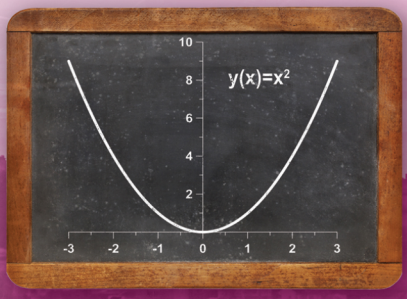
Hajdu Sándor

Czeglédy István
Czeglédy Istvánné
Hajdu Sándor Zoltán
Novák Lászlóné
Sümegi Lászlóné
Tüskés Gabriella
Zankó Istvánné

MATEMATIKA

GYAKORLÓ

8.



OKTATÁSI HIVATAL

DR. CZEGLÉDY ISTVÁN
DR. CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ
DR. HAJDU SÁNDOR
HAJDU SÁNDOR ZOLTÁN
NOVÁK LÁSZLÓNÉ
DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ
TÜSKÉS GABRIELLA
ZANKÓ ISTVÁNNÉ

MATEMATIKA 8.
GYAKORLÓ

ÁLTALÁNOS ISKOLA ALAP,
ÁLTALÁNOS ISKOLA EMELT B,
NYOLCOSZTÁLYOS GIMNÁZIUM ALAP,
HATOSZTÁLYOS GIMNÁZIUM ALAP
KERETTANTERVHEZ

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2019. 02. 15-én tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott
a TKV/121-11/2019. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet: Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára – 2.2.03. (Matematika),
2.3.1.2. (Emelt matematika – B variáció), 4. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok
7–12. évfolyama számára – 4.2.04. (Matematika) és az 5. melléklet: Kerettanterv
a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára – 5.2.04. (Matematika)
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
GYŐRFI LÁSZLÓNÉ, KEMPFNER ZSÓFIA

Alkotószerkesztő:
DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az előző kiadásokat bírálta:
KARÁDI KÁROLYNÉ ny. szaktanácsadó

Az átdolgozott részeket bírálta:
DR. FRIED KATALIN

© dr. Czeglédy István, dr. Czeglédy Istvánné, dr. Hajdu Sándor,
Hajdu Sándor Zoltán, Novák Lászlóné, dr. Sümegi Lászlóné, Tüskés Gabriella,
Zankó Istvánné, Oktatási Hivatal (Eszterházy Károly Egyetem), 2019

ISBN 978-963-19-8152-0

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök
Raktári szám: NT-4321-3
Utánnyomásra előkészítette: Bosznai Gábor
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Knausz Valéria · A borítót tervezte: Korda Ágnes
Terjedelem: 23,6 (A/5) ív · A könyv tömege: 330 gramm
25. kiadás, 2020
Nyomdai előkészítés: Könyv Művek Bt.

Nyomta
Felelős vezető:

magyar
nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

Tartalom

Feladatok 5

1. Halmazok, logika 5
   Halmazok értelmezése, vizsgálata 5
   Műveletek halmazokkal 10
   Igaz, hamis állítások 12
2. Számtan, számelmélet 14
   Természetes számok 14
   Használd a zsebszámológépet! 17
   Hatványozás 18
   Számok normálalakja 20
   Negatív egész kitevőjű hatványok 22
   Számelmélet 23
   Egész számok 26
   Racionális és irracionális számok 27
   Százalékszámítás 33
   Számok négyzete, négyzetgyöke 35
3. Algebrai kifejezések 37
   Algebrai kifejezések értelmezése, helyettesítési értéke 37
   Egynemű, különnemű algebrai kifejezések; összevonás 42
   Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel 44
   Többtagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel 46
   Többtagú kifejezések szorzattá alakítása kiemeléssel 49
   Algebrai egész és törtkifejezések 50
   Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel 52
   Nevezetes azonosságok 53
4. Egyenletek, egyenlőtlenségek 55
   Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok 59
5. Összefüggések, függvények, sorozatok 67
   Hozzárendelések, összefüggések, függvények 67
   Egyenes arányosság, lineáris függvény 69
   Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal 74
   Sorozatok 80
   Nemlineáris függvények 83
   Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása 85
6. Síkidomok, felületek, testek 87
   Térelemek, szögek 87
   Vektorok 89

Adott tulajdonságú ponthalmazok ... 91
Síkidomok, sokszögek ... 93
Háromszögek ... 95
Pitagorasz-tétel ... 98
Négyszögek ... 103

7. Mérés, terület, felszín, térfogat ... 107
Mértékegységek átváltása ... 107
Síkidomok területe ... 109
Hasáb felszíne és térfogata ... 116
Egyenes körhenger térfogata, felszíne; hengerszerű testek ... 119
Ismerkedés a gúlával ... 121

8. Geometriai transzformációk ... 122
Pont-pont függvények ... 122
Tengelyes tükrözés ... 123
Középpontos tükrözés ... 124
Eltolás ... 126
Forgatás ... 128
Vegyes feladatok az egybevágósági transzformációk köréből ... 131
Hasonlóság ... 134
Háromszögek hasonlósága ... 139
Hasonló síkidomok területe ... 140
Hasonló testek felszíne, térfogata ... 141
Középpontos hasonlóság ... 141

9. Kombinatorika, valószínűség, statisztika ... 146
Hányféleképpen? ... 146
Statisztika ... 149
Esélylatolgatás ... 154

Megoldások, útmutatások ... 156

1. Halmazok, logika ... 156
2. Számtan, számelmélet ... 162
3. Algebrai kifejezések ... 177
4. Egyenletek, egyenlőtlenségek ... 187
5. Összefüggések, függvények, sorozatok ... 193
6. Síkidomok, felületek, testek ... 202
7. Mérés, terület, felszín, térfogat ... 223
8. Geometriai transzformációk ... 237
9. Kombinatorika, valószínűség, statisztika ... 258

Útmutató az átdolgozatlan tankönyv és az átdolgozott gyakorló együttes használatához

FELADATOK

1. Halmazok, logika

Halmazok értelmezése, vizsgálata

1.01. Írd be a 10-nél kisebb abszolútértékű egész számokat a halmazdiagramba, és pótold a hiányzó elnevezéseket!

	Negatív	
Páratlan		

1.02. Írd be az alaphalmaz elemeit (és a hiányzó címkéket) a halmazábrákba!

U = {25-nél kisebb természetes számok};

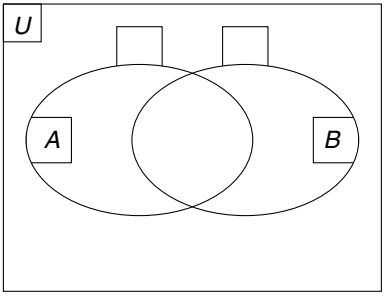
A = {4-gyel osztható számok}; B = {3-mal osztható számok};

C = {4-gyel nem osztható számok}; D = {3-mal nem osztható számok}

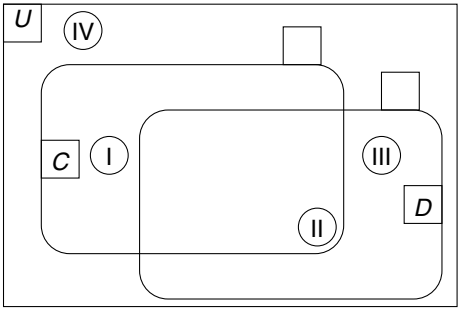
a)

	A	C
B		
D		

b)



c)



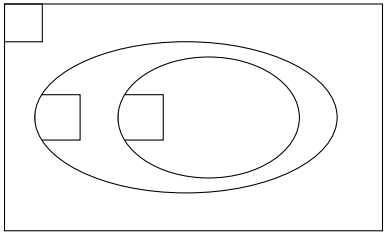
Az ábra egyes részeibe milyen tulajdonságú számokat írhatunk? Keresd meg az *a)*, illetve a *b)* feladatban, hogy az (I), (II), (III), (IV) halmazrészek hol helyezkednek el a halmazábrán?

1.03. Írd be a halmazábrába a hiányzó címkéket, majd számokat!

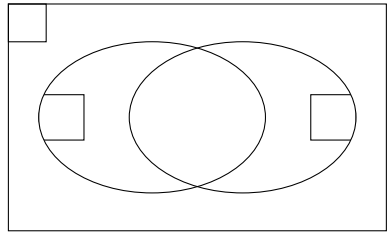
N = {Természetes számok}; **Q** = {Racionális számok}; **Z** = {Egész számok}

-7; $\frac{3}{7}$; $\frac{28}{4}$; $\frac{0}{7}$; $-7{,}7$; 77; $7{,}\dot{7}$

a)



b)



1.04. *a)* Írd be a 30-nál nem kisebb és 60-nál nem nagyobb egész számokat a diagramba!

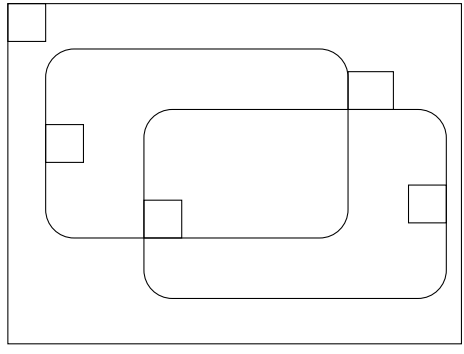
	Osztható 3-mal	3-mal osztva 1 maradékot ad	3-mal osztva 2 maradékot ad
Osztható 2-vel	(I)	(II)	(III)
Nem osztható 2-vel	(IV)	(V)	(VI)

b) Hogyan jellemezhetjük a különböző részekbe került számokat, ha a 6-tal való osztási maradékukat vizsgáljuk?

1.05. Írd be a halmazábrába a hiányzó címkéket, majd számokat!

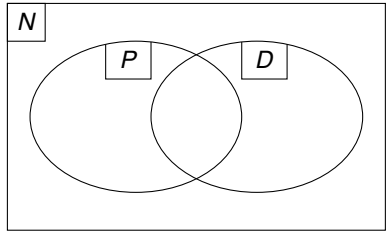
$\mathbf{Q}^+$ = {Pozitív racionális számok};
$\mathbf{Q}^-$ = {Negatív racionális számok};
N = {Természetes számok};
Q = {Racionális számok};
$\mathbf{N}^+$ = {Pozitív természetes számok}

$\frac{4}{36}$; $\frac{36}{4}$; $\frac{-11}{4}$; $-1{,}\dot{7}\dot{3}$; $\frac{0}{37}$; $6{,}25$; 5; -1

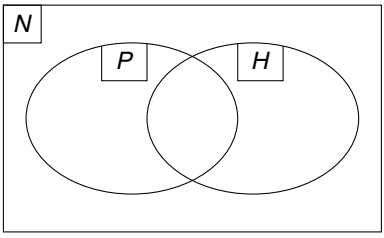


1.06. Írd be a halmazábrába, hogy az egyes halmazrészekbe hány négyszög tartozik!

a) Ábel a síkmértani modellezőkészlet 20 darab négyszöglapja között 11 paralelogrammát, 7 deltoidot és 5 rombuszt jelölt meg. Hány négyszöget nem jelölt meg Ábel?

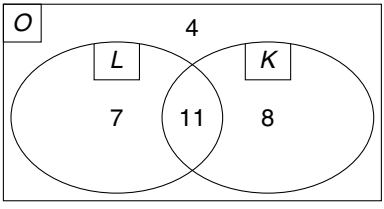


b) Balázs is kapott 20 négyszöget. Ő a húrtrapézokat és a paralelogrammákat jelölte meg, szintén 11 paralelogrammát talált és 7 húrtrapézt. Hány téglalap lehet a lapjai között, ha 5 négyszöget nem jelölt meg?



1.07. Egy osztály tanulói közül az ebédlőben néhányan a levest, néhányan a rakott krumplit ették meg. A halmazábra megfelelő részébe beírták, hogy hányan ették meg az egyes fogásokat, illetve hogy hányan nem ebédeltek az ebédlőben az osztály tanulói közül.

a) Hányan jártak ebbe az osztályba?
b) Hányan ettek rakott krumplit az osztály tanulói közül?
c) Hányan ettek levest?
d) Hányan ettek legalább egy fogást?
e) Hány tanuló evett csak egy fogást?
f) Hányan nem ettek levest?

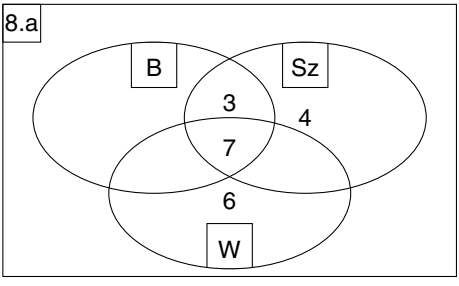


1.08. Egy 8. osztály tanulói (az elköltözőkön kívül) a város három középiskolájába adták be a felvételi kérelmüket. Az osztályfőnök a következő halmazábrát töltötte ki a létszám alapján. A halmazábrába beírtakon kívül tudjuk még a következőket:

(1) Két gyerek más városba költözik, így felvételi lapjukat csak oda küldték el.

(2) A Bolyaiba összesen 13-an jelentkeztek, közülük ketten csak oda adták be a felvételi lapjukat.

(3) 12-en voltak, akik a Weöresbe és a Szentgyörgyibe is jelentkeztek.



Fejezzük be a halmazábra kitöltését, majd válaszoljunk a következő kérdésekre!

a) Mennyi az osztály létszáma?

b) Hányan jelentkeztek a Weöresbe?

c) Hány tanuló nem jelentkezett a Szentgyörgyibe?

d) Hányan akarnak a Szentgyörgyi vagy a Weöres valamelyikébe menni?

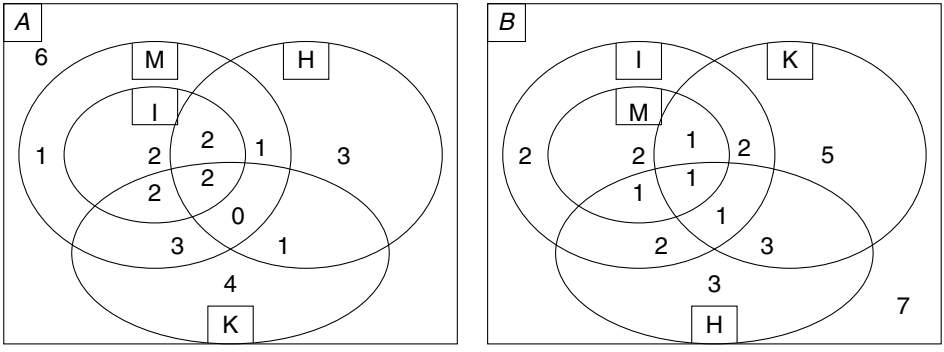
e) Hány tanuló jelentkezett a Bolyaiba és a Weöresbe is?

Tegyetek fel további kérdéseket a feladattal kapcsolatban, és válaszoljatok is rájuk!

1.09. Egy iskola 8. osztályos tanulói a következő szakkörökre járnak: informatika (I); matematika (M); honismeret (H); kosárlabda (K).

$A = \{8.\text{ a osztály tanulói}\}$; $B = \{8.\text{ b osztály tanulói}\}$

Ha alaphalmaznak valamelyik 8. osztályt választjuk, akkor az alábbi halmazábrákat rajzolhatjuk föl a szakkörösök létszáma alapján:



A kitöltött halmazábrák segítségével válaszolj a következő kérdésekre!

a) Hányan járnak az *A* és hányan a *B* osztályba?

b) Melyik szakkörre járnak legtöbben az *A* osztályból?

c) Melyik szakkörre járnak legtöbben a *B* osztályból?

d) Hányan járnak legalább két szakkörre az *A* osztályban?

e) Hányan járnak legfeljebb két szakkörre a *B* osztályban?

f) Hányan vannak az *A* osztályban, akik informatika vagy kosárlabda szakkörre járnak?

g) Hányan nem járnak a két osztályban összesen kosárlabdára a honismereti szakkörösök közül?

h) Melyik osztályban nem igaz, hogy minden informatika szakkörös jár matematika szakkörre?

1.10. Írd be a halmazábra minden részébe az alaphalmaz (**N**) néhány megfelelő elemét!

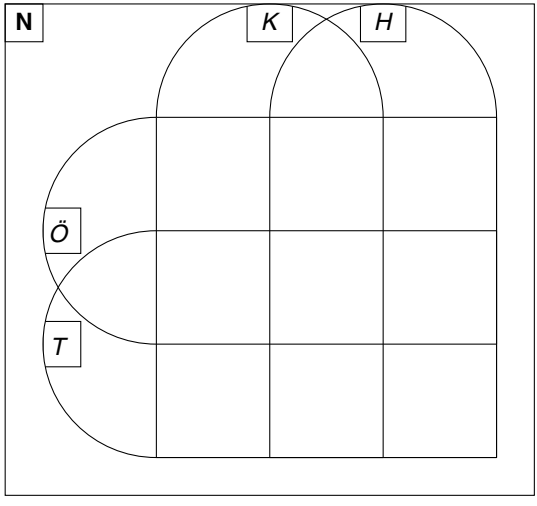
N = {Természetes számok}

K = {2-vel osztható számok}

H = {3-mal osztható számok}

Ö = {5-tel osztható számok}

T = {11-gyel osztható számok}



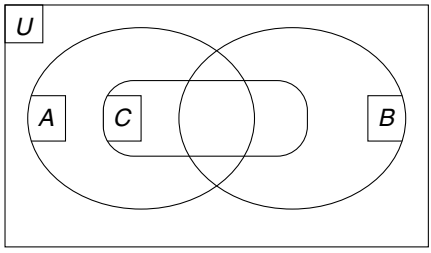
1.11. Adj meg olyan halmazokat, amelyek az alábbi módon szemléltethetők halmazábrával úgy, hogy ne legyen üres halmazrész!

a) $U = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$A = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$B = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$C = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$



b) $U = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

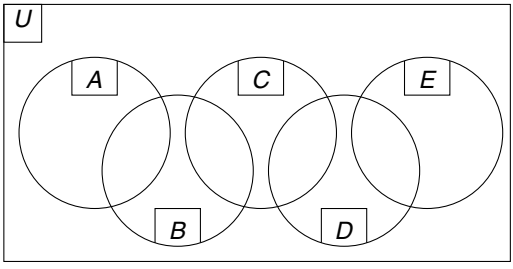
$A = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$B = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$C = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$D = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$E = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots \}$



1.12. Értelmezd és írd be a halmazábrába a hiányzó címkéket, majd az adott számokat! Feketítsd be az üres halmazt!

N = {Természetes számok}

Z = {Egész számok}

A = {Nemnegatív egész számok}

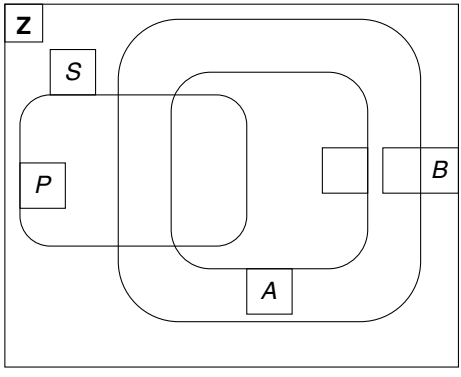
B = {Pozitív egész számok}

C = $\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

D = $\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

S = {Páros számok}

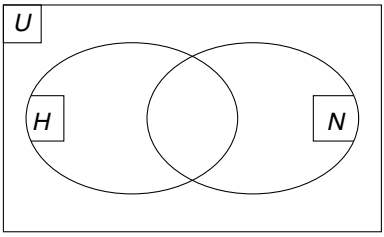
P = $\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$



$1001; \quad -76; \quad \frac{69}{23}; \quad 0; \quad -\frac{23}{1}; \quad \frac{12\,345\,678}{9}$

Műveletek halmazokkal

1.13. Az alaphalmaz:
$U = \{30\text{-nál kisebb természetes számok}\}$
Írd be a halmazábrába az U halmaz elemeit, ha
$H = \{3\text{-mal osztható számok}\}$;
$N = \{4\text{-gyel osztható számok}\}$!



Sorold föl

a) a H halmaz kiegészítő (komplementer) halmazának elemeit;

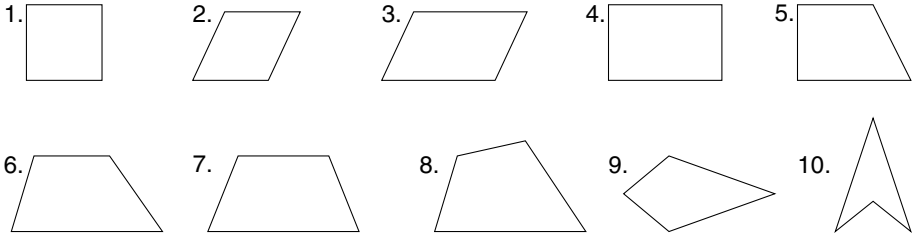
b) a H és az N halmaz metszetének (közös részének) elemeit;

c) a H és az N halmaz különbségének elemeit;

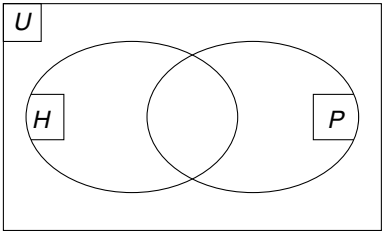
d) az N és a H halmaz különbségének elemeit;

e) a H és az N halmaz uniójának (egyesítésének) elemeit!

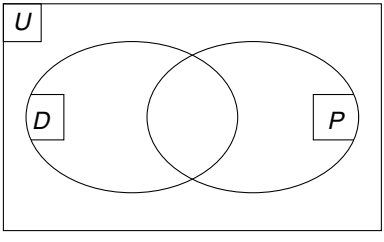
1.14. Az U alaphalmaz a következő négyszögek halmaza:



Írd be a halmazábrába az U halmaz elemeinek sorszámát, ha
$H = \{\text{Húrtrapézok}\}$; $P = \{\text{Paralelogrammák}\}$!
Sorold föl a következő halmazok elemeinek sorszámát!
$A = \{\text{Nem húrtrapézok}\}$
$B = \{\text{Paralelogrammák vagy húrtrapézok}\}$
$C = \{\text{Paralelogrammák és húrtrapézok}\}$
$D = \{\text{Paralelogrammák, de nem húrtrapézok}\}$
$E = \{\text{Sem paralelogrammák, sem húrtrapézok}\}$



1.15. Az U alaphalmaz az előző feladatban adott négyszögek halmaza. Írd be a halmazábrába az U halmaz elemeinek sorszámát, ha
$D = \{\text{Deltoidok}\}$; $P = \{\text{Paralelogrammák}\}$!
Sorold föl a következő halmazok elemeinek a sorszámát!
A: A D és a P halmaz különbsége
B: A D és a P halmaz metszetének a komplementere
C: a P és a D halmaz különbségének a komplementere
Fogalmazd meg, hogy mely négyszögek tartoznak ezekbe a halmazokba!



1.16. Végezd el a következő műveleteket!

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \setminus B$, ha

a) $A = \{\text{A hét napjai}\}$; $B = \{\text{vasárnap}\}$

b) $A = \{\text{Az osztály tanulói}\}$; $B = \{\text{Az osztályba járó lányok}\}$

c) $A = \{2;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 10\}$; $B = \{\text{20-nál kisebb, néggyel osztható számok}\}$

d) $A = \{\text{Paralelogrammák}\}$; $B = \{\text{A tanult síkidomok}\}$

1.17. Rajzolj (minden feladathoz új) halmazábrát! Az alaphalmaz $H = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leqq 30\}$; $A = \{\text{Páros számok}\}$; $B = \{\text{3-mal osztható számok}\}$; $C = \{\text{4-gyel osztható számok}\}$.

a) $A \cup B$; $A \cap B$; $B \setminus A$;

b) $A \cup C$; $A \cap C$; $C \setminus A$;

c) $B \cup C$; $B \cap C$; $C \setminus B$

Írd fel az eredményül kapott halmazok elemeit!

1.18. Írd fel a talált összefüggéseket jelekkel! Rajzolhatsz halmazábrát is!

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ páros}\}$; $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 3-mal}\}$;
$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 6-tal}\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ páros}\}$; $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 4-gyel}\}$;
$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 8-cal}\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 4-gyel}\}$; $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 5-tel}\}$;
$C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 25-tel}\}$; $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 100-zal}\}$;
$E = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 10-zel}\}$

1.19. *a)* Ábrázold a következő halmazokat!

$U = \{\text{36-nál nem nagyobb nemnegatív egész számok}\}$
$A = \{\text{2-vel nem osztható számok}\}$
$B = \{\text{3-mal nem osztható számok}\}$
$C = \{\text{6-tal nem osztható számok}\}$

b) Az előbbi ábrát egészítsd ki a következő halmazzal!
$D = \{\text{12-vel nem osztható számok}\}$

c) Válaszd ki, hogy az alábbi állítások közül melyik teljesül!

$A \subseteqq B$; $B \subseteqq A$; $A \subseteqq C$; $C \subseteqq A$; $A \cap B = C$; $C \subseteqq A \cap B$; $A \cup B \subseteqq C$;
$C \subseteqq A \cup B$; $A \cap C \subseteqq B$; $A \setminus B \subseteqq C$; $C \setminus A \subseteqq B$; $A \setminus C \subseteqq B$; $D \subseteqq C$;
$C \subseteqq D$; $D \setminus A \subseteqq B$; $D \setminus B \subseteqq A$

d) Add meg az alábbi halmazokat oszthatóság segítségével!

$\overline{A} = \{ \ldots\ldots\ldots\

1.20. Legyen

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 20 < x \leqq 100,\ x \text{ osztható 4-gyel}\}$;
$B = \{x \in \mathbf{N} \mid 10 < x \leqq 60,\ x \text{ osztható 5-tel}\}$;
$C = \{x \in \mathbf{N} \mid 60 < x \leqq 100,\ x \text{ osztható 25-tel}\}$.
Sorold fel a következő halmazok elemeit!

a) $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$;

b) $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$;

c) $A \setminus B$; $A \setminus C$; $B \setminus C$; $C \setminus A$; $C \setminus B$; $B \setminus A$;

d) $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$;

e) $(A \cup B) \cap C$; $(A \cup C) \cap B$; $(B \cup C) \cap A$

Igaz, hamis állítások

1.21. Melyik két állítás fejezi ki ugyanazt?

a) (1) Zoli tanul evezni. (2) Zoli nem tanul evezni.
(3) Nem igaz, hogy Zoli nem tanul evezni.

Melyik állítások fejezik ki ugyanazt?

b) (1) Egyetlen prímszám sem páros. (2) Minden prímszám páratlan.
(3) Van olyan prímszám, amelyik páratlan.

c) (1) Van olyan négyzet, amelyik nem téglalap.
(2) Van olyan téglalap, amelyik nem négyzet.
(3) Nem minden négyzet téglalap.

d) (1) A 9 osztható 3-mal. (2) A 3 osztható 9-cel.
(3) Nem igaz, hogy a 9 nem osztható 3-mal.
(4) A 3 nem osztható 9-cel. (5) Nem igaz, hogy a 3 osztható 9-cel.

e) (1) Nem minden vagera plézik. (2) Egyetlen vagera sem plézik.
(3) Van olyan vagera, amelyik nem plézik.
(4) Nincs olyan vagera, amelyik nem plézik.

1.22. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Van-e köztük olyan, amelyikről nem dönthető el, hogy igaz-e vagy hamis?

A: A derékszög háromszorosa nagyobb bármely tompaszögnél.
B: A derékszög és egy hegyesszög összege mindig tompaszög.
C: A γ hegyesszög nagyobb az egyenesszög negyedénél.
D: Bármely hegyesszög hatszorosa nagyobb a derékszögnél.
E: Az ε tompaszög fele hegyesszög.
F: φ homorúszög és ψ tompaszög különbsége homorúszög.
G: Ha egy mértani alakzatnak négy csúcsa van, akkor az négyszög.
H: A kör a legszabályosabb síkidom.

1.23. Először írd fel a következő állítások tagadását, majd állapítsd meg, hogy melyik igaz: az eredeti állítás, vagy a tagadása, vagy egyik sem!

A: Van olyan négyszög, amelyik paralelogramma.

B: Minden paralelogramma négyszög.

C: Minden 2-re végződő szám osztható 4-gyel.

D: Minden 3-mal osztható szám 4-re végződik.

E: Mindenki, aki szőke, kék szemű.

F: Van olyan kékszemű ember, aki szőke.

G: Minden 10-zel osztható szám osztható 2-vel és 5-tel.

H: A 100-zal osztható számok nem oszthatók 4-gyel és 25-tel.

I: A legkisebb négyjegyű szám osztható 8-cal.

J: A páros számok oszthatók 2-vel.

K: Ha egy szám számjegyeinek összege 6, akkor az osztható 3-mal.

L: A 6-tal osztható számok számjegyeinek összege páros szám.

1.24. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

M: Nincs 3-mal osztható páros szám.

N: A 8-cal osztható számok párosak.

O: A 2-nél nagyobb prímszámok páratlanok.

P: A négyzetszámok prímtényezőinek kitevője páros szám.

X: Ebben a feladatban két hamis állítás van.

1.25. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

Q: A 6-tal osztható számok 3-mal is oszthatók.

R: 5^3 osztható 8-cal.

S: A $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ négyzetszám.

T: A 2 az egyetlen páros prímszám.

V: Ebben a feladatban három igaz állítás van.

1.26. Először írd fel a következő állítások tagadását, majd állapítsd meg, hogy melyik igaz: az eredeti állítás vagy a tagadása (vagy egyik sem)!

A: Nincsenek hegyesszögű háromszögek.

B: Van olyan trapéz, amelyik nem négyszög.

C: Nem minden háromszög derékszögű.

D: Minden prímszám páratlan.

E: A 2 nem összetett szám.

F: Egyik négyszög sem trapéz.

1.27. Írd fel a következő állítások megfordítását! Az adott állítások, illetve megfordításaik közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Ha egy szám prímszám, akkor páratlan.

B: Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 6-tal.

C: Ha egy szám 0-ra végződik, akkor osztható 10-zel.

2. Számtan, számelmélet

Természetes számok

2.01. Hány eleme van a következő halmazoknak? Ábrázold számegyenesen!

A = {30-nál nem nagyobb, 10-nél nem kisebb egész számok}

B = {10-nél kisebb abszolútértékű számok}

C = {10-nél nagyobb, 12-nél kisebb páros egész számok}

D = {7-nél nem kisebb, 17-nél nem nagyobb abszolútértékű egész számok}

E = {3-nál nem kisebb, 2-nél nem nagyobb racionális számok}

F = {3-nál kisebb, 2-nél nagyobb racionális számok}

G = {1-nél nem nagyobb abszolútértékű racionális számok}

2.02. Az *a)–i)* pontban felsoroltak közül melyek

(1) természetes számok (2) egész számok (3) racionális számok?

a) 3; *b)* 12 000 *c)* 0; *d)* 1,5; *e)* $\frac{1}{3}$; *f)* -2; *g)* $-\frac{17}{23}$;

h) 3,010 020 003 (végtelen nem szakaszos tizedestört); *i)* végtelen sok;

Lehet-e megadni olyan halmazokat, amelyeknek annyi az elemszáma, amennyit az *a)–i)* pontban felsoroltunk?

2.03. Hány olyan természetes szám van, amely

a) kétjegyű; *b)* kétjegyű és számjegyei megegyeznek;

c) legfeljebb kétjegyű; *d)* kétjegyű és számjegyei különbözők?

2.04. Melyek azok a kétjegyű páros számok, amelyek

a) számjegyei is páros számok;

b) számjegyei összege is páros szám;

c) visszafelé olvasva is kétjegyű páros szám;

d) számjegyeinek szorzata 4-gyel osztható szám;

e) számjegyeinek szorzata négyzetszám?

2.05. Írd le római számírással

a) 400-tól 500-ig a kerek tízeseket;

b) 2500-tól 3500-ig a kerek százasokat;

c) 476; 1222; 1492; 1526; 1703; 1848; 1896; 1914; 1939; 1990; 2004

2.06. Keress olyan számokat, amelyeket arab számírással és római számírással leírva is három különböző jelből (számjegyből, betűből) állnak. (Például: 104 = CIV)

2.07. Rajzolj számegyenest, és ábrázold a következő egész számokat!

$x = 3$; $y = -5$; $p = x + y$; $q = -x$; $r = x - y$; $s = y - x$; $t = y + 5$; $u = |x|$; $v = -x - y$; $w = |y|$; $z = x \cdot y$

Az előbbi számok közül melyek a természetes számok?

2.08. Ábrázold számegyenesen a következő természetes számokat!

$A = \{$Azok a számok, amelyek 2-höz közelebb vannak, mint 8-hoz$\}$

$B = \{$Azok a számok, amelyek 2-nél nem kisebbek, 8-nál nem nagyobbak$\}$

$C = \{$Azok a számok, amelyek 2-nél nem nagyobbak és 8-nál kisebbek$\}$

$D = \{$Azok a számok, amelyek 2-nél kisebbek vagy 8-nál nem kisebbek$\}$

2.09. Hány természetes szám teljesíti a megadott egyenlőtlenséget?

a) $a \leqq 15$ *b)* $b \leqq 2 - b$ *c)* $10 < c < 70$ *d)* $13 \leqq d \leqq 29$

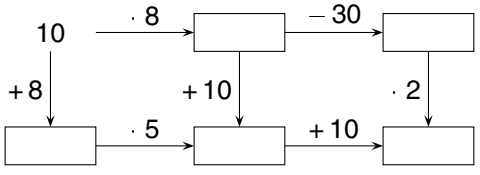
e) $e - 7 < 3$ *f)* $f + 4 \leqq 11$ *g)* $19 \leqq g < 20$ *h)* $19 < h \leqq 41$

2.10. Kerekítsd a következő számokat, a kerekített értékeket írd be a táblázatba!

	tízesre	százasra	ezresre	tízezresre	százezresre
5					
3					
9374					
154 454					
9 237 648					

2.11. Pótold a hiányzó számokat!

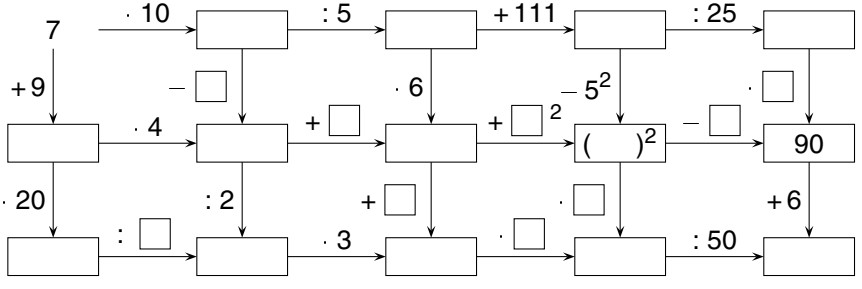
a)



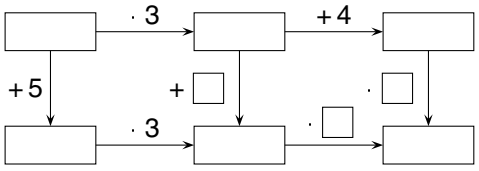
Megállapítható-e a következő egyenlőség? $(10 + 8) \cdot 5 = 10 \cdot 8 + 10$

Keress további egyenlőségeket a kitöltött ábra alapján!

b) Keress egyenlőségeket a kitöltött ábra alapján!



c) Töltsd ki többféleképpen is!



Keress egyenlőségeket a kitöltött ábra alapján! Van-e köztük olyan, amely bármilyen kiinduló érték esetén fennáll?

2.12. Pista és Robi autók és motorok modelljeit gyűjtik. Már 34 autó és 23 motor modelljét gyűjtötték össze, ebből 27 modell Pistáé. Robi inkább az autókért rajong, azokból ötször annyi van már neki, mint motorokból.

a) Hány modelljük van összesen a fiúknak?

b) Hány modellje van már Robinak?

c) Hány autómodellt gyűjtött már Robi?

d) Töltsd ki a mellékelt táblázatot!

	Autó	Motor	Össz.
Pista			
Robi			
Össz.			

2.13. Egy iskola két osztálya ugyanazt a matematika felmérést írta.

(1) A 28 fős 8. *a* osztályban az osztály negyede jelest kapott.

(2) A 30 fős 8. *b* osztályban ugyanennyien kaptak közepest.

(3) A két osztályban együttvéve ugyanannyian kaptak közepest, mint jót.

(4) A 8. *b*-ben eggyel több jó volt, mint a 8. *a*-ban közepes.

(5) A 8. *b*-ben annyi elégséges volt, mint ahány jó a 8. *a*-ban.

(6) A 8. *b*-ben annyi jeles volt, mint ahány elégséges a 8. *a*-ban.

(7) Összesen 3-an írtak elégtelen dolgozatot és 11-en elégségest.

Töltsd ki az alábbi táblázatot a megadott feltételek alapján!

	1	2	3	4	5	Összesen
8. *a*						
8. *b*						
Összesen						

2.14. Egy sporttagozatos iskolában három 8. osztály van, az *a* osztályba 28-an, a *b*-be 30-an, a *c*-be 27-en járnak. Pályázatok útján három nyári táborozási lehetőséget nyertek, de mivel mindegyik ugyanarra a hétre esik, egyszerre egy gyerek csak egy tábort választhat. Miután elosztották a helyeket, a következőket állapították meg:

(1) Az *a* osztályból ugyanannyian mentek gyalogtúrára, mint vízitúrára.

(2) A *b* osztályból minden táborba ugyanannyian jelentkeztek.

(3) A gyalogtúrázók harmada a *c* osztályból került ki, és a *c* osztályosok harmada gyalogtúrázik.

(4) Ugyanannyi jelentkező volt a kerékpáros és a vízitáborba.

a) Melyik táborba hányan jelentkeztek?

b) Ha minden tábort annak az osztályfőnöknek kell vezetnie, akinek az osztályából a legtöbben jelentkeztek, akkor a *b*-sek osztályfőnöke melyik tábor vezetője?

A gondolkodást segítheti az alábbi táblázat kitöltése.

	8. *a*	8. *b*	8. *c*	Összesen
K				
Gy				
V				
Összesen				

2.15. Egy baráti társaság kenutúrára indul. Mivel 12-en vannak, két lehetőség közül választhatnak: vagy 3 darab négyszemélyes, vagy 4 darab háromszemélyes kenut bérelnek.

A társaság tagjai közül csak Anna, Bea, Csaba és Dávid tudnak kormányozni. Erika és Emma ikrek, ők mindenképpen egy hajóban szeretnének bátyjukkal, Csabával ülni. Anna barátjával, Andrással; Bea Botonddal; Rita Rolanddal ülne. Gergő szeretne olyan hajóban evezni, ahol lány a kormányos. Kriszta kérése csupán az, hogy a lányokat és a fiúkat minél egyenletesebben osszák el a hajókon.

a) Teljesíthető-e az összes kérés, ha csak háromszemélyes kenukat bérelnek? Oldd meg a feladatot a táblázat segítségével!

	1. kenu	2. kenu	3. kenu	4. kenu
Lányok				
Fiúk				

b) Hányféleképpen teljesíthető az összes kérés, ha négyszemélyes kenukat bérelnek?

	1. kenu	2. kenu	3. kenu
Lányok			
Fiúk			

	1. kenu	2. kenu	3. kenu
Lányok			
Fiúk			

Használd a zsebszámológépet!

2.16. Végezd el a következő műveleteket „fejben”, majd a zsebszámológépeddel!

a) $17 + 5 \cdot 5$; $(17 + 5) \cdot 5$; 17 [+] 5 [×] 5 [=]

b) $36 - 20 : 4$; $(36 - 20) : 4$; 36 [−] 20 [÷] 4 [=]

c) $9 \cdot 3 + 10$; $9 \cdot (3 + 10)$; 9 [×] 3 [+] 10 [=]

d) $100 : 10 - 8$; $100 : (10 - 8)$; 100 [÷] 10 [−] 8 [=]

Mit tapasztaltál? Ismeri a géped a műveleti sorrendet?

2.17. Végezd el a következő műveleteket, keresd meg az egyenlőket (esetleg zsebszámológép segítségével)!

a) $p = 18 \cdot 49 : 63 : 14 : 20$; $q = 18 \cdot 49 : (63 \cdot 14 \cdot 20)$;

$r = 18 \cdot (49 : 63 : 14) \cdot 20$; $u = (18 \cdot 49 : 63) : (14 : 20)$;

$v = 18 \cdot 49 : (63 \cdot 14 : 20)$; $w = 18 \cdot (49 : 63) : (14 \cdot 20)$;

$x = 18 \cdot \{49 : [63 : (14 : 20)]\}$; $y = 18 \cdot [49 : (63 \cdot 14) : 20]$

b) $p = 18 + 49 - 63 - 14 - 20$; $q = 18 + 49 - (63 + 14 + 20)$;

$r = 18 + (49 - 63 - 14) + 20$; $u = (18 + 49 - 63) - (14 - 20)$;

$v = 18 + 49 - (63 + 14 - 20)$; $w = 18 + (49 - 63) - (14 + 20)$;

$x = 18 + \{49 - [63 - (14 - 20)]\}$; $y = 18 + [49 - (63 + 14) - 20]$

Hogyan írhatók fel a fenti kifejezések zárójelek nélkül? Mit vehetünk észre az *a)* és *b)* feladat megoldását összehasonlítva?

Hatványozás

2.18. Írd föl a szorzatokat hatványalakban! Számítsd ki az értéküket!

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ ..... *b)* $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$ .....

c) $1 \cdot 1 \cdot 1 =$ ..... *d)* $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$ .....

2.19. Számítsd ki a következő hatványok értékét!

a) 2^5;	5^2;	$(-2)^5$;	$(-5)^2$;	1^{15};	15^1;	$(-1)^{15}$
b) 10^0;	0^{10};	10^1;	1^{10};	10^2;	10^5;	10^{10}
c) $0{,}1^0$;	$0{,}1^1$;	$0{,}1^2$;	$0{,}1^3$;	$0{,}1^4$;	$0{,}1^7$;	$(-0{,}1)^7$
d) 2^3;	$(-2)^3$;	-2^3;	3^2;	$(-3)^2$;	-3^2;	$(-3)^0$

2.20. Írd be a keretbe a megfelelő kivetőket!

a) $2^{\square} = 8$; *b)* $13^{\square} = 1$; *c)* $7^{\square} = 7$;

d) $10^{\square} = 1000$; *e)* $10^{\square} = 1$; *f)* $10^{\square} = 10\,000\,000$;

g) $0{,}1^{\square} = 0{,}001$; *h)* $0{,}1^{\square} = 1$; *i)* $0{,}1^{\square} = 0{,}000\,000\,01$

2.21. Döntsd el, melyik nagyobb! Írd közéjük a megfelelő jelet!

a) $3^4 \square 4^3$;	$(-3)^4 \square (-4)^3$;	$-3^4 \square -4^3$;	$-3^4 \square (-4)^3$
b) $2^5 \square 2^3$;	$(-2)^5 \square (-2)^3$;	$2^4 \square 2^5$;	$(-2)^4 \square (-2)^5$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \square \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \square \left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \square \left(\frac{3}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \square \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

2.22. Írd hatványalakba a szorzatokat!

a) $2^5 \cdot 2^3$; *b)* $2 \cdot 2^3$; *c)* $3^5 \cdot 3^2 \cdot 3^4$; *d)* $5^4 \cdot 5 \cdot 4^2$;

e) $10 \cdot 10^2$; *f)* $x^5 \cdot x^2$; *g)* $y \cdot y^4 \cdot y$; *h)* $a^n \cdot a^m$

2.23. Írd hatványalakba a hányadosokat! Egyszerűsítsd a törteket!

a) $2^7 : 2^5$; *b)* $3^8 : 3$; *c)* $10^5 : 10^2$; *d)* $10^7 : 10^6$;

e) $8^6 : 8^6$; *f)* $k^5 : k^3$; *g)* $p^5 : p$; *h)* $a^n : a^m$ $(n \geqq m)$;

i) $\frac{5^4}{5^3}$; *j)* $\frac{156^6}{156^2}$; *k)* $\frac{1000^8}{1000^5}$; *l)* $\frac{q^{159}}{q^{150}}$;

m) $\frac{7^3}{7^8}$; *n)* $\frac{100^6}{100^5}$; *o)* $\frac{x^7}{x^{15}}$; *p)* $\frac{y^m}{y^n}$ $(m < n)$

2.24. Írd fel szorzatalakban a hatványokat!

a) $(2 \cdot 3)^6$; *b)* $(5 \cdot 10)^2$; *c)* $(2{,}5 \cdot 4)^6$; *d)* $(5 \cdot 3)^7$;

e) $(5 \cdot a)^3$; *f)* $(9 \cdot x)^5$; *g)* $(3 \cdot 2)^2$; *h)* $(3 \cdot a \cdot b)^5$

Írd fel hatványalakban az azonos kitevőjű hatványok szorzatát, majd számítsd ki az eredményt!

i) $2^5 \cdot 5^5$; *j)* $3^2 \cdot 10^2$; *k)* $2{,}5^3 \cdot 8^3$; *l)* $0{,}1^4 \cdot 10^4$;

m) $4^4 \cdot 25^4$; *n)* $0{,}5^7 \cdot 2^7$; *o)* $0^9 \cdot 13^9$; *p)* $(-2)^5 \cdot (-5)^5$

2.25. Írd fel törtalakban a hatványokat!

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; *b)* $\left(\frac{3}{8}\right)^3$; *c)* $\left(\frac{5}{9}\right)^4$; *d)* $\left(\frac{7}{5}\right)^5$; *e)* $\left(\frac{9}{10}\right)^6$; *f)* $\left(\frac{a}{b}\right)^m$

Írd fel hatványalakban az azonos kitevőjű hatványok hányadosát, majd számítsd ki az eredményt!

g) $\frac{8^5}{4^5}$; *h)* $\frac{3^4}{6^4}$; *i)* $\frac{10^3}{2^3}$; *j)* $\frac{25^2}{100^2}$; *k)* $\frac{27^5}{9^5}$; *l)* $\frac{70^2}{7^2}$

2.26. Végezd el a hatványok hatványozását!

a) $(2^3)^2$; *b)* $(3^5)^3$; *c)* $(a^2)^4$; *d)* $(9^5)^1$; *e)* $(7^0)^7$; *f)* $(x^k)^m$

2.27. Írd fel 10 hatványaként az eredményt!

a) $10\,000 \cdot 100\,000$; *b)* $100\,000\,000 \cdot 10\,000$; *c)* 1000^5;

d) $\frac{100\,000\,000}{10\,000}$; *e)* $\left(\frac{100\,000}{1000}\right)^4$; *f)* $(100^{10})^2$

2.28. Írd fel 0,1 hatványaként az eredményt!

a) $0{,}000\,001 \cdot 0{,}001$; *b)* $0{,}0001 : 0{,}001$; *c)* $(0{,}000\,01)^5$

2.29. Írd fel 0,1 vagy 10 hatványaként a szorzatokat és hányadosokat!

a) $0{,}1^3 \cdot 10^4$; *b)* $0{,}1^5 \cdot 10^5$; *c)* $10^7 \cdot 0{,}1^4$; *d)* $10^3 \cdot 0{,}1^0$;

e) $10^3 : 10^5$; *f)* $0{,}1^4 : 10$; *g)* $10 : 0{,}1$; *h)* $0{,}1^2 : 10^3$;

i) $0{,}1^5 \cdot 0{,}1^2$; *j)* $10^3 : 0{,}1^2$; *k)* $10^2 \cdot 0{,}1^2$; *l)* $0{,}1^2 : 0{,}1^5$

2.30. A hatványozás azonosságainak segítségével add meg a tört legegyszerűbb (tovább már nem egyszerűsíthető) alakját!

a) $\frac{3^5}{3^8}$; $\frac{2^{13}}{13^2 \cdot 2^7}$; $\frac{(5 \cdot 2)^3}{(2 \cdot 3)^4}$; $\frac{(7 \cdot 3)^5}{(7 \cdot 3)^3}$; $\frac{7^0 \cdot 7^4}{7^2 \cdot 7^2}$

b) $\frac{131^0}{11^1 \cdot 1^{13}}$; $\frac{10^5}{100^3}$; $\frac{4^3 \cdot 2^3}{8^4}$; $\frac{14^3 \cdot 5^4}{7^5 \cdot 10^3}$; $\frac{8^6 \cdot 9^4}{6^8 \cdot 4^9}$

c) $\frac{(2^3)^2 \cdot (7 \cdot 5)^5}{(5^2)^3 \cdot (17 \cdot 19)^0}$; $\frac{(2^3)^2 \cdot 6^2 \cdot 15^3}{12^3 \cdot (10^2)^2 \cdot (3^1)^1}$

Számok normálalakja

2.31. Írd be a hiányzó tényezőket!

$a = 8000 = 8 \cdot 10^{\square}$; $b = 900\,000 = 9 \cdot 10^{\square}$; $c = 7500 = 7{,}5 \cdot 10^{\square}$;

$d = 22 = 2{,}2 \cdot 10^{\square}$; $e = 54{,}3 = 5{,}43 \cdot 10^{\square}$; $f = 564{,}5 = 5{,}645 \cdot 10^{\square}$

2.32. Írd le a következő számok normálalakját!

$a = 5400$; $b = 65{,}46$; $c = 4\,000\,000$; $d = 6{,}465$;

$e = 62\,500$; $f = 654{,}6$; $g = 80\,000\,000$; $h = 1$

2.33. Írd le a normálalakjukkal adott számokat!

$a = 3{,}5 \cdot 10^4$; $b = 4{,}06 \cdot 10^1$; $c = 9{,}3 \cdot 10^0$; $d = 5{,}135 \cdot 10^2$

2.34. Helyezd el az egyenlőtlenségláncban a megadott számokat!

a) $1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < 10 < \ldots\ldots\ldots\ldots < 100 < \ldots\ldots\ldots\ldots < 1000 < \ldots\ldots\ldots\ldots$

$1{,}2 \cdot 10^3$; $1{,}02 \cdot 10^1$; $2{,}1 \cdot 10^0$; $3 \cdot 10^2$

b) $1000 < \ldots\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots < 10\,000 < \ldots\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3{,}2 \cdot 10^4$; $2{,}9 \cdot 10^3$; $1{,}11 \cdot 10^4$; $2{,}09 \cdot 10^3$

2.35. Keresd a párját!

a) $1{,}75 \cdot 10^4$; *b)* 1750; *c)* $0{,}0175 \cdot 10^8$; *d)* $17{,}5 \cdot 10^2$;

e) 175; *f)* $1750{,}0 \cdot 10^3$; *g)* $17{,}500 \cdot 10^0$; *h)* 175 000;

i) 17 500; *j)* $0{,}0175 \cdot 10^2$; *k)* $17{,}5 \cdot 10^4$; *l)* $0{,}175 \cdot 10^2$;

m) 1,75; *n)* $1{,}75 \cdot 10^2$

Válaszd ki, hogy a megadott számok közül melyek voltak normálalakban felírva! A többit írd föl normálalakban is!

2.36. Pótold a hiányzó számokat, válaszd ki a normálalakot!

a) $2\,923\,940 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^7 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^6 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^1 = 29{,}2394 \cdot 10^{\square}$

b) $28{,}4232 = 28{,}4232 \cdot 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^2 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^0 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^1$

c) $194\,000 = 194 \cdot 10^{\square} = 19{,}4 \cdot 10^{\square} = 19\,400{,}0 \cdot 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^5$

d) $6 = 0{,}006 \cdot 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots : 10^1 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^1 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^4 = \ldots\ldots\ldots \cdot 10^0$

2.37. Melyik nagyobb, hányszor akkora?

a) $888{,}8 \cdot 10^3$ vagy $8{,}888 \cdot 10^6$ *b)* $1{,}09 \cdot 10^4$ vagy $1{,}09 \cdot 10^6$

c) $93{,}722 \cdot 10^5$ vagy $9{,}3722 \cdot 10^4$ *d)* $0{,}000\,041 \cdot 10^{10}$ vagy $4{,}1 \cdot 10^5$

2.38. Írd a számokat normálalakba, majd végezd el a műveleteket! Az eredményt normálalakban add meg!

Például:

$56\,000 \cdot 4000 = (5{,}6 \cdot 10^4) \cdot (4 \cdot 10^3) = (5{,}6 \cdot 4) \cdot 10^{4+3} = 22{,}4 \cdot 10^7 = 2{,}24 \cdot 10^8$

$720\,000 : 16\,000 = (7{,}2 \cdot 10^5) : (1{,}6 \cdot 10^4) = (7{,}2 : 1{,}6) \cdot 10^{5-4} = 4{,}5 \cdot 10^1$

Zsebszámológéppel számolva:

	GOMBOK	KIÍRÁS
Szorzás:	5.6 EE 4	5.6 04
	×	
	4 EE 3	4 03
	=	2.24 08

	GOMBOK	KIÍRÁS
Osztás:	7.2 EE 5	7.2 05
	÷	
	1.6 EE 4	1.6 04
	=	4.5 01

a) $40\,000 \cdot 2\,500\,000$; *b)* $375\,000 \cdot 16\,000\,000$;

c) $640\,000 \cdot 625\,000$; *d)* $1250 \cdot 80\,000\,000$;

e) $500\,000\,000 \cdot 40\,000$; *f)* $280 \cdot 25\,000\,000$;

g) $6\,250\,000 : 2500$; *h)* $100\,000\,000 : 40\,000$

2.39. Írd a számokat normálalakba, majd végezd el a hatványozást! Az eredményt is normálalakban add meg!

Például: $30\,000^5 = (3 \cdot 10^4)^5 = 3^5 \cdot 10^{20} = 243 \cdot 10^{20} = 2{,}43 \cdot 10^{22}$

a) 200^6; *b)* 3000^4; *c)* $15\,000^2$; *d)* 1200^4

2.40. Számold ki a normálalak segítségével!

a) $123\,000 : 30 \cdot 20\,000$; *b)* $200^2 \cdot 11\,000$;

c) $185\,000 \cdot 40\,000 : 370$; *d)* $(2000)^4 : 4000^2$;

e) $(6000^2 + 20^6) : 100^3$; *f)* $20^5 \cdot 50^2$;

g) $(200^3)^2 : 4000^2 \cdot 250$; *h)* $(40^2)^2$

2.41. Írd a számokat normálalakba, majd zsebszámológép segítségével végezd el a hatványozást! Az eredményt is normálalakban add meg!

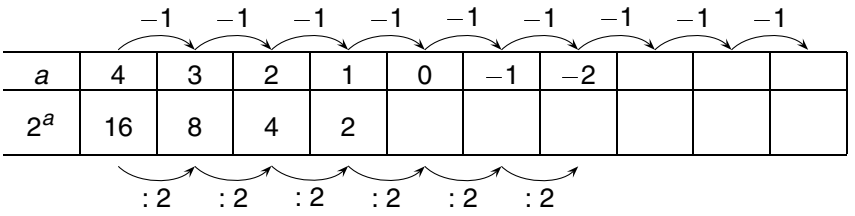
Például: $13\,000^7 = (1{,}3 \cdot 10^4)^7 = 1{,}3^7 \cdot 10^{28} = 6{,}274\,851\,7 \cdot 10^{28}$

a) 1570^3; *b)* $950\,000^4$; *c)* 290^5; *d)* $1{,}01^3$; *e)* $10{,}1^3$

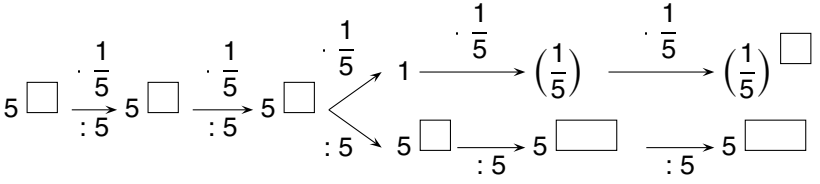
Állapítsd meg, hogy a géped segítségével közelítő vagy pontos értéket kaptál-e!

Negatív egész kitevőjű hatványok

2.42. Hogyan sorolhatnánk tovább a 2 hatványait?



2.43. Folytasd „kétféleképpen”!



2.44. Írd fel 3-nak egész kitevőjű hatványaként a következő számokat!

a) 27; *b)* 3; *c)* 9; *d)* 81; *e)* 1;

f) $\frac{1}{27}$; *g)* $\frac{1}{3}$; *h)* $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; *i)* $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; *j)* $\frac{1}{243}$

2.45. Írd be a keretbe a hiányzó kitevőt!

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4^{\square}$; *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\square}$; *c)* $\frac{1}{5^3} = 5^{\square}$

2.46. Számítsd ki többféleképpen az eredményt!

a) $3^5 \cdot 3^{-3}$; *b)* $4^{-2} \cdot 4^{-3}$; *c)* $5^{-1} \cdot 5^3$; *d)* $7^2 \cdot 7^{-4}$;

e) $3^5 : 3^3$; *f)* $4^{-2} : 4^3$; *g)* $5^{-1} : 5^{-3}$; *h)* $7^2 : 7^4$;

i) $\left(\frac{1}{2^5}\right)^2$; *j)* $(2^{-3})^4$; *k)* $\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3}$; *l)* $(5^{-1})^{-2}$

2.47. Írd fel 10-nek egész kitevőjű hatványaként a következő számokat!

a) 1000; *b)* 0,01; *c)* 100 000; *d)* 0,000 01; *e)* 1

2.48. Írd be a hiányzó kitevőket!

$a = 0{,}6 = 6 \cdot 10^{\square}$; $b = 0{,}005 = 5 \cdot 10^{\square}$;

$c = 0{,}045\,00 = 4{,}5 \cdot 10^{\square}$; $d = 0{,}07 = 7 \cdot 10^{\square}$;

$e = 0{,}055 = 5{,}5 \cdot 10^{\square}$; $f = 0{,}000\,000\,02 = 2 \cdot 10^{\square}$

2.49. Írd le a normálalakjaikkal adott számokat!

$a = 5 \cdot 10^{-6}$; $b = 3{,}4 \cdot 10^{-1}$; $c = 2{,}456 \cdot 10^{-2}$; $d = 5{,}45 \cdot 10^{-7}$

2.50. Írd a számokat normálalakba, majd végezd el a műveleteket! Az eredményeket is normálalakban add meg!

Például:

$0{,}024 \cdot 50\,000 = 2{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{4} = 12 \cdot 10^{-2+4} = 1{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{2} = 1{,}2 \cdot 10^{3}$

$6900 : 0{,}000\,23 = 6{,}9 \cdot 10^{3} : (2{,}2 \cdot 10^{-4}) = 3 \cdot 10^{3-(-4)} = 3 \cdot 10^{7}$

a) $3600 \cdot 0{,}000\,005$; *b)* $0{,}024 \cdot 0{,}003$; *c)* $0{,}0015 \cdot 50\,000$;

d) $540 : 9\,000\,000$; *e)* $360 : 0{,}000\,09$; *f)* $0{,}56 : 0{,}0014$;

g) $5500 \cdot 0{,}004 : 11\,000$; *h)* $0{,}72 : 0{,}000\,000\,6 : 5000$;

i) $63 : 0{,}000\,14 \cdot 0{,}04$; *j)* $0{,}0018 : 0{,}000\,009 : 0{,}25$

2.51. Írd normálalakba a számokat, azután végezd el a hatványozást! Az eredményt is normálalakban add meg!

$a = 20^5$; $b = 0{,}2^5$; $c = 2000^5$; $d = 0{,}002^5$; $e = 0{,}000\,02^5$;

$f = 300^3$; $g = 0{,}03^3$; $h = 30\,000^3$; $i = 0{,}0003^3$; $j = 0{,}3^3$

Számelmélet

2.52. A következő számok közül húzd alá a prímszámokat, karikázd be az összetett számokat!

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;

10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19;

20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29

Az előző számok közül melyek azok, amelyeknek pontosan két osztójuk van?

2.53. 5436; 7350; 9648; 3224; 5618; 7575; 6500

Az előző számok közül melyek oszthatók

a) 4-gyel; *b)* 8-cal; *c)* 3-mal; *d)* 9-cel; *e)* 20-szal;

f) 25-tel; *g)* 12-vel; *h)* 36-tal; *i)* 75-tel; *j)* 72-vel?

2.54. *a)* Írd le kifejezéssel (általános alakban):

(1) páros szám; (2) páratlan szám!

b) Bizonyítsd be, hogy két páratlan szám

(1) összege páros szám; (2) szorzata páratlan szám!

2.55. $A = \{1;\ 2;\ 5;\ 6\}$. Írd fel az A elemeiből mint számjegyekből képezhető (minden elem maximum egyszer szerepelhet egy számban) összes

a) páros számot; *b)* 3-mal osztható számot;

c) 5-tel osztható számot; *d)* 4-gyel osztható számot!

2.56. *a)* Sorold fel azokat a 3-mal osztható kétjegyű számokat, amelyekben a számjegyek összege páros!

b) Sorold fel a 6-tal osztható kétjegyű számokat!

c) Melyek az *a)* és *b)* feladat megoldáshalmaza metszetének elemei?

d) A 2-vel és 5-tel osztható számok mivel oszthatók még?

2.57. Bontsd prímtényezőkre a következő számokat!

$a = 100$; $b = 10\,000$; $c = 20\,000$; $d = 60\,000$; $e = 3000$; $f = 600$;
$g = 42$; $h = 84$; $i = 168$; $j = 1680$; $k = 8400$; $l = 2100$;
$u = 504$; $v = 650$; $w = 512$; $x = 493$; $y = 283$; $z = 999$

2.58. *a)* Prímtényezőkre bontás után állapítsd meg az összes osztóját

(1) 96-nak; (2) 144-nek; (3) 256-nak; (4) 300-nak!

b) Osztópárok segítségével keresd meg az összes osztóját

(1) 36-nak; (2) 150-nek; (3) 1024-nek; (4) 2340-nek!

c) Melyik prímszám: 121; 169; 269; 289; 307; 329?

2.59. *a)* Mely számjegyek írhatók a $\square$ helyére úgy, hogy a 734$\square$6 osztható legyen

(1) 2-vel; (2) 3-mal; (3) 4-gyel; (4) 5-tel?

b) Mely számokkal osztható

(1) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; (2) $2^3 \cdot 7$; (3) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$; (4) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$?

c) Mely számok írhatók x, y, illetve z helyére úgy, hogy a szám osztható legyen 100-zal:

(1) $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$; (2) $3^x \cdot 4 \cdot 5^y$; (3) $2^x \cdot 5^y \cdot 11^z$; (4) $15 \cdot 2^x \cdot 10^y \cdot 5 \cdot 9^1$?

d) Mely számok írhatók a $3a + b$ kifejezésben a és b helyére, hogy a keletkező szám

(1) osztható legyen 3-mal; (2) 3-as maradéka 1 legyen;

(3) 3-as maradéka 2 legyen?

2.60. Határozd meg a következő számok törzstényezős alakját!

$a = 72$; $b = 5400$

Az a és a b számok törzstényezős alakjának segítségével határozd meg a következő számok törzstényezős alakját is!

$c = ab$; $d = \frac{b}{a}$; $e = b^2$; $f = a^2b^3$; $g = \frac{b^3}{a^2}$

2.61. A törzstényezőkre bontás segítségével ésszerűsíthető a számítás.

a) Egy kocka térfogata 1728 cm^3. Mekkorák a kocka élei?

b) Egy kocka felszíne 7350 cm^2. Mekkorák a kocka élei?

c) Hányféle téglalap rakható ki 140 db egybevágó négyzetlapból?

d) Hányféle téglatest építhető 875 db egybevágó kis kockából?

2.62. Prímtényezős alak segítségével határozd meg a számpárok legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját!

a) 128; 512; *b)* 125; 625; *c)* 540; 360;

d) 200; 240; *e)* 729; 243; *f)* 640; 384

2.63. Számítsd ki a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst!

a) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$; *b)* $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$; $2^3 \cdot 3^4$;

c) $3^4 \cdot 10^3$; $7^2 \cdot 10^3$; *d)* $5^3 \cdot 7^5 \cdot 13$; $3^5 \cdot 5^7 \cdot 11$

2.64. Válaszd ki a következő számok közül a relatív prímeket!

a) 48; 49; 64; *b)* 16; 125; 27; *c)* 169; 39; 65

2.65. Egy állatkertben a teknőst minden negyedik, a siklót minden hatodik nap etetik. Most vasárnap mindkettő kapott enni.

a) Legközelebb hány nap múlva etetik együtt a két állatot?

b) Legközelebb hány hét múlva etetik vasárnap együtt a két állatot?

2.66. Gergő születésnapja az idén vasárnapra esik. Melyik évben lesz ismét vasárnap Gergő születésnapja?

2.67. Norbert (nagyszüleivel és keresztszüleivel egyetértésben) szilveszterkor a következő év hétvégéire az alábbi programokat tervezi:
Minden 5. hétvégén a keresztszüleit, minden 4. hétvégén az apai, minden 3. hétvégén az anyai nagyszüleit látogatja meg. A többi hétvégén a barátaival szervez programot. Páros hétvégeken gyógyfürdőbe kell mennie.

a) Hányszor megy Norbert a következő évben gyógyfürdőbe?

b) Hány olyan hétvégén látogatja meg Norbert az apai nagyszüleit, amikor gyógyfürdőbe is kell mennie?

c) Hány olyan hétvégén megy gyógyfürdőbe, amikor az anyai nagyszüleit és a keresztszüleit is meglátogatja?

d) Hány hétvégén látogatja meg Norbert apai és anyai nagyszüleit és keresztszüleit is?

e) Hány olyan hétvége lesz, amelyen Norbertnek nem kell gyógyfürdőbe mennie, és a barátaival szervezhet programot?

f) Milyen programjai lesznek Norbertnek a 15. hétvégére eső húsvétkor és (a hét héttel későbbi) pünkösdkor?

2.68. Három barát együtt jár sportolni, de más-más (egyenletes) tempóban futnak, úsznak és kerékpároznak.
Ugyanonnan egyszerre indulnak el, és addig mennek, amíg először érnek egyszerre ugyanarra helyre.

a) Bálint fut leggyorsabban, ő 10 perc alatt kerüli meg a parkot, Dávid a leglassabb, 15 percenként ér vissza az indulási ponthoz. Mennyi ideig tart Gábor egy köre, ha Bálint éppen két körrel fut többet Dávidnál?

b) Az uszodában egy hosszt Gábor 60 s, Bálint 55 s és Dávid 50 s alatt úszik. Mennyi ideig úsznak, és a medence melyik végén szállnak ki a fiúk?

c) A tó körül Dávid 28 perc, Gábor 21 perc alatt kerékpározik egy kört, és mindhárman 2 óra 48 perc múlva találkoznak újból. Mennyi idő alatt kerülheti meg Bálint a tavat?

2.69. Egy kertészetben három egymás melletti sorban különböző típusú csemetéket ültettek. Az első sorban lévő csemeték mindig 7 deciméterenként, a második sorban 5 deciméterenként, a harmadik sorban 6 deciméterenként követik egymást, és a sor elején az első csemetéket egy vonalba ültették. Rózsa megállt a második sor mentén egy csemeténél, és megállapította, hogy ha egy lépést a 2. sor mentén előrelép, a 3. sor egyik csemetéjével, ha hátralép, az 1. sor egyik csemetéjével áll egy vonalban.

Válaszolj a következő kérdésekre, ha Rózsa lépéseinek hossza

(1) 40 cm; (2) 50 cm; (3) 60 cm!

a) Hány méterre lesz legközelebb ugyanilyen elhelyezkedésben három csemete?

b) Ha Rózsa a sor eleje után az első ilyen helyen áll, akkor milyen messze van a sor elejétől?

c) Milyen hosszú a sor, ha Rózsa a sor elejétől számítva a harmadik ilyen helyen éppen a sorok végénél állt meg? Hány csemete van ekkor a középső sorban?

2.70. A prímtényezős felbontás segítségével egyszerűsítsd a következő törteket!

a) $\frac{1350}{720}$; *b)* $\frac{729}{1296}$; *c)* $\frac{12\,800}{5607}$; *d)* $\frac{2250}{288}$

A prímtényezős felbontást gyorsítja, ha felidézed a 2-vel, 3-mal, 5-tel való oszthatóság szabályait!

Egész számok

2.71. Végezd el a műveleteket!

a)	$17 + 38$;	$141 - 93$;	$33 - 72$;	$24 - 24$
b)	$991 + 883$;	$(-173) + (-859)$;	$(-74) + 101$;	$33 + (-56)$
c)	$13 - 291$;	$(-291) - 13$;	$(-291) - (-13)$;	$13 - (-291)$
d)	$83 \cdot 64$;	$9199 \cdot 9$;	$(-111) \cdot 84$;	$(-13) \cdot (-77)$
e)	$(-1001) : 13$;	$10\,001 : (-73)$;	$(-6666) : (-11)$;	$65 : 130$

2.72. Válaszd ki az igaz állításokat! A hamis állításokra írj ellenpéldát!

A: Bármely két természetes szám összege is természetes szám. .....

B: Bármely két természetes szám szorzata is természetes szám. .....

C: Bármely természetes szám felírható két természetes szám összegeként. .....

D: Bármely két természetes szám különbsége is természetes szám. .....

E: Bármely egész szám felírható két természetes szám összegeként. .....

F: Bármely két természetes szám különbsége egész szám. .....

G: Bármely egész szám felírható két természetes szám különbségeként. .....

H: Bármely két egész szám összege is egész szám. .....

I: Bármely két egész szám különbsége természetes szám. .....

J: Bármely két egész szám szorzata természetes szám. .....

K: Bármely két egész számnak létezik hányadosa, és az egész szám. .....

2.73. Ismételjük át a műveleti sorrendről tanultakat! Számítsuk ki!

a) $68 - 48 \cdot 25 + 15$; $(68 - 48) \cdot 25 + 15$; $(68 - 48) \cdot (25 + 15)$;

b) $2 + 4^2$; $(2 + 4)^2$; *c)* $2 \cdot 4^2$; $(2 \cdot 4)^2$; *d)* $2 - 4^2$; $(2 - 4)^2$;

e) $2 : 4^2$; $(2 : 4)^2$; *f)* 2^{4^2}; $(2^4)^2$; $(2^2)^4$; 2^{2^4};

g) -10^{2^3}; $(-10)^{2^3}$; $(-10^2)^3$; $[(-10)^2]^3$; $(-10)^{3^2}$; -10^{3^2};

h) $72 : [12 - (4 + 2) \cdot 3]$; $72 : (12 - 4) + 2 \cdot 3$; $72 : [12 - (4 + 2 \cdot 3)]$

2.74. *a)* $(7 - 64 : 2) : [-7 + 48 : (19 - 31) + 4^2]^2 =$

b) $[-4 - (-18) : (-3)^2] \cdot [-4 - (-18) : (-3)]^2 =$

c) $\{[-7 + (-3) - (4 - 15)] - [77 - 13 : (8 + 11 - 6)]\} \cdot (-11 + 9)^3 =$

2.75. *a)* $-18 - \{-37 + 2 \cdot [-42 - (6 - 11) - (9 - 26) \cdot 2] + (4 - 11) \cdot [(-3) \cdot 2]\} \cdot 4 =$

b) $-168 : (12 - 3 \cdot 12) + [(-2) \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-2)^3] : [7 - (-2)] =$

Racionális és irracionális számok

2.76. Mekkora része, hányszorosa?

a) 2 az 1-nek; *b)* 1 a 3-nak; *c)* 10 a 100-nak; *d)* 50-nek a 20;

e) 9-nek a 3; *f)* 14 a 28-nak; *g)* 5-nek a 7; *h)* 5 a 7-nek;

i) 18 a 6-nak; *j)* 6-nak a 18; *k)* 9 a 2-nek; *l)* 2 a 9-nek;

m) 2-nek a 9; *n)* 9-nek a 2; *o)* 0 a 8-nak; *p)* 0-nak a 8

2.77. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi törteket!

a) $\frac{1}{9}$; $\frac{4}{9}$; $-\frac{13}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{1}$; $-\frac{4}{9}$; $\frac{81}{9}$; $\frac{99}{9}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{0}{9}$

b) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{4}{1}$

2.78. Írd át az alábbi törteket más alakba, válaszd ki a legegyszerűbb alakot!

a) $\frac{36}{24} = \frac{9}{-} = \frac{}{18} = \frac{6}{-} = \frac{3}{-} = \frac{12}{-} = \frac{}{20} = \frac{}{100}$

b) $\frac{36}{84} = \frac{24}{-} = \frac{}{7} = \frac{}{28} = \frac{}{168} = \frac{}{42} = \frac{6}{-} = \frac{84}{-}$

2.79. Írd föl a következő törteket a lehető legegyszerűbb alakban!

a) $\frac{54}{81}$; *b)* $\frac{42}{49}$; *c)* $\frac{64}{36}$; *d)* $\frac{13}{65}$; *e)* $\frac{111}{37}$; *f)* $\frac{1280}{600}$

2.80. Írd át vegyesszám alakba!

a) $\frac{19}{8}$; *b)* $\frac{271}{26}$; *c)* $\frac{33}{4}$; *d)* $\frac{7}{6}$; *e)* $\frac{24}{3}$; *f)* $\frac{131}{9}$

2.81. Válaszd ki a nagyobbat, segíthet a vegyesszám alak!

a) $\frac{28}{5} \square \frac{29}{6}$; $\frac{13}{4} \square \frac{19}{6}$; $\frac{23}{8} \square \frac{17}{3}$

b) $4{,}7 \square \frac{14}{3}$; $33{,}\dot{3} \square \frac{100}{3}$; $1\frac{6}{7} \square \frac{90}{49}$

c) $-6\frac{4}{5} \square -6\frac{7}{9}$; $-\frac{17}{13} \square -\frac{13}{17}$; $-\frac{36}{11} \square -\frac{33}{8}$

2.82. Állítsd csökkenő sorrendbe a következő számokat!

a) $\frac{17}{17}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{13}{7}$; $-\frac{5}{6}$; $-\frac{9}{3}$; 0; *b)* $\frac{6}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{14}{13}$; $\frac{14}{12}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{13}{14}$;

c) $\frac{3}{7}$; $\frac{9200}{23\,000}$; $\frac{31}{80}$; $\frac{6}{13}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{8}{19}$; *d)* $-\frac{7}{8}$; $\frac{5}{4}$; $-\frac{7}{16}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{13}{8}$; $\frac{13}{6}$

2.83. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{1}{8} \cdot 8$; *b)* $\frac{3}{4} \cdot 7$; *c)* $\frac{4}{9} \cdot 3$; *d)* $\frac{18}{7} : 2$; *e)* $\frac{5}{11} : 3$; *f)* $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}$;

g) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9}$; *h)* $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$; *i)* $\frac{3}{2} + 2$; *j)* $\frac{3}{2} + \frac{4}{3}$; *k)* $\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$; *l)* $\frac{10}{7} - \frac{9}{6}$;

m) $\frac{12}{35} + \frac{8}{21}$; *n)* $\frac{4}{7} : \frac{2}{7}$; *o)* $2 : \frac{1}{8}$; *p)* $\frac{2}{21} : \frac{1}{7}$; *q)* $\frac{10}{21} : \frac{2}{7}$; *r)* $\frac{13}{7} : \frac{7}{13}$

2.84. *a)* $\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\right) \cdot 8$; *b)* $\left(\frac{18}{24} - \frac{12}{36}\right) \cdot \frac{6}{10}$; *c)* $\left(\frac{24}{50} - \frac{36}{45}\right) : \frac{72}{75}$;

d) $\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3}\right)$; *e)* $\left(\frac{7}{4} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{7}{4}\right)$; *f)* $\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{7}\right)$;

g) $\left(\frac{5}{8} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{5}{36} - \frac{13}{18}\right)$; *h)* $\left(\frac{10}{15} - \frac{30}{18}\right) : \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{5}\right)$; *i)* $\left(\frac{72}{45} + \frac{20}{25}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{36}{20}\right)$;

j) $\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}\right)$; *k)* $\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)^2$; *l)* $\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right)^2$

2.85. Írd át a következő törteket tizedestört alakba!

a) $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{17}{10}$; $\frac{173}{100}$; $\frac{1983}{100}$; $\frac{35}{1000}$; *b)* $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{5}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{93}{20}$; $\frac{384}{200}$;

c) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{17}{4}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{43}{40}$; $\frac{843}{400}$; *d)* $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$;

e) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{73}{22}$; $\frac{11}{111}$

2.86. Végezd el írásban a következő műveleteket, ellenőrizd számológéppel!

a) $3{,}7 + 4{,}36$; *b)* $52{,}16 - 73{,}9$; *c)* $14{,}6 \cdot 5$; *d)* $3{,}24 \cdot 1{,}16$;

e) $1{,}1^3$; *f)* $(-2{,}02)^2$; *g)* $9{,}81 : 9$; *h)* $4 : 1{,}25$;

i) $0{,}26 + 0{,}03 \cdot \{-14{,}5 + 2{,}7 \cdot [6{,}5 + 0{,}2 \cdot (0{,}3 - 7{,}13)] - 8\}$;

j) $(-6{,}3 - 11{,}011) : (1{,}2 - 2) \cdot (13{,}001 - 17{,}563 + 4{,}562)$

2.87. Kerekítsd a következő számokat, a kerekített értékeket írd be a táblázatba!

	százasra	tízesre	egyesre	tizedre	századra
5732					
16 574,9					
5638,73					
563,873					
56,3873					
90,909					
−49,825					
−54,5					

2.88. Írd be a hiányzó címkéket és az adott számokat a halmazábrába!

T = {Törtalakba nem írható számok}

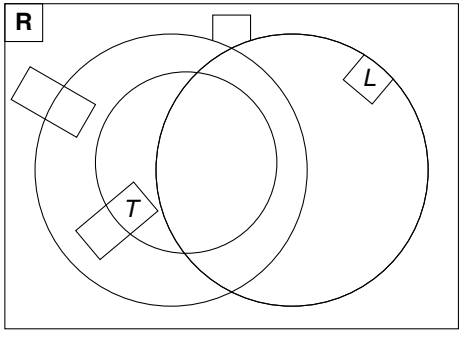
F = {Nem egész számok}

L = {Negatív számok}

W = {Nem természetes számok}

N, **Q**, **Z** a szokásos halmazjelölések.

Mely halmazok egyesítettje (uniója) a W halmaz?



$7{,}0$; -5; $-\frac{12}{3}$; $0{,}\dot{5}$; $-0{,}2\dot{3}$; $\frac{57}{19}$; 0;

$-0{,}11010010001$ (az 1-esek között mindig növekszik eggyel a 0-k száma)

2.89. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

A: Minden tizedestört alakban írható szám racionális szám.

B: Minden racionális szám felírható véges tizedestört, illetve végtelen szakaszos tizedestört alakban.

C: Van olyan véges tizedestört alakban írható szám, amely egész szám.

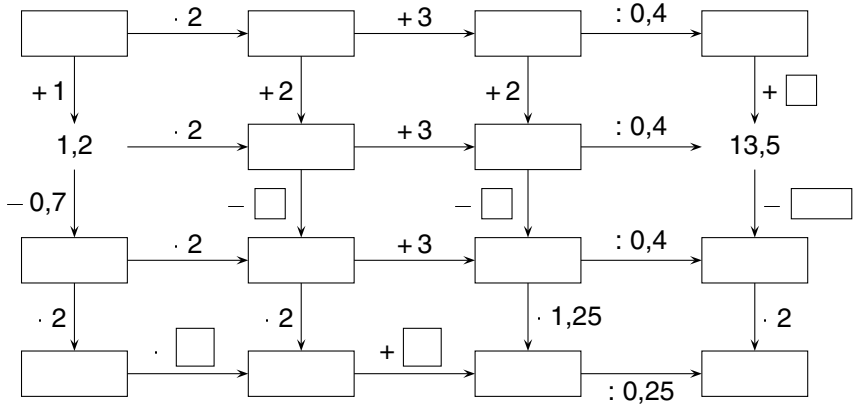
D: Minden végtelen nem szakaszos tizedestört alakban írható szám irracionális szám.

E: Minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként.

F: Minden egész szám felírható két racionális szám hányadosaként.

G: Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként.

2.90. Pótold a hiányzó számokat!



2.91. A következő feladatokban feltételezzük, hogy minden munkás mindig ugyanakkora teljesítményt nyújt.

a) Ha 3 munkás 4 óra alatt 240 m^2 kertet ás fel, akkor 2 munkás 5 óra alatt mekkora kertet képes felásni?

b) Ha 12 munkásnak napi 10 óra munkával 16 napig tart egy építkezés, akkor 10 munkásnak napi 8 órai munkával hány napig tart?

c) Ha 3 munkás 4 óra alatt ás fel egy kertet, akkor 2 munkás hány óra alatt ásná fel ugyanazt a kertet?

2.92. Péter, Robi és Samu testvérek. Édesanyjuk és nagymamájuk palacsintát süt. Édesanyjuk kétpercenként, nagymamájuk másfél percenként készít el egy palacsintát. Amikor 42 palacsinta elkészült, a fiúk palacsintaevő-versenybe kezdtek. Péternek 40 másodpercre volt szüksége egy-egy palacsinta elfogyasztásához, Robinak 45 másodpercre, Samunak 60 másodpercre.

12 perc múlva abbahagyták a versenyzést és a palacsintasütést is.

a) Ki ette meg a legtöbb palacsintát?

b) Hány palacsinta maradt meg a verseny végére?

c) Hány palacsintát sütött nagymama?

d) Hogyan aránylik egymáshoz az édesanya és a nagymama által sütött palacsinták száma?

2.93. Egy iskola felső tagozatosai számára papírgyűjtést szerveztek. Az eredményt a következő táblázat foglalja össze:

Osztály	5.	6.	7.	8.	Összesített
Létszám	26	25	24	30	
Átlag (kg)	67,5	80,8	88,5	86,7	
Összesen					

Azoknak az osztályoknak, amelyekben az egy tanulóra jutó átlag a felső tagozatos átlag fölött van, az igazgató egy jutalomnapot engedélyez az osztálykiránduláshoz.

a) Melyik osztály kap jutalomnapot?

b) Melyik osztály gyűjtötte a legtöbb papírt?

c) Hogyan alakult volna a táblázat, ha a 6. osztály még 5 kg papírt gyűjt?

2.94. Egy autós az autópályán 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel és 7,2 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$ átlagos fogyasztással halad, majd letérve az autópályáról 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel és 5,4 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$ átlagos fogyasztással teszi meg a hátralévő utat.

Mennyi az átlagos fogyasztása, ha

a) 150 km-t megy autópályán és 150 km-t közúton;

b) 100 km-t megy autópályán és 150 km-t közúton;

c) 1 órát megy autópályán és 1 órát közúton;

d) 1,5 órát megy autópályán és 1,5 órát közúton;

e) 1 órát megy autópályán és 1,5 órát közúton;

f) 1,5 órát megy autópályán és 1 órát közúton;

g) 100 percet megy autópályán és 100 km-t közúton?

A fenti esetekben mennyi az autó átlagsebessége?

2.95. Egy 5 km hosszú versenyautó-pályán két autót figyelünk. Meghatározható-e, hogy mikor és hol fogja leköröznie az első autó a másodikat, ha tudjuk, hogy

a) az első autó sebessége 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb;

b) az első autó minden körben 200 m-rel növeli az előnyét;

c) az első autó minden kört 10 másodperccel rövidebb idő alatt tesz meg, mint a második?

2.96. *a)* Egy üzletben a 150 grammos csomagolású joghurt ára 0,45 €. Ugyanaz a joghurt 350 grammos csomagolásban 1,05 €-ba kerül. Melyiket éri meg jobban megvásárolnod?

b) 1 liter tej ára 0,79 €, egy 25 literes kanna tej ára 12 €. Melyiket éri meg jobban megvásárolnod? Magyarázd meg döntésedet!

c) Egy zöldségesnél a 2,5 kg-os zacskó krumpli 1 €-ba kerül. Ugyanaz a krumpli 35 kg-os zsákkal 7,35 €-ba. Melyikből érdemes vennie

(1) Annáéknak, ha télire akarnak krumplit tárolni;

(2) Csabának, ha három barátjával a hétvégi túrán bográcsgulyást kíván főzni;

(3) Bélának, ha 20 kg krumplira van szüksége?

2.97. Egy üzletben egy sampon 2,15 €, a hozzá tartozó hajbalzsam 1,75 €. Akciósan egy sampon és egy hajbalzsam összecsomagolva 2,60 €, de a termék szavatossága már csak egy évre szól.

a) Ha Bea is és Cili is 12 sampont és 18 hajbalzsamot használ el évente, akkor akció nélkül mennyibe kerülne, ha egy évre előre megvásárolnák ezt a mennyiséget?

b) Kinek a gondolatmenetével értesz egyet?

Bea szerint egy sampon és egy balzsam összesen 3,90 €-ba kerül, vagyis akcióscsomagonként 1,30 € a megtakarítása. Mivel egy évben 18 balzsamot használ el, ha 18 akciós csomagot vásárol, akkor

$18 \cdot 1{,}3$ € = 23,4 € lesz a megtakarítása.

Cili szerint két sampon és két balzsam összesen 7,80 €-ba kerülne, de akciósan ebből a pénzből három csomagot is vehet. A megtakarítása tehát a három csomagon éppen egy csomag ára, vagyis 2,60 €. Egy évben 12 samponra van szüksége, ha 12 akciós csomagot vásárol, akkor $4 \cdot 2{,}6$ € = 10,4 € lesz a megtakarítása.

c) A lányok helyében te hogyan vásárolnál egy évre előre? Mennyibe kerülne a vásárlásod?

2.98. *a)* A 133 tömegszámú, alapállapotú céziumatom két hiperfinom energiaszintje közti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama 1 s. 1 óra hány periódusnak az időtartama?

b) Egy vitamintabletta 24 μg (mikrogramm) krómot tartalmaz, amely egy felnőtt napi krómszükségletének egyötöd része. Nyolc és fél millió felnőttnek mennyi a napi krómszükséglete, ha a mikrogramm a milligramm egyezred része?

c) A Földnek a Nap körüli átlagos sebessége másodpercenként 29 765 m. Mekkora utat tesz meg a Föld egy naptári év alatt? (Ez megközelítően a Föld Nap körüli pályájának a hossza.)

2.99. 3600 részvényből részvénycsomagot állítunk össze. A részvények $\frac{9}{20}$ része távközlési, $\frac{1}{3}$ része olajipari, a többi pénzintézeti részvény.

a) Hány távközlési, illetve hány olajipari részvény van a csomagban?

b) A részvények mekkora része pénzintézeti részvény?

2.100. Egy szálloda vendégeinek $\frac{1}{7}$ része japán, $\frac{1}{5}$-e olasz, $\frac{1}{3}$-a német, $\frac{1}{6}$-a osztrák, egy lakosztályban 3 kanadai vendég lakik, a többiek spanyolok és franciák 1 : 2 arányban. 33 olyan vendég van, aki nem az Európai Unióból jött.

a) Összesen hány vendég van a szállodában?

b) Hány spanyol vendég van?

c) Igaz-e, hogy az Európai Unióból jött vendégeknek több, mint $\frac{1}{6}$ része osztrák?

d) Igaz-e, hogy azoknak a vendégeknek, akik az Európai Unióból jöttek, nem kevesebb, mint az $\frac{1}{5}$ része osztrák?

Százalékszámítás

2.101. *a)* Mennyi 720 kg búzának az 1%-a; 20%-a; 50%-a; 200%-a?

b) Hány liter víznek a 20%-a 1 l víz; 10 l víz; 100 l víz?

c) 800 kg borsónak hány százaléka 40 kg; 600 kg; 728 kg; 1000 kg borsó?

2.102. Hány százaléka

a) 1 m^2-nek az 1 dm^2; a 4 dm^2; az 50 dm^2; a 80 dm^2; a 300 dm^2;

b) 1 m^3-nek a 10 dm^3; a 7 dm^3; a 70 dm^3; a 800 dm^3; a 2000 dm^3;

c) 6 m^2-nek a 60 dm^2; a 360 dm^2; a 9 dm^2; a 600 dm^2; a 900 dm^2;

d) 0,8 m^3-nek a 40 dm^3; az 540 dm^3; az 1 m^3?

2.103. Fejezd ki százalékban a következő törtrészeket!

a) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$;

b) $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{5}$;

c) $\frac{3}{20}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{13}{20}$;

d) $\frac{1}{25}$; $\frac{3}{25}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{23}{25}$; $\frac{27}{25}$;

e) $1\frac{6}{25}$; $1\frac{9}{20}$; $2\frac{9}{25}$;

f) $4\frac{3}{10}$; $3\frac{7}{25}$; $1\frac{2}{5}$; $2\frac{11}{20}$

2.104. Egy iskolában a létszám 52%-a fiú.

a) Hány tanuló jár az iskolába; *b)* hány lány jár az iskolába, ha 338 a fiúk létszáma?

2.105. Karcsi a nyáron dolgozott. Munkájáért nettó 1800 €-t kapott. Pénzének

(1) 32%-át cipőre; (2) 28%-át farmerre; (3) 18%-át táskára költötte.

a) Mennyibe kerültek a vásárolt termékek?

b) Mennyi pénze maradt? Hány százaléka ez a keresetének?

2.106. Nóra keresményéből, 500 €-ból

(1) 180 €-ért ruhát; (2) 85 €-ért cipőt;

(3) 105 €-ért szüleinek ajándékot; (4) 75 €-ért könyvet vásárolt.

a) Keresetének hány százalékát költötte az egyes árucikkekre?

b) Mennyi pénze maradt? Hány százaléka ez a keresetének?

2.107. Hány százalék és milyen irányú a változás, ha a termék ára

a) változás előtt 140 €, változás után 161 €;

b) változás előtt 5350 €, változás után 4280 €;

c) változás előtt 324 €, változás után 291,6 €;

d) változás előtt 840 €, változás után 714 €;

e) változás előtt 8920 €, változás után 11 774,4 €;

f) változás előtt 2570 €, változás után 3623,7 €?

2.108. Hány százalék az áfa a terméken, ha

a) áfa nélkül 1200 €; áfával 1440 €;

b) áfa nélkül 78 €; áfával 97,5 €;

c) áfa nélkül 230 €; áfával 253 €;

d) áfa nélkül 7500 €; áfával 8625 €?

2.109. Egy befektető 2200 db részvényből részvénycsomagot állít össze. A részvények 45%-a a távközlési, 33%-a olajipari, a fennmaradó rész pénzintézeti részvényekből áll.

A tőzsdei árfolyamok: olajipari: 23,5 €, távközlési: 4,6 €, pénzintézeti: 66,7 €.

a) Hány pénzintézeti részvény van a csomagban?

b) A csomag értékének hány százaléka az olajipari részvények értéke?

2.110. *a)* Egy tőzsdén a tőzsdeindex 128 pont erősödéssel 8320 ponton zárt. Hány százalékos volt az aznapi növekedés?

b) Másnap a tőzsdeindex 0,6%-os csökkenést mutat. Hány ponton zárt másnap?

2.111. Egy város lakóinak 12,5%-a 14 év alatti, 46,8%-a férfi. A 14 év alattiak 52%-a fiú.

a) A lakosság hány százaléka 14 év alatti fiú?

b) A lakosság hány százaléka 14 év feletti férfi?

c) A férfiak hány százaléka 14 év alatti fiú?

d) A lakosság hány százaléka 14 év alatti lány?

2.112. Egy kereskedő ruhákat és cipőket árusít. Miután összegzi a forgalmát, a következőket állapítja meg:

(1) A női ruházati és cipő termékekből éppen kétszer annyi volt a bevétele, mint a férfitermékekből.

(2) A férfi ruházati termékek bevétele 300 000 €-val haladta meg a férficipőkből származó bevételt.

(3) A női cipőkből ugyanannyi bevétele volt, mint a férficipőkből.

(4) Az összes bevétele 2 766 000 € volt.

a) Mennyi jövedelme volt az egyes termékekből a kereskedőnek?

	Ruha	Cipő	Összesen
Férfi			
Női			
Összesen			

b) Add meg a fenti táblázatot százalékos értékekkel is!

	Ruha	Cipő	Összesen
Férfi			33,33%
Női			66,67%
Összesen			100%

2.113. Egy dolgozó fizetésének 32,5%-át adóra és járulékokra vonják le, a fennmaradó összeget a folyószámlájára utalják. Ha a fizetését 51,8%-kal megemelik, akkor az új bére után már 42,7% a levonás. Mennyivel emelkedik a dolgozó folyószámlájára utalt összeg? (Ha nem megy rögtön, segíthet a számítás egy tetszőlegesen feltételezett összeggel!)

2.114. Vízből és sóból álló sóoldatból a víz felét elpárologtatva hány tömegszázalékos sóoldat keletkezik, ha az eredeti sóoldat

a) 10%-os; *b)* 20%-os; *c)* 16%-os; *d)* 1%-os volt?

2.115. Egy gazdálkodó a földterületének 25%-án epret, 15%-án dinnyét, a fennmaradó földterület $\frac{1}{6}$-án brokkolit, földjének további részén kukoricát termeszt.

a) Melyik növény termőterülete a nagyobb, a dinnyéé vagy a brokkolié?

b) Melyik termény termesztése volt a legkifizetődőbb, ha az epren 16 000 €, a dinnyén 9000 €, a brokkolin 5000 €, a kukoricán pedig 30 000 € volt a gazdálkodó haszna?

c) Hány kilogramm epret fog termeszteni, ha a kukorica vetésterületét a kétszeresére emeli?

2.116. Egy bank a befektetett pénz után havi 0,5% kamatot fizet. Egy másik bank legalább 10 000 € lekötése esetén évente 5% kamattal és 200 € prémiummal növeli pénzösszegünket.

a) 4 éves lekötés esetén melyiket érdemes választanunk, ha

(1) 10 000 €-t; (2) 15 000 €-t; (3) 20 000 €-t akarunk befektetni?

b) Mennyi lesz a legkedvezőbb hozam az egyes esetekben a 4 év során?

c) Mekkora betét adja 4 év alatt ugyanazt a hozamot a két bankban?

Számok négyzete, négyzetgyöke

2.117. Írd normálalakba a számokat, majd végezd el a négyzetre emelést! Az eredményt is normálalakban add meg!

a) 240; *b)* 3460; *c)* 0,27; *d)* 0,0083

2.118. *a)* Mekkora a négyzet területe, ha egy oldala

(1) 2,75 m; (2) 0,0065 km; (3) 5600 mm?

b) Mekkora a kör területe, ha sugara

(1) 3,8 cm; (2) 0,04 m; (3) 400 dm?

c) Mekkora a négyzetes hasáb felszíne és térfogata, ha magassága 4 cm, alapéle

(1) 0,2 cm; (2) 2 cm; (3) 200 cm?

2.119. A számjegyek vizsgálata alapján (számológép és táblázat használata nélkül) döntsd el, hogy melyik szám nem lehet egy egész szám négyzete!

$a = 47\,961$; $b = 49\,617$; $c = 46\,656$; $d = 48\,432$

2.120. Írd fel a következő prímtényezős alakban adott számok négyzetének prímtényezős alakját!

$a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$; $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$; $c = 3 \cdot 11 \cdot 17$; $d = 2^{16}$

2.121. Fejben számolva is meghatározhatod az eredményt.

$a = 205^2$; $b = 990^2$; $c = 2010 \cdot 1990$; $d = 3999 \cdot 4001$

2.122. Mekkora a négyzet egy oldala, ha területe

a) (1) 25 m^2; (2) 250 000 m^2; (3) 0,000 025 m^2;

b) (1) 49 m^2; (2) 49 000 000 m^2; (3) 0,0049 m^2?

2.123. Írd le egy 1 és 100 közé eső szám és 10 páros kitevőjű hatványaként a számot, majd végezd el a négyzetgyökvonást!

a) 72,25; 722 500; 0,000 000 722 5;

b) 5,29; 52 900; 0,000 529

2.124. A következő prímtényezős alakban adott számok közül melyik négyzetszám (egy egész szám négyzete)?

$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2$; $b = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^4$; $c = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^4$; $d = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$

2.125. *a)* Egy négyzetes hasáb magassága 7,5 cm, térfogata 43,2 cm^3. Mekkora az alapéle, illetve felszíne?

b) Egy kocka felszíne 73,5 cm^2. Mekkorák a kocka élei?

c) Egy kör területe $T \approx 30{,}2$ cm^2. Mekkora a sugara?

d) Egy egyenes körhenger magassága 4 cm, térfogata $V \approx 201$ cm^3. Mekkora az alapkörének a sugara? Mekkora a felszíne?

2.126. *a)* Egy pénzintézetben a két évre lekötött pénz után azonos évi kamatozás mellett két év alatt 44%-kal nő a befektetés értéke. Mennyi ekkor az éves kamat?

b) Egy ipari üzem évente ugyanannyi százalékkal, két év alatt a két évvel korábbihoz képest 36%-kal csökkentette a környezetet terhelő anyagok kibocsátását. Hány százalékos volt az éves csökkenés?

c) Egy vállalkozó a forgalmát évente ugyanannyiszorosára emelte. Ha négy év alatt 476%-kel emelkedett a forgalma, akkor hány százalék volt két év alatt az emelkedés?

d) Egy ásványvizet palackozó részvénytársaság minden évben azonos mértékben, tehát ugyanannyi százalékkal növeli a palackozott víz mennyiségét.

Ha négy év alatt 284,16%-kal emelkedett a termelés, akkor hány százalék volt a két év alatti bővülés?

Hány százalék volt évenként az emelkedés?

3. Algebrai kifejezések

Algebrai kifejezések értelmezése, helyettesítési értéke

3.01. Az a tetszőleges szám. Írd föl

a) az a számnál 48-cal nagyobb számot;

b) azt a számot, amely 48-cal kisebb az a-nál;

c) azt a számot, amelynél az a 48-cal nagyobb;

d) az a szám 48-szorosát;

e) az a szám 48-ad részét;

f) azt a számot, amely 48-szorosa az a-nak;

g) azt a számot, amelynek az a 48-ad része!

3.02. Az x és az y tetszőleges szám. Írd föl

a) a két szám különbségét; *b)* a két szám összegét;

c) a két szám hányadosát; *d)* a két szám szorzatát;

e) a két szám összegének négyzetét; *f)* a két szám négyzetének összegét;

g) a két szám különbségének négyzetét!

3.03. Az u és a z tetszőleges szám. Írd föl

a) a két szám szorzatának négyzetét;

b) a két szám négyzetének szorzatát;

c) a két szám hányadosának négyzetét;

d) a két szám négyzetének hányadosát;

e) a két szám összegének és különbségének szorzatát;

f) a két szám különbségének és összegének hányadosát;

g) a két szám összegének és különbségének hányadosát!

3.04. *a)* Egy könnyűzenei CD ára 12,89 €. Hány euróba kerül

a) 3 db; *b)* 9 db; *c)* x db; *d)* $2x$ db; *e)* $(x + 2)$ db CD?

3.05. Egy ragadozó emlősnek pontosan 111 kg húst kell elfogyasztania, hogy szervezete egyetlen kilogrammját fenntartsa – állítják a santiagói egyetem ökológus kutatói. Eszerint mennyi húst kell fogyasztania testtömege megtartásához

a) a 140 g testtömegű menyétnek;

b) a 300 kg testtömegű jegesmedvének;

c) az y kg tömegű szumátrai tigrisnek;

d) az $(y - 45)$ kg tömegű gepárdnak?

3.06. Egy videotéka összesen 207 € értékben új kazettákat vásárolt azonos egységáron. Hány euróba került egy műsoros kazetta, ha a videokazetták száma

a) 12 db; *b)* 46 db; *c)* z db; *d)* $(z + 13)$ db; *e)* $4z$ db volt?

3.07. Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $5a - 4$; $5(a - 4)$; $4a - 5$, ha $a = 0{,}2$

b) $2 - a - 2b$; $2 - (a - 2b)$; $2 - (a - 2)b$, ha $a = 2$; $b = -1$

c) $2a + ab$; $3a - ab$; $ab - 3a$, ha $a = 2$; $b = 3$

d) $a^2 + b^2$; $2a^2$; $2b^2$; $2a^2 - 2b^2$, ha $a = 4$; $b = 1$

e) $x^2 + y^2$; $2x^2$; $2y^2$; $2x^2 - 2y^2$, ha $x = -4$; $y = -1$

f) $xy - x^2$; $xy + xy$; $2x^2 - 3xy$, ha $x = -1$; $y = 2$

g) $a^2 + b^2 + c^2$; $(a - c)^2$; $(a + b)^2$; $(a + b + c)^2$;
ha $a = -1$; $b = 0$; $c = -2$

3.08. Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $\frac{x - y}{2}$; $\frac{1}{2}(x - y)$; $-\frac{1}{2}(x - y)$; $-\frac{x}{2} - \frac{y}{2}$, ha $x = 3$; $y = 1$

b) $3{,}5a^2$; $(3{,}5a)^2$; $-2{,}5a^2$; $(-2{,}5a)^2$, ha $a = 4$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$; $1{,}2x + 1{,}3x + 1{,}4x$; $6{,}2x - 1{,}4x$, ha $x = 2$

d) $b^2 - 2ab$; $(-b)^2 + (-2ab)$; $-(2ab - b^2)$, ha $a = 1$; $b = -1$

e) $e - 2f^2$; $(e - 2f)^2$; $2(e - f)^2$, ha $e = \frac{1}{2}$; $f = -2$

3.09. Töltsd ki a táblázatokat! Melyik helyre nem írható szám?
Karikázd be pirossal a táblázatokban azokat a számokat, amelyekre nem értelmezhető a kifejezés!

a)

a	0	1	-2	$-0{,}5$	$\frac{2}{3}$
b	2	-8	-5	4	$-\frac{6}{5}$
$\frac{a \cdot b}{2}$					

b)

a	0	1	4	-2	$\frac{1}{2}$
b	1	0	2	-2	-2
$\frac{1 + a}{2 + b}$					

c)

a	0	-4	4	$-4{,}5$	$\frac{5}{4}$
b	2	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$
$\frac{a - 1}{b - 1}$					

d)

a	0	1	4	-2	$\frac{1}{4}$
b	4	0	4	-2	$\frac{5}{2}$
$\frac{4 - b}{10a}$					

3.10. Töltsd ki a táblázatokat!

a)

a	0	$\frac{1}{2}$	-4	2,5
b	-3	2	-2	4
$a \cdot b + a^2$				

b)

a	0	$\frac{1}{2}$	-4	2,5
b	-3	2	-2	4
$2a^2 + 2b^2$				

c)

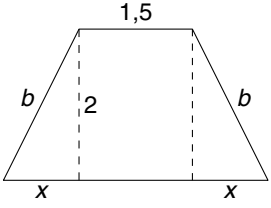
a	0	$\frac{1}{2}$	-4	2,5
b	-3	2	-2	4
$(a - 2b)^2$				

d)

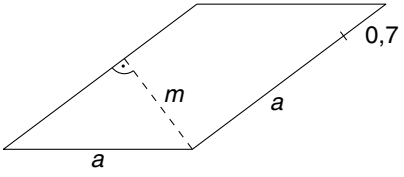
a	0	$\frac{1}{2}$	-4	2,5
b	-3	2	-2	4
$a - (2b)^2$				

3.11. Add meg algebrai kifejezéssel a sokszögek kerületét és területét!

a)



b)



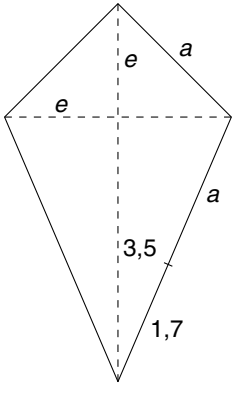
$K =$ ..... $K =$ .....

$T =$ ..... $T =$ .....

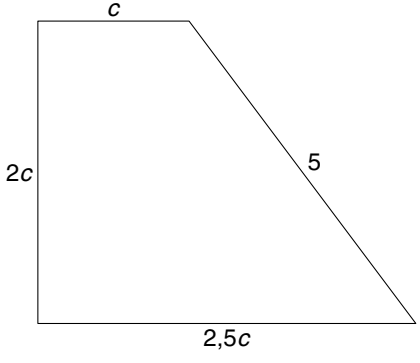
Határozd meg a kifejezések értékét! $x = 1$; $b = 2{,}2$; $a = 2{,}5$; $m = 1{,}5$

3.12. Add meg algebrai kifejezéssel a sokszögek kerületét és területét, majd határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét! $a \approx 2{,}1$; $e = 1{,}5$; $c = 2$

a)



b)



$K =$ ..... $K =$ .....

$T =$ ..... $T =$ .....

3.13. Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $A = 6a^2$; $V = a^3$, ha $a = \frac{1}{3}$

b) $A = 2(ab + bc + ac)$; $V = abc$, ha $a = 0{,}5$; $b = 3$; $c = 2{,}5$

c) $A = r\pi(r + a)$; $Vr^2\pi m$, ha $a = 3$; $r = 2$; $m = 10$

d) $A = 2a^2 + 4am$; $V = a^2m$, ha $a = \frac{1}{5}$; $m = \frac{15}{20}$

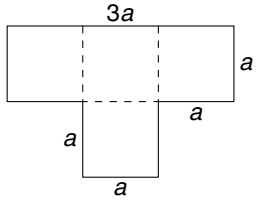
e) $A = ef + 4am$; $V = \frac{e \cdot f}{2} \cdot m$, ha $a = \frac{3}{4}$; $e = \frac{8}{9}$; $f = \frac{6}{4}$; $m = 12$

f) $A = \pi r(a + r)$; $V = \frac{\pi r^2 m}{3}$, ha $a = 7{,}6$; $r = 2{,}4$; $m = 11$

3.14. Írd be a táblázatok első oszlopába a síkidom kerületének és területének képletét, majd az adatokkal számítsd ki a kerületüket, illetve a területüket!

