Hajdu Sándor

Czeglédy István
Czeglédy Istvánné
Hajdu Sándor Zoltán
Novák Lászlóné
Sümegi Lászlóné
Tüskés Gabriella
Zankó Istvánné

MATEMATIKA

GYAKORLÓ

7.



OKTATÁSI HIVATAL

DR. CZEGLÉDY ISTVÁN
DR. CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ
DR. HAJDU SÁNDOR
HAJDU SÁNDOR ZOLTÁN
NOVÁK LÁSZLÓNÉ
DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ
TÜSKÉS GABRIELLA
ZANKÓ ISTVÁNNÉ

MATEMATIKA 7.

GYAKORLÓ

ÁLTALÁNOS ISKOLA ALAP,
ÁLTALÁNOS ISKOLA EMELT A,
ÁLTALÁNOS ISKOLA EMELT B,
NYOLCOSZTÁLYOS GIMNÁZIUM ALAP,
HATOSZTÁLYOS GIMNÁZIUM ALAP
KERETTANTERVHEZ

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

A könyvet TKV/4001-13/2013 számon, 2013.04.03-án az Oktatási Hivatal tankönyvvé nyilvánította.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban kirendelt szakértők neve:
Tudományos-szakmai szakértő: Dr. Stettner Eleonóra
Tantárgy-pedagógiai szakértő: Kusper László
Technológiai (könyvészeti) szakértő: Király Ildikó

OM-kerettanterv: 17/2004. (V. 20.) OM-rendelet, 3. sz. melléklet
EMMI-kerettanterv: 51/2012. (XII. 21.), EMMI rendelet 2. sz. melléklet 2.2.03; 2.3.1.1; 2.3.1.2;
4. sz. melléklet 4.2.04; 5. melléklet 5.2.04

Alkotó szerkesztő:
DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az előző kiadásokat bírálta:
KARÁDI KÁROLYNÉ ny. szaktanácsadó

Az átdolgozott részeket bírálta:
DR. FRIED KATALIN

© Dr. Czeglédy István, Dr. Czeglédy Istvánné, Dr. Hajdu Sándor
Hajdu Sándor Zoltán, Novák Lászlóné, Dr. Sümegi Lászlóné, Tüskés Gabriella,
Zankó Istvánné, 1994, 2018

© Műszaki Könyvkiadó Kft., 2018

A kiadvány szerzői jogi védelem alatt áll, arról másolat készítése, más (papír, elektronikus stb.)
formában való felhasználása a kiadó előzetes írásbeli engedélye nélkül tilos.
A kiadvány másolása és jogosulatlan felhasználása bűncselekménynek minősül.

ISBN 978-963-16-4211-7
Kiadói kód: MK–4211-9-K

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó Kft.
2519 Piliscsév, Topol u. 3.
1032 Budapest, San Marco u. 57.
Telefon/fax: 06-33-473-473
Felelős kiadó: Simon István ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Bosznai Gábor
Műszaki szerkesztő: Haász Anikó
A borítót tervezte: Korda Ágnes
Tördelőszerkesztés és számítógépes grafika: Könyv Művek Bt.
Terjedelem: 20,02 (A/5) ív
A kiadvány tömege: 278 gramm
25., 12. átdolgozott, EMMI kerettanterv szerinti 6. kiadás

info@mkkonyvkiado.hu
www.mkkonyvkiado.hu

Tartalom

Feladatok 5

1. Számtan, számelmélet 5
   Racionális és irracionális számok 5
   Hatványozás, számok normálalakja 14
   Számelmélet 27
   Műveletek 36
   Százalékszámítás 40
2. Grafikonok, függvények, sorozatok 43
   Grafikonok, diagramok 43
   Hozzárendelések vizsgálata 46
   Egyenes arányosság 48
   Lineáris függvény 52
   Egyenlet, egyenlőtlenség grafikus megoldása 55
   Sorozat 56
   Vegyes szöveges feladatok 57
3. Algebrai kifejezések 58
   Ismerkedés az algebrai kifejezésekkel 58
   Algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározása 60
   Egynemű, különnemű algebrai kifejezések 63
   Egynemű kifejezések összevonása 64
   Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel 66
   Többtagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel 68
   Többtagú kifejezések szorzattá alakítása kiemeléssel 70
4. Egyenletek, egyenlőtlenségek 71
   Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok 76
5. Mérés; terület, felszín, térfogat 80
   Mértékegységek átváltása 80
   Síkidomok kerülete, területe 82
   Felszín, térfogat 90
6. Geometriai transzformációk 97
   Mi lehet a szabály? 97
   Eltolás 100
   Tengelyes tükrözés 102
   Középpontos tükrözés 105
   Szimmetriák vizsgálata 107
7. Alakzatok előállítása, vizsgálata 108
   Térelemek 108
   Vektorok 108

Szögek ... 110
Elfordulás mérése irányított szöggel ... 111
Síkidomok, sokszögek ... 113
Háromszögek ... 114
Négyszögek ... 116

8. Statisztika, valószínűség ... 121
Statisztika ... 121
9. Vegyes feladatok ... 134

Megoldások, útmutatások ... 145

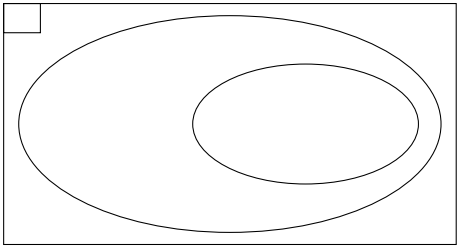
1. Számtan, számelmélet ... 145
2. Grafikonok, függvények, sorozatok ... 163
3. Algebrai kifejezések ... 173
4. Egyenletek, egyenlőtlenségek ... 179
5. Mérés; terület, felszín, térfogat ... 182
6. Geometriai transzformációk ... 196
7. Alakzatok előállítása, vizsgálata ... 203
8. Statisztika, valószínűség ... 213
9. Vegyes feladatok ... 218
Útmutató az átdolgozatlan tankönyv és az átdolgozott gyakorló együttes használatához ... 224

FELADATOK

1. Számtan, számelmélet

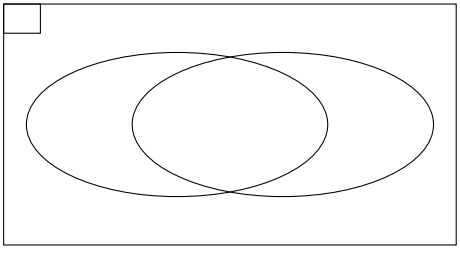
Racionális és irracionális számok

1.01. Írd be a halmazábrába a hiányzó címkéket, majd a számokat! Feketítsd be az üres halmazt!



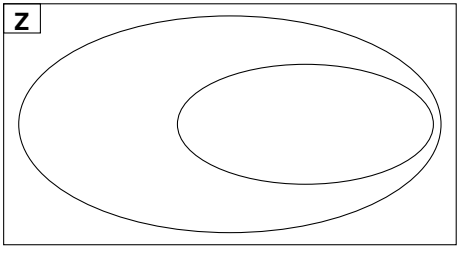
a) **N** = {Természetes számok};
Q = {Racionális számok};
Z = {Egész számok};

$0;\ -1{,}3;\ 5;\ -7;\ 5{,}8;\ 0{,}\dot{6}$



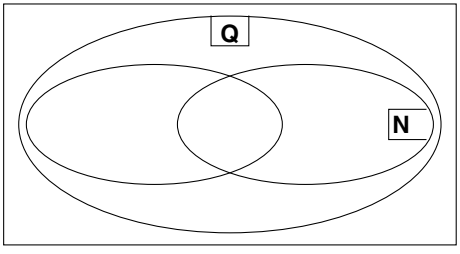
b) P = {Pozitív racionális számok};
M = {Negatív racionális számok};
Q = {Racionális számok};

$0;\ -5;\ 2{,}3;\ -0{,}5;\ 4;\ -\frac{3}{4};\ \frac{5}{6};\ 9{,}\dot{3}0\dot{5}$



c) A = {Pozitív egész számok};
B = {Negatív egész számok};
N = {Természetes számok};
Z = {Egész számok};

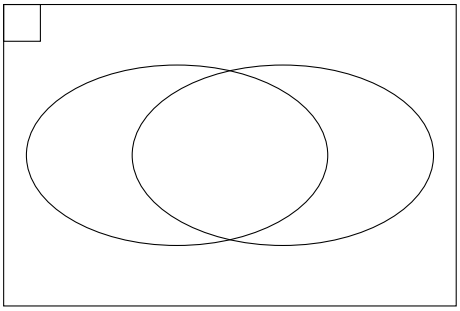
$0;\ -1{,}5;\ 6;\ -5;\ 4;\ \frac{10}{5};\ -\frac{6}{2}$



d) T = {Törtalakban írható számok};
N = {Természetes számok};
Z = {Egész számok};
Q = {Racionális számok};

$\frac{0}{5};\ 5;\ -7;\ 0{,}6;\ -\frac{1}{2};\ \frac{18}{3};\ -1{,}\dot{3}$

1.02. Írd be a halmazábrába a hiányzó címkéket, majd a számokat! Feketítsd be az üres halmazt!



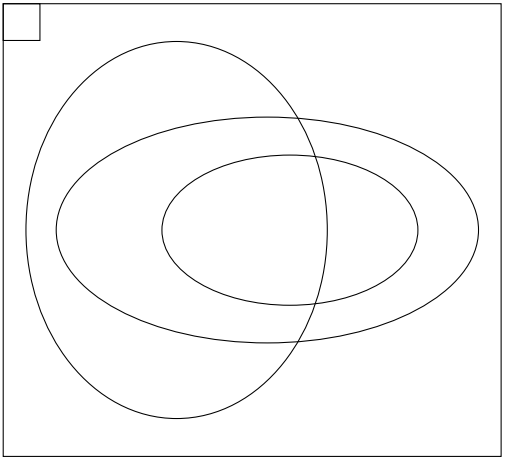
a) **Q** = {Racionális számok};
R = {Valós számok};
Z = {Egész számok};

A racionális és az irracionális számokat együtt valós számoknak nevezzük.

$0{,}\dot{3}$; $-\frac{1}{2}$; -5; 0; 4; 0,25; $\frac{51}{17}$;

0,1234567891011... (sorban következnek a természetes számok)

b) **R** = {Valós számok};
Q = {Racionális számok};
N = {Természetes számok};
Z = {Egész számok};



1,34520... (végtelen nem szakaszos tizedestört);
0; 1; -5; $2{,}6\dot{5}$; $-1{,}2$

1.03. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

A: Van olyan irracionális szám, amely felírható két egész szám hányadosaként.

B: Van olyan törtalakban felírható szám, amely egész szám.

C: Van olyan törtalakban felírható szám, amely végtelen szakaszos tizedestört alakban is felírható.

D: Van olyan racionális szám, amely végtelen nem szakaszos tizedestört alakban írható fel.

1.04. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

A: Minden racionális szám felírható (két egész szám hányadosaként) törtalakban.

B: Minden tizedestört alakban felírható szám felírható két egész szám hányadosaként.

C: A 0 nem racionális és nem irracionális szám.

D: Minden racionális szám felírható véges tizedestört vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban.

1.05. Írd le római számírással

a) 100-tól 200-ig a kerek tízeseket;

b) 1000-től 2000-ig a kerek százasokat;

c) 1-től 60-ig azokat a számokat, amelyek 5-tel osztva 3-at adnak maradékul;

d) 40-től 100-ig azokat a számokat, amelyek 5-tel osztva 4-et adnak maradékul!

1.06. Melyik lehet az a kétjegyű természetes szám, amely számjegyeinek összege egyjegyű számot ad, és

a) mindkét számjegye páros;

b) mindkét számjegye páratlan;

c) a két számjegy különbsége 8;

d) a két számjegy összege 8;

e) az egyik számjegye 8-cal több, mint a másik;

f) a két számjegy szorzata 8;

g) az egyik számjegy 8-szorosa a másiknak;

h) a két számjegy aránya 1 : 3?

1.07. Egy természetes szám számjegyeiről tudjuk, hogy páratlan számok.

a) Hány ilyen egyjegyű szám van?

b) Hány 100-nál kisebb ilyen szám van?

c) Hány ilyen kétjegyű szám van?

d) Hány ilyen háromjegyű szám van?

e) Hány ilyen négyjegyű szám van?

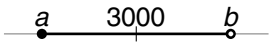
1.08. Kerekítsd a következő számokat, a kerekített értékeket írd be a táblázatba!

	tízesre	százasra	ezresre	tízezresre
22 445				
35 739				
47 002				
5 695				
4 500				
49				

1.09. Kerekítsd a következő számokat, a kerekített értékeket írd be a táblázatba!

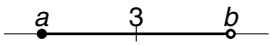
	századra	tizedre	egyesre	tízesre
29,3732				
944,448				
12 574,3				
1250,935				
300,0017				
3612,05				
4,002 39				

1.10. A számegyenes megvastagított részén pontosan azok a számok helyezkednek el, amelyeknek a kerekített értéke 3000. Mennyi az a, illetve a b értéke, ha



a) tízesre; *b)* ezresre; *c)* tizedre; *d)* egyesre kerekítünk?

1.11. A számegyenes megvastagított részén pontosan azok a számok helyezkednek el, amelyeknek a kerekített értéke 3. Mennyi az a, illetve a b értéke, ha



a) egyesre; *b)* tizedre; *c)* századra; *d)* ezredre kerekítünk?

1.12. Egy x szám kerekített értéke $x \approx 5000$. Mi lehet ez a szám, ha

a) tízesre; *b)* százasra; *c)* ezresre kerekítettünk?

d) Mi lehet ennek az x számnak a tízezresre kerekített értéke?

1.13. Mi lehet az x szám, ha

a) tizedre kerekített értéke 3,5; *b)* századra kerekített értéke 3,50;

c) ezredre kerekített értéke 3,500?

d) Mi lehet ennek az x számnak az egyesre kerekített értéke?

1.14. Az n egész szám százasra kerekített értéke 300. Mi lehet az

a) $n + 5$ tízesre kerekített értéke; *b)* $n \cdot 5$ százasra kerekített értéke;

c) $n \cdot 10$ ezresre kerekített értéke?

1.15. Egy gerenda hosszának kerekített értéke 6 m. Mekkora lehet a gerenda hosszúsága, ha a kerekítést

a) méter pontossággal végeztük, $g \approx 6$ m;

b) deciméter pontossággal végeztük, $g \approx 6{,}0$ m;

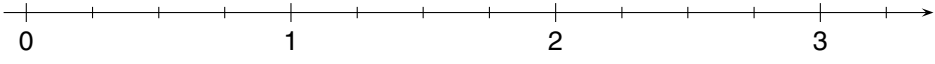
c) centiméter pontossággal végeztük, $g \approx 6{,}00$ m?

1.16. Mekkora lehet egy alkatrész tömege, ha a tömeg kerekített értéke

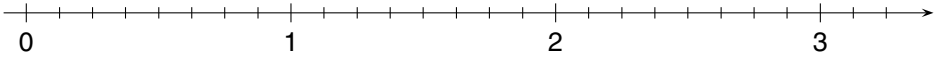
a) 5 kg; *b)* 5,0 kg; *c)* 5,00 kg?

1.17. Írd a számegyenes megfelelő pontja fölé a szám betűjelét!

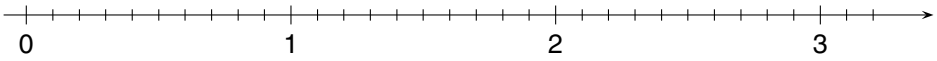
a) $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{7}{4}$; $c = \frac{5}{2}$; $d = \frac{10}{4}$; $e = \frac{8}{4}$; $f = \frac{3}{4}$; $g = \frac{3}{2}$



b) $a = \frac{7}{8}$; $b = \frac{18}{8}$; $c = 1\frac{3}{8}$; $d = \frac{3}{2}$; $e = \frac{10}{4}$; $f = \frac{23}{8}$; $g = 2\frac{1}{4}$



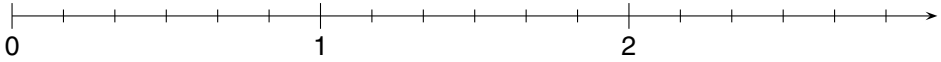
c) $a = \frac{3}{10}$; $b = \frac{3}{2}$; $c = \frac{3}{5}$; $d = \frac{38}{20}$; $e = \frac{25}{10}$; $f = \frac{26}{10}$; $g = \frac{5}{5}$

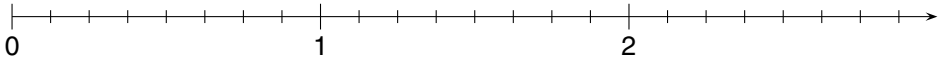


1.18. *a)* A következő törteket azon a számegyenesen ábrázold, amelyen könnyen megtalálod a helyét!

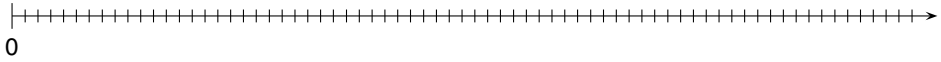
$a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{8}$; $c = \frac{8}{3}$; $d = \frac{5}{6}$; $e = \frac{5}{2}$; $f = \frac{5}{3}$; $g = \frac{9}{6}$;

$h = \frac{7}{7}$; $i = \frac{5}{4}$; $j = 1\frac{2}{3}$; $k = 2\frac{3}{4}$; $l = 1\frac{3}{8}$; $m = 2\frac{1}{3}$; $n = 1\frac{5}{6}$



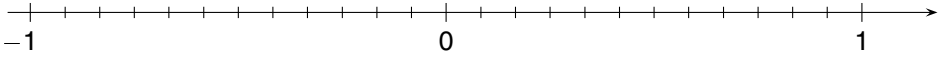


b) Az *a)* feladatban lévő törteket írd fel azonos nevezőjű alakban!
A következő számegyenesen úgy vedd fel az egységet, hogy valamennyi előző törtnek könnyen kijelölhesd a helyét! Jelöld a törteket a számegyenesen!

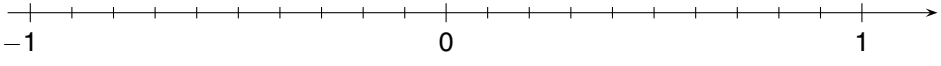


1.19. Írd a számegyenes megfelelő pontja fölé a szám betűjelét!

a) $a = -\frac{3}{18}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = -\frac{3}{3}$; $d = -\frac{3}{12}$; $e = \frac{9}{12}$; $f = -\frac{3}{4}$; $g = \frac{5}{6}$

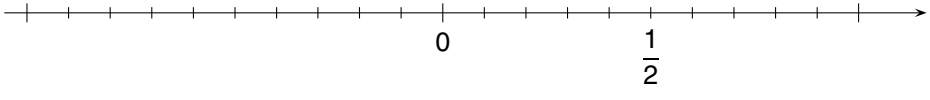


b) $a = 0{,}7$; $b = \frac{2}{5}$; $c = -0{,}60$; $d = -\frac{9}{10}$; $e = -\frac{4}{5}$; $f = \frac{1}{10}$; $g = -\frac{1}{2}$

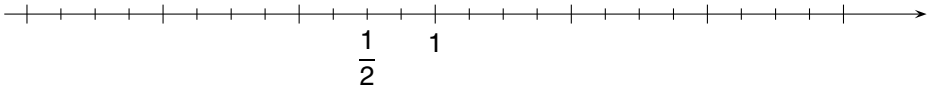


1.20. Keresd meg a szám közelítő helyét! Írd a számegyenes megfelelő pontja fölé a szám betűjelét!

a) $a = 0{,}3$; $b = -\frac{1}{3}$; $c = 0{,}65$; $d = \frac{19}{20}$; $e = -\frac{3}{4}$; $f = -0{,}8$; $g = \frac{1}{5}$

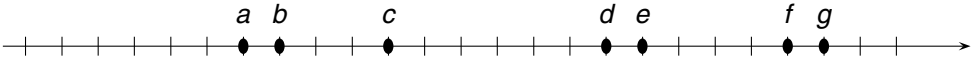


b) $a = \frac{3}{4}$; $b = \frac{0}{2}$; $c = -\frac{8}{16}$; $d = -\frac{16}{8}$; $e = \frac{16}{4}$; $f = 2{,}25$; $g = 3\frac{1}{8}$



1.21. Írd le a számegyenesen jelölt pontoknak megfelelő értékeket, a megadott értékeknek pedig jelöld a helyét ugyanezen a számegyenesen!

$p = -1$; $q = \frac{3}{2}$; $r = -\frac{8}{24}$; $s = 1\frac{1}{3}$; $t = -1\frac{1}{6}$

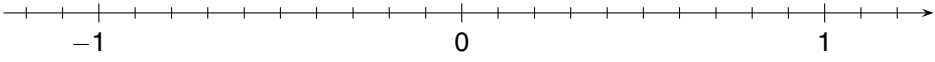


$a = -\frac{16}{24}$; $b =$ ..... ; $c = 0$; $d =$ ..... ;

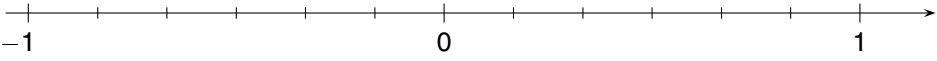
$e =$ ..... ; $f =$ ..... ; $g =$ .....

1.22. Keresd meg a megadott tizedestörtek közelítő helyét!
Jelöld meg a számegyenesen, és írd fölé a szám betűjelét!

a) $a = 0{,}75$; $b = -0{,}38$; $c = 1{,}17$; $d = 0{,}02$; $e = -0{,}99$; $f = 0{,}748$; $g = 0{,}\dot{6}$

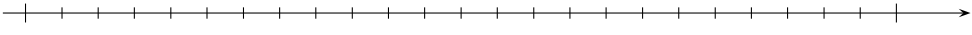


b) $p = -0{,}05$; $q = 0{,}3$; $r = 0{,}\dot{6}$; $s = -0{,}1$; $t = 0{,}25$; $u = -0{,}2$



1.23. Csak a megrajzolt beosztásokat használva jelöld meg a következő számok helyét a számegyenesen!

0; $a = -\frac{68}{24}$; $b = -\frac{33}{22}$; $c = -\frac{68}{34}$; $d = \frac{34}{68}$; $e = \frac{28}{42}$; $f = \frac{14}{12}$; $g = -2\frac{2}{6}$



1.24. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat!

a) $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 0; $\frac{4}{6}$; $-\frac{99}{3}$; $\frac{10}{30}$;

b) $\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{5}{99}$; $-\frac{5}{5}$;

c) $\frac{17}{17}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{13}{7}$; 0; $-\frac{5}{6}$; $\frac{10}{3}$; $-\frac{9}{3}$

1.25. Írd le számjegyekkel, majd állítsd nem növekvő sorrendbe a számokat!

a) Két harmad, három egész öt tized, százegy egész egy század, három egész két harmad, négy ötöd, egy egész egy negyed, háromszázegy egész három század, háromszáz egész egy háromszázad.

b) Egy ketted, három negyed, négy harmad, öt tizenketted, kilenc huszonnegyed, tizenhárom ötöd, tizenhárom kilenced, tizenhárom huszonnegyed, egy egész egy harmad.

c) Harmincmillió-harminchárom ezer-három egész harminchárom ezred, háromezer-egymillió-kétszáz egész háromezer-tizenkettő százezred, hárommillió-harmincezer-három.

d) Hetvenhét egész hét hetvened, hetvenhét egész egy tized, hét heted, hétezer-hét heted, hetvenhét egész hetvenhét század, hétezer-hetvenhét heted, hetvenhétezer-hetvenhét hetvened, hetvenhét egész egy heted.

e) Százötvenkét ezred, százötven kétezred, száz ötvenkétezred.

1.26. Írd le betűkkel a következő számok tízszeresét és a tizedrészüket:

a) kilencszázkétezer-huszonegy egész öt század;

b) hétszáztizenhét egész tizenhét század;

c) húszmillió-harminckétezer-ötszáztizennyolc egész nyolcszázhárom ezred.

1.27. Írd le betűkkel a következő számok százszorosát, ezerszeresét, majd a századrészét, ezredrészét:

a) három egész nyolc ezred;

b) kilencszázhét egész harminchat ezred.

1.28. Végezd el a műveleteket!

a)	$7301 \cdot 100 =$	$7301 : 100 =$ .....
	$7301 : 10\,000 =$	$7301 : 10 =$ .....
b)	$0{,}001 \cdot 10 =$	$0{,}001 \cdot 1000 =$ .....
	$0{,}001 : 10 =$	$0{,}001 : 100 =$ .....
c)	$0{,}45 \cdot 10 =$	$0{,}45 \cdot 10\,000 =$ .....
	$0{,}45 \cdot 100 =$	$0{,}45 : 10 =$ .....
d)	$3{,}07 \cdot 1000 =$	$3{,}07 : 100 =$ .....
	$3{,}07 \cdot 100\,000 =$	$3{,}07 : 1000 =$ .....

1.29. Pótold a hiányzó számot!

a)	$3{,}6 \cdot$ ..... $= 360$	$3{,}6 :$ ..... $= 0{,}0036$
	..... $\cdot 1000 = 360$	..... $: 100 = 360$
b)	$32{,}01 \cdot$ ..... $= 320{,}1$	$32{,}01 :$ ..... $= 0{,}032\,01$
	..... $\cdot 10\,000 = 3\,201\,000$	..... $: 1\,000\,000 = 0{,}032\,01$

1.30. Pótold a hiányzó számokat!

a) $5600 \xrightarrow{:10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:10} \ldots\ldots\ldots$;

b) $48\,500 \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots$;

c) $0{,}2 \xrightarrow{\cdot 1000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 1000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots$;

d) $850 \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:1000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:10\,000} \ldots\ldots\ldots$

1.31. Végezd el a műveleteket!

Például: $5{,}\dot{4}\dot{5} \cdot 1000 = 5{,}454545\ldots \cdot 1000 = 5454{,}545\ldots = 5454{,}\dot{5}\dot{4}$

$5{,}\dot{4}\dot{5} : 100 = 5{,}4545\ldots : 100 = 0{,}054\,54\ldots = 0{,}0\dot{5}\dot{4}$

a) $2{,}\dot{2} \cdot 10 = \ldots\ldots$

$2{,}\dot{2} : 10 = \ldots\ldots$

b) $36{,}\dot{3}\dot{6} \cdot 10 = \ldots\ldots$

$36{,}\dot{3}\dot{6} \cdot 100 = \ldots\ldots$

$36{,}\dot{3}\dot{6} : 100 = \ldots\ldots$

c) $1{,}02\dot{1}\dot{8} \cdot 10\,000 = \ldots\ldots$

1.32. A következő törteket írd fel a tovább nem egyszerűsíthető alakjukban!

$a = -\frac{4}{4}$; $b = \frac{9}{99}$; $c = -\frac{6}{8}$; $d = \frac{7}{3}$; $e = \frac{72}{16}$; $f = \frac{7}{49}$;

$g = -\frac{64}{8}$; $h = \frac{11}{101}$; $i = -\frac{10}{20}$; $j = -\frac{28}{42}$; $k = \frac{3}{111}$; $l = \frac{0}{12}$

1.33. Írd törtalakba a vegyesszám alakban adott számokat!

a) $p = 3\frac{1}{4}$; $q = 2\frac{3}{5}$; $r = 4\frac{1}{3}$; $s = 2\frac{1}{6}$; $t = 6\frac{1}{2}$; $u = 1\frac{6}{7}$;

b) $i = 12\frac{4}{9}$; $j = 5\frac{11}{12}$; $k = 10\frac{15}{28}$; $l = 5\frac{7}{20}$; $m = 2\frac{53}{60}$; $n = 18\frac{73}{100}$;

c) $c = -3\frac{2}{7}$; $d = -5\frac{4}{9}$; $e = -13\frac{2}{3}$; $f = -1\frac{1}{69}$; $g = -5\frac{1}{10}$; $h = -2\frac{2}{19}$

1.34. Írd tizedestört alakba a következő számokat!

a) $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = \frac{13}{10}$; $d = \frac{147}{20}$; $e = \frac{17}{25}$; $f = \frac{21}{50}$;

b) $g = -\frac{71}{2}$; $h = \frac{13}{8}$; $i = -\frac{65}{50}$; $j = \frac{270}{125}$; $k = \frac{1001}{8}$; $l = \frac{3333}{200}$;

c) $m = -\frac{5}{3}$; $n = \frac{17}{9}$; $o = -\frac{31}{6}$; $p = \frac{11}{12}$; $q = -\frac{71}{15}$; $r = \frac{50}{36}$;

d) $s = \frac{12}{11}$; $t = -\frac{45}{33}$; $u = -\frac{69}{99}$; $v = -\frac{73}{22}$; $x = \frac{194}{110}$; $y = -\frac{1000}{66}$

1.35. Írd le tizedestört alakba a következő számokat! Állapítsd meg az ismétlődő szakaszt! Mit veszel észre?

a) $p = \frac{1}{7}$; $q = \frac{3}{7}$; $r = \frac{2}{7}$; $s = \frac{6}{7}$; $t = \frac{4}{7}$; $u = \frac{5}{7}$;

b) $g = \frac{73}{99}$; $h = \frac{1}{99}$; $i = \frac{69}{99}$; $j = \frac{10}{99}$; $k = \frac{100}{99}$; $l = \frac{531}{999}$

1.36. Írd vegyesszám alakba, majd tizedestört alakba a számokat!

a) $e = \frac{13}{5}$; $f = \frac{15}{4}$; $g = \frac{153}{10}$; $h = \frac{267}{50}$; $i = \frac{162}{15}$; $j = \frac{97}{40}$;

b) $k = \frac{4}{3}$; $l = \frac{25}{9}$; $m = \frac{169}{33}$; $n = \frac{73}{30}$; $o = \frac{79}{54}$; $p = \frac{38}{15}$;

c) q = másfél; $r = -\left(3 + \frac{10}{30}\right)$; $s = -2 + \frac{5}{10}$; $t = 5 + \frac{4}{3}$

1.37. Írd tovább nem egyszerűsíthető törtalakba a számokat!

$a = 1{,}25$; $b = 2{,}8$; $c = 0{,}66$; $d = 2{,}48$; $e = 1{,}975$; $f = 7{,}77$

1.38. Döntsd el, hogy a következő törtek közül melyek írhatók át véges, illetve végtelen tizedestört alakba!

a) $a = \frac{13}{4}$; $b = \frac{21}{5}$; $c = \frac{7}{6}$; $d = \frac{9}{20}$; $e = \frac{49}{30}$; $f = \frac{43}{500}$;

b) $g = \frac{21}{12}$; $h = \frac{56}{35}$; $i = \frac{51}{68}$; $j = \frac{15}{9}$; $k = \frac{1200}{125}$; $l = \frac{66}{80}$

1.39. *a)* Írd föl a következő törteket tovább nem egyszerűsíthető alakban!

$p = \frac{14}{4}$; $q = -\frac{60}{36}$; $r = \frac{3}{99}$; $s = -\frac{16}{44}$; $t = \frac{56}{45}$; $u = \frac{0}{16}$

b) Írd föl az *a)* feladatban adott törtek reciprokát, majd a reciprokot is írd át tovább nem egyszerűsíthető alakba!

1.40. Írd be a táblázatba a számok ellentettjét és abszolútértékét! Számítsd ki az ellentett abszolútértékét is!

x	3	-2	-11				0	-20		20		
$-x$				-11	0	9,9			30		-30	
$\lvert x\rvert$												
$\lvert -x\rvert$												-2

1.41. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

A: Bármely szám abszolútértéke nem kisebb, mint a szám.

B: Bármely szám ellentettje kisebb, mint a szám.

C: Egy számnak és ellentettjének összege 0.

1.42. Írd fel jelekkel, majd számold ki az értékét!

a) 9 ellentettje = ...

b) -9 abszolútértéke = ...

c) 9 ellentettjének az abszolútértéke = ...

d) 9 abszolútértékének az ellentettje = ...

e) -9 abszolútértékének az abszolútértéke = ...

f) -9 ellentettjének az ellentettje = ...

g) -9 ellentettjének az abszolútértéke = ...

h) -9 ellentettje abszolútértékének az ellentettje = ...

1.43. Egészítsd ki a mondatokat a „nem kisebb”, illetve a „nem nagyobb” kifejezésekkel úgy, hogy igaz állításokat kapj!

A: Bármely negatív szám ..... bármely pozitív számnál.

B: Minden negatív számnál ..... a 0.

C: Akármelyik szám ..... az abszolútértékénél.

D: Egy szám ellentettje ..... a szám abszolútértékénél.

E: Ha egy szám ..... az ellentettjénél, akkor ez a szám negatív vagy 0.

1.44. Melyik állítás igaz, a hamisakra írj ellenpéldát!

A: A törtalakba írható számokat racionális számoknak nevezzük.

B: Az egész számok mindegyikét törtalakban is felírhatjuk.

C: A 0 nem írható fel két egész szám hányadosaként.

D: Negatív törtszám reciproka pozitív szám.

E: Ha egy törtszám nevezője többszöröse a számlálójának, akkor a tört reciproka egész szám.

F: Egész szám reciproka nem lehet egész szám.

G: Ha egy tört nagyobb 1-nél, akkor a reciproka kisebb 1-nél.

H: Ha egy tört kisebb 1-nél, akkor a reciproka nagyobb 1-nél.

I: Ha egy tört számlálója nagyobb a nevezőjénél, akkor a tört tovább nem egyszerűsíthető.

Hatványozás, számok normálalakja

1.45. Írd fel a következő szorzatokat hatványalakban! Számítsd ki az értéküket!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;

b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$;

c) $(-4) \cdot (-4) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;

d) $(-1{,}1) \cdot (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) \cdot (-3) \cdot (-3)$;

e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$;

f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

1.46. Írd fel a kifejezéseket szorzatalakban! Számítsd ki az értéküket!

a) 2^3; 3^2; $(-5)^2$; $(-3)^3$; 6^3; $(-1)^8$; $(-1)^9$;

b) $1{,}2^4$; $(-3{,}2)^3$; $2{,}5^2$; $(-3{,}1)^2$; $(-1{,}8)^4$; $-1{,}8^4$; -1^9;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$; $\left(\frac{5}{7}\right)^3$; $\left(-\frac{6}{5}\right)^3$; 0^7; $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$; $\left(\frac{6}{3}\right)^4$

1.47. Töltsd ki a táblázatot!

a	0	1	-1	2	-2	3	4	5	10	-10	0,1	0,5
a^0	–											
a^1												
a^2												
a^3												

1.48. Írd be a keretekbe a megfelelő kitevőket!

a) $2^{\square} = 4$; *b)* $3^{\square} = 27$; *c)* $10^{\square} = 10\,000$;

d) $5^{\square} = 25$; *e)* $7^{\square} = 1$; *f)* $2^{\square} = 64$;

g) $10^{\square} = 10$; *h)* $10^{\square} = 100$; *i)* $10^{\square} = 100\,000$

1.49. Írd be a hatványokba a hiányzó alapokat!

a) $\square^4 = 16$; *b)* $\square^3 = 27$; *c)* $\square^3 = 1\,000\,000$;

d) $\square^3 = \frac{125}{1000}$; *e)* $\square^5 = -\frac{1}{32}$; *f)* $\square^3 = 0{,}008$

1.50. Döntsd el, melyik nagyobb! Írd közéjük a megfelelő jelet!

a) $2^3 \square 3^2$; $2^5 \square 5^2$; *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \square \left(\frac{5}{4}\right)^3$;

c) $1{,}2^4 \square 1{,}2^3$; $0{,}8^3 \square 0{,}8^4$; *d)* $(-3)^2 \square (-3)^3$; $(-2)^5 \square (-2)^6$;

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \square \left(-\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 \square \left(-\frac{5}{3}\right)^3$; $\left(-2\frac{2}{3}\right)^3 \square \left(-\frac{2}{3}\right)^5$;

f) $(-3{,}4)^3 \square (-3{,}4)^5$; $(-2{,}1)^4 \square (-2{,}1)^6$ $(-0{,}9)^4 \square (-0{,}9)^3$;

g) $-7^4 \square (-7)^4$; $-3{,}5^5 \square (-3{,}5)^5$; $-1{,}1^6 \square (-1{,}1)^5$

1.51. Döntsd el az állításokról, melyek igazak, melyek nem! Mondj példákat is!

a) A (-1) 50. hatványa nagyobb, mint a (-1) 51. hatványa.

b) Egy 1-nél kisebb pozitív szám négyzete kisebb, mint ugyanennek a számnak a harmadik hatványa.

c) Egy 1-nél nagyobb szám 100. hatványa kisebb, mint a szám 101. hatványa.

d) Egy negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív szám.

e) Egy negatív szám páratlan kitevőjű hatványa pozitív szám.

(Lapozz!)

f) Egy pozitív szám páratlan kitevőjű hatványa negatív szám.

g) 0-nak bármely pozitív kitevőjű hatványa 0.

1.52. Pótold a hiányzó kitevőket, számokat!

a) $2 \xrightarrow{\cdot 2} 2^{\square} \xrightarrow{\cdot 2} 2^{\square} \xrightarrow{\cdot 4} 2^{\square} \xrightarrow{\cdot 4} 2^{\square} \xrightarrow{: 2} 2^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

b) $3 \xrightarrow{\cdot 3} 3^{\square} \xrightarrow{: 9} 3^{\square} \xrightarrow{\cdot 3} 3^{\square} \xrightarrow{\cdot 9} 3^{\square} \xrightarrow{: 3} 3^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.53. Pótold a hiányzó számokat, kitevőket!

a) $10 \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

b) $100 \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

c) $1000 \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

d) $0{,}1 \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 1000} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.54. Pótold a hiányzó számokat!

a) $4{,}5 \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots\ldots = 4{,}5 \cdot 10^{\square};$

b) $5{,}6 \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 5{,}6 \cdot 10^{\square};$

c) $0{,}2 \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2 \cdot 10^{\square};$

d) $2{,}85 \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 1000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2{,}85 \cdot 10^{\square};$

e) $0{,}05 \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 5 \cdot 10^{\square};$

f) $12{,}5 \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 1000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1{,}25 \cdot 10^{\square};$

g) $120 \xrightarrow{\cdot 1000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10\,000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1{,}2 \cdot 10^{\square}$

1.55. Pótold a hiányzó kitevőket!

a) $9{,}1 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 910 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 91\,000 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 9\,100\,000 = 9{,}1 \cdot 10^{\square};$

b) $5{,}3 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 5300 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 5\,300\,000 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 5\,300\,000\,000 = 5{,}3 \cdot 10^{\square};$

c) $3{,}7 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 37 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 370 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 3700 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 37\,000 = 3{,}7 \cdot 10^{\square};$

d) $5 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 50 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 5000 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 50\,000 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 5\,000\,000 = 5 \cdot 10^{\square};$

e) $4{,}75 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 47{,}5 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 4750 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 475\,000 = 4{,}75 \cdot 10^{\square};$

f) $1{,}01 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 10{,}1 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 10\,100 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 1\,010\,000 = 1{,}01 \cdot 10^{\square};$

g) $0{,}04 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 40 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 40\,000 \xrightarrow{\cdot 10^{\square}} 40\,000\,000 = 4 \cdot 10^{\square}$

1.56. Pótold a hiányzó kitevőket, számokat!

a) $100\,000 \xrightarrow{:10} 10^{\square} \xrightarrow{:10} 10^{\square} \xrightarrow{:10} 10^{\square} \xrightarrow{:10} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

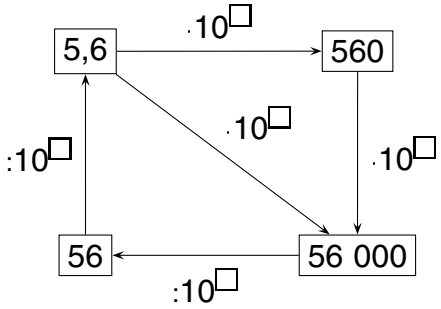
b) $10\,000\,000 \xrightarrow{:100} 10^{\square} \xrightarrow{:100} 10^{\square} \xrightarrow{:100} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

c) $1000 \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{:100} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 1000} 10^{\square} \xrightarrow{:10\,000} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

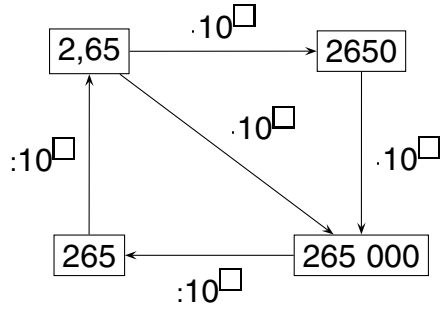
d) $10\,000 \xrightarrow{:10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 10^{\square} \xrightarrow{:1000} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.57. Pótold a hiányzó kitevőket!

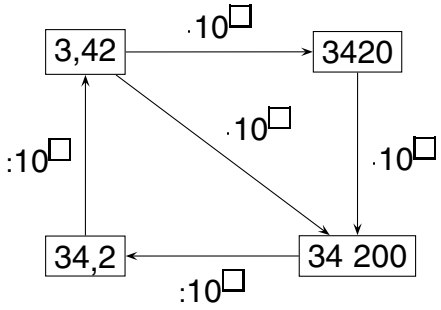
a)



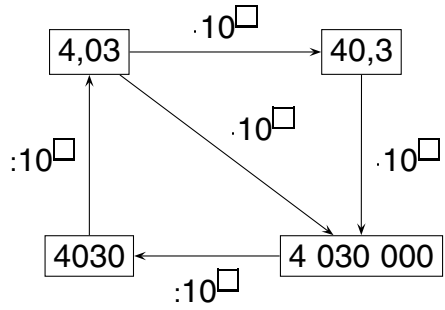
b)



c)



d)



1.58. Írd be a hiányzó kitevőket!

a) $700 = 7 \cdot 10^{\square}$; *b)* $8 = 8 \cdot 10^{\square}$; *c)* $9\,000\,000 = 9 \cdot 10^{\square}$;

d) $120 = 1{,}2 \cdot 10^{\square}$; *e)* $75 = 7{,}5 \cdot 10^{\square}$; *f)* $1350 = 1{,}35 \cdot 10^{\square}$;

g) $3000 = 3 \cdot 10^{\square}$; *h)* $14 = 1{,}4 \cdot 10^{\square}$; *i)* $534{,}7 = 5{,}347 \cdot 10^{\square}$

1.59. Írd le a következő számok normálalakját!

a) 576; 4718; 35; 60; 718; 1520;

b) 157 000; 548 400; 1 260 000; 15 000 000;

c) 3702; 370,2; 37 002; 3700,2; 3,702; 37 200

1.60. Írd le a következő számok normálalakját!

a) 547,67; 29,85; 1520,7; 4728,4;

b) $-239{,}4$; $-1562{,}7$; $-13{,}87$; $-795{,}81$

1.61. Írd le a normálalakjaikkal adott számokat!

a) $1{,}07 \cdot 10^3$; $2{,}58 \cdot 10^1$; $4{,}96 \cdot 10^4$; $1{,}5 \cdot 10^6$;

b) $8{,}805 \cdot 10^4$; $7{,}77 \cdot 10^5$; $1{,}11 \cdot 10^2$; $3{,}05 \cdot 10^7$

1.62. Melyik nagyobb, mennyivel?

a) $7{,}5 \cdot 10^3$ vagy 7500; $1{,}2 \cdot 10^2$ vagy 120;

b) $3{,}86 \cdot 10^4$ vagy $2{,}1 \cdot 10^5$; $5{,}4 \cdot 10^5$ vagy $6{,}2 \cdot 10^4$

1.63. Válaszd ki a következő számok közül azokat, amelyeket normálalakban írtunk fel! A többit írd át normálalakba!

$a = 700$; $b = 8{,}6 \cdot 10^1$; $c = 0{,}97 \cdot 10^2$; $d = 13{,}5 \cdot 10^3$;

$e = 2{,}5 \cdot 100^2$; $f = 7{,}4 \cdot 10^5$; $g = 3{,}523 \cdot 10^2$; $h = 47{,}01 \cdot 10^2$;

$i = 6 \cdot 10^1$; $j = 147{,}5 \cdot 10^0$; $k = 7{,}2 \cdot 5^2$; $l = 10^4 \cdot 10^3$;

$m = 0{,}1 \cdot 10^2$; $n = 10^3 \cdot 1$; $o = 3{,}63$; $p = 1$

1.64. Pótold a hiányzó kitevőket, válaszd ki a normálalakot!

a) $945\,003 = 945{,}003 \cdot 10^{\square} = 9450{,}03 \cdot 10^{\square} = 9{,}450\,03 \cdot 10^{\square} = 0{,}945\,003 \cdot 10^{\square}$;

b) $703{,}12 = 0{,}703\,12 \cdot 10^{\square} = 7{,}0312 \cdot 10^{\square} = 70{,}312 \cdot 10^{\square}$;

c) $1928 = 1{,}928 \cdot 10^{\square} = 19{,}28 \cdot 10^{\square} = 0{,}1928 \cdot 10^{\square}$;

d) $300\,000 = 30 \cdot 10^{\square} = 300 \cdot 10^{\square} = 0{,}3 \cdot 10^{\square} = 3000 \cdot 10^{\square} = 3 \cdot 10^{\square}$

1.65. Pótold a hiányzó számokat, válaszd ki a normálalakot!

a) $7\,642\,001 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^6$;

b) $1328{,}0101 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^3$;

c) $-90\,909{,}09 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^6$;

d) $730\,000 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^4$

1.66. Írd be a hiányzó számokat, fogalmazd meg az összefüggést!

a) $2^{\square} \cdot 2^{\square} = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\square + \square} = 2^{\square}$;

b) $3^{\square} \cdot 3^{\square} = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3^{\square + \square} = 3^{\square}$;

c) $7^{\square} \cdot 7^{\square} = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 7^{\square}$;

d) $13^{\square} \cdot 13^{\square} = (13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13) \cdot 13 = 13^{\square + \square} = 13^{\square}$;

e) $5^{\square} \cdot 5^{\square} \cdot 5^{\square} = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{\square}$;

f) $6^{\square} \cdot 6^{\square} = 6 \cdot \square = 6 = 6^{\square + \square} = 6^{\square}$;

g) $3^{\square\square} \cdot 3^{\square\square} = (3 \cdot 3) \cdot (\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{\text{40 tényező}}) = 3^{\square\square + \square\square} = 3^{\square\square}$;

h) $5^{\square} \cdot 5^{\square} = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5)}_{15 \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5)}_{11 \text{ tényező}} = 5^{\square + \square} = 5^{\square}$;

i) $(-2)^{\square} \cdot (-2)^{\square} = \big((-2) \cdot (-2) \cdot (-2)\big) \cdot \big((-2) \cdot (-2)\big) = (-2)^{\square + \square} = (-2)^{\square}$

1.67. Pótold a hiányzó számokat!

a) $2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} = 2^{\square + \square} = 2^{\square}$;

b) $4^5 \cdot 4^2 = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} = 4^{\square + \square} = 4^{\square}$;

c) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} = (-3)^{\square + \square} = (-3)^{\square}$;

d) $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^2 = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} = 7^{\square + \square + \square} = 7^{\square}$;

e) $5^4 \cdot 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 5^{\square + \square} = 5^{\square}$;

f) $11^3 \cdot 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 11^{\square + \square} = 11^{\square}$;

g) $2^{83} \cdot 2^5 = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} = 2^{\square + \square} = 2^{\square}$;

h) $10^{73} \cdot 10^{37} = \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\square \text{ tényező}} = 10^{\square + \square} = 10^{\square}$

1.68. Pótold a hiányzó számokat!

a) $2^2 \cdot 2^{\square} = 2^{2 + \square} = 2^5$;
b) $2^{\square} \cdot 2^3 = 2^{\square + 3} = 2^7$;
c) $3^4 \cdot 3^{\square} = 3^{\square + \square} = 3^7$;
d) $3^{\square} \cdot 3^{97} = 3^{\square + \square} = 3^{101}$;
e) $6^3 \cdot 6^{\square} = 6^{\square + \square} = 6^3$;
f) $10 \cdot 10^{\square} = 10^{\square + \square} = 10^{99}$;
g) $7 \cdot 7^{\square} = 7^{\square + \square} = 7$;
h) $(-2)^2 \cdot (-2)^{\square} = (-2)^{\square + \square} = (-2)^{\square}$

1.69. Írd fel az egyenlő alapú hatványok szorzatát hatványalakban!

a) $7^7 \cdot 7^3$;
b) $3^4 \cdot 3^{11}$;
c) $20^{20} \cdot 20^2$;
d) $(-5)^4 \cdot (-5)^9$;
e) $2{,}2^5 \cdot 2{,}2^3$;
f) $1{,}25^4 \cdot 1{,}25^2$;
g) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)$;
h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$;
i) $(-1)^{99} \cdot (-1)^{88}$;
j) $(-5)^2 \cdot (-5)^0$;
k) $0^{111} \cdot 0^3$;
l) $10^{23} \cdot 10^{77}$

1.70. Pótold a hiányzó számokat! Fogalmazz meg összefüggéseket!

a) $(2^3)^{\square} = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{\square + \square} = 2^{\square \cdot \square} = 2^{\square}$;

b) $(3^5)^{\square} = 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 = 3^{\square + \square + \square + \square} = 3^{\square \cdot \square} = 3^{\square}$;

c) $\left(5^{\square}\right)^3 = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{\square + \square + \square} = 5^{\square \cdot \square} = 5^{\square}$;

d) $(10^{10})^{\square} = 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} = 10^{\square + \square + \square + \square} = 10^{\square \cdot \square} =$
$= 10^{\square}$;

e) $\left(7^{\square}\right)^{\square} = \underbrace{7^3 \cdot 7^3 \cdot \ldots \cdot 7^3}_{\text{20 tényező}} = 7^{\underbrace{\square + \ldots + \square}_{\square \text{ tag}}} = 7^{\square \cdot \square} = 7^{\square}$;

f) $\left(13^{\square}\right)^{\square} = \underbrace{13^5 \cdot 13^5 \cdot \ldots \cdot 13^5}_{\square \text{ tényező}} = 13^{\underbrace{\square + \ldots + \square}_{\text{8 tag}}} = \square^{\square \cdot \square} = \square^{\square}$;

g) $\left(9^{\square}\right)^5 = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 9^{\square \cdot 5} = 1$;

h) $\left((2^4)^{\square}\right)^3 = (2^4)^2 \cdot (2^4)^2 \cdot (2^4)^2 = 2^4 \cdot \square \cdot 2^4 \cdot \square \cdot 2^4 \cdot \square = 2^{4 \cdot \square \cdot 3} = 2^{\square}$

1.71. Írd egyszerűbben!

a) $(7^7)^4 = 7^{\square \cdot \square} = 7^{\square}$;

b) $(6^5)^4 = 6^{\square \cdot \square} = 6^{\square}$;

c) $((-2)^5)^2 = (-2)^{\square \cdot \square} = (-2)^{\square}$;

d) $(17^{17})^3 = 17^{\square \cdot \square} = 17^{\square}$;

e) $(11^5)^2 = 11^{\square \cdot \square} = 11^{\square}$;

f) $(11^2)^5 = 11^{\square \cdot \square} = 11^{\square}$;

g) $(1^8)^{112} = 1^{\square \cdot \square} = 1^{\square}$;

h) $(9^0)^{16} = 9^{\square \cdot \square} = 9^{\square}$;

i) $((3^5)^4)^3 = \left(3^{\square \cdot \square}\right)^3 = 3^{\square \cdot \square \cdot \square} = 3^{\square}$

1.72. Végezd el a hatványok hatványozását!

a) $(2^2)^3$; *b)* $(10^3)^2$; *c)* $(13^{13})^0$; *d)* $(2^3)^2$; *e)* $(2^2)^2$; *f)* $(5^5)^5$

1.73. Hasonlítsd össze a következő hatványokat!

a) $(3^3)^2$ és 3^{3^2}; *b)* $(2^2)^{(3^2)}$; $\left((2^2)^3\right)^2$; $2^{(2^3)^2}$; $\left(2^{(2^3)}\right)^2$; $2^{2^{3^2}}$;

c) $7^{7^{0^7}}$; $(7^7)^{0^7}$; $\left((7^7)^0\right)^7$

1.74. Írd be a hiányzó számokat! Milyen összefüggést fogalmazhatsz meg?

a) $2^{\square} : 2^{\square} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\square - \square} = 2^{\square}$;

b) $3^{\square} : 3^{\square} = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3 \cdot 3) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 3^{\square - \square} = 3^{\square}$;

c) $7^{\square} : 7^{\square} = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) : (7 \cdot 7 \cdot 7) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 7^{\square - \square} = 7^{\square}$;

d) $5^{\square} : 5^{\square} = (5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 5^{\square - \square} = 5^{\square} = \ldots$;

e) $(-1)^{\square} : (-1)^{\square} = \big((-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\big) : \big((-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\big) =$
$= (-1)^{\square - \square} = (-1)^{\square} = \ldots\ldots;$

f) $6^{\square} : 6^{\square} = \underbrace{(6\cdot 6\cdot \ldots\cdot 6)}_{\text{25 tényező}} : \underbrace{(6\cdot 6\cdot \ldots\cdot 6)}_{\text{12 tényező}} = 6^{\square - \square} = 6^{\square};$

g) $10^{\square} : 10 = \underbrace{(10\cdot 10\cdot \ldots\cdot 10)}_{\text{90 tényező}} : 10 = 10^{\square - \square} = 10^{\square};$

h) $19^{\square} : 19^{\square} = \underbrace{(19\cdot 19\cdot \ldots\cdot 19)}_{\text{20 tényező}} : \underbrace{(19\cdot 19\cdot \ldots\cdot 19)}_{\text{10 tényező}} = 19^{\square - \square} =$
$= 19^{\square}$

1.75. Pótold a hiányzó számokat!

a) $13^4 : 13^3 = (\ldots\ldots\ldots\ldots) : (\ldots\ldots\ldots\ldots) = 13^{\square - \square} = 13^{\square};$

b) $4^{14} : 4^{11} = \underbrace{(\ 4\cdot 4\cdot \ldots\cdot 4\ )}_{\square \text{ tényező}} : \underbrace{(\ 4\cdot 4\cdot \ldots\cdot 4\ )}_{\square \text{ tényező}} = 4^{\square - \square} = 4^{\square};$

c) $1{,}7^{99} : 1{,}7^{98} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1{,}7^{\square - \square} = 1{,}7^{\square};$

d) $(-7)^4 : (-7)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (-7)^{\square - \square} = (-7)^{\square};$

e) $0{,}1^{20} : 0{,}1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}1^{\square - \square} = 0{,}1^{\square}$

1.76. Pótold a hiányzó számokat!

a) $2^6 : 2^{\square} = 2^{6-\square} = 2^4;$

b) $31^{\square} : 31^5 = 31^{\square - 5} = 31^{\square} = 31;$

c) $10^{\square} : 10^{10} = 10^{\square - \square} = 10^{\square} = 1$

1.77. Írd föl az azonos alapú hatványok hányadosát hatványalakban!

a) $\dfrac{10^{99}}{10^{33}};$ *b)* $\dfrac{5^6}{5^3};$ *c)* $\dfrac{2^{10}}{2^4};$ *d)* $\dfrac{12^3}{12};$ *e)* $\dfrac{1^{1111}}{1^{111}}$

1.78. Írd be a hiányzó számokat, fogalmazz meg összefüggést!

a) $2^4\cdot 3^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = (2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3) = (\ \square\ )^4;$

b) $2^5\cdot 5^5 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = (2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5) = (\ \square\ )^5;$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = \left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\right) = \left(\ \square\ \right)^3;$

d) $0^5\cdot 4^5 = 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = \square^{\,5}$

1.79. Írd föl a szorzatok hatványát egyenlő kitevőjű hatványok szorzataként!

a) $15^4 = (3 \cdot 5)^4 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$;

b) $(-6)^3 = \big((-2) \cdot 3\big)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = (-2)^{\square} \cdot 3^{\square}$;

c) $(-6)^3 = \big(2 \cdot (-3)\big)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = 2^{\square} \cdot (-3)^{\square}$;

d) $14^6 = (2 \cdot 7)^6 = \underbrace{(2 \cdot 7) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 7)}_{\square \text{ tényező}} = \underbrace{(2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{\square \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(7 \cdot \ldots \cdot 7)}_{\square \text{ tényező}} = 2^{\square} \cdot 7^{\square}$;

e) $9^9 = (3 \cdot 3)^9 = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\square \text{ tényező}} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\square \text{ tényező}} \cdot \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\square \text{ tényező}} = 3^{\square} \cdot 3^{\square}$;

f) $100^8 = (10 \cdot 10)^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 10^{\square} \cdot 10^{\square}$;

g) $100^8 = (4 \cdot 25)^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 4^{\square} \cdot 25^{\square}$;

h) $30^7 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square}$;

i) $1^2 = \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3^{\square}\left(\frac{1}{3}\right)^{\square}$;

j) $1^6 = (0{,}1 \cdot 10)^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}1^{\square} \cdot 10^{\square}$

1.80. Írd föl az egyenlő kitevőjű hatványok szorzatát hatványalakban!

a) $2^3 \cdot 5^3 = \square^{\,3}$; *b)* $5^5 \cdot 4^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *c)* $12^9 \cdot 5^9 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

d) $4^2 \cdot 2^2 = \square^{\,2}$; *e)* $0^8 \cdot 9^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *f)* $1^7 \cdot 7^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

g) $11^0 \cdot 5^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *h)* $(-1)^6 \cdot 3^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *i)* $(-1)^5 \cdot (-4)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

j) $32^{11} \cdot 31^{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *k)* $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 4^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *l)* $100^{11} \cdot 0{,}01^{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1.81. Írd föl a hányadosok hatványát egyenlő kitevőjű hatványok hányadosaként!

