OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

Matematika

tankönyv

8

transzformáció

medián

százalék

négyzetgyök

pénzügyek

valószínűség

négyzetszám

logika

szerkesztőprogram

Pitagorasz-tétel

hatvány

hasáb

középpontos tükrözés

módusz



MATEMATIKA 8. TANKÖNYV

OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2022. 07. 18-tól 2027. 08. 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/2285-7/2022. számú határozattal.
A tankönyv megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült – 2020. 01. 31. után kiadott matematika tantárgy kerettantervének.
A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Szentes Katalin

Tananyagfejlesztők: Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné

Kerettantervi szakértő és lektor: Hegyi Györgyné, Kulman Katalin

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztette: dr. Wintsche Gergely

Fedélterv: Slezák Ilona, Bánáti János
A könyvben található szakábrákat Szalóki Dezső készítette.
A könyv illusztrációit Kemény Zsuzsa készítette.
Fotók
Borító: © Shutterstock Képügynökség
5–7. oldal: Címerek, Public domain
50. oldal: Justus Sustermans: Galileo Galilei portréja (1640, National Maritime Museum, London) © CULTiRiS / AKG-Images / Rabatti – Domingie
68. oldal: Sumer számolótábla. Wikipédia / saját mű / Bill Casselman / CC BY-SA 3.0, CC BY 2.5
81. oldal: Munkácsy Mihály: Ásító inas (1868–1869), Szépművészeti Múzeum – Magyar Nemzeti Galéria, Budapest
81. oldal: Leonardo da Vinci: Mona Lisa (1503, Louvre, Párizs) © CULTiRiS/AKG-Images
81. oldal: Rembrandt van Rijn: Éjjeli vadászat (1642), Rijksmuseum, Amszterdam, Public domain
81. oldal: Munkácsy Mihály: Rőzsehordó nő (1873), Szépművészeti Múzeum – Magyar Nemzeti Galéria, Budapest
81. oldal: Francisco de Goya y Lucientes: A korsós lány (1808–1812 között), Szépművészeti Múzeum – Magyar Nemzeti Galéria, Budapest
Sánta Balázs fotói: 108., 109., 110., 114., 115., 123., 127., 131., 156., 157., 158., 161., 163., 205. oldal
A könyvben található további képek: © Shutterstock Képügynökség.
© Shutterstock szerkesztői képek: 14. oldal középső: muzsy, 16. oldal: eddtoro, 79. oldal felső: xabi_kls, alsó: Caio Pederneiras, 103. oldal felső sor első: Nina Alizada, felső harmadik: Vered Barequet, 107. oldal jobb oldali: Kutasi Xenia, 128. oldal: Kit Leong, 166. oldal: 4 kép: Attila JANDI, 187. oldal: Vivvi Smak, 192. oldal: maudanros
Large: 44., 53., 59., 117. oldal felső sor első
ThinkstockPhotos: 60. oldal

© Oktatási Hivatal, 2022

ISBN 978-963-436-402-3

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu
A kiadásért felel: Brassói Sándor elnök • Raktári szám: OH-MAT08TB
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Karácsony Orsolya • Grafikai szerkesztő: dr. Valaczka Bence
Nyomdai előkészítés: Fried Katalin
Terjedelem: 26,78 (A/5) ív, tömeg: 573 gramm • 1. kiadás, 2023

Fotók:
© Shutterstock képügynökség
© CULTiRiS / AKG-Images
A könyvben felhasználtuk Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva Matematika 8. című művét. Raktári szám: AP-080808

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001. számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen

Felelős vezető: György Géza vezérigazgató

A nyomdai megrendelés törzsszáma



Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz!
(Joseph Joubert francia filozófus, 1754–1824)

Kedves gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó feladatgyűjteményt nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelmeit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük:

TUDNI KELL!

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:

Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal, vagy a matematikát magasabb óraszámban tanuló csoportoknak, érdeklődőbb tanulóknak javasoljuk.

Amit korábban tanultatok és már tudnotok kellene.

Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el:

1. Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapfeladat, ezt meg kell tudnotok oldani a továbbhaladáshoz.

2. Az új ismeret alkalmazását, tudásotok rögzítését, elmélyítését segítő feladat.

3. Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.

4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.

Internettel támogatott feladatok.

A fentieken kívül, ha egy-egy részfeladat nehezebb, gondolkodtatóbb a többinél, így jelöljük: *b)*

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold!” típusú feladatoknál mindig a füzetetekben dolgozzatok!

A feladatok szövegéből az is kiderül, hogy melyeket ajánljuk **páros** vagy **csoportmunkára**.

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

A tankönyv utolsó fejezete egy összefoglalás, amely egyben segíti a középiskolai felvételitek sikeres megírását is matematikából.

Ezen kívül javasoljuk még, hogy oldjátok meg a korábbi évek felvételi feladatsorait, és megoldásaitokat ellenőrizzétek a megoldókulcs segítségével! Ezek az interneten szabadon hozzáférhetők.

Eredményes tanulást kívánunk: *a szerzők és a kiadó*

Gondolkodjunk együtt!

Halmazok

Halmazokba csoportosíthatjuk tulajdonságaik szerint a dolgokat. Adottnak tekintünk egy halmazt, ha bármely elemről egyértelműen eldönthető, hogy a halmazhoz tartozik vagy sem. Két halmaz egyenlő, ha elemeik megegyeznek.

1. példa

Válasszuk ki, hogy az alábbiak közül melyik tekinthető halmaznak?

- kedvenc állatok
- delfinek
- emlősök

Megoldás

A delfinek és az emlősök halmaznak tekinthetők, mert minden állatról egyértelműen eldönthető, hogy a halmaz eleme vagy sem (delfin, illetve emlős). A kedvenc állatokat nem tekinthetjük halmaznak, mert például az óriáskígyó lehet kedvenc állata valakinek, sokaknak pedig nem az.

Jelölések

A halmazokat általában nyomtatott nagybetűvel szoktuk jelölni.

Jelöljük a magánhangzók halmazát M-mel!

Azt, hogy az *ű* betű **eleme** a magánhangzók halmazának, így jelöljük: $ű \in M$.

Azt, hogy a *c* betű **nem eleme** a magánhangzók halmazának, így jelöljük: $c \notin M$.

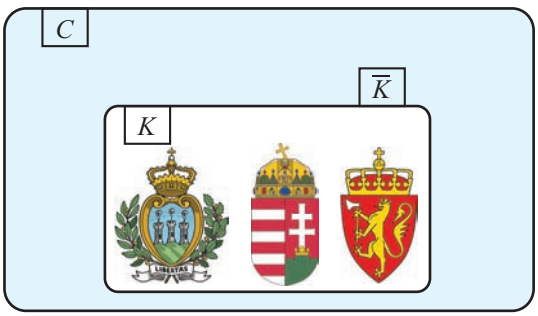
2. példa

A képeken országok címerei láthatók. Ezek alkotják az alaphalmazt. Jelöljük C-vel!

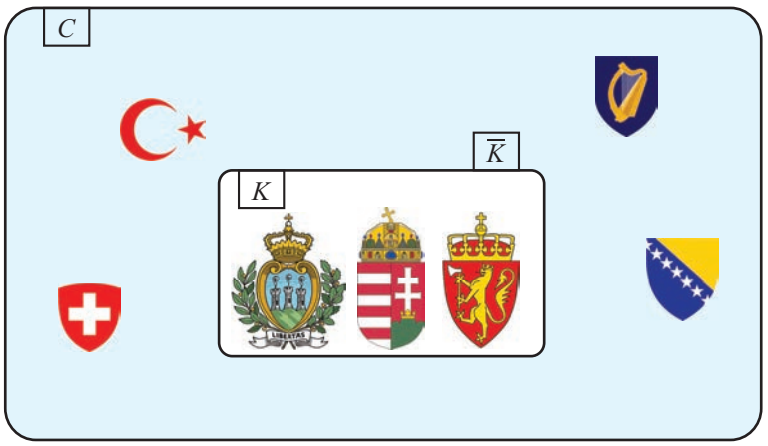


Jelöljük K-val azoknak a címereknek a halmazát, amelyeken korona van, és P-vel, amelyekben szerepel a piros szín!

a) Helyezzük el az alábbi halmazábrában a fenti címerek közül azokat, amelyeken korona van!



Azoknak a címereknek a halmazát, amelyeken nincs korona, a K halmaz kiegészítő, más szóval komplementer halmazának nevezzük. Jele: $\overline{K}$. A halmazábrán kékkel színeztük.

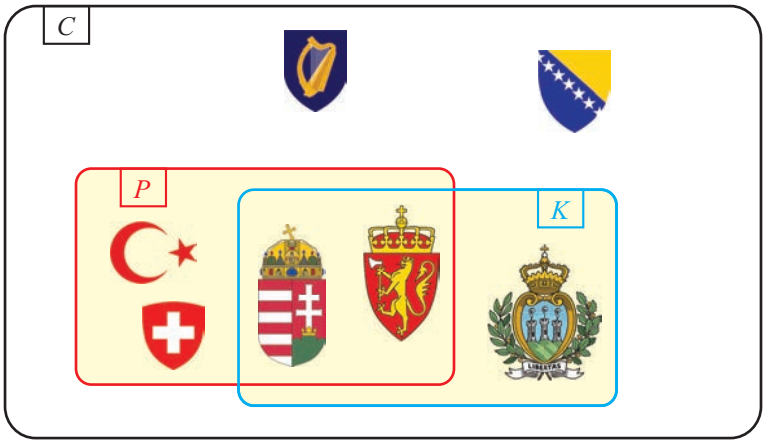


A K halmaznak a C alaphalmazra vonatkozó **kiegészítő** (komplementer) **halmaz**án értjük azt a $\overline{K}$ halmazt, melynek eleme az alaphalmaz összes olyan eleme, amely nem eleme a K halmaznak.

Négy olyan címer van, amely nem eleme a K halmaznak.

A jelöléssel: $\overline{K} =$ {  }

b) Melyek azok a címerek, amelyeken van korona, **vagy** van pirossal színezett részük?



Öt olyan címer van, amelyre teljesül **legalább az egyik** tulajdonság.

Két halmaz **unió**jának (egyesítésének) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyiknek elemei.

A P és K halmaz uniójának jele: $P \cup K$. (Olvasd: „P unió K”, vagy „P uniója K-val”.)

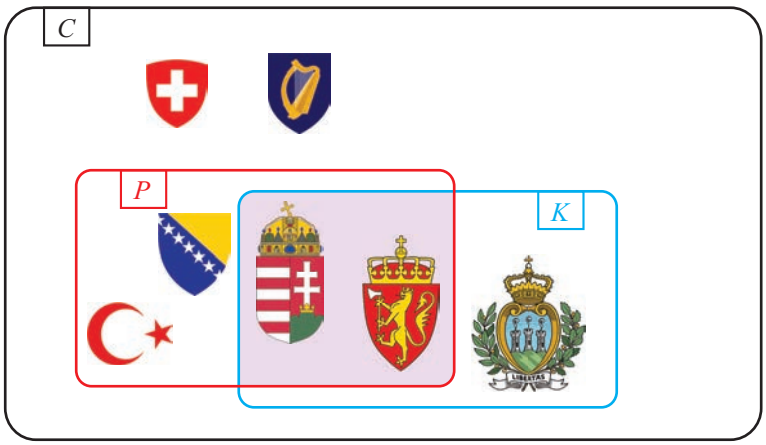
A halmazábrán sárgával színeztük.

$P \cup K =$ {  }

Jelöljük a magyar címert m-mel! A magyar címer eleme a két halmaz egyesítésének.

Jelekkel ezt így írjuk le: $m \in P \cup K$.

c) Melyek azok a címerek, amelyeken van korona, **és** van pirossal színezett részük?



Két olyan címer van, amelyre **mindkét** tulajdonság teljesül.

Két halmaz **metszete** (közös része) pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyeket az egyik halmaz is és a másik halmaz is tartalmaz.

A P és K halmaz metszetének jele: $P \cap K$. (Olvasd: „P metszet K”, vagy „P metszete K-val”.)

A halmazábrán rózsaszínnel színeztük.

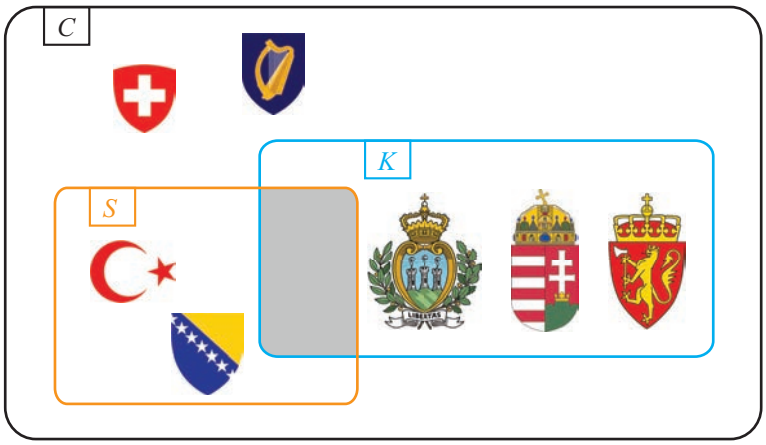
$P \cap K =$ 

A magyar címer eleme a két halmaz metszetének.

Jelekkel ezt így írjuk le: $m \in P \cap K$.

d) Jelöljük S-sel azoknak a címereknek a halmazát, amelyeken van csillag! Melyek azok a címerek, amelyeken van korona és csillag is?

Az alaphalmaz elemei között nincs ilyen címer.



Ha két halmaznak nincs közös eleme, vagyis metszetük üres halmaz, akkor a két halmazt **diszjunkt** (elkülönült) **halmaz**oknak nevezzük.

Az üres halmaz jele: $\varnothing$

A példa két halmazának metszete üres halmaz. Jelekkel: $S \cap K = \varnothing$

Feladatok

1. Az alábbi meghatározások a 8. b osztály tanulóira vonatkoznak. Válaszd ki, hogy az alábbiak közül melyik tekinthető halmaznak:

a) az osztályba járó lányok; *b)* a magas fiúk; *c)* a valamilyen egyesületben sportolók!

2. Melyik halmaznak soroltuk fel az összes elemét?

március 15., augusztus 20., október 23.

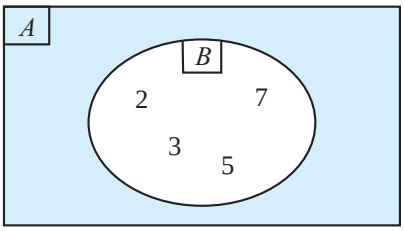
$M = \{\text{Munkaszüneti napok}\}$ $N = \{\text{Nemzeti ünnepek}\}$ $Ü = \{\text{Ünnepnapok}\}$

3. Az A alaphalmaz elemei a 10-nél kisebb pozitív egész számok.

a) Add meg a B halmaz kiegészítő (komplementer) halmazának elemeit!

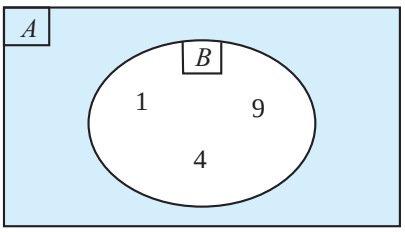
Hogyan jellemeznéd a B halmaz elemeit? Több jó válasz is lehetséges.

- {8-nál kisebb pozitív egészek}
- {Egyjegyű prímszámok}
- {Pontosan két osztójuk van}



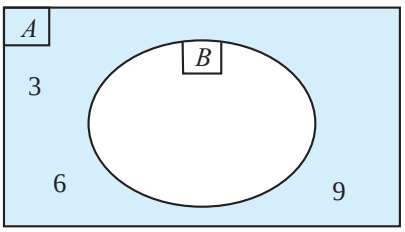
b) Add meg a B halmaz kiegészítő (komplementer) halmazának elemeit!

Hogyan jellemeznéd a B halmaz elemeit?

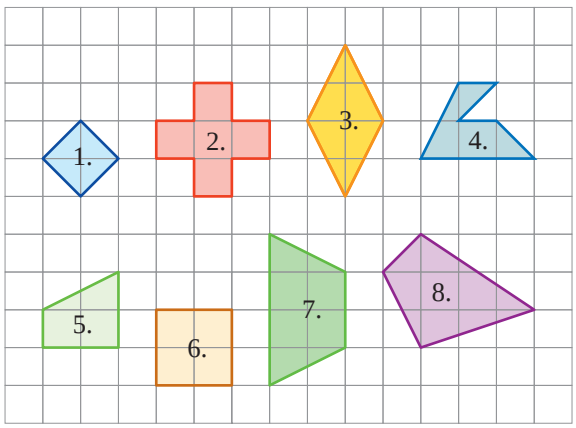


c) Megadtuk a $\overline{B}$ halmaz elemeit. Add meg a B halmaz elemeit!

Hogyan jellemeznéd a $\overline{B}$ halmaz elemeit?



4. Az alaphalmaz elemei az ábrán látható, 1-től 8-ig számozott sokszögek. Tekintsük az alábbi halmazokat:



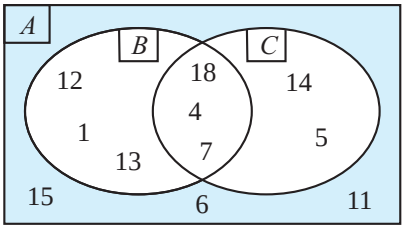
$E = \{\text{Egyenlő oldalú sokszögek}\}$

$V = \{\text{Olyan négyszögek, amelyeknek van két egyenlő szöge}\}$

Add meg azoknak a sokszögeknek a sorszámát, amelyek elemei a megadott halmazoknak!

a) E *b)* V *c)* $\overline{E}$ *d)* $E \cup V$ *e)* $E \cap V$

5. *a)* Sorold fel a füzetedben a megadott halmazok elemeit!



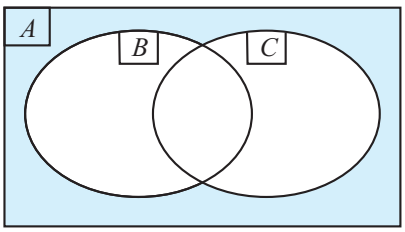
$B =$

$\overline{B} =$

$B \cup C =$

$B \cap C =$

b) Készítsd el a füzetedben az alábbi halmazábrát! Írd be a halmazábrába a megadott számokat a halmazok ismeretében!



$A = \{10\text{-nél kisebb pozitív egész számok}\}$

$B = \{1; 3; 4; 5; 7; 9\}$

$C = \{1; 3; 5; 7\}$

6. Európai országok zászlói szerepelnek a képen. Ez legyen az alaphalmaz!

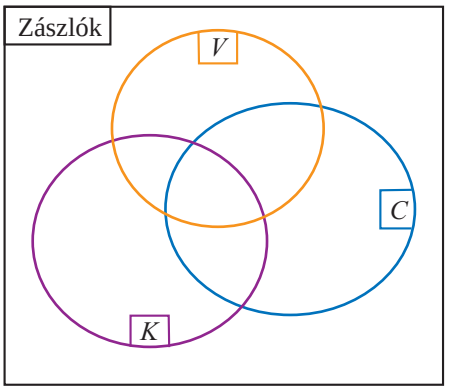
Szlovákia	**Monaco**	**Svájc**	**San Marino**	**Hollandia**
				
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Belgium	**Vatikán**	**Ausztria**	**Andorra**	**Albánia**
				
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**

V jelöli azoknak a zászlóknak a halmazát, amelyek vízszintes sávozásúak.

K jelöli azoknak a zászlóknak a halmazát, amelyeken pontosan kétféle a sávok színe.

C jelöli azoknak a zászlóknak a halmazát, amelyeken címer is látható.

a) Készítsd el a füzetedben az alábbi halmazábrát, és írd be a zászlók sorszámát a halmazábra megfelelő részébe!



A zászlók sorszámával válaszolj a további kérdésekre! A leíráshoz használd a tanult jeleket!

b) Mely zászlók tartoznak a V halmaz kiegészítő (komplementer) halmazába?

c) Mely zászlók tartoznak a V halmaz és a C halmaz metszetébe?

d) Mely zászlók rendelkeznek mind a három tulajdonsággal?

Jelekkel: $V \cap C \cap K = ?$

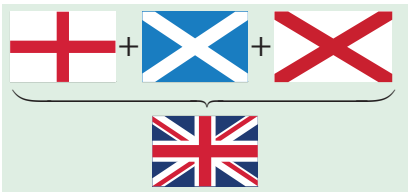
e) Mely zászlók tartoznak a V halmaz és K halmaz egyesítésébe (uniójába)?

f) Mely zászlók tartoznak a három halmaz egyesítésébe (uniójába)?

Jelekkel: $V \cup C \cup K = ?$

@ A Union Flag (ejtsd: junion fleg), azaz az Egyesült Királyság zászlója három, nagy hagyományokkal rendelkező állam lobogójának összemontírozásával jött létre.

Melyik ez a három állam?



Logikai feladatok

Az állítás olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Az állítás és a kijelentés ugyanazt jelenti. A logika állításokat (kijelentéseket) vizsgál.

1. példa

Melyik kijelentő mondatról tudjuk eldönteni, hogy állítás-e?

A) A róka szebb, mint a holló.

B) A Földön kívül is élnek értelmes lények.

C) A Déli-sarkvidék neve Antarktisz.

D) 2021-ben a Föld legnépesebb országa Kína volt.

E) Finnország fővárosa Bagdad.

Megoldás

A *C)* és a *D)* mondatok tartalmáról tudjuk, hogy igazak.

Az *E)* mondat tartalmáról tudjuk, hogy hamis, mert Finnország fővárosa Helsinki.

Az *A)* mondat tartalmáról nem tudjuk eldönteni, hogy igaz vagy sem, mert ízlés kérdése, hogy kinek melyik állat tetszik jobban.

A *B)* mondat tartalmáról kellő ismeret híján nem tudjuk eldönteni, hogy igaz-e vagy sem. Tehát a *C)*, *D)* és *E)* mondatok állítások, az *A)* és *B)* mondatok nem.

2. példa



Győző, Piroska, Lajos és Zoli közül valaki elrontotta kisöccsük karácsonyra kapott sárga autóját. Édesapjuk megpróbálta kideríteni az igazságot. A gyerekek ezeket mondták:

Győző: Lajos volt.

Piroska: Én hozzá se nyúltam az autóhoz.

Lajos: Zoli volt.

Zoli: Lajos hazudik.

Ki rontotta el az autót, ha a négy gyerek közül egy hazudott, a másik három pedig igazat mondott?

Megoldás

Győző és Lajos nem mondhattak egyszerre igazat, hiszen egymásnak ellentmond az állításuk. Ugyanez igaz Lajos és Zoli állítására is. Ezért Lajos hazudott, a többiek igazat mondtak.

Lajos rontotta el az autót.

3. példa

Egy nemzetközi futóverseny előtt öt női versenyző így nyilatkozott az újságíróknak:

Anna: Az első három között leszek.

Barbara: Én nyerek.

Cecília: Legyőzöm Annát.

Daniella: Nem tudom Barbarát legyőzni.

Edit: Cecília vagy Daniella fog nyerni.

Hogyan alakult a sorrend, ha a verseny végére egyiküknek sem lett igaza?

Megoldás

Oldjuk meg feladatot táblázat segítségével! Húzzuk ki azokat a helyezést jelölő mezőket, amelyek a szöveg alapján nem jöhetnek számításba az egyes versenyzők esetén!

Az ábráról leolvasható, hogy **Cecília** csak az **5.** lehet, **Anna** a **4.**

Csak **Edit** lehet az **1.**, **Daniella** a **2.**, mert csak így győzhette le Barbarát. **Barbara** pedig a **3.** helyen végzett.

helyezések / versenyzők	1.	2.	3.	4.	5.
Anna					
Barbara					
Cecília					
Daniella					
Edit					

Feladatok

1. Julinak, Marinak, Norbinak és Ferinek is van egy-egy állatkája: egy cica, egy kutya, egy aranyhal és egy kanári. Mari állata szőrös, Ferié pedig négylábú. Norbi madarat tart. Juli és Mari nem tart cicát.

Az alábbi állítások közül melyik nem igaz?

A) Ferié a kutya. *B)* Norbié a kanári. *C)* Julié az aranyhal.

D) Ferié a cica. *E)* Marié a kutya.

2. Egy családi nyaraláson a gyerekek ugyanazzal a bankkártyával vásárolhattak. Az ötödik napon édesapjuk érdeklődött, hogy mennyi pénz van még a bankkártyán. A gyerekek ezeket a válaszokat adták:

Andris: Még legalább 10 000 Ft.

Bea: 10 000 Ft-nál kevesebb van már rajta.

Csilla: Van még rajta pénz.

Hány forint van a bankkártyán, ha csak az egyik gyerek állítása igaz?

3. Négy testvér közül az egyik édesapjuk laptopján játszott, és véletlenül ráborította az üdítőitalát a gépre. Édesanyjuk megpróbálta kideríteni, melyik fiú tette. A gyerekek ezeket a válaszokat adták:

András: Nem én voltam. Béla: Én sem.

Csaba: Dani borította rá. Dani: Béla volt.

Kiderült, hogy az egyikük füllentett, a többiek igazat mondtak. Ki volt a tettes?

4. Franciska, Györgyi, Júlia és Katalin ugyanabba az iskolába járnak. Mindegyikük sportoló. A négy lány mindegyike sikeresen szerepelt az idei versenyeken. A tanév végén „Az iskola jó tanulója – jó sportolója” elismerő oklevelet kapták. Elsőként Magyart, másodikként Júliát, harmadikként Kovácsot és negyedikként Györgyit szólították a díj átvételére. Magyar kézilabdázik, Franciska úszó, Györgyi tájfutó, Szép pedig lovagol. A négy lány közül Szabó a legjobb tanuló.

Milyen teljes név állt a lányok oklevelén?

5. Hatalmas mennyiségű árut loptak el egy áruház raktárából. A tettes vagy tettesek autóval szállították el a zsákmányt. Három jól ismert bűnözőt vittek be a rendőrségre, Alfát, Bétát és Gammát. A következők derültek ki:

1. Alfán, Bétán és Gammán kívül senki más nem vett részt a rablásban.
2. Gamma sohasem dolgozik Alfa nélkül.
3. Béta nem tud autót vezetni.

Bűnös-e Alfa?

★ **6.** Tizenöt fős társaság ül egy kerek asztalnál, és mindenki azt állítja, hogy mindkét szomszédja hazudós. Azt is tudjuk, hogy a hazudósok mindig hazudnak, az igazmondók mindig igazat mondanak. A társaság minden tagja tudja mindkét szomszédjáról, hogy igazmondó vagy hazudós. Legalább hány igazmondó ül az asztal körül?

Logika, halmazok

Gyakran a kijelentésekből az „**és**” illetve a „**vagy**” kötőszavak felhasználásával úgynevezett összetett állításokat képezünk.

Az **és** kötőszót a hétköznapi szóhasználatban és a matematikában ugyanúgy használjuk.

Nézzünk erre példákat!

Magyarország az északi félgömbön és Európában található.

A 15 osztható 3-mal és 5-tel.

Az ilyen összetett állítás csak akkor igaz, amikor a benne szereplő két állítás mindegyike igaz, minden más esetben hamis.

A **vagy** kötőszó sokféle értelemben használatos a magyar nyelvben. Ezek közül kettőre nézzünk példát!

Kacér Vica vasárnap 9-kor **vagy** Deltás Bécivel megy evezni, **vagy** Sebes Gyuszival motorozik.

Ebben a mondatban a „vagy-vagy” kötőszó helyett a „pontosan az egyik” kifejezés írható, mivel Vica egyszerre, ugyanabban az időben nem lehet két különböző helyen.

Két szám szorzata nulla, ha az egyik **vagy** a másik tényező nulla.

Ebben a mondatban a „vagy” kötőszó helyett a „legalább az egyik (a kettő közül)” kifejezés írható. Megállapodhatunk abban, hogy az egyszer írt, illetve mondott „vagy” kötőszót – a hétköznapi használattól eltérően – a matematikában a „legalább az egyik (a kettő közül)” kifejezés helyett használjuk.

Az ilyen összetett állítás csak akkor hamis, amikor a két állítás mindegyike hamis, minden más esetben igaz.

1. példa

Az állításokat ezekről a logikai lapokról írtuk.



Melyik állítás hamis?

a) A lapok lyukasak és zöldek.

b) A lapok nem kékek és nem sárgák.

c) A lapok lyukasak vagy zöldek.

d) A lapok lyukasak vagy nagyok.

Megoldás

a) Hamis, mert van olyan lap, amelyikre nem teljesül egyszerre mindkét tulajdonság. *Például:* nagy zöld sima négyzet.

b) Igaz, mert mindkét tulajdonság igaz a lapokra.

c) Igaz, mert minden lapra legalább az egyik tulajdonság igaz.

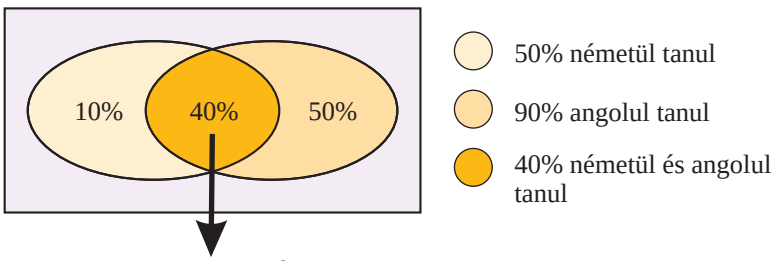
d) Hamis, mert van olyan lap, amelyikre egyik tulajdonság sem igaz. *Például:* kicsi zöld sima háromszög.

2. példa

Egy osztály fele németül tanul, 90%-a angolul. 16 gyerek mindkét nyelvet tanulja. Hányan járnak az osztályba, ha mindenki tanul legalább egy idegen nyelvet?

Megoldás

Az osztály felének (50%-ának) és a 90%-ának az összege 140%. Ez 40%-kal több, mint a 100%. A 40%-nyi többlet abból adódik, hogy a mindkét nyelvet tanuló gyerekeket kétszer számoltuk. Ők 16-an vannak. Ha az osztály tanulóinak 40%-a 16 gyerek, akkor 10%-a 4 fő, 100%-a 40 fő.



40%	16 fő
10%	4 fő
100%	40 fő

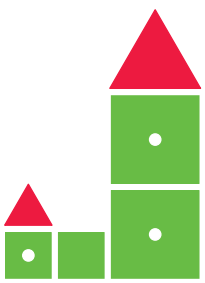
Válasz: 40 tanuló jár az osztályba.

Ellenőrizzünk! 20-an tanulnak németül, 36-an angolul: $20 + 36 - 16 = 40$.

Jól oldottuk meg a feladatot!

Feladatok

1. Az állításokat ezekről a várat alkotó logikai lapokról írtuk.



Melyik állítás igaz, melyik hamis?

a) A lapok pirosak és simák.

b) A lapok zöldek vagy simák.

c) A lapok nem körök és nem sárgák.

d) A nagy lapok lyukasak vagy zöldek.

2.



A **hivatalos nyelv** az az egy vagy több nyelv, amelyet egy adott állam a hivatalos működése során használ. Kanadának két hivatalos nyelve van, az angol és a francia. Ott az emberek 86%-a beszél angolul, 32%-a pedig franciául.

A Kanadában élő emberek hány százaléka beszéli mindkét hivatalos nyelvet, ha legalább az egyiket minden lakos beszéli?

3. Egy osztályban 40 tanuló van. 14 tanuló kézilabdázik, 36 kosárlabdázik. Minden tanuló legalább az egyik sportágat űzi. Az osztály hány százalékát teszik ki azok a tanulók, akik csak kézilabdáznak?

4. Az iskolának foci- és kosárlabdacsapata van. Az egyik osztályból 7 fiú jár az iskolai focimeccsekre, 10 jár a kosárlabdameccsekre, 3 mind a két sportág meccseit látogatja, de 4 fiú egyáltalán nem jár meccsekre. Hány fiú jár az osztályba?



5. Egy nyolcadikos osztály 35 tanulója között 20 lány van, és 12 olyan gyerek, aki tud keringőzni. Az osztályba járó fiúk közül 7 tud keringőzni. Hány fiú és hány lány nem tud keringőzni az osztályból?



6. A 40-nél nagyobb, de 60-nál kisebb számok közül hány olyan van, amelyik 3-mal vagy 4-gyel osztható?

7. Egy versenyen az iskola tanulóinak 20%-a indult. Az indulók két feladatot kaptak. Az elsőt a versenyzők 60%-a, a másodikat 65%-a oldotta meg. Minden induló legalább egy feladatot megoldott. Csak a másodikat 80-an oldották meg.

Hányan járnak az iskolába?

(Varga Tamás Matematikaverseny, 7. osztály)

8. Hány olyan kétjegyű szám van, amely

a) osztható 3-mal és 4-gyel,

b) osztható 3-mal vagy 4-gyel,

c) nem osztható sem 3-mal, sem 4-gyel?

★ **9.** Egy versenyen két feladatot kellett megoldani. Hatan voltak, akik mindkét feladatot megoldották, és hatan, akik egyiket sem tudták megcsinálni. A legalább egy feladatot megoldók 75%-a oldotta meg az elsőt, 50%-a a másodikat. Hányan vettek részt a versenyen, és hányan voltak, akik az első feladatot megoldották, de a másodikat nem?

Skatulyaelv

1. példa

Egy kotlós alatt tyúk- és kacsatojások vannak. Ha tyúktojást akarok kivenni a kotlós alól, akkor legkevesebb ötöt, ha kacsatojást, akkor hatot kell kivennem. Hány tojáson ül a kotlós?



Megoldás

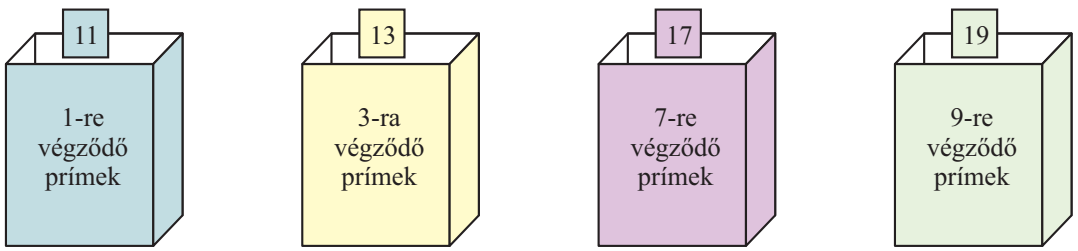
Mivel legrosszabb esetben 5 tojást kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen azok között tyúktojás, ezért kacsatojásból 4 van. Hasonló okok miatt tyúktojásokból 5 van. A kotlós tehát 9 tojáson ül.

2. példa

Igaz-e, hogy öt, legalább kétjegyű prímszám közül kiválasztható kettő olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel?

Megoldás

A 10-nél nagyobb prímek utolsó jegye csak 1, 3, 7, illetve 9 lehet. Képzeletben készítsünk négy skatulyát! Az elsőbe azokat a prímeket rakjuk, amelyek 1-re végződnek, a másodikba a 3 végűeket, a harmadikba a 7-re végződőeket és a negyedikbe a 9 végűeket, például a 11-et, a 13-at, a 17-et, a 19-et.



Mivel csak négy skatulya van és öt prím, így lesz legalább egy olyan skatulya, amelyikben két prím van. E kettő különbsége 0-ra végződő szám lesz, tehát osztható 10-zel.

Az ilyen gondolkodási módszert nevezzük **skatulyaelv**nek.

Feladatok

1. A 24 fős osztályunkban az a szokás, hogy a hónap elején felköszöntjük az összes olyan gyereket, aki abban a hónapban született.

a) Biztosan lesz-e olyan hónap, amikor legalább 2 gyereket köszöntünk fel?

b) Lehet-e olyan hónap, hogy nincs kit felköszönteni?

2. Egy zacskóban 10 zselés és 10 mogyorós drazsé van, szemre egyformáknak látszanak. Legkevesebb hány darabot kell kivennie Áronnak, hogy biztosan legyen köztük egy mogyorós és egy zselés is?

3. Egy borosgazda pincéjében 13 palack édes, 9 palack félédes és 5 palack száraz tokaji bor van. A feleség, aki nem tud különbséget tenni a palackok között, hányat vigyen fel a vendégeknek, ha azok azt szeretnék, hogy biztosan legyen köztük

a) édes, *b)* három palack édes, *c)* mindegyik fajtából legalább egy palack,

d) az összes száraz, *e)* édes és félédes, *f)* valamelyik fajtából három palack?

4. Egy fedett kosárban 10 barna, 15 szürke és 20 fehér galamb van. Egyesével engedjük ki őket. Legalább hány galambnak kell kirepülnie, hogy biztosan legyen köztük

a) barna vagy fehér, *b)* barna és fehér, *c)* legalább 12 egyforma színű?

5. A műlovarnő lovas számokat mutat be a cirkuszban.



Egy meglehetősen rendetlen műlovarnő az öltözőszekrényének fiókjában tartja a kesztyűit, igen nagy összevisszaságban: 3 pár sárgát, 3 pár kéket és 3 pár pirosat.

Előadás előtt kialszik a villany az öltözőjében. Legalább hány darab kesztyűt kell találomra kivennie ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy pár ugyanolyan színű, ha a jobbos és balos kesztyű nem egyforma?

6. Egy tálon meggyes, lekváros és túrós bukta illatozik. Legkevesebb 6-ot kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük meggyes. Legkevesebb 7-et kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük lekváros, és 8-at, hogy biztosan legyen köztük túrós. Hány bukta van a tálon?

7. Felírtunk a táblára hét különböző négyzetszámot. Igaz-e, hogy van közöttük két olyan, amelyik ugyanolyan számjegyre végződik?

8. Igaz-e, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel?

★

9. Bizonyítsuk be, hogy

a) három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2-vel,

b) öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható 3-mal,

c) hét egész szám között mindig van négy, amelyek összege osztható 4-gyel!

10. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az 1, 2, 3, …, 25 számok közül úgy, hogy semelyik kettőnek az összege ne legyen osztható 3-mal?

Hányféleképpen?

1. példa

Az idei farsangon öt tánciskolás fiú a görögök néptáncát, a szirtakit mutatta be. A táncot hol egy sort alkotva, hol körben összekapaszkodva járták. Az előadás nagy sikert aratott. Az öltözőben a táncosok kézfogással búcsúztak el egymástól.



a) Hány különböző sorrendben kerülhettek egymás mellé a fiúk, ha egy sort alkottak?

b) Hogyan változik a lehetőségek száma, ha körben táncoltak? A körtáncnál különböző esetnek számít, ha legalább egy táncos fiúnak legalább az egyik oldalán más táncos áll.

c) Hány kézfogást jelent, ha mindenki mindenkivel kezet fogott?

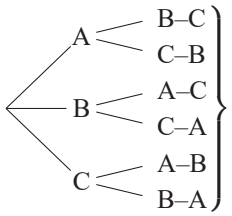
Megoldás

a) A táncosokat jelöljük az ábécé betűivel! Nézzük meg, mi történne, ha kevesebb táncos lenne!

Ha egy táncos van, akkor 1-féle sorrend lehetséges: 1 lehetőség.

Ha két táncos van, akkor $2 \cdot 1$-féle sorrend lehetséges: A–B, B–A. 2 lehetőség.

Ha három táncos van, akkor $3 \cdot (2 \cdot 1)$-féle:



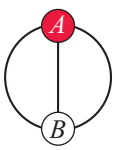
6 lehetőség.

Ha négy táncos van, akkor folytathatnánk a fadiagram felrajzolását, és 24 ágat kapnánk. Szorzással felírva $4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24$ a lehetőségek száma.

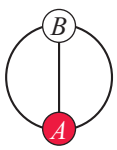
Ha öt táncos van, akkor $5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 24 = 120$-féle lehetőség adódik.

b) Ha körben táncolnak, akkor azt kell meggondolnunk, hogy melyek azok a sorrendek, amelyeket nem lehet megkülönböztetni.

Két fiú táncol:

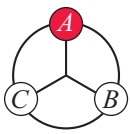


Ha a táncosok éppen egy félkörnyit fordulnak, akkor ezt kapjuk.

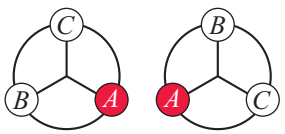


Ebben az esetben is ugyanabban a sorrendben állnak. A két eset között nem teszünk különbséget.

Három fiú táncol:

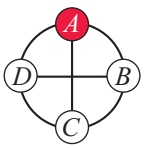


Ha a táncosok harmadfordulatokkal fordulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.

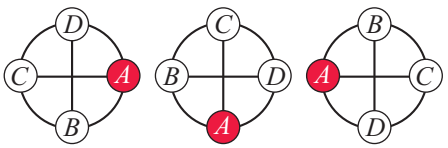


E három eset között nem teszünk különbséget.

Négy fiú táncol:

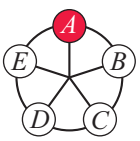


Ha a táncosok negyedfordulatokkal mozdulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.

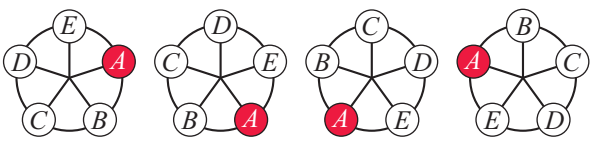


A négy állás között nem teszünk különbséget.

Öt fiú táncol:



Ha ötödfordulatokkal mozdulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.



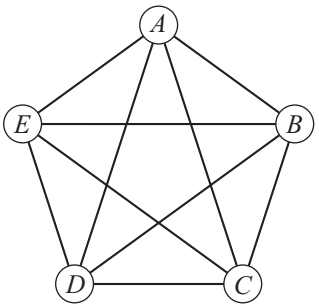
Az öt állás között nem teszünk különbséget.

Ha az öt fiú körben táncol, akkor az egy sorban táncolásnál kapott 120 lehetőségből 5-5 egymástól nem megkülönböztethető. Ezért $120 : 5 = 24$-féleképpen táncolhatnak.

Rövidebb megoldás: Kiválasztunk egy táncost, és megnézzük, hogy a többiek hány különböző módon állhatnak be a körbe. Öt táncos esetén ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

c) Mind az öt fiú 4 társával fog kezet, ez összesen $5 \cdot 4 = 20$ eset. Mivel minden kézfogásnak két résztvevője van, és a kézfogást mindkettőjüknél beleszámítottuk, ezért a 20-at még el kell osztani 2-vel.

A rajzon minden összekötés egy kézfogást jelent. Erről is leolvasható, hogy összesen 10-szer fogtak kezet a fiúk.



2. példa



Öt újonc közül hármat tud magával vinni az edző a tanulócsónakkal.

Hány különböző lehetőség van erre, ha

a) az ülésrend számít,

b) az ülésrend nem számít?

Az oktató minden esetben az első helyen ül.

Megoldás

a) Az első helyre még mind az öt gyereket választhatja az edző. A második helyre már csak a megmaradó négy gyerekből válogathat, a harmadikra pedig már csak három közül.

Ez összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eset.

Válasz: 60 különböző lehetőség van.

b) Ha az ülésrend nem számít, akkor nem teszünk különbséget az alábbi hat eset között.

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. (A csónakba beszálló gyerekeket az ábécé betűivel jelöljük.)

Ugyanez a helyzet, akármelyik három gyereket választja ki az edző.

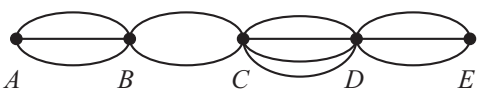
A 60-at el kell osztani 6-tal, mert ugyanaz a három gyerek 6-féle sorrendben tud beülni a csónakba. Ha az ülésrend nem számít, akkor $\frac{60}{6} = 10$ különböző módon ülhetnek be a gyerekek a csónakba.

Válasz: 10 különböző lehetőség van.

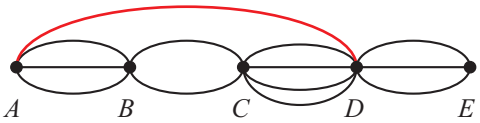
3. példa

Hány különböző útvonalon juthatunk el *A* városból *E* városba, ha csak *E* felé haladhatunk?

a)



b)



Megoldás

a) *A* városból *B* városba 3-féle úton juthatunk el. Innen *C*-be 2 különböző úton érkezhetünk. Ezért *A*-ból *C*-be $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen juthatunk el. Hasonló okoskodással határozhatjuk meg, hogy *D* városba $6 \cdot 4 = 24$-féle útvonalon juthatunk, amely $3 \cdot 2 \cdot 4$. *D*-ből *E*-be 3 út vezet, ezért *A*-ból *E*-be $24 \cdot 3 = 72$-féle útvonalon juthatunk el, amely $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$.

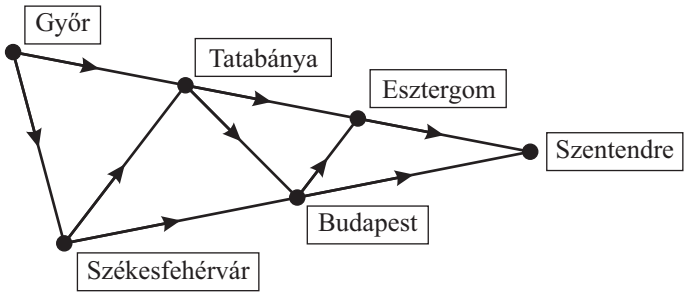
b) A *b)* feladatban az összes olyan útvonalon eljuthatunk *A*-ból *E*-be, mint az *a)* feladatban. Ezektől az utaktól teljesen független útvonalakon haladunk, ha a piros úton indulunk el. *A*-ból *D*-be 1 út vezet, innen *E*-be pedig 3, ezért *A*-ból *E*-be 3-féle olyan útvonalon juthatunk el, amelyik tartalmazza a piros utat.

Válasz: A piros utat is tartalmazó összes útvonal száma így $72 + 3 = 75$, amely $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3$.

4. példa

Sportkörünk kerékpártúrája Győrből indult, és Szentendrén fejeződött be. Minden csapatunk más-más útvonalon jutott el a célállomásra. A térképen látható nyilak mutatják, hogy milyen irányban haladtak a csapatok.

Hány csapat vett részt a kerékpártúrán?

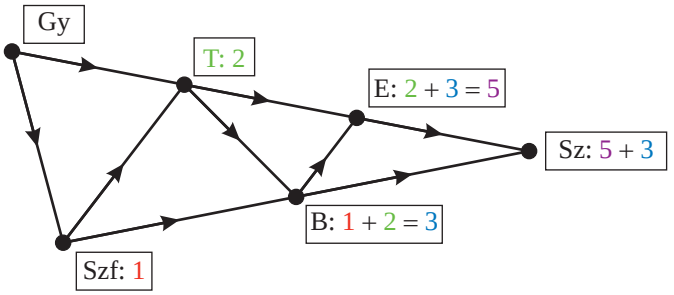


Megoldás

Minden pontba beírtuk, hogy oda hányféle útvonalon juthatunk el.

Tatabányára Győrből és Székesfehérvárról is eljuthatunk.

Budapestre Székesfehérvárról egyféle útvonalon, Tatabányáról az előző 2-féle útvonalon juthatunk el, ezért összesen $2 + 1 = 3$-féleképpen.



Esztergomba Tatabányáról 2-féle útvonalon, Budapestről 3-féle útvonalon érkezhetünk, ezért összesen $2 + 3 = 5$-féleképpen.

Szentendrére Budapestről 3-féle, Esztergomból 5-féle útvonalon érkezhetünk, ezért összesen $3 + 5 = 8$-féle útvonalon érkezhetünk.

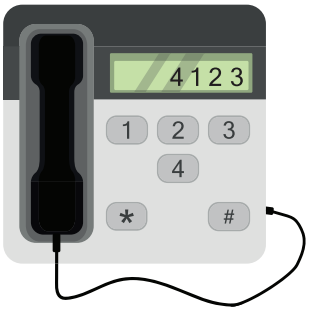
Válasz: Az idei kerékpártúrán 8 csapat vett részt.

Feladatok

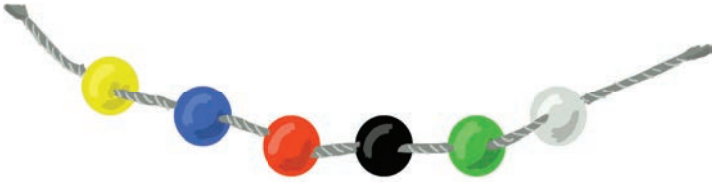
1. A mi iskolánknak belső használatra olyan telefonkészülékeket gyártottak, amelyeken csak négy számjegy van: 1, 2, 3 és 4. Hány különböző legfeljebb négyjegyű telefonszám hívható, ha

a) a számjegyek nem ismétlődhetnek,

b) a számjegyek ismétlődhetnek?



2. *a)* Hányféle gyöngysor fűzhető ezekből a gyöngyökből?



b) Hányféle lesz a gyöngysorok száma, ha körbefuthatnak a szálon a gyöngyszemek?



3. Magyarországon a 2022. június 30-ig forgalomba helyezett gépjárműveken 6 karakter hosszúságú forgalmi rendszámok voltak használatban. Ezek sorozatrendszám esetén három betű, három szám felosztásban követik egymást, fehér alapon fekete karakterekkel.



Magyar EU-s rendszám

Milyen autórendszámból lehet több Magyarországon, az olyanból, amelynek mind a három számjegye különböző, vagy az olyanból, amelynek számjegyei között vannak egyenlők is?

A feladat megoldását **padtársaddal** beszéljétek meg!

@ Nézz utána, milyen rendszámokat vezettek be 2022. július 1-én Magyarországon. Egyedi rendszámot is lehet igényelni meghatározott összegért.

Például ilyen rendszámot igényelt valaki: 

Nézz utána, hogy milyen előnyökkel jár a zöld rendszám! 

4. *a)* Ismert magyar költők híres sorait adtuk meg magánhangzók, illetve mássalhangzók nélkül. Melyik esetben könnyebb kitalálni a verssorokat? (A kétjegyű mássalhangzókat is egy □-tel jelöljük.)

A) T□LPR□ M□GY□R, H□ □ H□Z□

B) T□Z□S□N S□T L□ □ NY□R□ N□P S□G□R□

C) □Ú□ A□ É□I □O□Á□, □E□I□E□ A □A□□A□

D) □É□ □Í□□A□ A □Ö□□□E□ A □E□□I □I□Á□O□

b) A C□P□ „szó” hiányzó magánhangzói helyére a magyar abc magánhangzóit beírva hány különböző „szót” kapunk? Ezek közül hány lesz értelmes?

5. A nyári hegymászótáborban húsz fiú vett részt. A tábor végén mindenki e-mail-címet cserélt a többiekkel. Az állomáson mindenki kézfogással búcsúzott el egymástól, mindenki kezet fogott mindenkivel. Összesen hány címet írtak le a fiúk? Összesen hányszor fogtak kezet?

6. Az iskolánk kosárlabdacsapatának lányai a meccsek végén pacsit adnak egymásnak. Hány játékos vett részt a mi iskolánkból azon a mérkőzésen, ahol 105 pacsi csattant?

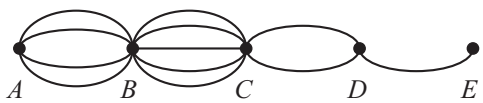
7. Az ötödikesek olyan lottóval játszottak, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 számokból két számra kell tippelni.

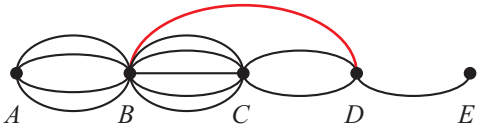
	1	2	3	4	5

a) Hány szelvényt kell ahhoz kitölteniük, hogy biztosan legyen telitalálatuk (azaz 2 találatuk) ezen a lottón?

b) Hány szelvény kitöltése esetén lesz biztosan 1 találatuk?

8. Hány különböző útvonalon juthatunk el *A* városból *E* városba, ha csak kelet felé haladhatunk?

a)


b)


9. Hányféleképpen olvasható le az ábráról az ODA, BUDA, illetve a BUDAPEST szó?
Csak az összekötő vonalak mentén, jobbra vagy lefelé szabad haladni.

a)
```
O-D-A
| |
D-A
|
A
```

b)
```
B-U-D-A
| | | |
U-D-A
| |
D-A
|
A
```

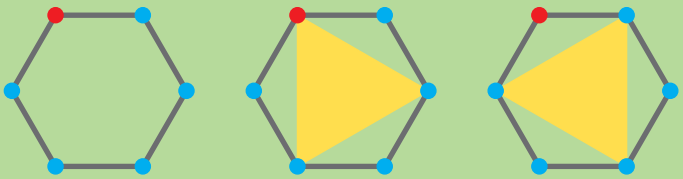
c)
```
O-D
| |
D-A
```

d)
```
B-U
| |
U-D
| |
D-A
```

e)
```
B-U-D-A-P-E-S-T
| | | | | | | |
U-D-A-P-E-S-T
| | | | | |
D-A-P-E-S-T
| | | | |
A-P-E-S-T
| | | |
P-E-S-T
| | |
E-S-T
| |
S-T
|
T
```

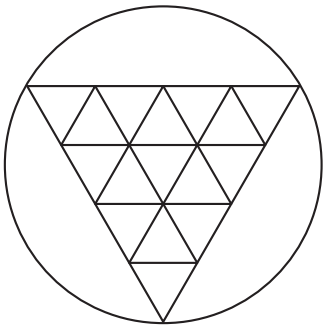
f)
```
B-U-D-A
| | | |
U-D-A-P
| | | |
D-A-P-E
| | |
A-P-E-S
| | |
P-E-S-T
```

10. Egy szabályos hatszög egyik csúcsát pirosra, a többit kékre színeztük. A hatszög csúcsaiból hármat kiválasztva háromszögeket kaptunk. Melyik fajta háromszögből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs?



Játékok, híres fejtörők

1. Két rejtvényt tartalmaz ez a rajz, amelyet Krisztus előtt 1500 évvel egy egyiptomi pap eszelt ki.



a) Hogyan lehet egy vonallal megrajzolni az egész ábrát anélkül, hogy a rajz bármelyik kis részén kétszer haladnánk át?

b) Hány háromszög van az ábrán?

c) **Padtársaddal** találjatok ki a rajzhoz kapcsolódó feladatokat!

2. **Mit nevezünk stratégiai játéknak, nyerő stratégiának?**

Az ilyen típusú játékokban a játékosok megadott szabály szerint, felváltva lépnek. A kezdeti feltételek már meghatározzák, hogy az első vagy a második játékos van nyerő helyzetben, a véletlennek ebben nincs szerepe. Előre kidolgozható az úgynevezett **nyerő stratégia,** ami a következőket jelenti:

– jól döntünk arról, hogy kezdőjátékosok legyünk-e, vagy átengedjük a kezdés jogát játékostársunknak,

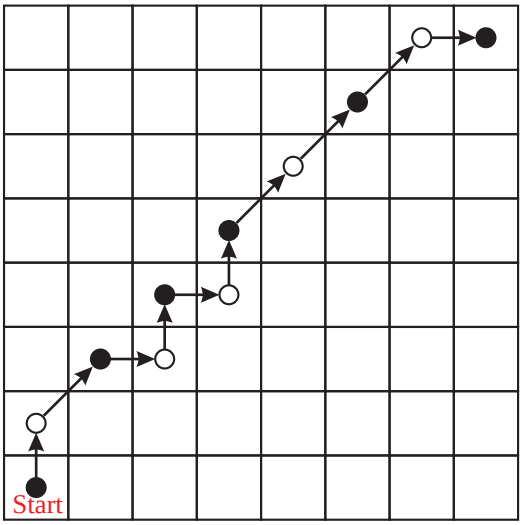
– úgy tervezzük meg lépéseinket, hogy ellenfelünk bármilyen lépéssorozata esetén is nyerhessünk.

Játék

Padtársaddal játszhatod a következő, **„Irány a másik sarok”** nevű stratégiai játékot.

Egy nyolcszor nyolcas négyzeten, például egy sakktáblán, helyezzetek el a bal alsó sarokban egy figurát, például egy gyalogot! Ezzel léphettek felváltva, egyszerre egy négyzettel arrébb: jobbra, vagy fölfelé, vagy átlóban. Az nyer, aki a jobb felső sarokba viszi a figurát.

Például az ábrán üres karikával az első játékos húzását, tele karikával a második játékos húzását jelöltük. Ebben a játszmában az első játékos kezdett, és a második játékos nyert.



Játsszatok, majd állapítsátok meg, hogy a kezdő vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája?

3. *a)* **Padtársaddal** játszhatod a következő, „Nyolcból négyet” nevű játékot.

Egyikőtök felír egy négyjegyű számot, a másiknak ezt kell majd kitalálnia. A négyjegyű számban csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek fordulhatnak elő, de egy számjegy legfeljebb csak egyszer szerepelhet.

Aki ki akarja találni a számot, szintén ilyen típusú négyjegyű számmal kérdez, partnere megmondja, hogy hány számjegyet talált el, és hogy közülük hány van a saját helyén.

Nézzünk egy példát!

A gondolt szám: **3472**

Az első tipp: **2785** **2/0** a válasz, mert két számot, a **2**-est és a **7**-est eltalálta, de ebből egyik sincs a helyén.

A második tipp: **2475** **3/2** a válasz, mert három számot eltalált, a **2**-est, a **4**-est és a **7**-est, és ezek közül kettő, a **4**-es és a **7**-es a helyén van.

A cél: minél kevesebb találgatással kitalálni a gondolt számot.

b) *Nyolcból négyet* játékokról készültek az alábbi feljegyzések. Próbáld meg kitalálni, hogy mi lehetett a gondolt szám a két játszmában!

1. játék		*2. játék*	
7652	2/0	2816	2/2
8721	2/0	5817	3/2
4237	2/2	5876	2/0
4587	0/0		

c) A „Nyolcból négyet” játék másik változata

Egyikőtök felír az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyekből álló olyan négyjegyű számot, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek és növekvő sorrendben követik egymást. A kitaláló is hasonló módon írja fel a tippjeit. Ebben az esetben csak egyetlen szám a válasz: hány számjegyet talált el a kitaláló. A cél: Minél kevesebb próbálkozással kitalálni a gondolt számot. Játszhatjátok a már tanult vagy közismert eseményekhez fűződő, megfelelő négyjegyű számokkal is.

Például: Legyen a gondolt szám 1456! (Nándorfehérvári diadal)

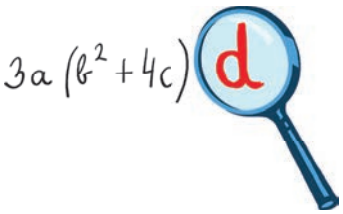
tipp	1234	1256	1257	1357	1457	1456
	1234	1256	1257	1357	1457	1456
találat	2	3	2	2	3	4

Betűs kifejezések

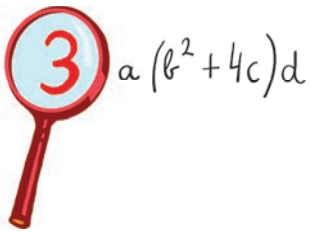
Betűs kifejezések nagyító alatt

Mi minden lehet egy betűs kifejezésben?

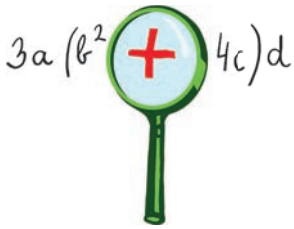
betűk



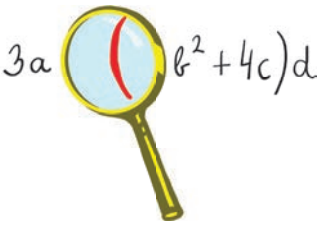
számok



műveleti jelek



zárójelek



Vannak benne láthatatlan szorzásjelek is.

Két betű közé | szám és betű közé | szám és zárójel közé | betű és zárójel közé

nem mindig írjuk ki a szorzásjelet.

Ilyenkor az egymás mellé írás szorzást jelent.

Két szám közé mindig ki kell írni a szorzásjelet, hiszen különben a 213 jelenthetne 2 · 13-at, 21 · 3-at és 2 · 1 · 3-at is.

A nagyítóval megvizsgált kifejezésben is vannak láthatatlan szorzásjelek. Pirossal bejelöltük őket.

$$3 \cdot a \cdot (b^2 + 4 \cdot c) \cdot d$$

Behelyettesítés

A betűs kifejezésekben mindegyik betű valamilyen számot takar.

Ha a betűs kifejezésbe a betűk helyére **behelyettesítjük** a számértéküket, és elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor megkapjuk a kifejezés **helyettesítési értékét.**

1. példa

Adjuk meg a $3 \cdot a \cdot (b^2 + 4 \cdot c)$ kifejezés helyettesítési értékét, ha $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ és $c = -0{,}4$.

Megoldás

$3a \cdot (b^2 + 4c)$ helyettesítési értéke:

$$3 \cdot (-1) \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 4 \cdot (-0{,}4) \right] = (-3) \cdot \left(\frac{1}{4} - 1{,}6 \right) = (-3) \cdot (0{,}25 - 1{,}6) = (-3) \cdot (-1{,}35) = 4{,}05$$

Műveleti jelek a nagyító alatt

Mi csak olyan kifejezésekkel foglalkozunk, amelyeket – ha akarunk – fel tudunk írni a négy alapművelet segítségével is. *Például:*

$3ab^2 = 3 \cdot a \cdot b \cdot b$ vagy $(a+2)^2 = (a+2) \cdot (a+2)$ vagy $\frac{3x}{y^3} = \frac{3x}{y \cdot y \cdot y} = 3 \cdot x : (y \cdot y \cdot y)$

Összeg, szorzat

A betűs kifejezések között lehetnek összegek vagy szorzatok.

Egy összetett műveletsort összegnek, szorzatnak vagy hatványnak nevezünk aszerint, hogy mi az utolsó művelet, amit el kell végeznünk.

2. példa

Válasszuk ki, hogy a következő kifejezések közül melyik összeg, melyik szorzat!

$a^2 + 5 \cdot a \cdot b$ $\quad 3 \cdot a : 5$ $\quad a^2$ $\quad b$

$\frac{12}{5}$ $\quad 2 \cdot a + 5 \cdot a$ $\quad a \cdot c - b$ $\quad 3 \cdot a \cdot (b-2)$

Megoldás

Összeg: $a^2 + 5 \cdot a \cdot b$, $\quad 2 \cdot a + 5 \cdot a$, $\quad a \cdot c - b$

Szorzat: $3 \cdot a : 5 = \frac{3}{5} \cdot a$, $\quad 3 \cdot a \cdot (b-2)$

Az a^2 hatvány, amit szorzat alakban is felírhatunk: $a \cdot a$.

A b és a $\frac{12}{5}$ nem is összeg, nem is szorzat.

Feladatok

1. Írd le a műveletsorokat úgy, hogy kiteszed pirossal a láthatatlan szorzásjeleket!

a) $3(a+2b)$ $\quad$ *b)* $4a + 8ab$ $\quad$ *c)* $\frac{3e}{4fg}$ $\quad$ *d)* $(a+5x)x$

2. Számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = 5$! Írd fel a helyettesítési értékeket növekvő sorrendben!

a) $6x - 2$ $\quad$ *b)* $\frac{12x-4}{2}$ $\quad$ *c)* $2 \cdot (x-4)^2$

d) $3 \cdot (x-35) + 27$ $\quad$ *e)* $0{,}5 \cdot (5x + 7x)$ $\quad$ *f)* $3 \cdot (x-3{,}28)(x+5)(x-5)$

3. Számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét x megadott értékeinél!

a) $8 - 3x$ $\quad x = 2, \quad x = \frac{4}{3}$ $\quad$ *b)* $\frac{3x+15}{5-x}$ $\quad x = -4, \quad x = 0{,}1$

c) $(x-5) \cdot (x+6)$ $\quad x = -10, \quad x = -106$

4. A változó milyen értékénél lesz a kifejezés értéke nulla?

a) $5x + 5$ $\quad$ *b)* $7x - 3x$ $\quad$ *c)* $6 - 3x$ $\quad$ *d)* $\frac{3}{4}x - 3$

5. A következő kifejezések értékét vizsgáljuk:

I. $5a+3(a+2)$ II. $\frac{(5b+7)\cdot 2}{3}$ III. $\frac{x-100x}{5}$

Írj a változó helyére olyan számot, hogy a kifejezés értéke

a) nagyobb legyen 100-nál *b)* kisebb legyen 0-nál *c)* kisebb legyen -100-nál!

6. Írd le betűs kifejezéssel a feladat szövegét! A kapott kifejezésről döntsd el, hogy melyik összeg, melyik szorzat!

a) a és b összegének a 3-szorosa

b) a háromszorosának és b-nek az összege

c) a és b szorzatának a hatszorosa

d) a és b különbségének a $\frac{2}{5}$-szerese

e) a és b összegének a $\frac{2}{5}$ része

f) a $\frac{2}{5}$ részének és b-nek a szorzata

7. Add meg a választ a feladat kérdésére betűs kifejezéssel!

Európa lakosainak számát jelöljük e-vel, területét t-vel! A 2020-as adatok szerint Ázsiának megközelítőleg hatszor annyi lakosa és közel négyszer akkora területe volt, mint Európának.



a) Hány lakosa volt Ázsiának?

b) Mennyivel több lakosa volt Ázsiának, mint Európának?

c) Mekkora Ázsia területe?

d) Mekkora Európa népsűrűsége?

e) Mekkora Ázsia népsűrűsége?

f) Melyik földrésznek nagyobb a népsűrűsége?

8. Riska tehén c liter tejet ad naponta. A tej $\frac{2}{5}$ részéből túrót csináltak, a többit eladták. Írj betűs kifejezést, amely megadja a következőket!



a) Hány liter tejet értékesítettek naponta?

b) Hány forint bevételük volt naponta, ha 1 liter tej ára b forint?

c) Hány kg túrót csinált a gazda, ha 1 liter tejből $\frac{1}{4}$ kg túró készült?

d) Hány forintot kapott a gazda a túróért, ha a túró kilója d forintba került?

9. Minden kérdésre egy betűs kifejezéssel válaszolj! Milyen értékeket vehetnek fel a betűs kifejezésben szereplő betűk?

a) Egyik zsebemben valahány dió van. A másikban ennek a kétszeresénél öttel több. Mennyi dió van a két zsebemben együttvéve?

b) Februárban háromszor annyi ötöst kaptam, mint januárban. Márciusban feleannyit, mint januárban és februárban összesen. Áprilisban háromszor annyit, mint márciusban. Hány ötöst kaptam az év első négy hónapjában?

c) A téglalap egyik oldala a, a másik oldala ennek a $\frac{2}{3}$ része. Mennyi a téglalap kerülete? Mennyi a téglalap területe?

10. Színezd a számegyenest!

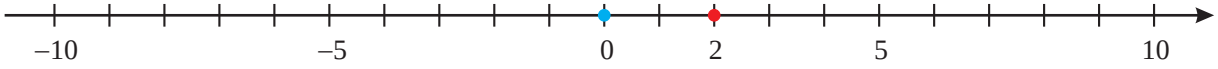
Válassz egy számot! Helyettesítsd be a $\boxed{7x - 7}$ kifejezésbe! Legyen a szám színe a számegyenesen

🔴, ha a helyettesítési érték **pozitív!**

🔵, ha a helyettesítési érték **negatív!**

⚫, ha a helyettesítési érték **0!**

A számegyenesen néhány pontot megjelöltünk, néhányat ki is színeztünk. Készítsd el a számegyenest a füzetedben, és színezd a többi pontot is! *Például:* ha $x = 2$, akkor a helyettesítési érték $7 \cdot 2 - 7 = 7$, ez pozitív szám, tehát a 2 piros.



Milyen színű az $x = -9$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 8$, $x = \frac{8}{5}$, $x = -1000$?

11. Színezz ki egy-egy számegyenest az alábbi kifejezésekhez! Aszerint színezd a pontokat piros-ra, kékre vagy feketére, hogy a hozzájuk tartozó helyettesítési érték pozitív, negatív vagy 0! Annál a számnál, amelyre a kifejezésnek nincs értelme, lyukaszd ki a számegyenest (rajzolj egy üres karikát)!

a) $2x - 11{,}3 + 7x + 1{,}3$ *b)* $(x - 2)(x + 10)$ *c)* $3(x - 2)$ *d)* $\frac{2}{x}$

Egytagú és többtagú betűs kifejezések

Az összegek **többtagú kifejezések**, amelyek **egytagú kifejezésekből** épülnek fel.

Például: $a + ab$ Ez egy kéttagú kifejezés.

$a + ab + 2a + 3ab + 5$ Ez egy öttagú kifejezés.

a, ab, $2a$, $3ab$, 5 Ezek egytagú kifejezések.

Az egytagú kifejezés egy szám vagy egy betű, vagy egy szám és betűk szorzata.

Az egytagú kifejezések számszorzói az **együtthatók**.

Például: az $5a$ kifejezésben 5 az együttható,

az xy kifejezésben $xy = 1 \cdot xy$ tehát 1 az együttható,

a $-\frac{x}{3}$ kifejezésben $-\frac{x}{3} = -\frac{1}{3} \cdot x$, tehát $-\frac{1}{3}$ az együttható.

Az egytagú kifejezések között vannak olyanok, amelyek tovább bonthatók egyszerűbb egész együtthatós részek összegére.

$2a = a + a$ $2a$ szétszedhető 2 darab a-ra, az a azonban nem bontható tovább egész együtthatós egyszerűbb részekre.

$3ab = ab + ab + ab$ $3ab$-t szét lehet szedni 3 darab ab összegére, az ab-t azonban már nem lehet egész együtthatós egyszerűbb tagok összegére bontani.

a és $2a$	**egyneműek,** ezek összeadhatók, vagyis **összevonhatók**: $a + 2a = 3a$
ab és $3ab$	**egyneműek,** ezek is **összevonhatók**: $ab + 3ab = 4ab$
a és ab	**nem egyneműek,** nem vonhatók össze.

Az egynemű kifejezésekben a számszorzó, vagyis az együttható különbözhet, de a betűket tartalmazó résznek meg kell egyeznie.

Az olyan egytagú betűs kifejezések, amelyek legfeljebb csak az együtthatójukban különböznek, **egynemű kifejezéseknek** nevezzük. Az egynemű kifejezéseket összeadhatjuk egymással, kivonhatjuk egyiket a másikból, röviden: **összevonhatjuk** őket.

Példa

$5x^2y - 10xy - x^2 + \frac{1}{2}xy + 3x^2y + x^2$

Válasszuk ki, és jelöljük egyformán az egynemű tagokat, majd végezzük el a lehetséges összevonásokat!

Megoldás

$5x^2y - 10xy - x^2 + \frac{1}{2}xy + 3x^2y + x^2 = 5x^2y + 3x^2y - 10xy + \frac{1}{2}xy - x^2 + x^2 = 8x^2y - 9{,}5xy$

Feladatok

1. Írd le az alábbi kifejezések mindegyikének együtthatóját!

a) $2a$ *b)* $\frac{1}{2}b$ *c)* $\frac{c}{5}$ *d)* $-d$ *e)* e^2f *f)* $\frac{ef}{2}$

2. Írd le az alábbi kifejezések mindegyikének együtthatóját! Válaszd ki az egynemű kifejezéseket!

a) $-2{,}5xy$ *b)* $\frac{-10xy}{4}$ *c)* $x^2y \cdot \frac{3}{4}$ *d)* $3x \cdot 4y$

e) $\frac{yx^2}{2}$ *f)* $\frac{5x \cdot 2y}{3}$ *g)* $2x \cdot 3xy$ *h)* $-x^2y^2$

3. Építs egynemű kifejezéseket!

Mindkét feladatban egynemű kifejezéseket adtunk meg többféle alakban. A kifejezések egy részét letakartuk egy színes folttal. Mi állhat a folt alatt?

a) $3x^2y^2$, $5xy\square$, $2x^{\square} \cdot y^2$, $\square \cdot x^2y$ *b)* $-xy$, $5x\square$, $\square \cdot 3{,}7$, $\frac{\square \cdot y}{5}$

4. Végezd el a lehetséges összevonásokat! Mindegyik esetben állapítsd meg, hány tagú volt az eredeti kifejezés, és hány tagú lett az összevonás után!

a) $5x + 3 - 2x - 5$ *b)* $2a - b + 1 - 11a + 3$

c) $2x^2 + 3x - 5x + x^2$ *d)* $-9a + 7bc - 18b - 21a - 9bc + 3b$

5. Az egyenlőségek közül melyik igaz a változók minden értékére?

a) $3x - 8x = -5x$ *b)* $5x^2 - 5x = 0$ *c)* $8xy - 5x = 3y$

d) $\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}x = x$ *e)* $x^2y + 2x^2y = 3x^2y$ *f)* $2y \cdot y + 2x - 2y^2 = 2x$

6. Pótold a hiányzó tagot!

a) $5x + \square = -2x$ *b)* $3ab - \square = 5ab$ *c)* $5y + \square - 2z = 3y - 2z$

d) $6b - \square + \frac{1}{2}b = 4b$ *e)* $2a^2b + \square = 8a^2b$ *f)* $-5x^3 + y^2 + \square = -5x^3$

7. TOTÓ

A és *B* kifejezésekben egy-egy részletet letakartunk, ezért nem mindig lehet biztosan eldönteni, hogy a két kifejezés egynemű-e vagy sem. A füzetedben dolgozz!

Írj a totóba 1-est, ha abban a sorban *A* és *B* **biztosan egyneműek,**

2-est, ha abban a sorban *A* és *B* **biztosan nem egyneműek,**

x-et, ha abban a sorban *A* és *B* **lehet, hogy egynemű, de nem biztos!**

	A	*B*	Tipp
1.	$2ab$	$-\frac{b}{3} \cdot a$	
2.	$a^{\square}$	$5a^3$	
3.	abc	$-2a^2b^2c^2$	
4.	$3x^2y^2$	$xy \cdot \square$	
5.	$ab \cdot \square$	$bc \cdot \square$	
6.	$2x^2$	$x^{\square} \cdot y$	
7.	$6c^2d^3$	$2{,}5c^{\square}d$	
8.	$3y^3$	$y \cdot \square \cdot 2$	
9.	a^2b^2	$ab\square$	
10.	$\frac{xy \cdot \square}{2}$	$z \cdot \square \cdot 3$	
11.	$\frac{y}{2} \cdot \square$	$\frac{x}{3}$	
12.	$5a \cdot \square$	$10a^2$	
13.	$5b$	$7b^2 \cdot \square$	
13 + 1.	aba^2	$b \cdot \square$	

Műveleti tulajdonságok



Betűs kifejezések többféle alakban

Minden számnak sok neve van.

$$0{,}19 = \frac{19}{100} = \frac{3\cdot 6+1}{100} =$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{100} = \frac{190}{1000} = \dots$$

Ezek a számok mind **egyenlőek,** csak az alakjuk különbözik.

Minden kifejezésnek sok neve van.

$$2a+6 = a+a+3\cdot 2 = 2(a+3) =$$
$$= \frac{10a}{5} + 6 = 3a + 6 - a = \dots$$

Ezek a kifejezések mind **azonosak,** csak az alakjuk különbözik.

Vannak olyan egyenletek, amelyekben a betűk helyére bármilyen megengedett számot írva az egyenlőség igaz marad.

Az ilyen egyenletek a műveletekről szóló alapigazságok. **Műveleti tulajdonságoknak** is nevezhetjük őket. A műveleteknek azokat a tulajdonságait mutatják meg, amelyek a változók értékétől függetlenül mindig fennállnak.

Ezeket a tulajdonságokat betűs kifejezésekkel is és szöveggel is meg lehet fogalmazni.

1. példa

Írjuk fel betűs kifejezésekkel a következő, szóban megfogalmazott – jól ismert – tulajdonságokat!

a) Összeadásnál a tagok felcserélhetők.

b) Ha az osztandót (számlálót) és az osztót (nevezőt) is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk, a hányados (tört) értéke nem változik.

c) Egy összeget úgy vonunk ki, hogy minden tagját kivonjuk.

d) Egy szorzattal úgy osztunk, hogy minden tényezőjével osztunk.

Megoldás

a) $a + b = b + a$

b) $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ $\quad b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad c \neq 0$$

c) $a - (b + c) = a - b - c$

d) $a : (b \cdot c) = a : b : c$ $\quad b \neq 0$, $c \neq 0$

Zárójellel vagy zárójel nélkül

Összeg, különbség kivonása

A zárójelek elhagyására vagy a zárójelek betevésére a betűs kifejezések használata során sokszor szükségünk van. Sokkal többször, mint a számok világában, hiszen a számokkal el tudjuk végezni a zárójelben levő műveleteket, betűkkel azonban nem mindig.

Ezért nagyon jól kell tudni, hogyan lehet egy kifejezésből zárójeleket elhagyni, vagy abba új zárójeleket betenni.

Ha a műveletsorban csupa összeadás és kivonás van, és a zárójel előtt „+” jel áll, akkor a zárójelet elhagyhatjuk. Ha a zárójel előtt „−” jel áll, akkor a zárójel elhagyása után a benne levő műveletek ellenkezőjükre változnak. A „+”-ból „−”, a „−”-ból „+” lesz.

2. példa

Írjuk át zárójel nélküli alakba!

a) $5-(x+2)$ *b)* $a-(b+2)$ *c)* $(x-3)-(x+3)$ *d)* $a+[b-(c-d)]$

Megoldás

a) $5-(x+2)=5-x-2=3-x$

b) $a-(b+2)=a-b-2$

c) $(x-3)-(x+3)=x-3-x-3=-6$

d) $a+[b-(c-d)]=a+b-(c-d)=a+b-c+d$

Szorzatból összeg

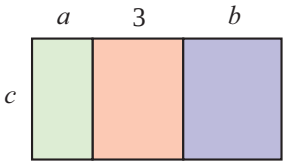
3. példa

Írjuk fel többféleképpen a téglalapok területét!

a)



b)



Megoldás

A téglalapok területe szorzat alakban és összeg alakban is megadható.

a) $T=(a+2)\cdot 3=$
$=a\cdot 3+2\cdot 3=$
$=3a+6$

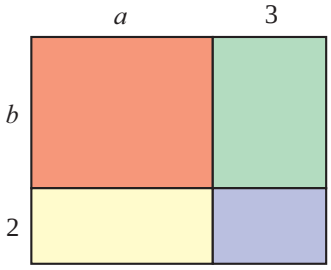
b) $T=(a+3+b)c=$
$=ac+3c+bc$

A 3. példa *a)–b)* képeiről azt a jól ismert összefüggést olvashattuk le, hogy összeg szorzásakor az összeg minden tagját meg kell szoroznunk.

