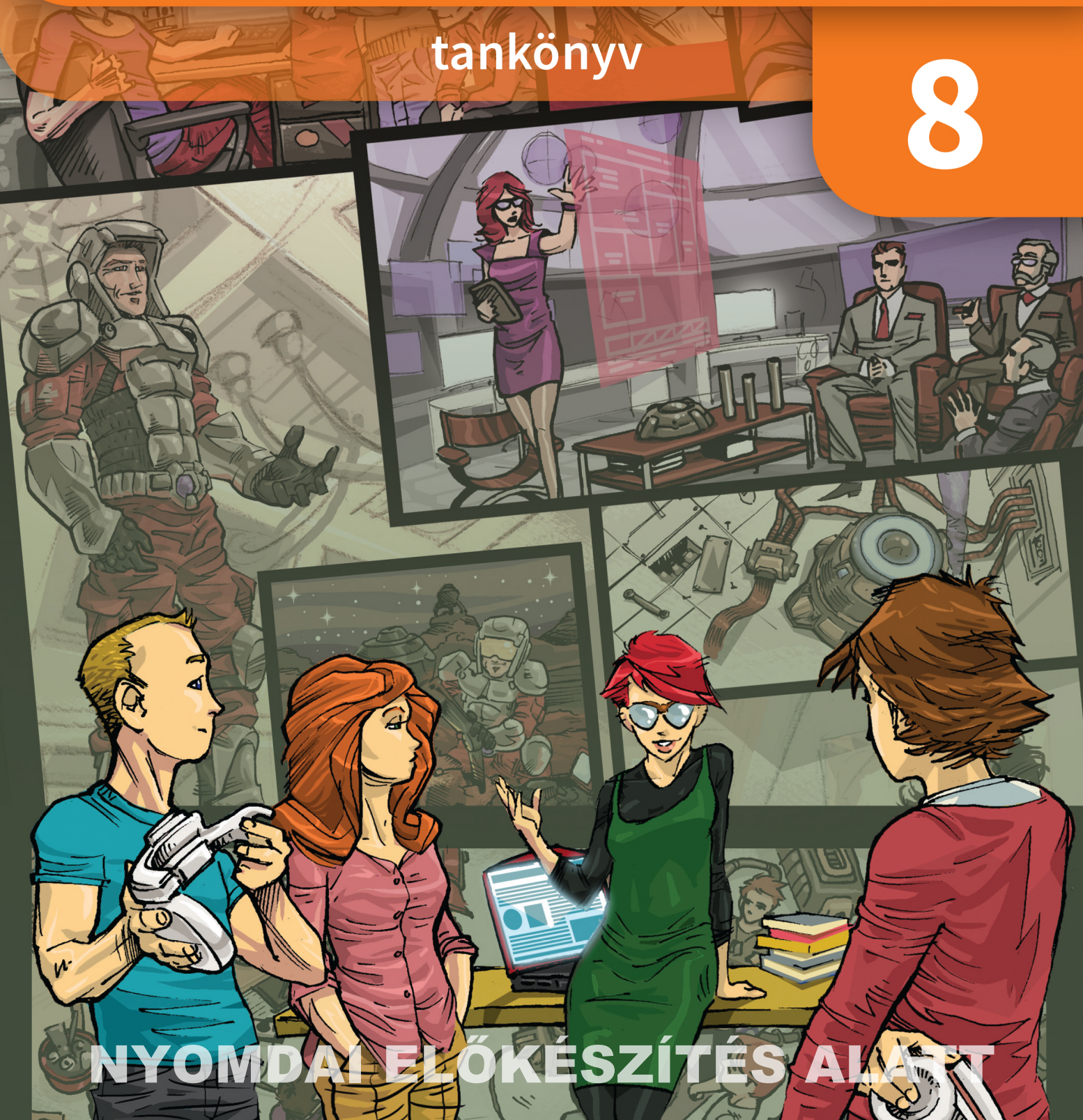
OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

Matematika

tankönyv

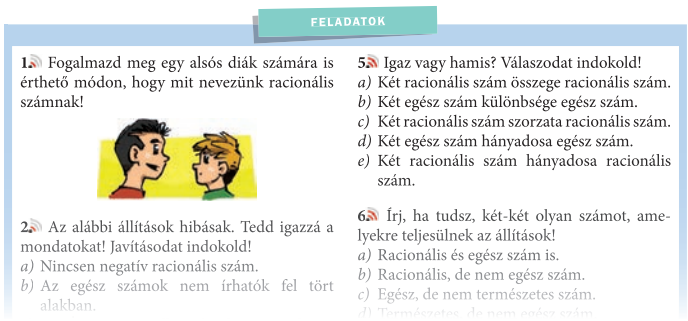
8



NYOMDAI ELŐKÉSZÍTÉS ALATT

Üdvözlünk a 8. osztályban!

Az új matematikakönyvedet tartod a kezedben.
Ha korábban már találkoztál ennek a sorozatnak a könyveivel,
akkor találsz néhány ismerős dolgot, de lesznek újdonságok is.


FELADATOK

1 Fogalmazd meg egy alsós diák számára is érthető módon, hogy mit nevezünk racionális számnak!

2 Az alábbi állítások hibásak. Tedd igazzá a mondatokat! Javításodat indokold!
a) Nincsen negatív racionális szám.
b) Az egész számok nem írhatók fel tört alakban.

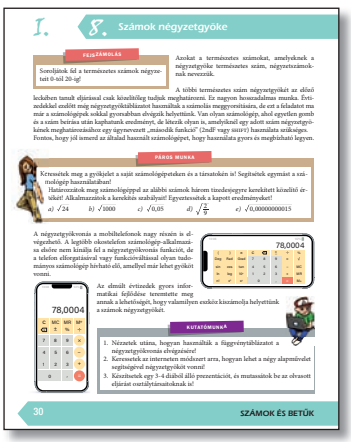
5 Igaz vagy hamis? Válaszodat indokold!
a) Két racionális szám összege racionális szám.
b) Két egész szám különbsége egész szám.
c) Két racionális szám szorzata racionális szám.
d) Két egész szám hányadosa egész szám.
e) Két racionális szám hányadosa racionális szám.

6 Írj, ha tudsz, két-két olyan számot, amelyekre teljesülnek az állítások!
a) Racionális és egész szám is.
b) Racionális, de nem egész szám.
c) Egész, de nem természetes szám.
d) Természetes, de nem egész szám.

A feladatokat nehézségük szerint
három csoportba soroltuk:
1 könnyű 2 közepes 3 kicsit nehéz



A fejezet elején található képregény néhány, a témához kapcsolódó szakmát villant fel.


I. 8. Számok négyzetgyöke

FELSZÁMOLÁS

Szerelőjük fél a természetes számok négyzetétől 0-tól 20-ig!

A többi természetes szám négyzetgyökét az előző leckében tanult eljárással csak közelítőleg tudjuk meghatározni. Ez nagyon hosszadalmas munka. Évtizedekkel ezelőtt még négyzetgyökkitáblázatot használtak a számolás meggyorsítására, de ezt a feladatot ma már a számológépek sokkal gyorsabban elvégzik helyettünk. Van olyan számológép, ahol egyetlen gomb és a szám beírása után kaphatunk eredményt, de láttuk olyan is, amelyiknél egy adott szám négyzetgyökének meghatározásához egy úgynevezett „másodikfunkció" (2ndF vagy SHIFT) használata szükséges. Fontos, hogy jól ismerd az általad használt számológépet, hogy használata gyors és megbízható legyen.

PÁROS MUNKA

Keressetek meg a gyökjelet a saját számológépeteken és a társatokén is! Segítsetek egymást a szükséges használatában!

Határozzátok meg számológéppel az alábbi számok három tizedesjegyre kerekített közelítő értékét! Alkalmazzatok a kerekítés szabályait! Egyeztessétek a kapott eredményeket!

a) $\sqrt{24}$ *b)* $\sqrt{1000}$ *c)* $\sqrt{6{,}05}$ *d)* $\sqrt{\frac{7}{9}}$ *e)* $\sqrt{0{,}000000000015}$

A négyzetgyökvonás a mobiltelefonok nagy részén is elvégezhető. A legtöbb okostelefon számológép-alkalmazás ebben nem kínálja fel a négyzetgyökvonás funkciót, de a telefon elforgatásával vagy funkcióváltással olyan tudományos számológép hívható elő, amelyből már lehet gyököt vonni.

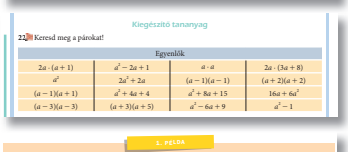
Az elmúlt évtizedek gyors informatikai fejlődése teremtette meg annak a lehetőségét, hogy valamilyen eszköz kiszámolja helyettünk a számok négyzetgyökét.

KUTATÓMUNKA

1. Nézzetek utána, hogyan használják a függvénytáblázatot a négyzetgyökvonás elvégzésére!
2. Keressetek az interneten módszert arra, hogyan lehet a négy alapművelet segítségével négyzetgyököt vonni!
3. Készítsetek egy 3-4 diából álló prezentációt, és mutassátok be az olvasott eljárást osztálytársaitoknak is!

30 SZÁMOK ÉS BETŰK

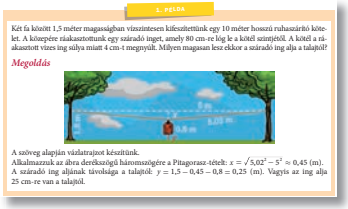
Az eltérő feladattípusokat jól megkülönböztethető keretbe foglaltuk, és felirattal láttuk el.


Kiegészítő tananyag

22 Keresd meg a párokat!

Egyenlők			
$2a\cdot(a+1)$	a^2-2a+1	$a\cdot a$	$2a\cdot(3a+8)$
a^2	$2a^2+2a$	$(a-1)(a-1)$	$(a+2)(a+2)$
$(a-1)(a+1)$	a^2+4a+4	$a^2+8a+15$	$16a+6a^2$
$(a-3)(a-3)$	$(a+3)(a+5)$	a^2-6a+9	a^2-1

Az új ismereteket játékkal, csoportokban végezhető feladatokkal, illetve érdekes példákkal vezetjük be.


1. PÉLDA

Két fa között 1,5 méter magasságban vízszintesen kifeszítettünk egy 10 méter hosszú ruhaszárító kötelet. A középére ráakasztottunk egy századó inget, amely 80 cm-re lóg le a kötél szintjétől. A kötél a ráakasztott vízen ing súlya miatt 4 cm-t megnyúlt. Milyen magasan lesz ekkor a századó ing alja a talajtól?

Megoldás

A szöveg alapján vázlatrajzot készítünk.
Alkalmazzuk az ábra derékszögű háromszögére a Pitagorasz-tételt: $x=\sqrt{5{,}02^2-5^2}\approx 0{,}45$ (m).
A századó ing aljának távolsága a talajtól: $y=1{,}5-0{,}45-0{,}8=0{,}25$ (m). Vagyis az ing alja 25 cm-re van a talajtól.

Játék

Egy papírlapon rajzoljatok körül egy 200 forintos érmét háromszor, hogy három körvonalat kapjatok! Az egyikre építsetek egy tornyot úgy, hogy 200, 50, 20, 10 és 5 forintos érmeket raktok egymásra! Az öt érme olyan hatást kelt, mintha egy tornyot építettünk volna. A 100 forintos érmét azért hagytuk ki az építésből, mert a mérete nem illeszkedik a többihez.
A feladat az, hogy az öt érmét átrakd valamelyik másik körre. Nem szabad általuk az oszlopot! Egyszerre csak egy érmét helyezhetsz át, és kisebb érmére nagyobbat tenni nem szabad. Hogyan lehet a teljes tornyot áthelyezését megvalósítani?
A játék egyszemélyes, de nyugodtan megbeszélhetitek párokban is. Gyakorlásképpen kezdheted 3, majd 4 pénzérmével. Ezt a játékot Édouard Lucas francia matematikus mutatta be 1883-ban. A játék a „Hanoi tornya" elnevezést kapta.



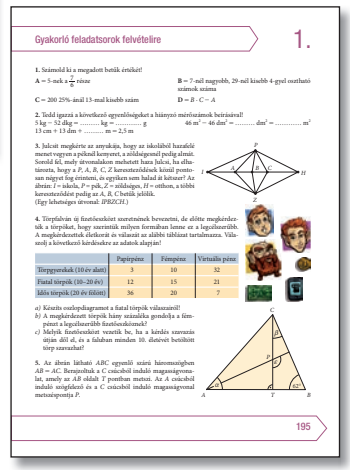
Otthoni kutatómunkának ajánlott feladatokat is találsz a könyvben.

A tankönyvben és a munkafüzetben is van *kiegészítő tananyag* alcím és a lap oldalán futó színes sáv. Azok a részek vannak így megjelölve, amelyek plusz ismeretet tartalmaznak.

A könyvhöz tartozó munkafüzet példái és néhány könnyed, játékos feladat is segít a gyakorlásban.

A leckékben egy jellemző feladat megoldását is közöljük, lépésről lépésre.

A játékos feladatok segítenek szórakoztatóbbá tenni a tananyagot.


Gyakorló feladatsorok felvételire 1.

1. Számold ki a megadott betűk értékét!
$A = 5$-nek a $\frac{2}{5}$-része
B = 7-nél nagyobb, 29-nél kisebb 4-gyel osztható számok száma
$C = 200$ 25%-ánál 13-mal kisebb szám
$D = B \cdot C - A$

2. Tedd igazzá a következő egyenlőségeket a hiányzó mértékszámok beírásával!
5 kg − 52 dkg = ... kg = ... g
46 m² − 46 dm² = ... dm² = ... m²
13 cm + 13 dm + ... m = 2,5 m

3. Juliska megkérte az anyukája, hogy az iskolából hazafelé menet vegyen a péknél kenyeret, a szükségesnél pedig almát. Sorold fel, mely útvonalakon mehetett haza Juliska, ha elhatározta, hogy a *P*, *A*, *B*, *C*, *Z* kereszteződések közül pontosan négyet fog érinteni, és egyikkam sem halad át kétszer! Az ábrán *I* = iskola, *P* = pék, *Z* = szülőhaza, *H* = otthon, a többi kereszteződést pedig az *A*, *B*, *C* betűk jelölik.
(Egy lehetséges útvonal: IPBZCH.)

4. Törpeláván új fizetőeszközt szeretnének bevezetni, de előtte megkérdezték a törpéket, hogy szeretnék milyen formában lenne ez a legcélszerűbb. A megkérdezettek életkorát és válaszát az alábbi táblázat tartalmazza. Válaszolj a következő kérdésekre az adatok alapján!

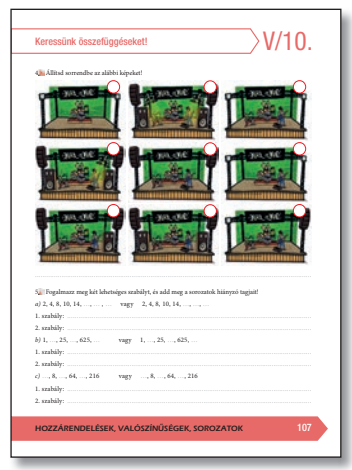
	Papírpénz	Fémpénz	Virtuális pénz
Törpegyerekek (10 év alatt)	3	10	32
Fiatal törpék (10–20 év)	12	15	21
Idős törpék (20 év felett)	36	20	7

a) Készíts oszlopdiagramot a fiatal törpék válaszairól!
b) A megkérdezett törpék hány százaléka gondolja a fémpénzt a legalkalmasabb fizetőeszköznek?
c) Melyik fizetőeszközt vezetik be, ha a kérdés szavazás útján dől el, és a faluban minden 10. életévét betöltött törpe szavazhat?

5. Az ábrán látható *ABC* egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$. Berajzoltuk a *C* csúcsból induló magasságvonalat, amely az *AB* oldalt *T*-pontban metszi. Az *A* csúcsból induló szögfelező és a *C* csúcsból induló magasságvonal metszéspontja *P*.

195

Négy feladatsorral készülhetsz a középiskolai felvételire.


Keressünk összefüggéseket! V/10.

4. Állítsd sorrendbe az alábbi képeket!

5. Fogalmazz meg két lehetséges szabályt, és add meg a sorozatok hiányzó tagjait!
a) 2, 4, 8, 10, 14, ..., ... vagy 2, 4, 8, 10, 14, ..., ...
1. szabály: .....
2. szabály: .....
b) 1, ..., 25, ..., 625, ... vagy 1, ..., 25, ..., 625, ...
1. szabály: .....
2. szabály: .....
c) ..., 8, ..., 64, ..., 216 vagy ..., 8, ..., 64, ..., 216
1. szabály: .....
2. szabály: .....

HOZZÁRENDELÉSEK, VALÓSZÍNŰSÉGEK, SOROZATOK 107

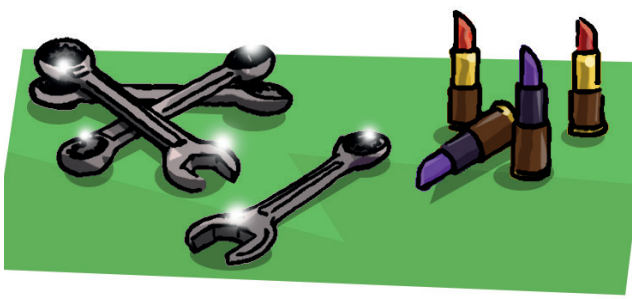
SIKERES TOVÁBBTANULÁST!

TARTALOM

Bevezetés 3

I. SZÁMOK ÉS BETŰK

1. Logika feladatok 8
2. Mit tudunk a halmazokról? 10
3. Műveletek halmazokkal 15
4. A racionális számok halmaza 19
5. Mit tudunk a racionális számokról? 21
6. Hatványozás 23
7. A négyzetgyök fogalma 27
8. Számok négyzetgyöke 30
9. Betűs kifejezések (ismétlés) 32
10. Betűs kifejezések szorzása és a kiemelés 37
11. Többtagú kifejezések szorzata (Kiegészítő tananyag) 41
12. Összefoglalás 43



II. GEOMETRIA

1. Egybevágósági transzformációk (ismétlés) 50
2. Transzformációk 53
3. Használjunk szerkesztőprogramot! 56
4. Hasonlóság 59
5. A középpontos hasonlóság (Kiegészítő tananyag). 62
6. Szerkesztések (Kiegészítő tananyag) 66
7. Összefoglalás 69



III. A PITAGORASZ-TÉTEL

1. Szerkesztések, mérések 72
2. A Pitagorasz-tétel 74
3. A Pitagorasz-tétel megfordítása (Kiegészítő tananyag). 78
4. A Pitagorasz-tétel alkalmazása 81
5. A Pitagorasz-tétel alkalmazása számológép segítségével (Kiegészítő tananyag) 84
Projektmunka – Számolj, szerkessz, vágj, hajtogass! 88
6. Nevezetes derékszögű háromszögek (Kiegészítő tananyag). 90
7. Összefoglalás 93



TARTALOM



IV. EGYENLETEK

1. Egyenletek 96
2. Szöveges feladatok számokról, életkorokról 100
3. Szöveges feladatok összekeverésről 104
4. Szöveges feladatok mozgásról, munkáról 108
5. Szöveges geometriai feladatok 112
6. Vegyes feladatok 116
7. Pénzügyi feladatok 118
8. Összefoglalás 123



V. HOZZÁRENDELÉSEK, VALÓSZÍNŰSÉGEK, SOROZATOK

1. Egyenes arányosság 128
2. Hozzárendelések és grafikonjaik 132
3. Fordított arányosság 137
4. Olvassunk a grafikonról! 141
5. Készítsünk grafikont! 147
6. Gyakoriság, relatív gyakoriság, átlag 153
7. Játék 158
8. Valószínűség 159
9. Valószínűségszámítási feladatok 163
10. Keressünk összefüggéseket! 166
11. Sorozatok 169
12. Összefoglalás 173



VI. TESTEK

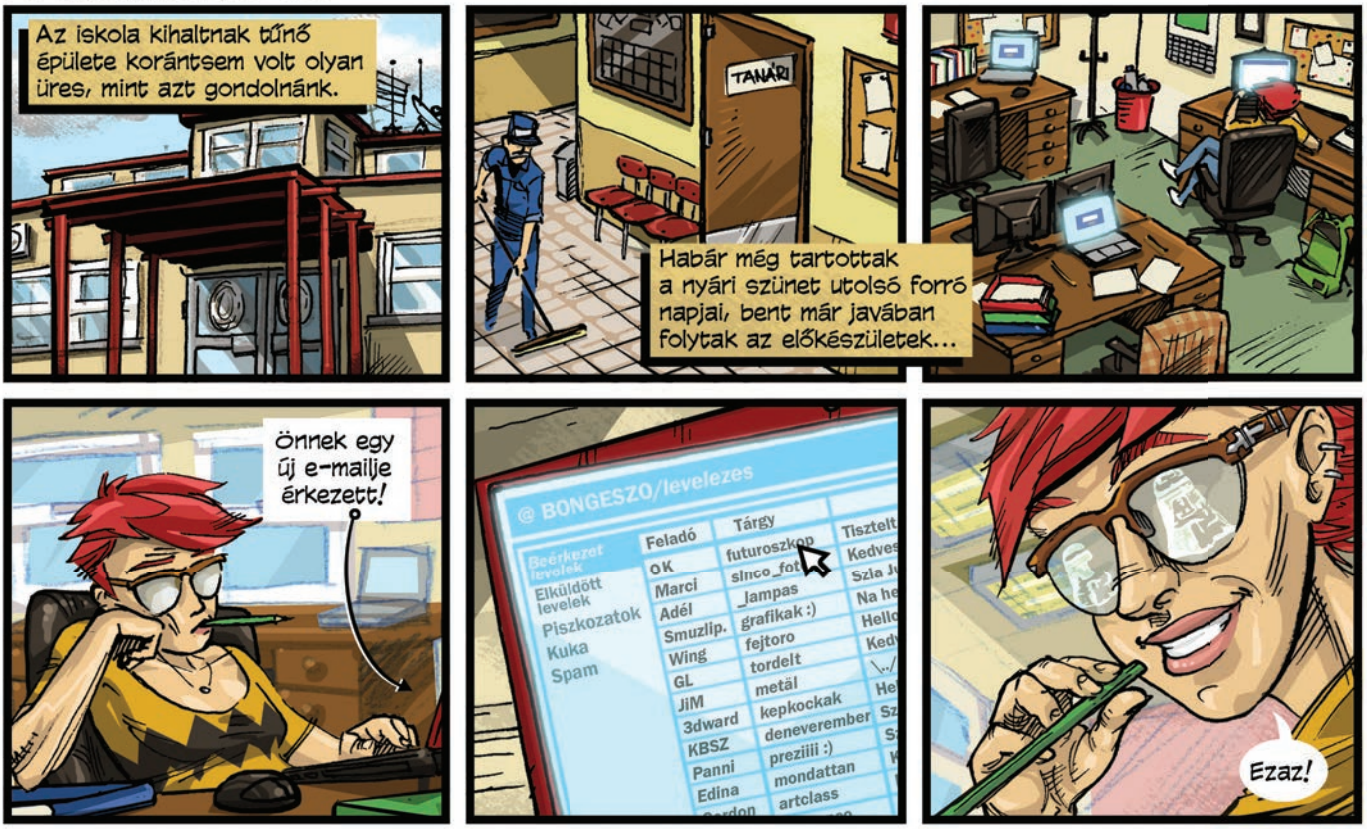
1. Mit tanultunk eddig? (ismétlés) 180
2. Gúlák 182
3. A gúla felszíne és térfogata (Kiegészítő tananyag) 185
4. A gömb 188
5. A Föld 190
6. Összefoglalás 193

GYAKORLÓ FELADATSOROK FELVÉTELIRE

..... 195

PROLÓGUS

Pár nappal az évnyitó előtt:



feladó: prof. Steinmann
e-mail: steinmann@ok.hu
tárgy: futuroszkop
érkezett: 08:29

csatolmányok

doc pdf

összes letöltése

Tisztelt Kolléganő!

Örömmel értesítjük, hogy iskolájuk lehetőséget nyert, hogy részt vegyen az Oktatás és Kutatás Intézet által kifejlesztett FS X10-es futuroszkóp tesztprogramjában. A készülék lehetséges valószínűség-mátrixok alapján Smith-féle algoritmusokkal generál lehetséges jövőképet, melyet az új Zeiss holo-kivetítő segítségével 3 dimenziós vetületként jelenít meg. A képek az alany tudatával összhangban változnak, így létrejöhet a jelen és a jövő közötti kommunikáció!

Amennyiben részt kíván venni a programban, kérem, jelezze irányunkba mielőbb, hogy a készülék telepítését még a tanévkezdés előtt lebonyolíthassuk és a használati bemutatót, valamint az operátori oktatást megszervezhessük.

Érdeklődését előre is köszönjük, együttműködésére számítunk!

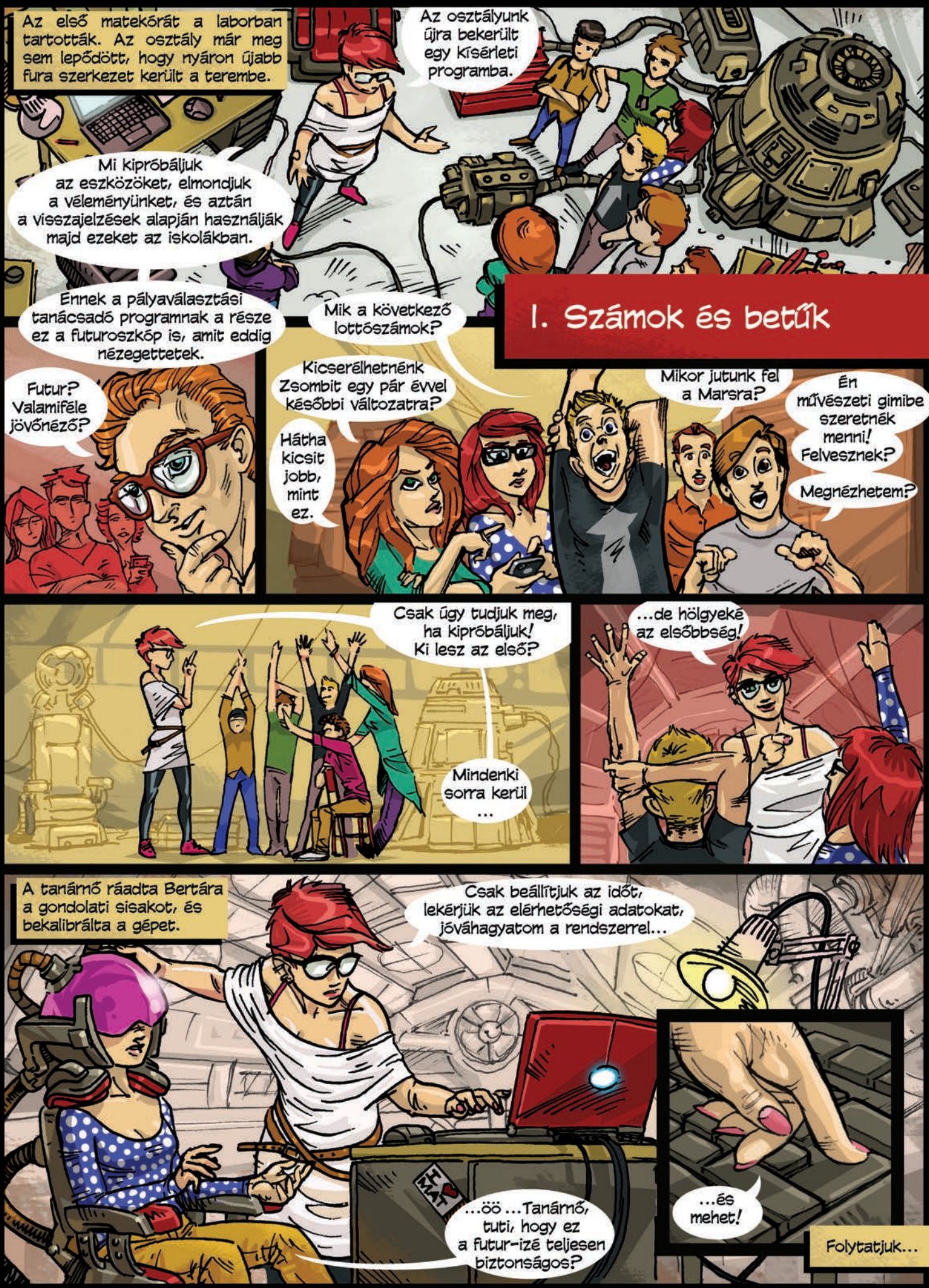
Üdvözlettel;

Prof. H. A. Steinmann
tudományos munkatárs

Ui.: a mellékletben megtalálja a berendezés technikai adatait, egy rövid használati utasítást, valamint az eddigi kutatási eredmények elemzéseit és statisztikáit.



Judit tanárnőnek se kellett több, már pötyögte is a válaszlevelet...


Az első matekórát a laborban tartották. Az osztály már meg sem lepődött, hogy nyáron újabb fura szerkezet került a terembe.
Az osztályunk újra bekerült egy kísérleti programba.
Mi kipróbáljuk az eszközöket, elmondjuk a véleményünket, és aztán a visszajelzések alapján használják majd ezeket az iskolákban.
1. Számok és betűk
Ennek a pályaválasztási tanácsadó programnak a része ez a futuroszkóp is, amit eddig nézegettetek.
Futur? Valamiféle jövőnéző?
Mik a következő lottószámok?
Kicserélhetnénk Zsombit egy pár évvel későbbi változatra?
Hátha kicsit jobb, mint ez.
Mikor jutunk fel a Marsra?
Én művészeti gimibe szeretnék menni! Felvesznek?
Megnézhetem?
Csak úgy tudjuk meg, ha kipróbáljuk! Ki lesz az első?
Mindenki sorra kerül ...
...de hölgyeké az elsőbbség!
A tanárnő ráadta Bertára a gondolati sisakot, és bekalibrálta a gépet.
Csak beállítjuk az időt, lekérjük az elérhetőségi adatokat, jóváhagyatom a rendszerrel...
...öö ...Tanárnő, tuti, hogy ez a futur-izé teljesen biztonságos?
...és mehet!
Folytatjuk...

Rejtélyek az iskolában

Valahol, a sötét rengeteg mélyén, a geotrollok birodalmán is túl, áll egy kastély. A kastély egy szigorúan őrzött iskolát rejt, ahova a 8. a, b, c, d és e osztályok diákjai járnak. A diákok különlegesen tehetséges gyerekek, mindegyikük másban kiemelkedő. Vannak köztük nagyszerűen gondolkodók, fejszámoló-bajnokok, tehetségesen éneklők és zenélők, számítógépzsenik, több nyelven beszélők, kiváló sportolók, kutatók és természetesen festőművészek is. Minden osztály élén egy mentor áll, ő védelmezi és támogatja az osztályba járó diákokat. Az egytől ötig sorszámozott osztálytermek egy hosszú folyosón egymás mellett helyezkednek el.

Az iskola különösen nagy hangsúlyt fektet a kastély védelmezésére, hiszen innen kerülnek ki a világ leendő segítői. A rendszer hibátlan, így a világ tökéletesen működik. Biztosan sejted, hogy vannak ebben a birodalomban is olyanok, akik elégedetlenek a rendszerrel, és minden erejükkel azon dolgoznak, hogy a Gonoszt hatalomra juttassák. Ez történt azon a szeptemberi napon is.

Délelőtt tíz órakor váratlanul elsötétült az ég, és a Gonosz küldöttei megtámadták a kastélyt. A tanítás közepén minden osztályterembe berontott egy-egy szörny, minden terembe más, és megpróbálta legyőzni a diákokat és az őket őrző mentort. Minden mentor más-más varázseszközzel védekezett.



Találd ki, melyik osztálynak ki a mentora, és milyen szörny támadta meg őket! Add meg a mentorok keresztnevét, vezetéknevét és azt is, ki milyen eszközzel védekezett a támadás során!

Segítségképpen eláruljuk a következőket:

Az Ökötö vezetéknevű mentor a 8. a osztályt védte.

Az Ikiti vezetéknevű mentor karddal védelmezte az osztályát.

Bea néni vezetékneve Akata.



Az Ukutu vezetéknevű mentor a vérfarkassal küzdött a második teremben.

Az Ekete vezetéknevű mentor a negyedik terem diákjait védte.

A legnehezebb védelem a vizek erejének irányítása, és erre egyedül Gergő bácsi képes az iskolában, így jogosan büszke rá az osztálya, a 8. c.

A 8. d osztály mentora Eszter néni.

A 8. b osztály mentora nem Bea néni.

A 8. a osztály mindig szájtátva nézi, ahogy a mentoruk a mágia erejével minden veszélyt elhárít.



A negyedik teremben Gergő bácsi a mentor.

Kata néni osztályát egy zombi támadta meg.

A 8. c osztály termébe egy vámpír rontott be, és nem varázspálcával védekeztek ellene.

A kobold ellen védekező mentor mágiát használt.

A zombikat csak karddal lehet elpusztítani, mással próbálkozni nem is érdemes.

1. Logika feladatok

A folyosó utolsó terme Erzsi néni osztályáé.
A vizek erejével védekező mentor termével szomszédos osztályterembe egy zombi tört be.
Egy vérfarkas épp az aranyíjjal védekező mentor termének szomszédjába rontott be.
Az Ekete vezetéknevű mentor terme a 8. b és a 8. a osztályok terme között van, ebben a sorrendben.
A Gergő bácsiék jobb szomszédjában lévő termet egy kobold támadta meg.
A 8. b osztály szomszédságában a bal oldalon a 8. d osztály terme van.

Sokat segíthet, ha készítesz a feladat megoldásához egy ilyen táblázatot.

	8. a	8. b	8. c	8. d	8. e	Akata	Ekete	Ikiti	Ökötö	Ukutu	Gergő	Eszter	Bea	Erzsi	Kata	kard	varázspálca	mágia	vizek ereje	aranyíj	vérfarkas	zombi	vámpír	kobold	gnóm
8. a																									
8. b																									
8. c																									
8. d																									
8. e																									
Akata																									
Ekete																									
Ikiti																									
Ökötö																									
Ukutu																									
Gergő																									
Eszter																									
Bea																									
Erzsi																									
Kata																									
kard																									
varázspálca																									
mágia																									
vizek ereje																									
aranyíj																									
vérfarkas																									
zombi																									
vámpír																									
kobold																									
gnóm																									

	1. terem	2. terem	3. terem	4. terem	5. terem
osztály					
mentor vezetékneve					
mentor keresztneve					
szörnyfajta					
védekezési mód					

I. 2. Mit tudunk a halmazokról?

A hétköznapi életben és a tanulmányaink során gyakran találkozunk a halmaz fogalmával.

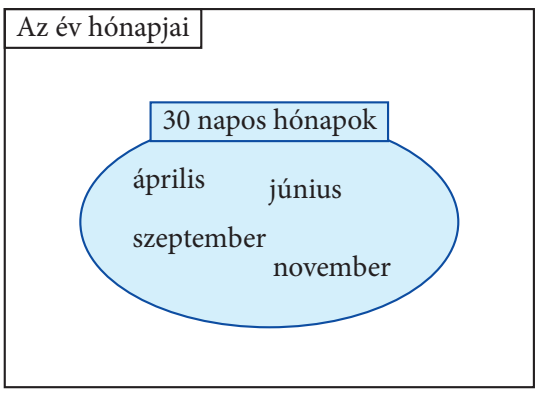
Például a növények, állatok rendszerezése során, a kémiai elemek csoportosításakor, a földrajzi tájak, természeti képződmények vizsgálatakor egy jól meghatározott tulajdonságú csoportot kapunk. Ezek mind halmazt alkotnak.

Halmaznak nevezzük az olyan dolgok összességét, amelyek egy jól meghatározott tulajdonsággal rendelkeznek, és mindegyikről egyértelműen eldönthető, hogy beletartozik-e az adott halmazba, vagy nem.

Halmazt alkotnak például
- az egy osztályban tanuló diákok;
- egy város iskolái;
- egy adott erdő fái.

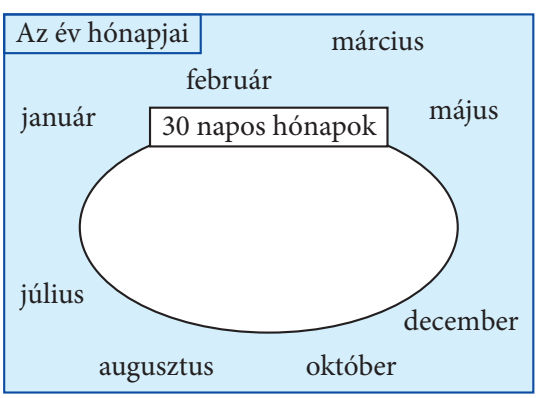
Nem alkotnak halmazt például
- a legszebb színek;
- a legmagasabb fák;
- a szép autók.

A halmazokat megadhatjuk:
- szöveges módon, a halmazt jellemző tulajdonság megfogalmazásával;
  például: a 30 napos hónapok
- elemei felsorolásával;
  például:
  {április, június, szeptember, november}
- ábrázolással, amit Venn-diagramnak nevezünk;
  például:



A halmazok jelölésére nagybetűket használunk. Ha az elemeket felsoroljuk, akkor azokat kapcsos zárójelbe tesszük. Például $A = \{\text{április; június; szeptember; november}\}$.

Sokszor adunk meg olyan halmazt, amelynek elemeiről vagy elemeinek egy részéről fogalmazunk meg állításokat. Például: $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$. Azt a halmazt, amelyen belül vizsgálódunk, **alaphalmaznak** nevezzük. A fenti példában az alaphalmaz az év hónapjainak halmaza. Az alaphalmaz jelölésére mi általában a H betűt fogjuk használni.



Ha a H alaphalmaz elemeiből elhagyjuk az A halmaz elemeit, akkor a megmaradt elemek is halmazt alkotnak. Ennek a halmaznak a neve ***A* kiegészítő halmaza** vagy más néven ***A* komplementer halmaza**. Jele: $\overline{A}$

A példánkban szereplő A komplementer halmaza
$\overline{A} = \{\text{január, február, március, május, július, augusztus, október, december}\}$.

1. PÉLDA

Legyen a H alaphalmazunk a 20-nál kisebb pozitív egész számok halmaza.

a) Soroljuk fel az A halmaz elemeit, ha tudjuk, hogy az
$A = \{20\text{-nál kisebb, hárommal osztható pozitív egész számok}\}$

b) Ábrázoljuk Venn-diagramon a H és az A halmazt!

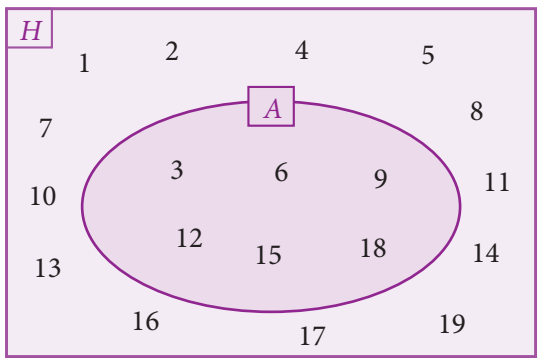
c) Soroljuk fel az $\overline{A}$ elemeit!

d) Ábrázoljuk számegyenesen az A halmaz elemeit!

Megoldás

a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

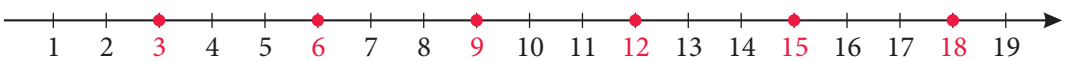
b)





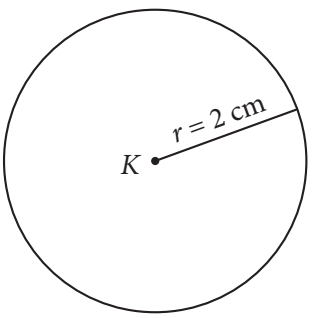
c) $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$

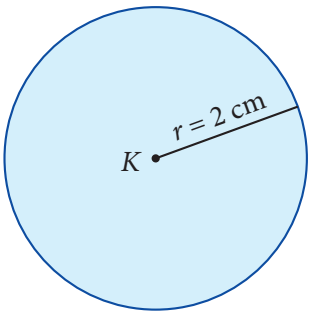
d)



A geometriai tanulmányaink során is találkoztunk halmazokkal. Ha a halmazok elemei pontok, akkor ponthalmazokról beszélünk.

Például: a körvonal is ponthalmaz. Az ábrán látható körvonal a sík olyan pontjainak halmaza, amelyek a K ponttól 2 cm távolságra vannak.





A 2 cm sugarú körlap olyan pontok halmaza, amelyek a kör középpontjától legfeljebb 2 cm távolságra vannak, vagy ami ugyanezt jelenti, 2 cm-nél nem nagyobb távolságra vannak. Ekkor a körvonal pontjai is a halmazhoz tartoznak, ahogy a rajzon is láthatod. Ezt szokták zárt körlapnak is hívni.

Ha azt akarjuk, hogy a körvonal pontjai már ne tartozzanak a halmazhoz, akkor úgy kell fogalmaznunk, hogy a körlap azon pontok halmaza, amelyek a kör középpontjától 2 cm-nél kisebb távolságra vannak. Ezt szokták nyílt körlapnak is hívni.

2. PÉLDA

Húzzunk meg egy *e* egyenest!

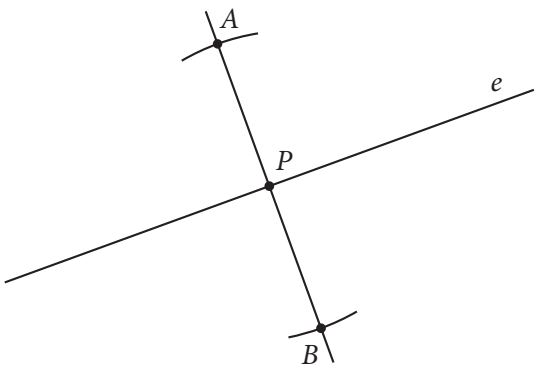
a) Szerkesszünk két olyan pontot, amelyek az *e* egyenestől 2 cm távolságra vannak!

b) Szerkesszük meg az összes olyan síkbeli pontot, amely az *e* egyenestől 2 cm távolságra van!

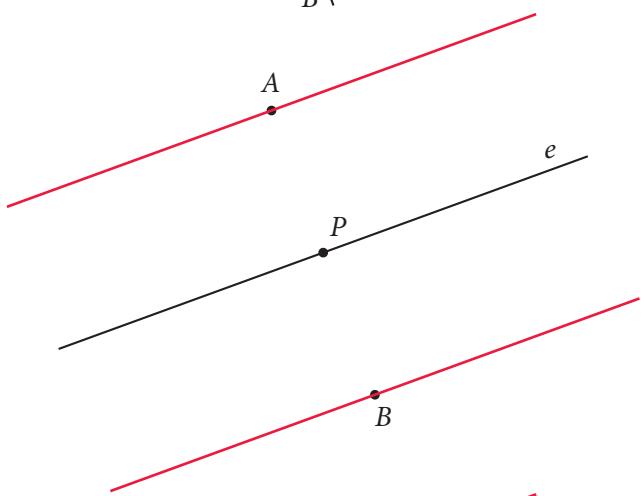
c) Színezzük ki a sík azon részét, amelyek pontjaira igaz, hogy az *e* egyenestől mért távolsága kisebb mint 2 cm!

Megoldás

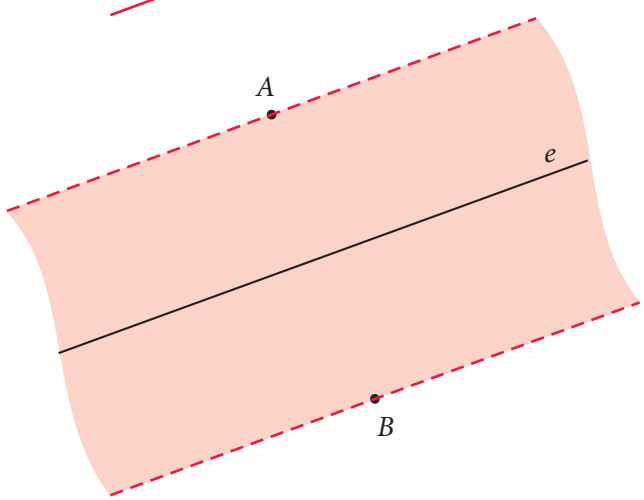
a) Jelöljünk ki az egyenesen egy pontot, szerkesszünk rá merőlegest, és mérjünk fel a merőleges egyenesre a metszésponttól 2 cm-t!



b) Az *a)* részben leírt szerkesztést sokszor ismételve tetszőlegesen sok pontot kapunk. Az összes ilyen síkbeli pont az *e* egyenessel párhuzamos, *e*-től 2 cm-re lévő egyeneseken van.

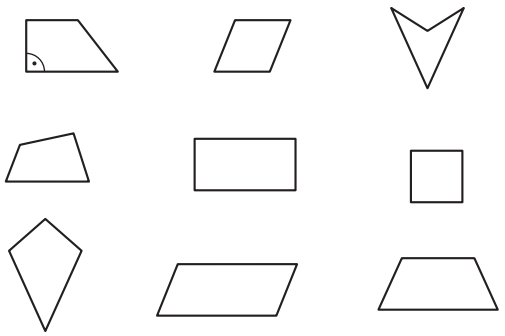


c) A *b)* részben felrajzolt piros egyenesek között minden pontra igaz, hogy az *e* egyenestől 2 cm-nél kisebb távolságra van. A piros egyenesek pontjai nem tartoznak a keresett ponthalmazba.

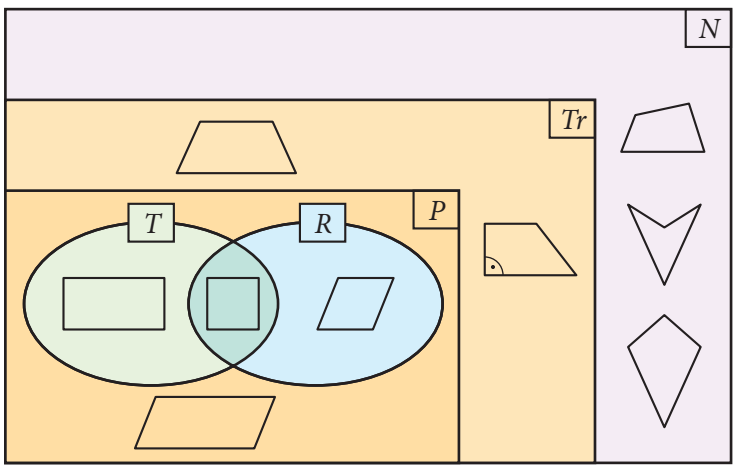


3. PÉLDA

Helyezzük el a megrajzolt négyszögeket Venn-diagramba!
N = {négyszögek}
Tr = {trapézok}
P = {paralelogrammák}
T = {téglalapok}
R = {rombuszok}



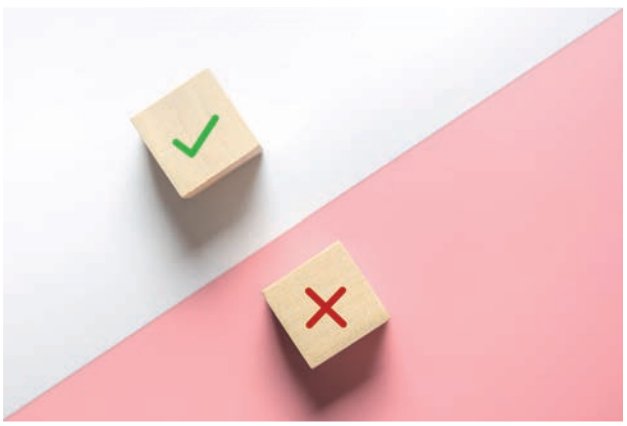
Megoldás



PÁROS MUNKA



Alakítsatok párokat! Fogalmazzatok meg 5-5 állítást a 3. példa alapján! Legyen közöttük igaz és hamis állítás is! Olvassátok fel a párotoknak az állításokat, ő pedig döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Indokolja is meg a válaszát!
Minden téglalap trapéz. – Az állítás igaz, mert minden téglalapnak van párhuzamos oldalpárja.
Van olyan rombusz, amelyik nem deltoid. – Az állítás hamis, mert minden rombusz tengelyesen tükrös az átlójára, tehát deltoid is.



FELADATOK

1. Döntsd el, melyek alkotnak halmazt az alábbiak közül! Választásodat indokold!

a) a kétjegyű páros számok
b) a hét munkanapjai
c) a nyár legszebb pillanatai
d) egy megszerkesztett háromszög fölötti pontok

2. Sorold fel a következő halmazok elemeit!

a) az osztályod keddi órái
b) Magyarország három legmagasabb hegycsúcsa
c) a 35-nél kisebb prímszámok
d) a 10-nél kisebb természetes számok négyzetének utolsó számjegye

3. Add meg az A halmaz komplementer halmazát!

a) Az alaphalmaz az iskolátokban tanító tanárok halmaza. Az A halmaz a matematikát tanító tanárok halmaza.
b) Az alaphalmaz a gerinces állatok halmaza. Az A halmaz a kétéltűek halmaza.
c) Az alaphalmaz az év hónapjai. Az A halmaz a téli hónapok halmaza.
d) Az alaphalmaz az osztályotokba járó diákok halmaza. Az A halmaz azoknak a gyerekeknek a halmaza, akik szeretik a mazsolát.



4. Legyen a H alaphalmaz a 16-nál kisebb pozitív egész számok halmaza.
Legyen A = {16-nál kisebb prímszámok} és B = {16-nál kisebb páros pozitív egész számok}.

a) Sorold fel az A és a B halmaz elemeit!
b) Ábrázold Venn-diagramon a H, A és B halmazt!
c) Sorold fel a H halmaz azon elemeit, amelyek sem az A, sem a B halmazba nem tartoznak!
d) Ábrázold számegyenesen a H halmaz elemeit! Színezd pirosra az A halmaz, kékre a B halmaz elemeit! Volt olyan szám, amit mindkét színnel kiszíneztél?

5. Vegyél fel a síkban két, egymástól 6 cm távolságra levő pontot, A-t és B-t! Rajzolj az A pont köré egy 3 cm, a B pont köré egy 4 cm sugarú kört!

a) Színezd pirossal azokat a pontokat, amelyek az A ponttól 3 cm és a B ponttól 4 cm távolságra vannak!
b) Színezd zölddel azokat a pontokat, amelyek az A ponttól legalább 3 cm távolságra vannak!
c) Színezd kékkel azokat a pontokat, amelyek az A ponttól legfeljebb 3 cm és a B ponttól legfeljebb 4 cm távolságra vannak!
d) Színezd sárgával azokat a pontokat, amelyek az A ponttól legfeljebb 3 cm, de a B ponttól legalább 4 cm távolságra vannak!

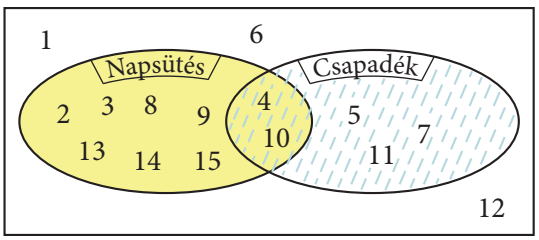
1. PÉLDA

A nyári iskolai tábor két turnusból állt augusztus 1–15. között. Felírtuk azokat a napokat, amikor volt napsütés: 2; 3; 4; 8; 9; 10; 13; 14; 15.
Azoknak a napoknak a számát is feljegyeztük, amikor volt csapadék: 4; 5; 7; 10; 11.

a) Készítsünk Venn-diagramot a tábori napok időjárásáról!
b) Mely napokon esett az eső, vagy sütött a nap?
c) Mely napokon esett az eső, és sütött a nap?
d) Hány olyan nap volt, amikor sütött a nap, de nem volt eső?
e) Mely napokon nem esett az eső, és nem sütött a nap sem?

Megoldás

a) A Venn-diagram segítségével jól láthatóvá tehetjük az egyes napok helyzetét időjárás szempontjából. Az ábrázolás után könnyebben válaszolhatunk a kérdésekre.



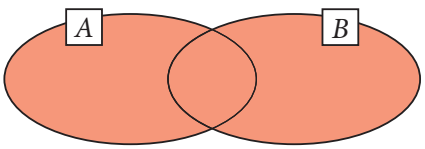
b) Esett az eső, vagy sütött a nap: 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 14; 15.

c) Sütött a nap, és esett az eső 4-én és 10-én.

d) Sütött a nap, de nem esett az eső: 2; 3; 8; 9; 13; 14; 15. Hét ilyen nap volt.

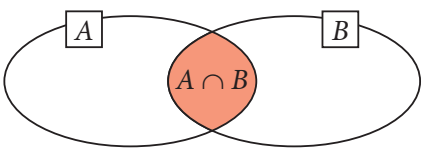
e) Három olyan nap volt, amikor nem esett az eső, és nem sütött a nap: 1, 6, 12.

A és B halmaz egyesítésének – más szóval uniójának – azt a halmazt nevezzük, amely minden olyan elemet tartalmaz, mely az A vagy a B halmazban benne van. Az első példában a *b)* kérdésre adott válasz adja meg a két halmaz unióját. Jelölése: $A \cup B$



$A \cup B$

Az A és B halmaz közös részének – más szóval metszetének – nevezzük azt a halmazt, amely azokat az elemeket tartalmazza, amelyek mindkét halmazban megtalálhatók. A példában azoknak a napoknak a halmaza, amikor sütött a nap, és esett az eső. A *c)* kérdésre adott válasz adja meg a két halmaz metszetét. Jelölése: $A \cap B$



PÁROS MUNKA

A páros mindkét tagja írjon három olyan halmazt, amely iskolában található tárgyakat tartalmaz! Ezután mindketten válasszatok egy halmazt a felírtak közül, majd mondjátok el társatoknak! Fogalmazzátok meg, milyen elemek tartoznak a két halmaz unió jába, metszetébe, majd ezt is-mételjétek meg a megmaradt két-két halmazzal is!
Volt-e olyan a kiválasztott halmazok között, amelynek közös részébe nem került elem?



2. PÉLDA

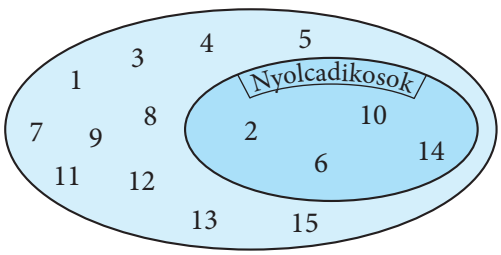
Az első példában leírt táborban a tábor lakói minden éjszaka őrséget szerveztek a tábortűznél. A nyolcadikosok augusztus 2-án voltak először őrségben, és minden negyedik éjszaka újra rájuk került a sor.

a) Ábrázoljuk Venn-diagramon az adatokat!

b) Mely napokon kellett őrségben lenniük a nyolcadikosoknak?

Megoldás

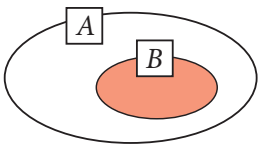
a)



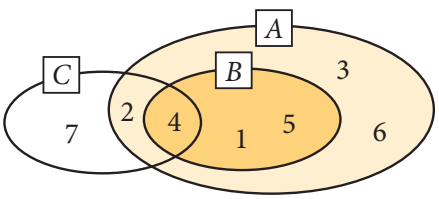


b) A nyolcadikosok 2-án, 6-án, 10-én és 14-én voltak őrségben. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a {2; 6; 10; 14} halmaz a táborozás napjainak részhalmaza.

Egy halmaz bizonyos elemeinek halmazát az adott halmaz részhalmazának nevezzük. Az ábrán B részhalmaza A-nak.
Jelölése: $B \subset A$



Például: Az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{1; 4; 5\}$, $C = \{2; 4; 7\}$ halmazok esetében a B halmaz részhalmaza az A-nak, de a C halmaz nem.
Jelöléseket használva: $B \subset A$, de $C \not\subset A$.



Gyakoriak az olyan feladatok, amelyekben nem vagyunk kíváncsiak egy halmaz összes elemére, nem akarjuk felsorolni azokat, számunkra csak az az érdekes, hogy hány eleme van a halmaznak.

3. PÉLDA

A tábori reggelinél 275 adag rántotta fogyott el. Sajtot vagy szalonnát lehetett kérni hozzá, és mindenki kért legalább az egyikből. Sajttal 161-en kérték, szalonnával pedig 145-en.

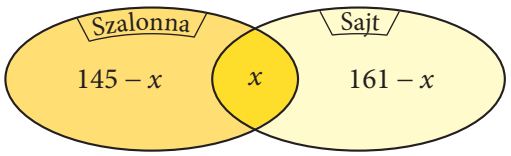
a) Hány olyan rántotta fogyott, amelyiken sajt és szalonna is volt?

b) Hány olyan rántotta fogyott, amelyiken csak sajt volt?

Megoldás



a) A reggelinél 275 adag rántotta fogyott el, amelyeken sajt vagy szalonna volt.
Mivel volt olyan rántotta, amelyiken sajt és szalonna is volt, ezért ezeket az adagokat a 145-be is és a 161-be is beleszámoltuk.
Jelöljük x-szel azoknak a rántottáknak a számát, amelyeken sajt és szalonna is volt, így csak szalonna $145 - x$ adag, csak sajt $161 - x$ adag rántottán volt.



Sajt vagy szalonna $145 - x + x + 161 - x$ adag rántottán volt.
Így $145 - x + x + 161 - x = 275$
$306 - x = 275$
$x = 31$

31 adag olyan rántottát készítettek, amelyen sajt és szalonna is volt.

Másik gondolatmenet: Ha összeadjuk a sajtos és a szalonnás rántották számát, akkor azokat, amelyeken sajt és szalonna is volt, kétszer számoltuk meg. Tehát a két halmaz elemszámának összege ($145 + 161 = 306$) pont annyival több az unió elemszámánál (275-nél), mint a két halmaz metszetének az elemszáma. $306 - 275 = 31$, tehát 31 adag sajtos szalonnás rántotta készült.

b) $161 - 31 = 130$ adag rántottán csak sajt volt.

Halmazok **metszetének, uniójának elemszámát** általában úgy határozhatjuk meg legkönnyebben, ha Venn-diagramot készítünk, amelybe beleírjuk a részhalmazok elemszámát.

FELADATOK

1. Legyen az alaphalmaz a 15-nél kisebb természetes számok halmaza.
a) Add meg elemeinek felsorolásával az A halmazt, ha $A = \{$15-nél kisebb 4-gyel osztható természetes számok$\}$!
b) Ábrázold Venn-diagramon az A és a H halmazt!
c) Ábrázold számegyenesen az $\overline{A}$ halmaz elemeit!

2. Az osztályból néhány jóbarát hamburgerezni ment. A sarki étteremben akció volt. Ha vettél a hamburger mellé egy üdítőt, akkor ingyen kérhettél valami extrát: sajtot vagy bacont, de választhattad akár mindkettőt is. A barátok nagyon megörültek a lehetőségnek, és mindannyian vettek üdítőt. Flóra, Zselyke, Ábel, Sári és Lázár kértek a hamburgerbe sajtot. Donát, Virág, Lázár és Zselyke kértek bele bacont. Mesi és Réka semmi extrát nem kértek.
a) Kik voltak azok, akik csak sajtot kértek a hamburgerbe?
b) Hányan éltek mindkét extra lehetőségével?
c) Hányan voltak ebben a baráti társaságban?

3. Legyen az alaphalmaz azon egész számok halmaza, melyek értéke (−5)-nél nagyobb, de legfeljebb 8.
$A = \{-4; -1; 0; 3; 4; 6; 7; 8\}$ $B = \{-4; -3; 0; 1; 2; 3; 7\}$
a) Ábrázold Venn-diagramon a halmazokat!
b) Sorold fel azokat a számokat az alaphalmazban, amelyek sem az A, sem a B halmazba nem kerültek!
c) Sorold fel az $A \cap B$ halmaz elemeit!
d) Sorold fel a $\overline{B}$ halmaz elemeit!
e) Hány eleme van az $A \cup B$ halmaznak?

4. Egy 19 tagú csoportban négy gyerek kivételével, akik csak franciául tudnak, mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Kilencen beszélnek közülük németül, tízen angolul.
a) Hányan beszélik mindkét nyelvet?
b) A csoportban hányan beszélnek csak angol nyelven?
c) Hányan vannak közülük azok, akik nem beszélnek németül?

5. Egy iskolában 48 diák vett részt egy matematika-tesztversenyen, 25-en pedig egy túrával egybekötött matekversenyen. 31 olyan diák volt, aki csak a tesztversenyen vett részt.
a) Hány olyan tanuló volt, aki mindkét versenyen részt vett?
b) Hány olyan tanuló volt, aki csak a túrával egybekötött versenyen vett részt?

6. Az alabári iskolában a nyolcadikosok között két szakkör is nagyon népszerű. Az évfolyam 65%-a színjátszószakkörre, 70%-a pedig robotikaszakkörre jár. 21 olyan nyolcadikos van, aki mindkét szakkörre jár, és mindenki jár valamelyik szakkörre.
a) Hányan járnak csak a színjátszószakkörre?
b) Hányan járnak csak a robotikaszakkörre?
c) Hány nyolcadikos diák van az alabári iskolában?



7. Ha az A halmaznak 15 eleme van, a B halmaznak 9 eleme van, és az $A \cap B$ halmaz 6 elemű, akkor hány eleme van az $A \cup B$ halmaznak?

8. Az A halmaznak 21 eleme, az $A \cup B$ halmaznak 42 eleme van, a metszetben pedig 10 elem van. Hány elemű a B halmaz?

9. *a)* Hány kétjegyű páros szám van?
b) Hány hárommal osztható kétjegyű szám van?
c) Hány hattal osztható kétjegyű szám van?
d) Hány olyan kétjegyű szám van, amely osztható kettővel vagy hárommal?

4. A racionális számok halmaza

I.



Szedjük össze közösen, mi mindent tanultunk eddig a számokról! Rendszerezzük ezeket az ismereteket!

A legismertebb számok a pozitív egészek, ide tartoznak az 1; 2; 3; 4; 5; …, és Z^+-szal jelöljük.





Ehhez az indiaiak hozzávették a nullát (0; 1; 2; 3; …), így született meg a természetes számok halmaza, jele: N.

A vagyon és az adósság megjelenésével megszülettek a negatív egész számok, a –1; –2; –3; –4; –5; …, ezeket a számokat szoktuk Z^--szal jelölni.





Az egész számok halmazába a pozitív és negatív egészek és a nulla is beletartozik, jele: Z.

A racionális számok jele Q, és azok a számok tartoznak ide, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.





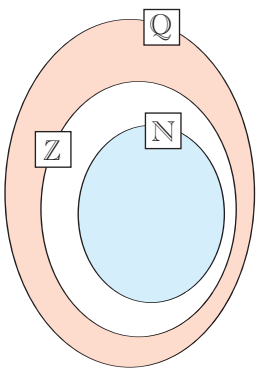
Egy csomó racionális számot ismerek. Pl.: 10; –7; 2,4; 5/3; $-0,\dot{3}$; …



PÁROS MUNKA

1. Rajzoljátok le a halmazábrát a füzetetekbe, majd írjátok a megfelelő helyre az alábbi számokat! Egyeztess a padtársaddal, hogy jól dolgoztál-e!

3; -6; $\frac{4}{7}$; $-9{,}12$; 0; $3,\dot{6}$; $\frac{-29}{11}$; $\frac{12}{4}$; $-1\frac{2}{5}$; $1,\dot{7}$



2. Döntsétek el az alábbi állításokról, melyik igaz, és melyik hamis! Válaszotokat minden esetben indokoljátok!

a) Minden egész szám egyben természetes szám is.
b) Az egész számok halmazában benne van a 0 is.
c) A pozitív és a negatív egész számok együtt az egész számok halmazát alkotják.
d) Minden természetes szám egyben racionális szám is.
e) Az 1 nem racionális szám, mert nem írható fel két egész szám hányadosaként.
f) A -2 egész szám, de nem természetes szám.
g) Minden racionális szám egyben egész szám is.



I. 4. A racionális számok halmaza

A racionális számok tizedes tört alakja lehet

- egész szám: $\frac{6}{2} = 3$; $-\frac{15}{3} = -5$
- véges tizedes tört: $\frac{64}{10} = 6{,}4$; $\frac{19}{4} = 4{,}75$; $-\frac{7}{2} = -3{,}5$
- végtelen szakaszos tizedes tört. Ez azt jelenti, hogy az osztás elvégzése során sohasem lesz 0 a maradék, de biztosan lesz olyan lépés, amikor megjelenik egy olyan maradék, ami már szerepelt. A visszatérő maradéktól kezdve a hányadosban újra ismétlődnek a korábbi számjegyek ugyanabban a sorrendben.

Ilyen például az $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\dot{3}$; $\frac{124}{99} = 1{,}252525\ldots = 1{,}\dot{2}\dot{5}$; $\frac{15}{7} = 2{,}142857142857\ldots = 2{,}\dot{1}42857\dot{}$

Versenyezzetek!

Alakítsátok át például számjegyek beírásával az $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ racionális számot úgy, hogy biztosan ne legyen ismétlődő szakasza!

FELADATOK

1. Fogalmazd meg egy alsós diák számára is érthető módon, hogy mit nevezünk racionális számnak!



2. Az alábbi állítások hibásak. Tedd igazzá a mondatokat! Javításodat indokold!

a) Nincsen negatív racionális szám.
b) Az egész számok nem írhatók fel tört alakban.
c) A $0{,}\dot{5}$ nem racionális szám, hanem csak egy végtelen szakaszos tizedes tört.
d) Az 1,23456789 szám nem racionális szám, mert nem írható fel tört alakban.

3. Keress öt olyan törtet, amelynek tizedes tört alakja végtelen szakaszos tizedes tört!

4. Igaz-e, hogy a racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört? Adj mindkét esetre két-két példát is!

5. Igaz vagy hamis? Válaszodat indokold!

a) Két racionális szám összege racionális szám.
b) Két egész szám különbsége egész szám.
c) Két racionális szám szorzata racionális szám.
d) Két egész szám hányadosa egész szám.
e) Két racionális szám hányadosa racionális szám.

6. Ha lehet, írj két-két olyan számot, amelyekre teljesülnek az állítások!

a) Racionális és egész szám is.
b) Racionális, de nem egész szám.
c) Egész, de nem természetes szám.
d) Természetes, de nem egész szám.

7. Csoportosítsd a racionális számokat tizedes tört alakjuk szerint! Mindegyikhez írj egy-egy példát is!

8. Döntsd el, igaz-e, hogy minden racionális szám reciproka is racionális szám! Válaszodat indokold!

9. Mely racionális számok tizedes tört alakja lesz véges tizedes tört?

A csoport



1. Jelöld a felsorolt számok helyét a számegyenesen!

$\frac{5}{4}$; $2{,}5$; $-\frac{4}{3}$; $\frac{11}{3}$; $-\frac{7{,}2}{2}$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $1\frac{3}{5} < a < 2{,}1$ *b)* $-3{,}6 < b < -2{,}8$

c) $\frac{1}{11} < c < \frac{1}{10}$

3. Lehet-e két racionális szám szorzata egész szám? Miért?

4. Add meg a felsorolt számok két-két tört alakját!

$\frac{10}{4}$; $2{,}5$; -3; $1\frac{3}{4}$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $-8+[-25-(-16)]$ *b)* $\frac{4}{25}+4{,}67-\frac{3}{100}$

c) $1{,}5-\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{7}\right]:0{,}5$

B csoport



1. Jelöld a felsorolt számok helyét a számegyenesen!

$\frac{13}{4}$; $-\frac{7}{3}$; $-1{,}5$; $\frac{5{,}2}{4}$; $\frac{9}{4}$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $2\frac{2}{5} < a < 2{,}7$ *b)* $-1{,}6 < b < -1\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{9} < c < \frac{1}{8}$

3. Lehet-e két racionális szám hányadosa egész szám? Miért?

4. Add meg az alábbi számok két-két tört alakját!

$\frac{7}{4}$; 4; $-2{,}2$; $2\frac{5}{7}$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $8+[-23+(-56)]$ *b)* $8{,}6-3{,}7+\frac{11}{20}$

c) $3\frac{2}{9}+\left(\frac{1}{3}:\frac{2}{3}-1\frac{5}{6}\right)$

C csoport



1. Jelöld a felsorolt számok helyét a számegyenesen!

$1{,}8$; $-\frac{5}{2}$; $\frac{11}{4}$; $-\frac{3{,}6}{2}$; $\frac{7}{4}$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $4\frac{3}{7} < a < 4{,}8$ *b)* $-2{,}8 < b < -2\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{101} < c < \frac{2}{100}$

3. Mit nevezünk egy szám reciprokának?

4. Add meg az alábbi számok két-két tört alakját!

$\frac{12}{4}$; -5; $3{,}5$; $-1\frac{3}{8}$

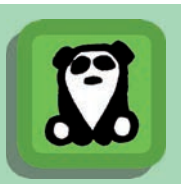
5. Végezd el a műveleteket!

a) $5+[-7+(-11)]$

b) $\frac{3}{8}-0{,}125+\frac{7}{2}$

c) $\left(1{,}5-\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

D csoport



1. Jelöld a felsorolt számok helyét a számegyenesen!

$-\frac{7}{5}$; 1,6; $\frac{9}{4}$; $-\frac{7{,}2}{4}$; $\frac{20}{6}$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $8\frac{3}{11} < a < 8{,}4$ *b)* $-5{,}7 < b < -5\frac{6}{20}$

c) $\frac{9}{10} < c < \frac{10}{11}$

3. Mit nevezünk egy racionális szám abszolút értékének?

4. Add meg a felsorolt számok két-két tört alakját!

$\frac{11}{3}$; 6,8; -14; $2\frac{5}{8}$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $-7+[-15+(-42)]$

b) $9+\frac{7}{10}-\left(-\frac{11}{5}\right)$

c) $\frac{72}{49}\cdot\frac{21}{54}-\frac{36}{28}:\frac{27}{14}$

A racionális számokkal végzett műveletek teszik lehetővé, hogy a mindennapjainkban felmerülő számítási feladatokat elvégezzük. Sokszor használjuk ezeket mértékegység-átváltásoknál, törtrész kiszámításakor vagy százalékszámításnál.

PÁROS MUNKA



Felváltva válaszoljátok meg az 1. és a 2. kérdést! A 3. és a 4. feladatot először egyedül oldjátok meg, majd egyeztessétek az eredményt!

1. Soroljátok fel az általatok ismert mennyiségeket és ezek mértékegységeit!

2. Rendezzétek növekvő sorrendbe az egy mennyiséghez tartozó tanult mértékegységeket, majd írjátok közéjük az átváltási számokat!

3. Végezzétek el az alábbi átváltásokat!

a) Hány kg, illetve dkg 5650 g?
b) Hány dm, illetve méter 4250 cm?
c) Hány liter 82,4 dl?
d) Hány m^2 750 dm^2?
e) Hány nap a 168 óra?
f) Hány liter 1,44 m^3?

4. Az angolok és az amerikaiak még ma is sokszor a hagyományos mértékegységeiket használják. 1 yard = 3 láb = 36 hüvelyk, azaz 1 láb = 12 hüvelyk.

a) Hány hüvelyk 2 yard?
b) Hány yard 2 hüvelyk?
c) Hány hüvelyk $8\frac{1}{3}$ láb?
d) Hány láb 2,4 hüvelyk?

6. Hatványozás

I.

Hetedik osztályban tanultuk a hatvány fogalmát, és műveleteket is végeztünk hatványokkal.

A hatványokat például a pozitív egész számok prímtényezős alakjának felírásához használtuk.

A hatvány az azonos tényezőkből álló szorzat rövidebb leírása:

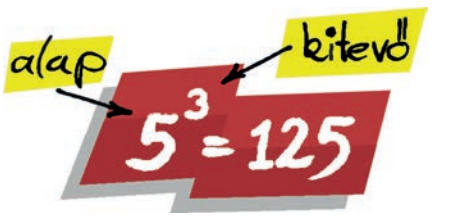


Ismételjük át az elnevezéseket!

Például az 5^3 esetében:
– a hatványalap vagy röviden az alap az 5,

– a hatványkitevő vagy röviden kitevő a 3,

– a hatvány értéke, a hatványérték az $5^3 = 125$.



Megállapítottuk, hogy minden szám első hatványa önmaga.

PÁROS MUNKA

Először oldjátok meg a feladatot önállóan, majd cseréljetek füzetet, és ellenőrizzétek a társatok munkáját! Ne írj a társad füzetébe, először beszéljétek meg az eltéréseket!

Írd fel a megadott hatványokat, majd számítsd ki az értéküket!

a) Egy olyan hatvány, melynek alapja 5, kitevője 2.

b) Egy olyan hatvány, melynek alapja 2, kitevője 3.

c) Egy olyan hatvány, melynek alapja $\frac{1}{2}$, kitevője 3.

d) Egy olyan hatvány, melynek alapja $\frac{3}{4}$, kitevője 2.

e) Egy olyan hatvány, melynek alapja 0, kitevője 11.



A sakk egy több mint ezeréves játék, amelynek eredetéről mesék, legendák szólnak. Az egyik történet szerint egy brahmin (az indiai kasztrendszerben főpap, főminiszter) találta fel, hogy a rádzsát (uralkodót) szórakoztassa. Szerény jutalmat kért magának. A sakktábla első mezejére 1, a következőre 2, a harmadikra 4, és így tovább, minden mezőre kétszer annyi gabonaszemet, mint az előzőn volt. A rádzsát igencsak szórakoztatta a játék, ezért megígérte, hogy azonnal teljesíti a brahmin kérését. Nagy volt a meglepetése, mikor jelentették neki, hogy egész birodalmában nem termett ennyi búza.



A sakktáblára összesen $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ darab búzaszemet kellett volna tenni. Számítsuk ki, mennyi búza ez:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ db búzaszem, ami kb. $7 \cdot 10^{11}$ tonna. Még ez is hatalmas szám. Ha vasúton szeretnénk ennyi búzát elszállítani, akkor kicsit tovább kell számolnunk. Egy gabonaszállító vasúti kocsi 16 m hosszú és 60 tonna teherbírású, tehát a szerelvény hossza kb. 5000-szer érné körül a Földet.

Figyeld meg!

A hatványértékek nagyon gyorsan növekednek.

$2^{10} = 1024$ $\quad 3^{10} = 59\,049$ $\quad 5^{10} = 9\,765\,625$

$2^{20} = 1\,048\,576$ $\quad 3^{20} = 3\,486\,784\,401$ $\quad 5^{20} = 95\,367\,431\,640\,625$

Olvassátok ki a számokat!

A hatványok szorzását, osztását is elvégezhetjük megfelelő feltételek teljesülése mellett úgy, hogy nem kell a hatványértéket kiszámolni.

1. PÉLDA

Végezzük el az alábbi műveleteket, és az eredményt adjuk meg egyetlen szám hatványaként!

a) $3^5 \cdot 3^4$ $\quad$ *b)* $\frac{4^8}{4^3}$ $\quad$ *c)* $(2^4)^3$

Megoldás

A műveletek elvégzésénél használjuk fel a hatvány fogalmát!

a) $3^5 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9$

b) $\frac{4^8}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

c) $(2^4)^3 = (2^4) \cdot (2^4) \cdot (2^4) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$

2. PÉLDA

Döntsük el a hatvány fogalmának felhasználásával, hogy igazak-e az alábbi egyenlőségek!

a) $(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$ $\quad$ *b)* $(2 \cdot 3)^6 = 2 \cdot 3^6$ $\quad$ *c)* $\left(\frac{10}{5}\right)^6 = 2^6$ $\quad$ *d)* $\frac{3^2}{4} = \frac{9}{16}$ $\quad$ *e)* $\frac{6^3}{5^3} = \left(\frac{6}{5}\right)^3$

Megoldás

a) $(2 \cdot 5)^4 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^4$
Ez az egyenlőség igaz.

b) $(2 \cdot 3)^6 = 2 \cdot 3^6$
Írjuk fel a vizsgált egyenlőség bal és jobb oldalán a hatványokat szorzatalakban!
$(2 \cdot 3)^6 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
A két oldal szorzatalakja nem egyenlő, így az egyenlőség nem igaz.

c) $\left(\frac{10}{5}\right)^6 = \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$
Az egyenlőség igaz.

d) $\frac{3^2}{4} = \frac{9}{16}$

$\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} \neq \frac{9}{16}$, ez az egyenlőség nem igaz.

e) $\frac{6^3}{5^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \left(\frac{6}{5}\right)^3$, ez az egyenlőség igaz.

