g–100 g	1,02 zed
101 g–200 g	1,75 zed
201 g–350 g	2,13 zed
351 g–500 g	2,44 zed
501 g–1000 g	3,20 zed
1001 g–2000 g	4,27 zed
2001 g–3000 g	5,03 zed

a) Az alábbi grafikonok közül melyik mutatja legjobban a postai díjszabást Zedországban?
(A vízszintes tengelyen a tömeg grammokban, a függőleges tengelyen a díj zedben van ábrázolva.)

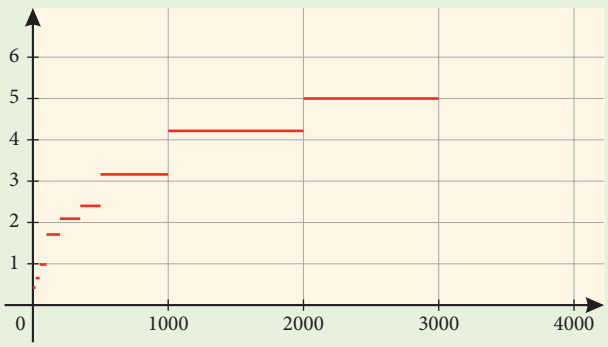
A)



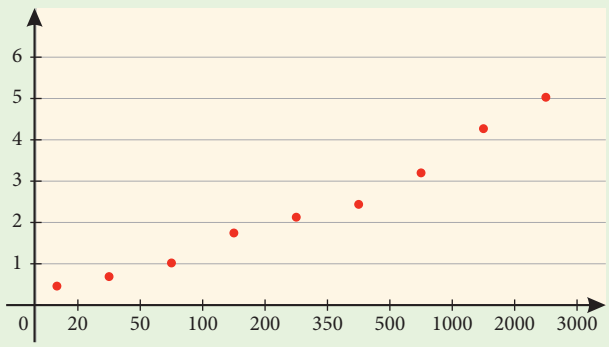
C)



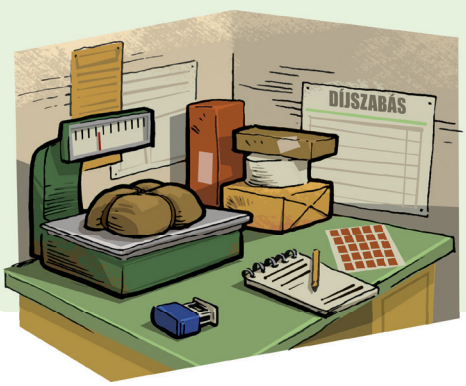
B)



D)



b) Gyurka két levelet akar küldeni (Zedországból) egy barátjának. A levelek tömege 40 g, illetve 80 g.
A zedországi posta díjszabása alapján döntsd el, melyik esetben kell kevesebbet fizetnie Gyurkának: ha egy borítékban adja postára a két levelet, vagy ha külön-külön adja postára őket! Támaszd alá számolással az állításodat!



HÁZI FELADAT

1 Egy vidámparkban különösen kedvelt a sárkányrepülő. Két cimbora közül az egyik 15 menetért és a belépőért fizetett összesen 1600 forintot, a másik 18 menetért és a belépőért összesen 1840 forintot.

a) Mennyi egy menet ára, és mennyi a belépődíj?

b) Add meg a menetszám–összköltség összefüggést!

c) Mennyit kellene fizetnünk 8 menetért?

d) Hány menetre lenne elég 2000 forint?

e) Igaz-e, hogy a menetszám és az összköltség kapcsolata lineáris?

2 Egy tartályban a töltőanyag mennyisége az időnek lineáris függvénye. Ha a gyártási folyamat kezdetétől eltelt idő x óra, akkor a töltőanyag mennyisége y kilogramm. A kettő közötti kapcsolat: $y = 500 - 2{,}5x$. Jelenítsd meg koordináta-rendszerben a kapcsolatot!

a) Hány kilogramm töltőanyag fogy óránként?

b) Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?

c) A gyártási folyamat indulása után mennyi idővel lesz a tartályban levő töltőanyag mennyisége 150 kilogramm?

65 EGYENLETEK GRAFIKUS MEGOLDÁSA

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Sári a piacon madáreledelt vett. Ennek 30%-a fénymag. Ezt az arányt szeretné Sári 50%-ra növelni. Mennyi fénymagot tegyen a piacon vásárolt 40 dkg magkeverékhez?

Megoldás

Legyen a szükséges fénymag tömege x dkg. Ha ezt Sári a piacon vásárolt madáreledelhez önti, akkor a keverék tömege $(40 + x)$ dkg lesz, ennek a fele $0{,}5\,(40 + x)$ dkg fénymag.
A megvásárolt 40 dkg madáreledelben $40 \cdot 0{,}3 = 12$ dkg fénymag volt, ehhez jött még x dkg. Ezért összesen $(12 + x)$ dkg fénymag lesz a keverékben.
Tehát $0{,}5\,(40 + x) = 12 + x$; $20 + 0{,}5x = 12 + x$.
Oldjuk meg ezt az egyenletet!

Első (algebrai) módszer

$$\begin{aligned} 20 + 0{,}5x &= 12 + x \qquad / -12 - 0{,}5x \\ 8 &= 0{,}5x \qquad / \cdot 2 \\ 16 &= x \end{aligned}$$

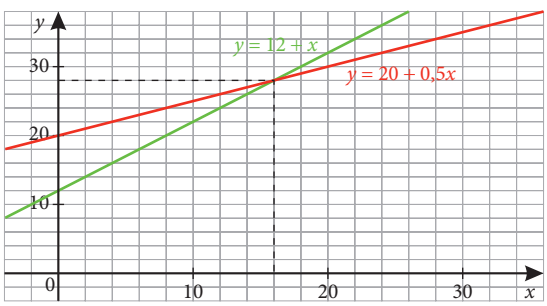
Tehát 16 dkg fénymagot kell Sárinak a piacon vásárolt keverékhez öntenie.

Ellenőrzés

Ha Sári a 40 dkg magkeverékhez 16 dkg fénymagot önt, akkor 56 dkg magkeveréket kap. Ebben összesen $12 + 16 = 28$ dkg fénymag van, és ez valóban 50%-a az 56 dkg-nak.

Második (grafikus) módszer

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben az $x \mapsto 20 + 0{,}5x$ és az $x \mapsto 12 + x$ függvény grafikonját!



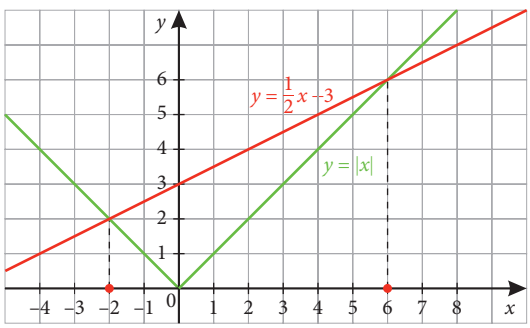
Ez a két grafikon a (16; 28) pontban metszi egymást.
A metszéspont **első koordinátája** a $20 + 0{,}5x = 12 + x$ egyenlet gyöke: $x = 16$.
Ugyanazt az eredményt kaptuk, amit az első módszerrel.
Az ellenőrzést ebben az esetben is a szöveg alapján végezzük.



2. Melyek azok a számok, amelyek esetében $|x| = \frac{1}{2}x + 3$?

Megoldás

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto |x|$ és az $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ függvény grafikonját!



Az ábráról leolvashatjuk, hogy a két grafikon két pontban metszi egymást. Ennek a két pontnak az **első koordinátája** az adott egyenlet két gyöke. A jobb oldali metszéspont első koordinátája 6, a bal oldalié pedig –2.
Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy
$|6| = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3$ és $|-2| = \frac{1}{2} \cdot (-2) + 3$ is igaz, tehát az adott egyenletnek két gyöke van: a –2 és a 6.
Az egyenlet **megoldáshalmaza**: $\{-2; 6\}$.

ELMÉLET

Az egyenletek megoldását **grafikus módszer**rel is elvégezhetjük.

Az egyenlet két oldalán lévő kifejezést egy-egy függvénynek tekintjük, és közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk azokat. Az egyenlet **megoldás**át a két függvénygrafikon **metszéspont**jának, illetve **metszéspontjainak első koordinátája** adja meg. Az egyenlet ellenőrzése során a két függvény – az egyes metszéspontok első koordinátájával számolt – helyettesítési értékének egyenlősége adódik. Ez a közös helyettesítési érték épp a kérdéses metszéspont második koordinátája.

A módszer előnye, hogy olyan egyenletek is megoldhatók a segítségével, melyeket algebrai úton nem vagy csak hosszadalmasan tudnánk megoldani.

A módszer hátránya, hogy nem minden esetben lehet pontosan meghatározni a megoldást, mert előfordulhat, hogy a metszéspont első koordinátáját csak közelítőleg tudjuk leolvasni.

FELADAT

1 Oldd meg grafikus módszerrel a következő egyenleteket!

a) $x-1=\frac{1}{2}x+5$ **c)** $x^2=|x|$

b) $|x|=x+2$ **d)** $x^2=3x+4$

2 Oldd meg az egyenleteket grafikus úton! Ellenőrizd az eredményeket behelyettesítéssel!

a) $|1-3x|=3-x$ **b)** $\left|\frac{7}{5}x+5\right|=2x+1$

3 Egy hordóban 16 liter víz van. Ha a dugaszt eltávolítják, akkor percenként 2 liter víz folyik ki belőle. Egy másik hordóban 1 liter víz van, és ezt olyan csappal töltik fel, mely percenként 3 liter vizet pótol. Mennyi idő múlva lesz a két hordóban ugyanannyi víz, ha egyszerre kezdik el a hordók kiürítését, illetve feltöltését? Oldd meg a feladatot többféle módszer segítségével!

HÁZI FELADAT

1 Oldd meg grafikus módszerrel!

a) $2x+3=|x|$ **b)** $x^2=2x+3$

2 Oldd meg grafikusan az egyenleteket!

a) $|2-3x|=4-x$

b) $|3-2x|=x^2$

3 Két pók függőlegesen, állandó sebességgel ereszkedik lefelé egy épület falán. Az egyik 320 cm magasan van, és 8 másodperc alatt tud leereszkedni a talajra, a másik 240 cm magasságból indul, és 12 másodperc alatt éri el a talajszintet. Mikor lesznek azonos magasságban, ha egyszerre indulnak?

RÁADÁS

1. Oldd meg az egyenletet grafikus úton a valós számok halmazán!

a) $|x+6|=|3x+2|$

b) $|4-2x|=\left|\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right|$

2. A következő egyenletben p és q valós számok. Az egyenlet a valós számok halmazán van értelmezve, és megoldáshalmaza: $\{-3; 2\}$. Milyen valós számokat jelöl p és q?

$|2x-1|=px+q$

66 EGYENLŐTLENSÉGEK

BEVEZETŐ



Hány évesek lehetnek az ötös ikrek, ha tudjuk, hogy 12 év múlva sem éri el az életkoruk összege a 100-at?

Megoldás

Ha most x évesek, akkor 12 év múlva $x + 12$ évesek lesznek, az életkoruk összege pedig 5-ször ennyi lesz. A feladat szerint $5(x + 12) < 100$. Egy egyenlőtlenséget kaptunk, amelyet a mérlegelvvel oldunk meg:

$5(x + 12) < 100$ / : 5

$x + 12 < 20$ / − 12

$x < 8$

Eredményünk azt mutatja, hogy az ikrek még nem érték el a 8 évet.

Ellenőrzés

Ha most 8 évesek lennének, akkor 12 év múlva az életkoruk összege $5 \cdot 20 = 100$ lenne. Ha pedig már most 8 évesnél idősebbek lennének, akkor ez az összeg 100-nál nagyobb szám lenne.

ELMÉLET

Az egyenlőtlenségek megoldására is használhatjuk a **mérlegelvet**. Ez azt jelenti, hogy

az egyenlőtlenség megoldásainak a halmaza nem változik meg, ha a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jel két oldalán álló kifejezést (számot)
- ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük,
- ugyanazzal a pozitív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk,
- ugyanazzal a negatív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, **és ezzel egy időben** a $<$, $>$, $\leq$, illetve $\geq$ jelet az ellenkezőjére változtatjuk.

Tehát a negatív számokkal való szorzás és osztás esetében különösen figyelnünk kell. Nyilvánvaló, hogy ilyenkor meg kell fordítanunk a jelet, mert például

$3 < 8$, de $-3 > -8$;

$-5 < 1$, de $5 > -1$;

$-9 < -6$, de $9 > 6$;

vagyis a (-1)-gyel való szorzás megfordítja a nagyságviszonyokat. Ugyanez a helyzet az osztással is. Ha lehetséges, rendezzük úgy az egyenlőtlenséget, hogy ne kelljen negatív számmal osztanunk vagy szoroznunk. Még jobban kell figyelni az egyenlőtlenség megoldása során, ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorozzuk vagy osztjuk mindkét oldalt!

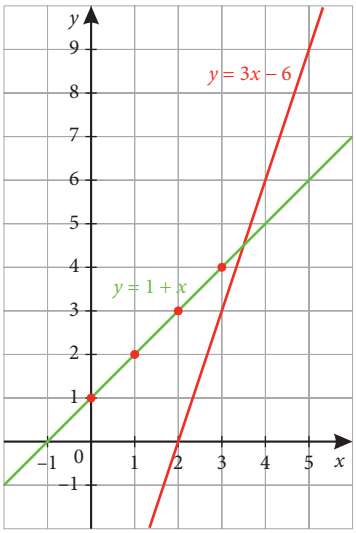
FELADAT

1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a mérlegelv alkalmazásával!

a) $-23 - 8x < -15(-7 - 8x)$ **b)** $5(x + 2)^2 - 8x \geq 5x^2 + 12x$ **c)** $\frac{3-5x}{5} - \frac{5-4x}{10} \geq -\frac{7}{20}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A grafikon alapján döntsük el, melyik természetes számokra igaz, hogy $1 + x \geq 3x - 6$!



Megoldás

Olyan pontokat kell keresnünk az $y = 1 + x$ egyenletű egyenesen, amelyeknek első koordinátája természetes szám, és amelyekhez legalább akkora második koordináta tartozik, mint az $y = 3x - 6$ egyenes megfelelő pontjaihoz. Négy ilyen pont van:

(0; 1), (1; 2), (2; 3) és (3; 4).

Tehát az **N** alaphalmazon az $1 + x \geq 3x - 6$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza: {0; 1; 2; 3}.

Megjegyzés

Az $1 + x \geq 3x - 6$ egyenlőtlenséget algebrai úton is megoldhatjuk. A mérlegelvet használjuk:

$1 + x \geq 3x - 6 \qquad / - 3x - 1$

$-2x \geq -7 \qquad / : (-2)$

$x \leq 3{,}5.$

Az utolsó lépésnél a $\geq$ jelet $\leq$-re változtattuk. Azt kaptuk, hogy az x természetes számnak 3,5-nél kisebbnek kell lennie. Négy ilyen természetes szám van: a 0, az 1, a 2 és a 3.

2. Van-e olyan, legfeljebb 21 cm kerületű háromszög, amelynek oldalai (cm-ben mérve) x, $x + 4$ és $x + 8$ hosszúak?

Megoldás

A kívánt tulajdonságú háromszög létezéséhez három feltételnek kell teljesülnie:

$x > 0$ **és** $x + (x + 4) + (x + 8) \leq 21$ (a kerület miatt) **és** $x + 8 < x + (x + 4)$ (a háromszög-egyenlőtlenség miatt).

Meg kell oldanunk a következő egyismeretlenes **egyenlőtlenség-rendszert**:

$x > 0$ **és** $3x + 12 \leq 21$ **és** $x + 8 < 2x + 4$.

A második egyenlőtlenséget mérlegelvvel megoldva: $x \leq 3$.

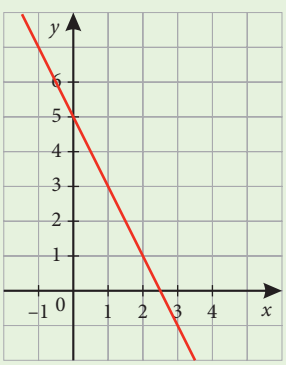
A harmadik egyenlőtlenséget mérlegelvvel megoldva: $4 < x$.

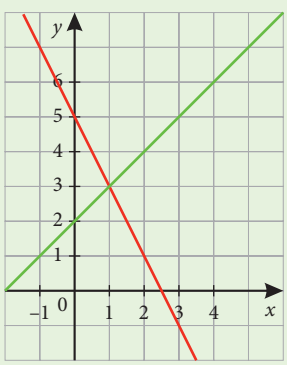
Olyan pozitív szám azonban nincs, amelynél egyszerre teljesülne az, hogy 3-nál nem nagyobb, 4-nél viszont nagyobb. Nincs tehát a szövegnek megfelelő háromszög.

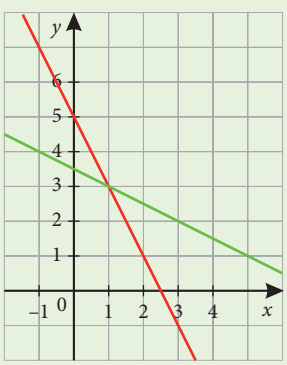
FELADAT

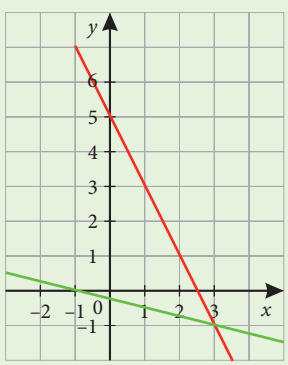
2 A grafikonok segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán, majd a valós számok halmazán is!

a) $0 \leq 5 - 2x$ **b)** $x + 2 \leq 5 - 2x$ **c)** $5 - 2x > 3{,}5 - 0{,}5x$ **d)** $\frac{-x - 1}{4} \leq 5 - 2x$

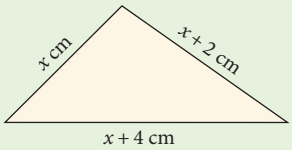








3 Hány olyan, legfeljebb 21 cm kerületű háromszög létezik, amelynek oldalai (cm-ben mérve) x, $x + 2$ és $x + 4$ hosszúak? Hány olyan van ezek között, amelyekre $x \in \mathbf{N}$?



4 Szociális segély igénylésekor a jogosultság egyik feltétele az egy főre jutó jövedelem. A család „létszámát” így határozzák meg: igénylő 1,2, igénylő házastársa 0,9, gyerekenként 0,8. (Tehát egy 3 fős család „létszáma”: 1,2 + 0,9 + 0,8 = 2,9.) A család akkor részesülhet szociális segélyben, ha a család összjövedelmének és a család fentebb leírt módon kiszámított „létszámának” hányadosa nem haladja meg a 26 500 tallért.
Az egyik igénylőnek és házastársának két gyermeke volt, és csak a harmadik gyermekük megszületése után váltak jogosulttá a szociális segélyre. Mennyi lehetett a család összjövedelme eredetileg, ha a bevételük – a harmadik gyermek megszületése után – még a 3. gyermek után járó 13 000 tallér családi pótlékkal megnőtt?

HÁZI FELADAT

1 Juditnak biológiából öt osztályzata van, ezek átlaga 3,8. Hány ötöst kell szereznie, hogy az átlaga 4,3-nél nagyobb legyen?



2 Oldd meg az egyenlőtlenség-rendszereket a valós számok halmazán!

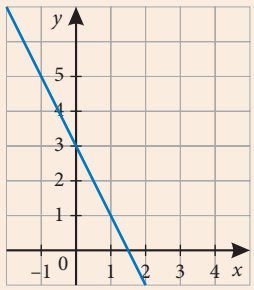
a) $5 - x < 0$ és $x - 8 \leq 0$

b) $5 - 4x \geq 7$ és $\frac{x+3}{2} \geq 0$

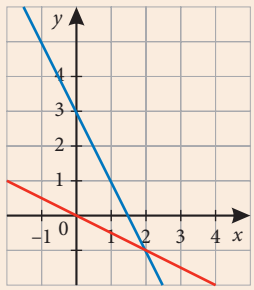
c) $\frac{4x+5}{9} < 1$ és $\frac{14-3x}{4} < x$

3 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a grafikonok segítségével a valós számok halmazán!

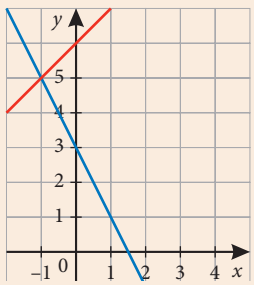
a) $0 \geq 3 - 2x$



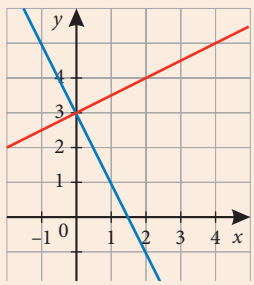
c) $3 - 2x > -0{,}5x$



b) $3 - 2x < 6 + x$



d) $\frac{x+6}{2} \leq 3 - 2x$

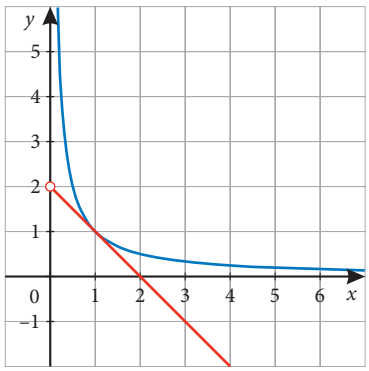


Tétel: Egy pozitív számnak és reciprokának összege nem kisebb, mint 2, vagyis minden $x \in \mathbf{R}^+$ esetén fennáll, hogy $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Az egyenlőség csak $x = 1$ esetén teljesül.

Vizsgáljuk meg a tétel állítását grafikus megközelítésből!

1. Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezésnek megfelelő függvényt nem tudjuk ábrázolni az eddig tanult elemi módszerekkel. A megoldáshoz készítsd el a függvény grafikonját *függvényábrázoló program,* például *Geogebra* segítségével! Állapítsd meg a kapott függvény értékkészletét!

2. A bal oldalon álló kifejezést nem tudjuk elemi úton függvényként ábrázolni, ezért az eredeti egyenlőtlenséggel egyenértékű **(ekvivalens),** átrendezés után kapott $\frac{1}{x} \geq 2 - x$ alakot használjuk. Tekintsük a bal és jobb oldali kifejezések alapján az $f(x) = \frac{1}{x}$, valamint $g(x) = 2 - x$ függvényeket a pozitív számok halmazán, és ábrázoljuk őket.



Az ábra alapján azt sejthetjük, hogy a két grafikonnak egyetlen közös pontja van (a piros félegyenes *érinti* a kék görbét). A két grafikon közös pontjának első koordinátája: $x = 1$, mely esetén $f(x) = g(x)$. (Ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.) Bármely más pozitív valós x érték esetén teljesül, hogy $f(x) > g(x)$.

Bizonyítsuk be a tétel állítását algebrai úton!

3. Az egyenlőtlenség a mérlegelv segítségével és algebrai átalakításokkal a következő módon írható fel:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$
$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$
$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$$
$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló tört nevezője a feltétel szerint pozitív. A számlálóban álló kifejezés teljes négyzet, mely bármely valós szám esetén nemnegatív, és a 0-val való egyenlőség csakis az $x = 1$ esetén áll fenn.

A számláló és nevező lehetséges előjelei miatt a tört értéke nemnegatív.

Az utolsó sorban kapott egyenlőtlenség tehát igaz bármely pozitív valós x esetén, ezért igaz a vele ekvivalens eredeti állításban megfogalmazott egyenlőtlenség is. (Az eredeti egyenlőtlenségből ekvivalens átalakításokkal jutottunk a végső egyenlőtlenséghez, így a gondolatmenet visszafelé is helytálló.)

Ezzel beláttuk a tételt.

FELADAT

1. Milyen $(x; y)$ pozitív valós számpárok teljesítik az $y + \frac{1}{y} = 2 - x^2$ egyenlőséget?

2. Hány $(x; y)$ valós számpár esetén teljesül az $y^2 + \frac{1}{y^2} = 1 - 2x - x^2$ egyenlőség?

Ráadás

KISEBB, NAGYOBB, EGYENLŐ

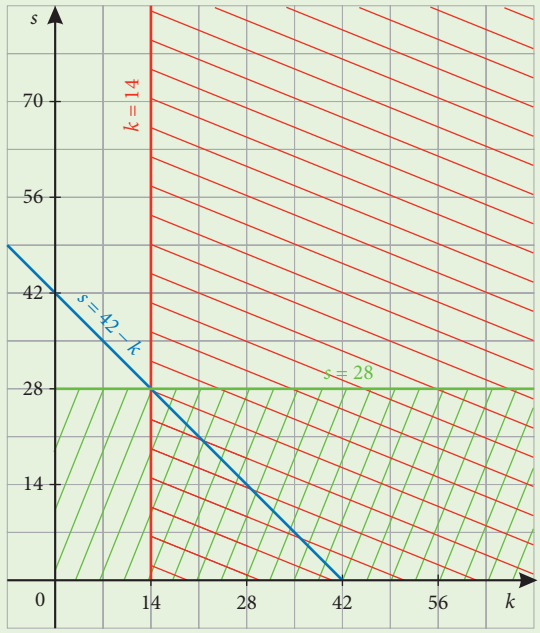
FELADAT

1 Egy kisebb cég fennállásának 10. évfordulójára ünnepséget szervez. A cégvezetés úgy dönt, hogy az ünnepi vacsorán egy-egy vidám ajándéktárgygyal meglepi a 42 alkalmazottat. Az ajándékokat 130 000 Ft-os keretből szeretnék megoldani. Kétféle ajándéktárgy merült fel: egy 2800 Ft-os nyaklánc és egy 3500 Ft-os határidőnapló. Annak a 14 alkalmazottnak, akik a forgalmazással foglalkoznak, mindenképpen naplót szeretnének adni.
Hány nyakláncot és hány határidőnaplót vehetnek a 130 000 Ft-ból?





a) Figyeld meg az egyenletet és az egyenlőtlenségeket! Mit jelenthetnek a betűk? Mit jelentenek az egyenlőtlenségek? Mit jelentenek a koordináta-rendszerben bejelölt részek?
$k + s = 42$; $k \geq 14$;
$0 \leq s \leq 28$; $3{,}5\,k + 2{,}8\,s \leq 130$.



b) Gondold végig a feladatot úgy is, hogy csak egy ismeretlent vezetünk be!
Ha k db határidőnaplót veszünk, akkor $42 - k$ db nyakláncra lesz szükség.
Írd fel, hogy ezek mennyibe kerülnek összesen!

c) A teljes költség nem lehet több 130 ezer forintnál. Mennyi lehet ekkor a k?

d) Hányféle megoldás jöhet szóba, ha az összes feltételt figyelembe veszed?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az állatkertbe 5290 Ft a „családi” jegy (két felnőtt és két gyerek részére). Minden további gyerek után 890 Ft-ot kell fizetni.
Mekkora létszámú gyerekcsoportot vigyen két óvónő az állatkertbe, hogy (az óvónőket is beleértve) az egy főre jutó jegyár 1000 Ft-nál kevesebb legyen?



Megoldás
Két óvónő és két gyerek bemehet a családi jeggyel.
Jelöljük a további gyerekek számát x-szel.
Ekkor a teljes fizetendő összeg
$4 + x$ fő után $5290 + 890x$ Ft.
Az egy főre jutó rész: $\frac{5290 + 890x}{4 + x}$. Ennek kell 1000 Ft-nál kevesebbnek lennie.
Meg kell tehát oldanunk az $\frac{5290 + 890x}{4 + x} < 1000$ egyenlőtlenséget a természetes számok halmazán.
Az $x + 4$ ebben az esetben pozitív, ezért nem fordul meg a relációs jel, ha megszorozzuk vele az egyenlőtlenség mindkét oldalát.

$$\frac{5290 + 890x}{4 + x} < 1000 \qquad / \cdot (4 + x)$$
$$5290 + 890x < 4000 + 1000x \qquad / - 5290$$
$$890x < -1290 + 1000x \qquad / - 1000x$$
$$-110x < -1290 \qquad / : (-110)$$
$$x > 11{,}73$$

Tekintve, hogy a gyerekek száma természetes szám, a megoldás $x \geq 12$, tehát összesen legalább $12 + 2 = 14$ gyerekkel kell menniük.

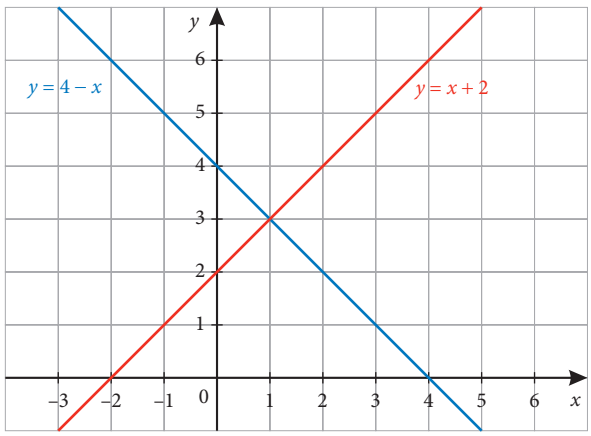
Ellenőrzés
A 16 belépőért fizetett összeg:
$5290 + 12 \cdot 890 = 15\,970$ Ft.
Ez kevesebb 16 000 forintnál, így az egy főre jutó jegyár valóban kevesebb 1000 Ft-nál.

Megjegyzés
Ekkora csoportnak már érdemes csoportos belépőt rendelni. Ezt ugyan korábban kell elintézni, viszont jóval olcsóbb.

2. Oldjuk meg az $(x + 2)(4 - x) > 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Egy kéttényezős szorzat pontosan akkor pozitív, ha mindkét tényező pozitív vagy negatív. Vizsgáljuk ezért mindkét tényező előjelét.

Első megoldás (grafikus módszer)
Ábrázoljuk az $f: x \mapsto x + 2$ és $g: x \mapsto 4 - x$ elsőfokú függvényeket a valós számok halmazán!



A (-2)-nél kisebb számok esetén az f függvény negatív, a g pozitív értékeket vesz fel, tehát ezek a számok nem megoldásai az egyenlőtlenségnek.

A (-2)-nél nagyobb és 4-nél kisebb számok esetén mindkét függvény pozitív értékeket vesz fel, ezért ezek a számok mind megoldásai az egyenlőtlenségnek.

A 4-nél nagyobb számok esetén az f függvény pozitív, a g negatív értékeket vesz fel, tehát ezek a számok sem megoldásai az egyenlőtlenségnek.

A -2 és 4 szintén nem megoldás, hiszen ezek bármelyikének behelyettesítésekor az eredeti egyenlőtlenségből a $0 > 0$ hamis kijelentést kapjuk.

Összefoglalva:
az $(x + 2)(4 - x) > 0$ egyenlőtlenségnek minden -2 és 4 közötti szám gyöke, és más gyöke nincs. Ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $]-2; 4[$ nyílt intervallum.