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^{\square}}{3^{\square}}$;

b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\square} = \square \cdot \square \cdot \square = \frac{\square \cdot \square \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square} = \frac{5^{\square}}{7^{\square}}$;

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{4} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square} = \frac{\square^{4}}{\square^{4}}$;

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{7} = \underbrace{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}_{\square \text{ tényező}} = \frac{\overbrace{(-3) \cdot (-3) \cdot \ldots \cdot (-3)}^{\square \text{ tényező}}}{\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{\square \text{ tényező}}} = \frac{(-3)^{\square}}{4^{\square}}$;

e) $\left(\frac{0{,}1}{0{,}2}\right)^{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{0{,}1^{\square}}{0{,}2^{\square}}$;

f) $\left(\frac{11}{12}\right)^{84} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\square \text{ tényező}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{11^{\square}}{12^{\square}}$

1.82. Írd föl az egyenlő kitevőjű hatványok hányadosát hatványalakban!

a) $\frac{7^5}{2^5} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{5}$;

b) $\frac{23^3}{50^3} = \frac{\square \cdot \square \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square} = \frac{23}{50} \cdot \frac{23}{50} \cdot \frac{23}{50} = \left(\frac{23}{50}\right)^{\square}$;

c) $\frac{(-2)^5}{11^5} = \frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11} = \underbrace{\left(-\frac{2}{11}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2}{11}\right)}_{\square \text{ tényező}} = \left(-\frac{2}{11}\right)^{\square}$;

d) $\frac{1^{20}}{5^{20}} = \frac{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\square \text{ tényező}}}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{\square \text{ tényező}}} = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \square^{20}$;

e) $\frac{4^{\square}}{(-3)^{\square}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^{\square}$

1.83. Számítsd ki, pótold a hiányzó számokat!

a) $\frac{4^5}{6^5} = \left(\frac{4}{6}\right)^{\square} = \left(\frac{\square}{3}\right)^{5} = \frac{2^{\square}}{3^{\square}} = \frac{32}{243}$;

b) $\dfrac{100^{10}}{50^{\square}} = \left(\dfrac{100}{50}\right)^{10} = 2^{\square} = 1024;$

c) $\dfrac{8^{\square}}{28^{\square}} = \left(\dfrac{8}{\square}\right)^{3} = \left(\dfrac{\square}{7}\right)^{3} = \dfrac{2^{\square}}{\square^{3}} = \dfrac{\square}{343};$

d) $\dfrac{(-10)^{\square}}{15^{5}} = \left(-\dfrac{10}{15}\right)^{\square} = \left(-\dfrac{2}{\square}\right)^{5} = \dfrac{(-2)^{\square}}{\square^{5}} =$ ..... ;

e) $\dfrac{(-70)^{5}}{(-7)^{5}} = \left(\dfrac{-70}{-7}\right)^{5} = \square^{5} =$ ..... ;

f) $\dfrac{0{,}16^{3}}{0{,}04^{3}} = \left(\dfrac{0{,}16}{0{,}04}\right)^{\square} = \left(\dfrac{16}{\square}\right)^{3} = \square^{3} =$ ..... ;

g) $\dfrac{6^{4}}{24^{4}} = \left(\dfrac{6}{24}\right)^{\square} = \left(\dfrac{1}{\square}\right)^{4} = \dfrac{\square^{4}}{4^{\square}} =$ .....

1.84. Mit írhatunk a keretbe?

a) $2^{\square} \cdot 2^{3} = 2^{6};$ *b)* $3^{\square} \cdot 3^{2} \cdot 3^{6} = 3^{12};$ *c)* $12^{\square} = 3^{3} \cdot 4^{\square};$

d) $2^{3} \cdot 2^{\square} = 8^{2};$ *e)* $\square^{3} = 1000^{2};$ *f)* $\left(6^{\square}\right)^{2} = 6^{6};$

g) $5^{3} \cdot 5^{\square} : 5^{4} = 5^{6};$ *h)* $\square^{2} = 2^{\square};$ *i)* $4^{\square} = 8^{4}$

1.85. Írd fel többféle módon, pótold a hiányzó természetes számokat!

$64 = 2^{6} = \left(2^{\square}\right)^{2} = \left(2^{\square}\right)^{3} = \square^{4} \cdot 2^{2} = 2^{\square} \cdot 2^{4} = 2^{3} \cdot 2^{\square} \cdot 2^{2} =$

$= 4^{2} \cdot 8^{\square} \cdot 2^{\square} = 8^{\square} = 4^{\square} = 2^{4} \cdot \square = \square^{3} \cdot 8 = (2^{2})^{2} \cdot \square = 2^{2^{2}} \cdot \square^{2} =$

$= 2^{\square} \cdot 2^{\square} \cdot 2^{\square} \cdot 2^{\square} \cdot 2^{\square} \cdot 2^{\square} \cdot 2^{\square} = \ldots$

Keress még más lehetőségeket!

1.86. Pótold a hiányzó számokat, illetve műveleti jeleket (◯)! Írd a számokat normálalakba, majd végezd el a műveleteket! Az eredményt is add meg normálalakban!

a) $32\,000 \cdot 5000 = \left(3{,}2 \cdot 10^{\square}\right) \cdot \left(\square \cdot 10^{\square}\right) = (3{,}2 \cdot 5) \cdot 10^{\square + \square} =$

$= \square \cdot 10^{7} = 1{,}6 \cdot 10^{1} \cdot 10^{\square} = \square \cdot 10^{\square + 7} = 1{,}6 \cdot 10^{\square};$

b) $780\,000 :$ ..... $= \left(\square \cdot 10^{5}\right) : (1{,}2 \cdot 10^{3}) =$

$= (7{,}8 \bigcirc 1{,}2) \cdot 10^{\square - \square} = 6{,}5 \cdot 10^{\square};$

c) $300^{4} = \left(\square \cdot 10^{\square}\right)^{4} = 3^{\square} \cdot 10^{\square \cdot 4} =$ ..... ;

d) $37\,500 \cdot 40\,000 = \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 10^{\square} \cdot \square \cdot 10^{\square} =$

$= (\ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots) \cdot 10^4 \bigcirc 4 = 15 \cdot 10^{\square} = \square \cdot 10^1 \cdot 10^{\square} = \square \cdot 10^{\square};$

e) $1250 \cdot 800\,000 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.87. Számold ki normálalak segítségével!

a) $15\,000 \cdot 800 =$ *b)* $700\,000 \cdot 90\,000 =$

c) $2\,000\,000^{10} =$ *d)* $1800 \cdot 500\,000 =$

e) $3\,600\,000 : 4500 =$ *f)* $200 \cdot 3000 \cdot 40\,000 \cdot 5\,000\,000 =$

g) $100\,000\,000 : 40\,000 =$ *h)* $40^4 =$

i) $120\,000^2 =$ *j)* $300^6 : 3000^4 =$

1.88. Pótold a hiányzó kitevőket!

a) $10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^3 \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square};$

b) $10^{\square} \xrightarrow{: 10} 10^3 \xrightarrow{: 10} 10^{\square} \xrightarrow{: 10} 10^{\square} \xrightarrow{: 10} 10^{\square} \xrightarrow{: 10} 0{,}1^{\square};$

c) $10^{\square} \xrightarrow{: 10^3} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{: 10^2} 10^4 \xrightarrow{: 10^2} 10^{\square} \xrightarrow{: 10^3} \ldots\ldots;$

d) $0{,}1^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 0{,}1^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 0{,}1^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 1 \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 10^{\square};$

e) $0{,}1 \xrightarrow{: 100} 0{,}1^{\square} \xrightarrow{: 10} 0{,}1^{\square} \xrightarrow{\cdot 100} 0{,}1^{\square} \xrightarrow{\cdot 10} 0{,}1^{\square}$

1.89. Számítsd ki a következő hányadosokat!

a) $10^5 : 10^2;\quad 10^5 : 10^3;\quad 10^5 : 10^4;\quad 10^5 : 10^5;\quad 10^5 : 10^6;\quad 10^5 : 10^7$

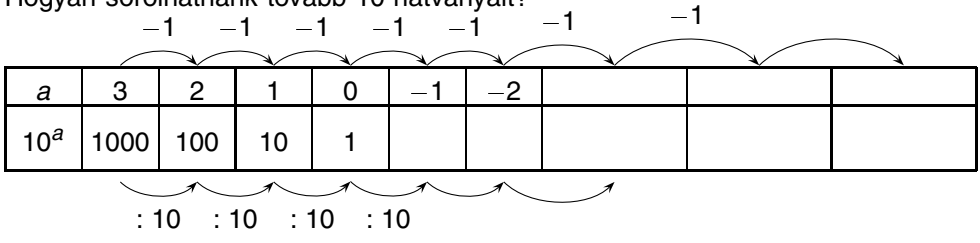
b) $0{,}1^2 : 10^2;\quad 0{,}1^2 : 10^3;\quad 0{,}1^2 : 10^4;\quad 0{,}1^2 : 10^5;\quad 0{,}1^2 : 10^6$

1.90. Melyik nagyobb?

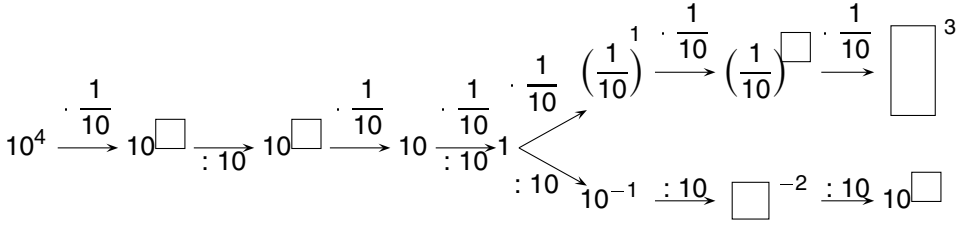
a) $10^6 : 10^2 \;\square\; 10^6 \cdot 0{,}1^2;$ *b)* $10^2 \cdot 10 \;\square\; 10^2 : 0{,}1;$

c) $10^2 : 10^4 \;\square\; 10^2 \cdot 0{,}1^4;$ *d)* $10^0 : 10^2 \;\square\; 1 : 0{,}1^2$

1.91. Hogyan sorolhatnánk tovább 10 hatványait?



1.92. Folytasd „kétféleképpen”!



1.93. Írjuk fel 10 hatványaként!

a) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$; *b)* $0{,}1^4$; *c)* 0,001; *d)* 1;

e) $\frac{1}{100\,000}$; *f)* $\frac{1000}{10\,000}$; *g)* $0{,}0001 \cdot 100$; *h)* $1 : 10^4$

1.94. Írjuk fel a 0 és 1 közötti tizedestörtek normálalakját!

a) $0{,}12 = 1{,}2 \cdot 10^{\square}$; *b)* $0{,}02 = 2 \cdot 10^{\square}$; *c)* $0{,}0203 = 2{,}03 \cdot 10^{\square}$;

d) 0,0966 = ... ; *e)* 0,0001 = ... ; *f)* 0,333 = ...

1.95. Írjuk fel tizedestört alakban a normálalakban adott számokat!

a) $2 \cdot 10^4$; *b)* $3{,}7 \cdot 10^1$; *c)* $3{,}7 \cdot 10^{-1}$; *d)* $6{,}06 \cdot 10^{-5}$; *e)* $9{,}81 \cdot 10^0$

1.96. Pótold a hiányzó kitevőket, válaszd ki a normálalakot!

a) $7304 = 7{,}304 \cdot 10^{\square} = 73{,}04 \cdot 10^{\square} = 0{,}7304 \cdot 10^{\square}$;

b) $0{,}012 = 0{,}12 \cdot 10^{\square} = 12 \cdot 10^{\square} = 1{,}2 \cdot 10^{\square}$;

c) $0{,}012\,001 = 0{,}120\,01 \cdot 10^{\square} = 12\,001 \cdot 10^{\square} = 1{,}2001 \cdot 10^{\square}$;

d) $10\,000 = 100 \cdot 10^{\square} = 0{,}1 \cdot 10^{\square} = 10 \cdot 10^{\square} = 1 \cdot 10^{\square}$

1.97. Pótold a hiányzó számokat, válaszd ki a normálalakot!

a) $42{,}394 = \ldots\ldots \cdot 10^2 = \ldots\ldots \cdot 10^{-3} = \ldots\ldots \cdot 10^1 = \ldots\ldots \cdot 10^{-2}$;

b) $32\,768 = \ldots\ldots \cdot 10^5 = \ldots\ldots \cdot 10^{-1} = \ldots\ldots \cdot 10^4 = \ldots\ldots \cdot 10^1$;

c) $0{,}36 = \ldots\ldots \cdot 10^{-2} = \ldots\ldots \cdot 10^{-1} = \ldots\ldots \cdot 10^2 = \ldots\ldots \cdot 10^1 = \ldots\ldots \cdot 10^0$;

d) $0{,}005\,05 = \ldots\ldots \cdot 10^{-5} = \ldots\ldots \cdot 10^{-4} = \ldots\ldots \cdot 10^{-3} = \ldots\ldots \cdot 10^{-2}$;

e) $0{,}009 = \ldots\ldots \cdot 10^1 = \ldots\ldots \cdot 10^{-2} = \ldots\ldots \cdot 10^3 = \ldots\ldots \cdot 10^{-3} = \ldots\ldots \cdot 10^{-1}$

1.98. Számolj normálalak segítségével!

a) $0{,}0025 \cdot 40\,000\,000 = 2{,}5 \cdot 10^{\square} \cdot 4 \cdot 10^{\square} = (2{,}5 \cdot 4) \cdot 10^{\square + \square} = 10 \cdot 10^{\square} =$
$= 1 \cdot 10^{\square}$;

b) $0{,}0008 : 0{,}02 = 8 \cdot 10^{\square} : (2 \cdot 10^{\square}) = (8 : 2) \cdot 10^{\square - \square} = 4 \cdot 10^{\square\square}$;

c) $0{,}003^5 = (3 \cdot 10^{\square})^{\square} = 3^{\square} \cdot 10^{\square \cdot \square} = 243 \cdot 10^{\square\square} =$
$= 2{,}43 \cdot 10^{\square\square} \cdot 10^{\square\square} = 2{,}43 \cdot 10^{\square + \square} = 2{,}43 \cdot 10^{\square}$

1.99. *a)* $0{,}72 : 0{,}0006$; *b)* $0{,}001\,25 \cdot 16\,000$; *c)* $0{,}000\,04 \cdot 0{,}000\,005$;

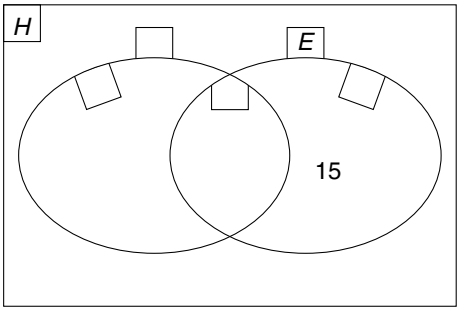
d) $0{,}2^{10}$; *e)* $9600 : 6\,400\,000$

Számelmélet

1.100. Az alaphalmaz legyen $H = \{30\text{-nál nem nagyobb természetes számok}\}$.

a) Írd be a halmazábra címkéibe a halmazok hiányzó betűjelét!

$A = \{5\text{-tel osztható számok}\}$
$B = \{2\text{-vel osztható számok}\}$
$C = \{10\text{-zel osztható számok}\}$
$D = \{\text{páratlan számok}\}$



b) Írd be a H halmaz minden elemét a megfelelő helyre!

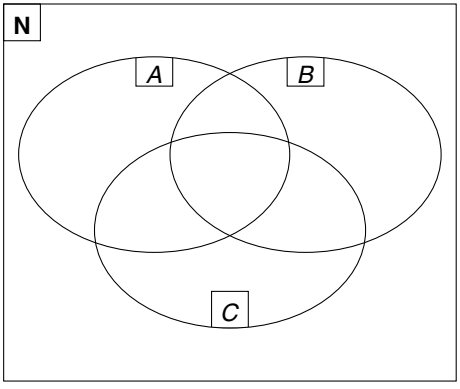
c) Add meg az E halmazt, fogalmazd meg az E címke jelentését!

$E = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

1.101. Többet ésszel, mint erővel!

Írd be a megadott halmazábrába a számok betűjelét a megfelelő helyre!

$A = \{7\text{-tel osztható számok}\}$
$B = \{11\text{-gyel osztható számok}\}$
$C = \{13\text{-mal osztható számok}\}$
$a = 55$; $b = 111$; $c = 390$; $d = 749$;
$e = 847$; $f = 2288$; $g = 770$;
$h = 1377$; $i = 7713$; $j = 1111$;
$k = 980$; $l = 91$; $m = 1001$;
$n = 5565$; $o = 0$; $p = 111\,111$;
$q = 10\,000$; $r = 1365$; $s = 637$;
$t = 65$; $u = 143$; $v = 121$



1.102. Keresd meg az összes osztópárját

a) 24-nek; *b)* 36-nak; *c)* 72-nek; *d)* 64-nek; *e)* 100-nak!

1.103. Sorold fel az összes osztóját

a) 48-nak; *b)* 49-nek; *c)* 50-nek; *d)* 51-nek; *e)* 52-nek!

1.104. A táblázatba írd minden szám alá azt, hogy hány osztója van!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

a) Sorold fel, mely 30-nál nem nagyobb számoknak van pontosan két osztója!

b) Sorold fel a fenti számok közül azokat, amelyeknek páratlan sok osztója van!

1.105. Keress olyan 30 és 100 közötti számokat, amelyeknek a megadott számú osztója van!

az *n* természetes szám										
n osztóinak a száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

a) Milyen számoknak lehet páratlan sok osztója?

b) Igaz-e, hogy a nagyobb számoknak több osztójuk van?

c) Hova nem lehet páros számot írni?

1.106. Több mint 2000 évvel ezelőtt *Eratoszthenész* görög matematikus dolgozta ki a következő eljárást. Fölírjuk a természetes számokat például 1-től 100-ig.

Az egyet kivesszük, mert 1-gyel minden szám osztható.
Bekarikázzuk a 2-t, és kékkel áthúzzuk a 2 többszöröseit.
Bekarikázzuk a következő olyan számot, amely nincs megjelölve, ez a 3, majd például pirossal áthúzzuk a 3 többszöröseit.
Folytatjuk az eljárást, mindig a következő meg nem jelölt számmal.
Észreveheted, hogy a 10-nél nagyobb bekarikázott számok többszöröseit már korábban áthúztuk. Miért?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Mely számokat karikáztad be ezzel az eljárással?

b) Mely számokat karikázhatod be ezzel az eljárással, ha 200-ig végzed el az eljárást?

1.107. Töltsd ki a táblázatot, ésszerűsítsd a munkádat! A megadott *n* számnak keresd meg az összes prímosztóját!

Az *n* szám	100	101	102	103	104	105	106	107
n prímosztói	2; 5;	101	2; 3; 17		2;	3; 5; 7	2;	

108	109	110	111	112	113	114	115	116	117
2; 3		2; 5;	3;	2; 7;					

118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
	7;								

128	129	130	131	132	133	134	135	136	137

1.108. A 400-nál nem nagyobb, 4-re végződő számok közül sorold fel azokat, amelyek oszthatók

a) 100-zal; *b)* 50-nel; *c)* 4-gyel; *d)* 8-cal!

1.109. A 200-nál nem nagyobb, 0-ra végződő számok közül sorold fel azokat, amelyek oszthatók

a) 4-gyel; *b)* 8-cal; *c)* 20-szal; *d)* 40-nel;

e) 50-nel; *f)* 25-tel; *g)* 3-mal; *h)* 6-tal!

1.110. Sorold fel azokat az 1800 és 1900 közé eső számokat, amelyek többszörösei

a) 20-nak; *b)* 30-nak; *c)* 40-nek; *d)* 50-nek!

1.111. Válaszd ki az igaz állításokat! A hamis állításokra írj ellenpéldát!

a) Ha egy 10-nél nagyobb számnak minden számjegye egyenlő, akkor ez a szám a 11-nek többszöröse. .....

b) Ha egy négyjegyű szám minden számjegye azonos, akkor ez a szám osztható 11-gyel. .....

c) Ha egy háromjegyű számban a számjegyek összege 27, akkor ez a szám osztható 37-tel. .....

d) Ha egy háromjegyű szám páros, akkor a számjegyeinek összege is páros. .....

1.112. Válaszd ki az igaz állításokat! A hamis állításokra írj ellenpéldát!

a) Ha egy kétjegyű szám 2-re végződik, akkor osztható 2-vel. .....

b) Ha egy háromjegyű szám 3-ra végződik, akkor osztható 3-mal. .....

c) Ha egy négyjegyű szám 4-re végződik, akkor osztható 4-gyel. .....

d) Ha egy ötjegyű szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel. .....

e) Ha egy szám utolsó jegye páratlan, akkor a szám is páratlan. .....

f) Ha egy szám 5-tel osztható, akkor 5-re végződik. .....

g) Ha egy természetes szám osztható 25-tel, akkor az utolsó két számjegyéből álló (legfeljebb kétjegyű) szám is osztható 25-tel. .....

1.113. Válasszuk ki a felsoroltak közül azokat, amelyeknek többszöröseit felismerjük akkor is, ha egy számnak csak az utolsó számjegyét ismerjük!

100; 10; 5; 4; 3; 2; 1

1.114. 1992; 2004; 112; 525; 3750; 6840; 5620; 8024; 9028; 4625; 10 500; 485

A felsoroltak közül melyek oszthatók

a) 4-gyel; *b)* 25-tel; *c)* 20-szal; *d)* 50-nel; *e)* 8-cal;

f) 40-nel; *g)* 250-nel; *h)* 200-zal; *i)* 500-zal; *j)* 125-tel?

1.115. Hány 3-mal osztható természetes szám van, amely

a) 100-nál nem nagyobb?

b) nem kisebb 100-nál, de kisebb 300-nál?

c) nem kisebb 300-nál és legfeljebb 600?

1.116. Miből van több? Hasonlítsd össze a halmazokat!

$A = \{$1000-nél kisebb 3-mal osztható páratlan természetes szám$\}$

$B = \{$1000-nél nem nagyobb 6-tal osztható természetes szám$\}$

$C = \{$500-nál kisebb 3-mal osztható természetes szám$\}$

1.117. Milyen 3-mal osztható számokat lehet összegként kirakni a következő számkártyákból?

a) 1 1 2 ; *b)* 4 4 1 2 ;

c) 4 7 2 ; *d)* 1 2 2 4

1.118. A következő számkártyákat számjegyekként használva milyen kétjegyű 3-mal osztható számok készíthetők?

a) 1 1 2 ; *b)* 4 1 2 ;

c) 3 1 4 ; *d)* 3 6 2 5 8 ;

e) 2 2 5 8 1 ; *f)* 3 6 9

1.119. Mely számjegyeket írhatjuk a □ helyére úgy, hogy a szám osztható legyen 3-mal?

a) 91□; *b)* 10□9; *c)* 523□; *d)* 5□32;

e) 65 51□; *f)* 9 □21 306; *g)* 7□1; *h)* 7□11

1.120. Mely számjegyek írhatók a betűk helyére úgy, hogy a felírt szám többszöröse legyen 3-nak?

a) 6*a* 2*a*0; *b)* 3*bb* 3*bb*; *c)* 8*c*7 *cc*1; *d)* 2*d*4 3*dd*

1.121. Melyik számjegy írható a □ helyére úgy, hogy a 95 32□-nak osztója legyen

a) 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* 6; *e)* 12; *f)* 15; *g)* 8?

1.122. Válaszd ki az igaz állításokat, a hamis állításokhoz írj ellenpéldát vagy magyarázatot!

a) Ha egy természetes szám számjegyeit összeadjuk, akkor a kapott szám osztható 3-mal. .....

b) Egy 9-cel osztható szám számjegyeinek összege is 9. .....

c) Ha egy páros szám számjegyeinek összege 6, akkor a szám is osztható 6-tal. .....

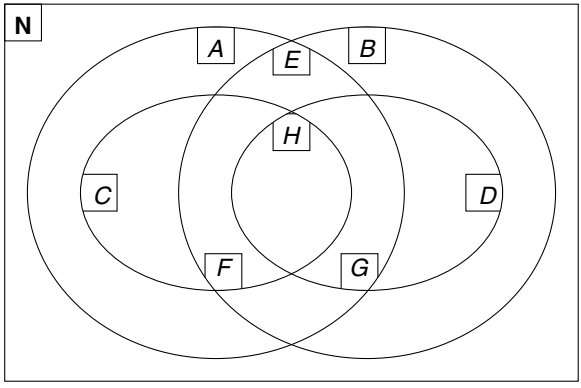
d) Egy 3-mal osztható szám számjegyeit felcserélgetve a kapott szám is osztható 3-mal. .....

e) Egy 9-cel osztható kilencjegyű szám számjegyeit felcserélgetve a kapott kilencjegyű szám nem mindig lesz 9-cel osztható. .....

f) Egy hatjegyű, azonos számjegyekből álló szám osztható 3-mal. .....

1.123. *a)* Az alább felírt számokat írd be a halmazábrába!

A halmazok:
$A = \{\text{páros számok}\}$
$B = \{\text{3 többszörösei}\}$
$C = \{\text{4 többszörösei}\}$
$D = \{\text{9 többszörösei}\}$
$E = A$ és B közös része
$F = B$ és C közös része
$G = A$ és D közös része
$H = C$ és D közös része
A számok: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 16; 18; 24; 30; 36; 45; 48; 54; 60; 63; 72; 75; 90



b) Egészítsd ki a halmazok következő megadását!

$E = \{\square$ többszörösei$\}$; $F = \{\square$ többszörösei$\}$;

$G = \{\square$ többszörösei$\}$; $H = \{\square$ többszörösei$\}$

1.124. Vizsgáld meg a következő állítást!

Ha egy számból elvesszük számjegyeinek összegét, akkor a kapott különbség 9-cel osztható szám lesz.

1.125. Válaszd ki a felsorolt számok közül, melyik

a) osztható 3-mal; *b)* osztható 6-tal; *c)* osztható 9-cel!

$u = 4 \cdot 10^{10} - 1$; $v = 3 \cdot 10^{9} + 6$; $w = 4 \cdot 10^{20} + 2$;

$x = 2{,}8 \cdot 10^{17} - 1$; $y = 5 \cdot 10^{8} - 1$; $z = 2 \cdot 10^{12} - 2$

1.126. A következő számpároknak sorold fel az összes osztóit, válaszd ki a közös osztók közül azt a számot, amely minden közös osztóval osztható!

a) (48; 60); *b)* (50; 60); *c)* (54; 60); *d)* (90; 60);

e) (68; 102); *f)* (75; 100); *g)* (128; 200); *h)* (77; 99)

1.127. Írd föl a következő számok prímtényezős alakját!

a) 40; *b)* 84; *c)* 196; *d)* 512; *e)* 1000; *f)* 1080

1.128. A prímtényezős alak segítségével határozd meg a számpárok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

a) 78; 195; *b)* 120; 160; *c)* 336; 480;

d) 343; 243; *e)* 666; 185; *f)* 384; 486

1.129. Számítsd ki!

a) (18; 30); (30; 50); (15; 45); (8; 15); (11; 17); (24; 36);

b) (12; 15; 24); (75; 25; 50); (40; 64; 56); (16; 24; 49);

c) [18; 30]; [30; 50]; [15; 45]; [8; 15]; [9; 15]; [24; 36];

d) [12; 15; 24]; [75; 25; 50]; [40; 64; 16]; [35; 49; 21]

1.130. A szorzás és osztás elvégzése nélkül állapítsd meg, hogy az

$a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$; $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $c = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$; $d = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$

prímtényezős alakban felírt számok közül melyiknek osztója

$w = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $x = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $y = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $z = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$!

1.131. A szorzások elvégzése nélkül írd fel prímtényezős alakban a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst!

a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^5$; *b)* $2^{11} \cdot 3^{18} \cdot 11^4 \cdot 19$; $2 \cdot 3^9 \cdot 11^2 \cdot 13^2$;

c) $2 \cdot 3^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3$; $5^2 \cdot 7^4 \cdot 101^2$; *d)* $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$; $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

1.132. Ádám mindennap, Bence minden másnap, Csaba harmadnaponta, Dani pedig minden negyedik napon jár reggel nyitásra az uszodába.

a) Hány naponként fordul elő, hogy a négy fiú mindegyike egyszerre úszik?

b) Ha Mónika minden 5. nap, Nikolett pedig minden szerdán megy reggelenként úszni, akkor az osztálytársak az általános iskola elvégzése során hányszor találkoznak mind a hatan egyszerre az uszodában?

1.133. Megfigyelték, hogy bizonyos kabócafajok más-más kifejlődési időszakaszok szerint élnek. Kirajzáskor a kabócák a növényzet jelentős részét elpusztítják, de szerencsére ez csak az életük utolsó évében történik, addig a föld alatt fejlődnek. Az amerikai Tibicen septemdecimus kabócafaj a leghosszabb ideig fejlődő gerinctelen állat, fejlődése 17 évig tart, egy másik faj 13 évente rajzik.

a) Hány év telik el két olyan kirajzás között, amikor mind a két kabócafaj megjelenik?

b) Amerika felfedezése óta legfeljebb hányszor fordulhatott elő, hogy egy évben mind a két kabócafaj pusztított?

1.134. Egy iskola tanulóinak nevét úgy írjuk sorba, hogy a lányok páratlan sorszámot, a fiúk páros sorszámot kapjanak. A listán minden 5. gyerek tagja évfolyama kosárcsapatának, minden 6. tanuló focizik.

A névsorban a 7.-esek a 9-cel osztható sorszámúak, a 7-tel osztható sorszámokat a matematika szakkörösök kapták.

a) Hányan járnak az iskolába, ha a 7. b-be járó Ábel, aki az utolsó ebben a névsorban, a kosármeccs miatt egyedül késett el a matematika szakkörről?

b) Focizik-e Ábel?

1.135. Mennyi a legnagyobb közös osztója, és mennyi a legkisebb közös többszöröse az első

a) 11; *b)* 12; *c)* 13; *d)* 14; *e)* 15; *f)* 16

pozitív egész számnak?

1.136. Egyszerűsítsd a törteket!

a) $\dfrac{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}$; *b)* $\dfrac{2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 29^2}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29}$; *c)* $\dfrac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11}$

1.137. Hozd közös nevezőre!

a) $\frac{2^2 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2}$ és $\frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$; *b)* $\frac{7^2 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17}$ és $\frac{3^3 \cdot 13 \cdot 17}{2^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11}$

Műveletek

1.138. Végezd el a műveletet, ellenőrizd a számolásodat!

a) 3,6 + 1,8; 3,6 + 1,08; 7,23 + 3,87;

b) 90,09 − 45,45; 103,001 − 3,27; 91,19 − 31,4;

c) 1237,703 + 34,011 − 1,9; 917,333 + 91,77 − 1006,9234;

d) 8733,14 − 94,1427 − 306,548; 69,556 − 1,3288 + 700,78

1.139. *a)* 1,3 · 1,5; 12,7 · 3,6; 29,4 · 10,5;

b) 1,72 · 10,1; 3,001 · 28,6; 9,4 · 4,001 02;

c) 1003,24 · 4368; 27,89 · 99,000 52; 102 030,405 · 503,05

1.140. *a)* 374,444 : 1,1; 10,01 : 0,13; 5295,29 : 0,23;

b) 0,2618 : 17; 31,856 : 0,0032; 91,31 : 2,5;

c) 7,777 77 : 3,7; 64 : 0,256; 8,1 : 0,8;

d) 3,21 : 0,009; 0,562 : 1,4; 0,606 : 0,11

1.141. *a)* (+14) + (−3); (+9) − (+7); (−4) + (−6); (−5) − (+6);

b) (−5) + (+3); (−15) − (−13); (−9) + (+17); (−11) − (−23);

c) (+11) + (−11); (−11) + (+11); (−11) − (−11); (−11) − (+11);

d) 129 − 81 + (−33); 137 − 19 − (−63) + (−81); 1319 − 2002;

e) 6 − (8 − 2); 113 + (97 − 410); −101 − [−11 − (−27)];

f) 0 − [2 − (7 − 9) + (13 − 21)] − [64 + (−88)]

1.142. *a)* −13,1 − 1,31; −22,7 + 5,4 −7,7 + 2,3;

b) −98,7 − (−43,2); −9,87 + 43,2; 40,04 − 50,005;

c) 37,4 − 39 + 12,93; 2 − (−2) + 2 + (−2) − 2; 3131,3 − 3,1313;

d) −230,014 − 69,986 02 + 20,15; 3,2 − 19,908 07 + 73,003

1.143. *a)* Írd a törteket egyszerűbb alakba, keresd meg a legegyszerűbb alakot!

$\frac{8}{6}$; $\frac{100}{16}$; $\frac{360}{420}$; $\frac{615}{123}$; $\frac{54}{1728}$; $\frac{32}{448}$; $\frac{280}{168}$

b) Írd fel a következő törtek 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal és 10-zel bővített alakjait!

$\frac{3}{2}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{13}{9}$; $\frac{34}{45}$; $\frac{7}{60}$; $\frac{20}{9}$; $\frac{25}{18}$; $\frac{9}{100}$

1.144. *a)* $\frac{4}{3} + \frac{5}{2}$; $\frac{7}{5} + \frac{5}{7}$; $\frac{4}{9} + \frac{9}{4}$; $\frac{10}{21} + \frac{5}{3}$;

b) $\frac{3}{8}+\frac{7}{6}$; $\frac{11}{12}+\frac{9}{10}$; $\frac{2}{15}+\frac{2}{9}$; $\frac{3}{14}+\frac{2}{21}$;

c) $\frac{6}{11}-\frac{1}{2}$; $\frac{23}{7}-\frac{4}{3}$; $\frac{41}{12}-\frac{61}{18}$; $\frac{15}{32}-\frac{3}{64}$;

d) $\frac{9}{10}-\frac{8}{9}$; $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}-\frac{6}{7}$; $\frac{10}{11}-\frac{9}{10}$;

e) $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}-\frac{3}{2}$; $\frac{5}{8}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$; $\frac{13}{16}-\frac{2}{5}+\frac{23}{40}$;

f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-1$; $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$; $\frac{7}{12}+\frac{11}{18}-\frac{5}{24}$

1.145. Végezd el a következő műveleteket, ügyesen csoportosítva egyszerűbben számolhatsz!

a) $\frac{14}{100}-\frac{2}{7}+\frac{5}{14}-\frac{7}{50}$; $\frac{6}{17}+\frac{131}{68}+\frac{15}{34}-\frac{24}{68}+\frac{9}{68}$;

b) $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$; $1-\frac{2}{27}-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{1}{27}$;

c) $\frac{17}{36}+\frac{11}{60}-\frac{3}{7}+\frac{31}{90}-\frac{1}{14}$; $\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+\frac{1}{49}+\frac{1}{3}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{100}{98}$

1.146. Számítsd ki a szorzatok értékét! Számítás előtt is egyszerűsíthetsz!

a) $\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}$; $\frac{8}{7}\cdot\frac{100}{9}\cdot\frac{21}{40}$; $\frac{11}{12}\cdot\frac{30}{16}\cdot\frac{56}{55}$;

b) $\frac{33}{98}\cdot\frac{63}{100}\cdot\frac{70}{99}$; $\frac{26}{21}\cdot\frac{72}{57}\cdot\frac{38}{39}\cdot\frac{63}{64}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{180}{56}$;

c) $\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{9}{10}$; $\frac{100}{49}\cdot\frac{77}{60}\cdot\frac{42}{110}\cdot\frac{66}{70}\cdot\frac{10}{11}$

1.147. Egészítsd ki!

a) $\frac{6}{7}\cdot\frac{\quad}{\quad}=\frac{30}{\quad}=\frac{\quad}{21}=\frac{5}{7}$; *b)* $\frac{\quad}{8}\cdot\frac{6}{\quad}=\frac{18}{\quad}=\frac{9}{44}$;

c) $\frac{7}{8}\cdot\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{168}=\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{8}{\quad}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{\quad}{6}=\frac{12}{5}$

1.148. Számítsd ki a szorzatok értékét!

a) $7\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{12}{5}$; $\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{17}{10}\cdot(-5)\cdot(-27)$;

b) $(-4):3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$; $7:(-2)\cdot\frac{1}{14}\cdot(-6)$;

c) $\left(-\frac{11}{4}\right)\cdot81:\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{7}{33}\right)$; $\frac{16}{35}:\left(-\frac{4}{5}\right):\frac{1}{3}:3\cdot10{,}5$

1.149. Számítsd ki!

a) $(160 + 728 - 64 - 72) : 4$; $\left(11 + \frac{17}{2} - \frac{31}{4} - \frac{14}{8}\right) \cdot 8$;

b) $\left(2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{9} - 7\frac{2}{3} + \frac{11}{6} + 0{,}5\right) \cdot 9$; $\left(1\frac{7}{8} + 2{,}25 - \frac{135}{60}\right) \cdot 8$;

c) $\left(\frac{81}{13} + \frac{72}{7} - \frac{9}{91}\right) \cdot \frac{1}{9}$; $\left(\frac{8}{49} - \frac{10}{21} + \frac{6}{7}\right) : \frac{2}{7}$

1.150. Ügyelj a műveletek sorrendjére!

a) $\frac{1}{3} : \left(\frac{31}{7} - 4\frac{1}{2}\right) - \left(3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4}\right) : 2\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{7} : \frac{1}{14} - \frac{1}{2} : \frac{3}{5}$;

b) $\left(12{,}4 - 4\frac{8}{25}\right) : 10{,}1 - 9{,}1 \cdot \frac{3}{13} : 7 \cdot 0{,}1 + \left(2\frac{3}{5} - 3\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{1}{25}\right)$

1.151. *a)* Egy munkát a mester 12 óra alatt fejez be. Két segédje együtt $\frac{3}{4}$ annyi idő alatt végezne. Mennyi idő alatt végezne a két segéd együtt; egy segéd egyedül?

b) Mennyi 360-nak a $\frac{2}{3}$-része; $\frac{3}{4}$-része; $\frac{4}{9}$-része; $\frac{3}{2}$ része?

c) Elemérék konyhakertje 300 m^2. Elemér felássa a kert $\frac{2}{5}$ részét; a barátai közül Dénes az $\frac{1}{4}$ részét; Gabi az $\frac{1}{3}$ részét. Mekkora területet ásnak fel külön-külön?

1.152. Egy család a jövedelmének $\frac{1}{3}$ részét élelemre, $\frac{1}{4}$ részét a rezsire költi. Mennyit költenek rezsire, mennyit élelemre, és mennyi marad másra, ha az összjövedelmük nettó 180 000 Ft?

1.153. Édesanya reggel 48 db szilvásgombócot főzött.

a) Viki ebédre megette az $\frac{1}{6}$ részét, Erika az $\frac{1}{8}$ részét, Judit az $\frac{1}{12}$ részét. Hány gombócot ettek meg a lányok személyenként?

b) A maradék gombócok $\frac{1}{3}$-át édesapa fogyasztotta el. Hány gombócot evett ő?

c) A többi gombócot eltették vacsorára. Hány gombóc maradt, és az hányad része az összes gombócnak?

1.154. Egy iskolában a felső tagozatos tanulók 3600 kg papírt gyűjtöttek.

a) Olvasd le a szalagdiagramról, hogy az egyes osztályok ennek a mennyiségnek mekkora hányadát hozták be, és ez hány kilogramm volt!

5. o.	6. o.	7. o.	8. o.

b) Ábrázold a kapott értékeket kördiagramon is!

1.155. Egy folyamatosan üzemelő rádióadó a műsoridejének $\frac{1}{6}$ részében híreket, $\frac{3}{5}$ részében zenét, $\frac{1}{10}$ részében beszélgetéseket, a fennmaradó időben pedig reklámot sugároz.

a) A műsorok mennyiségét ábrázold szalag- és kördiagramon!

b) Naponta mennyi a reklámok ideje, ez mekkora hányada a napnak?

1.156. Ismételd át a műveletek sorrendjéről tanultakat!

a) $-2+\{-3-[5+(4+4)-2]+7-1\}+8$;

b) $8-\{4+2-1+[-8-(-2+3)+6]-1-9\}-3$;

c) $3{,}2-\{-[4{,}3+2{,}1-3-(-1{,}6+2{,}1)-1]-3{,}4\}$;

d) $-2{,}5+\{2{,}5-[2{,}5-(-2{,}5+2{,}5)-2{,}5]\}$

1.157. Tegyél ki zárójeleket úgy, hogy az eredmény minél nagyobb legyen!

Például: $5-6-8=-9$ helyett $5-(6-8)=7$

a) $7-11-16-1-9$;

b) $-3-11+8-7+6-2-9$;

c) $-1-2-3-4-5-6-7$;

d) $1-2-3-4-5-6-7$;

e) $5-10+20-30+25-60+5$

1.158. *a)* $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{28}$;

b) $-\frac{5}{6}-\left[\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{2}\right]+1$;

c) $1-\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\left(2\frac{1}{8}+1\frac{3}{8}\right)+3\frac{1}{4}\right]-2\frac{1}{2}$;

d) $-3\frac{1}{5}+\left\{-\left[-2\frac{3}{10}+\left(-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right)-1\right]+\frac{3}{5}\right\}$;

e) $3\frac{1}{3}-\left\{2{,}5+4\frac{1}{4}-\left[1\frac{5}{6}-\left(7{,}6-8\frac{3}{4}\right)+2\right]-7{,}6\right\}$

1.159. *a)* Andinak 500 Ft-ot adott a mamája, hogy vásároljon. Az ABC-ben 320 Ft-ot fizetett, az újságosnál ennél 250 Ft-tal kevesebbet. Hány forintot vitt haza?

b) Zolinak 210 Ft-tal több pénze volt, mint Tibinek. Hány forintja volt a két fiúnak, ha 500 Ft-ért vásároltak, és ezután 300 Ft-juk maradt?

c) Mennyi áru van a raktárban szombaton, ha hétfőn reggel 12 t volt, elvittek belőle 3 t 20 kg-ot, kedden hoztak 4 t-nál 150 kg-mal kevesebbet, szerdán zárva volt a raktár, csütörtökön elvittek 6 t-nál 320 kg-mal kevesebbet, pénteken 3 t-nál 420 kg-mal többet?

d) Mennyit tanult Kati, ha délelőtt 5 óránál $\frac{3}{4}$ órával kevesebbet, délután 2 óránál $\frac{4}{10}$ órával többet töltött tanulással?

1.160. *a)* $(-4)\cdot(-2)$; $(-7)\cdot(+2)$; $(+3)\cdot(-5)$; $(+5)\cdot(-15)$;

b) $8\cdot(-14)\cdot(-2)$; $-2\cdot(-4)\cdot(-6)$; $-(-5)\cdot(-3)$; $-(+3)\cdot(+6)$;

c) $-(-4)\cdot(-1)\cdot(-7)$; $(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot(-1)$; $(-2)\cdot 5\cdot(-3)\cdot(-4)$; $(-9)\cdot(-3)\cdot 8\cdot 7$

1.161. Fogalmazd meg a műveletek sorrendjéről tanultakat!

a) $(-3)\cdot(-5)\cdot(-4)-(-8):2$; $\quad(-2)\cdot(-4):(-8)+(-2)\cdot 5:(-10)$;

b) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$; $\quad-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{8}{9}\right):(-2)$;

c) $1\frac{3}{5}\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right):(-4)$; $\quad-\left(5\frac{3}{8}\right)\cdot\left(1\frac{5}{43}\right):(-6)$

1.162. Zárójelezéssel változtasd meg a műveleti sorrendet úgy, hogy az eredmény minél nagyobb legyen!

a) $5:10:12:20$; $\quad$ *b)* $7\cdot 8:12:6\cdot 60$;

c) $128:512:256\cdot 64:32:8:4:16:2$;

d) $100:100:100:100:100:100$;

e) $2:2:2\cdot 2:2:2\cdot 2:2:2$

1.163. *a)* Józsi bácsi a munkahelyén naponta átlagosan $3\frac{2}{5}$ m^2 felület mázolását végzi. Mekkora felületet mázol le egy hét alatt?

b) 4 kg borsóért 992 Ft-ot fizettem. Mennyi volt 1 kg ára?

c) Klári hetente átlag $9\frac{1}{3}$ km-t fut. Mennyit fut naponta (ha mindennap ugyanannyit tesz meg)?

d) Zsuzsi $3\frac{1}{4}$ km-t sétált. Zoli kerékpáron kilencszer annyit hajtott, édesapjuk autóval 15-ször annyit tett meg, mint Zsuzsi. Mekkora utat tett meg Zoli, mekkorát az édesapjuk?

1.164. Írd egyszerűbb alakba!

a) $1-\dfrac{1+\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}$; $\quad$ *b)* $2+\dfrac{1+\frac{1}{4}}{5}$; $\quad$ *c)* $\dfrac{2+\frac{1}{4}}{11}$

1.165. *a)* $-7+4\cdot\{5-[3+2\cdot(-8-5)]+4\}$;

b) $-1\cdot\{-1-1\cdot[-1+(1+1)\cdot(-1+1)]+1\}+1$;

c) $2+2\cdot\{-2-2\cdot[-2+(2\cdot 2-2)\cdot(2-2-2)+(-2-2)\cdot(-2)]+2\cdot 2-2\}$;

d) $1+2\cdot\{3-4\cdot[5+6\cdot(7-8\cdot 9)]\}$;

e) $2\cdot(-8)-\{-3\cdot(-8)+7-[5\cdot(-8)-2+(10\cdot(-8)-4)-3\cdot(-8)]\}$

1.166. *a)* $(8-4:2):(2-10:2)$;

b) $7+(4-5)\cdot 3-9-2\cdot 5$;

c) $25+\{120+120:[30+48:(16-8\cdot 3)]\}:5$;

d) $12:6:2$;

e) $(9+18:3):[(9+18):9]$

1.167. Végezd el a kijelölt műveletsort!

a) $14{,}7342 \xrightarrow{\cdot 10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+3} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10\,000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{-30} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots$

b) $197{,}65 \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+11} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:1000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+0{,}1} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 10\,000} \ldots$

c) $370\,000 \xrightarrow{:10} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+10\,000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+30} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:1000} \ldots$

d) $960 \xrightarrow{:1000} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+0{,}4} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\cdot 100} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{-36} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:1000} \ldots$

1.168. Pótold a hiányzó számokat!

a) $54 \xrightarrow{+\ \ldots\ldots} 200 \xrightarrow{\cdot\ \ldots\ldots} 20\,000 \xrightarrow{+\ \ldots\ldots} 322\,000 \xrightarrow{:\ \ldots\ldots} 3{,}22$

b) $0{,}68 \xrightarrow{\cdot\ \ldots\ldots} 68\,000 \xrightarrow{:\ \ldots\ldots} 6\,800\,000 \xrightarrow{:\ \ldots\ldots} 68 \xrightarrow{\cdot\ \ldots\ldots} 6{,}8$

1.169. Melyik nagyobb?

a) $\frac{3}{5}$-nek az $\frac{5}{6}$ része vagy $\frac{5}{6}$-nak a $\frac{3}{5}$ része?

b) $2\frac{1}{3}$-nak a $\frac{3}{7}$ része vagy $3\frac{2}{5}$-nek az $\frac{5}{17}$ része?

c) 3,5-nek a 0,8 része vagy 5,2-nek a 0,6 része?

1.170. Egy család kiadásai úgy alakulnak, hogy a hónap első harmadában nettó jövedelmük $\frac{2}{5}$ részét, a következő harmadban a jövedelmük $\frac{1}{4}$ részét költik el.

a) Mekkora rész marad az utolsó harmadra?

b) Hány forint jut az egyes harmadokban, ha a család havi nettó jövedelme

(1) 250 000 Ft; (2) 370 000 Ft; (3) 650 000 Ft?

1.171. *a)* Milyen arányban osztották szét a kapott 70 000 Ft-ot a csoport tagjai között, ha egyikük 14 000 Ft-ot, a másikuk 21 000 Ft-ot kapott, a harmadik tagnak 17 500 Ft jutott, a negyedik a maradékot kapta? Mennyit kapott a negyedik tag?

b) Egy munkáért a csoport 50 000 Ft-ot kapott. Mennyi pénzt kaptak külön-külön, ha az *a)* feladatbeli arányban osztották szét azt?

1.172. *a)* János bácsi a 250 m^2 terület 0,55 részét felásta hétfőn, $\frac{1}{4}$ részét kedden délelőtt. Mekkora rész maradt délutánra?
Hány négyzetmétert ásott fel kedden délig?

b) Kató néni a kedden délig felásott terület $\frac{3}{20}$ részébe virágot ültetett. Mekkora Kató néni virágoskertje?

1.173. *a)* $4{,}2 - 3{,}6 \cdot 4{,}15 + 1{,}3$;
b) $-5{,}1 - 4{,}1 \cdot (-2{,}5) + 3{,}7 \cdot (-1{,}2)$;
c) $26{,}4 - 19{,}2 : 6 - 2{,}9$;
d) $(26{,}4 - 19{,}2) : 6 + 2{,}9$;
e) $(6{,}5 + 1{,}05) \cdot (2{,}3 + 0{,}25) : (-1)$;
f) $(5{,}37 - 5{,}37) : (4{,}37 \cdot 1{,}76 - 9{,}2)$

1.174. *a)* $\frac{7}{6} - \left[\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{8}{9}\right] + 1$;

b) $\frac{1}{5} \cdot \left[- \frac{3}{10} - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}\right) : 3\right] - \frac{3}{4}$;

c) $\frac{11}{15} - \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{30} - \left(\frac{3}{7} : \frac{5}{14} - \frac{9}{10}\right) + \frac{5}{6}\right]$;

d) $\frac{2}{7} : \frac{16}{35} + \left[\frac{11}{14} \cdot \frac{21}{33} - \left(\frac{7}{10} - \frac{19}{20}\right) \cdot \frac{5}{8}\right]$

1.175. *a)* Egy háromszög kerülete 24 cm. Oldalainak aránya 3 : 4 : 5. Mekkorák az oldalai? Szerkeszd meg a háromszöget! Milyen háromszöget kaptál?

b) Egy téglalap kerülete 36 cm. Mekkorák az oldalai, ha arányuk
(1) 1 : 8; (2) 1 : 2; (3) 4 : 5?

1.176. Egy házból az örökösök $\frac{1}{5} : \frac{4}{15} : \frac{4}{15} : \frac{4}{15}$ arányban részesültek. Hány forintot kaptak fejenként, ha a házat 9 millió forintért adták el?

1.177. Egy kisvállalkozásban a tagok 3 : 3,5 : 3,8 : 4,2 részben adták össze a szükséges pénzt. Mennyit adtak az egyes tagok, ha az indulótőke 20,3 millió Ft lett?

1.178. *a)* Melyik az a két szám, amelynek összege 600, aránya 7 : 8?

b) Két szám aránya 3 : 5, különbsége 96. Melyik ez a két szám?

c) Egy háromszög szögeinek aránya 5 : 6 : 7. Mekkorák a szögei? A leghosszabb oldala 3,5 cm. Szerkeszd meg a háromszöget!

Százalékszámítás

1.179. *a)* Mennyi 800 Ft-nak az 1%-a; 10%-a; 25%-a; 50%-a; 100%-a?

b) Mennyi 600 Ft-nak a 120%-a; 200%-a; 250%-a?

1.180. Fejezd ki köbdeciméterben 14 m^3 sóder

a) 30%-át; 33%-át; 66%-át; 15%-át; 45%-át; 60%-át;

b) 3%-át; 103%-át; 130%-át; 133%-át; 123%-át;

c) 5%-át; 50%-át; 25%-át; 75%-át; 150%-át!