A 2. példa megoldása során láthatjuk, hogy ha a műveletsorban nincs zárójel, akkor a műveletek sorrendje a következő: először a hatványozást, utána a szorzást és az osztást, végül az összeadást és a kivonást kell elvégezni.
A zárójel alkalmazása megváltoztathatja a műveleti sorrendet.

VERSENYEZZETEK!

Ki tud két perc alatt több különböző kettőhatványértéket leírni növekvő sorrendben a füzetébe? Ehhez a versenyhez ne használjatok számológépet!

3. PÉLDA

Írjuk fel a 792 és 1890 számokat prímtényezők szorzataként, majd határozzuk meg a számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb többszörösét!

Megoldás

A tanult módon felírva a prímosztókat:

792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

$792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$



Megkeressük azokat a prímeket, amelyek mindkét szám prímtényezős felbontásában szerepelnek. Minden közös prím esetében a prímhatványok közül kiválasztjuk azt, amelyik osztja a másikat, és a kiválasztott prímhatványokat összeszorozzuk. A példában lévő számok esetében mindkét szám felbontásában szerepel a 2 és a 3. A 2 és a 3^2 közös osztó, tehát a két szám legnagyobb közös osztója: $2 \cdot 3^2 = 18$.

A két szám legkisebb közös többszöröse a két számban található összes prímhatvány szorzata, a közös prímek a számokban előforduló nagyobb kitevővel: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 83\,160$

FELADATOK

1. Adj villámgyors választ a villámkérdésekre!
a) Az 1967^{638} hatvány esetében mi a kitevő?
b) Az 592^{1835} hatvány esetében mi az alap?
c) Az 1^{98765} hatvány esetében mennyi a hatványérték?
d) A $24\,680^{1}$ hatvány esetében mennyi a hatványérték?

2. Írd fel az 1470 és a 945 számokat prímtényezők hatványaként, majd határozd meg a számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

3. Oldd meg a „létrafeladatokat”!

a) I. $2^{▲} = 8$	II. $▲^2 = ■$	III. $■^3 = ☺$	$☺ = ?$
b) I. $♥^3 = 216$	II. $2^{♥} = ■$	III. $■ = ▲^3$	$▲ = ?$
c) I. $10^3 = ▲$	II. $▲ = 5^3 \cdot ♥^3$	III. $■^{♥} = 81$	$■ = ?$

Keresd meg a helyes válaszokat! Lehet, hogy egy-egy feladatnál több jó lehetőséget is találsz.

4. Hány darab hármas kitevőjű hatványt találsz a felsoroltak között?

7^3; 3^7; $\left(\frac{7}{5}\right)^3$; $0{,}64^5$; 3^3; $2{,}1^3$; 3

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* egyet sem

5. Mennyi a 2^{10} értéke?

A) 2 *B)* 10 *C)* 100 *D)* 512 *E)* 1024

6. Mennyi az alapja annak a hatványnak, melynek a kitevője 2, a hatványértéke 144?

A) 2 *B)* 12 *C)* 72 *D)* 144 *E)* 20 736

7. Mennyi a kitevője annak a hatványnak, melynek az alapja $\frac{2}{5}$, a hatványértéke $\frac{16}{625}$?

A) 2 *B)* 3 *C)* 4 *D)* 8 *E)* 16

8. Melyik osztás eredményeképp kaphatjuk meg a 4^3 hatványt?

A) $\frac{4^4}{3^3}$ *B)* $\frac{4^3}{4^3}$ *C)* $\frac{4^9}{4^6}$ *D)* $\frac{3^4}{3^3}$ *E)* $\frac{4^3}{4^1}$

9. Válaszd ki, mennyivel egyenlő a $(2^2)^3$ hatvány!

A) 2^5 *B)* 2^6 *C)* 26 *D)* 32 *E)* 64

10. Válaszd ki a helyes egyenlőségeket!

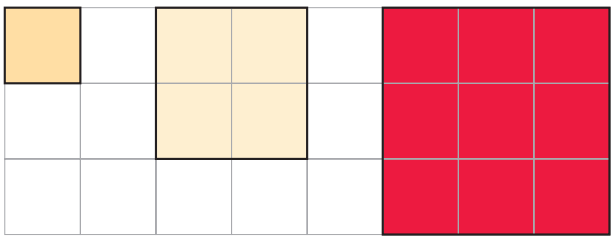
A) $\frac{4^8}{4^3} = \frac{4^5}{4}$ *B)* $\frac{7^{10}}{7^4} = 7^6$ *C)* $\frac{3^5}{3^9} = \frac{3}{3^4}$ *D)* $\frac{5^7}{5^9} = \frac{1}{5^2}$ *E)* $\frac{6^9}{6^3} = 6^3$

1. PÉLDA

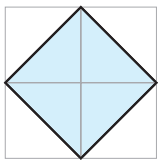
Rajzoljatok a füzetetekbe olyan négyzeteket, amelyek területe 1; 4; 9; 2; 5; 10 területegység! 1 területegység a füzetben egy kis rácsnégyzet területe legyen.

Megoldás

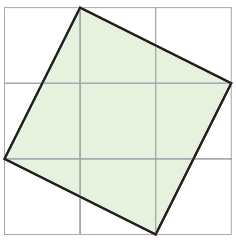
Az első három esetben könnyű dolgunk van, mert a négyzetrács oldalaival párhuzamosan rajzolhatunk négyzeteket.

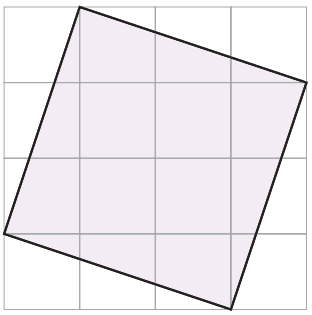


A 2 egység területű négyzet megrajzolása már egy kis ötletet kíván. Ha csak a négyzetrács oldalaival párhuzamos oldalakat akarunk használni, akkor nem boldogulunk a feladattal. Használjuk fel azt, hogy az egységnégyzet átlója 0,5 területegységű háromszögekre bontja a négyzetet! Négy ilyen háromszög megfelelő összeillesztésével megkaphatjuk a 2 egység területű négyzetet.



Az előző ötletet felhasználva megrajzolhatjuk az 5, illetve 10 egység területű négyzetet is.





2. PÉLDA

Határozzuk meg az első példában megrajzolt négyzetek oldalhosszát!

Megoldás

Az első három esetben az ábra alapján gyorsan válaszolhatunk a kérdésekre.

Terület: $t_1 = 1$ területegység,
oldalhossz: $a_1 = 1$ egység
Terület: $t_2 = 4$ területegység,
oldalhossz: $a_2 = 2$ egység
Terület: $t_3 = 9$ területegység,
oldalhossz: $a_3 = 3$ egység

A 2 egység területű négyzet esetében csak mérésen alapuló becsléssel, közelítőleg tudjuk megmondani a négyzet oldalhosszát. A mérés eredményeként azt kapjuk, hogy a 2 egység területű négyzet oldalhossza $\approx$ 1,4 egység. Természetesen ez nem pontos érték, mert az 1,4 egység oldalú négyzet területe $t = 1{,}96$ területegység lenne.

Ugyanígy méréssel, közelítő értékkel határozhatjuk meg az 5, illetve 10 területegységnyi négyzet oldalhosszát is.

Ha $t = 5$, akkor az oldalhossz $\approx 2{,}2$;
ha $t = 10$, akkor az oldalhossz $\approx 3{,}2$.

7. A négyzetgyök fogalma

A pontos érték jelölésére bevezetünk egy új jelet.
$\sqrt{2}$ -vel jelöljük, és négyzetgyök kettőnek mondjuk a 2 egység területű négyzet oldalának hosszát. A négyzet területe tehát: $t = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.
$\sqrt{5}$ -tel jelöljük, és négyzetgyök ötnek mondjuk az 5 egység területű négyzet oldalának hosszát. A négyzet területe tehát: $t = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

3. PÉLDA

Van-e a -9-nek négyzetgyöke?

Megoldás

Nincs, mert bármilyen számot négyzetre emelve (önmagával megszorozva) csak nemnegatív számot kaphatunk. **Tehát negatív számoknak nincs négyzetgyöke!**

Kiegészítő tananyag

A fogalmat általánosíthatjuk:
Ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ (négyzetgyök a) jelenti azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a-val egyenlő. Ha nem okoz félreértést, akkor négyzetgyök a helyett gyakran csak gyök a-t mondunk.
Például:

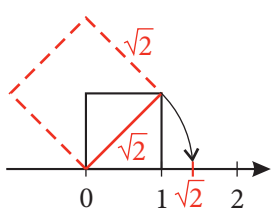
$\sqrt{4} = 2$, mert $2^2 = 4$; $\sqrt{9} = 3$, mert $3^2 = 9$;

$\sqrt{1} = 1$, mert $1^2 = 1$; $\sqrt{0} = 0$, mert $0^2 = 0$;

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, mert $0{,}4^2 = 0{,}16$; $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$, mert $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

Megmondható-e, hogy hol helyezkedik el a $\sqrt{2}$ a számegyenesen?
Igen. Rajzoljunk egy számegyenest! Vegyük körzőnyílásba a 2 egység területű négyzet oldalát (az egység területű négyzet átlóját), majd mérjük fel a 0-tól jobbra ennek a szakasznak a hosszát! Vigyázzunk, a számegyenesen ugyanakkora egységet vegyünk fel, mint a négyzet rajzolásakor!

Meghatározható-e pontosan a $\sqrt{2}$ értéke tizedes tört alakban?
Próbáljuk meg kiszámítani $\sqrt{2}$ néhány tizedesjegyét!



$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, mert $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, mert $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, mert $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$

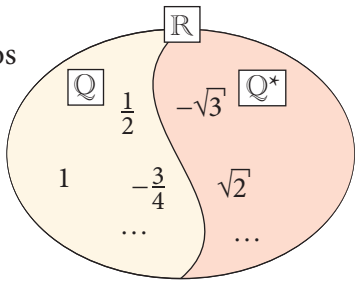
Ezt a közelítést tetszőlegesen sok tizedesjegy esetén elvégezhetjük, de pontos értéket nem kapunk. Például a $\sqrt{2}$ hét tizedesjegyre kerekített értéke: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$; 18 tizedesjegyre kerekített értéke: $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095049$.

7. A négyzetgyök fogalma

I.

A $\sqrt{2}$ tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

Azokat a számokat, amelyeknek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört, **irracionális számok**nak nevezzük.



Az eddig tanult számokat most egy új számhalmazzal egészítettük ki, ez az irracionális számok halmaza. Jele: Q*

A racionális és az irracionális számok együttesen alkotják a valós számok halmazát. Jele: R

FELADATOK

1. Rajzolj egy, a fentihez hasonló halmazábrát a füzetedbe! Írd a felsorolt racionális és irracionális számokat a megfelelő helyre a halmazábrában!

$0{,}7;\quad \frac{1}{3};\quad \sqrt{2};\quad -0{,}008007\dot{0}06\dot{};\quad \sqrt{4};\quad 0{,}\dot{5};\quad -\frac{3}{4};\quad 0{,}12345678\ldots$

az utolsó számnál a pozitív egész számokat írjuk le a tizedesvessző után sorban, a végtelenségig.

2. Döntsd el az alábbi állításokról, melyik igaz, melyik hamis! Válaszodat indokold!

a) A véges tizedes törtek racionális számok.
b) A végtelen szakaszos tizedes törtek irracionális számok.
c) A végtelen nem szakaszos tizedes törtek irracionális számok.
d) A racionális és irracionális számok együtt a természetes számok halmazát alkotják.
e) Ha egy pozitív egész számból gyököt vonunk, irracionális számot kapunk.

3. Válaszd ki azokat a számokat, amelyek valamely egész szám négyzetei! Add meg, mely számok négyzetei! Vigyázz, több megoldás is létezhet, hiszen pl.: $100 = 10^2 = (-10)^2$.

81; 36; 54; −49; 9; 0,5; 144; 18; 169; 8

4. Számold ki a négyzetgyökök értékét! Vigyázz, ide csak pozitív számot írhatsz!

a) $\sqrt{100}$ *b)* $\sqrt{49}$ *c)* $\sqrt{81}$ *d)* $\sqrt{1}$ *e)* $\sqrt{64}$
f) $\sqrt{121}$ *g)* $\sqrt{169}$ *h)* $\sqrt{400}$ *i)* $\sqrt{1\,000\,000}$ *j)* $\sqrt{225}$

5. Adott a négyzet területe. Váltsd át úgy a mértékegységet, hogy a mérőszám egész szám legyen, és határozd meg a négyzet oldalának hosszát és kerületét!

a) $T = 0{,}16\ \text{cm}^2$ *b)* $T = 0{,}36\ \text{dm}^2$ *c)* $T = 1{,}44\ \text{m}^2$ *d)* $T = 0{,}000196\ \text{km}^2$

6. Adottak a téglalap oldalai.

I. Számold ki a téglalap területét!
II. Add meg a vele egyező területű négyzet oldalának hosszát!
III. Hasonlítsd össze a téglalap és a négyzet kerületét!

a) $a = 5$ m, $b = 20$ m *b)* $a = 3$ dm, $b = 27$ dm
c) $a = 2$ cm, $b = 3{,}2$ dm *d)* $a = 4$ cm, $b = 36$ cm

I. 8. Számok négyzetgyöke

FEJSZÁMOLÁS

Soroljátok fel a természetes számok négyzeteit 0-tól 20-ig!

Azokat a természetes számokat, amelyeknek a négyzetgyöke természetes szám, négyzetszámoknak nevezzük.

A többi természetes szám négyzetgyökét az előző leckében tanult eljárással csak közelítőleg tudjuk meghatározni. Ez nagyon hosszadalmas munka. Évtizedekkel ezelőtt még négyzetgyöktáblázatot használtak a számolás meggyorsítására, de ezt a feladatot ma már a számológépek sokkal gyorsabban elvégzik helyettünk. Van olyan számológép, ahol egyetlen gomb és a szám beírása után kaphatunk eredményt, de létezik olyan is, amelyiknél egy adott szám négyzetgyökének meghatározásához egy úgynevezett „második funkció” (2ndF vagy SHIFT) használata szükséges. Fontos, hogy jól ismerd az általad használt számológépet, hogy használata gyors és megbízható legyen.



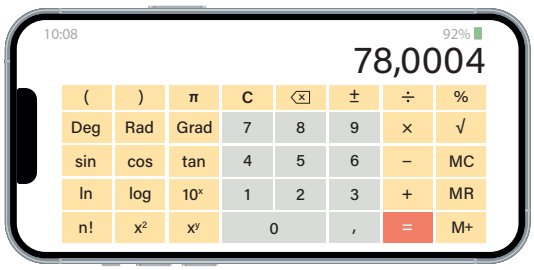
PÁROS MUNKA

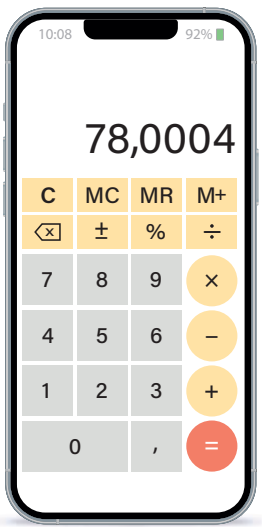
Keressétek meg a gyökjelet a saját számológépeteken és a társatokén is! Segítsétek egymást a számológép használatában!

Határozzátok meg számológéppel az alábbi számok három tizedesjegyre kerekített közelítő értékét! Alkalmazzátok a kerekítés szabályait! Egyeztessétek a kapott eredményeket!

a) $\sqrt{24}$ *b)* $\sqrt{1000}$ *c)* $\sqrt{0{,}05}$ *d)* $\sqrt{\frac{2}{9}}$ *e)* $\sqrt{0{,}00000000015}$

A négyzetgyökvonás a mobiltelefonok nagy részén is elvégezhető. A legtöbb okostelefon számológép-alkalmazása elsőre nem kínálja fel a négyzetgyökvonás funkciót, de a telefon elforgatásával vagy funkcióváltással olyan tudományos számológép hívható elő, amellyel már lehet gyököt vonni.





Az elmúlt évtizedek gyors informatikai fejlődése teremtette meg annak a lehetőségét, hogy valamilyen eszköz kiszámolja helyettünk a számok négyzetgyökét.



KUTATÓMUNKA

1. Nézzetek utána, hogyan használták a függvénytáblázatot a négyzetgyökvonás elvégzésére!
2. Keressetek az interneten módszert arra, hogyan lehet a négy alapművelet segítségével négyzetgyököt vonni!
3. Készítsetek egy 3-4 diából álló prezentációt, és mutassátok be az olvasott eljárást osztálytársaitoknak is!

FELADATOK

1. Írd a füzetedbe a helyes állítások betűjelét!

a) $\sqrt{144} = 12$ *b)* $\sqrt{200} = 20$ *c)* $\sqrt{189} = 13$ *d)* $\sqrt{256} = 16$

e) $\sqrt{625} = 25$ *f)* $\sqrt{289} = 17$ *g)* $\sqrt{100\,000} = 100$ *h)* $\sqrt{361} = 19$

2. Számold ki a felsorolt négyzetgyökök értékét! Használhatod a számológépedet!

a) $\sqrt{0{,}16}$ *b)* $\sqrt{2{,}25}$ *c)* $\sqrt{1{,}96}$ *d)* $\sqrt{324}$

e) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ *f)* $\sqrt{\frac{25}{81}}$ *g)* $\sqrt{\frac{9}{49}}$ *h)* $\sqrt{\frac{64}{10\,000}}$

3. Kisebb, nagyobb vagy egyenlő? Tedd ki a megfelelő relációs jelet! A füzetedben dolgozz!

a) $\sqrt{5^2}$ $\sqrt{25}$ *b)* $\sqrt{1}$ $\sqrt{0}$

c) $\sqrt{81}$ $\left(\sqrt{9}\right)^2$ *d)* $\sqrt{2^6}$ $\sqrt{4}^2$

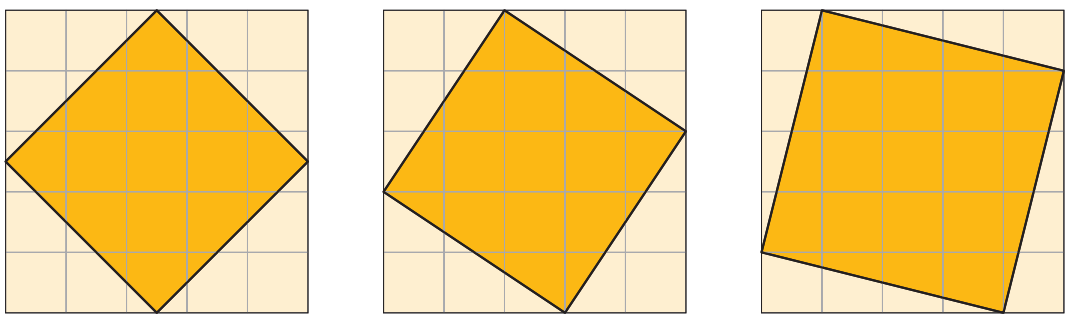
e) $\sqrt{0{,}16}$ $(-2)^2$ *f)* $\sqrt{36}$ $\left(\sqrt{4^2}\right)^2$

4. Melyik számra gondoltam?

a) A gondolt szám négyzetgyökének a háromszorosa 15.
b) A gondolt szám négyzetgyökének a negyede 2.
c) A gondolt szám négyzetgyökénél 3-mal nagyobb szám 10.
d) A gondolt szám négyzetgyökénél 5-tel kisebb szám 7.
e) A gondolt szám négyzetgyökének a négyzete 289.
f) A gondolt szám négyzetgyökének a négyzetgyöke 3.



5. Számítsd ki az alábbi négyzetek területét és oldalának hosszúságát, ha egy négyzetrács oldalának hosszúsága 1 egység!



6. Egy négyzet területe 144 cm^2.

a) Mekkora a négyzet oldala?
b) Hányszorosára változik a területe, ha az oldalát a kétszeresére növeljük?
c) Hányszorosára változik az oldalak hosszúsága, ha a területét az ötszörösére növeljük?
d) Mekkora lesz annak a négyzetnek az oldala, amelynek területe feleakkora, mint az eredeti négyzet területe?

I. 9. Betűs kifejezések (ismétlés)

CSOPORTMUNKA

Alakítsatok négyfős csoportokat! A csoport minden tagja válasszon egyet az első feladat fogalmai közül, önállóan gondolja végig, majd mondja el ismereteit a többieknek! Ha szükséges, egészítsétek ki, vagy helyesbítsétek a hallottakat!

1. Ismételjétek át a következő fogalmakat:

a) betűs kifejezés *b)* egytagú kifejezés *c)* együttható *d)* láthatatlan szorzásjel

A csoport tagjai felváltva oldják meg a 2. feladatot! A többiek ellenőrizzék a hallottakat, és szükség esetén javítsák ki a hibás válaszokat!

2. Válasszátok ki az egytagú betűs kifejezéseket, és állapítsátok meg az együtthatóikat!

a) $6{,}5y^2z^3$ *b)* $-5a^2b+3$ *c)* $\frac{7}{2}ab$ *d)* a^3-1

e) $\frac{x}{6}$ *f)* $8xy-2x^2y$ *g)* $\frac{12x^4}{5}$ *h)* x^6



Ismételjük át közösen a tavaly tanultakat!

Egy önálló számot is betűs kifejezésnek tekintünk. Például: 2; −1; 7,35

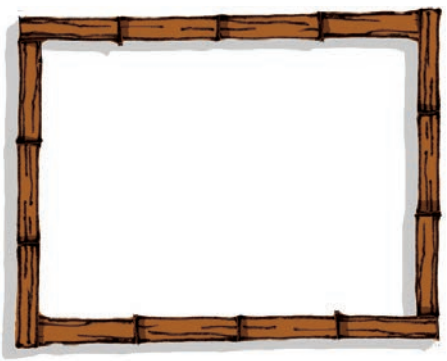
- **A betűs kifejezések közül azokat, amelyekben csak szorzás vagy számmal történő osztás szerepel, egytagú kifejezéseknek nevezzük.** Például: $5 \cdot a$; $-2 \cdot a$; $a \cdot b$
- **Ha a különböző egytagú kifejezéseket összeadjuk vagy kivonjuk, akkor többtagú kifejezésekről beszélünk.** Például $3 \cdot a + 5 \cdot b$ kéttagú; $2 \cdot a - 5 \cdot b - 0{,}5 \cdot c$ háromtagú.
- **A betűs kifejezésekben található számszorzókat együtthatónak nevezzük.** Például $2 \cdot x + 4 \cdot y$ kifejezésben az x együtthatója 2, az y együtthatója 4; $7{,}5 \cdot b - c$ kifejezésben a b együtthatója 7,5, a c együtthatója −1. Ha látszólag nincs együtthatója egy betűnek, akkor 1 az együtthatója. Például: az x betűs kifejezésben az x együtthatója 1.
- **A betűs kifejezésekben nem mindig tesszük ki a szorzásjelet, ezeket láthatatlan szorzásjeleknek nevezzük.** Például: $2 \cdot x + 4 \cdot y = 2x + 4y$

1. PÉLDA

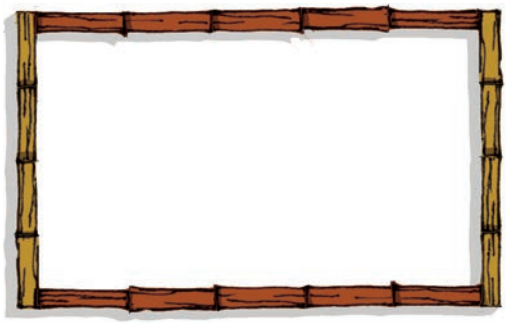
Technika és tervezés szakkörön Anna és Benedek rönkház-modellt épít.

a) Anna az építéshez azonos hosszúságú rönköket használ. Mennyi rönkre van szükség az első sor kialakításához, ha a ház alapja téglalap, és az oldalakhoz 4, illetve 3 rönköt használ fel, az ábrán látható módon? Határozzuk meg a ház alapjának kerületét, ha minden rönk 1 cm széles, és egy-egy rönk hossza

i) 5 cm; *ii)* 7 cm; *iii)* 10,5 cm; *iv)* a cm!



b) Benedek két különböző hosszúságú rönköt használ. A téglalap alakú ház rövidebb oldalához a rövidebb rönkből 4 db-ot, hosszabb oldalához a hosszabból 5 db-ot használ fel, az ábrán látható módon.
Határozzuk meg a téglalap alakú ház kerületét, ha a rönkök hossza
i) 4 cm és 7 cm; *ii)* 6 cm és 7 cm;
iii) 4 cm és 10,5 cm; *iv)* a és b cm!



Megoldás

Készítsünk táblázatot a kerületek meghatározásához!
a)

rönk hossza (cm)	5	7	10,5	a
rövidebb oldal hossza (cm)	$15 + 1 = 16$	$21 + 1 = 22$	$31{,}5 + 1 = 32{,}5$	$3 \cdot a + 1$
hosszabb oldal hossza (cm)	$20 + 1 = 21$	$28 + 1 = 29$	$42 + 1 = 43$	$4 \cdot a + 1$
kerület (cm)	$2 \cdot (16 + 21) = 74$	$2 \cdot (22 + 29) = 102$	$2 \cdot (32{,}5 + 43) = 151$	$2 \cdot (3 \cdot a + 1 + 4 \cdot a + 1) = 2 \cdot (7a + 2) = 2 \cdot 7a + 2 \cdot 2 = 14a + 4$

b)

rövidebb rönk hossza (cm)	4	6	4	a
rövidebb oldal hossza (cm)	16	24	16	$4 \cdot a$
hosszabb rönk hossza (cm)	7	7	10,5	b
hosszabb oldal hossza (cm)	$35 + 2 = 37$	$35 + 2 = 37$	$52{,}5 + 2 = 54{,}5$	$5 \cdot b + 2$
kerület (cm)	$2 \cdot (16 + 37) = 106$	$2 \cdot (24 + 37) = 122$	$2 \cdot (16 + 54{,}5) = 141$	$2 \cdot (4 \cdot a + 5 \cdot b + 2) = 2 \cdot 4a + 2 \cdot 5b + 2 \cdot 2 = 8a + 10b + 4$

Emlékszel?

A betűs kifejezések közül csak az olyan egytagú kifejezések vonhatók össze, amelyek egyneműek. Egyneműeknek nevezzük azokat az egytagú kifejezéseket, amelyek csak számszorzókban (együtthatókban) különböznek.

2. PÉLDA

Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = -1$; $b = 2$!

a) $2a + b$

b) $3a + 6b + 2a - 2b - 5a$

c) $3(a-2) + 2(b+3) - 5(a-b)$

d) $\frac{4}{5}ab^2 - \frac{5}{3}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 + \frac{7}{4}a^2b$



Megoldás

a) Helyettesítsük be a és b értékét:
$2a + b = 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0$

b) Kétféle módon járhatunk el. Ha a megadott értékeket behelyettesítjük a kifejezésekbe, akkor csak számokkal kell műveleteket végeznünk:
$3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = -3 + 12 - 2 - 4 + 5 = 8$
Ha azonban összevonjuk az egynemű tagokat, akkor sokkal kevesebb számolást kell végeznünk:
$3a + 6b + 2a - 2b - 5a = 4b$
$4b = 4 \cdot 2 = 8$

c) A gyorsabb számolás érdekében először bontsuk fel a zárójeleket, majd vonjuk össze az egynemű tagokat! A zárójelfelbontás során figyelni kell arra, hogy a zárójelben lévő tagok mindegyikét megszorozzuk a zárójel előtti számmal. Emellett különös gondot kell fordítanunk a zárójel előtti mínusz előjelre. Ebben az esetben a beszorzás alkalmával minden zárójelben lévő tag előjele ellentétesre változik:
$3(a-2) + 2(b+3) - 5(a-b) = 3a - 6 + 2b + 6 - 5a + 5b = -2a + 7b$
Ha összevonás után helyettesítünk be a betűk helyére, akkor kevés számolással megkapjuk a kifejezés helyettesítési értékét:
$-2a + 7b = 16$

d) Az azonos színnel jelölt egytagúak összevonhatók:

$$\frac{4}{5}ab^2 - \frac{5}{3}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 + \frac{7}{4}a^2b = \frac{4}{5}ab^2 - \frac{3}{2}ab^2 - \frac{5}{3}a^2b + \frac{7}{4}a^2b =$$

$$= \frac{8}{10}ab^2 - \frac{15}{10}ab^2 - \frac{20}{12}a^2b + \frac{21}{12}a^2b = -\frac{7}{10}ab^2 + \frac{1}{12}a^2b =$$

$$= -\frac{7}{10}(-1) \cdot 4 + \frac{1}{12}(-1)^2 \cdot 2 = \frac{14}{5} + \frac{1}{6} = \frac{89}{30}$$

3. PÉLDA

Írjuk fel betűs kifejezések segítségével az alábbi szöveges összefüggéseket!

a) Egy számnál kettővel nagyobb szám háromszorosa.
b) A szám négyzeténél öttel kisebb szám harmada.
c) Két szám összegét és különbségét összeadjuk. Az így kapott összegnek vesszük a felét.
d) Egy szám háromszorosából kivonjuk egy másik szám négyszeresét. A kapott különbséget hozzáadjuk a két szám összegéhez.



Megoldás

A számot x-szel jelöljük.

a) $(x+2)\cdot 3$ *b)* $(x^2-5)\cdot\frac{1}{3}$

Legyen a két szám a és b.

c) $\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$ *d)* $(3a-4b)+(a+b)$

FELADATOK

1. Fogalmazd meg, mit nevezünk láthatatlan szorzásjelnek! Találkozhatunk olyan feladattal, amelyben láthatatlan összeadásjel szerepel? Válaszodat indokold!

2. Válaszd ki az egytagú kifejezéseket!

$3a$; $a+b$; $2\cdot a\cdot b$; $\frac{x}{2}$; $0{,}73k$;
$\frac{a}{b}$; $-cd$; $1-ef$; $\frac{1}{7}\cdot a\cdot a$; $2\cdot x-y$

3. Válaszd ki azokat a kifejezéseket, amelyeknél az együttható nem egyenlő 2-vel! Határozd meg az együtthatóikat!

$2ab$; $2x+x$; $\frac{2e}{5}$; $x\cdot 2\cdot y$; $-2gh$; $\frac{lol}{2}$;
$-2a\cdot a\cdot a$; $\frac{14\cdot x\cdot y}{7}$; $\frac{-2xy}{-1}$

4.

a) Egy szabályos hatszög oldalhossza a cm. Mekkora a kerülete?
b) Egy négyzet oldalhossza b cm. Mekkora a területe?
c) Egy téglalap két oldalának hossza a és b cm. Mekkora a kerülete, mekkora a területe?
d) Egy szabályos ötszög kerülete $15\cdot c$ cm. Mekkora az oldalhossza?
e) Egy négyzet területe $16\cdot x\cdot x$ cm^2. Mekkora az oldalhossza?

5. Írd fel betűs kifejezésekkel!

a) x és y összegének az ötszöröse
b) x és y különbségének a fele
c) x és y szorzatának a négyszerese
d) x és y hányadosának a háromszorosa
e) x és y összegének a $\frac{4}{5}$ része
f) x háromszorosának és y négyszeresének az összege
g) x kétszeresének és y hatszorosának a hányadosa
h) az x-nél hárommal nagyobb szám kétszerese
i) az y-nál öttel kisebb szám negyede
j) x és y különbségének az abszolút értéke

6. Fogalmazd meg szövegesen az alábbi betűs kifejezéseket!

a) $2a+b$ *b)* $(a+b)\cdot 7$ *c)* $3a-8b$

d) $2ab$ *e)* $\frac{a}{3}+3b$ *f)* $\frac{a+1}{b+1}$

7. Számítsd ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét!

a) $2(5-3x)$, ha $x=4$

b) $4x(x-7)$, ha $x=\frac{3}{2}$

c) $\frac{12x-11}{8-6x}$, ha $x=-\frac{1}{6}$

d) x^2+3x-2, ha $x=-0{,}5$

8. Válaszd ki azokat a betűs kifejezéseket, amelyek együtthatója 8! Számítsd ki a helyettesítési értéküket, ha $a=-2$; $b=\frac{1}{2}$!

a) $2a4b$ *b)* $-8ab^2$

c) $\frac{8a}{3}$ *d)* $\frac{8}{ab}$

e) $2(2a^2 2b^2)$ *f)* $\frac{24b}{a^2}$

g) $(8ab)^2$ *h)* $2(2a)^2$

9. Számítsd ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét az a és b megadott értékeivel!

I. $4a+12b+3a-17a+9b+a-3b$

a) $a=5{,}2$; $b=-9{,}3$

b) $a=-\frac{2}{3}$; $b=\frac{5}{9}$

II. $23-(3a-5)+5(4-2b)-2(a-3b)$

a) $a=3$; $b=-2$

b) $a=-\frac{2}{5}$; $b=\frac{11}{2}$

III. $\frac{3}{2}ab-\frac{1}{4}ab^2+\frac{3}{5}a^2b$

a) $a=2$; $b=-3$

b) $a=\frac{2}{3}$; $b=-6$

10. *a)* A nyolcadik osztályba 32 tanuló jár. A nyolcadikosok átlagosan x kg-osak. November közepén érkezik az osztályukba Pista, aki 56 kg. Írd fel az így már 33 főből álló osztály tanulóinak átlagos tömegét!

b) Pankának hétvégére k órányi tanulnivalója volt. Szombat délelőtt megtanulta a harmadát, délután a maradék negyedét. Hány órányi tanulnivalója maradt Pankának vasárnapra?

11. Gergő rengeteg fényképet készített az iskolai farsangon. Szeretné kiszámolni, hány megabyte helyet foglal, ha mindet feltölti a gépére. A fájl méretét a következő képlettel tudja meghatározni:

$M=\frac{x\cdot y\cdot Szm}{8\cdot 1024\cdot 1024}$, ahol

M: a fájl mérete megabyte-ban,
x: a kép szélessége a felbontásban,
y: a kép hosszúsága a felbontásban,
Szm: a kép színmélysége bitben. (Ez a szám mutatja meg, hány bit határozza meg egy adott pont színét. Minél nagyobb a színmélység, annál nagyobb helyet foglal.)

a) Mekkora méretű fájlt kap Gergő, ha 50 darab 3888×2592 felbontású képet készített, melyek színmélységét 24 bitre állította?

b) Hogyan változik a fájl mérete, ha a felbontást 1936×1288-ra csökkenti?

c) Hogyan változik a fájl mérete, ha a színmélységet 32 bitre állítja?



Egytagú kifejezések szorzása

1. PÉLDA

Egy a oldalú négyzet egyik oldalát háromszorosára, másik oldalát kétszeresére növeltük, s így egy téglalapot kaptunk. Hányszorosa lesz a téglalap területe a négyzet területének?

Megoldás

A négyzet területe: $T_{\text{négyzet}} = a^2$

A téglalap oldalainak hossza: $2 \cdot a$ és $3 \cdot a$; területe a két különböző hosszúságú oldal szorzata: $T_{\text{téglalap}} = 2a \cdot 3a = 6a^2$. Tehát a téglalap területe hatszorosa lesz a négyzet területének.

A számítás során felhasználtuk a szorzásnak azt a tulajdonságát, hogy a szorzótényezők felcserélhetők. Alkalmaztuk továbbá a hatvány fogalmát.





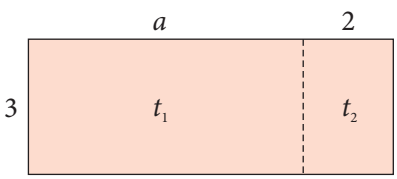
Egytagú kifejezéseket egytagúval úgy szorzunk, hogy az együtthatókat összeszorozzuk, majd az azonos betűk összeszorzásakor a hatvány definícióját használjuk fel.

Kéttagú kifejezés szorzása egytagú kifejezéssel

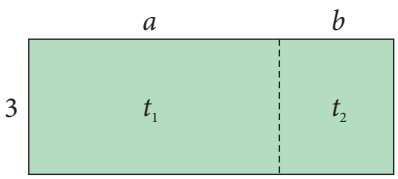
2. PÉLDA

Írjuk fel mindegyik téglalap területét kétféle alakban!

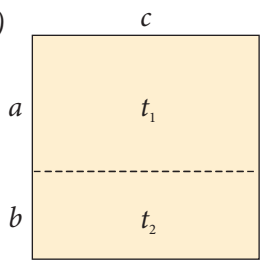
a)



b)



c)



Megoldás

A nagy téglalap területe mindhárom esetben egyenlő a résztéglalapok területének összegével:

a) $t = 3 \cdot (a + 2)$; $t_1 + t_2 = 3 \cdot a + 3 \cdot 2$, azaz $3 \cdot (a + 2) = 3 \cdot a + 3 \cdot 2$

b) $t = 3 \cdot (a + b)$; $t_1 + t_2 = 3 \cdot a + 3 \cdot b$, azaz $3 \cdot (a + b) = 3 \cdot a + 3 \cdot b$

c) $t = c \cdot (a + b)$; $t_1 + t_2 = c \cdot a + c \cdot b$, azaz $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$

A példa megoldása során átismételtük a tavaly tanultakat: többtagú kifejezés szorzásánál a zárójelfelbontáskor a zárójelben lévő összes kifejezést meg kell szoroznunk a szorzótényezővel, és az így kapott tagokat kell összeadni.

Másként fogalmazva: Többtagú kifejezést egytagúval úgy szorzunk, hogy a többtagú kifejezés minden tagját megszorozzuk az egytagú kifejezéssel.

A megfigyelt felbontási szabály érvényes abban az esetben is, ha a zárójelben két tagnál több szerepel.

PÁROS MUNKA



Készítsetek a példában látotthoz hasonló téglalapokat az alábbi műveletek szemléltetéséhez! Számítsátok ki a téglalapok területeit kétféle módon! Ha végeztetek egy feladatrésszel, cseréljetek füzetet, és ellenőrizzétek társatok munkáját! Ne írj a társad füzetébe! Beszéld meg vele, te hogyan gondoltad a megoldást!

a) $2(a+b+5)$ *b)* $3a\cdot(a+b+c)$ *c)* $1{,}5x\cdot(x+5)$

A kiemelés

A 2. példa megoldása során fogalmazhattunk volna úgy is, hogy a részterületek összege megadja a nagy téglalap területét, azaz:

a) $3\cdot a+6=3\cdot(a+2)$ *b)* $3\cdot a+3\cdot b=3\cdot(a+b)$ *c)* $c\cdot a+c\cdot b=c\cdot(a+b)$

Ezt az eljárást a matematikában **kiemelésnek** nevezzük. Ha egy összeg minden tagjában szerepel ugyanaz a szorzótényező (ez lehet szám vagy betű), akkor ezt az összeget úgy írhatjuk fel szorzatalakban, hogy a közös szorzótényezőt kiemeljük a zárójel elé, a zárójelben pedig ott maradnak a korábbi tagok a közös tényező nélkül, a korábbi műveletekkel. Ez a módszer tulajdonképpen a zárójelfelbontás fordítottja.

Összefoglalva:

Zárójelfelbontáskor szorzatot összeggé alakítunk: $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$

Kiemeléskor összeget szorzattá alakítunk: $c\cdot a+c\cdot b=c\cdot(a+b)$

3. PÉLDA

Írjuk át szorzatalakba az alábbi összegeket!

a) $4a+6b+16$ *b)* $ab+b^2$ *c)* $3x+5x^2$

Megoldás

a) $4a+6b+16=2\cdot 2a+2\cdot 3b+2\cdot 8=2\cdot(2a+3b+8)$

b) $ab+b^2=a\cdot b+b\cdot b=b\cdot(a+b)$

c) $3x+5x^2=3\cdot x+5\cdot x\cdot x=x\cdot(3+5x)$

4. PÉLDA

Egyszerűsítsük a törteket!

a) $\frac{3a+6}{12}$ *b)* $\frac{5x+10y}{20}$ *c)* $\frac{2a^2+14a}{10a}$

Megoldás

A törtvonal zárójelet helyettesít, ezért minden esetben egy összeget osztottunk el. Az osztás során minden tagot el kell osztanunk a nevezővel. Ezt úgy tehetjük egyszerűbbé, hogy a számlálót szorzattá alakítjuk.

a) $\frac{3a+6}{12} = \frac{3(a+2)}{12} = \frac{a+2}{4}$

b) $\frac{5x+10y}{20} = \frac{5(x+2y)}{20} = \frac{x+2y}{4}$

c) $\frac{2a^2+14a}{10a} = \frac{2a(a+7)}{10a} = \frac{a+7}{5}$, feltéve, hogy a nevező nem 0, azaz $a \neq 0$.

PÁROS MUNKA

Alkoss padtársadnak minél több betűs kifejezést az alábbi számok és betűk felhasználásával! A különböző értékeket szorzással kapcsold össze! Végezzétek el a kijelölt műveleteket egymás feladataiban! Javítsátok ki társatok megoldásában az esetleges hibákat!

2; 2; 3; 5; *a*; *b*

FELADATOK

1. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $2 \cdot a \cdot 3$ *b)* $4 \cdot b \cdot 2 \cdot 5$ *c)* $6 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{3}$

d) $(-9) \cdot d^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}$ *e)* $\frac{4}{7} \cdot e \cdot e \cdot \frac{7}{2} \cdot 5$ *f)* $1{,}5 \cdot f \cdot f \cdot \frac{2}{9} \cdot f \cdot (-3)$

2. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $3x \cdot 4y \cdot 2$ *b)* $(-5x) \cdot 3y \cdot 0{,}2y$ *c)* $\frac{3}{4}xy \cdot 6 \cdot \frac{5}{2} \cdot x$ *d)* $6x^2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 3y \cdot \frac{3}{7} \cdot 14y$

3. Sok *a* cm élű kockánk van. Ezekből a kockákból téglatesteket építettünk. Írd fel a téglatestek felszínét és térfogatát!

a) 

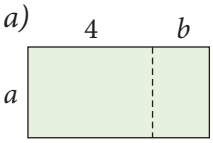
b) 

c) 

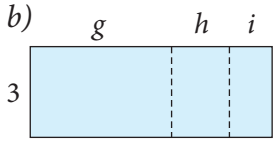
d) 

4. Írd fel kétféleképpen az alábbi téglalapok területét!

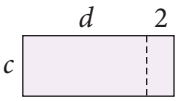
a)



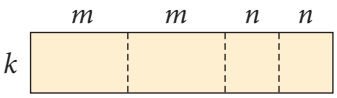
b)



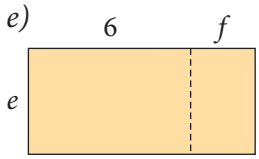
c)



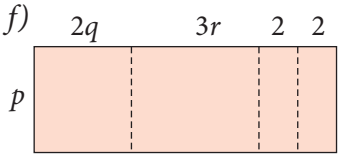
d)



e)



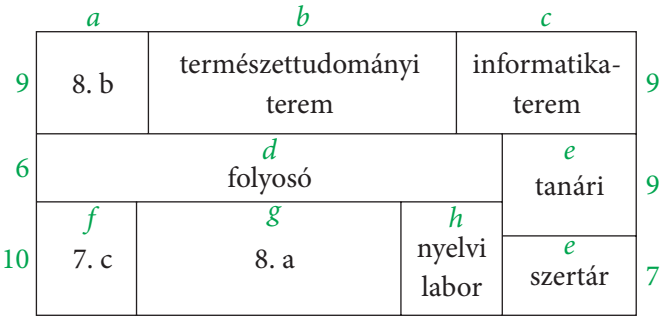
f)



5. A nyári szünetben az iskola egy részén kicserélik a járólapokat. Az alaprajzon szereplő számok és betűk méterben mért távolságokat jelölnek.

a) Írd fel az alaprajz segítségével, melyik helyiségbe hány m^2 járólap kerüljön!

b) Írd fel szorzatalakban, hány m^2 járólapra van szükség a felújítás során! Hányféle felírást találtál?



6. Írd át szorzatalakba az alábbi összegeket!

a) $3a + 3b$ *b)* $2x - 2y$ *c)* $ac + bc + dc$

d) $2bd - 3bg$ *e)* $14a + 6ab - 10ac$ *f)* $8ab + 12ab^2$

7. Keresd az egyenlő betűs kifejezéseket! Amelyiknek nincs párja, ahhoz írj te egyet!

a) $7x(5 - 4y)$ *b)* $20x^2y - 4xy^2$ *c)* $6xy + 3y$

d) $5x(4 - y)$ *e)* $6xy(2y - 3x)$ *f)* $6x^2 + 3xy$

g) $4xy(5x - y)$ *h)* $20x - 5xy$ *i)* $4y(5x - 2)$

j) $35x - 28xy$ *k)* $3y(2x + 1)$ *l)* $12xy^2 - 18x^2y$

8. Igazold az *a)* és *b)* állításokat betűs kifejezések felhasználásával!

a) Ha egy 15-tel osztható számhoz egy 10-zel osztható számot adunk, akkor az összeg mindig osztható 5-tel.

b) Ha egy 27-tel osztható számból elveszünk egy 18-cal osztható számot, akkor a különbség osztható 9-cel.

9. Egyszerűsítsd az alábbi törteket!

a) $\frac{5a + 15}{30}$ *b)* $\frac{14 - 21b}{35}$ *c)* $\frac{12c - 9d}{6e}$

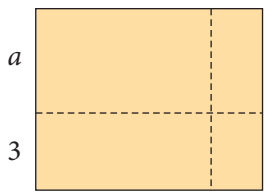
d) $\frac{3ab + 2a^2}{4a}$ *e)* $\frac{8a^2b + 10ab^2}{6ab}$ *f)* $\frac{33ab - 55a^2}{11ab^2}$

Kiegészítő tananyag

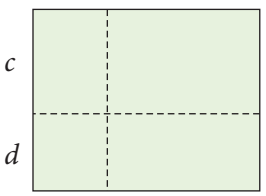
1. PÉLDA

Írjuk fel kétféleképpen az ábrán látható téglalapok területét!

a)



b)



Megoldás

a) A nagy téglalap területe $T = (a+3)\cdot(c+2)$, ami egyenlő a kis téglalapok területeinek összegével: $a \cdot c + a \cdot 2 + 3 \cdot c + 3 \cdot 2$

Így tehát: $(a+3)\cdot(c+2) = a \cdot c + a \cdot 2 + 3 \cdot c + 3 \cdot 2$

Vizsgáljuk meg az egyenlőséget!

$$(a+3)\cdot(c+2) = a \cdot c + a \cdot 2 + 3 \cdot c + 3 \cdot 2$$

Megfigyelhető, hogy az első zárójelben lévő mindkét tagot megszoroztuk a második zárójelben lévő mindkét taggal, és a szorzatokat összeadtuk.

b) Hasonlóan járjunk el, mint a példa *a)* részében!

A nagy téglalap területe: $(a+b)\cdot(c+d)$

A kis téglalapok területeinek összege: $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

A kétféle módon felírt területek egyenlők: $(a+b)\cdot(c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Itt is jól látható a példa *a)* részénél tett megállapítás: az első zárójelben lévő tagokat megszoroztuk a második zárójelben lévőkkel, és a kapott szorzatokat összeadtuk.

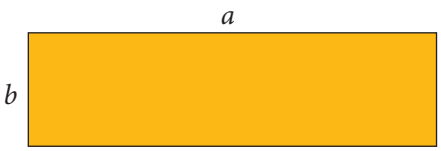
Többtagú kifejezések szorzásakor az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik tényező minden tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk. Ha vannak egynemű kifejezések, akkor azokat összevonjuk.

2. PÉLDA

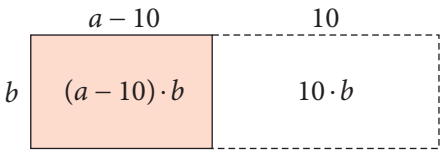
Egy téglalap oldalait a-val, illetve b-vel jelöltük. A téglalap a oldalát 10 egységgel csökkentettük, a b oldalát viszont 8 egységgel növeltük. Készítsünk ábrát az oldalak változásáról, és írjuk fel az egyes lépések során keletkezett téglalapok területét!

Megoldás

$T = a \cdot b$

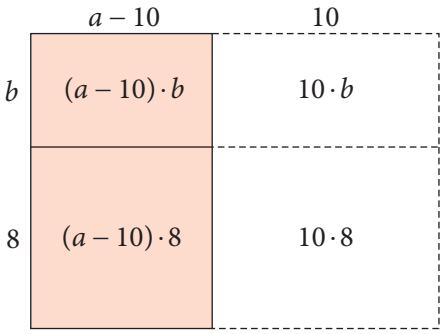


$T' = (a-10)\cdot b$



$T_{\text{vég}} = (a-10)\cdot(b+8)$,
másként felírva: $T_{\text{vég}} = (a-10)\cdot b + (a-10)\cdot 8$

Bontsuk fel a zárójeleket!
$T_{\text{vég}} = (a-10)\cdot b + (a-10)\cdot 8 = ab - 10b + 8a - 80$
A kétféleképpen felírt kifejezéseket összehasonlítva megkapjuk, hogy:
$(a-10)\cdot(b+8) = ab - 10b + 8a - 80$



FELADATOK

1. Írd fel a téglalapok területét kétféleképpen!

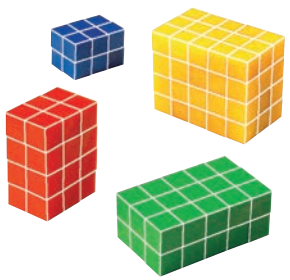
Vízszintes oldalak:	Függőleges oldalak:
a) $a+2$	$b+3$
b) $4+x$	$x+2$
c) $a+b$	$c+3$
d) $a+b$	$a+b$
e) $a-3$	$b-2$

2. Szorozd össze az alábbi kifejezéseket! Ahol tudsz, végezz összevonásokat!

a) $(a+1)(a+2)$	*b)* $(a-2)(a+3)$
c) $(2a+1)(a+1)$	*d)* $(2a-1)(a-1)$
e) $(2a-1)(2a+1)$	*f)* $(a+b)(a+2)$
g) $(a+2b)(a+2b)$	*h)* $(2a-5b)(5a-2b)$
i) $(a+b)(3a-2b)$	*j)* $(a^2b-ab^2)(a-1)$

3. Egy e oldalú négyzet egyik oldalát 3 egységgel csökkentettük, a rá merőleges oldalát 5 egységgel növeltük.
a) Szemléltesd egy ábrán a négyzet oldalhosszainak változását!
b) Írd fel kétféleképpen az így nyert téglalap területét!

4. Az alábbi téglatestek a élű kockákból épültek.



a) Írd fel a téglatestek felszínét és térfogatát!
b) Rajzolj egy olyan téglatestet a füzetedbe, amelyik annyi kockából áll, mint az *a)* részben látható négy téglatest összesen! Írd fel a térfogatát kétféleképpen!

5. Alkoss a kifejezésekből négy darab hármas csoportot úgy, hogy egy csoportban két kifejezés szorzata a harmadikat adja!

a) $(3x+1)$	*b)* $(2x-4)$
c) $(3-x)$	*d)* $9x^2+3x-6$
e) $(3x-2)$	*f)* $2x^2-10x+12$
g) $(3x-1)$	*h)* $(x-3)$
i) $-2x^2+2x+12$	*j)* $(2x+4)$
k) $9x^2-1$	*l)* $(3x+3)$

Halmazokkal más tantárgyakban is találkoztatok.

Keressetek néhány példát halmazra kémia, biológia, földrajz tantárgyból! Az általatok felsorolt halmazoknak adjátok meg egy-egy részhalmazát!

A halmazokat nagybetűvel jelöljük.

Halmazokkal műveleteket végeztünk, meghatároztuk két halmaz unióját, metszetét. Az unió vagy egyesítés jelölése az $A \cup B$, a metszet vagy más néven közös rész jelölése az $A \cap B$. Az alaphalmaz segítségével megadhatjuk a komplementer halmazt is. A komplementer vagy kiegészítő halmaz jelölése $\overline{A}$.

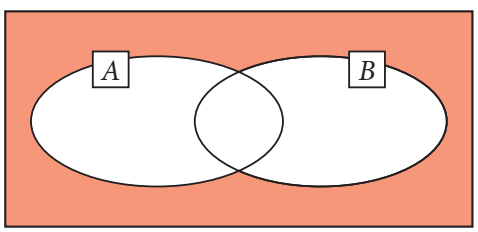
Nézzük meg egy példán ezeket a fogalmakat!

PÉLDA

Egy nagyváros tömegközlekedésében buszok és villamosok vesznek részt. A villamosok három vonalon járnak, jelölésük 1-es, 2-es és 3-as.

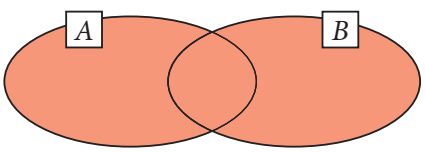
Legyen az alaphalmaz a városban munkába közlekedő emberek halmaza! Ezen belül
$A =$ {busszal közlekedők} $B =$ {villamossal közlekedők}

a) Határozzuk meg, kik tartoznak az $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$ halmazba!
b) Adjuk meg a B halmaz egy részhalmazát!
c) Milyen módon jutnak el munkahelyükre azok, akik a halmazábrán a színezett részbe tartoznak?

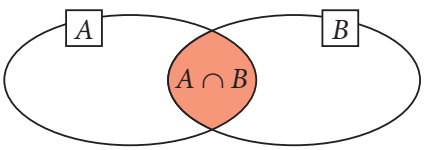


Megoldás

a) Az $A \cup B$ halmazba azok az emberek tartoznak, akik munkába járáshoz buszt vagy villamost használnak.
Az $A \cap B$ halmazba azok tartoznak, akik munkahelyükre busszal és villamossal mennek.



$A \cup B$



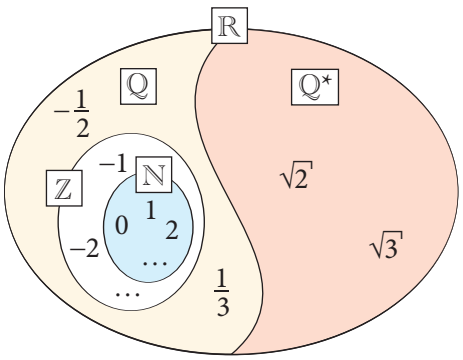
A $\overline{B}$ halmazba azok az emberek tartoznak, akik nem villamossal jutnak el a munkahelyükre.
b) A B halmaz egy részhalmazába például azok az emberek tartoznak, akik a villamosok közül csak a 2-es villamost használják.
c) A színezett részbe tartoznak azok az emberek, akik a munkába járáshoz se buszt, se villamost nem használnak. Például kerékpárral, gyalog vagy autóval mennek dolgozni.

CSOPORTMUNKA

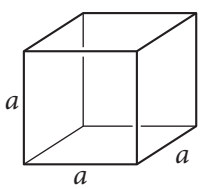


Alakítsatok 4-5 fős csoportokat! Olvassátok fel egyesével az *A*, *B*, *C*, … pontokban foglalt állításokat úgy, hogy a csoport többi tagja is értse, majd csukjátok be a tankönyveteket! Az lesz a feladatotok, hogy minél több állítást helyesen megismételjetek.
A verseny irányításához válasszatok egy vezetőt, aki elbírálja, hogy jó választ adtatok-e!
Minden jó válasz egy pontot ér. Ha az állítások mellett helyes példákat is felsoroltok, akkor két pontot kaphattok. Az győz, aki a legtöbb pontot szerzi.
Vigyázzatok! Fogalmazzatok pontosan, mert csak akkor fogadható el a válaszotok!

A) Leggyakrabban a pozitív egész számokat használjuk. Jele: $\mathbf{Z}^+$ vagy $\mathbf{N}^+$
B) A pozitív egész számokat a 0-val kiegészítve a természetes számokat kapjuk. Jele: **N**
C) Két természetes szám összege, illetve szorzata természetes szám.
D) A kivonás nem mindig végezhető el a természetes számok körében. A természetes számok halmazát a negatív egész számokkal bővítve az egész számok halmazát kapjuk. Jele: **Z**
E) Két egész szám összege, szorzata, illetve különbsége is egész szám lesz.
F) Az egész számok körében az osztás műveletének eredménye nem mindig lesz egész szám. Ez vezetett el a racionális számokhoz. Jele: **Q**
G) Racionális az a szám, amely felírható két egész szám hányadosaként.
H) A racionális számok tizedes tört alakjáról megmutattuk, hogy
a) egész vagy *b)* véges tizedes tört vagy
c) végtelen szakaszos tizedes tört.
I) Vannak végtelen nem szakaszos tizedes törtek is. Ezek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, ezért nem racionális számok. Az ilyen tulajdonságú számokat irracionális számoknak nevezzük. Ilyen például a $\sqrt{2}$. Az irracionális számok jele: $\mathbf{Q}^\star$
J) A racionális és irracionális számok együttesen a valós számok halmazát alkotják. Jele: **R**



A fejezetben foglalkoztunk a hatványokkal és a számok négyzetgyökével.



$V = a^3$

$A = 6 \cdot a^2$

A hatvány fogalmának bevezetése sok előnnyel járt. A pozitív egész számokat a hatványok segítségével gyakran rövidebb módon írhatjuk fel prímszámok szorzataként. A hatványok felhasználásával nagy számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét gyorsabban meghatározhatjuk. A betűs kifejezéseknél is használunk hatványokat, például az *a* élhosszúságú kocka felszínének, térfogatának felírásakor.

A számok négyzetgyökével akkor találkoztunk, amikor a négyzet területéből kellett meghatározni az oldalának hosszát. A 2 egység területű négyzet oldala $\sqrt{2}$. Ez olyan szám, amelyet önmagával

megszorozva 2-t kapunk. Ha nem négyzetszám négyzetgyökét keressük, akkor a négyzetgyökvonás műveletét számológép segítségével végezhetjük el. Így a keresett szám közelítő értékét kapjuk.

A betűk használata az egyenletek, szöveges feladatok megoldásánál nagyon hasznos. Ahhoz, hogy tudjunk a betűs kifejezésekkel jól műveleteket elvégezni, ismernünk kell néhány alapfogalmat.



PÁROS MUNKA

A páros mindkét tagja gyűjtsön össze a tanárotok által meghatározott idő alatt minél több fogalmat a betűs kifejezések témaköréből!

Az idő leteltével felváltva mondjátok el egymásnak a fogalmakat, majd beszéljétek meg, melyik mit jelent!

FELADATOK

1. Adott a H alaphalmaz, továbbá az A és B halmaz.
$H = \{25\text{-nél kisebb természetes számok}\}$
$A = \{14\text{-nél kisebb, 5-tel nem osztható természetes számok}\}$
$B = \{16\text{-nál nem nagyobb, 3-mal osztható pozitív egész számok}\}$
a) Ábrázold Venn-diagramon a halmazokat!
b) Add meg az $A \cap B$ halmazt az elemei felsorolásával!
c) Hány elemű az $A \cup B$ halmaz?
d) Sorold fel a $\overline{B}$ halmaz elemeit!

2. Add meg elemeik felsorolásával az A és B halmazokat!
$A = \{23\text{-nál kisebb, 4-gyel osztható természetes számok}\}$
$B = \{15\text{-nél nem nagyobb, 3-mal nem osztható pozitív egész számok}\}$

3. Döntsd el, hogy az alábbi halmazok közül melyik részhalmaza a másiknak! Írd le jelölésekkel is!
a) $A = \{\text{a hét napjai}\}$ $B = \{\text{péntek, vasárnap}\}$
b) $A = \{\text{a tavaszi hónapok}\}$ $B = \{\text{az év első hat hónapja}\}$
c) $A = \{2; 3; 6; 8; 10\}$ $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 10\}$
d) $A = \{\text{a hárommal osztható kétjegyű számok}\}$
$B = \{\text{olyan természetes számok, amelyek számjegyeinek összege osztható hárommal}\}$
e) $A = \{\text{a pozitív számok}\}$ $B = \{\text{a nullánál nagyobb páros számok}\}$

4. Ábrázold Venn-diagramon az alábbi halmazokat a füzetedben!
$A = \{-10; -7; -4; -2; 1; 3; 8; 9\}$
$B = \{-9; -6; -2; 1; 3; 4; 6; 9\}$
a) Határozd meg az $A \cup B$ halmaz elemeit!
b) Hány elemből áll az $A \cap B$ halmaz?

5. Legyen $A = \{\text{trapézok}\}$; $B = \{\text{deltoidok}\}$; $C = \{\text{húrnégyszögek}\}$. Határozd meg az alábbi halmazokat!

a) $A \cap B$ *b)* $B \cap C$ *c)* $A \cap C$

6. Egy osztálykiránduláson mindenki kapott egy kétgombócos fagyit a kirándulásra beszedett osztálypénzből. A 35 fős osztályból 12-en kértek vaníliát, 7-en epret, és 20-an se vaníliát, se epret nem kértek.

a) Hányan kértek olyan fagyit, amelyik vaníliát vagy epret tartalmazott?

b) Hányan kértek vanília-eper összetételű fagyit?

c) Hány olyan gyerek volt, aki csak eperízű fagyit evett?

7. Egy iskolában 152-en tudnak úszni, 88-an pedig korcsolyázni. 45-en úszni és korcsolyázni is tudnak.

a) Hányan tudnak úszni, de korcsolyázni nem?

Az iskola tanulói közül 142-en se korcsolyázni, se úszni nem tudnak.

b) Hányan járnak az iskolába?



8. Egy iskolai táborban zenefelismerő (audiókvíz), illetve filmfelismerő (videókvíz) vetélkedőt tartottak. Minden jó válaszért egy pont járt. A nyolcadikosok csapata 18 pontot, a hetedikesek csapata 16 pontot szerzett. 8 olyan kérdés volt, amelyre mindkét csapat jó választ adott. Hány kérdés volt a vetélkedőn?

9. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $-13-\left[-27+(-41)\right]$ *b)* $(-5)\cdot\left[12-(-18)\right]+(-96):(-8)$

c) $21\frac{1}{4}+32\frac{3}{10}-16\frac{3}{4}+29\frac{7}{10}$ *d)* $\frac{16}{25}+3{,}92-\frac{53}{100}$

e) $1{,}2-\left[\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}\right]:1{,}5$ *f)* $3\frac{2}{15}+\frac{1}{9}:1\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$

10. Melyik a nagyobb:

a) $\frac{5}{7}$-nek a fele vagy $\frac{5}{7}$-nek az $\frac{1}{2}$-szerese?

b) a 0,125-nél $\frac{5}{8}$-dal nagyobb szám vagy a $\frac{15}{4}$-nek a harmada?

c) $2\frac{1}{3}$ reciproka vagy $\frac{2}{9}$ és $\frac{4}{3}$ hányadosa?

11. Igaz-e, hogy két racionális szám

a) összege; *b)* különbsége; *c)* szorzata; *d)* hányadosa

is racionális szám? Melyik esetben kell valamilyen kikötést tenned?

12. Számold ki! Ha az eredmény nem egész szám, akkor kerekítsd két tizedesjegyre!

a) $\sqrt{1}$ *b)* $\sqrt{2}$ *c)* $\sqrt{3}$ *d)* $\sqrt{4}$ *e)* $\sqrt{9}$ *f)* $\sqrt{16}$

g) $\sqrt{25}$ *h)* $\sqrt{36}$ *i)* $\sqrt{81}$ *j)* $\sqrt{121}$ *k)* $\sqrt{12321}$ *l)* $\sqrt{1234321}$

13. Számold ki! Ha az eredmény nem egész szám, akkor kerekítsd úgy, hogy három 0-tól különböző tizedesjegy legyen a számban!

a) $\sqrt{10\,000}$ *b)* $\sqrt{1000}$ *c)* $\sqrt{100}$ *d)* $\sqrt{10}$ *e)* $\sqrt{1}$

f) $\sqrt{0{,}1}$ *g)* $\sqrt{0{,}01}$ *h)* $\sqrt{0{,}001}$ *i)* $\sqrt{0{,}0001}$ *j)* $\sqrt{0{,}00001}$

14. Mekkora a kocka éle, ha a felszíne

a) 96 cm^2; *b)* 726 m^2; *c)* 1014 dm^2; *d)* 2,94 km^2; *e)* 13,5 m^2; *f)* 0,06 dm^2?

15. Döntsd el, melyik igaz az alábbi egyenlőségek közül! A hamisakat írd kijavítva a füzetedbe!

a) $9^5 \cdot 9^8 = 9^{40}$ *b)* $(3 \cdot 5)^7 = 3 \cdot 5^7$ *c)* $(11^3)^4 = 11^{12}$

d) $2^6 \cdot 7^6 = 14^{36}$ *e)* $\frac{8^{14}}{8^7} = 8^2$ *f)* $\frac{18^7}{13^7} = \left(\frac{18}{13}\right)^1$

16. Írd fel az 588 és az 1960 számok prímtényezős felbontását, majd a hatványalakjuk segítségével határozd meg a számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

17. A Passz nekem! labdagyárban 1575 darab kosárlabda és 2205 darab focilabda maradt gazdátlanul a kiskereskedők karácsonyi nagybevásárlása után. A cégtulajdonos arra gondolt, hogy akciót hirdet az iskoláknak. Az az iskola, amelybe legalább 100 olyan diák jár, akinek a félévi bizonyítványában a testnevelés érdemjegy nem rosszabb négyesnél, egy ajándék labdacsomagot kap. A csomag elnyeréséhez nem kell mást tenni, mint az érintett diákoknak besétálni a boltba, és bemutatni a biziben szereplő jegyet. Ezeket a boltban feljegyzik, és a 100. diák után az iskola képviselője átveheti a labdacsomagot. Számítsd ki, hány ajándékcsomagot tudnak készíteni, ha mindegyik csomag tartalma egyforma, egyetlen labda sem marad a gyárban és a lehető legtöbb iskolát akarják így megjutalmazni!



18. Írd át összegalakba a szorzatokat és szorzatalakba az összegeket!

a) $3(5 - x)$ *b)* $(-2)(2x + 8)$ *c)* $x(73x + 11y)$ *d)* $2xy(7x - 14)$

e) $18a - 9b$ *f)* $48ab - 8c$ *g)* $15aba - 30ba$ *h)* $14a^2b^2 + 7ab^2$

19. Keresd meg a párokat!

a)

Egyenlők			
100	125	64	6^3
3^4	8^3	1^{10}	81
2^6	1	5^3	1024
512	10^2	2^{10}	216

b)

Egyenlők			
$2^3 \cdot 2^1$	$(10^2)^3$	$9^8 : 9^6$	243
100 000	729	$(2^4)^2$	$10^2 \cdot 10^3$
$3^2 \cdot 3^3$	16	81	128
256	$10^7 : 5^7$	1 000 000	$(3^2)^3$

20. Végezd el a lehetséges összevonásokat, majd számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $13x + 15 + (-8y) - 7x - 9y - 19$, ahol $x = (-1{,}5)$ és $y = \frac{3}{17}$

b) $7ab - 8 + 11a - 5ab + 7a - 8{,}5 - 2ab$, ahol $a = \frac{5}{9}$ és $b = -7{,}43$

c) $7 \cdot g^2 \cdot 4 \cdot h \cdot g \cdot (-5)$, ahol $g = 0{,}5$ és $h = \frac{4}{7}$

21. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket!

a) $\frac{5a}{15ab}$ *b)* $\frac{14a - 21b}{7}$ *c)* $\frac{3a + 9}{a + 3}$ *d)* $\frac{9a + 12ab}{3ab}$

Kiegészítő tananyag

22. Keresd meg a párokat!

Egyenlők			
$2a \cdot (a + 1)$	$a^2 - 2a + 1$	$a \cdot a$	$2a \cdot (3a + 8)$
a^2	$2a^2 + 2a$	$(a - 1)(a - 1)$	$(a + 2)(a + 2)$
$(a - 1)(a + 1)$	$a^2 + 4a + 4$	$a^2 + 8a + 15$	$16a + 6a^2$
$(a - 3)(a - 3)$	$(a + 3)(a + 5)$	$a^2 - 6a + 9$	$a^2 - 1$

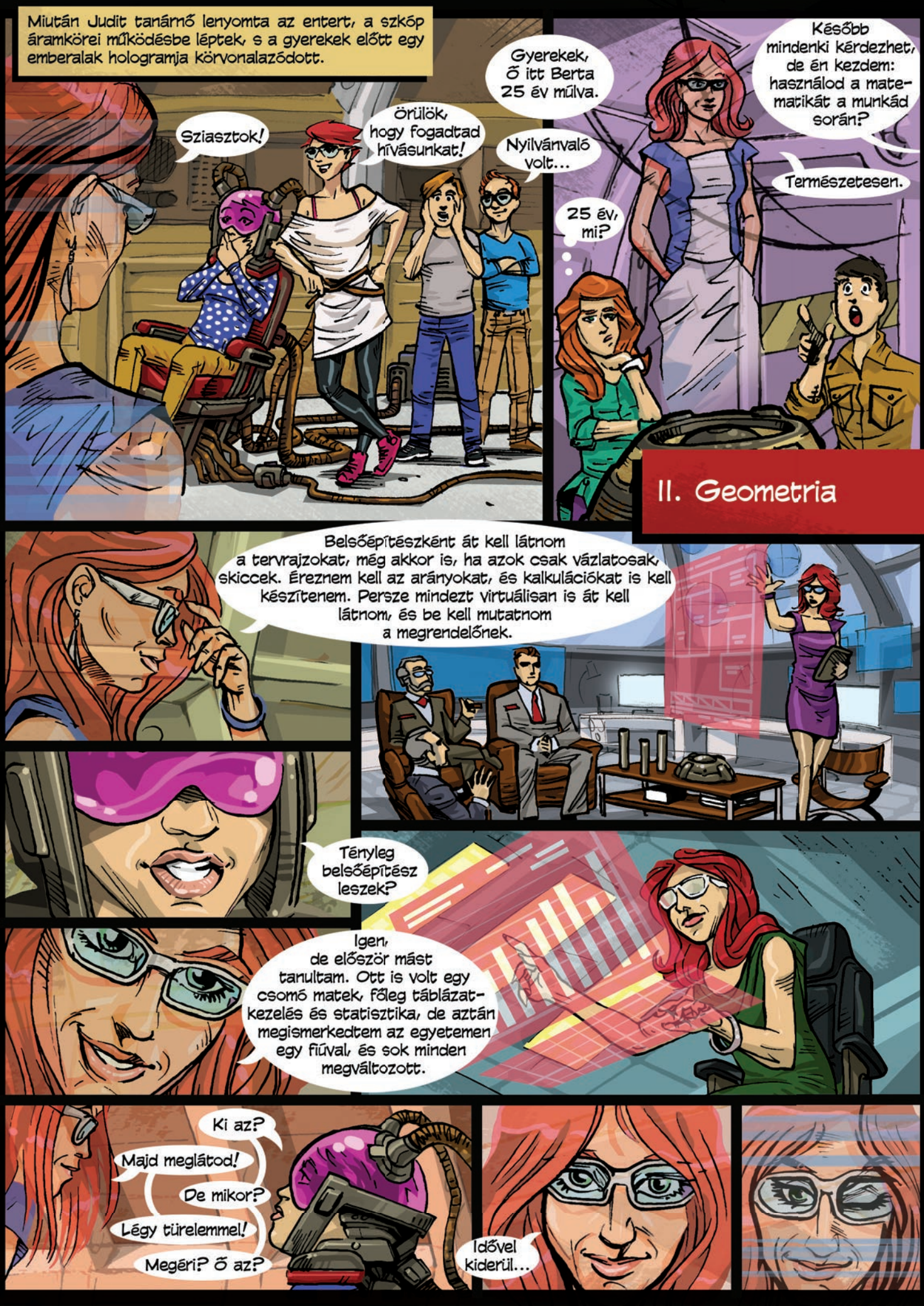
23. Igaz vagy hamis? Javítsd ki a hibásakat a füzetedben!

a) $(a + 1)(2a + 1) = 2a^2 + 2a + 1$ *b)* $(3a + 2)(3 - a) = 7a - 3a^2 + 6$

c) $(2 - a)(a - 2) = -4 - a^2$ *d)* $(a + 2b)(a - b) = a^2 - ab + 2b^2$

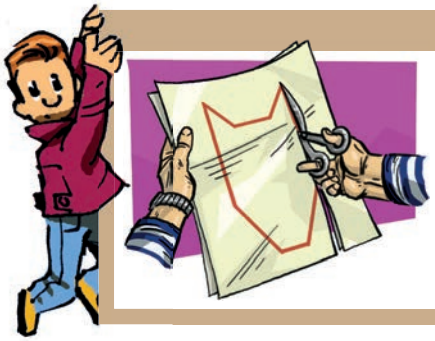
e) $(e + 3)(e - 3) = e^2 - 9$ *f)* $(f + 1)(f + 2) = f^2 + 3$

g) $\left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + x + x^2$ *h)* $\left(1 + \frac{x}{2}\right)(2 + x) = 2 + 2x + 0{,}5x^2$


Miután Judit tanárnő lenyomta az entert, a szkóp áramkörei működésbe léptek, s a gyerekek előtt egy emberalak hologramja körvonalazódott.
Sziasztok!
Örülök, hogy fogadtad hívásunkat!
Gyerekek, ő itt Berta 25 év múlva.
Nyilvánvaló volt...
Később mindenki kérdezhet, de én kezdem: használod a matematikát a munkád során?
Természetesen.
25 év, mi?
II. Geometria
Belsőépítészként át kell látnom a tervrajzokat, még akkor is, ha azok csak vázlatosak, skiccek. Éreznem kell az arányokat, és kalkulációkat is kell készítenem. Persze mindezt virtuálisan is át kell látnom, és be kell mutatnom a megrendelőnek.
Tényleg belsőépítész leszek?
Igen, de először mást tanultam. Ott is volt egy csomó matek, főleg táblázatkezelés és statisztika, de aztán megismerkedtem az egyetemen egy fiúval, és sok minden megváltozott.
Ki az?
Majd meglátod!
De mikor?
Légy türelemmel!
Megéri? Ő az?
Idővel kiderül...

II. 1. Egybevágósági transzformációk (ismétlés)

PÁROS MUNKA



Tervezzetek a padtársaddal egy szép síkidomot egy írólapra! Tegyetek az írólap alá egy másik lapot, és a kettőből egyszerre vágjátok ki a megtervezett síkidomot! Illesszétek össze a két kivágott darabot úgy, hogy először tengelyesen tükrös, aztán középpontosan tükrös ábrát kapjatok! A látottak alapján gyűjtsétek össze a füzetetekbe a tengelyes és a középpontos tükrözés előző években tanult tulajdonságait!

A tengelyes és a középpontos tükrözés esetén a sík minden pontjához hozzárendeltünk egy pontot a megadott utasítással.
A síkon átalakítást – transzformációt – végeztünk. A sík egy tetszőleges P pontjához egy P' pontot rendeltünk hozzá. A P' pontot a P képének, a P-t pedig a P' ősének neveztük.
Tavaly tanultuk, hogy ha a transzformáció megfordítható, azaz minden képponthoz egyetlen eredeti pont tartozik, akkor azt **geometriai transzformációnak** nevezzük.

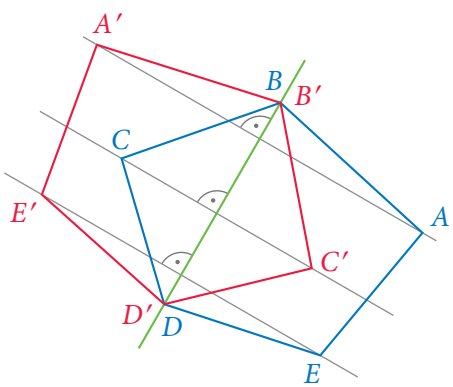
1. PÉLDA

Elevenítsük fel a tengelyes és a középpontos tükrözés kivitelezését! Adjuk meg egy tetszőleges $ABCDE$ ötszög képét, ha
a) a BD átlóegyenesre; *b)* a CD oldal K felezőpontjára tükrözzük!

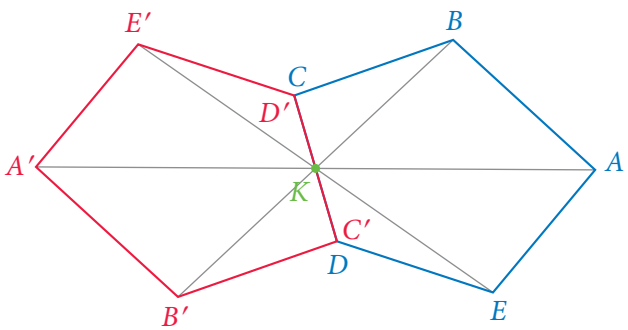
Megoldás

A két ábra mutatja a tetszőlegesen felvett ötszög megfelelő képét.

a)



b)



A tengelyes és a középpontos tükrözésről tavaly tanultuk, hogy távolságtartó transzformációk, azaz bármely szakasznak és a képének a hossza megegyezik. Az ilyen transzformáció neve egybevágósági transzformáció, röviden **egybevágóság**. Az egybevágóság jele: $\cong$
A tengelyes és a középpontos tükrözés is egybevágósági transzformáció.
Az előző példában a két sokszög egybevágó, ezt így írhatjuk: $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$
Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy két síkidom akkor egybevágó, ha egymásra fektetve tökéletesen fedik egymást.