Második megoldás (algebrai módszer)
$(x + 2 > 0$ **és** $4 - x > 0)$ **vagy** $(x + 2 < 0$ **és** $4 - x < 0)$,
$(x > -2$ **és** $4 > x)$ **vagy** $(x < -2$ **és** $4 < x)$.
Az első zárójeles egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza a $]-2; 4[$ nyílt intervallum, a másodiké pedig az üres halmaz [nincs ugyanis olyan (-2)-nél kisebb szám, amely 4-nél nagyobb lenne].
Tehát az $(x + 2)(4 - x) > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $]-2; 4[$ nyílt intervallum.

FELADAT

2 Egy alapítványi iskola bevétele az iskola tanulóinak létszámától is függ. Ha az iskolának 100-nál több tanulója van, akkor a helyi önkormányzattól 50 000 tallért és a 100-on felüli létszám után tanulónként még 800 tallér hozzájárulást kapnak. A támogatás feltétele az, hogy a teljes juttatás egy tanulóra jutó összege nagyobb legyen 550 tallérnál, de ne haladja meg a 600 tallért. Mekkora létszám esetén kaphatja meg az iskola az önkormányzati támogatást? Hány megoldása van a feladatnak?

3 Oldd meg a valós számok halmazán az

a) $\frac{x+2}{4-x} > 0$;

b) $\frac{x+2}{4-x} \leq 0$;

c) $\frac{4-x}{x+2} \leq 0$

egyenlőtlenséget!

Megoldásaidat a *függvényábrázoló programok* segítségével is ellenőrizheted.

4 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $(2x-5)\cdot(3-4x) \leq 0$

b) $\frac{3-7x}{12+5x} > 0$

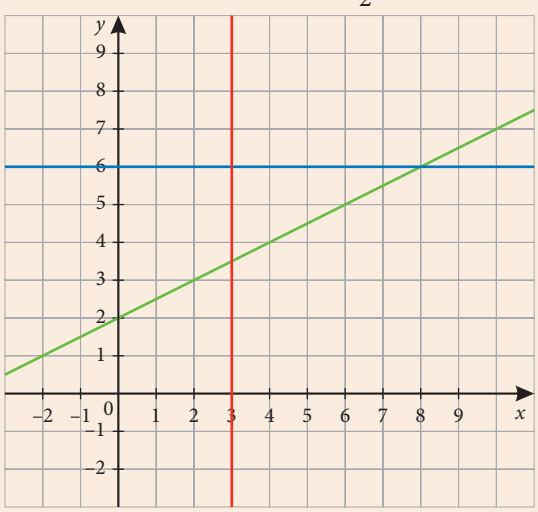
5 Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) > 0$

HÁZI FELADAT

1 Hány olyan $P(x; y)$ pont van a koordináta-rendszer síkjában, amelynek mindkét koordinátája egész szám, továbbá:

$x - 3 \geq 0$ és $y - 6 \leq 0$ és $y \geq \frac{1}{2}x + 2$?

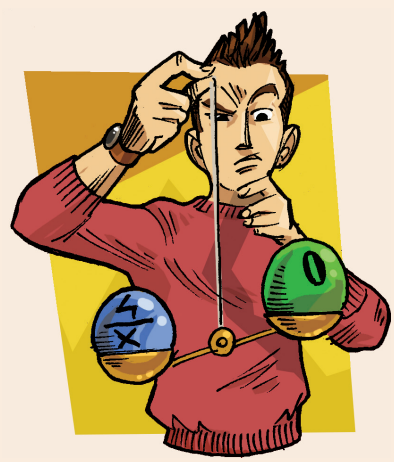


2 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x+3}{x+5} < 0$ b) $\frac{-x-2}{-x} \geq 0$ c) $\frac{6-2x}{2x+3} \leq 0$

Megoldásaidat a *függvényábrázoló programok* segítségével is ellenőrizheted.

3 Tibornak a $\frac{4}{x} < 0$ egyenlőtlenséget kellett megoldania. Úgy gondolta, alkalmazza a mérlegelvet. Mindkét oldalt megszorozta x-szel: $4 < 0$. Ez hamis kijelentés, tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása – gondolta Tibor.
Jól gondolkodott-e Tibor? Válaszod indokold!



4 Egy játékban három dobókockával dobunk. A dobott pontok összegét jelöljük p-vel. A játékban nyerünk, ha a $2(9-p)\left(5-\frac{1}{3}p\right)$ szorzat értéke negatív, egyébként veszítünk.
Hányféle pontösszeg esetén nyerhetünk?

RÁADÁS

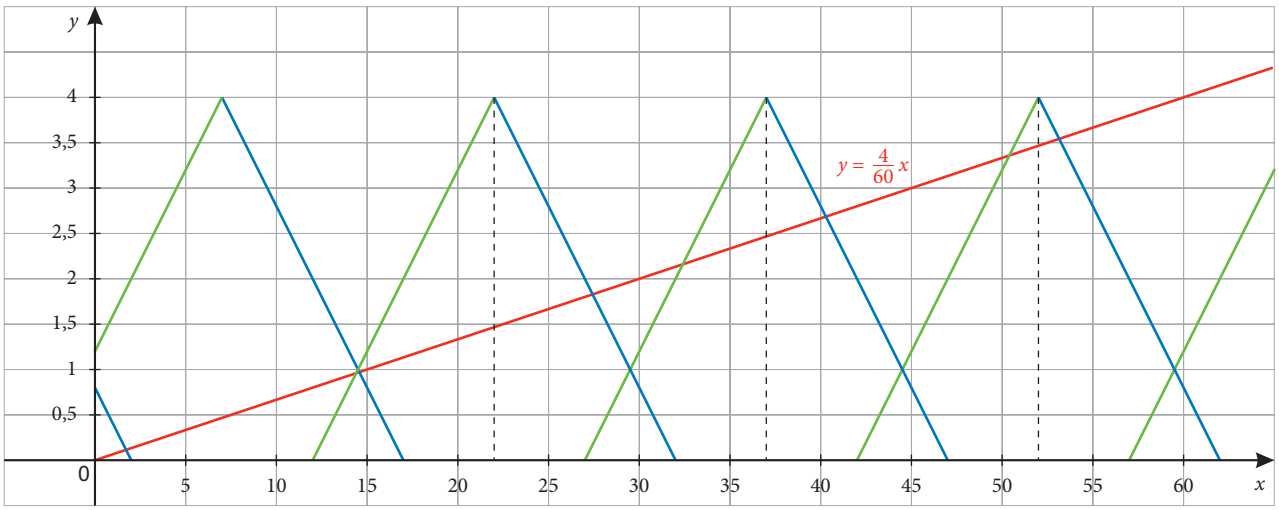
1. A villamosmegálló tájékoztatója szerint a következő villamos 12 perc múlva érkezik. A 10 perces villamosút helyett Karcsiék inkább gyalog indultak el, és egy óra alatt tették meg a 4 km-es távot.

a) Hány villamos haladt el mellettük és előzte meg őket, ha a villamosok a menetrend szerint 15 perces időközönként követik egymást?

b) Hány szemből jövő villamossal találkozhattak, ha a másik végállomásról mindig akkor indul egy-egy villamos, amikor beérkezik egy ellenkező irányú?

Megoldás

A villamosok számára vonatkozó egyenletet nehéz felírni, viszont grafikonok segítségével meglepően egyszerű a megoldás.



A vízszintes tengelyen a percekben mért időt, a függőlegesen a km-ben mért megtett utat látjuk. A piros vonal Karcsiék mozgásgrafikonja.

A metszéspontok azt jelzik, hogy 3 villamos hagyta el Karcsiékat, és 5 szemből jövő villamost számolhattak meg.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$$\frac{3-x}{7x} < 2$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Könnyebben boldogulnánk a feladattal, ha az egyenlőtlenség jobb oldalán 0 állna. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza nem változik (ekvivalens az átalakítás), ha mindkét oldalból kivonunk 2-t. Ezért rendezzük az egyenlőtlenséget a következő módon:

$$\frac{3-x}{7x} - 2 < 0$$

Hozzuk közös nevezőre, és vonjuk össze a bal oldalon álló kifejezéseket!

$$\frac{3-x}{7x} - \frac{14x}{7x} < 0$$

$$\frac{3-15x}{7x} < 0$$

Fejezzük be innen a feladat megoldását!

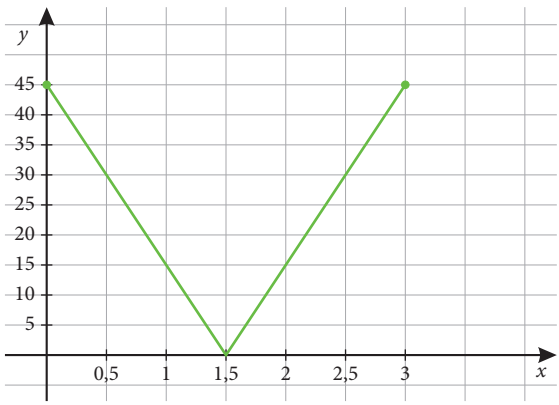
67 ABSZOLÚT ÉRTÉKES EGYENLETEK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Lajos kerékpárversenyző. Napi edzése részeként a 45-ös kilométertáblánál álló házától állandó $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel elkarikázik a megyeszékhelyig, ahol a kilométertáblák számozása kezdődik. Innen rögtön visszafordulva ugyanakkora sebességgel hazahajt.

A mellékelt grafikon megmutatja, hogy Lajos az edzése melyik pillanatában mekkora távolságra volt a megyeszékhelytől. Az időpontokat az x tengelyről, a távolságokat az y tengelyről olvashatjuk le.

A grafikon egyenlete: $y = |30x - 45|$.



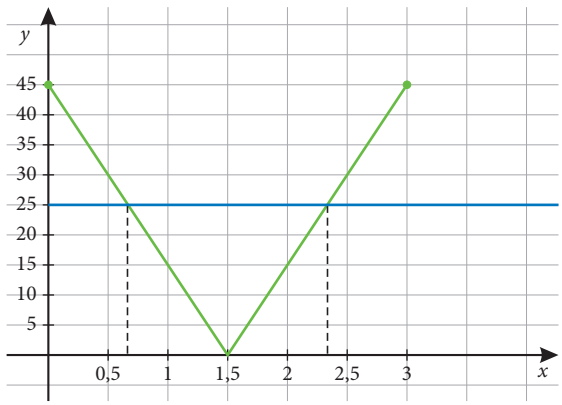
a) Az indulástól számítva mikor hajt el Lajos a 25-ös kilométertábla mellett?

b) Lajossal egy időben a barátja, Tibor is elindul egy kempingbiciklivel. Ő az 5-ös kilométertáblától indulva a megyeszékhellyel ellentétes irányban, $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Mikor és hol találkozik Tibor Lajossal?

Megoldás

a) A második grafikonról leolvasható, hogy Lajos odafelé $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ órakor (vagyis a 40. percben), visszafelé pedig $1{,}5 + \frac{25}{30} = \frac{7}{3}$ órakor (vagyis az indulás után 2 óra 20 perccel) halad el a 25-ös tábla mellett.

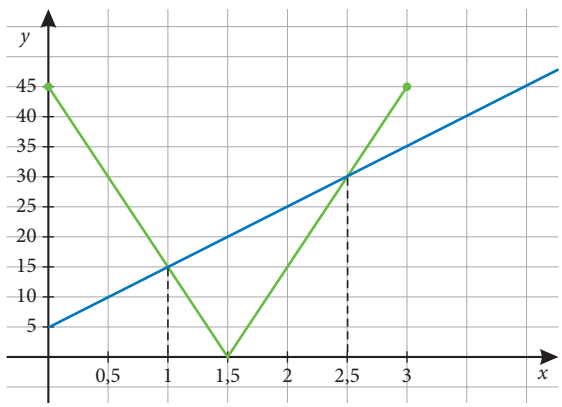
Megjegyzés: Grafikus úton megoldottuk az $|30x - 45| = 25$ egyenletet.



b) Az alsó koordináta-rendszerben ábrázoltuk azt a függvényt is, amely a kempingkerékpár helyzetét írja le. Ennek a hozzárendelési szabálya: $x \mapsto 10x + 5$.

A két grafikon két helyen metszi egymást, tehát kétszer fognak találkozni. Először indulásuk után 1 órával (ekkor Lajos a városközpont felé halad), a 15-ös táblánál, aztán pedig indulásuk után 2,5 órával, a 30-as táblánál (ekkor Lajos már hazafelé kerékpározik).

Megjegyzés: Grafikus úton megoldottuk az $|30x - 45| = 10x + 5$ egyenletet.



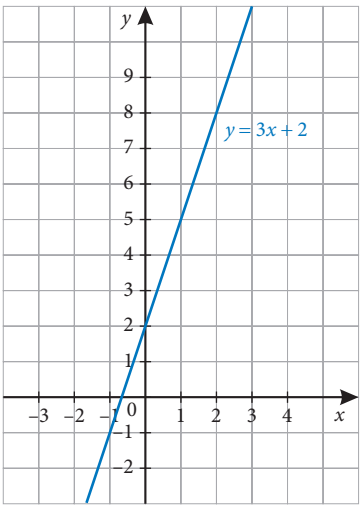
2. Melyik számot jelölheti az x, ha $|3x + 2| = 8$?

Megoldás

Első (grafikus) módszer

Rajzoljuk meg az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonját a valós számok halmazán, és olvassuk le, melyik számhoz rendeli ez a függvény a 8 értéket!

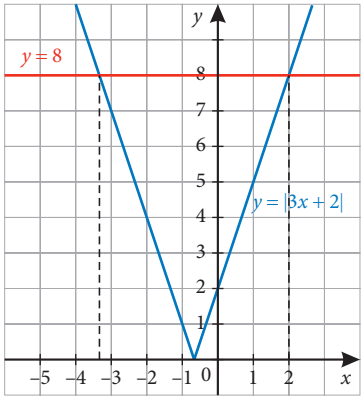
Először az $x \mapsto 3x + 2$ elsőfokú függvényt ábrázoljuk:



Ezután a grafikonnak az x tengely alatti részét az x tengelyre tükrözzük. Így kapjuk az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonját (V betűhöz hasonló kék töröttvonal). Ugyanitt megrajzoltuk az $x \mapsto 8$ függvény grafikonját, a piros egyenest. A két grafikon metszéspontjainak első koordinátái adják meg az $|3x + 2| = 8$ egyenlet gyökeit.

Az ábráról természetesen csak közelítőleg olvashatjuk le a 2 és a $-3\frac{1}{3}$ számot.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, pontosan megkaptuk-e az egyenlet gyökeit.



Ha $x = 2$, akkor $|3x + 2| = |6 + 2| = 8$, tehát a 2 gyöke az adott egyenletnek.

Ha $x = -3\frac{1}{3}$, akkor $|3x + 2| = |-10 + 2| = 8$, tehát a $-3\frac{1}{3}$ is gyöke az adott egyenletnek.

A grafikon jól mutatja, hogy az x más számot nem jelölhet.

Ráadás

Második (algebrai) módszer

Két olyan szám van, amelynek az abszolút értéke 8: a 8 és a –8. Ezért

$3x + 2 = 8$ vagy $3x + 2 = -8$.

Az első egyenletből $3x = 6$, vagyis $x = 2$, a második egyenletből $3x = -10$, vagyis $x = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$.

Tehát az x két különböző számot jelenthet: a 2-t vagy a $\left(-3\frac{1}{3}\right)$-ot.

Egyenlet megoldásához használhatók a *függvényábrázoló programok* is.

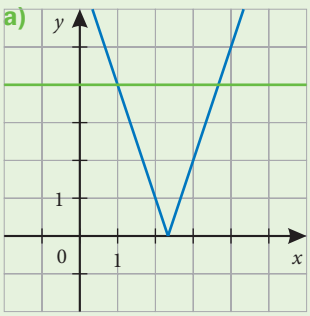
FELADAT

1 Oldd meg a következő abszolút értékes egyenleteket ($x \in \mathbf{R}$)!

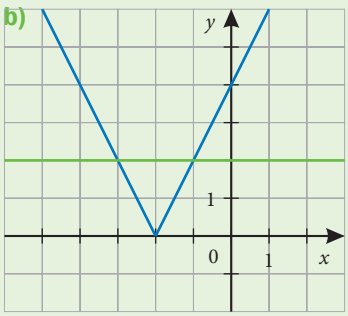
a) $|x + 2| = 3$ **b)** $|x + 2| = 2{,}3$ **c)** $|x + 2| = 0$ **d)** $|x + 2| = -1{,}8$

2 Írj fel egy-egy olyan egyenletet, amelynek a megoldása leolvasható a megadott grafikonról! Behelyettesítéssel ellenőrizd, hogy a leolvasott számok valóban megoldások!

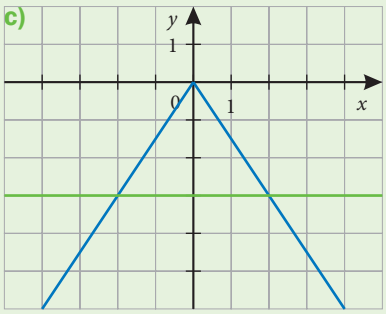
a)



b)

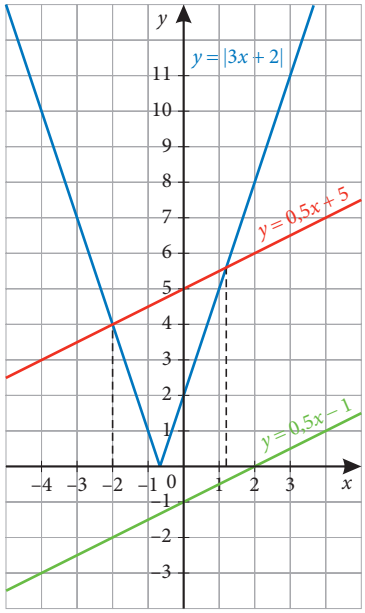


c)



KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Oldjuk meg grafikus úton az $|3x + 2| = 0{,}5x - 1$ és az $|3x + 2| = 0{,}5x + 5$ egyenletet ($x \in \mathbf{R}$)!



Megoldás

Az előző feladat megoldása során már megrajzoltuk az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonját. Most berajzoljuk ugyanabba a koordináta-rendszerbe az $x \mapsto 0{,}5x - 1$ és az $x \mapsto 0{,}5x + 5$ elsőfokú függvény grafikonját is.

Az első egyenesnek nincs közös pontja az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonjával. Ez azt jelenti, hogy az $|3x + 2| = 0{,}5x - 1$ egyenletnek nincs gyöke.

A második egyenesnek 2 közös pontja van az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonjával. Ez azt jelenti, hogy az $|3x + 2| = 0{,}5x + 5$ egyenletnek 2 gyöke van, e közös pontoknak az első koordinátája: -2 és 1,2.

Az ábráról csak közelítőleg olvashatjuk le a metszéspontok első koordinátáit. Hogy pontosan ezek a gyökök, azt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük:

Ha $x = -2$, akkor $|3x + 2| = |-6 + 2| = 4$ és $0{,}5x + 5 = -1 + 5 = 4$, vagyis a -2 gyöke az egyenletnek.

Ha $x = 1{,}2$, akkor $|3x + 2| = |3{,}6 + 2| = 5{,}6$ és $0{,}5x + 5 = 0{,}6 + 5 = 5{,}6$, vagyis az 1,2 is gyöke az egyenletnek.

A grafikonról leolvashatjuk, hogy egyenletünknek több gyöke nem lehet.

FELADAT

3 Oldd meg a következő abszolút értékes egyenleteket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $|2x - 6| = 3$ **b)** $|2x - 6| = x$ **c)** $|2x - 6| = -\frac{2}{5}x + 6$ **d)** $|2x - 6| = x - 3$

4 Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket ($x \in \mathbf{R}$)! Behelyettesítéssel ellenőrizd a megoldásokat!

a) $|2{,}5x - 4| = -\frac{3}{2}x + 4$ **b)** $9 - \frac{2}{5}x = |1{,}8x - 2|$

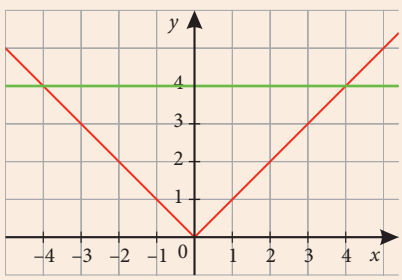
5 Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $|x| = x$ **b)** $|x| = -x$ **c)** $|x| = |x|$

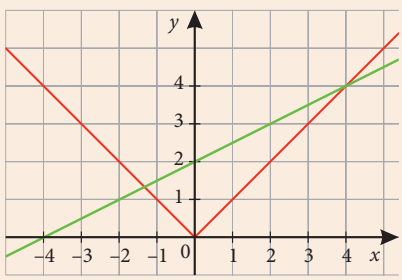
HÁZI FELADAT

1 Írj fel egy-egy olyan egyenletet, amelynek a megoldása leolvasható a megadott grafikonokról! Behelyettesítéssel ellenőrizd, hogy a leolvasott számok valóban megoldások-e!

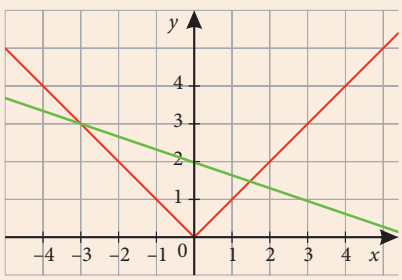
a)



b)



c)



2 Oldd meg a következő egyenleteket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $|x - 2{,}7| = 3{,}5$ **c)** $|70{,}4 + 22x| = 30{,}8$

b) $|5{,}7 - 3x| = 5{,}7$ **d)** $|4 - x| + 9 = 0$

3 Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket ($x \in \mathbf{R}$)!

a) $|2x| = x + 2$ **c)** $|2x - 2| = 3 - x$

b) $|2x| = 3 - x$ **d)** $\left|\frac{2}{3}x - 2\right| = -\frac{1}{3}x + 2$

Megoldásaidat *függvényábrázoló programmal* is ellenőrizheted.

RÁADÁS

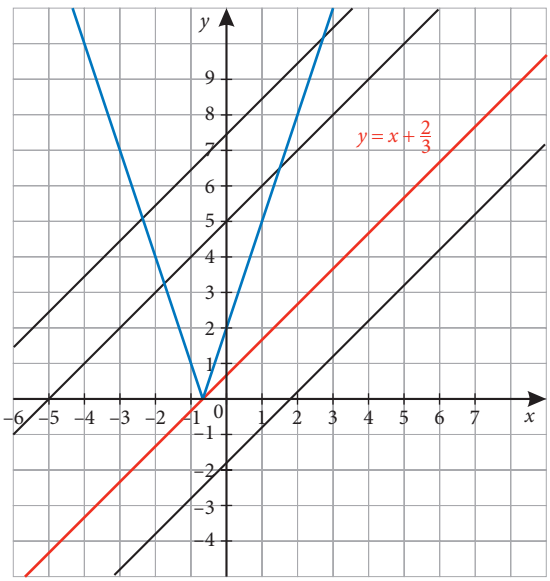
Vizsgáljuk meg, hogy az a értékének más-más megválasztása esetén hány gyöke van a $|3x + 2| = x + a$ egyenletnek a valós számok halmazán!

Adjunk az a-nak több értéket! Ábrázoljuk az $x \mapsto x + a$ elsőfokú függvényeket az $x \mapsto |3x + 2|$ függvénnyel közös koordináta-rendszerben! Látjuk, hogy

ha $a = \frac{2}{3}$, akkor az egyenesnek 1 közös pontja van az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonjával, vagyis az $|3x + 2| = x + \frac{2}{3}$ egyenletnek egy gyöke van, a $-\frac{2}{3}$;

ha $a > \frac{2}{3}$, vagyis ha a piros egyenest „feljebb” toljuk, akkor az új egyenesnek 2 közös pontja van az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonjával, vagyis az $|3x + 2| = x + a$ egyenletnek két gyöke van;

ha $a < \frac{2}{3}$, vagyis ha a piros egyenest „lejjebb” toljuk, akkor az új egyenesnek nincs közös pontja az $x \mapsto |3x + 2|$ függvény grafikonjával, vagyis az $|3x + 2| = x + a$ egyenletnek nincs gyöke.



FELADAT

1. A p paraméter egy valós szám. Mennyi p értéke, ha a $\frac{2}{3}x + p = |1{,}5x - 4{,}5|$ egyenletnek a valós számok halmazán

a) nincs megoldása;

b) pontosan egy megoldása van;

c) két megoldása van?

2. Ábrázold a következő függvény grafikonját!

a) $f: [0; 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ f(x-1), & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$

b) $g: [0; 4] \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1$, ha $0 \le x < 1$; és $g(x + 1) = g(x) + x$; ha $0 \le x \le 3$

68 GYAKORLÁS; TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Egy dobókockával 50-szer dobtunk, és a következő eredményeket kaptuk:
6, 3, 2, 5, 2, 2, 1, 5, 4, 1, 3, 2, 5, 6, 2, 2, 1, 5, 4, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 5, 2, 1, 6, 2, 5, 6, 2, 6, 1, 5, 4, 1, 4, 2, 5, 6, 1, 3, 3, 5, 4, 1.

a) Készíts gyakorisági táblázatot!

b) Ábrázold a gyakoriságokat oszlop- és kördiagramon!

2 Egy elsőfokú függvény grafikonja olyan egyenes, amely áthalad a (0; –3) ponton, és a meredeksége 2. Az alább felsoroltak közül melyik a függvény hozzárendelési szabálya?

a) $x \mapsto -3x + 2$ **c)** $x \mapsto 2x - 3$

b) $x \mapsto 3x - 3$ **d)** $x \mapsto 2x$

3 Add meg azt a valós számok halmazán értelmezett függvényt, amelynek grafikonja az az egyenes, amely áthalad a $P(-1;-3)$ és $Q(3; 3)$ pontokon!

4 Ábrázold a következő függvényeket! Add meg az értékkészletüket, a zérushelyeiket, a legnagyobb és a legkisebb függvényértéküket, ha ezek léteznek! Jellemezd őket monotonitás szempontjából!

a) $x \in [0; 5]$, $x \mapsto \frac{3}{2}x + 1$

b) $x \in]-3; 4[$, $x \mapsto |x + 1|$

c) $x \in [-1; +\infty[$, $x \mapsto -2x$

Közülük melyik elsőfokú függvény, melyik ír le egyenes arányosságot?

5 Az f függvény értelmezési tartománya a $[-4; 6[$ intervallum, hozzárendelési szabálya: $x \mapsto |2x - 3|$. Rajzold meg az f grafikonját, sorold fel néhány tulajdonságát (legnagyobb függvényérték, legkisebb függvényérték, értékkészlet, zérushely, növekedő, csökkenő, monoton)!

6 Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a megadott számhalmazon!

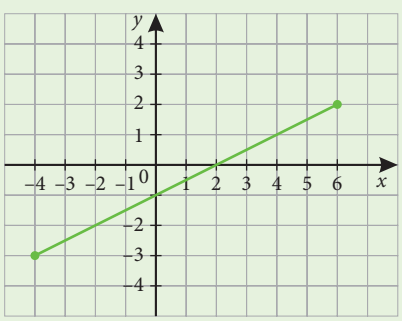
a) $3x - 1 = -x + 3$ $\quad x \in \mathbf{R}$

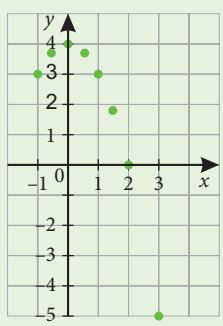
b) $(2x + 1)(5 - x) \geq 0$ $\quad x \in \mathbf{Z}$

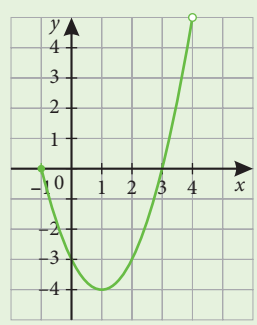
c) $|2x - 4| = 5 - x$ $\quad x \in \mathbf{Q}$

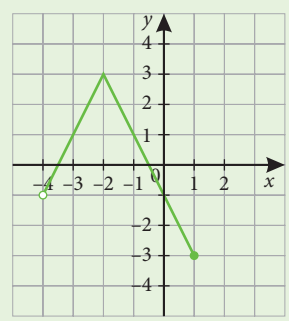
d) $\frac{x+1}{5-x} < 0$ $\quad x \in]-1; 4]$

7 Olvasd le a grafikonjukkal megadott függvények értelmezési tartományát, legnagyobb és legkisebb értékét (ha van!), értékkészletét, zérushelyeit!



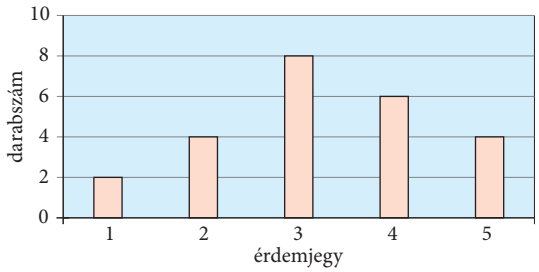






TUDÁSPRÓBA

1 A grafikon egy osztály matematikadolgozatának eredményeit szemlélteti.

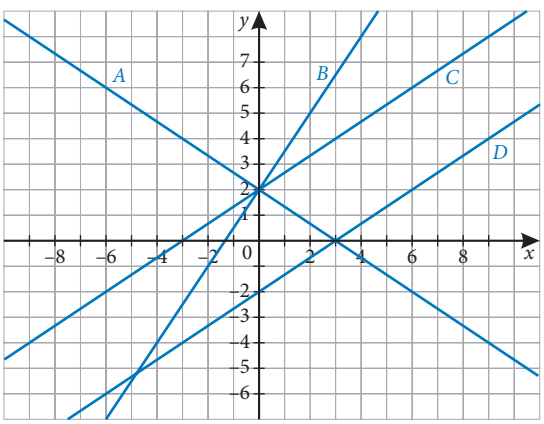


a) Add meg az érdemjegyek relatív gyakoriságát!

b) Ábrázold kördiagramon az adatokat!

2 **a)** A megadott egyenesek közül melyik egyenlete az $y = \frac{2}{3}x + 2$?

b) Melyik lehet egyenes arányosságot leíró függvény grafikonja?



c) Add meg a többi grafikon egyenletét is!

3 Egy f lineáris függvényről tudjuk, hogy értelmezési tartománya a valós számok halmaza, $f(-2) = 5$, és $f(2) = -1$.

a) Ábrázold a függvény grafikonját!

b) Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

c) Ábrázold és jellemezd az $|f|$ függvényt!

4 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

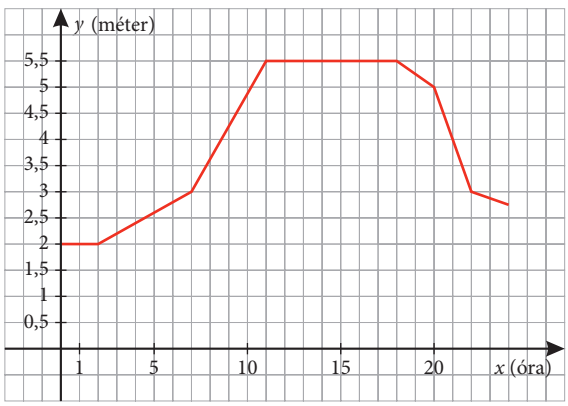
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |2x + 8|$ és

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = |-3x + 6|$

Melyik függvényre igazak a kövezkező állítások: f-re, g-re, mindkettőre vagy egyikre sem?