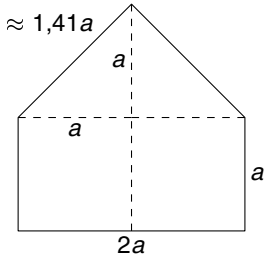
a)

a (cm)	1	2	10	0,1	$\frac{1}{2}$
$K =$					
$T =$					



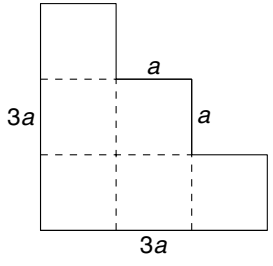
b)

a (cm)	1	2	10	0,1	$\frac{1}{2}$
$K =$					
$T =$					



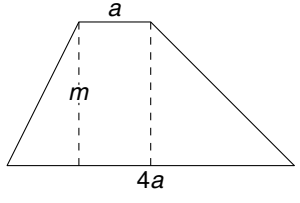
c)

a (cm)	1	2	10	0,1	$\frac{1}{2}$
$K =$					
$T =$					



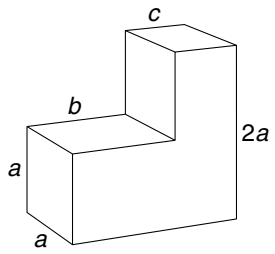
d)

a (cm)	1	2	10	0,1	$\frac{1}{2}$
m (cm)	5	$\frac{1}{2}$	0,1	10	2
$T =$					



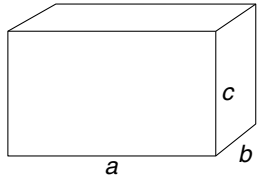
3.15. Írd be a táblázat első oszlopába a test felszínének képletét, majd az adatokkal számítsd ki a felszínét!

a (cm)	1,0	2,0	5	0,8	$\frac{4}{5}$
b (cm)	1,0	3,5	12	0,6	$\frac{3}{5}$
c (cm)	1,4	4,0	13	1,0	1
A =					



3.16. Írd be a táblázat első oszlopába a téglatest tömegének kiszámítási módját, majd az adatokkal számítsd ki a tömegét!

a (cm)	1	2	5	0,8	$\frac{5}{3}$
b (cm)	1	5	10	0,5	$\frac{6}{5}$
c (cm)	1	4	12	1,0	$\frac{5}{2}$
$\varrho \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$	7,6	1,6	0,5	12,4	0,8
m =					



3.17. Az elhízás mértékének meghatározására a testtömegindex (BMI: Body Mass Index) szolgál, amely a következő képlet segítségével számítható ki:

$$\text{Index} = \frac{\text{testtömeg}}{\text{testmagasság}^2} \quad \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$$

A túlsúly, illetve az elhízás nagymértékben rontja az életkilátásokat azáltal, hogy súlyos betegségek kialakulásához vezethet. Például szív-, mozgásszervi megbetegedések, cukorbetegség stb.

A képlet alapján számold ki testtömegindexedet, majd nézd meg a táblázat alapján, ideális-e a tömeged!

Sovány	18,5 alatt
ideális	18,5–24,9
túlsúlyos	25,0–29,9
elhízott	30,0–34,9
súlyosan elhízott	35,0–39,9
igen súlyosan elhízott	40,0 fölött

Kérdezd meg családod több tagját, hogy kíváncsiak-e, ha igen, akkor az ő testtömegindexüket is számítsd ki!

Egynemű, különnemű algebrai kifejezések; összevonás

3.18. Válogasd külön az egynemű kifejezéseket!

a) $\frac{3}{4}x^3$; $\frac{xy}{2}$; $\frac{1}{4}xy$; $3x^2$; $\frac{x^2}{3}$; $3xy$; x^2y; $x^2 \cdot x$

b) $5ab^2$; $\frac{ab}{5}$; $5a^2b$; $\frac{1}{5}a^2b$; $5ab$; $5b^2a$; $-\frac{a^2b}{5}$

c) $2{,}5cd^2$; $2{,}5c^2d$; $2{,}5(cd)^2$; $\frac{cd^2}{2}$; $\frac{1}{2}c^2d$; $(2{,}5cd)^2$

3.19. Húzd alá azonos színnel a következő kifejezésekben az egynemű tagokat, majd végezd el a lehetséges összevonásokat! Számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $2{,}3a - 0{,}3b - 0{,}3a + 3{,}3b + a - b - 2{,}3a$; $a = 10$; $b = 5$;

b) $\frac{3}{4}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + b$; $a = -8$; $b = 4$;

c) $1{,}2x - 0{,}8y + 3x - 0{,}2x + 4{,}8y - 5y - 0{,}6x$; $x = 5$; $y = -5$;

d) $\frac{d}{3} + \frac{c}{4} - \frac{2d}{6} - \frac{3c}{12} + \frac{d}{12} - \frac{d}{6} - \frac{c}{6}$; $c = -12$; $d = 18$;

e) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y - 0{,}5x - 0{,}25y + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 1{,}5x$; $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{4}{3}$;

f) $2{,}3f^2 + 0{,}7f - 1{,}3f^2 - 4{,}7f^2 + 3f - 0{,}7f + 0{,}7f^2$; $f = 2$;

g) $g - 5 + g^2 + 5 - g - 3g^2 + 15 - 2g - 3g^2 - 15$; $g = 4$

3.20. Végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $2a + 5a - 20 + 4a - a$;

b) $a - 2a + \frac{4}{2} - 3a - 15 + 6a$;

c) $(a - b) + (a - b) - (a - b)$;

d) $b - 2a + \frac{1}{3}b - b + a + \frac{2}{3}b$;

e) $\frac{c}{2} - 2c + 22 - (0{,}5c + 22c)$;

f) $2c - d + (d - 2c) - 12c + 3d$;

g) $2d - b + 3d - 4d + 5b + 6d$;

h) $1{,}8e + 23 - 5e - 9 - 11e + 17$;

i) $\frac{1}{3}b + \frac{1}{4}d - \left(\frac{3}{6}b - d\right) - \frac{1}{2}d + b$;

j) $-4a - (6a + 4c) - 3c + \frac{2}{2}c + \frac{6}{3}a$;

k) $\frac{3}{2}e - \left(\frac{3}{2}e + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4}e\right) + \frac{8}{2}e$;

l) $15c - (cd - cb) + cd + 4cb - 5c$

Számítsd ki a feladatok helyettesítési értékét kétféleképpen (összevonás előtt, összevonás után)! Hasonlítsd össze a két eredményt!

$a = \frac{1}{2}$; $b = -3$; $c = 0{,}5$; $d = -4$; $e = 0$

3.21. Bontsd fel a zárójeleket, végezd el az összevonásokat! Ellenőrizd az összevonások helyességét a helyettesítési érték kiszámításával!

a) $3a-(7+2b+6a)-3b+7$; $a=2$; $b=-2$;

b) $(5b-2c)+(7b-3b)-(3b-2c)$; $b=-1$; $c=3$;

c) $(2bc+8b)-(4bc+5bc)-(2b-8)$; $b=4$; $c=-3$;

d) $(6de+4e)+3d-2e-(de-3d)$; $d=-5$; $e=\frac{1}{5}$;

e) $\frac{1}{3}de+\left(\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}d\right)-\left(\frac{2}{3}de-\frac{1}{3}d\right)-\frac{1}{3}e$; $d=\frac{3}{4}$; $e=-\frac{4}{6}$;

f) $0{,}6f^2+(0{,}4f-2{,}5f^2)-(-1{,}8f^2-0{,}8f)$; $f=6$

3.22. Írd fel algebrai kifejezéssel a szöveges feladatokat!

a) A tisztítóban a € egy szoknya és kétszer ennyi euró egy zakó tisztításának ára. Mennyit fizetünk 2 szoknya és 2 zakó tisztításáért?

b) Egy kis méretű raklapra b db könyvet tudnak felpakolni, 50 darabbal kevesebbet, mint a nagy méretűre. Összesen hány könyvet lehet elszállítani 10 kicsi és 5 nagy raklapon?

c) Egy téglalap alakú szoba hosszabbik oldala c m, 3 méterrel több, mint a rövidebbik oldal hosszúsága. Hány négyzetméter padlószőnyeg szükséges a padló lefedéséhez? Hány méter szegő kell körbe a szőnyeg rögzítéséhez?

d) Frédi d €-t gyűjtött össze. Pénzének $\frac{3}{4}$ részénél 500 €-val kevesebbet betesz a bankba. Mennyi készpénze marad?

e) A tavaszi túra alkalmával az első napon 3 km-rel többet tettünk meg, mint a második napon, míg a harmadik napon 5 km-rel kevesebbet mentünk, mint az előző napon. Hány kilométert tettünk meg a három nap alatt?

3.23. *a)* Egy alkalommal 30 liter üzemanyagot tankoltunk, literét a euróért. Kértünk még motorolajat is, amelynek ára 5 l üzemanyag árával egyenlő. Hány eurót fizettünk összesen?

b) Dániel egy tévékészülék javításáért b € fizetséget kapott. Ennek $\frac{4}{5}$-szörösét kapta rádiójavításért. Az összesen kapott pénzből a tévékészülék javításáért kapott összeg $\frac{2}{5}$-szörösét alkatrészre költötte. Mennyi pénze maradt a vásárlás után?

c) Gábornak c db CD-je van, Ákosnak 25-tel több, Előd nek 16-tal kevesebb, mint Gábornak. Hány darab CD-je van a három fiúnak összesen?

d) Annának 36 darabbal több képeslapja van, mint Karolának, Csillának éppen kétszer annyi képeslapja van, mint Annának. Hány képeslapja van a lányoknak, ha Karolának d darabja van?
Mennyivel van több képeslapja Csillának, mint Annának és Karolának együtt?

(Lapozz!)

e) Eriknek e €-ja van, nővérének 25 €-val több, mint Erik pénzének $\frac{4}{3}$ része, míg húgának a pénze 15 €-val kevesebb, mint Erik pénzének harmada. Hány eurót gyűjtött a három testvér együtt?

f) Egy sütemény elkészítéséhez f dkg lisztre, továbbá a liszt mennyiségének $\frac{1}{2}$-szeresénél 6 dkg-mal kevesebb cukorra van szükség. Ezt a mennyiséget kettéosztjuk, az egyik felébe kakaót, a másikba vaníliát keverünk. Hány dekagramm a vaníliás tészta, mielőtt beletennénk a vaníliát? Hány dekagramm kakaós tésztát kapunk, ha $\frac{1}{8}$-szor annyi kakaót keverünk bele, mint amennyi lisztből készült?

Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.24. Végezd el a szorzásokat, majd számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét! $a = 2;\ b = \frac{1}{2}$

a) $5 \cdot 3{,}5a$; $\frac{4}{3} \cdot (3a)$; $\left(\frac{3}{4}a\right) \cdot 8$; $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{6}{5}a\right)$;

b) $(15ab) \cdot 2$; $4(2ab^2)$; $9 \cdot (4a^2b)$; $3\left(\frac{1}{3}a^2b^2\right)$;

c) $(2{,}5a^2b) \cdot 10$; $\left(\frac{6}{7}ab^2\right) \cdot 14$; $5{,}2 \cdot (0{,}5ab^3)$; $\frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}a^2b^3\right)$;

d) $(-0{,}5) \cdot (ab)$; $(-a^2b^2) \cdot (-0{,}5)$; $(-0{,}5a^2b) \cdot (-5)$; $(5{,}6a^3) \cdot 0$

3.25. Végezd el a szorzásokat, majd számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét! $x = 3;\ y = -1$

a) $\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (3x)$; $(2{,}5x) \cdot (5x)$; $\left(\frac{3}{4}y\right)\left(\frac{4}{3}y\right)$; $\left(\frac{2}{7}y\right) \cdot \left(\frac{14}{4}y\right)$;

b) $(3x^2) \cdot (3x)$; $\left(\frac{1}{4}y\right) \cdot (4y^2)$; $\left(\frac{7}{3}x^2\right) \cdot (6x^2)$; $(8y^2) \cdot \left(\frac{1}{2}y^3\right)$;

c) $9x \cdot (-7x)$; $6y^2 \cdot 3x$; $-2x^2y \cdot (-2xy^2)$; $-4y^3 \cdot (4y^2x^3)$;

d) $6xy \cdot 5xy$; $4x^2y^2 \cdot x^2y^2$; $-xy \cdot (-xy)$; $\frac{1}{3}x^2y^2 \cdot \frac{1}{3}xy$

3.26. Végezd el az osztásokat! Számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $12ab : 3$; $21a^2b : 7$; $14ab^2 : 2$; $a = \frac{1}{3}$; $b = 6$

b) $24ab^2 : (-4)$; $-42a^2b^2 : 6$; $63a^2b : (-9)$; $a = -\frac{1}{3}$; $b = -6$

c) $2{,}5c^2 : 0{,}5$; $8{,}1b^3c^3 : 9$; $(-2{,}7x^3) : (-0{,}3)$; $b = 1$; $c = -2$

d) $\frac{2}{5}cd : \frac{2}{5}$; $4c^4d^4 : 4$; $\frac{3}{7}c^2d^2 : \frac{1}{7}$; $c = \frac{1}{2}$; $d = -1$

e) $\frac{6}{8}e^2f^2 : (-3)$; $\frac{3}{4}ef^4 : \frac{3}{5}$; $-\frac{2}{9}f^3 : \frac{4}{3}$; $e = \frac{1}{2}$; $f = 2$

3.27. Végezd el az osztásokat! A változók mely értékeire nem értelmezhető a kifejezés?

a) $x^2 : x$; $4x^3 : x$; $2x^4 : 2x$; $\frac{1}{2}x^5 : \frac{1}{2}x^3$;

b) $5y^2 : y^2$; $\frac{1}{3}y : y$; $16y^4 : y^3$; $21y^{10} : y^9$;

c) $8x^2y : x$; $8x^2y : 4x$; $8x^2y : 4x^2$; $8x^2y^2 : 8x^2$;

d) $3x^2y^2 : xy$; $3x^2y^2 : 3xy$; $3x^2y^2 : 3x^2y$; $3x^2y^2 : 3x^2y^2$

3.28. Végezd el az osztásokat! A változók mely értékeire nem értelmezhető a kifejezés?

a) $\frac{12xy}{3}$; $\frac{18x^2y}{6}$; $\frac{21x^2y^2}{3}$; $\frac{42x^4y}{42}$

b) $\frac{4x^2}{x}$; $\frac{6xy}{x}$; $\frac{6x^2y}{6x}$; $\frac{6x^2y^2}{x^2}$

c) $\frac{15x^3y^2}{5xy}$; $\frac{32xy^3}{16y^2}$; $\frac{42x^4y^4}{21x^2y^2}$; $\frac{18xy^5}{6y^5}$

d) $\frac{-3xy^3}{3xy}$; $\frac{-12x^4y^4}{6x^4y}$; $\frac{72x^2y^2}{36xy}$; $\frac{19x^3y^3}{x^3y^3}$

3.29. Végezd el a szorzás, osztás műveleteket, majd vond össze az egynemű tagokat!

a) $3a \cdot a^2 + 4a^3 : 2a - 5a^2 + a \cdot 2a - 6a^4 : 3a^2 + 2a \cdot a$;

b) $\frac{2}{3}b^4 : b^2 - \frac{1}{3}b \cdot b + \frac{4}{3}b^6 : \left(\frac{4}{3}b^3\right) - \frac{1}{3}b^4 : b^2 + \frac{2}{3}b^2 \cdot b - \frac{2}{3}b \cdot b$;

c) $c^4 : c^3 + c^2 - 2c \cdot c + 2c^4 : c - 4c^4 : (2c^2) + 3c \cdot c$;

d) $6d^2 \cdot 2d - 4d \cdot 3d - 3d^6 : d^3 + 2d^2 + 8d^7 : (4d^4)$;

e) $4e \cdot 2e + 6e^4 : (3e) - 3e \cdot e^2 - 6e^2 + 4e^6 : (4e^3) - 2e \cdot e$;

f) $2{,}4f^2 : (2f) + 3{,}6f \cdot 3f - 48f^3 : (0{,}1f) + 0{,}9f^2 - 0{,}8f^4 : (0{,}2f^3)$

3.30. Végezd el a műveleteket! Mely értéket nem veheti fel az x és az y?

a) $\frac{4xy}{2x}$; $\frac{3x^2y}{9xy}$; $\frac{6x^2y^2}{3xy^2}$; $\frac{12xy^2}{4y^2}$;

b) $\frac{-2{,}4x^3y^2}{1{,}2xy^2}$; $\frac{-25x^2y^5}{-5x^2y}$; $\frac{0{,}8xy^6}{0{,}4y^5}$; $\frac{37x^3y^3}{-10x^3y^3}$;

c) $\frac{3x^4y^3}{-4x^4y}$; $\frac{-3{,}6x^4y^3}{x^4y}$; $\frac{-5{,}2x^2y}{5{,}2xy}$; $\frac{-0{,}75x^3y^4}{-0{,}25xy}$;

d) $\frac{-0{,}86y^7}{-0{,}2}$; $\frac{(5xy)^2}{5x^2y^2}$; $\frac{(-6xy)^2}{-6xy}$; $\frac{(7x^2y^2)^3}{(7x^2y^2)^2}$

3.31. Végezd el a műveleteket! Figyelj a helyes műveleti sorrendre! Mely értékeket nem vehetik fel az ismeretlenek? Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $a^2 + a^2 - a^2 : a^2 + a^2 \cdot a^2 - a^2 - a^2 + a^2 : a^2 + a^2$; $a = 3$

b) $b^2 : b^2 \cdot b^2 : b^2 \cdot b^2 : b^2 \cdot b^2 : b^2 \cdot b^2 : b^2 \cdot b^2 : b^2$; $b = \frac{1}{3}$

c) $c^3 - c^3 + c^3 - c^3 + c^3 - c^3 + c^3 - c^3 + c^3 - c^3 + c^3 - c^3$; $c = -2$

d) $d \cdot d^2 : d \cdot d^2 : d \cdot d^2 : d \cdot d^2 : d \cdot d^2 : d \cdot d^2$; $d = 2$

e) $e^2 \cdot e - e^2 : e + e^2 \cdot e - e^2 : e + e^2 \cdot e - e^2 : e$; $e = -3$

f) $f^2 : f - f \cdot f + f^2 : f - f \cdot f + f^2 : f - f \cdot f$; $f = 2$

Többtagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.32. Végezd el a kijelölt szorzásokat!

a) $6(a+2)$; $5(a-4)$; $\frac{1}{2}(6-a)$; $\left(-\frac{1}{3}\right)(9-2a)$

b) $2(2b+3)$; $4(2b-3)$; $0{,}5(8-4b)$; $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)$

c) $9(c+6)$; $3(3c-2)$; $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+c\right)$; $-6\left(c-\frac{1}{3}\right)$

d) $2(2d+7)$; $7(2d-7)$; $0{,}3(0{,}3-3d)$; $-0{,}6(4-5d)$

e) $2(2e-3)$; $2{,}5(0{,}5-e)$; $\frac{1}{5}(15e+5)$; $-2(-2e-4)$

3.33. Írd a szorzatokat összegalakba!

a) $a(3-a)$; $a(2a-0{,}5)$; $3a \cdot \left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\right)$; $(-a)\cdot(2a-2b)$

b) $b\cdot(2a+3b)$; $b(-2a-3b)$; $(-b)\cdot(-2a+3b)$; $b\cdot(2ab-b)$

c) $\frac{1}{2}c\cdot(4-2c)$; $3c\cdot\left(\frac{6}{7}c-c^2\right)$; $0{,}2c^2(8c-8)$; $(-c)\left(\frac{1}{4}c^2-c\right)$

d) $(x+y)\cdot x$; $2x(y^2-x)$; $\frac{3}{4}yx\cdot\left(\frac{4}{3}y+\frac{4}{3}x\right)$; $(x^2+y^2)\cdot 0{,}7y$

3.34. Végezd el a szorzásokat! Számítsd ki a helyettesítési értékeket mind szorzatalakban, mind összegalakban! Az $x = 2$.

a) $x(x-5)$; $-x \cdot (x+5)$; $\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}$

b) $3{,}4x \cdot (x+0{,}2)$; $0{,}5 \cdot (x^2 - x)$; $0{,}8x(3x+1)$

c) $\left(4x + \frac{2}{5}\right) \cdot 4x$; $\left(\frac{2}{4} - 3x\right) \cdot \frac{1}{3}x$; $(-2x) \cdot (3 - 4x)$

d) $5x \cdot (-5 - 3x)$; $\frac{1}{4}x \cdot (16x^2 - 4x)$; $0{,}4x \cdot (12x + 0{,}2)$

3.35. Írd be a hiányzó tényezőt! A szorzás elvégzésével ellenőrizd, hogy helyesen dolgoztál-e (keress több megoldást)!

a) $\ldots\ldots \cdot (3x + \ldots\ldots) = 15x^2 + 5x$; $3y(\ldots\ldots + 3) = 12y^2 + \ldots\ldots$

b) $5z \cdot (\ldots\ldots - 3z) = 35z - \ldots\ldots$; $2x(\ldots\ldots - 2x) = -14x - \ldots\ldots$

c) $\frac{2}{3}a(\ldots\ldots + \ldots\ldots) = a^2 + a$; $\ldots\ldots(\ldots\ldots - b) = -36b + 6b^2$

d) $\ldots\ldots(d + \ldots\ldots) = 4d^2 + 4d^3$; $\ldots\ldots(\ldots\ldots - 2d) = 2d + d^2$

e) $2ef(\ldots\ldots + \ldots\ldots) = 2e^2f + 2ef^2$; $e^3(\ldots\ldots - \ldots\ldots) = e^5 - 5e^4$

f) $\ldots\ldots(-0{,}1 + \ldots\ldots) = -0{,}05f^2 + 5f^3$; $7f(\ldots\ldots - 2f^2) = -7ef - \ldots\ldots$

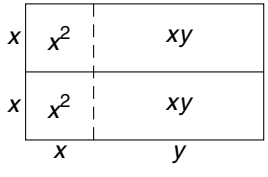
3.36. Írd fel összeg- és szorzatalakban a nagy téglalapok kerületét és területét!

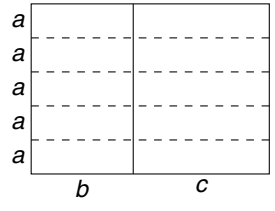
a) $K = 6x + 2y$ *b)* $K = 10a + 2b + 2c$ *c)* $K = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$

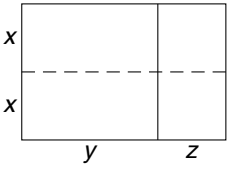
$K = 2(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$ $K = 2(\ldots + \ldots + \ldots)$ $K = 2(\ldots + \ldots + \ldots)$

$T = 2x^2 + 2xy$ $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$ $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

$T = 2x(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$ $T = 5a(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$ $T = 2x(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$







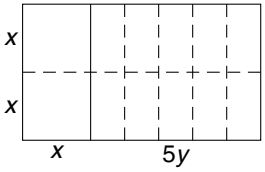
(Lapozz!)

d) $K = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$K = 2(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$T = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$T = 2x(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

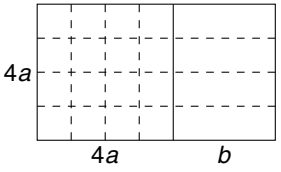


e) $K = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$K = 2(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$T = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$T = 4a(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

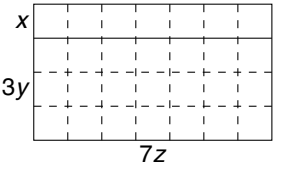


f) $K = \ldots + \ldots + \ldots$

$K = 2(\ldots + \ldots + \ldots)$

$T = \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$T = 7z(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$



3.37. A szorzatokat alakítsd összeggé (végezd el a szorzást)!

a) $4\left(\frac{1}{4}a + 5 - a^2\right)$;

b) $\frac{1}{3}(6b + 15 - 9b^2)$;

c) $c(4 - c^2 + 3c)$;

d) $2d\left(2 - d + \frac{1}{2}d^2\right)$;

e) $e^2\left(12 + 2e - \frac{1}{2}e^2\right)$;

f) $\frac{1}{3}f(18 - 6f + 3f^2)$;

g) $2{,}3g^2 + (10g - 10 + g^2)$;

h) $(-h^2)(h + 5 - 6h^2)$;

i) $8i\left(\frac{1}{4}i - \frac{1}{8}i^2 + \frac{1}{4}\right)$

3.38. Végezd el a kijelölt műveleteket! Vond össze az egynemű kifejezéseket! Számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét! $x = 10$

a) $3\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)$;

b) $\frac{1}{4}(4 - 8x) - 3(4 + 8x)$;

c) $\frac{2}{3}(3 - 6x) - 3\left(4 - \frac{1}{12}x\right)$;

d) $5(3x + 2) - 4(2x + 1)$;

e) $3x(2x - 1) + 2x(2 - 3x)$;

f) $2x(2x - 1) + 2x(2x - 1)$;

g) $\frac{1}{3}x(6x + 6) - \frac{1}{3}x(6 - 6x)$;

h) $4x\left(\frac{1}{2}x + 4\right) + 4x\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$

3.39. Végezd el az osztásokat! Ellenőrizz behelyettesítéssel!

a) $(4a + 8) : 4$;

b) $(12 - 3b) : 3$;

c) $(21c - 7) : 7$;

d) $(0{,}5d - 5) : 0{,}5$;

e) $\left(\frac{3}{4} + \frac{6}{8}e\right) : \frac{3}{4}$;

f) $\left(-\frac{4}{3}f - \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3}$;

g) $(-32g^2 + 12g) : (-4)$;

h) $(-3{,}6h - 12) : (-4)$;

i) $\left(\frac{16}{25}i^2 + \frac{8}{10}i\right) : \left(-\frac{4}{5}\right)$

3.40. Végezd el az osztásokat, majd mindkét alakba helyettesíts be! $x = 2$; $y = -2$

a) $(xy - x^2) : x$; $(x^2y + y) : y$; $(-x^2y^2 - y^2) : y$

b) $(4xy + 6x^2) : 2x$; $\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{5}xy\right) : \frac{2}{5}x$

c) $(12x^2 + 8x - 16) : 4$; $(7{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 5) : 2{,}5$

d) $\left(\frac{3}{6}x^2 - \frac{2}{4}x + 2xy\right) : (-2x)$; $(6xy - 12x^2y + 18xy^2) : 6xy$

e) $(9y^2 - 6xy^2 + 21x^2y^2) : 3y^2$; $(32x^2y^2 - 16xy + 64x^2y) : 16xy$

3.41. Végezd el az osztásokat! Ellenőrizd munkád behelyettesítéssel! $a = \frac{1}{2}$

a) $(a^2 + a) : a$; $(a - a^2) : a$; $(a^2 - a) : (-a)$

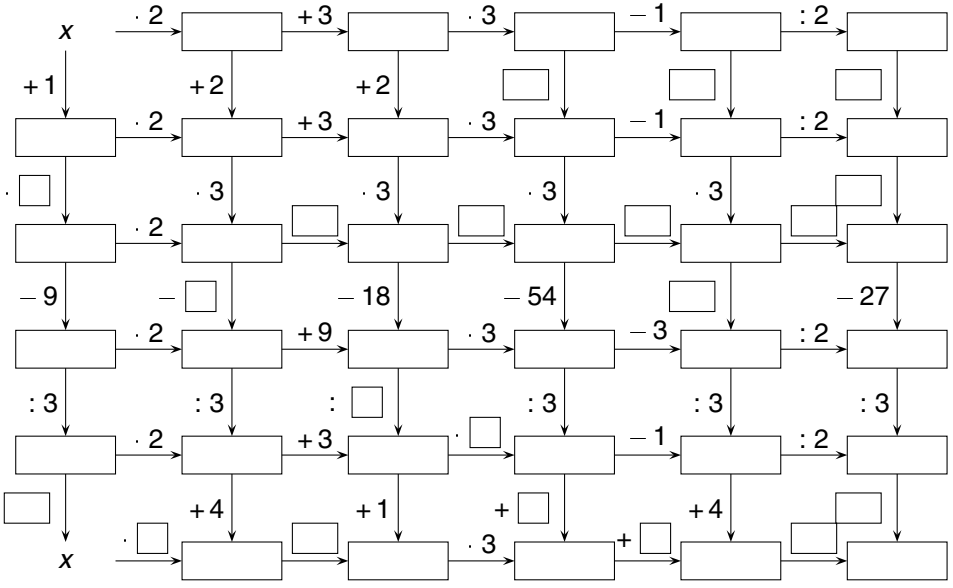
b) $(12a + 36a^2) : (12a)$; $\left(\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{3}a\right) : \left(\frac{1}{3}a\right)$; $\left(\frac{12}{5}a - \frac{4}{10}a^2\right) : \left(-\frac{4}{10}a\right)$

c) $(a^3 + a^2 + a) : a$; $(4a^3 - a^2 - a) : a$; $(6a^3 + a^2 - 3a) : (-a)$

d) $(4{,}5a^3 - 0{,}9a^2) : (0{,}9a^2)$; $(-10a^3 - 36a^2 - 23a) : (-10a)$

e) $\left(\frac{24}{30}a^4 - \frac{32}{30}a^3 - \frac{16}{30}a^2\right) : \left(-\frac{16}{30}a^2\right)$; $\left(\frac{16}{10}a^4 + \frac{8}{10}a^3 - \frac{4}{10}a^2\right) : \left(\frac{4}{10}a^2\right)$

3.42. Pótold a hiányzó számokat, illetve kifejezéseket!



Többtagú kifejezések szorzattá alakítása kiemeléssel

3.43. *a)* $3a + 6$; $2a + 8$; $4{,}5a^2 - 0{,}9$; $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}a^3$

b) $21b - 14$; $42 - 7b$; $63b^2 - 9$; $2{,}4b^3 - 4{,}8$

c) $c - \frac{1}{2}$; $2c - 3{,}2$; $7c + 3{,}5$; $10 + 0{,}1c$

d) $d^2 + d$; $3d^2 - d$; $2d^2 - 2d$; $2d^3 - 2d$

(Lapozz!)

e) $4e^2 - 2e$; $\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}e^3$; $0{,}6e^4 - 0{,}3e^3$; $\frac{12}{5}e^3 - \frac{3}{5}e^2$

f) $2ef + 3f$; $4e^2f - 4f$; $2{,}3ef^2 + 2{,}3ef$; $5e^2f^2 - 5ef^2$

3.44. Kiemeléssel alakítsd szorzattá a kifejezéseket! Ellenőrizd munkád helyességét behelyettesítéssel!

a) $4a - 4$; $12a - 8$; $6 + 18a$; $2{,}5a + 2{,}5$; $a = -8$

b) $3b - 24$; $28 + 7b$; $12b - 36$; $\frac{4}{6}b + \frac{2}{3}$; $b = 8$

c) $42c - 7$; $72 + 36c$; $24c - 4{,}8$; $-32c + 16$; $c = 0{,}2$

d) $36 + 18d^2$; $3{,}6 + 1{,}8d^2$; $\frac{1}{4}d - \frac{2}{8}$; $-\frac{2}{5} - \frac{8}{10}d$; $d = 3$

e) $2{,}5x + 2{,}5y$; $-4x + 4y$; $-0{,}5x - 0{,}5y$; $-12x + 12 - 12y$; $x = 4$; $y = 5$

3.45. Végezd el az összevonásokat, majd alakítsd szorzattá a kifejezéseket!

a) $9a^2 - 3a + 18 - 3a^2 - 6a$; *b)* $4a^2 + 8b + 20 - 4b + 8a^2$

c) $\frac{1}{2}x + \frac{6}{4}x^2 - 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; *d)* $3{,}5xy + 5x^2y - 0{,}5xy - 3xy^2 - 2x^2y$

e) $-\frac{2}{3}ab - \frac{2}{3}a^2b + \frac{4}{3}ab^2 + \frac{4}{3}ab - \frac{2}{3}ab^2$;

f) $12x^2y^2 - 6x^2y - 6x^2y^2 + 12x^2y + 12xy^2$

Számítsd ki a helyettesítési értéket összeg- és szorzatalakban is! $a = 3$; $b = -3$; $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$

3.46. Végezd el a műveleteket, az összevonásokat, majd alakítsd szorzattá a kapott algebrai kifejezéseket! $x = 3$ és $y = -3$

a) $3(2xy - 2x^2) - 4y(x - 5y) + 6(x^2 - y^2) + 6xy$

b) $2x(x - y) + 2xy(y + 1) - 3(xy^2 - 2x^2) + 2xy^2$

c) $2xy(2x - y) - 2y(xy - 3x) - 2x(4xy - 3y)$

d) $x(2xy - 3y) - y(2x - 3xy) + x(xy - 3y + 2xy)$

e) $x^2(4y^2 - y) - 2y^2(3x - 4x^2) + 5xy(2x + 3y)$

Algebrai egész és törtkifejezések

3.47. Írd külön az algebrai egész és az algebrai törtkifejezéseket!

$\frac{1}{2}x^2$; $2x^2$; $\frac{2}{x^2}$; $3(x + y)$; $\frac{x + y}{3}$; $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$; $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$; $\frac{a^2 + b^2}{4}$;

$\frac{4}{a^2 + b^2}$; $\frac{2(a + b)}{(ab)^2}$; $\frac{1}{c}(c + 2)$; $\frac{4c}{c}$; $\frac{b - 3}{3}$; $\frac{b - 3}{3b}$; $\frac{b^2}{b}$

3.48. Írd külön az algebrai egész és az algebrai törtkifejezéseket!

$\frac{a}{2}$; $\frac{2}{a}$; $\frac{x+y}{3}$; $\frac{3}{x+y}$; $\frac{x}{x}$; $\frac{a^2}{a}$; $\frac{1}{2}(x+y)$; $\frac{1}{x}(x+y)$; $\frac{x^2+2}{xy}$;

$\frac{x+y}{xy}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $\frac{a-5}{3}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{b-5}{2}$; $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{b+2}$; $0{,}8\cdot\frac{1}{x}$; $\frac{5}{x}+6$

3.49. Mely értékek nem írhatók a változók helyére a következő kifejezésekben?

a) $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{x-2}$; $\frac{x+1}{5}$; $\frac{3x}{5x}$; $\frac{x}{x+1}$

b) $\frac{1}{a-4}$; $\frac{a-2}{a-2}$; $\frac{a^2-5}{a+3}$; $\frac{2a-5}{2a-1}$; $\frac{1}{3a+2}$

c) $\frac{1}{y}+3$; $\frac{2}{y}+\frac{3}{2}$; $2+\frac{3y}{4}$; $2+\frac{3}{4y}$; $\frac{5x-2}{3}$

3.50. Mely értékek nem írhatók a változók helyére a következő kifejezésekben?

a) $\frac{5}{x(x-2)}$; *b)* $\frac{x}{(x+1)(x-1)}$; *c)* $\frac{2x-5}{x(x-3)}$; *d)* $\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

3.51. Mely értékek nem írhatók a változók helyére a következő algebrai kifejezésekben? Határozd meg a helyettesítési értékeket! $a=-1$; $b=2$

a) $\frac{5a-2}{3}$; $\frac{4}{a+1}$; $\frac{a-2}{a-2}$; $\frac{a-1}{a-1}$; $\frac{3a-2}{4}$

b) $b-\frac{1}{b}$; $\frac{2b-3}{2}$; $2b+\frac{1}{2b}$; $6+\frac{3}{b}$; $\frac{5}{b}-\frac{b}{5}$

c) $\frac{1}{a+b}$; $\frac{a-b}{a-b}$; $\frac{5}{b-b}$; $\frac{3}{2a-2a}$; $\frac{9}{(a+1)b}$

d) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; $\frac{a+b}{b+a}$; $\frac{a-b}{b-2}$; $\frac{a}{b+1}:\frac{b}{a}$

3.52. Mely értékek nem írhatók a változók helyére a következő algebrai kifejezésekben? Határozd meg a helyettesítési értékeket! $x=-2$; $y=2$

a) $\frac{2x-2}{2}$; $\frac{2}{2x-2}$; $\frac{x-3}{x-3}$; $\frac{5x}{x+3}$; $\frac{10x}{x(x-1)}$

b) $\frac{2(y+3)}{3-y}$; $\frac{xy}{x+y}$; $\frac{y^2}{2x}$; $\frac{x^2y}{3}$; $\frac{x^2-y^2}{x-y}$

c) $\frac{1}{x+y}$; $\frac{1}{xy}$; $\frac{y^2}{x-y}$; $\frac{y^2}{y-x}$; $\frac{y^2}{y^2}$

d) $2{,}5x^2:x$; $\frac{3}{4}x:\frac{x}{4}$; $\frac{y-10}{y-8}$; $\frac{y-10}{8-y}$

3.53. Alakítsd szorzattá a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítsd a törtet! Mely értékeket nem vehetik fel a változók?

a) $\frac{2ab-6a}{2b^2-6b}$; *b)* $\frac{3x^2+3xy}{2x+2y}$; *c)* $\frac{8y+8}{4xy+4x}$; *d)* $\frac{2xz+10x}{4xz+20x}$;

e) $\frac{3a^2+3ab}{6a+6b}$; *f)* $\frac{2a-4b}{2a^2-2b}$; *g)* $\frac{ab-2b}{2ab-2b^2}$; *h)* $\frac{5b^2-0{,}5b}{3b^2-0{,}3b}$

Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel

3.54. Végezd el a szorzásokat, majd ahol lehet, az összevonásokat!

a) $(x+1)(x+3)$; $(a-2)(a+3)$; $(y+5)(y-1)$

b) $(2-x)(x+4)$; $(5-y)(y+3)$; $(a+4)(4-a)$

c) $\left(a-\frac{1}{2}\right)(a+2)$; $\left(b-\frac{2}{3}\right)(b+1)$; $\left(c-\frac{5}{2}\right)\left(c+\frac{5}{2}\right)$

d) $(2x-5)(x-3)$; $(y-4)(5-2y)$; $(3z+2)(z-1)$

e) $(x+0{,}7)(2x-1{,}2)$; $(3{,}4y+1)(1-1{,}2y)$; $(z+1{,}5)(z-1{,}5)$

f) $(1{,}8a-2)(2a+3)$; $(3{,}2-a)(2{,}1+a)$; $(a+1)(1{,}2a+2{,}5)$

3.55. Végezd el a szorzásokat, majd az összevonásokat!

a) $(x-1)(x+3)+(x-2)(x+5)-(x-3)(x+2)$

b) $(a-3)(a-4)+(a-2)(a+5)-(a-4)(a+1)$

c) $(y-3)(y+1)-(y+1)(y+3)-(y-2)(y+2)$

d) $(b-5)(b+6)-(b-1)(b+8)+(b-9)(b+3)$

e) $(z-1)(z-1)+(z+3)(z+3)-(z+5)(z+5)$

f) $(x-9)(x+9)+(x-5)(x+5)-(x+3)(x-3)$

g) $(a+2)\left(a-\frac{1}{2}\right)+\left(a+\frac{1}{2}\right)(a-1)-(a+2)(a+2)$

3.56. Végezd el a szorzásokat, majd ahol lehet, vond össze az egynemű kifejezéseket!

a) $(x+y)(x+y)$; $(a+b)(a-b)$; $(y-z)(y+z)$;

b) $(x+y)(x-y+2)$; $(a-b)(a+b+1)$; $(x+1)(x+y+1)$;

c) $(x+y-2)(x-y)$; $(a-b-1)(a+1)$; $(y-z+2)(y+z)$;

d) $(a+b)(a+b+c)$; $(x+y+z)(x-y)$; $(a-b-c)(b-c)$;

e) $(a+b-2)(a+2)$; $(x-y-3)(y-1)$; $(4-x-y)(1-x)$;

f) $(a+b+c)(a+b-c)$; $(x-y+z)(x+y-z)$; $(a-b-c)(a+b+c)$

3.57. Végezd el a szorzást, majd az egynemű kifejezéseket vond össze!

a) $(3x-2y)(4x+5y)$; $(2x+3y)(5x-4y)$;

b) $(-3xy-2x)(4x+2y)$; $(4x+y)(-3x-2y)$;

c) $(4x^2y-3)(4x^2y+3)$; $(3x-7y^2)(4x-2y^2)$;

d) $(3a + 4b)(2a - 3b)$; $(5a - 4b)(2a + 4b)$;

e) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b\right)\left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{4}b\right)$; $\left(\frac{2}{3}a - \frac{5}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a + \frac{5}{4}b\right)$;

f) $(0{,}8a - 0{,}2b)(1{,}2a + 1{,}2b)$; $(3{,}4a + b)(b - 3{,}4a)$

3.58. Végezd el a szorzásokat, majd az egynemű kifejezéseket vond össze!

a) $(a - 2)(a - 2)(a - 2)$; $(a - 1)(a + 2)(a - 3)$;

b) $(x - y)(x + 2)(y - 1)$; $(x + y)(1 - x)(1 + y)$;

c) $(2x - 3)(x - 2)(x + 1)$; $(x - 3)(4x + 5)(x + 1)$;

d) $(a - b)(1{,}5b - a)(1{,}5a - b)$; $(0{,}8a - 1)(1{,}2b + 1)(a - b)$;

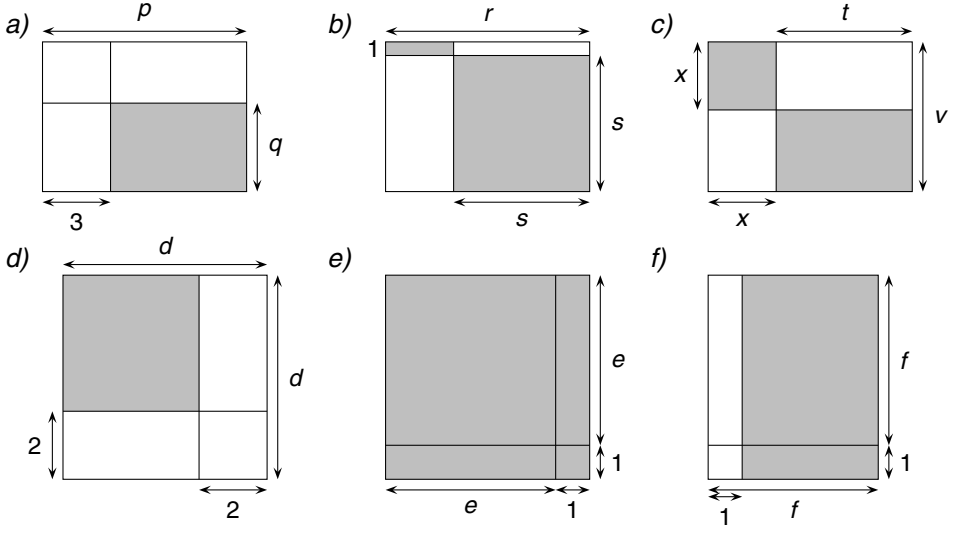
e) $(x + y + z)(x - y)(x + z)$; $(a - b - c)(a + b)(a - c)$

3.59. A szorzások elvégzése előtt és után is végezd el a behelyettesítést, úgy ellenőrizd a megoldást! $a = 6$; $b = -5$

a) $(a + 3)(a - 3)$; *b)* $(a + 2)(a + 2)$; *c)* $(a + b)(a + b)$;

d) $(a - b)(a - b)$; *e)* $(b - 4)(b + 4)$; *f)* $(3a + 2b)(2b - 3a)$

3.60. Fejezd ki szorzat- és összegalakban is a színezett területeket!



Nevezetes azonosságok

3.61. Írd fel a kifejezéseket összegalakban!

a) $(a + 2)^2$; $(x - 3)^2$; $(y + 5)^2$; $(b - 1)^2$;

b) $(3 - x)^2$; $(2 + y)^2$; $(5 - a)^2$; $(6 - b)^2$;

c) $(a + x)^2$; $(a - x)^2$; $(b + y)^2$; $(b - y)^2$;

d) $(2x - 1)^2$; $(3y + 2)^2$; $(4a - 2)^2$; $(5b + 3)^2$;

e) $(4 - 3b)^2$; $(2 + 3a)^2$; $(6 - 2x)^2$; $(5 + 4y)^2$;

f) $(2a + 3b)^2$; $(4b - 3a)^2$; $(3x - 5y)^2$; $(4x + 6y)^2$

3.62. Írd fel a kifejezéseket összegalakban!

a) $(0{,}2 - x)^2$; $(1{,}5a - 2)^2$; $(x + 1{,}2)^2$; $(2a + 1{,}2)^2$;

b) $\left(\frac{1}{2} - a\right)^2$; $\left(\frac{2}{3} + b\right)^2$; $\left(a - \frac{3}{4}\right)^2$; $\left(b + \frac{4}{5}\right)^2$;

c) $\left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2$; $\left(\frac{3}{4}a + 2\right)^2$; $\left(\frac{4}{5}b - 2\right)^2$;

d) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}\right)^2$; $\left(\frac{3}{7}y + \frac{1}{3}\right)^2$;

e) $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{5}{6} + 3x\right)^2$; $\left(\frac{4}{3}y - 2\right)^2$; $\left(5y + \frac{3}{5}\right)^2$;

f) $(0{,}6x + 0{,}5)^2$; $(1{,}5y - 2{,}5)^2$; $(3{,}4x - 1{,}8)^2$; $(2{,}1y + 1{,}2)^2$

3.63. Írd a kifejezéseket összegalakba!

a) $(x + 1)(x - 1)$; $(a - 3)(a + 3)$; $(y - 4)(y + 4)$; $(b - 5)(b + 5)$;

b) $(2x - 1)(2x + 1)$; $(2 - y)(2 + y)$; $(1 - 3x)(1 + 3x)$; $(2 - 4y)(2 + 4y)$;

c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{2}{3} - y\right)\left(\frac{2}{3} + y\right)$; $\left(\frac{4}{5} - z\right)\left(\frac{4}{5} + z\right)$;

d) $\left(3x + \frac{1}{3}\right)\left(3x - \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{2} - 2y\right)\left(\frac{5}{2} + 2y\right)$; $\left(\frac{z}{2} - 1\right)\left(\frac{z}{2} + 1\right)$;

e) $(1{,}1 - a)(1{,}1 + a)$; $(2{,}5 + b)(2{,}5 - b)$; $(c - 0{,}5)(c + 0{,}5)$;

f) $(2{,}1a - 3)(2{,}1a + 3)$; $(0{,}8 - 1{,}2b)(0{,}8 + 1{,}2b)$; $(1{,}5 - 1{,}5c)(1{,}5 + 1{,}5c)$

3.64. A nevezetes azonosságok felhasználásával írd fel hatvány- vagy szorzatalakban a következő többtagú kifejezéseket!

a) $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 + 2a + 1$; $b^2 - 2b + 1$;

b) $x^2 - 4x + 4$; $y^2 + 6y + 9$; $z^2 - 8z + 16$;

c) $x^2 - y^2$; $z^2 - 2^2$; $a^2 - 5^2$; $b^2 - 8^2$;

d) $a^2 - 16$; $b^2 - 25$; $c^2 - 81$; $d^2 - 9$;

e) $x^2 - 4y^2$; $4a^2 - b^2$; $16x^2 - 4y^2$; $25a^2 - 16b^2$

3.65. Alakítsd szorzattá a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítsd a törtet!

a) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4a^2 + 4ab}$; *b)* $\frac{a^2 - 8a + 16}{a^2 - 16}$; *c)* $\frac{4c^2 - 25}{4c^2 + 20c + 25}$;

d) $\frac{4x^2 - 8xy}{x^2 - 4y^2}$; *e)* $\frac{9y^2 - 6xy}{6xy - 4x^2}$; *f)* $\frac{9x^2 + 9y^2}{9x^2 - 9y^2}$

4. Egyenletek, egyenlőtlenségek

4.01. Oldd meg az egyenleteket! Végezz ellenőrzést is! Alaphalmaz a természetes számok halmaza (**N**).

a) $3x - 7x + 7 - 12 + 44x + 5 = 80$

b) $26 + 2x - 5 + 7x + 3x - 12 - 9 = 36$

c) $2x + 15 + 5x - 30 - 7x + 30 + x - 15 = 33$

d) $80x - 18 + 57 - 25x + 19 - 50x - 56 = 12$

e) $7 - 4x + 3x - 5 + 5x - 2 + 2x = 0$

f) $-33x - 72 - 12x + 51 + 23x + 21 + 8x = 120$

g) $11 - 14x + 28 + 30x - 4x - 39 + 8x = 24$

4.02. Oldd meg az egyenleteket! Végezz ellenőrzést is! Alaphalmaz az egész számok halmaza (**Z**).

a) $-2x - 5 + 3x - 4x + 7x + 5 = -12$

b) $48 - 16x + 90 + 27x - 38 - 11x = -25x$

c) $72x - 42 - 38x - 62 - 17x + 14 - 17x = 9x$

d) $-57 - 15x - 43 + 25x + 16 - 35x + 84 = -100$

e) $3{,}6x - 3{,}8 - 0{,}9x - 2{,}2 + 2{,}7x + 6 = 54$

f) $\frac{1}{2}x - \frac{4}{6} + \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} - \frac{2}{4}x + \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3}{4}x$

g) $\frac{6}{10} - \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} + \frac{7}{10}x - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{4}{10} = 0$

4.03. Oldd meg a következő egyenleteket! Végezz ellenőrzést is! Alaphalmaz a racionális számok halmaza (**Q**).

a) $-\frac{3}{6}a - 3 = \frac{1}{2}a - 5$;

b) $\frac{6}{8} + \frac{3}{4}b = \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}$;

c) $\frac{5}{10}c - 3 = 1 + \frac{1}{3}c$;

d) $\frac{5}{7} + \frac{12}{14}d = \frac{10}{14} + \frac{6}{7}d$;

e) $3{,}46e - 6{,}85 = 2{,}6e - 2{,}55$;

f) $6{,}7f - 15{,}4 = 2{,}7f + 0{,}6$;

g) $0{,}88 + 8{,}8g = 88 + 4{,}8g$;

h) $1{,}09h - 16{,}45 = 4{,}38h + 16{,}45$

4.04. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz az egész számok halmaza (**Z**). Végezz ellenőrzést!

a) $4a - 6 = 12 - 2a$;

b) $7b + 12 = -9 + 4b$;

c) $3c + 3 = 3 + 7c$;

d) $9d - 4 = 3d + 56$;

e) $8e + 13 = 5e + 79$;

f) $4f - 1 = f + 20$;

g) $2 - 3g = -3g + 2$;

h) $7h + 3 = 3h + 3$;

i) $8i + 4 = 2i + 58$

4.05. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz a racionális számok (**Q**) halmaza! Végezz ellenőrzést!

a) $4a - 2 - 3a + 5 + 5a = 4a - 4$

b) $12b - 35 + 4b + 25 - 8b = 12b - 20$

c) $35c - 14 + 25c = 42c - 20 + 18c - 40$

d) $100 - 26d - 13 - 24d = 51 - 16d + 12 - 40d$

e) $3{,}5e - 3{,}8 + 6{,}5e + 5{,}8 = 2{,}5e + 10 - 0{,}5e$

f) $1{,}6f + 5{,}2 + 1{,}4f - 4{,}8 = 6{,}12 - 4{,}5f - 5{,}72 + 7{,}5f$

g) $9{,}5 + 4g - 12{,}6 - 5{,}8g = 2{,}6g - 0{,}6 - 4{,}2g + 15$

h) $\frac{2}{3}h - \frac{1}{4} - \frac{4}{6}h + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}h - \frac{2}{4} + \frac{3}{4}h$

i) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i - \frac{3}{8} + \frac{5}{6}i = \frac{9}{12}i + \frac{7}{8} + \frac{1}{2}i - \frac{3}{4}$

j) $\frac{7}{20}j - \frac{15}{12} - \frac{6}{10}j - \frac{3}{4} = \frac{3}{5}j + \frac{2}{3} + \frac{2}{10}j + \frac{2}{6}$

4.06. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**

a) $13 - (5a - 7) = 25a + (-20 - 10a)$; *b)* $22b - (15 + 4b) = 72 - (32b - 13)$;

c) $(7c + 7) - 4c = 30c - (14 + 30c)$; *d)* $42d - (22 - 7d) = (27 - 21d) - 7$;

e) $12e - (56 - 28e) = (44 - 32e) - 20$; *f)* $(5f - 15) - 15f = 30 - (10f + 45)$;

g) $18 - (9g - 14) - (32 - 18g) = 0$; *h)* $(36 + 3{,}6h) - 0{,}8h - (2{,}4h - 0{,}8) = 0$;

i) $\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}i\right) + \left(\frac{3}{5}i - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}i\right) = 0$; *j)* $\frac{2}{10}j - \left(\frac{6}{8} + \frac{1}{2}j\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}j\right) + \frac{6}{8} = 0$

4.07. Oldd meg a következő egyenleteket! Végezz ellenőrzést is! Alaphalmaz: **Q**

a) $2a + 2(a + 1) = 14 - 2a$; *b)* $3b - 5 = 4(4 - b)$;

c) $(4c - 12) \cdot 2 - 5c = 51 + 6c$; *d)* $2d + 5(d - 7) = 35 - 3d$;

e) $13 - 3(e - 7) = 4(e - 9)$; *f)* $9(3 - f) - 3(6 + f) = 4f + 73$;

g) $10g - 2{,}5(g - 28) = 3{,}2(5g - 10)$; *h)* $5(h - 1{,}2) + 4(4{,}2 - 2h) = -63 - 12h$

4.08. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza (**Q**). Végezz ellenőrzést!

a) $52 - 2(3a + 1) = 4(8 - 2a)$

b) $2b - 3(b - 4) = 2(3 - 2b) + 2(2b - 3)$

c) $5(c - 2) + 4(2{,}5 - c) = 7 - 3{,}5(2c + 2)$

d) $11 - 4(3 - 3{,}5d) - 2{,}4(5d - 10) = 5(2d - 1{,}6) + 15$

e) $4(3e + 1) - (2e - 5) + 16 = 2(3e + 1) + (2e - 5)$

f) $28 + 2(3f + 2) - 4(f - 3) = 5(f - 2) - 3(3 - 2f)$

g) $6g + 3(3g - 2) + 4(4 - g) = 2(8 - 4g) - 3(2 - 3g)$

4.09. Számítsd ki a következő egyenletek megoldását! Alaphalmaz a racionális számok halmaza (**Q**).

a) $2{,}5(2{,}8 - a) = 5{,}2(2a - 0{,}5) - 15{,}4 - 0{,}4a$

b) $2{,}9(b - 3{,}4) = 19{,}62 - 6{,}7(b + 4{,}4)$

c) $2c^2 + 0{,}7c - 0{,}2(c - 15) = 3(4{,}5c - 5{,}5) + 2c^2$

d) $\frac{3}{4}\left(8d - \frac{8}{6}\right) - \frac{3}{6}\left(2d - 12\right) = \frac{2}{3}\left(3d - \frac{6}{4}\right) - \frac{1}{3}(12d + 3)$

4.10. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Jelöld számegyenesen az igazsághalmazt!

a) $6x + 5 \geqq 23$, az alaphalmaz: **N**

b) $6x + 5 < 23$, az alaphalmaz: **Z**

c) $8 - 3x > 0$, az alaphalmaz: **Z**

d) $7 - 2x \geqq 1$, az alaphalmaz: **N**

e) $\frac{2}{3}x - 4 \leqq 4$, az alaphalmaz: **Z**

f) $10 - 3x > 5$, az alaphalmaz: **N**

g) $2(3 - x) \leqq 6 - 2x$, az alaphalmaz: **Z**

h) $2x - 6 > 3x - 6$, az alaphalmaz: **N**

4.11. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**. Jelöld számegyenesen az igazsághalmazt!

a) $(2a - 5) - (3a - 7) \geqq 4a - 8$

b) $13 - (5b - 3) + 7b < 3b - (4b - 6)$

c) $2c - (4 - 2c) - 8 \geqq 2c - (4 + 2c)$

d) $(9d - 18) - (24 + 8d) > (3d - 4) - 7d$

e) $7e - (15 - 6e) + (2e + 3) \leqq 25 - (3e - 9)$

f) $62 - 3(2f + 10) + 4(8 - 6f) > 3(2f - 10) + 70$

4.12. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**. Jelöld számegyenesen a megoldást!

a) $8(4 + 2a) - 9(5a + 3) \geqq 5 - 29a$

b) $15b - (4 - 3b) - 15{,}5 < 2{,}5(4b - 5) - 15$

c) $3{,}5c - 2(1{,}5c - 4{,}5) \leqq -3(3{,}5c - 4{,}5) - 4{,}5$

d) $\frac{1}{2}(12d - 6) - \frac{2}{3}(6d - 9) > \frac{3}{4}(16d - 8) - 2d$

e) $\frac{4}{3}e - \frac{2}{3}(6e + 9) - \frac{8}{6}e \leqq \frac{1}{3}(21e - 15) + 12 - 4e$

f) $3(8f - 20) + 4(8 - 3f) < 2(12 - 3f) + 3(2f - 8)$

4.13. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**. Ellenőrizd a megoldást!

a) $3(x+5)=0$; *b)* $7(x-8)=0$; *c)* $x(x+4)=0$;

d) $(8-x)\cdot x=0$; *e)* $(x+6)(x-6)=0$; *f)* $(4-x)(4+x)=0$;

g) $(2x-3)(5-3x)=0$; *h)* $(9-6x)(6x+9)=0$

4.14. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**

a) $2a(4a-5)(7+3a)=0$; *b)* $(8-8b)\cdot 7b\cdot(21+3b)=0$;

c) $(12-6c)(5c+25)(24+8c)=0$; *d)* $(18-2d)(6d+36)(5-d)=0$;

e) $(-2e-3)(5e+10)=-2e(5e+4)$; *f)* $f(3-4f)=(2f-3)(5-2f)$;

g) $g(g-1)=(g-2)^2$; *h)* $(2h+4)^2=(h+2)(4h+8)$

4.15. Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Alaphalmaz: **Q**

a) $(a-5)^2\leqq 30+a^2$; *b)* $(b-1)^2=b^2$; *c)* $c^2-6c>(c-3)^2$;

d) $(3d+4)^2<9d^2+20d$; *e)* $(5-3e)^2=9e^2+25$; *f)* $4(f-3)^2\geqq(2f-6)^2$

4.16. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**

a) $\frac{2a}{3}<\frac{4}{3}$; *b)* $-\frac{4b}{7}\geqq 0$; *c)* $\frac{5}{9}c>-9$;

d) $-\frac{6}{8}d<\frac{3}{4}$; *e)* $\frac{e}{10}\leqq 3$; *f)* $-\frac{3f}{5}\geqq -12$;

g) $g<\frac{g}{10}$; *h)* $-h\geqq\frac{5}{2}h$; *i)* $\frac{3}{4}i>\frac{6}{8}i+1$

4.17. Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Alaphalmaz: **Z**. Ellenőrizd a megoldást!

a) $\frac{3}{8}a-2=13$; *b)* $1-\frac{b}{3}\leqq 3+\frac{b}{3}$; *c)* $\frac{7c}{12}-3=4$;

d) $\frac{5d}{7}+8>-7$; *e)* $1+\frac{2e}{5}=2$; *f)* $\frac{4}{5}+2f\leqq\frac{24}{30}-f$;

g) $\frac{g+3}{4}=\frac{3}{2}$; *h)* $\frac{6-3h}{3}\leqq\frac{3h}{5}$; *i)* $\frac{i-6}{3}=\frac{i+2}{5}$;

j) $-\frac{3}{7}\geqq\frac{1-j}{4}$; *k)* $\frac{12+3k}{5}=\frac{12+3k}{4}$; *l)* $\frac{5+9x}{6}>\frac{6x+7}{4}$

4.18. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**

a) $\frac{2a}{3}+\frac{5}{3}<a+\frac{2}{3}$; *b)* $30-\frac{7b}{12}\geqq 1-\frac{9b}{12}$;

c) $\frac{c}{5}+\frac{3c}{10}-4>\frac{c}{2}+1$; *d)* $\frac{8d}{9}-\frac{5}{6}\leqq\frac{5d}{9}+\frac{7}{6}$;

e) $\frac{3e}{4}+\frac{5e}{8}\leqq-\frac{7}{20}+\frac{3e}{8}$; *f)* $\frac{f+1}{4}>\frac{1}{4}-\frac{f}{2}$;

g) $\frac{5g+6}{2}\geqq 3+\frac{10g}{4}$; *h)* $\frac{2h-3}{3}\leqq\frac{2h}{6}-7$

4.19. Oldd meg a törtegyütthatós egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz az egész számok (**Z**) halmaza. Ellenőrizd a megoldást!

a) $\frac{6a-6}{15} = 3{,}2$; *b)* $\frac{25b-38}{24} < 0{,}5$; *c)* $\frac{16-4c}{7} = 12$;

d) $\frac{8(3d-5)}{11} \leqq 4d$; *e)* $\frac{4(e-21)}{5} = 0{,}8e$; *f)* $\frac{8(6f-7)}{4} < 12f$;

g) $\frac{3g+6}{10} = \frac{9}{10}$; *h)* $\frac{5(h-2)}{4} > \frac{h+1}{4}$; *i)* $\frac{3i}{35} - 2 = \frac{2i}{7}$

4.20. Oldd meg a törtegyütthatós egyenleteket! Az alaphalmaz a racionális számok (**Q**) halmaza. Ellenőrizd a megoldást!

a) $\frac{2a}{4} - \frac{a+1}{4} = 2$; *b)* $\frac{3}{4} - \frac{2b-1}{4} = \frac{16}{4}$;

c) $\frac{1-c}{3} + \frac{2c-1}{2} = \frac{1}{2}$; *d)* $4 - \frac{2d}{3} = 2\frac{(6-d)}{3}$;

e) $\frac{3e+2}{6} - \frac{2e-2}{3} = -2$; *f)* $\frac{2f+2}{3} - \frac{2f+2}{4} = \frac{2f+2}{12}$;

g) $\frac{4g-1}{12} + 1 = 2 - \frac{5-g}{24}$; *h)* $\frac{3(h+4)}{5} = \frac{h}{2} - \frac{2(h-3)}{10}$

4.21. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**. A megoldást jelöld számegyenesen! Ellenőrizd a megoldást!

a) $\frac{2-5a}{5} + \frac{a-4}{10} < 3{,}6$; *b)* $\frac{3b+2}{3} - \frac{1-2b}{4} \geqq \frac{25-2b}{12}$;

c) $\frac{5c-6}{9} + \frac{2(c+4)}{27} > -c$; *d)* $\frac{d-3}{5} + \frac{3(2-2d)}{10} \leqq \frac{2(2-3d)}{10}$;

e) $\frac{3(e+4)}{5} \geqq \frac{e}{2} - \frac{2(e-1)}{5}$; *f)* $\frac{2f+3}{3} - \frac{3f-2}{6} \geqq \frac{f+8}{6}$;

g) $\frac{4(3-g)}{5} - \frac{4g-2}{10} < 5 - \frac{3g}{5}$; *h)* $\frac{0{,}5(10-6h)}{7} + \frac{3(2h-1)}{14} \geqq \frac{7h}{14} - 1$

Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok

4.22. *a)* Két természetes szám összege 100. Az egyik háromszor akkora, mint a másik. Melyik ez a két szám?

b) Két természetes szám különbsége 45. Az egyik szám negyedrésze a másiknak. Melyik ez a két szám?

c) Két természetes szám összege 90, különbsége 54. Melyik ez a két szám?

d) Két egymást követő természetes szám összege 1405. Melyik ez a két szám?

e) Melyik az a két egymást követő páros szám, amelynek összege 174?

4.23. *a)* Ha egy szám negyedéhez hozzáadjuk a szám harmadát, 14-et kapunk. Melyik ez a szám?

b) Melyik az a szám, amelynek a négyszerese 26-tal több, mint a nála 3-mal nagyobb szám háromszorosa?

c) Két szám összege 550. Az egyik szám 25%-a egyenlő a másik szám 30%-ával. Melyik ez a két szám?

d) Melyik az a szám, amelyhez hozzáadva a tízszeresét, 253-at kapunk?

e) Melyik az a természetes szám, amelyiknek a kétszerese megegyezik az előtte és az utána következő szám összegével?

f) Melyik az a szám, amelynek az ötszöröséhez hozzáadtuk a nála 2-vel kisebb számot, és eredményül 100-at kaptunk?

g) Melyik az a két szám, amelynek az összege és különbsége megegyezik?

h) Keress olyan természetes számot, amelynek a kétszerese nagyobb, mint a nála eggyel kisebb szám háromszorosa!

4.24. *a)* Gondoltam egy számot, a háromszorosához hozzáadtam a szám 40%-át, majd kivontam az összegből a szám egyharmadrészét, így a szám háromszorosánál 8-cal nagyobb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

b) Gondoltam egy számot, hozzáadtam a nála 2-vel nagyobb szám kétszeresét, így 2,4-del kisebb számot kaptam, mint a gondolt szám négyszerese. Melyik számra gondoltam?

c) Gondoltam egy számot, elvettem belőle 20-at, az eredményt megkétszereztem, újra elvettem belőle 20-at, az eredményt újra megkétszereztem, majd újra elvettem belőle 20-at. Az eredmény 0 lett. Melyik számra gondoltam?

d) Gondoltam egy számot, hozzáadtam a nála 50-nel nagyobb szám felét, elvettem az összeg egynegyedét, így a gondolt szám háromszorosát kaptam. Melyik számra gondoltam?

e) Gondoltam egy számot, hozzáadtam a nála 15-tel nagyobb szám kétszeresét. Az eredményből elvettem 20-at és a gondolt számot. Így az eredeti szám kétszeresénél 10-zel nagyobb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

f) Gondoltam egy számot, hozzáadtam a kétszeresénél 15-tel nagyobb számot. Az eredményből elvettem a gondolt szám és 20 különbségét. Így a gondolt szám kétszeresénél 10-zel nagyobb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

4.25. *a)* Egy egész szám háromszorosa nagyobb, mint 19, kétszerese kisebb, mint 20. Mi lehet ez a szám?

b) Egy egész szám $\frac{2}{3}$ része 7-tel több, mint a szám fele. Melyik ez a szám?

c) Három egész szám összege 164. Az első szám 40%-a, a harmadik $\frac{4}{3}$ része a második számnak. Melyik ez a három szám?

d) Melyik az a szám, amelynek ötszöröse egyenlő a szám harmadrészének tizenötszörösével?

4.26. *a)* A szegény ember találkozik az ördöggel, aki üzletet ajánl neki: ahányszor kezet fognak, annyiszor megduplázza a zsebében lévő garasokat, azonban cserébe az ördög minden alkalommal 24 garast kap. Megegyeznek. Háromszori kézfogás után azonban elfogy a szegény ember pénze. Hány garasa volt eredetileg?

b) Egy asszony a piacon tojásokat árult. Az első vevőnek eladta a tojások felét és még egy tojást, a második vevőnek a maradék tojások felét és még egy tojást, a harmadik vevőnek a maradék tojások felét és még egy tojást. Ezzel elfogyott az összes tojása. Hány darab tojást adott el összesen az asszony?

c) Egy ókori feladat: Egy haldokló apa úgy végrendelkezett, hogy ha várandós felesége fiút szül, vagyonából kétszer annyi jusson a fiúnak, mint az anyának, ha pedig leányt szül, akkor kétszer annyi jusson az anyának, mint a lányának. Az özvegy ikerpárnak adott életet, egy fiúnak és egy lánynak. Hogyan kell a három örökös között a vagyont szétosztani?

d) Hány diákja volt Püthagorasznak, a szamoszi filozófusnak? (XVI. századi feladat) Amikor diákjai száma felől érdeklődtek, a tudós így válaszolt: A diákjaim fele matézist tanul, a negyedrésze fizikát, a hetedrésze hallgatást, és ezen kívül van még három egészen kis kölyök.

4.27. *a)* Egy 36 éves apának 3 éves fia van. Hány év múlva lesz az apa négyszer annyi idős, mint a fia?

b) Három testvér életkorának összege 18 év. A legidősebb 6 évvel idősebb a legfiatalabbnál. Mennyi idősek a testvérek, ha egyenlő időközönként születtek?

c) Egy téglalap rövidebbik oldalának hossza megegyezik a hosszabbik oldal hosszának 30%-val. Mekkorák a téglalap oldalai, ha a kerülete 18,2 cm?

Hány centiméter lesz a rövidebbik oldal hossza; ha a hosszabbik oldal a $\frac{3}{2}$-szeresére nő, és nem változhat a téglalap területének nagysága?

d) Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amely kerületének mérőszáma $\frac{2}{3}$ része a területe mérőszámának?

e) Mekkorák annak a paralelogrammának a szögei, amelynek kisebbik szöge 20%-a a nagyobbik szögnek?

f) Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelynek legnagyobb szöge 4,2-szerese a legkisebb szögnek, a középső szög pedig kétszerese? Milyen háromszög ez?

4.28. *a)* Két természetes szám közül az egyik 5-tel nagyobb, mint a másik. Mi lehet ez a két szám, ha az összegük legfeljebb 30?

b) Két pozitív szám közül az egyik 8-cal kisebb a másik kétszeresénél. Mi lehet ez a két szám, ha a második és az első szám különbsége nem nagyobb 5-nél?

c) Két természetes szám aránya 2 : 3. Mi lehet ez a két szám, ha különbségük nagyobb 10-nél?

d) Egy racionális szám 3-szorosa legalább 10-zel nagyobb, mint az 5-szöröse. Van-e ilyen szám?

e) Egy szám 70%-ának kétszerese negyvennel több, mint a szám. Van-e ilyen szám?

f) Egy szám kétszeresének 70%-a nagyobb, mint a szám 70%-ának kétszerese. Van-e ilyen szám?

4.29. *a)* Ádám 8 évvel fiatalabb Évánál. Hány éves lehet Ádám, ha kettőjük éveinek összege kevesebb Ádám éveinek háromszorosánál?

b) Béla 10 évvel idősebb Dóránál. Hány éves lehet Béla, ha kettőjük éveinek összege kevesebb Béla éveinek 4-szeresénél?

c) Csaba 6 évvel idősebb Cilinél. Hány éves lehet Csaba, ha éveik összege több Cili éveinek 3-szorosánál?

d) Dénes éveinek száma 5-tel kevesebb Mari éveinek 2-szeresénél. Hány éves lehet Dénes, ha éveiknek az összege több Mari éveinek 3-szorosánál?

e) Ábel kétszer annyi idős, mint Emma. Ha Emma évei számához 10-et hozzáadunk, akkor az így kapott érték $\frac{1}{3}$ része is nagyobb lesz, mint ha Ábel évei számából egyet kivonunk. Hány évesek lehetnek, ha most éppen együtt ünneplik a születésnapjukat?

f) Feri éveinek száma kétszerese Gábor évei száma harmadának. Kettejük éveinek száma együtt kevesebb 100 évnél. Hány éves lehet Feri?

4.30. *a)* Egy páratlan egész számra gondoltam. Megszoroztam 15-tel, majd az eredményből elvettem 8-at. Így 130-nál nagyobb és 181-nél kisebb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

b) Zsuzsa 8 kg gyümölcsöt és 3 kg burgonyát vásárolt. Mennyibe kerülhetett 1 kg gyümölcs, ha a burgonya kilogrammjának ára 0,40 € volt, és 5 €-ból 1 €-nál kevesebbet kapott vissza?

c) Robiék felhasználták az ősszel vásárolt burgonya $\frac{2}{5}$ részét és még 4 kg-ot. Így az eredeti mennyiség felénél kevesebb burgonyájuk maradt meg. Mennyi burgonyát vásárolhattak ősszel?

d) Dóra pénzének $\frac{3}{4}$ része kevesebb, mint Karola pénzének a fele. Mennyi pénzük lehet külön-külön, ha összesen 1000 €-juk van?

e) Ha Eszter kapna még 500 €-t, akkor pénzének $\frac{1}{3}$ része is több lenne annál, mint ha megkétszerezné a pénzét, és elköltene belőle 150 €-t. Hány eurója lehet Eszternek?

4.31. *a)* 6048; 6408; 6480

Írd *helyiérték szerint bontott* összegalakban az előző számokat a következő formában! $3406 = 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 6 \cdot 1$

b) Egy háromjegyű számban a százasok helyén x, a tízesek helyén y és az egyesek helyén z áll. Írd helyiérték szerinti összegalakban ezt a számot! Mely értéket veheti fel az x, y és z?

c) Egy háromjegyű számban a tízesek helyén álló szám 3-mal kisebb, mint az egyesek helyén álló, és 3-mal nagyobb, mint a százasok helyén álló számjegy. Írd fel helyiérték szerint bontott összegalakban ezt a számot! Mely értéket veheti fel az x?

d) Egy háromjegyű számban a tízesek helyén 6 áll. A százasok helyén álló szám annyival nagyobb a 6-nál, amennyivel kisebb 6-nál az egyesek helyén álló szám. Írd fel helyiérték szerint bontott összegalakban ezt a számot! Mely értéket veheti fel az x?

e) Egy négyjegyű szám a következő alakban írható fel:

$$x \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Mi áll ebben a számban a tízesek helyén?
Ha a szám számjegyeit fordított sorrendben írjuk fel, akkor szintén négyjegyű számot kapunk. Írd fel helyiérték szerint bontott összegalakban az utóbbi számot!

4.32. *a)* Egy kétjegyű szám első számjegye 1,5-szerese a másodiknak. Ha ebből a számból kivonjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor 18-at kapunk. Mi volt az eredeti szám?

b) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 15. A szám és a számjegyeinek felcserélésével kapott szám összege 165. Melyik ez a szám?

c) Egy kétjegyű szám első számjegye fele a második számjegyének. Ha az első számjegyhez 1-et, a másodikhoz 2-t adunk, és a két számot összeadjuk, akkor 60-at kapunk. Mi volt az eredeti szám?

d) Egy háromjegyű szám középső számjegye 5, az első számjegye 1-gyel nagyobb az utolsó számjegyénél. Ha ezt a számot és az első és utolsó számjegy felcserélésével kapott számot összeadjuk, akkor 807-et kapunk.
Mi volt az eredeti szám?

e) Egy háromjegyű szám második számjegye 3-mal nagyobb az elsőnél, az utolsó számjegye 2-szerese az elsőnek. Ha ennek a számnak az utolsó számjegyét az első helyre tesszük, akkor az eredetinél 171-gyel nagyobb számot kapunk.
Mi volt az eredeti szám?

4.33. *a)* Egy kocka élhosszúsága egész szám. Mi ez a szám, ha a térfogat másfélszerese a felszínnek?

b) Egy téglalap rövidebbik oldala $a = 2$ cm, a kerülete 20 cm. Egy hozzá hasonló téglalap kerülete 30 cm. Mekkora ennek a téglalapnak a területe?

c) Egy paralelogramma területe 48 cm^2, a rövidebbik oldala 8 cm. A hosszabbik oldalhoz tartozó magasság $\frac{2}{3}$ része a rövidebbik oldalhoz tartozó magasságnak. Hány cm a paralelogramma hosszabbik oldala, mekkora a kerülete?

d) Egy deltoid rövidebbik átlója 40%-a a hosszabbik átlónak. Írd fel a deltoid területét, határozd meg az átlók hosszát, ha a deltoidnak a területe 12,8 cm^2! Hány centiméter a kerülete, ha a terület 175%-val egyezik meg?

4.34. *a)* Egy téglalap két szomszédos oldala $\frac{3}{7}$ m és 1 m. A hozzá hasonló téglalap hosszabbik oldala $\frac{7}{3}$ cm. Mekkora ennek a téglalapnak a rövidebb oldala?

b) Egy téglalap két szomszédos oldala $\frac{3}{4}$ cm és $\frac{2}{5}$ cm. A hozzá hasonló téglalap szomszédos oldalainak összege 13 cm. Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai?

4.35. Egy derékszögű háromszög befogói x, y, átfogója z. Fejezd ki mindegyik oldalt a másik kettő segítségével!

a) Egy derékszögű háromszög átfogója 19,5 cm, egyik befogója 7,5 cm. Mekkora a másik befogó?

b) Egy derékszögű háromszög átfogója 19,5 cm, két befogójának aránya 3 : 4. Mekkorák a befogói?

c) Egy téglalap egyik oldala 24 cm. Az átló és a másik oldal különbsége 18 cm. Mekkora a téglalap kerülete és területe?

4.36. Aladár állandó sebességgel haladva 1 s alatt 0,8 m utat tesz meg. A megfigyelési ponthoz viszonyítva milyen helyzetben lesz t másodperc múlva, ha

a) a megfigyelési pontból az időmérés kezdetekor indul;

b) a megfigyelési pontból az időmérés megkezdése után 5 másodperccel indul;

c) a megfigyelési pontból az időmérés megkezdése előtt 7 másodperccel indul;

d) a megfigyelési ponttól 20 m távolságra levő pontból az időmérés megkezdésekor indul, és távolodik a megfigyelési ponttól;

e) a megfigyelési ponttól 20 m távolságra levő pontból az időmérés megkezdésekor indul, és közeledik a megfigyelési ponthoz;

f) a megfigyelési ponttól 20 m távolságra levő pontból az időmérés megkezdése előtt 3 másodperccel indul, és közeledik a megfigyelési ponthoz;

g) a megfigyelési ponttól 20 m távolságra levő pontból az időmérés megkezdése után 4 másodperccel indul, és távolodik a megfigyelési ponttól?

4.37. *a)* Egy gépkocsi 15 $\frac{m}{s}$ sebességgel távolodik a kiindulási ponttól. Mennyi idő múlva jut 9 km távolságra?

b) Egy kerékpáros 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel közeledik a megfigyelési ponthoz. Az időmérés megkezdésekor 1500 m távolságra van. Hány másodperc múlva lesz 600 m távolságra?

c) Egy hajó a parttól 240 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ sebességgel távolodik. Mikor lesz a távolsága a parttól 15 km-nél nagyobb, ha az időmérés kezdetekor 3 km távolságra volt attól?

d) Egy gépkocsi és egy kerékpár 250 km távolságra van egymástól. Egyszerre elindulnak egymás felé. Az indulás után mikor és hol találkoznak, ha a gépkocsi átlagos sebessége 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a kerékpáré 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

e) Egy teherhajó 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad. Indulása után 6 órával elindul utána egy postahajó, amelynek átlagos sebessége 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mikor és hol éri utol a postahajó a teherhajót?

f) Egy kerékpáros 150 m távolságról indul a megfigyelési pont felé, és másodpercenként 4 m-t tesz meg. Indulása után hány másodperc múlva lesz 90 m-nél nem nagyobb távolságra a megfigyelési ponttól?

g) Két hajó egyszerre indul el egy kikötőből ugyanabban az irányban. Az első hajó 16 km-t, a második 12 km-t tesz meg óránként. Mennyi idő múlva lesz a köztük lévő távolság 30 km-nél nagyobb?

h) Egy teherautó az *A* városból elindul a 270 km távolságra lévő *B* városba. Fél óra múlva a *B* városból az *A* város felé indul egy személyautó. A köztük lévő távolság mikortól lesz 100 km-nél kisebb, ha a teherautó 60 km-t, a személyautó 80 km-t tesz meg óránként, és megállás nélkül haladnak?

4.38. *a)* Mennyi só van a 35%-os sóoldatban, ha tömege
100 kg; 40 kg; x kg; $(x+3)$ kg?

b) Mennyi só van 40 kg sóoldatban, ha töménysége
10%-os; 30%-os; p%-os; $(10+p)$%-os?

c) Mennyi só van x kg 110%-os sóoldatban?

d) Hány százalékos a sóoldat, ha 400 kg oldatban
20 kg; 80 kg; x kg; só van?

4.39. *a)* Hány kilogramm 40%-os sóoldathoz adtak 4 kg sót, ha 60%-os oldatot kaptak?

b) Hány kilogramm 30%-os sóoldathoz öntöttek 4 kg vizet, ha 25%-os oldatot kaptak?

c) 3 kg 5%-os sóoldatba 4 kg 12%-os sóoldatot öntöttek. Hány százalékos lesz az összeöntött sóoldat?

d) Hány kilogramm 20%-os savat kell önteni 5 kg 50%-oshoz, ha 40%-os savat akarnak kapni?

e) Hány kilogramm 40%-os savat öntöttek 8 kg 10%-os savhoz, ha 45%-os savat kaptak?

f) 5 kg 20%-os sóoldathoz 3 kg vizet öntöttek. Hány százalékos oldatot kaptak?

g) 5 kg 20%-os sóoldathoz 3 kg sót adtak. Hány százalékos oldatot kaptak?

h) 7 kg 40%-os oldathoz 8 kg oldatot öntöttek, és 60%-os oldatot kaptak. Milyen töménységű volt a 8 kg oldat?

i) 10 kg 30%-os oldathoz 2 kg oldatot öntöttek, és 45%-os oldatot kaptak. Milyen töménységű volt a 2 kg oldat?

j) 6 kg 50%-os oldathoz 4 kg oldatot öntöttek, és 40%-os oldatot kaptak. Milyen töménységű volt a 4 kg oldat?

k) 8 kg 60%-os oldathoz 7 kg oldatot öntöttek, és 30%-os oldatot kaptak. Milyen töménységű volt a 7 kg oldat?

4.40. *a)* 100 l 10 °C-os vízbe 25 l 60 °C-os vizet öntünk. Hány °C lesz a közös hőmérséklet?

b) 80 l 20 °C-os vízbe 20 l 80 °C-os vizet öntünk. Hány °C lesz a közös hőmérséklet?

4.41. Két csap közül az első 15 óra alatt, a második 18 óra alatt töltene meg egy víztárolót. A víztároló mekkora részét tölti meg

a) az első csap 1 óra alatt; *b)* az első csap 6 óra alatt;

c) a második csap 8 óra alatt; *d)* a második csap x óra alatt;

e) az első és a második csap együtt 5 óra alatt;

f) az első és a második csap együtt t óra alatt;

g) az első csap 6 óra alatt úgy, hogy közben a második is nyitva volt 3 órán át;

h) az első csap y óra alatt úgy, hogy közben a második is nyitva volt 6 órán át?

4.42. *a)* Anna 15 óra alatt, Béla 10 óra alatt ásna fel egy kertet. Mennyi idő alatt ásnák fel együtt?

b) Az *A* csap 60 perc alatt, a *B* csap 45 perc alatt, a *C* csap 90 perc alatt töltene meg egy medencét.
Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mind a három csapot megnyitjuk?

c) Egy csap 12 perc alatt töltene meg egy kádat, és a lefolyón 15 perc alatt ürülne ki a megtelt kád. Egyszer elfelejtették bedugni a dugót a kifolyóba, és úgy nyitották meg a csapot. Mennyi idő alatt telt meg így a kád?

d) Egy tartály két csappal tölthető meg. Az egyik 10 perc alatt, a másik 15 perc alatt töltené meg a tartályt. Az alul lévő csapon át 5 perc alatt ürül ki a megtelt tartály. Mennyi idő alatt telik meg az üres tartály, ha mindhárom csapot kinyitják?

e) Egy apa 8 óra alatt, a fia 12 óra alatt ásna ki egy árkot. Mennyi idő alatt végez a fiú a munkával, ha az apja 3 órán át segít neki?

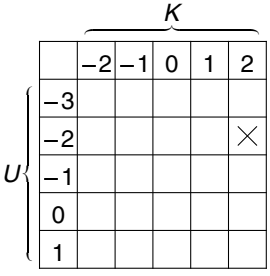
f) Endre 40 perc alatt végezné el egyedül a munkát, Feri 20 perc alatt. Mennyi ideig dolgozott Endre, ha Feri 15 percen át együtt dolgozott vele?

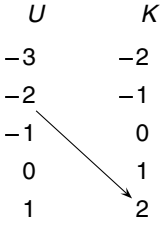
g) Az *A* gép 16 óra alatt, a *B* gép 12 óra alatt szántana fel egy földterületet. Mennyi ideig szánt az *A* gép, ha a munka megkezdése után 2 óra múlva a *B* gép is bekapcsolódik a munkába?

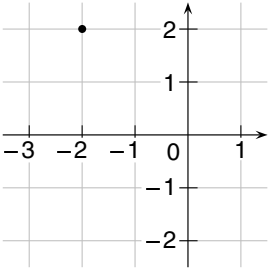
5. Összefüggések, függvények, sorozatok

Hozzárendelések, összefüggések, függvények

5.01. Add meg a következő hozzárendelést nyíldiagrammal, táblázattal, grafikonnal!
Az *alaphalmaz:* $U = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\}$; a *képhalmaz:* $K = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.
A *hozzárendelés szabálya:* minden számhoz rendeljük hozzá az abszolútértékét.







a) Sorold fel az összetartozó elempárokat! $(-2; 2)$; .....

b) Sorold fel az *értelmezési tartomány* elemeit! $A = \{$ ..... $\}$

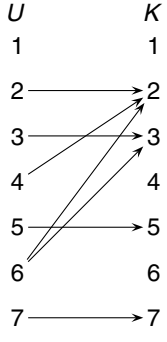
c) Sorold fel az értékkészlet elemeit! $B = \{$ ..... $\}$

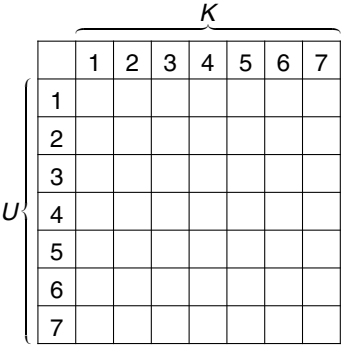
d) Egyértelmű-e ez a hozzárendelés? .....

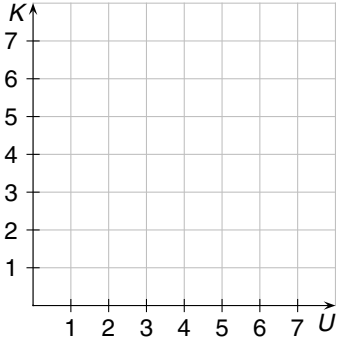
5.02. Nyíldiagrammal adott egy hozzárendelés. Mi lehet a hozzárendelés szabálya?

.....

Ábrázold táblázattal és grafikonnal is az összefüggést!







a) Sorold fel az értelmezési tartomány elemeit! $A = \{$ ..... $\}$

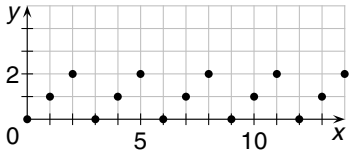
b) Sorold fel az értékkészlet elemeit! $B = \{$ ..... $\}$

c) Egyértelmű-e ez a hozzárendelés? .....

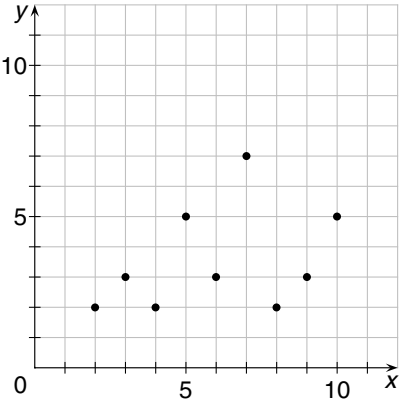
d) Sorold föl az összetartozó elempárokat! .....

5.03. Grafikonjukkal adtunk meg néhány hozzárendelést. Határozd meg a hozzárendelések egy lehetséges szabályát, értelmezési tartományát, értékkészletét!

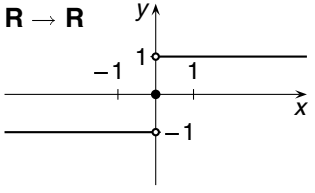
a) $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$



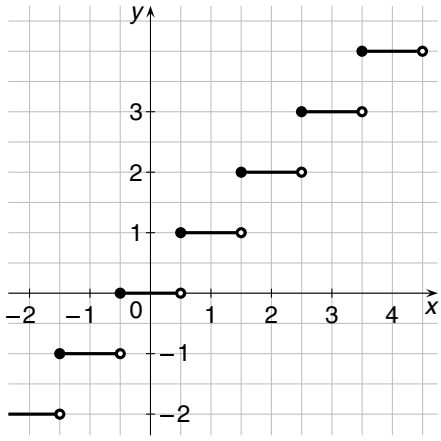
b) $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$



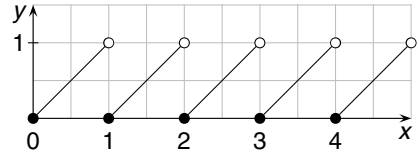
c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$



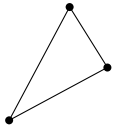
d) $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$

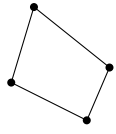


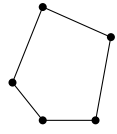
e) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$

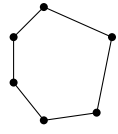


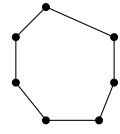
5.04. Az alaphalmaz és a képhalmaz legyen a természetes számok halmaza: $U = \mathbf{N}$; $K = \mathbf{N}$. Jelölje n a sokszög csúcsainak számát. Írd fel a következő összefüggések szabályát! Töltsd ki a táblázatokat! Határozd meg az értelmezési tartományt!


$n = 3$


$n = 4$


$n = 5$


$n = 6$


$n = 7$

a) $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $n \mapsto a$; az a az egy csúcsból kiinduló átlók száma.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	100	n
a												

b) $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $n \mapsto b$; a b azoknak a háromszögeknek a száma, amelyekre a sokszöget az egy csúcsából húzott átlói felbontják.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	100	n
b												

c) $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $n \mapsto c$; a c a sokszög belső szögeinek összege.

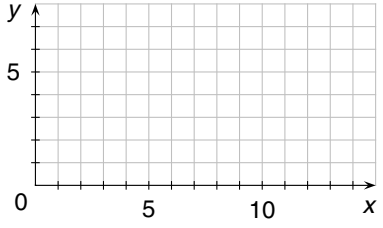
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	100	n
c												

d) $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $n \mapsto d$; a d a sokszög átlóinak száma.

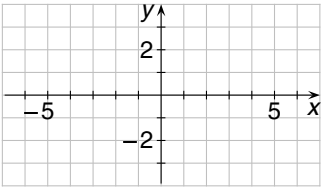
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	100	n
d												

5.05. Ábrázold a következő hozzárendelések grafikonját!

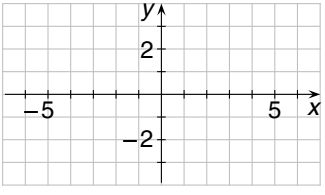
a) $\mathbf{N} \to \mathbf{Q}$; $x \mapsto \frac{1}{2}x$



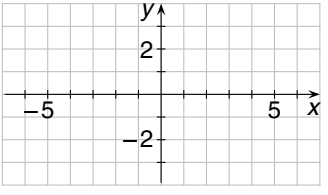
b) $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$; $x \mapsto \frac{1}{2}x$



c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$; $x \mapsto \frac{1}{2}x$



d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \frac{1}{2}x$



Minden hozzárendelés esetén vizsgáld meg, hogy mi az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet!

Egyenes arányosság, lineáris függvény

5.06. 1 kg alma ára 0,80 €.

a) Mennyit fizet Anikó, ha 1; 2; 3; ...; 20; ...; x kg almát vásárol?

.....

b) Mennyit fizet Bea, ha 1; 2; 3; ...; 20; ...; x kg almát vásárol és egy ládát 4 €-ért? .....

c) Mennyit fizet Cili, ha 1; 2; 3; ...; 20; ...; x kg almát vásárol, és (mindig) visszatérítenek neki 4 €-t egy visszahozott ládáért?

.....

5.07. Minden feladat esetén töltsd ki a táblázatot, határozd meg a hozzárendelés szabályát, rajzold meg a grafikont!

Egy üres edénybe vizet engednek. Menynyi víz lesz benne 0, 1, 2, 3, ... perc múlva, ha

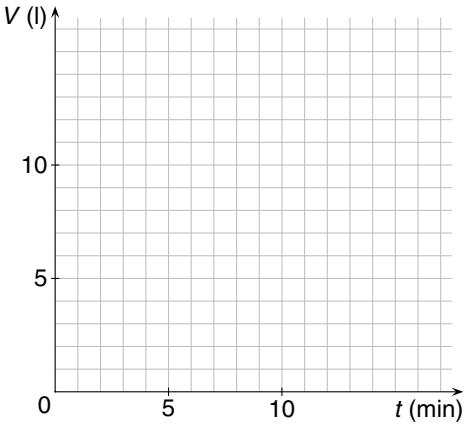
a) 1 perc alatt 1 l víz folyik bele;

b) 2 perc alatt 1 l víz folyik bele;

c) 1 perc alatt 2 l víz folyik bele;

d) 5 perc alatt 2 l víz folyik bele;

e) 2 perc alatt 5 l víz folyik bele?



	t (min)	0	1	2	5	6	10
a)	V (l)						
b)	V (l)						
c)	V (l)						
d)	V (l)						
e)	V (l)						

a) $t \mapsto$ .....

b) $t \mapsto$ .....

c) $t \mapsto$ .....

d) $t \mapsto$ .....

e) $t \mapsto$ .....

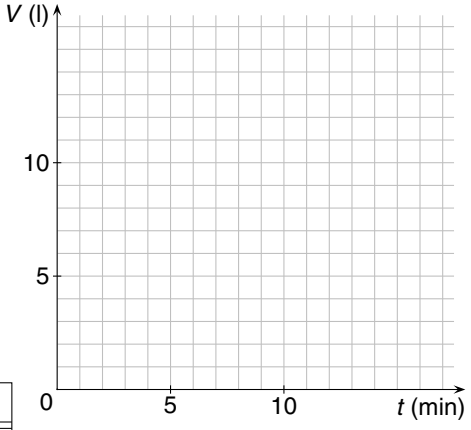
5.08. Minden feladat esetén töltsd ki a táblázatot, határozd meg a hozzárendelés szabályát, rajzold meg a grafikont!

Egy edénybe vizet engednek úgy, hogy 4 percenként 3 l víz folyik bele. Mennyi víz lesz benne 0, 1, 2, 3, ... perc múlva, ha

a) az edény üres volt;

b) az edényben 2 l víz volt;

c) az edényben 4 l víz volt?



	t (min)	0	1	4	8	12
a)	V (l)					
b)	V (l)					
c)	V (l)					

a) $t \mapsto$ .....

b) $t \mapsto$ .....

c) $t \mapsto$ .....

5.09. Minden feladat esetén töltsd ki a táblázatot, határozd meg a hozzárendelés szabályát, rajzold meg a grafikont!

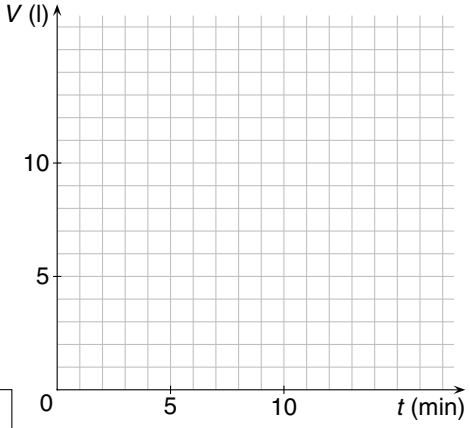
Egy edényben 9 l víz van. Mennyi víz lesz benne 0, 1, 2, 3, … perc múlva, ha

a) 5 percenként 3 l víz folyik bele;

b) 5 percenként 3 l víz folyik ki belőle;

c) 5 percenként 2 l víz folyik ki belőle;

d) minden csap és minden lefolyó el van zárva?



	t (min)	0	1	5	10	15
a)	V (l)					
b)	V (l)					
c)	V (l)					
d)	V (l)					

$t \mapsto$ .....

$t \mapsto$ .....

$t \mapsto$ .....

$t \mapsto$ .....

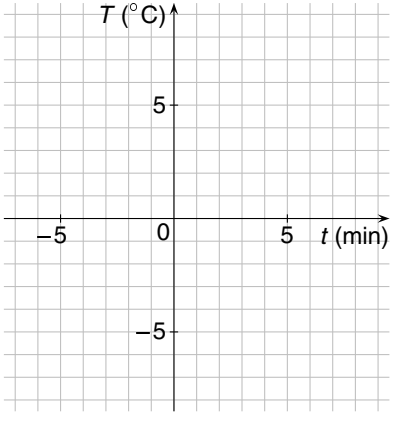
5.10. Minden feladat esetén töltsd ki a táblázatot, határozd meg a hozzárendelés szabályát, rajzold meg a grafikont!

Egy oldat hőmérsékletét egyenletesen változtatják. Akkor indítják az órát, amikor az oldat hőmérséklete 0 °C. Mekkora az oldat hőmérséklete az időmérés megkezdése előtti, illetve utáni időpontokban, ha

a) 3 percenként 4 °C-kal nő a hőmérséklet;

b) 3 percenként 2 °C-kal nő a hőmérséklet;

c) 3 percenként 4 °C-kal csökken a hőmérséklet?



Hogyan értelmezhetjük az idő negatív mérőszámait?

	t (min)	−6	−3	0	1	3	6
a)	T (°C)						
b)	T (°C)						
c)	T (°C)						

$t \mapsto$ .....

$t \mapsto$ .....

$t \mapsto$ .....

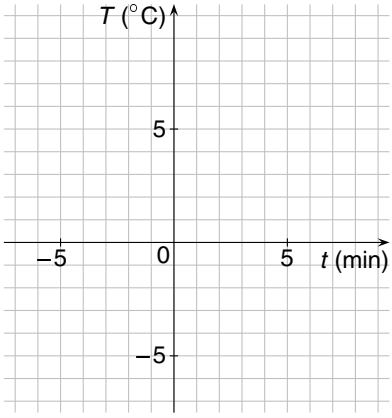
5.11. Minden feladat esetén töltsd ki a táblázatot, határozd meg a hozzárendelés szabályát, rajzold meg a grafikont!

Egy oldat hőmérsékletét egyenletesen változtatják. Akkor indítják az órát, amikor az oldat hőmérséklete 2 °C. Mekkora az oldat hőmérséklete az időmérés megkezdése előtti, illetve utáni időpontokban, ha

a) 3 percenként 4 °C-kal nő a hőmérséklet;

b) 3 percenként 2 °C-kal nő a hőmérséklet;

c) 3 percenként 4 °C-kal csökken a hőmérséklet?



	t (min)	−6	−3	0	1	3	6
a)	T (°C)						
b)	T (°C)						
c)	T (°C)						

a) $t \mapsto$ .....

b) $t \mapsto$ .....

c) $t \mapsto$ .....

5.12. Bernát kerékpárral másodpercenként 4,5 m-t tesz meg. Határozd meg, hogy hol volt Bernát az óra indítása előtt, illetve után 1; 2; 3; ...; t másodperccel, ha az északi irányú elmozdulást tekintjük pozitívnak, továbbá

a) Bernát észak felé halad, és az órát akkor indítjuk el, amikor a megfigyelőpontba ér;

b) Bernát dél felé halad, és az órát akkor indítjuk el, amikor a megfigyelőpontba ér;

c) Bernát észak felé halad, és az órát akkor indítjuk, amikor a megfigyelőponttól délre 18 m távolságra van;

d) Bernát dél felé halad, és az órát akkor indítjuk, amikor a megfigyelőponttól északra 9 m távolságra van!

5.13. Rajzold meg feladatonként közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját! Az értelmezési tartomány és az értékkészlet a valós számok halmaza.

a) $e(x) = \frac{2}{5}x$; $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$; $g(x) = \frac{2}{5}x + 4$;

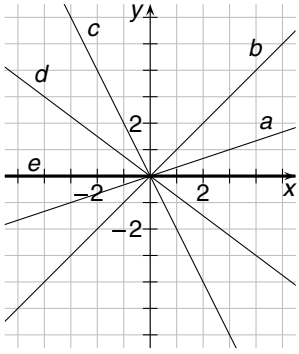
b) $e(x) = \frac{5}{2}x$; $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$; $g(x) = \frac{5}{2}x + 4$;

c) $e(x) = -\frac{2}{5}x$; $f(x) = -\frac{2}{5}x - 4$; $g(x) = -\frac{2}{5}x + 4$;

d) $e(x) = 0$; $f(x) = -4$; $g(x) = +4$

5.14. Közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk néhány függvény grafikonját. Írd le a függvények szabályát! Az értelmezési tartomány és a képhalmaz a valós számok halmaza.

(1)



$a: x \mapsto$ .....

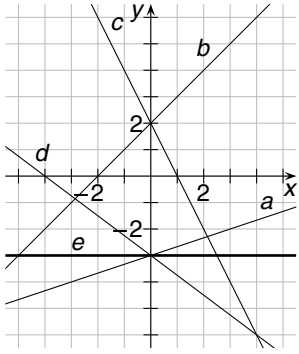
$b: x \mapsto$ .....

$c: x \mapsto$ .....

$d: x \mapsto$ .....

$e: x \mapsto$ .....

(2)



$a: x \mapsto$ .....

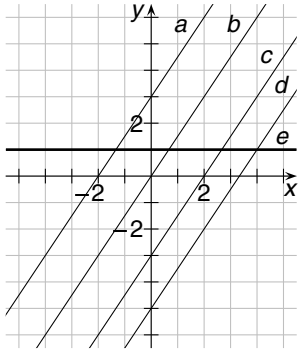
$b: x \mapsto$ .....

$c: x \mapsto$ .....

$d: x \mapsto$ .....

$e: x \mapsto$ .....

(3)



$a: x \mapsto$ .....

$b: x \mapsto$ .....

$c: x \mapsto$ .....

$d: x \mapsto$ .....

$e: x \mapsto$ .....

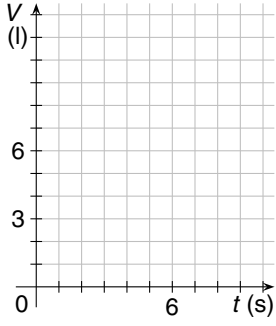
5.15. Egy üres tartályba az első csapon át másodpercenként 0,5 l, a második csapon át másodpercenként 1,5 l víz folyhat be.

Ábrázold közös grafikonon a vízmennyiség időbeli változását, ha

a) csak az első csapot nyitjuk ki;

b) csak a második csapot nyitjuk ki;

c) mindkét csapot kinyitjuk!

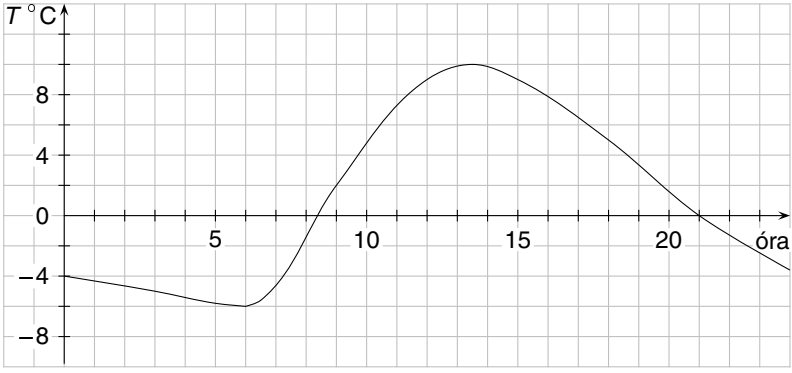


Töltsd ki a táblázatot!

	t (s)	0	2	4	6	8	10
a)	V (l)						
b)	V (l)						
c)	V (l)						

Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal

5.16. A grafikon a hőmérséklet 1 nap alatt megfigyelt változását szemlélteti.



a) Töltsd ki a táblázatot!

t (h)	0	3	6	9	12	15	18	21
T (°C)								

A táblázatba írt adatokból számítsd ki a napi középhőmérsékletet!

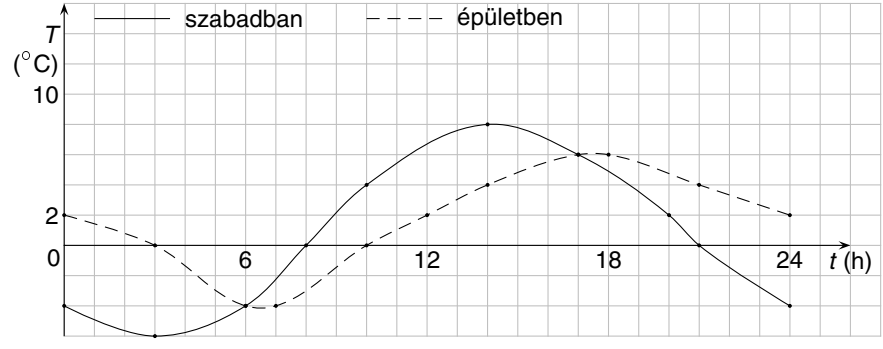
.....

.....

b) Mennyi ideig emelkedett a hőmérséklet? .....

Hány fokkal emelkedett a hőmérséklet ezalatt? .....

5.17. A két grafikon a hőmérséklet változását szemlélteti a szabadban, illetve egy fűtetlen épületben.



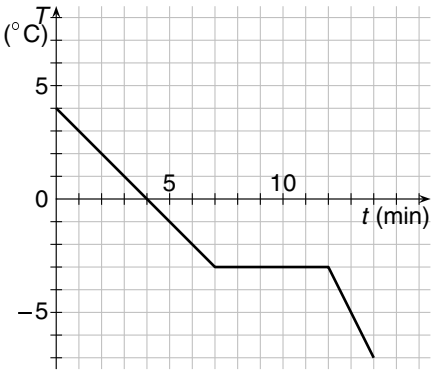
a) Mikor egyezett meg az épületben és a szabadban a hőmérséklet?

b) Déli 12 órakor hol volt melegebb, mennyivel?

c) Mikor volt hidegebb az épületben, mint a szabadban?

d) Mely időszakban emelkedett az épületben a hőmérséklet? Hány fokkal lett eközben melegebb?

5.18. Híg sóoldatot lehűtenek. Az oldat hőmérsékletének alakulását a grafikon szemlélteti. A grafikon segítségével egészítsd ki a táblázatot!



t (min)	0	1	2	6	7	9	12	13
T (°C)								

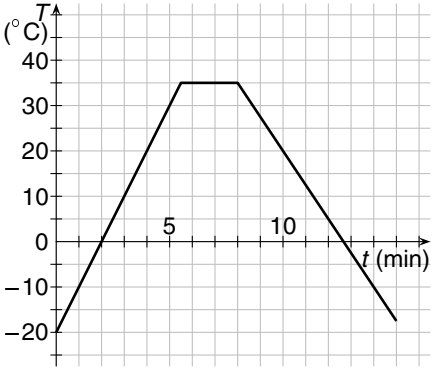
a) A grafikon időtengelyén húzd meg kékkel azt a szakaszt, ahol az oldat hőmérséklete 0 °C alá süllyedt!

b) Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor az oldat hőmérséklete 2 °C!

c) Percenként hány fokkal csökkent az oldat, illetve a megfagyott test hőmérséklete?

d) Milyen hőmérsékleten fagyott meg az oldat?

5.19. Egy oldatot forráspontjáig felmelegítenek, egy darabig forralják, majd hűlni hagyják. A grafikon segítségével egészítsd ki a táblázatot!



t (min)	0	3	6	7	9	10	11	15
T (°C)								

a) A grafikon időtengelyén húzd meg kékkel azt a szakaszt, ahol az anyag hőmérséklete csökkent!

b) Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor az oldat hőmérséklete 45 °C!