Összeget tagonként szorzunk.

$$(a+b)c=ac+bc$$

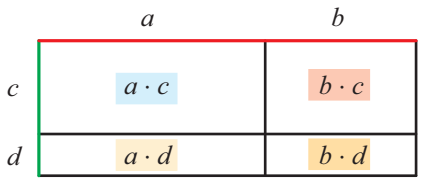
Összeg szorzása összeggel



Erről az ábráról azt olvashatjuk le, hogyan lehet a szorzatot összeg alakban írni, ha a szorzó is és a szorzandó is összeg.

$$\begin{aligned} T &= (a+3)(b+2) = \\ &= (a+3)b + (a+3)\cdot 2 = \\ &= a(b+2) + 3(b+2) = \\ &= ab + 2a + 3b + 6 \end{aligned}$$

Általánosan:



A téglalap területe

szorzat alakban: $(a+b)\cdot(c+d)$

összeg alakban: $a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d$

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

Összeget összeggel úgy is szorozhatunk, hogy az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik tényező minden tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Megjegyzés: Más a helyzet, ha egy többtényezős szorzatot szorzunk meg egy számmal.

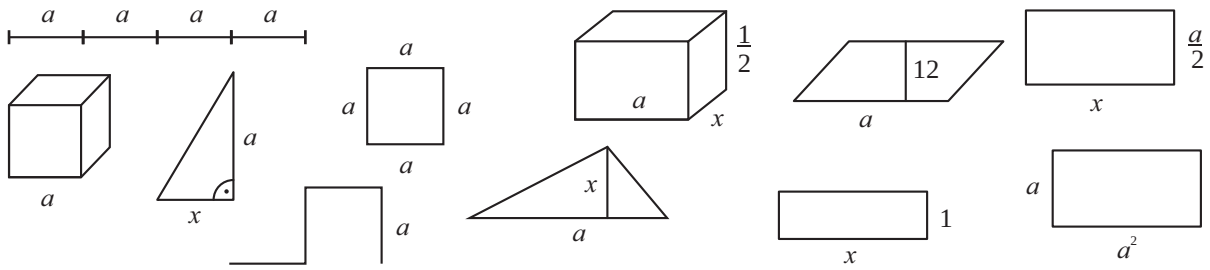
Például $(a\cdot 7\cdot 3)\cdot 5 = (a\cdot 5)\cdot 7\cdot 3 = a\cdot(7\cdot 5)\cdot 3 = a\cdot 7\cdot(3\cdot 5) = 105a$

Ilyenkor csak az egyik tényezőt kell megszoroznunk, mindegy, hogy melyiket.

Szorzatot úgy szorzunk, hogy csak valamelyik tényezőjét szorozzuk meg.

Feladatok

1. Melyik kifejezés melyik rajzhoz tartozhat? Mindegyik esetben állapítsd meg, mi a jelentése az ismeretleneknek! Mit határoz meg az egyes ábrák esetében a hozzájuk tartozó kifejezés?



$4a$, a^2, $2x+2$, x, $2x+a$, $\frac{a\cdot x}{2}$, a^3, $2(a^2+a)$, $a\cdot 12$, $6a^2$.

2. Párosítsd össze az azonosakat!

I. $5x-5$ II. $5xy-25x$ III. $25xy-5x$ IV. $5y-25xy$ V. $xy-5x$ VI. $x-5xy$

A $5x(5y-1)$ B $5y(1-5x)$ C $5(x-1)$ D $x(1-5y)$ E $5x(y-5)$ F $x(y-5)$

3. Oldd meg az egyenleteket!

a) $x(3-x)+x^2+2=5$

b) $(x-11)x+3=31+(3+x)x$

c) $x\cdot(x-3)+6=x^2-7x$

d) $x\cdot(2x-5)+8x=x\cdot(3+x)$

4. Töltsd ki a szorzótáblák üres mezőit!

a)

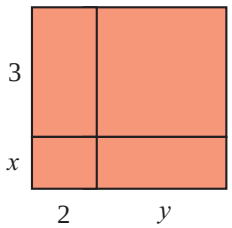
·	$a + 2b$	$3a^2b$	$a - b$
3			
$2b$			

b)

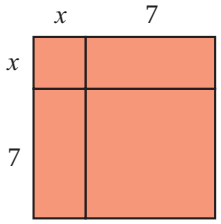
·	$a + 2b$	$a^2 + b$	$a - 2$
$\frac{1}{2}b$			
			$a^2 - 2a$

5. Írd fel többféleképpen a téglalapok területét!

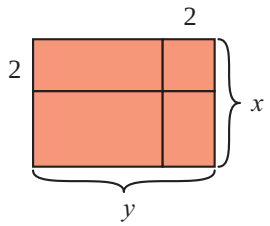
a)



b)



c)



6. A következő feladat megoldásakor először készíts rajzot a szorzathoz! A rajz segítségével alakítsd a szorzatot összeggé!

a) $e \cdot (f + g)$ *b)* $a \cdot (b + 3)$ *c)* $(a + 3) \cdot (b + 1)$ *d)* $c \cdot (x + y + z)$

7. A $26 \cdot 93$ egy különleges szorzat. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a $62 \cdot 39$ szorzatot kapjuk, ami meglepő módon megegyezik az eredetivel.

$$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$$

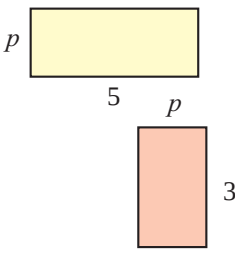
Keress más ilyen szorzatokat! Próbáld meg megfejteni a „titkát” ennek a furcsa viselkedésnek! Segíthet a „titok” megfejtésében, ha átírod a feladatot betűs kifejezésre, és a szorzatokat összeggé alakítod!

Összegből szorzat – kiemelés

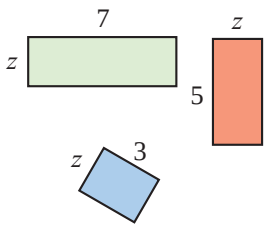
1. példa

Építsünk a megadott téglalapokból nagyobb téglalapot! Állapítsunk meg egyenlő területeket a rajzok segítségével!

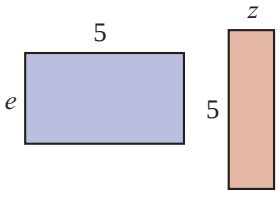
a)



b)

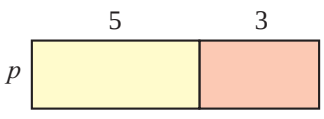


c)



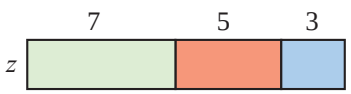
Megoldás

a)



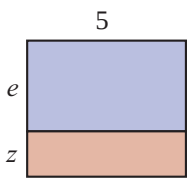
$p \cdot 5 + p \cdot 3 = p \cdot (5 + 3)$

b)



$z \cdot 7 + z \cdot 5 + z \cdot 3 = z \cdot (7 + 5 + 3)$

c)



$e \cdot 5 + z \cdot 5 =$
$= (e + z) \cdot 5$

2. példa

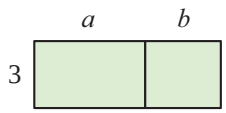
Készítsünk az összegek minden tagjához téglalapot úgy, hogy össze lehessen illeszteni őket egy nagy téglalappá! Olvassuk le róla a szorzat alakot!

a) $a \cdot 3 + b \cdot 3$ *b)* $a \cdot 3 + 6$ *c)* $4 + 4 \cdot b$

d) $6a + 2b$ *e)* $a \cdot 5 + 25$ *f)* $12a + 8b + 20$

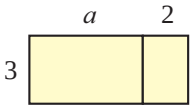
Megoldás

a)



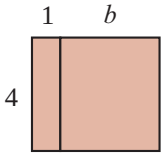
$a \cdot 3 + b \cdot 3 = (a + b) \cdot 3$

b)



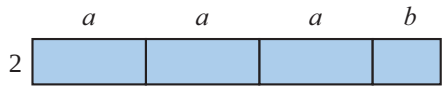
$a \cdot 3 + 6 = (a + 2) \cdot 3$

c)



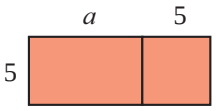
$4 + 4 \cdot b = 4 \cdot (1 + b)$

d)



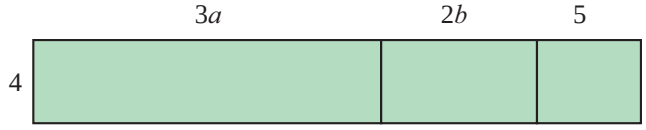
$6a + 2b = 2 \cdot (3a + b)$

e)



$a \cdot 5 + 25 = 5 \cdot (a + 5)$

f)



$12a + 8b + 20 = 4 \cdot (3a + 2b + 5)$

A 2. példa minden feladatában összeget alakítottunk szorzattá. Ez a beszorzás műveletének a megfordítása. Beszorzáskor egy összeg minden tagját megszorozzuk a zárójel mellett álló szorzóval.

$$5 \cdot (a + 2) = 5 \cdot a + 5 \cdot 2$$

A műveletet fordítva is végezhetjük, ha egy összeg minden tagjában találunk közös szorzótényezőt. Ezt a tagokból kiemelhetjük egy zárójel elé. Ezt kiemelésnek nevezik.

$$8 \cdot d + 8 \cdot e = 8 \cdot (d + e)$$

Beszorzáskor
szorzatot összeggé alakítunk.

Kiemeléskor
összeget szorzattá alakítunk.

3. példa

A) Vizsgáljuk egyszerű számpéldákon, hogyan készíthetünk összegből szorzatot! Ilyenkor beszorzással mindig ellenőrizhetjük, helyes-e az átalakítás.

a) $2 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 9 = (2 + 4 + 1) \cdot 9$

b) $2 \cdot 5^2 + 5 + 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5 \cdot 5 + 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5 + 1 + 2 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 5 = (10 + 1 + 50) \cdot 5$

Betűket tartalmazó kifejezések esetén is hasonlóan járhatunk el.

B) Írd át az összegeket szorzat alakba!

a) $2a + 3a + 7a$ *b)* $3x^2 + x$

Megoldás

a) $2a + 3a + 7a = (2 + 3 + 7) \cdot a$

b) $3x^2 + x = 3x \cdot x + 1 \cdot x = (3x + 1) \cdot x$

Törteket egyszerűsítünk

A törtek egyszerűsítésekor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk el.

4. példa

Egyszerűsítsük a törteket a közös tényezők segítségével!

a) $\dfrac{7^2 \cdot 5^3}{2 \cdot 7 \cdot 5^2}$ *b)* $\dfrac{12a \cdot 3}{3}$

Megoldás

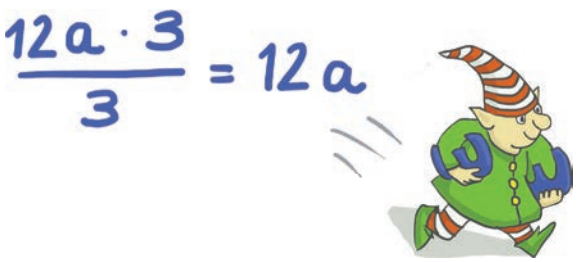
a) Ha csak szorzatok szerepelnek a törtkifejezésben, akkor a közös tényezők kiválasztása után egyszerűsíthetjük a törtet.

$$\frac{7^2 \cdot 5^3}{2 \cdot 7 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2}$$

Betűs kifejezéseket tartalmazó törtek esetében is hasonlóan járunk el.

b) A $\dfrac{12a \cdot 3}{3}$ törtet egyszerűsíthetjük 3-mal: a számlálóban szereplő tényezők közül csak az egyiket kell elosztani 3-mal. Így: $\dfrac{12a \cdot 3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3a \cdot 3}{3} = 4a \cdot 3 = 12a$ vagy $\dfrac{12a \cdot 3}{3} = 12a \cdot \dfrac{3}{3} = 12a \cdot 1 = 12a$.

Megjegyzés: Más a helyzet, amikor egy összeget osztunk el egy számmal, akkor az összeg minden tagját el kell osztanunk. Szorzat osztásakor csak az egyik tényezőt kell elosztani, mindegy, hogy melyiket.



5. példa

Egyszerűsítsük a törteket!

a) $\dfrac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2}$ *b)* $\dfrac{12a + 3}{3}$

Megoldás

Ha összegek is előfordulnak a számlálóban, akkor egyszerűsítéskor az összeget tagonként kell elosztani, vagy az összeget kiemeléssel szorzattá kell alakítani, és utána egyszerűsíteni.

a) $\dfrac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2}$ egyszerűsítése:

- tagonkénti osztás: $\dfrac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 3}{3 \cdot 3} = \dfrac{3^3 + 3 \cdot 5 + 1}{3}$
- egyszerűsítés kiemelés után: $\dfrac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2} = \dfrac{3\left(3^3 + 3 \cdot 5 + 1\right)}{3 \cdot 3} = \dfrac{3^3 + 3 \cdot 5 + 1}{3}$

Betűs kifejezéseket tartalmazó törtek esetében is hasonlóan járunk el.

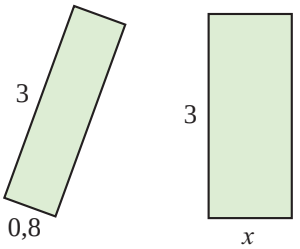
b) $\frac{12a+3}{3}$ tört egyszerűsíthető, mert a számlálója és a nevezője is osztható 3-mal. A számláló azért osztható 3-mal, mert mindkét tag 3 többszöröse. Így:

- tagonkénti osztás: $\frac{12a+3}{3} = \frac{4\cdot 3a}{3} + \frac{3}{3} = 4a+1$
- egyszerűsítés kiemelés után: $\frac{12a+3}{3} = \frac{3\cdot(4a+1)}{3} = 4a+1$

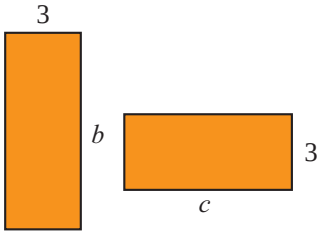
Feladatok

1. Írd fel az egyforma színű téglalapok területének összegét! Építs belőlük nagyobb téglalapot! Olvass le a nagy téglalapról szorzat alakot!

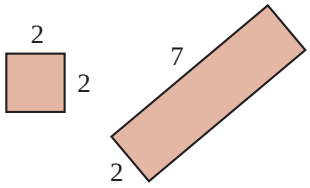
a)



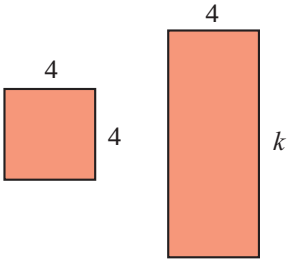
b)



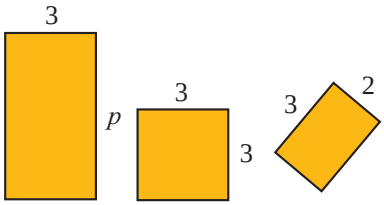
c)



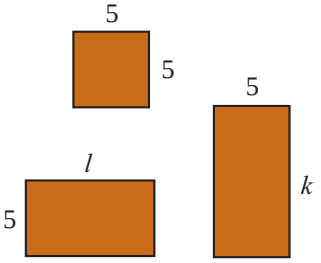
d)



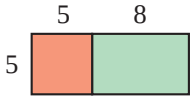
e)



f)



2. A szorzatok téglapok területét adják. A téglalapokat több részből raktuk össze. Például az $5 \cdot (5 + 8)$ szorzathoz ez az ábra tartozik:



Készíts ábrákat a szorzatokhoz! Írd fel a téglalap területét összeg alakban is!

a) $4\cdot(5+7)$ $2\cdot(2+6)$ $5\cdot(3+1)$ $(2+5)\cdot 3$

b) $a\cdot(a+1)$ $b\cdot(2+b)$ $3\cdot(3+b)$ $2\cdot(a+b)$

3. Készíts téglalapokat az összeg tagjaihoz úgy, hogy egy nagy téglalappá lehessen összeépíteni őket! Olvass le szorzatalakot a nagy téglalapról!

a) $3a + 3b$ *b)* $7x + 14$ *c)* $2a + 10a$

4. Keress közös tényezőket a tagokban! Alakítsd az összeget szorzattá a közös tényező kiemelésével! Dolgozz a példa szerint!

$$\underset{\text{11}}{121} + \underset{\text{11}}{99} = 11\cdot 11 + 11\cdot 9 = 11\cdot(11+9)$$

a) $48 + 60$ *b)* $25 \cdot 7 + 14 \cdot 15$ *c)* $600 + 250 \cdot 9$

d) $126 + 420$ *e)* $40 \cdot 28 + 35 \cdot 6 + 21 \cdot 60$ *f)* $540 + 1076 + 924$

5. Keress közös tényezőket a tagokban! Alakítsd az összeget szorzattá a közös tényező kiemelésével! Dolgozz a példa szerint!

$$\underset{b\cdot a}{ab} + \underset{b\cdot 3c}{3bc} = b\cdot(a+3c)$$

a) $x\cdot x\cdot y\cdot y + 2\cdot y\cdot x$ *b)* $15ab + 55$ *c)* $2\cdot x\cdot y\cdot y + 8\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$

d) $a^2b + ab^2$ *e)* $8bc + 6ab$ *f)* $2xy - 14\cdot x^2y$

6. Írd fel az összeget szorzat alakban!

a) $5a + 10$ *b)* $2x + x^2$ *c)* $3x + 5xy$

d) $a + ab$ *e)* $x + xy + xz$

7. Írd fel az összeget szorzat alakban!

a) $819 + 765 + 72$ *b)* $426 + 6060 + 174$ *c)* $9a + 72b$

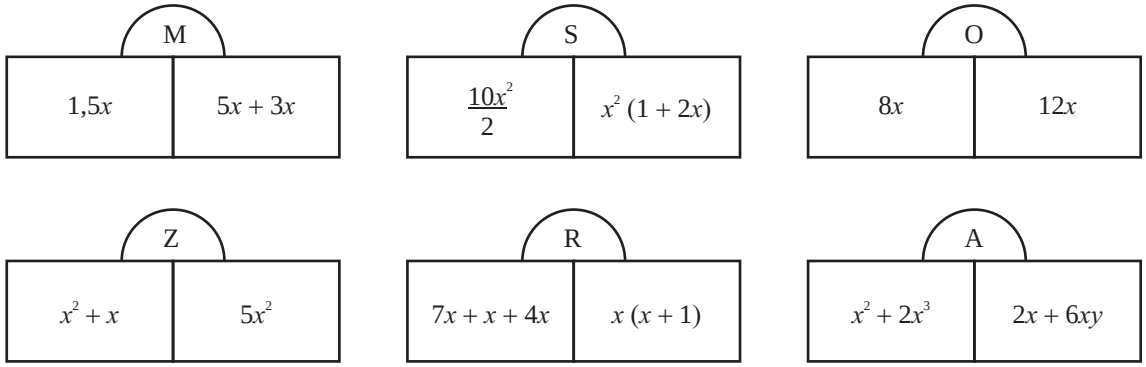
d) $6a^2 - 18a^2b + 12a^2$ *e)* $3x - 21x^2 - 12xy$ *f)* $5x^2y + 15x^2 - x^2$

8. Írd fel az összeget szorzat alakban!

a) $6x - 3$ *b)* $x^2 - 3x$ *c)* $4ab - 8b$

d) $2xy - y$ *e)* $a + ab - ac$ *f)* $x^4 - x^3$

9. Készíts láncot a dominókból! Illeszd egymáshoz az azonos kifejezéseket, majd olvasd össze a dominókon lévő betűket! A megfejtés egy Petőfi-versben szerepel. Mi a vers címe?



Törtvonalas kifejezések átalakítása

Az, hogy a törtszámokat sokféle alakban fel tudjuk írni, nagyon fontos a számok világában.

Például:

Törtek sorba rendezésekor: $\frac{5}{7} = \frac{20}{28} < \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

Tizedes tört alakba írásához: $\frac{9}{8} = 1{,}125$

Törtek összeadásakor: $\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{19}{38} + \frac{6}{38} = \frac{25}{38}$

Százalékszámításnál: $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$

Betűs kifejezések használatakor is elengedhetetlen, hogy egy törtvonalas kifejezést sokféle alakban fel tudjunk írni.

a) $\frac{5x}{9}\cdot 6$

Ebben a kifejezésben **nincsen sem összeadás, sem kivonás.** Ilyenkor nagyon sokféleképpen **változtathatjuk a tényezők sorrendjét, bővíthetjük,** és bizonyos esetekben **egyszerűsíthetjük** is a kifejezést.

$$\frac{5x}{9}\cdot 6 = 5x\cdot\frac{6}{9} = 5x\cdot\frac{2}{3} = \frac{30x}{9} = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot x = \frac{10}{3}\cdot x = \frac{10x}{3}$$

b) $\frac{5x-9}{6}$

Ha a **számlálóban van összeadás vagy kivonás,** akkor a kifejezéseket sok esetben érdemes **több tag összegeként** felírni.

$$\frac{5x-9}{6} = \frac{5x}{6} - \frac{9}{6} = \frac{5x}{6} - \frac{3}{2}$$

c) $5-\frac{2x+1}{3}$

Összeggé alakításnál különösen vigyáznunk kell arra, hogy a **törtvonal láthatatlan zárójelet helyettesít.**

Amikor a $\frac{2x+1}{3}$ törtet összegként írjuk fel, **ki kell tennünk a zárójelet.**

$$5-\frac{2x+1}{3} = 5-\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}\right) = 5-\frac{2x}{3}-\frac{1}{3} = \frac{15}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2x}{3} = \frac{14}{3}-\frac{2x}{3} = \frac{14-2x}{3}$$

d) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{5}{6}$

Sokszor előfordul, hogy érdemes **közös nevezőre** hoznunk a tagokat.

$$\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{5}{6} = \frac{3x}{6}+\frac{4x}{6}+\frac{5}{6} = \frac{7x+5}{6}$$

1. példa

Oldjuk meg az egyenletet! $4(x-1) = 12-(1-x)$

Megoldás

Bontsuk fel a zárójeleket!	$4(x-1)=12-(1-x)$
	$4x-4=12-1+x$
Összeadjuk a számokat:	$4x-4=11+x$
Mindkét oldalból kivonunk x-et:	$3x-4=11$
Mindkét oldalhoz hozzáadunk 4-et:	$3x=15$
Mindkét oldalt osztjuk 3-mal:	$x=5$

Ellenőrzés: **bal oldal:** $4(x-1) = 4(5-1) = 16$; **jobb oldal:** $12-(1-5) = 12-(-4) = 16$. Az egyenlet megoldása $x = 5$.

2. példa

Oldjuk meg az egyenletet! $5x+2-\frac{2x-3}{2} = \frac{x}{2}+7$

Megoldás

Szorozzuk meg mindkét oldalt 2-vel!	$2\cdot 5x+2\cdot 2-2\cdot\frac{2x-3}{2}=2\cdot\frac{x}{2}+2\cdot 7$
Végezzük el a szorzásokat!	$10x+4-(2x-3)=x+14$
Bontsuk fel a zárójelet!	$10x+4-2x+3=x+14$
Vonjunk össze!	$8x+7=x+14$
Vonjunk ki x-et mindkét oldalból!	$8x+7-x=x+14-x$
	$7x+7=14$
Vonjunk ki 7-et mindkét oldalból!	$7x+7-7=14-7$
	$7x=7$
Osszuk el mindkét oldalt 7-tel!	$\frac{7x}{7}=\frac{7}{7}$
	$x=1$

Ellenőrzés: **bal oldal:** $5\cdot 1+2-\frac{2\cdot 1-3}{2}=7-\frac{-1}{2}=7{,}5$; **jobb oldal:** $\frac{1}{2}+7=7{,}5$.

Az egyenlet megoldása $x=1$.

Feladatok

1. Melyik azonos az elsővel?

a) $\frac{14xy}{5}$ $\quad\frac{2}{5}\cdot 7xy$ $\quad 3xy\cdot x$ $\quad 12xy+10xy$ $\quad 7\cdot\frac{x}{5}\cdot 2y$

b) $\frac{3x+2}{11}$ $\quad\frac{3x}{11}+2$ $\quad 3x+\frac{2}{11}$ $\quad\frac{3x}{11}+\frac{2}{11}$ $\quad\frac{x+3+2}{11}$ $\quad\frac{3}{11}(x+2)$ $\quad\frac{3}{11}x+2$

c) $x-\frac{x+2}{2}$ $\quad x-\frac{x}{2}+\frac{2}{2}$ $\quad x-\frac{x}{2}-1$ $\quad\frac{x}{2}-1$ $\quad\frac{x}{2}+1$

2. Betűs kifejezéseket írtunk fel többféle alakban. Keress közöttük azonosakat!

$\frac{1}{2}\cdot ab$ $\quad 13a\cdot\frac{2b}{26}$ $\quad\frac{1}{22}\cdot 4ab$ $\quad 2a\cdot\frac{11}{44}$ $\quad\frac{2a}{6}\cdot 3b$ $\quad 22a\cdot\frac{b}{11}$ $\quad\frac{5}{7}\cdot 14a\cdot\frac{b}{10}$

$\frac{ab}{2}$ $\quad\frac{a}{6}\cdot 3b$ $\quad\frac{6ab}{3}$ $\quad\frac{4b}{2}\cdot a$ $\quad\frac{2b}{44}\cdot 4a$ $\quad 26ab\cdot\frac{1}{13}$

3. Betűs kifejezéseket írtunk fel többféle alakban. Keress közöttük azonosakat!

$\frac{5xy}{3}$ $\quad\frac{5x+5y}{3}$ $\quad 5\cdot\frac{x}{3}\cdot y$ $\quad\frac{1}{3}xy\cdot 5$ $\quad\frac{5x+y}{3}$

$\frac{5\cdot(x+y)}{3}$ $\quad\frac{30xy-15xy}{9}$ $\quad\frac{x+5y}{3}$ $\quad 10y\cdot\frac{x}{6}$ $\quad\frac{5}{3}x+\frac{y}{3}$

4. Bontsd fel a zárójeleket, majd végezd el az összevonásokat!

a) $a+(2a-b)$ $\quad$ *b)* $a-(2a-b)$ $\quad$ *c)* $(a+3)\cdot 2$

d) $8a^2-(2a^2+3a)$ $\quad$ *e)* $e\cdot f-(e\cdot f-3)$ $\quad$ *f)* $(2x+y)-(2x-y)$

5. Mi van a színes folt alatt?

a) $2x - x + \square = 18x$ *b)* $\frac{2x}{3} - \square + \frac{4x}{3} = \frac{8x}{3}$ *c)* $\frac{2x+1}{2} - \square = x$

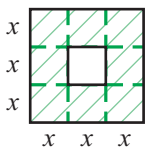
6. Végezd el az összevonásokat!

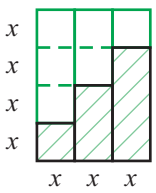
a) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{3} + \frac{4x}{3}$ *b)* $\frac{3a}{5} - \frac{a}{5} + \frac{3}{5}$ *c)* $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x}{2}$ *d)* $\frac{2x+1}{5} + \frac{4+3x}{5}$

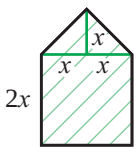
7. Végezd el az összevonásokat!

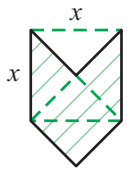
a) $x - \frac{x+1}{3}$ *b)* $\frac{2x+1}{3} - (x-1)$ *c)* $x - \frac{4x+6}{2}$

8. Írd fel a bevonalkázott síkidom területét többféleképpen is!

a) 

b) 

c) 

d) 

9. Oldd meg az egyenleteket!

a) $2x - x + 8 = 18$ *b)* $2x - x - 8 = 18$ *c)* $2x - (x + 8) = 18$

d) $2x - (x - 8) = 18$ *e)* $3 - (8 - 2x) = -13$ *f)* $2x - (x - 3) = 5x + 7$

10. Oldd meg az egyenleteket!

a) $0{,}1x - (5 - 2{,}32x) = 6{,}42x - 9$ *b)* $3{,}8x - (2 - 1{,}2x + 5x) = -2$

c) $3 - (0{,}25x + 0{,}5) = 1 - 0{,}1x$ *d)* $0{,}12x - (3 - 0{,}08x) = -0{,}3x + 6$

11. Oldd meg az egyenleteket!

a) $\frac{x}{2} = 3 + x$ *b)* $\frac{7x}{6} = 25 - 3x$ *c)* $\frac{x}{2} + 1 = x - 4$

d) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 35$ *e)* $\frac{x+1}{3} + \frac{2x}{9} = \frac{4x}{9} + \frac{2}{3}$ *f)* $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{x}{2} + 5$

12. Oldd meg az egyenleteket!

a) $\frac{5-2x}{3} - (1-3x) = -3$ *b)* $\frac{3x-5}{4} - (x-2) = 2$

c) $\frac{3x+2-5x}{-2} - (1+2x) = -1$ *d)* $\frac{5-7x-x}{5} - (2-x) = x$

13. Oldd meg az egyenleteket, ha csak egész szám lehet a megoldás (az alaphalmaz az egész számok halmaza)!

a) $2 - \frac{x-1}{2} = 2x$ *b)* $2 + \frac{x-1}{2} = 2x$ *c)* $3 - \frac{x+2}{2} = 5 - x$

14. Oldd meg az egyenleteket, ha csak természetes szám lehet a megoldás (az alaphalmaz a természetes számok halmaza)!

a) $\frac{4x-2}{7} + 18 = 5x$ *b)* $\frac{4x+2}{7} - 18 = 5x$ *c)* $\frac{4x-2}{7} - 18 = 5x$

15. Adj meg alaphalmazt úgy, hogy az $\frac{5x+3}{4}-\frac{2}{7}x=x+1$ egyenletnek

a) ne legyen megoldása, *b)* legyen megoldása!

16. Készíts 3×3-as bűvös négyzetet úgy, hogy a következő számok mindegyikét felhasználod: 23, 29, 35, 43, 49, 55, 63, 69, 75!

Számoljunk hatványokkal!

A csupa azonos tényezőkből álló szorzatot röviden hatvány alakba írhatjuk.

Például: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$

Az 5 a **hatvány alapja**, ez az **ismétlődő szorzótényező**. A 6 a **hatvány kitevője**, ez a **szorzótényezők darabszáma**. Bármely szám első hatványa megegyezik magával a számmal: $a^1 = a$.

1. példa

a) Gyűjtsük csoportokba az azonos alapú hatványokat! Hány csoportot kapunk?

b) Gyűjtsük csoportokba az azonos kitevőjű hatványokat! Hány csoportot kapunk?

5^9 $0{,}1^3$ 9^1 10^1 9^5 6^3 10^9 6^5 $0{,}1^9$ 6^2 10^3 5^2

Megoldás

a)

alap 5		alap 9		alap 6			alap 0,1		alap 10		
5^9	5^2	9^1	9^5	6^3	6^5	6^2	$0{,}1^3$	$0{,}1^9$	10^1	10^9	10^3

b)

kitevő 3			kitevő 9			kitevő 5		kitevő 1		kitevő 2	
$0{,}1^3$	6^3	10^3	5^9	10^9	$0{,}1^9$	9^5	6^5	9^1	10^1	6^2	5^2

Azonos alapú hatványok szorzása, osztása

2. példa

Számoljuk ki a 206. oldalon található hatványtáblázat segítségével: $64 \cdot 512$!

Megoldás

2 hatványainak táblázatában megtaláljuk mindkét szorzótényezőt.

$64 = 2^6$ $\qquad 512 = 2^9$ $\qquad 2^6 \cdot 2^9 = (\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{6\text{ db}}) \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{9\text{ db}}) = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{15\text{ db}}) = 2^{6+9} = 2^{15} = 32\,768$

A szorzat értékét a hatványtáblázatból közvetlenül kiolvashatjuk.

3. példa

Mutassuk meg, hogy az $a^5 \cdot a^3 = a^8$ összefüggés tetszőleges a szám esetén teljesül!

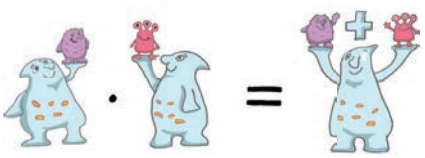
Megoldás

$$a^3 \cdot a^5 = (\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\text{ db}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5\text{ db}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{8\text{ db}}) = a^{5+3} = a^8$$

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a **közös alapot a kitevők összegére** emeljük.

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l},$$

ahol k és l pozitív egész számok.



4. példa

A hatványtáblázatból sokféle osztás eredménye is kiolvasható különösebb számolás nélkül.

Végezzük el a 2187 : 81 osztást!

Megoldás

Az osztandót és az osztót is megtaláljuk a 3 hatványtáblázatában. $2187 = 3^7$, $\quad 81 = 3^4$.

$$3^7 : 3^4 = (\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{7\text{ db}}) : (\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\text{ db}}) = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{(7-4)\text{ db}} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$$

5. példa

Mutassuk meg, hogy az $a^9 : a^2 = a^7$ összefüggés minden a érték esetén igaz (a ne legyen nulla)!

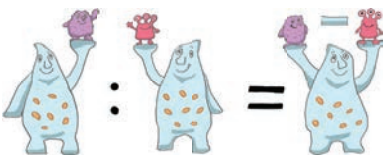
Megoldás

$$a^9 : a^2 = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{9\text{ db}}) : (\underbrace{a \cdot a}_{2\text{ db}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(9-2)\text{ db}}) = a^{9-2} = a^7$$

Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a **közös alapot** a számláló és a nevező **kitevőjének különbségére** emeljük.

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

ahol m és n pozitív egész számok, $m > n$.



Azonos kitevőjű hatványok szorzása, osztása

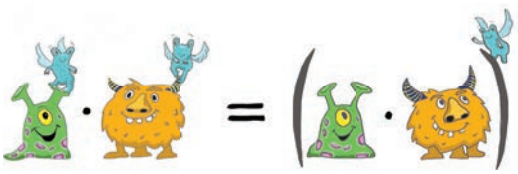
6. példa

Hatványtáblázat segítségével számítsuk ki a $2^5 \cdot 5^5$ szorzatot!

Megoldás

Gondolkodhatunk így: $2^5 = 32$, $5^5 = 3125$ és a $32 \cdot 3125 = 100\,000$ szorzat a végeredmény.

Gondolkodhatunk így:



$$2^5 \cdot 5^5 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\text{ db}}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5\text{ db}}) = \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)}_{5\text{ db}} = 10^5 = 100\,000$$

Ha hatványokkal számolunk, sokszor segít a hatvány alak szorzatra való átírása. Erre láthattok néhány példát:

7. példa

Számítsuk ki a $4^2 \cdot 5^4$ értékét!

Megoldás

$4^2 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 10^4 = 10\,000$

8. példa

Számítsuk ki a $\frac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^6}{9 \cdot 4}$ értékét!

Megoldás

$$\frac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^6}{9 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

Ez a tört egyszerűsíthető $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$-vel.

Az egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot 2 = 10^3 \cdot 2 = 2000$$

Ha a kifejezésben ismeretlen szorzótényezők vannak, akkor is segít, ha szétírjuk a hatványokat szorzat alakba.

9. példa

Írjuk egyszerűbb alakba a kifejezést! (Az a nem lehet 0.)

$$\frac{a^2 \cdot 3^3}{9 \cdot a}$$

Megoldás

Mivel $a \neq 0$, egyszerűsíthetünk, így a kifejezés sokkal egyszerűbb alakjához jutunk.

$$\frac{a^2 \cdot 3^3}{9 \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot a} = 3 \cdot a$$

Feladatok

1. Írd fel hatvány alakban!

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ *b)* $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ *c)* $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ *d)* $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}$

2. Vannak-e köztük egyenlők? Gyűjtsd ki az egyenlőket!

x^3 $\frac{15a^3}{3}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ $(5a)^3$ $\frac{1}{5^3}$ $5 \cdot a \cdot a \cdot a$ $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$ $5a^3$ $5^3 \cdot a$

3. $2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Helyezz el zárójelpárokat a műveletsorban! A zárójelben levő szorzatokat írd hatvány alakba!

Például így: $2^8 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^1$

Keress minél többféle megoldást!

4. Számítsd ki hatványtáblázat és zsebszámológép nélkül! Könnyebb látni az egyszerűsítési lehetőségeket, ha a hatványokat átírod szorzat alakba.

a) 2^8 *b)* $2^5 \cdot 4^2$ *c)* $\frac{6^5}{3^5}$ *d)* $\frac{5^2 \cdot 2^4}{25}$ *e)* $\frac{2^6 \cdot 9^2}{4^3}$

5. Zsebszámológép és hatványtáblázat nélkül állapítsd meg, melyik kisebb 1-nél!

a) $\frac{8 \cdot 2^3}{2^6}$ *b)* $\frac{9 \cdot 3^2}{9^2}$ *c)* $\frac{3^4 \cdot 3^3}{4^7}$ *d)* $\frac{2^4 \cdot 3^4}{6^3}$ *e)* $\frac{27 \cdot 3}{3^4}$

6. Másold át a füzetedbe az alábbi táblázatot! Töltsd ki az üres helyeket aszerint, hogy a fölötte található kifejezés értéke páros (ps) vagy páratlan (pt)!

12^3	5^3	$5^2 \cdot 3^2$	10^{11}	11^{10}	$6^3 \cdot 5^7$	$7^2 + 2^7$	$(3 \cdot 5)^8$	$14^3 \cdot 7^3$	$5^6 \cdot 6^3$

7. Írd fel hatvány alakban!

a) $6^3 \cdot 6$ $3^2 \cdot 3^7$ $9 \cdot 3^5$ $3^7 : 3^2$ $\frac{6^3}{6}$

b) xx^8 $p^3 p^2$ $a^5 : a^3$ $\frac{p^5}{p}$ $p^3 : p^2$

8. Rakj kártyákat az üres helyekre úgy, hogy igaz legyen az állítás! A megadott kártyákból válogathatsz, de a kék kártyák mindegyikéből csak egy van.

Ezeket használhatod alapnak: 2, 5.

Ezeket használhatod kitevőnek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$2^7 = 2^{\square} \cdot \square^{\square}$ $2^3 = \square^{\square} : \square^{\square}$

$(2 \cdot 5)^5 = \square^{\square} \cdot \square^{\square}$ $(2 \cdot 5)^5 = \square^{\square} \cdot \square^{\square} \cdot \square^{\square}$

9. Válaszd ki az egyenlőket!

a) 2^{20} *b)* $2^{10} \cdot 2$ *c)* $2^{10} \cdot 2^{10}$ *d)* $2^5 \cdot 2^5 \cdot 2$

e) $2^{18} \cdot 2^2$ *f)* $2 \cdot 2^{19}$ *g)* $2^{10} + 2^{10}$ *h)* 2^{11}

10. Az alábbi értékek egy kivételével egyenlőek. Keresd meg a kakukktojást!

a) $\frac{(2 \cdot 3^2 \cdot 7^3)^2}{3^2}$ *b)* $4 \cdot 3^2 \cdot 7^6$ *c)* $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6 + 2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$

d) $(2 \cdot 3^2 \cdot 7^6) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 7^6)$ *e)* $(2 \cdot 3 \cdot 7^3)^2$

11. Osztható 3-mal? Válaszolj I vagy N betűkkel! A füzetedben dolgozz!

$5\cdot10^7-2$	$3^3\cdot17^2-1$	$(9\cdot13)^5+a\cdot3$	$12a:4$	$12a:3$

12. A betűk pozitív egész számokat jelentenek.

Csoportosítsd a kifejezéseket aszerint, hogy az adott kifejezés **biztosan** négyzetszám-e; **lehet,** hogy négyzetszám, de nem biztosan az; **lehetetlen,** hogy négyzetszám legyen!

$3^3\cdot6\cdot a^4\cdot2^3$ $b^3\cdot3^3\cdot2^3$ c^5 $2a^2$ $3e^3$ $3a^4$

$2a^2b$ $12a^2b^5$ $k^3\cdot5^2\cdot k^5\cdot2^4$ $c^3\cdot\left(3b^2c\right)^3\cdot3$

Szöveges feladatok megoldása egyenlettel vagy anélkül

Már korábban is sokat foglalkoztunk szöveges feladatok megoldásával. Láttuk, hogy nagyon sokféle módszer van, amellyel a szöveges feladatok megoldhatók. Gyakran egyszerű következtetéssel jutottunk célhoz, máskor rajz segítségével olvastuk le a megoldást, sok esetben pedig egyenletet írtunk fel a szöveg alapján, és azt oldottuk meg.

Amikor egyenlettel oldjuk meg a feladatot, akkor valójában a **szöveget fordítjuk le a matematika nyelvére.** A fordítás a matematika nyelvére nagyon fontos feladat a tudomány, a technika és a gazdaság számos területén. Ez gyakran igen összetett egyenletek, egyenlőtlenségek felállítását és megoldását jelenti. Az egyenlettel való megoldáskor a nagyobb gondot általában ez a fordítás jelenti, vagyis az **egyenlet felállítása.**

A feladat megoldása előtt mindig érdemes **megbecsülni** a várható eredményt. Így a nagyobb tévedések elkerülhetők. Az egyenlet megoldása után a kapott értéket a **szövegbe** kell visszahelyettesítenünk, ezzel ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás valóban megfelel-e a feladat feltételeinek.

Olyan általános receptet, amely minden szöveges feladat megoldására alkalmazható, nem tudunk adni. A szöveges feladatok megoldásának módszereit néhány példán mutatjuk be.

Az itt következő feladatok nagyobb része nem igazi gyakorlati probléma, inkább rejtvény, fejtörő, fordítási gyakorlat. Segítség ahhoz is, hogy a fizika- vagy a kémiaórákon előkerülő problémákkal könnyebben boldogulj.

1. példa

Pista kétféle ceruzából 12 darabot vett 1720 Ft-ért. A ceruzák mindegyike 170 Ft-ba vagy 90 Ft-ba került. Hány darabot vett Pista az egyik fajta ceruzából, és hányat a másikból?



Megoldás egyenlettel

Ha a 170 Ft-os ceruzák száma	x,
akkor a 90 Ft-os ceruzák száma	$12 - x$.
A 170 Ft-os ceruzák ára forintban	$170x$,
a 90 Ft-os ceruzák ára forintban	$90(12 - x)$.
A kétféle ceruza ára összesen forintban	$170x + 90(12 - x)$.
Pista 1720 Ft-ot fizetett, így	$170x + 90(12 - x) = 1720$
	$170x + 1080 - 90x = 1720$
	$80x = 640$
	$x = 8$

Tehát Pista a 170 Ft-os ceruzából 8 darabot, a másikból pedig 4 darabot vásárolt.

Így valóban $170 \cdot 8 + 90 \cdot 4 = 1720$ Ft-ot fizetett.

Megoldás következtetéssel

Ha mind a 12 ceruza 170 forintos lett volna, akkor Pista 2040 Ft-ot fizetett volna értük. A 320 Ft többlet abból származik, hogy 90 Ft-os ceruzát is vett.

Ha 1 db 170 Ft-os ceruzát 90 Ft-osra cserélünk, akkor az 80 Ft-tal csökkenti a 320 Ft-os többletet. A 320 Ft többlet $320 : 80 = 4$ darab cserét jelent. Tehát 4 db 90 Ft-os és 8 db 170 Ft-os ceruzát vett Pista, és ezekért valóban 1720 Ft-ot fizetett, hiszen $90 \cdot 4 + 170 \cdot 8 = 360 + 1360 = 1720$.

2. példa

Egy kávéautomatában összesen 260 000 forint van 200 forintosokban és 50 forintosokban. Háromszor annyi 200 forintos van benne, mint 50 forintos. Hány darab van az egyes érmékből az automatában?

Megoldás

Ha az 50 forintosok száma	x,
akkor a 200 forintosok száma	$3x$.
Az 50 forintosok értéke forintban	$50 \cdot x$,
a 200 forintosok értéke forintban	$200 \cdot 3x$.
Az automatában levő pénz értéke forintban	260 000.
Ez az egyenlet írható fel:	$50x + 200 \cdot 3x = 260\,000$
	$650x = 260\,000$
	$x = 400$

Ellenőrzés

400 db 50 forintos értéke 20 000 Ft, 1200 db 200 forintos értéke 240 000 Ft. Ez együtt valóban 260 000 Ft.

Tehát az 50 forintosok száma 400, a 200 forintosoké 1200.

Megoldás következtetéssel

Mivel a 200 forintosok száma 3-szor annyi, mint az 50 forintosoké, úgy képzelhetjük, hogy minden 50 forintos mellé leteszünk 3 darab 200 forintost. Egy ilyen kupac értéke 650 Ft. A 260 000 Ft-ból 400 ilyen kupac képezhető. Mindegyikben egy darab 50 forintos van. Az 50 forintosok száma tehát 400, a húszasoké ennek 3-szorosa, vagyis 1200.

3. példa

Egy kétjegyű számban 3-szor annyi tízes van, mint egyes. Ha a szám jegyeit felcseréljük, 36-tal kisebb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

Megoldás egyenlettel

Tegyük fel, hogy az egyesek helyén áll	x,
ekkor a tízesek helyén	$3x$.
A kétjegyű szám	$10 \cdot 3x + x$.
A számjegyek felcserélésével kapott szám	$10x + 3x$.
Az eredeti szám 36-tal nagyobb.	$10 \cdot 3x + x - 36 = 10x + 3x$
	$31x - 36 = 13x$
	$18x - 36 = 0$
	$x = 2$

Ellenőrzés

Az eredeti szám 62, a felcseréléssel kapott szám 26, és ez valóban 36-tal kisebb az eredetinél.

Tehát a kétjegyű szám 62.

Megoldás egyenlet nélkül

Kevés szám jöhet csak szóba, mert az egyesek helyén csak 1, 2 vagy 3 állhat, ugyanis csak ezek azok a számjegyek, amelyeknek a háromszorosa is egyjegyű. (A 00-t nem tekintjük kétjegyű számnak.)

Az eredeti kétjegyű szám így vagy 31 vagy 62 vagy 93, és több lehetőség nincs. Ezek közül csak a 62 jó.

4. példa

Feri most feleannyi éves, mint édesapja volt 6 évvel ezelőtt, amikor Feri éppen harmadannyi éves volt, mint az édesapja most. Hány éves most Feri, és hány éves az édesapja?

Megoldás

Sokszor segít, ha önkényesen adunk egy választ a kérdésre, és kipróbáljuk, hogy jó-e. Áttekinthetőbb a feladat, ha **az adatokat táblázatba foglaljuk.**

Legyen Feri most például 21 éves.

	Ma	6 éve
Feri	21	$21 - 6$
Apja	$21 \cdot 2 + 6$	$21 \cdot 2$

Legyen Feri most x éves.

	Ma	6 éve
Feri	x	$x - 6$
Apja	$x \cdot 2 + 6$	$x \cdot 2$

A táblázat rubrikái között további **kapcsolatot keresünk.** A szöveg szerint Feri 6 évvel ezelőtt éppen harmadannyi éves volt, mint most az apja. A kapcsolat alapján **egyenletet írunk fel.**

Ha Feri 21 éves lenne, a feladat állítása nem teljesülne, mert $21 - 6$ nem egyenlő $\frac{21 \cdot 2 + 6}{3}$-dal.

Ha Feri x éves, akkor a táblázatból a következő egyenletet kapjuk:

$$x - 6 = \frac{x \cdot 2 + 6}{3}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 3-mal:	$3(x - 6) = x \cdot 2 + 6$
A bal oldalon azonos átalakítást végzünk:	$3x - 18 = 2x + 6$
Mindkét oldalhoz 18-at adunk:	$3x = 2x + 24$
Mindkét oldalból kivonunk 2-t:	$x = 24$

Ellenőrzés

	Ma	6 éve
Feri	24	18
Apja	54	48

18 valóban harmada 54-nek, megoldásunk tehát helyes.

Tehát most Feri 24 éves, édesapja pedig 54 éves.

Feladatok

1. Melyik az a szám, amelynek

a) $\frac{1}{2}$ része, $\frac{1}{3}$ része és $\frac{1}{4}$ része összesen 65, *b)* az $\frac{1}{4}$ része 2-vel kisebb az $\frac{1}{3}$-ánál,

c) az $\frac{1}{4}$-e 2-vel nagyobb az $\frac{1}{3}$-ánál, *d)* az $\frac{1}{4}$ része és az $\frac{1}{3}$ része megegyezik?

2. Gondoltam egy számot. Megszoroztam $\frac{7}{8}$-dal, majd hozzáadtam 1,5-et, és így az eredeti számnál 4-gyel kisebb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

3. *a)* Gondoltam két számra. Az egyik 15-tel nagyobb, mint a másik. Összegük 124. Melyik ez a két szám?

b) Kelekótya Karcsi nyáron vízitúrán volt. Ezt mesélte: A túrán 15-tel több fiú volt, mint lány. Összesen 124-en voltunk. Hány fiú és hány lány vett részt a túrán?

c) Egy pékségben 124 kg lisztet két részre osztottak. Egyik részből kiflit, a másikból kenyeret sütöttek. A kenyérhez 15 kg-mal több lisztet használtak fel. Hány kilogramm lisztből sütöttek kiflit?

4. A borítékban két szám van elrejtve. A boríték külsején látod az összegüket és a különbségüket is.

a) Melyik ez a két szám?

b) Készíts te is ilyen rejtvényt a társadnak!



5. Az osztályunkban 30-an vagyunk. Kettővel több a lány, mint a fiú. Hány fiú, hány lány jár az osztályunkba?

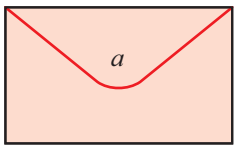
6. Két szám összege 2, az egyik szám 1-gyel nagyobb a másiknál. Melyik ez a két szám?

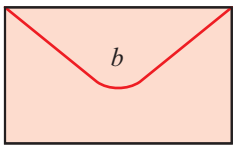
7. A szörppel telt üveg 520 forintba kerül. A szörp 500 forinttal ér többet, mint az üveg. Hány forint az üres üveg?

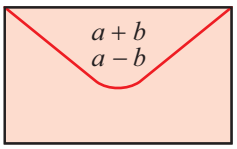
8. Szerkeszd meg a téglalapot, ha kerülete 23 cm, és egyik oldala 1,5 cm-rel hosszabb a másiknál!

9. Az előző feladatok között több olyan is van, amelyben két szám összegét és különbségét árulja el a szöveg, és ezek ismeretében lehet a kérdést megválaszolni. Mintha 2 borítékban elrejtenénk egy-egy számot, és elárulnánk az összegüket és a különbségüket is.

Keresd meg, melyek ezek a feladatok! A feladatok sorszámát írd a füzetedbe!

Amit nem ismerünk: 



amit ismerünk: 

10. Bence 4 éves volt, amikor Máté született. Hány éves korukban lesznek ketten együttvéve 50 évesek?

11. Egy 35 éves apának 10 és 6 évesek a fiai. Hány év múlva lesz a fiúk életkora együtt

a) ugyanannyi, mint az apjuké, *b)* feleannyi, mint az apjuké?

12. A szövegek és a betűs kifejezések is kétjegyű egész számokról szólnak. A betűs kifejezések egy-egy kétjegyű szám értékét adják meg. Az a egyjegyű egész számot jelent ezekben a betűs kifejezésekben. Párosítsd össze az összetartozó szövegeket és betűs kifejezéseket!

a) A szám első jegye a, a második jegye 2.	*A)* $10a + a + 2$
b) A szám első jegye a, a második 2-vel több.	*B)* $10a + 2$
c) A szám második jegye kétszer akkora, mint az első.	*C)* $10a + 2a$
d) A számban 2-vel több tízes van, mint egyes.	*D)* $10 \cdot 2 + a$
e) A számban kétszer annyi tízes van, mint egyes.	*E)* $10 \cdot (a + 2) + a$
f) A szám első jegye 2, a második jegye a.	*F)* $10 \cdot 2a + a$

★ **13.** Ádám születésekor édesanyja 30 éves volt. Ádám egy idő óta minden születésnapján kiszámolja, hogy anyukája életkora éppen hányszorosa az övének. Ha ez egész szám, akkor ezt külön megünnepelik. Hány ilyen születésnapot ünnepelhet meg Ádám?

Mozgásos feladatok

A mozgásos feladatokban a megtett út (s), az eltelt idő (t), és a sebesség (v) között keresünk kapcsolatot. Egyenletes mozgásról olyankor beszélünk, ha egyenlő időközönként egyenlő utat tesz meg a mozgó test. Ilyenkor a sebesség állandó, és a mozgás adatai között fennáll, hogy az eltelt idő és a sebesség szorzata megadja a megtett utat.

$$s = v \cdot t$$

1. példa

Veronika és Judit kerékpárral Kemencéről Szobra mentek. Veronika átlagosan 15 km-t, Judit átlagosan 12 km-t tett meg egy óra alatt. Judit $\frac{1}{2}$ órával előbb indult, így épp egyszerre értek be Szobra. Hány kilométert bicikliztek Kemencétől Szobig?

Megoldás egyenlettel

A jobb áttekinthetőség kedvéért az adatokat táblázatba foglaljuk. Judit menetidejét jelöljük x-szel!

	Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	Idő [h]	Út [km]
Judit	12	x	$12x$
Veronika	15	$x - 0{,}5$	$15(x - 0{,}5)$

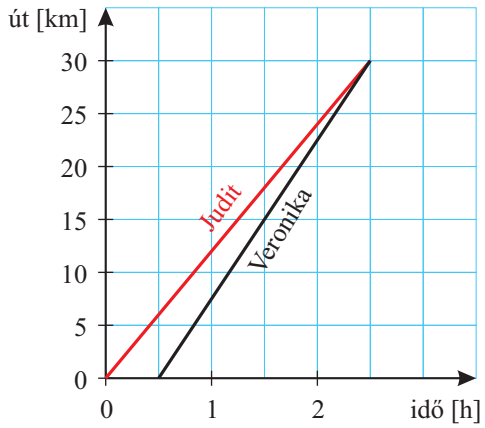
Mindketten ugyanakkora utat tettek meg:

$$12x = 15(x - 0{,}5)$$
$$4x = 5(x - 0{,}5)$$
$$4x = 5x - 2{,}5$$
$$x = 2{,}5$$

Ellenőrzés

Veronika fél órával rövidebb ideig, vagyis 2 óráig kerékpározott, ezalatt ($15 \cdot 2 =$) 30 km-t tett meg. Judit 2,5 óra hosszat kerékpározott, ezalatt ($12 \cdot 2{,}5 =$) 30 km utat tett meg. Szob és Kemence távolsága 30 km.

Grafikus megoldás



Pirossal rajzoltuk Judit mozgásgrafikonját, feketével Veronikáét. A grafikonról leolvasható Kemence és Szob távolsága, a 30 km, és az is, hogy Veronika 2 órát, Judit 2,5 órát haladt, míg Kemencéről Szobra ért.

Megoldás következtetéssel

Fél óra alatt Judit 6 km-t tett meg, tehát Veronika indulásakor Juditnak 6 km előnye volt. Mivel óránként 3 km-rel csökken Judit előnye, ezért a 6 km előny 2 óra alatt fogy el.

Veronika tehát 2 órát kerékpározott, és ezalatt $2 \cdot 15 = 30$ km-t tett meg. A két helység távolsága 30 km.

Galileo Galilei 1628-ban javasolta, és később elvégezte a következő kísérletet, amellyel a fény sebességét próbálta mérni:

Két ember áll két hegycsúcson. Mindkettőnél eltakart fényű lámpa van. Amikor az egyik ember kitakarja a lámpáját, akkor abban a pillanatban, amint ezt észreveszi, a másik embernek is ki kell takarnia a lámpáját.

Egy harmadik ember áll az első mellett, és méri, hogy mennyi idő telik el az első és második lámpa felvillanása között.

Ismételt kísérletek sem vezettek eredményre, csak annyit tudtak megállapítani, hogy a fény legalább 10-szer gyorsabb a hangnál.



2. példa

Tegyük fel, hogy Galilei kísérletében minden tökéletesen sikerült. A két lámpás ember 2 km-re áll egymástól, és egy harmadik az első mellett állva nagyon pontosan tudja mérni az időt.

Mi már tudjuk, hogy a fény sebessége jó közelítéssel $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$, ennek ismeretében számítsuk ki, mekkora időkülönbséget kellett volna a harmadik embernek észlelnie.

Megoldás

Az 1. felvillanás fénye a 2. megfigyelőig 2 km-t tett meg, ehhez $\frac{2}{300\,000}$ s idő szükséges. Ideális esetben rögtön felvillant volna a 2. lámpa, amelynek a fénye újra megtette ugyanazt a 2 km-t a megfigyelőig, ez újabb $\frac{2}{300\,000}$ s időt vett igénybe. Ez összesen $\frac{4}{300\,000}\,\text{s} = \frac{1}{75\,000}\,\text{s} = 0,000\,013\,\text{s}$ lett volna. Azaz körülbelül a másodperc százezred részével megegyező időtartamot kellett volna mérni, ami természetesen lehetetlen volt.

3. példa

Feriék kirándulni mentek. 3 óra alatt jutottak fel a kilátóhoz. Lefelé gyorsabban jöttek, sebességük $0,7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb volt, mint fölfelé, így 2,5 óra alatt értek le.

Milyen messze volt Feriék indulási helyétől a kilátó, és milyen sebességgel haladtak fölfelé, illetve lefelé menet?

Megoldás

Az adatokat ismét táblázatba foglaljuk. Azt a sebességet jelöljük x-szel, amellyel fölfelé haladtak.

	Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	Idő [h]	Út [km]
Fölfelé	x	3	$3x$
Lefelé	$x + 0,7$	2,5	$2,5(x + 0,7)$

Az odafelé, illetve a visszafelé megtett utak megegyeznek egymással, ennek alapján írhatjuk fel az egyenletet:

$$3x = 2{,}5(x + 0{,}7)$$
$$3x = 2{,}5x + 2{,}5 \cdot 0{,}7$$
$$0{,}5x = 2{,}5 \cdot 0{,}7$$
$$x = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}7}{0{,}5} = 5 \cdot 0{,}7$$
$$x = 3{,}5$$

Ellenőrzés

Felfelé $(3{,}5 \cdot 3 =)$ 10,5 km utat tettek meg. Visszafelé $(3{,}5 + 0{,}7 =)$ 4,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mentek, útjuk ekkor is $(4{,}2 \cdot 2{,}5 =)$ 10,5 km.

Tehát felfelé 3,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtak, lefelé $(3{,}5 + 0{,}7 =)$ 4,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A kilátó 10,5 km-re volt az indulási helytől.

Feladatok

1. Dolgozz a **padtársaddal!** Az adatok egy-egy állat, illetve az ember csúcsteljesítményeiről szólnak. Futóversenyen vagy menekülés közben mért adatokat találsz a táblázatban. Írd a füzetedbe a hiányzó adatokat!

Fajta	Zsiráf	Kerti csiga	Házi sertés	Oroszlán	Kenguru	Egér	Zebra	Mókus
Távolság	102 km	2 m	3 km	60 km		2160 m	8 km	5 km
Idő [perc]		3		45	5	10		15
Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	51		18		48		64	

Fajta	Sólyom	Elefánt	Ember	Nyúl	Csirke	Óriás-teknős
Távolság		10 km	25 m	7 km		90 m
Idő	34 perc	$\frac{1}{4}$ óra	2 s	7,5 perc	20 perc	
Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	280				13,5	0,27

Állítsd sorba az élőlényeket sebességük szerint!

Látsz-e összefüggést az állatok sebessége és mérete között?

2. Kati és Éva 800 méterre laknak egymástól. Kati átlagosan 45 métert, Éva 55 métert tesz meg percenként. Hány perc múlva találkoznak, ha egyszerre indulnak el egymás felé?

3. Két, egymástól 14 km távolságra fekvő faluból egy időben indult el egymással szemben két gyerek, az egyik gyalog 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik kerékpáron 16,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt. Az indulásuk után hány perc múlva találkoztak, és ekkor mekkora távolságra voltak a két falutól?

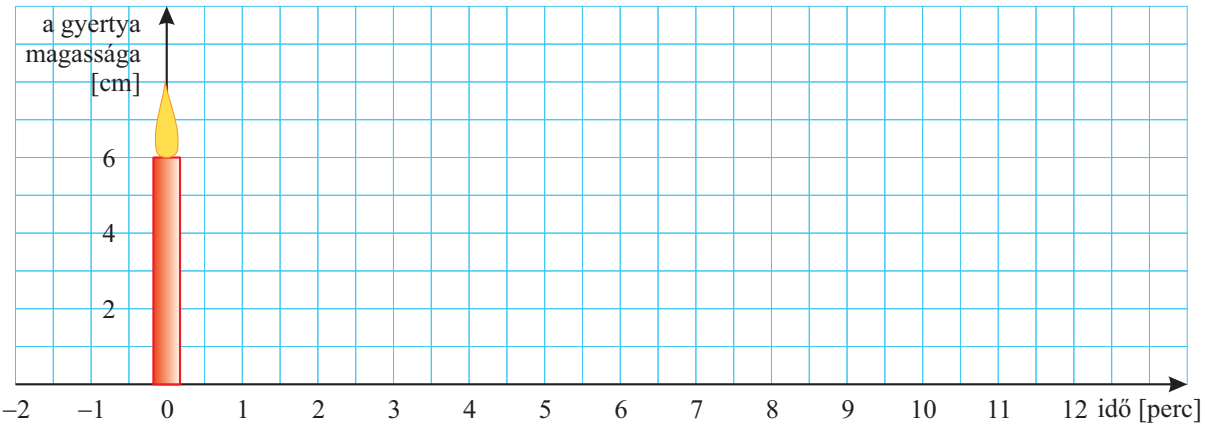
4. Egy faluból két gyalogos ment a városba. Az egyik egy órával előbb indult, és egy órával később érkezett a városba, mint a másik. Az első óránként 4 km-t, a másik pedig óránként 6 km-t haladt. Milyen messze van a falu a várostól?

5. Egy állomásról egymás után két óra különbséggel két vonat indul. Az első óránként 48, a második óránként 60 km-t halad. Hány óra múlva éri utol a második vonat az elsőt?

6. A Sopron és Tatabánya közötti utat $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 20 perccel több idő alatt lehet megtenni, mint $84\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Milyen hosszú a két város közötti út?

7. Egy fél cm átmérőjű gyertya égését figyeltük. A megfigyelést akkor kezdtük, amikor egy 6 cm-es darab volt a gyertyából. A gyertya egyenletesen, 12 perc alatt égett le.

Percenként hány milliméterrel lett rövidebb?



Készíts a füzetedben rajzot a gyertya hosszának változásáról!

a) Mikorra lett feleakkora a gyertya, mint a megfigyelés kezdetén (0 perckor) volt?

b) Mikorra lett a gyertyacsonk 2 cm-es?

c) 1 perc alatt hány cm ég le a gyertyából?

d) Hány perc alatt csökken a gyertya magassága 1 cm-t?

e) Milyen magas volt a gyertya a megfigyelés előtt 5 perccel?

f) Mekkora lehetett eredetileg a gyertya, ha a megfigyelés előtt 10 perccel gyújtottuk meg?

8. Két gyertyánk van. Ha meggyújtjuk őket, egyenletes sebességgel fogynak.

Az egyik 15 cm hosszú és $\frac{1}{2}$ óra alatt ég le.

A másik 25 cm hosszú és 50 perc alatt ég le.

a) Mikor lesznek egyenlő hosszúak, ha egyszerre gyújtjuk meg a két gyertyát?

b) Mikor lesznek egyenlő hosszúak, ha a hosszabb gyertyát 1 órával később gyújtjuk meg?

c) Mikor gyújtsuk meg a hosszabb gyertyát, ha azt akarjuk, hogy egyszerre égjenek le?

★ **9.** Két motorkerékpáros egy időben indult el kirándulni. Egyenlő távolságot tettek meg, és egy időben is érkeztek haza. Az úton mindketten megpihentek. Annyit tudunk, hogy az egyik kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit a másik pihent, a másik pedig háromszor annyit volt úton, mint amennyit az első pihent. Melyik haladt gyorsabban?

Munkavégzéssel kapcsolatos feladatok

1. példa

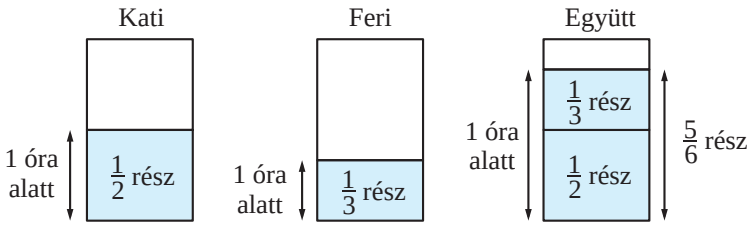
A nyári táborban paprikás krumpli készül. Katit és Ferit bízzák meg a krumpli hámozásával. Kati egyedül 2 óra alatt, Feri egyedül 3 óra alatt készülne el a munkával. Mennyi idő alatt lesznek készen, ha együtt dolgoznak?

Megoldás

Becslés

Biztos, hogy ketten együtt 2 óránál rövidebb idő alatt végeznek.

Készítsünk ábrát!



Megoldás következtetéssel

A teljes mennyiségnek

1 óra alatt Kati $\frac{1}{2}$ részét,

1 óra alatt Feri $\frac{1}{3}$ részét hámozza meg.

1 óra alatt együtt $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ részét hámozzák meg.

1 óra alatt $\frac{5}{6}$ rész készül el.



Hány óra alatt készül el 1 egész rész, azaz a teljes munka?

$$\begin{matrix} 1 \text{ óra} \\ \searrow \cdot \frac{6}{5} \\ ? \text{ óra} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{5}{6} \text{ rész} \\ \searrow \cdot \frac{6}{5} \\ 1 \text{ rész} \end{matrix}$$

$$? \text{ óra} = \frac{6}{5} \text{ óra} = 1 \text{ óra és } 12 \text{ perc}$$

Ellenőrzés

Kati $\frac{6}{5}$ óra alatt $\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{10}$ részét végzi el a munkának.

Feri $\frac{6}{5}$ óra alatt $\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{15}$ részét végzi el a munkának.

Együtt $\frac{6}{5}$ óra alatt $\frac{6}{10}+\frac{6}{15}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$ egészet, azaz az egész munkát elvégzik.

Tehát összesen $\frac{6}{5}$ óra = 1 óra 12 perc kell a munka elvégzésére, azaz a becslés helyes volt.

Megoldás egyenlettel

Tegyük fel, hogy ketten együtt x óra alatt lesznek készen a munkával. Vegyük 1 egységnek az elvégzendő munka mennyiségét!

Rendezzük el az adatokat táblázatban!

	Kati	Feri
Hány óra alatt végez?	2	3
1 óra alatt végzett munka:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
x óra alatt végzett munka:	$x \cdot \frac{1}{2}$	$x \cdot \frac{1}{3}$

Együtt x óra alatt végzik el az egész munkát.

$$x \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

$$\frac{5x}{6} = 1$$

$$x = 1 : \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$$

2. példa

Egy medencét több csapból is lehet tölteni. Az első csapból 5 óra alatt telik meg a medence, a másodikból 7 óra alatt. Mennyi idő alatt telhet meg a medence, ha mindkét csapot egyszerre nyitjuk ki?

Megoldás

Becslés: Biztos, hogy 5 óránál rövidebb idő alatt.

Megoldás következtetéssel

Az 1. csap 1 óra alatt $\frac{1}{5}$ medencét tölt meg. A 2. csap 1 óra alatt $\frac{1}{7}$ medencét tölt meg, a két csap együtt 1 óra alatt $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{5}{35} + \frac{7}{35} = \frac{12}{35}$ medencét tölt meg. Ez a teljes medencében $1 : \frac{12}{35} = \frac{35}{12}$-szer van meg. Tehát $\frac{35}{12}$ óra alatt telik meg a medence. Ez 5 perc híján 3 óra.

Megoldás egyenlettel

Legyen x a feltöltéshez szükséges idő, ha mindkét csap nyitva van. Az 1. csap x óra alatt $\frac{x}{5}$ medencét, a 2. csap x óra alatt $\frac{x}{7}$ medencét tölt meg. A két csap együtt x óra alatt a teljes medencét megtölti, ezért

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 1$$

$$7x + 5x = 35$$

$$12x = 35$$

$$x = \frac{35}{12}$$

Ellenőrzés

Az 1. csap $\frac{35}{12}$ ötödrészét, azaz $\frac{7}{12}$ részt tölt meg vízzel.

A 2. csap $\frac{35}{12}$ hetedrészét, azaz $\frac{5}{12}$ részt tölt meg vízzel.

Együtt $\frac{7}{12}$ részt + $\frac{5}{12}$ részt = $\frac{12}{12}$ részt töltenek meg, ami valóban az egész medence.

Tehát a két csap együtt $\frac{35}{12}$ óra, vagyis 2 óra 55 perc alatt tölti meg a medencét, azaz a becslés helyes volt.

Feladatok

1. Jancsi 3 óra alatt, Kati 6 óra alatt takarítja ki a lakást. Mennyi idő alatt végeznek a munkával, ha együtt dolgoznak?

2. A mindenízű drazsét gyártó vállalkozás kezdetben egyetlen géppel dolgozott. A termék annyira népszerű lett, hogy hamarosan egy második, modernebb, majd rövid idő múlva egy harmadik, csúcsszuper gépet is beindítottak. Mindegyik gépről közlünk egy-egy adatot. Találd ki, hogy melyik gép dolgozott először, melyik a modernebb, és melyik a csúcsszuper!



11 óra alatt 363 db-ot gyárt



6 óra alatt 168 db-ot gyárt



4 óra alatt 120 db-ot gyárt

A három gép naponta 13 óra hosszat együtt dolgozik. Egy nap alatt hány szem drazsé készül?

3. Gondos Géza, Ügyes Béla, Belevaló Józsi és Szorgos Ádám jó barátok. Ugyanakkora földet művelnek mind a négyen. Április 12-én is kinn voltak mindannyian a határban.

Gondos Géza 6 órát töltött munkával a földjén, és így a föld $\frac{1}{5}$-én végezte el a tavaszi talaj-előkészítést. Ügyes Béla 5 órát töltött kinn, és a földje $\frac{1}{4}$-ével végzett. Belevaló Józsi 4 óra alatt földje $\frac{1}{5}$-ével készült el, Szorgos Ádám 8 órát dolgozott, és a földje $\frac{1}{3}$-át művelte meg ezalatt.

a) Melyikük művelte meg 1 óra alatt a legnagyobb földterületet?

b) Hány óra alatt végeznek az egyes gazdák a földjükkel?

c) Egy földdarabot a négy ember együtt mennyi idő alatt művelne meg?

4. Két munkás üvegkancsókat fúj. Az első három óra alatt 8 kancsót készít, míg a másik 6 óra alatt végez ugyanennyivel. Hány óra alatt készítenek el 8 kancsót ketten együtt?

5. A medencét az egyik cső 54 perc alatt, a másik 1 óra 48 perc alatt tölti meg. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mind a két cső nyitva van?

6. Egy lakás parkettázásával az egyik munkás 40 óra alatt, a másik 48 óra alatt, a harmadik 60 óra alatt lenne készen. Hány óra alatt lesznek készen a munkával együtt?

7. Egy tartályba 3 csapon át folyhat a víz. Ha egy-egy csap van nyitva, a tartály 1 óra, 2 óra, illetve 3 óra alatt telik meg. Mi történik, ha mindhárom csapot kinyitjuk?

8. Feri a kertjüket 8 óra alatt tudja felásni, míg a bátyja 6 óra alatt végez ugyanezzel a munkával. Egy alkalommal ketten fogtak az ásáshoz. Két órát dolgoztak együtt, majd Feri egyedül folytatta a munkát, és be is fejezte. Hány órát ásott Feri?

9. Egy tartályba egy kék, egy piros és egy zöld csapon át engedhetünk vizet.

A piros csap egyedül 3 óra alatt, a piros és a kék csap együtt 2 óra alatt, a három csap együtt 1 óra alatt tölti meg a tartályt.

Hány óra alatt töltik meg ezek a csapok a tartályt külön-külön?

Százalékszámítással kapcsolatos feladatok

1. példa

Anikó a barátainak, Katinak és Csabának egy-egy ajándékot nézett ki összesen 12 000 Ft-ért, de nem volt nála ennyi pénz. A következő héten elment, hogy megvegye a kiszemelt ajándékokat. Éppen 12 000 Ft-ot vitt magával.

Meglepődve látta, hogy a Katinak szánt ajándék 20%-kal drágább, Csabáé viszont 10%-kal olcsóbb lett.

Anikó az új árak mellett is meg tudta venni az ajándékokat. Mennyibe kerülhettek eredetileg a kiválasztott meglepetések?

Megoldás

Kati ajándéka eredetileg	k Ft
Csaba ajándéka eredetileg	$12\,000 - k$ Ft
Kati ajándékának új ára	$k \cdot 1{,}2$ Ft
Csaba ajándékának új ára	$(12\,000 - k) \cdot 0{,}9$ Ft
A kétféle ajándék ára összesen	$k \cdot 1{,}2 + (12\,000 - k) \cdot 0{,}9$ Ft
Anikó pénze	12 000 Ft
A vásárlás feltétele	$k \cdot 1{,}2 + (12\,000 - k) \cdot 0{,}9 \le 12\,000$
	$1{,}2k + 10\,800 - 0{,}9k \le 12\,000$
	$0{,}3k \le 1200$
	$k \le 4000$

Kati ajándéka eredetileg legfeljebb 4000 Ft volt, ami azt jelenti, hogy Csaba ajándéka legalább 8000 Ft-ba került.

2. példa

Az egyik barkácsáruházban egy import padlócsempe árát 20%-kal leszállították. Néhány hónap múlva újabb 30%-os árleszállítással akciót hirdettek a csempére.

Egy kereskedő ekkor a teljes készletet felvásárolta, és elraktározta. Egy év múlva ugyanazt a csempét az eredeti áron értékesítette.

Hány %-kal drágábban árulta a kereskedő a csempét, mint ahogyan megvette?

Megoldás

A termék eredeti ára	A
Az 1. ár 20%-os árleszállítás után az eredeti ár 80%-a:	$A - A \cdot \frac{20}{100} = A \cdot \frac{80}{100}$
A 2. ár a 30%-os árleszállítás után az előző ár 70%-a:	$A \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{70}{100} = A \cdot \frac{56}{100}$
A 3., végső ár a 2. ár x százaléka:	$A \cdot \frac{56}{100} \cdot \frac{x}{100}$
A 3. ár épp az eredeti árral egyenlő:	$A \cdot \frac{56}{100} \cdot \frac{x}{100} = A$
Osszuk el mindkét oldalt A-val:	$\frac{56}{100} \cdot \frac{x}{100} = 1$
	$x = 1 : \frac{56}{100} \cdot 100 = \frac{10\,000}{56} \approx 178,6$

Ellenőrzés

Legyen az eredeti ár	A Ft
Az első új ár ennek 80%-a	$A \cdot 0,8$
A második új ár az első új ár 70%-a	$A \cdot 0,8 \cdot 0,7$
Ennek 178,6%-a	$A \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 1,786 \approx A \cdot 1 = A$

Ez azt jelenti, hogy a kereskedő 78,6%-kal drágábban árulta a csempét, mint ahogyan megvásárolta.

Feladatok

1. Melyik feladatban adták meg a 100%-ot, és melyikben kell azt neked kiszámítanod?

a) Mennyi 225-nek a 15 százaléka?
b) Melyik számnak a 15%-a a 34,15?
c) Hány százaléka 125-nek a 213?
d) Hány százaléka 52 a 130-nak?
e) A 13 hány százaléka a 85-nek?
f) A 22 a 100-nak hány százaléka?
g) A 22-nek hány százaléka a 100?
h) Melyik számnak a 22%-a a 100?

Az *a)–e)* feladatok mindegyikében jelöld x-szel az ismeretlent! Írj a feladatokról egy-egy egyenletet!

Nem kell megoldanod, elég, ha megbecsülöd!

2. Csizmás Kandúr csizmát vásárol szezonvégi kiárusításban, az eredeti árnál 42%-kal olcsóbban. Melyek azok az egyenletek, amelyek megadják, hogy mennyit kell fizetni a csizmáért?

Az eredeti ár 14 000 Ft volt.

a) $14\,000 \cdot \frac{58}{100} = x$
b) $14\,000 - \frac{42}{100} = x$
c) $14\,000 \cdot 0,42 = x$
d) $14\,000 : 100 \cdot 42 = x$
e) $14\,000 - 14\,000 \cdot 0,42 = x$
f) $14\,000 - 14\,000 \cdot 0,58 = x$

3. Hány százalékos volt az árleszállítás, ha 680 Ft helyett 430 Ft-ért vettünk egy labdát?
Válaszd ki azt az egyenletet, amelyben x a kérdésre válaszol!

a) $680 - x \cdot 680 = 430$ *b)* $680 - \frac{x}{100} \cdot 680 = 430$ *c)* $680 \cdot \frac{x}{100} = 430$

d) $430 \cdot \frac{x}{100} = 680$ *e)* $430 : \frac{680}{100} = x$ *f)* $680\left(\frac{100 - x}{100}\right) = 430$ *g)* $x = \frac{430 \cdot 100}{680}$

4. Mennyi volt Nóra fizetése januárban, ha a februári 30%-os fizetésemelés után 369 000 Ft lett?
Válaszd ki azokat az egyenleteket, amelyek megadják Nóra januári fizetését!

a) $369\,000 \cdot \frac{130}{100} = x$ *b)* $\frac{x \cdot 130}{100} = 369\,000$ *c)* $369\,000 : 1{,}3 = x$ *d)* $x + 0{,}3x = 369\,000$

e) $x + 1{,}3x = 369\,000$ *f)* $x \cdot 1{,}3 = 369\,000$ *g)* $x \cdot \frac{30}{100} = 369\,000$

5. Háromnapos gyalogtúránk első napján az út $\frac{2}{5}$ részét, a második napon a hátralévő út felét tettük meg. Az utolsó napon 15 km-t gyalogoltunk.

a) A teljes út hány százalékát tettük meg az első, a második, illetve a harmadik napon?

b) Hány kilométer volt a teljes túra útvonala?