- A negatív számok halmazán szigorúan monoton csökkenő.
- A pozitív számok halmazán monoton növekvő.
- Az $x = -4$ helyen minimuma van.
- Az $x = 2$ helyen az értéke 12.
- Értékkészletének eleme a 0.
- Ha x zérushelye, akkor $|x|$ is zérushelye.

5 Egy kisebb folyó vízállását 24 órán keresztül folyamatosan mérték, majd grafikonon ábrázolták.



a) Ezen a folyón a harmadfokú árvízvédelmi készültséget akkor rendelik el, ha a vízállás eléri a 3,5 métert. Mikor rendelték el, illetve mikor szüntették meg a harmadfokú készültséget?

b) Óránként hány méterrel nőtt a vízszint, amikor a növekedés sebessége a legnagyobb volt?

c) Óránként hány méterrel változott a vízszint, amikor a változás (növekedés vagy csökkenés) a leggyorsabb volt?

6 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x - 1 \geq 5 - 2x$

b) $\frac{x+3}{x} > 0$

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Egy felmérés során 1000 véletlenszerűen kiválasztott embert kérdeztek meg arról, hogy milyen közlekedési eszközzel jár reggelente munkába. A válaszok számát a táblázat mutatja:

Gyalog	125
Kerékpár, motorkerékpár	75
Autó	425
Tömegközlekedés	375

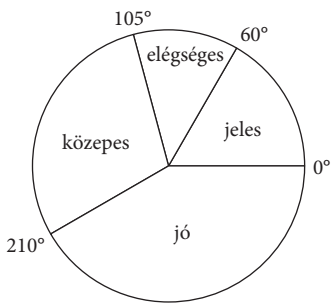
a) Számítsd ki az adatok relatív gyakoriságát!
b) Ábrázold a gyakoriságokat kördiagramon!

2 Egy 35 pontos matematika dolgozatban a következő pontszámok születtek:

Pontszám	0–5	6–10	11–15	16–20	21–25	25–30	31–35
Gyakoriság	2	2	8	5	8	6	5

a) Ábrázold oszlopdiagramon az adatokat!
b) Készíts táblázatot a relatív gyakoriságokról!

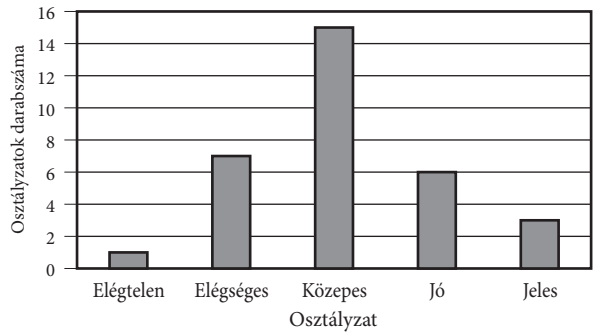
3 (Érettségi feladat, 2006)
A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.
a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották?
b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:



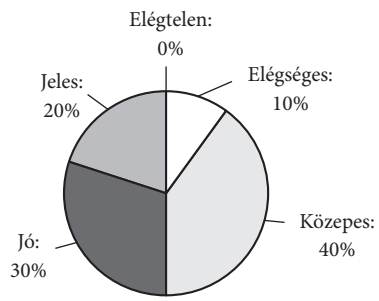
Add meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket!
Válaszod foglald táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesd oszlopdiagramon is!

4 (Kompetenciamérés, 2010)
A diákönkormányzat tanulmányi versenyt hirdetett az osztályok számára kémiából. A versenyen való részvételhez minden osztálynak le kellett adnia az év végi kémiaosztályzatokat. Az *A* osztály oszlopdiagramon, a *B* osztály kördiagramon adta le az eredményeket.

A osztály eredményei



B osztály eredményei (30 tanuló)



A diagramok alapján döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!
a) Mindkét osztályban közepes osztályzatot értek el a legtöbben.
b) Az *A* osztályban kevesebben értek el jeles eredményt, mint a *B* osztályban.
c) Mindkét osztályban ugyanannyi az osztálylétszám.
d) A két osztályban összesen 17 tanuló kapott elégséges osztályzatot.

5 Adott két halmaz: $A = \{1; 2; 3\}$ és $B = \{x; y\}$. Hány különböző függvény van, amelynek
a) értelmezési tartománya A és képhalmaza B;
b) értelmezési tartománya B és képhalmaza A;
c) értelmezési tartománya A és értékkészlete B;
d) értelmezési tartománya B és értékkészlete A?

6 Ábrázold a következő függvények grafikonját!

a) $f: \{-2; -0{,}5; 0{,}5; 1; 2\} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = 2x$

b) $g: \{-2; -0{,}5; 0{,}5; 1; 2\} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \frac{2}{x}$

7 Ábrázold a következő függvények grafikonját!

a) $\{-2; -0{,}5; 0{,}5; 1; 2\} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

b) $[-2; 2] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

c) $]-1; 3] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

d) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

8 Add meg az elsőfokú függvényt, ha

a) grafikonjának meredeksége $\frac{1}{3}$ és az y tengelyt -2-nél metszi;

b) grafikonjának meredeksége -4 és az y tengelyt $\frac{2}{5}$-nél metszi!

9 Add meg az elsőfokú függvényt, ha

a) grafikonjának meredeksége -3 és egyik pontja $P(4; 1)$;

b) grafikonjának meredeksége 2,5 és egyik pontja $P(1{,}5; 3)$!

10 Add meg az elsőfokú függvényt, ha

a) grafikonjának két pontja $P(102; 13)$ és $Q(17; 21)$;

b) grafikonjának két pontja $P(-41; -9)$ és $Q(56; 92)$!

11 Mennyi Fahrenheit-fokban mérve

a) a glicerin fagyáspontja (18 °C);

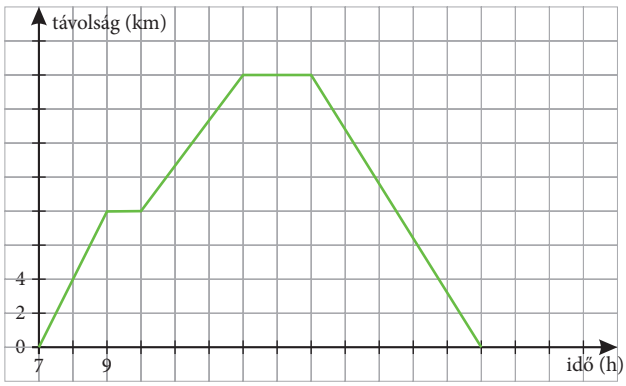
b) az etanol forráspontja (78,4 °C)?

12 Egy f elsőfokú függvényről tudjuk, hogy $f(-4) = 10$ és $f(2) = 8$. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

13 Egy biciklis állandó, 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad. Indulása után 1 másodperccel egy másik kerékpáros is elindul ugyanazon az úton, ugyanarról a kezdőpontról, ugyanabban az irányban. A második biciklis sebessége 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ábrázold közös koordináta-rendszerben, hogy mekkora utat tesznek meg az idő függvényében (az első biciklis indulásától számítva)! Olvasd le a grafikonról, hogy mikor, és milyen távol éri utol a második kerékpáros az elsőt!

14 A grafikon egy „challenge day” napi kirándulás mozgásgrafikonja. Vizsgáld meg a grafikont, és válaszolj a következő kérdésekre!



a) Milyen messzire jutottak a kirándulók a kiindulási helyüktől?

b) Hazaérkezésig összesen hány kilométert gyalogoltak?

c) Mikor (mely időpontok között) haladtak a leggyorsabban?

d) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt a sebességük egyes esetekben?

e) Hányszor tartottak pihenőt?

f) Összesen mennyi ideig pihentek?

g) Hány órakor indultak hazafelé?

h) Hány órakor érkeztek haza?

15 (Kompetenciamérés, 2011)

Zedfalva folyójának vízszintjét folyamatosan mérik. Egyik nyáron a sok csapadék miatt a folyó vízszintje emelkedni kezdett. Június 20-án 320 cm-es vízmagasságot mértek. A következő két hétben viszonylag egyenletesen, naponta átlagosan 37 cm-rel emelkedett a folyó vízszintje.

a) Ábrázold grafikonon a folyó vízszintjének alakulását!

b) Körülbelül milyen magas volt a vízszint július 4-én?

16 Egy újszülött koala kb. 2 cm hosszú. Az ezt követő 4 év alatt – havonta átlagosan 1,5 cm-t növekedve – fejlődik ki teljesen.

a) Add meg azt a függvényt, amely a koala hosszát a születése óta eltelt hónapok számának függvényében írja le!

b) Milyen hosszú egy 1 éves koala?

c) Mennyi idősen lesz 50 cm hosszú?

17 (Érettségi feladat, 2012)
Az f függvényt a 3-tól különböző valós számok halmazán értelmezzük az $f(x)=\frac{1}{x-3}$ képlettel. Melyik valós x szám esetén veszi fel az f függvény az $\frac{1}{20}$ értéket?

18 (Érettségi feladat, 2013)
Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x)=6$?

19 (Érettségi feladat, 2014)
Válaszd ki az f függvény hozzárendelési szabályát az A, B, C, D lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak:

x	-2	0	2
$f(x)$	-4	0	-4

A: $f(x)=2x$
B: $f(x)=x^2$
C: $f(x)=-2x$
D: $f(x)=-x^2$

20 (Érettségi feladat, 2018)
Hol metszi a koordinátatengelyeket az $x\mapsto -2x+6$ ($x\in\mathbf{R}$) függvény grafikonja?

21 (Érettségi feladat, 2018)
Egy elsőfokú függvény grafikonja az x tengelyt a (-2)-ben, az y tengelyt a 6-ban metszi. Mennyi a meredeksége?

22 (Érettségi feladat, 2015)
Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x=4$ helyen a függvényérték 6. Add meg a és b valós számok értékét!

23 (Érettségi feladat, 2018)
Add meg a $[-3;\,1]$ zárt intervallumon értelmezett $x\mapsto|x|$ függvény értékkészletét!

24 (Érettségi feladat, 2017)
Legyen $f:[-2;\,5]\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x-4|$, és $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=2x+1$.
a) Ábrázold az f függvényt!
b) Határozd meg, x mely értéke esetén lesz az f és a g függvény értéke egyenlő!

25 Egy időben két gyertyát gyújtunk meg. Az első gyertya 16 cm magas, és 4 óra alatt égne le teljesen. A második gyertya 12 cm magas, és 6 óra alatt égne le teljesen.
Ábrázold közös koordináta-rendszerben, hogy milyen magasak a gyertyák az idő függvényében (a meggyújtásuk pillanatától számítva)! Mikor lesznek egyforma magasak? Milyen magasak ekkor?

26 Ábrázold a függvények grafikonját!
a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2x-3$
b) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto|2x-3|$

27 Ábrázold a következő függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!
a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto|3x-5|$
b) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto|1-2{,}5x|$

28 Ábrázold a következő függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket! Határozd meg szélsőértékeieket, növekedési viszonyaikat, értékkészletüket, zérushelyüket!
a) $\{-1;\,5\}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto|6-2x|$
b) $]-1;\,5]\to\mathbf{R}$, $x\mapsto|6-2x|$

29 Hol van zérushelye a következő függvényeknek?
a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto(x-3)\cdot(x-6)$
b) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto(x-1)\cdot(x+4)$
c) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto(2x-5)\cdot(x+3)$

30 Határozd meg az alábbi függvények zérushelyét számolással! ($x\in\mathbf{R}$)
a) $f(x)=-\frac{2}{3}x+3$
b) $f(x)=-2x+3$
c) $f(x)=x^2+2$
d) $f(x)=x^2-9$
e) $f(x)=(x+3)^2$
f) $f(x)=(x-3)^2$

31 Határozd meg az alábbi, valós számok halmazán értelmezett függvények zérushelyét számolással!
a) $f(x)=|3x-5|$
b) $g(x)=|4-7x|$
c) $h(x)=\left|\frac{1}{3}x-2\right|$
d) Hol pozitív az f; g; h függvények helyettesítési értéke?

32 Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $2x+1=3x-6$ **c)** $-x+5<2x-1$ **e)** $|3x-1|=2x-4$

b) $\frac{1}{4}x+2=-\frac{1}{2}x+5$ **d)** $\frac{2}{3}x-5\geq-\frac{1}{2}x+2$ **f)** $\left|\frac{1}{2}x+1\right|=|x-4|$

33 (Érettségi feladat, 2010) Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$

34 (Érettségi feladat, 2015) Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$|x-3|=3x-1$

35 (Érettségi feladat, 2013) Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$\frac{x+2}{3-x}\geq 0$

36 (Érettségi feladat, 2009) Melyek azok az egész számok, amelyek mindkét egyenlőtlenséget kielégítik?

$3-\frac{x}{2}>x$ és $3x+4\geq-3x-8$

37 Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

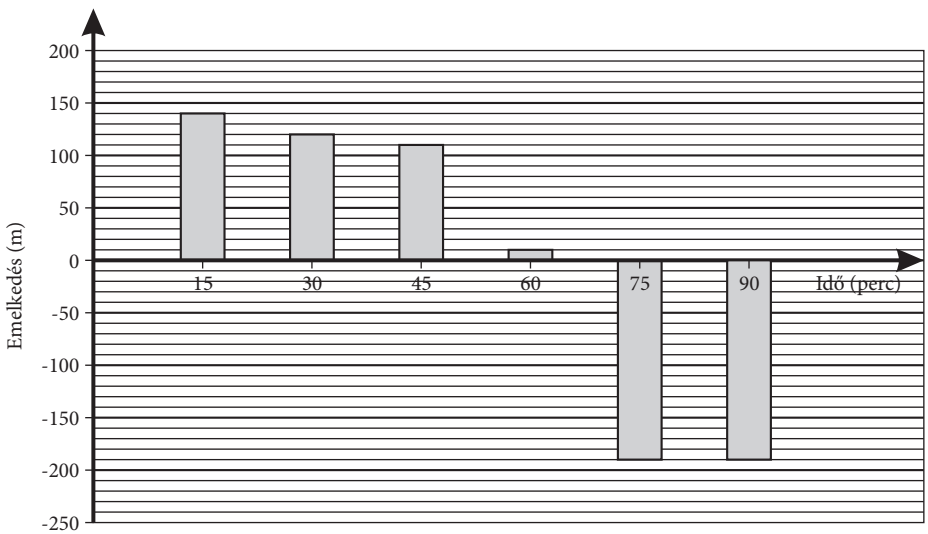
a) $(5+3x)(x-2)>0$; **b)** $(6x+4)(5-2x)<0$; **c)** $(10-2x)(21-3x)\geq 0$; **d)** $(7x+1)(3x-6)(x-4)\leq 0$

38 Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x-6}{x+3}>0$; **b)** $\frac{5x+33}{7-x}<0$; **c)** $\frac{4x-10}{x+9}\geq 0$; **d)** $\frac{4-2x}{8+x}\leq 0$.

39 (Kompetenciamérés, 2016)

Péter hőlégballonozik. Az alábbi diagram a repülési magasságának a VÁLTOZÁSÁT ábrázolja 15 percenként, azaz azt mutatják az oszlopok, hány métert emelkedett vagy süllyedt az előző adathoz képest.



a) Döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis az alábbi állítások közül!

A A hőlégballon kb. 100 métert süllyedt a 45. és a 60. perc között.

B A hőlégballon a 75. és a 90. percben ugyanolyan magasan volt.

C Az emelkedés kevesebb, mint 75 percig tartott.

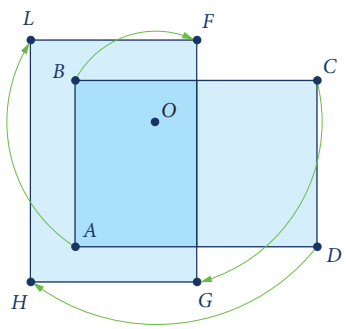
D A 75. percben magasabban volt a hőlégballon, mint a 15. percben.

b) Készíts olyan grafikont, amely azt ábrázolja, hogy milyen magasan volt a hőlégballon az idő függvényében! Közelítsd a hőlégballon mozgását azzal, hogy 15 percen keresztül minden alkalommal állandó sebességgel emelkedik, illetve süllyed.

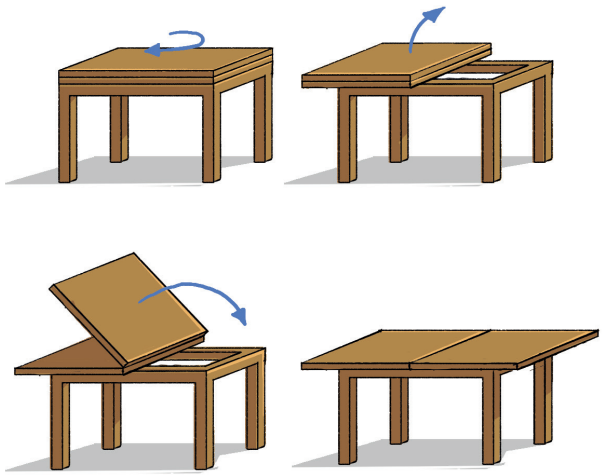
69 FORGATÁS ÉS KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

BEVEZETŐ

Az asztalosok többféle megoldással tudnak kinyitható asztalt készíteni. Az egyik ötletes megoldás, amikor az asztallap egy tengely körül elforgatható. Ha 90°-kal elfogatjuk, akkor kinyithatjuk úgy, hogy a lábak a tartó kerettel ugyanúgy középen vannak, mint félbehajtott állapotban. Ehhez ügyesen kell elhelyezni a tengelyt. A jól elhelyezett O pont körül 90°-kal elforgatva az $ABCD$ téglalap az $EFGH$ téglalapba fordul át.

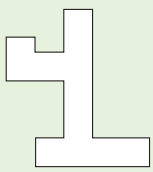


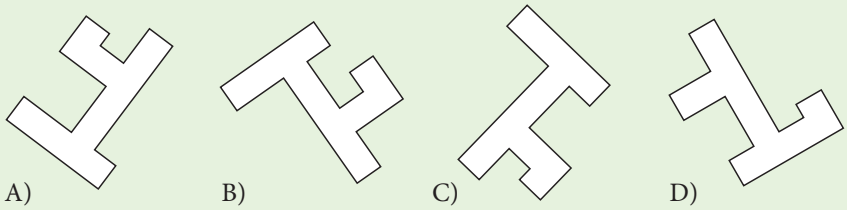
Az ábrán felülnézetből látjátok az egymásba forduló téglalapokat és az elforgatás O középpontját. Később megnézzük, hogy lehet az O pontot megszerkeszteni a téglalap csúcsainak ismeretében.



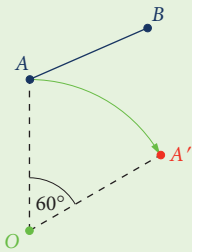
FELADAT

1 (Kompetenciamérés, 2009)
A jobb oldali ábrán egy síkidom látható.
Ezt a síkidomot a síkban elforgatjuk. Melyik kép mutathatja a forgatás eredményét?



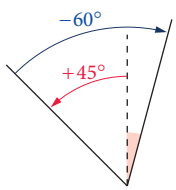


2 Az AB szakaszt elforgattuk az O pont körül 60°-kal az óramutató járásával megegyező irányban. Az ábra mutatja az A pont képét a forgatás után (A'). Hol lesz a B pont képe?
Vedd fel az ábrát a füzetedbe, és szerkeszd meg a B pont képét!



ELMÉLET

A 2. feladatban látható módon az O pont körüli 60°-os forgatás után az A pontra és annak A' képére igaz, hogy az A és A' pontoknak az O-tól való távolsága megegyezik, és az AOA' szög 60°. A 60° itt egy **irányított szög,** amelyben az óramutató járásával ellentétes forgatási irány tartozik a pozitív szögekhez, és az óramutató járásával megegyező forgatási irány tartozik a negatív szögekhez.

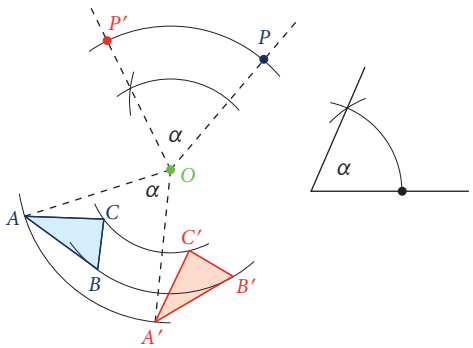


Ezzel az eljárással az A ponthoz hozzárendeljük az A' pontot, és hasonló módon a sík többi pontjához is megszerkeszthető (és egyben hozzárendelhető) a megfelelő képpont. Azt a (kölcsönösen egyértelmű) függvényt, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz, **geometriai transzformáció**nak nevezzük. A pont körüli forgatás egy geometriai transzformáció.

Pont körüli forgatás

Definíció: Adott a síkon egy O pont (az elforgatás középpontja), és adott egy α irányított szög. A sík minden P pontjához rendeljük hozzá a P' pontot úgy, hogy

- O képe önmaga (azaz $O' = O$),
- ha $P \neq O$, akkor P' a síknak az a pontja, melyre $OP = OP'$, és a POP' szög α.



A forgatás irányát *pozitívnak* mondjuk, ha az ellentétes az óramutató járásával, *negatívnak* mondjuk, ha az megegyezik az óramutató járásával. Ha a forgatás szöge mellé nem írunk előjelet, akkor azt pozitívnak gondoljuk.

A szerkesztés lépései:

- az OP félegyenesre felmérjük az α irányszöget;
- az O pontból OP sugárral körívet rajzolunk. P' a körív és az új szögszár metszéspontja.

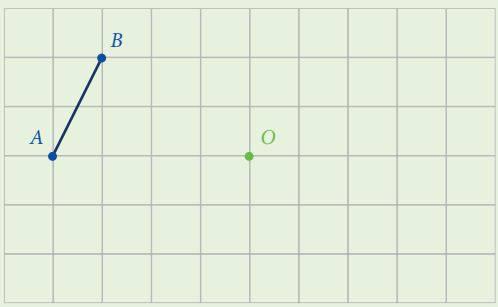
FELADAT

3 A füzetedben dolgozz!

a) Forgasd el az AB szakaszt az O pont körül 180°-kal! Miért nem adtuk meg az elforgatás irányát?

b) Tükrözd az AB szakaszt az O pontra!

c) Mit tapasztalsz? Milyen kapcsolat fedezhető fel az O pont körüli 180°-os elforgatás és az O pontra való tükrözés között?



ELMÉLET

Középpontos tükrözés

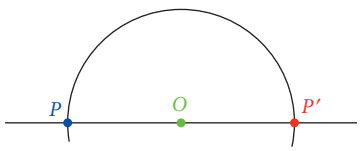
Definíció: Adott a síkon egy O pont, a tükrözés középpontja. A sík minden P pontjához rendeljük hozzá a P' pontot úgy, hogy:

- O képe önmaga (azaz $O' = O$),
- ha $P \neq O$, akkor a P' a PO egyenesének azon P-től különböző pontja, melyre $P'O = PO$.

A síkon a középpontos tükrözés a pont körüli forgatás egy különleges esete: 180°-os forgatás O pont körül.

A szerkesztés lépései:

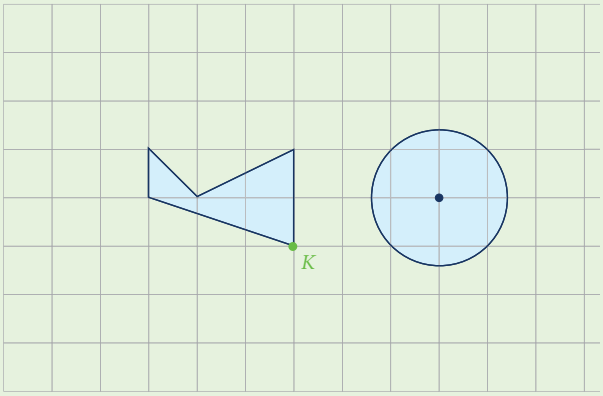
- meghúzzuk az OP egyenest;
- az O pontból OP sugárral körívet rajzolunk. P' a körív és az egyenes (P-től különböző) metszéspontja.



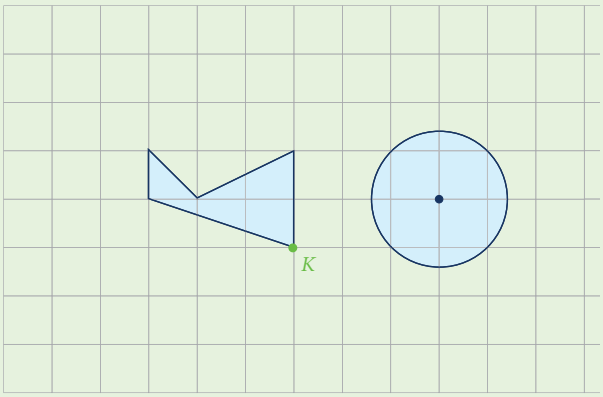
FELADAT

4 Hajtsd végre a négyzetrács felhasználásával a transzformációkat az ötszögön és a körön a füzetedben!

a) Tükrözés a K pontra.



b) Forgatás a K pont körül +90°-kal.



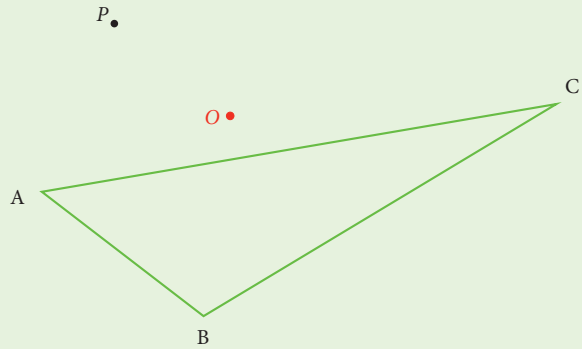
5 Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek befogói 6 cm és 3 cm hosszúak! Forgasd el a háromszöget

a) a derékszögű csúcsa körül;

b) az átfogójának felezőpontja körül +90°-kal!

6 Tükrözz egy háromszöget mindhárom oldalának a felezőpontjára! Mit alkot együtt a háromszög és a három képe?

7 Forgasd az ABC háromszöglemezt az O pont körül! (A füzetedben dolgozz!) Ha elég nagy a forgatás szöge, akkor forgatás közben a háromszöglemeznek több pontja is áthaladhat a megadott P ponton.



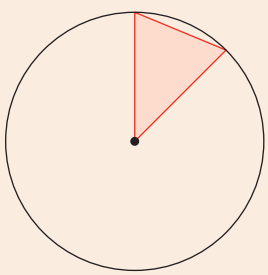
a) Szerkeszd meg a háromszög egy olyan elforgatottját, amelynek a határvonalára illeszkedik a P pont! Hány megoldása van a feladatnak?

b) Szerkeszd meg az ABC háromszöglemezen az összes olyan pontot, amelynek az O pont körüli elforgatottja lehet a P pont is!

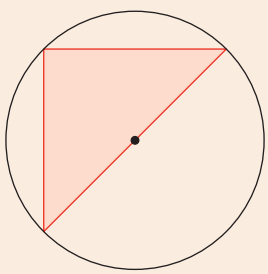
HÁZI FELADAT

1 Forgasd el a háromszöget a kör középpontja körül, negatív irányban, 45°-kal! A füzetedben dolgozz!

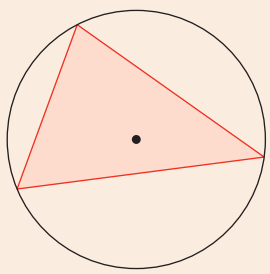
a)



b)

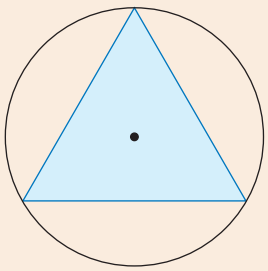


c)

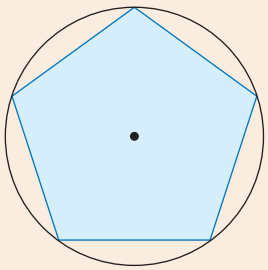


2 Tükrözd a szabályos sokszöget a körülírt körének középpontjára! A füzetedben dolgozz!

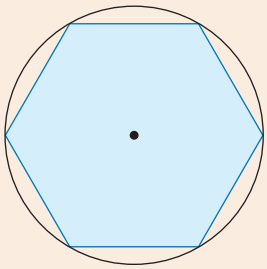
a)



b)



c)



3 Szerkessz olyan háromszöget, amelynek oldalhosszúságai 36 mm, 48 mm és 60 mm, majd tükrözd

a) a legkisebb oldal felezőpontjára;

b) a legnagyobb oldal felezőpontjára!

A háromszög és a tükörképe együtt egy négyszöget alkot. Sorold fel ennek a négyszögnek a tulajdonságait!

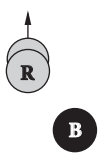
4 Vegyél fel két különböző pontot: A-t és B-t! Szerkeszd meg azt az O pontot, amelyre A-t tükrözve B-t kapjuk!

A *GeoGebra* programmal ellenőrizheted a szerkesztéseid helyességét is.

RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés, 2017)

A rendőrök gyakran használják az irány meghatározására az óraállások megnevezését, ahol mindig arra van 12 óra, amerre a rendőr néz. Például ha a rendőr (R) és a bűnöző (B) az ábrán látható módon helyezkedik el egymáshoz képest, akkor a bűnöző 5 óránál található.



a) Hány óránál van a bűnöző a következő ábrán a rendőrhöz képest?



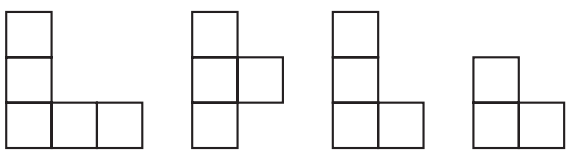




b) Merre néz az A helyen lévő rendőr, ha hozzá képest a bűnöző 8 óránál van?

2. (Kompetenciamérés, 2015)

A képen négy alakzat látható. Helyezd el mind a négy alakzatot egy 4 × 4-es négyzetrácson úgy, hogy ne fedjék egymást! Az alakzatokat csak elforgatni szabad, tengelyesen tükrözni nem.



3 Vegyél fel egy konvex szöget, és a szögtartományban egy P pontot! Szerkeszd meg azt az egyenest, amelynek a szögtartományba eső részét a P pont felezi!

4 Vegyél fel két párhuzamos egyenest, és közöttük egy P pontot. Szerkeszd meg azt a szabályos háromszöget, amelynek egyik csúcsa P, másik két csúcsa pedig az egyik, illetve a másik egyenesre illeszkedik!