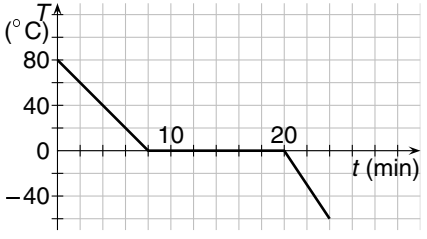
c) Percenként hány fokkal nőtt az oldat hőmérséklete?

d) A melegítés megszűntével percenként hány fokkal csökkent az anyag hőmérséklete?

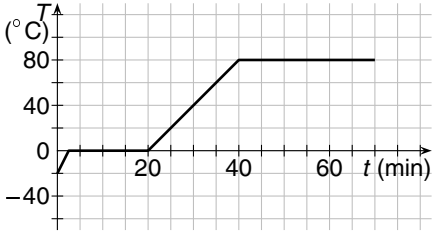
5.20. Valamilyen folyadék hűtését és fagyasztását, illetve melegítését és forralását szemlélteti a következő két grafikon. Írd le a hőmérséklet változását!

Lehet-e ez a folyadék víz? (Milyen körülmények között?)

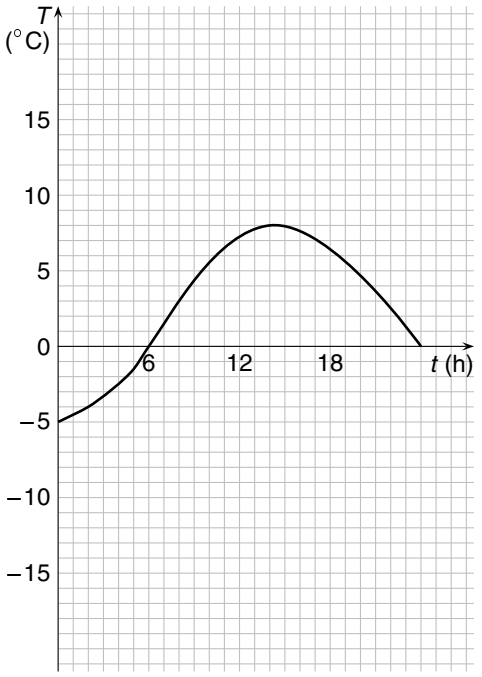
a)



b)



5.21. Egy szerkezet folyamatosan mérte és lerajzolta, hogy hogyan változott a szabadban a hőmérséklet:



$t \overset{\text{mér}}{\longmapsto} T$

a) Egy kísérleti klímakamra hőszabályozóját úgy állították be, hogy mindig 5 °C-kal melegebb legyen, mint a szabadban:

$t \overset{\text{mér}}{\longmapsto} T \overset{\text{melegít}}{\longmapsto} T+5$

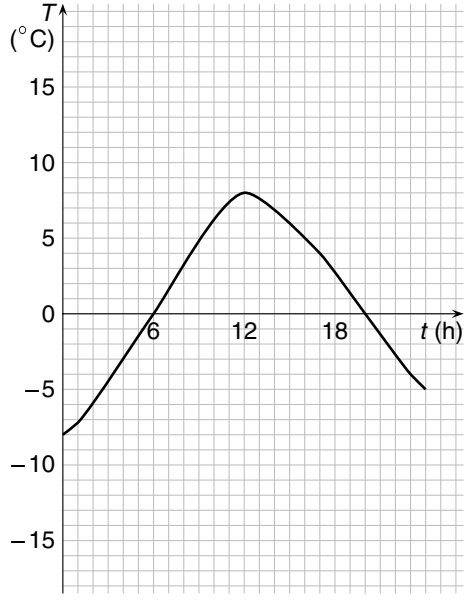
Pirossal ábrázold, hogy hogyan alakult a hőmérséklet a klímakamrában!

b) A klímakamra hőszabályozóját úgy állították be, hogy mindig 7 °C-kal hidegebb legyen, mint a szabadban:

$t \overset{\text{mér}}{\longmapsto} T \overset{\text{hűt}}{\longmapsto} T-7$

Kékkel ábrázold, hogy hogyan alakult a hőmérséklet a klímakamrában!

5.22. Egy szerkezet folyamatosan mérte és lerajzolta, hogy hogyan változott a szabadban a hőmérséklet:



$t \overset{\text{mér}}{\longmapsto} T$

a) Egy kísérleti klímakamra hőszabályozóját úgy állították be, hogy mindig (Celsius-fokban mérve) 2-szer annyi legyen a hőmérséklet, mint a szabadban:

$t \overset{\text{mér}}{\longmapsto} T \overset{\text{változtat}}{\longmapsto} 2T$

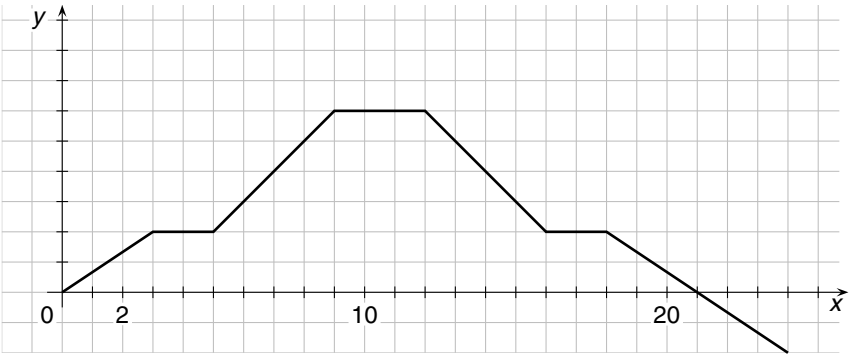
Pirossal ábrázold, hogy hogyan alakult a hőmérséklet a klímakamrában!

b) A klímakamra hőszabályozóját most úgy állították be, hogy mindig felényi legyen a hőmérséklet a kamrában, mint a szabadban:

$t \overset{\text{mér}}{\longmapsto} T \overset{\text{változtat}}{\longmapsto} \frac{1}{2}T$

Kékkel ábrázold, hogy hogyan alakult a hőmérséklet a klímakamrában!

5.23.



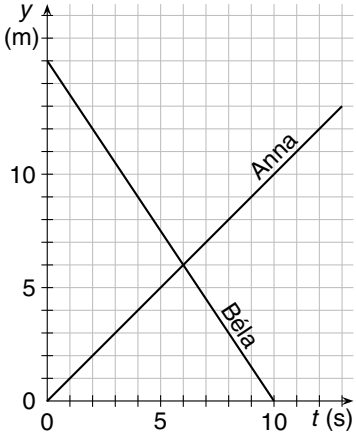
Írd le a grafikon segítségével a jelenséget, ha

a) az *x* tengely egy beosztása 1 min-et, az *y* tengely egy beosztása 25 °C-ot jelent, és valamilyen szilárd anyagot melegítünk olvadáspontjáig, majd tovább;

b) az *x* tengely egy beosztása 1 h-t, az *y* tengely egy beosztása 1 °C-ot jelent, és a levegő hőmérsékletét mérjük;

c) az *x* tengely egy beosztása 1 s-et, az *y* tengely egy beosztása 1 cm-t jelent, és egy katicabogár mozgását vizsgáljuk egy szalmaszálon!

5.24. A grafikon Anna, illetve Béla mozgását szemlélteti. Foglald táblázatba, hogy az egyes időpillanatban ki milyen távolságra van a megfigyelőponttól!



t (s)	0	2	4	6	8	10
y_a (m)						
y_b (m)						

a) Az időmérés megkezdésekor ki milyen távol van a megfigyelőponttól?

b) Ki közeledik a megfigyelőponthoz, ki távolodik attól?

c) Melyikük halad gyorsabban? Másodpercenként mekkora utat tesznek meg?

d) Mikor és hol találkoznak?

5.25. Egy úszó álló vízben 1 m-t tesz meg másodpercenként. Amikor az órát elindítják, az úszó a megfigyelőponttól 10 m távolságra van. Ábrázold az úszónak a megfigyelőponttól való távolságát különböző időpontokban, ha az úszó

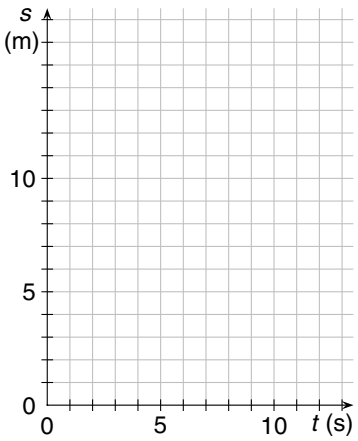
a) álló vízben közeledik a megfigyelőponthoz;

b) folyó vízben sodortatja magát, így távolodik a megfigyelőponttól, és a víz folyásának sebessége 0,75 m másodpercenként;

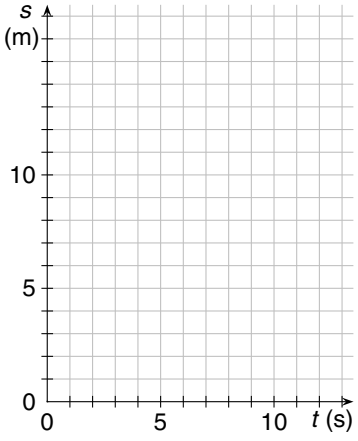
c) folyó vízben a folyás irányával szemben közeledik a megfigyelőponthoz!

5.26. Rajzold meg a fiúk mozgásának idő-út grafikonját!

a) Andor 6 m távolságra van a kezdőponttól. Az időmérés megkezdésekor másodpercenként 2 m-t megtéve a kezdőponthoz megy. Ott 3 s alatt átvesz egy térképet, majd 2 másodpercenként 5 m-t megtéve elkocog arrafelé, amerről jött.



b) Béla az időmérés megkezdésekor a kezdőpontban áll. 2 s múlva elindul, és 3 másodpercenként 2 m-t tesz meg. Az elindulása után 6 másodperc múlva felgyorsít, és 2 másodperc alatt tesz meg 3 m-t.

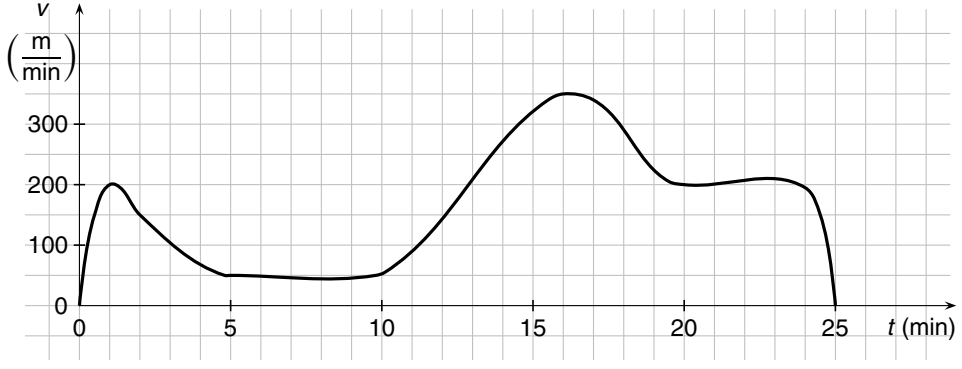


5.27. Egy sífutó hegyen-völgyön át folytatja az edzését. A pillanatnyi sebességét a grafikon szemlélteti. Körülbelül (az edzés 25 perce alatt) mettől meddig

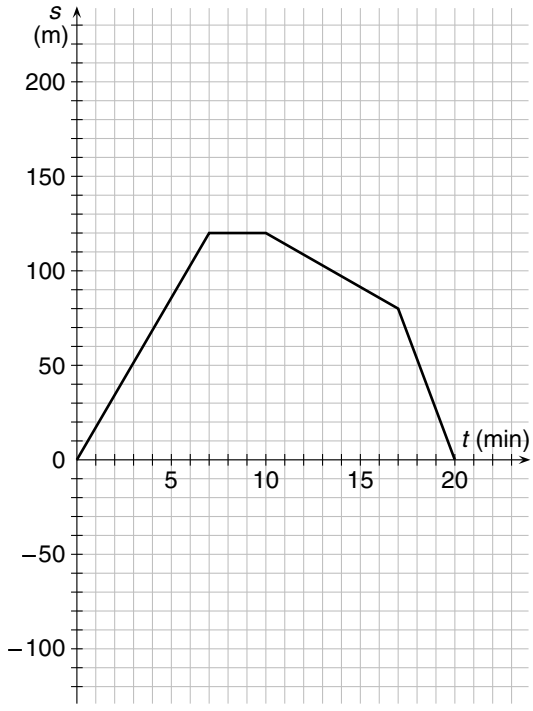
a) siklott lejtőn lefelé; .....

b) kapaszkodott emelkedőn felfelé; .....

c) futott vízszintes pályán? .....



5.28. Képzeld el, hogy közös távirányítással négy hajómodellt működtetünk. Az órát akkor indítjuk, amikor az *A* hajómodellt.



a) Az *A* modell mozgásgrafikonját megrajzoltuk. Egészítsd ki a megfelelő táblázatot!
A grafikon segítségével írd le a hajómodell mozgását!

b) A *B* hajómodell ugyanonnan, ugyanabban az irányban indul, mint az *A*, de $\frac{3}{2}$-szer akkora a sebessége, mint az *A* modellnek. Rajzold meg a *B* modell idő-elmozdulás grafikonját!
Foglalj táblázatba néhány összetartozó adatpárt!

a)

t (min)	0	3,5	10	17	20
s (m)					

b)

t (min)	0	3,5	10	17	20
s (m)					

c)

t (min)	0	3,5	10	17	20
s (m)					

d)

t (min)	0	3,5	10	17	20
s (m)					

c) A *C* hajómodell ugyanonnan, de ellenkező irányban indul, mint az *A*, és a sebessége $\frac{3}{4}$-szerese az *A* modellének. Rajzold meg a *C* modell idő-elmozdulás grafikonját! Foglalj táblázatba néhány összetartozó adatpárt!

d) A *D* hajómodell ugyanonnan, de ellenkező irányban indul, mint az *A*, és a sebessége is akkora, mint az *A* modellnek. Rajzold meg a *D* modell idő-elmozdulás grafikonját! Foglalj táblázatba néhány összetartozó adatpárt!

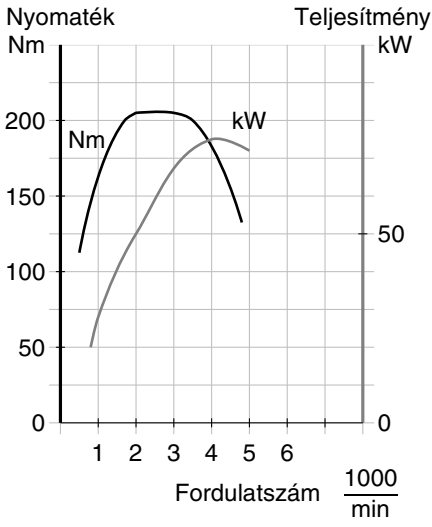
e) Az *E* modell ugyanazon program szerint működik, mint az *A*, de 5 perccel később indul. Rajzold meg az idő-elmozdulás grafikonját! Töltsd ki a táblázatot!

t (min)	5	8,5	15	22	25
s (m)					

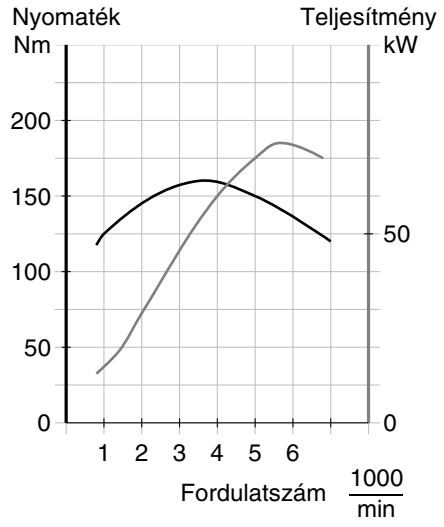
5.29. Ábrázold grafikonon, hogyan változik a figyelmed intenzitása egy matematikaóra folyamán!

5.30. A diagramok két személygépkocsi forgatónyomatékának, illetve teljesítményének alakulását mutatják a motor fordulatszámának függvényében.

2,0 literes (DTI) dízelmotor:



1,6 literes benzinmotor:



Fogalmazd meg észrevételeidet!

Sorozatok

5.31. Határozd meg a sorozat különbségsorozatát! A felismert szabály figyelembevételével írd fel a sorozat további öt elemét!

a) 1; 3; 5; 7; 9; ...

b) 20; 15; 10; 5; 0; ...

c) 2; 2; 3; 5; 8; ...

d) 5; −5; 5; −5; 5; ...

e) 0; 1; 4; 9; 16; ...

f) 6; 2; −2; −6; −10; ...

Melyik számtani sorozat a fenti sorozatok közül?

5.32. Határozd meg a sorozat hányadossorozatát! A felismert szabály figyelembevételével írd fel a sorozat további öt elemét!

a) 3; 6; 12; 24; 48; ...

b) 96; 48; 24; 12; 6; ...

c) 2; −4; 8; −16; 32; ...

d) 100 000; 1000; 10; 0,1; 0,001; ...

e) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$

f) $\frac{32}{81}; \frac{16}{27}; \frac{8}{9}; \frac{4}{3}; 2; \ldots$

Melyik nem mértani sorozat a fentiek közül?

5.33. Adott a sorozat első három eleme. A szabály alapján folytasd a sorozatot négy elemmel!

a) A különbségsorozat a páratlan természetes számok sorozata.

2; 3; 6; .....

b) A különbségsorozat elemei váltakozva 1 és 3.

2; 3; 6; .....

c) A különbségsorozat elemei mindig 3-szorosra növekednek.

2; 3; 6; .....

d) A hányadossorozat elemei mindig $\frac{1}{2}$-del növekednek ($\frac{3}{2}$; 2; $\frac{5}{2}$; 3; ...).

2; 3; 6; .....

e) A hányadossorozat elemei váltakozva $\frac{3}{2}$ és 2.

2; 3; 6; .....

f) A harmadik elemtől kezdve minden elem az előző kettő szorzata.

2; 3; 6; .....

g) A harmadik elemtől kezdve minden elemet úgy kapunk, hogy az előző két elem összegéhez 1-et adunk.

2; 3; 6; .....

h) Keress további szabályokat, és azok alapján is folytasd a sorozatot!

5.34. Egy sorozat első három eleme 1; 5; 25. Keress minél több szabályt a sorozathoz, és azok alapján add meg a sorozat a_4, a_5 elemét!

5.35. A szabály alapján határozd meg a sorozat néhány elemét! Töltsd ki a táblázatot!

a)

n	1	2	3	4	5	10	20	30	50	100
$a_n = 2n + 5$										

b)

n	1	2	3	4	5	10	20	30	50	100
$a_n = 50 - 2n$										

c)

n	1	2	3	4	5	10	20	30	50	100
$a_n = 30 : n$										

d)

n	1	2	3	4	5	10	20	30	50	100
$a_n = (n - 1)^2$										

5.36. *a)* Egy számtani sorozat első két eleme: $a_1 = 50$; $a_2 = 58$. Számítsd ki az a_3 és a_{10} elemet, majd az első tíz tag összegét!

b) Egy számtani sorozatban $a_1 = 60$; $a_5 = 44$. Számítsd ki az a_2; a_3; a_4 és az a_{10} elemet, illetve az első tíz tag összegét!

c) Egy számtani sorozatban $a_4 = 25$; $a_5 = 28$. Számítsd ki az a_4 és a_6; az a_3 és a_7, az a_2 és az a_8, illetve az a_1 és a_9 elemek számtani átlagát! Mit figyelhetsz meg? Fogalmazd meg a sejtésedet!

d) Dóra május 1-jén 5 €-t tesz a perselyébe. Ezután mindennap 2 €-val többet, mint az előző napon. Hány eurót tesz a perselyébe május 31-én? Hány eurót tesz összesen májusban a perselyébe?

5.37. Írd be a táblázatba a számtani sorozat hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*	*i)*
a_1	3	9	8	6	12			4	
d	2	-3				4	-8		-2
n	12	6	5	9	7	11	8	10	5
a_n			20	6	-18	45	8		
S_n								85	25

5.38. *a)* Egy mértani sorozat első két eleme: $a_1 = 5$; $a_2 = 10$. Számítsd ki az a_3 és az a_{10} elemet és az első 10 tag összegét!

b) Egy mértani sorozatban $a_1 = 4$; $a_3 = 36$. Számítsd ki az a_2, az a_4 és az a_5 elemet!

c) Egy mértani sorozatban $a_1 = \frac{27}{64}$; $q = -\frac{2}{3}$. Számítsd ki az a_2, a_3, a_4, a_5 elemet!

d) Egy mértani sorozatban $a_1 = 405$; $a_3 = 45$. Számítsd ki az a_2 és az a_8 elemet!

e) Egy mértani sorozatban $a_3 = 250$; $a_4 = 1250$. A hiányzó elemek meghatározása után számítsd ki a $\sqrt{a_3 \cdot a_5}$; $\sqrt{a_2 \cdot a_6}$ és a $\sqrt{a_1 \cdot a_7}$ értékeket! Mit figyelhetsz meg?

f) Egy sorozat első két eleme: $a_1 = 2$; $a_2 = 8$. Keress minél több szabályt a sorozathoz, és a felismert szabály alapján határozd meg a sorozat következő két elemét! Keress olyan szabályt is, hogy a sorozat számtani, illetve mértani legyen!

5.39. Írd be a táblázatba a mértani sorozat hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*	*i)*
a_1	5	13	-4	17	16	7	3		32
q	2	1	2	-1	1,5	0	2	4	
n	4	48	6	100	5	15		5	8
a_n							384	512	0
S_n									

5.40. *a)* Egy városnak 15 000 lakosa van. Hány lakosa lesz 4 év múlva, ha évente 10%-kal nő a lakossága?

b) Egy eszköz értéke 2500 €. Mennyi lesz az értéke 5 év múlva, ha évente az előző évi érték 10%-ával csökken?

c) Egy eszköz értéke 2500 €. Mennyi lesz az értéke 5 év múlva, ha évente az eredeti érték 10%-ával csökken?

5.41. A pozitív egész számokhoz ábrákat rendeltünk hozzá.
Minden harmadik számhoz olyan sün tartozik, amelyiknek ugyanúgy áll a tüskéje, minden negyedikhez olyan, amelyik ugyanarra fordul, minden hatodik számhoz olyan sün tartozik, amelyiknek ugyanaz a zsákmánya.



a) Az ábrasorozat mely ábrái lesznek ugyanolyanok, mint az első ábra?

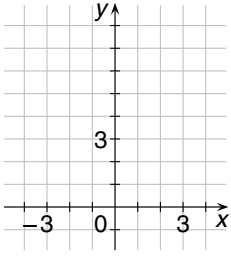
b) Rajzold le a 10., a 100., az 1000. ábrát!

Nemlineáris függvények

5.42. A valós számok halmazán értelmezzük a következő függvényeket:

a) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x| + 2$; $h(x) = |x + 3|$

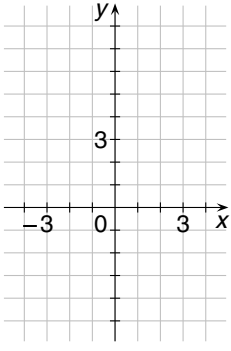
Töltsd ki a táblázatot! Rajzold meg a függvények grafikonját!



x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$								
$g(x)$								
$h(x)$								

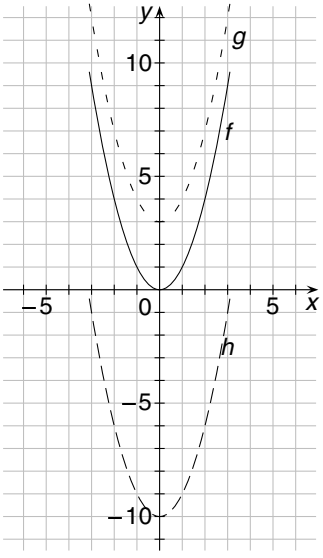
b) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x| - 2$; $h(x) = |x - 3|$

Töltsd ki a táblázatot! Rajzold meg a függvények grafikonját!



x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$								
$g(x)$								
$h(x)$								

5.43. Megrajzoltuk az $f(x) = x^2$, továbbá a g és a h függvény grafikonját.



a) Töltsd ki a közös táblázat első három sorát!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$		4		0	1		
$g(x)$							
$h(x)$							
$i(x)$							
$j(x)$							

b) Add meg a g és a h függvényt kifejezéssel!

$g: x \mapsto$ .....

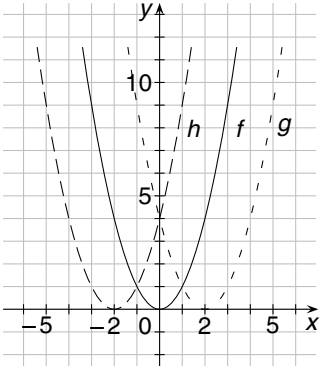
$h: x \mapsto$ .....

5.44. A valós számok halmazán értelmezzük a következő függvényeket:

$i: x \mapsto x^2 - 3$; $\quad j: x \mapsto x^2 + 6$

Töltsd ki az előző táblázat utolsó két sorát, és rajzold meg a függvények grafikonját!

5.45. Megrajzoltuk az $f(x) = x^2$, továbbá a g és a h függvény grafikonját.



a) Töltsd ki a közös táblázat első három sorát!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							
$h(x)$							
$i(x)$							
$j(x)$							

b) A következő kifejezések közül melyik írja le a g és melyik a h függvényt?

..... : $x \mapsto (x-2)^2$; $\quad$ ..... : $x \mapsto (x+2)^2$

5.46. A valós számok halmazán értelmezzük a következő függvényeket:

$i: x \mapsto (x-4)^2$; $\quad j: x \mapsto (x+4)^2$

Töltsd ki az előző táblázat utolsó két sorát, és rajzold meg a függvények grafikonját!

5.47. 1 cm^2 lemez tömege legyen 1 g. Mekkora a tömege

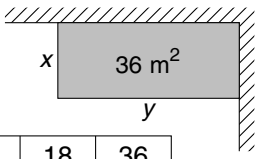
a) különböző oldalhosszúságú, négyzet alakú lemezeknek;

b) különböző sugarú, negyed körcikk alakú lemezeknek?

Készíts táblázatot! Szemléltesd közös grafikonon a lapok tömegének változását a méret függvényében!

	x (cm)	0	1	2	3	4
a)	m (g)					
b)	m (g)					

5.48. Egy kutya számára egy kert sarkában elkerítenek 36 m^2 téglalap alakú területet. Foglald táblázatba az elkerített rész lehetséges méreteit, illetve a szükséges kerítés hosszát!



x (cm)	0,5	1	2	3	4	6	9	12	18	36
y (m)										
$x + y$ (m)										

a) Milyen összefüggés van a kerítés két oldalának hossza között?

b) Hogyan kerítsük el a kertet, ha azt akarjuk, hogy a felhasznált kerítés a lehető legrövidebb legyen?

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

5.49. Töltsd ki a táblázatot! Oldd meg grafikusan és algebrai módon is a feladatot!

Egy tartályban 24 l víz van. Kinyitjuk a csapot, és percenként 1,5 l víz folyik ki belőle.

a) Hány perc múlva lesz 13,5 l víz a kádban?

b) Hány perc múlva lesz 12 l-nél kevesebb víz a kádban?

c) Hány perc múlva lesz felényi víz a kádban?

Idő (perc)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kifolyik (l)	0									
Marad (l)	24									

5.50. Vizsgáld grafikusan a következő egyenletek, egyenlőtlenségek megoldhatóságát! Az alaphalmaz: **R**

a) $\frac{2}{3}x + 4 = 2$; $\frac{2}{3}x + 4 \geqq 2$; $\frac{2}{3}x + 4 < 2$

b) $-\frac{3}{2}x - 6 = 0$; $-\frac{3}{2}x - 6 > 0$; $-\frac{3}{2}x - 6 \leqq 0$

c) $\frac{2}{5}x - 3 = -\frac{1}{2}x + 6$; $\frac{2}{5}x - 3 > -\frac{1}{2}x + 6$; $\frac{2}{5}x - 3 \leqq -\frac{1}{2}x + 6$

d) $-\frac{2}{6}x = -\frac{3}{9}x + 3$; $-\frac{2}{6}x \leqq -\frac{3}{9}x + 3$; $-\frac{2}{6}x \geqq -\frac{3}{9}x + 3$

5.51. Oldd meg grafikusan és algebrai módon is a következő feladatokat!

a) Egy 20 °C-os folyadékot hűteni kezdenek úgy, hogy 2 percenként 3 °C-kal csökken a hőmérséklete. Ugyanakkor egy 5 °C-os folyadékot melegíteni kezdenek úgy, hogy percenként 1 °C-kal nő a hőmérséklete. Mely időpontban fog megegyezni a két folyadék hőmérséklete, és hány fokosak lesznek ekkor?

b) Egy 14 °C-os folyadékot hűteni kezdenek úgy, hogy 3 percenként 2 °C-kal csökken a hőmérséklete. 3 perc elteltével egy 0 °C-os folyadékot melegíteni kezdenek úgy, hogy 3 percenként 4 °C-kal nő a hőmérséklete. Mikor fog megegyezni a két folyadék hőmérséklete, és hány fokosak lesznek ekkor?

c) Egy -6 °C-os folyadékot melegíteni kezdenek úgy, hogy 4 percenként 3 °C-kal nő a hőmérséklete. 2 perc elteltével egy 9 °C-os folyadékot hűteni kezdenek úgy, hogy 2 percenként 3 °C-kal csökken a hőmérséklete. Mikor fog megegyezni a két folyadék hőmérséklete, és hány fokosak lesznek ekkor?

d) 14 °C-os *A* folyadékot hűteni kezdenek úgy, hogy 3 percenként 4 °C-kal csökken a hőmérséklete. Ugyanakkor egy -2 °C-os *B* folyadékot melegíteni kezdenek úgy, hogy 3 percenként 2 °C-kal nő a hőmérséklete. Mikor lesz a *B* folyadék 2 °C-kal melegebb, mint az *A* folyadék?

e) 10 °C-os folyadékot hűteni kezdenek úgy, hogy 4 percenként 3 °C-kal csökken a hőmérséklete. Ugyanakkor egy -10 °C-os folyadékot melegíteni kezdenek úgy, hogy hogy 4 percenként 5 °C-kal nő a hőmérséklete. Mikor lesz a két folyadék hőmérséklete közt 4 °C a különbség?

5.52. Oldd meg grafikusan és algebrai módon is a következő feladatokat!

a) Egy tehergépkocsi 9 km távolságról indul, és 4 percenként 3 km-t megtéve távolodik a vonatkoztatási ponttól. Ugyanakkor a vonatkoztatási pontból is elindul egy személygépkocsi a tehergépkocsi után, amely 2 percenként tesz meg 3 km-t. Mikor és hol éri utol a tehergépkocsit a személygépkocsi?

b) Egy személygépkocsi 15 km távolságról indul, és 2 km-es percenkénti sebességgel halad a vonatkoztatási pont felé. Ugyanakkor az ellenkező irányból, 10 km távolságból, a személygépkocsival szemben elindul a vonatkoztatási pont felé egy tehergépkocsi, amely 2 percenként tesz meg 1 km-t. Mikor és hol találkozik a két gépkocsi?

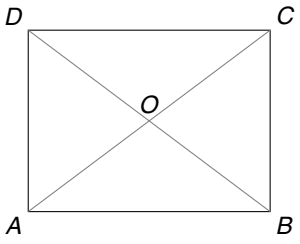
c) Egy személygépkocsi 20 km távolságról indul, és 2 km-es percenkénti sebességgel közeledik a vonatkoztatási ponthoz. Ugyanakkor a vonatkoztatási pontból is elindul egy tehergépkocsi a személygépkocsival szemben, amely 4 percenként tesz meg 2 km-t. Mikor lesz nagyobb távolságra a tehergépkocsi a vonatkoztatási ponttól, mint a személygépkocsi?

d) Egy tehergépkocsi 3 km távolságról indul, és 1 km-es percenkénti sebességgel távolodik a vonatkoztatási ponttól. 1 perccel később a vonatkoztatási pontból ugyanabba az irányba elindul egy gépkocsi a tehergépkocsi után, amely 2 percenként tesz meg 3 km-t. Mikor lesz 2 km távolság a két gépkocsi között?

6. Síkidomok, felületek, testek

Térelemek, szögek

6.01. Egy téglalap oldalai: $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm.



a) Mekkora távolságra van az A pont a BC oldaltól?

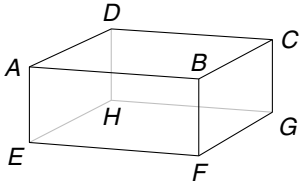
b) Mérd meg az A és a C pont távolságát!

c) Szerkeszd meg, majd határozd meg az A pont és a BD átló távolságát!

d) Határozd meg!

(1) az $ABD\sphericalangle$; (2) a $BDC\sphericalangle$; (3) az $AOD\sphericalangle$; (4) a $DOC\sphericalangle$ nagyságát!

6.02. Egy téglatest élei: $AB = 5$ cm; $AD = 3$ cm; $AE = 2$ cm.



a) Mekkora távolságra van

(1) a D pont a BC egyenestől;

(2) a B pont a $DCGH$ síktól;

(3) a BC egyenes az FG egyenestől?

b) Keress a téglatesten olyan csúcsot, amely ugyanolyan távol van az F csúcstól, mint az A csúcs

(1) a D csúcstól; (2) a H csúcstól; (3) a C csúcstól; (4) a G csúcstól!

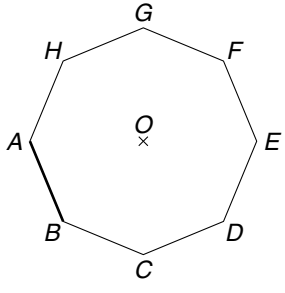
c) Keress a téglatesten olyan csúcsot, amely ugyanolyan távolságra van az FG éltől, mint az A csúcs

(1) az EF éltől; (2) az FG éltől!

d) Keress a téglatesten olyan élt, amely ugyanolyan távolságra van az $EFGH$ laptól, mint az AB él!

6.03. *a)* Egy szabályos nyolcszög AB oldala az A csúcsból kiinduló átlók közül melyikkel alkot

(1) hegyesszöget; (2) derékszöget;
(3) tompaszöget?



b) Mely átlók párhuzamosak

(1) az AB oldallal; (2) az AG átlóval;
(3) az AE átlóval?

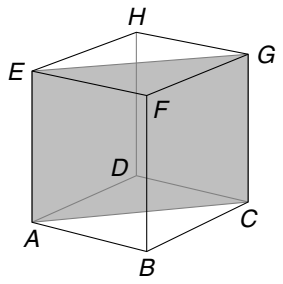
c) Mely átlók merőlegesek az

(1) AG átlóra; (2) AF átlóra; (3) AE átlóra?

6.04. Határozd meg a szabályos nyolcszögben (6.03. feladat) az

a) $AOB\sphericalangle$; *b)* $OBA\sphericalangle$; *c)* $ABC\sphericalangle$; *d)* $ABD\sphericalangle$; *e)* $ABG\sphericalangle$ nagyságát!

6.05. Az ábrán látható négyzet alapú hasáb alaplapjának átlója 8 cm hosszú, magassága 6 cm.



a) Mekkora távolságra van a *BF* él az *ACGE* átlósíktól?

b) Mekkora szöget zár be az *ACGE* átlósík az *ABFE* lappal?

c) Mekkora szöget zár be az *ACGE* átlósík az *ABCD* lappal?

d) Szerkeszd meg, majd mérd meg a *GA* testátló és az *ABCD* lap által bezárt szöget!

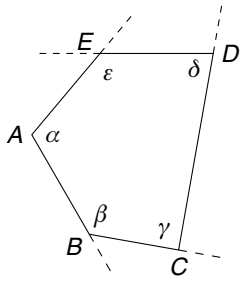
6.06. Egy játék óra pontosan déli 12 órát mutat. A nagymutatót elforgatjuk egy adott szöggel. Mennyi időt mutat az óra az egyes fordulatok után?

a) $+90^\circ$; *b)* -90°; *c)* $+30^\circ$; *d)* -330°; *e)* $+120^\circ$;

f) $+180^\circ$; *g)* -180°; *h)* -360°; *i)* -540°; *j)* $+720^\circ$

6.07. Egy ötszög szögei:

$\alpha = 110^\circ$, $\beta = 130^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\delta = 80^\circ$, $\varepsilon = 130^\circ$



Mekkora szöggel fordulunk el, ha

a) az *A* csúcsból a *B*-n keresztül a *C* felé fordulunk;

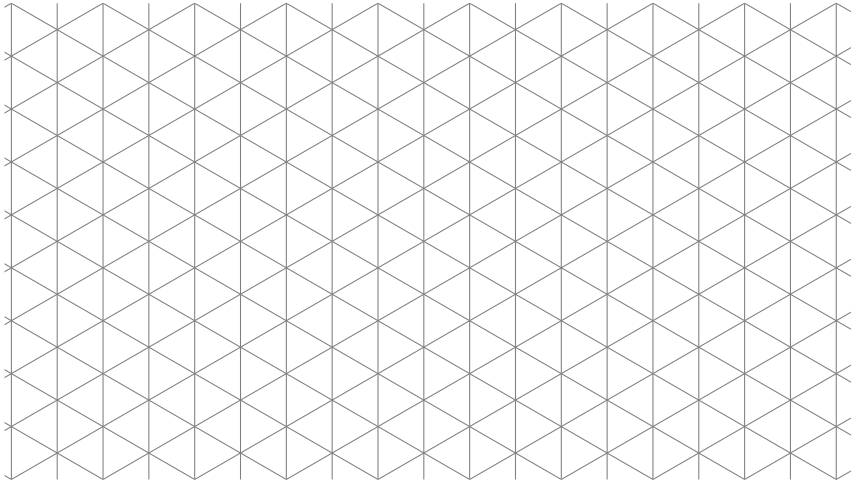
b) az *A* csúcsból az *E*-n keresztül a *D* felé fordulunk;

c) a *D* csúcsból az *E*-n keresztül az *A* felé fordulunk;

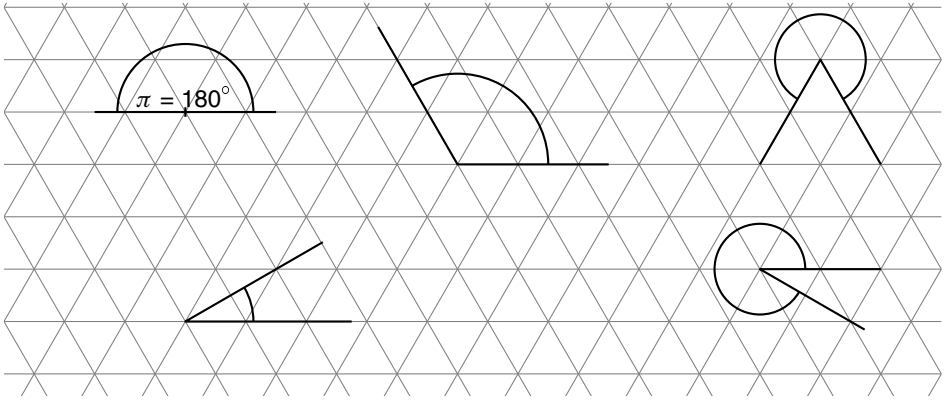
d) a *B* csúcsból a *C*-n keresztül a *D* felé fordulunk?

6.08. Az egyenesszög jele π. Rajzolj háromszögrácsra

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ nagyságú szöget!



6.09. Írd be, hány fokosak a megrajzolt szögek! Fejezd ki a szögek nagyságát π segítségével is!



6.10. *a)* $1^\circ = 60'$. Hány szögperc nagyságúak ezek a szögek?

$\alpha = 5^\circ = \ldots\ldots\ldots\ ';$ $\beta = 90^\circ = \ldots\ldots\ldots\ ';$ $\gamma = 0{,}5^\circ = \ldots\ldots\ldots\ '$

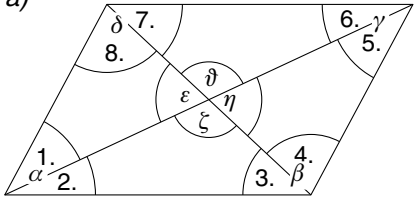
b) Hány fokosak az alábbi szögek?

$\alpha = 180' = \ldots\ldots\ ^\circ;$ $\beta = 3600' = \ldots\ldots\ ^\circ;$ $\gamma = 12' = \ldots\ldots\ldots\ ^\circ$

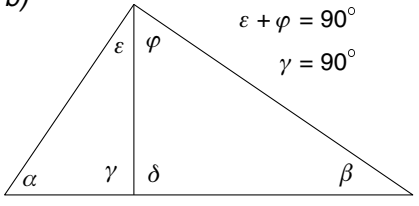
6.11. Szerkessz 60°-os, 15°-os, 90°-os, 150°-os, 225°-os, 330°-os szöget!

6.12. Keress az ábrán szögpárokat!

a)



b)



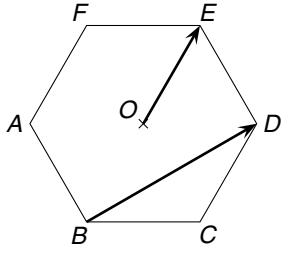
Vektorok

6.13. Az ábrán egy szabályos hatszögön megjelöltük az $\overrightarrow{OE}$-t és a $\overrightarrow{BD}$-t. Adj meg néhány vektort, amelyek

a) az adott vektorokkal egyenlők;

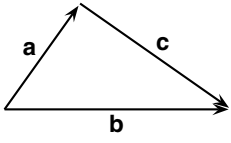
b) az adott vektorok ellentettjei;

c) amelyek összege a $\overrightarrow{BD}$!

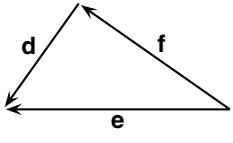


6.14. Írj összeadást és kivonást a következő vektorábrákról!

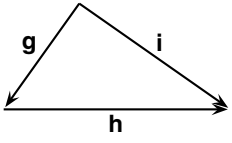
a)



b)



c)



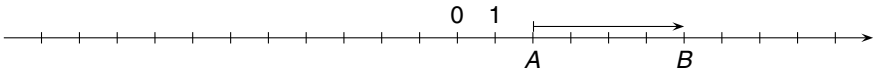
6.15. Szerkessz egy négyzetet, és húzd meg az átlóit! A hat szakasz közül irányíts kettőt úgy, hogy

a) az összegük $\overrightarrow{AD}$ legyen; *b)* a különbségük $\overrightarrow{AD}$ legyen;

c) az összegük $\overrightarrow{AC}$ legyen; *d)* a különbségük $\overrightarrow{AC}$ legyen!

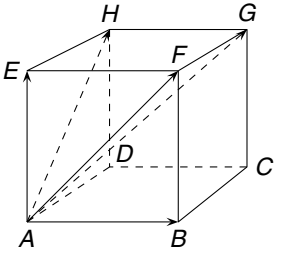
6.16. Rajzolj a számegyenesen három olyan vektort, amely az $\overrightarrow{AB}$

a) kétszerese; *b)* fele; *c)* (-2)-szerese!

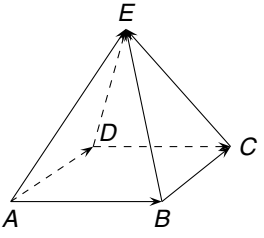


6.17. *a)* A kocka A csúcsából meghúztunk öt vektort. Még egy-egy újabb vektor meghúzásával írj fel összeadást, kivonást!

Például: $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AE}$



b) Szabályos négyzetes gúla élein vektorokat jelöltünk. Hányféle úton juthatunk az A csúcsból az E csúcsba? Írd le az utat vektorok összeadásával!



6.18. A koordináta-rendszerben megadtunk néhány origóból induló vektort:

a(1; 3),
b(4; 5),
c(3; −3),
d(−4; 2),
e(−1; −3)

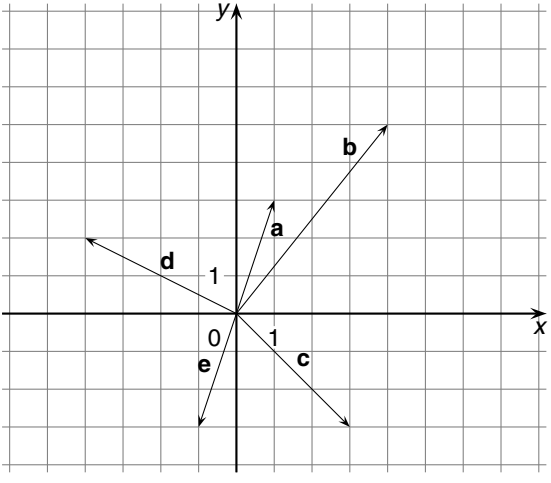
Rajzold meg a következő vektorokat, és írd fel a koordinátáikat!

a) **a** + **b**; *b)* **a** + **c**;

c) **a** + **d**; *d)* **a** + **e**;

e) **b** + **a**; *f)* **c** + **e**;

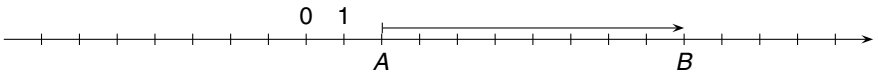
g) **b** + **e**; *h)* **d** + **c**



6.19. Rajzolj a számegyenesen két olyan vektort, amelyek

a) összege $\overrightarrow{AB}$; *b)* különbsége $\overrightarrow{AB}$;

c) összegének fele $\overrightarrow{AB}$; *d)* összegének kétszerese $\overrightarrow{AB}$!



6.20. Minden feladatban rajzolj egy tetszés szerinti **v** vektort!

a) Szerkessz olyan vektort (jelölje **a**), amelynek hossza egyenlő **v** hosszával, és azzal -60°-os szöget zár be!

b) Szerkessz olyan vektort (jelölje **b**), amelynek hossza másfélszerese **v** hosszának, és azzal 30°-os szöget zár be!

c) Szerkessz olyan vektort (jelölje **c**), amelynek hossza $\frac{3}{4}$-e **v** hosszának, és azzal -90°-os szöget zár be!

d) Szerkessz olyan vektort (jelölje **d**), amelynek hossza fele a **v** hosszának, és azzal 180°-os szöget zár be!

Adott tulajdonságú ponthalmazok

6.21. Végy fel egy *O* pontot! Határozd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek az *O* ponttól

a) 15 mm-nél nagyobb;

b) 30 mm-nél kisebb;

c) 15 mm-nél nagyobb és 30 mm-nél kisebb;

d) 15 mm-nél nem kisebb és 30 mm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

6.22. Rajzolj egy *e* egyenest! Határozd meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek az *e* egyenestől

a) 15 mm-nél nagyobb;

b) 30 mm-nél kisebb;

c) 15 mm-nél nagyobb és 30 mm-nél kisebb;

d) 15 mm-nél nem kisebb és 30 mm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

6.23. Rajzolj egy szakaszt! Határozd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek a szakasztól

a) 15 mm-nél nagyobb;

b) 30 mm-nél kisebb;

c) 15 mm-nél nagyobb és 30 mm-nél kisebb;

d) 15 mm-nél nem kisebb és 30 mm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

6.24. Rajzolj egy 4 cm sugarú kört! Határozd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek a körvonaltól

a) 15 mm-nél nagyobb;

b) 30 mm-nél kisebb;

c) 15 mm-nél nagyobb és 30 mm-nél kisebb;

d) 15 mm-nél nem kisebb és 30 mm-nél nem nagyobb távolságra vannak!

6.25. Jelölj ki egy *P* pontot! Határozd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek a *P* ponttól

a) legalább 2 cm és legfeljebb 2,5 cm-re vannak;

b) legalább 2 cm-re és kevesebb, mint 2,5 cm-re vannak;

c) több, mint 2 cm-re, nem több, mint 2,5 cm-re vannak;

d) több, mint 2 cm-re és kevesebb, mint 2,5 cm-re vannak!

6.26. Rajzolj egy *e* egyenest és ettől 2 cm távolságra egy *P* pontot! Határozd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek

a) a *P* ponttól is és az *e* egyenestől is 2 cm távolságra vannak;

b) a *P* ponttól több, mint 2 cm, az egyenestől kevesebb, mint 2 cm távolságra vannak;

c) a *P* ponttól legalább 2 cm, az *e* egyenestől legfeljebb 2 cm távolságra vannak!

6.27. Rajzold meg az *A* és *B* pontot egymástól 4 cm távolságra!
Határozd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek

a) az *A*-tól is és a *B*-től is 3,5 cm távolságra vannak;

b) az *A*-tól is és a *B*-től is kevesebb, mint 3,5 cm-re vannak;

c) az *A*-tól is és a *B*-től is nem kevesebb, mint 3,5 cm-re vannak;

d) az *A*-tól több, mint 3 cm-re és *B*-től legfeljebb 3 cm-re vannak!

6.28. Rajzolj két egymással párhuzamos (*a* és *b*) egyenest!
Határozd meg azoknak a pontoknak a halmazát az *a* és *b* síkjában, amelyek

a) egyenlő távolságra vannak mindkét egyenestől;

b) közelebb vannak az *a* egyeneshez, mint a *b*-hez;

c) az *a*-tól kétszer akkora távolságra vannak, mint a *b*-től;

d) a *b*-től háromszor akkora távolságra vannak, mint az *a*-tól!

6.29. Rajzolj két egymással $\alpha = 60^\circ$-os szöget bezáró *a* és *b* egyenest!
Határozd meg azoknak a pontoknak a halmazát az *a* és *b* síkjában, amelyek

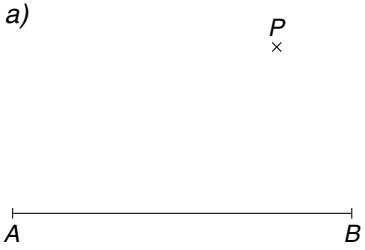
a) egyenlő távolságra vannak mindkét egyenestől;

b) közelebb vannak az *a*-hoz, mint a *b*-hez;

c) közelebb vannak a *b*-hez, mint az *a*-hoz!

6.30. Rajzolj egy AB szakaszt és egy P pontot az ábrához hasonló módon! Kösd össze a P pontot az AB szakasz néhány pontjával! Az így kapott szakaszok mindegyikét felezd meg! Hol helyezkednek el a felezőpontok?

a)



b)



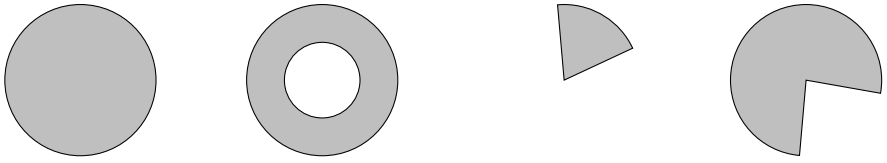
c)



Síkidomok, sokszögek

6.31. A következő síkidomok közül válaszd ki a konvexeket!

a) *b)* *c)* *d)*



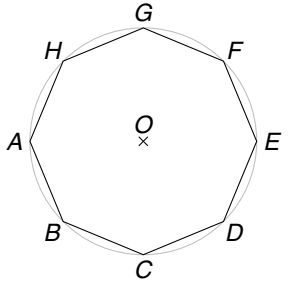
6.32. Egy körvonalat nyolc egyenlő részre osztottunk, és jelöltük a kör középpontját is.
A kilenc pontból válassz ki négyet úgy, hogy azokat összekötve

a) konvex négyszöget kapj;

b) konkáv négyszöget kapj;

c) tengelyesen szimmetrikus négyszöget kapj;

d) középpontosan szimmetrikus négyszöget kapj!



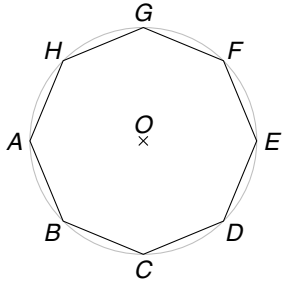
6.33. Egy körvonalat nyolc egyenlő részre osztottunk, és jelöltük a kör középpontját is.
A kilenc pontból válassz ki ötöt úgy, hogy azokat összekötve

a) konvex ötszöget kapj;

b) konkáv ötszöget kapj;

c) tengelyesen szimmetrikus ötszöget kapj;

d) középpontosan szimmetrikus ötszöget kapj!



6.34. Rajzolj egy konvex, illetve egy konkáv hatszöget! A megrajzolt hatszögek közül

a) melyiknek van homorúszöge;

b) melyik az, amelynek minden átlója a hatszög belsejében helyezkedik el?

6.35. Egy ötszög három csúcsa a koordináta-rendszerben $A(0;6)$, $O(0;0)$, $B(6;0)$ pontok.

Keress az $y = 9 - x$ egyenlet egyenesének az első síknegyedben lévő részén olyan két rácspontot, hogy azokat összekötve

a) az ötszögnek legyen két párhuzamos oldala;

b) az ötszögnek legyen két derékszöge;

c) az ötszög tengelyesen szimmetrikus legyen!

6.36. Ábrázold koordináta-rendszerben a következő három egyenest!

Az *a* egyenes egyenlete: $y = x + 4$;

a *b* egyenes egyenlete: $y = x - 4$;

a *c* egyenes egyenlete: $y = -x + 12$

a) Hol metszi az *a* egyenes az *y* tengelyt? Jelöld a metszéspontot *A*-val!

b) Hol metszi a *b* egyenes az *x* tengelyt? Jelöld a metszéspontot *D*-vel!

c) Hol metszi az *a* egyenes a *c* egyenest? Jelöld a metszéspontot *B*-vel!

d) Hol metszi a *b* egyenes a *c* egyenest? Jelöld a metszéspontot *C*-vel!

e) Számítsd ki az *A*, *B*, *C*, *D* és origó pontok által meghatározott ötszög belső szögeit! Számítsd ki a belső szögek összegét!

6.37. A táblázat megfelelő sorába írd be

a) az egy csúcsból húzható átlók számát;

b) a keletkezett háromszögek számát;

c) a belső szögek összegét;

d) az összes átlók számát!

	Háromszög	Négyszög	Ötszög	Hatszög	Hétszög	Húszszög
a)						
b)						
c)						
d)						

6.38. Hány oldalú az a sokszög, amelyre igaz, hogy

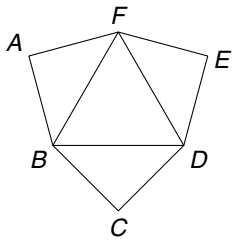
a) egy csúcsából 10 átló húzható;

b) az egy csúcsból húzott átlók 10 háromszögre bontják;

c) belső szögeinek összege $10 \cdot 180^\circ$;

d) az összes átlók száma $\frac{10 \cdot 7}{2}$?

6.39. Egy szabályos háromszög oldalaira egyenlő szárú derékszögű háromszöget emeltünk.

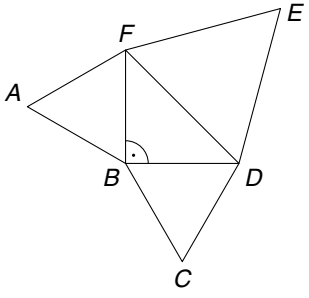


a) Hány szimmetriatengelye van a keletkezett sokszögnek?

b) Mekkorák a keletkezett sokszög belső szögei?

c) Középpontosan szimmetrikus-e a keletkezett sokszög?

6.40. Egy derékszögű egyenlő szárú háromszög oldalaira szabályos háromszögeket emeltünk.



a) A kapott hatszög tengelyesen szimmetrikus-e?

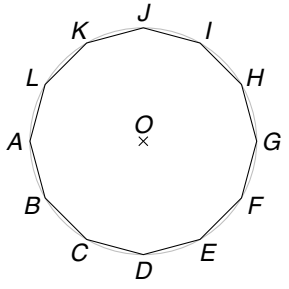
b) A kapott hatszög középpontosan szimmetrikus-e?

c) Mekkorák a belső szögei?

Háromszögek

6.41. Egy körvonalat tizenkét egyenlő részre osztottunk, és jelöltük a kör középpontját is.

A tizenkét osztópontból válassz ki hármat úgy, hogy azokat összekötve a kapott háromszög



a) hegyesszögű legyen;

b) derékszögű legyen;

c) tompaszögű legyen;

d) tompaszögű és egyenlő szárú legyen;

e) szabályos legyen!

6.42. Egy háromszög minden oldalának mérőszáma egész szám. A kerülete 18 cm. Mekkorák lehetnek az oldalai, ha a háromszög

a) minden oldala különböző;

b) egyenlő szárú?

6.43. Egy háromszög két csúcsa a koordináta-rendszerben $A(-3;0)$, $B(10;0)$. Keress az $y = x$ egyenlettel adott függvény grafikonján olyan C rácspontot, hogy a háromszög

a) derékszögű; *b)* tompaszögű; *c)* hegyesszögű legyen!

6.44. A következő szöghármasok közül melyek lehetnek egy háromszög belső szögei?

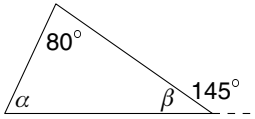
a) 40°; 50°; 70°; *b)* 40°; 60°; 80°; *c)* 40°; 70°; 100°

6.45. A következő szöghármasok közül melyek lehetnek egy háromszög külső szögei?

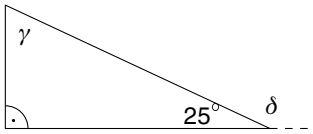
a) 80°; 130°; 150°; *b)* 70°; 90°; 200°; *c)* 110°; 90°; 100°

6.46. A megadott szögekből számítsd ki a görög betűkkel jelzett szögeket!

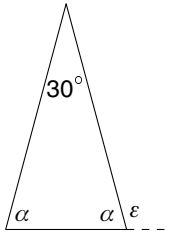
a)



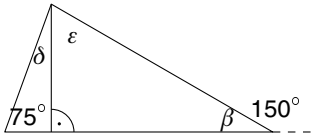
b)



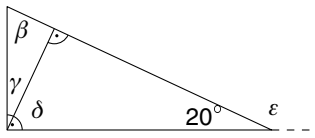
c)



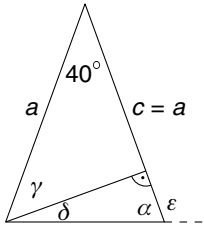
d)



e)



f)



6.47. Mekkorák a háromszög belső szögei, ha az arányuk

a) 1 : 2 : 2; *b)* 1 : 2 : 3; *c)* 4 : 5 : 6; *d)* 5 : 8 : 5?

6.48. A következő szakaszhármasok közül melyek lehetnek egy háromszög oldalai?

a) 3 cm; 5 cm; 8 cm; *b)* 1 cm; 10 cm; 10 cm;

c) 2 cm; 5 cm; 9 cm; *d)* 3 cm; 5 cm; 6 cm

6.49. Szerkessz háromszöget! Csak körzőt és vonalzót használj! Készíts vázlatot!

a) Adott a háromszög három oldala:

(1) $a = 5$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 3$ cm; (2) $a = 6$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $c = 3$ cm

b) Adott két oldal és a közbezárt szög:

(1) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 60^\circ$; (2) $a = 8$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = 210^\circ$

c) Adott egy oldal és két szög:

(1) $a = 6$ cm, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 45^\circ$; (2) $a = 4$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$;

(3) $a = 6$ cm, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 75^\circ$; (4) $a = 3$ cm, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

d) Adott két oldal és az egyik oldallal szemközti szög:

(1) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 60^\circ$; (2) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$;

(3) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 120^\circ$; (4) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 120^\circ$

6.50. Szerkessz háromszöget! Csak körzőt és vonalzót használj! Készíts vázlatrajzot!

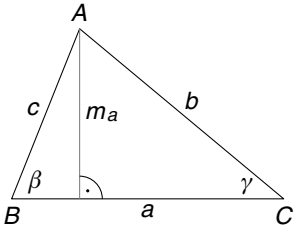
a) $a = 4$ cm; $m_a = 3$ cm; $\beta = 60^\circ$;

b) $a = 4$ cm; $m_a = 3$ cm; $\beta = 120^\circ$;

c) $a = 5$ cm; $m_a = 3$ cm; $b = 3{,}5$ cm;

d) $a = 5$ cm; $m_a = 4$ cm; $b = 3$ cm;

e) $b = 5$ cm; $c = 4$ cm; $m_a = 3$ cm



6.51. Megszerkeszthető-e az adatokból a háromszög? Ha igen, akkor szerkeszd meg, és szerkeszd meg a köré írható körét! Hány megoldás van? Készíts vázlatrajzot!

a) $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $c = 6{,}5$ cm; *b)* $a = 2{,}3$ cm; $b = 3{,}4$ cm; $c = 6{,}1$ cm;

c) $a = 3$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $\gamma = 45^\circ$; *d)* $a = 4$ cm; $\beta = 75^\circ$; $\gamma = 135^\circ$;

e) $b = 2$ cm; $\alpha = 45^\circ$; $\gamma = 120^\circ$; *f)* $a = 5$ cm; $b = 3$ cm; $\alpha = 90^\circ$

6.52. Megszerkeszthető-e az adatokból a háromszög? Ha igen, akkor szerkeszd meg, és szerkeszd meg a beírható körét! Hány megoldás van?

a) $a = 2{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $c = 4{,}5$ cm; *b)* $a = 3{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $\gamma = 60^\circ$;

c) $a = 5$ cm; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 105^\circ$; *d)* $a = 5$ cm; $b = 3$ cm; $\alpha = 75^\circ$;

e) $a = 5$ cm; $b = 3$ cm; $\beta = 75^\circ$; *f)* $a = 5$ cm; $c = 4$ cm; $\gamma = 45^\circ$

6.53. Vizsgáld meg, hogy az adatokból megszerkeszthető-e a háromszög! Ha igen, akkor szerkeszd meg, és szerkeszd meg a magasságpontját! Hány megoldás van?

a) $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $\gamma = 75^\circ$; *b)* $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $\gamma = 115^\circ$;

c) $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $\gamma = 90^\circ$; *d)* $a = 5$ cm; $m_a = 3{,}5$ cm; $\gamma = 60^\circ$;

e) $a = 6$ cm; $m_a = 4$ cm; $c = 3{,}5$ cm; *f)* $a = 5{,}5$ cm; $m_a = 3{,}5$ cm; $c = 3{,}5$ cm

6.54. Vizsgáld meg, hogy az adatokból megszerkeszthető-e a háromszög! Ha igen, akkor szerkeszd meg, és szerkeszd meg a súlypontját! Hány megoldás van?

a) $a = 5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $\gamma = 135^\circ$; *b)* $a = 4{,}5$ cm; $b = 6$ cm; $c = 7{,}5$ cm;

c) $a = 4$ cm; $s_a = 6$ cm; $\gamma = 75^\circ$; *d)* $a = 6$ cm; $s_a = 2{,}5$ cm; $\gamma = 75^\circ$;

e) $a = 6$ cm; $s_b = 6$ cm; $s_c = 9$ cm; *f)* $a = 6$ cm; $s_b = 4{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm

6.55. Egy 2,5 cm sugarú körbe húzz egy 3 cm-es húrt! Keress a körvonalon olyan pontot, hogy azt a húr két végpontjával összekötve a kapott háromszög

a) hegyesszögű;

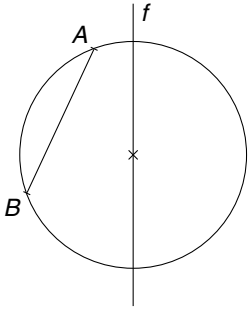
b) derékszögű;

c) tompaszögű legyen!

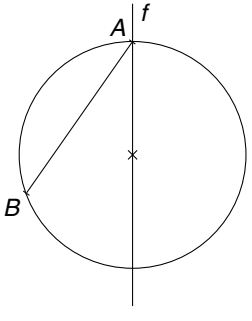
6.56. Egy 3 cm sugarú körbe húzz egy 2,5 cm-es húrt! Keress a körvonalon olyan pontot, hogy a húr végpontjaival összekötve egyenlő szárú háromszöget kapjál! Hány megoldást találtál?

6.57. A kör AB húrja egy háromszög egyik oldala, az f egyenes egy másik oldal felezőmerőlegese. Hol lehet a C csúcs?

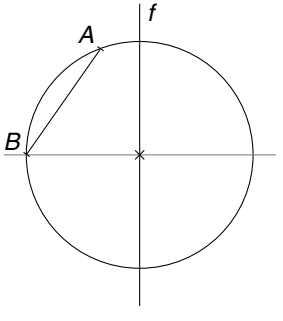
a)



b)



c)



6.58. Egy 2 cm sugarú körbe húzz 3 olyan sugarat, amelyek

a) 120°; 120°; 120°-os; *b)* 90°; 150°; 120°-os;

c) 150°; 150°; 60°-os szöget zárnak be egymással!

Szerkessz a sugarak végpontjaihoz érintőt! Mekkorák az érintő egyenesek által közbezárt háromszög szögei?

6.59. Szerkessz háromszöget egy oldalból és a rajta lévő két szögből! Szerkeszd meg a szögfelező egyeneseket és a háromszög beírható körét! Mekkora szöget zárnak be a szögfelező egyenesek?

a) $a = 5$ cm, $\beta = 80°$, $\gamma = 60°$;

b) $a = 3$ cm, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$;

c) $a = 4$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 75°$

6.60. Egy háromszögnek meghúztuk a három középvonalát. A középvonalak által meghatározott háromszögek oldalai:

a) 2 cm, 2 cm, 2 cm;

b) 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm;

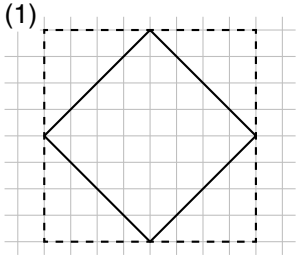
c) 3 cm, 2 cm, 2 cm

Mekkorák az eredeti háromszög oldalai? Szerkeszd meg a háromszögeket!

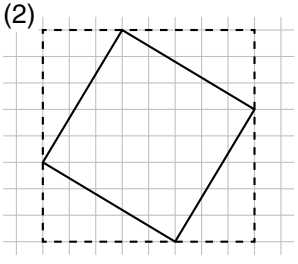
Pitagorasz-tétel

6.61. *a)* Határozd meg a négyzetek területét! (Egy kis négyzet oldala a hosszúságegység, területe a területegység.)

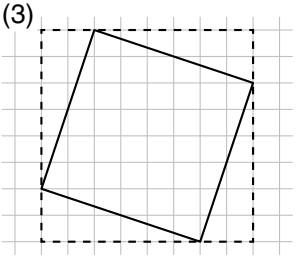
(1)



(2)

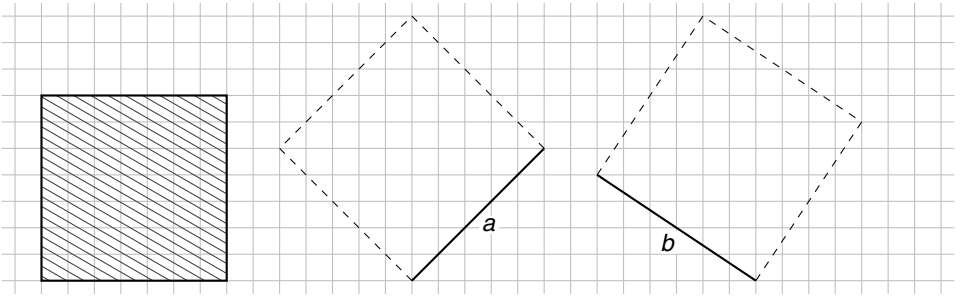


(3)

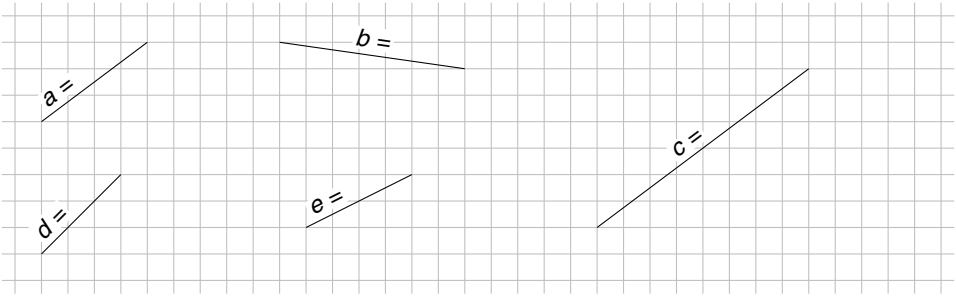


b) Határozd meg a négyzetek oldalait!

6.62. Melyik szakasz akkora, mint a bevonalkázott négyzet oldala?

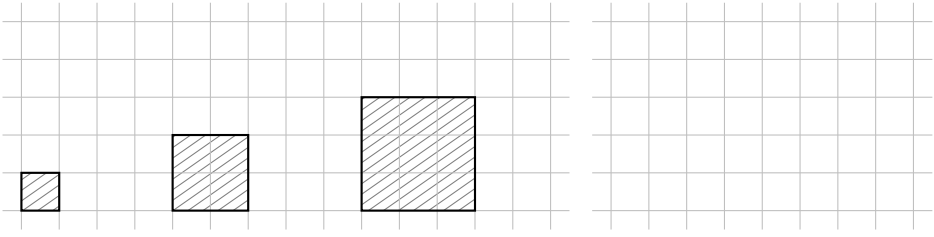


6.63. Írd a rácspontokat összekötő szakaszok mellé hosszúságuk pontos mérőszámát! (Egy kis négyzet oldala a hosszúságegység.)

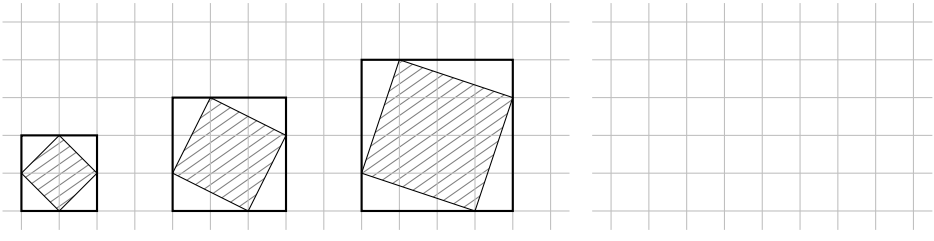


6.64. Négyzetekből sorozatokat képezünk. Mindegyik sorozatban rajzold meg a negyedik elemet! Határozd meg az első négy, illetve a 20. elem területét! (Egy kis négyzet oldala a hosszúságegység, területe a területegység.)

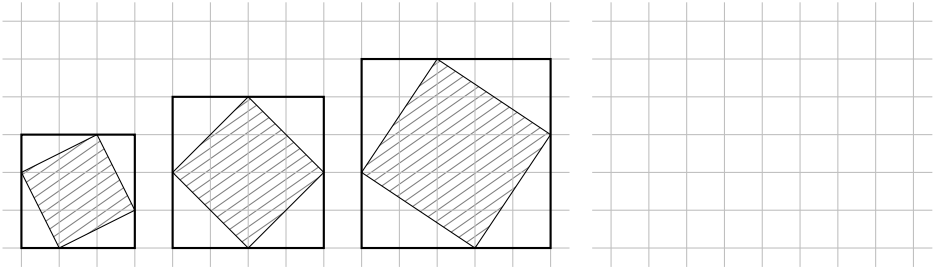
a) A rá következő tag oldala 1 egységgel nagyobb, mint az előzőé.



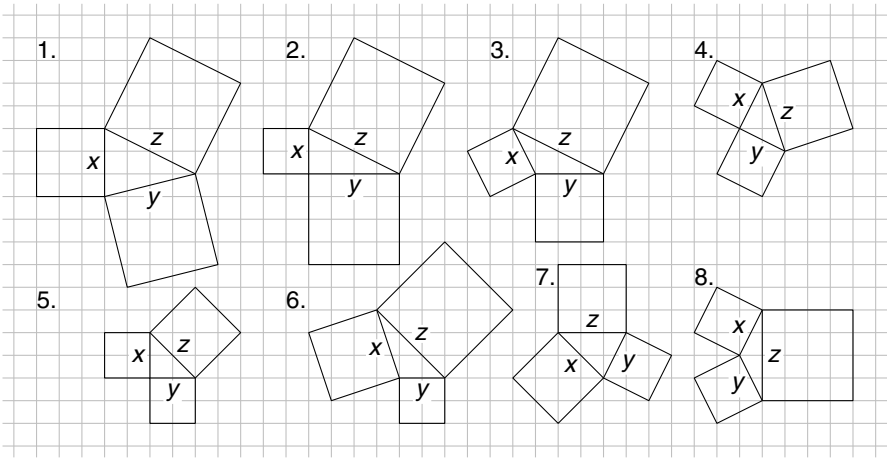
b) A négyzetek csúcsaiból az ábra szerint olyan derékszögű háromszögeket vágunk le, amelynek egyik befogója 1, a másik rendre 1, 2, 3, 4, ... A maradék négyzetek területét vizsgáljuk.



c) A négyzetek csúcsaiból az ábra szerint olyan derékszögű háromszögeket vágunk le, amelynek egyik befogója 2, a másik rendre 1, 2, 3, 4, ...



6.65. *a)* Határozd meg a háromszögek oldalaira emelt négyzetek területét! (Az előző 6 feladat megoldásai segíthetnek.) Töltsd ki a táblázat első három sorát!



Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
x^2								
y^2								
z^2								
$x^2 + y^2$								

b) Keress összefüggést a legnagyobb oldalra emelt négyzet területe és a másik két oldalra emelt négyzet területe közt! A táblázat alapján hasonlítsd össze a legnagyobb oldal négyzetét a másik két oldal négyzetének összegével! A tapasztaltak alapján fogalmazz meg sejtéseket!

(1) *Hegyesszögű háromszögnél* bármely oldal négyzete ....., mint a másik két oldal négyzetének összege.

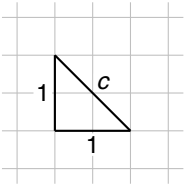
(2) *Derékszögű háromszögnél* az átfogó négyzete .....

.....

(3) *Tompaszögű háromszögnél* a legnagyobb oldal négyzete .....

.....

6.66. *a)* Mekkora annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek befogója 1 egység?

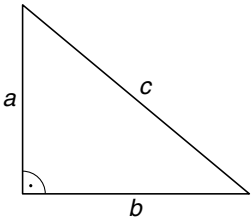


b) Mekkora annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek befogója

2 egység; 3 egység;

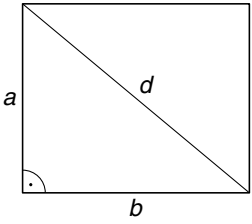
0,5 egység; *a* egység?

6.67. Határozd meg a derékszögű háromszög hiányzó oldalát!



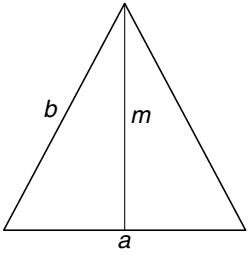
Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
a (cm)	9	10	0,8	5	2,4	10	5,6	7,2
b (cm)	12		0,6	4		7,5	5,6	
c (cm)		26			4,0			5,6

6.68. Határozd meg a téglalap hiányzó adatát!



Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
a (cm)	21	3,5		4,5	3,6	3,6		5,5
b (cm)	28	8,4	8,8		4,8		8,2	5,5
d (cm)			11,0	9,6		4,8	7,8	

6.69. Határozd meg az egyenlő szárú háromszög hiányzó adatát!



Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
a (cm)	8	10	3,2	5,4		10	10	
b (cm)	5	13			5,5	5	10	8
m (cm)			1,2	3,6	4,4			9

6.70. Milyen távolságra vannak a pontok a koordináta-rendszer kezdőpontjától?

$A(6;8)$, $B(-3;4)$, $C(-5;-12)$, $D(0;7)$, $E(-3;6)$, $F(4;-7)$

6.71. Derékszögű koordináta-rendszerben adottak a következő pontok:

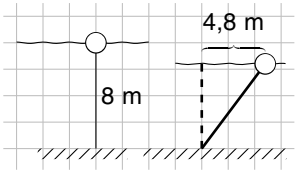
$A(9;7)$, $B(2;3)$, $C(-4;7)$, $D(-5;0)$, $E(-1;-5)$

Számítsd ki a pontokat összekötő szakaszok hosszúságát!

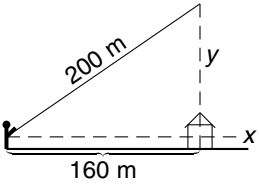
6.72. Bizonyítsd be, hogy a következő pontok egy origó középpontú körvonalon helyezkednek el! Mekkora ennek a körvonalnak a sugara?

$A(-13;0)$, $B(7{,}8;10{,}4)$, $C(12;5)$, $D(10{,}4;-7{,}8)$, $E(-5;-12)$

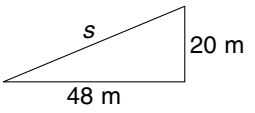
6.73. *a)* Egy 8 m mély folyóban 8 m hosszú huzallal a fenékhez rögzítettünk egy bóját. Pár nap múlva csökkent a víz magassága, ezért a bója az eredeti helyétől 4,8 m-re távolodott el. Milyen magasan állt ekkor a folyóban a víz?



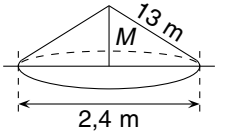
b) Egy fiú 200 m hosszú zsinórral sárkányt eregetett. A zsinór végét a földtől x = 1,5 m magasságban tartja. Milyen magasra repült a sárkány, ha éppen a fiútól 160 m távolságra lévő ház felett lebegett?



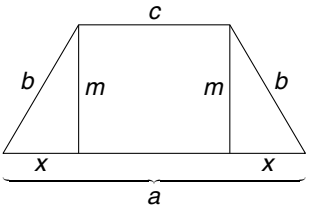
c) Milyen hosszú az a lejtő, amely 20 m magasra visz, és a vízszintes vetülete 48 m?



d) Milyen magas az a homokkúp, amely alapkörének az átmérője 2,4 m, és a csúcsától az aljáig gördülő homokszem 1,3 m utat tesz meg?



6.74. Határozd meg a húrtrapéz adatait!



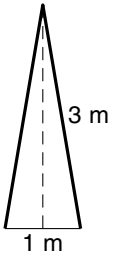
Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
a (cm)	8		15	13,2	14		24
b (cm)			10	7,8	9	9	
c (cm)		4		7,2			12
m (cm)	2,4	2			5,4	7,2	2,5
x (cm)	1	1,5	6			5,4	

Sorszám	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
a (cm)	18	13		11	8,3	15	
b (cm)	13	7	10,8	5			17
c (cm)			7,2		8,3		4
m (cm)	12	7	12,3		7,2	24	
x (cm)				6		7	8

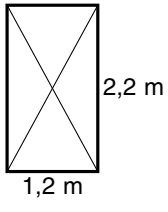
6.75. *a)* Egy 4 cm sugarú körbe egy 3,8 cm-es húrt rajzoltunk. Milyen távol van a húr a kör középpontjától?

b) Egy 5 cm sugarú körbe szabályos háromszöget szerkesztettünk. Mekkora a háromszög oldala? (A sugár és az oldal 30°-os szöget zár be.)

6.76. *a)* Egy „kettes” létra hosszúsága 3 m. Ha felállítjuk, akkor a létra két talpa 1 m távolságra van egymástól. Mekkora így a létra magassága?



b) Egy 2,2 m magas és 1,2 m széles vaskapura átlóvasat erősítenek. Mekkora az átlóvasak együttes hossza?

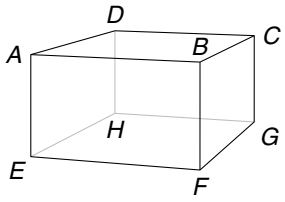


6.77. Egy téglatest élei: $AB = 16$ cm; $AD = 12$ cm; $AE = 9$ cm. Határozd meg

a) az AC lapátló hosszúságát;

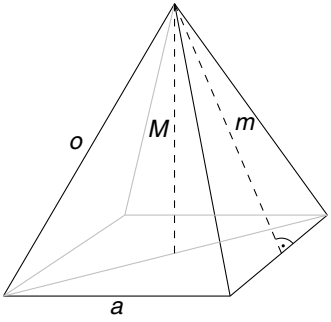
b) az AH lapátló hosszúságát;

c) az AG testátló hosszúságát!



6.78. Határozd meg a négyzet alapú szabályos gúla hiányzó adatait!

	a (cm)	o (cm)	m (cm)	M (cm)
a)	10	13		
b)	12			8
c)	6		4	



6.79. *a)* Egy hajó egy szigetről északkeleti irányba halad, majd dél felé fordulva megtesz 15 km-t. Hány kilométert haladt északkelet felé, ha most keletre van a szigettől?

b) Egy hajó egy szigetről kelet felé halad 7,5 km-t, majd északra fordulva megtesz 10 km-t. Mekkora távolságra van most a szigettől?

6.80. Egy kajakos álló vízben 3 m-t tesz meg egy másodperc alatt. A folyó sebessége 1 m másodpercenként.

Mekkora a kajakos sebessége a folyóban, ha

a) a folyón lefelé halad;

b) a folyón felfelé, a folyó sodrásával szemben halad;

c) a folyó sodrásának irányára merőlegesen evez (de közben sodródik is lefelé);

d) a folyó sodrásának irányára merőlegesen halad?

Négyszögek

6.81. Meghúztuk a szabályos hatszög rövidebb átlóit. A keletkezett metszéspontok közül válassz ki négyet úgy, hogy a keletkezett négyszög

a) trapéz legyen;

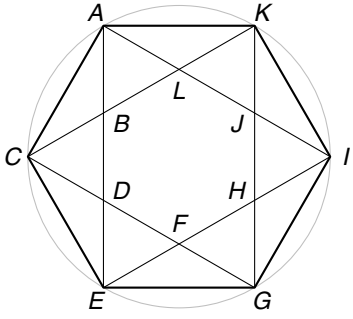
b) paralelogramma legyen;

c) húrtrapéz legyen;

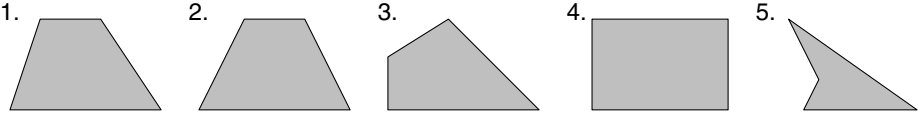
d) deltoid legyen;

e) tengelyesen szimmetrikus trapéz legyen;

f) középpontosan szimmetrikus trapéz legyen!



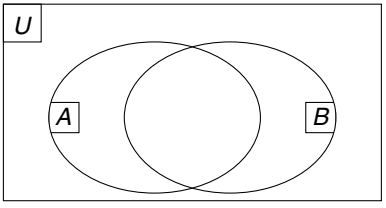
6.82. 1. 2. 3. 4. 5.



6. 7. 8. 9. 10.



Minden feladathoz rajzolj ilyen halmazábrát, és írd be a fenti négyszögek sorszámát!
U = {Négyszögek}



a) A = {Trapézok}; B = {Paralelogrammák};

b) A = {Trapézok}; B = {Deltoidok};

c) A = {Húrtrapézok}; B = {Paralelogrammák};

d) A = {Húrtrapéz}; B = {Tengelyesen szimmetrikus trapézok};

e) A = {Paralelogrammák}; B = {Középpontosan szimmetrikus négyszögek};

f) A = {Minden szögük egyenlő}; B = {Minden oldaluk egyenlő}

6.83. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Az igaz állítást szemléltesd példával! Hamis állítás esetén mondj ellenpéldát!

A: Minden tengelyesen szimmetrikus trapéz húrtrapéz.

B: Minden középpontosan szimmetrikus trapéz paralelogramma.

C: Minden paralelogramma átlói felezik egymást.

D: Van olyan téglalap, amelyik deltoid.

E: Van olyan paralelogramma, amelyik konkáv négyszög.

F: Nincs olyan konkáv négyszög, amelyik deltoid.

G: Van olyan húrtrapéz, amelyik konkáv négyszög.

H: Egyik konkáv négyszög sem tengelyesen szimmetrikus.

6.84. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Válaszod indokold!

A: Ha egy négyszög minden szöge egyenlő, akkor az négyzet.

A': Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge egyenlő.

B: Ha egy négyszög deltoid, akkor átlói merőlegesek egymásra.

B': Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az deltoid.

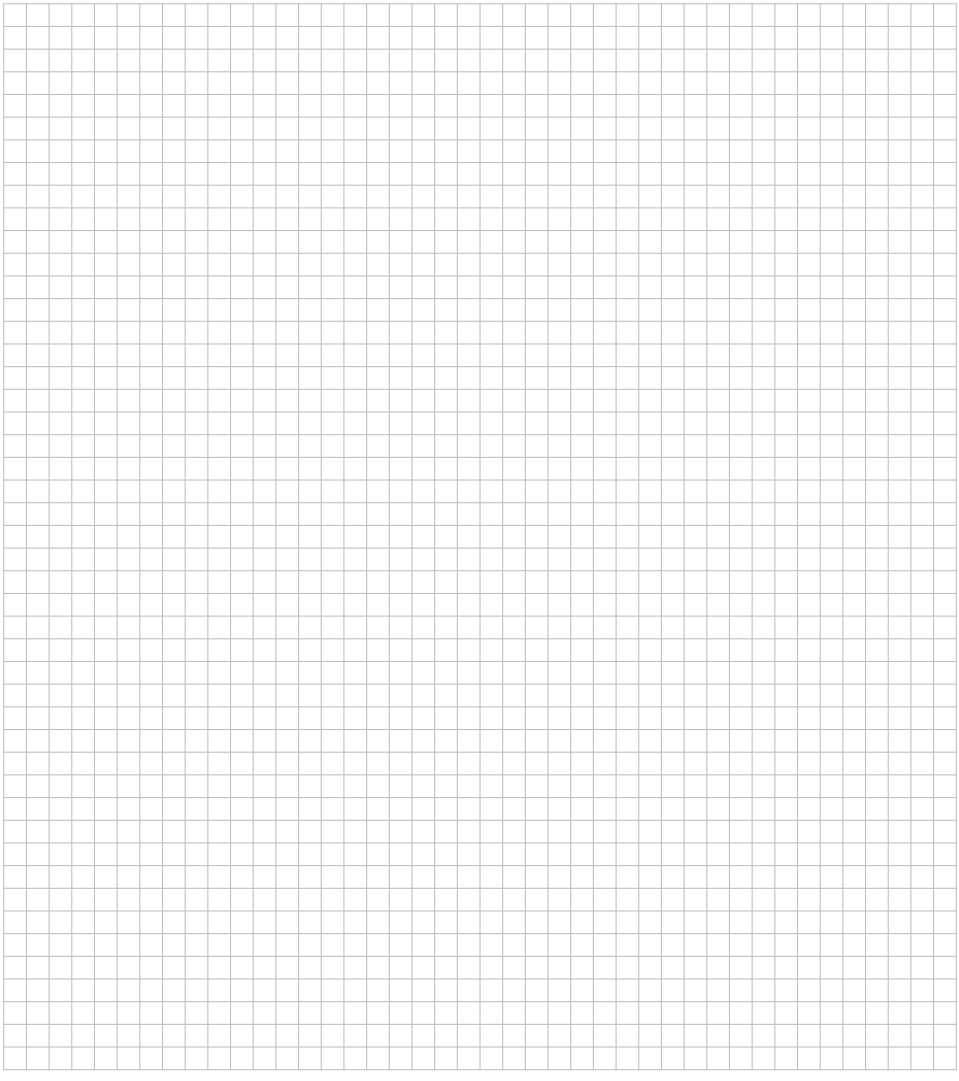
C: Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

C': Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.

6.85. Koordináta-rendszerben adjuk meg egy négyszög két csúcsát: (4; 2), (7; 5). Keress további két rácspontot az első síknegyedben (mindkét koordináta pozitív) úgy, hogy a négy pont által meghatározott négyszög

a) négyzet; *b)* téglalap; *c)* húrtrapéz; *d)* rombusz;

e) deltoid; *f)* paralelogramma; *g)* tengelyesen szimmetrikus négyszög legyen!



6.86. Vizsgáld meg az adott szögnégyeseket!

a) Melyek lehetnek egy négyszög belső szögei?

(1) 40°; 100°; 140°; 80°; (2) 35°; 105°; 75°; 120°

b) Melyek lehetnek egy trapéz belső szögei?

(1) 60°; 130°; 70°; 100°; (2) 65°; 115°; 50°; 130°

c) Melyek lehetnek egy deltoid belső szögei?

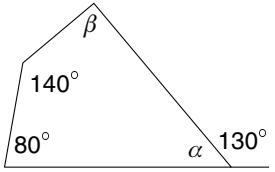
(1) 55°; 80°; 120°; 105°; (2) 40°; 200°; 40°; 80°

d) Melyek lehetnek egy paralelogramma belső szögei?

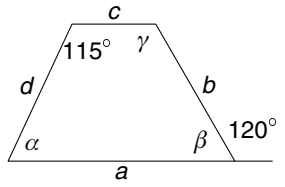
(1) 110°; 70°; 110°; 70°; (2) 120°; 50°; 120°; 50°

6.87. Határozd meg az ábrákon görög betűkkel jelölt szögeket!

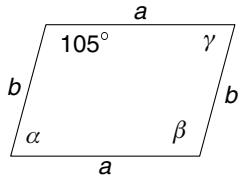
a)



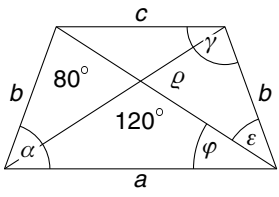
b)



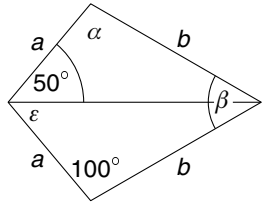
c)



d)



e)



6.88. Szerkessz rombuszt, ha adott

a) egy oldala: $a = 4$ cm és egy szöge: $\alpha = 45^\circ$;

b) egy oldala: $a = 5$ cm és a magassága: $m = 4$ cm;

c) két átlója: $e = 8$ cm; $f = 6$ cm!

6.89. Szerkessz deltoidot, ha

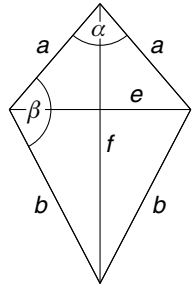
a) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $\beta = 105^\circ$;

b) $a = 2$ cm; $b = 4$ cm; $f = 4{,}5$ cm;

c) $a = 2$ cm; $b = 4$ cm; $e = 3$ cm;

d) $a = 2{,}5$ cm; $b = 3$ cm; $\alpha = 75^\circ$;

e) $a = 3$ cm; $f = 4$ cm; $\beta = 120^\circ$!



6.90. Szerkessz trapézt, ha

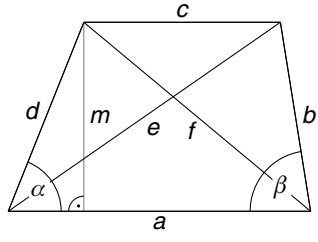
a) $a = 5$ cm; $b = 3$ cm; $c = 2{,}5$ cm; $e = 4{,}5$ cm;

b) $a = 4$ cm; $b = 3$ cm; $c = 2$ cm; $m = 2{,}5$ cm;

c) $a = 5$ cm; $c = 2$ cm; $d = 3$ cm; $\alpha = 60^\circ$;

d) $a = 5$ cm; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $m = 2$ cm;

e) $a = 5$ cm; $m = 2{,}5$ cm; $f = 3$ cm; $\beta = 90^\circ$!



7. Mérés, terület, felszín, térfogat

Mértékegységek átváltása

7.01. Írd be a keretbe a *váltószámot!*

1 km > [ ] 1 m > [ ] 1 dm > [ ] 1 cm > [ ] 1 mm

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 0,5 km = ... m = ... dm = ... cm;

b) 20 000 km = ... m = ... dm;

c) 0,065 km = ... m = ... dm = ... cm = ... mm;

d) ..... km = 5250 m = ... dm = ... cm;

e) ..... km = ... m = 5,25 dm = ... cm = ... mm;

f) ..... km = ... m = ... dm = 400 000 cm = ... mm;

g) ..... km = 5200 dm = ... cm = ... mm

7.02. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 t > [ ] 1 kg > [ ] 1 dkg > [ ] 1 g > [ ] 1 dg > [ ] 1 cg > [ ] 1 mg

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 4,75 t = ... kg = ... dkg = ... g;

b) ..... t = 600 kg = ... dkg = ... g;

c) ..... t = ... kg = 25 000 dkg = ... g;

d) 0,075 kg = ... g = ... dg = ... cg = ... mg;

e) ..... kg = ... dkg = 0,8 g = ... dg = ... cg;

f) ..... kg = 230 dkg = ... dg = ... mg

7.03. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 hl > [ ] 1 l > [ ] 1 dl > [ ] 1 cl > [ ] 1 ml

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 0,5 hl = ... l = ... dl = ... cl = ... ml;

b) 500 hl = ... l = ... dl = ... ml;

c) 0,042 hl = ... l = ... dl = ... cl = ... ml;

d) ..... hl = 750 000 l = ... dl = ... cl;

e) ..... hl = ... l = 4,5 dl = ... cl = ... ml;

f) ..... hl = ... l = ... dl = 42 400 cl = ... ml;

g) ..... hl = 3500 l = ... cl = ... ml

7.04. A hiányzó mérőszámokat írd fel 10 hatványaként!

a) 1 m = $10^{\square}$ cm = $10^{\square}$ mm = $10^{\square}$ dm;

b) 1 km = $10^{\square}$ m = $10^{\square}$ dm = $10^{\square}$ mm = $10^{\square}$ cm;

c) 1 l = $10^{\square}$ cl = $10^{\square}$ ml = $10^{\square}$ dl;

d) 1 hl = $10^{\square}$ l = $10^{\square}$ dl = $10^{\square}$ cl = $10^{\square}$ ml;

e) 1 kg = $10^{\square}$ dkg = $10^{\square}$ g = $10^{\square}$ mg;

f) 1 g = $10^{\square}$ dg = $10^{\square}$ cg = $10^{\square}$ mg;

g) 1 t = $10^{\square}$ kg = $10^{\square}$ dkg = $10^{\square}$ g

7.05. A hiányzó mérőszámokat írd fel 0,1 hatványaként!

a) 1 mm = $0{,}1^{\square}$ cm = $0{,}1^{\square}$ dm = $0{,}1^{\square}$ m;

b) 1 dm = $0{,}1^{\square}$ m = $0{,}1^{\square}$ km;

c) 1 ml = $0{,}1^{\square}$ cl = $0{,}1^{\square}$ dl = $0{,}1^{\square}$ l;

d) 1 dl = $0{,}1^{\square}$ l = $0{,}1^{\square}$ hl;

e) 1 g = $0{,}1^{\square}$ dkg = $0{,}1^{\square}$ kg = $0{,}1^{\square}$ t;

f) 1 mg = $0{,}1^{\square}$ g = $0{,}1^{\square}$ dg = $0{,}1^{\square}$ dkg = $0{,}1^{\square}$ cg = $0{,}1^{\square}$ kg

7.06. Pótold a hiányzó kitevőket!

a) 560 m = $5{,}6 \cdot 10^{\square}$ m = $5{,}6 \cdot 10^{\square}$ dm = $5{,}6 \cdot 10^{\square}$ cm = $5{,}6 \cdot 10^{\square}$ mm;

b) 48 km = $4{,}8 \cdot 10^{\square}$ km = $4{,}8 \cdot 10^{\square}$ m = $4{,}8 \cdot 10^{\square}$ cm = $4{,}8 \cdot 10^{\square}$ dm

7.07. Pótold a hiányzó mérőszámokat, kitevőket, mértékegységeket!

a) 5,45 km = $5{,}45 \cdot 10^{\square}$ m = $5{,}45 \cdot 10^{5}$ ..... = $5{,}45 \cdot 10^{\square}$ mm = ... mm;

b) 4,02 km = ... $\cdot 10^{3}$ m = $4{,}02 \cdot 10^{4}$ ..... = $4{,}02 \cdot 10^{\square}$ cm = $4{,}02 \cdot 10^{\square}$ mm;

c) ..... km = $4{,}7 \cdot 10^{3}$ m = $4{,}7 \cdot 10^{\square}$ dm = $4{,}7 \cdot 10^{\square}$ cm = $4{,}7 \cdot 10^{\square}$ mm;

d) ..... km = $1{,}2 \cdot 10^{\square}$ m = $1{,}2 \cdot 10^{6}$ dm = $1{,}2 \cdot 10^{\square}$ cm = $1{,}2 \cdot 10^{\square}$ mm;

e) ..... km = $2{,}5 \cdot 10^{1}$ m = $2{,}5 \cdot 10^{\square}$ dm = $2{,}5 \cdot 10^{\square}$ cm = $2{,}5 \cdot 10^{\square}$ mm

7.08. Pótold a hiányzó kitevőket, mérőszámokat, mértékegységeket!

a) 450 l = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ l = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ dl = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ cl = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ ml;

b) 75 hl = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ hl = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ l = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ dl = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ ml;

c) 5600 l = ... $\cdot 10^{\square}$ l = ... $\cdot 10^{\square}$ hl = ... $\cdot 10^{\square}$ dl = ... $\cdot 10^{\square}$ cl;

d) 15,6 hl = $1{,}56 \cdot 10^{1}$ ..... = $1{,}56 \cdot 10^{4}$ ..... = $1{,}56 \cdot 10^{\square}$ l

7.09. Pótold a hiányzó kitevőket!

a) 45 000 kg = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ kg = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ t = $4{,}5 \cdot 10^{\square}$ dkg;

b) 200 g = $2 \cdot 10^{\square}$ g = $2 \cdot 10^{\square}$ cg = $2 \cdot 10^{\square}$ mg = $2 \cdot 10^{\square}$ dg = $2 \cdot 10^{\square}$ dkg;

c) 75 t = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ t = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ kg = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ dkg

7.10. Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket, kitevőket!

a) 5,2 kg = $5{,}2 \cdot 10^{\square}$ dkg = $5{,}2 \cdot 10^{\square}$ g = $5{,}2 \cdot 10^{\square}$ dg = $5{,}2 \cdot 10^{\square}$ cg = $= 5{,}2 \cdot 10^{\square}$ mg;

b) 4,2 kg = ... $\cdot 10^{3}$ g = $4{,}2 \cdot 10^{4}$ ..... = $4{,}2 \cdot 10^{\square}$ cg = $4{,}2 \cdot 10^{\square}$ mg;

c) 7,5 t = ... $\cdot 10^{3}$ kg = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ dkg = $7{,}5 \cdot 10^{\square}$ g = ... g;

d) ..... t = $2{,}7 \cdot 10^{3}$ kg = $2{,}7 \cdot 10^{\square}$ dkg = $2{,}7 \cdot 10^{\square}$ g = ... g;

e) ..... t = $1{,}5 \cdot 10^{\square}$ kg = $1{,}5 \cdot 10^{6}$ dkg = $1{,}5 \cdot 10^{\square}$ g = ... g;

f) ..... t = $2{,}1 \cdot 10^{1}$ kg = $2{,}1 \cdot 10^{\square}$ dkg = $2{,}1 \cdot 10^{\square}$ g = ... g

Síkidomok területe

7.11. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 km > 1 m > 1 dm > 1 cm > 1 mm

1 km^2 > 1 m^2 > 1 dm^2 > 1 cm^2 > 1 mm^2

1 km^2 > 1 ha > 1 m^2

Írd be a hiányzó mérőszámokat!

a) 1 km^2 = ... ha = ... m^2 = ... dm^2;

b) 1 dm^2 = ... m^2 = ... cm^2 = ... mm^2;

c) 1 m^2 = ... ha = ... dm^2 = ... cm^2 = ... mm^2;

d) 3,5 km^2 = ... ha = ... m^2 = ... cm^2;

e) 0,5 m^2 = ... dm^2 = ... cm^2 = ... mm^2

7.12. Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket, kitevőket!

a) $3{,}6\ \text{m}^2 = 3{,}6 \cdot 10^{\square}\ \text{dm}^2 = 3{,}6 \cdot 10^{\square}\ \text{cm}^2 = 3{,}6 \cdot 10^{\square}\ \text{mm}^2$;

b) $0{,}7\ \text{m}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^2\ \text{dm}^2 = 7 \cdot 10^{\square}\ \text{cm}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^{\square}\ \text{mm}^2$;

c) $\ldots\ldots\ \text{m}^2 = 2 \cdot 10^1\ \text{dm}^2 = 2 \cdot 10^{\square}\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{\square}\ \text{mm}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{mm}^2$;

d) $8{,}5\ \text{km}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{\square}\ \text{ha} = 8{,}5 \cdot 10^{\square}\ \text{m}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{\square}\ \text{cm}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{\square}\ \text{mm}^2$;

e) $\ldots\ldots\ldots\ \text{km}^2 = 2{,}5 \cdot 10^5\ \text{ha} = 2{,}5 \cdot 10^{\square}\ \text{m}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{m}^2$

7.13. Normálalakban írd be a hiányzó számokat!

a) $0{,}502\ \text{km} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{km} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{m} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}$;

b) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{km} = 8{,}5\ \text{m} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{dm}$;

c) $2{,}3\ \text{m}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{dm}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{mm}^2$;

d) $120\ \text{ha} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{ha} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{km}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{m}^2$

7.14. Számítsd ki a téglalap területét, ha

a) $a = 4{,}5$ cm; $b = 3{,}2$ cm; *b)* $a = 3{,}6$ cm; $d = 4{,}5$ cm!

(A d a téglalap átlóját jelöli.)

7.15. Számítsd ki a négyzet területét, ha

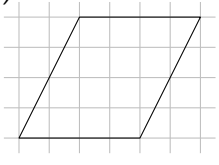
a) oldala: $a = 6{,}8$ dm; *b)* átlója: $d = 2{,}4$ cm!

7.16. *a)* Egy 81 m^2 területű, 18 m hosszú, téglalap alakú részt ástunk fel a kertben. Milyen széles ez a parcella?

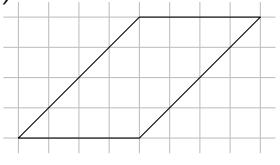
b) Egy négyzet alakú szoba területe 20,25 m^2. Mekkorák a szoba oldalai?

7.17. Darabold át a paralelogrammákat téglalappá, és határozd meg a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)

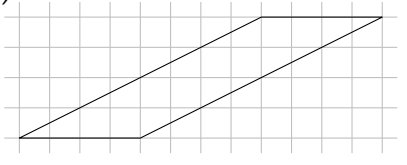
a)



b)

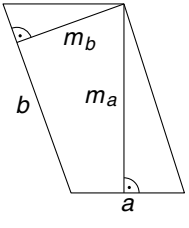


c)

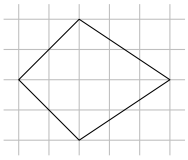


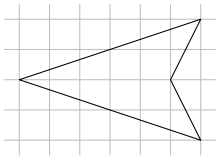
7.18. Számítsd ki a paralelogramma hiányzó adatait!

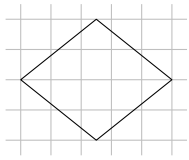
	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	10 cm	4,8 m		15 dm	
b	6 cm			8 dm	4,5 m
m_a	9 cm	3,5 m	4 dm		2,5 m
m_b		2,4 m	4 dm		
T			20 dm^2	120 dm^2	9,0 m^2



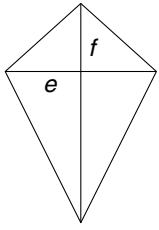
7.19. Egészítsd ki a deltoidokat téglalappá, és határozd meg a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)

a) 

b) 

c) 

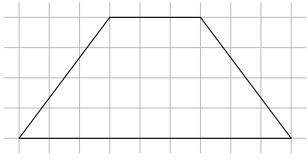
7.20. Számítsd ki a deltoid hiányzó adatait!

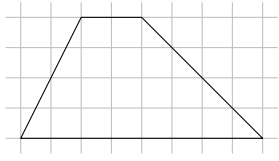


	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
e	8 cm	8 dm		6,4 cm	16 cm
f	10 cm		12 cm	25 mm	
T		0,56 m^2	1,2 dm^2		160 cm^2

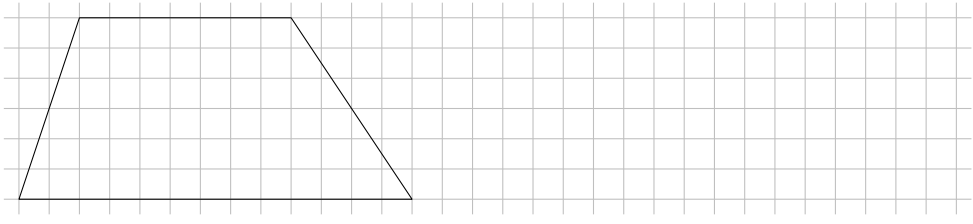
7.21. Darabold át vele megegyező területű téglalappá mindegyik trapézt, majd számítsd ki a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)

a) 

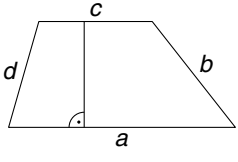
b) 

c) 

7.22. Egészítsd ki a trapézt paralelogrammává! A paralelogramma területének kiszámítása segítségével határozd meg a területét! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)



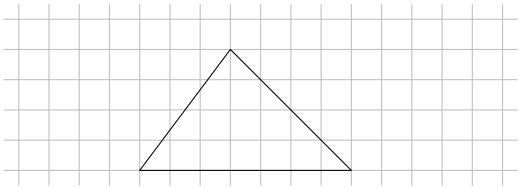
7.23. Számítsd ki a trapéz hiányzó adatait!