1.181. *a)* Mennyi 1200-nak a 4%-a; 40%-a; 140%-a; 240%-a?

b) Mennyi lesz az ára egy 1200 Ft-os terméknek, ha az árát
(1) felemelik 4%-kal; 40%-kal; 140%-kal;
(2) leszállítják 4%-kal; 40%-kal; 140%-kal?

c) Mennyi 1200-nak az
(1) $\frac{1}{4}$ része; $\frac{1}{5}$ része; $\frac{3}{10}$ része; $\frac{1}{2}$ része; $\frac{3}{4}$ része; $\frac{4}{5}$ része;
(2) 25%-a; 80%-a; 75%-a; 50%-a; 20%-a; 30%-a?
Hasonlítsd össze az (1) és (2) eredményeit!

1.182. *a)* Egy 800 Ft-os termék árát először leszállítják 20%-kal, majd felemelik 25%-kal. Mennyibe kerül a második változás után?

b) Egy 600 Ft-os termék árát először felemelik 20%-kal, majd leszállítják 25%-kal. Mennyibe kerül a második változás után?

c) Egy 900 Ft-os termék árát először felemelik 25%-kal, majd leszállítják 20%-kal. Mennyibe kerül a második változás után?

d) Hasonlítsd össze az *a)*, *b)*, *c)* feladat megoldását! Írd le úgy, hogy a termék árát *a* Ft-nak jelölöd!

1.183. Egy átlagos magyar család nettó jövedelmének 30%-át a rezsi viszi el, 40%-át élelmiszerre költi. A bruttó jövedelmének 30%-a adó és egyéb járulék.

a) Mennyit költ az átlagos magyar család évente
(1) élelemre; (2) rezsire, ha
a család havi bruttó jövedelme 300 000 Ft?

b) Saját családod adataival is számold ki az élelmiszerre és a rezsire költött összeget!

c) Vizsgáld meg, hogy a te családod „átlagos”-e!

d) Írd fel a feladatot általánosan (számok helyett betűkkel)!

1.184. *a)* Egy termék ára áfa nélkül 300 Ft. Mennyit kell fizetni érte, ha az áfa 10%; 15%; 20%; 25%; 0%?

b) A 25%-os áfa a termék bolti árának hány százaléka?

1.185. Az emberi test kb. 70%-a víz. Hány kilogramm vizet tartalmaz egy

a) 50 kg-os; *b)* 80 kg-os; *c)* 25 kg-os; *d)* 130 kg-os ember szervezete?

1.186. Mennyi egy termék ára áfa nélkül, ha 20%-os áfával

a) 720 Ft-ba; *b)* 18 000 Ft-ba; *c)* 66 Ft-ba; *d)* 1080 Ft-ba kerül?

1.187. A cipő árát 12%-kal felemelték. Mennyibe került áremelés előtt, ha utána

a) 6944 Ft-ba; *b)* 1344 Ft-ba; *c)* 15 120 Ft-ba; *d)* 10 248 Ft-ba kerül?

1.188. Számítsd ki, hogy mennyi a 100%, ha

a) a 15% 60; *b)* a 33% 297; *c)* a 75% 300;

d) a 117% 1111,5; *e)* a 150% 54; *f)* a 350% 105

1.189. *a)* Egy munkacsoport 4 millió forintért vállalt el egy munkát. Mennyit kapott kézhez, ha 10%-ot nyugdíjjárulékra, 28%-ot adóra vontak le a pénzükből?

b) Egy 160 ha-os terület $\frac{1}{4}$ részét a Kiss család, 0,3 részét Szabóék, $\frac{2}{5}$ részét Nagyék vállalták el művelésre. Melyik családnak mekkora rész jutott? Mekkora rész kiadó még? Hányad része, hány százaléka ez az egész területnek?

1.190. Töltsd ki a táblázatot! Egyszerűsítheted a számításod.

100%	1%	6%	30%	36%	60%	72%	90%
7000							
600							
250							

1.191. Fejben is kiszámíthatod az alapot a százalékértékből. Mennyi az alap, ha

a) 1%-a 0,18; 9,06; 38,6; 112,1; 342; 10 000;

b) 10%-a 0,18; 9,06; 38,06; 11,021; 34,02; 10 000;

c) 18%-a 0,18; 9,36; 38,16; 141,21; 34,2; 9999;

d) 60%-a 0,18; 9,36; 381,6; 1,4112; 324; 9888;

e) 75%-a 0,18; 90,6; 39,06; 1411,2; 432; 9888?

1.192. Számoljuk ki a megfelelő százaléklábat az alap és a százalékérték ismeretében!

a \ *e*	1200	720	3000	12	36	360	15 000	1500
1200	100%							
2400	50%							
15 000								
200	600%							
30 000								

1.193. *a)* Ábel 200 000 Ft-ot takarékbetétben helyezett el évi 10%-os kamatra. Hány forint lesz 2 év múlva a betétje?

b) Egy erdő faállománya évenként 15%-kal gyarapodik. Hány tonna fa termelhető ki három év múlva ebből az erdőből, ha most 70 000 t fát tudnánk belőle kivágni?

c) Egy sáskaraj fogyasztása naponta 20%-kal növekszik. Hány kilogramm növényt fogyasztanak el 1 nap, 2 nap, 3 nap, 4 nap múlva, ha a mai napon 10 000 kg növényt faltak fel?

1.194. *a)* Egy tó vizének 5%-a párolog el naponta. Mennyi víz lesz benne 1 nap, 2 nap, 3 nap, 4 nap múlva, ha most 80 000 m^3 víz van benne?

b) Egy 90 000 Ft-os termék árát háromszor egymás után 20-20%-kal leszállították. Mennyibe kerül így ez a termék?

1.195. Egy jéghegynek melegebb áramlatokba kerülve naponta 10%-a olvad el.

a) 5 nap múlva az eredeti tömegének hány százaléka lesz a jéghegy?

b) Mekkora volt eredetileg, ha 5 nap múlva 590 500 t a tömege?

1.196. Mikor jár jobban a család, ha 5 000 000 Ft-ját a folyószámláján

a) évi 7%-ra 1 éves lekötéssel helyezi el, vagy ha havi jóváírással évi 6%-os kamatra?

b) Mennyi a kamat havonként az utóbbi esetben? Mennyi a kamat évi 6% kamat esetén?

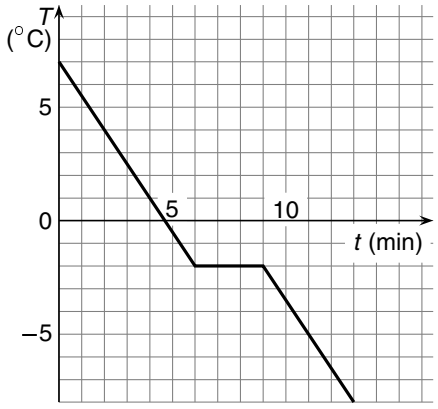
c) Megegyezik-e az évi 6%-os kamat a havi lekötés esetén kapott évi 6%-os kamattal? Miért?

2. Grafikonok, függvények, sorozatok

Grafikonok, diagramok

2.01. Híg sóoldatot lehűtenek. Az oldat hőmérsékletének alakulását a grafikon szemlélteti. A grafikon segítségével egészítsd ki a táblázatot!

t (min)	0	1	2	6	7	9	10	13
T (°C)								



a) A grafikon időtengelyén húzd meg kékkel azt a szakaszt, ahol az oldat hőmérséklete 0 °C alá süllyedt!

b) Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor az oldat hőmérséklete 4 °C!

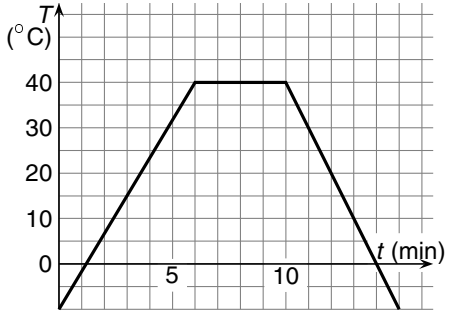
c) Percenként hány fokkal csökkent az oldat hőmérséklete?

d) Milyen hőmérsékleten fagyott meg az oldat?

e) Mennyi ideig tartott az oldat megfagyása?

2.02. Egy oldatot forráspontjáig felmelegítenek, egy darabig forralják, majd hűlni hagyják. A grafikon segítségével egészítsd ki a táblázatot!

t (min)	0	3	6	7	9	10	11	15
T (°C)								



a) A grafikon időtengelyén húzd meg kékkel azt a szakaszt, ahol az anyag hőmérséklete csökkent!

b) Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor az oldat hőmérséklete 15 °C!

c) Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor az oldat hőmérséklete 55 °C!

d) Percenként hány fokkal nőtt az oldat hőmérséklete?

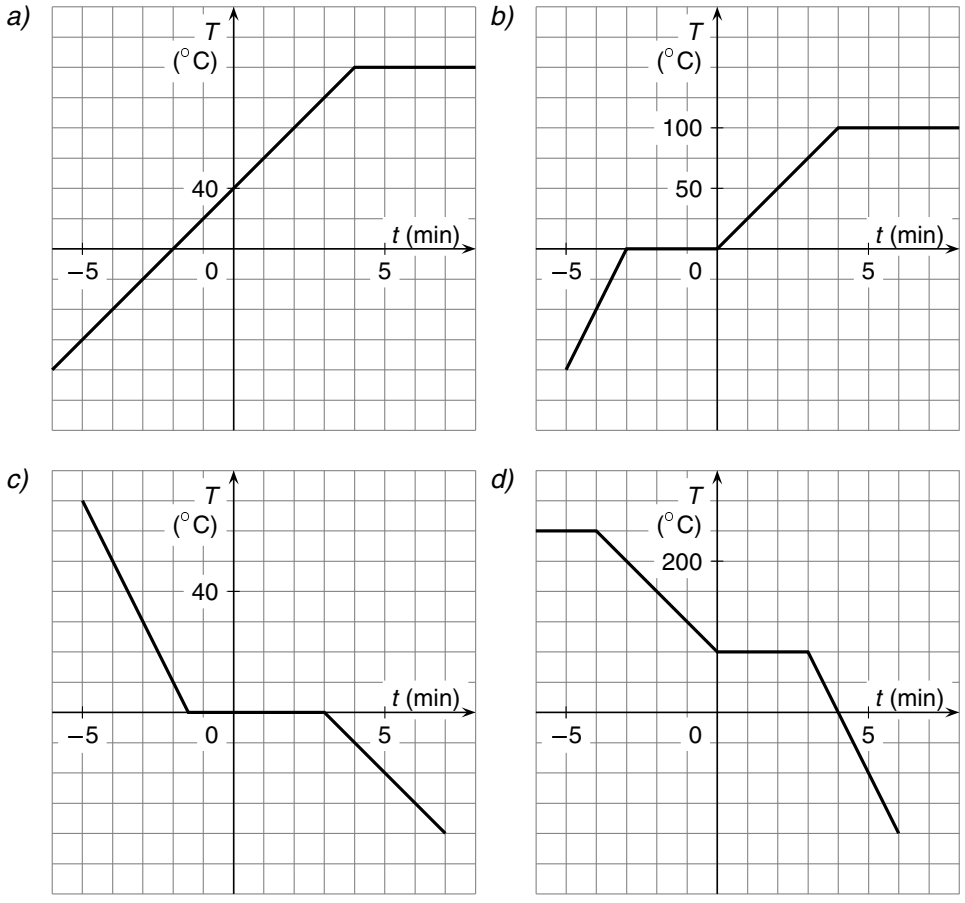
e) Mennyi ideig tartott a hőmérséklet növekedése?

f) Milyen hőmérsékleten forrt fel ez az oldat?

g) Mennyi ideig tartott az oldat forralása?

h) A melegítés megszűntével percenként hány fokkal csökkent az anyag hőmérséklete?

2.03. Valamilyen folyadék hűtését és fagyasztását, illetve melegítését és forralását szemlélteti a következő négy grafikon.



Melyik grafikon szemléltet hűtést és melyik melegítést?

A grafikon segítségével írd le a hőmérséklet változását!

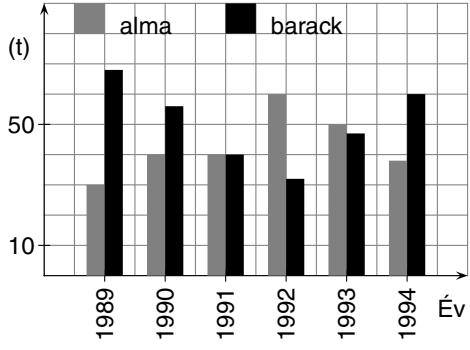
Melyik grafikon szemléltetheti a víz hűtését, illetve melegítését?

2.04. A diagram egy gazdaság alma- és baracktermését szemlélteti különböző években.

a) 1990-ben melyik gyümölcsből termett több, mennyivel?

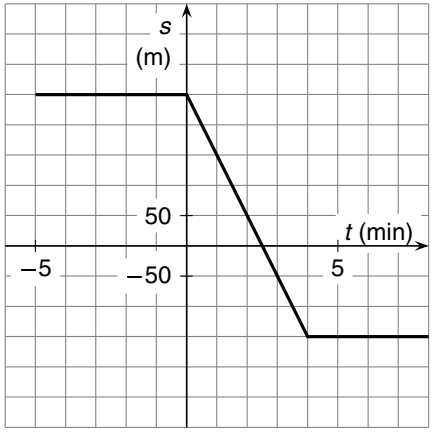
b) Mely években termett több alma, mint barack?

c) Mikor termett ugyanannyi barack, mint alma?

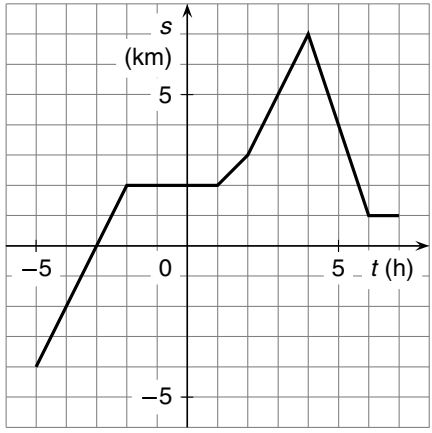


2.05. Értelmezd a következő idő–út grafikonokat!

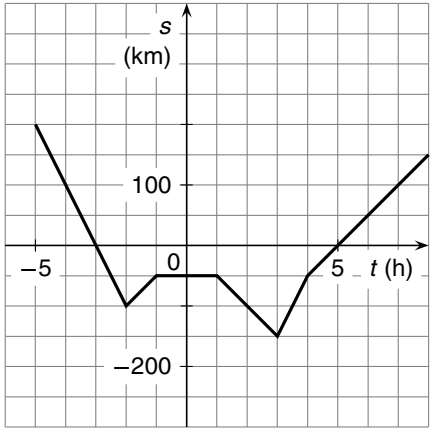
a)



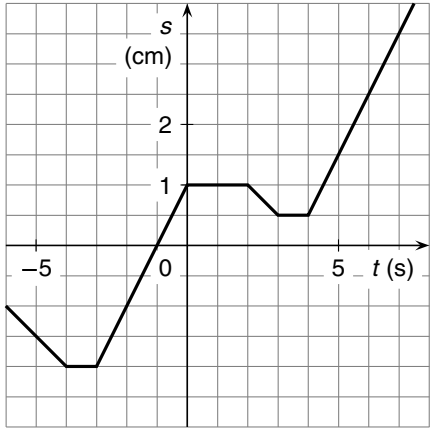
b)



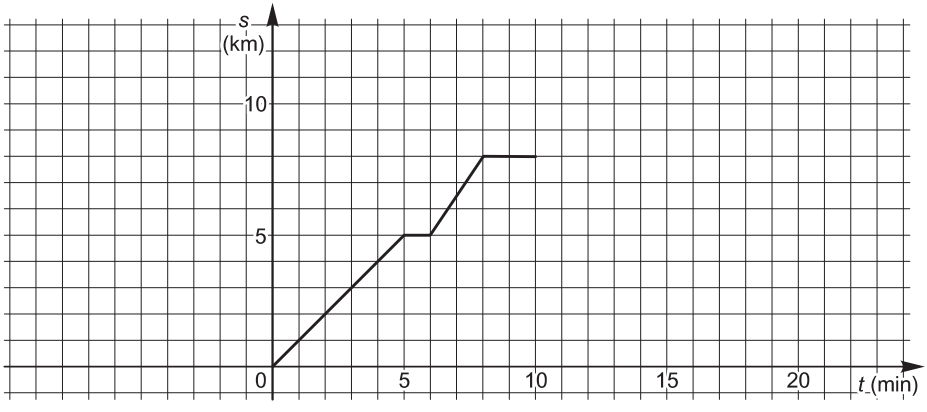
c)



d)



2.06. Egy autóbusz a grafikonnal jellemzett módon hajt végig az előírt útvonalon.



Rajzold meg annak a busznak az idő–út grafikonját, amely ugyanezen menetrend szerint járja végig az útvonalat, de

a) 5 perccel korábban indul; *b)* 10 perccel később indul!

Hozzárendelések vizsgálata

2.07. Adott az alaphalmaz (A), a képhalmaz (B) és a hozzárendelés szabálya. Egészítsd ki a táblázatot!

$A = \mathbf{Q} = \{\text{Racionális számok}\}$; $B = \mathbf{Z} = \{\text{Egész számok}\}$.

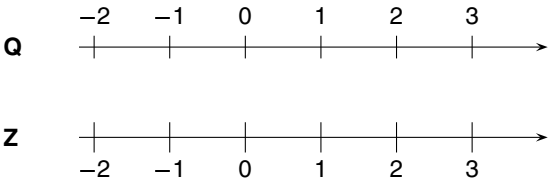
$\mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$; $x \mapsto$ az x egészekre kerekített értéke.

A **Q** eleme:	−5,5	−4,92	−0,53	−2	0,4	1,5	2,78	38,5	40,02
A **Z** eleme:	−5								

Ábrázold nyíldiagrammal, hogy a racionális számok közül melyeknek a képe:

...; −2; −1; 0; 1; 2; ... !

Egyértelmű-e a hozzárendelés?



2.08. Adott az alaphalmaz (A), a képhalmaz (B) és a hozzárendelés szabálya. Egészítsd ki a táblázatot!

Vizsgáld meg, hogy egyértelmű-e a hozzárendelés! Az alaphalmaz minden elemének van képe az adott hozzárendelés szerint?

a) $A = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$; $B = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$.

$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $x \mapsto$ amit az x 5-tel osztva maradékul ad.

Az A eleme:	0	4	5	9	17	2275	3560	2368	33 550	10 000
A B eleme:					2					

b) $A = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$; $B = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$.

$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $x \mapsto$ amit az x 4-gyel osztva maradékul ad.

Az A eleme:	0	4	5	9	17	2275	3560	2368	33 550	10 000
A B eleme:					1					

c) $A = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$; $B = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$.

$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $x \mapsto$ amit az x 9-cel osztva maradékul ad.

Az A eleme:	0	4	5	9	17	2275	3560	2368	33 550	10 000
A B eleme:					8					

d) $A = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$; $B = \mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\}$.

$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$; $x \mapsto$ amit az x 25-tel osztva maradékul ad.

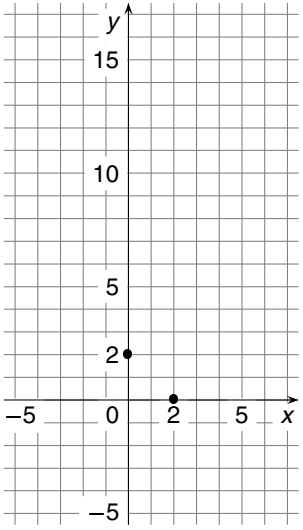
Az A eleme:	0	4	5	9	17	2275	3560	2368	33 550	10 000
A B eleme:					17					

2.09. A szabály alapján egészítsd ki a táblázatot! Rajzold meg a függvények grafikonját (különböző színnel)! Az alaphalmaz: **R**.

$f(x) = -x + 2$; $g(x) = 2 - |x|$;

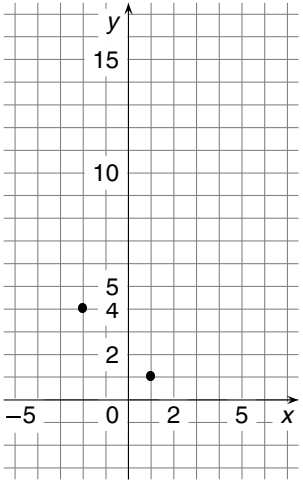
$h(x) = |x - 2|$; $i(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$				2		0		
$g(x)$				2		0		
$h(x)$				2		0		
$i(x)$				2		0		



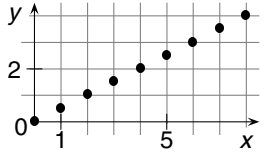
2.10. Táblázattal adtuk meg a szám-szám függvények két összetartozó értékpárját. Fogalmazz meg olyan összefüggéseket, amelyek a függvény szabályai lehetnek! Egészítsd ki a táblázatot a megfogalmazott szabályok szerint! Rajzold meg a függvények grafikonját (különböző színnel)!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$		4			1			
$g(x)$		4			1			
$h(x)$		4			1			
$i(x)$		4			1			

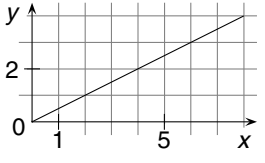


2.11. Fogalmazz szöveget a következő grafikonokhoz!
Mi a leképezés szabálya?
Mi lehet az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet?

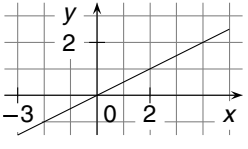
a)



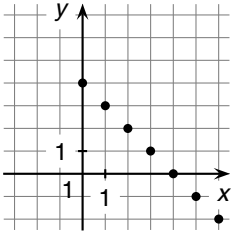
b)



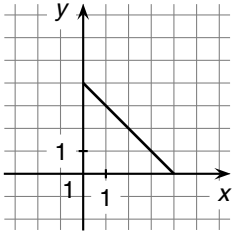
c)



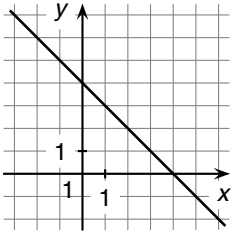
d)



e)

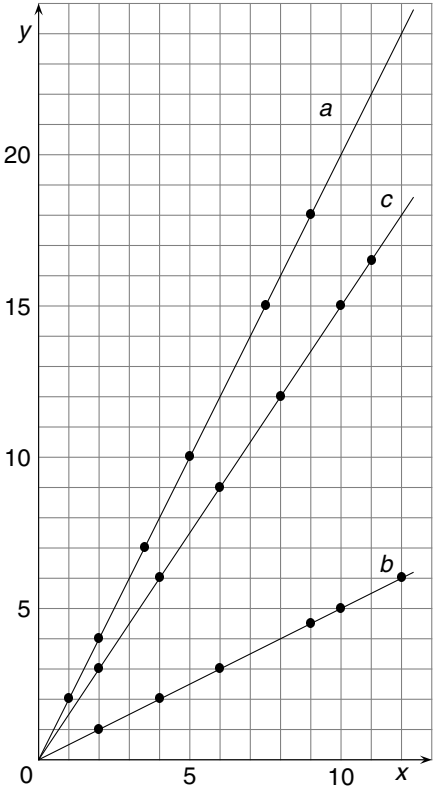


f)



Egyenes arányosság

2.12. Olvasd le a grafikonról a megjelölt pontok koordinátáit, és írd be a táblázatba!
Minden esetben számítsd ki az $y : x$ arányt!



a)

x	1					
y	2					
$y : x$						

b)

x	2					
y	1					
$y : x$						

c)

x	2					
y	3					
$y : x$	$\frac{3}{2}$					

2.13. Készíts minden feladathoz értéktáblázatot! Írd le kifejezéssel a mennyiségek közti összefüggést! Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az összefüggés grafikonját! Hogyan célszerű megválasztani az értelmezési tartományt, illetve a képhalmazt?

a) 1 m^3 fenyőfa tömege $\frac{1}{2}$ t. Hány tonna a tömege

0 m^3; 1 m^3; 2 m^3; 3 m^3; ...; x m^3; fenyőfának?

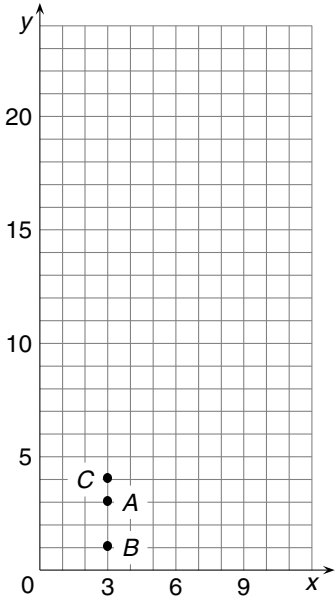
b) 1 db cipó tömege $\frac{1}{2}$ kg. Hány kilogramm a tömege

0 db; 2 db; 3 db; ...; x db; cipónak?

c) Egy kerékpáros dél felől közeledik a megfigyelési ponthoz úgy, hogy 1 min alatt $\frac{1}{2}$ km-t tesz meg. Hogyan függ az eltelt időtől a megfigyelési ponthoz viszonyított helyzete, ha az órát akkor indítják, amikor a kerékpáros a megfigyelési ponthoz ér, és az északi irányú elmozdulást tekintik pozitívnak?
Hogyan fordítható a matematika nyelvére a *c)* feladatban leírt jelenség, ha a déli irányú elmozdulást tekintik pozitívnak?

d) A megfigyelési pontból észak felé indul el egy teherautó, amely percenként 1 km-t tesz meg. Dél felé indul el egy személyautó, amely percenként 1,5 km-t halad. Az északi irány legyen pozitív, a déli negatív.

2.14. Az *a)*, *b)*, *c)* feladathoz rendre az *A*, *B*, *C* pont tartozik. Számítsd ki az $y : x$ arányt! Töltsd ki a táblázatot úgy, hogy az $y : x$ arány ugyanaz legyen, mint az adott pont esetén! Ábrázold grafikonon az összetartozó értékpárokat!



a)

x	1	2	3	6	9	12	15
y			3				
$y : x$							

b)

x	1	2	3	6	9	12	15
y			1				
$y : x$							

c)

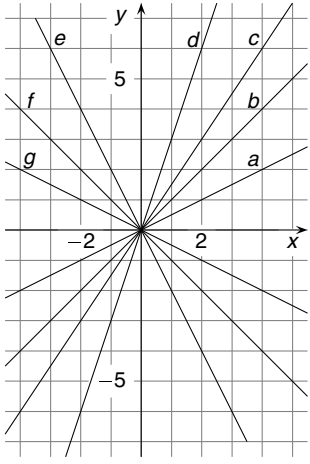
x	1	2	3	6	9	12	15
y			4				
$y : x$							

2.15. Hét egyenes arányosság grafikonját rajzoltuk meg közös koordináta-rendszerben. A grafikonok segítségével töltsd ki a táblázatot!

Keress kapcsolatot az összetartozó értékpárok aránya és a grafikon *meredeksége* között!

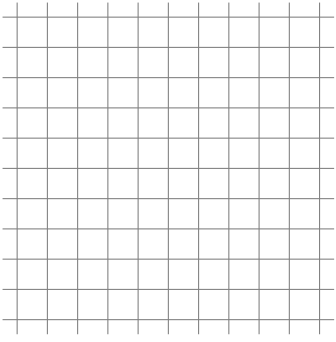
Írd le képlettel a függvénykapcsolat szabályát!

Minden grafikonhoz készíts ilyen táblázatot!



x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							
$y : x$							

2.16. Az adott szabályok alapján rajzold meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját! Melyik függvény nem egyenes arányosság? Az alaphalmaz: **R** = {A tanult számok halmaza}



$f(x) = \frac{2}{3}x$; $g(x) = -\frac{2}{3}x$;

$h(x) = \frac{4}{3}x$; $i(x) = -\frac{4}{3}x$;

$j(x) = x + \frac{5}{2}$; $k(x) = x - \frac{5}{2}$

2.17. Melyik egyenes arányosság? Mi az értelmezési tartomány, illetve a képhalmaz?
Az egyenes arányosságok grafikonját rajzold meg!
Írd le kifejezéssel (képlettel) a változók közti összefüggést!
A keresett értékeket olvasd le a grafikonról, illetve a képlettel határozd meg!

a) Ha 6 db citrom ára 180 Ft, akkor mennyibe kerül 1 db; 2 db; 15 db citrom?
Hány citrom kerül 240 Ft-ba; 330 Ft-ba; 90 Ft-ba; 1800 Ft-ba?

b) 100 g sóoldatban 25 g só van.
Mennyi só van 20 g; 60 g; 200 g ugyanilyen töménységű sóoldatban?
Mennyi sóoldatban van 7,5 g; 87,5 g; 200 g só?
Hány százalékos ez az oldat?

c) Hány százalékos lesz a keverék, ha 100 g 40%-os sóoldathoz 50 g; 100 g; 300 g; 900 g 20%-os sóoldatot öntenek?

d) Alberték kirándulni mentek. Megállás nélkül, egyenletes tempóban haladtak, és óránként 3 km-t tettek meg.
Hány kilométert tettek meg $\frac{1}{3}$ óra alatt; $1\frac{2}{3}$ óra alatt; 3 óra alatt?
Mennyi idő alatt tettek meg 0,5 km-t; 7,5 km-t; 12 km-t?

e) Bea sétálva óránként 3 km-t halad, és 2 és fél óra alatt ér a szomszéd faluba.
Mennyi idő alatt ér oda, ha siet, és óránként 4,5 km-t halad?
Mennyi idő alatt ér oda kerékpárral, ha óránként 15 km-t halad?

f) Egy tehergépkocsi 5 l benzinnel 25 km-t tesz meg. Mennyi utat tesz meg 0,5 l; 1 l; 1,5 l; 2 l; 7,5 l; 27,5 l benzinnel?
120 km-en mennyi benzint fogyaszt?

g) 10 kg sav hígításához 2,5 kg oldószer szükséges. Ugyanilyen hígítás mellett mennyi oldószer kell
1 kg; 0,1 kg; 7,5 kg; $2\frac{2}{3}$ kg; 25 kg savhoz?
12 kg oldószer mennyi savhoz elegendő?

h) Egy üzemben az oldószert 15 db húszliteres kannában tárolják. Ez a mennyiség hány darab 50 l-es hordóban; 1,5 l-es palackban; 150 l-es kádban férne el?
Az oldószert dobozokba töltötték át, 50 doboz telt meg. Hány literesek a dobozok?

2.18. 8 munkás napi 8 órai munkával 4 nap alatt fejez be egy munkát.

a) 16 munkás napi 8 órai munkával hány nap alatt végez?

b) 4 munkás napi 8 órai munkával hány nap alatt végez?

2.19. 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojást tojik. Hány ilyen tyúk tojik 9 nap alatt 18 tojást?

2.20. 4 ember 2 nap alatt 2 kg kenyeret fogyaszt el.

a) Hány ember fogyaszt el egy hét alatt 28 kg kenyeret?

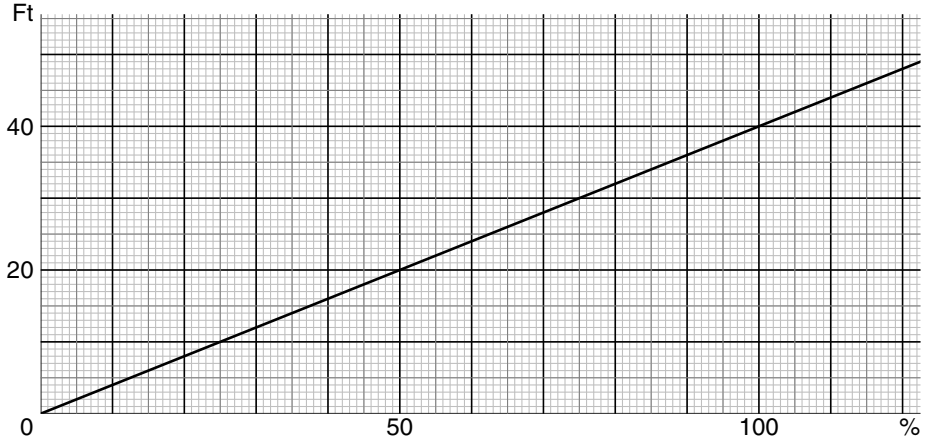
b) 8 ember 1 hét alatt hány kilogramm kenyeret fogyaszt el?

2.21. Két autó 160 km-en 19,2 l benzint fogyasztott. (Ugyanolyan körülmények között ugyanolyan autók.)

a) 4 autó 240 km-en hány liter benzint fogyaszt?

b) Egy autó 640 km-en hány liter benzint fogyaszt?

2.22. *a)* Olvasd le a grafikonról 40 Ft 100%-át, 20%-át, 25%-át, 50%-át, 75%-át, 80%-át, 100%-át, 125%-át, 150%-át!



Írd be a leolvasott százalékértéket a táblázatba! Alap: 40 Ft.

Százalékláb (%)	0	10	20	25	50	75	80	100	125	150
Százalékérték (Ft)										

b) Rajzolj grafikont (az előző milliméteres rácsra), amelyről 50 Ft százalékértékeit olvashatod le! Írd a százalékértékeket a táblázatba! Alap: 50 Ft.

Százalékláb (%)	0	10	20	25	50	75	80	100	125	150
Százalékérték (Ft)										

c) Rajzolj grafikont (az előző milliméteres rácsra), amelyről 20 Ft százalékértékeit olvashatod le! Írd a százalékértékeket a táblázatba! Alap: 20 Ft.

Százalékláb (%)	0	10	20	25	50	75	80	100	125	150
Százalékérték (Ft)										

Milyen összefüggés van *azonos alap* mellett a *százalékláb* és a *százalékérték* között?

Hasonlítsd össze a három grafikont, és egészítsd ki a mondatokat!

Ha a százalékláb egyenlő, nagyobb összeghez ..... , kisebb összeghez ..... *százalékérték* tartozik.

Ha a százalékérték egyenlő, nagyobb összeghez ..... , kisebb összeghez ..... *százalékláb* tartozik.

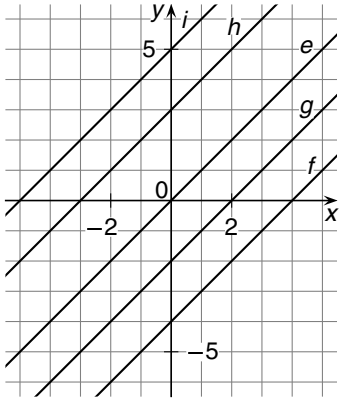
Lineáris függvény

2.23. *a)* Anna vásárolni akar egy doboz gyümölcsitalt 160 Ft-ért és valamennyi almát, amelynek kilogrammja 200 Ft. Mennyit kell fizetnie, ha
0 kg; 1 kg; 2 kg; ...; 10 kg; ...; x kg almát vásárol?

b) Beának 1200 Ft-ja van. Vásárolni kíván valamennyi burgonyát, amelynek kilogrammja 80 Ft. Mennyi pénze marad, ha
0 kg; 1 kg; 2 kg; ...; 10 kg; ...; x kg burgonyát vásárol?

c) Csaba visszavisz az üzletbe egy ládát, amelyért visszakap 200 Ft betétdíjat. Ugyanakkor vásárolni szeretne valamennyi lisztet, amelynek kilogrammja 80 Ft. Mennyit kell fizetnie, ha
0 kg; 1 kg; 2 kg; ...; 10 kg; ...; x kg lisztet vásárol?

2.24. Közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk néhány függvény grafikonját. Írd le a függvények szabályát! Töltsd ki a közös függvénytáblát!

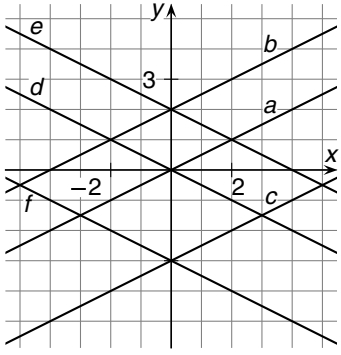


a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$e(x)$								
$f(x)$								
$g(x)$								
$h(x)$								
$i(x)$								

b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$a(x)$								
$b(x)$								
$c(x)$								
$d(x)$								
$e(x)$								
$f(x)$								



2.25. Mi a közös tulajdonsága a következő függvények grafikonjának?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$; $g(x) = -x + 4$; $h(x) = 2x + 4$;

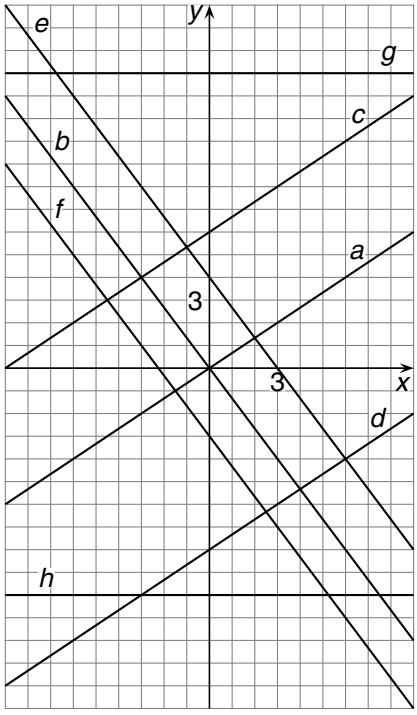
b) $f(x) = \frac{5}{6}x$; $g(x) = \frac{5}{6}x + 4$; $h(x) = \frac{5}{6}x - 2$

2.26. A grafikonok segítségével töltsd ki a közös táblázatot!

Az egyenes arányosságok esetén az összetartozó értékpárok arányát is határozd meg!

Írd le a függvénykapcsolat szabályát!

x	-9	-6	-3	0	3	6	9
$a(x)$							
$b(x)$							
$c(x)$							
$d(x)$							
$e(x)$							
$f(x)$							
$g(x)$							
$h(x)$							



2.27. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket! Az értelmezési tartomány és az értékkészlet a racionális számok halmaza.

a) $e(x) = 2{,}5x$; $f(x) = 2{,}5x + 1$; $g(x) = 2{,}5x - 2$;

b) $e(x) = 0{,}5x$; $f(x) = 0{,}5x + 1$; $g(x) = 0{,}5x - 2$;

c) $e(x) = \frac{3}{5}x$; $f(x) = \frac{3}{5}x + 2$; $g(x) = \frac{3}{5}x - 4$;

d) $e(x) = -2{,}5x$; $f(x) = -2{,}5x + 1$; $g(x) = -2{,}5x - 2$;

e) $e(x) = -0{,}5x$; $f(x) = -0{,}5x + 1$; $g(x) = -0{,}5x - 2$;

f) $e(x) = -\frac{3}{5}x$; $f(x) = -\frac{3}{5}x + 2$; $g(x) = -\frac{3}{5}x - 4$

2.28. Rajzold meg külön koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját! Az értelmezési tartomány az ismert legbővebb számhalmaz.

$f : x \mapsto \frac{3}{2}x - 3$; $\quad g : x \mapsto -\frac{4}{3}x + 8$

a) Tükrözd a függvény grafikonját az x tengelyre!

b) Tükrözd a függvény grafikonját az y tengelyre!

c) Tükrözd a függvény grafikonját az $e(x) = x$ függvény grafikonjára!
Írd fel a tükrözéssel kapott grafikonok hozzárendelési szabályát!

2.29. Minden feladat esetén töltsd ki a táblázatot (a *t* az időt, az *s* az elmozdulást jelöli)! Írd le az idő és elmozdulás közti kapcsolat szabályát! (Az északi irányban történő elmozdulást pozitív, a déli irányút negatív mérőszámokkal jellemezzük.)
Közös koordináta-rendszerben rajzold meg az idő–elmozdulás grafikont!
Egy hajó 5 percenként 2 km-t tesz meg. Milyen helyzetben van az *A* szigethez viszonyítva az időmérés 0., 1., 2., . . . , 6., 10., 15., 20. percében, ha

a) az időmérés megkezdésekor, az *A* szigetről északi irányban indul;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

b) az időmérés megkezdésekor indul az *A* szigettől 4 km-re északra fekvő *B* szigetről, és északi irányban halad;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

c) az időmérés megkezdésekor indul az *A* szigettől 6 km-re délre fekvő *B* szigetről, és északi irányban halad;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

d) az időmérés megkezdésekor az *A* szigetről déli irányban indul;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

e) az időmérés megkezdésekor indul az *A* szigettől 4 km-re északra fekvő *B* szigetről, és déli irányban halad;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

f) az időmérés megkezdésekor indul az *A* szigettől 6 km-re délre fekvő *C* szigetről, és déli irányban halad;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

g) az időmérés megkezdése után 5 perccel indul az *A* szigetről, és északi irányban halad;

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

h) az időmérés megkezdése után 5 perccel indul az *A* szigettől 4 km-re északra fekvő *B* szigetről, és déli irányban halad?

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)										

2.30. Rajzold meg annak a függvénynek a grafikonját, és add meg a leképezés szabályát, amelynek a grafikonja

a) párhuzamos az $f(x) = -\frac{3}{5} \cdot x$ függvény grafikonjával, és illeszkedik a $P(0; -4)$ pontra;

b) párhuzamos az $f(x) = \frac{2}{7} \cdot x$ függvény grafikonjával, és illeszkedik a $P(7; 4)$ pontra;

c) merőleges az $f(x) = -\frac{4}{5} \cdot x$ függvény grafikonjára, és illeszkedik az origóra;

d) merőleges az $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ függvény grafikonjára, és illeszkedik a $P(0; 5)$ pontra!

Egyenlet, egyenlőtlenség grafikus megoldása

2.31. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) (1) $\frac{2}{3}x + 2 \geqq 0$; (2) $\frac{2}{3}x + 2 = 0$; (3) $\frac{2}{3}x + 2 \leqq 0$;

b) (1) $x - 2 > 3$; (2) $x - 2 = 3$; (3) $x - 2 < 3$;

c) (1) $\frac{1}{2}x > -\frac{5}{2}x - 6$; (2) $\frac{1}{2}x = -\frac{5}{2}x - 6$; (3) $\frac{1}{2}x < \frac{6}{2}x - 6$

2.32. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{3}{4}x - 3$; *b)* $-\frac{3}{4}x + 3 \leqq \frac{3}{4}x - 3$;

c) $-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{3}{4}x + 3$; *d)* $-\frac{3}{4}x + 3 > \frac{3}{4}x + 3$;

e) $\frac{3}{4}x + 3 = \frac{3}{4}x - 3$; *f)* $\frac{3}{4}x + 3 > \frac{3}{4}x - 3$;

g) $-\frac{3}{4}x + 3 = 3 - \frac{3}{4}x$; *h)* $-\frac{3}{4}x + 3 = -3 - \frac{3}{4}x$

2.33. Melyik egyenletnek van pontosan egy megoldása, melyik azonosság, melyiknek nincs megoldása?

a) $-\frac{3}{2}x + 5 = 5 - 1{,}5x$; *b)* $\frac{2}{3}x + 2 = \frac{3}{2}x + 2$;

c) $2x + \frac{3}{2} = 2x + \frac{2}{3}$; *d)* $\frac{3}{2}x - 4 = \frac{2}{3}x + 1$

2.34. Oldd meg grafikusan az egyenlőtlenségeket! Melyik azonos egyenlőtlenség, melyik egyenlőtlenségnek nincs megoldása?

a) $-\frac{5}{4}x + 3 < \frac{3}{4} + 3$; *b)* $-\frac{5}{4}x + 3 > -\frac{5}{4}x - 3$; *c)* $\frac{3}{4}x - 3 \leqq -3 + \frac{3}{4}x$

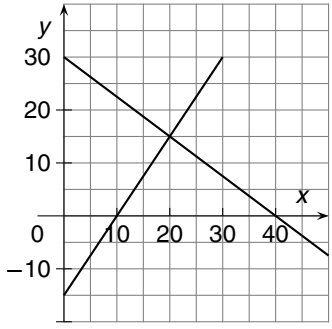
2.35. Oldd meg grafikusan az egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $|x| + 2 < 4$; *b)* $-|x| < x - 2$; *c)* $|x| = \frac{1}{3}x + 4$

2.36. Oldd meg grafikusan az adatok közti összefüggést leíró egyenletet!
Két 25 m^3-es tartály áll egymás mellett. Az egyik tele van vízzel, a másikban 10 m^3 víz van. Egyszerre nyitják meg az első tartály kifolyóját, amelyen $\frac{3}{4}$ m^3 víz folyik ki percenként, és a második tartály csapját, amelyen át $\frac{1}{2}$ m^3 víz folyik be a tartályba. Mikor lesz a két tartályban ugyanannyi víz?

2.37. *a)* Fogalmazz meg mozgással kapcsolatos feladatot a grafikonhoz!
Oldd meg a feladatot!

b) Fogalmazz meg hőmérséklet-változással kapcsolatos feladatot a grafikonhoz!
Oldd meg a feladatot!



Sorozat

2.38. *a)* Add meg a következő sorozatok első három elemét, majd az 50. elemet! Szóban is fogalmazd meg, hogy milyen tulajdonságú számok alkotják ezeket a sorozatokat!
$n \mapsto 4n - 4$; $n \mapsto 4n - 3$; $n \mapsto 4n - 2$; $n \mapsto 4n - 1$.

b) Egy sorozat általános eleme: $a_n = \frac{72}{n}$.
Add meg a sorozat első 12 elemét! Jelölje ezeket a_1; a_2; a_3; ...; a_{12}.

c) Egy sorozat első eleme $a_1 = 5$. Minden további elemet úgy kapunk, hogy az előtte lévő elemet szorozzuk 2-vel. Sorold fel a sorozat első öt elemét, majd add meg a 11. elemet is!

d) Egy sorozat 4. eleme $a_4 = 12$. A második elemtől kezdve minden elemet úgy kapunk, hogy az előtte lévő elemet szorozzuk 2-vel. Add meg a sorozat első nyolc elemét!

2.39. Megadtuk a sorozat néhány elemét. Keress szabályt, majd írd fel a sorozat következő öt elemét!
A szabály alkalmazásával számítsd ki a sorozat 15. elemét!

a) 1; 3; 6; 10; 15; ...; *b)* -2; 4; -8; 16; -32; ...

c) 0; 1; 0; $\frac{1}{2}$; 0; ...

Vegyes szöveges feladatok

2.40. Keresd meg, hogy melyik feladatban van a mennyiségek között *egyenes arányosság, fordított arányosság,* illetve olyan *lineáris függvénykapcsolat,* amely nem egyenes arányosság! Ezekben az esetekben *írd le kifejezéssel a változók közti összefüggést!* Határozd meg az értelmezési tartományát!

a) A pénzemből 12 kg szőlőt vásárolhatok, ha 1 kg szőlő ára 200 Ft. Hány kilogramm gyümölcsöt vehetek ugyanennyi pénzért, ha 1 kg gyümölcs ára
100 Ft; 50 Ft; 400 Ft; 150 Ft; 300 Ft?
Mennyibe került volna 1 kg gyümölcs, ha ezért a pénzért
15 kg; 10 kg; 40 kg; 25 kg gyümölcsöt vásárolhattam volna?

b) 3200 Ft-ból 20 kg szőlőt vásároltam. Mennyibe kerül ugyanebből a szőlőből
10 kg; 40 kg; 1 kg; 7,5 kg; 3,75 kg?
Hány kilogrammot vásárolhattam volna ebből a szőlőből
320 Ft-ért; 960 Ft-ért; 1320 Ft-ért; 1536 Ft-ért?

c) Egy tojás 30 Ft-ba kerül, és 20 Ft-ba az a doboz, amelybe a tojásokat rakjuk. Mennyibe kerül 30 db; 5 db; 45 db; 47 db; 50 db tojás
dobozzal együtt, ha egy-egy dobozba legfeljebb 10 tojás fér?

d) 1000 Ft-om van. Ebből pogácsát szeretnék vásárolni. Mennyi pénzem marad, ha egy pogácsa ára 40 Ft, és 5 db; 10 db; 15 db; 20 db pogácsát vásárolok?

e) Egy üres kád 25 perc alatt telik meg, ha percenként 6 l víz folyik ki a csapból. Hány perc alatt telik meg a kád, ha percenként
3 l; 12 l; 15 l; 20 l; 12,5 l víz folyik ki a csapból?
Hány liter víz folyt ki percenként a csapból, ha
15 perc; 5 perc; 12 perc; 150 perc alatt telt meg a kád?

f) Egy kádban 240 l víz van. A kád lefolyóján percenként 12 l víz folyik ki. Ha megnyitjuk a lefolyót, hány liter víz lesz a kádban
2 perc; 5 perc; 15 perc; 20 perc; 50 perc múlva?
Hány perc múlva lesz a kádban 234 l; 210 l; 180 l; 12 l víz?

g) Egy erőgép 36 óra alatt végezne el egy munkát. Hány óra alatt végezné el ezt a munkát 2 db; 3 db; 5 db; 12 db ugyanilyen erőgép?
Hány ugyanilyen erőgép végezné el a munkát
9 óra alatt 6 óra alatt; 4,5 óra alatt; 1,5 óra alatt?

h) Egy szerelő a kiszállásért 2800 Ft-ot számít, és minden megkezdett óráért 3500 Ft-os munkabért kér. Mennyit számláz a szerelő, ha
2 órán át; 4 órán át; 6,5 órán át dolgozott?
Hány órán át dolgozott a szerelő, ha 13 300 Ft-ot; 18 550 Ft-ot számlázott?

i) Egy motorcsónak $12\ \frac{km}{h}$ sebesség mellett 5 óra alatt ért célba. Mennyi idő alatt ért volna célba $6\ \frac{km}{h}$; $24\ \frac{km}{h}$; $10\ \frac{km}{h}$ sebességgel?
Mekkora sebességgel érne célba 4 óra alatt; 3 óra alatt?

3. Algebrai kifejezések

Ismerkedés az algebrai kifejezésekkel

3.01. Gondolj egy számra! Add hozzá az ötszörösét és még 15-öt! Az összeget oszd el 3-mal, majd a hányadosból vedd el az eredetileg gondolt szám kétszeresét!

a) Írd le kifejezéssel az eredményt!

b) Bizonyítsd be, hogy mindig 5 a végeredmény, akármelyik számra gondolsz!

Megoldás

a) A gondolt számot jelölje például g.
(A g tetszőleges számot jelöl, mert bármelyik számra gondolhattál.)
A szám ötszöröse: $5 \cdot g$.
A gondolt számnak, meg az ötszörösének és 15-nek az összege: $g + 5 \cdot g + 15$.
Ezt osztanunk kell 3-mal, majd el kell vennünk a hányadosból a szám kétszeresét:

$$(g + 5 \cdot g + 15) : 3 - 2 \cdot g.$$

b) Írjuk föl az előbbi kifejezést egyszerűbb alakban.
Ha a gondolt számhoz hozzáadjuk az ötszörösét, akkor a hatszorosát kapjuk.

Összeget úgy is oszthatunk egy számmal, hogy minden tagját külön-külön elosztjuk. Ha a szám hatszorosát 3-mal osztjuk, akkor a szám kétszeresét kapjuk.

Ha a szám kétszerese meg 5-ből elvesszük a szám kétszeresét, akkor valóban 5-öt kapunk.

$$\underbrace{(g + 5 \cdot g}_{6 \cdot g} + 15) : 3 - 2 \cdot g$$

$$\underbrace{(6 \cdot g + 15) : 3}_{2 \cdot g + 5} - 2 \cdot g$$

$$2 \cdot g + 5 - 2 \cdot g = 5$$

3.02. *a)* Albertnek a Ft-ja van, Nórának 45 Ft-tal több. Hány forintja van Nórának?

b) Beának 420 Ft-ja van, b Ft-tal több, mint Miklósnak. Hány forintja van Miklósnak?

c) Csabának c Ft-ja van, Lilinek 25 Ft-tal kevesebb. Hány forintja van Lilinek?

d) Dórának d Ft-ja van, 47 Ft-tal kevesebb, mint Péternek. Hány forintja van Péternek?

e) Emmának 100 Ft-ja van, Robinak e Ft-tal kevesebb. Hány forintja van Robinak?

3.03. *a)* Egy szék ára 1200 Ft. Hány forintba kerül
2 db; 6 db; x db; $2x$ db; $(x + 2)$ db szék?

b) Egy üzem 150 munkásának vásárol egyforma szerszámot. Mennyit fizet érte, ha egy szerszám ára
220 Ft; 1000 Ft; y Ft; $4y$ Ft; $(y - 250)$ Ft?

c) Egy vállalkozó 36 000 Ft-ért egyforma alkatrészeket vásárolt. Hány forintba került egy alkatrész, ha a vasárolt alkatrészek száma
12 db; 180 db; z db; $(z + 5)$ db; $3z$ db volt $(z > 0)$?

d) Egy szerelő d Ft-ért huzalt vásárolt. Hány forintba került 1 m huzal, ha a vásárolt huzal hossza
52 m; 48 m; u m; $2u$ m; $(15 + u)$ m volt ($u > 0$)?

e) Egy kertész 45 kg műtrágyát vásárolt. Hány forintba került 1 kg műtrágya, ha összesen
1800 Ft-ot; 405 Ft-ot; v Ft-ot; $3v$ Ft-ot; $(v + 90)$ Ft-ot fizetett?

3.04. Az a és a b tetszőleges szám. Írd föl

a) az a 2-szeresét; *b)* az a b-szeresét;

c) a két szám összegét; *d)* a b és az a különbségét;

e) az a 2-szeresének és a b 3-szorosának összegét;

f) az a 2-szerese meg a b összegének a 3-szorosát!

3.05. Az a, b és c tetszőleges szám. Írd föl

a) az a és b szorzatának meg c-nek az összegét;

b) az a meg b összegének és c-nek a szorzatát;

c) az a-nak meg b és c szorzatának az összegét;

d) az a-nak és b meg c összegének a szorzatát!

3.06. Melyik kifejezés felel meg az egyes kijelentéseknek? (Az x, y, z tetszőleges számok.)

A: $7x - yz$; **B:** $7x(y - z)$; **C:** $(7x - y)z$

a) Az x 7-szeresének és y és z különbségének a szorzata.

b) Az x 7-szeresének és y és z szorzatának a különbsége.

c) Az x és y különbségének a 7-szerese szorozva z-vel.

3.07. Egy téglalap rövidebb oldala x, hosszabb oldala pedig y hosszúságegység.

a) Hány területegység a téglalap területe?

b) Hány területegység annak a téglalapnak a területe, amelynek a rövidebb oldala 2-szerese az előző téglalap rövidebb oldalának, a hosszabbik oldala y?

c) Hány területegység annak a téglalapnak a területe, amelynek a hosszabbik oldala 2 hosszúságegységgel hosszabb, mint az eredeti téglalap hosszabb oldala?