70 VEKTOROK ÉS AZ ELTOLÁS

BEVEZETŐ

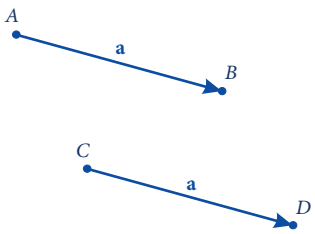


A repülőgépek kötelékben repülnek. Az eseményről másodpercenként felvételt készítenek a földről. Mindegyik repülőhöz odarajzoltuk azt az elmozdulásvektort, amely a következő felvételhez tartozik. Látható, hogy két pilóta kicsit hibázott. Melyik kettő, és milyen hibát követett el?

Megoldás

A képen látható két alsó gép pilótája hibázott. A legalsó gép nem tartotta az irányt, a felette repülő gép tartotta az irányt, de kicsit nagyobb volt a sebessége, mint a többinek.

ELMÉLET



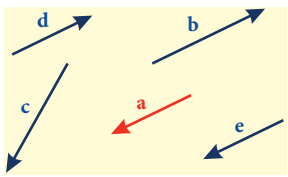
Találkozhattatok már azzal a megfogalmazással, hogy „a vektor irányított szakasz”. Ez abban az értelemben megfelelő, hogy minden vektornak van hossza, ahogy minden szakasznak is van hossza. Az is igaz, hogy ha a szakasz egyik végpontját kezdőpontnak, a másik pontját végpontnak tekintjük, akkor az irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy vektort.

Viszont arra is figyelni kell, hogy amíg az ábrán látható két szakaszt különbözőnek tekintjük (*AB* és *CD*), addig ha az *A*-ból *B*-be, illetve a *C*-ből *D*-be mutató vektort nézzük, akkor ezek ugyanazt a vektort jelenítik meg. Másként fogalmazva: ha két irányított szakasznak megegyezik a hossza és az iránya, akkor ezek ugyanazt a vektort határozzák meg.

Hasonlít ez a helyzet a közönséges törtekre: ott is igaz, hogy ugyanazt az értéket végtelen sokféle alakban felírhatjuk: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \ldots$ Ahogy ezek a törtek különböző alakban ugyanazt a számot határozzák meg, az egymással egyenértékű (azonos hosszúságú és irányú) irányított szakaszok ugyanazt a vektort határozzák meg.

A vektort az *iránya* és az *hossza* (abszolút értéke) jellemzi.

Ábránkon:



- Az **a** és az **e** egyirányú, a **b** és a **d** egyirányú, az **a** és az **e** a **b**-vel is, és a **d**-vel is ellentétes irányú.
- Az **a**, a **d** és az **e** abszolút értéke egyenlő; a **b** és a **c** abszolút értéke egyenlő.

Ezek miatt az **a** és az **e egyenlő vektorok**, az **a** és a **d ellentett vektorok**, a **d** és az **e ellentett vektorok**, a többi vektor között ilyen kapcsolat nincs.

Két vektort **egyenlőnek** mondunk, ha ugyanaz az irányuk is, abszolút értékük is.

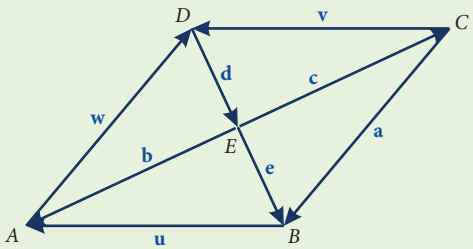
Két vektor egymás **ellentettje**, ha ugyanaz az abszolút értékük, az irányuk pedig ellentétes.

Egy **v**-vel jelölt vektor ellentettjének a jele: **–v**. A **–v** vektor ellentettje a **v**.

Tehát az ábra szerinti vektorok esetén például: **d** = **–a** és **a** = **–d**.

FELADAT

1 Keress az ábrán egyenlő és ellentett vektorokat szemléltető irányított szakaszokat.



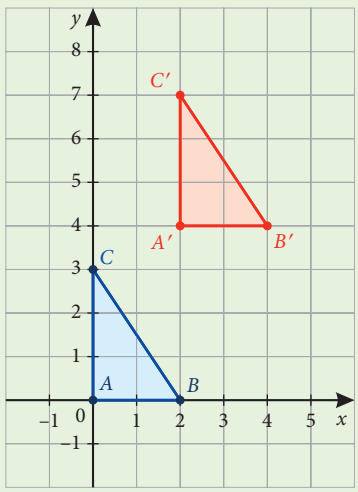
2 Vegyél fel egy P pontot és egy $\mathbf{v}$ vektort! Keresd meg azt a Q pontot, amelyre

- **a)** P-ből Q-ba mutató vektor $\mathbf{v}$;
- **b)** P-ből Q-ba mutató vektor $-\mathbf{v}$;
- **c)** Q-ból P-be mutató vektor $\mathbf{v}$;
- **d)** P-ből Q-ba mutató vektor hossza megegyezik $\mathbf{v}$ hosszával, de nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel!

3 A koordináta-rendszerben az ábra szerint felvettük az ABC derékszögű háromszöget. Eltoltuk a háromszöget, és ekkor az $A'B'C'$ háromszöghöz jutottunk.

Hasonlítsd össze az A-ból A'-be, B-ből B'-be, és C-ből C'-be mutató vektorokat!

- **a)** Igaz-e, hogy egyenlő hosszúak? Igaz-e, hogy azonos az irányuk?
- **b)** Hány vektor ez valójában?

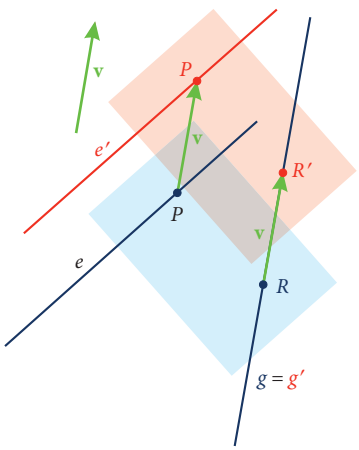


ELMÉLET

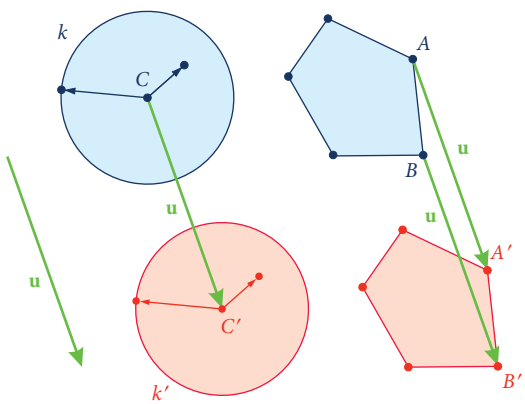
Eltolás

Az eltolás és a vektor két szorosan összekapcsolódó fogalom.

Definíció: Adott a síkon egy $\mathbf{v}$ vektor. A sík minden P pontjához rendeljük hozzá a P' pontot úgy, hogy a PP' vektor megegyezzen $\mathbf{v}$ vektorral.



Ha egy egyenes párhuzamos az eltolás vektorával, akkor a képe önmaga, minden más esetben az egyenes és a képe párhuzamos egymással.



Az ábra azt mutatja, hogy mi történik egy körrel és egy sokszöggel, ha a síkjukban egy adott $\mathbf{u}$ vektorral eltoljuk őket.

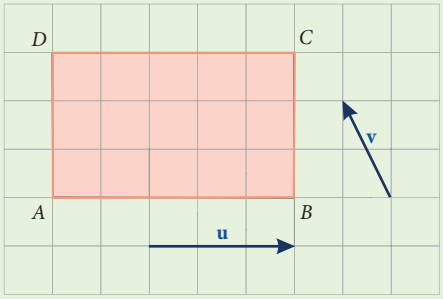
Egyenlő vektorok ugyanazt az eltolást hozzák létre.

Ha egy ponthalmazt eltolunk egy vektorral, utána pedig a képét az ellentett vektorral toljuk el, visszajutunk az eredeti ponthalmazhoz.

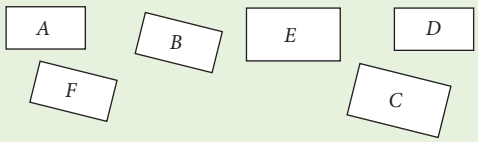
FELADAT

4 a) Told el a téglalapot az **u**, majd a kapott alakzatot a **v** vektorral!

b) Melyik vektorral kell eltolni a téglalapot, hogy *A* csúcsának a képe a téglalap egy másik csúcsa legyen?



5 (Kompetenciamérés, 2003)
Melyek azok az alakzatok, amelyek egymásból eltolással, (forgatás nélkül) megkaphatók?

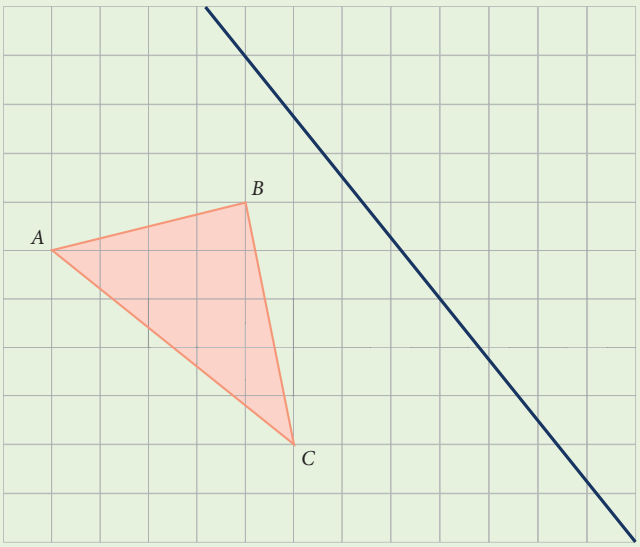


6 Told el a háromszöget úgy, hogy az eltolás után egyik csúcsa az egyenesre essen!

a) Hány megoldása van a feladatnak?

b) Melyik esetben lesz az eltolás vektorának hossza a legkisebb?

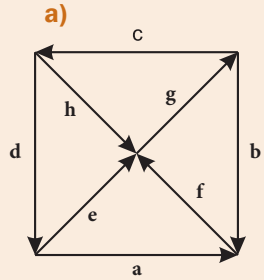
c) Told el a háromszöget úgy, hogy az egyik csúcsa az egyenesre essen, és pontosan egy közös pontja legyen az eredeti háromszöggel! Hány megoldása van a feladatnak?



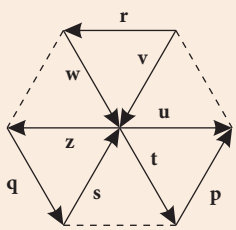
HÁZI FELADAT

1 Keresd meg az egyenlő vektorokat és az ellentett vektorokat!

a)



b)



2 Tolj el a síkjában egy 4 cm átmérőjű körvonalat egy 4 cm hosszú vektorral! Melyik állítás igaz, és melyik hamis?

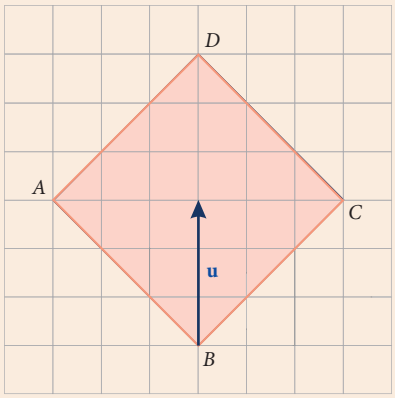
a) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma függ az eltolás irányától is.

b) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma csak 0 lehet.

c) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma csak 1 lehet.

d) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma lehet 2 is.

3 Told el a négyzetet az **u** vektorral!



Milyen alakzat lett az eredeti és az eltolt alakzat közös része? A közös rész területe hány százaléka az eredeti négyzet területének?

4 Vegyél fel egy kört és benne egy AB húrt! Told el úgy a kört, hogy

a) az A pont képe B pont legyen!

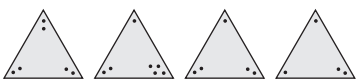
b) a B pont képe az A pont legyen!

Mindkét esetben add meg az eltolás vektorát!

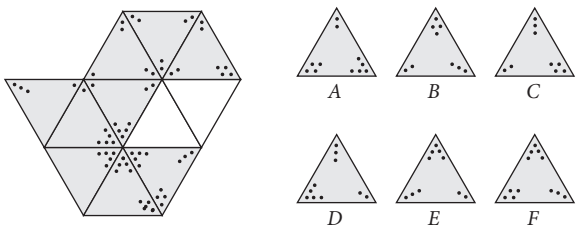
RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés, 2016)

A triominos olyan dominójáték, amely olyan háromszög alakú lapocskákból áll, amelyeknek a sarkaira különböző számú pont van felfestve 0 és 5 között.



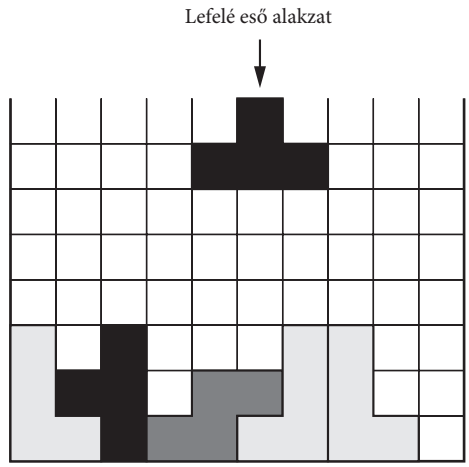
A játék során a lapocskákat úgy helyezik egymás mellé, hogy az egymással érintkező csúcsokon lévő pontok száma azonos legyen. A következő ábrán egy megkezdett játék pillanatnyi állása látható. Melyik lapocskák helyezhetők el a szabálynak megfelelően az üres helyekre?



2. (Kompetenciamérés, 2017)

Balázs tetriszt játszik a számítógépén.

A lefelé eső alakzatokat forgatással, illetve jobbra és balra történő eltolással lehet mozgatni a pályán, amíg le nem érnek az aljára vagy el nem érnek egy másik alakzatot. Ha egy hézagmentes sor keletkezik, az eltűnik a pályáról, és a fölötte lévő sorok lejjebb kerülnek. Az alakzatok kis négyzetekből állnak, a fekete alakzat forgatásának középpontja a „középső” kis négyzet középpontja: annak a négyzetnek a középpontja, amelyiknek mindhárom másik kis négyzettel van közös oldala.



a) Hogyan mozgassa Balázs a lefelé eső alakzatot, hogy hézagmentessé váljon és eltűnjön a legalsó sor?

A Forgassa el jobbra 90°-kal, majd tolja el jobbra a falig.

B Tolja el jobbra a falig, majd forgassa el jobbra 90°-kal.

C Tolja el jobbra a falig, majd forgassa el balra 90°-kal.

D Forgassa el balra 90°-kal, majd tolja el jobbra a falig.

b) Hol áll meg a lefelé eső alakzat a többi esetben?

71 TENGELYES TÜKRÖZÉS

BEVEZETŐ

Szép lehet egy tengelyesen szimmetrikus díszítő minta. Szép az emberi arc is, a maga szimmetriájával. Közismert tény azonban, hogy az ember arca sosem tökéletesen szimmetrikus. A digitális technika korában érdekes kísérlet azzal eljátszani, hogyan néznénk ki tökéletesen szimmetrikusan. Számítógépes képszerkesztő program segítségével egy fényképet megfelezhető és tükrözhető. Ha van kedved, próbáld ki!



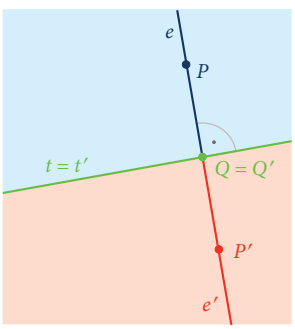
ELMÉLET

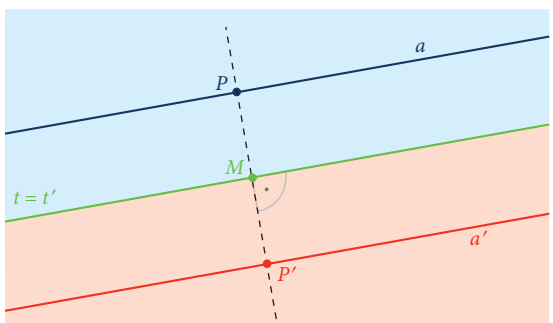
Egyenesre vonatkozó (tengelyes) tükrözés

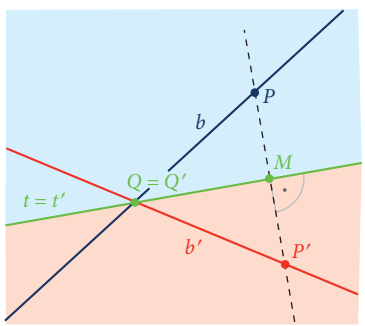
Definíció: Adott a síkon egy t egyenes (a tükrözés tengelye). A sík minden P pontjához rendeljük hozzá a P' pontot úgy, hogy:

– ha P a t egyenes egy pontja, akkor a képe önmaga,

– ha P nincs rajta a t egyenesen, akkor a képe az a P' pont a síkban, amelyre $P'P$ szakasznak felezőmerőlegese a t egyenes.

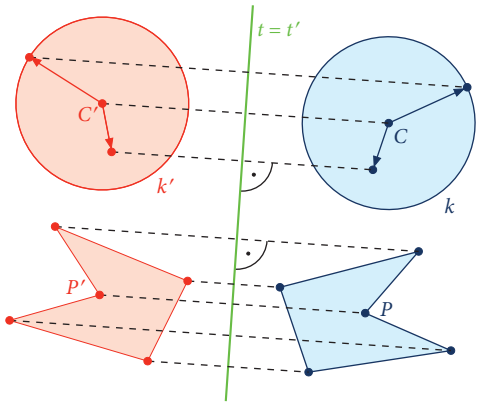






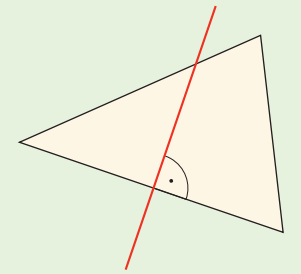
A tengely képe önmaga. Ha a sík egy egyenese merőleges a tengelyre, akkor egybeesik a képével, ha pedig párhuzamos a tengellyel, akkor a képe is párhuzamos vele. Ha egy egyenes metszi a tengelyt, de nem merőleges rá, akkor a képét a tengelyen metszi. Az egyenes és a képe ugyanakkora szöget alkot a tengellyel.

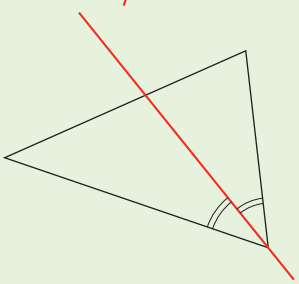
Az alsó ábra azt mutatja, hogy mi történik egy körrel és egy sokszöggel, ha a síkjuknak egy t egyenesére tükrözzük őket.



FELADAT

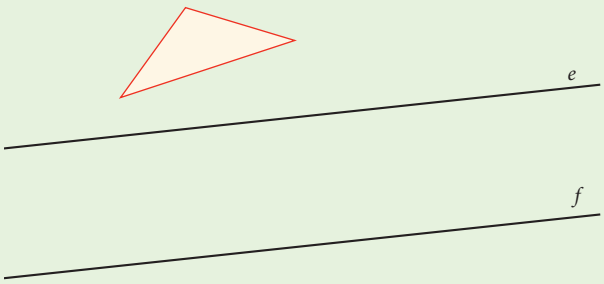
1 Tükrözd a háromszöget a megadott oldalfelező merőlegesére, illetve a megadott szögfelező egyenesére! Színezd ki az eredeti és a tükrözött háromszöglemez metszetét! Milyen síkidomot kaptál az egyik, illetve a másik esetben?





2 Vegyél fel egy kört és benne egy AB húrt! Tükrözd a kört az AB egyenesére!
Hogyan kell felvenni az AB húrt, hogy a tükörkép ugyanaz a kör legyen, mint az eredeti? Mit mondhatunk ekkor a kör egy tetszőleges P pontjáról és a tükörképéről?

3 Tükrözd a háromszöget az e egyenesre, majd a kapott tükörképet az e-vel párhuzamos f egyenesre! Milyen egyetlen transzformációval kapható meg az eredeti háromszögből a második tükrözés után kapott háromszög? A füzetedben dolgozz!

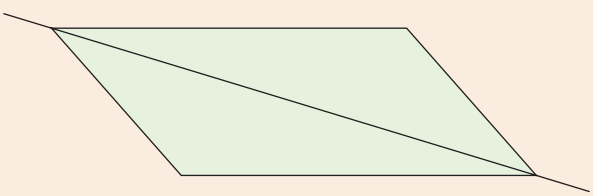


4 Vegyél fel két egyenest, amelyek 30°-os szöget zárnak be egymással! Az egyenesek legyenek e és f, metszéspontjuk legyen K. Vegyél fel egy P pontot, amely egyik egyenesre sem illeszkedik!

- **a)** Tükrözd a KP szakaszt e-re, majd a kapott $K'P'$ szakaszt tükrözd tovább f-re!
- **b)** Hogyan lehetne egyetlen transzformációval megkapni KP-ből a második tükörképet?
- **c)** Végezd el a feladatot úgy is, hogy először f-re tükrözöl, majd a tükörképet e-re!
- **d)** Gondold végig, hogyan módosul a feladat megoldása, ha e és f egyenesek szöge nem 30°, hanem 40°!

HÁZI FELADAT

1 Tükrözd a paralelogrammát az átló egyenesére! A füzetedben dolgozz!



2 Vegyél fel egy derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 24 mm, másik befogója 18 mm. Tükrözd az átfogójára! Milyen alakzatot határoz meg együtt a kép és az eredeti háromszög? Mekkora ennek a területe?

3 Vegyél fel egy 3 cm oldalú négyzetet!

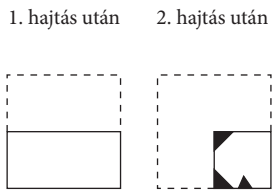
- **a)** Tükrözd az egyik oldalegyenesére!
- **b)** A kapott képet tükrözd a négyzet egy másik oldalegyenesére!
- **c)** Hány közös pontja lehet a második tükörképnek és az eredeti négyzetnek?
- **d)** Hogyan lehetne egyetlen transzformációval megkapni az eredeti négyzetből a két tükrözés után kapott képet, ha a két tengely párhuzamos volt, és hogyan, ha a tengelyek merőlegesek voltak egymásra?

4 Vegyél fel két egyenlő sugarú kört! Szerkeszd meg azt az egyenest, amelyre tükrözve az egyik kör képe a másik kör!

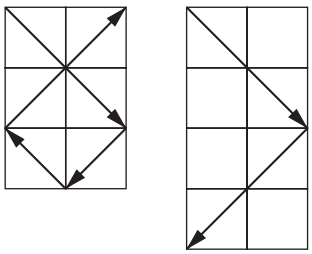
RÁADÁS

1. (Kompetenciamérés, 2009)
A titkos, bizalmasan kezelendő iratokra pecséttel rányomják azt, hogy „TITKOS”. A pecsételőn lévő felirat tükörképe jelenik meg a papíron. Melyik szöveget kell rátenni a pecsételőre ahhoz, hogy a pecsét helyén a TITKOS szó álljon?
TITKOS SOKTIT ⊥ILKOS ƧOꓘTIT

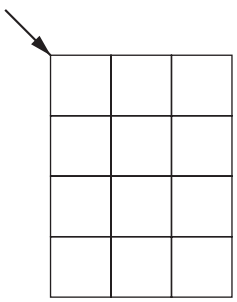
2. (Kompetenciamérés, 2007)
Egy négyzet alakú papírlapot kétszer összehajtottunk, majd az ábrán feketére színezett részeket kivágtuk belőle. Amikor újra kihajtogattuk, hogyan nézett ki a papírlap? Rajzold le!



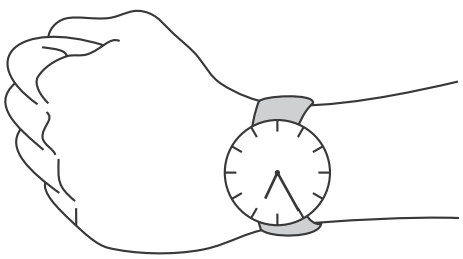
3. (Kompetenciamérés, 2008)
Ha egy fénysugarat egy téglatest alakú prizma bal felső sarkára irányítunk úgy, hogy az oldalegyenesekkel 45°-os szöget zárjon be, a fény behatol a prizmába, a prizma falairól 45°-os szögben mindig visszaverődik, míg eléri az egyik sarkot, ahol kilép. Erre mutat példát a két ábra.



a) Melyik sarokban lép ki a fény egy 2 × 15-ös prizma esetében?
b) Melyik sarokban lép ki a fény egy 3 × 4-es prizma esetében?
c) Keress olyan prizmát, amely esetén legalább két törés után a fénysugár a jobb alsó sarokban lép ki! Kísérletezz nagyobb prizmákkal is!



4. (Kompetenciamérés, 2015)
Linda vonaton ül. A vele szemben ülő utas karóráján ezt látja:
Mennyi az idő az óra szerint?



5. Adott a síkon két, egymást nem metsző kör és közöttük egy egyenes. Szerkessz szabályos háromszöget, amelynek az egyenes az egyik szimmetriatengelye, és egyik csúcsa az egyik körre, egy másik csúcsa a másik körre illeszkedik! Hány megoldás lehet? Fel tudod venni az adatokat úgy, hogy ne legyen megoldás?

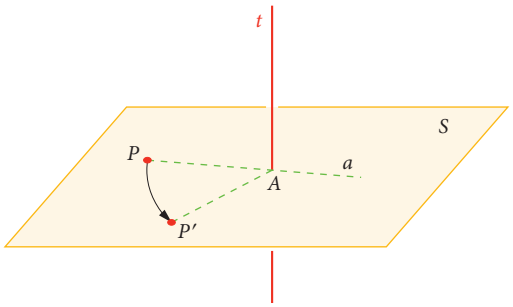
6. Adott a síkon két pont, A és P. Tükrözd az A pontot egy P-n átmenő egyenesre! Milyen alakzatot határoznak meg azok a pontok, amelyeket úgy kapunk, hogy A-t tükrözzük a P-n átmenő összes egyenesre? Vizsgáld meg a feladatot számítógép, pl. a *GeoGebra* program segítségével!

TÉRBELI TRANSZFORMÁCIÓK

ELMÉLET

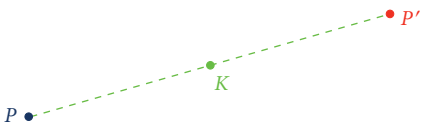
Az egyenes körüli forgatás

Megadunk egy egyenest, a forgástengelyt (t), egy szöget (α) és egy forgatási irányt. Az ábra mutatja, hogyan mozdul el egy P pont a t körül: P-ből a t-re merőleges egyenest (a) és síkot (S) állítunk. Az a és a t metszéspontja A. A forgatás során a P az S síkban, az A középpontú, AP sugarú körön mozdul el, a megadott irány szerint úgy, hogy a PAP' szög az α-val legyen egyenlő.



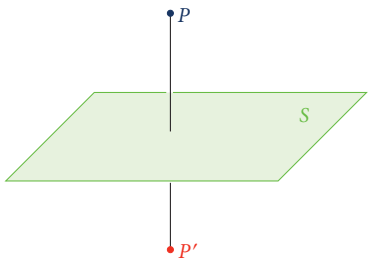
Középpontos tükrözés a térben

Megadunk egy pontot (K). A tér minden egyes pontjához (P) hozzárendeljük a tér egy pontját (P') úgy, hogy a pont és a képe által meghatározott szakasz felezőpontja a K legyen.



A síkra való tükrözés

Megadunk egy síkot (S). A tér minden egyes pontjához (P) hozzárendeljük a tér egy pontját (P') úgy, hogy a pont és a képe által meghatározott szakasz merőleges legyen S-re, és e szakasz felezőpontja S-re illeszkedjen.

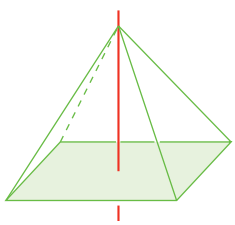


Eltolás a térben

Megadunk egy *vektort*. A tér minden egyes P pontjához azt a P' pontot rendeljük, amire a PP' irányított szakasz éppen a megadott vektornak felel meg.

FELADAT

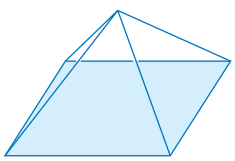
1. Egy szabályos 4 oldalú gúlát elforgatunk a magasságának egyenese körül 45°-kal.



a) Melyik csúcs hová fordul el?

b) Milyen test az eredeti és az elforgatott gúla közös része?

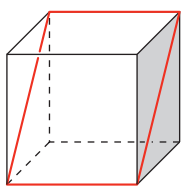
2. Egy gúla alaplapja négyzet, mindegyik oldallapja szabályos háromszög. Tükrözd ezt a gúlát az alaplap középpontjára!



a) Hány lapja, hány éle és hány csúcsa van annak a testnek, amelyet a a gúla és a képe együttesen alkot?

b) Milyen másféle transzformációval kaphatnánk meg a gúlának ugyanezt a képét?

3. Egy asztalra tett kockát tükrözünk



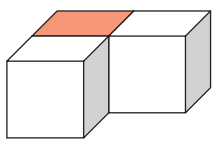
a) a fedőlapjának a síkjára;

b) az egyik oldallapjának a síkjára;

c) a pirossal jelzett átlós síkra.

Milyen testet alkot az eredeti kocka és a tükörkép együtt?

4. Egy kocka mindegyik lapjára ragasztunk egy ugyanakkora kockát úgy, hogy ezek pontosan fedik az eredeti kocka lapjait. Két ilyen kockát már berajzoltunk az ábrán.



a) Hány lapja, hány éle és hány csúcsa van a 7 kockából álló testnek?

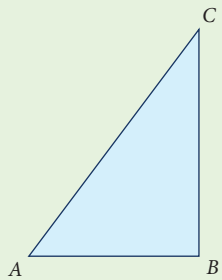
b) Melyik kockát milyen transzformációval állíthatjuk elő az eredeti kockából kiindulva?

72 SZERKESZTÉSEK

FELADAT

Vedd fel az ábrákat a füzetedben!

1 Vedd fel az ábra szerint az ABC háromszöget, melynek oldalai: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm és $CA = 5$ cm.



a) Forgasd el az A pontot a B pont körül 90°-kal! A kapott pontot jelöld D-vel!

b) Told el a D pontot az $\overrightarrow{AB}$ vektorral! A kapott pontot jelöld E-vel!

c) Mekkora az $ADEC$ négyszög területe és kerülete?

d) Vizsgáld meg a feladatot számítógép, pl. a *GeoGebra* program segítségével!

2 Az ábráknak megfelelően adott két egyenlő hosszú szakasz. Vedd fel a szakaszokat a füzetedbe az ábráknak megfelelően, és keress olyan transzformációkat, amelyek esetén az egyik szakasz képe a másik szakasz!