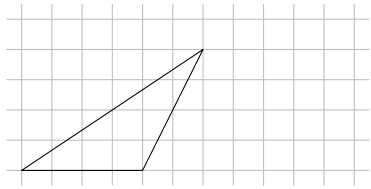
	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	6 cm	10 cm	7,5 cm		15 m
c	4 cm	4 cm	4,5 cm	3,2 cm	
m	3 cm		4 cm	2,5 cm	5 m
T		28 cm^2		10 cm^2	55 m^2

7.24. Egészítsd ki a háromszögeket paralelogrammává! Határozd meg a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)

a)



b)

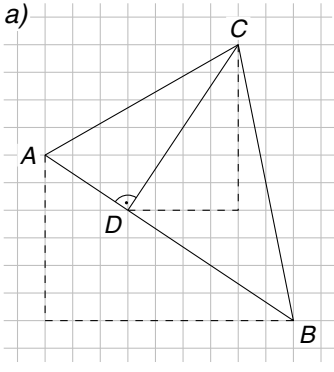


7.25. Számítsd ki a háromszög hiányzó adatait!

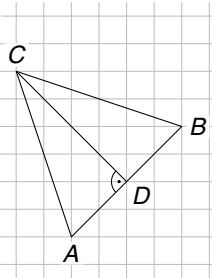
	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	8 cm	3,6 cm	8 cm		7 cm
b	10 cm		6 cm	8 cm	15 cm
m_a	7,5 cm	4 cm		8 cm	
m_b		3 cm			10 cm
T			18 cm^2	24 cm^2	

7.26. Négyzetrácson háromszöget rajzoltunk, és meghúztuk az egyik magasságát. Pitagorasz tételével kiszámítható a háromszög bármelyik oldala. Számítsd ki az egyik oldalt, a hozzá tartozó magasságot és a háromszög területét!

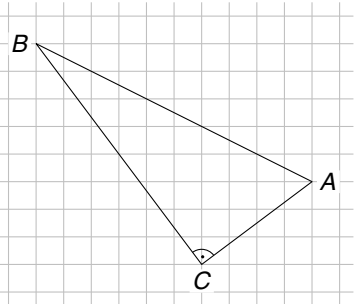
a)



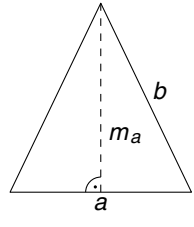
b)



c)



7.27. Számítsd ki az egyenlő szárú háromszögnek a táblázatból hiányzó adatait!



	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*
a		36 mm		10 m	100 m	6 cm
b	5 cm		6 cm		100 m	
m_a		3 cm	4,8 cm			
K	1,4 dm					16 cm
T				100 m^2		

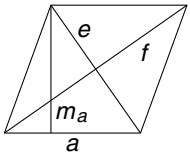
7.28. A rombusz oldala 4,5 cm, az egyik átlója 5,4 cm.

a) Mekkora a másik átló? *b)* Számítsd ki a rombusz területét!

c) Számítsd ki a rombusz kerületét! *d)* Számítsd ki a rombusz magasságát!

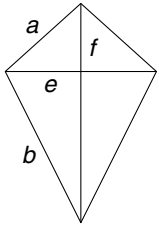
7.29. Számítsd ki a rombusznak a táblázatból hiányzó adatait! (Tizedekre kerekíts!)

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a		6 cm		4,8 cm	
e	8 cm				4 cm
f	6 cm	8 cm	10 cm	7 cm	
T			30 cm^2		
K					36 cm
m					



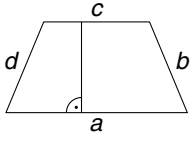
7.30. Számítsd ki a deltoidnak a táblázatból hiányzó adatait! (Tizedekre kerekíts!)

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	3 cm		6 cm	5 cm	
b		4 cm	9 cm		8 cm
e	4 cm		10 cm	7 cm	9,6 cm
f		6 cm		10 cm	
T		8,4 cm^2			48 cm^2
K	16 cm				



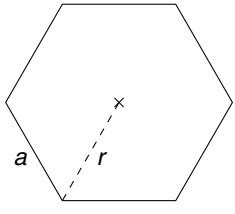
7.31. Számítsd ki a húrtrapéznak a táblázatból hiányzó adatait! (Tizedekre kerekíts!)

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	18 cm	7,2 cm		6 cm	10 cm
b = d			5 cm	3,5 cm	4 cm
c	10 cm		5 cm		6 cm
m	6 cm	3 cm	4 cm		
K				21 cm	
T		18,3 cm^2			

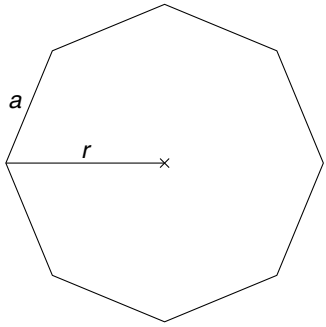


7.32. Számítsd ki vagy a hatszög megszerkesztése után mérd meg a hiányzó adatot, majd határozd meg a szabályos hatszög területét!

(1) a = 4,4 cm; (2) r = 3,0 cm

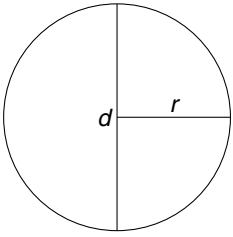


7.33. Számítással vagy a nyolcszög megszerkesztése után méréssel határozd meg a hiányzó adatokat, majd számítsd ki a szabályos nyolcszög területét!
(1) $r = 4{,}2$ cm; (2) $a = 4{,}2$ cm



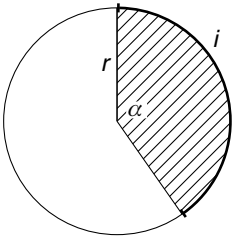
7.34. Számítsd ki a körnek a táblázatból hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
r	13 cm			
d		13 cm		
K			13 cm	
T				13 cm^2



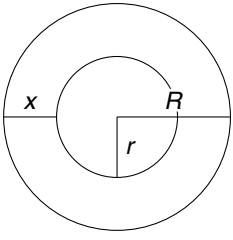
7.35. Számítsd ki a körcikkhez tartozó körív hosszát és a körcikk területét, ha adott a körcikkhez tartozó középponti szög és a kör sugara!

a) $r = 10$ cm; $\alpha = 120^\circ$; *b)* $r = 10$ cm; $\alpha = 30^\circ$;
c) $r = 20$ cm; $\alpha = 1^\circ$; *d)* $r = 20$ cm; $\alpha = 130^\circ$;
e) $r = 0{,}5$ m; $\alpha = 90^\circ$; *f)* $r = 0{,}5$ cm; $\alpha = 45^\circ$

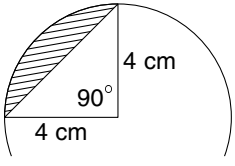


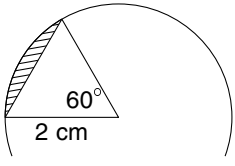
7.36. Számítsd ki a körgyűrű területét!

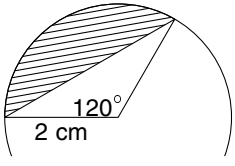
a) $R = 20$ cm; $r = 10$ cm; *b)* $R = 0{,}6$ m; $r = 0{,}5$ m;
c) $r = 4$ cm; $x = 1$ cm; *d)* $r = 0{,}5$ m; $x = 0{,}1$ m;
e) $R = 4$ cm; $x = 1$ cm; *f)* $R = 0{,}6$ m; $x = 0{,}1$ m



7.37. Határozd meg az adott körszeletek területét!

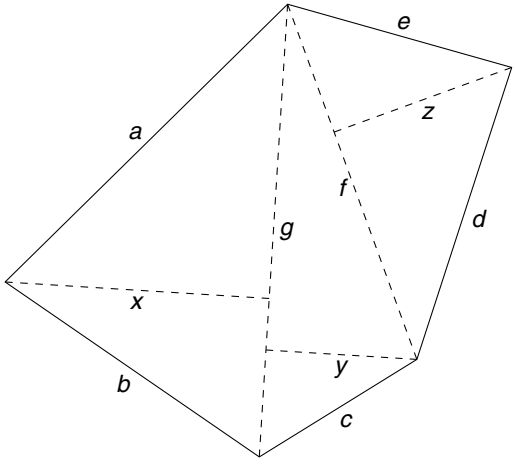
a)


b)


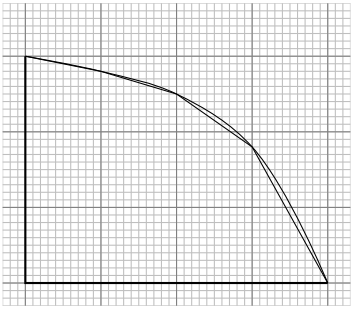
c)


7.38. Egy 5 cm sugarú körbe 3 cm oldalú téglalapot rajzoltunk. Számítsd ki
a) a téglalap ismeretlen oldalát; *b)* a téglalap kerületét és területét;
c) a kör és a téglalap területének különbségét!

7.39. A szükséges adatok megmérése után számítsd ki az ötszög területét és kerületét!



7.40. *a)* Becsüld meg a görbe alatti területet! Felosztottuk a görbe alatti síkidomot sávokra, számítsd ki a beírható trapézok, illetve háromszögek területét!



$T_1 =$ .....

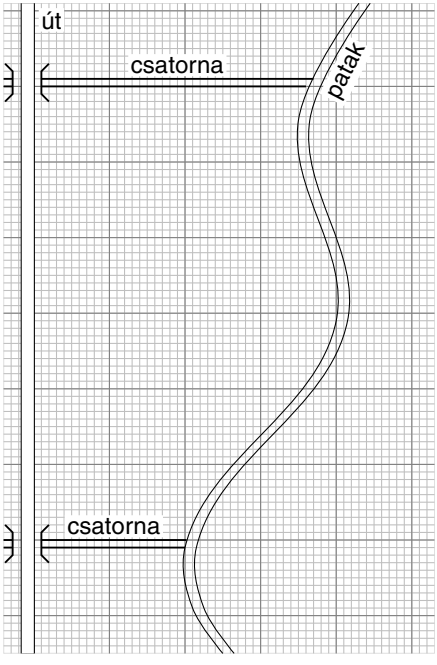
$T_2 =$ .....

$T_3 =$ .....

$T_4 =$ .....

$T =$ .....

b) Oszd 10 m széles sávokra a patak, a két csatorna és az út közötti területet, és becsüld meg a nagyságát! Ami a térképen 1 mm, az a valóságban 1 m.



$T_1 =$ .....

$T_2 =$ .....

$T_3 =$ .....

$T_4 =$ .....

$T_5 =$ .....

$T_6 =$ .....

$T =$ .....

Hasáb felszíne és térfogata

7.41. Határozd meg a téglatest hiányzó adatait!

Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
a (cm)	5	5	6	5	2	5	6	5	4,5	200
b (cm)	4	5	6	6		10	8	7		400
c (cm)	10	8	6		2				2,0	500
A (cm^2)							236	68	28,4	
V (cm^3)				90	8	1				

7.42. *a)* Egy kocka felszíne 96 cm^2. Mekkora a térfogata?

b) 1 cm élhosszúságú kis kockákból
(1) 2 cm; (2) 5 cm; (3) 10 cm
élhosszúságú kockákat rakunk össze.
Hány kis kockára van szükség?
Hányszorosa a kis kockák felszínének az összege a nagy kocka felszínének?

7.43. *a)* Téglatest éleinek aránya 2 : 3 : 5, a leghosszabb éle 10 cm. Mennyi a téglatest felszíne és térfogata?

b) Egy téglatest térfogata 165 cm^3, minden élének mérőszáma prímszám. Mekkorák az élei? Mekkora a téglatest felszíne?

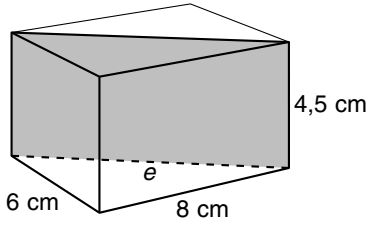
c) Egy téglatest élei: 7,5 cm; 15 cm; 10 cm. Hány százalékkal változik a téglatest felszíne, illetve térfogata, ha éleit
(1) 20%-kal növeljük; (2) 20%-kal csökkentjük?

d) Egy négyzetes oszlop térfogata 160 cm^3. A magassága 2,5-szerese az alapélnek. Mekkorák az élei, illetve a felszíne?

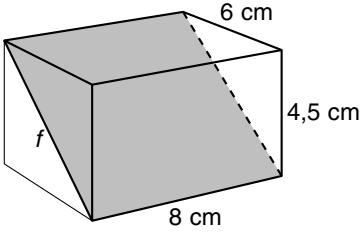
e) Hány téglából építhető föl egy 8 m hosszú, 40 cm vastag és 3 m magas fal, ha a téglák éleinek mérete: 40 cm, 25 cm, 25 cm?
Vegyük figyelembe azt is, hogy a falban 1,25 m $\times$ 2,25 m-es helyet kell kihagyni egy ajtónak és két 1,50 m $\times$ 1,25 m-es helyet két ablaknak.

7.44. Egy téglatest élei: 6 cm; 4,5 cm; 8 cm.
Mekkora lesz a keletkezett háromszög alapú hasáb felszíne, illetve térfogata, ha az ábrán látható átlósíkkal kettévágjuk a téglatestet?

a)

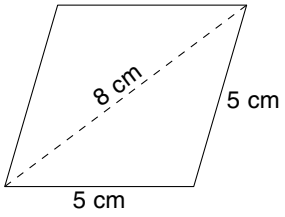


b)

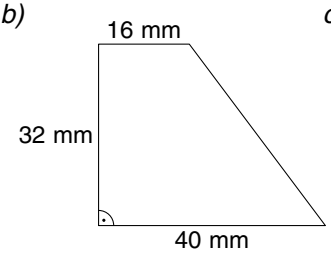


7.45. A következő síkidomok 2 cm oldalélű egyenes hasábok alaplapjai:

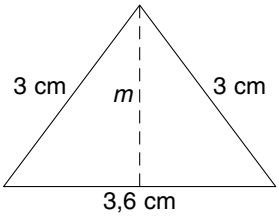
a)



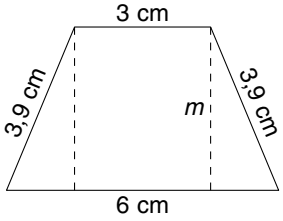
b)



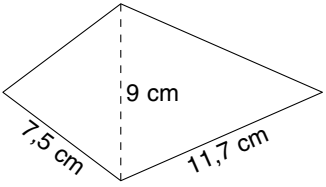
c)



d)

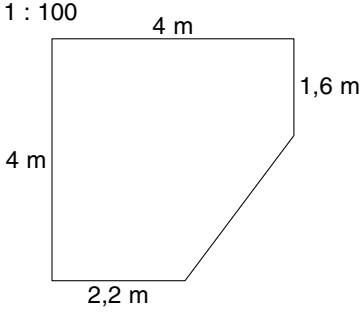


e)



Vázold föl a hasábok hálóját! Számítsd ki a felszínüket és térfogatukat!

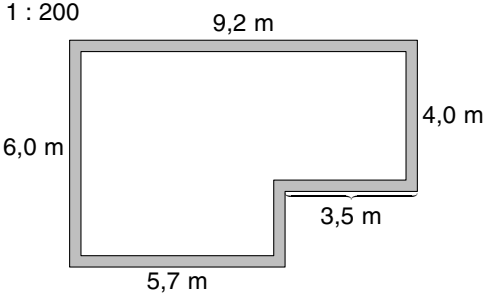
7.46. Egy 2 m mély medence alaprajza látható az ábrán. (Ami az ábrán 1 cm, az a valóságban 100 cm.)



a) Hány négyzetméter csempét használtak fel a burkolásához, ha a felhasznált csempe 4%-a hulladékba került?

b) Hány köbméter víz fér a medencébe, ha a túlfolyó nyílása a medence felső szintje alatt 25 cm-re található?

7.47. Egy épület alaprajza látható az ábrán. Hány köbméter betont használtak fel az alapozásához, ha az alap szélessége 0,6 m, mélysége 1,2 m, és az alapot a föld felszíne fölé 30 cm magasra építették föl?



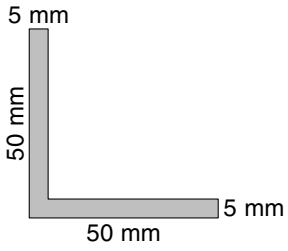
7.48. *a)* Egy gát keresztmetszete trapéz. Alul 22 m, felül 3 m széles, és 4 m magas. Hány köbméter földet és követ építettek a 10 km hosszú gátba, ha a gát 20%-a kő?

b) Trapéz keresztmetszetű árkot ásnak, amely felül 3,5 m, alul 1,5 m széles, és 1,2 m mély. Hány köbméter földet emelnek ki, ha az árok 200 m hosszú?

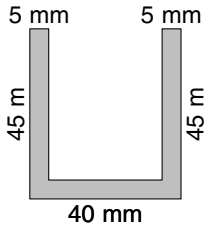
c) Trapéz keresztmetszetű csatornán a víz 2,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel folyik. Mennyi víz halad át a csatornán 1 óra alatt, ha a víz felszínén mérve a csatorna szélessége 3,2 m, a fenekén mérve 0,8 m, a víz mélysége 1,2 m?

7.49. Különböző idomacélok keresztmetszetének méreteit az ábrák mutatják. Mekkora a tömege 2,5 m idomacélnak, ha az acél sűrűsége $\varrho = 7{,}8\ \frac{g}{cm^3}$?

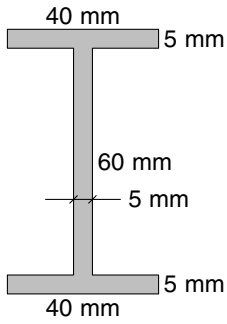
a)



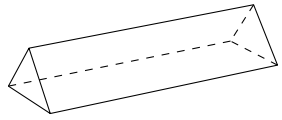
b)



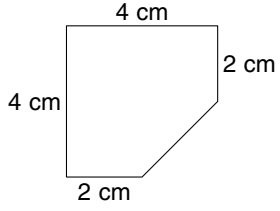
c)



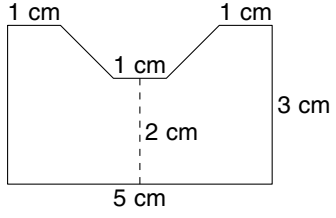
7.50. *a)* Mekkora a tömege annak a 10 cm hosszú üvegprizmának, amelynek a keresztmetszete 1,5 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög? Az üveg sűrűsége: $\varrho = 2{,}4\ \frac{g}{cm^3}$.



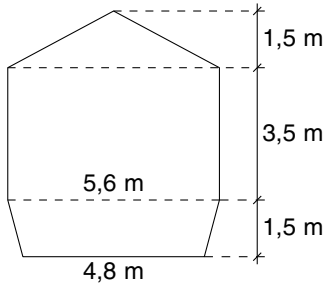
b) Mekkora a tömege annak a 150 cm hosszú falécnek, amelynek a keresztmetszetét az ábra mutatja? A fa sűrűsége: $\varrho \approx 0{,}7\ \frac{g}{cm^3}$.



c) Mekkora a tömege annak az 50 cm hosszúságú műanyag lécnek, amelynek a keresztmetszetét az ábra mutatja? A műanyag sűrűsége: $\varrho = 1{,}5\ \frac{g}{cm^3}$.



d) Egy asztag alakú szénakazal hosszúsága 25 m, keresztmetszetének méreteit az ábra mutatja. Hány tonna rétiszéna van a kazalban, ha a rétiszéna sűrűsége: $\varrho \approx 110\ \frac{kg}{m^3}$?



Egyenes körhenger térfogata, felszíne; hengerszerű testek

7.51. *a)* Egy hirdetőoszlop 5 m magas és 1,5 m átmérőjű hengerpalást. Hány négyzetméter lemez kellett az elkészítéséhez?

b) Mennyi bádoglemezre van szükség 20 db d = 14 cm átmérőjű, h = 1,5 m hosszú kályhacső elkészítéséhez, ha az átfedésre 2 cm-t számítunk?

c) Mennyi horganylemez kell h = 120 cm hosszú d = 18 cm átmérőjű, félhenger alakú csatorna elkészítéséhez, ha a szélek peremezéséhez 1-1 cm széles lemezcsíkot használnak fel?

7.52. *a)* Egy 18 cm átmérőjű fazék magassága 16 cm. Mennyi víz fér bele? Milyen magasan áll benne a víz, ha 16 dl vizet töltünk bele?

b) Egy henger alakú, lemezből készült zárt hordó átmérője 50 cm, magassága 102 cm. Mekkora a hordó térfogata?

A hordót kétszer átfestették. Mennyi festéket használhattak el, ha 1 kg festék 5 m^2 fémfelület egyszeri átfestéséhez elegendő?

c) Mennyi víz fér egy vaslemezből készült, félkör keresztmetszetű, 1,5 m hosszú és 40 cm átmérőjű vályúba? Mennyi lemezre van szükség az elkészítéséhez, ha a felhasznált lemez mintegy 10%-át a szélek peremezésére használjuk fel, illetve hulladékba kerül?

d) Egy körhenger alakú tartály belső átmérője 113 cm, magassága 100 cm. Mennyi víz van benne, ha félig van megtöltve?

Mennyit emelkedik benne a víz szintje, ha 200 l vizet engedünk még bele?

e) Egy 40 cm átmérőjű, kör keresztmetszetű csőben másodpercenként 2 m-es sebességgel áramlik a víz. Hány köbméter víz folyik át rajta óránként?

f) Mennyi víz fér egy 4 cm belső átmérőjű, 10 cm magas körhenger alakú pohárba? Hány ilyen pohár vízzel tölthető tele egy körhenger alakú, 8 cm belső átmérőjű, 20 cm magas edény?

Ha az előző edény tele van valamilyen folyadékkal, akkor hány olyan orvosságos ampulla tölthető meg belőle, amelyek belső átmérője 0,8 cm, magassága 2 cm?

7.53. Mekkora a tömege a következő testeknek?

a) Egy parafadugó átmérője 2 cm, hosszúsága 4 cm.

A parafa sűrűsége: $\varrho \approx 0{,}3\ \frac{g}{cm^3}$

b) Egy fenyőfa rúd átmérője 16 cm, hosszúsága 2,5 m.

A fenyőfa sűrűsége: $\varrho \approx 0{,}5\ \frac{g}{cm^3}$

c) Egy alumíniumhuzal átmérője 2 mm, hosszúsága 50 m.

Az alumínium sűrűsége: $\varrho = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}$

d) Egy rézből készült érme átmérője 30 mm, vastagsága 2 mm.

A réz sűrűsége: $\varrho = 8{,}8\ \frac{g}{cm^3}$

e) Egy acélcső külső átmérője 16 cm, falvastagsága 5 mm, hosszúsága 6,00 m. Az acél sűrűsége: $\varrho = 7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

f) Egy 20 mm átmérőjű félkör keresztmetszetű műanyag fedőléc hosszúsága 2,40 m. A műanyag sűrűsége: $\varrho = 1{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

g) Egy rézhuzal átmérője 4 mm, hosszúsága 20,000 m. A huzalt 2 mm vastag műanyag szigeteléssel vonták be.

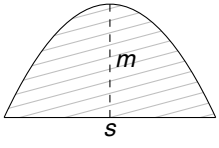
A réz sűrűsége: $\varrho = 8{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; a műanyag sűrűsége: $\varrho = 1{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

7.54. *a)* Egy négyzetes oszlop alakú tölgyfa gerenda élei: 0,2 m; 0,2 m; 6 m. A gerendából a lehető legnagyobb kör keresztmetszetű oszlopot faragják ki. Hány kilogramm fa megy veszendőbe? Az eredeti gerenda anyagának hány százaléka a hulladék? A fa sűrűsége: $\varrho = 700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

b) Egy körhenger alakú, 6 m hosszú tölgyfa oszlop keresztmetszetének átmérője 0,2 m. Az oszlopból a lehető legnagyobb négyzetes hasáb alakú gerendát faragják ki. Hány kilogramm fa megy veszendőbe? Az eredeti gerenda anyagának hány százaléka a hulladék? A fa sűrűsége: $\varrho = 700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

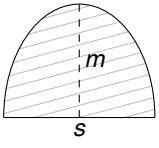
7.55. A kazlak keresztmetszetének területét a keresztmetszet alakjától függően a következő képletek segítségével becsülik meg:

(1) „Szétterpeszkedő”



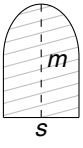
$T \approx \frac{2}{3} \cdot m \cdot s$

(2) „Szokványos”



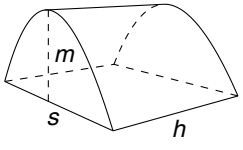
$T \approx \frac{3}{4} \cdot m \cdot s$

(3) „Egyenes törzsű”



$T \approx \frac{5}{6} \cdot m \cdot s$

a) Hány tonna lucernaszéna van abban a „szétterpeszkedő” kazalban, amelynek méretei: $h = 12$ m; $s = 8$ m; $m = 3{,}5$ m, ha a lucernaszéna sűrűsége: $\varrho = 80\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?



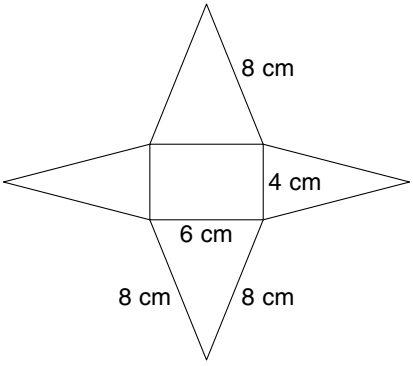
b) Hány tonna búzaszalma van abban a „szokványos” kazalban, amelynek méretei: $h = 16$ m; $s = 5$ m; $m = 5$ m, ha $\varrho = 60\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

c) Hány tonna vegyes széna van abban az „egyenes törzsű” kazalban, amelynek méretei: $h = 18$ m; $s = 4$ m; $m = 6$ m, ha $\varrho = 90\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

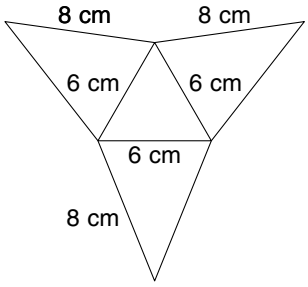
Ismerkedés a gúlával

7.56. Szerkeszd meg az ábrán látható hálózatokat rajzlapon! Vágd ki, hajtogasd össze! Számítsd ki az így kapott testek felszínét!

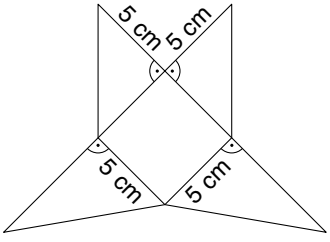
a)



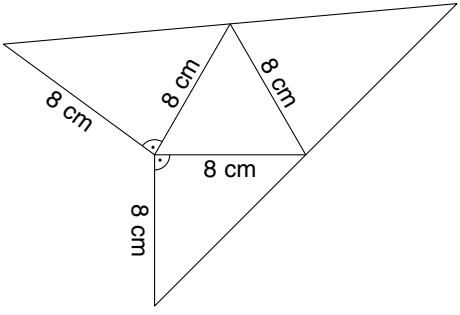
b)



c)



d)



7.57. Szerkessz szabályos háromszöget, amelynek oldalai 10 cm hosszúak! Kösd össze az oldalak felezési pontját! Az így nyert testháló segítségével milyen testet tudsz összeállítani?
Számítsd ki a test felszínét!

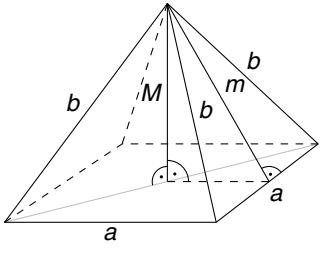
7.58. *a)* Mennyi anyag kell ahhoz a gúla alakú, négyzet alapú sátorhoz, amelynek alapéle 2,5 m, oldallapjának magassága 2 m?

b) Egy torony teteje négyzetes gúla. Alapéle 3 m, oldalmagassága 5 m. Hány darab 20 cm oldalú négyzetes alakú pala szükséges a befedéséhez?

7.59. Bizonyítható, hogy a gúla térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot T \cdot M$, ahol M a testmagasság, T az alaplap területe. Határozd meg a szabályos négyzetes gúla térfogatát, felszínét!

a) $a = 6$ cm; $M = 8$ cm;

b) $a = 6$ cm; $b = 7{,}8$ cm

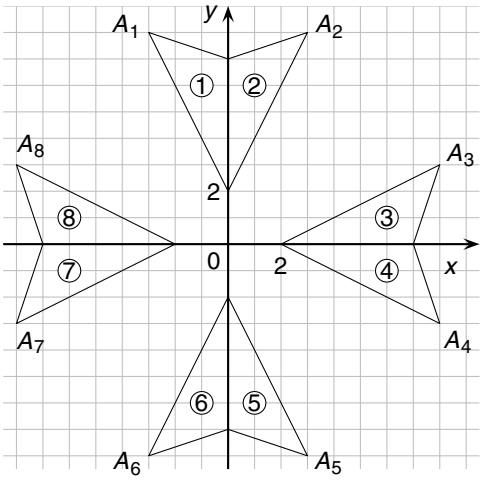


7.60. Határozd meg a **7.56.** feladatban adott gúlák térfogatát!

8. Geometriai transzformációk

Pont-pont függvények

8.01. Keress olyan háromszögeket, amelyek az ① háromszög
a) tengelyesen tükrös képei;
b) középpontosan tükrös képei;
c) elforgatással kapott képei!



8.02. Írd fel az A_1, A_2, …, A_8 csúcspontok koordinátáit! Keress összefüggést az

a) A_2–A_3; A_1–A_4; A_8–A_5; A_7–A_6 pontpárok koordinátái között;

b) A_1–A_5; A_2–A_6; A_3–A_7; A_4–A_8 pontpárok koordinátái között;

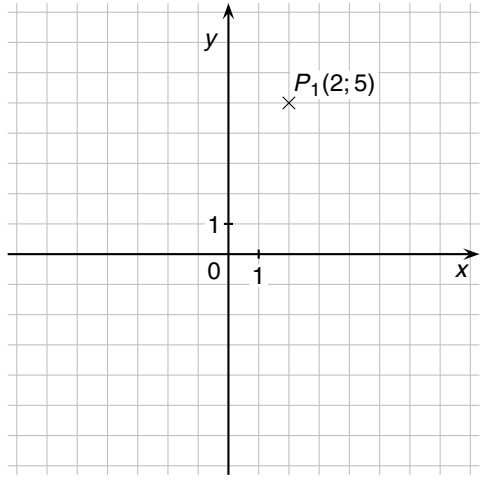
c) A_1–A_3; A_2–A_4; A_3–A_5; A_4–A_6; A_5–A_7; A_6–A_8; A_7–A_1; A_8–A_2 pontpárok koordinátái között;

d) A_1–A_7; A_2–A_8; A_3–A_1; A_4–A_2; A_5–A_3; A_6–A_4; A_3–A_5; A_8–A_6 pontpárok koordinátái között!

e) Milyen geometriai transzformáció adott az *a)*, *b)*, *c)*, illetve *d)* feladatban?

f) Keress más tükörtengelyre szimmetrikus pontpárokat, és vizsgáld meg a pontpárok koordinátái közti összefüggést!

8.03. *a)* Keresd meg azokat a pontokat, amelyek jelzőszámainak abszolútértéke megegyezik a P_1 pontéval! A jelzőszámok sorrendje felcserélhető. Hány pontot találtál? Számozd meg a pontokat! (P_1, P_2, …) Írd fel a pontok koordinátáit!



b) Milyen mozgatással kerülhet P_1 pont a többi helyére?

c) Ha a pontokat a számozás sorrendjében összekötjük, milyen sokszöget kapunk?

d) Hány szimmetriatengelye van?

e) Számítsd ki a sokszög kerületét! (Egység a négyzet oldala.)

f) Számítsd ki a területét! (Egység a négyzet területe.)

8.04. Keress olyan alakzatokat, amelyek az ① alakzat

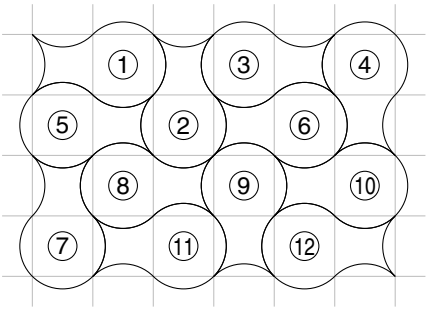
a) tengelyesen tükrös képei;

b) középpontosan tükrös képei;

c) eltolással kapott képei;

d) elforgatással kapott képei!

e) Határozd meg az ① alakzat területét, ha egy kis négyzet területe a területegység.



8.05. Keress olyan alakzatokat, amelyek az ① alakzat; ② alakzat; ③ alakzat

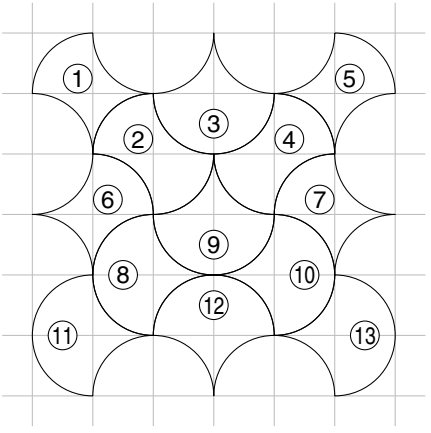
a) tengelyesen tükrös képei;

b) középpontosan tükrös képei;

c) eltolással kapott képei;

d) elforgatással kapott képei!

e) Határozd meg a ③, a ② és az ① alakzat területét, ha egy kis négyzet oldalhosszúsága a hosszúságegység!

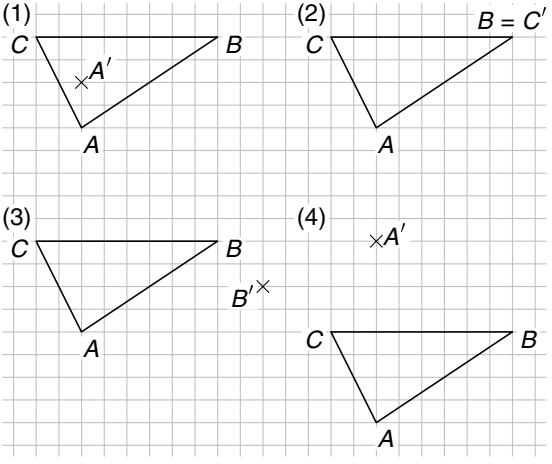


Tengelyes tükrözés

8.06. *a)* Adott a háromszög egy csúcsának a tengelyes tükörképe. Rajzold meg a tükörtengelyt, majd a háromszög tükörképét!

b) Sorold fel a (4) feladatban kapott $ABA'C$ négyszög tulajdonságait!

c) Számítsd ki a (4) feladatban kapott $ABA'C$ négyszög területét és kerületét, ha a kis négyzet oldala a hosszúságegység, területe a területegység!



8.07. Szerkessz szabályos háromszöget, ha egy oldala 3 cm!

a) Tükrözd a háromszöget mind a három oldalára!

b) Az eredeti háromszög és a három tükörkép együtt milyen test hálója lehet? Számítsd ki ennek a testnek a felszínét!

8.08. *a)* Szerkessz háromszöget, ha $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 3{,}5$ cm! Tükrözd a háromszöget az a oldal felezőmerőlegesére!

b) Szerkessz háromszöget, ha $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 60^\circ$! Tükrözd a háromszöget a γ szög szögfelezőjére!

c) Szerkessz háromszöget, ha $a = 5$ cm, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$! Tükrözd a háromszöget az a oldalhoz tartozó magasságvonalra!

d) Szerkessz háromszöget, ha $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $\beta = 60^\circ$! Tükrözd a háromszöget a b oldalához tartozó s_b súlyvonalára!

8.09. *a)* Szerkessz téglalapot, amelynek egyik oldala 2 cm, átlója 4 cm! Számítsd ki a másik oldalát! Hány fokos szöget zár be a két átló?

b) Tükrözd a téglalapot az egyik átlójára! Ha a két téglalap szomszédos csúcsait összekötjük, milyen sokszöget kapunk? Az így kapott sokszög területe hányszorosa a téglalap területének?

8.10. Az $ABC\triangle$-ben $AB = 36$ mm, $\alpha = 30^\circ$, $AC = BC$. Szerkeszd meg a háromszöget!

a) Tükrözd a háromszöget az AB oldalára! Milyen négyszöget kaptál? Méréssel vagy számítással állapítsd meg az oldalait! Mekkorák a szögei?

b) A tükörképet (az ABC' háromszöget) tükrözd az AC' oldalra! Folytasd a tükrözést, amíg az ABC háromszöghöz jutsz vissza! Milyen sokszöget kaptál? Hány szimmetriatengelye van?

c) Keress a kapott sokszögben három olyan csúcspontot, amelyek derékszögű háromszöget határoznak meg!

d) Keress három olyan csúcspontot, amelyek szabályos háromszöget határoznak meg!

e) Keress négy olyan csúcspontot, amelyek téglalapot határoznak meg!

f) Keress négy olyan csúcspontot, amelyek paralelogrammát határoznak meg!

g) Keress négy olyan csúcspontot, amelyek húrtrapézt határoznak meg!

Középpontos tükrözés

8.11. *a)* Szerkessz háromszöget, ha $a = 4$, $b = 4{,}5$, $c = 5$ cm! Tükrözd a háromszöget a beírható kör középpontjára!

b) Szerkessz háromszöget, ha $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 120^\circ$! Tükrözd a háromszöget a köré írható kör középpontjára!

c) Szerkessz derékszögű háromszöget, ha átfogója 6,5 cm, egyik befogója 5,2 cm! Tükrözd a háromszöget a súlypontjára!

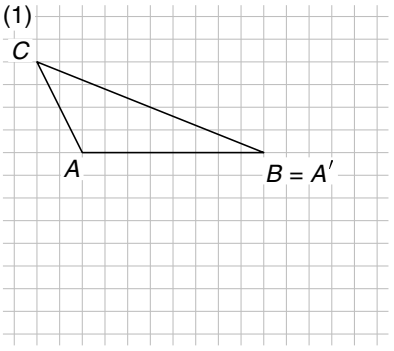
d) Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha szárai: $b = c = 4$ cm, szárszöge: $\alpha = 120^\circ$! Tükrözd a háromszöget a magasságpontjára!

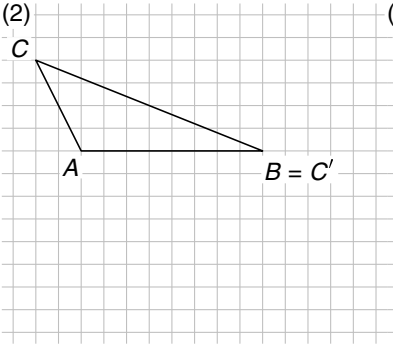
8.12. Szerkessz háromszöget, ha $a = 6$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 75^\circ$! Tükrözd a háromszöget súlypontjára! Milyen tulajdonságú sokszög a két háromszög közös része!

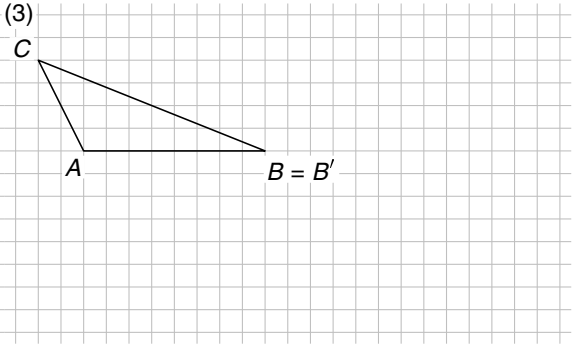
8.13. *a)* Adott a háromszög egy csúcsának a középpontos tükrözéssel kapott képe. Rajzold meg a tükrözés középpontját, majd a háromszög tükörképét!

b) Sorold fel az (1) feladatban kapott $AC'BC$ négyszög tulajdonságait!

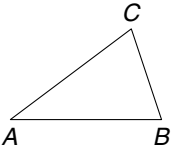
c) Számítsd ki a (2) feladatban kapott $ABA'C$ négyszög területét és kerületét, ha a kis négyzet oldala a hosszúságegység, területe a területegység!







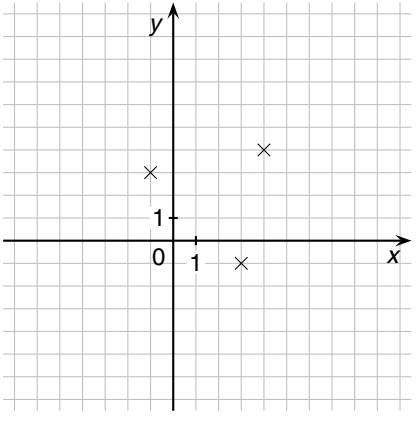
8.14. Szerkessz háromszöget a következő adatokkal!
$AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 2{,}5$ cm



a) Tükrözd a háromszöget középpontosan a B csúcsra! Kösd össze az A pontot C'-vel és a C pontot A'-vel! Milyen négyszöget kaptál? Hányszorosa az $AC'A'C$ négyszög területe az ABC háromszög területének?

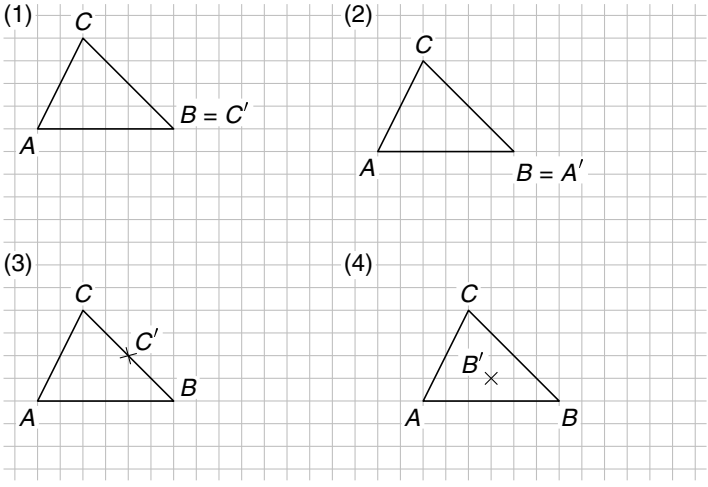
b) Tükrözd az ABC háromszöget középpontosan a B csúcsra is, majd a C csúcsra is. Kösd össze a szomszédos pontokat! Milyen sokszöget kaptál? Keress az ábrán párhuzamos szakaszokat! Keress az ábrán egyállású és váltószögeket! Hányszorosa a kapott sokszög területe az eredeti háromszög területének?

8.15. Adott a koordináta-rendszerben három pont, amelyek közül kettő egy paralelogramma két csúcspontja, a harmadik az átlók metszéspontja. Mik lehetnek a paralelogramma másik két csúcsának a koordinátái?



Eltolás

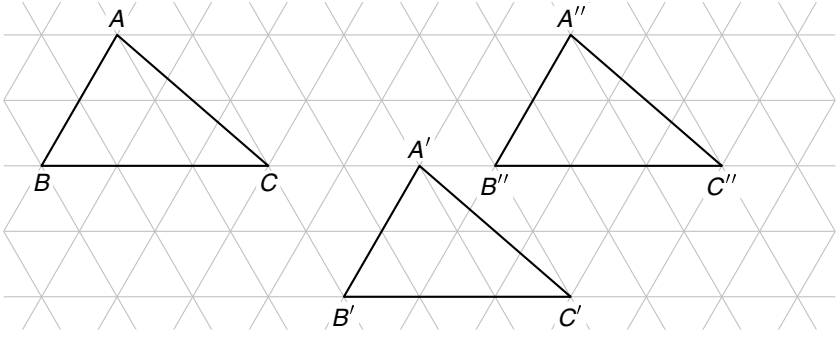
8.16. *a)* Adott háromszög egy csúcsának az eltolással kapott képe. Rajzold meg az eltolás vektorát, majd a háromszög eltolással kapott képét!



b) Sorold fel a (2) feladatban kapott $AA'C'C$ négyszög tulajdonságait! Határozd meg a négyszög területét, ha egy kis négyzet területe a területegység!

c) Milyen sokszöget határoz meg a (3) feladatban az $ABC\triangle$ és az $AB'C'\triangle$ közös része? A közös rész területe mekkora része az eredeti háromszög területének?

8.17. Az $ABC\triangle$ milyen mozgatásával kaphatjuk az $A'B'C'\triangle$-et és az $A''B''C''\triangle$-et?

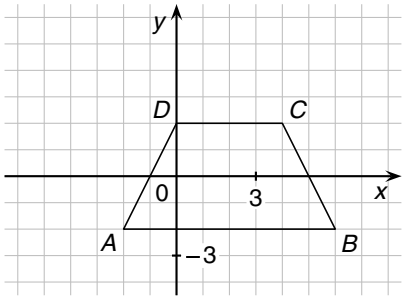


a) Rajzold meg feketével az $\overrightarrow{AA'}$-t!
Rajzolj feketével a háromszögek csúcsait összekötő olyan vektorokat, amelyek egyenlők az $\overrightarrow{AA'}$-ral! Melyek ezek? .....

b) Rajzold meg kékkel az $\overrightarrow{A'A''}$-t!
Rajzolj kékkel a háromszögek csúcsait összekötő olyan vektorokat, amelyek egyenlők az $\overrightarrow{A'A''}$-ral! Melyek ezek? .....

c) Rajzold meg pirossal az $\overrightarrow{AA''}$-t!
Rajzolj pirossal a háromszögek csúcsait összekötő olyan vektorokat, amelyek egyenlők az $\overrightarrow{AA''}$-ral! Melyek ezek? .....

8.18. Derékszögű koordináta-rendszerben adott az *ABCD* trapéz, és adott az *A* csúcs eltolással kapott képe: $A'(-5; 0)$.

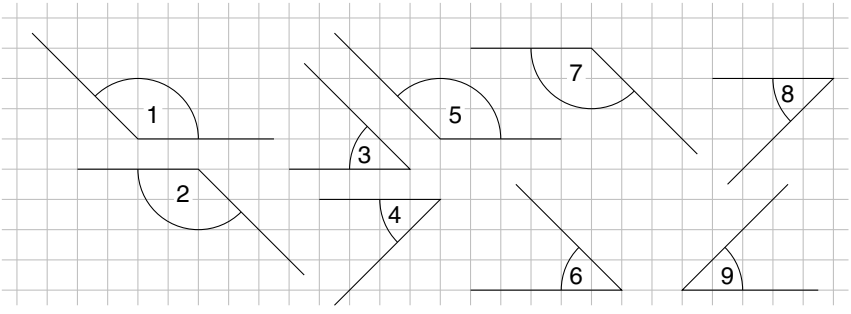


a) Rajzold meg az eltolás vektorát!

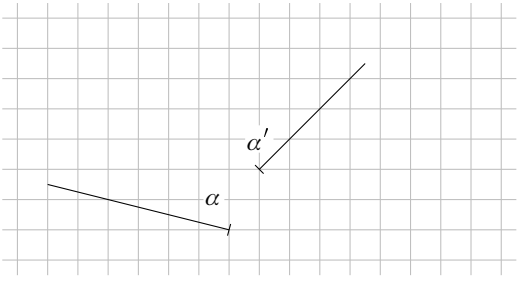
b) Rajzold meg a trapéz eltolással kapott képét, és határozd meg csúcspontjainak koordinátáit!

c) A két trapéz közös részének területe mekkora része az eredeti trapéz területének?

8.19. Keresd meg az összes olyan szögpárt az ábrán, amelyek egymásból eltolással származtathatók!



8.20. Az α szög egyik szára és a belőle eltolással kapott α' szög másik szára az ábráról hiányzik.
Pótold a hiányzó szögszárakat! Rajzold meg az eltolás vektorát!



8.21. A paralelogramma átellenes szögei egyenlők és párhuzamos szárúak.

a) Átvihetők-e egymásba eltolás segítségével? (Megállapításodat indokold!)

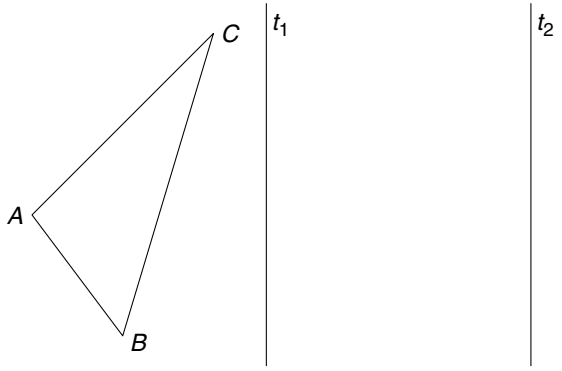
b) Átvihetők-e egymásba egyetlen tengelyes tükrözés segítségével?

c) Létezik-e olyan paralelogramma, amelynél az átellenes szögek egymásba átvihetők egyetlen tengelyes tükrözés segítségével?

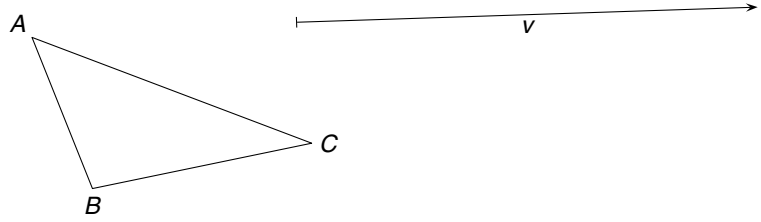
d) Bármely paralelogrammánál az átellenes szögek átvihetők-e egymásba két – egymás után végrehajtott – tengelyes tükrözés segítségével?

8.22. Szerkessz háromszöget, ha $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\gamma = 60^\circ$! Szerkeszd meg és kösd össze az oldalak felezőpontját! Jelöld azonos színnel az ábrán a γ szöggel egyállású szögeket! Jelöld más színnel azokat a szögeket, amelyek a γ szöggel nem egyállásúak, de azonos nagyságúak!

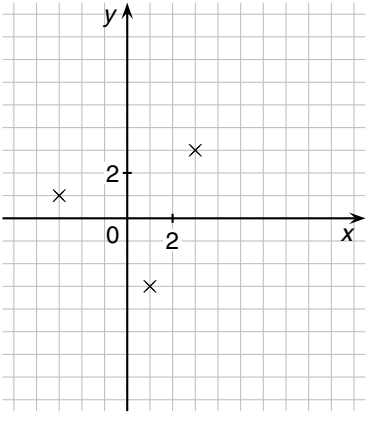
8.23. Az *ABC* háromszöget tükrözd egymás után a t_1 és a t_2 tengelyre! Figyeld meg az eredeti és a második tükörkép körüljárásának irányát! Hogyan lehet egyetlen mozgatással fedésbe hozni az *ABC* háromszöget a második tükörképpel?



8.24. Az $ABC\triangle$-et told el az adott vektorral! Keress két olyan tengelyt, amelyre egymás után tükrözve a háromszöget, az eltolással kapott képébe kerül a háromszög!

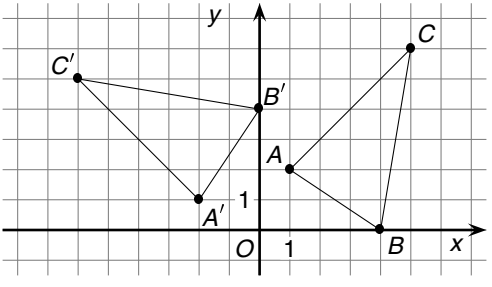


8.25. Adott a koordináta-rendszerben három pont, amelyek egy paralelogramma csúcspontjai. Mik lehetnek a paralelogramma negyedik csúcspontjának koordinátái?



Forgatás

8.26. Az $ABC\triangle$ elmozgatásával kaptuk az $A'B'C'\triangle$-et.



a) A csúcspontok koordinátáit olvasd le az ábráról!

$A(\ ;\ )$	$B(\ ;\ )$	$C(\ ;\ )$
$A'(\ ;\ )$	$B'(\ ;\ )$	$C'(\ ;\ )$

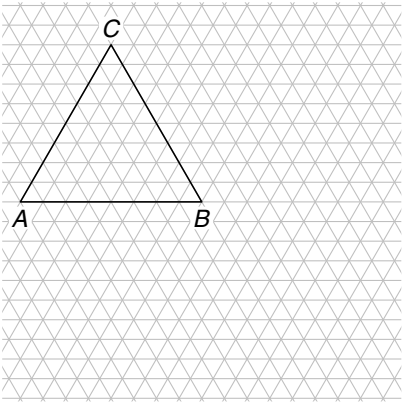
b) Add meg a megfeleltetés szabályát! $P(x; y) \rightarrow P'(\quad ;\quad)$

c) Mekkora az $AOA'\sphericalangle$; $BOB'\sphericalangle$; $COC'\sphericalangle$?

8.27. A 60°-os háromszögrácson forgasd el az $ABC\triangle$-et háromszor egymás után $+60^\circ$-kal az egyik csúcsa körül!

a) Hasonlítsd össze az eredeti és a harmadik elforgatással kapott háromszög megfelelő oldalainak helyzetét!

b) Milyen sokszöget alkot a négy háromszög együtt? Mekkorák a szögei?



8.28. A síkot elforgattuk O pontja körül, így a P pont a P' pontba került.

Hol helyezkedhet el az O pont, ha a forgatás

a) 180°-kal, *b)* $+90^\circ$-kal, *c)* -90°-kal,

d) $+60^\circ$-kal, *e)* -60°-kal történt?

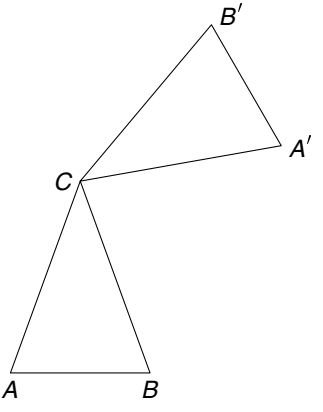
A *b)*, *c)*, *d)*, *e)* esetekben milyen sokszöget határoznak meg P, P' és O pontok? Állításodat indokold!



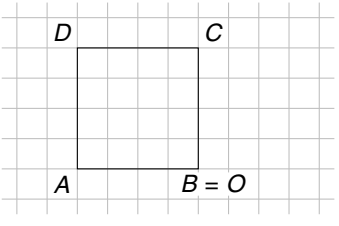
8.29. *a)* A síkot elforgattuk O pontja körül, így a P pont a P' pontba került. Hány fokos elforgatás történt, ha a $PP'O$ háromszög P csúcsú szöge 50°-os?

b) Vegyél föl a síkon egy tetszőleges P és O pontot! Szerkeszd meg azt a P' pontot, amely a P pont O körüli -100°-os elforgatásával keletkezett!

8.30. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge 70°-os. A háromszöget a C csúcsa körül elforgattuk. Mekkora az elforgatás szöge, ha a $BCA' \sphericalangle$ 80°-os?



8.31. Forgasd el az $ABCD$ négyzetet B pontja körül -90°-kal! Az eredeti és az elforgatott négyzet együtt milyen sokszöget alkot?



8.32. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

A: Minden forgásszimmetrikus alakzat középpontosan is szimmetrikus.

B: Minden középpontosan szimmetrikus alakzat forgásszimmetrikus.

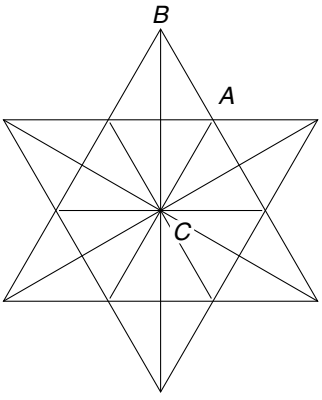
C: Van olyan forgásszimmetrikus alakzat, amely tengelyesen is szimmetrikus.

D: Ha egy tengelyesen szimmetrikus alakzatnak van szimmetria-középpontja, az rajta van a tengelyen.

E: Ha egy tengelyesen szimmetrikus alakzatnak több szimmetriatengelye van, akkor azok metszéspontja szimmetria-középpont.

8.33. Milyen szimmetriák figyelhetők meg a kör esetében?

8.34. *a)* Színezd pirossal a csillagban azokat a háromszögeket, amelyek az $ABC\triangle$-ből $+60^\circ$-os elforgatások ismételt végrehajtásával képezhetők!



b) Színezd kékkel azokat a háromszögeket, amelyek az $ABC\triangle$-ből $+120^\circ$-os elforgatások ismételt végrehajtásával képezhetők!

c) Feketítsd be azokat a háromszögeket, amelyek az $ABC\triangle$-ből 180°-os elforgatások ismételt végrehajtásával képezhetők!

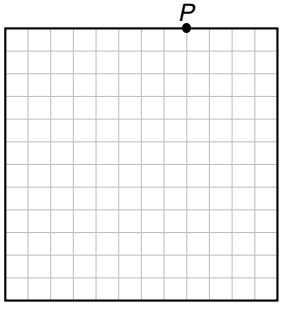
d) Vonalkázd be azokat a háromszögeket, amelyek az $ABC\triangle$-ből $+90^\circ$-os elforgatások ismételt végrehajtásával képezhetők!

e) Keress két olyan tengelyt, amelyekre egymás után tükrözve az $ABC\triangle$-et,

(1) a 120°-os (2) a -120°-os; (3) a 180°-os elforgatással kapott képébe kerül a háromszög!

Keress több megoldást! Mekkora szöget zárnak be ezek a tengelyek egymással?

8.35. A P pont 2 : 1 arányban osztja a négyzet oldalát. Forgasd el a P pontot a négyzet középpontja körül 90°-kal egymás után háromszor!



a) Kösd össze a kapott négy pontot! Milyen síkidomot kaptál?

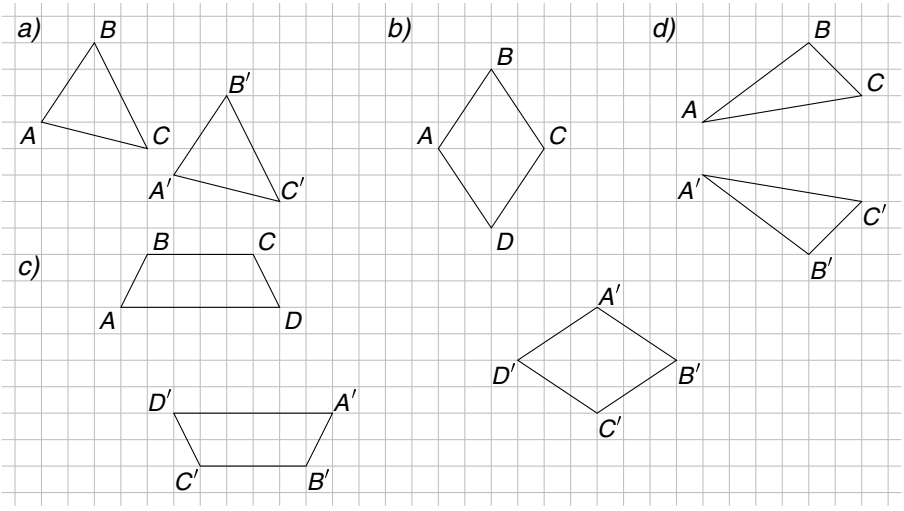
b) A szükséges adatok megmérése után számítsd ki az így kapott négyszög területét!

c) Mérés nélkül is határozd meg az így kapott négyszög területét!

d) A négyzet csúcsainál keletkezett derékszögű háromszögeket tükrözd átfogóik felezőpontjára! Ezek a háromszögek és a tükörképeik lefedik a négyzet egy részét. Mekkora a maradék (le nem fedett) síkidom területe?

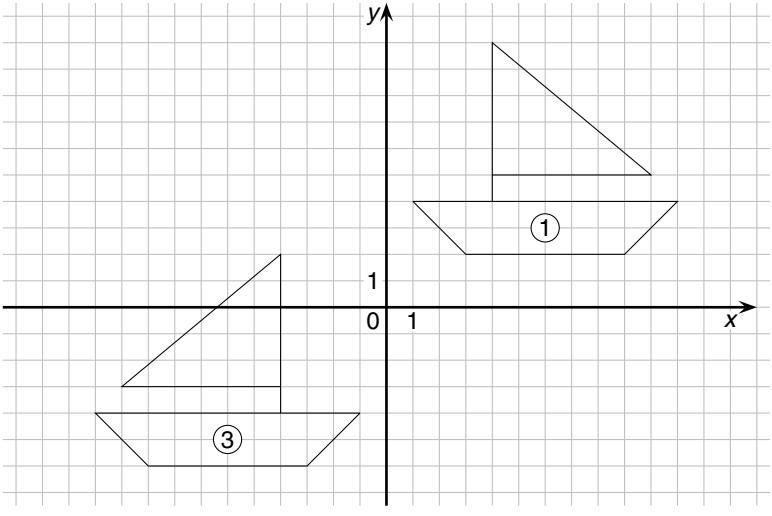
Vegyes feladatok az egybevágósági transzformációk köréből

8.36. Milyen geometriai transzformációt határoz meg a következő feladatokban két-két egybevágó síkidom?



Szerkesztéssel igazold, hogy valóban léteznek ezek a transzformációk!

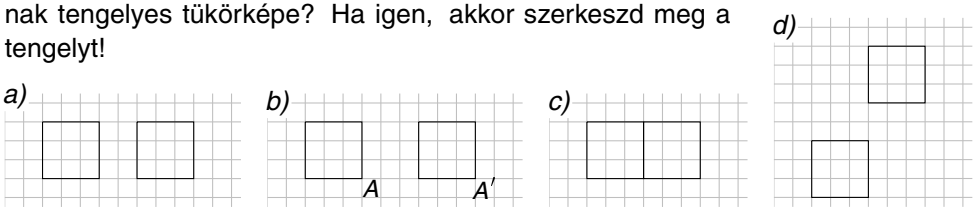
8.37. Két – egymást követő – egybevágósági transzformáció után az ① kis hajó képe a ③ alakzat.



a) Nevezd meg (a végrehajtás sorrendjében) a két transzformációt! (Keress több megoldást!)

b) Rajzold meg az első transzformáció végrehajtása után kapott ② kis hajót (a különböző megoldásokban eltérő színnel vagy más-más vonalazással)!

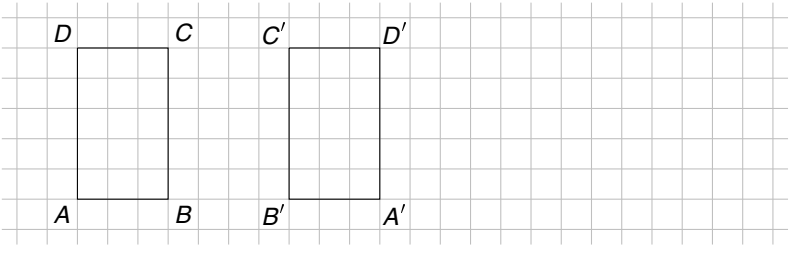
8.38. Lehet-e az ábrán látható négyzetek közül az egyik a másiknak tengelyes tükörképe? Ha igen, akkor szerkeszd meg a tengelyt!



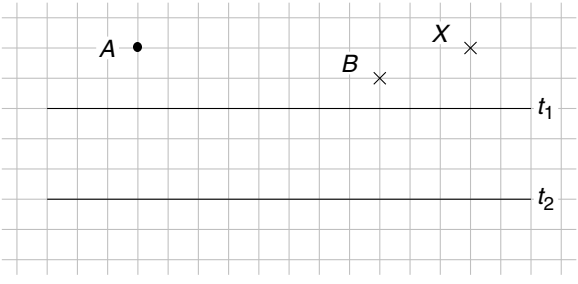
Lehet-e középpontos tükörképe? Ha igen, akkor szerkeszd meg a tükörközéppontot!

Lehet-e eltolással kapott képe? Ha igen, akkor add meg az eltolás vektorát!

8.39. Milyen transzformációval kaphattuk az $ABCD$ négyszögből az $A'B'C'D'$ négyszöget? Alkalmazz még egy transzformációt úgy, hogy az $A''B''C''D''$ négyszög az eredetinek eltolással kapott képe legyen!



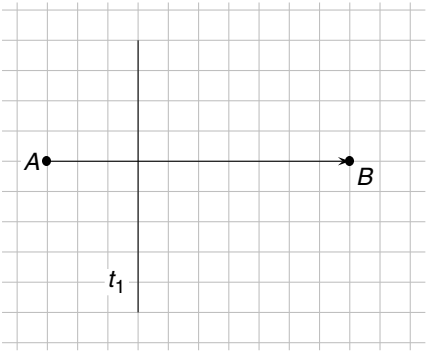
8.40. *a)* Tükrözd az A pontot a t_1 tengelyre, majd az így kapott A_1 tükörképet a t_2 tengelyre! Legyen az így nyert pont A_2. Hajtsd végre a kétszeres tükrözést a B és az X ponttal is!



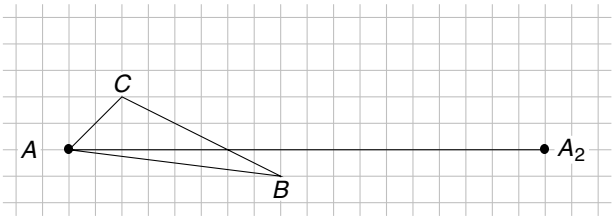
b) Rajzold meg azt a vektort, amellyel az A, B, X pontot eltolva A_2-be, B_2-be, X_2-be jutunk! Mit tapasztalsz?

c) Hogyan aránylik a t_1 és a t_2 tengely távolsága az A, A_2 távolságához?

8.41. Az A pontot előbb a t_1 tengelyre, majd tükörképét egy t_2 tengelyre tükröztük. A kétszeres tükrözés egy eltolással helyettesíthető, amelynek vektora legyen $\overrightarrow{AB}$. Szerkeszd meg a t_2 tengelyt!



8.42. Az ABC háromszög A csúcsa két tengelyes tükrözés egymás után való végrehajtása nyomán A_2-be került.



a) Szerkeszd meg a t_1 és a t_2 tengelyeket, ha $t_1 \parallel t_2$ és $t_1, t_2 \perp AA_2$!

b) Add meg azt az egyetlen eltolásvektort, amellyel helyettesíthető az előző két tengelyes tükrözés!

8.43. Az A pont eltolás nyomán a tőle 8 cm távolságra levő A_2 pontba került.

a) Rajzold meg az A és az A_2 pontot, majd szerkeszd meg az eltolást helyettesítő két tengelyes tükrözés t_1 és t_2 egymással párhuzamos, az AA_2-re merőleges tengelyét, ha azok adott sorrendben az AA_2 szakaszt 3 : 4 : 1 arányban osztják!

b) Szerkeszd meg az A_1 tükörképpontot!

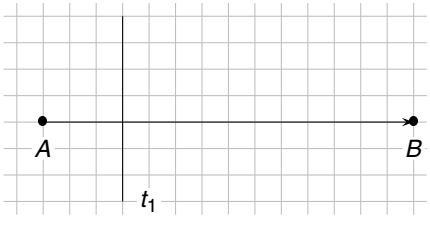
8.44. A sík A pontját a tőle 10 cm távolságra levő B pontba toltuk el. Az eltolást két olyan tengelyes tükrözés egymás után való végrehajtásával kívánjuk helyettesíteni, amelyek tengelyei egymással párhuzamosak és az $\overrightarrow{AB}$ vektorra merőlegesek. Az alábbi arányok közül – adott sorrendben – melyek szerint és hogyan oszthatják a tengelyek az eltolás vektorát?

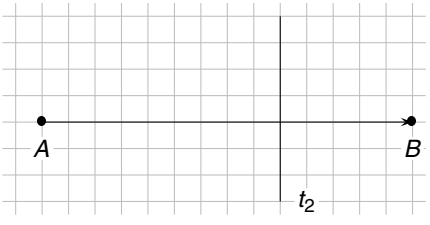
a) 1 : 5 : 4; *b)* 2 : 5 : 3; *c)* 2 : 4 : 4; *d)* 5 : 2 : 3;

e) 3 : 5 : 2; *f)* 4 : 5 : 1; *g)* 2 : 2 : 16; *h)* 3 : 3 : 9

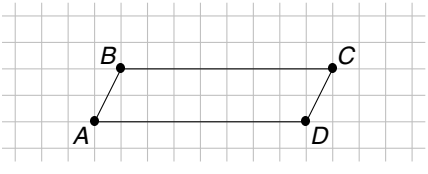
8.45. Az A pont eltolással a B pontba került. Ez az eltolás helyettesíthető a $t_1 \parallel t_2$ tengelyekre vonatkozó tükrözés egymás után való végrehajtásával is.
Szerkeszd meg a

a) t_2 tengelyt; *b)* t_1 tengelyt!





8.46. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldala eltolással átvihető a BA-ba.
Vidd át CD-t BA-ba pontosan két tengelyes tükrözés egymás után való végrehajtásával!



8.47. Adott egy AB szakasz. Hol legyen az O szimmetria-középpont, ha azt szeretnénk, hogy

a) $AA' = AB$,

b) a B' pont illeszkedjen az AB szakaszra,

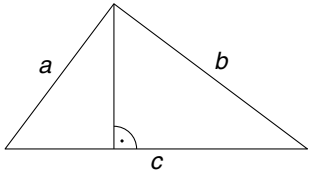
c) $2AB = AA'$, és A' illeszkedjen az AB egyenesre,

d) $A'O = OB$, és A' illeszkedjen az AB egyenesre,

e) $AA' = OB$, és A' illeszkedjen az AB egyenesre?

(Az A pont O pontra vonatkozó tükörképe A', a B ponté B'.)

8.48. Rajzolj derékszögű háromszöget, szerkeszd meg az átfogóhoz tartozó magasságát!
Keress a keletkező szögek között egyenlő nagyságúakat, igazold megállapításod!

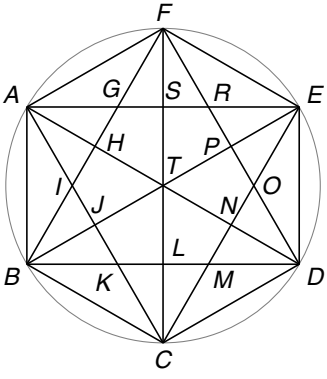


8.49. Egy szabályos hatszögnek meghúztuk minden átlóját. Keress az ábrán olyan háromszöget, amelyik az $AIH\triangle$-nek

a) tengelyesen szimmetrikus képe (határozd meg két pontjával a tengelyt is);

b) középpontosan szimmetrikus képe;

c) 180°-tól különböző szöggel elforgatott képe (írd le az elforgatás szögét is)!



8.50. Keress az előző ábrán az $ATFG$ négyszöggel

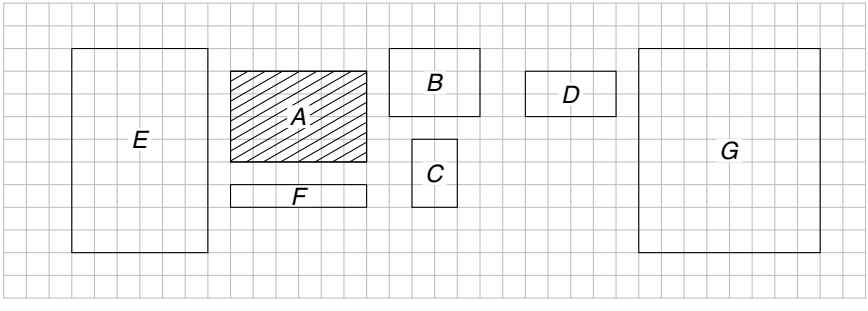
a) tengelyesen szimmetrikus négyszöget (határozd meg két pontjával a tengelyt is);

b) középpontosan szimmetrikus négyszöget (mekkorák a négyszög szögei?);

c) 180°-tól különböző szöggel elforgatott képe (írd le az elforgatás szögét is)!

Hasonlóság

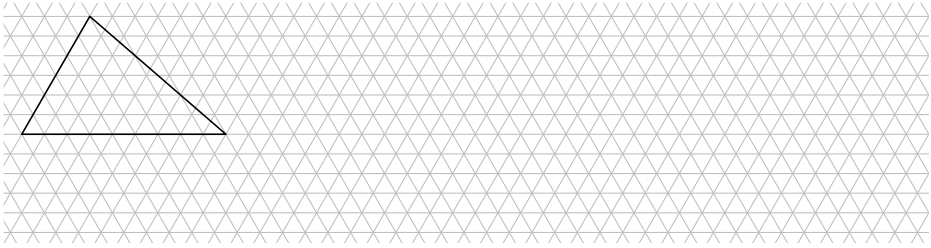
8.51. A B, C, D, E, F, G téglalapok közül melyik lehet az A téglalap nagyított vagy kicsinyített képe?



8.52. *a)* Rajzolj a háromszöggel egybevágó háromszöget!

b) Rajzold meg a háromszög nagyított képét úgy, hogy minden oldala 2-szeresére változzon!

c) Rajzold meg a háromszög kicsinyített képét úgy, hogy minden oldala $\frac{2}{3}$ részére változzon!



8.53. *a)* Egy téglalap oldalai: $a = 3$ cm, $b = 4{,}5$ cm. Megrajzoltuk a téglalap nagyított képét úgy, hogy $a' = 4$ cm lett. Mekkora lett a nagyított téglalap b' oldala? Számítsd ki az $a' : a$; $b' : b$; $K' : K$; $T' : T$ arányokat!

b) Egy téglalap oldalai: $a = 4$ cm, $b = 7{,}5$ cm. Megrajzoltuk a téglalap kicsinyített képét úgy, hogy $b' = 6$ cm lett. Mekkora lett a kicsinyített téglalap a' oldala? Számítsd ki az $a' : a$; $b' : b$; $K' : K$; $T' : T$ arányokat!

c) Egy téglalap oldalai: $a = 4{,}5$ cm, $b = 6$ cm. Kicsinyítsd a téglalapot úgy, hogy minden oldala $\frac{2}{3}$-szorosára változzon! Számítsd ki a téglalapok (K, illetve K') kerületét, (T, illetve T') területét, (d, illetve d') átlóját!
Határozd meg az $a' : a$; $b' : b$; $d' : d$; $K' : K$; $T' : T$ arányokat!

d) Egy téglalap két oldala 7,2 cm és 4,8 cm. Mekkorák annak a hozzá hasonló téglalapnak az oldalai, amelynek kerülete 72 cm?

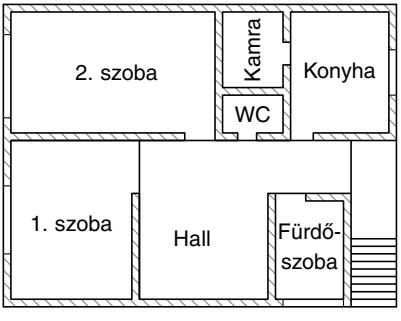
8.54. *a)* Egy szabályos hatszög kerülete 48 cm. Mekkora a hozzá hasonló szabályos hatszög köré rajzolható kör sugara, ha a hasonlóság aránya 2 : 1?

b) Egy négyszög oldalainak hossza rendre 10 cm, 15 cm, 20 cm és 25 cm. A hozzá hasonló négyszögben a legnagyobb és a legkisebb oldal összege 28 cm. Számítsd ki az utóbbi négyszög oldalainak hosszát!

8.55. Egy ház alaprajzát látod.
A méretarány: 1 : 250.
Ami az alaprajzon 1 cm, az a valóságban:

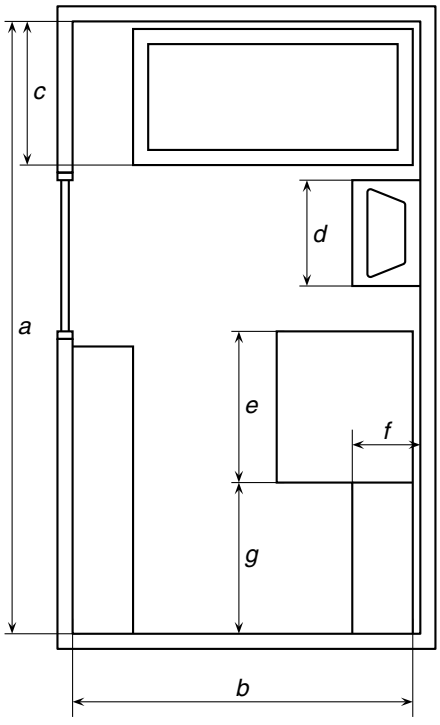
. . . . . .

Írd az alaprajzra a tényleges méreteket! Számítsd ki a helyiségek területét!



8.56. Írd be a táblázatba a betűvel jelzett méretek mért, illetve valódi értékét! Az arány: 1 : 50.

	Mért adat (mm)	Valódi méret (mm)
a		
b		
c		
d		
e		
f		
g		

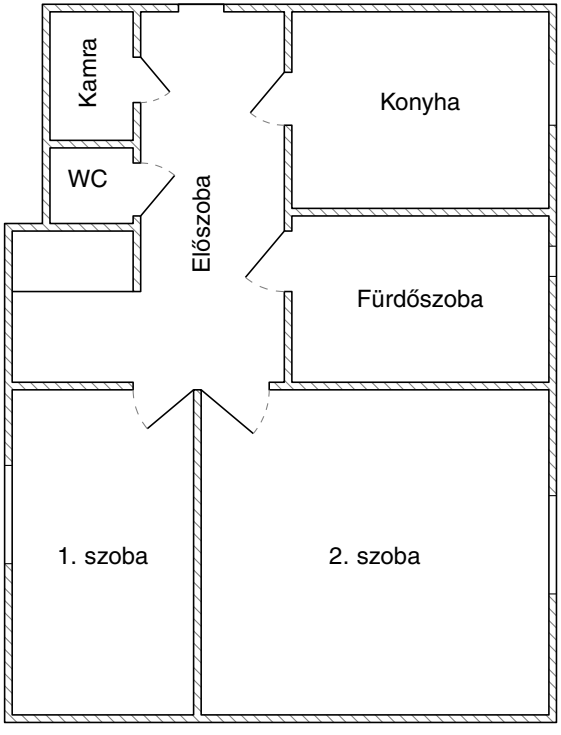


8.57. Egy kis lakás alaprajzát látod. A méretarány 1 : 100. Ami az alaprajzon 1 cm, az a valóságban: .....

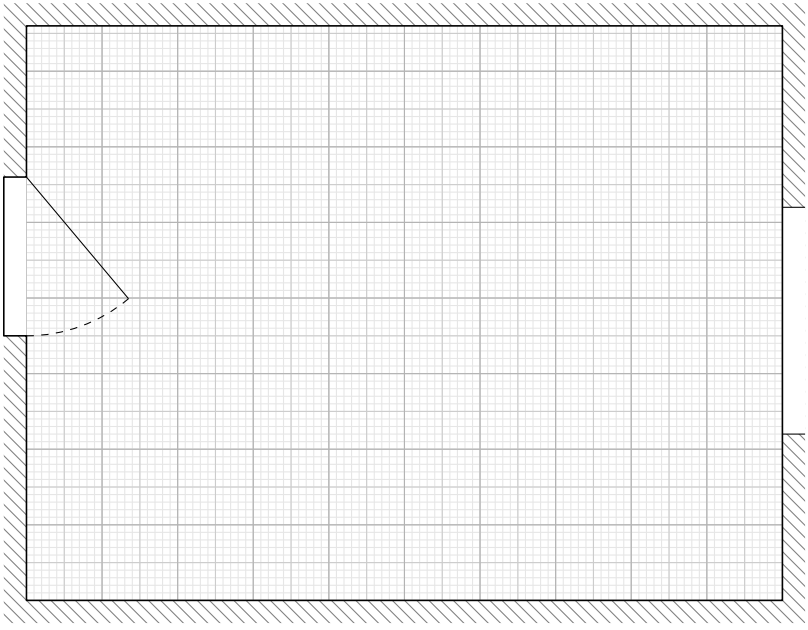
Írd az alaprajzra a tényleges méreteket!

Számítsd ki a helyiségek területét!

A méretarány figyelembevételével rendezd be a lakást, rajzold meg a bútorok alaprajzát!



8.58. Egy szoba alaprajza látható az ábrán. A méretarány 1 : 40.



Rendezd be a szobát! Vigyázz az arányra!

8.59. Potsdam–Erfurt távolsága 211,5 km, a térképen 4,7 cm. Milyen méretarányú a térkép?

8.60. Budapest–Moszkva távolsága 1580 km. A térképen mért távolságuk 7,9 cm. Milyen méretarányú a térkép?

8.61. Állapítsd meg Pécs–Szeged távolságát! A térképen mért távolságuk 6,9 cm. A térkép méretaránya 1 : 2 000 000.

8.62. Egy település térképének részlete látható az ábrán.
A térkép méretaránya 1 : 20 000.

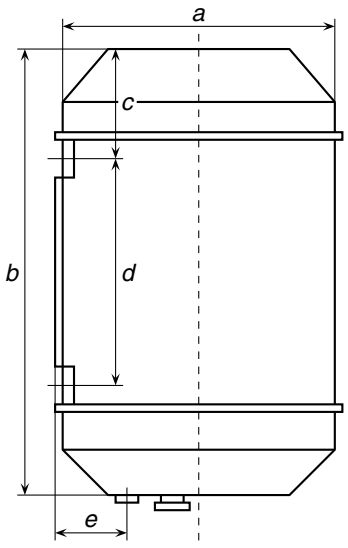
a) Milyen hosszú a valóságban a Szél utca?

b) Jelölj meg a térképen olyan pontokat, amelyek a postától (◉) 500 m távolságra vannak!



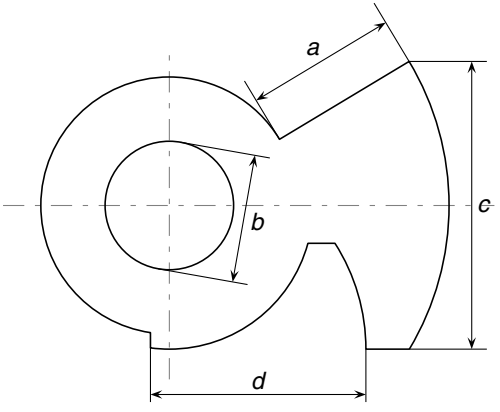
8.63. Írd be a táblázatba a betűvel jelzett méretek mért, illetve valódi értékét! Az arány: 1 : 10.

	Mért adat (mm)	Valódi méret (mm)
a		
b		
c		
d		
e		



8.64. Írd be a táblázatba a betűvel jelzett méretek mért, illetve valódi értékét! Az arány: 5 : 1.

	Mért adat (mm)	Valódi méret (mm)
a		
b		
c		
d		



8.65. *a)* Egy ház árnyéka a tűzfaltól számítva 4 m. Ugyanitt a 3 méter hosszú, függőleges helyzetű rúd árnyéka 75 cm. Milyen magas a ház?

b) Egy gyárkémény árnyékának hossza 60,5 m, ugyanakkor a melléje tűzött 1,2 m hosszú karó árnyéka 3 m-es. Mekkora a gyárkémény magassága?

8.66. Egy torony lábához vízszintes út vezet. 500 m-es távolságból 25°-os szög alatt látjuk a tornyot. Milyen magas a torony? (A torony talppontja és a mi szemünk azonos magasságban van.)

Háromszögek hasonlósága

8.67. Három háromszögről a következőket tudjuk:

$a = 2$ cm; $\beta = 40^\circ$; $\gamma = 50^\circ$;

$a_1 = 4$ cm; $\beta_1 = 40^\circ$; $\gamma_1 = 50^\circ$;

$a_2 = 6$ cm; $\beta_2 = 40^\circ$; $\gamma_2 = 50^\circ$

a) Mit állíthatsz az α, α_1, α_2 szögekről? Miért?

b) Szerkeszd meg a három háromszöget!

c) Vizsgáld meg a megfelelő oldalak arányát!

$a_1 : a =$: ; $b_1 : b =$: ; $c_1 : c =$:

$a_2 : a =$: ; $b_2 : b =$: ; $c_2 : c =$:

d) Tedd ki a megfelelő jelet!

$ABC\triangle$ $A_1B_1C_1\triangle$;

$ABC\triangle$ $A_2B_2C_2\triangle$;

$A_1B_1C_1\triangle$ $A_2B_2C_2\triangle$

8.68. Három háromszögről a következőket tudjuk:

$a = 2$ cm; $b = 3$ cm; $c = 4$ cm;

$a_1 = 3$ cm; $b_1 = 4{,}5$ cm; $c_1 = 6$ cm;

$a_2 = 4$ cm; $b_2 = 6$ cm; $c_2 = 8$ cm

a) Állapítsd meg a megfelelő oldalak arányát!

$a_1 : a =$: ; $a_2 : a =$: ; $a_2 : a_1 =$:

$b_1 : b =$: ; $b_2 : b =$: ; $b_2 : b_1 =$:

$c_1 : c =$: ; $c_2 : c =$: ; $c_2 : c_1 =$:

b) Szerkeszd meg a háromszögeket! Hasonlítsd össze a megfelelő szögeket!

c) Igaz-e a következő állítás? $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle \sim A_2B_2C_2\triangle$

8.69. Derékszögű háromszögben a két befogó aránya 7 : 10. Mekkora a háromszög

a) rövidebb befogója, ha a hosszabb 10,5 cm;

b) hosszabb befogója, ha a rövidebb 10,5 cm?

Hasonló-e egymáshoz az előző két derékszögű háromszög; ha igen, mennyi a hasonlóság aránya?

8.70. Derékszögű háromszög befogóinak aránya 7 : 15.

a) Mekkora a háromszög hosszabb befogója, ha a rövidebb 11,9 cm?

b) Mekkora az előző háromszöghöz hasonló derékszögű háromszög hosszabb befogója, ha a rövidebb 3,5 cm? Határozd meg a hasonlóság arányát (k_1)!

c) Mekkorák az *a)* feladatban adott háromszöghöz hasonló háromszög befogói, ha a hasonlóság aránya: $k_2 = 2$?

d) Hasonló-e egymáshoz a *b)* és *c)* feladatban adott két háromszög?

8.71. Egy derékszögű háromszög nagyobbik hegyesszögével szemközti befogójának és átfogójának aránya közelítőleg 4 : 5.

a) Mekkora az átfogó hossza, ha a hosszabb befogó 8 cm?

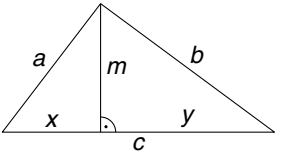
b) Mekkora a hosszabb befogó, ha az átfogó 8 cm?
Hasonló-e egymáshoz az előző két háromszög?

8.72. Egy derékszögű háromszög nagyobbik hegyesszögével szemben fekvő befogójának és átfogójának aránya 7 : 9.

a) Mekkora a hosszabb befogója, ha átfogója 12 cm-es?

b) Mekkora az előző háromszöghöz hasonló háromszög hosszabb befogója és átfogója, ha a hasonlóság aránya: $k = 3$?

8.73. Rajzolj derékszögű háromszöget, szerkeszd meg az átfogóhoz tartozó magasságát!
Keress az ábrán hasonló háromszögeket! Igazold megállapításod!



Számítsd ki a derékszögű háromszög hiányzó adatait, ha

a) $a = 3$ cm; $m = 2{,}4$ cm;

b) $a = 2{,}6$ cm; $x = 1{,}4$ cm!

8.74. Szerkessz egy olyan háromszöget, amelynek kerülete 18 cm, és oldalhosszai mérőszáma egész szám.
Kicsinyítsd a háromszöget úgy, hogy a kerülete

a) 12 cm, *b)* 9 cm legyen!

Az összes – az adott feltételnek eleget tevő – kicsinyített háromszög között hány olyan van, amelyben mindhárom oldal mérőszáma egész szám?

8.75. Egy háromszög oldalainak aránya 2 : 4 : 5. A hozzá hasonló háromszög kerülete 0,55 m. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

8.76. Egy $ABC\triangle$ oldalainak hossza 4 cm, 5 cm, 6 cm. A hozzá hasonló $A'B'C'\triangle$ legkisebb oldalának hossza 0,8 cm.

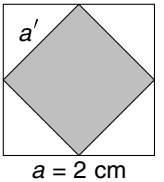
a) Határozd meg az $A'B'C'\triangle$ másik két oldalának hosszát!

b) Mérés nélkül állapítsd meg mindkét háromszögben a legnagyobb és legkisebb oldal arányát! Hasonlítsd össze ezt a két arányt!

Hasonló síkidomok területe

8.77. *a)* Egy négyzet oldala 3 cm. Nagyítsd a négyzetet 2-szeresére! Számítsd ki a nagyított négyzet és az eredeti négyzet területének arányát!

b) A 2 cm oldalhosszúságú négyzetet úgy kicsinyítettük, hogy a területe a felére változott. Mekkora a kicsinyített négyzet a' oldala?



8.78. Számítsd ki a kicsinyített síkidom és az eredeti síkidom kerületének, illetve területének arányát!

a) Egy téglalap oldalai: $a = 3$ cm; $b = 4{,}5$ cm. A téglalap oldalát $\frac{1}{3}$ részére kicsinyítettük.

b) Egy paralelogramma oldalai: $a = 4$ cm; $b = 6$ cm, az a oldalhoz tartozó magassága $m_a = 5{,}2$ cm. A paralelogrammát $\frac{3}{4}$ részére kicsinyítettük.

c) Egy kör sugara $r = 5$ cm. A kör sugarát 0,4-szeresére változtattuk.

8.79. Számítsd ki a nagyított síkidom és az eredeti síkidom területének arányát!

a) Egy rombusz egy oldala $a = 3$ cm, magassága $m = 2$ cm. A rombuszt $\frac{3}{2}$-szeresére nagyítottuk.

b) Egy deltoid két átlója $e = 4$ cm; $f = 6$ cm. A deltoidot $\frac{5}{4}$-szeresére nagyítottuk.

c) Egy trapéz alapjai: $a = 5$ cm; $c = 7{,}5$ cm, magassága 6 cm. A trapézt $\frac{8}{5}$-szörösére nagyítottuk.

Hasonló testek felszíne, térfogata

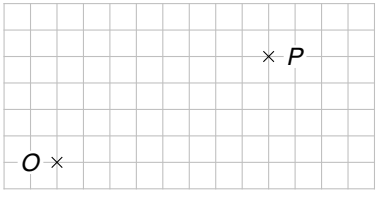
8.80. Egy kocka éle 2,5 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata? Mekkora annak a testnek a felszíne és a térfogata, amelynek minden éle háromszor akkora, mint az előző kocka élei?

8.81. *a)* Egy 4 cm élhosszúságú kockát 3-szorosára nagyítunk.

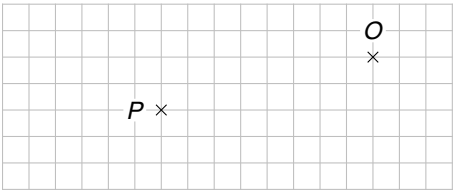
b) Egy 4 cm élhosszúságú kockát $\frac{1}{2}$ részére kicsinyítünk. Számítsd ki mindkét esetben a kockák
(1) élváza hosszának arányát;
(2) felszínének arányát;
(3) térfogatának arányát!

Középpontos hasonlóság

8.82. Keresd meg azt a P' pontot, amelyet az O középpontú, $k = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal rendelhetünk a P ponthoz!



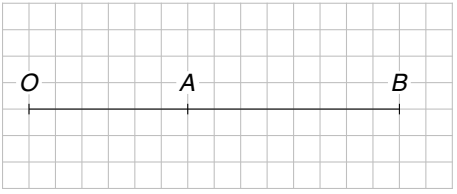
8.83. Keresd meg a P pont középpontosan hasonló helyzetű P' képét, ha O a hasonlóság középpontja! A hasonlóság aránya $k = \frac{3}{2}$.



8.84. A sík pontjait középpontos hasonlósággal feleltettük meg egymásnak. A hasonlóság középpontja O. Mennyi a hasonlóság aránya, ha

a) az A pontnak B a képe;

b) a B pontnak A a képe?



8.85. Az O középpontú hasonlósági transzformációval a P pontnak a P' pontot feleltettük meg. Határozd meg a k értékét, ha az O pont

(1) belső hasonlósági pont; (2) külső hasonlósági pont!

a) $OP = 4$ cm és $OP' = 2$ cm; *b)* $OP = 2$ cm és $OP' = 4$ cm;

c) $OP = 2{,}4$ cm és $OP' = 3$ cm; *d)* $OP = 15$ cm és $OP' = 18$ cm

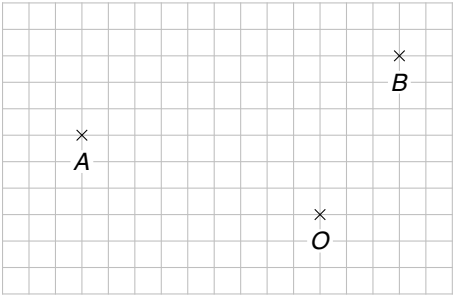
8.86. Jelöld meg az O hasonlósági középpontot és egy – tőle 6 cm-re levő – P pontot!

a) Szerkeszd meg a P pont középpontosan hasonló P' képét! $k = \frac{1}{4}$

b) $OP' = ?$

8.87. Adott a hasonlóság O középpontja és a sík két pontja: A és B. Keresd meg a rácshálón a két pont középpontosan hasonló képét!

(1) $k = \frac{1}{3}$; (2) $k = -\frac{1}{3}$

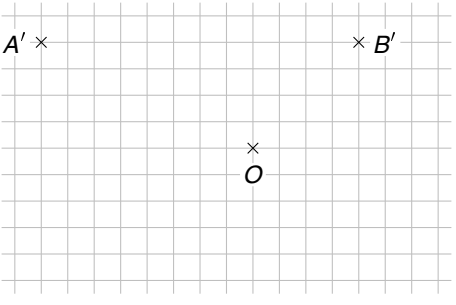


8.88. Az A' és B' pontokat az O középpontú középpontos hasonlósági transzformációval kaptuk.

(1) $k = \frac{4}{3}$; (2) $k = -\frac{4}{3}$

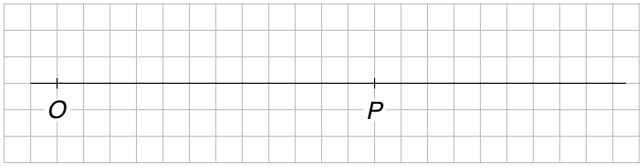
a) Keresd meg a sík A és B pontját!

b) Határozd meg az $A'B'$ és az AB szakaszok hosszának arányát!



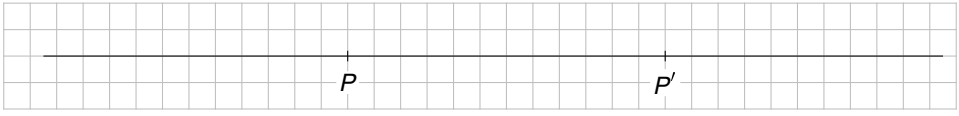
8.89. Keresd meg a P pontnak megfelelő P' pontot, ha a hozzárendelés olyan középpontos hasonlóság, amelynek centruma O, aránya pedig k!

a) $k = \frac{3}{2}$; *b)* $k = \frac{2}{3}$; *c)* $k = \frac{5}{4}$; *d)* $k = \frac{5}{6}$; *e)* $k = \frac{1}{4}$

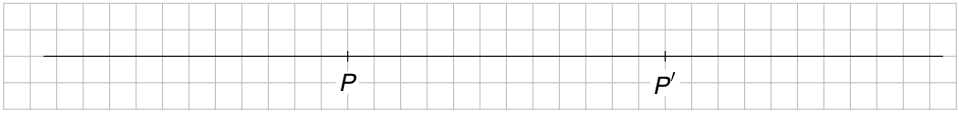


8.90. Az ábrán megjelölt P pont középpontos hasonlósággal megfeleltetett képe P'. Add meg a hasonlóság középpontját, ha az (1) belső, (2) külső hasonlósági pont!

a) A hasonlóság aránya: $k = \frac{1}{3}$

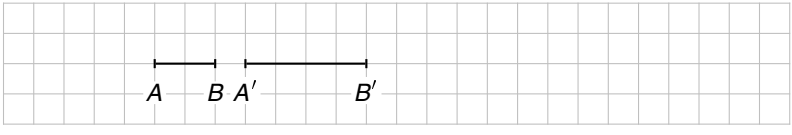


b) A hasonlóság aránya: $k = 2$

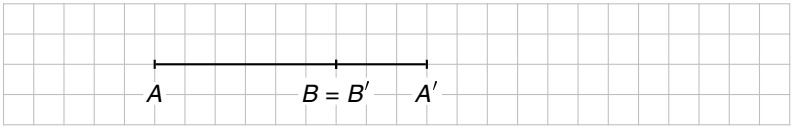


8.91. Az AB szakasz középpontosan hasonló képe az $A'B'$ szakasz.
Keresd meg az O hasonlósági középpontot, és add meg a hasonlóság arányát az egyes esetekben!

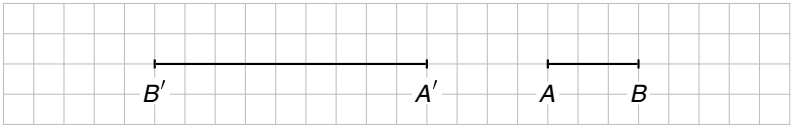
a)



b)



c)

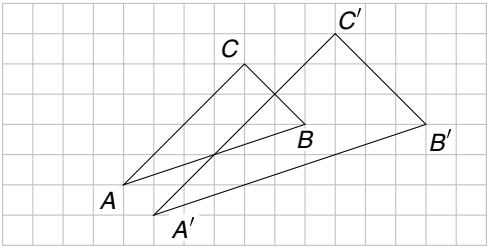


d)

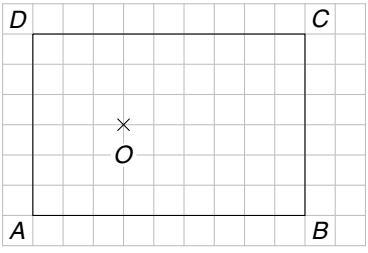


8.92. Az $A'B'$ szakasz az AB szakasz középpontosan hasonló képe, $A'B' : AB = 4 : 3$. Rajzold meg a két szakaszt, és szerkeszd meg a hasonlóság O középpontját! Milyen helyzetű lehet a két szakasz?

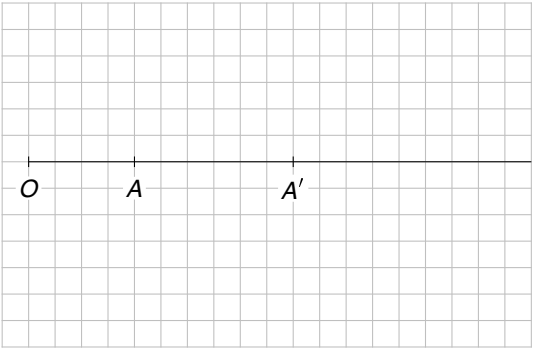
8.93. Az ábrán látható két háromszög középpontosan hasonló helyzetben van.
Keresd meg a hasonlóság középpontját, és add meg a hasonlóság arányát!



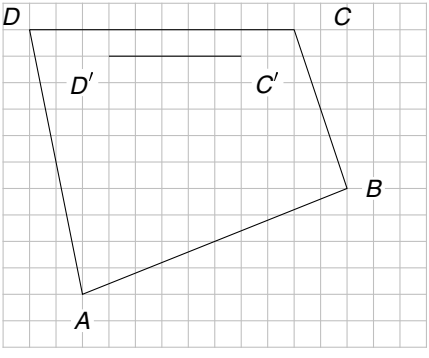
8.94. Rajzold be a téglalapba annak $k = \frac{1}{3}$ arányú képét! A hasonlóság középpontja O.



8.95. Rajzolj egy ABC háromszöget, amelynek egyik csúcsa az A pont, majd képezd le azzal a középpontos hasonlósággal, amelynek O a középpontja, és az A pontnak az A' felel meg!
Add meg a hasonlóság arányát!

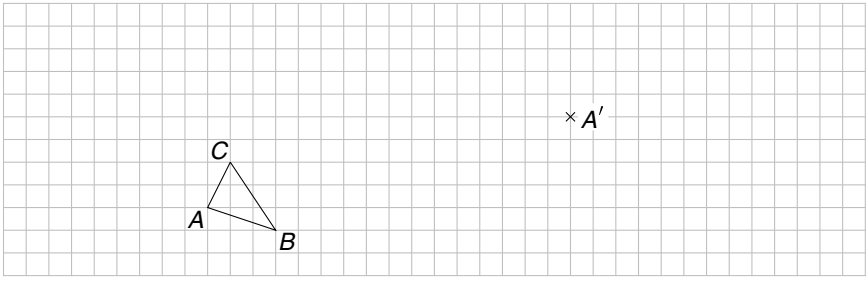


8.96. Folytasd az $ABCD$ négyszög kicsinyítését, ha a $D'C'$ szakasz a DC szakasznak felel meg.
Add meg a hasonlóság középpontját és arányát!



8.97. Nagyítsd az ABC háromszöget háromszorosára, ha az A csúcsnak megfelelő pont A'!

a) O_1 külső hasonlósági pont; *b)* O_2 belső hasonlósági pont



8.98. Rajzolj egy háromszöget! Szerkeszd meg a háromszög középpontosan hasonló képét a következő feltételek szerint!

a) A hasonlóság középpontja a háromszög belsejében van, aránya 3 : 2.

b) A hasonlóság középpontja a háromszög egyik csúcsa, aránya 3 : 5.

c) A hasonlóság középpontja a háromszög leghosszabb oldalának felezőpontja, és a hasonlóság aránya 3 : 1.

d) Milyen összefüggés van a hasonló háromszögek kerülete, területe között?

8.99. Egy háromszög kerülete 24,7 cm, oldalainak aránya 3 : 4 : 6.
Szerkeszd meg a háromszöget kétféle módon is:

a) a kerület arányos osztásával; *b)* középpontos hasonlóság alkalmazásával!

8.100. Egy trapéz egyik alapja a másiknak 3-szorosa. Milyen arányban osztják egymást az átlók?

8.101. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontját kösd össze a D csúccsal, CD oldalának felezőpontját az A csúccsal!
Milyen arányban osztja egymást a két összekötő szakasz?

8.102. Vízszintes síkban haladó út A pontjától 300 m hosszú út vezet egy torony lábához. Az A ponttól a torony felé haladva 2 m-re egy 1 m hosszú – függőleges irányú – rudat tűzünk le. Az A pontból szemlélve a rúd vége és a torony tetőpontja egy pontnak látszik.

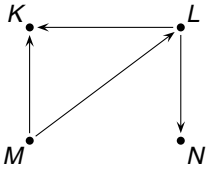
a) Milyen magas a torony?

b) Ha nem 1, hanem 2 m hosszú rudat tűzünk le az adott helyen, és az A pontból az út mentén a toronytól távolodunk egy méternyit, akkor a B pontba jutunk. Innen a torony felett lebegő sast és a rúd végét szintén egy pontnak látjuk. Milyen magasan lebeg a sas?

9. Kombinatorika, valószínűség, statisztika

Hányféleképpen?

9.01. Kálmán, Lali, Micu és Nándi szkander (kézbirkózás) körversenyt rendeztek úgy, hogy mindenki mindenkivel egyszer megmérkőzött. A győztes 1 pontot, a vesztes 0 pontot kapott. (Az egyik fél győzelméig tart a küzdelem.)



a) A verseny egy lehetséges állását szemlélteti ez a diagram: Az $M \to K$ jelentse azt, hogy Micu legyőzte Kálmánt. Hány pontja van ebben az állásban egy-egy versenyzőnek?

b) Hány mérkőzés volt összesen?

c) Hányféle eredménye lehetett a mérkőzéseknek?

9.02. Andor, Bea, Cili, Dániel sakk körversenyt rendeztek, mindenki mindenkivel egyszer játszott. Megállapodtak abban, hogy a győztes 2 pontot, a vesztes 0 pontot kap, a döntetlenért 1 pont jár.

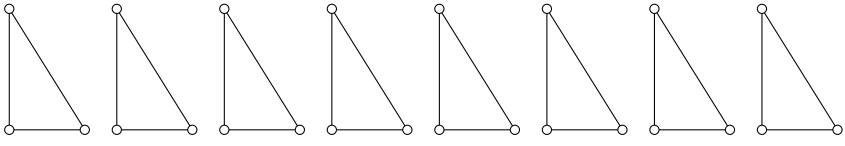
a) Hány mérkőzés volt összesen?

b) Hányféle eredménye lehetett a mérkőzéseknek?

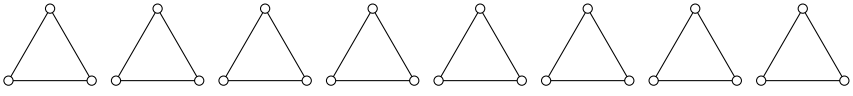
c) Mi lehetett a játszmák eredménye, ha végül Andor 6 pontot, Bea 2 pontot, Cili 3 pontot, Dániel 1 pontot szerzett? Készíts diagramot! (*Például* $A \Rightarrow D$ jelentse azt, hogy Andor legyőzte Dánielt, $A \leftrightarrows D$ jelentse azt, hogy Andor és Dániel döntetlent játszott.)

d) Ha a *c)* feladatban adott esetben a győzelemért 3 pont járt volna, Bea akkor is 2 pontot kapott volna. Mi volt a játszmák eredménye? Hány pontot kapott volna így Andor, illetve Cili?

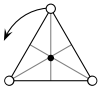
9.03. Színezd ki három különböző színnel a háromszög „csúcsait” úgy, hogy minden színt használj fel! Hány megoldás van?



9.04. *a)* Színezd ki piros, kék és sárga színnel a szabályos háromszög három „csúcsát” úgy, hogy minden színt használj fel! Hány megoldás van?



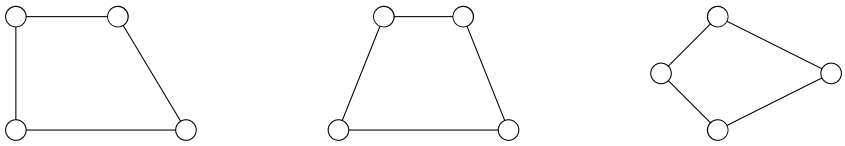
b) Hány különböző megoldás van, ha feltételezzük, hogy a háromszög a középpontja körül elforgatható?



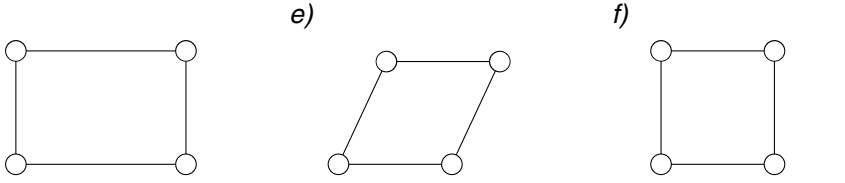
c) Hány nem egybevágó megoldás van?