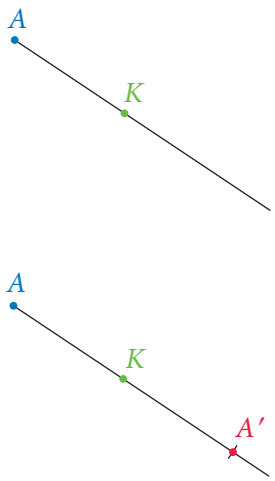
1. Egybevágósági transzformációk (ismétlés)

II.

A tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés megadása nagyon hasonlít egymáshoz. Vizsgáljuk meg a két transzformáció kapcsolatát!

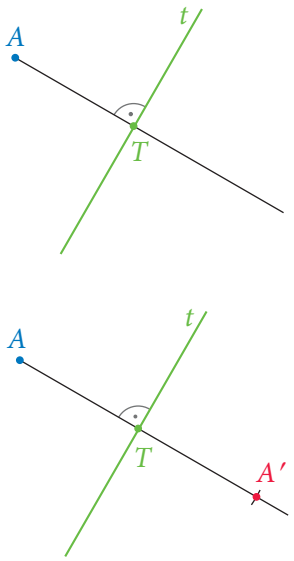
Középpontos tükrözés:

Rögzítenünk kell egy K pontot. Ez lesz a tükrözés középpontja.
Egy tetszőleges A pont képét úgy kapjuk, ha az A pontot összekötjük a K középponttal, és az AK szakaszt K-ból indulva felmérjük az összekötő egyenes A-val ellentétes oldalára (A').
Középpontos tükrözésnél csak a K pontra igaz, hogy a képe önmaga.



Tengelyes tükrözés:

Rögzítenünk kell egy t egyenest. Ez lesz a tükrözés tengelye.
Egy tetszőleges A pont képét úgy kapjuk, ha az A pontból merőlegest állítunk a t tengelyre, és az AT szakaszt T-ből indulva felmérjük a merőleges egyenes A-val ellentétes oldalára (A').
Tengelyes tükrözésnél csak a tengely pontjaira igaz, hogy a képe önmaga.



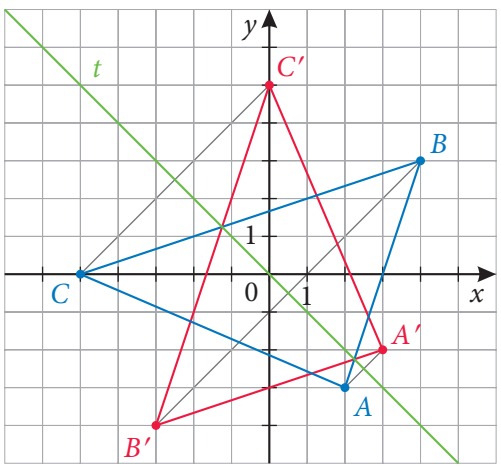
Transzformációkat a koordináta-rendszerben is meg tudtunk adni.

2. PÉLDA

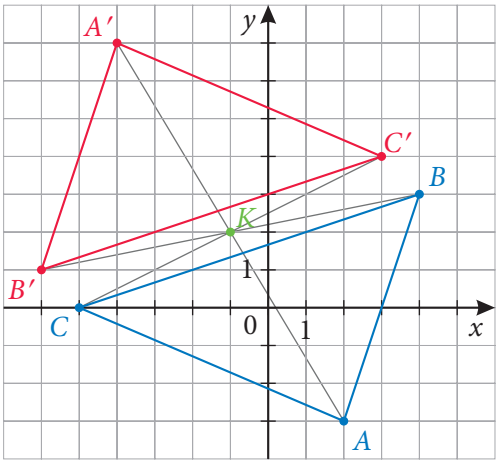
Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $A(2; -3)$, $B(4; 3)$, $C(-5; 0)$ koordinátákkal megadott háromszöget! Adjuk meg az ABC háromszög képét, ha tükrözzük
a) a második negyed szögfelezőegyenesére; *b)* a $K(-1; 2)$ pontra!

Megoldás

a)



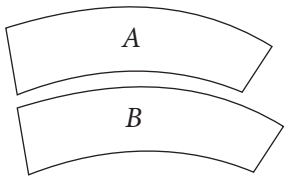
b)



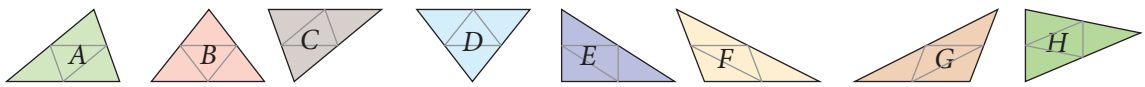
II. 1. Egybevágósági transzformációk (ismétlés)

FELADATOK

1. Egybevágók-e a képen látható síkidomok?



2. Válogasd ki a tükrös háromszögpárokat!



3. Rajzolj vonalzóval egy négyszöget a füzetedbe! Válaszd ki az egyik oldalát tengelynek, az egyik csúcsát középpontnak! Szerkeszd meg a négyszög tengelyes és középpontos tükörképét!

4. Ábrázold koordináta-rendszerben az $A(-2; -2)$, $B(4; 2)$, $C(3; 4)$, $D(-3; 2)$ koordinátákkal megadott négyszöget! Add meg az $ABCD$ négyszög

a) x tengelyre vett $A'B'C'D'$ tükörképét; *b)* y tengelyre vett $A''B''C''D''$ tükörképét!

5. Használd az előző feladat pontjait! Milyen négyszög

a) a $BCC'B'$; *b)* a $CD''DC''$; *c)* az $ABCB''$?

6. Ábrázold koordináta-rendszerben a $P(1; -3)$, $Q(5; 1)$, $R(-1; 4)$, $S(-3; 0)$ koordinátákkal megadott négyszöget! Add meg a $PQRS$ négyszög

a) origóra vett $P'Q'R'S'$ tükörképét; *b)* $K(2; 1)$ pontra vett $P''Q''R''S''$ tükörképét!

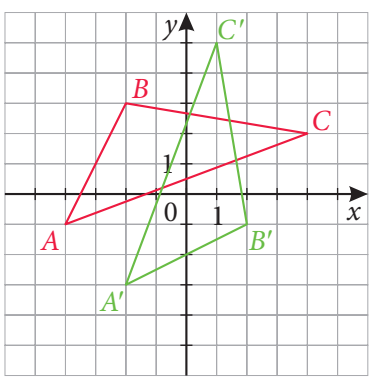
7. Használd az előző feladat pontjait! Milyen négyszög

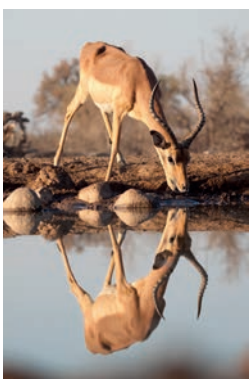
a) a $PQP'Q'$; *b)* az $SQS''Q''$; *c)* a $KQS''P''$?

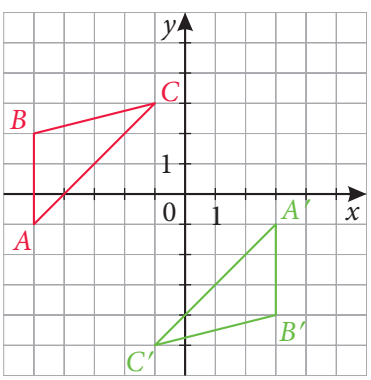
8. Az első ábrán látható ABC és $A'B'C'$ háromszög tengelyesen tükrös, a második ábrán középpontosan tükrös.

a) Add meg a tükörtengely és a koordináta-rendszer tengelyeinek metszéspontját a koordinátáival!

b) Add meg a középpontos tükrözés középpontjának koordinátáit!







A sík pontjait nagyon sokféleképpen megfeleltethetjük egymásnak, amit úgy is mondhatunk, hogy a síknak számtalan leképezése létezik önmagára.

1. PÉLDA

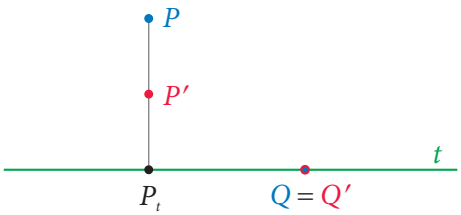
Rögzítsünk a síkon egy t egyenest! Egy P pont P' képét a következőképpen kapjuk:

i) Állítsunk a P pontból merőlegest a t egyenesre, metszéspontjuk legyen P_t!

ii) Legyen P' a PP_t szakasz felezőpontja. (Minden, a t egyenesen lévő pont képe önmaga.)

a) Megfordítható transzformációt kapunk?

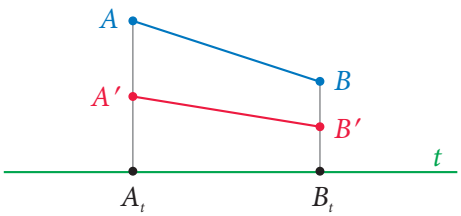
b) Egybevágósági transzformációt kapunk?

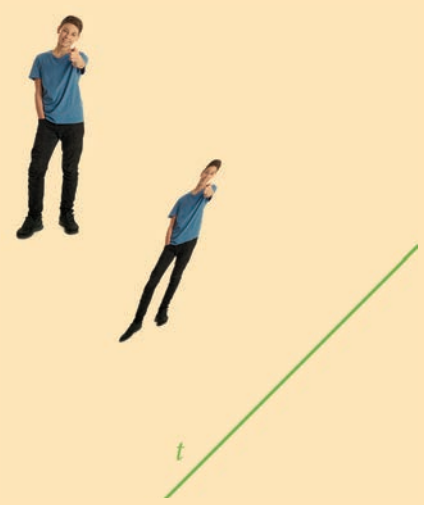


Megoldás

a) Igen, a transzformáció megfordítható, tehát geometriai transzformáció.

b) Nem. Ellenpéldát adunk. Például az ábrán látható AB szakasz és képe, az $A'B'$ szakasz, nem egyenlő hosszú, tehát nem lehet egybevágósági transzformáció.



Ha Pisti fotójára, illetve annak pontjaira és egy vízszintes t egyenesre alkalmazzuk ezt a transzformációt, akkor Pisti kicsit tömzsi lesz.	Ha a t egyenest függőlegesen választjuk meg, akkor Pisti nagyon sovány lesz.	Ferde t egyenes esetén még furcsább képet kapunk.
		

2. PÉLDA

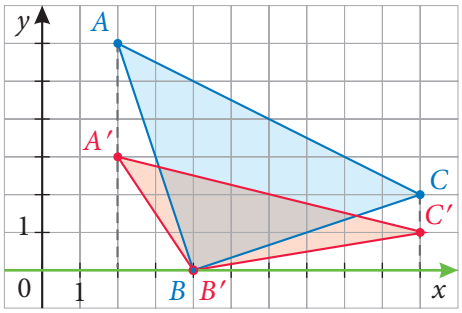
Alkalmazzuk az 1. példában leírt transzformációt az $A(2; 6)$, $B(4; 0)$, $C(10; 2)$ háromszögre, ha a transzformáció t egyenese az

a) x tengely; *b)* y tengely; *c)* első negyed szögfelezője!

d) Számoljuk ki az eredeti ABC háromszög és mindhárom transzformált háromszög területét! (A hosszúság egysége legyen a koordináta-rendszerben megadott egység!)

Megoldás

a) Ábrázoljuk a szokásos derékszögű koordináta-rendszerben az ABC és a transzformált $A'B'C'$ háromszöget! A B pont képe önmaga lesz, hiszen rajta van a t egyenesen. Az A és a C pont esetében, a transzformáció leírásának megfelelően, állítsunk merőlegest az A és C pontokból az x tengelyre, és felezzük meg a kapott távolságokat.



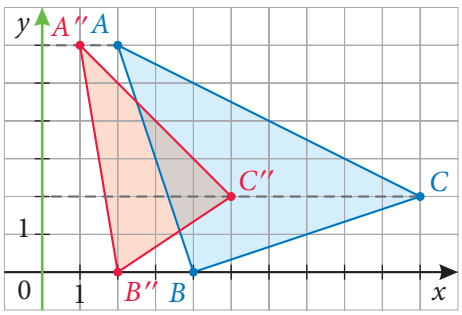
$A(2; 6) \rightarrow A'(2; 3)$

$B(4; 0) \rightarrow B'(4; 0)$

$C(10; 2) \rightarrow C'(10; 1)$

Ez egyenértékű azzal, mintha az A, B és C pontok y koordinátáját megfeleznénk, az x koordinátáját pedig nem változtatnánk.

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan járhatunk el, de most az y tengely lesz a transzformáció t egyenese.



A transzformált háromszög csúcsai:

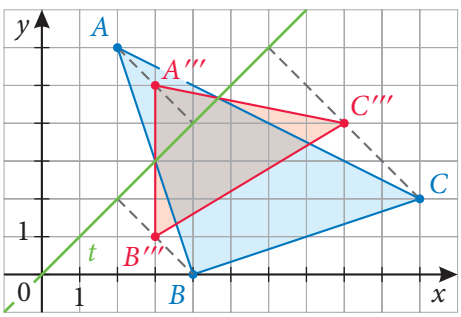
$A(2; 6) \rightarrow A''(1; 6)$

$B(4; 0) \rightarrow B''(2; 0)$

$C(10; 2) \rightarrow C''(5; 2)$

Ez egyenértékű azzal, mintha az A, B és C pontok x koordinátáját megfeleznénk, az y koordinátáját pedig nem változtatnánk.

c) Most is az *a)* feladathoz hasonlóan járhatunk el, de most az első negyed szögfelezője lesz a transzformáció t egyenese.



A transzformált háromszög csúcsai:

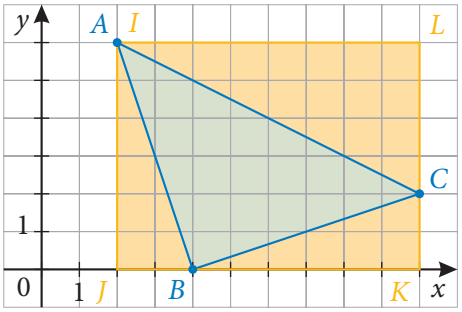
$A(2; 6) \rightarrow A'''(3; 5)$

$B(4; 0) \rightarrow B'''(3; 1)$

$C(10; 2) \rightarrow C'''(8; 4)$

Ebben az esetben sajnos nem tudunk olyan egyszerű megállapításokat tenni a koordináták megváltozására, mint az *a)* vagy a *b)* esetben tettünk.

d) Az ABC háromszög területének meghatározásához foglaljuk be az ABC háromszöget egy olyan téglalapba, melynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.
Az eredeti háromszög területét megkapjuk, ha levonjuk a téglalap területéből a felesleges sárga háromszögek területét, amit könnyen kiszámolhatunk, hiszen ezek derékszögű háromszögek.
Az $IJKL$ téglalap két oldalának hossza 8 és 6 egység, tehát a területe $8 \cdot 6 = 48$ területegység.

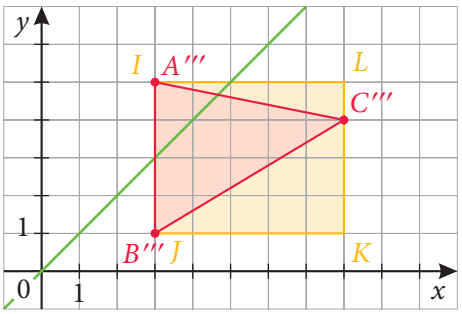


Az AJB háromszög területe: $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ területegység.

A BKC háromszög területe: $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ területegység.

A CLA háromszög területe: $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ területegység.

Az ABC háromszög területe tehát $48 - 6 - 6 - 16 = 20$ területegység.
Hasonlóan lehet kiszámolni az $A'B'C'$, az $A''B''C''$ és az $A'''B'''C'''$ transzformált háromszögek területét is, de a számításokat nem részletezzük, és csak a harmadik esethez készítünk ábrát.

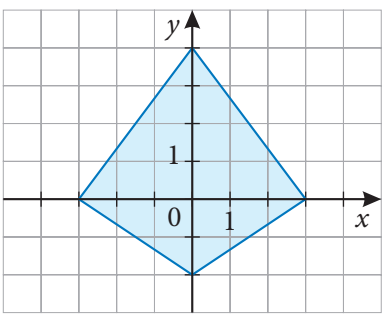


Az $A'B'C'$ háromszög területe
$24 - 3 - 3 - 8 = 10$ területegység.
Az $A''B''C''$ háromszög területe
$24 - 3 - 3 - 8 = 10$ területegység.
Az $A'''B'''C'''$ háromszög területe
$20 - 0 - 7{,}5 - 2{,}5 = 10$ területegység.

Megfigyelhetjük, hogy mindhárom esetben a képháromszög területe fele az eredeti háromszög területének.

FELADAT

1. Rajzold le a füzetedbe az itt látható deltoidot! Rajzold meg a transzformációkhoz tartozó képeit! Minden szabályhoz készíts új rajzot!



a) $(x; y) \mapsto (x; 2y)$
b) $(x; y) \mapsto (2x; y)$
c) $(x; y) \mapsto (2x; 2y)$
d) $(x; y) \mapsto (-x; -2y)$
e) $(x; y) \mapsto (x; |y|)$
f) $(x; y) \mapsto (|x|; y)$

II. 3. Használjunk szerkesztőprogramot!

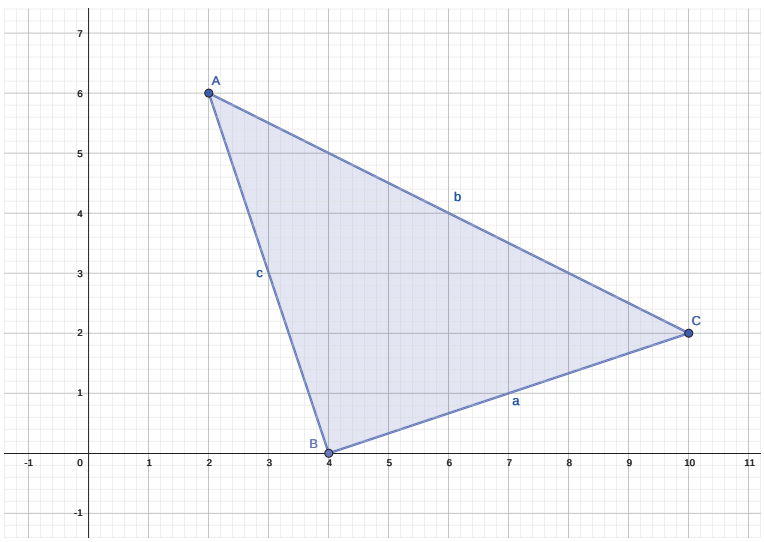
Sokféle geometriai szerkesztőprogram létezik a világon. Vannak köztük olyanok, amelyeket meg kell venni, ha használni akarjátok, és vannak ingyenesek is. Ahogy a 7.-es könyvben, idén is az egyik ingyenesen használható programot fogjuk javasolni, illetve annak lehetőségeivel fogunk megismerkedni. A program használható mobiltelefonon is, de a képernyő kis mérete ebben az esetben szűkös határokat szab. Javasoljuk, hogy legalább tableten, de ideális esetben számítógépen próbálgassátok és tanuljátok a program használatát.

A GeoGebra programon keresztül mutatjuk be egy szerkesztőprogram használatának lépéseit.

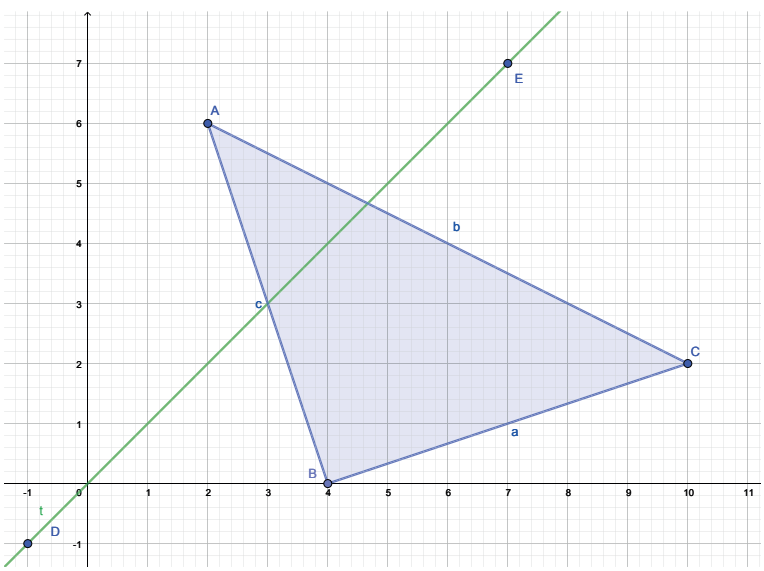
Lépj be a böngészőbe, és nyisd meg a geogebra.org/classic lapot!

Megnyílik egy oldal, amin máris kezdheted a szerkesztést.

Szerkesszük meg az előző leckében lévő 2. példa *c)* részét, azaz a ferde egyenesre transzformálást!



1. Kezdjük a három pont felvételével!
Válasszuk ki a sokszög rajzolása ikont , és kattintsunk a (2; 6) pont közelébe, amennyire csak lehet, aztán egy tetszőleges *B* és *C* pontba, majd újra az *A* pontba, hogy bezárjuk a háromszögünket!
Válasszuk ki a kijelöléshez használható nyilat , és húzzuk a felvett *B* és *C* pontokat a (4; 0) és a (10; 2) koordinátájú pontokba!



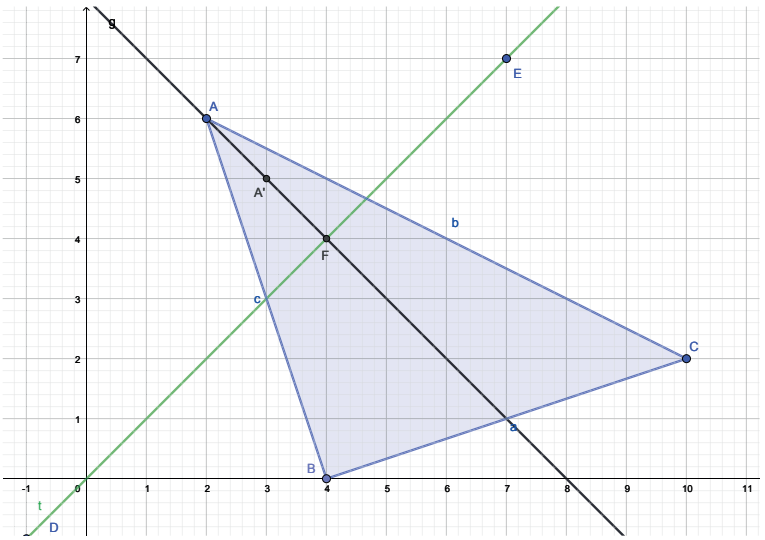
Ha a kijelölés eszközzel  vagy a jobb egérgombbal a háromszög belsejére kattintunk, felugrik a jobb oldalon egy ablak, ahol a tulajdonságait állíthatjuk be. Állítsuk át a háromszög színét kékre!

2. Vegyük fel a transzformáció *t* egyenesét!
Válasszuk ki az egyenes rajzolását , és hozzunk létre 2 pontot, ami

meghatározza az egyenest! Javasoljuk pl. a $(-1; -1)$ és a $(7; 7)$ pontokat, de később úgyis el lehet tüntetni, vagy odébb lehet húzni őket, ha akarjuk.

Kattintsunk a kijelölés  eszközzel az egyenesre, hogy beállítsuk a nevét t-re, a színét pedig zöldre!

3. Szerkesszük meg az A pont A' képét! Állítsunk merőlegest az A pontból a t egyenesre! Ehhez válasszuk ki a merőleges egyenest szerkesztő ikont , majd kattintsunk az A pontra és a t egyenesre! Már létre is jött a kívánt merőleges. Válasszuk a pontoknál a metszéspont létrehozása  lehetőséget, és kattintsunk a most létrejött merőlegesen és a t egyenesen! Ekkor létrejön a metszéspontjuk, a mi ábránkon az F pont. Válasszuk a felező vagy középpont létrehozását , és kattintsunk az A és az F pontra! Ezzel létrejön az AF szakasz felezőpontja. Nevezzük ezt át A'-re! (Emlékszel? A kijelölő eszközzel vagy jobb egérgombbal a pontra kattintva jobb oldalon megjelennek a beállításai. Csak át kell írni a pont nevét A'-re.)



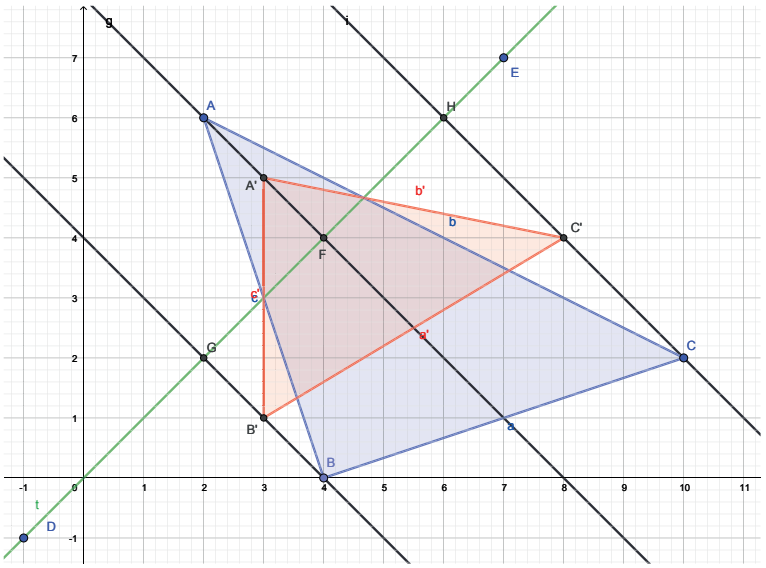
4. Ismételjük meg ugyanezt a B és a C ponttal, hogy megkapjuk a $B'(3; 1)$, $C'(8; 4)$ pontokat!

Válasszuk ki a sokszög eszközt , és kattintsunk sorban az $A'B'C'A'$ pontokon!

Jelöljük ki a kapott háromszöget, és állítsuk át a színét pirosra!

Melyik pontokat tudod mozgatni? (Használd a kijelölő eszközt !)

Próbálkozz az A ponttal, majd az A'-vel is! Sikerült? Mi történik az ábrával?



II. 3. Használjunk szerkesztőprogramot!

Beszéljétek meg, hogy miért lehetett mozgatni az egyik pontot, és miért nem lehetett a másikat!

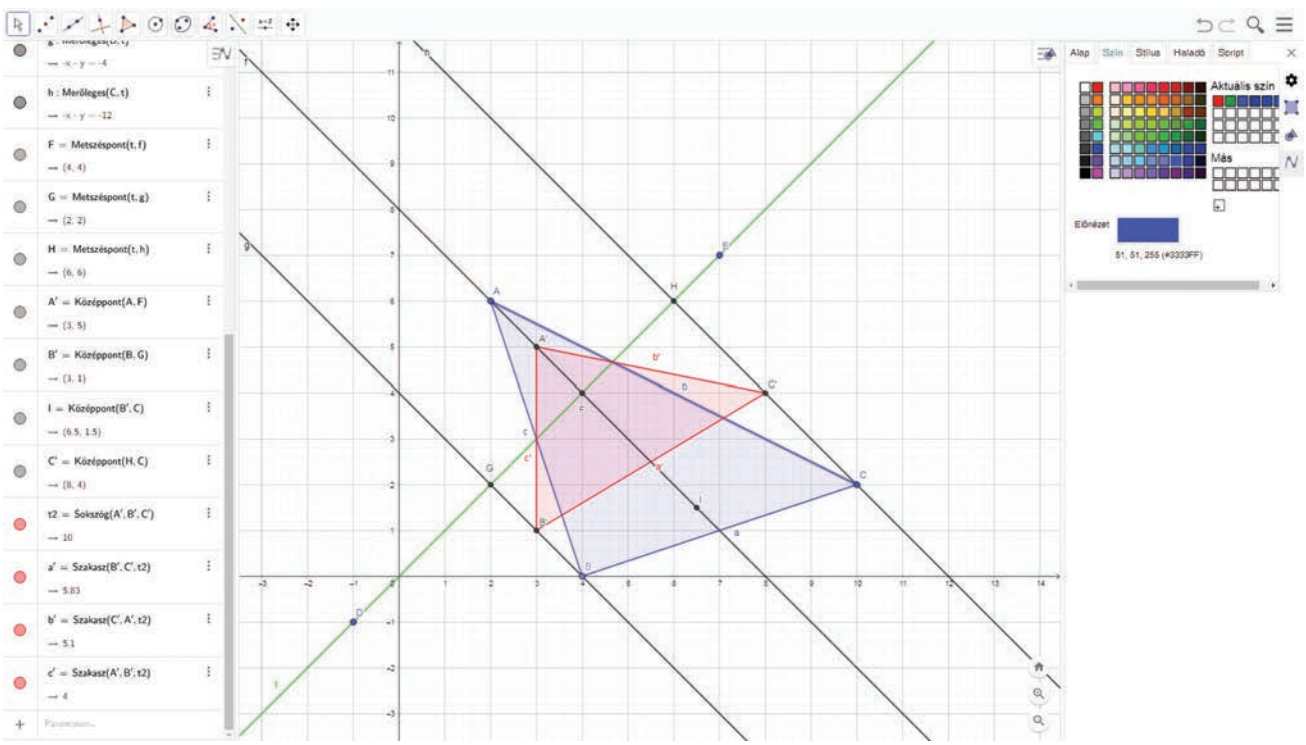
A kijelölő eszközzel húzogasd az ABC háromszög pontjait vagy a t egyenest meghatározó pontokat, és nézd meg, hogyan változik az egyes pontok, illetve az alakzat képe!

FELADATOK

1. A leckében szereplő rajzon húzd a megfelelő pontokat olyan helyre, hogy a
a) t egyenes az x tengely legyen!
b) t egyenes az y tengely legyen!

2. Húzd az A pontot a leckében szereplő t egyenesre! Hová került az A' pont? Miért működik a szerkesztés?

3. Húzd az A és a B pontot is a leckében szereplő t egyenesre! Mozgasd a C pontot!
a) Mit mondhatsz az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek C-ből, illetve C'-ből induló magasságvonaláról?
b) Mit mondhatsz az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek területéről?



Az *ugyanolyan alakú* vagy a *hasonló* és a *hasonlít* szavakat rendszeresen használjuk a mindennapjainkban, de ilyenkor nem feltétlenül matematikai, hanem köznapi értelemben. Megtalálhatók magyar szólásokban és közmondásokban is:



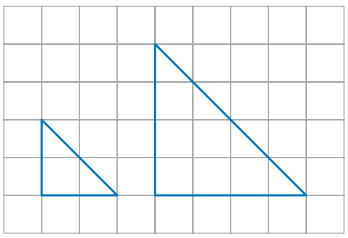
Hasonló a hasonlóval hamar összebarátkozik.

Szúnyogot a bikához ne hasonlítsd!

Hasonlít, mint egyik tojás a másikhoz.

Egy ikerpár két tagja is hasonlít egymáshoz a szó köznapi értelmében, de a szüleik azért meg tudják őket különböztetni.

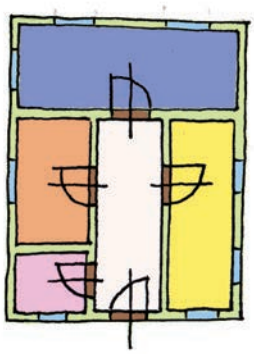




Akkor is beszélhetünk arról, hogy két dolog ugyanolyan alakú vagy hasonlít egymásra, ha nagyok a méretbeli különbségek. Sőt, akkor is, ha a hasonlóság az egyik képen nem is igazi, csak látszólagos. Modellautókon, alaprajzokon meg szokták adni a hasonlóság arányát. Modellautóknál a tipikus méretarány az 1 : 24 vagy az 1 : 43. Alaprajzokon 1 : 100 vagy 1 : 50 a legelterjedtebb arány, de egyes bonyolult részleteket akár 1 : 2 arányban is megjeleníthetnek egy-egy tervrészleten.



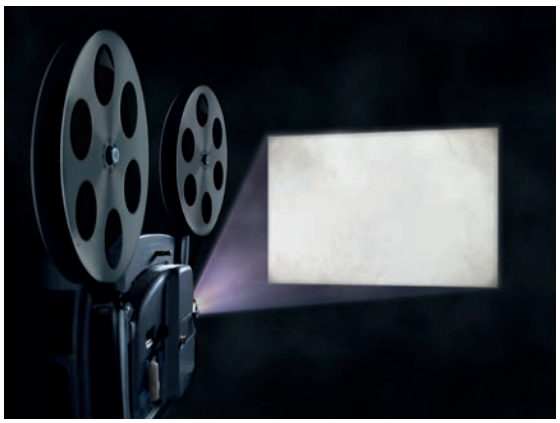




A hasonlóság az alakzatok tulajdonsága. Az itt felrajzolt háromszögeknek lehet, hogy más irányban áll az átfogójuk, más a színük, de geometriai értelemben mind hasonlók egymáshoz.



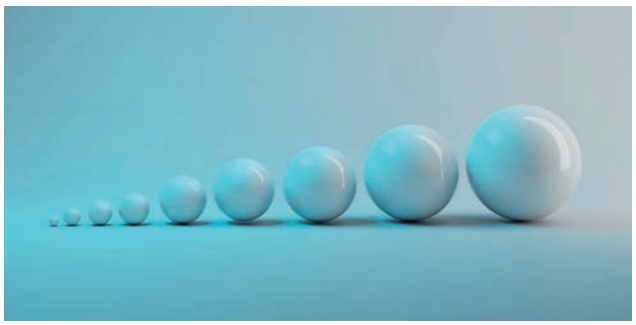
II. 4. Hasonlóság



A filmvetítésnél a hasonlóság speciális esetével találkozunk. A lámpából kiinduló fénysugarak a filmkockákat kivetítik, és sokkal nagyobb, de az eredetihez hasonló képet jelenítenek meg. Itt a fénysugarak egyeneseknek tekinthetők, a lámpa pedig pontszerűnek, a vetítés középpontjának (centrumának). Az ilyen típusú hasonlóságnak külön neve is van, ez a középpontos (centrális) hasonlóság.

(Ma már főleg nagyfelbontású LCD-paneleket használnak a projektorokban és a digitális mozigépekben, de az elv nem változott. Elvétve még lehet találkozni klasszikus filmszalagra készült filmmel is.)

Bármely két kör egy síkban, illetve bármely két gömb középpontosan hasonló egymáshoz.

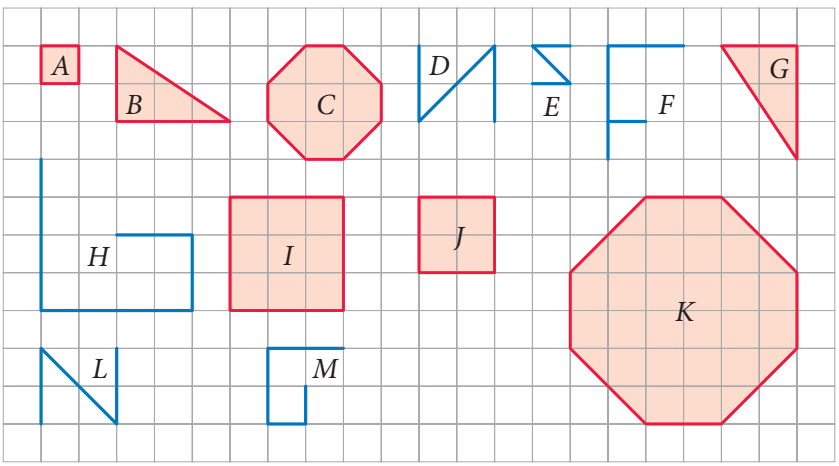




PÉLDA

Válogassuk ki

a) az egybevágó; *b)* a hasonló alakzatokat!

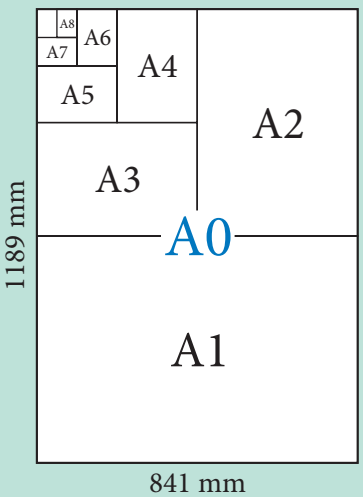


Megoldás

a) A *B* és a *G* egybevágó háromszögek, *D* és *L* pedig egybevágó alakzatok. Más egybevágó nincs az ábrán.

b) Hasonló alakzatból többet is lehet találni.
Az *A*, *J* és *I* négyzetek közül bármely kettő hasonló.
A *B* és a *G* háromszög természetesen hasonló is.
A *D*, *E* és *L* alakzatok közül bármely kettő hasonló.
A *H* és *M* alakzat hasonló.
A *C* és *K* nyolcszög hasonló.
Az *F* alakzat nem hasonlít semelyik másik alakzatra.

Tudtad?



Hazánkban 1936 óta a nemzetközi szabvány szerinti papírméreteket használjuk. Ezek mindegyike olyan téglalap, amelyben az oldalak aránya körülbelül 1,4142. (Majd látni fogjuk, hogy ez az arány pontosan egy négyzet átlóhosszának és oldalhosszának arányával egyenlő.) A megadott arány nagy előnye, hogy ahányszor csak félbehajtjuk az eredeti lapot, a kapott téglalap oldalainak aránya mindig ugyanaz marad, vagyis a téglalapok mindig hasonlók lesznek egymással. Ez a magyarázata annak, hogy a másológépeken például az A3-as lap könnyen A4-esre kicsinyíthető. A papírívek között többféle alapméret van. Az A0-s méretű lap területe 1 m^2. Ha a fent leírt arányt figyelembe vesszük, akkor ennek mérete milliméterben körülbelül 841-szer 1189. Az „A” betűjelzés utáni szám azt mutatja, hogy hányszor felezték az A0-s alapméretet.

FELADATOK

1. Keress a környezetedben olyan dolgokat, amelyekre a szó köznapi értelmében mondhatjuk, hogy hasonlók egymáshoz!

2. Keress a környezetedben olyan dolgokat, amelyekre a szó geometriai értelmében mondhatjuk, hogy hasonlók egymáshoz!

3. Indokold meg! Igaz-e, hogy bármely két, egy síkban lévő négyzet
a) hasonló; *b)* középpontosan hasonló?

4. Tudjuk, hogy a 4 m magas kosárpalánk tetejének árnyéka 3 m-re van a talpától. Milyen magas az az épület, amelyiknek ugyanekkor 12 m-es árnyéka van?

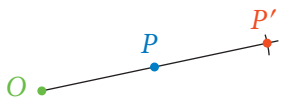
II. 5. A középpontos hasonlóság

Kiegészítő tananyag

A középpontos hasonlóság vagy szigorúbb nevén egy adott középpontú és adott arányú középpontos hasonlóság egy pontosan meghatározott geometriai transzformáció. A következő két példában megismerkedünk ezzel a transzformációval. A középpontos hasonlóságot szokták centrális hasonlóságnak is nevezni. A centrum szó jelentése középpont, középen lévő.

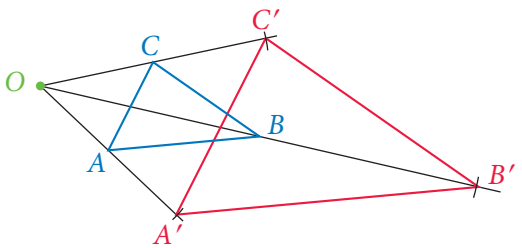
1. PÉLDA

Rögzítsünk a síkon egy O pontot, ez lesz a hasonlóság középpontja. Az O pont képe legyen önmaga. Egy tetszőleges (O-val nem egybeeső) P pont P' képe illeszkedjen az OP félegyenesre úgy, hogy $\frac{OP'}{OP} = \frac{2}{1} = 2$. Szerkesszük meg az ABC háromszög csúcsainak A', B' és C' képét, majd rajzoljuk meg az $A'B'C'$ háromszöget!



Megoldás

Megrajzoljuk az OA, OB, OC félegyeneseket. Az O-ból felmérjük kétszer az OA, OB, OC szakaszok hosszát. Így megkapjuk az A', B', C' pontokat. Összekötve látható az $A'B'C'$ háromszög.



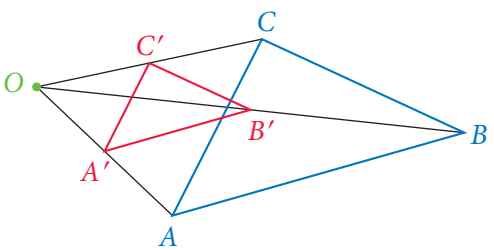
A példában szereplő transzformációt kétszeres **középpontos nagyítás**nak nevezzük. Az ABC háromszögnek az $A'B'C'$ háromszög a kétszeres középpontosan nagyított képe.

2. PÉLDA

Rögzítsünk a síkon egy O pontot! Az O pont képe legyen önmaga. Egy tetszőleges (O-val nem egybeeső) P pont P' képe illeszkedjen az OP félegyenesre úgy, hogy $\frac{OP'}{OP} = \frac{1}{2}$. Szerkesszük meg az ABC háromszög csúcsainak A', B' és C' képét, majd rajzoljuk meg az $A'B'C'$ háromszöget!

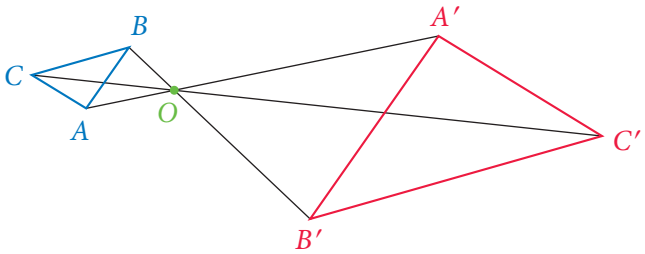
Megoldás

Megrajzoljuk az OA, OB, OC félegyeneseket. Az O-ból felmérjük az OA, OB, OC szakaszok hosszának felét. Az így kapott A', B', C' pontokat összekötve kapjuk a kívánt háromszöget.

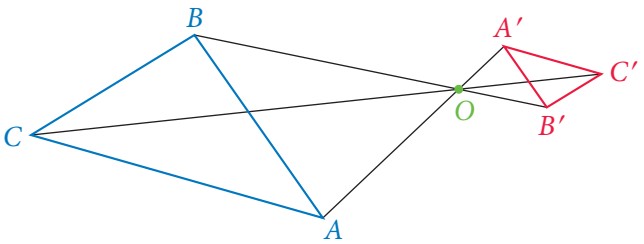


A példában szereplő transzformációt $\frac{1}{2}$-szeres **középpontos kicsinyítés**nek nevezzük. Az ABC háromszögnek az $A'B'C'$ háromszög az $\frac{1}{2}$-szeres középpontosan kicsinyített képe.

A nagyításhoz vagy a kicsinyítéshez az előzőektől eltérő, λ (ejtsd: lambda) arányt is választhatunk. Negatív arány esetén a kép az O másik oldalán, a félegyenes meghosszabbításán található. Az O pont képe minden esetben önmaga, vagyis az O pont a transzformáció fixpontja.

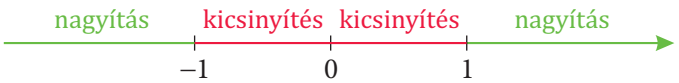


Az ABC háromszög képe $\lambda = -3$-as arányhoz



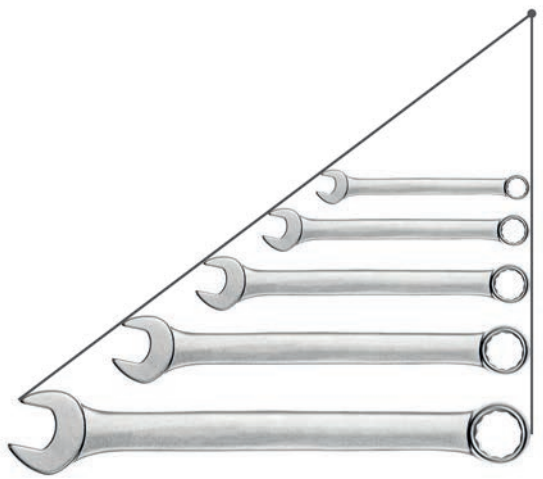
Az ABC háromszög képe $\lambda = -\frac{1}{3}$-os arányhoz

Gondoljuk meg!
Ha az arányszám $\lambda = 1$, akkor minden pont helyben marad.
Ha az arányszám $\lambda = -1$, akkor középpontos tükrözést kapunk.
Ha az arányszám $\lambda = 0$, akkor a sík minden pontjának képe az O pont lesz. Ez a transzformáció nem hasonlóság.



A középpontos nagyítást és kicsinyítést összefoglalóan **középpontos hasonlósági transzformáció**nak nevezzük.
A középpontos hasonlósági transzformációról a példák alapján a következő tulajdonságokat fogalmazhatjuk meg:

- Egyenestartó, szögtartó, a körüljárási irányt megtartó transzformáció.
- Bármely két pont esetén a képként kapott pontok távolságának és az eredeti két pont távolságának az aránya ugyanannyi, egyenlő a hasonlóság arányával.
- A középpontos hasonlóság középpontján áthaladó egyenes képe önmaga.
- A középpontos hasonlóság középpontján nem áthaladó egyenes képe az eredeti egyenessel párhuzamos egyenes.



Mi csak síkban vizsgálódtunk, de beszélhetünk középpontos hasonlóságról a térben is.

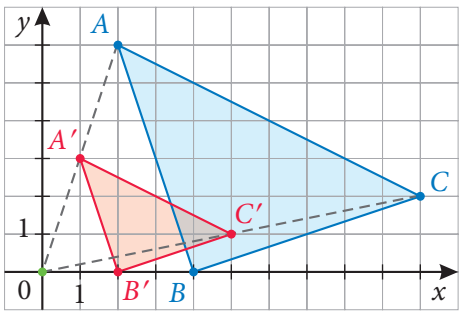
3. PÉLDA

a) Alkalmazzuk a 2. leckében látott $A(2; 6)$, $B(4; 0)$, $C(10; 2)$ háromszögre az $O(0, 0)$ középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósági transzformációt!

b) Számoljuk ki az eredeti ABC háromszög és a transzformált háromszög területét! (A hosszúság egysége legyen a koordináta-rendszerben megadott egység.)

Megoldás

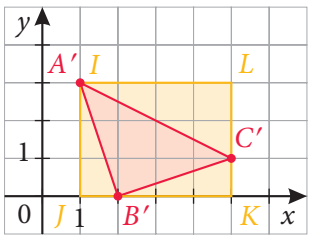
a) Ábrázoljuk a szokásos derékszögű koordináta-rendszerben az ABC és a transzformált $A'B'C'$ háromszöget! Az A, B és C pont esetében, a transzformáció leírásának megfelelően, kössük össze a pontokat O-val, és felezzük meg az OA, OB, illetve az OC szakaszokat, hogy megkapjuk az A', B' és C' pontokat!



$A(2; 6) \rightarrow A'(1; 3)$
$B(4; 0) \rightarrow B'(2; 0)$
$C(10; 2) \rightarrow C'(5; 1)$

Ez egyenértékű azzal, mintha az A, B és C pontok mindkét koordinátáját elfeleznénk.

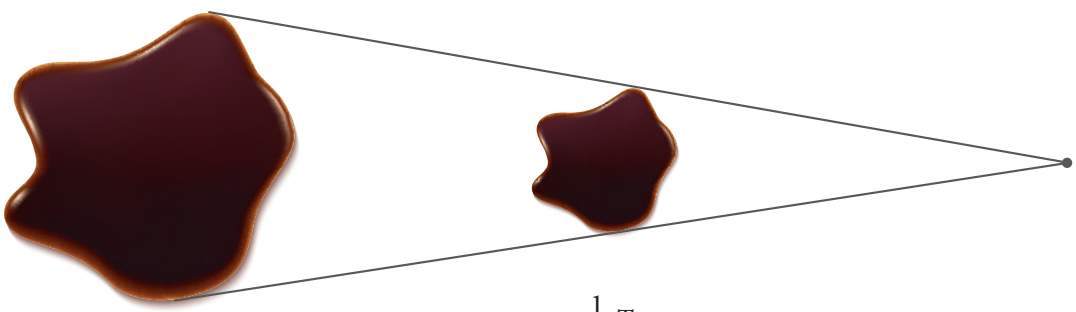
b) Az eredeti ABC háromszög területét a 2. leckében már kiszámoltuk, az 20 területegység volt.



Járjunk el hasonlóan a transzformált háromszöggel, mint korábban, azaz foglaljuk be az ábrán látható téglalapba! Megkapjuk az $A'B'C'$ háromszög területét, ha a téglalap területéből levonjuk a sárga háromszögek területét.

A téglalap területe $4 \cdot 3 = 12$, az egyes háromszögeké pedig 1,5, 1,5 és 4 területegység.

Az $A'B'C'$ háromszög területe tehát $12 - 1{,}5 - 1{,}5 - 4 = 5$ területegység, éppen az eredeti ABC háromszög területének negyede.

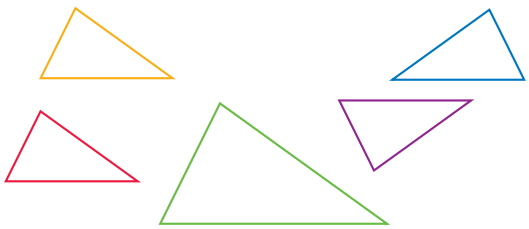


FELADATOK

1. Rajzolj egy négyszöget a füzetedbe!
a) Nagyítsd az egyik csúcsából a kétszeresére!
b) Kicsinyítsd a felére az egyik oldal felezőpontjából!

2. Rajzolj egy kört a füzetedbe!
a) Nagyítsd a körvonalat az egyik pontjából a háromszorosára!
b) Kicsinyítsd a felére a középpontjából!

3. Válaszd ki azokat a háromszögpárokat, amelyek középpontosan hasonlók!

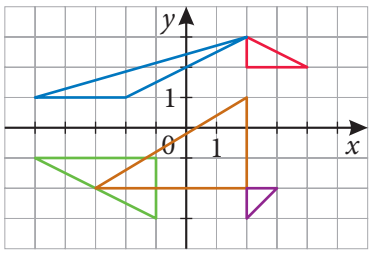


4. Rajzolj a füzetedbe két pontot! Az egyik legyen A, a másik pedig A'. Szerkeszd meg az O középpontot úgy, hogy az A pont középpontosan hasonló képe A' legyen, és a középpontos hasonlóság aránya
a) $\lambda = 3$; *b)* $\lambda = -3$;
c) $\lambda = \frac{2}{3}$; *d)* $\lambda = \frac{4}{3}$!

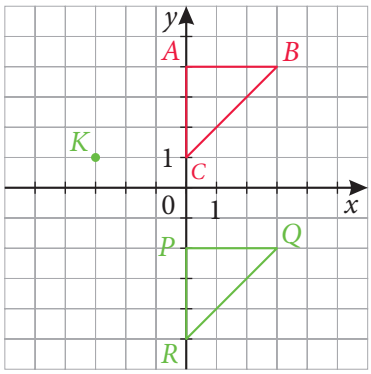
5. Rajzolj egy háromszöget, és
a) nagyítsd az egyik csúcsából $\frac{3}{2}$-szeresére;
b) kicsinyítsd egy külső pontjából $\frac{3}{4}$-szeresére!

6. Nagyítsd az origóból a kétszeresére az $A(1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(4; 1)$, $D(2; -1)$ csúcsokkal megadott négyszöget!
a) Add meg a képként kapott négyszög csúcsainak koordinátáit!
b) Számold ki az $ABCD$ négyszög és a transzformációval kapott négyszög területét!

7. Keresd meg az ábrán a két középpontosan hasonló háromszöget! Add meg a középpontos hasonlóság középpontjának koordinátáit! Add meg a középpontos hasonlóság arányát!



8. Másold át az ábrát a füzetedbe!



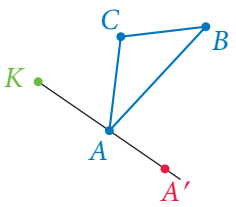
a) Rajzold meg az ABC háromszög K középpontra vonatkozó, $\frac{4}{3}$ arányú képét! Add meg az így kapott $A'B'C'$ háromszög csúcsainak koordinátáit!
b) Rajzold meg a PQR háromszög K középpontra vonatkozó, $-\frac{1}{3}$ arányú képét! Add meg az így kapott $P'Q'R'$ háromszög csúcsainak koordinátáit!

Kiegészítő tananyag

Az eddigi szerkesztésekben a középpontos hasonlóság arányát egy számmal adtuk meg. A következőkben olyan szerkesztéseket láthatsz, ahol ezt a számot nem ismerjük.

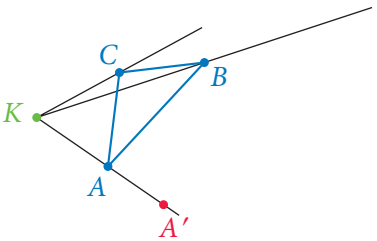
1. PÉLDA

Az adott K pontból nagyítsuk az ABC háromszöget úgy, hogy az A csúcsa a megadott A' pontba kerüljön!



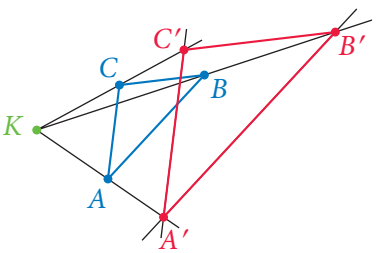
Megoldás

Már összegyűjtöttük a középpontos hasonlóság legfontosabb tulajdonságait. Tudjuk, hogy a középpontos hasonlóság K középpontja, az eredeti pont (a tárgypont) és a képe egy egyenesre illeszkedik. Ezt felhasználva megrajzoljuk a KB egyenest (mert erre illeszkedik a B' pont) és a KC egyenest (mert erre illeszkedik a C' pont). Az ábrán csak a szerkesztés elvégzéséhez szükséges félegyeneseket rajzoltuk meg.



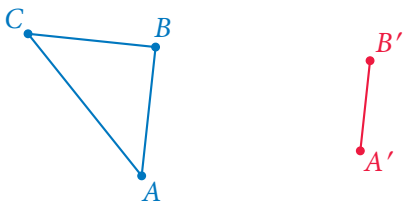
Azt is tudjuk, hogy a K középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással. Ezért az AB egyenessel párhuzamos, A' pontra illeszkedő egyenesen van a B' pont, és az AC egyenessel párhuzamos, A' pontra illeszkedő egyenesen van a C' pont.

Így megkaptuk a háromszög hiányzó csúcsait.



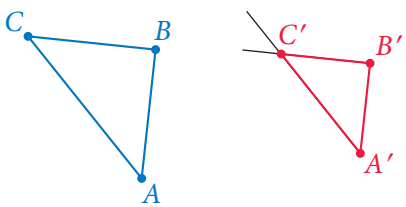
2. PÉLDA

Kicsinyítsük az adott ABC háromszöget a középpontos hasonlóság K középpontjának megszerkesztése nélkül úgy, hogy az A csúcsa az adott A', a B csúcsa az adott B' pontba kerüljön!



Megoldás

Alkalmazzuk a középpontos hasonlóságnak azt a tulajdonságát, hogy a K középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással. Ezért a megszerkesztendő C' pont rajta van az A'-n átmenő AC-vel párhuzamos és a B'-n átmenő BC-vel párhuzamos egyenesen is, tehát C' ezen egyenesek metszéspontja.



Megjegyzések:
- A kivitelezés csak akkor hajtható végre, ha a kiinduló ábrán az AB és az $A'B'$ párhuzamos, de nem egyenlő hosszú.
- A középpontos hasonlóság K középpontját nem kellett megszerkesztenünk, de tudjuk, hogy az AA' és BB' egyenesek metszéspontjában van.

Mivel tudunk szakaszt másolni és felezni, ezért ha a középpontos hasonlóság arányát egy egész számmal vagy 2, 4, 8, … nevezőjű törttel adjuk meg, akkor a középpont ismeretében a kép megszerkesztése egyszerű feladat. Az előző leckében már találkoztál ilyen helyzetekkel. Mi a teendő ezektől eltérő arányszámok esetén?

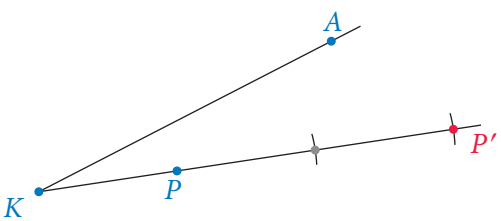
Megfigyelhettük, hogy például a $\lambda = 2$ arányú és a $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság szoros kapcsolatban van egymással. Ami az egyikben képpont, az a másikban tárgypont lesz, és fordítva. Ez minden λ és $\frac{1}{\lambda}$ esetén is elmondható.

Ezt felhasználva kivitelezhetjük például a $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú középpontosan hasonló kép szerkesztését, mert a 3-szoros nagyítás képét tudjuk, hogyan kell megszerkeszteni.

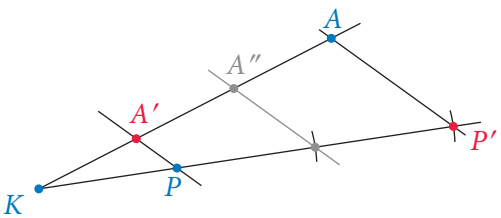
3. PÉLDA

Szerkesszük meg egy tetszőleges A pont A' képét egy adott K középpontú, $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonlóság esetén!

Megoldás



A K középpontú, $\lambda = 3$ arányú középpontos hasonlóságban egy tetszőleges P pont képe a P' lesz. Ezt a szerkesztést szakaszmásolással meg tudjuk valósítani.



Ha gondolatban felcseréljük az összetartozó két pont szerepét, akkor az adott A pont keresett A' képét már meg tudjuk szerkeszteni.

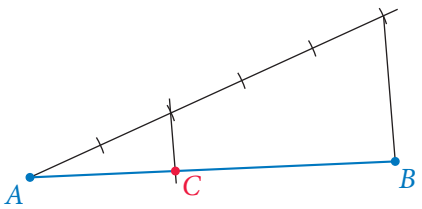
Ezzel a módszerrel az is látható, hogyan kell egy tetszőleges A pont képét megszerkeszteni egy adott K középpontú, $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság esetén. Az ábránkon ez az A'' pont. Ezt a módszert alkalmazzuk akkor is, amikor egy szakaszt adott arányban szeretnénk kettévágni.

4. PÉLDA

Szerkesszük meg az AB szakasz C pontját úgy, hogy $AC : CB = 2 : 3$ legyen!

Megoldás

Húzzunk egy tetszőleges félegyenest az A pontból kiindulva, majd A-ból mérjünk fel öt $(2 + 3)$ egyenlő szakaszt a körzőnkkel! Az ötödik szakasz végpontját összekötjük a B ponttal, majd az így kapott egyenessel párhuzamost húzunk a második szakasz végpontján át, ahogyan ezt az ábra mutatja. Ez az egyenes a megfelelő C pontban metszi az AB szakaszt.



FELADATOK

1. Kicsinyítsd a $KLMN$ téglalapot a K középpontból úgy, hogy az M csúcsa a KM szakasz egy előre adott, tetszőleges pontja legyen!

2. Adott az $ABCD$ trapéz. Tudjuk, hogy egy középpontos hasonlóság az AB szakaszt a CD szakaszba transzformálja. Szerkeszd meg egy tetszőleges E pont képét!

3. Szerkeszd meg egy tetszőleges AB szakasz képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja, és

a) $\lambda = 4$; *b)* $\lambda = \frac{1}{4}$;

c) $\lambda = 8$; *d)* $\lambda = \frac{5}{8}$;

e) $\lambda = -4$; *f)* $\lambda = -\frac{1}{4}$;

g) $\lambda = -8$; *h)* $\lambda = -\frac{5}{8}$!

4. Szerkeszd meg egy tetszőleges ABC háromszög képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja, és

a) $\lambda = \frac{1}{5}$; *b)* $\lambda = \frac{2}{5}$;

c) $\lambda = \frac{8}{5}$; *d)* $\lambda = -\frac{3}{5}$;

e) $\lambda = \frac{1}{7}$; *f)* $\lambda = \frac{4}{7}$;

g) $\lambda = \frac{9}{7}$; *h)* $\lambda = -\frac{5}{7}$!

5. Az adott AB szakaszt vágd két részre egy C ponttal úgy, hogy

a) $AC : CB = 1 : 5$; *b)* $AC : CB = 5 : 1$;

c) $AC : CB = 4 : 5$; *d)* $AC : CB = 2 : 7$!

6. Az adott AB szakasz B ponton túli meghosszabbításán szerkeszd meg azt a D pontot, amelyre

a) $AD : DB = 4 : 1$; *b)* $AD : DB = 5 : 2$;

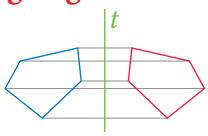
c) $AD : DB = 6 : 1$; *d)* $AD : DB = 8 : 3$!

7. Egy oszlop teljes hosszán – egyenletesen lassan – 1 óra alatt másznak végig egy csiga. Szerkesztéssel jelöld be a tartózkodási helyét 8 perc, 12 perc és 40 perc mászás után!

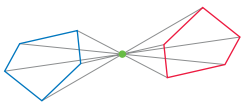
8. Képzeld el, hogy az $ABCD$ négyzet kerületén egy cérna fut körbe. Az A csúcsot rögzítettük. Ezek után a cérnából létrehozzuk a négyzettel azonos kerületű AEF szabályos háromszöget. Szerkesztéssel jelöld a négyzet ábráján, hogy a cérna mely pontjai adják majd a háromszög csúcsait!

Az eddig tanult egybevágósági transzformációk síkban:

- tengelyes tükrözés

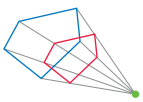


- középpontos tükrözés



Nem egybevágósági transzformáció:

- középpontos hasonlóság (kiegészítő tananyag)



FELADATOK

1. Adott a tükrözés tengelye. A sík mely egyenesei esnek egybe a tengelyes tükörképükkel?

2. Nevezz meg olyan síkbeli alakzatokat, amelyeknek végtelen sok szimmetriatengelye van!

3. Húzz egy egyenest a paralelogramma átlóinak metszéspontján át! Mutasd meg, hogy ez az egyenes a paralelogrammát két egybevágó síkidomra vágja!

4. Adott a koordináta-rendszerben az $ABCD$ trapéz, csúcsai $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(4; 3)$, $D(3; 3)$.

a) Tükrözd a trapézt az x tengelyre! Rajzold meg a tükörképet, és írd fel a csúcspontok koordinátáit!

b) Tükrözd a trapézt az y tengelyre! Rajzold meg a tükörképet, és írd fel a csúcspontok koordinátáit!

c) Tükrözd a trapézt az x tengelyre, majd a kapott képet az y tengelyre! Rajzold meg a tükörképeket, és írd fel a csúcspontok koordinátáit!

d) Tükrözd a trapézt az origóra középpontosan! Rajzold meg a tükörképet, és írd fel a csúcspontok koordinátáit! Mit tapasztalsz, ha összehasonlítod a *c)* és *d)* feladatban képként kapott trapézokat?

5. Adott a koordináta-rendszerben az ABC háromszög, csúcsai $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 3)$. Add meg az ABC háromszög képét, ha egy tetszőleges P pont képe:

a) $P(x; y) \mapsto P'(-x; -y)$;

b) $P(x; y) \mapsto P'(-2x; -2y)$;

c) $P(x; y) \mapsto P'(x; 2y)$;

d) $P(x; y) \mapsto P'\left(x; \frac{y}{2}\right)$!

6. Egy tervrajzon a 12 méter hosszú folyosót a mérnök 7,2 cm-nek, szélességét pedig 1,5 cm-nek rajzolta. Milyen széles a folyosó?

7. A képen látható csokoládéból annyi „kockát” szabad letörnöd és megenned, hogy a megmaradt darab alakja felülnézetben hasonló legyen az eredetihez.
Hányad részét eheted meg a csokoládénak?



8. Mindkét fényképen a Duna Aréna látható. A nagyobb képen az épület magasságát bal oldalán 1,7 cm-nek mértük. Ugyanezen a képen a tető két élének hossza 2,2 cm és 3,8 cm. A másik képen 0,9 cm az épület magassága. Határozd meg mérés nélkül, hogy milyen hosszúak a tető megfelelő élei a második képen!





Kiegészítő tananyag

9. Rajzolj egy AB szakaszt! Oszd fel olyan részekre, amelyek aránya
a) 2 : 5; *b)* 3 : 2; *c)* 1,5 : 8; *d)* 2 : 3,5!

10. Legyen adott az $ABCD$ négyszög AB oldalának B-n túli meghosszabbításán egy B' pont. Rajzold meg az $ABCD$ négyszög A középpontú nagyított képét úgy, hogy a B képe B' legyen!

11. Az előző feladat jelöléseit használva legyen az $ABCD$ négyszög kerülete 26 cm, az AB oldal 8 cm, az $A'B'$ oldal pedig 10,2 cm hosszú. Mekkora az $A'B'C'D'$ négyszög kerülete?

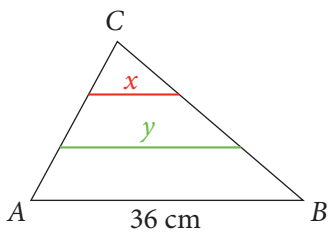
12. Legyen adott az $ABCD$ trapéz AB alapján egy B' pont. Kicsinyítsd a trapézt az A csúcsából úgy, hogy a B képe B' legyen! Milyen négyszög a $B'BDD'$ négyszög?

13. Adott egy deltoid és egy téglalap. Szerkessz az adott deltoidhoz hasonló deltoidot úgy, hogy kerülete az adott téglalap kerületével legyen egyenlő!

14. Egy hatszög oldalainak hossza: 2 cm, 2,4 cm, 3 cm, 2,8 cm, 3,5 cm, 5,2 cm. A hozzá hasonló hatszög leghosszabb oldala 23,4 cm. Mekkora ennek a hatszögnek a kerülete?

15. Egy téglalapot az egyik szimmetriatengelye mentén elvágva, az eredetihez hasonló két téglalapot kapunk. Mekkora az eredeti téglalap két oldalának aránya?

16. Az ABC háromszög AB oldala 36 cm hosszú. A BC oldalt három egyenlő részre vágjuk, és az osztópontokon át az AB oldallal párhuzamos egyeneseket rajzolunk. Milyen hosszúságú szakaszai lesznek ezeknek az egyeneseknek a háromszög belsejében?



A következő órán a gyerekek egy nagy zacskóval fogadták a tanárnőt.

Nem tudtuk eldönteni, hogy ki legyen a következő, úgyhogy aki akarta, annak beletettük a nevét a tasakba.

Tessék húzni!

Akkor ma Zozó és Kristóf következik!

Igggen!

Ezazz!

KRISTÓF

III. A Pitagorasz-tétel

A bányászat komoly dolog. Főként az űrben! Rengeteg előzetes számításra van szükség, hogy melyik aszteroidát érdemes befogni. Ha megkapjuk a koordinátákat, akkor a pilóta beállítja a bányászhajót, aztán uzsgyi felfelé!

A számítások, a repülés és a finomlandolás a pilóta feladata.

A mi dolgunk, hogy az alatt a pár nap alatt, amíg földközelben vagyunk, a lehető legtöbb értékes ásványt bányásszuk ki...

Nagyon sok munkát a számítógépek végeznek el, persze csak akkor, ha megfelelően állították be őket. A legjobb bányászok ma már a legtehetségesebb programozók közül kerülnek ki, szóval nem elég a tesiórán májerkedni, matekból is villantani kell hozzá.

Ohh, hellóka!

Zozókám, hinnéd vagy sem, de fodrász leszel!

Bizony ám! Képzeld, a múltkor bejött egy punk fazon a szalonba, és azt kérte, hogy vágjam körbe a haját, oldalt 90°-os szögben álljon a felnyírt pajesza, a szakálla pedig mindenütt legyen hegyesszögben.

Nem hittem, hogy fodrászként valaha is használ veszem a geoházinak, aztán nézd már...! Így pont olyan lett, ahogy megálmodta a srác.

III. 1. Szerkesztések, mérések

CSOPORTMUNKA



Alkossatok 3-4 fős csoportokat! Beszéljétek meg, milyen ötleteitek vannak az alábbiakban kérdezett távolságok meghatározására!



1. Hogyan határoznátok meg egy körbekerített, téglalap alakú kert átlójának hosszát, ha a kerítésen nem tudtok átjutni, de az oldalainak hosszát meg tudjátok mérni?
2. Hogyan határoznátok meg egy téglatest alakú doboz két legtávolabbi csúcsának távolságát, ha meg tudjátok mérni az élek hosszát?



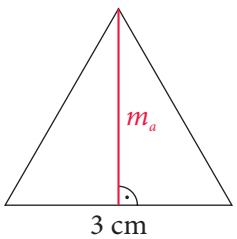
Mindkét esetben gondoljatok arra, hogy mérhettek, szerkeszthettek is!

1. PÉLDA

Mekkora egy 3 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög területe?

Megoldás

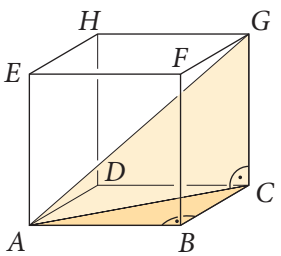
A háromszög területét az a oldalhossz és a hozzá tartozó m_a magassághossz segítségével határozzuk meg: $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$. Mivel az oldalhoz tartozó magasság hosszát most nem ismerjük, ezért szerkesszük meg a háromszöget, és mérjük meg ezt a hosszt!



Mérésünk eredménye: $m_a \approx 2{,}6$ cm. Ezért $t \approx \frac{3 \text{ cm} \cdot 2{,}6 \text{ cm}}{2} = 3{,}9 \text{ cm}^2$

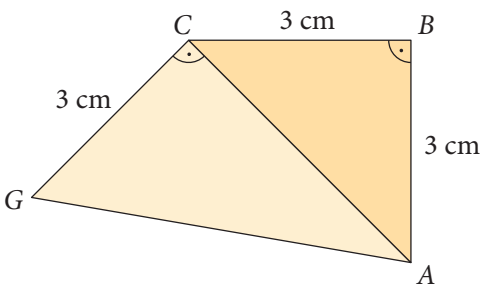
2. PÉLDA

Mekkora a 3 cm élhosszúságú kocka két legtávolabbi csúcsának távolsága?



Megoldás

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói 3 cm hosszúak. Szerkesszük meg ezt a háromszöget! Az ACG derékszögű háromszög egyik befogója 3 cm hosszú, a másik befogója az előbb említett ABC háromszög AC átfogójának hosszával egyenlő, vagyis ezt a háromszöget is meg tudjuk szerkeszteni. A keresett szakasz ennek a háromszögnek az átfogójával azonos hosszúságú.



A megszerkesztett ábrán meg tudjuk mérni a kocka két legtávolabbi csúcsának távolságát. A kocka testátlójának hossza kb. 5,2 cm.

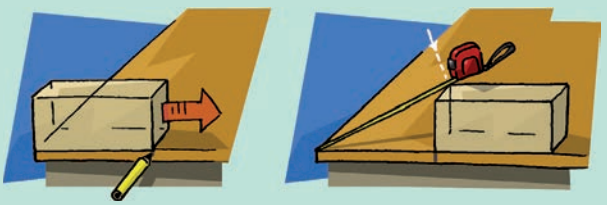
A példákban látott megoldások segítségével a csoportmunka kérdéseire is válaszolni lehet. A megmért adatok alapján hasonló alakzatokat szerkesztünk a füzetünkbe. A megszerkesztett ábrán megmérjük a kérdéses szakasz hosszát. Természetesen a válasznál figyelnünk kell arra, hogy milyen aránnyal kicsinyítettünk.

A lecke kérdéseinek megválaszolásánál számítanunk kell a mérésből és a szerkesztésből adódó hibákra.

Hogyan lehetne mérések helyett számolással választ adni a fenti kérdésekre? A következő leckékben erre keressük a választ.

Érdekesség

Egy téglatest alakú doboz testátlójának hosszát egy téglalap alakú asztalon is megmérheted. Az ábra mutatja a kivitelezést.



FELADATOK

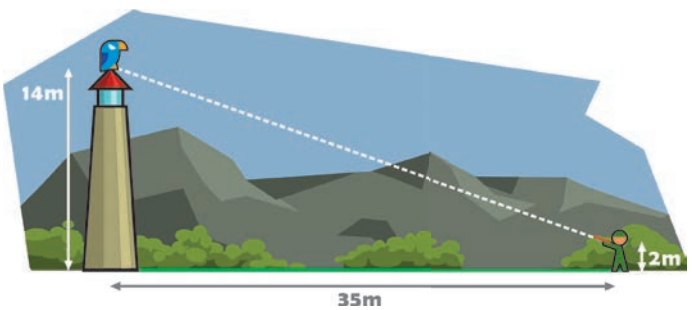
1. Egy négyzet oldala 3,5 cm hosszú. Szerkesztéssel és méréssel határozd meg, hogy hány milliméter hosszú az átlója!

2. Egy szabályos háromszög oldala 4 cm hosszú.
a) Hány milliméter hosszú a magassága?
b) Mekkora a területe?

3. Egy derékszögű háromszög befogói 27 cm és 63 cm hosszúak. Mekkora a háromszög átfogójának hossza? Szerkessz és mérj! A kivitelezés előtt gondolj a hasonlóságra!

4. Egy rombusz minden oldalának és az egyik átlójának hossza is 16 cm. Mekkora a másik átló hossza?

5. Egy dühös madár ül a 14 méter magas torony tetején. A vadász a torony lábától 35 méterre van, és a puskacsövét 2 méter magasra emeli. Hány métert kell megtennie a golyónak, míg elér a dühös madárig? Mérj az ábra alapján!



6. Egy tanterem hossza 8 méter, szélessége 6 méter, magassága 3 méter. Milyen hosszú zsinórt lehet kifeszíteni a terem két legtávolabbi csúcsa között? Szerkessz 1 : 200 arányú segédábrákat!

7. Egy kocka alakú kamra élei 3 méter hosszúak. A mennyezet közepén egy plafonba simuló világítótest van. Milyen messze van ez a világítótest a kamra csúcsaitól? Szerkessz 1 : 100 arányú segédábrákat!

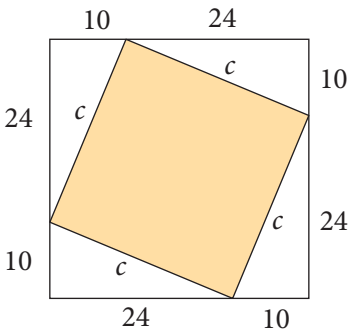
8. Egy padlástéri szoba egyik függőleges fala húrtrapéz alakú, melynek méretei 5 m, 3 m, 3 m és 3 m. Milyen magas a szoba? Szerkessz 1 : 100 arányú segédábrákat!

1. PÉLDA

Egy négyzet alakú szobában le tudtunk teríteni egy kisebb négyzet alakú szőnyeget úgy, hogy annak minden csúcsa a szoba egy-egy oldalán található. A szoba oldalai 34 deciméter hosszúak. Minden sarokban egy-egy derékszögű háromszög maradt takaratlanul, melyek egybevágók, és a befogóik 24 deciméter és 10 deciméter hosszúak. Mekkora a szőnyeg területe? Mekkora a szőnyeg egy-egy oldalának hossza?