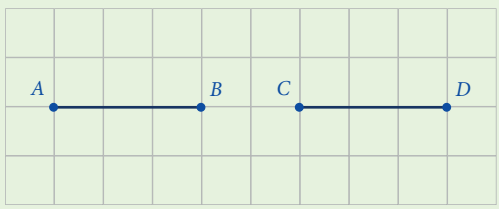
Van-e ilyen tengelyes tükrözés? Hol van a tükrözés tengelye?

Van-e ilyen középpontos tükrözés? Szerkeszd meg a középpontot!

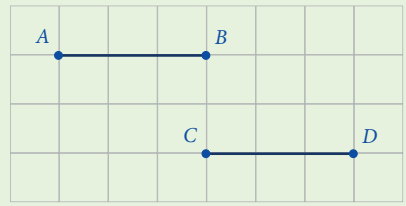
Van-e ilyen forgatás? Hány ilyen forgatás van? Szerkeszd meg a forgatások középpontját!

Van-e ilyen eltolás? Add meg az eltolás vektorát!

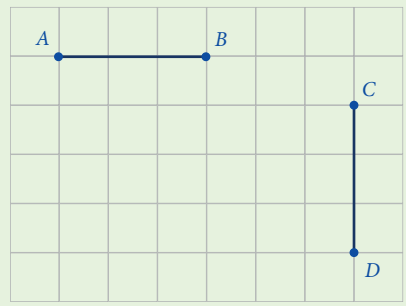
a) A szakaszok egy egyenesre illeszkednek.



b) A szakaszok párhuzamosak egymással.



c) A szakaszok nem párhuzamosak egymással, és nem illeszkednek egy egyenesre.



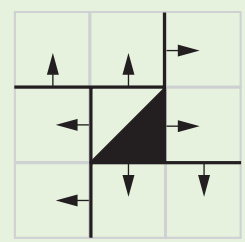
3 Vegyél fel a füzetedbe egy ABC háromszöget, melynek A-nál derékszöge van!

Szerkessz négyzeteket a háromszög AB befogójára és BC átfogójára kifelé (kifelé: ez azt jelenti, hogy nincs közös belső pontjuk a háromszöggel)! A befogóra szerkesztett négyzet csúcsai legyenek A, B, D, E; az átfogóra szerkesztett négyzet csúcsai legyenek B, C, F, G, ebben a sorrendben! Ekkor DC és AG szakaszok hossza egyenlő.

a) Szerkeszd meg az ábrát!

b) Bizonyítsd be a DC és AG szakaszok hosszának egyenlőségét! Keress olyan forgatást, amely a DC szakaszt az AG szakaszba viszi át! Melyik pont a forgatás középpontja? Mekkora a forgatás szöge?

4 (Kompetenciamérés, 2011)
Tükrözd a következő ábra középső négyzetét a vastagon jelölt vonalak mentén a nyilak irányában, majd folytasd az így kapott alakzat tükrözését a nyilak szerint!



ELMÉLET

Definíció: A **geometriai transzformációk** olyan (kölcsönösen egyértelmű) függvények, amelyeknek értelmezési tartománya is, és értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz. A transzformáció során egy ponthoz hozzárendelt pontot az eredeti pont **képének** nevezzük.

Definíció: Ha egy transzformáció *távolságtartó*, vagyis bármely két pont távolsága ugyanakkora, mint a képeik távolsága, akkor ezt **egybevágósági transzformációnak** nevezzük.

Egybevágósági transzformációk esetében az egyenes képe egy egyenes, a kör képe egy vele egyenlő sugarú kör, a szög képe egy vele egyenlő szög.

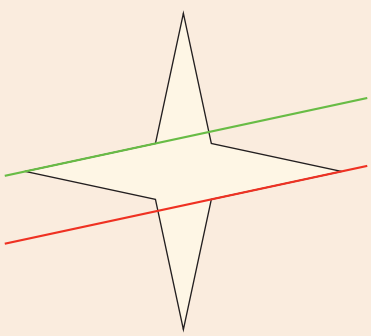
Definíció: Ha két ponthalmazhoz van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át, akkor ezeket a ponthalmazokat **egybevágóknak** mondjuk.

A sík egybevágóságai között fontosak:
– pont körüli forgatás,
– középpontos tükrözés,
– eltolás,
– tengelyes tükrözés.
Ha ezek közül többet végzünk el egymás után, akkor is egybevágósági transzformációt kapunk.

A geometriai transzformációk tulajdonságai vizsgálhatók a *GeoGebra* programmal is.

HÁZI FELADAT

1 Melyik egyenesre kell tükröznünk az ábrán látható alakzatot, hogy
- **a)** a zöld egyenes képe a piros egyenes legyen;
- **b)** a piros egyenes képe a zöld egyenes legyen;
- **c)** a piros egyenes képe önmaga legyen;
- **d)** a csillag képe önmaga legyen?



2 Melyik pontra kell tükröznünk az első házi feladatban látható alakzatot, hogy
- **a)** a zöld egyenes képe a piros egyenes legyen;
- **b)** a piros egyenes képe a zöld egyenes legyen;
- **c)** a zöld egyenes képe önmaga legyen;
- **d)** a csillag képe önmaga legyen?

3 Melyik pont körül és mekkora szöggel forgathatjuk el az első házi feladatban látható csillagot, ha azt akarjuk, hogy
- **a)** a képe önmaga legyen;
- **b)** minden pontjának a képe önmaga legyen?

4 Egy 5 cm oldalú négyzetet először 24 mm-rel balra, majd 45 mm-rel felfelé toltunk el.
- **a)** Szerkeszd meg az eredeti négyzetet és az eltolt képét!
- **b)** Rajzold be azt az egyetlen eltolásvektort, amivel a két lépés helyettesíthető!
- **c)** Milyen hosszú ez a vektor? Mérd meg, majd igazold az eredményt számítással is!

5 Válaszolj a kérdésekre!
- **a)** Melyik transzformáció esetén igaz, hogy minden pont képének a képe az eredeti pont?
- **b)** Melyik transzformáció esetén igaz, hogy minden egyenes képének a képe az eredeti egyenes?

Ráadás

EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK A GYAKORLATBAN

CSOPORTMUNKA

Fedezzétek fel, melyik egybevágósági transzformáció ismerhető fel a következő példákban!
Az ábrákat vedd fel a füzetedben!

1 Két kistelepülés (A és B) közelében egyenes országút fekszik.

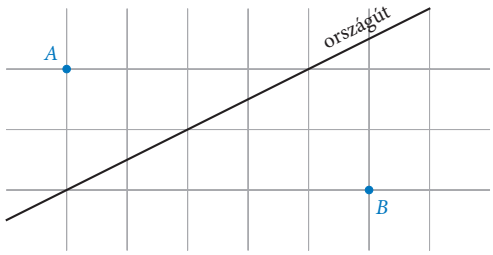
a) A két település között összekötő utat építenek. Milyen hosszú ez az út, ha a lehető legrövidebbre tervezik? (A négyzetháló km-beosztású.)

Az országút mentén megállót építenek a távolsági busz számára. Hol legyen a megálló, hogy

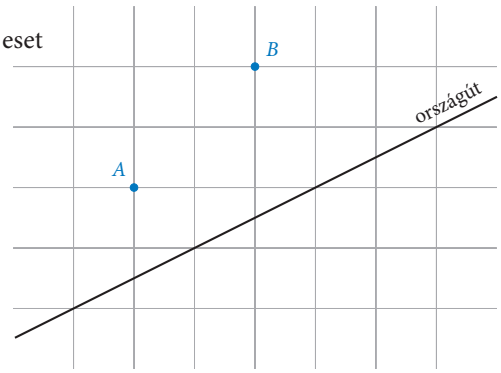
b) a B településhez a legközelebb legyen? Mekkora ez a távolság? Mekkora távolságra van a megálló az A településtől ebben az esetben?

c) az A-ból B-be vezető, a megállót is érintő út hossza a legrövidebb legyen? Mekkora ennek a legrövidebb útnak a hossza?

I. eset



II. eset

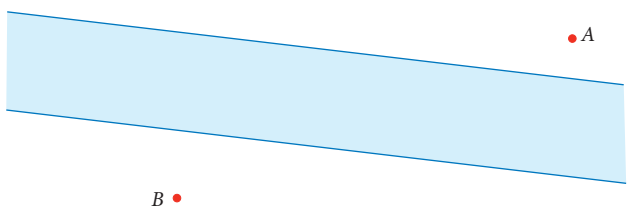


2 Egy folyó két partján van két falu: A és B. Hová építsék a hidat, hogy

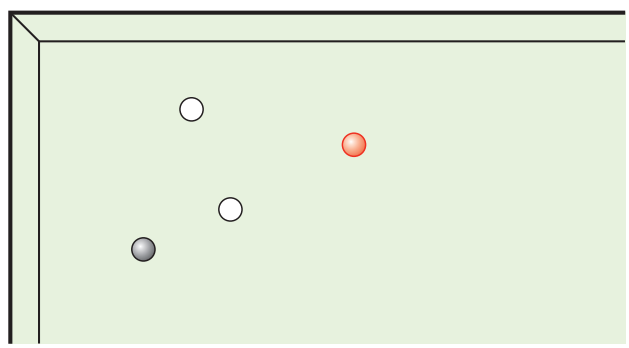
a) A-hoz a legközelebb legyen;

b) A-ból a legrövidebb úton lehessen B-be jutni?

c) A hídépítés magas költségei miatt csak a folyópartra merőleges hidat építenek. Hová építsék a hidat, hogy a legrövidebb úton lehessen A-ból B-be jutni? (Gondold végig azt az esetet, amikor a települések a folyóparthoz képest ugyanígy helyezkednek el, de sokkal keskenyebb a folyó. Majd kezdd el fokozatosan növelni a folyó szélességét!)



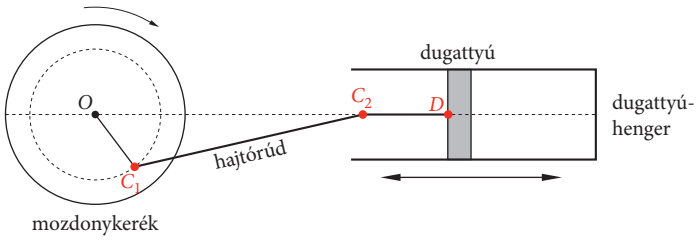
3 A piros biliárdgolyóval kell eltalálni a feketét úgy, hogy a piros golyó más golyóhoz nem érhet hozzá, de a biliárdasztalnak a rajzon látható két fala is használható. Hány megoldása van ennek a problémának?



4 A gőzmozdonyok kerekét csuklós szerkezettel hozzák forgásba. Ennek leegyszerűsített változata látható az ábrán. A C_1 pont a mozdonykerékhez van rögzítve, a C_2 pont pedig a dugattyúrúd végéhez. A merev hajtórúd a C_1 és C_2 pontok körül is elfordulhat (csuklós szerkezet).

A mozdonytesthez rögzített hengerben a dugattyú csak „vízszintesen” mozoghat.



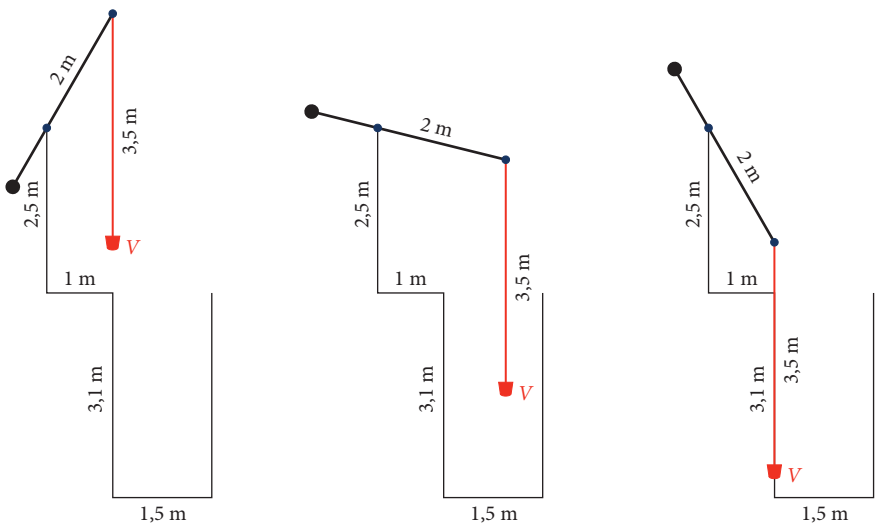


a) Milyen mozgást végez a dugattyú, ha hatására a C_1 pont 360°-ot fordul az O körül?

b) Szerkeszd meg a dugattyú két szélső helyzetét a hengerben! Mekkora a két szélső helyzet távolsága? (Segít az O, C_1, C_2 és D pontok megszerkesztése!)

c) Szerkeszd meg a dugattyú helyzetét abban az esetben, amelyben az OC_1 merőleges az OC_2-re! Igaz-e, hogy a dugattyú ekkor éppen „félúton” van a két szélső helyzete között?

5 Egy gémeskút működésének három mozzanatát mutatják az ábrák.



Az ágas a kút szélétől 1 m-re van a földbe állítva, ezen a gém (vízszintes) forgástengelye 2,5 m magasan van a földtől. A gémnek a kút fölé belógó része a forgástengelytől mérve 2 m hosszú, a kút 3 m-nél mélyebb, szélessége 1,5 m.

a) Milyen magasan van a talajszint felett V az első helyzetben?

b) Milyen mélyen van V a talajszint alatt a harmadik helyzetben?

c) Szerkeszd meg a második ábrán azt a pályát, amelyen a V mozog, amíg az első helyzetből a harmadik helyzetbe jut!

Szerkeszd meg ezt a feladatot egy számítógépes szerkesztő programmal, pl. a *GeoGebra* programmal!

6 (Kompetenciamérés, 2013)

Anna a fodrásznál ülve az előtte lévő tükörben meglátta a falióra tükörképét, és rögtön tudta, hogy nem fogja elérni a 20 perc múlva kezdődő mozifilmet.

Az óra tükörképe az ábrán látható.



a) Hány órakor kezdődik a mozifilm?

b) Rajzold le, mit láthatott a tükörben a fodrász 3 óra 12 perccel korábban?

73 SZIMMETRIKUS NÉGYSZÖGEK

BEVEZETŐ

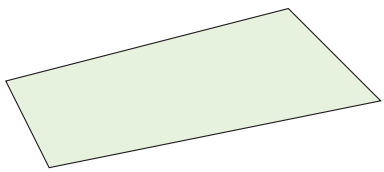
Vannak-e szimmetrikusak az alábbi képeken felismerhető négyszögek között? Ha igen, milyen szimmetriákat találsz?



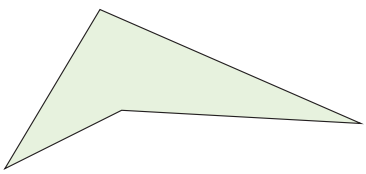



ELMÉLET

A négyszögek csoportosítása



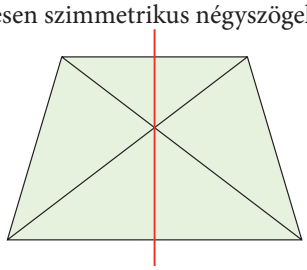
konvex négyszög
(minden szöge kisebb egy egyenesszögnél)



konkáv négyszög
(van olyan szöge, amelyik nagyobb egy egyenesszögnél)

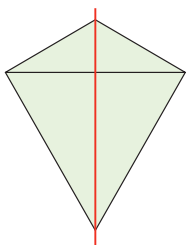
Minden négyszögre igaz: a belső szögek összege 360°.

Tengelyesen szimmetrikus négyszögek



húrtrapéz

- az alapoktól különböző két oldal egyenlő, ezek a szárak;
- az egy alapon fekvő szögek egyenlők;
- a szemközti szögek összege 180°;
- az átlók egyenlő hosszúak, a szimmetriatengelyen metszik egymást;
- van olyan kör, amelyik mindegyik csúcsán átmegy.

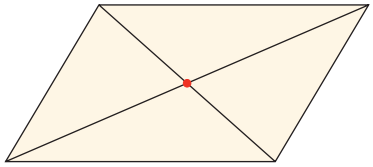


deltoid

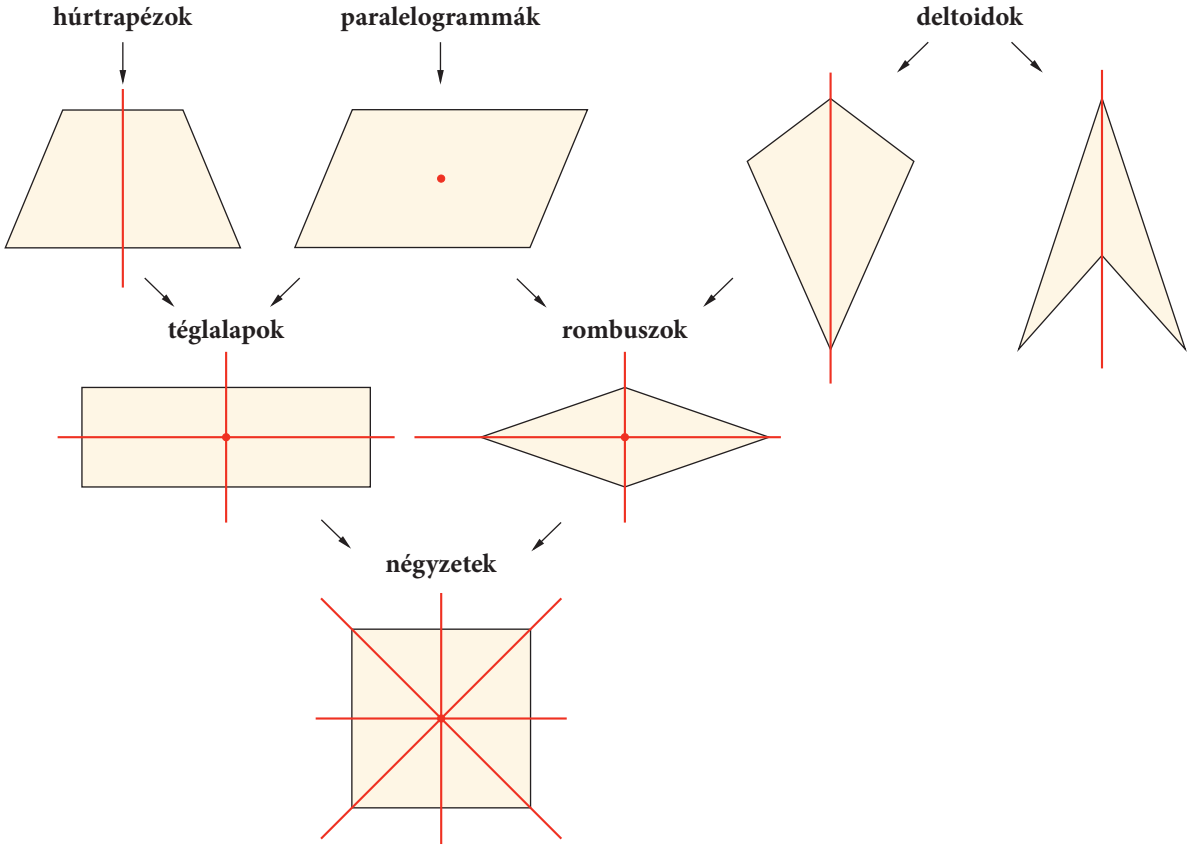
- két-két szomszédos oldala egyenlő;
- két szemközti szöge egyenlő;
- az átlói merőlegesek egymásra;
- a szimmetriatengelyen lévő átló felezi a másik átlót és a deltoid két szögét.

Középpontosan szimmetrikus négyszög: **paralelogramma.**

- két-két szemközti oldala egyenlő;
- két-két szemközti szöge egyenlő;
- két-két szemközti oldala párhuzamos;
- a szomszédos szögek összege 180°;
- átlói felezik egymást.



A szimmetrikus négyszögek csoportosítása



FELADAT

1 A szimmetrikus négyszögeket szemléltető ábra alapján döntsd el, melyek igazak az alábbi kijelentések közül!

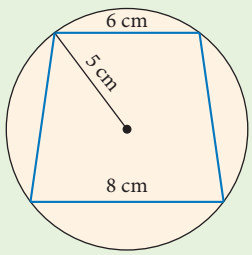
A: Minden rombusz deltoid.
B: Minden téglalap rombusz.
C: Van olyan téglalap, amelyik rombusz.
D: Minden négyzet paralelogramma.
E: Minden tengelyesen szimmetrikus trapéz paralelogramma.
F: Ha egy négyszög középpontosan is és tengelyesen is szimmetrikus, akkor az téglalap.
G: Ha egy tengelyesen szimmetrikus trapéz középpontosan is szimmetrikus, akkor az téglalap.
H: Minden négyzet deltoid.
I: Van olyan téglalap, amely paralelogramma.
J: Van olyan deltoid, amely paralelogramma.

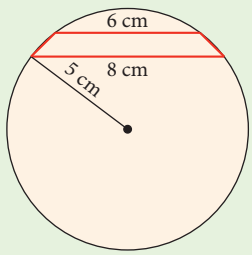
2 Egy háromszög oldalai 36 mm, 77 mm és 85 mm hosszúak.

a) Igazold, hogy a háromszög derékszögű!
b) Tükrözd a háromszöget az átfogó felezőpontjára. Milyen síkidomot alkot együtt a két háromszög? Mekkora a területe?
c) Tükrözd a háromszöget az átfogó egyenesére! Milyen síkidomot alkot együtt a két háromszög? Mekkora a területe? Milyen hosszúak az átlói?

3 Hányféle olyan négyszög van, amelynek két egymás melletti oldala 24 mm, a másik kettő pedig 35 mm hosszú?

4 Egy 5 cm sugarú kör két párhuzamos húrjának hossza 6 cm, illetve 8 cm. Sorban összekötjük a két húr négy végpontját. Milyen négyszöget kapunk? A húrok kétféleképpen helyezkedhetnek el a körben, ezért kétféle négyszög keletkezhet. Készítsd el az ábrákat a füzetedben!





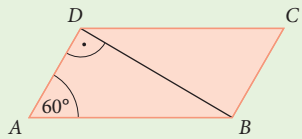
a) Van-e a két négyszögnek szimmetriatengelye? Ha van, akkor melyik egyenes?

b) Mekkora távolságra van a két párhuzamos húr a kör középpontjától?

c) Mekkora a két párhuzamos húr távolsága?

d) Mekkorák a négyszög ismeretlen oldalai?

5 Legyen az $ABCD$ paralelogramma BD átlója merőleges az AD oldalra. A paralelogramma A-nál levő szöge 60°. Az AB oldal hossza 5,2 cm. Keresd meg a nevezetes háromszöget az ábrán! Ennek tulajdonságai alapján számold ki a következőket:



a) Milyen hosszú a BD átló?

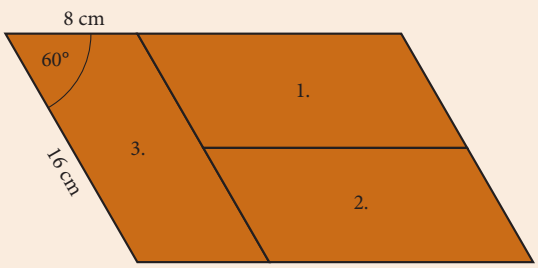
b) Milyen hosszú a paralelogramma többi oldala?

c) Mekkora a paralelogramma területe?

d) Milyen hosszú a paralelogramma két magassága?

HÁZI FELADAT

1 Bence szobájában olyan a parketta, hogy három egyforma parkettadarabot az ábra szerint helyeztek el, majd az így kapott nagyobb „paralelogramma” ismétlődik.



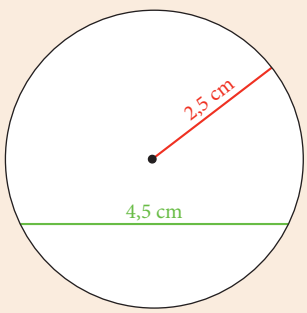
Bence azon gondolkodik, hogy milyen egybevágósági transzformációval vihetők át egymásba a paralelogrammák. Adj meg olyan egybevágósági transzformációt (vagy több, egymás után elvégzett transzformációt), amelyik

a) az 1. jelűt a 2. jelűbe;

b) az 1. jelűt a 3. jelűbe;

c) a 3. jelűt a 2. jelűbe viszi át!

2 Szerkessz húrtrapézt a füzetedben, ha a körülírt körének sugara 2,5 cm, hosszabbik alapja 4,5 cm, rövidebb alapja pedig 3 cm hosszú! Hány különböző (azaz nem egybevágó) trapéz szerkeszthető?



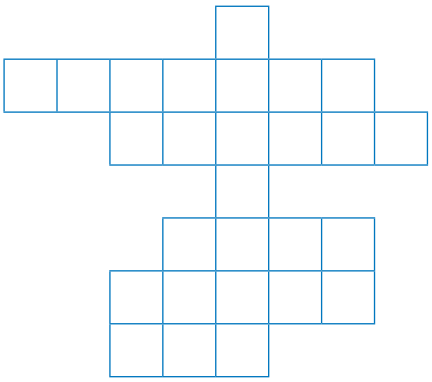
3 Egy rombusz beírható köre 1,8 cm sugarú, hosszabbik átlója 8,2 cm. Szerkeszd meg a rombuszt!

4 Szerkessz olyan húrtrapézt, amelynek a 6 cm-es alapján fekvő szögei 60°-osak, és a szárai 2 cm hosszúak! Mekkora a rövidebb alapja? Hány szabályos háromszögre bontható ez a trapéz?

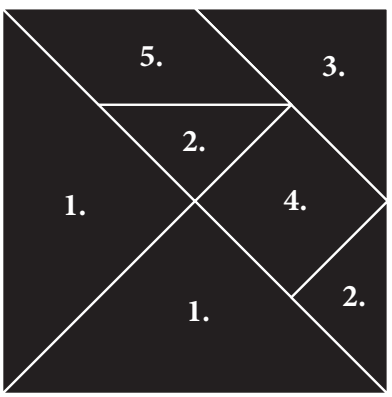
RÁADÁS

1. Igaz vagy hamis?
A helyes válaszhoz tartozó szót írd be a keresztrejtvény megfelelő sorába! A függőleges oszlop egy híres magyar festő vezetéknevét rejti. Ki ő?

	Igaz	Hamis
Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói merőlegesen felezik egymást.	ÁTLÓ	SZÖG
Az eltolás mindig előállítható két, egymással párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánjával.	KONVEX	TRAPÉZ
Ha egy alakzatot egy O pont körül forgatunk +60°-kal, majd a képet elforgatjuk O körül +120°-kal, akkor a két forgatás utáni kép középpontosan szimmetrikus az eredeti alakzatra.	CSÚCS	OLDAL
Ha egy kört eltolunk egy olyan vektorral, amelynek hossza megegyezik a kör sugarával, akkor az eredeti körnek és a képének pontosan egy közös pontja lesz.	DELTOID	TENGELY
Van olyan deltoid, amelynek pontosan 3 szimmetriatengelye van.	KÉP	KÖR

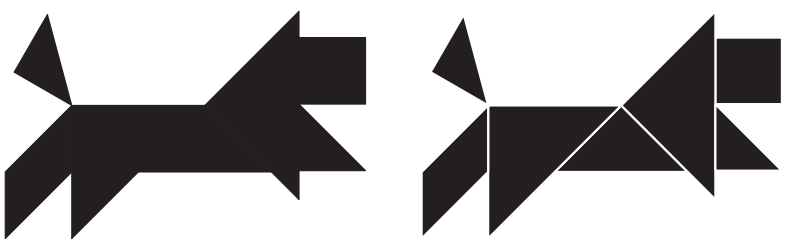


2. A tangram egy ősi kínai kirakójáték. A játék célja: 7 „tangramkő” segítségével kirakni különböző alakzatokat, illetve megfejteni, hogy egy megadott alakzatban hogyan helyezkednek el a kövek. A játékhoz 7 „kő” szükséges, amelyek egy négyzet feldarabolásával keletkeznek. Ezt mutatja az ábra. A kövek egyik oldalát beszámoztuk, az egyforma számok egybevágó alakzatokat jelölnek.



a) Melyik tangramkőnek van egynél több szimmetriatengelye?

b) Az alábbi ábra a „kutya” alakzatot ábrázolja, illetve azt, hogyan lehet kirakni tangramkövekből. Melyik tangramkő az, amelyet mindenképp a beszámozott oldalával lefelé kell fordítani ahhoz, hogy kirakhassuk a „kutya” alakzatot?



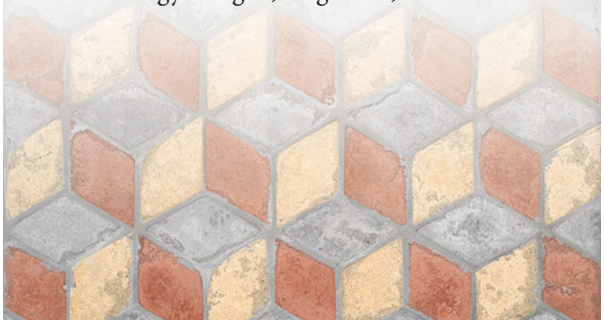
c) Rakj ki az összes tangramkő felhasználásával paralelogrammát, húrtrapézt, téglalapot! (Ha nincs tangramkészleted, vágd ki kemény papírból az alakzatokat!)

d) A tangram kirakójátékhoz több különleges feladvány kapcsolódik. Ezek közé tartozik a „két szerzetes paradoxona”, illetve a „törött váza paradoxon”. Nézz utána az interneten, hogy melyik feladványokat nevezik így!

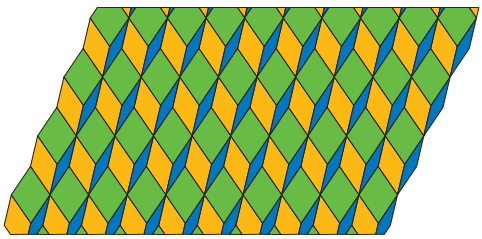
74 NEVEZETES NÉGYSZÖGEK TERÜLETE

BEVEZETŐ

A képen egy előszoba padlójának szokatlan, de érdekes mintájú burkolatát látjuk. A térbeli hatást különböző színű és állású rombuszok lerakásával érték el. Ezek a rombuszok mind egybevágók, szögeik 60, illetve 120 fokosak.



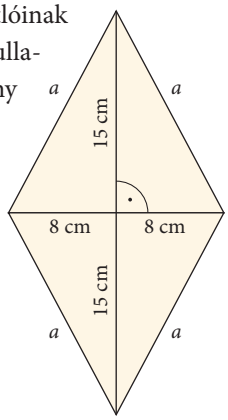
Megváltoztathatjuk a térhatást különböző rombuszok ügyes alkalmazásával, például így.