9.05. Színezd ki négy különböző színnel a négyszög „csúcsait” úgy, hogy minden színt használj fel! Hány nem egybevágó megoldás van?

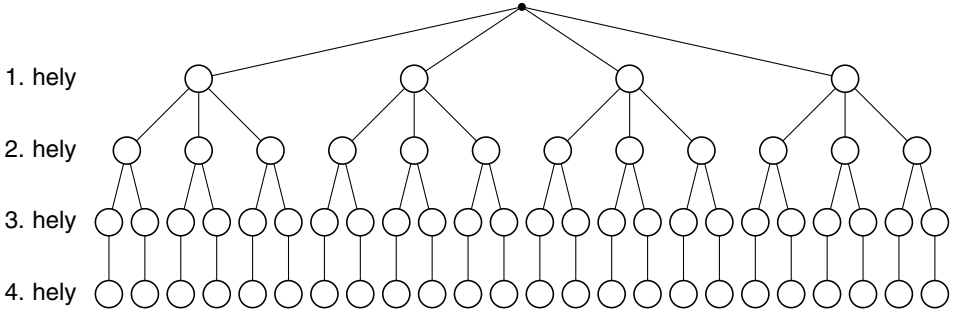
a) *b)* *c)*



d) *e)* *f)*



9.06. Emma, Flóra, Gabi és Heni futóversenyt szerveznek. Hányféle sorrendben érhetnek célba, ha nincs holtverseny? Írd be a lányok nevének kezdőbetűjét a fagráf megfelelő helyére!



Ha az 1. helyezett Emma, akkor ki lehet 2. helyezett?
Ha 1. helyezett Emma, akkor hányféleképpen alakulhat mögötte a sorrend?

9.07. Hányféleképpen foglalhat helyet (ha mindenki rendelkezik jogosítvánnyal)

a) két ember egy motorkerékpáron;

b) három ember egy pótkocsis motorkerékpáron;

c) négy ember egy négyszemélyes személygépkocsiban;

d) nyolc ember egy nyolcüléses kisbuszban?

9.08. *a)* A $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$ számkártyák mindegyikének felhasználásával hány 9-cel osztható négyjegyű szám rakható ki?

b) Az $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ számkártyák mindegyikének felhasználásával hány négyjegyű páros szám, illetve hány négyjegyű 4-gyel osztható szám rakható ki?

c) Az $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{7}$ számkártyák mindegyikének felhasználásával hány 25-tel osztható szám rakható ki?

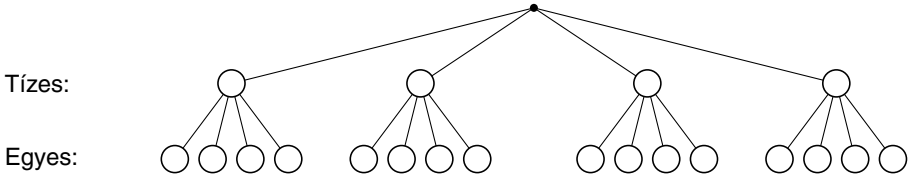
9.09. Egy szerelőnek egy útkereszteződésben döntenie kell, hogy először Alsófán végez-e el három munkát (jelölje *K*, *L*, *M*), és azután megy Belsőzugra, ahol négy (*P*, *Q*, *R*, *S*) munkája van, vagy Belsőzugon kezdi a munkát, és azután megy Alsófára. Az egyes településeken tetszőleges sorrendben végezheti a szereléseket. Hányféle sorrendben végezheti el a szerelő a munkákat?

9.10. Hányféle sorrendben rakhatók ki a következő kártyák?

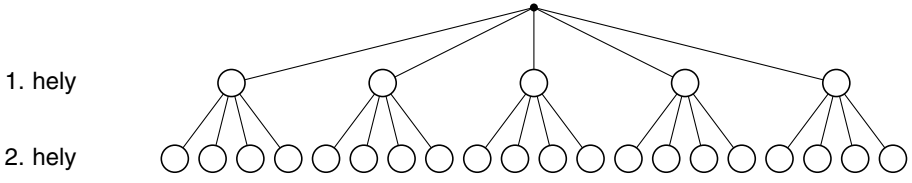
a) 1 1 2 3 4; *b)* 1 1 1 2 3; *c)* 1 1 1 2 2

Hány különböző ötjegyű szám olvasható le a kirakott kártyákról?

9.11. Az 1, 2, 3, 4 számjegyekkel hány kétjegyű szám írható fel úgy, hogy a számjegyek ismétlődhetnek a számban? Írd be a számjegyeket a fagráf megfelelő helyére!



9.12. Hédi, Ili, Joli, Kitti és Lilla futóversenyt rendeznek, az első két helyezett különböző díjat nyer. Hányféleképpen alakulhat a két nyertes személye? Írd be a lányok nevének kezdőbetűjét a fagráf megfelelő helyeire!



9.13. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy hattagú táborozó társaság

a) egyik nap kisorsolja azt a két embert, aki nappal, illetve aki éjjel őrzi a tábort;

b) másik napon kisorsolja azt a két embert, aki elmegy vásárolni a faluba?

Matematikai szempontból mi a különbség az *a)* és a *b)* feladat között?

9.14. Egy héttagú társaságban kisorsolnak egy labdát, majd egy társasjátékot úgy, hogy mindenki ráírja egy cédulára a nevét, és a cédulákat egy dobozba teszik. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha

a) a labda kisorsolása után a nyertes céduláját nem teszik vissza a dobozba;

b) a ladba kisorsolása után a nyertes céduláját visszateszik a dobozba?

9.15. Három különböző színűre festett szabályos tetraéder lapjaira 1, 2, 3, illetve 4 pöttyöt rajzolunk. Feldobjuk a tetraédereket, majd azt vizsgáljuk, hogy hány pötty van az alsó lapokon.

a) A három tetraédert feldobva hányféle eredménye lehet a dobásnak?

b) Hány olyan eset van, ahol a három tetraéder alsó lapjain különböző számú pöttyök vannak?

c) Hány olyan eset van, ahol egy adott színű tetraéder alsó lapján 4 pötty van?

d) Hány olyan eset van, ahol mindhárom tetraéder alsó lapján páros számú pötty van?

9.16. *a)* Egy körvonalon jelölj meg 9 pontot! Hány szakaszt, illetve hány hétszöget határoznak meg ezek a pontok?

b) Egy minilottón 9 szám közül kell eltalálni a kihúzott számokat. Hány eset lehetséges, ha 2 számot, illetve ha 7 számot húznak ki?

c) Az $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ halmaznak hány kételemű, illetve hány hételemű részhalmaza van?

9.17. Tételezzük föl, hogy a gépkocsik rendszámának elkészítéséhez 25 betűből hármat, továbbá három számjegyet használnak fel. *Például:* IXQ-033 vagy HTH-504. (Három 0 nem lehet a rendszámban!)

a) Hány különböző rendszám képezhető ily módon?

b) Hány különböző képezhető akkor, ha nem engedjük meg a betűk ismétlődését a rendszámban?

9.18. Hányféleképpen színezhető ki 4 színnel egy szabályos tetraéder 4 lapja úgy, hogy minden lap különböző színű legyen, ha

a) a tetraéder lapjait 1-től 4-ig megszámoztuk;

b) a lapok nincsenek megszámozva?

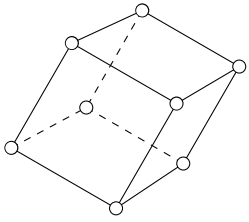
9.19. Hányféleképpen színezhetők ki hat színnel

a) a kocka lapjai; *b)* a szabályos oktaéder csúcsai

úgy, hogy minden lap (csúcs) különböző színű legyen?

9.20. *a)* Hányféleléppen színezhetők ki 8 színnel a kocka csúcsai úgy, hogy minden csúcs különböző színű legyen?

b) Hányféleképpen színezhetők ki 8 színnel a szabályos oktaéder lapjai úgy, hogy minden lap különböző színű legyen?



Statisztika

9.21. Ábel matematikajegyei 8. osztályban: 3; 2; 4; 4; 5; 3; 5, Bálinté: 5; 3; 3; 4; 3; 4; 3; 4. Az osztályzatai alapján melyik fiú áll jobban matematikából?

9.22. Egy 8. osztályban 10 lány a következő oldalon található táblázatba foglalt osztályzatokat kapta a nyolc témazáró dolgozatra matematikából:

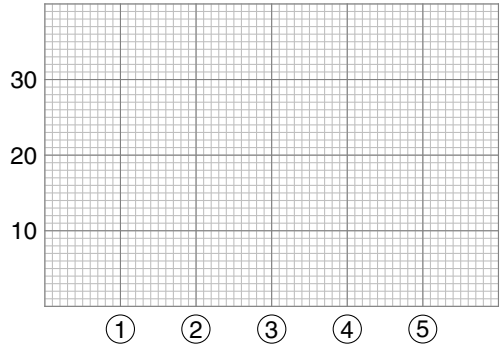
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Átlag	Érdemjegy
A. Irén	2	1	1	3	1	4	2	3		
B. Anna	4	5	4	5	5	3	4	5		
C. Dóra	1	4	5	2	4	3	5	3		
D. Magda	4	3	5	5	4	3	5	5		
E. Bea	1	2	3	3	1	5	2	4		
F. Éva	3	4	4	3	4	3	3	3		
G. Nóra	3	2	2	3	3	2	3	3		
H. Kitti	4	5	5	5	4	5	4	5		
I. Teréz	2	2	4	3	4	4	3	4		
J. Gitta	3	2	4	3	3	3	2	3		
Átlag										

a) E. Bea és G. Nóra közül ki ért el jobb eredményt a dolgozatok alapján?

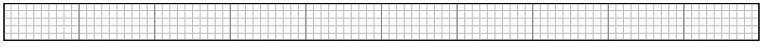
b) Melyik dolgozat sikerült leggyengébben, és melyik legjobban a lányoknak?

c) Töltsd ki a táblázatot, és készíts diagramot a nyolcvan dolgozatjegy *eloszlásáról!*

Jegy	1	2	3	4	5	Össz.
Gyakoriság						



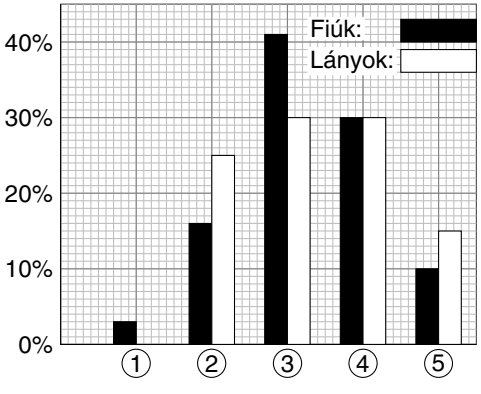
d) A dolgozatok hány százaléka lett 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, illetve 5-ös? Készíts szalagdiagramot a dolgozatjegyek eloszlásáról!



e) Számítsd ki a dolgozatjegyek számtani átlagát!

f) Számítsd ki az átlagtól való eltérések átlagát!

9.23. Egy iskola felső tagozatára 200 fiú és 160 lány jár. A diagram a fiúk és a lányok informatikaosztályzatának százalékos eloszlását mutatja.



a) Foglald táblázatba, hogy hányan kaptak 1-est, 2-est, . . . , 5-öst!

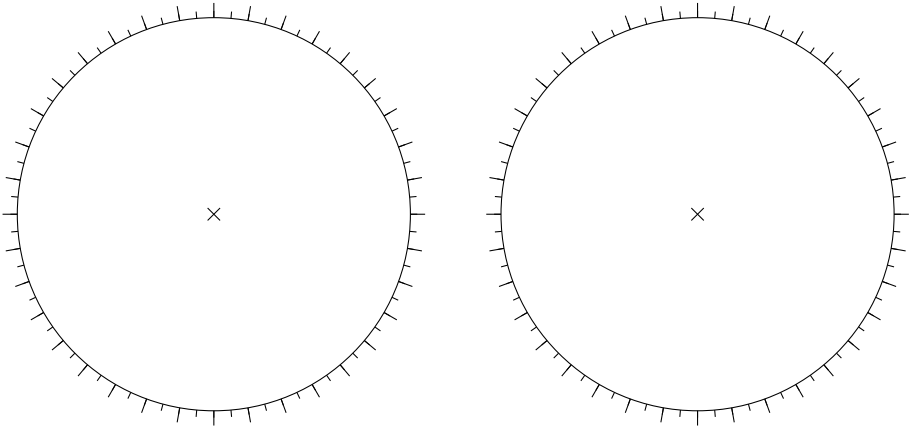
	1	2	3	4	5	Össz.
Fiúk						
Lányok						
Össz.						

b) Ábrázold szalagdiagramon a fiúk, illetve a lányok osztályzatainak az eloszlását!

Fiúk:

Lányok:

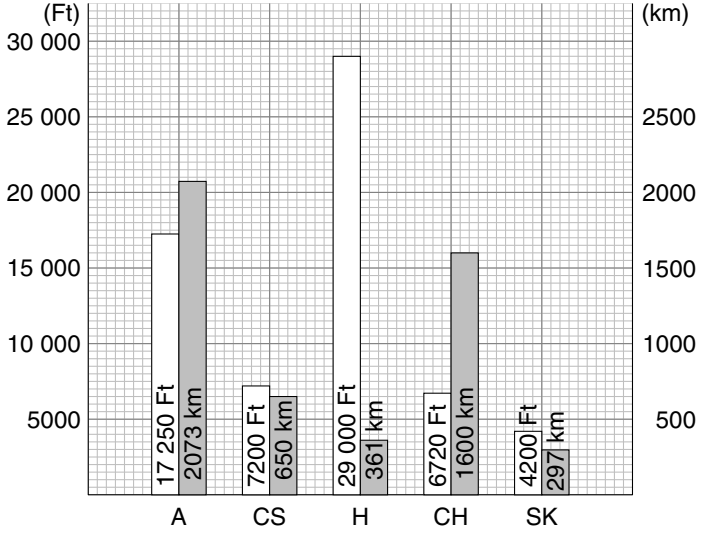
c) Ábrázold kördiagramon a fiúk, illetve a lányok osztályzatainak eloszlását!



d) Számítsd ki az informatikajegyek átlagát! A fiúk, illetve a lányok eredménye milyen irányban tér el az átlagtól?

9.24. Az oszlopdiagram néhány ország autópályáinak összhosszát és az éves autópálya-matrica forintban kifejezett árát szemlélteti. Értelmezd a diagramot! (2003. évi adatok) Magyarországon mennyibe került 1 km autópálya 1 éves használati díja? Hányszorosa ez a többi országban fizetett díjnak?

A: Ausztria
CS: Csehország
H: Magyarország
CH: Svájc
SK: Szlovákia

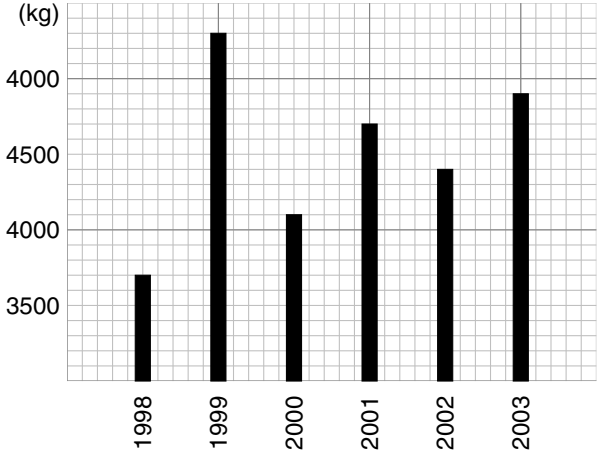


9.25. Emmáék iskolájában hét fizikadolgozatot írnak 8. osztályban. Az év végi osztályzatot ezek számtani átlagából, a kerekítés szabályai szerint határozzák meg. Hányast kaphat Emma év végén fizikából, ha tudja, hogy öt dolgozat után közepesre áll?

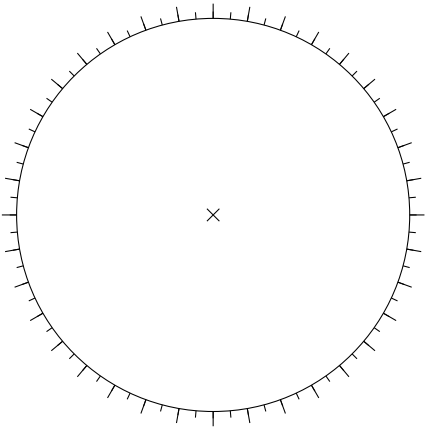
9.26. *a)* Három matematikadolgozat megírása után egy 20 fős osztályban minden tanulónak 3,0 a dolgozatjegyek átlaga. Mutasd meg, hogy biztosan van legalább két tanuló, akiknek mindhárom dolgozatjegyük megegyezik!

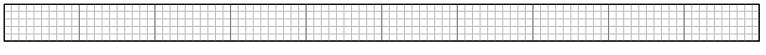
b) Három informatikadolgozat megírása után egy 21 fős osztályban minden tanulónak 4,0 a dolgozatjegyek átlaga. Mutasd meg, hogy biztosan van legalább három tanuló, akiknek mindhárom dolgozatjegyük megegyezik!

9.27. Egy gazdaságban a búza terméshozamának változását mutatja be a diagram. Mi olvasható le jól, és mit nem szemléltet ez a diagram?



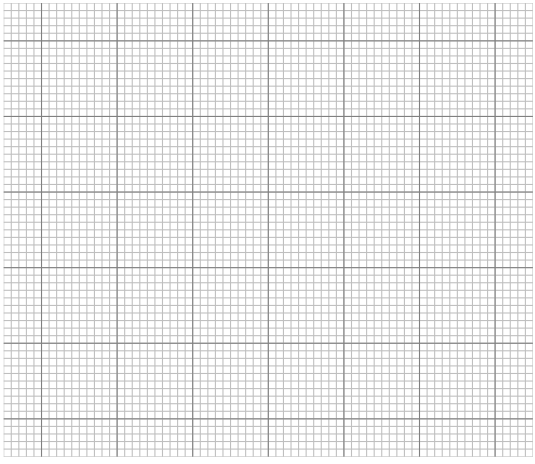
9.28. 2000-ben az ittasan okozott balesetek 47%-át a gépkocsivezetők, 21%-át a kerékpárosok, 16%-át a motorkerékpárvezetők, illetve segédmotorosok, 12%-át az ittas gyalogosok, a fennmaradt hányadot egyéb tényezők okozták. Készíts kördiagramot, illetve szalagdiagramot a fenti adatok szemléltetésére!

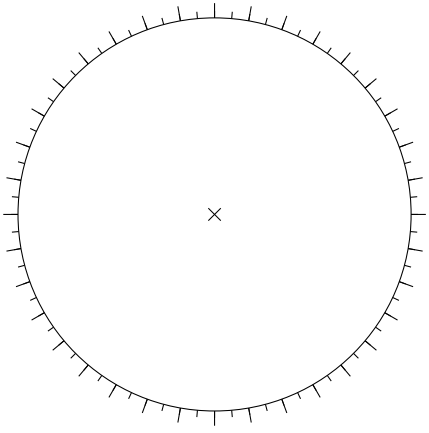


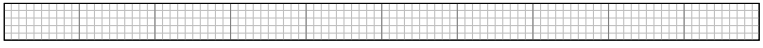


9.29. Saját osztályod utolsó matematikadolgozatban elért eredményeiről készíts táblázatot, diagramot!

Osztályzat	1	2	3	4	5	Összesen
Gyakoriság						
Relatív gyakoriság	%	%	%	%	%	%



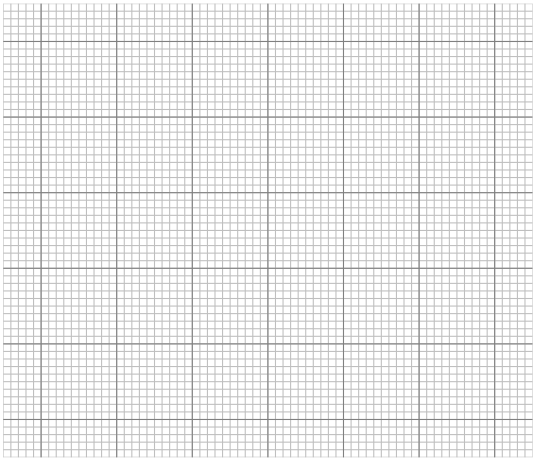




a) Határozd meg az osztályzatok számtani átlagát! Hasonlítsd össze a saját teljesítményedet az átlaggal!

b) Számítsd ki az átlagtól való eltérések átlagát!

9.30. 48 nyolcadik osztályos tanuló dolgozatot írt. 50%-uknak jelesre vagy jóra sikerült a dolgozata, 25%-uk írt közepest, $\frac{1}{6}$ részük pedig elégségest. Ugyanannyian írtak elégtelen dolgozatot, mint ahányan jelest. Ábrázold oszlopdiagrammal az osztályzatok eloszlását! Mennyi volt a dolgozatjegyek átlaga?



Esélylatolgatás

9.31. Egy dobozban 12 sötét és 8 világos (egyforma méretű) golyó van.

a) Ha találomra kiveszünk egy golyót, akkor a következő események közül melyiknek nagyobb az esélye?
A: Sötét golyót veszünk ki. **B**: Világos golyót veszünk ki.

b) Mi a sejtésed, ha ezerszer megismételnénk a húzást, akkor az eseteknek körülbelül hány százalékában húznánk ki világos golyót?

9.32. Egy városban mintegy 28 000 lakos él. Véleményed szerint körülbelül hányan születtek közülük

a) hétfői napon;

b) a hónap páros napján?

9.33. Az osztály minden tanulója írja fel a nevét és születési dátumát egy cédulára, és a cédulákat tegyétek egy dobozba. A kísérlet előtt töltsétek ki a következő táblázatokat!

	Fiú	Lány	Összesen
Magánhangzóval kezdődik a neve			
Mássalhangzóval kezdődik a neve			
Összesen			

	Fiú	Lány	Összesen
A hónap páros napján született			
A hónap páratlan napján született			
Összesen			

Találomra kihúzva egy cédulát, mi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: Lány nevét húzzuk ki.

B: Olyan nevet húzunk ki, amely fiúnak vagy lánynak a neve.

C: Magánhangzóval kezdődő nevet húzunk ki.

D: Olyan nevet húzunk ki, amely magánhangzóval kezdődik és lánynak a neve.

E: Olyan nevet húzunk ki, amely magánhangzóval kezdődik vagy lánynak a neve.

F: A hónap páros napján született tanuló nevét húzzuk ki.

G: A hónap páros napján született fiú nevét húzzuk ki.

H: A hónap páros napján született tanuló vagy fiú nevét húzzuk ki.

20-szor elvégezve a kísérletet, határozzátok meg az egyes események relatív gyakoriságát! (A húzások eredménye a fenti táblázat segítségével rögzíthető.)

9.34. Egy dobozban 3 sötét és 2 világos (egyforma méretű) golyó van. A golyókat egymás után kivesszük a dobozból. Mi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: Elsőnek sötét golyót veszünk ki.

B: Másodiknak sötét golyót veszünk ki.

C: Ötödiknek sötét golyót veszünk ki.

D: Elsőnek világos, másodiknak sötét golyót veszünk ki.

E: Elsőnek sötét, másodiknak világos golyót veszünk ki.

9.35. Tíz résztvevő között kisorsolnak három különböző tárgyat úgy, hogy a nyertes nevét tartalmazó cédulát a következő tárgy sorsolásakor visszateszik. Tehát egy-egy résztvevő több tárgyat is nyerhet. Mi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: Bármely résztvevő legfeljebb egy tárgyat nyer.

B: Van olyan résztvevő, aki egynél több tárgyat nyer.

9.36. Két (piros és zöld színű) szabályos dobókockával dobunk. Mi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: A zöld kockával páros számot dobunk.

B: Mindkét kockával páros számot dobunk.

C: A zöld vagy a piros kockával (legalább az egyikkel) páros számot dobunk.

D: A piros kockával kettőnél nagyobb számot dobunk.

E: A piros kockával kettőnél nagyobb számot, a zölddel páros számot dobunk.

F: A piros kockával kettőnél nagyobb számot vagy a zölddel páros számot dobunk.

9.37. Egy pénzérmével ötször dobunk egymás után. Mi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: Mind az öt dobás fej lesz.

B: Mind az öt dobás írás lesz.

C: Egy dobás lesz fej.

D: Négy dobás lesz fej.

E: Három dobás lesz fej.

F: Két dobás lesz fej.

9.38. A kísérletet ötszázszor elvégezve meghatároztuk a következő események gyakoriságát.

A: Rajzszöget feldobva a leesés után a hegye van felül. 278 eset (500-ból)

B: Csavart feldobva a hatszögletű lapjára esik. 49 eset (500-ból)

Becsüld meg az előző, illetve a következő események valószínűségét!

X: Rajzszöget és csavart feldobva az **A** és a **B** esemény is bekövetkezik.

Y: Rajzszöget és csavart feldobva az **A** és a **B** esemény egyike sem következik be.

Z: Rajzszöget és csavart feldobva az **A** és a **B** esemény közül legalább az egyik bekövetkezik.

MEGOLDÁSOK, ÚTMUTATÁSOK

1. Halmazok, logika

Halmazok értelmezése, vizsgálata

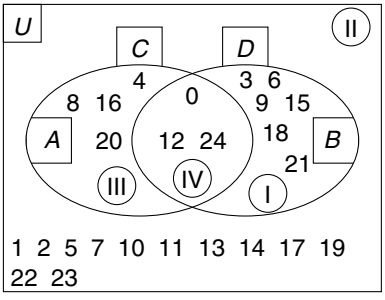
1.01.

	Negatív	Nemnegatív
Páratlan	-1; -3; -5; -7; -9	1; 3; 5; 7; 9
Páros	-2; -4; -6; -8	0; 2; 4; 6; 8

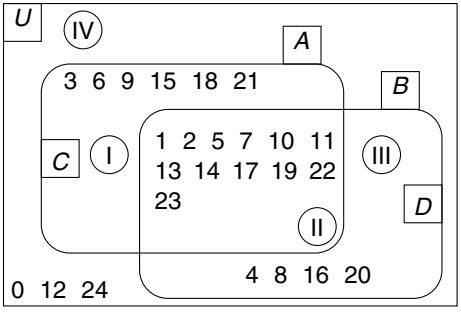
1.02. *a)*

	A	*C*
B	0; 12; 24 (IV)	3; 6; 9; 15; 18; 21 (I)
D	4; 8; 16; 20 (III)	1; 2; 5; 7; 10; 11; 13; 14; 17; 19; 22; 23 (II)

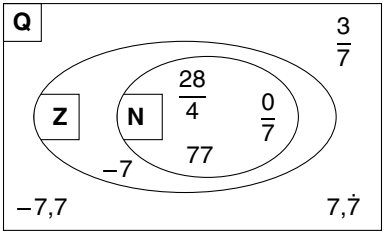
b)



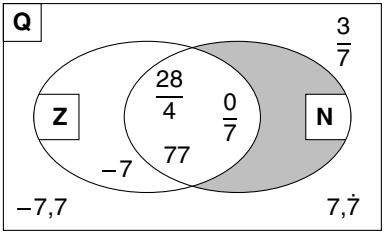
c)



1.03. *a)*



b)

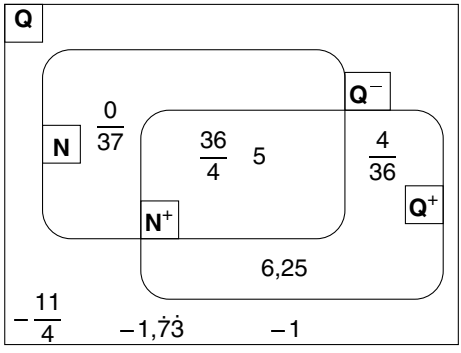


1.04. *a)*

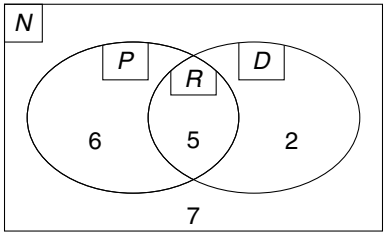
	Osztható 3-mal	3-mal osztva 1 maradékot ad	3-mal osztva 2 maradékot ad
Osztható 2-vel	30; 36; 42; 48; 54; 60 Ⓘ	34; 40; 46; 52; 58 Ⓘⓘ	32; 38; 44; 50; 56 Ⓘⓘⓘ
Nem osztható 2-vel	33; 39; 45; 51; 57 Ⓘⓥ	31; 37; 43; 49; 55 Ⓥ	35; 41; 47; 53; 59 Ⓥⓘ

b) 6-tal osztható: Ⓘ; 6-tal osztva 1 maradékot ad: Ⓥ; 2 a maradék: ⒾⒾⒾ; 3 a maradék: ⒾⓋ; 4 a maradék: ⒾⒾ; 5 a maradék: ⓋⒾ.

1.05.

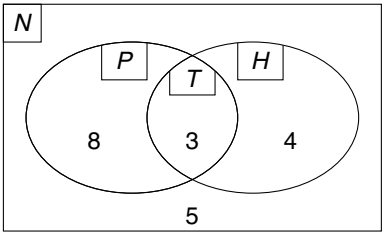


1.06. *a)* A közös rész a rombuszok halmaza.



7 négyszöget nem jelölt meg Ábel.

b) A közös rész a téglalapok halmaza.



Balázs 15 négyszöget jelölt meg, a jelölések száma 18, tehát 3 táglalapot jelölt meg mindkét módon.

1.07. *a)* Az osztálylétszám 30.

b) 19-en ettek rakott krumplit;

c) 18-an ettek levest;

d) 26-an ettek legalább egy fogást;

e) 15-en ettek pontosan egy fogást;

f) 12-en nem ettek levest.

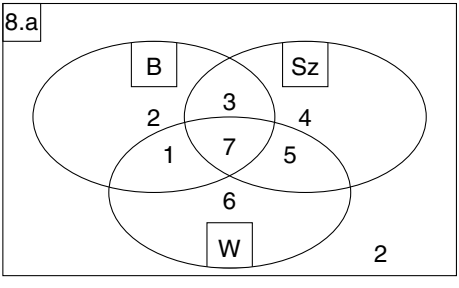
1.08. *a)* 30 fő az osztálylétszám.

b) 19-en jelentkeztek a Weöresbe.

c) 11-en nem jelentkeztek a Szentgyörgyibe.

d) 26-an írták be a Weörest vagy a Szentgyörgyit.

e) 8-an jelentkeztek a Bolyaiba és a Weöresbe.



1.09. *a)* Az *A* osztályba 27-en, a *B* osztályba 30-an járnak.

b) Matematika szakkörre járnak legtöbben, 13-an.

c) Kosárlabdára járnak legtöbben, 13-an.

d) 13-an járnak legalább két szakkörre.

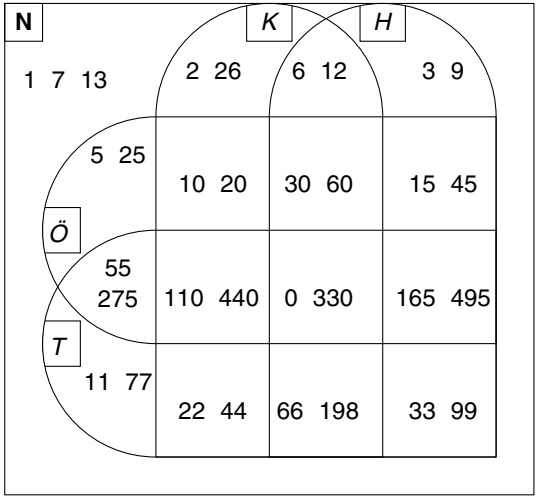
e) 26-an járnak legfeljebb két szakkörre (és 4-en járnak legalább háromra).

f) 16-an járnak informatikára vagy kosárlabdára.

g) Az *A* osztályban és a *B* osztályban is hatan-hatan nem járnak kosárlabdára a honismereti szakkörösök közül, összesen tehát 12-en.

h) Ez csak a *B* osztályban teljesül, ugyanis az *A* osztályban minden informatika szakkörös jár matematika szakkörre is.

1.10.



Mindegyik részbe végtelen sok szám írható be. A természetes számok beírásával egyidejűleg négy feltételre kell figyelnünk.

1.11. A halmazábrák tetszőleges kitöltése után leolvasható a halmazok elemek felsorolásával történő megadása. (Más típusú megoldások is vannak.)

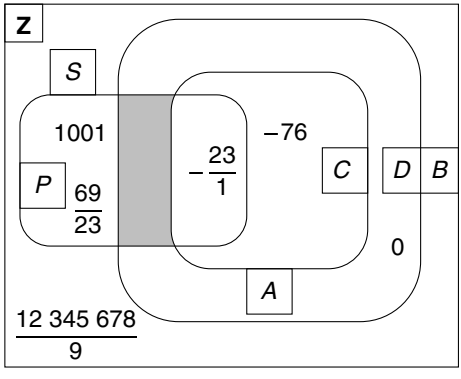
1.12. $C = \{\text{Negatív egész számok}\}$;

$D = \{\text{Nempozitív egész számok}\}$;

$P = \{\text{Páratlan számok}\}$

Az *A* helyett **N** is írható, mert megegyeznek.

Az $\frac{12\,345\,678}{9}$ az egyszerűsítés elvégzése nélkül is látható, hogy páros egész szám. A 12 345 678 osztható 9-cel és páros. Mivel $(9; 2) = 1$, ezért 9-cel osztva a hányados is páros szám, 1 371 742.



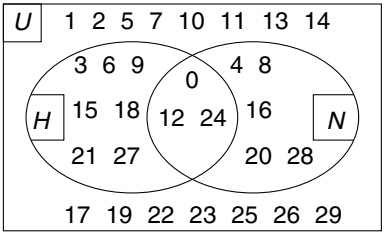
1.13. *a)* {1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 16; 17; 19; 20; 22; 23; 25; 26; 28; 29}

b) {0; 12; 24}

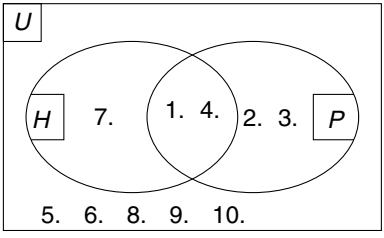
c) {3; 6; 9; 15; 18; 21; 27}

d) {4; 8; 16; 20; 28}

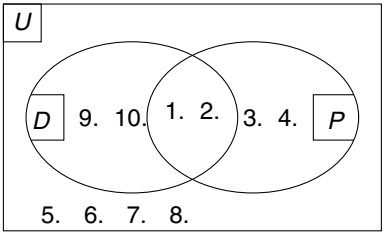
e) {0; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20; 21; 24; 27; 28}



1.14. A = {2., 3., 5., 6., 8., 9., 10.}
B = {1., 2., 3., 4., 7.}
C = {1., 4.}, ezek a téglalapok
D = {2., 3.}
E = {5., 6., 8., 9., 10.}



1.15. A = {9.; 10.}
B = {3.; 4.; 5.; 6.; 7.; 8.; 9.; 10.}
C = {1.; 2.; 5.; 6.; 7.; 8.; 9.; 10.}
A = {Deltoidok, de nem paralelogrammák}
B = {Nem rombuszok}
C = {Rombuszok vagy nem paralelogrammák}



1.16. *a)* $A \cup B = A$; $A \cap B = B$; $A \setminus B$ = {hétfő, . . . , szombat}

b) $A \cup B = A$; $A \cap B = B$; $A \setminus B$ = {az osztályba járó fiúk}

c) $A \cup B$ = {2; 4; 6; 7; 8; 10; 12; 16}; $A \cap B$ = {4; 8}; $A \setminus B$ = {2; 6; 7; 10}

d) $A \cup B = B$; $A \cap B = A$; $A \setminus B = \emptyset$

1.17. *a)* $A \cup B$ = {0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24; 26; 27; 28; 30}; $A \cap B$ = {0; 6; 12; 18; 24; 30}; $B \setminus A$ = {3; 9; 15; 21; 27}

b) $A \cup C = A$; $A \cap C = C$; $C \setminus A = \emptyset$

c) $B \cup C$ = {0; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20; 21; 24; 27; 28; 30}; $B \cap C$ = {0; 12; 24}; $C \setminus B$ = {4; 8; 16; 20; 28}

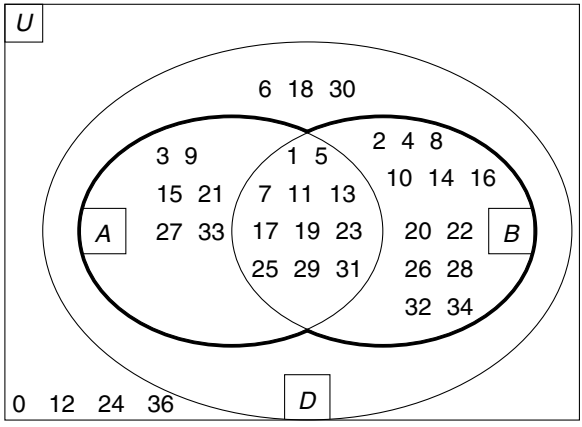
1.18. *Például:*

a) $A \cap B = C$; $C \setminus B = \emptyset$; $C \setminus A = \emptyset$; $C \subset A$; $C \subset B$

b) $A \cap B = B$; $A \cap C = C$; $B \cap C = C$; $C \cup B = B$; $C \cup A = A$; $B \cup A = A$; $C \subset B \subset A$; $C \setminus B = \emptyset$; $C \setminus A = \emptyset$; $B \setminus A = \emptyset$

c) $A \cap C = D$; $E \subset B$; $D \subset E$; $C \subset B$; $C \subset (A \cup B)$; $D \subset A$; $D \subset B$; $D \subset C$

1.19. $C = A \cup B$, azaz a C halmaz az A és B uniója (az ábrán vastag vonal határolja).



c) A következők teljesülnek:
$A \subseteq C$; $A \cup B \subseteq C$;
$C \subseteq A \cup B$; $A \setminus B \subseteq C$;
$C \setminus A \subseteq B$; $A \setminus C \subseteq B$ (mert üres halmaz); $C \subseteq D$

d) $\overline{A}$ = {2-vel osztható számok}
$\overline{B}$ = {3-mal osztható számok}
$\overline{A \cup B}$ =
= {6-tal osztható számok}

1.20. *a)* $A \cup B$ = {15; 20; 24; 25; 28; 30; 32; 35; 36; 40; 44; 45; 48; 50; 52; 55; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96; 100};
$A \cup C$ = {24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 75; 76; 80; 84; 88; 92; 96; 100};
$B \cup C$ = {15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 75; 100}

b) $A \cap B$ = {40; 60}; $A \cap C$ = {100}; $B \cap C = \emptyset$

c) $A \setminus B$ = {24; 28; 32; 36; 44; 48; 52; 56; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96; 100};
$A \setminus C$ = {24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96};
$B \setminus C = B$ = {15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60};
$C \setminus A$ = {75}; $C \setminus B = C$ = {75; 100}; $B \setminus A$ = {15; 25; 30; 35; 45; 50; 55}

d) $A \cup B \cup C$ = {15; 20; 24; 25; 28; 30; 32; 35; 36; 40; 44; 45; 48; 50; 52; 55; 56; 60; 64; 68; 72; 75; 76; 80; 84; 88; 92; 96; 100};
$A \cap B \cap C = \emptyset$

e) $(A \cup B) \cap C$ = {100}; $(A \cup C) \cap B$ = {40; 60}; $(B \cup C) \cap A$ = {40; 60}

Igaz, hamis állítások

1.21. (1) és (3); *b)* (1) és (2); *c)* (1) és (3); *d)* (1)–(3) és (4)–(5); *e)* (1) és (3)

1.22. Azt kell megvizsgálnunk, hogy az állításról egyértelműen eldönthető-e, hogy igaz-e vagy hamis, vagyis hogy az állításnak van-e logikai értéke.

A: Igaz; **B:** Igaz.

C: Ez nyitott mondat, ezért nincs logikai értéke. „A γ hegyesszög” kifejezés helyére konkrét hegyesszögeket írva igaz, illetve hamis állítást is kaphatunk.

D: Hamis, mert van olyan hegyesszög, amelynek a hatszorosa nem nagyobb a derékszögnél.

E: Ez nyitott mondat, ezért nincs logikai értéke. „Az ε tompaszög” helyére bármely tompaszöget írva *igaz* állítást kapunk.

F: Nyitott mondat, ezért nincs logikai értéke. Konkrét szögeket beírva igaz, illetve hamis állításokat is kaphatunk.

G: Hamis, például a tetraédernek is négy csúcsa van.

H: Nem dönthető el, mivel nincs értelmezve a „legszabályosabb” kifejezés.

1.23. A logika olyan állításokkal foglalkozik (a feladat állításai is ilyenek), amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy igazak vagy hamisak. Ha az állításnak van logikai értéke, akkor az állítás és a tagadása közül pontosan az egyik igaz, a másik hamis.

A: igaz; $\overline{\mathbf{A}}$: Nincs olyan négyszög, amelyik paralelogramma: hamis.

B: igaz; $\overline{\mathbf{B}}$: Nem minden paralelogramma négyszög: hamis.

C: hamis; $\overline{\mathbf{C}}$: Nem minden 2-re végződő szám osztható 4-gyel: igaz.

D: hamis; $\overline{\mathbf{D}}$: Nem minden 3-mal osztható szám végződik 4-re: igaz.

A kék szemre és szőkeségre vonatkozó állításainkat csak a tapasztalataink alapján tudjuk eldönteni, feltéve, hogy egyértelműen tudjuk, mi az, hogy kékszemű, mi az, hogy szőke.

E: hamis; $\overline{\mathbf{E}}$: Nem mindenki kék szemű, aki szőke: igaz.

F: igaz; $\overline{\mathbf{F}}$: Nincs kékszemű, szőke ember: hamis.

G: igaz; $\overline{\mathbf{G}}$: Van olyan 10-zel osztható szám, amely 2-vel vagy 5-tel nem osztható: hamis.

H: hamis; $\overline{\mathbf{H}}$: A 100-zal osztható számok oszthatók 4-gyel vagy 25-tel: igaz. (Sőt, 4-gyel is és 25-tel is oszthatók.)

I: igaz; $\overline{\mathbf{I}}$: A legkisebb négyjegyű szám (1000) nem osztható 8-cal: hamis.

J: igaz; $\overline{\mathbf{J}}$: Van olyan páros szám, amely nem osztható 2-vel: hamis.

K: igaz; $\overline{\mathbf{K}}$: Van olyan szám, amelynek a számjegyei összege 6, és nem osztható 3-mal: hamis.

L: hamis; $\overline{\mathbf{L}}$: Van olyan 6-tal osztható szám, amelynek számjegyei összege nem páros: igaz. (Például a 12.)

1.24. **M:** hamis; **N:** igaz; **O:** igaz; **P:** igaz

X: Eddig egy hamis állítást kaptunk. Ha **X** hamis lenne, akkor igaz lenne a tartalma (két hamis állítás lenne), tehát nem lenne hamis. Ha pedig igaz lenne, akkor tartalma szerint hamisnak kellene lennie. Ennek a kijelentésnek nincs logikai értéke, mert önmagának ellentmondó állítás.

1.25. **Q:** igaz; **R:** hamis; **S:** hamis; **T:** igaz

V: Eddig két igaz állítás szerepelt. Ha **V** hamis, akkor tartalma szerint is éppen hamis lesz. Ha viszont igaz, akkor tartalma szerint is éppen igaz. Ennek a kijelentésnek nem határozható meg egyértelműen a logikai értéke.

1.26. **A:** hamis; $\overline{\mathbf{A}}$: Vannak hegyesszögű háromszögek: igaz.

B: hamis; $\overline{\mathbf{B}}$: Minden trapéz négyszög: igaz.

C: igaz; $\overline{\mathbf{C}}$: Minden háromszög derékszögű: hamis.

D: hamis; $\overline{\mathbf{D}}$: Nem minden prímszám páratlan: igaz.

E: igaz; $\overline{\mathbf{E}}$: A 2 összetett szám: hamis.

F: hamis; $\overline{\mathbf{F}}$: Van olyan négyszög, amelyik trapéz: igaz.

1.27. **A:** hamis, a 2 páros szám és prímszám.

A': Ha egy szám páratlan, akkor prímszám: hamis.

B: hamis, a 4 például nem osztható 6-tal.

B': Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 2-vel: igaz.

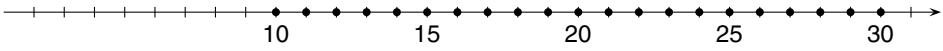
C: igaz.

C': Ha egy szám osztható 10-zel, akkor 0-ra végződik: igaz.

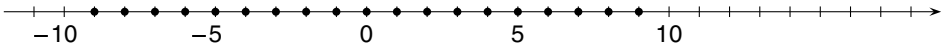
2. Számtan, számelmélet

Természetes számok

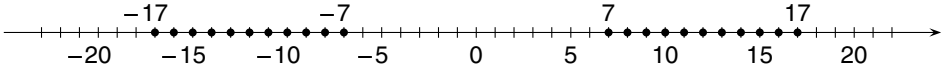
2.01. Az *A*-nak 21 eleme van.



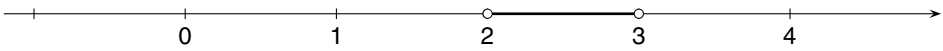
A *B*-nek 19 eleme van.



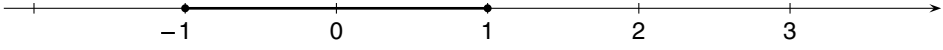
A *C* üres halmaz. A *D*-nek 20 eleme van.



Az *E* halmaz üres halmaz. Az *F* halmaznak végtelen sok eleme van, ezek a számegyenes megvastagított szakaszán helyezkednek el.



A *G* halmaznak is végtelen sok eleme van.



2.02. (1) *a)*, *b)*, *c)* (2) *a)*, *b)*, *c)*, *f)* (3) *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)*, *f)*, *g)* pontban megadott számok.
a) és *b)* esetén megadható ilyen halmaz tetszőlegesen; a *c)* esetén az üres halmazról van szó; *d)*, *e)*, *f)*, *g)* és *h)* esetén nem adható meg ilyen halmaz.
A véges halmazok elemeinek a száma csak természetes szám lehet, és minden természetes számhoz megadható ilyen halmaz. Ezeken kívül csak (az *i)*-hez tartozó) nem véges halmazok vannak, például a páros számok halmaza vagy az egységszakasz pontjainak halmaza.

2.03. *a)* 90; *b)* 9; *c)* 100; *d)* 81

2.04. *a)* 20; 22; 24; 26; 28; 40; 42; 44; 48; 60; 62; 64; 66; 68; 80; 82; 84; 86; 88

b) Ugyanaz, mint az *a)*.

c) Ugyanaz, mint az *a)*, kivéve 20; 40; 60; 80

d) Ugyanaz, mint az *a)* és még 14; 18; 34; 38; 54; 58; 74; 78; 94; 98

e) 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 22; 14; 28; 44; 82; 66; 94; 88

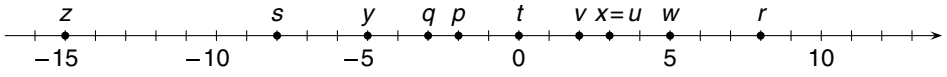
2.05. *a)* CD; CDX; CDXX; CDXXX; CDXL; CDL; CDLX; CDLXX; CDLXXX; CDXC; D

b) MMD; MMDC; MMDCC; MMDCCC; MMCM; MMM; MMMC; MMMCC; MMMCCC; MMMCD; MMMD

c) CDLXXVI; MCCXXII; MCDXCII; MDXXVI; MDCCIII; MDCCCXLVIII; MDCCCXCVI; MCMXIV; MCMXXXIX; MCMXC; MMIV

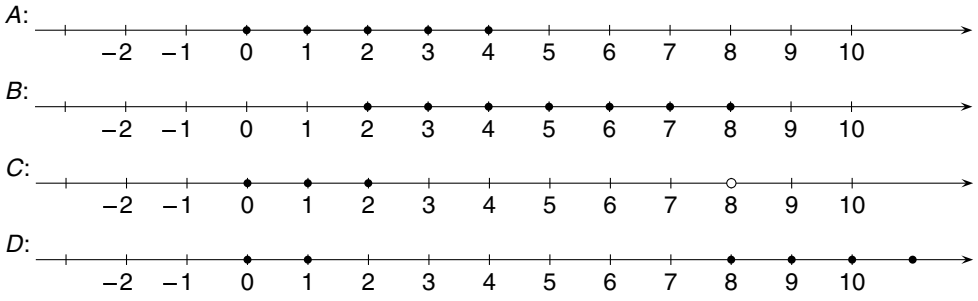
2.06. Néhány példa: 104 = CIV; 106 = CVI; 109 = CIX; 405 = CDV; CDL = 450; 901 = CMI stb. Vigyázat, például 491 nem XDI, a római számírás szabályai szerint, hanem CDXCI.

2.07.



Természetes számok: t; v; $u = x$; w; r

2.08.

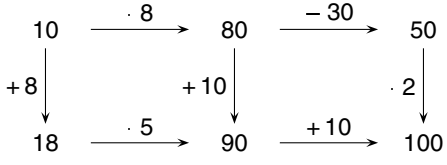


2.09. *a)* 16; *b)* 2; *c)* 59; *d)* 17; *e)* 10; *f)* 8; *g)* 1; *h)* 22

2.10.

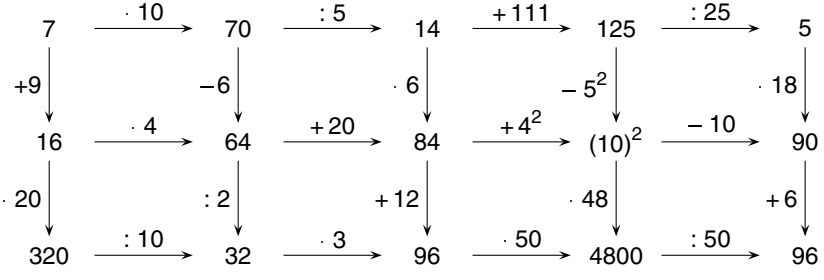
	tízesre	százasra	ezresre	tízezresre	százezresre
5	10	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
9374	9370	9400	9000	10 000	0
154 454	154 450	154 500	154 000	150 000	200 000
9 237 648	9 237 650	9 237 600	9 238 000	9 240 000	9 200 000

2.11. *a)*



A $(10 + 8) \cdot 5 = 10 \cdot 8 + 10$ egyenlőség megállapítható.
Megállapíthatók még a következő egyenlőségek is:
$(80 - 30) \cdot 2 = 80 + 10 + 10$; $(10 + 8) \cdot 5 + 10 = 10 \cdot 8 + 10 + 10 = (10 \cdot 8 - 30) \cdot 2$

b)



Egyenlőségek: $16 \cdot 4 : 2 = 16 \cdot 20 : 10$; $70 : 5 \cdot 6 = 70 - 6 + 20$;
$14 \cdot 6 + 4^2 - 10 = (14 + 111) : 25 \cdot 18$ stb.

c) A kiinduló értéktől függően többféle egyenlőség írható fel. A $(\square + 5) \cdot 3 = \square \cdot 3 + 15$ mindig igaz, azonosság.

2.12. *a)* 57; *b)* 30; *c)* 25

d)

	Autó	Motor	Össz.
Pista	9	18	27
Robi	25	5	30
Össz.	34	23	57

2.13.

	1	2	3	4	5	Összesen
8. *a*	1	5	9	6	7	28
8. *b*	2	6	7	10	5	30
Összesen	3	11	16	16	12	58

2.14. *a)* (2) alapján a *b* osztályból 10-en jelentkeztek mindhárom táborba.
(3) A 8. *c*-ből 9-en jelentkeztek a gyalogtúrára, és összesen 27 gyalogtúrázó van. Mivel a *b* osztályból 10-en gyalogtúráznak, a fennmaradó 8 gyalogtúrázó az *a* osztályba jár.
(1) az *a* osztályból 8-an vízitúráznak, ugyanannyian, mint ahányan gyalogtúráznak, a többi 12 tanuló kerékpártúrára jelentkezett.
(4) Mivel 27 tanuló gyalogtúrázik, 29-29 jelentkezett összesen vízi-, illetve kerékpártúrára. Következésképpen a 8. *c*-ből 7-en kerékpártúrára, 11-en vízitúrára jelentkeztek.

	8. *a*	8. *b*	8. *c*	Összesen
K	12	10	7	29
Gy	8	10	9	27
V	8	10	11	29
Összesen	28	30	27	85

b) A gyalogtúrázók táborát vezeti.

2.15. *a)* Háromszemélyes kenuk esetén csak úgy tudják a fiúkat és a lányokat elosztani, ha egy kenuban 1 fiú és 2 lány vagy 1 lány és 2 fiú ül. Kriszta a kérését nem fogalmazta meg pontosan, ezért vitatható, hogy teljesült-e a kérés vagy sem.

	1. kenu	2. kenu	3. kenu	4. kenu
Lányok	**A**, K	**B**	E_1, E_2	R
Fiúk	A	B, G	**C**	**D**, R

A kormányosok nevét vastag kezdőbetűvel jelöltük.
Kriszta és Gergő helyet is cserélhetnek.

b)

	1. kenu	2. kenu	3. kenu
Lányok	A, K	B, R	E_1, E_2
Fiúk	A, G	B, R	C, D

A Rita–Roland, valamint a Kriszta–Gergő páros helyet is cserélhet. (Ritának és Rolandnak együtt kell maradniuk.)

Használd a zsebszámológépet!

2.16. *a)* 42; 110; *b)* 31; 4; *c)* 37; 117; *d)* 2; 50
Ha az *a)* és *b)* feladatban a géppel a második eredményt kapjuk, akkor a gép abban a sorrendben végzi el a műveleteket, ahogyan azok éppen következnek.

2.17. *a)* $p = q = w = y = 0{,}05$; $r = u = v = 18 \cdot 49 : 63 : 14 \cdot 20 = 20$;
$x = 18 \cdot 49 : 63 \cdot 14 : 20 = 9{,}8$

b) $p = q = w = y = -30$; $r = u = v = 18 + 49 - 63 - 14 + 20 = 10$;
$x = 18 + 49 - 63 + 14 - 20 = -2$

Hatványozás

2.18. *a)* $5^4 = 625$; *b)* $(-2)^3 = -8$; *c)* $1^3 = 1$; *d)* $(-1)^4 = 1$

2.19. *a)* 32; 25; −32; 25; 1; 15; −1

b) 1; 0; 10; 1; 100; 100 000; 10 000 000 000

c) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,000 000 1; −0,000 000 1

d) 8; −8; −8; 9; 9; −9; 1

2.20. *a)* 3; *b)* 0; *c)* 1; *d)* 3; *e)* 0; *f)* 7; *g)* 3; *h)* 0; *i)* 8

2.21. *a)* >; >; <; <; *b)* >; <; <; >; *c)* <; >; >; <

2.22. *a)* 2^8; *b)* 2^4; *c)* 3^{11}; *d)* 5^7; *e)* 10^3; *f)* x^7; *g)* y^6; *h)* a^{n+m}

2.23. *a)* 2^2; *b)* 3^7; *c)* 10^3; *d)* 10^1; *e)* $8^0 = 1$; *f)* k^2; *g)* p^4; *h)* a^{n-m};

i) 5^1; *j)* 156^4; *k)* 1000^3; *l)* q^9; *m)* $\frac{1}{7^5} = \left(\frac{1}{7}\right)^5$; *n)* 100^1;

o) $\frac{1}{x^8} = \left(\frac{1}{x}\right)^8$; *p)* $\frac{1}{y^{n-m}}$

2.24. *a)* $2^6 \cdot 3^6$; *b)* $5^2 \cdot 10^2$; *c)* $2{,}5^6 \cdot 4^6$; *d)* $5^7 \cdot 3^7$;
e) $5^3 \cdot a^3$; *f)* $9^5 \cdot x^5$; *g)* $3^2 \cdot 2^2$; *h)* $3^5 \cdot a^5 \cdot b^5$;
i) $(2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$; *j)* $(3 \cdot 10)^2 = 300^2 = 90\,000$;
k) $(2{,}5 \cdot 8)^3 = 20^3 = 8000$; *l)* $(0{,}1 \cdot 10)^4 = 1^4 = 1$;
m) $(4 \cdot 25)^4 = 100^4 = 100\,000\,000$; *n)* $(0{,}5 \cdot 2)^7 = 1^7 = 1$;
o) $(0 \cdot 13)^9 = 0^9 = 0$; *p)* $[(-2) \cdot (-5)]^5 = 10^5 = 100\,000$

2.25. *a)* $\frac{2^2}{5^2}$; *b)* $\frac{3^3}{8^3}$; *c)* $\frac{5^4}{9^4}$; *d)* $\frac{7^5}{5^5}$; *e)* $\frac{9^6}{10^6}$; *f)* $\frac{a^m}{b^m}$;

g) $\left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 32$; *h)* $\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$; *i)* $\left(\frac{10}{2}\right)^3 = 5^3 = 125$;

j) $\left(\frac{25}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$; *k)* $\left(\frac{27}{9}\right)^5 = 3^5 = 243$; *l)* $\left(\frac{70}{7}\right)^2 = 10^2 = 100$

2.26. *a)* 2^6; *b)* 3^{15}; *c)* a^8; *d)* 9^5; *e)* $7^0 = 1$; *f)* $x^{k \cdot m}$

2.27. *a)* $10^4 \cdot 10^5 = 10^9$; *b)* 10^{12}; *c)* $(10^3)^5 = 10^{15}$; *d)* $10^8 : 10^4 = 10^4$; *e)* 10^8;
f) 10^{40}

2.28. *a)* $0{,}1^6 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}1^9$; *b)* $0{,}1^4 : 0{,}1^3 = 0{,}1^1$; *c)* $(0{,}1^5)^5 = 0{,}1^{25}$

2.29. *a)* $\frac{1}{10^3} \cdot 10^4 = 10^1$; *b)* $\frac{1}{10^5} \cdot 10^5 = 10^0$; *c)* $10^7 \cdot \frac{1}{10^4} = 10^3$;

d) $10^3 \cdot 1 = 10^3$; *e)* $\frac{10^3}{10^5} = \frac{1}{10^2} = 0{,}1^2$; *f)* $\frac{1}{10^4} : 10 = \frac{1}{10^5} = 0{,}1^5$;

g) $10 : \frac{1}{10} = 100 = 10^2$; *h)* $\frac{1}{10^2} : 10^3 = \frac{1}{10^5} = 0{,}1^5$; *i)* $\frac{1}{10^5} : \frac{1}{10^2} = \frac{1}{1000} = 0{,}1^3$;

j) $10^3 : \frac{1}{10^2} = 10^5$; *k)* $10^2 : \frac{1}{10^2} = 10^4$; *l)* $\frac{1}{10^2} : \frac{1}{10^5} = 10^3$

2.30. *a)* $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$; $\frac{2^6}{13^2} = \frac{64}{169}$; $\frac{5^3}{2 \cdot 3^4} = \frac{125}{162}$; $(7 \cdot 3)^2 = 441$; 1

b) $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{7^2} = \frac{5}{49}$; $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$; *c)* $\frac{2^6 \cdot 7^5}{5}$; $\frac{3}{2^2 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Számok normálalakja

2.31. $a = 8 \cdot 10^3$; $b = 9 \cdot 10^5$; $c = 7{,}5 \cdot 10^3$; $d = 2{,}2 \cdot 10^1$; $e = 5{,}43 \cdot 10^1$; $f = 5{,}645 \cdot 10^2$

2.32. $a = 5{,}4 \cdot 10^3$; $b = 6{,}546 \cdot 10^1$; $c = 4 \cdot 10^6$; $d = 6{,}465$; $e = 6{,}25 \cdot 10^4$; $f = 6{,}546 \cdot 10^2$; $g = 8 \cdot 10^7$; $h = 1 \cdot 10^0$

2.33. $a = 35\,000$; $b = 40{,}6$; $c = 9{,}3$; $d = 513{,}5$

2.34. *a)* $1 < 2{,}1 \cdot 10^0 < 10 < 1{,}02 \cdot 10^2 < 100 < 3 \cdot 10^2 < 1000 < 1{,}2 \cdot 10^3$

b) $1000 < 2090 < 2900 < 10\,000 < 11\,100 < 32\,000$

2.35. $a = i$; $b = d$; $c = f$; $e = n$; $g = l$; $h = k$; $j = m$ Normálalakban adottak: a; n
$b = d = 1{,}75 \cdot 10^3$; $c = f = 1{,}75 \cdot 10^6$; $g = l = 1{,}75 \cdot 10^1$; $h = k = 1{,}75 \cdot 10^5$; $j = m = 1{,}75 \cdot 10^0$

2.36. *a)* $2\,923\,940 = 0{,}292\,394 \cdot 10^7 = \mathbf{2{,}923\,94 \cdot 10^6} = 292\,394 \cdot 10^1 = 29{,}2394 \cdot 10^5$

b) $28{,}4232 = 28{,}4232 \cdot 10^0 = 0{,}284\,232 \cdot 10^2 = 28{,}4232 \cdot 10^0 = \mathbf{2{,}84232 \cdot 10^1}$

c) $194\,000 = 194 \cdot 10^3 = 19{,}4 \cdot 10^4 = 19\,400{,}0 \cdot 10^1 = \mathbf{1{,}94 \cdot 10^5}$

d) $6 = 0{,}006 \cdot 10^3 = 60 : 10^1 = 0{,}6 \cdot 10^1 = 0{,}0006 \cdot 10^4 = \mathbf{6 \cdot 10^0}$

2.37. *a)* a $8{,}888 \cdot 10^6$ 10-szer akkora; *b)* az $1{,}09 \cdot 10^6$ 100-szor akkora

c) a $93{,}722 \cdot 10^5$ 100-szor akkora; *d)* egyenlő

2.38. *a)* $(4 \cdot 10^4) \cdot (2{,}5 \cdot 10^6) = 10 \cdot 10^{10} = 1 \cdot 10^{11}$;

b) $(3{,}75 \cdot 10^5) \cdot (1{,}6 \cdot 10^7) = 6 \cdot 10^{12}$;

c) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (6{,}25 \cdot 10^5) = 40 \cdot 10^{10} = 4 \cdot 10^{11}$;

d) $(1{,}25 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^7) = 10 \cdot 10^{10} = 10^{11}$;

e) $(5 \cdot 10^8) \cdot (4 \cdot 10^4) = 20 \cdot 10^{12} = 2 \cdot 10^{13}$;

f) $(2{,}8 \cdot 10^2) \cdot (2{,}5 \cdot 10^7) = 7 \cdot 10^9$; *g)* $(6{,}25 \cdot 10^6) : (2{,}5 \cdot 10^3) = 2{,}5 \cdot 10^3$;

h) $1 \cdot 10^8 : (4 \cdot 10^4) = (10 \cdot 10^7) : (4 \cdot 10^4) = 2{,}5 \cdot 10^3$

2.39. *a)* $(2 \cdot 10^2)^6 = 64 \cdot 10^{12} = 6{,}4 \cdot 10^{13}$; *b)* $(3 \cdot 10^3)^4 = 81 \cdot 10^{12} = 8{,}1 \cdot 10^{13}$;
c) $(1{,}5 \cdot 10^4)^2 = 2{,}25 \cdot 10^8$; *d)* $(1{,}2 \cdot 10^3)^4 = 2{,}0736 \cdot 10^{12}$

2.40. *a)* $1{,}23 \cdot 10^5 : (3 \cdot 10^1) \cdot (2 \cdot 10^4) = (1{,}23 : 3 \cdot 2) \cdot 10^8 = 0{,}82 \cdot 10^8 = 8{,}2 \cdot 10^7$

b) $(2 \cdot 10^2)^2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^4 \cdot 1{,}1 \cdot 10^4 = 4{,}4 \cdot 10^8$

c) $1{,}85 \cdot 10^5 \cdot (4 \cdot 10^4) : (3{,}7 \cdot 10^2) = (1{,}85 \cdot 4 : 3{,}7) \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^7$

d) $(2 \cdot 10^3)^4 : (4 \cdot 10^3)^2 = 16 \cdot 10^{12} : (16 \cdot 10^6) = 10^6$

e) $[(6 \cdot 10^3)^2 + (2 \cdot 10^1)^6] : 10^6 = (36 \cdot 10^6 + 64 \cdot 10^6) : 10^6 = 100 \cdot 10^6 : 10^6 = 10^2$

f) $(2 \cdot 10^1)^5 \cdot (5 \cdot 10^1)^2 = 32 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^2 = 3{,}2 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^9$

g) $[(2 \cdot 10^2)^3]^2 : (4 \cdot 10^3)^2 \cdot (2{,}5 \cdot 10^2) = (8 \cdot 10^6)^2 : (16 \cdot 10^6) \cdot 2{,}5 \cdot 10^2 =$
$= 64 \cdot 10^{12} : (16 \cdot 10^6) \cdot 2{,}5 \cdot 10^2 = (64 : 16 \cdot 2{,}5) \cdot 10^8 = 10 \cdot 10^8 = 10^9$

h) $[(4 \cdot 10^1)^2]^2 = (16 \cdot 10^2)^2 = (1{,}6 \cdot 10^3)^2 = 1{,}6^2 \cdot 10^6 = 2{,}56 \cdot 10^6$

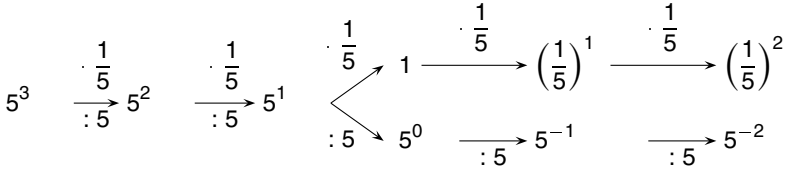
2.41. *a)* $3{,}869\,893 \cdot 10^9$; *b)* $8{,}145\,062\,5 \cdot 10^{23}$; *c)* $2{,}051\,114\,9 \cdot 10^{12}$;
d) $1{,}030\,301 \cdot 10^0$; *e)* $1{,}030\,301 \cdot 10^3$

Negatív egész kitevőjű hatványok

2.42.

a	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2^a	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

2.43.



2.44. *a)* 3^3; *b)* 3^1; *c)* 3^2; *d)* 3^4; *e)* 3^0;
f) 3^{-3}; *g)* 3^{-1}; *h)* 3^{-2}; *i)* 3^{-4}; *j)* 3^{-5}

2.45. *a)* -3; *b)* 3; *c)* -3

2.46. *a)* $3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$ vagy $3^5 \cdot 3^{-3} = 3^{5+(-3)} = 3^2$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 4^{-5}$ vagy $4^{-2} \cdot 4^{-3} = 4^{(-2)+(-3)} = 4^{-5}$

c) 5^2; *d)* $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$; *e)* $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$;

f) $4^{-2} : 4^3 = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^5} = 4^{-5}$; $4^{-2} : 4^3 = 4^{-2-3} = 4^{-5}$;

g) $5^{-1} : 5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right) : \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2$ vagy $5^{-1} : 5^{-3} = 5^{-1-(-3)} = 5^2$;

h) 7^{-2}; *i)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 2^{-10}$ vagy $(2^{-5})^2 = 2^{-10}$;

j) $2^{-3\cdot4} = 2^{-12}$ vagy $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$; *k)* $3^{(-2)\cdot(-3)} = 3^6$; *l)* 5^2

2.47. *a)* 10^3; *b)* 10^{-2}; *c)* 10^5; *d)* 10^{-5}; *e)* 10^0

2.48. $a = 6 \cdot 10^{-1}$; $b = 5 \cdot 10^{-3}$; $c = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$; $d = 7 \cdot 10^{-2}$; $e = 5{,}5 \cdot 10^{-2}$; $f = 2 \cdot 10^{-8}$

2.49. $a = 0{,}000\,005$; $b = 0{,}34$; $c = 0{,}024\,56$; $d = 0{,}000\,000\,545$

2.50. *a)* $3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 18 \cdot 10^{-3} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$; *b)* $2{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 7{,}2 \cdot 10^{-6}$

c) $1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^4 = 7{,}5 \cdot 10^1$; *d)* $5{,}4 \cdot 10^2 : (9 \cdot 10^6) = 0{,}6 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-5}$

e) $3{,}6 \cdot 10^2 : (9 \cdot 10^{-5}) = 0{,}4 \cdot 10^{2-(-5)} = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^7 = 4 \cdot 10^6$

f) $5{,}6 \cdot 10^{-1} : (1{,}4 \cdot 10^{-3}) = 4 \cdot 10^{-1-(-3)} = 4 \cdot 10^2$

g) $5{,}5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} : (1{,}1 \cdot 10^4) = (5{,}5 \cdot 4 : 1{,}1) \cdot 10^{3-3-4} = 20 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-3}$

h) $7{,}2 \cdot 10^{-1} : (6 \cdot 10^{-7}) : (5 \cdot 10^3) = (7{,}2 : 6 : 5) \cdot 10^{-1-(-7)-3} = 0{,}24 \cdot 10^3 = 2{,}4 \cdot 10^2$

i) $6{,}3 \cdot 10^1 : (1{,}4 \cdot 10^{-4}) \cdot 4 \cdot 10^{-2} = (6{,}3 : 1{,}4 \cdot 4) \cdot 10^{1-(-4)+(-2)} = 18 \cdot 10^3 = 1{,}8 \cdot 10^4$

j) $1{,}8 \cdot 10^{-3} : (9 \cdot 10^{-6}) : (2{,}5 \cdot 10^{-1}) = (1{,}8 : 9 : 2{,}5) \cdot 10^{-3-(-6)-(-1)} = 0{,}08 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^2$

2.51. $a = (2 \cdot 10^1)^5 = 32 \cdot 10^5 = 3{,}2 \cdot 10^6$; $b = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$; $c = 3{,}2 \cdot 10^{16}$; $d = 3{,}2 \cdot 10^{-14}$; $e = 3{,}2 \cdot 10^{-24}$; $f = 2{,}7 \cdot 10^7$; $g = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$; $h = 2{,}7 \cdot 10^{13}$; $i = 2{,}7 \cdot 10^{-11}$; $j = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$

Számelmélet

2.52. 0; 1; 2; 3; (4); 5; (6); 7; (8); (9);
(10); 11; (12); 13; (14); (15); (16); 17; (18); 19;
(20); (21); (22); 23; (24); (25); (26); (27); (28); 29

Amelyeknek pontosan két osztójuk van, azok a prímszámok (aláhúzás). A 0 és az 1 sem nem prímszám, sem nem összetett szám, a többi (bekarikázott) szám összetett.

2.53. *a)* 5436; 9648; 3224; 6500; *b)* 9648; 3224; *c)* 5436; 7350; 9648; 7575;

d) 5436; 9648; *e)* 6500; *f)* 7350; 7575; 6500;

g) az *a)* és a *c)* közös része: 5436; 9648; *h)* az *a)* és a *d)* közös része: 5436; 9648;

i) *c)* és *f)* közös része: 7350; 7575; *j)* *b)* és *d)* közös része: 9648

2.54. *a)* (1) $2n$; (2) $2n + 1$

b) (1) $(2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m) + 2$. Az összeg mindkét tagja osztható 2-vel, így az összeg is osztható vele. (Az összeg egyik tagja szorzat, ennek egyik tényezője osztható 2-vel, ezért a szorzat is.)

(2) $(2n + 1) \cdot (2m + 1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2\underbrace{(2nm + n + m)}_{a} + 1 = 2a + 1$

2.55. *a)* 2; 6; 12; 16; 26; 52; 56; 62; 126; 152; 156; 162; 216; 256; 512; 516; 526; 562; 612; 652; 1256; 1526; 1562; 1652; 2156; 2516; 5126; 5162; 5216; 5612; 6152; 6512

b) 6; 12; 15; 21; 51; 126; 162; 216; 261; 612; 621; 156; 165; 516; 561; 615; 651

c) 5; 15; 25; 65; 125; 165; 215; 265; 615; 625; 1265; 1625; 2165; 2615; 6215; 6125

d) 12; 16; 52; 56; 152; 156; 216; 256; 512; 516; 612; 652; 1256; 1652; 2156; 2516; 5216; 5612; 6512

2.56. *a)* 15; 24; 33; 39; 42; 48; 51; 57; 60; 66; 75; 84; 93; 99

b) 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84; 90; 96

c) 24; 42; 48; 60; 66; 84 *d)* 10-zel

2.57. $a = 2^2 \cdot 5^2$; $b = 2^4 \cdot 5^4$; $c = 2^5 \cdot 5^4$; $d = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4$; $e = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$; $f = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$; $g = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $h = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $i = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$; $j = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $k = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$; $l = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$; $u = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$; $v = 2 \cdot 5^2 \cdot 13$; $w = 2^9$; $x = 17 \cdot 29$; $y = 283$; $z = 3^3 \cdot 37$

2.58. *a)* $96 = 2^5 \cdot 3$; osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96
$144 = 2^4 \cdot 3^2$; osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144
$256 = 2^8$; osztói: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256
$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 150, 300

b) $36 = 1 \cdot 36$; $2 \cdot 18$; $3 \cdot 12$; $4 \cdot 9$; $6 \cdot 6$; osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
$150 = 1 \cdot 150$; $2 \cdot 75$; $3 \cdot 50$; $5 \cdot 30$; $6 \cdot 25$; $10 \cdot 15$;
osztói: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150
$1024 = 1 \cdot 1024$; $2 \cdot 512$; $4 \cdot 256$; $8 \cdot 128$; $16 \cdot 64$; $32 \cdot 32$;
osztói: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
$2340 = 1 \cdot 2340$; $2 \cdot 1170$; $3 \cdot 780$; $4 \cdot 585$; $5 \cdot 468$; $6 \cdot 390$; $9 \cdot 260$; $10 \cdot 234$; $12 \cdot 195$; $13 \cdot 180$; $15 \cdot 156$; $18 \cdot 130$; $20 \cdot 117$; $26 \cdot 90$; $30 \cdot 78$; $36 \cdot 65$; $39 \cdot 60$; $45 \cdot 52$
36 osztója van.

c) $121 = 11^2$; $169 = 13^2$; $289 = 17^2$; $329 = 7 \cdot 47$. Prímek: 269; 307

2.59. *a)* (1) bármelyik;
(2) 3-mal akkor osztható, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. 734□6 számjegyeinek összege $7 + 3 + 4 + \square + 6 = 20 + \square$. Ahhoz, hogy 3-mal osztható legyen az összeg, 1-et, 4-et vagy 7-et adhatunk hozzá.
(3) 4-gyel akkor osztható, ha a □6 osztható 4-gyel. □ helyére tehát 1; 3; 5; 7; 9 kerülhet.
(4) 5-tel akkor lenne osztható, ha 5-re vagy 0-ra végződne, de ez nem teljesül.

b) (1) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$. Osztóit lásd az **2.58.** *a)* feladat megoldásában.
(2) $2^3 \cdot 7 = 56$. Osztói: 1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56
(3) $3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$. Osztói: 1; 3; 5; 9; 11; 15; 33; 45; 55; 99; 165; 495
(4) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$. Osztóinak száma 54.

c) Egy szám akkor és csak akkor osztható 100-zal, ha a prímtényezős felbontásában a 2 is és az 5 is legalább második hatványon szerepel. A kitevők nemnegatív egészek lévén a megoldás tehát

(1) $x \geqq 2$, y bármi, $z \geqq 2$; (2) x bármi, $y \geqq 2$; (3) $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, z bármi;

(4) $15 \cdot 2^x \cdot 10^y \cdot 5 \cdot 9^1 = 3 \cdot 5 \cdot 2^x \cdot 2^y \cdot 5^y \cdot 5 \cdot 3^2 = 3^3 \cdot 2^{x+y} \cdot 5^{2+y}$ miatt y bármi, $x + y \geqq 2$ kell teljesüljön.

d) (1) a bármelyik számjegy lehet; $b = 0$; 3; 6; 9
(2) a bármelyik számjegy lehet; $b = 1$; 4; 7
(3) a bármelyik számjegy lehet; $b = 2$; 5; 8

2.60. $a = 2^3 \cdot 3^2$; $b = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; $c = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2$; $d = 3 \cdot 5^2$; $e = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$;
$f = (2^3 \cdot 3^2)^2 \cdot (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2)^3 = 2^{15} \cdot 3^{13} \cdot 5^6$;
$g = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2)^3 : (2^3 \cdot 3^2)^2 = (2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^6) : (2^6 \cdot 3^4) = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^6$

2.61. *a)* $1728 = 2^6 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3)^3$. Így a kocka élei $2^2 \cdot 3$ cm-esek.

b) $7350 : 6 = 1225 = 5^2 \cdot 7^2 = (5 \cdot 7)^2$. Így a kocka egy lapja 1225 cm^2 területű, és egy éle $5 \cdot 7 = 35$ cm hosszú.

c) $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, ezért a 140 osztópárjai: 2 és $2 \cdot 5 \cdot 7$; 5 és $2^2 \cdot 7$; 7 és $2^2 \cdot 5$; 2^2 és $5 \cdot 7$; $2 \cdot 5$ és $2 \cdot 7$, valamint 1 és 140. Így összesen 6-féle olyan téglalap rakható ki az egybevágó négyzetekből, amelynek a területe 140 egység.

d) $875 = 5^3 \cdot 7$, ezért a 875 osztóhármasai 5; 7 és 5^2; 5; 5 és $5 \cdot 7$; 1; 5^2 és $5 \cdot 7$; 1; 7 és 5^3; 1; 5 és $5^2 \cdot 7$, valamint 1; 1 és $5^3 \cdot 7$ lehetnek. Így 6-féle olyan téglatest építhető az egybevágó kis kockákból, amelynek a térfogata 875 egységnyi.

2.62. *a)* $(2^7; 2^9) = 2^7$; $[2^7; 2^9] = 2^9$; *b)* $(5^3; 5^4) = 5^3$; $[5^3; 5^4] = 5^4$;

c) $(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5; 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $[540; 360] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$;

d) $(2^3 \cdot 5^2; 2^4 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5$; $[200; 240] = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$;

e) $(3^6; 3^5) = 3^5$; $[3^6; 3^5] = 3^6$; *f)* $(2^7 \cdot 5; 2^7 \cdot 3) = 2^7$; $[640; 384] = 1920$

2.63. *a)* lnko: $2^3 \cdot 3^2$; lkkt: $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; *b)* lnko: $2^3 \cdot 3$; lkkt: $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2$;

c) lnko: 10^2; lkkt: $3^4 \cdot 7^2 \cdot 10^3$; *d)* lnko: 5^3; lkkt: $3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13$;

2.64. *a)* $(48; 49) = (49; 64) = 1$; *b)* $(16; 125) = (16; 27) = (27; 125) = 1$;

c) mindegyik osztható 13-mal, nincs köztük relatív prím.

2.65. *a)* $[4; 6] = 12$ nap múlva. *b)* $[4; 6; 7] = 84$ nap = 12 hét múlva.

2.66. $365 = 52 \cdot 7 + 1$; ezért ha csak egy szökőév lesz a következő 6 évben, akkor 6 év múlva, ha két szökőév lesz, akkor már 5 év múlva.

2.67. *a)* 26-szor. *b)* Mind a 13 alkalom ilyen. *c)* A 30. héten.

d) Nem lesz ilyen a tervezett hétvégék között.

e) Az 1., 7., 11., 13., 17., 19., 23., 29., 31., 37., 41., 43., 47., 49. hétvégeken. (Páratlan, nem osztható sem 5-tel, sem 3-mal, azaz 30-cal osztva 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 maradékot kell adjon.)

f) A húsvét a 15. hétvégére esik, így keresztszüleivel és anyai nagyszüleivel lesznek együtt. Pünkösd a 22. hétvége, barátaival szervez programot, és gyógyfürdőbe megy.

2.68. *a)* Ez a 60. percben lesz, így Dávid a 4., Bálint a 6., tehát Gábor az 5. körét fejezi be éppen. Így Gábor 12 perc alatt fut egy kört.

b) Ugyan $[50; 55; 60] = 3300$ másodperc múlva lesznek ismét a medence valamelyik végén a fiúk, de ekkor Gábor a másik oldalon lesz az 55. hossz után, mint a másik két fiú, akik viszont a 60. illetve 66. hossz után lesznek. Tehát 6600 s idő, azaz 1 óra 50 perc múlva találkoznak össze ismét mind a hárman, mégpedig az indulási pontnál.

c) 2 óra 48 perc = 168 perc, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Mivel hamarabb, $[21; 28] = 84$ perc múlva nem találkoznak még, ezért Bálint idejének mérőszáma osztható kell legyen $2^3 = 8$-cal. Osztható lehet még 3-mal vagy 7-tel vagy akár mindkettővel is, így a lehetséges köridők 8; $3 \cdot 8 = 24$; $7 \cdot 8 = 56$; $3 \cdot 7 \cdot 8 = 168$ perc. (A legvalószínűbb persze a 24 perc.)

2.69. *a)* $[5; 6; 7] = 210$; 210 dm = 21 m-re lesz ugyanilyen elhelyezkedésben három csemete.

b) Ha Rózsa távolsága a sor elejétől x dm, akkor az x szám 0-ra vagy 5-re végződik.
(1) $x + 4$ osztható 6-tal, ezért x csak 0-ra végződő lehet, és 2 maradékot ad 6-tal és 3-mal osztva. $x - 4$ így 1 maradékot ad 3-mal osztva, osztható 7-tel, és 6-ra végződik.

A 6-ra végződő 7-tel osztható számok: 56; 126; 196; 266; ... közülük 196 az első, amely 3-mal osztva 1 maradékot ad, így a kislány $x = 196 + 4 = 200$ dm-nél áll.
Hasonló gondolatmenettel:
(2) $x = 145$ dm; (3) $x = 90$ dm $= 9$ m

c) (1) $3 \cdot 210 + 200 + 4 = 834$ dm, a 2. sorban 167 csemete van;
(2) $3 \cdot 210 + 145 + 5 = 780$ dm a 2. sorban 157 csemete van;
(3) $3 \cdot 210 + 90 + 6 = 726$ dm, a 2. sorban 146 csemete van.

2.70. *a)* $\frac{1350}{720} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2^3} = \frac{15}{8}$; *b)* $\frac{729}{1296} = \frac{3^6}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16}$;

c) $\frac{12\,800}{5607} = \frac{2^9 \cdot 5^2}{3^2 \cdot 7 \cdot 89}$ nem egyszerűsíthető tovább;

d) $\frac{2250}{288} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 3^2} = \frac{5^3}{2^4} = \frac{125}{16}$

Egész számok

2.71. *a)* 55; 48; -39; 0; *b)* 1874; -1032; 27; -23; *c)* -278; -304; -278; 304;
d) 5312; 0; -9324; 1001; *e)* -77; -137; 606; 0,5

2.72. **A:** igaz; **B:** igaz; **C:** igaz; **D:** hamis: $3 - 7 = -4$;
E: hamis, az **A** állítás miatt, például -10 nem;
F: igaz; **G:** igaz; **H:** igaz; **I:** hamis: $4 - (-3) = -1$; **J:** hamis: $1 \cdot (-1) = -1$;
K: hamis: $1 : 0$ nem értelmezett, $1 : 2 = \frac{1}{2}$ nem egész szám;

2.73. *a)* -1117; 515; 800; *b)* 18; 36; *c)* 32; 64; *d)* -14; 4; *e)* $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$;
f) 65 536; 256; 256; 65 536;
g) $-100\,000\,000 = -10^8$; $100\,000\,000 = 10^8$; $-1\,000\,000 = -10^6$; $1\,000\,000 = 10^6$; $-1\,000\,000\,000 = -10^9$; $-1\,000\,000\,000 = -10^9$
h) -12; 15; 36

2.74. *a)* -1; *b)* -200; *c)* 600 **2.75.** *a)* -14; *b)* -3

Racionális és irracionális számok

2.76. *a)* 2; *b)* $\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{1}{10}$; *d)* $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$; *e)* $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; *f)* $\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$; *g)* $\frac{7}{5}$;
h) $\frac{5}{7}$; *i)* $\frac{18}{6} = 3$; *j)* $\frac{18}{6} = 3$; *k)* $\frac{9}{2} = 4{,}5$; *l)* $\frac{2}{9}$; *m)* $\frac{9}{2}$; *n)* $\frac{2}{9}$;
o) 0; *p)* nem értelmezhető

2.77. *a)* $-\frac{13}{9} < -\frac{4}{9} < \frac{0}{9} < \frac{1}{9} < \frac{4}{9} < \frac{7}{9} < \frac{9}{9} < \frac{9}{1} = \frac{81}{9} < \frac{99}{9}$

b) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < -\frac{1}{6} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{2}{1} < \frac{4}{1}$

2.78. *a)* $\frac{36}{24} = \frac{9}{6} = \frac{27}{18} = \frac{6}{4} = \mathbf{\frac{3}{2}} = \frac{12}{8} = \frac{30}{20} = \frac{150}{100}$

b) $\frac{36}{84} = \frac{24}{56} = \mathbf{\frac{3}{7}} = \frac{12}{28} = \frac{72}{168} = \frac{18}{42} = \frac{6}{14} = \frac{84}{196}$

2.79. *a)* $\frac{2}{3}$; *b)* $\frac{6}{7}$; *c)* $\frac{16}{9}$; *d)* $\frac{1}{5}$; *e)* 3; *f)* $\frac{32}{15}$

2.80. *a)* $2\frac{3}{8}$; *b)* $10\frac{11}{16}$; *c)* $8\frac{1}{4}$; *d)* $1\frac{1}{6}$; *e)* 8; *f)* $14\frac{5}{9}$

2.81. *a)* >; >; <; *b)* >; =; >; *c)* <; <; >

2.82. *a)* $\frac{13}{7} > \frac{17}{17} > \frac{3}{4} > \frac{5}{24} > 0 > -\frac{5}{6} > -\frac{9}{3}$; *b)* $\frac{6}{5} > \frac{7}{6} = \frac{14}{12} > \frac{13}{12} > \frac{14}{13} > \frac{13}{14} > \frac{6}{7} > \frac{5}{6}$;

c) $\frac{6}{13} > \frac{5}{11} > \frac{3}{7} > \frac{8}{19} > \frac{9200}{23\,000} > \frac{31}{80}$; *d)* $\frac{13}{6} > \frac{13}{8} > \frac{5}{4} > -\frac{1}{4} > -\frac{7}{16} > -\frac{7}{8}$

2.83. *a)* 1; *b)* $\frac{21}{4}$; *c)* $\frac{4}{3}$; *d)* $\frac{9}{7}$; *e)* $\frac{5}{33}$; *f)* $\frac{10}{9}$; *g)* $\frac{1}{90}$; *h)* $\frac{6}{5}$; *i)* $\frac{7}{2}$;

j) $\frac{17}{6}$; *k)* $\frac{1}{6}$; *l)* $-\frac{1}{14}$; *m)* $\frac{76}{105}$; *n)* 2; *o)* 16; *p)* $\frac{2}{3}$; *q)* $\frac{5}{3}$; *r)* $\frac{169}{49}$

2.84. *a)* $\frac{184}{21}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $-\frac{1}{3}$; *d)* $\frac{19}{144}$; *e)* $-\frac{729}{400}$; *f)* $-\frac{1}{42}$; *g)* $-\frac{5}{2}$;

h) $\frac{40}{9}$; *i)* 1; *j)* $-\frac{13}{64}$; *k)* $\frac{625}{144}$; *l)* $\frac{441}{100}$

2.85. *a)* 0,1; 0,3; 1,7; 1,73; 19,83; 0,035

b) 0,2; 0,8; 3,4; 0,05; 0,35; 4,65; 1,92

c) 0,25; 0,75; 4,25; 0,025; 1,075; 2,1075

d) 0,125; 0,0625; 0,031 25; 0,0125; 0,04; 0,008

e) $0,\dot{3}$; $0,\dot{1}$; $0,\dot{6}$; $0,\dot{2}$; $0,1\dot{6}$; $0,0\dot{9}$; $3,3\dot{1}\dot{8}$; $0,\dot{0}9\dot{9}$

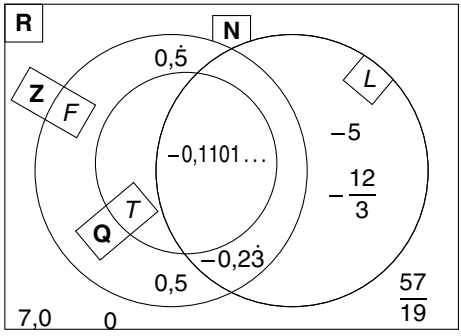
2.86. *a)* 8,06; *b)* −21,74; *c)* 73; *d)* 3,7584; *e)* 1,331;
f) 4,0804; *g)* 1,09; *h)* 3,2; *i)* 0,000 854; *j)* 0

2.87.

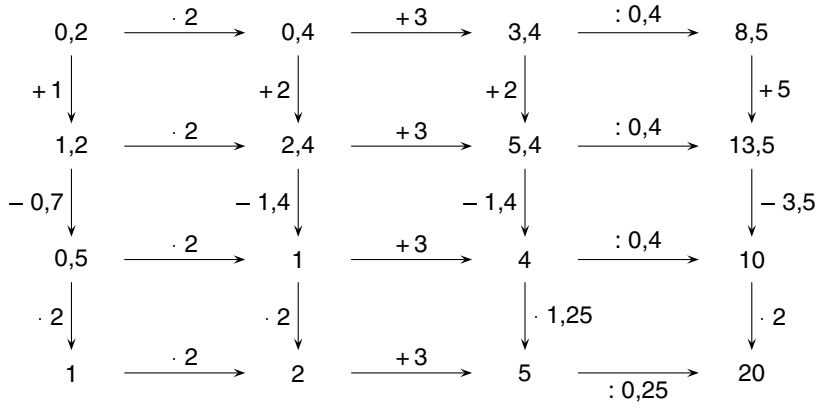
	százasra	tízesre	egyesre	tizedre	századra
5732	5700	5730	5732	5732,0	5732,00
16 574,9	16 600	16 570	16 575	15 574,9	16 574,90
5638,73	5600	5640	5639	5638,7	5638,73
563,873	600	560	564	563,9	563,87
56,3873	100	60	56	56,4	56,39
90,909	100	90	91	90,9	90,91
−49,825	0	−50	−50	−49,8	−49,82
−54,5	−100	−50	−54	−54,5	−54,50

2.88. W az F és L halmazok uniója ($W = F \cup L$).

2.89. **A:** hamis; **B:** igaz; **C:** igaz; **D:** igaz; **E:** igaz; **F:** igaz; **G:** hamis



2.90.



2.91. *a)* Egy munkás egy óra alatt 20 m^2 kertet, 2 munkás 5 óra alatt 200 m^2 kertet ás fel.

b) $16 \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{10}{8} = 24$ napig.

c) $\frac{2}{3}$ annyi munkás $\frac{3}{2}$ annyi idő, $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ óra alatt ásná fel ugyanazt a kertet.

2.92. *a)* Péter; *b)* 10 palacsinta maradt; *c)* 32 palacsintát; *d)* 3 : 4

2.93. *a)* A 7. és a 8. osztály kap jutalomnapot.

Osztály	5.	6.	7.	8.	Összesített
Létszám	26	25	24	30	105
Átlag (kg)	67,5	80,8	88,5	86,7	80,9523
Összesen (kg)	1755	2020	2124	2601	8500

b) A 8. osztály.

c) A 6. osztály átlaga 81 kg lenne, de még így sem lenne az iskolai átlag fölött, mert az emelkedő mennyiség miatt az iskolai átlag is éppen 81 kg lenne.
Szigorúan véve, a jutalomnap még így sem járna nekik.

Úgy is gondolkodhatunk, hogy a 6. osztály átlaga $\frac{5}{25}$-del, az iskola átlaga $\frac{5}{105}$-del nő.

$80{,}8 + 0{,}2 = 81$, $\frac{8500}{105} + \frac{5}{105} = \frac{8505}{105} = 81$

2.94. Átlagos fogyasztások:

a) 6,3 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$; *b)* 6,12 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$; *c)* 6,48 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$; *d)* 6,48 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$;

e) 6,3 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$; *f)* 6,65 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$; *g)* 6,6 $\frac{\text{l}}{100\ \text{km}}$

Átlagsebességek:

a) 96 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; *b)* 92,31 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; *c)* 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; *d)* 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; *e)* 96 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$;

f) 104 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; *g)* 102,86 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

2.95. *a)* Az előnye fél óra múlva 5 km, éppen lekörözi a másikat, de azt, hogy ez hol történik, csak a sebesség ismeretében tudnánk kiszámolni.

b) Az első autó előnye 25 megtett kör után lesz éppen 5 km, tehát 25 kör megtételekor körözi le a második autót, de hogy ez mikor lesz, csak a sebesség ismeretében számítható ki.

c) A sebesség ismerete nélkül nem tudjuk kiszámítani sem azt, hogy hol, sem azt, hogy mikor körözi le az első autó a másodikat.

2.96. *a)* A joghurt mindkét csomagolásban átszámítva deciliterre 0,30 €-ba kerül. Azt, hogy melyiket éri meg vásárolni, nem az ár határozza meg ebben az esetben.

b) A szükségleteknek megfelelően néhány liter tej megvételekor a szállítás és a frissesség is befolyásolja, hogy a literenként 0,79 €-ba kerülő tejet vásároljuk-e meg. Ha rövidebb idő alatt nagy mennyiségre van szükség, akkor érdemesebb a kannás, 0,48 € literenkénti árú tejet vásárolni.

c) (1) A 35 kg-os zsákokban lévő krumplit érdemes vásárolnia 0,21 €-s kilogrammonkénti áron.

(2) Bár a 2,5 kg-os zacskóban lévő krumpli kilogrammonkénti ára 0,4 €, de mivel kis mennyiségre van szükségünk, nem érdemes a nagy zsákban lévőt szállítgatni és tárolni a túrán.

(3) A 35 kg-os zsák vásárlása kevesebbe kerül, mint 8 zacskó a 2,5 kg-osból. Viszont mérlegelnie kell, hogy mennyire éri meg a nagyobb mennyiséget szállítani, tud-e valamit kezdeni a maradék 15 kg-mal, érdemes-e, etikus-e ekkora mennyiséget szemétbe dobni.

2.97. *a)* 57,3 €-ba kerülne 12 sampon és 18 balzsam akció nélkül.

b) 18 akciós csomag ára 46,8 €, Bea megtakarít 57,3 – 46,8 = 10,5 eurót, de kidob 6 sampont az év végén.

Bár Cili sem számolt helyesen, vásárolni mégis úgy érdemes, ahogyan Cili teszi, a megtakarítás csomagonként 1,30 €, a 12 csomagon 15,6 €-t takarít meg.

c) A 12 akciós csomag 31,2 €-ba kerül, de még vásárolni kell 6 hajbalzsamot 10,5 €-ért, így 41,7 €-t kell költeni. A megtakarítás tehát 57,3 – 41,7 = 15,6 €.

2.98. *a)* $(9{,}193 \cdot 10^9) \cdot (3{,}600 \cdot 10^3) \approx 3{,}309 \cdot 10^{13}$ periódus

b) $24\ \mu\text{g} \cdot 5 \cdot 8{,}5 \cdot 10^6 = 1{,}02 \cdot 10^9\ \mu\text{g} = 1{,}02 \cdot 10^6\ \text{mg} = 1{,}02 \cdot 10^3\ \text{g} = 1{,}02\ \text{kg}$

c) $29\ 765\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s} = 2{,}9765 \cdot 10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}1536 \cdot 10^7\ \text{s} \approx 9{,}3867 \cdot 10^{11}\ \text{m} =$

$= 9{,}3867 \cdot 10^8\ \text{km}$

2.99. *a)* 1200 olajipari és 1620 távközlési részvény van a csomagban.

b) A részvények $\frac{13}{60}$ rész a pénzintézeti részvény.

2.100. *a)* A japán és a kanadai vendégek nem az EU-ból valók, 33-an vannak, tehát 30 japán van. Így a vendégek száma $30 \cdot 7 = 210$.

b) 10 spanyol.

c) Igaz. Mivel az összes vendég $\frac{1}{6}$ része osztrák, az összes vendégnél kisebb létszámnak több, mint $\frac{1}{6}$-a az osztrákok létszáma.

d) Nem igaz. Az osztrákok 35-en vannak, ez kevesebb, mint az EU-ból való 177 fő ötödrésze.

Százalékszámítás

2.101. *a)* 7,2 kg; 144 kg; 360 kg; 1440 kg;

b) 5 l-nek; 50 l-nek; 500 l-nek;

c) 5%-a; 75%-a; 91%-a; 125%-a

2.102. *a)* 1; 4; 50; 80; 300; *b)* 1; 0,7; 7; 80; 200;

c) 10; 60; 1,5; 100; 150; *d)* 5; 67,5; 125

2.103. *a)* 25%; 75%; 125%; *b)* 10%; 60%; 20%; 80%; 120%;

c) 15%; 35%; 45%; 65%; *d)* 4%; 12%; 64%; 92%; 108%;

e) 124%; 145%; 236%; *f)* 430%; 328%; 140%; 255%

2.104. *a)* 650; *b)* 312

2.105. *a)* (1) 576 €; (2) 504 €; (3) 324 €; *b)* 396 €; 22%

2.106. *a)* (1) 36%; (2) 17%; (3) 21%; (4) 15%; *b)* 55 €; 11%

2.107. *a)* 15% fel; *b)* 20% le; *c)* 10% le; *d)* 15% le;

e) 32% fel; *f)* 41% fel

2.108. *a)* 20%; *b)* 25%; *c)* 10%; *d)* 15%

2.109. *a)* 484 db; *b)* 31,7%-a

2.110. *a)* $p \approx 1{,}56\%$; *b)* 8270 ponton zárt

2.111. *a)* $0{,}125 \cdot 0{,}52 = 0{,}065$ 6,5%-a

b) $46{,}8\% - 6{,}5\% = 40{,}3\%$

c) $6 : 46{,}8 \approx 0{,}1282$; 12,8%-a

d) $12{,}5\% - 6{,}5\% = 6\%$-a

(%)	Férfi	Nő	Összesen
14 év alatti	6,5	6	12,5
14 év feletti	40,3	47,2	87,5
Összesen	46,8	53,2	100

2.112. *a)*

	Ruha	Cipő	Összesen
Férfi	611 000	311 000	922 000
Női	1 533 000	311 000	1 844 000
Össz.	2 144 000	622 000	2 766 000

b)

(%)	Ruha	Cipő	Összesen
Férfi	22,09	11,24	33,33
Női	55,42	11,24	66,67
Össz.	77,51	22,49	100

2.113. 28,9%-kal.

2.114. *a)* 18,18%; *b)* 33,33%; *c)* 27,59%; *d)* $\approx 1{,}98\%$

2.115. *a)* Brokkolit a fennmaradó 60% $\frac{1}{6}$-án termel, tehát a birtok 10%-án. Így a dinnye termőterülete a nagyobb.

b) $16\,000 : 25 > 9000 : 25 = 30\,000 : 50 > 5000 : 10$ Az aránypárok megmutatják a jövedelmezőséget, az eper termesztése volt a legkifizetődőbb.

c) A kukorica vetésterülete 50%-ról 100%-ra nő, tehát nem fog epret termeszteni (0 kg).

2.116. *a)*

	10 000 €	15 000 €	20 000 €
1. bank	12 705 €	19 057 €	**25 410** €
2. bank	**13 017** €	**19 095** €	25 172 €
Kedvezőbb hozam	30,17%	27,30%	27,05%

A második bank x € betét esetén
$\{[(x \cdot 1{,}05 + 200) \cdot 1{,}05 + 200] \cdot 1{,}05 + 200\} \cdot 1{,}05 + 200$ eurót ad vissza 4 év múlva.
Ez $x \cdot 1{,}05^4 + 200 \cdot 1{,}05^3 + 200 \cdot 1{,}05^2 + 200 \cdot 1{,}05 + 200 \approx x \cdot 1{,}2155 + 862$ eurót jelent, míg az első bank $x \cdot 1{,}005^{48} \approx x \cdot 1{,}2705$ eurót fizet vissza.

b) A legkedvezőbb hozamot a második bankban 10 000 €-s betéttel érjük el.

c) Egyenlőség $x \cdot 1{,}2155 + 862 \approx x \cdot 1{,}2705$ esetén van, ekkor $x \approx 15\,680$ € betét mellett ad közel ugyanolyan hozamot a két bank.

Számok négyzete, négyzetgyöke

2.117. *a)* $240^2 = (2{,}4 \cdot 10^2)^2 = 5{,}76 \cdot 10^4$; *b)* $1{,}197\,16 \cdot 10^7 \approx 1{,}197 \cdot 10^7$;
c) $0{,}27^2 = (2{,}7 \cdot 10^{-1})^2 = 7{,}29 \cdot 10^{-2}$; *d)* $6{,}889 \cdot 10^{-5}$

2.118. *a)* (1) $7{,}5625\ \text{m}^2$; (2) $0{,}000\,042\,25\ \text{km}^2 = 4{,}225 \cdot 10^{-5}\ \text{km}^2 = 42{,}25\ \text{m}^2$;
(3) $31\,360\,000\ \text{mm}^2 = 3{,}136 \cdot 10^7\ \text{mm}^2 = 31{,}36\ \text{m}^2$

b) (1) $T \approx 45{,}34\ \text{cm}^2$; (2) $T \approx 0{,}0050\ \text{m}^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 = 50\ \text{cm}^2$;
(3) $T \approx 5{,}0 \cdot 10^5\ \text{dm}^2 = 5{,}0 \cdot 10^3\ \text{m}^2$

c) (1) $A = 3{,}28\ \text{cm}^2$; $V = 0{,}16\ \text{cm}^3$; (2) $A = 40\ \text{cm}^2$; $V = 16\ \text{cm}^3$;
(3) $A = 83\,200\ \text{cm}^2 = 832\ \text{dm}^2 = 8{,}32\ \text{m}^2$; $V = 160\,000\ \text{cm}^3 = 160\ \text{dm}^3 = 0{,}16\ \text{m}^3$

2.119. Az egész számok négyzete 0-ra; 1-re; 4-re; 9-re; 6-ra vagy 5-re végződhet. A *b* és a *d* nem lehet négyzetszám.

2.120. $a^2 = (2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2)^2 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7^4$; $b^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6$; $c^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 17^2$; $d^2 = 2^{32}$

2.121. $a^2 = (200 + 5)^2 = 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 5 + 5^2 = 40\,000 + 2000 + 25 = 42\,025$;
$b^2 = (1000 - 10)^2 = 980\,100$; $c = (2000 + 10) \cdot (2000 - 10) = 2000^2 - 10^2 = 3\,999\,900$;

$d = (4000 - 1)(4000 + 1) = 4000^2 - 1 = 15\,999\,999$

2.122. *a)* (1) 5 m; (2) 500 m; (3) 0,005 m;

b) (1) 7 m; (2) 7000 m; (3) 0,07 m

2.123. *a)* $\sqrt{72{,}25} = 8{,}5$; $\sqrt{72{,}25 \cdot 10^4} = 8{,}5 \cdot 10^2$; $\sqrt{72{,}25 \cdot 10^{-8}} = 8{,}5 \cdot 10^{-4}$

b) $\sqrt{5{,}29} = 2{,}3$; $\sqrt{5{,}29 \cdot 10^4} = 2{,}3 \cdot 10^2$; $\sqrt{5{,}29 \cdot 10^{-4}} = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$

2.124. A négyzetszámok prímtényezős felbontásában a tényezők csak páros hatványon szerepelhetnek. Az a és a c négyzetszám.

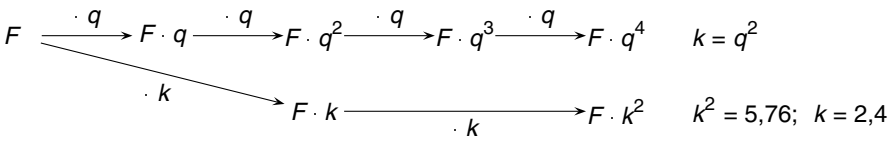
2.125. *a)* $V = a^2 \cdot M$; $a = 2{,}4$ cm; $A = 83{,}52$ cm^2; *b)* $A = 6a^2$; $a = 3{,}5$ cm;

c) $T = r^2\pi$; $r \approx 3{,}1$ cm; *d)* $V = r^2\pi M$; $r \approx 4{,}0$ cm; $A \approx 201$ cm^2

2.126. *a)* $B \xrightarrow{\cdot q} B \cdot q \xrightarrow{\cdot q} B \cdot q^2$; $q^2 = 1{,}44$; $q = 1{,}2$. Az éves kamat: 20%

b) $K \xrightarrow{\cdot q} K \cdot q \xrightarrow{\cdot q} K \cdot q^2$; $q^2 = 0{,}64$; $q = 0{,}8$. Az évenkénti csökkenés: 20%.

c)



Két év alatt az eredeti forgalom 240%-ára, vagyis 140%-kal nőtt a forgalma.

d) Az előző példa ábrája segíti a megoldást. $k^2 = 3{,}8416$; $k = q^2 = 1{,}96$; $q = 1{,}4$
Két év alatt 96%-kal, évenként 40%-kal nőtt a termelés.