3.08. Karikázd be az együtthatókat! Ha nem „látszik” az együttható, írd olyan alakba a kifejezést, hogy meg tudd oldani a feladatot! *Például:*

$-x^2 = -1 \cdot x^2$; $\quad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^2$

a) $2a$; $-5b^2$; $-3x^3$; $4x^2y$; $a^2 \cdot 3 \cdot c$;

b) $a \cdot 4$; $b^2 \cdot (-5)$; $c^2 \cdot (-3)$; $d \cdot 63$; $5{,}28 \cdot a^2$;

c) $a \cdot b$; $-c$; $\frac{d}{5}$; $\frac{xy}{-3}$; $\frac{5z}{4}$

Algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározása

3.09. Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $a+2{,}5$; $2a-3{,}1$; $4{,}2a-5$; $3-2a$, ha $a=4$

b) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$; $\frac{3}{7}-\frac{3}{14}x$; $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$, ha $x=2$

c) $\frac{2y-1}{3}$; $\frac{5-2y}{6}$; $\frac{4+3y}{2}$; $\frac{1-6y}{4}$, ha $y=3$

d) $2(x-3{,}5)$; $(3-1{,}4x)\cdot 2{,}5$; $\frac{3}{4}(2x+5)$, ha $x=0{,}5$

e) $(b+3{,}6)\cdot\frac{1}{2}$; $(b-0{,}5)\cdot\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}(1-2b)$, ha $b=-1$

f) $-\frac{2c+3{,}5}{4}$; $-\frac{3{,}2-c}{2}$; $\frac{5-1{,}8c}{4}$, ha $c=1$

g) $\frac{d\cdot(-2)+1}{3}$; $\frac{d\cdot 0{,}5-0{,}6}{4}$; $\frac{3-2{,}1d}{5}$, ha $d=-2$

3.10. Határozd meg a hatványok helyettesítési értékét!

a) a^2; a^3; $3\cdot a^4$; $(-a)^4$; $-a^4$, ha $a=2$

b) b^0; $(-b)^1$; $2(-b)^3$; $(-2\cdot b)^2$; $5\cdot b^1$, ha $b=-2$

c) c^5; $(-c)^5$; $(3\cdot c)^3$; $3\cdot c^3$; $-c^5$, ha $c=-1$

3.11. Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét! Figyelj a műveletek helyes sorrendjére!

a) $2+3\cdot a^2$; $2+(3\cdot a)^2$; $(2+3a)^2$, ha $a=-3$

b) $5(b+1)^2$; $(5b+1)^2$; $5b+1^2$, ha $b=-1$

c) $(3c)^3-2$; $3(c-2)^3$; $3(c-2^3)$, ha $c=2$

d) $5-5d^0$; $(5-5)d^0$; $(5-5d)^0$, ha $d=3{,}5$

e) $2e-e^3$; $2(e-e)^3$; $2(e-e^3)$, ha $e=-2$

f) $\frac{2f}{3}+6$; $\frac{2f+6}{3}$; $2\cdot\frac{f+6}{3}$, ha $f=9$

g) $\frac{g^2}{2}-5$; $\left(\frac{g}{2}\right)^2-5$; $\left(\frac{g-5}{2}\right)^2$, ha $g=4$

3.12. Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

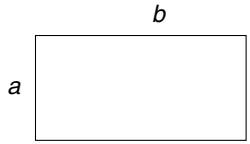
a) $3a-b^2$; $3(a-b)^2$; $(3a-b)^2$, ha $a=2$, $b=1$

b) $x-2y^3$; $(x-2)y^3$; $x-(2y)^3$, ha $x=4$, $y=-2$

3.13. Írd a táblázatok utolsó két sorába a síkidom kerületének és területének képletét, majd az adatokkal számítsd ki a kerületet és területet!

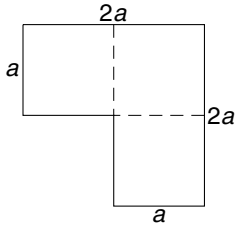
a)

a (cm)	3	2,5	5	1,3	10
b (cm)	5	8	10	2,8	30
K =					
T =					



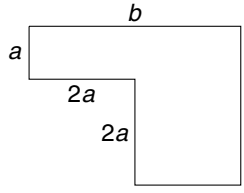
b)

a (cm)	1	2	5	10	0,1
K =					
T =					



c)

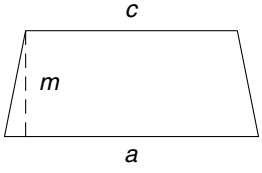
a (cm)	1	2	5	10	0,1
b (cm)	1	5	14	8	1,2
K =					
T =					



3.14. Írd a táblázatok utolsó sorába a síkidom területének képletét, majd az adatokkal számítsd ki a területet!

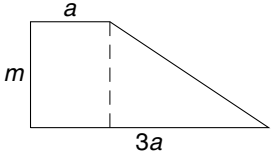
a)

a (cm)	6	10	4,3	3,5	4
c (cm)	4	7	2,7	2,5	3,2
m (cm)	5	8	3	5	1,8
T =					



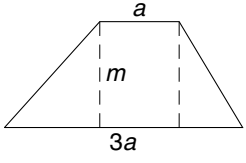
b)

a (cm)	1	2	5	10	0,1
m (cm)	2	3,5	5	16	0,4
T =					



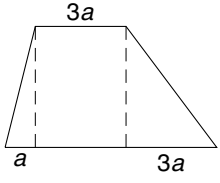
c)

a (cm)	1	2	5	10	0,1
m (cm)	2	4	6	12	0,8
T =					

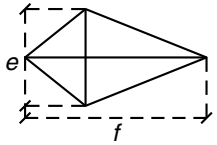


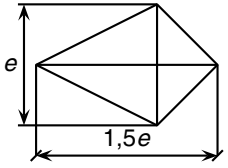
d)

a (cm)	1	2	5	10	0,1
m (cm)	2	4	6	12	0,8
T =					



3.15. Írd a táblázatok utolsó sorába a deltoid területének képletét, majd az adatokkal számítsd ki a területét!





a)

e (cm)	4	8	0,6	10	2,5
f (cm)	7	12,5	1,5	20	4
T =					

b)

e (cm)	6	0,8	9	10	4
T =					

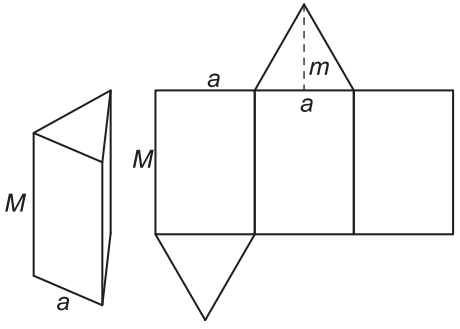
3.16. Írd a táblázatok utolsó sorába a test felszínének képletét, majd az adatokkal számítsd ki a felszínt!

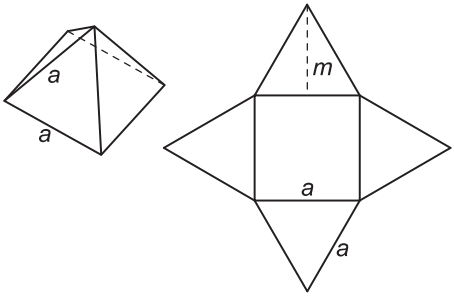
a)

a (cm)	2,0	6,0	10	1,2
M (cm)	1,4	6,0	13	1,0
m (cm)	1,7	5,2	8,7	1,0
A =				

b)

a (cm)	2,0	3,0	6,0	8,4
m (cm)	1,7	2,6	5,2	7,3
A =				



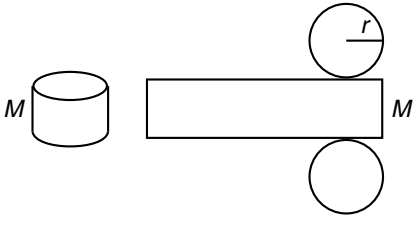


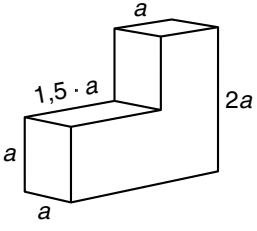
c)

r (cm)	2	3	7	1,3
M (cm)	1,5	5	10	1,0
A =				

d)

a (cm)	1	3	0,5	10
A =				





3.17. Töltsd ki a táblázatokat!

a)

a	1	0	3	2,5
b	2	5	-1	4
$a \cdot b + 1$				

b)

a	1	0	3	2,5
b	2	5	-1	4
$a \cdot (b + 1)$				

c)

a	5	-5	2,3	0
b	5	5	3,2	0
$4(a - b)$				

d)

a	5	-5	2,3	0
b	5	5	3,2	0
$4a - b$				

3.18. Töltsd ki a táblázatokat!

a)

a	2	4	0	-2
b	2	2	-3	-1
$a - 2b^2$				

b)

a	2	4	0	-2
b	2	2	-3	-1
$(a - 2b)^2$				

c)

a	2	4	0	-2
b	2	2	-3	-1
$(a - 2)b^2$				

d)

a	2	4	0	-2
b	2	2	-3	-1
$a - (2b)^2$				

Egynemű, különnemű algebrai kifejezések

3.19. A következő algebrai kifejezésekből gyűjtsd külön az egynemű kifejezéseket!

a) $2;\quad 2x;\quad x^2;\quad \frac{x}{2};\quad -1;\quad -5x;\quad 0;\quad 5x^2;\quad x$

b) $5y;\quad xy;\quad 3;\quad -y;\quad x \cdot 2 \cdot y;\quad 3yx;\quad 4;\quad \frac{y}{2};\quad 0{,}5$

3.20. Az algebrai kifejezések közül válaszd ki azokat, amelyek x-szel egyneműek! Számítsd ki ezek helyettesítési értékét $x = -2$ esetén!

$1;\quad -x;\quad 2x^2;\quad 3xy;\quad \frac{3x}{5};\quad \frac{5}{2};\quad x \cdot 1{,}5;\quad 3 \cdot x \cdot 5$

3.21. Írj 3-3 olyan algebrai kifejezést, amely egynemű a következő algebrai kifejezésekkel!

a) $7a;\quad 2x;\quad -\frac{y}{2};\quad \frac{3}{4}c;\quad -\frac{5}{2}d$

b) $x^2;\quad -y^2;\quad \frac{z^2}{4};\quad -5a^2;\quad 2b^3;\quad -\frac{c^4}{2}$

c) $xy;\quad 2ab;\quad 5cd;\quad -\frac{ax}{4};\quad -3{,}5by$

d) $-x^2y;\quad 2{,}85a^2b^2;\quad -0{,}7x^2y^2;\quad \frac{x^3y}{4};\quad \frac{2a^2x^2}{-3}$

Egynemű kifejezések összevonása

3.22. A következő műveletsorban húzd alá azonos színnel az egynemű kifejezéseket, majd vond össze az egynemű tagokat!

a) $3a - 5 + 4a + 7{,}5 - 2a$;

b) $-b + 5{,}5b - 9 - 3b + 3$;

c) $7 - 3c + 5c - 8{,}8 - 2c$;

d) $-8 - 3{,}5d + 2d + 7 - 12{,}5d$;

e) $\frac{3}{2} - \frac{e}{3} + \frac{5e}{6} - 4 - e$;

f) $1 - \frac{f}{5} + \frac{3f}{10} - \frac{5}{2} - \frac{4}{5}f \cdot 2$;

g) $\frac{g}{7} - \frac{g}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{7} + g$;

h) $h - \frac{1}{4} + 0{,}1h - \frac{3h}{2} + \frac{6}{5}$

3.23. Húzd alá azonos színnel a következő műveletsorokban az egynemű kifejezéseket, majd végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $2x - 1{,}5y + 3{,}2x + 4{,}2x + 5{,}6y + y - x$;

b) $3a - 2b + 5b - 6a - 7a + 8b - a - b$;

c) $x - y - x - y - x - y - x - y - x - y$;

d) $a + 2b - 3a + 4b - 5a + 6b - 7a + 8b$;

e) $0{,}8x + 3{,}2y - 1{,}2x + 0{,}8y - 0{,}4x - 0{,}4x + 1{,}2x$;

f) $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{a}{8} - \frac{b}{12} - \frac{a}{4} - \frac{b}{6}$;

g) $1{,}2x - 0{,}8y + \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + 3{,}2x + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{2}{10}y$;

h) $\frac{3}{5}a - 0{,}4b + \frac{6}{10}a - \frac{6}{10}b + a + b - 2a$;

i) $3 - a + 3 - b + 3 - a + 3 - b + 3 - a + 3 - b$;

j) $x - 4 + y + 4 + 4 - x + 4 - y - 4 - y - 4 - x$;

k) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} - \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$;

l) $\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y - 1{,}5x - 0{,}75y + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - 0{,}25x + 0{,}25y$

3.24. Számítsd ki a **3.23.** feladat helyettesítési értékeit kétféleképpen (összevonás előtt, összevonás után), hasonlítsd össze a két eredményt!

$x = -1$; $y = 2$; $a = -3$; $b = 4$

3.25. Figyelj a zárójelek használatára!

a) $2x - \{-3x + 7 - [5x - 2 + (10x - 4) - 3x]\}$;

b) $-2a + 3b + \{-3a - 2 + [6a - 2b + 2 - (8b - 2a)]\}$;

c) $4x - 2 - \{9 - 7x - [9x - (6 - 2x) - 3] - 9x\} + 9x$;

d) $-9x - 3y + \{4x + 3y + [3x - 4y - (-3x - 4y)]\}$;

e) $5ax + \{3ay - 2ax - [8ax + 6ay + (-5ay - 3ax) - 2ay] + 2ax\}$

3.26. Végezd el a lehetséges összevonásokat, majd számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha

$x = \frac{1}{2}$; $a = 0{,}6$; $y = -3{,}5$; $b = -\frac{5}{6}$!

a) $a - \frac{1}{2}a + 2a$;

b) $x - y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$;

c) $y - 0{,}6y + 0{,}3y$;

d) $0{,}8b - 3{,}6b - 2{,}6b$;

e) $5b - \frac{5}{2}b + \frac{3}{2}b - b$;

f) $\frac{1}{2}x - 0{,}6y + \frac{3}{4}x - 0{,}4y$;

g) $\frac{3}{7}x - \frac{1}{2}x + \frac{5}{14}x$;

h) $b - \frac{3}{5}b + \frac{7}{10}b - \frac{6}{5}b$;

i) $\frac{2}{7}y + \frac{3}{7}y + \frac{4}{7}y + \frac{5}{7}y$;

j) $\frac{19}{8}a - \frac{7}{8}a - \frac{5}{8}a$;

k) $0{,}1x + 0{,}2x + 0{,}3x + 0{,}4x$;

l) $y - 0{,}1y - 0{,}2y - 0{,}3y$

3.27. Végezd el a lehetséges műveleteket, majd határozd meg a kifejezés helyettesítési értékét!

a) $-6{,}5a - 1{,}1 + \{3{,}25a + 1{,}1 + [2{,}35a - (3{,}1a - 1{,}1)] - 1{,}1\}$; ha $a = 2$

b) $-1{,}1n + 1{,}6m - [9{,}9n + 3{,}1m + (-5{,}8m - 4{,}3n) - 8{,}3m]$; ha $m = -1$; $n = 1$

c) $7{,}9x + 3{,}4y - \{2{,}8y - 6{,}3x - [2x - (2{,}9y + 1{,}4x)] - 8{,}1y\}$; ha $x = 0{,}5$; $y = -2$

d) $10x + 6 - \{7{,}3x + 1{,}7 + [4{,}3x - 4{,}3 + (6{,}2x - 5{,}5) - 9{,}9]\}$; ha $x = -3$

e) $-\frac{4}{3}x - \left\{ -\frac{5}{6} + \left[2\frac{1}{3}x - \frac{5}{6} + \left(3\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}\right)\right]\right\}$; ha $x = \frac{6}{5}$

f) $\frac{1}{9}a + \frac{3}{4} + \left\{2\frac{5}{18}a - \frac{5}{16} - \left[1\frac{1}{2}a + \frac{3}{2} - (-4)\right]\right\}$; ha $a = -\frac{3}{2}$

3.28. *a)* Ádámnak a forintja van, Bélának 250 Ft-tal több, Csabának 300 Ft-tal kevesebb pénze van, mint Ádámnak. Mennyi pénzük van összesen?

b) Annának 70 Ft-tal több pénze van, mint Beának, Cili pénze pedig éppen háromszorosa Bea pénzének. Mennyivel van több pénze Cilinek, mint Beának és Annának együtt, ha Beának b Ft-ja van?

c) Cilinek c forintja van, Anna pénze 50 Ft-tal több Cili pénzének $\frac{5}{3}$ részénél, Bea pénze pedig 40 Ft-tal kevesebb Cili pénzének $\frac{5}{6}$ részénél. Mennyi pénzük van összesen?

d) Dénes d forint fizetést kapott, továbbá fizetésének $\frac{4}{5}$-szörösénél 120 Ft-tal kevesebb jutalmat. Ebből a pénzből egy háztartási gépet vásárolt, amelynek ára 120 Ft-tal volt több, mint a fizetésének a $\frac{3}{4}$ része.

Mennyi pénze maradt a vásárlás után?

Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.29. *a)* 1 kg alma 130 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetni

5 kg; $3 \cdot 5$ kg; $4 \cdot 5$ kg; x kg; $3x$ kg; $4x$ kg almáért?

b) 1 kg körte ára k Ft. Mennyit kell fizetni

5 kg; $4 \cdot 5$ kg; x kg; $4x$ kg körtéért?

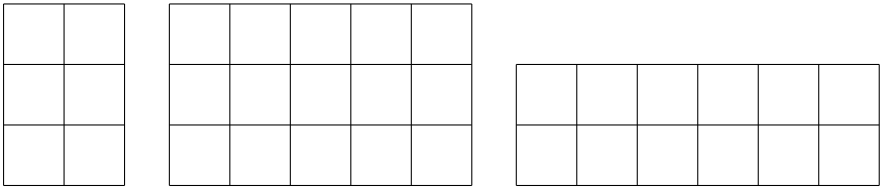
c) 1 m vezeték ára v Ft. Mennyit kell fizetni

3 m; 7,5 m; a m; $2x$ m; $2v$ m vezetékért?

3.30. Ennek a négyzetnek  a területe: $T = a^2$.

Határozd meg a következő téglalapok területét! Hányszorosa ez az előző kis négyzet területének?

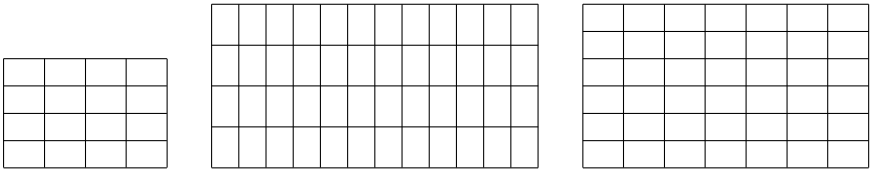
a) $T = 2a \cdot 3a = \ldots\ldots a^2$; *b)* $T = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ldots$ *c)* $T = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ldots$



3.31. Ennek a téglalapnak  a területe: $T = ab$.

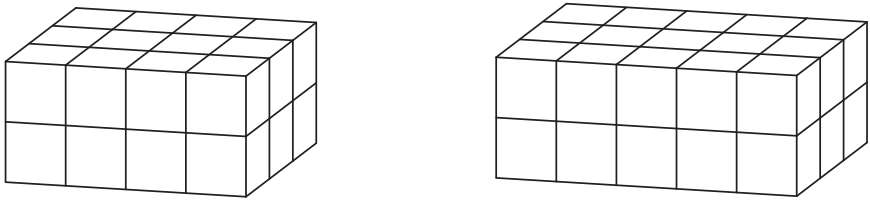
Határozd meg a következő téglalapok területét! Hányszorosa ez az előző kis téglalap területének?

a) $T = 4a \cdot 4b = \ldots\ldots ab$; *b)* $T = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ldots$ *c)* $T = \ldots \cdot \ldots = \ldots\ldots$



3.32. Ennek a kockának  a térfogata: $V = a^3$.

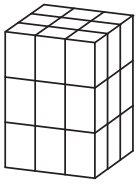
Határozd meg a következő téglatestek térfogatát! Hányszorosa ez az előző kis kocka térfogatának?

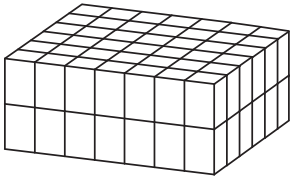


a) $V = 4a \cdot 2a \cdot 3a = \ldots\ldots\ldots\ldots a^3$; *b)* $V = \ldots \cdot \ldots \cdot \ldots =$

3.33. Ennek a négyzetes hasábnak  a térfogata: $V = a^2 b$.

Határozd meg a következő téglatestek térfogatát! Hányszorosa ez az előző kis négyzetes hasáb térfogatának?





a) $V = 3a \cdot 3a \cdot 3b = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *b)* $V = \ldots \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3.34. A szorzatokat írd hatványalakba, a hatványokat szorzatalakba!

a) $x \cdot x \cdot x$; $a \cdot a \cdot a \cdot a$; $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$;

b) $c \cdot c \cdot d \cdot d \cdot d$; $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b$; $x \cdot y \cdot x \cdot y$;

c) x^5; a^6; $(a \cdot b)^4$; $-a^3$; $(-a)^3$; $(x^2)^3$;

d) $x^2 \cdot x^3$; $z \cdot z^3$; $a^3 \cdot a^3$; $c^5 \cdot c^0$; $d^2 \cdot d^2 \cdot d^2$; $(y^3)^3$

3.35. Végezd el a szorzásokat!

a) $3 \cdot 2x$; $(-5x) \cdot 4$; $-6 \cdot (-2x)$; $-9 \cdot 0{,}6x \cdot (-0{,}45)$;

b) $2{,}5y \cdot (-4)$; $(0{,}1 \cdot 0{,}01)y$; $(-3y) \cdot (-2)$; $5 \cdot (-7y) \cdot (0{,}001)$;

c) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9}z$; $\frac{z}{3} \cdot \frac{6}{5}$; $\left(-\frac{2z}{5}\right) \cdot \frac{10}{17}$; $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-8z) \cdot \left(-\frac{7}{6}\right)$;

d) $(4v^3) \cdot (3v^2)$; $(-v^4) \cdot (2v^3)$; $(-v^2) \cdot v^2$; $0{,}5v^5 \cdot (-0{,}8v)$;

e) $3x^3 \cdot 4x$; $2z^2 \cdot 5z$; $3a \cdot 4a^2$; $-2c^3(-3c^4)$;

f) $\frac{c^5}{4} \cdot \frac{2c}{5}$; $\frac{2x^3}{3} \cdot \frac{9x}{8}$; $\frac{5z}{4} \cdot \left(-\frac{3z^2}{10}\right)$; $-\frac{2u^3}{7} \cdot \frac{7u^3}{6}$

3.36. Végezd el az osztásokat!

a) $x^3 : x$; $x^3 : x^2$; $x^5 : x^3$; $x^6 : x^4$;

b) $2 \cdot y^3 : y^2$; $4y^5 : y^4$; $y^6 : (3y^2)$; $y^5 : (2y)^2$

3.37. Végezd el az osztásokat!

a) $(8a) : 2$; $(-15a) : (-3)$; $(7{,}2a) : (-9)$; $(-36a) : 0{,}4$;

b) $(4{,}5b) : (-3)$; $(-5b) : 0{,}1$; $(-0{,}3b) : (-5)$; $(+0{,}02b) : (0{,}004)$;

c) $\frac{9c}{4} : \frac{3}{2}$; $\left(-\frac{10}{3}c\right) : \frac{5}{3}$; $\frac{5c}{-2} : \frac{-10}{3}$; $\frac{3c}{2} : \left(-\frac{6}{5}\right)$;

d) $(8d^3) : (2d)$; $(12d^5) : (3d^2)$; $d^4 : (2d^2)$; $(-24d^3) : (-6d^3)$;

e) $\frac{9e^5}{4} : \frac{6e^3}{5}$; $-\frac{4e^5}{3} : \frac{2e^5}{9}$; $-\frac{3e^3}{7} : \left(-\frac{6e}{5}\right)$; $\frac{e^4}{-5} : \left(-\frac{3e^3}{10}\right)$

Többtagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.38. Írd a szorzatokat összegalakba!

a) $2(a-2)$; $3(x-4)$; $5(y+6)$; $4(z+5)$;

b) $-4(b-3)$; $-5(c+2)$; $-3(d-3)$; $-7(e+6)$;

c) $-3\cdot(4-a)$; $5\cdot(6-b)$; $-8\cdot(2-c)$; $15\cdot(4-d)$;

d) $1{,}2(x-4)$; $-5{,}2(y+1{,}2)$; $-3{,}1\cdot(4-z)$; $5{,}2\cdot(3-x)$;

e) $(3-a)\cdot 4$; $(3+a)\cdot(-2)$; $(5-a)\cdot(-3)$; $(2{,}8-a)\cdot(-5)$;

f) $\frac{1}{2}(a-2)$; $(5-b)\cdot\frac{2}{3}$; $\left(\frac{1}{2}-c\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{4}+d\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$;

g) $3(x+y)$; $-2(x-y)$; $3{,}5(x+y+z)$; $-4{,}2(x-y-z)$;

h) $3\cdot(2a-1)$; $4\cdot(3-4a)$; $5\cdot(5a-6)$; $2\cdot(9a-3)$

3.39. Írd a szorzatokat összegalakba!

a) $(a+b+c)(-2)$; $(a-b-c)(-3)$; $(a-b+c)(-4)$;

b) $\left(5-\frac{2}{3}x\right)\cdot\frac{1}{2}$; $\left(4-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{2}{3}$; $(5-4x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $(3{,}4-2x)\cdot 3$; $-5\cdot(2{,}1+3x)$; $4{,}8\cdot(5-0{,}5x)$;

d) $\left(\frac{3}{4}a+2b\right)\cdot 4$; $3{,}1\cdot(2{,}5a-1{,}6b)$; $(0{,}6a-0{,}3b)(-2)$;

e) $-5\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b-\frac{4}{5}c\right)$; $(0{,}1a+0{,}2b+0{,}3c)(-10)$

3.40. Bontsd fel a zárójeleket!

a) $a(a-2)$; $b(b+3)$; $c(c-4)$; $d(d+5)$;

b) $(5-x)\cdot x$; $(6-2x)\cdot x$; $(7+3x)\cdot x$; $(8+4x)\cdot x$;

c) $a(a-2b)$; $b(b-2a)$; $a(a+2b)$; $b(b+2a)$;

d) $(x+y)(-x)$; $(2x+y)\cdot(-y)$; $(3x+4y)\cdot x$;

e) $x(2-x-y)$; $(3+x+y)(-y)$; $\left(x+\frac{1}{2}-y\right)\cdot(-x)$;

f) $3{,}4x(x^2+5)$; $2{,}8x^2(x+y)$; $-0{,}6x^3(x^2-2)$;

g) $(x+x^2+x^3)(-1{,}2x)$; $xy(x+xy+y)(-2)$

3.41. Végezd el a szorzásokat! Számítsd ki a helyettesítési értéket mind szorzatalakban, mind összegalakban, ha $a = 2$.

a) $a(a-1)$; $\left(\frac{2}{3}a-2\right)\cdot(-3)$; $(5a-4)\cdot\frac{1}{5}$;

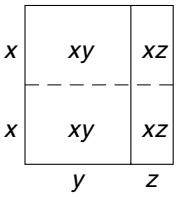
b) $(3{,}1a-4)\cdot(-2)$; $4{,}5\cdot(2a-4)$; $(5a+2)\cdot\frac{1}{5}$;

c) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}\right)\cdot 6$; $\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}a\right)\cdot(-10)$; $-3\cdot\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a\right)$

3.42. Írd fel összeg- és szorzatalakban a téglalapok területét!

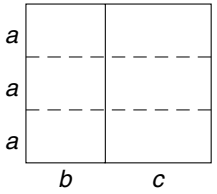
a) $T = 2xy + 2xz$;

$T = 2x(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$;



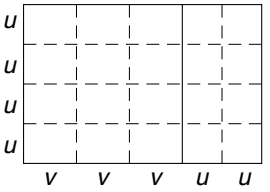
b) $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$;

$T = 3a(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$;



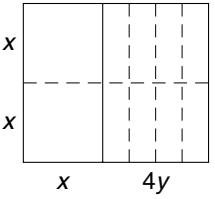
c) $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$;

$T = 4u(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$;



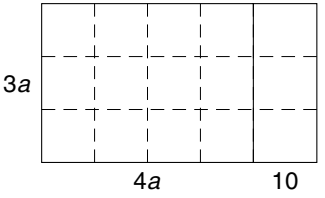
d) $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$;

$T = 2x(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$;



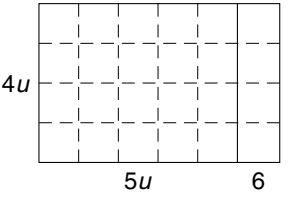
e) $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$;

$T = 3a(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$;



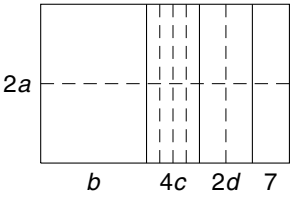
f) $T = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$;

$T = 4u(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$;



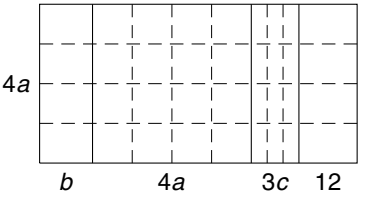
g) $T = \ldots. + \ldots. + \ldots. + \ldots.$;

$T = \ldots.(\ldots. + \ldots. + \ldots. + \ldots.)$;



h) $T = \ldots. + \ldots. + \ldots. + \ldots.$;

$T = \ldots.(\ldots. + \ldots. + \ldots. + \ldots.)$



3.43. *a)* Egy téglatest élei a, b, c. Írd fel felszínének a képletét szorzatalakban is, összegalakban is! Számítsd ki a felszínét, ha $a = 2{,}1$ cm; $b = 5$ cm; $c = 4{,}5$ cm!

b) A paralelogramma két oldalának hosszát jelölje x, illetve y. Írd fel a kerületének képletét szorzatalakban is és összegalakban is! Mennyi a kerület, ha $x = 3{,}2$ cm; $y = 4{,}8$ cm?

3.44. Végezd el az osztásokat!

a) $(48x + 36) : 12$; $(7{,}5x - 12) : (-3)$; $(-10x + 20) : 0{,}5$;

b) $(45y - 36) : (-9)$; $(5 - 3y) : (-0{,}1)$; $(3y + 5) : 4$;

c) $\left(\frac{3}{4}z + \frac{2}{3}\right) : \frac{5}{6}$; $\left(5 - \frac{z}{5}\right) : \left(-\frac{10}{3}\right)$; $\frac{5 - z}{4} : \frac{3}{8}$;

d) $(-0{,}01 - v) : 0{,}01$; $0{,}3 - 2v : (-4)$; $(2v - 3) : 3$

Többtagú kifejezések szorzattá alakítása kiemeléssel

3.45. Írd be a szorzat hiányzó tényezőjét! A szorzás elvégzésével ellenőrizd, hogy helyesen dolgoztál-e!

a) $24a - 18 = \ldots\ldots \cdot (4a - 3)$; *b)* $75b + 50 = \ldots\ldots \cdot (3b + 2)$;

c) $48 - 72c = \ldots\ldots \cdot (2 - 3c)$; *d)* $-25 + 15d = \ldots\ldots \cdot (5 - 3d)$;

e) $12{,}5e + 7{,}5 = \ldots\ldots \cdot (5e + 3)$; *f)* $-28 - 42f = \ldots\ldots \cdot (2 + 3f)$

3.46. Írd be a hiányzó tényezőt! Szorzással ellenőrizd munkád helyességét!

a) $25 - 30x = 5 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$; *b)* $40y + 24 = 8 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$;

c) $-10z - 25 = -5 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$; *d)* $-36 + 54u = -9 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$;

e) $-\frac{4}{3}v + \frac{10}{9} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$; *f)* $\frac{w}{3} - \frac{16}{27} = \frac{8}{3} \cdot \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$

3.47. Írd be a hiányzó tényezőt! Ellenőrizd az eredmény helyességét!

a) $2x^5 - x^2 = x^2 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$; *b)* $2y^3 - 6y = 2y \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$;

c) $12z^4 + 6z^3 = 6z^3 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$; *d)* $7{,}5v^6 + 15v^3 = 7{,}5v^3 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$;

e) $8a^3 - 6a^2 = 2a^2 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$; *f)* $15b^4 - 10b^2 = 5b^2 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3.48. Kiemeléssel alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket! Ellenőrizd munkád a zárójelek felbontásával!

a)	$3x + 3$;	$4x - 4$;	$2{,}5x + 2{,}5$;	$3{,}4 - 3{,}4x$;
b)	$2x - 4$;	$3x + 6$;	$4x + 2$;	$10x + 5$;
c)	$3x - 18$;	$24 - 4x$;	$8x + 12$;	$9x - 6$;
d)	$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$;	$\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x$;	$\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$;	$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$;
e)	$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$;	$\frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$;	$\frac{5}{9} - \frac{2}{3}x$;	$\frac{6}{7} + \frac{4x}{21}$

3.49. Kiemeléssel alakítsd szorzattá, majd ellenőrzésként bontsd fel a zárójeleket!

a)	$x^2 + 2x$;	$a^3 - 2a$;	$y - y^2$;	$b - 2b^2$;
b)	$3a + 6a^2$;	$b^3 - 4b^2$;	$5b^2 + 2b$;	$7b^2 + 14b^3$

3.50. Végezd el az összevonást, majd kiemeléssel alakítsd szorzattá a kifejezést! Számítsd ki a helyettesítési értéket!

a) $3{,}5 - 2{,}8a + 3{,}7 + 6{,}4a = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $a = -2$

b) $5{,}3b - 4{,}2 + 0{,}7 + 1{,}7b = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $b = 2$

c) $-2{,}5c + 3{,}8 + c - 1{,}3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $c = 3{,}2$

4. Egyenletek, egyenlőtlenségek

4.01. A következő egyenletek közül melyik oldható meg, ha az alaphalmaz:

N = {Természetes számok}; **Z** = {Egész számok};

Q = {Racionális számok}; $\mathbf{Q}^+$ = {Pozitív racionális számok}.

a) $5 \cdot a + 4 = 19$; *b)* $3 \cdot b - 7 = 1$; *c)* $7 \cdot c + 14 = -3$;

d) $9 \cdot d + 5 = 5$; *e)* $8 \cdot e + 33 = 9$; *f)* $3 \cdot f - 14 = 5$

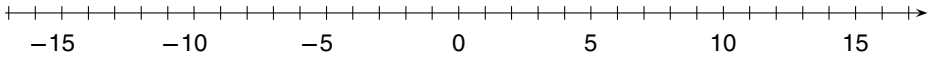
4.02. A következő egyenletek közül melyik azonosság, ha az alaphalmaz a **Q**?

a) $3 \cdot x + 12 = 3 \cdot (4 + x)$; *b)* $4 \cdot x + 20 = 4 \cdot x - 20$;

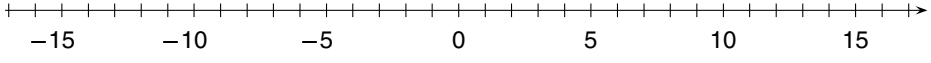
c) $(10 \cdot x) : 2 + 15 = 5 \cdot (x + 3)$

4.03. Ábrázold számegyenesen a következő egyenlőtlenség igazsághalmazát!

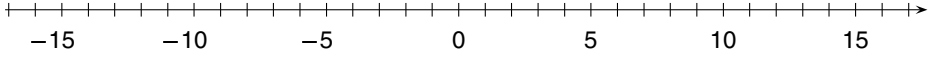
a) $2 \cdot x > 5$; alaphalmaz: **N**.



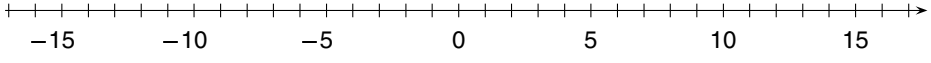
b) $x + 5 \leqq 9$; alaphalmaz: **N**.



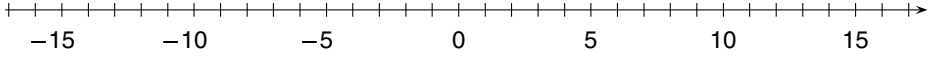
c) $3 \cdot x > -18$; alaphalmaz: **Z**.



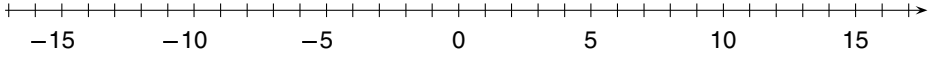
d) $-x \geqq 0$; alaphalmaz: **Z**.



e) $5 - x > 10$; alaphalmaz: **Q**.

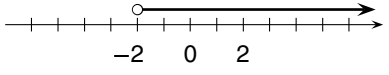


f) $3x \leqq 11$; alaphalmaz: **Q**.

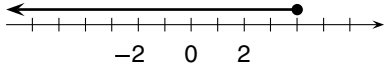


4.04. Írj legalább 3-3 olyan egyenlőtlenséget, amelynek a számegyenesen ábrázolt halmaz az igazsághalmaza! Az alaphalmaz: **Q**.

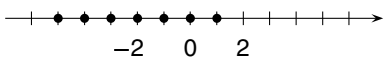
a)

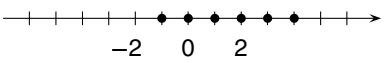


b)

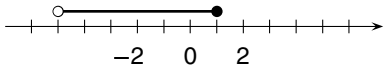


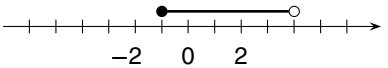
4.05. Add meg a számegyenesen adott halmazokat egyenlőtlenségekkel!
Alaphalmaz: **Z**.

a) 

b) 

Alaphalmaz: **Q**.

c) 

d) 

4.06. A következő egyenlőtlenségek közül melyik azonos egyenlőtlenség, ha az alaphalmaz a **Q**?

a) $3 \cdot x + 5 > 3 \cdot (x + 1)$; *b)* $3 \cdot x + 5 > 0$; *c)* $5 \leqq x + 5$;

d) $4 \cdot x > 2 \cdot x$; *e)* $|x + 1| \geqq 0$; *f)* $x \cdot x + 10 > 0$

4.07. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Z**. Végezz ellenőrzést!

a) $4a + 2 = -7 + a$; *b)* $3b + 1 = 5 + b$;

c) $5c - 2 = 3c + 4$; *d)* $9 - 2d = d - 3$;

e) $12 + 2e = 4e + 2$; *f)* $3f + 7 = f + 5$;

g) $3 - 4g = 2g + 15$; *h)* $12 + 2h = 5h + 8$;

i) $5i - 127 = -127 + 5i$; *j)* $17 + 3j = 3j - 17$;

k) $18 - 3k = 3k - 18$; *l)* $5l + 7 = 7 - 2l$

4.08. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**.

a) $5{,}3a - 4{,}8 = 2{,}7 + 2{,}8a$; *b)* $4{,}9b + 9{,}8 = 4b - 8{,}2$;

c) $-4{,}75 + 5{,}6c = 5{,}6c - 4{,}75$; *d)* $9{,}6 - 3{,}8d = -3{,}8d - 9{,}6$;

e) $7{,}5 - 3e = 7{,}5 - 5e$; *f)* $9{,}2f + 4{,}3 = 4{,}3f + 9{,}2$;

g) $8{,}3 - 4{,}6f = 4{,}6 - 8{,}3f$; *h)* $7{,}5h + 4{,}9 = 7{,}5h - 4{,}9$;

i) $8{,}3i + 2{,}8 = 2{,}8 + 8{,}3i$; *j)* $9{,}9j + 0{,}7 = 9{,}8j + 0{,}9$

4.09. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**. Végezz ellenőrzést!

a) $2a + 5 - 3a - 4 + 5a = 2 + 2a - 4$;

b) $5 - 3b + 6 - 2b + 5b = 2b - 12b + 5 + 10b$;

c) $4c - 15 + 3c - 6 = 5c - 10 + c - 8$;

d) $5d + 8 - 17d + 4 = 3d + 12 - 5d$;

e) $30 - 3e + 15 + 5e = 54 + 2e - 9$;

f) $8f - 15 + 3f + 18 = 15f + 9 - f$;

g) $15g - 8 - 25g = 16 - 10g - 24$;

h) $8h + 35 - 13h = 15 - 7h + 25$;

i) $13 - 13i + 7 = 5i + 15 - 10i - 3$;

j) $6 - 8j + 11 + 3j = 8 - 5j - 25$

4.10. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**.

a) $4 + (2a - 5) = 13 - (3a + 7)$; *b)* $(3 - 4b) + (15 + 5b) = 3 - 2b$;

c) $(3c + 12) + 2c = 3c + (12 + 2c)$; *d)* $20 - (10 - 4d) = 20 + 10 + 4d$;

e) $3e - (2e + 4) = 3e - 2e - 4$; *f)* $(9f + 3) - (5f + 7) = 3 - (f - 1)$;

g) $4g + (3g + 3) = 4g - (3g + 2)$; *h)* $7h - (3h + 5) = 13 + (4h - 8)$;

i) $(4 + i) + (5 + 2i) = 15 - (7 - 3i)$; *j)* $9 + (7j - 4) - (4 - 7j) = 0$

4.11. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Jelöld számegyenesen az igazsághalmazt!

a) $5a + 7 > 22$; alaphalmaz: **Z**; *b)* $5a + 7 > 22$; alaphalmaz: **Q**;

c) $5a + 7 \geqq 22$; alaphalmaz: **Q**; *d)* $5a + 7 \geqq 22$; alaphalmaz: **N**

4.12. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Jelöld számegyenesen az igazsághalmazt!

a) $(3a - 7) - (2a + 5) > 4{,}5$, alaphalmaz: **Z**;

b) $2 - (4b - 5) \leqq b + 3$, alaphalmaz: **Q**;

c) $3c - (5 - 5c) < 10 + 8c$, alaphalmaz: **Q**;

d) $(7d + 4) - (2 + 3d) \geqq 15 + 4d$, alaphalmaz: **N**;

e) $3e - (5 - 3e) < 6 - (4 - e)$, alaphalmaz: **N**;

f) $(8f + 4) - (3 - 9f) > 4 - (1 - 17f)$, alaphalmaz: **Z**

4.13. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**.

a) $-\frac{3}{4}a < \frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{5}{6}b \geqq 0$; *c)* $1 \leqq -\frac{c}{5}$;

d) $1 - \frac{d}{5} > \frac{17}{15}$; *e)* $0 < 2 - \frac{e}{5}$; *f)* $f \geqq -\frac{5f}{4}$

4.14. Oldd meg a következő egyenleteket! Végezz ellenőrzést is!
Az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

a) $7(a - 5) = 4a - 23$; *b)* $17b + 7 = 5(b - 1)$;

c) $18 - 2c = c + 3$; *d)* $2(d + 7) = 8 - d$;

e) $(e - 8) \cdot 3 = e - 5$; *f)* $6(f - 1) + 18 = -30$;

g) $3(g - 3) = 5(g - 2)$; *h)* $4(h + 2) + 9(3h + 4) = -18$;

i) $3(i - 3) + 2(i - 2) = 2$;

j) $2 - 2j - 11 = -5(j - 4) + 3(j - 8)$;

k) $k - 7 + 7(k - 1) = -10(2 - k) + k + 12(k + 1)$;

l) $-3(l + 3) - 4 = 5 - 4(l - 8) + 7(2 - l)$;

m) $-(7m + 13) + 3 - 3(m - 4) = 1 - (2m - 1) - 8m$;

n) $-5(n - 2) - 2(n - 3) - n = 2n - (11 - 2n)$;

o) $6(o - 10) - 4(o - 12) = 4$

4.15. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz: **Q**. Jelöld számegyenesen az igazsághalmazt!

a) $2a - 4 - (a + 3) > -8$;

b) $3(b - 5) \leqq 2(b - 5)$;

c) $15(c - 1) \geqq -2(c + 3)$;

d) $7(d + 4) - 3(5 - 2d) < 9d + 13$;

e) $15 - (e + 1) < 9 - 5(e + 1)$;

f) $4f - 10 + 12 > -2(3f - 6)$;

g) $3g - (3g - 5) + 2(2g - 1) \leqq 3(g + 5)$;

h) $5(5 - 2h) - 15 \geqq 2(2 - 4h) + (2h - 1)$;

i) $2(5i - 29) - (i - 4) > -5(i + 1) - 7$;

j) $7(2j + 3) - 24 < 4(j + 2) - (11 - 6j)$

4.16. Oldd meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

a) $15 - 2(a + 1) - 3(a - 1) = a + 18$;

b) $2[4 - 5(3b - 5)] = 60 - 15b$;

c) $2c - (11 - 2c) = -5(c - 2) - c - 2(c - 3)$;

d) $7d - 2(d - 3) + 21 = 48 - 4(3 - d)$;

e) $4(3e - 5) - 2(7 - 3e) = 6(2e - 3) - 5(2 - 3e)$;

f) $2(f + 1) + 3 < 5(f + 1) - 2(f + 1)$;

g) $5(g + 0{,}8) - 3(3 + 2g) \leqq 2(2 + g)$;

h) $3(0{,}25 - h) + 5(1{,}25 + h) \geqq 1 - (2 + h)$

4.17. Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz: **Q**.

a) $(a - 9)(a + 10)(a - 7) = 0$;

b) $(b + 3)(b - 3) = b(b + 9)$;

c) $(c + 1)(c - 8)(c + 3) = 0$;

d) $d(d - 3) - 4 = (d - 4)(d + 4)$;

e) $5(e + 1)(e - 1) = e(5e + 5)$;

f) $f(2f - 6)(1 - 3f)(12 + 3f) = 0$;

g) $(3g + 2)(4g - 1) = 0$;

h) $-2(h + 3)h(h - 2) = 0$

4.18. Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Alaphalmaz: **Z**. Ellenőrizd a megoldást!

a) $\frac{a}{2} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{a}{4}$;

b) $1 + \frac{b}{5} = \frac{27}{15} - \frac{2b}{10}$;

c) $\frac{4}{3} + \frac{c}{6} = \frac{c}{2} + \frac{5}{3}$;

d) $4 - \frac{d}{3} = -\frac{8}{3} - d$;

e) $\frac{e}{3} + \frac{2}{5} < 2$;

f) $\frac{8}{6} + 2f \geqq \frac{f}{2} + \frac{12}{9}$;

g) $0{,}6g + \frac{4}{5} \geqq 1 + \frac{3g}{5}$;

h) $1 - 0{,}75h < \frac{15}{8} - \frac{3h}{4}$;

i) $\frac{5}{6} - \frac{i}{12} = \frac{i}{2} - \frac{1}{24}$;

j) $\frac{3j}{2} - \frac{2j}{5} = 1{,}1j$

4.19. Oldd meg a következő törtegyütthatós egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza. Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $6a - \left(2a - \frac{7}{5}\right) = \frac{6}{5}$;

b) $2b - 20 < -8b - 6$;

c) $\frac{c}{2} - \frac{14}{5} \cdot (-20) = \frac{c}{4} + 2$;

d) $\frac{d}{2} + \frac{3}{2} - \frac{d}{3} - \frac{5}{6} \geqq 3$;

e) $\frac{3e}{5} + \frac{1}{3} \leqq \frac{3 + 10e}{15}$;

f) $\frac{3}{2}f - \frac{5}{4} \cdot (f + 4) = -5 + \frac{1}{4}f$;

g) $\frac{4g}{15} + \frac{13}{25} - \frac{g}{6} = \frac{14}{75} + \frac{g}{2} + \frac{1}{3}$;

h) $\frac{8h + 7}{10} = \frac{6h + 1}{7} + \frac{h - 6}{70}$;

i) $5 - i \geqq i - \frac{7 - i}{4}$;

j) $2j - \frac{3}{5}j = \frac{3}{2}j - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}j + 2$;

k) $\frac{k}{12} - \frac{3k}{4} + \frac{5k}{6} = 2 - \frac{2k}{3}$;

l) $1 - \frac{2l - 5}{6} = \frac{3 - l}{4}$;

m) $\frac{m + 17}{5} - \frac{3m - 7}{4} = -2$;

n) $\frac{3n + 12}{4} = 2 - \frac{5n - 7}{3}$

4.20. Oldd meg a következő törtegyütthatós egyenleteket! Végezz ellenőrzést! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

a) $\frac{3a - 2}{11} - \frac{a}{3} = \frac{3a - 5}{7} - \frac{5a - 3}{9}$;

b) $\frac{8}{5} - \frac{2b - 2}{6} = \frac{2b + 6}{10} + \frac{4 - 2b}{4}$;

c) $\frac{c + 5}{3} - \frac{c - 2}{4} = \frac{c - 1}{6} - \frac{3 - c}{8}$;

d) $\frac{4(3 - d)}{3} + 2(d - 1) = 2(d - 5)$;

e) $\frac{e}{4} - \frac{e + 1}{5} + \frac{e + 2}{2} - \frac{e + 3}{3} + \frac{e + 4}{7} = 9$;

f) $\frac{f + 3}{2} - \frac{2f + 1}{3} + \frac{3f - 1}{4} - \frac{5f - 3}{8} = 1$

4.21. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza. Az igazsághalmazt jelöld számegyenesen!

a) $a + \frac{1}{2} \leqq 3 + \frac{5a}{4}$;

b) $\frac{b + 3}{2} - \frac{1 + b}{10} - \frac{5 - b}{7} < \frac{19b + 26}{35}$;

c) $14 - \frac{2c + 4}{5} > 4c$;

d) $\frac{6d + 2}{14} - \frac{2d - 10}{6} \geqq \frac{4d - 22}{7} + \frac{2d}{21}$;

(Lapozz!)

e) $\frac{5(e-2)}{2} - \frac{5e-4}{3} \leqq \frac{e-14}{3}$;

f) $\frac{3f-5}{7} - \frac{2f-4}{4} > -2$;

g) $2g < 3 - \frac{2g+3}{2}$;

h) $\frac{h}{7} - \frac{2h-1}{12} - \frac{1}{2} < 0$;

i) $\frac{3(2i+1)}{2} + \frac{2i-3}{3} > 3i+2$;

j) $\frac{5(j-1)}{6} - 1 \leqq \frac{2(j+1)}{3}$;

k) $2 + \frac{3(k+1)}{8} \geqq 3 - \frac{k-1}{4}$;

l) $\frac{3l+6}{2} - \frac{4l-3}{6} < -3 - \frac{2l-4}{3} + 2$

Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok

4.22. *a)* Egy 18 m hosszú 6 kg tömegű drótkerítést kétfelé vágnak úgy, hogy az egyik rész 6 m-rel hosszabb, mint a másik. Mennyi a tömege a két résznek külön-külön?

b) Kati 10 éves volt, amikor bátyja, Laci 18 éves volt. Hány évesek most, ha együtt 40 évesek?

c) Pistinek és Robinak összesen 1200 Ft-ja van. Pistinek 316 Ft-tal több a pénze, mint Robinak. Hány forintjuk van külön-külön?

d) Két könyvespolcon összesen 146 db könyv van, az egyiken 26-tal több, mint a másikon. Hány könyv van az egyes polcokon?

e) Andinak háromszor annyi, Beának 15 Ft-tal több pénze van, mint Cilinek. Mennyi pénzük van külön-külön, ha összesen 240 Ft-ja van a három lánynak?

f) Három könyvespolcon összesen 172 db könyv van. Az elsőn 32-vel több, mint a másodikon, a harmadikon pedig kétszer annyi, mint a másodikon. Hány könyv van külön-külön az egyes polcokon?

4.23. *a)* Két szám összege 35. Az egyik 4-gyel több, mint a másik. Melyik ez a két szám?

b) Két szám összege 122, különbsége 66. Melyik ez a két szám?

c) Két szám közül az egyik a másiknak a négyszerese, különbségük 36. Melyik ez a két szám?

d) Gondoltam egy számot, az ötszöröséből elvettem a gondolt szám és 23 összegét, így 37-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

e) Ha egy szám háromszorosából elveszünk 32-t, akkor ugyanannyit kapunk, mint ha a szám kétszereséhez hozzáadunk 20-at. Melyik ez a szám?

f) Ha egy szám 12-szereséhez 86-ot adunk, akkor 470-et kapunk. Melyik ez a szám?

g) Ha egy szám 5-szörösséhez 2,5-et adunk, akkor az összeg legalább 30 lesz. Mi lehet ez a szám?

h) Ha egy természetes szám 3-szorosából elveszünk 10-et, akkor 50-nél kisebb számot kapunk. Mi lehet ez a szám?

4.24. *a)* Egy kiránduláson az első nap kétszer annyit tettünk meg, mint a második napon és 35 km-rel többet, mint a harmadik napon. Mennyi utat tettünk meg naponta, ha a kiránduláson 300 km-t utaztunk összesen?

b) 15 ugyanolyan ládából eladtak 160 kg gyümölcsöt, így 8 láda és 15 kg gyümölcs maradt. Hány kilogramm gyümölcs volt egy-egy ládában?

c) Zsuzsi 3 tábla csokoládét és 96 Ft-ért rágógumit vásárolt. A nővére 2 tábla ugyanolyan csokoládét vásárolt, és így 240 Ft-tal kevesebbet költött. Mennyibe került egy tábla csokoládé?

d) Kati 2 kg banánt és 3 db 42 Ft-os csokit vásárolt. 1002 Ft-ot fizetett. Mennyibe került egy kilogramm banán?

e) Orsi 2 kg paprikát és 2 kg paradicsomot vásárolt, és 930 Ft-ot fizetett. 1 kg paprika 35 Ft-tal többe került, mint 1 kg paradicsom. Mennyibe kerül 1 kg paprika, és mennyibe kerül 1 kg paradicsom?

4.25. *a)* Ha egy szám harmadához hozzáadjuk a szám negyedét, $\frac{7}{6}$-ot kapunk. Melyik ez a szám?

b) Egy szám feléből elvettem a szám negyedét, így $\frac{1}{2}$-et kaptam. Melyik ez a szám?

c) Ha egy szám $\frac{1}{5}$ részéhez hozzáadom a felét, akkor ugyanannyit kapok, mint ha a szám $\frac{3}{4}$ részéből elveszek 2-t. Melyik ez a szám?

d) Két egyforma üvegben 13 dl szörp van. Az egyik üveg $\frac{2}{3}$ részéig, a másik az $\frac{1}{5}$ részéig van megtöltve. Hány deciliter szörp fér el egy üvegben?

4.26. *a)* Két szám különbsége 36. Ha összegük 40%-ából kivonjuk a különbségük felét, akkor eredményül 36,4-et kapunk. Melyik ez a két szám?

b) Egy szám 15%-a megegyezik a nála 12-vel nagyobb szám nyolcadrészével. Melyik ez a szám?

c) Két szám összege 2490. Az egyik szám 13%-a egyenlő a másik szám 17%-ával. Melyik ez a két szám?

d) Egy szám 30%-ához hozzáadtam 18-at, akkor a szám 75%-ánál nagyobb számot kaptam. Mi lehet ez a szám?