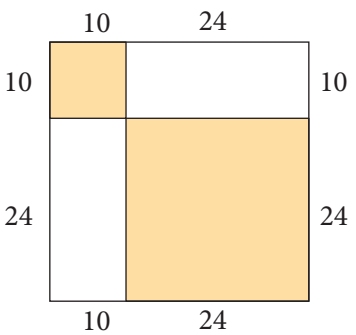
Megoldás

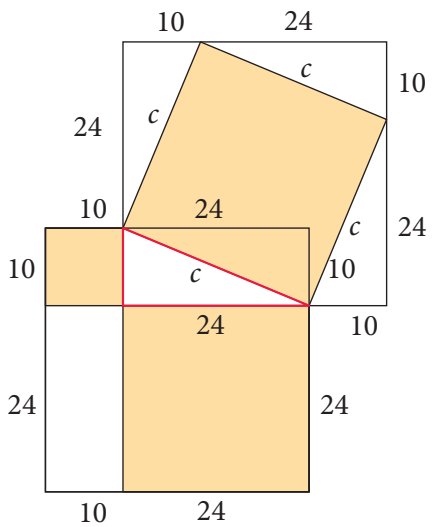
Készítsünk vázlatrajzot a szöveg alapján!
A szoba minden oldala 34 deciméter hosszú, ezért a területe:
$T = 34^2 = 1156$ (dm^2).
Minden sarokban van egy-egy derékszögű háromszög alakú rész, amelyet nem fed a szőnyeg. Mivel ismerjük a befogók hosszát, ezért egy ilyen rész területe: $t = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$ (dm^2). Ezek alapján a szőnyeg területe: $T - 4 \cdot t = 1156 - 4 \cdot 120 = 676$ (dm^2).
A négyzet alakú szőnyeg oldalhosszát jelölje c. Ebből következik, hogy a területe: $c^2 = 676$. Tehát a szőnyeg oldalhossza: $c = 26$ dm.



2. PÉLDA

Egy 34 deciméter oldalhosszúságú, négyzet alakú szobában két négyzet alakú szőnyeget terítettünk le az ábrán látható módon. A két téglalap alakú lefedetlen padlórész oldalai 24 deciméter és 10 deciméter hosszúak. Mekkora a két szőnyeg területe összesen? Hasonlítsuk össze ezt az előző példában látott nagy szőnyeg területével!



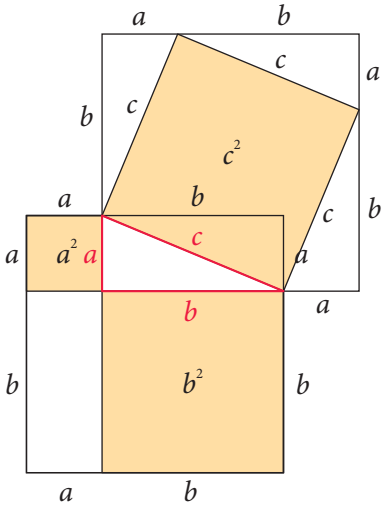


Megoldás

A négyzet alakú szőnyegek oldalhosszait ismerjük, ezért kiszámolhatjuk az együttes területüket. $10^2 + 24^2 = 676$, tehát az együttes terület 676 dm^2. Megfigyelhető, hogy a kapott terület egyenlő az előző példában látott nagy szőnyeg területével.
Ez azonban nem meglepő! A szoba területéből két téglalap nincs szőnyeggel takarva. Ezek területe pontosan akkora, mint az előző példában látott négy derékszögű háromszög együttes területe. Vagyis mindkét esetben ugyanakkora részt takartunk le szőnyeggel.

Gondold végig! Az előző két példában látottakat bármilyen a és b befogójú derékszögű háromszöggel és $a + b$ oldalú négyzettel megvalósíthatod.
Tedd a két ábrát egymásra, és olvasd le a tapasztalt összefüggést:

$a^2 + b^2 = c^2$



Nagyon fontos eredményre jutottunk. Tapasztalatainkat szavakkal is megfogalmazzuk:

A derékszögű háromszög két befogójára rajzolt négyzet területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.
Ez az állítás a **Pitagorasz-tétel**.

Másként megfogalmazva:
Ha a derékszögű háromszögben a két befogó hosszát négyzetre emeljük, és összeadjuk, akkor az átfogó hosszának négyzetét kapjuk.

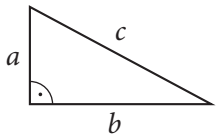
Püthagorasz, görög filozófus *Számosz* szigetén született a Kr. e. VI. században. (Helyesírásunk szabályai szerint nevét *Püthagorasz*nak írjuk, a róla elnevezett tételt viszont *Pitagorasz-tétel*nek.) Utazásai és tanulmányai után visszatért szülőföldjére, ahol tanítani kezdett. Későbbi útjait követően egy titkos társulatot alapított, ahol a matematika mellett vallási és politikai kérdésekkel is foglalkozott. Hamarosan azonban összeütközésbe került Számosz sziget uralkodójával, ezért *Krotónban* folytatta a munkáját. Nagyon jó előadó volt, de előadásait nem jegyezte le. Eredményei összekeveredtek tanítványaiéval, így amikor Püthagoraszt említjük, akkor leginkább Püthagorasz követőire, a *püthagoreusok*ra kell gondolnunk. A szövetség tagjai egy istenben hittek, aki a világot a számok közötti kapcsolatoknak megfelelően teremtette. Szerintük az ember igazi hivatása annak a boldogságot jelentő harmóniának a megtalálása, amelyhez leginkább a matematika művelése segít hozzá.



Tudjuk, hogy a róla elnevezett tételt az emberiség már őt megelőzően is ismerte, de valamelyik bizonyítás biztosan tőle származik. Nézz utána, hogy körülbelül hányféle bizonyítása ismert a Pitagorasz-tételnek! Keress olyan híres embert, aki bizonyította ezt a tételt! A világhálón további érdekességeket is találhatsz a témával kapcsolatban.

3. PÉLDA

Számítsuk ki a derékszögű háromszög hiányzó oldalának hosszát!
Használjuk a Pitagorasz-tételt!



a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm *b)* $a = 9$ cm, $b = 4$ dm
c) $a = 5$ cm, $c = 13$ cm *d)* $a = 25$ mm, $c = 6{,}5$ cm

Megoldás

a) Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. $\sqrt{25} = 5$, tehát a c átfogó hossza 5 cm.

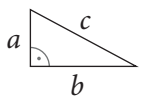
b) Váltsuk át a b oldal hosszát cm-re: $b = 40$ cm. Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $c^2 = 9^2 + 40^2 = 1681$. Ebből $c = \sqrt{1681} = 41$. A c átfogó hossza 41 cm.

c) Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 144$. $\sqrt{144} = 12$, a b befogó hossza 12 cm.

d) Váltsuk át a 6,5 cm-t mm-re: 6,5 cm = 65 mm. $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $a^2 = c^2 - b^2 = 65^2 - 25^2 = 3600$. $\sqrt{3600} = 60$, tehát az a befogó hossza 60 mm = 6 cm.

FELADATOK

1. Számítsd ki a derékszögű háromszög hiányzó oldalának hosszát! Használd a Pitagorasz-tételt!



a) $a = 8$ cm,	$b = 15$ cm	*b)* $a = 12$ cm,	$b = 35$ cm
c) $a = 10$ dm,	$b = 24$ dm	*d)* $a = 21$ dm,	$b = 28$ dm
e) $a = 16$ cm,	$c = 65$ cm	*f)* $b = 72$ cm,	$c = 97$ cm
g) $a = 17$ m,	$c = 145$ m	*h)* $b = 63$ m,	$c = 105$ m

2. Maximum milyen hosszú lehet az a szakasz, amelyet egy 18 cm-szer 24 cm-es téglalap alakú papírlapra rajzoltunk?

3. Szeretnénk a kamrába bevinni egy négyzet alakú üvegtáblát, melynek vastagsága elhanyagolható. A kamraajtó 75 cm széles és 1,8 m magas. Legfeljebb mekkora lehet az üvegtábla oldalának hossza?

4. Egy kétágú létra zárt állapotban 2,6 méter magas. Ha kinyitjuk, akkor a lábai 2 méterre vannak egymástól. Milyen távolságra van a vízszintes talajtól a kinyitott létra legmagasabb pontja?

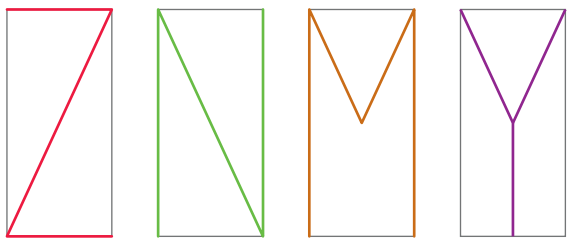


5. Egy szekrény ajtaja 48 cm széles és 189 cm magas. Egy átlós vaspánttal szeretnénk megerősíteni. Milyen hosszú ez a vaspánt?

6. 12 méteres távolságot áthidaló, 15 méter hosszú, egyenes csúszdát építettek. Milyen magasról indul a csúszda?

7. Milyen messze van a 42 cm és 56 cm befogójú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa az átfogótól?

8. Egy homlokzatra készülő felirathoz betűket festenek. A betűk 39 cm széles és 80 cm magas téglalapra kerülnek. A rajz mutat néhány vázlatot.

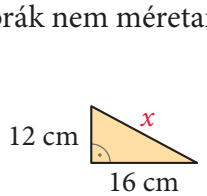


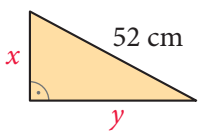
a) Milyen hosszú vonalból áll a Z betű?
b) Mennyivel hosszabb vonal szükséges az N betűhöz, mint a Z betűhöz?
c) Hasonlítsd össze az M és az N betű vonalának hosszát, ha az M betű ferde vonalainak találkozási pontja a téglalap középpontja!
d) Hány százaléka az Y megrajzolásához szükséges vonal hossza a Z megrajzolásához szükséges vonal hosszának, ha az Y betű ferde vonalainak találkozási pontja a téglalap középpontja?

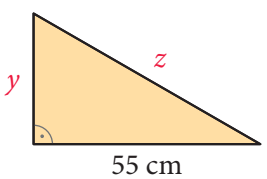
9. A parkban, ahol Barbara futni szokott, van egy téglalap alakú sétány, amelynek rövidebb oldala 36 méter. Az egyik átlója mentén is kiépítették az utat, ez 85 méter hosszú.
a) Készíts vázlatrajzot a parkról! Az átlós szakasz legyen AB, a téglalap másik két csúcsa pedig Q és R.
b) Tegnap délután Barbara bemelegítésként a $B - A - R - B - A - R - A$ útvonalat futotta végig. Hány métert futott összesen?

10. Adott a koordináta-rendszerben három pont. Számítsd ki a három pont által meghatározott háromszög kerületét és területét rácsegységben, illetve egységnégyzetben mérve!
a) $A(-2; 4)$ $B(2; 4)$ $C(2; 1)$ *b)* $D(3; -3)$ $E(9; -3)$ $F(9; 5)$

11. Határozd meg a háromszögek hiányzó oldalait! Vigyázz, a feladatok egymásra épülnek, és az ábrák nem méretarányosak!







III. 3. A Pitagorasz-tétel megfordítása

Kiegészítő tananyag

Az előző leckében megismertük a Pitagorasz-tételt, amely azt mondja ki, hogy ha egy derékszögű háromszögben a két rövidebb oldal hosszát (befogó) négyzetre emelem és összeadom, akkor a leghosszabb oldal (az átfogó) hosszának négyzetét kapom.

Ennek a tételnek a megfordítása is igaz:

Ha egy háromszögben az egyik oldal hosszának négyzete egyenlő a másik két oldal hosszának négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

1. PÉLDA

Számolással döntsük el, hogy derékszögűek-e a háromszögek, ha oldalaik hossza:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm; *b)* 4 cm, 4 cm, 6 cm; *c)* 5 cm, 6 cm, 8 cm; *d)* 20 cm, 21 cm, 29 cm!

Megoldás

Vizsgáljuk meg, hogy a két rövidebb oldal négyzetének összege egyenlő-e a leghosszabb oldal négyzetével!

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$	$5^2 = 25$,	$3^2 + 4^2 = 5^2$, így ez a háromszög derékszögű.
$4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$	$6^2 = 36$,	$4^2 + 4^2 \neq 6^2$, így ez a háromszög nem derékszögű.
$5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$	$8^2 = 64$,	$5^2 + 6^2 \neq 8^2$, így ez a háromszög nem derékszögű.
$20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$	$29^2 = 841$,	$20^2 + 21^2 = 29^2$, így ez a háromszög derékszögű.

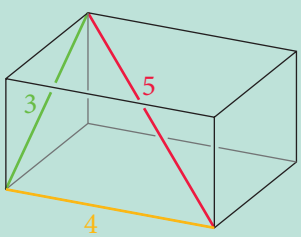
Érdekesség

A 3, 4 és 5 egység hosszú oldalakból kialakított háromszögről már láttuk, hogy derékszögű. Ennek a háromszögnek a segítségével a mindennapi életben könnyen kijelölhető a derékszög.



Egy hosszú zsinórra, egymástól egyenlő távolságokra csomókat kötünk. Az első és a tizenharmadik csomó összeillesztésével a zsinórt háromszög alakúra feszítjük úgy, hogy a háromszög csúcsai az első, a negyedik és a nyolcadik csomónál legyenek. Így derékszögű háromszöget kapunk.

Ennek a háromszögnek az ókori egyiptomiak és az ázsiai népek is évezredek óta ismerték a gyakorlati jelentőségét. A régészek ezeket a hosszúságokat faragott köveken is megtalálták, sőt Kheopsz fáraó piramisában, a királyszobában is megtalálható ez a háromszög. A szoba átlója 5, a leghosszabb fal éle 4, a legkisebb fal átlója pedig 3 egység hosszúságú.



Az ókorban ezt az alakzatot mágikus síkidomnak tartották. *Plutarkhosz* szerint ez a legszebb háromszög.

3. A Pitagorasz-tétel megfordítása III.

CSOPORTMUNKA

Alkossatok háromfős csoportokat!
Mindhárom csoporttag szerkesszen háromszöget a megadott adatokkal, ha a és b a háromszög két oldalát, γ az általuk bezárt szöget jelöli!
A: $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 120°$
B: $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 90°$
C: $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 80°$

Mérjétek meg a háromszög hiányzó oldalának hosszát!
Beszéljétek meg, melyik oldal lett a leghosszabb!



A Pitagorasz-tétel megfordításának felhasználásával eldönthető, hogy a háromszög derékszögű-e. Az alábbi állítások segítségével eldönthető az is, hogy egy nem derékszögű háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű.

- *Ha a háromszögben a két rövidebb oldalhossz négyzetének összege kisebb, mint a leghosszabb oldal négyzete, akkor a háromszög tompaszögű. (A leghosszabb oldallal szemben lévő szöge lesz a tompaszög.)*
- *Ha a háromszögben a két rövidebb oldalhossz négyzetének összege nagyobb, mint a leghosszabb oldal négyzete, akkor a háromszög hegyesszögű. (A leghosszabb oldallal szemben lévő szöge is hegyesszög.)*

A csoportmunkában elvégzett szerkesztéseknél ellenőrizhetitek az előzőekben leírtakat.

2. PÉLDA

Szögei szerint milyen háromszöget határoznak meg a következő oldalhosszak?
a) $a = 11$ cm, $b = 13$ cm, $c = 25$ cm
b) $a = 28$ cm, $b = 45$ cm, $c = 53$ cm
c) $a = 12$ cm, $b = 17$ cm, $c = 21$ cm
d) $a = 14$ cm, $b = 23$ cm, $c = 25$ cm



Megoldás

Először mind a négy esetben meg kell vizsgálnunk, hogy egyáltalán létrejönnek-e a háromszögek. Ehhez a háromszög-egyenlőtlenséget használjuk.
Csak az *a)* feladatrészben megadott adatok nem határoznak meg háromszöget.

a) Ilyen háromszög nincs, mert $11 + 13 < 25$, tehát nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

b) $28^2 + 45^2 = 784 + 2025 = 2809$ és $53^2 = 2809$.
Mivel $28^2 + 45^2 = 53^2$, ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján derékszögű.

c) $12^2 + 17^2 = 144 + 289 = 433$ és $21^2 = 441$.
Mivel $12^2 + 17^2 < 21^2$, ezért ez a háromszög tompaszögű.

d) $14^2 + 23^2 = 196 + 529 = 725$ és $25^2 = 625$.
Mivel $14^2 + 23^2 > 25^2$, ezért ez a háromszög hegyesszögű.

FELADATOK

1. Adott a háromszögek oldalainak hossza. Válaszd ki a derékszögű háromszögeket!

a) $a = 24$ cm, $b = 45$ cm, $c = 51$ cm
b) $a = 32$ cm, $b = 6$ dm, $c = 680$ mm
c) $a = 13$ m, $b = 800$ dm, $c = 0{,}084$ km
d) $a = 1$ m, $b = 7{,}5$ dm, $c = 125$ cm

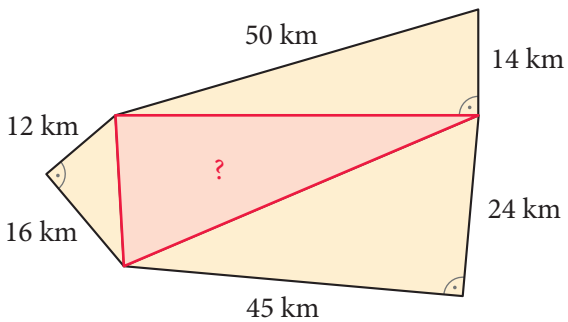
2. Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak? Ha igen, akkor állapítsd meg, szögei szerint milyen háromszögről van szó!

a) $a = 16$ cm, $b = 23$ cm, $c = 40$ cm
b) $a = 5{,}6$ mm, $b = 9$ mm, $c = 10{,}5$ mm
c) $a = 7{,}8$ dm, $b = 16$ dm, $c = 17{,}8$ dm
d) $a = 28$ m, $b = 39$ m, $c = 49$ m

3. „Szuper dolgot tanultunk ma a suliban! – mesélte örvendezve Rezső a bátyjának, Gerzsonnak. – Ha egy háromszög két rövidebb oldalának hosszát összeszorzod, és elosztod 2-vel, akkor megkapod a területét.” Gerzson kicsit hitetlenkedve nézett, de öccse folytatta. „Például a 6 cm, 7 cm, 8 cm oldalhosszú háromszög területe 21 cm^2, a 20 cm, 48 cm, 52 cm oldalú háromszög területe 480 cm^2” – vágta ki büszkén Rezső. „Ez csak a második háromszög esetében teljesül,” – válaszolta mosolyogva Gerzson, és lelkes magyarázatba kezdett. Fogalmazd meg Gerzson indoklását!



4. A PQR háromszög két oldala a koordináta-rendszerben $5e$ és $12e$ hosszú, csúcsai rácspontokban vannak. Két csúcsának koordinátái $P(-4; 6)$ és $R(8; 1)$. Készíts ábrát, és határozd meg a hiányzó Q csúcs koordinátáit, majd számítsd ki a háromszög kerületét! Szerkeszd meg a feladatot dinamikus geometriai szoftver segítségével!



5. Kegyetlen pusztítást végeztek a geotrollok, talán még a derékszögeket is tönkretették – kesergett Alabár királya, aki hihetetlenül büszke volt arra, hogy birodalmában mind a négy tartománynak van egy-egy derékszöge. Számolással döntsd el, hogy jogos volt-e a király aggodalma!

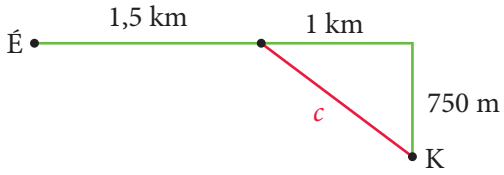
4. A Pitagorasz-tétel alkalmazása

III.

Az alábbi példákban a Pitagorasz-tételt használjuk fel a keresett adatok meghatározásához.

1. PÉLDA

Egy kempinghez a zölddel jelölt kerékpárút vezet. A bringások levágják a kijelölt út sarkát, hogy gyorsabban érjenek a bejárathoz.
Mekkora utat tesznek meg az *É* jelű étkezőtől a *K* jelű kemping bejáratáig, ha a rövidített útvonalon mennek?



Megoldás

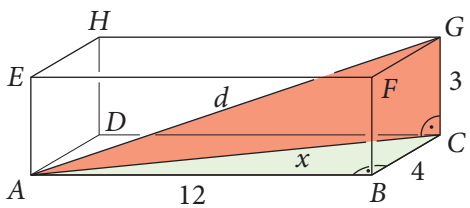
Az ábrán látható derékszögű háromszög átfogóját kell meghatározni. Jelöljük ezt *c*-vel!
Váltsuk át a távolságokat egységesen méterbe: 1,5 km = 1500 m, 1 km = 1000 m
Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt!
$c^2 = 1000^2 + 750^2$
$c^2 = 1\,562\,500$
$c = 1250$ (m)
A biciklisek az étteremtől a kemping bejáratáig 1500 + 1250 = 2750 m-t tesznek meg.
Számoljátok ki a keresett távolságot úgy, hogy a távolságokat km-ben adjátok meg!

2. PÉLDA

Andris egy 3-szor 4-szer 12 cm-es, téglatest alakú dobozba szeretne beletenni egy mindkét végén kihegyezett, 13 cm hosszú ceruzát. Sikerrel járhat-e a próbálkozása?

Megoldás

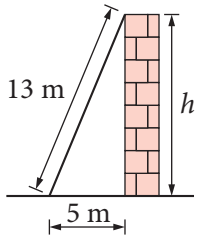
A téglatest alakú doboz két legtávolabbi csúcsának távolságát kellene meghatároznunk, vagyis a téglatest testátlójának hosszát. Az ábránkon az *AG* egy ilyen testátló.



Az *ABC* derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $x^2 = 12^2 + 4^2$
Az *ACG* derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $d^2 = x^2 + 3^2$
Helyettesítsük be az x^2 értékét: $d^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$, azaz: $d^2 = 169$
Ezek alapján a testátló hossza: $d = \sqrt{169} = 13$
Tehát a 13 cm hosszú ceruza átlósan éppen elférhet a dobozban.

3. PÉLDA

Egy 13 m-es acélmerevítő tart meg egy betonfalat. A merevítő alsó pontja 5 m-re van a fal alapjától. Mekkora a fal magassága?



Megoldás

A fal merőleges a talajra, ezért az ábrán látható háromszög derékszögű. Jelöljük a fal magasságát h-val.

A Pitagorasz-tételt felírva:

$13^2 = 5^2 + h^2$

$169 = 25 + h^2$

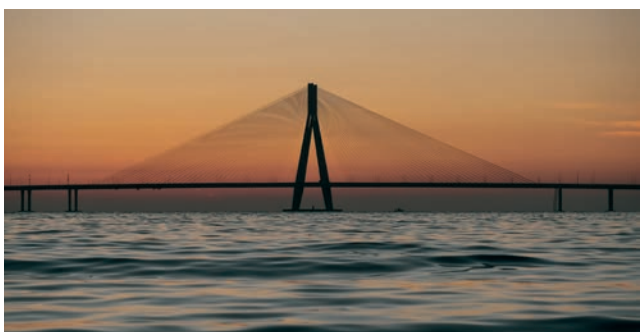
$h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$

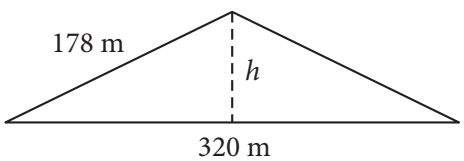
A fal magassága 12 méter.

4. PÉLDA

Egy széles folyón átívelő híd középső tartóoszlopát acélkötelekkel rögzítik a hídhoz. A leghosszabb tartókötél 178 méter hosszú. A két legtávolabbi rögzítési pont 320 méterre van egymástól. A folyó felett 8 m magasan halad a híd, a folyó közepén a vízmélység 28 m. Milyen távol van az acélköteleket tartó függőleges betonoszlop legmagasabb pontja a meder aljától?



Megoldás



Készítsünk egy ábrát adatokkal!

Az ábrán látható háromszög egyenlő szárú, így ha az alaphoz tartozó magassága mentén félbevágjuk, akkor két egybevágó derékszögű háromszöget kapunk, amelyek átfogója 178 m, egyik befogója 320 : 2 = 160 m.

A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$178^2 = 160^2 + h^2$

$31\,684 = 25\,600 + h^2$

$6084 = h^2$

$h = 78$ (m)

A hídtartó oszlop legmagasabb pontjának távolsága a híd felszínétől számítva 78 m. A teljes magassághoz hozzá kell adni a híd folyótól mért távolságát és a folyó mélységét: 78 + 8 + 28 = 114 (m).

A tartóoszlop legmagasabb pontja a meder aljától számítva 114 méter magasan van.

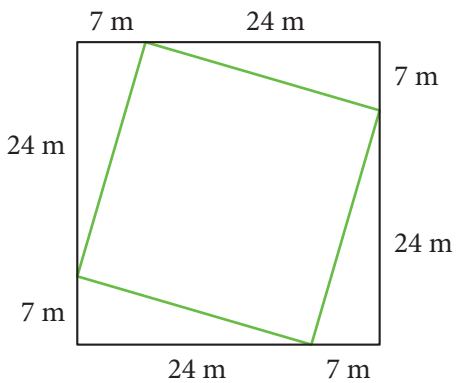
FELADATOK

1. Boldizsár egy 36 méter hosszú és 15 méter széles medencében 18 hosszt úszott a 36 méteres pályán. Gáspár gyorsabb, és azt gondolta, vicces, ha átlósan úszik, ezért ugyanannyi idő alatt ő 18-szor tette meg a medence két szemközti csúcsa közötti távolságot. Hány méterrel úszott többet Gáspár, mint Boldizsár?

2. Egy téglalap alakú telek egyik oldalának hossza 28 méter, a két szemközti csúcsának távolsága pedig 53 méter. Mekkora a telek kerülete, illetve területe?

3. A kertben két fa 2 méter távol áll egymástól. Rögzítettünk rajtuk 50 cm magasságban egy 3 méter hosszú kötelet. A rögzítésre a kötél hosszából összesen 10 cm-t használtunk fel. Milyen magasra kellene felemelni középen a kötelet, hogy az feszes legyen? Számolás előtt tippelj!

4. Az alabári futópályán Sári és öccse, Berci versenyeztek. Sári a nagyobb, Berci a kisebb négyzet mentén futott. Berci sebessége 9 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Sári sebessége 14,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.



a) Ki hány métert tett meg, ha egyszer futotta végig a pályát?
b) Ki mennyi idő alatt teljesítette a távot?

5. Két, egymástól 7,8 méterre lévő épület között kifeszítettek egy huzalt, amelynek két végét azonos magasságban rögzítették. Közepén egy tábla lóg, ezért a huzal közepe 56 cm-rel alacsonyabban van, mint a rögzítési pontok. Milyen hosszú a huzal?

6. Be lehet-e tolni egy 75 cm széles és 1,8 m magas ajtón egy 2 m oldalhosszúságú, négyzet alakú bútorlapot?



7. A gyerekek deltoid alakú sárkányt készítenek, melynek két átlója egy 30 cm és egy 44 cm hosszú nádszál. A rövidebb átló 2 : 9 arányban osztja a hosszabbat. A két nádszál négy végét egy vékony huzallal kötik össze. Milyen hosszú ennek a huzalnak a hossza, ha a kötésekre még 18 cm-t fognak elhasználni?

8. Kerítést szeretnénk készíteni az 1320 m^2 területű, derékszögű háromszög alakú zöldségeskertünk köré. A kert 48 méter hosszúságú befogója mentén már elkészültünk vele. Milyen hosszú kerítést kell még készíteni, ha teljesen körbe akarjuk keríteni a kertet?

9. Egy téglatest három különböző éle 12 cm, 16 cm és 21 cm hosszú. Számítsd ki a testátlójának hosszát!

10. Egy téglatest testátlója 10 cm. Lehet-e a téglatest minden élhossza centiméterben mérve egész szám?

III. 5. A Pitagorasz-tétel alkalmazása számológép segítségével

Kiegészítő tananyag

A Pitagorasz-tétel sokféle feladatban és a hétköznapi élethez kapcsolódó számításokban is jól használható. Az eddigi példákban és feladatokban olyan számokkal dolgoztunk, amelyeknek a négyzetgyöke egész szám volt. A valóságban azonban kevés olyan feladat van, amelynek a végeredménye egész szám, ezért a számolásainkhoz most nagy segítség lesz a számológép.

A $\sqrt{14}$ pontos értékét nem tudjuk tizedes törtként felírni, mert ez a szám egy végtelen, nem szakaszos tizedes tört lesz. Ezt nem tudjuk leírni, ezért helyette kerekített értéket szoktunk használni. Ebben a tankönyvben általában két tizedesjegyre kerekítünk, de műholdak pályájának kiszámítása során 18 tizedesjegyet is szoktak használni. A $\sqrt{14} \approx 3{,}74165738\ldots \approx 3{,}74$, ezzel a kerekített értékkel számolhatunk.

PÁROS MUNKA



Alakítsatok párokat!

I. Számológép használata nélkül döntsétek el, hogy az alábbi számok egész számok-e, vagy sem! Beszéljétek meg, hogyan oldottátok meg a feladatot!

$\sqrt{9}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{412}$

II. Keressétek meg a számológépeteken vagy a mobiltelefonotokon, hogyan lehet egy szám négyzetgyökét kiszámolni! Mutassátok meg társatoknak a számológépetek használatát!

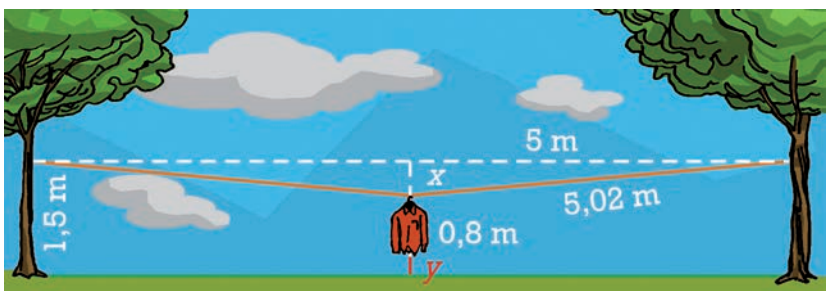
III. Számológép segítségével adjátok meg az alábbi számok két tizedes jegyre kerekített értékét!

$\sqrt{30}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{7{,}2}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{200}$

1. PÉLDA

Két fa között 1,5 méter magasságban vízszintesen kifeszítettünk egy 10 méter hosszú ruhaszárító kötelet. A közepére ráakasztottunk egy száradó inget, amely 80 cm-re lóg le a kötél szintjétől. A kötél a ráakasztott vizes ing súlya miatt 4 cm-t megnyúlt. Milyen magasan lesz ekkor a száradó ing alja a talajtól?

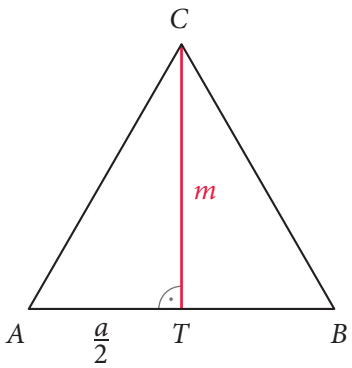
Megoldás



A szöveg alapján vázlatrajzot készítünk.
Alkalmazzuk az ábra derékszögű háromszögére a Pitagorasz-tételt: $x = \sqrt{5{,}02^2 - 5^2} \approx 0{,}45$ (m).
A száradó ing aljának távolsága a talajtól: $y = 1{,}5 - 0{,}45 - 0{,}8 = 0{,}25$ (m). Vagyis az ing alja 25 cm-re van a talajtól.

2. PÉLDA

a) Határozzuk meg az $a = 14$ cm oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságának hosszát!
b) Mekkora a háromszög területe?



Megoldás

a) A szabályos háromszög magassága felezi az oldalt, így az ATC háromszögre felírhatjuk a Pitagorasz-tételt.

$14^2 = 7^2 + m^2$

$196 = 49 + m^2$

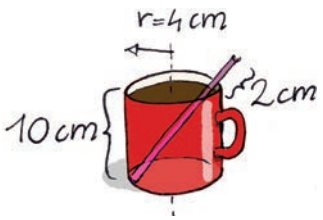
$m = \sqrt{147} \approx 12{,}12$ A háromszög m magassága kb. 12,12 cm.

b) A háromszög területét az oldal és a hozzá tartozó magasság ismeretében kiszámíthatjuk.

A háromszög területe $\frac{14 \cdot 12{,}12}{2} = 84{,}84$ cm^2

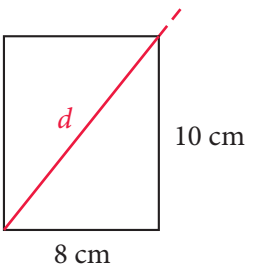
3. PÉLDA

Forró csokit öntöttünk egy olyan henger alakú bögrébe, amely 10 cm magas, és alapkörének sugara 4 cm. Milyen hosszú szívószálat tegyünk bele, ha azt szeretnénk, hogy legalább 2 cm-rel túllógjon a bögre szélén? Az eredményt kerekítsük centiméterekre!



Megoldás

Gondolatban vágjuk félbe függőleges síkkal a henger alakú bögrét úgy, hogy két félhengert kapjunk. Ekkor a vágás mentén keletkezett síkmetszet egy téglalap lesz, amelynek oldalai a henger magassága és az alapkörének átmérője. A bögrében a szívószál ennek a téglalapnak az átlóján helyezkedik el.



Számítsuk ki az átló hosszát!

$d^2 = 10^2 + 8^2$

$d = \sqrt{164}$

$d \approx 12{,}81$ (cm)

A szívószál ennél 2 cm-rel hosszabb, 14,81 cm ≈ 15 cm hosszú legyen.



KUTATÓMUNKA

Nézzetek utána a világhálón, mi az a *félszabályos háromszög*, és milyen jellemzői vannak! Mekkorák a szögei, milyen kapcsolat van az oldalak között?

4. PÉLDA



Dóriék színes papírsárkányt készítettek. A papírsárkány deltoid alakú, két oldalának hossza 36 cm és 48 cm, az általuk bezárt szög 90°-os. A rövidebb átló a szimmetriaátlót 9 : 16 arányban osztja ketté. Dóriék egy téglalap alakú papírlapból vágták ki a papírsárkányt úgy, hogy annak hosszabb szimmetriatengelye illeszkedett a téglalap hosszabb szimmetriatengelyére.

a) Mekkorák az oldalai a papírsárkányhoz szükséges legkisebb téglalap alakú papírlapnak?

b) A felhasznált legkisebb méretű papírlap hány százaléka volt hulladék?

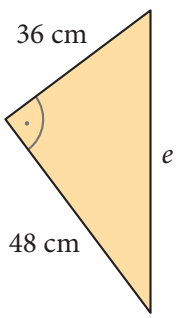
Megoldás

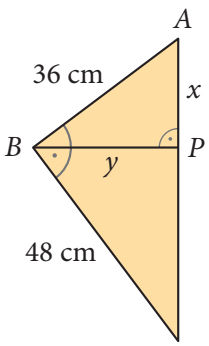
a) A deltoid tengelyesen szimmetrikus négyszög. Hosszabbik átlója mentén elvágva most derékszögű háromszögeket kapunk.

A Pitagorasz-tételt használva meghatározhatjuk a szimmetriaátló hosszát.

$e^2 = 36^2 + 48^2$

$e = \sqrt{3600} = 60$ (cm)





Jelöljük P-vel a deltoid átlóinak metszéspontját! A P pont 9 : 16 arányban osztja a szimmetriaátlót, így az x szakasz hossza

$x = 60 \cdot \frac{9}{25} = 21{,}6$ (cm).

A rövidebb átló fele (y) például az APB derékszögű háromszögből kiszámítható.

$36^2 = 21{,}6^2 + y^2$

$y = \sqrt{829{,}44} = 28{,}8$ (cm)

A rövidebb átló hossza 57,6 cm.

A téglalap alakú papírlap legalább 60 cm × 57,6 cm méretű.

b) Ha a legkisebb méretű téglalapot használták fel, akkor az oldalainak hossza megegyezik a deltoid átlóinak a hosszával, így a deltoid területe feleakkora lesz, mint a téglalap területe.

A téglalap fele, azaz 50%-a hulladék.

5. PÉLDA

Egy 20 cm-szer 20 cm keresztmetszetű, 110 cm magas négyzetes oszlopon mászik egy hangya. Az útvonalát az ábra mutatja. Tudjuk, hogy útjának a vízszintessel bezárt szöge mindig ugyanakkora. Milyen hosszú utat tett meg, amíg az aljától feljutott az oszlop tetejéig?

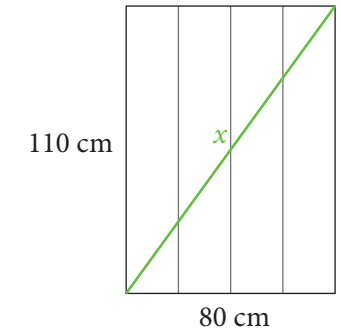


Megoldás

Ha az oszlop négy oldallapját egymás mellé kiterítjük, akkor a hangya útvonala egy szakaszt alkot, mivel tudjuk, hogy útjának a vízszintessel bezárt szöge mindig ugyanakkora. Jelöljük a hangya útjának, azaz az ábrán zölddel jelölt szakasznak a hosszát x-szel. Az oszlop adatait felhasználva felírható a Pitagorasz-tétel: $x^2 = 80^2 + 110^2$

Ezek szerint a hangya útjának hossza:

$x = \sqrt{6400 + 12\,100} = \sqrt{18\,500} \approx 136$ cm



FELADATOK

1. Mekkora a szabályos háromszög magassága és területe, ha az oldalhossza
a) 10 cm; *b)* 15 cm; *c)* 26 cm; *d)* 52 cm?

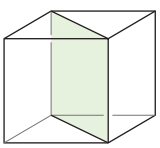
2. Megadtuk a négyzet átlójának hosszát. Milyen hosszú az oldala?
a) 6 dm *b)* 9 dm *c)* $\sqrt{2}$ dm *d)* $\sqrt{18}$ dm

3. Az aluljáróba vezető lépcső 25 lépcsőfokból áll. Egy lépcsőfok 30 cm mély és 17 cm magas. Hogy megkönnyítsék a babakocsival sétálók le- és feljutását, szeretnének két, egymástól 40 cm távolságra lévő párhuzamos fémcsíkot, amolyan recézett fémlejtőt fektetni a lépcső egyik oldalára. Számítsd ki egy fémlejtő hosszát!

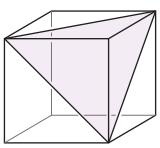
4. A sarki kisboltban kapható finom kézműves sajtot egy olyan hasáb alakú dobozban árulják, amelynek alapja szabályos háromszög. A doboz vékony falemezből készült, falvastagsága 3 mm. A dobozban található sajt teljesen kitölti a dobozt belül, és a hasáb alaplapjával párhuzamos keresztmetszete egy 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. Számítsd ki a doboz külső oldalának hosszát!

5. Mekkora az ábrákon látható színes sokszögek területe, ha minden csúcsuk a kocka valamely csúcsa vagy élfelező pontja, és a kockák éle 8 cm hosszú?

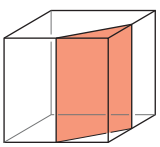
a)



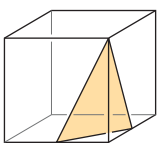
b)



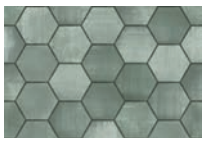
c)



d)



6. Egy 5 méter széles és 2,5 méter magas falat szabályos hatszögletű burkolólapokkal szeretnénk befedni.



A lapok oldalainak hossza 14 cm. A burkolólapokat tizenkét darabos csomagokban lehet megvásárolni. Hány csomaggal kell venni, ha a szabások miatt a burkolandó felületnél 5%-kal többet kell számolnunk?

7. Egy téglatest két élének hossza 11 cm és 12 cm, a testátlója pedig 133 cm hosszú. Milyen hosszú a harmadik él?

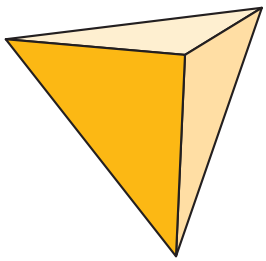
8. Mekkora a kocka felszíne és térfogata, ha a
a) lapátlója; *b)* testátlója
15 cm hosszú?

III. Projektmunka – Számolj, szerkessz, vágj, hajtogass!

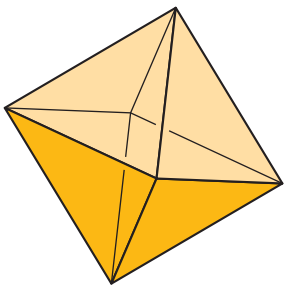
FELADATOK

Valahol, egy távoli alternatív univerzumban, a triangulárisok földjén minden háromszögből épül. Itt igen népszerűek azok a szabályos testek, amelyeknek minden oldala szabályos háromszög. Ilyen testből háromféle van, a tetraéder, az oktaéder és az ikozaéder.

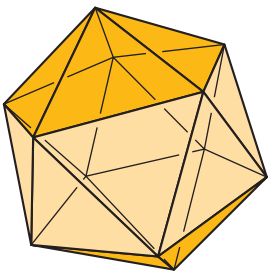
Tetraéder



Oktaéder

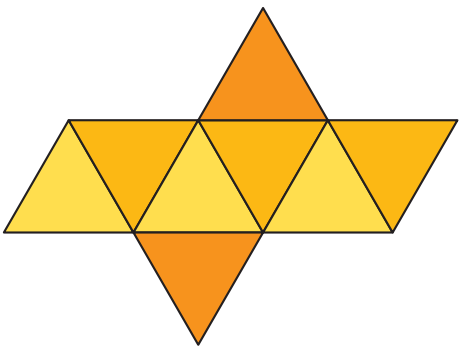


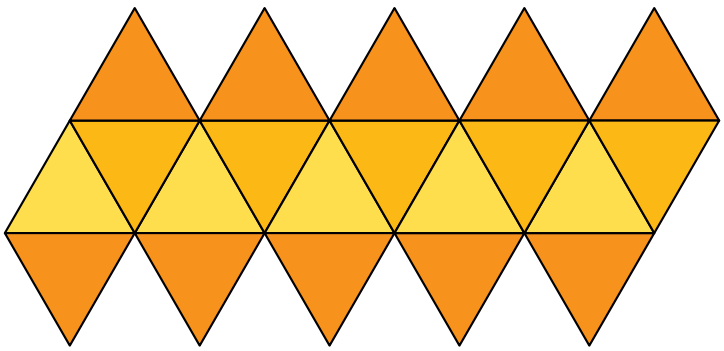
Ikozaéder



1. Építsd meg ezeket a testeket mágneses készletből! Ha nincs ilyen készleted, gyurmával összeragaszthatsz gyufaszálakat, az is remek megoldás lehet.

2. Tervezd meg, majd szerkeszd meg ezeknek a testeknek a testhálóját úgy, hogy elférjenek egy-egy A4-es lapon! Segítségképpen lerajzoltuk az oktaéder és az ikozaéder egy-egy testhálóját.





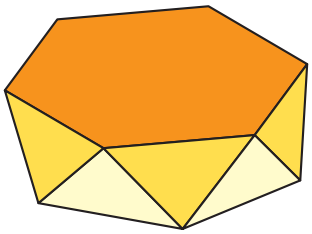
Figyelj rá, hogy a testek éleinek hossza centiméterben mérve egész szám legyen!
Vágd ki a testhálókat, és hajtogasd meg belőlük a testeket!

a) Határozd meg a testek felszínét a Pitagorasz-tétel segítségével!

b) Számítsd ki mindhárom testháló esetén, hogy a papír hány százaléka lesz hulladék!



3. Curiosus, az örök újító egy újabb alakzatot épített, ami csak részben áll szabályos háromszögekből. A test alsó és felső lapja szabályos hatszög alakú.



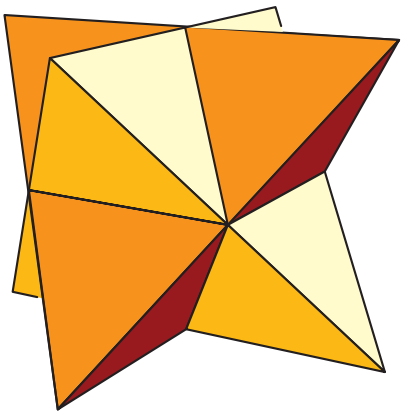
a) Építsd meg te is ezt a testet!
b) Szerkeszd meg a testhálóját egy A4-es lapon!
c) Számítsd ki a felszínét!



KUTATÓMUNKA

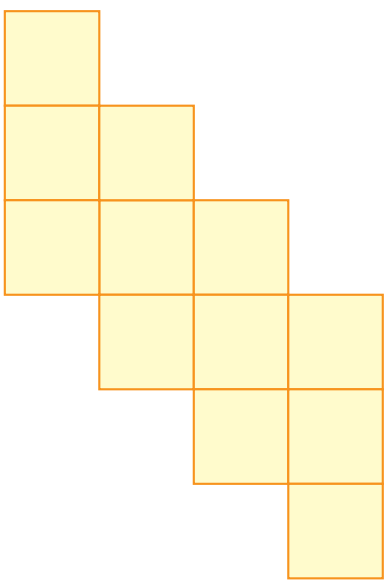
Mik azok a platóni testek? Nézz utána!

4. Trian, az osztály leglelkesebb tanulója csillagoktaédert készített. Ez a test egy olyan oktaéder, amelynek minden lapjához illeszkedik egy-egy szabályos tetraéder. Az oktaéder és a tetraéderek háromszöglapjai egybevágók.



a) Hány lapja van ennek a testnek?
b) Tervezd meg, hogyan tudnád papírból kivágva elkészíteni ezt a testet!
c) Szerkeszd meg a testhálót, vágd ki, és ragaszd össze belőle a csillagoktaédert!
d) Számítsd ki a felszínét!

5. Repertor, az osztály nagy utazója külföldön járt, nemrég tért haza Quadraticusból. Sok érdekességet mesélt az osztálytársainak a négyzetek világáról. Meglepetésként hozott az osztálynak egy négyzetekből álló alakzatot. Repertor, miután elmagyarázta a többieknek, mi az a kocka, azt a feladatot adta, hogy vágják ki az ábrát, és hajtogassanak belőle kockát.



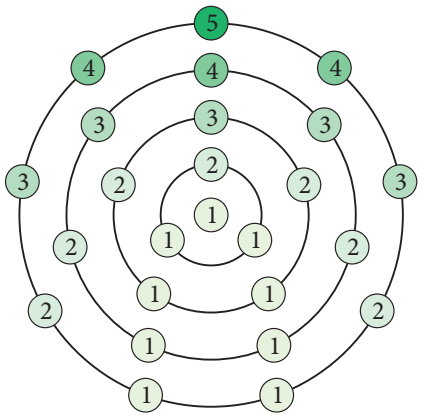
a) Szerkeszd meg és vágd ki te is az alakzatot, majd hajtogass belőle kockát! A négyzet oldala 4 cm hosszú legyen.
b) Számítsd ki a kocka élének hosszát!
c) Parricida szerint nagy segítség lett volna a hajtogatásnál, ha ez az alakzat is háromszögekből áll. El is készítette az új rajzot. Milyen módosításokkal egészíthette ki az ábrát?

III. 6. Nevezetes derékszögű háromszögek

Kiegészítő tananyag

CSOPORTMUNKA

Alakítsatok két-három fős csoportokat, és vizsgáljátok meg a mellékelt ábrát!
Adjátok össze a körvonalak mentén elhelyezkedő számokat! Rajzoljatok néhány további kört a megkezdett szabályszerűség alapján, és írjátok a kis körökbe a megfelelő számokat! Adjátok meg ezek összegét is! Mi a sejtésetek az így kapott összegekről? Próbáljatok magyarázatot adni a sejtésre!





Nem tudjuk biztosan, de lehetséges, hogy a számoknak ez az elrendezési ötlete Püthagorasztól származik. Ezért ezeket a köröket Pitagorasz-köröknek nevezzük.

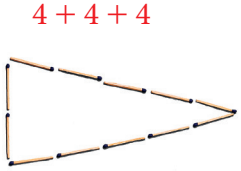
1. PÉLDA

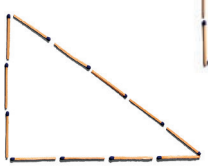
Hányféle háromszöget készíthetünk tizenkét gyufaszál felhasználásával? A kapott háromszögeket csoportosítsuk (hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű)!

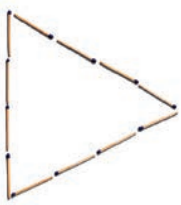
Megoldás

Bontsuk a 12-t három egész szám összegére! A sorrend most nem számít.

$1+1+10$	$2+2+8$	$3+3+6$	$4+4+4$
$1+2+9$	$2+3+7$	$3+4+5$	
$1+3+8$	$2+4+6$		
$1+4+7$	$2+5+5$		
$1+5+6$			







A háromszög-egyenlőtlenség miatt csak a színessel kiemelt összegek megfelelők.
Mivel $2^2+5^2 > 5^2$, $4^2+4^2 > 4^2$, $3^2+4^2 = 5^2$,
ezért az első két számhármas hegyesszögű, a harmadik pedig derékszögű háromszöget határoz meg.

A 3, 4 és 5 egység oldalhosszúságú háromszöggel már korábban is találkoztunk. A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt tudjuk, hogy ez a háromszög derékszögű, és az elmúlt ezredévekben fontos szerepe volt a terepen való mérésekben. Vannak-e további olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek minden oldalhossza egész szám? Némi próbálkozás után sok ilyen tulajdonságú háromszöget lehet találni. Az ilyen háromszögeket **Pitagorasz-féle háromszögek**nek, a három oldal hosszának mérőszámát pedig **pitagoraszi számhármas**nak nevezzük.
A következő táblázat néhány pitagoraszi számhármast tartalmaz:

a	3	5	7	8	9	11	12	13	16	20
b	4	12	24	15	40	60	35	84	63	21
c	5	13	25	17	41	61	37	85	65	29

Ha egy pitagoraszi számhármas minden tagját ugyanazzal a pozitív egész számmal szorozzuk meg, akkor is pitagoraszi számhármast kapunk. Az így kapott számhármashoz tartozó háromszög hasonló lesz az eredetihez, az oldalhosszak pedig ebből adódóan egész számok maradnak. A táblázatban csak olyan számhármasok szerepelnek, amelyek legnagyobb közös osztója az 1.

Hogyan tudnánk ilyen számhármasokat alkotni?
Az óra elején a csoportmunkában sejtésként négyzetszámokra gondolhattatok. Írjuk le egymás mellé a négyzetszámokat! Írjuk két szomszédos négyzetszám alá a különbségüket!

1	4	9	**16**	**25**	36	49	64	81	100	121	**144**	**169**	196	225	256	289	324	361	…
	3	5	7	**9**	11	13	15	17	19	21	23	**25**	27	29	31	33	35	37	…

Igazolható, hogy az alsó sorban a páratlan számok szerepelnek, növekedő sorrendben. Bejelöltük közülük a négyzetszámokat, illetve a felettük lévő két négyzetszámot is. Ezek szerint:

$25 - 16 = 9$, azaz: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ez a 3, 4, 5 számhármast adja.
$169 - 144 = 25$, azaz: $5^2 + 12^2 = 13^2$. Ez az 5, 12, 13 számhármast adja.

Az alsó sor végtelen sok négyzetszámot tartalmaz, ezért végtelen sok pitagoraszi számhármas létezik. Ilyen módon azonban nem tudjuk az összes számhármast elkészíteni. A táblázatunkban is szerepel olyan, amelyik nem ebből az eljárásból származik (például: 8, 15, 17).

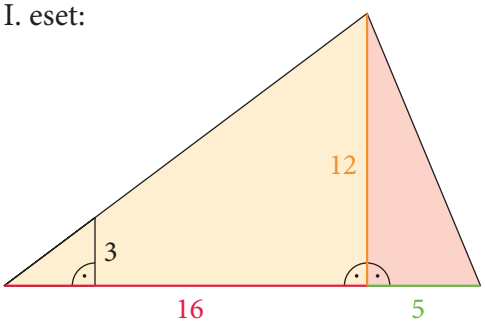
2. PÉLDA

A 3, 4, 5 egység oldalhosszúságú Pitagorasz-féle háromszöget nagyítsuk akkora Pitagorasz-féle háromszöggé, hogy az 5, 12, 13 egység oldalhosszúságú háromszöggel egy-egy befogójuk mentén összeillesztve egy új háromszöget kapjunk! Mekkora lesz az így kapott háromszög területe?

Megoldás

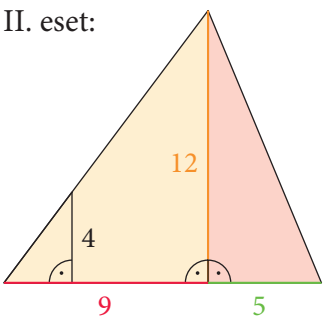
A 3-nak és a 4-nek az 5 nem a többszöröse. A megadott befogók hosszát figyelve a 3-nak és a 4-nek csak a 12 lehet a többszöröse. Vagyis két eset lehetséges. Az első esetben 4, a második esetben 3 a nagyítás aránya.

I. eset:



$$t = \frac{(16+5)\cdot 12}{2} = 126$$

II. eset:



$$t = \frac{(9+5)\cdot 12}{2} = 84$$

III. 6. Nevezetes derékszögű háromszögek

Az előző példában látott két háromszög oldalainak hossza és területük mérőszáma is egész szám. Érdekességként megemlítjük, hogy az ilyen háromszögeket Hérón-féle háromszögeknek nevezzük.

Hérón matematikus és fizikus volt, aki a Kr. u. I. században élt. Nagyon keveset tudunk róla. Írásai gyűjteményes jellegűek, fellelhető bennük egyiptomi, hindu, babiloni és természetesen görög és római hatás is. Többek között a síkidomok területszámításával és a testek térfogatszámításával is nagyon részletesen foglalkozott.

FELADATOK

1. Megadtuk egységben a derékszögű háromszög befogóinak hosszát. Pitagorasz-féle háromszöget alkotnak-e?
a) $a = 28$, $b = 45$ *b)* $a = 33$, $b = 56$
c) $a = 34$, $b = 79$ *d)* $a = 36$, $b = 77$

2. Egy háromszög minden oldalhosszának mérőszáma egész szám, a kerülete pedig 8 egység. Mutasd meg, hogy egy ilyen háromszög nem lehet derékszögű!

3. Három egymást követő pozitív egész szám lehet-e pitagoraszi számhármas?

4. *A 37, 48, 55 egy pitagoraszi számhármas* – állítja Előd. Aztán észreveszi, hogy valamelyik számban a két számjegyet felcserélte. Segíts megtalálni a hibát!

5. Két Pitagorasz-féle háromszög összeillesztésével készíts olyan háromszöget, amelyben az oldalhosszak mérőszáma és a terület mérőszáma is egész szám (vagyis készíts Hérón-féle háromszöget)!

6. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója azonos hosszúságú egy félbevágott szabályos háromszögből kapott derékszögű háromszög hosszabb befogójával. A két háromszög összeillesztésével is „nevezetes” háromszöget kapsz. Határozd meg a szögeinek az arányát! Ugye látod a háromszög „nevezetességét”?

7. Határozd meg azokat a Pitagorasz-féle háromszögeket, amelyek területe 30 egység!

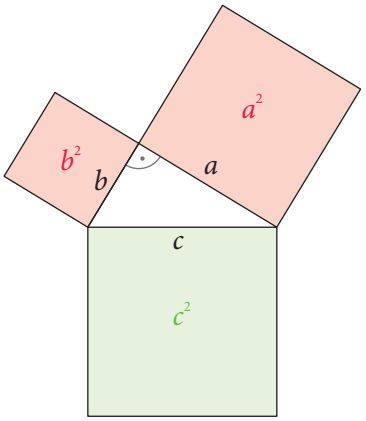
8. A koordináta-rendszerben a $K(3; 2)$ középpontú körre illeszkedik a
a) $P(5; 3)$ pont; *b)* $Q(15; 7)$ pont.
Adj meg a körvonalra illeszkedő további rácspontokat! Készíts ábrát szerkesztőprogram segítségével!

9. A következő állításokat a leckében szereplő tíz Pitagorasz-féle háromszögről fogalmaztuk meg. Döntsd el, hogy erre a tíz háromszögre vonatkozóan melyik kijelentés igaz, illetve melyik hamis!
a) Az átfogó hosszának mérőszáma mindig páratlan szám.
b) A számhármas valamelyik tagja osztható öttel.
c) Van közöttük olyan, amelyben mindkét befogó hosszának mérőszáma páratlan szám.
d) Mindegyik háromszög területének mérőszáma egész szám.
e) Van közöttük olyan számhármas, amelyikben nincs hárommal osztható szám.
f) Van olyan, amelyikben az átfogó hosszának mérőszáma osztható hárommal.
(Annak megválaszolása, hogy ezek a kijelentések *minden* Pitagorasz-féle háromszögre érvényesek-e, nem könnyű feladat, ezért ezt nem is szerepeltetjük feladatként.)

7. Összefoglalás

III.

Ebben a fejezetben megismerkedtél a Pitagorasz-tétellel, amely síkban és térben is nagy segítség lehet ismeretlen szakaszok hosszának meghatározásában. Az eddig csak szerkesztéssel és méréssel meghatározható hosszakat most már ki is tudjuk számítani.



Derékszögű háromszög esetén a két befogóra rajzolt négyzet területösszege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

Ez az állítás a **Pitagorasz-tétel**.
Az ábra mutatja a szövegben megfogalmazott állítást:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kiegészítő tananyag

Kiegészítő tananyagként láttuk, hogy a Pitagorasz-tétel megfordítása is igaz:

Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

FELADATOK

1. Egy fáskamra ajtaja 72 cm széles és 2,1 méter magas. Szeretnénk átlósan rászerelni egy vaspántot, hogy erősebb szerkezetű legyen. Milyen hosszú lehet ez a pánt maximálisan?

2. Az 1 : 200-as arányú felülnézeti tervrajzon az AB szakasz hossza 2 cm. A szakasz két vége között a valóságban 9,6 méter szintkülönbség van. Milyen hosszú a szakasz valójában?

3. Egy 12 méter széles, téglalap alakú kert egyik sarkában egy kerti csap található. Egy 25,5 méteres locsolócső pontosan átér a kert legtávolabbi sarkába.

a) Mekkora a kert területe?

b) A kert köré kerítést szeretnénk építeni. Menynyi dróthálót kell vásárolnunk a kerítéshez, ha a 3 méter széles bejárati kaput már elkészítettük?



4. Egy téglalap alakú szobát parkettáznak. A téglalap átlója 9 méter, a rövidebb oldala 5,4 méter. Mekkora felületet kell parkettázni? Milyen hosszú lesz a szoba falai mentén futó szegőléc?

5. Egy 2,5 méter magas kétágú létrát úgy nyitottak ki, hogy a lábai a vízszintes talajon 140 cm-re vannak egymástól. Milyen távolságra van a talajtól a létra legmagasabb pontja?

6. Van egy-egy 7 cm, 10 cm, 24 cm, 25 cm és 26 cm hosszúságú pálcánk. Hányféle háromszög állítható össze három pálcából? Van-e közöttük derékszögű?

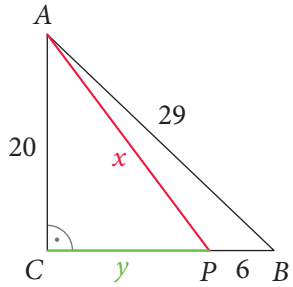
7. Jakab a lézerpisztolyával lő az emeleti ablakban álló céltáblára, amelyik 13 méter magasan van a pisztolya felett, és az épület 84 méterre van Jakabtól. Hány méter utat kell megtennie a lézersugárnak, hogy célba találjon?

8. A szoba sarkából elindult egy hangya. Az útja egy vízszintes, egyenes szakasznak tekinthető a padlón. Amikor megállt, akkor az egyik faltól 39 mm-re, a másiktól pedig 80 mm-re volt. Mennyire távolodott el a saroktól?



9. Melyik hosszabb: a 12 cm élű kocka vagy a 8 cm, 12 cm és 16 cm élű téglatest testátlója? Tippelj, majd számolj!

10. Milyen hosszúak az ábra x-szel és y-nal jelölt színes szakaszai?



11. Egy 5 egység hosszúságú szakasz mindkét végpontja illeszkedik egy-egy tengelyre, és mindkét koordinátája egész szám. A szakasz nem illeszkedik egyik tengelyre sem. Milyen messze van az origó a szakasztól?

Kiegészítő tananyag

12. Melyek igazak a következő négy állítás közül?
- Ha egy háromszög minden oldalának hossza méterben kifejezve páratlan szám, akkor az nem lehet derékszögű háromszög.
- Három egymást követő egész szám nem lehet egy derékszögű háromszög oldalainak hossza.
- Ha egy háromszögnek van egység hosszúságú oldala, akkor az nem lehet Pitagorasz-féle háromszög.
- Van olyan Pitagorasz-féle háromszög, amelynek az átfogója 13 egység hosszúságú.

13. Egy 4 cm oldalhosszúságú négyzetbe a lehető legnagyobb méretű nyomtatott N betűt írtuk. Milyen hosszú vonalat húztunk?

14. Mekkora a területe a következő, oldalaikkal megadott háromszögeknek?
a) 16 cm, 63 cm, 65 cm
b) 28 cm, 45 cm, 53 cm
c) 32 cm, 63 cm, 63 cm
d) 53 cm, 53 cm, 56 cm

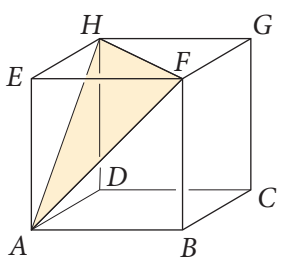
15. Számítsd ki egy 20 cm magasságú szabályos háromszög oldalának hosszát! Eredményedet két tizedesjegyre kerekítsd!

16. Tudjuk, hogy az $ABCD$ deltoidnak csak az A csúcsánál van derékszög. Az AB és az AD oldalak hossza 6 cm, a másik két oldal pedig 10 cm hosszú. Milyen hosszúak az átlók?

17. Egy szabályos hatszögletű faládika belseje 5,5 cm magas. A szemközti oldallapjai a doboz belsejében 20 cm-re vannak egymástól. Mekkora a doboz térfogata?



18. Az $ABCDEFGH$ kockát szétvágtuk az AFH sík mentén. A kisebb test felszíne 300 cm^2. Mekkora a kocka éle?



Ahogy mind többen nyertek bepillantást jövőbeli önmaguk életébe, egyre izgatottabban várták a következő matekórai bemutatót...

Ezúttal számítógéppel sorsoltattam azt a három diákot, akik a mai órán használhatják a szkópot. Szépen egymás után jöhet...

IV. Egyenletek

Helén

A cég, amit képviselek, szervpótlással foglalkozik. Nagyon szép feladatnak érzem, hogy sérült vagy beteg embereket segítünk hozzá egy teljesebb élethez.

Az én feladatom marketingesként az, hogy összesítsem a kutatási eredményeket, illetve hogy bemutatókat készítsek az orvosok és a betegek számára.

Nap mint nap rengeteg adat fut át a kezemen, melyeket mások által értelmezhetővé kell tennem.

Panni

Most éppen hullámvasutat tervezünk egy vidámparknak.

y

x

Nekem még fogalmam sincs, mit csinálok majd...

Emlékszem, ennyi idősen valóban nem tudtam, mi érdekel. Pontosabban szólva ezernyi dolog érdekelt: a matek, számítástechnika, a torna...nomeg a fiúk.

Rengeteg számításra van szükség, de ami mindennél fontosabb az, hogy képes vagyok felismerni a problémákat, majd logikusan végig is tudom gondolni őket, egészen a megoldásig... Mérnökként szinte bármit meg tudok tervezni.

és végül Matyi.

Helló, srácok!

Az elején azt reméltem, hogy formatervezőként csak rajzolnom és modellezgetnem kell majd.

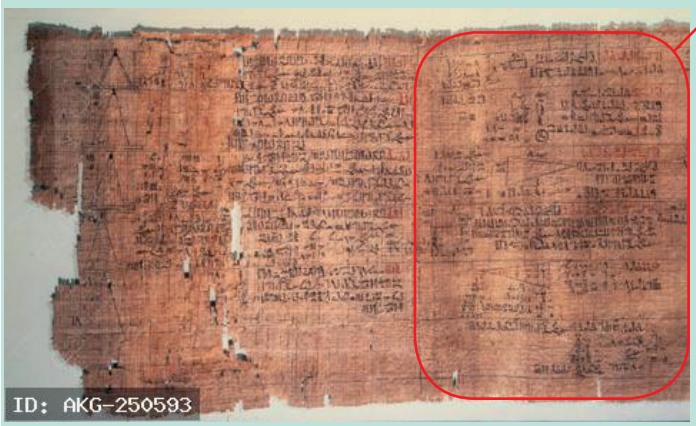
Már az egyetemen kiderült, hogy nem egészen így van ...

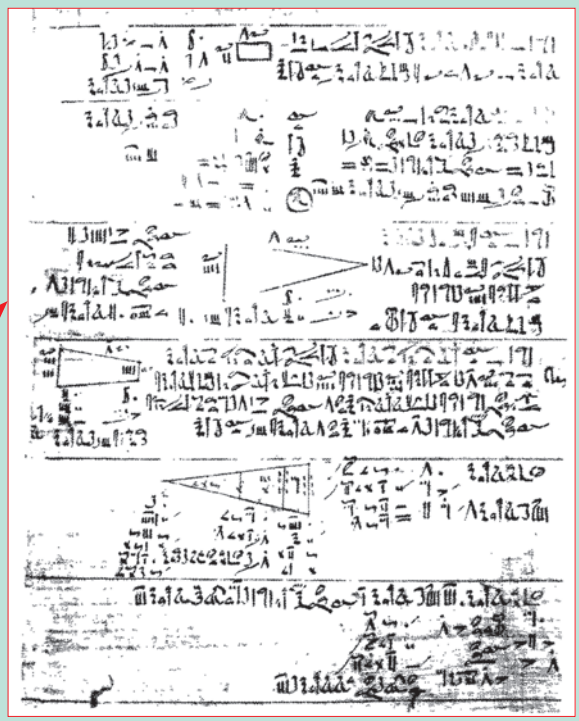
Nagyrészt a látványtervek és a makettek nyerik meg a megrendelőt...

...de ezután rengeteg statikai számítás, a tervek pontos méretezése, anyag- és gyártási költségkalkulációk következnek. Ezek mind elengedhetetlenek egy formatervező hétköznapjaiban.

Az egyenletmegoldás kezdetei

Az ékírásos agyagtáblák tanúsága szerint az ókori Mezopotámiában (Kr. e. 2000) már tudtak szorozni, négyzetre emelni. Ki tudták számolni a számok reciprokát, valamint meg tudtak oldani egyszerű egyenleteket és egyenletrendszereket is. Képleteket azonban még nem használtak, a megoldást szavakba öntött utasításokkal adták meg. Az egyiptomi algebra nem volt annyira fejlett, mint a mezopotámiai, de hasznos számítások elvégzésére alkalmas volt. Ezt bizonyítja a híres óegyiptomi, számtannal és mértannal foglalkozó Rhind-papirusz is, amelyet Jahmesz (Ahmesz) írnok készített Kr. e. 1850 táján. Az iratot gyakran Ahmesz-papirusznak is szokták nevezni. A tekercsen 87 darab, hétköznapi élettel összefüggő, egyszerű matematikai probléma és azok megoldása található. Van köztük szorzás, osztás, egyenletmegoldás és terület-, illetve térfogatszámítási példa is.





1. PÉLDA

Gondoltam egy számra. A szám négyszeresénél 66-tal nagyobb szám fele éppen 100. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelöljük a számot x-szel! A szöveg alapján felírt összefüggés:

$$(4x + 66) : 2 = 100$$

Oldjuk meg az egyenletet a **lebontogatás módszerével**!
A szám négyszeresénél 66-tal nagyobb szám egyenlő 200-zal, ebből a szám négyszerese 66-tal kevesebb, azaz 134, így a gondolt szám ennek a negyede: 33,5.
A kapott eredményt mindig az eredeti szövegbe helyettesítve ellenőrizzük!

2. PÉLDA

Egy születésnapi partin minden résztvevő kezet fogott mindenkivel, így 136 kézfogás történt. Hányan vettek részt a születésnapi partin?

Megoldás

A megoldást a pozitív egész számok halmazán keressük. Jelöljük a résztvevők számát x-szel!
1 résztvevő $x-1$ emberrel fogott kezet, hiszen saját magával senki sem fog kezet. Ez mindenkiről elmondható, azaz mind az x résztvevő $x-1$ emberrel fogott kezet. Ez összesen $x\cdot(x-1)$ kézfogás, de így minden kézfogást kétszer számoltunk. Például Mátyás és Jakab kézfogását megszámoltuk akkor is, amikor Mátyás kézfogásait számoltuk össze, és akkor is, amikor Jakab kézfogásait vettük számba.

Ezek alapján felírható a következő egyenlet: $\dfrac{x(x-1)}{2}=136$, ebből

$$x(x-1)=272.$$

Ezt az egyenletet jelenlegi tudásunkkal csak a próbálgatás módszerével tudjuk megoldani. Mivel x pozitív egész szám, ezért néhány esetet kipróbálva eljutunk a megoldáshoz.

x	5	10	15	16	17
$x(x-1)$	20	90	210	240	272

A megoldás tehát a 17. Több lehetőség nincsen, mert nagyobb szám választása esetén az $x(x-1)$ szorzat nagyobb lesz az előző szorzat értékénél. Tehát a születésnapi partin 17 résztvevő volt.
Ellenőrzés: 17 résztvevő esetén $\dfrac{17\cdot16}{2}=136$ kézfogás történt.

3. PÉLDA

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $8(x+2)+3(x+5)=x+121$ *b)* $x+15=2\cdot(x+10)-(x+5)$

c) $2(x+4)+x-10=5(x+4)-2(x+6)$

Megoldás

a) Bontsuk fel a zárójeleket, majd összevonás után alkalmazzuk a **mérlegelvet**!

$$\begin{aligned} 8x+16+3x+15&=x+121\\ 11x+31&=x+121 && /-31\\ 11x&=x+90 && /-x\\ 10x&=90 && /:10\\ x&=9 \end{aligned}$$

Ellenőrzés: bal oldal: $8\cdot(9+2)+3\cdot(9+5)=8\cdot11+3\cdot14=130$, jobb oldal: $9+121=130$
Tehát az egyenlet megoldása a 9.

b) Bontsuk fel a zárójeleket, majd összevonás után alkalmazzuk a mérlegelvet!

$x + 15 = 2x + 20 - x - 5$

$x + 15 = x + 15 \qquad / -x$

$15 = 15$

Mit jelent ez az eredmény? Ez egy azonosan igaz egyenlőség, ami azt jelenti, hogy az egyenletnek minden egész szám megoldása. Ezt azonosságnak nevezzük.

Mivel a megoldást az egész számok halmazán kerestük, ezért ebben az esetben az egyenletnek végtelen sok megoldása van. Ellenőrzésképpen helyettesítsünk az egyenletbe egy-két találomra választott értéket!

c) Oldjuk meg az *a)* példához hasonló módon!

$2x + 8 + x - 10 = 5x + 20 - 2x - 12$

$3x - 2 = 3x + 8 \qquad / -3x$

$-2 = 8$

Ez az egyenlőség nem igaz. Ellentmondásra jutottunk. Ennek az egyenletnek semmilyen számhalmazon nincs megoldása.

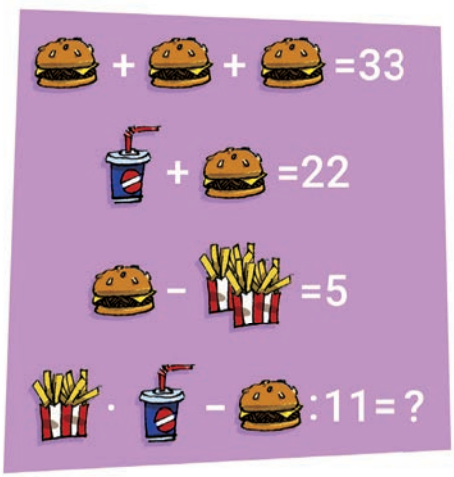
Azt a számhalmazt, amelyben a megoldást keressük, **alaphalmaznak** nevezzük. Ha nem teszünk semmilyen megkötést, akkor mindig a lehető legbővebb számhalmazra gondolunk. Az első példában ez az eset áll fenn, az alaphalmaz a tanult számok halmaza. A második példában az alaphalmaz a szöveg értelmezése alapján a pozitív egész számok halmaza, a harmadik példában pedig az egész számok halmaza volt. A kapott megoldások alkotják az egyenlet **igazsághalmazát.**



CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat! Osszátok szét egymás között a felsorolt négy kérdést, és mindenki írjon egy lapra egy gondolatot a saját kérdésével kapcsolatban! Ha készen vagytok, adjátok tovább a lapot a tőletek balra ülőnek, aki hozzáír valamit a már leírt gondolathoz, majd újra továbbadja. Közösen beszéljétek meg a leírtakat, amikor a négy lap körbejárt!

1. Mit értünk az egyenlet alaphalmazán?
2. Mely számok alkotják az egyenlet igazsághalmazát?
3. Fogalmazd meg az alábbi egyenletmegoldási módszerek lényegét!
   mérlegelv, lebontogatás módszere, próbálgatás módszere
4. A felsorolt megoldási módszereket milyen esetben célszerű használni?



FELADATOK

1. Oldd meg az egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $5x - 10 = 25$

b) $4 \cdot (3x - 2) = 28$

c) $12x + 22 = 8x - 6$

d) $5x + 21 - 3x = -8 + 3x$

2. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok halmazán a lebontogatás módszerével!

a) $(3x + 6) : 8 - 7 = 2$

b) $\left(\frac{x}{2} + 4\right) \cdot 9 = 27$

c) $\frac{(x + 3) \cdot 4}{5} = 6$

d) $\frac{-2{,}1(x - 53)}{1{,}4} = 63$

e) $\left(\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9}{5} = 7{,}8$

3. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $8x - 3(x + 4) = 3x - 26$

b) $4(2x - 9) = 5(6 + x)$

c) $-3(8 - 7x) + 6 = 4 - 4(2x - 9)$

d) $x - 7 + 6(2x - 8) = 9 - 2(5 - 4x) + x$

e) $5(x - 3) + \frac{3}{5} = \frac{3}{4}(8x + 6)$

f) $\frac{7}{6}(-9 - x) = \frac{3}{2}(5x - 7)$

4. *a)* Gondoltam egy számra. Hozzáadtam a háromszorosát, így 54,8-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

b) Gondoltam egy számra. Hozzáadtam a felét, így 74,7-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

c) Gondoltam egy számra. Elvettem a negyedét, így (−14,25)-ot kaptam. Melyik számra gondoltam?

5. *a)* Egy szám és a számnál 5-tel kisebb szám összege 23,3. Melyik ez a két szám?

b) Egy szám és a nála 9-cel nagyobb szám összege 47,8. Melyik ez a két szám?

6. Kristófnak és Eszternek összesen 15 000 Ft zsebpénze van. Amikor mindkettőjük zsebpénze megkétszereződik, Kristófnak annyi zsebpénze lesz, mint Eszternek most.

a) Mennyi pénze van most Kristófnak?

b) Mennyivel volt több pénze Eszternek?

7. – *A jégkásának elfogyott a negyede meg még 6 liter* – jegyezte meg Panni.

– *Én úgy látom, a 60%-a maradt meg* – mondta Jerry.

Mennyi jégkása volt eredetileg a gépben, ha mindkét gyereknek igaza volt?



8. *a)* Két szám különbsége 7, összege 17. Melyik ez a két szám?

b) Két szám különbsége 8, összege 4. Melyik ez a két szám?

c) Két egész szám különbsége 3, szorzata 70. Melyik ez a két szám?

9. *a)* Egy számnak és a kétszeresének a szorzata 32. Melyik ez a két szám?

b) Egy számnak és a háromszorosának a szorzata $\frac{3}{4}$. Melyik ez a két szám?

10. Ali, Bali és Cili életkora egész szám.

a) Ali és Bali együtt 22 évesek.

b) Bali és Cili együtt 33 évesek.

c) Ali és Cili együtt 26 évesek.

d) Ali, Bali és Cili együtt 39 évesek.

Hány éves Ali, Bali és Cili, ha a fenti négy állítás közül pontosan az egyik hamis? Keresd meg az összes megoldást!

IV. 2. Szöveges feladatok számokról, életkorokról

1. PÉLDA

Gondoltam egy számra. A gondolt szám $\frac{3}{8}$ részénél 8-cal nagyobb szám ugyanakkora, mint a gondolt szám kétszeresénél 5-tel kisebb. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelöljük a számot x-szel! A szöveg alapján felírhatjuk az alábbi betűs kifejezéseket:
A gondolt szám $\frac{3}{8}$ részénél 8-cal nagyobb szám: $\frac{3}{8}x + 8$
A gondolt szám kétszeresénél 5-tel kisebb szám: $2x - 5$
A szövegből kiderül, hogy a két kifejezés egyenlő:
$\frac{3}{8}x + 8 = 2x - 5$
Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy a gondolt szám a 8.
Az eredmény szövegbe történő helyettesítésével meggyőződhetünk annak helyességéről.