6. A Semmiresejó Bt. háromféle terméket forgalmaz: kütyüt, ketyerét és mütyürt, 100, 200, illetve 300 petákért darabját. Gyereknap előtt minden termék árát 30%-kal felemelték.
Egy hónap múlva minden cikket kiárusítottak 40%-kal olcsóbban. Az eredeti árhoz képest áremelést vagy árleszállítást jelentett ez? Hány százalékosat?

7. Egy árucikk árán kétszer változtattak.
Döntsd el, hogy ez végül áremelést vagy árcsökkentést eredményezett-e, és hány százalékosat!
A füzetedben dolgozz!

Első árváltoztatás	Második árváltoztatás	Ennyi %-kal emelkedett vagy csökkent az eredeti ár
30%-os emelés	10%-os emelés	
50%-os emelés	20%-os emelés	
10%-os csökkentés	10%-os emelés	
40%-os emelés	50%-os csökkentés	
40%-os emelés	30%-os csökkentés	

8. A téli vásár alkalmával egy család kétféle ingből összesen 8 darabot vásárolt. Az egyik fajtából 40%-os, a másik fajtából 28%-os volt az árkedvezmény. Az utóbbiból egy ingért 2592 Ft-ot, a másik fajta ing darabjáért 2040 Ft-ot, összesen 19 080 Ft-ot fizettek.
Mennyit takarított meg a család azzal, hogy a téli vásárkor vette meg az ingeket?

Pénzügyi ismeretek

Számlacsomagok összeállítása

A bankok a számlacsomagok összeállításakor természetesen az ügyfelek igényeit is figyelembe veszik. A bankok sokféle számlacsomagot kínálnak fel a különböző korú és foglalkozású ügyfeleknek, például a 18 év alattiak számára diákszámlacsomagot.

Bankautomaták

A bankautomata elnevezése röviden **ATM.** (Az angol elnevezés kezdőbetűi: **A**utomated **T**eller **M**achine.) A bankautomata segítségével pénzt tudunk felvenni a bankszámlánkról.



Bankkártya

A bankkártyával tudunk fizetni, és pénzt tudunk felvenni a bankautomatából. Néhány bank a 18 évnél fiatalabb diákok számára díjmentes havi számlavezetést biztosít, és a bankkártyát is díjmentesen kínálja. Van olyan bank, ahol a kártya díja később is ingyenes, másutt viszont a második évben már díjat számítanak fel. Ez utóbbi bankban a 18 éven aluliaknak évi 3450 Ft a kártya díja.

Többnyire kedvezőbb, ha a saját bankunk automatáját használjuk pénzfelvételkor. A saját bankunknál a törvény havonta 150 ezer forintig ingyenes készpénzfelvételt, és havonta két ingyenes tranzakciót biztosít, ha erről írásban nyilatkoztunk. A díjak és a törvények az évek során természetesen megváltozhatnak.



PIN-kód

Minden kártyához tartozik egy titkos kód. Ez egy négyjegyű szám. Ennek segítségével tudjuk használni a bankkártyánkat a különböző automatákon (pl.: buszjegyvásárláskor, pénzfelvételkor).

1. példa

A feladatokban a 2021. évi banki ajánlatok közül válogattunk.

Egyes bankok a 14–24 év közötti fiataloknak Junior számlacsomagot kínálnak fel. Az IFI Bank az ATM-készpénzfelvételért használati díjat számol fel. Ha az IFI Bank terminálján történik a pénzfelvétel, akkor a bank a havi két ingyenes készpénzfelvételt követően 112 Ft-ot és a felvett összeg 1,49%-át számolja fel.

a) Ákos júniusban a megtakarított pénzéből egy összecsukható elektromos rollert szeretne venni. Talál is egy jó ajánlatot. Az eladó 230 000 Ft-ért hirdette meg a jó állapotban lévő használt rollert. Ákosnak készpénzzel kell fizetnie. Ebben a hónapban már négyszer vett le pénzt a bankszámlájáról. Az IFI Bank terminálján veszi fel a pénzt. Számítsuk ki, mennyi a készpénzfelvételi díj összege?

Megoldás

112 Ft + 230 000 Ft · 1,49 : 100 = 112 Ft + 3427 Ft = 3539 Ft

A készpénzfelvételi díj 3539 Ft.

b) A 19 éves Péter ugyanilyen, de új rollert vásárolt 518 000 Ft-os áron. A vételárat előre utalással egyenlítette ki. Az IFI Bank a 18 és 35 év közöttieknek is felajánlott egy számlacsomagot. Az átutalási díj a korcsoport számára az átutalt összeg 0,2%-a.

Mennyi volt az átutalási díj?

Megoldás

518 000 Ft · 0,2 : 100 = 1036 Ft

Az átutalási díj 1036 Ft.

2. példa

Zsófi szülei a nagyszülők nevére, biztonságuk érdekében, Magyar Állampapír Plusz értékpapírt vásároltak 1 000 000 Ft-ért. A betett összeg kamata a futamidőtől függ.

A kamat mértéke:

- az első félévben évi 3,5%
- a második félévben évi 4,0%
- a 2. évben évi 4,5%
- a 3. évben évi 5,0%
- a 4. évben évi 5,5%
- az 5. évben évi 6%

Mennyi lesz a kamat az első félév végén?

Az adatok forrása: www.allampapir.hu



Megoldás

Ki kell számítanunk 1 egész évre a 3,5%-os kamatot, majd ennek a felét kell venni.

Számítás:

1 teljes évre a kamat:

1 000 000 Ft · 3,5 : 100 = 1 000 000 Ft · 0,035 = 35 000 Ft

Fél évre a kamat:

35 000 Ft : 2 = 17 500 Ft

Válasz:

Ha fél év múlva lenne a nagyszülőknek szükségük a pénzre, akkor 1 017 500 Ft-ot kapnának.

A kamatos kamat fogalma

A következő félévi kamat alapja az első félév végén felvehető 1 017 500 Ft lesz, ami már a kamattal megnövelt összeg. A **kamattal megnövelt összeg kamatát kamatos kamatnak** nevezzük.

Feladatok

1.



Az euró árfolyama 2008. 07. 20-án volt a legalacsonyabb, 1 euró 227,57 Ft (történelmi minimum) volt. 2022 előtt a koronavírus időszakában, 2021. 11. 23-án volt a legdrágább, 1 euró 372,01 Ft volt.

Hány eurót fizettek egy 12 000 Ft-os repülőútért 2008-ban, és mennyit 2021-ben, ha éppen ezeken a napokon vásároltak repülőjegyet?

2. A 17 éves Lilla júniusban a Brüsszelben dolgozó édesanyjához utazott. A nyári szünetet együtt töltötték. Az utazásra és egyéb kiadásokra szánt 800 000 Ft-ot négy egyenlő részletben az IFI Bank bankautomatájából vette fel készpénzben. Ebben a hónapban már kétszer vett le pénzt a terminálon, ezért a tranzakciókért már alkalmanként 118 Ft-ot és a felvett összeg 1,49%-át kellett kifizetnie. Számítsd ki, mennyi a készpénzfelvételi díj összege!

3. Zsombor 21 éves orvostanhallgató. A nyári szünetben munkát vállalt. A keresetéből júniusban 800 000 Ft-ot átutalt a beteg nagyszüleinek. Az átutalási díj a korcsoportja számára a TUTI Bankban az átutalt összeg 0,35%-a.

a) Mennyi volt az átutalási díj?

b) Mennyi lett volna a 800 000 Ft átutalási díja, ha az IFI Bankban nyitott volna számlacsomagot, ahol az átutalási díj a korcsoportja számára az átutalt összeg 0,2%-a?

4. Csoportoddal vitasd meg!

Mit kell tenned, ha gyanús pénzmozgást érzékelsz a számládon, vagy elvesztetted a bankkártyádat?

Megjegyzés: Ilyen esetben általában visszakaphatod a pénzt, ha nem a te hibádból történt a visszaélés. A te hibád lehet például, ha a kártyához tartozó PIN-kódot úgy szerezték meg, hogy az fel volt írva a kártya mellé. Fontos, hogy a kártyád legyen aláírva!

a) Azonnal értesítem a bankomat, hogy le tudják tiltani azt.

b) Felhívom a papámat telefonon, megkérem, hogy intézkedjen.

c) Bejelentem a rendőrségen.

d) A vásárlási limitet lecsökkentem 1 forintra.

5. A 2. példában találkoztunk a Magyar Állampapír Plusz értékpapír kamatozási feltételeivel. Az ott található adatok felhasználásával válaszoljatok az alábbi kérdésekre!

a) Mennyi lenne az 1 017 500 Ft kamatos kamata az első év végén, ha a 2. félévben évi 4%-os kamattal számolunk?

b) 5 év múlva a teljes kamatos kamat 27,35% lenne. Mekkora összeghez juthatnak Zsófi nagyszülei a futamidő végén?

Keveréses feladatok

1. példa

Kétféle kávéból 50 kg 3000 Ft egységárú keveréket akarunk készíteni. Az első fajta kilogrammja 2500 Ft, a második fajtáé 3300 Ft. Hány kilogrammot vegyünk az egyes fajtákból?

Megoldás

Becslés

A keverék egységára közelebb van a 3300 Ft-hoz, mint a 2500-hoz, ez azt jelenti, hogy a 3300 Ft-os kávéból kell többet venni, vagyis ebből több, mint 25 kg-ot kell felhasználnunk a keverék előállításához.

Jelöljük az első fajta kávé mennyiségét x-szel (kilogrammban)! Rendezzük el az adatokat táblázatban!

	Mennyiség [kg]	Egységár [Ft/kg]	Ár [Ft]
I. fajta	x	2500	$2500x$
II. fajta	$50 - x$	3300	$3300(50 - x)$
Keverék	50	3000	$3000 \cdot 50$

A keverék ára megegyezik a két ár összegével: $2500x + 3300(50 - x) = 3000 \cdot 50$



$$25x + 33(50 - x) = 30 \cdot 50$$

$$25x + 1650 - 33x = 1500$$

$$1650 - 8x = 1500$$

$$8x = 150$$

$$x = \frac{150}{8}$$

$$x = 18{,}75$$

Ellenőrzés

Az olcsóbb kávéból 18,75 kg-ot tettünk a keverékbe, ennek értéke $18{,}75 \cdot 2500 = 46\,875$ Ft.

A drágább kávéból 31,25 kg-ot tettünk a keverékbe, ennek értéke $31{,}25 \cdot 3300 = 103\,125$ Ft.

Az együttes tömeg így valóban 50 kg, és az együttes ár valóban 150 000 Ft.

A 2500 Ft-os kávéból 18,75 kg-ot, a másik fajtából 31,25 kg-ot kell vennünk, tehát a becslés helyes volt.

2. példa

5 kilogramm 80%-os oldathoz hány kilogramm 50%-os oldatot öntsünk, ha 60%-os oldatra van szükségünk?

Megoldás

Becslés

A keverék töménysége az 50%-hoz van közelebb, tehát az 50%-os oldatból 5 kilogrammnál többet kell venni.

x-szel jelöljük az 50%-os oldat tömegét. Az adatokat ismét foglaljuk táblázatba!

	Tömeg [kg]	Töménység [%]	Oldott anyag tömege [kg]
I. fajta	5	80	$5 \cdot 0{,}8$
II. fajta	x	50	$x \cdot 0{,}5$
Keverék	$5 + x$	60	$(5 + x) \cdot 0{,}6$

A keverékben annyi oldott anyag van, amennyi a két összetevőben együtt. Ennek alapján írhatjuk fel az egyenletet:

$$5 \cdot 0{,}8 + x \cdot 0{,}5 = (5 + x) \cdot 0{,}6$$
$$4 + 0{,}5x = 3 + 0{,}6x$$
$$1 = 0{,}1x$$
$$x = 10$$

Ellenőrzés

5 kg 80%-os oldatban 4 kg oldott anyag van.

10 kg 50%-os oldatban 5 kg az oldott anyag.

Ha ezeket összeöntjük, 15 kg oldatot kapunk, amiben 9 kg oldott anyag van. $15 \cdot 0{,}6 = 9$, így az oldat 60%-os.

Az 50%-os oldatból 10 kilogrammot kell vennünk, tehát a becslés helyes volt.

Feladatok

1. Kétféle kávéból 240 kg-ot kevernek össze: a jobb minőségűből 2330 Ft 1 kg ára, a másik fajtából 1270 Ft. A keveréket 1800 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os áron akarják eladni. Hány kilogramm kávét használjanak fel a keverékhez az egyik, és mennyit a másik fajtából?

2. Mennyi vizet kell a 320 gramm 10%-os rézgálicoldathoz tölteni, hogy a keverék 4,5%-os legyen?

3. 110 gramm 80%-os alkoholhoz 90 gramm vizet adunk. Hány százalékos alkoholt kapunk?

4. 220 gramm 12%-os cukoroldathoz 80 gramm vizet öntünk. Hány százalékos oldatot kapunk?

5. Fél kilogramm 70%-os gyümölcsszörpöt vásároltunk.

a) Mennyi valódi gyümölcslét tartalmaz ez?

b) Felhígítottuk vízzel úgy, hogy 20%-os töménységű legyen. Mennyi vizet töltöttünk hozzá?

6. Hány kilogramm vizet kell elpárologtatni ahhoz, hogy 8 kg 30% sót tartalmazó oldatból 50%-os oldatot kapjunk?

7. 100 gramm 15%-os töménységű oldathoz 25 gramm vizet öntünk. Hány százalékos oldatot kapunk?

8. Ugyanannak a savnak 8 liter 45%-os és 4 liter 60%-os oldatát összekeverjük. Hány százalékos oldatot kapunk?

Tudáspróba

1. 3 kg almát x Ft-ért vásárolunk. A körte kilója 20 Ft-tal drágább, mint az almáé.
Írj betűs kifejezést, ami megadja,

a) mennyibe kerül 10 kg alma,

b) mennyibe kerül 10 kg körte,

c) mennyit kell fizetni, ha 12 kg almát és 9 kg körtét veszünk!

d) 6 kg körtét és valamennyi almát vásároltunk. Összesen 5400 Ft-ot fizettünk. Írj összefüggést, ami megmutatja, hogy hány kg almát vettünk!

2. Végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $a+a^2-5{,}5a$ *b)* $ab^2-2ab+5{,}1ab^2+a^2b$ *c)* $\frac{1}{2}x-\frac{5}{3}y+\frac{2x}{3}+\frac{y}{6}+2$

3. Ahol szükséges, bontsd fel a zárójeleket, és végezd el az összevonásokat!

a) $5(2a-3b)-(8a-b)$ *b)* $3(x^2-xy)-2xy+(xy-y^2)$ *c)* $\frac{2x}{3}+\frac{x-2}{2}+\frac{3x+1}{6}$

4. Oldd meg az egyenleteket!

a) $3(x-4)-(5-2x)=5(2x-1)-27$ *b)* $-2x+\frac{x-5}{4}=x+\frac{3}{2}$ *c)* $3x-\frac{3x-9}{4}=9$

5. Állítsd növekedő sorrendbe az alábbi értékeket!

$A=5^2\cdot 2^7$ $B=2^2\cdot 5^3$ $C=(2^2\cdot 5)^3$ $D=10^5$ $E=\frac{10^8}{10^2}$

6. A nyári táborban 17 faházikó állt. Mindegyik 4 vagy 6 ágyas volt. Összesen 86 gyereket tudtak a faházakban elhelyezni. Hány ház volt 4 ágyas, és hányban volt 6 fekvőhely?

7. Írd fel a szorzatokat összeg alakban, az összegeket pedig szorzat alakban!

a) $3x+21$ *b)* 3^2-3b *c)* $15ab+3$

d) $5(3x+3y)$ *e)* $6y-18$ *f)* $2(3xy-y^2+5)$

8. Egy áruházban egy kiárusítás alkalmával minden ruházati cikk árát 50%-kal leszállították. Két hét elteltével az árakat 50%-kal felemelték.

a) Hogyan változott a hátizsák ára, ami eredetileg 15 200 Ft-ba került?

b) A kétszeres árváltoztatás emelést vagy csökkentést jelent az eredeti árhoz képest? Hány százalékkal változott az eredeti ár?

9. Egy külföldi gyár Magyarországról műszereket rendelt. Ezek elkészítését az egyik gyár 4 hónapra, a másik 6 hónapra vállalta. A megrendelő kérésére a két gyár együttesen készítette el a műszereket. Hány hónap múlva készültek el így a munkával?

Négyzetgyök, Pitagorasz-tétel

Számok sokféle alakban

Ismételjük át a számhalmazokról tanultakat!

A hétköznapi életben leggyakrabban **pozitív egész számok**kal találkozunk: 1, 2, 3, 4, …

A pozitív egész számokat a 0-val kiegészítve a **természetes számok**at kapjuk: 0, 1, 2, 3, 4, …

A **negatív egész számok** a pozitív egész számok ellentettjei: -1, -2, -3, -4, …

A nulla ellentettje önmaga: $-0 = 0$

A **tört alakú számok**at két egész szám hányadosaként kapjuk meg: $\frac{1}{2}$; $\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

A tört alakú számokat **racionális számok**nak hívjuk.

Véges és végtelen tizedes törtek

A **tört alakú számok felírása tizedes tört alakban:**

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$; $1\frac{1}{125} = \frac{126}{125} = \frac{1008}{1000} = 1{,}008$ **véges tizedes tört**

$\frac{4}{3} = 4 : 3 = 1{,}333\ldots = 1{,}\dot{3}$ **végtelen szakaszos tizedes tört**

Véges tizedes tört felírása tört alakban:

$4{,}5 = \frac{45}{10}$; $1{,}32 = \frac{132}{100}$; $0{,}0408 = \frac{408}{10\,000}$

Végtelen szakaszos tizedes tört felírása tört alakban

A végtelen szakaszos tizedes törtek is mindig megadhatók tört alakban, de ez nem olyan egyszerű, mint a véges tizedes törtek átírása.

Például:

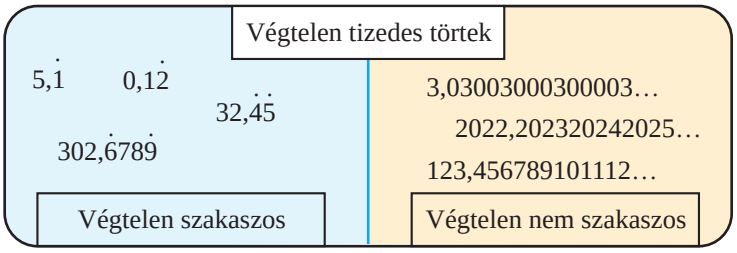
$$1{,}\dot{2} = \frac{11}{9}; \quad 29{,}\dot{6} = \frac{89}{3}; \quad 0{,}\dot{3}\dot{5} = \frac{35}{99}$$

Az egyenlőségeket az osztások elvégzésével vagy számológéppel könnyen ellenőrizheted.

A végtelen nem szakaszos tizedes törteket azonban sohasem kaphatjuk meg két egész szám hányadosaként. Ezek nem racionális számok.

Végtelen nem szakaszos tizedes törteket nem nehéz előállítani. Például képzeld el a végtelenségig folytatva a 0,1010010001… számot, amelyet úgy kapunk, hogy mindig eggyel több nulla áll két egyes között. Ebben a számban nem lesz ismétlődő szakasz.

Végtelen nem szakaszos tizedes törtet kapunk akkor is, ha a tizedesvessző után folytatólagosan leírjuk a természetes számokat: 0,12345678910111213…



Feladatok

1. Írd át tizedes tört alakba a törteket!

a) $\frac{3}{10}$ *b)* $\frac{18}{10}$ *c)* $\frac{57}{100}$ *d)* $\frac{123}{100}$ *e)* $\frac{256}{1000}$ *f)* $\frac{3490}{1000}$

2. Írd át tizedes tört alakba a törteket!

a) $\frac{11}{2}$ *b)* $\frac{18}{5}$ *c)* $\frac{107}{50}$ *d)* $\frac{12}{125}$ *e)* $\frac{13}{250}$ *f)* $\frac{123}{500}$

3. Írd át tizedes tört alakba a törteket!

a) $\frac{21}{30}$ *b)* $\frac{24}{40}$ *c)* $\frac{75}{150}$ *d)* $\frac{42}{60}$ *e)* $\frac{56}{800}$ *f)* $\frac{111111}{300000}$

4. Írd át tizedes tört alakba a törteket!

a) $\frac{5}{9}$ *b)* $\frac{3}{11}$ *c)* $\frac{8}{3}$ *d)* $\frac{23}{6}$ *e)* $\frac{18}{11}$ *f)* $\frac{231}{999}$

5. A **padtársaddal** készítsetek három végtelen, nem szakaszos tizedes törtet!

Az ókori görögök kimondhatatlannak (arrhéton) nevezték azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, azaz a végtelen nem szakaszos tizedes törteket.

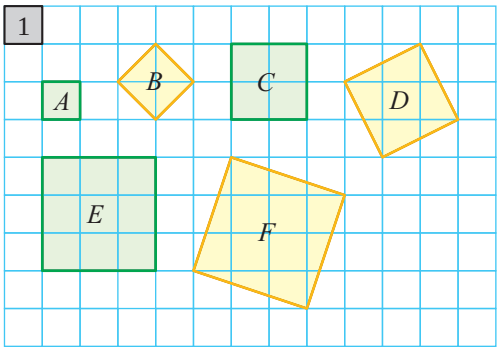
6. Válaszd ki az alábbi számok közül a végtelen nem szakaszos tizedes törtet! Add meg a betűjelét és a képzési szabályát!

a) 11,223344 *b)* $0,\dot{3}\dot{4}$ *c)* 0,123123123 *d)* 8910,111213141516…

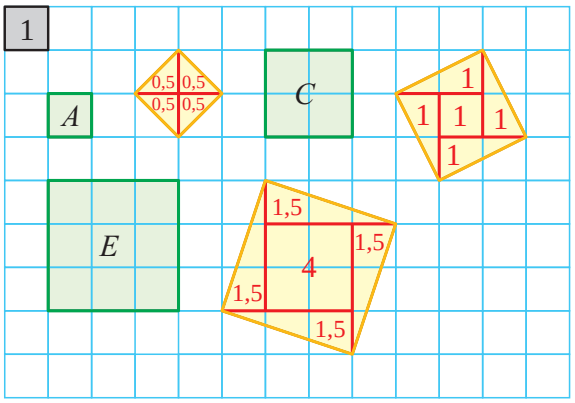
A négyzetszámok négyzetgyöke

1. példa

Határozzuk meg a négyzetek területét! A területmérés egysége: 1.



Megoldás



A négyzet betűjele	A	B	C	D	E	F
A négyzet területe (egység)	1	2	4	5	9	10

A **zöld négyzetek** területei:

$t_A = 1^2 = 1$ területegység.

$t_C = 2^2 = 4$ területegység.

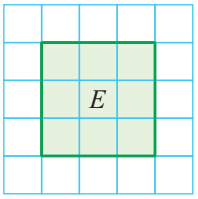
$t_E = 3^2 = 9$ területegység.

A négyzet területének mérőszámát az oldalának hosszából **négyzetre emeléssel** tudjuk kiszámítani.

A **zöld négyzetek** területei nemnegatív egész számok négyzetei, **négyzetszámok.** Ezért tudjuk leolvasni az ábráról az oldalaik hosszát.

2. példa

Határozzuk meg a négyzet oldalának hosszát annak területéből!



Megoldás

A négyzet oldalát a területéből egy új művelettel, a **négyzetgyökvonással** tudjuk meghatározni. Például ebben a feladatban azt a nemnegatív egész számot keressük, amelyet négyzetre emelve 9-et kapunk.

A keresett nemnegatív szám a 9 négyzetgyöke, ami 3-mal egyenlő.

Jelekkel: $\sqrt{9} = 3$

Szavakkal: négyzetgyök 9 egyenlő 3, vagy 9 négyzetgyöke 3.

A zöld négyzetek oldalainak hossza:



A négyzet betűjele	A	C	E
A négyzet területe (területegység)	1	4	9
Oldalának hossza (hosszúságegység)	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$

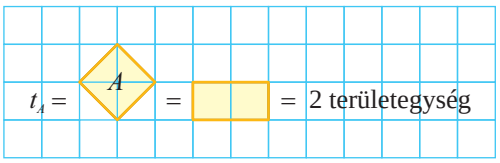
Egy négyzet területe nem lehet 0, de értelmezhetjük a 0 négyzetgyökét is: $\sqrt{0} = 0$.

3. példa

Nem minden négyzet területe négyzetszám.

Az 1. példában a **sárga négyzetek** területe ugyan egész szám, de oldalaik hossza nem az. A mostani tudásotok alapján csak méréssel vagy becsléssel tudjátok megadni azokat.

Például:



Az A négyzet területét meg tudjuk határozni átdarabolással: $t_A = 2$ területegység.

Az oldalának hossza 1 tizedesjegy pontossággal 1,4 hosszúságegység, mert $1{,}4^2 = 1{,}96 \approx 2$.



A 2 egység területű négyzet oldalának hosszát négyzetgyök 2-nek nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{2}$.

A zsebszámológép kijelzőjén a $\sqrt{2}$ tíz tizedesjegyét láthatjuk.

A $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623\ldots$ végtelen nem szakaszos tizedes tört, ami **nem racionális szám,** nem írható fel két egész szám hányadosaként.

4. példa

Melyik az a nemnegatív egész szám, amely igazzá teszi az egyenlőséget?

a) $x^2 = 0$ *b)* $x^2 = 4$ *c)* $x^2 - 36 = 0$ *d)* $x^2 - 5 = 0$ *e)* $x^2 + 4 = 0$

Megoldás

a) Egy ilyen szám van, az $x = 0$, mert $0 \cdot 0 = 0$. A 0 négyzetgyöke 0. Jelekkel: $\sqrt{0} = 0$.

b) Két olyan szám van, amelynek négyzete 4, a $(+2)$ és a (-2). Több nem lehet, mert a 2-nél nagyobb pozitív számok négyzete nagyobb, a kisebbeké kisebb 4-nél. A (-2)-nél nagyobb negatív számok négyzete 4-nél kisebb, a (-2)-nél kisebbeké 4-nél nagyobb.

Jelekkel: $\sqrt{4} = +2$ vagy $-\sqrt{4} = -2$.

Az egyenletnek egy megoldása van a nemnegatív egész számok körében, a $+2$.

c) Az $x^2 = 36$ egyenlőséget két szám teszi igazzá: $(+6)$ és (-6).

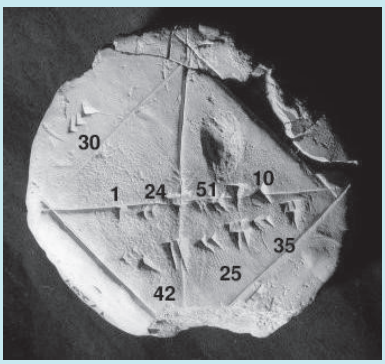
Jelekkel: $\sqrt{36} = +6$ vagy $-\sqrt{36} = -6$.

Egy megoldás van a nemnegatív egész számok körében, a $+6$.

d) $x^2 = 5$; Nincs olyan egész szám, amely igazzá teszi az egyenlőséget.

e) $x^2 = -4$; Nincs olyan szám, amelynek a négyzete negatív szám.

Mezopotámia régi nagyságát az 1800-as évek óta folyó ásatások és egyéb régészeti kutatások során feltárt leletek bizonyítják. Több tízezer ékírásos szöveget tartalmazó égetett agyagtáblát találtak. A képen látható egyike ezeknek. A legrégebbi táblák *Kr. e.* 2100 tájáról azt tanúsítják, hogy az itt élő nép igen ügyesen számolt. Tízes számrendszeren alapuló hatvanas számrendszert használtak, és már a helyi érték fogalmát is ismerték. A számolás megkönnyítésére szorzótáblázatokat használtak. Voltak négyzet- és négyzetgyöktáblázataik. Az ókorban Babilon több mint egy évezredig Mezopotámia tudományos központja volt. A babiloni matematika nagy hatást gyakorolt a hindu, a görög és a későbbi arab matematikára is.



@ Mezopotámia folyóközt jelent. Melyik két folyó között feküdt Mezopotámia?

Feladatok

1. Sorold fel a 100-nál kisebb négyzetszámokat!

2. Melyik állítás hamis?

a) Ha egy természetes szám utolsó jegye 9, akkor a szám négyzete 1-re végződik.

b) Van olyan négyzetszám, amelynek az utolsó jegye 8.

c) Nincs olyan négyzetszám, amelynek az utolsó jegye 2.

d) Ha egy természetes szám pontosan négy nullára végződik, akkor négyzetszám.

3. *a)* Természetes számok első néhány jegyét letakartuk. Melyik lehet ezek közül négyzetszám?

$\square 3$, $\square 4$, $\square 10$, $\square 600$, $\square 21$, $\square 5000$, $\square 0000$

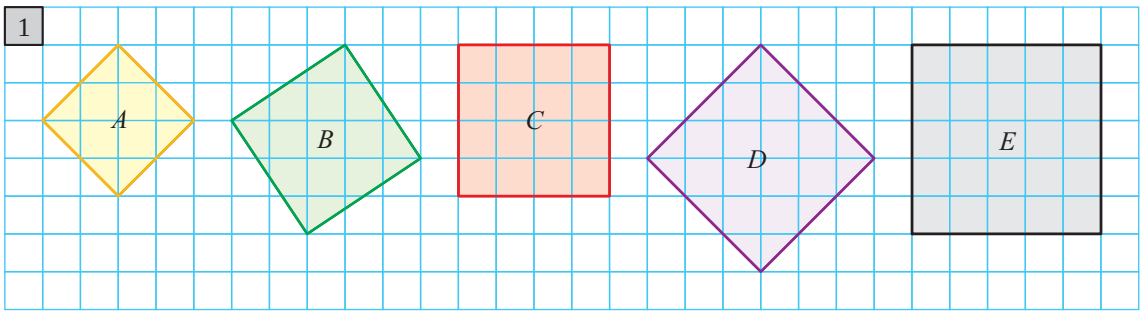
b) Prímtényezős alakban adtuk meg a számokat. Melyik nem négyzetszám?

$2^4 \cdot 5^4$, $2^2 \cdot 3^2$, $5^4 \cdot 7^4$, $2^2 \cdot 3^6$, 2^8, $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $(2 \cdot 5)^4 \cdot 3^2$

4. *a)* Határozd meg a négyzetek területét! A területmérés egysége: $\boxed{1}$.

b) Add meg azoknak a négyzeteknek az oldalhosszát, amelyek egész mérőszámúak!

c) Becsüld meg azoknak a négyzeteknek az oldalhosszát, amelyek nem egész mérőszámúak! Melyik két egész szám közé esnek?



5. Melyek azok a számok, amelyek négyzete

A) 121 *B)* 144 *C)* 625 *D)* 3^4 *E)* 0,01 *F)* 1,44 *G)* 6,25 *H)* 0,0001?

A válaszaidat írd le a tanult jelöléssel! Az eredményedet számológéppel ellenőrizd!

6. *a)* Melyik kifejezés értéke egész szám?

A) $\sqrt{10}$ *B)* $\sqrt{100}$ *C)* $\sqrt{1000}$ *D)* $\sqrt{10\,000}$ *E)* $\sqrt{100\,000}$ *F)* $\sqrt{1\,000\,000}$

b) Melyik állítás igaz?

10 páros kitevőjű hatványainak négyzetgyöke egész szám.

10 páratlan kitevőjű hatványainak négyzetgyöke nem egész szám.

7. *a)* Melyik kifejezés nem négyzetszám négyzetgyöke? Számológéppel ellenőrizz!

A) $\sqrt{1}$ *B)* $\sqrt{4}$ *C)* $\sqrt{16}$ *D)* $\sqrt{50}$ *E)* $\sqrt{64}$ *F)* $\sqrt{121}$ *G)* $\sqrt{144}$ *H)* $\sqrt{400}$

b) Add meg a négyzetszámok négyzetgyökét!

8. Mekkora a négyzet területe, ha az oldala

a) 1,1 m, *b)* 11 m, *c)* 110 m, *d)* 0,11 m?

9. Mekkora a négyzet oldala, ha a területe

a) 169 cm^2, *b)* 16 900 cm^2, *c)* 225 cm^2, *d)* 22 500 cm^2?

10. Mekkora a kocka felszíne, ha egy éle

a) 1,2 dm, *b)* 12 dm, *c)* 120 dm, *d)* 0,12 dm?

11. Mekkora a kocka egy éle, ha a felszíne

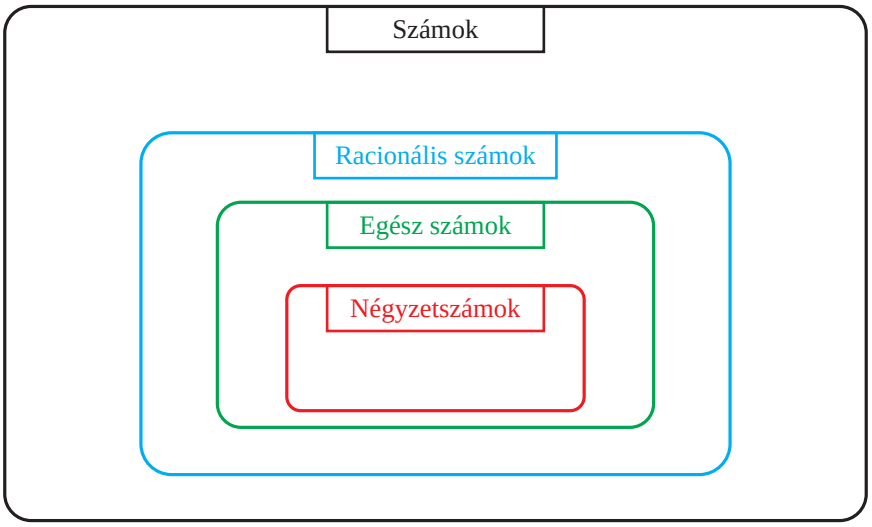
a) 600 mm^2, *b)* 150 cm^2, *c)* 15 000 dm^2, *d)* 3750 m^2?

12. Melyik az a nemnegatív egész szám, amely igazzá teszi az egyenlőséget?

a) $x^2 = 36$ *b)* $x^2 = 328$ *c)* $x^2 - 1225 = 0$ *d)* $x^2 - 18 = 0$ *e)* $x^2 + 16 = 0$

13. Másold le a füzetedbe a halmazábrát! Helyezd el a számokat a halmazábrában! Ha szükséges, használj számológépet!

$\frac{5}{3}$; -2; 0; $\sqrt{4}$; $0,\dot{1}$; $-\frac{6}{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $9,\dot{2}\dot{3}$; $\sqrt{1,41}$; $\sqrt{2,25}$; 121; $\sqrt{2}$



★ **14.** A történelem érdekes évszámai közül melyik nem négyzetszám?

A) **1024**-ben készítették a világon az első állami bankjegyet a kínai Szecsuánban.

B) **1444**-ben tengerészek bevésték nevüket egy afrikai majomkenyérfába.

C) Velence egyik különlegessége a Dózse Palotát (Palazzo Ducale) és a börtönt összekötő, **1600**-ban épült Sóhajok hídja.

D) **1824**-ben találták meg az első dinoszauruszmaradványokat. Addig senki sem tudta, hogy léteztek ilyen állatok.

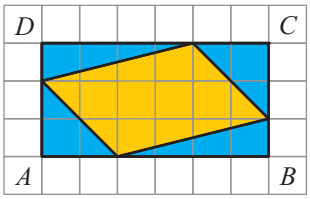
E) **1936** a berlini olimpia éve, ahol Magyarország tizenhat éremmel a harmadik helyet szerezte meg.

F) Charles Darwin tudós Harriet nevű óriásteknőse **2006**-ban pusztult el. A Galápagos-szigetekről hozta el Darwin az állatot, aki 100 évvel élte túl gazdáját.

Hosszúság és terület meghatározása rácson

1. példa

Az *ABCD* téglalapnak mekkora része a sárga paralelogramma?

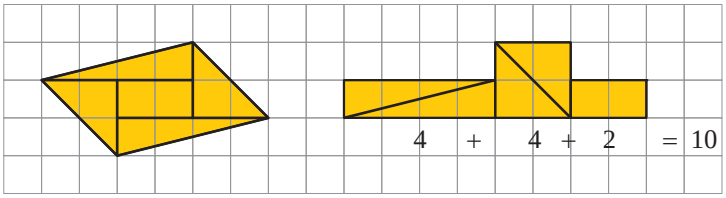


Megoldás

A feladat megoldására többféle lehetőség kínálkozik, ezek közül mutatunk meg kettőt.

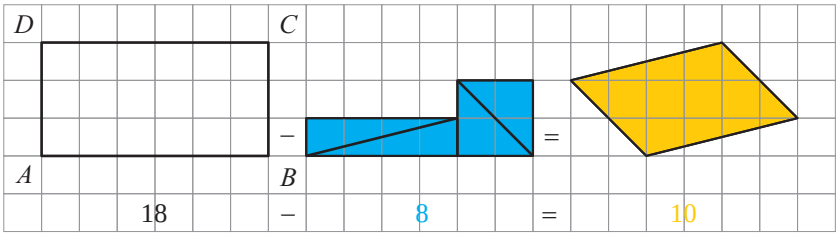
1. megoldás

Átdarabolással meghatározzuk a sárga paralelogramma területét:



2. megoldás

Az *ABCD* **téglalap** területéből kivonva a **kék háromszögek** területét, megkapjuk a **sárga paralelogramma** területét:



Mindkét úton ahhoz jutottunk, hogy a sárga négyszög területe $\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$ része a téglalapénak.

2. példa

Világszerte fénycsőből készült betűket használnak az utcai reklámokhoz, feliratokhoz.

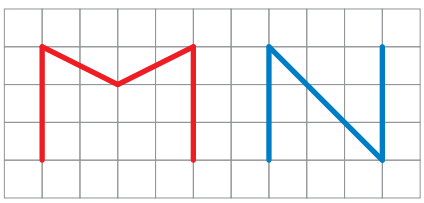
A fotón egy angol nyelvű, „Vissza az iskolába” feliratú tanév eleji fényreklám látható.



Egy másik fénycsőreklámban a piros M és a kék N betű a rajzon látható módon nézett ki.

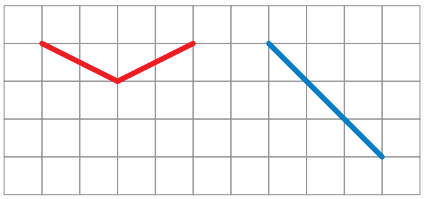
Melyik betű elkészítéséhez használtak hosszabb csövet?

Hogyan lehet megállapítani, ha nincs se vonalzónk, se körzőnk?

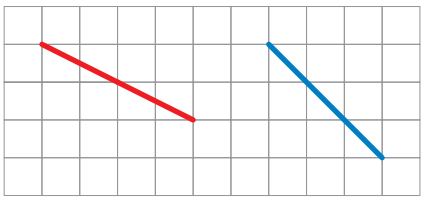


Megoldás

Dobjuk el a biztosan egyenlőket, és a maradék piros töröttvonal és a kék szakasz hosszát hasonlítsuk össze!

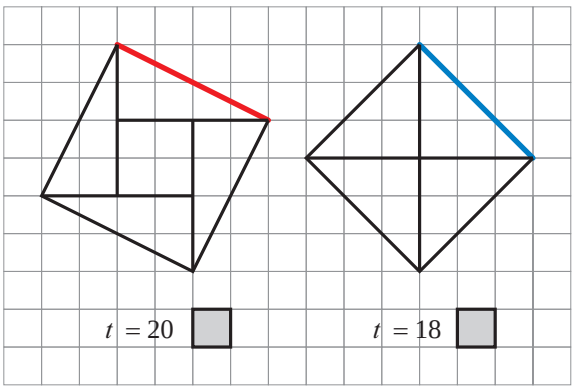


Ezek összehasonlítását kétféleképpen is megtehetjük.



Egyik lehetőség:

Az M-ből megmaradt töröttvonalat „kiegyenesítjük”, majd a piros és a kék szakaszra egy-egy négyzetet állítunk.



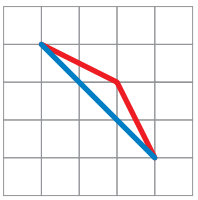
Határozzuk meg a négyzetek területét! **Az a szakasz lesz hosszabb, amelyre állított négyzet területe nagyobb.**

Az M betű maradékából kapott piros szakaszra állított négyzet területe a nagyobb, ezért a piros szakasz a hosszabb.

Ezzel beláttuk, hogy az M betű elkészítéséhez használtak fel több neoncsövet.

Másik lehetőség:

Helyezzük át a négyzethálón az M-ből megmaradt két piros szakaszt az ábrán látható módon! Egy egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szárai a piros szakaszok, alapja a kék szakasz.



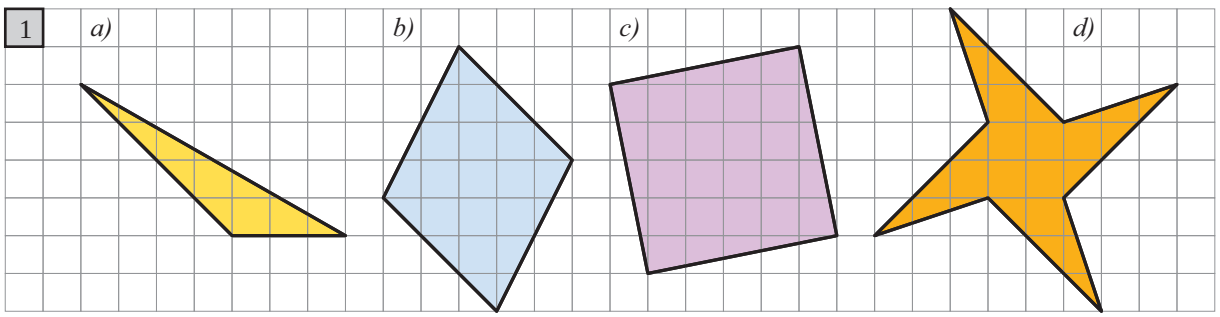
A piros töröttvonal hosszabb, mint a kék szakasz.

Feladatok

E feladatok megoldásához ne használj vonalzót mérésre!

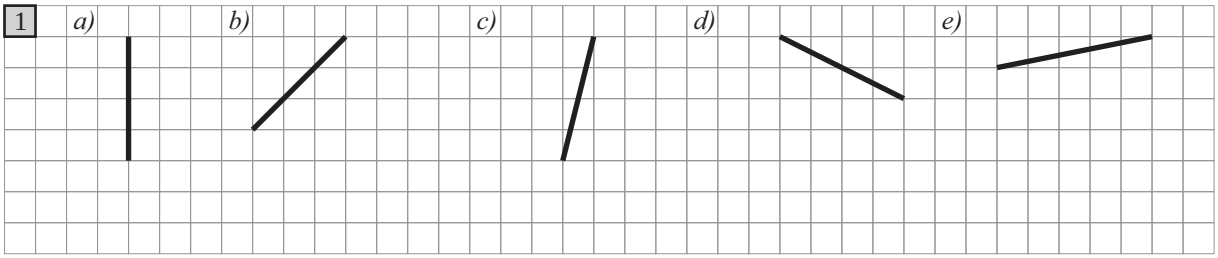
1. Mekkora a rácssokszögek területe? A területmérés egysége 1.

(A rácssokszögek csúcsai a négyzetrács pontjai.)

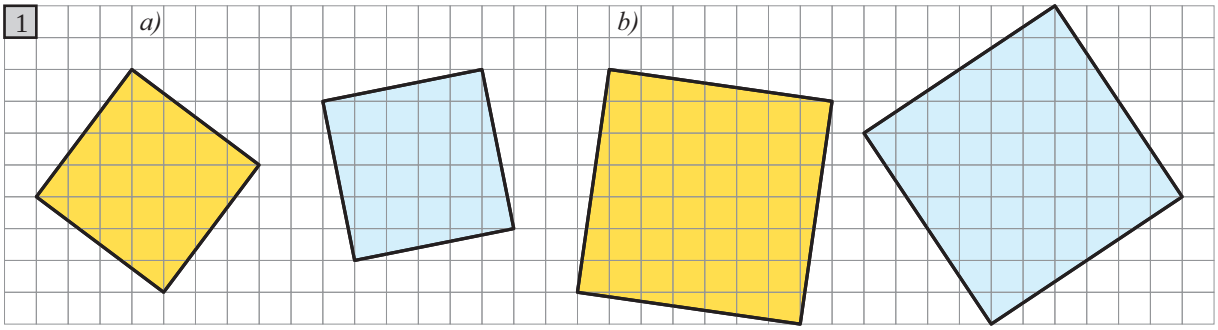


2. A megadott szakaszok négyzetek oldalai. Mekkora a négyzetek területe?

A területmérés egysége 1. Melyik négyzet oldala a legnagyobb?

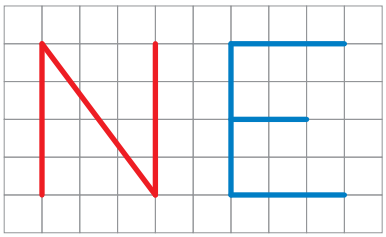


3. A sárga vagy a kék négyzet oldala a hosszabb? Válaszodat indokold meg!

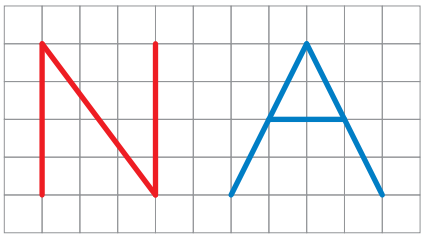


4. Melyik betű elkészítéséhez használtak hosszabb fénycsövet, a piroshoz vagy a kékhez? Válaszodat indokold meg!

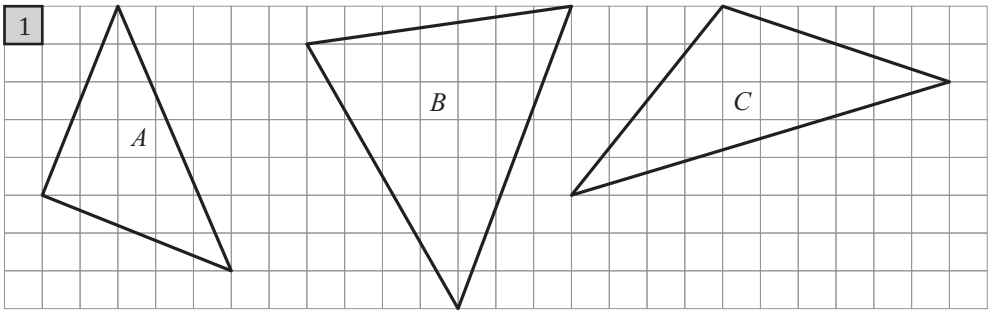
a)



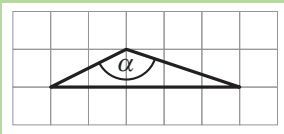
b)



5. Melyik háromszög nem tükrös?



6. Hány fokos a jobb oldali ábrán látható rácsháromszög α szöge?



7. Egy színes üveglapokból készülő ablak tervrajzát mutatja az ábra.

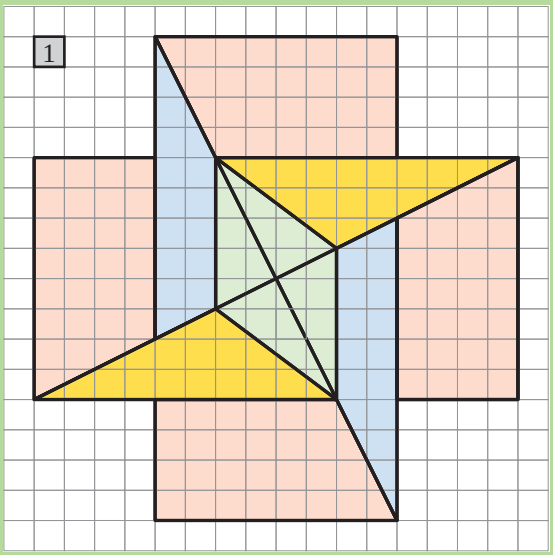
A területmérés egysége: 1

a) Sorold fel a nevüket a különböző színű sokszögeknek!

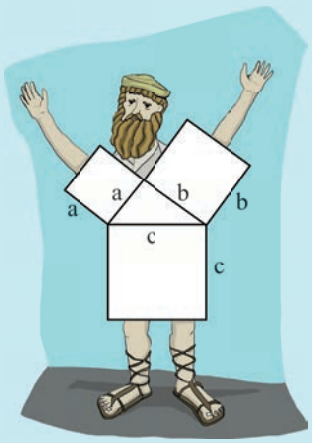
b) Igaz-e, hogy a zöld négyszög
– paralelogramma,
– rombusz?

c) Hány rácsnégyzet a területe a zöld négyszögnek? Válaszodat indokold!

d) Melyik két egész szám közé esik annak a négyzetnek az oldalhosszúsága, melynek területe megegyezik a zöld négyszög területével?



Pitagorasz-tétel



Pitagoraszról kevés dolgot tudunk biztosan.

Körülbelül Kr. e. 580–500 között élt, az égei-tengeri Szamosz szigetéről származhatott. Azt tartják róla, hogy elsősorban vallásalapító volt, csak mellékesen foglalkozott matematikával. Tanai, tudományos eredményei elválaszthatatlanul összekeveredtek tanítványai, a pitagoreusok munkáival. Annyi bizonyos, hogy nem ő fedezte fel a róla elnevezett tételt, de valószínű, hogy a sok bizonyítás közül az egyik tőle származik. A görög történetírók szerint a tétel bizonyítása akkora öröm volt számára, hogy 100 ökröt áldozott az isteneknek. Egy német költő azt írja tréfásan az egyik szonettjében, hogy azóta félnek az „ökrök” minden új felfedezéstől.

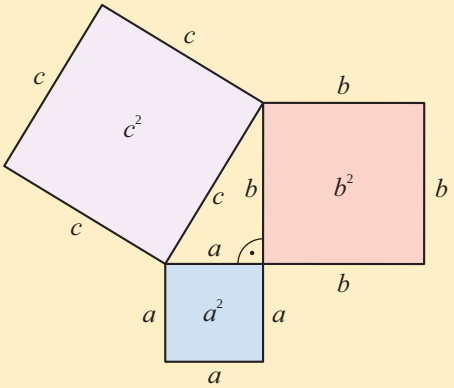
A XX. században sokan a Pitagorasz-tétel rajzát sugározták volna a Mars felé, azt gondolva, ha ott értelmes lények élnek, akkor ezt a tételt mindenképpen ismerniük kell.

Tétel

Bármely derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet területe egyenlő a befogóira emelt négyzetek területeinek összegével.

Az ábra szerinti jelölésekkel (*c* az átfogó, *a* és *b* a két befogó hossza):

$$c^2 = a^2 + b^2$$



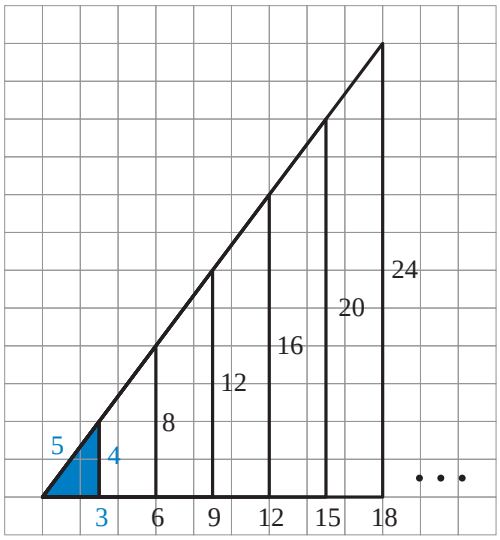
Másképpen megfogalmazva: *ha* egy háromszög derékszögű, *akkor* a két rövidebb oldalára (befogójára) emelt négyzetek területének összege egyenlő a leghosszabb oldalára (átfogójára) emelt négyzet területével.

Pitagoraszi háromszögek és számhármasok

Azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek mindhárom oldala valamilyen egységben mérve egész szám, pitagoraszi háromszögeknek is szokás nevezni. Az ilyen számhármasokat pedig **pitagoraszi számhármasoknak.** Az egyik pitagoraszi háromszög oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúságúak.

Ha ezt a háromszöget 2-szeresére, 3-szorosára, 4-szeresére … nagyítjuk, újabb pitagoraszi számhármasokhoz jutunk.

a	3	6	9	12	15	18	…
b	4	8	12	16	20	24	
c	5	10	15	20	25	30	



A többszörözéssel megkapható számhármasokon kívül is végtelen sok pitagoraszi számhármas van. Ezek közül néhány: (5, 12, 13) (7, 24, 25) (8, 15, 17) (20, 21, 29) (95, 168, 193).

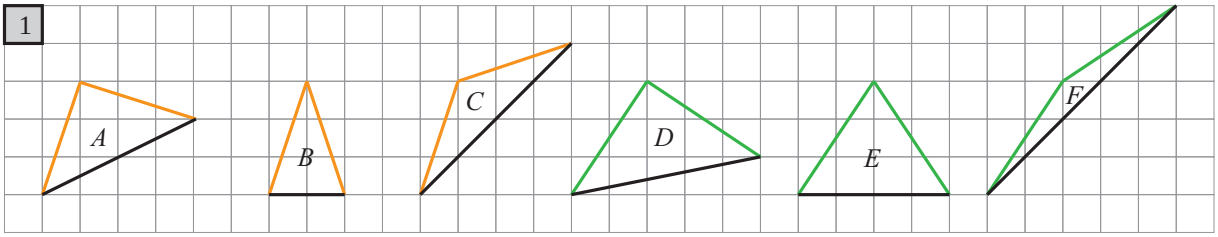
Feladatok

1. Igaz-e, hogy bármely négyzet átdarabolható két egybevágó négyzetté?

2. Egy négyzet alakú halastó területét úgy szeretnék megkétszerezni, hogy négyzet alakú maradjon, és a sarkain álló nyárfákat ne kelljen kivágni. Hogyan lehet ezt megvalósítani?



3. Igaz-e minden egyenlő szárú háromszögre, hogy az alapra emelt négyzet területe egyenlő a szárakra emelt négyzetek területeinek összegével? Az alábbi háromszögeken vizsgálódj!



Másold le a füzetedbe a táblázatot, és add meg a megfelelő értékeket!

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
az alapra emelt négyzet területe						
a szárakra emelt négyzetek területeinek összege						

4. Válaszd ki a pitagoraszi számhármasokat az alábbi számhármasok közül!

3, 4, 5 | 5, 13, 14 | 6, 8, 10 | 7, 23, 25 | 9, 40, 41 | 10, 24, 26 | 11, 60, 62

5. Pitagorasz és tanítványai pitagoraszi számhármasok előállítási módját találták ki. Az alábbi ábrán látható felső és alsó számsor segítségével végtelen sok pitagoraszi számhármast lehet előállítani.

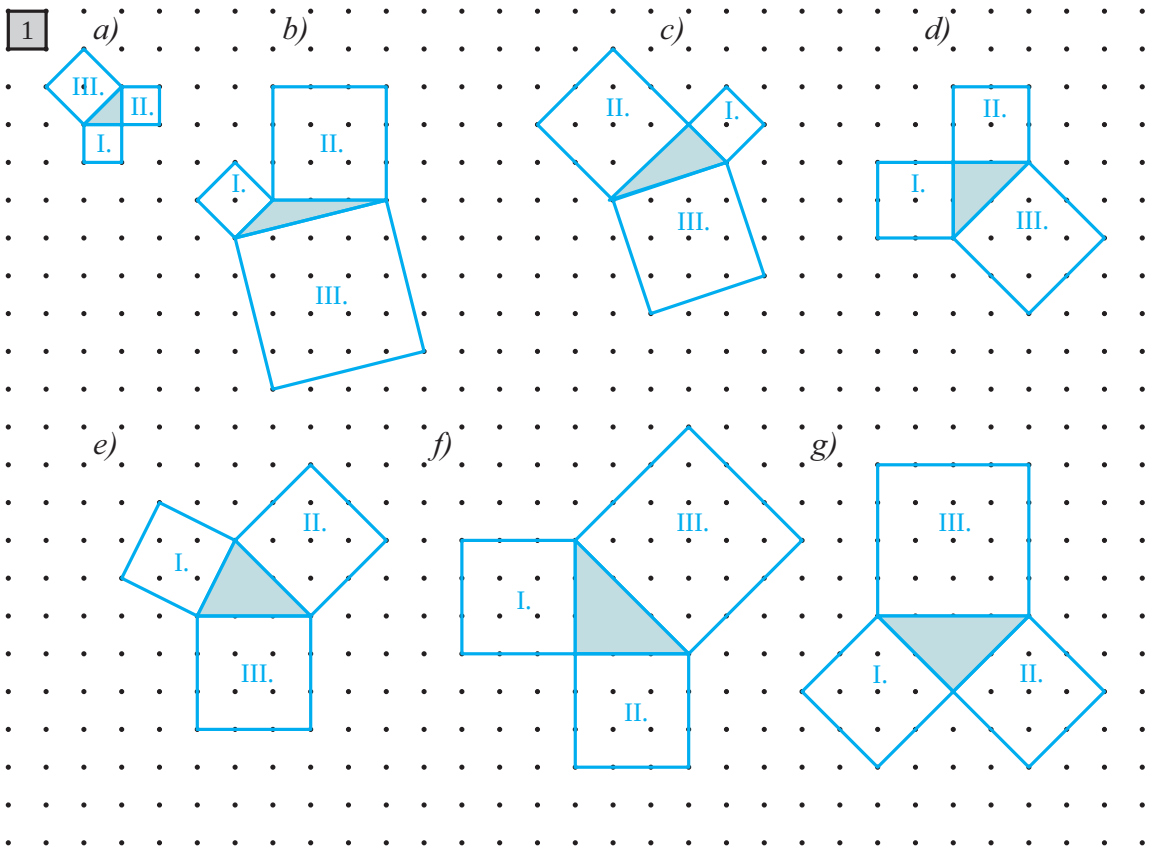
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	…
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	…

Padtársaddal fejtsétek meg a fenti eljárás titkát! Milyen számok állnak a következő sárga háromszögben?

6. Mennyi a háromszögek oldalaira rajzolt négyzetek területe rácsegységben mérve?

Mely háromszögekre igaz, hogy a leghosszabb oldalukra állított négyzet területe egyenlő a másik két oldalukra állított négyzetek területeinek összegével?

1



7. A Pitagorasz-tétel napját akkor ünnepeljük, amikor egy dátumban a hónap és a nap négyzeteinek összege megegyezik a dátumban szereplő év utolsó két jegyének négyzetével. Az ünnepség a Pitagorasz-tételről kapta a nevét.

2020. december 16-án Pitagorasz-tétel napja (más néven Derékszögű Háromszög Napja) volt, mert $12^2 + 16^2 = 20^2$

$$144 + 256 = 400$$

Bolyai János, a matematika egyik legnagyobb lángelméje 1802. december 15-én született. Az ő születésnapja nem Pitagorasz-tétel nap, mert $12^2 + 15^2 > 2^2$.

a) Pitagorasz-tétel nap volt-e 2017. augusztus 15.?

b) 2025-ben melyik hónap melyik napja Pitagorasz-tétel nap?

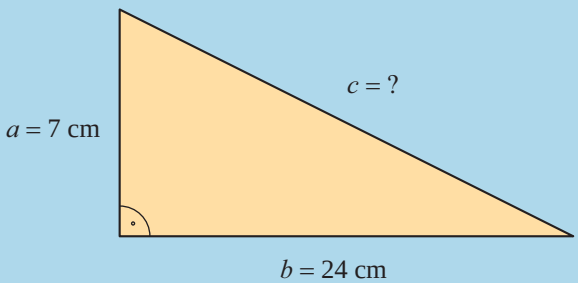
A Pitagorasz-tétel alkalmazása

Példa

A tétel alapján a derékszögű háromszög bármely két oldalának hosszából kiszámítható a harmadik oldal hossza.

Például:

a) Az átfogót számítjuk ki:



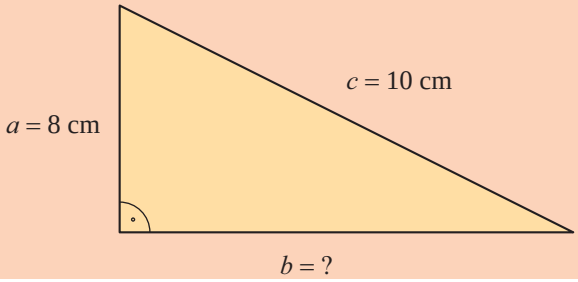
$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$

$c = \sqrt{625} = 25$

A keresett átfogó hossza 25 cm.

b) Az egyik befogót számítjuk ki:



$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

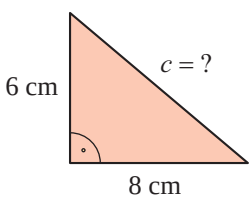
$b = \sqrt{36} = 6$

A keresett befogó hossza 6 cm.

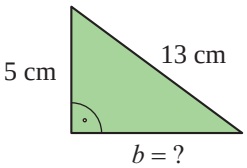
Feladatok

1. Számítsd ki a derékszögű háromszögek ismeretlen oldalainak hosszát!

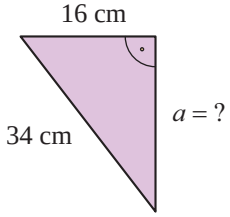
A)



B)



C)



2. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-12; 9)$ és a $B(8; 15)$ pontokat!

a) Becsüld meg, hogy melyik pont van távolabb az origótól! Méréssel ellenőrizd becslésedet!

b) Pitagorasz tételének alkalmazásával határozd meg az adott pontok távolságát az origótól! A rácsnégyzetek oldalhossza legyen az egység!

c) Add meg olyan rácspontok koordinátáit, amelyek pontosan olyan messze vannak az origótól, mint az A pont!

3. Milyen messze vannak a koordináta-rendszer kezdőpontjától az alábbi pontok?

$A(3; -4)$, $B(-5; 12)$, $C(-6; -8)$, $D(12; -5)$

4. Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától az a pont, amelynek az egyik tengelytől való távolsága 3, a másiktól pedig 4 hosszúságegység? Hány ilyen pont van?

5. Milyen messze van egymástól az A és a B pont a derékszögű koordináta-rendszerben? A rácsnégyzetek oldalhossza legyen az egység!

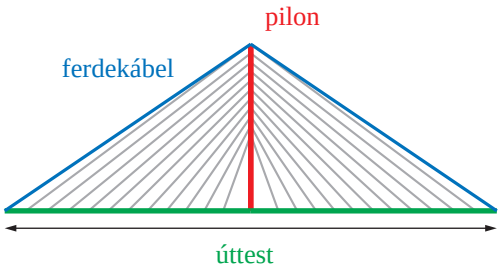
a) $A(3; 6)$, $B(3; 11)$ *b)* $A(4; 9)$, $B(11; 9)$ *c)* $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$ *d)* $A(-3; -2)$, $B(9; 3)$

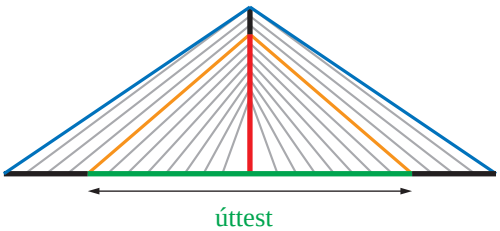
6. A Megyeri híd Magyarország második leghosszabb hídja. Békásmegyer és a pesti Megyer (Káposztásmegyer) között ível át, ezért lett a neve Megyeri híd.



A teljes híd öt híd együttese. Ezek közül a Nagy-Duna-ág feletti ferdekábeles acélhíd látható a fotón. A ferdekábeleket tartó, belül üreges vasbeton oszlopokat pilonoknak nevezik. A **pilonok** úttest fölé eső része 90 m. A két **leghosszabb ferdekábel** rögzítési helyének távolsága, más szóval az **úttest** ezen szakaszának hossza 300 m.

Mekkora a sárgával jelölt **ferdekábel** hossza, ha a pilon aljától számítva 80 méteres magasságban van rögzítve? Az **úttest** ezen szakaszának hossza 168 m.

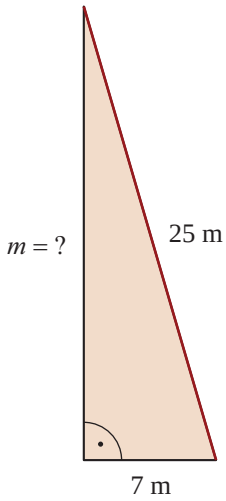




@ Hazánk közel 100 nevezetességének kicsinyített mása látható a Szarvasi Arborétum területén, a Mini Magyarország makettparkban. Közöttük van-e a mini Megyeri híd? Ha igen, keress fotót róla!

7.





A világ sok országában nagy népszerűségnek örvendenek a vízi csúszdák.

A legmeredekebbek egyike a képen látható „maja templom” csúszda, amely a Bahama-szigeteken található. A bátor vállalkozó egy átlátszó, meredek lejtésű csőben zuhan lefelé, és egy olyan akváriumba „pottyan”, ahol cápák és ráják úszkálnak. A csúszda végül egy „cápamentes” medencébe vezeti a lecsúszókat.

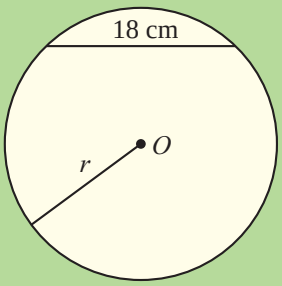


Milyen magas lehet az a fentinél is meredekebb csúszda, melynek adatait a kép melletti ábráról leolvashatod?

@ A brazíliai Insano csúszda 41 méter magas. Közel 14 emelet magasról lehet lecsúszni rajta. A 2010-es évek elején a Guinness Rekordok Könyve hivatalosan a világ legmagasabb vízicsúszdájának könyvelte el. Az Insano nemcsak a világ legmagasabb csúszdája volt, de a legfélelmetesebb is, hiszen rendkívül meredek. A bátor jelentkezők 4-5 másodperc alatt csobbannak a végén lévő medencébe, közben pedig elérhetik a 105 km/órás sebességet.

Nézz utána! Napjainkban melyik a világ legmagasabb csúszdája?

★ **8.** Egy 15 cm sugarú körbe egy 18 cm hosszú húrt rajzolunk! Milyen távolságra van ez a húr a kör középpontjától?



Tudáspróba

1. Melyik állítás hamis?

a) Ha egy természetes szám utolsó jegye 4, akkor a szám négyzete 6-ra végződik.

b) Van olyan négyzetszám, amelynek az utolsó jegye 2.

c) Nincs olyan négyzetszám, amelynek az utolsó két jegye 10.

d) Ha egy szám pontosan hat nullára végződik, akkor lehet négyzetszám.

2. Melyik az a természetes szám, amelynek négyzete

a) 81 *b)* 121 *c)* 169 *d)* 900 *e)* 1 000 000?

3. *a)* Melyik kifejezés nem négyzetszám négyzetgyöke?

A) $\sqrt{9}$ *B)* $\sqrt{36}$ *C)* $\sqrt{81}$ *D)* $\sqrt{144}$ *E)* $\sqrt{200}$ *F)* $\sqrt{400}$ *G)* $\sqrt{625}$

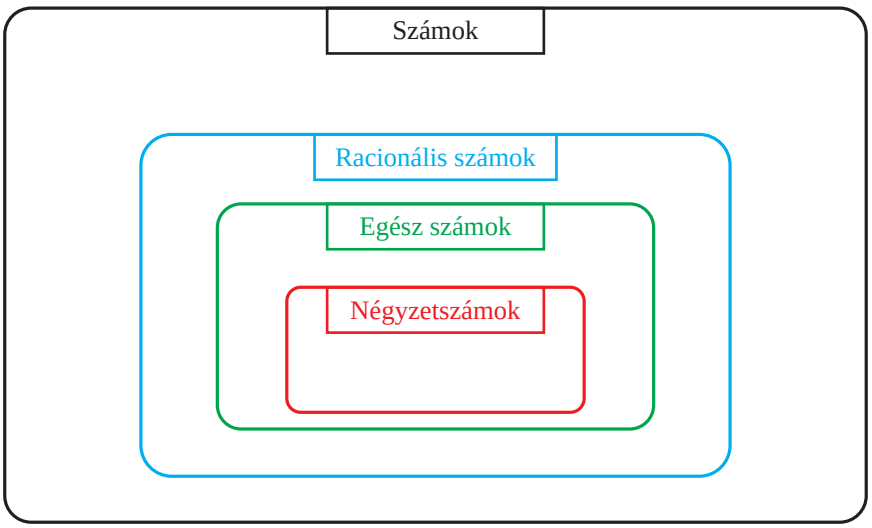
b) Add meg a négyzetszámok négyzetgyökét!

4. *a)* Mekkora a négyzet oldala, ha a területe 225 m^2?

b) Mekkora a kocka egy éle, ha a felszíne 5400 cm^2?

5. Helyezd el a számokat a halmazábrában!

a) $\frac{5}{7}$; -8; $\sqrt{2}$; $\sqrt{49}$; $0{,}1\dot{8}$; $-\frac{9}{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; $8{,}\dot{1}\dot{2}$; $0{,}1$; $\sqrt{2{,}22}$; $\sqrt{6{,}25}$; 144

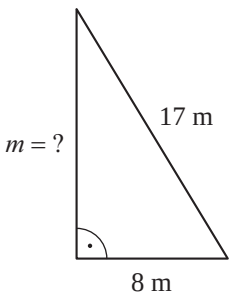


b) Írj egy példát végtelen nem szakaszos tizedes törtre!

6. Az alábbi számhármasok közül válaszd ki a pitagoraszi számhármasokat!

A) 6, 8, 10 *B)* 7, 24, 25 *C)* 8, 15, 19

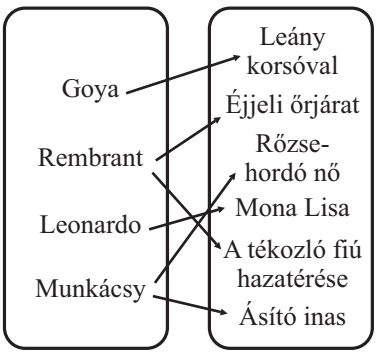
7. Az ábrán egy csúszda vázlatos rajza látható. Milyen magas a csúszda?

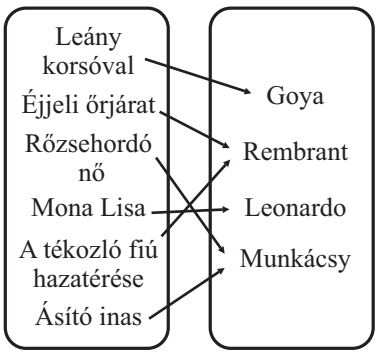


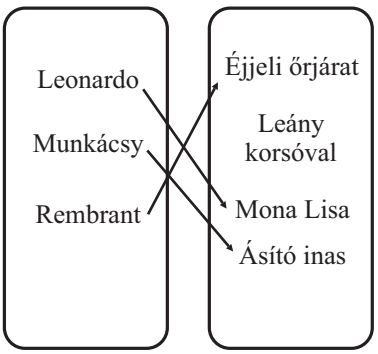
8. Mekkora a területe annak az egyenlő szárú háromszögnek, amelynek alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúak?

Hozzárendelések, grafikonok

Hozzárendelések









Munkácsy Mihály: Ásító inas



Rembrandt van Rijn: Éjjeli őrjárat



Munkácsy Mihály: Rőzsehordó nő



Francisco Goya: Leány korsóval

Az első megfeleltetésnél híres festőkhöz rendeltük hozzá képeik címét. Itt a kiindulási halmaz, az ún. alaphalmaz elemei között vannak olyanok, amelyeknek több elemet is megfeleltettünk. Ez a hozzárendelés nem egyértelmű.

A második megfeleltetésnél a képek címeihez egyértelműen hozzárendeltük a festők nevét.

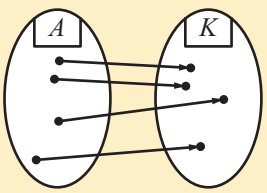
A harmadik megfeleltetésnél a festőkhöz egyértelműen hozzárendeltük az általuk festett képeket. Itt a képhalmaznak van olyan eleme, amely nem szerepel a megfeleltetésben.

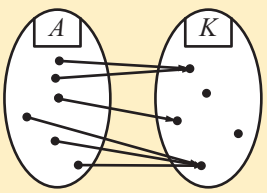


Leonardo da Vinci: Mona Lisa

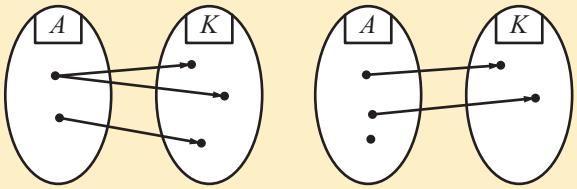
Hozzárendeléseknél a kiinduló halmazt **alaphalmaznak** nevezzük, és általában *A*-val jelöljük. A másik halmazt képhalmaznak hívjuk, és *K*-val jelöljük.

Ezek a hozzárendelések **egyértelműek**, mert az alaphalmaz minden eleméhez megadtuk a képhalmaz valamelyik elemét.





Ezek a hozzárendelések **nem egyértelműek**, mert az első esetben az alaphalmaz egyik eleméhez két képhalmazbeli elemet rendeltünk hozzá, a második esetben van olyan eleme az alaphalmaznak, amihez nem rendeltünk elemet a képhalmazból.



Az egyértelmű hozzárendelést függvénynek nevezzük.

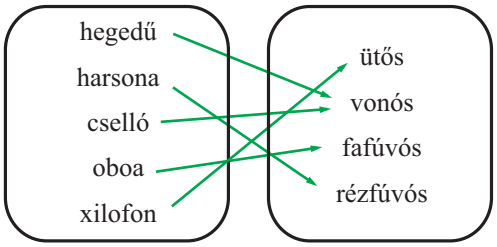
René Descartes (1596–1650, francia tudós, a nevét röné dékártnak olvassuk ki) volt, aki a függvényeket megfeleltetésként értelmezte. Ettől az időtől kezdve vált fontossá ez a matematikai fogalom. A *függvény* szót először Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716, a nevét gotfríd vilhelm lejbnicnek olvassuk ki) német matematikus és filozófus használta. Ő különösen szerette a matematikai jeleket, tőle származik a szorzás ($\cdot$), a hasonlóság ($\sim$) és az egybevágóság ($\cong$) jelölése is. A magyar nyelvbe a függvény szót Győry Sándor (1795–1870) vezette be. Ő 1832-től a Magyar Tudományos Akadémia tagja volt, és jelentős szerepe volt a magyar matematikai szaknyelv kialakításában. Tőle származnak még a kitevő, a szorzat, az arány szavaink is.

A függvényekkel a modern matematika (a XIX. század közepétől) nagyon sokat foglalkozik. A természeti jelenségek leírásának nélkülözhetetlen segédeszközévé vált.

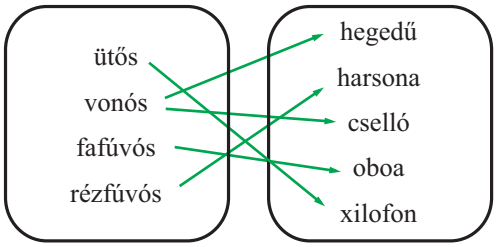
Feladatok

1. Melyik megfeleltetés egyértelmű?

a)



b)



2. *a)* Melyik foglalkozáshoz melyik tárgy tartozhat?

$A = \{$fazekas; bognár; szűcs; kalmár; kádár; kovács; varga; vájár$\}$

$K = \{$kocsikerék; csizma; szén; ködmön; kereskedés; hordó; lópatkó; korsó$\}$

b) Egyértelmű-e ez a megfeleltetés?



3. A következő megfeleltetések közül válaszd ki az egyértelműeket! Emeld ki azokat, amelyek mindkét irányban egyértelműek!

a) A = {osztályotok tanulói}

K = {osztályotok tanulói}

Minden tanulóhoz a tornasorban a jobb oldali szomszédját rendeljük hozzá.

Minden tanulóhoz, ha kettesével sorakoznak, a párját rendeljük hozzá.

b) A = {14 év feletti magyar emberek}

Az emberekhez a személyazonossági igazolványukban található, betűkből és számokból álló kifejezést rendeljük, például: AP 238435.

Az emberekhez a születési dátumukat rendeljük, például: 1990. 02. 06.

c) A = {filmszínészek nevei}

Minden filmszínészhez a nevének kezdőbetűiből képzett monogramot rendeljük.

Minden filmszínészhez annak (vagy azoknak) a filmnek (vagy filmeknek) a címét rendeljük, amelyben (vagy amelyekben) játszott.

d) A = {racionális számokból álló rendezett számpárok}

A számpárokhoz a koordináta-rendszer egy-egy pontját rendeljük.

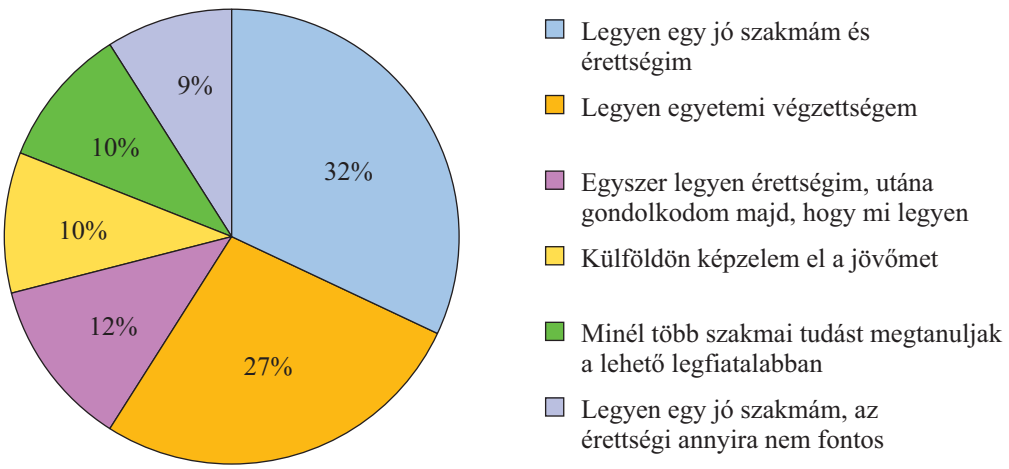
A számpárokhoz a két szám számtani közepét rendeljük.

e) A = {a sík pontjai}

A sík minden pontjához a tőle 1 cm-re lévő pontokat rendeljük.