4.27. *a)* Egy szám 72-vel nagyobb egy másik számnál. Ha a nagyobb számból kivonjuk a kisebbet, majd a különbségnek vesszük a kétszeresét, akkor 144-et kapunk. Melyik ez a két szám?

b) Gondoltam egy számot. Megszoroztam 3-mal és hozzáadtam 9-et. Ha 250-ből elveszem az így képzett összeget, akkor a gondolt szám kétszeresénél 6-tal nagyobb számot kapok. Melyik számra gondoltam?

c) Gondoltam egy számot, hozzáadtam a felét, ez az összeg annyival több 40-nél, amennyivel nagyobb a gondolt szám 20-nál. Melyik számra gondoltam?

4.28. *a)* Ágnes 4 kg almát vásárolt és 980 Ft-ért szőlőt; Barbara 5 kg almát vásárolt és 280 Ft-ért csokit. A két lány együtt kétszer annyit költött, mint Csilla, aki 6 kg almát vett és 180 Ft-ért gyümölcslevet.
Mennyibe került egy kilogramm alma?

b) Laci 648 Ft zsebpénzéből újságra költött 220 Ft-ot, és vett 3 füzetet. A maradék pénzéből meg tudna venni 5 db olyan füzetet, amelynek darabonkénti ára 12 Ft-tal több, mint annak a füzetnek az ára, amit előzőleg vett.
Mennyibe kerül az olcsóbb füzet?

c) Kétféle édességből összesen 14 db-ot vettünk, összesen 2166 Ft-ért. Hányat vettünk a 132 Ft-os és hányat a 185 Ft-os édességből?

d) A könyvesboltba kétféle könyvből érkezett 160 db, összesen 183 800 Ft értékben. Az egyiknek darabja 1250 Ft-ba, a másiknak darabja 980 Ft-ba került. Mennyit hoztak az egyik, illetve a másik könyvből?

4.29. *a)* Egy szám 12-vel nagyobb a másiknál. Ha a nagyobb számot osztjuk 6-tal, a kisebbet pedig 3-mal, akkor az utóbbi hányados 2-vel nagyobb lesz. Melyek ezek a számok?

b) Egy tört számlálója 3-mal kisebb, mint a nevezője. Ha a számlálót kétszeresére növelem, a nevezőből pedig elveszek 4-et, akkor a tört értéke $\frac{5}{2}$ lesz. Melyik ez a tört?

c) Két szám különbsége 500. Ha a nagyobb számot maradékosan osztjuk a kisebbel, akkor hányadosul 13-at, maradékul 20-at kapunk. Melyik ez a két szám?

d) Két szám összege 326. Ha a nagyobbik számot maradékosan osztjuk a kisebbikkel, a hányados 9 lesz, a maradék pedig 6. Melyik ez a két szám?

e) Két szám aránya 7 : 8, összegük 75. Melyik ez a két szám?

4.30. *a)* Egy kosárban kétszer annyi alma van, mint a másikban. Ha az elsőből eladnak 6 kg-ot, akkor mind a kettőben ugyanannyi lesz. Mennyi alma van a két kosárban külön-külön?

b) Egy kosárban kétszer annyi alma van, mint a másikban. Ha az elsőből átteszünk 6 kg-ot a másikba, akkor mindkettőben ugyanannyi lesz. Mennyi van az egyikben, mennyi a másikban?

c) Egy kosárban kétszer annyi alma van, mint a másikban. Ha a másodikból 6 kg-ot átteszünk az elsőbe, akkor az elsőben már háromszor annyi lesz, mint amennyi a másodikban marad. Mennyi van az egyikben, mennyi a másikban?

4.31. *a)* 660 Ft-ot egyenlő számú 10 Ft-os és 20 Ft-os érmékkel fizetünk ki. Hány 10 Ft-ossal és hány 20 Ft-ossal fizetünk?

b) 700 Ft-ot 10 Ft-os és 20 Ft-os pénzérmékkel fizetünk. A 20 Ft-osok száma 5-tel több, mint a 10 Ft-osoké. Hány 10 Ft-ossal és hány 20 Ft-ossal fizetünk?

c) 800 Ft-ot kétszer annyi 20 Ft-ossal fizetünk, mint a 10 Ft-osok száma. Hány 20 Ft-ossal és hány 10 Ft-ossal fizetünk?

4.32. *a)* Egy négyzet kerülete 27 cm-rel nagyobb az oldalánál. Mekkorák a négyzet oldalai?

b) Egy téglalap két oldalának aránya 3 : 4, a kerülete 35 cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

c) Egy téglalap kerülete 32,8 cm. A szomszédos oldalak közötti különbség 2,4 cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

d) Egy szabályos hatszög kerületének és szemközti csúcsait összekötő átlójának a különbsége 24 cm. Mekkorák a hatszög oldalai?

e) Egy húrtrapéz egyik alapja 7 cm-rel kisebb, másik alapja 5 cm-rel nagyobb, mint a szára. A kerülete 24 cm. Mekkorák a húrtrapéz oldalai?

f) Egy háromszög egyik oldala kétszerese a legrövidebb oldalának, a másik oldala 12 cm-rel hosszabb, mint a legrövidebb oldal. Mekkorák lehetnek a háromszög oldalai, ha a kerülete 48 cm-nél kisebb?

4.33. *a)* Egy háromszög két belső szöge 48° és 65°. Mekkora a harmadik belső szöge?

b) Egy háromszög legkisebb belső szöge 12°-kal, illetve 18°-kal kisebb a másik két szögénél. Mekkorák a belső szögei?

c) Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő egyik szöge 15°-kal nagyobb az alappal szemközti szögénél. Mekkorák a háromszög szögei?

d) Egy háromszög két szögének aránya 4 : 7, a harmadik szöge 45°-kal kisebb a legnagyobb szögénél. Mekkorák a háromszög szögei?

e) Egy háromszög β szöge 45°-kal kisebb az α szögénél, a γ szöge 20°-kal nagyobb az α 3-szorosánál. Mekkora az α szög?

4.34. *a)* Egy téglalap egyik oldala 6 cm, területe 72 cm^2. Mekkora a másik oldala?

b) Egy háromszög területe 45 cm^2, egyik oldala 10 cm. Mekkora az ehhez az oldalhoz tartozó magassága?

c) Egy rombusz területe 60 cm^2, egyik átlója 12 cm. Mekkora a másik átlója?

d) Egy paralelogramma két szomszédos oldala 8 cm és 10 cm. A 8 cm-es oldalhoz tartozó magassága 5 cm. Mekkora a 10 cm-es oldalhoz tartozó magassága?

e) Egy trapéz két párhuzamos oldala 12 cm és 8 cm, területe 50 cm^2. Mekkora a trapéz magassága?

f) Egy trapéz magassága 4,8 cm, területe 43,2 cm^2, a párhuzamos oldalak közül az egyik kétszerese a másiknak. Mekkorák a trapéz alapjai?

g) Egy trapéz egyik alapja 1,6 cm-rel hosszabb a másiknál, magassága 3,5 cm, területe 16,8 cm^2. Mekkorák a trapéz alapjai?

h) Egy deltoid átlója 7,5 cm, a másik valamennyivel nagyobb. Mennyivel nagyobb a másik átló, ha a deltoid területe 45 cm^2?

5. Mérés; terület, felszín, térfogat

Mértékegységek átváltása

5.01. Írd be a keretbe a *váltószámot!*

1 km > 1 m > 1 dm > 1 cm > 1 mm

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 6,5 km = ... m = ... dm = ... cm;

b) 40 000 km = ... m = ... dm;

c) 0,0065 km = ... m = ... dm = ... cm = ... mm;

d) ..... km = 525 000 m = ... dm = ... cm;

e) ..... km = ... m = 52,5 dm = ... cm = ... mm;

f) ..... km = ... m = ... dm = 40 000 cm = ... mm;

g) ..... km = 5200 m = ... cm = ... mm;

h) ..... km = ... dm = ... cm = 540 000 mm;

i) ..... km = 0,45 m = ... dm = ... cm = ... mm

5.02. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 t > 1 kg > 1 dkg > 1 g > 1 dg > 1 cg > 1 mg

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 54,75 t = ... kg = ... dkg = ... g;

b) ..... t = 652 kg = ... dkg = ... g;

c) ..... t = ... kg = 75 000 dkg = ... g;

d) 0,058 t = ... kg = ... dkg = ... g;

e) 0,0753 kg = ... g = ... dg = ... cg = ... mg;

f) 0,0015 kg = ... dkg = ... g = ... dg = ... mg;

g) ..... kg = ... dkg = 0,58 g = ... dg = ... cg;

h) ..... kg = 2300 dkg = ... dg = ... mg

5.03. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 hl > 1 l > 1 dl > 1 cl > 1 ml

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 7,5 hl = ... l = ... dl = ... cl;

b) 5000 hl = ... l = ... dl = ... ml;

c) 0,0042 hl = ... l = ... dl = ... cl = ... ml;

d) ..... hl = 650 000 l = ... dl = ... cl;

e) ..... hl = ... l = 45,5 dl = ... cl = ... ml;

f) ..... hl = ... l = ... dl = 65 400 cl = ... ml;

g) ..... hl = 2500 l = ... cl = ... ml

5.04. A hiányzó mérőszámokat írd fel 10, illetve 0,1 hatványaként!

a) 1 m = $10^{\square}$ cm = $10^{\square}$ mm = $10^{\square}$ dm;

b) 1 km = $10^{\square}$ m = $10^{\square}$ dm = $10^{\square}$ mm = $10^{\square}$ cm;

c) 1 mm = $0{,}1^{\square}$ cm = $0{,}1^{\square}$ dm = $0{,}1^{\square}$ m;

d) 1 cm = ... $^{\square}$ mm = ... $^{\square}$ dm = ... $^{\square}$ m;

e) 1 dm = ... $^{\square}$ m = ... $^{\square}$ cm = ... $^{\square}$ km

5.05. A hiányzó mérőszámokat írd fel 10, illetve 0,1 hatványaként!

a) 1 kg = $10^{\square}$ dkg = ... $^{\square}$ g;

b) 1 g = ... $^{\square}$ dkg = ... $^{\square}$ kg;

c) 1 t = ... kg = ... dkg = ... g;

d) 1 dkg = ... kg = ... t = ... g;

e) 1 g = ... dg = ... cg = ... mg;

f) 1 dg = ... g = ... dkg = ... cg = ... mg

5.06. A hiányzó mérőszámokat írd fel 10, illetve 0,1 hatványaként!

a) 1 l = ... dl = ... cl = ... ml;

b) 1 hl = ... l = ... dl = ... cl = ... ml;

c) 1 ml = ... dl = ... l = ... cl;

d) 1 cl = ... dl = ... ml = ... l;

e) 1 dl = ... l = ... hl = ... cl = ... ml

5.07. Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket, kitevőket!

a) 6,2 hl = 6,2 · $10^{\square}$ l = 6,2 · $10^{\square}$ dl = 6,2 · $10^{\square}$ cl = 6,2 · $10^{\square}$ ml ≈ ..... cm^3;

b) 4,3 m^3 = ... · 10^3 dm^3 ≈ 4,3 · $10^{\square}$ l = 4,3 · $10^{\square}$ cl ≈ 4,3 · $10^{\square}$ cm^3;

c) 0,02 m^3 ≈ ..... · $10^{\square}$ hl = ... · $10^{\square}$ l ≈ ..... · $10^{\square}$ dm^3 ≈ ..... · $10^{\square}$ ml;

d) 3,5 m^3 ≈ 3,5 · $10^{\square}$ hl ≈ 3,5 · $10^{\square}$ dm^3 ≈ 3,5 · $10^{\square}$ dl = ... ml

Síkidomok kerülete, területe

5.08. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 km $\square$ 1 m $\square$ 1 dm $\square$ 1 cm $\square$ 1 mm

1 km^2 $\square$ 1 m^2 $\square$ 1 dm^2 $\square$ 1 cm^2 $\square$ 1 mm^2

1 km^2 $\square$ 1 ha $\square$ 1 m^2

A hiányzó mérőszámokat írd fel 10, illetve 0,1 hatványaként!

a) 1 km^2 = ... ha = ... m^2 = ... dm^2 = ... cm^2;

b) 1 dm^2 = ... m^2 = ... cm^2 = ... mm^2;

c) 1 m^2 = ... ha = ... km^2 = ... dm^2 = ... cm^2 = ... mm^2

5.09. Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket, kitevőket!

a) 6,5 $m^2 = 6{,}5 \cdot 10^{\square}$ $dm^2 = 6{,}5 \cdot 10^{\square}$ $cm^2 = 6{,}5 \cdot 10^{\square}$ mm^2;

b) 0,5 m^2 = ... $\cdot 10^2$ $dm^2 = 5 \cdot 10^{\square}$ cm^2 = ... $\cdot 10^{\square}$ mm^2;

c) ..... $m^2 = 5 \cdot 10^1$ $dm^2 = 5 \cdot 10^{\square}$ $cm^2 = 5 \cdot 10^{\square}$ mm^2 = ... mm^2;

d) 3,5 $km^2 = 3{,}5 \cdot 10^{\square}$ ha $= 3{,}5 \cdot 10^{\square}$ $m^2 = 3{,}5 \cdot 10^{\square}$ $cm^2 = 3{,}5 \cdot 10^{\square}$ mm^2;

e) ..... $km^2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ ha $= 1{,}5 \cdot 10^{\square}$ m^2 = ... m^2

5.10. Számítsd ki a téglalap kerületét és területét, ha két oldala:

a) $a = 5$ cm; $b = 4$ cm;

b) $a = 3{,}2$ cm; $b = 16$ mm;

c) $a = 10$ cm; $b = 8$ cm;

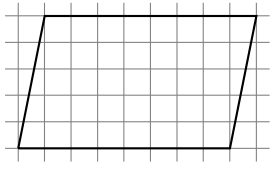
d) $a = 400$ m; $b = 50$ m;

e) $a = \frac{3}{4}$ m; $b = \frac{2}{3}$ m;

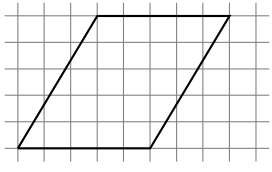
f) $a = \frac{9}{8}$ m; $b = \frac{4}{9}$ m!

5.11. Darabold át a paralelogrammákat téglalappá, és határozd meg a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)

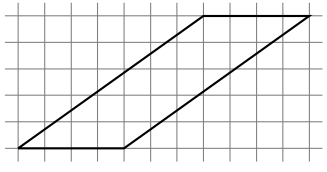
a)



b)

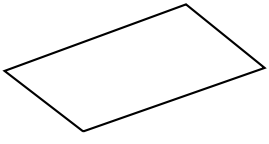


c)

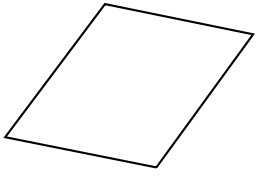


5.12. Rajzold meg a magasságot! A szükséges adatok megmérése után határozd meg a paralelogrammák kerületét és területét!

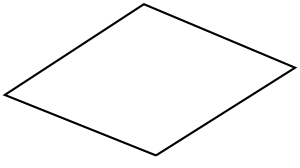
a)



b)



c)



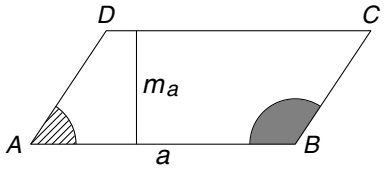
5.13. Számítsd ki a paralelogramma területét és kerületét, ha

a) $a = 4$ cm; $b = 3$ cm; $m_a = 2$ cm; *b)* $a = 7{,}5$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $m_b = 6$ cm;

c) $a = 5{,}6$ cm; $b = 3{,}4$ cm; $m_a = 2{,}5$ cm; *d)* $a = 4{,}8$ cm; $b = 2{,}5$ cm; $m_a = 3$ cm;

e) $a = b = 4{,}5$ cm; $m_a = 4$ cm; *f)* $a = b = 3$ cm; $m_a = 3$ cm!

5.14. Szerkessz paralelogrammát! (Először készítsd el a szerkesztés tervét!)
Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!



a) $AB = 4{,}5$ cm; $AC = 6$ cm; $ABC\sphericalangle = 105^\circ$;

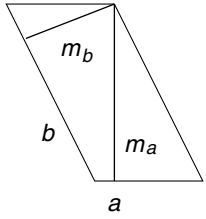
b) $AB = 5$ cm; $DAB\sphericalangle = 60^\circ$; $m_a = 2{,}5$ cm;

c) $AC = 6$ cm; $AB = 4$ cm; $BC = 3$ cm;

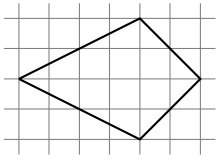
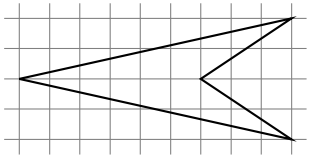
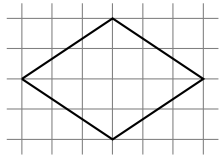
d) $AB = 56$ mm; $AD = 42$ mm; $m_a = 3$ cm

5.15. Számítsd ki a paralelogramma hiányzó adatait!

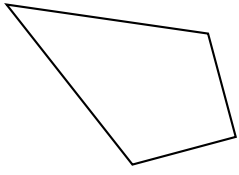
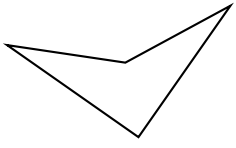
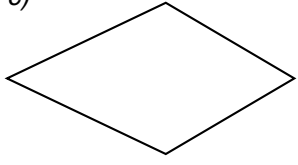
	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	6 cm	6 cm		72 cm	
b	4 cm			8,4 dm	24 cm
m_a	3 cm	3,6 cm	4 cm		8 cm
m_b		5,4 cm	5 cm		
T			12 cm^2	42 dm^2	96 cm^2



5.16. Egészítsd ki a deltoidokat téglalappá, és határozd meg a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)

a) 
b) 
c) 

5.17. A szükséges adatok megmérése után határozd meg a deltoidok kerületét és területét!

a) 
b) 
c) 

5.18. Számítsd ki a deltoid kerületét, ha két szomszédos oldala:

a) $a = 2{,}8$ cm; $b = 4{,}2$ cm; *b)* $a = 2{,}5$ cm; $b = 3$ cm;

c) $a = 6{,}0$ cm; $b = 80$ mm; *d)* $a = 2{,}7$ cm; $b = 4{,}3$ cm!

5.19. Számítsd ki a deltoid területét, ha két átlója:

a) $e = 4{,}5$ cm; $f = 4{,}8$ cm; *b)* $e = 3{,}2$ cm; $f = 7{,}5$ cm;

c) $e = 0{,}5$ dm; $f = 62$ mm; *d)* $e = 4{,}8$ cm; $f = 1{,}2$ dm!

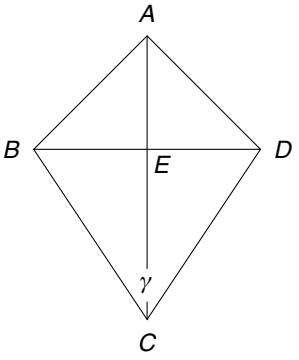
5.20. Szerkessz deltoidot! Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!

a) $AB = 2{,}8$ cm; $BC = 3{,}6$ cm; $AC = 5$ cm;

b) $AB = 3$ cm; $BD = 3$ cm; $\gamma = 30^\circ$;

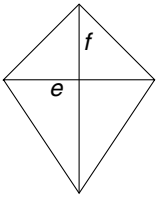
c) $BD = 4$ cm; $AC = 6$ cm; $AE = 2{,}5$ cm;

d) $AB = 36$ mm; $BAD\sphericalangle = 45^\circ$; $AC = 5{,}4$ cm.

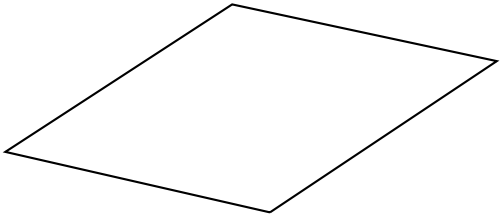


5.21. Számítsd ki a deltoid hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*
e	5 m	32 dm	4,6 cm		6,8 cm	12,5 dm
f	32 dm		3,4 cm	84 mm	40 mm	
T		6 m^2		29,4 cm^2		1 m^2



5.22. A szükséges adatok megmérése után számítsd ki kétféle megoldási tervvel a rombusz területét!



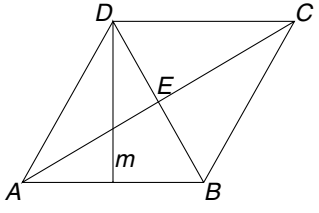
5.23. Szerkessz rombuszt! Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!

a) $AB = 4{,}5$ cm; $BD = 3$ cm;

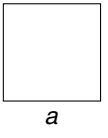
b) $AC = 6{,}4$ cm; $BD = 4{,}8$ cm;

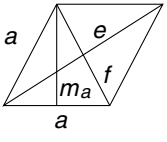
c) $AB = 4{,}2$ cm; $DAB\sphericalangle = 75^\circ$;

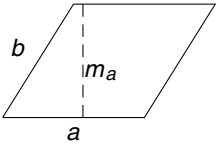
d) $AB = 4$ cm; $m = 2{,}8$ cm

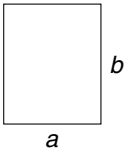


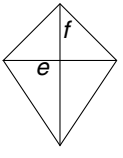
5.24. Húzz nyilat a négyszögektől azokhoz a képletekhez, amelyekkel kiszámítható a területük!





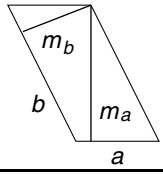
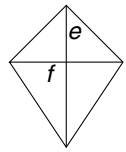
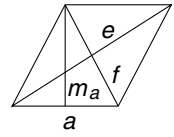
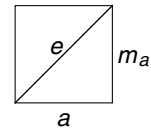




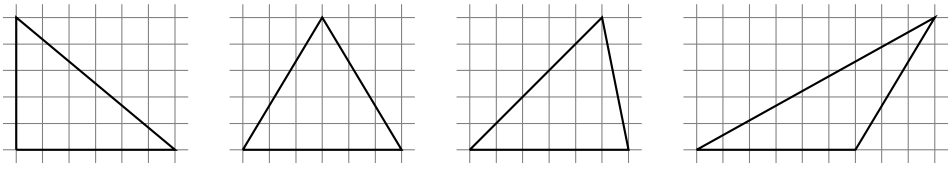


$T = a^2$; $T = a \cdot b$; $T = a \cdot m_a$; $T = \dfrac{e \cdot f}{2}$

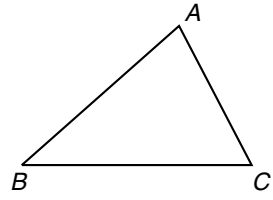
5.25. Adott az alaphalmaz (A), a képhalmaz (B) és a hozzárendelés szabálya. Egészítsd ki a táblázatot! *Egyértelmű*-e a hozzárendelés?
$A = \{\text{Sokszögek}\}$; $B = \{\text{Kifejezések}\}$.
A hozzárendelés szabálya: Sokszög $\rightarrow$ Területképlete.

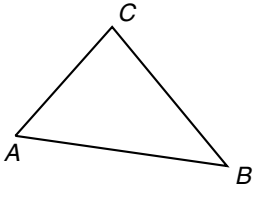
Sokszög:	Paralelogramma	Deltoid	Rombusz	Négyzet
				
Terület-képlete:				

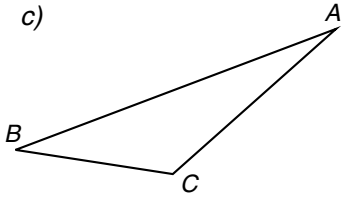
5.26. Egészítsd ki a háromszögeket téglalappá, és határozd meg a területüket! (Egy rácsnégyzet területe az egység.)



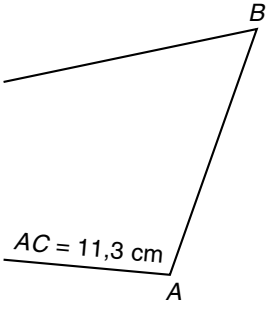
5.27. Szerkeszd meg az m_a magasságvonalat! Határozd meg a háromszögek kerületét és területét!

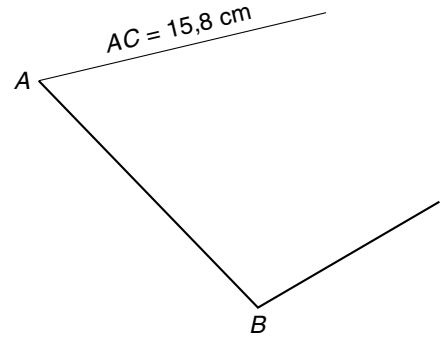
a)


b)


c)


5.28. A következő két háromszög C csúcsa nem fért rá a lapra, de a szükséges magasságvonal megszerkesztése és megmérése után az ismert adatokból kiszámítható a háromszögek területe.

a)


b)


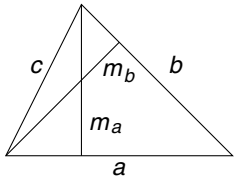
5.29. Számítsd ki a háromszög területét, ha

a) $a = 4$ cm; $m_a = 5$ cm; *b)* $b = 3{,}5$ cm; $m_b = 2{,}8$ cm;

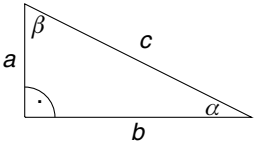
c) $c = 5{,}2$ cm; $m_c = 5{,}2$ cm; *d)* $a = 3{,}8$ cm; $m_b = 4$ cm!

5.30. Számítsd ki a háromszög hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	6 cm	4,8 cm	7,5 cm		
b	4 cm		5 cm	6,4 cm	
m_a	3,6 cm	3 cm		5 cm	3,2 cm
m_b		3,2 cm			2,5 cm
T			12 cm^2	12,8 cm^2	8 cm^2



5.31. Szerkessz derékszögű háromszöget! Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!

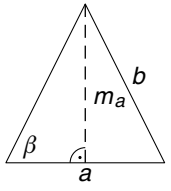


a) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm;

b) $b = 5$ cm; $\alpha = 30^\circ$; *c)* $a = 4$ cm; $c = 6$ cm;

d) $a + b = 6$ cm; $b = 1{,}5 \cdot a$; *e)* $c = 6{,}4$ cm $= 2 \cdot a$

5.32. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget! Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!



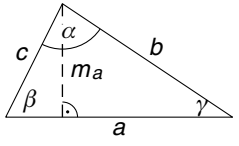
a) $a = 3{,}2$ cm; $m_a = 2{,}5$ cm;

b) $b = 5$ cm; $\beta = 75^\circ$;

c) $K = 14$ cm; $b = \frac{5}{4} \cdot a$;

d) $b = 5$ cm; $m_a = 4$ cm

5.33. Szerkessz háromszöget! Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!



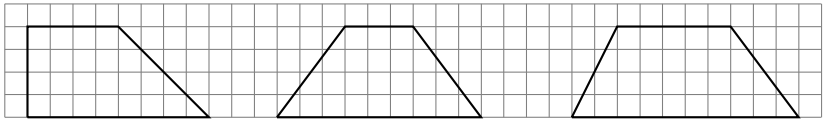
a) $a = 4{,}5$ cm; $m_a = 3{,}8$ cm; $\beta = 60^\circ$;

b) $a = 4$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm;

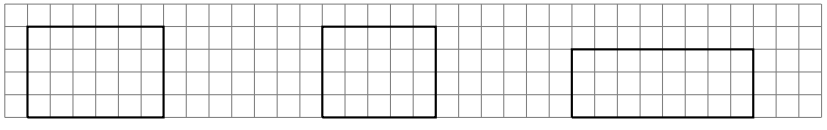
c) $b = 4{,}8$ cm; $c = 3$ cm; $\alpha = 75^\circ$;

d) $a = 5{,}6$ cm; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 75^\circ$

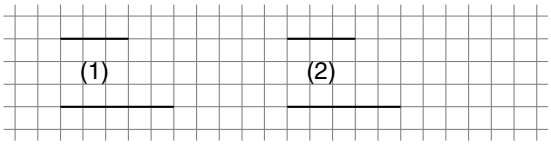
5.34. Darabold át vele megegyező területű téglalappá mindegyik trapézt!



5.35. Darabold át vele megegyező területű trapézzá mindegyik téglalapot!



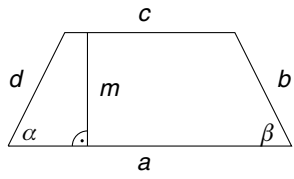
5.36. *a)* Egészítsd ki a szakaszokat úgy, hogy a végpontjaikat összekötve 15 egység területű rácsnégyszögeket kapj! (A kis négyzet területe az egység.)



b) A feltételnek megfelelően hányféleképpen egészíthetők ki a szakaszok?

c) Hány nem egybevágó megoldás van?

5.37. Szerkessz trapézt! Számítsd ki a kerületét és a területét! A hiányzó adatokat méréssel állapítsd meg!



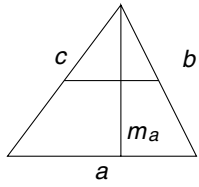
a) $b = d = 3{,}8$ cm; $a = 6$ cm; $m = 3{,}2$ cm;

b) $b = c = 3$ cm; $a = 5$ cm; $\alpha = 75^\circ$;

c) $b = c = d = \frac{a}{2}$; $K = 15$ cm;

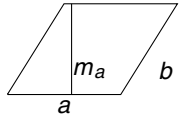
d) $a = 6$ cm; $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $m = 26$ mm

5.38. *a)* Szerkessz háromszöget! $a = 6$ cm; $m_a = 4$ cm; $b = 5$ cm. Kösd össze a b és a c oldal felezőpontját! Számítsd ki a kapott háromszög és négyszög területét! A négyszög területe hányszorosa a háromszög területének?

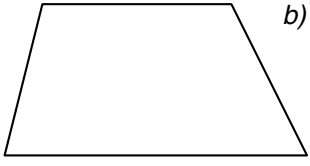


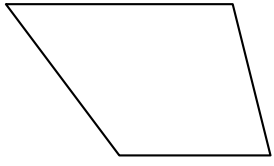
b) Szerkessz $a = 5{,}6$ cm oldalú négyzetet! Az egyik oldal negyedelő pontját kösd össze a szemközti csúcsok közül a közelebbivel! Számítsd ki a kapott sokszögek területét! Írd fel a két terület arányát!

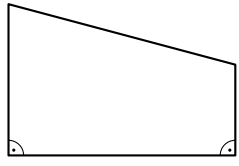
c) Szerkessz paralelogrammát! Számítsd ki a területét!
$a = 6{,}4$ cm; $m_a = 2{,}5$ cm; $b = 3$
Húzd meg az átlókat!
Számítsd ki az így kapott négy háromszög területét!



5.39. A szükséges adatok megmérése után határozd meg a trapézok kerületét és területét!

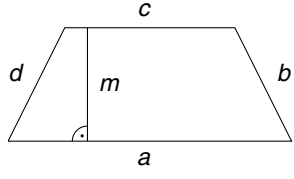
a) 

b) 

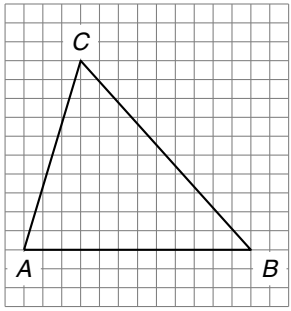
c) 

5.40. Számítsd ki a trapéz hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
a	1,2 dm	8 cm		7,2 cm	0,64 dm
c	0,8 dm	6 cm	8,4 cm		0,048 m
m	6,4 cm		4,5 cm	4 cm	
T		24,5 cm^2	41,4 cm^2	24,4 cm^2	16,8 cm^2



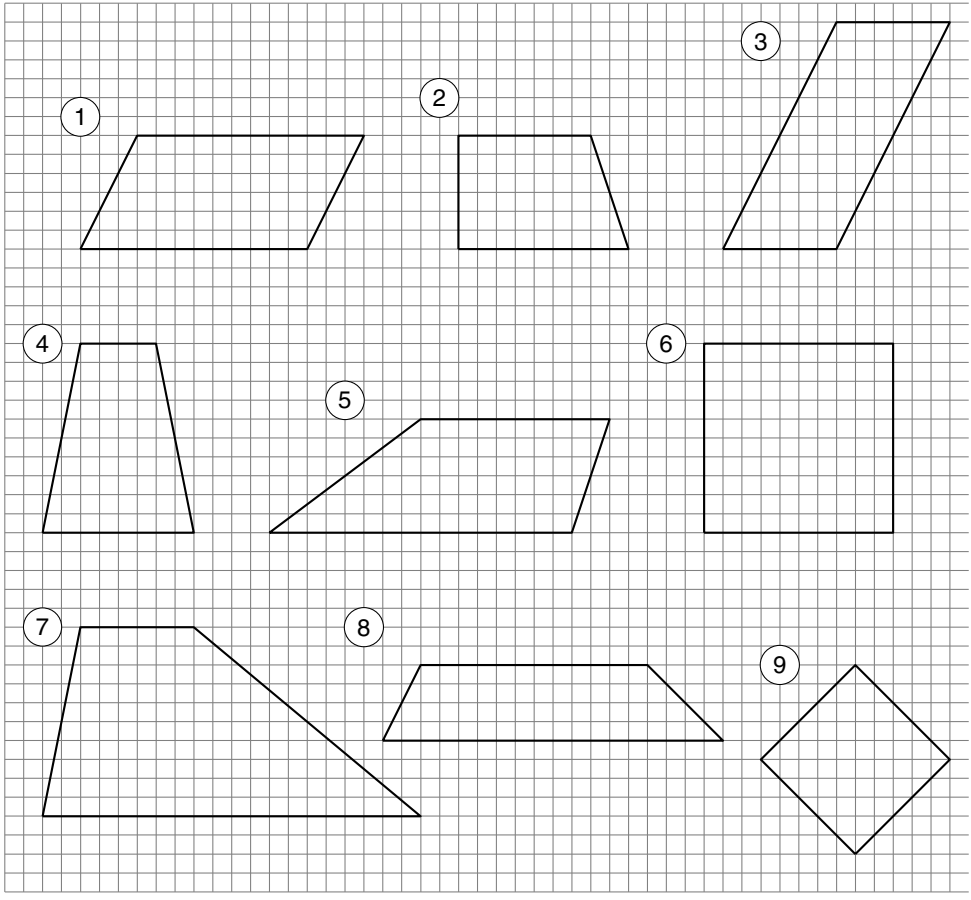
5.41. Számítsd ki az $ABC\triangle$ területét, ha a területegység egy rácsnégyzet!



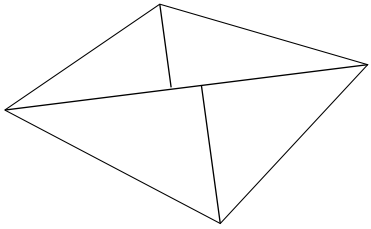
a) Az adott trapézok közül válaszd ki azokat, amelyek egyenlő területűek az $ABC\triangle$-gel!

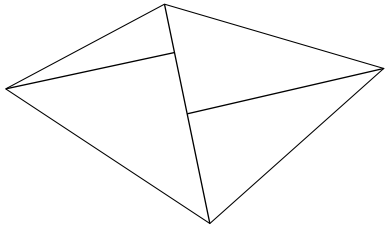
b) Az adott trapézok közül válaszd ki azokat, amelyeknek a területe kisebb az $ABC\triangle$ területénél!
Egészítsd ki ezeket olyan trapézzá, hogy területük megegyezzék az $ABC\triangle$ területével!

c) Az adott trapézok közül válaszd ki azokat, amelyek területe nagyobb az $ABC\triangle$ területénél!
Vágj le (egyenessel) ezekből úgy, hogy trapézok maradjanak és területük megegyezzék az $ABC\triangle$ területével!



5.42. A szükséges adatokat mérd meg, és írd a rajzra! Számítsd ki kétféleképpen a négyszög területét! Miből adódhat a két eredmény közti esetleges eltérés?





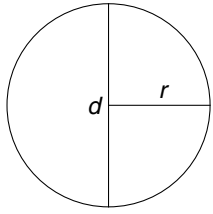
5.43. Számítsd ki a kör kerületét, területét, ha sugara, illetve átmérője:

a) $r = 10$ cm; *b)* $r = 3{,}2$ cm; *c)* $r = 4{,}8$ cm; *d)* $r = 3$ m;

e) $d = 10$ cm; *f)* $d = 6{,}4$ cm; *g)* $d = 2{,}4$ cm; *h)* $d = 1$ m!

5.44. Számítsd ki a körnek a táblázatból hiányzó adatait!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
r	26 cm				
d		26 cm			
K			26 cm		16,3 m
T				26 cm^2	



5.45. Számítsd ki a körcikkhez tartozó körív hosszát és a körcikk területét, ha adott a körcikkhez tartozó középponti szög és a kör sugara!

a) $r = 10$ cm; $\alpha = 15^\circ$; *b)* $r = 10$ cm; $\alpha = 75^\circ$; *c)* $r = 10$ cm; $\alpha = 225^\circ$;

d) $r = 2{,}2$ m; $\alpha = 30^\circ$; *e)* $r = 2{,}2$ m; $\alpha = 120^\circ$; *f)* $r = 2{,}2$ m; $\alpha = 240^\circ$;

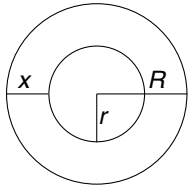
g) $r = 0{,}8$ dm; $\alpha = 90^\circ$; *h)* $r = 0{,}8$ dm; $\alpha = 45^\circ$; *i)* $r = 0{,}8$ dm; $\alpha = 135^\circ$

5.46. Számítsd ki a körgyűrű területét!

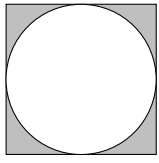
a) $R = 10$ cm; $r = 5$ cm; *b)* $R = 0{,}7$ m; $r = 0{,}4$ m;

c) $r = 8$ cm; $x = 2$ cm; *d)* $r = 0{,}5$ dm; $x = 0{,}5$ dm;

e) $R = 8$ cm; $x = 2$ cm; *f)* $R = 6$ cm; $x = 0{,}6$ dm



5.47. 10 cm oldalhosszúságú négyzetből kivágjuk a lehető legnagyobb kört.

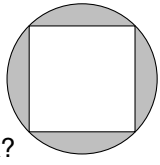


a) Mennyi a kör területe?

b) Mennyi a négyzet területe?

c) Mennyi a hulladék területe? Hány százaléka ez a kör területének?

5.48. 10 cm sugarú körből kivágjuk a lehető legnagyobb négyzetet.



a) Mennyi a kör területe?

b) Mennyi a négyzet területe?

c) Mennyi a hulladék területe? Hány százaléka ez a kör területének?

Felszín, térfogat

5.49. Írd a keretekbe a váltószámot!

1 m > 1 dm > 1 cm > 1 mm

1 m^3 > 1 dm^3 > 1 cm^3 > 1 mm^3

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 500 m^3 = ... dm^3 = ... cm^3;

b) 0,005 m^3 = ... dm^3 = ... cm^3 = ... mm^3;

c) 0,0025 m^3 = ... dm^3 = ... cm^3 = ... mm^3;

d) .....m^3 = 2500 dm^3 = ... cm^3 = ... mm^3;

e) .....m^3 = ... dm^3 = 450 cm^3 = ... mm^3;

f) .....km^3 = 150 000 000 m^3 = ... dm^3

5.50. 1 $dm^3 \approx$ 1 l.

Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 75 $m^3 \approx$ ..... hl $\approx$ ..... $dm^3 \approx$ ..... l;

b) 35 000 $m^3 \approx$ ..... hl $\approx$ ..... $dm^3 \approx$ ..... l;

c) 0,0045 hl $\approx$ ..... $dm^3 \approx$ ..... l = ... dl $\approx$ ..... cm^3;

d) .....$m^3 \approx$ 5000 l $\approx$ ..... $dm^3 \approx$ ..... dl;

e) .....hl = ... l $\approx$ 0,45 dm^3 = ... $cm^3 \approx$ ..... ml;

f) .....hl = ... l $\approx$ ..... $dm^3 \approx$ 68 000 dl $\approx$ ..... cm^3;

g) .....$m^3 \approx$ 250 hl = ... l $\approx$ ..... dm^3;

h) .....$m^3 \approx$ 0,56 hl = ... l $\approx$ ..... $dm^3 \approx$ ..... ml;

i) .....hl = ... l $\approx$ ..... dm^3 = 2500 $cm^3 \approx$ ..... ml

5.51. A hiányzó mérőszámokat írd fel 10, illetve 0,1 hatványaként!

a) 1 m^3 = ... dm^3 = ... cm^3 = ... mm^3;

b) 1 cm^3 = ... mm^3 = ... dm^3 = ... m^3;

c) 1 dm^3 = ... cm^3 = ... $mm^3 \approx$ ..... l = ... cl = ... ml;

d) 1 m^3 = ... $dm^3 \approx$ ..... l = ... hl = ... dl;

e) 1 dm^3 = ... m^3 = ... $cm^3 \approx$ ..... dl = ... hl = ... cl

5.52. Vázold fel a téglatest hálóját, számítsd ki a felszínét és a térfogatát, ha az élei:

a) 3 cm; 4 cm; 2 cm; *b)* 3,6 cm; 2,4 cm; 4,5 cm;

c) 2 cm; 2 cm; 3 cm; *d)* 2,5 cm; 2,5 cm; 2,5 cm

5.53. Határozd meg a téglatest hiányzó adatait!

Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
a (cm)	5	2,3	0,6	8	5	5		2	4	5,3
b (cm)	4	4,5	120	8	4		2,3	5	4	7,2
c (cm)	7	7,2	5	8		5	6,0			
A (cm^2)								420	96	69,8
V (cm^3)					60	125	34,5			

5.54. *a)* Egy kocka felszíne 54 cm^2. Mekkora a térfogata?

b) Ha egy kocka térfogata 64 cm^3, akkor mekkora a felszíne?

c) Egy téglatest felszíne 340 cm^2. Mekkora a térfogata, ha alapéleinek hossza 5 cm és 8 cm?

d) Négyzetes oszlop alapéle 4 cm. Mennyi a test magassága, ha a felszíne 304 cm^2?

5.55. *a)* Téglatest éleinek aránya 2 : 3 : 5, a legrövidebb éle 4 cm. Mennyi a téglatest felszíne és térfogata?

b) Egy téglatest alakú edény három – egy csúcsban összefutó – éle hosszának összege 48 dm, aránya pedig 3 : 4 : 5.
Hány liter víz fér el ebben az edényben?

c) Egy téglatest alapéleinek az aránya 4 : 3. Az alaplap kerülete 112 cm, a test magassága 30 cm. Mekkora a test felszíne és térfogata?

5.56. Egy téglatest térfogata 42 cm^3, minden élének mérőszáma prímszám.

a) Mekkorák az élei? *b)* Mekkora a téglatest felszíne?

5.57. Egy téglatest térfogata 385 cm^3, éleinek mérőszáma egész szám. Biztos, hogy mindhárom élének mérőszáma prímszám? (Válaszodat indokold!)

5.58. Tömör téglatest élei 6 cm, 9 cm és 12 cm hosszúak. A téglatestet először a legnagyobb, majd a középső, végül a legkisebb területű lapjával párhuzamosan, összesen három vágással feldaraboljuk.

a) Hány darab és milyen fajta test keletkezett a feldarabolás után?

b) Mennyi lesz a feldarabolt testek felszíne együttesen?

5.59. Egy négyzetes oszlop felszíne 490 cm^2. A test magasságának és alapélének aránya 2 : 1.
Gondolatban vágjuk el a testet az alaplapjával párhuzamosan, majd az oldallapjával párhuzamosan 4 egyenlő részre.
Milyen testeket kapunk, és mennyi egy-egy test felszíne és térfogata?

5.60. Egy négyzetes oszlop felszínét a következő egyenlettel adjuk meg:

$2a^2 + 4 \cdot 2{,}5a^2 = 192$.
Mekkora lehet a test térfogatának mérőszáma?

5.61. *a)* Egy négyzetes oszlop alapéle 4 cm, magassága pedig az alapél 2,5-szerese. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

b) Egy négyzetes oszlop térfogata 614,4 dm^3, magassága 9,6 dm. Számítsd ki alapélének hosszát, majd a felszínét!

c) Egy négyzetes oszlop magassága kétszerese az alapélnek, a felszíne 360 cm^2. Mekkora a test térfogata?

d) Egy négyzetes oszlop alapéle 4 cm, élei hosszának összege 80 cm. Mekkora a négyzetes oszlop térfogata?

5.62. Egy négyzetes oszlop alapéle a, élei hosszának összege $36a$.

a) Mekkora a felszíne? *b)* Mekkora a térfogata?

5.63. Egy kocka éle 24 cm. Egy másik kocka éle ennek 80%-a. Hány százaléka a kisebbik kocka felszíne, illetve térfogata az eredetiének?

5.64. Egy négyzetes oszlop alapéle 8 cm, magassága 16 cm.

a) A négyzetes oszlop alapéleinek hosszát 25%-kal megnöveljük, magasságát változatlanul hagyjuk.

b) A négyzetes oszlop magasságát növeljük meg 25%-kal, az alapél változatlansága mellett.

c) Az *a)* vagy a *b)* esetben lesz nagyobb az oszlop felszíne, illetve térfogata?

d) Hány százalékkal nőtt az eredeti oszlop felszínéhez, illetve térfogatához viszonyítva az *a)* és *b)* esetben a felszín, illetve a térfogat?

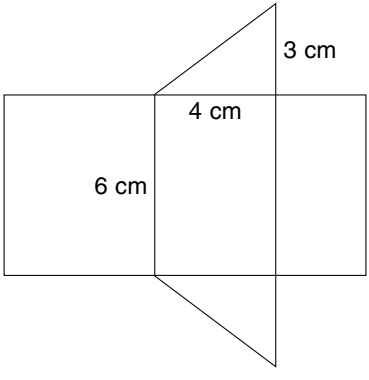
5.65. A négyzetes oszlop alapéle a cm, magassága m cm. A négyzetes oszlop magasságát növeljük meg p%-kal, alapélei hosszát r%-kal. Hány százalékkal növekszik meg a térfogata?

5.66. Egy négyzetes oszlop alapéle a cm, magassága $2a$ cm. Mekkora a esetén lesz egyenlő a térfogat mérőszáma a felszín mérőszámával?

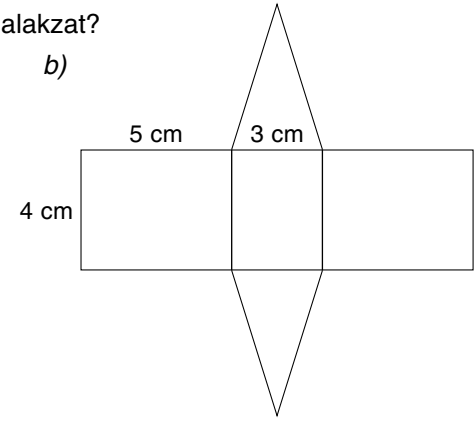
5.67. Négy hektár területű földet 35 cm mélyen szántanak fel. Hány köbméter földet forgatnak meg?

5.68. Milyen test hálózata a következő két alakzat?

a)



b)

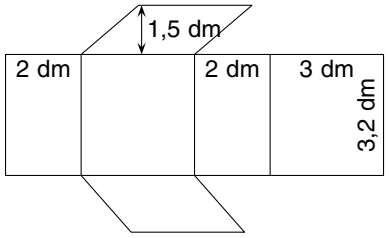


Szerkeszd meg a két hálózatot!

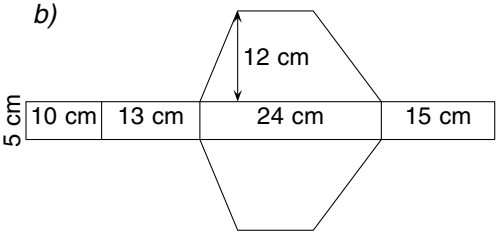
Számítsd ki a két test felszínét! (A szükséges adatokat mérd!)

5.69. Számítsd ki annak a testnek a felszínét, amelynek ez a hálója!

a)

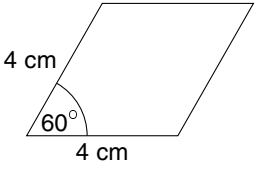


b)

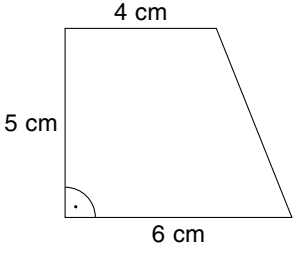


5.70. A következő sokszögek 10 cm oldalélű egyenes hasábok alaplapjai. Szerkeszd meg a hálózatukat rajzlapra, és hajtogasd testté!
Mérd meg a szükséges adatokat, és azok alapján számítsd ki a testek felszínét!

a)



b)



5.71. Szerkeszd meg a hasáb alaplapját! Vázold föl a hálóját! Számítsd ki a felszínét, térfogatát!

a) A háromszög alapú hasáb alapélei: 4 cm, 2,5 cm, 2,5 cm. A hasáb magassága 4 cm.

b) A háromszög alapú hasáb alapélei: 2,6 cm, 2,8 cm, 3,0 cm. A hasáb magassága 5,0 cm.

c) A paralelogramma alapú hasáb alapélei: 4 cm, 5 cm, a két alapél által bezárt szög: 30°. A hasáb magassága 2 cm.

d) A deltoid alapú hasáb két szomszédos alapéle: 2 cm, 4 cm, az alaplap szimmetriaátlója 5 cm. A hasáb magassága 4 cm.

5.72. Mekkora a hasáb magassága, ha

a) alapterülete 2 dm^2, térfogata 9,06 dm^3;

b) alapterülete 8,6 dm^2, térfogata 21,5 dm^3;

c) alapterülete 3 dm^2, térfogata 0,06 m^3?

5.73. Mekkora a hasáb alapterülete, ha

a) térfogata 2 m^3, magassága 8 dm;

b) térfogata 0,048 dm^3, magassága 0,2 dm;

c) térfogata 583,2 dm^3, magassága 16,2 dm?

5.74. Hány liter víz fér abba az árokba, amelynek keresztmetszete 6,4 m^2 területű háromszög, hossza pedig 20 m?

5.75. Egy vasúti töltés keresztmetszete trapéz. Alul 21 m, felül 4,5 m széles, és 4,8 m magas. Hány köbméter földet és követ építenek a 6 km hosszú töltésbe, ha a töltés 15%-a kő?

5.76. Trapéz keresztmetszetű árkot ásnak, amely felül 1,2 m, alul 0,8 m széles, és 70 cm mély. Hány köbméter földet emelnek ki, ha az árok 120 m hosszú?

5.77. Adott egy téglalap alakú kartonlap, amely 6 cm széles és 18 cm hosszú. A karton hulladékmentes szétvágásával és felhasználásával állíts elő olyan téglalapokat, amelyek egyetlen téglatest lapjai lehetnek!
Mekkorák az így előállítható téglatest élei?

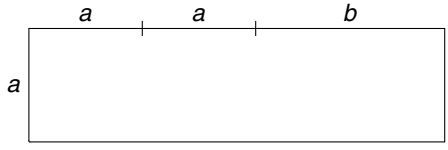
5.78. Trapéz keresztmetszetű csatornán (árokban) a víz 1,5 $\frac{m}{s}$ sebességgel folyik. Mennyi víz halad át a csatornán egy nap alatt, ha a víz felszínén mérve a csatorna szélessége 2,4 m, a fenekén mérve 1 m, a víz magassága 0,8 m?

5.79. Egy 8 cm széles, 24 cm hosszú téglalap alakú kartonlap hulladékmentes felhasználásával készíts hasábhálót! (Szétvágni, összeilleszteni szabad!)

a) Mi a hasáb neve? *b)* Mekkora az alapterülete és a magassága?

c) Számítsd ki az adott módon kialakított hasáb felszínét, térfogatát!

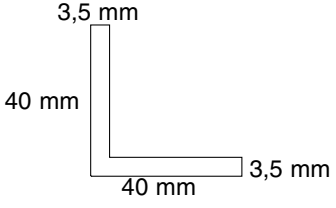
5.80. *a)* Az ábrán látható téglalap hulladékmentes felhasználásával milyen hasáb állítható elő?



b) Hogyan határoznád meg a hasáb felszínét, térfogatát?

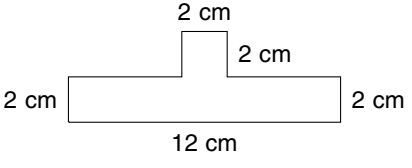
5.81. *a)* Egy L keresztmetszetű szögvas keresztmetszetének méreteit az ábra mutatja. Hosszúsága 5,00 m. Mekkora a tömege?

A vas sűrűsége: $\varrho = 7{,}8\ \frac{g}{cm^3}$.



b) Számítsd ki annak a 2,5 m hosszú alumínium rúdnak a tömegét, amelynek keresztmetszetét az ábra mutatja!

Az alumínium sűrűsége: $\varrho = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}$.



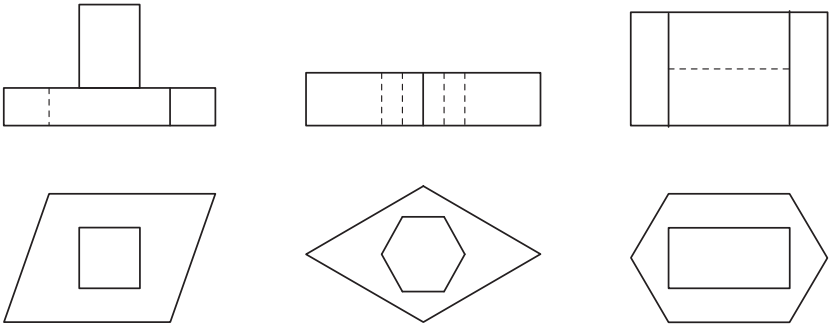
5.82. *a)* Számítsd ki annak a rombusz alapú egyenes hasábnak a felszínét és térfogatát, amelynek alapélei 5 cm-esek, a rombusz egyik átlója 8 cm, és az oldallapok négyzetek!

b) Egy szabályos hatszög alapú hasáb minden éle 6 cm. Mennyi a hasáb felszíne és térfogata?