PÁROS MUNKA



Mindketten válasszatok egy háromjegyű természetes számot, és mondjátok el, mit jelent az egyes számjegyek alaki, helyi és valódi értéke! Felváltva fogalmazzátok meg a felsorolt fogalmakat!

2. PÉLDA

a) Egy kétjegyű számban 3-as és 5-ös számjegy van. Melyik számokról lehet szó?
b) Egy kétjegyű szám tízes helyi értékén álló számjegye 3. Írjuk fel a számot általános alakban!
c) Írjuk fel az összes olyan kétjegyű számot, amelyben a számjegyek összege 12!
d) Írjuk fel általános alakban azokat a kétjegyű számokat, amelyekben a jegyek összege 12!

Megoldás

a) Ha 3 áll a tízes helyi értéken, akkor 5-ös van az egyes helyi értéken.
Ekkor a szám: $35 = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$
Ha 5 áll a tízes helyi értéken, akkor 3-as van az egyes helyi értéken.
Ekkor a szám: $53 = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

b) Az egyes helyi értéken álló ismeretlen számot jelöljük x-szel! Ha le akarjuk írni ezt a számot, akkor $3x$ alakú lenne, ami könnyen összekeverhető az x szám 3-szorosával. Ezért általában a szám fölé húzott vonallal jelöljük, ha egy többjegyű számról beszélünk. Jelentése: $\overline{3x} = 3 \cdot 10 + x$
Ekkor az x értéke 0; 1; … ; 9 lehet, azaz 10 db ilyen szám van.

c) Az egyes és tízes helyi értéken csak egyjegyű szám állhat, ezért a 0, 1, 2 számjegyeket nem választhatjuk. A felírható számok a következők:

Tízes helyi érték	Egyes helyi érték	A kétjegyű szám
3	9	39
4	8	48
5	7	57
6	6	66
7	5	75
8	4	84
9	3	93

d) A tízes helyi értéken lévő számot jelöljük x-szel! Ekkor az egyes helyi értéken $12 - x$ áll. A kétjegyű szám $\overline{x(12-x)}$ alakban írható fel. A felülvonás most is azt jelenti, hogy egy kétjegyű számról van szó, nem pedig az x és a $12 - x$ szorzatáról. Az x nem lehet a 0, 1, 2 számjegyek közül egyik sem, azaz x csak 3, 4, 5, 6, 7, 8 vagy 9 lehet.
Az $\overline{x(12-x)}$ kétjegyű számot átírhatjuk $x \cdot 10 + (12 - x) \cdot 1$ alakba.
Az így felírt műveleteket már könnyen elvégezhetjük, ha szükséges.

3. PÉLDA

Egy kétjegyű szám második számjegye 3-mal nagyobb, mint az első. Ha a számjegyeit felcseréljük, akkor a kapott kétjegyű számot az eredeti számhoz hozzáadva 77-et kapunk. Melyik ez a szám?

Megoldás

Az adatok alapján készítsünk táblázatot, amelyben felhasználjuk a számok alaki értékét és valódi értékét!

	Tízes	Egyes	A szám valódi értéke
Eredeti szám	x	$x + 3$	$x \cdot 10 + x + 3 = 11x + 3$
Felcserélt szám	$x + 3$	x	$(x + 3) \cdot 10 + x = 11x + 30$

Az összefüggést mindig a feladat szövegéből olvassuk ki, és ezek alapján írjuk fel az egyenletet:

$$11x + 3 + 11x + 30 = 77$$
$$22x + 33 = 77$$
$$22x = 44$$
$$x = 2$$

Tehát a keresett szám a 25, a számjegyek felcserélésével kapott szám az 52. A két szám összege valóban 77.
A feladat megoldható próbálgatással is, hiszen a lehetőségek száma nem túl nagy. Az egyenlettel való felírás viszont többjegyű szám esetén is sikerre vezet.

4. PÉLDA

Dani édesanyja ötször annyi idős, mint Dani, az édesapja pedig 7 évvel idősebb az édesanyjánál. Hány évesek a család tagjai, ha a három családtag életkorának összege 84 év?







Megoldás

Jelöljük Dani életkorát x-szel. Dani édesanyja $5x$ éves, Dani édesapja $5x + 7$.
Az így felírható egyenlet: $x + 5x + 5x + 7 = 84$, amelyből adódik, hogy $x = 7$.
Tehát Dani 7 éves, édesanyja 35 éves, édesapja pedig 42 éves. $7 + 35 + 42 = 84$, azaz megfelel a feladatban leírtaknak.

5. PÉLDA

Peti négy évvel ezelőtt negyedannyi idős volt, mint az édesapja most. Életkoruk összege most 64 év. Hány éves Peti, és hány éves az édesapja?

Megoldás

Jelöljük Peti 4 évvel korábbi életkorát x-szel!

	Életkoruk 4 évvel ezelőtt	Életkoruk jelenleg
Peti	x	$x + 4$
Édesapja	$4x - 4$	$4x$

A szöveg alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$x + 4 + 4x = 64$$
$$5x + 4 = 64$$
$$5x = 60$$
$$x = 12$$

Tehát négy évvel ezelőtt Peti 12, édesapja pedig 44 éves volt, azaz Peti most 16, édesapja pedig 48 éves. Életkoruk összege 64 év.

FELADATOK

1. Anna 14 éves, apukája 42. Hány év múlva lesznek ketten együtt 100 évesek?

2. Gergő 25 éves, anyukája 52.
a) Hány évvel ezelőtt volt Gergő negyedannyi idős, mint az anyukája?
b) Hány éves volt akkor Gergő?

3. Simi és Samu ikrek, kishúguk, Janka 4 évvel fiatalabb náluk. Hárman együtt 29 évesek. Hány éve volt Janka feleannyi idős, mint Samu?

4. Amikor Ádám született, édesanyja 24 éves volt. Hány év múlva lett az édesanyja
a) 25-ször annyi idős, mint Ádám;
b) 13-szor annyi idős, mint Ádám;
c) 3-szor annyi idős, mint Ádám;
d) 2-szer annyi idős, mint Ádám?

5. Hány éves most az az ember, aki 16 év múlva ötször annyi idős lesz, mint amennyi 8 évvel ezelőtt volt?

6. Dávid nagypapája 10 évvel idősebb, mint Dávid életkorának háromszorosa. 15 évvel ezelőtt nagypapa még 11-szer annyi éves volt, mint Dávid. Melyikük hány éves jelenleg?

7. Bence éppen hetedannyi idős, mint szülei életkorának az összege. Tavaly apukája még négyszer annyi idős volt, mint Bence, és 5 évvel volt idősebb az anyukájánál. Melyikük hány éves?

8. Egy kétjegyű szám egyik számjegye a másik kétszerese. Ha a számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor egy olyan kétjegyű számot kapunk eredményül, melynek számjegyei megegyeznek.
Hány ilyen számot találtál? Melyek ezek?

9. Sorold fel azokat a kétjegyű
a) számokat, amelyekben a számjegyek összege 17;
b) páratlan számokat, amelyekben a számjegyek összege 15;
c) páros számokat, amelyekben a számjegyek összege 10!

10. Egy kétjegyű szám első számjegye 6-tal kisebb, mint a második. Ha ezt a számot kivonjuk a számjegyei felcserélésével kapott számból, akkor 54-et kapunk. Melyik ez a szám? Hány ilyen szám van?

11. Egy kétjegyű szám első számjegye 5-tel nagyobb, mint a második. Ha ennek a számnak a kétszeresét hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott számhoz, eredményül 171-et kapunk. Melyik ez a szám?

12. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a szám négyszereséhez hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott szám hatszorosát, 650-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

13. Edit, Emil, Enikő és Elemér testvérek. Elemér két év híján kétszer annyi idős, mint Edit. Emil 10 évvel fiatalabb, mint Elemér. Enikő épp feleannyi idős, mint testvérei életkorának összege. Négyen együtt 69 évesek. Hogy hívják az ikreket?

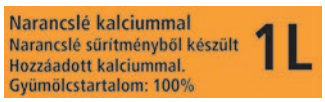
14. Gazsi levelet írt az édesapjának. A levélben ennyi állt:



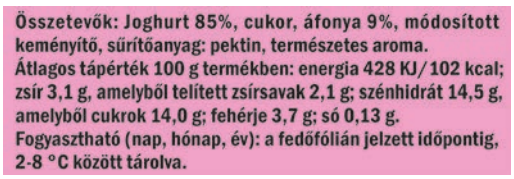
Apa megfejtette a rejtvényt, jót mosolygott, és átutalta a pénzt.
Mennyi pénzre volt szüksége Gazsinak, ha a különböző betűk különböző számokat jelölnek az összeadásban?

IV. 3. Szöveges feladatok összekeverésről

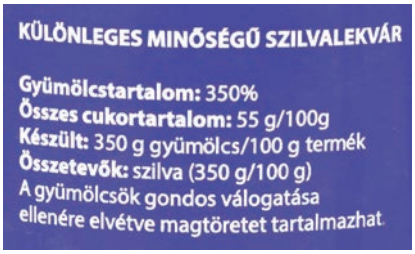
Az élelmiszerek többségén megtalálható az adott élelmiszer összetétele, amit gyakran %-ban adnak meg. Nézzünk néhány példát!



Van olyan címke, amely alapján egyszerűnek tűnik eldönteni, hogy mi van a dobozban.



Van olyan címke, amely alapján ki lehet számolni, hogy melyik összetevőből mennyi van a termékben.



Van olyan címke, amely marketingszempontból érthető ugyan, de megmosolyogtatja az emberek nagy részét. Észreveszitek a turpisságot?

1. PÉLDA

Egy lekvárkészítéssel foglalkozó cég kétféle eperlekvárt készít. Az egyik fajta hagyományos módszerrel készül, így sok benne a hozzáadott cukor (40%), a másik cukorszegény, csak minimális mennyiségű hozzáadott cukrot tartalmaz (10%). Egyik alkalommal véletlenül összeöntötték a kétféle lekvárt: 25 kg-ot a 40%-os és 15 kg-ot a 10%-os cukortartalmúból.

a) Mennyi cukor volt az összekevert lekvárban?

b) Hány százalékos volt a keverék cukortartalma?



Megoldás

Készítsünk táblázatot!

	Lekvár mennyisége (kg)	Cukor (%)	Cukor mennyisége (kg)
Hagyományos készítésű	25	40	$25 \cdot \frac{40}{100} = 25 \cdot 0{,}4 = 10$
Cukorszegény típusú	15	10	$15 \cdot \frac{10}{100} = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$
Keverék	40	28,75	11,5

Az összeöntés után az egyes lekvárfajtákban lévő cukormennyiség összeadódik. Ezt használjuk fel a megoldás során.

A táblázatból kiolvasható, hogy összesen $10 + 1{,}5 = 11{,}5$ kg cukor van 40 kg keverékben, tehát a cukor százalékos aránya $\frac{11{,}5}{40} \cdot 100 = \frac{115}{4} = 28{,}75\%$.

Tehát a kétfajta lekvár összeöntése után kapott keverék 28,75% cukortartalmú.

2. PÉLDA

A boltban 10%-os és 20%-os ecetet is lehet kapni. Mennyi vizet kell önteni 1 liter 20%-os ecethez, hogy 10%-os ecetet kapjunk?

Megoldás

10% éppen fele a 20%-nak, tehát ha 1 liter vizet adunk az 1 liter 20%-os ecethez, akkor éppen 10%-os ecetet kapunk.
Formálisan is felírhatjuk, de úgy sokkal bonyolultabb. 1 liter 20%-os ecetben 0,2 liter ecetsav van.
Jelöljük x-szel a hozzáadott víz mennyiségét! A kapott oldat töménysége: $\frac{0{,}2}{1+x} \cdot 100 = 10$
Az egyenletet megoldva most is az $x = 1$ liter eredményre jutunk.

3. PÉLDA

Pista bácsi permetezőszert kevert. Tegnapról maradt neki 20 liter 1,5%-os oldata. Ma kevesebb vízzel hígította a kis tasak növényvédő szert, és így 3,6%-os oldatot kapott. Mennyit öntsön a mai 3,6%-os oldatból a tegnapi 20 literhez, ha 2,8%-os oldatot akar kapni?

Megoldás

Jelöljük a hozzáöntött 3,6%-os oldat mennyiségét x literrel! Készítsünk az adatainkról táblázatot!

	Mennyiség (liter)	Töménység (%)	Növényvédő szer (liter)
1,5%-os oldat	20	1,5	$20 \cdot 0{,}015$
3,6%-os oldat	x	3,6	$x \cdot 0{,}036$
2,8%-os oldat (keverék)	$20 + x$	2,8	$(20 + x) \cdot 0{,}028$

A táblázat első két oszlopát a megadott adatok alapján ki tudjuk tölteni. A harmadik oszlop celláit a beírtak alapján ki tudjuk fejezni. Színessel jelöltük azokat a kifejezéseket, amelyeket az adatok alapján számoltunk, illetve fejeztünk ki. Az egyenlet felírásánál azt használjuk fel, hogy az összeöntés után a növényvédő szer mennyisége összeadódik:

$$20 \cdot 0{,}015 + x \cdot 0{,}036 = (20 + x) \cdot 0{,}028 \qquad / \cdot 1000$$
$$20 \cdot 15 + x \cdot 36 = (20 + x) \cdot 28$$
$$300 + 36x = 560 + 28x$$
$$x = 32{,}5$$



A 3,6%-os oldatból 32,5 litert kell a 20 liter 1,5%-oshoz önteni, hogy 2,8%-os permetszert kapjunk.
Ellenőrzés: A tömény növényvédő szer mennyisége:
Az 1,5%-osban $20 \cdot 0{,}015 = 0{,}3$ liter
A 3,6%-osban $32{,}5 \cdot 0{,}036 = 1{,}17$ liter
Összesen: 1,47 liter
A keverékben $52{,}5 \cdot 0{,}028 = 1{,}47$ liter, tehát a tömény növényvédő szer mennyisége ugyanannyi az összeöntés előtt és után.

4. PÉLDA

A karácsonyi vásárban egy viszonteladó kétféle áron vásárolt diót: 35 kg-ot 7200 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os és 45 kg-ot 6000 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os áron. A kétfajta megvásárolt diót összeöntötte.

a) Átlagosan mennyibe került 1 kg dió?

b) Hány kg-ot vásároljon még a 6000 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységárúból, hogy a keverék 6300 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységárú legyen?

Megoldás

a) Összesen $35 \cdot 7200 + 45 \cdot 6000 = 522\,000$ Ft-ot fizetett ki a 80 kg dióért.
Tehát 1 kg keverék ára: $\frac{522\,000}{80} = 6525$ Ft.

b) Jelöljük x-szel a további megvásárolt 6000 Ft-os dió mennyiségét.

	Mennyiség (kg)	Egységár $\left(\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}\right)$	Érték (Ft)
6525 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os dió	80	6525	522 000
6000 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os dió	x	6000	$x \cdot 6000$
Keverék	$80 + x$	6300	$(80 + x) \cdot 6300$

Ebben az esetben a dióért kifizetett összegek felhasználásával írhatunk fel egyenletet:

$$522\,000 + x \cdot 6000 = (80 + x) \cdot 6300$$
$$522\,000 + 6000x = 504\,000 + 6300x$$
$$18\,000 = 300x$$
$$x = 60$$

Tehát 60 kg 6000 Ft-os diót kell még vásárolni.



Megjegyzés:
A feladatot más módszerrel is megoldhatjuk. A viszonteladó kezdetben 35 kg 7200 Ft-os diót vett. Ha ehhez a mennyiséghez 35 kg 6000 Ft-os diót venne, akkor a kilónkénti egységár a két egységár átlaga, azaz $(7200 + 6000) : 2 = 6600$ Ft lenne.
Ekkor lenne 70 kg 6600 Ft-os egységárú dió. Ha ehhez még venne 70 kg 6000 Ft-os diót, akkor ismét a két egységár átlagát kapnánk, azaz 6300 Ft-ot.
Ehhez összesen 105 kg 6000 Ft-os diót kellene vásárolni. Mivel kezdetben már vett 45 kg-ot, ezért még 60 kg-ot kell vásárolnia az olcsóbb dióból.

FELADATOK

1. Számítsd ki az alábbi mennyiségeket!

a) Mennyi az epertartalma 2 dl 6%-os epres joghurtnak?

b) Mennyi a gyümölcstartalma 4 liter 25%-os almalének?

c) Mennyi a kakaótartalma 25 dkg 70%-os csokoládénak?

2. Határozd meg, hány gramm cukrot tartalmaznak az alábbi élelmiszerek, majd számold ki, hány darab kockacukornak felel meg ez a mennyiség! Egy kockacukor tömege kb. 3,3 g. Figyelj az általad fogyasztott ételek cukortartalmára!



a) 28 grammos, 29,6% cukortartalmú tejszelet

b) 160 grammos, 17,5% cukortartalmú ketchup

c) 20 grammos, 9% cukortartalmú müzliszelet

d) 300 grammos, 12,2% cukortartalmú meggyízű joghurt

e) 500 ml-es, 13,2% cukortartalmú szénsavas üdítőital

f) 190 grammos, 9,7% cukortartalmú gyümölcsös bébiétel

3. Hány százalék a kakaótartalma annak a tábla csokoládénak, amelyik 200 grammos, és 76 gramm kakaó van benne?

4. *a)* 15 liter 3,4% sótartalmú tengervízhez 5 liter édesvizet öntünk. Hány százalékos lesz a keverék sótartalma? Feltételezzük, hogy 1 l tengervíz kb. 1 kg.

b) Hány liter édesvizet kell önteni 15 liter 3,4% sótartalmú tengervízhez, hogy 1,5%-os sós vizet kapjunk?

5. Az egyes országokban igen különböző a megítélése annak, hogy mekkora klórkoncentrációra van szükség a strandok medencéinek fertőtlenítéséhez. Ez az érték 0,3 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$-től 1,2 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$-ig változhat.

a) Számold ki, hány gramm klórt tartalmaz egy vízzel teli 20 méter hosszú, 10 méter széles, 2 méter mély úszómedence a két szélsőséges esetben!

b) Hány százalék a medencében lévő víz klórtartalma?

6. Mennyi vizet öntsünk 2 liter 100%-os almaléhez, hogy 65%-os almalevet kapjunk?

7. Összeöntünk 3 liter 20%-os és 2 liter 100%-os gyümölcslevet. Hány százalékos lesz az így nyert ital?

8. Mennyi vizet kell elpárologtatni 85 kg 6%-os sóoldatból, hogy 8%-os sóoldatot kapjunk?

9. Egy kereskedő két termelőtől vásárolt barackot. Az egyiktől kilónként 800 Ft-ért 80 kg-ot, a másiktól kilónként 560 Ft-ért 120 kg-ot. Az összes barackot összeöntötte.

a) Átlagosan hány Ft-ba került 1 kg barack?

b) Hány kg-ot kellene még vásárolnia az olcsóbb fajtából, hogy a kilónkénti ára 640 Ft legyen?

10. Két hordó áll a pincében. Az egyikben 100 liter víz van, a másikban pedig 100 liter alkohol. Zsiga egy pohár vizet átmer az alkoholos hordóba. Megkeveri, majd ebből a keverékből merít át egy pohárnyit a vizes hordóba. A vizes hordóban lesz több alkohol, vagy az alkoholos hordóban lesz több víz?

IV. 4. Szöveges feladatok mozgásról, munkáról

Mozgásos példák





KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogy
a) mekkora a sebessége a profi teniszezők adogatásainak (szerváinak);
b) melyik a leglassabb állat a világon;
c) mekkora sebességgel mennek a vonatok Japánban;
d) mekkora a sebessége a 100 méteres síkfutás világbajnokainak!

A mozgásos feladatoknál célszerű felhasználnunk más órákon szerzett ismereteinket is. Ismételjük át, milyen összefüggés van a megtett út és a megtételéhez szükséges idő között! Írjuk fel, hogyan számolható ki a sebesség ezek segítségével! A példák és a feladatok megoldása során mindig feltételezzük, hogy a mozgó testek sebessége állandó, és így kétszer annyi idő alatt pont kétszer akkora utat tesznek meg.

A fizikában a sebességet v-vel, az utat s-sel, az időt t-vel szoktuk jelölni. A feladatok megoldása során használjuk a $v = \frac{s}{t}$ képletet, illetve ennek két másik alakját, az $s = v \cdot t$ és a $t = \frac{s}{v}$ képleteket is.



PÁROS MUNKA

Beszéljétek meg, mit jelentenek a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és a $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ mértékegységek! Ismételjétek át azt is, hogyan kell az egyik mértékegységet átváltani a másikra!

1. PÉLDA

Nagyi 24 méter hosszú, 7 méter széles téglalap alakú kiskertjének sarkában van egy nedves zug, ahonnan egy csiga egy nyári reggelen elindult világgá. Elérhet-e estére a kert legtávolabbi sarkába, ha az éticsiga sebessége 3 $\frac{\text{m}}{\text{h}}$?

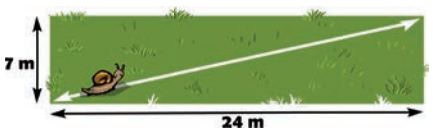


Megoldás

A Pitagorasz-tétel segítségével kiszámoljuk az indulási hely és a tőle legtávolabb lévő sarok távolságát.

$\sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$ (m)

A csiga 25 métert $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} = 8$ óra 20 perc alatt tesz meg, ha egész nap megállás nélkül siet. A Nap nyáron több mint 12 óra hosszat van fenn, tehát a csiga napnyugtáig elérhet a kiskert átellenes sarkába.



2. PÉLDA

Gáspár és Vince kitalálták, hogy körbebiciklizik a Velencei-tavat. A táv 32 km. Délelőtt 10 órakor indultak el ellentétes irányban. Vince óránként 18 km-t, Gáspár 22 km-t tett meg.

a) Mikor találkozott a két gyerek?
b) A kiindulási ponttól milyen messze találkoztak a fiúk?

Megoldás

a) Mivel a fiúk egyszerre indultak, ezért mindketten ugyanannyi ideig bicikliztek a találkozásig. Jelöljük ezt t-vel. Írjuk a táblázatba az adatokat, használjuk a megtett út felírásához az $s = v \cdot t$ képletet!

	v – sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	t – eltelt idő (h)	s – megtett út (km)
Gáspár	22	t	$22t$
Vince	18	t	$18t$

Az egyenlet felírásához felhasználjuk, hogy a két fiú által együttesen megtett út 32 km:
$22t + 18t = 32$

$t = 0{,}8$

Tehát a találkozásig eltelt idő 0,8 óra, azaz a fiúk 10:48-kor találkoztak.

b) Tudjuk, hogy a fiúk 0,8 órát bicikliztek a találkozásig.
Ennyi idő alatt Gáspár $22 \cdot 0{,}8 = 17{,}6$ km-t, Vince pedig $18 \cdot 0{,}8 = 14{,}4$ km-t tett meg.
Ellenőrzés: $17{,}6 \text{ km} + 14{,}4 \text{ km} = 32 \text{ km}$

Példák együttes munkavégzésre

Az ilyen típusú feladatok során mindig feltételezzük, hogy a munkában részt vevő felek mindig ugyanolyan sebességgel dolgoznak, akár egyedül, akár együtt végzik a munkát. Ha együtt dolgoznak, mindig rövidebb idő alatt végeznek, mint ha külön dolgoznának.

3. PÉLDA



A Kovács család a hétvégi nagytakarításnál a ház minden ablakát megpucolta. Anya egyedül 2 óra alatt, apa 3 óra alatt végzett volna az összes ablakkal, de inkább együtt dolgoztak.

a) Hány óra alatt végeztek együtt az ablakok megtisztításával?
b) Hány óra alatt végezne egyedül a fiuk, Bálint, ha apával együtt 2 óra alatt lennének készen?

Megoldás

a) Tekintsük az összes ablak lemosásához szükséges munkát egy egésznek! Jelöljük x-szel azt az időtartamot, amennyi alatt együtt végeznek a munkával! Foglaljuk táblázatba az adatokat!

	A munka elvégzéséhez szükséges idő	Az 1 óra alatt elvégzett munka hányada	Az x óra alatt elvégzett munka hányada
Anya	2 óra	$\frac{1}{2}$ rész	$\frac{x}{2}$ rész
Apa	3 óra	$\frac{1}{3}$ rész	$\frac{x}{3}$ rész

Ketten együtt elvégezték az egész munkát, azaz a két munka x óra alatt elvégzett része kitesz egy egészet. Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1 \qquad /\cdot 6$$

$$3x+2x=6$$

$$5x=6$$

$$x=1{,}2$$

Tehát ketten együtt 1,2 óra alatt végeznek az összes ablak lemosásával.



Ellenőrzés: $\frac{1{,}2}{2}+\frac{1{,}2}{3}=\frac{12}{20}+\frac{12}{30}=\frac{60}{60}=1$

b) Jelöljük y-nal azt az időt, amennyi alatt Bálint egyedül végezne az ablakpucolással.

	A munka elvégzéséhez szükséges idő	Az 1 óra alatt elvégzett munka hányada	A 2 óra alatt elvégzett munka hányada
Apa	3 óra	$\frac{1}{3}$ rész	$\frac{2}{3}$ rész
Bálint	y óra	$\frac{1}{y}$ rész	$\frac{2}{y}$ rész

Ketten együtt 2 óra alatt végeznek az egész munkával, így felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{y}=1 \qquad /-\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{3} \qquad /\cdot 3y$$

$$y=6$$

Tehát Bálint egyedül 6 óra alatt végezne az ablakpucolással.



Ellenőrzés: $\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$

FELADATOK

1. Dóri és Dani, az egyéves ikrek négykézláb mászva közlekednek a lakásban. Amikor délután meghallják, hogy megérkezett apa, közös szobájukból teljes gőzzel a bejárat felé indulnak. Dóri 2 mp alatt 1 métert, Dani pedig 5 mp alatt 3 métert tesz meg.

a) Ki a gyorsabb?

b) Ki mennyi idő alatt teszi meg a bejárat eléréséhez szükséges 12 métert?

2. – *Én 18* $\frac{km}{h}$*-val szoktam hazafelé biciklizni* – dicsekszik Imi.

– *Az semmi* – válaszol Laci. – *Én a múltkor úgy száguldoztam, hogy 4 métert tettem meg másodpercenként.*

a) Ki a gyorsabb?

b) Ki hány km-t tesz meg a 20 perces hazaút alatt?

3. Szili és Boti 12 km-re laknak egymástól. Délelőtt 10 órakor elindultak egymás felé, mert megbeszélték, hogy a Botiéktól 4 km-re lévő parkban találkoznak. Szili biciklivel ment, Boti görkorival. Szili átlagsebessége 16 $\frac{km}{h}$.

a) Hány órakor találkoztak?

b) Mekkora volt Boti átlagsebessége?

c) Fél órát beszélgettek a parkban, aztán Szili biciklivel hazavitte Botit, majd hazakerekezett. Hány órára ért haza Szili?

4. Alabárból Balabárba 9 órakor elindult egy terepjáró, 10:25-kor pedig egy motor. A terepjáró 11 órakor negyed órára félreállt tankolni, majd folytatta útját. A két jármű 12:45-kor egyszerre érkezett meg Balabárba. A motoros fél perc alatt tett meg 1 km-t.

a) Milyen messze van Alabártól Balabár?

b) Mekkora a terepjáró és a motoros átlagsebessége?

5. Latouret őrmester kivezényli Galamb közlegényt, hogy ásson egy 0,5 m széles, 6 m hosszú, 1,5 m mély lövészárkot a sivatag szélén. Egyedül 24 óra alatt végezne az ásással.

a) Galamb barátja, Troppauer Hümér, a költő, szintén 24 óra alatt ásná ki egyedül a lövészárkot. Mennyi idő alatt ásnák ki ketten együtt?

b) Közös barátjuk, Minkusz is 24 óra alatt végezne a munkával egyedül. Mennyi idő alatt ásnák ki hárman együtt?

c) Ha az ezred minden katonája 24 óra alatt ásná ki a lövészárkot, akkor igaz-e, hogy ezer katona együtt 86,4 másodperc alatt ásná ki az árkot?

6. – *Én egy óra alatt összepakolom a lakást, neked viszont másfél óráig tart. Csináljuk meg együtt!* – javasolja Judit az öccsének. Hány perc alatt végeznek, ha közösen raknak rendet?

7. A vegetáriánus vámpír 20 perc alatt hámoz meg egy tál vérnarancsot. Felesége 30 perc alatt készül el vele. Hány perc alatt végeznek, ha együtt dolgoznak?

8. Aladár 2,5 óra alatt tölti fel egyedül az összes farsangi képet és videót a netre. Ha Kriszta is segít neki, akkor 87,5 perc alatt végeznek. Mennyi idő alatt végezne Kriszta egyedül a feltöltésekkel?

9. A városi sportpályának három különböző teljesítményű és márkájú fűnyíró robotja van. Az Atolosz 3 óra alatt, a Portolosz 4 óra alatt, az Aramosz 6 óra alatt nyírja le a füvet a focipályán.

a) Hány perc alatt végez a fűnyírással az Atolosz és a Portolosz, ha együtt dolgoznak?

b) Hány perc alatt vágja le a füvet a Portolosz és az Aramosz?

c) Mennyi idő kell a három robotnak, ha egyszerre dolgoznak?

IV. 5. Szöveges geometriai feladatok

A geometriai feladatok megoldása közben is előfordulhat, hogy egyenleteket kell megoldani. Általában **célszerű ábrát készíteni** a feladat szövegéhez – ez ötletet adhat a megoldáshoz. Gondoljuk végig, milyen ismeretekkel rendelkezünk a feladat szövegével kapcsolatban! Ha egyenlettel oldjuk meg a feladatot, mindig **írjuk fel, mit választottunk ismeretlennek,** és **ne feledkezzünk meg az ellenőrzésről** sem!

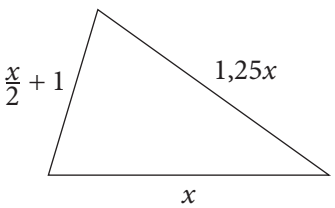
Emlékeztető a feladatok sikeres megoldásához:
A háromszög belső szögeinek összege 180°.
A háromszög bármely oldalának hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél.
A sokszögek (háromszög, négyszög…) kerületét megkapjuk, ha az oldalainak hosszát összeadjuk.

1. PÉLDA

Egy háromszög legrövidebb oldala 1 cm-rel hosszabb a középső oldal felénél. A leghosszabb oldal a középső 125%-a. Mekkorák a háromszög oldalai, ha a kerülete 23 cm?

Megoldás

Jelöljük a középső oldal hosszát x-szel. Ekkor a háromszög másik két oldalának hossza: $\frac{x}{2}+1$ és $1{,}25 \cdot x$.



Írjuk fel az oldalak hosszának összegét, amiről tudjuk, hogy 23 cm:

$$x+\frac{x}{2}+1+1{,}25x=23$$

$$2{,}75x+1=23$$

$$2{,}75x=22$$

$$x=8$$

Tehát a háromszög oldalai: 5 cm, 8 cm és 10 cm.

2. PÉLDA

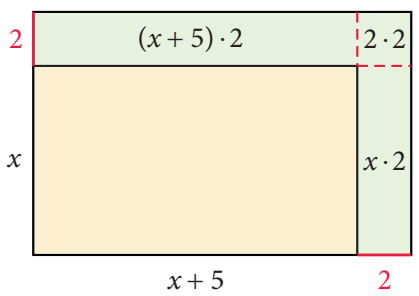
Egy téglalap egyik oldala 5 cm-rel hosszabb, mint a másik oldala. Ha mind a két oldalt 2-2 cm-rel megnöveljük, akkor a téglalap területe 42 cm^2-rel nő. Mekkorák a téglalap oldalai? Készítsünk ábrát a feladathoz!

Megoldás

Jelöljük a téglalap oldalainak hosszát x-szel és $x+5$-tel!
Az oldalak növelésével az ábrán zölddel színezett részeket kapjuk. Felírjuk ezek területét: $(x+5)\cdot 2+2\cdot 2+x\cdot 2=42$

$$4x+14=42$$

$$x=7$$



Tehát a téglalap oldalainak hossza: 7 cm és 12 cm.
Ellenőrzés: Eredeti terület: $7\text{ cm}\cdot 12\text{ cm}=84\text{ cm}^2$
Új terület: $(7+2)\text{ cm}\cdot(12+2)\text{ cm}=126\text{ cm}^2$
A terület növekedése 42 cm^2.

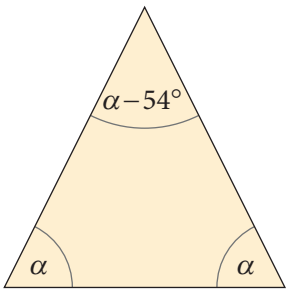
3. PÉLDA

Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei, ha az egyik szöge 54°-kal nagyobb egy másik szögénél?

Megoldás

Tudjuk, hogy a belső szögek összege 180°. Az egyenlő szárú háromszögnek két különböző nagyságú szöge lehet. Így két esetet kell megkülönböztetnünk.

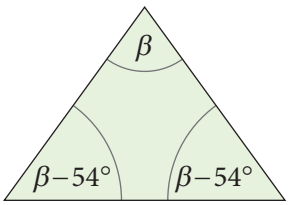
1. eset: Ha az alapon fekvő szögek a nagyobbak.
Az alapon fekvő szögeket jelöljük α-val, így a szárak által bezárt szög: $\alpha - 54°$. A belső szögek összegét ekkor a következőképpen írhatjuk fel:



$$\alpha + \alpha + (\alpha - 54°) = 180°$$
$$3\alpha - 54° = 180°$$
$$3\alpha = 234°$$
$$\alpha = 78°, \text{ és } \alpha - 54° = 24°$$

Tehát a háromszög belső szögei: 78°; 78°; 24°
Az eredmény megfelel a szövegben megfogalmazott feltételeknek, és a kapott szögek összege 180°.

2. eset: Ha a szárak által bezárt szög a nagyobb.
A szárak által bezárt szöget β-val jelöljük. Ekkor az alapon levő szögek $\beta - 54°$-kal egyenlők. A belső szögek összegét így írhatjuk fel:



$$\beta + 2(\beta - 54°) = 180°$$
$$3\beta - 108° = 180°$$

Az egyenlet alapján a szárak által bezárt szög: $\beta = 96°$. Az alapon levő szögek: $\beta - 54° = 42°$-osak.
Tehát a háromszög belső szögei: 42°; 42°; 96°
Ez az eredmény is megfelel a szövegben megfogalmazott feltételeknek.



KUTATÓMUNKA

Gyűjtsetek olyan szakmákat, amelyeknél fontos, hogy a mester tudjon területet, felszínt, térfogatot számolni!
Beszéljétek meg, ki milyen szakmát talált!





4. PÉLDA

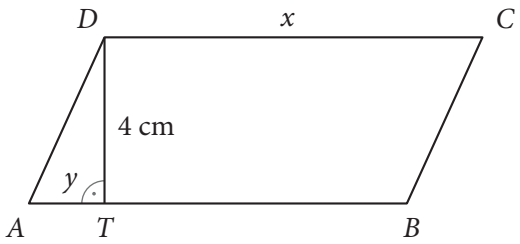
Egy paralelogramma területe 72 cm^2, hosszabbik oldalához tartozó magassága 4 cm.
Mekkora a paralelogramma kerülete, ha az egyik csúcsból a hosszabbik oldalra állított magasság a hosszabbik oldalt 1 : 5 arányban osztja?

Megoldás

Jelöljük a paralelogramma hosszabbik oldalát x-szel.
A paralelogramma területére vonatkozó összefüggést felhasználva:

$x \cdot 4 = 72$

$x = 18$ (cm)



A T pont az oldalt 1 : 5 arányban osztja ketté. Az y-t arányos osztással meghatározva:

$y + 5y = 18$

$y = 3$ (cm)

A magasság merőleges az oldalra, így az ATD háromszögre felírható a Pitagorasz-tétel.

$4^2 + 3^2 = b^2$, amelyből $b = 5$ cm.

A paralelogramma kerülete $2 \cdot (18 + 5) = 46$ cm.

FELADATOK

1. *a)* Egy háromszögben az oldalak aránya 2 : 3 : 4, a háromszög kerülete pedig 63 cm. Mekkorák az oldalai?

b) Egy háromszögben az oldalak aránya 1 : 4 : 7, a háromszög kerülete pedig 108 cm. Mekkorák az oldalai?

c) A fenti két feladatból az egyik hibás. Keresd meg, melyik, és fogalmazd meg, mi a hiba!

2. Egy egyenlő szárú háromszög két oldalának aránya 3 : 7, kerülete pedig 221 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

3. Egy háromszög kerülete 30 cm. Egyik oldala 6 cm-rel hosszabb, mint egy másik. Van olyan oldala, amelyik 3 cm-rel hosszabb, mint egy másik.
Mekkorák lehetnek a háromszög oldalai?

4. Egy derékszögű háromszög kerülete 210 cm, oldalai pedig centiméterben mérve egész számok. A legrövidebb oldala 27 cm-rel kisebb a leghosszabbnál. A középső oldala 5%-kal hosszabb a legrövidebbnél.

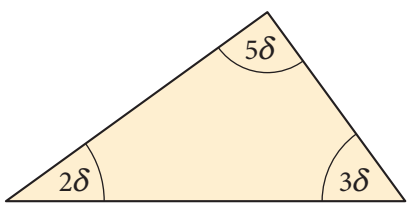
a) Mekkorák a háromszög oldalai?

b) Igazold, hogy a háromszög valóban derékszögű!

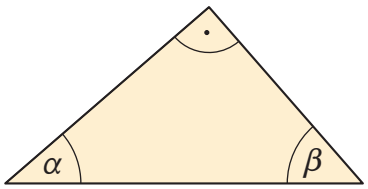
5. Egy háromszögben a szögek aránya 2 : 3 : 5.

a) Lehet-e a háromszög egyenlő szárú?

b) Mekkorák a szögei?



6. Jelöljük egy derékszögű háromszög két, derékszögtől különböző szögét α-val és β-val.



Számítsd ki a szögek nagyságát, ha tudod, hogy
a) α 10°-kal nagyobb, mint β;
b) α 25°-kal kisebb, mint β;
c) α feleakkora, mint β;
d) α háromszorosa β-nak!

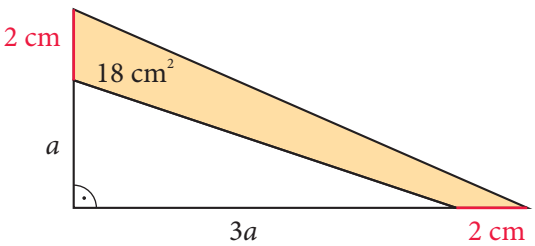
7. Egy szabályos sokszög belső szögeinek összege 1080°. Hány oldalú a sokszög?

8. Egy szabályos sokszög egyik külső szöge 45°-os. Hány oldalú a sokszög?

9. Két négyzet oldalainak aránya 8 : 15, kerületük összege 644 cm.
a) Mekkorák a négyzetek oldalai?
b) Mekkorák annak a négyzetnek az oldalai, amelynek területe megegyezik a fenti négyzetek területének összegével?

10. A téglalap alakú kiskertünk egyik oldala 6 méterrel hosszabb a másiknál. Ha a hosszabb oldal csak 4 méterrel lenne hosszabb, mint a rövidebb oldal, a kiskert területe 18 m^2-rel kisebb lenne. Számítsd ki a kiskert oldalainak hosszát és területét!

11. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza a másik befogó harmada. Ha a befogókat 2-2 cm-rel növeljük, a háromszög területe 18 cm^2-rel nő. Mekkora az eredeti háromszög területe?



12. Egy derékszögű háromszög belső szögeinek aránya 1 : 2 : 3. Hány fokos szöget zár be egymással a derékszögű csúcsból induló magasságvonal és a belső szögfelező?

13. A paralelogramma egyik oldala 5 cm-rel hosszabb, mint a másik oldal kétszerese, kerülete pedig 283 cm.
a) Mekkorák a paralelogramma oldalai?
b) Mekkora a területe, ha a hosszabb oldalhoz tartozó magassága egyenlő a két oldal különbségének az ötödével?



IV. 6. Vegyes feladatok

Az alábbi feladatok a szöveges feladatok gyakorlását segítik.
Dolgozzatok együtt, beszéljétek és oldjátok meg közösen a feladatokat! Az ellenőrzést csoportban végezzétek, és a feladatok végén található utolsó kérdést/kérdéseket már együtt gondoljátok végig, hogy minél több szempontot figyelembe véve válaszolhassatok!
Szükség esetén használjátok az internetet!

FELADATOK

1 Kicsit csöpög a csap, így óránként másfél liter víz csöpög el feleslegesen. A vízdíj területenként igen eltérő, egy országon belül többszörös díjkülönbség is előfordulhat. Például míg Budapesten 218 $\frac{\text{Ft}}{\text{m}^3}$, addig Pécsett 432 $\frac{\text{Ft}}{\text{m}^3}$ a vízdíj.

a) Mennyi víz folyik el így feleslegesen egy év alatt?
b) Körülbelül mekkora lenne annak a kockának az éle, amelyikbe ez a vízmennyiség belefér? (Használj számológépet!)
c) Egy gyerek átlagosan 1,5 liter vizet iszik naponta. Hány gyereknek lenne meg az egy napra szükséges ivóvize az egy hónap alatt elcsöpögő vízből?
d) Hányszor tudnál belőle lezuhanyozni? (Nézz utána, átlagosan mennyi vizet használ el egy ember zuhanyzáskor!)
e) Mennyivel fizet többet a feleslegesen elfolyt vízért egy pécsi lakos, mint egy budapesti?
f) Nézz utána, mennyibe kerül nálatok 1 m^3 víz, és számold ki, hogy hasonló helyzetben mennyi pénzt pazarolnátok el!
g) Nézz utána, hol a legdrágább a víz a világon!

2 A Földön található vízmennyiség korlátozott, kb. 1400 millió köbkilométer áll rendelkezésünkre. Ennek a 97,5%-a sós víz, ami az ember által nem fogyasztható. A többi édesvíz, de ennek is csak kb. az 1%-a hasznosítható ivóvízként, így fontos, hogy minél takarékosabban bánjunk vele. Nehezíti a helyzetet az is, hogy az édesvíz mennyisége egyenetlenül oszlik el a bolygón, így egyre több ember kerül komoly kihívások elé, hogy megfelelő mennyiségű ivóvízhez jusson.

a) Számítsd ki, hány liter édesvíz van a Földön!
b) Hány liter édesvíz hasznosítható a Földön ivóvízként?
c) Ha a mindennapos kádban fürdést egy ember egyetlen hónapig minden nap zuhanyozásra cseréli, akkor körülbelül 2,5 m^3 vizet takaríthat meg. Legalább hány napon kellene 10 000 000 embernek fürdés helyett zuhanyoznia, hogy a Velencei-tó vízkészletének megfelelő vízmennyiséget spórolhassanak meg? (A Velencei-tó vízkészlete kb. 41 millió m^3.)
d) Fogalmazz meg ötleteket, melyekkel te hatékonyabban tudnád használni a rendelkezésünkre álló édesvizet! Keress vízspórolási trükköket!

3 Szofi szeretné megvalósítani régóta dédelgetett álmát, ezért nyári diákmunkára jelentkezett egy elektrotechnikai céghez. Ha 10 000 Ft felett online vásárolunk ennél a cégnél, akkor facsemetét küldenek ajándékba. A cég a facsemetéhez egy leírást is ad arról, hogyan kell fát ültetni. A webes



oldalukon azt is megtudhatjuk, hová ültethetünk fákat. Minden fa saját kóddal rendelkezik. Ha elültettük a fánkat, és erről értesítést küldünk a weboldalukra, akkor az a fa a kódjával az online térképen is megjelenik.
Szofi feladata, hogy ezeket a raktárban tárolt facsemetéket gondozza, öntözze, és szállítás előtt becsomagolja. Szofi ad tanácsokat a betelefonáló érdeklődőknek a fákkal kapcsolatos tudnivalókról is. Például, hogy egy fa gyökere kb. akkora, mint a lombkoronája, ezért ha délben a fa lombkoronájának árnyéka 1 m^2, akkor egy ekkora területet kell locsolni a fa körül. Vagy hogy 1 liter víz 1 m^2-en kb. 1 cm mélységig nedvesíti be a talajt, ezért érdemes nagyobb szárazságban úgy locsolni, hogy egy locsolásnál kb. 30–40 cm mélyen átnedvesedjen a talaj.

a) A kertben lévő cseresznyefánk árnyéka délben 2,5 m^2 területű árnyékot ad. Mennyi vízre van szükségünk ahhoz, hogy 30 cm mélyen átnedvesedjen körülötte a talaj?

b) A kertünkben van egy ásott kút, így nem kell vezetékes vízzel locsolnunk. A kút vizével táplált kerti csapból másodpercenként kb. 1,5 liter víz folyik. Hány perc alatt tudjuk a kútból a fa mellett álló 240 literes hordót megtölteni?

c) A nagy, alul kicsit lyukas víztartályt (40 cm × 40 cm × 60 cm) nagypapa állította a cseresznyefánk mellé. Minden este megtölti vízzel, ami lassan elszivárog a fa gyökeréhez. Nagypapa úgy számolta, hogy 100 liter víz kb. 2,5 óra alatt szivárog el a földben. Számítsd ki, hány perc alatt szivárog el a cseresznyefa locsolásához szükséges mennyiség!

d) Tudjuk, hogy a fák hozzájárulnak a levegő szén-dioxid (CO_2) tartalmának a csökkentéséhez. Keress még indokokat a faültetésre!

e) Nézz utána, hol vannak a környékeden *Ültess fát!* jellegű környezetbarát programok, esetleg közösségek!

4. Néhány barát elindult a hétvégi *Élj egészségesen!* félmaraton futóversenyen (21 km). A start 9:00 órakor volt, 8000 indulóval.

a) Péter tervezett átlaga 5,5 perc volt km-enként. Hány órakor ér célba, ha végig tartani tudja ezt a tempót?

b) Sanyi is 5,5 perces átlagtempót tervezett, de sikerült gyorsabban futnia, így 5 perc 23 mp alatt futott le 1 km-t. Hány perccel előbb ért célba, mint Péter?

c) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val futott Sanyi?

d) Gergő 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s átlagsebességgel futott. Hány perc alatt fut le 1 km-t? Hány méter van még hátra Sanyinak, amikor Gergő beér a célba?

e) Hány perc alatt futott le 1 km-t az az induló, aki 11:45-re ért célba?

f) A férfi félmaraton világcsúcsát az eritreai származású Zersenay Tadese tartja 58:23-as idővel. Hány métert fut 1 perc alatt? Hány perc alatt fut 1 km-t?

g) Te hány perc alatt futsz le 1 km-t? Ha ezt a tempót tartani tudnád, le bírnád-e futni 2 órán belül a félmaratont?

IV. 7. Pénzügyi feladatok

1. PÉLDA

A bátyám 100 svájci frankot (CHF) adott a születésnapomra. Gyorsan kiszámoltam, hány forintot ér: 1 svájci frank most 405,6 forint, így 40 560 forint boldog tulajdonosa lettem. (A frank árfolyama gyorsan változhat. 2008-ban 1 svájci frank még csak körülbelül 150 Ft volt, 2015-ben pedig már nagyjából 300 Ft.)

a) Mennyit érne a 100 svájci frank, ha a forinthoz képest 3%-ot erősödik?

b) Mennyit érne a pénzem, ha a frank árfolyama a 3%-os erősödés után 2%-ot esne?

Megoldás

a) A svájci frank 3%-os erősödése azt jelenti, hogy 100 CHF $40\,560 \cdot 1{,}03 \approx 41\,777$ forintot érne.

b) A 3%-os erősödés után a 2%-os gyengülés azt jelenti, hogy 100 CHF $40\,560 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}98 \approx 40\,941$ forintot érne.

2. PÉLDA



Amikor nagyi meghallotta, hogy a bankba akarom tenni a megspórolt 100 000 Ft-omat, mindenképpen megpróbált lebeszélni. Azt javasolta, használjam az ő régi bevált módszerét, és varrjam a pénzt egy párnahuzatba. Így bármikor hozzáférhetek, ha szükségem van rá.

– És az infláció? – kérdeztem tőle, de ő csak legyintett.

Utánanéztem a dolognak az interneten. Az infláció 2021-ben 5,7%-os volt, azaz ennyit veszítene a pénzem az értékéből, ha otthon őrizgetném.

– Egyáltalán mi az az infláció?

– Jó kérdés. Megpróbálom egyszerűen megfogalmazni. **Ha sokféle, mindennap szükséges termék ára egy év alatt átlagosan 5,7%-kal emelkedik, akkor egy év múlva 100 forint helyett 105,7 forintból tudsz ugyanannyit vásárolni. El lehet mondani fordítva is. Egy év múlva ugyanabból a száz forintból csak $\frac{100}{105{,}7} \cdot 100 \approx 94{,}6$ forintnyi terméket tudsz megvenni.** Ezért szokták mondani, hogy az infláció során romlik a pénz értéke.

Mennyit érne 100 000 Ft 1, 2, illetve 3 év múlva, ha az infláció minden évben 5,7% lenne?

Megoldás

Egy év múlva a jelenlegi 100 000 forintom csak $100\,000 \cdot 0{,}946 = 94\,600$ forintot érne.

Két év múlva $100\,000 \cdot 0{,}946 \cdot 0{,}946 = 89491{,}6 \approx 89\,492$ forintot érne.

Három év múlva $100\,000 \cdot 0{,}946 \cdot 0{,}946 \cdot 0{,}946 \approx 84\,659$ forintot érne.

Így nagyi ötletét elvetettem, mivel egyrészt kevesebbet érne a párnában tartott pénzem, másrészt még az a veszély is fennállna, hogy hamarabb elköltöm, ha ilyen könnyen hozzáférek.



PÁROS MUNKA

Nézzetek utána, mennyi most az euró és az angol font árfolyama! Számoljátok ki, hány forintot érne, ha 100 svájci frank helyett 100 eurót, illetve ha 100 angol fontot kaptunk volna! Hasonlítsátok össze az értékeket!

3. PÉLDA



Oroszország 1867-ben a csőd szélén állt. Úgy döntöttek, hogy elfogadják az amerikaiak ajánlatát, és eladják a használhatatlannak tartott alaszkai területeiket. 7 200 000 amerikai dollárt kaptak körülbelül 1 700 000 km^2 földért. Ez kb. 4,2 dolláros ár volt négyzetkilométerenként. 150 évvel ezelőtt szinte mindenki azt gondolta, hogy az amerikaiak hatalmas ostobaságot követtek el, amikor jeges, lakhatatlan földet vásároltak. Sejtelmük sem volt a felszín alatt rejlő hatalmas nyersanyagkészletekről.

a) Ha az évenkénti átlagos pénzromlás üteme 2% lett volna, akkor mennyit kellene fizetni 150 évvel később, ha csak az inflációt vesszük figyelembe, azaz mennyi mai dollár felel meg a 150 évvel ezelőtti 7,2 millió USD-nek?

b) Mekkora lenne ez az érték 3%-os átlagos infláció esetén?

c) Hányszoros különbséget eredményezne a végösszegben egyetlen százalék változás?

Megoldás

a) $7{,}2 \text{ millió} \cdot 1{,}02^{150} \approx 7{,}2 \text{ millió} \cdot 19{,}4996 \approx 140{,}4 \text{ millió USD}$

b) $7{,}2 \text{ millió} \cdot 1{,}03^{150} \approx 7{,}2 \text{ millió} \cdot 84{,}2527 \approx 606{,}6 \text{ millió USD}$

c) 150 év alatt 1% különbség $\frac{606{,}4}{140{,}4} \approx \frac{84{,}2527}{19{,}4996} \approx 4{,}32$-szoros különbséget eredményezne.

Megjegyzés: az $1{,}02^{150}$ értékét a számológépeddel vagy a mobiloddal tudod kiszámolni.





FELADATOK

A nagybátyám bankban dolgozik. Tegnap délután sokat beszélgettem vele, és a következőket tudtam meg:

1. Ha bankban tartom a pénzemet, az biztonságosabb, mintha itthon tartanám, bár évente csupán 3%-ot kamatozik. Ez nagyon alacsonynak mondható. Számítsd ki, mennyi kamatra számíthatok egy év múlva, ha van a bankban félmillió forintom!

2. Van 60 000 Ft megtakarított pénzem, amit négy hónapig biztosan nem szeretnék elkölteni. A bankban két lehetőség közül választhatok. Az egyik lehetőség az, hogy lekötöm a pénzemet 1 hónapra, és akkor a hónap végén 0,5%-ot kamatozik, majd a kamattal megnövelt pénzemet újra lekötöm 1 hónapra, és ismét 0,5% lesz a kamat, végül ugyanígy lekötöm a 3., majd a 4. hónapra is. **Ez azt jelenti, hogy az adott időszak elmúltával már a kamattal megnövekedett pénzem kamatozik tovább a következő időszakban, ezt hívják kamatos kamatnak.**
A másik lehetőségem, hogy rögtön 4 hónapra kötöm le, így a 4. hónap végére 2% a kamat.

a) Először tippelj, szerinted mekkora összeggel gyarapodik az egyik, illetve a másik esetben a vagyonom!
b) Melyik lehetőséget válasszam, hogy nagyobb kamatra tegyek szert a 4. hónap végére? Válaszodat számolással igazold!

3. Fontos cél, hogy a megtakarított pénzünk megőrizze az értékét, sőt esetleg hasznot is hozzon. Érdemes ezért magasabb hozamú megtakarítási lehetőségeket keresni. Ha a bankban lekötjük a pénzünket egy évre, 9%-os kamattal számolhatunk. Ebben az esetben egy évig nem használhatjuk ezt a lekötött pénzt. Számítsd ki, félmillió forintnál hány forint kamatra számíthatunk egy év lekötés után!

4. Mivel a pénzünk lekötése sem mindig követi a magas inflációt, érdemes egyéb megoldásokat keresnünk a pénzünk értékének megőrzésére. 2023-ban az állampapírok számítanak a legkevésbé kockázatos befektetésnek. Ha erre gondolva választunk egy 4 éves futamidejű állampapírt, akkor 11,75%-os éves kamatot is kaphatunk, és ha a hozamot is befektetjük, akkor a következő évben már a kamattal megnövekedett pénzünk kamatozik tovább, azaz kamatos kamattal számolhatunk a futamidő végéig.

a) Számítsd ki, hány forintunk lesz a 4. év végére, ha 1 000 000 Ft-ért vásárolunk államkötvényt!
b) Hány forinttal gyarapodott így a pénzünk?
c) Hány %-kal növekedett a kezdetben betett 1 000 000 forintunk?

5. Az állampíprok hozamával is vetekszik a Babakötvény. Ez gyermeket nevelő szülőknek szól, és a gyermek 18 éves koráig jelent hosszú távú befektetést. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a befektetésünk évente átlagosan 8%-kal kamatozik. Számítsd ki, hogy ha egy baba születésekor 100 000 Ft-ot Babakötvénybe teszünk gyermekünk részére, akkor mekkora összeg tulajdonosa lehet a 18. születésnapján!

6. Sokan úgy döntenek, hogy a pénzüket valamilyen ingóságba fektetik. Az autó erre nem jó megoldás, hiszen annak a megvásárlás pillanatától csökken az értéke.
A használat során bekövetkező értékvesztést nevezik amortizációnak.
Egy autó értéke az első évben 20%-kal, a másodiktól a hatodik évig évente 10%-kal csökken. 8 000 000 Ft-ért vásároltam új autót.

a) Mennyit ér az autóm 1 év múlva?
b) Mennyit ér az autóm 3 év múlva?
c) Mennyit ér az autóm 6 év múlva?
d) Nézz utána az interneten, melyik Magyarországon gyártott típust tudnánk megvenni legfeljebb 8 000 000 Ft-ból!
e) Nézz utána az elektromos autók átlagos amortizációjának! Melyik típusú autó veszít többet az értékéből azonos időtartam alatt, a benzines vagy az elektromos?



7. Sok ember úgy gondolja, hogy a lakásvásárlás a jó befektetés. Ha készpénzből ki tudjuk fizetni, egyszerű a dolgunk. Ha lakáshitelt kell rá felvennünk, akkor már nagyobb a kockázat. **A felvett kölcsön után nemcsak a felvett összeget kell visszafizetnünk, hanem a kamatot – a pénz használatának árát – is meg kell fizetnünk.**

a) Hány forintot fizetünk vissza a banknak, ha 15 000 000 Ft hitelt vettünk fel lakásvásárlásra, és 20 éven keresztül havi 123 490 Ft a törlesztőrészlet?
b) Hány forintot fizetünk vissza a banknak, ha 15 000 000 Ft hitelt vettünk fel lakásvásárlásra, és 15 éven keresztül havi 141 510 Ft a törlesztőrészlet?

8. A barátomnak ikrei születtek, ezért vásárolt a családjának egy új, nagyobb lakást. Összegyűjtött egy jelentősebb összeget, hitelt is vett fel, így 10 éven keresztül havi 96 170 forintot törleszt a banknak. A régi lakását kiadta, ami reményei szerint fedezi majd a hitel törlesztőrészletét és azt a többletköltséget is, amennyivel az új lakás rezsije több, mint a régié. Hány forintért kellene kiadnia a régi lakását, ha a törlesztőrészleten túl a 47 500 Ft-os rezsikülönbözetet is ebből szeretné fizetni?
Gondolj arra is, hogy az ingatlankiadást 15%-os adó is terheli, így érdemes ezt is belekalkulálni a bérleti díjba.

9. Egyre több ember vásárol részvényt, ettől remélve a meggazdagodást.
A részvény bármikor megvehető és eladható. Árfolyama állandó mozgásban van, akár egyetlen napon belül is több százalékot emelkedhet vagy csökkenhet.
Itt nagyon nagy összegeket lehet gyorsan elveszíteni vagy nyerni, ezért nagy elővigyázatosságot igényel a részvényekkel való kereskedés! A részvények adásvétele nagyon sok matematikai ismeretet igényel a pénzpiac területéről.

a) 10 000 dollárért mobiltelefon-részvényeket vásároltam. Az értéke az első nap 4%-kal növekedett, a második nap 4%-kal csökkent. Mennyit ér most a részvényem?
b) Egy másik alkalommal 5000 euróért vásároltam részvényeket, de most nem volt akkora szerencsém. Az értéke első nap 1,7%-kal, a második nap 2,9%-kal, a harmadik nap 6,7%-kal esett. Számítsd ki, hány eurót vesztettem 3 nap alatt! Add meg a veszteségem értékét forintban is! Nézd meg az euró árfolyamát az interneten!

10. Magyarországon 1946-ban sikerült világrekordot dönteni, de erre nem lehetünk büszkék. Az akkori magyar infláció volt sokáig a legmagasabb a világon. Az ilyen magas inflációt hiperinflációnak nevezik. 1946-ban

pengő volt a magyar fizetőeszköz, ami gyorsan elértéktelenedett. Egy kiló kenyér például 1945 augusztusában 6 pengőbe került, ezzel szemben a következő év május elején már 8 millió, míg június végén már 5,85 milliárd (!) pengőt kellett érte fizetni. Az infláció 1946. július 10-én döntött világrekordot, amikor egyetlen nap alatt 348,46%-os drágulás következett be. 1946. augusztus 1-jén az akkori kormány végül egy új pénznemet, a forintot vezette be Magyarországon. A hivatalos átváltási ráta alapján 10^{29} pengőért 1 forintot adtak.

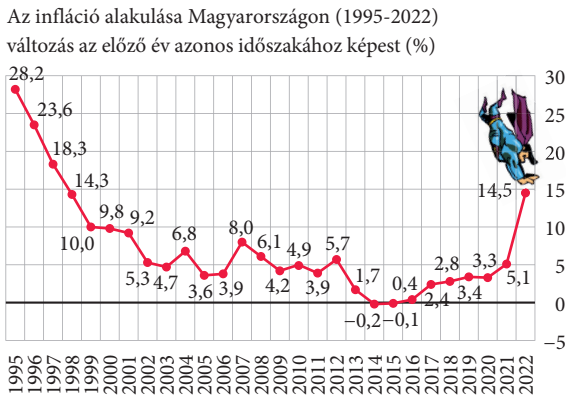


a) Hányszorosára nőtt a kenyér ára '45 augusztusa és '46 májusa között? Hány százalékos ez az emelkedés?

b) Hányszorosára nőtt a kenyér ára '45 augusztusa és '46 június vége között? Hány százalékos ez az emelkedés?

c) Írd le számjegyekkel a 10^{29} számot!

11. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre! A számításokhoz használj zsebszámológépet vagy mobiltelefont!



a) Melyik évben volt a legmagasabb az infláció?

b) Mennyit veszített az értékéből 1000 Ft 1995 és 2000 között?

c) Mennyit veszített az értékéből 1000 Ft 2010 és 2022 között?

d) Keresd meg az interneten, hogy mi az elnevezése a negatív inflációnak!



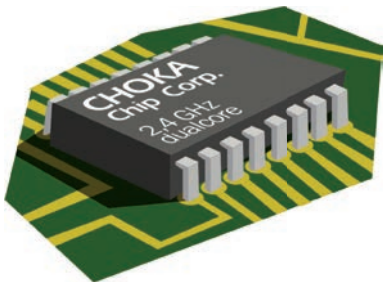
KUTATÓMUNKA

1. Végezzetek felmérést családotok, barátaitok, ismerőseitek körében, ki milyen megtakarítási formát ismer!
2. Szerezzetek információkat arról, mibe érdemes manapság befektetni – részvénybe, bankba, lakásba, aranyba stb. –, és válasszatok ki ezek közül egyet! Írjatok róla egy rövid összefoglalót és egy reklámszöveget! Próbáljátok meggyőzni a másik csoportot arról, hogy nálatok fektesse be megtakarítását! Készítsetek egy színes, figyelemfelkeltő plakátot! Szükség esetén használjátok az internetet!



CSOPORTMUNKA

Az itt lévő feladat kapcsán beszéljétek meg, hogy melyik kérdést lehet megválaszolni, melyiket nem, melyik kérdésre egyetlen szám a válasz, melyikre nem! Hogyan változtatnád meg a feladat szövegét, hogy minden kérdésre egyetlen szám legyen a válasz?



A feladat:
A Gamecode kiállítás szombati napjára 2400-an látogattak ki. Vasárnap 3200 látogatót regisztráltak.
a) Hány ember járt a Gamecode kiállításon összesen?
b) Legalább hány ember járt a Gamecode kiállításon?
c) Legfeljebb hány ember járt a Gamecode kiállításon?

FELADATOK

1. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok körében!
a) $3x-4+5x-2=17-4x+1$
b) $2(x-3)-3(4-2x)+7=10-(x+3)$
c) $\frac{x-1}{5}+\frac{x+4}{2}=2x-6$

2. Karcsi 8 év múlva harmadannyi idős lesz, mint édesapja most. Életkoruk összege most 44 év.
a) Hány éves most Karcsi?
b) Hány éves az édesapja?

3. Kata 26 évvel fiatalabb édesanyjánál, 3 évvel idősebb öccsénél, Bálintnál. Hármuk életkora összesen 65 év. Hány évesek külön-külön?

4. Hány éves most az az ember, aki 5 év múlva kétszer annyi idős lesz, mint 10 évvel ezelőtt?

5. Gondoltam egy számot. Ha a kétszereséhez 100-at adunk, akkor az ötszörösénél 48-cal kisebb számot kapunk. Melyik számra gondoltam?

6. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 13. Ha az eredeti számhoz hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám kétszeresét, akkor 228-at kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

7. Gondoltunk három különböző pozitív egész számot. Ezeket páronként összeadtuk, és a következő összegeket kaptuk:
a) 6, 8, 10 *b)* 99, 100, 101
Melyik három számra gondoltunk?

8. Egy természetes szám végéről elhagyva az egyes számjegyet egy új számot kapunk. Az új szám végéről elhagyva a hatos számjegyet egy újabb számot kapunk. Az eredeti, az új és az újabb szám összege 2176.
a) Melyik az újabb szám?
b) Mennyi lehet a legújabb szám?

9. Három egymást követő, hárommal osztható szám összege 783. Melyik ez a három szám?

10. Az asztalon 8400 Ft van. Kétszer annyi kétszázast láthatunk, mint ezrest. Százforintosból annyi van, mint amennyi az előző kettőből összesen. Van az asztalon ötezres is, de ebből van a legkevesebb. Hány darab pénz van az asztalon?

11. Egy hegedű tokkal 65 200 Ft. Egy hegedű vonóval 67 300 Ft. Egy hegedűt vonó és tok nélkül 59 800 Ft-ért adnak. Mennyibe kerül egy hegedű tokkal, vonóval?



12. Péter adott Ágnesnek annyi pénzt, amennyi Ágnesnek éppen volt. Ekkor ugyanannyi pénzük lett. Ezután Ágnes visszaadott Péternek egy ezrest, így Ágnesnek csak feleannyi pénze maradt, mint Péternek. Hány forintjuk volt eredetileg?

13. 10 liter 20%-os oldathoz hány liter 80%-os oldatot öntsünk, hogy a keverék 50%-os legyen?

14. Milyen töménységű lesz 20 liter 5%-os sóoldat, ha 5 liter víz elpárolog belőle?

15. A sarki irodaház teljes takarítását Elemér 120, Baltazár pedig 180 óra alatt végzi el.

a) Mennyi idő alatt végeznek, ha együtt dolgoznak?

b) Hány perc alatt végeznek Tündével együtt hárman, ha Tünde, a világ legprofibb dolgozója 90 óra alatt készen lenne egyedül?

16. Én 25 perc alatt eszem meg nagyi összes fánkját, te és én együtt 15 perc alatt végzünk vele. Mennyi idő alatt falod fel egyedül? (Feltételezzük, hogy a fánkfalási sebességünk állandó, hiszen nagyi a világ legfinomabb fánkját süti, így az étvágyunk semmit sem változik az eltelt idő alatt.)

17. Egy téglalap oldalainak aránya 5 : 7, területe 315 cm^2. Mekkorák az oldalai, mekkora a kerülete?

18. Egy négyzet alakú füves rész egyik oldalát 20%-kal növelték meg, a másikat pedig 5 m-rel. A területe 100,8 m^2-rel nőtt.

a) Mekkora volt, és mekkora lett a füves rész területe?

b) Hány százalékkal nőtt meg a füves rész területe?



19. Ha három évig bent hagyod az 1 000 000 forintodat a bankban, akkor évente 1,4% kamatot fizetnek, és az alapösszeg 2%-át pluszban jóváírják a 3. év végén. Hány forintod lesz összesen a harmadik év végén? (A költségektől tekintsünk el.)

20. Lekötöttünk 1 000 000 Ft-ot a bankban egy évre, amelyre a bank évi 1,2% kamatot fizet. A kiszámított kamatból levonnak 15% kamatadót, amelyet a bank befizet az államnak, ugyanakkor havi 690 Ft kezelési és számlavezetési díjat is felszámolnak.

a) Mennyivel nő a számlán lévő összeg egy év múlva?

b) Hogyan változik a számlán lévő összeg egy év múlva, ha az éves kamat 0,8%?

SZABADULÓSZOBA



Háromfős nyomozócsoportotok végre a siker előtt áll. A műkincstolvajok nyomán eljuthattok abba a titkos föld alatti kazamatarendszerbe, ahol az ellopott kincseket őrzik.
Oldjátok meg először az **A** feladatsort, majd a **B** feladatsort! Az egyes feladatsorokban lévő számokat adjátok össze! Az így kapott két szám szorzata lesz a széfet nyitó kód. Vigyázzatok, csak 45 percetek van egy-egy feladatsorra! Oszszátok el ügyesen a feladatokat!

„A" feladatsor

1. Oldd meg az alábbi feladatokat!
a) Egy számnak és a felének az összege 196,5. Melyik ez a szám?
b) Egy pozitív számnak és a nyolcszorosának a szorzata 50. Melyik ez a szám?
c) Egy szám és a hétszeresénél 2-vel kisebb szám különbsége 68. Melyik ez a szám?
d) Add össze a fenti feladatok végeredményeit! Ez lesz a kódhoz szükséges **első szám**.

2. Oldd meg az egyenleteket! Szorozd össze a megoldásokat, és megvan a kódhoz szükséges **második szám**.
a) $(14-9x)\cdot 2-11=-91$
b) $\frac{5x-17}{2}=\frac{101-4x}{3}$
c) $3(x+5)-2(4x-7)=5(9-x)-4(2x+1)$
d) $\frac{3}{4}\cdot(x-6)+13=\left(15-\frac{7}{2}x\right):\left(-\frac{5}{4}\right)$

3. A moziban 175-nél több, de 185-nél kevesebb néző volt. Kétszer annyi gyerek volt köztük, mint felnőtt. A felnőttek között a nők és a férfiak aránya 3 : 2 volt. Hány gyerek volt a moziban? Ez a kódhoz szükséges **harmadik szám**.

4. A nyári hőségben almafröccsöt készítettünk: 100%-os almalevet öntöttünk fel szódával. Mennyi szódát öntsünk 6 liter almaléhoz, hogy 60%-os almafröccsöt kapjunk? Az eredmény lesz a kódhoz szükséges **negyedik szám**.

5. Egy háromszög oldalainak aránya 3 : 4 : 5, kerülete 30 cm.
a) Mekkorák a háromszög oldalai?
b) Hány fokos a háromszög legnagyobb szöge? (Gondolj arra, honnan ismerős a 3, 4, 5 számhármas!)
c) Számold ki a háromszög területét! Ez a kódhoz szükséges **ötödik szám**.

„B” feladatsor

1. Az öcsém és én együtt 248 cm magasak vagyunk. Az apukánk háromszor olyan magas, mint a köztünk lévő magasságkülönbség. Hárman együtt 440 cm magasak vagyunk. Hány cm magas vagyok? Ez a végeredmény lesz a kódhoz szükséges **első szám**.

2. A parkban emberek és kutyák sétálnak. Hány ember és hány kutya sétál a parkban, ha összesen
a) 51 fejük és 130 lábuk van?
b) 51 fejük és 188 lábuk van?
c) Add össze az *a)* és *b)* feladatban szereplő kutyák számát! Ez a kódhoz szükséges **második szám**.

3. *a)* Gondoltam egy kétjegyű számra, melynek egyik számjegye 3-mal nagyobb a másiknál. Ha a számjegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti $\frac{4}{7}$ része lesz. Melyik számra gondoltam?
b) Gondoltam egy kétjegyű számra, amely számjegyeinek összege 10. Ha a jegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti szám ötszörösénél 4-gyel kevesebb. Melyik számra gondoltam?
c) Szorozd össze a fenti két eredményt! Ez a kódhoz szükséges **harmadik szám**.

4. Bandi és Dezső egy 1000 m hosszú, kör alakú pályán a startvonaltól egyszerre, de ellenkező irányba indul futni. Bandi 6 métert, Dezső 6,5 métert tesz meg másodpercenként.
a) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val futnak a fiúk?
b) Hány másodperc múlva találkoznak?
c) Add össze az *a)* és *b)* feladatokban eredményként kapott számokat! Ez a kódhoz szükséges **negyedik szám**.

5. Minden évben a nyolcadikosok feladata, hogy a farsangi mulatság után kitakarítsák az iskolát. Az *A* osztály 80 perc alatt, a *B* osztály – mivel kevesebben vannak – 2 óra alatt végezne a munkával. Hány percig tart, ha összefognak, és együtt dolgoznak? Az eredmény a kódhoz szükséges **ötödik szám**.



Az öt-öt szám összeadása után kapott két számot szorozzátok össze, így kapjátok meg azt a hétjegyű kódot, amivel bejuthattok a páncélszekrénybe.

Sikerült? Hurrá! Lefoglalhatjátok a lopott kincseket.

A mai három delikvens, Attila, Krisztián és Eszter tesztelheti az új vezeték nélküli headseteket, amelyek most érkeztek a futuroszkóphoz a fejlesztőktől.

Sokkal királyabb, mint az az ülés!

V. Hozzárendelések, valószínűségek, sorozatok

A számok világában élek. Néha az az érzésem, hogy könyvelőként az összeset leírtam már egyszer, de inkább többször.

Az irodában a kollégákkal azon dolgozunk, hogy minden egyes pénzügyi mozdulatot dokumentáljunk, és mind az állam, mind pedig az ügyfél részéről rendezetten könyveljük.

De igazából a problémamegoldó gondolkodásnak veszem hasznát, amikor olyan könyvelési lehetőséget tudok ajánlani az ügyfeleknek, amely sokkal kedvezőbb mindenkinek. Természetesen szigorúan a törvény keretein belül.

Egy profi hangosítónak rengeteg számítást, mérést kell végeznie kint a helyszínen és a műhelyben is.

Ezek főleg a hangszett beállításához szükséges elektrotechnikai műveletek.

Az adatok alapján kiválasztani a megfelelő eszközt, az kemény matek... és persze tapasztalat. De amikor a színpad mögött hallgathatod Lindsay-t hegedülni... Na, az megéri a sok fáradságot!

Sziasztok! Szép időnk van, nemde? És holnap is az lesz! Nekem elhihetitek. Én vagyok a meteorológiai intézet legjobb előrejelzője.

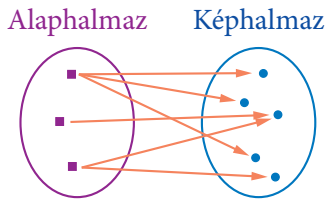
A közvetítéseken látható stúdiózást persze komoly kalkuláció előzi meg a mérőállomások, szatellitek és ballonok adatai alapján.

Az új indiai heurologic számítógépünknek köszönhetően 300-ból 288 előrejelzésünk közel 98%-ban bejön.

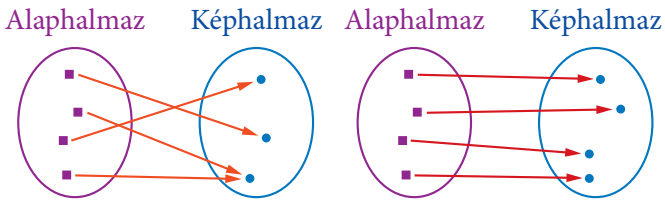
Szóval elhihetitek, ha azt mondom: a holnapi kirándulás rendben lesz!

V. 1. Egyenes arányosság

Emlékeztető
Az előző tanévben tanultunk a hozzárendelésekről. Ismételjük át a tanult fogalmakat!
Ha két halmaz elemei között megfeleltetést létesítünk, akkor **hozzárendelés**ről beszélünk.
Alaphalmaznak nevezzük azt a halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendelünk. **Képhalmaz**nak nevezzük azt a halmazt, amelynek az elemeit hozzárendeljük az alaphalmaz elemeihez.



Nem egyértelmű hozzárendelés



Egyértelmű hozzárendelések

Hozzárendelést sokféle módon megadhatunk: szöveges leírással, Venn-diagrammal, táblázattal, elempárokkal, nyíldiagrammal, képlettel. A fenti ábrák Venn-diagramon szemléltetik a hozzárendelést.

1. PÉLDA

A nyolcadik osztályosok búcsúzásakor fotókat készítettek. A fotókból egy példányt 150 Ft-ért lehet megrendelni. Réka vállalta, hogy összegyűjti a fotók árát, és mindennap leadja osztályfőnökének. Az első napon 105 db, a második napon 87 db, a harmadik napon 116 db árát hozták be az osztálytársai.

a) Kovács Panni 17 db-ot rendelt. Mennyit kell fizetnie?
b) Hány forintot szedett össze Réka az első napon?
c) Mennyi pénz gyűlt össze az első két napon?
d) Mennyit fizettek a fotósnak összesen?



Megoldás

a) $17 \cdot 150 = 2550$ forintot kellett Panninak fizetnie.
b) $105 \cdot 150 = 15\,750$ Ft-ot szedett össze Réka az első napon.
c) Az első két napon összesen 192 fotó árát hozták be, így $192 \cdot 150 = 28\,800$ Ft gyűlt össze.
d) Összesen 308 db fotót rendeltek, így $308 \cdot 150 = 46\,200$ Ft-ot fizettek a fotósnak.

Az első példa megoldásánál azt használtuk fel, hogy a fotók ára és a fizetendő összeg között egyenes arányosság van. Hatodik osztályban már tanultatok az egyenes arányosságról. Ismételjük át a tanultakat!

Két mennyiség akkor egyenesen arányos, ha az egyik mennyiség kétszeresére, háromszorosára stb. változik, akkor a másik mennyiség is kétszeresére, háromszorosára, ugyanannyiszorosára változik.
Ezt másként is megfogalmazhatjuk:
Két mennyiség egyenesen arányos, ha az összetartozó értékek hányadosa állandó. Ez alól a (0; 0) számpár jelent kivételt, mert nullával az osztást nem értelmeztük.

A példában a fotók száma és az ezekért fizetett összeg a két összetartozó mennyiség.

