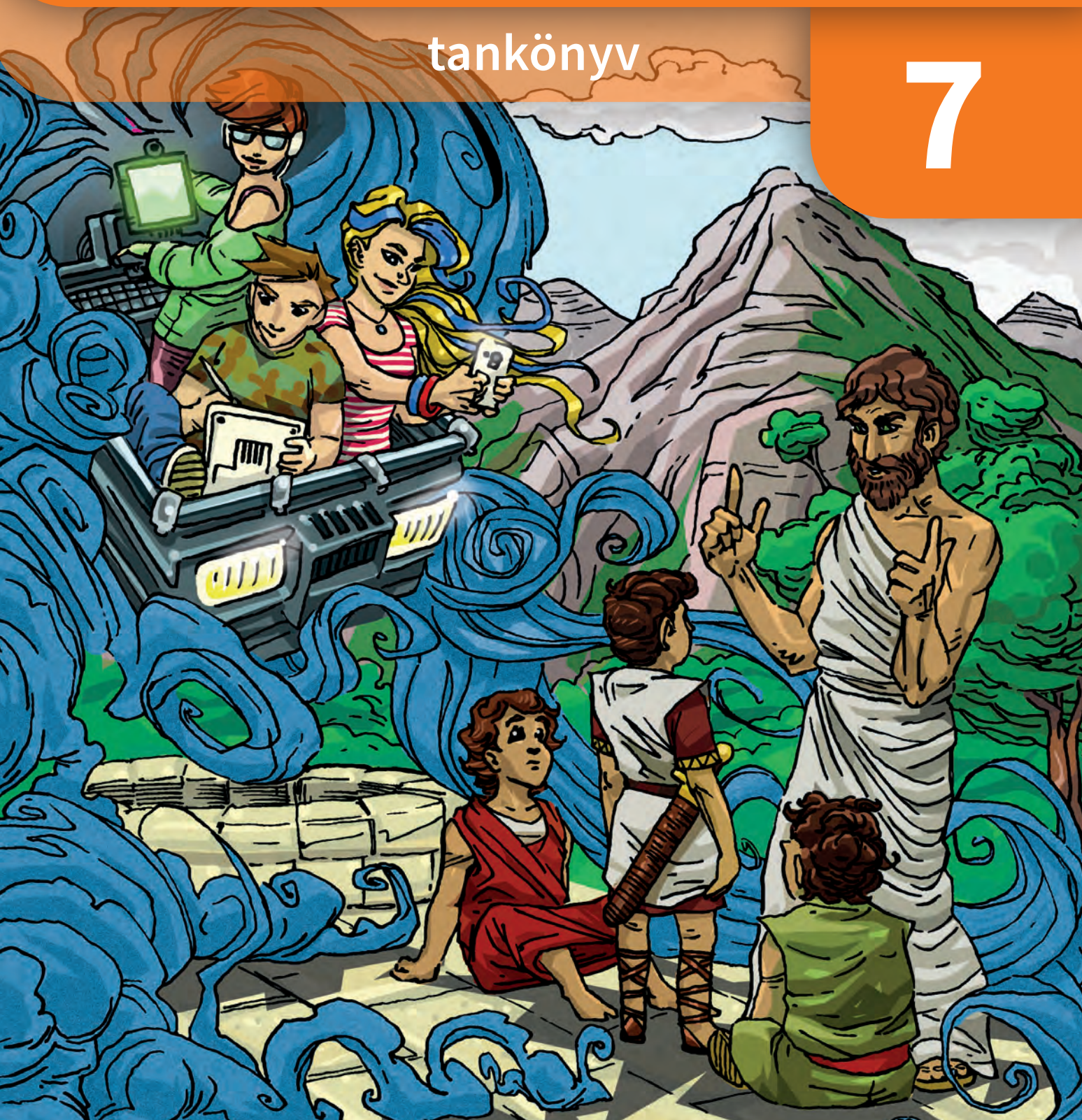
OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

Matematika

tankönyv

7



MATEMATIKA 7.

TANKÖNYV

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2022.02.23-tól 2027.08.31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/79-7/2022. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült, 2020. 01. 31. után kiadott, 5–8. évfolyam matematika tantárgy kerettantervének.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztők: Paróczay Eszter, Tamás Beáta, dr. Wintsche Gergely

Kerettantervi szakértő és lektor: Hegyi Györgyné, Kulman Katalin

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztette: dr. Wintsche Gergely

Fedélterv: Slezák Ilona, Bánáti János, Orosz Adél

Látvány- és tipográfiai terv: Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábrák: Szalóki Dezső

Nyelvi lektor: Bánki Lászlóné

© Oktatási Hivatal, 2021

ISBN 978-963-436-275-3

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.

Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor elnök • Raktári szám: OH-MAT07TA

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Orosz Adél

Grafikai szerkesztő: Téglásy György • Nyomdai előkészítés: Gados László

Terjedelem: 28,84 (A/5) ív, tömeg: 616,29 gramm • 1. kiadás, 2025

A könyvben felhasználtuk Gedeon Veronika, Korom Pál, Számadó László, Urbán Z. János, Wintsche Gergely Matematika 7. című művét. Raktári szám: FI-503010701/1.

A kötet megjelenését a Belügyminisztérium támogatta.

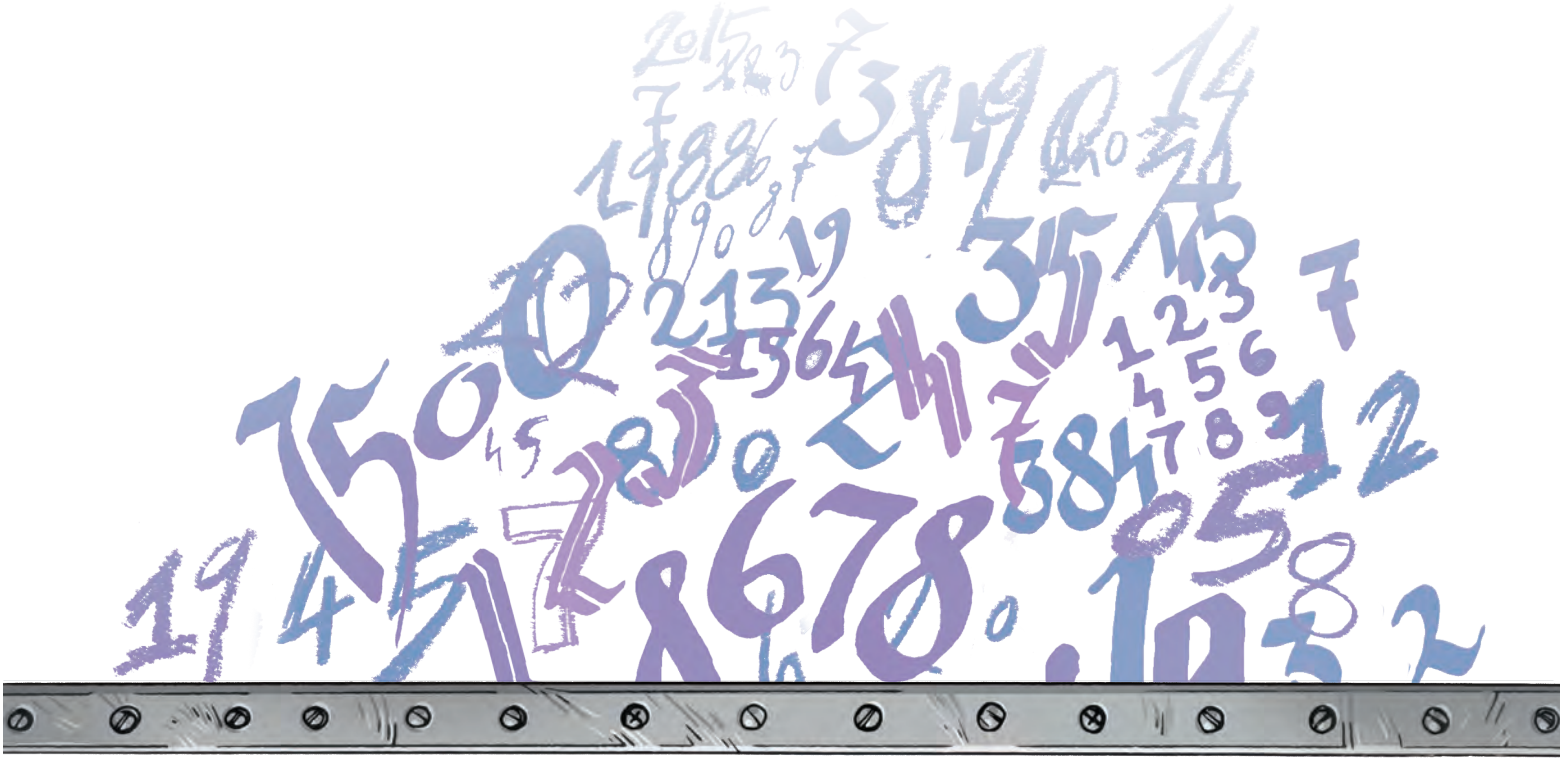
BELÜGYMINISZTÉRIUM

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

MATEMATIKA 7.



Oktatási Hivatal

TARTALOM

Bevezetés 6

I. Gondolkodjunk! 7

1. Számold össze! 8
2. Rendezd sorba! 11
3. Hány eset van? 14
4. Gráfok 17
5. Igazold! Cáfold! 20
6. Matematikai játékok 23
7. Összefoglalás 25

II. Racionális számok, betűs kifejezések 27

1. Az egész számok tulajdonságainak áttekintése 28
2. Törtek, tizedes törtek – minden, amit erről tudni kell 33
3. Műveletek a racionális számok halmazán 40
4. Szöveges feladatok 45
5. Összetett műveletek, zárójelfelbontás 47
6. Számok és betűk használata 50
7. Összevonás, helyettesítési érték 54
8. Zárójelfelbontás, kiemelés 57
9. Összefoglalás 60



III. Geometriai transzformációk 63

1. Geometriai fogalmak 64
2. Háromszögek nevezetes vonalai 68
3. Háromszögek és négyszögek 71
4. Geometriai transzformációk 76
5. Középpontos tükrözés 79
6. A középpontos tükrözés alkalmazása 82
7. Szögpárok 84
8. Középpontos és tengelyes szimmetria 86
9. Paralelogramma és deltoid 89
10. Középpontosan szimmetrikus alakzatok 91
11. Szabályos sokszögek 94
12. A kör 97
13. Szerkesztések 100
14. Összefoglalás 103



TARTALOM

IV. Hatványozás, oszthatóság 105

1. Nagy számok és a hatványalak 106
2. Hatványok alkalmazása 110
3. Mit tanultunk az oszthatóságról? (Ismétlés) 112
4. Egy kis logika 115
5. A prímszámok. A számok prímtényezős felbontása 117
6. Készítsünk magunknak oszthatósági szabályokat! 120
7. Osztókról, többszörösökről még egyszer 123
8. Legnagyobb közös osztó 126
9. Legkisebb közös többszörös 128
10. Matematikai játékok 131
11. Összefoglalás 132

V. Százalékszámítás, egyenletek 135

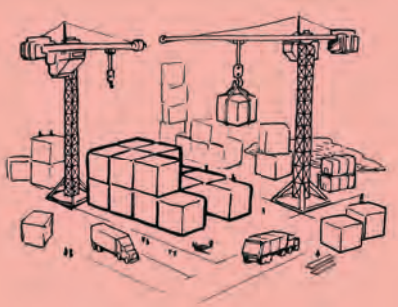
1. Az arányosságról még egyszer 136
2. Mit tanultunk a százalékszámításról? 138
3. A 100% kiszámítása 141
4. Hány százalék? 143
5. A százalékszámítás gyakorlása 146
6. Összetett százalékszámítási feladatok 149
7. Szöveges feladatok 152
8. Egyenletmegoldási módszerek: próbálgatás és lebontogatás 153
9. A mérlegelv 156
10. Egyenletek megoldása mérlegelvvel 161
11. Szöveges feladatok megoldása egyenlettel 164
12. Összefoglalás 165

VI. Geometria 169

1. Egybevágó háromszögek, szerkesztések 170
2. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között 173
3. Sokszögek szögei és átlói 175
4. A terület és a térfogat mértékegységei 178
5. A paralelogramma területe 181
6. A háromszög területe 184
7. A trapéz területe 186
8. A deltoid területe 188
9. A hasáb felszíne és térfogata 190
10. Testek térben és síkban 193

Szabadulószoba 197

11. Összefoglalás 199



VII. Hozzárendelések, statisztika 203

1. Két halmaz közötti hozzárendelések 204
2. A hozzárendelések megadási módjai 207
3. Olvassunk a grafikonról! 210
4. Átlag, módusz, medián 213
5. Gyakoriság, relatív gyakoriság 215
6. Valószínűség 217
7. Tippelj, kísérletezz, ellenőrizz! 221
8. Összefoglalás 222

Üdvözlünk a 7. osztályban!

Az új matematikakönyvedet tartod a kezedben.
Ha ennek a sorozatnak az 5.-es vagy 6.-os könyvéből tanultál korábban, akkor találsz néhány ismerős dolgot, de lesznek újdonságok is.



A fejezet elején olvasható történet egy, a témához kapcsolódó híres matematikusról mesél.

CSOPORTMUNKA

Keressetek olyan példákat (tárgyakat, élőlényeket, jelenségeket), amelyekre körülbelül jellemzőek ezek a mennyiségek!

a) 1 liter; *b)* 50 kg;
c) 20 cm; *d)* 150 km;
e) 10 080 perc; *f)* 130 km/h;
g) 0,5 m^3.



Az új ismereteket játékkal, csoportokban végezhető feladatokkal vagy érdekes példákkal vezetjük be.

KUTATÓMUNKA

Nézzetek utána, hány százalékos a sótartalma az Adriai-tengernek, a Jón-tengernek és a Holt-tengernek! Ezek közül melyik a legsósabb? Milyen következménye van ennek?

A tankönyv otthoni kutatómunkának ajánlott feladatokat is tartalmaz.

5. PÉLDA



Egy farmon kis robotgépek szedik az érett paradicsomot. A robotok 4,5 kg-os ládákat töltenek meg, majd gyűjtőhelyre viszik a termést. Egy napon három gépet állítottak be. Az első 135 láda, a második 97 láda, a harmadik 126 láda paradicsomot szedett.
Összesen hány kg paradicsomot szedett le a három gép?

A feladatokat nehézségük szerint három csoportba soroltuk:
1 könnyű 2 közepes 3 kicsit nehéz



JÁTÉK

Rajzoljatok írólapra körzővel egy kb. 4-5 cm sugarú kört! A kör belsejében egyforma pénzérméket (vagy korongokat) kell felváltva elhelyezni. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét el tudja helyezni. A lerakott pénzérméket már nem szabad megmozdítani, és a pénzérméknek nem lehet átfedése egymással.
Elemezzétek a játékot! Hogyan lehetne biztosan nyerni a játékban?

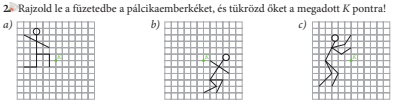
Az eltérő feladattípusokat jól megkülönböztethető keretbe foglaltuk, és felirattal láttuk el.

FELADATOK

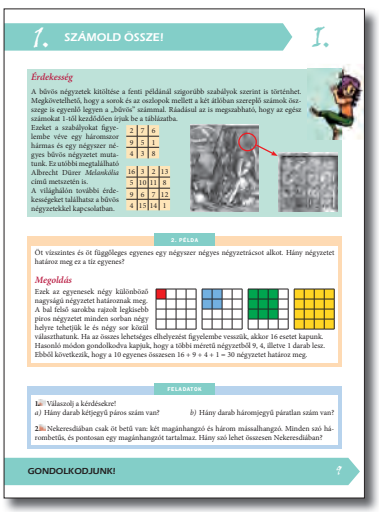
1. Egy kártyalapnak elég csak az egyik felét megmutatnunk, mert a másik felét megkaphatjuk a lap középpontjára tükrözve. Melyik a lap hiányzó része?



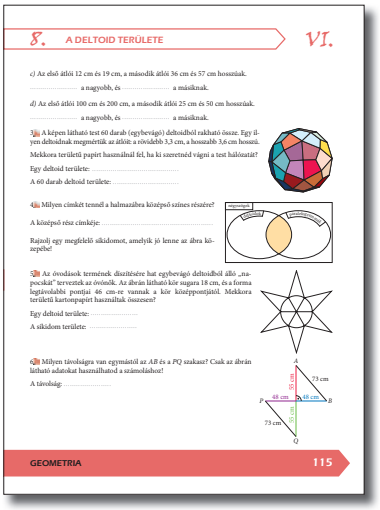
2. Rajzold le a füzetedbe a pálcikaemberkéket, és tükrözd őket a megadott K pontra!



3. Rajzolj egy szabályos háromszöget! Tükrözd
a) az egyik csúcsára; *b)* az egyik oldal felezőpontjára;
c) egy olyan pontra, amely a háromszög egyik oldalegyenesén a háromszögön kívül van!



A könyvben érdekes kiegészítéseket is találsz.



A fontos tudnivalókat piros színnel emeltük ki, hogy könnyebben megtaláld azokat.

A könyvhöz tartozó munkafüzet példái és néhány könnyed, játékos feladat is segít a tanulásban.

JÓ TANULÁST ÉS KELLEMES UTAZÁST!

I. GONDOLKODJUNK!



Esztert és Kristófot első hallásra nem hozta lázba a kötelező tanulmányi kirándulás híre.
– Láttad, hogy Judit néni még azt is előírta, hogy előadást tartsunk a többieknek? – fordult Eszter Kristófhoz.
Kristóf csak bólogatott, de nem válaszolt, mert teljesen elmerült annak az új téridőtrafónak a tanulmányozásában, amit az iskola egy nemzetközi pályázaton nyert. A szerkezet lehetővé tette, hogy az osztály néhány tagja a kirándulás alkalmával szabadon mozogjon a térben és az időben. A kezdeti unott várakozást és az első téridőutazást követően Kristóf úgy fordult Eszterhez, mintha csak az egy nappal korábban feltett kérdésére válaszolna, bár ez alkalommal elégedett mosoly terült szét az arcán.
– Azt hittem, halálosan unalmas lesz, de ez elképesztő volt! Láttuk Arisztotelészt meg Alexandroszt fiatalon. Ott sétáltak előttünk, akár meg is tudtuk volna érinteni őket! És az a fordítókütyü, amit kaptunk, Attila eddigi legjobban sikerült szerkezete!
– Érdekes volt hallani, amikor Arisztotelész a logikáról, a logikai következtetésekről mesélt, aztán meg arról magyarázott, hogyan emlékezünk azokra a dolgokra, amiket korábban érzékeltünk, és hogy tulajdonképpen ebből következik az, hogy tudunk valamit – mondta Eszter elgondolkodva.
– Kár, hogy utána a katonák elvitték a kis Nagy Sándort vívóedzésre. Rémes, hogy még be sem jelölhetem a Facebookon! – nevetett Kristófra, aki lelkesen böngészte a következő utazás kiírását a neten.

I. 1. SZÁMOLD ÖSSZE!



CSOPORTMUNKA

Alkossatok két-három fős csoportokat!
Beszéljétek meg az alábbi kérdéseket!
Soroljátok fel az összes esetet egy-egy lapra!

I. Hányféleképpen lehet a 10-et három pozitív egész szám összegére bontani, ha a számok sorrendje
   a) nem számít; *b)* számít?
II. Hányféle olyan háromszög van, amelyet tíz egyforma pálcikából (például gyufaszálból) tudtok kirakni?

A csoportmunka során láthattátok, hogy vannak olyan kérdések, amelyekben csak összeszámlálás a feladat. Az ilyen típusú kérdésekkel is foglalkozik a matematika. Amíg az esetek száma nem túl nagy, addig rendszerező felsorolással is megválaszolhatod a kérdéseket, de ha nagy az esetszám, akkor nem könnyű a feladat.



1. PÉLDA

Az ábrán látható bűvös négyzet minden sorában és minden oszlopában ugyanannyi a három szám összege. Töltsük ki a táblázatot! Előfordulhat-e, hogy nyolc tanuló mindegyike másféle sorrendben írja be a hiányzó számokat?

43	21	
	36	33
	23	

Megoldás

Számoljuk össze a lehetséges sorrendeket! Írjunk jeleket a hiányzó számok helyére!

43	21	☼
♣	36	33
♥	23	▲

A középső oszlopban a számok összege 80, vagyis minden sorban és minden oszlopban ugyanennyi lesz az összeg. A ☼ és a ♣ értékét azonnal meg tudjuk mondani. Mivel a beírás sorrendjét szeretnénk összeszámolni, ezért ezt a két esetet kell végiggondolnunk:

I. eset: a ☼ beírásával kezdünk.
Ezután a ▲ és a ♣ is beírható lesz. E kettő közül bármelyikkel is folytatjuk, utána már a ♥ értéke is megadható lesz.
Mindezek alapján a következő sorrendek lehetségesek:
☼, ♣, ♥, ▲; ☼, ♣, ▲, ♥; ☼, ▲, ♣, ♥; ☼, ▲, ♥, ♣.

II. eset: a ♣ beírásával kezdünk.
Ezután már a ☼ és a ♥ is beírható lesz. E kettő közül bármelyikkel is folytatjuk, utána már a ▲ értéke is kiszámolható lesz.
Vagyis most ezek a sorrendek lehetségesek:
♣, ☼, ♥, ▲; ♣, ☼, ▲, ♥; ♣, ♥, ☼, ▲; ♣, ♥, ▲, ☼.

A két eset vizsgálata során nyolc különböző sorrendet kaptunk. A bűvös négyzet kitöltésekor ezek bármelyike követhető, vagyis előfordulhat, hogy nyolc tanuló mindegyike másféle sorrendben írja be a hiányzó számokat.

43	21	16
11	36	33
26	23	31

Érdekesség



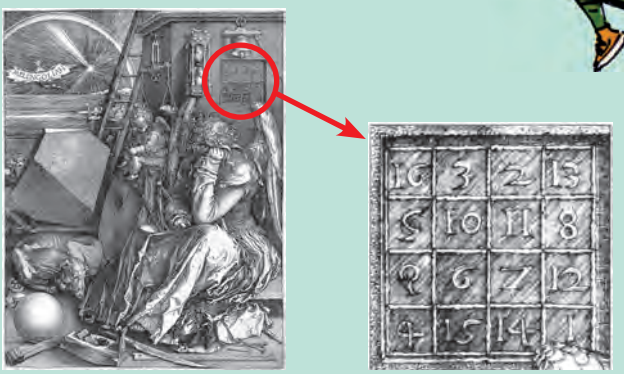
A bűvös négyzetek kitöltése az előző példánál szigorúbb szabályok szerint is történhet. Megkövetelhető, hogy a sorok és az oszlopok mellett a két átlóban szereplő számok összege is egyenlő legyen a „bűvös” számmal. Ráadásul az is megszabható, hogy az egész számokat 1-től kezdődően írjuk be a táblázatba.

Ezeket a szabályokat figyelembe véve egy háromszor hármas és egy négyszer négyes bűvös négyzetet mutatunk. Ez utóbbi megtalálható Albrecht Dürer *Melankólia* című metszetén is.

Az interneten további érdekességeket találhatsz a bűvös négyzetekkel kapcsolatban.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

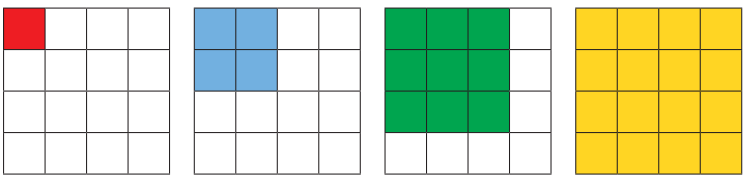
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



2. PÉLDA

Öt vízszintes és öt függőleges egyenes egy négyszer négyes négyzetrácsot alkot. Hány négyzetet határoz meg ez a tíz egyenes?

Megoldás



Ezek az egyenesek négy különböző nagyságú négyzetet határoznak meg. A bal felső sarokba rajzolt legkisebb piros négyzetet minden sorban négy helyre tehetjük le, és négy sor közül választhatunk. Ha az összes lehetséges elhelyezést figyelembe vesszük, akkor 16 esetet kapunk. Hasonló módon gondolkodva kapjuk, hogy a többi méretű négyzetből 9, 4, illetve 1 darab lesz. Ebből következik, hogy a 10 egyenes összesen 16 + 9 + 4 + 1 = 30 négyzetet határoz meg.

FELADATOK

1. Válaszolj a kérdésekre!

a) Hány darab kétjegyű páros szám van?

b) Hány darab háromjegyű páratlan szám van?

2. Nekeresdiában csak öt betű van: két magánhangzó és három mássalhangzó. Minden szó hárombetűs, és pontosan egy magánhangzót tartalmaz. Hány szó lehet összesen Nekeresdiában?

3. Egy társasjátékban annyit léphetsz előre a bábuddal, amennyit a dobókockával dobsz. A startmező sorszáma 0.



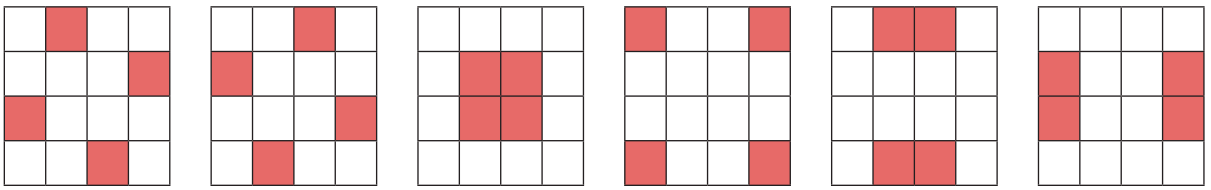
a) Hányas sorszámú mezőkön állhat a bábud, ha már háromszor dobtál?
b) Hányas sorszámú mezőkön állhatott közben a bábud, ha a harmadik dobás után a 17-es mezőre került?
c) Hányas sorszámú mezőkön állhatott közben a bábud, ha a harmadik dobás után a 9-es mezőre került?

4. Növekedő számsort kell készítened négy pozitív egész számból. A számsorban a 10 legyen a legnagyobb szám, és az 5-nek is szerepelnie kell benne. Az öttel osztható számok elé mindig pontosan egy darab öttel nem osztható számot kell írnod. Hányféle számsort tudsz készíteni?

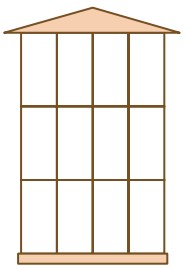
5. Válaszolj a kérdésekre!
a) Hány egyenes jelöli ki a sakktábla négyzetrácsát?
b) Hány darab négyzetet határoznak meg a sakktáblát kijelölő egyenesek?



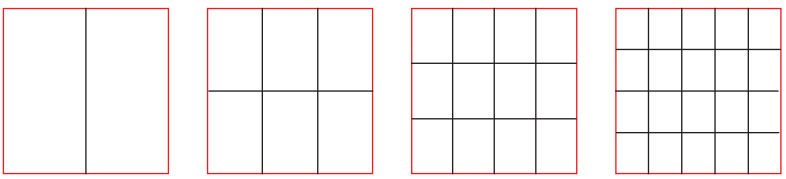
6. Figyeld meg az ábrán Dürer *Melankólia* című metszetét, majd válaszolj az alábbi kérdésekre!
a) Mennyi a bűvös száma a metszeten látható négyszer négyes bűvös négyzetnek?
b) Mennyi a számok összege a besatírozott mezőkben?



7. A szemközti háromszintes ház minden szintjén négy ablak van, a rajzon látható módon. Liza este megfigyelte, hogy ezek közül négy mögött nem ég a villany. A sötét ablakok sem sarkukkal, sem oldalukkal nem érintkeznek. Hányféleképpen helyezkedhet el ez a négy ablak? Rajzolj a füzetedbe!



8. Az ábrán egy olyan, négyzet alakú ablakokból álló sorozat első négy elemét látjuk, amelyekre rácsot terveztek. Az első ablakot a rács két, a második ablakot hat egyforma részre osztja, és így tovább, azaz mindig eggyel nő a vízszintes és a függőleges rácsok száma is.



a) Hány függőleges szakaszból állna a rács a hetedik ablakon?
b) Hány vízszintes szakaszból állna a rács a nyolcadik ablakon?
c) Hány részre osztaná a rács a tizedik ablakot?
d) Hány cm^2 lenne egy kis téglalap területe az ötödik ablakon, ha az eredeti ablak 1,44 m^2 területű?
e) Hányadik ablakot osztaná a rács 9900 részre?

2. RENDEZD SORBA!

1.



CSOPORTMUNKA

Készítsetek mondatokat a megadott három szó mindegyikének egyszeri felhasználásával! Legyen a három szó a következő: nézz, csak, rám! Értelmezzétek az így kapott mondatokat! Beszéljétek meg, hogy melyiket milyen helyzetben tudjátok elképzelni!

1. PÉLDA



a) Hányféleképpen lehet egy fagyistölcsérbe beletenni 1 gombóc csokoládé-, 1 gombóc eper- és 1 gombóc pisztáciafagyit?

b) Hányféleképpen lehet az *a)* részben felsorolt három gombóc fagyit egy olyan kör alapú fagylaltkehelybe kimérni, amelyikben egy rétegben elfér a három gombóc? Két sorrendet akkor tekintünk azonosnak, ha egy bizonyos gombóc jobb és bal oldali szomszédja ugyanaz.

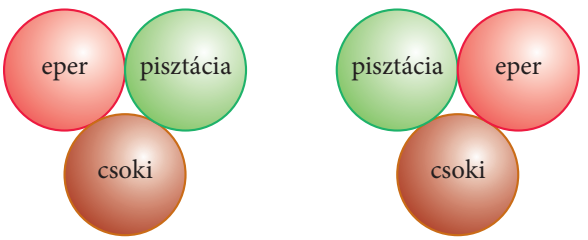
Megoldás

a) Készítsünk táblázatot a fagyigombócok lehetséges elhelyezésére:

Legfelül	eper	pisztácia	pisztácia	csoki	eper	csoki
Középen	pisztácia	eper	csoki	pisztácia	csoki	eper
Legalul	csoki	csoki	eper	eper	pisztácia	pisztácia

A táblázat alapján gondoljuk végig a lehetőségeket felsorolás nélkül.
Legalulra háromfélét választhatunk. Ha kiválasztottuk az egyiket, akkor középre már csak a maradék kettőből választhatjuk valamelyiket, és legfelül már csak egyféle lehet. Ez összesen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetőség.

b) Most kevesebb lehetőségünk van, mert ha beletesszük valamelyik gombócot (az ábrán a csokit), akkor a jobb oldali szomszédja kétféle lehet. Kétféleképpen lehet a kehelybe kimérni a három gombóc fagyit.



CSOPORTMUNKA



Alkossatok négyfős csoportokat!

a) Hányféle sorrendben ülhettek le egymás mellé egy padon? Próbáljátok ki! Indokoljátok meg a válaszotokat!

b) A feladatot oldjátok meg úgy, hogy a csoport minden tagja azokat a sorrendeket írja le, amelyben ő ült a pad bal szélén! Füzeteket cserélve ellenőrizzétek egymás munkáját!

c) Most üljetek egy asztal köré! Hányféleképpen ülhettek le az asztalhoz, ha két sorrendet akkor tekintünk azonosnak, ha a jobb és a bal oldali szomszédotok ugyanaz?

A füzetetekben azonos színnel színezzétek ki az *a)* részben felsorolt sorrendekből azokat, amelyek az asztal köré ültetésnél ugyanazt a sorrendet adják!

Beszéljétek meg, mit tapasztaltatok!

2. PÉLDA

Öt jó barát minden nap egyszerre érkezik a tanterem bejáratához. Az első iskolai napon elhatározzák, hogy minden nap másféle sorrendben lépnek be a terembe. Vajon megtehetik ezt a téli szünet megkezdéséig?

Megoldás

Ha csak hárman lennének, akkor könnyen összeszámolhatjuk az 1. példa *a)* része alapján, hogy 6 lehetséges belépési sorrend van.

Ha négyen lennének, akkor bármelyikük beléphetne elsőnek, de a maradék három gyerek utána hatféleképpen mehetne be a terembe. Ez összesen $4 \cdot 6$, azaz 24-féle sorrend lenne.

Mivel öten vannak, és bármelyikük beléphet elsőnek, ezért az elsőnek belépőt még négy tanuló fogja követni. Már tudjuk, hogy ők négyen 24 különböző sorrendben léphetnek be a terembe, ezért a sorrendek száma $5 \cdot 24$, azaz 120.

A téli szünetig körülbelül 80-85 tanítási nap van. A téli szünet megkezdéséig biztosan megtehetik, hogy minden nap másféle sorrendben lépnek be a tanterembe.

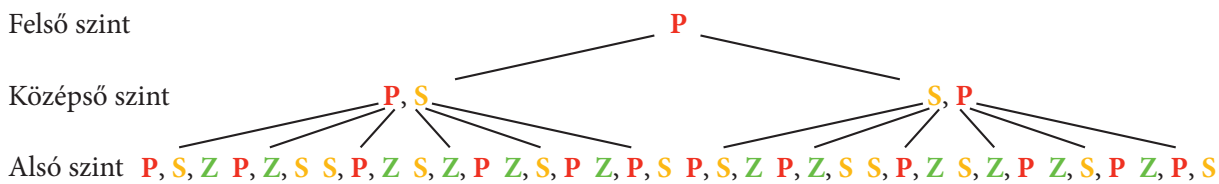
3. PÉLDA



Hat dísztéglából piramist építünk egy sima téglafal elé az ábrán látható módon. A hat tégla közül három piros, kettő sárga és egy zöld színű. Hányféle piramis építhető, ha egy sorban különböző színű téglák lesznek, és a téglaszínek sorrendje is számít?

Megoldás

A feltételeknek megfelelően úgy lehet piramist építeni, hogy minden sorba 1 piros tégla kerül. A középsőbe már csak sárga kerülhet, az alsó sorba pedig sárgát és zöldet tehetünk a piroson kívül. Készítsünk egy ágrajzot, amely tartalmazza az összes lehetőséget!



A felső sorban csak egy lehetőség van. A középső sorban lévő két téglát kétféleképpen rakhatjuk sorba. Ez alatt az alsó sorban a három különböző színű téglát hatféleképpen helyezhetjük el. Az összes eset $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$.

FELADATOK

1. Készíts háromjegyű számokat a képen látható számkártyák mindegyikének felhasználásával! Sorold fel az összes esetet! Hány esetben kaptál négyzetszámot? (Egy egész szám önmagával vett szorzatát négyzetszámnak nevezzük.)



2. Hányféle sorrendben rakhatod egymás mellé a következő szavak betűit? Írd fel az összes lehetőséget! A megoldások között értelmes szavak is lesznek. Válogasd ki ezeket!

a) RÉT; *b)* ERRE; *c)* ADNI.

3. Anett, Betti, Dávid és Péter moziba mennek.

a) Sorold fel, hányféleképpen ülhetnek egymás mellé, ha Anett mindenképpen Betti mellett szeretne ülni!

b) Sorold fel, hányféleképpen tudnak egymás mellé ülni úgy, hogy Anett semmiképpen ne üljön Betti mellett!

4. Készíts négyjegyű számokat a 2, 5, 7, 8 számjegyek mindegyikének felhasználásával! Hány számot kaptál?

Sorold fel azokat, amelyekre teljesül, hogy

a) oszthatók 5-tel;

b) a tízesek és az egyesek helyi értékén álló számjegyeik párosak;

c) felváltva állnak a számban a páros és a páratlan számjegyek!

5. A 246 813 579 egy olyan kilencjegyű szám, amelyikben az összes pozitív számjegy szerepel. Hány olyan kilencjegyű szám készíthető, amelyben a négy legnagyobb helyi értéken páros számjegy, a többi helyi értéken páratlan számjegy szerepel?

6. Emese, Klári, Roland és Tivadar elmentek együtt vacsorázni. Egy kör alakú asztalhoz vezette őket a pincér.



Hányféleképpen ülhetnek le, ha

a) négy különböző színű szék van: fekete, fehér, zöld és sárga; és számít, hogy ki milyen színű széken ül?

b) a székek mind kék színűek, és két sorrend akkor megegyező, ha egymásba forgatható?

c) a székek mind kék színűek, és Klári és Tivadar egymás mellett szeretnének ülni?

d) a székek mind kék színűek, és az ablakhoz legközelebbi széken Emese szeretne ülni?

7. Az iskolai verseny döntőjébe a tíz legjobb sakkozó került. Hányféleképpen alakulhat az arany-, az ezüst- és a bronzérem kiosztása, ha nincs holtverseny?

8. Hány különböző ötjegyű számot tudsz előállítani a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával? Fogalmazd meg, hogyan gondolkoztál!

9. A házban külön kulcs nyitja a kertkaputa, a bejárati ajtót és a fészert. Rajzold le, hányféleképpen fűzhetem fel ezt a három kulcsot egy kulcskarikára!

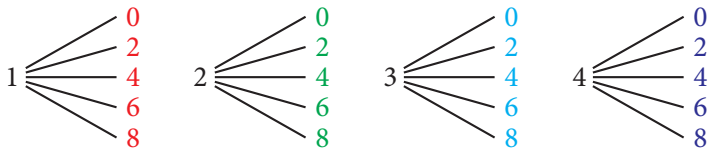


1. PÉLDA

Hány 50-nél kisebb kétjegyű pozitív páros szám van?

Megoldás

I. Készítsünk ágrajzot a megoldáshoz!



Az ábra alapján látható, hogy 20 db olyan szám van, ami megfelel a feltételeknek.

II. Számoljuk össze az eseteket felrajzolás nélkül!
A tízes helyi értéken állhat 1, 2, 3, 4; az egyes helyi értéken állhat 0, 2, 4, 6, 8. Minden tízes helyi értéken álló számjegy mellé 5 szám választható az egyes helyi értékre. 4-féle szám állhat a tízesek helyén, ezért $4 \cdot 5 = 20$ szám van.

III. Másként is végiggondolhatjuk.
10-től 49-ig 40 db szám van, amelynek fele páros, fele páratlan. Így 20 db, a feltételeknek megfelelő szám van.

2. PÉLDA

Egy gyümölcskosárban alma, körte, szilva, barack és szőlő található, mindegyikből egy-egy darab. Hányféleképpen választható ki közülük kettő? Most nem fontos a sorrend, ha valaki almát és barackot választott, az ugyanaz, mintha barackot és almát választott volna.

Megoldás

Soroljuk fel a lehetőségeket!



A táblázat elkészítésénél az alábbi gondolatmenetet követtük:

Az alma mellé bármelyik másik gyümölcsöt választhatjuk.	Ez 4 eset.
A barack mellé már csak a körte, a szilva és a szőlő valamelyike választható, mert az alma-barack párt már felsoroltuk.	Ez 3 eset.
A körte mellé már csak a szilvát és a szőlőt választhatjuk.	Ez 2 eset.
Végezetül a szilva mellé már csak a szőlőt választhatjuk.	Ez 1 eset.

Vagyis $4 + 3 + 2 + 1 = 10$-féle kiválasztás lehetséges.

3. PÉLDA

A 32 fős osztályban minden héten két hetest választanak. A neveket egyforma cédulákra írják, és bedobják egy dobozba. Ezután kivesznek két cédulát, így kapják a két hetes nevét. Hányféle kimenetele lehet összesen ennek a sorsolásnak?

Megoldás

Ha megkülönböztetnénk a sorrendet is, akkor elsőre 32 név közül sorsolhatnak ki valakit, a második helyre pedig a maradék 31 név bármelyike kerülhetne. Ez összesen $32 \cdot 31$, azaz 992 lehetőség. Ebben az esetben azonban azt is beszámítottuk az összeszámlálásba, ha Gazsit választják először, aztán Matyit, és azt is, ha Matyit választják elsőnek, aztán Gazsit, azaz minden lehetőséget kétszer számoltunk. Ezért a 992-t meg kell feleznünk, hogy megkapjuk a helyes megoldást.

Tehát a sorsolásnak $992 : 2 = 496$ kimenetele lehet.

4. PÉLDA

Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei növekvő sorrendben követik egymást?

Megoldás

Írjuk fel növekvő sorrendben 1-től 9-ig a számjegyeket!

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ha ezek közül kihúzunk kettőt, akkor máris megmarad egy, a feltételeknek eleget tevő szám. Vagyis annyi hétjegyű szám készíthető, ahányféleképpen a fent látható kilenc számjegyből kihúzhatunk kettőt:

~~12~~3456789, ~~1~~23456789, ~~1~~23~~4~~56789, ~~1~~234~~5~~6789, ~~1~~2345~~6~~789, ~~1~~23456~~7~~89, ~~1~~234567~~8~~9, ~~1~~23456789,
1~~23~~456789, 1~~2~~3~~4~~56789, 1~~2~~34~~5~~6789, 1~~2~~345~~6~~789, 1~~2~~3456~~7~~89, 1~~2~~34567~~8~~9, 1~~2~~345678~~9~~,
12~~34~~56789, 12~~3~~4~~5~~6789, 12~~3~~45~~6~~789, 12~~3~~456~~7~~89, 12~~3~~4567~~8~~9, 12~~3~~45678~~9~~,
123~~45~~6789, 123~~4~~5~~6~~789, 123~~4~~56~~7~~89, 123~~4~~567~~8~~9, 123~~4~~5678~~9~~,
1234~~56~~789, 1234~~5~~6~~7~~89, 1234~~5~~67~~8~~9, 1234~~5~~678~~9~~,
12345~~67~~89, 12345~~6~~7~~8~~9, 12345~~6~~78~~9~~,
123456~~78~~9, 123456~~7~~8~~9~~,
1234567~~89~~.

A darabszámok soronként: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$. Vagyis 36 ilyen hétjegyű szám van.

Megjegyzés:
Természetesen gondolkodhatunk a következő módon is. A kilenc számjegyből tetszőleges kettőt kihúzhatunk. Elsőre kilenc, másodikra nyolc számjegy lehet a kihúzott. Ez összesen $9 \cdot 8 = 72$ lehetőség, de ekkor minden kihúzásra kétszer gondoltunk. Ezért kell a 72-nek a felét vennünk.
A megoldásban látott módszert azért mutattuk, mert így az is megfigyelhető, hogyan lehet hiánytalanul felsorolni az összes lehetőséget.

I. 3. HÁNY ESET VAN?

FELADATOK

1. Laci, Dezső, Soma és Misi bringóhintózni mentek a Margitszigetre. A bringóhintó négyszemélyes, ketten elöl ülnek, ketten hátul. Hányféleképpen választhatják ki maguk közül, hogy kik ülnek elöl? Sorold fel a lehetőségeket!

2. Emi, Bogi, Marcsi, Lóci és Szabi nyaralni indulnak a Balatonra. Megdöbbenve tapasztalták, hogy a sok csomag miatt nem férnek be mind az öten a kocsiba. Úgy döntöttek, ketten közülük vonattal mennek.



a) Hányféleképpen választhatják ki maguk közül a két vonattal utazót, ha csak Emi tud vezetni? Sorold fel az eseteket!

b) Hányféleképpen választhatják ki a két vonatozó embert akkor, ha mindenki tud vezetni?

c) Hányféleképpen választhatják ki maguk közül azt a három embert, aki kocsival utazik, ha mindenki tud vezetni?

3. Az iskolai pályázaton négy diák indult: Lilla, Maxim, Dóri és Zsombor. A két legügyesebb tanuló egy-egy 5000 Ft értékű könyvutalványt kap. Hányféleképpen történhet a díjazás? Sorold fel a lehetőségeket!

4. Egy társasjátékhoz hat darab különböző színű bábu tartozik: piros, zöld, fehér, sárga, lila és fekete. Hárman szeretnének játszani, ezért három bábut kell kiválasztani. Hányféleképpen lehet ezt megtenni? Sorold fel az eseteket!

5. Egy nyolcfős társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hány kézfogás történt összesen?

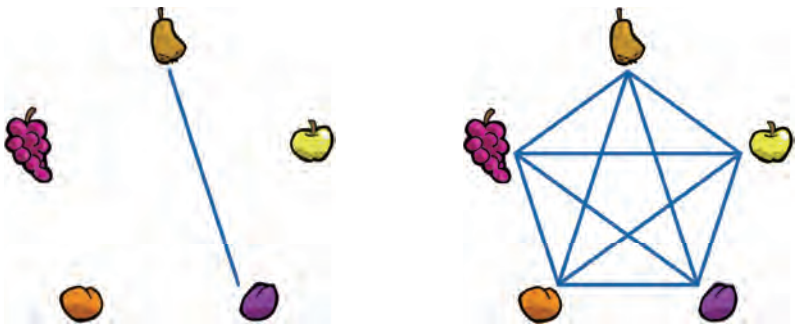
6. Hét pont úgy helyezkedik el a síkon, hogy semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány szakaszt kell rajzolnod, ha minden lehetséges módon összekötöd őket?

7. Egy 15 fős csoportban 13 mozijegyet kell kiosztani. Egynél több jegyet senki nem kaphat. Hányféle kiosztás lehetséges?

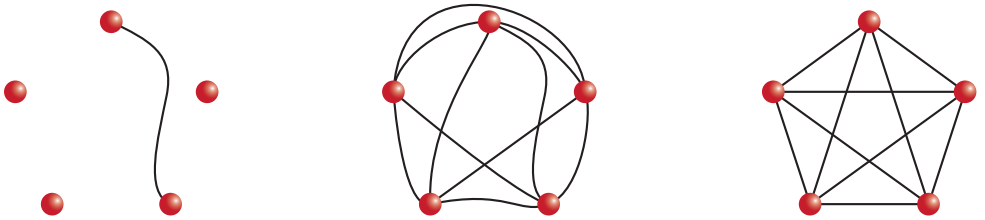
8. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben követik egymást?

9. Egy sakkfeladványt öt bábuval lehet kirakni a sakktáblára: három világossal és két sötéttel. Tudjuk, hogy a világos és a sötét királynak is a táblán kell lennie, továbbá nem lehet két azonos világos bábu a táblán. Hányféle kiválasztása lehet a bábuknak egy ilyen feladvány esetén?

Az előző leckében felsoroltuk ötféle gyümölcs: az alma, a körte, a szilva, a barack és a szőlő összes lehetséges párosítását. Azokat az eseteket soroltuk fel, amikor két különböző gyümölcsöt választottunk ki közülük, és a sorrendjük nem számított. Tíz ilyen esetet találtunk.
Nézzük meg ugyanezt a feladatot kicsit más szemléltetéssel! Rajzoljuk le az ötféle gyümölcsöt egy ötszög csúcsaiba, és ha két gyümölcsöt kiválasztunk, akkor húzzunk egy vonalat közéjük! Ha például a körtét és a szilvát választjuk, akkor az ábrán látható összekötő vonalat húzzuk be.
Ha minden lehetséges módon ki akarunk választani két gyümölcsöt, akkor az összes lehetséges vonalat be kell húznunk.

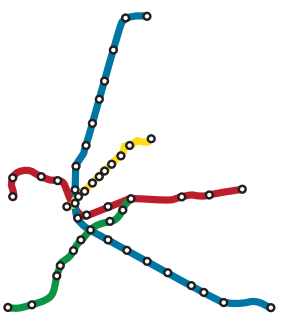


Igazából felesleges körtét és szilvát rajzolni. Tökéletes az is, ha pontokat és azokat összekötő vonalakat rajzolunk. A vonalak alakja is lényegtelen, összeköthetjük a pontokat görbe vagy egyenes vonallal is. Mindig úgy rajzolunk, ahogy jobban segíti a feladat megoldását.



Ha megszámláljuk a második vagy a harmadik ábrán berajzolt vonalakat, most is megállapíthatjuk, hogy tízféle olyan gyümölcspárt lehet választani, ahol mindkét gyümölcs különböző, és a sorrendjük lényegtelen.

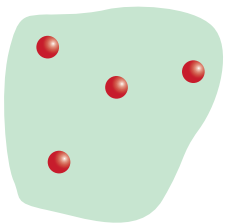
Ha egyes dolgokat pontokkal, a köztük levő összefüggést pedig a pontokat összekötő vonalakkal szemléltetünk, akkor azt mondjuk, hogy ez egy **gráf**.
Az egyes dolgokat, mint a példában a gyümölcsöket, a gráf **csúcsainak** nevezzük (szokták a gráf **pontjainak** is hívni), az őket összekötő vonalak pedig a gráf **élei**.
A **csúcsokból (pontokból)** és az azokat összekötő **élekből** álló alakzatot **gráfnak** nevezzük.



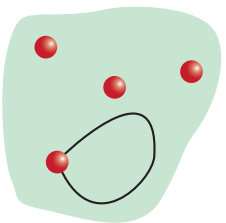
Vannak olyan helyzetek, amikor kézenfekvő a gráfokkal való szemléltetés. Például a budapesti metró térképe is egy gráf.
Ha egy társaságban mindenki bejelöli, hogy kit ismer (feltesszük, hogy az ismeretség kölcsönös), akkor a társaság tagjai lesznek a gráf csúcsai és a köztük lévő ismeretségek a gráf élei.

Rajzoltunk néhány gráfot:

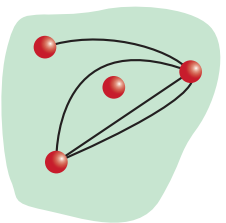
Lehetséges, hogy egy gráfban nincs él.



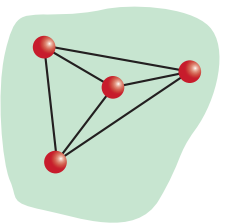
Lehet, hogy egy csúcsból önmagába megy él.



Lehet, hogy két csúcs között több él is van.



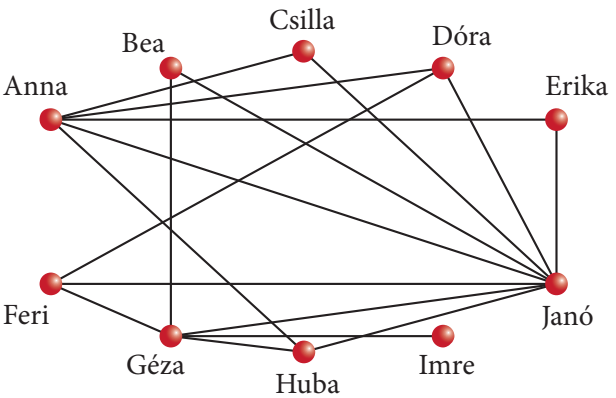
Lehet, hogy bármely két csúcs között pontosan egy él halad.



1. PÉLDA

Megadtuk egy tízfős társaság ismeretségi gráfját. Most megneveztük a gráf csúcsait, hogy könnyebb legyen beszélni róluk. Fogalmazzuk át a kérdéseket gráfokra, és adjuk meg a válaszokat is!

a) Kinek van a legtöbb ismerőse?
b) Kinek van a legkevesebb ismerőse?
c) Hány ismeretség van összesen a társaságban?



Megoldás

a) Melyik csúcsból indul ki a legtöbb él? Janó csúcsából 8 él indul ki, ez a legtöbb, neki van a legtöbb ismerőse.
b) Melyik csúcsból indul ki a legkevesebb él? Imre csúcsából csak 1 él indul ki, ez a legkevesebb, ő 1 embert ismer.
c) Hány él van a gráfban összesen? A gráfban összesen 17 él van.

2. PÉLDA

Vilma reggel iskolába megy. Lehet, hogy elviszik kocsival a buszvégállomásra, de lehet, hogy le kell sétálnia oda. A buszvégállomásról háromféle járattal juthat el az iskolához. Az expresszel, a normál járattal, és van egy harmadik járat is, ami kerül ugyan egy kicsit, de elviszi az iskola mögötti utcába.

a) Szemléltessük Vilma iskolába jutási lehetőségeit gráffal!
b) Mi volt a felesleges információ?
c) Hová kellene még egy élt behúzni, ha az is előfordul, hogy anyukája az iskola felé megy kocsival, és elviszi?

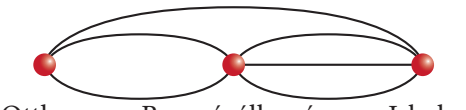
Megoldás

a) A gráf pontjai az otthon, a buszvégállomás és az iskola. Berajzoltunk 2 élt az otthon és a buszvégállomás közé, mert kétféle módon juthat el oda.
Onnan tovább 3 lehetősége van. Az egyes lehetőségeket az egyes élek szemléltetik.

b) Például az, hogy az iskola mögötti utcába viszi az egyik járat.

c) Egy új élt rajzoltunk a gráfhoz, amelyik otthonról közvetlenül az iskolába vezet.





Amikor kinyitunk egy útvonaltervezőt, akkor a számítógép, illetve a telefon egy gráf élhálózatán keres utakat két vagy több pont között.
Ha használjuk az internetet, akkor a számítógépek és a hálózati elosztók lesznek a gráf csúcsai, az őket összekötő kapcsolatok pedig a gráf élei. Ezek általában hatalmas méretű gráfok.



Szemerédi Endre

A magyar matematikusok kiemelkedő eredményeket értek el a kombinatorika, ezen belül a gráfok tulajdonságainak kutatása terén. Szemerédi Endre 2012-ben, Lovász László pedig 2021-ben kapta meg, részben a gráfokkal kapcsolatos eredményeiért az egyik legrangosabb matematikai kitüntetést, az Abel-díjat.



Lovász László

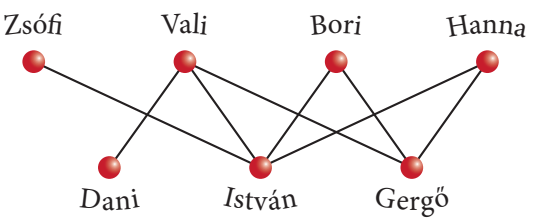
FELADATOK

1. Vera, Xavér, Yvett és Zénó jutott a teniszverseny döntőjébe, ahol mindenki egyszer játszik mindenkivel. A Vera–Xavér, Yvett–Zénó és Vera–Zénó mérkőzéseket már lejátszották.
a) Ábrázold a mostani helyzetet egy gráfon!
b) Hány mérkőzés van hátra?
c) Hogyan módosulnának a válaszaid, ha nem egy-, hanem kétfordulós lenne a verseny, azaz bármely két játékos kétszer mérkőzne meg egymással?

2. Rajzold le egy gráfon a te iskolába jutási lehetőségeidet! Nem baj, ha egyszerű lesz!

3. A történelemórákon már találkoztál uralkodóházak családfájával. Rajzolj családfát a saját családodról! Mik lesznek a csúcsok és az élek?

4. Négy lány és három fiú táncolt az este. A gráfon berajzoltuk, hogy mely párok táncoltak az este folyamán.



a) Ki táncolt egyetlen társsal?
b) Ki táncolt minden lehetséges társsal?

I. 5. IGAZOLD! CÁFOLD!



Figyeld meg a *Ha …, akkor …* felépítésű állítások megfordítását:

Ha esik az eső, akkor esernyőt viszek magammal.
Ha esernyőt viszek magammal, akkor esik az eső.

A fenti két mondatról azt mondjuk, hogy az egyik a másik megfordítása. A két mondat nagyon hasonlóan hangzik, hiszen ugyanazokból a szavakból áll, de jelentésük mégis eltérő. Ezért az igazságtartalmukat is meg kell vizsgálnunk.

1. PÉLDA

Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását! Döntsük el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem! Az igaz állítást igazoljuk, a hamisat cáfoljuk!

a) Ha egy négyszög minden szöge egyenlő, akkor az négyzet.
b) Ha egy egész szám 3-ra végződik, akkor osztható 13-mal.

Megoldás

a) Az eredeti állítás: Ha egy négyszög minden szöge egyenlő, akkor az négyzet.
A megfordítása: Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge egyenlő.
Az eredeti állítás hamis. Cáfolatként gondoljunk egy olyan téglalapra, amelynek szomszédos oldalai nem egyenlő hosszúak. Ez egy olyan négyszög, amelynek minden szöge egyenlő, és mégsem négyzet.
Az állítás megfordítása igaz, mert azokat a téglalapokat nevezzük négyzeteknek, amelyeknek minden oldala egyenlő hosszú. Mivel a téglalapok minden szöge derékszög, ezért a négyzeteké is.

b) Az eredeti állítás: Ha egy egész szám 3-ra végződik, akkor osztható 13-mal.
A megfordítása: Ha egy egész szám osztható 13-mal, akkor 3-ra végződik.
Az eredeti állítás hamis. Cáfolatként vegyük a 23-at. A végződése 3, de nem osztható 13-mal.
Az állítás megfordítása is hamis. A 26 osztható 13-mal, de nem végződik 3-ra.

2. PÉLDA

Alakítsuk át a következő mondatokat olyan formájúvá, hogy beszélhessünk a megfordításukról! Fogalmazzuk meg a megfordításukat is!

a) A lónak négy lába van.
b) Az arany fénylik.
c) A négyzet tengelyesen tükrös négyszög.
d) Minden pozitív egész szám reciproka pozitív törtszám.



Megoldás

a) Ha egy állat ló, akkor négylábú.
A megfordítása: Ha egy állat négylábú, akkor ló.
b) Ha valami arany, akkor fénylik.
A megfordítása: Ha valami fénylik, akkor az arany.

c) Ha egy négyszög négyzet, akkor tengelyesen tükrös.
A megfordítása: Ha egy négyszög tengelyesen tükrös, akkor négyzet.
d) Ha egy szám pozitív egész szám, akkor a reciproka pozitív törtszám.
A megfordítása: Ha egy szám pozitív törtszám, akkor a reciproka pozitív egész szám.

Egy beszélgetés során előfordulhat, hogy egy állítással nem értesz egyet. Ilyenkor az eredeti állítás tagadását kell megfogalmaznod:

(1) Ez egy fehér ing.
(2) Ez nem egy fehér ing.

Az első mondat tagadásakor nagyon sokan egy ingre gondolnak, ami nem fehér. Pedig ezt a mondatot nemcsak egy zöld ingre mondhatjuk, hanem például egy piros kabátra vagy egy barna dobozra is.
Ha egy állítás tagadását hallod, akkor gondolj ezekre!



3. PÉLDA

a) Gondoltam egy számot, ami nem negatív. Milyen számra gondolhattam?
b) Hogyan lehetne befejezni a következő mondatot: *A kezemben tartott dolgozat nem jó, hanem …* ?

Megoldás

a) Előjelét tekintve háromféle számra gondolhatunk: negatívra, nullára, pozitívra. A feladatban a negatív tagadásáról van szó, vagyis gondolhattunk pozitív számra, de a nullára is. (Ezeket a számokat együttesen nemnegatív számoknak nevezzük.)

b) Nem lehet egyértelműen meghatározni, hogy kinek mit jelent a jó.
Tudjuk, hogy ötféle érdemjegy lehetséges: elégtelen, elégséges, közepes, jó, jeles.
Ha ilyen értelemben gondolunk a jó tagadására, akkor a mondat lehetséges befejezései: elégtelen, elégséges, közepes, jeles.
Természetesen nem csak az érdemjegyekre gondolhatnánk. Ezért például ilyen mondatokat is hallhatunk: *a kezemben tartott dolgozat nem jó, hanem csapnivaló!* vagy *[…] nem jó, hanem szuper!*

Az ilyen típusú szófordulatokat a reklámok is használják. Egy nagy cég óriásplakátokon arra kér: Ne a jót válaszd! Válaszd a nagyszerűt! A „jó” tagadásához, vagyis a „nem jó” kifejezéshez nem a „rossz” jelentést társítják, hanem a „nagyszerű”-t!

A matematikában egy állítás vagy igaz, vagy nem igaz (hamis).
Az igaz állítások tagadása hamis, a hamis állítások tagadása pedig igaz.
Egy állítás és a tagadása közül az egyik – és csakis az egyik – igaz, a másik hamis!

FELADATOK

1. Döntsd el a tankönyv 2. példájában szereplő mondatokról és megfordításaikról, hogy igazak vagy hamisak! A hamis állításokat cáfold!

2. Fogalmazd meg a következő állítások megfordítását! Döntsd el, hogy melyik igaz, az eredeti állítás vagy a megfordítása! Az igaz állításokat igazold, a hamisakat cáfold!

a) Ha egy négyszög minden oldala egyenlő, akkor az négyzet.
b) Ha egy egész szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel.
c) Ha egy lónak szárnya van, akkor az pegazus.
d) Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszú, akkor tengelyesen szimmetrikus.

3. Tudunk mondani olyan igaz állításokat, amelyeknek a megfordítása is igaz. Például:
Ha egy pozitív egész szám osztható 5-tel, akkor az utolsó számjegye 0 vagy 5.
Ha egy pozitív egész szám utolsó számjegye 0 vagy 5, akkor osztható 5-tel.
Ilyenkor a két mondatot egy igaz állításként is megfogalmazhatjuk:
Egy pozitív egész szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha utolsó jegye 0 vagy 5.

Fogalmazd meg a következő állítások megfordítását! Ha az eredeti állítás és a megfordítása is igaz, akkor fogalmazd meg őket egy igaz állításként!

a) Ha egy négyszög négyzet, akkor a két-két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.
b) Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 4-gyel.
c) Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszú, akkor tengelyesen szimmetrikus.
d) Ha egy szám osztható 15-tel, akkor osztható 3-mal és 5-tel.

4. A *Minden négyzet téglalap* állítás tagadása: Nem igaz, hogy minden négyzet téglalap. Ezt a mondatot így is mondhatjuk:
Van olyan négyzet, amelyik nem téglalap.
Az eredeti állítás igaz, a tagadása hamis!
A fentiek alapján fogalmazd meg a következő állítások tagadását! Döntsd el, hogy melyik igaz, melyik hamis!

a) Minden téglalap négyzet.
b) Minden bogár rovar.
c) Minden kocka téglatest.

5. A *Nincs olyan háromszög, amelyben két tompaszög van* állítás tagadása: *Nem igaz, hogy nincs olyan háromszög, amelyben két tompaszög van.* Ezt a mondatot így is mondhatjuk:
Van olyan háromszög, amelyben két tompaszög van.
Az eredeti állítás igaz, a tagadása hamis!
A fentiek alapján fogalmazd meg a következő állítások tagadását! Dönts, hogy melyik igaz, melyik hamis!

a) Nincs olyan háromszög, amelyben két derékszög van.
b) Nincs olyan állat, amelyiknek nyolc lába van.
c) Nincs olyan test, amelyiknek hat lapja van.





JÁTÉK

Páros játékok

1. Felváltva kell egyre nagyobb pozitív egész számokat mondanotok úgy, hogy az előzőt legfeljebb 3-mal növelhetitek, és a 21-et nem léphetitek túl. A kiinduló szám a nulla. Az a játékos nyer, aki kimondatja a másikkal a 21-et.

Például Dóri és Zsombi felváltva ezeket a számokat mondta:

1 2 3 4 7 10 11 14 16 19 20 21

Vagyis most Dóri nyert.

Játsszátok el többször a játékot, és közben készítsétek el saját stratégiáitokat! Hogyan kell játszanod, ha nyerni szeretnél?

2. Rakjatok ki egymás mellé néhány (például 6-8 darab) kupakot, némelyik a többihez képest legyen fordítva!

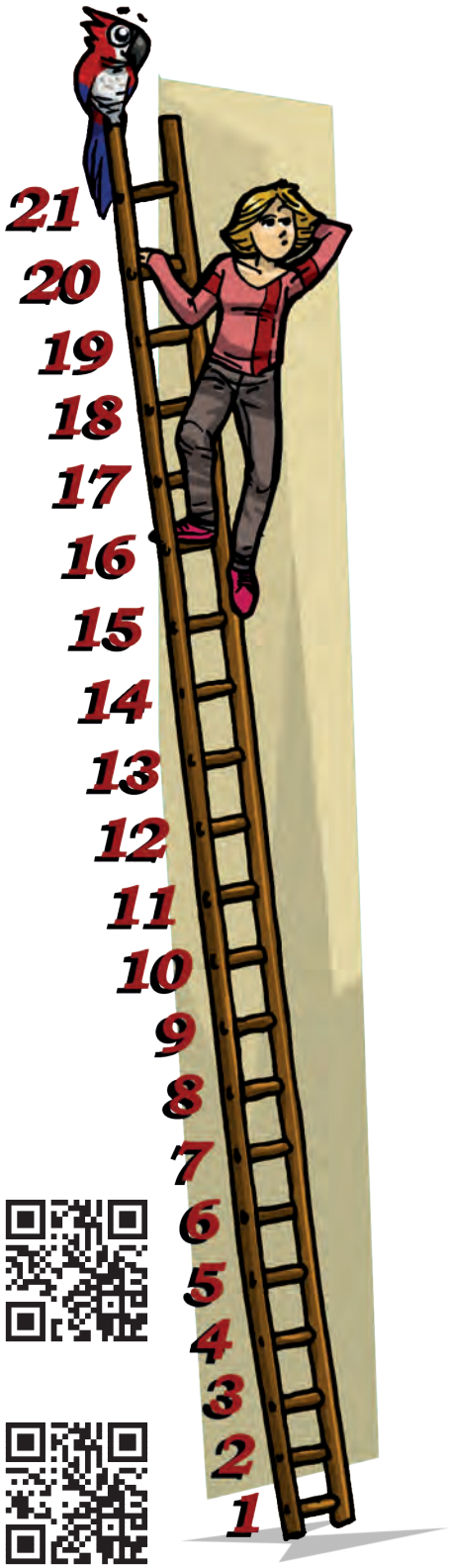


A kezdő játékosnak meg kell fordítania egy olyan kupakot, amelyiknek nem látszik a teteje, majd minden tőle jobbra lévő kupakot is meg kell fordítania. Most például balról a harmadik, az ötödik és a hatodik kupaknak nem látszik a teteje, tehát elsőként ezek közül kell valamelyiket megfordítania, majd pedig az ettől jobbra lévőket is.
Ha például a kezdő játékos balról a harmadik kupak megfordítása mellett dönt, akkor ilyen kupaksort kap:



Most a második játékos is fordítson meg egy kupakot és a tőle jobbra levőket.
Az a játékos nyer, aki eléri, hogy mindegyik kupaknak látszódjon a teteje.

Játsszátok el többször a játékot! Érdemes úgy játszani, hogy az egyik játékos kirakja a kupakokat, a másik pedig dönthet, hogy szeretne-e kezdeni. A játék során szerezz olyan tapasztalatokat, hogy amikor dönthetsz a kezdésről, akkor mindig te nyerj!



FELADATOK

1. Dóri és Zsombi továbbra is a lecke első játékát játsszák.

a) Zsombi kimondta a 17-et. Mit mondjon Dóri, hogy megnyerje a játékot?

b) Dóri kimondta a 16-os számot. Hányféle befejezése van innen a játéknak, ha Dóri már nem rontja el, és ő nyeri a játékot?

c) Zsombi kimondta a 14-es számot. Hányféle befejezése van innen a játéknak, ha Dóri már nem rontja el, és ő nyeri a játékot?

2. Hogyan változik a taktikád a lecke első játékában, ha

a) az előző számot maximum 4-gyel lehet növelni, és a 31-et nem szabad túllépni?

b) az előző számot maximum 6-tal lehet növelni, és az 50-et nem szabad túllépni?

3. A lecke második játékában megismert szabályokkal kell játszanod. Szeretnél kezdeni? Válaszodat indokold, és rajzold le a folytatást a füzetedbe!

a)



b)



c)



d)



4. Fogalmazz meg nyerő stratégiát úgy, hogy a kupakok darabszáma és állása is tetszőleges!

7. ÖSSZEFOGLALÁS

I.

Ebben a fejezetben találkoztunk sorbarendezési feladatokkal. Összeszámoltuk, hány eset van, ha néhány elemet kiválasztunk az összesből. Megismerkedtünk olyan eljárásokkal és módszerekkel, amelyek minden lehetséges eset megtalálását segítik. Összeszámlálási feladatokban a lehetőségek felsorolását alkalmazhatjuk kis elemszám esetén. Az összes eset szemléltetésére ágrajzot (gráfot) is készíthetünk. Néha célszerű táblázatban felírni az összes lehetőséget. Minél több eljárást ismerünk, annál nagyobb eséllyel oldhatjuk meg hibátlanul a feladatokat.

A matematikában az állítás olyan kijelentés, amelyről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igaz vagy hamis. Megfogalmazható egy állítás megfordítása is.

A gráfok alapfogalmainak megismerése segít sok matematikai és hétköznapi probléma megoldásában. Például az összeszámlálási feladatokban, a kapcsolatok szemléltetésében, úthálózatok megrajzolásában.



FELADATOK

1. Írd fel a 0, 3, 6 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával képezhető összes
a) páros számot;
b) páratlan számot;
c) öttel osztható számot!

2. Válaszolj az alábbi kérdésekre!
a) Hányféle sorrendben helyezheted egymásra az ötödikes matematikakönyvedet, a munkafüzetedet, a hatodikos matematikakönyvedet és a munkafüzetedet?
b) Az előző kupac tetejére ráteszed a hetedikes matematikakönyvedet és a munkafüzetedet is. Így hányféle sorrend alakulhat ki összesen?

3. Hány darab 90 000-nél nagyobb 5-tel osztható szám készíthető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával?

4. Egy barátságos tornán öt labdarúgócsapat vett részt.
a) Hányféle sorrendben végezhettek?
b) Hányféle sorrendben végezhettek, ha a két legesélyesebbnek kikiáltott csapat valóban az első két helyet szerezte meg?

5. Az iskolai néptáncelőadáson a fiúk botos táncot táncolnak. A tánc egyik jelenetében hat fiú körben áll, minden második kezében bot van, amit adott pillanatban átdobnak a tőlük jobbra táncoló társuknak. Hányféleképpen állhatnak körbe, ha a körtánc kezdetén Olivér, Zalán és Áron kezében van a bot, és Bence, Máté, Levente lesznek azok, akik velük táncolnak?

6. A táborban mindenki elfért az öt sátorban. A különböző színű sátrak vidám látványt nyújtottak a tábortűz körül. A tanárok sátra piros volt, a fiúk két sátra zöld és kék, a lányok sátra narancssárga és rózsaszín. Hányféleképpen állíthatták fel a sátrakat a táborozók, ha az egyetlen fix hely a piros sátoré volt, közvetlenül a tábor bejárata előtt?



7. Az *ABCDEFGHIJ* betűkből nyolcbetűs „szavakat” kell képezned úgy, hogy a szavak betűi az ábécé sorrendjében kövessék egymást. Egy szóban egy-egy betűt csak egyszer használhatsz. Hány „szót” kaphatsz ilyen módon?

8. A 28 fős osztályban egy osztálytitkárt, egy sportfelelőst és egy gazdasági felelőst választanak. Hányféleképpen lehetséges, ha egy ember csak egy feladatot vállalhat?

9. Fogalmazd meg a következő mondatok megfordításait! Minden esetben döntsd el, hogy melyik igaz és melyik hamis!

a) Ha egy tört számlálója és nevezője is páros szám, akkor a tört egyszerűsíthető.

b) Ha egy háromjegyű szám minden számjegye egyenlő, akkor osztható hárommal.

c) Ha egy egész szám végződése 75, akkor osztható 25-tel.

d) Ha egy szám osztható néggyel, akkor osztható hússzal.

10. Panni firkálgatott a kockás füzetébe, és egy idő után ezt látta maga előtt:

G	Á	S	P	Á	R
Á	S	P	Á	R	
S	P	Á	R		
P	Á	R			
Á	R				
R					

a) Hányféleképpen olvashatja ki a Gáspár nevet, ha csak jobbra vagy lefelé léphet?

b) Hányféleképpen olvashatja ki a Gáspár nevet, ha egymás után legfeljebb kétszer léphet jobbra vagy lefelé?

11. A hét törpe pingpongbajnokságot szervezett. Természetesen mindenki mindenkivel játszik egy meccset. Tudor már pingpongozott mind a hat másik törpével; Vidor Hapcival, Morgóval és Szendével; Kuka Vidorral, Szendével és Szundival; Hapci pedig Morgóval játszott.



a) Rajzold fel a megfelelő gráfot!

b) Számold össze, hány pingpongmeccset játszottak már le a törpék!

c) Hány meccs van még hátra?

12. Egy nemzetközi konferencián találkozott néhány tudós. A tudósok angolul, németül, olaszul és franciául beszéltek, de mindenki csak két nyelven, és nem volt két olyan tudós, aki ugyanazt a két nyelvet beszélte.

a) Legfeljebb hány tudós találkozott ezen a konferencián?

b) Rajzold fel a megfelelő gráfot, és kösd össze azokat egy éllel, akik tudtak egymással beszélni!

c) Hány emberrel tudott beszélni egy tudós?

d) Hány beszélgetés lehetett összesen, ha mindenki mindenkivel szóba elegyedett, akivel egy nyelvet beszélt?

13. Lázár Ervin *A Négyszögletű Kerek Erdő* című mesekönyvében olvashatsz arról, hogy az erdő lakói költői versenyt rendeztek. Szerették volna eldönteni, hogy ki a legnagyobb költő közöttük. Nagyon sok vers született.
Bruckner Szigfrid ezt írta:

Ej, mi a kő! tyúkanyó, kend
a szobában lakik itt bent?

Miután a többiek elmagyarázták neki, hogy ez nem az ő verse, a következő változattal állt elő:

Ej, kend, tyúkanyó, mi a kő,
itt bent lakik a szobában?

Hányféle változatot írhatott volna ilyen módon Bruckner Szigfrid, ha csak soronként keverte össze a szavakat, és a *kő* és a *szobában* szavak előtt az *a* névelőt mindig megtartotta?



II. RACIONÁLIS SZÁMOK, BETŰS KIFEJEZÉSEK

Bár a második útra Gazsi és Attila kártyáját sorsolta ki a véletlenszám-generátor, az al-Hvárizmiről szóló Wikipédia-lapot valamennyi gyerek elolvasta. A két szerencsés időutazó reménykedett, hogy a 800-as évek elejének Perzsiájába való utazás legalább annyira izgalmas lesz, mint az előző páros útja.

A két fiú már jó előre beállította a fordító protokollrobotot, így a megérkezés pillanatában még épp elcsípték a következő beszélgetést:

– Miért rajzolsz magadnak négyzeteket és téglalapokat? – kérdezte érdeklődve Rashid.

– Egyenleteket oldok meg. Nézd csak, ha itt egy téglalapot is rajzolok, akkor épp kiegészítem az egészre – válaszolta al-Hvárizmi.

Rashid nem tágított, mindenképpen megpróbálta kizökkenteni az elmélyülten dolgozó tudóst.

– Miért használsz hindu jeleket? Én is láttam már néhány helyen, de nem szoktam használni őket.

– Sokkal kényelmesebb. Ezt ideírom, ezt meg alá, és kész is az összeadás.

– Gyors vagy. Lehet ezekkel az új jelekkel szorozni is?

– Persze. Gyere el délután az iskolába, ahol gyerekeknek magyarázok – mosolyodott el al-Hvárizmi, és visszafordult a rajzaihoz.

– Láttad? – súgta Attila Gazsinak. – Már az új számokat használja. Kicsit hasonlítanak a mi számainkra, de sok különbség is van.

– Úgy tűnik, több mint 1000 éve ugyanazokat a dolgokat tanuljuk a suliban – somolygott Gazsi, aki már elképzelte, hogyan meséli el a többieknek, hogy már ezer éve is az összeadást és a szorzást kellett gyakorolni az iskolában.

II. 1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

Az emberek ősidők óta számolnak. Kezdetben tárgyaikat, munkaeszközeiket, összegyűjtött javaikat számolták meg. Az egy, a kettő már nem egy konkrét tulajdonságú tárgyat jelentett, hanem a vizsgált tárgyak számát. A szám fogalommá vált. Az ember először valószínűleg a kézujjait, majd a lábujjait használta a megszámláláshoz. Ez teljesen magától értetődött, hiszen ezeket a „számolóeszközöket” mindig magával vitte.
A kezdeti időkben nem számoltak húsznál tovább. Ha valamiből ennél több volt, akkor arra azt mondták, hogy sok. Később, a megtermelt javak gyarapodásával, egyre nagyobb számokat használtak. Így alakultak ki a pozitív egész számok.





A számok jelölésére használt számjegyeket az arabok vezették be, a X. században pedig Európába is eljutottak. Itt kapták az „arab számok” elnevezést, mivel arab matematikusok és csillagászok munkássága révén váltak ismertté.

A nulla kialakulása nagyon hosszadalmas folyamat volt. Kezdetben az a gondolat tűnt természetesnek, hogy a *semmit* nem kell jelölni. Valószínű, hogy a kereskedelemben volt szükség először a 0 szám, majd ehhez kapcsolódóan a 0 számjegy használatára, amelyet körülbelül a Kr. u. IX. században vezettek be az indiaiak. Vajon miért éppen ilyen a nulla alakja? Vannak, akik úgy gondolják, hogy azért, mert több ezer évvel ezelőtt homokba rakott kavicsok segítségével számoltak az indiaiak, és ha elvettek egy kavicsot a homokból, akkor annak nyoma hasonlított a 0 számjegyre. A 0 tehát azt a helyet jelölte, ahol nincsen számot jelentő kavics.



A természetes számok a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12… . Másként fogalmazva: a pozitív egész számok és a 0 együtt alkotja a természetes számok halmazát. A természetes számok halmazát **N**-nel jelöljük. Minden természetes számnál lehet nagyobb természetes számot mondani. Próbáljátok ki ti is a padtársatokkal!
Ez azt is jelenti, hogy a természetes számok halmazának végtelen sok eleme van.

1. PÉLDA



Matyi az üdítőitalos kupakokra egész számokat írt, majd azt a feladatot adta osztálytársainak, hogy vegyenek el összesen négy kupakot úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy kupak hiányozzon, és

a) az elvett kupakokon lévő számok összege a lehető legnagyobb legyen;

b) az elvett kupakokon lévő számok összege a lehető legkisebb legyen.

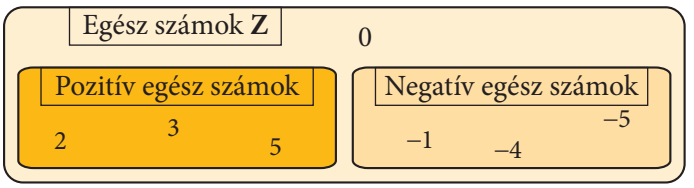
Megoldás

a) Az első oszlopból a hetes, a másodikból a nyolcas, a harmadikból szintén a hetes és az utolsóból a tízes feliratú kupakot elvéve megkapjuk a legnagyobb összeget. Keress más megoldást is!

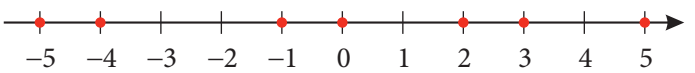
b) Az első oszlopból a négyes, a másodikból a hetes, a harmadikból a hatos és a negyedikből szintén a hetes feliratú kupakot elvéve megkapjuk a legkisebb összeget. Keress más megoldást is!