A sík minden pontjához azt az 1 cm sugarú kört rendeljük, amelynek az adott pont a középpontja.

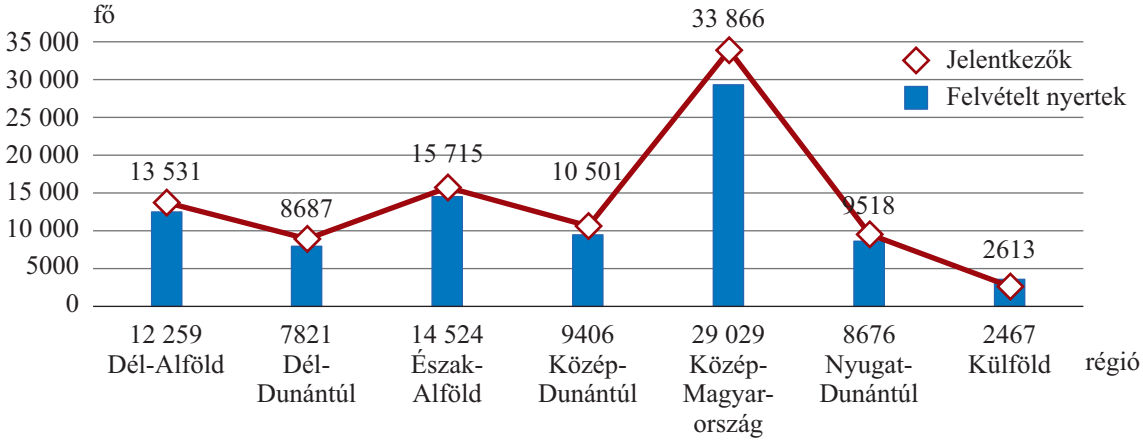
4. Statisztikai felmérést készítettek a nyolcadikos tanulók jövőre vonatkozó terveiről, melyet az alábbi kördiagramon láthattok:



a) Adj meg egy alaphalmazt, egy képhalmazt, és írd le a hozzárendelési utasítást a két halmaz elemei között!

b) Egyértelmű-e a hozzárendelési utasításod?

5. A 2015 szeptemberében induló felsőoktatási képzésre jelentkezők régiók szerinti megoszlása:



Az ábrán látható oszlop-, illetve vonaldiagram alapján állapítsd meg a hozzárendelések alaphalmazát, képhalmazát, és írd le a hozzárendelési utasítást is!

(A felvi.hu statisztikája alapján)

6. A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának alapképzési felvételi ponthatárait (2021/22-es tanév) tartalmazza az alábbi táblázat. Készítsetek vonaldiagramot, majd elemezzétek a **padtársatokkal!**

Szak	Ponthatár
gazdálkodási és menedzsment	400
kommunikáció- és médiatudomány	400
műszaki menedzser	330
nemzetközi gazdálkodás	400
szakoktató	346
pénzügy és számvitel	402

Forrás: Oktatási Hivatal

7. Minden számhoz rendeld hozzá *a)* az ellentettjét, *b)* a reciprokát!

$\frac{2}{3}$ $\quad -4 \quad$ $1+\frac{3}{5}$ $\quad \frac{4^2}{5} \quad$ $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $\quad 0 \quad$ x

8. n oldalú konvex sokszögekhez ($3 \le n \le 10$, n egész szám) rendeld hozzá a

a) belső szögeinek összegét, *b)* külső szögeinek összegét!

9. 2021 októberében Budapest 13. Kerületi Önkormányzata megszervezte a lakossági veszélyes hulladékok gyűjtését, és azok megsemmisítésére, illetve újrahasznosítására 8,7 millió forintot fordított.

Az egyes hulladákfajtákról készített táblázat alapján készítsetek oszlopdiagramot, majd **padtársatokkal** elemezzétek azt! Beszéljétek meg, hogy miért fontos a hulladékok szelektív gyűjtése!

Hulladékfajta	Mennyiség (kg)
Irodatechnikai hulladékok (nyomtatópatron, toner)	340
Fáradtolaj	620
Oldószer, hígítók	340
Veszélyes anyaggal szennyezett göngyölegek	720

Hulladékfajta	Mennyiség (kg)
Hajtógázos spray-flakonok	290
Növényvédő szerek	365
Fénycsövek, izzók	60
Festékmaradékok (oldószeres)	1 350
Festékmaradékok (diszperziós)	4 400
Gyógyszerhulladékok	300
Elektronikai hulladékok (képcsöves)	1 600
Elektronikai hulladékok (egyéb)	7 200
Elemek	160
Mosószerek	510
Sütőolaj	1 100
Összesen	**19 355**

Forrás: Budapest 13. kerületi újság

10. Töltsd ki a füzetedben az első 15 pozitív egész szám osztóinak számáról készült értéktáblázatot, majd szemléltesd grafikonon a kapott összetartozó párokat!

szám	1	2													15
osztók száma	1	2													4

Padtársaddal próbáljatok minél több dolgot felfedezni az osztók számáról!

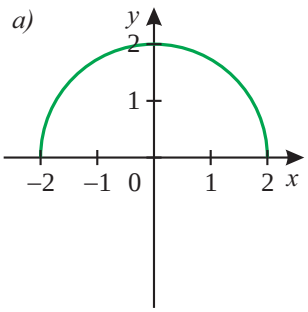
11. Keresd a párját! A szakaszokat végpontjaikkal adtuk meg. Melyik hossz tartozik hozzájuk, ha rácsegységben számolunk?

A) $A(-3; 2)\ B(5; 2)$ *B)* $A(-2; -2)\ B(-2; -5)$ *C)* $A(0; 1)\ B(3; 5)$

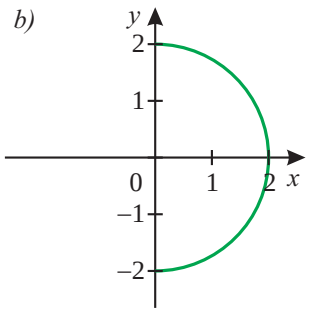
D) $A(-1; -2)\ B(2; 7)$ *a)* 3 *b)* 5 *c)* 8 *d)* $\sqrt{90} \approx 9{,}49$

12. Döntsd el, hogy melyik grafikon hozzárendelési szabálya biztosan nem egyértelmű!

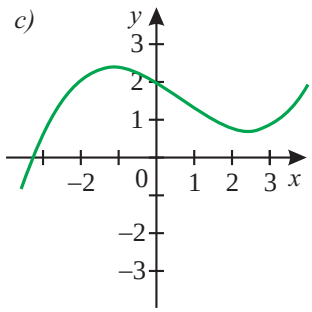
a)



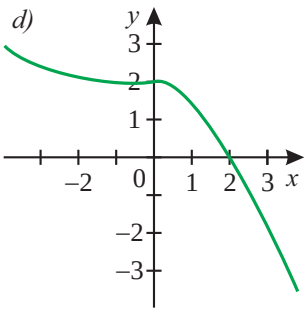
b)



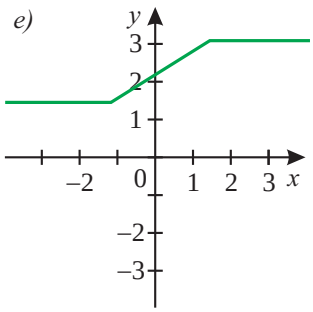
c)



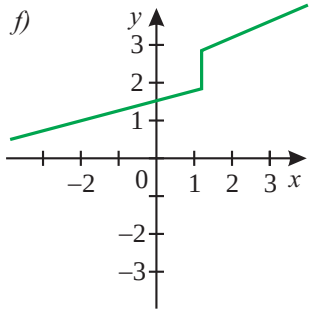
d)



e)



f)



Hozzárendelések szemléltetése, grafikonok

1. példa

Ebben a példában három hozzárendelést tanulmányozunk.

a) A lovak számához hozzárendeljük a lábaik számát.

b) A négyzet oldalának hosszához hozzárendeljük a négyzet kerületét (azonos hosszúságegységben).

c) A számokhoz hozzárendeljük a szám négyszeresét.

Mindegyik hozzárendeléshez értéktáblázatot készítünk, majd megrajzoljuk a hozzárendelés grafikonját.



Megoldás

a)

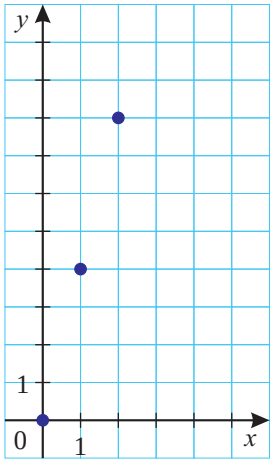
Lovak száma	0	1	2	3	4	5
Lábak száma	0	4	8	12	16	20

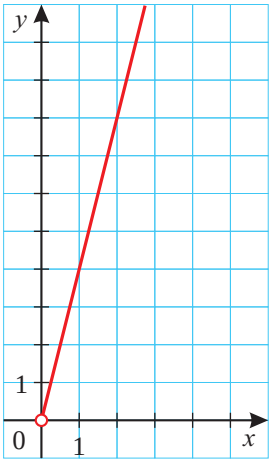
b)

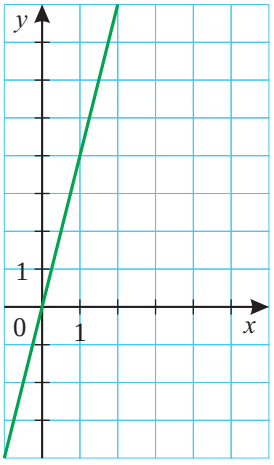
Oldalhossz	$\frac{1}{2}$	1	2	3,5	4	5
Kerület	2	4	8	14	16	20

c)

Szám	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2,75	4
Négyszeres	-2	0	2	4	11	16







Ha a lovak számát, a négyzet oldalának hosszát és a kiindulási számot x-szel jelöljük, akkor mindhárom grafikonnál olyan $P(x;y)$ koordinátájú pontokat ábrázolunk, ahol $y = 4x$, de az **alaphalmazok** eltérése miatt a grafikonok különbözőek.

A = {természetes számok} grafikon: pontokból áll, amelyek egy, az origón áthaladó egyenesen vannak

B = {pozitív számok} grafikon: félegyenes

C = {tetszőleges szám} grafikon: az origón áthaladó egyenes

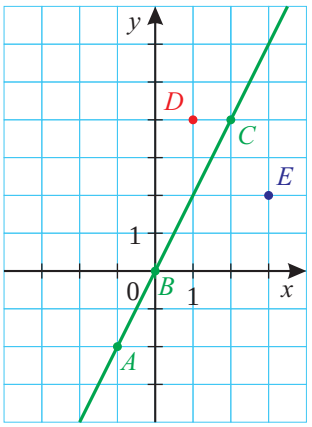
2. példa

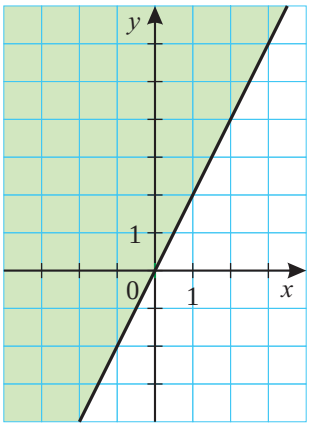
Rendeljük hozzá a számokhoz a kétszeresüket!

Megoldás

Elkészítjük a hozzárendelésnek megfelelő grafikont.

Ha a feladatnak megfelelő pontokat koordináta-rendszerben akarjuk ábrázolni, akkor olyan $P(x;y)$ koordinátájú pontokat jelölünk ki, amelyekben az x koordinátához hozzárendeljük az y koordinátát úgy, hogy $y = 2x$.





Például: $A(-1;-2)$, $B(0;0)$, $C(2;4)$ pontokra igaz az $y = 2x$ összefüggés, ezért ezek a pontok a grafikonon vannak.

A $D(1;4)$ pont a grafikon „felett” van, hiszen $4 > 2 \cdot 1$ ($y > 2x$ összefüggés áll fenn).

Az $E(3;2)$ pont a grafikon „alatt” van, mert $2 < 2 \cdot 3$ ($y < 2x$ összefüggés teljesül).

Az $y > 2x$ összefüggés a grafikon „felett” lévő pontok koordinátáira igaz.

3. példa

Rajzoljuk le az $y = 2 - x$ összefüggésnek megfelelő $P(x;y)$ pontok helyét a koordináta-rendszerben!

a) Adjunk meg legalább 4 olyan pontot a koordinátáival, amelyek a grafikonhoz tartoznak!

b) Pótoljuk az adott pontok koordinátáit úgy, hogy azok rajta legyenek a grafikonon!

$A(0;\square)$ $B\left(\frac{1}{3};\square\right)$ $C(\square;4)$ $D\left(\square;\frac{4}{5}\right)$

c) A grafikonként kapott egyenes hol metszi a koordinátatengelyeket?

Megoldás

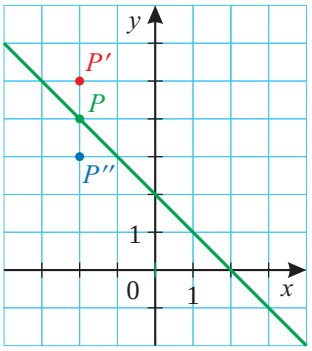
a) A pontok x koordinátáihoz kiszámoljuk az $y = 2 - x$ koordinátát.

A megoldást célszerű táblázatba foglalni:

x	-2	-1	1	3
$2 - x$	4	3	1	-1

A pontok:

$P(-2;4)$, $Q(-1;3)$, $R(1;1)$, $S(3;-1)$.



Ha például a $P(-2;4)$ pont helyett a $P'(-2;5)$ pontot vizsgáljuk, akkor az a grafikon fölött, míg a $P''(-2;3)$ pont a grafikon alatt helyezkedik el.

b) A grafikonon levő pontok koordinátáit x-szel és y-nal jelölve az $y = 2 - x$ egyenlet jellemzi azokat. Innen, ha például $x = 0$, akkor $y = 2 - 0 = 2$, tehát $A(0;2)$;

ha $x = \frac{1}{3}$, akkor $y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, tehát $B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$;

ha $y = 4$, akkor $4 = 2 - x$, innen $x = -2$, tehát $C(-2;4)$;

ha $y = \frac{4}{5}$, akkor $\frac{4}{5} = 2 - x$; $\frac{4}{5} - 2 = -x$; $-\frac{6}{5} = -x$; $x = \frac{6}{5}$, tehát $D\left(\frac{6}{5};\frac{4}{5}\right)$.

c) Az x tengelyen levő pontoknál az $y = 0$, ezért a $0 = 2 - x$ összefüggésből $x = 2$, a keresett metszéspont $M(2; 0)$.

Az y tengelyen fekvő pontoknál $x = 0$, ezért $y = 2 - 0 = 2$, a keresett metszéspont $T(0; 2)$.

4. példa

Rajzoljuk fel a $P(x; y)$ pontok helyét a koordináta-rendszerben, ha az A alaphalmazba az összes eddig tanult szám beletartozik.

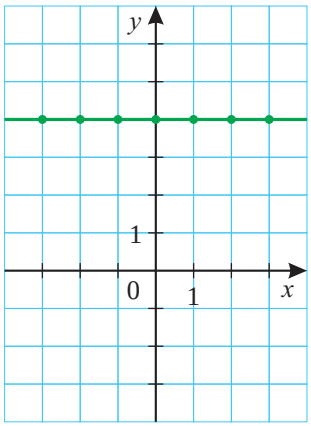
a) $y = 3$ *b)* $y = -3x$ *c)* $y = 2x - 1$

Megoldás

A grafikonok elkészítéséhez értéktáblázatot készítünk a (-2) és 2 közötti egész számokra.

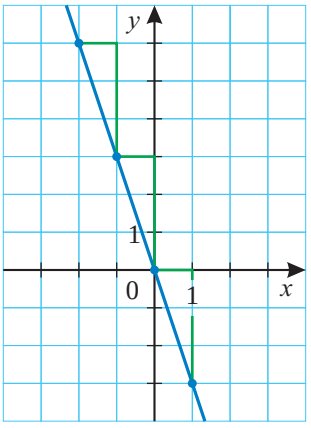
a) $y = 3$

x	-2	-1	0	1	2
3	3	3	3	3	3



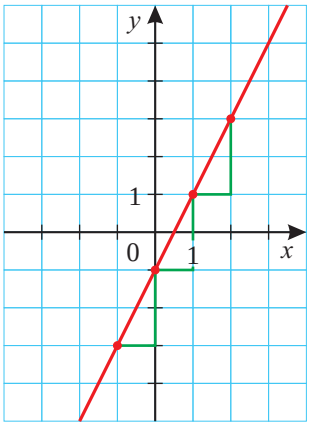
b) $y = -3x$

x	-2	-1	0	1	2
$-3x$	6	3	0	-3	-6



c) $y = 2x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
$2x - 1$	-5	-3	-1	1	3



Tapasztalatunk szerint a kapott grafikonok az *a)*, *b)* és *c)* esetben is egyenesek.

- Ha a hozzárendelés $y = a$ („szám”) típusú, akkor az egyenes párhuzamos az x tengellyel.
- Ha a hozzárendelés $y = a \cdot x$ ($a \neq 0$ szám) típusú, akkor az origón áthaladó egyenes a grafikon, melyet az egyenes arányosságnál már megismertünk.
- Ha a hozzárendelés $y = a \cdot x + b$ ($a \neq 0$ szám és $b \neq 0$ is egy szám), akkor a grafikon a két koordinátatengelyt az origótól különböző pontokban metsző egyenes lesz.

Ha $a < 0$, akkor a grafikon csökkenő, ha $a > 0$, akkor pedig növekvő.

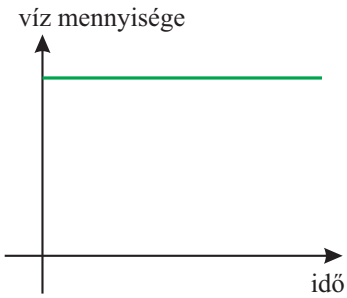
Megállapodás: Ha az A alaphalmazt külön nem adják meg, akkor

$A =$ {az összes eddig tanult szám}.

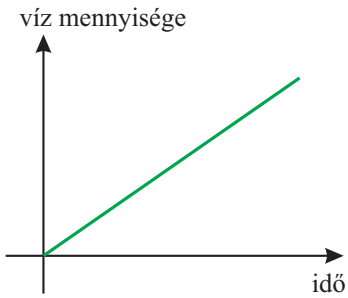
Feladatok

1. Keresd a párját!

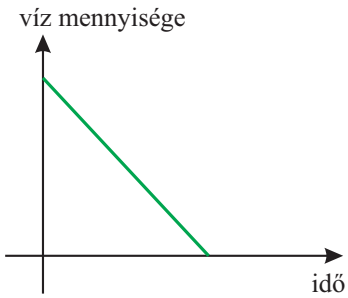
a) Az automata mosógép vizet szivattyúz.



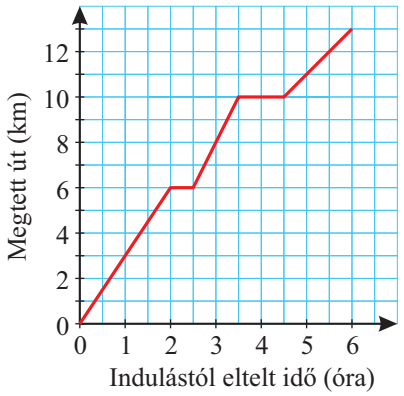
b) A gép mos.



c) Kiszivattyúzza az elhasznált vizet.



2. Egy pécsi iskola egyik hatodik osztálya kirándulást tett a Mecsekben. Az első napi cél egy turistaház volt. Az osztály hétfő reggel 9 órakor indult. A diákok hétfői haladását mutatja a következő grafikon.



a) Összesen hány km utat tett meg az osztály hétfőn?

Ⓐ 6 km-t Ⓑ 9 km-t

Ⓒ 13 km-t Ⓓ 14 km-t

b) A hétfői túra alatt összesen hány óra pihenőt tartott az osztály?

Ⓐ Nem tartottak pihenőt. Ⓑ 1,5 óra pihenőt tartottak.

Ⓒ 3 óra pihenőt tartottak. Ⓓ 4 óra pihenőt tartottak.

c) Add meg, hogy melyik időintervallumban haladtak a leggyorsabban a gyerekek! Mekkora volt ekkor a sebességük?

(Kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2011)

3. Az angol autók sebességmérő órája kétféle mértékegységben mért sebességet mutat. Az Angliában használatos $25\ \frac{\text{mérföld}}{\text{óra}}$ megfelelője kb. $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Add meg hozzárendelési szabállyal a két sebesség közötti összefüggést, ha 1 mérföld ≈ 1,6 km!

Először a $\frac{\text{mérföld}}{\text{óra}}$-ban mért sebességnek feleltesd meg a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mért sebességet, és a kapcsolatot ábrázold koordináta-rendszerben!

Ezután a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mért sebességnek feleltesd meg a $\frac{\text{mérföld}}{\text{óra}}$-ban mért sebességet! Ennek a hozzárendelésnek is készítsd el a grafikonját!

@ Nézz utána, hogy milyen hosszú a földrajzi mérföld és a nemzetközi tengeri mérföld!

4. Juci a vasárnapi kosárlabda-mérkőzésen 23 pontot dobott. Ezt részben az 1 pontos büntetődobásokból, részben a 2 pontos kosarakból gyűjtötte össze. Mennyit dobhatott az egyes kosárfajtákból? Ha x-szel jelölöd a 2 pontos kosarak számát, hogyan függ az x-től a büntető kosárdobások száma? Készíts grafikont a kapott összefüggésed alapján!

5. Számold ki az $y=\frac{1}{3}x+2$ egyenlettel megadott grafikonon levő $P(x;y)$ pontok hiányzó koordinátáit, ha

a) $x=6$ *b)* $x=\frac{1}{2}$ *c)* $x=-261$ *d)* $x=0$

6. Számold ki az $y=0{,}2x+8$ egyenlettel megadott grafikonon levő $P(x;y)$ pontok hiányzó koordinátáit, ha

a) $x=-5$ *b)* $x=\frac{3}{5}$ *c)* $x=-104$ *d)* $x=0$

7. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő összefüggéseknek eleget tevő $P(x;y)$ pontokat!

a) $y=x+2$ *b)* $y=2x+1$ *c)* $y=\frac{1}{2}x+2$ *d)* $y=2x$

8. Ábrázold az $y=3x-4$ összefüggésnek eleget tevő $P(x;y)$ pontokat a koordináta-rendszerben! Határozd meg az $A(-6;\square)$, $B(2;\square)$, $C(\square;1)$ és $D(\square;-1)$ pontok hiányzó jelzőszámait úgy, hogy a pontok

a) a grafikonon, *b)* a grafikon alatt, *c)* a grafikon fölött legyenek!

9. Ábrázold az $y=4x-3$ összefüggésnek eleget tevő $P(x;y)$ pontokat a koordináta-rendszerben! Döntsd el, hogy az adott pontok közül melyik van a grafikonon, melyik van fölötte, és melyik alatta!

$A(0;0)$, $B(0;-3)$, $C(0;2)$, $D(1;1)$, $E(1;2)$, $F(2;2)$, $G(2;5)$, $H(100;397)$

10. Ábrázold az $y=-2x+4$ összefüggésnek eleget tevő $P(x;y)$ pontokat a koordináta-rendszerben! Döntsd el, hogy az adott pontok közül melyik van a grafikonon, melyik van fölötte, és melyik alatta!

$A(0;0)$, $B(-2;0)$, $C(-1;6)$, $D(1;3)$, $E(2;0)$, $F(5;7)$, $G(6;-6)$, $H(100;-198)$

★ **11.** A $P(x;y)$ koordinátájú pontok között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$y=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

a) Mi a hozzárendelés A alaphalmaza?

b) Készítsd el a hozzárendelési utasításhoz tartozó grafikont!

c) Mely számok alkotják a K képhalmazt?

12. A $P(x;y)$ koordinátájú pontok között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$y=\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(x-2)(x-6)}$$

a) Mi a hozzárendelés A alaphalmaza?

b) Készítsd el a hozzárendelési utasításhoz tartozó grafikont!

c) Mely számok alkotják a K képhalmazt?

Grafikonok tulajdonságai

1. példa

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi összefüggéseknek eleget tevő $P(x;y)$ pontokat!

a) $y = 2x$ *b)* $y = 2x+1$ *c)* $y = 2x-3$

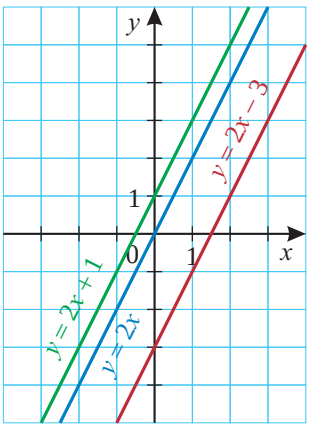
Megoldás

A hozzárendelési utasítások alapján tudjuk, hogy a grafikonok egyenesek lesznek. Így elegendő a grafikonok két-két pontját meghatározni.

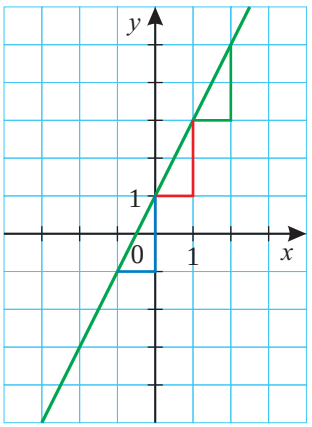
x	0	2
$2x$	0	4

x	0	2
$2x+1$	1	5

x	0	2
$2x-3$	-3	1



Észrevehetjük, hogy az egyenesek párhuzamosak. A hozzárendelési utasításban az x-es tag szorzótényezője mindig 2. Bárhol lépünk egyet jobbra vízszintesen, a grafikon mindig 2-t emelkedik. Ezt a 2-es számot hívjuk a fenti egyenesek **meredekségének.** Az $y = 2x + 1$ hozzárendelés grafikonjának egy kis részét kinagyítottuk, ott szemléltetjük mindezt.



2. példa

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, ha

a) $y = x+3$ *b)* $y = 2x+3$ *c)* $y = 3$

Megoldás

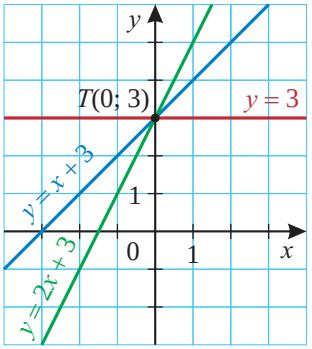
Tudjuk a koordináták közötti kapcsolatokból, hogy a grafikonok egyenesek lesznek. Így elegendő a grafikonok két-két pontját meghatároznunk.

x	0	2
$x+3$	3	5

x	0	2
$2x+3$	3	7

x	0	2
3	3	3

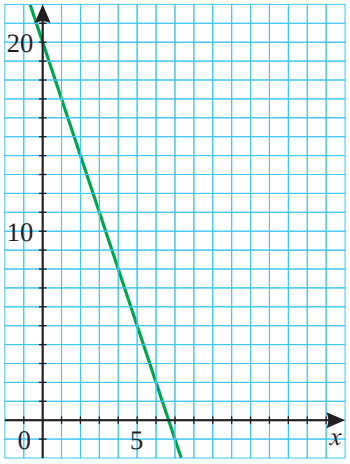
Észrevehetjük, hogy mindhárom egyenes áthalad a $T(0;3)$ ponton, azaz az egyenesek ugyanabban a pontban metszik az y koordinátatengelyt.



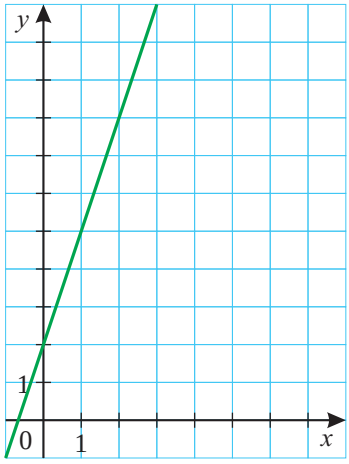
Feladatok

1. Melyik hozzárendelés melyik grafikonhoz tartozik?

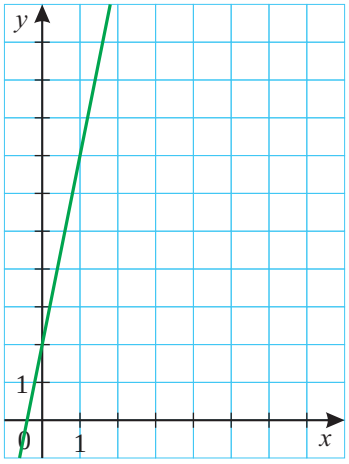
a) $y = 2x + 5$



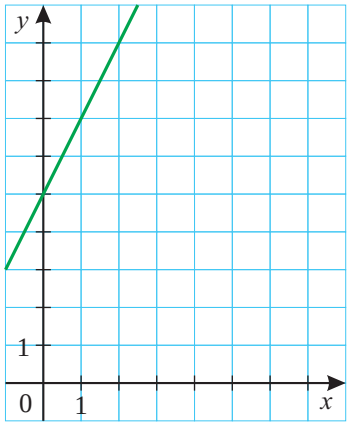
b) $y = 20 - 3x$



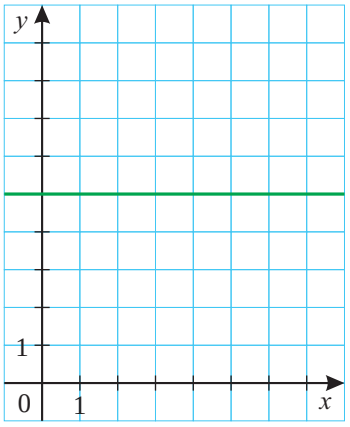
c) $y = 3x + 2$



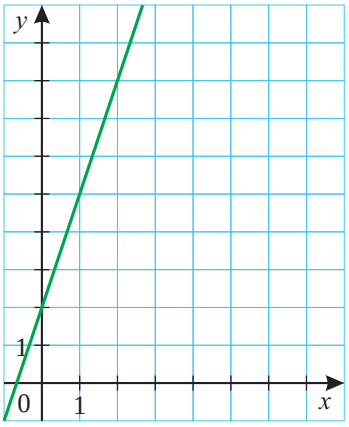
d) $y = 5$



e) $y = 5x + 2$



f) $y = 2 + 3x$

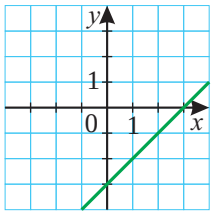


2. Melyik hozzárendelési szabály melyik grafikonhoz tartozik?

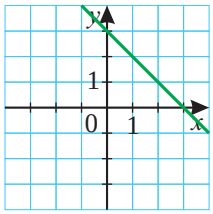
$y = 3x - 1$ $\quad$ $y = x - 3$ $\quad$ $y = 3 - x$

$y = -x + 3$ $\quad$ $y = 3(x - 1)$ $\quad$ $y = -3 + 3x$

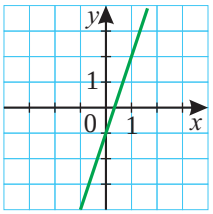
a)



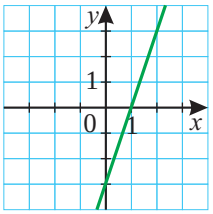
b)



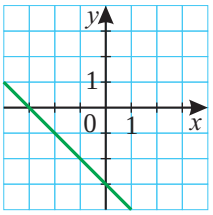
c)



d)



e)



3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő $P(x; y)$ koordinátájú pontokat, ha

a) $y = x - 2$ $\quad$ *b)* $y = x$ $\quad$ *c)* $y = -2$

Mit mondhatunk a három grafikonról? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, ha

a) $y=\frac{1}{2}x+2$ *b)* $y=\frac{1}{2}x-3$ *c)* $y=\frac{1}{2}x$

Mit mondhatunk a három grafikonról? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

5. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, ha

a) $y=1,5x+3$ *b)* $y=1,5x-2$ *c)* $y=1,5x$

Mit mondhatunk a három grafikonról? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

6. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, ha

a) $y=-x+3$ *b)* $y=x+3$ *c)* $y=3-x$

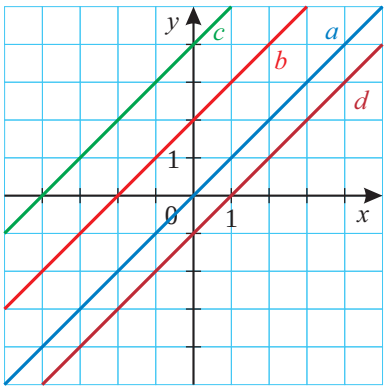
Milyen közös tulajdonsága van a három grafikonnak? Észrevettél-e még valamit?

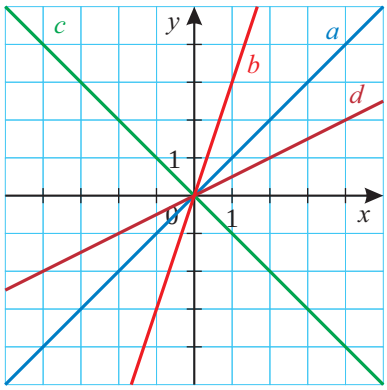
7. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő $P(x;y)$ koordinátájú pontokat, ha

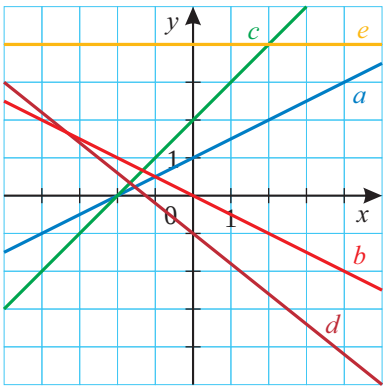
a) $y=\frac{1}{6}x$ *b)* $y=\frac{1}{3}x$ *c)* $y=\frac{1}{2}x$

Melyik a legmeredekebb grafikon? Van-e közös pontja a három grafikonnak? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

8. Keress szabályt a grafikonokhoz!







9. Rajzold meg az egyes egyeneseket a koordináta-rendszerben, és add meg a nekik megfelelő hozzárendelési utasítást!

a) Az egyenes áthalad az $A(0;2)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 3-at emelkedik.

b) Az egyenes áthalad az $A(0;2)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 3-at süllyed.

c) Az egyenes áthalad az $A(2;1)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 2-t emelkedik.

d) Az egyenes áthalad az $A(2;1)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 2-t süllyed.

10. Gondoltam egy egyenesre. Mi lehet a hozzárendelési szabály, ha ez az egyenes áthalad a megadott pontokon?

a)

x	0	1
$y=?$	-2	-1

b)

x	3	4
$y=?$	1	3

c)

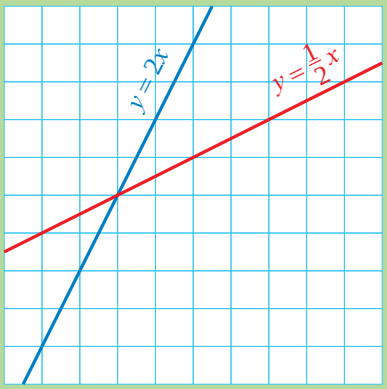
x	-4	-6
$y=?$	11	13

d)

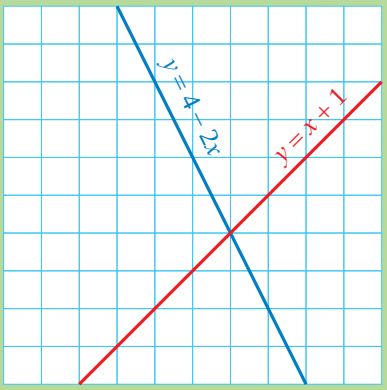
x	-2	2
$y=?$	-5	3

11. Rajzold le a koordináta-rendszer hiányzó tengelyeit!

a)



b)



12. A $P(x; y)$ pontok koordinátái között az $y = (2x - 3) - (x + 1)$ összefüggés érvényes.

a) Készítsd el az összefüggéshez tartozó grafikont!

b) Add meg a hozzárendelési utasításhoz tartozó A alaphalmazt és K képhalmazt!

c) Mely pontban vagy pontokban metszi a grafikon a koordinátatengelyeket?

13. A $P(x; y)$ pontok koordinátái között az $y = \dfrac{2x - 6}{x - 3}$ összefüggés érvényes.

a) Készítsd el az összefüggéshez tartozó grafikont!

b) Add meg a hozzárendelési utasításhoz tartozó A alaphalmazt és K képhalmazt!

c) Mely pontban vagy pontokban metszi a grafikon a koordinátatengelyeket?

Feladatok grafikus megoldása

1. példa

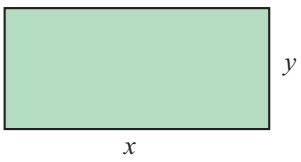
a) Egy téglalap kerülete 12 hosszúságegység. Egyik oldalának hosszát változtatva, hogyan változik a másik oldalának hossza, ha a téglalap kerülete továbbra is 12 hosszúságegység?

b) A $P(x; y)$ pontok koordinátái között az $y = 6 - x$ kapcsolat áll fenn. Készítsük el az összefüggéshez tartozó grafikont!

c) Keressünk olyan egész számokat, amelyeknek az összege 6!

Megoldás

a) Jelöljük a téglalap oldalainak hosszát x-szel és y-nal.



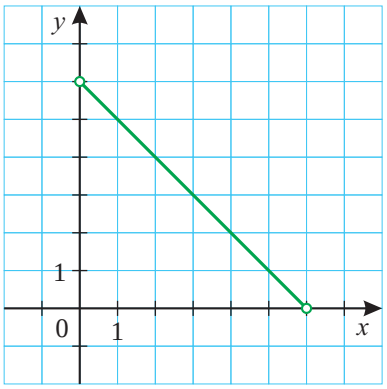
A $K = 2(x + y)$ összefüggés miatt $12 = 2(x + y)$, innen $y = 6 - x$, azaz a téglalap egyik oldalának változásától függ a másik oldal hossza. Ezt a kapcsolatot az $y = 6 - x$ összefüggés írja le, ahol $0 < x < 6$ és $0 < y < 6$.

c) Az egész számokat x-szel és y-nal jelölve: $x + y = 6$. Innen $y = 6 - x$, azaz az egyik számtól függ a másik szám, az $y = 6 - x$ hozzárendelési utasítás szerint. Itt x csak egész szám lehet.

Mindhárom hozzárendelési utasítás azonos, ezért elég egy közös értéktáblázatot készíteni.

x	2	4
$y = 6 - x$	4	2

a)

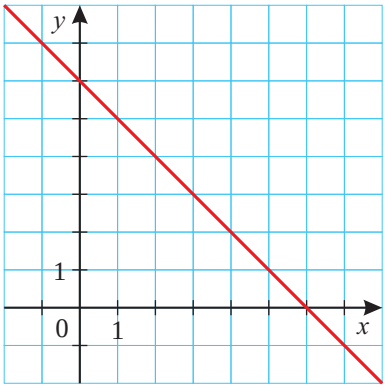


A grafikon: egy szakasz, elhagyva belőle a végpontjait,

az alaphalmaz: $0 < x < 6$,

a képhalmaz: $0 < y < 6$.

b)

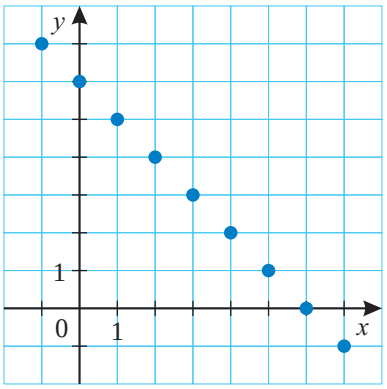


A grafikon: egyenes,

az alaphalmaz: az összes szám,

a képhalmaz: az összes szám.

c)



A grafikon: egy egyenesen elhelyezkedő pontok,

az alaphalmaz: az egész számok halmaza,

a képhalmaz: az egész számok halmaza.

Az *a)* feladatban A olyan x számokból áll, amelyekre $0 < x < 6$,
K olyan y számokból áll, amelyekre $0 < y < 6$.

A *b)* feladatban $A = \{\text{az összes eddig tanult szám}\}$,
$K = \{\text{az összes eddig tanult szám}\}$.

A *c)* feladatban $A = \{\text{egész számok}\}$, $K = \{\text{egész számok}\}$.

2. példa



Eszti reggel 8-kor indul el biciklivel az 56 km-re levő faluban élő nagymamájához. Óránként átlagosan 16 km-t halad, míg bátyja, Zoli egy órával később indul, mondván, úgyis utoléri Esztit, hiszen ő 24 km-t tud óránként megtenni.

Mikor éri utol Zoli a húgát, és ekkor hány km-re vannak a nagymamájuktól?

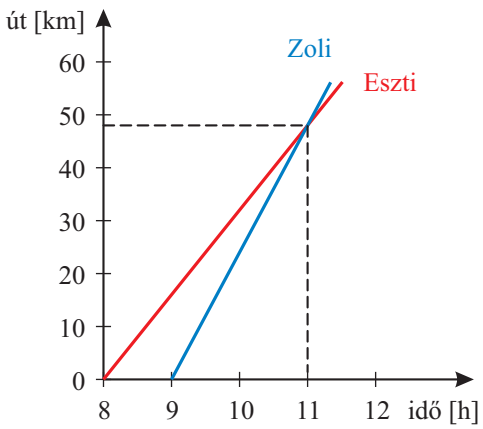
Megoldás

A feladatot grafikusan oldjuk meg.

Az eltelt időt Eszter indulásától mérjük órákban.

Készítsünk táblázatot és grafikont is a két gyerek által megtett útról. Mindkettőt célszerű 8 órától indítani.

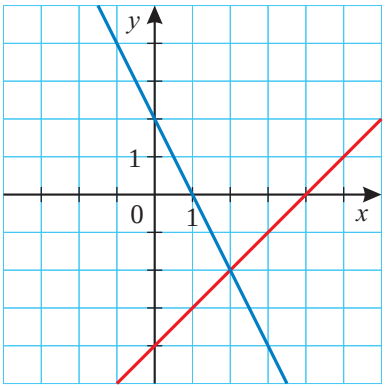
Idő (óra)	8	9	10	11	…
Eszter (km)	0	16	32	48	…
Zoli (km)	0	0	24	48	…



A grafikonról leolvasható, hogy 11 órakor éri utol Zoli Esztert, és ekkor a 48-as kilométerkőnél vannak, azaz még 8 km-t kell mindkettőjüknek megtenniük a nagymama falujáig.

Feladatok

1. Olvasd le a grafikonról a feladatok megoldásait, és jelöld őket a számegyenesen! A füzetedben dolgozz! Ellenőrizz behelyettesítéssel!



a) $x-4=2-2x$ (Pirossal színezz!)

b) $x-4>2-2x$ (Kékkel színezz!)

c) $x-4\leq 2-2x$ (Zölddel színezz!)

2. Melyik lehet az a két szám, amelynek összege 4? Keress összefüggést a két szám között, és ábrázold ezt koordináta-rendszerben!

3. Melyik lehet az a két szám, amelynek különbsége 2? Keress összefüggést a két szám között, és ábrázold ezt koordináta-rendszerben!

4.



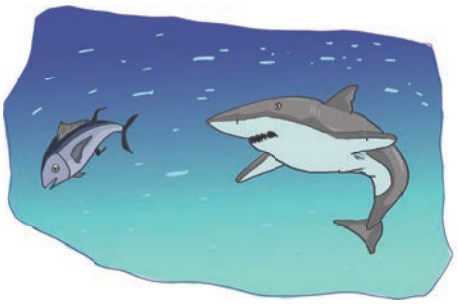
Az agár meglátja a tőle 100 m-re levő nyulat, és $25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel üldözőbe veszi. A nyúl azonnal menekülni kezd, de csak 15 m-t képes megtenni egy másodperc alatt.



Mennyi ideig tart az üldözés? Oldd meg a feladatot grafikusan!

5. Pista és Zoli két, egymástól 85 km-re levő faluban nyaralnak. Elhatározzák, hogy hétfőn reggel 6-kor kerékpárral elindulnak egymás felé, és útközben találkoznak. Pista óránként 14 km-t tesz meg. Zoli elaludt, és csak fél nyolckor indult, de ő óránként 18 km-t tekert. Mikor és hol találkoznak, és melyik fiú tesz meg hosszabb utat a találkozásig? Oldd meg a feladatot grafikusan!

6. Hány perc alatt szerzi meg a cápa a tőle 200 m-re levő áldozatát, a tonhalat, ha az észreveszi a cápát, és elkezd elúszni előle? A tonhal óránként 18 km-t, míg a cápa 36 km-t tesz meg.



7. Mennyi idő múlva éri utol a rendőrautó a bankrablót, ha az $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel menekül, és a rendőrök a rablást követő 10. percben kezdték el üldözni $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű, szirénázó rendőrautójukkal?

Érdekes grafikonok

1. példa

Minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét!

Megoldás

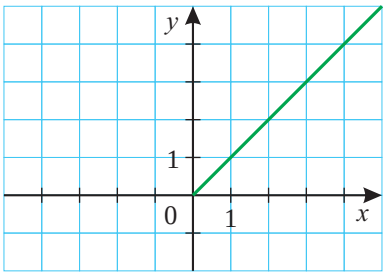
Ha a számokat x-szel jelöljük, akkor a hozzárendelés matematikai leírása: $y = |x|$.

Néhány x értékkel táblázatot készítünk:

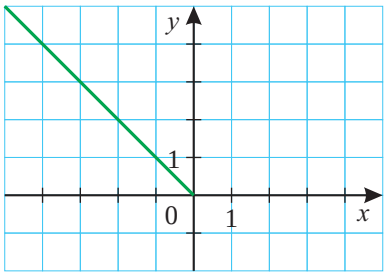
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \|x\|$	3	2	1	0	1	2	3

Az abszolút érték definícióját alkalmazzuk a grafikon elkészítéséhez:

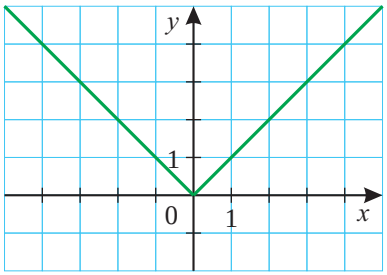
Ha $x \geq 0$, akkor $y = x$.



Ha $x < 0$, akkor $y = -x$.



Tehát:



A={az összes tanult szám}, K={nemnegatív számok}. A grafikonnak a $(0;0)$ pontban töréspontja van.

A grafikon fontos tulajdonsága:

ha $x \leq 0$, akkor az y értékek csökkennek, azaz nagyobb x értékhez kisebb y érték tartozik;

ha $x \geq 0$, akkor az y értékek növekednek, azaz nagyobb x értékhez nagyobb y érték tartozik.

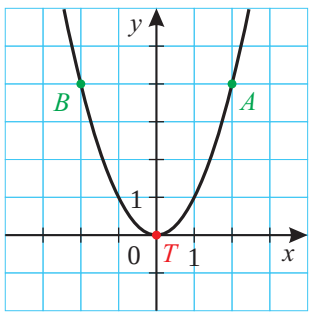
2. példa

Minden számhoz rendeljük hozzá a négyzetét!

Megoldás

Ha a számokat x-szel jelöljük, akkor a hozzárendelési szabály: $y = x^2$. Célszerű értéktáblázatot készíteni:

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Ezt a grafikont **parabolának** nevezzük. A hozzárendelés alaphalmaza:

A = {az összes tanult szám}.

Minden szám négyzete nemnegatív szám, és minden nemnegatív szám szerepel a hozzárendelésben.

A hozzárendelés képhalmaza:

K = {nemnegatív számok}.

Mivel az azonos abszolút értékű számok négyzete egyenlő, a grafikon szimmetrikus az y tengelyre. [*Például:* $A(2;4)$ tükörképe $B(-2;4)$.]

A parabola szimmetriatengelyén levő pontját **tengelypontnak** nevezzük: $T(0;0)$, mely egyben a grafikon legalacsonyabban levő pontja, az úgynevezett **minimumpont.**

A grafikon fontos tulajdonsága:

ha $x \le 0$, akkor az y értékek csökkennek, azaz nagyobb x értékhez kisebb y érték tartozik;

ha $x \ge 0$, akkor az y értékek növekednek, azaz nagyobb x értékhez nagyobb y érték tartozik.

3. példa

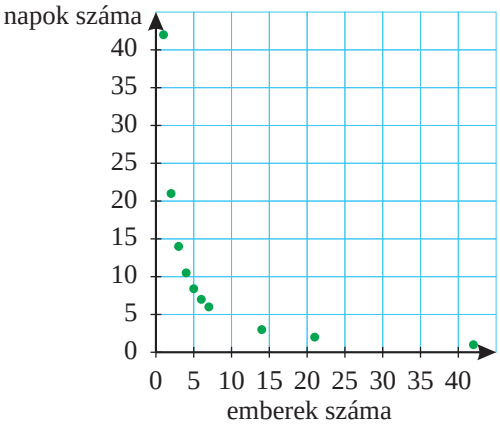
Egy háromtagú hegymászó expedíció összekészített élelmiszer-mennyisége két hétre elég. Hány napig tart ki ugyanez az élelmiszer-mennyiség, ha más létszámú csoport indul útnak?



Megoldás

Készítsünk értéktáblázatot néhány értékre, és ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!

Emberek száma	1	2	3	4	5	6	7	14	21	42
Napok száma	42	21	14	10,5	8,4	7	6	3	2	1



Ha az élelmiszer mennyisége adott, akkor az emberek száma és a napok száma között **fordított arányosság** van.

Ha az emberek számát x-szel jelöljük, akkor a napok számát az $y = \frac{42}{x}$ egyenlettel kapjuk meg.

A grafikon csökkenő, és különálló pontokból áll, melyek nem összeköthetők.

$A = \{1;2;3;\ldots;41;42\}$. $K = \{1;2;3;\ldots;8{,}4;10{,}5;\ldots;42\}$.

Az A alaphalmazban csak pozitív egész számok, míg a K képhalmazban törtszámok is vannak.

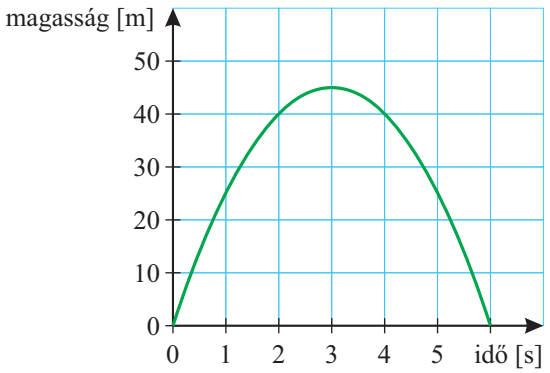
Feladatok

1. Keresd a párját! Melyik pont melyik grafikonon van rajta?

A) $y = x^2$ B) $y = 2x$ C) $y = x + 2$

$P(-1;1)$ $Q(2;4)$ $R(7;9)$ $S(-4;-8)$ $T(-4;16)$

2. Ha egy követ $30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel felfelé hajítunk, akkor annak a mozgását az ábrán látható magasság-idő grafikonnal szemléltethetjük. A mozgást leíró összefüggés: $y = 30t - 5t^2$, ahol t az eltelt időt jelenti másodpercben mérve.



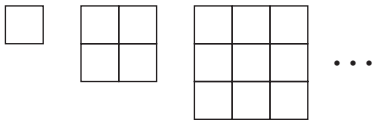
a) Milyen maximális magasságot ért el a kő?

b) Mikor volt a kő 40 m magasan?

c) Milyen hosszú ideig volt a kő 40 m fölött?

d) Mikor esett vissza a földre?

3. Hány kis négyzetet látsz az ábrán? Ábrázold grafikusan az összetartozó értékeket! Lehetséges-e, hogy 256 vagy 1000 kis négyzet legyen valamelyik ábrán?



4. Az ejtőernyő a repülőgépből való kiugrás után 5 másodperccel nyílik ki. Hány métert zuhan az ugró ez idő alatt? (A megtett út és az eltelt idő közötti összefüggést az $s = 5t^2$ képlettel lehet számolni, ha az s utat méterben, a t időt pedig másodpercben mérjük.)



5. A szabadon eső testek által megtett utat a Földön az $s = 5t^2$ képlettel, míg a Holdon az $s = 0{,}8t^2$ képlettel lehet kiszámítani, ha az s utat méterben, a t időt pedig másodpercben mérjük. Közös koordináta-rendszerben ábrázold a két helyen érvényes út-idő grafikonokat! Olvasd le a grafikonokról, hogy 2, 3, 4, 5 másodperc elteltével mennyivel tesz meg hosszabb utat a Föld felé zuhanó test! A leolvasott értékeket számolással is ellenőrizd!

Mennyi idő alatt ér a Földre, illetve a Holdra egy 30 m magasról leejtett kő?

6. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a $P(x;y)$ pontok által alkotott grafikont! Add meg a hozzárendelésekhez tartozó képhalmazokat!

Hol csökkenőek és hol növekvőek a grafikonok?

a) $y=|-x|$ *b)* $y=-|x|$

7. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a $P(x;y)$ pontok által alkotott grafikont! Add meg a hozzárendelésekhez tartozó képhalmazokat!

Hol csökkenőek és hol növekvőek a grafikonok?

a) $y=|x|$ *b)* $y=|x|-2$

8. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a $P(x;y)$ pontok által alkotott grafikont! Add meg a hozzárendelésekhez tartozó képhalmazokat!

Hol csökkenőek és hol növekvőek a grafikonok?

a) $y=\frac{3}{x}$ $x\neq 0$ *b)* $y=-\frac{3}{x}$ $x\neq 0$

9. Egy téglalap területe 12 cm^2. Egyik oldalának hosszát változtatva hogyan változik a másik oldal hossza, ha a téglalap területe változatlanul 12 cm^2?

Készítsd el az általad felírt összefüggés grafikonját, és add meg a hozzárendelés alaphalmazát és képhalmazát is!

10. Hol vannak a síkon azok a $P(x;y)$ koordinátájú pontok, amelyekre igaz, hogy

a) $y=\frac{1}{x}$, *b)* $x\cdot y=1$, *c)* $x\cdot y=0$?

11. Mekkora a kerülete és a területe annak a háromszögnek, amelyet az $y=2-|x|$ egyenletet koordinátáikkal igazzá tevő $P(x;y)$ pontok halmaza és az x tengely határol?

12. A folyóparton sportpálya céljára téglalap alakú telket akarunk elkeríteni 400 m hosszú kerítéssel. (A vízparti részhez nem kell kerítés.)

Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, ha azt akarjuk, hogy a sportpálya területe a lehető legnagyobb legyen?

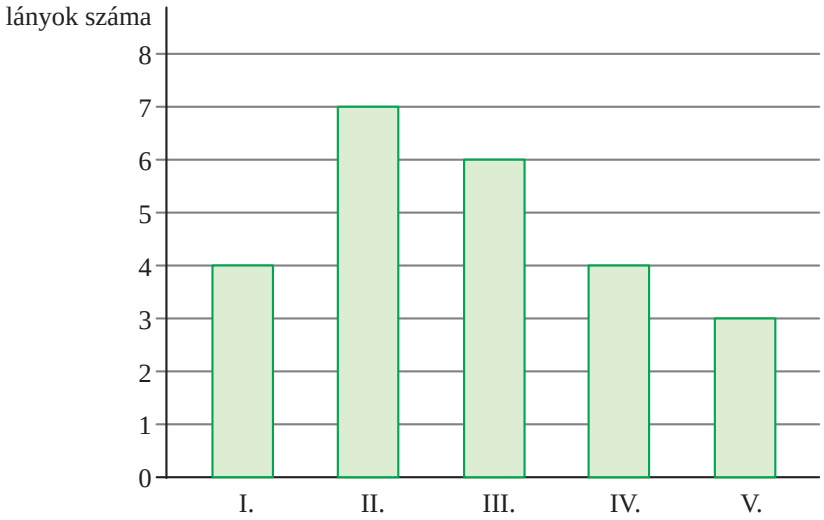
TOTÓ

		1	2	x
1.	Minden emberhez hozzárendeljük a születési dátumát. Ez a hozzárendelés	egyértelmű	nem egyértelmű	csak a gyerekek esetében egyértelmű
2.	A háziállattal rendelkező családokhoz hozzárendeljük az állataikat. Ez a hozzárendelés	egyértelmű	nem egyértelmű	csak a kutyák esetében egyértelmű
3.	Minden háziállathoz hozzárendeljük azt a családot, aki az állatot tartja. Ez a hozzárendelés	egyértelmű	nem egyértelmű	csak a kutyák esetében egyértelmű
4.	Az $y = 3x - 5$ és az $y = 7 + 3x$ összefüggésekhez tartozó grafikonok közül	az első a meredekebb	a második a meredekebb	egyforma a meredekségük
5.	Az $y = 2 - 3x$ összefüggéshez tartozó grafikon	növekvő	csökkenő	nem megállapítható
6.	Az $y = ax + b$ összefüggéshez tartozó grafikon metszi az x tengelyt	minden esetben	soha	általában igen, de nem minden esetben
7.	Az $y = 2x + 2$ és a $y = -\frac{1}{2}x + 3$ hozzárendelések grafikonjai	párhuzamosak	merőlegesek	derékszögtől különböző szöget zárnak be egymással
8.	Az $A(9; 45)$ pont az $y = 3x + 28$ összefüggéshez tartozó	grafikonon van	grafikon alatt van	grafikon felett van
9.	Ha az $y = 3x + 2$ hozzárendelés alaphalmaza $1 < x \leq 5$, akkor a képhalmaza	$6 \leq y \leq 17$	$5 < y \leq 17$	$5 < y < 17$
10.	Az $y = 5x - 1$ összefüggéshez tartozó grafikon $x = 10$ helyen felvett értéke	51	47	49
11.	Az $y = -2x + 4$ hozzárendelés grafikonjához képest az $A(3; -3)$ pont	a grafikonon van	a grafikon felett van	a grafikon alatt van
12.	Az $y = 3x - 2$ hozzárendelési utasítás alaphalmaza $-1 \leq x < 4$. A legkisebb y érték	8	-5	nincs legkisebb érték
13.	Az $y = 3x - 2$ hozzárendelési utasítás alaphalmaza $-1 \leq x < 4$. A legnagyobb y érték	10	nincs legnagyobb érték	14
13+1.	Szerintem a válaszaim közül	legalább 10 jó	8 vagy 9 jó	legfeljebb 7 jó, ezért többet kell tanulnom

Tudáspróba

1. Az oszlopdiagramon a 8. a és a 8. b osztály lányainak magassági besorolását láthatod az év eleji orvosi felmérés alapján. Az egyes kategóriák jelentése:

I.	II.	III.	IV.	V.
$m < 155$ cm	$155 \text{ cm} \le m < 160$ cm	$160 \text{ cm} \le m < 165$ cm	$165 \text{ cm} \le m < 170$ cm	$170 \text{ cm} \le m$



a) Adj meg egy hozzárendelési utasítást a grafikon alapján!

b) Mi az általad megadott hozzárendelés alaphalmaza és képhalmaza?

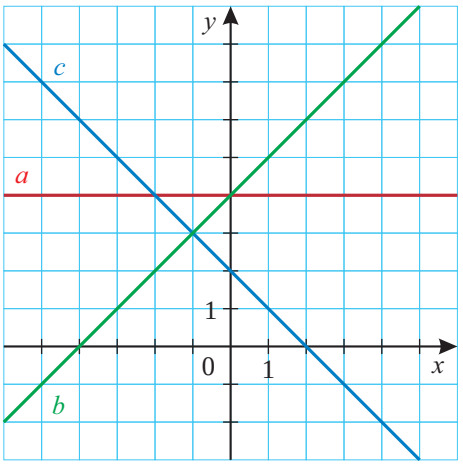
c) Mennyi a lányok magasságának átlaga a két nyolcadik osztályban?

2. *a)* Készítsd el a $P(x;y)$ koordinátájú pontokhoz tartozó grafikont, ha $y = 2x - 3$!

b) Határozd meg a pontok hiányzó jelzőszámait úgy, hogy azok a grafikonon legyenek!

$A(3;\ \square)$, $B(-4;\ \square)$, $C\left(\frac{2}{3};\ \square\right)$, $D(\square;\ 7)$, $E\left(\square;\ \frac{1}{5}\right)$

3. Add meg az ábrán látható grafikonok $P(x;y)$ pontjainak koordinátái között fennálló kapcsolatot!



4. Készítsd el az $y = 0{,}5x + 2$ összefüggéshez tartozó grafikont, és add meg a képhalmazát, ha az alaphalmaza $A = \{-4 \le x \le 6\}$!

5. Egy könyvszekrény alsó polcán 31 könyv van, míg a legfelsőn már csak egy.

Minden polcra 6-tal kevesebb könyvet tettek, mint az alatta lévőre.

a) Hány polcból áll a könyvszekrény?

b) Hány könyvet helyeztek el rajta?

c) Keresd meg azt az összefüggést, amely megadja, hogy az alulról számított x. polcon hány könyv van!

Mi az alaphalmaza és a képhalmaza ennek a hozzárendelésnek?

Térgeometria

Térbeli alakzatok és geometriai modelljeik



„Karod erős – szived emelkedett:
Végetlen a tér, mely munkára hív,
S ha jól ügyelsz, egy szózat zeng feléd
Szünetlenül, mely visszaint s emel,
Csak azt kövesd.”

(Madách Imre: Az ember tragédiája)

A következő képek arról tanúskodnak, hogy az egyszerű mértani testekből kiindulva a művészi fantázia milyen csodálatos alkotásokra képes.



E fantasztikus építmények alkotóelemei hasábokkal, hengerekkel, gúlákkal, kúpokkal és gömbökkel modellezhetők.

1. példa

Csoportmunka

a) Építsetek sokszöglapokból különböző mértani testeket!

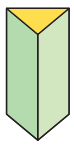
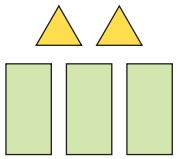
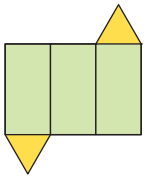
b) Rajzoljátok le, milyen lapok határolják a megépített testet!

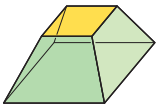
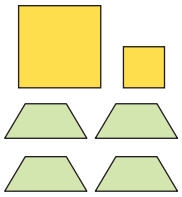
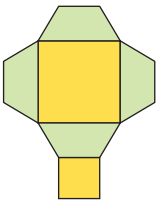
c) Rajzoljátok le a test egyik hálóját!

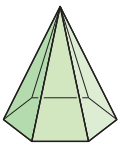
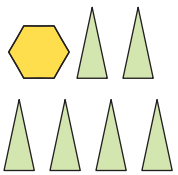
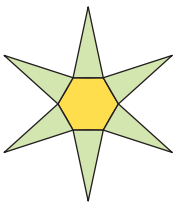
d) Állapítsátok meg, hogy hány csúcsa, lapja és éle van a testeknek!

Megoldás

A megoldásban néhány példát mutatunk.

1. test	A határoló lapok	A test egyik hálója	csúcs	lap	él
			6	5	9
			Összefüggés		
			$6+5=9+2$		

2. test	A határoló lapok	A test egyik hálója	csúcs	lap	él
			8	6	12
			Összefüggés		
			$8+6=12+2$		

3. test	A határoló lapok	A test egyik hálója	csúcs	lap	él
			7	7	12
			Összefüggés		
			$7+7=12+2$		

Euler tétele

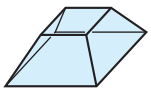
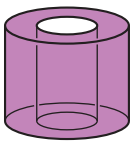
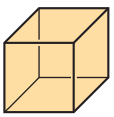
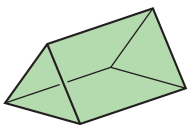
A táblázat utolsó sorában leírt összefüggések általában is igazak. A sokszöglapokkal határolt egyszerű testek esetében a csúcsok és lapok számának összege 2-vel több, mint az élek száma:

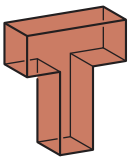
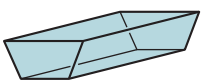
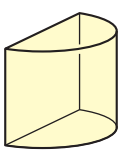
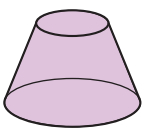
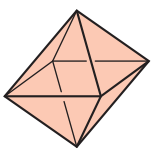
$$c+l=é+2.$$

Ezt az összefüggést Leonhard Euler [ejtsd: leonárd ajler] (1707–1783) svájci matematikus fedezte fel.

2. példa

Válasszuk ki az ábrán látható testek közül azokat, amelyekre igazak a felsorolt állítások!

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 

f) 
g) 
h) 
i) 
j) 

A) A testet csak sokszöglapok határolják.
B) A test minden határoló lapja négyszög.
C) A testet görbe felület is határolja.
D) A testnek nincs sokszöglapja.
E) A testet konkáv síkidomok is határolják.
F) A test határoló lapjai egybevágó sokszögek.

Megoldás

A) A testet csak sokszöglapok határolják. *a), d), e), f), g), j)*

B) A test minden határoló lapja négyszög. *a), d), g)*

C) A testet görbe felület is határolja. *b), c), h), i)*

D) A testnek nincs sokszöglapja. *b), c), i)*

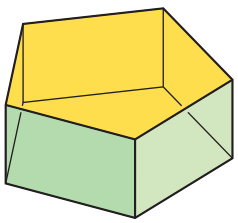
E) A testet konkáv síkidomok is határolják. *c), f)*

F) A test határoló lapjai egybevágó sokszögek. *d), j)*

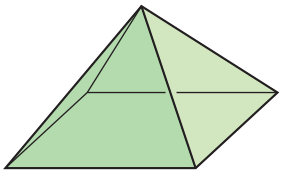
Feladatok

1. Melyik testnek melyik a hálója? Keresd meg a párokat!

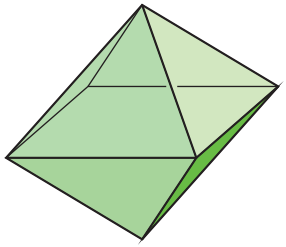
A)



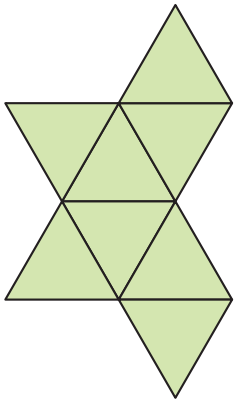
B)



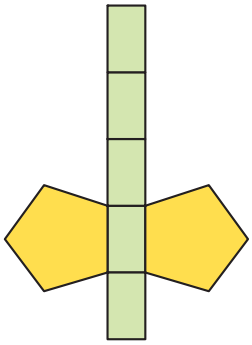
C)



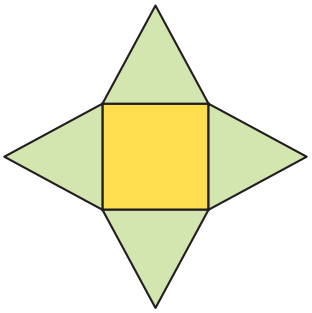
a)



b)



c)

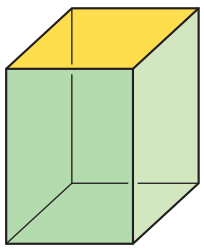


2. *a)* Rajzold le, milyen határoló lapjai vannak az ábrán látható testeknek!

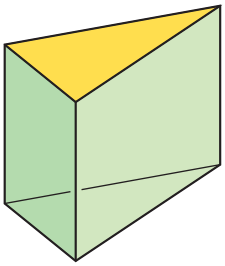
b) Rajzold le a testek egyik hálóját!

c) Hány csúcsuk, lapjuk és élük van?

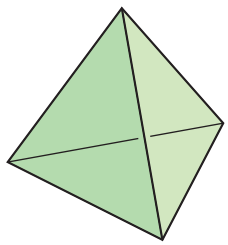
A)



B)



C)

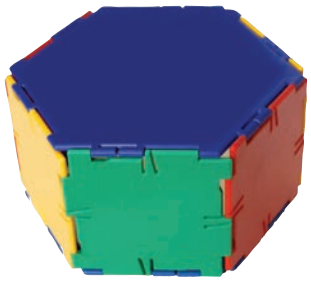


3. Milyen síklapok határolják a testeket? Add meg a síklapok egyes fajtáinak darabszámát is!

a)



b)



c)



d)



e)



f)



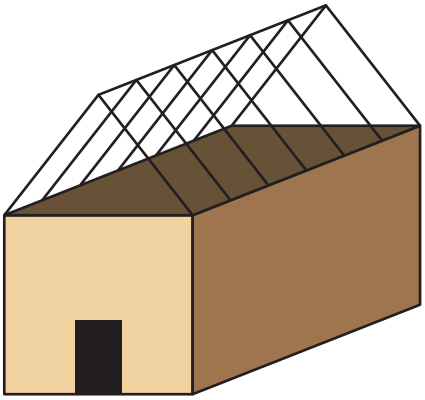
4. Az építészeti alkotások látványtervei speciális szoftverek segítségével, 3D-s grafikával készülnek.





@ Az interneten számos, ingyenesen letölthető 3D-s rajzoló-program érhető el. Keress ilyen térbeli rajzoló-, tervező-programot, és annak segítségével készítsd el egy általad elképzelt térbeli alakzat modelljét!

Például itt egy félkész ház modelljét rajzoltuk le. Használhatod a GeoGebra program térbeli rajzolófelületét is.



5. 

Milyen geometriai testeket lehet felismerni az ábrán? Rajzold le a füzetedbe, és írd mellé a nevüket is!

A gúla és hálója

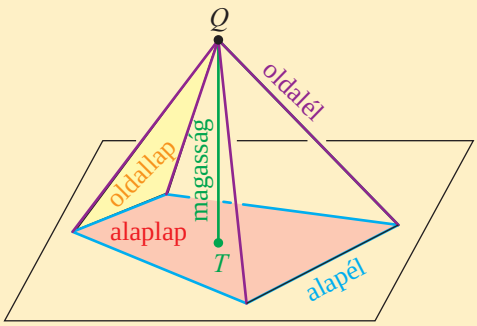


Kisalföld épületei

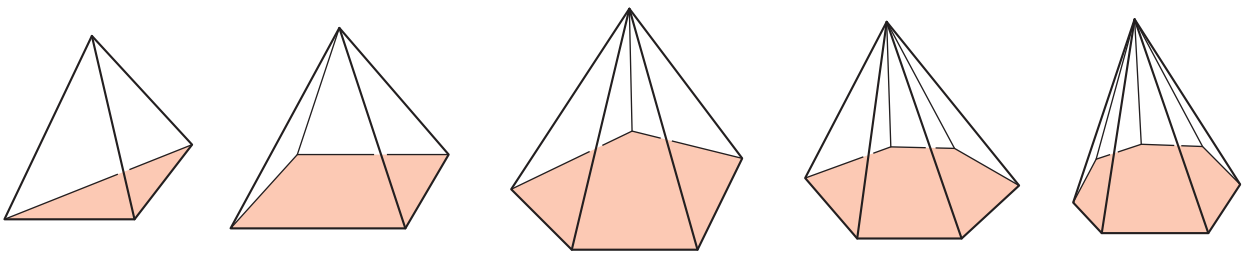


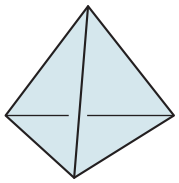
Kamra kisalföldi mintára

(Szabadtéri Néprajzi Múzeum)



A gúlát egy n oldalú sokszög és n darab, egy csúcsba „összefutó” háromszög határolja (n egész szám, értéke legalább 3). Az n oldalú sokszög a gúla **alaplapja,** a háromszögek az **oldallapok.** Az oldallapok az **oldalélekben,** az alaplap és az oldallapok az **alapélekben** metszik egymást. A Q pontnak az alaplap síkjától való távolsága a gúla **magassága,** ami a Q pontból az alaplap síkjára bocsátott merőleges szakasz hossza.





Érdemes megjegyezni, hogy a gúlának csak lapátlója van, testátlója nincs, mivel bármely két csúcsát összekötő szakasz mindig valamelyik lapon vagy annak határán halad.

Ha a gúla alapja háromszög, akkor a testet négy háromszög határolja, ezért az ilyen gúlákat tetraédernek is nevezik (tetra = négy görögül). A tetraéderek bármelyik lapja lehet alaplap. Nevezetes az ábrán látható szabályos tetraéder, amelynek minden határoló lapja szabályos háromszög.

1. példa

Csoportmunka

A) Építsetek síklapokból négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúlát!

B) Építsetek síklapokból szabályos tetraédert!

a) Hány darab négyzetlapra és háromszöglapra volt szükség külön-külön az egyes testekhez?

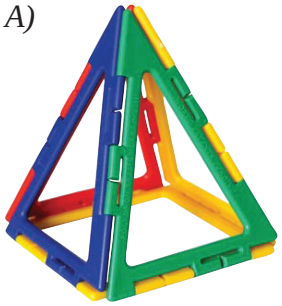
b) Mérjétek meg a testek alapélének, oldalélének, lapmagasságának és testmagasságának hosszúságát!

Megoldás

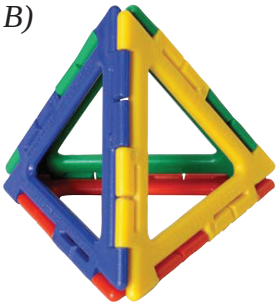
a) Az *A* testhez 1 db négyzet és 4 db egyenlő szárú háromszög kellett.

A *B* testhez 4 db szabályos háromszög kellett.

A)



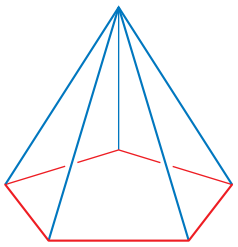
B)



b) (A táblázat az építőjátékkal készült testek adatait tartalmazza.)

	Alapél	Oldalél	Lapmagasság	Testmagasság
Négyzet alapú gúla	6 cm	9 cm	8,5 cm	7,9 cm
Szabályos tetraéder	6 cm	6 cm	5,2 cm	4,9 cm

2. példa



Ha egy gúlát szívószálakból, pálcikákból vagy drótból készítünk el, akkor a test **élvázát** kapjuk meg.

a) A szabályos ötszög alapú gúla alapéleit piros drótból, az egyenlő oldaléleit pedig kék drótból készítettük. Hány cm piros és hány cm kék drótot használtunk fel, ha az alapél 5 cm, az oldalél pedig 8 cm hosszú?

b) Milyen hosszú drót szükséges az olyan gúla megépítéséhez, amelynek minden éle kétszer ilyen hosszú?

Megoldás

a) Az alapélek hossza összesen: $5 \cdot 5$ cm $= 25$ cm. Az oldalélek hossza összesen: $5 \cdot 8$ cm $= 40$ cm.

25 cm hosszú piros drótot és 40 cm hosszú kék drótot használtunk fel.

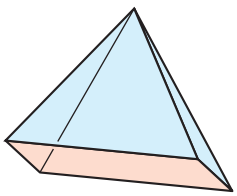
b) Ha az élek mindegyike kétszerese az eredetinek, akkor a piros drótból $(2 \cdot 5$ cm$) \cdot 5 = 50$ cm, a kék drótból $(2 \cdot 8$ cm$) \cdot 5 = 80$ cm hosszú drót szükséges.

A nagyobb gúla élvázának hossza összesen kétszer akkora, mint a kisebbiké.

A gúla hálója

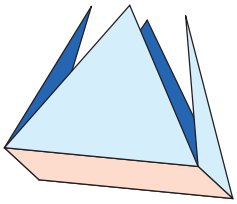
3. példa

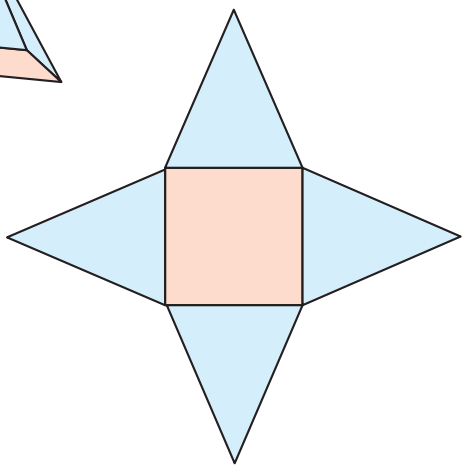
Készítsük el egy négyzet alapú gúla egyik hálóját!



Megoldás

Egy lehetséges háló:



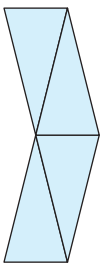


@ Testhálókból mozgatással összeállítható testekről számtalan animációt találhatunk az interneten. Nézz utána néhány lehetőségnek, és tanulmányozd az ismert testek hálóját!

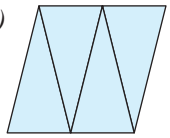
4. példa

Egyenlő szárú háromszögekből készítettük az ábrán látható sokszögeket. Melyik lehet egy háromszög alapú gúla hálója, és melyik nem?

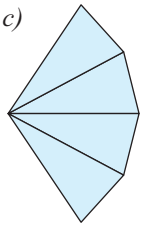
a)



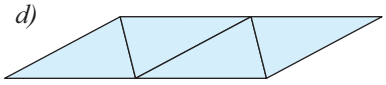
b)



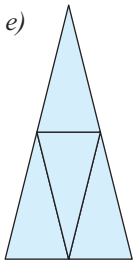
c)



d)

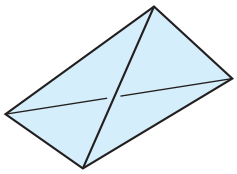


e)



Megoldás

A *b)*, a *d)* és az *e)* sokszögekből készíthető gúla.



Az *a)* és a *c)* sokszögek nem gúlahálók.

Feladatok

1. Műanyag elemekből építettük a testeket.

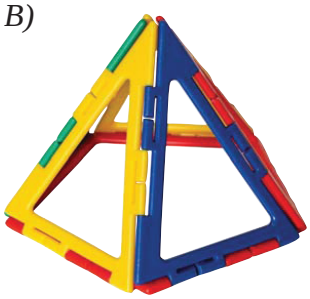
a) Milyen síkidomok határolják a testet? Rajzold le a határoló lapokat!

b) Hány egybevágó síkidomot használtunk az egyes testek építésénél?