3. Algebrai kifejezések

Algebrai kifejezések értelmezése, helyettesítési értéke

3.01. *a)* $a + 48$; *b)* $a - 48$; *c)* $a - 48$; *d)* $48a$; *e)* $\frac{a}{48}$; *f)* $a \cdot 48$; *g)* 48a

3.02. *a)* Mivel a kivonásban nem cserélhető fel a kisebbítendő és a kivonandó, a feladat megfogalmazása nem egyértelmű. Az x és az y szám különbsége: $x - y$; az y és az x szám különbsége: $y - x$.

b) $x + y$;

c) A feladat pontosítása után dől el, hogy $\frac{x}{y}$ vagy $\frac{y}{x}$.

d) xy; *e)* $(x + y)^2$; *f)* $x^2 + y^2$; *g)* $(x - y)^2$ vagy $(y - x)^2$

3.03. *a)* $(u \cdot z)^2$; *b)* $u^2 \cdot z^2$; *c)* $\left(\frac{u}{z}\right)^2$; $\left(\frac{z}{u}\right)^2$; *d)* $\frac{u^2}{z^2}$; $\frac{z^2}{u^2}$; *e)* $(u + z)(u - z)$;

f) $(u - z) : (u + z)$; $(z - u) : (z + u)$; *g)* $\frac{z + u}{z - u}$; $\frac{u + z}{u - z}$

3.04. *a)* 38,67 €; *b)* 116,01 €; *c)* $12{,}89 \cdot x$ €; *d)* $2x \cdot 12{,}89$ €; *e)* $12{,}89 \cdot (x + 2)$ €

3.05. *a)* 15,54 kg; *b)* 33 300 kg; *c)* $111y$ kg; *d)* $111 \cdot (y - 45)$ kg

3.06. *a)* 17,25 €; *b)* 4,5 €; *c)* $\frac{207}{z}$; *d)* $\frac{207}{z+13}$; *e)* $\frac{207}{4z}$

3.07. *a)* -3; -19; $-4{,}2$; *b)* 2; -2; -2; *c)* 10; 0; 0; *d)* 17; 32; 2; 30;
e) 17; 32; 2; 30; *f)* -3; -4; 8; *g)* 5; 1; 1; 9

3.08. *a)* 1; 1; -1; -2; *b)* 56; 196; -40; 100; *c)* $\frac{13}{6}$; 7,8; 9,6; *d)* 3; 3; 3;
e) $\frac{-7}{2}$; $\frac{81}{4}$; $\frac{25}{2}$

3.09. *a)* 0; -4; 5; -1; $-\frac{2}{5}$; *b)* $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{5}{4}$; –; –;
c) -4; 4; 0; –; $\frac{11}{6}$; *d)* –; 0,4; 0; $-\frac{3}{10}$; 0,6

3.10. *a)* 0; $\frac{5}{4}$; 24; 16,25; *b)* 18; $8\frac{1}{2}$; 40; 44,5; *c)* 36; $\frac{49}{4}$; 0; 30,25;
d) -36; $\frac{-31}{2}$; -12; $-61{,}5$

3.11. *a)* $K = 2x + 2 \cdot 1{,}5 + 2b = 2(x + 1{,}5 + b)$; $K = 2 \cdot (1 + 1{,}5 + 2{,}2) = 9{,}4$;
$T = \frac{2 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5}{2} \cdot 2 = 2 \cdot (x + 1{,}5)$; $T = 2(1 + 1{,}5) = 5$
b) $K = 2a + 2(a + 0{,}7) = 4a + 1{,}4$; $K = 4 \cdot 2{,}5 + 1{,}4 = 11{,}4$;
$T = (a + 0{,}7) \cdot m = am + 0{,}7m$; $T = (2{,}5 + 0{,}7) \cdot 1{,}5 = 4{,}8$

3.12. *a)* $K = 2a + 2(a + 1{,}7) = 4a + 3{,}4$; $K = 4 \cdot 2{,}1 + 3{,}4 = 11{,}8$;
$T = \frac{e \cdot (e + 3{,}5)}{2} = \frac{e^2 + 3{,}5e}{2}$; $T = \frac{1{,}5 \cdot (1{,}5 + 3{,}5)}{2} = 3{,}75$
b) $K = 2{,}5c + 5 + c + 2c = 5{,}5c + 5$; $K = 5{,}5 \cdot 2 + 5 = 16$;
$T = \frac{2{,}5c + c}{2} \cdot 2c = 3{,}5c^2$; $T = 3{,}5 \cdot 2^2 = 14$

3.13. *a)* $A = \frac{2}{3}$; $V = \frac{1}{27}$; *b)* $A = 20{,}5$; $V = 3{,}75$; *c)* $A = 31{,}4$; $V = 125{,}6$;
d) $A = \frac{17}{25}$; $V = \frac{3}{100}$; *e)* $A = 37\frac{1}{3}$; $V = 8$; *f)* $A = 25{,}69$; $V = 99{,}47$

3.14. *a)* $K = 10a$; 10; 20; 100; 1; 5; $T = 4a^2$; 4; 16; 400; 0,04; 1
b) $K \approx 6{,}82a$; 6,82; 13,64; 68,2; 0,682; 3,41; $T = 3a^2$; 3; 12; 300; 0,003; $\frac{3}{8}$
c) $K = 12a$; 12; 24; 120; 1,2; 6; $T = 6a^2$; 6; 24; 600; 0,06; $\frac{3}{2}$
d) $T = \frac{5a}{2} \cdot m$; $\frac{25}{2}$; $\frac{5}{2}$; 2,5; 2,5; $\frac{5}{2}$

3.15. $4a^2 + 6ac + 4ab$; 16,4; 92; 730; 9,28; $\frac{232}{25}$

3.16. $m = abc\varrho$; 7,6; 64; 300; 4,96; 4

3.17. Egy 164 cm magas, 62 kg testtömegű ember testtömegindexe: $I = \frac{8132}{1{,}64^2} = 23$, ez az ideális sávba esik.

Egynemű, különnemű algebrai kifejezések; összevonás

3.18. *a)* Egynemű kifejezések: az $\frac{xy}{2}$, $\frac{1}{4}xy$, $3xy$; a $3x^2$, $\frac{x^2}{3}$, illetve a $\frac{3}{4}x^3$, $x^2 \cdot x$

b) Egynemű kifejezések: az $5ab^2$, $5b^2a$; az $\frac{ab}{5}$, $5ab$; az $5a^2b$, $\frac{1}{5}a^2b$, $-\frac{a^2b}{5}$

c) Egynemű kifejezések: a $2{,}5cd^2$, $\frac{cd^2}{2}$; a $2{,}5c^2d$, $\frac{1}{2}c^2d$; a $2{,}5(cd)^2$, $(2{,}5cd)^2$

3.19. *a)* $0{,}7a + 2b$; 17; *b)* $\frac{3}{2}b$; 6; *c)* $3{,}4x - y$; 22; *d)* $-\frac{1}{12}d - \frac{c}{6}$; $\frac{1}{2}$;

e) $-\frac{3}{4}y$; -1; *f)* $-3f^2 + 3f$; -6; *g)* $-5g^2 \cdot 2g$; -88

3.20. *a)* $10a - 20$; -15; *b)* $2a - 13$; -12; *c)* $a - b$; $3\frac{1}{2}$;

d) $b - a$; $-3\frac{1}{2}$; *e)* $22 - 24c$; 10; *f)* $3d - 12c$; -18;

g) $4b + 7d$; -40; *h)* $31 - 14{,}2e$; 31; *i)* $\frac{5}{6}b - \frac{3}{4}d$; $\frac{1}{2}$;

j) $-8a - 6e$; -7; *k)* $\frac{19}{4}e - \frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$; *l)* $10c + 5cb$; $-2{,}5$

3.21. *a)* $-3a - 5b$; 4; *b)* $7 - b$; 1; *c)* $-7be - 6b + 8$; 68;

d) $2de + 2e + 6d$; $-31\frac{2}{5}$; *e)* $-\frac{1}{3}de$; $\frac{1}{6}$; *f)* $1{,}2f - 0{,}1f^2$; 3,6

3.22. *a)* $6a$ €; *b)* $10b + 5(b + 50) = 15b + 250$; *c)* $T = c \cdot (c - 3)$; $K = 2(2c - 3) = 4c - 6$;

d) $d - \left(\frac{3}{4}d - 500\right) = \frac{1}{4}d + 500$ (€); *e)* $e + 3 + e + e - 5 = 3e - 2$ (km)

3.23. *a)* $30a + 5a = 35a$ (€); *b)* $b + \frac{4}{5}b - \frac{2}{5}b = \frac{7}{5}b$ (€); *c)* $c + (c + 25) + (c - 16) = 3c + 9$;

d) $(d + 36) + d + 2(d + 36) = 4d + 108$; $2(d + 36) - (2d + 36) = 36$;

e) $e + \left(\frac{4}{3}e + 25\right) + \left(\frac{1}{3}e - 15\right) = \frac{8}{3}e + 10$ (€);

f) $\left(f + \frac{1}{2}f - 6\right) : 2 = \frac{3}{4}f - 3$ (dkg), $\frac{3}{4}f - 3 + \frac{1}{8}f = \frac{7}{8}f - 3$ (dkg)

Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.24. *a)* $17{,}5a$; 35; $4a$; 8; $6a$; 12; a; 2

b) $30ab$; 30; $8ab^2$; 4; $36a^2b$; 72; a^2b^2; 1

c) $25a^2b$; 50; $12ab^2$; 6; $2{,}6ab^3$; 0,65; $2a^2b^3$; 1

d) $-0{,}5ab$; $-0{,}5$; $0{,}5a^2b^2$; 0,5; $2{,}5a^2b$; 5; 0

3.25. *a)* $2x^2$; 18; $12{,}5x^2$; 112,5; y^2; 1; y^2; 1

b) $9x^3$; 243; y^3; -1; $14x^4$; 1134; $4y^5$; -4

c) $-63x^2$; -576; $18xy^2$; 54; $4x^3y^3$; -108; $-16x^3y^5$; 432

d) $30x^2y^2$; 270; $4x^4y^4$; 324; x^2y^2; 9; $\frac{1}{9}x^3y^3$; -3

3.26. *a)* $4ab$; 8; $3a^2b$; 2; $7ab^2$; 84;

b) $-6ab^2$; 72; $-7a^2b^2$; -28; $-7a^2b$; $\frac{14}{3}$;

c) $5c^2$; 20; $0{,}9b^3c^3$; $-7{,}2$; $9c^3$; -72;

d) cd; $-\frac{1}{2}$; c^4d^4; $\frac{1}{16}$; $3c^2d^2$; $\frac{3}{4}$;

e) $-\frac{1}{4}e^2f^2$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}ef^4$; 10; $-\frac{1}{6}f^3$; $-\frac{4}{3}$

3.27. *a)* x; $4x^2$; x^3; x^2, $x \neq 0$

b) 5; $\frac{1}{3}$; $16y$; $21y$, $y \neq 0$

c) $8xy$; $2xy$; $2y$; y^2, $x \neq 0$

d) $3xy$; xy; y; 1, $x \neq 0$ és $y \neq 0$

3.28. *a)* $4xy$; $3x^2y$; $7x^2y^2$; x^4y

b) $4x$; $6y$; xy; $6y^2$; $x \neq 0$

c) $3x^2y$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$; $2xy$; $y \neq 0$;

$2x^2y^2$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$; $3x$; $y \neq 0$

d) $-y^2$; $y \neq 0$; $-2y^3$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$;

$2xy$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$; 19; $x \neq 0$ és $y \neq 0$

3.29. *a)* $3a^3 - a^2$; *b)* $\frac{-2}{3}b^2 + \frac{5}{3}b^3$; *c)* $c + 2c^3$; *d)* $-10d^2 + 11d^3$; *e)* 0;

f) $-2{,}8f + 6{,}9f^2$

3.30. *a)* $2y$; $x \neq 0$; $3x$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$; $2x$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$; $3x$; $y \neq 0$

b) $-2x^2$; $5y^4$; $2xy$; $-3{,}7$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$

c) $-\frac{3}{4}y^2$; $-3{,}6y^2$; $-x$; $3x^2y^3$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$

d) $4{,}3y^7$; 5; $-6xy$; $7x^2y^2$; $x \neq 0$ és $y \neq 0$

3.31. *a)* $a^2 + a^4$; 90; $a \neq 0$; *b)* 1; $b \neq 0$; *c)* 0; *d)* d^8; 256; $d \neq 0$;

e) $3e^3 - 3e$; -72; $e \neq 0$; *f)* $3f - 3f^2$; -6; $f \neq 0$

3.32. *a)* $6a+12;\ 5a-20;\ 3-\frac{1}{2}a;\ -3+\frac{2}{3}a;$ *b)* $4b+6;\ 8b-12;\ 4-2b;\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b;$

c) $9c+54;\ 9c-6;\ \frac{2}{9}+\frac{1}{3}c;\ -6c+2;$ *d)* $4d+14;\ 14d-49;\ 0{,}09-0{,}9d;\ -2{,}4+3d;$

e) $4e-6;\ 1{,}25-2{,}5e;\ 3e+1;\ 4e+8$

3.33. *a)* $3a-a^2;$ $2a^2-0{,}5a;$ $a^2+a;$ $-2a^2+2ab;$

b) $2ab+3b^2;$ $-2ab-3b^2;$ $2ab-3b^2;$ $2ab^2-b^2;$

c) $2c-c^2;$ $\frac{18}{7}c^2-3c^3;$ $1{,}6c^3-1{,}6c^2;$ $\frac{-1}{4}c^3+c^2;$

d) $x^2+xy;$ $2xy^2-2x^2;$ $xy^2+x^2y;$ $0{,}7x^2y+0{,}7y^3$

3.34. *a)* $x^2-5x;\ -6;$ $-x^2-5x;\ -14;$ $x-1;\ 1;$

b) $3{,}4x^2+0{,}68x;\ 14{,}96;$ $0{,}5x^2-0{,}5x;\ 1;$ $2{,}4x^2+0{,}8x;\ 11{,}2;$

c) $16x^2+\frac{8x}{5};\ 67\frac{1}{5};$ $\frac{1}{6}x-x^2;\ -\frac{11}{3};$ $-6x+8x^2;\ 20;$

d) $-25x-15x^2;\ -110;$ $4x^3-x^2;\ 28;$ $4{,}8x^2+0{,}08x;\ 19{,}36$

3.35. *a)* $5x\cdot(3x+1)=15x^2+5x=\frac{5}{3}(3x+9x^2);$ $3y\cdot(4y+3)=12y^2+9y;$

b) $5z\cdot(7-3z)=35z-15z^2;$ $2x\cdot(-7-2x)=-14x-4x^2;$

c) $\frac{2}{3}a\left(\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}\right)=a^2+a;$ $-6b\cdot(6-b)=-36b+6b^2;$

d) $4d\cdot(d+d^2)=4d^2+4d^3;$ $-\frac{1}{2}d\cdot(4-2d)=-2d+d^2;$

e) $2ef\cdot(e+f)=2e^2f+2ef^2;$ $e^3\cdot(e^2-5e)=e^5-5e^4;$

f) $0{,}5f^2\cdot(-0{,}1+10f)=-0{,}05f^2+5f^3;$ $7f\cdot(-e-2f^2)=-7ef-14f^3$

3.36. *a)* $K=2(3x+y);\ T=2x(x+y)$

b) $K=2(5a+b+c);\ T=5ab+5ac=5a(b+c)$

c) $K=4x+2y+2z=2(2x+y+z);\ T=2xy+2xz=2x(y+z)$

d) $K=6x+10y=2(3x+5y);\ T=2x^2+10xy=2x(x+5y)$

e) $K=16a+2b=2(8a+b);\ T=16a^2+4ab=4a(4a+b)$

f) $K=2x+6y+14z=2(x+3y+7z);\ T=7xz+21yz=7z(x+3y)$

3.37. *a)* $a+20-4a^2;$ *b)* $2b+5-3b^2;$ *c)* $4c-c^3+3c^2;$ *d)* $4d-2d^2+d^3;$

e) $12e^2+2e^3-\frac{1}{2}e^4;$ *f)* $6f-2f^2+f^3;$ *g)* $23g^3-23g^2+2{,}3g^4;$

h) $-h^3-5h^2+6h^4;$ *i)* $2i^2-i^3+2i$

3.38. *a)* $-2;$ *b)* $-11-26x;\ -271;$ *c)* $-10-3\frac{3}{4}x;\ -47\frac{1}{2};$ *d)* $7x+6;\ 76$

e) $x;\ 10;$ *f)* $8x^2-4x;\ 760;$ *g)* $4x^2;\ 400;$ *h)* $32x;\ 320$

3.39. *a)* $a+2$; *b)* $4-b$; *c)* $3c-1$; *d)* $d-10$; *e)* $1+e$; *f)* $-2f-i$;

g) $8g^2-3g$; *h)* $0{,}9h+3$; *i)* $-\frac{4}{5}i^2-i$

3.40. *a)* $y-x$; -4; $x\neq 0$; x^2+1; 5; $y\neq 0$; $-x^2y-y$; 10; $y\neq 0$;

b) $2y+3x$; 2; $x\neq 0$; $\frac{5}{8}x-y$; $3\frac{1}{4}$; $x\neq 0$;

c) $3x^2+2x-4$; 12, $3x^3-x^2+2$; 22;

d) $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}-y$; $1\frac{3}{4}$; $1-2x+3y$; -9;

e) $3-2x+7x^2$; 27; $2xy-1+4x$; -1

3.41. *a)* $a+1$; $\frac{3}{2}$; $1-a$; $\frac{1}{2}$; $-a+1$; $\frac{1}{2}$

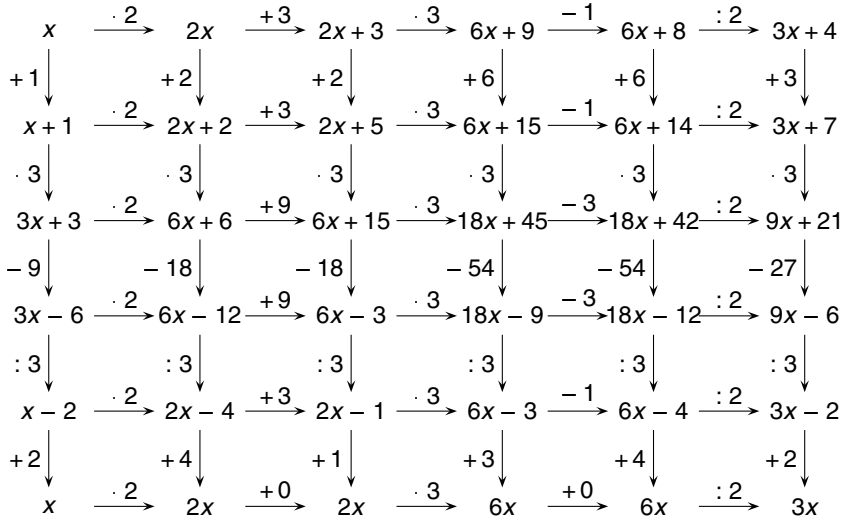
b) $1+3a$; $\frac{5}{2}$; $4a+1$; 3; $-6+a$; $-\frac{11}{2}$

c) a^2+a+1; $\frac{7}{4}$; $4a^2-a-1$; $-\frac{1}{2}$; $-6a^2-a+3$; 1

d) $5a-1$; $\frac{3}{2}$; $a^2+3{,}6a+2{,}3$; 4,35

e) $-\frac{3}{2}a^2+2a+1$; $\frac{13}{8}$; $4a^2+2a-1$; 1

3.42.



Többtagú kifejezések szorzattá alakítása kiemeléssel

3.43. *a)* $3(a+2)$; $2(a+4)$; $0{,}9(5a^2-1)$; $\frac{3}{4}(1-a^3)$

b) $7(3b-2)$; $7(6-b)$; $9(7b^2-1)$; $2{,}4(b^3-2)$

c) $\frac{1}{2}(2c-1)$; $2(c-1{,}6)$; $7(c+0{,}5)$; $0{,}1(100+c)$

d) $d(d+1)$; $d(3d-1)$; $2d(d-1)$; $2d(d^2-1)$

e) $2e(2e-1)$; $\frac{1}{4}e^2(3+e)$; $0{,}3e^3(2e-1)$; $\frac{3}{5}e^2(4e-1)$

f) $f(2e+3)$; $4f(e^2-1)$; $2{,}3ef(f+1)$; $5ef(ef-f)$

3.44. *a)* $4(a-1)$; -36; $4(3a-2)$; -104; $6(1+3a)$; -138; $2{,}5(a+1)$; $-17{,}5$

b) $3(b-8)$; 0; $7(4+b)$; 84; $12(b-3)$; 60; $\frac{2}{3}(b+1)$; 6

c) $7(6c-1)$; 1,4; $36(2+c)$; 79,2; $4{,}8(5c-1)$; 0; $-16(2c-1)$; 9,6

d) $18(2+d^2)$; 198; $1{,}8(2+d^2)$; 19,8; $\frac{1}{4}(d-1)$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{5}(1-2d)$; $-\frac{14}{5}$

e) $2{,}5(x+y)$; 22,5; $-4(x-y)$; 4; $-0{,}5(x+y)$; $-4{,}5$; $12(-x+1-y)$; -96

3.45. *a)* $6a^2-9a+18=3(2a^2-3a+b)$; 45; *b)* $12a^2+4b+20=4(3a^2+b+5)$; 116;

c) $x^2-2x=x(x-2)$; $-\frac{3}{4}$; *d)* $3xy+3x^2y-3xy^2=3xy(1+x-y)$; $-\frac{3}{2}$;

e) $\frac{2}{3}ab-\frac{2}{3}a^2b+\frac{2}{3}ab^2=\frac{2}{3}ab(1-a+b)$; 30;

f) $6x^2y^2+6x^2y+12xy^2=6xy(xy+x+2y)$; $\frac{9}{8}$

3.46. *a)* $8xy+14y^2=2y(4x+7y)$; 54; *b)* $xy^2+8x^2=x(8x+y^2)$; 99;
c) $12xy-4x^2y-4xy^2=4xy(3-x-y)$; -108;
d) $5x^2y-8xy+3xy^2=xy(5x-8+3y)$; 108;
e) $9x^2y+12x^2y^2+9xy^2=3xy(3x+4xy+3y)$; 972

Algebrai egész és törtkifejezések

3.47. Algebrai egész: $\frac{1}{2}x^2$; $2x^2$; $3(x+y)$; $\frac{x+y}{3}$; $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$; $\frac{a^2+b^2}{4}$; $\frac{b-3}{3}$

Algebrai tört: $\frac{2}{x^2}$; $\frac{x^2+y^2}{x+y}$; $\frac{4}{a^2+b^2}$; $\frac{2(a+b)}{(ab)^2}$; $\frac{1}{c}(c+2)$; $\frac{4c}{c}$; $\frac{b-3}{3b}$; $\frac{b^2}{b}$

3.48. Algebrai egészek: $\frac{a}{2}$; $\frac{x+y}{3}$; $\frac{1}{2}(x+y)$; $\frac{a-5}{3}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{b-5}{2}$

Algebrai törtek: $\frac{2}{a}$; $\frac{3}{x+y}$; $\frac{x}{x}$; $\frac{a^2}{a}$; $\frac{1}{x}(x+y)$; $\frac{x^2+2}{xy}$; $\frac{x+y}{xy}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{b+2}$; $0{,}8\cdot\frac{1}{x}$; $\frac{5}{x}+6$

3.49. *a)* $x\neq 0$; $x\neq 2$; bármely szám írható; $x\neq 0$; $x\neq -1$

b) $a\neq 4$; $a\neq 2$; $a\neq -3$; $a\neq \frac{1}{2}$; $a\neq -\frac{2}{3}$

c) $y\neq 0$; $y\neq 0$; bármely szám írható; $y\neq 0$; bármely szám írható.
A változók helyére csak olyan számok helyettesíthetők, amelyek esetén a tört nevezője nem 0.

3.50. A változók helyére csak olyan számok helyettesíthetők, amelyek esetén a tört nevezője nem 0.

a) $x \neq 0$, $x \neq 2$; *b)* $x \neq -1$, $x \neq 1$; *c)* $x \neq 0$, $x \neq 3$; *d)* $x \neq -1$, $x \neq 1$

3.51. *a)* Bármely szám írható, $-\frac{7}{3}$; $a \neq -1$, nincs értelme; $a \neq 2$, 1; $a \neq 1$, 1;

bármely szám, $-\frac{5}{4}$;

b) $b \neq 0$, $\frac{3}{2}$; bármely szám írható, $\frac{1}{2}$; $b \neq 0$, $\frac{17}{4}$; $b \neq 0$, $\frac{15}{2}$; $b \neq 0$, $\frac{21}{10}$;

c) $a \neq -b$, 1; $a \neq b$, 1; nincs értelme; nincs értelme; $a \neq -1$, $b \neq 0$, nincs értelme;

d) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $-\frac{1}{2}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $-\frac{5}{2}$; $a \neq -b$, 1; $b \neq 2$, nincs értelme;

$b \neq -1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\frac{1}{6}$

3.52. *a)* Az x helyére tetszőleges szám írható; -3; $x \neq 1$; $\frac{-1}{3}$; $x \neq 3$; 1; $x \neq -3$; -10;

$x \neq 0$ és $x \neq 1$; $\frac{-10}{3}$

b) $y \neq 3$; 10; $x \neq -y$; nincs értelmezve; $x \neq 0$; -1; a változók helyére bármely szám beírható; $\frac{8}{3}$; $x \neq y$; 0

c) $x \neq -y$; nincs értelmezve; $x \neq 0$ és $y \neq 0$; $\frac{-1}{4}$; $x \neq y$; -1; $y \neq x$; 1; $y \neq 0$; 10

d) $x \neq 0$; -5; $x \neq 0$; 3; $y \neq 8$; $\frac{4}{3}$; $y \neq 8$; $-\frac{4}{3}$

3.53. *a)* $\frac{2a(b-3)}{2b(b-3)} = \frac{a}{b}$; $b \neq 3$; $b \neq 0$ *b)* $\frac{3x(x+y)}{2(x+y)} = \frac{3}{2}x$; $x \neq y$

c) $\frac{8(y+1)}{4x(y+1)} = \frac{2}{x}$; $y \neq -1$; $x \neq 0$ *d)* $\frac{2x(z+5)}{4x(z+5)} = \frac{1}{2}$; $z \neq -5$; $x \neq 0$

e) $\frac{3a(a+b)}{6(a+b)} = \frac{a}{2}$; $a \neq b$ *f)* $\frac{2(a-2b)}{2(a^2-b)} = \frac{a-2b}{a^2-b}$; $a^2 \neq b$

g) $\frac{b(a-2)}{2b(a-b)} = \frac{a-2}{2(a-b)}$; $a \neq b$, $b \neq 0$ *h)* $\frac{15b(b-0{,}1)}{3b(b-0{,}1)} = \frac{5}{3}$; $b \neq 0{,}1$, $b \neq 0$

Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezéssel

3.54. *a)* x^2+4x+3; a^2+a-6; y^2+4y-5

b) $-2x-x^2+8$; $2y-y^2+15$; $16-a^2$

c) $a^2+\frac{3}{2}a-1$; $b^2+\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}$; $c^2-\frac{25}{4}$

d) $2x^2-11x+15$; $-2y^2+13y-20$; $3z^2-z-2$

e) $2x^2+0{,}2x-0{,}84$; $-4{,}08y^2+2{,}2y+1$; $z^2-2{,}25$

f) $3{,}6a^2+1{,}4a-6$; $6{,}72+1{,}1a-a^2$; $1{,}2a^2+3{,}7a+2{,}5$

3.55. *a)* x^2+6x-7; *b)* a^2-a+6; *c)* $-y^2-6y-2$; *d)* $b^2-12b-49$;

e) $z^2-6z-15$; *f)* x^2-97; *g)* $a^3-3a-\frac{11}{2}$

3.56. *a)* $x^2+2xy+y^2$; a^2-b^2; y^2-z^2

b) x^2+2x-y^2+2y; a^2+a-b^2-b; $x^2+xy+2x+y+1$

c) $x^2-y^2-2x+2y$; $a^2-ab-b-1$; $y^2-z^2+2y+2z$

d) $a^2+2ab+b^2+ac+bc$; $x^2-y^2+zx-zy$; $ab-ac-b^2+c^2$

e) $a^2+ab+2b-4$; $xy-x-y^2-2y+3$; $4-5x+x^2-y+xy$

f) $a^2+2ab+b^2-c^2$; $x^2-y^2+2zy-z^2$; $a^2-b^2-2bc-c^2$

3.57. *a)* $12x^2+7xy-10y^2$; $10x^2+7xy-12y^2$

b) $-12x^2y-6xy^2-8x^2-4xy$; $-12x^2-11xy-2y^2$

c) $16x^4y^2-9$; $12x^2-34xy^2+14y^4$

d) $6a^2-ab-12b^2$; $10a^2+12ab-16b^2$

e) $\frac{3}{4}a^2-ab-\frac{3}{16}b^2$; $\frac{4}{9}a^2-\frac{25}{16}b^2$

f) $0{,}96a^2+0{,}72ab-0{,}24b^2$; $b^2-11{,}56a^2$

3.58. *a)* $a^3-6a^2+12a-8$; a^3-2a^2-5a+6

b) $x^2y-x^2+3xy-2x-xy^2-2y^2+2y$; $x-x^2+y-x^2y+y^2-xy^2$

c) $2x^3-5x^2-x+6$; $4x^3-3x^2-22x-15$

d) $4{,}75a^2b-4{,}75ab^2-1{,}5a^3+1{,}5b^3$;

$0{,}96a^2b-0{,}96ab^2+0{,}8a^2-2ab+1{,}2b^2-a+b$

e) $x^3+2x^2z-y^2x-y^2z+xz^2-xyz-yz^2$; $a^3-2a^2c-b^2a+b^2c+ac^2-abc+bc^2$

3.59. *a)* a^2-9; 27; *b)* a^2+4a+4; 64; *c)* $a^2+2ab+b^2$; 1;

d) $a^2-2ab+b^2$; 121; *e)* b^2-16; 9; *f)* $4b^2-9a^2$; -224

3.60. *a)* $(p-3)\cdot q=pq-3q$; *b)* $1\cdot(r-s)+s^2=r-s+s^2$;

c) $x^2+t(v-x)=x^2+tv-tx$; *d)* $(d-2)(d-2)=d^2-4d+4$;

e) $(e+1)(e+1)=e^2+2e+1$; *f)* $(f-1)(f+1)=f^2-1$

3.61. *a)* a^2+4a+4; x^2-6x+9; $y^2+10y+25$; b^2-2b+1

b) $9-6x+x^2$; $4+4y+y^2$; $25-10a+a^2$; $36-12b+b^2$

c) $a^2+2ax+x^2$; $a^2-2ax+x^2$; $b^2+2by+y^2$; $b^2-2by+y^2$

d) $4x^2-4x+1$; $9y^2+12y+4$; $16a^2-16a+4$; $25b^2+30b+9$

e) $16-24b+9b^2$; $4+12a+9a^2$; $36-24x+4x^2$; $25+40y+16y^2$

f) $4a^2+12ab+9b^2$; $16b^2-24ab+9a^2$; $9x^2-30xy+25y^2$; $16x^2+48xy+36y^2$

3.62. *a)* $0{,}04-0{,}4x+x^2$; $2{,}25a^2-6a+4$; $x^2+2{,}4x+1{,}44$; $4a^2+4{,}8a+1{,}44$

b) $\frac{1}{4}-a+a^2$; $\frac{4}{9}+\frac{4}{3}b+b^2$; $a^2-\frac{3}{2}a+\frac{9}{16}$; $b^2+\frac{8}{5}b+\frac{16}{25}$

c) $\frac{1}{4}a^2+a+1$; $\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{3}x+1$; $\frac{9}{16}a^2+3a+4$; $\frac{16}{25}b^2-\frac{16}{5}b+4$

d) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{25}x^2-\frac{4}{25}x+\frac{4}{25}$; $\frac{9}{49}y^2+\frac{2}{7}y+\frac{1}{9}$

e) $4x^2-3x+\frac{9}{16}$; $\frac{25}{36}+5x+9x^2$; $\frac{16}{9}y^2-\frac{16}{3}y+4$; $25y^2+6y+\frac{9}{25}$

f) $0{,}36x^2+0{,}6x+0{,}25$; $2{,}25y^2-7{,}5y+6{,}25$;
$11{,}56x^2-12{,}24x+3{,}24$; $4{,}41y^2+5{,}04y+1{,}44$

3.63. *a)* x^2-1; a^2-9; y^2-16; b^2-25

b) $4x^2-1$; $4-y^2$; $1-9x^2$; $4-16y^2$

c) $x^2-\frac{1}{4}$; $\frac{4}{9}-y^2$; $\frac{16}{25}-z^2$

d) $9x^2-\frac{1}{9}$; $\frac{25}{4}-4y^2$; $\frac{z^2}{4}-1$

e) $1{,}21-a^2$; $6{,}25-b^2$; $c^2-0{,}25$

f) $4{,}41a^2-9$; $0{,}64-1{,}44b^2$; $2{,}25-2{,}25c^2$

3.64. *a)* $(a+b)^2$; $(a+1)^2$; $(b-1)^2$

b) $(x-2)^2$; $(y+3)^2$; $(z-4)^2$

c) $(x+y)(x-y)$; $(z+2)(z-2)$; $(a-5)(a+5)$; $(b+8)(b-8)$

d) $(a-4)(a+4)$; $(b+5)(b-5)$; $(c-9)(c+9)$; $(d+3)(d-3)$

e) $(x-2y)(x+2y)$; $(2a-b)(2a+b)$; $(4x-2y)(4x+2y)$; $(5a-4b)(5a+4b)$

3.65. *a)* $\frac{(a+b)^2}{4a(a+b)}=\frac{a+b}{4a}$; $a\neq 0,\ a\neq -b$; *b)* $\frac{(a-4)^2}{(a+4)(a-4)}=\frac{a-4}{a+4}$; $a\neq 4,\ a\neq -4$;

c) $\frac{(2c-5)(2c+5)}{(2c+5)^2}=\frac{2c-5}{2c+5}$; $c\neq -2{,}5$; *d)* $\frac{4x(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)}=\frac{4x}{x+2y}$; $x\neq \pm 2y$;

e) $\frac{3y(3y-2x)}{2x(3y-2x)}=\frac{3y}{2x}$; $x\neq 0,\ y\neq +\frac{2}{3}x$; *f)* $\frac{9(x^2+y^2)}{9(x-y)(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}$; $x\neq y,\ x\neq -y$

4. Egyenletek, egyenlőtlenségek

4.01. *a)* $40x = 80$; $x = 2$; *b)* $x = 3$; *c)* $x = 33$; *d)* $x = 2$; *e)* $x = 0$; *f)* $x = -4$; *g)* nincs megoldása az egyenletnek a természetes számok halmazán.

4.02. *a)* $4x = -12$, $x = -3$; *b)* $x = -4$; *c)* $x = -10$; *d)* $x = 4$; *e)* $x = 10$; *f)* azonosság; *g)* $x = 0$

4.03. *a)* $-\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a - 2$; $a = 2$; *b)* $b = 0$; *c)* $c = 24$; *d)* azonosság; *e)* $e = 5$; *f)* $f = 4$; *g)* $g = 21{,}78$; *h)* $h = -10$

4.04. *a)* $6a = 18$, $a = 3$; *b)* $b = -7$; *c)* $c = 0$; *d)* $d = 10$; *e)* $e = 22$; *f)* $f = 7$; *g)* azonosság; *h)* $h = 0$; *i)* $i = 9$

4.05. *a)* $6a + 3 = 4a - 4$, $a = -3{,}5$; *b)* $8b - 10 = 12b - 20$, $b = 2{,}5$; *c)* nincs megoldás; *d)* $87 - 50d = 63 - 56d$, $d = -4$; *e)* $10e + 2 = 10 + 2e$; $e = 1$; *f)* azonosság; *g)* $-1{,}8g - 3{,}1 = -1{,}6g + 14{,}4$; $g = -87{,}5$; *h)* $\frac{1}{8} = \frac{1}{12}h$; $h = -\frac{3}{2}$; *i)* $\frac{1}{6}i + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}$; $i = 0$; *j)* $-\frac{1}{4}j - 2 = \frac{4}{5}j + 1$; $j = -\frac{20}{7}$

4.06. *a)* $20 - 5a = 15a - 20$; $a = 2$; *b)* $18b - 15 = 85 - 32b$; $b = 2$; *c)* $3c + 7 = -14$; $c = -7$; *d)* $49d - 22 = 20 - 21d$; $d = 0{,}6$; *e)* $e = 1{,}\dot{1}$; *f)* $-10f = -10f$, azonosság; *g)* $g = 0$; *h)* $36{,}8 = 0$, nincs megoldás; *i)* $\frac{5}{3}i - \frac{1}{5} = 0$; $i = -\frac{1}{5}$; *j)* $\frac{2}{10}j - \frac{4}{5} = 0$; $j = 4$

4.07. *a)* $4a + 2 = 14 - 2a$; $a = 2$; *b)* $b = 3$; *c)* $c = -25$; *d)* $d = 7$; *e)* $e = 10$; *f)* $f = -4$; *g)* $g = 12$; *h)* $h = -8{,}2$

4.08. *a)* $50 - 6a = 32 - 8a$; $a = -9$; *b)* $b = 12$; *c)* $c = 0$; *d)* $d = 2$; *e)* $e = -14$; *f)* $f = 7$; *g)* $g = 0$

4.09. *a)* $7 - 2{,}5a = 10a - 18$; $a = 2$; *b)* $b = 0$; *c)* $c = 1{,}5$; *d)* $d = -1$

4.10. *a)* $6x \geqq 18$, $x \geqq 3$ természetes szám; *b)* $x < 3$, $x = 2; 1; 0; -1; \ldots$; *c)* $x < \frac{8}{3}$, $x = 2; 1; 0; -1; \ldots$; *d)* $x \leqq 3$; $x = 3; 2; 1; 0$; *e)* $x \leqq 12$; $x = 12; 11; \ldots; 0; -1; \ldots$; *f)* $x < \frac{5}{3}$; $x = 1; 0$; *g)* azonosság; *h)* a természetes számok halmazán nincs megoldása

4.11. *a)* $10 \geqq 5a$; $2 \geqq a$; *b)* $b < -\frac{10}{3}$; *c)* $c \geqq 2$; *d)* $d > \frac{38}{5}$; *e)* $e \leqq \frac{23}{9}$; *f)* $f < \frac{2}{3}$

4.12. *a)* $5 - 29a \geqq 5 - 29a$, azonosság; *b)* $b < -1$; *c)* $c \leqq 0$; *d)* $d < \frac{9}{8}$; *e)* $e \geqq -\frac{13}{7}$; *f)* $f < \frac{7}{3}$

4.13. Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha a szorzótényezők között szerepel a 0.
a) $3(x+5)=0$, ha $x+5=0$, vagyis $x=-5$; *b)* $x=8$;
c) $x_1=-4,\ x_2=0$; *d)* $x_1=8;\ x_2=0$; *e)* $x_1=6,\ x_2=-6$;
f) $x_1=4;\ x_2=-4$; *g)* $x_1=\frac{3}{2};\ x_2=\frac{5}{3}$; *h)* $x_1=\frac{3}{2};\ x_2=-\frac{3}{2}$

4.14. *a)* $2a(4a-5)(7+3a)=0$, ha $2a=0$, ha $4a-5=0$ vagy $7+3a=0$ az egyenlet megoldásai
$a_1=0,\ a_2=\frac{5}{4};\ a_3=-\frac{7}{3}$;
b) $b_1=1;\ b_2=0,\ b_3=-7$; *c)* $c_1=2,\ c_2=-5,\ c_3=-3$;
d) $d_1=9,\ d_2=-6,\ d_3=5$; *e)* $e=-\frac{10}{9}$; *f)* $f=\frac{15}{13}$;
g) $g=\frac{4}{3}$; *h)* azonosság

4.15. *a)* $a^2-10a+25\leqq 30+a^2$, ebből $a\geqq -\frac{1}{2}$;
b) $b=\frac{1}{2}$; *c)* $0>9$, ellentmondás; *d)* $d<-4$; *e)* $e=0$; *f)* azonos egyenlőtlenség

4.16. *a)* $\frac{2a}{3}<\frac{4}{3}$, akkor $2a<4$, vagyis $a<2$;
b) $-\frac{4b}{7}\geqq 0$, más alakban $-\frac{4}{7}\cdot b\geqq 0$, a szorzat nemnegatív, ha $b\leqq 0$; *c)* $c>-\frac{81}{5}$;
d) $d>-1$; az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal osztjuk, ezért az egyenlőtlenség iránya megváltozik;
e) $e\leqq 30$; *f)* $f\leqq 20$; *g)* $g<0$; *h)* $h\leqq 0$; *i)* nincs megoldás, mert $0\ngeq 1$

4.17. *a)* $a=(13+2)\cdot\frac{8}{3},\ a=40$; *b)* $1-3\leqq\frac{2b}{3},\ b\geqq -3$ *c)* $c=12$; *d)* $d>-21$;
e) $e=\frac{5}{2}$ nem megoldás, csak egész számokra értelmezett a feladat; *f)* $f\leqq 0$;
g) $g=3$; *h)* $h\geqq\frac{5}{4}$, h csak egész szám lehet; *i)* $i=18$;
j) $j\geqq\frac{19}{7}$; j csak egész szám lehet; *k)* $12+3k=0$; $k=-4$; *l)* ellentmondás

4.18. *a)* $2a+5<3a+2$, $a>3$; *b)* $b\geqq -174$; *c)* ellentmondás;
d) $d\leqq 6$; *e)* $e\leqq -\frac{7}{20}$; *f)* $f>0$; *g)* azonos egyenlőtlenség; *h)* $h\leqq -18$

4.19. *a)* $6a-6=3{,}2\cdot 15,\ a=9$; *b)* $b<2$; *c)* $c=-17$; *d)* $d\geqq -2$;
e) ellentmondás; *f)* $-56<0$, azonos egyenlőtlenség; *g)* $g=1$;
h) $h>\frac{11}{4}$, h csak egész szám lehet; *i)* $i=-10$

4.20. *a)* $2a-a-1=8$, ebből $a=9$; *b)* $b=-6$; *c)* $c=1$; *d)* azonosság;
e) $e=18$; *f)* azonosság; *g)* $g=3$; *h)* $h=-6$

4.21. *a)* $2(2-5a)+a-4<36$, ebből $a>-4$; *b)* $b \geqq 1$; *c)* $c>\frac{5}{22}$;

d) $d \leqq 2$; *e)* $e \geqq -4$; *f)* azonos egyenlőtlenség; *g)* $g>-4$; *h)* $h \leqq 3$

Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok

4.22. *a)* Legyen a két szám: a és b, akkor az $a+b=100$ és az $a=3b$ összefüggésből $b=25$, $a=75$;

b) 15 és 60; *c)* 18 és 72; *d)* 702 és 703; *e)* 86 és 88

4.23. *a)* $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=14$, ebből $x=24$; *b)* $4x \underset{26}{>} 3(x+3)$; $x=35$; *c)* 250 és 300;

d) 23; *e)* végtelen sok megoldása van; *f)* 17;

g) $a+b=a-b$, ha $b=0$, a tetszőleges szám; *h)* $2h>3(h-1)$, ebből $h<3$

4.24. *a)* $(3a+0{,}4a)-\frac{a}{3}=3a+8$; $a=120$; *b)* 6,4;

c) $[2(x-20)-20]\cdot 2-20=0$, $x=35$; *d)* 10;

e) $x+2(x+15)-20-x=2x+10$; azonosság, bármely számra gondolhattam;

f) $x+(2x+15)-(x-20)=2x+10$; $35=10$; ellentmondás, nincs ilyen szám.

4.25. *a)* $3x>19$ és $2x<20$, ebből $10>x>6\frac{1}{3}$, $x=7; 8; 9$;

b) $\frac{2}{3}x-7=\frac{x}{2}$; $x=42$; *c)* $0{,}4x+x+\frac{4}{3}x=164$; a három szám: 24, 60, 80;

d) $5x=\frac{x}{3}\cdot 15$; bármely szám megoldása, azonosság

4.26. *a)* $2[2(2a-24)-24]-24=0$; $a=21$;

b) A feladat megoldását visszafelé, a 3. vevővel kezdjük.

A 3. vevő $x_3-\frac{x_3}{2}-1=0$, $x_3=2$ db tojást vett, a 2. vásárló után ez a 2 db tojás maradt, így $x_2-\frac{x_2}{2}-1=2$, ebből $x_2=6$, az 1. vásárló után 6 db tojás maradt. Így eredetileg $x-\frac{x}{2}-1=6$, vagyis $x=14$ tojást vitt a piacra az asszony; ennyit adott el összesen.

c) A vagyont 7 egyenlő részre kell felosztani, ebből az anya kettőt, a lánya egyet, a fia 4 részt kap. $2x$, x, $4x$

d) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x$; $x=28$ diákja volt.

4.27. *a)* x év múlva az apa $36+x$, a fia $3+x$ éves lesz.
$36+x=(3+x)\cdot 4$; $x=8$ év múlva

b) Mivel a legidősebb és a legfiatalabb testvér között 6 év van, ezért 3 évente születtek a testvérek. $x+x+3+x+6=18$; $x=3$; a fiúk életkora 3, 6 és 9 év.

c) $K = 18{,}2$ cm $2(0{,}3a + a) = 18{,}2$; $a = 7$ cm, $b = 2{,}1$ cm; $T = 14{,}7$ cm^2

Ha a hosszabbik oldal a $\frac{3}{2}$-szeresére nő: $\frac{3}{2}a = 10{,}5$ cm, akkor a rövidebbik oldalnak ugyanannyiad részére kell csökkennie, így $b : \frac{3}{2} = 1{,}4$ cm; $10{,}3 \cdot 1{,}4 = 14{,}7$ cm^2.

d) $K = 4a$, $T = a^2$, $\frac{2}{3}a^2 = 4a$, ebből $a = 6$

e) A paralelogramma egy oldalon lévő szögei 180°-ra egészítik ki egymást. $\alpha + 0{,}2\alpha = 180°$, $\alpha = 150°$, $\beta = 30°$

f) A háromszög szögei $\alpha < \beta < \gamma$, és $\gamma = 4{,}2\alpha$, $\beta = 2\alpha$, így $\alpha + 2\alpha + 4{,}2\alpha = 180°$. Ebből $\alpha = 25°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 105°$. A háromszög tompaszögű.

4.28. *a)* $a + (a + 5) \leqq 30$; $a \leqq 12{,}5$. Az egyik természetes szám: $0 \leqq a \leqq 12$. A másik természetes szám: $5 \leqq b \leqq 17$.

b) $(2a - 8) - a \leqq 5$ és $0 < 2a - 8$. Az egyik szám: $4 < a \leqq 13$; a másik szám $0 < b \leqq 18$.

c) $3x - 2x > 10$; $x > 10$, az x természetes szám.

Egyik szám:	33	36	39	...	...	$3x$
Másik szám:	22	24	26	...	...	$2x$

d) $3x \geqq 5x + 10$; $x \leqq -5$. Van ilyen szám.

e) $x = 100$. *f)* Ellentmondás, nincs megoldás.

4.29. *a)* $a + (a + 8) < 3a$; $8 < a$. Ádám 8 évesnél idősebb.

b) $b + (b - 10) < 4b$; $-5 < b$. Akárhány éves lehet Béla.

c) $c + (c - 6) > 3(c - 6)$; $12 > c$. Csaba 12 évesnél fiatalabb.

d) $(2m - 5) + m > 3m$; $-5 > 0$; ellentmondás. A feladatnak nincs megoldása.

e) Emma 1 vagy 2 éves lehet, Ábel 2 vagy 4 éves.

f) $G < 60$, $F = \frac{2}{3}G < 40$

4.30. *a)* $130 < 15x - 8 < 181$; $9{,}2 < x < 12{,}6$; $x = 11$

b) $4 < 8x + 3 \cdot 0{,}40 \leqq 5$; $0{,}35 < x \leqq 0{,}475$. A kilogramm gyümölcs többe került 0,35 €-nál, de nem került többe 0,475 €-nál.

c) 40 kg-nál kevesebbet vásároltak.

d) Dórának kevesebb, mint 400 €-ja van, Karolának 600 €-nál több pénze van.

e) 190 €-nál kevesebb pénze van.

4.31. *a)* *Például:* $6048 = 6 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

b) $x \cdot 100 + y \cdot 10 + z \cdot 1$; $0 < x \leqq 9$, $0 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq z \leqq 9$

c) $(x - 3) \cdot 100 + x \cdot 10 + (x + 3)$; $3 < x \leqq 6$

d) $(6 + x) \cdot 100 + 6 \cdot 10 + (6 - x) \cdot 1$; $0 \leqq x \leqq 3$

e) A tízesek helyén 0 áll; $5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + x \cdot 1$; $0 < x \leqq 9$

4.32. *a)* 64

b) Bármely kétjegyű számra igaz, ha a számjegyeinek összege 15. Ezek a számok: 96; 87; 78; 69

c) 24; *d)* 453; *e)* 254

4.33. *a)* $6a^2 \cdot \frac{3}{2} = a^3$; $a = 9$

b) $a = 2$ cm, $b = \frac{K}{2} - a = 8$ cm, $T = 16$ cm^2 $a' = a \cdot \frac{K'}{K}$ $a' = 3$ cm;

$b' = b \cdot \frac{K'}{K}$, $b' = 12$ cm, $T' = 36$ cm^2

c) $a = 8$ cm, $T = 48$ cm^2, $m_a = 6$ cm

Az $a \cdot m_a = b \cdot m_b$ képletbe behelyettesítve a $8 \cdot 6 = b \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}$ egyenletet kapjuk, ebből $b = 12$ cm és $K = 40$ cm.

d) $e = 0{,}4f$, $T = \frac{e \cdot f}{2}$, $12{,}8 = \frac{0{,}4f^2}{2}$, ebből $f = 8$ cm, $e = 3{,}2$ cm

$K = T \cdot 1{,}75$, $K = 22{,}4$ cm

4.34. *a)* $a' : \frac{7}{3} = \frac{3}{7} : 1$; $a' = 1$ m.

b) A hasonlóság aránya legyen k. $a' = \frac{3}{4}k$ cm, $b' = \frac{2}{5}k$ cm;

$\frac{3}{4}k + \frac{2}{5}k = 13$; $k = \frac{260}{23}$; $a' = \frac{195}{23}$ cm; $b' = \frac{104}{23}$ cm

4.35. $x^2 + y^2 = z^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \sqrt{z^2 - y^2}$; $y = \sqrt{z^2 - x^2}$
($x > 0$; $y > 0$, mert a háromszög oldalainak hossza csak pozitív értéket vehet fel.)

a) $b = 18$ cm; *b)* $(3x)^2 + (4x)^2 = 19{,}5^2$; $x = 3{,}9$; $a = 11{,}7$ cm; $b = 15{,}6$ cm;

c) A másik oldalt a-val jelölve az átló: $(a + 18)$
$a^2 + 24^2 = (a + 18)^2$; $a = 7$ cm; $K = 62$ cm; $T = 168$ cm^2

4.36. *a)* $0{,}8 \cdot t$ (m);

b) $0{,}8 \cdot (t - 5)$ m, 5 másodperccel kevesebb ideig halad, ha később indul;

c) $0{,}8(t + 7)$ m; *d)* $(20 + 0{,}8 \cdot t)$ m; *e)* $(20 - 0{,}8 \cdot t)$ m; *f)* $[20 - 0{,}8 \cdot (t + 3)]$ m;

g) $[20 + 0{,}8)t - 4)]$ m

A *d), e), f), g)* feladat megoldásakor az Aladár kiindulási pontja felé történő elmozdulást tekintettük pozitívnak. Ha ezt az elmozdulást negatív mérőszámmal jelezzük, akkor például az *e)* feladat megoldása: *e)* $(-20 + 0{,}8 \cdot t)$ m.

4.37. *a)* $15 \cdot t = 9000$; $t = 600$ s $= 10$ min

b) $1500 - 6\,t = 600$; $t = 150$ s $= 2$ min 30 s

c) $3000 + 240t > 15\,000$; $t = 50$ min

d) $80t + 20t = 250$; $t = 2{,}5$ h; a kerékpár kiindulási helyétől 50 km-re.

e) $20t = 30(t - 6)$; $t = 18$ h; a teherhajó indulása után 18 órával, a parttól 360 km távolságra.

f) $150 - 4 \cdot t < 90$; $t > 15$ s

g) $16t - 12t > 30$; $t > 7{,}5$. 7 és fél óra múlva.

h) $(270 - 60t) - 80(t - 0{,}5) < 100$; $t > 1{,}5$. A teherautó indulása után másfél óra múlva.

4.38. *a)* 35 kg; $0{,}35 \cdot 40$ kg $= 14$ kg; $0{,}35 \cdot x$ kg; $0{,}35(x + 3)$ kg

b) $0{,}1 \cdot 40$ kg $= 4$ kg; 12 kg; $\frac{p}{100} \cdot 40$ kg; $\frac{10 + p}{100} \cdot 40$ kg

c) Az oldat töménysége nem lehet 100%-osnál nagyobb.

d) $\left(\frac{20}{400} \cdot 100 = \right)$ 5%-os; 20%-os; $\frac{x}{400} \cdot 100$%-os

4.39. *a)* $0{,}4x + 4 = 0{,}6(x + 4)$; $x = 8$ kg. *b)* $0{,}3x = 0{,}25(x + 4)$; $x = 20$ kg.

c) $3 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}12 = 7x$; $x = 0{,}09$. A sóoldat 9%-os.

d) $x \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}5 = (x + 5) \cdot 0{,}4$; $x = 2{,}5$ (kg).

e) 40%-os sav és 10%-os sav keveréséből nem kapható 45%-os oldat.

f) $5 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0 = 8 \cdot \frac{x}{100}$; 12,5%-os oldatot kaptak.

g) $5 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 1 = 8 \cdot \frac{x}{100}$; 50%-os oldatot kaptak.

h) $7 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot \frac{x}{100} = 15 \cdot 0{,}6$; 77,5%-os volt az oldat.

i) $10 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot \frac{x}{100} = 12 \cdot 0{,}45$; $x = 120$; 100%-osnál nagyobb töménységű oldat nem készíthető. A feladatnak nincs megoldása.

j) $6 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot \frac{x}{100} = 10 \cdot 0{,}4$; 25%-os volt az oldat.

k) $8 \cdot 0{,}6 + 7 \cdot \frac{x}{100} = 15 \cdot 0{,}3$; x negatív, tehát nincs megoldása a feladatnak.

4.40. *a)* $100(x - 10) = 25(60 - x)$; $x = 20$. A közös hőmérséklet 20 °C.

b) $80(x - 20) = 20(80 - x)$; $x = 32$. A közös hőmérséklet 32 °C.

4.41. *a)* $\frac{1}{15}$ részét; *b)* $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ részét; *c)* $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ részét; *d)* $\frac{x}{18}$ részét;

e) $\frac{5}{15} + \frac{5}{18} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$ részét; *f)* $\frac{t}{15} + \frac{t}{18} = \frac{6t}{90} + \frac{5t}{90} = \frac{11t}{90}$ részét;

g) $\frac{6}{15} + \frac{3}{18} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{12 + 5}{30} = \frac{17}{30}$ részét; *h)* $\frac{y}{15} + \frac{6}{18} = \frac{y}{15} + \frac{1}{3} = \frac{y + 5}{15}$ részét

4.42. *a)* $\frac{t}{15} + \frac{t}{10} = 1$; $t = 6$ óra; *b)* $\frac{t}{60} + \frac{t}{45} + \frac{t}{90} = 1$; $t = 20$ perc;

c) $\frac{t}{12} - \frac{t}{15} = 1$; $t = 60$ perc;

d) $\frac{t}{10} + \frac{t}{15} - \frac{t}{5} = 1$; $t = -30$ perc. Az üres tartály ilyen feltételek mellett sohasem telik meg. Az eredmény értelmezhető úgy, hogy a tartály az időmérés megkezdése előtt tele volt, és 30 perc alatt kiürült.

e) $\frac{t}{12} + \frac{3}{8} = 1$; $t = 7{,}5$ óra

f) $\frac{t}{40} + \frac{15}{20} = 1$; $t = 10$ perc. Az eredmény nem felel meg a szövegnek.

g) $\frac{t}{16} + \frac{t - 2}{12} = 1$; $t = 8$ óra

5. Összefüggések, függvények, sorozatok

Hozzárendelések, összefüggések, függvények

5.01. *a)* $(-2;2)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$; *b)* $A = \{-2;-1;0;1\}$;
c) $B = \{0;1;2\}$; *d)* igen

5.02. $U \to K$, minden számhoz hozzárendeljük a prímosztóit.
a) $A = \{2;3;4;5;6;7\}$; *b)* $B = \{2;3;5;7\}$; *c)* Nem, a 6-nak két képeleme van.
d) $(2;2)$, $(3;3)$, $(4;2)$, $(5;5)$, $(6;2)$, $(6;3)$, $(7;7)$

5.03. *a)* Minden természetes számhoz hozzárendeljük, hogy hárommal osztva mit ad maradékul. Értelmezési tartomány: $\mathbf{N}$; értékkészlet: $B = \{0;\ 1;\ 2\}$

b) A természetes számokhoz hozzárendeljük a legnagyobb prímosztóját. (Más szabály is megfogalmazható). Értelmezési tartomány: $A = \{$1-nél nagyobb természetes számok$\} = \mathbf{N} \setminus \{0;\ 1\}$. Értékkészlet: $B = \{$prímszámok$\}$

c) $x \to 1$, ha $x > 0$; $x \to 0$, ha $x = 0$; $x \to -1$, ha $x < 0$. Értelmezési tartomány: $\mathbf{R}$; értékkészlet: $B = \{-1;\ 0;\ 1\}$

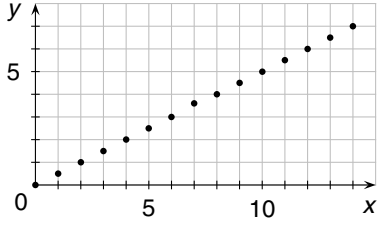
d) Minden valós számhoz hozzárendeljük az egészre kerekített értékét. (Figyeld meg, hogyan jelölhető a grafikon segítségével például az, hogy az 1,5-nek a 2 a kerekített értéke.) Értelmezési tartomány $\mathbf{R}$, értékkészlet $\mathbf{Z}$.

e) Minden pozitív valós számhoz hozzárendeljük a törtrészét. Például 3,56 törtrészét úgy kapjuk, hogy kivonjuk belőle a nála nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat; $3{,}56 - 3 = 0{,}56$. Értelmezési tartomány $\mathbf{R}^+ = \{$pozitív valós számok$\}$. Értékkészlet: $\mathbf{B} = [0;\ 1[$, vagyis a 0-nál nem kisebb, de 1-nél kisebb valós számok.

5.04. Az értelmezési tartomány mind a négy hozzárendelés esetén:
$A = \{$A kettőnél nagyobb természetes számok$\} = \{n \in \mathbf{N} | n > 2\}$
A 2-höz egyik hozzárendelés esetén sem tartozik érték.
a) Az a rendre: –; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 17; 97; $a = n - 3$
b) A b rendre: –; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 18; 98; $b = n - 2$
c) A c rendre: –; 180°; 360°; 540°; 720°; 900°; 1080°; 1260°; 1440°; $17\,640^\circ$; $c = (n-2) \cdot 180^\circ$
d) A d rendre: –; 0; 2; 5; 9; 14; 20; 27; 35; 170; 4850; $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$

5.05. Az értelmezési tartományt A, az értékkészletet B jelöli.

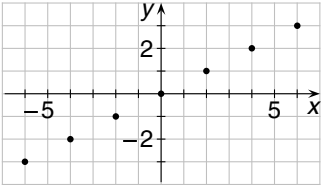
a)



$A = \mathbf{N}$;

$B = \left\{\frac{1}{2} \text{ nemnegatív egésszeresei}\right\}$

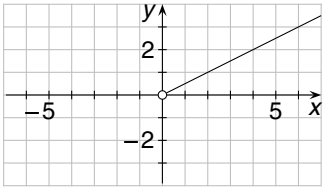
b)



$A = \{$Páros egész számok$\}$;

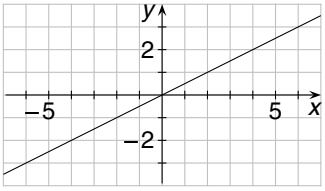
$B = \mathbf{Z}$

c)



$A = \mathbf{R}^+$; $B = \mathbf{R}^+$

d)



$A = \mathbf{R}$; $B = \mathbf{R}$

Egyenes arányosság, lineáris függvény

5.06. *a)* $0{,}8 \cdot 1$; $0{,}8 \cdot 2$; $0{,}8 \cdot 3$; ...; $0{,}8 \cdot 20$; $0{,}8 \cdot x$ (€)

b) $0{,}8 \cdot 1 + 4$; $0{,}8 \cdot 2 + 4$; $0{,}8 \cdot 3 + 4$; ...; $0{,}8 \cdot 20 + 4$; $0{,}8 \cdot x + 4$ (€)

c) $0{,}8 \cdot 1 - 4$; $0{,}8 \cdot 2 - 4$; $0{,}8 \cdot 3 - 4$; ...; $0{,}8 \cdot 20 - 4$; $0{,}8 \cdot x - 4$ (€)

A negatív érték azt jelenti, hogy több pénzt kap vissza, mint amennyibe került az alma.

5.07. A táblázatból hiányzó értékek:

a) 0; 1; 2; 5; 6; 10 (l); $t \mapsto t$;

b) 0; $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{5}{2}$; 3; 5 (l); $t \mapsto \frac{1}{2}t$;

c) 0; 2; 4; 10; 12; 20 (l); $t \mapsto 2t$;

d) 0; $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{5}$; 2; $\frac{12}{5}$; 4 (l); $t \mapsto \frac{2}{5}t$;

e) 0; $\frac{5}{2}$; 5; $\frac{25}{2}$; 15; 25 (l); $t \mapsto \frac{5}{2}t$

5.08. A táblázatból hiányzó értékek:

a) 0; $\frac{3}{4}$; 3; 6; 9 (l); $t \mapsto \frac{3}{4}t$;

b) 2; $\frac{11}{4}$; 5; 8; 11 (l); $t \mapsto \frac{3}{4}t + 2$;

c) 4; $\frac{19}{8}$; 7; 10; 13 (l); $t \mapsto \frac{3}{4}t + 4$

5.09. A táblázatból hiányzó értékek:

a) 9; $\frac{48}{5}$; 12; 15; 18 (l); $t \mapsto \frac{3}{5}t + 9$;

b) 9; $\frac{42}{5}$; 6; 3; 0 (l); $t \mapsto -\frac{3}{5}t + 9$; $t \geqq 0$;

c) 9; 7; 0; 0; 0; $t \mapsto \begin{cases} 9 - 2t\,, & \text{ha } t \leqq 4{,}5 \text{ min} \\ 0\,, & \text{ha } t \geqq 4{,}5 \text{ min} \end{cases}$

d) 9; 9; 9; 9; 9 (l) $t \mapsto 9$; konstans függvény.

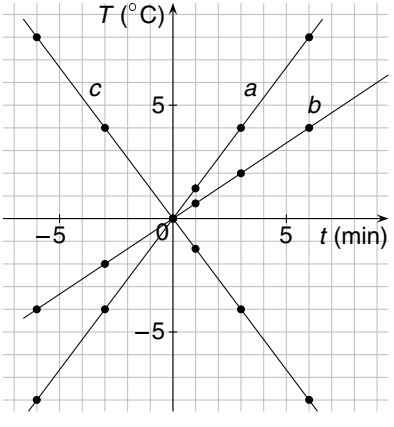
Például a -3 min az óra indítása előtti 3. percet jelenti.

5.10. A táblázatból hiányzó értékek:

a) -8; -4; 0; $\frac{4}{3}$; 4; 8 (°C); $t \mapsto \frac{4}{3}t$

b) -4; -2; 0; $\frac{2}{3}$; 2; 4 (°C); $t \mapsto \frac{2}{3}t$

c) 8; 4; 0; $-\frac{4}{3}$; -4; -8 (°C); $t \mapsto -\frac{4}{3}t$

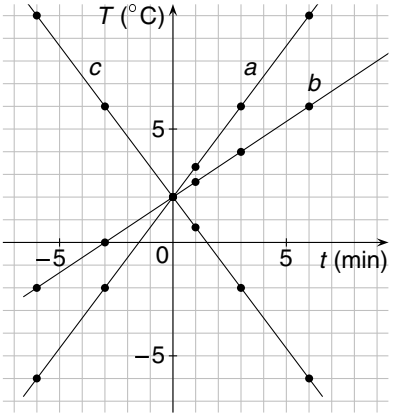


5.11. A táblázatból hiányzó értékek:

a) $-6;\ -2;\ 2;\ \frac{10}{3};\ 6;\ 10\ (^\circ\text{C});\ t \mapsto \frac{4}{3}t+2$

b) $-2;\ 0;\ 2;\ \frac{8}{3};\ 4;\ 6\ (^\circ\text{C});\ t \mapsto \frac{2}{3}t+2$

c) $10;\ 6;\ 2;\ \frac{2}{3};\ -2;\ -6\ (^\circ\text{C});\ t \mapsto -\frac{4}{3}t+2$

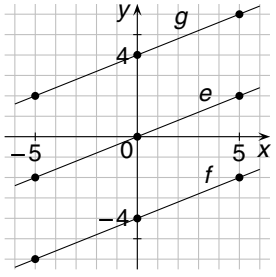


5.12. *a)* $t \mapsto 4{,}5t$; *b)* $t \mapsto -4{,}5t$;

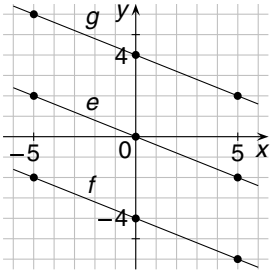
c) $t \mapsto 4{,}5t - 18$; *d)* $t \mapsto -4{,}5t + 9$

5.13. *Például:*

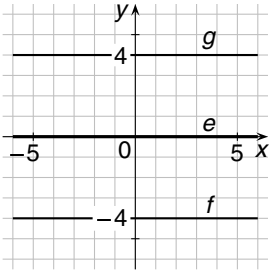
a)



c)



d)



5.14. (1) $a: x \mapsto \frac{1}{3}x$; $b: x \mapsto x$; $c: x \mapsto -2x$; $d: x \mapsto -\frac{3}{4}x$; $e: x \mapsto 0$

(2) $a: x \mapsto \frac{1}{3}x - 3$; $b: x \mapsto x + 2$; $c: x \mapsto -2x + 2$; $d: x \mapsto -\frac{3}{4}x - 3$; $e: x \mapsto -3$

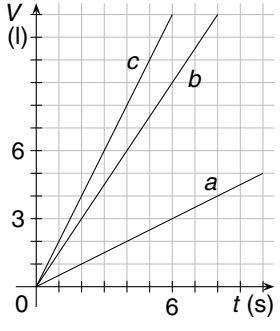
(3) $a: x \mapsto \frac{3}{2}x + 3$; $b: x \mapsto \frac{3}{2}x$; $c: x \mapsto \frac{3}{2}x - 3$; $d: x \mapsto \frac{3}{2}x - 5$; $e: x \mapsto 1$

5.15. A táblázatból hiányzó értékek:

a) 0; 1; 2; 3; 4; 5 (l);

b) 0; 3; 6; 9; 12; 15 (l);

c) 0; 4; 8; 12; 16; 20 (l)



Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal

5.16. *a)* A T rendre: $-4\ ^\circ\text{C};\ -5\ ^\circ\text{C};\ -6\ ^\circ\text{C};\ 2\ ^\circ\text{C};\ 9\ ^\circ\text{C};\ 9\ ^\circ\text{C};\ 5\ ^\circ\text{C};\ 0\ ^\circ\text{C};\ T_{\text{közép}} = 1{,}25\ ^\circ\text{C}$

b) A hőmérséklet 6 órától 13 óra 30 percig emelkedett, 7 és fél órán át. Ezalatt $-6\ ^\circ\text{C}$-ról $+10\ ^\circ\text{C}$-ra, vagyis 16 $^\circ\text{C}$-kal nőtt a hőmérséklet.

5.17. *a)* 6 órakor és 17 órakor; *b)* a szabadban 4 $^\circ\text{C}$-kal melegebb volt;

c) 6 órától 17 óráig; *d)* 7 órától 18 óráig, 10 $^\circ\text{C}$-kal.

5.18. A táblázatból hiányzó adatok rendre: 4; 3; 2; −2; −3; −3; −3; −5

a) $t > 4$ min; *b)* $t = 2$ min

c) 0 min–7 min időtartamban percenként 1 °C-kal,
7 min–12 min időtartamban percenként 0 °C-kal (állandó),
12 min-től kezdődő időtartamban percenként 2 °C-kal.

d) −3 °C-on. Azt keressük, hogy mely intervallumban állandó a hőmérséklet. Ugyanis a folyadék hőmérséklete addig a fagyponton marad, amíg az összes folyékony anyag meg nem szilárdul.

5.19. A táblázatból hiányzó adatok rendre: −20; 10; 35; 35; 27,5; 20; 12,5; −17,5

a) $t > 8$ min

b) Nincs ilyen időpont, az anyag hőmérséklete nem emelkedik 35 °C fölé.

c) 0 min–5,5 min időtartamban percenként 10 °C-kal nőtt a hőmérséklet.
5,5 min–8 min időtartamban percenként 0 °C-kal nőtt, vagyis állandó volt a hőmérséklet.

d) A 8. min-től kezdődő időtartamban percenként 7,5 °C-kal csökkent a hőmérséklet.

5.20. *a)* Folyadék, lehet víz is, hűtését szemlélteti a grafikon. Az időmérés megkezdésekor 80 °C a hőmérséklete. Percenként 10 °C-kal csökken a hőmérséklete, a 8. percben eléri a *fagyáspontot,* a 0 °C-ot. A 20. percre fagy meg az egész mennyiség, eddig az anyag hőmérséklete 0 °C. Ezután tovább csökken a hőmérséklete percenként 15 °C-kal.

b) Ez a grafikon csak magas hegyen (alacsony légnyomáson) szemléltetheti a víz állapotváltozásait. Az időmérés megkezdésekor −20 °C-os jeget melegíteni kezdenek, amely 2,5 min alatt éri el a 0 °C-ot, a jég *olvadáspontját.* A 20. percre olvad meg az egész mennyiség. Ezután egyenletesen, percenként 4 °C-kal emelkedik a víz hőmérséklete. A 40. percben 80 °C-on forrni kezd.

5.21. *a)* A grafikon 5 egységgel „felfelé” tolódik. *b)* A grafikon 7 egységgel „lefelé” tolódik.

5.22. *a)* A grafikon az időtengelytől mérve a hőmérséklettengely irányában kétszeresére nyúlik.

b) A grafikon az időtengelytől mérve a hőmérséklettengely irányában felényire zsugorodik.

5.23. *a)*

0 min–3 min	0 °C-ról 50 °C-ra melegszik;
3 min–5 min	50 °C-on megolvad;
5 min–9 min	50 °C-ról 150 °C-ra melegszik;
9 min–12 min	150 °C-on forr;
12 min–16 min	150 °C-ról 50 °C-ra lehűl;
16 min–18 min	50 °C-on megfagy;
18 min–24 min	tovább hűl az anyag.

b)

0 h–3 h	0 °C-ról 2 °C-ra melegszik;
3 h–5 h	2 °C-on állandó;
5 h–9 h	2 °C-ról 6 °C-ra melegszik;
9 h–12 h	6 °C-on állandó;
12 h–16 h	6 °C-ról 2 °C-ra lehűl;
16 h–18 h	2 °C-on állandó;
18 h–24 h	2 °C-ról −2 °C-ra hűl a levegő.

c) 0 s–3 s a kezdőpontból 2 cm-re felfelé mászik;
3 s–5 s áll;
5 s–9 s 2 cm-ről 6 cm-re mászik;
9 s–12 s a kezdőpont fölött 6 cm-rel megáll;
12 s–16 s 6 cm-ről 2 cm-re lefelé mászik;
16 s–18 s megáll a kezdőpont fölött 2 cm-rel;
18 s–24 s 2 cm-rel a kezdőpont alá mászik a katicabogár.

5.24.

t (s)	0	2	4	6	8	10
y_a (m)	0	2	4	6	8	10
y_b (m)	15	12	9	6	3	0

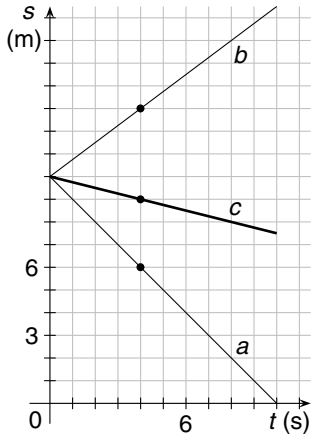
a) Anna 0 m-re, Béla 15 m-re.

b) Béla közeledik a megfigyelőponthoz, Anna távolodik attól.

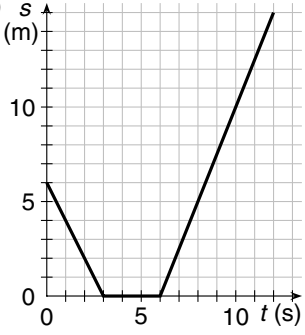
c) Anna 1 s alatt 1 métert, Béla 1 s alatt 1,5 m-t tesz meg.

d) Az óra indítása után 6 s múlva, a megfigyelőponttól 6 m távolságra találkoznak.

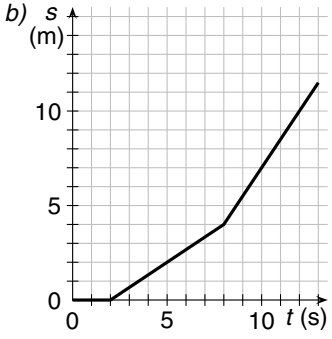
5.25.



5.26. *a)*



b)



5.27. *a)* A 10. perctől a 16. percig fokozatosan nő a sebessége, itt siklott lefelé.

b) Az 1. perc végétől a 10. percig nagyon lecsökken a sebessége, felfelé kapaszkodik.

c) A 16. perc végétől csökken a sebessége, de jó tempóban halad, valószínűleg vízszintes terepen. A 25. percben megáll.

5.28. Az *A* modell elmozdulásával ellentétes irányú elmozdulást negatív mérőszámmal jellemezzük.

a) Az *A* modell:
0 min–7 min: 120 m-re eltávolodik a kiindulási ponttól;
7 min–10 min: áll a hajómodell;
10 min–17 min: 120 m távolságból 80 m-re közelít;
17 min: felgyorsít;
17 min–20 min: visszatér a kiindulási pontba.

b) Az időtengelyhez viszonyítva az úttengely irányában másfélszeresére nyúlik a grafikon.

c) A grafikon az időtengelyhez viszonyítva az úttengely irányában az eredeti grafikonnal ellentétes irányban háromnegyedére zsugorodik.

d) Az *A* modell grafikonját tükrözzük az időtengelyre.

A táblázatok hiányzó értékei rendre:

a) 0; 60; 120; 80; 0; *b)* 0; 90; 180; 120; 0;

c) 0; −45; −90; −60; 0; *d)* 0; −60; −120; −80; 0

e) Az *A* modell grafikonját eltoljuk jobbra 5 egységgel. A táblázatban 5-tel nagyobb időértékeknél ugyanazokat az elmozdulás értékeket kapjuk, mint az *A* modell táblázatában.

5.29. Egyéni megoldások.

5.30. A dízelmotornak nagyobb a forgatónyomatéka, mint a benzinmotornak. Mindkét motor maximális teljesítménye 74 kW(= $1{,}36 \cdot 74 \approx 100$ LE). A dízelmotornak viszonylag alacsony fordulatszámon már nagy a forgatónyomatéka. A dízelmotor percenként 4000-es fordulatszámon nyújtja a maximális teljesítményt, a benzinmotor a percenkénti 5500-as fordulatszámon.

Sorozatok

5.31. *a)* ...; 11; 13; 15; 17; 19. Számtani sorozat. A különbségsorozat minden eleme 2.

b) −5; −10; −15; −20; −25. Számtani sorozat. A különbségsorozat minden eleme −5.

c) A különbségsorozat a természetes számok sorozata. ...; 12; 17; 23; 30; 38.

d) A különbségsorozat elemei váltakozva −10; 10; ...; −5; 5; −5; 5; −5

e) A négyzetszámok sorozata, a különbségsorozat a páratlan természetes számok sorozata. ...; 25; 36; 49; 64; 81.

f) ...; −14; −18; −22; −26; −30. Számtani sorozat. A különbségsorozat minden eleme −4.

5.32. Az *e)* feladatban adott sorozat kivételével mértani sorozatok. A szomszédos elemek hányadosát jelölje q. (Az elemet az előtte levővel osztjuk.)

a) 96; 192; 384; 768; 1536; $q = 2$

b) $3;\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{8};\ \frac{3}{16};\ q = \frac{1}{2}$

c) −64; 128; −256; 512; −1024; $q = -2$

d) 0,000 01; 0,000 000 1; 0,000 000 001; 0,000 000 000 01; 0,000 000 000 000 1; $q = 0{,}01$. Áttekinthetőbb alakban írva a sorozat első 10 eleme:

$10^5;\ 10^3;\ 10^1;\ 10^{-1};\ 10^{-3};\ 10^{-5};\ 10^{-7};\ 10^{-9};\ 10^{-11};\ 10^{-13};\ q = 10^{-2}$

e) $1 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\cdot\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\cdot\frac{4}{5}} \frac{1}{5} \xrightarrow{\cdot\frac{5}{6}} \frac{1}{6} \xrightarrow{\cdot\frac{6}{7}} \frac{1}{7} \xrightarrow{\cdot\frac{7}{8}} \frac{1}{8} \xrightarrow{\cdot\frac{8}{9}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\cdot\frac{9}{10}} \frac{1}{10}$

Nem mértani sorozat.

f) $3;\ \frac{9}{2};\ \frac{27}{4};\ \frac{81}{8};\ \frac{243}{16};\ q = \frac{3}{2}$

5.33. *a)* 11; 18; 27; 38; *b)* 7; 10; 11; 14; *c)* 15; 42; 123; 366;

d) 15; 45; 157,5; 630; *e)* 9; 18; 27; 54; *f)* 18; 108; 1944; 209 952;

g) 10; 17; 28; 46

5.34. Elvileg végtelen sok megoldás létezik. Például:
(1) $a_n = 5^{n-1}$; $a_4 = 125$; $a_5 = 625$; (2) 1; 5; 25; 5; 1; 5; 25; 5; 1; ...
(3) A különbségsorozat elemei 16-tal növekednek: $a_4 = 61$; $a_5 = 113$

5.35. A hiányzó elemek rendre:

a) 7; 9; 11; 13; 15; 25; 45; 65; 105; 205;

b) 48; 46; 44; 42; 40; 30; 10; -10; -50; -150;

c) 30; 15; 10; 7,5; 6; 3; 1,5; 1; 0,6; 0,3;

d) 0; 1; 4; 9; 16; 81; 361; 841; 2401; 9801

5.36. *a)* $d = 58 - 50 = 8$; $a_3 = 66$; $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 50 + 9 \cdot 8 = 122$; $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 860$

b) $a_5 = a_1 + 4d$; $d = -4$; $a_2 = 56$; $a_3 = 52$; $a_4 = 48$; $a_{10} = 24$; $S_{10} = 420$

c) Az a_5-től szimmetrikusan elhelyezkedő két elem számtani átlaga mindig a_5.

Például: $\frac{a_2 + a_8}{2} = \frac{(a_5 - 3d) + (a_5 + 3d)}{2} = \frac{2a_5}{2} = a_5$

d) $a_1 = 5$ (€); $d = 2$ (€); $a_{31} = a_1 + 30 \cdot d = 65$ (€); $S_{31} = 1085$ (€)

5.37. *a)* $a_n = 25$; $S_n = 168$; *b)* $a_n = -6$; $S_n = 9$; *c)* $d = 3$; $S_n = 70$;
d) $d = 0$; $S_n = 54$; *e)* $d = -5$; $S_n = -21$; *f)* $a_1 = 5$; $S_n = 275$;
g) $a_1 = 64$; $S_n = 288$; *h)* $d = 1$; $a_n = 13$; *i)* $a_1 = 9$; $a_n = 1$

5.38. *a)* $q = 10 : 5 = 2$; $a_3 = 20$; $a_{10} = a_1 \cdot 2^9 (= a_3 \cdot 2^7) = 2560$; $S_{10} = 5 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 5115$

b) $a_3 = a_1 \cdot q^2$; $q = 3$; $a_2 = 12$; $a_4 = 108$; $a_5 = 324$

c) $a_2 = -\frac{9}{32}$; $a_3 = \frac{3}{16}$; $a_4 = -\frac{1}{8}$; $a_5 = \frac{1}{12}$

d) $q = \frac{1}{3}$; $a_2 = 135$; $a_8 = 405 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 5 \cdot 3^4 \cdot 3^{-7} = 5 \cdot 3^{-3} = \frac{5}{27}$

e) Ha az a_4-től szimmetrikusan elhelyezkedő két elem szorzatából négyzetgyököt vonunk, mindig az a_4-et kapjuk. Például: $\sqrt{a_2 \cdot a_6} = \sqrt{\frac{a_4}{q^2} \cdot a_4 \cdot q^2} = \sqrt{a_4^2} = a_4$

f) Elvileg végtelen sok megoldása van a feladatnak. Például:
(1) $a_n = 2 \cdot n^2$; $a_3 = 18$; $a_4 = 32$; (2) $a_n = 3^n - 1$; $a_3 = 26$; $a_4 = 80$;
(3) $a_n = 4^n : 2$; $a_3 = 32$; $a_4 = 128$; (4) $a_n = n \cdot 2^n$; $a_3 = 24$; $a_4 = 64$;
(5) Számtani sorozat: $a_n = 2 + (n - 1)6 = 6n - 4$; $a_3 = 14$; $a_4 = 20$;
(6) Mértani sorozat: $a_4 = 2 \cdot 4^{n-1}$; $a_3 = 32$; $a_4 = 128$

5.39. *a)* $a_n = 40$; $S_n = 75$; *b)* $a_n = 13$; $S_n = 624$; *c)* $a_n = -128$; $S_n = -252$;
d) $a_n = -17$; $S_n = 0$; *e)* $a_n = 81$; $S_n = 211$; *f)* nem értelmezhető;
g) $n = 8$; $S_n = 765$; *h)* $a_1 = 2$; $S_n = 682$; *i)* nem értelmezhető

5.40. *a)* $15\,000 \cdot 1{,}1^4 \approx 21\,960$; *b)* $2500 \cdot 0{,}9^5 \approx 1476$ (€); *c)* $2500 - 5 \cdot 250$ €

5.41. Felírjuk az egyes tulajdonságokhoz tartozó sorszámokat, és megkeressük a közöseket.
Egyforma a tüskéje: 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; ...
Ugyanarra fordul: 1; 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; 37; ...
Ugyanaz a zsákmánya: 1; 7; 13; 19; 25; 31; 37; ...

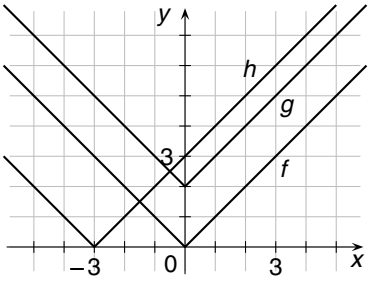
a) 13.; 25.; 37.; .... $a_n = 1 + 12(n - 1)$, ahol $n \in \mathbf{N}^+$.

b) A 10. sün tüskéje az elsőével, állása a másodikával, zsákmánya a negyedikével egyezik meg.
[3 , 4 , 6] = 12, ezért a sorozatban 12 elemű ciklusok ismétlődnek.
A 100 és az 1000 12-vel osztva 4-et ad maradékul. Ezért a 100. és az 1000. elem olyan, mint a negyedik.

Nemlineáris függvények

5.42. *a)*

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3
$g(x)$	6	5	4	3	2	3	4	5
$h(x)$	1	0	1	2	3	4	5	6

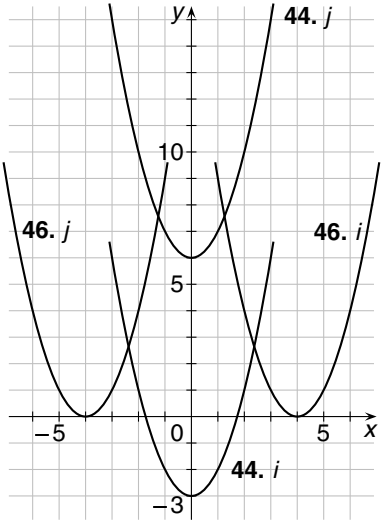


b) Az $f(x) = |x|$ grafikonja 2 egységgel „lefelé” tolódik [$g(x)$], illetve 3 egységgel „jobbra” tolódik [$h(x)$].

5.43. *a)*

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	12	7	4	3	4	7	12
$h(x)$	−1	−6	−9	−10	−9	−6	−1

b) $g(x) = x^2 + 3$; $h(x) = x^2 - 10$



5.44.

$i(x)$	6	1	−2	−3	−2	1	6
$j(x)$	15	10	7	6	7	10	15

5.45. *a)*

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	25	16	9	4	1	0	1
$h(x)$	1	0	1	4	9	16	25

b) $g\colon x \mapsto (x-2)^2$; $h\colon x \mapsto (x+2)^2$

5.46.

$i(x)$	49	36	25	16	9	4	1
$j(x)$	1	4	9	16	25	36	49

5.47.

x (cm)	0	1	2	3	4
a) m (g)	0	1	4	9	16
b) m (g)	0	≈ 0,8	≈ 3,1	≈ 7,1	≈ 12,6

5.48.

x (cm)	0,5	1	2	3	4	**6**	9	12	18	36
y (m)	72	36	18	12	9	**6**	4	3	2	1
$x + y$ (m)	72,5	37	20	15	13	**12**	13	15	20	37

a) Fordított arányosság

b) A négyzet alakú terület elkerítéséhez kell a legrövidebb kerítés.

5.49. *a)* $24 - 1{,}5t = 13{,}5$ $t = 7$ (s) | $24 - 1{,}5t < 12$ $t > 8$ (s) | $24 - 1{,}5t = 12$ $t = 8$ (s)

5.50. *a)* $x = -3$; | $x \geqq -3$; | $x < -3$

b) $x = -4$; | $x < -4$; | $x \geqq -4$

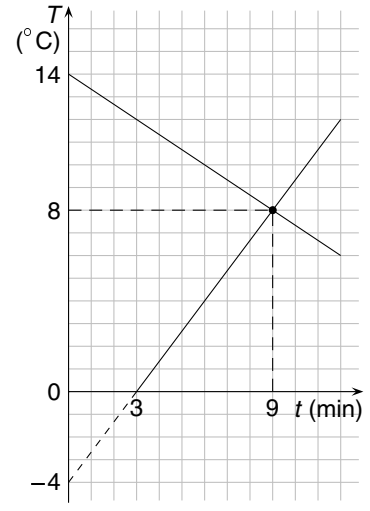
c) $x = 10$; | $x > 10$; | $x \leqq 10$

d) Nincs megoldás; | azonos egyenlőtlenség; | nincs megoldás.

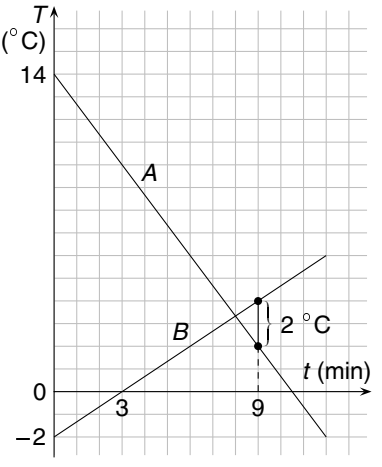
5.51. *a)* $20 - \frac{3}{2}t = 5 + t$; $t = 6$ min;

b) $14 - \frac{2}{3}t = \frac{4}{3} \cdot (t - 3)$ vagy $14 - \frac{2}{3}t = \frac{4}{3}t - 4$ $t = 9$ min; $T = 8\ ^\circ\text{C}$

c)



d)



$T_A \underset{+2\ ^\circ\text{C}}{<} T_B$; $T_A + 2\ ^\circ\text{C} = T_B$

$\left(14 - \frac{4}{3}t\right) + 2 = -2 + \frac{2}{3}t$

d) $t = 8$ min; $T = 0\ ^\circ\text{C}$

e) Két megoldás van!

5.52. *a)* $9 + \frac{3}{4}t = \frac{3}{2}t$; $t = 12$ min; $s = 18$ km

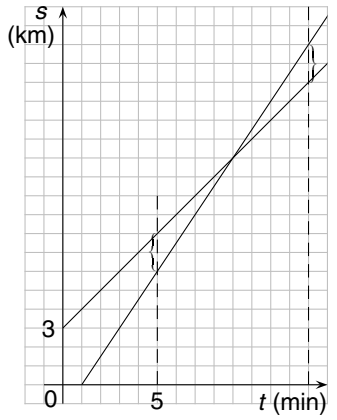
b) $15 - 2t = -10 + \frac{1}{2}t$; $t = 10$ min; $s = -5$ km

A tehergépkocsi indulási pontja felé 5 km távolságra találkoznak.

c) $20 - 2t < \frac{1}{2}t$; $t > 8$ min

d) Két megoldás van!

d)



6. Síkidomok, felületek, testek

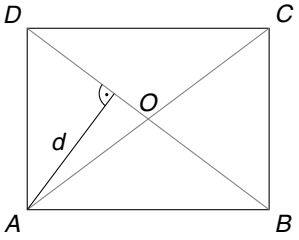
Térelemek, szögek

6.01. *a)* Az A pont 4 cm-re van a BC oldaltól.

b) Az AC távolság 5 cm.

c) Az A pontból a BD egyenesre merőlegesen húzott d szakasz hossza a keresett távolság. A d hosszúsága számolással is meghatározható. Számítsuk ki az $ABD\triangle$ területét kétféleképpen:

$$T = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{5 \cdot d}{2};\quad d = 2{,}4 \text{ cm}$$



d) $ABD\sphericalangle \approx 37^\circ$; $BDC\sphericalangle = ABD\sphericalangle$; $AOD\sphericalangle = 2 \cdot ABD\sphericalangle \approx$ $\approx 74^\circ$; $DOC\sphericalangle = 180^\circ - AOD\sphericalangle = 106^\circ$

6.02. *a)* (1) 5 cm; (2) 3 cm; (3) 2 cm

b) (1) $AD = FG = 3$ cm; (2) $AH = FC$; (3) $AC = FH$; (4) $AG = FD$

c) (1) B és C; (2) A és D

d) AB, BC, CD, DA élek

6.03. *a)* (1) AC, AD, AE; (2) AF, (3) AG

b) (1) CH, DG; (2) AG, BF, CE; (3) HF, AE, BD

c) (1) AC, HD, GE; (2) HC, GD; (3) HB, GC, FD

6.04. *a)* $AOB\sphericalangle = 360^\circ : 8 = 45^\circ$; *b)* $OBA\sphericalangle = (180^\circ - 45^\circ) : 2 = 67{,}5^\circ$;

c) $ABC\sphericalangle = 2 \cdot OBA\sphericalangle = 135^\circ$ vagy $ABC\sphericalangle = 6 \cdot 180^\circ : 8 = 135^\circ$;

d) A $BED\triangle$ belső szögeinek összege 180°.

$BCD\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 135^\circ$; $CBD\sphericalangle = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 22{,}5^\circ$;

$ABD\sphericalangle = ABC\sphericalangle - CBD\sphericalangle = 135^\circ - 22{,}5^\circ = 112{,}5^\circ$;

e) $ABG\sphericalangle = 180^\circ - BAH\sphericalangle = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

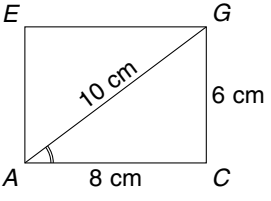
6.05. *a)* A négyzet átlói merőlegesek egymásra, ezért a keresett távolság az átló hosszának fele: 4 cm.

b) A keresett szög megegyezik például a $CAB\sphericalangle$-gel, 45°.

c) Az $ACGE$ átlósík merőleges az alaplapra.

d) A GA átló alaplapra eső merőleges vetülete AC.

$GAC\sphericalangle \approx 37^\circ$



6.06. *a)* 11 óra 45 perc; *b)* 12 óra 15 perc; *c)* 11 óra 55 perc;

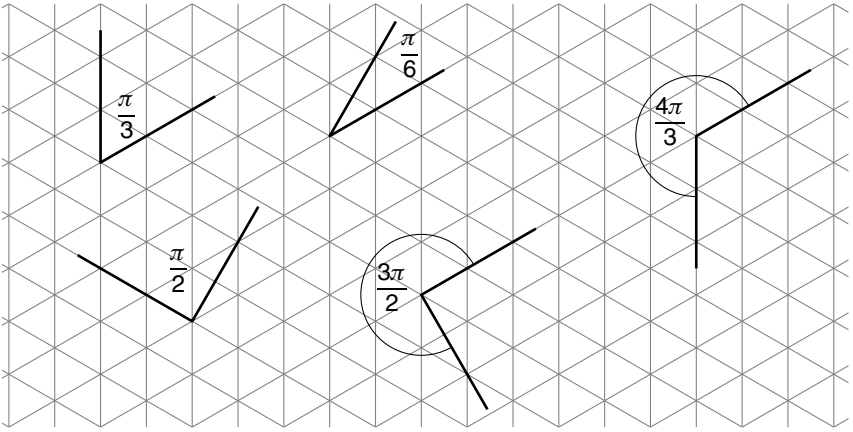
d) 12 óra 55 perc; *e)* 11 óra 40 perc; *f)* 11 óra 30 perc;

g) 12 óra 30 perc; *h)* 13 óra; *i)* 13 óra 30 perc;

j) 10 óra

6.07. *a)* $+50^\circ$; *b)* -50°; *c)* $+50^\circ$; *d)* $+90^\circ$

6.08.



6.09. A szögek rendre: $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$; $\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$; $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$; $\frac{11\pi}{6} = 330^\circ$

6.10. *a)* $\alpha = 300'$; $\beta = 5400'$; $\gamma = 30'$; *b)* $\alpha = 3^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 0{,}2^\circ$

6.11. Például: 15°-ot kapunk, ha a 60°-os szöget, majd a 30°-os szöget megfelezzük; 225°-ot kapunk, ha az egyenesszöghöz hozzámérjük a 30°-os és a 15°-os szöget.

6.12. *a)* Csúcsszögek: ε és η; ζ és ϑ
Váltószögek: ε és η; ζ és ϑ; 1. és 5.; 2. és 6.; 3. és 7.; 4. és 8.; α és γ; β és δ
Mellékszögek: ε és ζ; ζ és η; η és ϑ; ϑ és ε
Társszögek: ε és ζ; ζ és η; η és ϑ; ϑ és ε; α és β; β és γ; γ és δ; δ és α

b) Pótszögek: α és ε; α és β; ε és φ; β és φ
Mellékszögek, társszögek: γ és δ
Merőleges szárú szögek: α és φ; β és ε

Vektorok

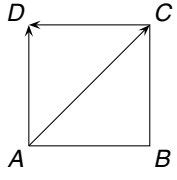
6.13. *a)* $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$

b) $-\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$; $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA}$

c) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD}$;
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$; stb.

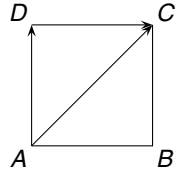
6.14. *a)* $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$; $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c}$; $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{a}$; *b)* $\mathbf{f} + \mathbf{d} = \mathbf{e}$; $\mathbf{e} - \mathbf{f} = \mathbf{d}$; $\mathbf{e} - \mathbf{d} = \mathbf{f}$;
c) $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{i}$; $\mathbf{i} - \mathbf{g} = \mathbf{h}$; $\mathbf{i} - \mathbf{h} = \mathbf{g}$

6.15. *a)*



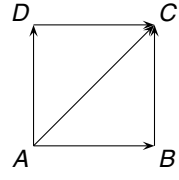
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$;

b)



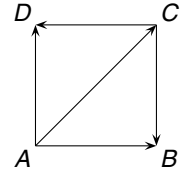
$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$;

c)



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
vagy
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$;

d)



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
vagy
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$

6.16. *a)* A vektor végpontja 8-cal nagyobb számnál van, mint a kezdőpontja. Pl.: $\overrightarrow{CD}$ (7; 15)

b) A vektor végpontja 2-vel nagyobb számnál van, mint a kezdőpontja. Pl.: $\overrightarrow{EF}$ (10; 12)

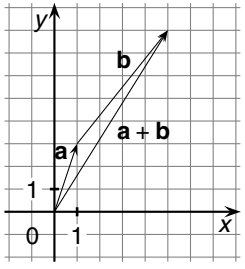
c) A vektor kezdőpontja 8-cal kisebb számnál van, mint a kezdőpontja. Pl.: $\overrightarrow{GH}$ (4; –4)

6.17. *Például:*

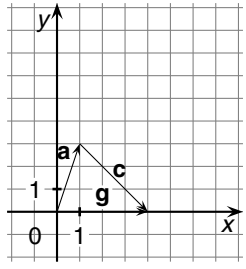
a) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$;
$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$;
$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{AE}$

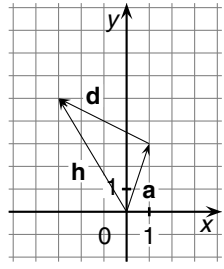
6.18. *a)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{f}(5; 8)$;



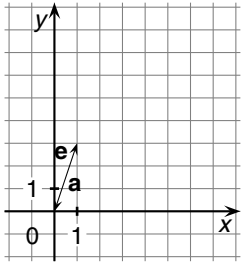
b) $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{g}(4; 0)$;



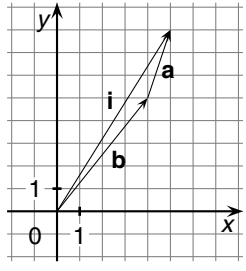
c) $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{h}(-3; 5)$;



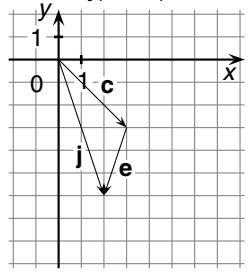
d) $\mathbf{a} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$;



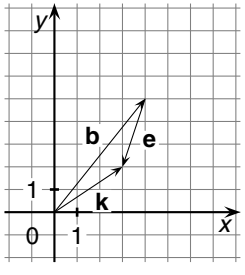
e) $\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{i}(5; 8)$;



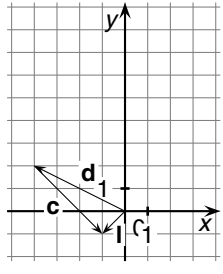
f) $\mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{j}(2; -6)$;



g) $\mathbf{b} + \mathbf{e} = \mathbf{k}(3; 2)$;



h) $\mathbf{d} + \mathbf{c} = \mathbf{l}(-1; -1)$



6.19. Például a számegyenesen a 6-os pontból a 8-as pontba mutató vektort most így jelöljük: $\overrightarrow{6; 8}$. Lehetséges megoldás:

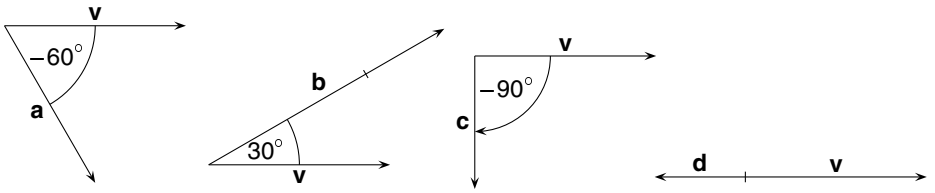
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{6; 8} + \overrightarrow{10; 16}$;

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{20; 10} - \overrightarrow{8; 6}$;

c) $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{10; 20} + \overrightarrow{30; 36}}{2}$;

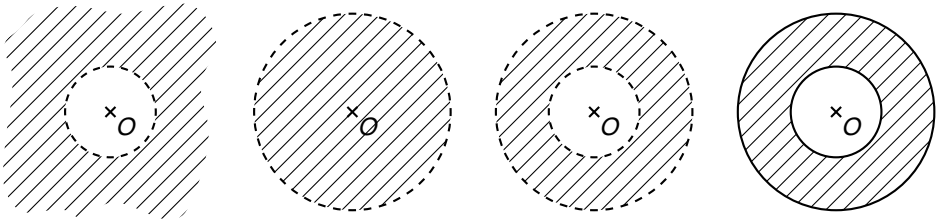
d) $\overrightarrow{AB} = \left[\overrightarrow{0; 1} + \overrightarrow{0; 3}\right] \cdot 2$

6.20. *a)* *b)* *c)* *d)*

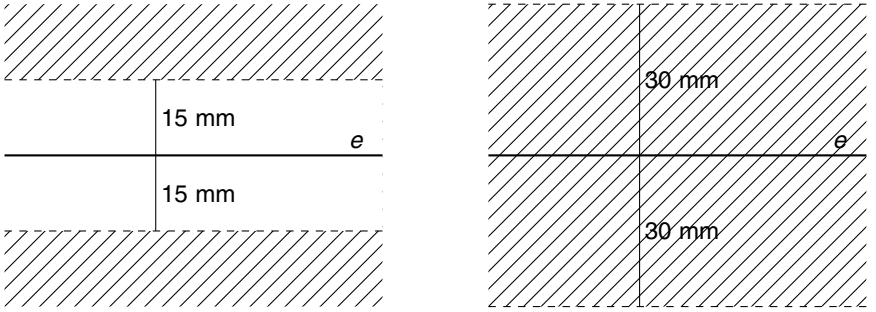


Adott tulajdonságú ponthalmazok

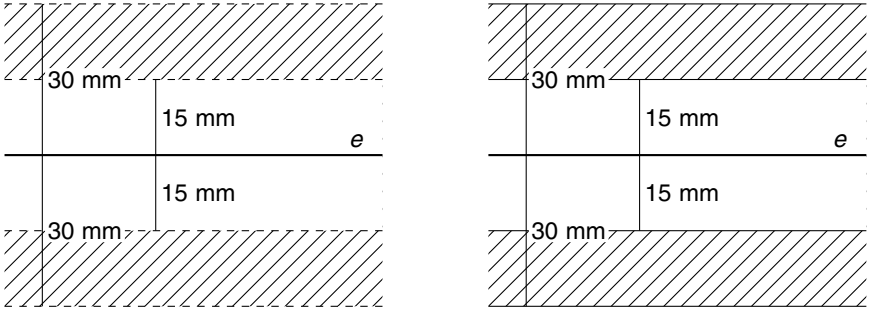
6.21. *a)* *b)* *c)* *d)*



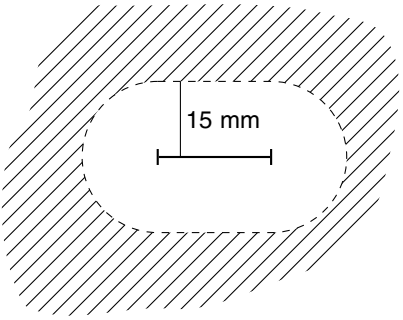
6.22. *a)* *b)*



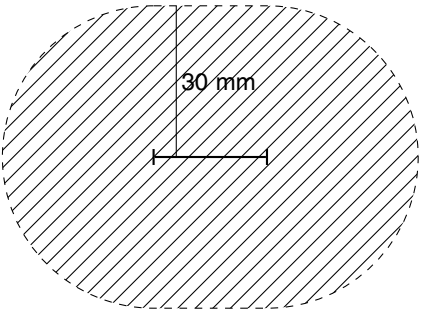
c) *d)*



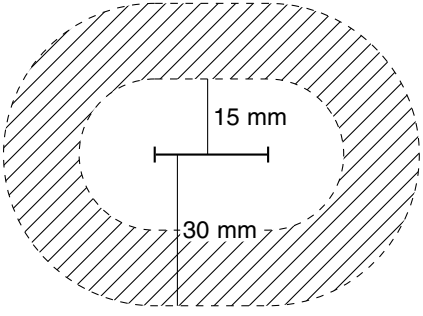
6.23. *a)*



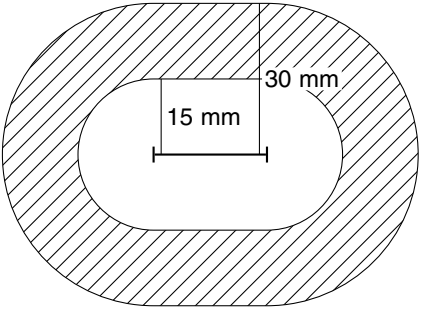
b)



c)

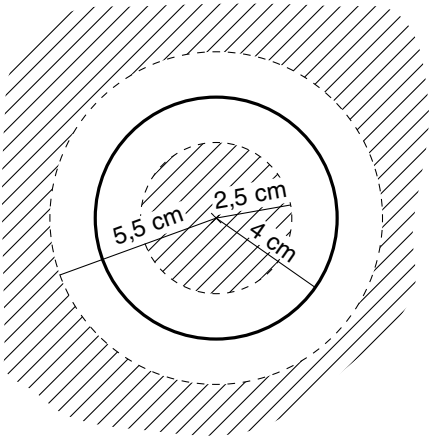


d)

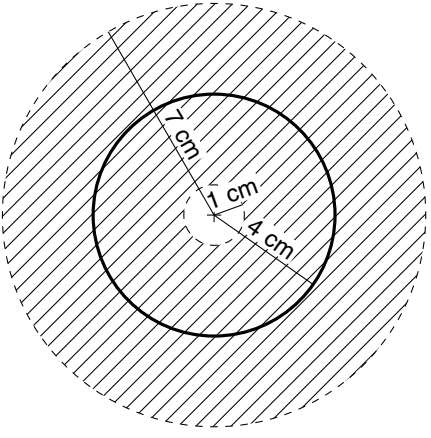


6.24. A megoldás kulcsa, hogy a 4 cm sugarú körvonaltól 15 mm-re lévő pontok halmaza a 2,5 cm sugarú, illetve az 5,5 cm sugarú körvonal.