Ha egy „szokásos”, téglalap alakú helyiséget akarunk így burkolni, akkor tisztában kell lennünk a rombuszok oldalainak, átlóinak, magasságának és területének viszonyaival.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy rombusz alakú járólap átlóinak hossza: 16 cm és 30 cm. A hulladékot nem számítva kb. hány ilyen járólap kell egy 6 m²-es fürdőszobapadló burkolásához?



Megoldás

Először számítsuk ki egy rombusz területét!

Tudjuk, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra, és kölcsönösen felezik egymást, így a rombuszt 4 egybevágó derékszögű háromszögre osztják fel.

Ezért a rombusz területe: $T = 4 \cdot \frac{15 \cdot 8}{2} = 240\ (\text{cm}^2)$.

A 6 m²-es (60 000 cm²) fürdőszobához – hulladék nélkül – $\frac{60\,000}{240} = 250$ darab járólapra lesz szükség.

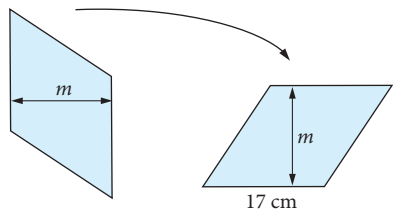
2. Számítsuk ki az előző feladatban szereplő rombusz magasságát!

Megoldás

Először számítsuk ki a rombusz oldalának hosszát!

A Pitagorasz-tétel értelmében:

$a^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$, tehát a rombusz oldala: $a = 17$ (cm).



A rombusz területét az *oldal* · *magasság* képlettel is kiszámíthatjuk:

$T = a \cdot m$

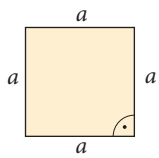
$240 = 17 \cdot m$,

ebből a magasság $m = 240 : 17 \approx 14{,}12$ cm, ezt kell tehát figyelembe venni, amikor az egymás mellé elhelyezhető járólapok számát kalkuláljuk.

ELMÉLET

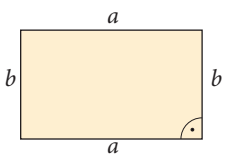
Tekintsük át a nevezetes négyszögek területéről tanultakat!

négyzet



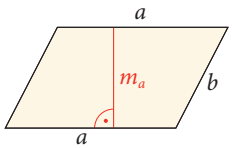
$T = a^2$

téglalap



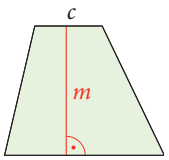
$T = a \cdot b$

paralelogramma



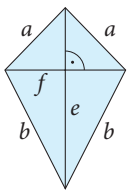
$T = a \cdot m_a$

trapéz



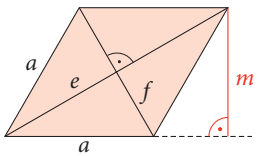
$T = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$

deltoid



$T = \frac{e \cdot f}{2}$

rombusz

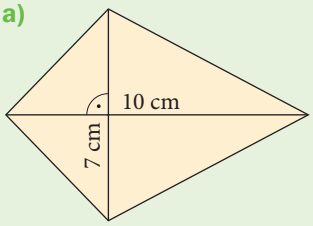


$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$

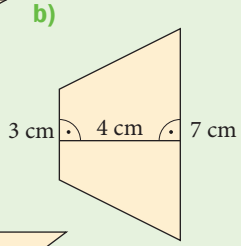
FELADAT

1 Számítsd ki az alábbi alakzatok területét!

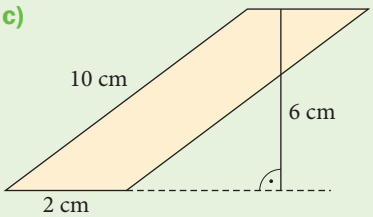
a)



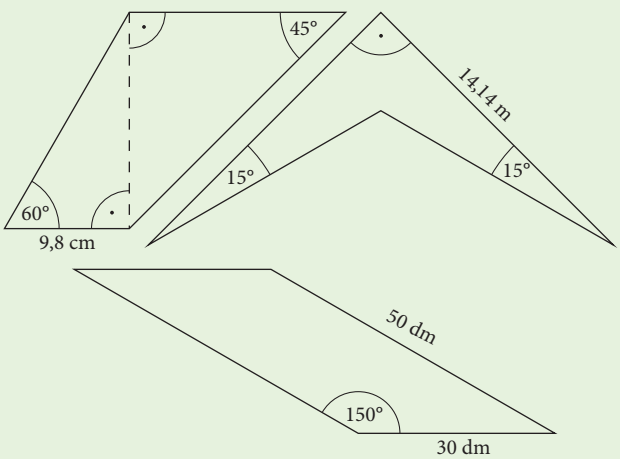
b)



c)



2 Számítsd ki a trapéz, a deltoid és a paralelogramma területét!



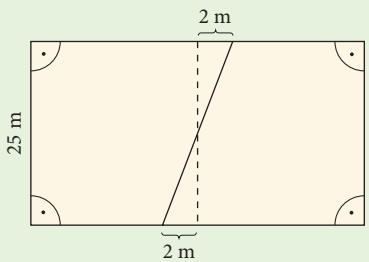
3 Egy rombusz kerülete 48 cm. Lehet-e a területe

a) 48 cm²;
b) 150 cm²;
c) 0,1 cm²;
d) 144 cm²?

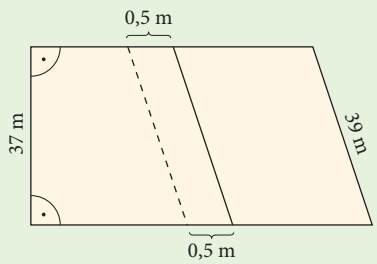
Ha lehet, akkor mekkora a rombusz magassága?

4 Két szomszédos telek határvonalát az ábra szerint módosítani kellett. Hány m²-rel változott a telkek területe? (Szaggatott vonallal az eredeti, folytonossal az új határvonalat jelöli az ábra.)

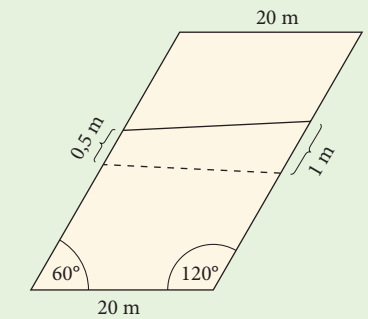
a)



b)



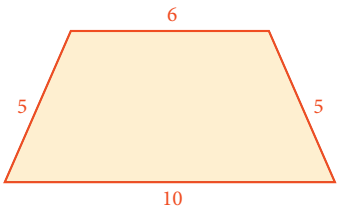
c)



KIDOLGOZOTT FELADAT



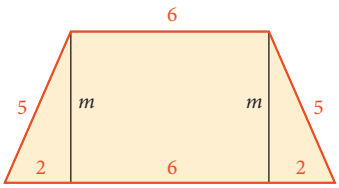
3. Egy különlegesen nagy csoki csomagolása egy egyenes hasábot formáz, amelynek keresztmetszete szimmetrikus trapéz (lásd a rajzot). A csoki hosszúsága 25 cm, a trapéz méreteit az ábrán láthatod. Hány cm^2 a csokisdoboz külső felszíne? Válaszodat cm^2-ben, egészre kerekítve add meg!



Megoldás

A doboz külső felszíne négy téglalapból és két trapézból áll. A téglalapok egyik oldala 25 cm, a másik oldala pedig a trapéz valamelyik oldala. Így ezek területei összesen: $T_1 = 5 \cdot 25 + 6 \cdot 25 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 25 = 25 \cdot (5 + 6 + 5 + 10) = 25 \cdot 26 = 650\ (cm^2)$.

A szimmetrikus trapéz területének kiszámításához szükségünk van a magasságára. Ha a rövidebb alap végpontjaiból meghúzzuk a magasságvonalakat, a trapéz másik alapját felosztottuk egy 6 cm-es középső, és két azonos hosszúságú, 2-2 cm hosszú szakaszra. Így mindkét oldalon kapunk egy-egy derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 2 cm, átfogója pedig a trapéz szára, vagyis 5 cm.



A magasság Pitagorasz-tétellel kiszámítható: $m^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$.

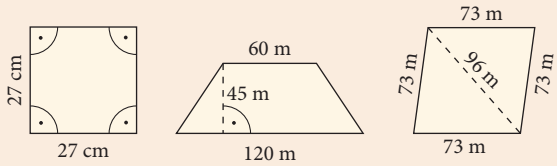
Ebből $m \approx 4{,}58$ cm.

A trapéz területe: $T_2 = \frac{10 + 6}{2} \cdot 4{,}58 = 36{,}64\ (cm^2)$.

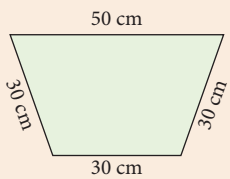
A doboz felszíne tehát: $T_1 + 2T_2 = 723{,}28\ cm^2 \approx 723\ cm^2$.

HÁZI FELADAT

1 Számítsd ki a négyszögek területét!

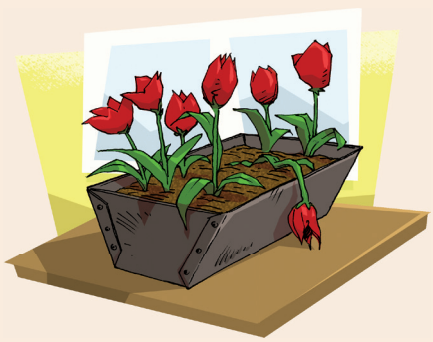


2 Egy (egyenes hasáb formájú) bádog virágláda keresztmetszete húrtrapéz. A láda hossza 1,2 m.



a) Hány m^2 a virágláda külső felszíne?

b) Hány m^2 anyagot kellett felhasználni a készítéséhez, ha a gyártás során a rendelkezésre álló bádog 20%-a hulladék lett?



3 Egy 60 cm-es és egy 40 cm-es nádszál felhasználásával deltoid alakú papírsárkányt készítünk. (A nádszálak a deltoid átlói.)

a) Mekkora lesz a sárkány területe?

b) Mekkora lesz a sárkány kerülete, ha a nádszálak felezik egymást?

c) Mekkora a sárkány kerülete, ha a 40 cm-es nádszál felezőpontja a 60 cm-es nádszálat 2 : 1 arányban osztja két részre?

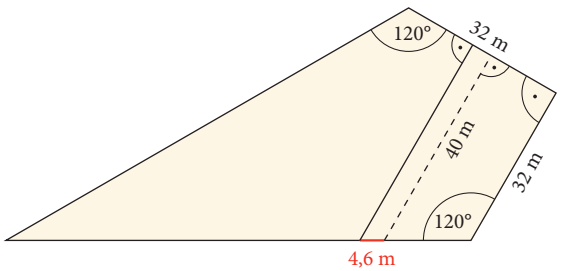
4 A fürdőszobában 3,6 m^2-es részt szeretnénk mozaiklapokkal burkolni. Erre még 5%-ot rá kell számítanunk a darabolások, törések és anyaghiba miatt.

a) Hány m^2-re kell burkolóanyagot beszerezni?

b) 10 cm oldalú, rombusz alakú mozaiklapokat veszünk, amelyek hegyesszöge 60°-os. Hány darabra van szükségünk?



1. Két szomszédos telek határvonalát az ábra szerint módosítani kellett. Hogyan változott a telkek területe? (Szaggatott vonallal az eredeti, folytonossal az új határvonalat jelöli az ábra.)



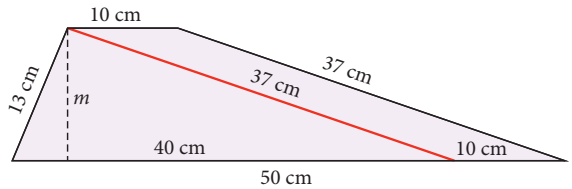


A következő feladatokban használd Héron képletét! (Héron képletét megtalálod az 50. leckében)

2. **a)** Egy paralelogramma oldalai 24 cm és 18 cm hosszúak, egyik átlója 12 cm. Számítsd ki a területét!

b) Egy paralelogramma átlói 24 cm és 18 cm hosszúak, egyik oldala 12 cm. Számítsd ki a területét!

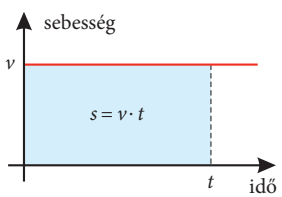
3. Egy trapéz alapjai 50 cm és 10 cm, szárai 37 cm és 13 cm hosszúak. Mekkora a területe? Segít az ábra!



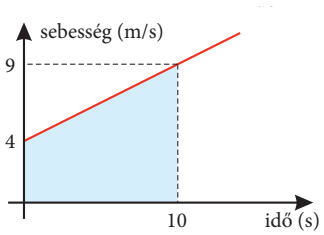
4. Egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) hosszabbik alapja 44 cm, szárai 17 cm-esek, átlói 39 cm-esek. Mekkora a területe?

RÁADÁS

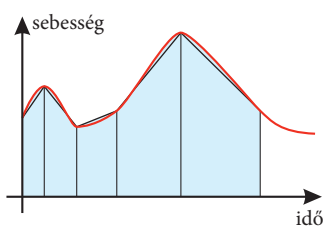
Fizikusok kedvelt módszere bizonyos mennyiségek értékének megállapítására, hogy az adott jelenséget leíró függvény grafikonja alatti területet vizsgálják. Például egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén – egy bizonyos t időpontig vizsgálódva – a görbe alatti terület mérőszáma megegyezik a megtett út nagyságának mérőszámával.
A gondolatmenet kiterjeszthető olyan mozgásokra is, ahol a sebesség változik, ennek elméleti hátterével és gyakorlati módszereivel az *integrálszámítás* foglalkozik.



Egyenletes gyorsulásnál a sebesség nagysága egyenletesen változik, ilyenkor a görbe alatti terület trapéz. A grafikonon bemutatott mozgás esetén pl. a trapéz „alapjai” 4 és 9 egység hosszúak, „magassága” 10 egység, ezek alapján a terület pedig $T = \frac{4+9}{2} \cdot 10 = 65$, a megtett út tehát ebben az esetben 65 m.



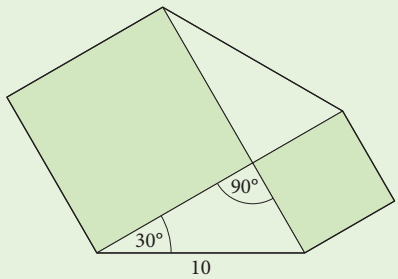
Trapézokkal *közelíthető* szinte bármilyen tetszőleges „görbe alatti” terület. Minél több trapézt használunk, annál pontosabban tudjuk becsülni a tényleges területet.



75 GYAKORLÁS

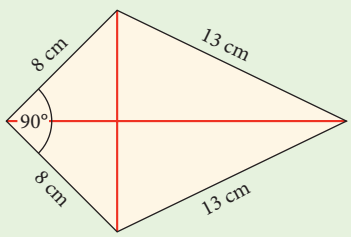
FELADAT

1 Az ábrán egy sokszöget állítottunk össze két négyzetből és két háromszögből.



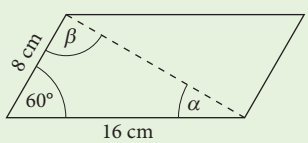
a) Hány oldalú ez a sokszög, és hány átlója van?
b) Van-e szimmetriatengelye, szimmetria-középpontja?
c) Mennyi a belső szögeinek összege?
d) Mekkorák az oldalai, a szögei, és mekkora a leghosszabb átlója?
e) Mekkora a kerülete és a területe?

2 Egy rézlemez konvex deltoid alakú. Az oldalainak a hosszúsága 13 cm és 8 cm. A két rövidebb oldal merőleges egymásra.

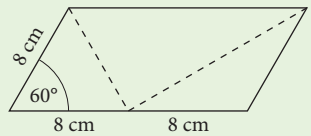


a) Mekkorák a deltoid átlói?
b) Mekkora a rézlemez területe?
c) Legalább hány százalék a hulladék, ha téglalap alakú lemezből vágják ki a deltoidot?

3 **a)** Megrajzoltuk az ábra szerinti paralelogramma átlóját. Mekkora az α és a β? Milyen hosszú a megrajzolt átló?

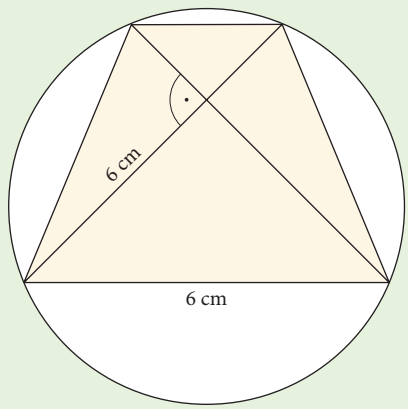


b) Az ábra szerint három részre bontottuk a paralelogrammát. Mekkorák a keletkezett háromszögek szögei és oldalai?

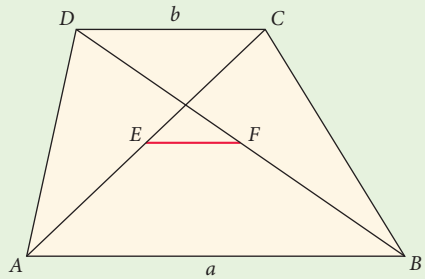


c) Mekkora a paralelogramma területe?

4 Egy húrtrapéz hosszabbik alapja és átlói is 6 cm hosszúak. Az átlók merőlegesek egymásra.
a) Szerkeszd meg a trapézt!
b) Mekkorák a trapéz szögei, mekkora a kerülete és a területe?

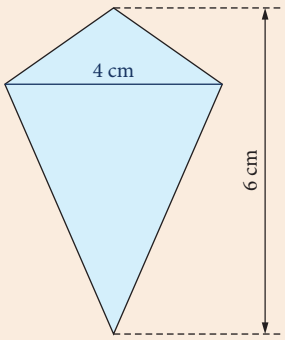


5 Az $ABCD$ trapéz átlóinak felezőpontjai E és F. Milyen hosszú az EF szakasz, ha a trapéz két alapja a és b?

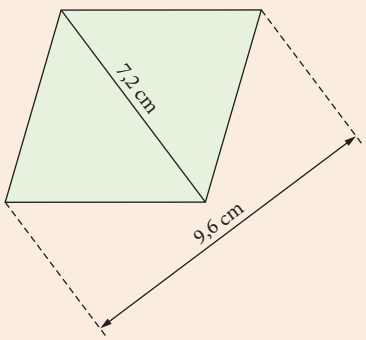


HÁZI FELADAT

1 Szerkessz konvex deltoidot a füzetedben, amelynek átlói 4 cm, illetve 6 cm hosszúak, egyik szöge 120°-os, a másik három szöge ettől különböző! Hány különböző (azaz nem egybevágó) deltoid szerkeszthető? Mekkora ezeknek a területe?



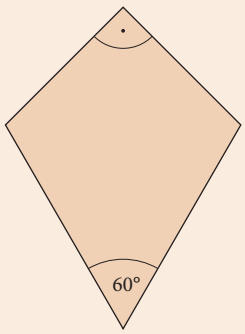
2 Egy rombusz rövidebb átlója 7,2 cm, hosszabb átlója 9,6 cm hosszú. Számítsd ki a rombusz kerületét és területét!



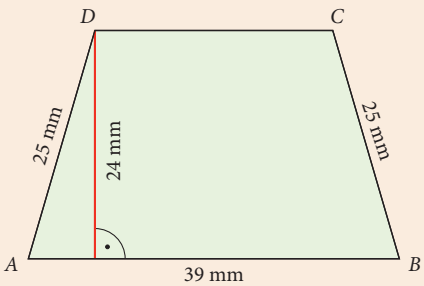
3 Egy konvex deltoidnak egyetlen derékszöge és egyetlen 60°-os szöge van.

a) Mekkora a deltoid másik két szöge?

b) Mekkora lehet a deltoid kerülete és területe, ha két oldala 18,4 cm hosszú?



4 Az *ABCD* négyszög két oldala párhuzamos, a másik kettő egyenlő, de nem párhuzamos.



a) Szerkeszd meg ezt a négyszöget!

b) Sorold fel a tulajdonságait!

c) Mekkora az ismeretlen oldal?

d) Mekkora a négyszög területe?

e) Mekkorák a négyszög átlói?

RÁADÁS

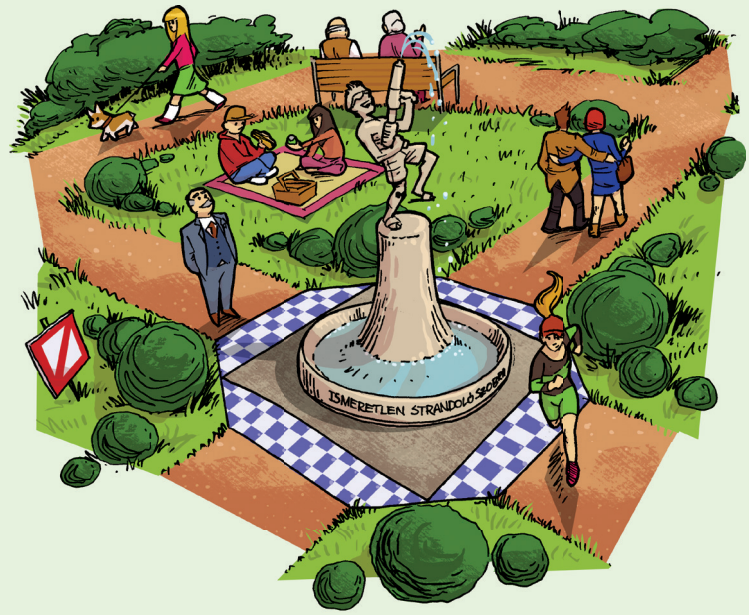
1. Az *ABCD* deltoid oldalai 4 cm és 6 cm hosszúságúak, a két 4 cm-es oldal között pedig 60°-os szög van. A deltoidot az átlóival négy háromszögre bontottuk. A háromszögek köré írható körök középpontjai egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe és a kerülete?

2. Négy egyforma rudat csuklókkal egymáshoz kapcsolunk, majd az utolsó szabad végét az első szabad végével illesztjük össze. Így egy olyan keretet kapunk, amely mindig rombusz alakú, de csuklókkal mozgatható. Egyik rúdját a talajon tartjuk. Milyen pályán mozog a rombusz átlóinak metszéspontja, miközben a keretet mozgatjuk?

ÉRDEKES FELADATOK

FELADAT

1 Egy szökőkút medencéje négyzet alakú talapzaton áll. A talapzat köré – az ábra szerint – szabályos nyolcszög alakban szeretnének díszburkolatot építeni. A talapzat oldalai 3 méter hosszúak. Mekkora a díszkővel borítandó vízszintes felület?



2 A Malajzia fővárosában, Kuala Lumpurban felépült Petronas ikertornyokat a modern építészet egyik csodájaként tartják számon. A tornyok alaprajzához – az egymásba kapcsolódó négyzetekhez és körökhöz – az ország uralkodó vallása, az iszlám építészeti stílusa adott ihletet.

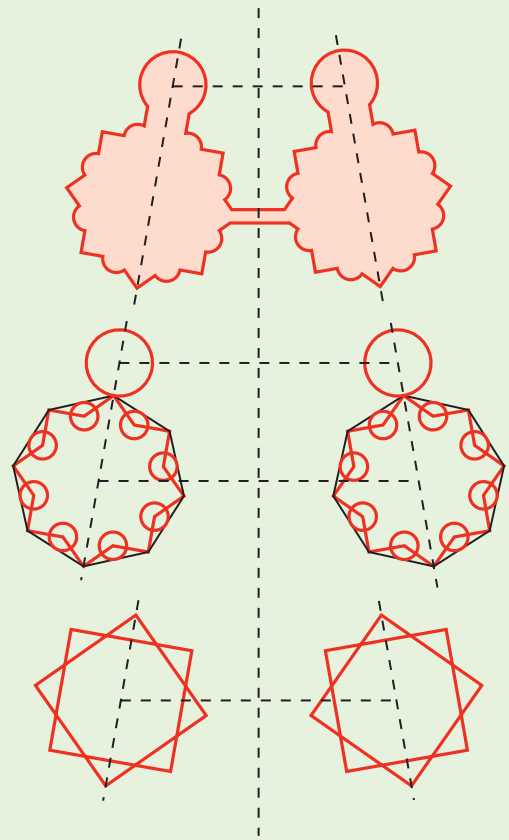
Szerkeszd meg a bemutatott alaprajzot egy 15 cm oldalú négyzetből kiindulva!



– Forgasd el a négyzetet a középpontja körül 45°-kal!

– Kösd össze a két négyzet csúcsait, így egy szabályos nyolcszöget kapsz!

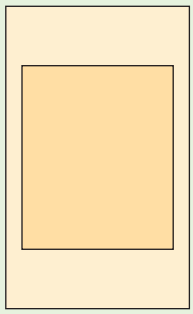
– Szerkessz olyan köröket, amelyeknek középpontja a két négyzet egy-egy oldalának a metszéspontja és érintik a nyolcszög oldalait!



3 Az asztalos összecsukható étkezőasztalt készít. Az asztal kinyitva a külső téglalapot formázza, felére összecsukva és elfordítva pedig a belső téglalapot. A kinyitott asztal hosszabbik oldala 180 cm, rövidebbik oldala 120 cm.

a) Hány fokos szöggel kell elforgatni a kettéhajtott asztallapot?

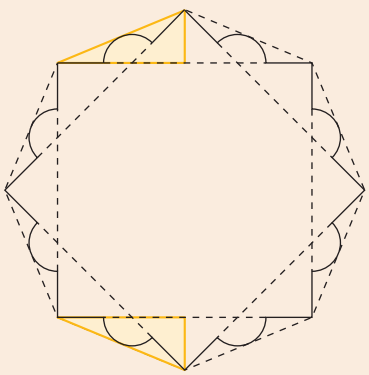
b) Hova kell szerelni a csapszeget, amely körül a félbehajtás után elforgatjuk az asztallapot?



HÁZI FELADAT

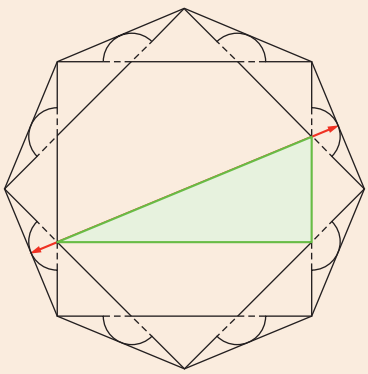
A házi feladatok a Petronas tornyokkal kapcsolatosak. A kérdések arra az alaprajzra vonatkoznak, amelyet a tanóra 2. feladatában leírt módon, 15 cm oldalú négyzetből kiindulva kaphatsz.

1 Mekkorák a „külső” szabályos nyolcszög oldalai? (Figyeld meg a narancssárga háromszögek oldalait!)



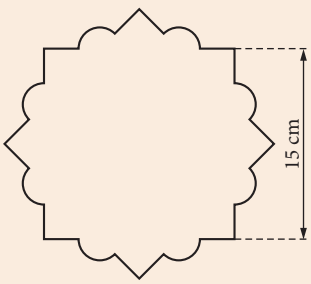
2 Mekkora a „külső” szabályos nyolcszög két szemközti oldala közötti távolság?

3 Mekkora a „belső” szabályos nyolcszög két szemközti csúcsa közötti távolság? (Figyeld meg a zöld háromszöget!)



4 Mekkora a körök sugara?

5 Mekkora a kicsinyített alaprajz területe?



Ráadás

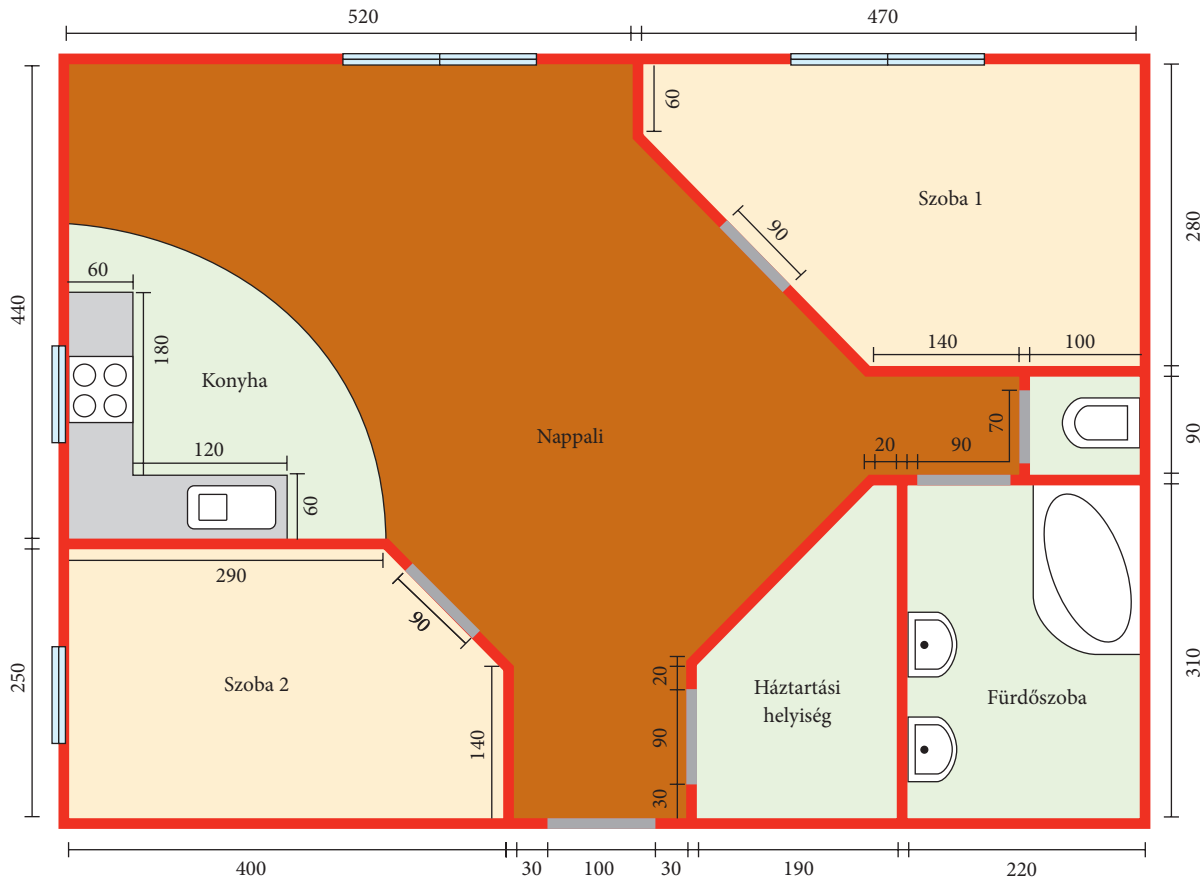
LAKÁSFELÚJÍTÁS

PROJEKTMUNKA

Megadjuk egy lakás alaprajzát. A méreteket cm-ben adtuk meg, a belső falak vastagsága mindenhol 10 cm, a helyiségek magassága 265 cm. Az alaprajzon ferdén rajzolt falak mindenhol 45°-os szöget zárnak be az oldalfalakkal.