A)

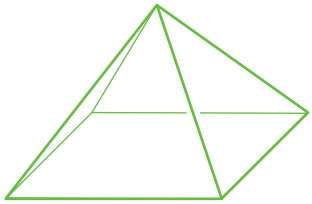


B)

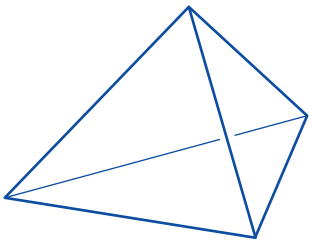


2. Az alábbi gúlák minden éle 7 cm hosszú. Milyen hosszú drótot használtak fel az elkészítésük során?

A)

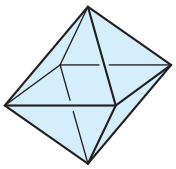


B)

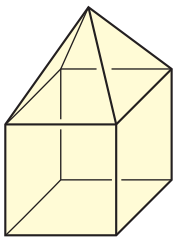


3. Válaszd ki a testek közül a gúlákat!

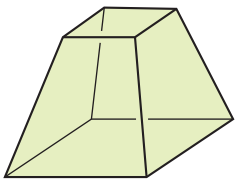
a)



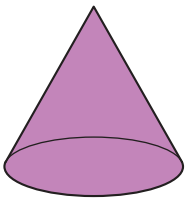
b)



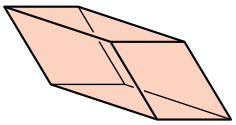
c)



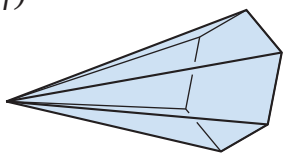
d)



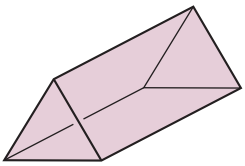
e)



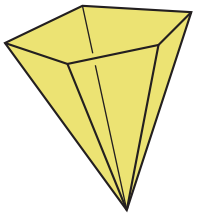
f)



g)



h)



4. 24 cm hosszú vékony drótból elkészítjük egy szabályos tetraéder élvázas modelljét. Hányszor annyi drótra lenne szükségünk, ha ennél háromszor nagyobb élhosszú szabályos tetraédert szeretnénk készíteni? Mennyivel hosszabb ez a drót az eredetinél?

5. Az állítások az alábbi két gúlára vonatkoznak. Ezeket a gúlákat olyan szabályos háromszöglapokból építettük, amelyeknek egy oldala 6 cm hosszú. Döntsd el, melyik tulajdonság igaz az *A)* gúlára, melyik a *B)*-re és melyik mindkettőre!

a) A gúla minden éle egyenlő.

b) A gúlát 4 db szabályos háromszög határolja.

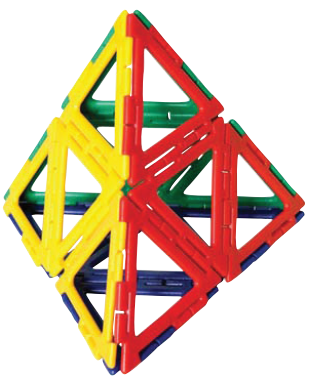
c) A gúla egy lapjának kerülete 18 cm.

d) Sárga háromszögből ugyanannyit használtunk az építésnél, mint zöldből.

e) A gúla egyik oldallapjának területe négyszer akkora, mint a másik gúláé.

f) A gúla egy éle 12 cm hosszú.

A)



B)



6. **Csoportmunka**

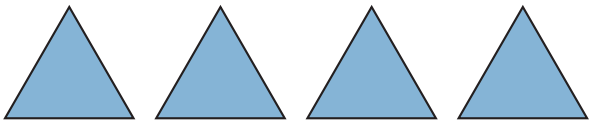
Készítsétek el olyan gúla hálóját, amelynek minden éle egyenlő, alaplapja

a) szabályos háromszög, *b)* négyzet,

c) szabályos ötszög, *d)* szabályos hatszög!

Vizsgáljátok meg, hogy mindegyik gúla elkészíthető-e!

7. Az ábrán látható 4 darab szabályos háromszögből készíts különböző gúlahálókat!

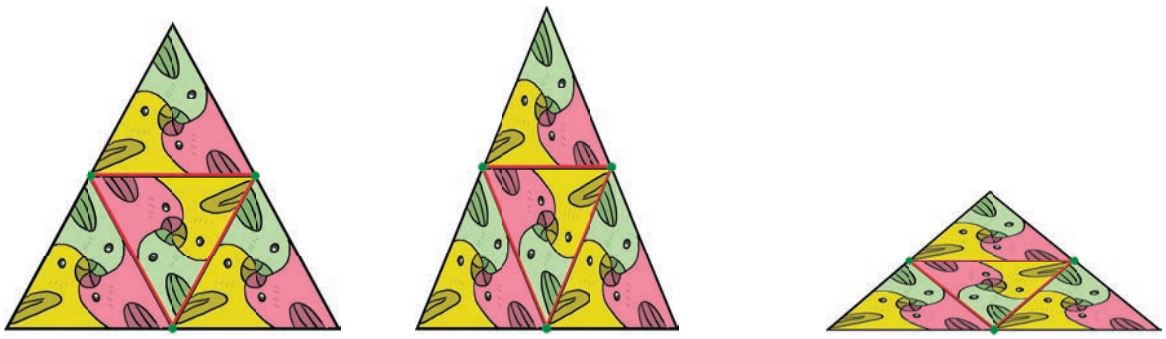


8. **Páros munka**

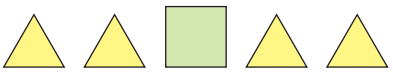
Készítsétek el az ábrán látható háromszögeket, a madarakat nektek persze nem kell rárajzolni, de a zöld oldalfelező pontokat összekötő szakaszokat igen! Vágjátok ki a háromszögeket!

Milyen fajta gúla készíthető az *a)*, a *b)* és a *c)* háromszögből, ha a pirossal rajzolt szakaszok mentén a sarkokat fölhajtogatjuk?

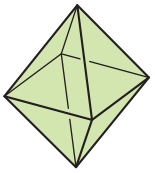
a) 4 db szabályos háromszög *b)* 4 db egyenlő szárú háromszög *c)* 4 db egyenlő szárú derékszögű háromszög



9. Az ábrán lerajzolt 4 db háromszögből és 1 db négyzetből készíts legalább háromféle különböző gúlahálót, és rajzold le azokat a füzetedbe!



10. Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla alapéle 12,5 cm hosszú, oldallapjának magassága az alapél 120%-a. Két ilyen gúlát az alaplapjuknál egymáshoz ragasztunk. Mennyivel változik a gúla határoló lapjainak összterülete?



11. Egy légi bemutatón négy repülőgép száll kötelékben úgy, hogy mindegyik 100 m távolságra van a három másiktól. Hogy hívják azt a képzeletbeli testet, amelynek csúcsaiban szállnak ezek a repülők?

★ **12.** Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű tömör fából készült gúlát kékre festünk, majd az alaplappal szemközti csúcsán áthaladó, az oldalmagasságokat is tartalmazó síkkal elmetsszük. Hány festetlen lap keletkezik, ha

a) egy sík, *b)* két sík

mentén végezzük el a vágást? Rajzold le a festetlen lapokat!

Hasábok és gúlák

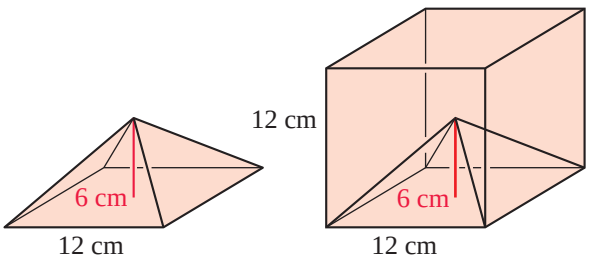
1. példa

12 cm élű kockából egyik oldallapjánál kivágunk egy 6 cm magasságú, négyzet alapú gúlát.

a) Hány ilyen gúlából áll ez a kocka?

b) A kocka térfogatának hányad részét foglalja el egy ilyen gúla?

c) Mekkora egy kivágott gúla térfogata?



Megoldás

a) A kocka mind a hat lapjánál elvégezhető ez a művelet. Tehát a kocka 6 db ilyen gúlából rakható ki.

b) Egy gúla térfogata hatodrésze a kocka térfogatának.

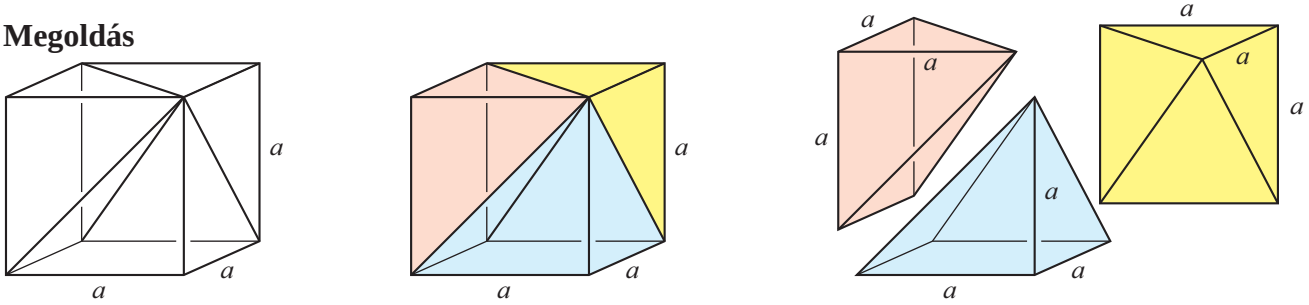
c) A kivágott gúla térfogata: $V = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12}{6} = 288\ (\text{cm}^3)$.

2. példa

Egy kockát felvágunk három lapátlója és egy testátlója mentén, az ábrán látható módon.

Hányad része egy ilyen gúla térfogata a kocka térfogatának?

Megoldás

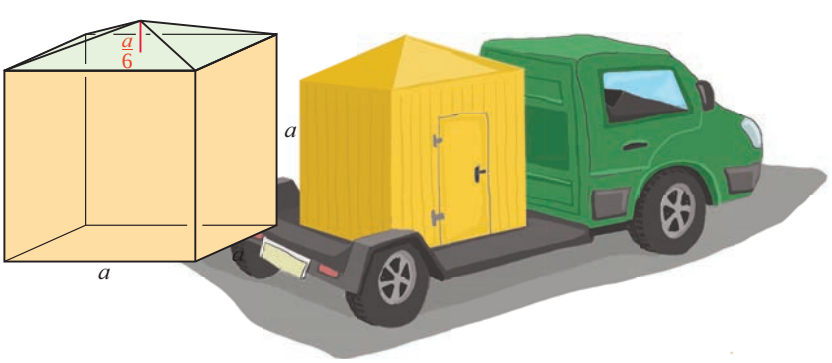


A vágások után három olyan egybevágó, négyzet alapú gúlát kapunk, amelynek alaplapja azonos a kocka lapjával, magassága pedig egyenlő a kocka élével.

Egy gúla térfogata a kocka térfogatának harmada.

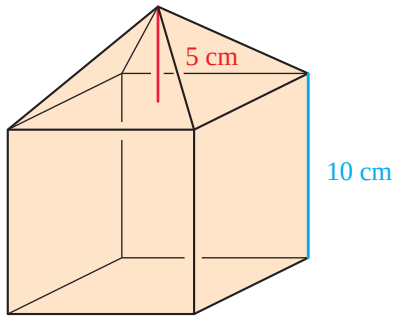
Feladatok

1. Az ábrán látható szerszámos kamrát egy teherautó szállítja el a vidéki telekre. A kamra gúla alakú tetejének magassága a kocka éleinek $\frac{1}{6}$ része. A szállítmánynak az országúton többször kell felüljáró alatt áthaladni. A legalacsonyabb felüljáró a vízszintes talajtól 4 m magasságban halad. A teherautó 2,4 m × 4 m méretű, téglalap alakú rakodófelülete 1,2 m magasan van. Add meg annak a kamrának a méreteit, amely a felüljáró alatt állítva vagy fektetve elfér a teherautón!

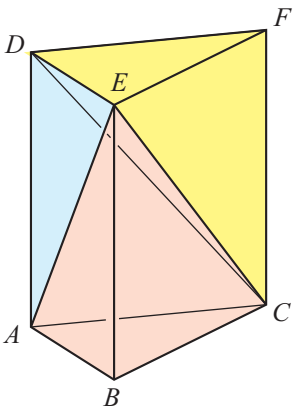


2. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára illesztünk egy 5 cm magasságú, négyzet alapú gúlát (jobb oldali ábra).

A kapott test térfogata hány százaléka a kocka térfogatának?



3.



A hasábot a színezésnek megfelelően gúlákra vágjuk szét (bal oldali ábra). Csúcsainak felsorolásával add meg a kék, a rózsaszín és a sárga gúlát!

4. Egy *a* oldalélű kocka minden lapjára kifelé olyan egyenlő oldalélű gúlákat illesztünk, amelyeknek magassága a kocka élének a fele.

a) Milyen lapjai lesznek az így kapott testnek?

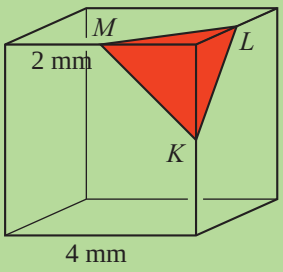
b) Konvex vagy konkáv testet kapunk?

c) Hány éle, hány lapja és hány csúcsa lesz az új testnek?

5. Egy ékszerkészítő műhelyben egy 4 mm élű üvegkocka minden sarkát levágják az oda futó élek felezőpontján átfektetett síkkal. Így készítenek egy soklapú nyakéket. Az első ábrán az egyik ilyen vágás látható. A felezőpontokat *K*, *L*, *M* betűkkel jelöltük

a) Milyen sokszögek határolják a kapott a testet? Hány darab van a különböző határoló lapokból?

b) Rajzolj le a levágás után keletkezett különböző határoló lapokból egyet-egyet!



C) Határozd meg a keletkezett négyszöglapok területét!

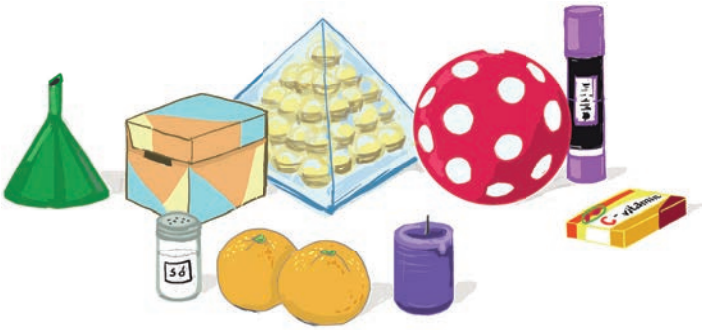


A kúp

1. példa

Az ábrán látható használati tárgyak közül válasszuk ki azokat, amelyeknek alakja általunk ismert mértani testre hasonlít, és soroljuk a megfelelő halmazba!

Megoldás



Hasáb: C-vitamin, doboz

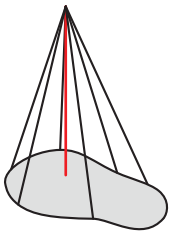
Henger: lila színű flakon, sótartó, gyertya

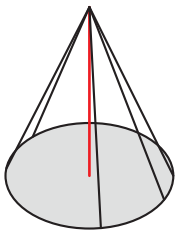
Gúla: csokigolyós doboz

Kúp: a tölcsér alsó része

Gömb: labda, narancs

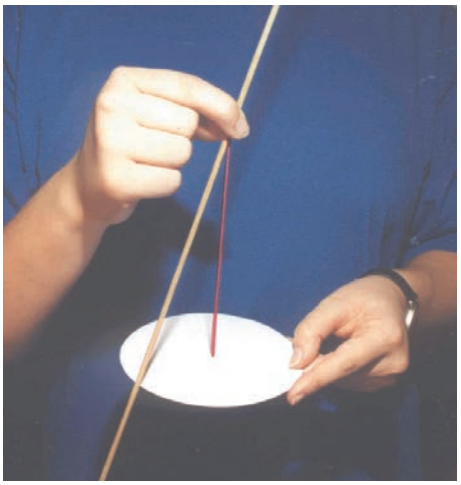
Az alábbi ábrákon különböző kúpokat látunk.







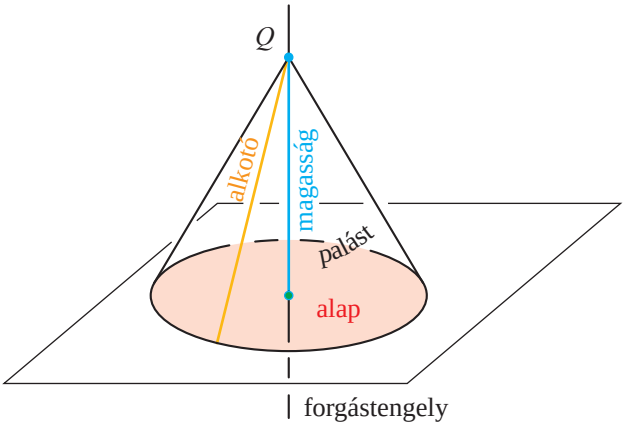




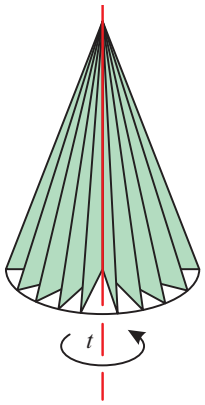
A kúpot egy görbe vonallal határolt síkidom (az alaplap) és egy görbe felület (a palást) határolja. A palástot azzal szemléltethetjük, hogy az alaplap határvonalán végigvezetünk egy hurkapálcikát úgy, hogy a pálca minden helyzetében áthaladjon egy, az alaplap síkján kívüli ponton.

A kúpnak nincs éle. A Q pont a kúp csúcsa. A csúcsnak az alap síkjától való távolsága a kúp **magassága.** A felület a kúp **palástja.** Az alaplap határvonalának egy tetszőleges pontját a kúp csúcsával összekötő szakasz a kúp **alkotója.**

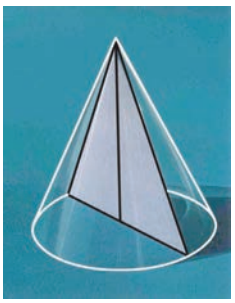
Az egyenes körkúpnak van forgástengelye, ezért ezt forgáskúpnak is nevezik.



A forgáskúpot úgy is elképzelhetjük, hogy egy egyenlő szárú háromszöget a szimmetriatengelye körül megforgatunk.



A forgáskúp csúcsán áthaladó, alaplapjára merőleges sík a kúpot egyenlő szárú háromszögben metszi. Ez a háromszög a kúp tengelymetszete.



2. példa

Csoportmunka

Különböző fajtájú, azonos sugarú körcikkekből kúppalástokat állítunk elő.

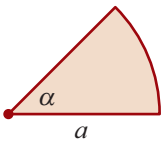
a) Bármelyik körcikkből készíthető kúppalást?

b) Melyik esetben legkisebb az alapkör sugara?

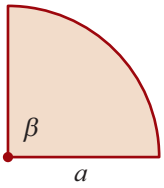
c) Melyik kúppalástnak legkisebb és melyiknek legnagyobb a magassága?

d) Hogyan változik a kúp magassága a körcikk középponti szögének növelésével?

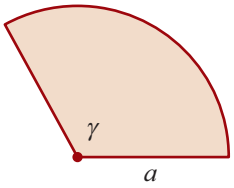
A)



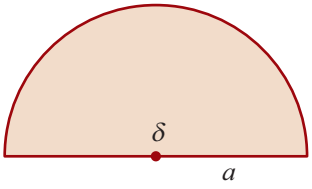
B)



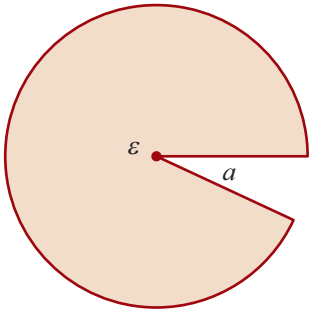
C)



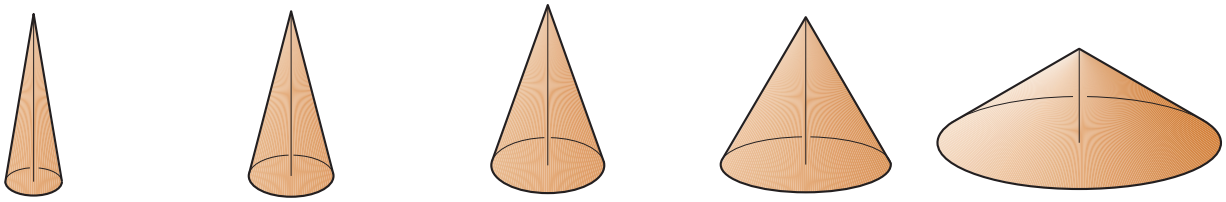
D)



E)



Megoldás



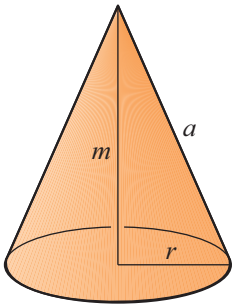
a) Bármilyen körcikkből lehet kúppalástot készíteni, tehát a fenti öt különböző körcikkből is.

b) Az *A)* kúp esetében legkisebb az alapkör sugara.

c) Az *E)* kúpnak a legkisebb és az *A)*-nak a legnagyobb a magassága.

d) Ha a körcikk középponti szöge nagyobb, akkor a keletkező kúp magassága kisebb.

3. példa



Az ábrán m a kúp magasságát, a az alkotóját, r pedig az alapkörének sugarát jelöli. Az ábrán látható kúp adatainak változtatásával más-más kúpot kapunk. Az állítások ezekre a kúpokra vonatkoznak. Döntsük el, hogy hány állítás igaz és hány hamis.

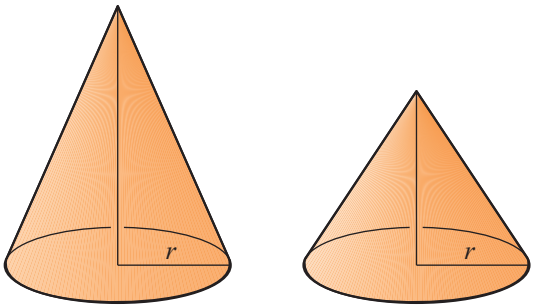
A) Ha két kúp alapkörének sugara egyenlő, akkor annak nagyobb a magassága, amelyiknek hosszabb az alkotója.

B) Ha két kúpnak egyenlő az alkotója, akkor a kisebb magasságú esetében kisebb az alapkör sugara.

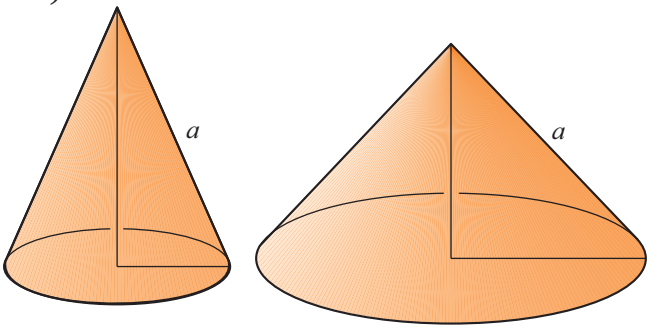
C) Ha két kúpnak egyenlő a magassága, akkor abban az esetben nagyobb az alkotó, amelyikben kisebb az alapkör sugara.

D) Ha két kúp közül az egyiknek feleakkora az alkotója és a magassága, mint a másiknak, akkor a kisebb kúp esetében feleakkora az alapkör sugara is.

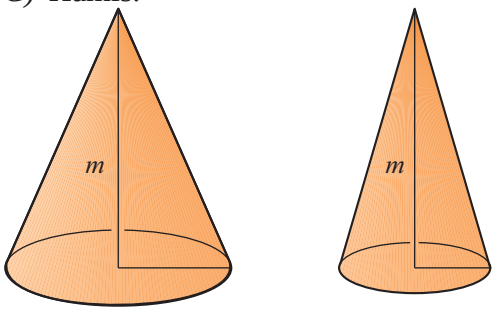
A) Igaz.



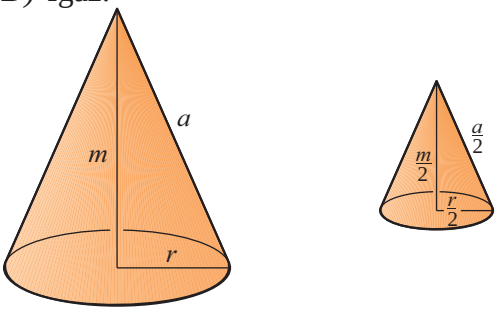
B) Hamis.



C) Hamis.



D) Igaz.



Az állítások igaz vagy hamis voltának eldöntésénél a kúpok tengelymetszetén megjelenő derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmaztuk.

Az állítások között két igaz és két hamis szerepelt.

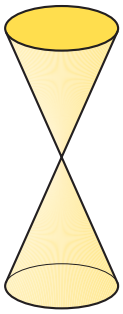
Feladatok

1. Vágjunk el egy kúpot a

a) forgástengelyére illeszkedő síkkal,

b) forgástengelyére merőleges síkkal!

Rajzold le, milyen síkidomok a síkmetszetek!

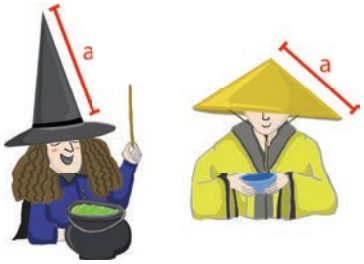


2. *a)* Mekkora a kúp magassága, ha az alapkör sugara 4,2 cm, az alkotó 60 mm hosszú?
b) Rajzold le a kúp tengelymetszetét!
c) Mekkora a tengelymetszet területe?

3. Rajzold le, milyen síkbeli alakzatot kell a szimmetriatengelye körül megforgatni, hogy a homokórát szemléltető mértani testet kapjuk!

4. Egy tömör fából készült kúp felületét kékre festjük, majd a tengelyére illeszkedő két, egymásra merőleges síkkal négy részre vágjuk. Rajzold le a vágás után látható festetlen lapokat!

5. A varázsló kúp alakú kalapját és a kínai kalapot *a* sugarú körcikkekből készítették. Melyik körcikknek nagyobb a középponti szöge? Rajzold le a körcikkeket!



6. Egy sátortábor közepén álló rúdra egy elemmel működő, nagy fényű ledes lámpát lehet felakasztani. A lámpa fénykúpjának a kúp csúcsánál lévő szöge 90°. A gyerekek az esti játék után a rúd 2,5 méter sugarú környezetében elhagytak néhány pingponglabdát. Milyen magasra kell akasztani a lámpát, hogy az a labdákat megvilágítsa? Készíts rajzot!

A gömb

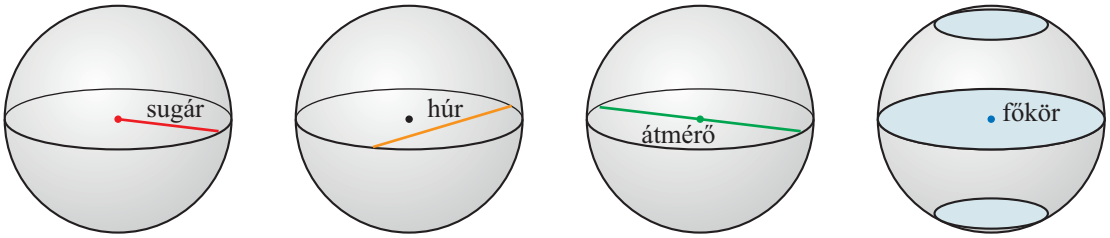






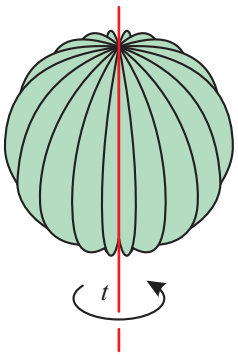

Gömb alakú tárgyak igen gyakran megjelennek az ember életében. Már a csecsemőkorú gyermek is játszik a labdával; az óvodás már azt is tudja, hogy gömbnek hívják. Geometriai tulajdonságait részletesen viszont csak magasabb matematikai ismeretek segítségével írhatjuk le.

A gömb felületének minden pontja egyenlő távolságra van a gömb középpontjától.



A gömb középpontját a gömbfelülettel összekötő szakasz a gömb **sugara.** A gömbfelület két tetszőleges pontját összekötő szakasz a gömb **húrja.** A gömb minden **síkmetszete kör.** A legnagyobb ilyen kör a gömb **főköre,** amelyet a középpontján áthaladó sík metsz ki a gömbből; ezt a gömb tengelymetszetének is nevezik. Ennek a körnek az átmérője egyben a gömb **átmérője** is.

Ha egy kört valamelyik átmérőjének egyenese körül megforgatunk, a forgatás közben gömböt látunk. Ezért a gömb, hasonlóan a forgáshengerhez és a forgáskúphoz, **forgástest.**



1. példa



A farsangi dekorációhoz a gyerekek üveggömböket díszítettek fel különböző színű szalagokkal, a gömbök néhány főkörének határvonala mentén. Egy ilyen gömb látható az ábrán. A gömb sugara 8 cm.

a) Hányféle szalagot használtak a díszítésre?

b) Összesen mennyi a felhasznált szalagok hossza egy gömb díszítésénél, ha minden főkörnél egy-egy cm-t hagytak a szalag két végének összeragasztására. (Egy főkör határvonalának hossza a gömb átmérőjének kb. 3,14-szorosa.)

Megoldás

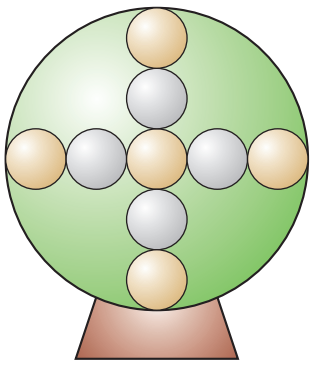
a) Az ábrán látható, hogy a különböző színű szalagok száma összesen 6.

b) A főkör átmérője 16 cm.

Egy főkör határvonala $16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24$ cm hosszú. A ragasztás miatt $50{,}24\text{ cm} + 2\text{ cm} = 52{,}24$ cm hosszú egy szalag.

A 6 díszítőszalag hossza összesen: $6 \cdot 52{,}24\text{ cm} = 313{,}44$ cm.

2. példa



Egy ajándékboltban kapható az ábrán látható asztali dísztárgy. Egy 15 cm átmérőjű, átlátszó műanyagból készült gömbbe 1,5 cm sugarú csillogó kis gömböket helyeztek el úgy, hogy a kis gömbök középpontjai a nagy gömb három, egymásra páronként merőleges átmérőjén sorakoznak. A szomszédos kis gömbök érintik egymást, és a szélső gömbök a nagy gömböt is érintik. Összesen hány gömbből áll ez a dísztárgy?

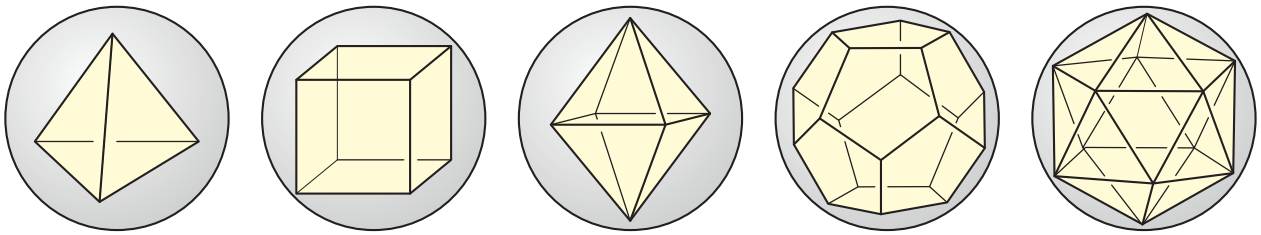
Megoldás

Az ábrán a dísztárgy egyik tengelymetszetét látjuk. Egy kis gömb átmérője 3 cm. A nagy gömb egy 15 cm-es átmérője mentén $15\text{ cm} : 3\text{ cm} = 5$ db kis gömb fér el. Erre merőlegesen, a nagy gömb két átmérője mentén a középsőn kívül még 4-4 kis gömbnek van hely.

Ez összesen $5 + 4 + 4 = 13$ db kis gömb. A nagy gömbbel együtt 14 db gömb van a dísztárgyban.

A gömb nagyon különleges test. A mindennapi életünkben, ha valami tökéletes, akkor arra azt is szokták mondani, hogy „gömbölyű”. Valóban a „legszabályosabb” test a gömb. Ilyen elnevezés persze nincs a geometriában, de szabályos testek léteznek. A szabályos test minden határoló lapja egymással egybevágó szabályos sokszög, ezenkívül a test gömbbe írható úgy, hogy minden csúcsa a gömb felületén van. Érdekes, hogy míg a síkidomok között végtelen sok szabályos sokszög van, addig a szabályos testekből csak ötféle létezik. Közülük az első hárommal már megismerkedtünk.

A szabályos tetraédert 4 szabályos háromszög,
a szabályos hexaédert (a kockát) 6 négyzet,
a szabályos oktaédert 8 szabályos háromszög,
a szabályos dodekaédert 12 szabályos ötszög,
a szabályos ikozaédert 20 szabályos háromszög határolja.



tetraéder | hexaéder (kocka) | oktaéder | dodekaéder | ikozaéder

3. példa

Páros munka

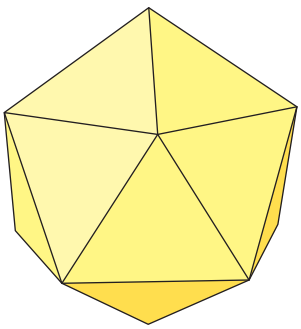
20 db szabályos háromszögből készítsünk egy ikozaédert!

Hogyan lehet elkészíteni a focilabda modelljét az ikozaéderből?

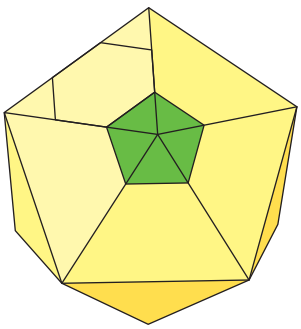


Megoldás

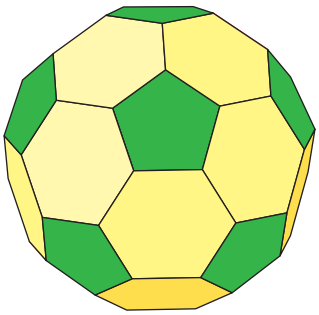
(1)



(2)



(3)



Megjelöljük az ikozaéder minden élének harmadolópontjait, és ezeket a (2)-es ábrán látható módon összekötjük. A csúcsokhoz közelebbi fekete szakaszok mentén levágjuk az ikozaéder csúcsát. Egy csúcsnál például a (2)-es ábrán látható zöld, ötszög alapú gúlát vágjuk le.

Ha a hatszöget minden lapon kijelöljük, és a levágást minden csúcsnál elvégezzük, akkor a (3)-as ábrán látható focilabda-modellt kapjuk.

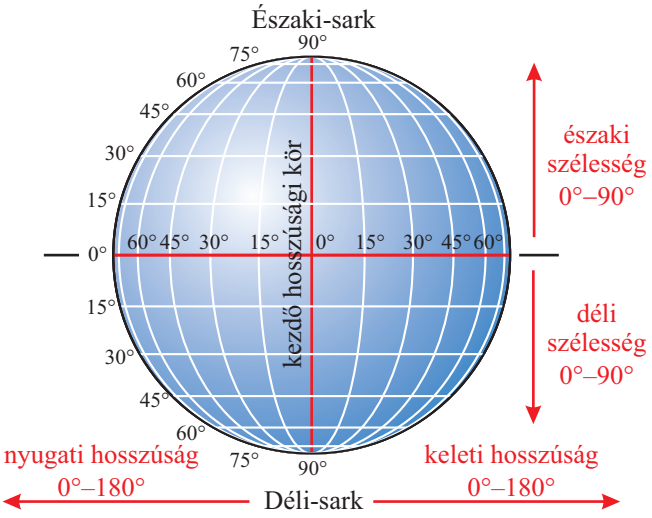
Ezt a testet annyi ötszög határolja, ahány csúcsa, és annyi hatszög határolja, ahány lapja van az ikozaédernek, vagyis 12 ötszög és 20 hatszög. A focilabda tehát ezekből a sokszögekből készül.

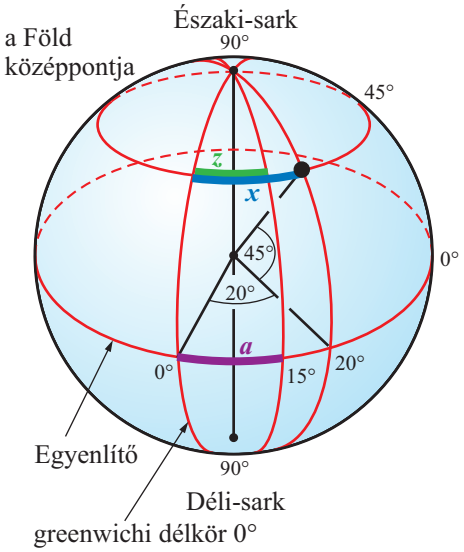
A focilabda modelljének labdává alakítását megfigyelhetjük az interneten található térbeli animációk segítségével.

4. példa

Ha a földgömbön a hosszúsági körök 15 fokonként vannak bejelölve, akkor az Egyenlítőn haladva két ilyen hosszúsági kör távolsága kb. 1665 km. A greenwichi 0°-os délkörtől keletre haladva a 45°-os északi szélességnél ez a távolság kb. 1305 km. Ezen a szélességi körön keletre haladva tovább, mekkora távolságra van a 20°-os hosszúsági körön lévő pont a greenwichi délkörtől?

Emlékeztető ábra a földgömb nevezetes köreiről:





Megoldás

A jobb oldali ábra jelölése szerint: $a = 1665$ km és $z = 1305$ km.

z és x ugyanazon a köríven van, az egyikhez 15°-os, a másikhoz 20°-os szög tartozik.

Aránypárral felírjuk a kérdést:

$$\frac{x}{20} = \frac{1305}{15} \qquad \text{Innen } x = 1740 \text{ km}$$

A keresett távolság a földön kb. 1740 km.

Megjegyzés: A GPS (global positioning system, globális helymeghatározó rendszer) is a földgömbi koordinátákat használja. A szélességi és hosszúsági körök kezdőköröktől való eltérése mellett az észak (N), dél (S), kelet (E), nyugat (W) irányokat is meg kell adni (például é. sz.; k. h.).

A földgömbön (földön, vízen, levegőben) lévő helyek és távolságok meghatározását a szélességi és hosszúsági fokok megadásán túl egyrészt szögpercek és szögmásodpercek (1 szögperc = 60 szögmásodperc, jelöléssel: $1' = 60''$), másrészt több tizedesjegy használatával lehet pontosítani.

Például:

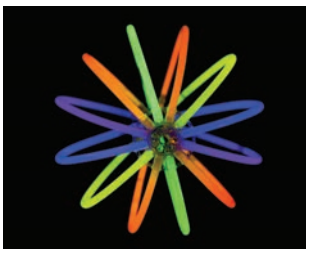
Fok, perc, másodperc (DMS) megadása		Tizedesjegyek megadása	
északi szélesség (N)	keleti hosszúság (E)	északi szélesség	keleti hosszúság
N48°25′12,2″	E12°10′26,5″	é. sz. 46,41338°	k. h. 15,17403°
N48,4200555556	E12,1740277778	46°24′48,168″	15°10′26,508″

@ Keresd meg az interneten, hogy a saját lakóhelyednek mik a GPS-koordinátái! Az interneten tájékozódhatsz a különböző műholdas helymeghatározó rendszerekről is.

Feladatok

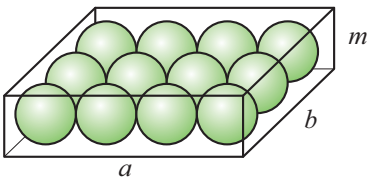
1. Léna egy labdát ajándékoz testvérének. A labdát a főkörénél egy 85 cm hosszú szalaggal átköti úgy, hogy a masnira 20 cm hosszú szalagot hagy. Mekkora az ajándéklabda sugara? (Egy főkör határvonalának hossza a gömb átmérőjének kb. 3,14-szorosa.)

2. Az ábrán látható 14 cm átmérőjű gömb vázát színes műanyag csövekből készítették. A csövek a főkörök mentén haladnak. Milyen hosszú külön-külön egy műanyag cső? Mennyi a csövek hossza összesen? (A gömb tetején és alján lévő összeillesztő idomok méretét figyelmen kívül hagyjuk. Egy főkör határvonalának hossza a gömb átmérőjének kb. 3,14-szorosa.)



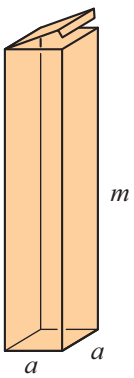
3. 12 db marcipángolyó van a téglatest alakú dobozban. Egy golyó átmérője 3,2 cm.

Mekkora a doboz térfogata?



4. Az ábrán látható, a kontinensek ökológiai lábnyomát tartalmazó „földgömbre” 24 hosszúsági kört rajzoltunk. Hány hosszúsági kör halad át a zöld lábnyomon? Mekkora szöget zár be a két szélső, zöld lábnyomon áthaladó berajzolt hosszúsági kör?



5. 

A pingponglabdákat négyzetes hasáb alakú dobozban árulják.

A doboz mérete olyan, hogy a labdák pontosan egymás fölött éppen belefférnek. Hány labdát tehetünk ebbe a dobozba, ha a doboz alapja 2,8 cm oldalú négyzet, magassága 14 cm?

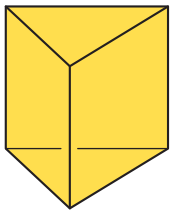
6. Egy üveggömbökből készült karkötő középső gömbjének átmérője 12 mm. A három különböző méretű gömb alakú gyöngy sugarainak aránya 3 : 2 : 1. Hány cm-t foglal el az 5 db gyöngy a 20 cm hosszú zsinóron, ha azok egymáshoz kapcsolódva az ábra szerint vannak felfűzve?



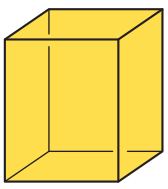
Rokonságok

1. példa

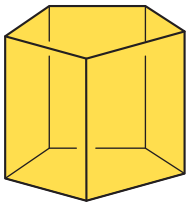
Hasábok, hengerek



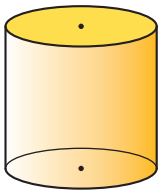
háromszög alapú hasáb



négyszög alapú hasáb



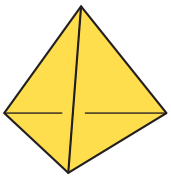
ötszög alapú hasáb



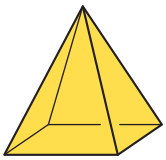
körhenger

2. példa

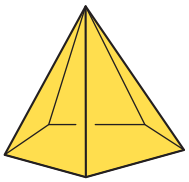
Gúlák, kúpok



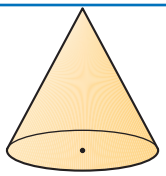
háromszög alapú gúla



négyszög alapú gúla



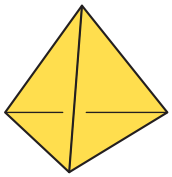
ötszög alapú gúla



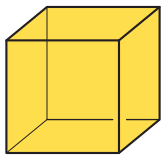
kúp

3. példa

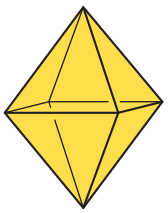
Szabályos testek és gömb



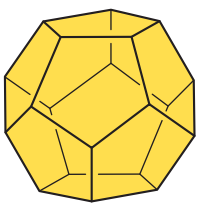
szabályos tetraéder



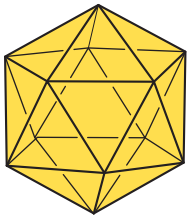
kocka



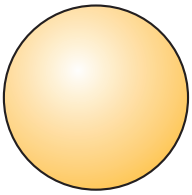
oktaéder



dodekaéder



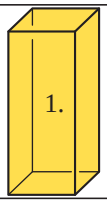
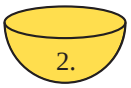
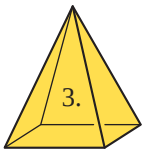
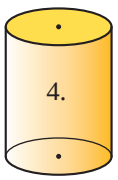
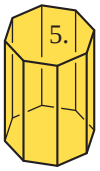
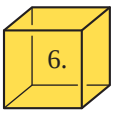
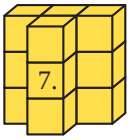
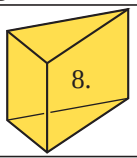
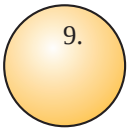
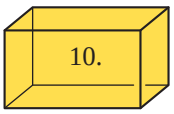
ikozaéder



gömb

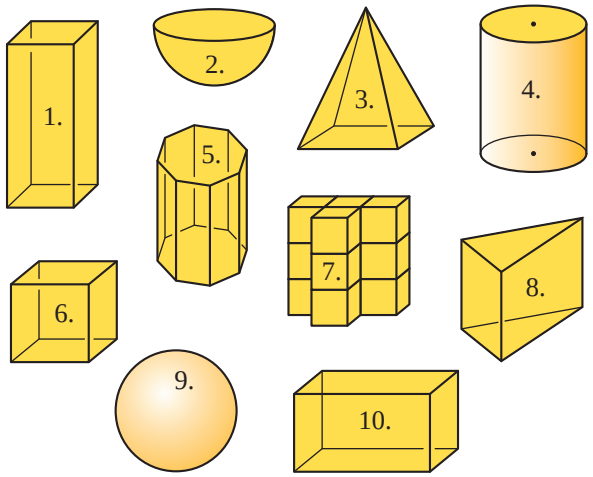
Feladatok

1. *a)* Párosítsd a képeken ábrázolt mértani testeket a legjobban hozzájuk illő valóságos tárggyal!

 1.	 2.	 3.	 4.	 5.
A Labda	B Doboz	C Szögletes tartóoszlop	D Hatlapú dobótest	E Sátor
 6.	 7.	 8.	 9.	 10.
F Félbevágott alma	G Sajtszelet	H Szalámirúd	I Fűszertartó	J Toronyház

b) Írj legalább három geometriai tulajdonságot, amiben különböznek egymástól az 1. és a 2., a 3. és az 5., valamint a 9. és a 10. testek!

2. A képen ábrázolt 10 különböző testről állításokat fogalmaztunk meg. Döntsd el, hogy igazak vagy hamisak! Minden döntésedhez írj példát a testek sorszámával!



A) A testek között 3 db hasáb van.

B) Van olyan test, amelyiknek nincs testátlója.

C) 3 db olyan test van, amelynek nincs csúcsa.

D) Minden testnek van határoló lapja.

E) 6 db olyan test van, amelynek alap- és fedőlapja egybevágó síkidom.

F) A testek között vannak forgástestek.

G) Nincs olyan test, amely konkáv.

H) Vannak olyan testek, amelyeknek ugyanannyi éle, lapja és csúcsa van.

Tudáspróba

1. Add meg a megfelelő halmazba tartozó tárgyak sorszámát!

a) hasábok, *b)* gúlák, *c)* gömbök.



Add meg az alábbi két halmazba tartozó tárgyak sorszámát!

d) hengerek, *e)* kúpok.

2. *a)* Nevezd meg és rajzold le a testek oldallapjait!

b) Milyen – általunk ismert – testekből épült fel a *B)* alakzat?

c) Határozd meg a *B)* alakzat hálójának területét, ha a kocka éle 4 cm, a háromszög oldallapjának magassága 3,5 cm!

A)



B)



3. Egy tömör fából készült, téglalap alapú, egyenlő oldalélű gúla alapélei 6 cm és 8 cm, oldaléle 9 cm hosszú. A gúlát pirosra festjük, majd kettévágjuk egy olyan sík mentén, amely az alaplapra merőleges, és annak egyik átlóján áthalad.

a) Rajzold le, milyen festetlen lapjai lesznek a kettévágott gúlának?

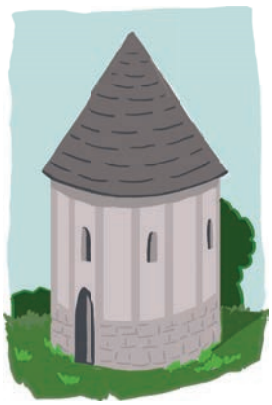
b) Mekkorák a festetlen síkidom(ok) oldalai?

4. *a)* Rajzold le az ábrán látható körtemplom elölnézetét!

b) Írd rá az általad lerajzolt elölnézeti ábrára ezeket az adatokat! A templom alapkörének sugara 8 m, oldalfalának magassága 6 m, a tetőtér magassága a csúcsig 5 m.

c) Számítsd ki az elölnézeti ábrán lerajzolt síkidom területét!

d) Igaz-e, hogy ha az ábrádat a szimmetriatengelye körül megforgatnád, akkor a körtemplomot látnád?



5. 6 cm átmérőjű karácsonyi gömböt egyik főköre mentén szalaggal feldíszítünk. (A főkör hossza a gömb átmérőjének közelítőleg 3,14-szorosa). És az a szalag, amivel a fára felkötjük, 14 cm hosszú.



Összesen hány cm szalagra van szükségünk, ha 8 db ilyen gömbünk van?

6. 

A keljfeljancsi fejét alkotó gömb sugara 2,5 cm. A hasát és a fejét alkotó gömb átmérőinek aránya 11 : 5. Milyen magas dobozban fér el álló helyzetben?

A gúla felszíne

Egy sokszöglapokkal határolt test felszínét a határoló lapok területének összege adja.

A gúla felszíne ezért:

$A = T_a + T_p$, ahol T_a az alaplap területe, T_p pedig az oldallapok területének összege.

Ha a gúla n oldalú, szabályos sokszög alapú, egyenlő oldalélű, akkor felszíne:

$A = T_a + nt$, ahol a t egy oldalháromszög területét jelöli, vagy

$A = T_a + \frac{K_a m_o}{2}$, ahol K_a az alaplap kerülete, m_o pedig az oldalháromszög magassága.

A felszín mértékegységei megegyeznek a terület mértékegységeivel.

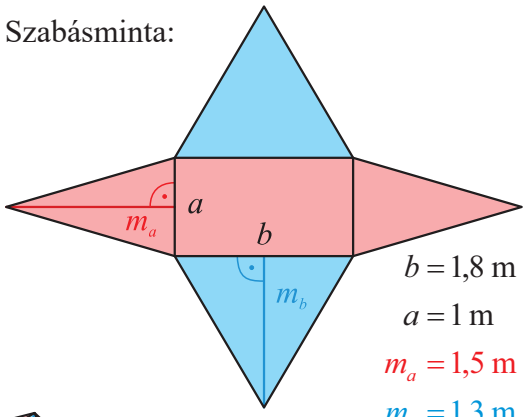
$$1\,\text{mm}^2 \underset{100}{<} 1\,\text{cm}^2 \underset{100}{<} 1\,\text{dm}^2 \underset{100}{<} 1\,\text{m}^2 \underset{100}{<} [1\text{ ár (1 a)}] \underset{100}{<} [1\text{ hektár (1 ha)}] \underset{100}{<} 1\,\text{km}^2$$

Példa

Marci édesanyja a nyári szünetben egy gúla alakú, alul zárt sátrat készít fiának, az ábrán látható szabásminta szerint. Mennyi anyagra van szüksége, ha a megvásárolt anyagból 15% hulladékra kell számítani?



Szabásminta:

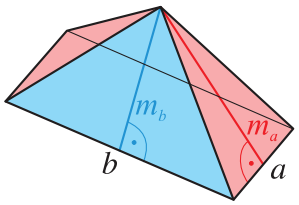


$b = 1{,}8$ m

$a = 1$ m

$m_a = 1{,}5$ m

$m_b = 1{,}3$ m



Megoldás

A szükséges anyag mennyiségét a háló (a szabásminta) területének meghatározásával kaphatjuk meg.

A megadott hosszúságokat deciméterben fejezzük ki:

$b = 1{,}8\text{ m} = 18\text{ dm}$, $a = 1\text{ m} = 10\text{ dm}$, $m_a = 1{,}5\text{ m} = 15\text{ dm}$, $m_b = 1{,}3\text{ m} = 13\text{ dm}$.

Az alaplap téglalap, ennek területe $T_a = ab = 10 \cdot 18 = 180\,[\text{dm}^2]$.

Az oldallapokat alkotó háromszögek közül kettő-kettő egybevágó.

Az a oldalú és m_a magasságú háromszög területe: $t_1 = a \cdot m_a : 2 = 10 \cdot 15 : 2 = 75\,[\text{dm}^2]$. Ebből kettő van, ezek területe: $2t_1 = 150\,[\text{dm}^2]$.

A b oldalú és m_b magasságú háromszög területe: $t_2 = b \cdot m_b : 2 = 18 \cdot 13 : 2 = 117\,[\text{dm}^2]$. Ebből is kettő van, ezek területe: $2t_2 = 234\,[\text{dm}^2]$.

Az oldallapok területe: $T_p = 2t_1 + 2t_2 = 150 + 234 = 384\,[\text{dm}^2]$.

A gúla hálójának teljes területe: $T_a + T_p = 180 + 384 = 564\,[\text{dm}^2]$.

Ha a megvásárolt anyagmennyiség 15%-a hulladék, akkor a most kiszámolt terület a teljes anyag 85%-a. Ezért az $x \cdot 0{,}85 = 564$ egyenletet kell megoldanunk. Innen $x \approx 663{,}5 \approx 664$.

Mindent figyelembe véve a sátor megvarrásához kb. $664\ \text{dm}^2 \approx 6{,}64\ \text{m}^2$ anyagra van szükség.

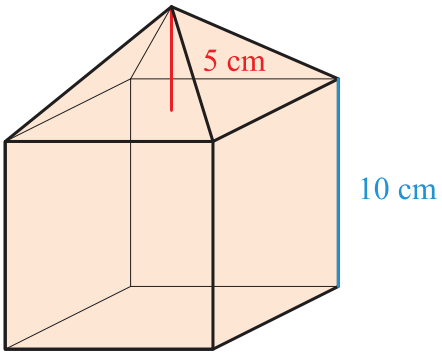
Megjegyzés:

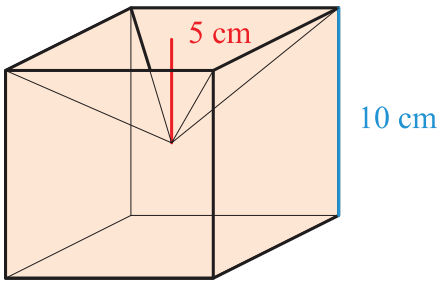
A méteráruüzletekben általában 1,4 m széles anyagokat árusítanak. Ha a sátorhoz $6{,}64\ \text{m}^2$ anyagot használunk fel, akkor $6{,}64\ \text{m}^2 : 1{,}4\ \text{m} \approx 4{,}74$ m-t kellene ebből az anyagból megvásárolni, és ügyes átdarabolással lehetne kiszabni a sátrat. A varrónők a biztonság kedvéért minden esetben fölfelé kerekítenek. Ezért anyukának az 1,4 m szélességű sátoranyagból legalább 5 m-t kellene vennie.

Feladatok

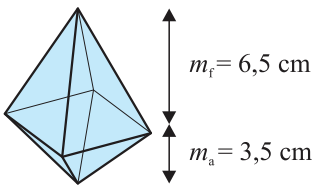
1. Egy háromszög alapú gúlát egybevágó háromszögek határolnak. Egy oldallap területe 6,5 cm^2. Mekkora a gúla felszíne?

2. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára az ábrán látható módon, kétféleképpen helyezünk el egy 5 cm magasságú, egyenlő oldalélű, négyzet alapú gúlát. Határozd meg mindkét test felszínét!





3. Az ábrán látható karácsonyfadíszt két 25 cm^2 alapterületű, négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla összeillesztésével készítettük. Számítsd ki, hány cm^2 papírt használtunk el!



4. Párizsban a Louvre udvarában álló üvegpiramis egy négyzet alapú, egyenlő oldalú gúla. A gúla alapéle 35,4 m, magassága pedig 21,6 m. Mekkora az üvegfelület nagysága?

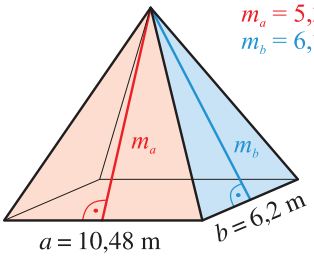
(Az üvegpiramisról a 128. oldalon találsz fotót.)

5.



Erődtemplom (Bázna, Románia)

Fedjük be az ábrán látható téglalap alapú, egyenlő oldalélű, gúla alakú tetőt palával! Hány darab palára van szükségünk, ha 1 m^2 területre 9 darabot tudunk lerakni, és törésekre, hulladékra plusz 8%-ot számolunk?

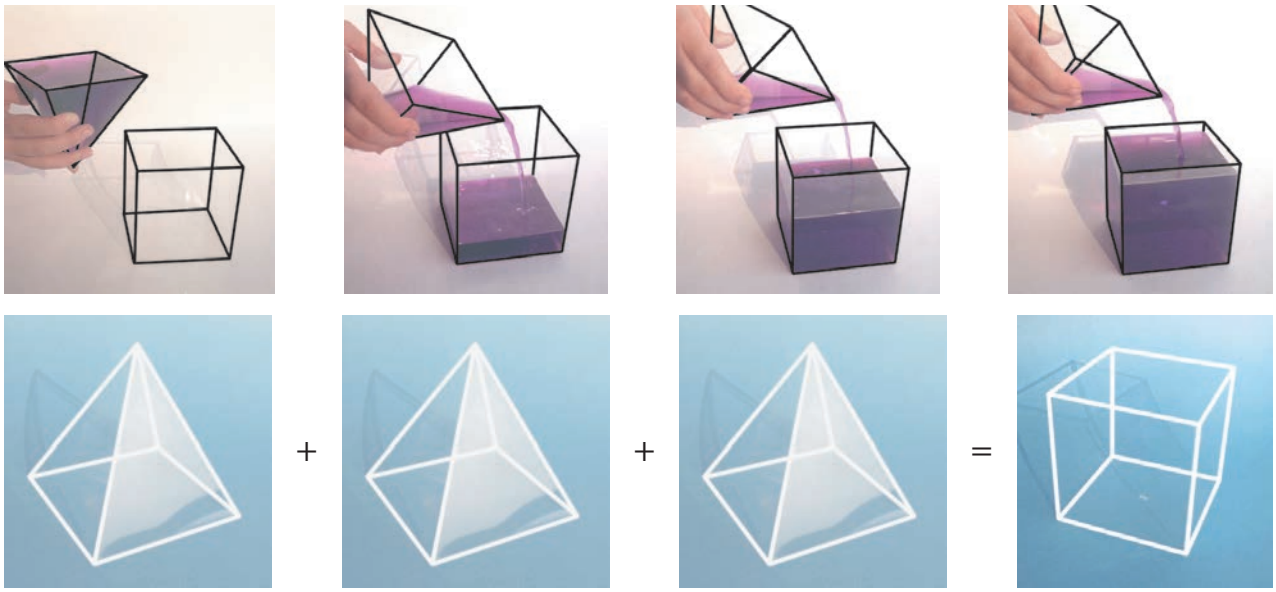


6. Az ábrán látható hatalmas síremlékek a gízai piramisok. Közülük az egyik négyzet alapú gúla alapéle 232,4 m, testmagassága 146,7 m. Mekkora a kőóriás felszíne?



A gúla térfogata

A gúlából a hasábba öntött folyadék mennyisége a testek térfogatát méri. A tapasztalat szerint a hasáb térfogata éppen háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú gúláénak.



A térfogat mértékegységei a hosszúság egységeiből eredően:

$$1\ \text{mm}^3 \underset{1000}{<} 1\ \text{cm}^3 \underset{1000}{<} 1\ \text{dm}^3 \underset{1000}{<} 1\ \text{m}^3 \underset{1\,000\,000\,000}{<} 1\ \text{km}^3$$

A térfogatot az űrtartalom mértékegységeivel is mérhetjük:

$$1\ \text{ml} \underset{10}{<} 1\ \text{cl} \underset{10}{<} 1\ \text{dl} \underset{10}{<} 1\ \text{l} \underset{100}{<} 1\ \text{hl}$$

Ismert összefüggések: $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{ml}$ $\quad$ $\mathbf{1\ dm^3 = 1\ l}$ $\quad$ $1\ \text{m}^3 = 10\ \text{hl} = 1000\ \text{l}$

A gúla térfogata harmadrésze az ugyanakkora alapterületű és magasságú hasáb térfogatának:

$$V_g = \frac{V_h}{3}, \qquad \text{tehát} \qquad V_g = \frac{T_a m}{3},$$

ahol T_a a gúla alapterülete, m pedig a magassága.

Feladatok

1. Számítsd ki a négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla térfogatát, ha

a) alapéle 2 cm, magassága 3,6 cm,

b) alapéle 4 cm, magassága 3,6 cm,

c) alapéle 4 cm, magassága 1,8 cm!

2. Számítsd ki annak a háromszög alapú gúlának a térfogatát, amelynek

a) alapterülete: $T_a = 20\ \text{cm}^2$, magassága: $m = 15$ cm,

b) alapterülete: $T_a = 30\ \text{cm}^2$, magassága: $m = 10$ cm!

3. Párizsban a Louvre udvarán áll az ábrán látható hatalmas üvegpiramis. Ez egy olyan négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla, amelynek alapéle $a = 35{,}4$ méter, magassága $m = 21{,}6$ m.

Határozd meg a piramis térfogatát!

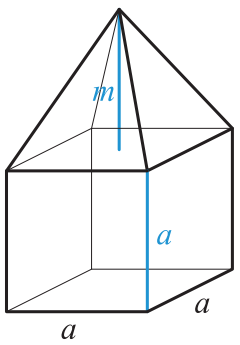
@ Nézz utána az interneten, hogy az üvegpiramison hány különböző síkidom látható!



Louvre (Párizs, Franciaország)

4. Két egybevágó, négyzet alapú gúlát alapjuknál összeragasztunk. A gúlák minden éle 10 cm. Milyen lapok határolják a testet? Mekkora a térfogata?

5. Hány cm^3 az ábrán látható „házikó” térfogata, ha $a = m = 13$ mm?



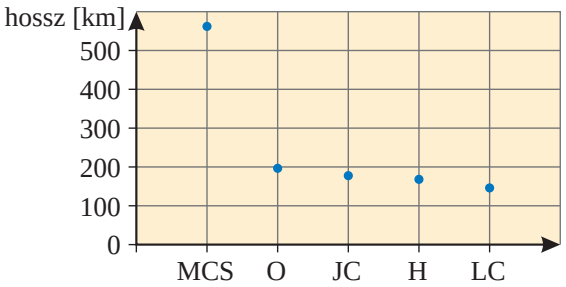
6. Mennyi a tömege annak az ólomüvegből készült, négyzet alapú, gúla alakú dísztárgynak, melynek alapéle 9 cm, magassága 12,6 cm, és az üveg sűrűsége $2600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

Statisztika, valószínűségszámítás

Statisztika: alapfogalmak, elnevezések

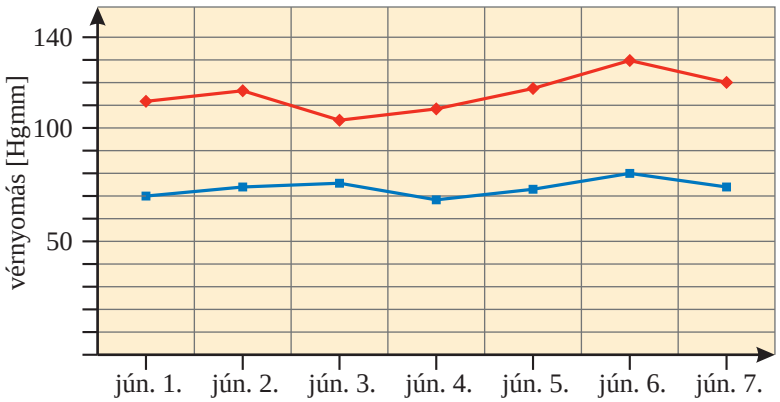
1. Pontdiagramon szemléltetjük a Föld öt leghosszabb barlangjának hosszát:

Barlang neve	Ország	Hossza (km)
Mammoth Cave System	USA	563,27
Optimiszticsna	Ukrajna	191,4
Jewel Cave	USA	174
Hölloch	Svájc	168
Lechuguilla Cave	USA	143,85



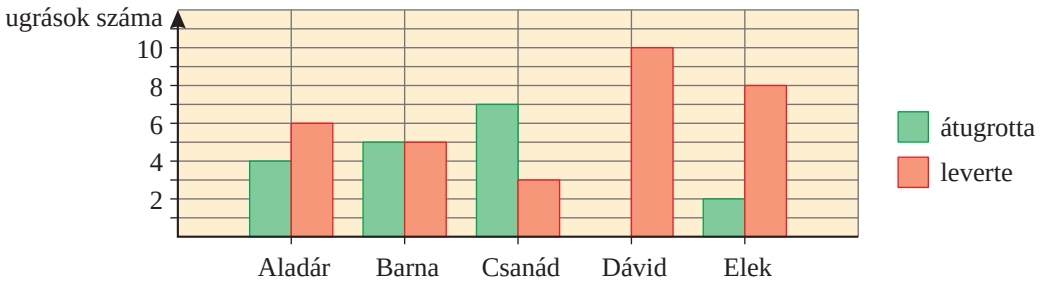
2. Vonaldiagramon szemléltetjük egy 60 éves férfi vérnyomás-ingadozását, egy héten át mért adatok alapján:

Dátum	Felső	Alsó
	érték	
Június 1.	112	69
Június 2.	116	74
Június 3.	104	76
Június 4.	108	68
Június 5.	117	72
Június 6.	131	80
Június 7.	120	74

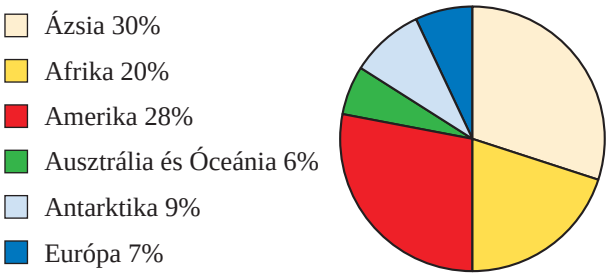


3. Testnevelésórán a magasugrást gyakorolják a fiúk. A 8. osztályban Aladár, Barna, Csanád, Dávid és Elek általában átugrották a 130 cm-es magasságot. Az új kihívás számukra az, hogy a tanár 5 cm-rel magasabbra emelte a lécet. Mindegyik gyerek tízszer próbálkozott. Az eredményeket táblázatba foglaltuk. Az adatokat **kettős oszlopdiagramon** ábrázoltuk.

	Aladár	Barna	Csanád	Dávid	Elek
Átugrotta a lécet	4	5	7	0	2
Leverte a lécet	6	5	3	10	8



4. A **kördiagramon** a földrészek területének százalékos eloszlását ábrázoljuk:



A statisztikai kutatások adatok gyűjtésére épülnek. A statisztikusok gyűjthetnek adatokat tárgyakról, élőlényekről, hagyományokról, egészségi állapotról, étkezési szokásokról, emberi kapcsolatokról, gondolkodásmódról stb. Az összegyűjtött adatokat (adatsokaságokat) rendezik, táblázatba foglalják, grafikusan ábrázolják, és különböző statisztikai mutatók segítségével elemzik. Több **adatsokaság** esetén összehasonlító elemzéseket végeznek.

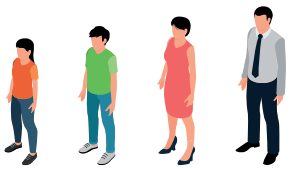
Míg a valószínűségszámítás a XVII. század óta szerves része a matematika tudományának, addig a statisztika, ezen belül a matematikai statisztika csak a XX. században ért el tudományos rangot.

Vannak statisztikai adatok, amelyek pontosan nyomon követhetők, mert megtalálhatók valamilyen adatnyilvántartásban. Gyakori azonban, hogy egy nagy létszámú sokaság minden tagját nem lehet elérni. Ilyenkor a felmérésben megjelölt tulajdonság vizsgálata céljából a sokaságból **mintát** vesznek.

A sokaság:



Például egy minta:



Az adatok gyűjtésének többféle módja van. A négy alapvető módszer:

1. Kérdőív: szakszerűen összeállított kérdések sorozata, megadott válaszlehetőségekkel.
2. Interjú: személyes beszélgetés, tematikusan felépített kérdésekkel.
3. Megfigyelés.
4. Kísérlet.

Az utóbbi kettőre mutatunk példát:

Megfigyelés

Népi hagyomány, hogy december 13-án, Luca napján egy kis tálkába búzát tesznek, abban csíráztatják. A búza, ha jól gondozzák, karácsonyra felnövekszik. A növény fejlődéséből következtetnek az eljövendő esztendő búzatermésére és a család, valamint a jószágállomány egészségére. Eredete visszavezethető az egyiptomi gabonacsíráztatás rítusára, amely a Kr. e. XVII. századi Ozirisz-kultuszban játszott fontos szerepet.

Megfigyeltük a búza gyarapodását az ültetést követő 11 napban. Naponként megmértük a növény hosszát, és az adatokat a táblázatban rögzítettük:



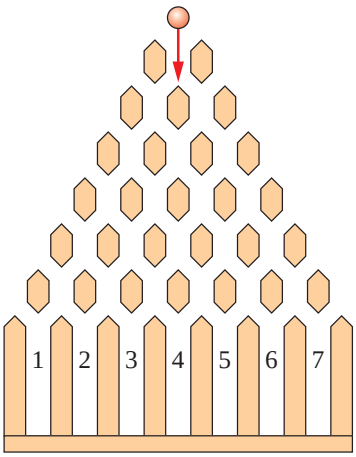
Nap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Hossz [mm]	1	5	20	60	90	100	130	150	170	180	190

A megfigyelés a statisztikai vizsgálatok egyik leghasznosabb módja. Gyakran alkalmazzák a mindennapokban. *Például:*

- Az autópálya egy adott pontján a gyorshajtók megfigyelése, számlálása.
- Utasszámlálás egy-egy tömegközlekedési eszközön.
- Kereskedők árurendelése a korábban megfigyelt kereslet alapján.

Kísérlet

Francis Galton [ejtsd: franszisz galton] (1822–1911) angol író és utazó volt, aki orvosi tanulmányait felhasználva a születendő gyermekek nemét vizsgálta. Kutatásainak eredményét az ún. születési táblában foglalta össze. Statisztikai megfigyelésen alapuló feljegyzései segítették a valószínűségszámítás fejlődését is. A róla elnevezett Galton-deszkával végzett kísérletekkel modellezni lehet azt a statisztikai törvényt, hogy egy adatsokaságban nagy valószínűséggel az átlagos tulajdonságú elemből van a legtöbb. Az eszköz egyszerűsített változata az ábrán látható.

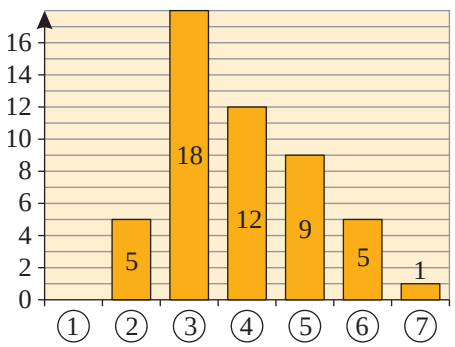


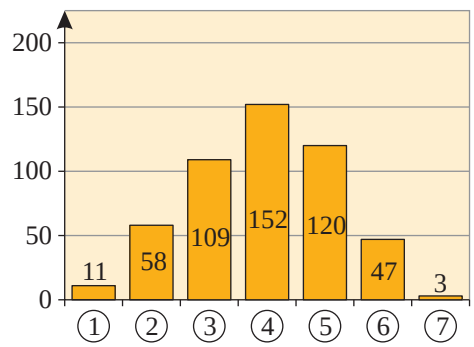
Az eszköz tetején és oldalán nyílások vannak. Bármelyik nyíláson bedobott golyót az elágazásoknál levő ékek egyenlő valószínűséggel terelik a két irány valamelyikébe.

A Galton-deszka számítógépes modelljével először 50, majd 500 kísérletet végeztünk úgy, hogy a golyót a felső nyíláson dobtuk be. Lejegyeztük az egyes folyosókba érkező golyók számát.

Az adatok alapján készítsünk oszlopdiagramot!

Folyosó	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	Összes
Leérkező golyók száma	0	5	18	12	9	5	1	50
	11	58	109	152	120	47	3	500





Ha n kísérletből az A esemény k-szor következik be, akkor k szám az A esemény bekövetkezésének **gyakoriságát,** a $\frac{k}{n}$ hányados pedig a **relatív gyakoriságát** jelenti.

A kísérleti eredmények alapján meghatározzuk az egyes folyosókba való megérkezés gyakoriságát és relatív gyakoriságát.

		1	2	3	4	5	6	7
50 kísérlet	gyakoriság	0	5	18	12	9	5	1
	relatív gyakoriság	$\frac{0}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{18}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{1}{50}$
500 kísérlet	gyakoriság	11	58	109	152	120	47	3
	relatív gyakoriság	$\frac{11}{500}$	$\frac{58}{500}$	$\frac{109}{500}$	$\frac{152}{500}$	$\frac{120}{500}$	$\frac{47}{500}$	$\frac{3}{500}$

Példa

Megkérdeztük a 8. osztályos tanulókat, hogy a maximum 50 pontos térgeometriai témazáró dolgozatra ki hány pontot kapott. A huszonhárom választ a táblázat tartalmazza:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.
37	50	16	41	22	37	46	43	38	49	10	29	25	24	45	26	18	12	40	50	40	27	20

Ebben a mintában a 8. osztályos tanulók alkotják a **statisztikai sokaságot.**

A közülük megkérdezett tanulók az **egyedek:** őket a táblázat első sorában sorszámmal jelöltük.

A vizsgált tulajdonság az **ismérv:** itt a dolgozat pontszáma.

Az ismérv egy-egy konkrét értéke az **adat:** példánkban a táblázat második sorában egy-egy szám.

Ezek összessége az **adatsokaság:** a táblázat második sorában szereplő számok.

Feladatok

1. Keress az interneten, a napilapokban, a katalógusokban statisztikai adatok alapján készült vonal-, kör- és oszlopdiagramokat! Elemezd azokat! Állapítsd meg, hogy az általad választott diagramokon

a) mi a sokaság, *b)* mik az egyedek, *c)* mi az ismérv, *d)* mik az adatok!

2. **Páros munka**

Készíts legalább 10 kérdésből álló kérdőívet a következő témák valamelyikéről, majd a párod válaszoljon a kérdésekre!

A) zenehallgatás, *B)* olvasás, *C)* sportolás, *D)* számítógép-használat,

E) általad választott téma.

Adjátok meg, hogy az általatok összeállított kérdőívben

a) mi a sokaság, *b)* mik az egyedek, *c)* mi az ismérv, *d)* mik az adatok!

3. **Adatgyűjtés, beszámoló**

Az iskolai diákönkormányzat vezetőjeként a következő összejövetelen be kell számolnod arról, hogy a mostani nyolcadikosok közül ki hogyan folytatja tanulmányait a következő tanévben, vagy ha nem tanul tovább, mivel foglalkozik majd. Készítsd el ezt a statisztikát!

A kapott adatokat foglald táblázatba az alábbiak szerint!

Gimnázium, Technikum, Szakképző iskola, Egyéb.

4. Egy 36 fős nyolcadikos osztály egész évi hiányzásának összesítését tartalmazza a táblázat. Határozd meg a mulasztott napok relatív gyakoriságát, és add meg ezeket az értékeket százalék alakban is!

A mulasztott napok száma	0	1	5	8	9	10	15
A tanulók száma	2	3	7	6	4	13	1

5. Egy kis falu most megnyílt vegyesboltjának vagy az üzletvezetője. Készíts olyan felmérést (kérdőívvel, interjúval vagy az általad választott tetszőleges módszerrel), amely alapján le tudod adni az árurendelést!

6. *a)* Mérd meg a kinti levegő hőmérsékletét 7 napon keresztül minden nap iskolába indulás előtt, majd este 6 és 7 óra között! Készítsd el az időpontokat és a mért adatokat tartalmazó táblázatot, majd ábrázold azokat – két különböző színnel – vonaldiagramon!

Átlagos középhőmérséklet, °C

Budapest	Debrecen	Győr	Kecskemét	Kékestető	Miskolc
11,9	10,6	11,0	11,0	6,3	10,0
Nyíregyháza	Pécs	Siófok	Szeged	Szombathely	
10,2	11,5	11,4	11,2	10,2	

b) A táblázatban az 1990-ben mért hőmérsékletek éves átlaga szerepel a megjelölt mérőállomásokon. Válaszd ki a lakóhelyedhez legközelebbi mérőállomást, és hasonlítsd össze az ottani éves átlaghőmérsékletet az általad mért adatokkal! (Pl.: kevesebb, több, ugyanannyi.)

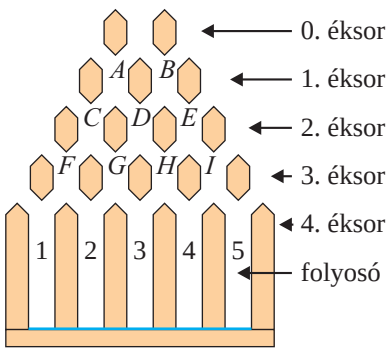
7. Válassz egyet a szabályos dobótestek közül! Dobd fel 40-szer! Készítsd el az egyes számok dobásának relatívgyakoriság-grafikonját!



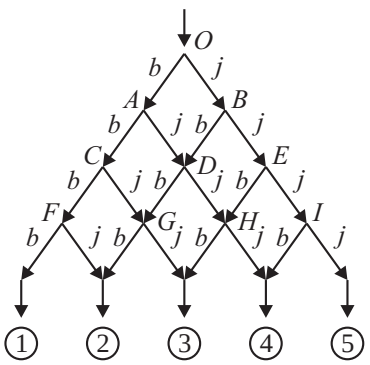
8. A Galton-deszka felső nyílásán golyókat indítunk egymás után, amik minden elágazásnál egyenlő eséllyel térnek el jobbra vagy balra, végül a legalul lévő 5 folyosó valamelyikébe érkeznek meg.