A pozitív egész számok, a 0 és a negatív egész számok alkotják az egész számok halmazát.

Az egész számok halmazát **Z**-vel jelöljük.



Az egész számokat szemléltethetjük számegyenesen vagy ábrázolhatjuk halmazábrán.



Egy szám abszolút értékén a szám 0-tól való távolságát értjük a számegyenesen. A 3 abszolút értéke 3, a –5 abszolút értéke 5. A 3 abszolút értékének jelölésére a $|3|$ jelölést használjuk. Így $|3| = 3$ és hasonlóan $|-5| = 5$.

Az egész számok körében végzett műveleteknél az összeg, a szorzat és a különbség mindig egész szám lesz. Az osztás műveletére ez azonban nem igaz.
Mutassatok példákat a fenti állításokra!

2. PÉLDA

Számítsuk ki az alábbi műveletsorok eredményét! A példák megoldása során ismételjük át az előjeles számok összeadásáról és kivonásáról tanult ismereteket!

a) $(+25) + (+19) + (+41)$
b) $(-450) - (-45) - (-200)$
c) $(-140) + (-122) + (-78)$
d) $(-415) - (+65) - (+45)$

Megoldás

a) $(+25) + (+19) + (+41) = 25 + 19 + 41 = +85$
b) $(-450) - (-45) - (-200) = -450 + 45 + 200 = -405 + 200 = -205$
c) $(-140) + (-122) + (-78) = -140 - 122 - 78 = -340$
d) $(-415) - (+65) - (+45) = -415 - 65 - 45 = -525$

II. 1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

VERSENYEZZETEK!

A következő feladatot a tanárotok irányításával, időre kell megoldanotok. Az nyeri a versenyt, aki ez alatt az idő alatt hibátlanul dolgozik. Legyetek gyorsak és pontosak!
Az egész számokkal végzett műveletekről olvashattok állításokat. Döntsétek el, hogy igazak vagy hamisak! Válaszaitokat a füzetbe írjátok!



A) $37 + 49 = 49 + 37$
B) $8 \cdot 14 = 14 \cdot 8$
C) $46 - 24 = 24 - 46$
D) $28 : 7 = 7 : 28$

E) Két negatív egész szám összege negatív.
F) Egy pozitív és egy negatív egész szám összege pozitív.
G) Két pozitív egész szám szorzata pozitív.
H) Két különböző előjelű szám szorzata negatív.
I) Ha két azonos előjelű egész számot összeszorzunk, akkor pozitív számot kapunk.

Ismételjük át a tanult műveletek tulajdonságait!

Összeadás	Kivonás
Az összeadás tagjai felcserélhetők: $3 + 5 = 5 + 3$ $(-2) + 7 = 7 + (-2)$	A kisebbítendő és a kivonandó nem cserélhető fel: $3 - 5 \neq 5 - 3$ $(-2) - 7 \neq 7 - (-2)$
A tagok csoportosíthatók, átzárójelezhetők: $(11 + 9) + (-15) = 11 + (9 + (-15))$	A tagok tetszőlegesen nem csoportosíthatók (a zárójel nem helyezhető át bárhová): $(11 - 9) - 15 \neq 11 - (9 - 15)$

Szorzás	Osztás
A szorzótényezők felcserélhetők: $35 \cdot 5 = 5 \cdot 35$	Az osztandó és az osztó nem cserélhető fel: $35 : 5 \neq 5 : 35$
A tényezők csoportosíthatók, átzárójelezhetők: $(2 \cdot 9) \cdot (-10) = 2 \cdot (9 \cdot (-10))$	A osztási műveletek nem csoportosíthatók tetszőlegesen (nem tehető át bárhova a zárójel): $(54 : 9) : 3 \neq 54 : (9 : 3)$

Zárójelfelbontások során ügyeljünk a műveleti sorrendre. Ha nincs zárójel a műveletsorban, akkor először a szorzást és az osztást végezzük el a felírt sorrendben, majd az összeadást és a kivonást.

$$450 \overset{2.}{-} 15 \overset{1.}{\cdot} 28 = 450 - 420 = 30$$

Ha van zárójel, akkor a zárójelben lévő műveletet kell először elvégezni, majd a többit.

$$15 \overset{2.}{\cdot} (28 \overset{1.}{-} 13) = 15 \cdot 15 = 225$$

Előjeles számok összeadása, kivonása:

Előjeles számok összeadásakor és kivonásakor célszerű a műveleti jelet és az előjelet egy műveleti jellé összevonni a korábban tanult szabályok felhasználásával:

- **összeadáskor a pozitív előjel, kivonáskor a negatív előjel egy összeadássá olvad össze;**
- **összeadáskor a negatív előjel, kivonáskor a pozitív előjel egy kivonássá olvad össze.**

Előjeles számok szorzása, osztása:

Két azonos előjelű szám szorzata pozitív. $12 \cdot 18 = 216$; $(-25) \cdot (-14) = +350$

Két különböző előjelű szám szorzata negatív. $(-32) \cdot (+25) = -800$

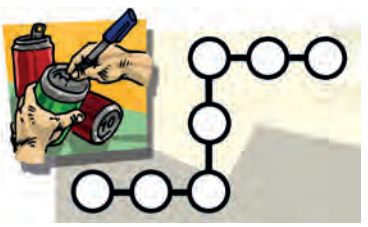
Ha kettőnél több tényezőből áll a szorzat, akkor az előjelének meghatározásakor célszerű kettesével megnézni a szorzatok előjelét.

$(-2) \cdot (+3) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-10) = (-6) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-10) = (-24) \cdot (-5) \cdot (-10) = (+120) \cdot (-10) = -1200$

Osztás esetén a szorzáshoz hasonló szabályok érvényesek a hányados előjelére.

FEJTÖRŐ

Julcsi kilenc üdítősdobozt hozott magával, melyek tetejére ráírta a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 számokat, és felrajzolta a földre a mellékelt ábrát. A gyerekeknek úgy kellett a dobozokat a körökre helyezni, hogy a szakaszokkal összekötött körökhöz tartozó három szám szorzata ugyanannyi legyen. Hogyan oldanád meg Julcsi feladatát?



KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogyan ábrázolták a számokat az ókorban! Keress legalább kétféle ábrázolási módot! Keress az interneten arra vonatkozó információkat, hogy mikor használtak először negatív számokat!

FELADATOK

1. Riki lelkesen magyarázza a bátyjának, hogy mit tanultak az egész számokról az iskolában. A tesója csak a fejét fogja, és nem győzi magyarázni, mire emlékszik rosszul az öccse. Javítsd ki Riki hibáit!

a) Ha két egész számot összeadok, néha egész számot kapok, például $13 + 21 = 34$, de néha nem, hiszen $19 + (-25) = -6$, ami már láthatólag nem egész. Ez a furcsa kettősség a kivonásnál is előjön, hiszen $52 - 19 = 33$, ami egész szám, de $28 - 47 = -19$, ami nem egész szám.

b) Szerencsére az osztás és a szorzás mindig egész számot eredményez, például: $15 : 3 = 5$ és $13 \cdot (-3) = 39$.



2. Válaszd ki az alábbi műveletsorok közül azokat, amelyekben a műveleteket elvégezve az egész számok körében maradunk! Számolással ellenőrizd választásodat!

a) $37 + (+18)$ *b)* $(-53) + (-21)$ *c)* $(+16) \cdot (-5)$
d) $23 - (-17) \cdot (-2)$ *e)* $(-35) : 7 + 3$ *f)* $23 - 11 : (-2)$
g) $17 \cdot 2 : (-6)$ *h)* $34 : (-5) \cdot 2$ *i)* $69 - 24 : (-2) : (+4)$

3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak!

a) Két természetes szám összege természetes szám.
b) Két egész szám összege egész szám.
c) Ha két egész szám összege természetes szám, akkor mindkét szám természetes szám.
d) Ha egy szám kétszerese egész szám, akkor a szám is egész szám.
e) Minden természetes szám abszolút értéke egyenlő magával a számmal.

4. Határozd meg, hogy melyik műveletsor eredménye pozitív, negatív, illetve nulla!

a) $2547 + 1332 + 1215$; *b)* $2547 - 1332 + 1215$; *c)* $2547 - 1332 - 1215$;
d) $2547 - (1332 + 1215)$; *e)* $2547 - (1332 - 1215)$; *f)* $2547 + 1332 \cdot 1215$;
g) $(2547 + 1332) \cdot 1215$; *h)* $2547 - 1332 \cdot 1215$; *i)* $2547 + 1332 \cdot (-1215)$.



5. Zinka nyári munkát keresett, és a következő lehetőségek közül választhatott:

I. 4 héten keresztül minden nap (hétvégén is) napi 4 órát dolgozik, 600 fabatkás órabérért.
II. 30 napon keresztül, 6 tetszőlegesen választott szabadnappal, napi 5 órát dolgozik, 3000 fabatkás napidíjért.
III. Minden hétköznap napi 7 órát dolgozik 4 héten át, összesen 77 000 fabatkáért.

a) Számítsd ki, hány fabatka volt az óradíja az egyes esetekben, és mennyit kereshetett összesen!
b) Te melyik lehetőséget választanád? Választásodat indokold!

6. Gerzson úgy döntött, március 1-től sportos életet él, és minden nap futni fog. Első nap lefutott 1 kilométert, majd ezt a távot kétnaponta 100 méterrel növelte.

a) Hány métert fut majd április 10-én?
b) Hány kalóriát égetett el március 31-én, ha 1 km lefutása alatt 210 kalóriát éget el?



7. A műveleti sorrendről tanultak felhasználásával a füzetedben végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(68 + 142) \cdot (-4)$ *b)* $[(-6) \cdot (+14)] - [(+4) \cdot (-32)]$ *c)* $(-24) \cdot (-6 + 52 + 280)$
d) $(256 + 122) : (-14)$ *e)* $(-194 + 326) : [84 : (-7)]$ *f)* $(-345) : (-17 + 61 - 21)$

A részekre bontás (az osztozkodás) az emberi fejlődés nagyon korai szakaszában megjelent. Az emberek először a fél, a felezés fogalmát használták, illetve a többi egyszerű törtet (harmad, negyed, tized stb.). A törtszámok kialakulása csak jóval később történt, és az egyes népeknél különböző időben és módon jelent meg.
A görögöknél például az I–II. században alakult ki a törtszámok általános leírási módja, a rómaiak pedig csak tizenkettedrészekkel számoltak.



Egy osztás eredménye nem lesz mindig egész szám. Az ilyen esetek jelölésére használjuk a törtszámokat.

1. PÉLDA

Egy narancs négy egyenlő részre történő felosztásakor a narancs $\frac{1}{4}$ részét kapjuk. Nagyon szerencsés helyzetben vagyunk, ha a narancs éppen 8 gerezdre bontható szét, mert akkor mindenki 2 gerezdet kap. Nehezebb a helyzet, ha a narancs 9 kisebb gerezdből áll, mert akkor nem olyan egyszerű igazságosan elosztani. Hány gerezd jut egy-egy embernek ebben az esetben?

Megoldás

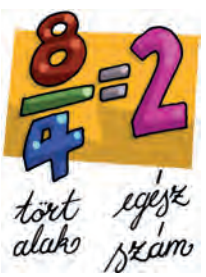
Ebben az esetben mindenkinek $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$ gerezd jut.

Tanultad már! Ismételjük át!

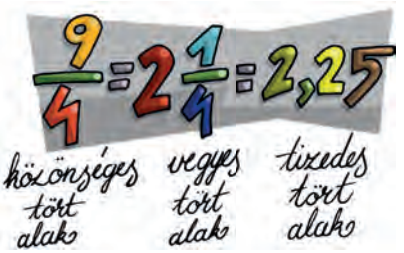
A törtek leírása:



Az 1. példa alapján is látható, hogy az eddig tanult számok többféle alakban írhatóak:



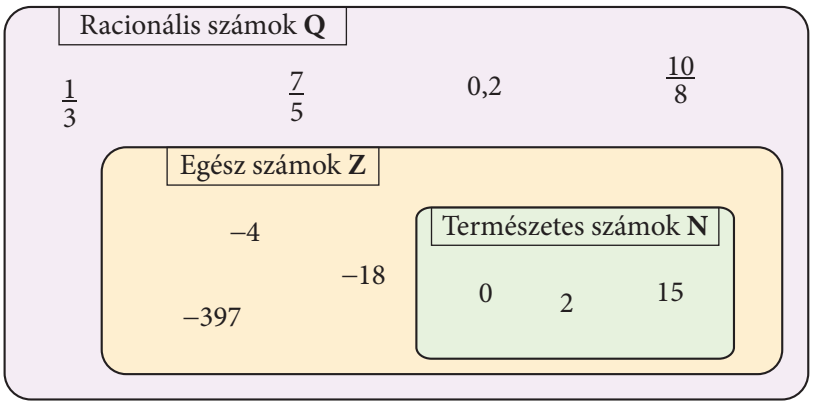
Ez a szám tehát egész szám, amelyet írhatunk tört alakban is.



Ez egy törtszám, amely nem egész szám, de többféle tört alakja is létezik.

II. 2. TÖRTEK, TIZEDES TÖRTEK – MINDEN, AMIT ERRŐL TUDNI KELL

Megmutattuk, hogy az egész számok és a törtszámok is felírhatók két egész szám hányadosaként.



Racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

A racionális számok halmazába az egész számok és a törtszámok tartoznak. A racionális számok halmazának jelölésére a **Q** betűt használjuk.

A törtek vizsgálatánál, összehasonlításánál, műveletek elvégzésénél sokszor szükséges lehet a törteket egyszerűsíteni, illetve bővíteni.

Egyszerűsítéskor a számlálót és a nevezőt is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk.

A mindennapi szóhasználatban a következőt mondjuk: 45 perc múlva érkezem. Ezt órában kifejezve úgy is mondhatjuk, hogy $\frac{3}{4}$ óra múlva érkezem. Mókás lenne azt hallanunk, hogy $\frac{45}{60}$ óra múlva érkezem.

Bővítéskor a számlálót és a nevezőt is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk.

Melyik nagyobb: $\frac{3}{5}$ vagy $\frac{4}{7}$?

Ha mindkét törtet úgy bővítjük, hogy ugyanakkora legyen a nevezőjük (ez a közös nevezőre hozás), akkor elegendő a számlálókat összehasonlítani.

$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$, $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$, ezért $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, honnan származik a *racionális szám* kifejezés! Derítsd ki, miért **Q**-val jelöljük a racionális számok halmazát!

A tizedes törtek használata hétköznapjainkban nagyon elterjedt, mivel a helyiértékes írásmód használatával az összeadás és a kivonás sokkal gyorsabban elvégezhető.
Példa egy tizedes tört alakú szám helyiértékes felírására:
$6540{,}103 = 6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 0{,}001$.

Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a tört alakú számok és a tizedes tört alakú számok között!

2. PÉLDA

Írjuk fel a megadott számokat közönséges tört alakban!

a) 2,1 *b)* 0,625 *c)* 103,05

Megoldás

a) $2{,}1 = 2 + \frac{1}{10} = \frac{21}{10}$

b) $0{,}625 = 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 0 + \frac{600}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

c) $103{,}05 = 103 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} = \frac{10\,305}{100} = \frac{2061}{20}$

Elvégezhető-e az átalakítás fordítva is? Felírható-e minden közönséges tört vagy vegyes tört alakban megadott szám tizedes tört alakban?

3. PÉLDA

Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat!

a) $\frac{3}{2}$ *b)* $\frac{7}{25}$ *c)* $\frac{3}{7}$ *d)* $\frac{5}{6}$

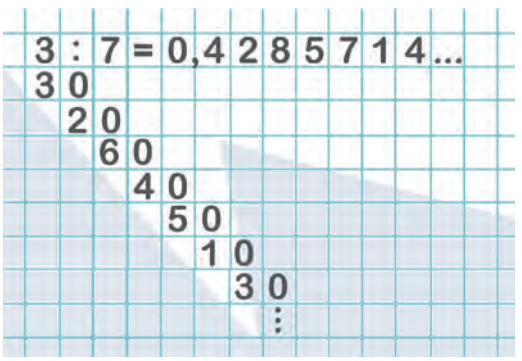
Megoldás

Az első két törttel könnyebb dolgunk van. Mindkét törtet tudjuk úgy bővíteni, hogy a nevezőben 10 vagy 100 szerepeljen.

a) $\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1{,}5$ *b)* $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28$

c) A $\frac{3}{7}$ azonban nem bővíthető hasonló módon.

Végezzük el az osztást!



Innen ugyanúgy folytatódik, mint a tizedesvessző utáni számjegy, és újra ugyanolyan maradékokat kapunk. Tehát a hányadosban a tizedesvessző utáni hat számjegy ismétlődik.

d) Az $\frac{5}{6}$ átírásakor is az osztás elvégzése vezet célra: $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$

II. 2. TÖRTEK, TIZEDES TÖRTEK – MINDEN, AMIT ERRŐL TUDNI KELL

Ha egy egész számot elosztunk egy másik egész számmal, és a hányados végtelen tizedes tört, akkor a maradékok között biztosan megjelenik egy olyan maradék, amelyik már szerepelt. Ezért ettől kezdve a hányados jegyei ugyanabban a sorrendben ismétlődnek. Ekkor a tört tizedes tört alakja végtelen szakaszos tizedes tört. Ezt az ismétlődő részt szakasznak nevezzük. Jelölésekor a szakasz első és utolsó számjegye fölé pontot teszünk.
Az előző példa *c)* része esetén a szakasz hossza 6, jelölése: $0,\dot{4}28571\dot{4}$.
A *d)* rész esetében a szakasz hossza 1. $\frac{5}{6} = 0,8333\ldots = 0,8\dot{3}$. A 8 nem tartozik a szakaszhoz.

Egy nemnulla egész számmal mindig tudunk osztani. Előfordulhat, hogy az osztás során a maradék néhány lépés után 0 lesz. Ekkor egész számot vagy véges tizedes törtet kapunk. Ha nem véges a hányados, akkor a kapott szám mindig végtelen szakaszos tizedes tört.

A racionális számok tizedes tört alakja lehet:

- **egész:** pl. $\frac{8}{2} = 4$; $\frac{21}{3} = 7$; $\frac{45}{9} = 5$;
- **véges tizedes tört:** $\frac{12}{5} = 2,4$; $\frac{7}{4} = 1,75$; $\frac{8}{25} = 0,32$;
- **végtelen szakaszos tizedes tört:** $\frac{5}{11} = 0,\dot{4}\dot{5}$; $\frac{4}{9} = 0,\dot{4}$.

Megjegyzések:
- A végtelen szakaszos tizedes törtek összes számjegyét nem tudjuk leírni, ezért használjuk a szakasz két végpontja fölé írt pontot.
- A végtelen szakaszos tizedes törtet úgy olvassuk ki, hogy az egész részét kimondjuk, a tizedesvessző utáni részt a szakasz végéig felsoroljuk, és megmondjuk, hol van a szakasz.
- Gyakran a tört pontos értéke helyett annak közelítő értékét írjuk le, és azzal dolgozunk. Ezt minden esetben a $\approx$ jel használatával jelezzük.



CSOPORTMUNKA

Vizsgáljátok meg, milyen nevező esetén lesz a tört alakja véges tizedes tört! Indokoljátok meg a válaszotokat!

FELADATOK

1. Kisebb? Nagyobb? Egyenlő? Hasonlítsd össze a törtek értékét! A füzetben dolgozz!

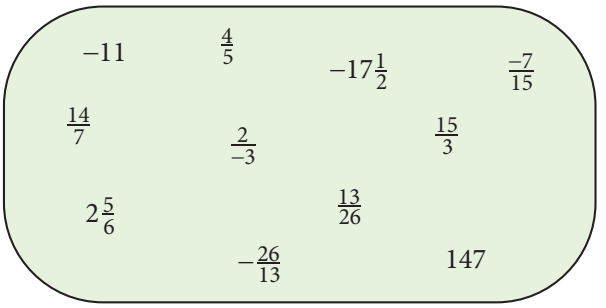
a) $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{9}$ *b)* $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{6}$ *c)* $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ *d)* $2\frac{5}{8}$ $\frac{10}{4}$

e) $-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$ *f)* $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ *g)* $-\frac{2}{7}$ $-\frac{3}{8}$ *h)* $-\frac{17}{6}$ $-2\frac{3}{4}$

2. Melyik szám a nagyobb:

a) 2,79 vagy $2,\dot{8}$; *b)* 2,5 vagy $2,\dot{5}$; *c)* 2,38 vagy $2,38\dot{9}$; *d)* 2,18 vagy $2,\dot{1}\dot{8}$?

3. *a)* Válogasd ki a számhalmazból az egész számokat, a tört alakban írt egész számokat és a törteket!
b) Állítsd a törteket növekvő sorrendbe!



4. Írd át a felsorolt törteket tizedes tört alakba, a tizedes törteket pedig tört alakba!

a) $\frac{15}{4}$ *b)* $\frac{5}{6}$ *c)* $-\frac{4}{9}$ *d)* $\frac{13}{16}$ *e)* $2\frac{10}{13}$ *f)* 0,91 *g)* 3,507 *h)* $0,\dot{3}$ *i)* $9,\dot{6}$

5. Döntsd el, igaz-e vagy hamis!

a) Ha két pozitív tört számlálója és nevezője is megegyezik, akkor a két tört értéke megegyezik.
b) Két pozitív tört közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója és a nevezője is nagyobb.
c) Ha két pozitív tört számlálója megegyezik, akkor az a nagyobb, amelyiknek a nevezője nagyobb.
d) Ha két negatív tört nevezője megegyezik, akkor a kisebb számlálójú a nagyobb.
e) Két negatív tört közül az a nagyobb, amelyik a számegyenesen közelebb van a nullához.

6. Határozd meg számológép segítségével a $\frac{13}{9}$ és a $\frac{16}{9}$ tizedes tört alakját! Milyen érdekességet vettél észre? Mi a magyarázata?

7. *a)* Vizsgáld meg a 99 nevezőjű törtek tizedes tört alakját. A számításhoz a *tanárod utasítása szerint* használd a számológépedet vagy a mobiltelefonodat! Írj a füzetedbe legalább öt példát! Fogalmazd meg tapasztalataidat!
b) Írd fel az $1,\dot{3}$; $0,\dot{1}$; $0,\dot{7}$; $0,\dot{0}\dot{5}$; $1,\dot{6}\dot{7}$ törteket közönséges tört vagy vegyes tört alakban!



8. Szofi és Helén a lecke megírása közben talált két „egymáshoz közeli” racionális számot. Szofi szerint mindig tud olyan racionális számot mondani, ami a kettő között van, Helén viszont úgy gondolja, hogy ez nem lehetséges. Írj két „egymáshoz közeli” racionális számot, és próbáld ellenőrizni Szofi és Helén állítását! Melyik lánynak van igaza? Válaszodat indokold!

9. Nézz utána, mit nevezünk egységtörtnek!

a) Írd fel az 1 egészet 3, 4, 5, 6 darab *különböző nagyságú* egységtört összegeként!
b) Írd fel a $\frac{2}{5}$-öt, a $\frac{3}{7}$-et, az $\frac{5}{8}$-ot, $\frac{13}{25}$-öt és a $\frac{19}{33}$-ot *különböző nagyságú* egységtörtek összegeként!



JÁTÉK

VAN 10 PERCED?

A játék célja:

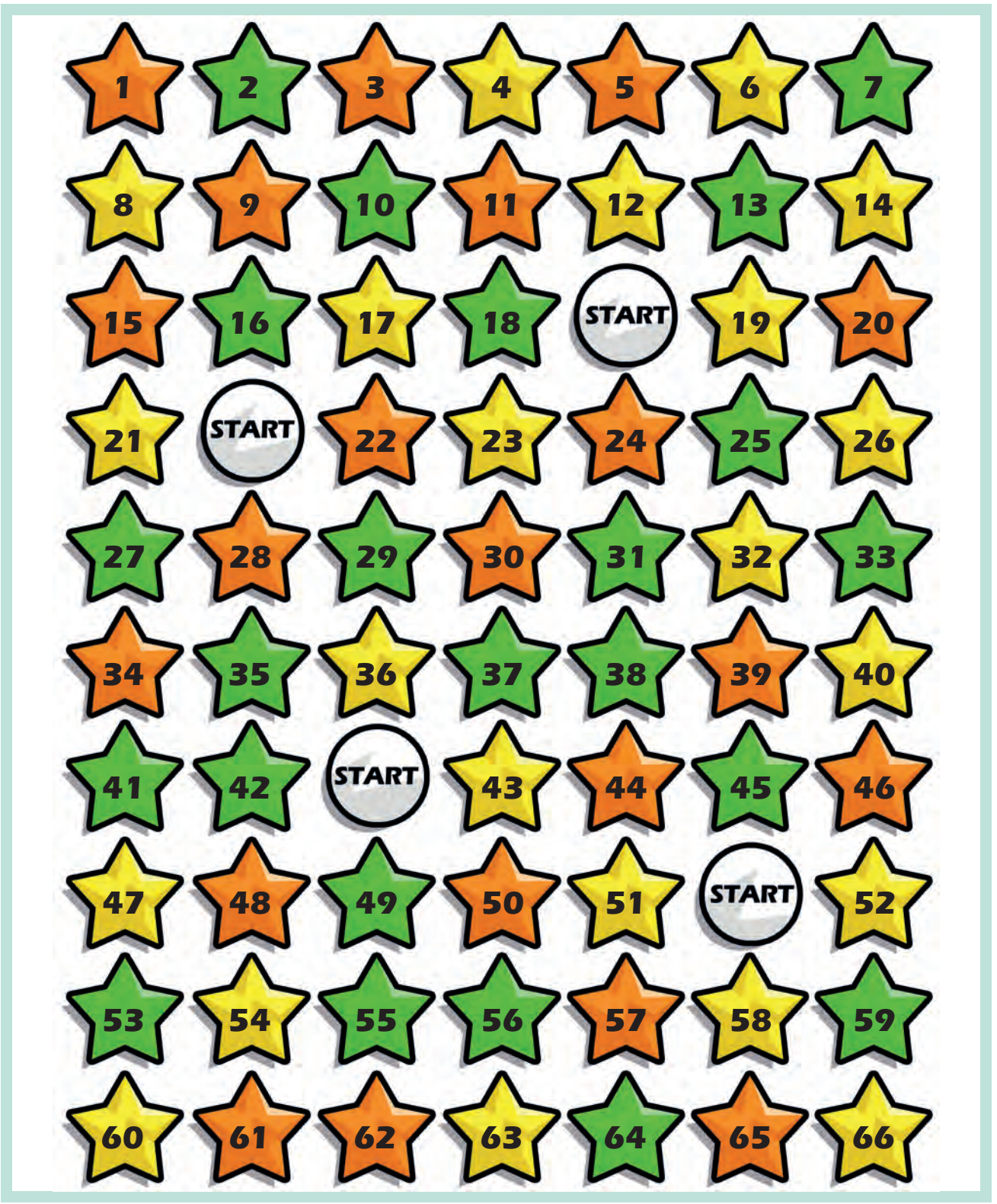
Oldjátok meg a feladatokat, és szerezzetek minél több pontot! Válasszatok saját stratégiát, és alakítsátok ennek megfelelően a pályátokat! Minden hibátlanul megoldott feladat 1 pontot ér. Aki a legtöbb pontot szerzi 10 perc alatt, az a nyertes.

Játék menete:

Ezt a játékot legfeljebb négyen játszhatjátok. Tegyétek a saját bábutokat egy kiválasztott START mezőre! Tegyetek középre egy üres lapot is! Felváltva lépjetek, a legfiatalabb kezdjen!

Egy lépésben 1-et, 2-t vagy 3-at léphettek függőlegesen vagy vízszintesen, ezt mindig a soron következő játékos dönti el. A kezdő játékos egy általa választott mezőre lép, felírja a mező számát az üres lapra, majd megoldja a mezőhöz tartozó feladatot. A többiek ellenőrzik a megoldását. Ha hibátlan, akkor kap egy pontot. Az eredménytől függetlenül jön a következő játékos, aki ugyanígy jár el. Egy feladatot csak egyszer oldhattok meg, a középre rakott lapon minden szám csak egyszer szerepelhet. Ha egy játékos olyan mezőn áll, ahonnan semelyik irányba se mehet tovább, kiesett a játékból. Jó játékot kívánunk!

1. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$
2. $(-3{,}4)\cdot 2$
3. $-2{,}3+5{,}1$
4. $7{,}2:(-8)$
5. $-\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$
6. $1\frac{1}{3}:4$
7. $1{,}6\cdot 3$
8. $\left(-\frac{63}{6}\right):7$
9. $4{,}8-3{,}5$
10. $\frac{2}{9}\cdot 11$
11. $9{,}4+1{,}5$
12. $8{,}4:2$
13. $3{,}1\cdot 7$
14. $\frac{60}{5}:12$
15. $11{,}6+4{,}1$
16. $4\cdot\frac{7}{4}$
17. $21{,}7:7$
18. $\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot 3$
19. $\frac{24}{9}:6$
20. $2{,}8:1{,}5$
21. $\frac{27}{5}:9$
22. $\frac{5}{9}+\frac{7}{9}$
23. $\frac{52}{23}:4$
24. $\frac{11}{8}-\frac{6}{8}$
25. $8{,}2\cdot(-4)$
26. $(-9{,}5):5$
27. $\frac{9}{10}\cdot(-5)$
28. $12{,}6-5{,}1$
29. $35\cdot\frac{2}{10}$
30. $7{,}7+3{,}3$
31. $5{,}3\cdot 5$
32. $3{,}8:(-2)$
33. $(-6)\cdot\frac{5}{13}$
34. $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}$
35. $\frac{3}{8}\cdot 15$
36. $35{,}5:5$
37. $6\cdot 6{,}5$
38. $\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 17$
39. $8{,}9-4{,}8$
40. $2{,}8:14$
41. $9{,}7\cdot(-10)$
42. $(-8)\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)$
43. $\frac{56}{9}:8$
44. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$
45. $(-0{,}94)\cdot 1000$
46. $12{,}5+7{,}4$
47. $4{,}9:(-7)$
48. $-4{,}3+7{,}6$
49. $2{,}5:8$
50. $\frac{8}{6}-\frac{5}{6}$
51. $42{,}6:6$
52. $(-1{,}8):9$
53. $25\cdot\frac{3}{7}$
54. $\frac{34}{9}:(-17)$
55. $\frac{7}{12}\cdot(-6)$
56. $\left(-\frac{5}{42}\right)\cdot 21$
57. $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$
58. $\frac{69}{5}:7$
59. $(-7)\cdot 1{,}5$
60. $2\frac{2}{7}:(-8)$
61. $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$
62. $9{,}9-7{,}7$
63. $\left(-\frac{55}{8}\right):11$
64. $(-9{,}2)\cdot(-3)$
65. $\frac{9}{11}-\frac{2}{11}$
66. $37{,}9:10$


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
START
19
20
21
START
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
START
43
44
45
46
47
48
49
50
51
START
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66

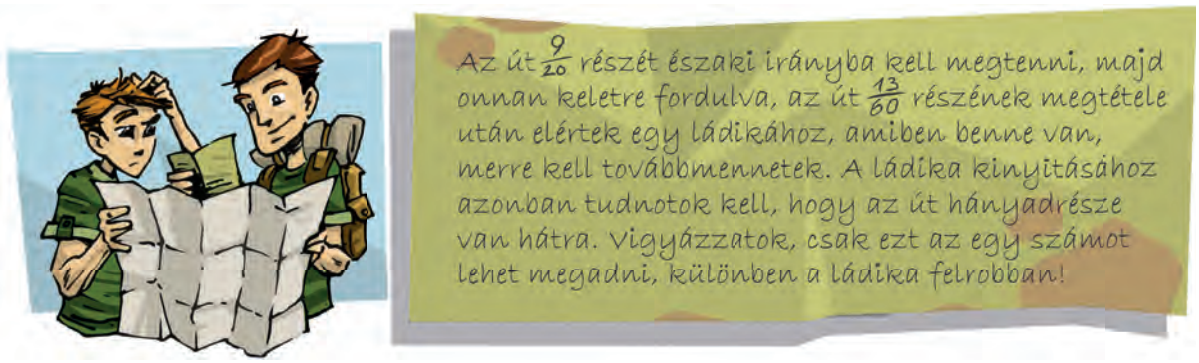
II. 3. MŰVELETEK A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN

Az előző években megtanultuk, hogyan végezzünk műveleteket a racionális számokkal.

Műveletek közönséges törtekkel

1. PÉLDA

Attila és Bálint kincset keresett, s a térkép mellett a következő útmutatást találta:



Megoldás

A két gyerek úgy döntött, külön-külön számolják ki, hogy az út hányadrészét kell megtenni a ládikáig.

Attila:

$$\frac{9}{20}+\frac{13}{60}=\frac{540}{1200}+\frac{260}{1200}=\frac{800}{1200}=\frac{2}{3}.$$

Bálint:

$$\frac{9}{20}+\frac{13}{60}=\frac{27}{60}+\frac{13}{60}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}.$$

Eddig az út $\frac{2}{3}$ részét tették meg, tehát $\frac{1}{3}$ része van hátra, a fiúknak ezt a számot kell megadni.

Törtek összeadásakor és kivonásakor a törteket közös nevezőre hozzuk, majd a kapott számlálókat összeadjuk vagy kivonjuk. A közös nevező a nevezőkben lévő számok közös többszöröse, lehetőleg a közös többszörösök közül a legkisebb.

2. PÉLDA

A kézműves szakkörön részt vevő diákok a tökfesztiválra készülve kivágták a megvásárolt 24 kg-os dísztök tömegének $\frac{1}{5}$ részét. A kifaragott dísztökbe teamécseseket tettek, majd hangulatvilágításként használták. Mennyi volt a dísztök tömege a kifaragás után?

A dísztök tömegét két hét elteltével megmérték, és azt tapasztalták, hogy vízelpárolgás miatt a tömege $\frac{1}{3}$ részét elveszítette. Hány kg-ot mutatott a mérleg? Hányadrésze ez a dísztök eredeti tömegének?

Megoldás



Az eredeti tömeg $\frac{4}{5}$ része marad meg.

24 kg $\frac{4}{5}$ része egyenlő a 24 kg $\frac{4}{5}$-szörösével. $24 \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{5} = 19{,}2$ kg.

A kifaragott tök 19,2 kg tömegű.

Ha elveszítette tömegének $\frac{1}{3}$ részét, akkor a $\frac{2}{3}$ része megmaradt.

$\frac{96}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\overset{32}{\cancel{96}}}{5} \cdot \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{64}{5} = 12{,}8$ kg. A víz elpárolgása után a tök tömege 12,8 kg lett.

Ez a tömeg az eredeti tömeg $\frac{4}{5}$ részének a $\frac{2}{3}$ része, azaz $\frac{4}{5}$-nek a $\frac{2}{3}$-szorosa.

Tehát a dísztök $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ része maradt meg.

Törtet egész számmal úgy szorzunk, hogy a tört számlálóját megszorozzuk az egész számmal, és a tört nevezője változatlan marad. Ha az egész számnak és a tört nevezőjének van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor a könnyebb számolás érdekében célszerű egyszerűsíteni.

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy előbb összeszorozzuk egymással a számlálókat, majd pedig a nevezőket. Ha lehet, itt is végezzük el az egyszerűsítést.

Egy szám reciproka az a szám, amellyel az eredeti számot megszorozva 1-et kapunk.

Például a 2 és az $\frac{1}{2}$ egymás reciprokai. A 0-nak nincs reciproka.

3. PÉLDA

Egy 50 literes tartályban eperjoghurt készült. A tartály tele van. A gyümölcsjoghurtokat általában műanyag dobozokban árusítják. Hány doboz joghurt készíthető ebből a mennyiségből, ha egy dobozba $1\frac{1}{4}$ dl kerül?

Megoldás

Először váltsuk át a mennyiségeket azonos mértékegységre: 50 liter = 500 dl.

Ezután azt kell kiszámítani, hogy 500-ban hányszor van meg az $\frac{5}{4}$.

$500 : \frac{5}{4} = 500 \cdot \frac{4}{5} = \overset{100}{\cancel{500}} \cdot \frac{4}{\cancel{5}} = 100 \cdot \frac{4}{1} = 400$. Tehát 400 doboz joghurt készíthető.

Egész számot vagy törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk.

A vegyes törteket közönséges törtekké alakítjuk, majd ezután végezzük el a megadott műveletet.

Műveletek tizedes törtekkel

A tizedes törtekkel végzett műveletek során azt használjuk ki, hogy a számokat helyi értékes alakban írjuk fel.

4. PÉLDA

A lakásunk három szobáját újraparkettáztatjuk. A nappali 23,7 négyzetméter, a hálószoba 16,6 négyzetméter, a gyerekszoba 18,8 négyzetméter alapterületű.

a) Hány négyzetmétert kell parkettázni?

A nappali amerikai konyhás, azaz a konyha és a nappali egy térben kapott helyet. Anya azt javasolta, hogy a konyhaszekrény alatt és előtt inkább járólappal burkoltassunk. Lemérte a szükséges részt, s kiderült, hogy ez a terület 6,7 négyzetméter.

b) Hogyan módosult a parkettázandó terület?



Megoldás

a)

$$\begin{array}{r} 23{,}7 \\ 16{,}6 \\ +\,18{,}8 \\ \hline 59{,}1 \end{array}$$

Összesen 59,1 négyzetmétert kell parkettázni.

b)

$$\begin{array}{r} 59{,}1 \\ -\;\;6{,}7 \\ \hline 52{,}4 \end{array}$$

Ebben az esetben 52,4 négyzetméter területet kell parkettázni.

Az összeadás és a kivonás elvégzésekor a számokat úgy írjuk egymás alá, hogy az azonos helyi értékek egymás alá kerüljenek.

Összeadás során egyszerre több tagot is leírhatunk, kivonásnál ezt nem tehetjük meg.

5. PÉLDA

A burkoló szakember tájékoztatása szerint vásárlásnál 10%-ot kell rászámolni a parkettázandó területre.

a) Mennyi parkettát kell vásárolni a 4. példa *b)* pontjában kiszámított parkettázandó területre?

b) A boltban kiderült, hogy a család által kiválasztott parketta csak 2,2 m^2-es kiszerelésben kapható. Hány doboz szükséges a kívánt felület burkolásához?

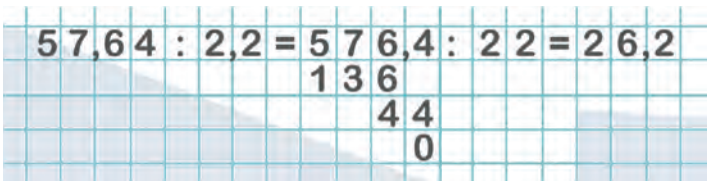
Megoldás

a) Számoljuk ki 52,4 négyzetméter 10%-át, majd adjuk hozzá az 52,4 négyzetméterhez!
Tehát 57,64 négyzetméter parkettára van szükségünk.

$$52{,}4 \cdot 0{,}1 = 5{,}24$$

$$\begin{array}{r} 52{,}4 \\ +\;\;5{,}24 \\ \hline 57{,}64 \end{array}$$

b) Számítsuk ki, hányszor van meg az 57,64-ban a 2,2!
Csak egész doboz vásárolható, ezért 27 dobozra van szükség.



A tizedes törtek írásbeli szorzásakor ugyanúgy járunk el, mint az egész számok írásbeli szorzásánál, és a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a szorzótényezőkben együttesen volt. Tizedes törtek osztása során annyival szorozzuk meg az osztót és az osztandót, hogy az osztó egész szám legyen, így egész számmal történő osztást végezhetünk el. Amikor az osztandóban elérkezünk a tizedesvesszőhöz, akkor a hányadosban is kitesszük a tizedesvesszőt.

FELADATOK

1. Végezd el a műveleteket! Ahol tudsz, egyszerűsíts!

a) $\frac{5}{7}+\frac{32}{14}$; *b)* $\frac{8}{6}-\frac{10}{3}$; *c)* $\frac{8}{11}-\frac{3}{7}$; *d)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$;

e) $3\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}$; *f)* $3\frac{5}{12}+5\frac{1}{4}$; *g)* $12\frac{3}{4}+23\frac{4}{5}$; *h)* $43\frac{11}{34}-\frac{135}{102}$.

2. Számolj minél egyszerűbben! Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{14}{17}+\frac{9}{16}+\frac{3}{17}+1\frac{7}{16}$; *b)* $41\frac{1}{8}+23\frac{9}{10}+19\frac{3}{8}+15\frac{6}{10}$;

c) $8\frac{16}{24}-\frac{9}{14}-5\frac{4}{24}+1\frac{2}{14}$; *d)* $\left(-\frac{9}{18}\right)+2\frac{2}{4}-\frac{11}{22}+7\frac{4}{8}$;

e) $\frac{7}{2}+\frac{6}{4}-5+\frac{13}{7}$; *f)* $4\frac{1}{7}+5\frac{2}{22}-2\frac{1}{7}+3\frac{10}{11}$.

3. Számítsd ki

a) 12-nek a $\frac{3}{4}$ részét; *b)* $\frac{5}{6}$-nak az $\frac{1}{3}$ részét;

c) $4\frac{2}{7}$-nek az $\frac{5}{3}$ részét; *d)* $\frac{3}{2}$-nek a $\frac{6}{7}$ részét;

e) $\frac{15}{14}$ hatodrészének a $\frac{2}{3}$-szorosát; *f)* $\frac{8}{7}$ háromnyolcadának a $\frac{3}{8}$-szorosát!

4. Melyik nagyobb és mennyivel?

a) 20 km $\frac{3}{5}$ része vagy 9000 m $\frac{6}{5}$ része? *b)* 2 óra $\frac{3}{8}$ része vagy 144 perc $\frac{5}{12}$ része?

c) $\frac{8}{5}$ liter $\frac{7}{8}$ része vagy 42 dl $\frac{3}{7}$ része? *d)* 350 kg $\frac{5}{7}$ része vagy $\frac{4}{5}$ tonna $\frac{1}{5}$ része?

5. Végezd el a műveleteket!

a) 3,14 + 6,28 – 8,42 *b)* 10,02 – 3,98 + 1,74 *c)* 13,12 + 5,73 – 6,75
d) 1,9 · 2,1 *e)* 8,9 · 9,1 *f)* 5,8 · 1,55
g) 6,657 : 2,1 *h)* 14,16 : 1,77 *i)* 47,912 : 9,04

6. Végezd el a műveleteket!

a) $1{,}35 \cdot 8{,}4 - 6{,}7 : 5$ *b)* $2{,}72 \cdot 2{,}72 - 0{,}3984$ *c)* $\frac{5}{7} : 10 + 13 \cdot \frac{1}{14}$

d) $\frac{7}{4} \cdot 6{,}4 + 0{,}95 \cdot 4$ *e)* $18{,}46 : 2{,}6 \cdot 25 \cdot 0{,}4$ *f)* $3{,}14 \cdot 12{,}25 : 3\frac{1}{2}$

7. Gergő bácsi, a suli legviccesebb matektanára feladatíró versenyt hirdetett a diákoknak „Ez biztos matekfeladat” címmel. Halomra érkeztek a gyerekektől a kreatív ötletek, többek között az alábbiak. Oldd meg mindet!



a) Vettem reggel a piacon néhány sárgadinnyét. Délelőtt megettem az $\frac{1}{4}$ részét, délután a maradék $\frac{11}{12}$ részét, így csak 5 db maradt estére. Hány sárgadinnyét cipeltem haza reggel?

b) Helén hajnalban ébredt, és boldogan látta, hogy kapott néhány tábla csokit a Mikulástól. Azonnal megette az $\frac{1}{5}$ részét, aztán ebédre 15 db-ot, így uzsonnára csak az összes csoki fele maradt meg. Hány tábla csokit kapott Helén? Mije lesz estére Helénnek?

c) Gergő bácsi rengeteget dolgozott tegnap. Először megcsinálta a munka $\frac{9}{10}$ részét, aztán ugyanolyan hatékonyan még dolgozott 2 órát és 22 percet, így végre készen lett és lefeküdt aludni. Hány percet aludt a munkakezdéstől számított 24 órában Gergő bácsi?

d) Írj te is hasonlókat vagy jobbakat!

8. Egy amerikai autó fogyasztási adatáról azt írja az interneten egy felhasználó, hogy 22 MPG, ahol az MPG a mérföld per gallon rövidítése. Ez azt jelenti, hogy 1 gallon üzemanyaggal 22 mérföldet tud megtenni.
1 gallon ≈ 3,785 liter, 1 mérföld ≈ 1609,3 m.
Az eredményeket kerekítsd két tizedesjegyre!



a) 22 mérföldet hány liter üzemanyaggal tud megtenni?
b) Hány kilométert tud megtenni 1 gallon üzemanyaggal?
c) 100 km-en hány liter üzemanyagot fogyaszt az autó?
d) Hogyan kaphatnád meg a *c)* feladatban kiszámolt fogyasztási adatot a 22-ből egyetlen művelet segítségével?

9. Számítsd ki a következő összeget!

$$\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\ldots+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\ldots+\frac{9}{10}\right)=$$

FELADATOK

Levente éppen elvégezte az egyetemet, amikor meghallotta a hírt, hogy hatalmas farmot örökölt kocsándi nagybátyjától. Ismerte a terepet, rengeteg szép nyarat töltött ott.
Szeme előtt megjelent a kis tó, a nyulak, a kecskék és a frissen fejt tej, a hat ló, melyeken annyira szeretett lovagolni a környékbeli gyerekekkel, s a távoli méhkaptárak a sokat dolgozó méhekkel. Levente három napig gondolkodott, mitévő legyen. Adja el az egész farmot, vagy hagyjon itt csapot-papot, költözzön Kocsándra, és folytassa, amit a nagybátyja elkezdett? Megbeszélte a feleségével, Jankával, és úgy döntöttek, elutaznak Kocsándra.
Mikor megérkeztek, egyenesen a szomszédokhoz – Bálint bácsihoz és Anna nénihez – mentek, akik mindeddig gondját viselték az állatoknak. Leventéék számtalan kérdést tettek fel nekik, hogy lássák, fenn tudnák-e tartani a gazdaságot.
Számold ki, a szomszédoktól szerzett információk alapján mennyi bevételre és kiadásra számíthatnak harminc nap alatt!

1. Bálint bácsi büszkén mesélte, hogy az összes anyakecske együtt napi 56 liter tejet ad, amit könnyedén el tudnak adni a piacon. Azt is hozzátette, hogy az összes kecskének csak a $\frac{8}{11}$ része ad tejet.

a) Hány kecske él a farmon, ha tudjuk, hogy egy kecske napi $3\frac{1}{2}$ liter tejet ad?

b) Hány forintot kereshetnek Leventéék a tej eladásából naponta, ha 1 liter kecsketej ára 480 Ft, de a bevétel $\frac{1}{12}$ részét ki kell fizetniük a piacon helypénzre?

c) Egy kecske napi takarmányozása 80 Ft. Számold ki, hányadrésze a kecskék napi takarmányozása a kecsketejből származó napi bevételnek!

2. „Hálás állatok a méhek” – dicsérte őket Bálint bácsi. Egy kaptár átlagosan évi 52,5 kg mézet termel. A méz ötöde hársméz, $\frac{3}{35}$ része repceméz, $\frac{5}{14}$ része akácméz és a maradék vegyes virágméz.

a) Mennyi mézet gyűjthetnek az egyes fajtákból egy év alatt, ha a farmon négy kaptár van?

b) Hány forint bevételük van a mézből évente, ha a piacon 1 kg repcemézért 1600 Ft-ot, a vegyes virágmézért ennek a $\frac{9}{8}$-szorosát, a hársmézért az $\frac{5}{4}$-szeresét és az akácmézért a $\frac{3}{2}$-szeresét kapják?



3. Anna néni büszkén mutatta meg nekik a baromfiudvart. Közben összeszedte a tojásokat is, aminek darabját 45 Ft-ért lehet eladni a piacon. Arra is figyelmeztette őket, hogy minden este zárják be a tyúkokat, nehogy a környéken garázdálkodó róka elvigyen közülük párat.

a) A baromfiudvar lakóinak $\frac{4}{6}$ része tojó tyúk, $\frac{2}{7}$ része jérce (azaz fiatal tyúk, amelyik még nem tojik), és 2 kakas is van. Hányan laknak a baromfiudvarban?

b) Egy tyúk heti hat tojást tojik. Mennyi bevétel származhat a tojások eladásából, ha a bevétel $\frac{1}{12}$ részét ki kell fizetni a piacon helypénzre?

4. Egy felnőtt baromfi napi takarmányszükséglete 12 dkg, de a jérce ennek csak a $\frac{2}{3}$ részét fogyasztja. A vegyes takarmány $\frac{2}{25}$ része kukorica, $\frac{27}{100}$ része búza, $\frac{3}{10}$ része árpa, $\frac{1}{10}$ része zab, $\frac{3}{20}$ része napraforgó és a maradék korpa.

a) Számold ki, melyik összetevőből hány dkg-ot tartalmaz 1 kg vegyes takarmány!

b) Hány forintot kell havonta a baromfik etetésére költeniük, ha 1 kg vegyes takarmány 65 forintba kerül?

5. A hat ló békésen legelészett a karámban. A lovász már készítette a nyergeket a délutáni lovagláshoz. A futószáras oktatás 2000 Ft, az osztályban lovaglás 3000 Ft, a tereplovaglás pedig 6000 Ft minden felnőttnek. A gyerekek ennek csak a $\frac{4}{5}$ részét fizetik.

a) Mennyi heti bevételre számíthat Levente és Janka, ha tizenkét gyerek jár hozzájuk lovagolni, hetente kétszer? A gyerekek harmada futószáron, a többiek már osztályban lovagolnak.

b) Tereplovaglásra minden szombat délelőtt 4 felnőtt jár. Mennyi lesz az ebből származó havi bevétel?

c) Egy ló napi takarmányozásához 8 kg széna és feleennyi abrak kell. A 400 kg-os szénabála 6000 Ft, egy mázsa abrak pedig ennek a $\frac{11}{12}$ részébe kerül. Számold ki, hány forintot kell költeniük a lovak takarmányozására havonta!

6. Anna néni lelkesen magyarázta, mennyire egészséges a nyúlhús, és elvezette őket az ólakhoz. Janka kicsit megszeppent, de Anna néni megnyugtatta, hogy az ilyen szeretettel gondozott haszonállatok nagyon boldogan nevelkednek. Az ólajtók mögül összesen 3 baknyúl és 18 anyanyúl figyelte őket kíváncsian. Anna nénitől azt is megtudták, hogy egy anyanyúl évente háromszor, alkalmanként átlagosan 7 utódot hoz világra. Az utódokat 4 hónapig nevelik mielőtt eladják, ekkor átlagosan 1,5 kg a tömegük. A piacon 1500 Ft-ért tudják eladni darabját.



a) Mennyi bevételre számíthatnak Leventéék egy év alatt a nyúlszaporulatból, ha minden utódot eladnak?

b) A kocsándi nyulak szénát és búzát esznek, meg persze néha egy kis maradék száraz kenyeret. A széna ingyen van, hisz maguk kaszálják és szárítják. 1 tonna búza ára 60 000 Ft. Mennyibe kerül a 21 nyúl etetése egy hónapban, ha napi 15 dkg búzát esznek fejenként?

5. ÖSSZETETT MŰVELETEK, ZÁRÓJELFELBONTÁS II.

A műveletek elvégzése során különös figyelmet kell fordítanunk a műveletvégzés sorrendjére.

- **Ha egy műveletsort kell elvégezni, akkor egyenrangú műveletek esetében balról jobbra haladunk.**

1. PÉLDA

$$1{,}3 + (+2{,}5) - (+1{,}25) + (+2{,}4) - (-5{,}05) = +3{,}8 - 1{,}25 + 2{,}4 + 5{,}05 =$$
$$= +2{,}55 + 2{,}4 + 5{,}05 = +4{,}95 + 5{,}05 = 10$$

- **A szorzás és az osztás úgynevezett magasabbrendű művelet, ezért egy műveletsorban először ezt vagy ezeket végezzük el.**

2. PÉLDA

$$45 + 7 \cdot (-5) - 18 + 135 : 9 = 45 + (-35) - 18 + 15 = 7$$

- **A zárójel módosíthatja a műveletek sorrendjét. Először a zárójelben lévő műveletet kell elvégezni. A törtvonal zárójelet helyettesíthet, ezért körültekintőnek kell lennünk abban az esetben is, ha nincs feltüntetve a zárójel.**

3. PÉLDA

$$6 \cdot (5{,}2 + 7{,}8) - 48 : (13{,}6 - 4{,}4 + 2{,}8) = 6 \cdot 13 - 48 : 12 = 78 - 4 = 74$$

Ha egy műveletsorban közönséges tört, vegyes tört és tizedes tört is szerepel, akkor a tizedes törteket írjuk át tört alakba. A tört alakú számok tizedes tört alakja nem minden esetben véges, ezért közelítő értékkel kellene számolnunk, és a végeredmény nem lesz pontos.

4. PÉLDA

$$-3{,}5 - \frac{2}{7} + \frac{5}{3} = -\frac{35}{10} - \frac{2}{7} + \frac{5}{3} = -\frac{735}{210} - \frac{60}{210} + \frac{350}{210} = -\frac{445}{210} = -\frac{89}{42}$$

5. PÉLDA



Egy farmon kis robotgépek szedik az érett paradicsomot. A robotok 4,5 kg-os ládákat töltenek meg, majd gyűjtőhelyre viszik a termést. Egy napon három gépet állítottak be. Az első 135 láda, a második 97 láda, a harmadik 126 láda paradicsomot szedett.
Összesen hány kg paradicsomot szedett le a három gép?

Megoldás

Számoljuk ki kétféle módon a leszüretelt paradicsom mennyiségét!

1. lehetőség
   Kiszámoljuk, hogy a három robot külön-külön mennyit szedett le, majd a kapott mennyiségeket összeadjuk.
   $135 \cdot 4{,}5 + 97 \cdot 4{,}5 + 126 \cdot 4{,}5 = 607{,}5 + 436{,}5 + 567 = 1611$ (kg)

2. lehetőség:
   Összeszámoljuk, hogy a három robot hány ládát töltött meg, majd ezt szorozzuk meg 4,5-del.
   $(135 + 97 + 126) \cdot 4{,}5 = 358 \cdot 4{,}5 = 1611$ (kg)
   A kétféle módon kiszámolt mennyiségek egyenlők.

Összesen 1611 kg paradicsomot szedett a három gép együtt.

PÁROS MUNKA

A páros egyik tagja a bal oldali, a másik tagja a jobb oldali műveleteket végezze el! Keressetek egyenlőket az eredményeitek között! Nézzétek meg, milyen műveletsorok eredménye lett egyenlő! Beszéljétek meg, mit tapasztaltatok!



I. $32 \cdot 5 + 48 \cdot 5$	*A)* $450 \cdot 1{,}1 - 125 \cdot 1{,}1$
II. $(450 - 125) \cdot 1{,}1$	*B)* $\frac{1}{2} \cdot (3 - 21)$
III. $\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 21$	*C)* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$
IV. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{5}\right)$	*D)* $(32 + 48) \cdot 5$

A páros munkában az alábbiakat figyelhettük meg:

Ha zárójelben levő összeget vagy különbséget szorzunk egy számmal, akkor a zárójelet úgy bontjuk fel, hogy az összeg vagy különbség minden tagját megszorozzuk a számmal.

$(32 + 48) \cdot 5 = 32 \cdot 5 + 48 \cdot 5$

$\frac{1}{2} \cdot (3 - 21) = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 21$

Ha egy összeg vagy különbség minden tagja osztható egy számmal, akkor ezt az összeget vagy különbséget úgy írhatjuk fel szorzat alakban, hogy a közös osztó lesz az egyik tényező, a visszamaradó hányadosok összege vagy különbsége zárójelbe téve a másik tényező. Ezt az átalakítást kiemelésnek nevezzük.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{7}{5}\right)$

$450 \cdot 1{,}1 - 125 \cdot 1{,}1 = (450 - 125) \cdot 1{,}1$

Ha az előző két egyenlőséget megfigyeljük, akkor az egyik irányba (jobbról balra) zárójelfelbontást, az ellentétes irányba (balról jobbra) kiemelést végzünk.

FELADATOK

1. Végezd el fejben az alábbi műveleteket!

a) $(7+9+4)\cdot 3$ *b)* $4\cdot 4+5\cdot 4+6\cdot 4$ *c)* $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\right)\cdot 9$

d) $\frac{5}{6}\cdot 7+\frac{6}{6}\cdot 7+\frac{7}{6}\cdot 7$ *e)* $(3{,}1-0{,}3-0{,}8)\cdot 19$ *f)* $4{,}5\cdot 11-1{,}9\cdot 11+0{,}4\cdot 11$

2. Válaszd ki a helyes zárójelfelbontást, majd végezd el a műveleteket!

a) $3{,}4-\left(\frac{2}{7}+\frac{6}{5}\right)$ $3{,}4-\frac{2}{7}+\frac{6}{5}$ vagy $3{,}4-\frac{2}{7}-\frac{6}{5}$

b) $15{,}95-\left(\frac{6}{15}-4{,}02\right)$ $15{,}95-\frac{6}{15}+4{,}02$ vagy $15{,}95-\frac{6}{15}-4{,}02$

c) $5-4\cdot\left(\frac{7}{8}-5{,}25\right)$ $5-4\cdot\frac{7}{8}-4\cdot 5{,}25$ vagy $5-4\cdot\frac{7}{8}+4\cdot 5{,}25$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(7-\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{3}{10}\right)$ $-\frac{2}{3}\cdot 7-\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}-\frac{3}{10}$ vagy $-\frac{2}{3}\cdot 7+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

3. Melyik az a szám, amelyik

a) $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{7}$ összegénél $\frac{9}{14}$-del több? *b)* $\frac{5}{6}$-dal több, mint $\frac{4}{5}$ és $\frac{3}{4}$ különbsége?

c) $1\frac{1}{7}$-szerese a $\frac{7}{8}$ és az $\frac{5}{6}$ összegének? *d)* a $2\frac{1}{4}$ és a $\frac{3}{10}$ hányadosánál $\frac{7}{6}$-dal kisebb?

e) $\frac{2}{7}$ és $\frac{12}{7}$ összegének a fele? *f)* $\frac{10}{3}$ és $2\frac{2}{6}$ különbségének a $\frac{19}{20}$-szorosa?

4. Hogyan szeretnéd inkább kiszámolni? Válassz az *A* és a *B* lehetőség között! Végezd is el a számolást!

a) A: $5\frac{2}{3}\cdot 11-3\frac{2}{3}\cdot 11$; B: $\left(5\frac{2}{3}-3\frac{2}{3}\right)\cdot 11$ *b)* A: $\left(\frac{25}{8}-\frac{9}{8}\right)\cdot 7$; B: $\frac{25}{8}\cdot 7-\frac{9}{8}\cdot 7$

c) A: $(2045+985+(-30)):9$; B: $2045:9+985:9+(-30):9$

5. Mit szeretnél inkább kapni?

A: Heti 510 Ft-ot négy héten keresztül, és aztán az összegyűlt pénz dupláját?

B: Az első héten 300 Ft-ot, és aztán három hétig az előző heti pénz dupláját?



6. Számítsd ki az eredményt!

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}$

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\frac{1}{256}-\frac{1}{512}$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$



II. 6. SZÁMOK ÉS BbetűK HASZNÁLATA



PÁROS MUNKA

Rajzoljatok egy téglalapot, egy szabályos háromszöget és egy négyzetet! A rajzokat adjátok oda a párotoknak, és a kapott rajzon méréssel határozzátok meg a felrajzolt síkidomok kerületét!

Fogalmazzátok meg szavakkal, hogyan lehet kiszámítani a megadott síkidomok kerületét!

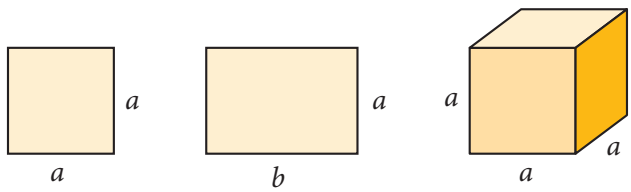
A hétköznapjainkban használt mennyiségeket nem tudjuk minden esetben méréssel meghatározni, de a mérések alapján összefüggéseket tudunk megfogalmazni. A szövegesen megfogalmazott összefüggéseket sokszor leírhatjuk matematikai eszközök felhasználásával. Ezekhez betűket szoktunk használni.

Ismerkedjünk meg egy példán keresztül néhány betűt tartalmazó kifejezéssel!

1. PÉLDA

Írjuk fel betűk és számok felhasználásával:

a) a négyzet kerületét;
b) a téglalap kerületét;
c) a szabályos háromszög kerületét;
d) a téglalap területét;
e) a kocka felszínét!



Megoldás

a) A négyzet kerülete a négyzet oldalhosszának négyszerese: $4 \cdot a$.
b) A téglalap kerülete a szomszédos oldalhosszak kétszeresének összege: $2 \cdot a + 2 \cdot b$.
c) A szabályos háromszög kerülete az oldalhosszának háromszorosa: $3 \cdot a$.
d) A téglalap területe a két szomszédos oldal hosszának szorzata: $a \cdot b$.
e) A kocka felszíne 6 db egybevágó négyzet területének összege: $6 \cdot a \cdot a$.

2. PÉLDA

Írjuk fel betűs kifejezések felhasználásával az alábbi szöveges feladatokat!

a) Hány darab matrica van összesen 3 matricás füzetben, ha egy-egy füzetben m db matrica van?
b) Mennyit kell fizetni összesen k darab kifliért, ha a kifli darabja 49 Ft-ba kerül?
c) Mennyit kell fizetni k darab kifliért és l darab zsemléért, ha a kifli 49 Ft-ba, a zsemle 57 Ft-ba kerül?







Megoldás

a) A 3 matricás füzetben összesen $3 \cdot m$ darab matrica van.
b) A k db kifliért összesen $k \cdot 49$ Ft-ot kell fizetni.
c) A k db kifliért és az l darab zsemléért összesen $k \cdot 49 + l \cdot 57$ Ft-ot kell fizetni.

A szorzótényezők felcserélhetők, ezért $k \cdot 49 = 49 \cdot k$ vagy $l \cdot 57 = 57 \cdot l$.

A betűs kifejezések közül azokat, amelyekben csak szorzás vagy számmal történő osztás szerepel, egytagú kifejezéseknek nevezzük.

Az 1. példában egytagúak az alábbi betűs kifejezések: $4 \cdot a$; $3 \cdot a$; $a \cdot b$; $6 \cdot a \cdot a$.

Ha a különböző egytagú kifejezéseket összeadjuk vagy kivonjuk, akkor többtagú kifejezésekről beszélünk. (Akkor is, ha kivonás van közöttük.)

Többtagúak: $2 \cdot a + 2 \cdot b$ kéttagú; $a - b - c$ háromtagú.

A betűs kifejezésekben található számszorzókat együtthatónak nevezzük.

A fenti példákban az egytagúak együtthatói:

Tag	$4 \cdot a$	$3 \cdot a$	$a \cdot b$	$6 \cdot a \cdot a$
Együttható	4	3	1	6

Többtagúak esetén minden tagnak külön van együtthatója.
$2 \cdot a + 2 \cdot b$ kifejezésben az a együtthatója 2; b együtthatója 2.
$a - b - c$ kifejezésben az a együtthatója 1; b együtthatója -1; c együtthatója -1.

Jegyezd meg!
A betűs kifejezések során gyakran nem teszünk ki minden szorzásjelet, ezeket láthatatlan szorzásjelnek nevezzük.

Például: $5a = 5 \cdot a$; $ab = a \cdot b$; $2x + 3y = 2 \cdot x + 3 \cdot y$.

3. PÉLDA

a) Válasszuk ki az alábbi kifejezések közül az egytagúakat!

$4{,}5x$; $2x - 5y$; $3ab$; $-2ab$; $2x + 3y$; $-at$; $\frac{3}{2}v$; $\frac{5x}{4}$; $5x - 3y + 4z$

b) Színessel jelöljük be az egytagúak esetén a láthatatlan szorzásjeleket!
c) Határozzuk meg az egytagú kifejezések együtthatóit!

Megoldás

Egytagúak:

a) $4{,}5x$; $3ab$; $-2ab$; $-5at$; $\frac{3}{2}v$; $\frac{5x}{4}$

b) $4{,}5 \cdot x$; $3 \cdot a \cdot b$; $-2 \cdot a \cdot b$; $-5 \cdot a \cdot t$; $\frac{3}{2} \cdot v$; $\frac{5 \cdot x}{4}$

c) $4{,}5 \cdot x$; $3 \cdot a \cdot b$; $-2 \cdot a \cdot b$; $-5 \cdot a \cdot t$; $\frac{3}{2} \cdot v$; $\frac{5 \cdot x}{4} = \frac{5}{4} \cdot x$

Az együtthatók a kékkel színezett számok: 4,5; 3; −2; −5; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$.

Az egytagú kifejezések közül azokat, amelyek csak együtthatóikban (számszorzókban) különböznek, egynemű kifejezéseknek nevezzük.

Egyneműek például: $2x$; $-x$; $\frac{3}{2}x$ vagy $3ab$; $-5ab$; $-\frac{ab}{10}$; $\frac{2}{7}ab$.

Nem egynemű például a $3x$ és a $4y$, a $2a$ és $2ab$ és az x és x^2 sem.



PÁROS MUNKA

A feladat megoldásához szükségetek lesz 6-6 db üres kis kártyalapra.
Az *a* és *b* betűk, valamint számok felhasználásával írjatok minden lapra egy egytagú kifejezést!
Cseréljétek ki a kártyalapokat!
Határozzátok meg a nálatok lévő betűs kifejezések együtthatóit!
A kártyalapokat válogassátok szét úgy, hogy az egyneműek egy csoportba kerüljenek!
Beszéljétek meg egymással a megoldást!

FELADATOK

1. Keresd meg a filmcímeknek megfelelő rövidítéseket! Írj te is hasonlókat!

a) Hófehérke és a hét törpe
b) 101 kiskutya
c) Az Ezeregyéjszaka meséi
d) A hét mesterlövész
e) A három testőr
f) Hős6os

A) $3t$
B) $101kk$
C) $7ml$
D) $H + 7t$
E) $H6$
F) $1001ém$



2. Írd fel betűs kifejezésekkel az alábbiakat! Használj minél egyszerűbb jelöléseket!

a) 9 fiú és 13 lány
b) 88 zongorabillentyű
c) egy tábla csoki harmada
d) 1 szépség és 1 szörnyeteg
e) 7 xilofon és 4 Yoda
f) 100 szűk időalagút

3. Nagy országos névtalálkozót tartottak a fővárosban. 12 Xénia és 16 Yvett volt az egyik teremben, jelöljük így: 12X + 16Y. Írd fel betűkkel, kik maradtak a teremben az eredetileg jelenlévőkhöz képest, ha

a) kiment 4 Xénia és 13 Yvett;
b) kiment az Yvettek fele, de minden Xénia bent maradt;
c) kiment a Xéniák harmada, és bent maradt az Yvettek negyede;
d) bent maradt a Xéniák háromnegyede, és kiment az Yvettek nyolcada.

4. Keresd a párját!

a) Az x hétszerese.
b) Az x felének háromszorosa.
c) Az x és az y hányadosa.
d) Az x harmadának kétszerese.
e) Az x-nél kilencszer nagyobb szám.
f) Az x-nél héttel nagyobb szám négyszerese.

A) $(x : 3) \cdot 2$ *D)* $x \cdot 9$ *G)* $x + 9$
B) $7x$ *E)* $x \cdot 7 \cdot 4$ *H)* $(x + 7) \cdot 4$
C) $\frac{x}{3 \cdot 2}$ *F)* $\frac{x}{2} \cdot 3$ *I)* $\frac{x}{y}$

5. Van az asztalon a liter almalé és n liter narancslé. Más üdítő nincs.
Írd fel betűs kifejezéssel, mi marad ezekből, ha

a) elfogyott az almalé fele;
b) elfogyott a narancslé harmada;
c) elfogyott az almalé negyede és a narancslé kétharmada;
d) elfogyott az az almalé ötöde és megmaradt a narancslé negyede;
e) elfogyott a narancslé fele, és hoztak még kétszer annyi gyümölcslevet, mint amennyi az asztalon maradt.

6. Az iskolai nagytáborban extra rántottát készítenek. Azért extra, mert egy adag elkészítéséhez 2 tojáson kívül h dkg hagymát, b szelet bacont, k szelet kolbászt és p dkg paprikát is felhasználnak. Egy lányra egy adag, egy fiúra másfél adag, egy felnőttre két adag rántotta készítésével számolnak. Írd fel betűs kifejezésekkel, melyik összetevőből mennyi kell, ha a táborban

a) 12 lány, 24 fiú, 4 felnőtt;
b) x lány, y fiú, z felnőtt;
c) a lány, kétszer annyi fiú, feleannyi felnőtt vesz részt!



7. Válaszd ki azokat a kifejezéseket, amelyeknek az együtthatója 2-nél nagyobb!

$8z$; $-\frac{17}{3}r$; $7xy$; $-5aba$;
$1{,}7abc$; $\frac{12xx}{6}$; $\frac{km}{9}$; $5{,}4xyx$

8. Válogasd szét az alábbi betűs kifejezéseket aszerint, hogy melyik egytagú, melyik többtagú! Az egytagú kifejezések mellé írj egy-egy velük egynemű kifejezést is!

$3a + b$; $1{,}73ef$; $\frac{34k}{9}$; $-2{,}1m - (-n)$;
$5g$; $\frac{6}{5}sz$; $\frac{2d}{3} - \frac{5f}{8}$; $2x + 3xx + 4xxx$

9. Készíts az a; b; ab; $a \cdot a$; 0,5; -14 elemekből legalább 5-5 darab különböző

a) egytagú;
b) kéttagú;
c) háromtagú betűs kifejezést!

1. PÉLDA

Egy drogéria raktárában 3 bontatlan karton papír zsebkendőt tároltak. Egy teherautó még 15 kartonnal szállított a raktárba. Minden kartonban ugyanannyi csomag papír zsebkendő volt.

a) Hány csomag papír zsebkendő van a raktárban?

b) A hét első három napján elfogyott 4 karton és 7 csomag, a hét második felében 6 karton és 5 csomag. Hány csomag fogyott el a héten?



Megoldás

a) Nem tudjuk, hogy egy kartonban hány csomag van, ezért jelöljük ezt x-szel.
A raktárban a szállítás után 18 karton, így összesen $18 \cdot x$ csomag papír zsebkendő van.
Gondolkodhatunk úgy is, hogy a szállítás előtt a raktárban $3 \cdot x$ csomag volt, érkezett $15 \cdot x$ csomag.
Azaz $3 \cdot x + 15 \cdot x = 18 \cdot x$.

b) A hét első felében $4 \cdot x + 7$ csomag, a második felében $6 \cdot x + 5$ csomag fogyott el.
Összesen $4 \cdot x + 7 + 6 \cdot x + 5 = 10 \cdot x + 12$ csomag papír zsebkendő fogyott el.

Az egynemű kifejezések egymással összevonhatók úgy, hogy az együtthatókkal elvégezzük az összeadást vagy a kivonást, és az összevonás után a betűs kifejezésnek ez lesz az együtthatója.

2. PÉLDA

Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $2x + 5y + 3x - 2y - 4x$ *b)* $\frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{2}x - 2 - 4x + 5$

Megoldás

Jelöljük azonos színnel az egyneműeket.

a) $2x + 5y + 3x - 2y - 4x = 1x + 3y = x + 3y$ *b)* $\frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{2}x - 2 - 4x + 5 = -2x + 7$

3. PÉLDA

Kiderítettük, hogy az első példában említett kartondobozban 24 csomag papír zsebkendő volt.

a) Hány csomag papír zsebkendő volt a szállítmány beérkezése után?

b) Hány csomag papír zsebkendő fogyott el?

Megoldás

a) Tudjuk, hogy $x = 24$, ezért $18 \cdot x$ értékét megadhatjuk, ha x helyére 24-et írunk.
$18 \cdot 24 = 432$ csomag papír zsebkendő volt a raktárban.

b) Most a $10 \cdot x + 12$ kifejezésben írjunk az x helyére 24-et!
$10 \cdot 24 + 12 = 252$ csomag papír zsebkendő fogyott el.

Ha a betűk helyére konkrét számokat helyettesítünk, akkor a kifejezés helyettesítési értékét kapjuk meg.

Például: Az a oldalú négyzet kerülete $4a$. Ha $a = 5$, akkor a kerület $4 \cdot 5 = 20$ egység, ha $a = \frac{1}{2}$, akkor a kerület $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ egység.



JÁTÉK

Alakítsatok 4-5 fős csoportokat!

A csoport minden tagja annyi üres kártyalapocskát vegyen elő, ahányan a csoportban vannak!

Írjatok a saját kártyalapocskáitokra egy-egy egytagú kifejezést x és y betűk felhasználásával, majd az együtthatókat írjátok át színessel!



A kezdő játékos az asztal közepére kitesz egy kártyát, majd a csoport minden tagjának olyan lapot kell tenni, amely az asztalon lévővel egynemű. Akinek nincs megfelelő kártyája, az ebben a körben nem tesz. A kezdő játékos begyűjti az asztalon lévő kártyákat, majd a tőle jobbra lévő játékos folytatja a leírt útmutatás szerint a játékot. Annyi kört játsszatok, ahányan vagytok. Akinek az utolsó kör után elfogyott a kártyája, az nyer.

Másoljátok le az összegyűjtött kártyákon lévő kifejezéseket a füzetbe, és adjátok össze azokat! A kártyacsomagot adjátok a jobb oldali szomszédnak, és ő is végezze el az összeadást! Egyeztessétek az eredményeiteket!

FELADATOK

1. Írd fel betűkkel!

a) Egy számhoz hozzáadjuk a szám négyszeresét.

b) Egy számból kivonjuk a számnál 4-gyel nagyobb számot.

c) Egy számot megszorzunk a szám négyszeresével.

d) Egy számot elosztunk a szám negyedével.

2. Egy csomag rágó 139 Ft, egy darab csoki 89 Ft. Írd fel betűkkel a vásárolt termékek árát!
a) Vettem x csomag rágót.
b) Vettem x darab csokit és y csomag rágót.
c) Vettem x csomag rágót és feleannyi csokit.
d) Vettem x csomag csokit és háromszor annyi rágót.
Fogalmazd meg, miből mennyit vettem, ha így írhatom fel a vásárolt termékek árát!

e) $139x + 89(x - 2)$ *f)* $139(y + 5) + 89y$ *g)* $89z + 139 \cdot \frac{z}{3}$

h) Beszéljétek meg, miért végződik a bolti termékek ára leggyakrabban kilencesre!

3. Mérlegre tettünk néhány betűs kifejezést. Számítsd ki, melyik betű mennyit ér, ha a mérlegek egyensúlyban vannak, és d értéke 20!



4. Írd fel betűs kifejezésekkel
a) egy négyzet kerületét és területét, ha az oldala a hosszúságú!
b) egy téglalap kerületét és területét, ha két csatlakozó oldala a és b hosszúságú!
c) a kocka felszínét és térfogatát, ha élei a hosszúságúak!
d) egy téglatest felszínét és térfogatát, ha egy csúcsból induló élei a, b és c hosszúságúak!

5. Két hókuszban van öt ókusz. Egy ókuszban van nyolc kusz. Egy kuszban van x usz.
a) Hány usz van egy hókuszban?
b) Egy usz ára 20 fabatka. Mennyibe kerül 1 hókusz-pókusz, ha másfélszer annyit kell fizetnünk érte, mint 1 hókuszért?



6. Végezd el az összevonásokat a következő betűs kifejezésekben!

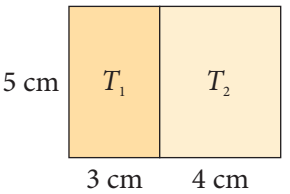
a) $a - a - a + a - a - a$
b) $4b - 5b - b + 6b + 2b - 13b$
c) $6c + 8c - 2c - 4c - 16c + c$
d) $4{,}3b - 3{,}9b + 5{,}4b$
e) $4x - (+3x) + 7x - (-2x)$
f) $-7y - 13y + (-9y) + 13$

7. Végezd el az összevonásokat, és számold ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{2}$!

a) $3x - 4y + 5x - 7y$
b) $5x + 11 - 7x + (-19)$
c) $4xy - 3x + 5y - 2xy$
d) $4x + 8y - 1 + 5x - 12y$
e) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + xy + \frac{1}{6}$
f) $2{,}7x + 0{,}2xy - 1{,}9x + 5{,}8yx$

1. PÉLDA

Egy téglalap két oldala 3 és 5 cm hosszú. Rövidebb oldalát meghosszabbították 4 cm-rel. Mekkora lesz a megnövelt oldalú téglalap területe?

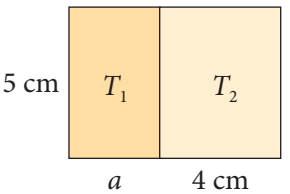


Megoldás

Írjuk fel az eredeti téglalap területét: $T_1 = 3 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 15\ \text{cm}^2$.
Írjuk fel a hozzáépített téglalap területét: $T_2 = 4 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 20\ \text{cm}^2$.
Írjuk fel a nagy téglalap területét kétféleképpen: $T_{\text{nagy}} = T_1 + T_2 = 15\ \text{cm}^2 + 20\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2$.
$T_{\text{nagy}} = 7 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2$.

2. PÉLDA

Egy téglalap egyik oldalának hossza 5 cm, a másik oldalának hosszát nem ismerjük.
a) Írjuk fel a téglalap területét!
b) Növeljük meg az ismeretlen oldal hosszát 4 cm-rel, majd írjuk fel az így kapott téglalap területét kétféle módon!



Megoldás

a) Az ismeretlen oldal hosszát jelöljük a-val.
Az eredeti téglalap területe: $T_1 = a \cdot 5\ \text{cm}^2 = 5a\ \text{cm}^2$.
b) A megnagyobbított téglalap oldalai 5 cm és $a + 4$ cm.
Írjuk fel a nagy téglalap területét kétféleképpen: $T_{\text{nagy}} = T_1 + T_2 = 5a\ \text{cm}^2 + 20\ \text{cm}^2$.
$T_{\text{nagy}} = (a + 4) \cdot 5\ \text{cm}^2$.

A szorzás műveleténél a tényezők felcserélhetők, ezért az utolsó sort $T_{\text{nagy}} = 5 \cdot (a + 4)\ \text{cm}^2$ alakban is írhatjuk.

A kétféle módon felírt terület egyenlő, tehát azt kaptuk, hogy $5 \cdot (a + 4) = 5a + 20$.

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha összeget szorzunk egy számmal, akkor ugyanazt kapjuk, mintha az összeg minden tagját megszorozzuk a számmal, és a szorzatokat adjuk össze.