A fotók száma (db)	17	105	192	308
Fizetendő összeg (Ft)	2550	15 750	28 800	46 200
1 fotó ára (Ft)	$\frac{2550}{17} = 150$	$\frac{15\,750}{105} = 150$	$\frac{28\,800}{192} = 150$	$\frac{46\,200}{308} = 150$

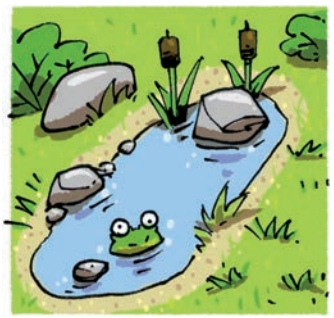
2. PÉLDA

Zsigáék az udvaron lévő csapból 15 perc alatt tudják feltölteni a 120 literes kerti tavat.

a) Mennyi víz folyik a kerti csapból 1 perc alatt?

b) Hány literes a víztározó hordó, ha 25 perc alatt tudják feltölteni?

c) Hány literes a kerti pancsoló, ha 60 perc alatt tudják feltölteni?



Megoldás

Ha 15 perc alatt 120 liter víz folyik ki, akkor

a) 1 perc alatt $\frac{120}{15} = 8$ liter víz.

b) 25 perc alatt $25 \cdot 8 = 200$ liter víz. Tehát a hordó 200 literes.

c) 60 perc alatt $60 \cdot 8 = 480$ liter víz. Tehát a pancsolómedence 480 literes.

Foglaljuk táblázatba az előző példában szereplő összetartozó mennyiségeket!

Eltelt idő (perc)	15	1	25	60
Vízmennyiség (l)	120	8	200	480
$\frac{\text{Vízmennyiség}}{\text{Idő}}$ $\left(\frac{\text{liter}}{\text{perc}}\right)$	$\frac{120}{15} = 8$	$\frac{8}{1} = 8$	$\frac{200}{25} = 8$	$\frac{480}{60} = 8$

Az összetartozó értékek hányadosa, azaz a kifolyt vízmennyiség és az eltelt idő hányadosa állandó. Ábrázoljuk a kifolyt vízmennyiséget az idő függvényében!

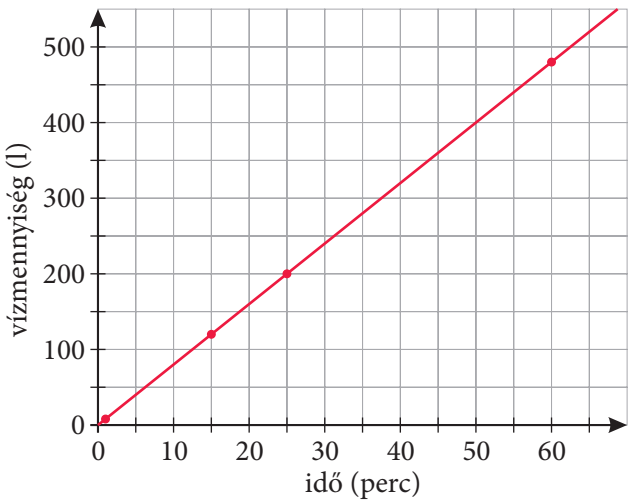
A grafikonról sok információt leolvashatunk:

– A 2. példában a hozzárendelés grafikonja egy origón áthaladó félegyenes.

– Az összetartozó értékek hányadosa állandó.

A kifolyt víz mennyisége és az eltelt idő között felírható összefüggés:

Vízmennyiség $= 8 \left(\frac{\text{liter}}{\text{perc}}\right) \cdot$ idő, ahol az időt percben, a vízmennyiséget literben adjuk meg.



3. PÉLDA

Ábrázoljuk az alábbi hozzárendeléseket egy koordináta-rendszerben! A hozzárendelés alaphalmaza legyen a valós számok halmaza! Ábrázolás előtt készítsünk táblázatot az összetartozó értékekről! Milyen közös tulajdonságokat látunk a grafikonokon?
Minden számhoz hozzárendeljük

a) a kétszeresét; *b)* a harmadrészét; *c)* az ellentettjét; *d)* a $\left(-\frac{3}{2}\right)$-szeresét.

Megoldás

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6

b)

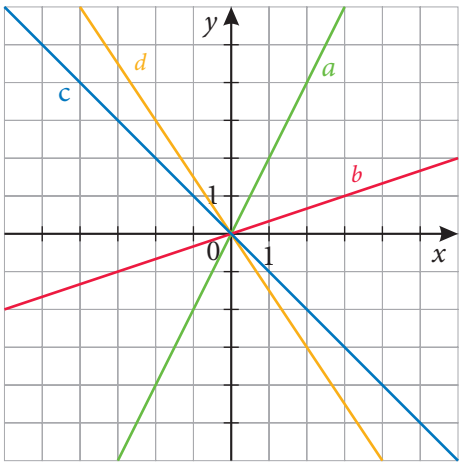
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{1}{3}x$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-\frac{3}{2}x$	$4{,}5$	3	$1{,}5$	0	$-1{,}5$	-3	$-4{,}5$



FELADATOK

1. *a)* A suli büféjében négy pogácsa 1120 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetnünk hét pogácsáért?
b) A csiga 4 óra alatt 3 métert tett meg. Menynyit tesz meg 11 óra alatt?
c) Nagypapa január elsején megfogadta, hogy mindennap ugyanannyit sétál a közeli kiserdőben. Ha három nap alatt 7,5 km-t tesz meg, akkor hány km-t sétál januárban?
d) Az 5,6 kg-os dinnye 1680 Ft-ba került. Mennyit kell fizetni a 8,4 kg-os dinnyéért?
e) Ha 12 süteményhez 20 dkg dió kell, akkor hány dkg dióra van szükség 50 db süteményhez?

2. Négy magyar fiatalember tartja a folyamatos csocsózás világrekordját. A játékot reggel 10:09-kor kezdték, és másnap 23:06-kor fejezték be.
a) Hány percet pihentek ez idő alatt, ha óránként 5 percet engedélyezett a Guinness-rekordok szabályzata?
b) Hány percet csocsóztak összesen?

3. A raktár alapja téglalap, melynek egyik oldala a valóságban 24 méter hosszú, a tervrajzon pedig 20 cm. Mekkora az épület alapterülete, ha a raktár másik oldala a tervrajzon 12,5 cm?

4. A világ legnagyobb, 40 méter átmérőjű pizzáját Rómában készítették. A 25,6 tonnás pizzán öt séf 48 órán keresztül folyamatosan dolgozott. A pizzát csak 5234 adagban tudták megsütni.

a) Számold ki, hány kg pizza volt egy adagban!

b) Hányszorosa a pizza súlya egy normál (kb. 720 gramm) pizza súlyának?

c) A hagyományos, 32 cm átmérőjű, 8 szeletes pizzából egy nyolcadikos átlagosan 6 szeletet tud megenni. Számold ki, hány nyolcadikos lakna jól a világ legnagyobb pizzájából a megadott adatok alapján!

5. A csapból percenként 8 liter víz folyik a kádba. Mennyi idő alatt telik meg a 120 literes kád, ha csak a kétharmadáig töltjük meg?

a) Ábrázold grafikonon a kádban lévő víz mennyiségét az eltelt idő függvényében!

b) Hogyan módosul a grafikon, ha a víztakarékos csapon csak 2,5 liter folyik percenként?

c) Mennyi idő alatt lesz üres a kétharmadáig megtöltött kád, ha 2 liter 6 másodperc alatt folyik le? Ábrázold grafikonon a kádban lévő víz mennyiségét az idő függvényében!

6. A japán mágnesvasút, amely egy tesztszakaszon 11 másodpercig 603 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s sebességgel száguldott, megdöntötte a gyorsasági világrekordot.

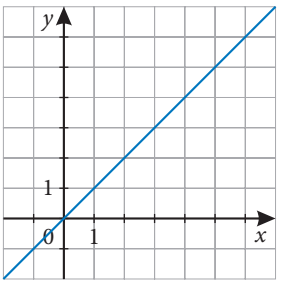
a) Számold ki, hány km-t tett meg másodpercenként a mágnesvasút!

b) Ábrázold a megtett utat az idő függvényében!

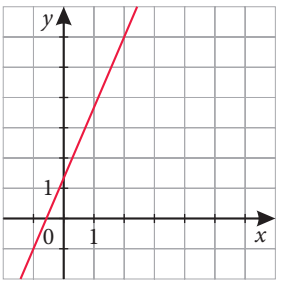


7. Válaszd ki az egyenes arányosságot ábrázoló grafikonokat!

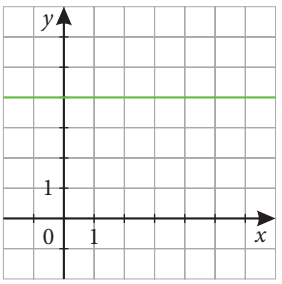
a)



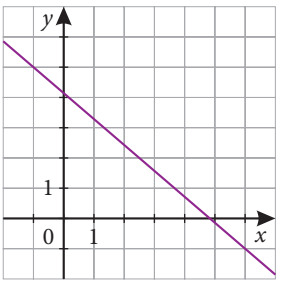
b)



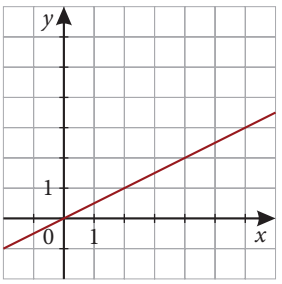
c)



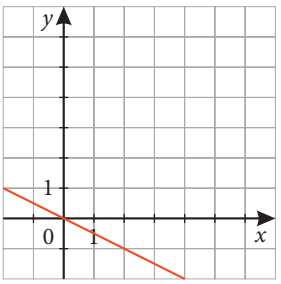
d)



e)



f)



8. Ábrázold az alábbi hozzárendeléseket egy koordináta-rendszerben, és válaszd ki közülük az egyenes arányosságokat!

a) Minden számhoz rendeljük hozzá a háromszorosát!

b) Minden számhoz rendeljük hozzá a felénél 1-gyel nagyobb számot!

c) Minden számhoz rendeljük hozzá az ötödét!

d) Minden számhoz rendeljük hozzá a nála 3-mal kisebb szám kétszeresét!

Játék

Alkossatok párokat! A páros tagjai különböző színnel dolgozzanak!
Rajzoljatok egy koordináta-rendszert egy négyzetrácsos lapon! Egy egység a négyzetrács hossza legyen!

I. A koordináta-rendszer (1; 3) pontjából kell eljutni a (3; 6) pontba úgy, hogy felváltva rajzoltok be egy-egy útvonalat, és csak jobbra vagy felfelé lehet egy egységet lépni. Az nyer, aki utoljára tud berajzolni az előzőektől különböző utat.
Beszéljétek meg, hogy az első vagy a második játékos fog nyerni, és indokoljátok meg, miért!

II. Játsszátok le azt is, ha a $(-2; 3)$ pontból kell eljutni a $(-4; -1)$ pontba, de most csak balra, illetve lefelé lehet lépni!
Beszéljétek meg, ebben az esetben a kezdő vagy a második játékos nyer, és indokoljátok meg válaszotokat!

Ha egy hozzárendelés összetartozó számpárjait koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor a hozzárendelés **grafikonját** kapjuk.

1. PÉLDA

Készítsünk értéktáblázatot a szövegesen megadott hozzárendelésekhez, majd ennek segítségével ábrázoljuk koordináta-rendszerben a hozzárendeléseket!

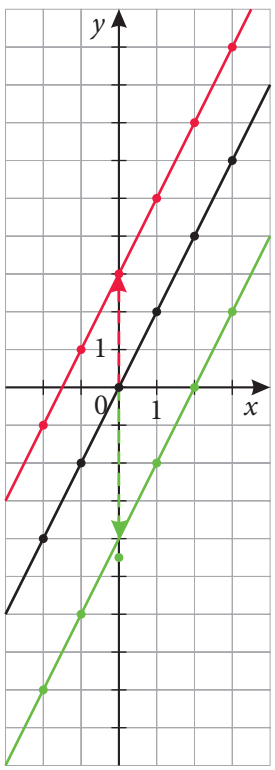
a) Minden számhoz rendeljük hozzá a kétszeresét!
b) Minden számhoz rendeljük hozzá a kétszeresénél hárommal nagyobb számot!
c) Minden számhoz rendeljük hozzá a kétszeresénél néggyel kisebb számot!

Vizsgáljuk meg, milyen közös tulajdonsága van a három grafikonnak!

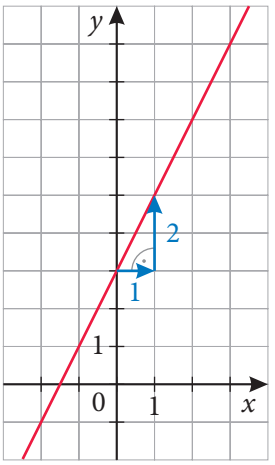
Megoldás

x	-2	-1	0	1	2	3
$2 \cdot x$	-4	-2	0	2	4	6
$2 \cdot x + 3$	-1	1	3	5	7	9
$2 \cdot x - 4$	-8	-6	-4	-2	0	2

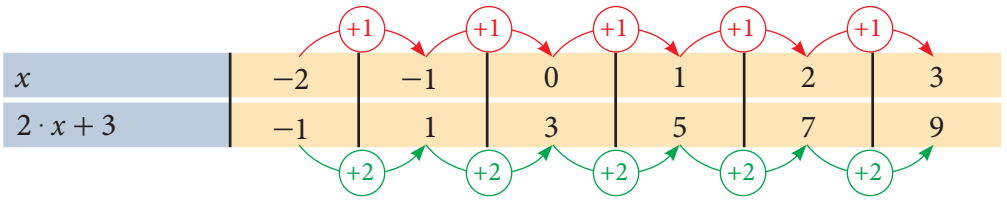
Grafikonjaik:



Látjuk, hogy a hozzárendelések grafikonja három egymással párhuzamos egyenes.
Ezt az alábbiakkal igazolhatjuk:
Az *a)* hozzárendelés egy egyenes arányosság, ezért a grafikonja egy egyenes.
A *b)* hozzárendelést az *a)*-ból kiindulva úgy kaphatjuk meg, hogy minden *a)*-beli értékhez hozzáadunk 3-at. Ez azt jelenti, hogy az *a)*-beli grafikont 3 egységgel eltoljuk az *y* tengely mentén pozitív irányba (felfelé).
A *c)* hozzárendelést az *a)*-ból kiindulva úgy kaphatjuk meg, hogy minden *a)*-beli értékből kivonunk 4-et. Ez azt jelenti, hogy az *a)*-beli grafikont 4 egységgel eltoljuk az *y* tengely mentén negatív irányba (lefelé).
Mit jelent a 2-es szorzó?
Az értéktáblázatból azt látjuk, hogy az *x* értékét eggyel növelve a hozzárendelt érték 2-vel nő.



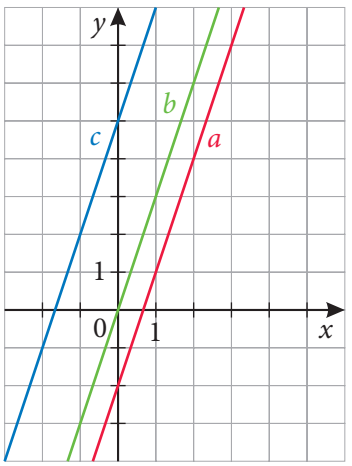
Nézzük meg ezt például a *b)* hozzárendelésnél!



Ezt a 2-es számszorzót az egyenes meredekségének nevezzük. Ha ezt a pozitív számszorzót növeljük, a hozzárendelt értékek nagyobb mértékben növekednek, az egyenes meredekebb lesz.

2. PÉLDA

Megrajzoltunk három grafikont a koordináta-rendszerben.
Fogalmazzuk meg a hozzárendelések szabályát!



Megoldás

A *b)* grafikon egy egyenes arányosság. Ha 1 egységgel nő az *x* értéke, a hozzárendelt érték 3-mal nagyobb lesz.
Így a hozzárendelési szabály: minden számhoz a háromszorosát rendeltük.

Az *a)* grafikon párhuzamos a *b)*-vel, és a *b)* grafikonját 2-vel lefelé toltuk az *y* tengely mentén.
Így a hozzárendelési szabály: minden szám háromszorosából kivontunk kettőt.

A *c)* grafikon is párhuzamos *b)*-vel, és a *b)* grafikonját 4 egységgel felfelé toltuk az *y* tengely mentén.
Így a hozzárendelési szabály: minden szám háromszorosához négyet hozzáadtunk.

3. PÉLDA

Készítsünk értéktáblázatot az alábbi hozzárendelésekhez, majd ábrázoljuk koordináta-rendszerben a grafikonjaikat! Határozzuk meg a grafikonok meredekségét!
Minden számhoz hozzárendeljük
a) a kétszeresét; *b)* a háromszorosának ellentettjét; *c)* a felét.

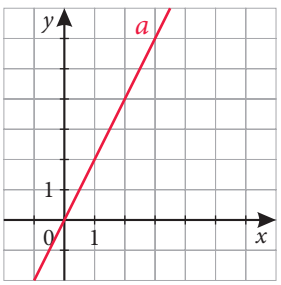
Megoldás

Mind a három hozzárendelés egyenes arányosság, ezért grafikonja egyenes.

a)

x	-1	0	1	2	3
$2x$	-2	0	2	4	6

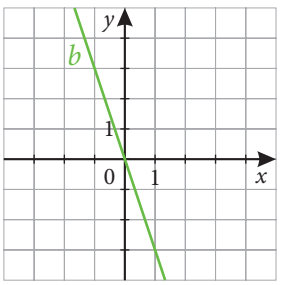
Az egyenes meredeksége 2, mert ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a hozzárendelt érték 2-vel nő.



b)

x	-1	0	1
$-3x$	3	0	-3

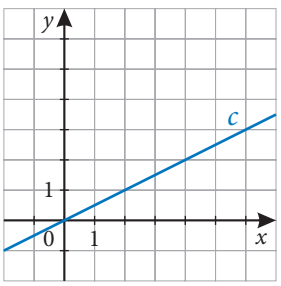
Az egyenes meredeksége -3, mert ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a hozzárendelt érték 3-mal csökken.



c)

x	-2	0	1	2	3
$\frac{1}{2}\cdot x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Az egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$, mert ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a hozzárendelt érték $\frac{1}{2}$-del nő. Úgy is fogalmazhatunk, ha az x értéke 2-vel nő, akkor a hozzárendelt érték 1-gyel nő.





PÁROS MUNKA

Alkossatok párokat!
Keressetek olyan hozzárendeléseket, amelyeket koordináta-rendszerben ábrázolva, a grafikonjuk össze nem köthető pontokból áll! A páros mindkét tagja ábrázoljon egy-egy ilyen hozzárendelést!

FELADATOK

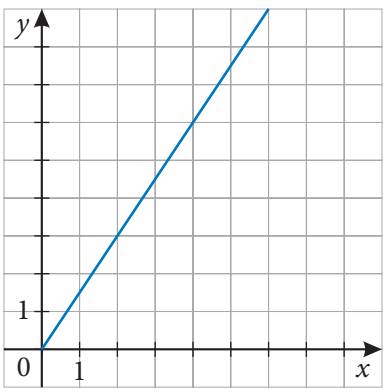
1. Reggel három család indult el a Tölgyerdei Nomád Táborba (rövidítve TNT). A 210 km-t mindhárom autó 2 óra 20 perc alatt tette meg. A Szalay család 8 órakor, a Kellei család két órával hamarabb, a Litkei család pedig 3 órával később indult.

a) Ábrázold egy koordináta-rendszerben a három család által megtett utat az idő függvényében!

b) Olvasd le a grafikonokról, melyik család hány órakor érkezett meg!

c) Fogalmazd meg, miért párhuzamosak a grafikonok!

2. Válaszd ki, melyik hozzárendelés nem tartozhat a grafikonhoz! Fogalmazd meg azt is minden esetben, melyik tengelyen mit ábrázoltunk!



a) 20 perc alatt 3 km-t tettem meg rollerrel.

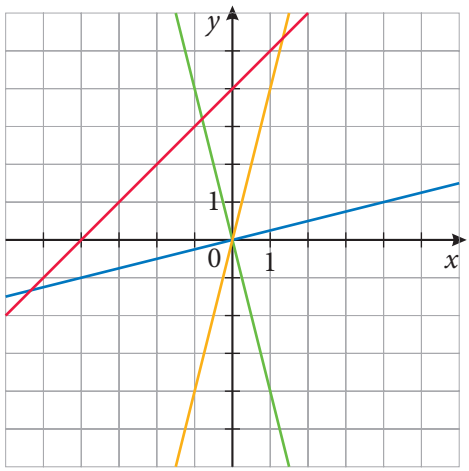
b) 4 kg zab 6 euróba kerül.

c) 3 km-t motoroztam 2 perc alatt.

d) 5 tengeri mérföldet kajakoztam 5 óra alatt.

3. Fogalmazd meg, honnan lehet eldönteni a hozzárendelési szabály alapján, hogy a hozzárendelés grafikonja növekedő vagy csökkenő! Mindkettőre adj egy példát, és ábrázold a grafikonjukat is!

4. Keresd meg, melyik grafikonhoz melyik hozzárendelés tartozik! Amelyikhez nem találtál hozzárendelést, ahhoz írj! Amelyik hozzárendeléshez nem találtál grafikont, ahhoz készíts!



a) Minden számhoz hozzárendelem a negyedét.

b) Minden számhoz hozzárendelem a négyszeresét.

c) Minden számhoz hozzárendelem a nála 4-gyel nagyobb számot.

d) Minden számhoz hozzárendelem a (-4)-szeresét.

5. Figyeld meg az E és F hozzárendelések és a grafikonjaik közötti kapcsolatot! Fogalmazd meg, melyik esetben hogyan változott az E hozzárendelés grafikonjához képest az F grafikonja!

a) *E:* Minden számhoz hozzárendelem saját magát.
F: Minden számhoz hozzárendelem a nála 4-gyel nagyobb számot.

b) *E:* Minden számhoz hozzárendelem a kétszeresét.
F: Minden számhoz hozzárendelem a kétszeresénél 5-tel kisebb számot.

6. Ábrázold a szöveges leírás szerinti megfeleltetéseket közös koordináta-rendszerben! Az alaphalmaz és a képhalmaz is a tanult számok halmaza.

a) Válaszd ki azokat, amelyek grafikonjai párhuzamosak egymással!

b) Add meg, melyik grafikon hol metszi az y tengelyt!

A: Minden számhoz hozzárendelem a háromszorosát.

B: Minden számhoz hozzárendelem a harmadánál 1-gyel nagyobb számot.

C: Minden számhoz hozzárendelem a nála 1-gyel nagyobb szám háromszorosát.

D: Minden számhoz hozzárendelem a háromszorosánál 4-gyel kisebb számot.

E: Minden számhoz hozzárendelem a nála 3-mal kisebb szám harmadát.

7. Egy hozzárendelés grafikonja egyenes, melynek megadtuk két pontját, A-t és B-t. Ábrázold koordináta-rendszerben az egyenest a füzetedben! Írd le szövegesen a hozzárendelés szabályát! Olvasd le a grafikonra illeszkedő C és D pontok hiányzó koordinátáit!

a) $A(-1; 5)$ $B(2; 2)$ $C(4; \ldots)$ $D(\ldots; -2)$

b) $A(-4; -3)$ $B(6; 2)$ $C(0; \ldots)$ $D\left(\ldots; \frac{1}{2}\right)$

c) $A(1; -1)$ $B(4; -7)$ $C(-1; \ldots)$ $D(\ldots; 7)$

8. Rajzolj a füzetedbe egy koordináta-rendszert és egy olyan egyenest, amelyik nem egyértelmű hozzárendelés grafikonja!

9. Az A és B halmaz elemei a tanult számok. Az A halmaz elemeihez a B elemeit rendeljük. A hozzárendelés grafikonja egyenes. Néhány összetartozó értékpárt tartalmaz a táblázat.

A elemei	0	3	6	−3	−6
B elemei	1	3	5	−1	−3

Ábrázold a hozzárendelést egy koordináta-rendszerben, és válaszd ki a helyes állításokat! A hibás állításokat javítsd ki!

a) Ez a hozzárendelés egyértelmű.

b) A hozzárendelés szerint minden számhoz hozzárendelem a kétharmadát.

c) A hozzárendelés egyenes arányosság.

d) A $P(-12; -7)$ pont rajta van a grafikonon.

10. Ábrázolás nélkül döntsd el, mi a közös az alábbi hozzárendelések grafikonjaiban!

a) A: Minden számhoz hozzárendeljük a nyolcszorosát.

B: Minden számhoz hozzárendeljük a hetedét.

C: Minden számhoz hozzárendeljük a kétharmadát.

D: Minden számhoz hozzárendeljük a (−7)-szeresét.

b) A: Minden számhoz hozzárendeljük a 10-szeresét.

B: Minden számhoz hozzárendeljük a 10-szeresénél 7-tel nagyobb számot.

C: Minden számhoz hozzárendeljük a 10-szeresénél 5-tel kisebb számot.

D: Minden számhoz hozzárendeljük a 10-szeresénél $\frac{3}{7}$-del nagyobb számot.

11. Egy taxitársaság díjai a következők: alapdíj: 1000 Ft, viteldíj: 400 $\frac{\text{Ft}}{\text{km}}$, várakozás: 100 $\frac{\text{Ft}}{\text{perc}}$.

Rajzold le az egyes esetekhez a megtett kilométerek száma és a fizetendő összeg közötti hozzárendelés grafikonját!

a) 14 km-t teszünk meg, várakozás nélkül.

b) 4 km-t teszünk meg, de közben megállunk egy helyen, ahol a taxi 6 percig vár.

c) Indulásnál vár ránk a taxi 5 percet, aztán elmegyünk a 11 km-re lakó nagymamához.

d) Elmegyünk a nagymamához, 5 percig vár ránk a taxi, aztán hazamegyünk.

Állapítsd meg, melyik esetben egyértelmű a hozzárendelés!

1. PÉLDA

18 kg epret különböző nagyságú dobozokba csomagolnak. Számítsuk ki, hány dobozra van szükség, ha a gyümölcsökből csak 20 dkg-os; 30 dkg-os; 40 dkg-os; 50 dkg-os; 60 dkg-os; 90 dkg-os; 1 kg-os; 1,5 kg-os csomagokat készítenek! Készítsünk az adatokról táblázatot!



Megoldás

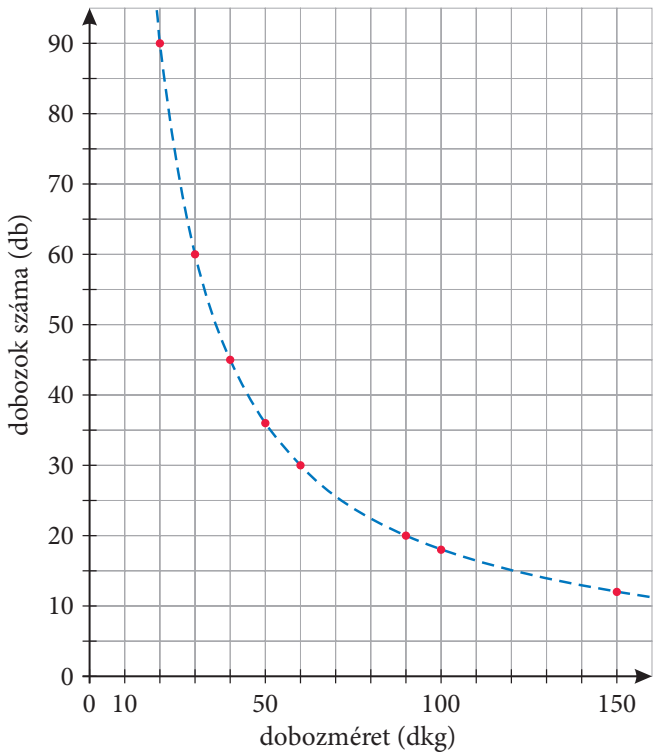
Dobozméret (dkg)	20	30	40	50	60	90	100	150
A dobozok száma (db)	90	60	45	36	30	20	18	12

A táblázatba beírt **mennyiségek összetartozó értékeinek szorzata állandó** (1800 dkg), ezért **a két mennyiség fordítottan arányos.**
Másként fogalmazva, ahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiad részére változik a másik mennyiség.

2. PÉLDA

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az első példában készített táblázat összetartozó értékeit!

Megoldás



EGYÉNI MUNKA

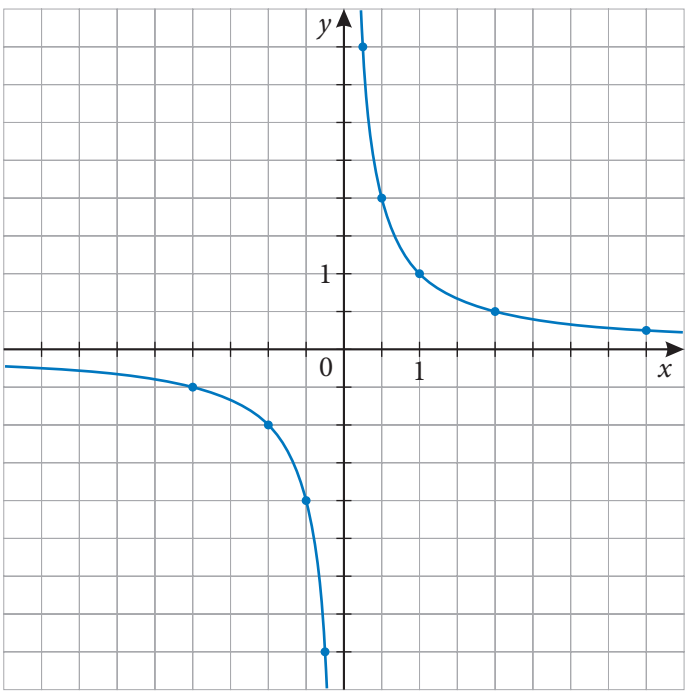
Döntsétek el, hogy fordítottan arányosak-e az alábbi mennyiségpárok!
a) egy pozitív egész szám osztópárjai
b) a 10–14 évesek életkora és magassága
c) a 100 km-es távolság megtételéhez szükséges idő és a közlekedési eszköz sebessége
d) egy 10 km-es futóverseny résztvevőinek száma és a megtételhez szükséges idő
e) egy kerítést festő emberek száma és a lefestéshez szükséges idő

3. PÉLDA

Rendeljük hozzá minden 0-tól különböző számhoz a reciprokát!
a) Készítsünk táblázatot a hozzárendelési szabály alapján!
b) Ábrázoljuk a táblázatban szereplő értékpárokat a koordináta-rendszerben!

Megoldás

x	-2	-1	$-0{,}5$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$0{,}5$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



A hozzárendelési szabály: $x \mapsto \frac{1}{x}$, ahol $x \neq 0$.

A fordított arányosság grafikonja két görbéből áll. Ezt hiperbolának nevezzük. A két görbe a hiperbola egy-egy ága.

3. Fordított arányosság

V.

PÁROS MUNKA

Alkossatok párokat! A páros egyik tagja az I., a másik tagja a II. feladatot oldja meg! Dolgozzatok a füzetetekben!

Feladat:
Készítsetek értéktáblázatot, és ezek alapján ábrázoljátok az itt megadott hozzárendeléseket közös koordináta-rendszerben!

I. Minden számhoz hozzárendeljük
a reciprokát;
a reciprokának a négyszeresét!

II. Minden számhoz hozzárendeljük
a reciprokát;
a reciprokának a felét!



Beszéljétek meg, milyen közös vagy milyen eltérő tulajdonságai vannak az ábrázolt grafikonjaitoknak!

FELADATOK

1. „Tudok segíteni valamiben?” – kérdezte Laci. „Persze – válaszolta Eszter mosolyogva. – Meg tudnád oldani, hogy egy nap 24 helyett 36 órából álljon?” „Semmi akadálya – vigyorgott Laci –, de akkor csak 40 perces lesz egy óra.” Tegyük fel, hogy egy nap 1440 percből áll! Hány perces lesz egy óra, ha egy nap

a) 12 óra; *b)* 6 óra;
c) 5 óra; *d)* 40 óra;
e) 48 óra; *f)* 60 óra?

2. „Ha ezeket mind egyedül szerelem össze, a prospektus szerint 60 órám rámegy” – boszszankodott Pista bácsi. „Majd mi segítünk!” – válaszolták a gyerekek, unokák és szomszédok. Hány óra alatt végeznek a szereléssel, ha

a) ketten; *b)* hárman;
c) négyen; *d)* öten;
e) tizenöten; *f)* húszan;
g) harmincan; *h)* ezren dolgoznak rajta?

I. Foglald táblázatba megoldásaidat!
II. Ábrázold koordináta-rendszerben a táblázat összetartozó értékeit!

3. Egy tengerimalac átlagosan napi 4 dkg szaraztápot fogyaszt. Hány napra elegendő 1 kg táp

a) 1; *b)* 2; *c)* 5;
d) 10; *e)* 25 tengerimalacnak?

Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékeket!

4. Hatalmas falusi lagzira készül a Buli család. Pénteken 3000 lufit kell felfújniuk. A szervezők úgy kalkuláltak, hogy 8 ember 15 óra alatt fúj fel ennyi lufit.

a) 20 ember hány óra alatt végezne vele?
b) 3 óra alatt hány ember tudná felfújni a 3000 lufit?
c) Hogyan számoltak a szervezők, 1 ember 1 óra alatt hány lufit tud felfújni?

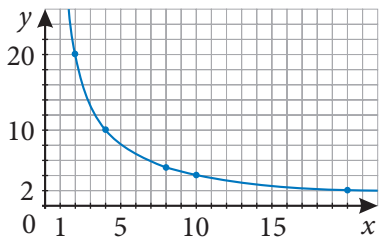
5. A fővárosi nagy lecsófesztiválra rengeteg segítő diák érkezett. Szükség is van rájuk, hiszen az előzetes számítások szerint 1440 kg paprikát kell felkarikázzanak.

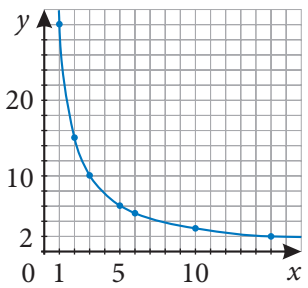
a) Ha 60 diák 4 óra alatt végez a karikázással, mennyi ideig tart ez 25 diáknak?
b) Hány diáknak kellene egyszerre dolgoznia ahhoz, hogy 20 perc alatt készen legyenek?

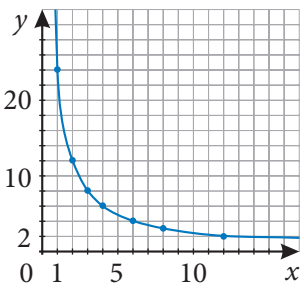
6. Táblázatba foglaltuk az összetartozó értékpárokat.
a) Ábrázold ezeket koordináta-rendszerben, és döntsd el, fordított arányosság grafikonját látod-e!
b) Találj ki egy történetet, ami illik a megadott számpárokhoz!

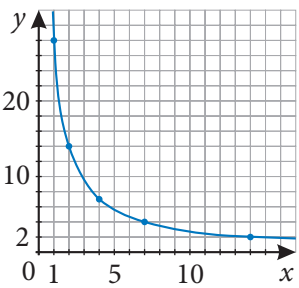
x	1	2	3	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	30	15	10	6	60	90

7. Párosítsd a diagramokat a leírásokkal! Készíts táblázatot a füzetedbe, és írd bele az összes értékpárt a diagram alapján!
a) Három ember 8 nap alatt, két ember 12 nap alatt végez a munkával.
b) Öt gyereknek 6 napra, hat gyereknek 5 napra elegendő a tábor maradék fogkrémkészlete.
c) Két csap 14 óra alatt, négy csap 7 óra alatt tölti meg a medencét.
d) 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 20 óra alatt, 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 8 óra alatt érünk Perőcsénybe.

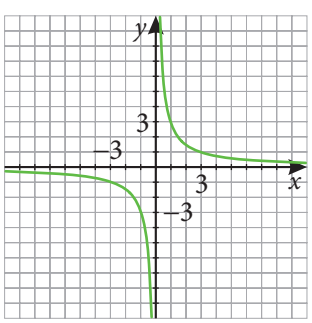
A)


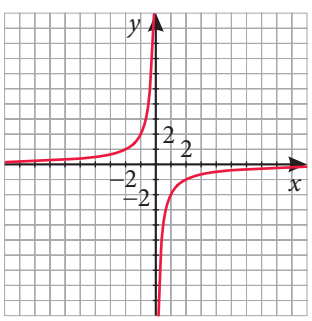
B)


C)


D)


8. Keress összetartozó pontpárokat, és fogalmazd meg a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési szabályt!

a)


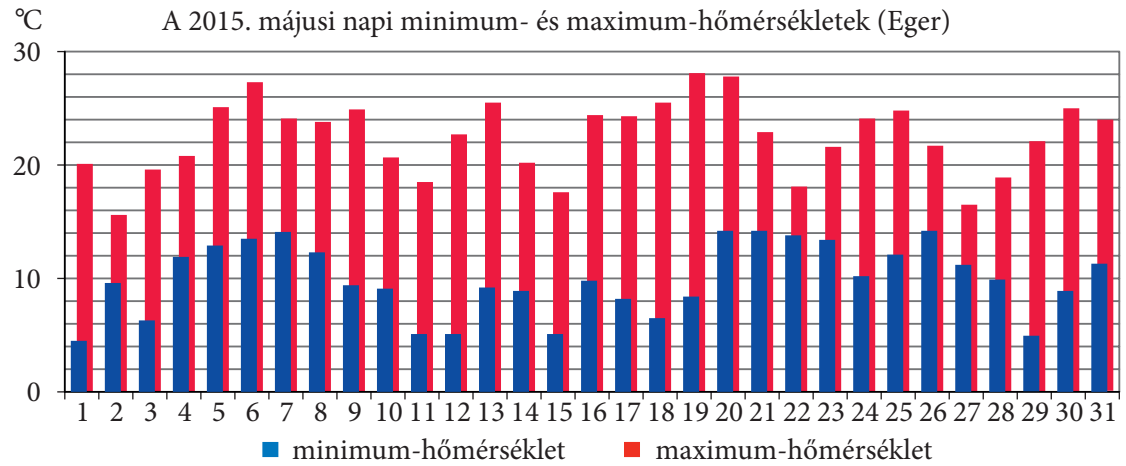
b)


4. Olvassunk a grafikonról! V.

A mindennapi életünkben gyakran van szükségünk arra, hogy grafikonokat, diagramokat értelmezzünk. Az internetes időjárás-előrejelzést, a valuták árfolyamainak változását, a banki kamatváltozásokat gyakran grafikonon jelenítik meg. Az alábbi példák azt segítenek megérteni, hogyan lehet adatokat grafikonokról, diagramokról leolvasni, illetve értelmezni.

1. PÉLDA

A diagramon az Országos Meteorológiai Szolgálat mérései alapján rögzített adatok láthatók.



a) Melyik napon volt a leghidegebb, és melyiken a legmelegebb Egerben 2015 májusában?
b) Mikor volt a legnagyobb a különbség a napi hőmérsékleti minimum- és maximumérték között?
c) Gerzson a napi középhőmérsékletet a minimum és a maximum átlagából számolta ki. Te hogyan számolnád a napi középhőmérsékletet, ha a minimum- és maximumérték mellett még rendelkezésre állnak a 7, 13 és 19 órakor mért értékek is?

Megoldás

a) A leghidegebb május 1-jén volt, 4 és 5 °C között. A legmelegebb május 19-én, körülbelül 28 °C.
b) Néhány napot egyből ki lehet zárni, mert a közelében látunk olyan kék és piros oszlopot, ahol nagyobb a különbség. Nézzük meg május 18-át és 19-ét alaposabban. Teljesen pontos értéket nem tudunk leolvasni a diagramról, de az látszik, hogy ezen a két napon volt a legnagyobb a hőingadozás, talán 19-én egy kicsit nagyobb, mint 18-án.

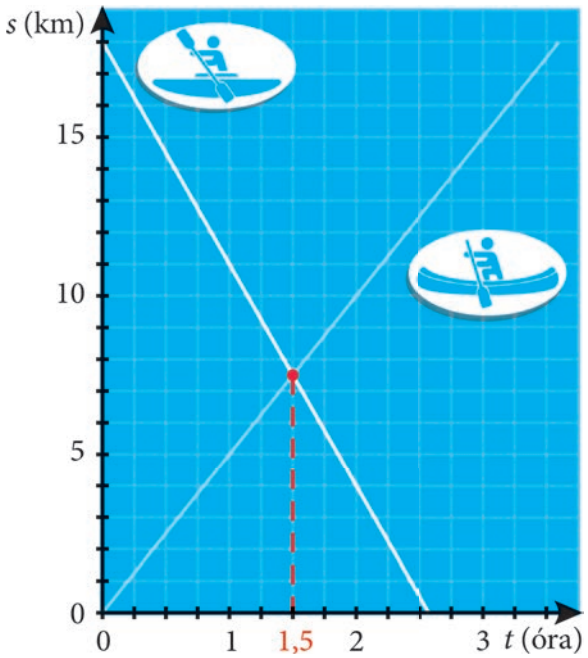
	Minimum	Maximum	Különbség
május 18.	6–7	25–26	19–20
május 19.	8–9	28	19–20

c) A napi középhőmérséklet kiszámítására nagyon sok lehetőség van.
1. A 7, 13 és 19 órakor mért értékek számtani közepe.
2. A minimum és a maximum hozzávételével az öt érték számtani közepe stb.
Ha meg szeretnéd tudni, hogyan számítják ki a napi középhőmérsékletet a meteorológusok, keress rá az interneten!

2. PÉLDA

Balatonszemes és Fonyód kikötője 18 km távolságra van egymástól. Fonyódról 5 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ egyenletes sebességgel egy kenu indul el Balatonszemes kikötőjébe. Ugyanebben az időben Szemesről egy kajak indul el Fonyódra, amely 7 km-t tesz meg óránként.

a) Ábrázoljuk a hajók helyzetét koordináta-rendszerben!
b) Mennyi idő alatt ér Balatonszemesre a kenu?
c) Mikor haladnak el egymás mellett?
d) Mikor voltak 6 km-re egymástól?



Megoldás

a) Az egyenletesen mozgó testek út-idő összefüggése $s = v \cdot t$, ahol s a megtett út, v a test sebessége, és t az eltelt idő. Ezek alapján:
A kenu által megtett utat $s = 5 \cdot t$ alakban írhatjuk fel. Ez az adat egyben az indulási helyétől mért távolságát is jelenti. A tőle 18 km-re lévő kikötőből induló kajak Fonyódtól mért távolságát a $18 - 7 \cdot t$ kifejezés írja le.

b) A kenu 3,6 óra = 3 óra 36 perc alatt ér Szemesre.

c) A két grafikon a $t = 1{,}5$-nél metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy a két hajó az indulás után 1,5 órával haladt el egymás mellett.
Ellenőrzés: A kenus 7,5 km-t, a kajakos 10,5 km-t tett meg. Ketten együtt 18 km-t, ami az eredetileg köztük lévő távolság, így valóban az indulás után másfél órával találkoztak.

d) Olyan pontokat kell keresni a hajók helyét mutató egyeneseken, amelyek az y tengely mentén mérve 6 egység távolságra vannak egymástól. Két lehetőség van.
I. Indulás után 1 óra elteltével a kenu 5 km-t tett meg, a kajak 7 km-t. Ez összesen 12 km, és induláskor 18 km-re voltak. Tehát 6 km-re vannak egymástól.
II. Indulás után 2 órával. Ekkor a kenu 10 km-t, a kajak 14 km-t tett meg. Ekkor már elhaladtak egymás mellett, közöttük a távolság ismét $10 + 14 - 18 = 6$ km.

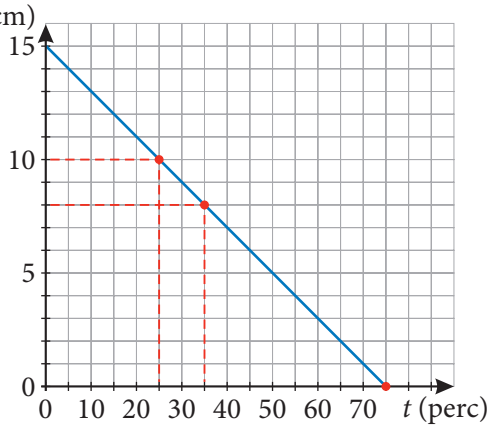
3. PÉLDA

Egy egyenletesen égő, henger alakú gyertya magassága a meggyújtás után 10 perc alatt 2 cm-t csökken.

a) Ábrázoljuk a 15 cm-es gyertya magasságának változását az idő függvényében!
b) Mennyi idő alatt ég le a gyertya?
c) Mennyi idő múlva lesz a gyertya magassága 8 cm?
d) Milyen magas lesz a gyertya 25 perc múlva?

Megoldás

a) h (cm)



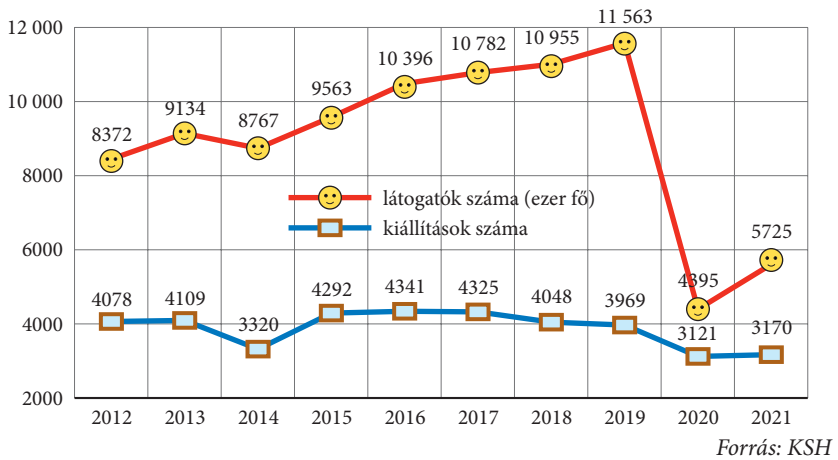
A *b)*, *c)* és *d)* kérdésekre a választ legkönnyebben a grafikon segítségével adhatjuk meg.

A grafikon alapján látható, hogy:
b) a gyertya 75 perc alatt ég le;
c) a gyertya magassága 35 perc múlva lesz 8 cm;
d) a gyertya 25 perc múlva 10 cm magas lesz.

FELADATOK

1. Nézd meg az alábbi grafikon adatait, majd válaszolj a kérdésekre!

A múzeumlátogatók és a kiállítások száma Magyarországon (2012–2021)

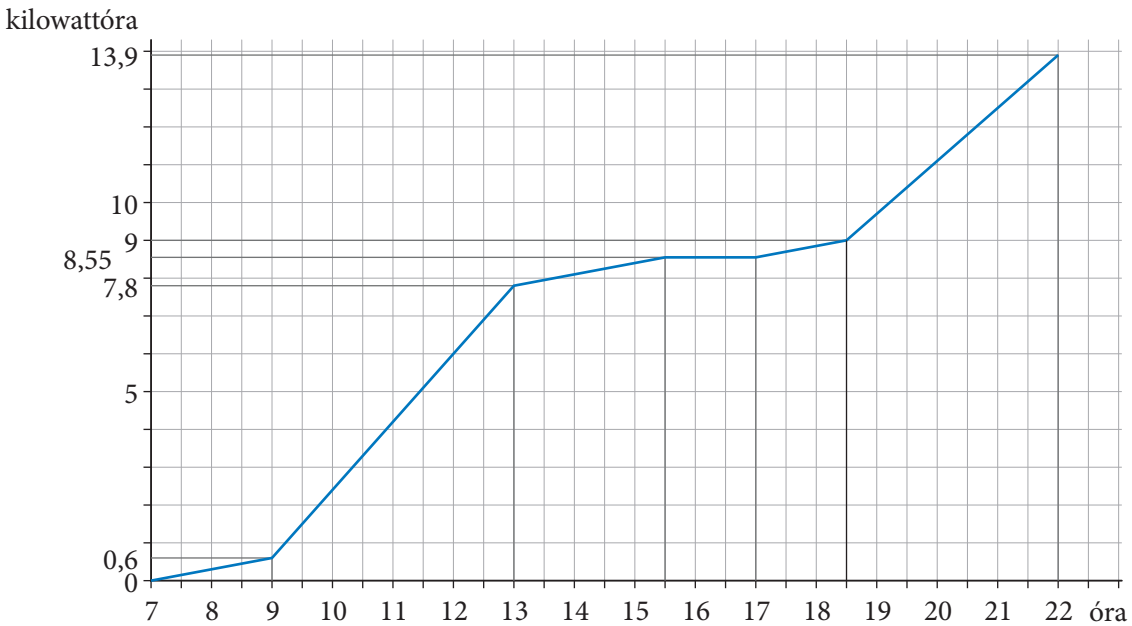


Forrás: KSH

a) Melyik évben volt a legtöbb kiállítás Magyarországon?
b) Mennyien látogatták a kiállításokat 2016-ban?
c) Mikor volt a legtöbb látogató?
d) Melyik évben volt nagyobb az egy kiállításra jutó átlagos látogatószám, 2014-ben vagy 2021-ben?

2. Tamásék 80 literes melegvíz-tárolója pont akkor kezdett el csöpögni, amikor elutaztak nyaralni. Három nap alatt szép lassan, egyenletesen kicsöpögött belőle az összes víz.
Ábrázold a tartályban lévő víz fogyását az idő függvényében!

3. Az alábbi grafikon azt mutatja, mennyi áramot használt el a Kellér család szombaton. Délelőtt beindult a szokásos hétvégi takarítás és főzés, így 1,8 kilowattot használtak óránként. Délután kirándultak egyet a környező dombokon, ekkor csak 0,3 kilowattóra volt a fogyasztás, de estére ismét 1,4 kilowattórára nőtt az áramfelhasználás. Válaszolj a kérdésekre az alábbi grafikon alapján!



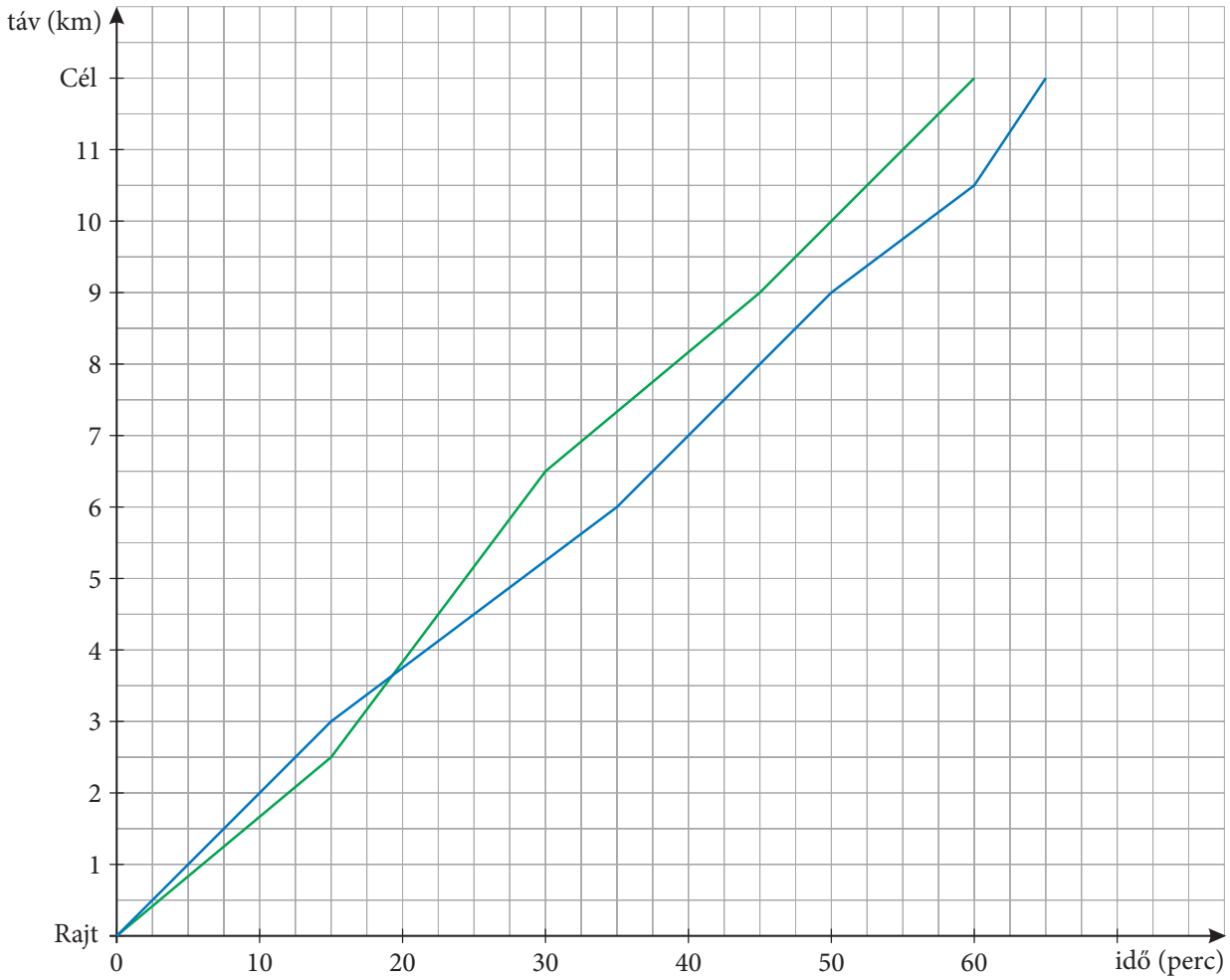
a) Hány órakor ébredtek szombat reggel?
b) Hány órakor kezdték el az otthoni munkákat?
c) Mikor indultak kirándulni?
d) Mi okozhatja a fogyasztást, ha nincsenek otthon?
e) Mit jelenthet a vízszintes szakasz 15:30 és 17:00 óra között?
f) Mikor lépték át az 5 kilowattórás fogyasztást?

4. Dávid a suliba busszal és biciklivel is mehet. Ha busszal megy, minden reggel 6 perc a várakozási idő. A busz 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s sebességgel haladva teszi meg az iskolába vezető 6 km-es utat, és szinte a suli előtt teszi le Dávidot. Biciklivel 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s átlagsebességgel teker el az iskoláig.



a) Ábrázold a megtett utat mindkét esetben az idő függvényében!
b) Melyik járművel ér előbb az iskolába Dávid?
c) Hány órakor ér a suliba, ha 7:20-kor indul el otthonról?

5 Lóci és Samu elindultak a 12 km-es futóversenyen. A grafikonon a helyüket leíró hozzárendelést ábrázoltuk az idő függvényében a rajttól a célig. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!



a) Lóci kicsit lassabban kezdett Samunál. Milyen színű grafikon mutatja Lóci teljesítményét?

b) Ki futotta le gyorsabban a 12 km-t?

c) Hány perc alatt futotta le a távot Lóci?

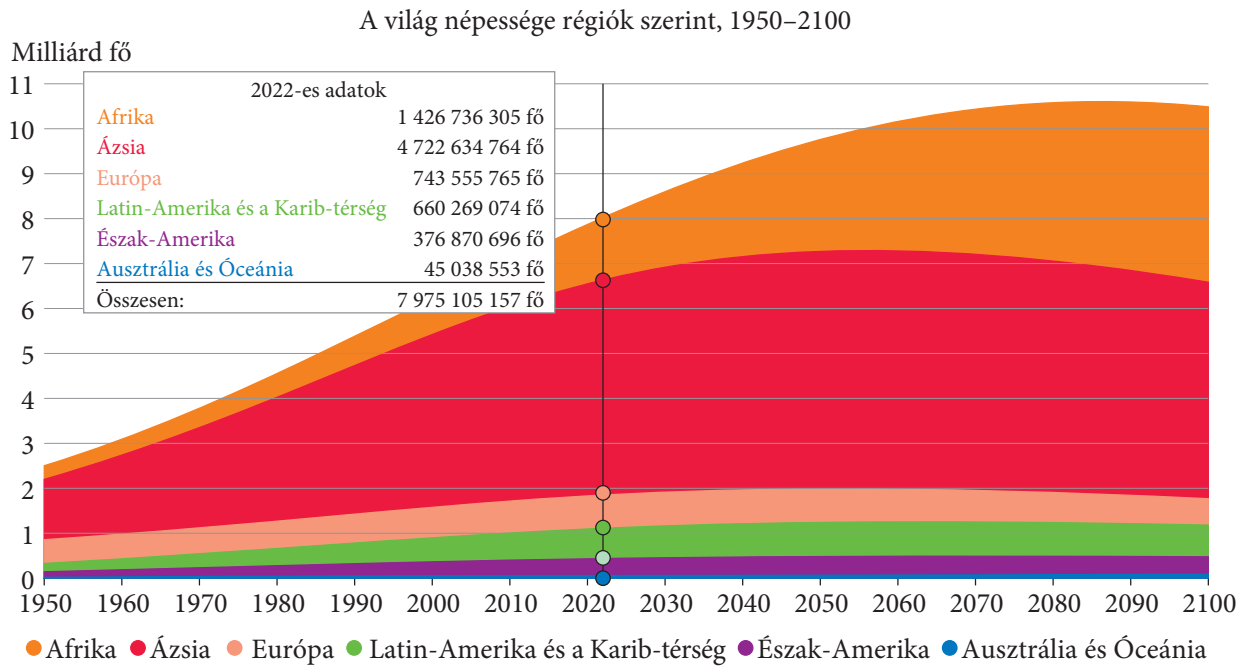
d) Samu a verseny utolsó 5 percében hatalmasat sprintelt. Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val futott ekkor?

e) Számítsd ki, melyik gyereknek mekkora volt az átlagsebessége!

f) Fogalmazd meg, honnan olvasható le a grafikonról, hogy az egyik fiú megelőzte a másikat! Ki kit előzött meg?

g) Hányadik percben történt az előzés?

6. Az ENSZ demográfusai elkészítették a világ népességének alakulására vonatkozó előrejelzéseket 1950-től 2100-ig. Válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!



a) Melyik régióban éltek a legtöbben 2022-ben?
b) Körülbelül hány ember élt a Földön 2022-ben?
c) Körülbelül hányan éltek a Földön 1950-ben? Ehhez képest hány év alatt duplázódott meg a bolygónkon élő emberek száma?
d) Az előrejelzés szerint mikor lesz 10 000 000 000 ember a Földön?
e) Melyik régióban várható a legnagyobb népességnövekedés a következő 20 évben?
f) Hányszor annyian éltek 2022-ben Afrikában, mint Európában? Ez a szám az évek múlásával növekedni vagy csökkenni fog?
g) Mit gondolsz, miért mondják a demográfusok, hogy a Föld lakóinak száma egyszer eléri a maximumot, és aztán csökkenni kezd?



KUTATÓMUNKA

Látogass el a Központi Statisztikai Hivatal (KSH) honlapjára, és keress interaktív grafikonokat! Válassz ki egyet, és készíts róla kiselőadást társaidnak!

5. Készítsünk grafikont!

V.

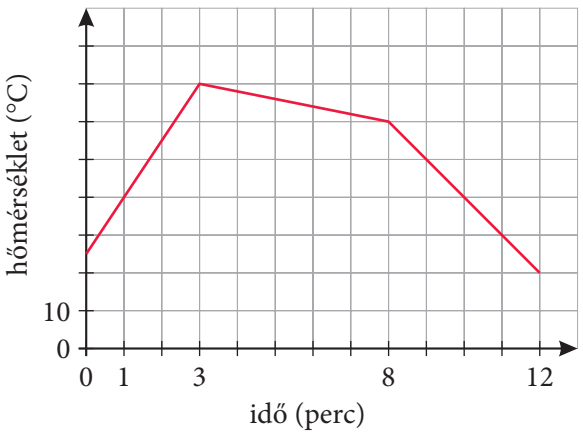
Összefüggések, változások bemutatásához gyakran szemléletesebb, ha egy figyelemfelkeltő grafikont használunk az adatok puszta sokasága helyett. Kísérletek elvégzésekor, adatok elemzése alkalmával vagy előadásokon szükség lehet arra, hogy az eredményeket grafikonon ábrázoljuk.

1. PÉLDA

Gábor és Zsolti kísérleteztek. Azt vizsgálták, hogyan változik a hőmérséklet, ha a vizet először felmelegítik, majd hűteni kezdik. Vízforralóval 3 perc alatt melegítették fel a vizet 25 °C-ról 70 °C-ra. Ezután a vízforralót kikapcsolták, majd a vizet 5 percig hűlni hagyták. Ekkor a víz 60 °C-os lett. Ezt követően egy jégkockát dobtak bele, és 4 perc elteltével a víz 20 °C-ra hűlt. Azt tapasztalták, hogy az egyes szakaszokon a hőmérséklet-változás egyenesen arányos az eltelt idővel.
Ábrázoljuk a szöveges utasítással megadott hozzárendelés grafikonját!

Megoldás

A hozzárendelés grafikonja három szakaszból áll.



2. PÉLDA

Egy autós és egy motoros két, egymástól 12 km-re lévő településről indul el, egymással szembe. Az autós percenként 1,2 km-t, a motoros percenként 0,8 km-t tesz meg.

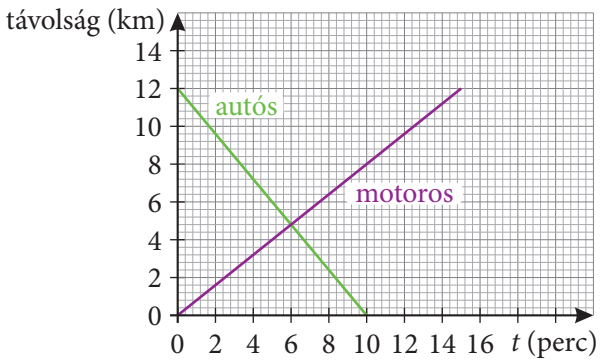
a) Ábrázoljuk az autós és a motoros mozgását közös koordináta-rendszerben!

b) Olvassuk le a grafikonról, hogy mennyi idő elteltével találkoznak!

c) Mekkora utat tett meg a találkozásig az autós, és mekkora utat a motoros?

Megoldás

a) A koordináta-rendszer vízszintes tengelye az eltelt időt, a függőleges tengely az autós és a motoros helyét jelöli a két település között.
A két grafikon a (6; 4,8) pontban metszi egymást.



b) A metszéspont első koordinátája arról informál, hogy az indulástól számítva mennyi idő múlva találkoznak. Tehát a találkozás 6 perc múlva lesz.
c) A metszéspont második koordinátája arról informál, mennyi utat tettek meg a járművek. A motoros 4,8 km-t, az autós $12 - 4{,}8 = 7{,}2$ km-t.

A grafikonról azt is leolvashatjuk, hogy az autós 10 perc alatt, a motoros 15 perc alatt érte el célját.

3. PÉLDA

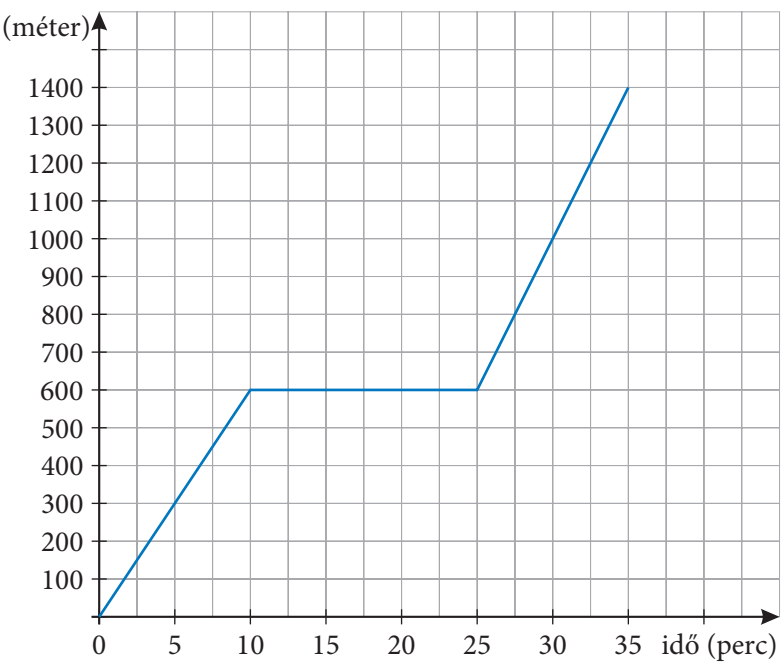
Janka az iskolából hazafelé menet 10 perc alatt 600 m-t tett meg. Megállt egy fagyizónál, ott találkozott a barátnőjével, és negyed órát beszélgettek. Rájött, hogy otthon várják, ezért most már a hazaérkezésig gyorsabban haladt, 800 m-t tett meg 10 perc alatt.

a) Ábrázoljuk grafikonon Janka mozgását!
b) Ábrázoljuk ebben a koordináta-rendszerben, hogyan mozgott volna akkor, ha nem állt volna meg a fagyizónál, hanem végig egyenletes sebességgel ment volna, és ugyanannyi idő alatt ért volna haza! Mekkora lett volna ekkor a sebessége?

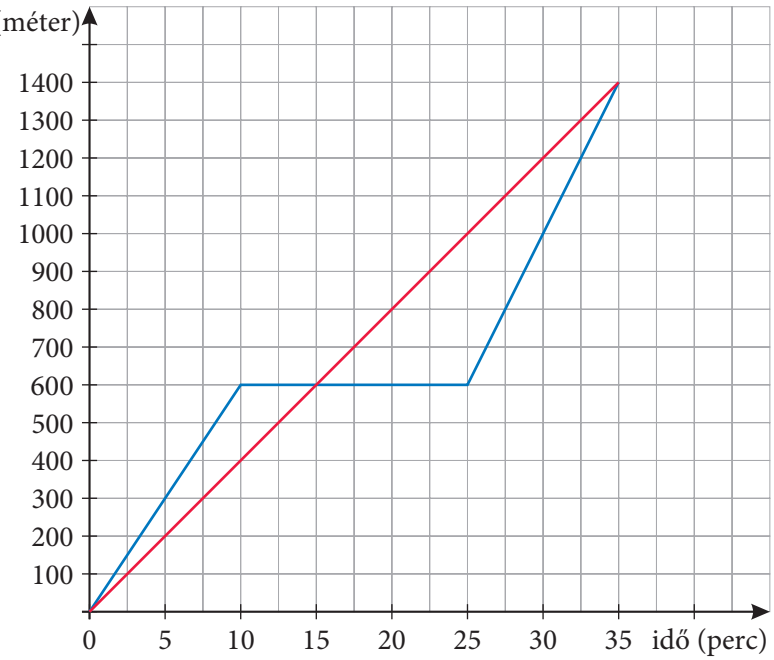


Megoldás

a)



b)



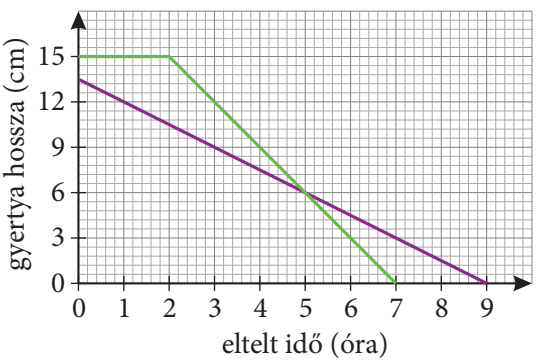
Janka 35 perc alatt ért haza. A grafikonról leolvasható, hogy 1400 métert tett meg összesen, így sebessége 40 $\frac{\text{m}}{\text{perc}}$.

4. PÉLDA

Egy lila gyertya 13,5 cm magas, és 9 óra alatt ég le. Egy mellette álló, 15 cm magas zöld gyertyát 2 órával később gyújtanak meg, s 5 óra alatt ég le.
Ábrázoljuk a gyertyák magasságát az eltelt idő függvényében!
Olvassuk le a grafikonról, mikor lesz a két gyertya azonos magasságú!
Mikor lesz a két gyertya magasságának különbsége 3 cm?

Megoldás

A két gyertya 5 órával a lila, 3 órával a zöld gyertya meggyújtása után lesz egyforma magasságú.
A két gyertya magasságkülönbsége három időpontban lesz 3 cm: a lila gyertya meggyújtása után 1 óra, 3 óra és 7 óra elteltével.



5. PÉLDA

Egy kamion reggel 6 órakor hagyja el a rakodóterminált. Átlagosan 80 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel halad. Két óra múlva észreveszik, hogy egy, a célállomásra küldendő irat az irodában maradt. Egy motoros futárt küldenek a kamion után, aki átlagosan 110 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel megy. A kamionos négy óra vezetés után 30 percre megáll, hogy kivegye a kötelező pihenőidőt.

a) Mennyi idő elteltével éri utol a motoros a kamiont?

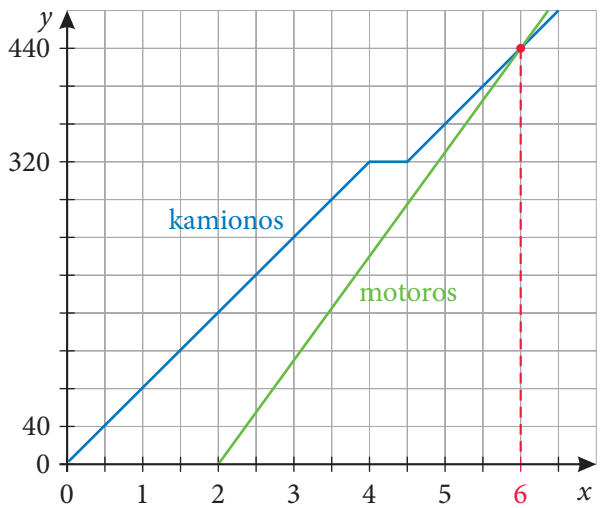
b) Az autópályán nem lehet tetszőleges helyen megállni. A találkozás időpontjától a legközelebbi pihenőhely 15 percre van. Mikor tudja átadni az iratot a motoros futár?

Megoldás

A feladat első olvasásra összetettnek tűnhet, de könnyen megoldható, ha a két jármű mozgását grafikonon ábrázoljuk.

a) A két grafikon metszéspontjának segítségével válaszolhatunk a kérdésre. A metszéspont első koordinátája adja meg a találkozásig eltelt időt. Ez leolvasható a grafikonról. A kamion indulásától számított 6 óra elteltével találkoznak.
Ekkorra a kamionos már 5,5 órát ment, tehát 440 km-t tett meg. A motoros menetideje 4 óra volt, ekkor ő is 440 km-t tett meg.

b) Az irat átadása a kamion indulásától számítva 6 óra 15 perc múlva, azaz 12 óra 15 perckor történhet meg.



Ellenőrzés: Mivel a motoros 4 óra alatt ugyanannyit tett meg, mint a kamionos (440 km), valóban ekkor találkoztak.

FELADATOK

1. Balázs elment vásárolni. 2 perc alatt 150 m-t tett meg. 8 perc alatt ért a boltba, ahol 5 percet töltött. Visszafelé ugyanazon az úton ment, és sietett, ezért 6 perc alatt hazaért.

a) Ábrázold Balázs mozgását az idő függvényében indulástól hazaérkezésig!

b) Milyen messze volt a bolt?

c) Mennyi ideig volt távol?

d) Mikor haladt el a házuktól 300 m-re lévő fagyizó előtt?

2. Döme Szadáról indult el Szelessel, a lovával. Már fél órája 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel ügettek, amikor a ló Őrbottyánnál megbokrosodott, ledobta a lovasát, és 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val elvágtatott, egészen Kállóig.

a) Ábrázold a ló által megtett utat az idő függvényében!

b) Az esés után Döme 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel hazagyalogolt Szadára. Ábrázold grafikonon Döme helyét az idő függvényében! Olvasd le, hány perc alatt ért haza!

3. Ez egy könnyű feladat lesz! – mondta Feri bácsi, a tesitanár, de a gyerekek gyanakodva néztek rá. – Tudjátok, két gyors, egy lassú – amire a gyerekek felhorkantak. Hiszen erről már tudták, hogy futni fognak, 2 × 100 métert gyorsan, 1 × 100 métert lassan. Csak kétszer egymás után! – nyugtatgatta őket Feri bácsi, de ezzel már nem sokat segített. Bertalan az első 2 × 100 méteres gyors szakaszt 40 mp alatt, a második 2 × 100 méteres gyors szakaszt 48 mp alatt tette meg. A lassú 100 métereken 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s átlagsebességgel kocogott.



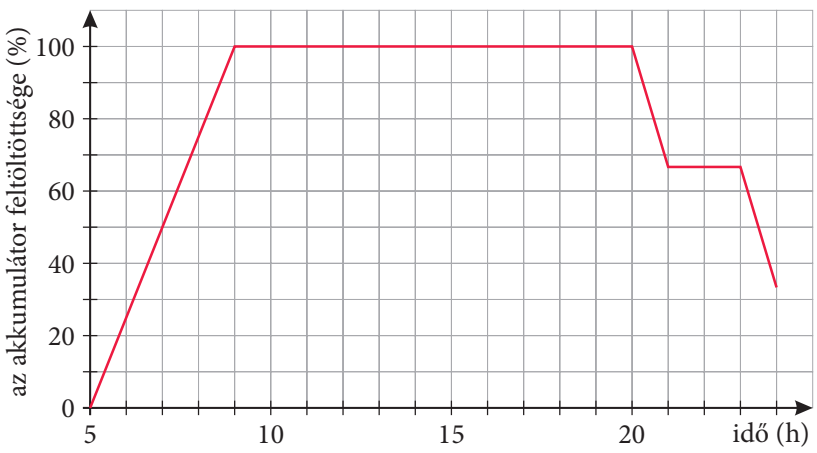
a) Hány mp alatt teljesítette az egész távot?

b) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val futott gyorsabban az első 2 × 100 méteres gyors szakaszon, mint a másodikon?

c) Ábrázold a Bertalan által megtett teljes utat az idő függvényében!

4. Panni családja a nyaralás alkalmával lakókocsiban lakott. A lakókocsi tetején napelem volt, ami napfényes időben 4 óra alatt teljesen feltöltötte az akkumulátort. Panniék sötétedés után ennek segítségével világítottak. Ha folyamatosan égett a lámpa, három óra alatt az összes eltárolt napenergiát elhasználták. A nap 5-kor kelt, és este 8-kor nyugodott le.

a) Találj ki egy történetet az alábbi grafikonhoz!



b) Egy felhős napon kétszer annyi idő alatt töltődött fel az akkumulátor, majd sötétedés után addig társasoztak a lakókocsiban, míg világított a lámpa. Ábrázold grafikonon az akkumulátor töltöttségének változását az idő függvényében!

5. A kisrepülő 1800 méter magasságban szállt. Kíra, aki a magasságmérőt figyelte, ötpercenként feljegyezte, hány métert emelkedett (e), illetve süllyedt (s) a repülő az előző magasságadathoz képest. A repülő végig egyenletes tempóban haladt.

feljegyzés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
magasságváltozás (m)	150 s	200 e	50 e	350 e	100 s	250 s	50 e	150 e

Ábrázold a kisrepülő szintkülönbség-változását az eltelt idő függvényében!

6. A kertünkben hétfőn hajnalban 3,6 cm magas volt a fű. Naponta 4 mm-t nőtt. Szerdán este levágtuk, így 2 cm magas lett. Aztán újra nőni kezdett, ugyanúgy, mint eddig.

a) Ábrázold a fű magasságát az eltelt idő „fű – ggvényében”!

b) Mikor lesz a fű 5 cm magas?



7. Rajzolj feladatonként egy-egy koordináta-rendszert, és ábrázold bennük az alábbi tulajdonságú pontokat!

a) A pontok y koordinátája megegyezik az x koordináta négyzetével.

b) A pontok y koordinátája megegyezik az x koordináta abszolút értékével.

c) A pontok y koordinátája megegyezik az x koordináta reciprokával.

8. Mérd meg három napon keresztül naponta öt alkalommal a szabadban a levegő hőmérsékletét! Mérésedhez használhatsz telefonos applikációt.

a) Készíts egy grafikont a mért hőmérsékletekről az eltelt idő függvényében!

b) Összeköthetők-e a grafikonon ábrázolt pontok? Válaszodat indokold!
Hány Celsius-fok volt a legmagasabb és legalacsonyabb hőmérséklet közötti különbség?



KUTATÓMUNKA

Keress az interneten olyan alkalmazást, amelyik függvényt ábrázol! Válaszd ki a 7. feladat egyik függvényét, és ábrázold az alkalmazás segítségével! Beszéljétek meg, ki milyen alkalmazást talált!