5.83. Nagyítva megrajzoltuk műanyagból készült eszközök elöl- és felülnézetét. Határozd meg az eszközök térfogatát és tömegét! A műanyag sűrűsége:

$\varrho = 1200\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \ldots\ldots\ldots\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. A nagyítás aránya:

a) 5 : 1; *b)* 3 : 1; *c)* 5 : 1

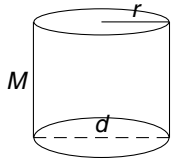


5.84. Számítsd ki az egyenes körhenger felszínét és térfogatát, ha

a) $r = 1$ dm; $M = 1$ dm; *b)* $r = 2{,}5$ cm; $M = 4$ cm;

c) $r = 1{,}2$ dm; $M = 4$ cm; *d)* $d = 4$ cm; $M = 2$ cm;

e) $d = 3{,}4$ cm; $M = 35$ m; *f)* $d = 6$ cm; $M = 0{,}3$ dm



5.85. *a)* Egy kerék sugara 30 cm, szélessége 3 cm. Mekkora területű nyomot hagy egy körülforgás után?

b) A vetés hengerezésénél használt henger átmérője 0,6 m, hossza 1,5 m. Mekkora területet hengerel 1 fordulat során?

c) Egy kocsikerék 8 cm széles nyomot hagy. A kerék átmérője 70 cm. 1000 fordulat után mekkora területű nyomot hagy maga után egy kerék?

5.86. *a)* Hány hektoliter víz szükséges az 1,5 km hosszú vízvezeték-hálózat feltöltéséhez, ha a csövek belső átmérője 12 cm?

b) Egy henger alakú kazán belső átmérője 140 cm, magassága 4 m. Hány hektoliter víz van benne, ha a vízállásmutató szerint magasságának $\frac{3}{4}$ részéig van megtöltve?

c) Hány köbméter gőz szükséges percenként egy gőzgép hengerének működtetéséhez, ha a henger belső átmérője 38 cm, a dugattyú lökethossza 75 cm, és percenként 60-szor szív és nyom?

d) Egy henger alakú víztartály belső átmérője 1,8 m. Leengednek belőle 8 hl vizet. Mennyit süllyed a víz szintje?

e) Egy 8 dm élű kockába a lehető legnagyobb – 8 dm magas – hengert állítunk. Hány liter vizet lehet a kocka kitöltetlen részébe önteni?
Hány százaléka ez a mennyiség a henger térfogatának?

5.87. *a)* Egy hirdetőoszlop 4 m magas, 1,4 m átmérőjű. Hány négyzetméter lemez kellett a palást elkészítéséhez?

b) A házak esőcsatornája félhenger alakú. Mennyi bádog kellett egy 15 cm átmérőjű, 4 m hosszú csatorna elkészítéséhez?
Mennyi védőfestéket használtak el, ha 1 m^2-re 0,2 kg kell?

c) Mennyi horganylemez kell 80 cm hosszú, 16 cm átmérőjű, félhenger alakú csatorna elkészítéséhez, ha a szélek peremezéséhez 1-1 cm széles lemezcsíkot használnak fel?

d) Mennyi bádoglemezre van szükség 50 db 13,2 cm átmérőjű, 0,8 m hosszú kályhacső elkészítéséhez, ha a takarásra 2 cm-t számítunk?

5.88. Egy 1,2 m átmérőjű henger alakú kútban 6 m mély víz van. A víz felszíne 4 m mélyen van.

a) Hány köbméter víz van a kútban?

b) Hány köbméter földet ástak ki a kút készítésekor?

5.89. Egy 8 cm-es belső átmérőjű hengeres mérőedénybe 0,75 liter vizet öntünk.

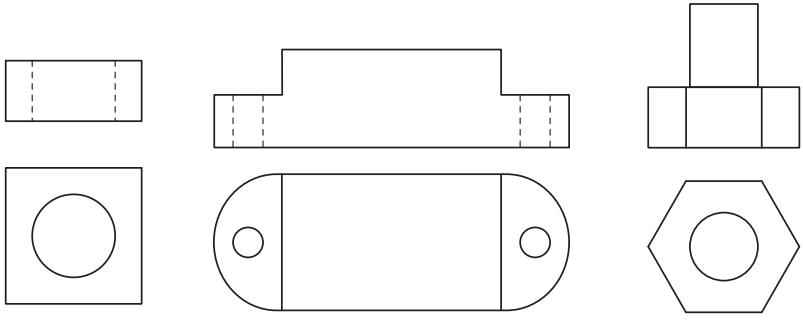
a) Milyen magasan áll benne a víz?

b) Belehelyezünk egy 4 cm élű vaskockát. Milyen magasra emelkedik a víz?

5.90. Kicsinyítve megrajzoltuk acélból készült alkatrészek elöl- és felülnézetét. Határozd meg az alkatrészek térfogatát és tömegét!

Az acél sűrűsége: $\varrho = 7600 \frac{kg}{m^3} = \ldots\ldots\ldots \frac{g}{cm^3}$. A kicsinyítés aránya:

a) 1 : 2; *b)* 1 : 25; *c)* 1 : 5



5.91. Egy henger felszíne 180,1 cm^2, sugara 3,7 cm.

a) Mekkora a henger magassága?

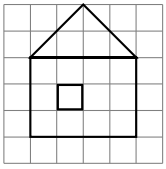
b) Számítsd ki a henger térfogatát!

5.92. Egy vasból készült négyzetes oszlop alapéle 5 cm, magassága 182 mm, tömege 3549 g. Hosszában 18 mm átmérőjű fúróval átfúrták. Mekkora az így kialakított vastest tömege?

6. Geometriai transzformációk

Mi lehet a szabály?

6.01. A diaképet különböző helyzetű képernyőkre vetítjük úgy, hogy a négyzetrácsból az *A*, *B*, *C* jelű rácsokat kapjuk.

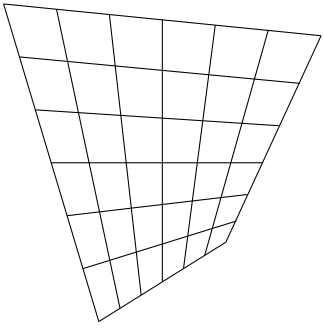


a) Rajzold meg ezekre a rácsokra az alakzat képét!

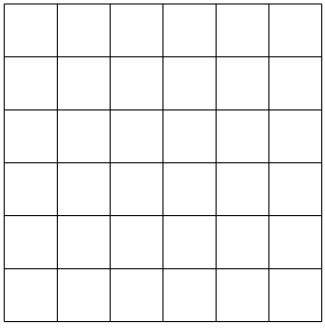
b) Melyik képernyőn igazak a következő állítások?

(1) Az eredeti rajzon párhuzamos szakaszok a képen is párhuzamosak.
(2) Az eredeti rajzon merőleges szakaszok a képen is merőlegesek.
(3) A képen minden szakasz hossza az eredeti szakasznak kétszerese.

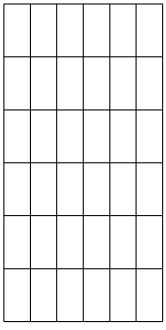
A



B

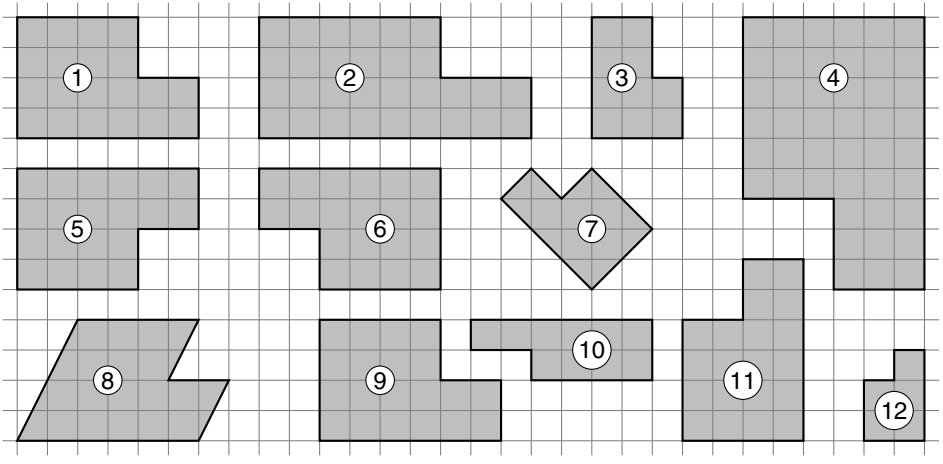


C



Melyik kép ugyanolyan alakú, mint az eredeti, vagyis melyik kép hasonló az eredetihez?

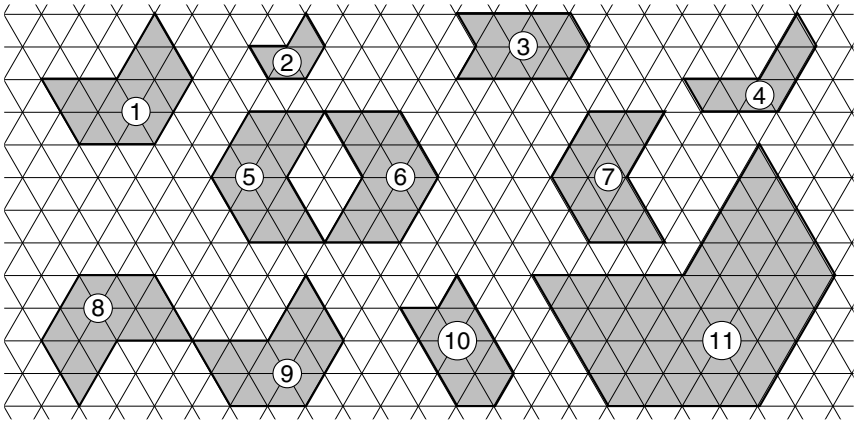
6.02. Hogyan kaphatjuk az ① ábrából a többi ábrát? A ②, ③ stb. ábrából a többit?



Sorold föl az ① alakzat

a) nagyított; *b)* kicsinyített; *c)* egybevágó képeit!

6.03. Hogyan kaphatjuk az ① ábrából a többi ábrát? A ②, ③ stb. ábrából a többit?



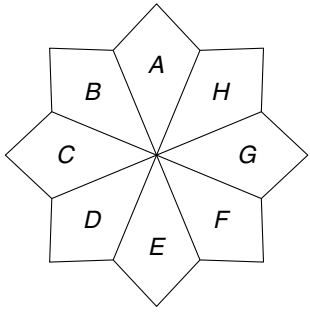
Sorold föl az ① alakzat

a) nagyított;

b) kicsinyített;

c) egybevágó képeit!

6.04. A nyolcágú csillagot az *A* deltoid elforgatásának segítségével rajzolhatjuk meg. Írd be a táblázatba, hogy hány fokos szöggel elforgatva kerülhetett az *A* deltoid a többi deltoid helyére!



		Az *A* deltoid elforgatottja:							
		B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*A*
A szög nagysága	jobbra forgatva								
	balra forgatva								

6.05. Az $ABC\triangle$ csúcspontjainak koordinátái: $A(6;2)$, $B(2;5)$, $C(2;2)$. Ábrázold a háromszöget a koordináta-rendszerben! (Minden feladatban külön-külön.)
Az adott utasítás szerint rajzolj újabb háromszöget!

a) Cseréld fel a pontok két jelzőszámát!

b) Növeld a jelzőszámokat 2-vel!

c) Csökkentsd a jelzőszámokat 2-vel!

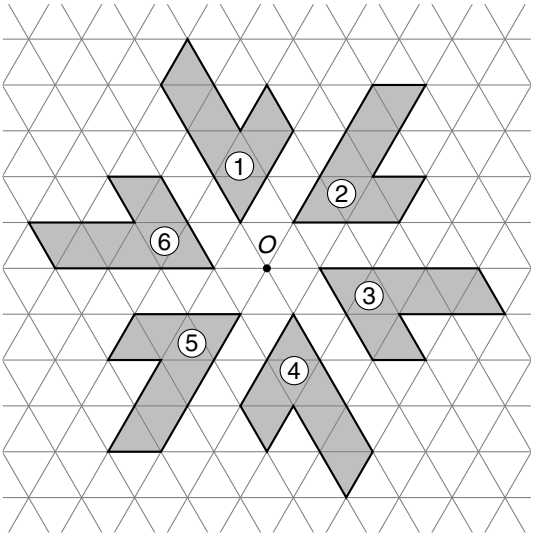
d) Minden jelzőszámot szorozz meg 2-vel!

e) Minden jelzőszámot szorozz meg (-1)-gyel!

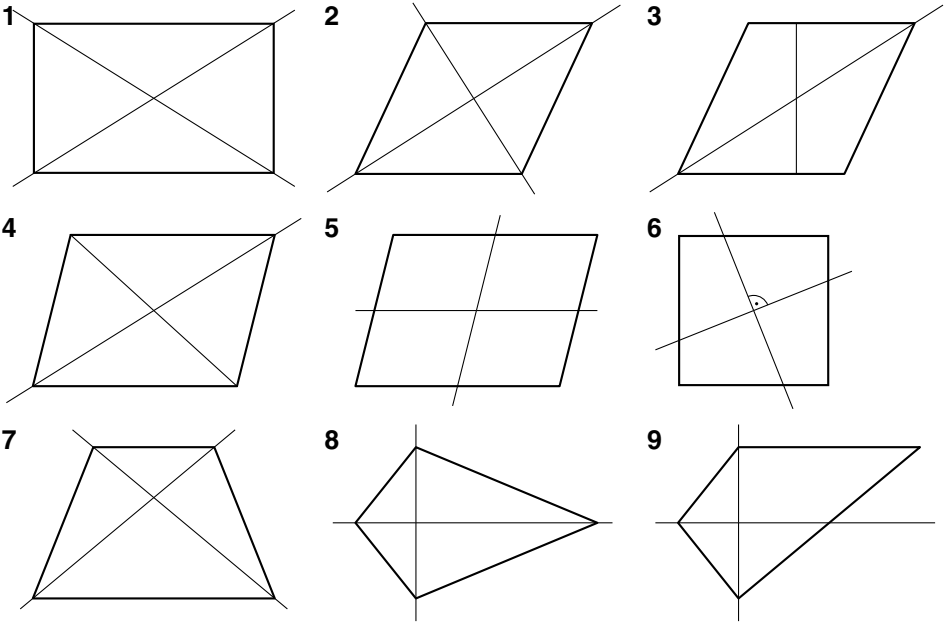
A kapott háromszögek közül melyek hasonlók az $ABC\triangle$-höz?

A kapott háromszögek közül melyek egybevágók az $ABC\triangle$-gel?

6.06. Hogyan kaphatjuk meg az ① ábrából a többi ábrát! Hány fokos elforgatással lettek a megfelelő szakaszok párhuzamosak?



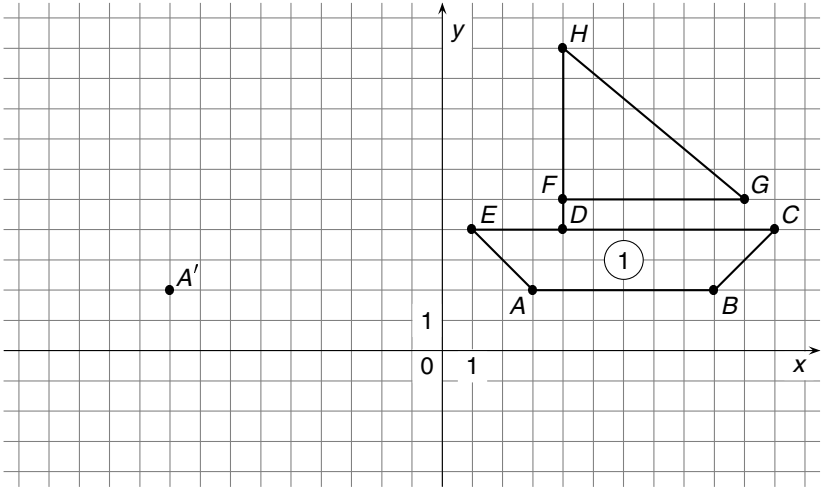
6.07. A következő négyszögeket két egyenessel négy részre vágtuk. Melyik feldarabolásra igazak az állítások? (Az ábra sorszámával válaszolj!)



A: A részek között van 2 egybevágó.
B: Mind a négy rész egybevágó.
C: A részek között van tengelyesen tükrös.
D: Mind a négy rész tengelyesen tükrös.
E: A részek között van két tengelyesen tükrös helyzetű.
F: A részek között kettő-kettő tengelyesen tükrös helyzetű.

Eltolás

6.08. *a)* Olvasd le az ábráról az ① kis hajó betűvel megjelölt pontjainak koordinátáit!

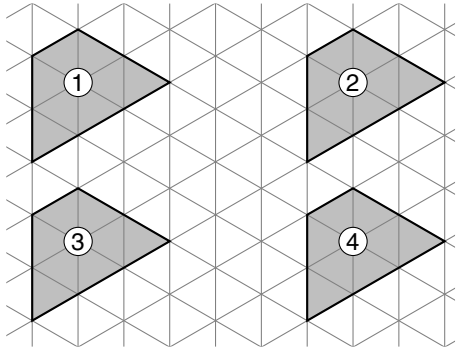


b) Ússzon a kis hajó (elfordulás nélkül) úgy, hogy az A pont az A' pontba kerüljön! Rajzold meg a kis hajót ebben a helyzetben, és olvasd le így is a megjelölt pontok koordinátáit! A megfeleltetés szabályát add meg: $P(x; y) \rightarrow P'(\ ;\ )$!

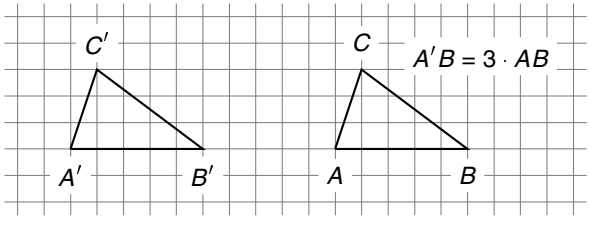
c) Rajzold meg azt a kis hajót, amelynek megfelelő pontjait az ① alakzat pontjaiból úgy származtatjuk, hogy a második koordinátájuk értékét ellentettjére változtatjuk! A megfeleltetés szabálya: $P(x; y) \rightarrow P''(\ ;\ )$.

d) Rajzold meg azt a kis hajót, amelynek megfelelő pontjait az ① alakzat pontjaiból úgy kapjuk, hogy mindkét koordinátájuk értékét ellentettjére változtatjuk! A megfeleltetés szabálya: $P(x; y) \rightarrow P'''(\ ;\ )$.

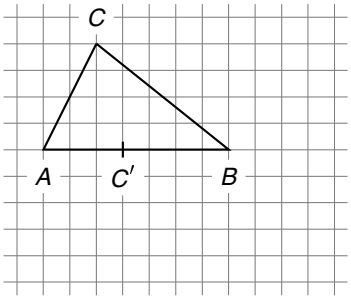
6.09. Az ① ábrából eltolással kaptuk a többit: Jelöld vektorral az egyes eltolásokat! Hasonlítsd össze a megfelelő oldalak, illetve szögek nagyságát! Milyen helyzetűek a megfelelő oldalak?



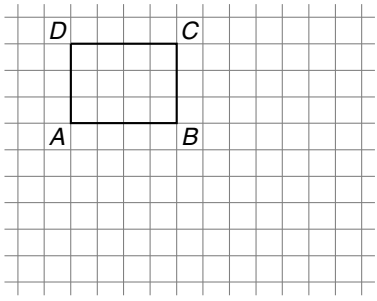
6.10. *a)* Az $A'B'C'$ háromszöget az ABC háromszög eltolásával kaptuk. Add meg az eltolás vektorát!



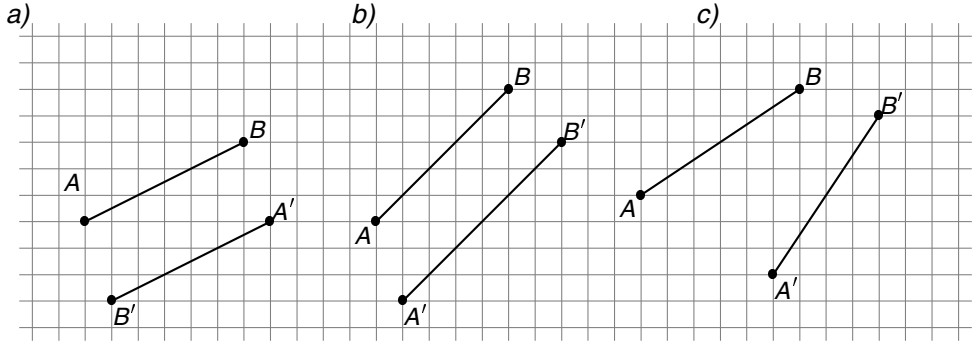
b) Az ABC háromszög eltolásával annak C pontja C'-be került. Add meg az eltolás vektorát és az eltolással kapott $A'B'C'$ háromszöget!



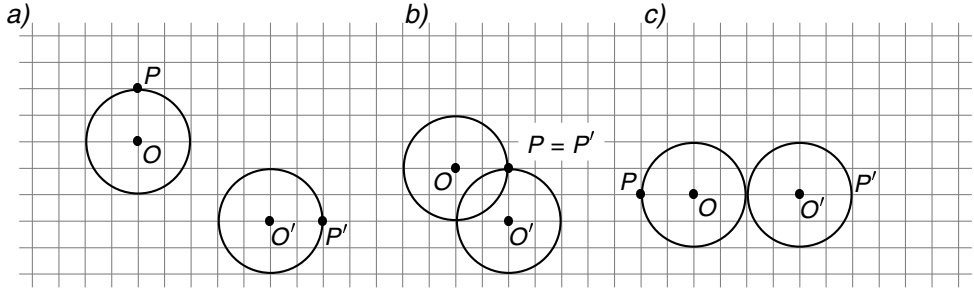
c) Az $ABCD$ téglalap eltolása után annak D pontja B-be került. Add meg az eltolás vektorát és az A, C és B pontoknak megfelelő A', C' és B' pontokat!



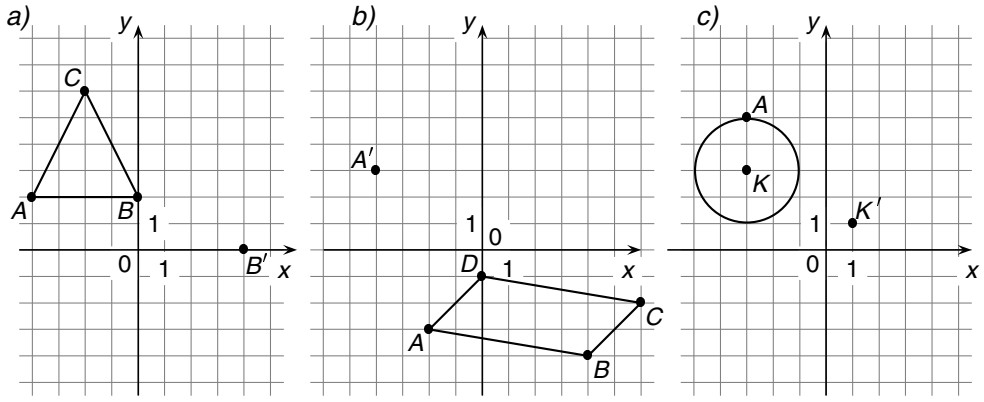
6.11. Javítsd ki a következő ábrákat úgy, hogy az $A'B'$ szakasz az AB szakasz eltolással kapott képe legyen!



6.12. Javítsd ki a következő ábrákat úgy, hogy az O' középpontú kör az O középpontú kör eltolással kapott képe legyen!

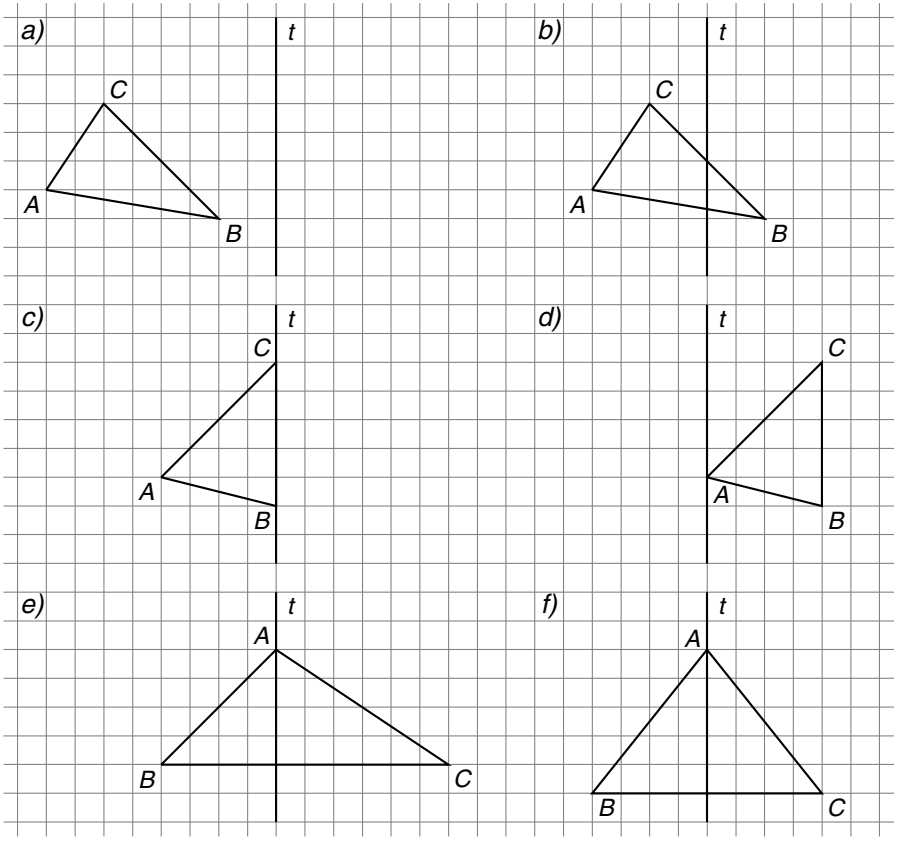


6.13. Szerkeszd meg az alakzat eltolással kapható képét, ha ismerjük az alakzat egy pontjának a képét! Rajzold meg origó kezdőponttal az eltolás vektorát, és add meg végpontjának koordinátáit!



Tengelyes tükrözés

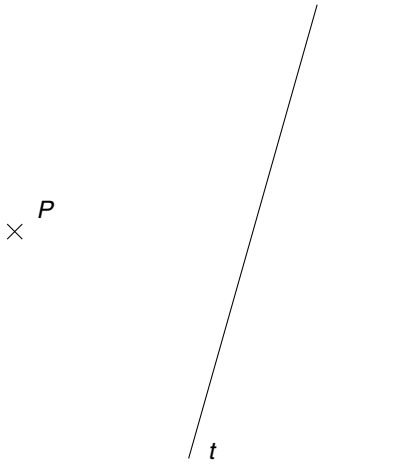
6.14. Tükrözd a háromszöget az adott *t* tengelyre!

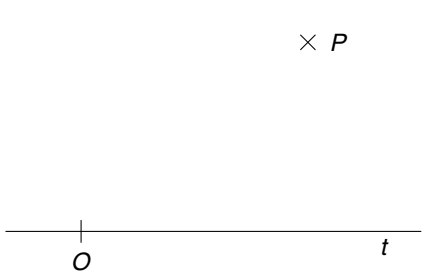


6.15. Szerkeszd meg a P pont, illetve az OP szakasz t tengelyre vonatkozó tükörképét! Például az A pont tükörképét A', a P pont tükörképét P' jelöli. Egészítsd ki a következő állítást!

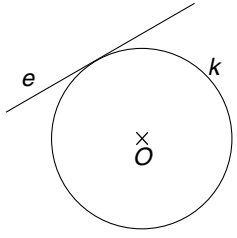
a) A t tengely a PP' szakasz .....

b) A t tengely a POP' szög .....



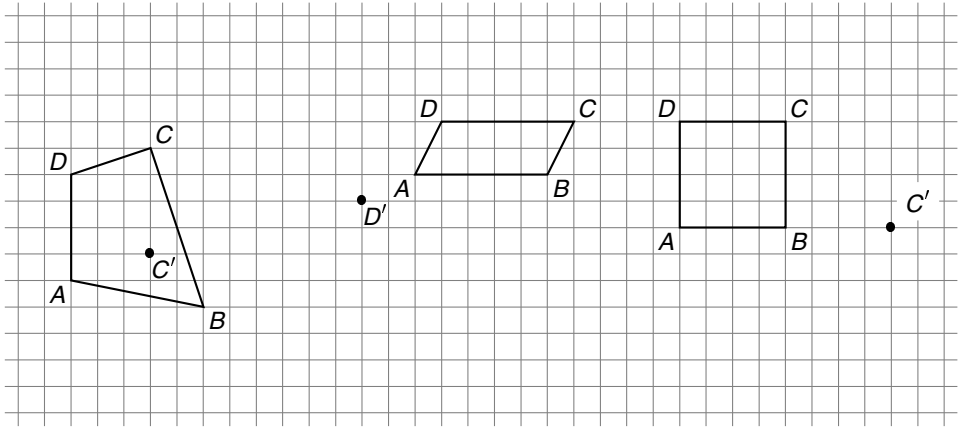


6.16. Rajzolj egy O középpontú k kört, és szerkeszd meg egy e érintőjét! Tükrözd a kört az e egyenesre!
Milyen helyzetben van a tükrözéssel kapott k' kör és az e egyenes?



6.17. Rajzold meg az *a)*, *b)* és *c)* esetekben a tükörtengelyt piros színnel, az alakzatok tükörképét kék színnel! (*Például: A* tükörképét A'-vel, C tükörképét C'-vel jelöljük.)

a) *b)* *c)*



6.18. Szerkeszd meg az $ABC\triangle$ tükörképét!
Tedd ki a megfelelő reláció jelét (<, >, =)!

AC $A'C'$;

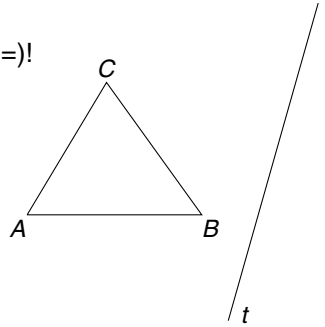
AB $A'B'$;

CB $C'B'$;

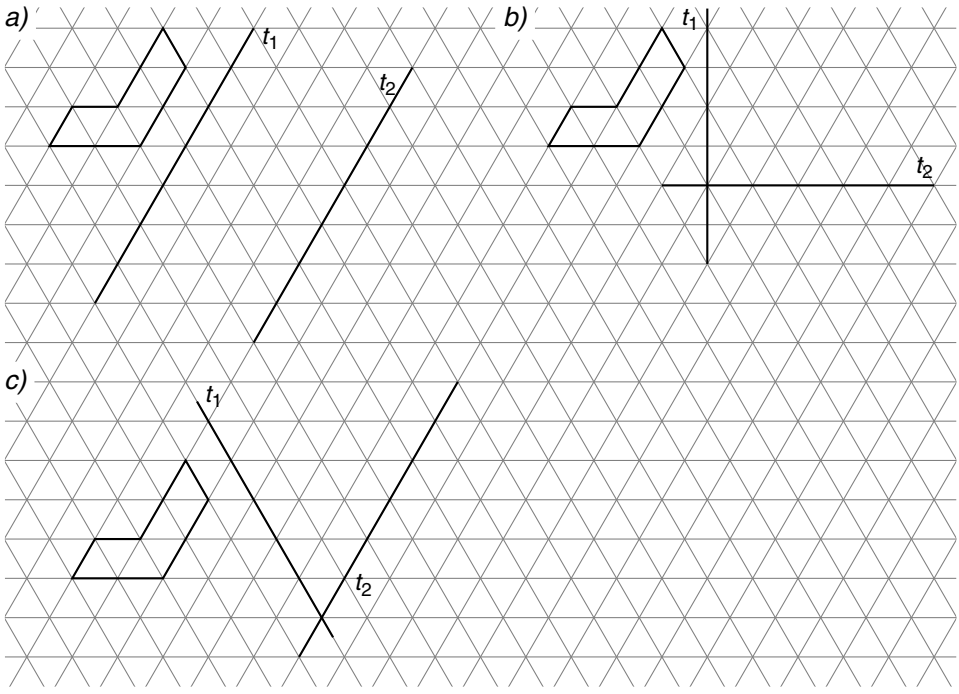
$A\sphericalangle$ $A'\sphericalangle$;

$B\sphericalangle$ $B'\sphericalangle$;

$C\sphericalangle$ $C'\sphericalangle$



6.19. Tükrözd az ábrát először a t_1, majd a kapott képet a t_2 tengelyre! Hogyan kapható tengelyes tükrözés nélkül az első ábrából a harmadik ábra?



6.20. Tükrözzünk egy háromszöget először a t_1 tengelyre, majd a kapott tükörképet a t_2 tengelyre!
Hasonlítsd össze a három háromszög közül az 1. és a 3. háromszög körüljárási irányát! A megfelelő oldalak egymáshoz viszonyított helyzetét!
Mérd le a megfelelő csúcsok távolságát!

a) Legyen a t_1 és t_2 egyenes egymástól 5 cm távolságra lévő párhuzamos egyenes!

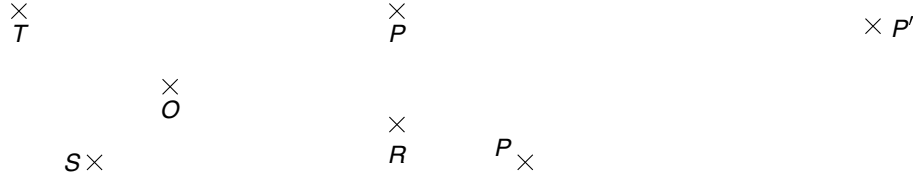
b) A t_1 és t_2 egyenes merőleges legyen egymásra. Kösd össze az eredeti háromszög és a második tükörkép megfelelő pontjait! Mit tapasztalsz?

c) A t_1 és t_2 egyenes közötti szög legyen 60°-os!

Középpontos tükrözés

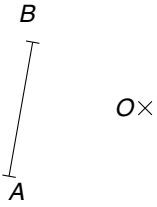
6.21. *a)* Szerkeszd meg a megjelölt pontok középpontos tükörképét!
(Szimmetria-középpont az O pont.)

b) A P és a P' pontok középpontos tükörképei egymásnak. Hol van a szimmetria-középpont?

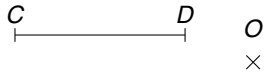


6.22. Szerkeszd meg a szakaszok középpontos tükörképét!

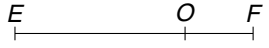
a)



b)



c)



d) Milyen négyszög az $ABA'B'$ négyszög?
Sorold fel e négyszög tulajdonságait a kapott ábra alapján!

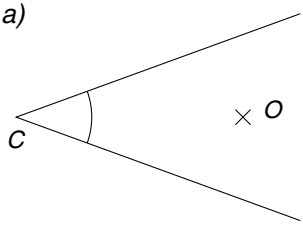
6.23. Tükrözd középpontosan az egyenlő szárú háromszöget, ha szimmetria-középpontja

a) az alap felezőpontja, *b)* az egyik szár felezőpontja!

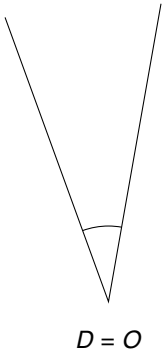
Milyen síkidomokat kaptál az egyes esetekben?

6.24. Szerkeszd meg a szögek O pontra vonatkozó középpontos tükörképét!
Mi a neve a szögpároknak?
Mi ezen szögpárok közös tulajdonsága?

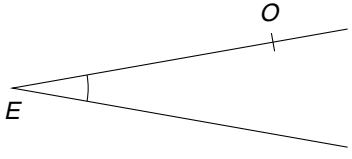
a)



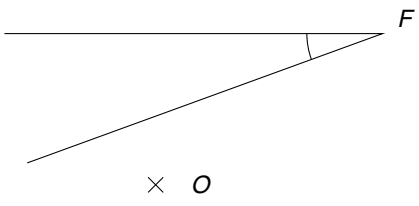
b)



c)

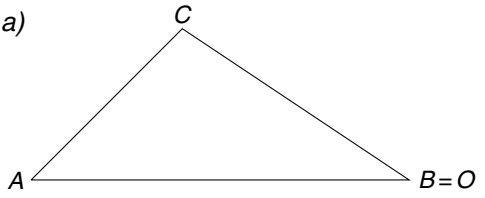


d)

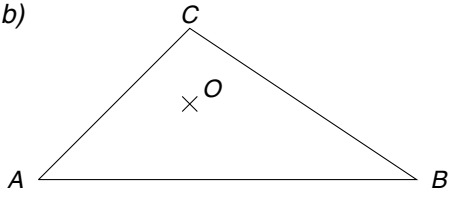


6.25. Rajzolj *ABC* háromszöget! Vedd fel a középpontos tükrözés *O* középpontját úgy, ahogyan az ábrán megadtuk! Szerkeszd meg a háromszögek középpontos tükörképét! A kapott ábrán jelölj meg fordított állású szögpárokat!

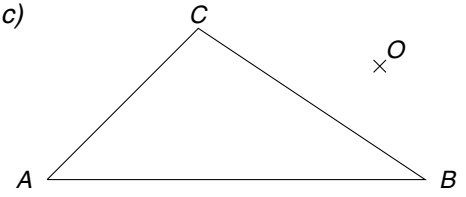
a)



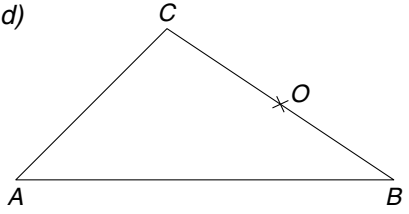
b)



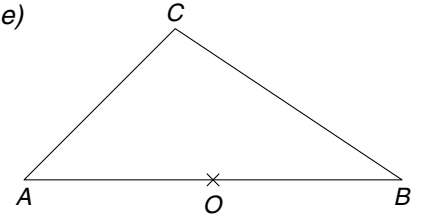
c)



d)



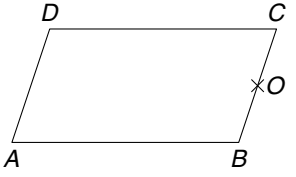
e)



6.26. Rajzolj *ABCD* paralelogrammát!

a) Tükrözd a *BC* oldal *O* felezőpontjára! Milyen alakzat a paralelogramma és a tükörképe együtt?

b) Tükrözd a paralelogrammát az *AC* átló felezőpontjára! Mit tapasztalsz?



6.27. Adott egy *AB* szakasz. Hol legyen a szimmetria-középpont, ha azt szeretnénk, hogy a tükrözés után az eredeti két végpont és a tükörképeik egy

a) négyzet, *b)* téglalap, *c)* rombusz,

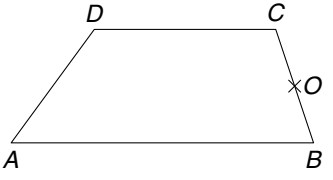
d) paralelogramma, *e)* trapéz, *f)* deltoid

csúcspontjai legyenek?

6.28. A megjelölt három pont közül kettő egy paralelogramma két csúcsa, egy a szimmetria-középpontja.
Szerkeszd meg a paralelogrammát!
Hány megoldást találtál?



6.29. Rajzolj *ABCD* trapézt! Tükrözd a *BC* szár felezőpontjára. Milyen alakzat a trapéz és a tükörkép együtt?



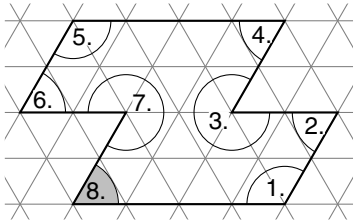
6.30. Sorold fel a 8. szög

a) egyállású szögeit;

b) váltószögeit;

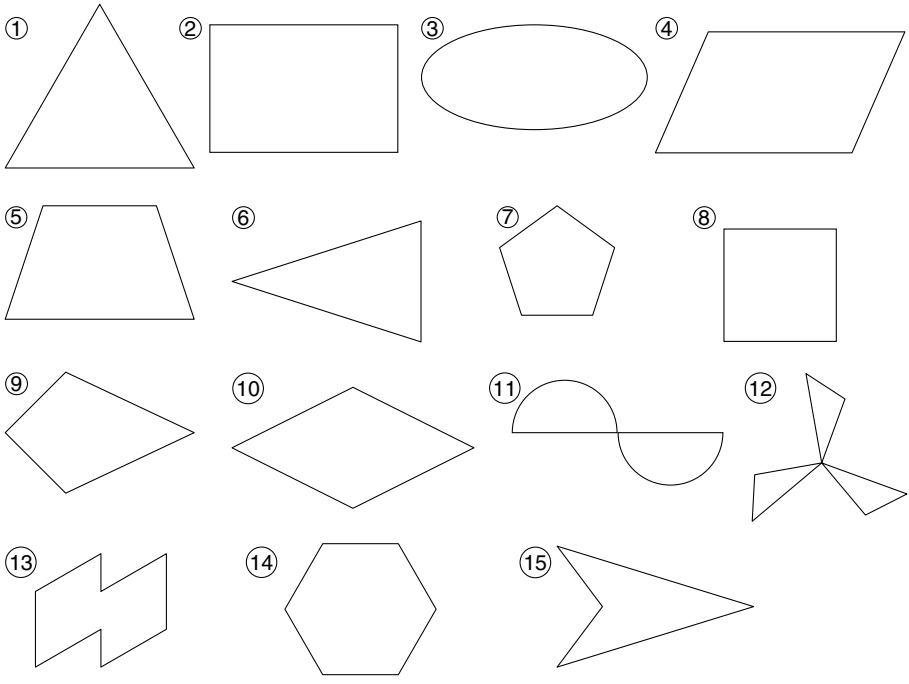
c) társszögeit;

d) Milyen szögpárt alakot a 3. és a 7. szög?



Szimmetriák vizsgálata

6.31. *a)* Rajzold meg a tengelyesen szimmetrikus alakzatok szimmetriatengelyeit!



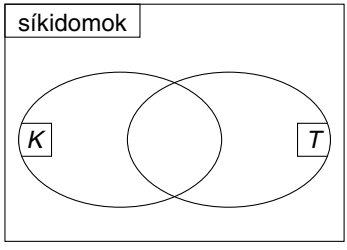
b) Rajzold be pirossal a középpontosan szimmetrikus alakzatok szimmetria-középpontját!

c) Írd be az alakzatok sorszámát a halmazábrába!

Jelölések:

K = {Középpontosan tükrös alakzat}

T = {Tengelyesen tükrös alakzat}



7. Alakzatok előállítása, vizsgálata

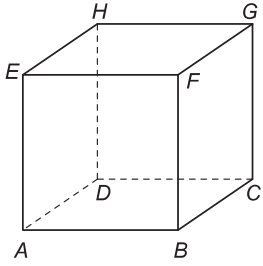
Térelemek

7.01. Keress a kockán olyan csúcsot, amely ugyanolyan távol van

a) az *A* csúcstól, mint (1) a *B* csúcs; (2) a *C* csúcs; (3) a *G* csúcs;

b) az *AB* éltől, mint (1) az *E* csúcs (2) a *H* csúcs;

c) az *ABCD* laptól, mint az *E* csúcs!



7.02. Milyen háromszöget határoz meg a kocka adott három csúcsa?

a) *A*, *B*, *F* csúcs; *b)* *A*, *B*, *G* csúcs;

c) *A*, *C*, *H* csúcs.

7.03. A kocka *E* és *G* pontja egy háromszög két csúcsa. Keress a kockán egy harmadik csúcsot úgy, hogy a háromszög

a) derékszögű legyen; *b)* egyenlő szárú legyen;

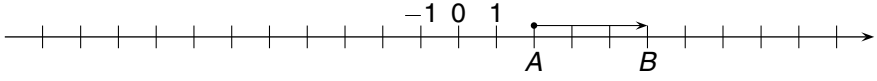
c) derékszögű egyenlő szárú legyen; *d)* szabályos háromszög legyen!

7.04. Koordináta-rendszerben a $P(2;2)$ és az $R(-2;-2)$ pontokon átmenő *e* egyenessel húzzál párhuzamos és rá merőleges egyeneseket a következő pontokon keresztül! A kapott egyenesek hol metszik az *x*, illetve az *y* tengelyt?

a) $A(6;2)$; *b)* $B(-4;2)$; *c)* $C(-7;-3)$

Vektorok

7.05. A számegyenesen felvett $\overrightarrow{AB}$ vektort ebben a feladatban jelöljük így: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{2;5}$.



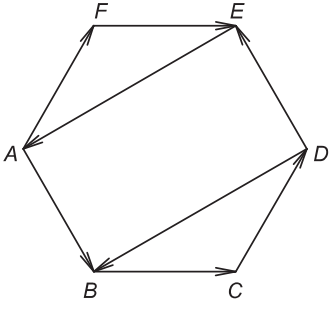
Rajzolj a számegyenesen öt olyan vektort, amely

a) egyenlő az $\overrightarrow{AB}$-ral; *b)* ellentettje az $\overrightarrow{AB}$-nak!

7.06. Az ábrán egy szabályos hatszögön megjelöltünk néhány vektort. Válassz ki közülük

a) egyenlőket;

b) ellentetteket!



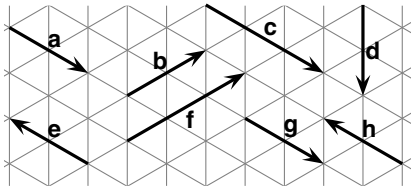
7.07. A megrajzolt vektorok közül válaszd ki

a) az **a**-val egyenlő vektorokat;

b) az **a**-val egyirányú vektorokat;

c) az **a**-val egyenlő nagyságú vektorokat;

d) az **a** ellentettjeit!

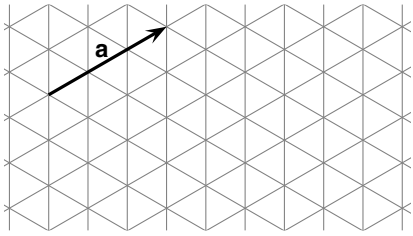


7.08. Adott az **a** vektor. Rajzold meg

a) az **a** ellentettjét;

b) az **a** kétszeresét;

c) az **a**-val 60°-os szöget bezáró, vele egyenlő hosszúságú vektort!



7.09. Rajzold meg derékszögű koordináta-rendszerben az OP-t, ha $O(0;0)$, $P(2;4)$! Rajzolj olyan vektort, amelynek kezdőpontja

a) $A(4;3)$, és egyenlő az $\overrightarrow{OP}$-ral;

b) $B(5;2)$, és ellentettje az $\overrightarrow{OP}$-nak;

c) $C(-3;-1)$, és kétszerese az $\overrightarrow{OP}$-nak!

Határozd meg minden esetben a vektor végpontjának a koordinátáit!



7.10. Lépegess a számegyenesen! Hová jutsz, ha a 0 pontból indulsz, és

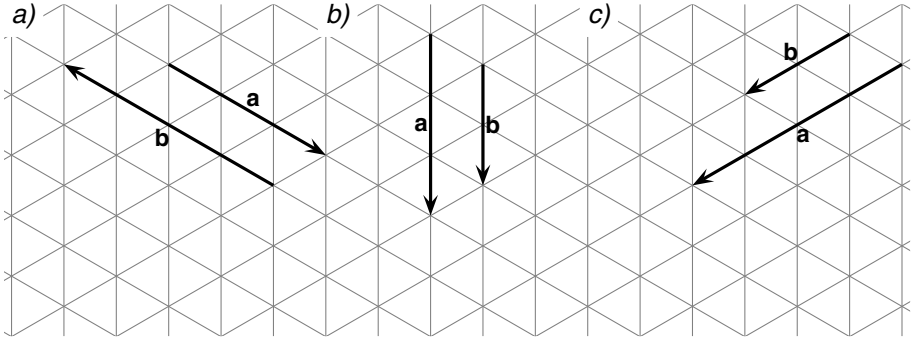
a) pozitív irányban lépsz 3-at, majd negatív irányban 5-öt;

b) negatív irányban lépsz 7-et, majd pozitív irányban 4-et;

c) negatív irányban lépsz 4-et, majd negatív irányban 5-öt?

Ábrázold vektorokkal az elmozdulásokat!

7.11. Rajzold meg az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, illetve az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektort!



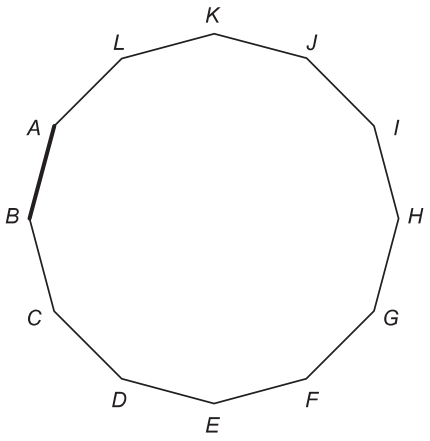
Szögek

7.12. A szabályos tizenkétszög AB oldala az A csúcsból kiinduló átlók közül melyikkel alkot

a) hegyesszöget;

b) derékszöget;

c) tompaszöget?



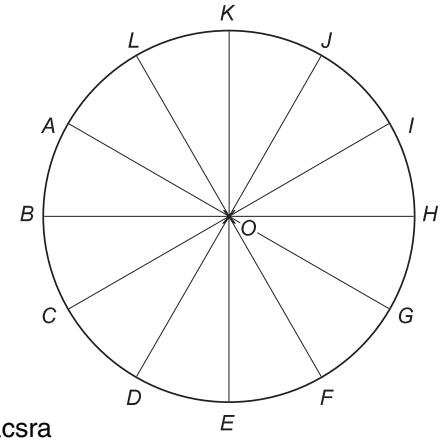
7.13. A kört a meghúzott sugarak 12 egyenlő részre osztják. Mekkora szöget zár be az AO sugárral

a) a BO sugár; *b)* a CO sugár;

c) a DO sugár; *d)* az EO sugár;

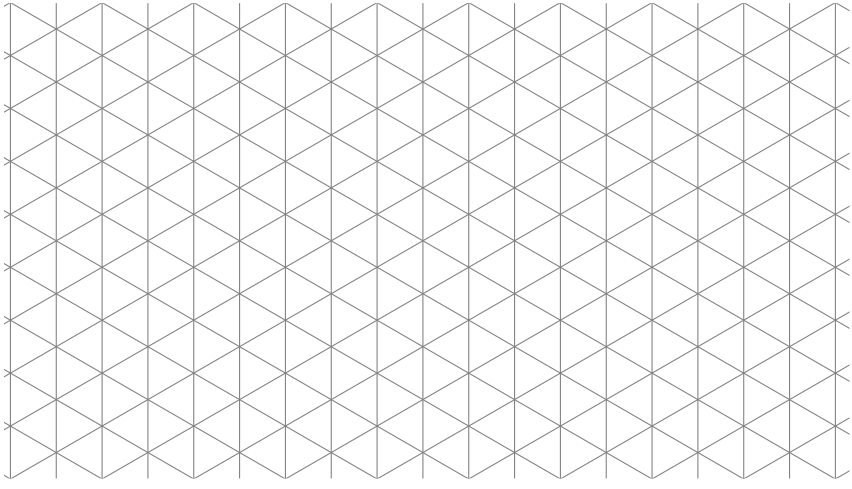
e) az FO sugár; *f)* a GO sugár?

A szögeket fejezd ki fokkal, derékszöggel, egyenesszöggel is!

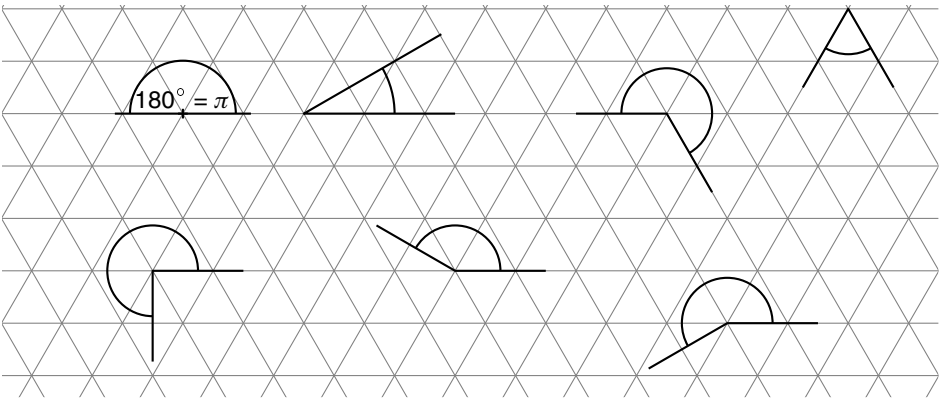


7.14. Az egyenesszög jele π. Rajzolj háromszögrácsra

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ nagyságú szöget!



7.15. Írd be, hány fokosak a megrajzolt szögek. Fejezd ki a szögek nagyságát π segítségével is!



7.16. $1^\circ = 60'$. Hány szögperc nagyságúak ezek a szögek?

a) $15^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\,'$; *b)* $150^\circ = \ldots\ldots\ldots\,'$; *c)* $60^\circ = \ldots\ldots\ldots\,'$

7.17. Hány fokosak az alábbi szögek?

a) $1200' = \ldots\ldots\ldots\,^\circ$; *b)* $300' = \ldots\ldots\ldots\,^\circ$; *c)* $150' = \ldots\ldots\ldots\,^\circ$;

d) $270' = \ldots\ldots\ldots\,^\circ$; *e)* $615' = \ldots\ldots\ldots\,^\circ$; *f)* $504' = \ldots\ldots\ldots\,^\circ$

7.18. $1' = 60''$. Fejezd ki szögmásodperccel az alábbi szögek nagyságát!

a) $1{,}5' = \ldots\ldots\ldots\,''$; *b)* $50' = \ldots\ldots\ldots\,''$; *c)* $150' = \ldots\ldots\ldots\,''$;

d) $1^\circ 10' = \ldots\ldots\ldots\,''$; *e)* $4^\circ 20' 40'' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Elfordulás mérése irányított szöggel

7.19. Egy játék óra pontosan déli 12 órát mutat. A nagymutatót elforgatjuk egy adott szöggel. Mennyi időt mutat az óra az egyes fordulatok után?

a) $+30^\circ$; *b)* -45°; *c)* -15°; *d)* $+60^\circ$

7.20. Mekkora szöggel kell elmozdítani az óra nagymutatóját, ha pontatlanságát helyesbítjük, és az óra

a) 10 percet siet; ..... *b)* 10 percet késik; .....

c) 15 percet siet; ..... *d)* 15 percet késik; .....

e) 1,5 percet siet; ..... *f)* 1,5 percet késik; .....

g) 6 percet siet; ..... *h)* 6 percet késik; .....

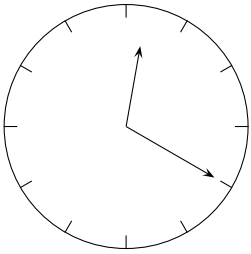
i) 30 percet siet; ..... *j)* 30 percet késik; .....