CSOPORTMUNKA

Oldjátok meg az előző feladatot az alábbi módosításokkal!
1. Nem ismerjük a téglalap rövidebb oldalát, és nem ismerjük a meghosszabbítás mértékét sem, így ezeket jelöljétek a-val, illetve c-vel! A téglalap másik oldala továbbra is 5 cm. Rajzoljatok ábrát a füzetbe, és írjátok fel a területeket!
2. Nem ismerjük a téglalap egyik oldalát sem, és a meghosszabbítás mértékét sem. Jelöljétek a téglalap oldalait a-val, illetve b-vel, és legyen a meghosszabbítás mértéke c! Rajzoljatok ábrát a füzetbe, és írjátok fel a területeket!

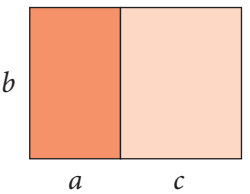
II. 8. ZÁRÓJELFELBONTÁS, KIEMELÉS

Betűs kifejezéseket akkor használunk, ha nem ismerjük egy adott mennyiség konkrét számértékét. Használatuk során több megállapodást kell megjegyeznünk ahhoz, hogy helyesen tudjunk feladatokat megoldani.

- **Zárójeles kifejezések esetén sem tesszük ki mindig a láthatatlan szorzásjeleket.**

Például: $5(a+4) = 5 \cdot (a+4)$.

A csoportmunka során megoldott 2. feladatban azt kaptátok eredményül, hogy a nagy téglalap területe $T_{\text{nagy}} = b \cdot (a+c)$, illetve $T_{\text{nagy}} = b \cdot a + b \cdot c$.



A kétféle módon felírt terület egyenlő, azaz
$b \cdot (a+c) = b \cdot a + b \cdot c$.

- A zárójelfelbontásra tanult szabályt betűs kifejezések használata során is alkalmazhatjuk.

Zárójelben szereplő összeg vagy különbség szorzása esetén a zárójel felbontásakor a zárójelben lévő összes tagot meg kell szoroznunk a szorzótényezővel, majd ezeket kell összeadnunk vagy kivonnunk.

Cseréljük fel a fenti egyenlőségben a bal és a jobb oldalt
$b \cdot a + b \cdot c = b \cdot (a+c)$.

- Azt láthatjuk, hogy a bal oldalon minden tagban szerepel a b szorzótényezőként. Ez a b kiemelhető a tagokból, hasonló módon, mint a számok esetében. **Ilyenkor kiemelést végzünk.**

A zárójelfelbontás és a kiemelés egymás ellentétes eljárásai.

3. PÉLDA

Végezzük el a zárójelfelbontást és a lehetséges összevonásokat!
a) $3(x+4)+2(x-1)+5(x-2)$;
b) $5(x+y)+3(x+2y)-2(x-y)$.

Megoldás

Jelöljük egyforma módon az egynemű tagokat! Itt most színessel jelöltük, de a füzetedben jelölheted aláhúzással, kiemelő filccel, ahogy neked kényelmes.

a) $3(x+4)+2(x-1)+5(x-2) = 3x+12+2x-2+5x-10 = 10x$

A *b)* résznél vigyázni kell az utolsó zárójel felbontásánál. A negatív előjel megváltoztatja a zárójelben lévő összes tag előjelét!

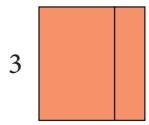
$-2(x-y) = (-2) \cdot (x-y) = (-2) \cdot x + (-2) \cdot (-y) = -2x + 2y$

b) $5(x+y)+3(x+2y)-2(x-y) = 5x+5y+3x+6y-2x+2y = 6x+13y$

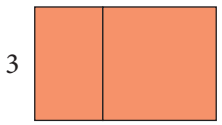
FELADATOK

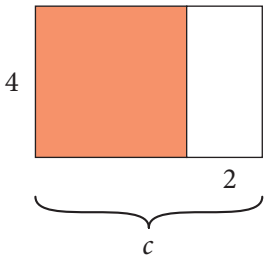
1. Írd fel a színes téglalap területét kétféleképpen a minta alapján!

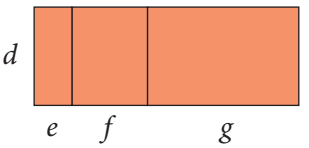
Minta:



$3(2+a) = 3\cdot 2 + 3a$







2. Keresd a párját! Amelyiknek nincs, azt te add meg!

a) $2(x+4)$ *b)* $2x+6$ *c)* $5(x-1)$
d) $5-5x$ *e)* $4x+8$ *f)* $2x+8$
g) $5x-5$ *h)* $5(1-x)$ *i)* $4(x+2)$

3. Minden fiú k darab körtét és egy banánt, és minden lány a darab almát vitt az iskola gyümölcskosarába. Melyik fajtából hány darab gyűlt össze, ha az osztályban

a) 21 fiú és 12 lány *b)* 12 fiú és 21 lány *c)* 15 lány és 15 fiú van?

4. Bontsd fel a zárójeleket!

a) $3(x+2)$ *b)* $-4(5+y)$ *c)* $1{,}5(2x-3y)$ *d)* $x(7-x)$ *e)* $(x+y)\cdot(-5)$
f) $z(4x-6y)$ *g)* $2x(x+8)$ *h)* $xy(3{,}4+1{,}7)$ *i)* $4y(x+y)$ *j)* $z(3x+4y-5z)$

5. Végezd el a kiemeléseket!

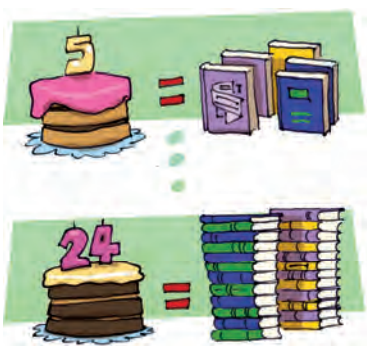
a) $8x+8$ *b)* $3x-6$ *c)* $21+7x$ *d)* $-10x-5$ *e)* $-9x+12$
f) $1{,}3x+3{,}9$ *g)* $1{,}5-2x$ *h)* $xy+x$ *i)* $6xy-8$ *j)* $18y-12xy$

6. Először vonj össze a zárójelen belül, majd végezd el a szorzásokat!

a) $3(a+7b-4a+5b)$ *b)* $(-2e-3f+7f-12e)\cdot(-5)$
c) $x(-3-4x+8-2x+1)$ *d)* $(-5)(4-x+5+4x-8-3x)$
e) $(2x-3y+4xy-2yx)\cdot 5x$ *f)* $(x-y-4x-7y-xy)\cdot(-3y)$

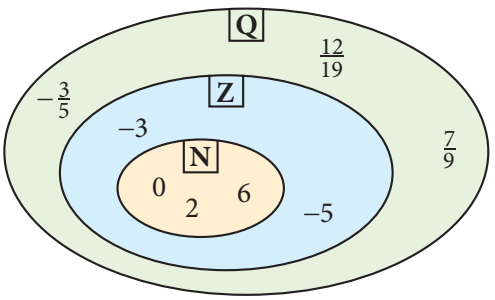
7. Bontsd fel a zárójeleket, és végezd el az összevonásokat!

a) $4(a-1)+7(2-a)$ *b)* $5(3-a)-3(a+2)$
c) $3(3+a)-7(2-a)$ *d)* $2(2-a)+2(a+4)$
e) $4(4x-2)-5(5-3x)$ *f)* $6(3x-8)+2(11x+8)$



8. András minden születésnapjára annyi könyvet kapott, ahány éves volt. Készíts táblázatot, hogy hány könyve gyűlt össze az ajándékokból 1; 2; …; 13; 14, illetve a éves koráig!

II. 9. ÖSSZEFOGLALÁS



A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. A racionális számok halmazába tartoznak a pozitív egész számok, a negatív egész számok, a 0 és a törtek.
Minden racionális számnak többféle alakja van. Minden tört alakú szám átírható tizedes tört alakba.
Megmutattuk, hogy a racionális számok tizedes tört alakja egész szám, véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört.

Ha az eddig tanult műveletek bármelyikét racionális számokkal végezzük el, eredményül racionális számot kapunk.
A négy alapművelet közül az összeadás és a szorzás esetében az alábbi műveleti tulajdonságok érvényesek:

- **az összeg tagjai, illetve a szorzat tényezői felcserélhetők;**
- **az összeg tagjai, illetve a szorzat tényezői tetszőlegesen csoportosíthatók.**

A kivonás és az osztás esetében ezek a műveleti tulajdonságok nem igazak.
A kivonás felírható negatív szám hozzáadásaként. Ekkor **az előjeles számokra már alkalmazható az összeadásra érvényes felcserélhetőség, illetve csoportosíthatóság.**
Az osztás felírható az osztó reciprokával történő szorzásként is.
Vigyázz! 0-val nem végezhető el az osztás!

A tanult műveletek sorrendjéről:
Ha egy műveletsort kell elvégezni, akkor egyenrangú műveletek esetében balról jobbra haladunk.
A szorzást és az osztást magasabb rendű műveletnek tekintjük, ezért egy műveletsorban először ezeket végezzük el.
A zárójel módosíthatja a műveleti sorrendet. Először a zárójelben lévő műveletet kell elvégezni.
A törtvonal zárójelet helyettesíthet, ezért abban az esetben is nagyon körültekintőnek kell lenni, ha nincs feltüntetve a zárójel.

Betűs kifejezéseket használunk, ha összefüggéseket írunk fel olyan adatok között, amelyek számértékét nem ismerjük. A betűk használatához új fogalmak ismeretére van szükség.

Egytagú kifejezés: $2a$; $\frac{5}{2}xy$; $-3a^2$.

Együttható: az egytagú betűs kifejezés számszorzója. Az előző példákban: 2; $\frac{5}{2}$; -3.

Egynemű kifejezések: olyan egytagú kifejezések, amelyek csak számszorzókban térnek el: $2x$; $-6x$; $\frac{3}{4}x$.

Betűs kifejezések helyettesítési értéke: adott szám vagy számok behelyettesítése után kapott számérték. Például: $T = a \cdot b$ helyettesítési értéke $a = 6$; $b = 2$ esetén $T = a \cdot b = 6 \cdot 2 = 12$.
A betűs kifejezésekkel hasonlóan végezhetünk műveleteket, mint a számokkal. **Csak az egynemű kifejezések vonhatók össze.**

Összeg vagy különbség szorzása esetén zárójelfelbontásnál a zárójelben lévő mindegyik tagot meg kell szorozni a megadott szorzóval. Figyelj a láthatatlan szorzásjelre!

FELADATOK

1. Helyezd át a zárójeleket úgy, hogy könnyebb legyen a számolás, majd végezd el az összeadásokat!

a) $2135 + (2865 + 1972) + 2028$
b) $(2543 + 457 + 1049) + (2951 + 1544 + 4456)$
c) $384 + (1616 + 4848) + (2152 + 2152) + 1848$
d) $(2014 + 986 + 840) + (1160 + 727) + 273$

2. Melyik eredmény melyik műveletsorhoz tartozik? Először becsülj, aztán tippelj, végül számold ki az eredményeket!

a) $3543 + 1879 + 282$;
b) $3543 + (1879 + 282)$;
c) $3543 - 1879 + 282$;
d) $3543 - (1879 + 282)$;
e) $3543 - 1879 - 282$;
f) $(3543 + 1879) - 282$;
g) $3543 - (1879 - 282)$.

A) 1382
B) 1946
C) 5140
D) 5704

3. Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $(-17 - 13) : (-5)$
b) $(11 + 31) : (-5)$
c) $(-9) \cdot 8 - (-32) : (-2)$
d) $-13 - 16 : (-4) + 8 \cdot 5$

4. Döntsd el, melyik szám nagyobb! Válaszodat indokold!

a) $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ *b)* $\frac{15}{17}$ $\frac{15}{19}$
c) $-\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{6}$ *d)* $-\frac{5}{9}$ $-\frac{5}{8}$
e) $1 + \frac{1}{6} + 1\frac{3}{6}$ $4 - 1{,}5$

5. Melyik műveletsor eredményének abszolút értéke kisebb, mint 20?

a) $(-9) - (-7) + (-2) : 2 + 18$
b) $14 - (-49) : 7 + (-4) \cdot (+6)$
c) $24 - (-7) \cdot (+3) + (-11) - (-24) : (+4)$
d) $18 : (-6) + (-5) - (-44) : (+11) - 3$
e) $49 - (-49) : (-7) + (-16) \cdot 2 - (-19) \cdot (-1)$

6. Végezd el a műveleteket! Vannak-e közöttük olyanok, amelyeknek egyenlő az eredménye?

a) $8\frac{4}{5} - \left(\frac{9}{15} - \frac{10}{3}\right)$ *b)* $8\frac{4}{5} - \frac{9}{15} + \frac{10}{3}$
c) $8\frac{4}{5} - \frac{9}{15} - \frac{10}{3}$ *d)* $8\frac{4}{5} - \left(-\frac{9}{15} - \frac{10}{3}\right)$
e) $8\frac{4}{5} - \left(\frac{9}{15} + \frac{10}{3}\right)$ *f)* $8\frac{4}{5} + \frac{9}{15} + \frac{10}{3}$
g) $8\frac{4}{5} + \frac{9}{15} - \frac{10}{3}$ *h)* $8\frac{4}{5} + \left(\frac{9}{15} - \frac{10}{3}\right)$

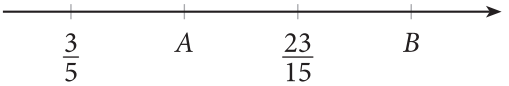
7. Töröljünk az 1353102420 számból öt számjegyet úgy, hogy a megmaradó ötjegyű szám a lehető legkisebb legyen! Mennyi a törölt számjegyek összege?

8. A feladatban szereplő minden nagybetű értéke egy-egy szám. A *PIZZA* szó értéke az őt alkotó betűk értékeinek összege. Mennyit érnek az alábbi betűk, és mennyi a *PIZZA* szó értéke?

a) $A = -\frac{7}{11} \cdot 13 + \frac{29}{11} \cdot 13$
b) $I = 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{11}{3}$
c) $Z = 121$-nek a $\frac{2}{11}$ része
d) $P = 123 + (-54) - (-35) - 4$



9. Négy számot adunk meg a számegyenesen, ezek a $\frac{3}{5}$; A; $\frac{23}{15}$ és a B. Tudjuk, hogy az A felezi a $\frac{3}{5}$; $\frac{23}{15}$ végpontú szakaszt, a $\frac{23}{15}$ pedig felezi az AB szakaszt.



a) Mekkora A?
b) Mekkora B?
c) Milyen hosszú az AB szakasz?
d) Melyik szakasz hossza egyezik meg az AB szakasz hosszával? Miért?

10. *a)* A baromfiudvarban kacsák (k), libák (l) és tyúkok (ty) voltak. Éjjel beszökött egy rókacsalád, és elvitte a kacsák felét, a libák harmadát és a tyúkok negyedét. Írd fel betűs kifejezéssel, mennyi állat maradt a baromfiudvarban!

b) A baromfiudvarban kacsák (k), libák (l) és tyúkok (ty) voltak. Írd le, mennyit vitt el éjjel a róka, ha maradt $\frac{2}{5}k + \frac{6}{7}l + \frac{3}{6}ty$ baromfi az udvarban!

11. Végezd el az alábbi műveleteket, ha

$A = 3x + 2y$ $\quad B = -5x + 8$

$C = 9 - 6y$ $\quad D = 7 - x - 4y$!

a) $A + B$ $\quad$ *b)* $D - B$

c) $B + C - D$ $\quad$ *d)* $A - B + C - D$

e) $D - C + B - A$

12. Végezd el a lehetséges összevonásokat, és számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = 0{,}5$ és $b = -1$!

a) $3a + 15b - 8 + 15a + 7 - 9b =$

b) $5{,}7 - 4{,}9b + 1{,}2a - 8{,}1b + 3{,}6a + 1 =$

c) $\frac{5}{3}a + \frac{11}{4}b - \frac{2}{3}a + \frac{5}{4}b + 4 =$

d) $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{a}{2} - \frac{a}{6} + \frac{b}{4} - \frac{b}{12} =$

13. Bontsd fel a zárójeleket, és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $(11a - 13b + 5c) + (-15a + 7b - 2c)$

b) $(17a - 37b - 2c) - (16a + 15c - 24b)$

c) $8a - 4 - 3(a - 5) + 6(2a - 1)$

d) $4a - 11b - (5a - 12b) - 4(2a - b)$

e) $(5x - 4y) - 5(3x - 4y) + (3y - 5x)$

f) $5 - 3(7 - 2x) - 4 - 2(6x - 3)$

14. Végezz kiemeléseket az alábbi kifejezésekből!

a) $6x + 12xy + 18yz$ $\quad$ *b)* $4ab - 6bc + 8bd$

c) $10xyz - 25xyx + 15yxy$

d) $24ab + 16aba - 8ba$

e) $1{,}2x + 3{,}6xy + 2{,}4$

f) $1{,}8ab + 2{,}7aa - 4{,}5abc$

15. Válaszd ki az alábbi betűs kifejezésekre vonatkozó állítások közül az igazakat! Válaszodat indokold!

$A = 8xy$ $\quad B = 1{,}7yx$ $\quad C = -0{,}4x$ $\quad D = \frac{y}{7}$

$E = \frac{3x}{5}$ $\quad F = xx$ $\quad G = -\frac{1}{4}yx$

a) Az A és a G kifejezések egyneműek.

b) Az F és a B kifejezések egyneműek.

c) Minden betűs kifejezés egytagú.

d) C és E kifejezések összege $\frac{1}{5}x$.

e) Négy olyan betűs kifejezés van, amelyek együtthatója 1-nél kisebb.

16. Egy osztály 30 tanulójának 30%-a kék szemű és $\frac{2}{5}$ része szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű tanulók $\frac{2}{3}$ része szőke.

a) Hány kék szemű tanulója van az osztálynak?

b) Mennyi a szőkék száma?

c) Hány szőke és kék szemű jár az osztályba?

d) Hány olyan tanulója van az osztálynak, aki se nem szőke, se nem kék szemű?

17. A gimnáziumba járó Hanna tagja a kerületi énekkar Facebook-csoportjának. Az itteni ismerőseinek 75%-a egykori vagy jelenlegi iskolatársa, akiknek felével egy időben járt általános iskolába, 60%-ával pedig gimnáziumba. 72 olyan ismerőse van, akivel egy időben járt általános iskolába, de középiskolába már nem.

a) Összesen hány ismerőse van Hannának a Facebook-csoportban?

b) Hány olyan ismerőse van, akivel az általános iskolába is egy időben járt, és jelenleg is iskolatársa?



III. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

A Kr. e. 290-be induló útra Judit néni örömére mindenki jelentkezett. A szerencse két lánynak kedvezett, így a téridőtrafóval felszerelt szerkezet Bertát és Pannit repítette Alexandriába. Az első, amit megláttak és meghallottak, az a kardok csattogása volt. Néhány izmos fiatal testőr küzdött a gyakorlótéren. A szomszédos épület lépcsőjén két tógás alak diskurált. A beszédfelismerő rájuk fókuszált, és a lányok már hallhatták is a fordítógép hangját.

– Euklidész, nem zavarnak a fiatalok? – kérdezte társát az idős férfi.

– Épp ellenkezőleg, Démétriosz! Csengő zajuk az erdei madarak énekére emlékeztet, amely mindig megnyugtat.

– Remélem, ez azt jelenti, hogy jól haladsz a könyveddel. Milyen címet adtál neki?

– Sztoikheia – a fordító protokollrobot csak rövid késéssel tudta tolmácsolni. – Elemek. Összefoglaltam benne azt, amit nyilvánvalóan tudunk, és azt, amire ezekből következtetni lehet. Tartalmazza például a milétoszi Thalész körre vonatkozó következtetéseit és más munkákat is.

– Mikor olvashatjuk végre? Sokan kíváncsiak új írásod logikájára.

– Nemsokára. Most még választ keresek egy-két problémára, bár lehet, hogy anélkül fejezem be ezt a könyvet, hogy megtalálnám a megoldást. Legyetek egy kicsit türelemmel!

Berta feldobódva fordult barátnőjéhez.

– Ha visszaértünk, megkeresem ezt a könyvet a neten!

– Ha visszaértünk, beiratkozom vívni – válaszolta Panni, le sem véve szemét a testőrökről.

III. 1. GEOMETRIAI FOGALMAK



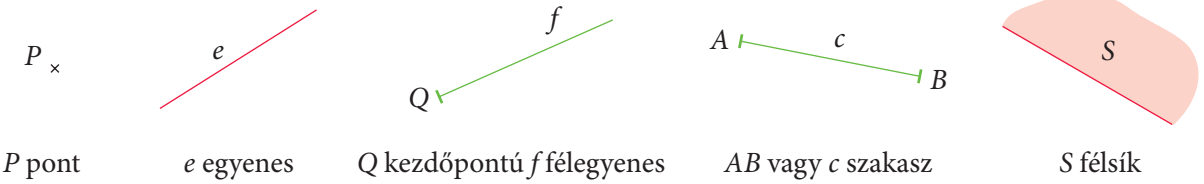
CSOPORTMUNKA

Adott idő alatt párosával írjatok egy-egy rövid (maximum 8 mondatos) történetet, amelyben az eddig tanult geometriai fogalmak is szerepelnek! A történet ne kapcsolódjon a matematikaórához! Amíg az egyikőtök felolvassa a szöveget, addig a másik fél írja a táblára a szövegetek matematikai fogalmait! Ha egy fogalom korábban már más párnál is előfordult, akkor azt húzzátok alá! A feladat végeztével vizsgáljátok meg, hogy szerepelnek-e olyan fogalmak a táblán, amelyek nincsenek aláhúzva! Ekkor láthatjátok, kik tudtak olyan fogalmat szerepeltetni, ami csak náluk fordult elő. A gyűjtőmunka győztesei lehetnek azok, akiknél a legtöbb fogalom szerepelt, de azok is, akiknél a nem aláhúzottak szerepeltek.

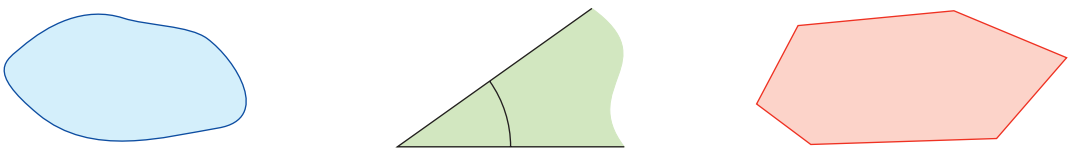
A csoportmunkában feleleventettük az eddig tanult geometriai fogalmakat. Mindegyiket nehéz lenne felidézni, ezért most csak a leggyakrabban előfordulókat, a továbbhaladás szempontjából a legfontosabbakat soroljuk fel.

Alapfogalmak: **pont, egyenes, sík, tér.**

További fogalmak: **félegyenes, szakasz, félsík, féltér, síkidom, szög, sokszög.**



P pont | *e* egyenes | *Q* kezdőpontú *f* félegyenes | *AB* vagy *c* szakasz | *S* félsík



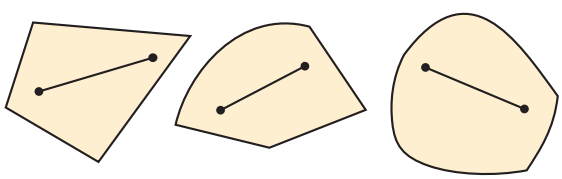
síkidom | szög | sokszög

A megismert fogalmakkal új fogalmakat határozhatunk meg (definiálhatunk), illetve újabb és újabb fogalmakat kapcsolhatunk hozzájuk.

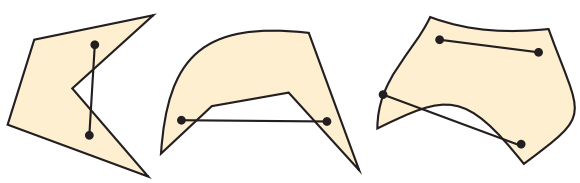
Például: A félegyenesek segítségével definiáltuk a szög fogalmát. A szöggel kapcsolatban pedig beszéltünk a **szög szár**áról, a **szög csúcs**áról, a **szögtartomány**ról, a **szög mérés**éről és a **szögfajták**ról is.

A síkidomok két tetszőleges pontját összeköthetjük egy szakasszal. Figyeld meg az ábrákat! A bal oldalon olyan síkidomokat látunk, amelyek bármely két pontját összekötő szakasz nem lép ki a síkidomból.

konvex



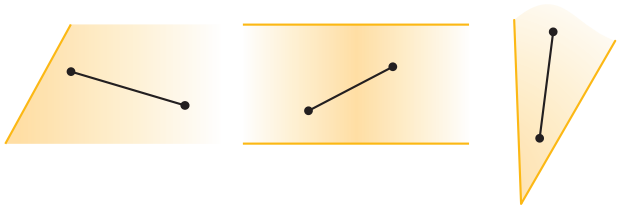
konkáv



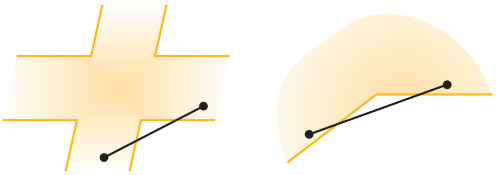
Az ilyen síkidomokat **konvex**nek nevezzük. A jobb oldalon látható síkidomok esetén van olyan összekötő szakasz, amelyik kilép a síkidomból. Az ilyen síkidomokat **konkáv**nak nevezzük.

Nemcsak véges síkidomokat, hanem végtelenbe nyúló alakzatokat is szoktunk hasonló tulajdonságuk alapján konvexnek, illetve konkávnak nevezni. Konvex például a teljes sík, egy félsík, és az ábrán látható szögtartomány is. Konkáv szögtartományt könnyű rajzolni, minden homorúszög megfelelő.

konvex



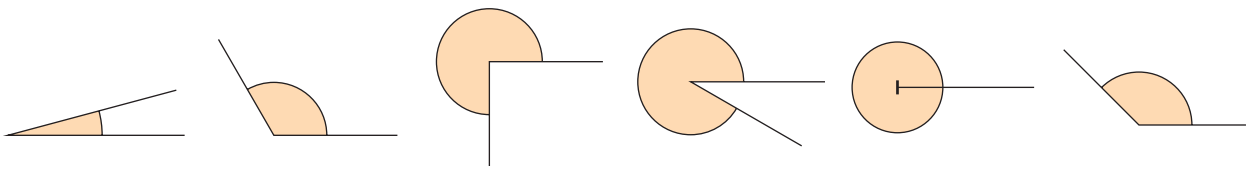
konkáv



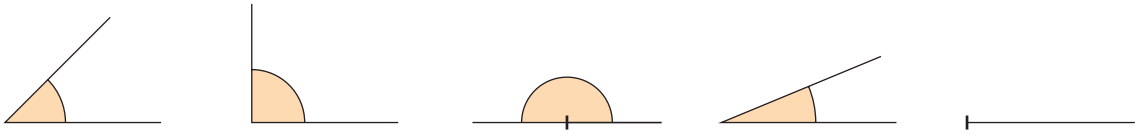
1. PÉLDA

Rajzoljuk le, majd csoportosítsuk nagyságuk szerint a következő szögeket:
a) 15°; *b)* 120°; *c)* 270°; *d)* 330°; *e)* 21 600′; *f)* 135°; *g)* 45°; *h)* 5400′; *i)* 180°; *j)* 22,5°; *k)* 0°!
Szögmérő segítségével rajzoljuk le a füzetbe is ezeket a szögeket! Adjuk meg a csoportokhoz tartozó intervallumokat!

Megoldás



15° 120° 270° 330° 21 600’ = 360° 135°

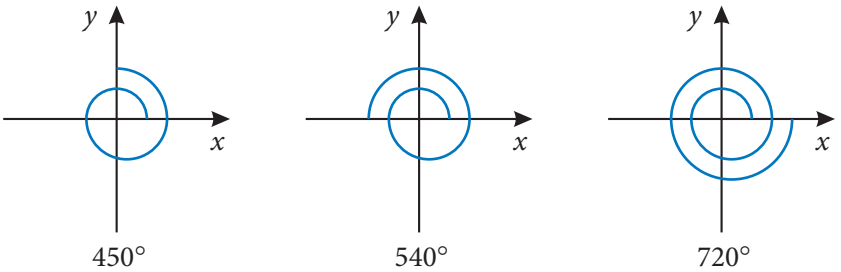


45° 5400’ = 90° 180° 22,5° 0°

Az α hegyesszög, ha $0° < \alpha < 90°$.
Az α tompaszög, ha $90° < \alpha < 180°$.
Az α homorúszög, ha $180° < \alpha < 360°$.
Az α nullszög, ha $\alpha = 0°$.
Az α derékszög, ha $\alpha = 90°$.
Az α egyenesszög, ha $\alpha = 180°$.
Az α teljesszög, ha $\alpha = 360°$.

Hegyesszögek: 15°, 45°, 22,5°.
Tompaszögek: 120°, 135°.
Homorúszögek: 270°, 330°.
Nullszög: 0°.
Derékszög: 5400′ = 90°.
Egyenesszög: 180°.
Teljesszög: 21 600′ = 360°.

Beszélhetünk 360°-nál nagyobb **forgásszög**ről is.



2. PÉLDA

Válogassuk ki a sokszögeket az ábrán látható síkidomok közül! Alakítsunk ki két csoportot: **konvex** és **konkáv** sokszögek!

a) b) c) d) e) f) g) h) i)

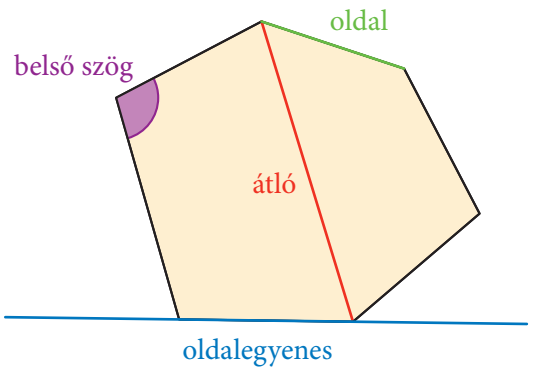


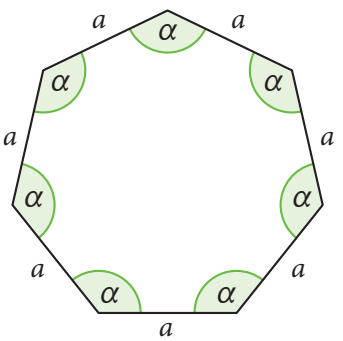
Megoldás

A sokszögek határvonala csak szakaszokból áll. Ezért az ábrán látható síkidomok közül a következők a sokszögek: *a)*; *c)*; *f)*; *h)*; *i)*.

Konvex sokszögek: *c)*; *f)*; *h)*. Konkáv sokszögek: *a)*; *i)*.

A sokszögekhez kapcsolódó fogalmak: **oldal, oldalegyenes, átló, belső szög, szabályos sokszög.**





FELADATOK

1. Válogasd ki a hegyesszögeket! Mely csoportokba tartoznak a többiek?

a) $1020'$ *b)* $92°$ *c)* $310°$ *d)* $6600'$

e) $44°\,22'$ *f)* $120'$ *g)* $170°$ *h)* $274°\,59'$

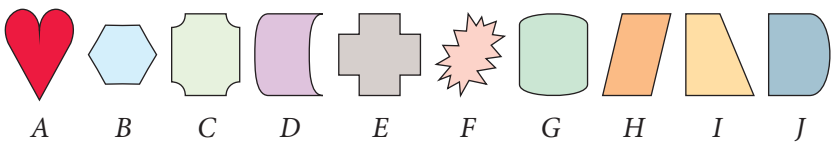
2. A felsorolásban a másodiktól kezdve minden szög 34°-kal nagyobb, mint az előtte lévő: 34°, 68°, …, 340°. Add meg a felsorolás hegyesszögeit, tompaszögeit és homorúszögeit!

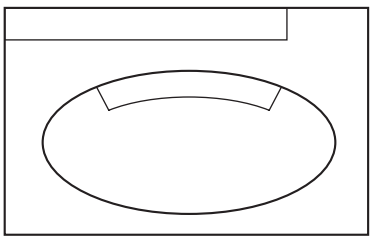
3. Legyen $\alpha = 24°\,33'$, $\beta = 88°\,27'$, $\gamma = 112°\,45'$! Rakd növekvő sorrendbe a következő szögeket:

a) $\alpha + \beta$; *b)* γ; *c)* $\beta - \alpha$; *d)* $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3}$!

4. *a)* Rajzolj konvex négyszöget, ötszöget, hatszöget!
b) Rajzolj konkáv négyszöget, ötszöget, hatszöget!
c) Melyik sokszögnek nincs konkáv változata?

5. Az ábrán néhány síkidomot látsz. Másold le a füzetedbe a mellékelt halmazábrát, feliratozd, majd írd be a síkidomok betűjelét a megfelelő helyre!





6. *a)* Rajzolj két különböző egyenest a füzetedben! Hány részre oszthatják a síkot?
b) Rajzolj három különböző egyenest a füzetedben! Hány részre oszthatják a síkot?
c) Rajzolj két különböző kört a füzetedben! Hány részre oszthatják a síkot?
d) Az *a)*, *b)* és *c)* feladatok megoldásai közül melyik ábrán jött létre konkáv tartomány?

7. Egy konvex nyolcszög egyik csúcsából megrajzoltunk két átlót. Milyen sokszögekre oszthatja a két átló a nyolcszöget?

8. Egy sokszögnek két homorúszöge van. Minimum hány oldala lehet? Rajzolj ilyen sokszöget!

9. Melyik igaz, melyik hamis?

a) Minden sokszög síkidom.
b) Van olyan síkidom, amelyik sokszög.
c) Van olyan sokszög, amelyik nem síkidom.
d) Nincs olyan sokszög, amelyik síkidom.
e) Minden síkidom sokszög.
f) Minden négyzet síkidom.

10. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyet néhány átlójával

a) két háromszögre és egy négyszögre;
b) egy háromszögre és két négyszögre;
c) egy háromszögre, egy négyszögre és egy ötszögre;
d) két négyszögre és egy ötszögre vágtunk?

III. 2. HÁROMSZÖGEK NEVEZETES VONALAI

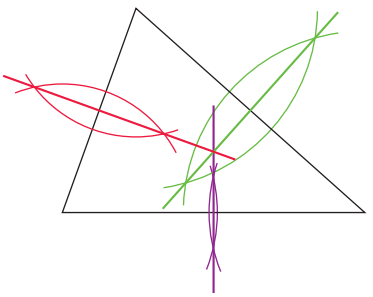


CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban! Jelöljetek be két pontot egy papírlapon! Hogyan tudnátok a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegesét egy hajtásvonallal létrehozni?
Egy papírlapon három hajtással jelöljetek ki egy háromszöget! Hajtsátok meg a háromszög mindhárom oldalának felezőmerőlegesét! (A csúcsok egymásra illesztésében segíthet, ha a körző hegyével mindkét csúcsot egyszerre átszúrjátok.) Mit tapasztaltok? Milyen helyzetű ez a három hajtásvonal? Fogalmazzátok meg a sejtéseteket!

1. PÉLDA

Szerkesszük meg a háromszög három oldalának felezőmerőlegesét! Mi a sejtésünk az így kapott három egyenesről?



Megoldás

Az ábra mutatja a szerkesztést:
Az így kapott három egyenes, a szerkesztett ábra szerint, egy pontban metszi egymást.

A papírhajtogatás és a megszerkesztett ábra is azt sejteti, hogy a háromszög három oldalának felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást.

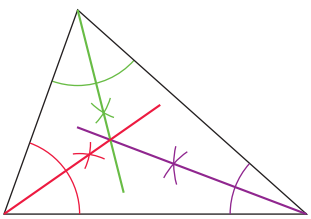


CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban! Vágjatok ki papírból egy nagy háromszöget! Illesszétek egymásra a háromszög oldalait a csúcsain átmenő hajtással! Mik lesznek ezek a hajtásvonalak a háromszögben? Mit tapasztaltok? Milyen helyzetű ez a három hajtásvonal? Fogalmazzátok meg a sejtéseteket!

2. PÉLDA

Szerkesszük meg a háromszög három szögfelezőjét! Mi a sejtésünk az így kapott három egyenesről?

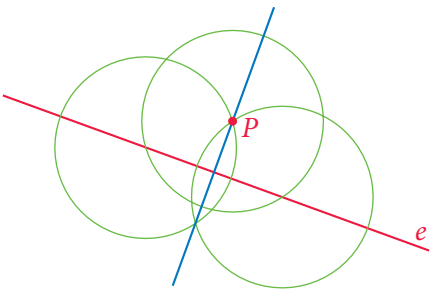


Megoldás

Az ábra mutatja a szerkesztést:
Az így kapott három egyenes a szerkesztett ábrán egy pontban metszi egymást.

A papírhajtogatás és ez az ábra is azt sejteti, hogy a háromszög három szögfelezője egy pontban metszi egymást.

A háromszög magasságát úgy kapjuk, hogy az egyik csúcsából merőlegest állítunk a szemközti oldalegyenesre.
Az így kapott egyenes a **magasságvonal**, amelynek a csúcs és az oldalegyenes között lévő darabja a **magasságszakasz** (röviden **magasság**).
Mielőtt megvizsgáljuk a három magasságvonal helyzetét, elevenítsük fel az ábra segítségével, hogyan kell egy *e* egyenesre egy rá nem illeszkedő *P* pontból merőlegest szerkeszteni!

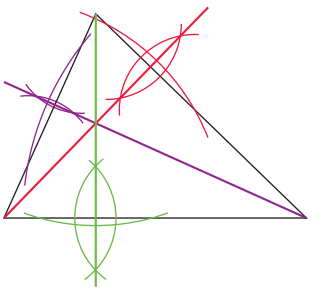


3. PÉLDA

Szerkesszük meg a háromszög három magasságvonalát! Mi a sejtésünk az így kapott három egyenesről?

Megoldás

Mindhárom csúcsból merőlegest állítunk a szemközti oldalegyenesre.
Az ábránkon a három megszerkesztett egyenes egy pontban metszi egymást.
Lehetséges, hogy ez nem véletlen! Az a sejtésünk, hogy a háromszög három magasságvonala mindig egy pontban metszi egymást.





Digitális eszközök

Rajzoljátok meg számítógépes szerkesztőprogrammal egy *ABC* háromszög három oldalfelező merőlegesét! Mozgassátok az *A*, *B* és *C* csúcsokat. Figyeljétek meg, hogyan változik az oldalfelező merőlegesek helyzete és a metszéspont helye!

Segítség:
Nyissátok meg az interneten például a *geogebra.org/geometry* lapot!

Érdemes számítógépet vagy tabletet használnotok. Van ugyan mobiltelefonos változat is, de kezdetben sokkal kényelmesebb a nagyobb képernyőt használni.

Jobban átlátható ábrát kaptok, ha kikapcsoljátok a koordináta-rendszer megjelenítését. Ehhez kattintsatok jobb egérgombbal a lapra, és vegyétek ki a pipát a megfelelő helyekről!

Használjátok a rajzoláshoz a 

és a 

eszközöket!

III. 2. HÁROMSZÖGEK NEVEZETES VONALAI

Készítsetek másik háromszöget, és rajzoljátok meg a három szögfelezőt a 

eszköz, illetve egy másik ábrán a három magasságvonalat a 

eszköz alkalmazásával!

Kövessétek, hova esik a szögfelezők, illetve a magasságvonalak metszéspontja, ha mozgatjátok az A, B és C pontokat!

FELADATOK

1. Szerkeszd meg egy szabályos háromszög oldalfelező merőlegeseit, szögfelezőit és magasságvonalait! Hány egyenest kellett rajzolnod?

2. Egy háromszög két szögének nagysága 30° és 60°. Szerkessz egy ilyen háromszöget, és szerkeszd meg a harmadik csúcsból induló szögfelezőt és magasságvonalat!

3. Mekkora szöget zár be egymással a háromszög 74°-os és 38°-os szögének csúcsából induló
a) két szögfelező?
b) két magasságvonal?

4. Rajzolj vonalzóval egy tetszőleges négyszöget, és szerkeszd meg a négy oldalfelező merőlegest! Egy ponton megy át a négy egyenes? Milyen esetek lehetségesek?

5. Az ABC derékszögű háromszög 30°-os szögének szögfelezője D pontban metszi a derékszögű csúcsból induló magasságvonalat. Határozd meg az ADC háromszög szögeinek nagyságát!

6. Egy hegyesszögű háromszög egyik szöge 70°-os. Mekkora szöget zár be egymással a másik két csúcsából induló magasságvonal?

7. Melyik igaz, melyik hamis?
a) A magasságpont mindig a háromszög belsejében található.
b) A derékszögű háromszögeknek csak egy magasságuk van.
c) A háromszögek magasságpontja egyenlő távolságra van az oldalegyenesektől.
d) Minden háromszögnek van olyan magasságvonala, amelyik metszi a szemközti oldalszakaszt.

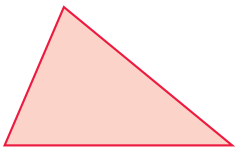




CSOPORTMUNKA

Ha egy háromszögnek mindhárom szöge hegyesszög, akkor hegyesszögű háromszögről beszélünk. Ha azonban a háromszög egyik szöge tompaszög (két szöge pedig hegyesszög), akkor a tompaszög adja a háromszög elnevezését, ezért az ilyen háromszögeket tompaszögű háromszögeknek nevezzük. Ugyanez a helyzet a derékszöggel is.
Vitassátok meg két-három fős csoportokban, hogy ezt az „igazságtalan” helyzetet hogyan lehetne feloldani! Tegyetek javaslatot egy igazságosabb meghatározásra! Mikor nevezzünk egy háromszöget hegyesszögűnek, derékszögűnek, tompaszögűnek?

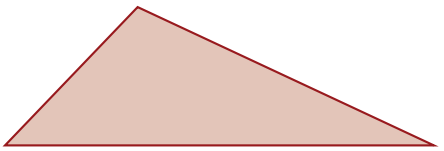
A háromszögeket szögeik alapján három csoportba soroljuk:



hegyesszögű

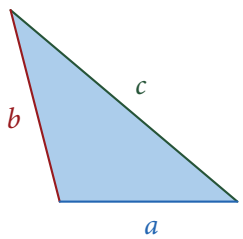


derékszögű



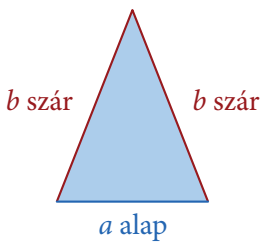
tompaszögű

A háromszögeket oldalaik alapján is meg szoktuk nevezni. Egy háromszög lehet:



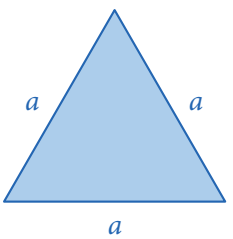
általános

Az általános háromszög szögei különböző nagyságúak.



egyenlő szárú

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők.



szabályos

A szabályos (egyenlő oldalú) háromszög minden szöge 60°-os.

1. PÉLDA

Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 42°. Mekkora a másik két szög?

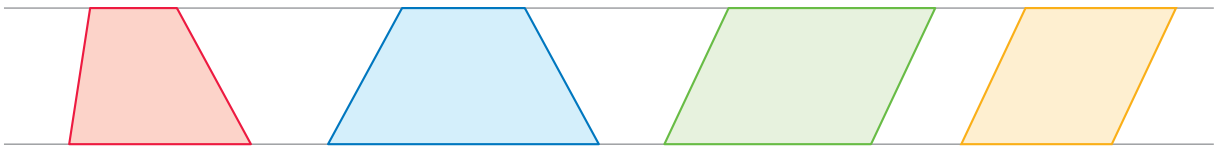
Megoldás

Nem tudjuk, hogy a megadott szög melyik, ezért két eset lehetséges.

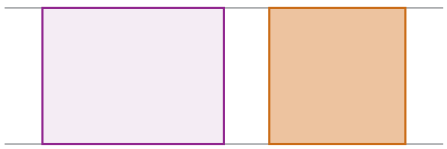
I. eset: A megadott szög az alapon fekszik.
Ekkor az alapon fekvő másik szög is 42°. A hiányzó harmadik szög: $180° - 2 \cdot 42° = 96°$.

II. eset: A megadott szög a szárszög (a két szár által bezárt szög).
Ekkor az alapon fekvő szögek összege: $180° - 42° = 138°$. Mivel ez két egyenlő szög összege, így a nagyságuk külön-külön 69°.

Két párhuzamos egyenes közötti síkrészből **nevezetes négyszögek**et vághatunk ki.



trapéz | szimmetrikus trapéz | paralelogramma | rombusz



téglalap | négyzet

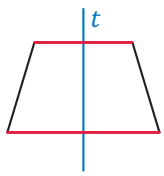
Az ábrán látható négyszögek mind **trapéz**ok, mert van párhuzamos oldalpárjuk.
A további speciális tulajdonságok új elnevezéseket adnak.

A **szimmetrikus trapéz** olyan trapéz, melynek van oldalfelezéspontokon átmenő szimmetriatengelye.
A **paralelogramma** olyan trapéz, amelynek a szárai is párhuzamosak egymással.
A **rombusz** olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő hosszú.
A **téglalap** olyan paralelogramma, amelynek a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.
A **négyzet** olyan téglalap, amelynek a szomszédos oldalai egyenlő hosszúak.
A **négyzet** olyan rombusz, amelynek a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.

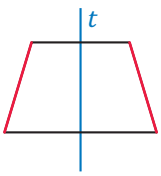
A tengelyesen szimmetrikus trapéz köré lehet kört rajzolni.
Mivel erre a körre illeszkedik a tengelyesen szimmetrikus trapéz négy csúcsa, ezért mind a négy oldala húrja a körnek. Az ilyen négyszög húrnégyszög, de láttuk, hogy trapéz is.
Ezért **húrtrapéz**nak is nevezhetjük.

Gyűjtsük össze a húrtrapéz tulajdonságait!

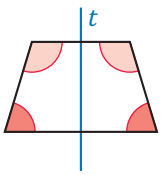
– Van két párhuzamos oldala. Ezeket alapnak nevezzük.



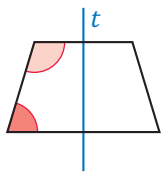
– Van két szemközti oldala, amelyek egyenlő hosszúságúak. Ezeket szárnak hívjuk.

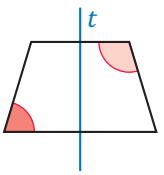


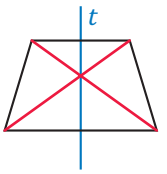
– Az alapokon fekvő két-két szöge egyenlő.

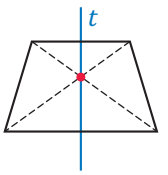


– A szárakon fekvő két-két szög összege 180°.









– A két-két szemközti szög összege 180°.

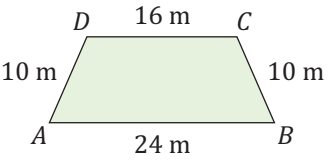
– Átlói egyenlő hosszúak.

– Az átlók a szimmetriatengelyen metszik egymást.

– Ha a húrtrapéz minden szöge egyenlő, akkor téglalap.
– Ha a húrtrapéz minden szöge és minden oldala egyenlő, akkor négyzet.

2. PÉLDA

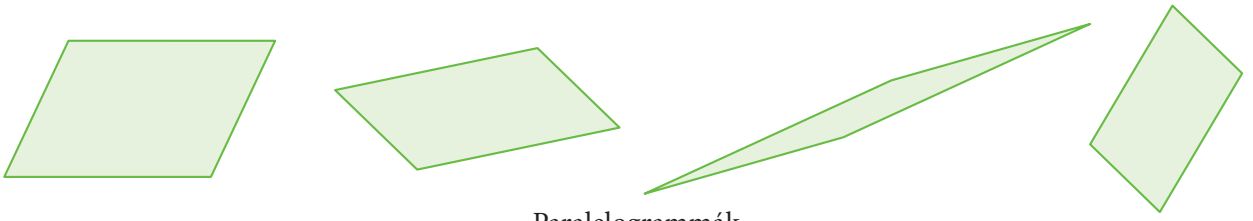
Egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) alakú kertet szeretnének bekeríteni. Milyen hosszan kell kerítést készíteni, ha a kert adatait az ábráról leolvashatjuk?



Megoldás

Gondolatban végighaladunk a kerítés vonalán. Induljunk az A csúcstól a B irányába! Ekkor a következő oldalhosszakat járjuk be, ezeket kell összegeznünk: $K = 24 + 10 + 16 + 10 = 60$ (m). Vagyis 60 méter hosszan kell kerítést készíteni.

Összegyűjtöttük a **paralelogramma** néhány **tulajdonság**át. A paralelogramma olyan négyszög, amelynek
– szemben fekvő oldalai párhuzamosak;
– szemközti oldalainak hossza egyenlő;
– bármely oldalán fekvő két szög összege 180°;
– szemközti szögei egyenlők.



Paralelogrammák

Ha egy paralelogrammának van 90°-os szöge, akkor az egy téglalap. A téglalap is paralelogramma! Tréfásan szokták azt is mondani, hogy ha egy téglalapot pofon csapunk, akkor paralelogrammát kapunk.

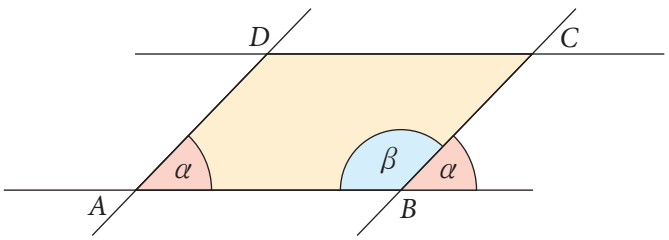
Az elnevezések gyakran magukért beszélnek. A paralel szó (régebbi helyesírással parallel) görög eredetű, jelentése *párhuzamos, párhuzam, hasonló*. Például mondhatjuk a következőt: Az érvelésed paralel az enyémmel.

3. PÉLDA

Következtessünk! Igaz-e az alábbi állítás?
Ha egy négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak, akkor az egy oldalon fekvő két szög összege 180°.

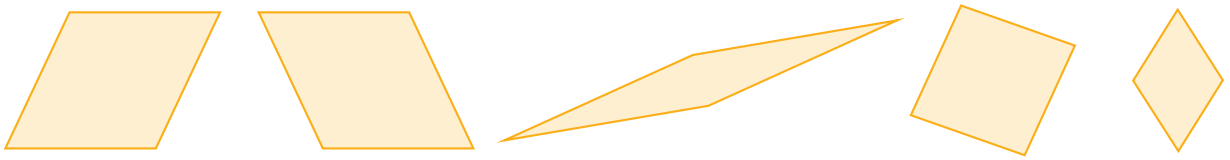
Megoldás

Rajzoljunk egy $ABCD$ paralelogrammát, és az A csúcsnál lévő szöget jelöljük α-val, a B csúcsnál lévő szöget pedig β-val. Hosszabbítsuk meg a paralelogramma oldalegyeneseit a csúcsokon túl. Az AB egyenest metsző AD és BC egyenesek párhuzamosak, ezért az ábrán jelölt A-nál és B-nél lévő α szög egyenlő.



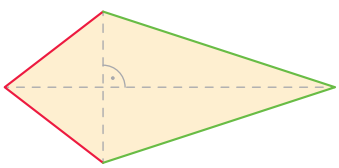
A B csúcsnál lévő β szög tényleg egyenesszögre, azaz 180°-ra egészíti ki az α szöget.

A **rombusz** olyan négyszög, melynek oldalai egyenlő hosszúak.
Minden rombusz egyben paralelogramma is, tehát azt is mondhatjuk, hogy a rombusz olyan paralelogramma, melynek szomszédos oldalai egyenlő hosszúak.

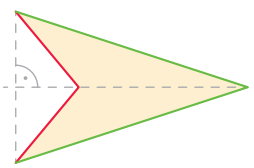


Rombuszok

A nevezetes négyszögek között van olyan is, amelyiknek nem feltétlenül van párhuzamos oldalpárja.
A **deltoid** olyan négyszög, amelyben van két-két egyenlő hosszú szomszédos oldal, átlói (átlóegyenesei) merőlegesek egymásra, és az egyik felezi a másikat.
Jellegzetes alakja miatt más országokban szokták ezt a négyszöget sárkánynak is nevezni.



konvex deltoid



konkáv deltoid



A rombusz olyan deltoid, amelynek minden oldala egyenlő.

FELADATOK

1. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

a) Ha egy háromszög legnagyobb szöge hegyesszög, akkor a háromszög hegyesszögű.

b) Ha egy háromszög legnagyobb szöge derékszög, akkor a háromszög derékszögű.

c) Ha egy háromszög legnagyobb szöge tompaszög, akkor a háromszög tompaszögű.

d) Ha egy háromszögnek két hegyesszöge van, akkor a háromszög biztosan hegyesszögű.

e) Ha egy háromszögben két szög összege 90°, akkor a háromszög derékszögű.

f) Nincs olyan háromszög, amelyben két szög összege 180°.

2. Egy háromszög két szögének különbsége 14°. A harmadik szöge 82° nagyságú. Mekkorák a háromszög hiányzó szögei?

3. Igaz vagy hamis? Ha hamis, akkor rajzolj vagy nevezz meg olyan négyszöget, amelyik cáfolja az állítást!

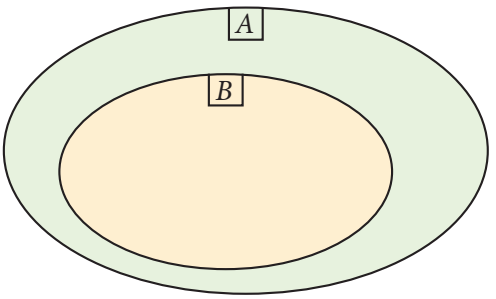
a) Ha egy négyszög minden oldala egyenlő, akkor az négyzet.

b) Minden trapéz paralelogramma.

c) Egy deltoid nem lehet rombusz.

d) A négyzet paralelogramma, rombusz és deltoid is.

4. Adott az alábbi halmazábra:
Keress olyan feliratokat a megadott halmaz elemei közül, amelyeket be lehet írni *A* és *B* helyére, hogy jó halmazábrát kapj!
Feliratok = {négyzet, téglalap, paralelogramma, rombusz, deltoid}





III. 4. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK



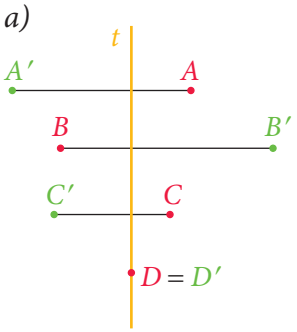
A következő példában megadott szabályok a sík minden pontjához hozzárendelnek egy-egy pontot. Az ilyen hozzárendeléseket **transzformációk**nak nevezzük. A transzformáció átalakítást, átváltoztatást jelent. Ez a fogalom nem csak geometriaórán fordul elő. A síkon a pontok helyét egy utasítással megváltoztatjuk, vagyis átalakítást hajtunk végre. A sík egy tetszőleges P pontjához a transzformáció által rendelt pontot P'-vel jelöljük, és azt mondjuk, hogy a P pont képe a P'.

Transzformer

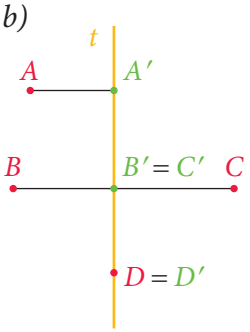
1. PÉLDA

Egy ismeretlen transzformáció hatására csak néhány pont képét láthatjuk az ábrán. Fogalmazzuk meg, hogyan szerkesztenénk meg egy-egy további pont képét!

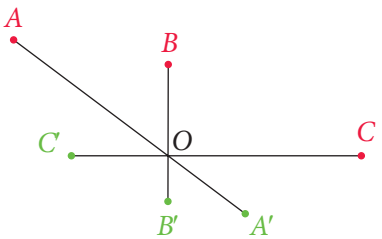
a)



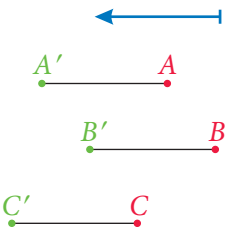
b)



c)



d)



Megoldás

a) A pontból állítsunk merőleges egyenest a t egyenesre! Ezen a merőlegesen a pont és a t egyenes közötti távolságot mérjük fel kétszer a t egyenes másik oldalára! Ekkor kapjuk a képpontot. A t-re illeszkedő pontok helyben maradnak.

b) Az adott pontból állítsunk merőleges egyenest a t egyenesre! A metszéspont lesz a képpont.

c) A pontot kössük össze a sík rögzített O pontjával! A rögzített O ponton túl mérjük fel a távolságuk felét! Ekkor kapjuk a képpontot. A rögzített O pont képe önmaga lesz.

d) A pontra a megadott iránnyal párhuzamosan egy egyenest illesztünk. A pontból kiindulva mérjük fel a megadott irány hosszát erre az egyenesre a megadott iránynak megfelelően! Így kapjuk a képpontot.

Megfordítható transzformációról beszélünk, ha minden képponthoz egyetlen eredeti pont tartozik. Ilyenkor azt is mondhatjuk, hogy minden képpontnak egy őse van. A megfordítható transzformációk elterjedt elnevezése a **geometriai transzformáció**.

Például: ha az 1. példa *a)* részében egy pont ismeretében az eredeti pontot kell megkeresni, akkor ebből a pontból állítsunk merőleges egyenest a t egyenesre! Ezen a merőlegesen a pont és a t egyenes közötti távolság felét mérjük fel a t egyenes másik oldalára! Ekkor kapjuk az eredeti pontot.

A tavaly tanult tengelyes tükrözés egy geometriai transzformáció.

Sőt! Egy alakzatot tengelyesen tükrözve az eredeti alakzattal egybevágó képet kapunk. Az ilyen tulajdonságú geometriai transzformációt egybevágósági transzformációnak vagy röviden egybevágóságnak hívjuk. Nemsokára másik egybevágósági transzformációval is találkozni fogunk.

Ha a pontokat a koordinátáikkal adjuk meg, akkor másképp is tudunk szabályokat megadni.

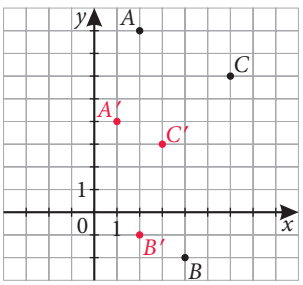
2. PÉLDA

Transzformáljunk néhány pontot a következő szabályok szerint! Minden pont képét úgy kapjuk,
a) hogy mindkét koordinátáját felezzük;
b) hogy a két koordinátáját felcseréljük.

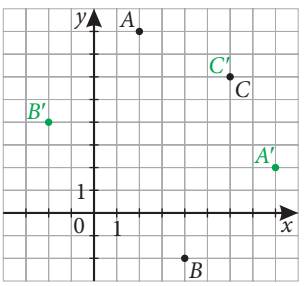
Megoldás

Legyenek a választott pontjaink: $A(2; 8)$, $B(4; -2)$, $C(6; 6)$!

a) A képpontok:
$A'(1; 4)$, $B'(2; -1)$, $C'(3; 3)$.



b) A képpontok:
$A'(8; 2)$, $B'(-2; 4)$, $C'(6; 6)$.



Az 1. példa *a)*, *c)* és *d)* részében látható transzformációk megfordíthatók, a *b)* nem. A 2. példa mindkét transzformációja megfordítható, tehát geometriai transzformáció.

FELADATOK

1. Tükrözd az *ABCD* tetszőleges négyszöget az
a) *AB* oldal egyenesére;
b) *AC* átló egyenesére!

2. Rajzolj egy téglalapot! Tükrözd az egyik átlójának egyenesére! Mi lesz az eredeti és a képként kapott téglalap közös része?

3. Egy négyzetet tükröztünk egy egyenesre. Az eredeti és a képként kapott négyzet közös része az eredetinél kisebb négyzet lett. Rajzolj egy ilyen ábrát!

4. Rajzold le, hogyan néznének ki a következő jelek, ha egy függőleges egyenesre tükröznéd őket! Egy tükör segíthet a kivitelezésben!

{ < \ % @ § &

5. Legyen adott három pont a koordinátarendszerben: $A(2; 8)$, $B(4; -2)$, $C(6; 6)$. Készíts rajzot, és add meg a transzformált pontok koordinátáit, ha a két koordinátát fel kell cserélned, majd a csere után kapott első koordinátának az ellentettjét kell venned!

6. Adva van egy egyenes a síkon. Bármely síkbeli pont képét megkapjuk, ha a pontból merőlegest állítunk az adott egyenesre, majd erre a talppontból kiindulva felmérjük a pont és a talppont távolságának felét a másik oldalon. Az adott egyenesre illeszkedő pont képe önmaga lesz.

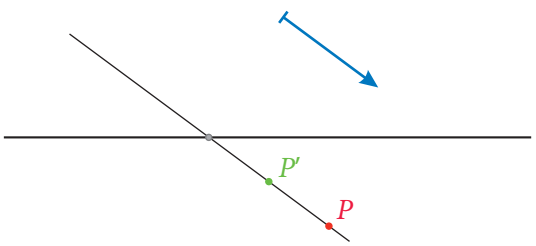
a) Vegyél fel három tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont képét!

b) Vegyél fel három további tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont ősét!

7. A síkban adott egy egyenes és egy irány a hosszával (az irány nem párhuzamos és nem is merőleges az adott egyenesre).
Bármely pont képét megkapjuk, ha a pontból a megadott iránnyal párhuzamos egyenest húzunk, és bejelöljük a két egyenes metszéspontja és a pont közötti szakasz felezőpontját. Az adott egyenesre illeszkedő pont képe önmaga lesz.

a) Vegyél fel három tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont képét!

b) Vegyél fel három további tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont ősét!



8. Transzformáljuk az $A(2; 8)$, $B(4; -2)$, $C(6; 6)$ pontokat a következő szabályok szerint! Minden pont képét úgy kapjuk, hogy

a) mindkét koordinátáját duplázzuk;

b) az első koordinátájának az ellentettjét vesszük;

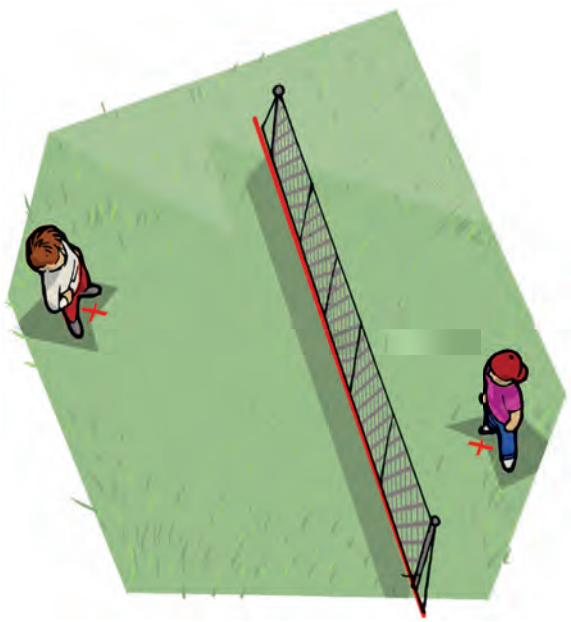
c) a második koordinátájának az ellentettjét vesszük;

d) mindkét koordinátájának az ellentettjét vesszük;

e) a két koordinátáját felcseréljük, majd a csere után kapott második koordinátának az ellentettjét vesszük;

f) mindkét koordinátát csökkentjük 5-tel.

9. Az iskolaudvaron áll két gyerek. Szeretnének a kerítésnél találkozni.



a) Hol legyen a találkozási hely, ha azt szeretnék, hogy mindketten azonos hosszúságú utat tegyenek meg?

b) Hol legyen a találkozási hely, ha azt szeretnék, hogy a kettőjük által megtett út hossza a lehető legrövidebb legyen?

5. KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

III.

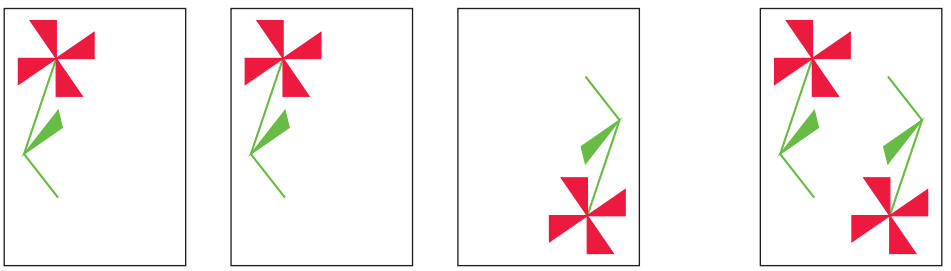


CSOPORTMUNKA

Padtársaddal rajzoljatok egy 10-szer 15-ös méretű téglalapot egy-egy „kockás” papírra! Tervezzetek egy olyan képet a négyzetháló segítségével, amely a téglalap átlója által meghatározott egyik részben van! A négyzetháló segít abban, hogy a képet mindketten tökéletes másolatként rajzoljátok le. Tegyétek egymásra a két téglalapot úgy, hogy az ábrák felfelé legyenek fordítva és a két téglalap fedje egymást, de a két ábra ne! Másoljátok le az így kapott ábrát a füzetetekbe! (Fény felé fordítva könnyebb a másolás.)
Figyeljétek meg az így kapott képet! Fogalmazzátok meg észrevételeiteket!

Ezek az ábrák a leírtaknak megfelelően készültek:

Az ábra: A másolat: A másolat az összeillesztés előtt: Egymásra illesztve:



Az egymásra illesztés után megfigyelhető, hogy a kép megfelelő részei a téglalap közepétől ugyanolyan távolságra vannak. A virág megfelelő pontjait összekötő szakasznak a téglalap középpontja pontosan a felezőpontja. A virág megfelelő szakaszai nemcsak egyenlők, hanem párhuzamosak is.
A látottak alapján megadunk egy geometriai transzformációt a következő utasítással:

Rögzítünk a síkon egy *K* pontot. Egy tetszőleges síkbeli *A* pontnak úgy kapjuk meg az *A′* képét, hogy az *A* pontot összekötjük a *K* ponttal, és ennek az egyenesnek az *A* pontot nem tartalmazó részére felmérjük a *K* ponttól a *KA* távolságot. (A *K* pont képe önmaga.)



Az így meghatározott transzformációt **középpontos tükrözés**nek nevezzük.

Középpontos tükrözésnél megfigyelhető, hogy egy pontot a *K* középpont körül át tudunk fordítani a képpontba. Vagyis minden távolság és minden szög nagysága változatlan marad a transzformáció elvégzése után. Minden alakzat egybevágó lesz a középpontos tükörképével, vagyis a középpontos tükrözés is egybevágóság.

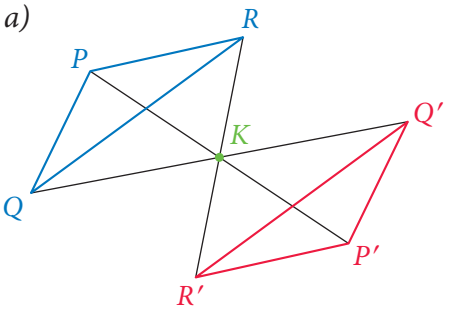
III. 5. KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

1. PÉLDA

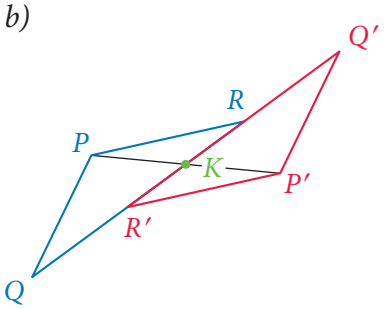
Tükrözzünk középpontosan egy PQR háromszöget egy olyan K középpontra, amely a
a) háromszögön kívül;
b) háromszög határvonalán;
c) háromszögön belül található!

Megoldás

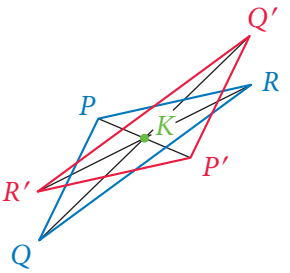
a)



b)



c)



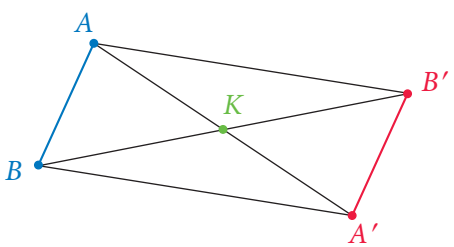
A látottak alapján összegyűjtjük a középpontos tükrözés tulajdonságait:

– Távolságtartó, szögtartó, egyenestartó.
– A középpontra illeszkedő egyenes képe önmaga.
– A középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.
– A félegyenes és képe fordított állású.
– Szakasz képe vagy párhuzamos az eredeti szakasszal, vagy vele egy egyenesre esik, de a végpontjaik sorrendje felcserélődik.
– Nem változtatja meg a körüljárási irányt.
– Ha egy középpontos tükrözés esetén az A pont képe az A', akkor az A' képe ugyanebben a középpontos tükrözésben A lesz. Vagyis a középpontos tükrözés megfordítható transzformáció.

2. PÉLDA

Tükrözzük az AB szakaszt egy, az AB egyenesre nem illeszkedő K középpontra! Milyen négyszöget határoz meg ez a négy pont?

Megoldás



Mivel az AB szakasz képe az $A'B'$ szakasz, ezért ezek hossza egyenlő.
Mivel az AB' szakasz képe az $A'B$ szakasz, ezért ezek hossza is egyenlő.
Vagyis az így kapott négyszög paralelogramma.

FELADATOK

1. Egy kártyalapnak elég csak az egyik felét megmutatnunk, mert a másik felét megkaphatjuk a lap középpontjára tükrözve. Melyik a lap hiányzó része?



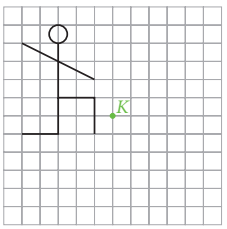
a) 

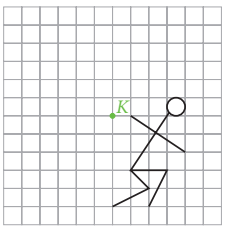
b) 

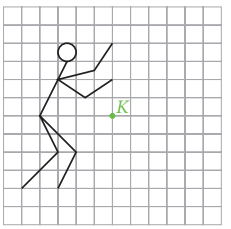
c) 

d) 

2. Rajzold le a füzetedbe a pálcikaemberkéket, és tükrözd őket a megadott K pontra!

a) 

b) 

c) 

3. Rajzolj egy szabályos háromszöget! Tükrözd
a) az egyik csúcsára; *b)* az egyik oldal felezőpontjára;
c) egy olyan pontra, amely a háromszög egyik oldalegyenesén a háromszögön kívül van!

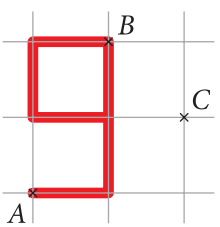
4. Rajzolj két egyenlő hosszúságú szakaszt! Szerkeszd meg azt a pontot, amelyre az egyik szakaszt tükrözve pontosan a másik szakaszt kapjuk! Mikor kapsz ilyen pontot?

5. Rajzolj egy nyomtatott A betűt! Tükrözd
a) a csúcsára; *b)* egy olyan pontra, mely a szárán van;
c) egy tetszőleges pontra!

6. Rajzolj egy négyszöget! Tükrözd
a) az egyik csúcsára; *b)* az egyik oldalának a felezőpontjára;
c) egy olyan pontra, amely a négyszögön kívül van!

7. Rajzolj egy ABC háromszöget és a háromszögön kívül egy F' pontot! Tudjuk, hogy F' a BC oldal F felezőpontjának a középpontos tükörképe. Szerkeszd meg a háromszög tükörképét!

8. Másold az ábrát a füzetedbe, és tükrözd az ábrán látható számot
a) az A pontra!
b) a B pontra!
c) a C pontra!



III. 6. A KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS ALKALMAZÁSA

Megismerkedtünk a középpontos tükrözéssel, és összegyűjtöttük a legfontosabb tulajdonságait:

- Minden egyenes képe is egyenes (egyenestartó).
- Minden szöget önmagával azonos nagyságú szögbe visz (szögtartó).
- Minden szakaszt önmagával azonos hosszúságú szakaszba visz (távolságtartó).



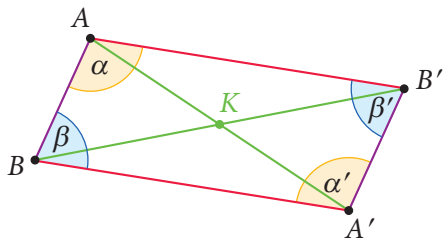
A középpontos tükrözés **egybevágósági transzformáció**.

1. PÉLDA

Tudjuk, hogy ha az AB szakaszt egy, az AB egyenesre nem illeszkedő K középpontra tükrözzük, akkor paralelogrammát kapunk. Gyűjtsük össze ezek alapján a paralelogramma tulajdonságait!

Megoldás

Ha egy négyszög paralelogramma, akkor
– két-két szemközti oldala egyenlő hosszúságú;
– két-két szemközti oldala (oldalegyenese) párhuzamos;
– két szemközti oldala egyenlő hosszúságú és párhuzamos;
– átlói felezik egymást;
– két-két szemközti szöge egyenlő egymással;
– bármely két szomszédos szög összege 180°.



A megfogalmazott állítások megfordítása is igaz. Például az első mondat megfordítása így hangzik:

Ha egy négyszögben két-két szemközti oldal egyenlő hosszúságú, akkor az paralelogramma.

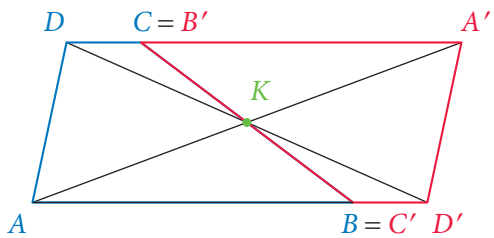
A „*ha* ■, *akkor* ◆” típusú mondat megfordításának nevezzük a „*ha* ◆, *akkor* ■” mondatot.

2. PÉLDA

Tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC szár K felezőpontjára! Mutassuk meg, hogy az eredeti trapéz és az $A'B'C'D'$ kép együtt egy paralelogrammát alkot!

Megoldás

A BA félegyenes középpontos tükörképe $B'A'$, ezért párhuzamosak egymással. A C és B' pontok egybeesnek.
Az $ABCD$ trapézban az AB szakasz párhuzamos a CD szakasszal (azaz $B'D$-vel). A tükrözés miatt az $ABC\sphericalangle$ megegyezik $A'B'C'\sphericalangle$-gel. $BCD\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ éppen 180°-ra egészítik ki egymást, tehát ugyanez igaz a közös csúcsú $BCD\sphericalangle$ és $A'B'C'\sphericalangle$ szögekre is. Vagyis D, $C = B'$ és A' egy egyenesre illeszkedik.



Hasonlóan tudjuk megmutatni, hogy A, B és D' pontok is egy egyenesre illeszkednek.
Vagyis a két trapéz együtt az $AD'A'D$ négyszöget adja, amelynek AD' és $A'D$ oldalairól már tudjuk, hogy párhuzamosak. Az AD középpontos tükörképe $A'D'$, ezért ezek is párhuzamosak. Mivel az $AD'A'D$ négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, így valóban paralelogrammát kaptunk.

FELADATOK

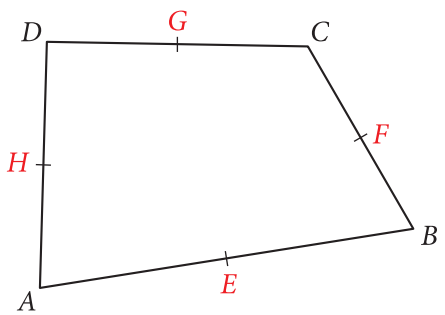
1. Fogalmazd meg és írd le a füzetedbe az 1. példa állításainak megfordításait!

2. Tükrözd az ABC háromszöget a BC oldal F felezőpontjára! Igazold, hogy az eredeti háromszög és az $A'B'C'$ kép együtt egy paralelogrammát alkot!

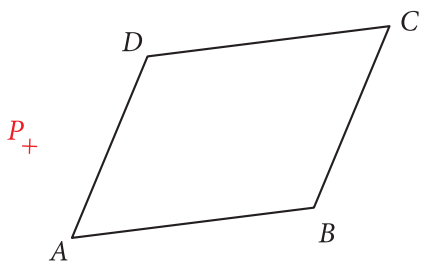
3. Tükrözz egy szabályos háromszöget az egyik oldal felezőpontjára! Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítése?

4. Vegyél fel két metsző egyenest és egy rájuk nem illeszkedő pontot! Szerkessz egy-egy olyan pontot az egyenesekre, amelyek az eredeti pontra tükrösek!

5. Legyen az $ABCD$ négyszög négy oldalának felezőpontja E, F, G és H. Tükrözd az A csúcsot E-re, majd a kapott tükörképet sorban az F, aztán a G, majd a H oldalfelező pontra! Mi lesz az A pont képe a négy tükrözés után?



6. Az $ABCD$ paralalogrammát és a tetszőleges P pontot rajzold meg a füzetedben! Tükrözd a P pontot az A csúcsra, az így kapott tükörképet a B-re, majd a C-re és D-re! Mit tapasztalsz?

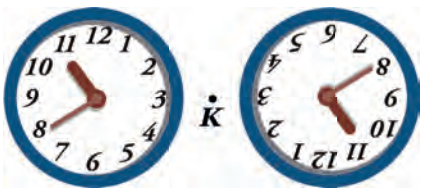


7. Legyen az $ABCD$ trapéz hosszabb alapja AB. Tükrözd a trapézt az AB szakasz F felezőpontjára! Hogyan neveznéd el az eredeti trapéz és az $A'B'C'D'$ kép egyesítésével kapott sokszöget?