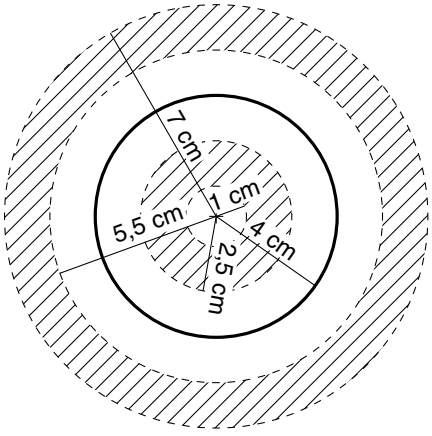
a)



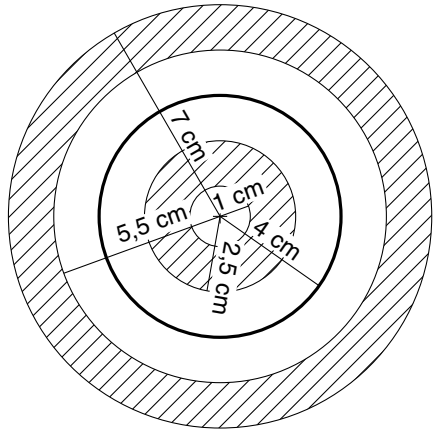
b)



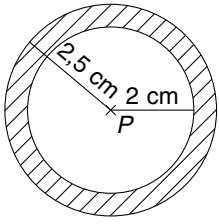
c)



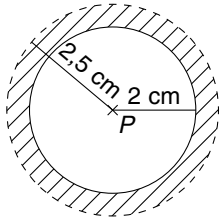
d)



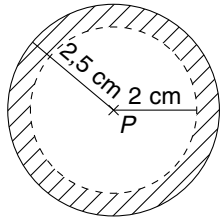
6.25. a)



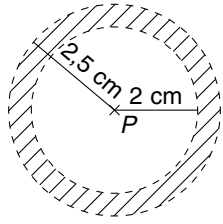
b)



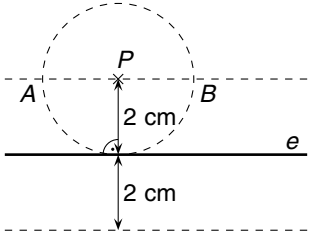
c)



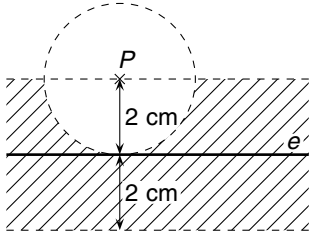
d)



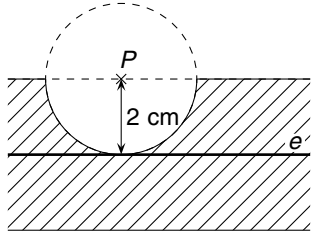
6.26. a)



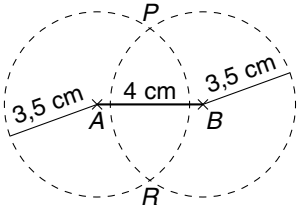
b)



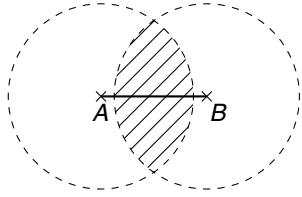
c)



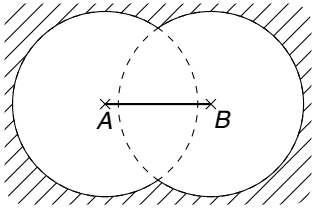
6.27. a)



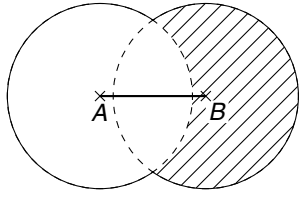
b)



c)



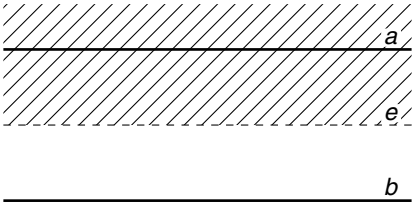
d)



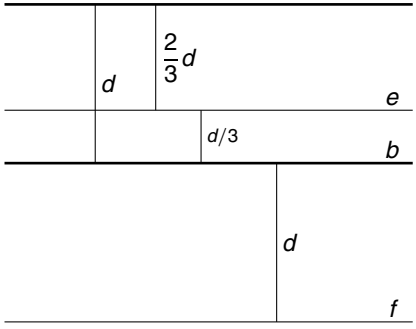
6.28. *a)*



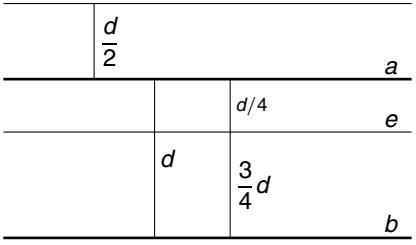
b)



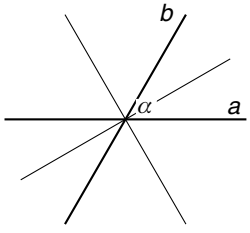
c)



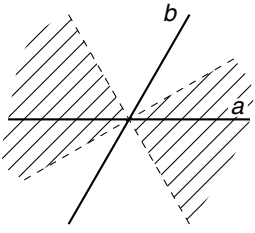
d)



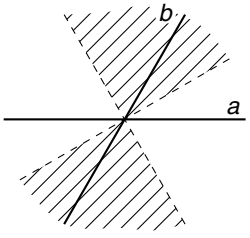
6.29. *a)*



b)

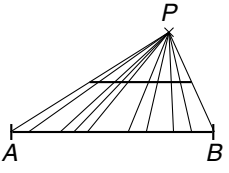


c)



6.30. Ha az *AB* szakasz minden pontját összekötjük a *P* ponttal, és megfelezzük ezeket az összekötő szakaszokat, akkor a felezőpontok az *AB*-vel párhuzamos, a *P*-től feleakkora távolságra levő szakasz pontjai lesznek. *Például:*

a)



Síkidomok, sokszögek

6.31. *a)* Konvex; *b)* konkáv; *c)* konvex; *d)* konkáv

6.32. *a)* Ha a körvonal osztópontjai közül választunk négyet, akkor konvex négyszöget kapunk.
b) Ha az *O* pont is a kiválasztott pontok között van, akkor kaphatunk konkáv négyszöget. Például *OHBE* négyszög ilyen.
c) Húrnégyszög például: *AEFH*; *ADFG*; *BDFH*; *BCFG*
Deltoid például: *OBCD*; *OBGD*
d) A téglalapok ilyenek, például: *BDFH*; *BCFG*

6.33. *a)* Ha a körvonal osztópontjai közül választunk ötöt, akkor konvex ötszöget kapunk.
b) Ha az *O* pont is a kiválasztott pontok között van, akkor kaphatunk konkáv ötszöget. Például *OBCEH* ötszög ilyen.
c) Például *BCDEF*; *BDFOH* ötszög tengelyesen szimmetrikus.
d) Nincs középpontosan szimmetrikus ötszög.

6.34. *a)* A konkáv hatszög ilyen. *b)* A konvex hatszög ilyen.

6.35. *a)* (1) Ha az ötszög AD oldala párhuzamos az OB oldallal, akkor a D csúcs a $(3;6)$ pont. A C csúcs lehet a $(4;5)$, $(5;4)$, $(6;3)$, $(7;2)$ vagy $(8;1)$ pont.

(2) Ha az ötszög BC oldala párhuzamos az OA oldallal, akkor a C csúcs a $(6;3)$ pont. A D csúcs az $(1;8)$, $(2;7)$, $(3;6)$, $(4;5)$ vagy $(5;4)$ pont lehet.

(3) Ha az ötszög AD oldala párhuzamos a BC oldallal, akkor a D csúcs az $(1;8)$ vagy $(2;7)$ pont, és a C csúcs a $(7;2)$ vagy $(8;1)$ pont.

b) $C(6;3)$ vagy $D(3;6)$

c) $C(8;1)$ és $D(1;8)$; $C(7;2)$ és $D(2;7)$; $C(6;3)$ és $D(3;6)$; $C(5;4)$ és $D(4;5)$

6.36. *a)* $A(0;4)$; *b)* $D(4;0)$; *c)* $B(4;8)$; *d)* $C(8;4)$;

e) $A\sphericalangle = 135^\circ$; $O\sphericalangle = 90^\circ$; $D\sphericalangle = 135^\circ$; $C\sphericalangle = 90^\circ$; $B\sphericalangle = 90^\circ$
A belső szögek összege 540°.

6.37.

	Háromszög	Négyszög	Ötszög	Hatszög	Hétszög	Húszszög
a)	0	1	2	3	4	17
b)	1	2	3	4	5	18
c)	180°	360°	540°	720°	900°	3240°
d)	0	2	5	9	14	170

6.38. *a)* 13 oldalú a sokszög; *b)* 12 oldalú a sokszög;

c) 12 oldalú a sokszög; *d)* 10 oldalú a sokszög.

6.39. *a)* 3 szimmetriatengelye van; *b)* 90°; 150°; 90°; 150°; 90°; 150°.

c) Középpontosan nem szimmetrikus.

6.40. *a)* Tengelyesen szimmetrikus, szimmetriatengelye az EB egyenes.

b) Középpontosan nem szimmetrikus.

c) Belső szögei: 60°; 210°; 60°; 165°; 60°; 165°

Háromszögek

6.41. *a)* A kör középpontja a háromszög belsejében van. Például: $AEH\triangle$; $ACH\triangle$ ilyen.

b) A kör középpontja az átfogó felezőpontja. Például: $AGH\triangle$; $AGI\triangle$; $AGJ\triangle$ ilyen. A feltételnek megfelelő többi háromszög ezek valamelyikével egybevágó.

c) A kör középpontja a háromszögön kívül van. Például: $AHI\triangle$; $AHJ\triangle$; $AIJ\triangle$; $AIK\triangle$; $AJK\triangle$; $AKL\triangle$ ilyen.

d) Például: $AIK\triangle$; $AKL\triangle$, illetve az ezek valamelyikével egybevágó háromszögek ilyenek.

e) Például $AEI\triangle$.

6.42. Ügyeljünk a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésére.

a)

a	3	4	5
b	7	6	6
c	8	8	7
K	18	18	18

$a < b < c$; $a + b > c$

b)

a	2	4	6	8
b	8	7	6	5
c	8	7	6	5
K	18	18	18	18

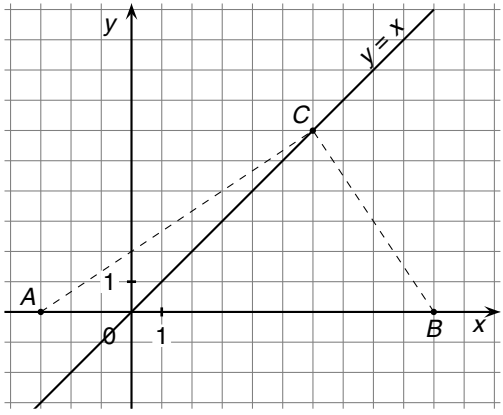
$b = c$; $b + c > a$

6.43. *a)* $C(-3;-3)$; $C(10;10)$; $C(6;6)$, ez látható az ábrán.

b) $C(11;11)$; $C(12;12)$; ...
$C(5;5)$; $C(4;4)$; ... $C(-2;-2)$;
$C(-4;-4)$; $C(-5;-5)$; ...

c) $C(7;7)$; $C(8;8)$; $C(9;9)$

A $C(0;0)$ nem megoldása egyik feladatnak sem.



6.44. Csak ezek a szögek lehetnek egy háromszög belső szögei:

b) $40^\circ + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

6.45. Csak ezek a szögek lehetnek egy háromszög külső szögei: *a)*

6.46. A háromszög belső szögeinek összege 180°. A háromszög egy külső szögének nagysága megegyezik a két nem mellette lévő belső szög összegével.

a) $\beta = 35^\circ$; $\alpha = 65^\circ$;
b) $\gamma = 65^\circ$; $\delta = 155^\circ$;
c) $\alpha = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$; $\varepsilon = 105^\circ$;
d) $\beta = 30^\circ$; $\varepsilon = 60^\circ$; $\delta = 15^\circ$;
e) $\beta = \delta = 70^\circ$; $\gamma = 20^\circ$; $\varepsilon = 160^\circ$;
f) $\alpha = 70^\circ$; $\delta = 20^\circ$; $\gamma = 50^\circ$; $\varepsilon = 110^\circ$

6.47. *a)* $1 + 2 + 2 = 5$; $180^\circ : 5 = 36^\circ$, a szögek $1 \cdot 36^\circ$; $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$; $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$

b) 30°; 60°; 90°; *c)* 48°; 60°; 72°; *d)* 50°; 80°; 50°

6.48. *a)* $3 + 5 \not> 8$, nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

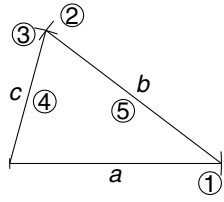
b) Az adott szakaszok lehetnek egy háromszög oldalai.

c) $2 + 5 \not> 9$, nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

d) Teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

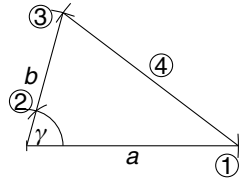
6.49. *a)* (1) Teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, a háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

(2) $b + c \not> a$, nem szerkeszthető meg.



b) (1) $\gamma < 180^\circ$, egyértelműen megszerkeszthető.

(2) $\gamma > 180^\circ$, nem szerkeszthető meg.

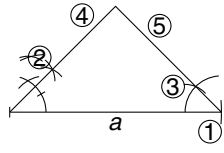


c) (1) $\beta + \gamma < 180^\circ$, egyértelműen megszerkeszthető.

(2) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 45^\circ$

(3) $\beta + \gamma > 180^\circ$, nem szerkeszthető meg.

(4) Egyértelműen megszerkeszthető.

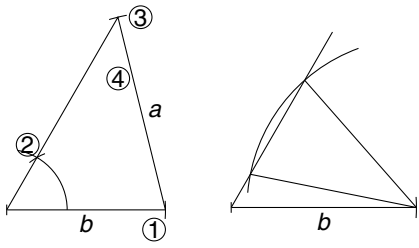


d) (1) $a > b$, egyértelműen megszerkeszthető.

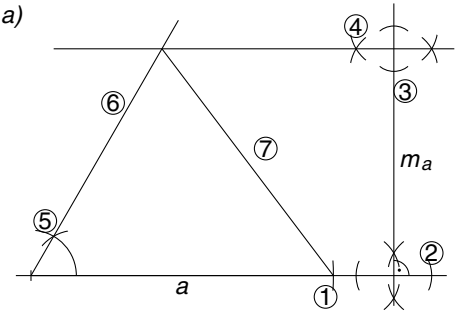
(2) $a < b$, két megoldás van.

(3) $a > b$, egyértelműen megszerkeszthető.

(4) $a < b$, ezért $\alpha < \beta$, de $\alpha = 120^\circ$. Egy háromszögnek nem lehet két tompaszöge. Nem szerkeszthető meg a háromszög.

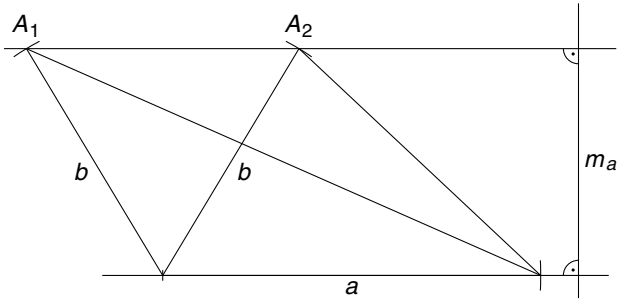


6.50. *a)*



b) Megszerkeszthető. Az *a)* feladat szerkesztésétől annyiban tér el, hogy az 5. lépésben 120°-os szöget szerkesztünk.

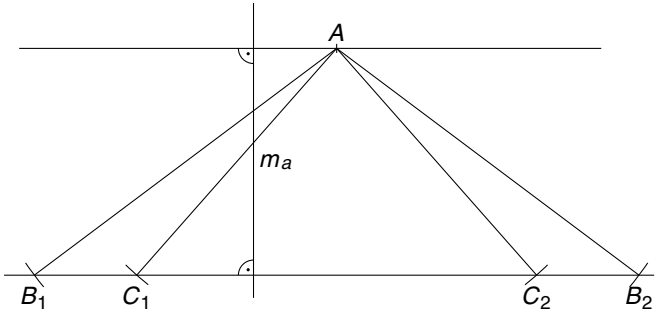
c)



$m_a < b$, két megoldás van, ezek nem egybevágók.

d) $m_a > b$, nem szerkeszthető meg.

e)



$m_a < b$ és $m_a < c$
$AC_1B_1\triangle \cong AC_2B_2\triangle$,
$AC_1B_2\triangle \cong AC_2B_1\triangle$.
Két nem egybevágó megoldása van:
$AC_1B_1\triangle$ és $AC_1B_2\triangle$

6.51. A háromszög szerkesztésének alapeseteivel a **6.49.** feladat megoldása foglalkozik. A köré írható kör megszerkesztése a 8. osztályos alapszintű tankönyv 74–75., illetve a bővített tankönyv 100–101. oldalán található. Az adott szögek a 60°-os szög ismételt felezésével és az így kapott szögek összegzésével megszerkeszthetők.

a) Az adatokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A három oldalával adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

b) $2{,}3 + 3{,}4 < 6{,}1$; a háromszög nem szerkeszthető meg.

c) Két oldalával és a két oldal által közrezárt szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

d) $75^\circ + 135^\circ > 180^\circ$; nincs ilyen háromszög.

e) $45^\circ + 120^\circ < 180^\circ$; az egy oldalával és két szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

f) Két oldalával és a nagyobbik oldallal szemközti szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

6.52. A háromszög szerkesztésének alapeseteivel a **6.49.** feladat megoldása foglalkozik. A beírható kör megszerkesztése a 8. osztályos alapszintű tankönyv 76., illetve a bővített tankönyv 102. oldalán található. Az adott szögek a 60°-os szög ismételt felezésével és az így kapott szögek összegzésével megszerkeszthetők.

a) Az adatokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A három oldalával adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

b) Két oldalával és a két oldal által közrezárt szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

c) $60^\circ + 105^\circ < 180^\circ$; az egy oldalával és két szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

d) Két oldalával és a nagyobbik oldallal szemközti szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

e) Nem szerkeszthető meg a háromszög. *f)* Két ilyen háromszög szerkeszthető.

6.53. A háromszög szerkesztésének alapeseteivel a **6.49.** feladat megoldása foglalkozik. A magasságpont megszerkesztése a 8. osztályos alapszintű tankönyv 77., illetve a bővített tankönyv 103. oldalán található. Az adott szögek a 60°-os szög ismételt felezésével és az így kapott szögek összegzésével megszerkeszthetők.

a), b), c) Két oldalával és a két oldal által közrezárt szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

a) A hegyesszögű háromszög magasságpontja a háromszögön belül van.

b) A tompaszögű háromszög magasságpontja a háromszögön kívül van.

c) A derékszögű háromszög magasságpontja a derékszög csúcsa.

d) A szerkesztés terve:
① Felvesszük az 5 cm-es szakaszt.
② Egyik végpontján rámérjük a 60°-os szöget.
③ Az 5 cm-es szakasztól 3,5 cm távolságra, vele párhuzamos egyenest húzunk.
④ A párhuzamos egyenesnek és a 60°-os szög szárának a metszéspontja a megszerkesztendő háromszög harmadik csúcsa.

e) $m_a > c$; nem szerkeszthető ilyen háromszög.

f) $m_a = c$; derékszögű háromszöget kapunk.

6.54. A háromszög szerkesztésének alapeseteivel a **6.49.** feladat megoldása foglalkozik. A súlyvonal és a súlypont megszerkesztése a 8. osztályos alapszintű tankönyv 78–79., illetve a bővített tankönyv 104–105. oldalán található. Az adott szögek a 60°-os szög ismételt felezésével és az így kapott szögek összegzésével megszerkeszthetők.

a) Két oldalával és a két oldal által közrezárt szögével adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

b) Az adatokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A három oldalával adott háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

c) Visszavezethető két oldalával és a nagyobbik oldallal szemközti szögével adott háromszög megszerkesztésére.
A szerkesztés terve:
① Felvesszük a 4 cm-es *a* szakaszt.
② A szakasz egyik végpontjára rámásoljuk a 75°-os szöget.
③ Megfelezzük a 4 cm-es *a* szakaszt. A felezőpontból 6 cm-es körívvel kimetsszük a 75°-os szög szárából a háromszög harmadik csúcsát.
④ Az *a* oldal másik végpontját is összekötjük az *A* csúccsal.

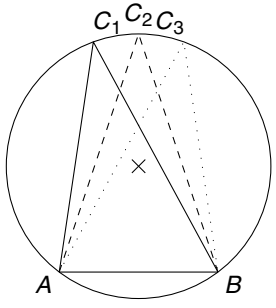
d) Az adatokból nem szerkeszthető háromszög.

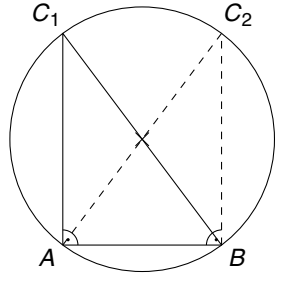
e) Visszavezethető három oldalával adott háromszög megszerkesztésére.
Figyelembe vesszük, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást.
A szerkesztés terve:

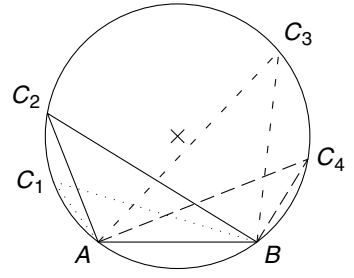
① A súlypont az *a* oldal két végpontjától, *B*-től és *C*-től $\frac{2}{3}s_b = 4$ cm, illetve $\frac{2}{3}s_c = 6$ cm távolságra van. Ezekkel az adatokkal megszerkeszthető a $BCS\triangle$, ahol *S* a súlypont.
② A *BS* oldalt 2 cm-rel, a *CS* oldalt 3 cm-rel meghosszabbítva megkapjuk a *b* és a *c* oldal felezőpontját. Jelölje *E*, illetve *F*.
③ A *BE* és a *CF* egyenes metszéspontja a háromszög harmadik csúcsa.

f) Az adatokból nem szerkeszthető háromszög.

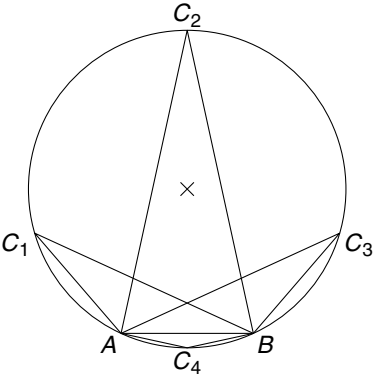
6.55. A kör középpontja
a) a háromszögön belül van; *b)* az átfogón van; *c)* a háromszögön kívül van.



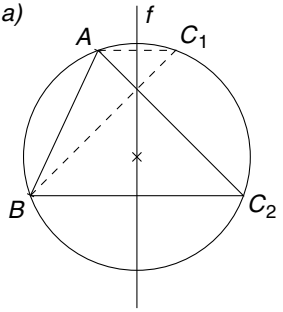




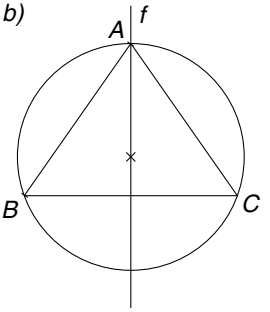
6.56. Négy megoldás van. Ezekből egy hegyesszögű, három tompaszögű. A három tompaszögű közül kettő egybevágó.



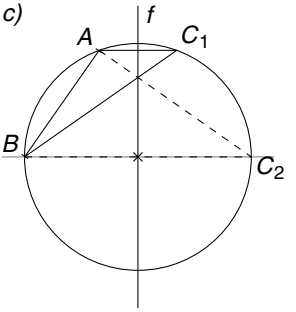
6.57. *a)*



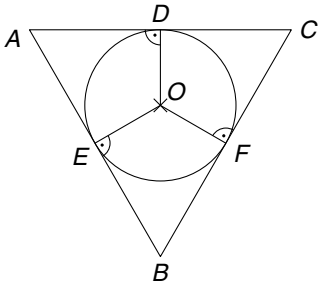
b)



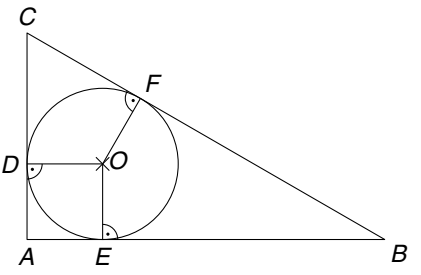
c)



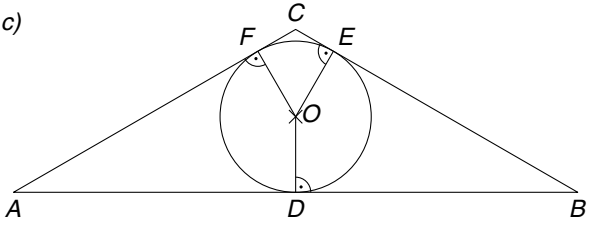
6.58. *a)*



b)



c)



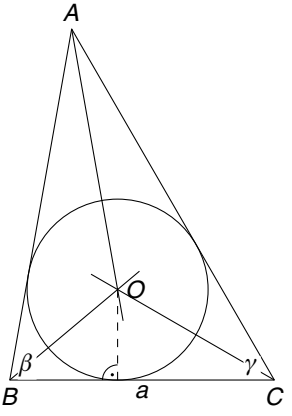
A háromszög szögei:

a) 60°; 60°; 60°;

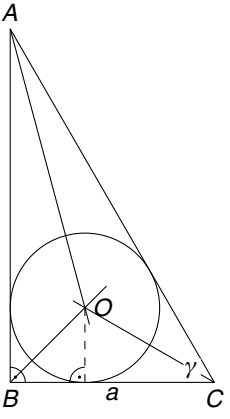
b) 90°; 30°; 60°;

c) 30°; 30°; 120°

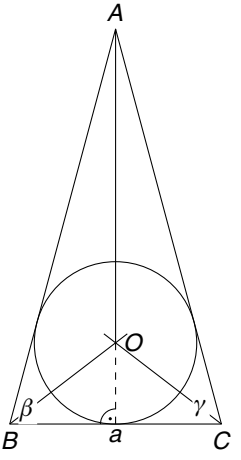
6.59. *a)*



b)



c)



A szögfelezők által bezárt szögek:

a) $BOC\sphericalangle = 110^\circ$;
$COA\sphericalangle = 130^\circ$;
$AOB\sphericalangle = 120^\circ$;

b) $BOC\sphericalangle = 105^\circ$;
$COA\sphericalangle = 135^\circ$;
$AOB\sphericalangle = 120^\circ$;

c) $BOC\sphericalangle = 105^\circ$;
$COA\sphericalangle = 127{,}5^\circ$;
$AOB\sphericalangle = 127{,}5^\circ$

6.60. A háromszög oldalai:

a) 4 cm, 4 cm, 4 cm;

b) 3 cm, 4 cm, 5 cm;

c) 6 cm, 4 cm, 4 cm

6.61. Az adott *négyszögek* 8 egység oldalú négyzetté egészíthetők ki. A középpont körül 90°-kal ismételten elforgatva azt tapasztaljuk, hogy
a kiegészítő négyzet csúcsainál négy egybevágó derékszögű háromszög alakul ki;
az eredeti négyszög minden oldala és minden szöge egyenlő, tehát ez valóban *négyzet*.
Ha a kiegészítő négyzet területéből elhagyjuk a négy derékszögű háromszög területét, akkor megkapjuk az eredeti négyzet területét.

a) (1) $64 - 4 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 32$; (2) $64 - 4 \cdot \frac{5 \cdot 3}{2} = 34$; (3) $64 - 4 \cdot \frac{6 \cdot 2}{2} = 40$

b) (1) $\sqrt{32} \approx 5{,}66$; (2) $\sqrt{34} \approx 5{,}83$; (3) $\sqrt{40} \approx 6{,}32$

6.62. Mindkét szakasz nagyobb, mint a bevonalkázott négyzet oldala:
$7 = \sqrt{49}$; $a = \sqrt{50} > 7$; $b = \sqrt{52} > 7$

6.63. Megrajzoljuk azt a rácsnégyzetet, amelynek az adott szakasz egy oldala, a továbbiakban a **6.61.** feladatban leírtak szerint dolgozhatunk.
$a = 5$; $b = \sqrt{50}$; $c = 10$; $d = \sqrt{18}$; $e = \sqrt{20}$

6.64. *a)* A területek mérőszámai rendre: $a = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; ...; $400 = 20^2$

b) A pontozott négyzetek területét úgy kapjuk meg, hogy a „keret” négyzet területéből elhagyjuk a négy derékszögű háromszög területét.
A kapott sorozat elemeit összehasonlítva az *a)* feladat eredményével felismerhető a következő szabályosság:
$2 = 1^2 + 1^2$; $5 = 1^2 + 2^2$; $10 = 1^2 + 3^2$; $17 = 1^2 + 4^2$; ...; $401 = 1^2 + 20^2$

c) $5 = 2^2 + 1^2$; $8 = 2^2 + 2^2$; $13 = 2^2 + 3^2$; $20 = 2^2 + 4^2$; ...; $404 = 2^2 + 20^2$

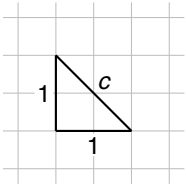
6.65. *a)* Megfigyelhetjük, hogy a háromszögekben a z oldal a legnagyobb.

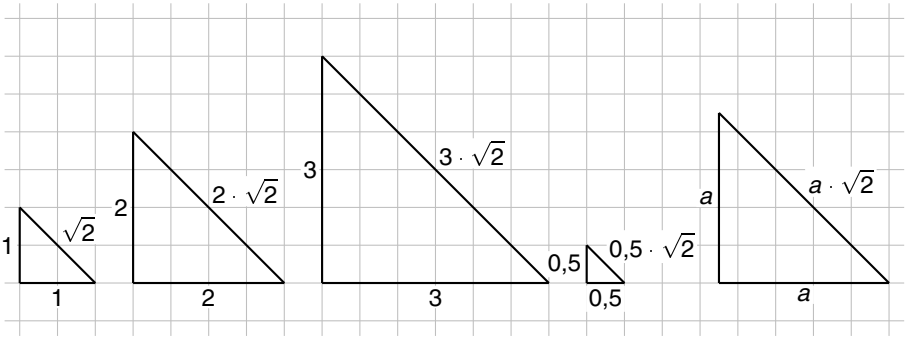
Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
x^2	9	4	5	5	4	10	8	5
y^2	17	16	9	5	4	4	5	5
z^2	20	20	20	10	8	18	9	16
$x^2 + y^2$	26	20	14	10	8	14	13	10

b) A megfigyelt összefüggések alátámasztják a Pitagorasz-tétel megfordítását.
(1) *Hegyesszögű háromszögnél* bármely oldal négyzete kisebb, mint a másik két oldal *négyzetének összege*.
(2) *Derékszögű háromszögnél* az átfogó négyzete egyenlő a másik két oldal *négyzetének összegével*.
(3) *Tompaszögű háromszögnél* a legnagyobb oldal négyzete nagyobb, mint a másik két oldal *négyzetének összege*.

6.66. *a)* $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; $c = \sqrt{2}$ egység $\approx 1{,}41$ egység.

b) Ha az 1 egység befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóját valahányszorosára változtatjuk, akkor átfogója is ugyanannyiszorosára változik.





6.67. 1. $c = 15$ cm; 2. $b = 24$ cm; 3. $c = 1$ cm; 4. $c = \sqrt{41}$ cm $\approx 6{,}40$ cm; 5. $b = 3{,}2$ cm;
6. $c = 12{,}5$ cm; 7. Egyenlő szárú derékszögű háromszög; $c = 5{,}6 \cdot \sqrt{2}$ cm $\approx 7{,}92$ cm;
8. Az átfogó nem lehet kisebb, mint a befogó. Nincs ilyen derékszögű háromszög.

6.68. 1. $d = 35$ cm; 2. $d = 9{,}1$ cm; 3. $a = 6{,}6$ cm; 4. $b \approx 8{,}48$ cm; 5. $d = 6$ cm;
6. $b \approx 3{,}17$ cm,
7. A téglalap átlója mindig hosszabb, mint akármelyik oldala. Nincs ilyen téglalap.
8. Ez a téglalap négyzet. $d = 5{,}5 \cdot \sqrt{2}$ cm $\approx 7{,}78$ cm

6.69. 1. $m = 3$ cm; 2. $m = 12$ cm; 3. $b = 2$ cm; 4. $b = 4{,}5$ cm; 5. $a = 6{,}6$ cm;
6. Nincs ilyen egyenlő szárú háromszög, mert a szár mindig nagyobb, mint az alap fele.
7. Szabályos háromszög; $m = \frac{a}{2}\sqrt{3} \approx 8{,}66$ cm;
8. Nincs ilyen egyenlő szárú háromszög, mert az alaphoz tartozó magasság mindig kisebb, mint a szár.

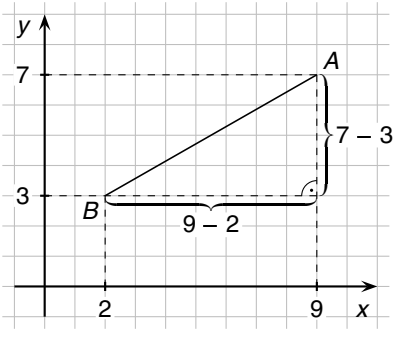
6.70. $OA = 10$; $OB = 5$; $OC = 13$; $OD = 7$; $OE \approx 6{,}71$; $OF \approx 8{,}06$

6.71. Öt pont 10 szakaszt határoz meg. *Például* az AB szakasz hosszának kiszámítása:
Az AB szakasz olyan derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek befogóit a pontok koordinátái segítségével meghatározhatjuk: $A(9; 7)$; $B(2; 3)$. Egyik befogó: $9 - 2 = 7$ egység, másik befogó: $7 - 3 = 4$ egység.

$AB^2 = (9 - 2)^2 + (7 - 3)^2$;

$AB = \sqrt{(9 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{65}$;

$AB \approx 8{,}06$ egység



6.72. $r = OA = 13$ egység. $OB = OD = \sqrt{7{,}8^2 + 10{,}4^2} = \sqrt{169} = 13$ egység $= r$;
$OC = OE = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ egység $= r$

6.73. *a)* 6,4 m; *b)* $y = 120$ m; $m = x + y = 121{,}5$ m; *c)* 52 m; *d)* $M = 0{,}5$ m

6.74. 1. $c = a - 2x = 8$ cm $- 2 \cdot 1$ cm $= 6$ cm; $b^2 = m^2 + x^2 = 5{,}76 + 1 = 6{,}76$;
$b = \sqrt{6{,}76}$ cm $= 2{,}6$ cm;
2. $a = 7$ cm; $b = 2{,}5$ cm; 3. $c = 3$ cm; $m = 8$ cm;

4. $x = \frac{a-c}{2} = 3$ cm; $m^2 = b^2 - x^2 = 60{,}84 - 9 = 51{,}84$; $m = \sqrt{51{,}84}$ cm = 7,2 cm;

5. $x^2 = b^2 - m^2 = 81 - 29{,}16 = 51{,}84$; $x = 7{,}2$ cm; $c = a - 2x < 0$, nincs ilyen húrtrapéz;

6. A három adat nem független egymástól. Ha az adatokra teljesül Pitagorasz tétele, akkor végtelen sok megoldás van, ha nem, akkor nincs megoldás. $b^2 = x^2 + m^2$; $9^2 = 5{,}4^2 + 7{,}2^2$; $81 = 29{,}16 + 51{,}84$. Végtelen sok megoldás van. Tetszőleges c-re $a = c + 2x = x + 10{,}8$.

7. $x = 6$ cm; $b = 6{,}5$ cm; 8. $x = 5$ cm; $c = 8$ cm;

9. $b = m = 7$ cm, téglalapról van szó; $x = 0$ cm; $c = a = 13$ cm;

10. Nincs ilyen húrtrapéz, ugyanis a szár nem lehet kisebb a magasságnál.

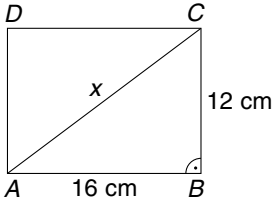
11. $c = a - 2x < 0$; nincs ilyen húrtrapéz. 12. Téglalap: $b = m = 7{,}2$ cm; $x = 0$ cm;

13. $b = 25$ cm; $c = 1$ cm; 14. $a = 20$ cm; $m = 15$ cm

6.75. *a)* $d \approx 3{,}52$ cm; *b)* $a \approx 2 \cdot 4{,}33 = 8{,}66$ cm

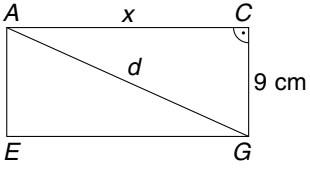
6.76. *a)* $m \approx 2{,}96$ m; *b)* $e \approx 2 \cdot 2{,}51 = 5{,}02$ m

6.77. *a)* $x^2 = 16^2 + 12^2$
$x^2 = 256 + 144$
$x^2 = 400$
$x = 20$ cm



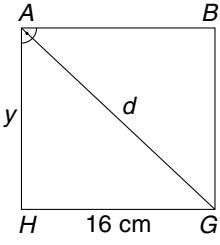
b) $y^2 = 12^2 + 9^2$; $y = 15$ cm

c) A testátló hosszát akármelyik lapátló segítségével meghatározhatjuk.



$d^2 = x^2 + 9^2$

$d^2 = 16^2 + 12^2 + 9^2$



$d^2 = 16^2 + y^2$

$d^2 = 16^2 + 12^2 + 9^2$

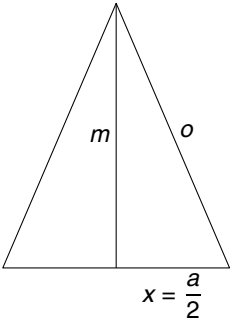
$d = \sqrt{16^2 + 12^2 + 9^2} \approx 21{,}9$ cm

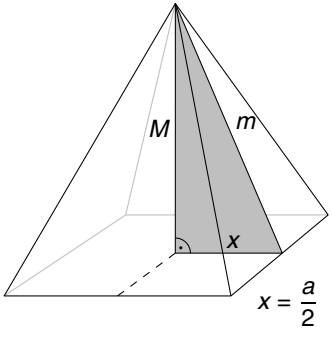
6.78. Megfelelő derékszögű háromszögeket keresünk.

a) $m^2 = o^2 - x^2$; $m = 12$ cm
$M^2 = m^2 - x^2$;
$M \approx 10{,}9$ cm

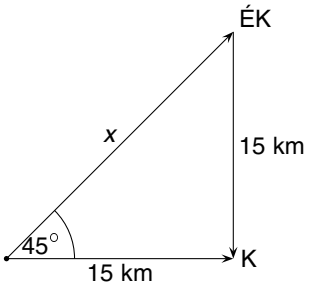
b) $m^2 = M^2 + x^2$; $m = 10$ cm
$o^2 = m^2 + x^2$;
$o \approx 11{,}7$ cm

c) $o^2 = m^2 + x^2$; $o = 5$ cm;
$M^2 = m^2 - x^2$;
$M \approx 2{,}6$ cm



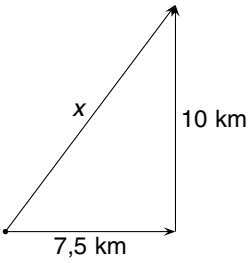


6.79. *a)*



$x^2 = 15^2 + 15^2$; $x \approx 21{,}2$ km

b)



$x^2 = 7{,}5^2 + 10^2$; $x \approx 12{,}5$ km

6.80. *a)*

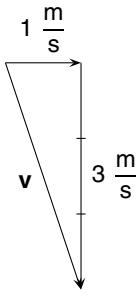
$v = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b)



$v = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

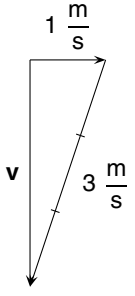
c)



$v^2 = 1^2 + 3^2$

$v \approx 3{,}16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

d)



$v^2 = 3^2 - 1^2$

$v \approx 2{,}83\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

A v a **v** hosszát, a sebesség nagyságát jelöli.

Négyszögek

6.81. A nem egybevágó megoldásokat soroljuk föl. Ilyenek pl.:

a) *AKJB*; *AKJD*; *AKJE*; *AKHD*; *AKHE*; *AKGE*; *AJHE*; *ALFB*; *ALFD*; *ALFE*; *LBDF*; *AKIC*; *AJGD*

b) *AKJB*; *AKHD*; *AKGE*; *ALFD*; *AJGD*

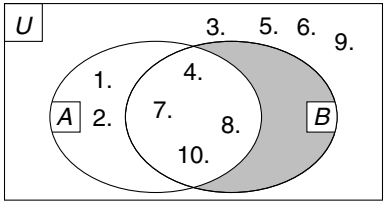
c) *AKJB*; *AKHD*; *AKGE*; *AJHE*; *AKIC*; *LBDF*

d) *AKGC*; *LBFJ*; *AJGD*; *ALKF*; *ALGB*

e) A húrtrapézokon kívül a rombuszok.

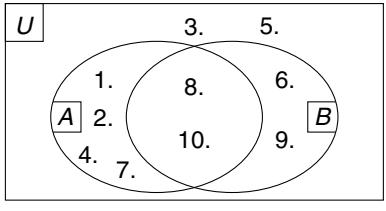
f) Pontosan a paralelogrammák.

6.82. *a)*



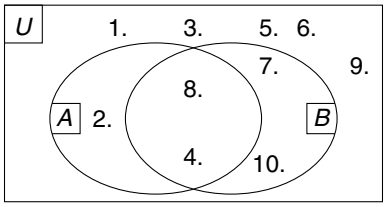
Minden paralelogramma trapéz.

b)



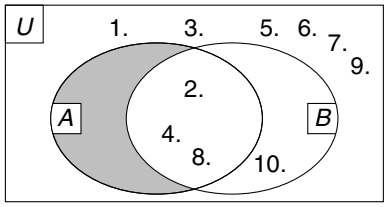
A rombuszok paralelogrammák is és deltoidok is.

c)



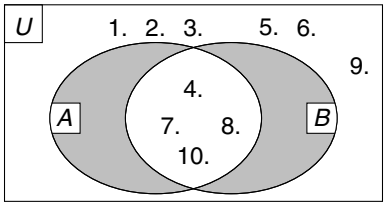
A téglalapok húrtrapézok és paralelogrammák is.

d)



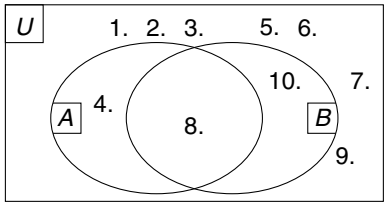
A tengelyesen szimmetrikus trapézok a húrtrapézok, továbbá a rombusz.

e)



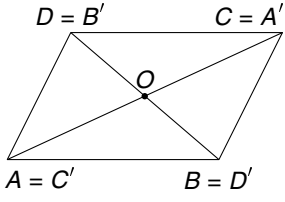
Pontosan a paralelogrammák a középpontosan szimmetrikus négyszögek.

f)



A négyzet téglalap és rombusz is.

6.83. **A:** Hamis, a rombusz is tengelyesen szimmetrikus trapéz, de a rombuszok közül csak a négyzet húrtrapéz.



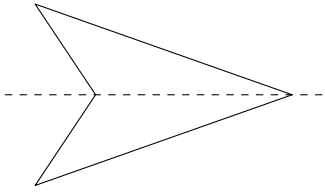
B: Igaz, pontosan a középpontosan szimmetrikus négyszögek a paralelogrammák.

C: Igaz, a középpontos szimmetria miatt a paralelogramma átlói felezik egymást.

D: Igaz, a négyzet is téglalap, és a négyzet két-két szomszédos oldala egyenlő.

E: Hamis, a középpontos szimmetria miatt a paralelogramma szemközti szögei egyenlők. Ezért ha a paralelogrammának lenne homorúszöge ($\alpha > 180^\circ$), akkor a szögeinek összege nagyobb lenne 360°-nál, ami nem lehetséges.

F: Hamis, az ábrán látható konkáv négyszög deltoid.



G: Hamis, a tengelyes szimmetria miatt a húrtrapéz két-két szomszédos szöge egyenlő. Ezért, ha a húrtrapéznak lenne homorúszöge, akkor szögeinek összege nagyobb lenne 360°-nál, ami nem lehetséges.

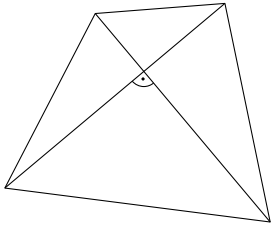
H: Hamis, a konkáv deltoidok tengelyesen szimmetrikusak.

6.84. **A:** Hamis, a téglalap minden szöge egyenlő, akkor is, ha a téglalap nem négyzet.

A': Igaz, a négyzet minden szöge 90°.

B: Igaz, a tengelyes szimmetria miatt a deltoid átlói merőlegesek egymásra.

B': Hamis, megadható olyan négyszög, amely nem deltoid, de átlói merőlegesek egymásra (lásd az ábrát).



C: Igaz, a középpontosan szimmetrikus négyszögek átlói felezik egymást.

C': Igaz, ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma.

Megfogalmazható a következő igaz állítás:

C'': Egy négyszög átlói akkor és csak akkor felezik egymást, ha a négyszög paralelogramma.

6.85. *a)* (4; 2), (7; 2), (7,5), (4; 5); (4; 2), (7; 5), (4; 8), (1; 5)

b) A négyzeteken kívül: (4; 2), (5; 1), (8; 4), (7; 5); (4; 2), (7; 5), (6; 6), (3; 3)

c) A téglalapokon kívül végtelen sok megoldás van. Például: (4; 2), (7; 5), (7; 6), (3; 2); (4; 2), (7; 5), (7; 7), (2; 2); (4; 2), (7; 5), (8; 7), (2; 1); (4; 2), (7; 5), (8; 5), (11; 2); ...

d) A négyzeten kívül: (4; 2), (6; 3), (7; 5), (5; 4); (4; 2), (8; 1), (7; 5), (3; 6)

e) A rombuszokon kívül végtelen sok megoldása van. Például: (4; 2), (6; 3), (7; 5), (4; 5); (4; 2), (7; 5), (4; 4), (1; 5); (4; 2), (7; 5), (4; 8), (2; 5) ...

f) A rombuszokon és téglalapokon kívül végtelen sok megoldása van. Például: (4; 2), (7; 5), (6; 5), (3; 2); (4; 2), (7; 3), (7; 5), (4; 4); ...

g) A húrtrapézok és deltoidok megfelelnek a feltételnek.

6.86. *a)* A négyszög belső szögeinek összege: 360°.
(1) $40^\circ + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 360^\circ$; lehetnek egy négyszög belső szögei.
(2) $35^\circ + 105^\circ + 75^\circ + 120^\circ \neq 360^\circ$; nem lehetnek egy négyszög belső szögei.

b) A trapéz egy száron fekvő szögei 180°-ra egészítik ki egymást.
(1) Nem felel meg a feltételeknek.
(2) $65^\circ + 115^\circ = 180^\circ$; $50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$; lehetnek egy trapéz belső szögei.

c) A tengelyes szimmetria miatt a deltoidnak van két egyenlő nagyságú szöge és szögeinek összege 360°. A (2) szögnégyes felel meg a feltételeknek.

d) A paralelogramma két-két szemközti szöge egyenlő, és két-két szomszédos szöge 180°-ra egészíti ki egymást. Az (1) szögnégyes felel meg a feltételeknek.

6.87. *a)* $\alpha = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$; $\beta = 360^\circ - (50^\circ + 80^\circ + 140^\circ) = 90^\circ$

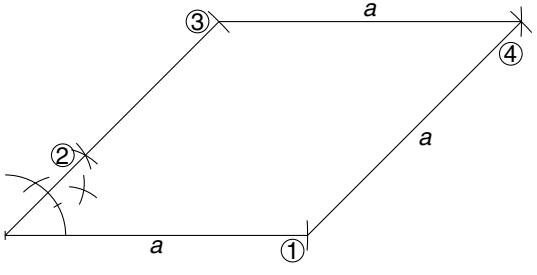
b) $\alpha = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$; $\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; $\gamma = 120^\circ$

c) $\alpha = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$; $\beta = 105^\circ$; $\gamma = \alpha = 75^\circ$

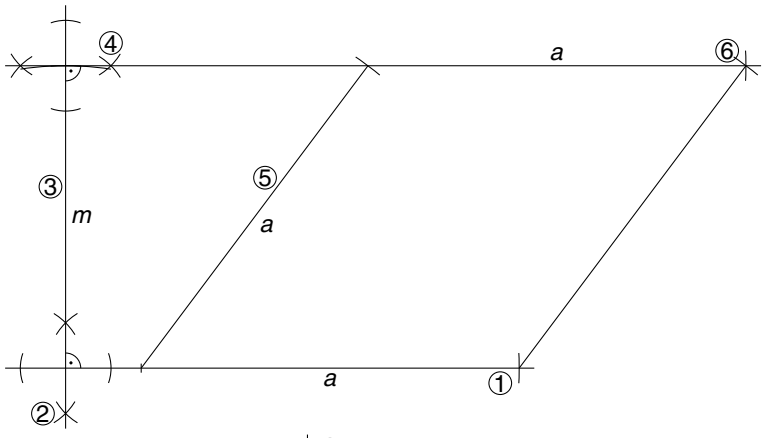
d) $\varphi = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$; $\varrho = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; $\varepsilon = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ)$; $\alpha = \varphi + \varepsilon = 70^\circ$; $\gamma = 180^\circ - \alpha = 110^\circ$

e) $\alpha = 100^\circ$; $\varepsilon = 50^\circ$; $\frac{\beta}{2} = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$

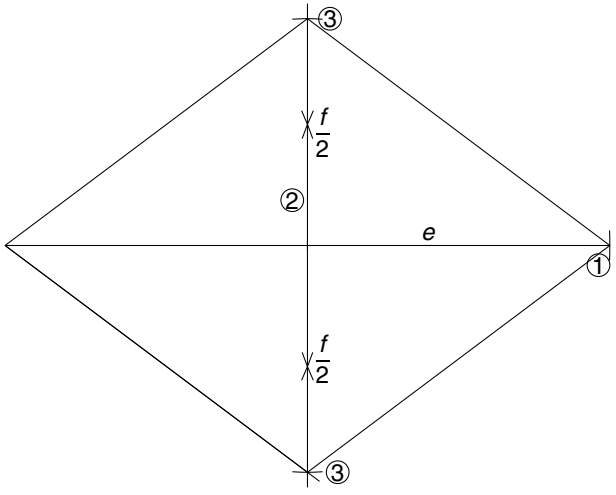
6.88. *a)*



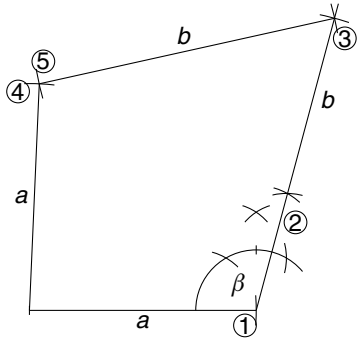
b)



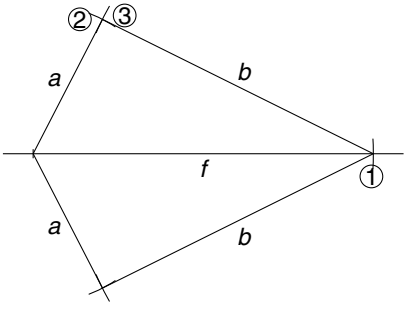
c)



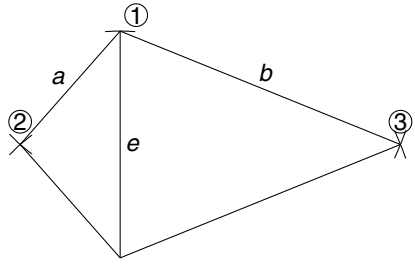
6.89. *a)*

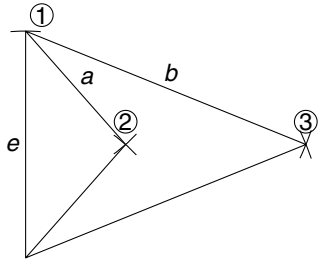


b)

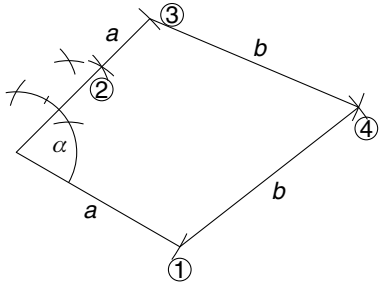


c) Két megoldás van:

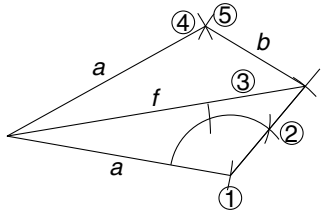




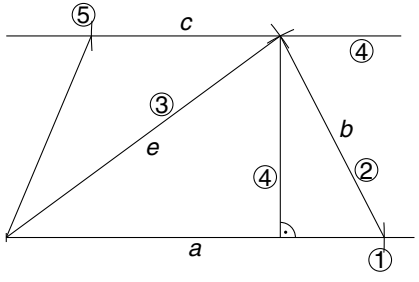
d)



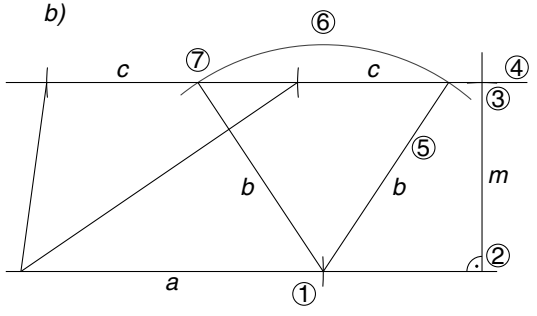
e)



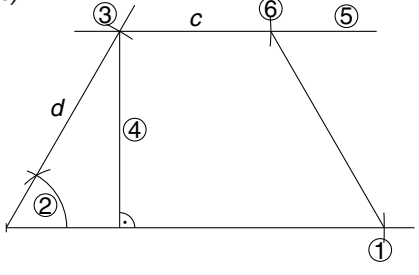
6.90. *a)*



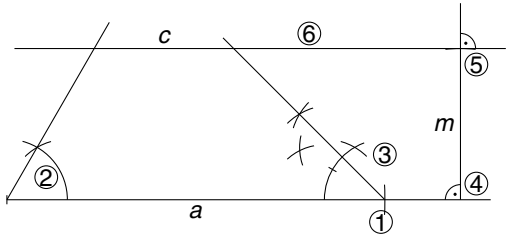
b)



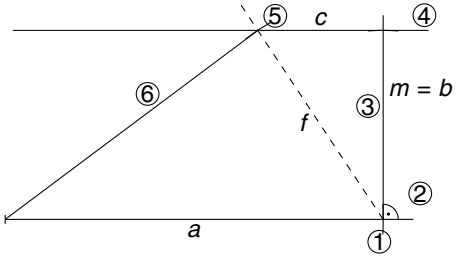
c)



d)



e)



7. Mérés, terület, felszín, térfogat

Mértékegységek átváltása

7.01. 1 km $\overset{\boxed{1000}}{>}$ 1 m $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 dm $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 cm $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 mm

a) 0,5 km = 500 m = 5000 dm = 50 000 cm;

b) 20 000 km = 20 000 000 m = 200 000 000 dm;

c) 0,065 km = 65 m = 650 dm = 6500 cm = 65 000 mm;

d) 5,25 km = 5250 m = 52 500 dm = 525 000 cm;

e) 0,000 525 km = 0,525 m = 5,25 dm = 52,5 cm = 525 mm;

f) 4 km = 4000 m = 40 000 dm = 400 000 cm = 4 000 000 mm;

g) 0,52 km = 5200 dm = 52 000 cm = 520 000 mm

7.02. 1 t $\overset{\boxed{1000}}{>}$ 1 kg $\overset{\boxed{100}}{>}$ 1 dkg $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 g $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 dg $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 cg $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 mg

a) 4,75 t = 4750 kg = 475 000 dkg = 4 750 000 g;

b) 0,6 t = 600 kg = 60 000 dkg = 600 000 g;

c) 0,25 t = 250 kg = 25 000 dkg = 250 000 g;

d) 0,075 kg = 75 g = 750 dg = 7500 cg = 75 000 mg;

e) 0,0008 kg = 0,08 dkg = 0,8 g = 8 dg = 80 cg;

f) 2,3 kg = 230 dkg = 23 000 dg = 2 300 000 mg

7.03. 1 hl $\overset{\boxed{100}}{>}$ 1 l $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 dl $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 cl $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 ml

a) 0,5 hl = 50 l = 500 dl = 5000 cl = 50 000 ml;

b) 500 hl = 50 000 l = 500 000 dl = 50 000 000 ml;

c) 0,042 hl = 4,2 l = 42 dl = 420 cl = 4200 ml;

d) 7500 hl = 750 000 l = 7 500 000 dl = 75 000 000 cl;

e) 0,0045 hl = 0,45 l = 4,5 dl = 45 cl = 450 ml;

f) 4,24 hl = 424 l = 4240 dl = 42 400 cl = 424 000 ml;

g) 35 hl = 3500 l = 350 000 cl = 3 500 000 ml

7.04. *a)* 1 m = 10^2 cm = 10^3 mm = 10^1 dm;

b) 1 km = 10^3 m = 10^4 dm = 10^6 mm = 10^5 cm;

c) 1 l = 10^2 cl = 10^3 ml = 10^1 dl;

d) 1 hl = 10^2 l = 10^3 dl = 10^4 cl = 10^5 ml;

e) 1 kg = 10^2 dkg = 10^3 g = 10^6 mg;

f) 1 g = 10^1 dg = 10^2 cg = 10^3 mg;

g) 1 t = 10^3 kg = 10^5 dkg = 10^6 g

7.05. *a)* $1\ \text{mm} = 0{,}1^1\ \text{cm} = 0{,}1^2\ \text{dm} = 0{,}1^3\ \text{m}$;

b) $1\ \text{dm} = 0{,}1^1\ \text{m} = 0{,}1^4\ \text{km}$;

c) $1\ \text{ml} = 0{,}1^1\ \text{cl} = 0{,}1^2\ \text{dl} = 0{,}1^3\ \text{l}$;

d) $1\ \text{dl} = 0{,}1^1\ \text{l} = 0{,}1^3\ \text{hl}$;

e) $1\ \text{g} = 0{,}1^1\ \text{dkg} = 0{,}1^3\ \text{kg} = 0{,}1^6\ \text{t}$;

f) $1\ \text{mg} = 0{,}1^3\ \text{g} = 0{,}1^2\ \text{dg} = 0{,}1^4\ \text{dkg} = 0{,}1^1\ \text{cg} = 0{,}1^6\ \text{kg}$

7.06. *a)* $560\ \text{m} = 5{,}6 \cdot 10^2\ \text{m} = 5{,}6 \cdot 10^3\ \text{dm} = 5{,}6 \cdot 10^4\ \text{cm} = 5{,}6 \cdot 10^5\ \text{mm}$;

b) $48\ \text{km} = 4{,}8 \cdot 10^1\ \text{km} = 4{,}8 \cdot 10^4\ \text{m} = 4{,}8 \cdot 10^6\ \text{cm} = 4{,}8 \cdot 10^5\ \text{dm}$

7.07. *a)* $5{,}45\ \text{km} = 5{,}45 \cdot 10^3\ \text{m} = 5{,}45 \cdot 10^5\ \text{cm} = 5{,}45 \cdot 10^6\ \text{mm} = 5\ 450\ 000\ \text{mm}$;

b) $4{,}02\ \text{km} = 4{,}02 \cdot 10^3\ \text{m} = 4{,}02 \cdot 10^4\ \text{dm} = 4{,}02 \cdot 10^5\ \text{cm} = 4{,}02 \cdot 10^6\ \text{mm}$;

c) $4{,}7\ \text{km} = 4{,}7 \cdot 10^3\ \text{m} = 4{,}7 \cdot 10^4\ \text{dm} = 4{,}7 \cdot 10^5\ \text{cm} = 4{,}7 \cdot 10^6\ \text{mm}$;

d) $120\ \text{km} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \text{m} = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{dm} = 1{,}2 \cdot 10^7\ \text{cm} = 1{,}2 \cdot 10^8\ \text{mm}$;

e) $0{,}025\ \text{km} = 2{,}5 \cdot 10^1\ \text{m} = 2{,}5 \cdot 10^2\ \text{dm} = 2{,}5 \cdot 10^3\ \text{cm} = 2{,}5 \cdot 10^4\ \text{mm}$

7.08. *a)* $450\ \text{l} = 4{,}5 \cdot 10^2\ \text{l} = 4{,}5 \cdot 10^3\ \text{dl} = 4{,}5 \cdot 10^4\ \text{cl} = 4{,}5 \cdot 10^5\ \text{ml}$;

b) $75\ \text{hl} = 7{,}5 \cdot 10^1\ \text{hl} = 7{,}5 \cdot 10^3\ \text{l} = 7{,}5 \cdot 10^4\ \text{dl} = 7{,}5 \cdot 10^6\ \text{ml}$;

c) $5600\ \text{l} = 5{,}6 \cdot 10^3\ \text{l} = 5{,}6 \cdot 10^1\ \text{hl} = 5{,}6 \cdot 10^4\ \text{dl} = 5{,}6 \cdot 10^5\ \text{cl}$;

d) $15{,}6\ \text{hl} = 1{,}56 \cdot 10^1\ \text{hl} = 1{,}56 \cdot 10^4\ \text{dl} = 1{,}56 \cdot 10^3\ \text{l}$

7.09. *a)* $45\ 000\ \text{kg} = 4{,}5 \cdot 10^4\ \text{kg} = 4{,}5 \cdot 10^1\ \text{t} = 4{,}5 \cdot 10^6\ \text{dkg}$;

b) $200\ \text{g} = 2 \cdot 10^2\ \text{g} = 2 \cdot 10^4\ \text{cg} = 2 \cdot 10^5\ \text{mg} = 2 \cdot 10^3\ \text{dg} = 2 \cdot 10^1\ \text{dkg}$;

c) $75\ \text{t} = 7{,}5 \cdot 10^1\ \text{t} = 7{,}5 \cdot 10^4\ \text{kg} = 7{,}5 \cdot 10^6\ \text{dkg}$

7.10. *a)* $5{,}2\ \text{kg} = 5{,}2 \cdot 10^2\ \text{dkg} = 5{,}2 \cdot 10^3\ \text{g} = 5{,}2 \cdot 10^4\ \text{dg} = 5{,}2 \cdot 10^5\ \text{cg} = 5{,}2 \cdot 10^6\ \text{mg}$;

b) $4{,}2\ \text{kg} = 4{,}2 \cdot 10^3\ \text{g} = 4{,}2 \cdot 10^4\ \text{dg} = 4{,}2 \cdot 10^5\ \text{cg} = 4{,}2 \cdot 10^6\ \text{mg}$;
(dg = decigramm; SI-ben nem használatos mértékegység);

c) $7{,}5\ \text{t} = 7{,}5 \cdot 10^3\ \text{kg} = 7{,}5 \cdot 10^5\ \text{dkg} = 7{,}5 \cdot 10^6\ \text{g} = 7\ 500\ 000\ \text{g}$;

d) $2{,}7\ \text{t} = 2{,}7 \cdot 10^3\ \text{kg} = 2{,}7 \cdot 10^5\ \text{dkg} = 2{,}7 \cdot 10^6\ \text{g} = 2\ 700\ 000\ \text{g}$;

e) $15\ \text{t} = 1{,}5 \cdot 10^4\ \text{kg} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{dkg} = 1{,}5 \cdot 10^7\ \text{g} = 15\ 000\ 000\ \text{g}$;

f) $0{,}021\ \text{t} = 2{,}1 \cdot 10^1\ \text{kg} = 2{,}1 \cdot 10^3\ \text{dkg} = 2{,}1 \cdot 10^4\ \text{g} = 21\ 000\ \text{g}$

Síkidomok területe

7.11. $1\ \text{km} \overset{\boxed{1000}}{>} 1\ \text{m} \overset{\boxed{10}}{>} 1\ \text{dm} \overset{\boxed{10}}{>} 1\ \text{cm} \overset{\boxed{10}}{>} 1\ \text{mm}$

$1\ \text{km}^2 \overset{\boxed{1\ 000\ 000}}{>} 1\ \text{m}^2 \overset{\boxed{100}}{>} 1\ \text{dm}^2 \overset{\boxed{100}}{>} 1\ \text{cm}^2 \overset{\boxed{100}}{>} 1\ \text{mm}^2$

$1\ \text{km}^2 \overset{\boxed{100}}{>} 1\ \text{ha} \overset{\boxed{10\ 000}}{>} 1\ \text{m}^2$

a) $1\ \text{km}^2 = 100\ \text{ha} = 1\ 000\ 000\ \text{m}^2 = 100\ 000\ 000\ \text{dm}^2$;

b) $1\ \text{dm}^2 = 0{,}01\ \text{m}^2 = 100\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{mm}^2$;

c) $1\ \text{m}^2 = 0{,}0001\ \text{ha} = 100\ \text{dm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2 = 1\,000\,000\ \text{mm}^2$;

d) $3{,}5\ \text{km}^2 = 350\ \text{ha} = 3\,500\,000\ \text{m}^2 = 35\,000\,000\,000\ \text{cm}^2$;

e) $0{,}5\ \text{m}^2 = 50\ \text{dm}^2 = 5000\ \text{cm}^2 = 500\,000\ \text{mm}^2$

7.12. *a)* $3{,}6\ \text{m}^2 = 3{,}6 \cdot 10^2\ \text{dm}^2 = 3{,}6 \cdot 10^4\ \text{cm}^2 = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{mm}^2$;

b) $0{,}7\ \text{m}^2 = 0{,}7 \cdot 10^2\ \text{dm}^2 = 7 \cdot 10^3\ \text{cm}^2 = 7 \cdot 10^5\ \text{mm}^2$;

c) $0{,}2\ \text{m}^2 = 2 \cdot 10^1\ \text{dm}^2 = 2 \cdot 10^3\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^5\ \text{mm}^2 = 200\,000\ \text{mm}^2$;

d) $8{,}5\ \text{km}^2 = 8{,}5 \cdot 10^2\ \text{ha} = 8{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{mm}^2$;

e) $2500\ \text{km}^2 = 2{,}5 \cdot 10^5\ \text{ha} = 2{,}5 \cdot 10^9\ \text{m}^2 = 2\,500\,000\,000\ \text{m}^2$

7.13. *a)* $0{,}502\ \text{km} = 5{,}02 \cdot 10^{-1}\ \text{km} = 5{,}02 \cdot 10^2\ \text{m} = 5{,}02 \cdot 10^4\ \text{cm}$;

b) $8{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{km} = 8{,}5\ \text{m} = 8{,}5 \cdot 10^2\ \text{cm} = 8{,}5 \cdot 10^1\ \text{dm}$;

c) $2{,}3\ \text{m}^2 = 2{,}3 \cdot 10^2\ \text{dm}^2 = 2{,}3 \cdot 10^4\ \text{cm}^2 = 2{,}3 \cdot 10^6\ \text{mm}^2$;

d) $120\ \text{ha} = 1{,}2 \cdot 10^2\ \text{ha} = 1{,}2 \cdot 10^0\ \text{km}^2 = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{m}^2$

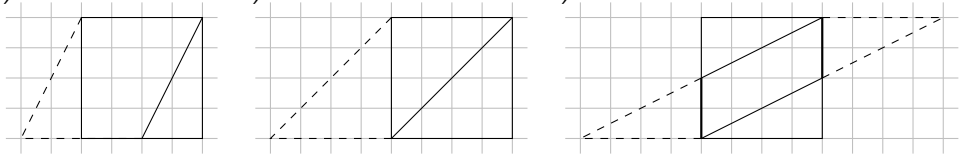
7.14. *a)* $T = a \cdot b = 14{,}4\ \text{cm}^2$; *b)* $b^2 = d^2 - a^2 = 20{,}25 - 12{,}96$; $b = 2{,}7\ \text{cm}$; $T = 9{,}72\ \text{cm}^2$

7.15. *a)* $T = a^2 = 46{,}24\ \text{dm}^2$; *b)* $T = \dfrac{d \cdot d}{2} = \dfrac{d^2}{2} = 2{,}88\ \text{cm}^2$

7.16. *a)* $b = \dfrac{T}{a} = 4{,}5\ \text{m}$; *b)* $T = a^2$; $a = \sqrt{T} = 4{,}5\ \text{m}$

7.17. Mindhárom esetben: $T = 4 \cdot 4$ területegység

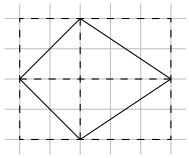
a) *b)* *c)*

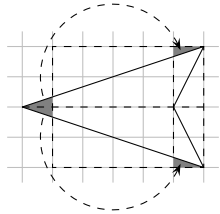


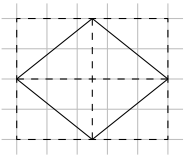
7.18. $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$; $a = \dfrac{T}{m_a}$; $m_a = \dfrac{T}{a}$; $b = \dfrac{T}{m_b}$; $m_b = \dfrac{T}{b}$

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	10 cm	4,8 m	**5** dm	15 dm	**3,6** m
b	6 cm	**7,0** m	**5** dm	8 dm	4,5 m
m_a	9 cm	3,5 m	4 dm	**8** dm	2,5 m
m_b	**15** cm	2,4 m	4 dm	**15** dm	**2,0** m
T	**90** cm^2	**16,8** m^2	20 dm^2	120 dm^2	9,0 m^2

7.19. Mindhárom esetben: $T = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ területegység

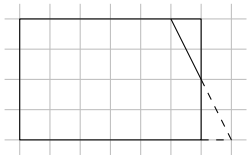
a) 

b) 

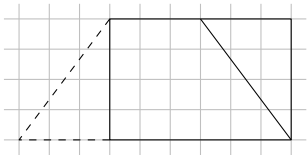
c) 

7.20. $T = \frac{e \cdot f}{2}$; $e = \frac{2 \cdot T}{f}$; $f = \frac{2 \cdot T}{e}$

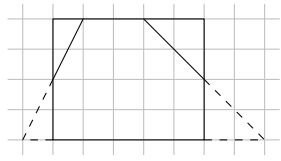
	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
e	8 cm	8 dm	**20** cm	6,4 cm	16 cm
f	10 cm	**14** dm	12 cm	25 mm	**20** cm
T	**40** cm^2	0,56 m^2	1,2 dm^2	**8** cm^2	160 cm^2

7.21. *a)* 

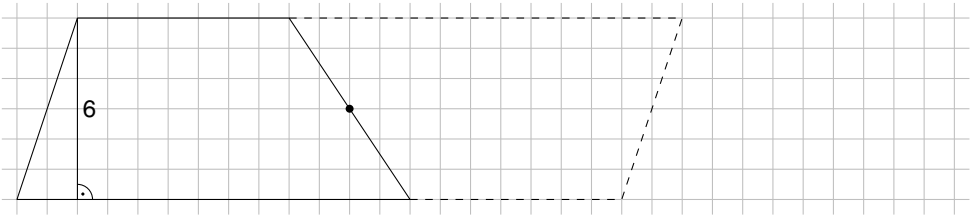
24 területegység;

b) 

24 területegység;

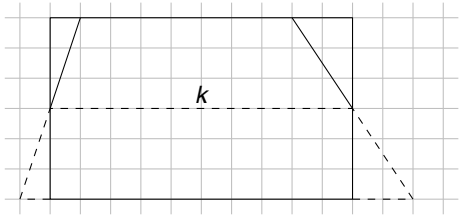
c) 

20 területegység

7.22. 

$T = \frac{(13 + 7) \cdot 6}{2} = 60$ területegység

Átdarabolással is ugyanazt az eredményt kapjuk:



$k = \frac{13 + 7}{2} = 10$ egység

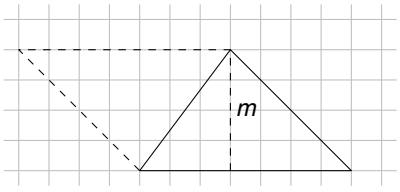
$T = k \cdot m = \frac{13 + 7}{2} \cdot 6$

$T = 60$ területegység

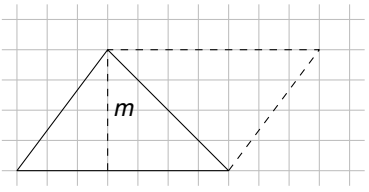
7.23. $T = \frac{a + c}{2} \cdot m$; $m = \frac{2T}{a + c}$; $a = \frac{2T}{m} - c$; $c = \frac{2T}{m} - a$

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	6 cm	10 cm	7,5 cm	**4,8** cm	15 m
c	4 cm	4 cm	4,5 cm	3,2 cm	**7** m
m	3 cm	**4** cm	4 cm	2,5 cm	5 m
T	**15** cm^2	28 cm^2	**24** cm^2	10 cm^2	55 m^2

7.24. *a)*

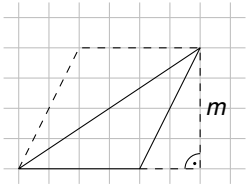


vagy

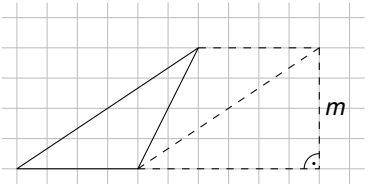


$T = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ területegység

b)



vagy



$T = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ területegység

7.25. $m_a \leqq b$; $m_b \leqq a$; $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$; $a = \frac{2 \cdot T}{m_a}$; $b = \frac{2 \cdot T}{m_b}$; $m_a = \frac{2 \cdot T}{a}$; $m_b = \frac{2 \cdot T}{b}$

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	8 cm	3,6 cm	8 cm	**6** cm	7 cm
b	10 cm	**4**,**8** cm	6 cm	8 cm	15 cm
m_a	7,5 cm	4 cm	**4**,**5** cm	8 cm	
m_b	**6** cm	3 cm	**6** cm	**6** cm	10 cm
T	**30** cm^2	**7**,**2** cm^2	18 cm^2	24 cm^2	

d) Derékszögű háromszög, mivel $a = m_b$ és $b = m_a$.

e) Nincs ilyen háromszög, mert $m_b > a$.

7.26. *a)* $\overline{AB}^2 = 6^2 + 9^2 = 117$; $AB \approx 10{,}8$; $\overline{DC}^2 = 4^2 + 6^2 = 52$; $DC \approx 7{,}2$; $T \approx 38{,}8 \approx 39$

Pontos értékekkel is számolhatunk:

$AB = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3 \cdot \sqrt{13}$

$DC = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2 \cdot \sqrt{13}$

$T = \frac{3 \cdot \sqrt{13} \cdot 2 \cdot \sqrt{13}}{2} = 3 \cdot 13 = 39$ területegység

b) $\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$; $AB \approx 5{,}7$; $\overline{DC}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$; $DC \approx 5{,}7$; $T \approx 16{,}245 \approx 16$

c) $\overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; $AC = 5$; $\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $BC = 10$; $T = 25$

7.27. *a)* $a = 14 - 2 \cdot 5 = 4$ (cm); $m_a = \sqrt{5^2 - 2^2} \approx 4{,}6$ (cm); $T \approx 9{,}2$ cm^2;

b) $b = \sqrt{3^2 + 1{,}8^2} \approx 3{,}5$ (cm); $K \approx 10{,}6$ cm; $T = 5{,}4$ cm^2;

c) $a = 2 \cdot \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2$ (cm); $K = 19{,}2$ cm; $T \approx 17{,}3$ cm^2;

d) $m_a = \frac{2 \cdot 100}{10} = 20$ (m); $b = \sqrt{5^2 + 20^2} \approx 20{,}6$ (m); $K \approx 51{,}2$ m;

e) $m_a = \sqrt{100^2 - 50^2} \approx 86{,}6$ (m); $K = 300$ m; $T \approx 4330$ m^2;

f) $b = \dfrac{16-6}{2} = 5$ (cm); $m_a = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (cm); $T = 12$ cm^2

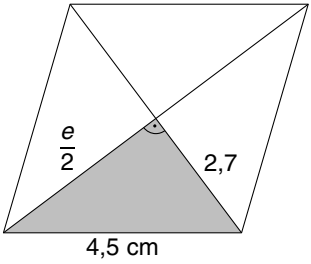
7.28. *a)* $e = 2\sqrt{4{,}5^2 - 2{,}7^2} = 2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2$ cm;

b) $T = 19{,}44$ cm$^2 \approx 19{,}4$ cm^2;

c) $K = 18$ cm;

d) $T = \dfrac{e \cdot f}{2} = a \cdot m_a$; $m_a = \dfrac{T}{a}$;

$m_a \approx \dfrac{19{,}44}{4{,}5} = 4{,}32$ (cm)



7.29. *a)* $a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (cm); $T = 24$ cm^2; $K = 20$ cm; $m = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$ (cm)

b) $e = 2 \cdot \sqrt{6^2 - 4^2} \approx 8{,}9$ (cm); $T \approx 35{,}6$ cm^2; $K = 24$ cm; $m \approx 5{,}9$ cm

c) $e = \dfrac{2 \cdot 30}{10} = 6$ (cm); $a = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}8$ (cm); $K \approx 23{,}2$ cm; $m \approx \dfrac{30}{5{,}8} \approx 5{,}2$ (cm)

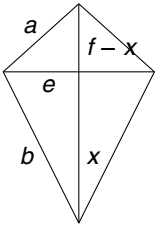
d) $e = 2 \cdot \sqrt{4{,}8^2 - 3{,}5^2} \approx 2 \cdot 3{,}3 = 6{,}6$ (cm); $T \approx 23{,}1$ cm^2; $K = 19{,}2$ cm; $m \approx 4{,}8$ cm. Az m csak a kerekített érték miatt egyenlő a rombusz oldalával. A rombusz átlói nem egyenlők, tehát nem négyzet.

e) $a = 9$ cm; $f = 2 \cdot \sqrt{9^2 - 2^2} \approx 17{,}5$ (cm); $T \approx 35$ cm^2; $m \approx 3{,}9$ cm

7.30. *a)* $b = 5$ cm; $f = \sqrt{3^2 - 2^2} + \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{5} + \sqrt{21} \approx 2{,}2 + 4{,}6 = 6{,}8$ (cm);
$T \approx 13{,}6$ cm^2

b) $e = \dfrac{2 \cdot 8{,}4}{6} = 2{,}8$; $x = \sqrt{x^2 - 1{,}4^2} \approx 3{,}7$ (cm);

$f - x \approx 6 - 3{,}7 = 2{,}3$ (cm); $a = \sqrt{2{,}3^2 + 1{,}4^2} \approx 2{,}7$ (cm);
$K \approx 13{,}4$ cm



c) (A *b)* ábrája szerint.) $x = \sqrt{9^2 - 5^2} \approx 7{,}5$ (cm); $f - x = \sqrt{6^2 - 5^2} \approx$
$\approx 3{,}3$ (cm); $f \approx 10{,}8$ cm; $T \approx 54$ cm^2; $K = 30$ cm

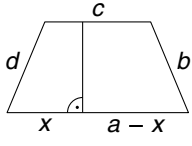
d) (A *b)* ábrája szerint.) $f - x = \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 3{,}6$ (cm); $x = 6{,}4$ cm;
$b = \sqrt{3{,}5^2 + 6{,}4^2} \approx 7{,}3$ (cm); $T = 35$ cm^2; $K \approx 24{,}6$ cm

e) $f = \dfrac{2 \cdot 48}{9{,}6} = 10$ (cm); $x = \sqrt{8^2 - 4{,}8^2} = 6{,}4$ (cm); $f - x = 3{,}6$ cm;
$a = \sqrt{4{,}8^2 + 3{,}6^2} = 6$ (cm); $K = 28$ cm

7.31. *a)* $x = \dfrac{18-10}{2} = 4$ (cm); $b = d = \sqrt{4^2 + 6^2} \approx 7{,}2$ (cm);

$K \approx 18 + 10 + 2 \cdot 7{,}2 = 42{,}4$ (cm); $T = \dfrac{(18+10) \cdot 6}{2}$;

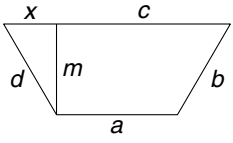
$T = 84$ cm^2



b) $c = \dfrac{18{,}3 \cdot 2}{3} - 7{,}2 = 5$ (cm); $x = \dfrac{7{,}2 - 5}{2} = 1{,}1$ (cm); $b = d = \sqrt{3^2 + 1{,}1^2} \approx 3{,}2$ (cm);
$K \approx 7{,}2 + 5 + 2 \cdot 3{,}2 = 18{,}6$ (cm)

c) $x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (cm); $a = 5 + 2 \cdot 3 = 11$ (cm); $K = 26$ cm; $T = 32$ cm^2

d) $c = 21 - (6 + 2 \cdot 3{,}6) = 7{,}8$ (cm); $x = \dfrac{7{,}8 - 6}{2} = 0{,}9$ (cm);



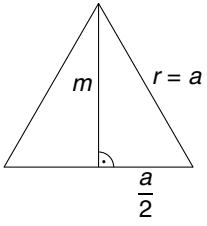
$m = \sqrt{3{,}6^2 - 0{,}9^2} \approx 3{,}5$ (cm); $T \approx \dfrac{(6 + 7{,}8) \cdot 3{,}5}{2}$;

$T \approx 24{,}2$ cm^2

e) $x = \dfrac{10 - 6}{2} = 2$ (cm); $m = \sqrt{4^2 - 2^2} \approx 3{,}5$ (cm); $K = 24$ (cm); $T = \dfrac{(10 + 6) \cdot 3{,}5}{2}$;

$T = 28$ cm^2

7.32. A szabályos hatszög 6 egybevágó szabályos háromszögre bontható. Ezeknek a magasságát kell meghatároznunk.



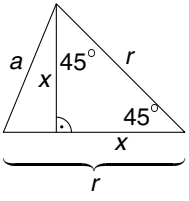
(1) $m^2 = 4{,}4^2 - 2{,}2^2 = 19{,}36 - 4{,}84 = 14{,}52$

$m = \sqrt{14{,}52} \approx 3{,}8$ cm

$T_{\triangle} \approx \dfrac{4{,}4 \cdot 3{,}8}{2}$ cm$^2 \approx 8{,}36$ cm^2; $T = 6 \cdot T_{\triangle} \approx 50{,}2$ cm^2

(2) $m^2 = 3^2 - 1{,}5^2$; $m \approx 2{,}6$ cm; $T \approx 3{,}9$ cm^2; $T \approx 23{,}4$ cm^2

7.33. (1) A szabályos nyolcszög 8 egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyeknek a szárszöge 45°. (360° : 8 = 45°)



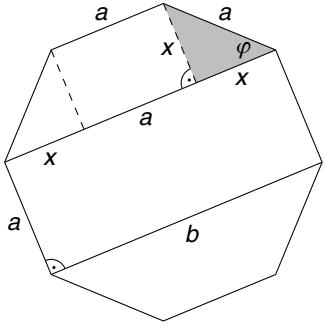
A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

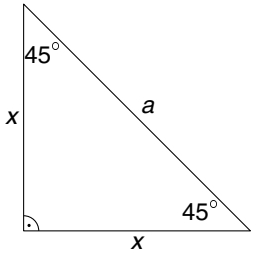
$x^2 + x^2 = l^2$; $x^2 = \dfrac{l^2}{2}$

$x^2 = \dfrac{4{,}2^2}{2} = \dfrac{17{,}64}{2} = 8{,}82$; $x \approx 3{,}0$ cm

$T_{\triangle} = \dfrac{r \cdot x}{2} \approx 6{,}3$ cm^2; $T = 8 \cdot T_{\triangle} \approx 50{,}4$ cm^2

(2) A szabályos nyolcszög két egybevágó húrtrapézra és egy téglalapra darabolható. A megoldás kulcsa az ábrán szürkére színezett egyenlő szárú derékszögű háromszög x befogójának a meghatározása ($\varphi = 45°$).





$x^2 + x^2 = a^2$; $x^2 = \dfrac{a^2}{2}$; $x \approx 3{,}0$ cm; $T_{\text{téglalap}} = a \cdot b \approx 4{,}2 \cdot 10{,}2 \approx 42{,}8$ cm^2;

$T_{\text{húrtrapéz}} = \dfrac{b + a}{2} \cdot x \approx 21{,}6$ cm^2; $T_{\text{téglalap}} + 2 \cdot T_{\text{húrtrapéz}} \approx 85{,}8$ cm^2

7.34. Az eredményeket kerekítve adtuk meg.

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
r	13 cm	**6,5** cm	**2,1** cm	**2,0** cm
d	**26** cm	13 cm	**4,1** cm	**4,0** cm
K	**81,6** cm	**40,8** cm	13 cm	**12,8** cm
T	**531** cm^2	**133** cm^2	**13,4** cm^2	13 cm^2

7.35. *a)* $i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{3} \approx 20{,}9$ cm; $T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi}{3} = \frac{i \cdot r}{2} \approx 104{,}7\ cm^2$

b) $i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{12} \approx 5{,}2$ cm; $T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi}{12} \approx 26{,}2\ cm^2$

c) $i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{360} \approx 0{,}35$ cm; $T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi}{360} \approx 3{,}5\ cm^2$

d) $i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{360} \cdot 130 \approx 45{,}4$ cm; $T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi}{360} \cdot 130 \approx 454\ cm^2$

e) $i \approx 0{,}79$ m; $T_{\text{körcikk}} \approx 0{,}196\ m^2$; *f)* $i \approx 0{,}39$ m; $T_{\text{körcikk}} \approx 0{,}098\ m^2$

7.36. $T = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi = \underbrace{(R - r)}_{x} \cdot (R + r) \cdot \pi$

$R + r = R + R - x = 2R - x$; $R + r = r + x + r = 2r + x$

$T = x \cdot (2R - x) \cdot \pi$; $T = x \cdot (2r + x) \cdot \pi$

a) $T \approx 942\ cm^2$; *b)* $T \approx 0{,}35\ m^2$; *c)* $T \approx 28{,}3\ cm^2$

d) $T \approx 0{,}35\ m^2$, megegyezik a *b)* feladatban adott körgyűrűvel;

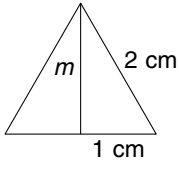
e) $T \approx 22{,}0\ cm^2$;

f) $T \approx 0{,}35\ cm^2$, megegyezik a *b)* és *d)* feladatban adott körgyűrűvel.

7.37. $T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{\text{háromszög}}$

a) $T_{\text{körszelet}} = \frac{4^2 \cdot \pi}{4} - \frac{4^2}{2} \approx 4{,}6\ cm^2$

b) Meg kell határoznunk a szabályos háromszög magasságát, majd a területét.



$m^2 = 2^2 - 1^2 = 3$; $m = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ (cm)

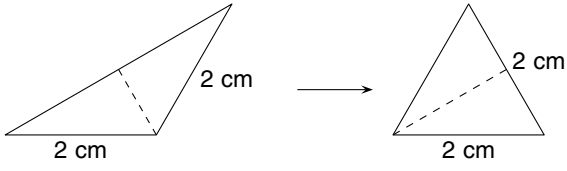
$T_{\text{háromszög}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2}\ cm^2 \approx 1{,}73\ cm^2$;

$T_{\text{körszelet}} = \frac{2^2 \cdot \pi}{6} - T_{\text{háromszög}} \approx 0{,}36\ cm^2$

c) A háromszög átdarabolható:

$T_{\text{körszelet}} = \frac{2^2\pi}{3} - T_{\text{háromszög}} \approx$

$\approx 2{,}46\ cm^2$



7.38. *a)* $b \approx 9{,}54$ cm; *b)* $k = 25{,}1$ cm; $T \approx 28{,}6$ cm^2;

c) $T_k - T_t \approx 78{,}5$ cm$^2 - 28{,}6$ cm$^2 = 49{,}9$ cm^2

7.39. $a \approx 52$ mm; $b \approx 41$ mm; $c \approx 25$ mm; $d \approx 42$ mm; $e \approx 31$ mm; $g \approx 60$ mm; $f \approx 50$ mm; $x \approx 35$ mm; $y \approx 20$ mm; $z \approx 25$ mm

$K = a + b + c + d + e \approx 191$ mm

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{g \cdot x}{2} + \frac{g \cdot y}{2} + \frac{f \cdot z}{2} \approx 2275 \text{ mm}^2$$

7.40. *a)* Az alakzatot 10 mm széles „függőleges” sávokra bontjuk. Így a görbe alatti terület megközelítőleg három trapéz és egy háromszög területének az összege.

$$T_1 = \frac{30 + 28}{2} \cdot 10 \text{ mm}^2 = 290 \text{ mm}^2; \qquad T_2 = \frac{28 + 25}{2} \cdot 10 \text{ mm}^2 = 265 \text{ mm}^2;$$

$$T_3 = \frac{25 + 18}{2} \cdot 10 \text{ mm}^2 = 215 \text{ mm}^2; \qquad T_4 = \frac{18 \cdot 10}{2} \text{ mm}^2 = 90 \text{ mm}^2;$$

$T \approx 860$ mm^2

b) Az alakzatot most 10 mm széles „vízszintes” sávokra bontjuk.

$$T_1 = \frac{37 + 35}{2} \cdot 10 \text{ m}^2 = 360 \text{ m}^2; \qquad T_2 = \frac{35 + 38}{2} \cdot 10 \text{ m}^2 = 365 \text{ m}^2;$$

$$T_3 = \frac{38 + 40}{2} \cdot 10 \text{ m}^2 = 390 \text{ m}^2; \qquad T_4 = \frac{40 + 36}{2} \cdot 10 \text{ m}^2 = 380 \text{ m}^2;$$

$$T_5 = \frac{36 + 26}{2} \cdot 10 \text{ m}^2 = 310 \text{ m}^2; \qquad T_6 = \frac{26 + 20}{2} \cdot 10 \text{ m}^2 = 230 \text{ m}^2;$$

$T \approx 2035$ m^2

Hasáb felszíne és térfogata

7.41. Ha a térfogat és két él adott, akkor a harmadik élt a térfogat képletéből kifejezhetjük:

Például: $V = abc$; $c = \dfrac{V}{ab}$

Ha a felszín és két él adott, akkor a hiányzó élt ki kell fejezni a felszín képletéből.

$A = 2ab + 2ac + 2bc$; $A - 2ab = (2a + 2b)c$; $c = \dfrac{A - 2ab}{2a + 2b}$

Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
a (cm)	5	5	6	5	2	5	6	5	4,5	200
b (cm)	4	5	6	6	**2**	10	8	7	**0,8**	400
c (cm)	10	8	6	**3**	2	**0,02**	**5**		2,0	500
A (cm^2)	**220**	**210**	**216**	**126**	**24**	**100,6**	236	68	28,4	$\mathbf{7{,}6 \cdot 10^5}$
V (cm^3)	**200**	**200**	**216**	90	8	1	**240**		**7,2**	$\mathbf{4 \cdot 10^7}$

8. Nincs megoldás, mert $2ab > A$

7.42. *a)* $A = 6 \cdot a^2$; $a^2 = \dfrac{A}{6}$; $a = \sqrt{\dfrac{A}{6}} = 4$ cm; $V = a^3 = 64$ cm^3

b) (1) $2^3 = 8$ db kis kocka, $A = 6\ \text{cm}^2$; $8 \cdot A = 48\ \text{cm}^2$; $A_1 = 24\ \text{cm}^2$; $8 \cdot A = \mathbf{2} \cdot A_1$

(2) $5^3 = 125$ db kis kocka; $125 \cdot A = 750\ \text{cm}^2$; $A_2 = 150\ \text{cm}^2$; $125 \cdot A = \mathbf{5} \cdot A_2$

(3) $10^3 = 1000$ db kis kocka; $1000 \cdot A = 6000\ \text{cm}^2$; $A_3 = 600\ \text{m}^2$; $1000 \cdot A = \mathbf{10} \cdot A_3$

7.43. *a)* A téglatest élei: 4 cm; 6 cm; 10 cm; $A = 248\ \text{cm}^2$; $V = 240\ \text{cm}^3$

b) A 165 prímtényezős felbontása: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. A téglatest élei: 3 cm; 5 cm; 11 cm; $A = 206\ \text{cm}^2$

c) $A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 675\ \text{cm}^2$; $V = a \cdot b \cdot c = 1125\ \text{cm}^3$;

(1) $A_1 = 2 \cdot [(1{,}2 \cdot a) \cdot (1{,}2 \cdot b) + (1{,}2 \cdot a) \cdot (1{,}2 \cdot c) + (1{,}2 \cdot b) \cdot (1{,}2 \cdot c)] =$

$= 2 \cdot (1{,}44 \cdot a \cdot b + 1{,}44 \cdot a \cdot c + 1{,}44 \cdot b \cdot c) = \underbrace{2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}_{A} \cdot 1{,}44$

$A_1 = A \cdot 1{,}44$; 44%-kal nő a felszín.

A konkrét adatokkal is számolhatunk:

$a_1 = 1{,}2 \cdot 7{,}5\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$; $b_1 = 1{,}2 \cdot 15\ \text{cm} = 18\ \text{cm}$; $c_1 = 1{,}2 \cdot 10\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$

$A_1 = 972\ \text{cm}^2$; $A_1 : A = 972 : 675 = 1{,}44$; 44%-kal nő a felszín.

$V_1 = (1{,}2 \cdot a) \cdot (1{,}2 \cdot b) \cdot (1{,}2 \cdot c) = 1{,}2^3 \cdot \underbrace{a \cdot b \cdot c}_{V} = 1{,}728 \cdot V$; 72,8%-kal nő a térfogat.

A konkrét adatokkal számolva:

$V_1 = 9 \cdot 18 \cdot 12\ \text{cm}^3 = 1944\ \text{cm}^3$; $V_1 : V = 1944 : 1125 = 1{,}728$

(2) $A_2 = 0{,}8^2 \cdot A = 0{,}64 \cdot A$; 36%-kal csökken a felszín.

$V_2 = 0{,}8^3 \cdot V = 0{,}512 \cdot V$; 48,8%-kal csökken a térfogat.

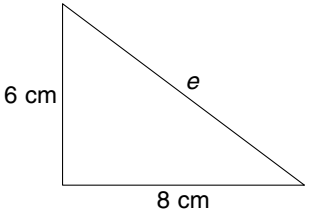
d) $V = a^2 \cdot 2{,}5a = 2{,}5a^3$; $a^3 = \dfrac{160}{2{,}5} = 64$; $a = 4\ \text{cm}$; $A = 96\ \text{cm}^2$

e) 1 m^2 fal elkészítéséhez 16 tégla kell. A teljes falhoz 279 db-ra, a hulladékot is figyelembe véve körülbelül 290–300 db téglára van szükség.

7.44. *a)* A hasáb alaplapja derékszögű háromszög.

$e^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $e = 10\ \text{cm}$; $M_1 = 4{,}5\ \text{cm}$;

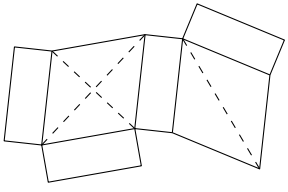
$A_1 = 2 \cdot T_{\text{alap}} + P = 2 \cdot 24\ \text{cm}^2 + 108\ \text{cm}^2 = 156\ \text{cm}^2$



b) $f = 7{,}5\ \text{cm}$; $M_2 = 8\ \text{cm}$; $A_2 = 171\ \text{cm}^2$

A térfogat mindkét esetben: $V = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{2} = 108\ \text{cm}^3$

7.45. A háló a két egybevágó alaplapból és annyi téglalap alakú oldalból áll, ahány oldalú az alaplap.



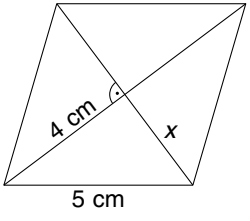
a) $x^2 = 5^2 - 4^2$; $x = 3\ \text{cm}$

$T_{\text{alap}} = \dfrac{6 \cdot 8}{2}\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$

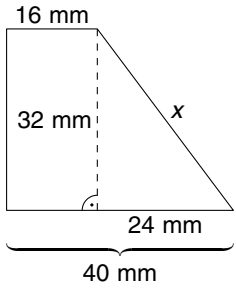
$A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + P = 2 \cdot 24\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 5 \cdot 2\ \text{cm}^2$

$A = 88\ \text{cm}^2$

$V = T_{\text{alap}} \cdot M = 24 \cdot 2\ \text{cm}^3 = 48\ \text{cm}^3$



b) $x^2 = 24^2 + 32^2$; $x = 40$ mm;



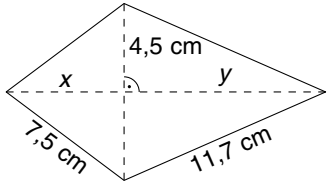
$T_{alap} = \frac{16 + 40}{2} \cdot 32\ mm^2 = 896\ mm^2$;

$P = (32 + 40 + 40 + 16) \cdot 20\ mm^2 = 2560\ mm^2$;
$A = 43{,}52\ cm^2$; $V = 17{,}92\ cm^3$

c) $m^2 = 3^2 - 1{,}8^2$; $m = 2{,}4$ cm; $T_{alap} = 4{,}32\ cm^2$; $P = 19{,}20\ cm^2$;
$A = 27{,}84\ cm^2$; $V = 8{,}64\ cm^3$

d) $m^2 = 3{,}9^2 - 1{,}5^2$; $m = 3{,}6$ cm; $T_{alap} = 16{,}2\ cm^2$;
$P = 33{,}6\ cm^2$; $A = 66{,}0\ cm^2$; $V = 32{,}4\ cm^2$

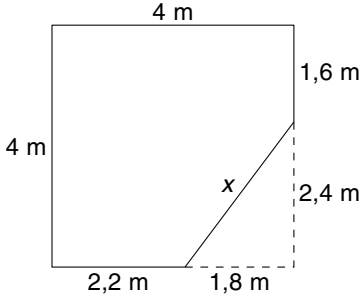
e) $x^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2$; $x = 6$ cm;
$y^2 = 11{,}7^2 - 4{,}5^2$; $y = 10{,}8$ cm;
$e = x + y = 16{,}8$ cm; $f = 9$ cm;



$T_{alap} = \frac{e \cdot f}{2} = 75{,}6\ cm^2$;

$P = 2 \cdot 2 \cdot (7{,}5 + 11{,}7)\ cm^2 = 76{,}8\ cm^2$; $A = 228{,}0\ cm^2$;
$V = 151{,}2\ cm^3$

7.46. *a)* $x^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 = 9$; $x = 3$ m;



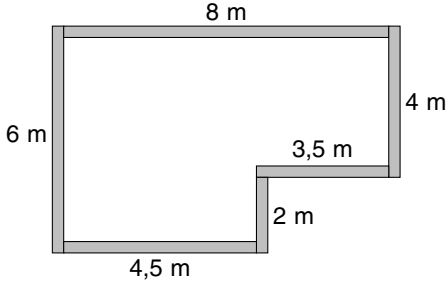
$T_{alap} = 16\ m^2 - \frac{1{,}8 \cdot 2{,}4}{2}\ m^2 = 13{,}84\ m^2$;

$P = 2 \cdot (4 + 4 + 2{,}2 + 3 + 1{,}6)\ m^2 = 29{,}60\ m^2$;
$T_{csempe} = T_{alap} + P = 43{,}44\ m^2$
(a felhasznált csempe 96%-a);

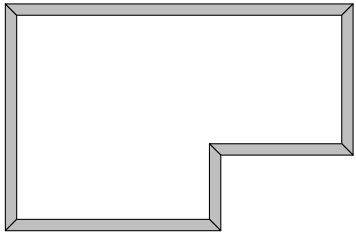
A felhasznált csempe mennyisége:
$(43{,}44 : 0{,}96 =)\ 45{,}25\ m^2$

b) $V = T_{alap} \cdot M$; $M = 1{,}75$ m; $V = 24{,}22\ m^3$

7.47. Az alap olyan téglatestekből állítható össze, amelyek két éle 0,6 m; 1,5 m. A téglatestek harmadik élét kell meghatároznunk. Ezek az értékek leolvashatók az ábráról.
$V = 1{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot (6 + 4{,}5 + 2 + 3{,}5 + 4 + 8)\ m^3$;
$V = 25{,}2\ m^3$



Az alap másképpen is felbontható hasábokra. Egy ilyen lehetséges felbontást mutat a mellékelt ábra.



7.48. *a)* A keresztmetszet területe: $T = 50\ \text{m}^2$
A gát térfogata: $V = 10\,000 \cdot 50\ \text{m}^3 = 500\,000\ \text{m}^3$,
ebből 40 000 m^3 föld, 10 000 m^3 kő.

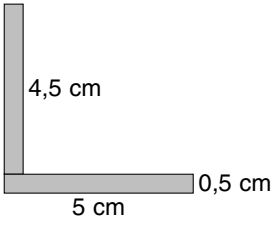
b) A keresztmetszet területe: $T = \dfrac{3{,}5 + 1{,}5}{2} \cdot 1{,}2\ \text{m}^2 = 3\ \text{m}^2$

A kiásott föld térfogata: $V = 600\ \text{m}^3$

c) Az átfolyó víz keresztmetszete: $T = 2{,}4\ \text{m}^2$
1 h = 3600 s; a vízfolyam hossza: $3600 \cdot 2{,}5\ \text{m} = 9000\ \text{m}$
Az átfolyó víz térfogata: $V = 21\,600\ \text{m}^3$

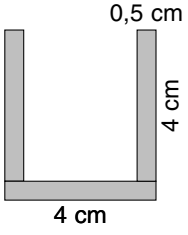
7.49. Az idomacélok téglatestekre darabolhatók (többféleképpen).

a)



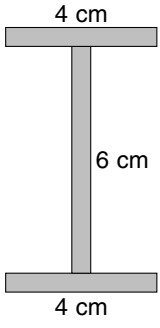
$h = 250\ \text{cm}$;
$V = 1187{,}5\ \text{cm}^3$;
$m \approx 9{,}26\ \text{kg}$;

b)



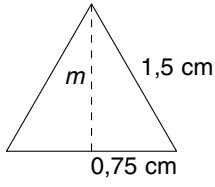
$h = 250\ \text{cm}$;
$V = 1500\ \text{cm}^3$;
$m = 11{,}70\ \text{kg}$;

c)



$h = 250\ \text{cm}$;
$V = 1750\ \text{cm}^3$;
$m = 13{,}65\ \text{kg}$

7.50. *a)* $m^2 = 1{,}5^2 - 0{,}75^2$; $m \approx 1{,}3\ \text{cm}$; $T_{\text{háromszög}} = 0{,}975\ \text{cm}^2$;
$V = l \cdot T_{\text{háromszög}} \approx 9{,}75\ \text{cm}^3$; $m \approx 23{,}4\ \text{g}$



b) A léc keresztmetszetének területe: $T = 14\ \text{cm}^2$; $V = 2100 \approx \text{cm}^3$;
$m = 1470\ \text{g} = 1{,}47\ \text{kg}$

c) A léc keresztmetszetének területe:

$T = 3 \cdot 5\ \text{cm}^2 - \dfrac{3+1}{2} \cdot 1\ \text{cm}^2 = 13\ \text{cm}^2$;

$V = 650\ \text{cm}^3$; $m = 975\ \text{g} = 0{,}975\ \text{kg}$

d) A kazal egy háromszög alapú, egy téglalap alapú és egy trapéz alapú hasábra bontható.
A keresztmetszet területe:

$$T = \left(\frac{5{,}6 \cdot 1{,}5}{2} + 5{,}6 \cdot 3{,}5 + \frac{5{,}6 + 4{,}8}{2} \cdot 1{,}5\right)\ \text{m}^2 = 31{,}6\ \text{m}^2;\quad V = 790\ \text{m}^3;\quad m \approx 87\ \text{t}$$

Egyenes körhenger térfogata, felszíne; hengerszerű testek

7.51. *a)* $K = d \cdot \pi$; $P = M \cdot K = M \cdot d \cdot \pi \approx 23{,}56\ \text{m}^2$

b) $T_1 = (d \cdot \pi + 2) \cdot h \approx 46 \cdot 150\ \text{cm}^2 = 6900\ \text{cm}^2 = 0{,}69\ \text{m}^2$; $T = 20 \cdot T_1 \approx 13{,}8\ \text{m}^2$

c) $T = \left(\dfrac{K}{2} + 2\right) \cdot h = (r \cdot \pi + 2) \cdot h \approx 30{,}2 \cdot 120\ \text{cm}^2 \approx 0{,}36\ \text{m}^2$

7.52. *a)* $V = r^2 \cdot \pi \cdot M \approx 4070\ \text{cm}^3 \approx 4\ \text{l}$; $M_1 = \dfrac{V_1}{r^2 \cdot \pi} = \dfrac{1600}{9^2 \cdot \pi}\ \text{cm} \approx 6{,}3\ \text{cm}$

b) $V = 2{,}5^2 \cdot \pi \cdot 10{,}2\ \text{dm}^3 \approx 200\ \text{dm}^3$ (= 200 l);
$A = 2 \cdot T + P = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + d \cdot \pi \cdot M = (2 \cdot 0{,}25^2 \cdot \pi + 0{,}5 \cdot \pi \cdot 1{,}02)\ \text{m}^2 \approx 2{,}0\ \text{m}^2$;
4 m^2 felületet kell átfestenünk, 0,8 kg festékre van szükség.

c) A vályú keresztmetszetének területe: $T \approx 6{,}28\ \text{dm}^2$; $V \approx 94{,}2\ \text{dm}^3$. A nyitott félhenger felülete: $A \approx 106{,}8\ \text{dm}^2$; a felhasznált lemez mennyisége: A: 0,9 $\approx 118{,}6\ \text{dm}^2$

d) $V \approx 1002{,}4\ \text{l} : 2 = 501{,}2\ \text{l}$; a vízszint emelkedése: $x \approx 20{,}0\ \text{cm}$

e) $V = T \cdot x \approx 0{,}1256 \cdot 7200\ \text{m}^3 \approx 900\ \text{m}^3$

f) $V_{\text{pohár}} \approx 125{,}6\ \text{cm}^3$; $V_{\text{edény}} = 2^3 \cdot V_{\text{pohár}}$; $V_{\text{edény}} = 10^3 \cdot V_{\text{ampulla}}$

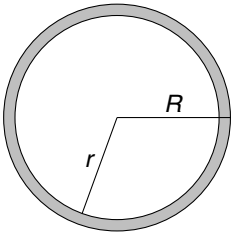
7.53. *a)* $V \approx 12{,}6\ \text{cm}^3$; $m \approx 3{,}8\ \text{g}$;

b) $V \approx 50\,265\ \text{cm}^3$; $m \approx 25\,133\ \text{g} \approx 25\ \text{kg}$;

c) $V = 157\ \text{cm}^3$; $m \approx 424\ \text{g} \approx 0{,}42\ \text{kg}$;

d) $V \approx 1{,}4\ \text{cm}^3$; $m \approx 12{,}4\ \text{g}$;

e) $R = 8\ \text{cm}$; $r = 7{,}5\ \text{cm}$; $l = 600\ \text{cm}$;
$V = (R^2 - r^2) \cdot \pi \cdot l \approx 14\,600\ \text{cm}^3 = 14{,}6\ \text{dm}^3$; $m \approx 113{,}9\ \text{kg}$;



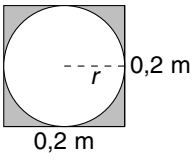
f) $V \approx 377\ \text{cm}^3$; $m \approx 452\ \text{g}$;

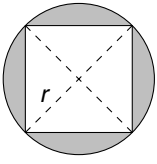
g) $V_{\text{réz}} \approx 251\ \text{cm}^3$; $m_{\text{réz}} \approx 2210\ \text{g}$;
$V_{\text{szig}} \approx 754\ \text{cm}^3$; $m_{\text{szig}} \approx 905\ \text{g}$; $m = m_{\text{réz}} + m_{\text{szig}} \approx 3115\ \text{g}$

7.54. *a)* $V = a^2 \cdot l - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot l \approx 0{,}0516\ \text{m}^3$; $m \approx 36{,}1\ \text{kg}$

Az eredeti gerendának mintegy 21,5%-a a hulladék.

b) $V = r^2 \cdot \pi \cdot l - 2 \cdot r^2 \cdot l \approx 0{,}0685\ \text{m}^3$; $m \approx 48{,}0\ \text{kg}$
Az eredeti oszlop anyagának mintegy 36,3%-a a hulladék.