A Galton-deszka rajza



A golyó útja



Az első ábrán egy Galton-deszka képét látod, a másodikon annak egy sematikus rajzát, a harmadikon pedig a felső nyíláson bedobott golyók lehetséges útvonalait.

a) Készítsd el a füzetedben – feliratok nélkül – a 3. ábrán látható úthálót! Határozd meg, hogy ezeken az utakon haladva hányféleképpen érkezhetnek a golyók az ① ② ③ ④ ⑤ számokkal jelölt folyosókba!

b) Melyik folyosóba érkezik a legtöbb, és melyikbe a legkevesebb golyó? Mit gondolsz, miért?

@ Az interneten sokféle érdekes animációt találsz, ha beírod a keresőbe a Galton-deszka nevet.

Diagramok

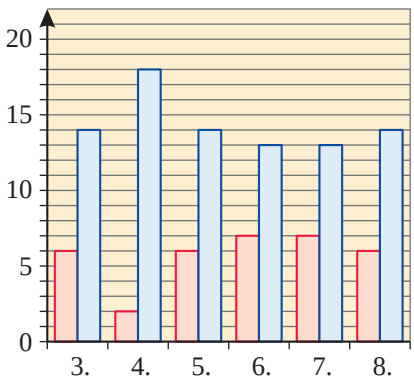
A statisztikai adatok szemléltetésére az oszlopdiagramnak sokféle változatát használják.

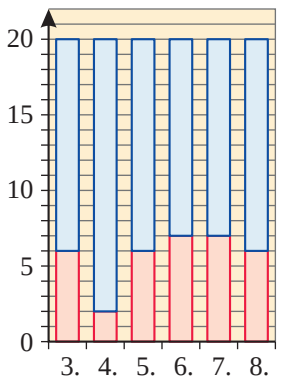
1. példa

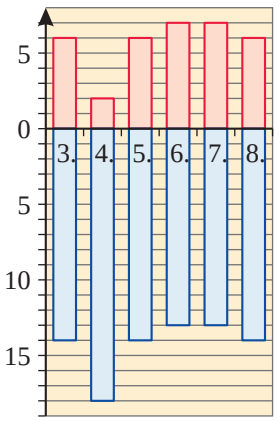
A táblázat egy matematikaverseny országos döntőjében az első 20 helyezett tanuló lakhely szerinti eloszlását mutatja. Az adatok alapján készítsünk különböző oszlopdiagramokat!

Tanulók	3. évfolyam	4. évfolyam	5. évfolyam	6. évfolyam	7. évfolyam	8. évfolyam
Budapesti	6	2	6	7	7	6
Vidéki	14	18	14	13	13	14

Megoldás



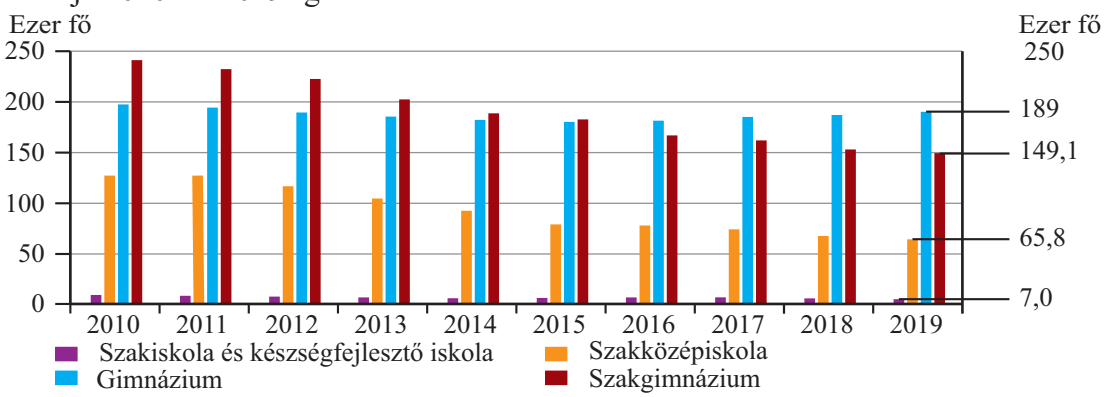




Az oszlopdiagramokon a téglalapok egy-egy oldalhossza egyenlő, ezért a másik oldaluk hosszának aránya és így a területük aránya is megegyezik a táblázatban adott megfelelő értékek arányával.

Az adatsokaság jellegétől függ, hogy mikor melyik fajta oszlopdiagram alkalmas az adatok szemléltetésére. Ha kétféle adat tartozik egy helyhez, akkor bármelyik fenti típus használható. Ha egy helyhez több adat is tartozik, akkor inkább az egymás mellé illesztett téglalapok alkalmasak az adatok ábrázolására.

Például: az alábbi négyes oszlopdiagram a középfokú nappali rendszerű oktatásban tanuló diákok számát mutatja 2010-től 2019-ig.



Az utolsó négyes oszlopban a 2019/2020. tanévben tanuló diákok számát olvashatjuk le. Ezeket írtuk a táblázatba, ami alapján megállapíthatjuk, hogy ebben a tanévben összesen közel 411 000-en tanultak valamilyen középfokú intézményben.

	Szakiskola és készségfejlesztő iskola	Szakközép-iskola	Gimnázium	Szak-gimnázium	Összesen
A tanulók létszáma	7 000	65 800	189 000	149 100	410 900

Forrás: KSH Oktatási adatok, 2019–2020

2. példa

a) Jocó naponta 2 órát tölt kosárlabdaedzésen. Edzője mindennap feljegyzi, hogy a lejátszott meccsek alatt a palánkra dobott labdák közül hány talált a kosárba – ezzel jellemzi Jocó heti teljesítményét. Készítsük el az adatok alapján a naponkénti találatok relatív gyakoriságának grafikonját!

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Dobások száma	12	8	16	11	9
Találatok száma	5	4	13	10	7

b) Az edző arra is kíváncsi, hogy milyen Jocó kosárdobásainak napok szerinti eloszlása. Ehhez a heti összes találat egy-egy napra eső részarányát kell kiszámítani. Adjuk meg ezeket az arányokat százalék alakban, és készítsünk az adatokból kördiagramot!

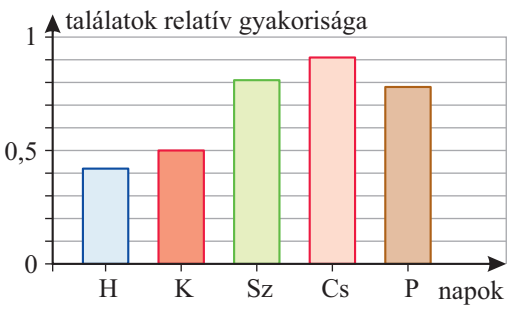
Megoldás

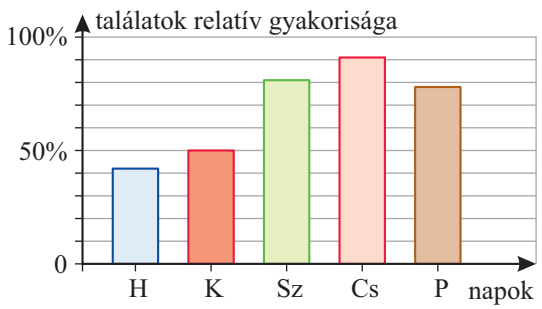
a)

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Dobások száma	12	8	16	11	9
Találatok száma	5	4	13	10	7
A találatok relatív gyakorisága	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{7}{9}$
A találatok relatív gyakorisága %-ban	42	50	81	91	78

Az $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{7}{9}$ számok a megfigyelés adatainak naponként kiszámított **relatív gyakorisági sorát** alkotják.

A 42%, 50%, 81%, 91%, 78% arányszámok a sikeres dobások **százalékos eloszlását** adják hétfőtől péntekig.





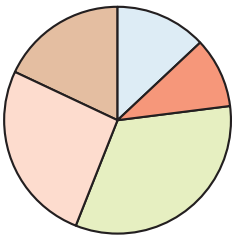
Láthatjuk, hogy a két diagram majdnem azonos. A relatív gyakoriság ábrázolásakor mindegy, hogy az arányban vagy a százalékban megadott adatokat használjuk. A diagramról leolvashatjuk, hogy Jocó a naponkénti értékelés szerint csütörtökön volt a legeredményesebb.

b) A fenti táblázat adatai szerint Jocó hétfőtől péntekig összesen 39-szer dobott kosarat.

A keresett arányok:

	H	K	Sz	Cs	P
Találatok száma	5	4	13	10	7
Rel. gyak.	$\frac{5}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{13}{39}$	$\frac{10}{39}$	$\frac{7}{39}$
Rel. gyak. %-ban	13	10	33	26	18

A kördiagram:

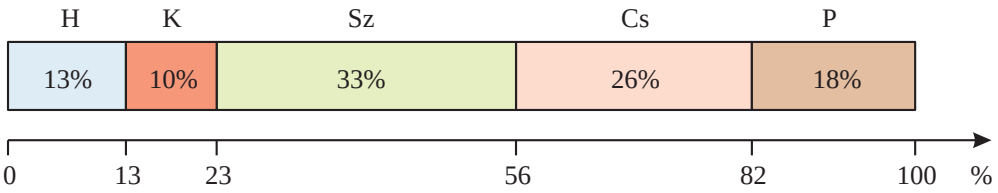


A kördiagram egyes részeinek középponti szögeit a 360°-os teljesszögnek a találatok száma szerinti arányos osztásával kapjuk.

Ezeket az adatokat **szalagdiagram** segítségével is ábrázolhatjuk. A szalagdiagramot úgy készítjük el, hogy felveszünk egy adott hosszúságú téglalapot, melyet 100%-nak tekintünk, majd elkészítjük ennek a téglalapnak az adatokkal arányos felosztását úgy, hogy a „résztéglalapok” egyik oldala állandó, a másik pedig arányos a megfelelő adattal.

Így az egyes téglalapok területe arányos a megfelelő adattal. Ez a diagram hasonlít a kördiagramhoz, hiszen azt is hasonlóan készítjük el, csak annál téglalap helyett kört osztunk fel az adatokkal arányos területű körcikkekre.

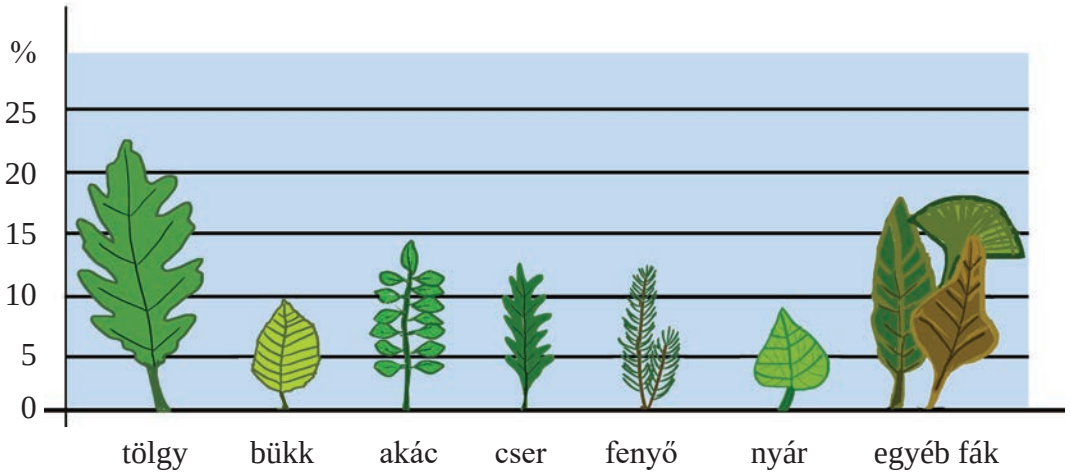
A szalagdiagram:



3. példa

Rendkívül szemléletes és „beszédes” az adatok ábrázolásánál alkalmazott **piktogram.** Ezt a formát főleg a napilapok, folyóiratok és egyes szakkönyvek használják. Az adatok értékét ebben az esetben a figurák vagy szimbólumok száma, illetve mérete szemlélteti.

2021-ben Magyarország élőfakészlete 404 millió m^3 volt. Az egyes fafajcsoportok százalékos eloszlását leolvastuk a grafikonról, és táblázatban rögzítettük. Adjuk meg, hogy közelítőleg hány millió m^3 volt a fenyőfaállomány ebben az évben!



	Tölgy	Bükk	Akác	Cser	Fenyő	Nyár	Egyéb fák
%-os arány	23	10	14	13	13	9	18

Megoldás

A fenyőállomány a teljes élőfakészlet 13%-a. 404 millió $m^3 \cdot 0{,}13 \approx 52{,}5$ millió m^3.

Feladatok

1. *a)* Olvasd le a grafikonról, hogy az egyes megyékben hány település található!



Forrás: KSH

b) Foglald táblázatba a grafikonról leolvasott adatokat!

c) Hány megyében van 100-nál több település?

d) Sorold fel azokat a megyéket, amelyekben legfeljebb 100 település van!

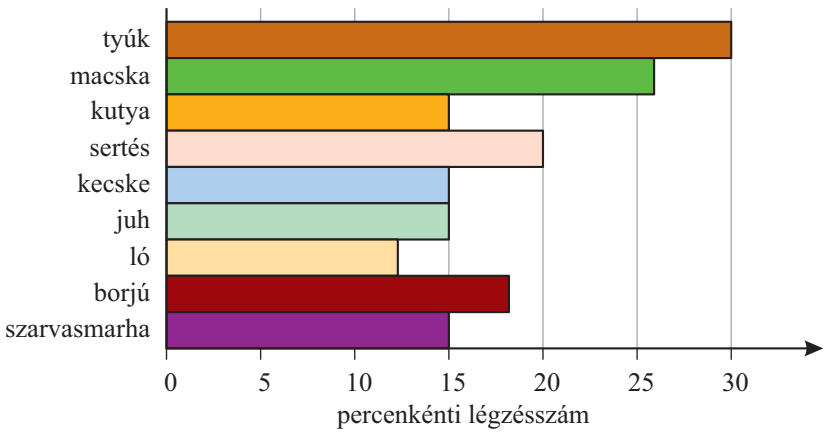
2. A táblázat adatai alapján készíts hármas oszlopdiagramot a tanulókról és szüleikről!

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Testmagasság (cm)	14 éves gyermek	165	155	186	160	164	172	165	172	165
	Apa	170	167	187	185	186	181	175	189	173
	Anya	160	158	171	162	176	171	160	173	161

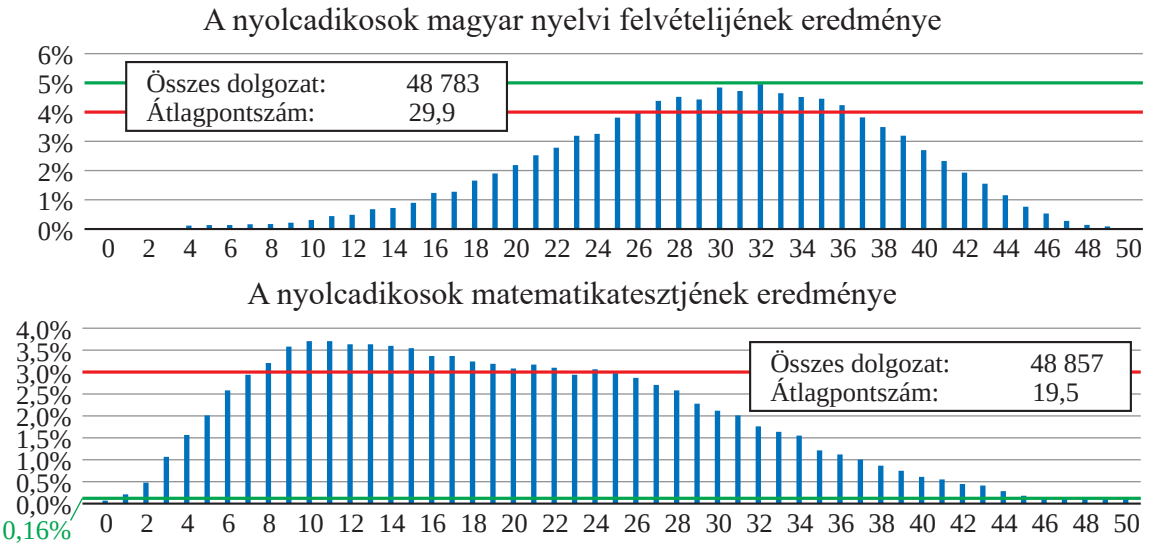
A grafikon elkészítésénél használhatsz táblázatkezelő programot.

3. A háziállatok percenkénti átlagos légzésszámát olvashatjuk le az oszlopdiagramról.

Foglald táblázatba a következő adatokat: hányat lélegzik 12 másodperc alatt a tyúk, a sertés, a kutya, a kecske, a juh és a szarvasmarha!



4. Az alábbi két diagram a 2019-es középiskolai felvételi írásbelik pontszámainak eloszlását mutatja.



a) Értelmezd, mit jelentenek a bal oldalon feltüntetett százalékok!

b) Hasonlítsd össze a magyar nyelv és a matematika írásbeli dolgozatok pontszámait! A két különböző diagramról fogalmazz meg legalább öt igaz állítást!

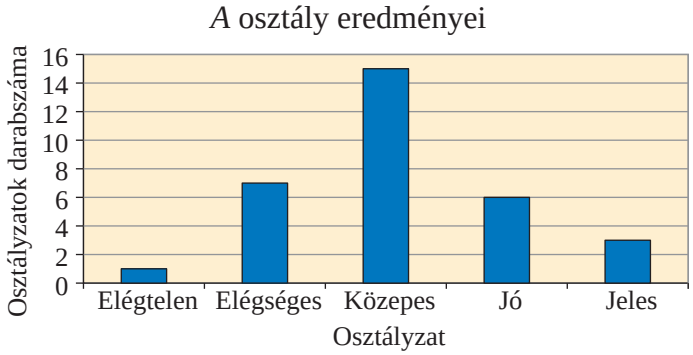
c) Hányan írtak 32 pontos dolgozatot magyar nyelvből?

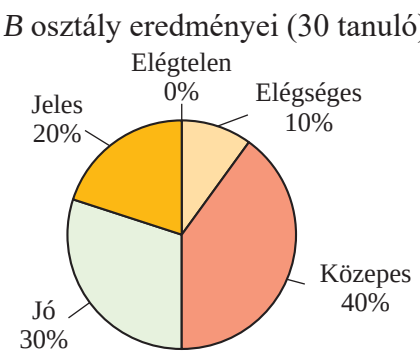
d) Melyik az a pontszám magyar nyelvből, amit a felvételizőknek pontosan 4%-a ért el?

e) Hányan írtak 50 pontos matematikadolgozatot?

f) Sorold fel a matematikadolgozatok diagramján behúzott piros vonal fölé emelkedő téglalapokhoz tartozó pontszámokat!

5. A diákönkormányzat tanulmányi versenyt hirdetett az osztályok számára kémiából. A versenyen való részvételhez minden osztálynak le kellett adnia az év végi kémiaosztályzatokat. Az *A* osztály oszlopdiagramon, a *B* osztály kördiagramon adta le az eredményeket.





A diagramok alapján döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

A) Mindkét osztályban közepes osztályzatot értek el a legtöbben.

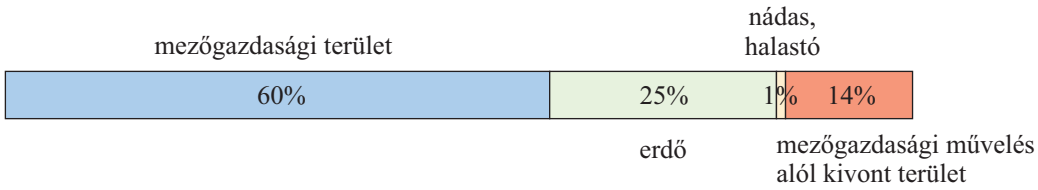
B) Az *A* osztályban kevesebben értek el jeles eredményt, mint a *B* osztályban.

C) Mindkét osztályban ugyanannyi az osztálylétszám.

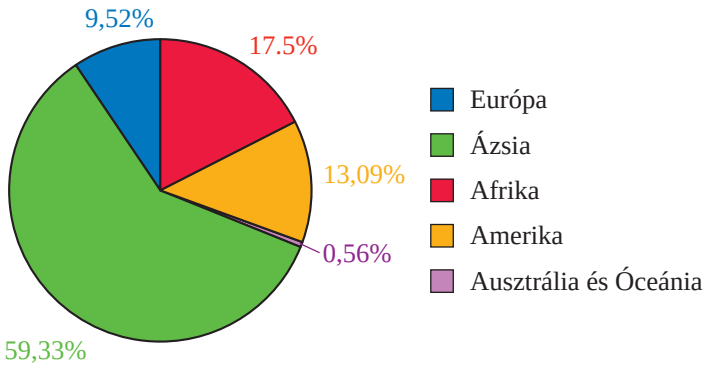
D) A két osztályban összesen 17 tanuló kapott elégséges osztályzatot.

(Országos kompetenciamérés, 10. évfolyam, 2010)

6. Magyarország földterületeinek művelési ágak szerinti megoszlását mutatja a szalagdiagram. Készíts a szalagdiagramból kördiagramot!



7. A kördiagram a Föld népességének földrészenkénti százalékos eloszlását mutatja.



a) Mennyi az Amerikában és Európában élő népesség aránya?

b) Hányszor annyi ember él Afrikában, mint Európában?

c) Igaz-e, hogy Ázsiában több ember él, mint a többi földrészen együttvéve?

d) Határozd meg, hány milliárd ember él Ázsiában!
A Föld népessége 2022-ben 7 895 757 760 fő ≈ 7,9 milliárd fő = $7{,}9 \cdot 10^9$ fő.

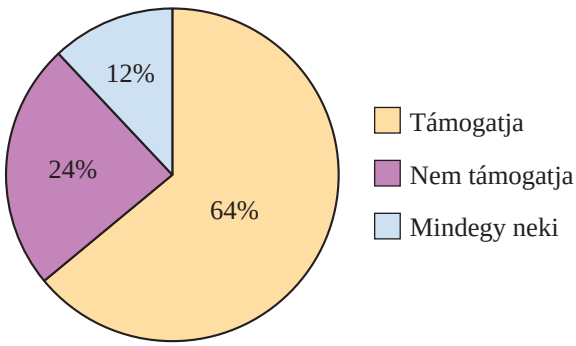
@ A népesség számának folyamatos változását az interneten is láthatod. Keress te is ilyen honlapot!

8. **Páros munka**

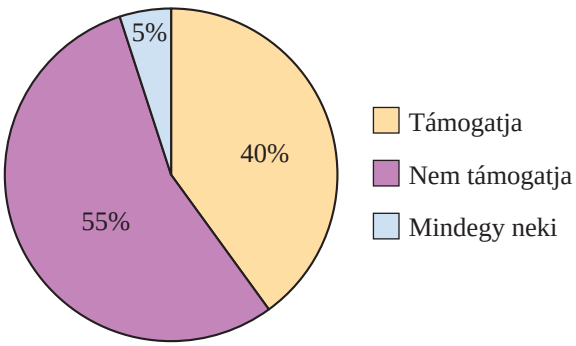
Az *A* és a *B* falut összekötő út mellé szemétégetőt szeretnének telepíteni. A szemétégető felépítéséhez azonban a két falu beleegyezésére van szükség, ezért szavazást írtak ki.

Akkor építik meg a szemétégetőt, ha azt a két falu szavazóinak együttesen több mint 50%-a támogatja. A következő diagramok mutatják a szavazás végeredményét:

A falu – 1250 szavazó



B falu – 2800 szavazó

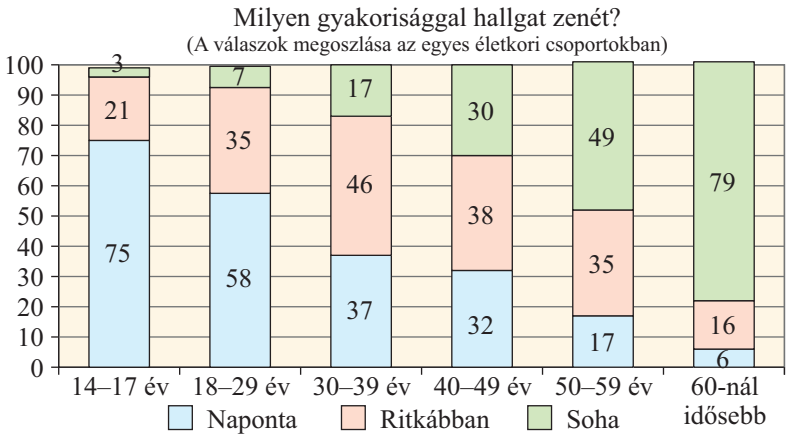


Döntsd el a rendelkezésedre álló adatok alapján, hogy megépülhet-e a szemétégető vagy sem! Válaszodat matematikai érvekkel támaszd alá!

(Országos kompetenciamérés, 10. évfolyam, 2012)

9. Csendesvár városának lakóit zenehallgatási szokásairól kérdezték a statisztikusok. A legfiatalabb megkérdezett 14 éves volt. Az oszlopdiagramok a válaszok korosztályonkénti százalékos aránya alapján készültek.

Az alábbi állítások közül melyek biztosan igazak, melyek lehetséges, hogy igazak, és melyek biztosan hamisak?



A) A 14–17 éves korosztályban majdnem mindenki naponta hallgat zenét.

B) A 30–39 éves korú emberek között többen hallgatnak naponta zenét, mint a 18–29 év közöttiek.

C) Minden korcsoportban van olyan ember, aki soha nem hallgat zenét.

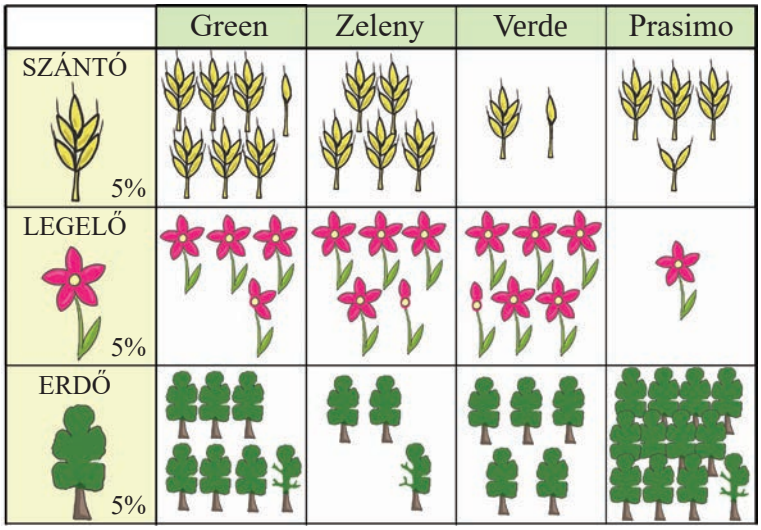
D) Az 50–59 éves emberek majdnem fele sohasem hallgat zenét.

E) A 40–49 éves emberek harmada naponta hallgat zenét.

F) Többen vannak azok a 60 évesnél idősebb emberek, akik sohasem hallgatnak zenét, mint azok a legfiatalabb megkérdezett városlakók, akik naponta hallgatnak zenét.

10. Csoportmunka

A Zöld Bolygón négy földrész található: Green, Zeleny, Verde és Prasimo.



A) Az ábrán látható piktogram segítségével válaszoljatok a kérdésekre!

a) Green földrészen hány százalék a legelő?

b) Zeleny földrészen hány százalék az erdő?

c) Prasimo földrészen hány százalék a szántó?

d) Zeleny földrészen összesen hány százalék a táblázatban felsorolt háromféle földterület?

e) Prasimón hány százalékkal több a szántó, mint a legelő?

f) Melyik földrészen 17% a szántó?

g) Prasimón hány százalékkal több a szántó, mint Verdén?

h) Melyik földrészen 32% az erdő?

B) A csoport minden tagja fogalmazzon meg egy-egy igaz és egy-egy hamis állítást a diagram alapján!

Középértékek

1. példa

A Krumplihámozó Kft.-nek hét dolgozója van. A beosztásukat és a havi fizetésüket az alábbi táblázat mutatja be:

Ügyvezető igazgató:	3 000 000 Ft
Ügyvezetőigazgató-helyettes:	850 000 Ft
Könyvelő:	600 000 Ft
Menedzser:	450 000 Ft
Oktató:	300 000 Ft
Krumplihámozó szakmunkás:	220 000 Ft
Takarító:	100 000 Ft

Jellemezzük a hét különböző beosztású dolgozó fizetéséből álló halmazt!

Megoldás

A cégnél dolgozó emberek **átlagfizetése:**

$(3\,000\,000 + 850\,000 + 600\,000 + 450\,000 + 300\,000 + 220\,000 + 100\,000)$ Ft : $7 \approx 788\,571$ Ft

Az ügyvezető igazgató kiugró fizetése miatt az átlagfizetés nem jól jellemzi ezt az adatsokaságot, hiszen a kft. beosztottjainak fizetése átlag alatti, csak az igazgató és a helyettese keres az átlagnál többet.

Gondoljunk arra, hogy ha valaki egy hirdetésben azt olvassa, hogy ennél a cégnél milyen magas az átlagfizetés, azonnal munkát szeretne vállalni itt oktatóként, aztán kiderül, hogy nem jól döntött. Az átlag ebben az esetben félrevezet. Meg kell adni egyéb statisztikai mutatót is.

Ilyen például a **minta terjedelme,** ami a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége. Itt

$$3\,000\,000 \text{ Ft} - 100\,000 \text{ Ft} = 2\,900\,000 \text{ Ft}.$$

További információt ad a sokaságról a benne szereplő bérek nagyság szerinti sorrendjében **a középső.** Jelen esetben ez 450 000 Ft. Ez alatt és e fölött is három-három érték van.

2. példa

Egy matematikadolgozat osztályzatait foglalja össze a táblázat. Az értékelést többen többféleképpen mondták el. Milyen statisztikai jellemzőkre támaszkodnak az egyes szereplők?

Ötös	Négyes	Hármas	Kettes	Egyes
3	6	10	8	2

A tanárnő beszámolója:

„Az osztályzatok átlaga 3 egész. Sajnos sokan gyengén produkáltak. A 29 tanulóból csak 9-en írtak számomra elfogadható dolgozatot.”

Lili beszámolója otthon, aki 3-as dolgozatot írt:

„Nekem jól sikerült a dolim, hisz az osztályból legtöbben 3-ast írtak, és én köztük vagyok.”

Béci beszámolója otthon, aki szintén 3-ast írt:

„Szerintem az én dolim jó lett, mert többen írtak nálam rosszabbat, mint jobbat.”

Megoldás

- A tanárnő az adatsokaság **számtani közepét,** vagyis az osztályzatok átlagát adta meg a tanulóknak. A 3-as átlag önmagában semmit nem árul el a különböző osztályzatok számáról. Mivel ő a többi dolgozatjegyet is ismerte, beszámolója helyes volt.

- Lili a számára legkedvezőbb jellemzést választotta. Az osztályzatok között a leggyakoribb a 3-as, és ő valóban ebben a csoportban van. Lehet, hogy anyukának a 3-as dolgozat nem jó, de Lili statisztikailag helyesen, egy másik középértékkel, az adatok **móduszával** jellemezte dolgozatának eredményét.
- Béci, Lilihez hasonlóan, magát mentegetve az adatok **mediánjával** magyarázta otthon 3-as osztályzatát. Ha nála többen írtak rosszabbat, mint jobbat, akkor ő jó helyen áll a sorban. Béci a 29 darab osztályzatot nagyság szerint sorba állította, és ennek a sornak a középső eleme 3-as. Továbbá az is igaz, hogy tízen írtak nála rosszabbat, és csak kilencen jobbat.

Az adatok összegének és az adatok számának a hányadosa az adatsokaság **átlaga** (számtani közepe):

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Az adatsokaságban leggyakrabban előforduló elem a sokaság **módusza.** Ha több ilyen van, akkor azok mindegyike módusz. A móduszt *mo*-val jelöljük.

Egy adatsokaság elemeit (ha ez lehetséges) nagyság szerint sorba rendezzük. Ha az páratlan számú elemből áll, akkor a sorban a középső elem a sokaság **mediánja.** Ha páros számú elemből áll, akkor a sorban a két középső elem számtani közepe a sokaság **mediánja.** A mediánt *me*-vel jelöljük. A medián a sokaságot két azonos elemszámú részre osztja.

Az adatsokaságok ismérvei **mennyiségi** vagy **minőségi** jellegűek. A mennyiségi ismérvek adatai általában számsokaságot alkotnak. Az ilyen adatsokaságnak van átlaga, módusza és mediánja. A minőséget jellemző adatok rendszerint valamilyen tulajdonságot hordoznak, például fajta, szín, ezért az ilyen adatsokaságnak csak módusza van, átlaga, mediánja nincs.

A medián a szomszédos adatok távolságát, illetve különbségét figyelmen kívül hagyja. Ezért olyan adatok esetén is alkalmazható, ahol nem mérhető az egyes adatok közötti távolság. Ilyen például a különböző sportversenyek eredménylistája, az egyes árucikkek minőség szerinti osztályozása vagy az iskolában használt érdemjegyek sorozata.

3. példa

A 8. b osztályba járó 26 tanuló cipőinek méretei:

36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 43, 43

Adjuk meg az adatok számtani közepét, móduszát és mediánját!

Megoldás

Az adatok átlaga:		$\overline{a} \approx 39{,}27$	Ez az átlagos lábméret.
	módusza:	$mo = 38$	Ez fordul elő a legtöbbször (6-szor).
	mediánja:	$me = 39$	A 13. és a 14. elem is 39, és azok számtani közepe 39.

Az adatsokaságok jellemzésekor feltétlenül szükség van a középértékekre. Különösen akkor, ha nagyszámú, esetenként több millió adat gyakran áttekinthetetlen listáját kell összehasonlítani más, ugyanilyen méretű listával.

A középértékek meghatározásánál használhatunk számítógépes programot is.

4. példa

Béci a második félévben öt osztályzatot kapott matematikából, ezek átlaga 4,4. Az átlag számításánál mind az öt jegy azonos súlyú.

a) Mi lehet az öt osztályzat?

b) Hány 5-öst kell még szereznie Bécinek, hogy év végén 5-öst kaphasson? Az e-naplóban rögzített iskolai szabályok szerint 4,5 feletti átlag esetén lehet felfelé kerekíteni.

c) Hány 5-öst kell még szereznie, hogy az átlaga pontosan 4,7 legyen?

Megoldás

a) Az átlag és az osztályzatok számának szorzata megadja az osztályzatok értékének összegét, ami $4{,}4 \cdot 5 = 22$.

Az 1, 2, 3, 4, 5 osztályzatokból a 22 öt darab összegével csak ebben a három esetben állítható elő: 5, 5, 4, 4, 4 vagy 5, 5, 5, 3, 4, vagy 5, 5, 5, 5, 2.

b) Mindhárom esetben ugyanúgy gondolkodhatunk.

Ha egy db 5-öst szerez, akkor az átlag $27 : 6 = 4{,}5$. Ezért 1 db 5-ös nem elég.

Ha két db 5-öst szerez, akkor az átlag $32 : 7 \approx 4{,}57$. Ez elég az év végi 5-öshöz.

c) 4,7-es átlag esetén még x db 5-öst kell szereznie. Ekkor az osztályzatok száma $n = 5 + x$ lesz, az osztályzatok összege pedig az eredeti 22-höz képest $5 \cdot x$-szel növekedik.

Az osztályzatok összege kétféleképpen írható fel: $4{,}7 \cdot (5 + x) = 22 + 5 \cdot x$

Ezt az egyenletet megoldva megkapjuk a szükséges ötösök számát.

$$23{,}5 + 4{,}7 \cdot x = 22 + 5 \cdot x$$

$$1{,}5 = 0{,}3 \cdot x$$

$$x = 5$$

Bécinek még 5 db ötöst kell szereznie, hogy az átlaga 4,7 legyen.

Feladatok

1. Határozd meg az 1, 3, 3, 3, 3, 4, 7, 8, 12, 12, 15, 19, 20 adatsokaság számtani közepét, móduszát és mediánját!

2. Egy nyolcadikos tanuló tankönyveinek oldalszámai a táblázatban olvashatók.

Számítsd ki, hogy összesen hány oldalnyi tananyagot kellene egy év alatt egy nyolcadikosnak megtanulni! Mennyi a könyvek átlagos oldalszáma? Hogyan alakul ez az átlag abban az iskolában, ahol nem tanulnak nyolcadikban digitális kultúrát?

Magyar irodalom	Magyar nyelvtan	Történelem	Angol	Matematika	Fizika	Kémia	Biológia	Földrajz	Ének	Digitális kultúra
345	152	230	144	219	151	136	173	193	126	70

3. A matematikatanár megbetegedett, ezért a kijavított dolgozatokat nem tudta kiosztani. Telefonon lediktálta a táblázatban olvasható adatokat. A tanulóknak meg kell határozniuk a dolgozat osztályzatainak átlagát, móduszát és mediánját.

Ötös	Négyes	Hármas	Kettes	Egyes
4	7	6	5	1

Add meg ezeket a középértékeket! Számítsd ki a különböző osztályzatok relatív gyakoriságát! Készítsd el a relatív gyakoriságok grafikonját!

4. Laci így számolt be egy másik osztályba járó barátjának történelemdolgozata értékeléséről. „A 21 fős csoportból ugyanannyian írtak nálam rosszabb dolgozatot, mint ahányan jobbat.” Lehet-e Laci dolgozata 5-ös, 4-es, 3-as, 2-es vagy 1-es?

5. Készíts olyan 10 elemből álló adatsort, amelynek

a) nincs számtani közepe,

b) számtani közepe nincs, de módusza van,

c) számtani közepe 4, módusza 5,

d) számtani közepe is, módusza is 6!

6. Készíts olyan 15 elemből álló adatsort, amelynek

a) átlaga, módusza és mediánja egyaránt 7,

b) mediánja és számtani közepe egyenlő,

c) módusza van, de mediánja nincs,

d) három különböző módusza van!

7. Az újkori nyári olimpiai játékokon a magyar versenyzők által megszerzett érmek számát foglalja össze a táblázat 1896 és 1996 között, az 1920-as és az 1984-es év kihagyásával. Határozd meg az érmek számából álló adatsokaság átlagát, móduszát és mediánját! Vajon miért több az érmek száma a táblázat második részében?

Év	Hely	Érmek száma
1896	Athén	5
1900	Párizs	6
1904	St. Louis	4
1908	London	8
1912	Stockholm	8
1920	Antwerpen	nem vettünk részt
1924	Párizs	10
1928	Amszterdam	10
1932	Los Angeles	16
1936	Berlin	16
1948	London	28

Év	Hely	Érmek száma
1952	Helsinki	42
1956	Melbourne	26
1960	Róma	21
1964	Tokió	22
1968	Mexikóváros	32
1972	München	35
1976	Montreal	22
1980	Moszkva	32
1984	Los Angeles	nem vettünk részt
1988	Szöul	23
1992	Barcelona	30
1996	Atlanta	21

8. Táborozás előtt az osztályfőnök megkéri a 26 táborozót, hogy sorolják fel, milyen ételeket esznek szívesen. Ennek alapján állítja össze az étrendet. A begyűjtött adatokat figyelembe véve mi lesz az ebéd a hatnapos táborozás egyes napjain, ha mindennap mást rendel az osztályfőnök?

Ételek	Rántott pulyka-mell	Rakott burgo-nya	Milánói makaró-ni	Sajt-felfújt	Rakott kel-káposzta	Pala-csinta	Csirke-pörkölt	Spenót	Borsó-főzelék	Rizses hús
Gyakoriság	10	4	8	8	2	18	12	0	6	5

9. Jenci márciusig 6 osztályzatot szerzett matematikából. Ekkor érdemjegyeinek átlaga 3,5 volt. Év végéig még egy dolgozatot írnak. Jenci szeretne év végén 4-est kapni, aminek az a feltétele, hogy a 7 osztályzat átlaga elérje a 3,6-et. Hányasra kell megírnia a hátralévő dolgozatot, hogy megkapja a 4-est év végén? Pótdolgozatra és javítófelelésre nincs lehetőség.

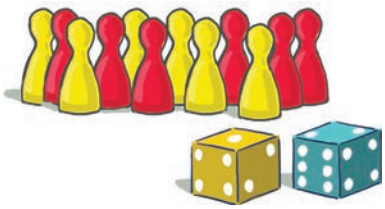
10. Az Erős Leszel SE kosárlabda-szakosztályába járó 10 tag életkorának átlaga 28 év. Egy játékos távozott közülük, így az ott maradt 9 játékos átlagéletkora 29 év lett. Hány éves volt, aki elment a szakosztályból?

Valószínűségszámítás

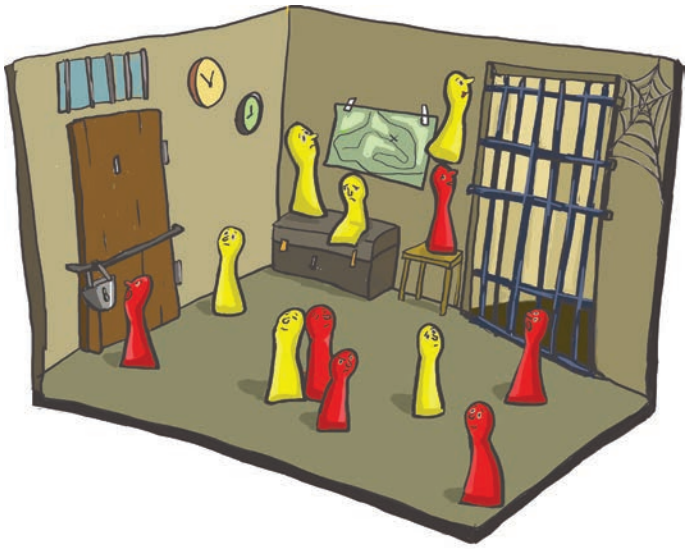
A szabadulószoba foglyai

Kétszemélyes játék

A játékhoz szükséges fejenként 6-6, játékosonként azonos színű játékbábu és két különböző színű dobókocka.



A bábuk a játékosok előtt állnak egy kis papírdobozban, és a kockák feldobása után a leírt feltételek szerint „szabadulhatnak ki a szobából”. Szabadulásuk után kikerülnek a dobozból.



1. JÁTÉK

A két játékos egymást követve feldobja a két dobókockát.

Az *A* játékos egy-egy bábuja akkor szabadulhat ki, ha az általa dobott pontok összege maximum 6.

A *B* játékos egy-egy bábuja pedig akkor, ha az általa dobott összeg minimum 8.

A játékot az a játékos nyeri, akinek először szabadul ki mind a 6 bábuja.

A játékot többször ismételjétek meg, és a tapasztalatok alapján döntsétek el, melyik játékosnak van nagyobb nyerési esélye!

Foglaljátok táblázatba a dobott összegeket, és figyeljétek meg azok előfordulásának gyakoriságát!

2. JÁTÉK

Ebben a játékban még **a játék előtt tippeljétek meg**, kinek van nagyobb nyerési esélye!

Az *A* játékos egy-egy bábuja akkor szabadulhat ki a szobából, ha a két kockával dobott pontok összege 7.

A *B* játékos egy-egy bábuja pedig akkor, ha az általa dobott pontok összege 3 vagy 4.

A játékot az a játékos nyeri, akinek először szabadul ki mind a 6 bábuja.

A játékot többször ismételjétek meg!

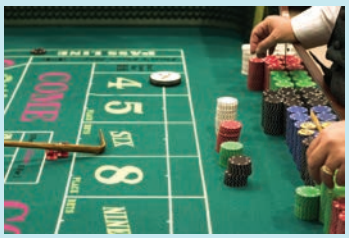
A játék során foglaljátok táblázatba a dobott összegeket, és figyeljétek meg azok előfordulásának gyakoriságát! A játék végén beszéljétek meg, hogy jól tippeltetek-e, és magyarázzátok meg, miért!

Megjegyzés: Az események valószínűségének meghatározása című kiegészítő tananyag 3. példájában megtaláljátok, hogy a kétkockás játékok *A* és *B* játékosa mekkora valószínűséggel nyerheti a játékot.

A relatív gyakoriság és a valószínűség

Az emberiség története során a hazárdjátékok nyerési esélyének, a fogadások kimenetelének találgatása minden embert élénken foglalkoztatott (a mai napig is foglalkoztat). A kockajátékok szenvedélyét már az ókori Római Birodalomban is ismerték (pl. Claudius, Augustus, Nero, Caligula, Commodus, Domitianus császárok a kockajáték rabjai voltak).

Sokáig úgy képzelték, hogy egy-egy ilyen szerencsejátékban mindent a véletlenre kell bízni. Először az 1477-ben kiadott „Dante-kommentár” említi meg a három kocka feldobása során előforduló pontösszegek matematikai leírását.



Később, az 1600-as években, de Méré lovag a következő kérdéssel fordult Blaise Pascalhoz (1623–1662), a híres matematikushoz: ha egy kockával négyszer dobunk, annak nagyobb az esélye, hogy egyszer sem dobunk hatost, vagy annak, hogy legalább egyszer azt dobunk?

Pascal ennek a problémának a helyes megfejtésén kívül matematikus barátjával, Pierre de Fermat-val (1607–1665) még számtalan valószínűségszámítási tételt állított fel.

A matematikatörténet a valószínűségszámítás megszületését Pascalnak a Francia Akadémia számára 1654-ben írt levelétől számítja.

1. példa

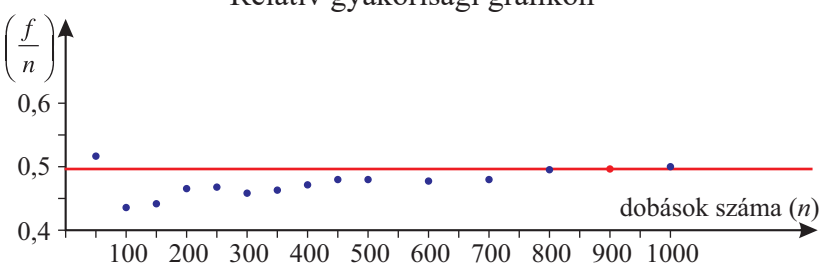
Egy 10 Ft-os érmét 1000-szer feldobtunk, és feljegyeztük a táblázatban feltüntetett dobásszámok esetében az addig előfordult fejek számát. Megállapítottuk, hogy az addigi dobások számának hányad része fej, azaz megadtuk a fejek és a dobások számának arányát tört és tizedes tört alakban.

Dobások száma (n)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	600	700	800	900	1000
Fejek száma (f)	26	44	67	94	118	139	164	191	217	241	289	340	399	450	507
f és n aránya $\left(\frac{f}{n}\right)$	$\frac{26}{50}$	$\frac{44}{100}$	$\frac{67}{150}$	$\frac{94}{200}$	$\frac{118}{250}$	$\frac{139}{300}$	$\frac{164}{350}$	$\frac{191}{400}$	$\frac{217}{450}$	$\frac{241}{500}$	$\frac{289}{600}$	$\frac{340}{700}$	$\frac{399}{800}$	$\frac{450}{900}$	$\frac{507}{1000}$
f és n aránya tizedes törtben	0,52	0,44	0,447	0,47	0,472	0,463	0,469	0,478	0,482	0,482	0,482	0,486	0,499	0,5	0,507

Az érme feldobását valószínűségszámításban **kísérletnek** nevezzük, a kísérlet **kimenetele** pedig ebben az esetben kétféle lehet: fej, illetve írás. A fej dobása legyen az ***A* esemény,** az írásé a ***B* esemény.** A táblázat második sorában az A esemény előfordulásának **gyakorisága** áll, a harmadik és a negyedik sorában kapott arányszámok pedig az A esemény **relatív** (viszonylagos) **gyakoriságát** fejezik ki. Ez a hányados – amelyet megadhatunk százalékalakban is – megmutatja, hogy az addig előfordult dobások mekkora része volt fej.

Hasonló módon határozhatjuk meg a B eseménynek, az írások előfordulásának gyakoriságát, illetve relatív gyakoriságát. A grafikont a kísérletek kimeneteleit tartalmazó táblázat alapján készítettük.

Relatív gyakorisági grafikon



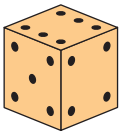
A grafikonon megfigyelhetjük, hogy a relatív gyakoriság értéke egy bizonyos állandó körül ingadozik. A pénzérme dobásakor a két, **egyenlő esélyű** kimenetel miatt ez az állandó érték éppen $\frac{1}{2}$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy

a **fej dobásának valószínűsége** $\frac{1}{2}$, vagy az **írás dobásának valószínűsége** $\frac{1}{2}$.

Az a p szám, amely körül egy esemény relatív gyakorisága ingadozik, az esemény **valószínűsége.** Az A esemény bekövetkezésének valószínűségét $P(A) = p$ $(0 \le p \le 1)$ valós szám jelöli. (P betű a latin probabilis, „valószínű” szó kezdőbetűje.)

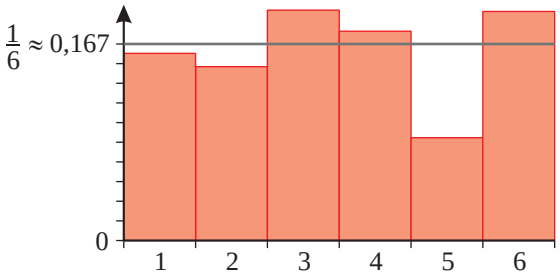
2. példa

a) Mindannyiunk számára ismert, hogy ha egy szabályos dobókockával végzünk dobássorozatot, a kísérlet kimenetele minden egyes dobásnál az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok valamelyike lehet. Ezek az események **egyenlő valószínűséggel** következnek be, tehát mindegyik esemény valószínűsége $\frac{1}{6}$.

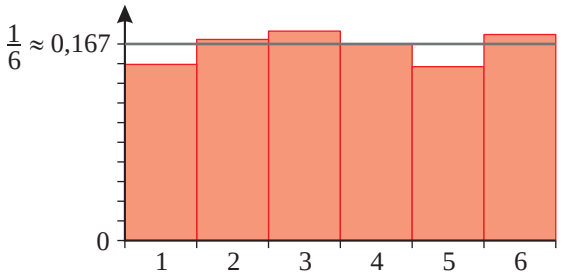


A kockadobási kísérletek kimeneteleit megfigyelheted az interneten található animációkon. Ilyen animációs megfigyelés alapján készültek az alábbi diagramok:

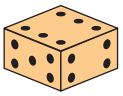
100 dobás után a diagram



1000 dobás után a diagram



b) Vágjuk félbe a dobókockát, és a „félkocka” hat lapjára rajzoljuk fel a pöttyöket 1-től 6-ig ugyanolyan rend szerint, ahogy a szabályos dobókockán vannak. A kimenetel itt is hatféle lehet: 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Mit gondoltok, egyenlően valószínűek-e ezek a kimenetelek? Vajon melyik kimenetel a leggyakoribb? Vitassátok meg, érveljetek!

Az alábbi táblázatban feljegyeztük 30 egymás utáni dobás kimeneteleit, és meghatároztuk az egyes kimenetelek relatív gyakoriságát.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
6	1	5	4	1	6	5	1	6	1	5	1	4	6	1	6	2	6	4	6	3	6	6	6	1	3	4	1	2	1

Az egyes kimenetelek relatív gyakorisága:

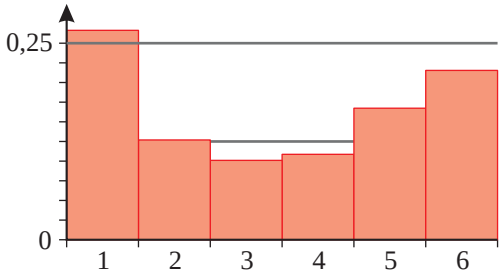
Dobott szám	1	2	3	4	5	6
Relatív gyakoriság	$\frac{9}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{10}{30}$

Magyarázzátok meg, miért ennyire különbözőek a relatív gyakoriság értékei!

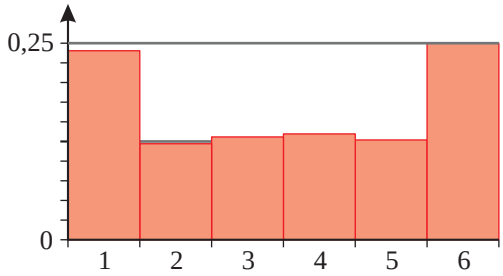
Sejtésünket megerősítette a kísérlet eredménye. Már 30 dobás és a megfigyelt animációk esetén is jól látható, hogy ebben a kísérletben az egyes események bekövetkezése **nem egyenlően valószínű.**

A „félkockával” végzett animációk megfigyelése alapján készültek a diagramok.

100 dobás után a diagram



1000 dobás után a diagram



Feladatok

1. **Csoportfeladat**

Dobjatok fel egy szabályos dobókockát 100-szor! A dobások eredményeit foglaljátok táblázatba, majd egyesítsétek a csoporttagok dobási eredményeit, és töltsétek ki a füzetetekben az alábbi táblázatot!

	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság						
Relatív gyakoriság						
Eltérés az $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$ értéktől						

2. Végezd el a következő kísérletet! Egy dobozban 3 piros és 2 kék szívószál van. Ezekből húzz véletlenszerűen egyet, majd írd le, milyen színű a kihúzott szívószál. A húzást ismételd meg 20-szor úgy, hogy a szívószálat a kihúzás után mindig visszateszed a dobozba! A kísérlet elvégzése után számítsd ki

a) a piros húzásának gyakoriságát és relatív gyakoriságát,

b) a kék húzásának gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

3. **Játék 3 fős csoportoknak**

A játék előtt a dobások lehetséges kimenetelei közül az alábbi hármat külön-külön cédulára írjuk. Minden játékos húz egy cédulát.

I. A dobott szám prímszám.

II. A dobott szám 2-vel osztható.

III. A dobott szám 2 pozitív hatványa.



A játékosok szabályos dobókockával dobnak egyet-egyet, körbe haladva.

Az a játékos kap pontot, aki a céduláján lévő számnak megfelelőt dobott. 10 kör után nézzétek meg az eredményeket! A játék több fordulóban játszható. A játék után döntsétek el, hogy igazak-e az állítások!

A) Az I. és II. cédulákon szereplő kimenetelek egyenlően valószínűek.

B) A III. cédulán szereplő kimenetelnek nagyobb a valószínűsége, mint a II-esen lévőnek.

C) Mindhárom játékos számára igazságos a játék, azaz mindenki egyenlő valószínűséggel kap pontot.

4. Egy pénzérmével, egy szabályos tetraéderrel és egy kockával végeztünk dobássorozatokat. A pénzérme egyik oldala fej (F), a másik oldala írás (I), a tetraéder egy lapjára fej (F), három lapjára írás (I), a kocka egy lapjára fej (F), öt lapjára pedig írás (I) van írva. Mit gondolsz, hogy a három dobássorozat közül melyik tartozik az érméhez, melyik a tetraéderhez, és melyik a kockához?

A) F F I I I F F F I I F I I I I F F I I I F F F I I I I F I I

B) F F I I F F F I I F I I I I F F F F I F F I I F F I I I F F

C) F F I I I I I I F I I F F F I I I I F I F I I I I I I F I I

Mennyi az írás relatív gyakorisága az *A)*, a *B)* és a *C)* dobássorozatban?

5. **Páros feladat**

Végezzétek el a következő kísérletet! Tegyetek egy dobozba 5 sárga és 3 zöld golyót! Ezekből húzzatok egymás után két golyót, és a két kihúzott golyót tegyétek vissza a dobozba! 20 húzás eredményét jegyezzétek le, és minden húzás után számítsátok ki az addig lejegyzett események közül az alábbiak relatív gyakoriságát!

a) Sárga–sárga húzás,

b) sárga–zöld húzás ebben a sorrendben,

c) sárga–zöld húzás tetszőleges sorrendben.

6. **Kísérlet párban**

Készítsétek el a szükséges eszközöket! Egyikőtök a dobókockát, másikótok a színes lapokat!

A) A kocka két lapjára 1-est, három lapjára 2-est, egy lapjára pedig 3-ast írjatok!

B) Vágjatok ki hat darab kis méretű színes lapot! Legyen közöttük két piros, három sárga és egy kék!

Az elkészített eszközökkel végezzétek el az alábbi kísérleteket!

A) Dobjatok a kockával 20-szor!

B) A színes lapokból – keverés után – véletlenszerűen húzzatok egymás után 20-szor egyet-egyet! Jegyezzétek fel a színt, majd a kihúzott lapot minden húzás után tegyétek vissza!

A kimeneteleket foglaljátok külön-külön (*A), B)*) táblázatba, és hasonlítsátok össze a gyakoriságokat! Értékeljétek a különböző kimenetelek esélyét, és keressetek kapcsolatot a kétféle kísérlet között!

A dobás-, illetve a húzássorozatot többször megismételhetitek.

Valószínűségi játékok, esélylatolgatás

1. JÁTÉK

KINEK NAGYOBB A NYERÉSI ESÉLYE?

Két játékos játszik együtt.

A játékhoz 4 db pénzérmére van szükség.

Az egyik játékos két egyforma érmével játszik, a másik két különbözővel.

Például:

Egyik játékos érméi



Másik játékos érméi



A két játékos egyszerre feldobja a két-két pénzérmét, egymás után tízszer. Minden feldobás egy-egy újabb fordulót jelent. Az egyes dobások után megfigyelik, hogy az érméiken fej vagy írás van-e felül. Egy fordulóban az a játékos nyer, aki kétfélét dobott, szemben azzal, aki egyfélét. Ha mindkét játékos dobása kétféle vagy mindkettőé egyféle, akkor az a forduló döntetlen. A játékosok az egyes fordulók után lejegyzik, hogy melyikük nyert.

A játék előtt tippeljétek meg, vajon egyenlő eséllyel nyer-e az egyik, illetve a másik játékos!

A 10 forduló után lejegyzett eredmények alapján vitassátok meg a nyerési esélyeket!

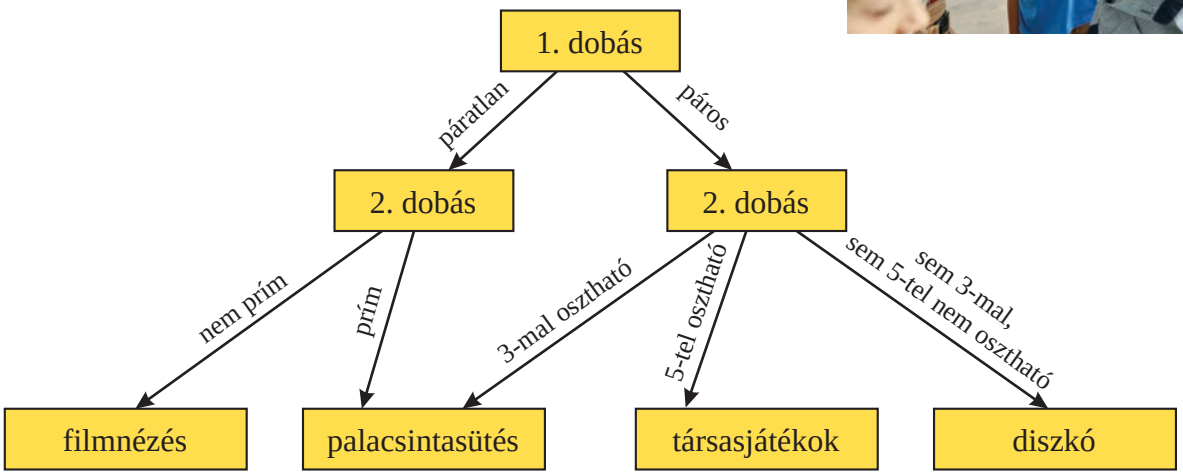
Megjegyzés: Az események valószínűségének meghatározása című kiegészítő tananyag 2. példájában megtaláljátok, hogy a kétérmés játékban résztvevők közül ki mekkora valószínűséggel nyerheti a játékot.



2. JÁTÉK

MELYIK UTAT VÁLASZTOD?

Egy nyolcadikos osztály a hétvégére bulit tervez. Az összejövetel programjában nem tudnak megegyezni, ezért a döntést egy valószínűségi játékkal hozzák meg, aminek a terve az alábbi ábrán látható.



Ehhez egy olyan 12 lapú dobótestre (szabályos dodekaéderre) van szükségük, amelynek minden lapján egy-egy szám áll 1-től 12-ig.



Ti is játsszátok el ezt a játékot az alábbi leírás alapján!

Az útvonalat 20-szor járjátok végig úgy, hogy minden dobás után az ábrán leírt szabály szerint haladjatok tovább! Válasszátok ki azt a 20 embert, aki a dobásokat egymás után elvégzi! **A játék kezdete előtt** mindenki írja fel, hogy szerinte melyik programhoz lehet a legtöbbféleképpen eljutni. Minden forduló után jegyezzétek fel, hová jutottatok!

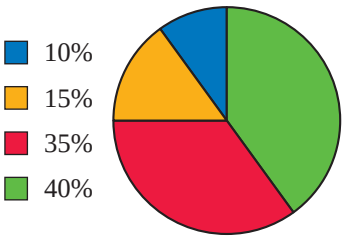
Végül azt a programot kell elfogadni, amelyekhez a játék során összesen a legtöbbször érkeztetek meg.

Megjegyzés: Az események valószínűségének meghatározása című kiegészítő tananyag 4. példájában megtaláljátok, hogy az útvonalválasztó játékok egyes kimenetelei közül melyiknek mekkora a valószínűsége.

Tudáspróba

Statisztika, valószínűségszámítás

1. Az osztály farsangi rendezvényére a nyolcadikosok 80 db fánkot sütöttek. A vetélkedő végén a négy csapat a kördiagramon ábrázolt arányban ehetett a fánkokból.



a) Mekkorák a kördiagramban az egyes részek középponti szögei?

b) Hány darab fánkot kapott egy-egy csapat?

c) Foglald táblázatba a kapott adatokat!

d) Készíts oszlopdiagramot a kapott adatokkal!

2. Az iskolai kosárlabdacsapat részt vesz a régióban működő iskolák közötti bajnokságon. Az előző idényben az edző-tanár minden meccsen feljegyezte, hogy összesen hány egypontos kosarat dobtak a játékosok.

Meccsek	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Kosarak	41	37	36	41	52	60	50	43

a) Mennyi az adatok átlaga, módusza, mediánja?

b) Írd fel az adatok relatív gyakorisági sorát!

c) Az edző a felírt számok közül két adatot véletlenül kitörölt, de nem emlékezett arra, melyik kettőt. A maradék adatok átlaga így 43 lett. Mely számokat törölte ki az edző?

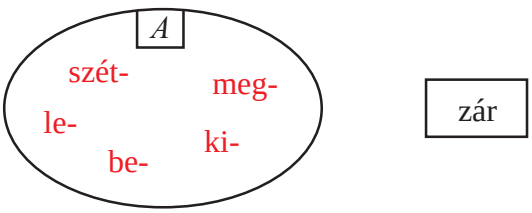
3. Készíts olyan 20 elemből álló adatsokaságot, amelynek átlaga 15, módusza 14, mediánja 13!

4. *a)* A **KARÓ** és a **PÓRÁZ** szavakat betűkártyákból rakjuk ki, majd az első szó betűit az 1-es dobozba, a másodikét pedig a 2-es dobozba tesszük. Áron az 1-es dobozból, Botond a 2-es dobozból húz egy-egy betűkártyát. Melyiküknek van nagyobb esélye arra, hogy az Ó kártyát húzza ki?

b) Melyik játékosnak van nagyobb esélye abban az esetben, ha az 1-es dobozba a **HAJÓS**, a 2-es dobozba a **SÓHAJ** szavak betűkártyáit tesszük?

5. Az *A* halmazba igekötőket írtunk. Ezek közül véletlenszerűen választunk egy igekötőt, és a keretben lévő szó elé illesztjük. Az 1. vagy a 2. kimenetelnek van nagyobb esélye?

1. A köznyelvben használatos szót kapunk.
2. A köznyelvben nem használt szót kapunk.



6. 12 db cédulára felírtuk a hónapok nevét, minden cédulára egyet. Ezekből véletlenszerűen húzunk egy cédulát. Melyik kimenetelnek nagyobb a valószínűsége?

A: a kihúzott hónap nevében szerepel r betű.

B: a kihúzott hónap nevében nem szerepel r betű.

Események valószínűségének meghatározása

Nagyszámú kísérlet esetén (100, 1000, 10 000, …) a megfigyelt esemény relatív gyakorisága nagyon jól megközelíti az esemény valószínűségét.

Korábbi kísérleteink során, ahol a kimenetelek egyenlően valószínűek voltak, úgy határoztuk meg a megfigyelt események relatív gyakoriságát, hogy azok előfordulásainak számát elosztottuk az összes előforduló esemény számával. A relatív gyakoriság tehát megmutatja, hogy a kísérlet során az összes esemény hányad részében fordult elő a megfigyelt – számunkra kedvező – esemény.

Ugyanígy határozhatjuk meg egy tetszőleges véletlen esemény bekövetkezésének valószínűségét.

A kísérlet során előforduló minden lehetséges kimenetel halmaza az **összes esemény,** a megfigyelt kimenetelek halmaza pedig a **kedvező esemény.** Ha az események bekövetkezése **egyenlően valószínű,** akkor a megfigyelt A esemény valószínűségét a $P(A)=\frac{K}{N}(=p)$ hányados adja, ahol K a kedvező esetek, N pedig az összes eset száma.

1. példa

Egy dobókocka 3 lapját pirosra, 2 lapját sárgára és 1 lapját kékre festjük.

A kockát feldobjuk, és megfigyeljük a dobott színeket.

a) Melyik szín előfordulásának a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb az esélye?

b) Mekkora a piros szín dobásának valószínűsége?

c) Mekkora a sárga szín dobásának valószínűsége?

Megoldás

a) Mivel az események bekövetkezése egyenlően valószínű, a legnagyobb esélye a piros szín előfordulásának van, a legkisebb esélye pedig a kéknek.

b) A piros szín előfordulásának valószínűsége $P(\text{piros})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

c) A sárga szín előfordulásának valószínűsége $P(\text{sárga})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

2. példa

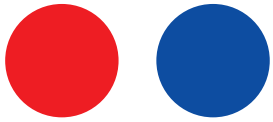
A) Feldobunk egy olyan korongot, amelynek egyik oldala piros, másik pedig kék. A leesett korong látható oldalát figyeljük.

B) Két különböző méretű piros-kék korongunk van. Ezeket egyszerre feldobjuk, majd a leesett korongok látható oldalát figyeljük.

Határozzuk meg a lehetséges kimeneteleket és azok valószínűségét!

Megoldás

A) A kimenetel kétféle lehet:



Ezek egyenlő eséllyel következnek be. Az egyes kimenetelek valószínűsége $P(\mathrm{P})=\frac{1}{2}$; $P(\mathrm{K})=\frac{1}{2}$.

B) Négyféle kimenetel lehet:

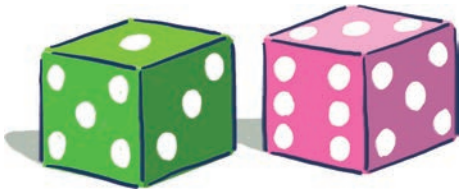


Ezek egyenlő eséllyel következnek be. Az egyes kimenetelek valószínűsége:

$$P(\mathrm{Pk})=\frac{1}{4};\qquad P(\mathrm{Pp})=\frac{1}{4};\qquad P(\mathrm{Kp})=\frac{1}{4};\qquad P(\mathrm{Kk})=\frac{1}{4}.$$

3. példa

Két különböző színű szabályos dobókockával dobunk. A dobott pontok összegét figyeljük.



Mekkora a valószínűsége annak, hogy

A) két egyforma számot dobunk,

B) a dobott két szám összege 5,

C) a dobott két szám összege 12,

D) a dobott számok összege 14,

E) a dobott számok összege legalább 2 és legfeljebb 12?

Megoldás

Két kocka feldobása esetén az összes lehetséges kimenetelt a 6 × 6-os táblázat tartalmazza.

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Az alábbi valószínűségeket a táblázatban szereplő számpárok segítségével határozzuk meg.
Az összes esemény száma 36.

	A kedvező események	A valószínűség
A) Két egyforma számot dobunk	(1;1) (2;2) (3;3) (4;4) (5;5) (6;6)	$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
B) A dobott két szám összege 5	(1;4) (2;3) (3;2) (4;1)	$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
C) A dobott számok összege 12	(6;6)	$P(C)=\frac{1}{36}$
D) A dobott számok összege 14	Ilyen eset nem fordulhat elő.	$P(D)=0$
E) A dobott számok összege legalább 2 és legfeljebb 12	Ez bármelyik dobás során bekövetkezik. A kedvező események száma egyenlő az összes esemény számával.	$P(E)=\frac{36}{36}=1$

A *D* eseményt **lehetetlen eseménynek,** az *E* eseményt pedig **biztos eseménynek** nevezzük.

Feladatok

1. Két különböző pénzérmét egyszer feldobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobás után

a) I, I; *b)* I, F; *c)* F, F látható az érméken?

2. Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott szám

a) páros, *b)* páratlan, *c)* prím, *d)* 3-mal osztható, *e)* 7-tel osztható?

3. Egy szabályos dobókockával egyszer dobva mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott szám

a) legalább 3, *b)* legfeljebb 2?

4. Egy dobozban három betűkártyát helyeztünk el, egyiken A, másikon K, harmadikon R betű van. Egymás után kihúzzuk a kártyákat, és a kihúzás sorrendjében az asztalra tesszük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy értelmes szót kapunk?

5. Elhelyezünk egy dobozban 20 számkártyát, amelyekre a pozitív egész számok vannak felírva 1–20-ig. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az általunk kihúzott egy számkártyán

a) 3-mal, *b)* 5-tel, *c)* 4-gyel osztható szám lesz?

6. Kovács apuka három gyermeke, Ákos, Dezső és Jutka közül szeretné valamelyik kettőt elküldeni vásárolni. Mivel a gyerekek vonakodnak, apuka mind a három nevet felírja egy-egy cédulára, és kihúz közülük két nevet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy

a) két fiú, *b)* egy fiú és egy lány, *c)* Jutka és Ákos

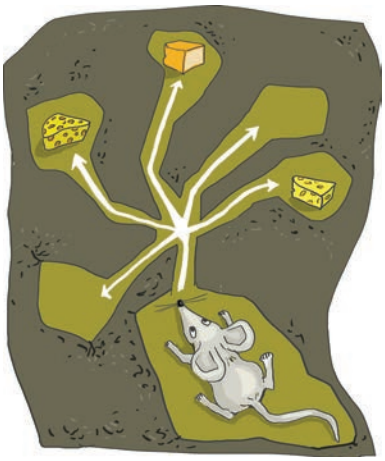
megy vásárolni?

7. Két szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Határozd meg a felsorolt események valószínűségét! Használd a 153. oldalon található 6 × 6-os táblázatot!

a) A dobott számok összege 3, *b)* a dobott számok összege 10,

c) a dobott számok összege 9.

8. Inci egér vacsorázni indul az ábrán berajzolt úton. Az elágazásnál döntenie kell, hogy az öt lehetséges út közül melyiken folytatja útját. A járatokban mindenütt egyenletes sajtszag kering, de csak a megjelölt helyeken találhat sajtot. Mekkora az esélye annak, hogy Inci sajtot vacsorázik?

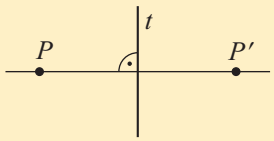


Geometriai transzformációk

Egybevágósági transzformációk

A geometriai transzformáció olyan egyértelmű hozzárendelés, amelyben a sík pontjaihoz hozzárendeljük ugyanazon sík pontjait úgy, hogy megadunk egy utasítást vagy szerkesztési eljárást, amelyet végrehajtva minden pont a képébe kerül.

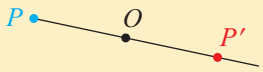
Ez az utasítás a **tengelyes tükrözés**nél így szól:



Adott egy t egyenes. Egy P pont tengelyes tükörképét úgy kaphatjuk meg, hogy a P pontból merőlegest állítunk a t tengelyre, majd ennek a meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, amely a tengelytől ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont.

Ez a P' pont a P pont t tengelyre vonatkozó tükörképe.

A **középpontos tükrözés**nél ez az utasítás:



Adott egy O pont, az O pont képe legyen önmaga. Bármely O-tól különböző P pont képét úgy kaphatjuk meg, hogy a P pontot összekötjük az O ponttal, majd ennek a félegyenesnek a meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, amely az O ponttól ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont. Ez a P' pont a P pont O középpontra vonatkozó tükörképe.

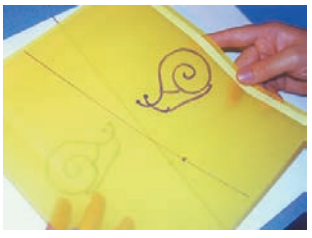
Pontok transzformációja mozgással

Bizonyos transzformációkat máshogy is megadhatunk. Ha a síkot elmozgatva kerülnek a pontok a képpontokba, akkor mozgatásról vagy mozgásról beszélünk. A mozgásoknál a pontok képét nem egyenként keressük meg, hanem egyszerre az egész síkot (a síkot jelképező átlátszó papírt) mozgatjuk el. A sík pontjainak képét egy átlátszó papír segítségével lehet megkeresni. Ahova a mozgatás elviszi az alakzatot, az lesz a képe.

Emlékeztetőül újra megmutatjuk, hogyan kerül tengelyes tükrözéskor az alakzat a képébe a mozgatás során.

A tükörképet legegyszerűbben másolópapír segítségével állíthatjuk elő. Tegyük a másolópapírt (a képen sárga színű) az ábrára, másoljuk át a rajzot és az egyenest is, majd a másolópapírt emeljük fel, és tegyük le úgy, hogy a tükörtengely pontjai önmagukra kerüljenek, de a tengely két partja felcserélődjön!






Ahhoz, hogy a tengely pontjait pontosan önmagukra tudjuk illeszteni, meg kell jelölnünk rajta egy pontot, és ezt a másolópapírra is át kell másolni.

Ha ezután az eredeti rajzot újra átmásoljuk a másolópapírra, megkapjuk együtt az eredeti rajzot és a tükörképét.

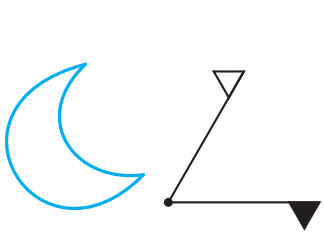
Ha a síkot úgy mozgatjuk el, hogy a tengely pontjai önmagukra kerülnek, és a tengely által határolt két félsík helyet cserél, akkor a **tengelyes tükörképet** kapjuk.

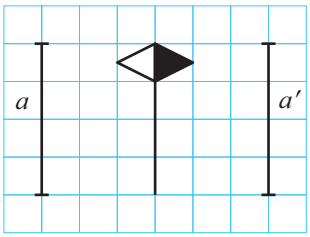
A tengelyes tükrözés térbeli mozgás, hiszen a síkot (a másolópapírt) át kellett fordítani, ki kellett lépni a síkból.

Hogyan adhatjuk meg a sík transzformációit mozgással?

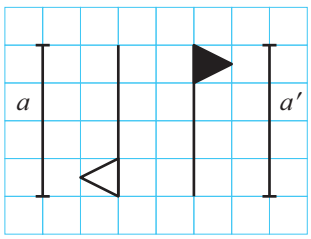
Adva van a síkon egy zászlós mutatópár, ez két egyforma zászlóból áll. Az egyik zászló fehér, a másik fekete. Mozgassuk el a síkot (a síkra fektetett átlátszó papírt) úgy, hogy a fehér zászló éppen fedje a feketét. Így minden pont a képébe megy át. A mozgások is transzformációk, minden pontnak az a képe, ahova a mozgatás elviszi.

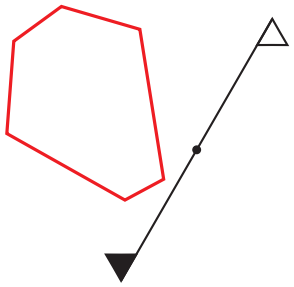
A tengelyes tükrözést is megadhatjuk zászlós mutatópárral. Ha az ábrák szerint a sík (a másolópapír) mozgatásakor a fehér zászló éppen a fekete zászlót fedi, akkor az alakzat a tengelyes tükörképébe kerül. Ekkor térbeli mozgást kellett végeznünk.





A következő ábrákon a zászlós mutatópárok középpontos tükrözést adnak meg:





A középpontos tükrözéskor a síkot önmagában mozgatjuk el, nem kell kilépnünk a térbe.

Zászlós mutatópárral másféle mozgásokat is megadhatunk. Nézzünk erre két példát:

Először lemásolod a rajzot a fehér zászlóval együtt.



A fehér zászlót a feketére mozgatod, majd újra lemásolod a rajzot a fehér zászlóval együtt.



A másolópapíron megjelent az eredeti alakzat a képével együtt. A síkot megadott irányba, adott távolságra eltoltuk. Az eltolás is síkmozgás.

Ezen az ábrán egy másféle transzformációt láthatunk. Ha a fehér zászlót a feketére mozgatjuk, az alakzat a képbe kerül. A síkot egy megadott szöggel megadott irányba (ez itt a fehér és a fekete zászlórudak irányított szöge) elforgattuk. A forgatás is síkmozgás.

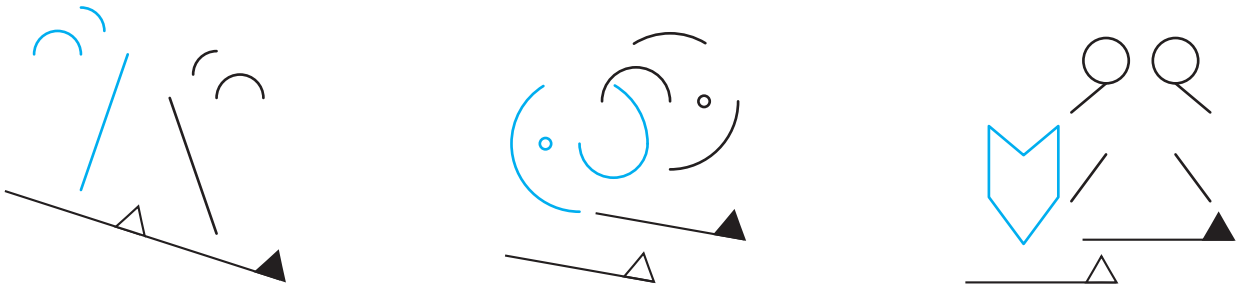


A másolópapírral elvégzett mozgások során két pont között a távolság soha nem változik meg. A mozgások mindegyike **távolságtartó.**

A távolságtartó transzformációt **egybevágósági transzformációnak** nevezzük.