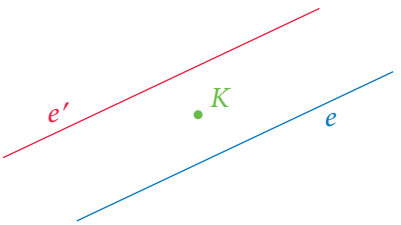
III. 7. SZÖGPÁROK

Kiegészítő tananyag

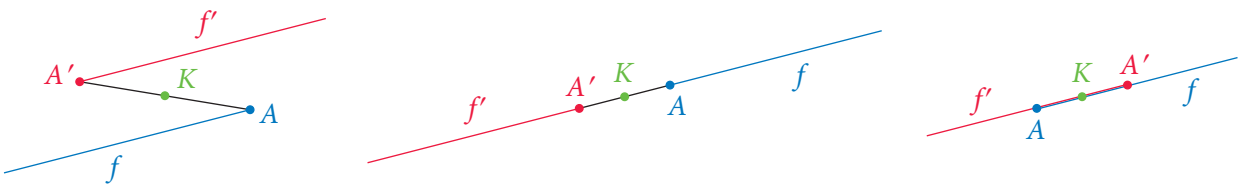
Megállapítottuk, hogy a középpontos tükrözés nem változtatja meg a körüljárási irányt. Ez természetesen abból is következik, hogy egy alakzat tükörképét megkaphatjuk úgy is, hogy a síkot a rögzített K pont körül 180°-kal elforgatjuk.



A tükörközéppontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.



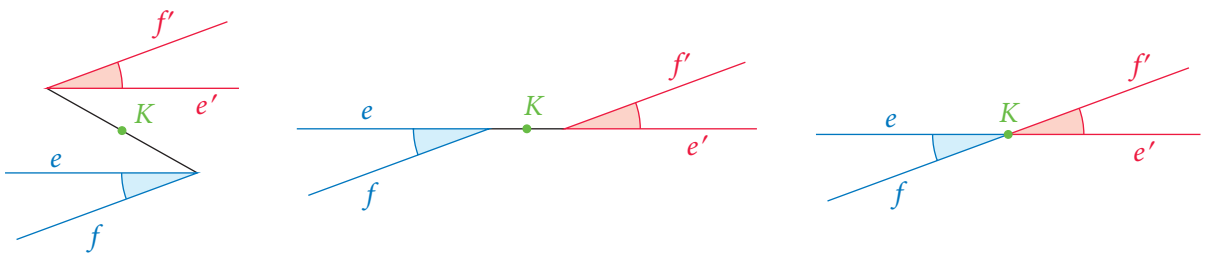
Figyeljük meg, milyen lesz egy félegyenesnek és a középpontos tükörképének helyzete!



A félegyenes egy önmagával párhuzamos, ellentétes irányú félegyenesbe transzformálódik. Az is lehet, hogy a két félegyenes ugyanarra az egyenesre kerül, de ezt is mondhatjuk speciális helyzetű párhuzamosságnak. Figyeld meg ezek alapján, hogy milyen helyzetű lesz egy szög képe a középpontos tükrözés során!

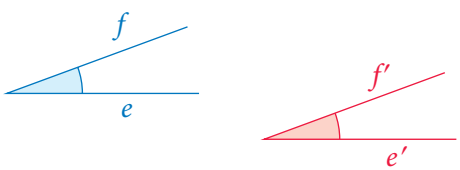
A középpontos tükrözés hatására a szög szárait alkotó félegyenesek önmagukkal párhuzamos, ellentétes irányú félegyenesek lesznek. A két szög nagysága természetesen egyenlő, hiszen egybevágósági transzformációról van szó.

A középpontos tükrözés párhuzamos szárú szögpárokat hoz létre.



A képként kapott szög szárai páronként ellentétes irányúak az eredeti szög száraihoz képest. Ezek a **fordított állású szögek** vagy **váltószögek**.

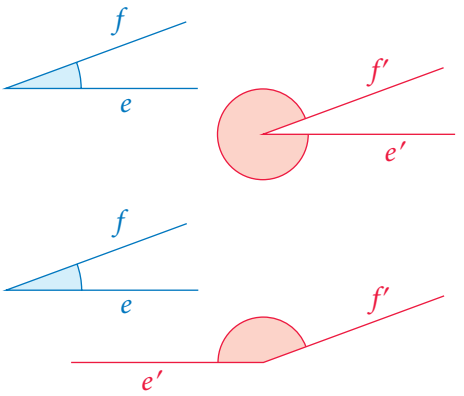
Csúcsszögeknek nevezzük az olyan fordított állású szögeket, amelyeknek közös a csúcspontja.



Ha egy szöget eltolsz a síkon, az eredeti és az eltolt szög megfelelő szárai akkor is párhuzamosak lesznek. Vagyis ezek is párhuzamos szárú szögpárt alkotnak, de itt a félegyenesek páronként egyező irányúak. Ezeket **egyállású szögek**nek nevezzük.

Kiegészítő tananyag

A konvex egyállású és a konvex fordított állású szögpárok egyenlők egymással. Az állítás megfogalmazható konkáv szögpárokra is.



Az egyenlőséghez fontos, hogy mindkét szög konvex vagy mindkét szög konkáv legyen.

Figyeld meg a párhuzamos szárú szögek harmadik csoportját! Ezek nem egyenlők, hanem 180°-ra vagy 360°-ra egészítik ki egymást.

Általában **kiegészítő szögek**nek nevezzük azokat a szögpárokat, amelyek egymást 180°-ra egészítik ki.

Nevezetes szögpárokat az épített környezetedben is láthatsz.

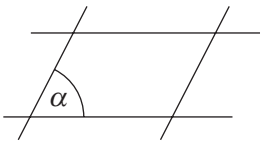




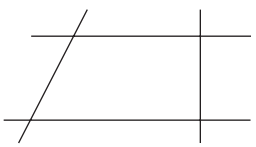


FELADATOK

1. Rajzold le az ábrát a füzetedbe! A rajzodon jelöld pirossal az α-val egyállású, kékkel az α-val fordított állású szögeket, zölddel az α kiegészítő szögeit!



2. Rajzold le az ábrát a füzetedbe! A rajzodon jelöld azonos színekkel a csúcsszögeket!



3. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) Nincs olyan párhuzamos szárú szögpár, ahol a két szög különböző.

b) Minden fordított állású tompaszögpárban a két szög egyenlő.

c) Egy 120°-os és egy 60°-os szög nem alkothat párhuzamos szárú szögpárt.

d) Ha két szög egyenlő, akkor egyállásúak.

e) Ha két szög szárai páronként párhuzamosak, akkor a két szög egyenlő.

4. Keresd meg a kiegészítő szögpárokat!

a) 44° 28′; *b)* 14° 33′;
c) 76° 27′; *d)* 72° 44′;
e) 103° 33′; *f)* 17° 56′;
g) 72° 4′; *h)* 45° 32′.

5. Add meg a kiegészítő szögét!

a) 23° 45′ 19″;
b) 143° 42′ 27″;
c) 90° 32′ 48″;
d) 3° 15′ 26″.

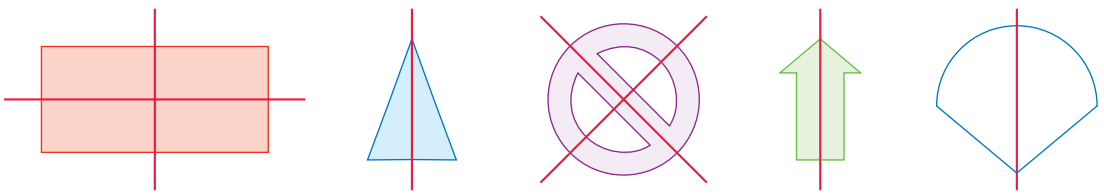
III. 8. KÖZÉPPONTOS ÉS TENGELYES SZIMMETRIA



JÁTÉK

Rajzoljatok írólapra körzővel egy kb. 4-5 cm sugarú kört! A kör belsejében egyforma pénzérméket (vagy korongokat) kell felváltva elhelyezni. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét el tudja helyezni. A lerakott pénzérméket már nem szabad megmozdítani, és a pénzérméknek nem lehet átfedése egymással.
Elemezzétek a játékot! Hogyan lehetne biztosan nyerni a játékban?

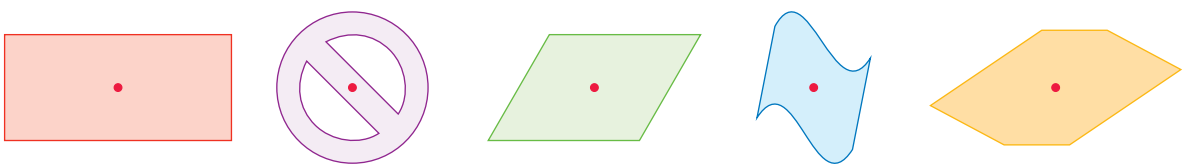
Tavaly megismerkedtünk a **tengelyes tükrözés**sel, és bevezettük a **tengelyes szimmetria** fogalmát is. Azt a síkbeli alakzatot nevezzük tengelyesen szimmetrikusnak, amelyhez van olyan tengelyes tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.
A következő ábrákon tengelyesen szimmetrikus síkidomokat figyelhetsz meg:



A középpontos tükrözés bevezetése után természetesen **középpontos szimmetriá**ról is tudunk beszélni.

Azt a síkbeli alakzatot nevezzük középpontosan szimmetrikusnak, amelyhez van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.

Az ábrán középpontosan szimmetrikus síkidomokat látsz:



A középpontos szimmetria a környezetünkben is megtalálható. Az előző évben a tengelyes szimmetria arányosságát és kiegyensúlyozottságát figyelhettük meg. Hasonlóan szépek a középpontosan szimmetrikus alakzatok is. A képek színezésétől néha eltekintünk, csak az alakzatok szimmetriájáról beszélünk.










1. PÉLDA

Adva van három pont a következő koordinátákkal: $A(-3; -2)$, $B(3; 0)$, $C(1; 4)$. Adjuk meg a D pont koordinátáit úgy, hogy a négy pont egy középpontosan szimmetrikus négyszög csúcsait adja!

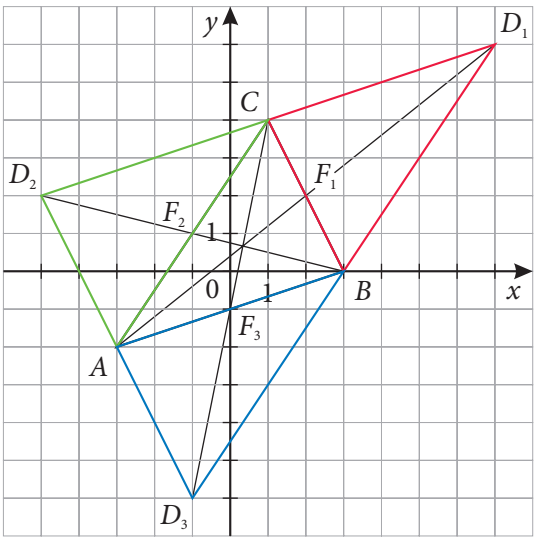
Megoldás

Három eset lehetséges.

I. Ha a B és a C egymás középpontos tükörképei, akkor a középpont a BC szakasz F_1 felezőpontja lesz.

II. Ha az A és a C egymás középpontos tükörképei, akkor a középpont az AC szakasz F_2 felezőpontja lesz.

III. Ha az A és a B egymás középpontos tükörképei, akkor a középpont az AB szakasz F_3 felezőpontja lesz.



Készítsünk ábrát!

Az ábráról leolvashatók a fontos pontok koordinátái.

A felezőpontok: $F_1(2; 2)$, $F_2(-1; 1)$, illetve $F_3(0; -1)$.

A hiányzó negyedik csúcs:
$D_1(7; 6)$, $D_2(-5; 2)$, illetve $D_3(-1; -6)$.

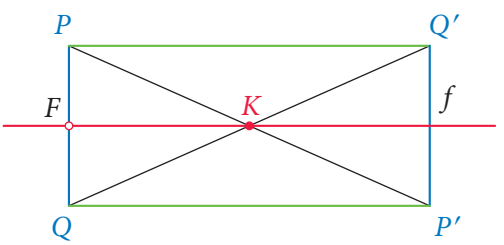
Három paralelogrammát kaptunk megoldásként: ABD_1C, BCD_2A, CAD_3B.

2. PÉLDA

Milyen helyzetű K pontra kell tükröznünk a PQ szakaszt, ha azt szeretnénk, hogy a $PQP'Q'$ négyszög téglalap legyen?

Megoldás

Ha K nem illeszkedik a PQ egyenesre, akkor $PQP'Q'$ négyszög paralelogramma. Ez a paralelogramma akkor lesz téglalap, ha az átlói (illetve az átlóinak a fele) egyenlő hosszúságúak. Vagyis olyan K pontot keresünk, amelyre $PK = QK$. Ezek a K pontok a PQ szakasz f felezőmerőlegesén találhatók.



Megmutatjuk, hogy a PQ szakasz F felezőpontja kivételével a felezőmerőleges minden pontja megfelelő lesz.
Legyen egy ilyen tetszőleges pont a K. Ekkor $PK = QK$, vagyis $PP' = QQ'$ is teljesül a tükrözés miatt. Olyan $PQP'Q'$ négyszöget kaptunk, amelyben az átlók egyenlő hosszúságúak, és felezik is egymást. Tehát a $PQP'Q'$ valóban téglalap.

III. 8. KÖZÉPPONTOS ÉS TENGELYES SZIMMETRIA

FELADATOK

1. Keresd meg azokat a számjegyeket, amelyek lerajzolhatók középpontosan szimmetrikus alakzatként!

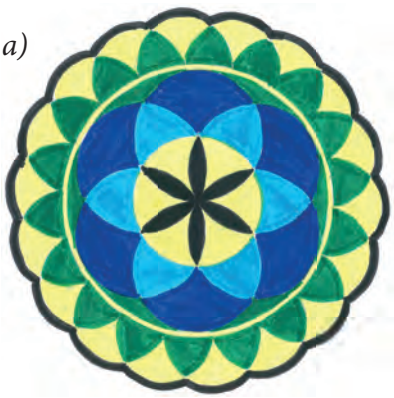
2. Mely nyomtatott nagybetűk rajzolhatók le középpontosan szimmetrikus alakzatként is?

3. Készíts nyomtatott nagybetűkből olyan betűsorokat, amelyek középpontosan szimmetrikusak!

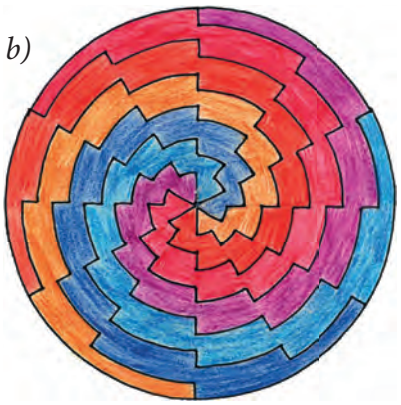
4. Rajzolj a füzetedbe olyan középpontosan szimmetrikus nyolcszöget, amelyik nem tengelyesen szimmetrikus! Sorold fel néhány tulajdonságát!

5. A következő ábrákat körző és vonalzó segítségével hetedikesek készítették. Csoportosítsd a képeket az eddig tanult szimmetriák szerint!

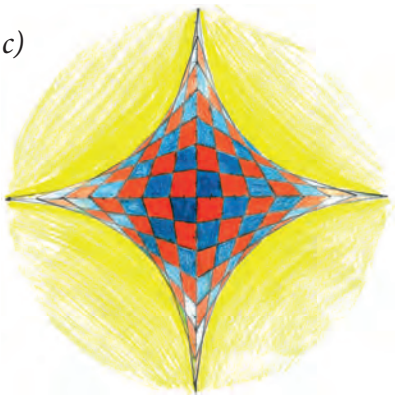
a)



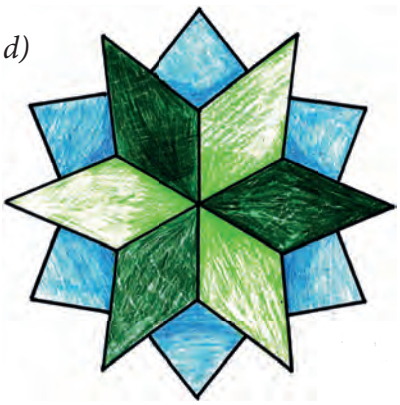
b)



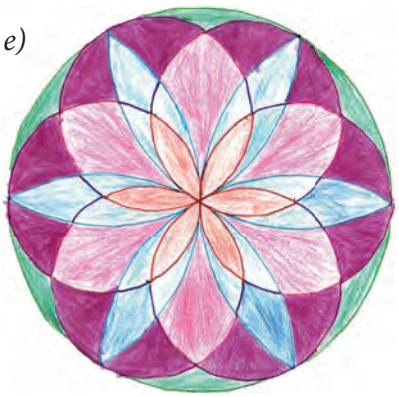
c)



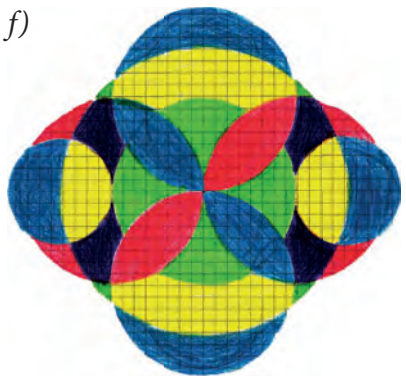
d)



e)



f)



6. Válaszd ki a megadott pontok közül azt a négyet, amelyik középpontosan szimmetrikus négyszöget határoz meg! Ha tudsz, akkor válassz többféleképpen is!

$A(-5; 2)$; $B(-1; 1)$; $C(2; 0)$; $D(0; 4)$; $E(3; 2)$; $F(5; 2)$; $G(3; 3)$; $H(4; 5)$.

9. PARALELOGRAMMA ÉS DELTOID III.

Mi lehet a magyarázata annak, hogy a címben szereplő két négyszöget együtt említjük?

A legegyszerűbb sokszög a háromszög.
Milyen négyszöget kaphatunk, ha a háromszöget tükrözéssel megduplázzuk?

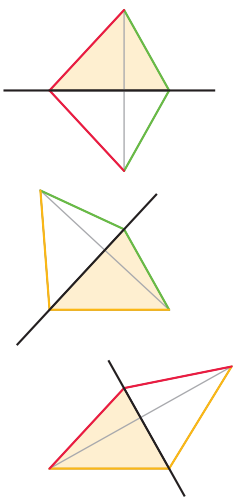


1. PÉLDA

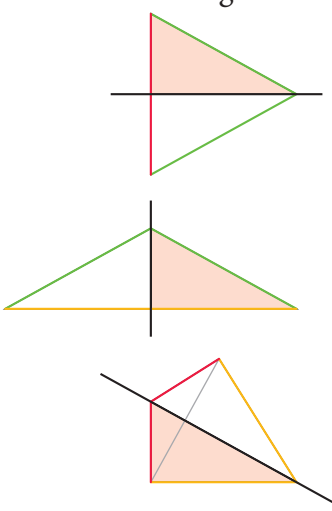
Tükrözzük tengelyesen a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszöget mindhárom oldalegyenesére! Milyen sokszöget kapunk az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével?

Megoldás

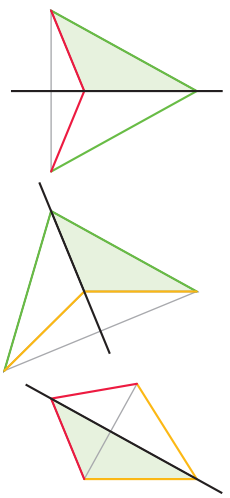
Hegyesszögű



Derékszögű



Tompaszögű



Ezzel az egyesítéssel általában deltoidot kapunk. Kivételnek számít, ha a derékszögű háromszög befogóira tükrözünk, mivel ekkor egyenlő szárú háromszög lesz az egyesítés eredménye.
Amikor a tompaszögű háromszögnek nem a leghosszabb oldalára tükrözünk, konkáv deltoidot kapunk.

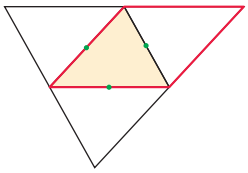


2. PÉLDA

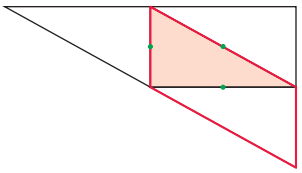
Tükrözzük középpontosan a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszöget mindhárom oldalfelező pontjára! Milyen sokszöget kapunk az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével?

Megoldás

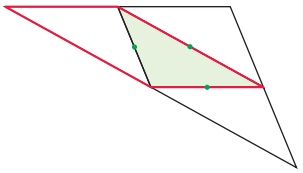
Hegyesszögű



Derékszögű



Tompaszögű



Ha az eredeti és a képként kapott háromszöget egyesítjük, minden esetben paralelogrammát kapunk.

Megfogalmazunk néhány fontos észrevételt:

Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor az paralelogramma.
Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus valamelyik átlójára, akkor az deltoid.
Ha egy deltoid középpontosan szimmetrikus, akkor az rombusz.
Ha egy paralelogramma tengelyesen szimmetrikus az átlójára, akkor az rombusz.

FELADATOK

1. Miért nem lehet egy háromszög középpontosan tükrös?

2. *a)* Rajzolj öt olyan pontot, amelyek középpontosan szimmetrikus helyzetűek!
b) Lehet-e egy ötszög középpontosan szimmetrikus?

3. Rajzolj páros oldalszámú középpontosan szimmetrikus sokszögeket! Konkáv és konvex sokszögek is legyenek a rajzaid között!

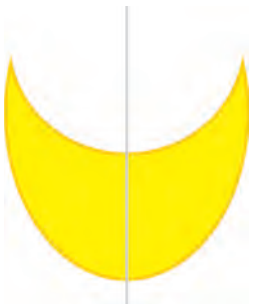
4. Fogalmazzatok meg olyan tulajdonságokat, amelyek a paralelogrammára és a deltoidra is érvényesek!

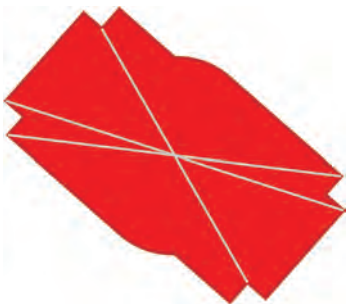
5. Igazak-e a következő állítások?
a) Ha egy sokszög páros oldalszámú, akkor középpontosan tükrös.
b) Ha egy sokszög középpontosan tükrös, akkor páros oldalszámú.
c) Ha egy sokszög szabályos, akkor középpontosan szimmetrikus.
d) Ha egy sokszög szabályos, akkor tengelyesen tükrös.
e) Ha egy sokszög minden oldalának van párhuzamos párja, akkor az középpontosan tükrös.
f) Ha egy sokszög minden oldalának van vele egyenlő hosszúságú párja, akkor az középpontosan tükrös.

10. KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK III.

Már megismerkedtünk a tengelyes és a középpontos szimmetriával. Most tovább folytatjuk a szimmetrikus alakzatok vizsgálatát, hogy újabb tulajdonságaikat is felfedezzük.
Emlékeztető:

- Azt a síkbeli alakzatot nevezzük tengelyesen szimmetrikusnak, amelyhez van olyan tengelyes tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.
- Azt a síkbeli alakzatot nevezzük középpontosan szimmetrikusnak, amelyhez van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.



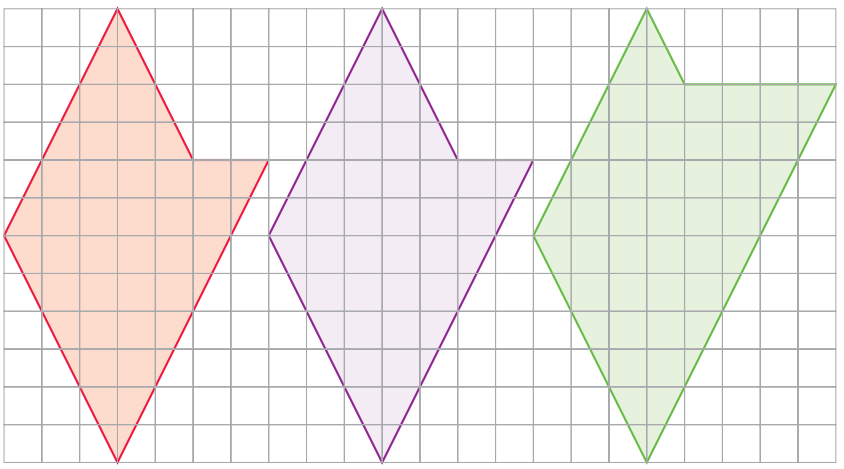




CSOPORTMUNKA

Kirakós játék

Vágjátok ki az ábrán látható síkidomokat kartonpapírból! A négyzetrács segít, hogy pontos másolatokat készítsetek.



a) Hogyan lehet az első és a második síkidomot egymáshoz illeszteni, hogy középpontosan szimmetrikus alakzatot kapjunk?

b) Hogyan lehet az első és a második síkidomot egymáshoz illeszteni, hogy tengelyesen szimmetrikus alakzatot kapjunk?

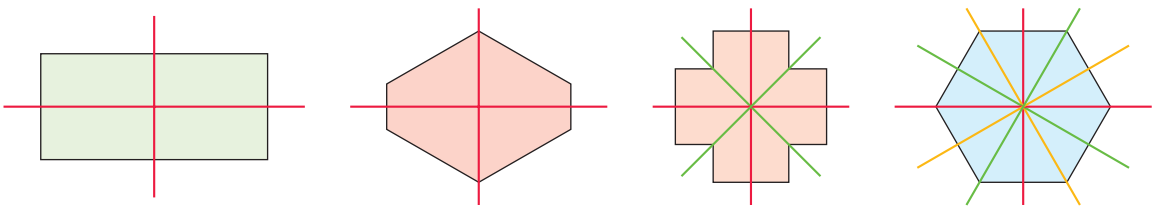
c) Hogyan lehet az első és a harmadik síkidomot egymáshoz illeszteni, hogy tengelyesen szimmetrikus alakzatot kapjunk?

Dolgozzatok két-három fős csoportokban! A síkidomok az összeillesztésnél akár meg is fordíthatók. Ha a három kérdésből kettőre megtaláljátok a választ, az már nagyon jó!

1. PÉLDA

Rajzoljunk olyan sokszögeket, amelyek középpontosan és tengelyesen is szimmetrikusak! Mit figyelhetünk meg?

Megoldás



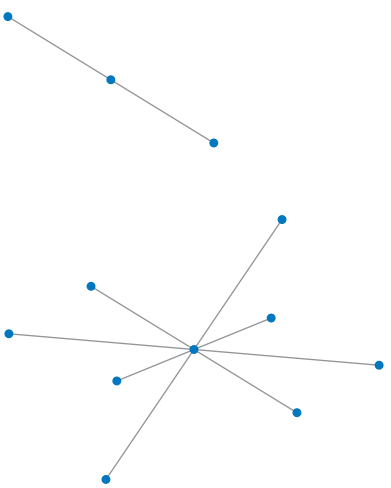
Megfigyelhető, hogy a tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus sokszögeknek legalább két szimmetriatengelye van.
Ha berajzoltunk egy szimmetriatengelyt, akkor a szimmetria-középpontban a rá merőleges egyenes is szimmetriatengely lesz.

2. PÉLDA

Adjunk válaszokat a következő kérdésekre!
a) Van-e három pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzat?
b) Van-e középpontosan szimmetrikus háromszög?
c) Van-e középpontosan szimmetrikus négyszög?
d) Van-e páratlan sok pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzat?
e) Van-e páratlan sok csúcsú, középpontosan szimmetrikus sokszög?

Megoldás

a) Három pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzatot csak úgy tudunk létrehozni, ha az egyik pont maga a szimmetria-középpont, vagyis a másik kettő között éppen középen található.
b) Középpontosan szimmetrikus háromszög nem létezik, hiszen ha lenne, akkor mindegyik oldalának volna párhuzamos párja. Három oldal esetén ez nem lehetséges.
c) Ilyen négyszög van. Ezek a paralelogrammák.
d) Páratlan sok pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzatot csak úgy tudunk létrehozni, ha az egyik pont a szimmetria-középpont lesz, a többiek pedig párosával, erre középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el.
e) Ilyen sokszög nem létezik. Az indoklást a háromszög esetén leírtakhoz hasonlóan fogalmazhatjuk meg.



FELADATOK

1. Rajzold le néhány autó márkajelzését a füzetedbe! Írd mellé, ha valamelyik tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikus!

2. Gyűjts egyszerű, középpontosan szimmetrikus ábrákat a környezetedből! **Ra**jzold le őket!

3. Melyik igaz? Melyik hamis?

a) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor páros oldalszámú.
b) Ha egy sokszög páros oldalszámú, akkor középpontosan szimmetrikus.
c) Ha egy sokszög tengelyesen szimmetrikus, akkor páros oldalszámú.
d) Ha egy sokszög páros oldalszámú, akkor tengelyesen szimmetrikus.
e) Ha egy sokszögben minden oldalnak van párhuzamos párja, akkor a sokszög középpontosan szimmetrikus.
f) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor minden oldalának van párhuzamos párja.

4. *a)* A sakktáblát két színnel színezik. A színeket is figyelembe véve, milyen szimmetriája van a sakktáblának?
b) Egy hatszor hatos táblát színezz ki két színnel úgy, hogy tengelyesen szimmetrikus legyen! Tervezz több ábrát is!
c) Egy négyszer négyes táblát színezz ki három színnel úgy, hogy középpontosan szimmetrikus legyen!

5. Pentominónak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyek öt darab egység (például 1 cm^2) területű négyzetből rakhatók össze. A négyzeteket az oldalaik mentén illesztheted egymáshoz.



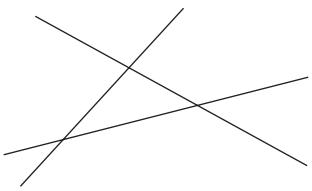
a) Rajzold le a füzetedbe az összes pentominót! Csak azokat tekintsd különbözőnek, amelyek elforgatással és tükrözéssel sem hozhatók fedésbe egymással! Törekedj arra, hogy megtaláld mind a tizenkettőt!
b) Csoportosítsd őket a szimmetriájuk szerint!

6. Válogasd szét a képeket! Melyik középpontosan szimmetrikus?



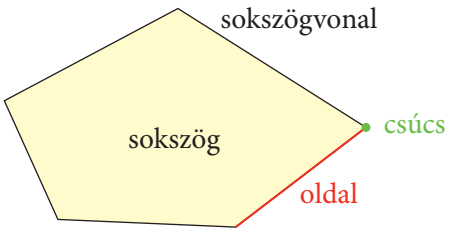



III. 11. SZABÁLYOS SOKSZÖGEK



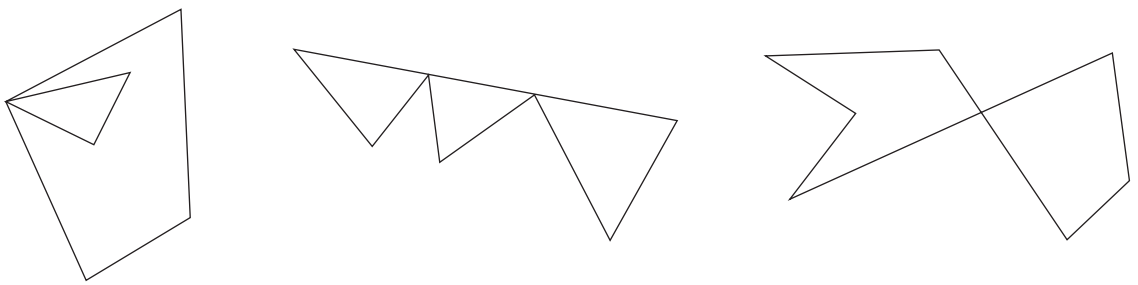
A sík darabolásával síkidomokat hozhatunk létre. Az ábrán három olyan egyenest látsz, amelyek páronként metszik egymást.
Ezek hét részre vágják a síkot, és közülük csak a középső nem nyúlik a végtelenbe. Ez a középső síkidom egy sokszög. Három egymáshoz csatlakozó szakasz határolja, **háromszög**nek nevezzük.

A síkban egymáshoz csatlakozó, záródó töröttvonalat **sokszögvonal**nak, az általuk határolt síkidomot pedig **sokszög**nek nevezzük. Az egymáshoz csatlakozó szakaszok a sokszög oldalait, a szakaszok végei a sokszög csúcsait adják.

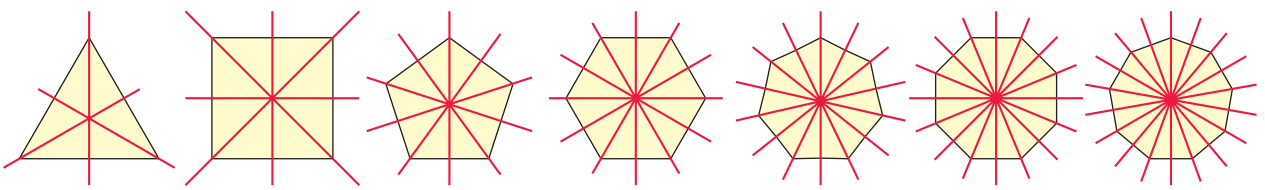


Mi csak az egyszerű sokszögvonalakkal foglalkozunk, azaz
- a csúcsok és oldalak száma egyenlő;
- minden csúcsba két oldal fut be;
- az oldalaknak a csúcsokon kívül nincs közös pontjuk.

Mutatunk néhány nem egyszerű sokszögvonalat:



Ha a sokszög minden oldala és minden belső szöge egyenlő, akkor **szabályos sokszög**ről beszélünk.



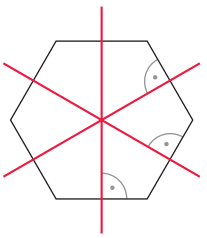
Minden szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus.

1. PÉLDA

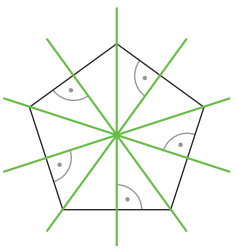
Hány oldala lehet a szabályos sokszögnek, ha van
a) olyan tengelye, amelyikre nem illeszkedik csúcs?
b) olyan tengelye, amelyikre pontosan egy csúcs illeszkedik?
c) olyan tengelye, amelyikre két csúcs illeszkedik?
d) szimmetria-középpontja?

Megoldás

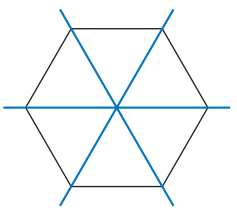
a) A páros oldalszámú szabályos sokszögekben az oldalfelező merőlegesek tengelyek lesznek, és nem illeszkedik rájuk csúcs.



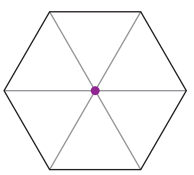
b) A páratlan oldalszámú szabályos sokszögekben az oldalfelező merőlegesek tengelyek lesznek, és a szemközti csúcs illeszkedik rájuk.



c) A páros oldalszámú szabályos sokszögekben bármely csúcsot a vele szemközti csúccsal összekötő egyenes ilyen tengely lesz.



d) A páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van szimmetria-középpontjuk.



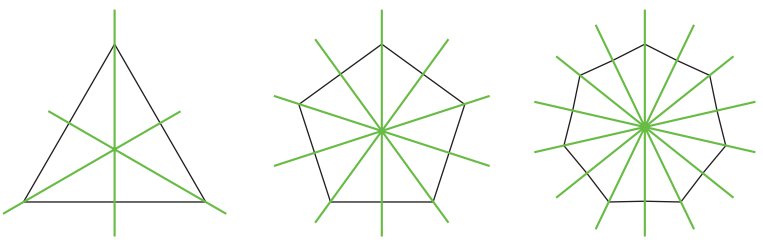
2. PÉLDA

Hány szimmetriatengelye van a szabályos sokszögeknek?

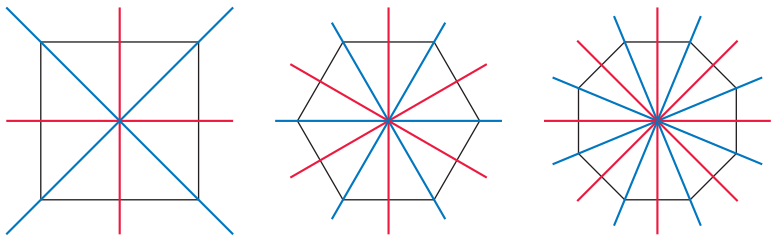
Megoldás

Érdemes külön vizsgálni a páratlan és a páros oldalszámú sokszögeket.

I. A páratlan oldalszámú szabályos sokszögek bármely oldalfelező merőlegese szimmetriatengely. Ebből következik, hogy a tengelyek száma egyenlő az oldalak számával.



II. A páros oldalszámú szabályos sokszögekben bármely oldalfelező merőleges szimmetriatengely. Egy ilyen tengely két oldalnak is a felezőmerőlegese lesz, így ezek száma az oldalak számának felével egyenlő. A két-két szemközti csúcsot összekötő egyenes is tengely lesz. Az ilyen egyenesek száma a csúcsok számának a felével egyenlő. Mivel a csúcsok és az oldalak száma egyenlő, ezért a tengelyek száma összesen most is az oldalak számával egyenlő.



A példák alapján a következő hasznos állításokat fogalmazhatjuk meg:

A szabályos sokszögek szimmetriatengelyeinek száma egyenlő az oldalainak számával, vagyis az n oldalú sokszögnek n darab szimmetriatengelye van.

A páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van, a páratlan oldalszámú szabályos sokszögeknek nincs szimmetria-középpontja.

FELADATOK

1. Hol találsz a környezetedben szabályos sokszögeket?

2. Döntsd el, igaz vagy hamis!

a) Egy sokszög csak akkor lehet tengelyesen szimmetrikus, ha szabályos.

b) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor szabályos.

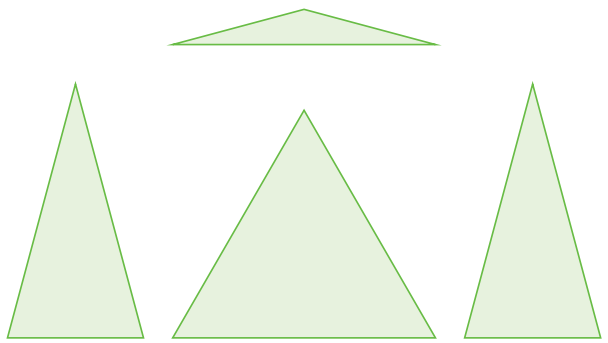
c) A szabályos sokszögnek biztosan van legalább három szimmetriatengelye.

d) Ha egy sokszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor szabályos.

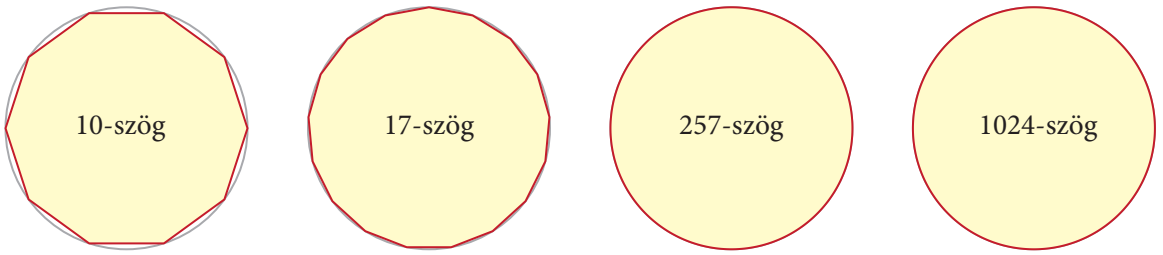
3. Egy egyenlő szárú háromszög szögei: 30°, 75°, 75°. Hány darab egybevágó példányra lenne szükséged, ha szabályos sokszöget szeretnél összerakni belőlük?

4. Egy szabályos sokszög összes szimmetriatengelyét megrajzoltuk. Ezek 10 csúcson haladtak át. Hány oldalú a sokszög?

5. Készítsd el papírból az ábrán látható egyenlő szárú háromszögeket! Milyen szabályos sokszöget tudsz kirakni mind a négy felhasználásával?



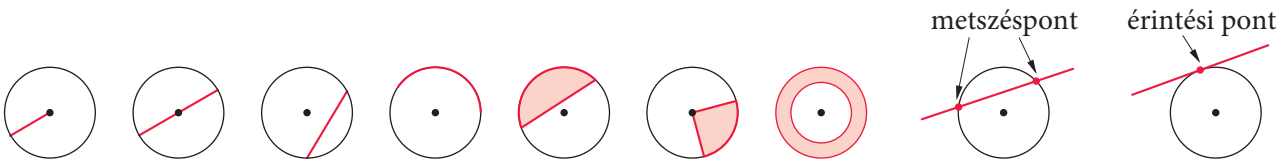
Sok másik mellett tudunk szabályos 10-szöget, 17-szöget, 257-szöget és 1024-szöget is rajzolni, sőt szerkeszteni is. Az ábrán is láthatjátok, hogy ebben a méretben már a 257-szöget sem igazán lehet megkülönböztetni a körtől, az 1024-szöget pedig szemmel lehetetlen. Ettől azonban ezek matematikai értelemben különböző alakzatok.



Nagyobb méretben már látszanának a különbségek. Ha például azt szeretnénk, hogy 1 m legyen az 1024 oldalú szabályos sokszög oldala, akkor körülbelül 163 méter sugarú körbe kellene beírnunk. Ez nem lehetetlen, de nem is könnyű feladat.

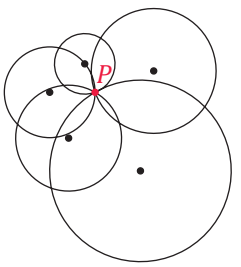
A körnek végtelen sok szimmetriatengelye van, minden olyan egyenes szimmetriatengelye, amelyik átmegy a kör középpontján. A kör középpontosan is szimmetrikus a középpontjára nézve.

A következő ábrák alapján feleleventheted a körrel kapcsolatos legfontosabb fogalmakat. Vannak köztük olyanok, amelyekkel találkoztunk már, és vannak közöttük újak is, de ezek elnevezése az ábrák alapján szemléletes.



1. PÉLDA

Adott a síkon egy P pont. Rajzoljunk olyan köröket, amelyek ezen a ponton áthaladnak! Mit tapasztalunk? Hány ilyen kör van? Hogyan kell ilyen köröket rajzolnunk?

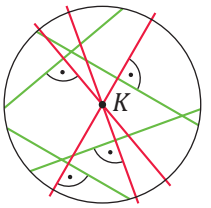


Megoldás

Tetszőlegesen sok ilyen kört tudunk rajzolni. Kiválasztunk egy K középpontot a síkon. Természetesen nem a P pontot. Ehhez megrajzolható a K középpontú KP sugarú kör.

2. PÉLDA

Rajzoljunk egy K középpontú kört! Szerkesszük meg a kör néhány húrjának a felezőmerőlegesét! Mit tapasztalunk?

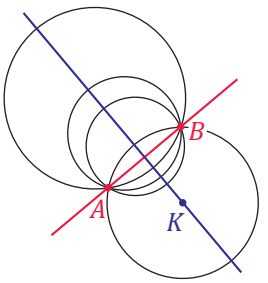


Megoldás

A felezőmerőlegeseket a tavaly tanult módon megszerkeszthetjük. Ezek mindegyike áthalad a kör középpontján.

3. PÉLDA

Adott a síkon az A és a B pont. Rajzoljunk olyan köröket, amelyek ezeken a pontokon áthaladnak! Hány ilyen kör van? Hogyan kell ezeket a köröket megrajzolnunk?



Megoldás

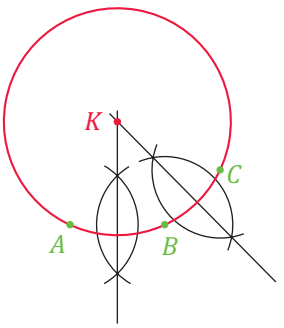
Most is tetszőlegesen sok megfelelő kört tudunk rajzolni. Az AB szakasz a kör húrja lesz, ezért a kör középpontja csakis az AB felezőmerőlegesén lehet. Erről az egyenesről választhatjuk a kör K középpontját. A KA és KB szakasz a kör sugara lesz.

4. PÉLDA

Adott a síkon három, nem egy egyenesre illeszkedő pont: A, B és C. Hogyan lehet olyan kört szerkeszteni, amely mindhárom ponton átmegy? Hány ilyen kör van?

Megoldás

A keresett körben az AB, BC és a CA húr lesz. Tudjuk, hogy mindhárom szakasznak a felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Ezért elegendő két felezőmerőlegest megszerkesztenünk. A K metszéspontjuk lesz a kör középpontja. A KA, KB és KC a kör sugarát adja.

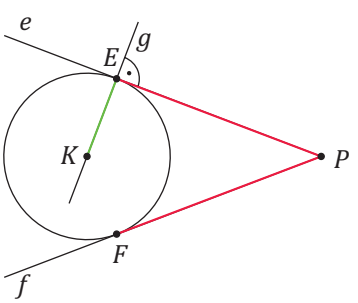


Ilyen kör csak egy van.

5. PÉLDA

Kiegészítő tananyag

Az ábrán egy K középpontú kört és a körhöz a P pontból húzott e és f érintőket látjuk. Az ábra tanulmányozásával fogalmazzunk meg igaz állításokat!



Megoldás

Az ábrán az e egyenes merőleges az EK sugárra. Rövid jelöléssel: $e \perp EK$.
A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
A K pont illeszkedik a g egyenesre. Rövid jelöléssel: $K \in g$.
Az érintési pontban az érintőre merőleges egyenesre illeszkedik a kör középpontja.
Az E pontra illeszkedő további egyenesek metszenék a kört.
A kör egy adott pontjában csak egy érintő rajzolható.
Az ábrán látható PE és PF szakaszok egyenlő hosszúak.
Egy körön kívüli pontból két érintő húzható a körhöz, és az ezeken lévő érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

FELADATOK

1. Miben különbözik a kör egy szelője és egy húrja? Fogalmazzátok meg! Mondjatok egy magyar mondatot, amelyikben a *szelő*, és egy másikat, amelyikben a *húr* szó szerepel!

2. Autópálya-gyűrű, jegygyűrű, seeger-gyűrű, „Egy gyűrű mind felett.”, Csollány Szilveszter. Hol találkozhattatok ezekkel a kifejezésekkel? Mi köze ezeknek a körgyűrűhöz? Használd az internetet!

3. Vegyél fel a füzetedben egy A és egy tőle 4 cm távolságra lévő B pontot!

a) Szerkeszd meg a legkisebb sugarú kört, amely átmegy mindkét ponton!
b) Meg tudod szerkeszteni a legnagyobb sugarú ilyen tulajdonságú kört is?

4. Vegyél fel a füzetedben három különböző pontot, legyenek ezek A, B és C!

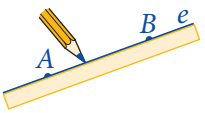
a) Szerkeszd meg azt a kört, amelyik átmegy mindhárom ponton!
b) Hogyan helyezkedik el az A, B és C pont, ha nem létezik ilyen kör?



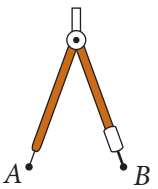
III. 13. SZERKESZTÉSEK

Már az előző években is készítettünk ábrákat vonalzó és körző segítségével. A síkidomok tengelyes és középpontos tükrözését is ezekkel végeztük. Azt is tudjuk, hogy szerkesztésről csak akkor beszélünk, ha a vonalzónknak egy élét használjuk, és betartjuk a következőket:

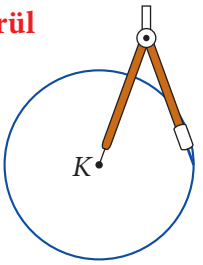
– **A vonalzót két adott ponthoz illesztve meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.**



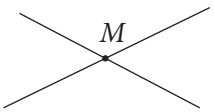
– **Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.**



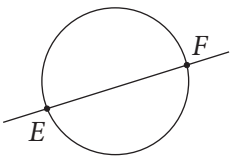
– **Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.**



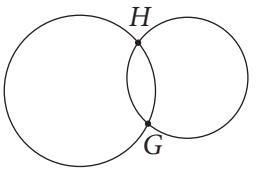
– **Két egyenes metszéspontját megszerkesztettnek tekintjük.**



– **Egyenes és kör metszéspontjait megszerkesztettnek tekintjük.**



– **Két kör metszéspontjait megszerkesztettnek tekintjük.**



Ebben az esetben **euklideszi szerkesztés**ről beszélünk, amit röviden csak szerkesztésnek nevezünk.



Kr. e. 300 körül született Alexandriai Eukleidész görög matematikus, akit később a geometria atyjaként is emlegettek. Miután befejezte athéni tanulmányait, megalapította az alexandriai matematikai iskolát. Ő a híres ókori matematikakönyv, az *Elemek* szerzője, amelyben összefoglalta a matematika alapjait. Születésének éve és helye, valamint halálának körülményei ismeretlenek.

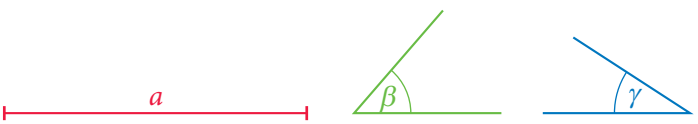
1. PÉLDA

Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a oldala, valamint az ezen az oldalon fekvő β és γ szög!

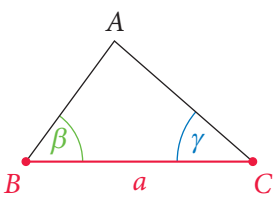
Megoldás

Ha az adatokat a feladat szövege nem adta meg, akkor azokat tetszőlegesen felvehetjük.

Adatok:



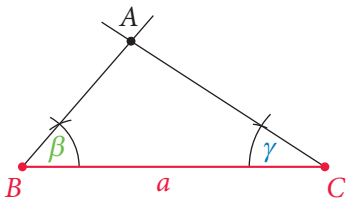
Vázlat:



Most csak az a oldal, valamint a β és a γ szög adott, ezért csak ezeket szerepeltetjük a vázlatrajzon. A B és a C pontokra tömött karikát tettünk, ezzel jelezve, hogy a szerkesztést az a szakasz felvételével fogjuk kezdeni. Az adatoknál szereplő a szakaszt a tanult módon a megfelelő helyre másoljuk.

A szerkesztés menete: Az A pontot szeretnénk megszerkeszteni. A szerkesztési lépésekből tudjuk, hogy egy pont akkor megszerkesztett, ha az két vonalnak – két egyenesnek, egy egyenesnek és egy körnek vagy két körnek – a metszéspontja.

Milyen vonalon van rajta az A pont?
A BC szakasz B végpontjához másolt β szög BC félegyenestől különböző szára lesz az egyik egyenes, amelyikre A illeszkedik.

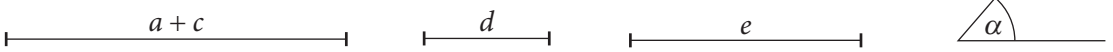


Milyen másik vonalon van rajta még az A pont?
A BC szakasz C végpontjához másolt β szög CB félegyenestől különböző szára lesz a másik egyenes, amelyikre A illeszkedik.
A két egyenes metszéspontja adja az A pontot.

Kivitelezés: Az adatok felhasználásával a leírás alapján, illetve a vázlatrajz segítségével megszerkeszthetjük a háromszöget. Ha $\beta + \gamma \geq 180°$, akkor nem kapunk megoldást.

2. PÉLDA

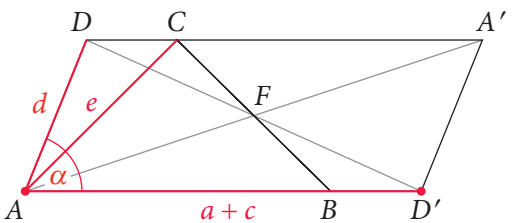
Szerkesszünk trapézt, ha adott az alapjainak összege, az egyik szár hossza, az egyik átló hossza és a hosszabb alapon fekvő egyik szög nagysága a szokásos jelöléssel: $a + c$, d, e, α!

Adatok: 

Megoldás

Készítsünk vázlatot! A trapézt középpontosan tükrözzük a BC szár F felezőpontjára, mert ekkor megjelenik a rajzunkon az $a + c$ hosszúságú szakasz is.

Vázlat:



A vázlatrajzon csak az adott szakaszok hosszát jelentő kisbetűket, valamint a szög nagyságát jelentő görög betűt jelöltük, így jól láthatók az adatok. Tömött karikát tettünk annak a szakasznak a két végére, amellyel a szerkesztést el szeretnénk kezdeni.
Az $ABCD$ trapéz és a BC szár F felezőpontjára tükrözött képe, vagyis az $A'CBD'$ trapéz együtt egy paralelogrammát alkot. Ezt használjuk fel a szerkesztés során.

A szerkesztés menete:

- Az AD' szakasz két végére tettük a tömött karikát, ezért rajzolunk egy A kezdőpontú félegyenest, majd a körzőnyílásba vett $a + c$ hosszúságú szakaszt rámérjük. Így kapjuk a D' pontot.
- Az A pontba az AD' szakaszra másoljuk az α szöget. A szög szára adja a D pont megszerkesztéséhez szükséges egyik vonalat.

- A most megrajzolt szögszárra rámérjük az adott d hosszúságú szakaszt, azaz az A középpontú d sugarú kör a D pont másik vonala lesz. Így megkapjuk a D csúcsot.
- A D középpontú, $a + c$ sugarú és a D' középpontú, d sugarú körök metszéspontja lesz az A' pont.
- Az $AD'A'D$ paralelogramma átlóinak metszéspontja adja az F pontot. Az A középpontú, e sugarú kör kimetszi az $A'D$ szakaszból a C-t. A CF egyenes pedig kimetszi az AD' egyenesből a B-t.

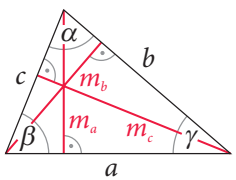
A leírás alapján kivitelezhető a szerkesztés.

Az adatokat most is tetszőlegesen vettük fel. A felvett adatok azonban nem biztos, hogy meghatároznak egy trapézt. Ezért a feladat megoldásához a szerkeszthetőség feltételeinek vizsgálata is hozzátartozik. Például az α csak hegyesszög lehet, az e nem lehet nagyon kicsi és nagyon nagy sem. Most nem foglalkozunk részletesebb vizsgálattal, de a kivitelezésnél azonnal kiderül, ha az adatokból nem szerkeszthető meg a trapéz.

FELADATOK

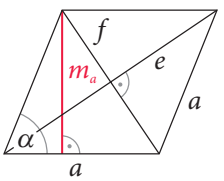
1. Szerkessz háromszöget a következő adatokból!

a) a, b, c *b)* $a, b, \gamma = 60°$ *c)* a, b, m_a



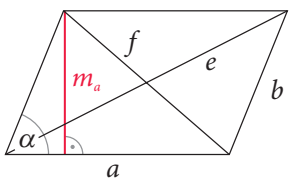
2. Szerkessz rombuszt a következő adatokból!

a) a, e *b)* $a, \alpha = 45°$ *c)* a, m_a



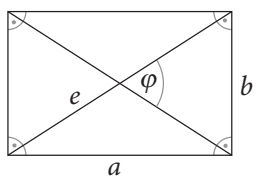
3. Szerkessz paralelogrammát a következő adatokból!

a) a, b, α *b)* a, b, e *c)* a, b, m_a

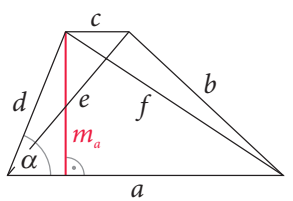


4. Szerkessz téglalapot a következő adatokból!

a) a, b *b)* a, e *c)* e, φ



5. Szerkessz trapézt, ha adott az $a + c$, m_a, e, α!



14. ÖSSZEFOGLALÁS III.

Felelevenítettünk néhány már ismert geometriai fogalmat, és megtudtuk, hogy mikor **konvex**, illetve **konkáv** egy alakzat.

Megismertünk néhány speciális négyszöget: a trapézt, a szimmetrikus trapézt, a paralelogrammát, a rombuszt és a deltoidot. Ezeknek a négyszögeknek sok tulajdonságát, jellemzőjét is felsoroltuk.

Egy új geometriai transzformációval, a **középpontos tükrözéssel** ismerkedtünk meg. A középpontos tükrözés (ugyanúgy, mint a tengelyes tükrözés) **egybevágósági** transzformáció.

Összegyűjtöttük a középpontos tükrözés legfontosabb tulajdonságait:

- Távolságtartó, szögtartó, egyenestartó.
- A középpontra illeszkedő egyenes képe önmaga.
- A középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.
- A félegyenes és képe fordított állású.
- A szakasz képe párhuzamos az eredeti szakasszal, de a végpontjaik sorrendje felcserélődik.
- Nem változtatja meg a körüljárási irányt.
- Ha egy középpontos tükrözés esetén az A pont képe az A', akkor az A' képe ugyanebben a középpontos tükrözésben az A lesz. Azt mondtuk, hogy a középpontos tükrözés megfordítható transzformáció.



A középpontos tükrözést bizonyításokban és szerkesztésekben is alkalmaztuk. Vizsgáltuk a **középpontosan szimmetrikus** alakzatok tulajdonságait, és készítettünk is ilyen ábrákat.

Megvizsgáltuk a szabályos sokszögek szimmetriatulajdonságait.

Néhány új, a körhöz kapcsolódó fogalom is szóba került, ilyen volt például a **szelő**, a **körszelet** és az érintő is.

FELADATOK

1. Melyik nem a középpontos tükrözés tulajdonsága?
A: Távolságtartó.
B: Az egyenes és képe párhuzamos.
C: Van olyan egyenes, amelyik egybeesik a képével.
D: A körüljárási irányt megfordítja.
E: Szögtartó.

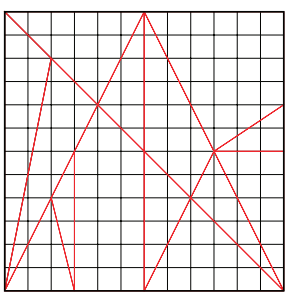
2. Melyik befejezés hibás?
Ha egy négyszög paralelogramma, akkor
A: két-két szemközti oldala egyenlő hosszúságú.
B: két-két szemközti oldala párhuzamos.
C: az átlói merőlegesen felezik egymást.
D: két-két szemközti szöge egyenlő egymással.
E: bármely két szomszédos szöge egymásnak kiegészítő szöge.

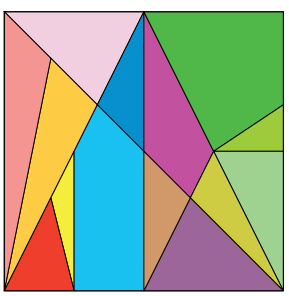
3. Rajzoltunk egy középpontosan szimmetrikus szabályos sokszöget. Hány oldala lehet a megadottak közül?
A: 1961
B: 1986
C: 2001
D: 2015
E: 2345

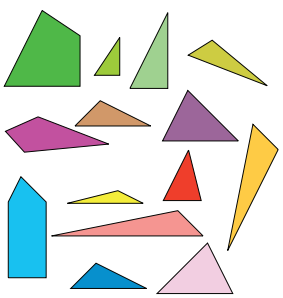
4. Mekkora a 12 cm átlóhosszúságú négyzet területe?
A: 144 cm^2
B: 72 cm^2
C: 36 cm^2
D: 288 cm^2
E: Az átló hosszával nem határozható meg a négyzet területe.

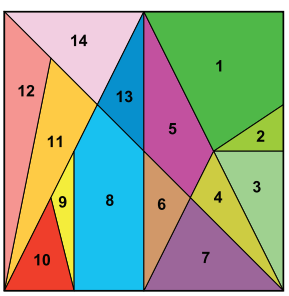
5. Milyen négyszögeket tudsz kirakni 3, 4, 5, 6, 7, illetve 8 darab egybevágó, egységoldalú szabályos háromszögből? Vágj ki 8 db ilyen háromszöget, és próbálgass! Hasonlítsátok össze a kapott négyszögeket!

6. Az ábrán látható egy ókori görög kirakójáték, az osztomachion, amelyet állítólag Arkhimédész készített. Mely darabokból tudsz trapézt kirakni? Adjál meg három lehetőséget!









7. Igaz vagy hamis?
a) Minden paralelogramma trapéz.
b) Van olyan trapéz, amelyik rombusz.
c) A téglalap paralelogramma és trapéz is.
d) A trapéz köré kör írható.

8. Rajzolj csak körök és körívek felhasználásával emojikat!

9. Szemléltesd rajzzal a következő fogalmakat: húr, átmérő, körív, körszelet, körcikk, körgyűrű, szelő, érintő! Hogyan mondják ezeket a kifejezéseket az általad tanult idegen nyelven? Keress rá az interneten!

10. Rajzolj a füzetedbe egy deltoidot! Tükrözd az átlók metszéspontjára! Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott síkidom közös része?

11. Rajzolj a füzetedbe egy téglalapot! Tükrözd az egyik átlójának egy tetszőleges pontjára! (Ne az átlók metszéspontját válaszd!) Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott síkidom közös része?

12. Rajzolj a füzetedbe egy húrtrapézt! Tükrözd az átlók metszéspontjára! Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott síkidom közös része?

13. Rajzolj egy A csúcsú hegyesszöget a két szárával, és vegyél fel a szögtartományban egy tetszőleges C pontot! Szerkeszd meg azt az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek két oldalegyenese a szög száraira esik!

14. Rajzolj egy A csúcsú hegyesszöget a két szárával, és vegyél fel a szögtartományban egy tetszőleges K pontot! Szerkeszd meg azt az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek két oldalegyenese a szög száraira esik, és a K pont az átlóinak a metszéspontja!

15. Rajzolj egy szabályos hatszöget a füzetedbe! Rajzold meg az összes átlóját is!
a) Keress az ábrádon párhuzamos szárú szögeket!
b) Keress az ábrádon tengelyesen tükrös síkidomokat!
c) Keress az ábrádon középpontosan tükrös síkidomokat!

IV. HATVÁNYOZÁS, OSZTHATÓSÁG



A következő utazással csupán röpke kb. 170 évet kellett Nellinek és Szilvinek ugrania, hogy 1846-ban láthassák az idős Johann Carl Friedrich Gausst.

– Tudja jól, hogy nem szoktam tanítványokat vállalni – temetkezett vissza Gauss a függvényekkel teleírt papírjai közé.

– Az ön zsenialitása és az eredményeim arra bátorítottak, hogy személyesen érdeklődjek a prímekről írt levelem sorsáról.

– Igen, olvastam – söpört félre kezével néhány papírlapot Gauss. – Ám ezeket már én is leírtam a prímszámokról!

– Ismerem a professzor úr munkáit, és nagyon nagyra becsülöm önt, de nekem új gondolataim vannak a prímek elhelyezkedésével kapcsolatban…

– Azért fogadtam. Mert elgondolkodtató dolgokat is írt, amelyek valójában nekem is újak voltak.

Az utolsó szavakat olyan halkan mormolta maga elé, hogy a lányok alig értették.

– A függvényem…

– Jöjjön minden kedden pontban 10 órára. Most elmehet. Mi is a neve?

– Bernhard Riemann vagyok, professzor úr, és ígérem, pontos leszek!

A lányok eltávolodtak a helyszíntől, és a látványt köddé mosta az idő.

– Rémes, hogy minden tanárnak a mániája a pontosság – morfondírozott Szilvi hangosan –, és milyen keményen kiosztotta azt a Riemannt.

– Úgy látszik, Gauss egy zseni volt, de nem túl kedves.

– Ebből következik, hogy ha undok vagyok, akkor matekzseni leszek? – vigyorgott kajánul Szilvi.

– Erről esetleg beszélgess Arisztotelésszel – válaszolt mosolyogva Nelli.

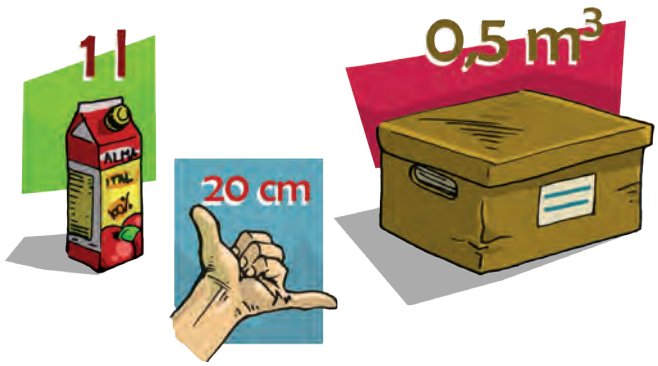
IV. 1. NAGY SZÁMOK ÉS A HATVÁNYALAKOK

A hétköznapjainkban többnyire olyan számokkal találkozunk, amelyeknek nagyságáról van elképzelésünk.

CSOPORTMUNKA

Keressetek olyan példákat (tárgyakat, élőlényeket, jelenségeket), amelyekre körülbelül jellemzőek ezek a mennyiségek!

a) 1 liter *b)* 50 kg
c) 20 cm *d)* 150 km
e) 10 080 perc *f)* 130 km/h
g) 0,5 m^3



Vannak azonban olyan mennyiségek, amelyek jellemzéséhez nagyon nagy számokat kell használnunk. Például az informatikában vagy a csillagászatban a távolságok megadásánál vagy az atomok számának meghatározásánál gyakran használunk nagy számokat. Hogyan írhatjuk fel a nagy számokat rövidebb alakban?

Próbáljuk rendszerezni az eddigi ismereteinket! Írjunk egymás alá olyan számokat, amelyek 1-gyel kezdődnek és mindig eggyel több 0-val folytatódnak! Bár a sort tetszőlegesen sokáig folytathatnánk, sőt nevet is tudnánk adni ezeknek a nagy számoknak, egy idő után egyre nagyobb lenne az esélye annak, hogy eltévesztjük a nullák számát.

Szám	10-es szorzótényezőkkel	Név
10	10	tíz
100	$10 \cdot 10$	száz
1000	$10 \cdot 10 \cdot 10$	ezer
10 000	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	tízezer
100 000	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	százezer
1 000 000	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	egymillió

Keressünk egyszerűbb leírási módot! Használjuk fel azt, hogy az egymás alatt lévő számok úgy keletkeztek, hogy az előző számot megszoroztuk 10-zel, azaz a 10 többszöri összeszorzásával kapjuk meg a fenti számokat. Ha így írjuk fel a számot, azt is látjuk, hogy hány darab tízest kell összeszorozni. Ez a forma azonban még mindig nagyon hosszú, ezért bevezetünk egy új jelölést, amivel leírhatjuk ezeket a szorzásokat:

$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$ amit így mondunk: tíz a másodikon (vagy tíz a négyzeten);

$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ kimondva: tíz a harmadikon (vagy tíz a köbön);

$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ kimondva: tíz a negyediken.

Ha tovább folytatnánk a sort, akkor például a százmilliárdot a következőképpen írnánk fel:

$100\,000\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{11}$ (tíz a tizenegyediken).

Eddig tíz szorzataival dolgoztunk, nincs akadálya annak sem, hogy más számokat szorozzunk össze. Például:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (kettő az ötödiken).

Ha egy számot többször szorzunk önmagával, akkor azt rövidebb alakban, úgynevezett hatványalakban adjuk meg.

A hatványalakban több szám is szerepel. Alul található az alap, vagyis az a szám, amelyet önmagával szorzunk. Az alap jobb felső sarkában, kicsit kisebb betűvel szerepel a kitevő, ami azt mutatja, hogy hányszor szorozzuk össze az alapot.
A hatvány alapja bármilyen eddig tanult pozitív egész szám lehet, a kitevő pedig 1-nél nagyobb egész szám.

Például:



hatvány vagy hatványalak

Ennek a hatványnak az értéke:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Ha a pozitív egész számok első hatványát is értelmezzük, akkor megállapodás szerint minden pozitív egész szám első hatványa önmaga.
Például: $2^1 = 2$ $7^1 = 7$

1. PÉLDA

Írjuk fel az alábbi szorzatokat hatványalakban!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ *b)* $5 \cdot 5 \cdot 5$ *c)* $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Megoldás

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$ *b)* $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ *c)* $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

2. PÉLDA

Írjuk fel az alábbi hatványokat szorzatalakban, és számítsuk ki a hatványok értékét!

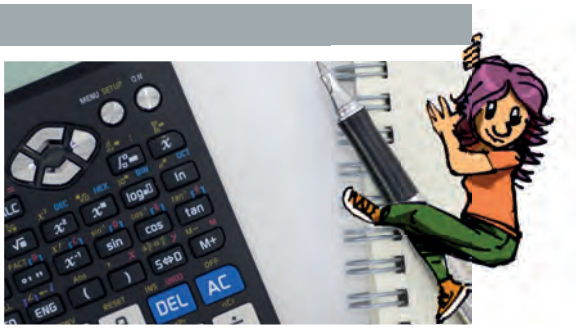
a) 2^4 *b)* 10^5 *c)* 3^3 *d)* 1^5

Megoldás

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
b) $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$
c) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
d) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

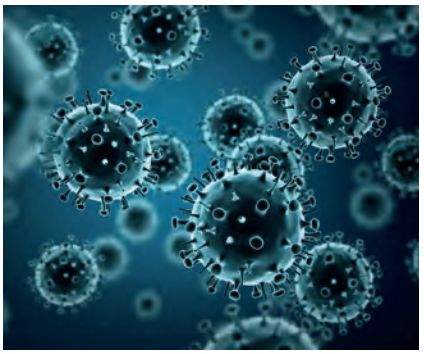
KUTATÓMUNKA

Nézz utána,
- a számológépeddel tudsz-e hatványokat számolni;
- hogyan tudod a mobiloddal hatványok értékét kiszámolni!



3. PÉLDA

A téli betegségek nagy többségét az influenzavírus egyik fajtája okozza. A nagyvárosokban gyorsan terjed a vírus, hisz sok ember él kis helyen.
Egy nagyvárosban egy januári hétfőn 300 influenzás beteget regisztráltak. A vírus naponta megkétszerezi a betegek számát.
Hányan lettek betegek a 10. napon?



Megoldás

A megbetegedések száma:

Az első napon	300
A második napon	$300 \cdot 2 = 600$
A harmadik napon	$300 \cdot 2 \cdot 2 = 300 \cdot 2^2 = 1200$
A negyedik napon	$300 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 300 \cdot 2^3 = 2400$
Az ötödik napon	$300 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 300 \cdot 2^4 = 4800$

Ezek alapján a 10. napon megbetegedettek száma:

$300 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{\text{9 db 2-es szorzó}} = 300 \cdot 2^9 = 300 \cdot 512 = 153\,600.$

Meglepő lehet ez a nagy szám, de az 1-nél nagyobb számok hatványai gyorsan nőnek. (Körülbelül ennyi ember lakik Miskolcon.)

Érdekességek



Tudod, honnan származik a Google keresőszoftver neve?
Az alkotók valamilyen módon utalni szerettek volna arra, hogy a program segítségével rendkívül nagyszámú információhoz lehet hozzájutni. Azt találták ki, hogy a 10^{100} alkalmas lehet e nagyságrend érzékeltetésére. Mivel az említett szám elnevezése a googol – ahhoz hasonlóan, ahogy a 10^6-t milliónak nevezzük –, ezért az általuk létrehozott rendszert is Googolnak szerették volna elnevezni. Végül azonban valaki belejavított a névadásba, így lett a szoftver és később a cég neve Google.



FELADATOK

1. Írd fel az alábbi szorzatokat hatványalakban!
a) $7 \cdot 7 \cdot 7$ *b)* $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$

2. Írd fel az alábbi hatványokat szorzatalakban!
a) 4^8 *b)* 6^6 *c)* 9^3 *d)* 13^4 *e)* 1848^2 *f)* 1^5

3. Határozd meg, hogy az alábbi számok a 2-nek hányadik hatványai!
a) 8 *b)* 16 *c)* 2 *d)* 64 *e)* 128 *f)* 1024

4. Határozd meg, mely számok harmadik hatványai az alábbiak!
a) 27 *b)* 125 *c)* 1000
d) 216 *e)* 1 000 000 *f)* 343

5. Válaszd ki, mely hatványok egyenlők egymással! Melyik hatvány lett a kakukktojás?
a) 2^6 *b)* 4^2 *c)* 8^2 *d)* 2^5 *e)* 2^4 *f)* 4^3

6. Döntsd el az alábbi állításokról, melyik igaz, melyik hamis! Válaszodat indokold!
a) A 9 második hatványának értéke egyenlő a 3 negyedik hatványának értékével.
b) Egy pozitív egész szám második hatványának értéke mindig kisebb, mint a harmadik hatványának értéke.
c) Minden pozitív egész szám első hatványának értéke nulla.
d) A 10 nyolcadik hatványának értéke 8 számjegyből áll.

7. Reggel 8-kor egy olyan vírust aktivált Joker a számítógépén, amelyik fél óra alatt másik három, még egészséges számítógépet fertőz meg. A vírusos gépek fél óra múlva ismét három-három gépet fertőznek meg.
a) Hány gép fertőződik meg egyetlen délelőtt folyamán (8.00-tól 12.00-ig)?
b) Hány gép fertőződik meg reggel 8-tól este 8-ig? Próbáld meg kiszámolni a számológéppeddel! Olvasd ki a kapott számot!
c) Hány jegyű ez a szám? A Föld összlakosságánál kisebb vagy nagyobb számot kaptál?

8. A kisballagi tavon megtelepedett a zöld alga. Megfigyelték, hogy az algával borított terület nagysága minden nap megkétszereződik. Október 25-ére éppen teljesen beborította a zöld alga a teljes tavat.



a) Hányadikán borította be a kisballagi tó felszínének felét a zöld alga?
b) Hányadikán borította be a kisballagi tó felszínének negyedét a zöld alga?
c) Hányadikán borította be a kisballagi tó felszínének kevesebb mint ezredrészét a zöld alga?

9. A kettő hatványai fontos szerepet játszanak az informatikában. Nézz utána, hogy 1 byte hány bit, és 1 kilobyte hány byte!



10. Számítsd ki, hogy a 10 hányadik hatványával kell megszorozni a mértékegység mérőszámát az alábbi átváltásoknál!
a) 3 kilométert átváltok deciméterbe.
b) 8 hektolitert átváltok centiliterbe.
c) 4 dekagrammot átváltok milligrammba.

11. Írd fel nagyobb mérőszámmal és a hozzá tartozó mértékegységgel az alábbi mennyiségeket! Melyik a kakukktojás és miért?
a) 3,4 m *b)* 0,71 t *c)* 5,8 l *d)* 4 hét

1. PÉLDA

Írjuk fel rövidebb alakban (egy szám hatványaként) az alábbi szorzás, illetve osztás eredményét!
a) $2^5 \cdot 2^4$ *b)* $3^7 : 3^5$

Megoldás

a) A hatvány az azonos tényezőjű szorzótényezők rövidebb leírási módja, ezért írjuk fel a hatványokat szorzatként!

$$2^5 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9$$

b) Ha ezt az osztást átírjuk tört alakba, akkor azt egyszerűsíthetjük.

$$3^7 : 3^5 = \frac{3^7}{3^5} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

A számok hatványalakjának egyik alkalmazására nézzük meg a következő példát!

2. PÉLDA

Írjuk át tízes számrendszerbe az alábbi számokat!
a) 1011011_2 *b)* 2134_5 *c)* 4587_9

Megoldás

a) Az ötödik osztályban tanultak alapján a kettes számrendszerben megadott számot felírjuk helyiérték-táblázatának segítségével.

	64	32	16	8	4	2	1
1011011_2	1	0	1	1	0	1	1

$1011011_2 = 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 = 91$

A kettes számrendszer helyi értékeit átírhatjuk 2 hatványaként. Írjuk át most hatványok segítségével a számot tízes számrendszerbe.

A szám	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1
1011011_2	1	0	1	1	0	1	1

$1011011_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 91$

b) Alkalmazzuk a hatványokat a szám átírásánál! Most 5 hatványaival kell számolnunk.
$2134_5 = 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 = 294$

c) $4587_9 = 4 \cdot 9^3 + 5 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 7 = 3400$

A számok szorzatalakja többféle lehet. Például a $144 = 12 \cdot 12$, így a 144-et felírhatjuk 12^2 alakban is.

Azokat a számokat, amelyek felírhatók egy pozitív egész szám második hatványaként (négyzeteként), négyzetszámoknak nevezzük.



CSOPORTMUNKA

Tanárotok irányításával soroljátok fel az első húsz négyzetszámot!

3. PÉLDA

Írjuk fel hatványok szorzataként az alábbi számokat!

a) 500 *b)* 108 *c)* 144

Megoldás

A tanult oszthatósági szabályokkal megkereshetjük, hogy a megadott számok mely számokkal oszthatók. Az osztásokat fejben vagy írásban elvégezve a számokat felírhatjuk szorzatalakban.

a) $500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^3$

b) $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$

c) $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$

FELADATOK

1. Írd fel egyetlen szám hatványaként az alábbi műveletek eredményét!

a) $2^3 \cdot 2^2$ *b)* $5^2 \cdot 5 \cdot 5$ *c)* $10^2 \cdot 10^4$ *d)* $3^8 \cdot 3^3$ *e)* $11^4 \cdot 11^5 \cdot 11^6$

f) $3^4 : 3^2$ *g)* $(7^2 \cdot 7^3) : 7$ *h)* $\frac{11^4}{11^3}$ *i)* $\frac{5^5 \cdot 5^4}{5^3}$ *j)* $(3^7 : 3^5) \cdot 3^8$

2. Számítsd ki, mely számokat adtuk meg hatványok szorzataként vagy hányadosaként!

a) $10^3 \cdot 3^2$ *b)* $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$ *c)* $(2^9 \cdot 2^3) : 2^2$ *d)* $3^8 : 3^5$ *e)* $5^3 \cdot 100^2$ *f)* $6^{14} : 6^9$

3. Írj olyan négyzetszámokat, amelyek 0-ra, 1-re, 2-re, …, 9-re végződnek! Milyen számjegyre végződhetnek a négyzetszámok?

4. Írd fel az alábbi számokat egyetlen szám hatványaként a példa alapján!

Példa: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 35 \cdot 35 \cdot 35 = 35^3$

a) $4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 9$ *b)* $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ *c)* $2^8 \cdot 3^8$ *d)* $9^4 \cdot 11^4$ *e)* $2^6 \cdot 5^2$

5. Felírtunk néhány számot összegalakban. Határozd meg minden esetben, hogy melyik számrendszer helyi értékeit vettük alapul! Írd fel a számokat a megállapított számrendszerbeli alakban és tízes számrendszerbeli alakban is!

a) $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1$

b) $1 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 1$

c) $1 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 6 \cdot 1$

6. Gondold végig, miért igazak az alábbi állítások! Fogalmazd meg a szabályt! Mit gondolsz, ez a szabály a 2 minden pozitív egész hatványára teljesül? Válaszodat indokold!

a) $2^1 + 2^1 = 2^2$ *b)* $2^2 + 2^2 = 2^3$ *c)* $2^3 + 2^3 = 2^4$ *d)* $2^7 + 2^7 = 2^8$ *e)* $2^{99} + 2^{99} = 2^{100}$

IV. 3. MIT TANULTUNK AZ OSZTHATÓSÁGRÓL? (ISMÉTLÉS)

Gyűjtsük össze címszavakban, kinek mi jut eszébe az oszthatóságról!