Egy család lakásfelújítást tervez. A helyiségek egy részét parkettázni kell, más részére járólapokat raknak, a falak mentén szegélyléceket kell lefektetni, a falakat és a plafont pedig ki kell festeni.

Dolgozzátok fel, hogy az alaprajzból kiindulva mely munkához mennyi alapanyagra lesz szükség, és mekkora költséggel jár mindez összesen. Az alábbi feladatokban szereplő információkat használhatod a munkádhoz, de ha szeretnéd, önállóan is utána nézhetsz az anyagköltségnek. A számítások során kerekíthetsz vagy becsülhetsz is, ezzel a számolás menetét is megkönnyítheted.



Parkettázás

1. A két hálószobába egyforma, világos színű laminált parkettát szeretnének lerakni.

a) Mekkora a lefedendő terület?

b) Egy csomag parkettából 2,24 m^2-t lehet lefedni. Hány csomagot vegyenek, ha 5% hulladékkal számolnak?

c) A világos parketta ára 2100 Ft/csomag. Mennyit fognak fizetni?

2 A nappalit sötétebb színű parkettával szeretnék burkolni. Ez 1,96 m²/csomag kiszerelésben kapható.

a) Mennyit vegyenek, ha itt is 5% hulladékkal kell számolni? (A számoláshoz felhasználhatod, hogy egy r sugarú kör területe közelítőleg $3{,}14 \cdot r^2$.)

b) A sötétebb parketta csomagja 2600 Ft. Mennyibe fog kerülni ez a fajta parketta?

3 A parketta és a falak találkozását szegélyléccel szokták letakarni.

a) Hány m szegélylécet vegyenek a két szobához és a nappalihoz összesen? (Vigyázat! Az ajtóküszöböknél és a járólapozott részeken nem kell szegélyléc!)

b) Mennyibe kerül ez 290 Ft/m áron számítva?

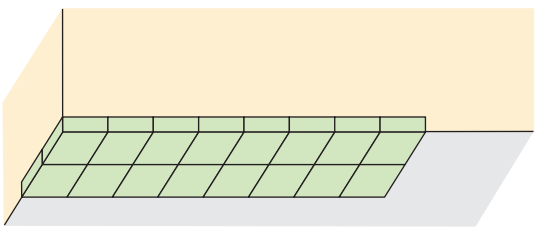
Járólapok

4 A háztartási helyiségbe és a konyhapult köré járólapot terveznek.

a) Hány m² járólapra lesz szükség?

b) A járólapok 33 × 33 cm-esek, és 9 db van belőlük egy csomagban, így minden csomag 1 m² terület burkolására alkalmas. Egy csomag, tehát 1 m² járólap ára 2900 Ft, de a csomagokat nem lehet megbontani. Hány csomagra lesz szükség, és mennyit kell majd fizetni értük?

c) Egy burkolómester azt javasolta, hogy néhány lapot vágjanak szét 4 egyforma széles csíkra, és építsenek belőle „lábazatot", azaz ragasszák fel körben a burkolt terület szegélye mentén a falra. Hány plusz lapra lesz ehhez szükség?



5 Ugyanilyen módon (lábazattal) burkolják a fürdőszobát és a WC-t. Oda olyan járólapot választanak, melyből egy csomag járólap 1 m² lefedésére elég, és az ára 3200 Ft. Hány csomag járólapra lesz szükség, és ez mennyibe kerül?

Festés

6 A két hálószobát szeretnénk egyforma színűre festeni. Az ajtók 1,8 m², az ablakok pedig egyenként 1,3 m² felületűek. Mekkora falfelületet kell összesen befesteni?

7 Az összes helyiségben fehér színűre festjük a mennyezetet. Mekkora ez a felület összesen?

8 A két szobában a mennyezeten körbe gipsz díszlécet szeretnének felrakni. Hány darab 2 m hosszú díszlécet kell venniük?

9 A mellékhelyiségeket is kifestik, de oda nem tesznek díszléceket. Hány m²-es falfelülettel számoljanak?

A nappalival most nem foglalkozunk, azt szakemberrel fogjuk tapétáztatni.

10 A festéket 10 l térfogatú vödrökben hozzák forgalomba, egy vödörben 9,5 l festék van. 1 m²-re kb. 0,1 liter festék kell. Hány vödör festéket kell venniük?

11 Egy vödör festék ára 6830 Ft, egy szál (2 m) díszléc ára 1230 Ft. Mennyibe fog kerülni a festék és a díszlécek?

76 GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

FELADAT

1 Mi jellemzi a nevezetes négyszögeket? Írd be a táblázat megfelelő celláiba azoknak a tulajdonságoknak a sorszámát, amelyek az adott típusú négyszögre biztosan igazak!

trapéz	
húrtrapéz	
paralelogramma	
deltoid	
rombusz	
téglalap	
négyzet	

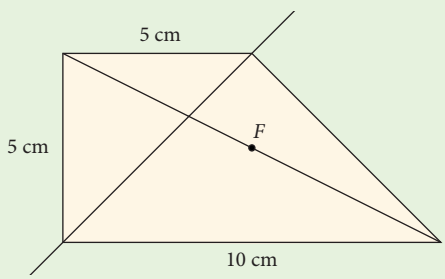
1. átlói egyenlő hosszúak
2. átlói felezik egymást
3. átlói merőlegesek egymásra
4. van két egyenlő hosszú oldala
5. van két egyenlő nagyságú szöge
6. középpontosan szimmetrikus
7. tengelyesen szimmetrikus
8. konvex

2 Vegyél fel egy trapézt, melynek hosszabbik alapja 10 cm, rövidebbik alapja 5 cm, rövidebbik szára 5 cm, és az alapokon fekvő egyik szöge derékszög.

a) Tükrözd a trapézt a hosszabbik átló felezőpontjára!

b) Tükrözd a rövidebbik átló egyenesére!

c) Határozd meg, hogy az a) és b) esetekben mekkora a tükörkép és az eredeti síkidom közös részének területe?



3 (2008. évi érettségi feladat nyomán)



a) Az alábbiak közül melyik transzformációk viszik önmagába az ábrán látható, sugárveszélyt jelző táblát?

A 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül

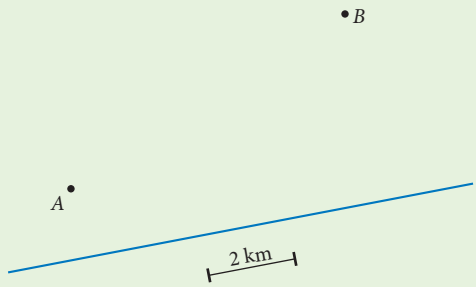
B 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül

C középpontos tükrözés a tábla középpontjára

D tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre

b) Nézz utána, mit jelent az, hogy sugárveszély!

4 Az *A* településről a *B* településre szeretnénk eljutni úgy, hogy közben 2 km-t úszunk a folyóban. Melyik a legrövidebb út?

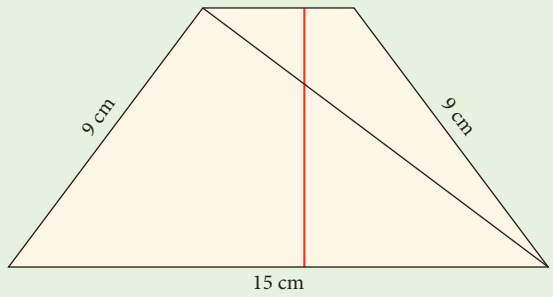


5 Egy húrtrapéz egyik alapjának a hosszúsága 15 cm, a szárai 9 cm-esek, a körülírt körének átmérője is 15 cm.

a) Mekkorák az átlói?

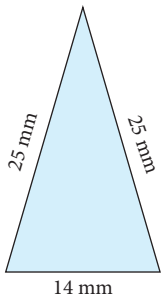
b) Mekkora a magassága?

c) Mekkora a másik alapja?



TUDÁSPRÓBA

1 Egy háromszög oldalainak hossza 14 mm, 25 mm és 25 mm. Ezt a háromszöget tükrözzük mindhárom oldalfelező pontjára. A háromszög és a három tükörképe együtt egy sokszöget alkot.



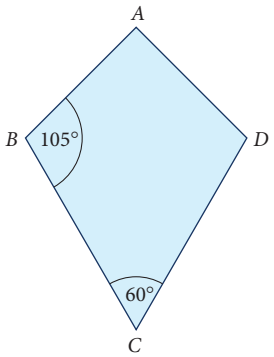
a) Hány oldalú ez a sokszög?
b) Hány szimmetriatengelye van?
c) Mekkora a területe?

2 Vegyél fel egy derékszögű trapézt, melynek magassága 4 cm, és két alapja 5 cm, illetve 8 cm hosszú.

a) Tükrözd a trapézt tengelyesen a hosszabb átló egyenesére! Milyen síkidom a tükörkép és az eredeti síkidom közös része? Mekkora a kerülete?
b) Tükrözd a trapézt középpontosan a hosszabbik átló felezőpontjára! Milyen síkidom a tükörkép és az eredeti síkidom közös része? Mekkora a területe?
c) Tükrözd a trapézt tengelyesen a rövidebbik átló egyenesére! Mekkora a tükörkép és az eredeti síkidom közös részének területe?

3 Egy rombusz egyik tompaszögű csúcsából meghúztuk a magasságot. Ez a magasság felezi a szemközti oldalt. Mekkorák a rombusz szögei?

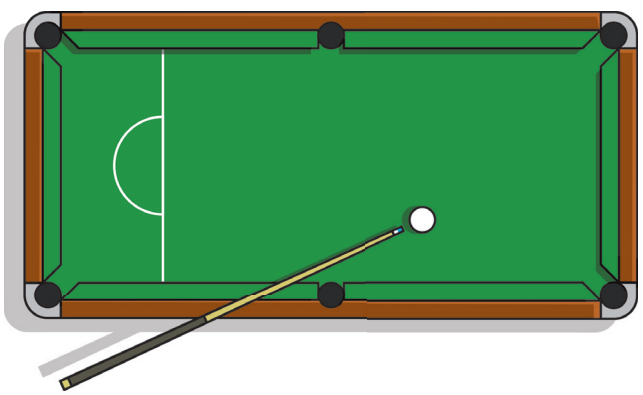
4 Egy deltoid két szöge 105°-os, egyik szöge 60°-os. Hosszabb oldalai 10 cm hosszúak.



a) Milyen hosszúak az átlói?
b) Mekkora a területe?
c) Milyen hosszú a két rövidebb oldal?

RÁADÁS

1. Egy biliárdasztalon az egyik átlóval párhuzamosan elindítok egy biliárdgolyót. Hová fog érkezni a biliárdgolyó, miután mind a négy oldalon visszaverődött? Válaszodat indokold! (Az asztal téglalap alakú, a visszaverődések tökéletesen rugalmasak, a golyó nem az asztal közepéről és nem a legszéléről indul úgy, hogy útja során nem esik bele egyik lyukba se.)



2. (Kompetenciamérés, 2011)
A közlekedésben néhány jármű (mentők, rendőrség, tűzoltók) elején speciális felirat látható. Ezt a feliratot a járművezetők a visszapillantó tükörből tudják elolvasni anélkül, hogy hátrafordulnának.

a) Melyik felirat van elhelyezve egy tűzoltóautó elején?

A) TŰZOLTÓSÁG
B) 
C) 
D) 

b) Milyen feliratot készítsen a RENDŐRSÉG, ha azt szeretné, hogy ezt a szót olvassák a vezetők a visszapillantótükörben?

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 4,2 cm és 2,3 cm.

a) Tükrözd a háromszöget a hosszabbik befogó felezőpontjára!

b) Tükrözd a háromszöget az átfogóra!

c) Milyen síkidomot határoz meg együtt az eredeti és a tükörkép a két esetben?

2 Egy 3,5 cm oldalú szabályos háromszöget forgass el 60°-kal az egyik csúcsa körül. Milyen síkidomot határoz meg az eredeti háromszög és a képe együtt? Milyen hosszúak az átlói?

3 Vegyél fel a füzetedben két metsző egyenest, e-t és f-et, és az egyeneseken kívül egy P pontot! Forgasd el P körül az e egyenest úgy, hogy a képe

a) f-fel párhuzamos legyen;

b) f-re merőleges legyen!

4 Egy 4,4 cm oldalú négyzet egyik csúcsa A, középpontja O. Told el a négyzetet az $\overrightarrow{OA}$ vektorral! Mekkora területű a két négyzet közös része?

5 Egy paralelogramma egyik szöge 45°-os, oldalai 8 cm és 3 cm hosszúak. Told el a paralelogrammát egy 3 cm hosszú, a paralelogramma egyik oldalával párhuzamos vektorral! Mekkora az eredeti és az eltolt paralelogramma által lefedett terület, ha

a) a vektor a rövidebb oldallal párhuzamos;

b) a vektor a hosszabb oldallal párhuzamos?

6 Vegyél fel a füzetedben két metsző egyenest és egy olyan szakaszt, amely egyik egyenessel sem párhuzamos! Told el a szakaszt úgy, hogy végpontjai az egyenesekre essenek! Hány megoldás van?

7 Vegyél fel a füzetedben egy 2,5 cm sugarú kört és egy 4 cm hosszú szakaszt! Szerkeszd meg a körben azt a 4 cm hosszú húrt, amely párhuzamos a szakasszal! Hány megoldás van?

8 Szerkessz egy négyzetet! Egyik oldalának felezőpontja legyen P. Tükrözd P-t a négyzet csúcsaira! Milyen négyszöget határoznak meg a kapott pontok?

9 Egy háromszög egyik szöge 30°-os, másik szöge 80°-os. A háromszög beírható körének középpontját tükrözzük a háromszög oldalegyeneseire. A kapott pontok a háromszög csúcsaival együtt egy hatszöget határoznak meg. Mekkorák a hatszög szögei?

10 Az $ABCDEF$ konvex hatszögről tudjuk, hogy az $ABDE$ és a $BCEF$ négyszögek paralelogrammák. Bizonyítsd be, hogy a $CDFA$ négyszög is paralelogramma!

11 Egy háromszög súlypontját tükrözzük a háromszög oldalfelező pontjaira. A kapott pontok a háromszög csúcsaival együtt egy hatszöget határoznak meg. Bizonyítsd be, hogy a hatszög középpontosan szimmetrikus!

12 Egy deltoidban két szemközti szög nagysága 52° és 116°. Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?

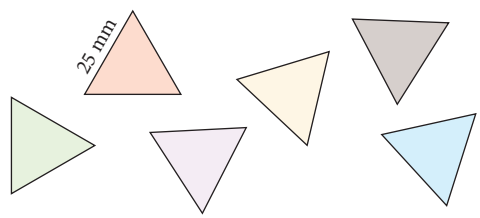
13 Hat szabályos háromszög oldalai 25 mm-esek. Állíts össze belőlük egy olyan sokszöget, amely

a) középpontosan is, és tengelyesen is szimmetrikus;

b) középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem;

c) tengelyesen szimmetrikus, de középpontosan nem;

d) sem tengelyesen, sem középpontosan nem szimmetrikus!



14 (Érettségi feladat, 2008)

Melyik állítás igaz, melyik állítás hamis?

A Ha az $ABCD$ négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.

B Ha az $ABCD$ négyszög átlói felezik egymást, akkor ez a négyszög téglalap.

C Ha az $ABCD$ négyszög nem téglalap, akkor átlói nem felezik egymást.

15 (Érettségi feladat, 2008)
Melyik állítás igaz, melyik állítás hamis?

A Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van.

B Minden rombusznak van két szimmetriatengelye.

C Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.

D Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van.

16 Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 12 cm és 16 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara?

17 (Érettségi feladat, 2010)
Egy húrtrapéz egyik alapjának hossza 7 cm, ezen az alapon fekvő szögei 60°-osak. A szárai 4 cm-esek.

a) Számítsd ki a másik alap hosszát!

b) Számítsd ki a trapéz területét!

18 Egy rombusz egyik oldala 14 cm hosszú, egyik szöge 120°-os.

a) Milyen hosszú a hosszabbik átlója?

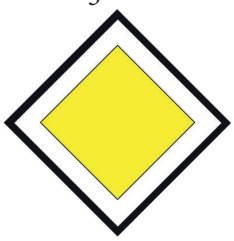
b) Mekkora a területe?

19 (Érettségi feladat)
Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három egybevágó téglalapra bontunk. Egy ilyen téglalap kerülete 24 cm. Hány cm^2 a négyzet területe?

20 Az $ABCD$ konvex négyszöget átlóival négy háromszögre bontottuk. Milyen négyszöget határoznak meg a háromszögek köré írható köreinek középpontjai?

21 Hány százalékkal nagyobb a 3 cm oldalhosszúságú négyzet területe, mint annak a 3 cm oldalhosszúságú rombusznak a területe, melynek egyik szöge 60°-os?

22 A főútvonalat jelző tábla 60 cm × 60 cm nagyságú, élére állított négyzetet formáz. A függőlegesen behúzott átló mentén a külső fekete sáv az átló $\frac{1}{20}$ részéig tart, a közbülső fehér sáv pedig az átló $\frac{1}{5}$ részéig. Számítsd ki a táblán található három tartomány (a külső fekete sáv, a közbülső fehér sáv és a középső sárga négyzet) területeinek arányát!



23 Egy húrtrapéz alapjai 16 cm és 12 cm hosszúak, magassága 8 cm hosszú.

a) Mennyi a területe?

b) Milyen hosszúak a szárai?

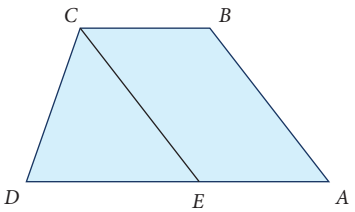
c) Mennyi a kerülete?

d) Milyen hosszúak az átlói?

e) Két ilyen húrtrapézt egymás mellé illeszthetünk úgy, hogy egy paralelogrammát kapjunk. Készíts ábrát!

f) Mennyi a paralelogramma területe és kerülete?

24 Az ábra szerinti trapézban CE párhuzamos DA-val. A BE szakasz 4 egység, a trapéz középvonala 5 egység hosszú. Milyen hosszúak a trapéz alapjai?



25 Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsához tartozó magassága felezi a CD oldalt. BC oldal hossza 4,7 cm. Milyen hosszú az AC átló?

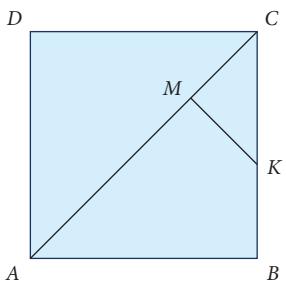
26 Egy trapéz egyik szöge 40°-os. A 40°-os szögből húzott átlója a trapézt két egyenlő szárú háromszögre bontja. Mekkora lehet a trapéz többi szöge?

27 Egy húrtrapéz hosszabbik alapja és átlói is 6 cm hosszúak. Az átlók merőlegesek egymásra.

a) Mekkorák a trapéz szögei?

b) Mekkora a trapéz kerülete és területe?

28 Az ábra szerinti $ABCD$ négyzetben $AM = AB$, és az MK szakasz merőleges az AC átlóra. A négyzet oldala 12 cm.



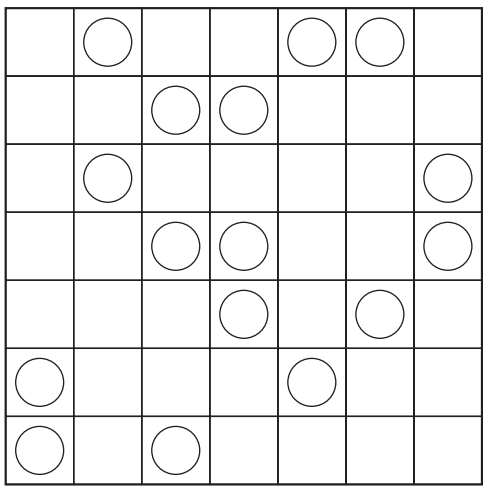
a) Milyen síkidom az $ABKM$ négyszög?

b) Tükrözd az M és K pontokat a BD átló egyenesére, legyenek az így kapott pontok M' és K'. Milyen síkidom az $MM'K'K$ négyszög? Mekkora a területe?

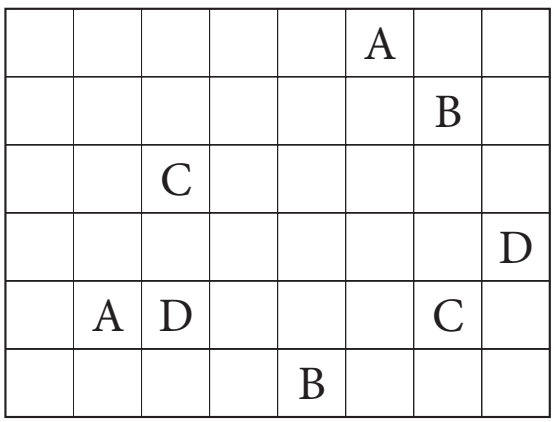
c) Mekkora az ABK háromszög területe?

I. Rejtvények

1 Néhány oszlopban az összes karikát színezd pirosra úgy, hogy minden sorban pontosan egy karika legyen piros!



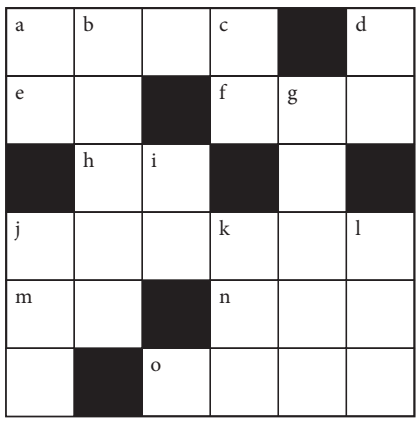
2 Kösd össze az azonos betűket, de csakis a négyzetek középpontján át vízszintesen és függőlegesen haladó, egymást nem metsző vonalakkal!



3. **Számkeresztrejtvény**

Vízszintes: a) Egy prímszám négyzete. **e)** A függőleges j) és a függőleges k) legnagyobb közös osztójának a fele. **f)** Egy négyzetszám köbe. **h)** A vízszintes a) négyzetgyöke. **j)** Szimmetrikus négyzetszám (jegyei fordított sorrendben is ugyanazt a számot alkotják). **m)** A függőleges i)-nél 1-gyel nagyobb szám. **n)** A vízszintes h) ötszöröse. **o)** A vízszintes m)-nél 1-gyel nagyobb szám négyzete.

Függőleges: a) 8-cal kisebb a legkisebb olyan természetes számnál, amely 2-vel osztva 1-et, 3-mal osztva 2-t, 4-gyel osztva 3-at, 5-tel osztva 4-et, 6-tal osztva 5-öt ad maradékul. **b)** Számjegyeinek összege 29. **c)** Prímszám. **d)** A függőleges k) egyik prímtényezője. **g)** A vízszintes m) és a vízszintes o) szorzatának négytizede. **i)** A függőleges d) kétszerese. **j)** A függőleges k) fordítottja. **k)** A vízszintes j) négyzetgyöke. **l)** A vízszites m) legnagyobb prímtényezőjének többszöröse.

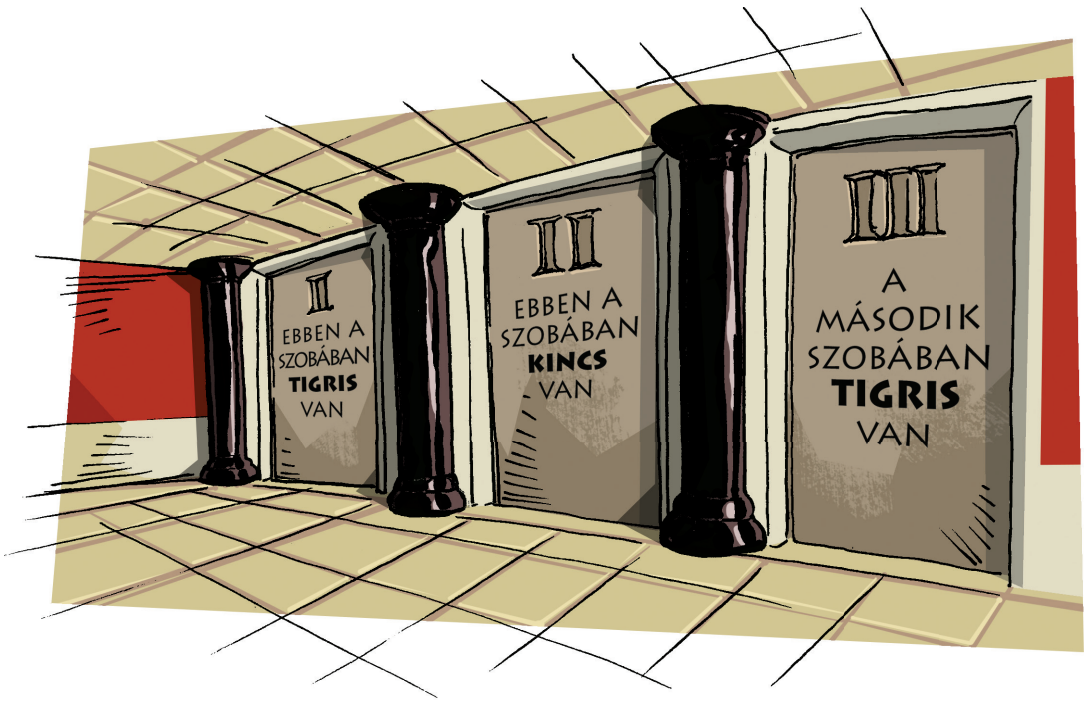


II. Fejtörők

1 Gondolj egy számra, adj hozzá 2-t, szorozd meg 6-tal, adj hozzá 9-et, oszd el 3-mal, vegyél el belőle 7-et, oszd el 2-vel! Így megkapod azt a számot, amelyre gondoltál. Miért?

2 Gondolj egy számra, adj hozzá 5-öt, szorozd meg 2-vel, vegyél el belőle 20-at, adj hozzá 9-et, szorozd meg 3-mal, vond ki a gondolt szám 6-szorosából! Így 3-at kapsz. Miért?

3 Három szoba közül az egyikben kincs van, a másik kettőben pedig egy-egy tigris. A szobák ajtaján szereplő három felirat közül legfeljebb egy igaz. Melyik szobában van a kincs, ha a feliratok a következők:



4 Határozd meg azt a legnagyobb számot, amelyben a harmadik számjegytől kezdve minden számjegy az előző két számjegy összege!

5 A 4 cm oldalú négyzetnek 16 cm^2 a területe és 16 cm a kerülete. Van-e még egy olyan téglalap, amelynek annyi négyzetcentiméter a területe, ahány centiméter a kerülete? A téglalap oldalainak hossza csak egész centiméter lehet.

6 Egy szabályos sakktábla bal alsó sarkából elindul egy bábu. Balázs és apa lépteti vagy vízszintesen jobbra valahány mezőt, vagy függőlegesen felfelé valahány mezőt. Az nyer, aki a jobb felső sarokba lép. Először Balázs lépett, és akkor apa azt mondta, hogy Balázs máris vesztett. Honnan tudta apa, hogy ha ő jól játszik, akkor Balázs nem nyerhet?

7 Csongor előkészített 56 gyufaszálat. Balázzsal ezekből felváltva vesznek ki 1, 2 vagy 3 darabot. Az nyer, aki az utolsót veszi el. Balázs azt állította, hogy ő biztosan nyer, ha Csongor kezdi a játékot. Ezt Csongor csak azután hitte el, hogy Balázstól 5-ször kikapott. Mi lehet Balázs trükkje?

8 Csongor egy gyufát kidobott, maradt 55 darab. Kíváncsi volt, így is megveri-e az öccse. Balázs váltig állította, hogy igen, de akkor neki kell kezdenie a játékot. Csongor beleegyezett. Balázs az első húzásnál 3 gyufát vett el. Ezután pedig mindig újra Balázs győzött. Miért?

A FELADATOK VÉGEREDMÉNYEI

39. lecke: 1. a) X. **b)** A; K; X. **c)** H; N; Z. **d)** A; E; L; M; N; Z. **e)** A; E; H; T; X. **f)** nincs. **2. a)** $e \parallel f$; $i \perp f$; $i \perp g$. **b)** $\beta = 130°$; $\gamma = 50°$; $\delta = 130°$. **4.** nagymutató: 240°; kismutató: 20°. **5.** 20°. **6. a)** 130°; 65°; 50°; 25°. **b)** Egyállásúak például β és ε. Váltószögek α és λ. Kiegészítőszögek λ és φ.

40. lecke: 1. 180°; 60°; 135°; 105°; 120°; 360°. **2.** igaz; hamis; igaz; igaz; hamis; hamis; igaz; igaz. **3. a)** 22,5°; 45°; 67,5°. **4.** 150°. **5. a)** *ECD*; *ADE*; *BEA*; *CAB*; *DBC*. **b)** *EAT*; *EAC*; *ABP*; *ABD*; *BCQ*; *BCE*; *CDR*; *CDA*; *DES*; *DEB*. **c)** $AD = BD$ (2 kék + 1 zöld szakasz), *AD*-vel és *BD*-vel szemközti szögek egyenlők. **d)** a) és b) részben: 36°; 36°; 108°; c) részben: 36°; 72°; 72°. **6.** 40°és 50°. 20° és 70°.

41. lecke: 1. a) 37,5. **b)** 12,5. **c)** 6. **d)** 4,5 és 8. **e)** igaz. **2. a)** nem. **b)** igen. **3.** 112 m; 6696 m^2. **4.** oldalak: 28 cm; 45 cm; 53 cm.

42. lecke: 1. 13,5 cm. **2. a)** 11,8 dm. **b)** 10,4 m. **c)** 11,4 m; 9,87 m. **3. a)** szabályos háromszög; oldala kétszerese az eredetinek. **b)** 6,9 cm. **4.** két lehetőség van; $CD = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ vagy $CD = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

43. lecke: 1. b) c) a cm-ben lemért távolság 0,2-szerese adja meg km-ben a távolságot. **d)** pl. cérna segítségével. **2.** 2,60 cm; 5,2 cm. **3.** 4,24 m; 5,66 m. **4. a)** *BC*; *CG*; *DC*. / *AB*; *AD*; *DH*; *BF*; *FG*; *GH*. / *AE*; *EF*; *EH*. **b)** *AB*; *AD*; *AE*; *BC*; *BF*. / *EF*; *DC*; *EH*; *DH*; *FG*; *CG*. / *GH*. **c)** *AB*; *BC*; *EF*; *BF*; *FG*; *GH*; *DC*; *CG*. / *EH*; *DH*; *AD*; *AE*. **5.** (7; 7).

44. lecke: 1. a) 3,3 cm. **b)** 9,8 cm; 3,2 cm. **2. a)** 9,66 cm. **3.** 48 cm. **4.** 5 cm sugarú koncentrikus kör.

45. lecke: 1. a) 2,31 cm; 1,15 cm. **b)** fele. **2.** nincs. **3.** 3,19 cm.