Feladatok

1. Másolópapír segítségével mozgasd el a kék ábrát a megadott zászlós mutatópárral! Ekkor megkapod, mit ábrázoltak eredetileg az itt látható széttöredezett ábrák!



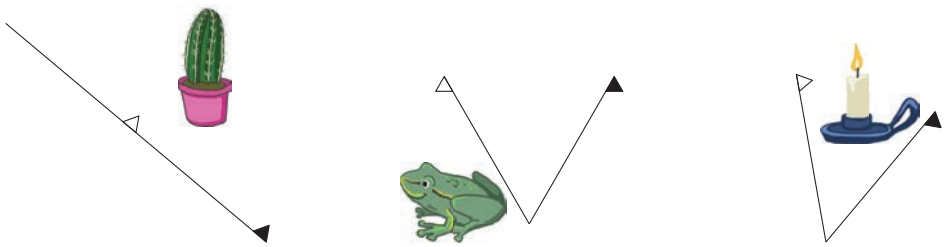
2. Válasszuk ki az alábbi mozgásokból, melyik

a) tengelyes tükrözés – adjuk meg a tengelyt!

b) középpontos tükrözés – adjuk meg a középpontot!

c) A kimaradó mozgásoknak adjunk nevet!

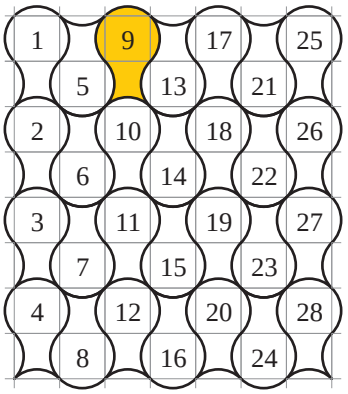
A) *B)* *C)*



D) *E)*



3. Milyen transzformációt alkalmaztunk, és hova került a színes csempe, ha



a) az ⑤-ös ⑨-esbe ment át, röviden: ⑤ ⟶ ⑨

b) ② ⟶ ⑮

c) ② ⟶ ⑦

d) ⑤ ⟶ ⑲

Ellenőrizz másolópapírral!

4. Gondoltunk egy mozgatásra.

Eláruljuk, hogy a mozgatás az egyik kék négyszöget egy feketébe juttatta.

Hová kerülhetett ekkor a koronás darab?

Mi lehetett a transzformáció?

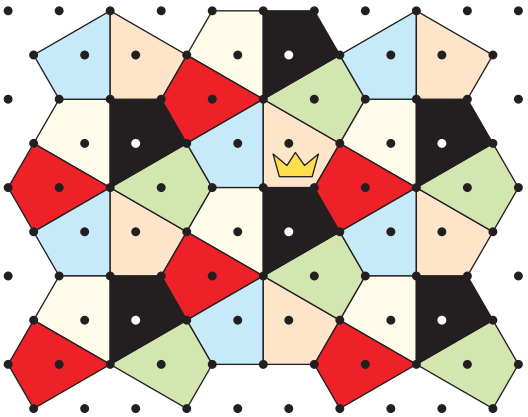
Lehetett tengelyes tükrözés?

Melyik tengelyre?

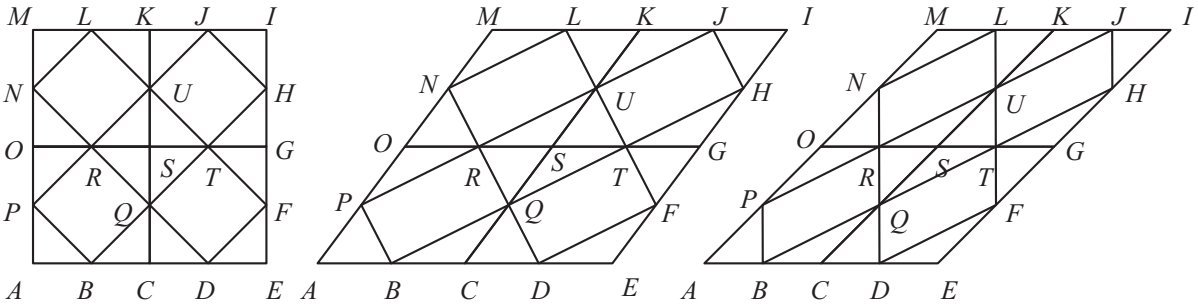
Lehetett középpontos tükrözés?

Melyik középpontra?

Lehetett másféle mozgás?



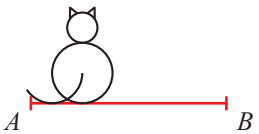
5. Döntsd el, hogy az alábbi állítások melyik ábrára igazak, melyikre nem! Ahol igaz, ott add meg a tengelyt vagy a tükörközéppontot!



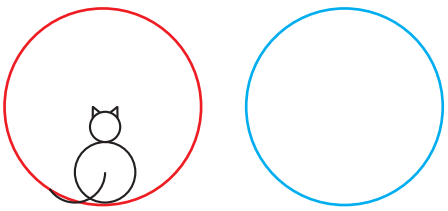
a) *MNL*△ tengelyes tükörképe *EDF*△ *b)* *MNL*△ középpontos tükörképe *EFD*△

c) *NLUR* középpontos tükörképe *QBPR* *d)* *NLUR* tengelyes tükörképe *PBQR*

6. *a)* Hányféle és milyen mozgatással kerülhet az *AB* szakasz a kék szakaszra? Add meg a mozgást zászlós mutatópárral! A mozgás során hová került a cica?

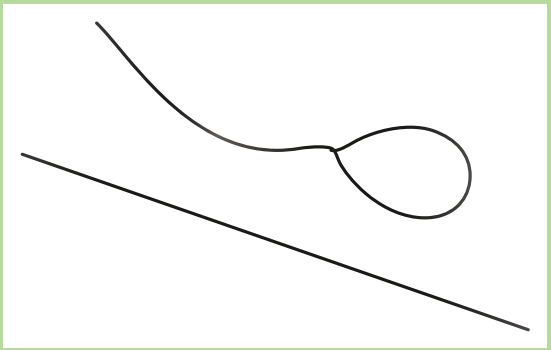


b)



Hányféle és milyen mozgás viheti át a piros kört a kék körbe? Segít, ha elképzeled, hogy hova került a cica! Add meg a mozgást zászlós mutatópárral!

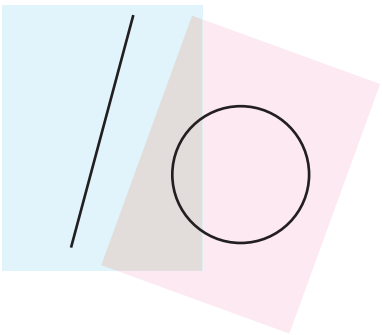
7. Adott a síkon egy egyenes és egy alakzat. Hová kerülhet az alakzat képe, ha azt tudjuk, hogy a mozgás során az egyenes ugyanarra az egyenesre kerül, az általa határolt két félsík pedig helyet cserél?

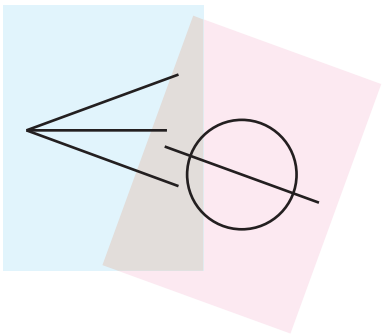


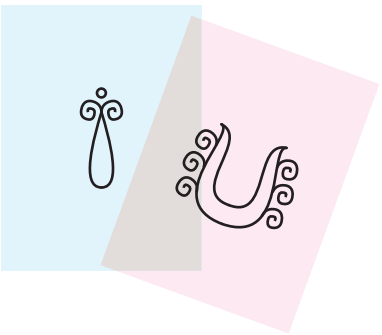
Két alakzat együttes szimmetriái

1. példa

Piros és kék fóliákra rajzoltunk három alakzatpárt.







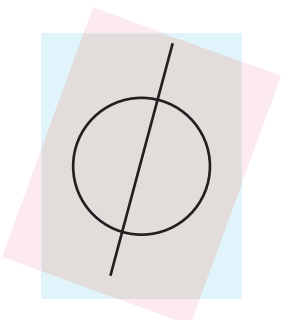
Válasszuk ki az egyik párt, és másoljuk át a hozzá tartozó két képet egy-egy átlátszó papírra!

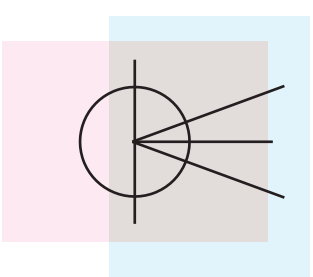
a) Helyezzük egymásra az átlátszó papírokat úgy, hogy az együttes alakzat tengelyesen szimmetrikus legyen!

b) Helyezzük el ezután az átlátszó papírokat úgy, hogy az együttes alakzat ne legyen tengelyesen szimmetrikus!

Megoldás

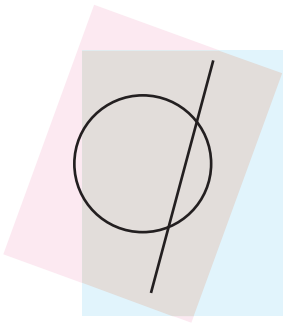
a) Tengelyesen szimmetrikus alakzat lehet például így:

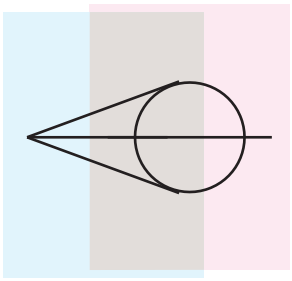


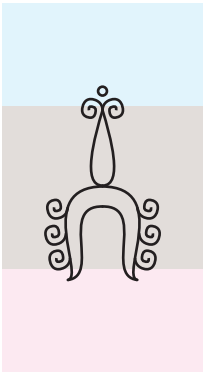




Lehet másképp is:



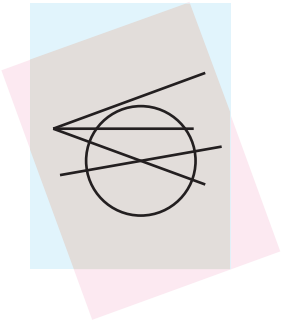


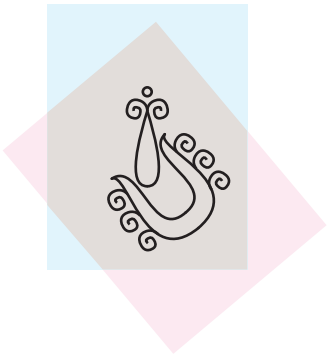


b) Nem tengelyesen szimmetrikus alakzatok például:

Próbáljuk meg elhelyezni az egyenest és a kört úgy, hogy ne alkossanak tengelyesen szimmetrikus együttest!

Sikerül-e?





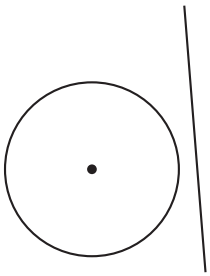
Ha két tengelyesen tükrös részletet úgy teszünk egymásra, hogy tengelyeik egybeesnek, akkor az együttes kép is tengelyesen tükrös.

Kör és egyenes együttes szimmetriái

Figyeljük meg a kör és egyenes együtteséből álló alakzatot!

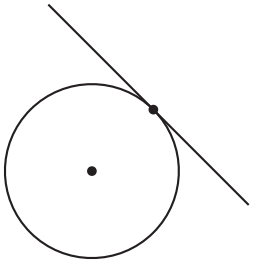
Ez az alakzat a közös pontok száma szerint ilyen lehet:

0 közös pont



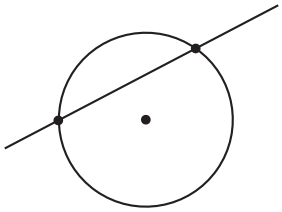
az egyenes a körvonalon kívül halad

1 közös pont



az egyenes érinti a kört

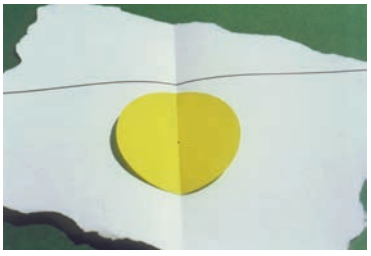
2 közös pont



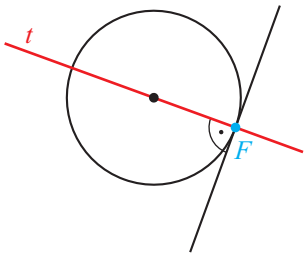
az egyenes metszi a kört

A kör középpontjából az egyenesre bocsátott merőleges közös szimmetriatengelye a körből és az egyenesből álló alakzatnak.

Kör és egyenes együttes alakzata tehát mindig tengelyesen szimmetrikus.

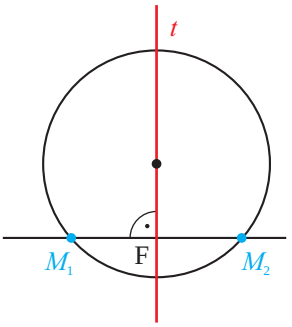


A közös pont képe is közös pont, így a következőket állapíthatjuk meg:



Ha **egy** közös pont van (az egyenes érinti a kört), akkor az érintési pontnak a képe önmaga, így rajta van a szimmetriatengelyen, amely merőleges az egyenesre, és áthalad a középponton.

Ha egy egyenes érint egy kört, akkor az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.



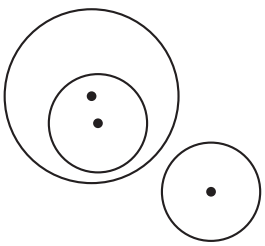
Ha **két** közös pont van – az egyenes metszi a kört –, akkor a közös pontok, M_1 és M_2 egymás tükörképei. A tükörtengely ebben az esetben az M_1M_2 húr felezőmerőlegese, amely az egyenesnek és a körnek közös szimmetriatengelye.

A kör bármely húrjának felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján.

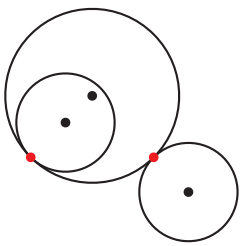
Kör és kör együttes szimmetriái

Figyeljük meg a két kör együtteséből álló alakzatot! A közös pontok száma szerint ilyen esetek lehetnek:

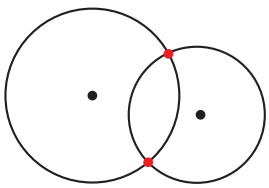
nulla közös pont



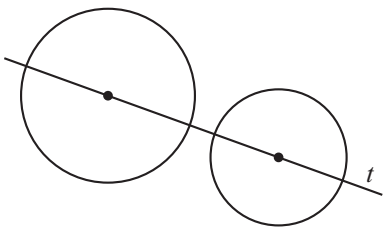
egy közös pont



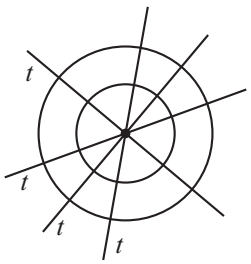
két közös pont



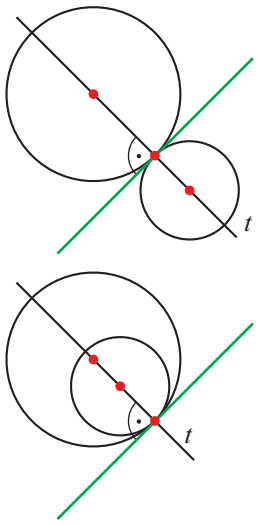
A körök középpontjait összekötő egyenes szimmetriatengelye az együttes alakzatnak.



Ha a két kör középpontja egybeesik, akkor végtelen sok tükörtengely van.



Két kör együttes alakzata mindig tükrös alakzat, tehát minden pontnak van egy szimmetrikus párja. A két kör közös pontjainak tükörképe is közös pont.

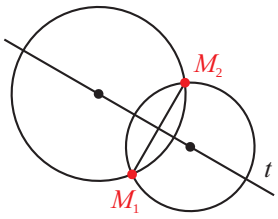


Ha **egy közös pont** van, akkor annak a képe önmaga, tehát rajta van a tengelyen.

Ha a két kör érinti egymást, akkor a két középpont és az érintési pont egy egyenesre esik.

Erre az egyenesre merőleges a közös ponton átmenő közös érintő egyenese.

Ha **két közös pont** van, akkor ezek egymás tükörképei, ezért a tengely a közös húr felezőmerőlegese.



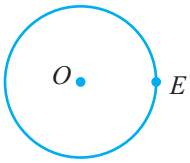
Érintő szerkesztése

2. példa

Szerkesszünk egy kör adott pontjában érintőt a körhöz!

Megoldás

Adatok:

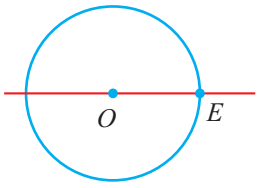


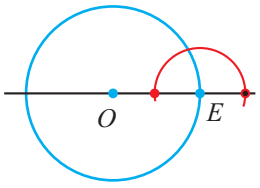


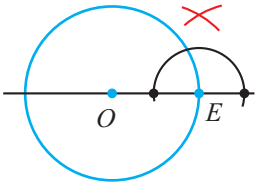
Összefüggések:

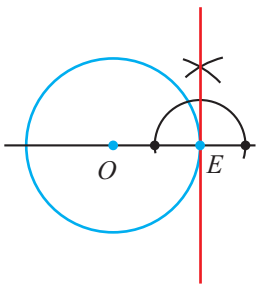
A kör érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.

A szerkesztés lépései:



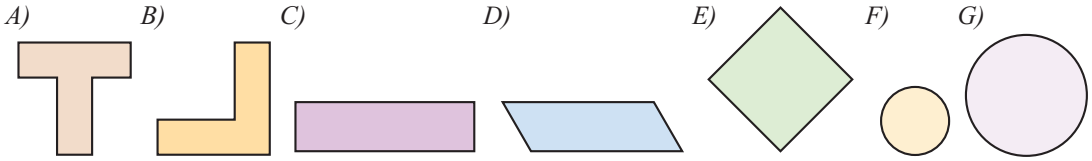






Feladatok

1. Válassz ki kettőt a képen látható alakzatokból! (Keménypapírból kivághatod magadnak az alakzatokat, vagy dolgozhatsz másolópapírral is.)



Helyezd el ezeket úgy, hogy az együttes alakzat

a) tengelyesen szimmetrikus legyen! Melyiket tudod, melyiket nem tudod így elhelyezni?

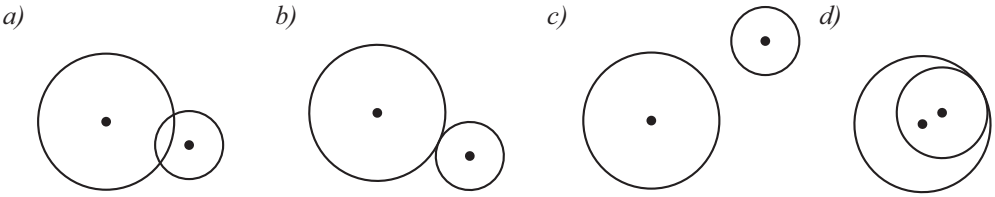
b) tengelyesen ne legyen szimmetrikus! Melyiket tudod, melyiket nem tudod így elhelyezni?

2. Vágj ki papírból két egyenlő szárú háromszöget, mindkettőt 4 cm hosszú alappal. Illeszd össze a két háromszöget az alapjuknál fogva!

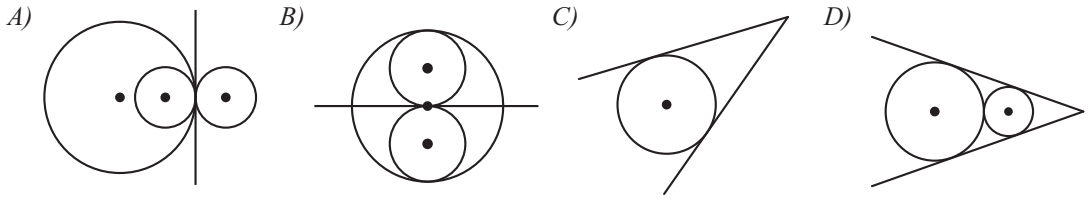
a) Milyen alakzatot kaptál, ha két egybevágó háromszöget vágtál ki?

b) Milyen alakzatot kaptál, ha nem egybevágó háromszögeket vágtál ki?

3. Rajzold meg a két kör közös szimmetriatengelyét!



4. Keresd meg az alakzatok szimmetriatengelyét!



5. Rajzolj vonalzóval egy egyenest, jelöld meg egy pontját! Szerkessz olyan 2 cm sugarú kört, amely a megjelölt pontban érinti az egyenest! Hány kört szerkeszthetsz?

6. Rajzolj körzővel egy 3 cm sugarú kört, jelöld meg a körvonal egy pontját! Szerkessz olyan egyenest, amely a kört a megjelölt pontban érinti!

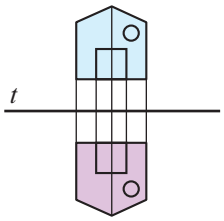
7. Szerkessz egy 3 cm, egy 5 cm és egy 6 cm sugarú kört úgy, hogy közülük legalább kettő érintse egymást, és a középpontjaik egy egyenesre essenek! Keress többféle megoldást!

Nem egybevágósági transzformációk

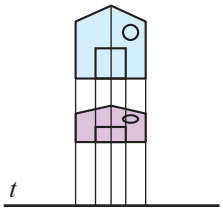
Változik a szabály, változik a kép

Megrajzoltunk egy alakzatot (a házikót), és különböző szabályok alapján a képét is.

a)



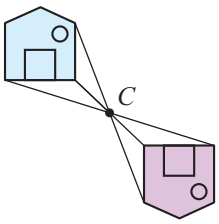
b)



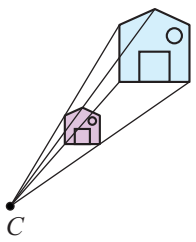
A *b)* esetben az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontból a tengelyre merőlegest bocsátottunk, és erre a tengellyel való metszéspontból felmértük a tengely ugyanazon oldalára a pont és a tengely távolságának felét.

Ez tengelyes tükrözés.

c)



d)



A *d)* esetben az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontot egy megadott ponttal (a centrummal) összekötöttük, és erre a félegyenesre a centrumból kiindulva felmértük a pont és a centrum távolságának felét. (Úgy is mondhatjuk, hogy az alakzatot a centrumból felére kicsinyítettük.)

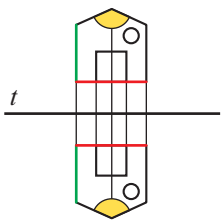
Ez középpontos tükrözés.

1. példa

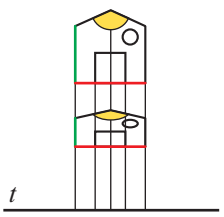
Figyeljük meg, hogyan változnak a távolságok és a szögek az előbbi transzformációkban!

Hasonlítsuk össze a tető hajlásszögét (sárga), a házikó magasságát (zöld) és a házikó szélességét (piros) az eredeti alakzaton és a képén!

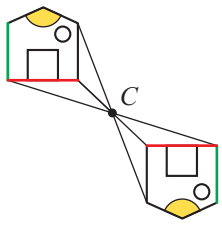
a)



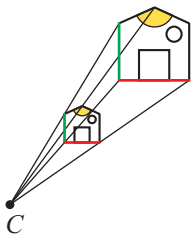
b)



c)



d)



Megoldás

Az *a), c), d)* szabályok esetén a szög nem változik. Bármely megfelelő szögpárra ugyanez teljesül. **Ezek szögtartó transzformációk.**

A *b)* transzformációnál a kijelölt szög megváltozott; ez nem szögtartó transzformáció.

Az *a)* és *c)* esetben a magasság és a szélesség is megegyezik a képével, és ugyanez teljesül bármely más távolságra és a képére is. Ezek **távolságtartó transzformációk, egybevágóságok.**

A *b)* és a *d)* transzformációk nem távolságtartóak. A *d)* esetben azonban a távolságok mindegyike éppen a felére csökken. Ebben az esetben a megfelelő távolságok megváltoznak, de az arányuk (hányadosuk) egyenlő. Ez **aránytartó transzformáció.**

Ez a tulajdonság a *b)* esetben nem teljesül.

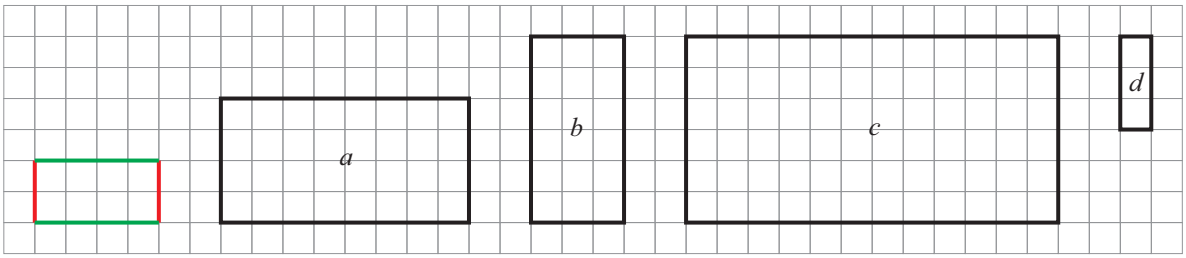
Azokat a transzformációkat, amelyekre igaz az, hogy bármely két pont esetén a képtávolság és az eredeti távolság aránya ugyanannyi, **aránytartó transzformációnak hívjuk.**

Ezek a transzformációk a szögeket nem változtatják meg. A kép az eredetinek nagyított vagy kicsinyített mása, **hasonló** az eredetihez.

Az aránytartó transzformációkat **hasonlóságnak** vagy hasonlósági transzformációnak nevezzük.

2. példa

Válasszuk ki a színes téglalaphoz hasonló téglalapokat! Minden kiválasztott alakzaton színezd egyformán a megfelelő szakaszokat!



Megoldás

A színes téglalaphoz hasonló téglalapok: *a*, *b*, *c*.

Az *a* téglalap mindegyik mérete az eredetinek kétszerese, a **hasonlóság aránya** 2.

A *b* téglalap mindegyik mérete az eredetinek másfélszerese, a **hasonlóság aránya** $\frac{3}{2}$.

Az *c* téglalap mindegyik mérete az eredetinek háromszorosa, a **hasonlóság aránya** 3.

@ Sokszor készülnek makettek meglévő vagy éppen tervezett épületekről. Egy szép gyűjtemény a szarvasi Mini Magyarország makettpark, ahol nemcsak épületek, de működő vasútmodellek is találhatók. Nézz utána, milyen arányú kicsinyítésben láthatók a Mini Magyarország szabadtéri múzeumban a nevezetes épületek!





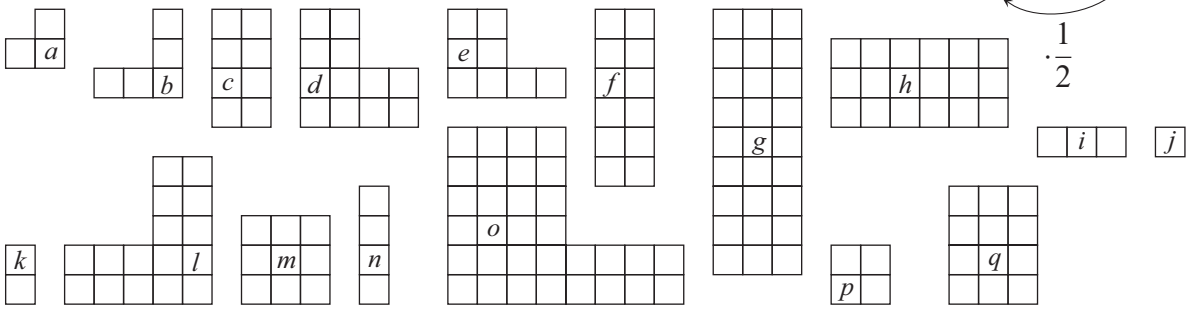




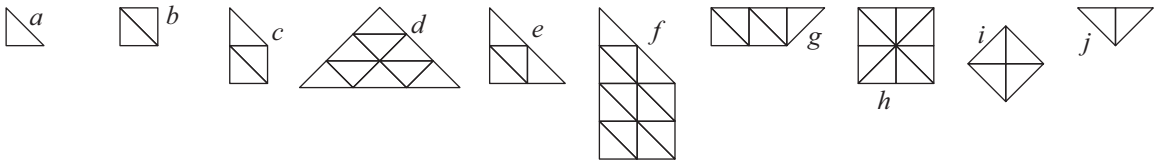
Feladatok

1. Egybevágó kis négyzetlapokból építettünk síkidomokat.
Add meg a hasonló alakzatok betűjelét és a hasonlóság arányát!

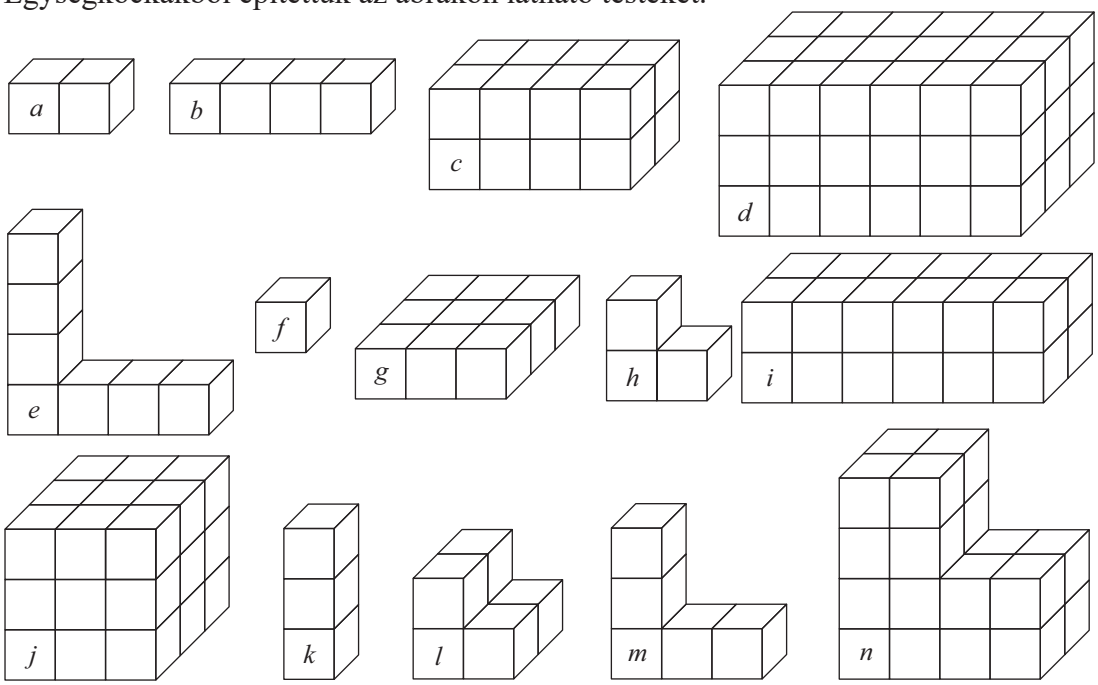
Például: a $\xrightarrow{\cdot 2}$ *d* $\xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}}$ *a*



2. Egybevágó háromszögekből építettünk síkidomokat. Vannak-e közöttük hasonló alakzatok?
Add meg a betűjelüket és a hasonlóság arányát!



3. Egységkockákból építettük az ábrákon látható testeket.



Igazak-e a testekre vonatkozó alábbi állítások?

A: *a* és *b* hasonlóak.

B: *a*-nak 3-szoros nagyítása *b*.

C: *h* és *e* nem hasonlóak.

D: *f*-nek 3-szoros nagyítása *g*.

E: *j* és *f* hasonlóak.

F: *h*-nak 2-szeres nagyítása *n*.

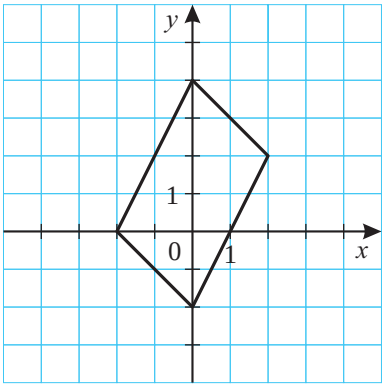
G: *b*-nek 2-szeres nagyítása *i*.

H: *h* kicsinyítése *e*-nek.

I: *a* $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítése *e*-nek.

J: Egyik sem hasonló *k*-hoz.

4. Rajzold meg ezt a paralelogrammát!



Készítsd el a paralelogramma képét a következő szabályok szerint! Minden szabályhoz készíts új ábrát!

Válaszd ki azokat az eseteket, amelyekben a képalakzat hasonló az eredetihez!

a) $(x; y) \mapsto (2x; 2y)$

b) $(x; y) \mapsto \left(-\frac{1}{2}x; -\frac{1}{2}y\right)$

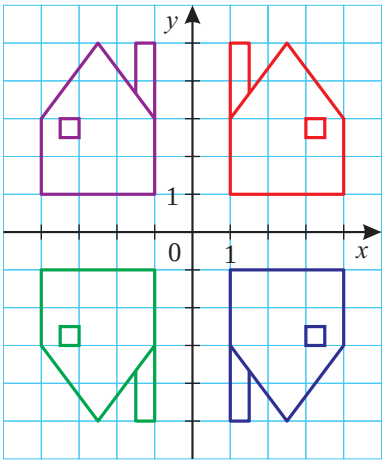
c) $(x; y) \mapsto (x+2; y)$

d) $(x; y) \mapsto (x-1; y+3)$

e) $(x; y) \mapsto (2x+3; 2y+3)$

f) $(x; y) \mapsto (|x|; |y|)$

5. Az $(x; y) \mapsto (-x; y)$ hozzárendelés szerint mozgattuk a sík pontjait.



a) Hová került a piros házikó?

b) Add meg azt a hozzárendelést, amely a piros házikót a kékbe viszi át!

c) Milyen szabály viszi a piros házikót a zöldbe?

d) Milyen szabály viszi a kék házikót a lilába?

6.

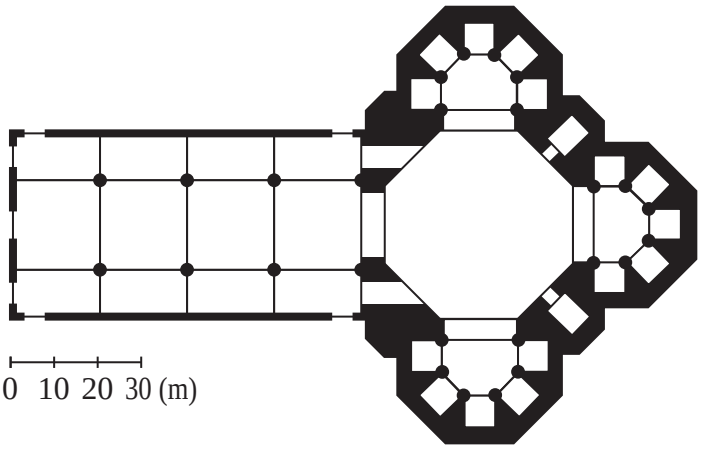


A firenzei dóm (Olaszország)

A firenzei dómról készült fotót látod.

Az alaprajz mellett megadtuk a kicsinyítés léptékét is.

Becsüld meg, milyen hosszú a firenzei dóm! Mérd meg, hogy mekkora a rajzon, és számítsd ki, hogy mekkora a valóságban!



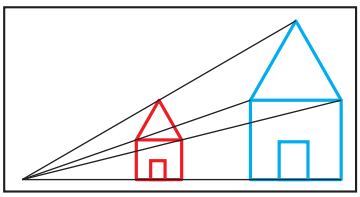
A középpontos hasonlóság képekben



Pontszerű fényforrásból (pici lámpából) induló fénysugárral a kezünk felnagyított árnyékát látjuk a vetítővásznon. Az aránytartó transzformációk – a hasonlóságok – sokfélék lehetnek. Egyik fontos fajtájuk, amikor az alakzatokat egy pontból arányosan nagyítjuk vagy kicsinyítjük.

Bizonyára mindenki látott már vetítést. Ilyenkor egy kicsi, erős fényforrásból kiinduló sugarak kinagyítják az alakzatot. Minél messzebb tesszük a vetítőt a vetítővászontól, annál nagyobb képet láthatunk a vásznon. A kivetített kép nem torzkép, hanem az eredeti kép nagyítása.



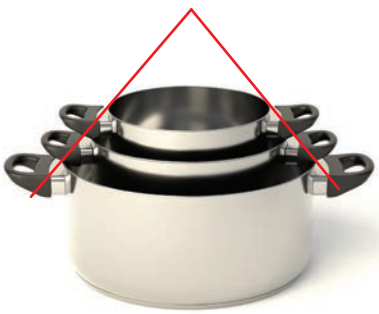


A piros házikó kétszeres nagyítása a kék ház. A kék házat felére kicsinyítve kapjuk a pirosat.

A matrjoska babák mind hasonlók egymáshoz.



A lábosok egymás kicsinyített, illetve nagyított másai.



Szerkesztések

Használjuk a GeoGebra programot!

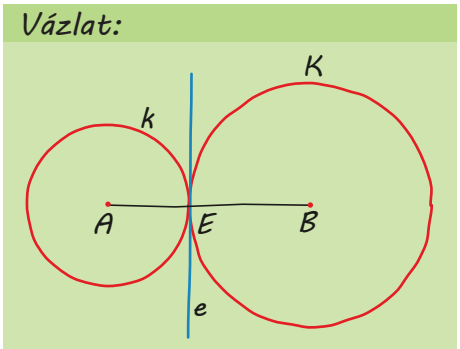
1. példa

Szerkesszük meg két különböző sugarú, egymást érintő kör közös érintőjét az érintési pontjukban!

Megoldás

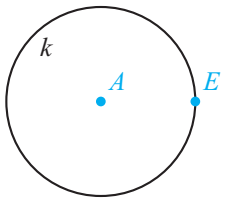
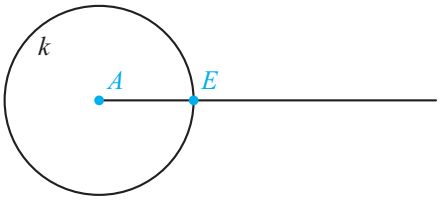
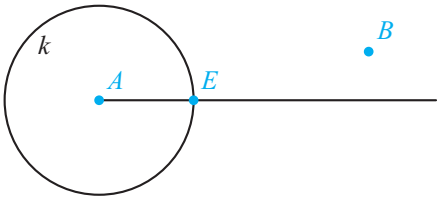
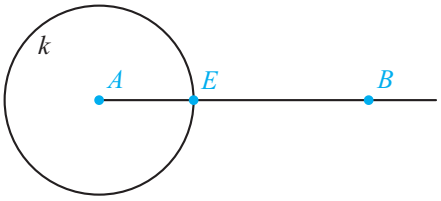
a) A két kör kívülről érinti egymást.

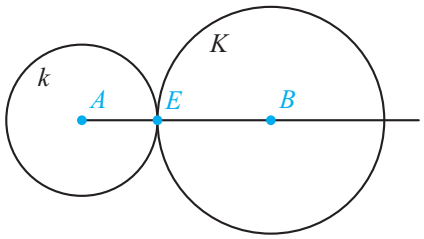
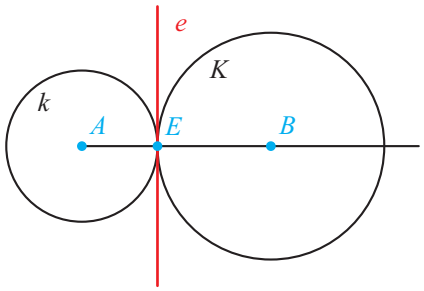
Nevezzük el a feladatban szereplő alakzatokat, és képzeljük el, milyen lenne a keresett érintő!



Összefüggések:

A két egymást érintő kör érintési pontjában húzott közös (*e*) érintő merőleges a két kör középpontját összekötő *AB* szakaszra.

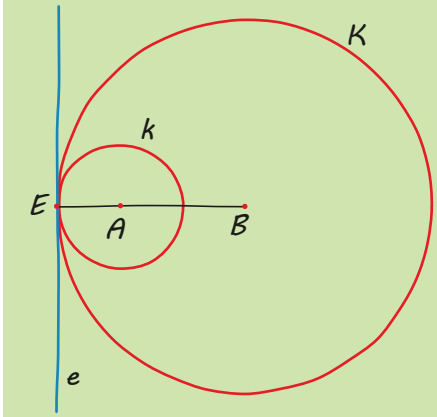
A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
1. *A* középpontú *k* kör felvétele *E* érintési ponttal	Kör középponttal és egy kerületi ponttal 	
2. *AE* félegyenes	Félegyenes 	
3. Tetszőleges *B* pont	Pont 	
4. *B* pont csatolása az *AE* félegyeneshez	Pont alakzathoz csatolása 	

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
5. *B* középpontú *BE* sugarú *K* kör	Kör középponttal és egy kerületi ponttal 	
6. *AB* szakaszra merőleges az *E* pontban → *e* Ez az egyenes mindkét kört érinti az *E* pontban.	Merőleges 	

b) A két kör belülről érinti egymást.

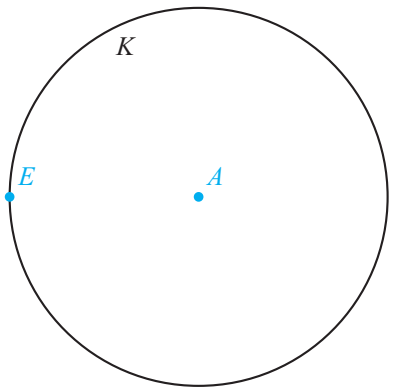
Nevezzük el a feladatban szereplő alakzatokat, és képzeljük el, milyen lenne a keresett érintő!

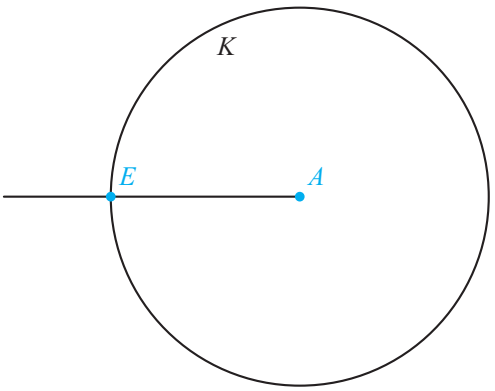
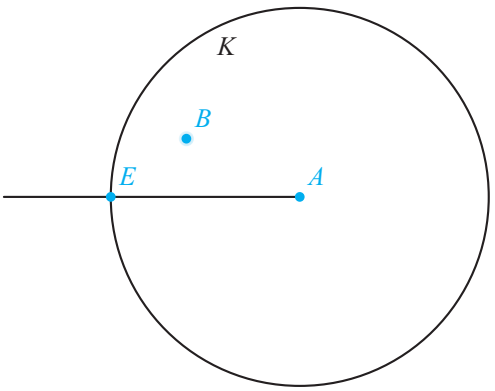
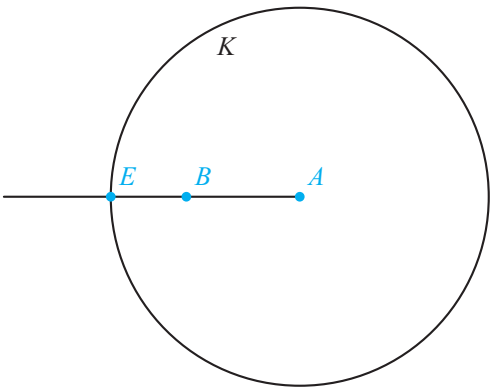
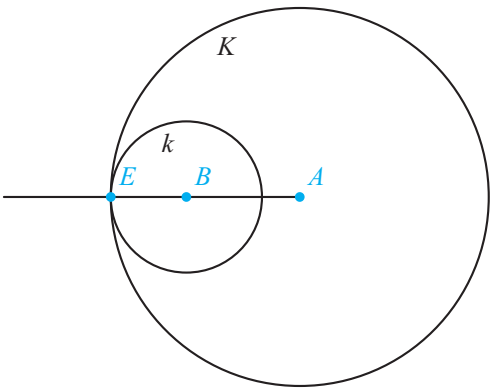
Vázlat:

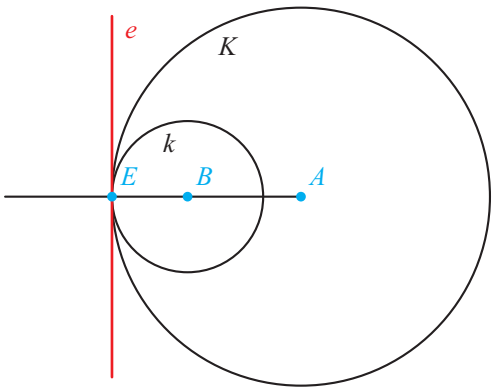


Összefüggések:

A két egymást érintő kör érintési pontjában húzott közös (*e*) érintő merőleges a két kör középpontját összekötő *AB* szakasz egyenesére.

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
1. *A* középpontú *K* kör felvétele *E* érintési ponttal	Kör középponttal és egy kerületi ponttal 	

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
2. *AE* félegyenes	Félegyenes 	
3. Tetszőleges *B* pont	Pont 	
4. *B* pont csatolása az *AE* félegyeneshez	Pont alakzathoz csatolása 	
5. *B* középpontú, *BE* sugarú *k* kör	Kör középponttal és egy kerületi ponttal 	

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
6. *AB* egyenesre merőleges az *E* pontban. Ez az egyenes mindkét kört érinti az *E* pontban.	Merőleges 	

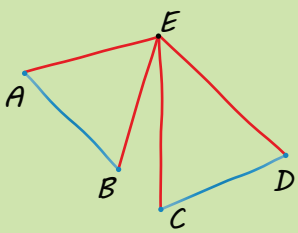
2. példa

Adott az *AB* és a *CD* szakasz. Szerkesszünk föléjük közös csúcsú egyenlő szárú háromszögeket!

Megoldás

Nevezzük el a szakaszokat, és rajzoljuk le, milyen lenne a közös csúcsú két háromszög!

Vázlat:

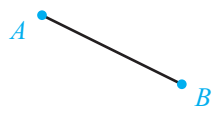
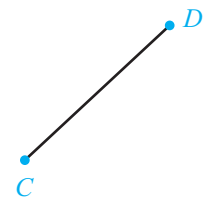
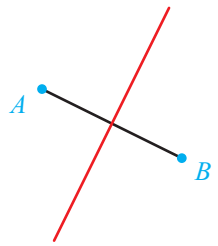


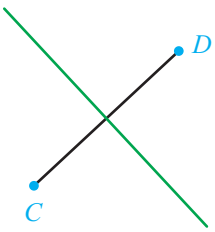
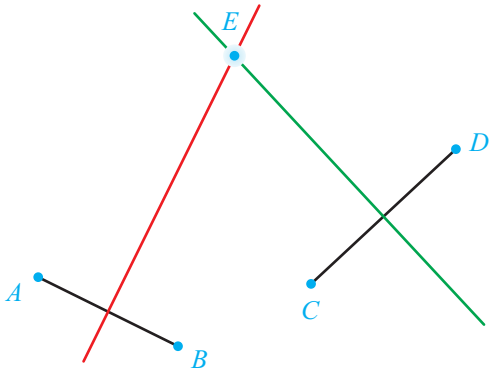
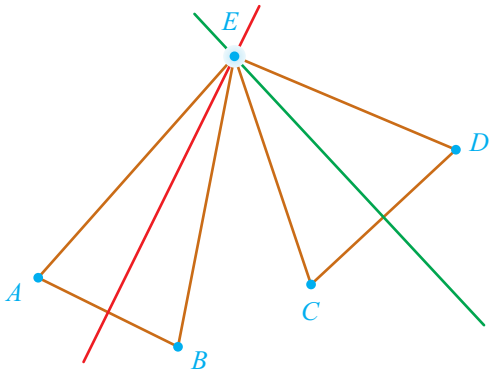
Összefüggések:

ABE háromszög egyenlő szárú, ezért $AE = BE$.

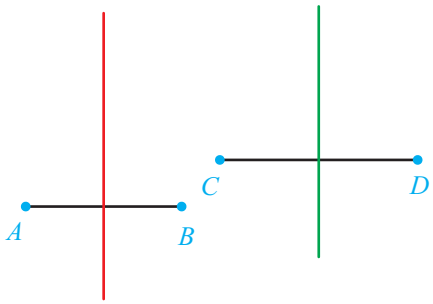
CDE háromszög egyenlő szárú, ezért $CE = DE$.

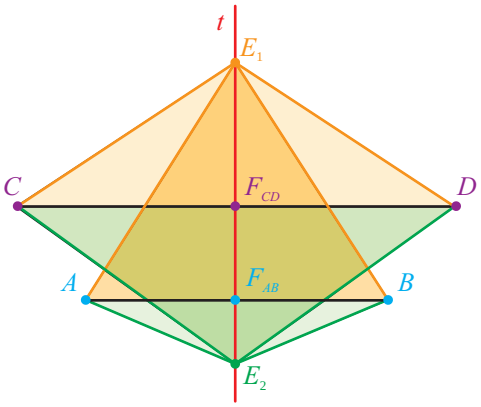
Az *E* közös csúcs rajta van mindkét szakasz felezőmerőlegesén.

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
1. *AB* szakasz	Szakasz 	
2. *CD* szakasz	Szakasz 	
3. *AB* felezőmerőlegese	Szakaszfelező 	

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
4. *CD* felezőmerőlegese	Szakaszfelező 	
5. Mindkét feltételnek eleget tevő pont (*E*) a két felező merőleges metszéspontja.	Metszéspont 	
6. A háromszögek megrajzolása	Sokszög 	

A megoldások számának vizsgálata (diszkusszió)

Nincs megoldás, ha az adott szakaszok párhuzamosak, és a tükörtengelyeik nem esnek egybe.	

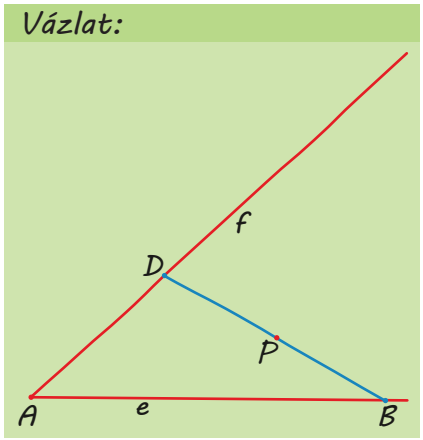
Végtelen sok megoldás van, ha az adott szakaszok párhuzamosak, és a tükörtengelyeik egybeesnek. A közös szimmetriatengelyen az *AB* és *CD* szakasszal közös pontokat kivéve bárhol felvehető az *E* pont. Ezt mozgatással lehet szemléltetni, ha az *E* pontot a *t* tengelyen egérrel vontatjuk lefelé vagy fölfelé.	Mozgatás 	

3. példa

Egy hegyesszög szögtartományában adott egy *P* pont. Szerkesszük meg azt az egyenest, amelynek a szögtartományba eső szakaszát a *P* pont felezi!

Megoldás

Nevezzük el a szögszárakat, és rajzoljuk le, milyen lenne a keresett szakasz!

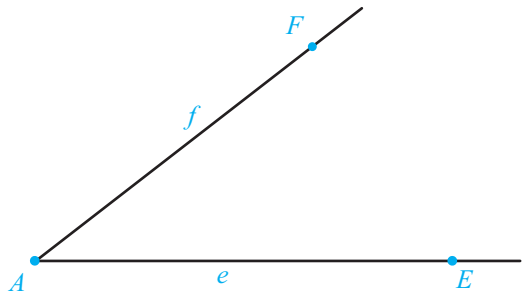


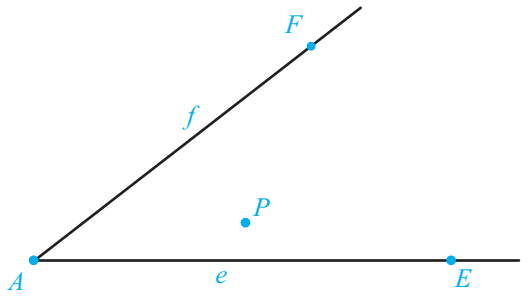
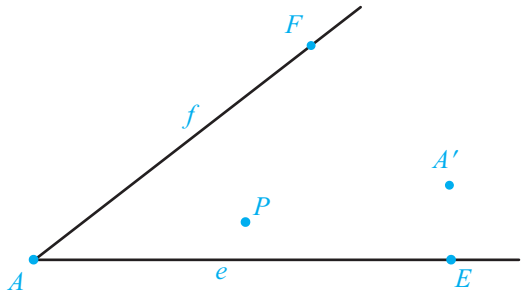
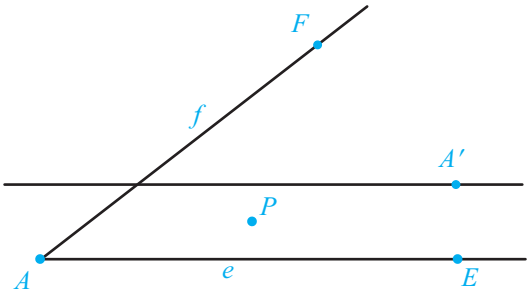
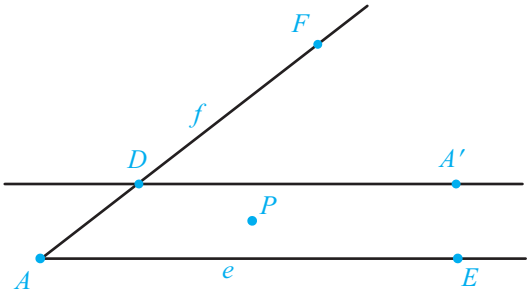
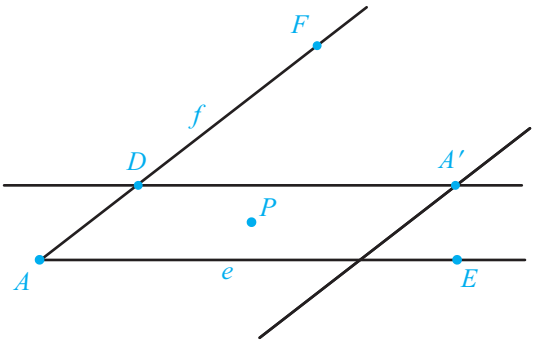
Összefüggések:

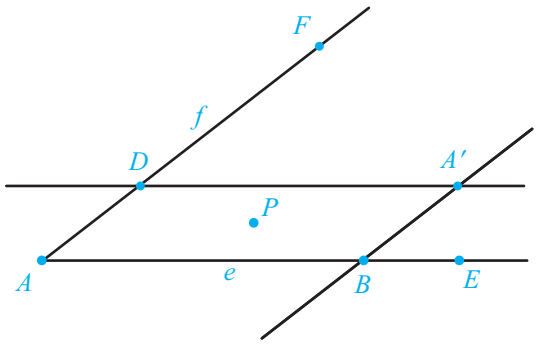
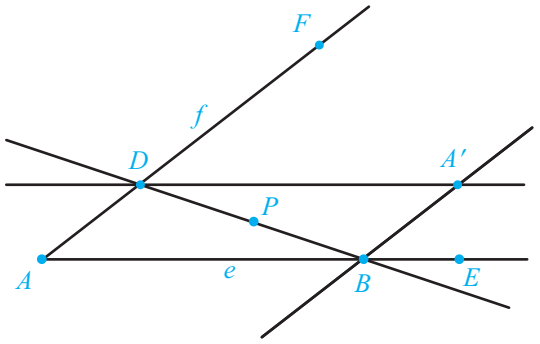
Az *ABD* háromszög *P* pontra vonatkozó tükörképe az eredeti háromszöggel együtt egy olyan *ABA′D* paralelogrammát alkot, amelynek egyik átlója az *AA′*, a másik átlója pedig a *BD* szakasz.

A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a *P* pont felezi a *BD* szakaszt.

Szerkesszük meg az *ABA′D* paralelogrammát!

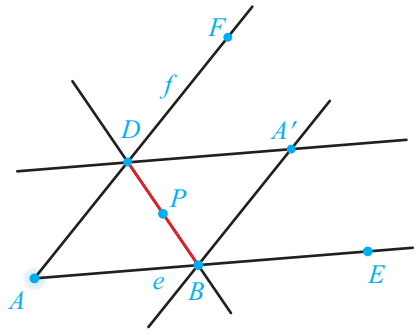
A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
1. *AE* félegyenes, *E* pont az *e* félegyenes tetszőleges pontja	Félegyenes 	
2. *AF* félegyenes, *F* pont az *f* félegyenes tetszőleges pontja	Félegyenes 	

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
3. P pont	Pont 	
4. A pont tükrözése P pontra $\rightarrow A'$ pont	Centrális tükrözés 	
5. e-vel párhuzamos egyenes A'-n át	Párhuzamos 	
6. A párhuzamos egyenes és az f szögszár metszéspontja D	Metszéspont 	
7. f-fel párhuzamos egyenes A'-n át	Párhuzamos 	

A szerkesztés lépései	A programlépés neve és ikonja	Mit látunk a rajzlapon?
8. A párhuzamos egyenes és az *e* szögszár metszéspontja *B*	Metszéspont 	
9. *BD* egyenes	Egyenes 	

Megjegyzés: A 7. és a 8. lépésre valójában nincs szükség, mivel *D* és *P* már meghatározza a keresett egyenest.

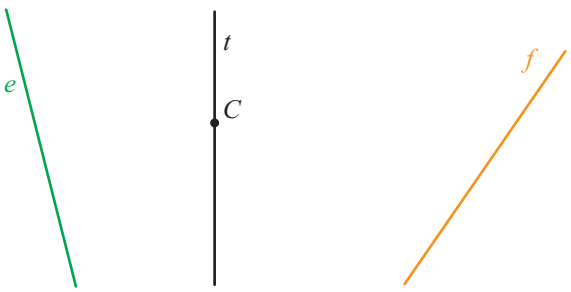
A lehetséges megoldások bemutatása

A *P* pont mozgatásával különböző megoldásokat állíthatunk elő.	Mozgatás 	Például 

4. példa

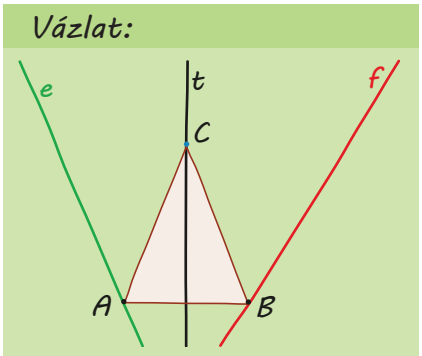
Adott a síkon 3 egyenes, *e*, *f* és *t*, valamint a *t* egyenesen egy *C* pont.

Szerkesszük meg azt az egyenlő szárú háromszöget, amelynek szimmetriatengelye a *t* egyenes, szárainak metszéspontja a *C* pont, az *e* egyenes a háromszög alapjának *A* pontján, az *f* egyenes pedig a *B* pontján halad át!



Megoldás

Rajzoljuk le, milyen lenne a feltételeknek megfelelő háromszög!



Összefüggések:

Az e egyenes áthalad az A ponton.

Az f egyenes áthalad a B ponton.

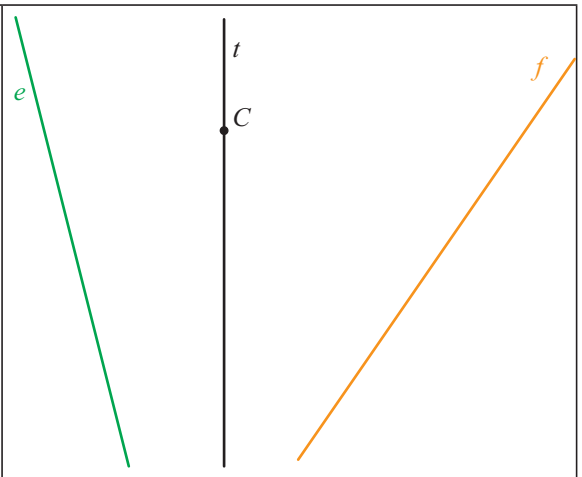
Az A pont t-re vonatkozó tükörképe a B pont.

Az e tükörképe e', ami áthalad a B ponton.

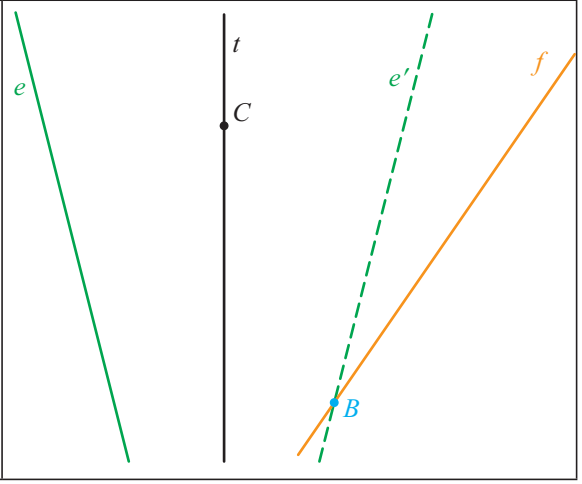
Az e' és az f egyenesek metszéspontja kijelöli a háromszög B csúcsát.

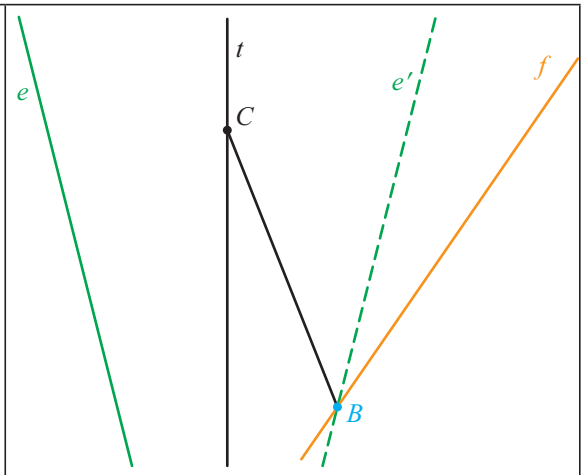
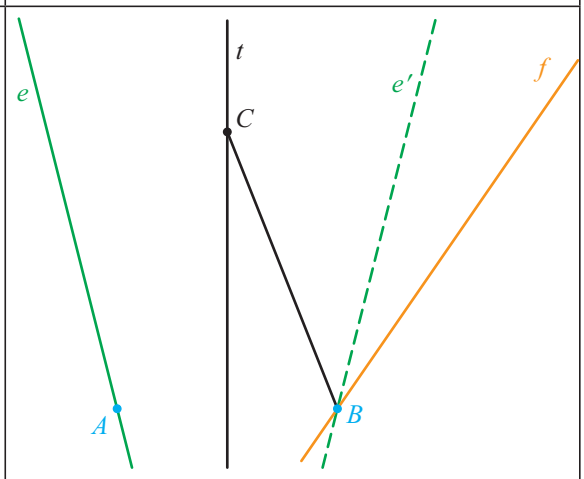
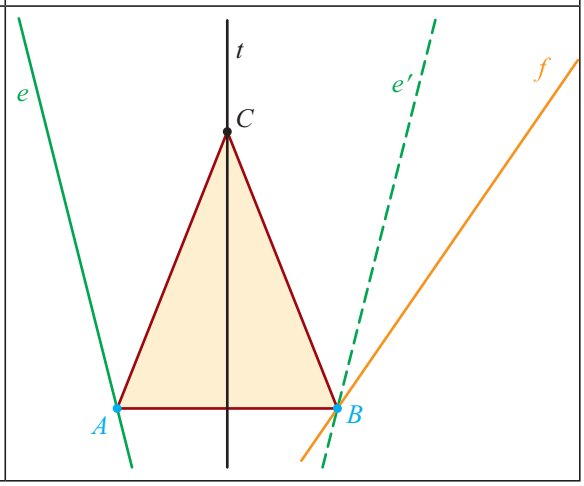
A fenti példák alapján végezzük el a szerkesztést a Geogebra program segítségével!

1. Vegyük fel az adatokat lépésenként!
   1) e egyenes
   2) f egyenes
   3) t egyenes
   4) C pont



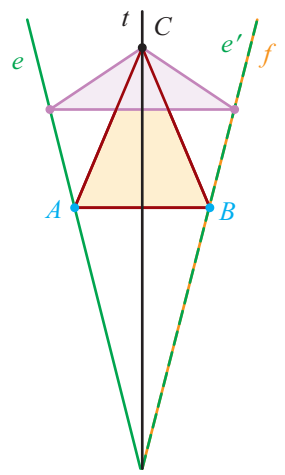
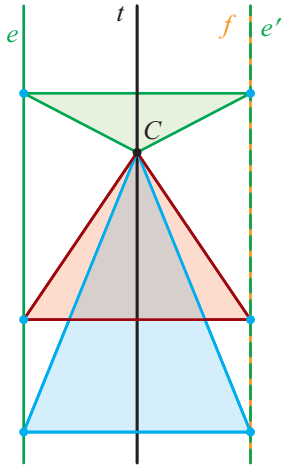
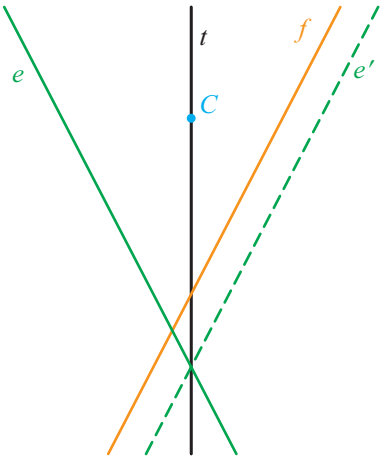
2. Tükrözzük az e egyenest a t tengelyre, és jelöljük meg az e' és f egyenesek B metszéspontját!



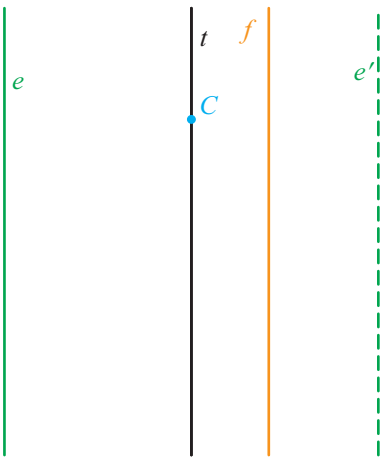
3. Húzzuk meg a BC szakaszt!	
4. Tükrözzük a B pontot a t tengelyre! A tükörkép a háromszög A csúcsa.	
5. Rajzoljuk meg az ABC háromszöget!	

A lehetséges megoldások vizsgálata (diszkusszió)

A GeoGebra rajzlapján az e vagy az f egyenes helyzetének változtatásával meg tudjuk figyelni az e' és f egyenesek helyzetét! *Például:*

1. Az e' és az f egyenes egybeesik. Ilyenkor a feltételeknek megfelelően végtelen sok háromszög szerkeszthető.	
2. A megadott e, f és t párhuzamos egyenesek, t felezi e és f távolságát. Ekkor e' egybeesik f-fel. Ilyenkor is végtelen sok háromszög szerkeszthető.	
3. Az e' és az f egyenes párhuzamosak. Ilyenkor nincs a feltételeknek megfelelő megoldás.	

4. A megadott e, f és t párhuzamos egyenesek, t nem felezi e és f távolságát. Ilyenkor nincs a feltételeknek megfelelő megoldás.



Feladat

A kidolgozott példák alapján GeoGebra programmal oldd meg a feladatot!

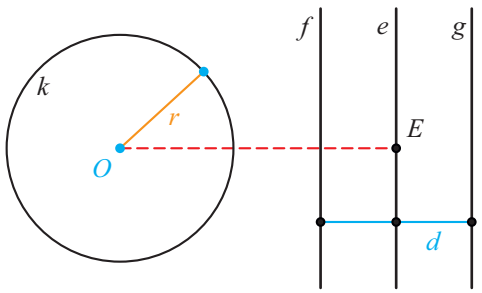
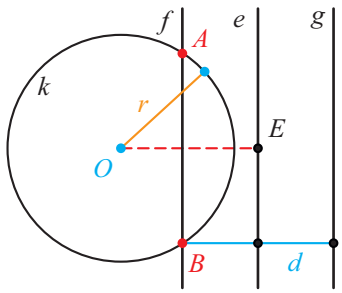
Adott a síkon egy $r = 3$ egység sugarú kör és egy e egyenes. Keresd meg azokat a pontokat a körön, amelyek az e egyenestől $d = 2$ egység távolságra vannak!

A keresett pontok száma az e egyenesnek és a k kör középpontjának OE távolságától függ. Ezt a távolságot változtatva, minden lehetséges módon add meg a feltételeknek megfelelő pontok számát!

a) Készítsd el a GeoGebra rajzlapján a lenti táblázat első oszlopában lévő ábrát!

b) Az e egyenes vontatásával  olvasd le az ábráról a megoldások számát!

Például:

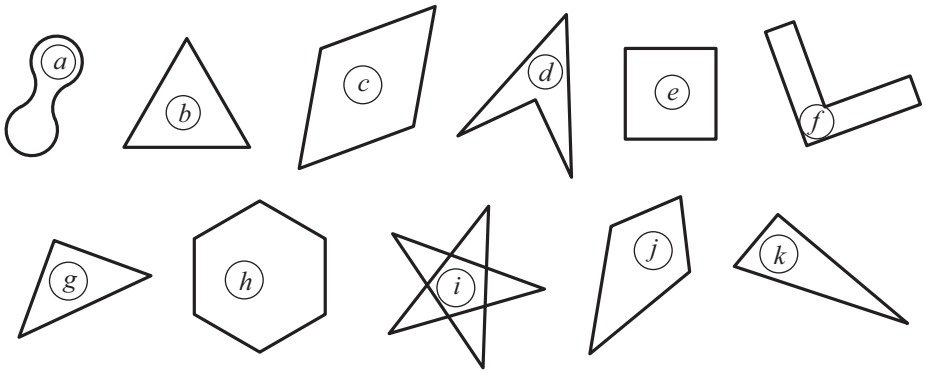
Ezen az ábrán nincs megfelelő pont	Ezen az ábrán két megfelelő pont van: A és B
	

Tudáspróba

1. *a)* Csoportosítsd az alakzatokat szimmetriatengelyeik száma szerint!

1 tengelye van: 2 tengelye van: 3 tengelye van:

4 tengelye van: 4-nél több tengelye van: nincsen tengelye:



b) Melyik alakzatnak van szimmetriaközéppontja? Jelöld meg a rajzon a középpontot!

c) Helyezd el a két egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy a közösen alkotott alakzat is tükrös legyen! Rajzolj többféle megoldást!

2. H betűhöz hasonlító egybevágó csempékkel lefedhető a sík egyrétegűen és hézagmentesen. Ennek a lefedésnek egy részletét rajzoltuk meg, és színeztük ki.

a) Megkaphatjuk-e a fekete csempéből középpontos tükrözéssel a kéket? Ha igen, add meg a tükörközéppontot! (Ebben a feladatban és a következőkben is sokat segíthet a másolópapír használata.)

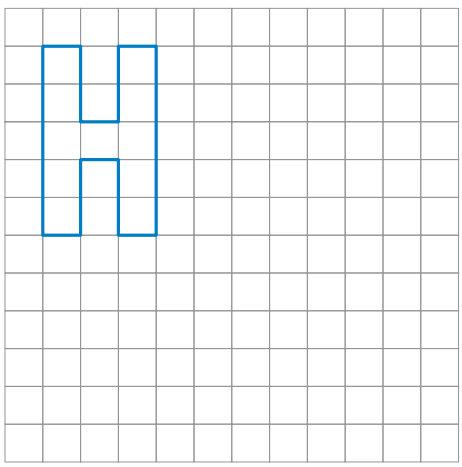
b) Hogyan kerülhet középpontos tükrözéssel a fekete a sárgába? Jelöld meg a középpontot!

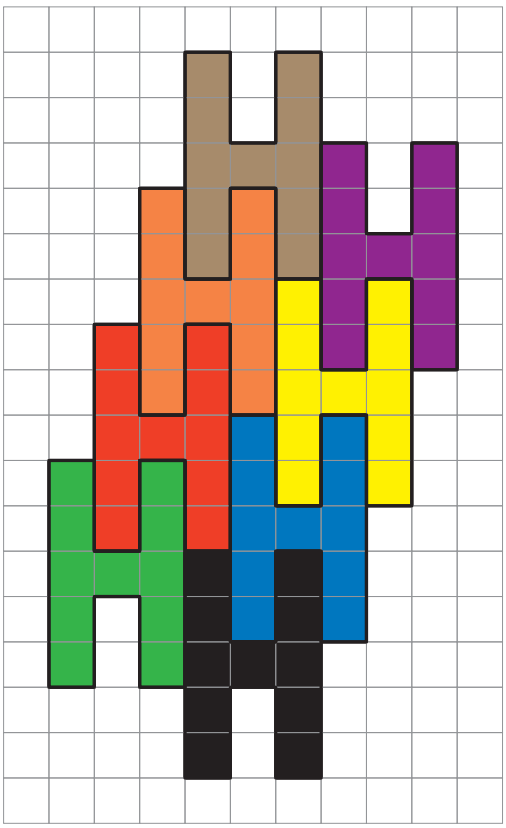
c) Hogyan kerülhet középpontos tükrözéssel a narancssárga a lilába?

d) Mit gondolsz, bármelyik két csempéhez található tükörközéppont?

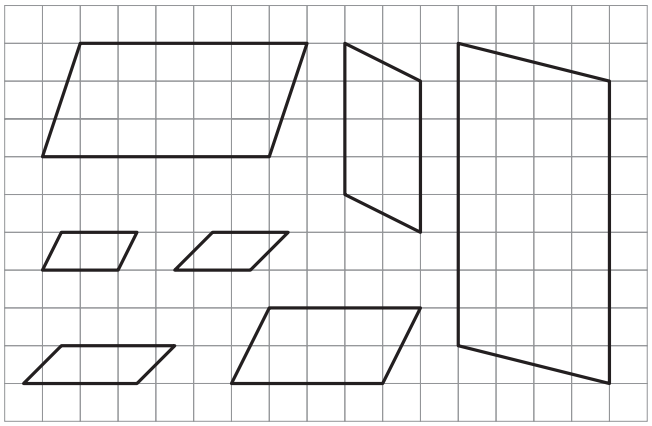
e) Van-e tengelyesen tükrös csempepár a rajzon? Ha találsz ilyet, rajzold be a tükörtengelyt!

f) Rajzold meg az ábrán látható csempe 2-szeresre nagyított képét!





3. Válaszd ki a paralelogrammák közül a hasonlókat! Színezd azonosan a megfelelő oldalaikat! A hasonló párok esetében add meg a hasonlóság arányát!



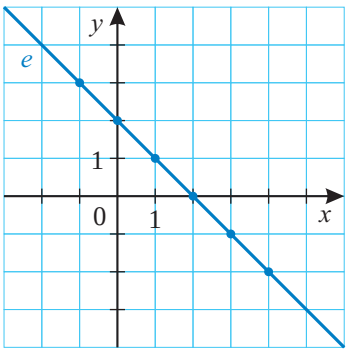
4. Tükrözd az *y* tengelyre a megadott *e* egyenest!

Add meg az egyenesen kijelölt pontok tükörképeinek koordinátáit!

(4; –2) (3; –1) (2; 0) (1; 1) (0; 2) (–1; 3)

Milyen hozzárendelés viszi az *e* egyenest az *y* tengelyre vonatkozó tükörképébe?

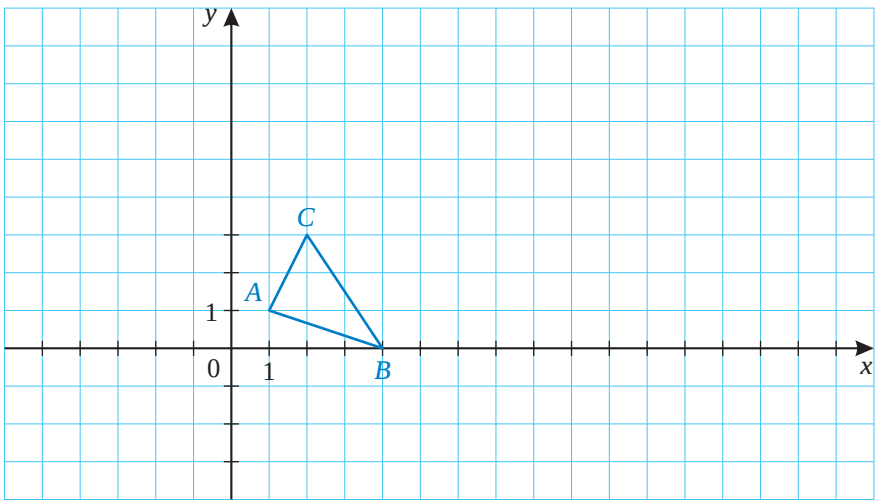
$(x; y) \rightarrow (?; ?)$



5. Megrajzoltuk koordináta-rendszerben az *ABC* háromszöget. A csúcsok koordinátái *A*(1; 1), *B*(4; 0) és *C*(2; 3). Megadtunk öt hozzárendelést (*a)–e)*). Ezek mind a sík pontjait mozgatják.

a) $(x; y) \rightarrow (-x; y)$ *b)* $(x; y) \rightarrow (x; -y)$ *c)* $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

d) $(x; y) \rightarrow (4x; -y)$ *e)* $(x; y) \rightarrow (3x; 3y)$



Rajzold meg az ábrán megadott koordinátarendszerben az *ABC* háromszög képét az *a)-f)* hozzárendeléseknek megfelelően! Melyik hozzárendelés esetében kaptál az eredeti *ABC* háromszöggel

I. egybevágó háromszöget; II. hasonló háromszöget?

Összefoglaló fejezet

Középiskolába készülünk

Számok

1. 6948



a) Írd le betűkkel!
b) Kerekítsd egyesekre, tízesekre, százasokra és ezresekre!
c) Írd le a legnagyobb helyi értéken lévő számjegy ellentettjét!
d) Írd le a legkisebb alaki értékű számjegy reciprokát!
e) Melyik számnál kevesebb 1355-tel?
f) Melyik számnak a 12-szerese?
g) Osztható-e 9-cel, 18-cal, 36-tal, 72-vel?