A tanult ismereteket feladatokon keresztül ismételjétek át!

FELADATOK

1. Sorold fel az alábbi számok első tíz többszörösét! Húzd alá azokat a többszörösöket, amelyek mindkét felsorolásban szerepelnek!

Egy pozitív egész szám többszöröseit úgy kaphatjuk meg, hogy a megadott számot rendre megszorozzuk a természetes számokkal.

Azokat a számokat, amelyek mindegyik vizsgált szám többszörösei között szerepelnek, közös többszörösöknek nevezzük.

Például az 5 többszörösei: 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50…

a) 6 és 9 *b)* 10 és 15 *c)* 16 és 32 *d)* 3 és 4

2. Sorold fel az alábbi számok összes osztóját!

Egy természetes szám osztói azok a pozitív egész számok, amelyek maradék nélkül megvannak benne. Másként fogalmazva: egy pozitív egész számnak akkor osztója egy másik pozitív egész szám, ha az első szám többszöröse a második számnak. Az 1 minden számnak osztója, így minden szám legkisebb osztója az 1. Például a 15 osztói: 1, 3, 5, 15.

a) 18 *b)* 36 *c)* 49 *d)* 61 *e)* 64 *f)* 72

3. Sorold fel az alábbi számok osztóit, és keresd meg a közös osztókat!
Karikázd be a füzetedben a közös osztók közül a legnagyobbat!

Két vagy több szám közös osztója az a szám, amely mindegyik vizsgált számnak osztója.

Két vagy több szám legnagyobb közös osztója az a szám, amely mindegyik számnak osztója, és a pozitív osztók közül a legnagyobb.



Például:
16 és 40 közös osztói: 1, 2; 4; 8. Látjuk, hogy a legnagyobb közös osztó a 8.

a) 14 és 35 *b)* 40 és 70
c) 42 és 54 *d)* 16, 32 és 48

4. Igaz vagy hamis?

a) Az 1 minden természetes számnak többszöröse.
b) Van olyan természetes szám, amelyik minden természetes számnak osztója.
c) A 0 minden természetes számnak többszöröse.
d) Minden természetes szám osztója önmagának.
e) A 0 minden természetes számnak osztója.
f) Van olyan 1-nél nagyobb egész szám, amelynek pontosan egy osztója van.

5. Írd fel az alábbi számok osztópárjait!

Egy pozitív egész szám osztói közül azokat a párokat, amelyek szorzata egyenlő a számmal, osztópároknak nevezzük.

Például: 18 osztópárjai $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

a) 24 *b)* 50 *c)* 68 *d)* 144

6. Egyszerűsítsd az alábbi törteket!

Törtet úgy egyszerűsítünk, hogy a számlálót és a nevezőt is elosztjuk ugyanazzal a közös osztóval. Ha a legnagyobb közös osztóval egyszerűsítünk, akkor egy lépésben megkapjuk azt a törtet, amely tovább már nem egyszerűsíthető.

Például: $\frac{36}{54} = \frac{2 \cdot \cancel{18}}{3 \cdot \cancel{18}} = \frac{2}{3}$. *a)* $\frac{25}{150}$ *b)* $\frac{36}{60}$ *c)* $\frac{30}{450}$

7. Hozd közös nevezőre a törteket, és végezd el az alábbi műveleteket!

A nevezők közös többszörösei közül bármelyiket használhatjuk közös nevezőként, de általában akkor kell a legkevesebbet számolni, ha a legkisebb közös többszörössel dolgozunk.

Például: $\frac{3}{20} + \frac{27}{25} = \frac{15}{100} + \frac{108}{100} = \frac{123}{100}$.

a) $\frac{5}{8} + \frac{13}{12}$ *b)* $\frac{7}{10} - \frac{8}{25}$ *c)* $\frac{9}{14} + \frac{10}{21} - \frac{1}{2}$ *d)* $\frac{7}{6} - \frac{11}{9} - \frac{4}{15}$

8. Milyen számjegyeket írhatsz az *a*, *b*, *c*, *d* betűk helyére, hogy a számok oszthatók legyenek *A)* 2-vel, *B)* 3-mal, *C)* 4-gyel, *D)* 5-tel, *E)* 9-cel, *F)* 10-zel, *G)* 2-vel és 5-tel, *H)* 2-vel és 3-mal?

Ha egy szám utolsó számjegye osztható 2-vel, 5-tel vagy 10-zel, akkor maga a szám is osztható 2-vel, 5-tel vagy 10-zel.

Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 3-mal vagy 9-cel, akkor maga a szám is osztható 3-mal vagy 9-cel.

Ha egy szám utolsó két helyén álló kétjegyű szám osztható 4-gyel vagy 100-zal, akkor maga a szám is osztható 4-gyel vagy 100-zal.

a) 8*a*5 *b)* 284*b* *c)* 7*c*450 *d)* 13521*d*0

9. Igaz vagy hamis?

a) Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor osztható 10-zel is.
b) Ha egy szám osztható 5-tel és 8-cal, akkor osztható 40-nel is.
c) Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal is.
d) Ha egy szám 4-re végződik, akkor osztható 4-gyel.
e) Ha egy szám utolsó két számjegyéből álló szám osztható 3-mal, akkor maga a szám is osztható 3-mal.



10. Határozd meg az összegek kiszámítása nélkül, hogy mennyi lesz az alábbi összegek osztási maradéka!

Összeg osztási maradéka vagy megegyezik a tagok osztási maradékának összegével, vagy ha ez az összeg nagyobb, mint az osztó, akkor annak is vesszük az osztási maradékát.

a) 457 + 1286 + 249 osztási maradéka kettővel való osztásnál;
b) 578 + 3412 + 357 tízes maradéka;
c) 6457 + 324 + 2467 négyes maradéka;
d) 186 + 479 + 2472 + 456 hármas maradéka.

CSOPORTMUNKA

Versenyezzetek!

Határozzátok meg azokat az *x*, *y* pozitív egész számokat, amelyekre a $2x + 5y = 65$ egyenlőség teljesül!



Az élet minden területén gyakran kell eldöntenünk egy állításról, információról, hogy igaz-e vagy hamis. A kérdés eldöntésében előző ismereteink, ezekből levont következtetéseink segíthetnek.
A helyes következtetés az oszthatóság esetében is fontos, mivel ezekre alapozhatjuk újabb állításainkat. Vizsgáljunk meg néhány fontos következtetést és annak megfordítását!

1. Ha egy összeg minden tagja osztható egy pozitív egész számmal, akkor az összeg is osztható a számmal.

A feltétel (az összeg minden tagja osztható egy számmal) szerint a szám többszöröseit adjuk össze, ezért az összeg is többszöröse lesz az adott számnak. Illusztráljuk egy példával:
A $35 + 21 + 63 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 9$, az összeg minden tagja osztható 7-tel.
Az összeg $119 = 7 \cdot (5 + 3 + 9)$, ami szintén osztható 7-tel, mivel 7-nek az $(5 + 3 + 9)$-szerese.

A következő mondat az 1. következtetés megfordítása, ami egy **hamis** állítás.

2. Ha egy összeg osztható egy pozitív egész számmal, akkor az összeg minden tagja is osztható a számmal.

Például a 4 osztója a 12-nek, de a 4 nem osztója az $5 + 7$ összeg tagjainak.

3. Ha egy különbség minden tagja osztható egy pozitív egész számmal, akkor a különbség is osztható a számmal.

Különbség esetén az 1. esethez hasonló módon gondolkodhatunk. Ezt a következő példával szemléltetjük: A $72 = 99 - 27 = 11 \cdot 9 - 3 \cdot 9$, a különbség minden tagja osztható 9-cel, ezért a különbség $72 = (11 - 3) \cdot 9$ is osztható 9-cel, hiszen 9 többszöröse.

A következő mondat a 3. következtetés megfordítása, ami egy **hamis** állítás.

4. Ha egy különbség osztható egy pozitív egész számmal, akkor a különbség minden tagja is osztható a számmal.

A következtetés hibás, mivel például a 4 osztója a 20-nak, de a 4 nem osztója a $43 - 23$ különbség tagjainak.

5. Ha egy szorzat egyik tényezője osztható egy pozitív egész számmal, akkor a szorzat is osztható a számmal.

A következtetés helyes, mivel a feltétel szerint a szorzat egyik tényezője többszöröse egy pozitív számnak, így ennek a többszöröse az adott pozitív számnak is többszöröse lesz.

A következő mondat az 5. következtetés megfordítása, ami egy **hamis** állítás.

6. Ha egy szorzat osztható egy pozitív egész számmal, akkor az egyik tényezője osztható a számmal.

Például a 6 osztója a 18-nak, de a 6 nem osztója a $2 \cdot 9$ szorzat tényezőinek.

FELADATOK

Szorgimorgi szigetén szorgik és morgik laknak. A szorgik mindig igazat mondanak, a morgik mindig hazudnak. Egyetlen dologban azonban hasonlítanak: jól tudják a matekot.



1. Hétfőn a szigeten sétálva találkoztam három szigetlakóval. Megmutattam nekik két számot, és a következőket mondták:
A: A két szám összege osztható 3-mal.
B: Az egyik szám 3 többszöröse.
C: A másik szám 3-mal osztva 2-t ad maradékul.
Lehetett-e mindhárom szigetlakó szorgi?

2. Kedden szembejött velem három szigetlakó, megmutattam nekik három számot, ekkor a következőket mondták:
A: Mindhárom szám osztható 5-tel.
B: A három szám szorzata osztható 5-tel.
C: A három szám összege osztható 5-tel.

a) Mit mondhatsz *B*-ről és *C*-ről, ha tudod, hogy *A* szorgi?
b) Mit mondhatsz *A*-ról és *C*-ről, ha tudod, hogy *B* morgi?

3. Szerdán újabb ismerősöket szereztem a szigeten, így nekik is mutattam két számot. A következőket mondták:
A: A két szám összege osztható 4-gyel.
B: A két szám különbsége osztható 4-gyel.
C: A két szám szorzata osztható 4-gyel.

a) Lehet-e *A*, *B* és *C* is szorgi?
b) Lehet-e mindhárom szigetlakó morgi?
c) Lehet-e közöttük egy szorgi és két morgi? Ha igen, melyikük mond igazat?

4. Csütörtökön három 10-nél nagyobb természetes számot mutattam nekik, melyek összege osztható 3-mal. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy mondhatták-e szorgik! Válaszaidat példákkal indokold!
A: Az összeg minden tagja osztható hárommal.
B: Az összeg pontosan két tagja osztható hárommal.
C: Az összeg pontosan egy tagja osztható hárommal.
D: Az összeg egyik tagja sem osztható hárommal.

5. Pénteken a 306 540-es számot mutattam a szembe jövő szorgiknak és morgiknak, akik a következő megállapításokat tették:
A: Ez a szám akkor is páros, ha az első és az utolsó számjegyét felcseréljük.
B: Ez a szám akkor is osztható 3-mal, ha a számjegyeit összekeverjük, és tetszőleges sorrendben felírjuk.
C: Ez a szám akkor is osztható 5-tel, ha az utolsó két számjegyét felcseréljük.
D: Ez a szám nem osztható 9-cel.
E: Ezt a számot tetszőleges természetes számmal szorozva 3-mal osztható számot kapunk.

Kik voltak morgik a csapatból?

PÁROS MUNKA

Csoportosítsátok az alábbi számokat az osztóik száma szerint!

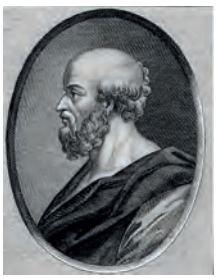
15; 3; 28; 1; 9; 12; 7; 36; 100; 13

A csoportok a következők legyenek:
A) pontosan egy osztója van; *B)* pontosan két osztója van; *C)* kettőnél több osztója van.

Egyeztessétek az eredményeiteket! Figyeljétek meg azokat a számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van! Mi jellemzi az osztóikat?



Az ókori Görögországban körülbelül 2200 évvel ezelőtt Eratoszthenész kitalált egy eljárást, amit később róla neveztek el eratoszthenészi szitának. Eljárása arra szolgált, hogy különleges tulajdonságú számokat találjon. Ismerjük meg a módszerét!



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Írjuk fel a pozitív egész számokat 1-től 100-ig, és húzzuk ki a táblázatból azokat, amelyek valamilyen kisebb szám többszörösei! Az 1 csak önmagának többszöröse, különleges, ezt egyelőre félretesszük, és most nem vesszük figyelembe, hogy minden szám többszöröse az 1-nek. A következő szám a 2, ezt pirossal bekeretezzük, és minden olyan számot kihúzunk, amelyik a 2 többszöröse, azaz az összes páros számot. A következő szám, ami még nincs kihúzva, az a 3. Ezt is bekeretezzük pirossal, és kihúzzuk a többszöröseit. Ha egy számot már korábban kihúztunk, azzal nem foglalkozunk. A következő ki nem húzott szám az 5. Bekeretezzük, és kihúzzuk a többszöröseit, és folytatjuk az eljárást, amíg minden számot ki nem húztunk vagy be nem kereteztünk.

A megmaradt bekeretezett számok:
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

Figyeljük meg a bekeretezett számok szorzatalakját!

Ezek a számok különlegesek, mert **pontosan két különböző pozitív osztóval rendelkeznek, az 1-gyel és önmagukkal. Ezeket a számokat prímszámoknak vagy röviden prímeknek** nevezzük. (Más néven törzsszámoknak is szokták hívni.)

IV. 5. A PRÍMSZÁMOK. A SZÁMOK PRÍMTÉNYEZŐS FELBONTÁSA

Az összetett számok azok a pozitív egész számok, amelyeknek 2-nél több osztójuk van.

A 0-nak minden pozitív szám osztója, ezért nem tekintjük se prímszámnak, se összetett számnak.
Az 1-nek csak 1 pozitív osztója van, az 1, ezért az 1 nem prím és nem is összetett szám.
Az összetett számokat felbonthatjuk náluk kisebb természetes számok szorzatára is. Például: $12 = 3 \cdot 4$, $9 = 3 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$ stb. Ha valamelyik tényező, mint például a $3 \cdot 4$-ben a 4 szintén összetett szám, akkor azt tovább bonthatjuk, $4 = 2 \cdot 2$. Ha már minden tényező prímszám, akkor a felbontás nem folytatható tovább.

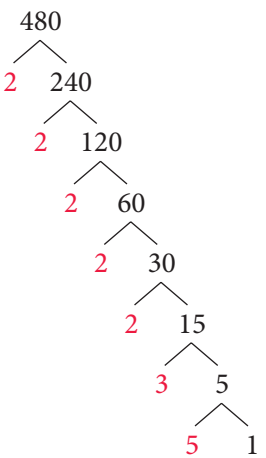
Ha prímszámokat szorzunk össze, akkor biztosan összetett számot kapunk, mert a szorzat osztható lesz a prímszámok mindegyikével, 1-gyel és a szorzattal.

PÉLDA

Bontsuk fel prímszámok szorzatára a 480-at!

Megoldás

Megmutatjuk, hogy leggyakrabban melyik két módon juthatunk el a prímek szorzatához.



1. lehetőség:
A felírásnál az egyik oldalra egy prímszámot írunk, mellé pedig azt a számot, amivel megszorozva az eredeti számot kapjuk. A kapott számot, ami 1-nél nagyobb, újra felbontjuk egy prím és egy szám szorzatára. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg egy prím és az 1 kerülnek egy sorba.
A bal oldali ágon végighaladva felírhatjuk a számot prímek szorzataként:

$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$.

Ez a szám prímtényezős alakja. A hatványalak rövidíti a szorzások felírását. Segíti az átláthatóságot, ha az ágrajzban a prímeket mindig azonos oldalra írjuk. Itt most a bal oldalon van az összes prím. Célszerű mindig a legkisebb prímosztót kiválasztani, mert így egyszerűbb a számolás.

2. lehetőség:
Ezt a módszert használjuk leggyakrabban. Lényegében ebben az esetben is az előző eljárást alkalmazzuk, ügyelve arra, hogy a jobb oldali oszlopba csak prímszámok kerüljenek.
A jobb oldalon látható prímek szorzata adja a 480 prímtényezős felbontását:

$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$.

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

A kétféle módon történő felírás ugyanazt a **szorzatalakot** eredményezi, a tényezők sorrendjétől eltekintve.

Ha az összetett számot prímszámok szorzataként írjuk fel, akkor ezt a szám prímtényezős felbontásának nevezzük. A prímtényezős alakot felírhatjuk prímszámok hatványának szorzataként is.

A példánkban a 480 prímtényezős felbontása: $480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$.

FELADATOK

1. Válogasd ki a következő számok közül a prímszámokat és az összetett számokat! Mely számok nem kerültek egyik csoportba sem?
12; 7; 13; 1; 17; 21; 43; 45; 63; 57; 0; 34; 2; 31; 33.

2. Igaz vagy hamis?
a) Az első két prímszám összege páros szám.
b) Egyetlen páros prímszám van.
c) Az első tíz prímszám szorzata páratlan szám.
d) A prímszámok osztóinak száma páratlan.
e) Nincs 5-tel osztható prímszám.
f) Van 6-tal osztható prímszám.

3. A 2, 3, 7, 9 számjegyekből állítsd elő az összes kétjegyű számot, és húzd alá közülük a prímszámokat!

4. Készítsd el a következő számok prímtényezős felbontását!
a) 24 *b)* 30 *c)* 36 *d)* 59 *e)* 102
f) 105 *g)* 180 *h)* 900 *i)* 2160

5. Három testvér életkora prímszám, és vannak köztük ikrek. Éveik számának szorzata 20. Hány évesek az ikrek?

6. Gazsi két prímszámra gondolt, és összeadta őket. Eredményül egy harmadik prímszámot kapott. Mi lehetett a Gazsi által gondolt kisebbik prím?

7. A hajó méterben megadott hosszának és a kapitány életkorának szorzata 5617. Hány éves a kapitány?

8. Peti összeszorozta jó barátainak számát az életkorával és az osztálytársainak számával, így 806-ot kapott. Hány éves Peti? Hány tagú az osztálya? Hány jó barátja van?

9. Melyik az a legkisebb szám, amelynek prímtényezős felbontásában három különböző prím szerepel?

10. Ikerprímnek nevezünk két prímszámot, ha az egyik szám 2-vel nagyobb a másiknál. Ilyen például a 3 és az 5.



a) Sorolj fel legalább öt ikerprímet!
b) Mi a legkisebb háromjegyű ikerprím?
c) Nézz utána az interneten, mi a ma ismert legnagyobb ikerprím!

11. Adj meg két prímszámot, amelyek összege 5053. Fogalmazd meg röviden, hogyan gondolkoztál!

12. Adj meg két olyan prímszámot, amelyek között pontosan 1; 2; 3; 4 darab összetett szám áll!

13. Marcell azt mondta, hogy nagyon könnyű prímszámot készíteni. Csak összeszorzol valamennyi prímet, a szorzathoz hozzáadsz 1-et, és kész is vagy. Igaza van Marcellnek? Válaszodat indokold!

IV. 6. KÉSZÍTSÜNK MAGUNKNAK OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOKAT!

Kiegészítő tananyag

Az eddig tanult oszthatósági szabályokat alapvetően két csoportba sorolhatjuk.

I. A számjegyek összegének vizsgálatával döntünk: például a 3-mal, a 9-cel való oszthatóság.

II. A szám utolsó helyi értékein álló számok vizsgálatával döntünk:
   a) A 2-vel, 5-tel, 10-zel történő oszthatóságot az utolsó számjegy határozza meg;
   b) A 4-gyel, 25-tel, 100-zal való oszthatóságot az utolsó két helyen álló kétjegyű szám határozza meg.

   Ezt a sort folytathatjuk újabb oszthatósági szabályokkal.
   c) 8-cal, 125-tel, 1000-rel akkor osztható egy szám, ha az utolsó három helyen álló háromjegyű szám osztható 8-cal, 125-tel, 1000-rel.

1. PÉLDA

Mutassuk meg, hogy a 34 176 osztható 8-cal!

Megoldás

$34\,176 = 34\,000 + 176$

1000 osztható 8-cal, ennek minden többszöröse, tehát a 34 000 is osztható 8-cal.

Ebből következik, hogy elegendő az utolsó három helyi értéken álló háromjegyű szám vizsgálata a 8-cal való oszthatóság szempontjából. $176 = 22 \cdot 8$, tehát osztható 8-cal.

A példa megoldása során láthattuk, miért elegendő az utolsó három helyen álló háromjegyű számot vizsgálni. Ugyanígy igazolható a *c)* rész többi állítása is.



A már ismert oszthatósági szabályokat felhasználva újabb szabályokat alkothatunk.

Ez lehetőséget ad arra, hogy a nagyobb számokkal való oszthatóság vizsgálatát visszavezessük kisebb számokkal való oszthatóság vizsgálatára. Így megkönnyíthetjük a számolást.



CSOPORTMUNKA

A tanult oszthatósági szabályokat felhasználva közösen döntsétek el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak! A hamis állításoknál mutassatok ellenpéldát!

A) Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal.

B) Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor osztható 10-zel.

C) Ha egy szám osztható 3-mal és 6-tal, akkor osztható 18-cal.

D) Ha egy szám osztható 3-mal és 6-tal, akkor osztható 12-vel.

E) Ha egy szám osztható 2-vel és 6-tal, akkor osztható 12-vel.

F) Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor osztható 12-vel.

6. KÉSZÍTSÜNK MAGUNKNAK OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOKAT! IV.

Kiegészítő tananyag

Egy példán keresztül vizsgáljuk meg, hogyan alkothatunk újabb szabályokat!

2. PÉLDA

Milyen számjegyet írjunk a ✸ helyére a 818✸0 számban, hogy a szám osztható legyen 40-nel?

Megoldás



Bontsuk fel a 40-et két 40-nél kisebb szám szorzatára!
Legyen például $40 = 4 \cdot 10$, mert a 4-re és a 10-re is ismerünk oszthatósági szabályt.
Ezek alapján megállapítható, hogy a feladatban megadott szám 10-zel biztosan osztható, mert az utolsó számjegye 0. 4-gyel viszont csak akkor lesz osztható, ha a ✸ helyére 0-t, 2-t, 4-et, 6-ot vagy 8-at írunk.

Ellenőrizzük a megoldásokat:
$81\,800 = 2045 \cdot 40$, tehát a 0 megoldása a feladatnak.
$81\,820 = 2045 \cdot 40 + 20$, tehát a 2 nem jó megoldása a feladatnak, mert 20 az osztási maradék.
A további eseteket ellenőrizve a 81 840 és a 81 880 osztható 40-nel, a 81 860 viszont nem.



Miért kaptunk hamis megoldásokat is?

Mielőtt erre válaszolnánk, nézzük meg 40-nek egy másik szorzatalakját! Például: $40 = 5 \cdot 8$.

Az 5-tel való oszthatóság bármilyen számjegy esetén teljesül, mert a 81 8✸0 nullára végződik.
A 8-cal való oszthatóság azonban csak azokban az esetekben igaz, ha 8✸0 szám osztható 8-cal, vagyis a ✸ helyére a 0, 4, 8 számjegyeket írhatjuk, de nem írhatjuk a 2-t és a 6-ot.

Tehát a megoldások:
- a ✸ helyére 0-t írva: 40 osztója a 81 800-nak;
- a ✸ helyére 4-et írva: 40 osztója a 81 840-nek;
- a ✸ helyére 8-at írva: 40 osztója a 81 880-nak.

A 40 kétféle felbontása oszthatóság szempontjából abban különbözik, hogy az első esetben a 4-nek és a 10-nek van 1-nél nagyobb közös osztója, a második esetben az 5-nek és a 8-nak a legnagyobb közös osztója 1.

Ezt a megfigyelést általánosíthatjuk:

Ha összetett számmal való oszthatóságot vizsgálunk, akkor célszerű a számot olyan szorzatalakban felírni, amelynek tényezőire ismerünk oszthatósági szabályt. A tényezőket úgy válasszuk meg, hogy a szorzótényezők legnagyobb közös osztója 1 legyen!

IV. 6. KÉSZÍTSÜNK MAGUNKNAK OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOKAT!



Kiegészítő tananyag

CSOPORTMUNKA

Alkossatok 4-5 fős csoportokat! Vegyetek magatokhoz egy tolltartót és egy füzetet!

Minden csoport írjon négy, az előző csoportmunkában található állításokhoz hasonló, igaz vagy hamis állítást. A csoport egy tagja olvassa fel az osztálynak az állításokat! A többi csoportban beszéljétek meg, hogy az elhangzott állítás igaz vagy hamis! A csoportok egy-egy képviselője a füzetet mutatja fel, ha az állítás igaz, a tolltartót, ha az állítás hamis. Indokoljátok az igaz állításokat, mondjatok ellenpéldát a hamis állításra!

A csoportmunka megbeszélése után közösen fogalmazzatok meg összetett oszthatósági szabályokat!

FELADATOK

1. Írd fel az alábbi számokat olyan szorzatalakban, amelynek tényezőire ismersz oszthatósági szabályt! A szorzótényezőket úgy válaszd meg, hogy legnagyobb közös osztójuk 1 legyen!
a) 20 *b)* 24 *c)* 36 *d)* 50 *e)* 75 *f)* 200

2. Fogalmazd meg a 45-tel való oszthatóság szabályát, és vizsgáld meg a szabály alapján, hogy mely számok oszthatók az alábbiak közül 45-tel!
585 710 850 945 1180 5535 11 540 5 555 520

3. Készíts táblázatot a füzetedben, és rendszerezd, mely számok oszthatók a felsoroltak közül
a) 6-tal; *b)* 18-cal; *c)* 15-tel; *d)* 30-cal; *e)* 24-gyel!

210; 1215; 2048; 48 000; 62 208; 72 576; 91 125

4. Vizsgáld meg, hogy a $4 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 34 \cdot 62$ szorzat osztható-e
a) 17-tel; *b)* 38-cal; *c)* 51-gyel; *d)* 82-vel; *e)* 124-gyel!

5. Milyen számjegyet írhatunk a ✸ helyére, hogy igaz legyen az állítás?
a) 4508✸ osztható 12-vel. *b)* 9✸605 osztható 15-tel. *c)* 32✸40 osztható 30-cal.

6. „Gondoltam egy számra” – szól az osztály lelkes matekosa, és a többiek már kérdezgetik is. „Annyit elárulok róla, hogy 1 és 100 között van” – teszi hozzá sokat sejtető mosollyal.
– 10-zel osztva mennyi maradékot ad? – Négyet.
– Osztható nyolccal? – Igen.
– Megvan benne a három? – Igen.
– Én már tudom! – örvendezik Jázmin.
Próbáljátok ki ti is a padtársatokkal ezt a játékot!

7. Igaz-e, hogy a $10^{2023} + 2024$ osztható 6-tal, 12-vel, 18-cal és 24-gyel is? Válaszodat indokold!

8. Melyik az a legkisebb háromjegyű szám, amelynek minden osztóját összeszorozva a szám négyzetét kapjuk?

9. Melyik a 2-nek az a legmagasabb kitevőjű hatványa, amely még osztója a 88^{12}-nek?

7. OSZTÓKRÓL, TÖBBSZÖRÖSÖKRŐL MÉG EGYSZER IV.

Az osztó és a többszörös fogalmát a 3. leckében átismételtük. Most a prímszámok ismeretében új lehetőségünk lesz az osztók és a többszörösök megkeresésére.



PÁROS MUNKA

A páros mindkét tagja írjon a füzetébe négy prímszámot! A számok között lehetnek azonosak is! Szorozz össze közülük kettőt! A szorzatot hívjuk KEZDŐ számnak! Készíts a megadott prímek felhasználásával olyan szorzatokat, amelyek többszörösei a KEZDŐ számnak! Készíts olyan szorzatokat is, amelyek nem többszörösei a KEZDŐ-nek!

Beszéljétek meg egymással, hogyan készítettetek a feltételeknek megfelelő számokat!

1. PÉLDA

Mely számok többszörösei a 15-nek a felsoroltak közül?

a) $3^2 \cdot 5$; *b)* $3 \cdot 5^2$; *c)* 5^2; *d)* $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; *e)* $2^2 \cdot 5$; *f)* $3^2 \cdot 5^3$; *g)* $3^2 \cdot 7$.

Megoldás

$15 = 3 \cdot 5$. Írjuk fel a számokat szorzatalakban, és nézzük meg, hogy szerepel-e szorzótényezőként a 3 és az 5!

a) $3^2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, vagyis ez a szám többszöröse (3-szorosa) a 15-nek.

b) $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, vagyis ez a szám többszöröse (5-szöröse) a 15-nek.

c) $5^2 = 5 \cdot 5$, tehát ez a szám nem többszöröse a 15-nek, mert a prímek szorzatában nincs 3-as tényező.

d) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, tehát ez a szám többszöröse ($2 \cdot 3$-szorosa) a 15-nek.

e) $2^2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, vagyis ez a szám nem többszöröse a 15-nek, mert a prímek között nem szerepel a 3-as tényező.

f) $3^2 \cdot 5^3 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, tehát ez a szám többszöröse ($3 \cdot 5 \cdot 5$-szöröse) a 15-nek.

g) $3^2 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 7$, így ez a szám nem többszöröse a 15-nek, mert a prímek szorzatában nincs 5-ös tényező.

A tapasztalat tehát az, hogy a szám többszörösében a 15 minden prímtényezőjének szerepelnie kell. Fogalmazzuk meg általánosítva:

Egy szám többszöröseinek prímtényezős felbontásában minden olyan prímtényező megtalálható, amelyik a számban is szerepelt.

2. PÉLDA

Döntsd el, mely számok osztói a 72-nek!
$A = 3^2 \cdot 2$; $B = 3 \cdot 2^2$; $C = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $D = 2^3 \cdot 3^3$; $E = 2^2 \cdot 3^2$.

Megoldás

A 72 többszöröse az osztóinak, ezért nézzük meg a 72 prímtényezős felbontását!

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

A 72 osztóiban csak a 2 és a 3 szerepelhet prímosztóként, ezért a $C = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ szám nem lehet osztó. Az osztókban legfeljebb annyi prím szerepelhet szorzóként, amennyi az eredeti számban is szerepelt. Vizsgáljuk meg a számokat ezek alapján! A $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ osztóiban legfeljebb 3 db 2-es és 2 db 3-as szorzótényező szerepelhet, és más prímszorzó nem.
$A = 3^2 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2$;
$B = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2$;
$D = 2^3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
$E = 2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
Ebből következik, hogy az A, B, E számok osztói a 72-nek, a D szám viszont nem osztója, mert a 3 szorzótényezőiből több szerepel benne.

Egy szám osztóinak prímtényezős felbontásában csak olyan prímek (prímtényezők) szerepelhetnek szorzóként, amelyek a szám prímszorzat alakjában is szerepeltek, és az egyes prímtényezők száma legfeljebb annyi lehet, mint amennyi a vizsgált számban van.

Hogyan határozhatjuk meg egy összetett szám osztóit?

Egy lehetséges módszer az osztópárok felírása. Írjuk fel az osztópárokat két oszlopban úgy, hogy szorzatuk az adott szám legyen! Kezdjük a legkisebb számmal!

3. PÉLDA



Írjuk fel a 108 összes osztóját!

Megoldás

Egy lehetséges módszer az osztópárok felírása, ezért írjuk fel azokat két oszlopban úgy, hogy az egy sorban lévők szorzata az adott szám legyen!

Kezdjük a legkisebb számmal, az 1-gyel és annak osztópárjával, a 108-cal! Ha találunk olyan osztót, amely egyenlő a párjával, akkor nem kell keresnünk több osztót. Ha nincs ilyen osztó, akkor addig kell folytatnunk a szorzatok felírását, amíg meg nem jelenik osztópárként egy, már korábban megtalált osztó.

Az osztópárok: 1 és 108
2 és 54
3 és 36
4 és 27
6 és 18
9 és 12

Egy szám osztói között mindig szerepel az 1 és maga a szám. Ezeket nem valódi osztóknak nevezzük. A szám valódi osztóinak száma tehát kettővel kevesebb az osztók számánál.

A példában a 108-nak 12 db osztója van. Ezek közül 10 db valódi osztó.

FELADATOK

1. Döntsd el, az alábbi számok közül melyik többszöröse a 18-nak!

a) $3^3 \cdot 2$; *b)* $3 \cdot 2^2 \cdot 5$;
c) $2 \cdot 3 \cdot 13^2$; *d)* $2^{12} \cdot 3^3 \cdot 19$;
e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$; *f)* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

2. Sorold fel az alábbi számok prímosztóit! Az osztók mellé írd fel, az adott szám hányszorosa az osztónak!

a) 36; *b)* 135;
c) 360; *d)* 132.



3. Sorold fel az alábbi számok prímosztóit! Írd fel melléjük, az adott szám hányszorosa az osztónak!

a) $3^3 \cdot 2$; *b)* $3^3 \cdot 11$;
c) $2 \cdot 3^2 \cdot 7$; *d)* $2^4 \cdot 3 \cdot 5$;
e) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$; *f)* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

4. *a)* Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyik 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel is osztható?
b) Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyik 2-vel osztva 1-et, 3-mal osztva 2-t, 4-gyel osztva 3-at és 5-tel osztva 4-et ad maradékul?

5. Sorold fel a számok osztópárjait! Húzd alá a valódi osztókat!

a) 44; *b)* 89; *c)* 114; *d)* 150.

6. Többszöröse-e

a) 15-nek a $2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
b) 22-nek a $2^4 \cdot 3 \cdot 5$;
c) 77-nek a $2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$;
d) 24-nek a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$?

7. *a)* Egy téglalap területe 54 cm^2. Mekkorák lehetnek az oldalai, ha tudjuk, hogy az oldalak hossza (centiméterben mérve) egész szám?
b) Egy téglatest térfogata 231 cm^3. Mekkorák lehetnek az élei, ha tudjuk, hogy az élek hossza (centiméterben mérve) egész szám?

8. Adj meg legalább két olyan számot, amelyek többszörösei az alábbi három-három számnak!

a) $3; 3^2; 3^3$
b) $2^2; 2^2 \cdot 3^2; 2 \cdot 3$
c) $2^2; 2^3 \cdot 5; 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
d) $2 \cdot 3 \cdot 7; 2 \cdot 7^2; 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

9. Válaszd ki az alábbi számok közül azokat, amiknek páratlan darab osztója van! Fogalmazd meg, hogyan tudod ezt számolás nélkül, első ránézésre eldönteni!

a) $5^2 \cdot 7^2$ *b)* $2^2 \cdot 3^3$ *c)* $3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^6$
d) $2^5 \cdot 5^6 \cdot 13^7$ *e)* $11^6 \cdot 17^4 \cdot 19^8 \cdot 23^{10}$

10. Hozz ellenpéldát az ötletre! Péter felsorolta a 360-nak mind a 24 osztóját. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ és $24 = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30 - 6$, ezért úgy gondolta, hogy a számok osztóinak számát megkaphatjuk, ha a prímtényezős felbontásban szereplő prímszámok szorzatából kivonjuk a kitevők szorzatát.

11. Egy négyjegyű szám számjegyeit összeszorozva 168-at kapunk.
a) Hány ilyen szám van?
b) Számítsd ki a legnagyobb és legkisebb szám különbségét!

1. PÉLDA

A Mikulás-napi játékos délutánon a 7. b osztály vállalta a szervezést. A hetedikesek szaloncukrot és nápolyit osztottak jutalmul a kisdiákoknak. A befejezés után 54 darab szaloncukor és 36 nápolyi szelet maradt. Az osztályfőnök a megmaradt édességet úgy osztotta szét, hogy minden szervezőnek ugyanannyi szaloncukor és ugyanannyi nápolyi szelet jusson. Hányan vehettek részt a szervezésben?

Megoldás

Ha megkeressük a 36 és az 54 közös osztóit, akkor válaszolhatunk a kérdésre.
Írjuk fel mindkét szám osztópárjait, majd jelöljük meg a közös osztókat!
Mindkét számnak osztója az 1; 2; 3; 6; 9 és 18, tehát a szervező diákok ennyien lehettek.
Ezek szerint több válaszlehetőség van.

A 36 osztópárjai:	
1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

Az 54 osztópárjai:	
1	54
2	27
3	18
6	9

A szervező diákok száma	1	2	3	6	9	18
Egy diáknak jutó szaloncukrok száma	36	18	12	6	4	2
Egy diáknak jutó nápolyi szeletek száma	54	27	18	9	6	3



A megoldás során a közös osztókat soroltuk fel.
Az osztók között van legnagyobb, így a közös osztók között is biztosan van legnagyobb. Ezt a számot a két (vagy több) szám legnagyobb közös osztójának nevezzük.
Jelölése: a számokat kerek zárójelbe tesszük, és pontosvesszővel választjuk el egymástól: (36; 54) = 18.
Meghatározása történhet a példában látott módszerrel, azaz a közös osztók meghatározása után a legnagyobb megkeresésével, de ez a módszer a sok osztóval rendelkező nagy számok esetén túlságosan hosszadalmas. Keressünk egy másik módszert!

2. PÉLDA

Írjuk fel a 36 és az 54 prímtényezős alakját! A prímtényezős alak felhasználásával adjuk meg a két szám legnagyobb közös osztóját!

Megoldás

$36 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3}$; $54 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot 3$. A színessel jelölt prímek mindkét számnak osztói: **2**; **3**; **3**.
Képezzünk ezekből minden lehetséges módon szorzatokat: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 3$.
Ha ezekhez a szorzatokhoz hozzávesszük a közös prímeket, azaz a 2-t és a 3-at, valamint az 1-et, akkor megkapjuk az összes közös osztót.
A legnagyobb közös osztót úgy kapjuk, hogy az összes közös prímet összeszorozzuk.

Ez a meggondolás mindig célravezető. Foglaljuk össze a tapasztalatokat!

Két szám legnagyobb közös osztóját úgy határozhatjuk meg, hogy a számokat prímtényezőkre (prímszámok szorzatára) bontjuk, és a számokban szereplő közös prímeket összeszorozzuk.

Ugyanígy határozható meg kettőnél több szám legnagyobb közös osztója is.

Azokat a számokat, amelyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk, relatív prímeknek nevezzük.

Megjegyzés:
Két vagy több szám legnagyobb közös osztóját a hatvány fogalmának felhasználásával is meghatározhatjuk. A számokat prímhatványok szorzataként írjuk fel, kiválasztjuk a közös prímeket és azok legkisebb kitevős hatványát (kitevők egyenlősége esetén az egyforma kitevőjű hatványt), majd ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$; $54 = 2 \cdot 3^3$. Tehát: $(36; 54) = 2 \cdot 3^2$.

FELADATOK

1. Írd fel az alábbi számok közös osztóit és legnagyobb közös osztóját!
a) 10; 12 *b)* 24; 60 *c)* 14; 15
d) 80; 108 *e)* 45; 120 *f)* 96; 144

2. Írd fel prímtényezős alakban a számok legnagyobb közös osztóját!
a) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 3 \cdot 5^2 \cdot 11)$
b) $(2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5^2;\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 19^2)$

3. Számítsd ki az alábbi számhármasok legnagyobb közös osztóját!
a) (24; 120; 72) *b)* (25; 100; 200)

4. Egyszerűsítsd az alábbi törteket! Javaslat: a legnagyobb közös osztó segítségével gyorsabb az egyszerűsítés.
a) $\frac{48}{42}$ *b)* $\frac{168}{96}$ *c)* $\frac{95}{209}$ *d)* $\frac{2016}{2592}$

5. Nagymama nagyon örül, hogy ilyen sok unokája van, ezért rengeteg süteménnyel készült a gyereknapi hétvégére. Minden unokának egyforma kis nasicsomagot állított össze. Összesen 34 túrós batyut, 85 szelet zserbót és 119 darab pogácsát csomagolt nekik.
a) Hány unokája lehet nagymamának?
b) Melyik süteményből hány darab volt a nasicsomagban?



6. Éva néni az iskolai nagytáborban összesen 286 kakaós csigát és 429 kis dobozos almalevet vásárolt uzsonnára. Hány diák volt a táborban, ha több mint százan voltak, és a 9 kísérő tanár is ugyanazt az uzsonnacsomagot kapta, mint a gyerekek?

7. Egységkockákból 72 és 84 térfogategységnyi téglatesteket építettünk.
Tudjuk, hogy a két téglatest egy-egy lapja egybevágó.
Mekkora az egybevágó lapok közül a legnagyobb területű? Számítsd ki az ehhez tartozó téglatestek éleinek hosszát!

IV. 9. LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS



JÁTÉK

Álljatok körbe! A tanárotok egyenletesen tapsol. A lányok minden harmadik ütemre mondják azt, hogy HANGYA.
A fiúk minden ötödik ütemre mondják azt, hogy BOLY.
Figyeljétek meg, hányadik ütemeknél hangzik fel a HANGYABOLY!

PÉLDA



Két hegyi falu között kétféle útjelző oszlop található. Az egyik az út szélét jelzi, és fényvisszaverő csíkkal van ellátva, a másik kb. 2 méter magas, élénk színe van, és a lehullott hó magasságát mutatja. Az útjelzőt 45 méterenként, a másikat 75 méterenként helyezték el. Az egyik falu határában egymás mellett van a két jelzőoszlop. Ettől a helytől számítva hány méterenként lesz egymás mellett a kétféle jelzőoszlop?

Megoldás

Írjuk fel, hány méterenként helyezkednek el az egyes oszloptípusok!

A felsorolt számok 45, illetve 75 többszörösei. Ezek közül a színessel jelölt számok a két szám közös többszörösei.
Az összesítésből kiderül, hogy a kétféle jelzőoszlop 225 méterenként kerül egymás mellé.
Tehát először 225 méternél lesznek egymás mellett.

Útjelző (méter)	Hómagasságjelző (méter)
45	75
90	150
135	**225**
180	300
225	375
270	**450**
315	525
360	
405	
450	

A többszörösök közül a 225 a legkisebb. Legnagyobb közös többszörös nincs, mert ha a 225-öt egy tetszőlegesen nagy számmal megszorozzuk, az eredmény is többszörös lesz. A közös többszörösök közül a legkisebb kitüntetett szerepet játszik. Jelölése: a számokat szögletes zárójelbe tesszük, és pontosvesszővel választjuk el egymástól. [45; 75] = 225.

A legkisebb közös többszöröst úgy is meghatározhatjuk, ahogyan most tettük: felírjuk a számok többszöröseit, majd megkeressük a legkisebbet, amelyik mindkét számnak többszöröse. Ez a módszer néha nagyon hosszadalmas lehet. Keressünk egy másik módszert, amely a legkisebb közös többszörös meghatározásához a számok prímtényezős felbontását használja.

PÁROS MUNKA

Dolgozzatok a felsorolt kártyákkal!

2	2	2	3	3	3	5	5	7	7	11	17

I. A páros egyik tagja határozza meg a 84, a páros másik tagja a 198 prímtényezős alakját!
Ellenőrizzétek egymás prímfelbontását! Keressetek a prímkártyák közül egy vagy több kártyát úgy, hogy a számotokat ezekkel a prímekkel megszorozva a két szám közös többszörösét kapjátok!
Írjátok fel a többszörösöket prímszámok szorzataként, majd keressétek meg a közös többszörösök közül a legkisebbet!

II. Készítsetek a felsorolt prímek felhasználásával két összetett számot, majd adjátok oda társatoknak!
Ezzel a két számmal is végezzétek el a fent leírtakat!
Figyeljétek meg, hogy milyen prímtényezőket tartalmaz a közös többszörösök közül a legkisebb!

Fogalmazzátok meg a tapasztalataitokat!

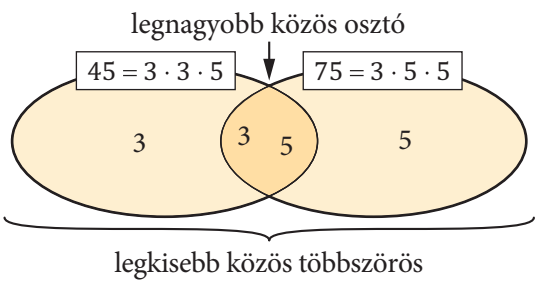


A példában megadott két szám prímtényezős felbontása: $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$; $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$.
A legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontása: $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$.

A legkisebb közös többszörös meghatározása során olyan számot kell keresnünk, amely mindkét számnak többszöröse, így a legkisebb közös többszörösben a vizsgált számok összes prímtényezőjének szerepelni kell.
Foglaljuk össze a tapasztalatokat!

A számokat felírjuk prímhatványok szorzataként, kiválasztjuk a számokban szereplő összes prímet, azok legnagyobb kitevős hatványát (kitevők egyenlősége esetén az egyforma kitevőjű hatványt), majd ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk.

A példában megadott 45 és 75 számok esetén a legkisebb közös többszörös: $[45; 75] = 3^2 \cdot 5^2$.



FELADATOK

1. Írd fel az alábbi számok öt-öt közös többszörösét!

a) 7; 8 *b)* 3; 12 *c)* 10; 15
d) 12; 15 *e)* 22; 26 *f)* 40; 80

2. Írd fel az alábbi számok legkisebb közös többszörösét a számok prímtényezős alakjának felhasználásával!

a) [8; 32] *b)* [1; 14]
c) [24; 60] *d)* [120; 45]
e) [96; 144] *f)* [60; 108]

3. Számítsd ki az alábbi számhármasok legkisebb közös többszörösét!

a) [7; 28; 12] *b)* [25; 8; 27]
c) [48; 120; 72] *d)* [75; 300; 200]

4. Add meg a legkisebb közös többszörösöket prímhatványok szorzataként!

a) $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 3 \cdot 5^2 \cdot 13]$
b) $[2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5^2;\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3;\ 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 11^2]$

5. A legkisebb közös többszörös megkeresésével hozzatok közös nevezőre, és végezzétek el a műveleteket!

a) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$ *b)* $\frac{7}{30} - \frac{3}{55}$
c) $\frac{7}{75} - \frac{8}{100}$ *d)* $\frac{11}{54} + \frac{25}{108} - \frac{23}{72}$
e) $\frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2}$ *f)* $\frac{4}{3^3 \cdot 11} - \frac{8}{11^2 \cdot 5}$

6. Milyen számok kerüljenek a négyzetek helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $[2^2 \cdot 3^{\blacksquare} \cdot 5^{\blacksquare};\ 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{\blacksquare}] = 2400$
b) $[2^2 \cdot 3^{\blacksquare} \cdot 5^{\blacksquare};\ 2^{\blacksquare} \cdot 3^2 \cdot 5] = 1080$

7. Hatalmas tapsviharral jutalmazták a diákok az iskolai ünnepségen fellépő másodikosok zenekarát. Az énekszó mellett minden harmadik ütemben öten egyszerre rácsaptak a dobra, minden negyedik ütemben tízen összeütötték a cintányérjukat, és minden hatodik ütemben harsány furulyaszó hallatszott. Hányadik ütemekben szólt a három hangszer egyszerre?



8. Egy repülőgép-társaságnál négyféle úti cél közül választhatunk: 3 naponta indul egy gép Londonba, 4 naponta Párizsba, 8 naponta Brüsszelbe és 12 naponta Stockholmba. Ha Budapestről január elsején mind a négy városba elrepülhetünk, melyik napon indul újra együtt Budapestről ez a négy járat?

9. Vali a területi prózamondó versenyen megkapta a zsűri különdíját, így rengeteg nyalókát nyert. Arra gondolt, egyet sem tart meg, mindet elosztogatja a barátnői között. Amikor négy, hat, nyolc vagy tíz barátnőjének tervezett adni belőle, mindig nála maradt 1 darab. Végül 11 barátnője között sikerült maradék nélkül szétosztani. Hány nyalókát kapott Vali?

10. Keresd meg azokat a kétjegyű pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy a 3, 6, 9, 12 számok közül pontosan három számmal oszthatók, de a negyedikkel nem!

11. Felírtam egy lapra 1-től 50-ig a pozitív egész számokat. Hány nullára végződik az a pozitív egész szám, amely ezeknek a számoknak a legkisebb közös többszöröse?



JÁTÉK



Az 1–3. feladatokat a fenti játéktáblán játsszátok! Keressetek olyan lépéssorozatot, amelyikkel mindig nyerhettek! Adjatok nyerő stratégiát!

1. Ezt a játékot párban játszhatjátok. Tegyetek egy bábut (radírt, papírfecnit stb.) a START mezőre! Lépjetek a bábuval felváltva egy vagy két mezőt előre! Az a játékos nyer, aki pontosan rálép a CÉL mezőre.

2. Változtassatok a játékszabályon! Lépjetek egyet, kettőt vagy akár hármat is! Működik az előző játéknál kialakított stratégia?

3. Hogyan változik a nyerő stratégia, ha a mezők számát növeljük
a) 3-mal? *b)* 5-tel? *c)* 7-tel?

4. Ezt a játékot másféleképpen is játszhatjátok. Rakjatok ki tetszőleges számú kavicsot vagy pálcikát az asztalra, és vegyetek el belőle felváltva egyet, kettőt vagy hármat! Az nyer, aki az utolsó darabot elveszi. Figyeljétek meg, hogyan kell megváltoztatni a nyerő stratégiát a kirakott tárgyak darabszámától függően!

5. Versenyezzetek, ki tud adott idő alatt többféle téglatestet megépíteni adott darabszámú kis kockából! Hányféle téglatest építhető
a) 8 darab; *b)* 12 darab;
c) 16 darab; *d)* 48 darab kis kockából?

IV. 11. ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a fejezetben először átismételtük az osztó és a többszörös fogalmát, valamint a korábban tanult oszthatósági szabályokat.



Felsoroljuk azokat a számokat, amelyekhez már tanultunk oszthatósági szabályt:
2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 100.

Foglalkoztunk a prímszámokkal is:
Prímszámnak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan kettő pozitív osztója van (1 és önmaga).
Összetett számok azok a pozitív természetes számok, amelyeknek kettőnél több pozitív osztója van.
Az 1 nem prímszám és nem összetett szám.

Beszéltünk a következő fogalmakról:

- közös osztó;
- legnagyobb közös osztó;
- közös többszörös;
- legkisebb közös többszörös.

Például 72 és 40 legnagyobb közös osztója $(72; 40) = (2^3 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 5) = 2^3 = 8$.
Például 72 és 40 legkisebb közös többszöröse $[72; 40] = [2^3 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 5] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

FELADATOK

1. Teszt
Az alábbi tesztben több jó válasz is lehetséges. A jó válaszok betűjelét írd a füzetedbe!

I. A 269 136 osztható
A: 6-tal; B: 8-cal; C: 72-vel; D: 48-cal.

II. A $\overline{64\,63Z}$ ötjegyű szám osztható 12-vel. Milyen szám kerülhet a Z helyére?
A: 2 B: 4 C: 0 D: 8

III. Az 1, 2, 3, 4 számkártyákkal hány 3-mal osztható háromjegyű szám rakható ki?
A: 3 B: 6 C: 12 D: nincs ilyen szám

IV. Válaszd ki, melyik szorzattal egyenlő a 3600!
A: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ B: $4^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ C: $2^4 \cdot 15^2$ D: $12^2 \cdot 5^2$

V. Válaszd ki, mi lesz a tízes számrendszerben felírt 190-nek az ötös számrendszerben felírt alakja!
A: 1320_5 B: 432_5 C: 1230_5 D: 123_5

VI. Az alábbiak közül mely számpároknak lesz a legnagyobb közös osztója 12?
A: 120 és 38 B: 84 és 132 C: 24 és 96 D: 12 és 924

2. Számítsd ki az alábbi műveletek eredményét!
a) $3^3 \cdot 2^4$ *b)* $2^5 \cdot 7^2 \cdot 5^5$ *c)* $8^2 \cdot 3^5 \cdot 0^{15}$ *d)* $11^3 \cdot 3^2$

3. *a)* Tudjuk, hogy $3^a = 1$. Mi lehet a?
b) Tudjuk, hogy $b^3 = 1$. Mi lehet b?
c) Tudjuk, hogy $c^3 = 0$. Mi lehet c?
d) Tudjuk, hogy $0^d = 0$. Mi lehet d?

4. *a)* $3^x = 81$. Mennyi az x értéke?
b) $5^y = 125$. Mennyi az y értéke?
c) $z^4 = 16$. Mennyi a z értéke?
d) $v^3 = 64$. Mennyi a v értéke?

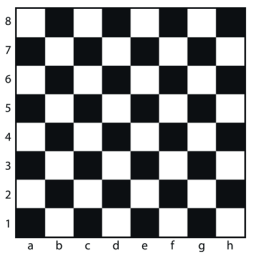
5. Válaszd ki az alábbi számok közül a négyzetszámokat, és írd fel, mely számok második hatványai!
a) 81 *b)* 169 *c)* 125 *d)* $5^2 \cdot 5^2$ *e)* $2^4 \cdot 2^6$ *f)* $2^3 \cdot 3^3$ *g)* $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5$

6. Melyik állítás igaz? A hamis állításra keress példát!
A: Ha egy szám osztható 4-gyel és 12-vel, akkor osztható 48-cal is.
B: Ha egy szám osztható 5-tel és 2-vel, akkor osztható 10-zel is.
C: Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható 24-gyel is.
D: Ha egy szám osztható 4-gyel és 8-cal, akkor osztható 32-vel is.
E: Ha egy szám osztható 9-cel és 5-tel, akkor osztható 45-tel is.

7. Melyik az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyek valamilyen sorrendjével felírható hatjegyű számok közül
a) a legnagyobb;
b) a legnagyobb páros;
c) a legnagyobb 3-mal osztható;
d) a legnagyobb 4-gyel osztható;
e) a legnagyobb 5-tel osztható;
f) a legnagyobb 6-tal osztható;
g) a legnagyobb 12-vel osztható;
h) a legnagyobb 15-tel osztható szám?

8. Miért nem lehet az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyek valamilyen sorrendjével felírható hatjegyű szám 9-cel osztható?

9. Lefedhető-e a sakktábla
a) 1×2-es dominókkal, ha kivesszük az A1-es mezőt?
b) 1×2-es dominókkal, ha kivesszük az A8 és a H1 mezőt?
c) 1×3-as dominókkal, ha kiveszünk egy tetszőleges mezőt?
Mit javasolsz, melyik mezőt vegyük ki?



10. Minden sorban felírtuk, hogy az első oszlopban szereplő szám mely prímek szorzata, de elrejtettünk a sorban egy felesleges prímet is. Ha a felesleges prímek mellé írt betűket összeolvasod, akkor egy értelmes szót kapsz.
Nézz utána az interneten, hogy mi a megfejtett szó és a prím szó kapcsolata!

60	2 H	7 I	3 J	5 K	2 L
198	3 H	2 I	3 J	13K	11 L
525	3 A	5 B	7 C	5 D	13 E
572	2 P	7 R	13 S	2 T	11 U



11. Az angoltanár ad házi feladatot az első napon, aztán a negyedik napon és így tovább, minden 3. tanítási napon.
A matektanár is ad leckét az első napon, és aztán minden 2. tanítási napon.
A földrajztanár rendes, ő először a hatodik napon ad leckét, és aztán is csak minden 5. tanítási napon.
Ha mindhárom tanár ad házi feladatot, akkor az tragikus nap. Először október 10-e, péntek volt tragikus. Mikor lesz a következő tragikus nap?

12. Igaz vagy hamis?
a) Ha két természetes szám szorzata 0, akkor mindkettő 0.
b) Ha két természetes szám szorzata páros, akkor mindkettő páros.
c) Ha két természetes szám szorzata páratlan, akkor mindkettő páratlan.
d) Ha egy természetes szám jegyeinek összege osztható 6-tal, akkor a szám is osztható 6-tal.
e) Ha egy páros természetes szám jegyeinek összege osztható 18-cal, akkor a szám is osztható 18-cal.



JÁTÉK

BINGO			
Kisebb, mint 15	Páros	Négyzetszám	Páratlan
Prím	2-re végződik	11 többszöröse	30 osztója
25-nél nagyobb	10 hatványa	5-nél kisebb	40 és 60 között van
Van benne 7-es	Háromjegyű szám	Köbszám	Egy másik prím

Mindenki készítsen egy 4 × 4-es táblázatot a füzetében, amelyikbe olyan természetes számokat ír be, amelyek illenek az itt látható meghatározásokhoz.

Ha mindenki kitöltötte a saját táblázatát, akkor sorban mondjatok egy-egy számot a saját lapotokról. Akinél szerepel a mondott szám, az be kell ikszelje egy helyen a saját lapján. Ha valaki egy sorban, oszlopban vagy átlóban mind a négy számot beikszelte, akkor felkiált, hogy BINGÓ! és nyert.

A játék egy nehezebb változatában akkor lehet nyerni, ha mind a 16 számot sikerül valakinek beikszelni.

Ha már nagyon jól megy, készítsetek saját meghatározástáblát a bingóhoz.

V. SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS, EGYENLETEK



– Következő járatunkkal Alexandriába látogatunk, Kr. e. 240-be. Mindenki jelentkezett? – kérdezte Judit néni teljesen feleslegesen, hiszen maga előtt látta a pályázók névsorát. Még tizenkét másodpercet kellett várni, és a holomonitoron megjelent az utazók listája. A két kiválasztott, Zsombi és Zsuzsi először örömujjongásban tört ki, majd villámgyorsan készülődni kezdtek az időugrásra. A visszaszámlálás megkezdésekor erősen megmarkolták a karfát. Szorításuk csak akkor enyhült, amikor megpillantottak néhány görögösen öltözött embert és mögöttük az alexandriai könyvtárat.

– Üdv, Béta! Hallom, keresel egy megbízható embert, aki Szüénébe utazik mérni.

– Jól hallottad, Hérón, de ha még egyszer Bétának szólítasz, nem te leszel az, bármilyen nagyra tartom is a munkáidat.

– Bocsáss meg, Eratoszthenész! Tudod, én is mennyire becsüllek. Nem mellesleg szeretnék részt venni a mérésben. Elmagyaráznád az eljárásodat?

– Az utazók szerint van Szüénében egy nap, amikor a Nap úgy süti a kutak fenekét, hogy egy csepp árnyék sem esik a vízre. Ha ugyanekkor itt, Alexandriában is megmérjük, hogy mekkora árnyékot vet egy függőlegesen leszúrt bot, akkor ki tudjuk majd számolni a Föld kerületét, hiszen tudjuk, milyen messze van Szüéne Alexandriától. – Miközben beszélt, egy bottal hevenyészett ábrát rajzolt a homokba.

– Most, hogy elmondtad, olyan egyszerűnek tűnik. Hogy nem jutott ez nekem is eszembe? – sóhajtott Héron.

Zsuzsi azt forgatta a fejében, hogyha hazaérnek, ők is lerajzolják a többieknek Eratoszthenész magyarázatát. Zsombi viszont ekkorra már készített is néhány téridőképet, amit elégedetten bámult a holomonitoron.

V. 1. AZ ARÁNYOSSÁGRÓL MÉG EGYSZER



Hatodik osztályban tanultuk az arány fogalmát. Mennyiségeket, számokat osztottunk fel megadott arányban.

CSOPORTMUNKA

a) Beszéljétek meg, mit jelent az 1 : 2!
b) Szemléltessétek ábrával egy mennyiség 2 : 3 arányú felosztását!
c) Írjatok egy feladatot az osztály egy másik csoportjának, amelyben egy mennyiség 3 : 5 arányú felosztását kell elvégezni!

Ha egy osztályban a fiútanulók kétszer annyian vannak, mint a lánytanulók, akkor azt is mondhatjuk, hogy a lányok és a fiúk aránya 1 : 2.

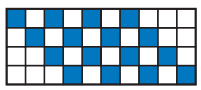
Mit jelent az 1 : 2 arány? Azt, hogy az 1 hányszorosa a 2-nek. Az 1 a 2-nek $\frac{1}{2}$-szerese.

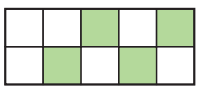
Két szám vagy mennyiség aránya a két szám hányadosa. Azt fejezi ki, hogy az első szám, illetve mennyiség hányszorosa a másodiknak.

Tizedes tört alakban csak akkor adjuk meg az arányt, ha véges tizedes tört az értéke.

1. PÉLDA

Írjuk fel az itt látható különböző színű csempék területének arányát!





Megoldás

A kék és a fehér területek aránya: 16 : 24.
Írjuk fel az arányokat tört alakban!

$16 : 24 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

A zöld és a fehér területek aránya 4 : 6.

$4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Azt kaptuk, hogy a színes és a színezetlen csempék aránya mindkét esetben 2 : 3.

A két ábráról leolvasott arányok egyenlő értékűek. Az egyenlő értékű arányokat **aránypárok**nak nevezzük. Az arányban szereplő számok nem cserélhetők fel.
Az arányokkal való számolásnál célszerű a lehető legegyszerűbb alakot használni.

2. PÉLDA

Egy iskolai *A fele sem igaz!* vetélkedő díjazására a diákönkormányzat 24 db 1000 Ft-os könyvutalványt ajánlott fel. A megállapodás alapján az első három helyezett csapatot jutalmazzák könyvutalvánnyal. Szeretnék, ha az első helyezett háromszor akkora jutalmat kapna, a második pedig kétszer akkorát, mint a harmadik helyezett. Hogyan kell elosztani az utalványokat?

Megoldás

Tekintsük a harmadik helyezett csapat jutalmát egységnyinek! Ekkor a jutalmat 3 : 2 : 1 arányban kell felosztani, azaz az első kapjon 3 részt, a második 2 részt, a harmadik 1 részt! Ez azt jelenti, hogy az utalványokat $3 + 2 + 1 = 6$ részre kell osztani.

$24 : 6 = 4$

Az első helyezettnek $3 \cdot 4 = 12$, a második helyezettnek $2 \cdot 4 = 8$, a harmadik helyezettnek $1 \cdot 4 = 4$ könyvutalvány jut. Ellenőrzés: $12 \cdot 1000 + 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 1000 = 24\,000$.

A példa megoldásában az arányos osztás módszerét alkalmaztuk.

Arányos osztásnál a felosztandó mennyiséget vagy számot elosztjuk az arányban szereplő számok összegével, majd a kapott értéket megszorozzuk az arányban szereplő számokkal.

FELADATOK

1. Írj fel három-három olyan számpárt, melyekben a számok aránya

a) 2 : 5; *b)* 3 : 2; *c)* 10 : 15.

2. Írd fel két egész szám arányaként a megadott arányokat!

a) 1,5 : 6,75; *b)* $\frac{1}{2} : 2$; *c)* $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$;

d) $\frac{1}{3} : \frac{3}{6}$; *e)* $\frac{3}{7} : \frac{4}{9}$; *f)* $3\frac{1}{5} : 2\frac{3}{7}$.

3. Írd fel, milyen arányban osztoztak a gyerekek a süteményeken!

a) A muffinok hatodát Lajos, harmadát Irénke ette meg, a többi megmaradt.

b) A pogácsák harmadát Elemér, negyedét Izabell, a maradékot Károly ette meg.

c) Az islerek felét Konrád, a maradék negyedét Marika, az összes többit Erika ette meg.

4. Osszuk fel az alábbi számokat a megadott arányban!

a) 56-ot 3 : 5 arányban;

b) $\frac{11}{5}$-öt 5 : 6 arányban;

c) 2800-at $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ arányban;

d) 6300-at 2 : 3 : 4 arányban.

5. Két testvérnek összesen 420 cserélhető focis kártyája van. Az idősebb testvérnek háromszor annyi kártyája van, mint a fiatalabbnak.

a) Írd fel a két testvér kártyái számának arányát!

b) Hány focis kártyája van a kisebb testvérnek?

6. Két szám aránya 2 : 7.

a) Mekkora a nagyobbik szám, ha a kisebb szám 124?

b) Melyik két számra gondoltunk, ha az összegük 1710?

c) Melyik két számról van szó, ha különbségük 45?

7. Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének aránya 1 : 4. Hány fokosak a háromszög szögei?

8. A Vidám családban három gyerek van. A családtagok életkorának összege 116 év. A gyerekek életkorának aránya 5 : 4 : 3. Az apa 4 évvel idősebb az anyánál. Ha az apa életkorának kétszereséhez 4-et adunk, 100-at kapunk.

a) Hány évesek a szülők?

b) Hány éves a legidősebb gyermek?

c) Hány év múlva lesz a legkisebb gyerek feleannyi idős, mint az anya most?

V. 2. MIT TANULTUNK A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSRÓL?



Ismételjük át példákon keresztül az eddigi ismereteinket!

1. PÉLDA

a) Számítsuk ki 560-nak az $\frac{1}{100}$ részét!

b) Mit jelent az 1%?

c) Számítsuk ki 25 kg-nak a 40%-át!

Megoldás

a) 560-nak az $\frac{1}{100}$ része egyenlő az 560 $\frac{1}{100}$-szorosával, azaz $560 \cdot \frac{1}{100} = 5{,}6$-del.

b) Az 1% egy adott szám vagy mennyiség $\frac{1}{100}$ részét jelenti.

c) 25 kg 40%-a egyenlő 25 kg $\frac{40}{100}$-szeresével, tehát $25 \cdot \frac{40}{100} = 25 \cdot 0{,}40 = 10$ kg-mal.

Egy tört kifejezheti egy mennyiség vagy egy szám adott törtrészét. Ezt tizedes tört alakban vagy százalék alakban is megadhatjuk.

Például a $\frac{3}{5}$ rész egyenlő 0,6 résszel, ami megegyezik 60%-kal.

0,1% az 1% tizedrésze. $0{,}1\% = 0{,}1 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000}$, ezért ezt 1 ezreléknek nevezzük. Jele: ‰.

PÁROS MUNKA

Alakítsatok párokat! A páros egyik tagja az I., a másik tagja a II. feladatot oldja meg! Ha végeztetek a megoldással, akkor mondjátok el a feladatot és a megoldást a társatoknak!



I. Add meg az alábbi értékeket tört alakban!

4%;	150%;	0,2%;
25%;	325%;	1,25%;
75%;	100%;	5‰

II. Add meg az alábbi törtrészeket százalék alakban!

$\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{19}{25}$; 1,25; $\frac{5}{125}$;

$\frac{3}{4}$; $\frac{8}{20}$; 0,22; $\frac{1}{3}$

2. PÉLDA

Egy 650 férőhelyes színházban a jegyek 40%-a 4900 Ft, a többi jegy ára 3500 Ft.
a) Hány db jegyért kell 4900 Ft-ot fizetni?
b) A jegyek 92%-át sikerült eladni. Hány darab jegy maradt meg?

Megoldás

a) 650-nek a 40%-át keressük. Másként úgy is fogalmazhatunk, hogy mennyi 650-nek a $\frac{40}{100}$ része. Ezt sokféleképpen felírhatjuk:

$650 \cdot \frac{40}{100} = 260$ vagy $650 \cdot 40 : 100 = 260$ vagy $650 \cdot 0{,}4 = 260$.

A konkrét érték kiszámítása bármelyik műveletsorral elvégezhető.
260 db 4900 Ft-os jegy van.

b) A jegyek 100% − 92% = 8%-a maradt meg, tehát 650-nek a 8%-át kell meghatározni.
Az előzőekhez hasonlóan $650 \cdot \frac{8}{100} = 650 \cdot 0{,}08 = 52$ db jegy maradt meg.

3. PÉLDA

Egy almás sütinek a 40%-a alma, negyedrésze tojás, vaj és cukor, a többi liszt. A süteménynek hány %-a liszt?



Megoldás

40% = 0,4 része az alma.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ része tojás, vaj és cukor.

Így a sütemény 1 − 0,65 = 0,35 része, azaz 35%-a liszt.

4. PÉLDA

Összeöntünk 2 liter 25%-os és 3 liter 40%-os narancslevet.
a) Hány liter tömény (100%-os) narancslé lesz a keverékben?
b) A keveréknek hányadrésze tömény gyümölcslé? Hány százaléka ez az összes mennyiségnek?

Megoldás

a) A 2 liter 25%-os narancslében $2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$ liter, a 3 liter 40%-os narancslében $3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ liter a tömény gyümölcslé. Az összeöntés után az 5 literben 0,5 + 1,2 = 1,7 liter a 100 százalékos narancslé mennyisége.

b) 1,7 liter az 5 liternek az $\frac{1{,}7}{5} = \frac{34}{100}$ része. A keverék 0,34 része, azaz 34%-a tömény narancslé.

V. 2. MIT TANULTUNK A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSRÓL?

KUTATÓMUNKA

Nézzetek utána, hány százalékos a sótartalma az Adriai-tengernek, a Jón-tengernek és a Holt-tengernek! Ezek közül melyik a legsósabb? Milyen következménye van ennek?

FELADATOK

1. Keresd az egyenlőket! Írd megfelelő sorrendbe az ezekhez tartozó betűket, és értelmes szavakat kapsz!

E) $\frac{9}{25}$ *S)* 36% *LY)* $\frac{36}{100}$ *NY)* $1\frac{2}{5}$

R) 140% *A)* $\frac{7}{5}$ *Á)* 1,4 *É)* 0,36

2. Számítsd ki 750-nek a

a) 20%-át; *b)* 15%-át; *c)* 27,5%-át;
d) 145%-át; *e)* 24,75%-át; *f)* 400%-át!

3. Számítsd ki kétféle módon a

a) 24 500 m 45%-át;
b) 5,4 kg 70%-át;
c) 3700 cm^2 27,5%-át!

4. Egy téglalap alakú kert egyik oldala 25 m, hosszabb oldala ennek 170%-a. Milyen hosszú a kert másik oldala?

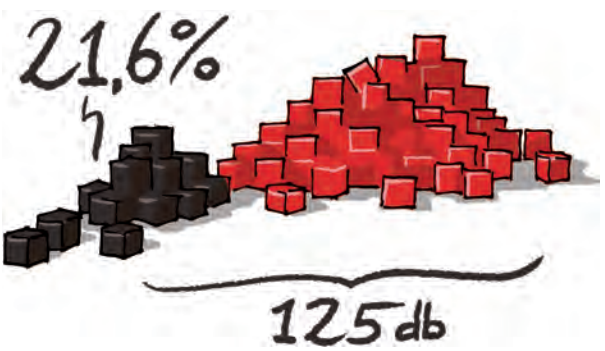
5. A sulibulin hatalmas sikere volt a tanári zenekar előadásának. A felső tagozat $\frac{3}{5}$ része végigtáncolta, 70%-a pedig végigénekelte a bulit. 78 olyan gyerek volt, aki az egész buli alatt énekelt és táncolt is. Számítsd ki, hányan járnak a felső tagozatra, ha tudjuk, hogy ezen a bulin minden gyerek részt vett!

6. Az iskolaújságban jelent meg a következő hír: „A nyolcadik évfolyamra 124 gyerek jár. Az ide járók pontosan …%-a szeretne jövőre gimnáziumban továbbtanulni.” Milyen szám állhat a … helyén, hogy ez a mondat egész számú gyerekre utaljon?

7. Egy városismereti vetélkedőn 50 kérdéses tesztet kellett kitölteni. A Pajkos csapat célba érés után az alábbit mondta a már beérkezett csapatoknak: *„A feladatok közül 40% biztos, hogy jó, 45% lehet, hogy jó, és csak a tesztkérdések 15%-ára nem tudtunk válaszolni.”* Igaz lehetett-e az állításuk?

8. Összeöntöttem 2 liter 100%-os narancslevet 1 liter 40%-os narancslével – mondta Dávid, de a kishúga rögtön közbevágott, hogy az nem lehet, mert akkor a keverék 140%-os lesz, ami köztudottan nem létezik. Számolj, és indokold meg, miért hibás Dávid húgának gondolatmenete!

9. Van 125 db egybevágó kis kockánk, melyek 21,6%-a teljesen fekete, a többi egyszínű piros. Tudok-e az összes kis kocka felhasználásával egy olyan nagy kockát építeni, hogy kívülről csak a piros kis kockák látszódjanak?



1. PÉLDA

Egy iskolában 84 diák tanul zenét. Ez az iskola tanulóinak 12%-a. Számítsuk ki, hogy hányan járnak ebbe az iskolába!



Megoldás

Az ismert adatokból kiszámíthatjuk az iskola tanulóinak 1%-át, majd ebből következtethetünk az egészre, azaz a 100%-ra.

Az iskola tanulóinak 12%-a, azaz $\frac{12}{100}$ része 84 tanuló.	12%	84
Az iskola tanulóinak 1%-a a 84 tanuló $\frac{1}{12}$ része, tehát $84 : 12 = 7$ tanuló.	1%	$\frac{84}{12} = 7$
Az iskola tanulóinak száma az 1% 100-szorosa: 700 tanuló.	100%	$7 \cdot 100 = 700$

$\frac{84}{12} \cdot 100 = 700$ tanuló jár az iskolába.

2. PÉLDA

Az iskola 7. osztályosainak 32%-a rendszeresen sportol, ez 40 diák. Hány tanuló jár a 7. évfolyamra?

Megoldás

Az előző feladatban megismert módszert alkalmazzuk:	32%	40
Az évfolyam 1%-ának kiszámítása: $40 : 32 = 1{,}25$.	1%	$\frac{40}{32} = 1{,}25$
Az évfolyam létszáma (100%) ennek százszorosa: 125 tanuló.	100%	$1{,}25 \cdot 100 = 125$

Az 1%-ra nem egész szám adódott, de ez csak egy részeredmény. Ezzel továbbszámolva az évfolyam létszámára a valóságban is elfogadható egész számot kaptunk.

3. PÉLDA

Egy autó árát megemelték 20%-kal, így most 4 560 000 Ft-ba kerül. Mennyi volt az ára az áremelés előtt?



Megoldás

A 20%-os áremelés utáni ár az eredeti ár 120%-a, ezért

120%	4 560 000
1%	$4\,560\,000 : 120 = 38\,000$
100%	$38\,000 \cdot 100 = 3\,800\,000$.

Az áremelés előtt 3 800 000 Ft-ba került az autó.

V. 3. A 100% KISZÁMÍTÁSA

4. PÉLDA

Egy akciós számítógépet 20%-kal olcsóbban kínálnak. Az ára most 196 000 Ft. Mennyibe került az akció előtt? Mennyivel olcsóbban vehetjük meg?



Megoldás

A 20%-os árcsökkentés utáni ár az eredeti ár 80%-a, ezért

80% 196 000 Ft

1% 196 000 : 80 = 2450

100% 2450 · 100 = 245 000.

A számítógép akció előtti ára 245 000 Ft volt.

Akciós vásárlás esetén a megtakarítás 245 000 − 196 000 = 49 000 Ft.

Ez ugyanannyi, mint 245 000-nek a 20%-a, azaz 245 000 · 0,2 = 49 000 Ft.

A 100% kiszámításánál először az 1%-ot számoljuk ki, majd ebből következtetünk a 100%-ra.

FELADATOK

1. Számítsd ki azt a számot, melynek

a) 1%-a 29; *b)* 2%-a 22;

c) 20%-a 40; *d)* 160%-a 40.

2. Az osztálylétszámunk idén 25%-kal növekedett, így már 30-an vagyunk. Hányan voltunk eddig?

3. Higgye el, tanárnő – sopánkodott Albert az angolóra elején –, tegnap még az összes szót tudtam! Sajnos az éjszaka olyan rosszul aludtam, hogy a szavak 40%-át elfelejtettem reggelre, azért emlékeztem csak 72 szóra.

a) Hány szót kellett volna tudnia Albertnek?

b) Te mit válaszolnál a tanárnő helyében?

4. *a)* Egy nyeregtetős ház tetejére 24 négyzetméter napelemet szereltek, amellyel a teljes tető 30%-át fedték le. Mekkora a tető teljes felülete?

b) A házban lakó család villanyszámlája korábban évi 264 ezer Ft volt. A napelemek használatával éves szinten 90%-os csökkenést értek el. Hány Ft-ot takarítanak meg egy év alatt?

5. Ingatlan vásárlása esetén szerződéskötéskor 10%-os foglalót szoktak kérni a vevőtől. A foglaló a vételárba beleszámít. Egy család 7500 eurót fizetett foglalóként egy ház vásárlásánál. Mennyibe került a ház?

6. *a)* Egy őstermelő a piaci nap délelőttjén eladta a reggeli őszibarackkészletének 60%-át. Délután a maradék 120 kg is elfogyott. Mennyi őszibarackja volt a nap elején?

b) Az őstermelő délelőtt kilogrammonként 160 Ft-ot kért, délután 15%-os árengedményt adott. Mennyi volt az aznapi bevétele?

7. A 95-ös benzin árát 1,5%-kal csökkentették. Autónk 47 literes benzintankjában már csak 2 liter üzemanyag van, amikor teletankoljuk. Az árcsökkenés miatt 297 Ft-ot takarítottunk meg. Mennyibe került literenként a benzin az árcsökkentés előtt?

8. Mennyi volt Peti édesapjának az éves adóköteles bevétele, ha 15%-os adókulcs esetén 684 000 Ft adót fizetett?

4. HÁNY SZÁZALÉK? V.

PÁROS MUNKA

Alkossatok párokat! Keressétek meg a kék sorban lévő törtekkel, arányokkal egyenlő számokat a piros és a zöld sorban! Írjátok le az egyenlőségeket a füzetetekbe! Amelyik számnak nincs megfelelője valamelyik sorban, azt írjátok fel a hiányzó formában!



$\frac{1}{10}$	$2:5$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{100}$	$6:5$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$
0,8	0,5	0,75	1,25	0,4	1,2	0,01	0,55
1%	40%	75%	120%	10%	175%	60%	32%



1. PÉLDA

Egy 256 GB kapacitású pendrive-on 192 GB adat található.
Hány százaléka ez a teljes kapacitásnak?
Hány százalék a még rendelkezésre álló szabad terület?



Megoldás

Kétféle megoldási lehetőséget mutatunk:

I. módszer

Kiszámítjuk, hogy a 192 hányadrésze a 256-nak. $\frac{192}{256} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}$

Az 1% az $\frac{1}{100}$ rész, ezért a $\frac{75}{100}$ rész egyenlő 75%-kal. A pendrive tárhelyének 75%-a foglalt, a szabad terület $100\% - 75\% = 25\%$.

II. módszer

A 100% 256 GB, ezért az 1% 2,56 GB.
Ezután kiszámoljuk, hogy a 192 GB hányszor nagyobb, mint a 2,56 GB.
$192 : 2{,}56 = 75$.
Tehát 2,56 1%
192 75%
A pendrive 75%-a foglalt, a szabad terület 25%.

Az első esetben kiszámítottuk, hogy a megadott mennyiség hányadrésze az egésznek, majd a törtrészt átalakítottuk százalékalakká.

A második esetben a 100 százalékból következtettünk vissza az 1 százalékra, majd kiszámoltuk, hogy hányszor van meg a kapott érték a megadott mennyiségben.



2. PÉLDA

Egy lakásvásárló 29 440 000 Ft-ra alkudta le a 32 000 000 Ft-os ingatlant.
A meghirdetett ár hány százalékáért sikerült megvenni a lakást?
Hány százalékos kedvezményt adott az eladó?