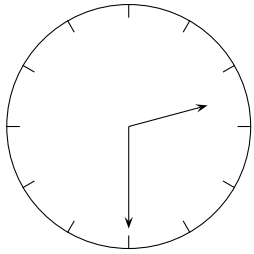
k) 45 percet siet; ..... *l)* 45 percet késik; .....

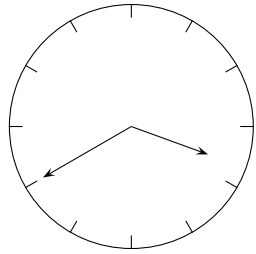
m) 60 percet siet; ..... *n)* 60 percet késik; .....

o) 90 percet siet; ..... *p)* 90 percet késik? .....

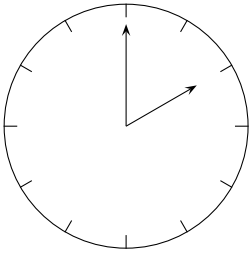
7.21. Az óra kis- és nagymutatója déli 12 órakor fedi egymást. Ehhez a helyzethez viszonyítva hány fokkal fordult el a kis- és nagymutató? Jelöld meg a szögeket!

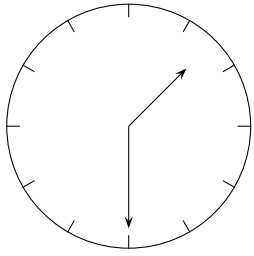
a) 

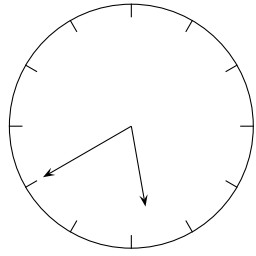
b) 

c) 

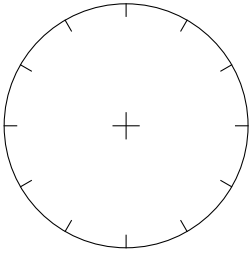
7.22. Hány fokos szöget zárnak be egymással az óra mutatói? Jelöld meg a szögeket!

a) 

b) 

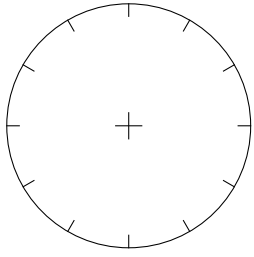
c) 

7.23. Rajzold meg a mutatók állását, ha az egyik mutató déli 12 óra óta az adott szöggel fordult el! Számítsd ki a másik mutató elfordulásának a mértékét is!

a) 

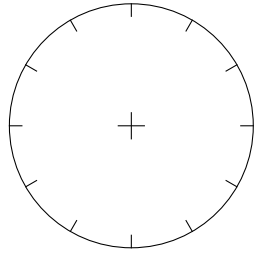
Kismutató: -30°-kal

Nagymutató: .....

b) 

Kismutató: .....

Nagymutató: -270°-kal

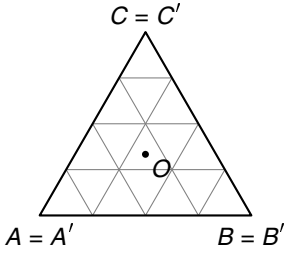
c) 

Kismutató: -20°-kal

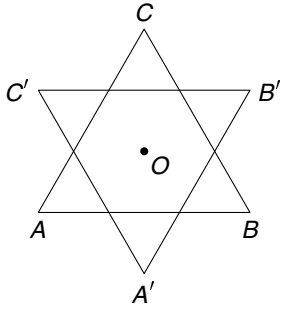
Nagymutató: .....

7.24. Hány fokkal fordulhatott el a szabályos háromszög, ha az eredeti háromszög és az elforgatott háromszög

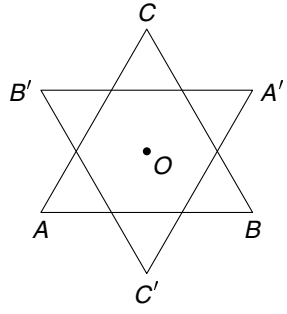
a) fedi egymást;



b) ilyen helyzetben van:

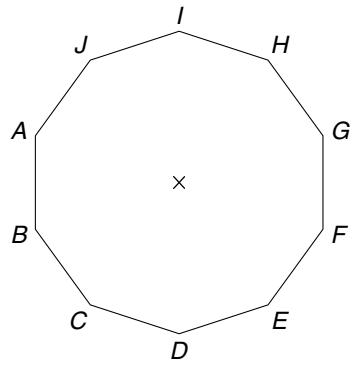


c) ilyen helyzetben van:



Síkidomok, sokszögek

7.25. Határozd meg az ábrán látható szabályos tízszög kerületét!



7.26. Egy körvonalat 10 egyenlő részre osztottunk. Az osztópontok közül válassz ki hármat úgy, hogy azokat összekötve a kapott háromszög

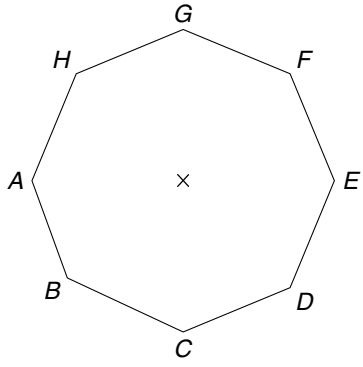
a) hegyesszögű legyen;

b) derékszögű legyen;

c) tompaszögű legyen;

d) tompaszögű és egyenlő szárú legyen!

7.27. Határozd meg az ábrán látható szabályos nyolcszög kerületét!



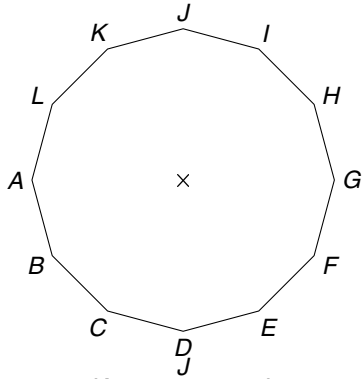
7.28. Egy körvonalat nyolc egyenlő részre osztottunk.
A nyolc pontból válassz ki négyet úgy, hogy azokat összekötve a kapott négyszögnek

a) ne legyen szimmetriatengelye;

b) pontosan egy szimmetriatengelye legyen;

c) legalább két szimmetriatengelye legyen!

7.29. Határozd meg az ábrán látható szabályos tizenkétszög kerületét!



7.30. Egy körvonalat 12 egyenlő részre osztottunk. A 12 pontból válassz ki ötöt úgy, hogy azokat összekötve a kapott ötszögnek

a) legyen szimmetriatengelye;

b) legyen derékszöge;

c) legyen párhuzamos oldalpárja!

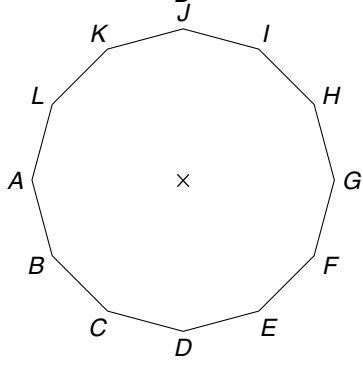
7.31. A 12 pont egyenlő részre osztja a körvonalat. Válassz ki 6 pontot úgy, hogy azokat összekötve a hatszögnek

a) egy szimmetriatengelye legyen;

b) ne legyen szimmetriatengelye;

c) a lehető legtöbb szimmetriatengelye legyen!

7.32. Határozd meg az előző feladatban megrajzolt hatszögek kerületét!



Háromszögek

7.33. *a)* Egy egyenlő szárú háromszög minden oldalának mérőszáma egész szám. A kerülete 24 cm. Mekkorák lehetnek az oldalai?

b) Egy háromszög minden oldalának mérőszáma egymástól különböző egész szám. A kerülete 24 cm és az egyik oldala 8 cm. Mekkorák lehetnek az oldalai?

7.34. Egy háromszögnek van két egyenlő szöge. Oldalainak mérőszáma egész szám, kerülete 16 cm. Mekkorák lehetnek az oldalai?

7.35. Egy háromszög két csúcsa a koordináta-rendszerben adott $A(0;4)$ és $B(4;0)$ pont. Keress az $y = 10 - x$ egyenes első síknegyedben lévő részén olyan C rácspontot, hogy a háromszög

a) hegyesszögű; *b)* tompaszögű;

c) derékszögű; *d)* egyenlő szárú legyen!

7.36. Rajzold meg a koordináta-rendszerben az $y = 2x+6$ egyenlettel adott a egyenest!

a) Hol metszi az egyenes az x és az y tengelyt (a metszéspontokat jelölje A, illetve B)?

b) A metszéspontok és az origó milyen háromszöget határoznak meg?

c) Hány négyzet (1×1-es oldalú) a területe?

7.37. Az alábbi szöghármasok közül melyek lehetnek egy háromszög belső szögei?

a) $38^\circ;\ 95^\circ;\ 100^\circ$; *b)* $38^\circ;\ 42^\circ;\ 100^\circ$; *c)* $30^\circ;\ 60^\circ;\ 90^\circ$;

d) $56^\circ;\ 72^\circ;\ 42^\circ$; *e)* $60^\circ;\ 60^\circ;\ 60^\circ$; *f)* $100^\circ;\ 120^\circ;\ 140^\circ$

7.38. *a)* Egy egyenlő szárú háromszög fokokban mért szögeinek mérőszáma 20-szal osztható szám. Mekkorák lehetnek a szögei?

b) Egy derékszögű háromszög fokokban mért szögeinek mérőszáma 15-tel osztható szám. Mekkorák lehetnek a szögei?

7.39. Az alábbi szöghármasok közül melyek lehetnek egy háromszög egy külső szöge és a nem mellette fekvő két belső szög?

a) $80^\circ;\ 50^\circ;\ 30^\circ$; *b)* $70^\circ;\ 60^\circ;\ 50^\circ$; *c)* $120^\circ;\ 120^\circ;\ 120^\circ$;

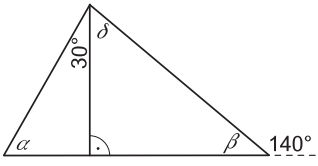
d) $30^\circ;\ 60^\circ;\ 90^\circ$; *e)* $55^\circ;\ 55^\circ;\ 70^\circ$; *f)* $65^\circ;\ 65^\circ;\ 130^\circ$

7.40. Mekkorák a háromszög belső szögei, ha az arányuk

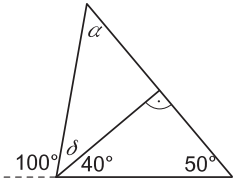
a) 2 : 3 : 4; *b)* 5 : 6 : 7; *c)* 5 : 5 : 8; *d)* 1 : 1 : 3?

7.41. A megadott szögekből számítsd ki a görög betűkkel jelzett szögeket!

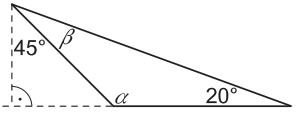
a)



b)

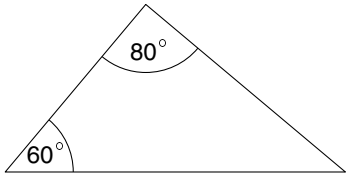


c)

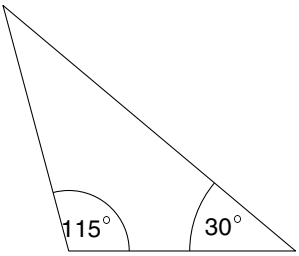


7.42. A következő, nem mérethelyes ábrákon rajzold meg a háromszög külső szögeit, és határozd meg a nagyságukat!

a)



b)



7.43. Az alábbi szöghármasok közül melyek lehetnek egy háromszög külső szögei?

a) 50°; 60°; 70°; *b)* 80°; 120°; 160°; *c)* 200°; 80°; 80°;

d) 140°; 70°; 70°; *e)* 120°; 120°; 120°; *f)* 180°; 100°; 80°

7.44. Mely három hosszúságadat lehet egy háromszög három oldala? Az adott három oldalból szerkeszd is meg a háromszöget!

a) 5 cm, 5 cm, 7 cm; *b)* 4 cm, 3 cm, 5 cm;

c) 5 cm, 5 cm, 3 cm; *d)* 7 cm, 3 cm, 3,5 cm

Mérd meg a megszerkesztett háromszögek szögeit! Számítsd ki a háromszögek kerületét! A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a háromszögek területét!

7.45. Adott a háromszög kerülete és az oldalak aránya. Számítsd ki az oldalakat, és szerkeszd meg a háromszöget! Készíts vázlatrajzot!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*
Kerület (cm)	10,8	9,8	13,2	18	10,5	0,5	14	15
Az oldalak aránya	2 : 3 : 4	2 : 2 : 3	3 : 3 : 5	3 : 4 : 5	3 : 5 : 7	3 : 4 : 8	1 : 3 : 3	3 : 3 : 3

7.46. Adott egy háromszög legrövidebb oldala és az oldalak aránya. Számítsd ki az oldalakat, és szerkeszd meg a háromszöget! Készíts vázlatrajzot!

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*
A legrövidebb oldal (cm)	3	4,5	3,2	3,6	1	2,8	4,5
Az oldalak aránya	2 : 3 : 4	3 : 5 : 5	2 : 3 : 3	3 : 4 : 5	1 : 4 : 4	2 : 4 : 5	2 : 2 : 5

7.47. Szerkeszthető-e a következő adatokból háromszög? Ha igen, akkor szerkeszd meg!

a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 90°$; *b)* $a = 1$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 120°$;

c) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = 300°$; *d)* $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = 30°$

7.48. Szerkeszthető-e következő adatokból háromszög? Ha igen, akkor szerkeszd meg!

a) $a = 4$ cm, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$; *b)* $a = 3$ cm, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$;

c) $b = 5$ cm, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$; *d)* $c = 2$ cm, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

7.49. Szerkeszthető-e a következő adatokból háromszög? Ha igen, akkor szerkeszd meg!

a) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 75^\circ$; *b)* $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 60^\circ$;

c) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$; *d)* $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 30^\circ$

7.50. Szerkessz háromszöget! Csak körzőt és vonalzót használj! Készíts vázlatrajzot!

a) $a = 4$ cm; $B\sphericalangle = 75^\circ$; $C\sphericalangle = 60^\circ$;

b) $a = 5$ cm; $b = 6$ cm; $\gamma = 45^\circ$;

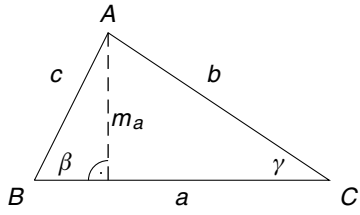
c) $a = 45$ mm; $m_a = 3$ cm; $B\sphericalangle = 75^\circ$;

d) $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; $c = 3$ cm;

e) $a = c = 6$ cm; $\gamma = 30^\circ$;

f) $a = c = 6$ cm; $\beta = 30^\circ$;

g) $b = 6{,}8$ cm; $c = 4$ cm; $\beta = 90^\circ$



Határozd meg a megszerkesztett háromszögek kerületét!

Négyszögek

7.51. Egészítsd ki a következő nyitott mondatokat úgy, hogy a kapott állítások igazak legyenek!

a) Ha egy deltoid átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor az .....

b) Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye, akkor az ..... vagy .....

c) Ha egy paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, akkor az .....

d) Ha egy paralelogramma átlóinak hossza különböző, akkor az nem lehet .....

e) Ha egy téglalap az átlóira is szimmetrikus, akkor az .....

f) Ha egy rombusz négyzet, akkor ..... egyenlők.

7.52. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Hamis állítás esetén mondj ellenpéldát!

A: Minden paralelogrammának van párhuzamos oldalpárja.

B: Van olyan téglalap, amely húrtrapéz.

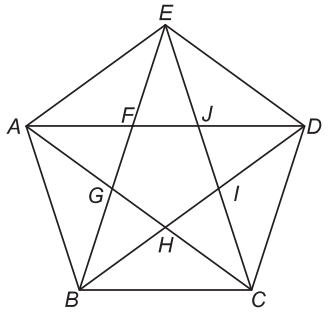
C: Ha egy trapéz átlói egyenlők, akkor az húrtrapéz.

D: Minden deltoid átlói felezik egymást.

E: Ha egy paralelogramma átlói egyenlők, akkor az négyzet.

F: Van olyan négyszög, amelynek pontosan három szimmetriatengelye van.

7.53. Egy szabályos ötszögben meghúztuk az átlókat. Keress az ábrán olyan négyszöget, amelyre igaz, hogy

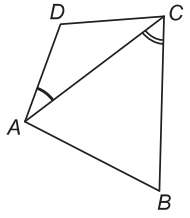


a) deltoid; *b)* rombusz;

c) deltoid, de nem rombusz!

(A négyszög csúcsaihoz írt betűvel válaszolj!)

7.54. Az $ABCD$ négyszöget az AC átló két egyenlő szárú háromszögre bontja, $AD = DC$ és $AC = BC$. Mekkorák a négyszög belső szögei, ha



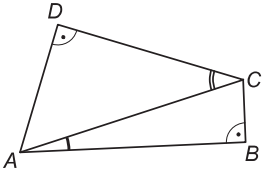
a) $DAC\sphericalangle = 30^\circ$ és $ACB\sphericalangle = 40^\circ$;

b) $DAC\sphericalangle = 40^\circ$ és $ACB\sphericalangle = 30^\circ$;

c) $DAC\sphericalangle = 60^\circ$ és $ACB\sphericalangle = 90^\circ$;

d) $DAC\sphericalangle = 60^\circ$ és $ACB\sphericalangle = 60^\circ$?

7.55. Az $ABCD$ négyszöget az AC átló két derékszögű háromszögre bontja.
Mekkorák a négyszög belső szögei, ha



a) $CAB\sphericalangle = 20^\circ$ és $ACD\sphericalangle = 40^\circ$;

b) $CAB\sphericalangle = 30^\circ$ és $ACD\sphericalangle = 45^\circ$;

c) $CAB\sphericalangle = 45^\circ$ és $ACD\sphericalangle = 45^\circ$;

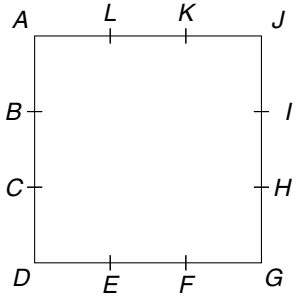
d) $CAB\sphericalangle = 15^\circ$ és $ACD\sphericalangle = 75^\circ$?

7.56. Koordináta-rendszerben megadtuk egy négyszög három csúcsát. Ezek: $A(1;1)$, $B(9;1)$, $C(3;5)$. Keress negyedik csúcsot (rácspontot) úgy, hogy a négyszög

a) deltoid; *b)* húrtrapéz;

c) paralelogramma; *d)* derékszögű trapéz legyen!

7.57. Egy négyzet oldalait harmadoltuk. A csúcsok és az osztópontok közül válassz ki négyet úgy, hogy azokat összekötve a kapott négyszög



a) újabb négyzet;

b) téglalap, de ne négyzet;

c) paralelogramma, de ne téglalap;

d) deltoid, de ne négyzet legyen!

7.58. Az alábbiak közül melyik szögnégyes lehet egy négyszög négy szöge?

a) 130°, 50°, 70°, 100°; *b)* 90°, 60°, 120°, 90°;

c) 200°, 40°, 40°, 80°; *d)* 45°, 45°, 45°, 45°

7.59. Mekkorák a négyszög belső szögei, ha igaz, hogy

a) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$, $\delta = 4\alpha$;

b) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 4\alpha$, $\delta = 5\alpha$;

c) $\beta = \alpha + 20^\circ$, $\gamma = \alpha + 40^\circ$, $\delta = \alpha + 60^\circ$?

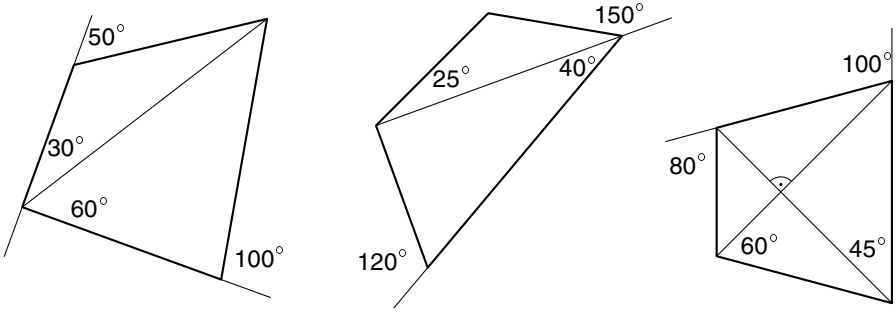
7.60. Egy háromszög *a* oldala 4 cm, a rajta lévő két szög $\beta = 60^\circ$ és $\gamma = 40^\circ$. Szerkeszd meg a háromszöget, és tükrözd az egyik oldalára! Mekkorák a keletkezett négyszög belső szögei, ha a háromszöget

a) az *a* oldalára; *b)* a *b* oldalára; *c)* a *c* oldalára tükrözzük?

7.61. Húzz egy kört és abba négy sugarat úgy, hogy azok rendre 60°-os, 70°-os, 80°-os és 150°-os szöget zárjanak be! Kösd össze a körvonalon kapott négy pontot! Számítsd ki a négyszög belső szögeit!

7.62. Mekkorák a négyszög belső szögei?

a) *b)* *c)*



7.63. A négyszöget egyik átlója egy egyenlő szárú és egy egyenlő oldalú háromszögre bontja. Az átló az egyenlő szárú háromszög alapja.

a) Szerkeszd meg a négyszöget, ha az egyenlő oldalú háromszög oldala 4 cm, az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge 75°!

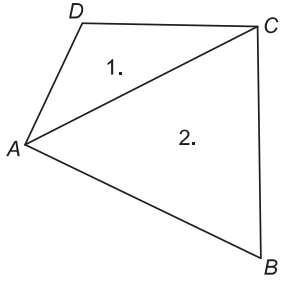
b) Mekkorák a kapott négyszög belső és külső szögei?

c) A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a négyszög területét!

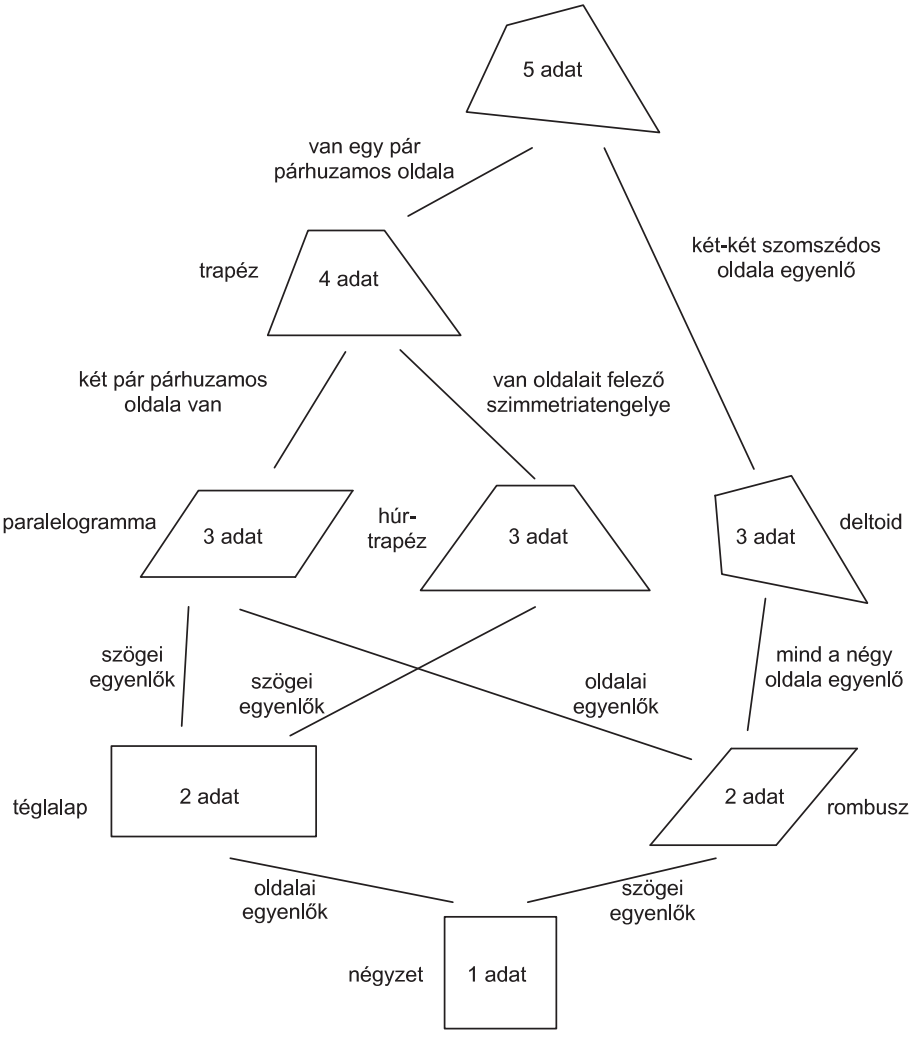
7.64. Hány adatából szerkeszthető meg a négyszög?

Megoldás

A négyszöget egy átlója két háromszögre bontja. Az első háromszög három adatból szerkeszthető meg, a második háromszöghöz már csak két adat kell, mert a két háromszögnek van egy közös oldala (a rajzon az *AC* átló). Ezért a négyszög 5 adatból megszerkeszthető. Ha a négyszögről bizonyos speciális tulajdonságokat már ismerünk, akkor kevesebb adat is elegendő.



A négyszög megszerkesztéséhez ennyi adat szükséges:



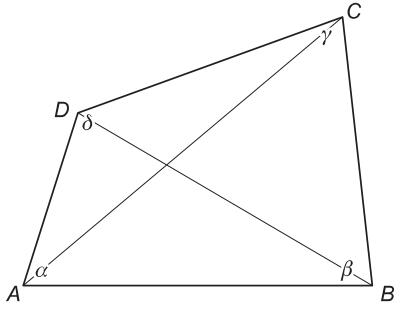
Szerkessz négyszöget a következő adatokból!

a) $AB = 4$ cm; $BC = 5$ cm; $AD = 5$ cm;
$\alpha = 105^\circ$; $\beta = 75^\circ$

b) $AB = 4$ cm; $BC = 5$ cm; $AC = 6$ cm;
$AD = 3$ cm; $BD = 6{,}4$ cm

c) $AB = 3$ cm; $BC = 3$ cm;
$\alpha = 75^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\gamma = 120^\circ$

Készíts vázlatrajzot, és azon tervezd meg a szerkesztés menetét!



7.65. Egy konvex négyszög három csúcsának koordinátái: $A(1;4)$, $O(0;0)$, $B(4;1)$. A négyszögről még a következőket tudjuk:

1. Az OA és OB szakaszok oldalak.
2. A negyedik csúcs is az 1. síknegyedben lévő rácspont.
3. Nincs az OA szakasznál hosszabb oldala.

Add meg a negyedik csúcspontot úgy, hogy a négyszög

a) rombusz; *b)* deltoid, de ne rombusz; *c)* ne deltoid legyen!

A negyedik csúcs koordinátáival válaszolj! Hány megoldást találtál?

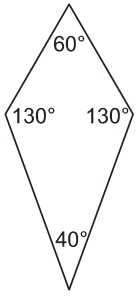
7.66. Szerkessz háromszöget két oldalából és az általuk közbezárt szögből! $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $\gamma = 135^\circ$. Tükrözd a háromszöget

a) az a oldal; *b)* a b oldal; *c)* a c oldal felezőmerőlegesére!

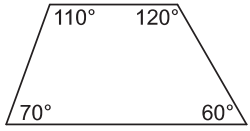
Állapítsd meg a kapott alakzat belső szögeit számítással vagy méréssel! Milyen alakzatokat kaptál?

7.67. A következő négyszögeket úgy kaptuk, hogy egy háromszöget egy egyenessel kettévágtunk. Mekkorák lehettek az eredeti háromszög belső szögei?

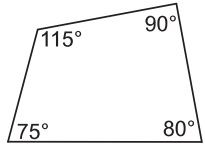
a)



b)



c)

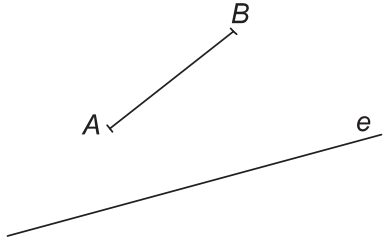


7.68. Az AB szakasz egy négyszög egyik oldala, a másik két csúcs rajta van az e egyenesen. Keress az egyenesen két pontot úgy, hogy a négyszögnek

a) legyen három egyenlő oldala;

b) legyen két derékszöge;

c) húrtrapéz legyen!



7.69. Melyik állítás igaz, melyik hamis? A hamis állításokhoz rajzolj ellenpéldát!

A: Ha a négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a négyszög deltoid.

B: Ha a négyszög átlói egyenlők, akkor a négyszög téglalap.

C: Ha a négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

D: Ha a négyszög átlói merőlegesen felezik egymást, akkor a négyszög deltoid.

E: Ha a rombusz átlói egyenlők, akkor a rombusz négyzet.

F: Ha a deltoid paralelogramma, akkor az négyzet.

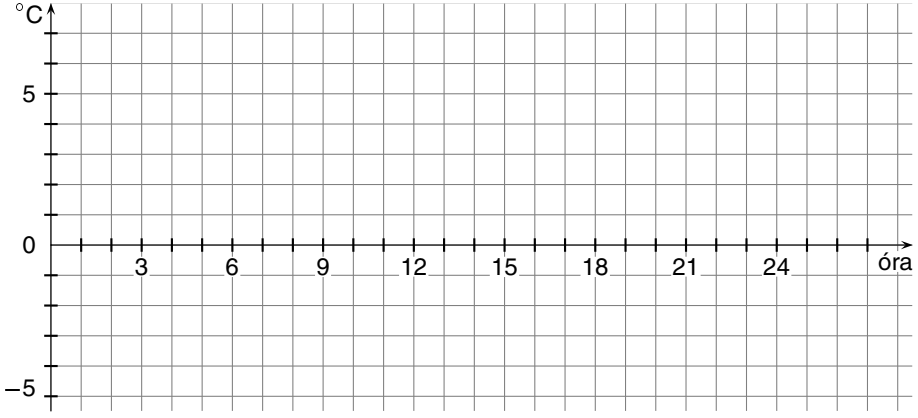
8. Statisztika, valószínűség

Statisztika

8.01. A napi középhőmérsékletet általában nyolc adatból számítjuk. Egy februári napon a következő adatokat mérték:

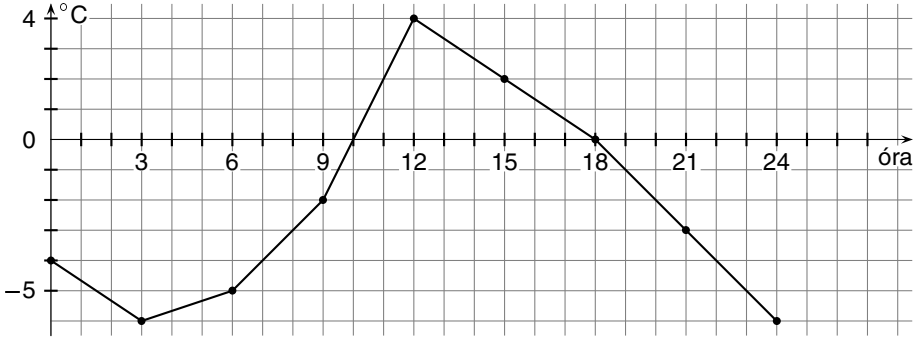
Időpont (óra)	3	6	9	12	15	18	21	24
Hőmérséklet (°C)	−2	−4	3	8	8	6	4	1

a) Ábrázold grafikonon a hőmérséklet változását! (Az előző nap 24. órájában −1 °C volt a hőmérséklet.)



b) Számítsd ki az adatok számtani közepét, vagyis a napi középhőmérsékletet!

8.02. Egy januári napon a hőmérséklet alakulása:



a) Töltsd ki a táblázatot!

Időpont (óra)								
Hőmérséklet (°C)								

b) Számítsd ki a napi középhőmérsékletet!

8.03. A statisztikai zsebkönyv alapján hasonlítsd össze néhány európai ország 1985. évi adatait! Az ezer lakosra jutó személygépkocsik számát táblázatban adtuk meg.

A feltüntetett tizenkét ország közül hányadikak voltunk az ezer lakosra jutó személygépkocsik számában?

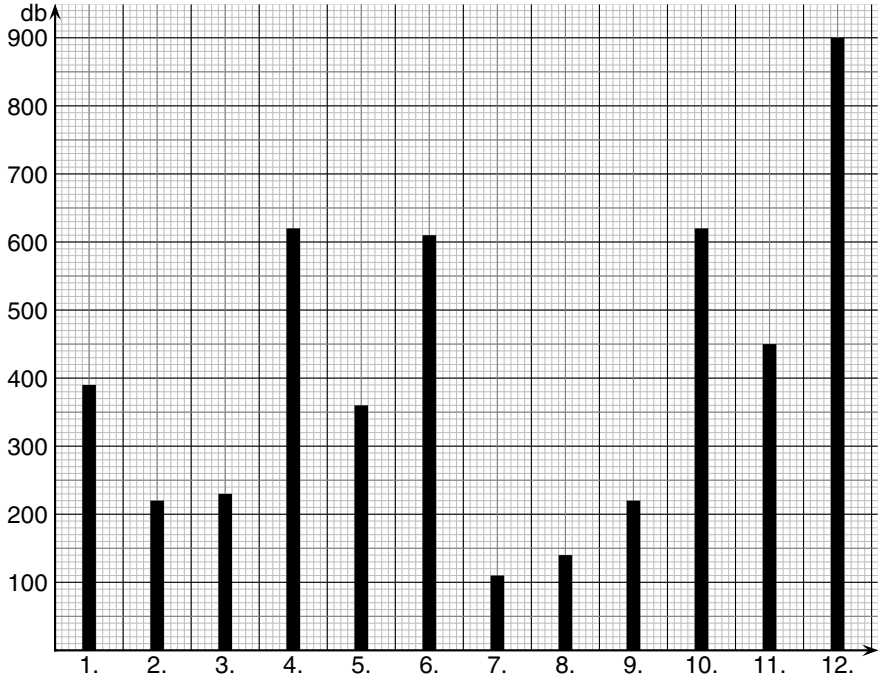
Határozd meg, hogy az egyes országokban az ezer lakosra jutó személygépkocsik száma hány százaléka volt az USA megfelelő adatának, ha az USA-ban 540 személygépkocsi jutott ezer lakosra!

(1985-ben még két Németország volt és Csehszlovákia egy ország volt.)

Sorszám	Ország	Gépkocsi		Telefon	
		db	%	db	%
1.	Ausztria	335			
2.	Bulgária	115			
3.	Csehszlovákia	165			
4.	Franciaország	454			
5.	Görögország	127			
6.	Hollandia	340			
7.	Lengyelország	66			
8.	Magyarország	135			
9.	Német D. K.	188			
10.	Német Sz. K.	424			
11.	Olaszország	392			
12.	Svédország	456			

8.04. Az ezer lakosra jutó távbeszélő-állomások számát grafikonon tüntettük fel. A grafikon alapján töltsd ki az előző feladatban lévő táblázatot!

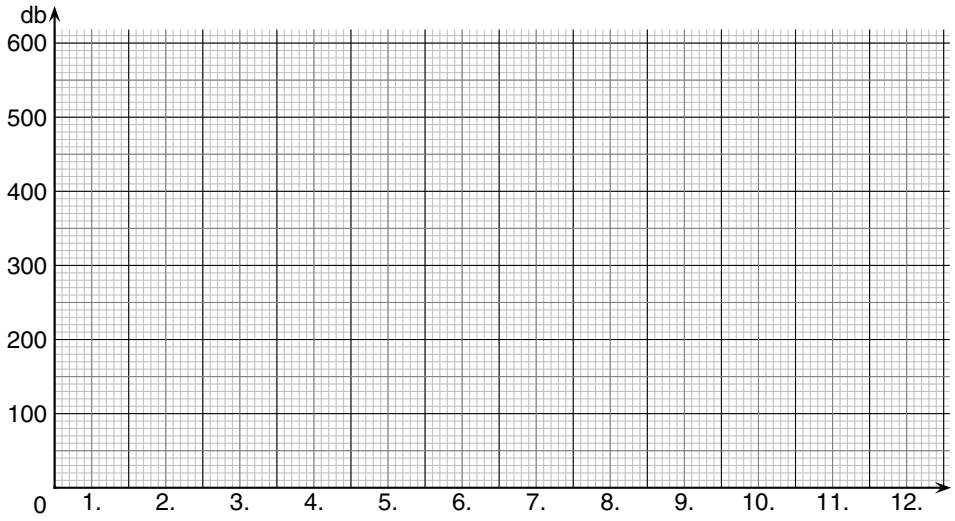
Az ezer lakosra jutó távbeszélő-állomások száma 1985-*ben:*



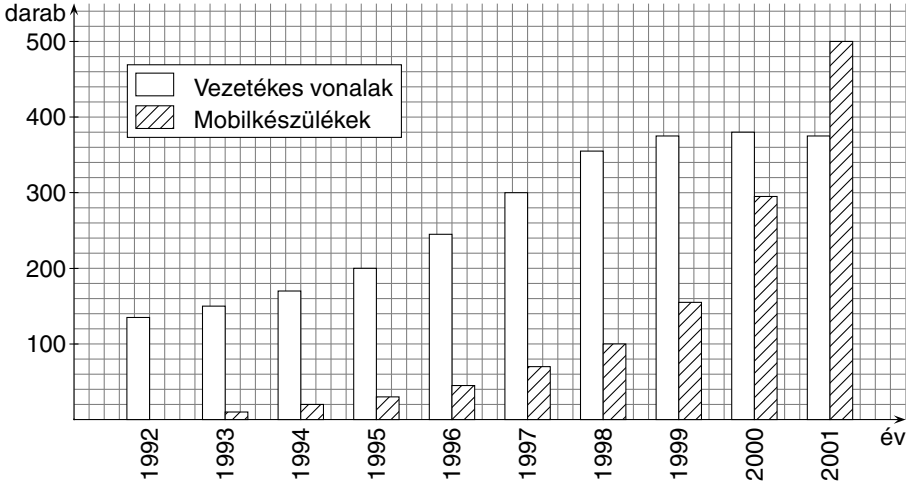
8.05. Határozd meg, hogy az egyes országokban az ezer lakosra jutó telefonok száma hány százaléka volt az USA megfelelő adatának, ha az USA-ban 760 telefon jutott ezer lakosra!

8.06. A **8.03.** feladatban látható táblázat alapján készíts grafikont! Szemléltesd oszlopdiagrammal az adatokat!

Az ezer lakosra jutó személygépkocsik száma 1985-*ben:*



8.07. Az ezer lakosra jutó közcélú távbeszélő-hálózat alakulása Magyarországon:

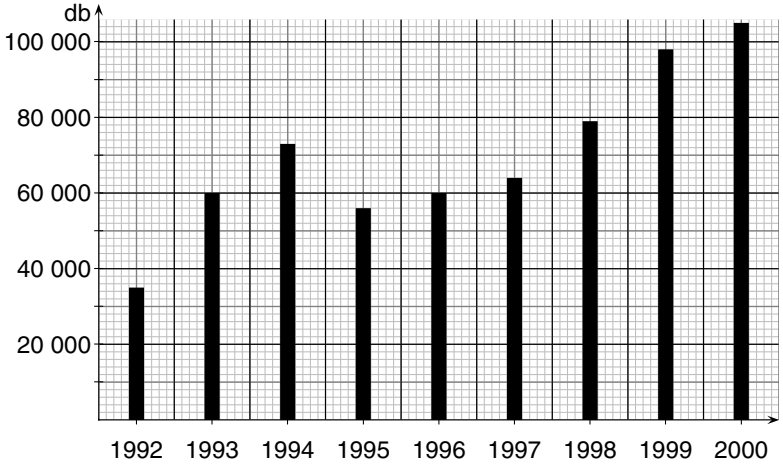


A grafikon alapján töltsd ki a táblázatot! Az ezer lakosra jutó távbeszélő-állomások száma:

Év	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Vezetékes vonal										
Mobilkészülék										

1985-ben jelentős számú „iker” állomás volt, ezért ezek az adatok nem hasonlíthatók össze az 1985-ös adatokkal.

8.08. Új személygépkocsi értékesítése Magyarországon (a Suzuki adatai nélkül):



a) A grafikon alapján töltsd ki a táblázatot!

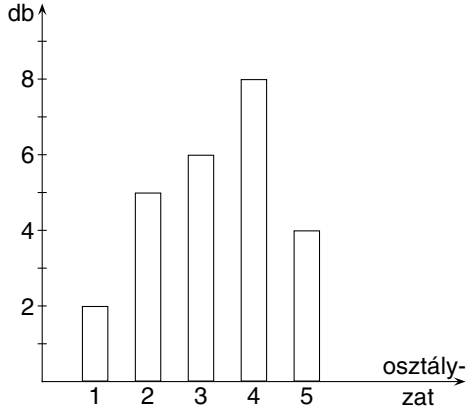
Év	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Darab									

b) A fenti mennyiségen kívül eladtak még új Suzuki gépkocsikat is. Hozzávetőlegesen hány új személygépkocsit adtak el ezekben az években?

Év	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Darab	–	13 000	16 000	12 000	14 000	16 000	24 000	31 000	28 000

c) Magyarországon mintegy 10 millió lakosa van. Hány személygépkocsi volt összesen Magyarországon 1985-ben (lásd **8.03.** feladat)? Hasonlítsd össze ezt a számot a *b)* feladatban kapott értékekkel!

8.09. Egy oszlopdiagramon ábrázoltuk egy 25 fős osztály dolgozatai eredményeinek megoszlását.



a) Olvasd le a diagramról, hogy hányan milyen érdemjegyet szereztek!

b) Add meg százalékértékben is az elért eredmények megoszlását!

c) Ábrázold *szalagdiagramon* is!

d) Ábrázold *kördiagram* segítségével is az eredmények megoszlását!

e) Számítsd ki az eredmények számtani átlagát!

8.10. Olvasd le a *szalagdiagramról*, hogy a tanulók hány százaléka jár 1. matematika szakkörre; 2. sportkörre; 3. énekkarra!

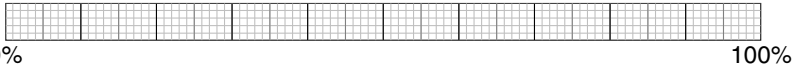


8.11. Készíts *szalagdiagramot!*

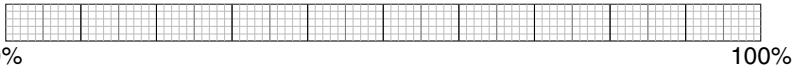
a) Egy 7. osztályba 11 lány és 14 fiú jár.
Az osztály hány százaléka lány? Hány százaléka fiú? Szemléltesd a lányok és a fiúk százalékban kifejezett arányát!



b) Egy 7. osztályba 32 tanuló jár, ebből 28-an írtak matematikadolgozatot. Szemléltesd a dolgozatot megírók, illetve a hiányzók arányát!



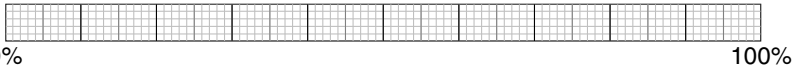
c) Szemléltesd, hogy a tanulók hány százaléka kapott jeles, jó stb. osztályzatot, ha az érdemjegyek *eloszlása*: 3 jeles; 7 jó; 14 közepes; 4 elégséges!



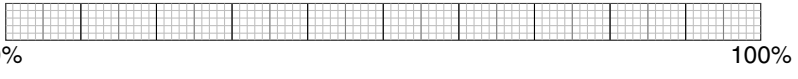
8.12. *a)* Ábrázold szalagdiagrammal saját osztályodban a lányok és a fiúk százalékban kifejezett arányát! (A százaléklábat egész számra kerekítve határozd meg.)



b) Szemléltesd, hogy az osztályodban hatodik osztály év végén a tanulók hány százaléka kapott elégtelent, elégségest, közepest, jót, jelest matematikából!



c) Szemléltesd a hatodik osztályos történelemosztályzatok megoszlását!



d) Szemléltesd a hatodik osztályos énekosztályzatok megoszlását!



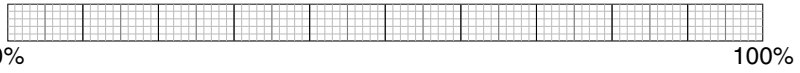
e) Hasonlítsd össze a különböző tantárgyakból elért eredményeket!

8.13. *a)* Egy 24 fős osztályból a szakiskolákba, szakközépiskolákba, illetve gimnáziumokba jelentkezők aránya 3 : 4 : 1. Szemléltesd ezt az arányt!



A tanulók hány százaléka jelentkezett szakiskolába; szakközépiskolába; gimnáziumba?

b) Egy iskola felső tagozatán a nyelvtagozatos, matematika tagozatos, illetve normál osztályba járó tanulók aránya 3 : 2 : 5.
Szemléltesd ezt az arányt!

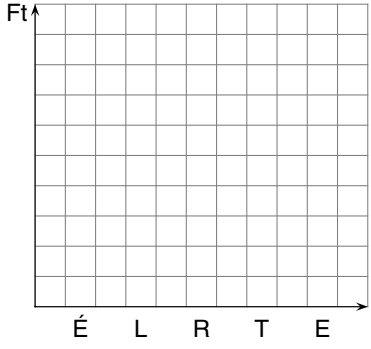


A tanulók mekkora része jár nyelvtagozatos; matematika tagozatos; normál osztályba? (A törteket írd föl tovább nem egyszerűsíthető alakban is!)
A tanulók hány százaléka jár nyelvtagozatos; matematika tagozatos; normál osztályba?

8.14. Egy család évi nettó jövedelme 2 500 000 Ft volt. Ebből élelmiszerre (É) költöttek 500 000 Ft-ot, tisztálkodásra és a lakás fenntartására (L) 800 000 Ft-ot, ruházkodásra (R) 400 000 Ft-ot, tartós cikkekre (T) 600 000 Ft-ot, egyebekre (E) 200 000 Ft-ot.

a) Készíts oszlopdiagramot a fenti adatokból!

b) Készíts szalagdiagramot a fenti adatokból!





8.15. 1999-ben $4{,}0 \cdot 10^7$ gépkocsit gyártottak a világon. Amerikában $1{,}12 \cdot 10^7$ darabot, Ázsiában összesen $1{,}16 \cdot 10^7$-t, Európában $1{,}66 \cdot 10^7$-t, Afrikában és Ausztráliában összesen $6 \cdot 10^5$ darabot.
Ábrázold szalagdiagramon a gépkocsigyártás százalékos megoszlását az egyes területek között!

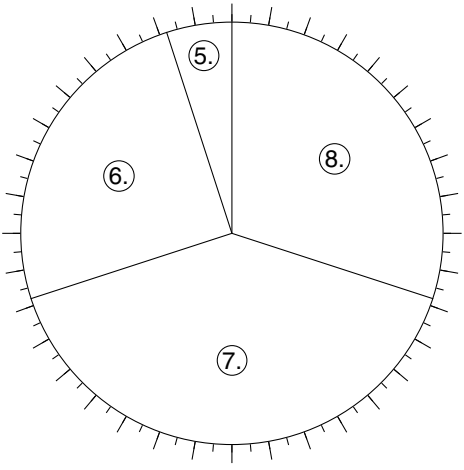


8.16. *a)* Hány fok a teljesszög 1%-a; 10%-a; 15%-a; 25%-a; 45%-a?

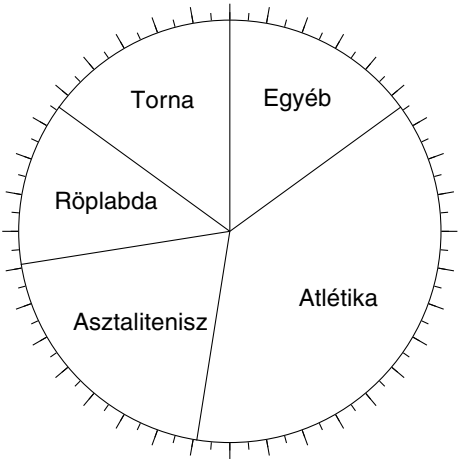
b) Hány százaléka a teljesszögnek a 18°; 72°; 144°; 135°?

8.17. A kördiagram segítségével állapítsd meg, hogy a sportkörös tanulók hány százaléka jár az 5., a 6., a 7. vagy a 8. osztályba, illetve hány százalékuk vesz részt az egyes szakosztályok munkájában! Hány tanulót jelent ez, ha összesen 150 sportkörös tanuló van. (A kördiagram kerületét 5°-onként beosztottuk.)

Osztályok szerinti megoszlás:

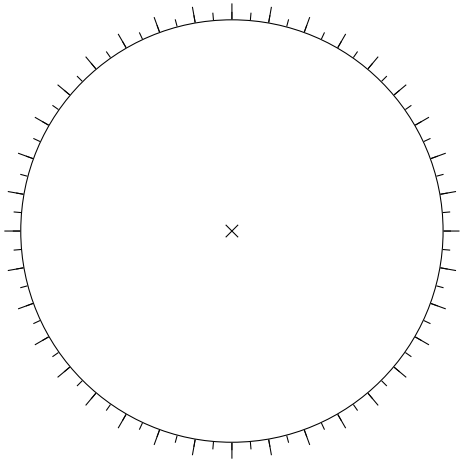


Szakosztályok szerinti megoszlás:

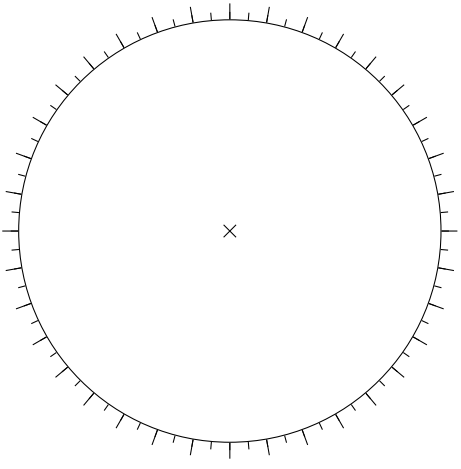


8.18. Készíts kördiagramot a következő adatok alapján! (A körív kerületét 5°-onként beosztottuk.)

Egy erdő faállománya
35% tölgy; 45% cser; 5% éger;
15% egyéb.

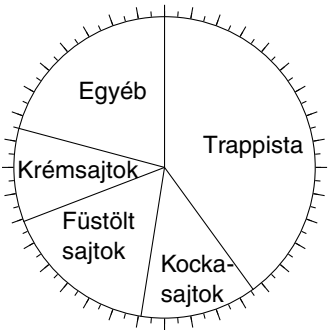


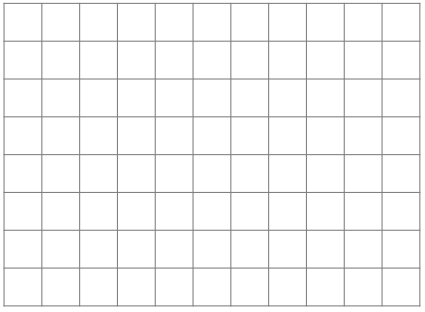
Egy tóban a halállomány
22,5%-a ponty; 55%-a keszeg;
5%-a süllő; 17,5%-a egyéb.



8.19. A következő kördiagram egy üzlet sajteladásai alapján készült.

a) Mennyi sajtot adtak el összesen, illetve az egyes fajtákból, ha tudjuk, hogy 12 kg fogyott a krémsajtokból?





b) Számítsd ki, hogy az egyes sajtfélék hány százalékát tették ki az összes sajtforgalomnak?

c) Készíts az eladási számok alapján oszlopdiagramot!

d) Készíts szalagdiagramot!



8.20. Az iskolai kirándulás előtt megkérdezték a tanulókat arról, hogy hova menjenek együtt. A kapott számokat szalagdiagramon ábrázoltuk.

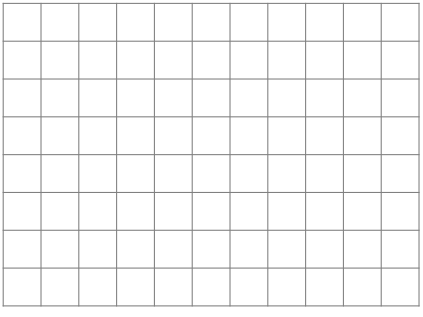
Strandfürdő	Nagyváros	Hegyek	Kerékpártúra	Más

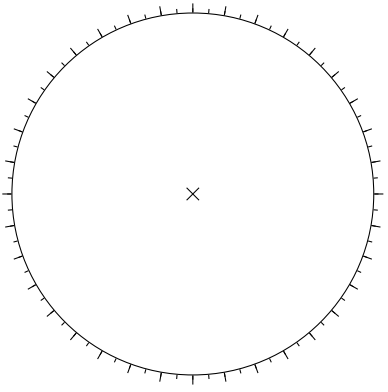
a) Hány gyerek szavazott, ha kerékpártúrára 27-en mennének el?

b) Hány gyerek választotta az egyes lehetőségeket?

c) Ábrázold a leolvasott százalékértékeket oszlopdiagramon!

d) Ábrázold a szavazás eredményét kördiagramon is!





8.21. Alexandra és Barbara zöld és sárga korongokkal játszanak. Ha egy dobozból zöld korongot húznak, Alexandra nyer, ha sárgát, akkor Barbara a győztes. Kinek van nagyobb esélye a nyerésre, ha a dobozban

a) 3 sárga, 7 zöld; *b)* 15 sárga, 35 zöld;

c) csak sárga; *d)* 5 sárga, 5 zöld korong van?

8.22. Egy üzletben ajándékot nyerhetnek az ott vásárlók. Egy dobókockával kell dobniuk. Ha páros számot dobnak, kapnak egy csokit, ha 3-mal oszthatót számot, akkor kapnak egy pohár üdítőt. Mekkora a valószínűsége, hogy egy vásárló egy dobással

a) csokit nyer; *b)* üdítőt nyer; *c)* csokit is és üdítőt is nyer;

d) semmit sem nyer; *e)* valamit nyer (csokit van üdítőt)?

8.23. Az iskolai tombolán n darab tombolajegyet adtak el, ebből Ottó vett meg k darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy Ottó nyeri meg a főnyereményt? Töltsd ki a táblázatot!

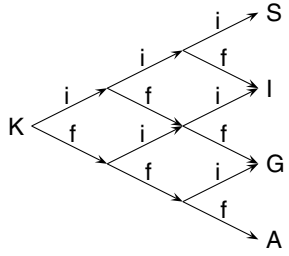
k	0	1	2	1	7	100	5	50				30
n	1000	100	3	2	7	100	10	100	70	600	200	
esély									$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$

8.24. Dani és Viktor a kosárra dobást gyakorolták. Daninak 118 dobása sikerült 400 kísérletből, Viktor 240 dobásból 81-szer talált a gyűrűbe. Melyiküket nevezzék be inkább a büntetődobó versenybe?