6. Gyakoriság, relatív gyakoriság, átlag V.

Az elmúlt években számos adatot gyűjtöttünk általunk elvégzett kísérletek vagy természetben előforduló események alapján. Ezeket az adatokat gyakran táblázatba rendeztük, és oszlopdiagramon, vonaldiagramon, illetve kördiagramon szemléltettük. Megismerkedtünk adatok középértékével. Meghatároztuk az adatok **móduszát**, de ha az adataink számok voltak, akkor ki tudtuk számolni az **átlagukat** (számtani közepüket) és a **mediánjukat** is. Megszámláltuk, hogy egy-egy esemény hányszor következett be, azaz felírtuk az események **gyakoriságát**. Hogy a különböző kísérletekből származó adataink könnyebben összehasonlíthatók legyenek, a **relatív gyakoriságot** használtuk annak leírására, hogy mekkora eséllyel következik be egy esemény. Hetedikben azt is láttuk, hogy ha egy kísérletet nemcsak százszor, hanem többször hajtunk végre, akkor a relatív gyakoriságok kevésbé fognak változni. Ezeket a korábban tanult ismereteket két példán keresztül ismételjük át.

1. PÉLDA

Hasonlítsuk össze Budapest és London havi átlagos csapadékmennyiségét! Az adatokat mm-re kerekítettük.



	Budapest	London
január	37	55
február	29	41
március	30	42
április	42	44
május	62	49
június	63	45
július	45	45
augusztus	49	50
szeptember	40	49
október	39	69
november	53	59
december	43	55

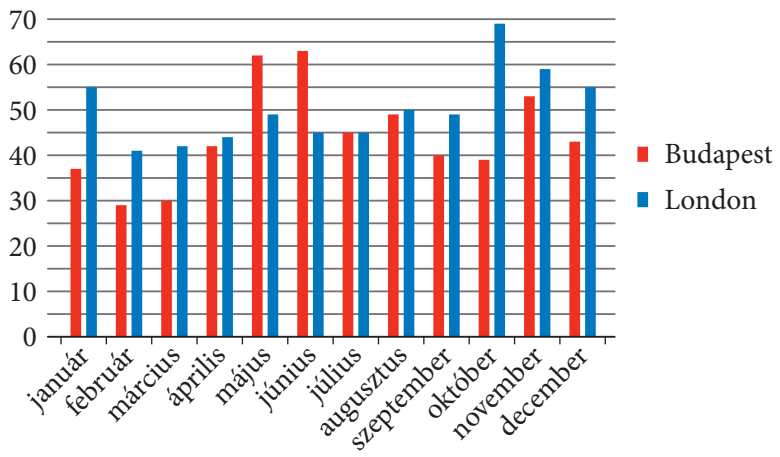
a) Mennyi az éves csapadékmennyiség Budapesten, illetve Londonban? Mennyi a csapadék átlagos havi mennyisége?
b) Ábrázold az adatokat!
c) Hány hónapban haladja meg a Londonban mért havi csapadékmennyiség a budapesti értékeket?
d) Mely hónapokban haladta meg legalább 15 mm-rel a havi londoni csapadékmennyiség a budapestit?

Megoldás

a) Adjuk össze az egyes oszlopokban szereplő számokat! Az éves csapadékmennyiség Budapesten 532 mm, Londonban 603 mm.

Az átlagokra vonatkozóan $\frac{532}{12} \approx 44{,}33$ mm-t és $\frac{603}{12} = 50{,}25$ mm-t kapunk.

b) Az adatokat célszerű oszlopdiagramon ábrázolni, mert a kördiagram csupán arányokat mutat.
c) A Londonban mért havi átlagos csapadékmennyiség 9 hónapban haladja meg a budapesti adatokat.
d) Csak két ilyen hónap van, az október és a január.



2. PÉLDA

A 8. b osztály tanulói szavazással döntötték el, hogy mi legyen a kötelező olvasmány. Öt könyvet jelöltek ki, amelyekből mindenkinek legalább egyet el kellett olvasnia. A táblázatban az szerepel, hogy hányan választották az egyes könyveket. (Volt, aki többet is elolvasott, őket csak az általuk első helyen rangsorolt könyvnél vettük figyelembe.)

A hobbit	*Harry Potter és a Halál ereklyéi*	*Időfutár – A körző titka*	*Kétévi vakáció*	*Twilight – Alkonyat*
4	9	6	3	8

a) Írjuk fel, milyen gyakorisággal választották az osztály tanulói az egyes könyveket!
b) Készítsünk az adatokból oszlop- és kördiagramot!
c) Ha az iskola 124 nyolcadikosának véleményét össze akarjuk vetni a 8. b osztály véleményével, akkor a gyakoriságokat vagy a relatív gyakoriságokat érdemes összehasonlítani? Miért?
d) Mi az adatok módusza?

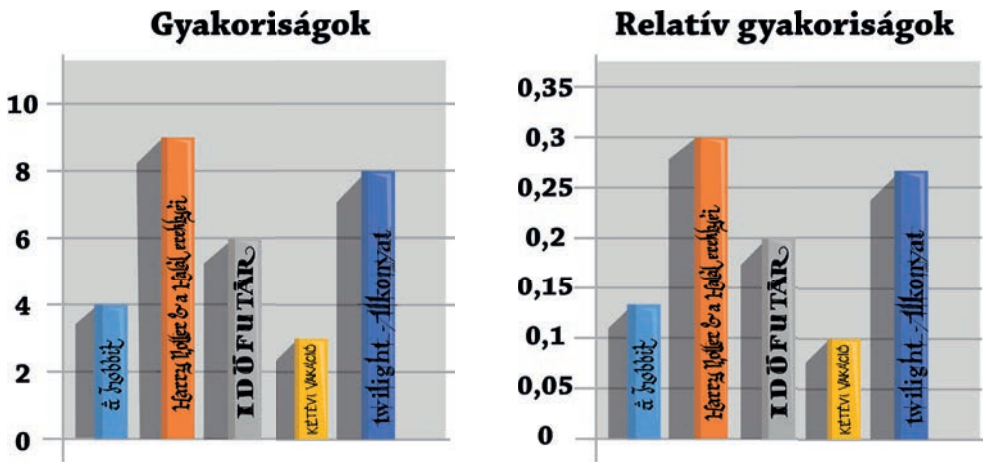
Megoldás

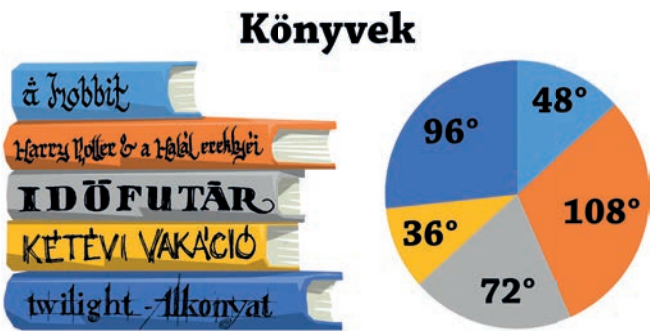
a) A táblázat alapján $4 + 9 + 6 + 3 + 8 = 30$ gyerek járt az osztályba. Ez alapján az egyes könyvek választásának gyakorisága a következőképpen határozható meg:

	A hobbit	*Harry Potter és a Halál ereklyéi*	*Időfutár – A körző titka*	*Kétévi vakáció*	*Twilight – Alkonyat*
Gyakoriság	4	9	6	3	8
Relatív gyakoriság	$\frac{4}{30} = 0{,}1\dot{3}$	$\frac{9}{30} = 0{,}3$	$\frac{6}{30} = 0{,}2$	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	$\frac{8}{30} = 0{,}2\dot{6}$

b) Kétféle oszlopdiagramot is készítettünk: egyet a gyakoriságokról, egyet a relatív gyakoriságokról. Különbséget csak az y tengely méretezése jelent. A relatív gyakoriságok összege mindig 1. A kördiagram középponti szögei:

	A hobbit	*Harry Potter és a Halál ereklyéi*	*Időfutár – A körző titka*	*Kétévi vakáció*	*Twilight – Alkonyat*
Relatív gyakoriság	$\frac{4}{30} = 0{,}1\dot{3}$	$\frac{9}{30} = 0{,}3$	$\frac{6}{30} = 0{,}2$	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	$\frac{8}{30} = 0{,}2\dot{6}$
Középponti szög	$\frac{4}{30} \cdot 360° = 48°$	$\frac{9}{30} \cdot 360° = 108°$	$\frac{6}{30} \cdot 360° = 72°$	$\frac{3}{30} \cdot 360° = 36°$	$\frac{8}{30} \cdot 360° = 96°$





c) Természetesen a relatív gyakoriságokat, mivel ez mutatja meg az egyes könyvek népszerűségének arányait.

d) A *Harry Potter és a Halál ereklyéi* a legkedveltebb, így ez lesz a módusz.

KUTATÓMUNKA

Kik a könyvek írói?



FELADATOK

1. Határozd meg a 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 6; 6 számok átlagát, móduszát, mediánját!

2. Egy 28 fős osztály átlaga irodalomból pontosan 4,25.
a) Ha hét gyereknek lenne kettese, akkor milyen jegye lenne a többieknek?
b) Lehet-e nyolc gyereknek kettese?
c) Hány gyereknek van négyese, ha csak négyes és ötös volt az osztályban?
d) Mi lehet a módusz?

3. Anya koktélparadicsomot termeszt a kertben. Gazsi rendszeresen locsolja, gyomlálja. A 24 tő paradicsomról egyik reggel még egy vázlatrajzot is készített, amelybe beírta, hogy melyik tőről hány kis paradicsomot szüretelt az aznapi reggelihez.
a) Készíts az adatokból gyakorisági táblázatot!
b) Átlagosan hány koktélparadicsomot szüretelt Gazsi egy tőről?
c) Mi volt az adatok mediánja és módusza?
d) Ábrázold a relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon!
e) A kert melyik részét kellene jobban öntözni?



4. A 124 nyolcadikos megszavazhatta, hogy ki „a legjobb fej” a tanárok között. 46 szavazattal Judit néni nyert, 29 szavazattal Tóni bácsi lett a második és 26 szavazattal Szilvi néni a harmadik. A többi szavazaton három másik tanár osztozott. Ábrázold a kapott szavazatokat oszlop- és kördiagramon is!

5. A Lubic család együtt fizeti a víz- és csatornadíjakat. A számla négy tételből áll össze. Az első a szolgáltatás alapdíja, ami a fogyasztástól függetlenül havi 880 Ft. A vízdíj köbméterenként 285 Ft, a csatorna díja pedig ugyancsak köbméterenként 395 Ft. A csatornadíjjal együtt jár még köbméterenként 8 Ft környezetterhelési díj is. A táblázatban a Lubic család havi vízfogyasztási adatait adtuk meg.

Hónap	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Fogyasztás (m^3)	11	13	14	12	14	19	27	11	13	12	10	12

a) Számold ki a család átlagos havi vízfogyasztását!
b) Melyik hónapban fogyasztottak átlagos mennyiségű vizet?
c) Ábrázold a havi fogyasztási adatokat oszlopdiagramon!
d) Mennyi az éves vízdíjuk?
e) Mennyi lenne a Lubic család havi átalánydíja, ha az éves vízdíjat egyenletesen, 12 hónapra osztanák el?

6. A futballmérkőzések után ki szokták írni a csapatok különböző statisztikai mutatóit. Ilyen mutató például, hogy az idő hány százalékában birtokolta a csapat a labdát, a passzok hány százaléka ment csapattárshoz, hány lövésből lett gól stb. A táblázat néhány európai csapat saját bajnokságában elért mutatóit tartalmazza.

	A csapat neve	Lövés/gól	Labdabirtoklás (%)	Sikeres passz (%)
1.	Barcelona	16,4	69,7	88,2
2.	Real Madrid	18,1	57,9	86,3
3.	Bayern Munich	17,4	70,2	87,5
4.	Wolfsburg	15,3	54,9	79,6
5.	Arsenal	16,1	56,7	83,8
6.	Bayer Leverkusen	16,3	51,7	69,9
7.	Paris Saint-Germain	12,9	63,5	88,0
8.	Borussia M. Gladbach	12,6	53,3	82,7
9.	Manchester City	17,6	59,5	84,6
10.	Chelsea	14,8	55,6	83,2
11.	Marseille	15,2	58,0	83,8
12.	Juventus	15,8	57,4	84,8

A 2015-ös Bajnokok Ligája-döntőben a Juventusnak 343-ból 286, a Barcelonának pedig 570-ből 505 sikeres passza volt. Ugyanakkor a Juventus 14 lövésből 1, a Barcelona pedig 18-ból 3 gólt ért el, a labdabirtoklás aránya pedig 39 : 61 volt a Barcelona javára.

a) Melyik felsorolt csapat lövéseiből lesz leggyakrabban gól a saját bajnokságában?

b) Ki lehet-e számítani ezekből az adatokból, hogy a 12 csapat lövéseinek hány százaléka lesz gól?

c) Számold ki a 12 csapat labdabirtoklásának (%) mediánját és átlagát!

d) Mennyire van összhangban a Juventus és a Barcelona hazai bajnokságban mutatott éves átlaga a BL-döntőben mutatott teljesítményükkel?

e) Ábrázold kördiagramon a két csapat labdabirtoklási arányát a Bajnokok Ligája-döntőben!



V. 7. Játék

A kockapóker – vagy idegen szóval Yahtzee – egy viszonylag új játék. Az internet szerint az amerikai Milton Bradley írta le először 1956-ban. A játéknak számtalan variánsa van, az egyes változatok főleg a pontozásban különböznek. Ha másként ismered, az nem hiba, hanem természetes. A játékhoz 5 darab dobókocka szükséges, és praktikus egy dobópoharat is használni a kockák összerázásához és gurításához, hogy ne repüljenek szerteszét. Az eredmények összegzéséhez tettünk egy játéklapot az oldalra, és a munkafüzetben is találsz üres játéklapot. Ha nyerni akarsz, akkor némi szerencse mellett szükséged lesz az esélyek mérlegelésére és a helyes döntések meghozatalára.

Szabályok:

- A játékot érdemes 2–4 játékosnak játszani, hogy elég gyors legyen. A soron következő játékos 5 kockával dob, de ezek közül tetszőleges számú kockával újra dobhat, majd ezt még egyszer megismételheti. Tehát maximum három dobás után kialakul a játékos dobásának az eredménye.
  - Például elsőre dob: 1, 1, 2, 3, 6. Lent hagyja a 6-ost, és újra dob a másik néggyel.
  - Másodikra dob: 1, 1, 2, 3. Lent hagyja a két 1-est, és újra dob a másik kettővel.
  - Harmadikra dob: 4, 5. Ekkor a dobásainak az eredménye: 1, 1, 4, 5, 6.





  - Amikor majd játszotok, szabadon dönthettek, melyik kockákat hagyjátok lent, és melyikkel dobtok újra. Mérlegelj, és dönts a saját belátásod szerint!
- Beírt eredményt nem lehet később felülírni.
- Ha egy dobássorozat eredményét nem akarod sehová sem beírni, akkor egy üres sort ki kell húzni.
- A játék célja az, hogy minél több pontunk legyen, az első hat sor azonban különleges, jutalmat ér. Ha valaki az első 6 sorban összesen legalább 63 pontot ér el, akkor 30 jutalompontot kap. Ezt a 63 pontot elérheti, ha mindegyik számból legalább 3 darabot sikerül dobnia, de elérheti úgy is, hogy csak két 1-est dob, és négy darab 5-öst.

A 2 egyforma maximuma 12, a 2 + 2 egyforma maximuma 22, a három egyforma maximuma 18, a kis sor (1, 2, 3, 4, 5) 15 pontot, a nagy sor (2, 3, 4, 5, 6) 20 pontot ér stb. Mindenhová az odaillő dobott számok összegét lehet beírni. Van azonban két kivételes sor. Bármiből is dobsz 5 egyformát, az 50 pontot ér. Ha sehová nem tudod beírni, amit dobtál, akkor a játék során egyszer megteheted, hogy a dobott pontjaidat összeadod, és az összeget beírod a *Szemét* sorba.

1-es (3)			
2-es (6)			
3-as (9)			
4-es (12)			
5-ös (15)			
6-os (18)			
Felső összeg: (63)			
Jutalom: (30) (ha a felső összeg legalább 63)			
2 egyforma (pár)			
2 + 2 egyforma (két pár)			
3 egyforma (drill)			
3 + 2 egyforma (full)			
4 egyforma (póker)			
Kis sor (15)			
Nagy sor (20)			
5 egyforma (50)			
Szemét			
SZUMMA			

A munkafüzetben találtok kitölthető táblázatot.

Mérlegeljetek az egyes esetekben! Nézzük a mintadobást, amikor az 1, 1, 4, 5, 6 jött ki. Érdemes-e kihúzni az 5 egyformát, ami nem lehetetlen, de nyilván kicsi az esély arra, hogy kidobjad? Vagy jobban jársz, ha összesen 2 pontot írsz be az egy párhoz, amikor oda 12-t is lehetne? Vagy használd el a szemét sorodat, és írd be most az összeget, ami 17? Melyiknek kisebb vagy nagyobb az esélye? Mi éri meg jobban? Függ-e a döntésed attól, hogy a játék hányadik körénél tartotok? A te döntésed, a te stratégiád és a te szerencséd. Miután mindegyikőtök 15-ször sorra került, és minden sort kitöltöttetek vagy kihúztatok, akkor már csak össze kell adnotok a pontszámaitokat. Aki a legtöbb pontot éri el, az nyer.

8. Valószínűség

V.



A korábbi évek során és az idei órákon is rengeteg kísérletet hajtottunk végre. Ezek során számos **esemény** relatív gyakoriságát felírtuk. Ilyen esemény volt például az, hogy egy szabályos kockával 1-est dobtunk, vagy az, hogy öt kockával egyből öt darab 6-ost dobtunk. Az eseményeket – a halmazokhoz hasonlóan – nagybetűkkel jelöljük.

A következő pár leckében gyakran fogunk dobókockára hivatkozni. Ha mást nem mondunk, akkor kockán, illetve dobókockán mindig olyan szabályos dobókockát értünk, amelynek lapjain 1-től 6-ig van hat különböző szám vagy annak megfelelő jel, és mindegyik egyforma eséllyel jön ki.

Egy szabályos kocka feldobása esetén a lehetséges kimenetelek a következők:

A: 1-est dobok; *B*: 2-est dobok; *C*: 3-ast dobok;
D: 4-est dobok; *E*: 5-öst dobok; *F*: 6-ost dobok.

Ezeket **elemi eseményeknek** nevezzük.

Nemcsak a kísérlet kimeneteleinek írtuk fel a relatív gyakoriságát, hanem ezzel kapcsolatos más eseményeknek is: *K*: a dobott szám páros; *L*: a dobott szám páratlan; *M*: a dobott szám kisebb, mint 3; *N*: a dobott szám 1 vagy 5.

A *K* esemény például úgy következhet be, ha 2 vagy 4 vagy 6 áll a kockán.

Két különleges eseménynek saját neve van. Ezekkel az eseményekkel már korábban is találkoztatok.

A **lehetetlen esemény** az, amely a kísérlet során soha nem következhet be. Jele: $\varnothing$

A **biztos esemény** az, amely a kísérlet során mindig bekövetkezik. Jele: I (vagy E vagy Ω)

Például lehetetlen esemény, hogy egy kockával 7-est dobunk, vagy az, hogy az iskolai menzán „marinírozott halszeletet kapjak Turbigo módra kétfelé vágott tojással, egész kevés vörösborral párolva”. Biztos esemény például az, hogy a kockával hetesnél kisebbet dobunk.

Egy esemény relatív gyakoriságára mindig igaz, hogy $0 \leq \frac{\text{gyakoriság}}{\text{kísérletek száma}} \leq 1$.

Nagyszámú kísérlet elvégzése esetén az esemény relatív gyakorisága egy érték körül ingadozik. Ezt az értéket tekintettük az esemény valószínűségének.

A kockadobás esetében a 6 elemi esemény relatív gyakoriságának értéke mindegyik esetben $\frac{1}{6}$ körül ingadozik, ezért azt mondjuk, hogy ezeknek az eseményeknek a valószínűsége $\frac{1}{6}$.

A **valószínűséget** P betűvel jelöljük. Egy A esemény valószínűségét így írjuk le: $P(A)$
A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\varnothing) = 0$.
A biztos esemény valószínűsége 1, azaz $P(I) = 1$.
Tetszőleges eseményre igaz, hogy $0 \leq P(A) \leq 1$.



KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogy milyen betűvel kezdődik angolul, franciául, illetve latinul a *valószínűség* szó!

1. PÉLDA

Dobjuk fel a képen látható homogén testet (szabályos tetraéder) 200-szor!



a) Készítsünk táblázatot arról, hogy milyen gyakorisággal esett az egyes lapjaira! Számítsuk ki a dobások relatív gyakoriságait is!

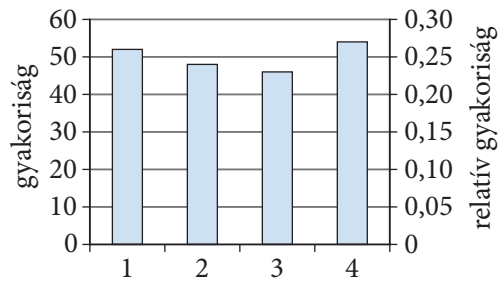
b) Készítsünk oszlopdiagramot a gyakoriságokról és a relatív gyakoriságokról!

Megoldás

a) Mi a következő eredményeket kaptuk:

	1	2	3	4
Gyakoriság	52	48	46	54
Relatív gyakoriság	$\frac{52}{200} = 0{,}26$	$\frac{48}{200} = 0{,}24$	$\frac{46}{200} = 0{,}23$	$\frac{54}{200} = 0{,}27$

b)



Megjegyzés: Ha a képen látható tetraéderrel dobunk, akkor annak nem lesz felül lévő lapja. Tetraéder esetén az alul lévő lap egyértelmű, ezért ezt tekintjük a dobás értékének. A lap mindhárom élére rá szokták írni a laphoz tartozó számot. A képen látható tetraéderrel éppen 1-est dobtunk.

Az 1. példa esetében mind a négy esemény értéke az $\frac{1}{4}$ érték körül ingadozik, tehát az egyes események valószínűsége $\frac{1}{4}$.

Vigyázzatok! Visszafelé nem lehet ilyen következtetéseket levonni! Nézzük erre a következő, magától értetődő példát!

Mekkora annak az esélye, hogy egy piros fülű elefánt sétál az iskolaudvaron?

Két eset van:

A: Az elefánt ott sétál az iskolaudvaron.

B: Nem sétál az elefánt az iskolaudvaron.

A példának véges sok esete van, pontosan 2 db. Ebből azonban nem következik, hogy mindkét eseménynek 0,5-0,5 lenne a valószínűsége.



CSOPORTMUNKA

Gyűjtsetek ti is olyan példákat, ahol két lehetőség van, de szemléletesen látszik, hogy azok nem egyenlő eséllyel következnek be!

A későbbiekben nem fogunk minden egyes esetben ezernyi kísérletre támaszkodni, ha el akarjuk dönteni, hogy mekkora egy-egy esemény bekövetkezésének az esélye. Gyakran csak logikai úton következtetünk egyes események valószínűségére.

2. PÉLDA

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az 1. példában látott tetraéderrel páros, illetve páratlan számot dobunk!

Megoldás

Páros szám a 2 és a 4, páratlan az 1 és a 3. A lehetséges 4 eset mindegyike $\frac{1}{4}$ valószínűségű volt, tehát:

$P(\text{páros számot dobunk}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(\text{páratlan számot dobunk}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

3. PÉLDA

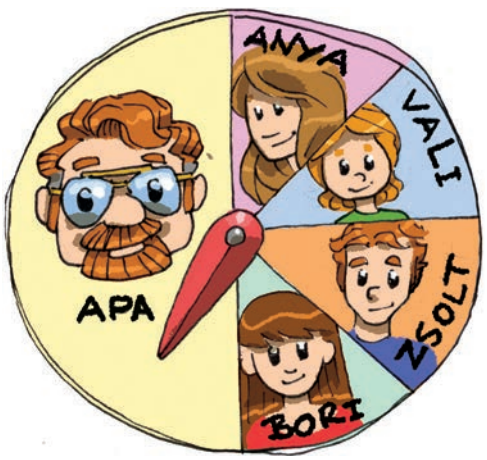
Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy kockával 5-nél kisebb számot dobunk!

Megoldás

A feladat feltételeinek megfelelően csak az 1, 2, 3, 4 számokat dobhatjuk, ami 4 eset a lehetséges 6-ból, tehát az esemény előfordulásának valószínűsége: $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

4. PÉLDA

A Nagy családban egy öt részre osztott pörgettyűt használnak annak eldöntésére, hogy ki vigye le a szemetet. A pörgettyű fele apáé, a másik felén pedig egyenlően osztozik anya és a három gyerek, Zsolt, Vali és Borbála. Mekkora a valószínűsége, hogy a család két férfi tagja közül kerül ki az, aki a szemetet leviszi?



Megoldás

A család két férfi tagja apa és Zsolt, de nem egyenlő az esélyük.

Apa esélye $\frac{1}{2}$, Zsolté pedig a fél negyede, tehát $\frac{1}{8}$.

$P(\text{férfi viszi ki a szemetet}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

FELADATOK

1. Készítsetek felmérést az osztályban arról, hogy mennyi időt töltötök hetente a táblázatban felsorolt tevékenységekkel! Az eredményeket összesítsétek a táblánál, illetve számítógépen! Készítsetek grafikont is!

	Kevesebb, mint fél óra	Kb. 1 óra	Kb. 2 óra	Legalább 3 óra
Netezés				
Tévé-nézés				
Olvasás				

A táblázat adatai alapján válaszoljatok az alábbi kérdésekre!

a) Egy osztálytársadat véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy ő kevesebb mint fél órát netezik hetente?

b) Egy osztálytársadat véletlenszerűen választva mennyi annak a valószínűsége, hogy ő kb. 1 órát tévézik hetente?

c) Egy osztálytársadat véletlenszerűen választva mennyi annak a valószínűsége, hogy ő kb. 2 órát olvas hetente?

2. A *Ki nevet a végén?* elnevezésű játékban 3 mezővel maradtam le Berta mögött, és én jövök.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ki tudom ütni?

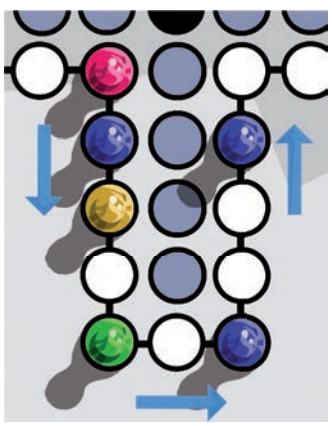
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy elé kerülök?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő lépésnél ő üt ki engem, ha 5-öst dobtam?

3. Két kék bábum is veszélyes helyen áll a *Ki nevet a végén?* táblán. Éppen Zozó fog lépni a piros bábuval.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy ki tudja ütni valamelyik kék bábut?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ki tudja ütni valamelyik bábut?



4. Számold ki annak a valószínűségét, hogy egy kockával prímszámot dobunk!

5. Egy piros és egy zöld kockával dobok. A piros kockával dobott szám egy kétjegyű szám első, a zöld kockával dobott szám pedig a kétjegyű szám második számjegye lesz.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a 11-es számot írom le?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy 20-nál kisebb számot írok le?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy négyzetszámot írok le?



6. A képen látható húszlapú testtel (ikozaéderrel) dobsz egyet.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám kisebb, mint 10?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám legfeljebb 10?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám 1 vagy 20?

d) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám négyzetszám?

OSZTÁLYMUNKA

Tippeljétek meg az osztályban, hogy két 100 forintos pénzérme feldobása esetén mennyi az alábbi események valószínűsége!

A: két fej; *B:* egy fej és egy írás; *C:* két írás.

Ha nem tudtok egyértelműen dönteni, vagy kétség merül fel valakiben, akkor érdemes kísérleteket végezni.

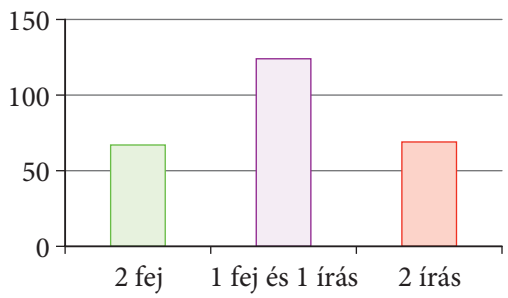
a) Mindannyian vegyetek elő két pénzérmét (nem kötelező százasokat), és dobjátok fel 10-szer! A dobások eredményeit írjátok le!

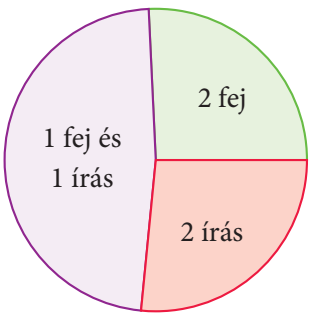
b) Összesítsétek az osztályban az eredményeket! Használjatok az összesítéshez és utána az ábrázoláshoz számítógépet!
A mi osztályunk összesített eredménye:



67	124	69

Az eredményeket diagramon is ábrázolhatjuk. A jelenlegi feladat arányai szembetűnőbbek, ha kördiagramot használunk.

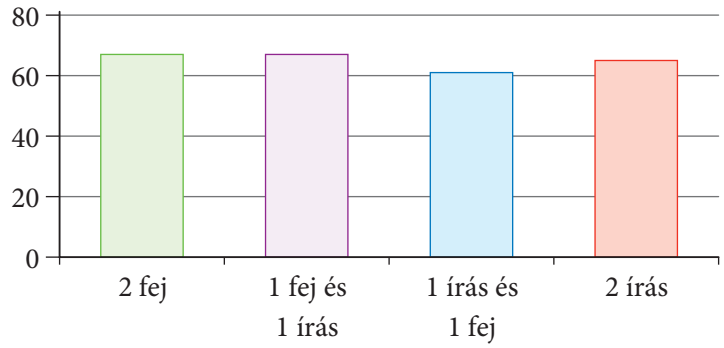


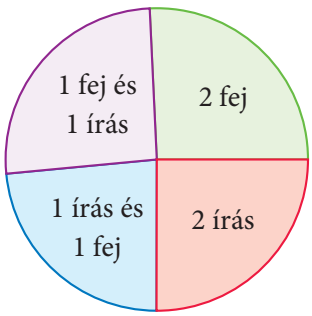


Az adatok alapján úgy tűnik, hogy az *egy fej és egy írás* körülbelül az esetek felében fordul elő, míg a *két fej* és a *két írás* a dobások negyedében. Hogyan lehetséges ez, ha három eseményünk volt? Végezzük el a kísérletet újra, de most két különböző pénzérmével! A mi osztályunkban a következő eredményeket kaptuk:



67	67	61	65





Most valóban körülbelül $\frac{1}{4}$ mind a négy esemény valószínűsége.

A pénzérmék nyilván nem tudják, hogy mennyit érnek, tehát két egyforma pénzérme esetén is kétszer akkora az *egy fej és egy írás* dobásának valószínűsége, mint a *két fej* vagy a *két írás* valószínűsége.

PÉLDA

Dobjunk fel 4 pénzérmét, és számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két fej és két írás lesz köztük!

Megoldás

Olyan elemi eseményeket kell keresnünk, amikor mindegyik esemény valószínűsége egyenlő. Gondoljunk arra, hogy négy különböző pénzérmét használunk, például egy 100 Ft-ost, egy 50-est, egy 20-ast és egy 10-est. A dobott fejek száma nyilván nincs összefüggésben a pénz értékével. Mindegyik pénzérme 0,5-0,5 valószínűséggel lesz fej (F) vagy írás (I).

Készítsünk táblázatot az összes esetről! Lehet mindegyik pénzérme fej. Lehet, hogy egy fej lesz, ami lehet a 100-as, az 50-es, a 20-as vagy a 10-es. A táblázatban piros háttérrel szerepelnek az általunk keresett esetek.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
100	F	I	F	F	F	I	I	I	F	F	F	I	I	I	F	I
50	F	F	I	F	F	I	F	F	I	I	F	I	I	F	I	I
20	F	F	F	I	F	F	I	F	I	F	I	I	F	I	I	I
10	F	F	F	F	I	F	F	I	F	I	I	F	I	I	I	I

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha másképpen számláljuk le az összes esetet.

A 100 Ft-os kétféle lehet: F vagy I. Az 50 Ft-os mindegyik esetben kétféle lehet, stb. (Lásd a következő oldal tetején lévő fadiagramot. Aláhúztuk azokat az eseteket, amikor két fejet és két írást kaptunk.)

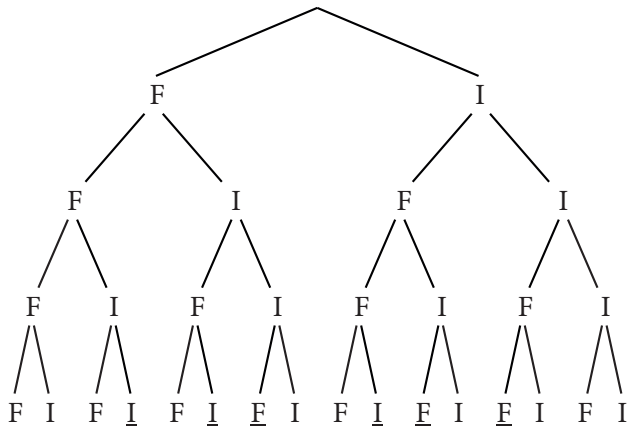
Mindkét leszámlálási mód esetén 16 db $\frac{1}{16}$ valószínűségű elemi eseményt kaptunk. Közöttük 6 esetben van két fej és két írás, tehát a keresett valószínűség $6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = 0{,}375$.

9. Valószínűségszámítási feladatok

V.

A pénz értéke, mint mondtuk, nyilván nincsen összefüggésben azzal, hogy fej vagy írás lesz egy dobás eredménye. Abban segít, hogy az érméket megkülönböztessük egymástól. A valószínűség akkor is ugyanennyi marad, ha négy darab egyforma pénzérmét dobunk fel, de az eseteket gyakran kényelmesebb áttekinteni, ha legalább gondolatban megkülönböztetjük az egyforma érméket.





FELADATOK

1. Csongi az iskolai menzán tépelődik: „Kétféle leves van, de mindegyiket szeretem. Háromféle főétel, és az is mind jó. Nem tudok választani."
a) Hányféle menüt tud összeállítani Csongi?
b) Ajánlj neki egy sorsolási eljárást, amelynél minden párosításnak ugyanakkora a valószínűsége!

2. Mennyi lesz az elemi események valószínűsége, ha a képen látható nyolclapú testtel (oktaéderrel) dobunk?



3. Írd fel 3 pénzérme feldobásának összes lehetséges kimenetelét!

4. Dobj fel 3 egyforma pénzérmét 40-szer, és készíts táblázatot az eredményekről!
a) Mennyi lett a három fej dobásának relatív gyakorisága?
b) Mennyi lett a két fej és egy írás esemény relatív gyakorisága?
c) Mikor közelítené meg a relatív gyakoriság a valószínűséget pontosabban?

5. Egy 24 fős osztályban mindenki nevét felírják egy cetlire, összehajtják, és beteszik egy sapkába. Berta húz egyet.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pont önmagát húzza?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy Zozó elsőre nem Bertát húzta, és aztán Berta másodiknak önmagát húzza? (A kihúzott nevet nem teszik vissza.)

6. A tányéron van 3 olyan süti, aminek kicsit odakapott az alja, meg 9 hibátlan. A rájuk szórt porcukor miatt egyáltalán nem vehető észre, hogy melyik alja kozmálhatott oda.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk közülük 1-et, akkor az a süti égett lesz?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk közülük 1-et, akkor az a süti jó lesz?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk közülük 2-t, akkor mindkét süti égett lesz?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy 4 égettet választunk?

V. 10. Keressünk összefüggéseket!

Gyakran kerülünk a hétköznapokban olyan helyzetbe, hogy egy bonyolult, összetett szövegből kell kikeresnünk lényeges információkat, összefüggéseket. Például a telefonszolgáltatók, közműszolgáltatók sokszor nehezen érthető leveleit akkor értjük meg, ha előtte megtanultuk, hogyan vegyünk észre összefüggéseket.
A szövegbeli kapcsolatok megtalálására és a következtetések levonására most néhány könnyed szövegezésű, de odafigyelést igénylő példát mutatunk.

1. PÉLDA

Átlag Ábel a számokat kedvenc szabálya szerint állította sorba. Az adott hatjegyű szám számjegyeit az elejétől kezdve párokba rendezte, majd kiszámította a párokban levő számjegyek átlagát. Ha ez a szám egész volt, akkor az átlagot írta le, ha viszont az átlag nem egész szám lett, akkor a számjegyek szorzatát. Az így kapott számokat növekvő sorrendbe állította, és eszerint rendezte sorba az eredeti számokat. Írjuk fel, hogy milyen számokat kapott Ábel az átalakítás után, és rendezzük eszerint sorrendbe a számokat!
255 314; 270 846; 802 695; 510 067; 711 407

Megoldás

Az új számok a szövegbeli utasítások szerinti átalakítás után:
255 314 → 1044
270 846 → 1445
802 695 → 447
510 067 → 3042
711 407 → 440
Az eredeti számok sorrendje: 711 407; 802 695; 255 314; 270 846; 510 067

2. PÉLDA

Szofi számokat rak sorba egy általa kitalált szabály alapján. Először összeadja a számokban lévő 2-vel osztható számjegyeket, majd a kapott összegek csökkenő sorrendje szerint rendezi el a számokat. Ha az összeg két számnál megegyezik, akkor a 3-mal osztható számjegyek összegét is meghatározza, és ezek csökkenő sorrendje szerint rendez. Ha ez is egyenlő, akkor a 4-gyel osztható számjegyek összege, majd az 5-tel osztható számjegyek összege stb. szerint rendezi a kapott számokat az összegek szerinti csökkenő sorrendbe. Mi lesz Szofi sorrendje az alábbi számok esetén?
24 835; 26 972; 58 236; 63 945; 22 823

Megoldás

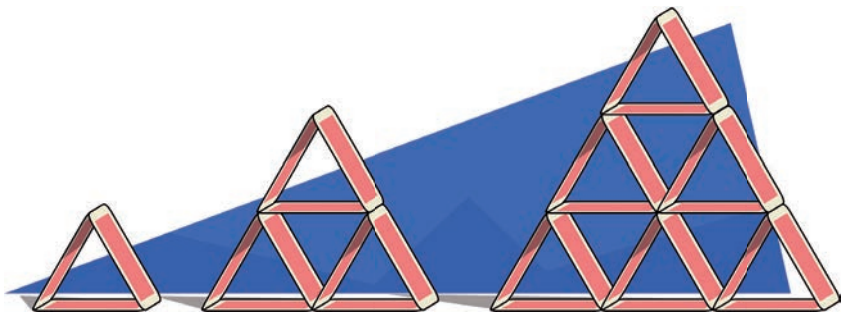
Készítsünk táblázatot! A táblázat kitöltését addig folytassuk, amíg nincs két egyenlő szám az adott sorban! Ekkor egyértelműen eldönthető a sorrend.

	24 835	26 972	58 236	63 945	22 823
2-vel osztható számjegyek összege	14	10	16	10	14
3-mal osztható számjegyek összege	3	15		18	3
4-gyel osztható számjegyek összege	12				8
5-tel osztható számjegyek összege					

A számok sorrendje Szofi elrendezése alapján: 58 236; 24 835; 22 823; 63 945; 26 972

3. PÉLDA

Kártyavárakat építettünk. A képen a kártyavárakat látjuk.



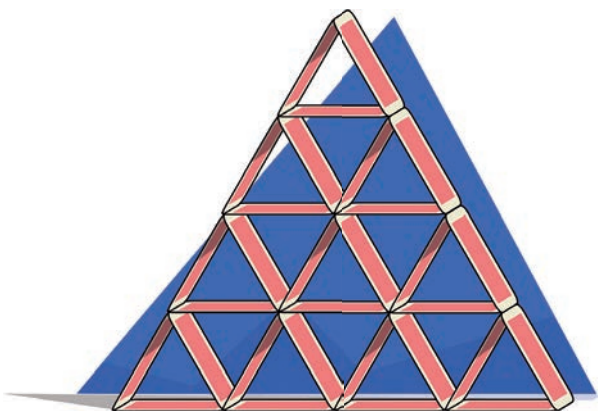
a) Hány darab kis háromszöget látnánk egy négyszintes kártyavár egyes szintjein?
b) Hány darab kis háromszöget látnánk egy négy-, illetve ötszintes vár esetében?
c) Milyen következtetést vonhatunk le az *a)* és *b)* feladatrész alapján?

Megoldás

a) A legalsó szinten 7 db, a felette lévőn 5 db, a következőn 3 db, a legfelsőn pedig 1 db kis háromszög látható.

b) Egy négyszintes vár esetében 16 db, ötszintesnél 25 db kis háromszög látható.

c) A kis háromszögek számát a kártyavár egyes szintjein – fentről lefelé – egymást követő páratlan számok adják. A szintek számának a négyzete szintén az összes kis háromszög számát adja. Azaz az első négy páratlan szám összege egyenlő 4^2-nel, az első öt páratlan szám összege egyenlő 5^2-nel.
Ez a megfigyelés általánosan is igaz. Az első n db páratlan szám összege n^2.



V. 10. Keressünk összefüggéseket!



KUTATÓMUNKA

Nézz utána, milyen módszerekkel lehet igazolni a páratlan számok összegére vonatkozó állítást!

FELADATOK

1. „Pakoljátok be a ceruzáitokat a dobozba szépen, sorban!” – szólt anya az ikrekhez.
Dini így rakta:



Dani így rakta:



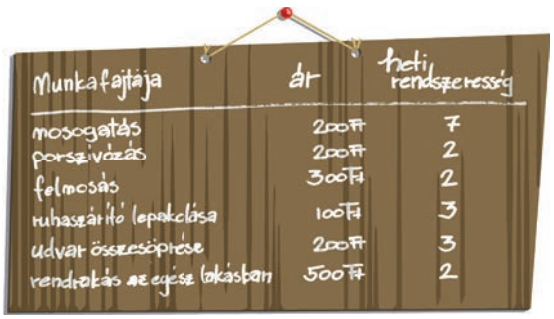
Fogalmazd meg a fiúk sorba rendezésének szabályait! Bármely logikus magyarázat elfogadható.

2. Vizsgáld meg a következő sorozatokat! Fogalmazd meg a képzés szabályát, és folytasd a sorozatokat 3-3 taggal!
a) H, Sz, P, V, K, …
b) a1, b2, c3, d4, …
c) Szlovákia, Ukrajna, Románia, Szerbia, …

3. Folytasd az alábbi számsorozatokat 3-3 taggal! Írd le a képzési szabályt is!
a) 1, 2, 4, 7, 11, … *b)* 1, 2, 4, 8, 16, …
c) 2, 3, 5, 7, 11, …

4. Add meg annak a számsorozatnak az első 5 tagját, amelynek első eleme 10, és a további tagokat úgy képezzük, hogy
a) az előző taghoz hozzáadunk (−9)-et;
b) az előző tag kétszereséből elveszünk 1-et!

5. Balázséknál otthon „gyerekbank” működik. Ha Balázsnak pénzre van szüksége, kérhet anyától, de házimunkával kell törlesztenie. A hagyományos bankokhoz hasonlóan a törlesztésnek határideje van, de kamata szerencsére nincs. Az alábbi táblázat mutatja, melyik házimunka hány forintot ér, és hányszor végezhető el egy héten.



Munka fajtája	ár	heti rendszeresség
mosogatás	200 Ft	7
porszívózás	200 Ft	2
felmosás	300 Ft	2
ruhaszárító lepakolása	100 Ft	3
udvar összesöprése	200 Ft	3
rendrakás az egész lakásban	500 Ft	2

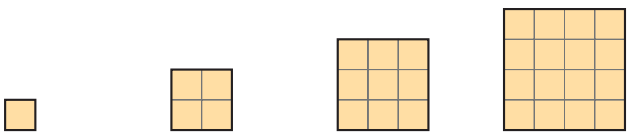
a) Állíts össze egy 3 hetes munkasort Balázsnak, ha 6000 forintot kért el anyától!
b) Te hány forintot kérnél 3 hét alatt? Mennyi idő alatt és milyen házimunkával tudnád törleszteni?

6. Gyuriék körbeültek, és a *Minden harmadik kiesik* játékot játszották. Elkezdtek egyesével számolni, és minden olyan ember, akinek a sorszáma osztható volt 3-mal, kiesett. Ez így ment körbe-körbe, és a végén az nyert, aki utolsónak maradt bent. Hányadik helyre üljön Gyuri, ha mindenképp nyerni akar, és a játékot
a) hatan; *b)* heten;
c) ötvenen játsszák?
d) Hova kerül a nyerő hely, ha a játékszabály *Minden negyedik kiesik*-re módosul?

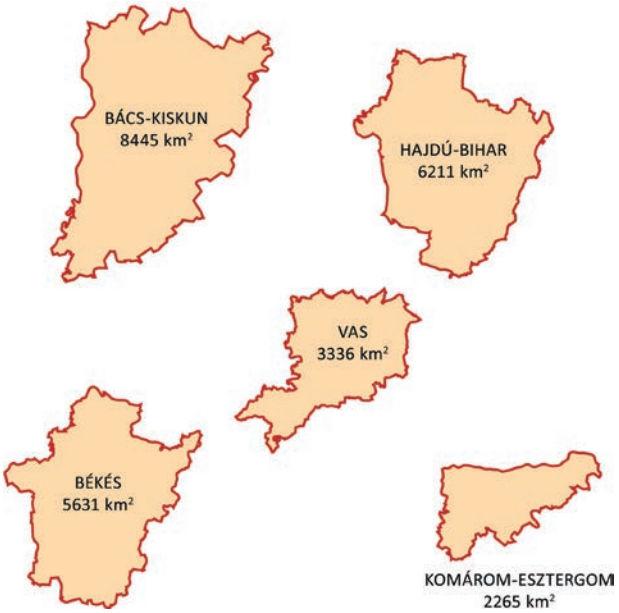
11. Sorozatok

V.

Sorozatról akkor beszélünk, ha egy halmaz elemeit **sorba rendezéssel** adjuk meg. Sorozatba rendezhetjük Magyarország hegységeit magasságuk szerint, vármegyéit területük nagysága alapján vagy akár ábécé szerint is.
A **számsorozatok** megadása során számokat adunk meg valamilyen sorrendben vagy szabály alapján. Az egyes számokat a sorozat tagjainak nevezzük.
Például számsorozat az 1; 4; 9; 16… Ez a „pozitív négyzetszámok” sorozata.



1 négyzet 4 négyzet 9 négyzet 16 négyzet



Olyan sorozatot is könnyű felírni, amelynek nemcsak a később következő, hanem a korábbi tagjait is meg tudjuk állapítani. Például, ha egy számsorozat ötödik, hatodik és hetedik tagja 8; 18 és 28, akkor lehet, hogy a számsorozat tagjai tízesével növekednek. Ekkor a
8. tag a 38; 9. tag a 48; 4. tag a −2;
3. tag a −12; 2. tag a −22; 1. tag a −32 lesz.
Természetesen a sorozat tagjainak felsorolását más módon is folytathatnánk. Például: 8; 18; 28; 38; 48; 8; 18; 28; 38; 48; 8; …

Azt a számsorozatot, amelyik 1-gyel kezdődik, és minden tagja eggyel több egyest tartalmaz, csak az egyik irányba tudjuk folytatni: 1; 11; 111; 1111; 11111; … Ennek a számsorozatnak az első tagja az 1, második tagja a 11, stb.
Ezt rövidebben a következő módon szoktuk jelölni:
$a_1 = 1$; $a_2 = 11$; $a_3 = 111$; $a_4 = 1111$; $a_5 = 11111$; …
Az a_8 a sorozat nyolcadik, **az a_n a sorozat n-dik tagját jelöli, ahol n egy pozitív egész szám.**

Sorozatok megadásakor többféle módon járhatunk el:
– A sorozat első néhány tagját adjuk meg. Ekkor többféle módon is folytathatjuk a sorozatot.

– Ha azt szeretnénk, hogy mindenki ugyanarra az egy folytatásra gondoljon, akkor nem elég csupán felsorolnunk a tagokat, hanem a képzési szabályt is meg kell adnunk. Ezt többféle módon tehetjük meg:
  - szöveges megfogalmazással
  - képlettel

EGYÉNI MUNKA

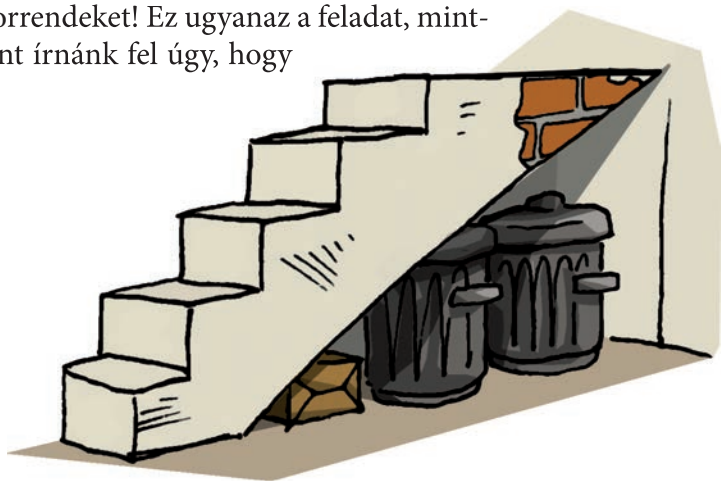
Mindenki folytassa az 1; 3; 6; … sorozatot legalább háromféle módon! Mindegyik folytatáshoz készítsetek leírást is!

1. PÉLDA

Három fiú kirándulást tervezett. Gáspár és Bálint időben a találkozó helyszínére érkezett, de a harmadik fiú késett. A szökőkúthoz – ahol a találkozót megbeszélték – öt lépcsőfok vezetett. Gáspár a várakozás ideje alatt a következő játékot találta ki:
Felváltva menjünk fel a lépcső tetejére! Elég magasak a lépcsőfokok, úgyhogy csak egy vagy két lépcsőfokot léphetünk felfelé. Mindig más módon kell feljutnunk. Az nyer, aki utolsónak tud felmenni olyan módon, amilyen előtte még nem volt. Kezdd te a lépcsőzést!
Ki nyerte a játékot?

Megoldás

Írjuk fel rendszerezve a lehetséges lépéssorrendeket! Ez ugyanaz a feladat, mintha az ötöt egyesek és kettesek összegeként írnánk fel úgy, hogy a tagok sorrendje is számít.



$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$5 = 1 + 1 + 1 + 2$
$5 = 1 + 1 + 2 + 1$
$5 = 1 + 2 + 1 + 1$
$5 = 2 + 1 + 1 + 1$
$5 = 1 + 2 + 2$
$5 = 2 + 2 + 1$
$5 = 2 + 1 + 2$

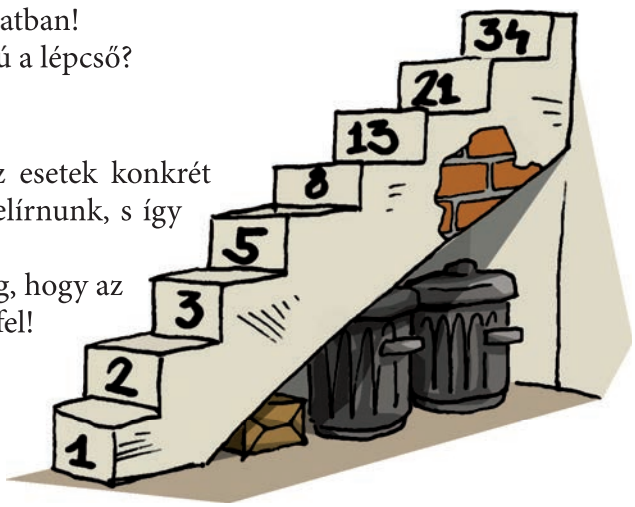
Ez nyolc lehetőség, tehát Gáspár nyerte a játékot.

2. PÉLDA

Módosítsuk a lépcsőfokok számát az előző feladatban!
Hány lehetőség van, ha hat-, hét- vagy nyolcfokú a lépcső?

Megoldás

A feladatot megoldhatjuk az előző módon, az esetek konkrét felsorolásával is, de egyre több esetet kellene felírnunk, s így könnyen tévedhetünk.
Gondolkodjunk hát másképpen! Vizsgáljuk meg, hogy az egyes lépcsőfokokra hányféleképpen juthatunk fel!



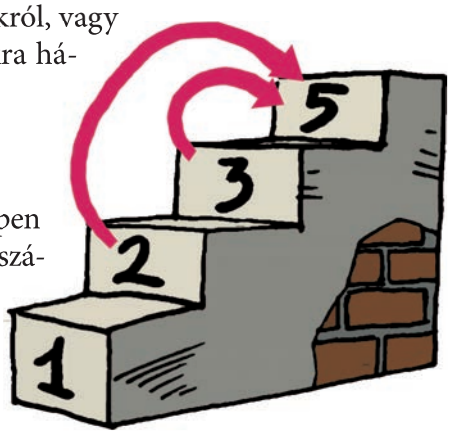
Az első lépcsőfokra egyféleképpen juthatunk. A második lépcsőfokra vagy egyszer kettőt lépünk, vagy kétszer egyet, tehát kétféleképpen juthatunk.
A harmadik lépcsőfokra már háromféleképpen juthatunk fel: vagy az első fokról lépünk kettőt, vagy a másodikról egyet.

$3 = 1 + 2$

Az előzőhöz hasonló gondolattal azt is könnyen megkaphatjuk, hányféleképpen juthatunk fel a negyedik lépcsőfokra. Két eset van: vagy kettőt lépünk a másodikról, vagy egyet a harmadikról. A másodikra kétféleképpen, a harmadikra háromféleképpen juthattunk, tehát a negyedikre

$2 + 3 = 5$

különböző módon juthatunk fel.
Minden lépcsőfokra annyiféleképpen juthatunk fel, ahányféleképpen az előző két lépcsőfokra összesen eljuthattunk. Írjuk fel ezeket a számokat: 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34.
Most már válaszolhatunk a feltett kérdésre. Hatfokú lépcső esetén 13, hétfokú esetén 21, nyolcfokú esetén pedig 34 különböző lehetőségünk van a feljutásra.



A felsorolt számok olyan sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1, második tagja 2, harmadik tagja 3, … nyolcadik tagja 34.
Jelöléseinkkel: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 5$; $a_5 = 8$; $a_6 = 13$; $a_7 = 21$; $a_8 = 34$; …
Ez a sorozat nagyon hasonló az 1; 1; 2; 3; 5; 8; ... Fibonacci-sorozathoz (ejtsd: fibonaccsi), csak nem kettő, hanem egy darab 1-essel kezdődik.
A Fibonacci-sorozatban és a lépcsőmászó feladatban is igaz, hogy a sorozat bármely tagja – harmadik tagjától kezdve – megkapható az előző két tag összegeként.





KUTATÓMUNKA

1. Nézz utána, ki volt Fibonacci! Milyen feladat kapcsán írta le a róla elnevezett Fibonacci-sorozatot?
2. Milyen kapcsolat van a napraforgó és a Fibonacci-számok között?



FELADATOK

1. Nagyinak öt unokája van. Búcsúzáskor ott sorakoztak előtte, és a legkisebb vidáman közölte, hogy ad neki két puszit. „Az semmi – vágta rá a második. – Én kétszer annyit adok.” „Én meg annak a kétszeresét!” – vigyorgott a soron következő. Nagyi aznap este rengeteg puszit kapott: minden unoka kétszer annyit adott neki, mint a sorban előtte álló.

a) Kitől hány puszit kapott?

b) Hány puszit kapott nagyi aznap az unokáktól összesen, ha érkezésnél mindenki csak a szokásos kettőt adta?

2. Adalbert fogyókúrázik, így állandóan a kalóriákat számolgatja. Azt találta ki, hogy hétfőn 1800 kalóriányi ételt fogyaszt, és az ezt követő napokon mindig az előző napi adag felénél 500-zal többet.

a) Számold ki, hány kalóriát fogyaszt az első négy napon!

b) Igaz-e, hogy vasárnap már 1000 kalória alatt lesz a napi adagja?

3. Egy sorozat első tagja –2, második tagja 3. Minden további tag a közvetlenül előtte lévő két tag összegével egyenlő.

a) Sorold fel a sorozat első hat tagját!

b) Hányadik tag lesz 100-nál nagyobb?

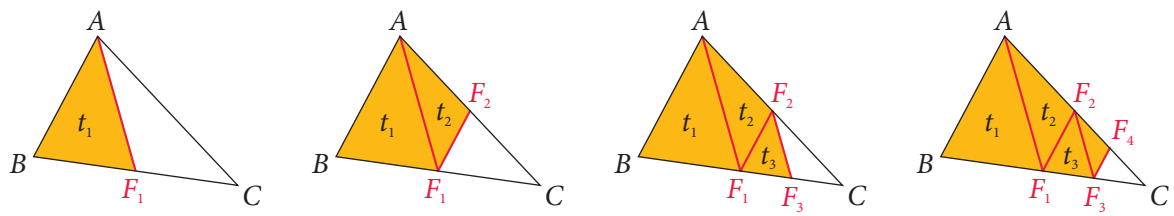
c) Számold ki az első tíz tag összegét!

4. Add meg növekvő sorrendben a 3-mal osztható természetes számok sorozatának első tíz tagját! Legyen $a_1 = 0$.

a) Add meg a sorozat 50. és 100. tagját is!

b) Számold ki az első tíz tag összegét!

5. Sári gondolkodás közben satírozgatott, és az alábbi ábrát készítette. Az F betűk az ábrán látható oldalak felezőpontjai. Például F_1 a BC; F_2 az AC; F_3 az F_1C… oldalak felezőpontjai.
Az ABC háromszög területe legyen 1 egység.



1. lépés 2. lépés 3. lépés 4. lépés

a) Számold ki minden lépés után az újonnan beszínezett háromszög területét!

b) Folytasd a sorozatot! Számold ki a sorozat 5. és 6. tagját!

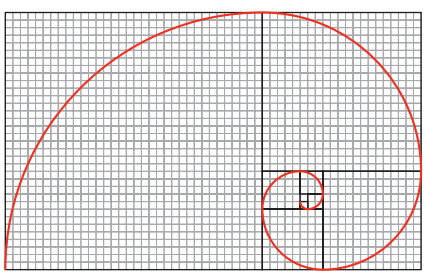
c) Számold ki a sorozat első hat tagjának összegét!

d) Mit gondolsz, hányadik lépésben lesz a sorozat tagjainak összege 1?

6. Az ábrán a Fibonacci-spirált látod.

a) Nézz utána az interneten, melyik cég használta ezt a spirált a logója elkészítéséhez!

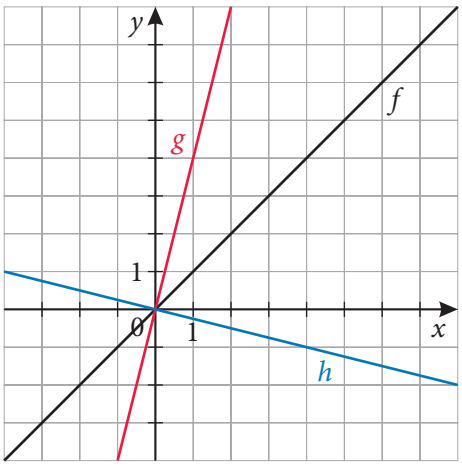
b) Hol találkozhatsz a természetben ezzel az alakzattal?



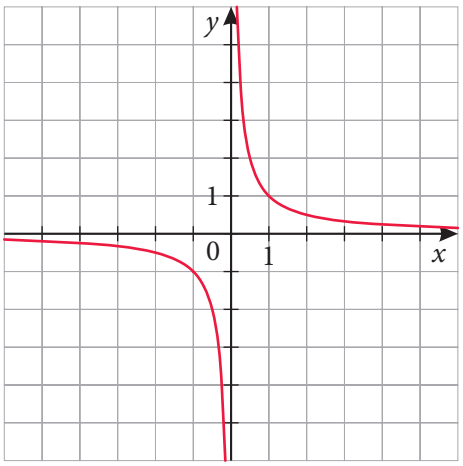
A fejezet első részében a hozzárendeléseket ismételtük át.

Megismertünk többféle hozzárendelési módot. Kiemelten foglalkoztunk a hozzárendelések grafikonon történő ábrázolásával. A grafikonok felrajzolása, elemzése sok esetben segít egy feladat megoldásában.

Az egyenes és a fordított arányosság a hozzárendelések egy speciális fajtája. Sok hétköznapi feladatot könnyen és gyorsan oldhatunk meg, ha tudjuk, hogy bennük egyenes vagy fordított arányosságról van szó.



Az egyenes arányosság grafikonja az origón átmenő egyenes.



A fordított arányosság grafikonja hiperbola, amely két hiperbolaágból áll.

Újra találkoztunk adatokkal, adatok ábrázolásával, grafikonokkal. Meghatároztuk adatok középértékeit, azaz mediánját, móduszát, átlagát. Átlag alatt számtani közepet értettünk.

Kiszámoltuk események gyakoriságát, relatív gyakoriságát, és beszéltünk események valószínűségéről is.

Egy A esemény valószínűségét P betűvel jelöljük, és így írjuk le: $P(A)$.

A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\varnothing) = 0$.

A biztos esemény valószínűsége 1, azaz $P(I) = 1$.

Tetszőleges A eseményre igaz, hogy $0 \leq P(A) \leq 1$.

Beszéltünk elemi eseményekről.

Meghatároztuk egyszerű események valószínűségét.

Felismertünk és megadtunk sorozatokat. Láttuk, hogy egy sorozat minden tagjának egyértelmű megadásához nem elegendő az első pár tag ismerete, meg kell adnunk a sorozat képzésének leírását, szabályát is.

FELADATOK

1. Döntsd el, melyik állítás igaz! A hamis állításokat tedd igazzá!

a) 1200 Ft-ért 5 kg őszibarackot vásárolhatunk. Ha a barack feleannyiba kerülne, akkor ugyananynyi pénzből kétszer annyit vásárolhatnánk.

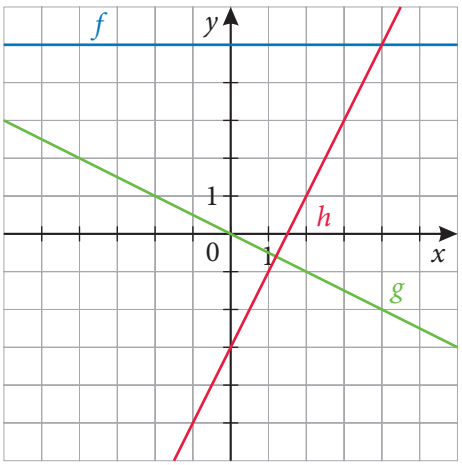
b) Egy irodaházat egy 6 fős takarítócég 4 óra alatt tud kitakarítani. Ha a dolgozók felét máshova küldik munkát végezni, akkor a többiek feleannyi idő alatt végeznek a takarítással. (Feltételezzük, hogy mindenki ugyanolyan intenzitással dolgozik.)

c) Ha négy pohár limonádé elkészítéséhez 1 liter vízre van szükség, akkor 3 liter víz 7 pohár limonádéhoz elegendő.

d) 1500 db almát dobozokba csomagolnak, és minden dobozba 24 db alma kerül. Ha háromszor annyi almát tennének egy dobozba, akkor harmadannyi dobozt kellene felhasználni.

e) Ha egy autó fél óra alatt 55 km-t tesz meg az autópályán, akkor két óra alatt 200 km-t tud megtenni. (Feltételezzük, hogy az autó egyenletes tempóban halad.)

2. Készíts az ábrán látható grafikonok összetartozó értékeihez táblázatot, és határozd meg a hozzárendelési szabályaikat!



3. Ábrázold a megadott hozzárendeléseket! Ha szükséges, készíts értéktáblázatot az ábrázoláshoz!

a) Minden számhoz rendeljük hozzá a kétszeresénél hárommal nagyobb számot!

b) Minden számhoz rendeljük hozzá az ellentettjét!

c) Minden számhoz rendeljük hozzá az ötödének az ellentettjét!

4. Ábrázold a következő hozzárendelést koordináta-rendszerben, majd válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!

Minden számhoz hozzárendelem a harmadánál 2-vel kisebb számot.

a) A hozzárendelés melyik számot rendeli hozzá a (-3)-hoz?

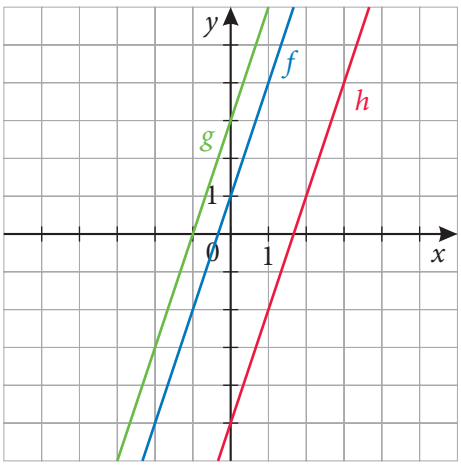
b) Melyik számhoz rendeli hozzá a 0-t?

c) Mely x számokhoz rendel pozitív számokat?

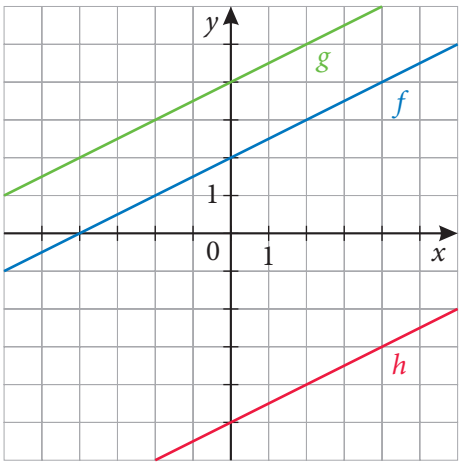
d) Mely számokhoz rendel hozzá 1-nél kisebb számokat?

5. Fogalmazd meg a grafikonok hozzárendelési szabályát! Mi jelzi a hozzárendelési szabályokban azt, hogy a grafikonok egymással párhuzamos egyenesek?

a)



b)



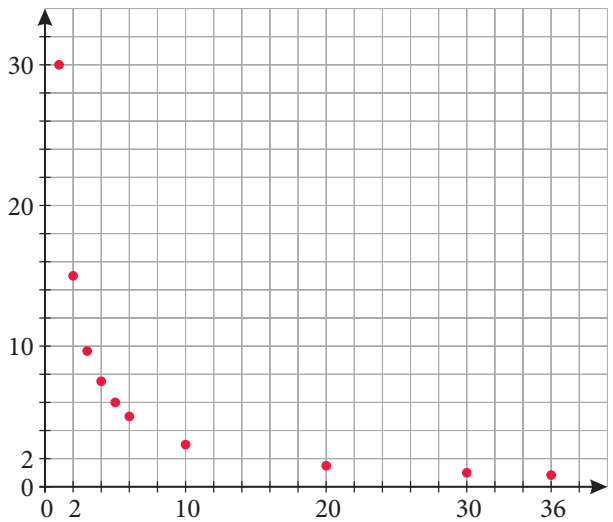
6. Rajzold meg a koordináta-rendszerben a következő egyeneseket, és add meg a hozzárendelési szabályukat!

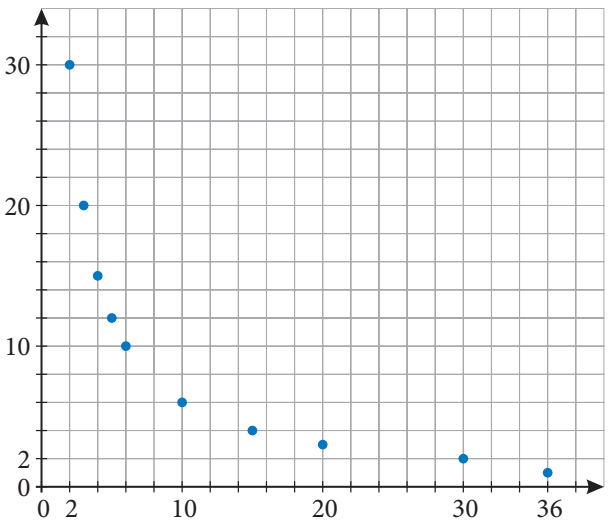
a) Az egyenes átmegy a (0; 0) és a (−1; 2) pontokon.

b) Az egyenes az *y* tengelyt a (−3) pontban metszi, és átmegy a (3; −2) ponton.

c) Az egyenes az *y* tengelyt a 2 pontban, az *x* tengelyt a (−2) pontban metszi.

7. Ajajaj! – búslakodott Eszter néni, a nyolcadikosok matektanára. – Úgy látszik túl sok feladatot állítottam össze erre a dolgozatra. Ha a számításaim nem csalnak, 1 gyerek 30 tanóra alatt tudná egyedül megoldani az összes példát. Talán szerencsésebb lenne, ha egy utolsó gyakorlóórát tartanék inkább, és szétosztanám közöttük a feladatokat – morfondírozott tovább.





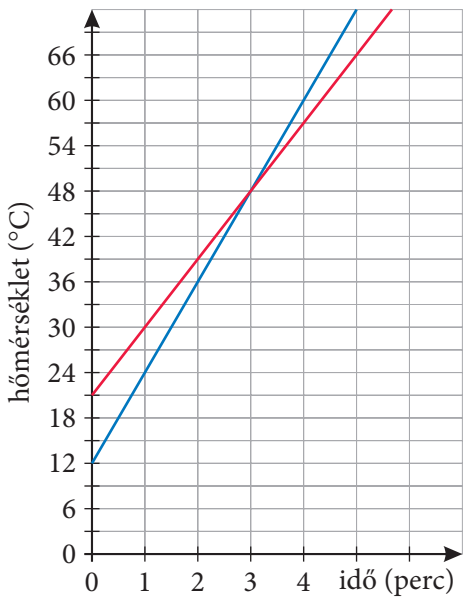
a) Válaszd ki, melyik grafikon mutatja Eszter néni szétosztási terveit! Tudjuk, hogy Eszter néni örök optimista, így feltételezi, hogy minden gyerek ugyanolyan tempóban, töretlen lelkesedéssel oldja meg a feladatokat.
b) A másik grafikonhoz te írj egy történetet!

8. Balázsék otthonról autóval szerettek volna eljutni Firenzébe. Hajnali 4 órakor indultak Gödöllőről, és 2 óra 40 perc alatt tették meg az utat a letenyei határátkelőig. Az autó átlagsebessége ezen a szakaszon 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. Tartottak 20 perc pihenőt, majd folytatták az útjukat. 280 km autózás után megálltak tankolni Szlovéniában, majd negyed óra múlva újra útnak indultak. Ekkor még 490 km út volt előttük Firenzéig. A következő kávé- és mosdószünetet másfél óra múlva tartották. A 25 perces pihenő végén újult erővel vágtak neki a maradék 310 km-nek, amit pont 3 óra alatt tettek meg, így végül 14 óra 50 percre értek Firenzébe.



a) Milyen messze van a letenyei határátkelő Balázsék otthonától?
b) Hány km-t vezetett Balázs Gödöllőtől Firenzéig?
c) Összesen hány percre álltak meg útközben?
d) Készíts idő-út grafikont Balázsék utazásáról!

9. Fizikaórán a hőmérséklet-változást vizsgálják a tanulók. Két csoport különböző hőmérsékletű vizet kap. Az I. csoport 12 °C-os, a II. csoport 21 °C-os vizet kezd el melegíteni. Az I. csoport vízmelegítője nagyobb teljesítményű, így az általuk melegített víz percenként 12 °C-kal, míg a II. csoporté csak percenként 9 °C-kal melegszik.
A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!

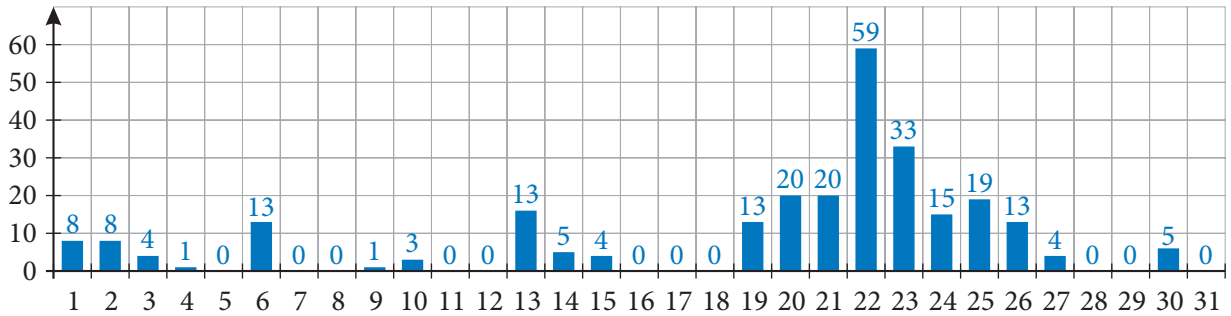


a) Mennyi lesz a víz hőmérséklete az egyes csoportoknál 2 perc elteltével?
b) Mikor lesz a víz hőmérséklete 60 °C az egyes csoportoknál?
c) Mikor lesz a víz hőmérséklete azonos a két csoportnál?
d) A mérés kezdetétől számítva mikor lesz a két csoportnál a vízhőmérsékletek különbsége 6 °C?

10. Add meg a következő események valószínűségét! Egy szabályos dobókockát egyszer feldobva
a) 6-ost dobunk;
b) 1-est dobunk;
c) páratlan számot dobunk;
d) prímszámot dobunk;
e) négyzetszámot dobunk;
f) 6-nál kisebbet dobunk;
g) 7-nél kisebbet dobunk;
h) 7-est dobunk.

11. Egy Magyarországon működő amatőr meteorológiai mérőállomás többek között a napi csapadékmennyiséget is méri. Az itt látható grafikonon a csapadék mennyiségét mm-ben adták meg. Válaszoljatok az alábbi kérdésekre a grafikon alapján!

Csapadék 2015 májusában – Napi maximum



a) Hány napon esett eső májusban?
b) Mennyi volt a legnagyobb napi csapadékmennyiség?
c) Összesen hány mm csapadék hullott ebben a hónapban?
d) Mire tippelnél? Ez több vagy kevesebb, mint az éves adatok alapján számított havi átlagos csapadékmennyiség?

12. A játszótéren Matyi, Heléna és Anna egy labdát dobált a képen látható tölcsérbe. Mindegyikük választott egy ágat, és beállt alá. Ha nála gurult ki a labda, legközelebb ő dobhatta be.
a) Melyik táblázat mutathatja a dobásaik számát?
b) Mire gyanakodnál, ha az *A* táblázat mutatná a dobásszámokat?



A:

Anna	Heléna	Matyi
66	32	22

B:

Anna	Heléna	Matyi
22	68	30

C:

Anna	Heléna	Matyi
38	37	45

13. Zsiga tolltartójában van két kék toll és öt fekete ceruza, de ezek közül kettőnek ki van törve a hegye. Van még egy kék és egy piros ceruza is benne, amelyek szépen ki vannak hegyezve. Ha véletlenszerűen választ ki egy íróeszközt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az

a) toll; *b)* ceruza; *c)* fekete ceruza;

d) fekete ceruza, amelyikkel írni is tud?

e) Ha tapintással érzi, hogy épp egy ceruzát fog, akkor mennyi a valószínűsége, hogy írni tud vele?

14. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első negyven pozitív egész szám közül egyet véletlenül kiválasztva a szám
a) osztható lesz 2-vel; *b)* osztható lesz 3-mal; *c)* prímszám lesz; *d)* összetett szám lesz?
e) Miért nem 1 a *c)* és *d)* feladatban kapott számok összege?

15. A szecsuáni síncsiszoló sínt csiszol Szecsuánban. A csiszolás nehéz munka, és a csiszológép is túlmelegszik, ha sokáig használják, úgyhogy minden órában 40 percig dolgozik, és 20 percig pihen. Mennyi a valószínűsége, hogy amikor a főnöke ellenőrizni megy, akkor éppen pihen?



16. Az osztályban kisorsolnak egy gyereket, aki az osztály papagájait eteti szeptemberben. Négyharmadszor valószínűbb, hogy fiút sorsolnak ki, mint lányt. Mekkora a lányok és a fiúk számának aránya az osztályban?



17. Viktor két kedvenc száma az 5 és a 7. Ha kitölt egy ötöslottószelvényt, és persze bejelöli a kedvenc számait is, akkor
a) az 5 és a 7 közül melyik szám kihúzásának van nagyobb esélye?
b) hány olyan 90-nél kisebb szám van, amelyikben csak 5-ös vagy 7-es számjegy szerepel?
c) ha csak olyan számokat húztak ki, amelyekben csak 5-ös vagy 7-es számjegy szerepel, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között szerepel az 5 és a 7 is?