Megoldás

Oldjuk meg a feladatot most is mindkét módszerrel!

I. módszer

Kiszámítjuk, hogy 29 440 000 hányadrésze a 32 000 000-nak.

$$\frac{29\,440\,000}{32\,000\,000} = \frac{23}{25} = \frac{92}{100} = 0{,}92$$

A 0,92 rész egyenlő 92%-kal.
Az eredeti ár 92%-áért sikerült megvenni a lakást, így 8% az engedmény mértéke.

II. módszer

A 100% az 32 000 000 Ft, ezért az 1% az 320 000 Ft.
Számoljuk ki, hogy a 29 440 000 hányszor nagyobb, mint a 320 000.
29 440 000 : 320 000 = 92
Tehát 320 000 1%
29 440 000 92%
Az eredeti ár 92%-a a lealkudott ár, így 8% az engedmény mértéke.

3. PÉLDA

Az élelmiszerárak emelkedése során az 1 liter 290 Ft-os tej új ára 430 Ft lett.
Hány százalékos az áremelkedés mértéke?



Megoldás

I. módszer

Számítsuk ki, hogy az új ár hányadrésze a régi árnak, majd ezt alakítsuk százalékalakra.

$\frac{430}{290} \approx 1{,}48$; az 1,48 törtrész 148%.
Az eredeti ár a 100%, ezért körülbelül 48%-os az áremelkedés.

II. módszer

A 100% az 290 Ft, ezért 1% az 2,9 Ft.
Kiszámoljuk, hogy a 430 hányszorosa a 2,9-nek: 430 : 2,9 ≈ 148.
Az új ár a réginek kerekítve 148%-a, tehát az áremelkedés körülbelül 48%-os.

FELADATOK

1. Számítsd ki, hány százaléka 1 méternek
a) 0,5 m; *b)* 1,3 m; *c)* 58 cm; *d)* 8,2 cm; *e)* 419 mm; *f)* 0,2 km!

2. Hányszorosa, illetve hány százaléka a
a) 24 a 48-nak; *b)* 12 a 120-nak; *c)* 10 az 50-nek; *d)* 10 a 4-nek?

3. Mióta hetedikes lettem, az eddig jól bevált heti 5 óra helyett heti 7 órát tanulok – sopánkodott Lázár. Hány százalékkal növekedett Lázár tanulási ideje?

4. Az iskolai büfében délután háromtól mindig akció van. Minden szendvics, ami napközben 250 Ft volt, ilyenkor csak 180 Ft-ba kerül. Hány százalékos az árcsökkenés?

5. Hányadrésze és hány százaléka a(z)
a) 24 a 72-nek; *b)* 85-nek a 17; *c)* 5 a 42-nek; *d)* 2534-nek az 52;
e) 24 óra az egy hétnek; *f)* 50 gramm a 2,5 kg-nak; *g)* 20 perc a 30 másodpercnek?

6. Az ábrán látható szórólap egy cipőbolt tél végi akcióját reklámozza. Hány százalékos volt a leárazás?

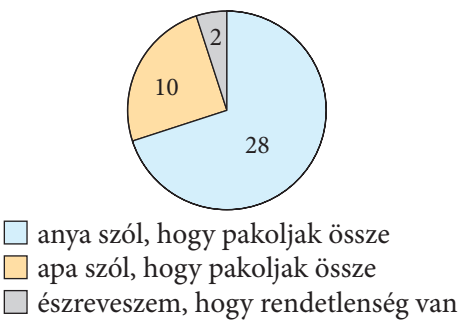


7. Két egymást követő árváltozás során egy 2000 Ft-os könyv árát először 1600 Ft-ra csökkentették, később felemelték ismét 2000 Ft-ra. Hány százalékos volt az árcsökkentés, és hány százalékos az áremelés?

8. Egy 440 km-es autós utazásból eddig 176 km-t tettünk meg. Az út hány százaléka van még hátra?

9. Matyi a 140 pontos dolgozatot 119 pontra írta. Jelest a 80% fölöttiek kaptak, és a 90 százalék fölöttieket külön kiemelte és megdicsérte a tanáruk. Milyen értékelést kapott Matyi?

10. Aladár szobájában állandó a rendetlenség, amiért a szülei rendszeresen rá is szólnak. A diagram azt mutatja, hányszor kerül ez említésre hetente. Számítsd ki, hogy az esetek hány százalékában szól ezért az anyukája és hány százalékban az apukája!



11. Morgós Miskának soha nem jó semmi. Egy iskolai nap alatt 27-szer azon morgott, miért kell iskolába járni. 48-szor arról panaszkodott, hogy milyen nehezeket tanulnak a suliban. 39-szer azon búslakodott, hogy megint mennyi leckét kaptak, és csak 6-szor hozta fel ezen a napon azt, hogy túl hangos a suliban az órakezdést jelző csengő. Számítsd ki, hogy a morgások hány százaléka szólt arról, hogy iskolába kell járni!

V. 5. A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS GYAKORLÁSA



CSOPORTMUNKA

Versenyezzetek!
Oldjátok meg a füzetetekben az alábbi feladatokat a tanárotok által meghatározott időtartam alatt! Az eredményeket közösen ellenőrizzétek!

1. Mennyi 42-nek a 25%-a?
2. Mennyivel egyenlő 34,5-nek a 220%-a?
3. Melyik számnak a 45%-a 27?
4. Hány százaléka 250-nek a 40?
5. Melyik nagyobb? A 35 70%-a vagy a 75 30%-a?
6. Mennyi a 140-nél 10%-kal nagyobb szám értéke?
7. Mennyivel egyenlő 750-nek a 20%-kal csökkentett értéke?
8. Hány százaléka 180-nak a 99?
9. Hány százaléka a 923 a 650-nek?
10. Mennyivel egyenlő 680 háromnegyed részének 20%-a?
11. Mennyivel egyenlő 1000 37,5%-ának $\frac{8}{3}$-szorosa?



1. PÉLDA



Egy dromedár (egypúpú teve) testtömegének akár 40 százalékát is elveszítheti anélkül, hogy maradandó károsodást szenvedne. Számítsuk ki, hogy egy 500 kg tömegű dromedár esetében hány kg-ot jelent ez! Hány százalékot hízik, ha ezt a veszteséget visszaszedi?

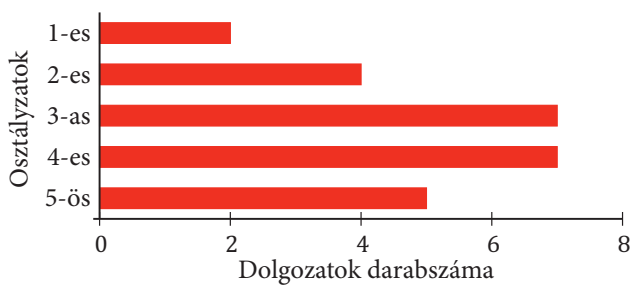
Megoldás

Az 500 kg 40%-a: $500 \cdot 0{,}4 = 200$ kg.
A dromedár 200 kg-ot veszített a testtömegéből, így a tömege 500 kg − 200 kg = 300 kg lett. 200 kg-ot kell visszahíznia. Ez a 300 kg-nak a $\frac{200}{300} \approx 0{,}67$-szorosa, azaz 67%-a. A dromedárnak 67%-ot kell híznia, hogy 500 kg-os legyen.

2. PÉLDA

A 7. b osztály matematikadolgozatának eredményét láthatjuk a diagramon.

a) Az osztály hány százaléka írt ötös dolgozatot?
b) Az osztály hány százaléka írta meg a dolgozatot legalább közepesre?



Megoldás

Készítünk egy táblázatot a grafikonon látható adatokból.

Osztályzatok	5	4	3	2	1	Összesen
Osztályzatok darabszáma	5	7	7	4	2	25

a) A 25 dolgozatból 5 jeles dolgozat volt. Az 5 a 25-nek $\frac{5}{25} = 0{,}2$ része, ami a dolgozatok 20%-a.

b) Legalább közepesre $5 + 7 + 7 = 19$ tanuló írta meg a dolgozatot. Ez az összes dolgozat $\frac{19}{25} = 0{,}76$ része. A dolgozatok 76%-a lett legalább közepes.

3. PÉLDA



A kereskedelemben az eladott termékeket úgynevezett bruttó áron vásárolhatjuk meg. A bruttó ár általános forgalmi adót tartalmaz, amit röviden áfának nevezünk. Az áfa nélküli ár a nettó ár, ami az eladót illeti, az adó pedig az államé. Az áfa mértéke különböző, jelenleg a legtöbb termék bruttó ára 27%-os áfát tartalmaz, de néhány termék áfatartalma csupán 5%.
A világjárványra tekintettel a házhoz szállított vagy elvitt ételek áfája 2021. július 31-ig csupán 5% volt, de augusztus 1-től visszaállt a korábban is alkalmazott 27%-os adókulcs.

a) Mennyi a heti menü nettó ára, ha 2021 júliusában bruttó 5880 Ft-ba került?

b) Mennyivel lett drágább a heti menü 2021. augusztus 1-től?

Megoldás

a) Az 5880 Ft a nettó ár 5%-kal megnövelt értéke, azaz 105%-a.

105% 5880 Ft
1% 56 Ft
100% 5600 Ft

A menü nettó ára 5600 Ft.

b) A korábbi 27%-os áfa visszaállítása miatt a bruttó ár a nettó ár 127%-a.

100% 5600 Ft
127% 5600 Ft $\cdot$ 1,27 = 7112 Ft

A heti menü új ára 7112 Ft lett, így az adóváltozás miatt ugyanazért a heti menüért 1232 Ft-tal többet kellett fizetni.

V. 5. A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS GYAKORLÁSA

FELADATOK

1. A 150 grammos mogyorós csoki 45%-a mogyoró. Hány gramm csoki van benne?

2. Andris a százalékszámítás-dolgozatra készült. Megoldotta a feladatgyűjtemény témába tartozó összes feladatát. A végeredmények ellenőrzésekor megállapította, hogy a feladatok 80%-át, szám szerint 32 darabot helyesen oldott meg. Hány feladatot oldott meg összesen?

3. Az osztályba járó diákok 70%-a szereti a mézet, és 60%-a szereti a mazsolát. 9 gyerek mindkettőt szereti. Hányan járnak ebbe az osztályba?

4. A Lázár által ismert varázslatok 23%-a csiribú, 84%-a csiribá, és csupán 14 olyan varázslatot tud, ami csiribú és csiribá is egyszerre. Hány csak csiribá varázslatot ismer Lázár?

5. A sarki palacsintázó áremelést tervez, mivel a hozzávalók ára egyre magasabb lett. Mit javasolsz, egyszerre emeljen 20%-ot, vagy inkább kétszer emeljen 10%-ot? Fogalmazd meg a válaszodat az eladó és a vevő szemszögéből is!

6. Egyre többen követik az oldalamat – lelkendezett Adorján. Tegnap még csak 68-an, ma már 85-en lájkolták a kirakott posztomat. Hány százalékkal kapott több lájkot Adorján ma, mint tegnap?

7. Ragyogó eredménnyel zárult a magyarok tokiói paralimpiai szereplése, 16 érmet szereztek összesen.

a) Számítsd ki, hány paralimpiai aranyérmet szereztek idén a magyarok Tokióban, ha tudod, hogy 40%-kal több aranyérem született, mint ezüst, és szereztek 4 bronzot is!

b) Nézzetek utána a rendezvénynek, a magyar résztvevőknek, és készítsetek róla egy fényképes kiselőadást!

8. Hány forintba kerül a 27%-os áfa nélkül az a nagy zacskó keksz, amelyiknek a boltban a bruttó ára 635 Ft?

9. A magyar adótörvény szerint 27%-os az áfa, ez alól csak néhány termék kivétel. Ilyen például a tehéntúró is, amely 18%-os áfakulcs alá tartozik. Egy doboznyi túró esetén az áfa értéke 63 Ft.

a) Mennyi a túró áfa nélküli nettó ára?

b) Mennyi a túró áfával növelt bruttó ára?

10. A hét minden napján nyitva tartó elektrotechnikai szakbolt szokatlan akciót hirdetett. Egy hétig +20%, –20% akció volt, ami azt jelentette, hogy ezen a héten minden páratlan napon 20%-kal drágábban, minden páros napon 20%-kal olcsóbban lehetett megvásárolni a termékeiket, mint az azt megelőző napon. Melyik nap tudnánk a legolcsóbban megvenni az eredetileg 1 000 000 Ft-os házimozirendszert, és mennyibe kerülne ezen a napon?



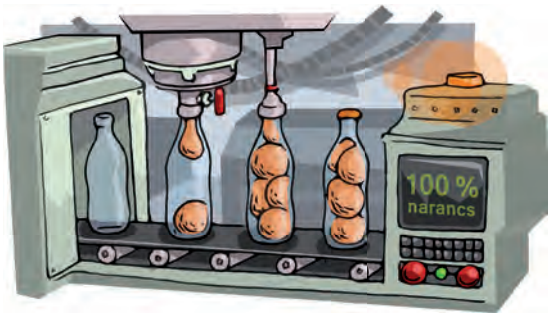
11. – Nálatok mindenkinek jól megy a matek? – kérdezte Rozi néni Maximot.

– Az én évfolyamom igazán remek – dicsekedett Maxim –, csak a hetedikesek 40%-ának a 40%-ának a 40%-a, mindössze 8 olyan gyerek van, aki kicsit nehezebben érti a matekot.

Hányan járnak ebbe a szuper matekos évfolyamba?

1. PÉLDA

a) Egy üdítőspalackokat töltő üzem új gépet vásárolt. Ennek teljesítménye nagyobb, mint a régi gépé, így egy óra alatt 10%-kal több palackot tud megtölteni. A régi géppel egy óra alatt 2500 üdítőspalack tölthető meg. Hány palackot tud megtölteni az új gép egy óra alatt?



b) Egy év múlva a gyártó frissítette a gép szoftverét, ami további 6%-os termelésnövekedést eredményezett. Hány palackot tudnak a frissítés után megtölteni a géppel egy óra alatt?

Megoldás

a) A 2500-nak a 10%-a $2500 \cdot 0{,}1 = 250$. Ennyivel növekedett a megtöltött palackok száma.
Így az új gép $2500 + 250 = 2750$ palackot tud megtölteni 1 óra alatt.
Ezt felírhatjuk az alábbi műveletsorral is:
$2500 + 2500 \cdot 0{,}1 = 2500 \cdot (1 + 0{,}1) = 2500 \cdot 1{,}1 = 2750$.
Gondolkodhatunk úgy is, hogy ha 10%-kal megnöveljük a palackok számát, akkor az 110% lesz, ami a 2500-nak az 1,1-szerese, tehát $2500 \cdot 1{,}1$.

b) Hasonlóan járhatunk el, mint az *a)* esetben. Most a 2750-et 6%-kal növeljük meg.

$$2750 + 2750 \cdot \frac{6}{100} = 2750 \cdot (1 + 0{,}06) = 2750 \cdot 1{,}06 = 2915$$

A gép most 2915 palackot tud megtölteni 1 óra alatt.

Figyeljük meg, hogy az eredeti értékből kiindulva hogyan kaphatjuk meg a kétszeri változás utáni értéket!

Eredeti érték	10%-kal megnövelt érték	A kapott érték 6%-kal megnövelt értéke
2500	$2500 \cdot 1{,}1$	$(2500 \cdot 1{,}1) \cdot 1{,}06 = 2500 \cdot (1{,}1 \cdot 1{,}06) = 2500 \cdot 1{,}166$

A kapott eredményből azt is láthatjuk, hogy a kétszeri százalékos növekedés megfelel egyszeri 16,6%-os növekedésnek.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hány százalékos volt a drágulás 2020-ban és 2021-ben az autópiacon!
Keress az interneten információt arról, hogy a kerékpárok drágulása is ugyanilyen mértékű volt-e!

2. PÉLDA

Mint minden gép, az újonnan vásárolt is kopik, veszít az értékéből, idegen szóval amortizálódik a használat során. Ennek következtében az első évben 12%-kal, a második évben 8%-kal csökken az értéke.

a) Mennyit ér a gép egy év elteltével, ha 12 500 000 Ft-ért vásárolták?

b) Mennyi az értéke két év múlva?

Megoldás

a) Egy év elteltével a gép ára 12%-kal csökkent.
12 500 000 Ft-nak a 12%-a $12\,500\,000 \cdot 0{,}12 = 1\,500\,000$ (Ft).
$12\,500\,000 - 1\,500\,000 = 11\,000\,000$ Ft-ot ér a gép egy év elteltével.
Gondolkodhatunk másképp is. Ha 12%-kal csökken a gép értéke, akkor $100\% - 12\% = 88\%$-ra csökkent, így az értéke $12\,500\,000 \cdot 0{,}88 = 11\,000\,000$ Ft lesz.

b) A második évben az *a)* részben kiszámított érték csökken 8%-kal. Tehát 11 000 000 Ft 92%-a lesz a gép két év utáni értéke.
$11\,000\,000 \cdot 0{,}92 = 10\,120\,000$ Ft lesz a gép értéke két év elteltével.
Készítsünk most is egy áttekintő táblázatot a kétszeri értékcsökkenésről!

Eredeti érték	12%-kal csökkentett érték	A kapott érték 8%-kal csökkentett értéke
12 500 000	$12\,500\,000 \cdot 0{,}88$	$(12\,500\,000 \cdot 0{,}88) \cdot 0{,}92 =$ $= 12\,500\,000 \cdot (0{,}88 \cdot 0{,}92) = 12\,500\,000 \cdot 0{,}8096$

Az eredeti érték 80,96%-át éri két év elteltével a gép, ami közelítőleg 19%-os csökkenést jelent.

3. PÉLDA

A Molnár család internet-előfizetési díja 6500 Ft-ba került. Díjcsomagot váltottak, így 12%-kal többet kellett fizetni. Fél év múlva egy hűségakció keretében csökkentették a díjtételt 12%-kal.

a) Mennyibe került a csomagváltás után a havi előfizetési díj?

b) Változott-e a fizetendő összeg a kétszeri díjváltozás után az eredeti előfizetéshez képest?

Megoldás

a) A díjcsomagváltás után a 12%-os emelés azt jelenti, hogy a 6500 Ft 112%-át, azaz 1,12-szorosát kell fizetni. $6500 \cdot 1{,}12 = 7280$ Ft lett az új előfizetési díj.

b) A 7280 Ft-ot 12%-kal csökkentették, azaz most a 7280 Ft 88%-át kell fizetni.
$7280 \cdot 0{,}88 = 6406{,}4$ Ft
Kerekítve a fizetendő összeg 6406 Ft lett. Tehát változott a fizetendő összeg az eredetihez képest, majdnem száz forinttal, pontosan számolva 94 Ft-tal lett kevesebb.

6. ÖSSZETETT SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSI FELADATOK

V.

PÁROS MUNKA

Alkossatok párokat, és számoljatok közösen!

Egy 25 000 Ft-os cipő árát először megemelték, majd csökkentették valamilyen mértékben.

A növekedés, illetve csökkenés lehetséges százalékos mértékét itt láthatjátok.

+25%; +30%; +20%; −20%; −30%; −25%

Számolással adjatok meg olyan áremelkedés és árcsökkenés mértéket a felsorolt lehetőségek közül, hogy a cipő végső ára

A) az eredeti árnál nagyobb; *B)* az eredeti árnál kisebb; *C)* az eredeti árral egyenlő legyen!

FELADATOK

1. Írd fel egyenlőséggel! Ellenőrizd, valóban jók-e a számolások! Ha hibát találsz, akkor írd le helyesen a füzetedbe!

a) 450 méter 22%-a 99 méter.
b) 3400 dl 15%-kal csökkentett értéke 2890 dl.
c) 680 dkg 18%-kal megnövelt értéke 731 dkg.
d) 1222 20%-kal csökkentett értékének 24%-kal megnövelt értéke 1222.
e) 1,2 óra 25%-a 18 perc.

2. Az edzésre 14 lány jár. A csapat 72%-a fiú. Hány gyerek jár az edzésre?

3. A nyári angoltábor 10%-kal olcsóbb, ha most fizetem be, így 7830 forintba kerül. Menynyibe kerül eredetileg?

4. A téglalap egyik oldala 10 dm, másik oldala 2 m. Minden oldalát 45%-kal megnöveljük.

a) Hány százalékkal növekszik a kerülete?
b) Hány százalékkal növekszik a területe?

5. A 10 cm oldalú négyzet egyik oldalát 40%-kal megnöveltük, másik oldalát 40%-kal csökkentettük.

a) Hány százalékkal változott a kerülete?
b) Hány százalékkal változott a területe?

6. A tavaszi leárazás során a 30 000 Ft-os csizma árát először 15%-kal, majd áprilisban 10%-kal csökkentették.

a) Mennyibe került a csizma a kétszeri leárazás után?
b) Hány százalékos lenne az árleszállítás, ha egy lépésben csökkentették volna az árat?

7. Egy hipermarket árufeltöltője 500 csomag nápolyit rakott ki kedd reggel az üzlet polcaira. Estére elfogyott a nápolyi 12%-a, sőt másnap estig újabb 15%-kal csökkent a nápolyikészlet.

a) Hány csomag nápolyi volt a polcokon kedd este?
b) Hány csomag nápolyi fogyott el a két nap alatt?



FELADATOK

1. A matematikadolgozatok átlaga 4,56 lett, ami 14%-kal jobb, mint a földrajzdolgozatok átlaga. Mennyi lett az osztályátlag földrajzból?

2. Nyáron bejártuk Görögországot. Az út 75%-át repülővel tettük meg, az ötödét autóval, és 120 km-t még bicikliztünk is. Hány kilométert utaztunk a nyáron?



3. Nyári munkával és újságkihordással összegyűjtöttem 140 000 Ft-ot, de a laptop, amit kinéztem magamnak, 200 000 Ft-ba kerül. Ha kifizetem a 140 000 Ft-ot, és a fennmaradó összeget hathavi részletben fizetem ki, akkor erre a hitelrészre 15% kamatot számolnak fel.

a) Mennyivel kell így többet fizetnem a laptopért?

b) Hány forint lesz a havi törlesztőrészlet, ha fél évre vettem fel a hitelt, és minden hónapban ugyanannyit fizetek?

4. Volt két tengerimalacom. Egy szép napon kölykeik születtek, majd azoknak is lettek kölykeik, akik még tovább szaporodtak. Azóta eltelt pár év, és megállapítottam, hogy a tengerimalac-állományom fél év alatt 20%-kal növekszik. Jelenleg 100 tengerimalacom van. Hány tengerimalac boldog tulajdonosa leszek fél év, egy év és két év múlva?



5. Egy tableteket forgalmazó cég az új terméket 48 000 Ft-ért állítja elő. Mivel a piacon nem volt más ilyen termék, nagy hasznot remélt a forgalmazásból, ezért a tableteket az előállítási költség 150%-kal megnövelt értékéért árusította. Nem sokkal később megjelentek hasonlóan jó minőségű tabletek, így az árat 30%-kal csökkentenie kellett.

a) Mennyibe került a piacra kerüléskor a tablet?

b) Hány Ft-tal csökkentették a tabletek árát?

c) Mennyi volt a cég bevétele, ha 12 500 tabletet sikerült eladniuk a bevezető áron, és 21 000 darabot a csökkentett áron?

6. Lakásvásárlás során a szerződés megkötésekor a lakás árának 15%-át kell kifizetni előlegbe. Lucáék szülei 2,4 millió forintot fizettek előlegként az eladónak.

a) Mennyibe került a lakás?

b) A lakás vásárlásához hitelt kellett felvenni. Ez a lakás árának a 30%-a. Hány forint hitelre volt szükség?

c) A lakás vásárlásakor 640 000 Ft illetéket kellett fizetni az államnak. A lakás árának hány százaléka az illeték mértéke?

7. A nagy nyári hőségben eladtuk a jégkrémek 55%-át. Hány százalékkal kell növelnünk a megmaradt mennyiséget, hogy ugyanannyi jégkrémünk legyen, mint eredetileg volt?

PÁROS MUNKA

Dolgozzatok párban!
Ismételjétek át a betűs kifejezések használatát az alábbi feladatokon keresztül!
A páros egyik tagja a bal oldali feladatokat, a másik tagja a jobb oldali feladatokat oldja meg!
Mondjátok el egymásnak a feladatot és a megoldást is!



Írd fel betűs kifejezések felhasználásával az alábbi szöveges feladatokat!

A: Egy szám kétszeresénél 5-tel nagyobb szám.

B: Egy számnál 12-vel nagyobb szám háromszorosa.

C: Egy szám háromnegyed részének és a szám összegének a nyolcszorosa.

D: Egy szám ötszörösét elvesszük 100-ból, majd a különbséget megszorozzuk (-4)-gyel.

E: Egy szám 40%-ának a hatszorosához hozzáadjuk a számnál 15-tel kisebb számot.

Az alábbi betűs kifejezéseket fogalmazd meg szöveggel!
Az x egy gondolt számot jelent.

I. $3 \cdot x + 20$

II. $\frac{1}{2} \cdot x + 14$

III. $2 \cdot x + (x - 20)$

IV. $(60 - x) \cdot 5$

V. $x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + 40$

Betűk használatával az egyenletek megoldását is egyszerűbbé tehetjük.



- Az **egyenlet olyan egyenlőség**, amely egy (esetleg több) ismeretlent tartalmaz. Az **egyenlet megoldása** során az ismeretlen lehetséges értékei közül keressük azt az értéket, amely igazzá teszi az egyenlőséget.
- Az **egyenlet alaphalmazának** nevezzük azoknak a számoknak a halmazát, amely halmazban a megoldást keressük. Ha nem utal semmi az alaphalmazra, akkor mindig a tanult számok halmazán kell keresni a megoldást.
- Az alaphalmaz azon elemeinek összessége, amelyeket az egyenletbe helyettesítve igaz kijelentést kapunk, az egyenlet **igazsághalmaza**. Egyenletet megoldani annyit jelent, mint meghatározni az igazsághalmazát.
- A kapott megoldást mindig ellenőrizni kell. Az ellenőrzést az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel végezzük. Ha szöveges feladatot oldunk meg egyenletfelírással, akkor az ellenőrzés mindig a szöveg alapján történjen!

1. PÉLDA

Oldjuk meg az egyenleteket a korábban tanult módszerek segítségével!

a) $(3x + 8) \cdot 2 - 5 = 17$

b) Van-e megoldása az alábbi egyenletnek a 10-nél kisebb prímszámok között?

$x \cdot (x - 1) = 6$

Megoldás

Az egyenleteket többféle módszerrel megoldhatjuk. Próbáljuk meg mindig azt alkalmazni, amely a leggyorsabban vezet a megoldáshoz!

a) Most a **lebontogatás** a legcélravezetőbb. Ezt a módszert akkor tudjuk hatékonyan használni, ha az egyenlet egyik oldalán egy szám áll. Ilyenkor az egyenlet ismeretlent is tartalmazó oldalán szereplő utolsó művelet ellentétes műveletével változtatjuk a másik oldal értékét. Ezt a lépést többször alkalmazva eljutunk az ismeretlen (most az x) értékének meghatározásához.

$x = [(17 + 5) : 2 - 8] : 3$

$x = 1$

Ellenőrzés: $(3 \cdot 1 + 8) \cdot 2 - 5 = 11 \cdot 2 - 5 = 22 - 5 = 17$, az 1 megoldása az egyenletnek.

b) A **próbálgatás módszerét** akkor érdemes alkalmazni, ha az egyenlet alaphalmazának kevés eleme van. Hátránya, hogy sok számolással jár, hiszen gyakran az alaphalmaz minden elemét be kell helyettesíteni.

Az alaphalmaz elemei: 2; 3; 5; 7. Ezeket behelyettesítve az $x = 3$ megoldást kapjuk.

Ellenőrzés: $3 \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$.

Az összevonásról, zárójelfelbontásról tanult szabályok érvényesek a betűs kifejezésekre is, tehát használhatjuk őket az egyenletek megoldása során is.

2. PÉLDA

Oldjuk meg a $3(x + 2) + 2(x - 1) + x - 5 = 11$ egyenletet!



Megoldás

$3(x + 2) + 2(x - 1) + x - 5 = 11$ /zárójelfelbontás

$3x + 6 + 2x - 2 + x - 5 = 11$ /összevonás

$6x - 1 = 11$

Oldjuk meg a $6x - 1 = 11$ egyenletet lebontogatással! Visszafelé gondolkozva kapjuk, hogy $x = (11 + 1) : 6 = 2$.

Ellenőrzés: $3(2 + 2) + 2(2 - 1) + 2 - 5 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 3 = 11$.

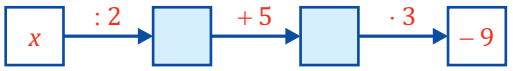
Tehát az $x = 2$ valóban megoldás.

FELADATOK

1. Add meg a folyamatábrákhoz tartozó egyenleteket, majd oldd is meg ezeket!

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Párosítsd a szövegeket az egyenletekkel, és határozd meg, ki melyik számra gondolt! Amelyik egyenletnek nincs szöveges párja, oda te írj egyet!
Elek: A gondolt szám háromszorosánál néggyel kisebb szám a 2.
Huba: A gondolt számnál öttel nagyobb szám kétszerese a 12.
Fülöp: A gondolt szám felének és harmadának összege az 5.
Zaránd: A gondolt szám kétszeresénél héttel kisebb szám ötöde a 3.

a) $2(x+5)=12$ *b)* $\frac{2x-7}{5}=3$ *c)* $3x-4=2$ *d)* $\frac{x}{4}-5=8$ *e)* $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

3. Végezd el az összevonásokat, és oldd meg az egyenleteket! Gondolj az ellenőrzésre!

a) $4x+7-x+11=28$ *b)* $-5x+13-4x+17=3$

c) $\frac{6x}{7}-8=22$ *d)* $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}=81$

4. Végezd el a zárójelfelbontásokat, az összevonásokat, és oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd eredményeidet!

a) $2(x+3)+3(x-2)=35$ *b)* $8x+4(2x-7)=20$

c) $15-2(8-4x)=47$ *d)* $5(10-2x)-4(10+2x)=100$

5. Egy autóbusz előre tervezett útjának harmadánál 20 km-rel többet tett meg, amikor pihenőt tartott egy parkolóban. Ekkor a buszvezető azt mondta az utasoknak, hogy eddig 200 km-t tettek meg. Hány km volt a tervezett út?

6. Egy számot elosztva a nyolcadával eredményül 8-at kaptunk. Melyik számra igaz ez az állítás?

7. Egy téglalap területe 168 cm^2. Az egyik oldala 2 cm-rel rövidebb a másiknál. Mekkorák az oldalai? Mekkora a kerülete?

8. A három kedvenc számom éppen három egymást követő 1000-nél kisebb prímszám. A számjegyeik összege 22, és az egyik közülük 9-re végződik. Mi a három kedvenc számom?

9. Rajzoltam egy téglalapot és egy négyzetet. A négyzet oldalának hossza megegyezik a téglalap rövidebb oldalával. A téglalap másik oldala ennél 5 cm-rel hosszabb. A téglalap területe 176 cm^2. Mekkorák a négyzet oldalai?

V. 9. A MÉRLEGELV

Az ábrákon régi mérlegeket láttok. Ezeket kétkarú mérlegnek nevezik. Egyensúly esetén a mérleg tányérjai ugyanolyan magasan vannak. Ha az egyik oldalon nehezebb tárgy van, akkor az ezen az oldalon lévő mérleg tányérja lejjebb van a másik oldalhoz képest.



Egyensúlyban lévő mérleg; a serpenyőkben lévő tömegek megegyeznek.



A mérleg nincs egyensúlyban, a jobb oldali serpenyőben nagyobb tömeg van, mint a bal oldaliban.

Kétkarú mérleg segítségével a serpenyőkben lévő testek tömegét hasonlítjuk össze. A digitális mérlegek elterjedése előtt ilyen mérlegek szolgáltak tömegmérésre. Számos helyen ma is találkozhatunk velük.

1. PÉLDA

Van három egyforma tömegű dobozunk. Ha egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjébe 2 ilyen dobozt és egy 2 kg-os tömeget, a másikba pedig egy ugyanilyen dobozt és két darab 2 kg-os és egy 1 kg-os tömeget teszünk, akkor a mérleg egyensúlyban van. Határozzuk meg egy doboz tömegét!

Megoldás

A mérleg egyensúlyban van.



Jelölje az ismeretlen tömeget x.

Bal oldal: $x + x + 2 = 2 \cdot x + 2$

Jobb oldal: $x + 2 + 2 + 1 = x + 5$

A két oldal egyenlő, ezért: $2 \cdot x + 2 = x + 5$

Mindkét serpenyőből levettünk egy 2 kg-os tömeget.



$2x = x + 3$

A mérleg egyensúlyban maradt.

Mindkét serpenyőből levettünk egy-egy ismeretlen tömegű  dobozt.



$x = 3$

A mérleg egyensúlyban maradt. A  doboz tömege 3 kg.

Ellenőrizzük a kapott eredményt!

A bal oldalon a két doboz és a 2 kg összesen 8 kg. A jobb oldalon egy doboz és 5 kg össztömege 8 kg. A mérleg valóban egyensúlyban van.

9. A MÉRLEGELV

V.

Egyenlet megoldásakor az előbb látott módszert akkor is alkalmazhatjuk, ha nincs szó valódi mérlegről. Az egyenlet két oldalát egy egyensúlyban lévő mérleg két serpenyőjéhez hasonlítjuk. Megoldás közben a két oldalt ugyanolyan módon változtatjuk.

Nem változik a mérleg egyensúlya, azaz az egyenletben az egyenlőség, ha:

- **Az egyenlet két oldalán álló kifejezést ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük.**
- **Az egyenlet két oldalán álló kifejezésnek ugyanannyiszorosát (kivéve a 0-szorosát) vagy ugyanannyiad részét vesszük.**

Ezek a **mérlegelv** lépései, melyeket megoldás során az egyenlet jobb oldala mellé írva jelölünk. A mérlegelv segítségével olyan egyenleteket is meg tudunk oldani, amelyek lebontogatással nem, vagy csak sokkal körülményesebben lennének megoldhatók.



CSOPORTMUNKA

Vizsgáljátok meg a kétkarú mérleg működését!

Kisebb tárgyak (tolltartó, ceruza, radír) segítségével egyensúlyozzátok ki a mérleget!

Ha sikerült, írjatok fel egyenlőségeket!
Például: Ági tolltartója + 1 radír = 3 ceruza + 2 toll.



2. PÉLDA

Oldjuk meg mérlegelv segítségével az alábbi egyenletet!
$3 \cdot x + 2 = x + 12$

Megoldás

$3 \cdot x + 2 = x + 12$ /− 2 Mindkét oldalból vonjunk ki 2-t.
$3 \cdot x + 2 - 2 = x + 12 - 2$

$3 \cdot x = x + 10$ /− x Mindkét oldalból vonjunk ki x-et.
$3 \cdot x - x = x + 10 - x$

$2 \cdot x = 10$ /: 2 Mindkét oldalt osszuk el 2-vel.
$x = 5$

Ellenőrzéskor az eredeti egyenlet mindkét oldalán be kell helyettesítenünk.
Bal oldal: $3 \cdot 5 + 2 = 17$. Jobb oldal: $5 + 12 = 17$.
A két oldal egyenlő, tehát $x = 5$ az egyenlet megoldása.

V. 9. A MÉRLEGELV

A mérlegelv alkalmazásakor is az a célunk, hogy megkapjuk az ismeretlennek (betűnek) azt az értékét, amelyet az egyenletbe behelyettesítve igaz egyenlőséget kapunk.
Célszerű az átalakításokat úgy végezni, hogy az egyik oldalon csak ismeretlen, a másik oldalon csak szám legyen.

3. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenletet! $4 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 5$

Megoldás

Az egyenlet	A lépések jelölése	A megoldás lépései szövegesen
$4 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 5$	$/+ 7$	Mindkét oldalhoz 7-et hozzáadunk.
$4 \cdot x - 7 + 7 = 2 \cdot x + 5 + 7$		
$4 \cdot x = 2 \cdot x + 12$	$/- 2 \cdot x$	Mindkét oldalból elveszünk $2 \cdot x$-et.
$4 \cdot x - 2 \cdot x = 2 \cdot x + 12 - 2 \cdot x$		
$2 \cdot x = 12$	$/: 2$	Mindkét oldalt elosztjuk 2-vel.
$2 \cdot x : 2 = 12 : 2$		
$x = 6$		

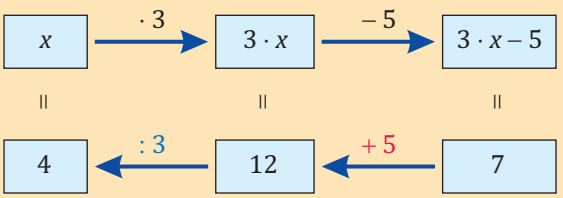
Az egyenlet megoldása $x = 6$.
Behelyettesítéssel igazoljuk a megoldás helyességét: $4 \cdot 6 - 7 = 17$, $2 \cdot 6 + 5 = 17$.

4. PÉLDA

Az előző példa egyenletét lebontogatással nem lehet megoldani. A $3 \cdot x - 5 = 7$ egyenletet azonban igen. Oldjuk meg kétféleképpen!

Megoldás

Lebontogatással:



A mérlegelv alkalmazásával:

$$3 \cdot x - 5 = 7 \qquad /+ 5$$
$$3 \cdot x - 5 + 5 = 7 + 5$$
$$3 \cdot x = 12 \qquad /: 3$$
$$3 \cdot x : 3 = 12 : 3$$
$$x = 4$$

Ellenőrzés:
$3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$.
A kapott szám megoldása az egyenletnek.

5. PÉLDA

Oldjuk meg mérlegelv segítségével az alábbi egyenletet!
$1 - 4x = 10 - x$

Megoldás

$1 - 4x = 10 - x$	$/+ x$	Mindkét oldalhoz adjunk hozzá x-et.
$1 - 3x = 10$	$/- 1$	Mindkét oldalból vonjunk ki 1-et.
$-3x = 9$	$/: (-3)$	Mindkét oldalt osszuk el (-3)-mal.
$x = -3$		

Ellenőrzés:
Az egyenlet bal oldala: $1 - 4 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13$.
Jobb oldal: $10 - (-3) = 13$.
A két oldal egyenlő, a (-3) megoldása az egyenletnek.

FELADATOK

1. A mérlegeken gyümölcsök és súlyok vannak. A mérleg egyensúlyban van. Számítsd ki, hány dkg egy-egy gyümölcs tömege! (A mérlegen látható súlyok tömegét dkg-ban adtuk meg.)

a)



b)



c)



2. Oldd meg mérlegelv segítségével az egyenleteket!
a) $6x - 2 = 5x + 7$ *b)* $4x + 2 = 2x + 22$ *c)* $8x - 1 = 4x + 29$ *d)* $-7 + 8x = 8 - 7x$

3. Végezd el a zárójelfelbontásokat, és oldd meg az egyenleteket!
a) $2(x + 1) = 3(x - 1)$ *b)* $9(2x - 1) = 9(1 - 2x)$
c) $6(x + 7) = 3(10 - x)$ *d)* $4(3x - 7) = 4(7x - 3)$

4. Végezd el az összevonásokat, zárójelfelbontásokat, majd a mérlegelv felhasználásával oldd meg az egyenleteket!
a) $6x + 4 - 7x - 2 = 6x + 1 + 2x - 3$
b) $22 - 28x + 56 + 60x = 8x - 24 + 42 + 12x$
c) $21(x - 1) + 9 = 9(x - 1) + 9$
d) $8(x + 12) - 6 = 6(2x - 1) + 6$

5. Zárójelfelbontás után végezd el a lehetséges összevonásokat, és oldd meg az egyenleteket!

a) $2\cdot(4x+1)+7\cdot(8x+2)=12\cdot(x+6)-4\cdot(x+2)-6$

b) $6-(x+2)-3\cdot(2x-4)=8\cdot(4-x)+3\cdot(x-4)$

c) $3\cdot(2x+1)+12\cdot(3x-2)=6\cdot(3x-1)+3\cdot(x-4)+11$

d) $10-5\cdot(2-2x)+2\cdot(x+4)=2\cdot(2-3x)-4\cdot(6-x)$

6. A csempéket húszasával dobozolják. A csempéket tartalmazó papírdoboz üresen 0,5 kg, és egy doboz csempe ugyanolyan nehéz, mint 5 csempe és 8 kg. Hány kg egy csempe?



7. Egy szám hatszorosából 4-et kivonva ugyanazt kapjuk, mintha az ötszöröséhez 10-et hozzáadunk. Melyik ez a szám?

8. Egy szám négyszerese 12-vel nagyobb, mint a szám háromszorosánál öttel nagyobb szám.

9. Hány éves Lázár, ha két évvel ezelőtti életkora 75%-a annak, amennyi két év múlva lesz?

10. Gondoltam egy kétjegyű számra, amely számjegyeinek összege 8. Ha a szám számjegyeit felcseréljük, a kapott szám 3-mal nagyobb, mint a gondolt szám négyszerese. Melyik számra gondoltam?

11. – Gondoltam egy számra – közli somolyogva Jancsi. – Ha a négyszereséből elveszek 6-ot, a különbséget elosztom 2-vel, és a hányadoshoz hozzáadok 5-öt, éppen 0-t kapok.
– Akkor nyertem – szól Juliska –, az én számom nagyobb, hisz a háromszorosa 5-tel nagyobb, mint a fele.
Melyik gyerek melyik számra gondolt?

12. Guszti és Juci online játszanak egymással, éppen szörnyeket irtanak. A Guszti által elpusztított szörnyek négyszeresénél 10-zel több szörny pontosan ugyanannyi, mint a Juci által kiirtott szörnyek hatszorosánál 22-vel kevesebb szörny.

a) Hány szörnyet pusztított el Guszti, ha Juci épp százat?

b) Hány szörnyet pusztított el Juci, ha Guszti pusztított el százat?

c) Keress összefüggést a két gyerek által elpusztított szörnyek száma között!



1. PÉLDA

A lányok száma az osztálylétszám harmadánál kettővel több. Hány fős az osztály, ha a fiúk kilencen vannak?

Megoldás

Az osztálylétszámot jelöljük x-szel!

A feladat első mondata szerint a lányok száma $= \frac{1}{3} \cdot x + 2$.

A feladat második mondata szerint a lányok száma $= x - 9$.

Az egyenlet ennek a két kifejezésnek az egyenlőségét írja le: $\frac{1}{3} \cdot x + 2 = x - 9$.

Megoldjuk az egyenletet:

$$\frac{1}{3} \cdot x + 2 = x - 9 \qquad /-2$$

$$\frac{1}{3} \cdot x = x - 11 \qquad /-x$$

$$-\frac{2}{3} \cdot x = -11 \qquad /\cdot 3$$

$$-2 \cdot x = -33 \qquad /:(-2)$$

$$x = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2} = 16{,}5$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a felírt egyenletet jól oldottuk meg.

Az $x = 16{,}5$ az egyenlet megoldása.
A 16,5 mégsem megoldása a feladatnak, mert az x az osztály tanulóinak számát jelöli, és ez csak pozitív egész szám lehet. Ebben a feladatban az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza, és a 16,5 nem tartozik ebbe a halmazba.
Így ennek a feladatnak nincs megoldása.

2. PÉLDA

Oldjuk meg a törtkifejezéseket tartalmazó egyenleteket!

a) $\frac{x-2}{3} + x = 6$ *b)* $\frac{2}{3} \cdot (x - 5) = 3 \cdot x + 1$

Megoldás

a)
$$\frac{x-2}{3} + x = 6 \qquad /\cdot 3 \text{ (így nem lesz tört az egyenletben)}$$
$$x - 2 + 3 \cdot x = 18 \qquad /\text{összevonás}$$
$$4 \cdot x - 2 = 18 \qquad /+2$$
$$4 \cdot x = 20 \qquad /:4$$
$$x = 5$$

Ellenőrzés: $\frac{5-2}{3} + 5 = 6$.

b) $\frac{2}{3}\cdot(x-5)=3\cdot x+1$ /zárójelfelbontás

$\frac{2}{3}\cdot x-\frac{10}{3}=3\cdot x+1$ /· 3

$2x-10=9x+3$ /+ 10

$2x=9x+13$ /− 9x

$-7x=13$ /: (−7)

$x=-\frac{13}{7}$



Ellenőrzés: Bal oldal: $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{13}{7}-5\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{48}{7}\right)=-\frac{96}{21}=-\frac{32}{7}$.

Jobb oldal: $3\cdot\left(-\frac{13}{7}\right)+1=-\frac{39}{7}+1=-\frac{32}{7}$.

3. PÉLDA

Oldjuk meg a $2(x-1)+3(x+2)-5+x=3x+11$ egyenletet!

Megoldás

Írjuk ki a láthatatlan szorzásjeleket a megoldás lépéseinek megkönnyítéséhez.

$2\cdot(x-1)+3\cdot(x+2)-5+x=3\cdot x+11$ /zárójelfelbontás

$2\cdot x-2+3\cdot x+6-5+x=3\cdot x+11$ /összevonás

$6x-1=3x+11$ /+ 1

$6x=3x+12$ /− 3x

$3x=12$ /: 3

$x=4$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

4. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $2\cdot(x-3)+1=2\cdot x-5$

b) $2\cdot(x-3)+2=2\cdot x-5$

Megoldás

a) $2\cdot(x-3)+1=2\cdot x-5$ / zárójelfelbontás

$2\cdot x-6+1=2\cdot x-5$ / összevonás

$2\cdot x-5=2\cdot x-5$

A két oldal azonos; bármilyen számot helyettesítünk *x* helyére, az egyenlőség teljesül.
Az ilyen egyenletet azonosságnak nevezzük.
Azonosság: olyan egyenlet, amelynek igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal.

b) $2 \cdot (x-3) + 2 = 2 \cdot x - 5$ / zárójelfelbontás
$2 \cdot x - 6 + 2 = 2 \cdot x - 5$ / összevonás
$2 \cdot x - 4 = 2 \cdot x - 5$
A jobb oldal 1-gyel kisebb, mint a bal oldal. Ez semmilyen x esetén nem teljesül. Az egyenletnek nincs megoldása. Más szavakkal: az egyenletmegoldás során ellentmondásra jutunk.
Az alaphalmaz egyetlen elemére sem teljesül az egyenlőség, így az egyenlet igazsághalmazának nincs eleme.

FELADATOK

1. Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek? Az egyenletek megoldása után válaszolj a kérdésre!
a) $6(2+6x) = 36(x-1) + 48$
b) $10(2x-3)+5 = 15 + 20(x+1)$
c) $9 - 6(x-3) = 12x - 21$
d) $2 \cdot (x+7) - 2 \cdot x = 7$
e) $7 = 2 \cdot x + 14 - x$
f) $-14 = 2 \cdot (x-7) - 2 \cdot x$
g) $-6 = 3 \cdot x + 1 - \frac{2}{3} \cdot x$
h) $0 = 3 \cdot x + 1 - \frac{2}{3}(x-5)$

2. Melyik egyenletnek van megoldása az egész számok halmazán? Az egyenletek megoldása után válaszolj a kérdésre!
a) $\frac{4x-2}{3} = 5x - 4$ *b)* $\frac{4x+2}{3} = 2x + 22$
c) $4 + \frac{2x}{5} = 2x$ *d)* $\frac{3}{2} \cdot (5x+12) = 7x$
e) $\frac{7x-1}{5} = \frac{4x+10}{4}$ *f)* $\frac{3x}{4} + 9 = \frac{2x-5}{3}$

3. Egy szám kétszereséből kivontam nyolcat. Ugyanakkora számot kaptam, mint a számnál hárommal kisebb szám kétszerese. Válaszd ki az alábbiak közül a szövegnek megfelelő egyenletet! A másik egyenlethez te írj szöveget! Oldd meg az egyenleteket! Gondolj a szöveges válaszra és az ellenőrzésre is!
a) $2(x-8) = 2(x-3)$ *b)* $2x - 8 = 2(x-3)$

4. Egy számot hárommal csökkentettem, majd vettem a hatodrészét. Ugyanazt a számot kaptam, mint a szám kétszeresénél 5-tel nagyobb szám. Melyik ez a szám?

5. Gondoltam egy számra. A kilencszereséhez hozzáadtam nyolcat. Így ugyanakkora számot kaptam, mint amikor a szám feléhez adtam hozzá másfelet. Melyik számra gondoltam?

6. Egy régi házban lakunk, ahol a négyzet alapú szobám magassága éppen 0,8-szerese az oldalának. A szoba 12 élének hossza összesen 44,8 méter.
a) Milyen magas a szobám?
b) Mekkora a szobám alapterülete?

7. Anna meghirdette a használt játékát, de nem jelentkezett vevő, úgyhogy 20%-ot engedett az árból. Sajnos így sem jelentkezett senki, de amikor ezt tovább csökkentette 1500 Ft-tal, akkor ezen a 4900 Ft-os áron már talált vevőt. Mennyiért kezdte hirdetni Anna a játékát?



V. 11. SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETTEL

Ha szöveges feladatot egyenlettel szeretnél megoldani, akkor célszerű megfogadni az alábbi tanácsokat:

- Írd fel, mit fogsz ismeretlennek választani, és mivel fogod jelölni! Állapítsd meg az alaphalmazt is!
- Lehetőleg csak egy ismeretlent használj!
- Készíts olyan ábrát, amelynek segítségével összefüggéseket állapíthatsz meg!
- Írj fel betűs kifejezéseket a szövegben levő összefüggések alapján, és ezek segítségével írd fel az egyenletet!
- A megoldásaidat a szövegbe helyettesítve ellenőrizd!



Nem szükségszerű minden esetben egyenletekkel dolgoznunk. Sokszor könnyebb következtetésekkel megfejteni a választ. Az ilyen megoldások „szebbek”, de a megoldás leírása nem mindig egyszerű.

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat, és dolgozzatok a csoporton belül párban!
A feladatokat két feladatsorra osztottuk. Beszéljétek meg a csoportban, melyik pár melyik feladatsort oldja meg! Ha készen vagytok, egyeztessétek egymással a végeredményeiteket! Bár a két feladatsor feladatai különbözőek, a végeredmények és a válaszok azonosak. Jó munkát kívánunk!

1. feladatsor

1. Csenge és Mátyás együtt 42 évesek. Csenge kétszer annyi idős, mint Mátyás. Hány évesek külön-külön?

2. Apa 4 évvel idősebb, mint anya. Dávid 23 évvel fiatalabb, mint anya. Apa, anya és Dávid életkorának összege 80 év. Hány évesek külön-külön?

3. Gondoltam egy számra. Ha 24-ből elveszem a kétszeresét, a szám hatszorosát kapom. Melyik számra gondoltam?

4. Gondoltam egy számra. Ennek a számnak a felénél 5-tel kisebb szám egyenlő a háromszorosánál 10-zel nagyobb számmal. Most melyik számra gondoltam?

5. Egy kétjegyű számban a tízes helyi értéken álló számjegy hattal nagyobb, mint az egyesek helyén álló szám. Ha ehhez a számhoz hozzáadjuk a számjegyeinek felcserélésével kapott számot, akkor 110-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

6. Egy háromszög egyik szöge 10°-kal, másik szöge 20°-kal nagyobb a harmadik szögnél. Hány fokosak a háromszög szögei?

2. feladatsor

1. Csenge 14 évvel idősebb, mint az öccse, Mátyás. Ketten együtt háromszor annyi idősek, mint Mátyás. Melyik gyerek hány éves?

2. Anya és apa együtt 70, anya és Dávid együtt 43, apa és Dávid együtt 47 évesek. Hány évesek külön-külön?

3. Gondoltam egy számra. A háromszorosából elvettem 4-et, a különbséget elosztottam 5-tel, a hányadoshoz hozzáadtam 2-t, így 3-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

4. Gondoltam egy számra. Ennek a számnak a hatodánál 4-gyel kisebb szám egyenlő a kétszeresénél 7-tel nagyobb számmal. Most melyik számra gondoltam?

5. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 10. Ha ebből a számból elvesszük a számjegyeinek felcserélésével kapott számot, 54-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

6. Egy háromszög egyik szöge 10°-kal nagyobb, másik szöge 40°-kal kisebb a harmadik szögnél. Hány fokosak a háromszög szögei?

12. ÖSSZEFOGLALÁS

V.

A fejezet első részében százalékszámítással foglalkoztunk.
Ezekben a leckékben különböző típusú feladatok megoldási módjait ismertük meg. Ismételjük át!

I. Egy adott szám vagy mennyiség megadott százalékát kell meghatároznunk.
Például: 80 kg 15%-a egyenlő a 80 kg $\frac{15}{100}$ részével, azaz 80 kg 0,15-szorosával.
$80 \cdot 0{,}15 = 12$ (kg).

II. Ismert egy szám adott százaléka, meg kell határozni a 100%-ot.
Következtetéssel oldhatjuk meg a feladatot. Visszakövetkeztetünk az 1%-ra, és a kapott érték 100-szorosa lesz a 100%.
Például: Egy szám 22%-a 286. Melyik ez a szám?

22%	286
1%	13
100%	1300

A szám az 1300.

III. Ismerjük a számot, és keressük, hogy egy másik szám hány százaléka az adott számnak.
Például:
A 35 fős osztályból 28-an mentek színházba. Az osztálynak hány százaléka nézte meg a színházi előadást?
Másként fogalmazva: a 28 hány százaléka a 35-nek, azaz a 28 hányadrésze a 35-nek?



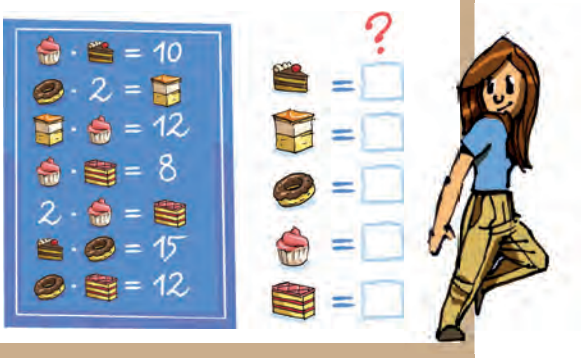
28 a 35-nek $\frac{28}{35}$ része, azaz 0,8-szerese, ami 80%.
Az osztály 80%-a volt színházban.
Következtetéssel is megoldhatjuk:

35	100%
35 : 100 = 0,35	1%
28	28 : 0,35 = 80%.

Összetett feladatok megoldásánál a fenti gondolatmenetek valamelyikét, esetleg többfélét is kell alkalmazni.

PÁROS MUNKA

Versenyezzetek!
Alkossatok párokat! Melyik páros tudja leghamarabb megfejteni az édességek értékét? Az édességek értéke csak pozitív egész szám lehet.



V. 12. ÖSSZEFOGLALÁS

Egyenletek megoldási módszereit ismertük meg a fejezet második felében.

Szöveges feladatok sikeres megoldásában segíthet, ha az előző lecke elején leírt tanácsokat megfogadod. A szöveg alapján felírt egyenletet például a mérlegelv alkalmazásával oldhatjuk meg.

A mérlegelv az egyik legáltalánosabb egyenletmegoldási módszer. Lényege:

- Az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük.
- Az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezésnek ugyanannyiszorosát (kivéve a 0-szorosát) vagy ugyanannyiad részét vesszük.

Ezeket a lépéseket ismételve megkapjuk az egyenlet megoldását.

Egyenlet megoldása során ne feledkezzünk meg az ellenőrzésről!

FELADATOK

1. A szünetig még 8 dolgozatot írunk. Tegnap már megírtunk kettőt, ma egyet. A tervezett dolgozatok hány százaléka van még hátra?

2. Az iskolába 680 gyerek jár. A gyerekek 15%-a minden nap vesz magának tízórait a büfében, közülük minden harmadik ásványvizet is vásárol. Hány gyerek vásárol minden nap tízórait és ásványvizet is a büfében?

3. Olga néni sütött egy nagy tepsi pogácsát. Matyi a pogácsák 20%-át, Gazsi a negyedét, Gergely a $\frac{3}{10}$ részét ette meg, így anyának és apának 10 darab maradt.

a) A pogácsák hány százaléka maradt meg a szülőknek?

b) Hány darab pogácsát sütött Olga néni?

4. A Nagy család havi összjövedelme 380 000 Ft. Élelmiszerre 120 000 Ft-ot költöttek. A maradék 20%-át közlekedésre kellett kiadniuk, 25 000 Ft-ot lakástakarékba fektettek. A maradék pénz 85%-a gáz-, villany-, vízdíj volt. Az ezután megmaradt pénzt nyaralásra tették félre.

a) Hány Ft-ot szántak közlekedésre?

b) A rezsiköltség hány százaléka az összjövedelmüknek?

c) A havi jövedelem hány százalékát teszik félre a nyaralásra?

5. A Föld vízkészletének 3%-a édesvíz, aminek legnagyobb részét az Északi- és Déli-sarkvidékeken található jéghegyek teszik ki, tehát a ténylegesen hozzáférhető mennyiség az összes vízkészlet 0,6%-a. Kevés használható édesvíz van tehát a Földön, takarékoskodnunk kell vele. Egy új találmány segítségével csökkenteni tudjuk a mosdáshoz használt víz mennyiségét. Az újítással 12 liter helyett csak 7 liter folyik a csapból percenként.



a) Hány százalékkal kevesebb vizet használunk el így egy 10 perces zuhanyozás alatt?

b) Egy négytagú városi család napi vízfogyasztása kb. 0,35 m^3 lenne az újítás bevezetése után. Hány m^3 vizet használnak el a találmány nélkül havonta?

6. Oldd meg tetszőleges módszerrel az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot (2x + 5) - 5 = 23$ *b)* $(2x - 8) : 9 + 4 = 6$

7. Oldd meg mérlegelv segítségével!

a) $23(x - 1) + 3 = 6x - 10$ *b)* $\frac{1}{2}x + \frac{3}{10} + \frac{5}{4} = 5 - \frac{3}{5}x$

c) $\frac{2}{5}x = 7 - x$ *d)* $\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{12} + 10 = 3 - x$

8. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot (x - 1) + 3 = 5x - 29$

b) $5 \cdot (2x + 1) - 4 \cdot (3x - 2) + 8 = 3(x - 9) + 10$

c) $\frac{x + 1}{7} = \frac{x - 2}{2}$

d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 3 = \frac{3x}{10} - 9$

9. Gondoltam egy számra. Ha a hétszereséből elveszek 10-et, épp a szám harmadát kapom. Melyik számra gondoltam?

10. Nagypapa matek tagozatos osztályba járt, így mindig is megmaradt benne a matek szeretete. A múlt heti osztálytalálkozón kiderült, hogy ezzel a tulajdonságával nincs egyedül. Amikor a találkozón a „kinek hány éves az unokája” beszélgetésnél tartottak, mindenki, akinek már van unokája, egy feladvánnyal árulta el az életkorát. Számítsd ki, melyik unoka hány éves!
Anna: Az életkor hétszereséből négyet elvéve 45-öt kaptam.
Bálint: Az életkorhoz hozzáadtam 8-at, az összeget elosztottam 7-tel, a hányadosból elvettem 3-at, így (−1)-et kaptam.
Csenge: Az életkor kilencszeresénél 12-vel kisebb szám harmada a 2.
Gáspár: Ha az életkor négyszereséből elveszek 2-t, a különbséget megszorzom 3-mal, a szorzatból elveszek 10-et, és az eredményt elosztom 5-tel, akkor 4-et kapok.

11. A sarki boltban egy csoki és egy jégkrém 420 Ft-ba, egy jégkrém és egy üdítő 560 Ft-ba, egy csoki és egy üdítő pedig 460 forintba kerül. Mennyibe kerül a csoki, a jégkrém és az üdítő külön-külön?

12. Péter, Pál és Panka hármas ikrek. Péter születési tömege 40 grammal több, mint Pankáé, de 60 grammal kevesebb, mint Pál tömege. Mikor mindhármukat egyszerre mérték meg, a kijelző 8750 grammot mutatott. Hány grammal születtek a gyerekek?

13. A rombusz egyik szöge háromszor akkora, mint a szomszédos szöge. Mekkorák a rombusz szögei?

14. Egy háromszög egyik oldalának hossza 90%-a a középső nagyságú oldalnak, míg a harmadik oldal hossza 130%-a a középsőnek.
Mekkorák a háromszög oldalai, ha a kerülete 9,6 cm?

15. Egy téglalap területét 25%-kal megnöveljük, ekkor egy olyan négyzetet kapunk, melynek kerülete 60 cm. Mekkora a téglalap területe?

16. A téglalap egyik oldalát a négyszeresére, a másik oldalát a harmadára változtattuk. Hányszorosa az így kapott téglalap területe az eredeti téglalap területének?

17. A Rugalmas laborban holtan találták reggel 9-kor Dr. Agyvillámot, és valaki elvitte annak a végtelenül rugalmas anyagnak a leírását, amelyen a tudós éppen dolgozott. A halottkém megállapította, hogy a test hőmérséklete a megtaláláskor 28 °C-os volt, és tudjuk, hogy a halál beállta után, a kezdetben 36 °C-os test hőmérséklete óránként 2 °C-kal csökken. A biztonsági kamera négy ember képét rögzítette a labor előtti folyosón.
A négy lehetséges elkövető Mr. Roszfickov, Mr. Jang, Mrs. Kékharis és Mrs. Innocent.



– Mr. Roszfickovot 11 órakor tartóztatták fel a rendőrök az országhatáron, egy vasúti kocsiban. A határ 1100 km-re volt a Rugalmas labortól, és a vonat maximális sebessége 160 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lehetett.
– Mr. Jangot a labortól 240 km-re kapták el egy kerékpáron, délelőtt 10-kor. A kerékpárral legfeljebb 40 km-t tudott megtenni óránként.
– Mrs. Kékharis motorozott. Őt délelőtt 10:30-kor tartóztatták fel az autópályán. A motorkerékpárral legfeljebb 140 km-t tehetett meg óránként, és a labortól 850 km-re kapták el.
– Mrs. Innocent autóval távozott. A hegyi úton szaladt bele egy rendőrségi útzárba, 11-kor. A szerpentinen legfeljebb 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladhatott, és éppen 600 km-re volt a labortól.

a) Mikor távozhatott a laborból Mr. Roszfickov?
b) Mikor távozhatott a laborból Mr. Jang?
c) Mikor távozhatott a laborból Mrs. Kékharis?
d) Mikor távozhatott a laborból Mrs. Innocent?
e) Mikor követték el a bűntényt?
f) Ki lehetett az elkövető?

VI. GEOMETRIA



– Az előző útra nagyon sokan jelentkeztek, de sajnos csak két diák jöhetett velem Alexandriába. Nem kell azonban elkeserednetek, mivel a mostani kalandunk is hasonló korba indul. Úti célunk ezúttal Szürakusza, ahol Arkhimédészt láthatják a szerencsések, akik… Matyi és Zozó! – kiáltotta Judit néni, vásári kikiáltóként elnyújtva a hangját. – Fiúk! Ha megérkezünk, ne ijedjetek meg a zajoktól! Kr. e. 213-ban épp ostromolták Szürakuszát! – mondta a tanárnő, s alig néhány pillanat múlva már valóban maguk előtt látták a csatát.

A várfalon sürgölődők harsányan nevettek, amikor a római hajókról kilőtt kő jóval a falak előtt, ártalmatlanul hullott a vízbe.

– Itt jön Arkhimédész. Mutassuk meg a rómaiaknak a hajítógépét! Tekerjetek a kötélen még kettőt, aztán álljatok hátrébb! – vezényelt egy díszes egyenruhájú katona.

A nehéz kő magasra ívelt, majd telibe találta az egyik hajó árbócát. Recsegve-ropogva dőlt el. Az evezőknél ülő rabszolgáknak igencsak igyekezniük kellett, ha biztonságos távolságba akarták juttatni a hajó maradékát.

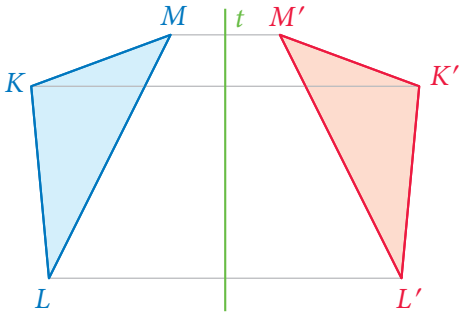
– Remélem, örülsz, és büszke vagy a sikereinkre, Arkhimédész. Szerencsére jól működnek a terveid alapján épített gépek – fordult oda a tudóshoz a parancsnok.

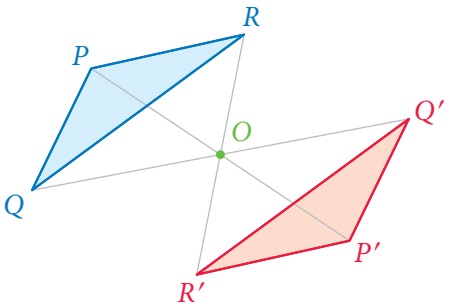
– Örülök, de nem a szerencse működteti a gépeimet. A matematika és a fizika törvényeinek engedelmeskednek, de ez csak játék! A gömbről és a kúpról írt munkámra büszkébb vagyok, mint erre a gépre.

– Csinálhatnánk mi is hajítógépet technikaórán – lelkesült fel Zozó. – Sokkal izgalmasabb lenne, mint a múltkori feladat, amikor rakott krumplit kellett főzni.

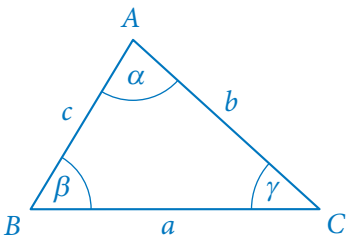
VI. 1. EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK, SZERKESZTÉSEK

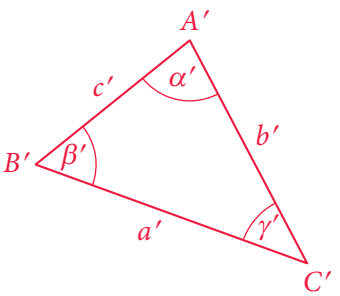
A tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés kapcsán megismerkedtünk az egybevágóság fogalmával. Megállapítottuk, hogy mind a két transzformáció egybevágóság, ezért mondhatjuk, hogy a KLM háromszög egybevágó a $K'L'M'$ háromszöggel, illetve a PQR háromszög egybevágó a $P'Q'R'$ háromszöggel.





Rövid jelöléssel: $KLM\triangle \cong K'L'M'\triangle$, $PQR\triangle \cong P'Q'R'\triangle$.





Az ABC és az $A'B'C'$ háromszög között nincs sem tengelyes, sem középpontos tükrös kapcsolat, mégis egybevágónak gondoljuk, és egybevágónak is nevezzük őket. Ha képzeletben kivágnánk például a kék háromszöget, akkor rá tudnánk helyezni a piros háromszögre úgy, hogy pontosan egybeessenek. Másképp mondva, el tudjuk mozgatni a kék háromszöget a piros helyére. Azt a mozgatást is megengedjük, hogy ha kell, akkor a kivágott háromszöget kiemeljük a síkból, és a másik oldalára fordítjuk, mintha egy tengelyre tükröztük volna.

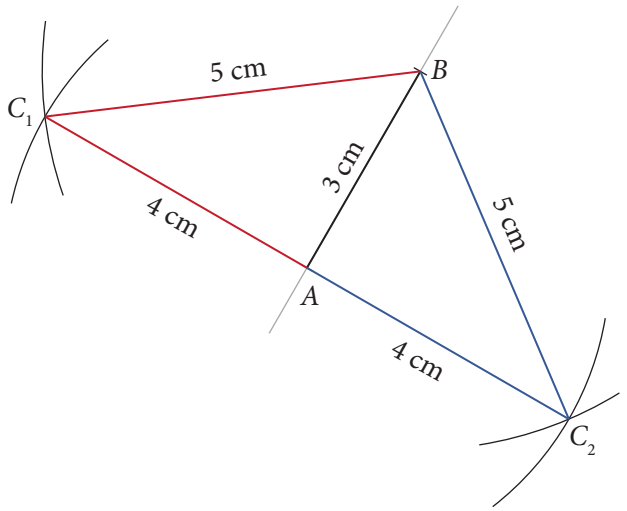
A lecke hátralévő részében mindig úgy betűzzük a háromszögeket, hogy a megfelelő csúcsnál a megfelelő betűjelű szög és velük szemben a megfelelő betűjelű oldal található. Tehát a háromszög C csúcsánál van a γ szög, és velük szemben a c oldal.

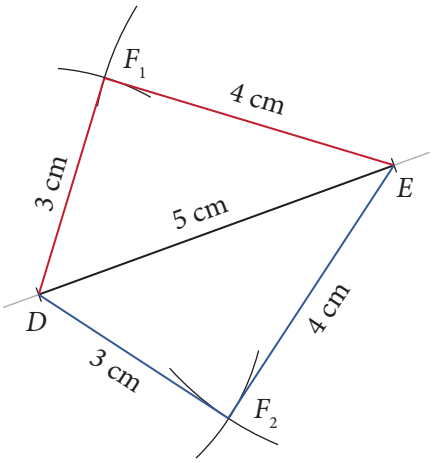
1. PÉLDA

Szerkesszünk egy ABC háromszöget, melynek oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak, majd egy másik, DEF háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 3 cm és 4 cm hosszúak! Mit állapíthatunk meg a két háromszögről?

Megoldás

Három oldal ismeretében tudunk háromszöget szerkeszteni.
1. lépés: Felvesszük a 3 cm hosszú oldalt, végpontjai legyenek A és B.
2. lépés: A középpontú 4 cm sugarú és B középpontú 5 cm sugarú kört rajzolunk.
3. lépés: A két kör két pontban metszi egymást, bármelyiket választhatjuk C pontnak.



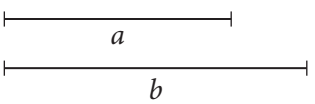


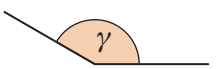
A *DEF* háromszög esetében az 5 cm hosszú oldalt vesszük fel először, és az *ABC* háromszög szerkesztéséhez hasonló lépéseket végzünk. A két háromszög természetesen egybevágó lesz. A szerkesztés során láthatjuk, hogy az oldalak megadásának sorrendje nincs hatással a háromszög alakjára.

Megjegyzés: Szerkeszthettünk volna *A* középpontú 5 cm sugarú és *B* középpontú 4 cm sugarú kört, illetve *D* középpontú 4 cm és *E* középpontú 3 cm sugarú kört is, a szerkesztett háromszögek egybevágóságán nem változtatna.

2. PÉLDA

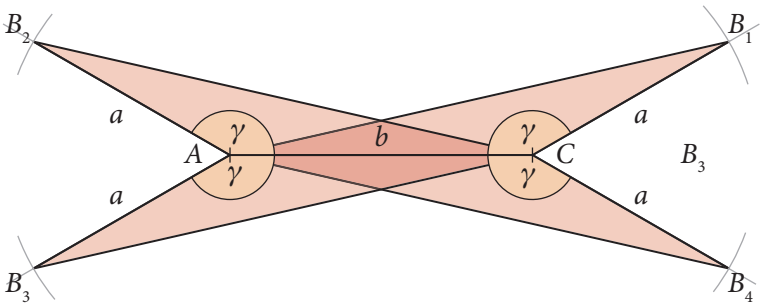
Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala, a és b, és az általuk közbezárt γ szög! Hány különböző háromszöget tudunk szerkeszteni?





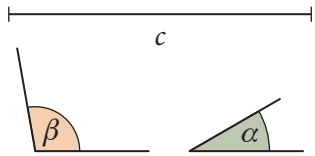
Megoldás

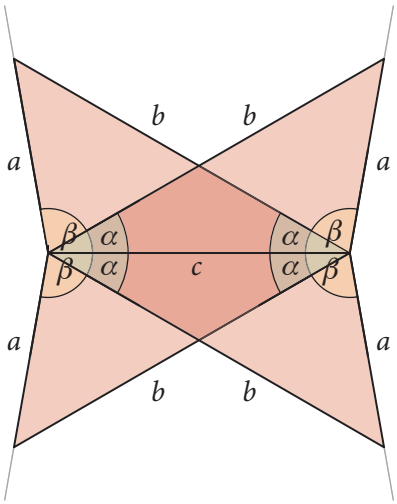
Vegyük fel a b oldalt! Ennek bármely végpontjába és egyenesének bármelyik oldalára felmérhetjük a megadott γ szöget, és a szögszárra átmásolhatjuk az a szakaszt. Ez négy lehetséges B csúcsot ad meg, de bármelyiket is választjuk, a kapott AB_1C, AB_2C, AB_3C, AB_4C háromszögek egybevágók lesznek.



3. PÉLDA

Szerkesszünk háromszöget, ha adott a c oldala és a rajta fekvő β és α szög! Hány különböző háromszöget tudunk szerkeszteni?





Megoldás

Vegyük fel a c oldalt! A megadott két szöget a két végpontba másolva megszerkeszthetjük az a és b oldalak félegyenesét. Metszéspontjuk megadja a háromszög harmadik csúcsát. A c oldal két végpontjába kétféleképpen választhatjuk a két szöget, és két oldalra is szerkeszthetünk az ábra szerint, de a kapott háromszögek ismét egybevágók lesznek.

Azokban az esetekben, amikor a szerkesztés során a kívánt alakzatnak egybevágó példányaihoz jutunk, azt szoktuk mondani, hogy a szerkesztés egyértelmű, vagy az alakzat az egybevágóság erejéig egyértelmű.

FELADATOK

1. Rajzoltunk két négyzetet, amelyek átlója egyenlő hosszúságú. Egybevágó-e a két négyzet?

2. Rajzolj egy $ABCD$ paralelogrammát, és húzd meg a két átlóját! A metszéspont legyen E. Írj föl annyi egybevágó háromszöget, ahányat csak találsz az ábrán!

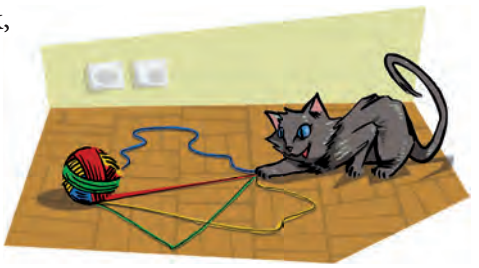
3. Rajzoltunk két egyenlő szárú háromszöget, amelyeknek az alaphoz tartozó magassága egyenlő. Egybevágó-e a két háromszög?

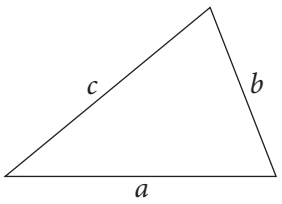
4. Szerkessz háromszöget, ha $a = 5$ cm, és a rajta fekvő két szög $\beta = 60°$ és $\gamma = 45°$!
a) Hány megoldást kaptál?
b) Egybevágók a kapott megoldások?

5. Szerkessz háromszöget, ha
$a = 5$ cm, $b = 4$ cm és $m_a = 3$ cm!
a) Hány megoldást kaptál?
b) Egybevágók a kapott megoldások?

6. Igazold, hogy a négyzetet a két átlója négy egybevágó háromszögre vágja!

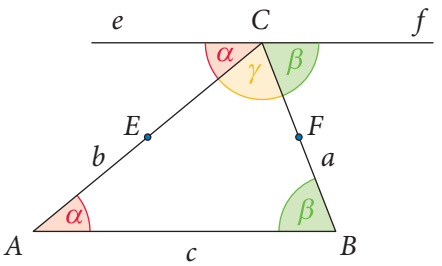
Két pontot egyenes és görbe vonalakkal is összeköthetünk. Tudjuk, hogy az összekötő vonalak közül az egyenes vonal a legrövidebb.





Ennek következménye háromszögekre nézve a **háromszög-egyenlőtlenség**.
A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.
A rajz jelöléseit használva: $b + c > a$, $a + c > b$, $a + b > c$.

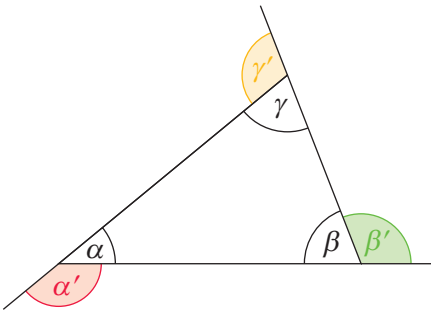
Bebizonyítjuk, hogy a **háromszög belső szögeinek összege 180°**.
Az ábrán α-val jelölt szögek egyenlők, mert középpontosan tükrösek az E oldalfelező pontra. A középpontos szimmetria miatt a C csúcsnál lévő e szögszár párhuzamos a c oldallal.



A β-val jelölt szögek is egyenlők, és az f félegyenes párhuzamos a c oldallal, mert középpontosan tükrösek az F oldalfelező pontra.

Mivel e és f is párhuzamos a-val, és mindkettő átmegy a C ponton, ezért az e és f egy egyenesbe esnek, a C-nél keletkezett szög egyenesszög: $180° = \alpha + \gamma + \beta$.

Határozzuk meg a háromszög külső szögeinek összegét!



A háromszög bármely belső szögének és a mellette fekvő külső szögének összege 180°.
A rajz jelöléseit használva:
$\alpha + \alpha' = 180°$, $\beta + \beta' = 180°$, $\gamma + \gamma' = 180°$.
Ezek összege: $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 3 \cdot 180°$.
Vegyük el mindkét oldalról az $\alpha + \beta + \gamma = 180°$-ot!
Ekkor ezt kapjuk: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$.

A háromszög külső szögeinek összege 360°.

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ és $\alpha + \alpha' = 180°$, ezért: $\alpha' = \beta + \gamma$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $\beta' = \alpha + \gamma$,
$\gamma' = \alpha + \beta$.

Vagyis **a háromszög egy-egy külső szöge akkora, mint a vele nem szomszédos két belső szög összege**.

Vonalzó és szögmérő segítségével a háromszögek oldalai és szögei között további összefüggéseket is felfedezhetünk. Mi is megfogalmaztunk néhányat, de az állításokat nem bizonyítjuk be.

I. *a)* Ha egy háromszögben két oldal hossza egyenlő, akkor a velük szemközti szögek is egyenlők.
II. *a)* Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van.

Ezen állítások megfordítása is igaz.

I. *b)* Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor az ezekkel szemközti oldalak hossza is egyenlő.
II. *b)* Bármely háromszögben két szög közül a nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.

PÉLDA

Egy háromszög két belső szöge: $\alpha = 32^\circ\ 46'$, $\beta = 63^\circ\ 25'$. Mekkorák a hiányzó belső és külső szögek?