7.55. A kazlak hengerszerű testek, ahol a henger magassága a kazal l hosszúsága. $V = T \cdot l$

a) $V \approx 224\ \text{m}^3$; $m \approx 17\,920\ \text{kg} \approx 18\ \text{t}$

b) $V \approx 300\ \text{m}^3$; $m \approx 18\,000\ \text{kg} \approx 18\ \text{t}$

c) $V \approx 360\ \text{m}^3$; $m \approx 32\,400\ \text{kg} \approx 32\ \text{t}$

Ismerkedés a gúlával

7.56. A felszín kiszámításához szükséges a háromszögek magassága (oldalmagasság), amely a testháló megszerkesztése után *méréssel*, illetve Pitagorasz-tétel segítségével határozható meg.

a) A téglalap alapú gúla felszíne:

$$A = 4\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} + 2 \cdot \left(\frac{6\ \text{cm} \cdot 7{,}4\ \text{cm}}{2} + \frac{4\ \text{cm} \cdot 7{,}7\ \text{cm}}{2}\right) = 99{,}2\ \text{cm}^2$$

b) A szabályos háromszög alapú gúla felszíne:

$$A = \frac{6\text{ cm} \cdot 5{,}2\text{ cm}}{2} + 3 \cdot \frac{6\text{ cm} \cdot 7{,}4\text{ cm}}{2} = 82{,}2\text{ cm}^2$$

c) A négyzet alapú gúla felszíne:

$$A = 5^2\text{ cm}^2 + 2 \cdot \left(\frac{5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}{2} + \frac{5\text{ cm} \cdot 7\text{ cm}}{2}\right) = 85\text{ cm}^2$$

d) A szabályos háromszög alapú gúla hiányzó adatai: $m_a \approx 6{,}9$ cm; $m_0 \approx 10{,}6$ cm.

A gúla felszíne: $A = \frac{8\text{ cm} \cdot 6{,}9\text{ cm}}{2} + 2 \cdot \frac{8\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}}{2} + \frac{8\text{ cm} \cdot 10{,}6\text{ cm}}{2} = 137\text{ cm}^2$

7.57. Négy egybevágó szabályos háromszög alkotta gúla: szabályos tetraéder.

$m_0 \approx 4{,}3$ cm; $A = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}3}{2}\text{ cm}^2 = 43\text{ cm}^2$

7.58. *a)* A sátorlap területe: $4 \cdot t_0 = 4 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 2}{2}\text{ m}^2 = 10\text{ m}^2$

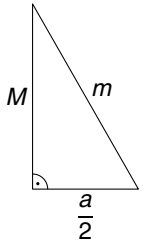
b) A torony tetejét 4 egybevágó, egyenlő szárú háromszög alkotja, ezek területe:

$t = 4 \cdot \frac{3 \cdot 5}{2}\text{ m}^2 = 30\text{ m}^2$; 1 db pala területe 0,04 m^2.

A befedéshez szükséges: $\frac{30}{0{,}04} = 750$ db pala.

(Ennél több kell az átfedés, a törés és a szabásból eredő hulladék miatt.)

7.59. *a)* $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot M = 96\text{ cm}^3$

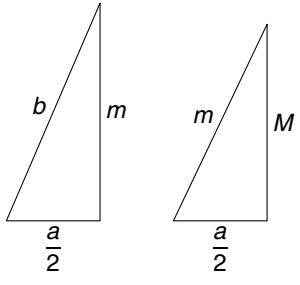


A felszín kiszámításához meg kell határoznunk az oldallapok m magasságát.

$m^2 = M^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $m \approx 8{,}5$ cm

$A = T_{\text{négyzet}} + 4 \cdot T_{\text{háromszög}} \approx 138\text{ cm}^2$

b) Meg kell határoznunk az oldallapok m magasságát, majd az M testmagasságot.



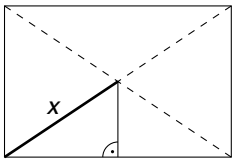
$m^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $m = 7{,}2$ cm

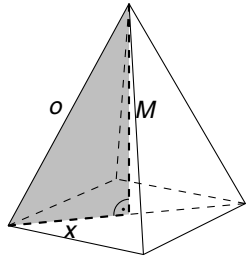
$M^2 = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $M \approx 6{,}5$ cm

$A = T_{\text{négyzet}} + 4 \cdot T_{\text{háromszög}} = 122{,}4\text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot M \approx 78\text{ cm}^3$

7.60. *a)*



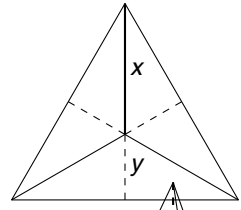


$x^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

$M^2 = o^2 - x^2 = 64 - 13$: $M \approx 7{,}1$ cm

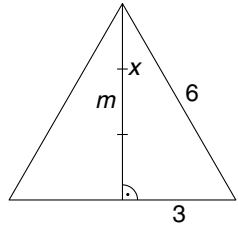
$V = \frac{1}{3} \cdot T_{\text{téglalap}} \cdot M \approx 57\ \text{cm}^3$

b) A szabályos háromszög a magasságvonalai segítségével három egybevágó háromszögre bontható.
Egy ilyen háromszög y magassága $\frac{1}{3}$ része, a maradék x szakasz $\frac{2}{3}$ része a szabályos háromszög magasságának.



$m^2 = 6^2 - 3^2$; $m \approx 5{,}2$ cm; $x \approx 3{,}46$ cm;

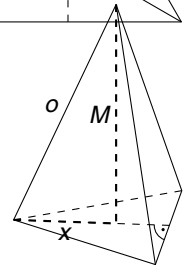
$T_{\text{háromszög}} \approx \frac{6 \cdot 5{,}2}{2}\ \text{cm}^2 = 15{,}6\ \text{cm}^2$



$M^2 = o^2 - x^2 = 64 - 12 = 52$

$M \approx 7{,}2$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot T_{\text{háromszög}} \cdot M \approx 37{,}4\ \text{cm}^3$



c) Az 5 cm-es oldalél a gúla testmagassága.

$V = \frac{1}{3} \cdot T_{\text{négyzet}} \cdot M \approx 41{,}7\ \text{cm}^3$

d) $m_a \approx 6{,}9$ cm; $M = 8$ cm; $V = \frac{1}{3} T_{\text{háromszög}} \cdot M \approx 73{,}6\ \text{cm}^3$

8. Geometriai transzformációk

Pont-pont függvények

8.01. Az ① háromszög

a) tengelyesen tükrös képei: ②, ④, ⑥, ⑧; *b)* középpontosan tükrös képe: ⑤;

c) elforgatással kapott képei: ③, ⑤, ⑦

8.02. $A_1(-3;8)$; $A_2(3;8)$; $A_3(8;3)$; $A_4(8;-3)$; $A_6(-3;-8)$; $A_7(-8;-3)$; $A_8(-8;3)$.

a) A pontpárok koordinátái felcserélődtek.

b) A pontpárok koordinátái előjelben különböznek.

c) A pontpárok koordinátái felcserélődtek, és a második koordináta előjele megváltozott.

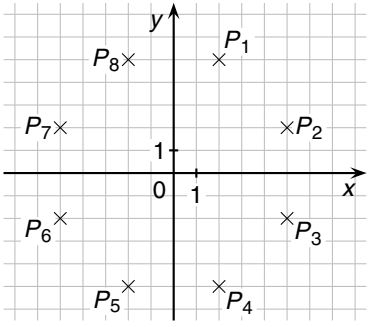
d) A pontpárok koordinátái felcserélődtek, és az első koordináta előjele megváltozott.

e) Az *a)* feladatban tengelyes tükrözés, tükörtengely az $y = x$ egyenes;

a *b)* feladatban középpontos tükrözés; a *c)* feladatban -90°-os forgatás;
a *d)* feladatban $+90^\circ$-os forgatás.

f) Az y tengelyre tükrösek: A_1–A_2; A_3–A_8; A_4–A_7; A_5–A_6. Az első koordináta előjele megváltozik.
Az x tengelyre tükrösek: A_1–A_6; A_2–A_5; A_3–A_4; A_7–A_8. A második koordináta előjele megváltozik.

8.03. *a)* $P_1(2;5)$; $P_2(5;2)$; $P_3(5;-2)$; $P_4(2;-5)$; $P_5(-2;-5)$; $P_6(-5;-2)$; $P_7(-5;2)$; $P_8(-2;5)$



b) Valamennyi pont egyenlő távolságra van az origótól, ezért bármely pont forgatással átvihető bármely másikba. A P_1 pontot tükrözve az $y = x$ egyenesre, kapjuk a P_2-t, az x tengelyre tükrözve kapjuk a P_4-et, az $y = -x$ egyenesre, kapjuk a P_6-ot, az y tengelyre, kapjuk a P_8-at.
A P_1-et az O-ra tükrözve kapjuk P_5-öt. A P_3 és a P_7 is lehet P_1 tükörképe. A P_1 eltolással is átvihető bármelyik pontba.

c) Nyolcszöget kapunk, ennek szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlőek.

d) Négy szimmetriatengelye van.

e) A P_1P_2 oldal hossza: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, P_2P_3 oldal hossza: 4.
A nyolcszög kerülete: $4 \cdot 3\sqrt{2} + 4 \cdot 4 \approx 17 + 16 = 33$.

f) $T = 82$ területegység

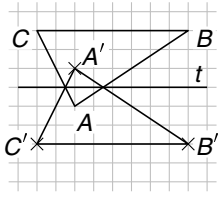
8.04. *a)* ③; ⑨; *b)* ③; ⑤; ⑧; ⑫; *c)* ⑥; ⑩; ⑪;
d) ②; ③; ④; ⑧; ⑦; ⑨; ⑫; *e)* 2 területegység

8.05.

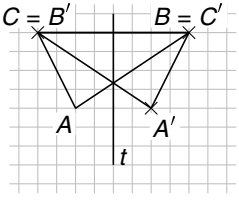
	① alakzat	② alakzat	③ alakzat
a) tengelyesen tükrös	⑤	④	⑫
b) középpontosan tükrös		⑫	⑫
c) eltolással kapott	⑦		⑨
d) elforgatással kapott	⑤ ⑥	④	⑧ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬
e) terület	$3 - \frac{\pi}{2} \approx 1{,}43$	2	2

Tengelyes tükrözés

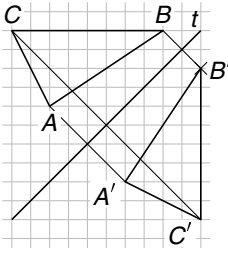
8.06. *a)* (1)



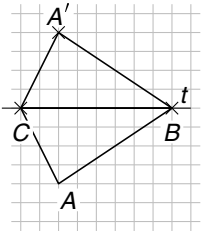
(2)



(3)



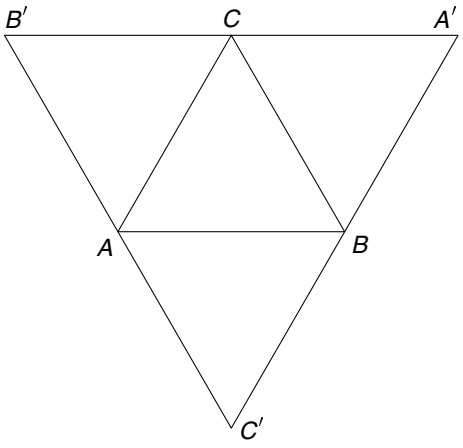
(4)



b) A négyszög deltoid. Két-két szomszédos oldala egyenlő, a BC átlóra szimmetrikus.

c) $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$; $AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$; $K = 11{,}68 \approx 11{,}7$ egység. $T = 32$ területegység.

8.07. *a)*



b) A négy háromszög egy háromoldalú gúla (tetraéder) hálója lehet. A test felszíne a négy háromszög területe.

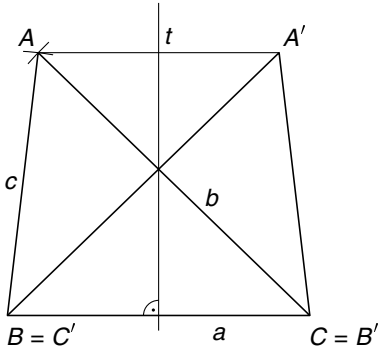
Az $ABC\triangle$ magassága:

$$m = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx \frac{5{,}2}{2} = 2{,}6$$

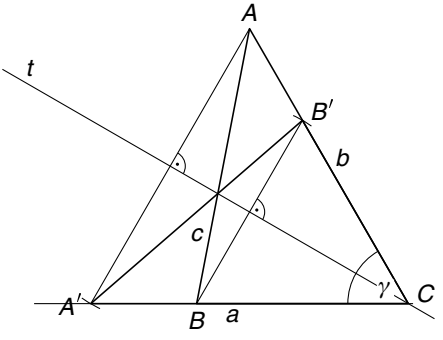
$$T_{\triangle} = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 3{,}9$$

$A = 4 \cdot T_{\triangle} = 4 \cdot 3{,}9 = 15{,}6$ területegység

8.08. *a)* $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $c = 3{,}5$ cm

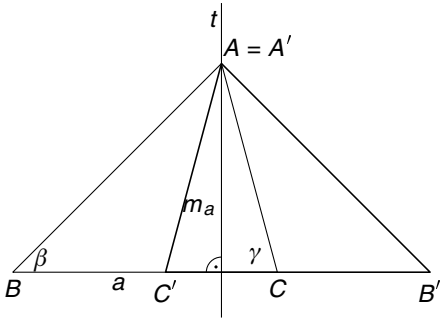


b) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\gamma = 60^\circ$

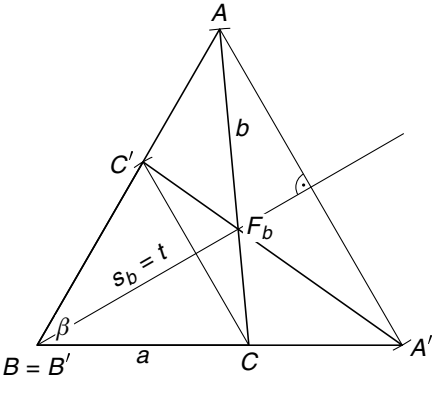


c) $a = 5$ cm, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

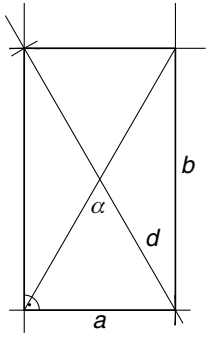
β és γ szerkeszthető.

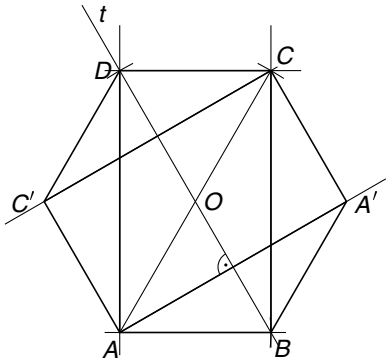


d) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $\beta = 60^\circ$



8.09. *a)* $a = 2$ cm, $d = 4$ cm, $b = \sqrt{12}$ cm $\approx 3{,}5$ cm, $\alpha = 60^\circ$





b) Az $ABA'CDC'$ sokszög szabályos hatszög. Területe 1,5-szerese az $ABCD$ téglalap területének.

Igazolás: $T_{AOD\triangle} = \dfrac{T_{ABCD\square}}{4}$, $AOD\triangle \cong AC'D\triangle$

$$T_{\text{hatszög}} = T_{\text{téglalap}} + 2 \cdot T_{AC'D\triangle} = T_{\text{téglalap}} + \frac{T_{\text{téglalap}}}{2} = 1{,}5 \cdot T_{\text{téglalap}}$$

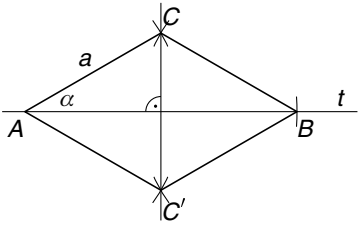
8.10. $AB = 36$ mm, $\alpha = 30^\circ$, $AC = BC$

a) A négyszög rombusz. Oldala:

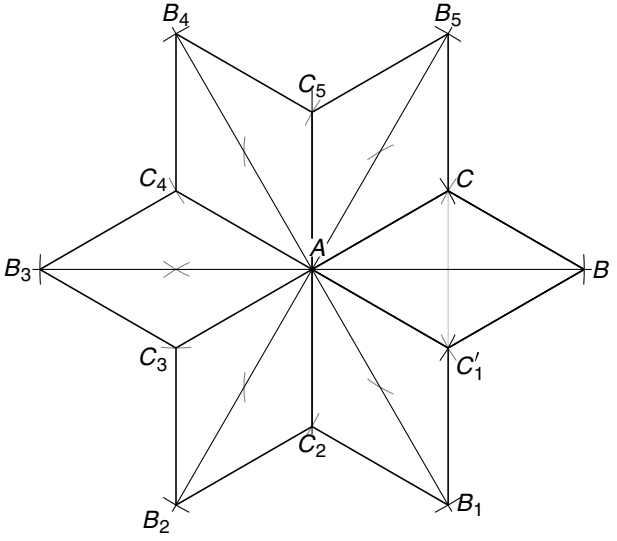
$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 18^2; \quad \frac{3a^2}{4} = 324; \quad 3a^2 = 1296$$

$a^2 = 432$ $a \approx 21$ (mm)

Szögei: 60°, 120°, 60°, 120°



b) 12 oldalú konkáv sokszöget kaptunk. Oldalai egyenlőek. Hat szöge 60°-os, a másik hat 240°-os. Hat szimmetriatengelye van.



c) Ha a derékszög csúcsa C, akkor a másik két csúcs: B, C_2; C_1, C_4; B_1, C_4; B_5, C_4; C_2, C_5; C_2, B_4.

Ha a derékszög csúcsa B, akkor a másik két csúcs: C_1, B_5; B_1, C; B_1, C_5; B_1, B_4; C_2, B_5; B_2, B_5.

Minden csúcs hatszor lehet derékszögű háromszög derékszögének csúcsa. Tehát az ilyen derékszögű háromszögek száma $12 \cdot 6 = 72$.

(Olyan háromszög, amelyben a derékszögű csúcs A-ban van, 12 található.)

d) $CC_2C_4\triangle$; $BB_2B_4\triangle$; $C_1C_3C_5\triangle$; $B_1B_3B_5\triangle$

e) Téglalapok:

BB_1C_2C; $B_1B_2C_3C_1$; $B_2B_3B_4C_2$;
$BB_1C_3C_5$; $B_1B_2C_4C$; $B_2B_3C_5C_1$;
$BB_1B_3B_4$; $B_1B_2B_4B_5$; $B_2B_3B_5B$;
$CC_2C_3C_5$; $C_1C_3C_4C$; $C_2C_4C_5C_1$;
$CC_2B_3B_4$; $C_1C_3B_4B_5$; $C_2C_4B_5B$;
$C_5C_3B_3B_4$; $CC_4B_4B_5$; $C_1C_5B_5B$

f) Az *e)* feladatban felsorolt 18 téglalapon kívüli paralelogrammák:

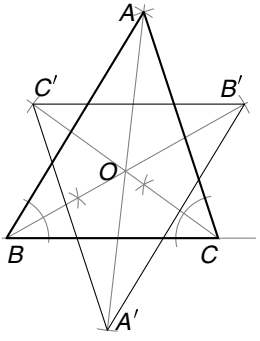
CBC_2C_3; $BC_1C_4C_5$; CBC_3B_3;
$BC_1B_3C_4$; $CB_1C_3B_4$; $CC_1B_2C_3$

g) Az *e)* feladatban felsorolt téglalapokon kívüli húrtrapézok:

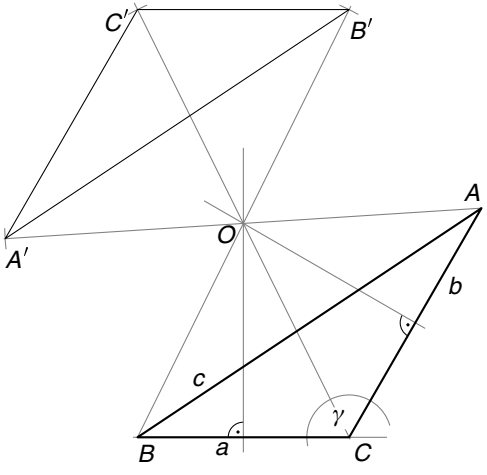
$CC_1C_2C_5$; $C_1C_2C_3C$; $C_2C_3C_4C_1$; $CC_1B_2B_4$;
$C_1C_2B_3B_5$; $C_2C_3B_4B$; $C_3C_4C_5C_2$; $C_4C_5CC_3$;
$C_5CC_1C_4$; $C_3C_4B_5B_1$; $C_4C_5BB_2$; $C_5CB_1B_3$

Középpontos tükrözés

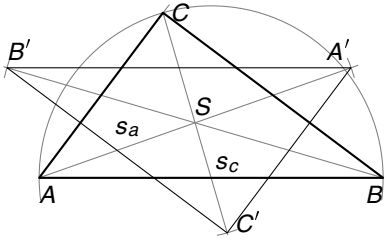
8.11. *a)* A háromszög beírható körének középpontja a szögfelezők metszéspontja.
$a = 4$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $c = 5$ cm



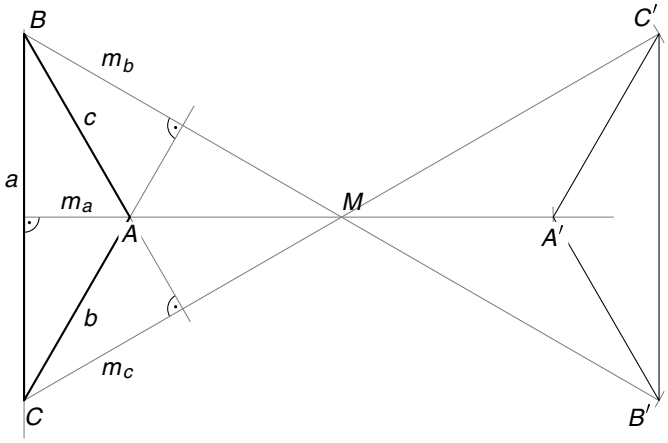
b) A háromszög köré írható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 120^\circ$



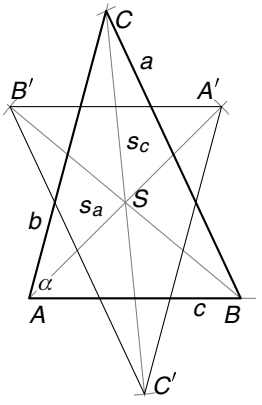
c) A háromszög szerkesztése a Thalésztétel felhasználásával is történhet.
$c = 6{,}5$ cm, $a = 5{,}2$ cm, $ACB\sphericalangle = 90^\circ$



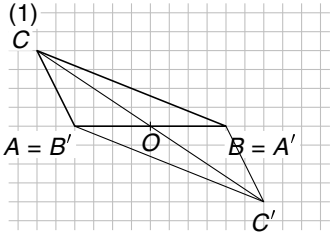
d) $b = c = 4$ cm, $\alpha = 120^\circ$

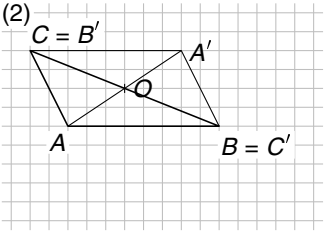


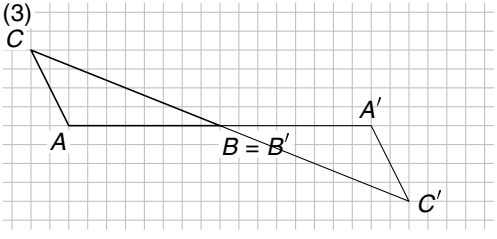
8.12. $a = 6$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 75^\circ$. A 75°-os szög szerkeszthető. A közös rész olyan hatszög, amelyiknek két-két szemközti oldala egyenlő és párhuzamos. Szemközti szögei váltószögek.



8.13. *a)*





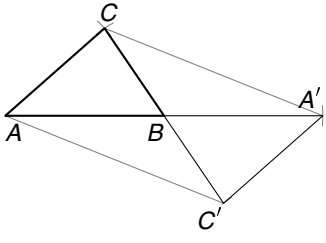


b) Az $AC'BC$ négyszög paralelogramma. Szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők. Szemközti szögei egyenlők, váltószögek. Szomszédos szögeinek összege 180°. Az átlók felezik egymást.

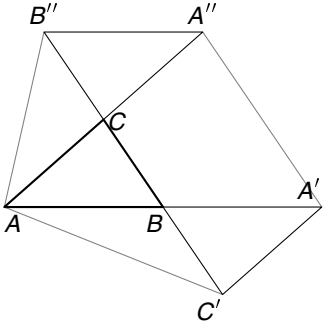
c) $T = 8 \cdot 4$ területegység = 32 területegység.

8.14. $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 2{,}5$ cm

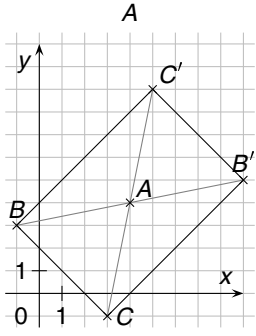
a) A kapott négyszög paralelogramma, átlói négy háromszögre bontják. A háromszögek területe egyenlő. Tehát az $AC'A'C$ négyszög területe négyszerese az ABC háromszög területének.

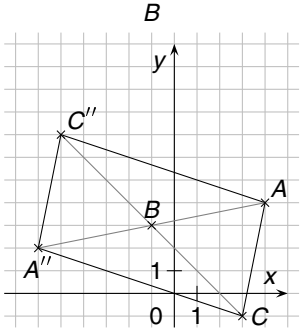


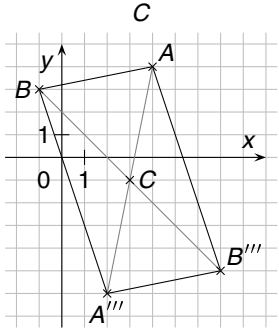
b) A kapott ábra ötszög, amely a szerkesztés menetében 8 háromszögre bontható. A háromszögekre igaz, hogy egy oldalban és a hozzá tartozó magasságban megegyezik az $ABC\triangle$-gel, tehát területük egyenlő. Az $AC'A''A'''B''$ ötszög területe nyolcszorosa az ABC háromszög területének.



8.15. A paralelogramma az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikus. Ha az átlók metszéspontja:







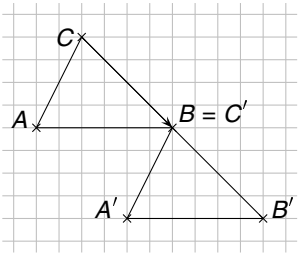
A másik két csúcs:

$B'(9;5)$, $C'(5;9)$ $\quad A''(-6;2)$, $C''(-5;7)$ $\quad A'''(2;-6)$, $B'''(7;-5)$

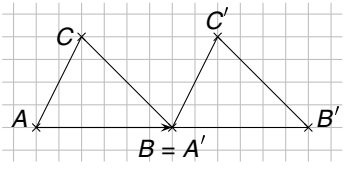
A paralelogramma téglalap. A két paralelogramma egybevágó.

Eltolás

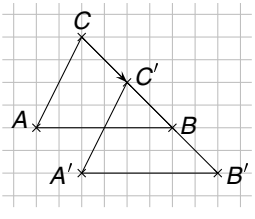
8.16. *a)* (1)



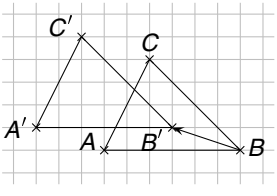
(2)



(3)



(4)

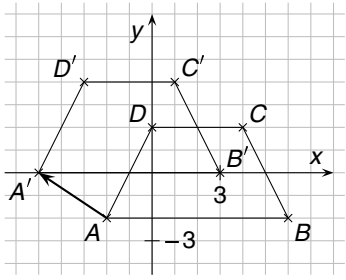


b) A négyszög paralelogramma. Szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők. Szemközti szögei egyenlők, váltószögek, szomszédos szögei társszögek, összegük 180°. Az átlók felezik egymást. Középpontosan szimmetrikus. $T = 24$ területegység.

c) A közös rész olyan háromszög, amelynek oldala fele az $ABC\triangle$ oldalának, területe negyede az $ABC\triangle$ területének.

8.17. Eltolással. *a)* $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$; *b)* $\overrightarrow{B'B''}$ és $\overrightarrow{C'C''}$; *c)* $\overrightarrow{BB''}$ és $\overrightarrow{CC''}$

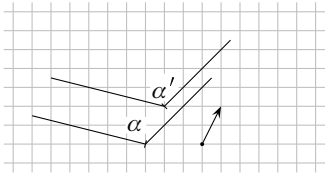
8.18. *a)–b)*



c) A két trapéz közös része is trapéz. Az *ABCD* trapéz területe 24 területegység, a közös rész területe 6 területegység, negyede az *ABCD* trapéz területének.

8.19. 1. és 5.; 2. és 7.; 3. és 6.; 4. és 8.

8.20.



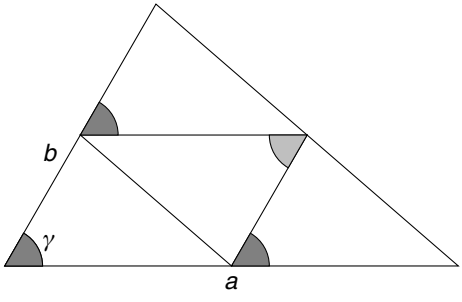
8.21. *a)* Nem vihetők át egymásba eltolással, mert nem egyállásúak.

b) Nem; mert nem tengelyesen szimmetrikus helyzetűek.

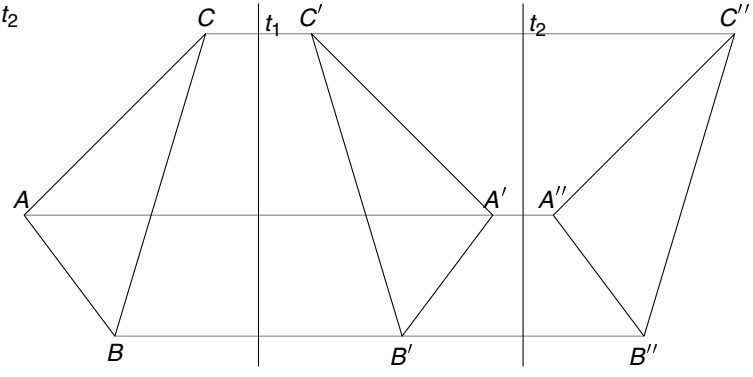
c) Igen; rombusz, speciálisan négyzet.

d) Igen; két, egymásra merőleges tengelyre egymás után végrehajtott tükrözés segítségével.

8.22.

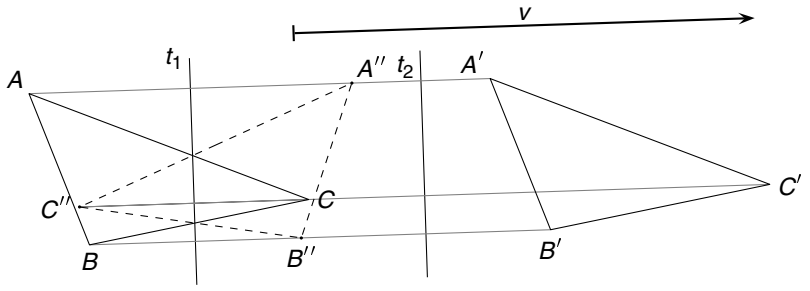


8.23. $t_1 \parallel t_2$

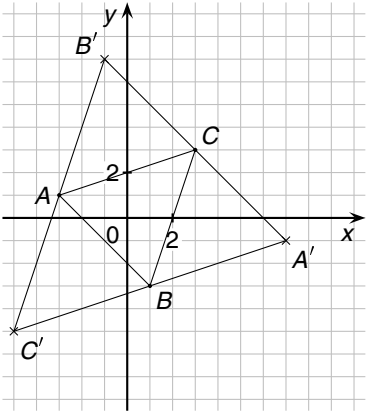


$ABC\triangle$ és $A''B''C''\triangle$ körüljárásának iránya megegyezik.
Az $ABC\triangle$ a második tükörképpel eltolással fedésbe hozható.
Az eltolás vektora merőleges t_1-re és t_2-re, nagysága a t_1 és t_2 távolságának kétszerese.

8.24. A két tengely párhuzamos és merőleges a vektorra. Távolságuk a vektor hosszának a fele.



8.25. Ha az AB szakasz a paralelogramma átlója, akkor a negyedik csúcs: $C'(-5;-5)$.
Ha az AC szakasz a paralelogramma átlója, akkor a negyedik csúcs: $B'(-1;7)$.
Ha a BC szakasz a paralelogramma átlója, akkor a negyedik csúcs: $A'(7;-1)$.



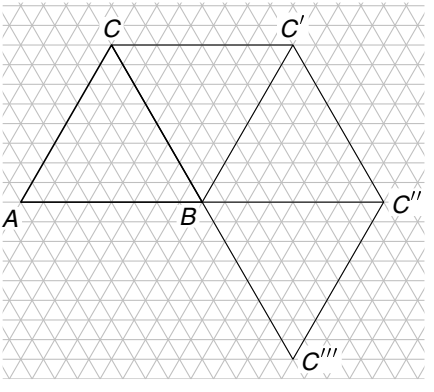
Forgatás

8.26. *a)* $A(1;2) \longrightarrow A'(-2;1)$; $B(4;0) \longrightarrow B'(0;4)$; $C(5;6) \longrightarrow C'(-6;5)$;

b) $P(x;y) \longrightarrow P'(-y;x)$;

c) $AOA' \sphericalangle = BOB' \sphericalangle = COC' \sphericalangle = 90^\circ$

8.27. Az $ABC\triangle$ és a harmadik elforgatott képe, a $BC'''C''\triangle$ középpontosan szimmetrikus.



a) A megfelelő oldalak párhuzamosak, illetve egy egyenesbe esnek. A megfelelő szögek váltószögek.

b) A négy háromszög együtt hatszöget alkot. A hatszög oldalai egyenlők. Két szöge 60°-os, három szöge 120°-os, egy szöge 240°-os.

8.28. *a)* Az O a PP' szakasz felezési pontja.

b) Az O a PP' szakasz felezőmerőlegesén helyezkedik el úgy, hogy a $POP' \sphericalangle$ derékszög. (O a „felső” félsíkon.)

c) Az O a PP' szakasz felezőmerőlegesén helyezkedik el úgy, hogy a $POP' \sphericalangle$ derékszög. (O az „alsó” félsíkon.)

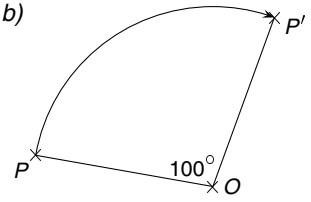
d) A „felső” félsíkon, a PP' szakasz felezőmerőlegesén úgy, hogy $POP' \sphericalangle = 60^\circ$.

e) Az „alsó” félsíkon, a PP' szakasz felezőmerőlegesén úgy, hogy $POP' \sphericalangle = 60^\circ$.

A *b)* és *c)* esetben $POP'\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű.

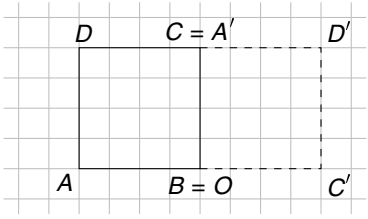
A *d)* és *e)* esetben $POP'\triangle$ szabályos.

8.29. *a)* 80°-os elforgatással. *b)*



8.30. Az elforgatás szöge:
$ACB\sphericalangle + BCA'\sphericalangle = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$

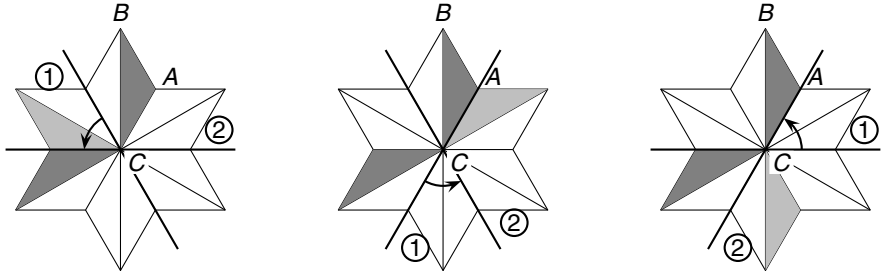
8.31. Az eredeti és az elforgatott négyzet együtt téglalapot alkot.



8.32. **A** hamis; **B**, **C**, **D** igaz; **E** hamis.
Az **A** állítás hamis, mert van olyan forgásszimmetrikus alakzat – *például* a szabályos háromszög –, amely középpontosan nem szimmetrikus.
A **B** állítás igaz, mert a középpontos tükrözés 180°-os elforgatás.
A **C** állítás igaz, mert pl. a szabályos ötszög forgásszimmetrikus alakzat, és tengelyesen is szimmetrikus.
A **D** állítás igaz, mert a szimmetria-középponttól a pont és a tükörképe egyenlő távolságra van, a szimmetria-középpont tehát tengelypont.
Az **E** állítás hamis, mert pl. a szabályos háromszög szimmetriatengelyeinek metszéspontja nem szimmetria-középpont.

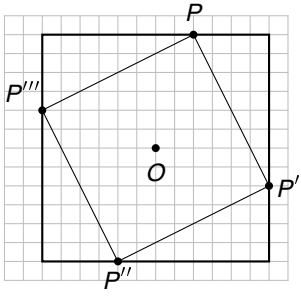
8.33. Minden átmérőjére nézve tengelyesen szimmetrikus. Középpontjára nézve középpontosan szimmetrikus. Bármilyen forgásszög esetén (a középpontja körül elforgatva) forgásszimmetrikus.

8.34. A feltételeknek megfelelő háromszögek száma (az $ABC\triangle$-ön kívül):
a) 5; *b)* 2; *c)* 1; *d)* 1;
e) (1) Sok megoldás van. Például:



Az ① és a ② tengely által bezárt (kisebb abszolútértékű) szög: $+60^\circ$

8.35. *a)* Forgásszimmetrikus alakzatot kapunk, amelynek középpontja az O. Ez az alakzat 90°-os elforgatások ismételt végrehajtásával önmagába vihető át. A kapott négyszög minden oldala és minden szöge egyenlő, tehát négyzet.



b) $T \approx 2{,}7^2\ \text{cm}^2 \approx 7{,}3\ \text{cm}^2$

c) 144 rácsnégyzet – $2 \cdot 32$ rácsnégyzet =
$= 80$ rácsnégyzet $= 80 \cdot 0{,}9\ \text{cm}^2 = 7{,}2\ \text{cm}^2$

d) 16 területegység.

Vegyes feladatok az egybevágósági transzformációk köréből

8.36. *a)* Eltolás; *b)* forgatás; *c)* középpontos szimmetria; *d)* tengelyes szimmetria.

8.37. y tengelyre való tükrözés, majd eltolás, illetve eltolás, majd y tengelyre való tükrözés. Az x tengelyre való tükrözés esetén a $(0; -4)$ pont körüli elforgatás is célhoz vezet.

8.38. *a)* Lehet tengelyes, középpontos tükörkép és eltolt kép is.

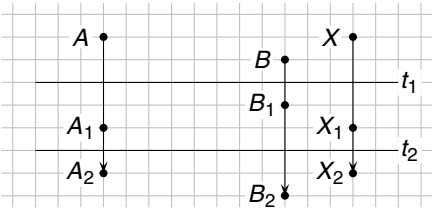
b) Az eltolás vektora $\overrightarrow{AA'}$. *c)* Lehet tengelyes, középpontos tükörkép és eltolt kép.

d) Középpontos tükrözéssel és eltolással előállítható.

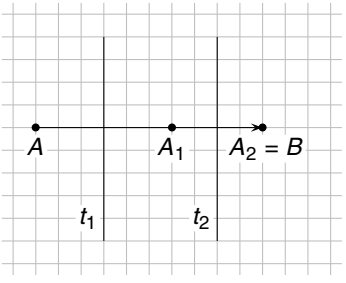
8.39. Tengelyes tükrözéssel (t_1 felezőmerőlegese a CC'-nek). Újabb transzformáció: $t_2 \parallel t_1$

8.40. *b)* $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_2} = \overrightarrow{XX_2}$. A két tükrözés egymás utáni végrehajtása eltolást eredményez.

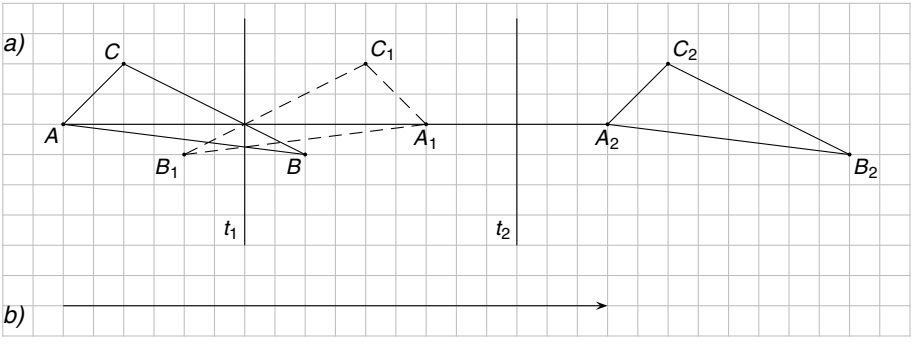
c) A t_1t_2 és AA_2 távolságok aránya: 1 : 2.



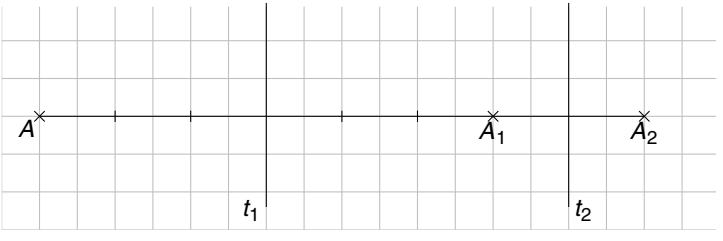
8.41.



8.42. Lehetséges megoldás például:

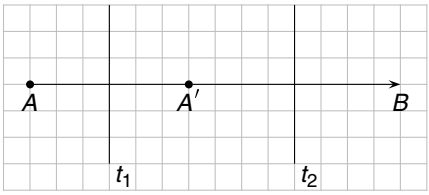


8.43.

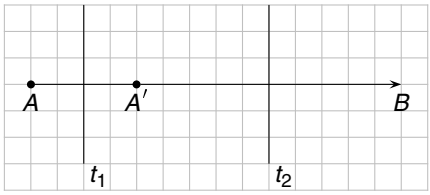


8.44. A 10 cm hosszú AB eltolásvektort a t_1 és t_2 tengelyek az *a)*, *b)*, *e)* és *f)* arányok szerint oszthatják fel. A *c)*, *d)*, *g)*, *h)* szerint nem lehetséges.

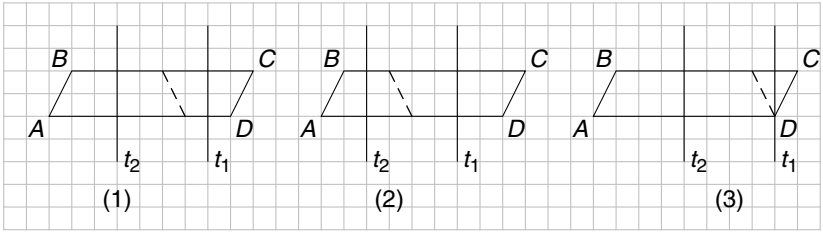
8.45. *a)*



b)



8.46. Néhány megoldás:



A tengelyek minden esetben 4 egység (rácsegység) távolságra vannak egymástól.

8.47. *a)* Az A' pont lehetséges helye az A középpontú, AB sugarú körvonal. Így az O pont lehetséges helye az A középpontú, $\frac{AB}{2}$ sugarú k körvonal. Az O szimmetria-középpont a k kör *bármely* pontja lehet, mert $AO + OA' = AB$.

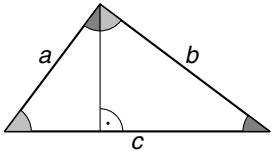
b) Ha az O pont illeszkedik az e egyenesre, akkor a követelmény teljesül.

c) Az A ponttól AB távolságra lévő két pont felel meg a követelménynek. (Az egyik lehetséges szimmetria-középpont a B.)

d) Az AB szakasz felezőpontjára teljesül a követelmény.

e) Két ilyen tulajdonságú pont van. Az egyik az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja, a másik az AB egyenesnek az a pontja, amely az A-tól AB távolságra van, és B-től különbözik.

8.48. Az egyformán jelzett szögek egyenlők, mert merőleges szárú szögek.



8.49. Az $AIH\triangle$-nek

a) tengelyesen szimmetrikus képe:

a háromszög	AGH	FRS	EOP	DMN	CKL	BIJ
a tengely	AD	GH	FC	RK	BE	IO

b) Középpontosan szimmetrikus képe: $DON\triangle$

c) $FGS\triangle$, -60°-kal vagy $+300^\circ$-kal;
$ERP\triangle$, -120°-kal vagy $+240^\circ$-kal;
$CML\triangle$, -240°-kal vagy $+120^\circ$-kal;
$BKJ\triangle$, -300°-kal vagy $+60^\circ$-kal

8.50. Az $ATFG$ négyszöggel

a) tengelyesen szimmetrikus

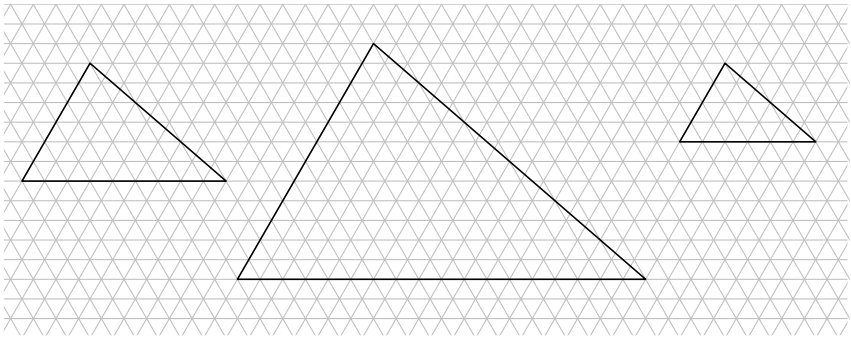
négyszög	$FTER$	$ETDO$	$DTCM$	$CTBK$	$BTAI$
a tengely	FC	RK	EB	IO	AD

b) $DTCM$, a forgatás középpontja a T pont; a négyszög szögei: 30°, 60°, 30°, 240°

c) $BTAI$, 60°; $CTBK$, 120°; $ETDO$, 240°; $FTER$, 300°

8.51. $A \sim C$, $k = \frac{1}{2}$; $\quad A \sim E$, $k = \frac{3}{2}$

8.52. *a)* *b)* *c)*



8.53. *a)* $a = 3$ cm; $\quad b = 4{,}5$ cm; $\quad a' = 4$ cm; $\quad b' = 6$ cm

$K = 15$ cm; $\quad T = 13{,}5$ cm^2; $\quad K' = 20$ cm; $\quad T' = 24$ cm^2

$\frac{a'}{a} = \frac{4}{3}$; $\quad \frac{b'}{b} = \frac{6}{4{,}5} = \frac{4}{3}$; $\quad \frac{K'}{K} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$; $\quad \frac{T'}{T} = \frac{24}{13{,}5} = \frac{16}{9}$

b) $a = 4$ cm; $\quad b = 7{,}5$ cm; $\quad a' = 3{,}2$ cm; $\quad b' = 6$ cm

$K = 23$ cm; $\quad T = 30$ cm^2; $\quad K' = 18{,}4$ cm; $\quad T' = 19{,}2$ cm^2

$\frac{a'}{a} = \frac{3{,}2}{4} = \frac{4}{5}$; $\quad \frac{b'}{b} = \frac{6}{7{,}5} = \frac{4}{5}$; $\quad \frac{K'}{K} = \frac{18{,}5}{23} = \frac{4}{5}$; $\quad \frac{T'}{T} = \frac{19{,}2}{30} = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$

c) $a = 4{,}5$ cm; $\quad b = 6$ cm; $\quad a' = 3$ cm; $\quad b' = 4$ cm

$K = 21$ cm; $\quad T = 27$ cm^2; $\quad K' = 14$ cm; $\quad T' = 12$ cm^2

$d = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2}$ cm $= 7{,}5$ cm; $\quad d' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm

$\frac{a'}{a} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{b'}{b} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{d'}{d} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{K'}{K} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{T'}{T} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

d) $a = 7{,}2$ cm; $\quad b = 4{,}8$ cm; $\quad K = 24$ cm; $\quad K' = 72$ cm; $\quad \frac{K'}{K} = \frac{72}{24} = 3$

A hasonló téglalap oldala háromszorosa az eredeti téglalap oldalának.
$a' = 7{,}2 \cdot 3$ cm $= 21{,}6$ cm; $\quad b' = 4{,}8 \cdot 3 = 14{,}4$ cm

8.54. *a)* A szabályos hatszög bármelyik oldala a köré írható kör sugarával egyenlő. A hatszög oldala $\frac{48 \text{ cm}}{6} = 8$ cm. A hasonlóság aránya 2 : 1, az eredetihez hasonló hatszög köré írható kör sugara 16 cm.

b) Az eredeti négyszög megfelelő oldalainak az összege 10 cm + 25 cm = 35 cm, a hasonlóság aránya $\frac{28}{35} = \frac{4}{5}$. A kicsinyített négyszög oldalai $\frac{10 \cdot 4}{5} = 8$, $\frac{15 \cdot 4}{5} = 12$, $\frac{20 \cdot 4}{5} = 16$ és $\frac{25 \cdot 4}{5} = 20$ cm-esek.

8.55. Ami az alaprajzon 1 cm, az a valóságban 2,5 m.

1. szoba: $4 \times 5{,}3$ m; $21{,}2$ m^2 — 2. szoba: $6{,}8 \times 4{,}0$ m; $27{,}2$ m^2

Kamra: $1{,}8 \times 2{,}5$ m; $4{,}5$ m^2 — Konyha: $4{,}5 \times 4$ m; $18{,}0$ m^2

Fürdőszoba: $2{,}3 \times 3{,}0$ m; $6{,}9$ m^2 — Hall: $23{,}9$ m^2

8.56. A mért adatokat zárójelben közöljük.

a: (81 mm) 405 cm; *b*: (45 mm) 225 cm; *c*: (19 mm) 95 cm;
d: (14 mm) 70 cm; *e*: (20 mm) 100 cm; *f*: (8 mm) 40 cm;
g: (20 mm) 100 cm

8.57. Ami az alaprajzon 1 cm, az a valóságban 1 m.

Kamra: $0{,}9 \times 1{,}6$ m; $1{,}4$ m^2 — WC: $1{,}0 \times 0{,}9$ m; $0{,}9$ m^2

Konyha: $3{,}3 \times 2{,}5$ m; $8{,}3$ m^2 — Fürdőszoba: $3{,}3 \times 2{,}2$ m; $7{,}3$ m^2

1. szoba: $2{,}3 \times 4{,}2$ m; $9{,}7$ m^2 — 2. szoba: $4{,}5 \times 4{,}2$ m; $18{,}4$ m^2

8.59. 211,5 km = 21 150 000 cm. $4{,}7 : 21\,150\,000 = 1 : 4\,500\,000$ a térkép méretaránya.

8.60. 1580 km = 158 000 000 cm. $7{,}9 : 158\,000\,000 = 1 : 20\,000\,000$ a térkép méretaránya.

8.61. Pécs–Szeged távolsága: $2\,000\,000 \cdot 6{,}9$ cm = 13 800 000 cm = 138 km.

8.62. *a)* A Szél utca a térképen 44 mm, a valóságban $4{,}4 \cdot 10$ mm $\cdot\, 2 \cdot 10^4 = 8{,}8 \cdot 10^5$ mm = $= 8{,}8 \cdot 10^2$ m = 880 m.

b) Az 500 m-es távolság a térképen 25 mm. A 25 mm sugarú körön belül van például sportpálya, templom, iskola, Polgármesteri Hivatal stb.

8.63. A mért adatokat zárójelben közöljük.

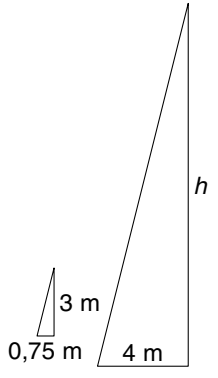
a: (36 mm) 360 mm; *b*: (59 mm) 600 mm; *c*: (15 mm) 150 mm; *d*: (30 mm) 300 mm; *e*: (10 mm) 100 mm

8.64. A mért adatokat zárójelben közöljük.

a: (19 mm) 3,8 mm; *b*: (17 mm) 3,4 mm;
c: (38 mm) 7,6 mm; *d*: (28 mm) 5,6 mm

8.65. *a)* A Nap sugarai egymással párhuzamosak, a két derékszögű háromszög hasonló egymáshoz.

$\frac{h}{3} = \frac{4}{0{,}75}$; $h = 16$ m. A ház 16 m magas.

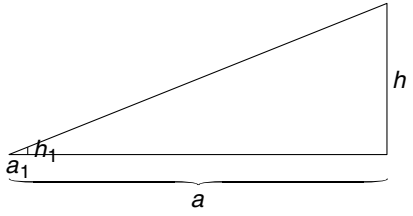


b) $h_1 = 1{,}2$ m; $a = 60{,}5$ m; $a_1 = 3$ m; h =?

Az egymáshoz hasonló derékszögű háromszögek alapján $\frac{h}{h_1} = \frac{a}{a_1}$,

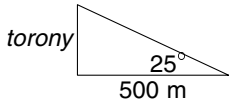
$h = \frac{1{,}2 \text{ m} \cdot 60{,}5 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 24{,}2$ m.

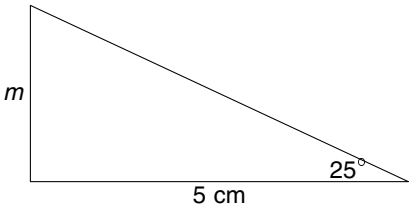
A gyárkémény 24,2 m magas.



8.66. Kicsinyítjük $\frac{1}{10\,000}$ részére:

m = 23 mm = 2,3 cm (méréssel!)
A valóságban a torony magassága közelítően 230 m.

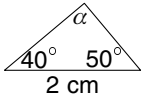


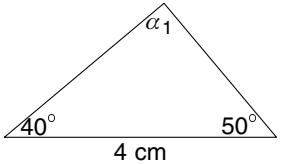


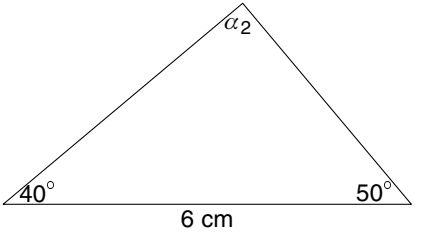
Háromszögek hasonlósága

8.67. *a)* $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$.
A háromszög belső szögeinek összege 180°.

b)







c) $a_1 : a = 4 : 2\ (= 2 : 1)$; $b_1 : b = 2 : 1$; $c_1 : c = 2 : 1$;
$a_2 : a = 6 : 2\ (= 3 : 1)$; $b_2 : b = 3 : 1$; $c_2 : c = 3 : 1$
(A b a b_1-re kétszer, a b_2-re háromszor mérhető fel.)

d) $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$; $ABC\triangle \sim A_2B_2C_2\triangle$; $A_1B_1C_1\triangle \sim A_2B_2C_2\triangle$.
(A hasonlóság aránya a harmadik esetben 2 : 3)

8.68. *a)* $a_1 : a = 3 : 2$; $a_2 : a = 4 : 2\ (= 2 : 1)$; $a_2 : a_1 = 4 : 3$;
$b_1 : b = 4{,}5 : 3\ (= 3 : 2)$; $b_2 : b = 6 : 3\ (= 2 : 1)$; $b_2 : b_1 = 6 : 4{,}5\ (= 4 : 3)$;
$c_1 : c = 6 : 4\ (= 3 : 2)$; $c_2 : c = 8 : 4\ (= 2 : 1)$; $c_2 : c_1 = 8 : 6\ (= 4 : 3)$

b) $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$; $\beta = \beta_1 = \beta_2$; $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$

c) $ABC\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle \sim A_2B_2C_2\triangle$, mert a megfelelő oldalak aránya egyenlő.

8.69. *a)* $\frac{7}{10} = \frac{x}{10{,}5}$. x = 5,95 cm. A rövidebb befogó 7,35 cm.

b) $\frac{7}{10} = \frac{10{,}5}{y}$; y = 15 cm. A hosszabb befogó 15 cm.

Hasonló, a hasonlóság aránya: $k_2 = \frac{10{,}5}{15} = \frac{7{,}35}{10{,}5} = 0{,}7$

8.70. *a)* $\frac{7}{15} = \frac{11{,}9}{y}$; $y \approx 25{,}5$ cm; *b)* $\frac{x}{25{,}5} = \frac{3{,}5}{11{,}9}$; x = 7,5 cm; $k_1 = \frac{7{,}5}{25{,}5} = \frac{3{,}5}{11{,}9} \approx 0{,}29$

c) A befogók: 23,8 cm; 51 cm *d)* Hasonlók; k = 6,8

8.71. *a)* $\frac{4}{5} = \frac{8}{c}$; c = 10 cm; *b)* $\frac{4}{5} = \frac{x}{8}$; x = 6,4 cm; hasonlók, $k = \frac{6{,}4}{8} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

8.72. *a)* $\frac{b}{12} = \frac{7}{9}$; $b = 9\frac{1}{3}$ cm; *b)* x = 28 cm; c = 36 cm

8.73. A keletkezett két derékszögű háromszög hasonló az eredeti derékszögű háromszöghöz és így egymáshoz, mert szögeik egyenlők.

a) $x^2 = a^2 - m^2$; $x = 1{,}8$ cm

A hasonlóság alapján: $\frac{b}{a} = \frac{m}{x}$; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm

b) $m^2 = a^2 - x^2$; $m \approx 2{,}2$ cm; $b = 4{,}1$ cm; $x \approx 4{,}8$ cm

8.74. A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, esetünkben bármely két oldal összege legalább 10 cm ($\frac{18}{2} = 9$ alapján). A létrejövő esetek:

2, 8, 8; 3, 7, 8; 4, 6, 8;
4, 7, 7; 5, 5, 8 (cm)

a) 4, 4, 4 (cm); *b)* 1, 4, 4; 2, 3, 4; 3, 3, 3 (cm)

8.75. $\frac{55 \text{ cm}}{2+4+5} = 5$ cm, a háromszög oldalai 10, 20 és 25 cm-esek.

8.76. *a)* I. mód: $\frac{5}{4} = \frac{a'}{0{,}8}$ alapján $a = 1$ cm. Hasonló módon számítható ki b' értéke, $b' = 1{,}2$ cm.

II. mód: $\frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$, tehát $4 \cdot 0{,}2$ cm, $5 \cdot 0{,}2$ cm és $6 \cdot 0{,}2$ cm a háromszög oldalainak hossza.

b) A két háromszögben a megfelelő oldalak aránya egyenlő.

Hasonló síkidomok területe

8.77. *a)* Az eredeti négyzet oldala 3 cm, területe 9 cm^2. A kétszeres nagyításon az oldalak készeresére történő változását értjük. A nagyított négyzet oldala 6 cm, területe 36 cm^2.

$$\frac{T_{\text{nagyított}}}{T_{\text{eredeti}}} = \frac{36 \text{ cm}^2}{9 \text{ cm}^2} = 4$$

b) $a = 2$ cm; $T = 4$ cm^2; $T' = 2$ cm^2. $a' = ?$
$(a')^2 = 2$ cm^2, $a' = \sqrt{2}$ cm $\approx 1{,}41$ cm

8.78. *a)* $a = 3$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $K = 15$ cm; $T = 13{,}5$ cm^2
$a' = 1$ cm; $b' = 1{,}5$ cm; $K' = 5$ cm; $T' = 1{,}5$ cm^2

$$\frac{K'}{K} = \frac{5 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{1}{3}; \qquad \frac{T'}{T} = \frac{1{,}5 \text{ cm}^2}{13{,}5 \text{ cm}^2} = \frac{1}{9}$$

b) $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $m_a = 5{,}2$ cm; $K = 20$ cm; $T = 20{,}8$ cm^2
$a' = 3$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $m_a' = 3{,}9$ cm; $K' = 15$ cm; $T' = 11{,}7$ cm^2

$$\frac{K'}{K} = \frac{15 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = \frac{3}{4}; \qquad \frac{T'}{T} = \frac{11{,}7 \text{ cm}^2}{20{,}8 \text{ cm}^2} = \frac{117}{208} = \frac{9}{16}$$

c) $r = 5$ cm; $K = 31{,}4$ cm; $T = 78{,}5$ cm^2

$r' = 2$ cm; $K' = 12{,}56$ cm; $T' = 12{,}56$ cm^2

$\frac{K'}{K} = \frac{12{,}56\text{ cm}}{31{,}4\text{ cm}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{T'}{T} = \frac{12{,}56\text{ cm}^2}{78{,}5\text{ cm}^2} = 0{,}16$

8.79. *a)* $a = 3$ cm; $m = 2$ cm; $T = 6$ cm^2;

$a' = 4{,}5$ cm; $m' = 3$ cm; $T' = 13{,}5$ cm^2

$\frac{T'}{T} = \frac{13{,}5\text{ cm}^2}{6\text{ cm}^2} = \frac{4{,}5}{2} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$

b) $e = 4$ cm; $f = 6$ cm; $T = 12$ cm^2;

$e' = 5$ cm; $f' = 7{,}5$ cm; $T' = 18{,}75$ cm^2;

$\frac{T'}{T} = \frac{18{,}75\text{ cm}^2}{12\text{ cm}^2} = \frac{25}{16}$

c) $a = 5$ cm; $c = 7{,}5$ cm; $m = 6$ cm; $T = 37{,}5$ cm^2

$a' = 8$ cm; $c' = 12$ cm; $m' = 9{,}6$ cm; $T' = 96$ cm^2

$\frac{T'}{T} = \frac{96\text{ cm}^2}{37{,}5\text{ cm}^2} = 2{,}56 = \frac{256}{100} = \frac{64}{25}$

Hasonló testek felszíne, térfogata

8.80. $a = 2{,}5$ cm; $A = 6a^2$; $A = 37{,}5$ cm^2; $V = a^3$; $V = 15{,}625$ cm^3

$a' = 7{,}5$ cm; $A' = 337{,}5$ cm^2; $V' = 421{,}875$ cm^3

$\frac{A'}{A} = \frac{337{,}5}{37{,}5}$; $\frac{A'}{A} = 9$; $\frac{V'}{V} = \frac{421{,}875}{15{,}625}$; $\frac{V'}{V} = 27$

A kocka felszíne kilencszeresére, térfogata 27-szeresére változik.

8.81. *a)* $a = 4$ cm; az élváz hossza: $4\text{ cm} \cdot 12 = 48$ cm; $A = 16\text{ cm}^2 \cdot 6 = 96\text{ cm}^2$; $V = 64$ cm^3

$a' = 12$ cm; az élváz hossza: 144 cm; $A' = 144\text{ cm}^2 \cdot 6 = 864\text{ cm}^2$; $V' = 1728$ cm^3

Az élvázak hosszának aránya: $\frac{144\text{ cm}}{48\text{ cm}} = 3$

A felszínek aránya: $\frac{A'}{A} = \frac{864\text{ cm}^2}{96\text{ cm}^2} = 9 = 3^2$

A térfogatok aránya: $\frac{V'}{V} = \frac{1728\text{ cm}^3}{64\text{ cm}^3} = 27 = 3^3$

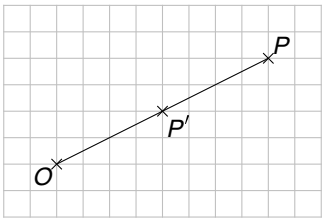
b) $a' = 2$ cm; az élváz hossza: $2\text{ cm} \cdot 12 = 24$ cm; $A' = 4\text{ cm}^2 \cdot 6 = 24\text{ cm}^2$; $T' = 8$ cm^3

Az élvázak hosszának aránya: $\frac{24\text{ cm}}{48\text{ cm}} = \frac{1}{2}$

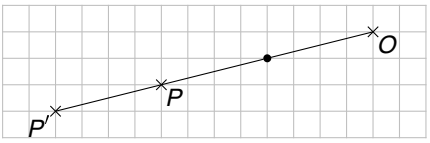
A felszínek aránya: $\frac{A'}{A} = \frac{24\text{ cm}^2}{96\text{ cm}^2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

A térfogatok aránya: $\frac{V'}{V} = \frac{8\text{ cm}^3}{64\text{ cm}^3} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

8.82.



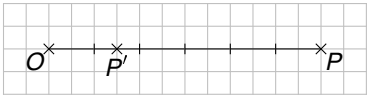
8.83.



8.84. *a)* $k = \frac{7}{3}$; *b)* $k = \frac{3}{7}$

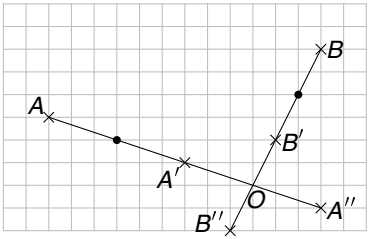
8.85. *a)* $k_1 = -\frac{1}{2}$; $k_2 = \frac{1}{2}$; *b)* $k_1 = -2$; $k_2 = 2$; *c)* $k_1 = -\frac{5}{4}$; $k_2 = \frac{5}{4}$; *d)* $k_1 = -\frac{6}{5}$; $k_2 = \frac{6}{5}$

8.86. *a)*

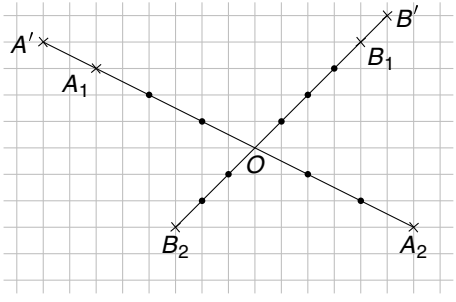


b) $OP' = 1{,}5$ cm

8.87.

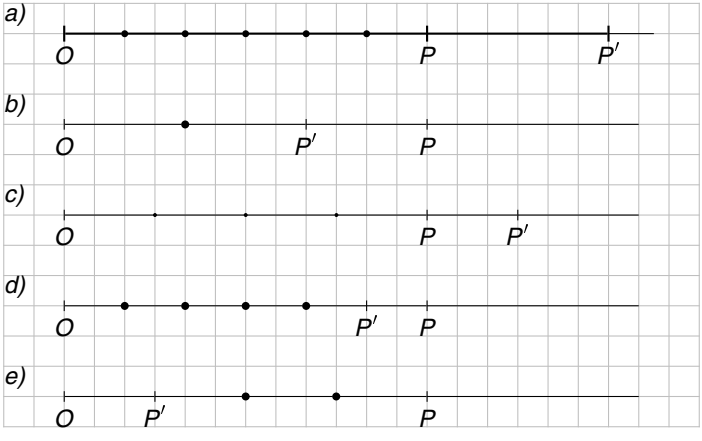


8.88. *a)*

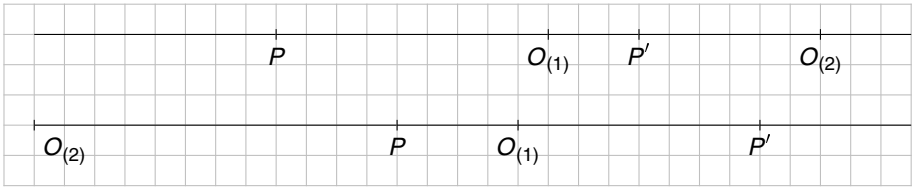


b) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{3}$

8.89.



8.90. *a)*



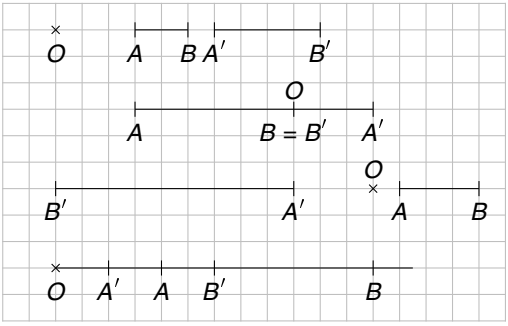
b)

8.91. *a)* Külső hasonlósági pont; $k = 2$;

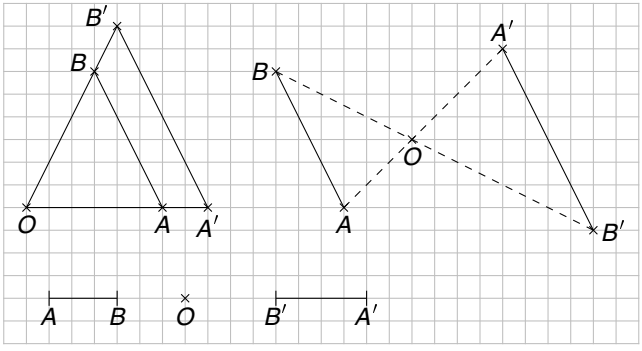
b) belső hasonlósági pont; $k = \frac{1}{2}$;

c) belső hasonlósági pont; $k = 3$;

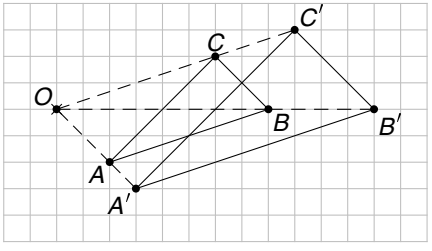
d) külső hasonlósági pont; $k = \frac{1}{2}$



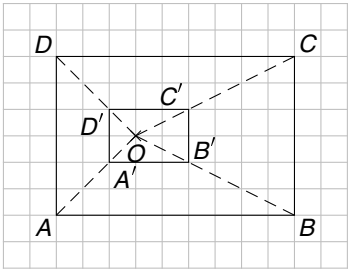
8.92. Szakasz és képe párhuzamos helyzetű (egy egyenesre illeszkedik).



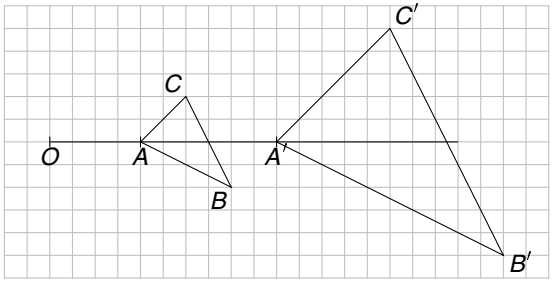
8.93.



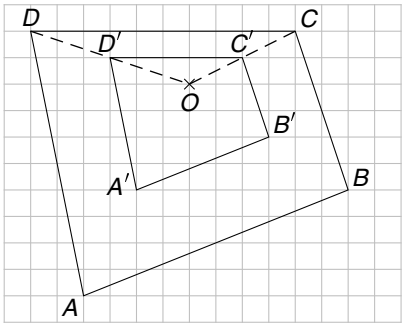
8.94.



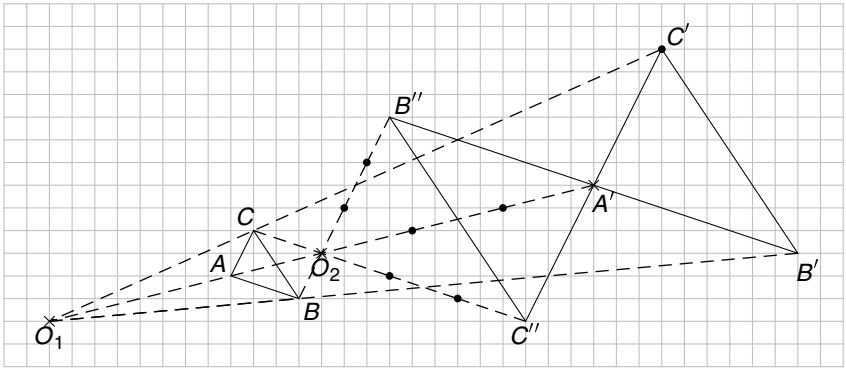
8.95. $k = \frac{5}{2}$



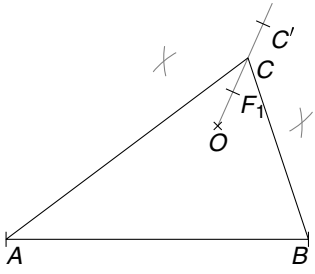
8.96. $k = \frac{1}{2}$



8.97.

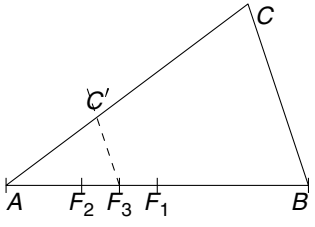


8.98. *a)* 1. Megszerkesztjük az OC szakasz F_1 felezőpontját.
2. Körzőnyílásba vesszük OF_1-et, majd e távolságot az OC félegyenesre C-ből „kifelé” felmérjük.
3. Az így nyert C' pont középpontosan hasonló háromszög csúcspontja.
Innentől kezdve többféleképpen is folytathatjuk a szerkesztést.
1. mód: A leírt módon megszerkesztjük a B' és az A' pontot.



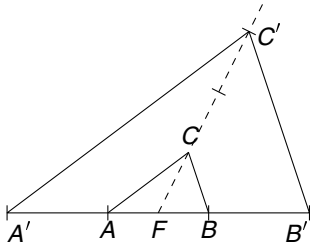
2. mód: A C' ponton át CB-vel párhuzamos egyenest szerkesztünk. Ezen egyenes és az OB egyenes metszéspontja a B' pont. B'-n át AB-vel párhuzamos egyenest szerkesztünk. Ezen egyenes és az OA egyenes metszéspontja A'.

b) Legyen A a hasonlóság középpontja.
Megszerkesztjük az AB felezőpontját (F_1).
Megszerkesztjük az AF_1 felezőpontját (F_2).
Megszerkesztjük az F_2F_1 felezőpontját (F_3).
Az F_3 pont 3 : 5 arányban osztja az AB szakaszt, F_3 tehát a középpontosan hasonló háromszög egyik csúcsa. Az F_3 ponton áthaladó – BC-vel párhuzamos – egyenes AC-ből kimetszi C'-t.
Az AF_3C' háromszög megfelel az előírásoknak.



Megjegyzés: Mind az *a)*, mind a *b)* esetben arányos osztással *is* meg lehetett volna szerkeszteni a csúcspontokat. Itt speciális volt az arány, ez tette lehetővé az egyedi (latinul: ad hoc) módszert.

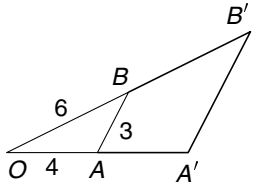
c) Az AB egyenesre A-ból, illetve B-ből felmérjük az AB távolságot. Az így nyert A' és B' a keresett háromszög egy-egy csúcsa.
Az FC egyenesre folyamatosan kétszer felmérjük a C pontból az FC távolságot. Az így nyert C' pont a háromszög harmadik csúcsa.



d) A hasonló háromszögek és az eredeti háromszög kerületének aránya rendre $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{5}$; 3.

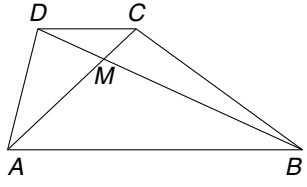
A hasonló háromszögek területe és az eredeti háromszögek területének aránya rendre $\frac{9}{4}$; $\frac{9}{25}$; 9-szerese.

8.99. *a)* $24{,}7 : (3 + 4 + 6) = 1{,}9$, az oldalak $3 \cdot 1{,}9$ cm, $4 \cdot 1{,}9$ cm és $6 \cdot 1{,}9$ cm hosszúak. Az oldalhosszak ismeretében a háromszög szerkeszthető.



b) Megszerkesztjük a 3 cm, 4 cm, 6 cm oldalhosszúságú háromszöget. $4 \cdot 1{,}9$ cm = 7,6 cm alapján megszerkesztjük az A' pontot. Az A' ponton át AB-vel párhuzamos egyenest szerkesztünk, ez az egyenes OB-t B'-ben metszi.
A keresett háromszög az $OA'B'\triangle$.

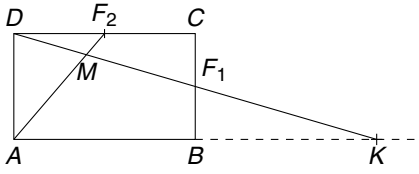
8.100. $ABM\triangle \sim CDM\triangle$, $\frac{AB}{AC} = 3$, tehát az átlók 3 : 1 arányban osztják egymást.



8.101. Az AB egyenest a DF_1 egyenes a K pontban metszi. $KF_1B\triangle \sim KDA\triangle$.

Mivel $F_1B = \frac{1}{2}DA$, a hasonlóság aránya 2 : 1.

$DF_2M\triangle \sim KAM\triangle$ és $DF_2 = \frac{1}{4}AK$ alapján a keresett arány 1 : 4.



8.102. $a' = AT = 300$ m, $r = 1$ m; $a = 2$ m

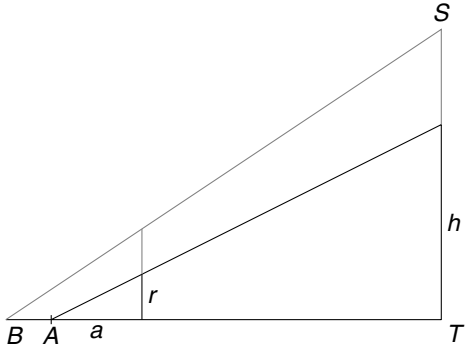
a) Az r és a befogójú derékszögű háromszög hasonló az a' és h befogójú háromszöghöz.

$\frac{h}{r} = \frac{a'}{a}$ alapján $h = \frac{1 \cdot 300}{2}$ m;
$h = 150$ m.

b) A $BTS\triangle$-höz hasonló a B csúcsú 3 m és 2 m befogójú derékszögű háromszög.

$\frac{ST}{2} = \frac{301}{3}$ alapján $ST = \frac{602}{3}$ m.

A sas $\frac{602}{3}$ m $\approx$ 200 m magasan lebeg.



9. Kombinatorika, valószínűség, statisztika

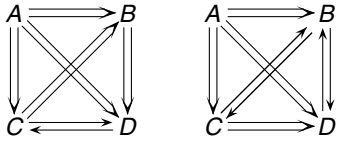
Hányféleképpen?

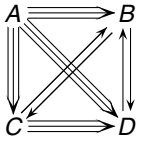
9.01. *a)* Kálmánnak 0, Lalinak 2, Micunak 2, Nándinak 0 pontja van.

b) 6 mérkőzés volt, ahány szakasz húzható a *K*, *L*, *M*, *N* pontok közé.

c) Minden mérkőzésnek két lehetséges kimenetele volt, ezért 12-féle eredménye lehetett a mérkőzéseknek, annyi, ahány vektort meghatároznak a *K*, *L*, *M*, *N* pontok.

9.02. *a)* 6 mérkőzés volt. *b)* 18-féle eredménye lehetett a mérkőzéseknek.

c) 

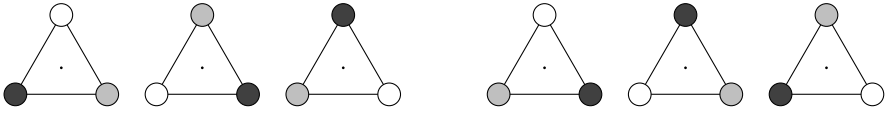
d) 

Andor: 9 pont,
Cili: 4 pont

9.03. 6-féle megoldás van.

9.04. *a)* Ha számít a csúcsok elhelyezkedése a lapon, akkor 6 megoldás van.

b) Három-három színezés forgatással egymásba vihető.

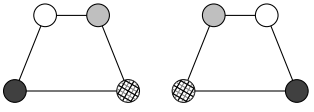


Két megoldás van.

c) Egy megoldás van, a *b)* pontban kapott két megoldás egymásnak tengelyesen tükrös képe, tehát az a két megoldás egybevágó.

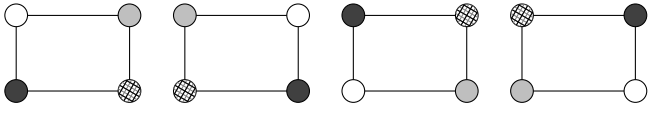
9.05. *a)* 24 nem egybevágó megoldás van.

b) Két-két színezés egymásnak tengelyesen tükrös képe. 12 nem egybevágó színezés van.



c) 12 nem egybevágó színezés van.

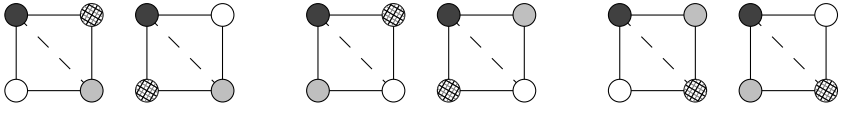
d) Négy-négy színezés tengelyes, illetve középpontos tükrözéssel egymásba vihető.



6 nem egybevágó megoldás van.

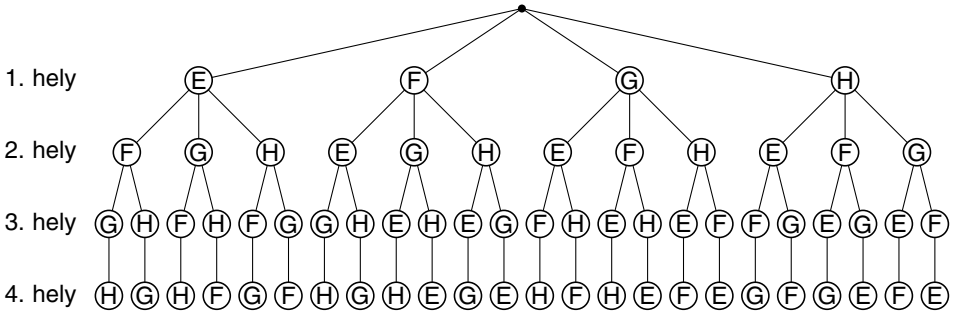
e) 6 nem egybevágó megoldás van.

f) 6-féle színezést kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy négy-négy színezés a négyzet középpontja körüli elforgatással egymásba vihető.



3 nem egybevágó megoldás van, mivel a fenti színezések közül kettő-kettő tengelyes tükrözéssel egymásba vihető.

9.06. 24-féleképpen érhetnek célba.

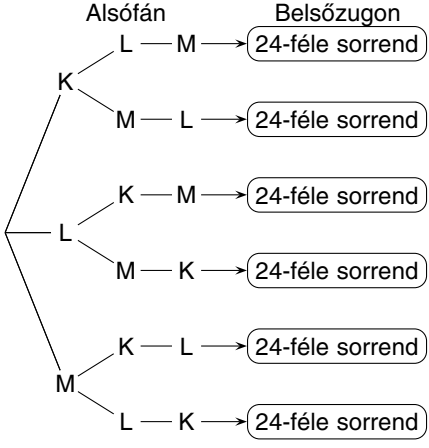


Ha Emma az 1., akkor a három másik lány bármelyike lehet 2. helyezett.
Ha Emma az 1., akkor a három másik lány $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6-féle sorrendben érkezhet célba.

9.07. *a)* $(2 \cdot 1 =)$ 2-féleképpen; *b)* $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6-féleképpen;
c) $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24-féleképpen; *d)* $(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 40 320-féleképpen.

9.08. *a)* $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24 négyjegyű szám rakható ki. Mindegyik osztható 9-cel.
b) 12 páros szám rakható ki. 6 olyan, amelyik 2-re, és 6 olyan, amelyik 4-re végződik. 6 olyan szám rakható ki, amelyik osztható 4-gyel: 3412; 4312; 1324; 3124; 1432; 4132
c) A kirakható 25-tel osztható számok 25-re vagy 75-re végződnek.

9.09. Ha Alsófán kezd, akkor ott $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6-féle sorrendben végezheti el a munkát. Bármilyen sorrendben is dolgozik, Belsőzugon $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24-féle sorrend közül válogathat. Alsófán kezdve $(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 144$-féle sorrend lehetséges. Kezdheti a munkát Belsőzugon is, ezért $(2 \cdot 6 \cdot 24 =)$ 288-féle sorrend lehetséges.



9.10. Mindhárom esetben $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 120-féle sorrendben rakhatók ki a kártyák.

a) Mindegyik kirakott szám 2-szer fordul elő, *például:*

2 1 4 **1** 3, illetve 2 **1** 4 1 3

(120 : 2 =) 60 különböző szám olvasható le.

b) Mindegyik kirakott szám annyiszor fordul elő, ahányszor a három 1-es kártya egymás közt felcserélhető; $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6-szor. *Például:*

1 2 1 **1** 3; 1 2 **1** 1 3; 1 2 1 **1** 3

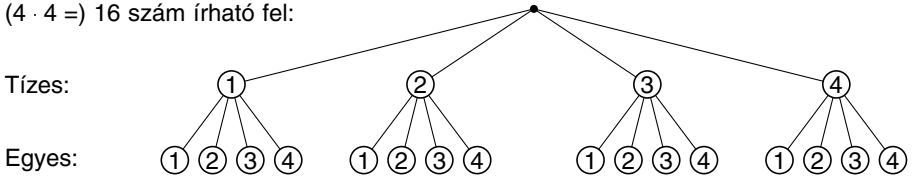
1 2 **1** 1 3; **1** 2 1 1 3; **1** 2 1 1 3

(120 : 6 =) 20 különböző szám olvasható le.

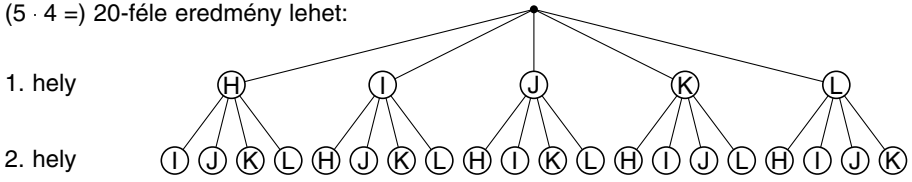
c) Az 1-es kártyák 6-féleképpen, a 2-es kártyák 2-féleképpen cserélhetők fel egymás között.

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10$$ különböző ötjegyű szám olvasható le.

9.11. $(4 \cdot 4 =)$ 16 szám írható fel:



9.12. $(5 \cdot 4 =)$ 20-féle eredmény lehet:



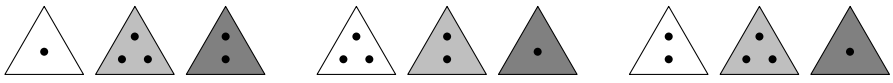
9.13. *a)* $(6 \cdot 5 =)$ 30; például a nappali őrt még 6 résztvevő közül sorsolják ki, az éjszakai őrt a maradék 5 ember közül. Számít, hogy kinek a nevét húzták ki először, kiét másodszor.

b) Nem számít, hogy kinek a nevét húzzák ki először, kiét másodszor. Ezért a lehetséges 30-féle húzás között kettőnek-kettőnek megegyezik az eredménye. $(30 : 2 =)$ 15-féle eredménye lehet a sorsolásnak.

9.14. *a)* $(7 \cdot 6 =)$ 42-féle eredmény lehet. Nem húzható ki ugyanaz a név kétszer.

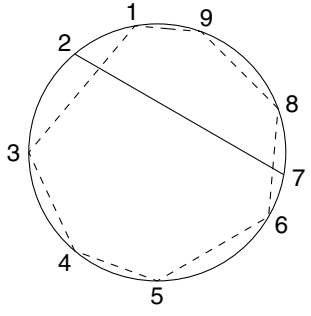
b) $(7 \cdot 7 =)$ 49-féle eredmény lehet. Kétszer is kihúzható ugyanaz a név.

9.15. A különböző színű tetraéderek segítségével meghatározható az adatok leolvasásának a sorrendje. A következő eredményeket nem tekintjük azonosnak:



a) $4^3 = 64$; *b)* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; *c)* $4^2 = 16$; *d)* $2^3 = 8$

9.16. Megfigyelhetjük, hogy a három feladatnak ugyanaz a matematikai modellje: 9 különböző elem közül hányféleképpen választható ki 2, illetve 7 elem úgy, hogy nem számít a sorrend.



Két elem $\left(\frac{9 \cdot 8}{2} = \right)$ 36-féleképpen választható ki.

Például az *a)* feladatban ha megrajzolunk egy szakaszt, akkor a maradék 7 pont egy hétszöget határoz meg. Ugyanannyi hétszög rajzolható meg, mint ahány szakasz.
7 elem is 36-féleképpen választható ki.

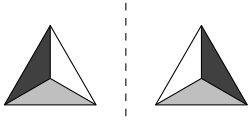
9.17. Minden betűhármashoz 001–999-ig rendelhető számhármas.

a) $(25^3 \cdot 999 =)$ 15 609 375 különböző rendszám készíthető.

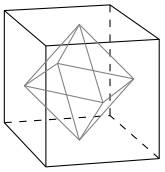
b) $(25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 999 =)$ 13 786 200 ilyen rendszám készíthető.

9.18. *a)* $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24-féle színezés lehetséges.

b) Mondjuk pirosra színezzük ki a tetraéderek alaplapját, ezután vizsgálhatjuk a másik három lap színezését felülnézetből. Két különböző színezés lehet. (Ezek a színezett tetraéderek síkra tükrözve egymás tükörképei.)



9.19. *a)* Színezzük ki a kocka egyik lapját pirosra. A vele szemben fekvő lapot 5-féleképpen színezhetjük ki. Ha ideiglenesen megszámozzuk a maradék négy lapot, akkor azok a maradék négy színnel $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 24$-féleképpen színezhetők ki. Ezek közül 4-4 színezés forgatással egymásba vihető át.

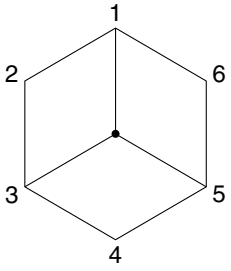


A lehetséges színezések száma: $5 \cdot \frac{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{4} = 30$

b) A kocka szomszédos lapjainak középpontjai egy szabályos oktaédert határoznak meg. Így a feladat visszavezethető az *a)* feladatra.

9.20. *a)* A kocka egy csúcsát fessük pirosra. A vele átellenes csúcsot 7-féleképpen színezhetjük ki. Ha ideiglenesen megszámozzuk a fennmaradt hat csúcsot, akkor azok a maradék hat színnel $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$-féleképpen színezhetők ki. A testátló körül elforgatva 3-3 színezés egymásba vihető át.

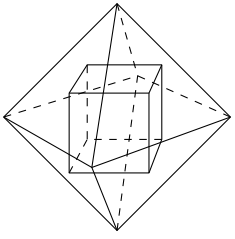
A kocka testátlóra merőleges nézete:



A lehetséges színezések száma:

$7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 1680$

b) A szabályos oktaéder szomszédos lapjainak középpontjai egy kockát határoznak meg. Így a feladat visszavezethető az *a)* feladatra.



Statisztika

9.21. A számtani átlagok: $\overline{a} = 3{,}71$; $\overline{b} = 3{,}63$. Ábel áll jobban.

9.22. *a)* Mindkét lány átlaga 2,63.

b) A nyolc dolgozat átlageredménye rendre:

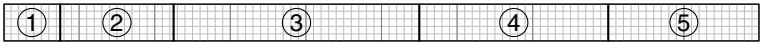
$\overline{x_1} = 2{,}7$; $\overline{x_2} = 3{,}0$; $\overline{x_3} = 3{,}7$; $\overline{x_4} = 3{,}5$; $\overline{x_5} = 3{,}3$; $\overline{x_6} = 3{,}5$; $\overline{x_7} = 3{,}3$; $\overline{x_8} = 3{,}8$

Az első dolgozat sikerült leggyengébben, az utolsó a legjobban.

c)

Jegy	1	2	3	4	5	Össz.
Gyakoriság	6	12	26	20	16	80

d)



7,5% 15% 32,5% 25% 20%

e) $\overline{x} = \frac{6 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 26 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 5}{80} = 3{,}35$

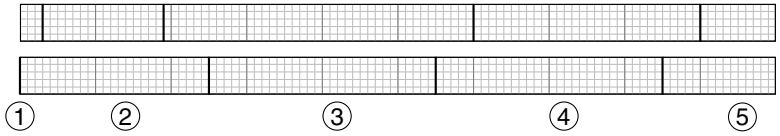
f) $\overline{e} = \frac{6 \cdot 2{,}35 + 12 \cdot 1{,}35 + 26 \cdot 0{,}25 + 20 \cdot 0{,}65 + 16 \cdot 1{,}65}{80} \approx 0{,}95$

Megjegyzés: A szórás értéke $D = 1{,}18$

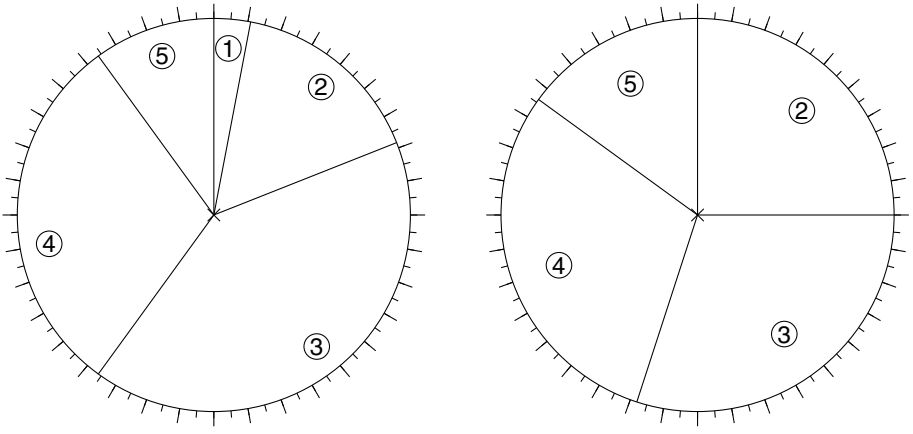
9.23. *a)*

	1	2	3	4	5	Össz.
Fiúk	6	32	82	60	20	200
Lányok	0	40	48	48	24	160
Össz.	6	72	130	108	44	360

b)



c)



d) $\overline{x} = 3{,}31$; $\overline{x}_{\text{fiúk}} = 3{,}28$; $\overline{x}_{\text{lányok}} = 3{,}35$; $\overline{x}_{\text{fiúk}} < \overline{x} < \overline{x}_{\text{lányok}}$

9.24. Az adott országok közül Magyarországon a legmagasabb az autópálya-matrica ára, ugyanakkor csak Szlovákiában rövidebb az autópályák összhossza, mint Magyarországon.

1 km autópálya éves használati díja

A: 8,32 Ft; CS: 11,08 Ft; H: 80,33 Ft; CH: 4,20 Ft; SK: 14,14 Ft

Magyarországon az 1 km autópálya éves használati díja 9,66-szorosa az osztrák, 7,25-szorosa a cseh, 19,12-szorosa a svájci és 5,68-szorosa a szlovák autópályák használati díjának.

9.25. Emma dolgozati jegyeinek átlaga öt dolgozat után

$$2{,}5 \leqq \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} < 3{,}5$$

(Az átlag pontos értékét nem tudjuk.)

A jegyek összege $13 \leqq d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \leqq 17$. Legkedvezőbb esetben a hét dolgozatjegy összege 27, ekkor 4-est kap Emma. Legkedvezőtlenebb esetben a dolgozatjegyek összege 15, ekkor 2-est kap.

9.26. *a)* A három dolgozatjegy összege 9. A lehetséges esetek száma 19:

1. dolgozat:	1	1	3	3	5	5	1	4	4	2	2	5	2	2	3	3	4	4	3
2. dolgozat:	3	5	1	5	1	3	4	1	4	2	5	2	3	4	2	4	2	3	3
3. dolgozat:	5	3	5	1	3	1	4	4	1	5	2	2	4	3	4	2	3	2	3

A fentiek alapján 20 tanuló közül legalább két olyan van, akinek mindhárom dolgozatjegye megegyezik.

b) A három dolgozatjegy összege 12. A lehetséges esetek száma 10:

1. dolgozat: 3 3 4 4 5 5 2 5 5 4

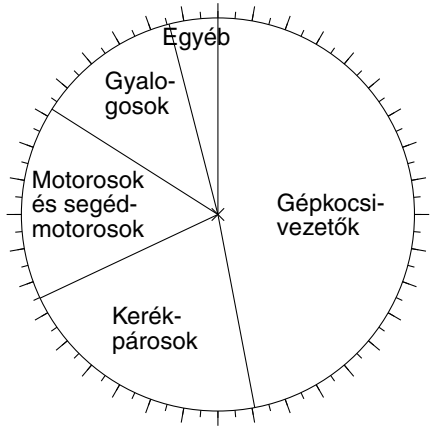
2. dolgozat: 4 5 3 5 3 4 5 2 5 4

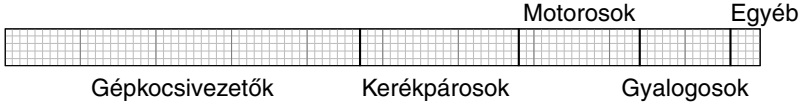
3. dolgozat: 5 4 5 3 4 3 5 5 2 4

20 fős osztályban előfordulhatna, hogy pontosan két-két tanulónak egyeznének meg rendre a dolgozatjegyei. A 21. tanuló akárhogyan is érte el a 4,0-es átlagot a fenti tíz lehetőség közül, legalább hármójuknak azonosak lesznek az eredményei.

9.27. Jól olvashatók le a grafikonról az átlagos terméshozamok. Mivel az oszlopok alja 3000 kg-tól (és nem 0 kg-tól) kezdődik, az oszlopok magassága nem szemlélteti a termésátlagok közti arányokat.

9.28.





9.29. A konkrét adatoktól függ a megoldás.

9.30. 12-en írtak közepest, 8-an elégségest, (24 – 12 – 8 =) 4-en elégtelent, 4-en jelest, (24 – 4 =) 20-an jót. $\overline{x} = 3{,}25$

Esélylatolgatás

9.31. *a)* A sötét golyó kihúzásának nagyobb az esélye.

b) Körülbelül 40%-ában. Nagyon kicsi az esélye annak, hogy ettől az értéktől lényegesen eltérő eredményt kapjunk.

9.32. Nagy a valószínűsége annak, hogy a lakosoknak körülbelül

a) egy heted része hétfőn, *b)* mintegy 49%-a a hónap páros napján született.

(Egy évben 179 olyan nap van, amely a hónap páros sorszámú napja.)

9.33. A konkrét osztály összetételétől függenek a valószínűségi értékek.

Mivel a kísérletet csak 20-szor hajtjuk végre, az egyes események relatív gyakorisága és valószínűsége lényegesen eltérhet egymástól.

9.34. Tízféle sorrendben vehetők ki egymás után a golyók.

A: $\frac{3}{5}$; **B:** $\frac{3}{5}$; **C:** $\frac{3}{5}$; **D:** $\frac{3}{10}$; **E:** $\frac{3}{10}$

9.35. Az összes lehetséges eset száma: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$

Az **A** esemény szempontjából kedvező esetek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Az **A** esemény valószínűsége: $\frac{720}{1000} = 0{,}72$

A **B** esemény és **A** esemény együtt a biztos eseményt adja, ezért a **B** esemény valószínűsége: $1 - 0{,}72 = 0{,}28$

9.36. A lehetséges esetek száma 36.

A: $\frac{1}{2}$; **B:** $\frac{1}{4}$; **C:** $\frac{3}{4}$; **D:** $\frac{2}{3}$; **E:** $\frac{1}{3}$; **F:** $\frac{5}{6}$

9.37. Az összes lehetséges eset száma: $2^5 = 32$

A és **B:** $\frac{1}{32}$; **C** és **D:** $\frac{5}{32}$; **E** és **F:** $\frac{10}{32}$

9.38. A relatív gyakoriságuk alapján az **A** esemény valószínűsége: 0,56 körüli, a **B** esemény valószínűsége: 0,10 körüli érték, nagy valószínűséggel.

Rajzszöget és csavart sokszor feldobva az **A** esemény az esetek körülbelül 0,56 részében következik be. Ezeknek az eseteknek mintegy 0,10 részében bekövetkezik a **B** esemény is. Végeredményben az **X** esemény valószínűsége ($0{,}56 \cdot 0{,}10 \approx$) 0,06 körüli érték.

Az **A** esemény az esetek körülbelül 0,44 részében nem következik be. Ezeknek az eseteknek mintegy 0,90 részében nem következik be a **B** esemény sem. Végeredményben az **Y** esemény valószínűsége ($0{,}44 \cdot 0{,}90 \approx$) 0,40 körüli érték.

Az **A** esemény az esetek körülbelül 0,56 részében következik be, a **B** esemény az eseteknek mintegy 0,10 részében. Ez összesen 0,66 rész. Ám így az eseteknek 0,06 részét, amikor az **A** és a **B** esemény egyidejűleg bekövetkezik, kétszer vettük figyelembe. Végeredményben a **Z** esemény valószínűsége ($0{,}56 + 0{,}10 - 0{,}06 \approx$) 0,60 körüli érték.

Másik megoldás: Észrevehető, hogy a **Z** esemény akkor következik be, amikor az **Y** esemény nem következik be. A két esemény együtt a biztos eseményt adja. Ebből a **Z** esemény valószínűsége ($1 - 0{,}40 \approx$) 0,60 körüli érték.

Útmutató az átdolgozatlan tankönyv és az átdolgozott gyakorló együttes használatához

Az átdolgozatlan tankönyvben a korábban kiadott Matematika 7–8. Gyakorló feladataira hivatkozunk. Az alábbiakban felsoroljuk, hogy a tankönyv anyagának feldolgozása során milyen sorszám alatt találhatók meg a szükséges feladatok.

Tankönyvoldal	Gyakorlófeladat	Tankönyvoldal	Gyakorlófeladat
12.o.	1.01–1.20.	119.o.	7.52.–7.54.
14.o.	2.01–2.15.	121.o.	7.55.
17.o.	2.16–2.17.	128.o.	7.56.–7.58.
20.o.	2.18–2.30.	133.o.	5.01–5.05.
25.o.	2.52–2.70.	140.o.	5.06–5.15.
30.o.	2.71–2.75.	143.o.	5.16–5.23.
37.o.	2.76–2.90.	147.o.	5.24–5.30.
	2.93–2.100.	151.o.	9.21–9.30.
	7.01–7.03.	158.o.	5.42–5.48.
42.o.	2.91–2.92.	162.o.	5.49–5.52.
	2.101–2.116.	164.o.	5.31–5.35.
46.o.	3.01–3.60.	168.o.	8.01–8.05.
51.o.	2.31–2.51.	173.o.	8.06–8.50.
	7.04–7.10.	178.o.	8.51–8.52.
53.o.	2.117–2.121.	182.o.	8.53–8.66.
59.o.	2.122–2.126.	188.o.	8.67–8.72.
63.o.	6.01–6.10.	192.o.	8.73–8.76.
66.o.	6.11–6.12.	200.o.	8.82–8.98.
70.o.	6.21–6.30.	203.o.	8.99–8.102
72.o.	6.31–6.40.	213.o.	4.01–4.21.
74.o.	6.41–6.50.	217.o.	4.22–4.27.
78.o.	6.51.	220.o.	4.28–4.30.
80.o.	6.52.	221.o.	4.31–4.32.
81.o.	6.53.	224.o.	4.33–4.35.
82.o.	6.54–6.60.	228.o.	4.36–4.37.
	6.61–6.65.	230.o.	4.38–4.40.
89.o.	6.66–6.80.	233.o.	4.41–4.42.
91.o.	6.81–6.90.	238.o.	9.01–9.20.
96.o.	7.11–7.33.	242.o.	9.31–9.38.
	7.39–7.40.	261.o.	2.42–2.46.
108.o.	7.34–7.38.	268.o.	3.61–3.65.
111.o.	7.41–7.50.	285.o.	5.36–5.37.
116.o.	7.51.	289.o.	5.38–5.41.