2. Helyezd el a számoknak megfelelő betűket a számegyenesre! Olvasd ki, hogy mit kaptál!

U = 25% T = $3\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$ N = 1,2-nek a reciproka Á = $\left|-\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right|$

K = 3-nak a $\frac{2}{5}$ része Ó = $0{,}2^2$ J = $-0{,}2^2$ M = $\frac{1}{33}\cdot\frac{11}{5}$

3. Hasonlítsd össze! Tedd ki a $<$, $>$ vagy $=$ jelet!

a) 2 és 3 aránya ☐ $\frac{26}{39}$ *b)* 12-nek a $\frac{3}{4}$ része ☐ 0,75-nak a 12-szerese

c) $\frac{3}{7}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{14}{5}$ ☐ $2\frac{1}{3}:\frac{7}{6}$ *d)* $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ ☐ $2\cdot\frac{2}{5}$

e) $\frac{3}{8}$-nak a 20%-a ☐ $\frac{3}{8}$-nak az $\frac{1}{4}$ része *f)* $-1\frac{3}{7}$ reciproka ☐ $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$

4. „Többet ésszel, mint erővel!” Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{13}{24}\cdot\frac{12}{65}$ *b)* $3\frac{1}{2}:\frac{49}{4}\cdot\frac{7}{8}$ *c)* $\frac{2}{3}:17\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{14}\cdot17$

d) $(-8)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{11}{19}\cdot0\cdot\frac{5}{7}$ *e)* $3\frac{2}{5}:\frac{34}{35}-\frac{35}{34}\cdot\frac{17}{5}$ *f)* $5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$

5. Keresd meg az egyenlőket!

A	B	C	D	E
$2^4\cdot7^4$	1^5+1^5	$6{,}28\cdot10^2$	10^3-372	$(2\cdot7)^4$

F	G	H	I	J	K
2^4+7^4	$0{,}1^4-0{,}0001$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\frac{4^3}{9}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^3$	$-\left(\frac{2}{3}\right)^6$

6. Végezd el a műveleteket! Minden eredménynek egy-egy betű felel meg. Ha jól számoltál, akkor egy közmondás első részét kapod, amelyet bizonyára be tudsz fejezni.

$(-60)\cdot(-3):20\cdot 2$	
180 felének az ellentettje	
$-328+476:2$	
$(-328+476):2$	
$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)$	

$\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2^2}{9}$	
$3\frac{5}{8}$ reciproka	
$-\frac{10}{17}$ reciproka	

$(-60)\cdot(-3):(20:2)$	

$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2^2}{9}$	
$\frac{3}{7}+\frac{5}{4}$	
$\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$	
$\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{5}\right)$ ellentettje	
$\frac{14}{3}\cdot\frac{10}{7}\cdot\frac{9}{5}$	

$3\frac{3}{4}\cdot 4\frac{4}{5}$	

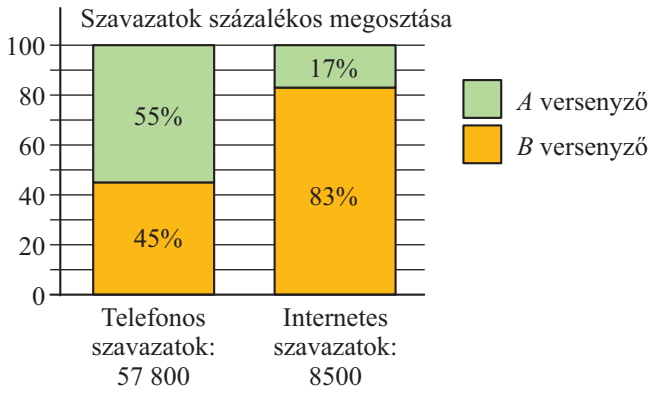
$\frac{7}{3}:2\frac{5}{8}$	
$\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{18}{16}$	
$(0{,}03)^2$	
$-4\frac{1}{5}+2{,}5$	
30-nak a $\frac{3}{5}$ része	

$A=18$ $\quad Á=\frac{8}{29}$ $\quad D=-90$ $\quad G=-\frac{13}{15}$ $\quad I=74$ $\quad J=0$ $\quad K=\frac{8}{9}$

$O=1\frac{19}{28}$ $\quad Ó=12$ $\quad R=-\frac{17}{10}$ $\quad S=-1\frac{3}{20}$ $\quad T=0{,}0009$ $\quad Ú=2$

7. Egy tehetségkutató verseny döntőjében a nézők telefonon és interneten is szavazhatnak a szerintük legjobb műsorszámra. Az a versenyző nyeri a döntőt, aki a legtöbb szavazatot kapja. Az ábrán a telefonos és az internetes szavazatok száma és százalékos megoszlása látható.

Az ábra alapján ki nyerte a döntőt? Válaszodat számítással indokold!



(Kompetenciamérés, 6. évfolyam, 2013)

8. Egy autógyár egyik üzemében előre legyártott alkatrészekből szerelik össze a kész autókat. A gyár napi 14 órát üzemel, és percenként legördül egy új kocsi a szalagról. Melyik műveletsorral lehet kiszámítani, hogy hány nap alatt teljesítenek egy 6000 db autóra leadott rendelést?

Ⓐ $6000:(60\cdot 14)$ Ⓑ $6000:14\cdot 60$ Ⓒ $6000:14$ Ⓓ $6000:(24-14)$

(Kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2014)

9. Írd le matematikai jelekkel, és számítsd ki

a) (-820) és 450 összegének az abszolút értékét,

b) (-820) és 450 abszolút értékeinek összegét,

c) 270 $\frac{5}{9}$ részének a felét,

d) $\frac{3}{4}$ és $\frac{4}{5}$ különbségének a reciprokát,

e) 20-nak a 120%-át,

f) 120-nak a 20%-át,

g) ezzel a tizedes törttel szorzunk, ha valaminek a 0,14%-át számítjuk ki,

h) három és négy arányát!

10. Határozd meg x, y, z értékét, ha

$x = \frac{11}{7} : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7}\right)$, $y = -3 - (5 - 11)$, $z =$ a legnagyobb egyjegyű prímszám!

Számítsd ki a három szám átlagát!

11. Határozd meg az a, b és c értékét, ha $a = 12$ és 18 legkisebb közös többszöröse, $b =$ a legnagyobb kétjegyű négyzetszám, $c =$ a legkisebb kétjegyű prímszám háromszorosa!

Válaszd ki az alábbiak közül az igaz állításokat!

A: A három szám legnagyobb közös osztója a 9.

B: Az $\frac{a+c}{b}$ tört értéke $\frac{4}{27}$-del kisebb az 1-nél.

C: $11 < \frac{2b-a}{\frac{c}{3}} < 12$.

D: Az $\frac{a}{b}$ tört reciproka 2,5.

12. Egy műszaki áruház raktárában 120 darab televízió van. A készlet 15%-a 36 cm képátlójú készülék, 48 darab 72 cm képátlójú, a többi 55 cm képátlójú.

a) A legkisebb képátlójú készülékből hány darab van a raktárban?

b) Az 55 cm képátlójú készülékből hány darab van a raktárban?

c) Hány százalékkal változik a teljes raktárkészlet, ha 21 készüléket eladnak?

13. Egy iskola 375 diákja és 25 tanára megkérdezésével felmérték, hogy három lehetőség közül ki melyik ételt választaná legszívesebben az iskolai menzán. A felmérés eredménye egy hiányosan kitöltött táblázatban található meg.

	Alsósok	Felsősök	Tanárok	Összesen
Rántott csirke krumplival	78		17	220
Főzelék feltéttel		31		70
Túrós tészta	65	43	2	

Számold ki a táblázatból hiányzó számokat, majd döntsd el, hogy melyik állítás igaz és melyik hamis!

a) A megkérdezettek több mint 20%-a választotta a főzeléket feltéttel.

b) Az alsósoknak megközelítőleg 37%-a a túrós tésztát kedveli a legjobban.

c) A főzeléket feltéttel a tanárok választották a legnagyobb arányban.

d) A felsősök több mint negyed része a túrós tésztát kedveli a legjobban.

14. Egy cég vezetése az éves jutalomalapot legeredményesebb dolgozói között akarta szétosztani. A javaslat szerint Andrea, Béla, Csaba és Dénes kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően 1 : 2 : 3 : 4.

Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalomalap ötödét szánták, súlyos hibát követett el. A vezetés úgy döntött, hogy a neki szánt 160 000 forintot is szétosztják a másik három dolgozó között úgy, hogy az ő jutalmaik aránya ne változzon.

a) Név szerint ki nem kap jutalmat a négy dolgozó közül?

b) Hány forint a jutalomalap?

c) A kiosztott jutalmak közül mennyi volt a legkevesebb?

d) Mennyi volt a legnagyobb kiosztott jutalom?

15. A festéküzletben színskála alapján keverik a festékeket. Egy alkalommal 40% fehér, 25% kék és 35% sárga festékből zöld színű festéket állítottak elő.

a) Hány liter kék festék szükséges 16 liter zöld festék elkészítéséhez?

b) Hány liter zöld festék keverhető 8 liter fehér festék felhasználásával?

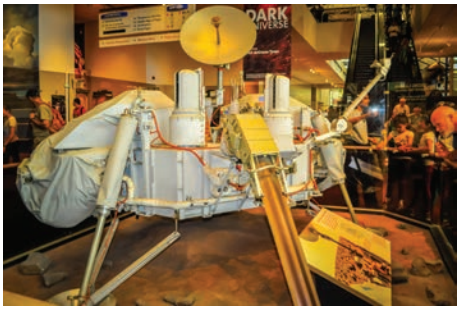
16. A világ öt leggyorsabb, ember által épített eszköze:

1. Helios-2 – 252 792 km/h

A leggyorsabb eszköz a Helios-2 űrszonda volt, amelyik elérte a 252 792 km/h sebességet. A Helios-2-t a NASA és a Német Űrügynökség építette. 1976-ban bocsátották fel, és a 18 hónapra tervezett eszköz sokszorosan túlteljesített, kb. 5 évig működött hibátlanul.

2. Helios-1 – 228 530 km/h

3. Voyager-1 – 62 140 km/h



1977-ben indították útjára a külső Naprendszer felé. Elhaladt a Jupiter és a Szaturnusz mellett is. Ez az első űreszköz, amelyik közeli fényképeket tudott küldeni a két bolygó holdjairól. Távolsága a Naptól már meghaladja a 137 csillagászati egységet (20,5 milliárd km-t).

4. New Horizons – 58 540 km/h

A New Horizons 2015. július 14-én érte el úti célját, a Plútót.

5. Stardust – 46 440 km/h

A szonda küldetése az volt, hogy üstökösök csóvájából részecskéket és szemcséket gyűjtsön.

a) Körülbelül hány napot töltött az űrben a Helios-2 űrszonda?

b) Hány százalékkal volt nagyobb a sebessége a Helios-2 űrszondának, mint a Helios-1-nek?

c) Hány kilométer egy csillagászati egység?

d) Hányszor haladt gyorsabban a Voyager-1, mint a Stardust?

17. Hány darab háromjegyű számot tudsz készíteni a 0, 2, 3, 9 számkártyákból?

A kirakott háromjegyű számok közül hány darab lesz osztható

a) 2-vel,

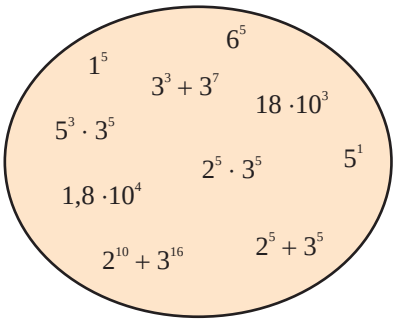
b) 4-gyel,

c) 3-mal,

d) 9-cel?

18. Válassz az alábbi halmaz elemei közül!

a) Páros szám.
b) Öttel osztható szám.
c) Prímszám.
d) Se nem prímszám, se nem összetett szám.
e) Két egymással egyenlő szám.
f) A 18 pontosan 1000-szer van meg benne.
g) Osztható 3^3-nal.



19. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek kétszerese négyzetszám, háromszorosa pedig köbszám?

20. Adott két természetes szám: $k = 495$, $m = 1275$. Készítsd el k és m prímtényezős felbontását! Mit kapunk eredményül, ha a k számot elosztjuk k és m legnagyobb közös osztójával?

21. Az autóbusz-végállomásról a 7-es buszokat 5 percenként, a 15-ös buszokat 6 percenként, míg a gyorsjáratú 110E-t csak 11 percenként indítják. Reggel 5-kor egyszerre indul a fenti három budapesti járat. Válaszd ki a felsoroltak közül a helyes állítást vagy állításokat!

a) A 7-es és 15-ös buszokra vonatkozó állítások:

A) Minden egész órában egyszerre indítják őket.

B) A nap folyamán legalább 50-szer indulnak együtt.

C) Pontosan 48-szor indulnak együtt.

D) Minden órában háromszor van közös indulásuk.

b) Mindhárom járatra vonatkozó állítások:

A) Legközelebb 220 perc múlva indul egyszerre a három járat.

B) A nap folyamán kétszer indulnak egyszerre.

C) A nap folyamán 4-szer indulnak egyszerre.

D) Legközelebb 5,5 óra múlva indulnak egyszerre.

Betűs kifejezések



1. Keresd a párját!

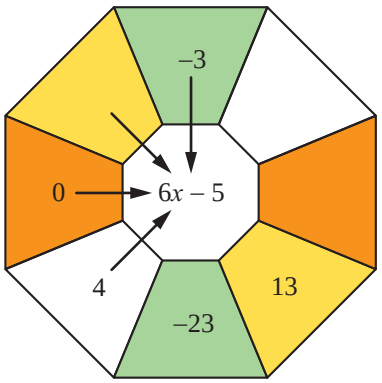
A) $8a-7a+12a+3a$	*B)* $8a-(7a+12a+3a)$	*C)* $8a-(7a-12a)+3a$	*D)* $8-7a+12a+3a$	*E)* $8a-7+12a+3a$	*F)* $12a-(7a-3a)+8$

a) $16a$	*b)* $23a-7$	*c)* $-14a$	*d)* $8(a+1)$

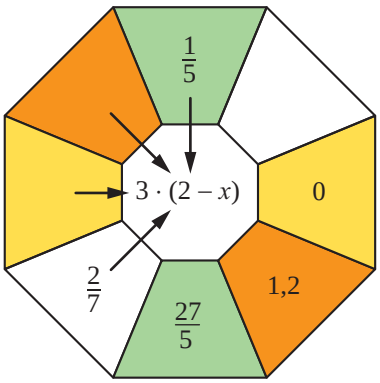
2. Milyen számok kerülnek az üresen hagyott helyekre?

A zöld minta alapján dolgozz!

a)



b)



3. Mennyi az $[a-(b-c)]-[(a-b)-c]$ kifejezés értéke, ha $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$ és $c=\frac{1}{6}$?

A megadott 5 válasz közül pontosan egy helyes. Válaszd ki a betűjelét!

A: $-\frac{2}{3}$ **B:** 0 **C:** $-\frac{1}{3}$ **D:** $\frac{1}{3}$ **E:** $\frac{1}{2}$

4. Írd le betűs kifejezésekkel a mondatokat!

a) Egy családban a férj 8 évvel idősebb a feleségénél. Ha a férj életkora *f*, akkor mennyi a feleségé, és mennyi kettőjük életkorának az összege?

b) Öt szomszédos egész szám közül a középső *k*. Írd le a másik négy egészet is, és írd fel az összegüket!

c) Két szám különbsége 4. A kisebbet *k*-val jelöljük. Írd fel a nagyobb számot és a két szám számtani közepét!

d) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 14. A tízesek helyén *t* áll. Mi áll az egyesek helyén? Milyen értéket vehet fel a *t*?

5. *a)* Számold ki a következő kifejezések helyettesítési értékét!

A) $x=\frac{1}{2}$, $y=2$ esetén $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y^2$ *B)* $a=-2$, $b=6$ esetén $\left|3a+\frac{1}{2}b\right|$

C) $a=5$, $b=2$ esetén $0{,}5a-(2b)^2$

b) Írd le csökkenő sorrendben a kiszámolt helyettesítési értékeket!

6. Az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül melyik behelyettesítése esetén lesz az alábbi három állítás közül mindegyik igaz, pontosan egy hamis, pontosan kettő hamis vagy mindegyik hamis?

a) x egész szám *b)* $x+\frac{1}{x}$ egész szám *c)* x^2-3x negatív egész szám

7. Melyik nem ugyanakkora részét adja a *p*-nek, mint az *A*?

A	*p*-nek a 125%-a			
a)	*p*-nek az $\frac{5}{4}$ része	*b)*	$\frac{5p}{4}$	*c)* $\frac{4p}{5}$
d)	$p:\frac{4}{5}$	*e)*	$\frac{p\cdot 125}{100}$	*f)* $p+\frac{1}{4}$
g)	$2p-\frac{3}{4}p$	*h)*	$\frac{p\cdot 100}{125}$	

8. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $7x-9+4x=3x-3+12+9x$

b) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-5=\frac{x}{3}-\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{3x-4}{5}+8=12$

d) $3x-7(x-1)=7-4x$

e) $8-\frac{3x-4}{5}=12$

f) $\frac{1}{3}(x-6)-2(x+5)=6(x-2)$

9. *a)* Oldd meg az egyenletet az egész számok halmazán!

$$\frac{10-(x-6)}{3}=2-\frac{x-6}{2}$$

b) Oldd meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$\frac{3x+1}{14}-\frac{x-5}{6}=\frac{2x-11}{7}+\frac{x}{21}$$

10. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $3(8x-4)-(3-2x)=5(3x-4)-2(x+3)$

b) $\frac{3x-1}{5}-\frac{2-7x}{3}=5-\frac{4x-9}{15}$

c) $\frac{x+1}{4}+\frac{3-2x}{2}=\frac{1}{4}-\frac{x-2}{3}$

11. Az alábbi négy egyenletet [*a), b), c)* és *d)*] megoldottuk a valós számok halmazán. Azt tapasztaltuk, hogy pontosan két egyenletnek azonos a megoldáshalmaza. Melyik ez a két egyenlet?

a) $3x-5=7-3x$

b) $2-\left\{2-\left[2x-(x-2)\right]+\frac{x}{2}\right\}=\frac{x}{2}$

c) $\frac{1}{x}=\frac{3}{x}+1$

d) $\frac{x+1}{3}-\frac{4-3x}{2}=x$

A: *a)* és *b)* **B:** *a)* és *c)* **C:** *a)* és d) **D:** *b)* és *c)* **E:** *b)* és *d)*

12. Az öttusaversenyek első száma a vívás. Minden versenyző mindenkivel egy mérkőzést vív, és 25 győzelem 1000 pontot ér. Ahánnyal több győzelmet ér el ennél egy versenyző, annyiszor 24 ponttal nő, ahánnyal kevesebbet, annyiszor 24 ponttal csökken az 1000 pont.

Hány mérkőzést nyert meg az a sportoló, aki 880 pontot szerzett? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetők legyenek!

(Kompetenciamérés, 6. évfolyam, 2014)

13. *Euler* (1707–1783) svájci matematikus feladata:

Egy apa 1600 koronát hagyott három fiára. A végrendeletében meghagyta, hogy a legidősebb fiú jussa 200 koronával több legyen a középsőénél, a középsőé pedig 100 koronával több, mint a legkisebbé. Számítsd ki a fiúk örökségét!

14. Az egyetemen az egyik tantárgyból akkor lehet ötöst kapni, ha a tesztek összesített eredménye eléri a maximális pontok 85%-át. Zsófinak eddig 92 pontja van, és még egy 50 pontos teszt megírása van hátra.

Legalább hány pontot kell elérnie Zsófinak az utolsó teszten, hogy meglegyen az ötöse, ha az év végére megszerezhető pontok maximális száma 160? Válaszd ki a helyes válasz betűjelét!

Ⓐ 50 Ⓑ 44 Ⓒ 42 Ⓓ Már biztosan nem kaphat ötöst.

(Kompetenciamérés, 10. évfolyam, 2014)

15. Tíz egymást követő páros szám összege 50.

a) Az összeadott számok közül melyik a legkisebb?

b) Az összeadott számok közül melyik a legnagyobb?

c) Mennyi a két említett szám számtani közepe?

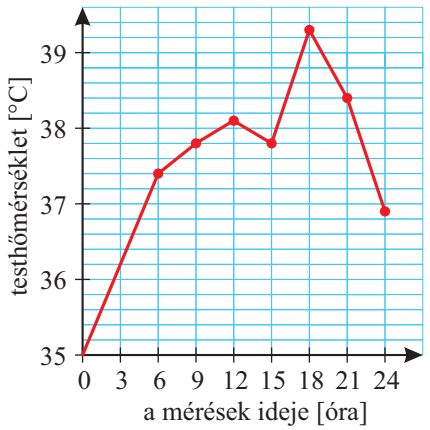
16. Egy néptáncegyüttesben háromszor annyi a fiú, mint a lány. Egy előadáson közülük nyolc pár lép fel. A fel nem lépők között ötször annyi a fiú, mint lány. Hány fiú és hány leány tagja van az együttesnek?

17. Egy ruha árának ötöde a kereskedő haszna. Ha megemelné az árat 2000 Ft-tal, akkor már az ár harmada lenne a haszna. Mennyi a ruha ára?



Hozzárendelések, grafikonok, statisztika

1. Pisti tüdőgyulladást kapott, és kórházba került. A lázát reggel hat órától éjfélig háromóránként mérték, és az itt látható lázlapon ábrázolták. Válaszolj a grafikon alapján az alábbi kérdésekre:



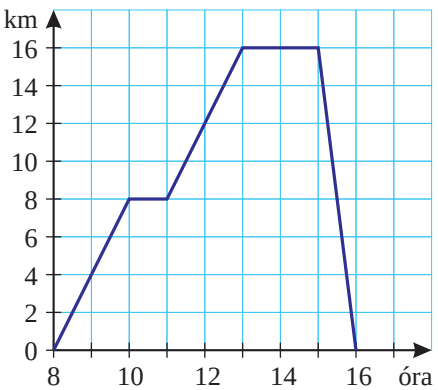
a) Mekkora volt Pisti legmagasabb hőmérséklete? (A választ egy tizedesjegy pontossággal add meg!)

b) Melyik mérési időpontokban volt legalább 38,1 °C Pisti láza? (Minden ilyen időpontot sorolj fel!)

c) Hány °C volt a legkisebb eltérés két egymást követő mérés között? (A választ egy tizedesjegy pontossággal add meg!)

d) Melyik két egymást követő mérés között változott Pisti láza 0,9 °C-ot?

2. Egy nyolcadikos osztály egynapos kirándulásáról készült a grafikon, melynek alapján válaszolj az alábbi kérdésekre!



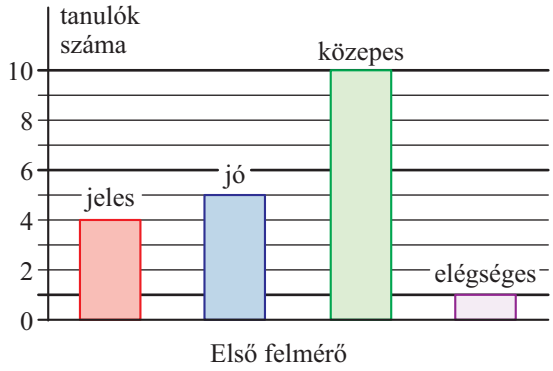
a) Hány órakor indultak a gyerekek?

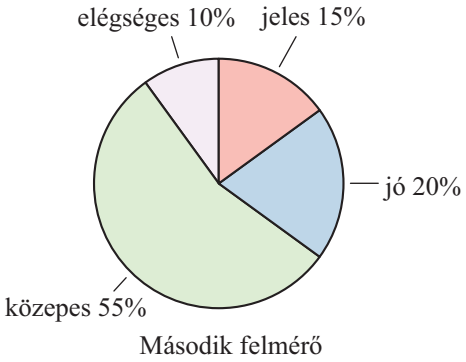
b) Hány órás volt a kirándulás, és hány km-t tettek meg?

c) Hányszor tartottak pihenőt, és összesen mennyi ideig pihentek?

d) Mennyi idő alatt értek vissza a kirándulás végpontjától a kiindulási helyükre? Vajon miért értek olyan gyorsan vissza?

3. A 8. osztályosok két felmérőt írtak, mindkettőt 20 tanuló írta meg. Az eredményeket az alábbi diagramok mutatják.





a) Hány közepes volt a második felmérőben?

b) Az első felmérőben hány százalék volt a jó osztályzatú?

c) Melyik felmérőben volt több jeles?

d) A második felmérőben mennyivel volt több közepes osztályzat, mint jeles?

4. A következő diagramon négy iskola (*A*, *B*, *C*, *D*) nyolcadik osztályainak felvételi eredményei láthatók matematikából és anyanyelvből.

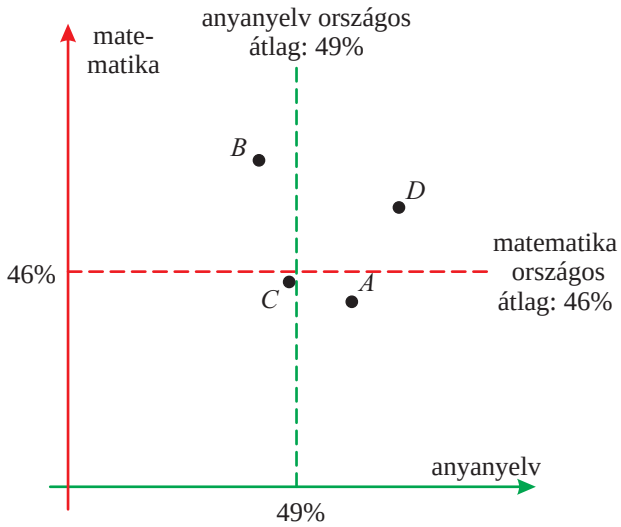
A diagram adatai alapján döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

A) Az *A* iskola mindkét tantárgyból az országos átlag alatt teljesített.

B) A *B* iskola jobb eredményt ért el anyanyelvből, mint a *D* iskola.

C) A *C* iskola eredménye mindkét tantárgyból az országos átlag közelében volt.

D) A *D* iskola mindkét tantárgyból jobb eredményt ért el, mint a többi iskola.



(Kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2014)

5. A kosárlabdát 5-5 fős csapatokban játsszák. Amelyik csapat betalál a kosárba, az 2 pontot kap. Ha a dobás távolról volt sikeres, akkor az 3 pontot ér. A szabálytalanságok után büntetődobás jár a sértett játékosnak, amit ha bedob, 1 pontot szerez.

Peti a legutóbbi meccsen 5-ször szerzett 2 pontot, sikerült 1 hárompontosat bedobnia, és kétszer is bedobta a büntetődobásait.

a) Mennyi volt Peti egy dobásra jutó átlagpontszáma?

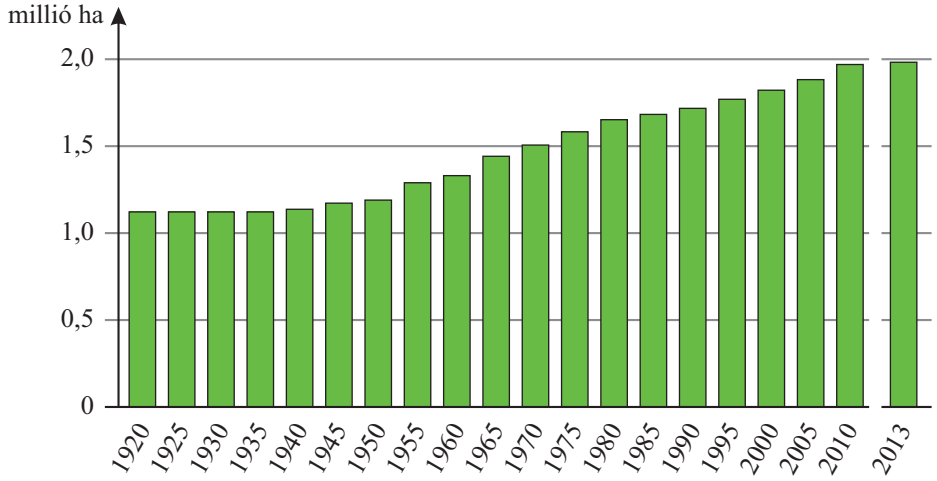
b) Mi volt dobásainak módusza és mediánja?

c) A következő meccsen Peti ugyanannyi pontot szerzett, mint az előzőn, és most is két sikeres büntetője volt. A többi pontot milyen összetételben tudta bedobni?



6. *a)* Mit mondhatunk az erdőterület változásáról 1920–2013 között? Körülbelül hány százalékos az erdőállomány növekedése a feltüntetett időszakban?

Az erdőterület változása 1920–2013 között



b) Mennyi az átlaga a legkisebb és a legnagyobb erdőterületnek?

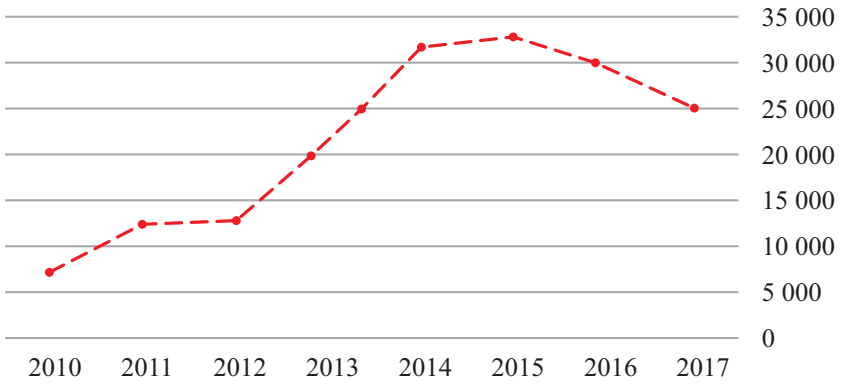
c) Mekkora az erdőterület átlagos értéke?

d) Mekkora a grafikon alapján az erdőterületek mediánja?

e) Hasonlítsátok össze a *b), c), d)* feladatban kapott középértékeket!

7. Az KSH kivándorlásról készült grafikonja alapján válaszolj az alábbi kérdésekre!

A magyar állampolgárok
kivándorlása 2010-től (fő/év)



Forrás: KSH

a) Mennyi a kivándorlók egy évre jutó átlagos száma 2010 és 2017 között?

b) Hány százalékkal vándoroltak ki többen 2015-ben, mint 2010-ben?

c) Mennyi az adatok mediánja?

8. Minden számhoz rendeld hozzá *a)* az ellentettjét *b)* a négyzetét!

7 0 1,2 $2+\frac{1}{3}$ $3-\frac{2}{5}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

9. A derékszögű háromszög két befogójának hosszához rendeld hozzá az átfogó hosszát! Megfordítható-e ez a hozzárendelési utasítás?

a) $a = 3$ cm és $b = 4$ cm *b)* $a = 6$ cm és $b = 8$ cm

10. Ábrázold koordináta-rendszerben az $A(1; -3)$, $B(5; 2)$ és a $C(1; 2)$ pontokat, és kösd össze azokat!

a) A pontokat tükrözd az y tengelyre – pirossal rajzolj!

b) Az *a)* feladatban kapott pontokhoz rendeld hozzá azoknak az x tengelyre tükrözött képét – kékkel rajzolj!

c) Tetszőleges $P(x; y)$ ponttal hajtsd végre a két transzformációt! Van-e helyben maradó pont az egyes transzformációknál?

Töltsd ki a táblázatot a füzetedben! Tudsz-e mondani olyan hozzárendelési utasítást, amely az eredeti pontokhoz a kék színűeket rendeli hozzá?

Eredeti	$A(1; -3)$	$B(5; 2)$	$C(1; 2)$	$P(x; y)$
a)	$A(\ ;\ )$	$B(\ ;\ )$	$C(\ ;\ )$	$P(\ ;\ )$
b)	$A(\ ;\ )$	$B(\ ;\ )$	$C(\ ;\ )$	$P(\ ;\ )$

11. Édesanya rakott krumplit főz ebédre. A krumpli főzésének melyik szakaszát látod az egyes grafikonokon?

a) Elkezdte hámozni.

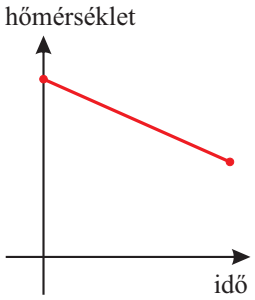
b) Feltette a krumplit főni.

c) Egyenletesen forr a víz.

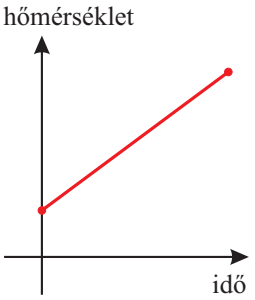
d) Vízcsap alá teszi a főtt krumplit, hogy hűljön.



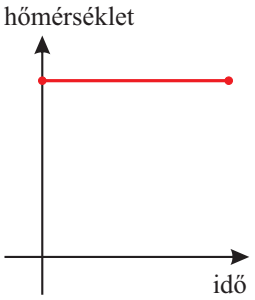
A)



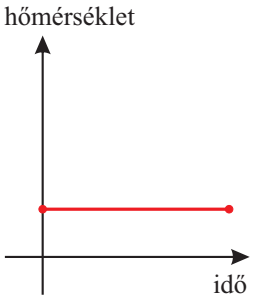
B)



C)



D)



12. Számold ki az $y = 1{,}2x - 3$ egyenlettel megadott grafikonon levő $P(x; y)$ pontok hiányzó koordinátáját!

a) $x = 0$ *b)* $x = 5$ *c)* $x = -3$ *d)* $x = \frac{5}{6}$

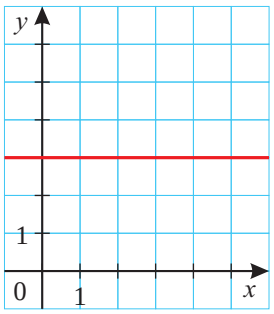
13. Számold ki az $y = \frac{4}{5}x + 2$ egyenlettel megadott grafikonon levő $P(x; y)$ pontok hiányzó koordinátáját!

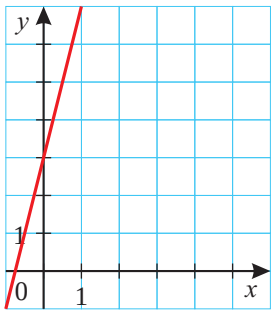
a) $x = 0$ *b)* $x = 10$ *c)* $x = -2{,}4$ *d)* $x = 1\frac{2}{3}$

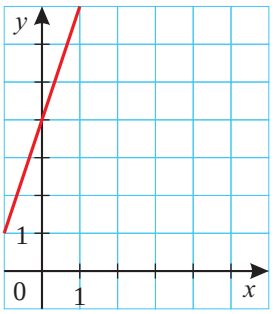
14. Keresd a párját! Melyik hozzárendelés melyik grafikonhoz tartozik?

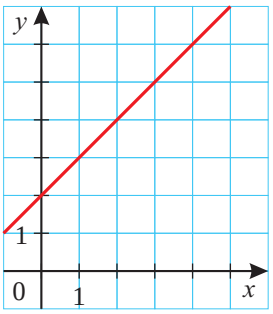
a) $y = 4x + 3$ *b)* $y = 3x + 4$ *c)* $y = 3$

d) $y = 4 + 3x$ *e)* $y = 2 + x + 2 + 2x$ *f)* $y = 4 - 3x$









15. Ábrázold a koordináta-rendszerben az $y = 2x - 3$ összefüggésnek eleget tevő $P(x; y)$ pontokat! Határozd meg az $A(1; \square)$, $B(-4; \square)$, $C(12; \square)$, $D(\square; -3)$, $E(\square; 5)$, $F(\square; 101)$ pontok hiányzó jelzőszámait úgy, hogy a pontok

a) a grafikonon legyenek, *b)* a grafikon felett legyenek, *c)* a grafikon alatt legyenek!

Alakzatok

1. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a következő 8 pontot: $A(-2; 0)$, $B(-4; 8)$, $C(4; 0)$, $D(-6; -4)$, $E(6; -2)$, $F(0; 8)$, $G(0; -4)$, $H(6; 8)$! Ezek közül válogass!

a) Adj meg három egy egyenesre illeszkedő pontot! Keress több megoldást!

b) Két-két pontjukat megnevezve adj meg párhuzamos egyeneseket! Keress több megoldást!

c) Két-két pontjukat megnevezve adj meg merőleges egyeneseket! Keress több megoldást!

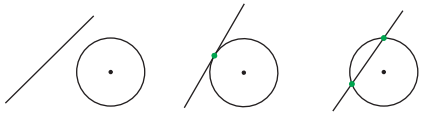
2. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a következő 10 pontot: $A(-2; 0)$, $B(-4; 8)$, $C(4; 0)$, $D(-6; -4)$, $E(6; -2)$, $F(0; 8)$, $G(0; -4)$, $H(6; 8)$, $I(8; 0)$, $J(6; 2)$! Ezek közül válogass!

a) Adj meg derékszögű háromszög csúcsait alkotó pontokat! Keress több megoldást!

b) Adj meg trapézt! Keress több megoldást!

c) Adj meg paralelogrammát! Keress több megoldást!

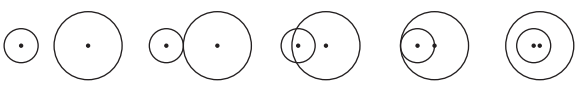
3. Egy egyenes egy körhöz képest lehet külső egyenes, érintő vagy szelő.



Adott egy 7 cm sugarú kör. Határozd meg, hogy a középpontjától milyen távolságra lehet egy

a) külső egyenes, *b)* érintő egyenes, *c)* szelő egyenes!

4. Két különböző sugarú kör kölcsönös helyzete ötféle lehet.

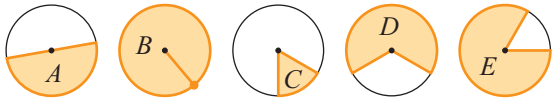


Add meg a 2 cm és a 3 cm sugarú kör kölcsönös helyzetét, ha középpontjaik távolsága

a) 6 cm, *b)* 5 mm, *c)* 5 cm, *d)* 7 cm, *e)* 1 cm, *f)* 0, *g)* 4 cm!

5. Keresd meg az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* körcikkhez tartozó húrt, körívet és középponti szöget! Válaszodat az ábrák betűjelével add meg! Az összehasonlításhoz használhatsz másolópapírt vagy szerkesztőeszközöket.

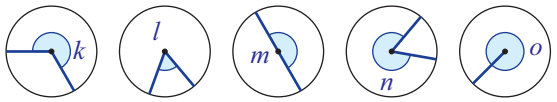
körcikkek



körívek



középponti szögek



húrok



6. Döntsd el, hogy az állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

A: A derékszögű háromszögnek van két hegyesszöge.

B: Minden körcikk konvex alakzat.

C: Minden paralelogramma rombusz.

D: Egy konvex hatszög átlóinak száma háromszorosa az egy csúcsból induló átlók számának.

E: Egy trapéz egyik szárának végpontjaiból induló belső szögfelezők merőlegesek egymásra.

7. Hány fokos szöget zár be két metsző egyenes, ha az általuk meghatározott négy szög közül

a) két szög összege 130°,

b) három szög összege 237°,

c) az egyik szög háromszor akkora, mint egy másik?

8. Hány olyan különböző háromszög van, amelynek két oldala 21 cm és 27 cm, a harmadik oldala pedig centiméterben mérve hárommal osztható egész szám?

9. Egy háromszög egyik szöge a másiknak kétszerese, a harmadik szöge a másodiknál 20°-kal nagyobb. Hány fokosak a háromszög szögei?

10. Egy derékszögű háromszögnek van egy 32°-os szöge.

Hány fokos szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

11. Egy derékszögű háromszög két hegyesszögéhez tartozó külső szögeinek aránya 11 : 16. Határozd meg a hegyesszögek nagyságát!

12. Egy konvex négyszög két szemközti szögét az átlója 30°-os és 80°-os, illetve 60°-os és 100°-os szögekre bontja. Határozd meg a négyszög belső és külső szögeinek nagyságát!

13. Egy konvex négyszög belső szögeinek aránya 3 : 4 : 5 : 6. Mekkorák a belső és a külső szögei?

14. *a)* Határozd meg, hogy mi a kiegészítő halmaza a konvex négyszögek halmazának a négyszögek halmazára nézve!

b) Határozd meg, hogy mi a kiegészítő halmaza a konvex háromszögek halmazának a háromszögek halmazára nézve!

15. Keresd meg, hogy az *a*, *b*, *c*, … tulajdonság mely halmazokat határozza meg!

a: A négyszögnek van két párhuzamos oldala.

b: A négyszög két-két szomszédos oldala egyenlő.

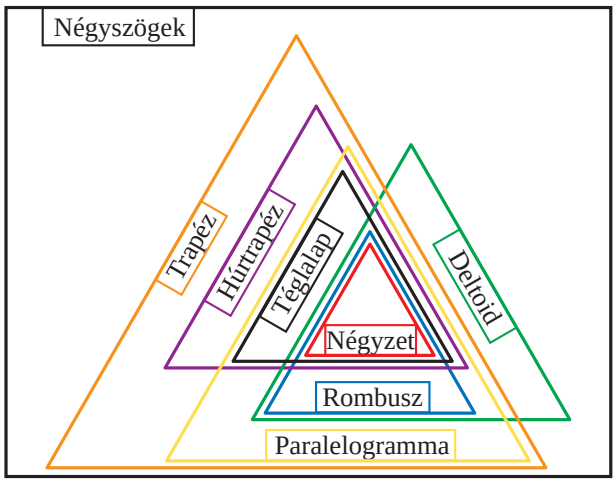
c: A négyszög oldalai egyenlők.

d: A négyszög szögei egyenlők.

e: A négyszög szemközti oldalai egyenlők.

f: A négyszög oldalai és szögei egyenlők.

g: A négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos.



h: A négyszög egyik átlója merőlegesen felezi a másik átlóját.

i: A négyszögnek van a csúcsokon át nem menő szimmetriatengelye.

16. Döntsd el, hogy az állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

A: Ha egy paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor az négyzet.

B: A paralelogramma átlói felezik a paralelogramma belső szögeit.

C: A paralelogramma átlói felezik egymást.

D: Van olyan paralelogramma, ami deltoid.

E: Van olyan deltoid, aminek az átlói egyenlő hosszúak.

F: Ha egy trapéz szárai egyenlők, akkor húrtrapéz.

17. Adj meg a lehető legkevesebb számú különböző fajta négyszögekből álló halmazt a feltételeknek megfelelően!

Az elemek között pontosan egy négyzet van, az elemek kétharmad része téglalap, az elemek között van három paralelogramma.

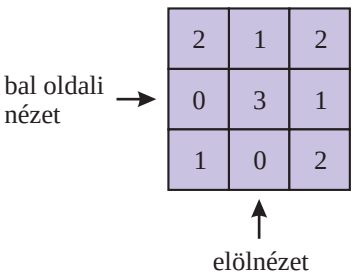
18. Egybevágó kockákból készült építmények kótás alaprajzai láthatók az ábrán.

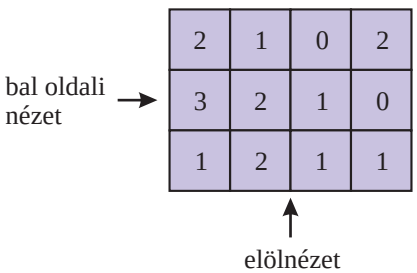
a) Rajzold le az építmények bal oldali nézetét!

b) Rajzold le az építmények elölnézetét!

c) Legfeljebb hány kockát lehet elvenni úgy, hogy az I. építménynek se a bal oldali nézete, se az elölnézete ne változzon?

d) Legfeljebb hány kockával lehet kiegészíteni úgy a II. építményt, hogy se a bal oldali nézete, se az elölnézete ne változzon?



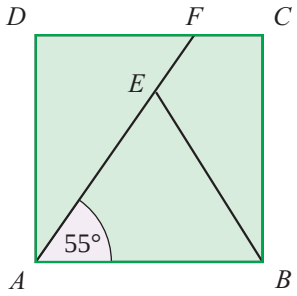


19. Egy 12 elemű halmaz csak háromszögeket és négyszögeket tartalmaz. Ezen sokszögeknek összesen 41 csúcsa van. Az elemek hány százaléka háromszög?

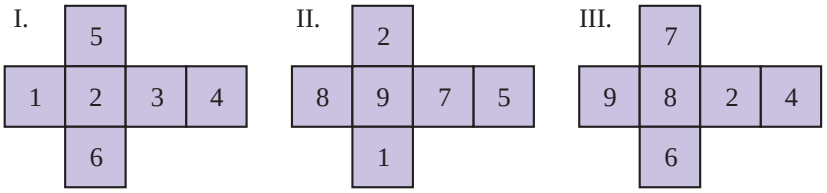
20. Az *ABCD* négyzetet az *AF* és az *EB* szakasz az ábra szerint három részre bontja. Az *EAB* szög 55°, az *EB* szakasz pedig a négyzet *B* csúcsnál levő szögét 7 : 2 arányban osztja az *AB* oldaltól kiindulva.

a) Mekkorák lehetnek az *EBCF* négyszög szögei?

b) Igaz-e, hogy az *A*, *E* és *C* pont a *B*-től egyenlő távolságra van?



21. A három hálózatból elkészítjük a három kockát, majd egymás tetejére rakva négyzetes oszlopot állítunk össze. Az oszlop négy oldalán felülről lefelé olvasva a számokat négy darab háromjegyű számot kapunk, majd a négy darab háromjegyű számot összeadjuk. Milyen sorrendben, hogyan helyezzük egymásra a három kockát úgy, hogy az előbbi összeg a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez az összeg?



Geometriai transzformációk, szimmetriák

1. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-3;2)$, $B(5;-4)$, $C(8;0)$, $D(0;6)$ pontokat!

a) Ábrázold az *ABCD* négyszög szimmetriatengelyeit!

b) Tükrözd a négyszöget az *y* tengelyre!

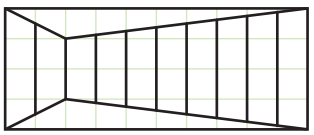
c) Határozd meg, milyen sokszöget alkot a négyszögnek és képének a közös része!

2. *a)* Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-5;4)$, $B(-2;1)$, $C(1;4)$, $D(-2;7)$ pontokat, majd tükrözd azokat az *y* tengelyre!

b) Az eredeti négy pont és a négy tükörképpont közül adj meg olyan pontokat, amelyek szimmetrikus sokszög csúcsai lehetnek!

3. A képen egy kaput ábrázoltunk, ahogy az utca felől látszik.

Rajzold le a kaput a kert felől nézve!



4. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-5;4)$, $B(-2;1)$, $C(1;4)$, $D(-2;7)$ pontokat!

a) A $(-1;0)$ pontból nagyítsd kétszeresére az *ABCD* négyszöget!

b) A nagyított képet tükrözd a $(-1;0)$ pontra!

c) Egybevágó-e a második transzformációval kapott kép az eredeti *ABCD* négyszöggel?

5. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz két belső szögének aránya 4 : 5. Számítsd ki, hogy hány fokosak a trapéz szögei!

6. Egy középpontosan szimmetrikus négyszög két belső szögének aránya 2 : 3. Számítsd ki, hogy hány fokosak a négyszög szögei!

7. Számítsd ki egy szabályos nyolcszög középponti szögét, belső szögét, átlóinak számát!

8. Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Van tengelyesen szimmetrikus konkáv négyszög.

B: Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye, akkor van két egyenlő szöge.

C: A rombusz két szabályos háromszögből áll.

D: Minden deltoid tengelyesen szimmetrikus.

E: A paralelogramma tengelyesen szimmetrikus.

F: Van olyan trapéz, amelynek egynél több szimmetriatengelye van.

G: Egy szabályos hatszög átlóinak száma egyenlő a szimmetriatengelyeinek számával.

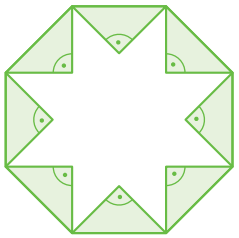
9. Egy szabályos sokszög külső és belső szögeinek összege 1260°.

a) Hány oldalú a sokszög?

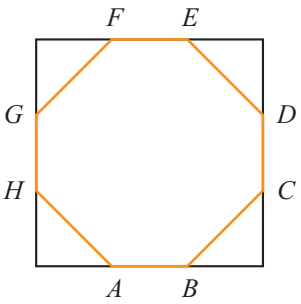
b) Megrajzolható-e egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül a sokszög összes oldala és átlója úgy, hogy semelyik szakaszt sem rajzoljuk meg kétszer?

10. Egy szabályos nyolcszögből levágtuk a zöld színnel jelölt derékszögű háromszögeket, így egyenlő oldalú konkáv tizenhatszöget kaptunk.

Határozd meg azoknak a háromszögeknek a szögeit, amelyekre a szimmetriatengelyei bontják a tizenhatszöget!



11. Egy 48 cm kerületű négyzet oldalait három egyenlő részre osztottuk, majd az ábra szerint összekötöttük a harmadolópontokat.



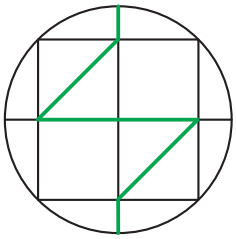
a) Hány szimmetriatengelye van az *ABCDEFGH* nyolcszögnek?

b) Határozd meg a nyolcszög belső szögeinek nagyságát!

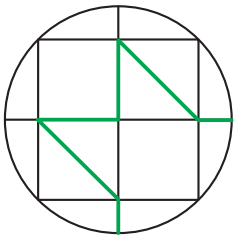
c) Számítsd ki a nyolcszög *BC* oldalának hosszát! Válaszodat centiméter egységben, tizedekre kerekítve add meg!

12. A kör sugara 82 m. Mekkora a színessel jelölt útvonalak hossza?

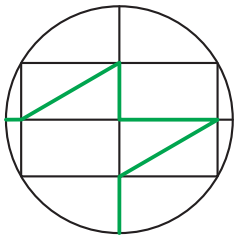
a)



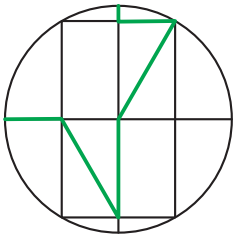
b)



c)



d)



Mennyiségek a geometriai számításokban

1. Váltsd át a mennyiségeket a megadott mértékegységbe!

a) Add meg dm-ben: 7 m; 31 m 2 dm; 85 cm; 5 km 67 m; 8763 mm!

b) Add meg dm^2-ben: 17 m^2; 4600 cm^2; 2 m^2 34 dm^2; 34 m^2 2 dm^2; 406 cm^2!

c) Add meg dm^3-ben: 6 m^3; 41 l; 55 m^3 55 dm^3; 50 000 cm^3; 27 hl; 48 dl!

d) Add meg szögpercben: 54°; 3,6°; 43° 42′; $\left(\frac{2}{3}\right)^\circ$!

2. Váltsd át a mennyiségeket a megadott mértékegységbe!

a) Add meg cm-ben: 630 mm; 319 dm; 2 m 7 dm 6 cm; 4,1 dm; 3 dm 9 mm!

b) Add meg cm^2-ben: 321 dm^2; 67 000 mm^2; 5 dm^2 20 cm^2; 203 dm^2 9 cm^2; 640 mm^2!

c) Add meg cm^3-ben: 35 dm^3; 4 dl; 73 dm^3 612 cm^3; 40 000 ml; 28,13 dm^3; 84 dl!

3. Döntsd el, hogy az *A* vagy a *B* mennyiség a nagyobb, és számítsd ki a különbségüket!

a) *A*: 73 m *B*: 6010 dm *b)* *A*: 45 m^2 *B*: 450 dm^2

c) *A*: 357 dm^3 *B*: 37 l *d)* *A*: 74′ *B*: 7° 4′

4. Döntsd el, hogy az *A* vagy a *B* mennyiség a nagyobb, és számítsd ki a különbségüket!

a) *A*: 46 mm *B*: 5 cm *b)* *A*: 540 dm^2 *B*: 54 m^2

c) *A*: 4 m^3 *B*: 500 l *d)* *A*: 4,2° *B*: 250′

5. Döntsd el, hogy az alábbi szögek melyik csoportba tartoznak! (A szögfajták: nullszög, hegyesszög, derékszög, tompaszög, egyenesszög, homorúszög, teljesszög.)

a) $\alpha = 30{,}5° + 3870'$

b) $\beta =$ két derékszögnél 103°-kal kisebb

c) $\gamma = 7200°$ huszada

d) $\delta =$ egy szabályos hatszög két belső szögének összege

6. Végezd el a kijelölt műveleteket a megadott mennyiségekkel!

a) 870 m + 37 cm *b)* 3 m^2 + 2 dm^2 *c)* 7 cm^3 + 3 l *d)* 5,4° + 6′

7. Végezd el a kijelölt műveleteket a megadott mennyiségekkel!

a) 87 dm − 16 cm *b)* 7 m^2 − 3 dm^2 *c)* 9 dm^3 − 3 dl *d)* 5,4° − 6′

8. Tedd igazzá az egyenlőségeket a hiányzó adatok beírásával!

a) 28 dm + ☐ dm = 8 m *b)* 27 m^2 − ☐ dm^2 = 7 m^2

c) 1,07 l − ☐ dl = 1 l *d)* ☐ ° ☐ ′ − 54′ = 2° 24′

9. Tedd igazzá az egyenlőségeket a hiányzó adatok beírásával!

a) 280 m + ☐ m = 18 km *b)* ☐ dm^2 − 3 m^2 = 7,6 m^2

c) 1,07 dm^3 + ☐ cm^3 = 2 dm^3 *d)* 5,2° − ☐ ′ = 3,7°

10. Döntsd el, hogy az állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

A: 280 000 m = 28 km *B:* 24 cm^2 = 2400 mm^2

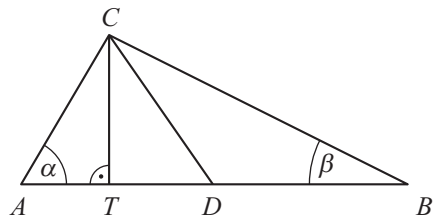
C: 634 dm^2 = 6,34 m^2 *D:* 2645 l = 2,645 m^3

E: 10 km 5%-a nagyobb, mint 3 000 000 mm $\frac{1}{6}$ része.

11. Egy húrtrapéz két külső szögének aránya 1 : 2. Számítsd ki, hogy hány fokosak a húrtrapéz szögei!

12. Egy paralelogramma két külső szögének aránya 4 : 11. Számítsd ki, hogy hány fokosak a paralelogramma szögei!

13. Az *ABC* háromszög *C* csúcsánál levő szöge 120°-os.
A *CT* magasság és a *CD* szakasz három egyenlő részre osztja a 120°-os szöget.
(Az ábra tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



a) Számítsd ki a háromszög másik két szögének nagyságát!

b) Határozd meg a *CD* oldal hosszát, ha az *AC* oldal hossza 4 cm!

Geometriai szerkesztési feladatok

1. *a)* Hányféle háromszög szerkeszthető tetszőleges számú 3 cm és 7 cm hosszú szakaszból?

b) Hányféle háromszög szerkeszthető tetszőleges számú 4 cm és 6 cm hosszú szakaszból?

c) Szerkessz tompaszögű háromszöget 4 cm és 6 cm hosszú szakaszokból!

2. *a)* Hányféle négyszög szerkeszthető két 3 cm-es és két 4 cm-es szakaszból?

b) Szerkessz olyan négyszöget, amelynek két 3 cm-es, két 4 cm-es oldala van, s az egyik szöge 45°!

3. I. Szerkeszd meg a háromszögeket, ha oldalaik hossza

a) 56 mm, 90 mm, 106 mm; *b)* 3 cm, 5 cm, 7 cm; *c)* 4,4 cm, 5,5 cm, 6,8 cm!

II. Határozd meg, milyen típusúak a megszerkesztett háromszögek!

4. Egy húrtrapézból a 7 cm hosszú átlója olyan háromszöget vág le, amelynek az oldalai 3 cm, 5 cm és 7 cm hosszúak. Szerkeszd meg a négyszöget!

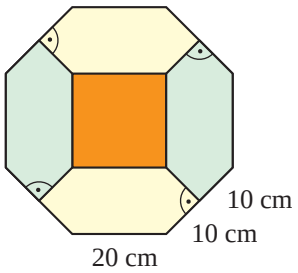
5. Az *ABCD* deltoid átlói 8 cm és 4 cm hosszúak. A rövidebb átló 1 : 3 arányban osztja a hosszabb átlót.

a) Szerkeszd meg a deltoidot, majd tükrözd az átlók metszéspontjára!

b) Milyen alakzat az eredeti deltoid és a tükörkép egyesítése, illetve milyen alakzat az eredeti deltoid és a tükörkép közös része? Az *ABCD* deltoid területének hányszorosa az egyesítés, illetve a közös rész területe?

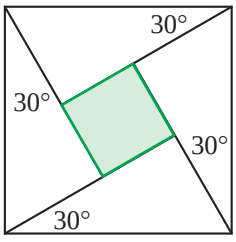
c) Számítsd ki mm pontossággal az *ABCD* deltoid kerületét!

6. A budai várban feltárt majolikacsempék egyikének mintázatát mutatja az ábra. Alakja szabályos nyolcszög. Számítsd ki a sokszög belső szögeit! Szerkeszd meg az ábrát negyedére kicsinyítve!



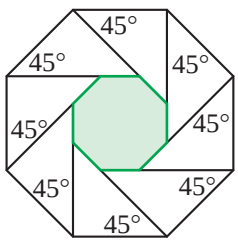
7. Szerkeszd meg a szabályos sokszöget, majd a színessel jelölt belső sokszöget! Becsüld meg, hány százaléka a színessel jelölt rész területe az eredeti alakzat területének!

a)



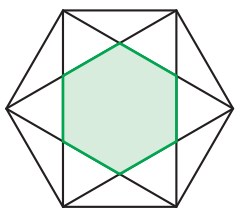
12 cm

b)



9 cm

c)

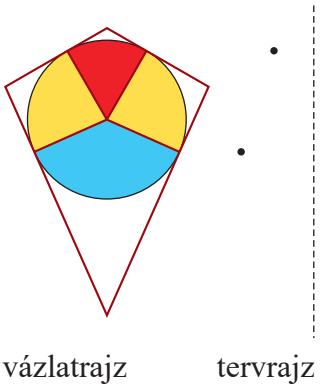


6 cm

8. Egy derékszögű háromszög kerülete 150 mm, befogóinak aránya 12 : 5. Szerkeszd meg a háromszöget!

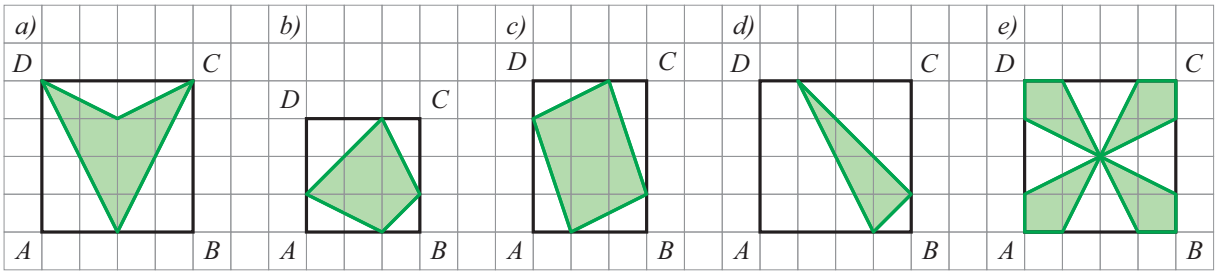
9. Egy színes ólomüveg ablak tervrajza hiányos. A szimmetrikus rajz egyik felén az a két pont látható, ahol a deltoid oldalait a körhöz forrasztják.

Szerkeszd meg a teljes ábrát, ha adott a szimmetriatengely és a két érintési pont!



Geometriai számítási feladatok

1. Számítsd ki a színessel jelölt sokszög és az *ABCD* négyszög területének arányát!

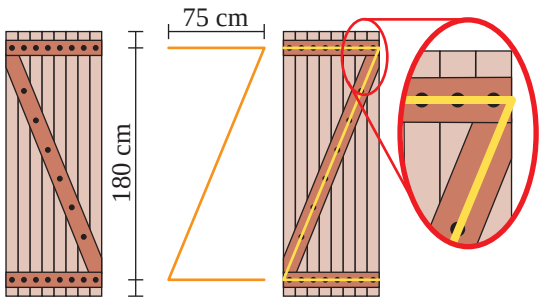


2. *a)* Mekkora területű háromszöget alkotnak a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-1;1)$, $Q(7;-5)$, $R(7;7)$ pontok? Hány egység a háromszög kerülete?

b) Mekkora az *ABC* háromszög területe, ha csúcsai az $A(-3;8)$, $B(2;-4)$, $C(2;0)$ pontok?

3. Egy háromszög szögeinek nagysága 30°, 45° és 105°, legrövidebb magassága 4 cm hosszú. Számítsd ki a háromszög területét!

4. Egy tároló dupla ajtaja 200 cm magas, 2 × 75 cm széles. Az ajtókat az alsó és felső szélüktől 10-10 cm-re keresztben és átlósan is megerősítették. A vázlatrajzról leolvashatók a **Z** alakú merevítés középen mért méretei. A vízszintes deszkák az ajtó teljes szélességében végigfutnak, a keresztléc ezekre támaszkodik. Elkészíthető-e kétméteres szálakból a keresztmerevítés?



5. Egy paralelogrammát az egyik átlója két derékszögű háromszögre bontja. Számítsd ki a paralelogramma területét, ha oldalai 220 és 221 cm hosszúak!

6. Egy rombusz kerülete 36 cm, az egyik átlója két 28 cm kerületű háromszögre bontja. Számítsd ki a rombusz területét!

7. Számítsd ki egy 20 cm kerületű, 45°-os szögű rombusz területét!

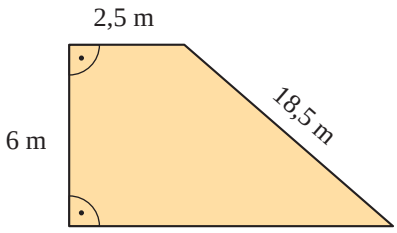
8. Számítsd ki a húrtrapéz területét, ha

a) alapjai 10 cm és 18 cm hosszúak, kerülete 38 cm;

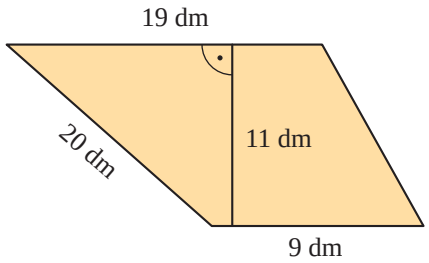
b) alapjai 28 cm és 13 cm, szárai 23 cm hosszúak!

9. Számítsd ki a trapézok kerületét és területét!

a)

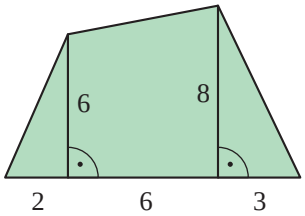


b)

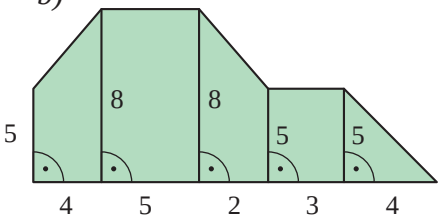


10. Az ábrán szereplő adatok segítségével számítsd ki a sokszög területét! Az adatokat méterben mértük.

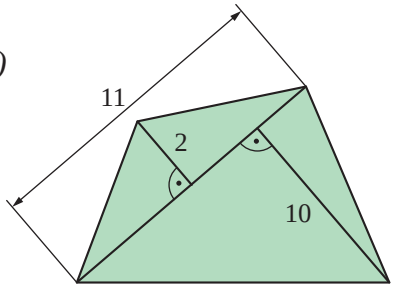
a)



b)

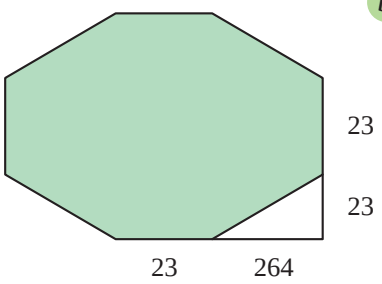


c)

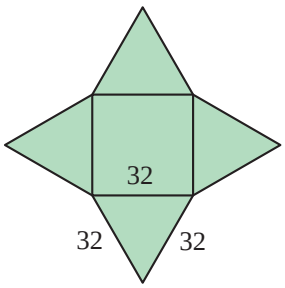


11. Számítsd ki a sokszög kerületét és területét, ha az adatok cm-ben értendők! A vázlatrajzon a szakaszhosszak nem arányosak.

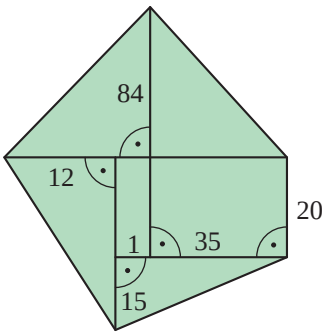
a)



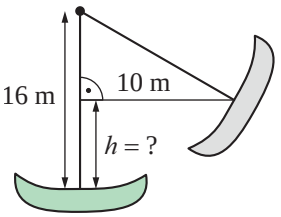
b)



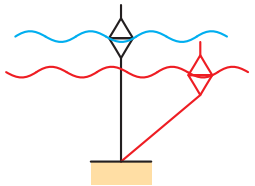
c)



12. A „Kalózhajó” nevű szerkezet 16 m hosszú rúdon lengett a Vidámparkban. Hány métert emelkedett, mialatt a rúd vége tíz méterre eltávolodott a kiinduló helyzettől?

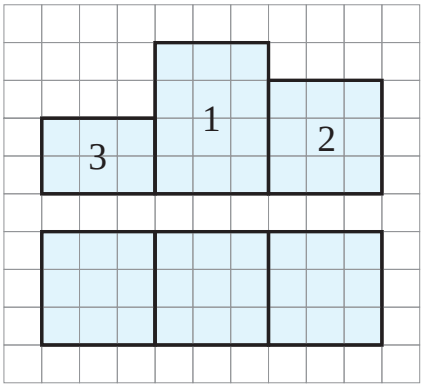


13. A folyómederhez 7 m hosszú lánccal rögzítettek egy bóját. Mennyivel csökkent a víz szintje, ha a bóját a kötél függőleges helyzetéhez képest 4 m-rel odébb sodorta a víz, bár a rögzítése nem változott?



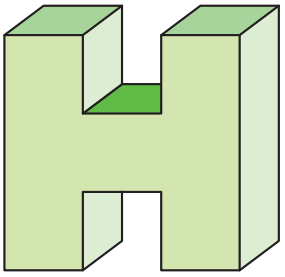
14. Egy deltoid átlói 24 cm és 40 cm hosszúak. A rövidebb átló a hosszabbat annak nyolcadolópontjában metszi. Számítsd ki a deltoid kerületét és területét!

15. Az ábra egy sportversenyek eredményhirdetéséhez használt emelvény elölnézetét és felülnézetét szemlélteti méretarányosan. Az építmény egy kockából és két négyzetes oszlopból áll. Mindhárom rész alapja egy-egy 60 cm oldalhosszúságú négyzet, a testek magasságai növekvő sorrendben 40 cm, 60 cm, 80 cm. Az emelvény látszódó részeit kékre festik. Mekkora a kék színű felület területe?



16. Egy téglatest alakú ruhagyűjtő konténer szélessége 110 cm, mélysége 55 cm, magassága pedig 165 cm. Számítsd ki, hány köbméter ruha fér a konténerbe!

17. A „térbeli **H** betű” hét egybevágó, 4 cm élű kockából elkészíthető. Számítsd ki, mekkora a test felszíne és térfogata!



18. Egy négyzetes oszlop magasságát felére csökkentve 27 cm^3 térfogatú kockát kapunk.

a) Milyen magas az oszlop?

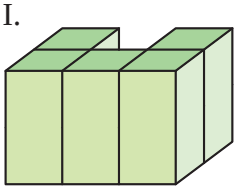
b) Hány cm^2 az oszlop felszíne?

c) Hány liter a négyzetes oszlop térfogata?

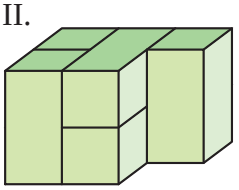
19. Öt darab egybevágó négyzetalapú egyenes hasáb alkotja az ábrán látható testeket. Egy-egy hasáb alapéle 6 cm, magassága ennek kétszerese.

Határozd meg a testek térfogatát és felszínét! A térfogatot literben, a felszínt mm^2 egységben add meg!

I.

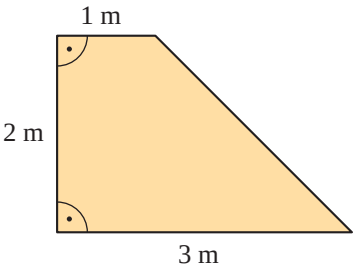


II.



20. Mekkora a rombusz alapú egyenes hasáb felszíne, ha a rombusz átlóinak hossza 6 cm és 8 cm, a hasáb magassága 10 cm?

21. Egy egyenes hasáb alapja az ábrán látható derékszögű trapéz. Hány liter a térfogata a 2,3 m magasságú hasábnak?



22. Egy téglatest egyik lapjának területe 160 cm^2, e téglalap szomszédos oldalai hosszának aránya 5 : 8. A téglatest harmadik éle a rövidebb él 60%-a.

Mekkora a téglatest felszíne?

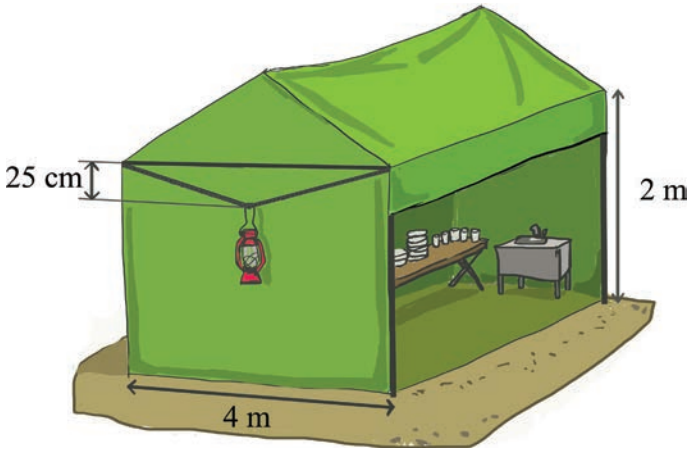
23. Egy 18 méter hosszú, 10 méter széles víztükrű medence alja egyenletesen lejt. A víz a 18 méter hosszú szakaszon 60 cm-ről 250 cm-re mélyül. A téglalap alakú, lejtős alját apró lapokból készült mozaikminta alkotja.

a) Számítsd ki, hogy hány köbméter víz van a színültig töltött medencében!

b) Határozd meg, hogy hány négyzetméternyi mozaiklap szükséges a minta elkészítéséhez!

24. Az erdei táborban a mosogatósátorban a képen látható módon rögzítettek egy viharlámpát. A rögzítőkötél alakja egy vízszintes és két egyenlő hosszúságú, ferde szakaszból álló tükrös háromszög. Mennyivel kell rövidebbre venni a lámpa rögzítő kötelét, ha azt szeretnék, hogy a lámpa 10 cm-rel magasabbra kerüljön? Becsülj! Számolj!

Ⓐ 0,5 m Ⓑ 28 cm Ⓒ 2 cm



25. Add meg egy-egy téglatest méreteit úgy, hogy térfogata egyenlő legyen a megadott mennyiségekkel!

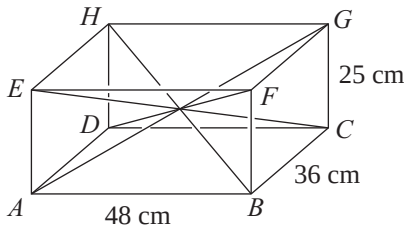
50 mm^3:	a méh mézgyomra
8 m^3:	egy közepes olajtartály térfogata
60 m^3:	lakószoba
200 m^3:	osztályterem
2205 m^3:	a vár lakótornya Nagyvázsonyban
40 000 m^3:	a tihanyi Belső-tó térfogata
240 000 m^3:	az Országház fűthető része
2 km^3:	a Balaton vizének térfogata

26. Egy téglatest éleinek hossza 48 cm, 36 cm és 25 cm. Drótból elkészült a téglatest élváza, és a testátlóit is a csúcsokba hegesztették az ábra szerint.

Határozd meg a legrövidebb út hosszát két legtávolabbi csúcs között, ha

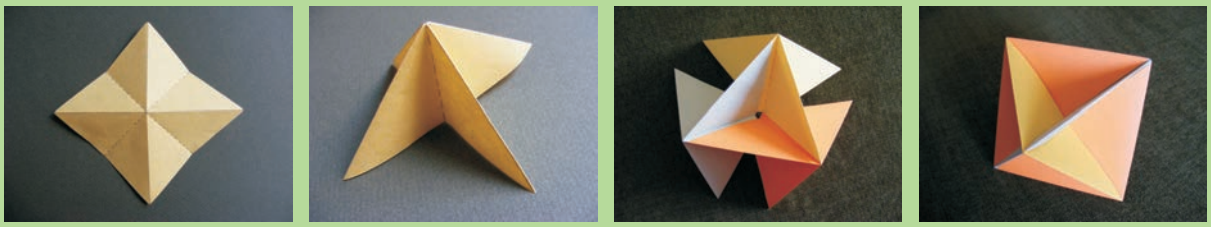
a) az útvonal csak éleken halad,

b) az útvonal átlón is haladhat!



27. Az 1 méter magas egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú háromszög. A háromszög alapjának hossza 12 deciméter, az alaphoz tartozó magassága 7 deciméter. Számítsd ki, hány liter a hasáb térfogata!

28. A kristályoktaéder hat darab 15 cm oldalú négyzetből készülhet.



a) Mekkora a test egy éle?

b) Mekkora a két legtávolabbi csúcsának távolsága?

c) Mekkora a test felszíne?

A 2, 3, …, első 13 hatványa

k^n

n \ k	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1 296	2 401	4 096	6 561
5	32	243	1 024	3 125	7 776	16 807	32 768	59 049
6	64	729	4 096	15 625	46 656	117 649	262 144	531 441
7	128	2 187	16 384	78 125	279 936	823 543	2 097 152	4 782 969
8	256	6 561	65 536	390 625	1 679 616	5 764 801	16 777 216	43 046 721
9	512	19 683	262 144	1 953 125	10 077 696	40 353 607	134 217 728	387 420 489
10	1024	59 049	1 048 576	9 765 625	60 466 176	282 475 249	1 073 741 824	3 486 784 401
11	2048	177 147	4 194 304	48 828 125	362 797 056	1 977 326 743	8 589 934 592	31 381 059 609
12	4096	531 441	16 777 216	244 140 625	2 176 782 336	13 841 287 201	68 719 476 736	282 429 536 481
13	8192	1 594 323	67 108 864	1 220 703 125	13 060 694 016	96 889 010 407	549 755 813 888	2 541 865 828 329

Tartalom

ELŐSZÓ 3
GONDOLKODJUNK EGYÜTT! 5
Halmazok 5
Logikai feladatok 10
Logika, halmazok 12
Skatulyaelv 15
Hányféleképpen? 16
Játékok, híres fejtörők 21
BETŰS KIFEJEZÉSEK 23
Betűs kifejezések nagyító alatt 23
Egytagú és többtagú betűs kifejezések 26
Műveleti tulajdonságok 29
Zárójellel vagy zárójel nélkül 30
Törtvonalas kifejezések átalakítása 36
Számoljunk hatványokkal! 40
Azonos alapú hatványok szorzása, osztása 40
Azonos kitevőjű hatványok szorzása, osztása 41
Szöveges feladatok megoldása egyenlettel vagy anélkül 44
Mozgásos feladatok 48
Munkavégzéssel kapcsolatos feladatok 53
Százalékszámítással kapcsolatos feladatok 56
Pénzügyi ismeretek 59
Keveréses feladatok 62
Tudáspróba 64
NÉGYZETGYÖK, PITAGORASZ-TÉTEL 65
Számok sokféle alakban 65
A négyzetszámok négyzetgyöke 66
Hosszúság és terület meghatározása rácson 71
Pitagorasz-tétel 74
Pitagoraszi háromszögek és számhármasok 75
A Pitagorasz-tétel alkalmazása 77
Tudáspróba 80
HOZZÁRENDELÉSEK, GRAFIKONOK 81
Hozzárendelések 81
Hozzárendelések szemléltetése, grafikonok 86
Grafikonok tulajdonságai 91
Feladatok grafikus megoldása 94
Érdekes grafikonok 97

Tudáspróba 103
TÉRGEOMETRIA 103
Térbeli alakzatok és geometriai modelljeik 103
A gúla és hálója 107
Hasábok és gúlák 112
A kúp 114
A gömb 117
Rokonságok 122
Tudáspróba 123
A gúla felszíne 125
A gúla térfogata 127
STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS 129
Statisztika: alapfogalmak, elnevezések 129
Diagramok 134
Középértékek 141
Valószínűségszámítás 145
A relatív gyakoriság és a valószínűség 146
Valószínűségi játékok, esélylatolgatás 149
Tudáspróba 151
Események valószínűségének meghatározása 152
GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK 156
Egybevágósági transzformációk 156
Két alakzat együttes szimmetriái 160
Nem egybevágósági transzformációk 165
A középpontos hasonlóság képekben 169
Szerkesztések 170
Tudáspróba 182
ÖSSZEFOGLALÓ FEJEZET 184
Középiskolába készülünk 184