Megoldás

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ezért $\gamma = 180^\circ - 32^\circ\ 46' - 63^\circ\ 25' = 83^\circ\ 49'$.
Mivel $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, ezért $\alpha' = 180^\circ - 32^\circ\ 46' = 147^\circ\ 14'$.
Mivel $\beta + \beta' = 180^\circ$, ezért $\beta' = 180^\circ - 63^\circ\ 25' = 116^\circ\ 35'$.
Mivel $\gamma + \gamma' = 180^\circ$, ezért $\gamma' = 180^\circ - 83^\circ\ 49' = 96^\circ\ 11'$.

Ellenőrzésként: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 147^\circ\ 14' + 116^\circ\ 35' + 96^\circ\ 11' = 360^\circ$.

FELADATOK

1. Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak?
a) 12 cm, 13 cm, 14 cm;
b) 17 dm, 17 dm, 33 dm;
c) 240 mm, 12 cm, 3,6 dm;
d) 0,28 m, 12 cm, 420 mm.

2. Három település távolságát egy térkép segítségével légvonalban megbecsültük. Selyebtől Monaj 3 km-re, Lak pedig 7 km-re található. A becsült adatok alapján milyen messze lehet Lak és Monaj egymástól? Nézz utána, hogy hol találhatók ezek a települések!

3. A térképen A és B pont között, valamint B és C pont között is 2 cm a távolság. A három pont a térképen egy egyenesre illeszkedik. A valóságban azonban az A-ból B-be vezető egyenes út hosszabb, mint a B-ből C-be vezető. Hogyan lehetséges ez?

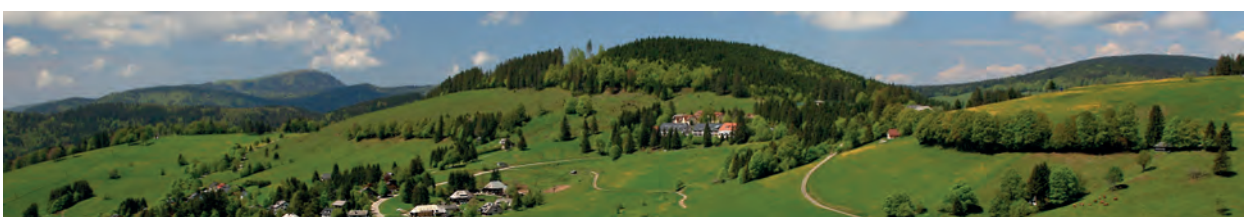
4. Add meg a háromszög hiányzó belső szögét!
a) 34°, 67° *b)* 88°, 35°
c) 42°, 101° *d)* 78°, 28°

5. Add meg a háromszög harmadik szögéhez tartozó külső szöget!
a) 56°, 104° *b)* 48°, 13°

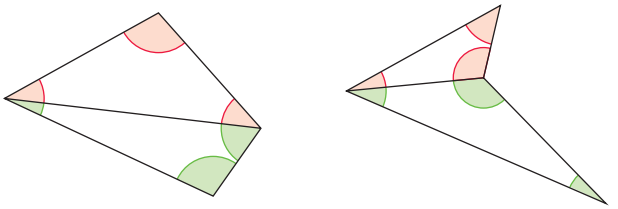
6. Rakd növekvő sorrendbe a háromszög a, b és c oldalát, ha
a) $\alpha = 38^\circ\ 43'$, $\beta = 86^\circ\ 23'$;
b) $\alpha = 68^\circ\ 23'$, $\beta = 96^\circ\ 48'$.

7. Rakd növekvő sorrendbe a háromszög a, b és c oldalát, ha
a) $\alpha = 97^\circ\ 31'$, $\beta' = 126^\circ\ 50'$;
b) $\alpha' = 78^\circ\ 38'$, $\beta' = 143^\circ\ 40'$.

8. Egyenlő szárú háromszögről van-e szó, ha
a) $\alpha = 38^\circ\ 48'$, $\beta' = 77^\circ\ 36'$;
b) $\alpha = 62^\circ\ 23'$, $\beta' = 117^\circ\ 37'$?

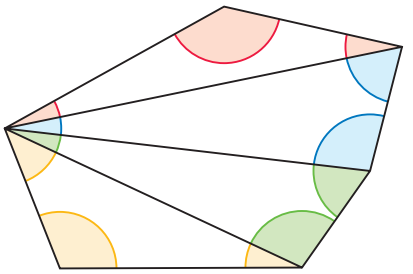


A konvex és a konkáv négyszögben is van olyan átló, amely a négyszöget két háromszögre vágja.
A két háromszög belső szögei lefedik a négyszög belső szögeit, és a négyszög belső szögei is lefedik a háromszögek belső szögeit.
Mivel mindkét háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért **a négyszögek belső szögeinek összege 360°**.



1. PÉLDA

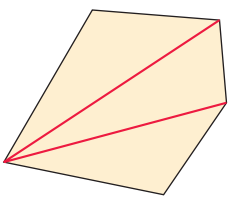
Határozzuk meg egy konvex hatszög belső szögeinek összegét!



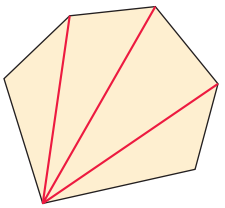
Megoldás

A hatszög egy csúcsából induló átlói négy háromszögre vágják a hatszöget. A négyszögeknél is használt indoklással mondhatjuk, hogy a konvex hatszög belső szögeinek összege $4 \cdot 180° = 720°$.

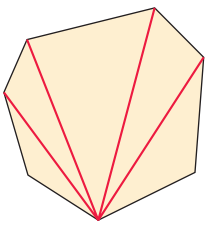
Hasonlóan gondolkodhatunk minden konvex sokszög esetén, így mindig meghatározhatjuk a belső szögek összegét.



Ötszög: $3 \cdot 180° = 540°$.



Hatszög: $4 \cdot 180° = 720°$.

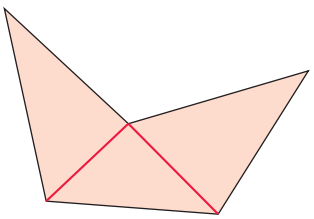


Hétszög: $5 \cdot 180° = 900°$.

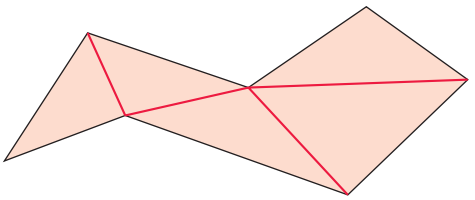
A sokszögnek ugyanannyi szöge és csúcsa van, mint ahány oldala. Minden sokszögben hárommal kevesebb átlót húzhatunk egy csúcsból, mint amennyi a csúcsok száma, mert a kiválasztott csúcsba és a két szomszédos csúcsba nem húzhatunk átlót.

Az *n* oldalú sokszögben egy csúcsból *n* – 3 átló húzható. A háromszögnek nincs átlója.

A konkáv sokszögeket is felvághatjuk háromszögekre, de nem feltétlenül egy csúcsból induló átlókkal. Az ábrán látható két konkáv sokszög erre mutat egy-egy példát.



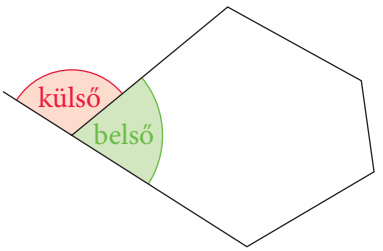
Ötszög: $3 \cdot 180° = 540°$.



Hétszög: $5 \cdot 180° = 900°$.

Konvex sokszögek esetén beszélhetünk külső szögekről.

A konvex sokszög egy külső szöge a mellette fekvő belső szöget 180 fokra egészíti ki.

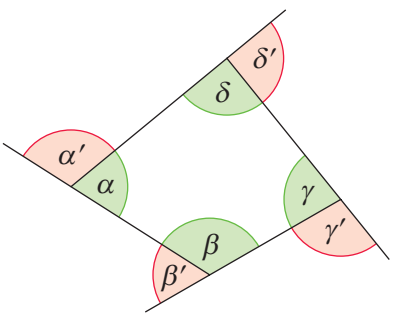


2. PÉLDA

Határozzuk meg a konvex négyszögek külső szögeinek összegét!

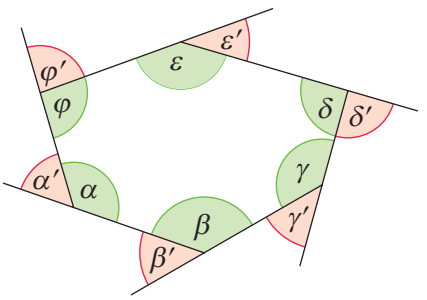
Megoldás

A rajz jelöléseit használva:
$\alpha + \alpha' = 180°$, $\beta + \beta' = 180°$, $\gamma + \gamma' = 180°$, $\delta + \delta' = 180°$.
Ezek összege: $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' + \delta + \delta' = 720°$.
Vegyünk el mindkét oldalból 360°-ot, és használjuk fel, hogy a belső szögek összege 360°, azaz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$!
Ekkor a külső szögek összegét kapjuk: $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°$.



A konvex négyszögek külső szögeinek összege 360°.

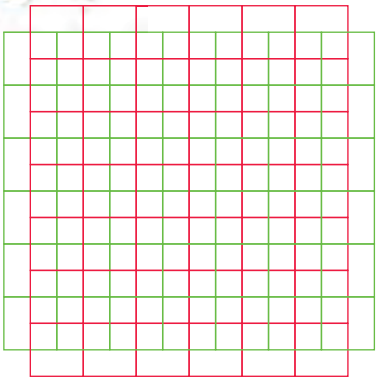
A háromszögek és a konvex négyszögek külső szögeinek összege is 360°. Az előző példában látott gondolatmenetet követve megmutatható lenne, hogy **minden konvex sokszögben 360° a külső szögek összege**.





JÁTÉK

A játékot a mellékelt táblán ketten játszhatjátok. Elsőként érdemes lehet nagyobb méretben megrajzolni a táblát magatoknak. Az egyik játékos a piros, a másik a zöld rácsot használja!
A játékosok célja, hogy a saját rácsukon az egymással szemben fekvő, legtávolabbi oldal egy-egy tetszőleges rácspontját összekössék egy vonallal. A játékosok két szomszédos rácspont közé felváltva húznak egy-egy szakaszt, de mindenki csak a saját rácsára rajzolhat. (Érdemes két különböző színű ceruzát használni.) A már megrajzolt vonaldarabok bármikor összeköthetők a játék során, de az ellenfél vonaldarabjait nem szabad átvágni! A nyertes az lesz, akinek előbb sikerül megrajzolni a nyerő vonalat.



FELADATOK

1. Egy ötszög négy belső szögének nagysága: 112°, 99°, 113° 25', 128° 56'. Add meg a külső szögek nagyságát és összegét!

2. Egy négyszög egyik szöge 62°, a másik kétszer akkora, a harmadik és a negyedik szöge között pedig 10° az eltérés. Mekkorák a négyszög belső és külső szögei?

3. A következő kérdések konvex tizenkétszögre vonatkoznak.
a) Hány átló húzható egy csúcsból?
b) Hány háromszögre vágják az egy csúcsból húzható átlói?
c) Mennyi a külső szögeinek összege?

4. Határozd meg az oldalak számát abban a konvex sokszögben, amelyben
a) egy csúcsból 17 átló húzható;
b) az egy csúcsból húzott átlók 100 darab háromszöget hoznak létre!

5. Készíts táblázatot a szabályos sokszögek egy belső szögének nagyságáról! Táblázatodban a szabályos sokszögek oldalainak száma 3-tól 12-ig szerepeljen!

6. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben a belső szögek összege hétszer akkora, mint a külső szögek összege?



Oktogon (Budapest)



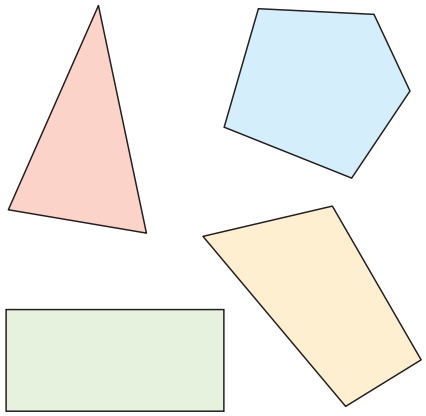
Pentagon (Washington)

VI. 4. A TERÜLET ÉS A TÉRFOGAT MÉRTÉKEGYSÉGEI



CSOPORTMUNKA

Alakítsatok 4 fős csoportokat!



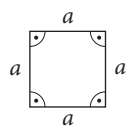
Egy nagy csomagolópapírra rajzoljatok négy különböző méretű síkidomot! A síkidomok között legyen háromszög és négyszög is.
Határozzátok meg négyzetcentiméter pontossággal a lerajzolt síkidomok területét! Az eredményt a füzetetekbe írjátok, ne a papírra!

Az elkészített rajzokat tegyétek egymás mellé! A csoportok feladata, hogy mérés nélkül megbecsüljék a többi csoport által rajzolt síkidomok területét. Minden síkidom területének becslésekor az a csoport kap egy pontot, amelyik a legpontosabb értéket adja meg.

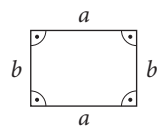
Az a csoport nyer, amelyik a legtöbb pontot szerzi. Legyetek ügyesek!

Ismételjük át röviden, mit tudunk a kerületről és a területről, illetve a felszínről és a térfogatról!

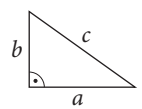
A négyzet kerülete egy oldal hosszának négyszerese, területe pedig az oldal hosszának négyzete. $K = 4 \cdot a$ $T = a^2$



A téglalap kerülete az oldalai hosszának összege, területe pedig két szomszédos oldal hosszának szorzata. $K = 2a + 2b$ $T = a \cdot b$



A derékszögű háromszög kerülete az oldalai hosszának az összege, területe pedig fele a megfelelő téglalap területének. $K = a + b + c$ $T = \frac{a \cdot b}{2}$

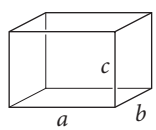


A testeket felület határolja, ami lehet síklapokból álló vagy görbe.

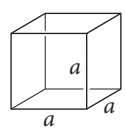
A testekkel kapcsolatos elnevezések: csúcs, él, lap, lapátló, testátló.

A kocka és a téglatest felszínének és térfogatának kiszámítási módját ismerjük. A felszínük (A) a határoló lapok területének összege, a térfogatuk (V) az egy csúcsba futó élek hosszának szorzata.

Téglatest $A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$ $V = a \cdot b \cdot c$



Kocka $A = 6 \cdot a^2$ $V = a^3$



4. A TERÜLET ÉS A TÉRFOGAT MÉRTÉKEGYSÉGEI

VI.

A területmérésnél leggyakrabban használt mértékegységek: négyzetmilliméter, négyzetcentiméter, négyzetdeciméter, négyzetméter, négyzetkilométer. Az ár és a hektár is terület-mértékegységek, de ezeket ritkábban használjuk.

Vizsgáljuk meg először, honnan származik például a *négyzetcentiméter* elnevezés!

Az 1 cm oldalú négyzet területe $T = 1\ (\text{cm}) \cdot 1\ (\text{cm}) = 1\ (\text{cm} \cdot \text{cm}) = 1\ \text{cm}^2$. Kiolvasva: centiméter a négyzeten, másként elnevezve: négyzetcentiméter. A mértékegység meghatározásánál felhasználtuk a hatványozásról tanult ismereteinket.

Ugyanilyen módon származtathatók a négyzetmilliméter (mm^2), négyzetdeciméter (dm^2), négyzetméter (m^2) elnevezések is.

1. PÉLDA

Végezzük el az alábbi mértékegység-átváltásokat!

a) $1\ \text{m}^2 = \ldots\ \text{dm}^2$ *b)* $1\ \text{m}^2 = \ldots\ \text{cm}^2$ *c)* $1\ \text{km}^2 = \ldots\ \text{m}^2$

Megoldás

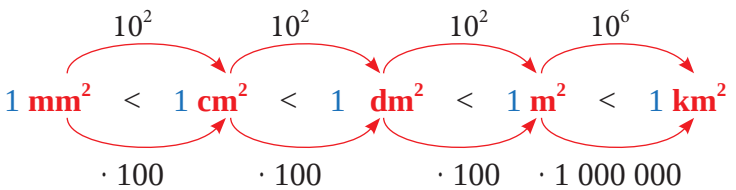
Az átváltáshoz ismét felhasználhatjuk a hatványokról tanultakat.

a) $1\ \text{m}^2 = 1\ \text{m} \cdot 1\text{m} = 10\ \text{dm} \cdot 10\ \text{dm} = 10^2\ \text{dm}^2 = 100\ \text{dm}^2$

b) $1\ \text{m}^2 = 1\ \text{m} \cdot 1\text{m} = 100\ \text{cm} \cdot 100\ \text{cm} = 10^2 \cdot 10^2\ \text{cm}^2 = 10^4\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$

c) $1\ \text{km}^2 = 1000\ \text{m} \cdot 1000\ \text{m} = 10^3 \cdot 10^3\ \text{m}^2 = 10^6\ \text{m}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$

A mértékegység-átváltások során sokszor célszerű 10 hatványaival számolni vagy az átváltási táblázatot használni.



2. PÉLDA

Hány négyzetméter

a) $8\ \text{km}^2$; *b)* $3500\ \text{dm}^2$; *c)* $640\,000\ \text{cm}^2$?

Megoldás

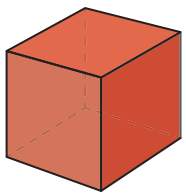
a) Ha a mértékegységek közötti váltószám nagy, akkor érdemes hatványokkal számolni.
$1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$, ezért $1\ \text{km}^2 = 1000\ \text{m} \cdot 1000\ \text{m} = 10^3\ \text{m} \cdot 10^3\ \text{m} = 10^6\ \text{m}^2$
$8\ \text{km}^2 = 8 \cdot 10^6\ \text{m}^2$

b) $3500\ \text{dm}^2 = (3500 : 100)\ \text{m}^2 = 35\ \text{m}^2$

c) $640\,000\ \text{cm}^2 = (640\,000 : 10\,000)\ \text{m}^2 = 64\ \text{m}^2$

VI. 4. A TERÜLET ÉS A TÉRFOGAT MÉRTÉKEGYSÉGEI

A térfogat mértékegységei hasonlóképpen alakultak ki, mint a terület mértékegységei. Gyakran használt térfogat-mértékegységek: köbmilliméter, köbcentiméter, köbdeciméter, köbméter. A köbkilométer is térfogat-mértékegység, de ezt ritkán használjuk.



Az 1 cm élű kocka térfogata:

$V_{\text{kocka}} = 1\ (\text{cm}) \cdot 1\ (\text{cm}) \cdot 1(\text{cm}) = 1^3\ (\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}) = 1\ \text{cm}^3$.

Az 1 cm élű kocka térfogata 1 centiméter a harmadikon (köbön), másképp mondva 1 köbcentiméter.

A térfogat mértékegységei közötti átváltást most is segíti a hatványok alkalmazása.

$$1\ \text{mm}^3 \overset{\cdot 1000}{<} 1\ \text{cm}^3 \overset{\cdot 1000}{<} 1\ \text{dm}^3 \overset{\cdot 1000}{<} 1\ \text{m}^3 \overset{\cdot 1\,000\,000\,000}{<} 1\ \text{km}^3$$

10^3 10^3 10^3 10^9

3. PÉLDA

Egy téglatest alakú úszómedence 25 m hosszú, 18 méter széles, és a vízmélysége 1,8 m. Hány liter víz van a medencében?

Megoldás

1 liter = 1 dm^3, így azt kell kiszámolni, hány dm^3 víz van a medencében.
$V = 25\ \text{m} \cdot 18\ \text{m} \cdot 1{,}8\ \text{m} = 810\ \text{m}^3 = 810\,000\ \text{dm}^3$. 810 000 liter víz van a medencében.

FELADATOK

1. Végezd el a szorzásokat! Állapítsd meg azt is, melyik esetben kaptál terület- és melyik esetben térfogat-mértékegységet!
a) 7 cm · 5 cm *b)* 3 m · 4 m · 5 m *c)* 2,4 dm · 1,5 dm^2 *d)* 0,75 km · 4,4 km

2. Végezd el a szükséges átváltásokat, és add meg a szorzatok eredményét dm^2-ben!
a) 4 cm · 9 cm *b)* 8 m · 12 m *c)* 73 cm · 0,1 km *d)* 13 mm · 6 m *e)* 2 m · 2 km

3. Egy téglalap oldalai cm-ben mérve egész számok. Hány centiméteresek lehetnek az oldalak, ha tudjuk, hogy a téglalap területe 0,0189 m^2?

4. Megadtuk a kocka térfogatát. Hány centiméter az éle?
a) 27 cm^3 *b)* 0,001 cm^3 *c)* 1 dm^3 *d)* 0,125 dm^3 *e)* 8 m^3 *f)* $\frac{64}{1000}$ m^3

5. Aladár és Kriszta szomszédok. Mindkettőjüknek van egy-egy téglalap alapú felfújható medencéje a kertben. Aladáréké 260 cm × 175 cm alapterületű, míg Krisztáéké 2,4 m × 1,95 m alapterületű. A medencék magassága 60 cm.
a) Számítsd ki, melyikbe fér több víz, és hány literrel!
b) Ki hány perc alatt tölti fel a medencéjét, ha 5 mp alatt 12 liter víz folyik a kerti csapból?

5. A PARALELOGRAMMA TERÜLETE

VI.

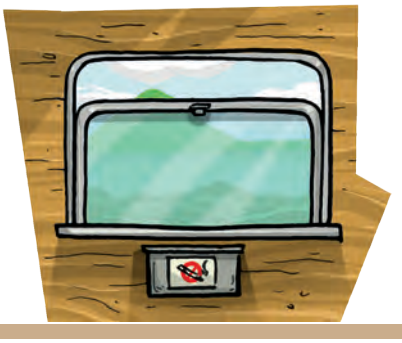


CSOPORTMUNKA

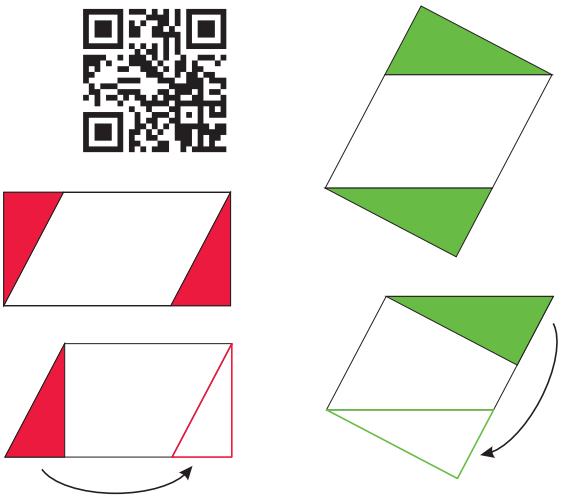
Az ábra egy vasúti kocsi 120 cm széles ablakát szemlélteti. Vannak olyan személykocsik, amelyek ablakai lehúzhatók, ha az utasok szellőztetni szeretnének. Az ábrán látható ablaküveg 24 cm-re van lehúzva.



Vitassátok meg a rendelkezésetekre álló adatok alapján, hogy szerintetek mekkora területű a rés! Ha nem tudjátok pontosan megmondani, akkor próbáljatok becslést adni!

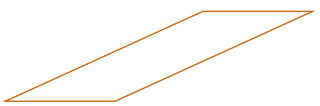


Ha egy paralelogramma területét akarjuk meghatározni, akkor téglalapba foglaljuk. Ezt kétféleképpen tehetjük meg, ahogy az ábra is mutatja.



Az így kapott téglalap területéből kivonjuk a két piros, illetve a két zöld derékszögű háromszög területét, amelyek szintén egy-egy téglalapra egészítik ki egymást. Vagyis a paralelogramma területét azért tudjuk meghatározni, mert a téglalap területét már ki tudjuk számolni.

A paralelogramma területét meghatározhatjuk átdarabolással is. Vágjuk le a paralelogrammából a beszínezett derékszögű háromszöget, és helyezzük át úgy, ahogy az ábrán látható! Az így kapott téglalap területét már ki tudjuk számítani.

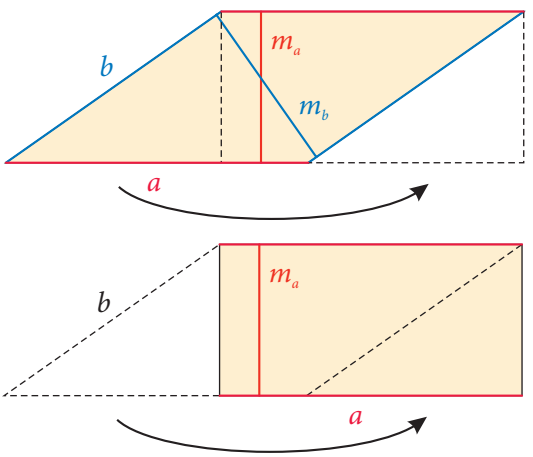


A kétféleképpen kapott téglalapok nem egybevágók, de a területük egyenlő, hiszen ugyanazt a paralelogrammát daraboltuk át. Van olyan paralelogramma, amelyiknél a rajzon mutatott kétféle darabolás mindegyike nem valósítható meg.

A téglalapok területének kiszámításához nem elegendő a paralelogramma oldalhosszainak ismerete, a párhuzamos oldalainak távolságát is ismernünk kell.

A paralelogramma párhuzamos oldalegyeneseinek távolságát a paralelogramma magasságának nevezzük.

Jelölje a paralelogramma két szomszédos oldalát és a hozzájuk tartozó magasságot a és m_a, illetve b és m_b.



Mivel az átdarabolás során a paralelogramma területe nem változik, ezért **a paralelogramma területét az oldal és a hozzá tartozó magasság hosszának szorzata adja**.

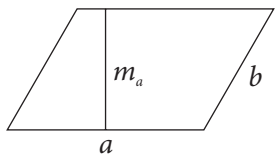
Minden paralelogrammára igaz, hogy területe:
$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$.

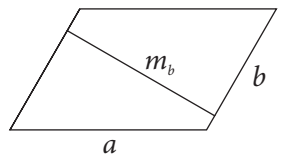
1. PÉLDA

a) A paralelogramma egyik oldalának hossza 14 cm, a hozzá tartozó magasság 6 cm, a másik oldal hossza pedig 8 cm. Mekkora magasság tartozik ehhez az oldalhoz?
b) A paralelogramma egyik oldalának hossza 16 cm, a hozzá tartozó magasság 9 cm, a másik oldal hossza pedig 6 cm. Mekkora magasság tartozik ehhez az oldalhoz?

Megoldás

a) Kiszámíthatjuk a paralelogramma területét a paralelogramma oldala és a hozzá tartozó magasság ismeretében: $T = 14 \cdot 6 = 84$ (cm^2).
A terület és a másik oldal ismeretében kiszámítjuk a hiányzó magasság hosszát:
$84 = 8 \cdot m_b$. Vagyis $m_b = 10{,}5$ cm.
b) Az előző gondolatmenetet követve: $T = 16 \cdot 9 = 144$ (cm^2). A hiányzó magasságra felírhatjuk a következő összefüggést: $144 = 6 \cdot m_b$. Ezek alapján azt gondolhatnánk, hogy $m_b = 24$ cm.

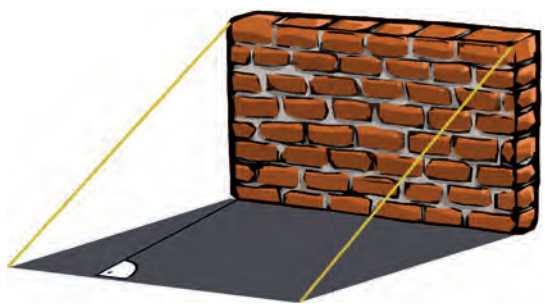




Vizsgáljuk meg, hogy a kapott paralelogrammák léteznek-e!
A paralelogramma magassága nem lehet hosszabb, mint a nem hozzá tartozó oldal, vagyis $b \geq m_a$, $a \geq m_b$. Téglalap esetében lesz közöttük egyenlőség.
Ezek alapján az *a)* megoldás helyes. A paralelogramma létezik, hiányzó magasságának hossza 10,5 cm.
A *b)* részben kapott $m_b = 24$ cm, amely azonban nem lehet hosszabb a nem hozzá tartozó oldalnál, ami 16 cm-es. Sőt már a számolás előtt is észrevehető, hogy a 9 cm-es magasság nem lehet hosszabb a 6 cm-es oldalnál. Vagyis ez a paralelogramma nem létezik, így a hiányzó magasságának a hosszát sem adhatjuk meg!

2. PÉLDA

Egy téglalap alakú faldarab árnyéka a vízszintes talajon paralelogramma alakú. A fal szélessége 4,4 m. Az árnyék a fal tövétől 2,5 méterre nyúlik. Mekkora részt árnyékol a fal?

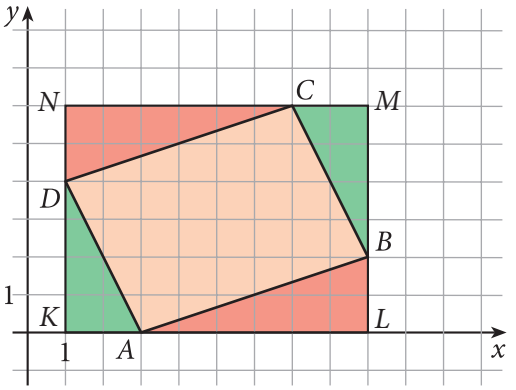


Megoldás

A szöveget értelmezve kiderül, hogy a paralelogramma egyik oldalának hossza 4,4 m, a hozzá tartozó magasságé pedig 2,5 m.
A paralelogramma területe: $T = 4{,}4 \cdot 2{,}5 = 11$. Vagyis a fal egy 11 m^2-es területet árnyékol.

3. PÉLDA

Egy paralelogramma négy csúcsának koordinátái $A(3; 0)$, $B(9; 2)$, $C(7; 6)$, $D(1; 4)$. Mekkora a területe?



Megoldás

Most sajnos nem ismerjük a paralelogramma oldalainak hosszát, ezért a feladatot kiegészítéssel, átdarabolással oldjuk meg.

Foglaljuk a paralelogrammát téglalapba! A befoglaló $KLMN$ téglalap területe $6 \cdot 8$ területegység. A középpontos szimmetria miatt az ADK és a BMC háromszögekből egy $2 \cdot 4$-es téglalap rakható ki. Hasonlóan az ALB és CND háromszögekből egy $2 \cdot 6$-os téglalapot tudunk kirakni. $6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 48 - 8 - 12 = 28$ területegység az $ABCD$ paralelogramma területe.

FELADATOK

1. Hány négyzetdeciméter a területe a következő paralelogrammáknak?

a) $a = 12$ dm, $m_a = 3{,}8$ dm

b) $b = 21{,}2$ dm, $m_b = 15$ dm

c) $a = 85$ cm, $m_a = 1{,}4$ m

d) $b = 2{,}8$ m, $m_b = 140$ cm

2. Add meg a hiányzó oldal vagy magasság hosszát!

a) $a = 8{,}8$ cm, $m_a = 2{,}5$ cm, $b = 11$ cm

b) $a = 1{,}2$ m, $b = 0{,}8$ m, $m_b = 0{,}6$ m

c) $a = 51$ dm, $m_a = 16$ dm, $m_b = 17$ dm

d) $a = 24$ mm, $b = 16$ mm, $m_b = 9$ mm

3. Egy 49 hektáros (1 hektár = 10 000 m^2) paralelogramma alakú terület két párhuzamos oldalának távolsága 560 méter. Milyen hosszúak ezek az oldalak?

4. Hogyan változik a paralelogramma területe, ha

a) az alapjának a hosszát kétszeresére növeled;

b) az egyik magasságának a hosszát a harmadára csökkented;

c) az alapját és a hozzá tartozó magasság hosszát is kétszeresére növeled;

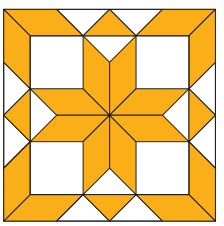
d) az alapjának a hosszát háromszorosára, a hozzá tartozó magasság hosszát a felére változtatod?

5. Egy rombusz alakú búzaföld kerülete 2,8 km, a területe 392 000 m^2.

a) Milyen messze van a földterület két szemközti széle egymástól?

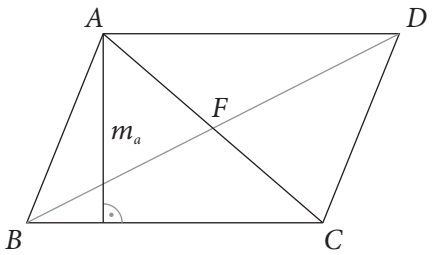
b) Mennyivel nagyobb egy ugyanekkora kerületű, négyzet alakú búzaföld területe?

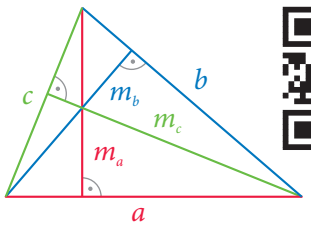
6. A képen látható 20 cm oldalú négyzet alakú mintát egyenlő szárú derékszögű háromszög, négyzet és paralelogramma alakú csempékből állítottuk össze. Mekkora egy sárga paralelogramma területe?



VI. 6. A HÁROMSZÖG TERÜLETE

Az *ABCD* paralelogramma megkapható, ha az *ABC* háromszöget az *AC* oldal felezőpontjára tükrözzük.
Az ábrán bejelölt m_a a paralelogramma egyik magassága. Az *ABC* háromszög *A* csúcsa és a *BC* oldalegyenes távolsága m_a. Azt is mondhatjuk, hogy m_a az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló *BC* oldalhoz tartozó magassága.
Mivel a paralelogramma területe $a \cdot m_a$, és a tükrözés miatt az *ABC* háromszög egybevágó a *CDA* háromszöggel, ezért az *ABC* háromszög területe pontosan a paralelogramma területének felével egyenlő.
A háromszög területét megkapjuk, ha valamelyik oldal és a hozzá tartozó magasság hosszának szorzatát elfelezzük.

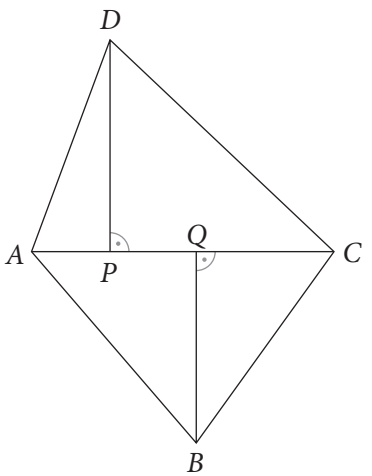




A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.

1. PÉLDA

Az ábra egy gazdaság négyszög alakú területének vázlatát mutatja. A bejelölt utak hosszát ismerjük: $AC = 120$ m, $BQ = 76$ m, $DP = 84$ m. Mekkora a gazdaság területe?



Megoldás

Az *ABC* háromszögnek és az *ADC* háromszögnek is oldala az adott hosszúságú *AC* út. Mindkét háromszögben az ehhez az oldalhoz tartozó magasság hosszát is ismerjük. A kérdéses területet a két háromszög területének összege adja.

$$T = \frac{120 \cdot 76}{2} + \frac{120 \cdot 84}{2} = \frac{120}{2} \cdot (76 + 84) = 60 \cdot 160 = 9600 \text{ (m}^2\text{)}.$$

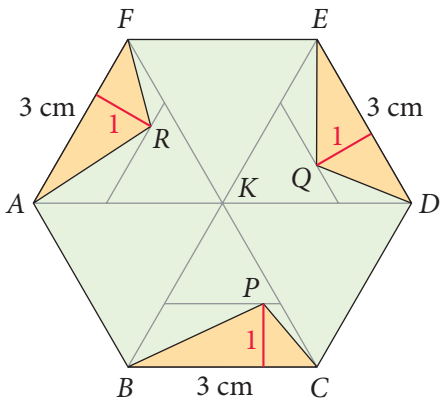
Vagyis a négyszög területe 9600 m^2.

2. PÉLDA

A 3 cm oldalhosszúságú *ABCDEF* szabályos hatszög szimmetria-középpontja a *K* pont. Tudjuk, hogy a *P* pont a *BCK* háromszög belsejében, a *BC* oldaltól 1 cm távolságra található párhuzamos szakaszon van. Hasonlóan a *Q* pont a *DEK*, az *R* pont pedig az *AFK* háromszögben található. Mekkora az *ABPCDQEFR* kilencszög területe, ha a hatszög területe kerekítve 23,4 cm^2?

Megoldás

Rajzoljunk ábrát a szöveg alapján (az ábrát lásd a következő oldalon)!
A *BCP*, *DEQ* és *AFR* háromszögeknek 3 cm-es az az oldaluk, amelyik a hatszögnek is oldala. Mivel a *P*, *Q* és *R* pontok ezekkel az oldalakkal párhuzamos szakaszokon vannak 1 cm-re az oldalaktól,



ezért mindhárom pontból 1 cm hosszúságú magasság húzható a 3 cm-es oldalhoz. A P, Q és R pontok helyzetétől függetlenül ezeknek a háromszögeknek a területe:

$t = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$ (cm^2).

A 23,4 cm^2 területű szabályos hatszögből három 1,5 cm^2-es háromszöget kell kivágnunk, hogy a kilencszöget megkapjuk.

A kilencszög területe: $T = 23{,}4 - 3 \cdot 1{,}5 = 18{,}9$ cm^2.

FELADATOK

1. Mekkora a területe a következő háromszögeknek?
a) $a = 67$ dm, $m_a = 38{,}2$ dm;
b) $b = 5{,}8$ dm, $m_b = 32$ dm;
c) $c = 84$ cm, $m_c = 0{,}74$ m;
d) $a = 3{,}72$ m, $m_a = 17$ dm.

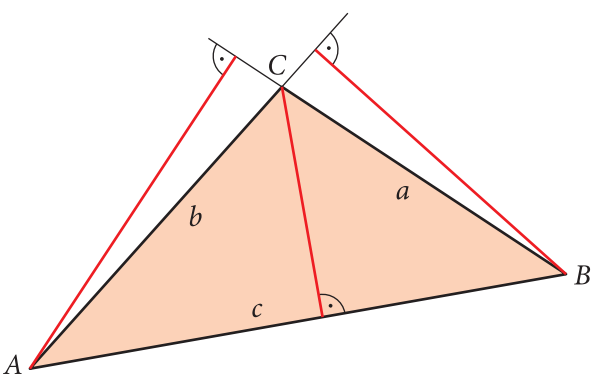
2. Add meg egy hiányzó oldal vagy egy hiányzó magasság hosszát a háromszögben!
a) $a = 10{,}2$ cm, $m_a = 2{,}4$ cm, $b = 12{,}24$ cm;
b) $a = 14{,}4$ m, $b = 9{,}6$ m, $m_b = 7{,}2$ m;
c) $a = 16{,}2$ km, $m_a = 10{,}8$ km, $b = 14$ km;
d) $a = 0{,}3$ cm, $m_a = 0{,}22$ cm, $c = 0{,}42$ cm.

3. Hogyan változik a háromszög területe, ha
a) az egyik oldalának hosszát háromszorosára növeled, a hozzá tartozó magasság hosszát viszont nem változtatod;
b) az egyik magasságának hosszát a felére csökkented, a hozzá tartozó oldal hosszát viszont nem változtatod;
c) az oldalát és a hozzá tartozó magasság hosszát is felére csökkented;
d) az oldalának hosszát kétszeresére, a hozzá tartozó magasság hosszát a felére változtatod?

4. Egy derékszögű háromszög hosszabb befogójának felezőpontjától a háromszög határoló vonalán haladva a szemközti csúcsot az egyik irányból 40 cm, a másik irányból 56 cm megtétele után érjük el. Az átfogó és a rövidebb befogó együtt 64 cm.
a) Mekkora a háromszög kerülete?
b) Mekkora a háromszög területe?

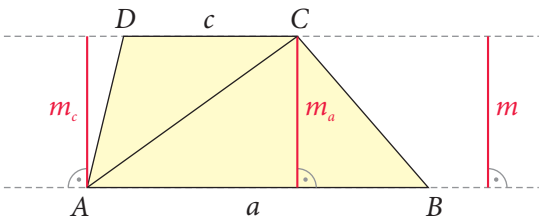
5. Egy szabályos háromszög kerülete 12 cm, magasságát 3,6 cm-nek mértük. Mekkora a területe?

6. Mérd meg az ábrán látható háromszög megfelelő adatait, majd számold ki a területét!



VI. 7. A TRAPÉZ TERÜLETE

Az egyik átlója mentén minden trapézt két háromszögre vághatunk. Az ABC háromszög a oldalához az m_a, az ACD háromszög c oldalához az m_c magasság tartozik.



Mindkét magasság a trapéz párhuzamos oldalainak a távolságát adja, ezért $m_a = m_c$.
Ezt jelöljük m-mel.

A trapéz párhuzamos oldalegyeneseinek távolságát a trapéz magasságának nevezzük.

A trapéz területét a két háromszög területének összege adja. Vagyis a **trapéz területe:**

$$T = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2} = \frac{(a+c) \cdot m}{2}.$$

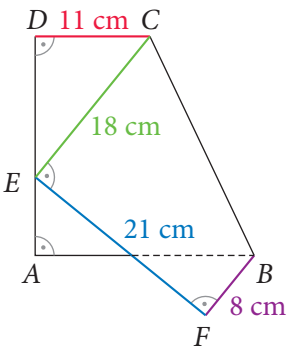


Trapéz a cirkuszban

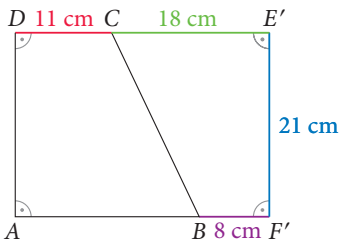
A trapéz területét úgy kapjuk, ha a két párhuzamos oldalának összegét megszorozzuk a trapéz magasságával, majd az eredményt elosztjuk kettővel.

1. PÉLDA

Egy téglalap alakú papírt a jobb oldali ábra alapján kettéhajtottunk. Néhány adatot feltüntettünk. Adjuk meg ezek alapján a két rész területét!



Megoldás



Rajzoljuk le az ábrát úgy, mintha visszahajtottuk volna a lapot az eredeti állapotába!
Az $ABCD$ és a $BF'E'C$ trapéz területét kell megadnunk. Ezeknek a trapézoknak az egyik szára merőleges az alapra. Az ilyen derékszögű trapézok magasságának hossza pontosan a merőleges szár hosszával egyenlő.

A $BF'E'C$ trapéz területe: $T_1 = \frac{(8+18) \cdot 21}{2} = 273\ \text{cm}^2$.

Az $ABCD$ trapéz AB alapjának hosszát megkapjuk, ha a DE' hosszából elvesszük a BF' hosszát. Vagyis $AB = (11 + 18) - 8 = 21$ (cm).

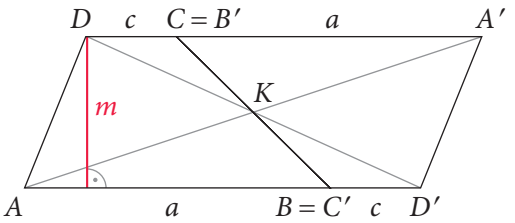
Az $ABCD$ trapéz területe: $T_2 = \frac{(21+11) \cdot 21}{2} = 336\ \text{cm}^2$.

2. PÉLDA

Már korábban láttuk, hogy ha az $ABCD$ trapézt a BC szár K felezőpontjára tükrözzük, akkor az eredeti trapéz és a képként kapott trapéz együtt egy paralelogrammát alkot. Ezt az állítást felhasználva igazoljuk a trapéz területképletét!

Megoldás

Az ábrán az $ABCD$ trapézt tükröztük a BC szár K felezőpontjára, ezért az $AD'A'D$ paralelogramma. Tudjuk, hogy az AD' oldal hossza $a + c$, a hozzá tartozó magasság pedig m.



Használjuk a paralelogramma területképletét: $(a + c) \cdot m$. Ez a tükrözés miatt kétszerese az $ABCD$ trapéz területének, ezért a trapéz területe: $T = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$.

FELADATOK

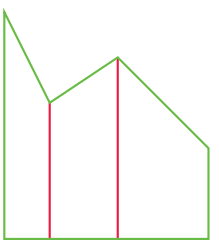
1. Mekkora a trapéz területe, ha
a) $a = 28$ cm, $c = 12$ cm, $m = 17$ cm;
b) $a = 33$ m, $c = 27$ m, $m = 15$ m;
c) $a = 450$ dm, $c = 31$ m, $m = 4200$ cm;
d) $a = 12$ cm, $c = 0{,}07$ m, $m = 1{,}1$ dm?

2. Mekkora a trapéz magassága, ha
a) $a = 32$ cm, $c = 14$ cm, $T = 184$ cm^2;
b) $a = 47$ m, $c = 29$ m, $T = 646$ m^2?

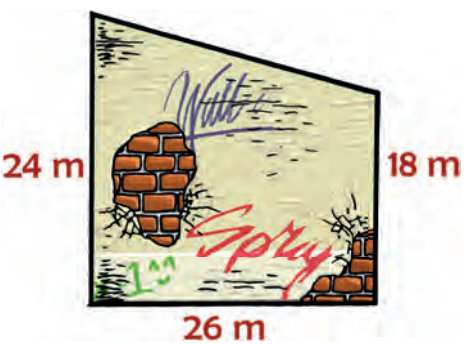
3. Mekkora a trapéz hiányzó alapjának hossza, ha
a) $a = 47$ cm, $m = 18$ cm, $T = 612$ cm^2;
b) $a = 102$ m, $m = 52$ m, $T = 3848$ m^2?

4. Melyek igazak a következő állítások közül? A hamis állításokat javítsd, hogy igazak legyenek!
a) A trapézt az egyik átlója két háromszögre vágja.
b) A trapéz szemközti oldalegyeneseinek távolságát a trapéz magasságának nevezzük.
c) A trapéz területét úgy számíthatjuk ki, hogy a két párhuzamos oldalának összegét megszorozzuk a trapéz magasságával.
d) Van olyan trapéz, amelynek a területét három oldal ismeretében is ki lehet számítani.

5. Mekkora az ábrán látható sokszög területe, ha a függőleges szakaszok hossza 10 cm, 6 cm, 8 cm és 4 cm, és a szomszédos függőleges szakaszok távolsága 2 cm, 3 cm és 4 cm?

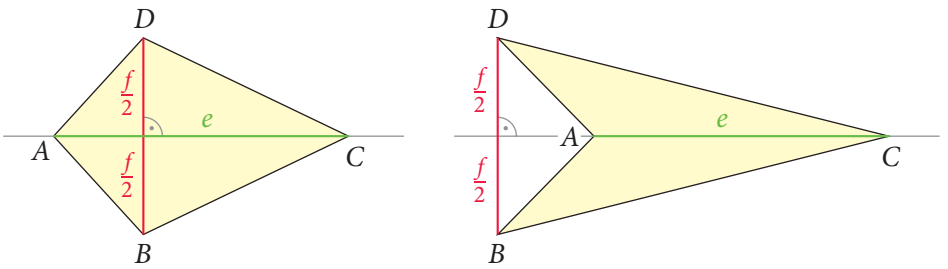


6. Egy tűzfal trapéz alakú. Mennyi vakolatra lesz szükség a felújításnál, ha m^2-enként 32 kg anyagot használnak fel?



VI. 8. A DELTOID TERÜLETE

Tudjuk, hogy a deltoidoknak van szimmetriatengelyük, amely mentén minden deltoid két egybevágó háromszögre vágható.



A konvex és a konkáv $ABCD$ deltoid esetén is az $ABC\triangle \cong ADC\triangle$. (Így jelöltük röviden, hogy az ABC háromszög egybevágó az ADC háromszöggel.)

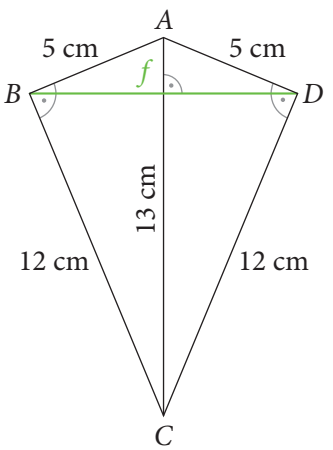
Az ABC háromszög e oldalához $\frac{f}{2}$ magasság tartozik, ezért a területe: $\frac{e \cdot \frac{f}{2}}{2} = \frac{e \cdot f}{4}$.

A keresett terület ennek a kétszeresével egyenlő, vagyis **a deltoid területe: $T = \frac{e \cdot f}{2}$**.

A deltoid területét úgy kapjuk, ha a két átlójának hosszát összeszorozzuk, és a szorzat felét vesszük.

1. PÉLDA

Az ábrán látható adatokat méréssel kaptuk. Határozzuk meg mérés nélkül a BD átló f hosszát!



Megoldás

A deltoid területe felírható a tanult módon: $T = \frac{13 \cdot f}{2}$.

Ez a deltoid az AC átlója mentén két egybevágó derékszögű háromszögre vágható, ezért a területe:

$T = 2 \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = 5 \cdot 12 = 60$ (cm^2).

A kétféleképpen kapott terület egyenlő: $\frac{13 \cdot f}{2} = 60$.

Ebből következik, hogy $f = \frac{120}{13}$ cm.

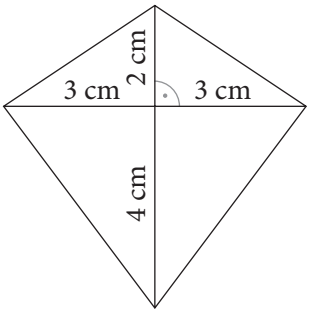
2. PÉLDA

A 18 cm^2 területű deltoid átlói egyenlő hosszúak, és az egyik harmadolja a másikat. Rajzoljuk le a deltoidot!

Megoldás

A deltoid területképletét használjuk, de tudjuk, hogy $e = f$, ezért $18 = \frac{e \cdot e}{2}$.

Mivel $e \cdot e = 36$, ezért az átlók hossza 6 cm.
Bár a deltoid egyik átlója mindig felezi a másikat, de most egy olyan adattal is rendelkezünk, mely szerint a másik harmadolva metszi az egyiket. Ezek ismeretében elkészíthető a rajz:



FELADATOK

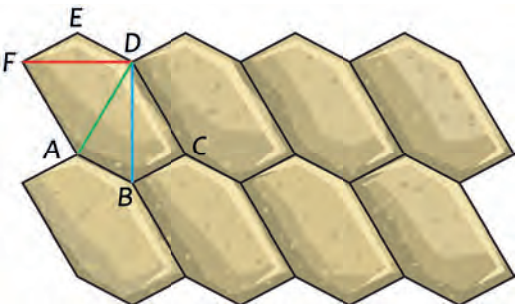
1. Hogyan változik a deltoid területe, ha
a) az egyik átlóját kétszeresére növeljük, a másik átló hosszát nem változtatjuk;
b) mindkét átló hosszát duplázzuk;
c) mindkét átló hosszát harmadoljuk;
d) az egyik átlóját kétszeresére növeljük, a másik átló hosszát felére csökkentjük?

2. Számold ki a deltoid területét, ha adott az e és f átlójának hossza!
a) $e = 16$ cm, $f = 28$ cm;
b) $e = 32$ m, $f = 14$ m;
c) $e = 64$ dm, $f = 7$ dm;
d) $e = 56$ mm, $f = 8$ mm.

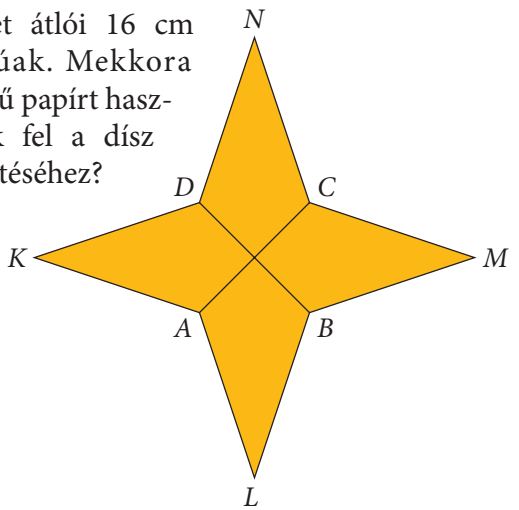
3. Egy 5 cm oldalhosszúságú rombusz átlóinak hossza 6 cm, illetve 8 cm. Milyen távol van egymástól a két párhuzamos oldala?

4. Egy rombusz alakú szántóföld két párhuzamos széle 672 méterre van egymástól. A terület két távoli csúcsa között 2400 méter, a két közelebbi csúcsa között pedig 700 méter a távolság. Mekkora a szántóföld oldalhossza?

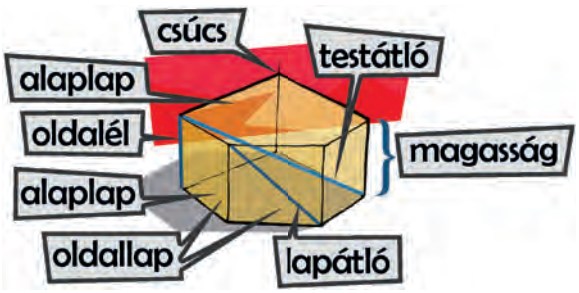
5. Egy parkolót az ábrán látható térkövekkel burkoltak. A kövekből összesen 1200 darabot használtak fel. Mekkora részt burkoltak összesen? Az ábra néhány térkő felülnézetét mutatja. Tudjuk, hogy az AD átló két egybevágó deltoidra vágja a térkövet, illetve, hogy a BD átló hossza 25 cm, a DF átló hossza pedig 20 cm.



6. A képen látható karácsonyfadíszt színes papírból szeretnénk kivágni. A minta négy egybevágó deltoidból áll. Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 cm, a $KLMN$ négyzet átlói 16 cm hosszúak. Mekkora területű papírt használunk fel a dísz elkészítéséhez?



VI. 9. A HASÁB FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA



A képen látható dobozok, tárgyak közös jellemzője, hogy két egybevágó, párhuzamos sokszöglap és téglalapok határolják. Az ilyen testek neve **hasáb**.
A két egybevágó sokszög az **alaplap**, a téglalapok az **oldallapok**, az alaplapok távolsága pedig a **hasáb magassága**. A nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszok a hasáb átlói: **lapátlók** – amelyek egy lap síkjában vannak – és **testátlók**.

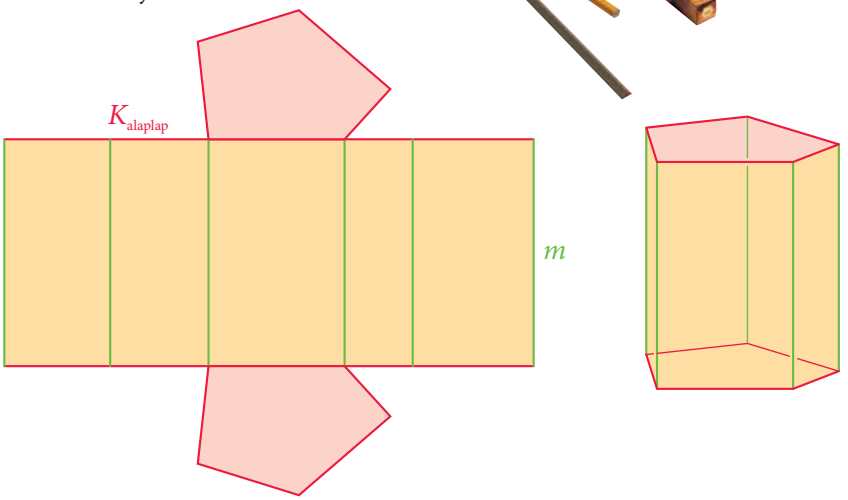
A téglatest téglalap alapú, a kocka és a négyzetes oszlop pedig négyzet alapú hasáb.



A hasáb felszínét a határoló sokszöglapok területének összege adja.

Az ábra egy ötszög alapú hasáb hálózatát mutatja.
Az oldallapok együtt egy nagy téglalapot alkotnak. Ez a hasáb **palástja**. A kiterített palást egyik oldala egyenlő a hasáb alaplapjának kerületével, a másik oldala pedig a hasáb magasságával.
A hasáb felszínére tett megállapításainkat röviden így írhatjuk le:

$$A = 2 \cdot T_{\text{alaplap}} + T_{\text{palást}} =$$
$$= 2 \cdot T_{\text{alaplap}} + K_{\text{alaplap}} \cdot m.$$



1. PÉLDA

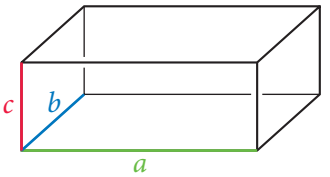
A hobbiboltban festhető dobozokat lehet vásárolni. Flóra mind a négy barátnőjének és magának is vett egyet-egyet. A termék ismertetője szerint a csillag alakú díszdoboz alapterülete 40 cm², magassága pedig 5 cm. Méréssel az is kiderült, hogy a csillag alakú alaplap mindegyik oldala 3 cm-es.
Hány cm² felületet kell Flórának befesteni?



Megoldás

A doboz alaplapjának területe: $T_{\text{alaplap}} = 40$ cm², a magassága: $m = 5$ cm.
Az alaplap kerülete: $K_{\text{alaplap}} = 10 \cdot 3 = 30$ (cm).
A hasáb felszínképlete alapján: $A = 2 \cdot T_{\text{alaplap}} + K_{\text{alaplap}} \cdot m = 2 \cdot 40 + 30 \cdot 5 = 230$ (cm²).
Vagyis öt ilyen doboz felszíne $5 \cdot 230$ (cm²) = 1150 cm².

Ha a hasáb alakú dobozokat, edényeket tárolásra használjuk, akkor szükségünk van a térfogatuk meghatározására is.
A téglatest térfogatát már ismerjük: $V = abc$.
A téglatest olyan hasáb, amelynek az alaplapja egy téglalap.
Alaplapjának területe: $T_{alaplap} = ab$, a hasáb magassága pedig $m = c$.
Vagyis a téglatest térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m$.
Igazolható, hogy minden **hasáb térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m$.**
Ennek bizonyításától mi most eltekintünk.



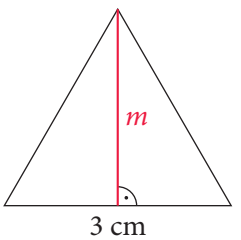
2. PÉLDA

Mekkora a képen látható szabályos hatszög alapú dobozok térfogata, ha az alapélük hossza 3 cm, a magasságuk pedig 1,5 cm?



Megoldás

A hasáb térfogatképletében szerepel az alaplap területe. Először ezt kell meghatároznunk! A hatszöget hat egybevágó szabályos háromszögre vághatjuk, ezért a feladatunk egy 3 cm oldalú szabályos háromszög területének meghatározása. A háromszög területének megállapításához szükségünk van a háromszög magasságára is, amit jelenleg még csak méréssel tudunk meghatározni. Szerkesszük meg a háromszöget, és mérjük meg a magasságát!
A mérés eredménye: 2,6 cm.



Ezek alapján a hatszög területe: $T_{alaplap} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4$ (cm²).

A doboz térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m = 23{,}4 \cdot 1{,}5 = 35{,}1$ cm³.

3. PÉLDA

Egy arany pecsétgyűrű térfogatát akarjuk meghatározni. Ehhez rendelkezésünkre áll egy olyan szabályos hatszög alapú pohár, amelynek alapéle 3 cm. (Az adat a pohár belső részére vonatkozik.) Hogyan lehet a gyűrű térfogatát meghatározni?

Megoldás

Öntsünk a pohárba annyi vizet, hogy ha majd beletesszük a gyűrűt, akkor a víz teljesen ellepje. Az előző példa alapján már tudjuk, hogy a pohár alapterülete 23,4 cm². Mérjük meg, mennyivel emelkedik a vízszint, ha beletesszük a gyűrűt! Jelöljük ezt h-val! A gyűrű térfogata a h magasságú, 23,4 cm² alapterületű hasáb térfogatával lesz egyenlő: $V_{gyűrű} = 23{,}4 \cdot h$ (cm³).

FELADATOK

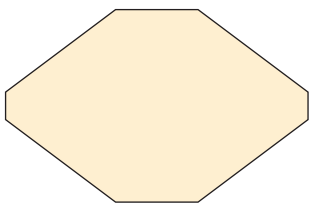
1. Rendezd táblázatba a hasábok csúcsainak, éleinek, lapjainak számát! A hasábok alaplapjai legyenek háromszögek, négyszögek, …, nyolcszögek!

2. Az ábra a szabályos ötszög alapú hasáb élvázát szemlélteti. Határozd meg, összesen hányszor hosszabbak a zöld élek, mint a pirosak, ha a test magassága az alapél hosszának ötszörösével egyenlő!

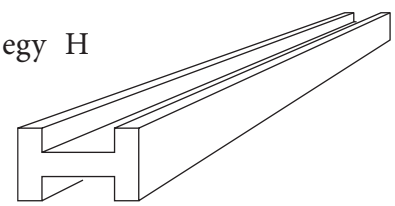


3. Egy hasáb alaplapjának területe 30 cm^2, kerülete 22 cm. A hasáb magassága 24 cm. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát!

4. A rajz egy 12 cm magas hasáb alaplapjának vázlatát mutatja. Ezt a nyolcszöget egy 11 cm-szer 7 cm-es téglalapból négy egybevágó derékszögű háromszög levágásával kaptuk. A nyolcszög oldalai 1 cm, 5 cm és 3 cm hosszúak. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?



5. Az ábrán egy H keresztmetszetű 2 méteres vasrudat látsz. A rúd keresztmetszete 3 db 3 · 1 cm-es téglalapból áll. Menynyi festékre lesz szükség a rúd befestéséhez, ha a festék használati utasítása szerint 1 m^2 lefestéséhez 200 gramm szükséges?



6. Egy meghámozott krumpli térfogata 0,4 dm^3. Az aprítógép 35 db 1 cm-szer 1 cm-szer 6 cm-es hasábot vág ki belőle. A krumpli többi részéből püré készül. A burgonya hány százalékából lesz püré?



7. A gyertyaöntő mester egyedi gyertyákat is készít.

a) Hány cm^3 viaszt használ 34 darab 20 cm magas, hasáb alakú gyertyához, ha ezek alaplapja egy 18 cm^2 területű szabályos hatszög?

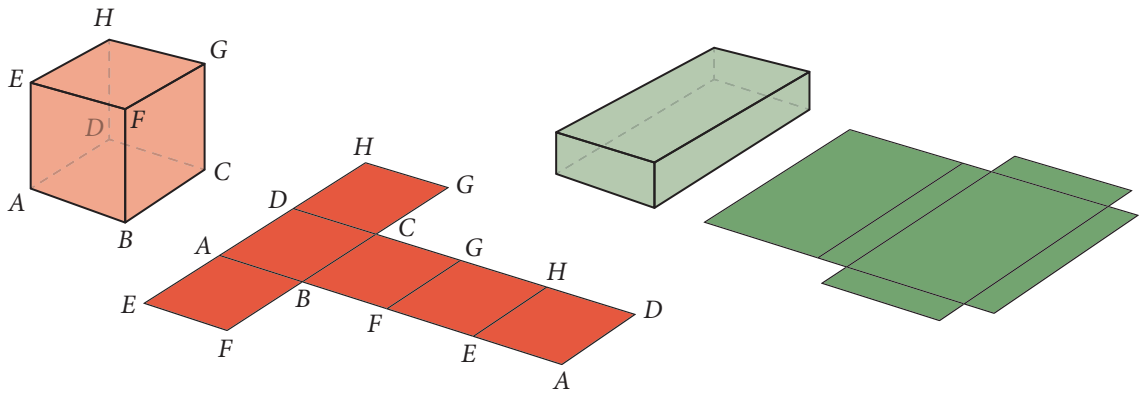
b) Hogyan változna a gyertyaöntéshez felhasznált anyagmennyiség, ha az alaplapot az előző megrendelés adatai alapján, de a hatszög minden második csúcsát összekötve határoznánk meg?



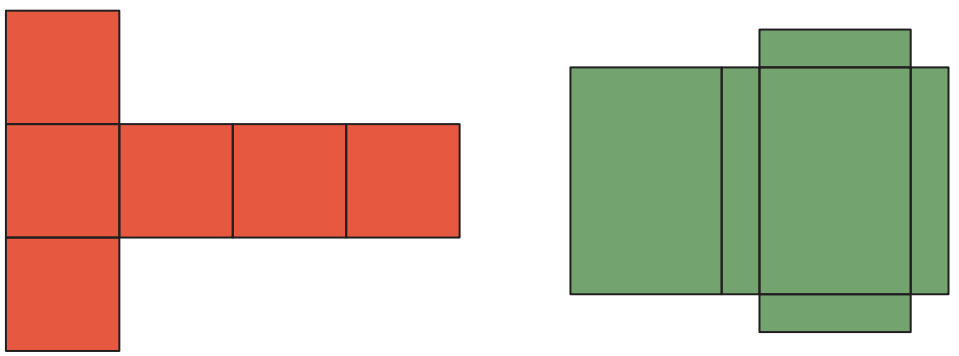
8. Egy vízelvezető árok keresztmetszete olyan trapéz, amelynek az egyik párhuzamos oldala 80 cm, a másik 160 cm, a magassága pedig 60 cm. Hány hektoliter víz fér el benne, ha a hossza 850 méter?



A korábbi években találkoztunk már a kocka és a téglatest kiterített lapjaival, azaz hálójával vagy hálózatával. A kockát megbetűztük, és a kiterített háló mellé is odaírtuk a megfelelő betűket. Az azonos betűjelű csúcsok a háló összehajtása során egy helyre kerülnek.



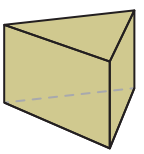
A hálókat nem térbeli helyzetben, hanem síkba rajzolva szoktuk ábrázolni.



A kockának és a téglatestnek is 8 csúcsa, 12 éle és 6 lapja van.

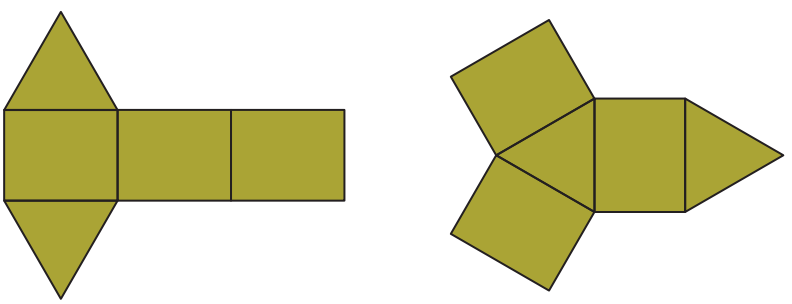
1. PÉLDA

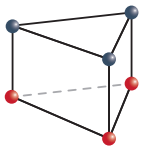
Rajzoljuk meg a képen látható szabályos háromszög alapú hasáb kiterített hálóját! Hány csúcsa, éle és lapja van a testnek?

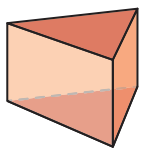


Megoldás

Sokféle jó, egymással nem egybevágó hálót lehet felrajzolni. Mi most kettőt adunk meg.



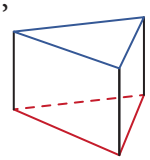




A háromszög alapú hasábnak 6 csúcsa van, a két háromszöglapon 3 + 3;

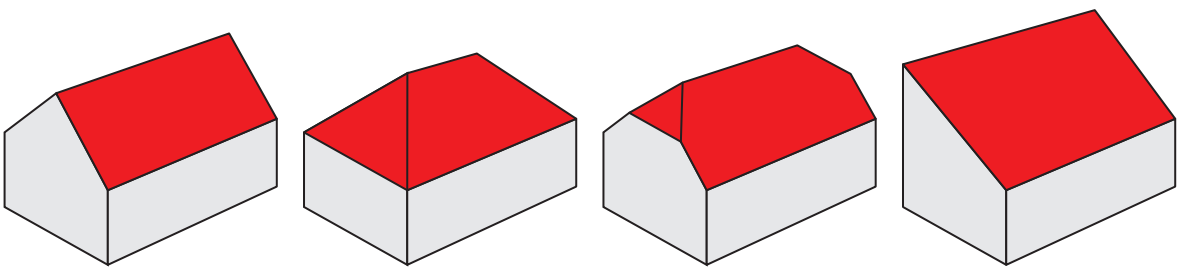
9 éle van, a két háromszöglapon 3 + 3, és az azokat összekötő 3 él;

5 lapja van, a 2 háromszöglap és még 3 téglalap.



2. PÉLDA

Néhány jellegzetes magyar háztetőformát mutatunk a sok közül. (A kontyos tetőt szokták kontyolt tetőnek, vagy röviden kontytetőnek is nevezni.)



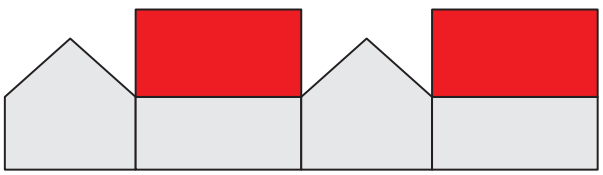
1. nyeregtető 2. kontyos tető 3. csonkakontyos tető 4. féltető

a) Melyik ház és tető alkot hasábot?
b) Rajzoljuk le a nyeregtetős ház hálóját!
c) Rajzoljuk le a kontyos tetős ház hálóját!

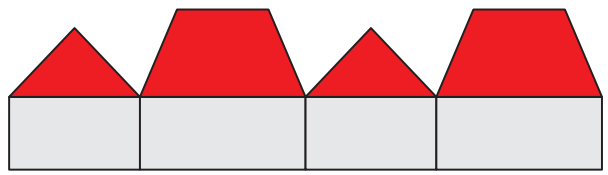
Megoldás

a) Az 1-es nyeregtetős ház egy ötszög alapú hasáb, a 4-es féltetős ház pedig egy derékszögű trapéz alapú hasáb. A 2. és a 3. nem hasáb.

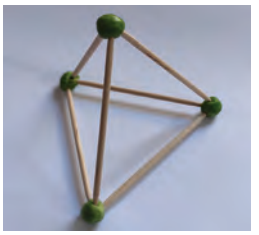
b) Nyeregtetős ház hálója.



c) Kontyos tetős ház hálója.



Természetesen sok más lehetőség is van a házak hálójának lerajzolására, mi csak egy-egy lehetséges megoldást adtunk meg.



Néha nem a testek hálózata, csak a csúcsok és az azokat összekötő élek hálózata, a testek élváza (drótváza) érdekel minket. Könnyen készíthetünk ilyen testmodelleket például nyers borsószemekből és hegyes fogpiszkálókból.

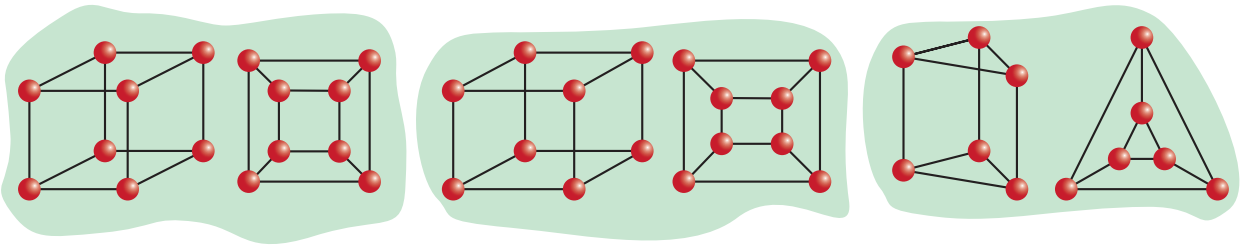
„Csúcsok és azokat összekötő élek” – Ezekkel az elnevezésekkel a gráfoknál is találkoztunk. Ez nem véletlen. Szokták röviden azt is mondani, hogy adjuk meg a test élvázának gráfját, vagy röviden gráfját.

3. PÉLDA

Rajzoljuk meg a kocka, a téglatest és a háromszög alapú hasáb csúcsaiból és éleiből álló gráfokat!

Megoldás

Mindegyikre sokféle megoldás létezik. Megadunk két-két lehetőséget. Ha lehet, akkor általában úgy szeretjük lerajzolni a gráfokat, hogy ne metsszék egymást a vonalak.
Észrevehetjük, hogy a kocka és a téglatest élvázának gráfja egyforma.



4. PÉLDA

Rajzoljuk meg a 2. példában látott négy ház élvázainak gráfjait!

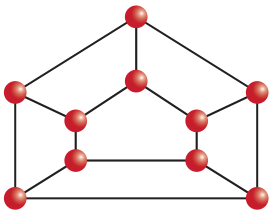
Megoldás

Érdemes a 4. házzal kezdeni, mert az lesz a legegyszerűbb. Minden lapja egy négyszög. Ha a féltető két magasan lévő csúcsát gondolatban lenyomnánk egy kicsit, akkor téglatesthez jutnánk. A gráf megegyezik a téglatest (kocka) élvázának gráfjával.

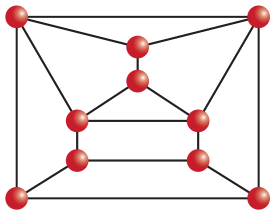
Folytassuk az 1. házzal, és készítsünk magunknak stratégiát a rajzoláshoz. Vegyük szemügyre a sokszög lapjait. Az oldalfal (oromfal) egy ötszög, és van még egy ilyen ötszög a ház másik oldalán. Rajzoljuk le a két ötszöget egymásba, és a megfelelő csúcsokat kössük össze. Gondolhatjuk azt is, hogy a ház falai átlátszóak, és nagyon közel megyünk az egyik oldalfalhoz kívülről.

A 2. ház esetén az oldalfalak téglalapok. Rajzoljunk két téglalapot egymásba, és kössük össze a megfelelő csúcsokat. Megrajzoltuk az alapházat, már csak a tető hiányzik. A két oldalfalon egy-egy háromszög áll, amelyeket érdemes egymás felé berajzolni, mert akkor nem fogják metszeni egymást a gráf élei. Már csak a két háromszög szabadon maradt két csúcsát kell összekötnünk, azaz a tetőgerincet kell berajzolni.

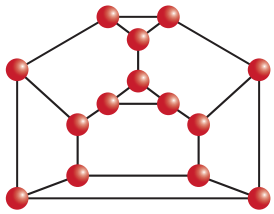
A 3. ház esetében hasonlóan járhatunk el, mint a 2. háznál, de két hatszögből érdemes kiindulni.



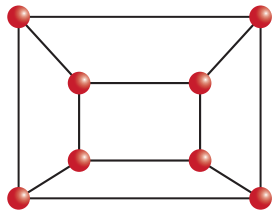
1. nyeregtetős ház



2. kontyos tetős ház



3. csonkakontyos tetős ház



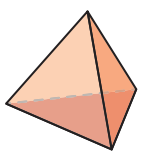
4. féltetős ház

FELADATOK

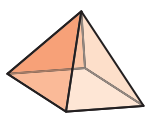
1. Rajzold meg egy ötszög alapú hasáb kiterített hálóját!

2. Rajzold meg a megadott testek egy-egy hálóját és élvázát! Számold meg a testek csúcsait, éleit, lapjait!

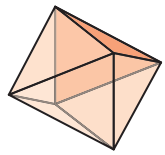
a)



b)



c)

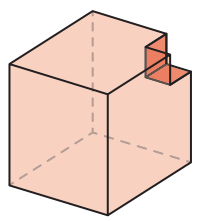


3. Egy labdarúgótornára 8 csapat érkezett. Minden csapat mindegyik másik csapattal pontosan egy mérkőzést fog játszani.

a) Szemléltesd a versenyt egy gráfon!
b) Hány mérkőzés vár egy-egy csapatra?
c) Hány mérkőzés lesz összesen?

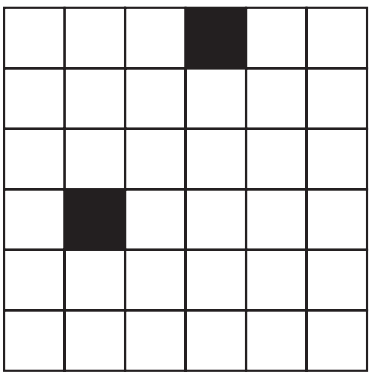
4. Egy háromszög alapú hasáb minden élének hossza 1 cm. Rajzold meg a hasáb összes, nem egybevágó kiterített hálóját!
Hány különbözőt találtál? Hány különböző gráfja van a test élvázának?

5. *a)* Egy 4 cm élű kocka egyik csúcsánál kivágtunk egy 1 cm élű kis kockát, ahogy az ábrán láthatod. Mennyivel nőtt a kocka csúcsainak, éleinek és lapjainak száma? Hány csúcsa, éle és lapja lett a keletkezett testnek?



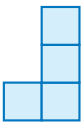
b) Rajzold meg a test élvázának a gráfját!
c) Egy 4 cm élű kocka minden csúcsánál kivágtunk egy 1 cm élű kis kockát. Hány csúcsa, éle és lapja lett a keletkezett testnek?

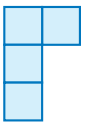


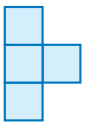


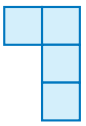
Csapdába estetek. Az ajtón feltörhetetlen zár van, ablak és egyéb szabadulóút nincs. Egyetlen esélyetek maradt a kijutásra, ha kinyitjátok a záron lévő lakatot, azaz megfejtitek a titkos kódot. Ha minden elem a helyére kerül, az ajtó magától kitárul. Oldjátok meg a feladatokat, a megfejtésként kapott elemeket forgatás nélkül illesszétek a tábla megfelelő fehér részeire, és szabadok vagytok. Siessetek, csak 40 percre elegendő oxigén maradt! Sok sikert kívánunk!

1. Szerkessz háromszöget, ha az egyik oldala 7 cm, a rajta fekvő egyik szög 110°, és az oldallal szemközti szög derékszög. Hány különböző megoldást kaptál?

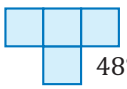
 0

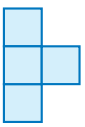
 1

 2

 3

2. Egy háromszög egyik külső szöge 94° 32'. A nem mellette fekvő másik két belső szög egyenlő. Mekkorák ezek a szögek?

 48° 16'

 47° 16'

 37° 16'

 47° 26'

3. Hány fokos annak a szabályos sokszögnek az egyik szöge, melyre teljesül, hogy a külső szögek összege nyolcada a belső szögek összegének?

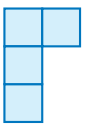
 150°

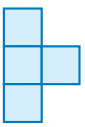
 160°

 165°

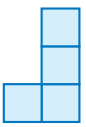
 170°

4. A derékszögű háromszög egyik szöge 40°. Számítsd ki, hány fokos szöget zár be egymással a derékszögű csúcsból húzott magasságvonal és a szögfelező!