18. Folytasd mindegyik sorozatot kétféleképpen!

a) 3; 13; 23; 33; 43; …
b) A; Á; E; É; …
c) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots$
d) $-1; +1; -1; +1; \ldots$
e) 1; 121; 1331; 14 641; …
f) 2; 3; 5; 7; 11; …

19. Add meg a sorozatok első, második, harmadik, ötödik és 112. tagját!
a) $a_n = n + 5$
b) $b_n = 1 - n^2$



KUTATÓMUNKA

Készíts sorozatot a következő szabály szerint! Válassz egy tetszőleges pozitív egész számot, ez lesz a_1, a sorozat első tagja. Ha páros, oszd el kettővel, ha páratlan, szorozd meg hárommal, és adj hozzá egyet, ez lesz a sorozat következő tagja, és így tovább. Folytasd addig, amíg 1-et nem kapsz! Ha 5-tel kezdjük, akkor az 5, 16, 8, 4, 2, 1 sorozatot kapjuk. Ha 3-mal kezdjük, akkor a 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 sorozatot.
a) Készítsd el a 7-tel kezdődő sorozatot!
b) Készítsd el a 9-cel kezdődő sorozatot!
c) Készítsd el a 11-gyel kezdődő sorozatot!
d) Tegyél fel egy kérdést a sorozattal kapcsolatban!
Keress rá az interneten a Collatz szóra! Erdős Pál 500 dollár jutalmat tűzött ki a Collatz-sejtés bizonyításáért.

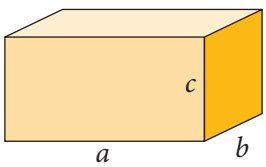

Gazsinak határozott elképzelései voltak a jövőjéről, így bátran vette fel a headsetet. ...És nem csalódott!
Ide először egy egyszerű kontyolt tetőt tervezett az építész, de meggyőztem, hogy legyen valami kicsit összetettebb, mutatósabb alakzat...
...úgyhogy rádobjuk még ezt a kupolát. Mondjuk már maga a kilátás is megéri!
Wáo, ez de király!
Helló, srácok!
Változnak az idők... és a módszerek is. De az ember terjeszkedik
...és épít.
VI. Testek
Nos, amit készítünk, nem éppen maradandó.
Cukrászatunk kis szériás süteményeket készít. Gondoltátok volna, hogy egy átlagos 12 szeletes tortát 32 dkg 40x30 cm-es, 3 mm vastagra nyújtott marcipánnal lehet beborítani?
Szerinted a 16 szeleteshez mekkora lapra van szükség? Gyakori kérdés ez. A recept arányait a rendelés szerint kell alakítanunk. A rugalmasság a fő erényünk.
Remélem, nekem nem kell minden nap olyan magasra mászkálnom..., de én is alkotni szeretnék. Valami maradandót létrehozni!
Mindig is érdekelt, amikor ismeretlen, veszélyes terepet kellett bejárni, megismerni és feltárni. Manapság rengeteget utazom, járjuk a kollégáimmal a világot, mindenféle tudományos projektben segédkezünk, térképészeti feladatokat látunk el, geológiai vizsgálatokat végzünk. Ehhez néha robbantanunk is kell.
Nem is hinnétek, mennyit képes változtatni az ember a világán.
Gyönyörű végső, nagyon köszönöm a bemutatkozást!
El kell búcsúznunk, jön a következő osztály. Vigyázzon magára!
Ne már, tanárnő, pont most kezd izgi lenni!
És még a nyerő számokat se kértük el. Tanárnő, elosztjuk!
Sajnos vége az óránk.



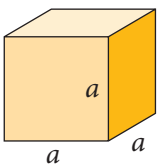
A különböző alakú tárgyak más és más alakú és méretű helyet foglalnak el a környezetünkben. Fontos lehet annak eldöntése, hogy a kanapé befér-e a sarokba, vagy mennyi cserép kell a tetőre, vagy elég lesz-e a tepsibe annyi tészta, amennyit bekevertünk. Az ilyen kérdések megválaszolása része a mindennapjainknak, még ha nem is kell állandóan hasonló problémákat átgondolnunk, megoldanunk. Ahhoz, hogy megválaszoljuk a hasonló kérdéseket, tisztában kell lennünk a testek felszínének és térfogatának fogalmával, egyszerűbb testek esetén a kiszámítás módjával is.

Az előző években megismertük, hogyan lehet kiszámolni néhány speciális test felszínét, illetve térfogatát. Összegyűjtöttük ezeket a testeket és a felszínük, illetve a térfogatuk kiszámítására szolgáló képleteket:

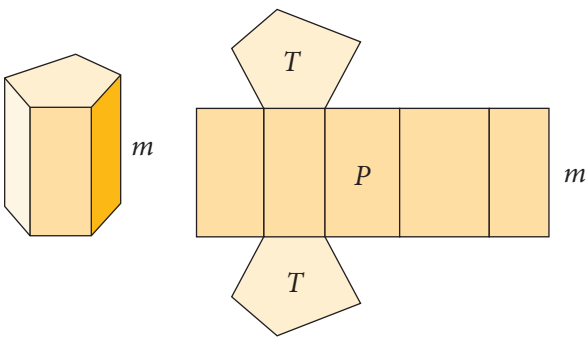
Téglatest
felszíne: $A = 2(ab + ac + bc)$
térfogata: $V = abc$



Kocka
felszíne: $A = 6a^2$
térfogata: $V = a^3$



Hasáb
felszíne: $A = 2T + P$, ahol T az alaplap, P a palást területe
térfogata: $V = Tm$, ahol T az alaplap területe, m a hasáb magassága





FELADATOK

1. Rajzolj halmazábrát a következő címkékkel: sokszöglapokkal határolt testek, kockák, hasábok, testek, téglatestek!

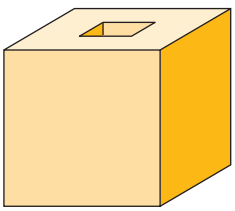
2. Az egyik téglatest éleinek hossza a, b és c, a másiké x, y és z. Hasonlítsd össze a felszínüket és a térfogatukat! Melyiknek nagyobb a felszíne, és mennyivel? Melyiknek nagyobb a térfogata, és hányszor?

a) $a = 12$ cm, $b = 4$ dm, $c = 10$ cm, $x = 25$ cm, $y = 3$ dm, $z = 80$ mm

b) $a = 16$ cm, $b = 50$ mm, $c = 0{,}5$ dm, $x = 100$ mm, $y = 0{,}4$ dm, $z = 4$ cm

3. Egy kocka felszínét cm^2-ben, térfogatát cm^3-ben adtuk meg. Hány centiméteres a kocka éle, ha felszínének és térfogatának mérőszáma ugyanaz?

4. Egy 12 cm élű kockát egyik lapjára merőlegesen átfúrtunk. A keletkezett lyuk egy 4 cm-szer 4 cm keresztmetszetű, négyzetes oszlop. Mennyivel változott a kocka felszíne és térfogata a lyukasztás után?



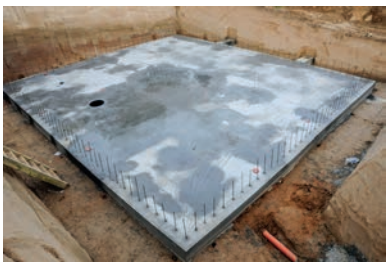
5. Tervezd meg annak a trapéz alapú hasábnak a hálóját, amelyiknek az alaplapja húrtrapéz, a húrtrapéz párhuzamos oldalainak hossza 1 cm és 3 cm, a trapéz magassága 2 cm, a hasáb magassága pedig 4 cm!

a) Mekkora a hasáb térfogata?

b) Mekkora a hasáb felszíne?

6. A köbméterenként 3 tonna tömegű bazaltzúzalékból épített vasúti töltés keresztmetszete olyan húrtrapéz, melynek két párhuzamos oldala 2,2 és 3,2 méter, magassága 50 cm hosszú. Hány tonna zúzalék szükséges egy 600 m hosszú rakodóvágány megépítéséhez?

7. Pistiék házat építenek, és az alapozásnál tartanak. Betont rendelnek a 11 m × 8 m alapterületű, 20 cm vastagra tervezett alaplemezhez.



a) Hány köbmétert kell venniük, ha csak egész, illetve fél köbmétert szállítanak ki, és a biztonság kedvéért mindig felfelé kell kerekíteni?

b) A betont 6 vagy 10 m^3-es keverőautóval szállítják ki. Ha a betont egyszerre szállítják ki, akkor hány kocsi fog érkezni a betonozáshoz?



A telek lejt, ezért a ház hátsó betonfala teljesen, két oldalfala pedig részben pincefal lesz. Ezeken a helyeken szükséges egy beton szigetelőfal felhúzása, amit vasalt beton zsalukövekkel oldanak meg. Ehhez nem rendelnek kész betont, hanem helyben keverik meg, mert folyamatosan kell feltölteni. A hátsó 8 méter hosszú oldalon a szigetelőfal 2,6 méter magas lesz. A két 11 méteres oldalon 5-5 méter hosszan 2,6 méter, a maradék 6-6 méteren csupán 1,4 méter lesz a beton szigetelőfal magassága. A zsalukövekhez kapott tájékoztató szerint 1 m^2 falazathoz 220 liter kitöltőbeton szükséges.

c) Hány köbméter betont kell megkeverniük helyben?

d) Egy köbméter betonhoz 350 kg cement, 1750 kg homokos kavics (sóder) és 200 liter víz kell. Hány zsák cementet kell rendelniük, ha egy zsák 25 kg?



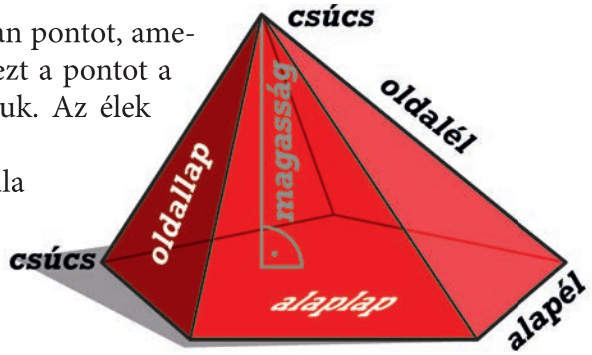
VI. 2. Gúlák

A természetben és épített világunkban rendkívül változatos alakzatokat találunk. Ezek egy csoportját alkotják a **gúlák**.



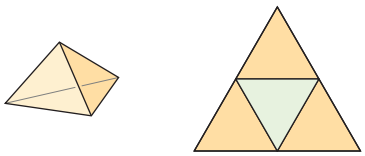
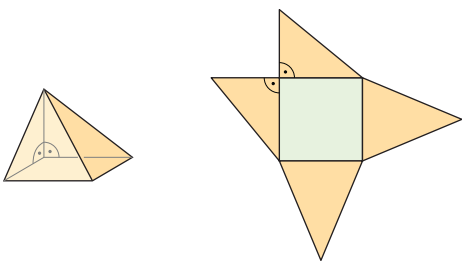



Vegyünk fel egy sokszöget a határvonalával és egy olyan pontot, amelyik nem illeszkedik a sokszög síkjára! Kössük össze ezt a pontot a sokszög minden csúcsával! Így egy gúla élvázát kapjuk. Az élek a gúla **csúcs**aiban futnak össze.
A sokszöget a gúla **alaplapjá**nak, a háromszögeket a gúla **oldallapjai**nak nevezzük. Az oldallapok együttesen a gúla **palást**ját alkotják. Az alaplap oldalai az **alapélek**, két szomszédos oldallap az **oldalél**ben metszi egymást. A háromszögek közös csúcsának az alaplap síkjától vett távolsága a **gúla magassága**.

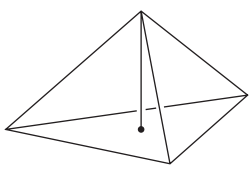


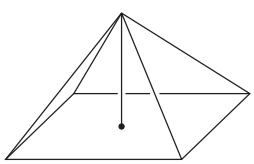
A gúlának nincs testátlója. A gúla két nem szomszédos csúcsát összekötő szakaszok csak az alaplapon lehetnek (ha az alaplap legalább négyszög), és a nevük **lapátló**.

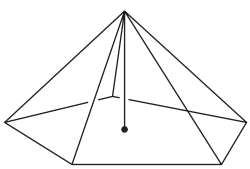
A háromszög alapú gúlát **tetraéder**nek nevezzük. A tetraédert négy háromszög határolja. Ha mind a négy háromszög szabályos, akkor **szabályos tetraéder**ről beszélünk.
Megadtuk néhány gúla hálóját. Ha ezeket kartonpapírból kivágnád, és ragasztófüleket is terveznél rájuk, akkor összeállíthatnád belőlük a gúlákat.

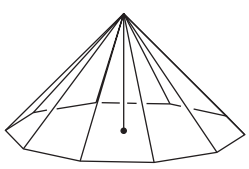



Ha a gúla alaplapja szabályos sokszög, és magasságának talppontja az alaplap középpontja, akkor **szabályos gúlá**ról beszélünk.


szabályos háromszög alapú gúla


négyzet alapú gúla


szabályos ötszög alapú gúla

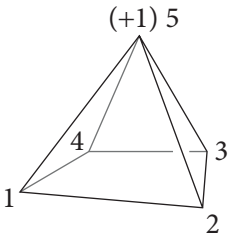

szabályos tízszög alapú gúla

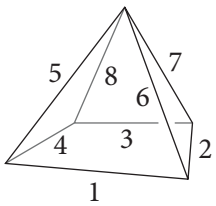
PÉLDA

Hány csúcsa, éle és lapja van egy négyszög alapú gúlának?

Megoldás

Az alaplapon van 4 csúcs, és még 1 csúcs található a négy oldallap találkozásánál. Ez összesen 5 csúcs.





Az alaplapot alkotó négyszögön van 4 él, és az alaplapon található 4 csúcs mindegyikéből indul ki még 1-1 él. Ez összesen $4 + 4 = 8$ él.

A gúlának annyi oldallapja van, ahány oldalú sokszög az alapja, és még 1 maga az alaplap. A négyszög alapú gúla lapjainak száma tehát $4 + 1 = 5$.

Táblázatot készítünk a gúlák csúcsainak, éleinek és lapjainak számáról.

Az alaplap csúcsainak száma		3	4	5	6	…	n
A gúla-	csúcsok száma	4	5	6	7	…	$n + 1$
	élek száma	6	8	10	12	…	$2n$
	lapok száma	4	5	6	7	…	$n + 1$

Játék

Egy papírlapon rajzoljatok körül egy 200 forintos érmét háromszor, hogy három körvonalat kapjatok! Az egyikre építsetek egy tornyot úgy, hogy 200, 50, 20, 10 és 5 forintos érméket raktok egymásra! Az öt érme olyan hatást kelt, mintha egy tornyot építettünk volna. A 100 forintos érmét azért hagytuk ki az építésből, mert a mérete nem illeszkedik a többihez.

A feladat az, hogy az öt érmét átrakd valamelyik másik körre. Nem szabad áttolni az oszlopot! Egyszerre csak egy érmét helyezhetsz át, és kisebb érmére nagyobbat tenni nem szabad. Hogyan lehet a teljes torony áthelyezését megvalósítani?

A játék egyszemélyes, de nyugodtan megbeszélhetitek párokban is. Gyakorlásképpen kezdheted 3, majd 4 pénzérmével. Ezt a játékot Édouard Lucas francia matematikus mutatta be 1883-ban. A játék a „Hanoi torony” elnevezést kapta.



VI. Z. Gúlák



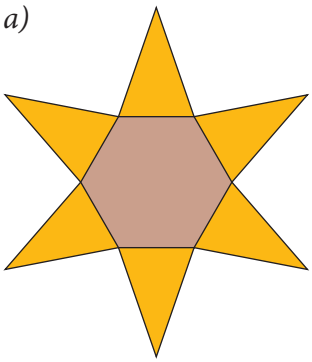
KUTATÓMUNKA

Mit találsz az interneten, ha rákeresel a Hanoi torony kifejezésre?

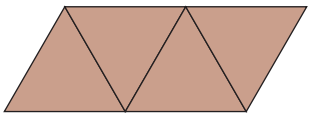
FELADATOK

1. Lehet-e gúlát hajtogatni a megadott testhálókból? Hány csúcsa, éle és lapja lesz az elkészült testeknek?

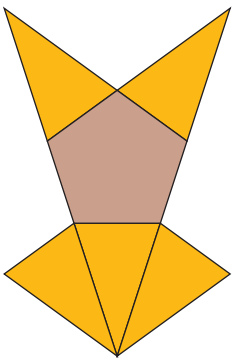
a)



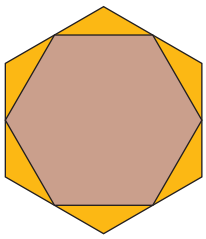
b)



c)



d)



2. Ha létezik, akkor rajzolj a füzetedbe olyan gúlát, melynek
a) 4; *b)* 6; *c)* 8; *d)* 9 éle van!

3.
a) Rajzolj 6 élű testeket! Milyen testeket rajzoltál? *b)* Rajzolj 9 élű testeket! Milyen testeket rajzoltál?

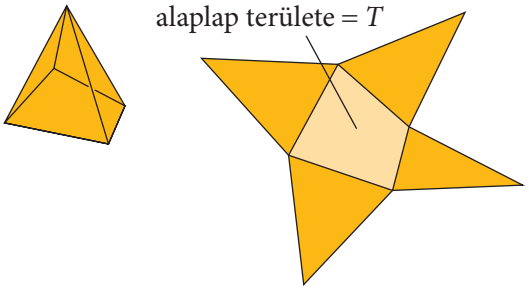
4. Egy négyzet alapú szabályos gúla minden lapja egyszínű. Az alaplapja mindig sárga, oldallapjai piros, sárga, zöld vagy kék színűek lehetnek. Hányféleképpen lehet kiszínezni a gúlákat, ha
a) a háromszögek különböző színűek;
b) a háromszögek között pontosan két piros van, amelyek szomszédosak, és a további kettő különböző színű;
c) a háromszögek között pontosan két azonos színű van, amelyek szomszédosak, és a további kettő ezektől eltérő és különböző színű;
d) a háromszögek között pontosan két piros van, amelyek nem szomszédosak, és a további kettő különböző színű;
e) a háromszögek között pontosan két azonos színű van, amelyek nem szomszédosak, és a további kettő ezektől eltérő és különböző színű?



Kiegészítő tananyag

A sokszöglapokkal határolt testek felszínén a határoló lapok területének összegét értjük. Így volt ez a kocka és a téglatest esetében is, de azoknál a testeknél minden határoló lap téglalap volt.

A gúla felszíne az alaplap és az oldallapokat alkotó háromszögek területének összege, vagy használva új elnevezésünket, az alaplap és a palást területének összege: $A = T + P$

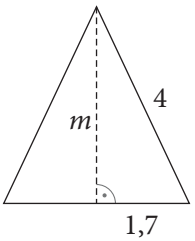


1. PÉLDA

Egy 3,4 méter oldalhosszúságú, négyzet alapú sarokszobára önálló tetőt terveztek. A tető gúla alakú, az oldalélei 4 m hosszúak. Hány darab cserepet fognak felhasználni a befedéséhez, ha 1 m^2-re 20 db-bal kell számolnunk?

Megoldás

A gúla palástjának területét kell meghatároznunk, amely négy egybevágó, egyenlő szárú háromszögből áll. Egy ilyen háromszög minden oldalának hosszát ismerjük.



A háromszög magasságát a Pitagorasz-tétellel számítjuk ki:

$m = \sqrt{4^2 - 1{,}7^2} \approx 3{,}6$ (m)

A háromszög területe: $t = \frac{3{,}4 \cdot 3{,}6}{2} = 6{,}12$ (m^2)

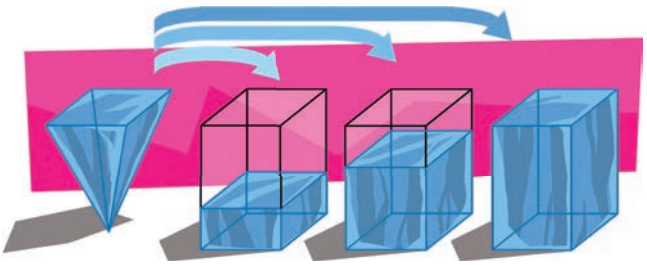
Ennek a területnek a négyszeresét, vagyis 24,48 m^2-t kell befedni. Mivel négyzetméterenként 20 db cserépre van szükség, ezért összesen $24{,}48 \cdot 20 = 489{,}6 \approx 490$ db cserép szükséges.

Természetesen a vágások, összeillesztések miatt a tető befedéséhez ennél valamennyivel több cserepet kell vásárolni.



A párizsi Louvre üvegpiramisát sokan kritizálták, mások örömmel üdvözölték, de egy dolog tény: mára a Louvre, sőt Párizs egyik szimbólumává vált. A szabályos piramis körülbelül 21 méter magas, alapélének hossza pedig 35 méter. Magában foglalja az új főbejáratot, és megnyitja a föld alatti teret a pénztárak, a büfé, az ajándékbolt és más, a múzeumhoz tartozó létesítmények felé. Az üvegből készült szerkezet egyben felülvilágító is, amely lehetővé teszi, hogy a természetes fény az alsóbb szintekre is eljusson. A nagy üvegpiramis mellett van három kisebb piramis, sőt, egy föld alá nyúló fordított piramis is az építészeti kompozíció része. A Louvre közlése szerint a fő piramist 673 darab 2,1 cm vastag, rombusz vagy háromszög alakú üvegtábla fedi. Viszonylag könnyen ki lehet számolni, hogy az üvegpiramis felülete körülbelül 1900 m^2. Mivel 1 dm^3 üveg 2,6 kg, ezért a fő piramisba kicsivel több mint 100 tonna üveget építettek be.

A képen látható kísérlet azt mutatja, hogy ha a hasábbal egyforma alapú és magasságú gúlát háromszor megtöltjük folyadékkal, majd annak tartalmát beleöntjük a hasábba, akkor az éppen megtelik. A hasáb térfogata háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú gúla térfogatának.



A **gúlák térfogatát** a következő képlet adja meg: $V = \frac{Tm}{3}$, ahol T az alaplap területét, m a gúla magasságát jelenti. A képlet bizonyítható, de mi a tapasztalat alapján egyszerűen csak elfogadjuk és használjuk.

2. PÉLDA

Egy térbeli játék négy szabályos tetraéderből és hat négyzet alapú gúlából áll. Mindkét test mindegyik éle 5 cm-es. Szeretnénk elkészíteni a játék tartós változatát égethető gyurmából. A szabályos tetraéder magasságát milliméter pontossággal megmértük, ami 4,1 cm volt. Mennyi gyurmára lesz szükségünk?

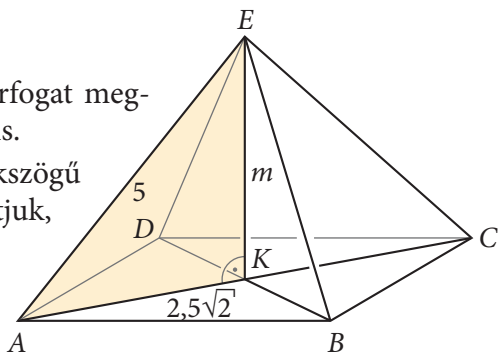
Megoldás

A négyzet alapú gúla alaplapjának területe: 25 cm^2. A térfogat meghatározásához azonban ismernünk kell a gúla magasságát is.

A négyzet átlója $5\sqrt{2}$, ezért $AK = 2{,}5\sqrt{2}$. Az AKE derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítjuk, hogy:

$m = \sqrt{5^2 - \left(2{,}5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 12{,}5} = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}5$ (cm)

Vagyis egy gúla térfogata: $V_1 = \frac{25 \cdot 3{,}5}{3} \approx 29{,}2$ (cm^3)





A szabályos tetraéder alaplapja szabályos háromszög.

A Pitagorasz-tétellel meghatározhatjuk a háromszög magasságát, és kiszámíthatjuk a szabályos háromszög területét: $\frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 10{,}8$ (cm^2)

A mérés szerint a tetraéder magassága 4,1 cm.

Vagyis egy szabályos tetraéder térfogata: $V_2 = \frac{10{,}8 \cdot 4{,}1}{3} \approx 14{,}8$ (cm^3)

Tehát a szükséges gyurma mennyisége:

$6 \cdot V_1 + 4 \cdot V_2 = 6 \cdot 29{,}2 + 4 \cdot 14{,}8 = 234{,}4$ cm^3

A piramisok

Az emberek több ezer éve építenek piramisokat. Az inkák Mexikóban, a maják a mai Salvador területén, de a legismertebbek a mai Egyiptom területén vannak. A Kairó határában lévő Gíza városában álló nagy piramisok Hufu fáraó, a fia, Hafré, és az ő fia, Menkaure temetkezési helyéül szolgáltak. A legnagyobb piramis Hufué, Hufu nevének görög változata alapján szokták Kheopsz-piramisnak is hívni. Alapja körülbelül 230 méter oldalú négyzet, és a szabályos gúla magassága ma 137 méter. Ezt a hatalmas építményt körülbelül 1 m^3-es, 2 tonnás kőtömbökből állították össze. Ha kicsit számolunk, akkor kiderül, hogy a piramis térfogata kb. 2,5 millió m^3, ami nagyjából 5 millió tonna. Számtalan elmélet látott korábban napvilágot, hogyan építhették fel 4500 évvel ezelőtt ezeket a piramisokat. Voltak olyan emberek, akik azt gondolták, hogy űrlények segítették az embereket az építkezésben. Sok tudós úgy vélte, hogy rabszolgák építették a piramisokat, de az ő álláspontjuk sem volt mindig egyértelmű. Ma már az az elfogadott elmélet, hogy fizetett munkások, illetve adóbeszámításért dolgozó emberek építették fel hosszú évek során.



Maja piramis



Hufu- (Kheopsz-) piramis

FELADATOK

1. A 6 cm-es alapélű, négyzet alapú gúla minden oldallapjának magassága 8 cm. Mekkora a felszíne?

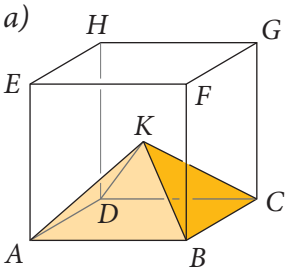
2. A 8 cm-szer 12 cm-es, téglalap alapú gúla magassága 15 cm. Mekkora a térfogata?

3. Egy négyzet alapú gúla minden oldaléle egyenlő hosszúságú. Add meg a gúlák felszínét és térfogatát az a alapél és a b oldalél hosszának ismeretében!
a) $a = 8$ cm, $b = 12$ cm
b) $a = 14$ cm, $b = 9$ cm

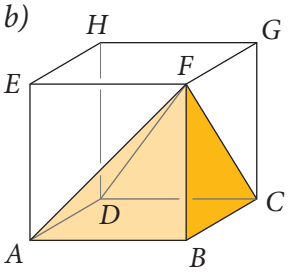
4. Egy téglalap alapú gúla minden oldaléle egyenlő hosszúságú. Add meg a gúlák felszínét és térfogatát az a és a b alapél, valamint a c oldalél hosszának ismeretében!
a) $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $c = 18$ cm
b) $a = 14$ cm, $b = 9$ cm, $c = 28$ cm

5. 12 cm élhosszúságú kockákba egy-egy gúlát írtunk. Add meg a gúlák felszínét és térfogatát! Az *a)* feladatban K-val jelöltük a kocka középpontját.

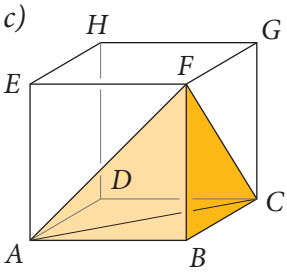
a)



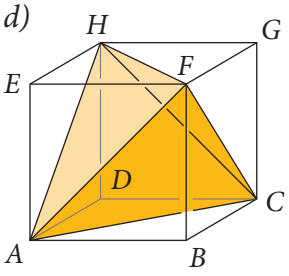
b)



c)



d)

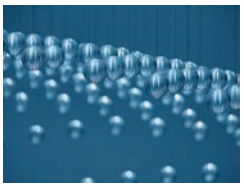


VI. 4. A gömb

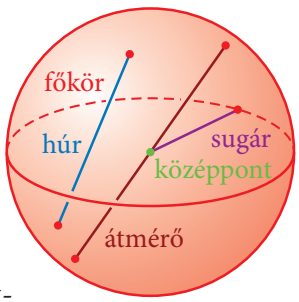
A paradicsom, az alma, a dinnye ugyanazt a formát juttatja eszünkbe. A labdák, a golyók azonos geometriai tulajdonsággal rendelkeznek. Ebben a leckében ez a térbeli alakzat, a **gömb** lesz a főszereplő.



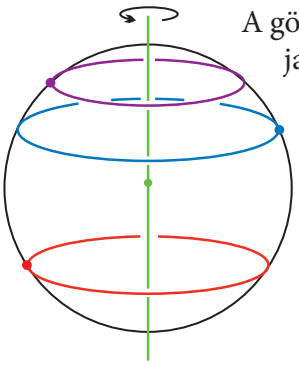




Beszélhetünk **gömbfelület**ről és **gömbtest**ről.
A gömbfelület azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól ugyanakkora távolságra találhatók.
Az adott pont a **gömb középpontja**, a távolság a **gömb sugara**.



A gömbtest azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól egy adott távolságnál nincsenek messzebb.
A gömbfelület két tetszőleges pontját összekötő szakasz a **gömb húrja**, a leghosszabb húr pedig a **gömb átmérője**. Ha a gömböt egy síkkal elvágjuk, a metszet egy kör lesz. A legnagyobb ilyen köröket **főkörök**nek nevezzük. A gömb és a főkörök középpontja egybeesik. A főkörök sugara egyben a gömb sugara is.



A gömb forgástest. Ha egy kört az átmérője körül forgatunk, akkor a körvonal pontjai gömbfelületet írnak le.
A gömbfelületet nem tudjuk síkba kiteríteni.

Játék

Kigolyózunk



A játék egyszemélyes, de megbeszélhetitek párban is. Helyezzetek egy hosszú, keskeny vályú egyik felébe négy sötét, másik felébe négy világos golyót! A vályú közepén egy akkora kiszélesedés található, amelyben úgy elfér egy golyó, hogy közben egy másik elgurítható mellette. A vályú sötét golyókat tartalmazó vége zárt, a másik nyitott.
Hogyan lehet a vályúból az összes sötét golyót kigurítani úgy, hogy közben a világosak bent maradjanak? Megtaláljátok a megoldást akkor is, ha a kiszélesedésbe csak sötét golyót lehet begurítani?
A golyók természetesen helyettesíthetők más tárgyakkal is. A golyós változathoz a vályú könnyen kialakítható például gyurmából. Segítségképpen kezdhetitek 2-2 vagy 3-3 golyóval is.

4. A gömb



KUTATÓMUNKA

Keresd meg az interneten, milyen játék a petanque!
Gyűjtsetek össze minél több olyan sportszert, amely gömb alakú!



KUTATÓMUNKA

Hallottál már a dobógömbről? Ez egy gömb alakú dobótest. Nézz utána, hogyan működik, és mi garantálja azt, hogy az egyes dobások ugyanakkora valószínűséggel következzenek be!



FELADATOK

1. Amikor Carlos Alcaraz edz, akkor 100 darab 6,7 cm átmérőjű, 58 grammos teniszlabdát üt el a teniszpályán.

a) Milyen geometriai alakzaton helyezkednek el a labdák középpontjai, amikor a pályán hevernek?

b) Milyen geometriai alakzaton helyezkednek el egy S síkot érintő, d átmérőjű gömbök középpontjai?



2. Hány részre vághatunk egy gömböt

a) 1 síkkal; *b)* 2 síkkal; *c)* 3 síkkal?

3. Egy asztalitenisz- (pingpong-) labda átmérője kereken 40 mm. Néha négyesével csomagolják őket egy 40 mm alapélű négyzetes hasáb alakú papírdobozba.

a) Mekkora a doboz felszíne?

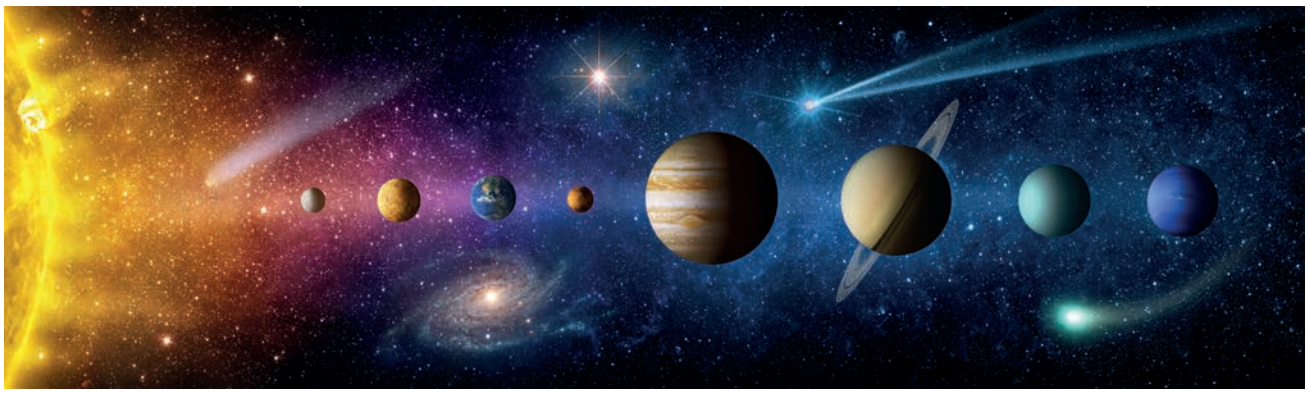
b) Mennyi papír kell egy doboz elkészítéséhez, ha a hajtások és ragasztások miatt 20%-ot még rászámolnak a felszínre?

4. A nagyobb gyerekek kosárlabdája kb. 22,3 cm átmérőjű. Hány kosárlabda fér el egymás mellett a 45 cm átmérőjű gyűrűben?

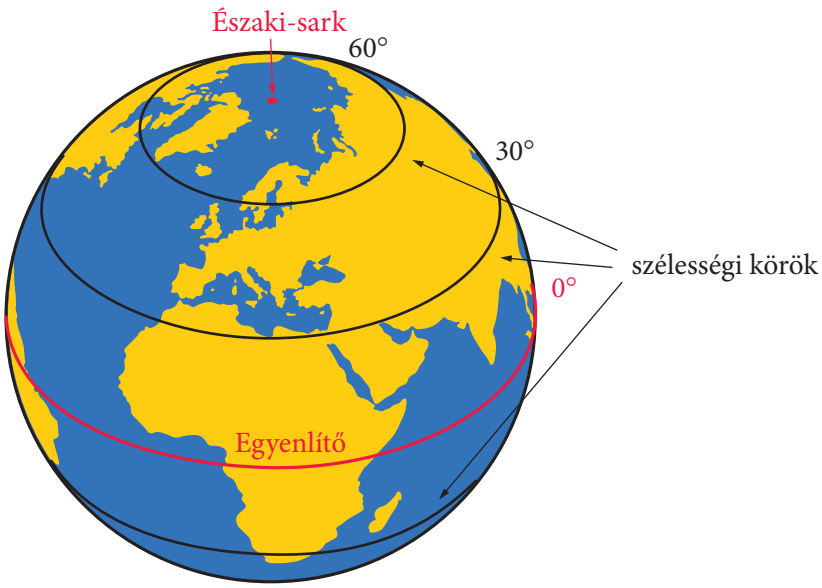


VI. 5. A Föld

A Naprendszerben lévő égitestek többsége nagyjából gömb alakú. A Nap, a bolygók, a holdak a tengely körüli forgásuk miatt lehetnek nagyon enyhén lapultak, de ezt szabad szemmel alig, vagy egyáltalán nem lehet észrevenni. A kisebb, általában valamilyen ütközés vagy robbanás során létrejött törmelékrészecskék nem gömb alakúak.



A Föld mint égitest különleges szerepet játszik az életünkben, hiszen ez az otthonunk. Vigyáznunk kell rá, mert emberi léptékkel mérve ugyan hatalmas, de nem kimeríthetetlen. Óriási méretei miatt a tájékozódás a Földön mindig is kiemelt fontosságú volt a gyalogosok, lovasok, autók, hajók, repülőgépek és műholdak számára.



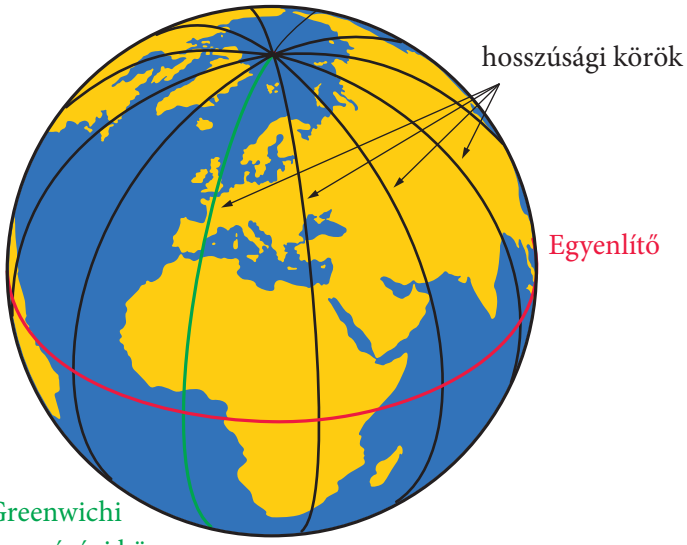
Pár ezer évvel ezelőtt szóbeszéd, kézzel rajzolt térkép vagy a csillagok állása alapján tájékozódtak az emberek, de ma már rögzített és szabványos koordináta-rendszert használunk. A Föld felszínén kitüntetjük az Egyenlítőt, ez a főkör lesz a 0°-hoz tartozó úgynevezett kezdő szélességi kör. Ha az Egyenlítővel párhuzamos síkokkal szeleteljük fel képzeletben a Földet, akkor a metszésvonalak adják a többi szélességi kört. Az Egyenlítőtől észak vagy dél felé 90°-ot haladva elérünk az Északi-, illetve a Déli-sarkra.

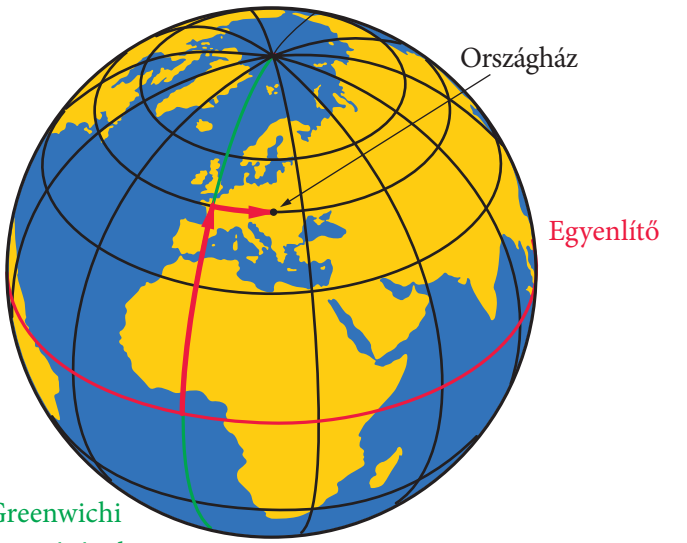
A hosszúsági körök az Északi- és a Déli-sarkon áthaladó főkörökön lévő, a két sarkot összekötő félkörök, amelyek merőlegesek a szélességi körökre. A hosszúsági körök nem párhuzamosak egymással. A szomszédos hosszúsági körök által határolt testet úgy képzelhetjük el, mint egy narancsgerezdet. A 0°-hoz tartozó hosszúsági kör történelmi okokból az angliai Greenwich Királyi Obszervatóriumon halad keresztül. Ettől keletre és nyugatra haladva 180°-180°-ot az összes hosszúsági körön áthaladunk.

Szélességi körök északra és délre lehetnek az Egyenlítőtől, ezért ezeket é. sz., illetve d. sz. kezdőbetűkkel rövidítjük. Hosszúsági körök esetében a keleti és nyugati hosszúságokat k. h. és ny. h. kezdőbetűkkel rövidítjük.

Az Országház körülbelül az északi szélesség 47,50723°, keleti hosszúság 19,04556° metszéspontban helyezkedik el, ezért ennek rövidítése é. sz. 47,50723°, k. h. 19,04556°.

A nemzetközi helymeghatározó rendszerek természetesen nem a magyar, hanem az angol East (kelet), West (nyugat), North (észak) és South (dél) szó első betűjét használják, és csak annyit írnak, hogy N47,50723 és E19,04556. Gyakran a fokjelet sem teszik ki a műszerek, mert alapértelmezésként minden fokban van megadva. Olyan rendszerek is léteznek, amelyek nem tizedes törtekkel, hanem fok, szögperc és szögmásodperc használatával adják meg a koordinátákat (a szögmásodperc a szögperc 60-ad része, jele ”). Ekkor az Országház koordinátái é. sz. 47°30’26”, k. h. 19°02’44”.







1. PÉLDA

Mekkora távolságra van egymástól két falu az Egyenlítőn, ha 1° az eltérés a rajtuk áthaladó hosszúsági körök között?

Megoldás

Az Egyenlítő hossza körülbelül 40 075 km, és ez egy teljes körnek, 360°-nak felel meg.

1°-os eltérés tehát $\frac{40\,075}{360} \approx 111{,}32$ km távolságot jelent.

2. PÉLDA

Mekkora a távolság London és Ghána fővárosa, Accra között? Kerekítsük az eredményt 10 km-re!

Megoldás

London és Accra gyakorlatilag ugyanazon a hosszúsági körön helyezkedik el, de London kb. az é. sz. 51°30', Accra pedig kb. az é. sz. 5°35' szélességi körön van.

A kettő különbsége 51°30' – 5°35' = 45°55' ≈ 45,91667°.

Ha elfogadjuk, hogy a Föld kb. gömb alakú, akkor $40\,075 \cdot \frac{45{,}91667}{360} \approx 5110$ km adódik a két város távolságára.

Az interneten ellenőrizve körülbelül 5109 km-t kapunk.



KUTATÓMUNKA

Nézzetek utána, hogy Londonból Washingtonba milyen útvonalon haladnak a repülőgépek! Miért?

FELADATOK

1. Mekkora távolságot jelent az Egyenlítőn két hosszúsági kör között 1' különbség?

2. Szeged és Szolnok nagyjából ugyanazon a hosszúsági körön fekszik, de Szeged az északi szélesség 46°15', Szolnok pedig az északi szélesség 47°10' körül. Mekkora a két város távolsága tíz km-re kerekítve?

3. Hány km-re van az Egyenlítőtől a Ráktérítő, illetve a Baktérítő, ha azok az északi, illetve a déli 23° 30'-es szélességi körök?

FELADATOK

1. Sorold fel, milyen testeket látsz a képen!



2. A harangtorony egy olyan négyzetes hasáb, amelynek a tetején van egy négyzet alapú gúla. Hány csúcsa, éle és lapja van ennek a testnek?

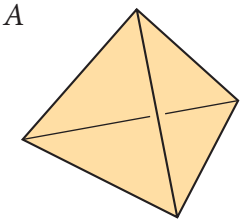


3. Megszámoltuk egy gúla éleinek a számát. Mennyit kaphattunk eredményül? Válaszodat indokold!

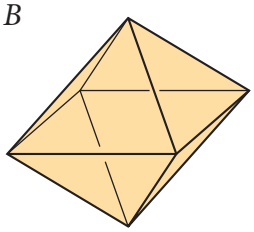
A: 1001 B: 2000 C: 2015 D: 2061 E: 2345

4. Párosítsd össze a testeket a hálójukkal!
Hány csúcsa, éle és lapja van az egyes testeknek?

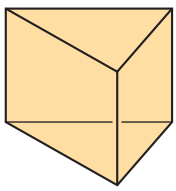
A



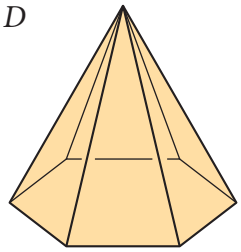
B



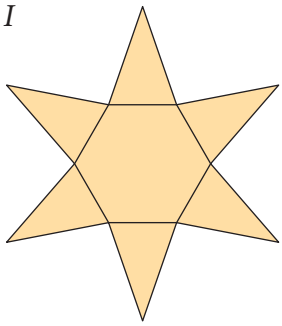
C



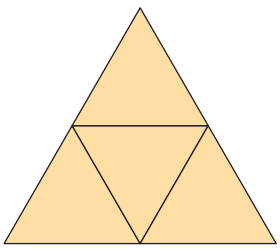
D



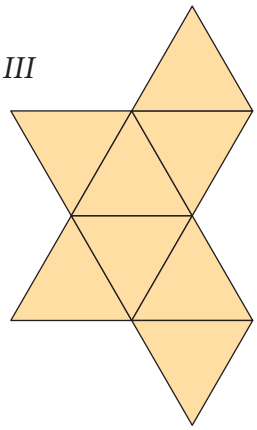
I



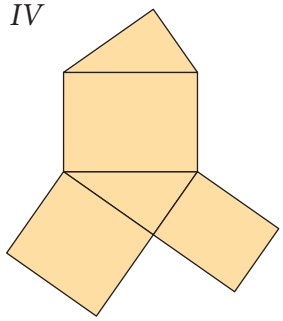
II



III

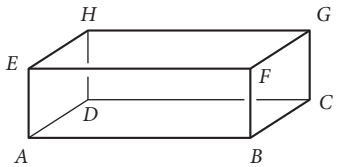


IV



5. Fogalmazd meg a saját szavaiddal, miért nem hasáb a gúla!

6. Add meg az ábrán látható téglatest néhány csúcsát úgy, hogy a megfelelő csúcsok összekötésével gúlát kapj!



a) Találtál egybevágó testeket?
b) Adjál meg négy nem egybevágó testet!
c) Rajzolj mindegyikre egy-egy példát a füzetedben!

7. Három díszgömbünk van, egy 5 cm sugarú piros, egy 3 cm sugarú kék és egy 1 cm sugarú sárga. Úgy lógattuk fel a három gömböt, hogy a középpontjaik egy egyenesre essenek. Értsük most két gömb távolságán a középpontjaik távolságát! A piros a sárgától 15 cm-re, a sárga a kéktől 6 cm-re van. Hogyan helyezkedhetnek el egymáshoz képest a gömbök? Rajzold le a füzetedbe arányosan a gömbök elhelyezkedésének lehetőségeit! Hány különböző esetet találtál?

8. Egy 16 cm élhosszúságú kocka egyik sarkából kivágtunk egy kis kockát. Ennek térfogata az eredeti kocka térfogatának a 12,5%-ával egyenlő. Mekkora a kivágott kis kocka élhossza?

Kiegészítő tananyag

9. Egy gúla térfogata 652 cm^3. Mekkora a vele azonos magasságú és alaplapú hasáb térfogata?
A: 652 cm^3-nél kevesebb
B: 978 cm^3 C: 1304 cm^3 D: 1956 cm^3
E: Az előzőek egyike sem.

10. Egy gúla minden lapja 11 cm^2 területű. Mekkora a felszíne?
A: Ez az egy adat kevés a kérdés megválaszolásához.
B: Biztosan több, mint 44 cm^2.
C: 33 cm^2
D: 44 cm^2
E: 55 cm^2

11. A szabályos hatszög keresztmetszetű toronyra rézlemezből tetőt terveznek. A tető olyan gúla lesz, amelynek oldallapjai egyenlő szárú háromszögek. A háromszögek alapja 4 m, a szárai pedig 6 m hosszúak.
a) Mekkora felületet kell rézlemezzel borítani?
b) A vágások és az átfedések miatt a megvásárolt lemez mennyiségének a 18%-a hulladék lett. Hány m^2 lemezt vásároltak összesen?

12. Egy emléktárgyboltba üvegből készített, négyzet alapú gúlák érkeztek. Az üzletben a gúlák felületére szöveg bevésését is vállalják. Egy gúla alaplapja 70,56 cm^2 területű, magassága pedig 6 cm. Mekkora a tömege egy ilyen emléktárgynak, ha az üveg sűrűsége 2500 kg/m^3 (azaz 1 m^3 üveg 2500 kg tömegű)?

1. Számold ki a megadott betűk értékét!

A = 5-nek a $\frac{7}{6}$ része

B = 7-nél nagyobb, 29-nél kisebb 4-gyel osztható számok száma

C = 200 25%-ánál 13-mal kisebb szám

D = $B \cdot C - A$

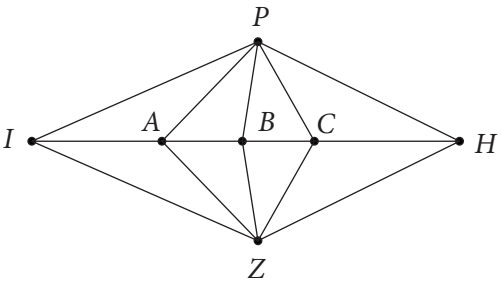
2. Tedd igazzá a következő egyenlőségeket a hiányzó mérőszámok beírásával!

5 kg − 52 dkg = …… kg = …… g

13 cm + 13 dm + …… m = 2,5 m

46 m^2 − 46 dm^2 = …… dm^2 = …… m^2

3. Julcsit megkérte az anyukája, hogy az iskolából hazafelé menet vegyen a péknél kenyeret, a zöldségesnél pedig almát. Sorold fel, mely útvonalakon mehetett haza Julcsi, ha elhatározta, hogy a *P*, *A*, *B*, *C*, *Z* kereszteződések közül pontosan négyet fog érinteni, és egyiken sem halad át kétszer? Az ábrán: *I* = iskola, *P* = pék, *Z* = zöldséges, *H* = otthon, a többi kereszteződést pedig az *A*, *B*, *C* betűk jelölik.
(Egy lehetséges útvonal: *IPBZCH*.)



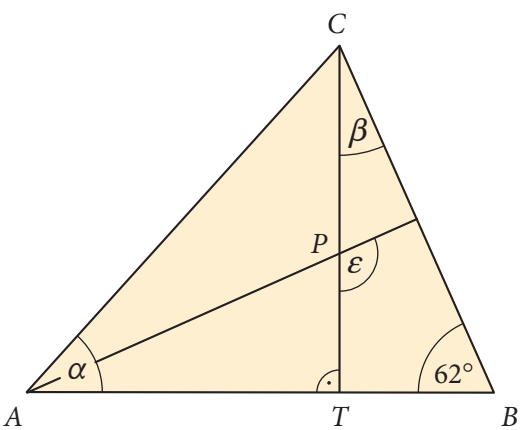
4. Törpfalván új fizetőeszközt szeretnének bevezetni, de előtte megkérdezték a törpöket, hogy szerintük milyen formában lenne ez a legcélszerűbb. A megkérdezettek életkorát és válaszát az alábbi táblázat tartalmazza. Válaszolj a következő kérdésekre az adatok alapján!



	Papírpénz	Fémpénz	Virtuális pénz
Törpgyerekek (10 év alatt)	3	10	32
Fiatal törpök (10–20 év)	12	15	21
Idős törpök (20 év fölött)	36	20	7

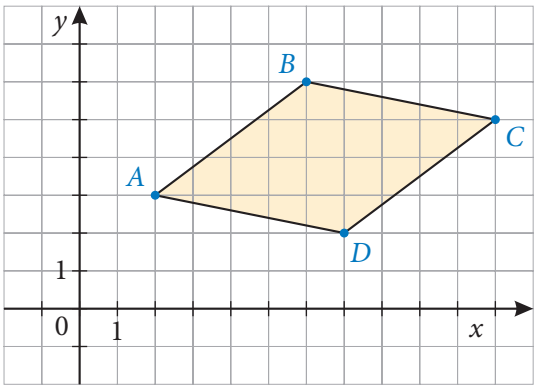
a) Készíts oszlopdiagramot a fiatal törpök válaszairól!
b) A megkérdezett törpök hány százaléka gondolja a fémpénzt a legcélszerűbb fizetőeszköznek?
c) Melyik fizetőeszközt vezetik be, ha a kérdés szavazás útján dől el, és a faluban minden 10. életévét betöltött törp szavazhat?

5. Az ábrán látható *ABC* egyenlő szárú háromszögben *AB* = *AC*. Berajzoltuk a *C* csúcsból induló magasságvonalat, amely az *AB* oldalt *T* pontban metszi. Az *A* csúcsból induló szögfelező és a *C* csúcsból induló magasságvonal metszéspontja *P*.



a) Mekkora a BTC háromszög β szöge?
b) Számold ki az ABC háromszög A csúcsánál lévő α szöget!
c) Mekkora az ε szög nagysága?

6. Az $ABCD$ négyszöget koordináta-rendszerben ábrázoltuk.



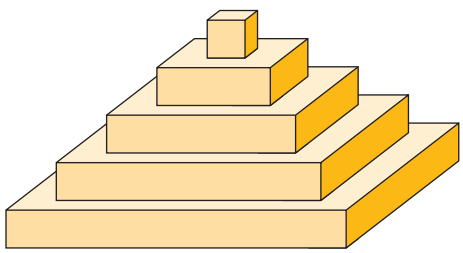
a) Milyen négyszög az $ABCD$ négyszög?
b) Az E pont első koordinátája 7. Add meg a második koordinátáját úgy, hogy az egy 4-nél nem nagyobb, pozitív egész szám legyen, és az E pont
- a négyszög belsejében;
- a négyszög határvonalán;
- a négyszögön kívül helyezkedjen el!

c) Határozd meg az $ABCD$ négyszög területét, ha egy kis négyzet területe 1!

7. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak!
a) Ha egy pozitív egész számnak kettőnél több osztója van, akkor az összetett szám.
b) Nem minden rombusz paralelogramma.
c) Egy sokszög belső szögeinek összege lehet 1800°.
d) A legkisebb pozitív négyzetszám a 4.
e) A háromszög magasságvonalainak metszéspontja a háromszög belsejében van.

8. Bori és Dávid matricákat gyűjt. Dávid matricáinak száma egyenlő Bori matricáinak 3/4-ével.
a) Mennyi matricája van Dávidnak, ha ketten együtt 210 matricát gyűjtöttek?
b) Mennyi matricát gyűjtsön még Dávid, hogy 30%-kal több matricája legyen, mint Borinak?

9. A fiúk technikaszakkörön 1 cm vastag falemezekből 5 cm magas inka piramist barkácsoltak. A szintek négyzet alapú hasábok lettek, rendre 9 cm, 7 cm, 5 cm, 3 cm és 1 cm hosszú alapéllel. Mekkora lett az így összeállított piramis felszíne és térfogata?



10. A nyári kiárusítás során egy nyári cipőt 24%-kal leáraztak, így 16 720 Ft-ba került.
a) Mennyibe került a cipő a leárazás előtt?
b) Mennyibe kerülne ez a cipő, ha a 24%-os leárazás után 15%-kal felemelnék az árát?
c) Hány százalékos lenne a leárazás mértéke, ha a cipő 17 600 Ft-ba kerülne?

1. Számítsd ki az alábbi betűk értékét, majd írd fel a betűket értékük szerint növekvő sorrendbe!

a) $H = \frac{3}{5} + \frac{5}{12}$

b) $Ó = \frac{3^3 - 2^3}{38} \cdot 4{,}2$

c) $D = (-2) \cdot 3 - (-10)$

2. Tedd igazzá az alábbi egyenlőségeket!

a) 4 h + 600 s = … min

b) 123 cm^2 − 0,5 dm^2 = … dm^2

c) 156,4 m − … dm = 6400 cm

d) 5 dkg + 5 kg = … g

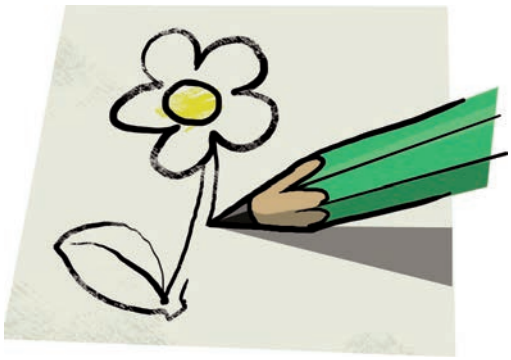
3. Alma, Boróka, Csenge és Dóri társasjátékoztak. A játék elején választaniuk kellett a piros, kék, zöld, sárga és fehér bábuk közül. Alma és Boróka egyszótagú színt szeretne, Dóri nem szereti a kék, zöld és fehér színeket, Csengének pedig mindegy, melyik bábuval játszik. Írd fel az összes lehetőséget, ahogyan alakulhatott a bábuk elosztása, ha mindenki kívánságát figyelembe vették!

4. Eszter virágos sormintával díszíti a füzete borítóját. Ötszirmú, sárga közepű, egylevelű virágokkal kezdi a mintát, de minden harmadik virágnak két levelet, minden negyedik virágnak négy szirmot rajzol, és minden ötödik virágnak narancssárgára színezi a közepét.

a) Milyen tulajdonságai vannak a 36. virágnak?

b) Melyik a legkisebb sorszámú, négyszirmú, narancssárga közepű és egylevelű virág?

c) Hány ötszirmú, sárga közepű, egylevelű virág van az ötven virágból álló mintában?

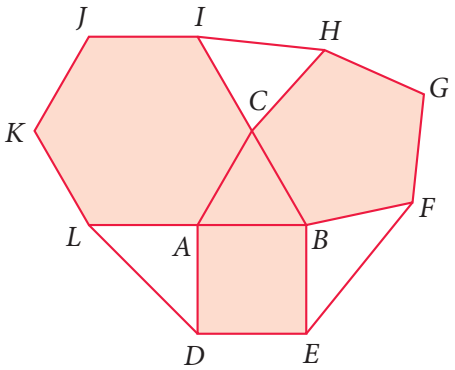


5. Egy szabályos *ABC* háromszög oldalaira szabályos négyszöget, ötszöget és hatszöget rajzoltunk, így kaptuk a *DEFGHIJKL* kilencszöget.

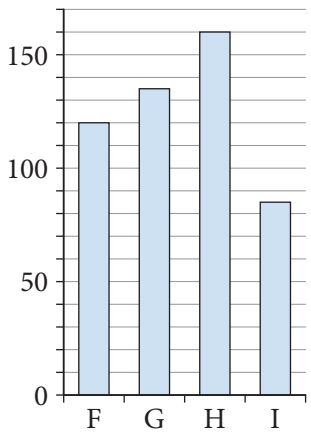
a) Mekkorák a kilencszög belső szögei?

b) Tedd hosszuk szerint növekvő sorrendbe az *EF*, *HI* és *LD* szakaszokat!

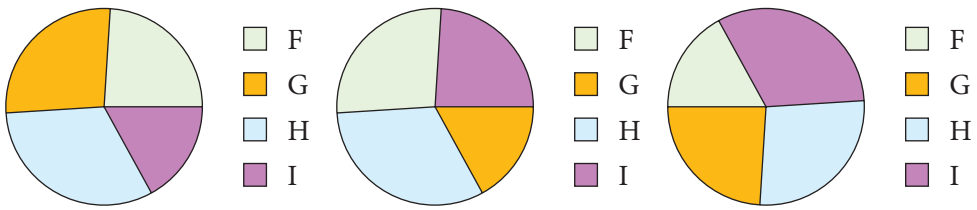
c) Milyen négyszögek a következők: *DEAL*, *ACKL*, *LDBI*, *CIKL*? Válaszodat indokold!



6. Fecó, Gergő, Huba és Iván nyáron meggymagozó versenyt tartottak. Az eredményt a jobb oldalon lévő oszlopdiagram ábrázolja.



a) Ki nyerte a versenyt?
b) Lehetséges-e, hogy nem a győztes csapatba kerül az egyéni nyertes, ha kétfős csapatokban játszanak?
c) Melyik kördiagram szemlélteti helyesen a végeredményt?

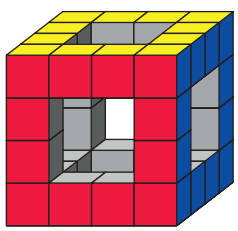


d) Mennyi meggyet magoztak ki átlagosan?
e) Hány százalékát magozta ki a meggynek Gergő?

7. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!
a) Minden számnak van reciproka.
b) Négy gyerek 24-féleképpen állhat sorba.
c) A szabályos sokszögek tengelyesen szimmetrikusak.
d) A tengelyesen szimmetrikus sokszögek szabályosak.
e) A 2 minden páros szám osztója.

8. Két testvér 40 darab cukorkán osztozkodik. Jancsi, aki két évvel idősebb Katinál, azt javasolja, hogy az általános iskolai évfolyamuk sorszámának arányában osszák szét a kupacot. (Mindketten 6 évesen kezdték az iskolát, és nem ismételtek évet.) Kati inkább az éveik számát venné alapul, mert akkor jobban járna: csak 4-gyel kevesebb jutna neki, mint Jancsinak. Végül Kati javaslata alapján osztoztak.
a) Hány cukorkát kapott Kati?
b) Hány éves Jancsi és Kati?
c) Valóban jobban járt az általa javasolt elosztással Kati? Válaszodat számolással indokold!

9. Lali szétszedte a $4 \times 4 \times 4$-es Rubik-kockát úgy, hogy csak az élek mentén lévő kis kockákat hagyta meg.



a) Az így létrehozott test térfogata hány százaléka az eredeti kocka térfogatának?
b) Az így keletkezett test kis négyzetlapjainak hányad részén van szürke színtől eltérő színezés?

10. Osztályfőnöki órán szavazást tartottak az osztálykirándulás helyszínéről. A három lehetséges helyszín közül legalább egyet és legfeljebb kettőt mindenkinek választania kellett. A szavazatok összeszámolása után a következő eredmény került fel a táblára: Győr: 18, Debrecen: 13, Szeged: 11. Néggyel többen szavaztak két helyszínre, mint ahányan csak Szegedre, négyen írták be Szegedet és Győrt, és csak Debrecenbe 8-an mentek volna. Hány diák vett részt a szavazáson?

1. Végezd el a műveleteket!

$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$ $B = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ $C = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$ $D = A - B + C$

2. Tedd igazzá a hiányzó mérőszámok beírásával az alábbi egyenlőségeket!

a) 7,3 m − ..... dm = 662 cm *b)* 2300 g + 120 dkg = ... kg

c) $\frac{1}{14}$ hét + ... perc = 1,5 nap *d)* ..... $dm^2 - 697\ cm^2 = 300\ mm^2$

3. Egy gyerek a strandon kerek és szögletes kavicsokból a következő alakzatokat rakta ki:



a) Hány kavicsból állna a következő alakzat? *b)* Hányadik alakzat áll 81 kavicsból?

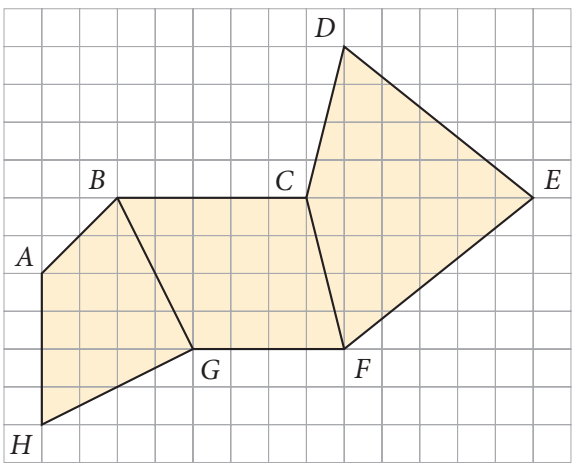
c) Melyik fajta kavicsból van több a 45. alakzatban, és mennyivel?

d) Az egyik alakzatban legyen *a* db szögletes és *b* db kerek kavics. Add meg a szögletes és a kerek kavicsok számát a következő alakzatban!

4. A rácson a szomszédos rácsvonalak távolsága 1 cm.

a) Mekkora az ábrán látható *CDEF* deltoid területe?

b) Az *ABGH* és a *BCFG* négyszögek közül melyiknek nagyobb a területe, és mennyivel?



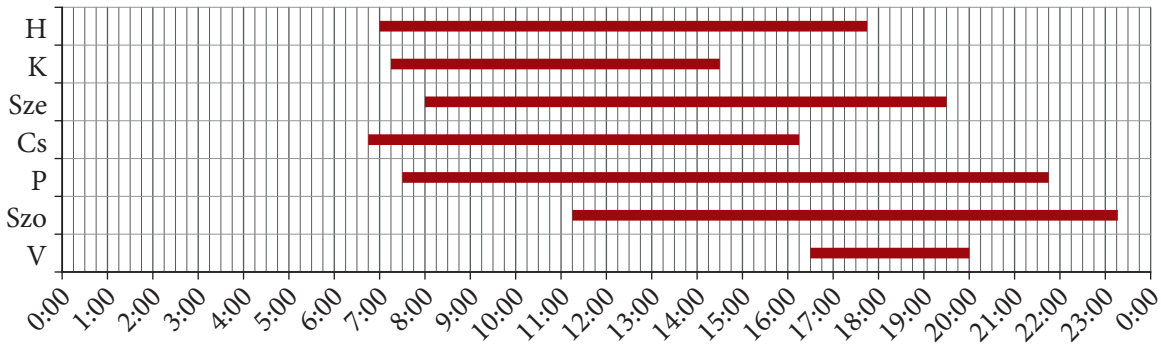
5. Nagymama a kamrában hét üveg lekvárt tett egymás mellé a polcra. Az üvegekben barack, vagy szilvalekvár volt. Arra emlékszik, hogy a két szélén baracklekvár zárta a sort, és arra is, hogy eggyel kevesebb üveg szilvalekvárt tett a polcra, mint baracklekvárt. Hányféleképpen sorakozhat a hét üveg a polcon?

6. Balambér számlájára havonta 210 000 Ft érkezik, amiből ki kell fizetnie lakásának törlesztőrészletét, havonta 75 000 Ft-ot.

a) Mennyi pénz marad a számláján, ha a bankban az átutalási költség az átutalt összeg 0,2%-a, és a fix átutalási díj 200 Ft?

b) A törlesztőrészlet kifizetése után megmaradt pénzének 48%-át költi élelmiszerre és tisztálkodási szerekre, és kb. havi 30 000 Ft-ot fordít a lakás rezsijére. Mennyi pénze marad Balambérnak az egyéb költségeire?

7. Zénó egy héten keresztül mindennap feljegyezte, hogy mettől meddig nem volt otthon. Ezt szemlélteti az alábbi diagram:

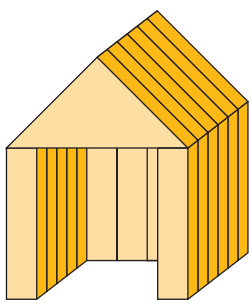


a) Melyik napon indult el a legkorábban otthonról?
b) Mit mondhatunk, átlagosan mikor érkezett haza?
c) Hány olyan nap volt, amikor több időt töltött otthon, mint máshol?
d) Mely napokon nézhette meg otthon a 19 órakor kezdődő híradót?

8. Egy mezőgazdasági vállalkozásban egyforma munkagépeket alkalmaznak. Ha egy gép két hektár földet szánt fel egy óra alatt, akkor

a) hány gép szánt fel 30 hektár földet egy óra alatt?
b) hány gép szánt fel 30 hektár földet 2,5 óra alatt?
c) hány óra alatt szánt fel 5 gép 20 hektár földet?
d) hány hektár földet szánt fel 10 gép 24 óra alatt?

9. Andris fa építőelemekből garázst épített. A garázs alapjának külső határvonala négyzet, oldalfalai négyzet alapú hasábokból, a teteje egyenlő szárú derékszögű háromszög alapú hasábokból van összerakva. A felhasznált alkotórészek számát és elhelyezkedését az ábra mutatja.



a) Mekkora a garázs légtere, ha a négyzetes oszlopok alapéle 2 cm, magasságuk pedig 10 cm hosszú?
b) Mennyi az építéshez használt faanyag térfogata?
c) Mekkora a garázs belsejének felülete?

10. Egy kereskedő december elején háromféle szaloncukrot vásárolt a nagykereskedésben. A zselés szaloncukornak 1800 Ft-ba, a csokisnak 2000 Ft-ba, a marcipánosnak 2400 Ft-ba került kilója. Összesen 380 000 Ft-ot fizetett. 10 kg-mal több marcipánost vett, mint csokist, és kétszer annyi zselést, mint marcipánost.

a) Melyik fajtából hány kg-ot vásárolt?
b) Átlagosan mennyibe került a szaloncukor kg-onként?

1. Határozd meg az a, b és c értékét, ha tudod, hogy

a) $-4-(-a)=7$; *b)* $b:\frac{4}{9}=16$; *c)* $c\cdot(-9)=11$!

d) Számold ki az $a\cdot b:c$ kifejezés értékét!

2. Írd be a hiányzó mérőszámokat úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek!

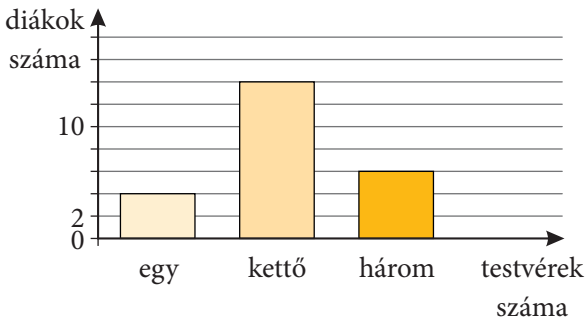
a) 34,8 m − ..... cm = 147,9 dm

b) 31 m^2 + 2380 cm^2 = ... dm^2

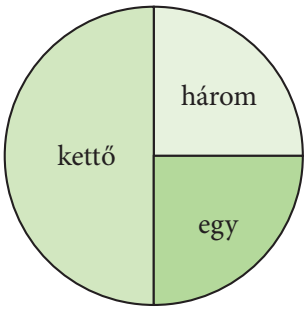
c) 0,2 óra + 180 mp = ... perc

d) 1,78 l − ..... cl = 8,4 dl

3. A Cselővárosi Általános Iskolában két nyolcadik osztály van. Az osztályok létszáma megegyezik. Minden tanulónak van testvére, de az osztályokba nem járnak testvérek. Az alábbi két diagram a nyolcadik osztályosok testvéreinek számát mutatja.



8. a



8. b

a) Hányan járnak az osztályokba?

b) Hány 8. a-ba járó gyereknek van egy testvére?

c) Hány 8. b-be járó gyereknek van három testvére?

d) Melyik osztályban van több olyan gyerek, akinek két testvére van?

e) Melyik osztályban van összesen több testvére a gyerekeknek, és mennyivel?

f) A 8. a osztályosok testvéreinek 58%-a már iskolába jár, a többiek óvodába. Hány ovis testvére van a 8. a-soknak összesen?

4. Igaz vagy hamis?

a) Minden négyzet deltoid.

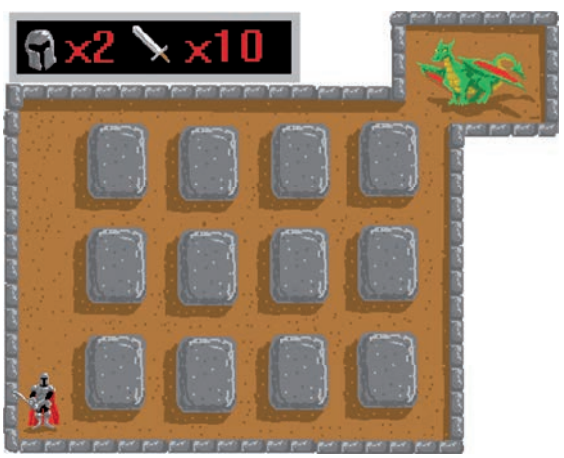
b) A 3147 prímszám.

c) Van olyan paralelogramma, aminek pontosan két szimmetriatengelye van.

d) Minden a és b valós számra igaz, hogy $2(3a+4b)=6a+4b$.

e) Minden 5-re végződő szám osztható 15-tel.

5. Hányféle különböző útvonalon juthat el a lovag a sárkányhoz, ha csak felfelé vagy jobbra haladhat?



6. Kilencedik osztályban angolul, németül és olaszul tanulnak a diákok. 3 tanuló kivételével, akik mindhárom nyelvet tanulják, mindenki pontosan két nyelvet tanul. Csak angolt és németet 16 diák tanul. Ők kétszer annyian vannak, mint a csak németet és olaszt tanulók. Olaszul összesen 17 diák tanul az osztályból.

a) Hányan választották az angol-olasz párosítást?
b) Hányan tanulnak németül?
c) Mennyivel több diák tanul angolul, mint olaszul?
d) Mekkora az osztálylétszám?

7. Julcsi virágcsokrot készített a nagymamájának. A virágok harmada rózsa, 25%-a nárcisz, a többi tulipán.

a) A csokor hányad része tulipán?
b) Hány szál nárcisz és hány szál tulipán van a csokorban, ha tudod, hogy 8 szál rózsa van benne?
c) Pár nap után nagyi kidobta a hervadt szálakat: 3 tulipánt, 2 nárciszt és 1 rózsát. Írd fel a megmaradt virágfajták arányát!

8. Az $ABCD$ négyszög olyan téglalap, amely nem négyzet. Az AC és BD átlók metszéspontja a P pont. Az ABP háromszög területe 27 cm^2.

a) Készíts ábrát a megadott adatok alapján!
b) Számold ki a téglalap területét!
c) Mekkora a téglalap BC oldala, ha az AB oldala 12 cm?
d) Számítsd ki, hány cm hosszú a téglalap átlója!

9. *a)* Tükrözd az AD oldal felezőpontjára az $A(1; 4)$, $B(-3; 4)$, $C(-1; -3)$, $D(3; 0)$ csúcsokkal megadott négyszöget! Add meg a tükörkép csúcsainak koordinátáit!
b) Az $ABCD$ négyszöget egy e egyenesre tengelyesen tükrözve az $A'B'C'D'$ négyszöget kaptuk, ahol a csúcsok koordinátái: $A'(3; 2)$, $B'(3; -2)$, $C'(-4; 0)$, $D'(-1; 4)$. Rajzold be az e egyenest a koordinátarendszerbe, és add meg a rajta lévő $E(5; \ldots)$ és $F(\ldots; -3)$ pontok hiányzó koordinátáit!

10. Az eszkimó gyerekek 15 cm × 35 cm alapterületű, 10 cm magas jégtéglákból jégkunyhót építettek a kutyájuknak. Az alsó sor 27 téglából állt, a következő sorokhoz pedig mindig 4 téglával kevesebb kellett. A tetejére 3 tégla került.



a) Hány sorból áll a kunyhó?
b) Hány téglát használtak fel az építéshez?
c) Hány liter vizet kellene lefagyasztanunk, ha egy ilyen kunyhót szeretnénk építeni? Gondolj arra is, hogy kb. 1 liter vízből 1,1 dm^3 jég lesz.
d) Mikor a kunyhó elkészült, a gyerekek nagyon mosolyogtak, mert észrevették, hogy elfelejtettek ajtót építeni a kunyhóra. Így az alsó négy sorból kivettek rendre 4, 3, 2, illetve 1 téglát. Igaz-e, hogy a téglák több mint 10%-át feleslegesen építették be a kunyhóba? Válaszodat indokold!


Elérkezett az utolsó osztályfőnöki óra. A gyerekek remélték, hogy néhányan mehetnek még egy bónuszkört a futuroszkóppal, de szomorúan konstatálták, hogy az már nincs a laborban.
Sajnos ennyi volt erre az évre, a gépet visszaszállították.
A kiegészítőkért és az eredményekért majd az évzáró után jönnek. Ezért is kérek mindenkitől egy rövid beszámolót az élményeiről.
Hogyan hatott rád, hogy belekukkanthattál a jövőbe? A max. egyoldalas írásművet legkésőbb vasárnap este 8-ig mindenki küldje el az e-mail címemre!
Abban bíztam, hogy ha nekem nem is, de majdani önmagatoknak elhiszitek, hogy a matematika nélkülözhetetlen része a mindennapjainknak. Van, ahol ez egyértelműen kitűnik, van, ahol a háttérben bújik meg, de mindenütt ott van valamilyen formában.
Egyet azonban feltétlenül tartsatok szem előtt!
A futuroszkóp nem időgép. Rengeteg alternatív idővonal létezik. Az, hogy épp melyiket sikerül befogni rajta, az nagyban függ az alany érzéseitől, gondolataitól, pillanatnyi vágyaitól. Vagyis amit láttatok, korántsem biztos, hogy úgy is történik majd. A döntés a tietek, azzá válhattok, amivé csak akartok. Rajtatok áll, a ti kezetekben van a marsallbot!
Köszönöm nektek ezt az évet, nagyszerű volt veletek dolgozni!
VÉGE