46. lecke: 1. a) igen. **b)** igen. **c)** igen. **d)** nem. **2. a)** 4,2 cm. **b)** 1,4 cm; 2,8 cm. **c)** 4,85 cm. **3. a)** 32,5 cm; 28 cm; 16,5 cm. **b)** 43,28 cm; 58,38 cm. **4. a)** 9 mm. **b)** $9\sqrt{2}$ mm. **c)** 18 mm. **d)** 93 mm. **e)** $9\sqrt{2}$ mm. **5.** középvonalak: 21 cm; 14,5 cm; 14,5 cm; súlyvonalak: 20 cm; 33 cm; 33 cm.

47. lecke: 1. a) igaz. **b)** hamis. **c)** igaz. **d)** hamis. **e)** igaz. **f)** igaz. **g)** igaz. **h)** igaz. **2. a)** mindkét egyenestől (*e* és *f*) kisebb, mint 3,5 cm távolságra lévő pontok. **b)** *K* ponttól nagyobb, mint 3 és (ugyanakkor) *P* ponttól legfeljebb 2 egység távolságra lévő pontok. **c)** *B* ponttól való távolsága legalább 2 km és ugyanakkor *B*-hez közelebb lévő pontok, mint *A*-hoz. **d)** *K* ponttól 6 egység távolságra lévő pontok, melyek az e egyenestől legfeljebb 1 egység távolságra vannak. **e)** *K* ponttól 6 egység távolságra lévő pontok, melyek legalább olyan távolságban vannak *f* egyenestől, mint *e* egyenestől. **3.** 1375 méter. **4.** két eset van: 13 cm vagy 27 cm. **5.** a Pitagorasz tétel segítségével: pl. 1 egység befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója ($\sqrt{2}$ egység), illetve a 2 egység oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága ($\sqrt{3}$ egység).

49. lecke: 1. 2,95 cm. **3. a)** a Thálesz tétel és az egyenlőszárú derékszögű háromszög tulajdonságainak felhasználásával. **b)** a távolságok: $25\sqrt{2}$; $25\sqrt{2}$; $25\sqrt{10}$. **4. a)** hegyesszögű, mert $6^2 + 8^2 < 9^2$. **b)** 4,5 cm (a Thálesz tétel megfordítása miatt). **5. a)** lásd előző feladat. b) része. **b)** igaz.

50. lecke: 1. 72 dm^2; 16 dm^2; 62,4 m^2. **2. a)** 8 cm és 6 cm. **b)** 24 cm^2. **c)** 2,4 cm. **3.** 33,33%. **4. a)** 13,9 m és 10,4 m. **b)** 83,1 m^2. **c)** 52,3 m. **5.** ≈102 m^2.

51. lecke: 1. 6,93 m; 14,73 m. **2. a)** 25°; 65°. **b)** 8 cm. **3. a)** 16,37°; 73,63°. **b)** 69°; 111°. **c)** 85°. **d)** nincs ilyen. **4.** 21,25 cm^2. **5. a)** 13 km. **b)** 21,2 km. **c)** 5,5 km. **d)** 15°. **6.** Segít a pontok megtalálásában, ha berajzoljuk a *BC* oldal felezőmerőlegesét, és az *A* középpontú 1 cm sugarú kört. **7.** 180 cm^2. **8. a)** 14,5 m.

52. lecke: 1. Növekvő pontszámhoz tartozó gyakoriságok: 1; 4; 3; 3; 2; 5; 5; 3; 3; 1; relatív gyakoriságok: $\frac{1}{30}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{30}$. **2. a)** gyakoriságok: 4; 1; 2; 3; 4; 4; 3; 1; 1; 1; 1. **b)** gyakoriságok: 4; 5; 7; 10; 14; 18; 21; 22; 23; 24, 25. Relatív gyakoriságok: 0,16; 0,25; 0,28; 0,40;

0,56; 0,72; 0,84; 0,88; 0,92; 0,96; 1,00. **3. a)** ≈ 0,14; ≈ 0,13; ≈ 0,15. **b)** ≈ 0,16; ≈ 0,1. **c)** ≈ 57; ≈ 0,13.

53. lecke: 1. relatív gyakoriságok: 0,00; 0,00; 0,00, 0,25; 0,40; 0,33; 0,43; 0,50; 0,56; 0,60; 0,64; 0,67; 0,62; 0,64; 0,67; 0,62. **2.** $\frac{150}{270} \approx 0{,}5556$ és $\frac{120}{270} \approx 0{,}4444$. **4.** $\frac{90}{270} \approx 0{,}3333$; $\frac{135}{270} = 0{,}5$ és $\frac{45}{270} \approx 0{,}1667$.

54. lecke: 1. a) 0. perc Kövespuszta; 11. perc város széle (piros lámpa); 15. perc Alsóváros, 15–16. perc várakozás; 20,5 perc piros lámpa (állítólagos baleset); 24. perc leszállás. **b)** Alsóvárosnál megállt; 15–16. perc között várakozott, hasonló tempóban lassított, mint az előző piros lámpánál. **c)** várakozott a busz egy percen keresztül. **d)** 2–3. perc között átlépte a 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ megengedett sebességet. **2. a)** Januártól júliusig növekedett, júliustól decemberig csökkent. A növekedés mértéke összességében kisebb, mint a csökkenésé. Januárhoz képest decemberben olcsóbb lett. **b)** *A)* a) –60; b) −93. *B)* a) május–június: 11; b) április–május: 3. c) átlagos: $\frac{28}{6} \approx 4{,}67$. *C)* a) október–november: –40; b) augusztus–szeptember: –2; c) átlagos: –12. *D)* pontosan nem állapítható meg. Május 17. ≈ 305 $\frac{\text{Ft}}{\text{liter}}$; november 20. ≈ 240 $\frac{\text{Ft}}{\text{liter}}$. **3. a)** B. **b)** C. **c)** C. **d)** B.

Ráadás lecke: 2. a) 248; 216; 315,6; 277,6 (ezer Ft). **d)** 1,5 millió Ft vagy ennél több. **3. a)** igaz. **b)** igaz. **c)** hamis. **d)** igaz. **e)** igaz.

55. lecke: 1. a) 130; 260; 520; 650; 780; 910; 1040; 1170; 1300. **b)** $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} = \{x \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}$; $R = \{130x \mid x \in \mathbf{Z};\ 1 \leq x \leq 10\}$ **2. a)** $D_a = [-3; 4]$, $D_b = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $D_c = [-2; 5]$. **b)** $R_a = [-3; 4]$; $R_b = \{-2; 0; 1\}$; $R_c = \{4\}$. **c)** c. **d)** b és c. **3. a)** 20; 30; 50; 70; 80; 100(s). **b)** $D = \{100; 150; 250; 350; 400; 500\}$; $R = \{20; 30; 50; 70; 80; 100\}$.

56. lecke: 1. a) lineáris függvény. **b)** kb. 0,1 litert. **c)** időtartam = 0,1 · mennyiség. **d)** 15 perc. **e)** 1,5 liter. **2. b)** Ha a pontokra egyenest illesztünk, akkor 300 forintnál. Ez jelenti az alapdíjat. **c)** Zérushelye nincs, negatív valósak esetén nem értelmezhető a feladat a szövege miatt.

57. lecke: 1. a) 0,5 cm. **b)** $\frac{1}{3}$ cm-rel. **c)** teljesíti az $y = 3x$ kapcsolatot, azaz $1{,}5 = 3 \cdot 0{,}5$. **d)** teljesíti az $y = 4x$ kapcsolatot, azaz $2 = 4 \cdot 0{,}5$. **2.** Mindegyik a nemnegatív számok halmaza.

58. lecke: 1. b) $f_1(x) = 0{,}5 \cdot x$; $f_2(x) = 1 \cdot x$; $f_3(x) = 1{,}5 \cdot x$. **c)** 0,5; 1; 1,5. **2. a)** $m_a = -0{,}25$; $m_b = -1$; $m_c = -2$. **b)** $f_a(x) = -0{,}25x$; $f_b(x) = -x$; $f_c(x) = -2x$. **c)** $f_a(x) = -0{,}25x + 3$; $f_b(x) = -x + 3$; $f_c(x) = -2x + 3$. **3. a)** f párhuzamos c-vel; a párhuzamos e-vel. **b)** d, c és f egyenesek. **c)** c és f egyenes **4. a)** $\frac{3}{2}$. **b)** igen.

59. lecke: 1. a) $0 \leq x < 5$ esetén Kisgázzal, $x = 5$ esetén mindegy, $5 < x$ esetén „7 × 7”-tel. **b)** $\frac{1}{4}$ tallér illetve $\frac{1}{2}$ tallér. **c)** $\frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{4}$. **d)** $y_{\text{Kisgáz}} = \frac{1}{2}x + 1$; $y_{7\times7} = \frac{1}{4}x + 2$. **e)** 2,8 4,8 6,8 km után a Kisgáznál 2,4; 3,4 és 4,4 tallért; a „7 × 7”-nél 2,7; 3,2 és 3,7 tallért. **f)** 6 km, illetve 8 km. **3.** $f(x) = -\frac{2}{3}x - 3$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - 3$; $h(x) = -2x - 3$ **4.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **5. a)** ≈ 232,7 °C. **b)** rendre 18 F; 9 F; 1,8 F.

60. lecke: 2. a) −4,5 és 4,5. **b)** −1,5. **3.** minimumhelyek: $-\frac{8}{3}$; 2 és 1. **4. a)** (−6; 4) és (−3; 2). **b)** az a hely (első koordináta), ahol megegyezik a két függvény értéke (második koordináta). **5. a)** $f_a(x) = \left|\frac{4}{3} \cdot x + 3\right|$ vagy $f_a(x) = \left|-\frac{4}{3} \cdot x - 3\right|$. **b)** $f_b(x) = \left|-\frac{3}{2} \cdot x + 2\right|$ vagy $f_b(x) = \left|\frac{3}{2} \cdot x - 2\right|$; **c)** $f_c(x) = |-3 \cdot x + 1|$ vagy $f_c(x) = |3 \cdot x - 1|$.

61. lecke: 2. *a)* és *c)* lehet. **3. a)** biztos. **b)** lehetetlen. **c)** lehetséges. **4. a)** $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = |x|$. **b)** $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}_0^+$, $f(x) = |x|$. **6. a)** igaz. **b)** nem igaz.

62. lecke: 1. f: legkisebb értéke −1; legnagyobb értéke 1. g: legkisebb értéke −1; legnagyobb értéke 8. h: legkisebb értéke nincs; legnagyobb értéke nincs. **2. a)** legkisebb nincs, legnagyobb 3; 4, illetve 2,5. **b)** legnagyobb 3; nincs, illetve 2,5. Legkisebb 0; 0, illetve nincs. **3. a)** legnagyobb 3; nincs, illetve 3. Legkisebb −1; −1; −1. **b)** legnagyobb 1; 1; 1. Legkisebb −3; nincs, illetve −3. **c)** legnagyobb 3; nincs, illetve 3. Legkisebb 0; 0; 0.

63. lecke: 1. a) *A*; *C*. **b)** 1024; 64; $\frac{9}{25}$. **c)** −15 és 15; −1,3 és 1,3; $-\frac{6}{7}$ és $\frac{6}{7}$. **2. a)** 14. **b)** 29. **c)** 90. **3. a)** rajta van: *B*; *D*; *G*. **b)** rendre: 0; 7,84; 26,01; 144. **c)** rendre: 0; $\sqrt{2{,}8} \approx 1{,}67$; $\sqrt{5{,}1} \approx 2{,}26$; $\sqrt{12} \approx 3{,}46$. **4.** $4 = \sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25} = 5$; $7 = \sqrt{49} < \sqrt{57} < \sqrt{64} = 8$;

$9 = \sqrt{81} < \sqrt{93} < \sqrt{100} = 10$ a négyzetgyökfüggvény szigorú monoton növekvő tulajdonságát használtuk.
5. a) 5. **b)** 8. **c)** 19.

64. lecke: 1. a) 38 tallér. **b)** 8 tallér. **c)** 18 kilométer. **e)** 16 kilométernél kisebb távon. **2. a)** $y = -x + 7$, $0 \le x \le 7$.
b) $T(x) = x(7 - x)$. **c)** (3; 4), illetve (4; 3) koordinátájú pontok esetén a terület 12 területegység.
3. a) $\approx$ 26 667 forint. **b)** $D = [0; 11]$; $R = [50; 130]$;
c) Nem, csak szakaszonként lineáris. **4. a)** *B*.
b) 40 g 0,69 zed, 80 g 1,02 zed, együtt 1,71 zed;
120 g 1,75 zed, tehát külön jobban megéri.

65. lecke: 1. a) $x = 4$. **b)** $x = -1$. **c)** $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.
d) $x_1 = -1$; $x_2 = 4$. **2. a)** $x_1 = -1$; $x_2 = 1$. **b)** $x = \frac{20}{3}$.
3. 3 perc múlva.

66. lecke: 1. a) $-1 < x$. **b)** minden valós szám. **c)** $x \le 0{,}75$.
2. a) $x \le 2{,}5$. **b)** $x \le 1$. **c)** $x < 1$. **d)** $x \le 3$. **3.** $2 < x \le 5$; valós számok esetén végtelen sok, természetes számok esetén három. **4.** legalább 11 050 Ft, legfeljebb 132 250 Ft.

Ráadás lecke: 1. a) k = határidőnaplók száma; s = nyakláncok száma. **b)** $3{,}5k + 2{,}8(42 - k)$ Ft.
c) $k \le 17{,}71$. **d)** 4-féle. **2.** 30 lehetőség van, a létszám lehet 121; 122; 123; …; 149; 150. **3. a)** $-2 < x < 4$. **b)** $x \le -2$ vagy $x > 4$. **c)** $x < -2$ vagy $x \ge 4$. **4. a)** $x \le 0{,}75$ vagy $2{,}5 \le x$.
b) $-\frac{12}{5} < x < \frac{3}{7}$. **5.** $-3 < x < -2$ vagy $-1 < x < 0$.

67. lecke: 1. a) 1 és −5. **b)** 0,3 és −4,3. **c)** −2. **d)** nincs megoldás. **2. a)** $|3x - 7| = 4$ vagy $|-3x + 7| = 4$.
b) $|2x + 4| = 2$. **c)** $-|x| = -3$. **3. a)** 4,5 és 1,5. **b)** 2 és 6.
c) 0 és 4. **d)** 3. **4. a)** 2 és 0. **b)** 5 és −5. **5. a)** $0 \le x$.
b) $x \le 0$. **c)** $x = 0$.

68. lecke: 2. c. **3.** $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$. **6. a)** 1. **b)** 0; 1; 2; 3; 4; 5.
c) 3; −1; **d)** nincs megoldása.

69. lecke: 1. *C*. **6.** Háromszöget (mely hasonló az eredetihez). **7.** Az adatoktól függően legfeljebb 6 megoldás lehet.

70. lecke: 1. Egyenlőek **d** és **e, u** és **v;** ellentettek **a** és **w**, **b** és **c;** egyenlő hosszúak de nem egyállásúak például **a** és **v**.
3. a) igaz. **b)** egy. **4. b)** $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ vagy $\overrightarrow{AD}$ vektorok valamelyikével. **5.** *A* és *D*, *B* és *F*. **6. a)** végtelen. **b)** Amikor az eltolás vektora merőleges az egyenesre, hossza megegyezik a *B* pont és az egyenes távolságával. **c)** végtelen.

71. lecke: 1. Egyenlőszárú háromszöget; deltoidot. **2.** *AB* a kör átmérője. Ekkor *P′P* egy *AB*-re merőleges húr. **3.** Eltolással. **4. b)** 60°-os forgatással.

72. lecke: 1. c) területe 21 cm^2, kerülete $\approx$ 19,86 cm.
2. a) Tengelyes tükrözés van, tengelye *BC* felezőmerőlegese. Középpontos tükrözés van, középpontja a *BC* szakasz felezőpontja. Forgatás van, középpontja a *BC* szakasz felezőpontja. Eltolás van, vektora az $\overrightarrow{AC}$ vagy a $\overrightarrow{CA}$ vektor.
b) Tengelyes tükrözés nincs. Középpontos tükrözés van, középpontja a *BC* szakasz felezőpontja. Forgatás van, középpontja a *BC* szakasz felezőpontja. Eltolás van, vektora az $\overrightarrow{AC}$ vagy a $\overrightarrow{CA}$ vektor. **c)** Tengelyes tükrözés nincs. Középpontos tükrözés nincs. Forgatás van, két lényegesen különböző módon: egyik középpont a *BC* szakasz felezőmerőlegesének és az *AD* szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja, másik középpont az *AC* szakasz felezőmerőlegesének és a *BD* szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja. Eltolás nincs. **3. b)** A forgatás középpontja a *B* pont, a forgatás szöge 90°. **6.** Visszajutunk a kiindulási körhöz a), b) és c) esetben, a) és b) esetben pontonként is.

Ráadás lecke: 1. I. eset. **a)** 5,39 km. **b)** *B*-től 2,24 km, *A*-tól 4 km. **c)** 5,39 km. II. eset **a)** 2,83 km. **b)** *B*-től 2,24 km, *A*-tól 3 km. **c)** 4,47 km. **2. a)** *A*-ból merőlegest bocsájtunk a folyóra. **b)** *AB* egyenesén. **c)** *A*-t toljuk el a folyó szélességével, a folyóra merőlegesen *B* felé. *A′B* kimetszi a folyó szélét jelentő egyenesből a híd helyét. **3.** Három megoldás van. **5. a)** 0,732 m. **b)** 2,73 m. **6. a)** 7:30-kor. **b)** Nagymutató két perccel a 12-es után, kismutató majdnem a 8-asnál.

73. lecke: 1. Hamis: *B*, *E* és *F*. **2. b)** Téglalap. 2772 mm^2.
c) Deltoid. 2772 mm^2. **3.** Végtelen. Lehet sokféle konvex vagy konkáv deltoid is. **4.** Szimmetrikus trapéz. **a)** Igen.
b) 3 cm; 4 cm. **c)** 7 cm; 1 cm. **d)** 7,07 cm; 1,41 cm.
5. a) 4,50 cm. **b)** 2,6 cm; 5,2 cm; 2,6 cm. **c)** 11,71 cm^2.
d) 2,25 cm; 4,50 cm.

74. lecke: 1. a) 35 cm^2. **b)** 20 cm^2. **c)** 12 cm^2. **2.** 227,2 cm^2; 42,3 m^2; 750 dm^2. **3. a)** lehet, 4 cm. **b)** nem lehet.
c) lehet, 0,0083 cm. **d)** lehet, 12 cm. **4. a)** nem változott.
b) 18,5 m^2-rel. **c)** 13 m^2-rel.

75. lecke: 1. a) 6; 9. **b)** Szimmetriatengelye van. **c)** 720°. **d)** 10 cm; 5 cm; 8,66 cm; 120°; 150°; 90°; 19,3 cm. **e)** 47,3 cm; 143,3 cm^2. **2. a)** 11,3 cm és 17,4 cm. **b)** 98,3 cm^2. **c)** 50%. **3. a)** 30°; 90°; 13,86 cm. **b)** a baloldali: 60°, 60° és 60°; minden oldala 8 cm; a jobboldali: 30°, 30° és 120°, oldalai 8 cm, 8 cm és 13,86 cm; a középső: 60°, 30° és 90°; oldalai 8 cm, 16 cm és 13,86 cm. **c)** 110,9 cm^2. **4. b)** 112,5°; 112,5°; 67,5°; 67,5°. Kerülete 17,7 cm; területe 18 cm^2. **5.** 9,12 cm^2; 13,12 cm.

Ráadás lecke: 1. 5,9 m^2. **2. a)** 90°-kal. **b)** Egymásnak megfelelő csúcsokat összekötő szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjába.

Ráadás lecke: 1. a) 20,135 m^2. **b)** 10. **c)** 21 000 Ft. **2. a)** 16. **b)** 41 600 Ft. **3. a)** $\approx$ 42 m. **b)** 12 180 Ft. **4. a)** kb. 9 m^2. **b)** 9 csomag; 26 100 Ft. **c)** 8. **5.** 10 csomag; 32 000 Ft. **6.** kb. 61,5 m^2. **7.** 70 m^2. **8.** 14 darab. **9.** kb. 56,6 m^2. **10.** 3 doboz. **11.** 37 710 Ft.

76. lecke: 1. trapéz: 8; húrtrapéz: 1, 4, 5, 7, 8; paralelogramma: 2, 4, 5, 6, 8; deltoid: 3, 4, 5, 7; rombusz: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; téglalap: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8; négyzet: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. **2. c)** mindkét esetben 25 cm^2. **3.** *B* és *D*. **4.** *A*-t toljuk el 2 km-rel a folyó mentén, s ekkor keressük meg a folyót érintő legrövidebb utat. **5. a)** 12 cm. **b)** 7,2 cm. **c)** 4,2 cm.

SZÁMÍTÓGÉPES PROGRAMOK HASZNÁLATA

A programok telepítése előtt győződjünk meg a használati jogosultságról!

1. Ábrázoljuk a *GeoGebra* program segítségével (ingyenes matematikai program, letölthető a www.geogebra.org oldalról) a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto ax + b$ lineáris függvényt! Vizsgáljuk, hogyan változnak a függvény tulajdonságai az a, illetve a b értékének változtatásával!

Segítség

– Hozzunk létre egy-egy *csúszkát* a, illetve b névvel, állítsuk a lehetséges értékeiket a vizsgálni kívánt eseteknek megfelelően.

– Definiáljuk az f függvényt az $f(x) = ax + b$ képlettel (vagy az $y = ax + b$ képlettel egy egyenest, amelyik az f függvény grafikonja). Ekkor a program a csúszkán beállított aktuális értékeknek megfelelően megrajzol egy egyenest.

– Változtassuk a csúszkák értékét és figyeljük, hogyan változik a függvény grafikonja (az egyenes meredeksége, illetve az y tengelyen lévő metszéspontja).

2. Figyeljük meg a *GeoGebra* program segítségével, hogyan változik meg egy f függvény grafikonja, és hogyan változnak meg a függvénytulajdonságok, ha áttérünk az $|f|$ vagy a $-f$ függvényre!

Segítség

– Hozzunk létre egy-egy *csúszkát* a, illetve b névvel, ezek felhasználásával definiáljuk az $f(x) = ax + b$ függvényt!

– A parancssorba g = abs(f) utasítást írva tudjuk létrehozni az $|f|$ függvényt. Ugyanitt tudjuk definiálni $h = -f$ paranccsal a $-f$ függvényt.

– Megtehetjük ezt másfajta, lineáris függvénytől különböző függvények esetén is.

3. Vizsgáljuk a függvény zérushelyét, szélsőértékét (és monotonitását) a *Graph* program segítségével! (Ingyenes matematikai szoftver, letölthető a www.padowan.dk oldalról.) A program többek között magyar nyelvű menüvel is futtatható, a kívánt nyelvi környezet a *Szerkesztés* → *Beállítások* (angol nyelvű környezetben az *Edit* → *Options*) menüpontban választható ki.

Segítség

– A programban a *Függvény* → *Függvény beszúrása* menüpontban adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát és a függvény értelmezési tartományát, ügyelve a szintaxisra (például tizedes pontot kell használnunk, a négyzetgyökfüggvény neve *sqrt*(), az abszolútérték-függvény neve *abs*(), a hatványkitevőt az AltGr+3 billentyűkombináció lenyomását követően lehet beírni, pl. így: x^5)! Állítsuk be a grafikon színét, vonalvastagságát!

– Jelöljük meg a vizsgálni kívánt függvényt és indítsuk el a *Számítások* menüpontban a *Számítás*-t. Ekkor megjelenik egy segédtáblázat (jellemzően a képernyő bal alsó részén).

– A segédtáblázatban az *Illesztés* legördülő menüjében kiválaszthatjuk, hogy milyen vizsgálatot szeretnénk. Például a zérushely kereséséhez az „*x tengelyhez*” sort kell választani. Ezután a kiválasztott függvény grafikonján egérrel kattintva a zérushely közelében, a program azonnal kiírja a segédtáblázatban a zérushelyet (és a „zérushelyhez” tartozó helyettesítési értéket, továbbá az adott helyen az első és második derivált értékét is, ha ezek léteznek).

4. Egyenlet és egyenlőtlenség (grafikus) megoldására akár a *Graph*, akár a *GeoGebra* program is használható.

Segítség

Egyismeretlenes egyenlet, egyenlőtlenség megoldása:

– Ábrázoljuk a kiválasztott program segítségével az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel definiált függvényeket (a megfelelő értelmezési tartományon).

– Ha az egyenlet egyik oldalán a 0 áll, akkor olvassuk le az ábrázolt függvény zérushelyét; ha nem, akkor az ábrázolt két függvény metszéspontjának (metszéspontjainak) első koordinátája adja az egyenlet megoldását.

– Az egyenlet megoldásának ismeretében az egyenlőtlenség megoldása értelemszerűen adódik.

5. Keressük meg a háromszögek nevezetes pontjait, vonalait a *GeoGebra* program segítségével!

Segítség

– Vegyünk fel a síkon három pontot, *A*-t, *B*-t és *C*-t. A *Sokszög* ikon segítségével megrajzolhatjuk az *ABC* háromszöget, ha sorba kattintunk az *A*, *B*, *C* és végül újra az *A* pontra.

– A pontokat definiáló ikonok alatt találjuk a *Felezőpont* ikont. A nevezetes ponthalmazokat létrehozó ikonok közt találjuk azokat, amelyek segítségével egy adott pontból egy egyenesre *merőlegest* állíthatunk, *szakaszfelező merőlegest* vehetünk fel, *szögfelezőt* rajzolhatunk. Kört rajzolhatunk pl. a középpont és egy kerületi pont megadásával.

– A *Mozgatás* ikonra kattintva tudjuk változtatni az objektumokat. Kattintsunk a *Mozgatás* ikonra, majd az egér gombját lenyomva tartva mozgathatunk a síkon egy pontot. Ekkor a ponttal együtt elmozdul az összes olyan objektum is, amelyet ennek a pontnak a felhasználásával hoztunk létre. A háromszög csúcsainak mozgatásával megfigyelhetjük, hol helyezkednek el különböző háromszögek esetén a megszerkesztett nevezetes pontok, vonalak.

6. A geometriai transzformációk tulajdonságainak vizsgálata történhet *GeoGebra* program segítségével is.

Segítség

– Adjuk meg a transzformáció jellemző adatát (a tükrözés / forgatás középpontját, vagy a tükrözés tengelyét, vagy az eltolás vektorát) és a transzformálni kívánt pontot (vagy akár egy egész síkidomot, esetleg egy külső forrásból importált képet).

– A menüsor alatt található *ikonok* közül gördítsük le a *transzformációs ikont*, válasszuk ki a kívánt transzformációt, kattintsunk rá. Ekkor az ikon ábrája a kívánt transzformációnak megfelelően megváltozhat (alaphelyzetben a tengelyes tükrözés ikonja látható). A képernyő alján megjelenik, hogy milyen sorrendben kell az objektumokra kattintani a transzformáció végrehajtásához.

– Egérrel jelöljük ki a transzformálni kívánt objektumot, kattintsunk a transzformáció ikonjára, majd a transzformációt definiáló objektumra (pontra, egyenesre vagy vektorra). Ekkor a program a kiválasztott objektumon végrehajtja a kívánt transzformációt. (Forgatásnál előbb még kéri a forgatás irányát és szögét is.)

– Változtassuk folyamatosan a transzformációt definiáló objektumot, és figyeljük meg, hogyan változik meg az eredeti és a transzformált objektum kölcsönös helyzete.

– Maradjon változatlanul a transzformációt definiáló objektum, és változtassuk folyamatosan a transzformálni kívánt objektumot. Figyeljük meg, hogyan változik a képalakzat.

7. Pontdiagram (vonaldiagram) készíthető *Graph* programmal is.

Segítség

– Válasszuk a *Függvény* → *Pontsor* beszúrása menüpontot.

– A felugró ablak táblázatának „*x*” jelű oszlopába gépeljük be az *x* tengelyen ábrázolni kívánt értékeket, az „*y*” jelű oszlopába pedig a hozzájuk tartozó értékeket.

– Válasszuk ki a vizuális megjelenés paramétereit.

– Ha kívánjuk, akkor vonaldiagramként is megjeleníthetjük a táblázat adatait, ehhez az *Interpoláción* belül válasszuk a *Lineáris* opciót, és adjuk meg a pontokat összekötő vonal stílusát is (folytonos vonal, szaggatott stb.).

TARTALOM

A tankönyv témakörei 3

BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA

39 A sík geometriája 4
40 Általános és szimmetrikus háromszögek 8
41 Pitagorasz tétele 12
42 Különleges derékszögű háromszögek 16
43 Távolságok 20
44 A kör 26
45 A háromszög nevezetes vonalai és pontjai I. 30
46 A háromszög nevezetes vonalai és pontjai II. 34
47 Gyakorlás 38
48 Thalész tétele 40
49 A Thalész-tétel alkalmazásai 44
50 Háromszögek kerülete és területe 46
51 Gyakorlás, tudáspróba 50
Témazáró feladatgyűjtemény 52

FÜGGVÉNYEK

52 Táblázatok 56
53 Diagramok 60
54 Változások ábrázolása 66
R Grafikonok a mindennapokban 70
55 A függvény fogalma 72
56 Készítsünk grafikont! 76
57 Az egyenes arányosság és a fordított arányosság függvénye 80
58 Egyenesek meredeksége 84
59 Lineáris függvények 88
60 Abszolútérték-függvény 92
61 Függvények jellemzése 96
62 Szélsőértékek 100
63 Másodfokú függvény és a négyzetgyök-függvény 104
64 Gyakorlati feladatok 110
65 Egyenletek grafikus megoldása 112
66 Egyenlőtlenségek 114
R Kisebb, nagyobb, egyenlő 118
67 Abszolút értékes egyenletek 122
68 Gyakorlás, tudáspróba 126
Témazáró feladatgyűjtemény 128

EGYBEVÁGÓSÁG, NÉGYSZÖGEK

69 Forgatás és középpontos tükrözés 132
70 Vektorok és az eltolás 136
71 Tengelyes tükrözés 140
72 Szerkesztések 144
R Egybevágósági transzformációk a gyakorlatban 146
73 Szimmetrikus négyszögek 148
74 Nevezetes négyszögek területe 152
75 Gyakorlás 156
R Érdekes feladatok 158
R Lakásfelújítás 160
76 Gyakorlás, tudáspróba 162
Témazáró feladatgyűjtemény 164

R Játékok 166
A feladatok végeredményei 168
Számítógépes programok használata 172

Képjegyzék:

Grafika (Létai Márton): 9., 15., 19., 24., 30., 57., 111., 118., 119., 120., 132., 154., 158., 167.

Flickr: 26., 47., 66., 69., 78., 80., 90., 136., 147., 148., 158.

Shutterstock: 5., 14., 21., 26., 39., 104., 112., 118., 155.

Pixabay: 12., 16., 24., 25., 31., 33., 34., 37., 51., 84., 85., 92., 114., 116., 148., 152., 154., 163., 165.

Wikimedia: 43., 66., 76.