 5°

 10°

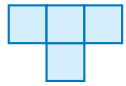
 15°

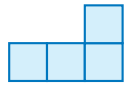
 18°

5. A rombusz területe 108 cm^2, az oldala 3 cm-rel hosszabb, mint a magassága. Számítsd ki, hány cm^2 a rombusszal azonos oldalhosszúságú négyzet területe!

 169 cm^2

 144 cm^2

 121 cm^2

 64 cm^2

6. A háromszög területe a háromszorosára nőtt, az „a” oldala a felére csökkent. Hányszorosára változott az „a” oldalhoz tartozó magasság hossza?

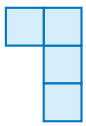

háromszorosára

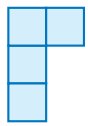

negyedére

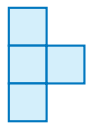

kétharmadára

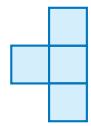

hatszorosára

7. Egy trapéz területe 108 dm^2. Magassága 90 cm, a rövidebbik alapja 7 dm. Hány méter hosszúságú a hosszabbik alapja?

 1,7 m

 17 m

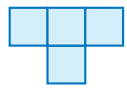
 1,5 m

 15 m

8. A rombusz oldala 9 cm, a magassága 4 cm hosszúságú. Számítsd ki, hány cm hosszúak az átlói, ha az egyik átlója kétszerese a másiknak!


2 cm, 4 cm


3 cm, 6 cm


6 cm, 12 cm


nincs ilyen rombusz

9. Egy négyzet alapú egyenes hasáb élváza 70 dm hosszú, magasságának hossza a négyzet oldalának háromszorosa. Mekkora a hasáb palástjának területe?

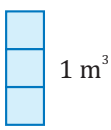
 14,7 m^2

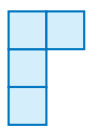
 1,47 m^2

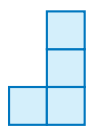
 17,4 m^2

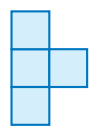
 1,74 m^2

10. Az utcában nyolc betonoszlop áll. Az oszlopok mind egybevágók, deltoid alapú hasábok. A deltoid átlói 20 cm és 50 cm hosszúságúak, az oszlopok magassága 2,5 m. Hány m^3 beton kellett az oszlopok elkészítéséhez?

 1 m^3

 1,25 m^3

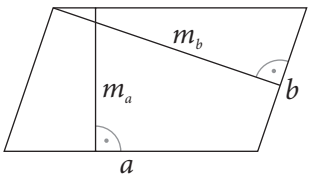
 0,125 m^3

 2,25 m^3

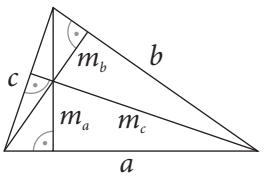
Tizennégy pontban összefoglaljuk a fejezet legfontosabb tudnivalóit:



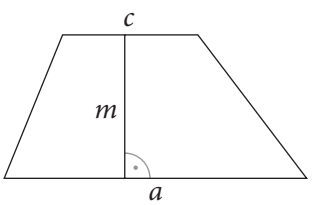
1. A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.
2. A háromszög belső szögeinek összege 180°, külső szögeinek összege pedig 360°.
3. A háromszög egy-egy külső szöge akkora, mint a vele nem szomszédos két belső szög összege.
4. Ha egy háromszögben két oldal hossza egyenlő, akkor a velük szemközti szögek is egyenlők. Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor az ezekkel szemközti oldalak hossza is egyenlő.
5. Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van. Bármely háromszögben két szög közül a nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.
6. A paralelogramma területe: $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$.



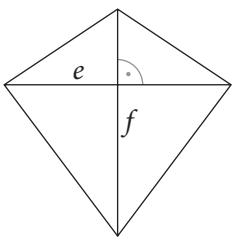
7. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.



8. A trapéz területe: $T = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$.



9. A deltoid területe: $T = \frac{e \cdot f}{2}$



10. Az n oldalú sokszögben egy csúcsból $n - 3$ átló húzható.
11. Az n oldalú konvex sokszögben az egy csúcsból induló átlók $n - 2$ darab háromszöget hoznak létre.
12. Minden konvex sokszögben a külső szögek összege 360°.
13. A hasáb felszíne: $A = 2 \cdot T_{\text{alaplap}} + K_{\text{alaplap}} \cdot m$.
14. A hasáb térfogata: $V = T_{\text{alaplap}} \cdot m$.

VI. 11. ÖSSZEFOGLALÁS

FELADATOK

Az első 8 feladatnál pontosan egy helyes válasz van. Melyik az?

1. Egy háromszög egyik oldalának hossza 13,2 cm, egy másiké pedig 16,8 cm. Melyik nem lehet a harmadik oldal hossza a megadottak közül?

A: 290 mm; B: 2,1 dm; C: 36 mm; D: 13,2 cm; E: 16,8 cm.

2. Felsoroltunk néhányat egy háromszög belső és külső szögei közül. Melyik a kakukktojás?

A: 30°; B: 80°; C: 90°; D: 120°; E: 150°.

3. Egy egyenlő szárú (nem szabályos) háromszögbe berajzoltuk a magasságvonalakat, a szögfelezőket és az oldalfelező merőlegeseket. Hány egyenest rajzoltunk?

A: 6; B: 7; C: 8; D: 9; E: Az előzőek egyike sem.

4. Melyik állítás igaz az egyenlő szárú (nem szabályos) háromszög alapjának egyik csúcsából induló szögfelezőre és magasságra?

A: Az egyik felezi a háromszög területét.
B: Egyik sem merőleges a szemközti oldalegyenesre.
C: Közülük mindig a szögfelező a rövidebb.
D: Közülük mindig a magasság a rövidebb.

5. A 72 cm^2 területű paralelogramma egyik oldalának hossza 9 cm. Mekkora lehet az ehhez az oldalhoz tartozó magasság hossza?

A: 4 cm; B: 16 cm; C: 8 cm; D: 63 cm; E: Ennyi adatból nem adható meg.

6. Egy deltoid egyik átlója kétszer olyan hosszú, mint a másik átlója. Centiméterben mérve mindkettő hossza egész szám. Mekkora lehet a területe?

A: 961 cm^2; B: 916 cm^2; C: 691 cm^2; D: 619 cm^2; E: Az előzőek egyike sem.

7. Az ábrán egy 31 dm magas oszlop keresztmetszete látható. Az alaplap minden éle egyenlő hosszúságú, és deciméterben mérve egész szám. Melyik lehet a megadott értékek közül az oszlop térfogata?



A: 150 dm^3; B: 620 dm^3; C: 279 dm^3; D: 124 dm^3; E: 2790 dm^3.

8. Egy hasáb alaplapja 16 cm kerületű és 12 cm^2 területű. Mekkora a magassága, ha a felszíne 248 cm^2?

A: 14 cm; B: 18 cm; C: 14,75 cm; D: 15,5 cm; E: $\frac{58}{3}$ cm.

9. A teherautó-makett platója 12 cm × 4 cm × 2,4 cm. A makett méretaránya 1 : 50. Hány köbméter homok fér egy ekkora, valódi teherautó platójára, ha pont a peremig töltik?

10. Egy háromszögnek van egy 18 cm-es és egy 12 cm-es oldala. Milyen határok között változhat a harmadik oldal hossza?

11. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik oldala 5 cm hosszúságú. Rajzold le a háromszöget!

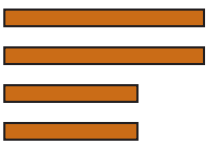
12. Rakd növekedő sorrendbe a háromszög oldalhosszait, ha a szögei:
a) $\alpha = 43°$, $\beta = 98°$; *b)* $\alpha = 103°$, $\beta = 23°$!

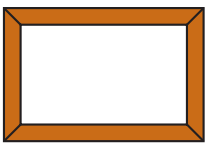
13. Rakd növekedő sorrendbe a háromszög szögeit, ha az oldalhosszai:
a) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 14$ cm; *b)* $a = 28$ cm, $b = 18$ cm, $c = 25$ cm!

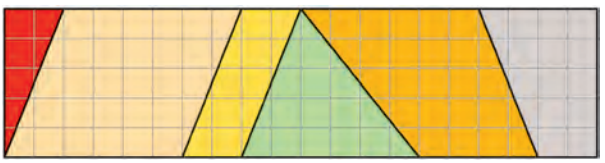
14. Rajzolj egy szabályos hatszöget! Rajzold meg az összes átlóját! Készíts leltárt, hogy a különböző hosszúságú átlókból hány darab van!

15. A rendelkezésedre álló adatok alapján add meg a nevezetes sokszögek kerületét, területét! Elképzelhető olyan eset, amikor valamelyiket még nem fogod tudni kiszámolni! Ebben az esetben méréssel határozd meg a hiányzó szükséges adatot!
a) A téglalap két oldalának hossza 2,6 cm és 8,5 cm.
b) A négyzet átlójának hossza 6 cm.
c) A derékszögű háromszög oldalainak hossza 7,5 cm, 18 cm és 19,5 cm.
d) A deltoid átlóinak hossza 14 cm és 8 cm.
e) A deltoid két különböző oldalának hossza 6,3 cm és 11,7 cm.

16. A képen látható négy téglalap alakú lécből egy kép keretét szeretnénk kialakítani. A lécekből levágunk éppen annyit, hogy az ábrán látható összeillesztés megvalósítható legyen. Mekkora lesz a képen látható keret területe, ha két léc 2,2 cm-szer 26,4 cm-es, a másik két léc pedig 2,2 cm-szer 17,6 cm-es?







17. A képen látható négyzetrács szomszédos rácsvonalai 5 mm-re vannak egymástól. Határozd meg a színes síkidomok területét!

18. Egy deltoid mind a négy csúcsának helyét ismerjük a koordináta-rendszerben: $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(6; 6)$, $D(0; 4)$. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak-e!
a) A szimmetriaátlója hosszabb, mint a másik átló.
b) A területe 16 területegységnél nagyobb.
c) A kerülete 20 egység.
d) A területe 36 területegységnél nagyobb.
e) A rövidebb átló másfélszeresét kell vennünk, hogy a hosszabb átlót kapjuk.
f) A megadott négy pontból kiválaszthatunk három olyat, amelyik hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget alkot.

19. Mekkora a felszíne és a térfogata a téglatestnek, ha az élei
a) 3 cm, 5 cm és 11 cm; *b)* 2,5 cm, 12 cm és 16 cm hosszúak?

20. A képen látható tűzzománc fülbevalók deltoid alakúak, amelyeknek 3,2 cm hosszú a szimmetriaátlójuk, és 2 cm hosszú a másik átlójuk. Mekkora területet foglal el az asztalon egy pár ilyen fülbevaló?



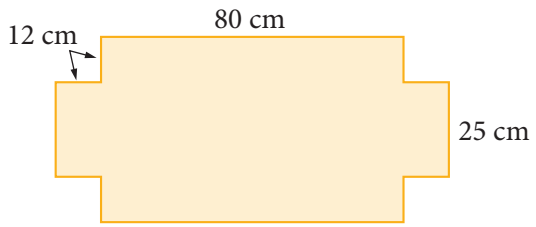
21. A tetőtéri szoba háromszög alakú ablakának árnyékolását szeretnénk megvalósítani. A szalagfüggöny kivitelezési költségét az ablak területe adja. Mekkora ez a terület, ha az ablak szélessége 240 cm, magassága 180 cm?

22. Mekkora lehet a felszíne a 66 cm^3 térfogatú téglatestnek, ha minden éle cm-ben mérve egész szám?

23. Egy téglatest éleinek hossza cm-ben mérve három egymást követő egész szám, a térfogata pedig 1320 cm^3. Mekkora a felszíne?

24. Egy téglatest éleinek hossza cm-ben mérve három egymást követő egész szám. Lehet-e a felszíne
a) 94 cm^2; *b)* 100 cm^2?

25. Egy 2 mm vastag vaslemezből kivágták a képen látható sokszöget.
a) Mekkora a sokszög alakú lemez térfogata?
b) Mekkora a lemez tömege, ha tudjuk, hogy 1 m^3 vas 7860 kg?

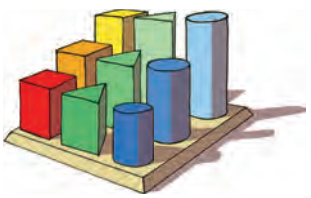


26. A tangram nevű játék 7 darab színes elemét 8 mm vastag fából készítették. Az elemeket a képen látható módon egy 10 cm-es négyzet alakba lehet rendezni. A négyzet átlóját vegyük 14,2 cm hosszúságúnak.
a) Hány különböző térfogatú elemből áll a játék? Add meg ezeket a térfogatokat!
b) Hány különböző felszínű elemből áll a játék? Add meg ezeket a felszíneket!



27. Egy 550 oldalas könyv 3 cm vastag a borítója nélkül. A lapjai 14 cm-szer 20 cm-es méretűek. Mekkora egy lap térfogata?

28. A képen látható geometriai testeket tartalmazó kirakójátékot óvodásoknak készítették. Az első sorban 6 cm, a második sorban 8 cm, a harmadik sorban 10 cm magas testek láthatók. Az első oszlopban az alaplap és a fedőlap is 3 cm oldalú négyzet, a második oszlopban 4 cm oldalú szabályos háromszög, a harmadik oszlopban pedig 3 cm átmérőjű kör. Add meg a kilenc test közül azok felszínét és térfogatát, amelyeket számítással meg tudsz határozni!



VII. HOZZÁRENDELÉSEK, STATISZTIKA



– A következő csapat csak pár száz évet ugrik az időben – tájékoztatta a tanulókat Judit néni, majd néhány másodperc múlva kihirdette: – Helén és Dávid látogathatja meg Galileit.

Csak egy villanás volt, és a két gyerek Itáliában találta magát. A Napnak még elég ereje volt, hogy kellemesen átmelegítse a ház köveit, úgyhogy mindketten elfoglalták helyüket az egyik ablakfülkében.

– Mondd csak, miért foglalkozol olyan felesleges dolgokkal, mint a játékkockák természete? – fordult Niccolini Galileihez.

– Azért, kedves barátom, mert sokan hódolnak e szenvedélynek, és kérdéseik kíváncsivá tettek. Ahogy egyre több választ tudok adni nekik, egyre jobban érzem, hogy egyáltalán nem feleslegesek az ezzel kapcsolatos kísérleteim: törvényeket vettem észre a véletlenek mögött.

– Akkor mindenki nyerni fog a kockajátékokon, ha megismeri a munkádat?

– Nem, kedves barátom. Nem tudom megjósolni a véletlent, csak megérteni és leírni a törvényeit. Ezek azonban nem olyan természetűek, mint az optika törvényei.

– Az algebra mely fejezetébe illenek az eredményeid?

– Egyikbe sem, szerintem ennek nincs neve, de úgy érzem, nemsokára lesz. Lehet, hogy új tudományág van születőben.

– Az is véletlen volt, hogy éppen minket sorsoltak ki erre az útra? – kérdezte Helén.

– Természetesen – hümmögött Dávid, aki mindig jó volt infóból, és egy egész napot pepecselt a sorsolás előtti este az iskola számítógépén.

1. PÉLDA

Keressük meg az A és B halmaz összetartozó elemeit!

a) A = {I. István; Hunyadi János; I. Károly; I. László}
B = {az aranyforint atyja; a törökverő; a lovagkirály; az államalapító}

b) A = {Az alföld; Balatonparton; A walesi bárdok; Reszket a bokor; Himnusz; Rege a csodaszarvasról}
B = {Arany János; Kölcsey Ferenc; Nagy László; Petőfi Sándor}

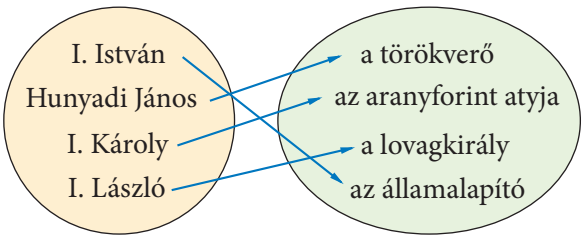
c) A = {tenger; óceán; földrész}
B = {Ázsia; Indiai-óceán; Amerika; Atlanti-óceán; Antarktisz; Vörös-tenger}

Megoldás

A példa megoldásához megfelelő szintű ismerettel kell rendelkeznünk más tantárgyakból is.



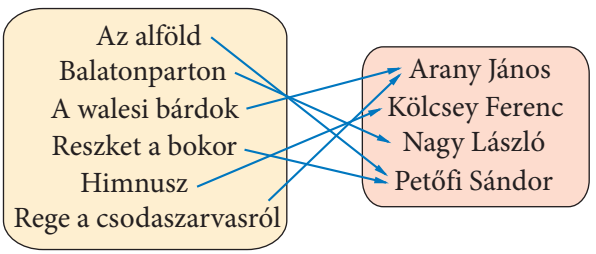
a) Magyar történelmi személyiségekhez rendeltünk őket jól leíró jelzőket:



➢ *Hunyadi János*



b) Magyar irodalmi alkotásokhoz rendeltünk szerzőket:

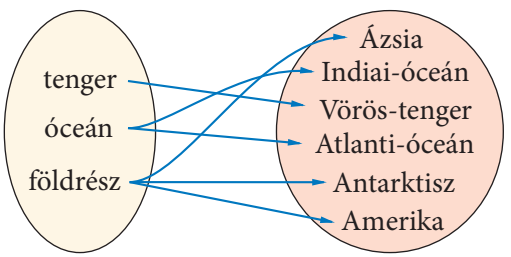


➢ *Arany János*

c) Földrajzi fogalmak és elnevezések között kerestünk összetartozókat:



➢ *Oroszlánhal*



Nézzük meg, hogy miben egyezik és miben különbözik a három feladatrész!

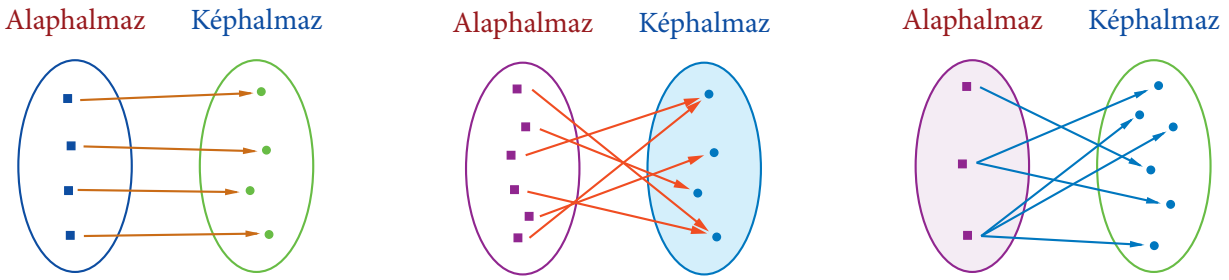
Közös bennük, hogy mindhárom esetben az A halmaz minden eleméhez találtunk B-beli elemeket, vagyis az A halmaz elemeihez **hozzárendeltük** a B halmaz elemeit. Az A halmazt **alaphalmaznak**, a B halmazt pedig **képhalmaznak** nevezzük.

Milyen különbségek vannak a hozzárendelések között?

Az *a)* esetben minden *A*-beli elemhez pontosan egy *B*-beli elemet rendeltünk, és minden *A* halmazbeli elemhez különbözőt.

A *b)* esetben minden *A*-beli elemhez pontosan egy *B*-belit rendeltünk, de több olyan *A* halmazbeli elem is lehet, amelynek ugyanazt a *B* halmazbeli elemet feleltettük meg.

A *c)* esetben az *A* halmazbeli elemek között volt olyan (pl. földrész), amelyhez több *B*-beli elemet rendeltünk hozzá.



Az *a)* és *b)* esetben minden *A*-beli elemhez csak egyet rendeltünk hozzá a *B* halmazból. Ezt **egyértelmű hozzárendelésnek** nevezzük.
A *c)* esetben az *A* halmaznak vannak olyan elemei, amelyekhez több *B*-beli elemet is rendeltünk. Ezt **nem egyértelmű hozzárendelésnek** nevezzük.

Összefoglalva:
Ha két halmaz elemei között megfeleltetést létesítünk, akkor hozzárendelésről beszélünk.
Azt a halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendelünk, alaphalmaznak nevezzük.
Azt a halmazt, amelynek az elemeit rendeljük hozzá, képhalmaznak nevezzük.

Egyértelmű hozzárendelést hozunk létre, ha minden alaphalmazbeli elemhez csak egy elemet rendelünk a képhalmazból.
Nem egyértelmű hozzárendelésről beszélünk, ha az alaphalmaz egy eleméhez több képhalmazbeli elemet rendelünk hozzá.

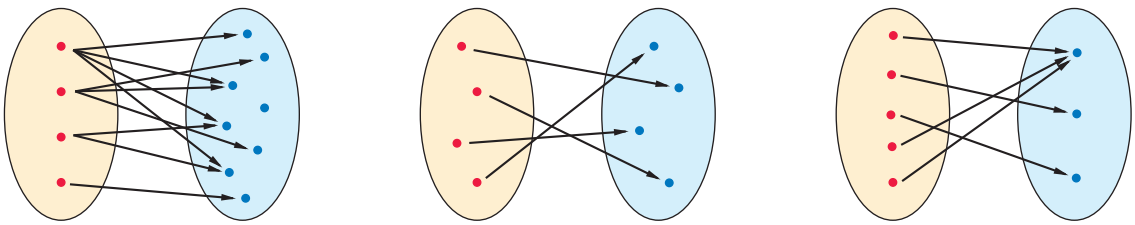
FELADATOK

1. Fogalmazd meg, mi a különbség az egyértelmű és a nem egyértelmű hozzárendelés között!

2. Adj meg olyan hozzárendeléseket, amelyekre teljesül, hogy alaphalmaza
a) az osztályodba járó gyerekek halmaza;
b) az iskolátok menzáján fogyasztható ételek halmaza;
c) az iskolai tantárgyak halmaza!

3. Párosítsd a hozzárendeléseket a diagramokkal! Döntsd el, melyik egyértelmű és melyik nem egyértelmű hozzárendelés!

a) Minden magyar emberhez hozzárendeljük a taj-számát.
b) Minden emberhez hozzárendeljük a születési dátumát.
c) Minden emberhez hozzárendeljük a barátait.



4. Melyik egyértelmű és melyik nem egyértelmű hozzárendelés az alábbi megfeleltetések közül?

a) Minden számhoz hozzárendeljük a nála eggyel nagyobb számot.
b) Minden számhoz hozzárendeljük a reciprokát.
c) Minden számhoz hozzárendeljük a számszomszédait.
d) Minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét.
e) Minden számhoz hozzárendeljük a tizedét.
f) Minden egész számhoz 1-et rendelünk, ha páros, 0-t, ha páratlan.

5. Adj meg hozzárendelést a mellékelt nevek és képek között! Párosítsd a névhalmaz elemeit a képhalmaz elemeivel! Melyik névhez nem találsz képet?






Bolyai János Neumann János Varga Tamás
Erdős Pál Sain Márton

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, kik voltak ők, és miért lettek híresek! Tartsatok róluk kiselőadást!

6. Az alábbi hozzárendelések közül melyek egyértelműek?

a) Alaphalmaz: az aktuális év dátumai január 1-től december 31-ig.
Képhalmaz: a hét napjai.
Hozzárendelés: Minden dátumhoz rendeljük hozzá a hét megfelelő napját!

b) Alaphalmaz: az iskolád diákjai.
Képhalmaz: az iskolád tanárai.
Hozzárendelés: Minden diákhoz rendeljük hozzá az őt tanító tanárokat!

A hozzárendelések fajtái közül kitüntetett szerepe van az egyértelmű hozzárendelésnek.
A hozzárendelés sokféle módon történhet, de minden esetben meg kell adni

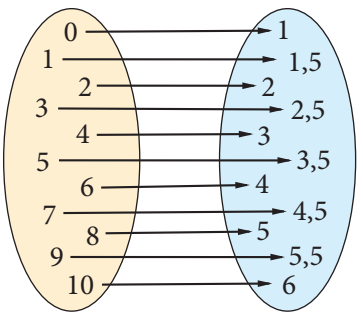
- az alaphalmazt,
- a képhalmazt,
- a hozzárendelési szabályt.

Megállapodás: Ha olyan feladattal találkozol, ahol nincs megadva az alaphalmaz és a képhalmaz, akkor az alaphalmaz és a képhalmaz is a tanult számok halmaza lesz.

Figyeljük meg, milyen módon adhatunk meg hozzárendeléseket!
Legyen az alaphalmaz a 10-nél nem nagyobb természetes számok halmaza, a képhalmaz pedig a racionális számok halmaza!

A hozzárendelés megadása történhet:

a) Szövegesen:
Például: Minden számhoz rendeljük hozzá a felénél 1-gyel nagyobb számot!



b) A megadott hozzárendelést ábrázolhatjuk Venn-diagramon:

c) A hozzárendelés megadható táblázattal is:

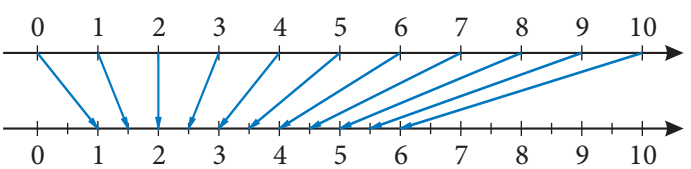
A elemei	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B elemei	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

d) Megadhatjuk a hozzárendelést elemenként is. Ebben az esetben úgynevezett **talpas nyíllal** jelöljük, hogy melyik elemhez mit rendelünk:
$0 \mapsto 1$; $1 \mapsto 1{,}5$; $2 \mapsto 2$; $3 \mapsto 2{,}5$; $4 \mapsto 3$; $5 \mapsto 3{,}5$; $6 \mapsto 4$; $7 \mapsto 4{,}5$; $8 \mapsto 5$; $9 \mapsto 5{,}5$; $10 \mapsto 6$.

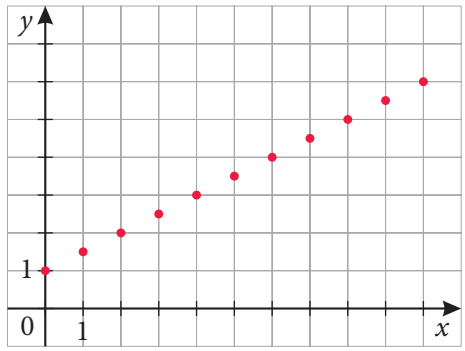
Az ezután következő megadási módok csak akkor használhatók, ha az alaphalmaz és a képhalmaz is számhalmaz.

e) Számpárok megadásával is megadhatjuk a hozzárendelést. A számpár első tagja az alaphalmaz eleme, a második tagja a képhalmaz eleme lesz:
(0; 1); (1; 1,5); (2; 2); (3; 2,5); (4; 3); (5; 3,5); (6; 4); (7; 4,5); (8; 5); (9; 5,5); (10; 6).

f) A hozzárendelést két párhuzamos számegyenes segítségével is ábrázolhatjuk. A hozzárendelést nyilak jelölik, amelyek az egyik számegyenes számaitól mutatnak a másik számegyenes megfelelő számai felé. Ezt nyíldiagramos ábrázolásnak nevezzük.



g) Ábrázolhatjuk a hozzárendelést derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az ábrázolandó pont első jelzőszáma az alaphalmaz eleme, a pont második jelzőszáma pedig a képhalmaz megfelelő eleme legyen.
Az ilyen módon ábrázolt pontok összességét a **hozzárendelés grafikonjának** nevezzük. Az alaphalmaz elemeit az x tengelyen lévő számokból választjuk, a képhalmaz elemeit az y tengelyen lévő értékekből.
Vigyázz! A hozzárendelés nem egyenlő a grafikonjával, hisz a grafikon csupán a hozzárendelés egy megjelenítési formája.







CSOPORTMUNKA

Alkossatok 3-4 fős csoportokat, és összegezzétek az órán tanultakat!
Találjatok ki egy hozzárendelést!
Egy plakáton mutassátok be, milyen módon lehet megadni az általatok kigondolt hozzárendelést!
Írjatok, rajzoljatok több lehetőséget is!

FELADATOK

1. Válaszd ki az alábbi hozzárendelések közül az egyértelmű hozzárendeléseket! Az alaphalmazt A-val, a képhalmazt B-vel jelöltük.

a) A = {iskoláskorú gyerekek}; B = {iskolák}
Minden iskoláskorú gyerekhez hozzárendeljük a saját iskoláját.

b) A = {állattulajdonosok}; B = {állatok}
Minden állattulajdonoshoz hozzárendeljük a háziállatát.

c) A = {házaspárok}; B = {évszámok}
Minden házaspárhoz hozzárendeljük az évet, amikor összeházasodtak.

d) A = {gyümölcsök}; B = {racionális számok}
Minden gyümölcshöz hozzárendeljük, hányféle vitamint tartalmaz.

2. Megadtuk egy hozzárendelés alaphalmazát, képhalmazát és hozzárendelési szabályát. Készítsd el a hozzárendelés táblázatát!

a) A = {10-nél kisebb nem negatív egész számok}
B = {természetes számok}
Hozzárendelési szabály: Minden A-beli számhoz rendeljük hozzá a háromszorosánál 2-vel nagyobb számot!

b) A = {20-nál kisebb prímszámok}
B = {egész számok}
Hozzárendelési szabály: Minden A-beli számhoz rendeljük hozzá az ellentettjét!

3. Megadtuk egy hozzárendelés alaphalmazát, képhalmazát és a hozzárendelési szabályát. Add meg a hozzárendelést szövegesen és Venn-diagrammal is!

a) A = {–6-nál nagyobb negatív számok};
B = {racionális számok}
$-5 \mapsto -3{,}5$; $-4 \mapsto -3$; $-3 \mapsto -2{,}5$;
$-2 \mapsto -2$; $-1 \mapsto -1{,}5$.

b) A = {–3 és 3 közötti egész számok};
B = {természetes számok}
$-3 \mapsto 3$; $-2 \mapsto 2$; $-1 \mapsto 1$; $0 \mapsto 0$;
$1 \mapsto 1$; $2 \mapsto 2$; $3 \mapsto 3$.

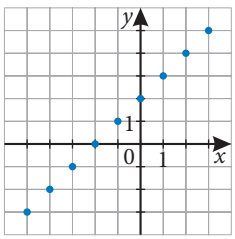
4. Készíts táblázatot az alábbi hozzárendelésekhez 8 db általad választott számmal, és ábrázold a szöveges leírás szerinti megfeleltetéseket a koordináta-rendszerben! Az alaphalmaz és a képhalmaz is a tanult számok halmaza.

a) Minden számhoz rendeljük hozzá a nála eggyel nagyobb szám kétszeresét!

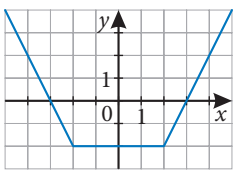
b) Minden számhoz rendeljük hozzá a negyedénél 2-vel nagyobb számot!

5. Válaszd ki az egyértelmű hozzárendelések grafikonjait az ábrák közül! Választásaidat indokold!

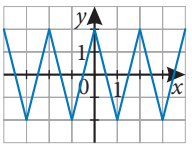
a)



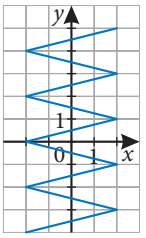
b)



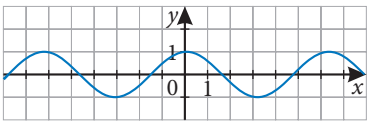
c)



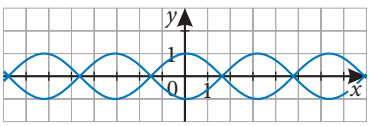
d)



e)



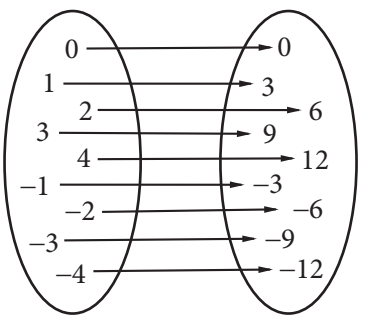
f)



6. Ábrázold az alábbi hozzárendeléseket egy koordináta-rendszerben! Az egyik hozzárendelés grafikonja kakukktojás lesz. Mit gondolsz, melyik? Válaszodat indokold!

a) Minden egész számhoz rendeljük hozzá a negyedét!

b)



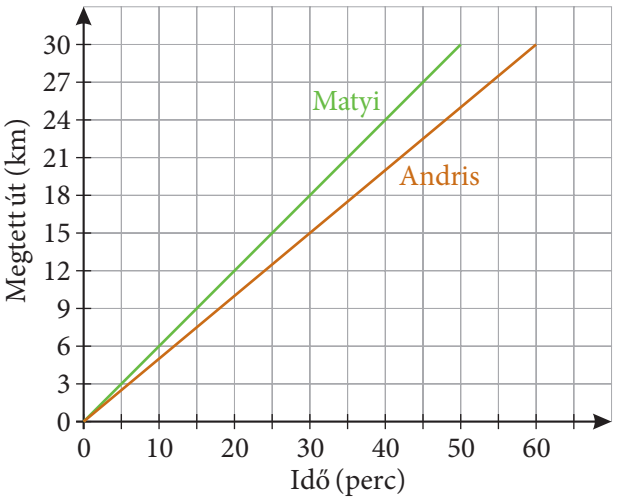
c)

A elemei	0	1	2	3	4	–4	–3	–2	–1
B elemei	0	–1	–2	–3	–4	4	3	2	1

d) (–4; –2); (–3; –1); (–2; 0); (–1; 1) ; (0; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 6)

1. PÉLDA

Andris és Matyi bicikliversenyt rendeznek. Az erdei kirándulóösvényen tekernek végig. Aki előbb célba ér, az nyer. A grafikon a megtett utat mutatja az idő függvényében. Mit tudhatunk meg a grafikonról?



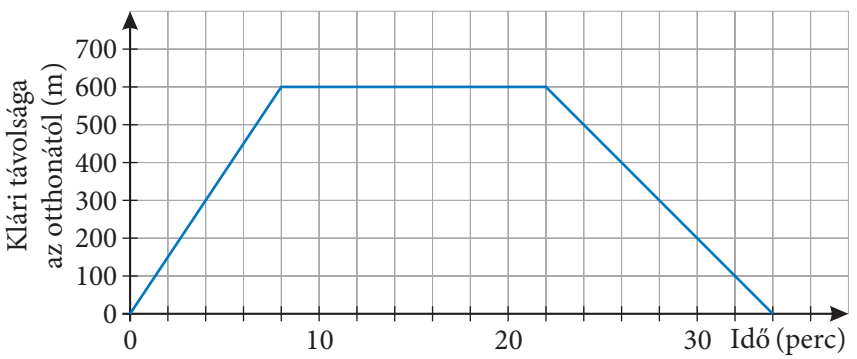
Megoldás

A vízszintes tengelyen az időt, a függőleges tengelyen a megtett utat ábrázoltuk. A megtett út tehát az idő függvényében változott.
A függőleges tengelyről leolvashatjuk, hogy a kirándulóösvény hossza 30 km volt, a grafikon vízszintes tengelyéről pedig az is megtudható, hogy Andris 60, Matyi pedig 50 perc alatt tekerte végig a pályát, így Matyi nyerte a versenyt. Azt, hogy Matyi volt a gyorsabb, onnan is láthatjuk, hogy az ő mozgásgrafikonja meredekebb, tehát az adott távolságot kevesebb idő alatt tette meg.

2. PÉLDA

Klári elsétált a boltba, bevásárolt, majd hazament. A grafikon Klári otthonától mért távolságát mutatja az idő függvényében.

a) Hány órára ért haza Klári, ha 15:10-kor indult otthonról?
b) Hány perc alatt ért a boltba?
c) Hány percet töltött vásárlással?
d) Odafelé vagy hazafelé sétált gyorsabban?

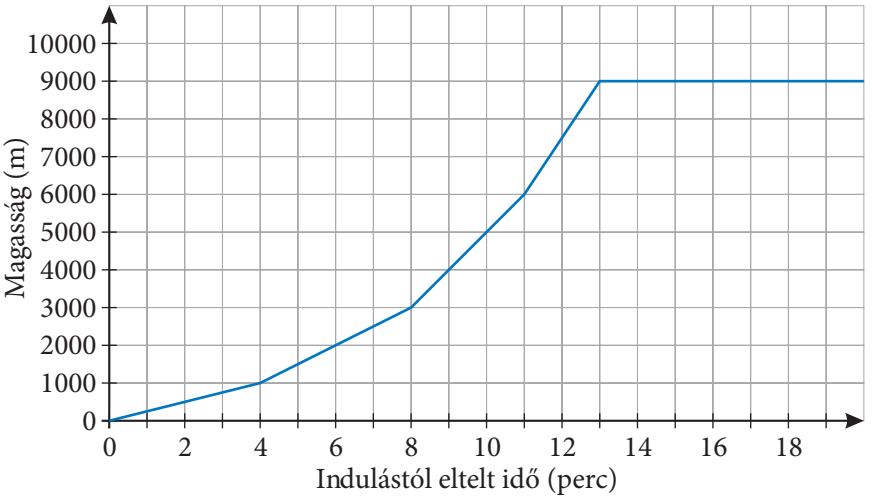


Megoldás

a) Klári 34 percet töltött távol, így 15:44-re ért haza.
b) 8 perc alatt odaért a boltba. A boltba érkezés a grafikon vízszintes részénél kezdődik. Ez jelöli, hogy Klári már nem ment tovább.
c) Klári a 8.-tól a 22. percig volt a boltban, így 14 perc alatt vásárolt be.
d) Odafelé gyorsabban sétált, hisz rövidebb idő alatt tette meg ugyanazt a távolságot, mint hazafelé.

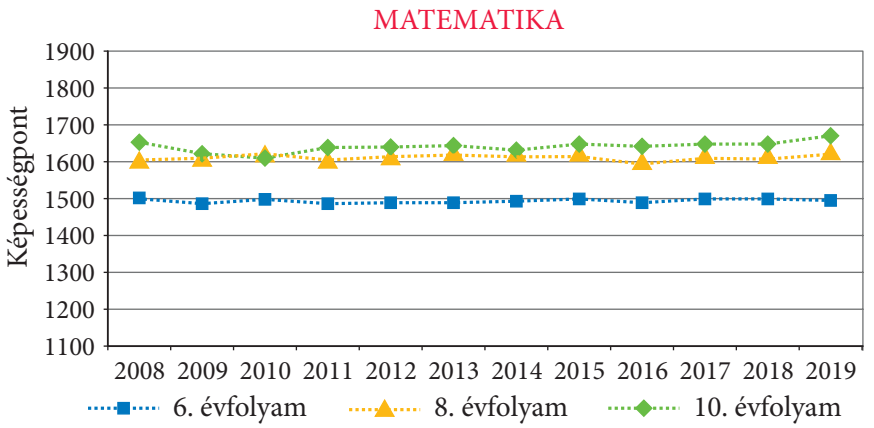
FELADATOK

1. Az utasszállító repülőgép magassági adatai alapján nyomon követhetjük, hogy az indulást követő egyes időpontokban milyen magasan szállt a repülőgép.



a) Hány perc alatt érte el a repülési magasságát?
b) Milyen magasan járt az indulást követő 8. percben?
c) Hány métert emelkedett a gép a 4–8. perc között?
d) Melyik időintervallumban volt a legnagyobb a repülőgép emelkedési sebessége?
e) Hányadik percben volt 8000 m a repülési magassága?

2. Az ábrán az országos kompetenciamérés néhány egymást követő évének átlageredményeit látod.
Döntsd el a grafikonok alapján, melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül!

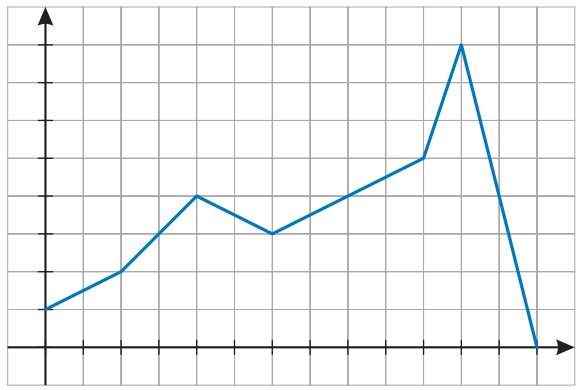


a) Minden évben a 6. évfolyam érte el a legalacsonyabb pontszámot.
b) A nyolcadikosok teljesítménye 2016 óta folyamatosan emelkedik.
c) A nyolcadikosok leggyengébb átlageredménye 2009-ben volt.
d) A tizedikesek több mint 200 ponttal jobb eredményt értek el 2019-ben, mint a hatodikosok.
e) A hatodikosok teljesítménye sokkal kisebb ingadozást mutat ebben a 12 évben, mint az idősebbeké.
f) Mindhárom évfolyam átlageredménye 2019-ben volt a legmagasabb.
g) A nyolcadikosok legalacsonyabb és a tizedikesek legmagasabb átlageredménye között legalább 100 pontnyi eltérés van.

3. Fogjatok össze a padtársaddal, és írjatok egy történetet ehhez a grafikonhoz úgy, hogy legyen benne legalább 4 darab a következő szavak közül:

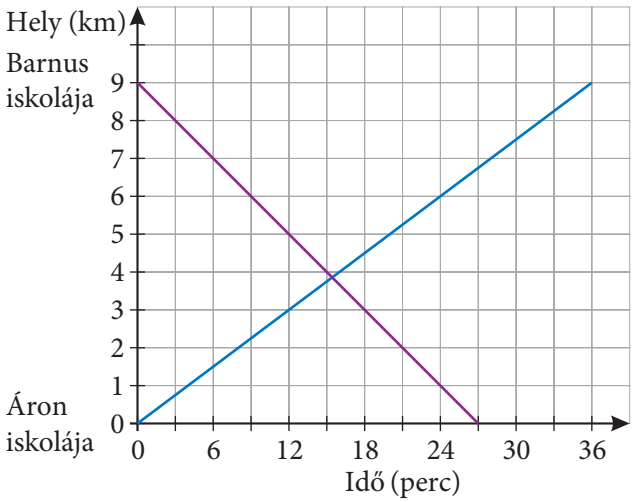
elképesztő, drámai, örömmámor,
settenkedik, kuruttyol, zuhan,
szakad, káosz, óbégat, töpörtyű

Beszéljétek meg azt is, melyik tengelyen mit ábrázoltatok, és mennyit ér a tengelyeken egy-egy egység!



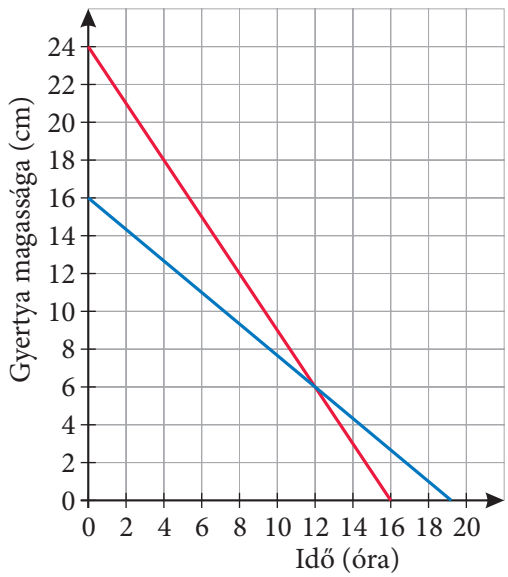
4. Áron és Barnus különböző iskolákba járnak, de pénteken mindkettőjüknek öt órája van. Tanítás után Barnusnak Áron iskolájában van zeneórája, Áronnak meg Barnus iskolájában van kosárlabdaedzése. Egyszerre indulnak, s mindketten biciklivel mennek egymás iskolájába. Válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!

a) Melyik grafikon jelöli Áron, és melyik Barnus mozgását?
b) Melyik gyerek biciklizik gyorsabban? Miért?
c) Milyen messze van egymástól a két iskola?
d) A fiúk az indulástól számított hányadik percben találkoznak?
e) Hány perc alatt teszi meg az utat Áron?
f) Hány km utat tesz meg Barnus egy perc alatt?



5. Meggyújtottunk két különböző magasságú gyertyát, egy kéket és egy pirosat. Az egyik vékonyabb, a másik vastagabb, így egyenletes tempóban, de nem egyforma sebességgel égtek el. Válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!

a) Hány cm hosszúak voltak a gyertyák?
b) Milyen hosszúak lesznek a gyertyák 2 óra elteltével?
c) Hány cm-t csökkent a hosszabb, és hány cm-t a rövidebb gyertya magassága 6 óra alatt?
d) Melyik gyertya ég el hamarabb?
e) A meggyújtás után hány óra múlva lesz a két gyertya azonos magasságú?



Az előző évben már találkoztatok az átlag fogalmával, pontosabban a számtani átlaggal, amit úgy számítottunk ki, hogy összeadtuk az adatokat, és elosztottuk az adatok számával. Ha például Matyinak négy darab ötöse, három négyese és egy hármasa volt, akkor a jegyei átlaga:

$$\overline{x} = \frac{5+5+5+5+4+4+4+3}{8} = \frac{35}{8} = 4{,}375.$$

Ehhez hasonlóan valószínűleg sokan kiszámoltátok az év végi átlagotokat vagy akár egyetlen tárgy átlagát.

Vannak olyan esetek, amikor ki lehet ugyan számolni az átlagot, de nem biztos, hogy megéri a befektetett munkát. Judit néni, a matektanár összegyűjtötte, milyen jegyeket adott a hetedikeseknek a tanév során. Eredményül ezt a táblázatot kapta:

Jegy	1	2	3	4	5
Darabszám	84	32	66	121	99

Csak ránézett az adatokra, és látta, milyen osztályzatból volt a legtöbb, melyik volt a leggyakoribb: Judit néni leggyakrabban 4-est adott az év során. Mivel a leggyakoribb elemet sokszor használják az átlagos érték jellemzésére, ezért külön nevet is adtak neki.

Egy kísérlet során a legtöbbször előforduló adat, azaz egy halmaz leggyakoribb eleme a **módusz**. A módusz jelölése Mo.

Előfordulhatott volna az is, hogy Judit néni tavaly 110 darab 4-est és 110 darab 5-öst adott. Ekkor az adathalmaznak két módusza lenne, a 4 és az 5. A móduszban az a hasznos, hogy abban az esetben is használható, ha átlagot egyáltalán nem tudunk számolni, mert az adatok nem számok.

1. PÉLDA

Mi az „átlagos” hajszín Judit néni osztályában, ha 8 szőke, 12 barna, 4 fekete és 1 vörös hajú gyerek van az osztályban?

Megoldás

Értelmetlen lenne átlagot számítani, hiszen nem tudjuk, milyen színű az átlaga egy szőke és egy vörös hajú gyereknek. A móduszt viszont egy pillanat alatt megállapíthatjuk: barna hajú gyerekből van a legtöbb az osztályban.

Egy másik, a középértéket jellemző adat a középső elem. Rendezzük az adatokat nagyság szerinti sorrendbe, és válasszuk a középső elemet! A gyakorlatban ezt az értéket is sűrűn használják a középérték jellemzésére, így ennek is külön nevet adtak. Ez az adatok **mediánja**. A medián jelölése Me.

Például: A 7; 2; 1; 1; 3 számokat nagyság szerint rendezve az 1; 1; 2; 3; 7 számsort kapjuk, amelyek közül a 2 a középső, azaz a medián a 2.

Ha páros számú adatunk van, mint például a 3; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5 adatok esetében, akkor a két középső elem átlaga lesz a medián, vagyis $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

A mediánt nem értelmezzük, ha az adatok nem rendezhetők sorba.



2. PÉLDA

Hét pozitív egész szám között szerepel az 1-es és a 3-as, a hét szám átlaga 3, mediánja és módusza 2. Adj meg hét ilyen számot!

Megoldás

Rajzoljunk 7 vonalat, ezek fogják jelölni a hét szám helyét. Mivel a medián 2, ezért a középső helyre beírhatjuk a 2-t.

_ _ _ 2 _ _ _

Az első három helyen nem állhat három egyes, mert akkor legalább 4 darab kettes kellene legyen a hét szám között, és nem lenne 3-as. Legyen ezért csak az első két szám 1-es, ekkor legalább három darab 2-es is van a számok között. Legyen most pont három darab!

1 1 _ 2 _ _ _
1 1 2 2 2 _ _

A feladat szövege szerint van egy 3-as is a hét szám között.

1 1 2 2 2 3 _

Ahhoz, hogy az átlag 3 legyen, a számok összege $7 \cdot 3 = 21$ kell legyen. Az eddig választott 6 szám összege 11, tehát az utolsó még hiányzó szám a 10.

1 1 2 2 2 3 10

Keress más megoldást is! Mik lehetnek a számok, ha csak 1 darab egyes van közöttük?

FELADATOK

1. Határozd meg a –2; 0; 0; 0; 7 számok
a) számtani átlagát; *b)* móduszát; *c)* mediánját!

2. Határozd meg a –1; –1; 1; 1; 3; 6 számok
a) számtani átlagát; *b)* móduszát; *c)* mediánját!

3. Az iskolai büfében eladtak 42 párizsis, 33 sajtos, 27 sonkás és 18 rántott húsos zsömlét.
a) Melyik középértéket tudod meghatározni?
b) Mennyi volt az egy szendvicsre jutó átlagos ár?



4. A YouTube-on 2015 elején az első hat leggyakrabban hallgatott zeneszám hossza 5:08; 4:14; 4:04; 1:29; 3:27 és 4:42 volt.
a) Milyen hosszú az átlagos zeneszám?
b) Mekkora az adatok mediánja?

5. Ha lehet, adj meg hat természetes számot úgy, hogy
a) az átlaguk 5 legyen;
b) a móduszuk 6 legyen;
c) a mediánjuk 7 legyen;
d) az *a)* és a *b)* egyszerre teljesüljön;
e) az *a)* és a *c)* egyszerre teljesüljön;
f) a *b)* és a *c)* egyszerre teljesüljön;
g) az *a)*, *b)* és a *c)* egyszerre teljesüljön!

Matyiék fociszakosztályának új mezeket és cipőket kell rendelni, mert az előző két évben sokat nőttek a fiúk. Ma már Marci, Milán, Miklós, Zsiga és Dani lába 40-es, Matyié, Gézáé és Mátéé 38-as, Dávidé és Zaláné 42-es. A különböző méretű cipőkből szükséges darabszámot egy táblázatban gyűjtöttük össze. A leggyakoribb cipőméret a 40-es, ez a méretek módusza.

A 38-as cipőméret 3-szor fordul elő a fiúk között. Azt mondjuk, hogy a 38-as méret **gyakorisága** 3, a 40-es méret gyakorisága 5, a 42-es méret gyakorisága pedig 2.

Méret	38	40	42
Darab	3	5	2

A **gyakoriság** az a szám, ahányszor az adat előfordul a halmazban.

Egy adat relatív gyakorisága az adat előfordulási számának, azaz **a gyakoriságának és az összes adat számának hányadosa.** A relatív gyakoriság mindig legalább 0 és legfeljebb 1.

A cipőméretek relatív gyakoriságai a táblázatban láthatók.

Méret	38	40	42
Gyakoriság	3	5	2
Relatív gyakoriság	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$

1. PÉLDA

Két iskolában is nyereményjátékot szerveztek. A gyerekek mindkettőben kaptak egy-egy tombolajegyet. A Méta iskolában 12-en nyertek, a Bálna iskolában pedig 18-an. Hol volt nagyobb a nyerés esélye?

Megoldás

Ezt sajnos nem tudjuk megválaszolni. A Bálna iskolában ugyan 18-an nyertek, ami több, mint a Méta iskola 12 nyertese, azaz a nyertesek gyakorisága nagyobb a Bálna iskolában, de ebből nem lehet következtetni a nyerési esélyekre. Nézzük meg az *A* és *B* eseteket!

A eset: Ha mindkét iskolába 180 gyerek jár, akkor nyilván ott van nagyobb esély a nyerésre, ahol több gyerek nyer, azaz a Bálna iskolában.

A eset	Gyakoriság	Az iskola létszáma	Relatív gyakoriság
Bálna iskola	18	180	$\frac{1}{10}$
Méta iskola	12	180	$\frac{1}{15}$

B eset: Ha a Bálna iskolába például 180 gyerek jár, a Méta iskolába pedig csak 60, akkor annak az esélye, hogy egy gyerek a Bálna iskolában nyer, $\frac{18}{180} = \frac{1}{10}$, annak pedig, hogy a Méta iskolában, $\frac{12}{60} = \frac{2}{10}$.

B eset	Gyakoriság	Az iskola létszáma	Relatív gyakoriság
Bálna iskola	18	180	$\frac{1}{10}$
Méta iskola	12	60	$\frac{2}{10}$

Ebben az esetben a Méta iskolában volt nagyobb esély a nyerésre: éppen kétszer annyi, mint a Bálna iskolában.

FELADATOK

1. A cukrászdában 84 vanília-, 47 csokoládé-, 44 pisztácia- és 35 eperfagylaltot adtak el.

a) Mi az adatok módusza?

b) Mekkora az eladott vanília-, csokoládé-, pisztácia- és eperfagyik relatív gyakorisága?

c) Készíts kördiagramot az adatok ábrázolásához!

2. Az M1-es autópálya Tatabányát követő szakaszán utasszámlálást tartottak. Feljegyezték az egyes autókban ülő emberek számát, és az összesítés után az alábbi táblázatot kapták.

Az emberek száma autónként	1	2	3	4	5	6	7
Autók száma (db)	145	77	24	38	18	3	3

a) Számold ki a füzetedben a relatív gyakoriságokat!

b) Ha jön egy következő autó az úton, mire tippelnél, hány ember ül benne?



3. Bár az iskolában csak 7:45-kor kezdődik a tanítás, de már 7:00-tól be lehet menni az épületbe. Az iskolatitkár kérésére a portás bácsi statisztikát készített. 7:00 és 7:15 között 18 gyerek érkezett, 7:15 és 7:30 között 63, 7:30 és 7:45 között 228, sőt sajnos 7:45 és 8:00 között is még 12.

a) Mekkora az egyes negyedórákban érkezett gyerekek számának relatív gyakorisága?

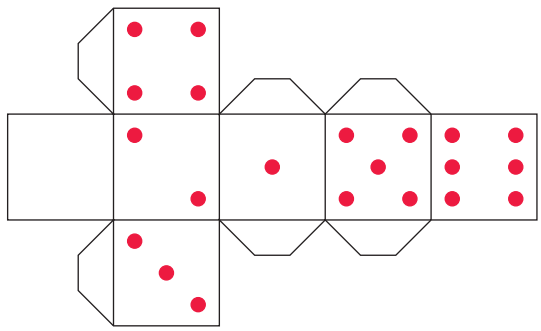
b) Melyik negyedórában jött a legtöbb gyerek?

c) Melyik negyedórában jött meg a 161., azaz a középső gyerek?

d) Hogyan számolnád ki, hogy mi volt a gyerekek átlagos érkezési ideje?

e) Ha semmi egyebet nem tudunk Gazsiról, akkor mire tippelnél, mikor érkezett az iskolába?

4. A hatodikos tankönyv 221. oldalán találkozhattál az alábbi kockahálóval. A rajzoláshoz, hajtogatáshoz és ragasztáshoz a következő utasítást adtuk meg: „A pettyeket is másold át az ábra szerint! A kettes melletti üres lapot hajtsd belülre, és erre ragaszd a hatpettyes lapot!”



A kockát mi is elkészítettük, majd 100-szor feldobtuk. Az eredményeket a táblázatban láthatod:

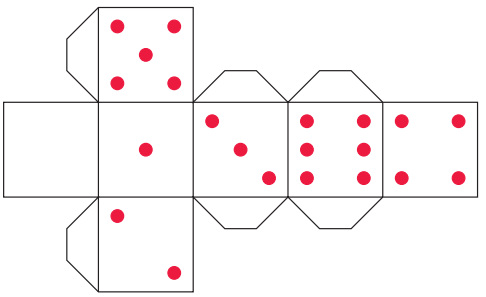
Dobott szám	1	2	3	4	5	6
Darab	29	19	17	12	15	8

a) Írd fel a dobott számok relatív gyakoriságát!

b) Mit gondolsz, miért az 1-es lett a módusz?

c) Dobj 100-szor egy szabályos dobókockával, és készíts a füzetedbe egy hasonló táblázatot! Hogyan tudnád gyorsítani a kísérlet elvégzését?

Sok olyan esemény zajlik körülöttünk, amelyről nem tudjuk megmondani, hogy bekövetkezik-e vagy nem. Ilyen például az, hogy felelni fogsz-e holnap, hogy elalszol-e este 9 előtt, vagy az, hogy a szüleid nyernek-e a lottón.
Vannak olyan események is, amelyek nem emberi tevékenységtől függnek. Ilyen például az, hogy holnap esni fog-e az eső, vagy az, hogy az itt látható, papírból készített hamis kockánkkal 3-ast dobunk-e vagy sem. Otthon elkészítettünk egy hamis kockát, és elvégeztük a kísérletet 100-szor, majd még 100-szor és ismét 100-szor. A dobott hármasok számát egy táblázatba foglaltuk:



	100 dobás után	200 dobás után	300 dobás után
Gyakoriság	31	57	87
Relatív gyakoriság	$\frac{31}{100} = 0{,}31$	$\frac{57}{200} = 0{,}285$	$\frac{87}{300} = 0{,}29$



Ebben a kísérletben nem tudjuk pontosan megmondani, hogy mennyi a hármas dobás esélye, vagy más szavakkal, mennyire valószínű a hármas dobás, de azt látjuk, hogy a relatív gyakorisága nagyjából 0,3.

Nagyszámú kísérlet elvégzése esetén az esemény relatív gyakorisága egy érték körül ingadozik. Ezt az értéket tekintjük az esemény valószínűségének.

Van olyan eset, amikor egy esemény valószínűségét kísérletek sokaságával tudjuk körülbelül meghatározni. A szabálytalan kocka esetén azt mondhatjuk, hogy a hármas dobás valószínűsége körülbelül 0,3.

Végezzük el a kísérletünket egy szabályos kockával is. Mitől lesz egy kocka szabályos? Feltételezzük, hogy anyagát tekintve homogén, és lapjain rendre 1, 2, …, 6 pötty van. A valószínűségek szempontjából ennyi elég is lenne, de mindig olyan dobókockát gyártanak, amelyen a szemközti lapokon lévő pöttyök összege 7.

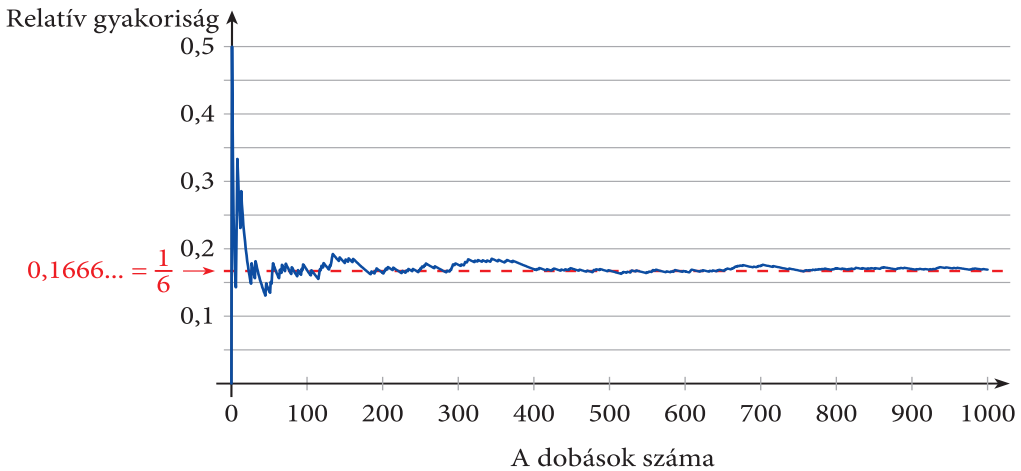


CSOPORTMUNKA

Az osztályban mindenki dobjon fel egy-egy kockát 50-szer, és jegyezze fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok gyakoriságát.
Összesítsétek az eredményeiteket a táblánál, és számoljátok ki a relatív gyakoriságokat is!

Mi is feldobtunk egy szabályos kockát 100-szor, majd még 100-szor és így tovább, összesen 1000-szer. A dobott hármasok előfordulására vonatkozóan a következő eredményt kaptuk:

Dobások száma	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Gyakoriság	15	32	55	71	87	102	113	135	148	165
Relatív gyakoriság	0,150	0,160	0,183	0,178	0,174	0,170	0,161	0,169	0,164	0,165



Láthatjuk, hogy a kísérletünk eredményeképpen a relatív gyakoriságok az $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667$ körül ingadoznak.

Szabályos kocka esetén nem fogunk mindig kísérleteket végezni. Feltételezzük, hogy minden lap ugyanolyan valószínűséggel fordul elő. Mivel a kockának hat lapja van, ezért ekkor a hármas dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$. Ebben az esetben persze minden lehetséges dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$.



Érdekesség: Gerolamo Cardano 1550 körül írta *Liber de Ludo Aleae*, azaz *Könyv a szerencsejátékokról* című könyvét, de csak jóval halála után, 1657-ben adták ki. Ebben a könyvben áttekinti a kocka- és kártyajáték során felmerülő valószínűségszámítási kérdéseket, sőt sokat meg is old közülük. Például: *„A kocka lapjainak fele mindig az esélyek felét képviseli, […] ugyanakkora eséllyel dobok egyet, hármat és ötöt, mint kettőt, négyet és hatot.”*

1. PÉLDA

Anna, Matyi, Hanna és Zozó is jelentkezett, hogy gondját viseli a teremben lévő növényeknek. Hogy ne maradjon a feladat gazda nélkül, a gyerekek nevét felírták egy-egy cetlire. Összehajtották, és 40 héten keresztül minden hétre kisorsoltak közülük egyet, akinek azon a héten gondoskodnia kellett a növényekről. Milyen eséllyel húzták ki az egyes gyerekeket?

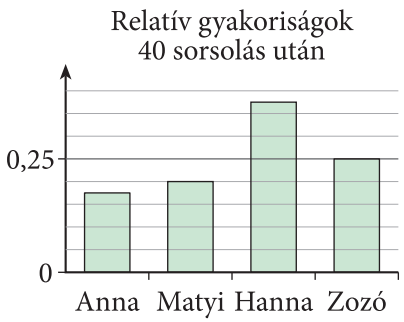
Megoldás

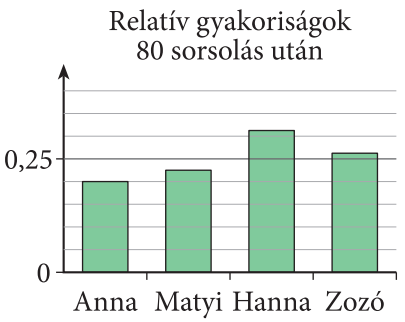
Mindenkinek egyforma esélye van arra, hogy sorra kerüljön, azaz bármelyik gyerek kihúzásának a valószínűsége $\frac{1}{4}$.

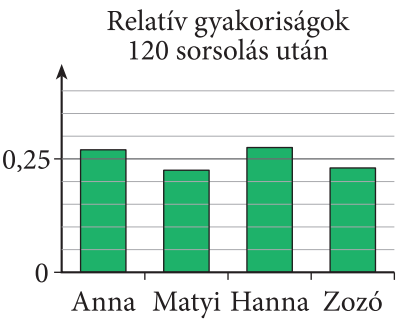
Az első példa sorsolását végre is hajtottuk, aztán még kétszer megismételtük, hogy több adatunk legyen.

	Anna	Matyi	Hanna	Zozó
40 sorsolás	7	8	15	10
Relatív gyakoriságok 40 sorsolás után	$\frac{7}{40} = 0{,}175$	$\frac{8}{40} = 0{,}2$	$\frac{15}{40} = 0{,}375$	$\frac{10}{40} = 0{,}25$
40 + 40 = 80 sorsolás	16	18	25	21
Relatív gyakoriságok 80 sorsolás után	$\frac{16}{80} = 0{,}2$	$\frac{18}{80} = 0{,}225$	$\frac{25}{80} = 0{,}3125$	$\frac{21}{80} = 0{,}2625$
40 + 40 + 40 = 120 sorsolás	32	27	33	28
Relatív gyakoriságok 120 sorsolás után	$\frac{32}{120} \approx 0{,}27$	$\frac{27}{120} = 0{,}225$	$\frac{33}{120} = 0{,}275$	$\frac{28}{120} \approx 0{,}23$

A táblázatban szereplő relatív gyakoriságokat a könnyebb áttekinthetőség kedvéért ábrázoltuk is.







Mind a táblázat, mind a grafikonok alapján azt látjuk, hogy a relatív gyakoriságok az $\frac{1}{4} = 0{,}25$ körül ingadoznak.

FELADATOK

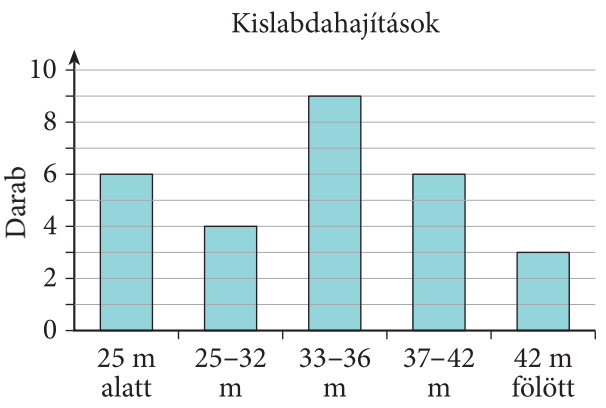
1. A grafikonon a 7. d tanulóinak a kislabdahajítási eredményeit látjuk.

a) Mekkor a dobások módusza?

b) Mekkora lehet a dobások mediánja?

c) Mekkora lehet a dobások átlaga?

d) Változik-e az *a)* és a *b)* kérdésre adott válasz, ha kiderül, hogy Gazsi dobását elmérték. Nem 34, hanem 44 m.



2. Szokták mondani, hogy a vajas kenyér mindig a vajas oldalára esik. Ha egy vajas kenyér 100 feldobása esetén 64-szer a vajas felére esik, akkor állíthatjuk-e, hogy ennek a valószínűsége $\frac{64}{100}$? A kísérletet ne hajtsátok végre!

3. Egy sorsolást igazságosnak tekintünk, ha az egyes eseteknek ugyanakkora a valószínűsége. Felsorolunk néhány sorsolást, amellyel el akarjuk dönteni, hogy Anna vagy Zsolt vihesse le a szemetet. Válaszd ki az igazságosakat!

A) Feldobunk egy pénzérmét. Ha írás, akkor Anna, ha fej, akkor Zsolt viheti le a szemetet.

B) Felütünk egy könyvet valahol. Ha a lapon az „a” betű fordul elő korábban, akkor Anna, ha a „z” betű, akkor Zsolt viheti le a szemetet.

C) Feldobunk egy kockát. Ha 1-es vagy 6-os, akkor Anna, ha más, akkor Zsolt viheti le a szemetet.

D) Két gyufaszál közül az egyiknek letörjük a fejét, majd az ujjaink közé fogva Anna húzhat egyet. Ha a rövidebbet húzza, ő viheti le a szemetet, ha nem, akkor Zsolt.

E) Célba dobnak. Aki előbb tudja az almacsutkát tíz lépésről a szemetesbe dobni, az viheti le a szemetet.

4. Anna, Matyi, Hanna és Zénó közül kisorsoltak egy növényfelelőst az első hétre.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy lányt sorsoltak?

Az első 40 héten feljegyezték, hogy mikor kit sorsoltak ki. Az egyes gyerekeket a nevük kezdőbetűjével jelölték.

AHHZZHMAMMHHHHMHHZHAHMHZZAAHHZZMAZZAMMHZ

b) Készíts táblázatot a kisorsolt lányok számának változásáról!

c) Ábrázold a kisorsolt lányok gyakoriságának és relatív gyakoriságának változását egy pontdiagramon!

5. Feldobunk egy szabályos dobókockát.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 6-os lesz?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy 1-es lesz?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy páros lesz?

d) Mennyi a valószínűsége, hogy prímszám lesz?

e) Mennyi a valószínűsége, hogy 4-nél nagyobb lesz?

f) Adj meg olyan eseményt a kockadobáshoz, amelynek valószínűsége $\frac{1}{3}$.

g) Adj meg olyan eseményt a kockadobáshoz, amelynek valószínűsége $\frac{2}{3}$.

6. A 7. d-ben kisorsolják, hogy ki kit fog megajándékozni karácsonykor. A tanulók neveit felírják egy papírdarabra, összehajtogatják, beleteszik egy dobozba, ahol összekeverik, és egyesével húznak belőle. 12 fiú és 16 lány jár az osztályba, köztük Helénke. Matyi húz elsőnek.

a) Mekkora annak az esélye, hogy Helénkét húzza?

b) Mekkora annak az esélye, hogy lányt húz?

7. Anna, Berta, Hanna és Zsu egy négyszemélyes ebédlőasztalnál ülnek. Nincs rögzített helyük, mindenki oda ül, ahová akar, azaz minden ülésrend egyformán valószínű. Rajzold fel a füzetedbe az összes lehetséges ülésrendet, ha csak az számít, hogy ki ül ki mellett! Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Hanna egymással szemben ülnek?



Akkor szoktunk igazságosnak tekinteni egy játékot, ha mindenkinek ugyanakkora esélye van a nyerésre. Két játékos esetén ez azt jelenti, hogy mindketten $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$ eséllyel nyerhetnek. Ilyen például az az eset, ha egy érmét feldobnak. Ha fej (F), akkor Anna, ha írás (I), akkor Bianka nyer.

PÁROS MUNKA

Alkossatok párokat! Beszéljétek meg, hogy a felsorolt játékok igazságosak-e!
A következő játékokban Anna és Bianka játszik.

1. Kosárlabdával büntetőket dobnak. Anna kezdi, és az nyer, aki előbb ér el kosarat.
2. Kosárlabdával büntetőket dobnak, egy kosár 1 pont, és az nyer, akinek előbb lesz 3 pontja.
3. Egy érmét dobálnak felváltva. Anna kezdi. Aki előbb dob fejet, az nyer. Például ha Anna elsőre fejet dobott, akkor nyert. Ha a dobások sorban Anna: írás, Bianka: írás, Anna: fej, akkor is Anna nyert.

Ha a 3. részben nem tudtok dűlőre jutni, akkor kísérletezzetek! Állapodjatok meg abban, hogy ki kezdi, és dobáljatok egy pénzérmét felváltva. Játsszatok 10 menetet, és jegyezzétek fel, hogy a kezdő vagy a második játékos nyert-e!
Összesítsétek az osztályban az eredményeket!





A 7. a osztályban szavazást rendeztek.
Az osztályból néhány gyerek Ajtony és Aurél vezetésével azt mondta, hogy ha két érmét feldobunk, akkor három eset lehetséges: két fej (FF), két írás (II) vagy két különböző (F és I) lehet a dobások eredménye. Ezért az egyes esetek $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ eséllyel következnek be. Ők két százforintost dobáltak.
Vera és Jusztina nagyon ellenkezett, szerintük négy egyforma esélyű lehetőség van. Ők egy száz- és egy húszforintost dobáltak fel. A négy eset az II, IF, FI, FF, attól függően, hogy melyik érmén volt fej, melyiken írás.
Segítsetek! Mindenki dobjon fel 20-szor két érmét. Írjátok le, hogy az egyes esetek hányszor következtek be. Összesítsétek az osztályban az eredményeket!
A mi osztályunkba 27-en járnak. 13-an két egyforma érmét dobáltak, 14-en pedig két különbözőt. A következő eredmények születtek:

Egyforma érmék				Különböző érmék			
FF	F és I	II		FF	FI	IF	II
71	126	63	Gyakoriság	72	71	63	74
0,273	0,485	0,242	Relatív gyakoriság (≈)	0,257	0,254	0,225	0,264

Tényleg különbözik a két eset? Érveljetek az eredmények magyarázata mellett!
Nézzetek utána, hogy mi a Jusztina és a Vera nevek jelentése!

VII. 8. ÖSSZEFOGLALÁS

Egy hozzárendelés lehet
- nem egyértelmű.
- egyértelmű.

Leggyakrabban az egyértelmű hozzárendeléseket vizsgáltuk. Egy egyértelmű hozzárendelés megadása során meg kell adni az alaphalmazt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt. Egyértelmű hozzárendeléseket gyakran ábrázolunk grafikonon. Gyakoroltuk, hogyan olvasunk le információt grafikonról.

Átismételtük a régebben is használt átlagszámítást, és megismerkedtünk a medián, a módusz és a relatív gyakoriság fogalmával.
Egy esemény valószínűségének azt az értéket tekintjük, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik, ha a kísérletek száma nagy.
Vannak esetek, amikor nem végzünk kísérleteket, hanem logikai alapon határozzuk meg a valószínűséget.

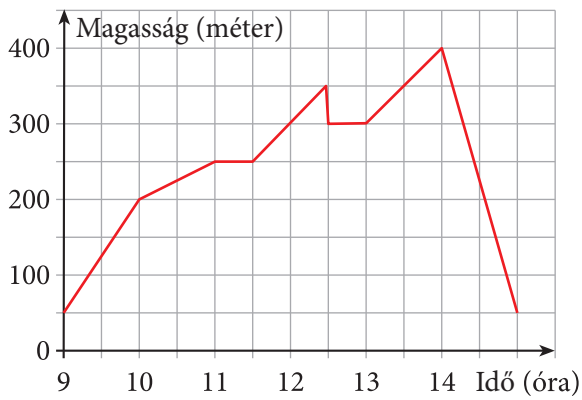
FELADATOK

1. Sorold fel a hozzárendelések fajtáit, és mondj példát minden típusra!

2. *a)* Egyetlen szó hozzáadásával alakítsd ezt a nem egyértelmű hozzárendelést egyértelművé!
Minden egész számhoz hozzárendelem a számszomszédját.
b) Egyetlen szó kicserélésével alakítsd ezt az egyértelmű hozzárendelést nem egyértelművé!
Minden diákhoz hozzárendelem a diákigazolványa számát.

3. Hétfő reggel 6 órakor a hőmérséklet 14 °C volt. Egyenletesen melegedett az idő, 10 órakor már 22 °C-ot mértek. Ekkor feltámadt a szél, és a hőmérséklet egy óra alatt 2 °C-ot csökkent. A szélvihar elmúltával ismét egyenletesen melegedett a levegő hőmérséklete, így délután 2 órakor 24 °C-ot mértek.
a) Készíts grafikont a hőmérséklet változásáról!
b) Hány fok volt 8 órakor?
c) Hány órakor volt a hőmérséklet 21 °C?
d) Mikor melegedett gyorsabban a levegő hőmérséklete, a szél megérkezése előtt vagy utána?

4. Egy sziklamászó útjáról készült az itt látható grafikon. Egy 50 méteres kötéllel biztosította magát. A vízszintes tengelyen az időt, a függőleges tengelyen a hegymászó tartózkodási helyének magasságát jelöltük.



a) Milyen magasról indult a hegymászó?
b) Mikor mászott fölfelé a leglassabban?
c) Mikor mentette meg az életét a biztosítókötél?
d) Milyen magasra mászott a sziklafalon?
e) Mikor tartott pihenőt?
f) Hány órára ért vissza a kiindulási helyre?

5 Az osztályban az év végi matekfelmérők eredménye a következő volt: 3 db 2-es, 5 db 3-as, 12 db 4-es és 8 db 5-ös.

a) Határozd meg a felmérők átlagát, mediánját és móduszát!

b) Készíts az adatok alapján oszlopdiagramot!

c) Egy tanulót választva mennyi a valószínűsége, hogy 5-öst kapott?

6 A képen látható szabályos dobótestnek 12 lapja van, 1-től 12-ig megszámozva.



a) Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy páros számot dobunk?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy prímszámot dobunk?

d) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 6-ost dobunk?



7 A Harry Potter sorozat filmjeinek hossza 146, 155, 142, 153, 133, 153, 150 és 130 perc. Amikor Gazsi bemenekült az eső elől a moziba, akkor csak azt látta, hogy valamelyik Harry Potter filmet vetítik.

Mennyi a valószínűsége, hogy

a) 2 óránál rövidebb a film?

b) 2,5 óránál hosszabb a film?

c) 2,5 óránál rövidebb a film?



Képjegyzék:
Fotók: 9-10. o. Albrecht Dürer: Melankólia 1 (1514.), The Metropolitan Museum of Art, New York, public domain, 19. o. Szemerédi Endre portréja, Fotó: Wikimedia/Sergio01, CC BY-SA 3.0; Lovász László fotója, Fotó: Új Köznevelés, Szabó Ivett, 100. o. Justus van Gent (1460–1480): Alexandriai Eukleidész, public domain, 117. o. Eratoszthenész, © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch, 141. o. Peugeot 203 Coupe, Bay State Antique Automobile Club' show, 2005., Fotó: Wikimedia/ Sfoskett, CC BY-SA 3.0, 177. o. Az Oktogon légifelvétele, © CULTiRiS / Somogyi-Tóth Dániel, 204. o. Ismeretlen festő: Hunyadi János (1673), Magyar Nemzeti Múzeum, Budapest; Barabás Miklós: Arany János portréja, 1884; Olaj, vászon, 157 x 115 cm, jelezve balra lent: „Barabás M. 1884." MTA Művészeti Gyűjtemény ltsz. 13, fotó: MTA és Magyar Képek Kiadói Kft. (Szelényi Károly) tulajdona, 206. o. Neumann János, (MTI/INT); Márkos Ferenc: Bolyai János portréja, HUNGART © 2025; Mohácsi Miklós: Varga Tamás portréja, MTI Fotó: Mohácsi Miklós; Erdős Pál portréja, MTI Fotó: Vitályos József; 218. o. Richard Cooper: Girolamo Cardano, Wellcome Collection, közkincs
Wintsche Gergely fotói: 156., 191., 195., 202., 217. o.
Orosz Adél: 190, 192. alsó kettő.
© Shutterstock Képügynökség: 11., 13., 20., 22., 33., 37., 42., 54., 70., 75., 76., 85., 86., 93., 107., 108., 114., 120., 127., 143., 146., 151., 153., 160., 174., 177., 192., 202., 204., 216., 221., 223. o.
Shutterstock szerkesztői képek: 44. o. Miro Vrlik Photography, 99. o. Elentaris Photo, 181. o. Roberto Sorin, 186. o. Oleg Elkov, 223. o.: felső: Usa-Pyon
Pixabay/CC.0: 8., 20., 85., 86., 93., 133., 204., 223. o.
iStock: 32., 157. o.
Thinkstock: 10. o.