8.25. A világtenger jelenleg 361 000 000 km^2-t fed le a Föld felszínéből, míg a szárazföldek kiterjedése mintegy 149 000 000 km^2. Mekkora a valószínűsége, hogy egy a világűrből érkező meteor a Föld felszínét tengerbe csapódva éri el?

8.26. Ildikó, András, Gábor és Sanyi a következő játékot játsszák.

a) Egy zsetont indítanak a pálya K kiindulási pontjából, és egy pénzdarab segítségével döntik el, hogy a zseton jobbra (**f**ej) vagy balra (**í**rás) lépjen egyet előre. Ha a zseton beért valamelyikük mezőjére, akkor ő elteheti. A játékosok mezőit a kezdőbetűjükkel jelöltük.



A következő táblázat 50 játék után mutatja a zsetonok eloszlását.

játékos	S	I	G	A	össz.
zseton	4	23	15	8	50

Igazságos-e a játék?
Próbáljátok ki ti is!

játékos					össz.
zseton					

(Lapozz!)

b) Gábor azt javasolta, hogy egy-egy játék ne három egymás utáni dobásból álljon. Ehelyett egyszerre csak egy dobással, de három darab érmével helyettesítsék úgy, hogy az 1 Ft-os az első lépést, a 2 Ft-os a második lépést és az 5 Ft-os a harmadik lépést döntse el.

Így a következő lett az eloszlás újabb 50 játék után.

játékos	S	I	G	A	össz.
zseton	5	16	20	9	50

Igazságosabb lett-e így a játék? Próbáljátok ki ti is!

játékos					össz.
zseton					

Sorold föl, hogy melyik lehetséges dobásnál nyernek az egyes játékosok!

1 Ft-os	i	i	i							
2 Ft-os	i	i	f							
5 Ft-os	i	f	f							
nyerő	S	I								

A lehetséges eseteknek hanyad részében nyernek az egyes játékosok?

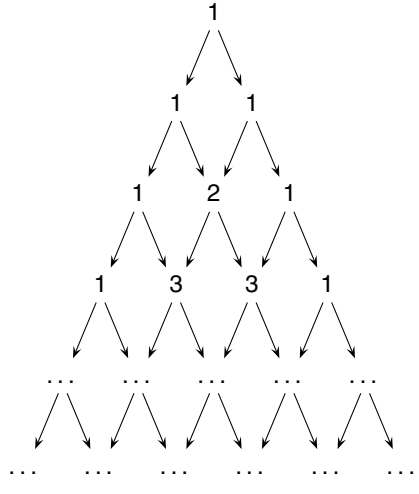
c) András szerint ha három darab egyforma érmét dobnak fel, akkor az esélyek kiegyenlítődnek, és a játék igazságossá válik. Szerinte ekkor négy eset lehetséges, tehát mindenkinek egyformák az esélyei. Igaza van-e?

Próbáld ki te is, hogy 50 játszma esetén a zsetonok eloszlása tapasztalatod szerint mi lesz!

nyerő	az érmék állása
A	3 fej
G	2 fej, 1 írás
I	1 fej, 2 írás
S	3 írás

játékos					összesen
zseton					

8.27. Az előző feladat játékát megnézve láthattuk, hogy nem csak a lehetséges kimenetelek száma befolyásolja egy játék igazságosságát. Ildikó a következő „háromszöget" írta fel annak kiszámítására, hogy melyik eset hányféleképpen fordulhat elő.



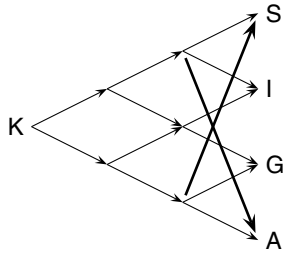
a) Mi lehet a szabály?

b) Folytassátok újabb sorokkal, ha rájöttetek a szabályra!

c) Melyik sorban lesznek egyformák a számok? Lehet-e valamikor is „igazságos a játék"?

d) Ha rájöttél a szabályra, akkor a **Pascal-háromszög** újabb sorait írhatod föl. Ha ennek a háromszögnek a tetején álló 1 számot az 1. sornak tekintjük, akkor hány szám lesz a 10. sorban?

8.28. András szerint azért nem igazságos a **8.26.** feladatban leírt játékok egyike sem, mert már az első pénzérme dobása után eldől, hogy András vagy Sanyi közül valaki nem nyerhet. Ildikó vagy Gábor viszont, akármi is az első dobás, még mindig nyerhet. András a következő pályát ajánlja kipróbálásra:



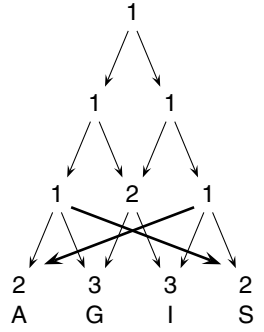
Itt a pályán két továbbhaladás közül fej–írással választják ki a jobb–bal irányt, mint eddig. Ha három irány közül kell választani, akkor pedig dobókocka segítségével döntenek.

a) Hogyan lehet dobókockával három lehetséges út közül igazságosan dönteni?

b) Ildikó szerint ezt a játékot is lehet egyszeri dobással eldönteni, csupán két pénzdarab és egy dobókocka kell hozzá. Hogyan helyettesíthet egy dobókocka egy esetleges harmadik pénzfeldobást?

c) Két pénzdarab és egy dobókocka feldobása hányféle lehetséges eredményt adhat? Sorold fel őket, válaszd ki, melyiknél ki nyer, és döntsd el, hogy igazságos-e így a játék!

d) Gábor a Pascal-háromszög mintájára a következőképpen számolta ki a lehetséges kimenetelek számát és a nyerési esélyeket:

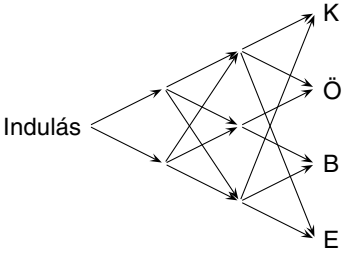


„Összesen 10-féle úton juthat el a zseton az első sortól a negyedikig. A-hoz és S-hez 2-2 út vezet, mindkettőjük esélye tehát $\frac{2}{10}$.

G és I pedig 3-3 lehetséges út végén áll, tehát $\frac{3}{10}$, azaz 30% esélyük van a zsetonszerzésre."

e) Végezzetek el 120 dobást, foglaljátok táblázatba az eredményeket, a tapasztalati eloszlást hasonlítsátok össze a saját becslésetekkel (a *c)* pontban számított **elméleti eloszlással**)!

8.29. Eszter, Kati, Ödön és Bori szintén játszani akarnak. Eszter a következő pályát és szabályokat javasolja:



Dobókockával kell eldönteni az irányt,
kettős elágazásnál 1; 2; 3 a balra, 4; 5; 6 a jobbra utat jelentse,
hármas elágazásnál 1; 2 a balra, 3; 4 a középre, 5; 6 a jobbra haladást.

a) Ödön szerint az első dobást el lehetne hagyni, mert nem befolyásolja a végeredményt. Milyen egyszerűbb pályát javasolhatott Ödön?

b) Eszter megszámolta, kihez hány lehetséges út vezet, ennek alapján igazságosnak találta a játékot. Hogyan számolt Eszter? (Lapozz!)

c) Kati felírta az összes lehetséges dobást, és úgy találta, hogy számára ezek a szabályok nem kedveznek. Kinek van nagyobb esélye Katinál?

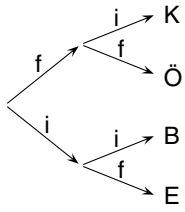
d) Végezz kísérleteket, a kapott eredményeket foglald táblázatba!

K	Ö	B	E	össz.

e) Az osztályodban kapott eredményeket összesítve töltsd ki ezt a táblázatot!

név	K	Ö	B	E	össz.
nyert					
hanyad					100%

8.30. Bori két különböző érmét és egy egyszerűbb pályát javasol.



a) Igazságos-e a Bori által javasolt játék?

b) Készíts sok játék alapján táblázatot!

K	Ö	B	E	össz.

c) Az osztálytársaiddal összegezd a tapasztalati eloszlást!

K	Ö	B	E	össz.
				100%

8.31. *a)* Egy dobozban 1 piros és 2 kék egyforma nagyságú golyó van. Kihúzunk 2 golyót egyszerre, felírjuk a kapott eredményt, majd visszadobjuk őket. Ezt a húzást 100-szor megismételjük. Becsüld meg, hogy a húzások hány százalékában lehetett a két golyó különböző színű!

b) Ugyanebből a dobozból a húzást most úgy hajtjuk végre, hogy először csak egy golyót húzunk ki, félretesszük, majd még egy golyó kihúzása után írjuk fel a két golyó színét. Becslésed szerint így a golyók színe az esetek hány százalékában különböző?

c) Most a 2 golyó egymás utáni kihúzásakor az elsőnek kihúzott golyót előbb visszatesszük, és utána húzunk másodszor is. (Lehet, hogy ugyanazt a golyót húzzuk ki mindkétszer!) Becsüld meg így is, hogy az esetek hanyad részében lesz a két kihúzott golyó színe különböző!

d) Babylon játék vagy más, különböző színű, de tapintásra egyforma tárgy segítségével végezz kísérleteket!

8.32. A dobozban most 2 piros és 4 kék egyforma nagyságú golyó van, 2 golyót húzunk ki közülük.

Becsüljük meg (tehát számoljuk ki), hogy várhatóan hányszor lesz 100 húzásból a 2 kihúzott golyó különböző színű, ha

a) egyszerre húzzuk ki a 2 golyót;

b) az elsőnek kihúzott golyót előbb visszarakjuk, és utána húzunk másodszor újra!

c) Melyik fajta golyóhúzást tudnánk dobókockával 2 dobással „lejátszani”: a visszatevés nélküli [*a)*] vagy a visszatevéses [*b)*] húzást?

d) Próbáld ki kísérleti úton is!

8.33. Alexandra, Bence és Gergő egy üdítőspalack kupakjával játszanak. Alexandra győz, ha feldobáskor a kupak az oldalára esik, Bence győz, ha a kupak a tetejére, belsejével fölfelé esik le. Abban az esetben, ha a kupak a tetejével fölfelé esik le, Gergő a nyertes.
Amikor abba kellett hagyniuk a játékot, éppen így állt a győzelmek táblázata:

játékos	A	B	G
győzelmek	90	72	18

a) Hány százalékát nyerték a feldobásoknak az egyes játékosok?

b) Legközelebb, másik kupakkal kipróbálva ugyanezt a játékot, a következő eredmény született:

játékos	A	B	G
győzelmek	24	43	13

Látható, hogy a másik kupak más valószínűségekkel esik a különböző oldalaira. Nőtt-e Gergő győzelmének az esélye?

c) Végezzetek különböző kupakokkal valószínűségi kísérleteket 200 feldobással! Hasonlítsátok össze egymás eredményeit!

8.34. Készítsetek különböző henger alakú testeket, és vizsgáljátok meg, hogy a feldobások során miként változik a „fej”, „írás” és a „palást” valószínűsége a henger vastagságától függően! (A henger lehet egy parafadugó, egy pénzdarab, egy konzervdoboz, egy szívószál stb.)

8.35. Egy 25 fős 7. osztály karácsonyi osztályrendezvényén mindenki két ajándékot hoz, és kettőt kap. Az ajándékosztást sorsolással rendezik. A sorsolásnál két külön dobozból húzzák az 1. és a 2. ajándékozott nevét.

a) Lehetséges-e, hogy Péter ugyanazt a nevet húzza ki mindkétszer?

b) Függ-e a 2. húzás eredménye az 1. húzástól?

c) Lehetséges-e, hogy Péter senki mástól nem kap ajándékot?

d) Ha Vivien húz utolsó előttinek, akkor mennyi az esélye annak, hogy saját nevét húzza ki a 2. dobozból?

9. Vegyes feladatok

9.01. Hogyan válthatók át a különböző országok pénznemei?

Az Európai Unió tagállamai 2002. január 1-jétől közös fizetőeszközként az eurót használják. Hivatalos jelölése EUR, jelképe az €, váltópénze az eurocent,

1 € = 100 cent.

Az országok a régebben használt pénzeiket a következő szabály szerint váltották át euróra: A régi árakat a hivatalos átváltási kulcsokkal kötelező átszámolni euróra, majd a kapott eredményt két tizedesjegy pontosságig kell kerekíteni.

Pénznem	1 euró (EUR)
Osztrák schilling (ATS)	13.7603
Belga frank (BEF)	40.3399
Finn márka (FIM)	5.94573
Francia frank (FRF)	6.559570
Görög drachma (GRD)	340.750
Holland forint (NLG)	2.20371
Ír font (IEP)	0.787564
Luxemburgi frank (LUF)	40.3399
Német márka (DEM)	1.95583
Olasz líra (ITL)	1936.27
Portugál escudo (PTE)	200.482
Spanyol peseta (ESP)	166.386

Például: Ha egy nadrág 299 belga frankba került, akkor átszámítva:
299 : 40,3399 = 7,412... a kapott eredmény, ebből már látható, hogy ez két tizedesjegyre kerekítve 7,41 €, tehát 7 euró 41 cent.

Ha egy csomag müzli 2,5 német márkába került, akkor a hivatalos átváltás után hány euróba kerül?

a) Válaszd ki az átváltás helyes számítási módját!

A: 2,5 : 1,95583 **B:** 2,5 · 1,95583

C: 1,95583 : 2,5 **D:** 2,5 – 1,95583

b) Az előbb kapott eredményt mire kell kerekíteni?

A: Századra **B:** tizedre **C:** tízesre **D:** százasra

c) A müzli ára tehát:

A: 12,78 € **B:** 1,278 € **C:** 1,28 € **D:** 1 € 28 cent

9.02. Ha egy autó ára 10 000 €, mennyi lehetett

a) francia frankban;

b) olasz lírában;

c) osztrák schillingben;

d) német márkában számítva?

(Használd a hivatalos átváltási kulcsok táblázatát a **9.01.** feladatból!)

9.03. Az euró bevezetése után könnyebben összehasonlíthatóak lettek az árak és a bérek az EU tagállamaiban.

a) Korábban Ausztriában az egyik benzinkútnál 30 liter benzin 367,4 schillingbe, ugyanakkor Németországban az autópályán 55,35 márkába került. A közös pénzre átszámítva az árakat, számold ki, hol érdemesebb tankolniuk az autósoknak!

b) Hány gulden (holland forint) lehetett a benzin ára Hollandiában, ha tudjuk, hogy az osztrák ár és a német ár közé esik a holland ár?

9.04. Egy német üzlet polcain korábban az alábbi árakat láttuk, váltsd át ezeket euróra! (Használd a **9.01.** feladat táblázatát!)

Márka	1,99	3,98	3,99	5,85	39,02	11,99	389,21	195,5
Euró								

9.05. Görögországban az új eurós árakat látva számítsd ki, hogy mennyibe kerültek ugyanezek a termékek régebben, drachmában számolva!

€	1,20	2,38	23,46	8	5,87	60	640
GRD							

9.06. 2002 májusában egy étterem számlájának részlete a következő:

Megnevezés	Menny.	E. ár (Ft)	€	Ár (Ft)	€
Ásványvíz (0,25 l)	1	150	0,63	150	0,63
Kapucsínó	2	250	1,05	500	.....
Szóda (1 dl)	6	20	0,09	120	.....
Gombaleves	2	320	.....	640	.....
Currys pulykamell	1	1120	.....	1120	.....
Rántott sertésborda	1	940	.....	940	.....
Céklasaláta	1	250	.....	250	.....
Összesen:		.....	.....	.....	.....

a) Hány forintot számítottak 1 €-ért ebben az étteremben ezen a napon?

b) Pótold a számla hiányzó értékeit!

c) Rendelj egy 25 fős külföldi társaságnak ebből a választékból úgy, hogy a költség ne haladja meg a 200 €-t!

9.07. Japán harmadik legnagyobb játékgyártója vezeték nélküli fordítógéppel kívánja áthidalni a kutyák és az emberek közötti „nyelvi különbségeket”. A minikompjúter az állat ugatásából több mint 20-fajta információt képes kihámozni. Aprócska fekete-fehér ikonok jelzik a kutya nyakörvén az állat hangulatát. A jelek szerint 100 dollárnak megfelelő jen lesz az eszköz ára.

a) A tervek szerint hány jenbe fog kerülni az eszköz?

b) Hány forintért vehetnék meg a gazdik kedvenceiknek ezt az eszközt Magyarországon?

Nézz utána a napi sajtóban vagy az interneten a valutaárfolyamoknak!

9.08. A Nemzetközi Statisztikai Évkönyv szerint Földünk népessége 300 év alatt a tízszeresére szaporodott. 1700-ban 600 millió volt, 2000-ben 6 milliárd. Szédületes ütemben gyorsul a növekedés, 1700 és 1750 között 115 millió fő volt a gyarapodás, a XX. század első felében 950 millió, a második 50 évben pedig 3,5 milliárd.

a) Mennyi volt a világ összlakossága az 1950-es, az 1900-as évben?

b) Hány százalékos volt a népességnövekedés 1700 és 1751 között?

c) 1980-ban 4,4 milliárd volt a Föld lakossága, hány százalékos volt a népességnövekedés 1980 és 2000 között?

d) A népességnövekedés mai, évi 1,8%-os ütemét alapul véve várhatóan hány fő lesz 3 év múlva az emberiség lélekszáma?

9.09. Magyarország a világ kevés, csökkenő népességű országai közé tartozik. Ha a születések és a halálozások számának különbsége pozitív, akkor természetes szaporodásról, ha negatív, akkor természetes fogyásról beszélünk.

Év	Lakosság száma (ezer fő)	Születések száma	Halálozások száma	Születések és halálozások különbsége	Természetes szaporodás
1960	9 961	146 000	106 000		
1970	10 322	152 000	120 000		
1980	10 709	149 000	145 000		
1985	10 599	130 000	148 000		
1990	10 375	127 000	145 000		
1992	10 337	118 000	144 000		
1994	10 277	113 000	143 000		
1996	10 212	103 000	140 000		

a) A táblázat alapján számítsd ki az adott években a születések és a halálozások különbségét!

b) Határozd meg a természetes szaporodást az adott években úgy, hogy a születések és a halálozások különbségét elosztod az adott év ezer főben megadott lakosságszámával (egy tizedesjegy pontossággal számolj)!

c) Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a természetes szaporodás értékeit!

d) Mely évben beszélhetünk természetes szaporodásról, mely évben természetes fogyásról?

e) Figyeld meg, melyik évben volt a legmagasabb (legalacsonyabb) a születések, illetve a halálozások száma!

f) Határozd meg a jelzett időszakban az átlagos természetes szaporodást!

9.10. A születéskor vátható átlagos élettartam az ismert adatok szerint a leghosszabb Japánban: a férfiaké 80,2, a nőké 86,6 év. A legrövidebb Guineában: a férfiaké 44 év, a nőké 45 év. Európában az izlandiak számíthatnak a leghosszabb életre: a férfiak 76,9, a nők 81,5 évre. Hazánkban a férfiak átlagosan 66,3, a nők 75,1 évig élnek, ezzel a középmezőnybe tartozunk. Európában az orosz férfiak (61,3 év) és a moldvai nők (70,3 év) életkilátásai a legrosszabbak.

a) Ábrázold oszlopdiagramon az adatokat! A számítógép táblázatkezelő programjával is dolgozhatsz.

b) Az ismert adatok alapján fejezd ki a férfiak, illetve a nők várható leghosszabb és legrövidebb élettartamának arányát!

c) Átlagosan hány százalékkal rövidebb élettartamra van esélyük hazánkban a férfiaknak, mint a nőknek? Szerinted mi okozhatja a két nem eltérő esélyeit? Fogalmazd meg észrevételeidet!

9.11. Egy 12 fős csoport moziba megy. 650 és 550 Ft-os jegyeket váltanak, összesen 7300 Ft értékben.

a) Hány darab 650 Ft-os és hány darab 550 Ft-os jegyet váltottak?

b) Mennyivel kerülne többe, ha mindenkinek 650 Ft-os jegyet váltanának?

c) Ha vettek volna 500 Ft-ért egy vödör pattogatott kukoricát is ugyanennyi pénzből, hány darab 650 és hány darab 550 Ft-os jegyet vehettek volna? Mi a helyzet, ha 2 vödör kukoricát akartak volna venni? És ha csak egy 50 Ft-os műsorfüzetet?

9.12. Egy baráti társaság kirándulást tervez, a völgyben lévő turistaházból indulva a hegygerincen lévő kilátóba. Azt szeretnék tudni, hogy mikor kell reggel elindulniuk ahhoz, hogy ebédre visszaérjenek a turistaházba. A térképen a turistaház és a kilátó távolsága 12 km, a szintkülönbség 300 m. A menetidő meghatározásához figyelembe kell venni, hogy a sík távolságra kiszámított menetidőhöz (4 km óránként) felfelé haladva 10 méterenként 2 percet, lefelé haladva 1 percet kell hozzáadni.

a) Ilyen feltételekkel mennyi időre van szükség a teljes útvonal megtételéhez?

b) Reggel hány órakor kell elindulniuk, ha az ebéd délután 2 órakor van, és fél órát szeretnének nézelődni a kilátóban?

c) Ábrázold grafikusan a túra útvonalát! Olvasd le a kilátóból való visszaindulás időpontját!

9.13. Egy versenyen úgy osztották fel a nyereményt az első három helyezett között, hogy az első helyezett kétszer annyi, a harmadik viszont feleakkora összeget kapjon, mint a második.

a) Mekkora összeget kapott az első, a második, illetve a harmadik helyezett játékos, ha a versenybizottság 554 400 Ft-ot osztott szét közöttük?

b) Hogyan változik a nyeremények összege, ha 2 első vagy 2 második vagy 2 harmadik helyezett lesz?

9.14. A Föld arculata az eltelt több mint 4,6 milliárd (4600 millió) év alatt nagyon sokszor és nagymértékben változott. Könnyebben érzékelhetjük, hogy mikor következtek be az egyes földtörténeti események, ha bolygónk 4,6 milliárd éves történetét egyetlen napba sűrítve próbáljuk megérteni. Az időtáblából leolvasható a földtörténeti események hozzárendelése a nap 24 órájához:

0 óra 00 perc	A Föld kialakulása.
5 óra 45 perc	Kialakulnak a ma megtalálható legidősebb kőzetek.
8 óra 40 perc	Az élet kialakulása. Az ősóceánban megjelennek a legegyszerűbb baktériumok.
19 óra 00 perc	Kialakulnak a tengerekben a soksejtű szervezetek.
22 óra 00 perc	Az élet megjelenik a szárazföldön.
22 óra 50 perc	Megkezdődik a dinoszauruszok kora.
23 óra 40 perc	A dinoszauruszok kihalása, az emlősök elterjedésének kezdete.
23 óra 58 perc	Megjelennek a főemlősök.
23 óra 59 perc 59 másodperc	A mai ember megjelenése.

a) Ennek a képzeletbeli napnak egyetlen órája és perce a valóságban körülbelül hány évnek felel meg?

b) Körülbelül hány évvel ezelőtt jelent meg a mai ember a Földön?

c) Hány évvel ezelőtt történhetett a dinoszauruszok kihalása?

9.15. 2001-ben Budapesten is bemutattak egy mobiltelefont, amely az új világidőt mutatja. Ez az óra nem a Nap járásához igazodik, független a napszaktól. Így egy adott pillanatban a világon mindenütt ugyanazt az időt mutatja. Az új időmérő eszköz a nap 24 óráját 1000 részre osztja fel. Új időegységnek az egynapi időtartam ezredrészét választották, amelynek „beat” (ejtsd: bít, egyik jelentése: dobbanás) lett a neve, és a közismert @ karakter jelöli. A nap 0 beattel indul, és 999 beattel végződik.

a) Fejezd ki a világóra egységeivel a következő időtartamokat!

1 h = ... @ 12 h = ... @ 21 h = ... @

10 min = ... @ 30 min = ... @ 45 min = ... @

1 min = ... @ 6 s = ... @ 1 s = ... @

b) Fejezd ki az időmérés ma használatos egységeivel a beatben megadott mennyiségeket!

500@ = ... h 250@ = ... h 750@ = ... h

100@ = ... h 50@ = ... h = ... min = ... s

10@ = ... h = ... min = ... s 1@ = ... h = ... min = ... s

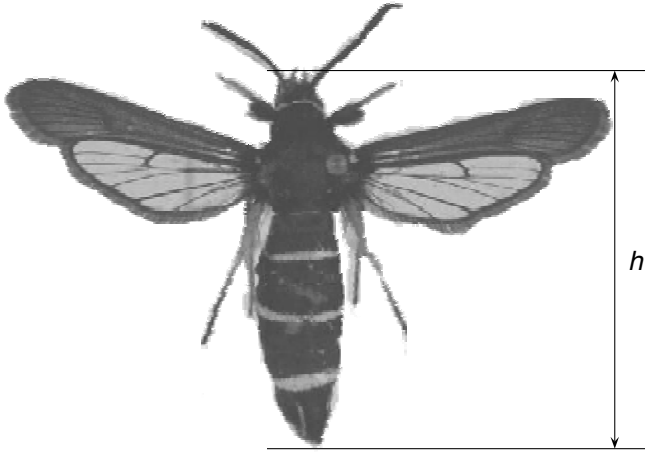
9.16. Az egységes tízes felosztású mértékrendszer az 1800-as évek második felében terjedt el. 1 m hosszúságnak a Párizson áthaladó délkör $\frac{1}{4}$ részének 110 milliomod részét választották. Platina–irídium ötvözetből készítették az ennek megfelelő hosszúságú rudat. Ez volt az ősméter, amelynek alapján minden ország megkapta a saját etalonját (hazánké a 14. számú lett). A Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatal jelenleg Bay Zoltán „fényre szabott" méter definícióját alkalmazza etalonként, eszerint 1 méter az a távolság, amelyet a fény légüres térben a másodperc $\frac{1}{299\,792\,458}$ része alatt megtesz.

a) Mekkora az a távolság, amelyet a fény 1 másodperc, 1 óra, 1 nap alatt megtesz légüres térben? (Normál alakkal számolj!)

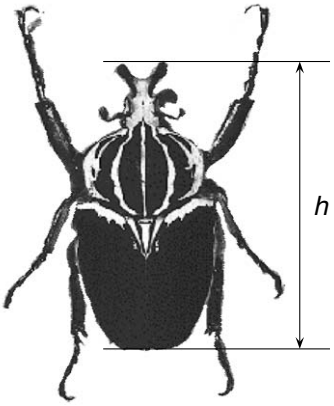
b) A fénynek a Naptól a Földig mintegy 8 percig tart az út. Tekintsük úgy, hogy 1 m körülbelül akkora távolság, amennyit a fény az 1 másodperc $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$ része alatt tesz meg. Eszerint mekkora lehet a Nap–Föld távolság?

c) A Földről elküldött fényjeleket mennyi idő elteltével lehetne érzékelni a Holdon, ha a Föld–Hold átlagos távolsága 384 400 km?

9.17. Ez a hazánkban ritkán előforduló lepkefajta hosszú, gyűrűre osztott potrohával a darázsra emlékeztet. Ezért is kapta a darázsforma lepkék családnevet. Testük vastag, erőteljes, csápjuk fokozatosan megvastagodott. Szárnyuk egészen üvegszerű, nyugalmi állapotban a testükhöz simul, így az éjjeli lepkék csoportjába tartozik.



A kép nagyítási aránya alapján számítsd ki, hogy a valóságban mekkora a testhossza (fej + tor + potroh) ennek a példánynak! A nagyítás aránya 5 : 3.



9.18. A világ egyik leghosszabb bogara, a góliátbogár az afrikai esőerdő fáin él. Ennek a hímnek a valóságban 15 cm a testhossza. A megfelelő adat megmérése után állapítsd meg a kicsinyítés arányát!

9.19. A majomkenyérfa az afrikai szavannák növénye. Vastag, hordószerű törzsében sok vizet raktároz. Az idősebb példányok korát 3000–4000 évre becsülik, törzsük kerülete elérheti a 40 métert is.

Hány négyzetméter az alapterülete egy ilyen fa legnagyobb keresztmetszetének, ha a keresztmetszetet kör alakúnak tekintjük?

9.20. Egy területi matematikaversenyen 75-tel több fiú vett részt, mint lány. A lány és a fiú versenyzők aránya 2 : 5 volt.

a) Hány lány versenyzett? *b)* Összesen hányan vettek részt a versenyen?

9.21. Három jó barát, Gábor, Zoltán és Imre a nyáron külön-külön megy nyaralni. Hol nyaralnak, mivel utaznak, és mi a foglalkozásuk, ha a következőket tudjuk róluk:

– A sportoló repülővel utazik.
– Zoltán autóval megy.
– Az egyetemista Rómába vonattal utazik.
– Gábor nem Londonba tart.
– Nem könyvárus, aki Londonba tart.

9.22. A rádió egy alkalommal a következő játékot hirdette meg. Az elhangzó riport után találják ki a hallgatók a riportban szereplő író, tudós és zongorista nevét és haja színét. A riporter valamilyen sorrendben: Vörös, Fehér, illetve Fekete néven mutatta be a közreműködőket. – Nekem fekete a hajam – mondja egyikük –, nektek pedig vörös és fehér, de egyikünk hajszíne sem egyezik a nevével. – Tökéletesen igazad van – válaszolja neki Fehér. – Kedves hallgatóink nem látják, de elárulom, hogy írónk haja a tudós nevével azonos színű – közli a műsorvezető. A műsor alatt a zongorista – akinek a haja és a neve megegyezik a billentyűzet színeivel – folyamatosan játszott a hangszerén.

A szöveg alapján egészítsd ki a táblázatot!

név	Fekete	Fehér	Vörös
foglalkozás			
hajszín			

9.23. Egy lótenyésztő gazdaságban a munkába álló lovásznak egész évi munkájáért 1 200 000 Ft-ot és egy lovat ajánlottak. 8 hónap után a lovász felmondott, ekkor időarányosan kapott fizetést: 700 000 Ft-ot és a lovat. Mennyi volt a ló értéke?

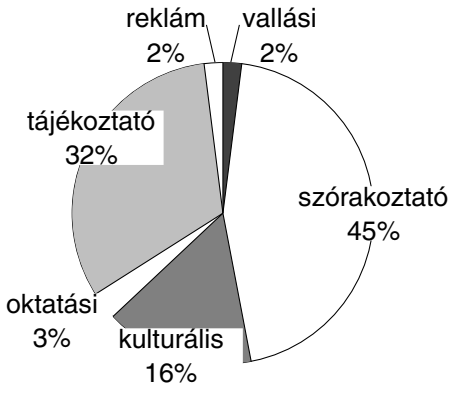
9.24. Egy nyári napon a budapesti Vidám Parkban az óriáskerék pénztáránál álltunk sorban. Várakozás közben megfigyeltük, hogy a sorban 12 magyar, 8 felnőtt férfi, 9 külföldi fiú, 7 magyar gyerek, 12 fiú, 5 magyar férfi (a fiúkat is beleértve) és 5 külföldi nő (a lányokat is beleértve) áll. Összesen hányan váltottak ekkor jegyet az óriáskerékre? A szöveg alapján rendezd táblázatba az adatokat, majd írd be a hiányzókat!

	magyar	külföldi	összesen
nő			
lánygyerek			
fiúgyerek			
férfi	12		
összesen			

9.25. A közszolgálati televíziós csatornák (M1, M2, Duna Televízió) műsorideje 2000-ben összesen 23 574 óra volt, ez kétszerese az 1995. évinek. 1995-ben a szórakoztató műsorok ideje 5304 óra, a tájékoztató műsoroké 4125 óra, az oktató műsoroké 590 óra, a kulturálisé 1650 óra volt, míg 118 órában egyéb (reklám, vallási) műsorokat sugároztak.

a) Olvasd le a kördiagramról, hogy az egyes műsortípusok hány órában kerültek a képernyőre 2000-ben!

A műsoridő megoszlása 2000-ben



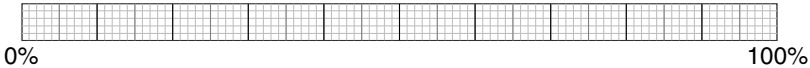
b) Ábrázold kördiagramon az 1995. év műsoreloszlását százalékos formában!

9.26. A távolsági személyszállítás megoszlása Magyarországon 1997-ben:

Közlekedési eszköz	Szállított utas ezer fő	Utaskilométer millió
(1) Vasút	156 870	8 672
(2) Autóbusz	517 962	10 159
(3) Hajó	2 225	38
(4) Repülőgép	2 001	3 049
Összesen		

Készíts mindkét szempont szerint szalagdiagramot a személyszállítás százalékos megoszlásáról!





9.27. Hány százalék támogatásban részesül az a gyógyszer, amelyért

a) 4940 Ft helyett 1482 Ft-ot;

b) 1370 Ft helyett 181 Ft-ot;

c) 269 Ft helyett 99 Ft-ot;

d) 1198 Ft helyett 1198 Ft-ot

kell fizetni?

Számítsd ki, hogy aki a fenti gyógyszereket megveszi, összességében hány százalékos támogatást kap!

9.28. Új lakás vásárlásakor az egyik ügyfél 7 000 000 Ft hitelt akar felvenni a bankból. A következő lehetőségek közül válogat.

a) 5 év futamidő esetén 7 545 000 Ft-ot kell visszefizetnie. Mennyi ekkor a havi törlesztőrészlet?

b) 15 éves futamidő esetén havonta 48 307 Ft-ot kell törlesztenie. Mennyit fizet ekkor 15 év alatt?

Melyik lehetőséget miért választja az ügyfél?

9.29. Az egyik kereskedelmi bank a lakáshiteleinek hirdetésében 1 000 000 Ft hitel esetén a következő *havi törlesztőrészleteket* adta közre.
3 év futamidő esetén 29 077 Ft, 10 év futamidő esetén 9651 Ft, 20 év futamidővel 5541 Ft.

a) Számítsd ki, mennyit fizet az ügyfél az egyes esetekben!

b) Hasonlítsd össze a kapott értékeket! Ki-ki melyiket miért választja?

9.30. Használt lakásra ugyanez a bank magasabb kamattal ad kölcsönt.

a) A legmagasabb felvehető hitel ennél a banknál 15 000 000 Ft. 20 év futamidő esetén 115 897 Ft-ot kell törleszteni havonta. Mekkora összeget jelent ez a 20 év alatt?

b) 10 év futamidővel 10 000 000 Ft-ot felvéve összesen 14 149 440 Ft-ot kell fizetni. Mennyi ez havonta?

9.31. Nagy Aladár 1999 júniusában 5 800 000 Ft-ért vásárolt egy lakásingatlant. 2002-ben 11 900 000 Ft-ért hirdette meg, végül 2002 júniusában 10 600 000 Ft-ért eladta. Az árkülönbözet után 20% adót kellett fizetnie.

a) Mennyi volt így a nyeresége? A befektetett összeg hány százaléka volt ez?

b) Ez idő alatt az egyik bank 10%-os kamatra kötötte volna le a pénzt. Hány forintot kapott volna vissza Nagy Aladár, ha bankba teszi a pénzét?

c) Zsebszámológéppel számolva próbáld meg meghatározni, hogy az ingatlanügyleten szerzett nyereség hány százalékos kamatos kamatnak felel meg!

d) Hány százalékos kamatos kamatnak felel meg a nyeresége, ha a pénzét újra ingatlanba fektette, és így nem kellett adót fizetnie?

e) Hány százalékos kamatos kamatnak megfelelő nyereséget tervezett, amikor meghirdette az ingatlant?

9.32. Kissék lakásra gyűjtöttek. Betétjük az egyik kereskedelmi banknál megtakarítási betétszámlán (napi kamatszámítással) kamatozott. A kamatszámítás módja:

$$\text{Kamat} = \frac{\text{Tőke} \cdot \text{kamatláb} \cdot \text{betétben töltött napok száma}}{365 \cdot 100}$$

a) Áprilisban 2 914 439 Ft-ról 2 928 333 Ft-ra nőtt a pénzük. Hány százalékos kamatot fizetett ebben a hónapban a bank?

b) Mennyi lett május végére a pénzük, ha a kamatláb közben nem változott?

c) Mikor lesz Kissék pénze 3 000 000 Ft?

9.33. Részlet az egyik magyarországi kereskedelmi bank (természetes személyek részére 2002. április 2-án kiadott) devizakamat-hirdetményéből.

Kamatláb %

Pénznem	látra	1 hó	3 hó	6 hó	12 hó
GBP	0,250	2,000	2,050	2,050	2,100
USD	0,125	0,400	0,550	0,550	0,600
CHF	0,000	0,300	0,300	0,300	0,300
EUR	0,150	1,500	1,525	1,525	1,550

Ezek a kamatok a 4000 USD értékét elérő betétekre vonatkoznak, kisebb összegekre 0,25%-kal kevesebb kamatot fizetnek.

A bank nem fizet látra szóló betétre kamatot, ha a számlán kevesebb, mint 100 USD van.

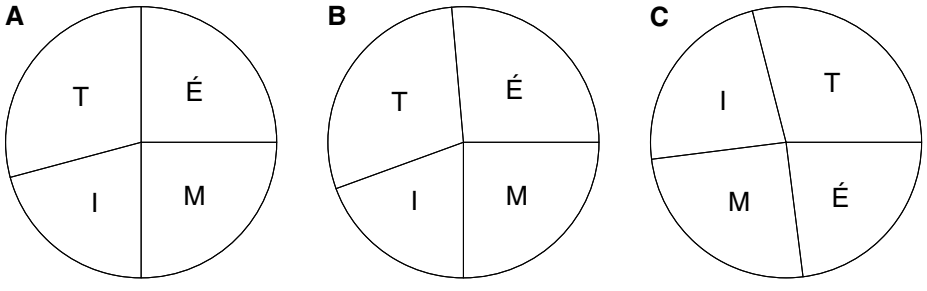
a) Mennyi volt a kamata 5000 USD-nak, ha ezen a napon kötötte le valaki 1 évre?

b) Hány EUR-t (€) helyezett el ekkor 6 hónapra az, aki lejáratkor 6045,87 €-t kapott?

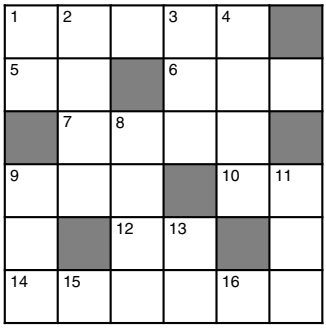
c) Hány CHF-t kapott 1 hónap múlva az, aki ezen a napon 10 000 CHF-t helyezett el 1 hónapos lekötéssel?

d) Mennyi kamatot fizetett ez a bank 10 GBP látra szóló elhelyezése után 1 évre?

9.34. 400 tanuló megjelölte, hogy adott négy tantárgy közül melyeket szereti a legjobban. 116-an a történelmet, 92-en az irodalmat, 100-an a matematikát, a többiek az éneket jelölték meg. A következő kördiagramok közül melyik szemlélteti a fenti adatokat?



9.35.



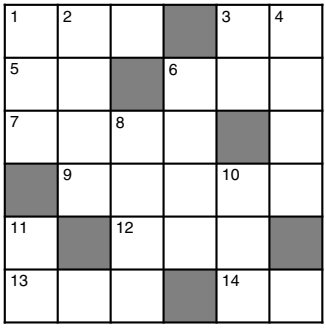
Vízszintes:

1. A legnagyobb csupa páratlan számjegyből álló ötjegyű szám.
5. Két prímszám szorzata.
6. [23; 40]
7. $3{,}3 \cdot 10^3 + 2^6$
9. A két szélső számjegye egyenlő.
10. 3^4
12. Ennyiféleképpen lehet négy, nullától különböző számjeggyel négyjegyű számot felírni ismétlés nélkül.
14. A 9 egyik többszöröse.

Függőleges:

1. A legnagyobb kétjegyű szám.
2. Az egyjegyű prímszámok csökkenő sorozata.
3. A legnagyobb kétjegyű számmal osztható.
4. Minden következő számjegy az előző kétszerese.
8. [11; 302]
9. A 18 cm oldalú négyzet területének mérőszáma cm^2-ben.
11. Egy szám harmadik hatványa (köbszám).
13. Egy szám négyzete.
15. A 25 cm^2 területű háromszög 10 centiméteres oldalához tartozó magasságának mérőszáma cm-ben.
16. Páros prímszám.

9.36.



Vízszintes:

1. $2^3 \cdot 10^2 + 2^3 \cdot 7$
3. A 2340 összes osztójának száma.
5. (308; 484)
6. A 25 cm oldalhosszúságú négyzet területének mérőszáma cm^2-ben megadva.
7. Annak a deltoidnak a területe cm^2-ben, amelynek átlói 5,6 dm és 9 dm hosszúságúak.
9. Az 1427 ötszörösének és a 6250 nyolcszorosának az összege.
12. $(5^2)^2$
13. Ekkora szöget zár be az óra nagy- és kismutatója fél kettőkor.
14. Ennyi egyenest határoznak meg egy kocka csúcsai.

Függőleges:

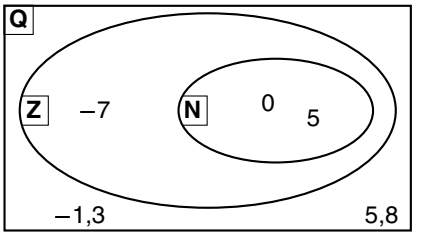
1. Az a háromjegyű szám, amely 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 7-tel és 8-cal osztva egyaránt 2-t ad maradékul.
2. A legkisebb négyjegyű szám, amelynek tízesre kerekített értéke 5460.
3. Ha 0-tól 200-ig leírjuk a számokat, ennyiszer fog szerepelni a 0.
4. 65,95 hl dm^3-ben kifejezve.
6. A 32 3-as számrendszerbeli alakja.
8. A szám és 2235 összegének a 20-szorosa 100 000.
10. A 75%-a 264.
11. A 100-nál nem nagyobb páros számok száma.

MEGOLDÁSOK, ÚTMUTATÁSOK

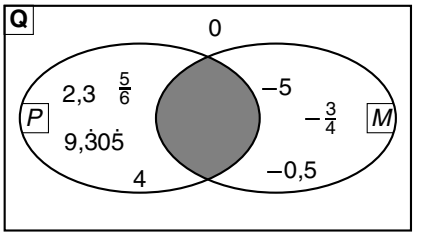
1. Számtan, számelmélet

Racionális és irracionális számok

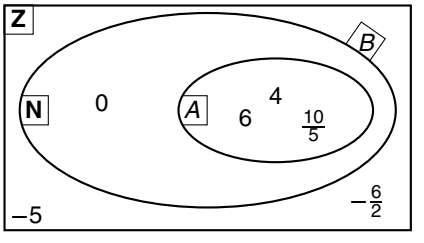
1.01. *a)*



b)

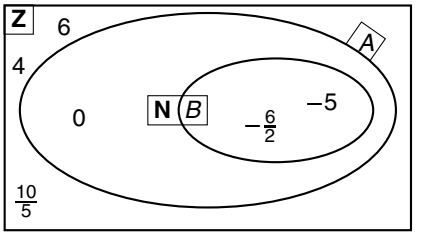


c) 1. megoldás

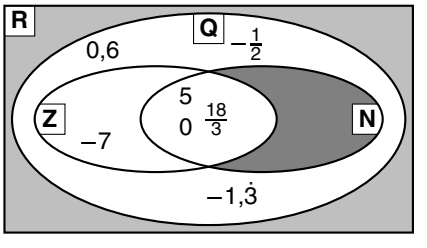


Nem helyezhető el a halmazábrán: $-1{,}5$.

2. megoldás



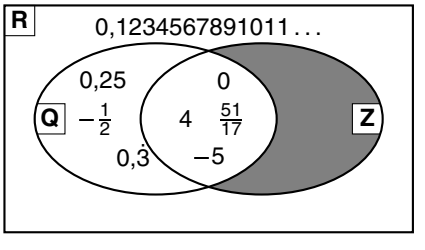
d)



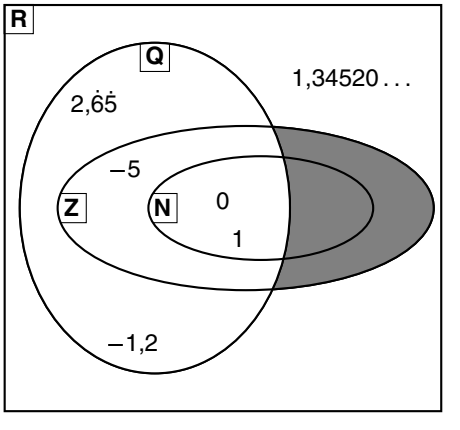
$T = \mathbf{Q}$.

A világos szürkére színezett részbe kerülnek a nem racionális számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

1.02. *a)*



b)



1.03. **A**: hamis; **B**: igaz; **C**: igaz; **D**: hamis.

1.04. **A**: igaz; **B**: hamis; **C**: hamis; **D**: igaz.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (1. old.)

1.05. *a)* C; CX; CXX; CXXX; CXL; CL; CLX; CLXX; CLXXX; CXC; CC;

b) M; MC; MCC; MCCC; MCD; MD; MDC; MDCC; MDCCC; MCM; MM;

c) III; VIII; XIII; XVIII; XXIII; XXVIII; XXXIII; XXXVIII; XLIII; XLVIII; LIII; LVIII;

d) XLIV; XLIX; LIV; LIX; LXIV; LXIX; LXXIV; LXXIX; LXXXIV; LXXXIX; XCIV; XCIX

1.06. *a)* 20; 22; 24; 26; 40; 42; 44; 60; 62; 80;

b) 11; 13; 15; 17; 31; 33; 35; 51; 53; 71;

c) 80; *d)* 17; 26; 35; 44; 53; 62; 71; 80; *e)* 80;

f) 18; 24; 42; 81; *g)* 18; 81; *h)* 13; 26

1.07. *a)* 5; *b)* 30; *c)* 25; *d)* 125; *e)* 625

1.08.

	tízesre	százasra	ezresre	tízezresre
22 445	22 450	22 400	22 000	20 000
35 739	35 740	35 700	36 000	40 000
47 002	47 000	47 000	47 000	50 000
5 695	5 700	5 700	6 000	10 000
4 500	4 500	4 500	5 000	0
49	50	0	0	0

1.09.

	századra	tizedre	egyesre	tízesre
29,3732	29,37	29,4	29	30
944,448	944,45	944,4	944	940
12 574,3	12 574,30	12 574,3	12 574	12 570
1250,935	1250,94	1250,9	1251	1250
300,0017	300,00	300,0	300	300
3612,05	3612,05	3612,1	3612	3610
4,002 39	4,00	4,0	4	0

1.10. *a)* $a = 2995$; $b = 3005$; *b)* $a = 2500$; $b = 3500$;

c) $a = 2999{,}95$; $b = 3000{,}05$; *d)* $a = 2999{,}5$; $b = 3000{,}5$

1.11. *a)* $a = 2{,}5$; $b = 3{,}5$; *b)* $a = 2{,}95$; $b = 3{,}05$;

c) $a = 2{,}995$; $b = 3{,}005$; *d)* $a = 2{,}9995$; $b = 3{,}0005$

1.12. *a)* $4995 \leqq x < 5005$; *b)* $4950 \leqq x < 5050$; *c)* $4500 \leqq x < 5500$;

d) $x \approx 0$ (pl. $x = 4800$ esetén) vagy $x \approx 10\,000$ (pl. $x = 5200$ esetén).

1.13. *a)* $3{,}45 \leqq x < 3{,}55$; *b)* $3{,}495 \leqq x < 3{,}505$; *c)* $3{,}4995 \leqq x < 3{,}5005$;

d) $x \approx 3$ (ha pl. $x = 3{,}4999$) vagy $x \approx 4$ (ha pl. $x = 3{,}5001$)

1.14. $250 \leqq n \leqq 349$.

a) $n + 5 \approx 260$; 270; ...; 340; 350 lehet;

b) $n \cdot 5 \approx 1300$; 1400; ...; 1700 lehet;

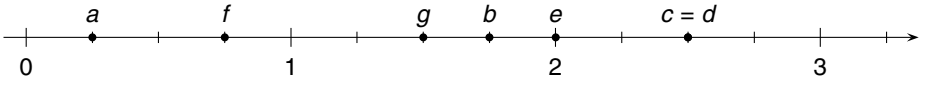
c) $n \cdot 10 \approx 3000$ lehet

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (2. old.)

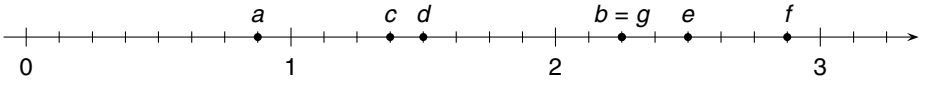
1.15. *a)* 5,5 m $\leqq g <$ 6,5 m; *b)* 59,5 dm $\leqq g <$ 60,5 dm;
c) 599,5 cm $\leqq g <$ 600,5 cm

1.16. *a)* 4,5 kg $\leqq m <$ 5,5 kg; *b)* 4,95 kg $\leqq m <$ 5,05 kg;
c) 4,995 kg $\leqq m <$ 5,005 kg

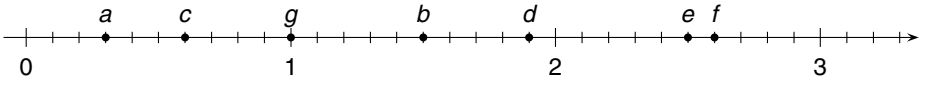
1.17. *a)*



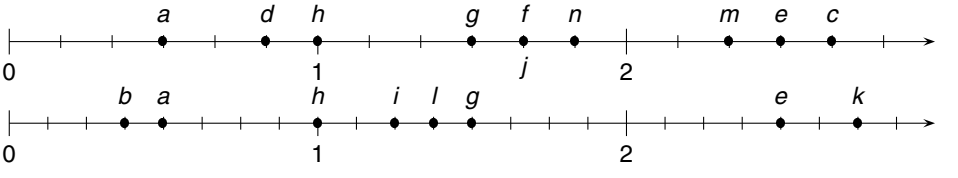
b)



c)

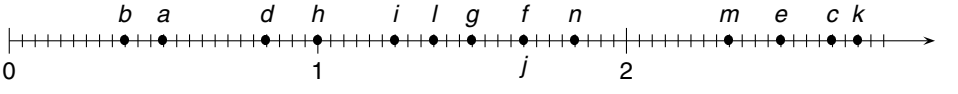


1.18. *a)*

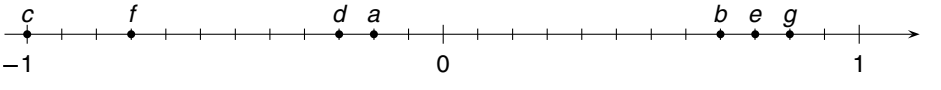


b) $a = \frac{12}{24}$; $b = \frac{9}{24}$; $c = \frac{64}{24}$; $d = \frac{20}{24}$; $e = \frac{60}{24}$; $f = \frac{40}{24}$; $g = \frac{36}{24}$;

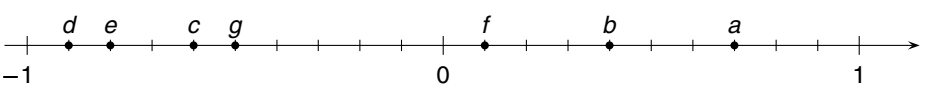
$h = \frac{24}{24}$; $i = \frac{30}{24}$; $j = \frac{40}{24}$; $k = \frac{66}{24}$; $l = \frac{33}{24}$; $m = \frac{56}{24}$; $n = \frac{44}{24}$



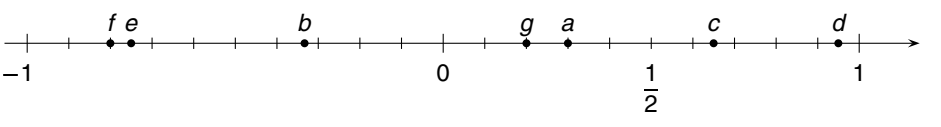
1.19. *a)*



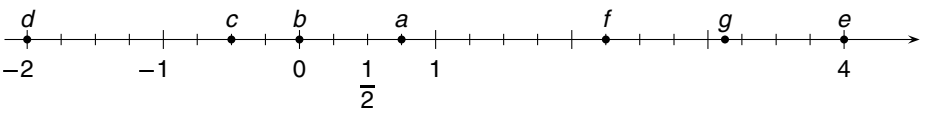
b)



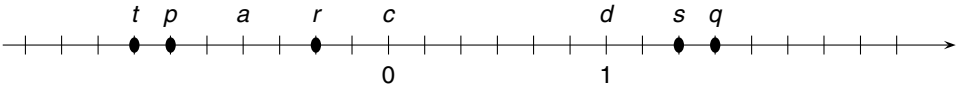
1.20. *a)*



b)



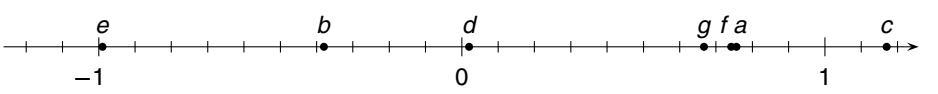
1.21.



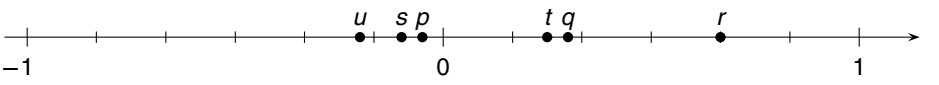
$a = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{2}$; $d = 1$; $e = \frac{7}{6}$; $f = 1\frac{5}{6}$; $g = 2$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (3. old.)

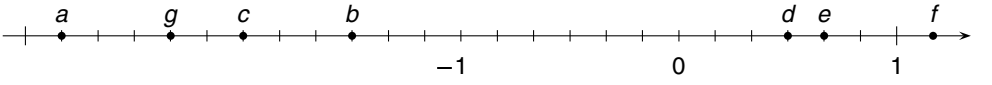
1.22. *a)*



b)



1.23.



1.24. *a)* $-\frac{99}{3} < -\frac{2}{3} < 0 < \frac{10}{30} < \frac{4}{6} < \frac{3}{3} < \frac{7}{3}$;

b) $-\frac{5}{3} < -\frac{5}{5} < \frac{5}{100} < \frac{5}{99} < \frac{5}{10} < \frac{5}{5} < \frac{5}{4} < \frac{5}{3}$;

c) $-\frac{9}{3} < -\frac{5}{6} < 0 < \frac{5}{24} < \frac{3}{4} < \frac{17}{17} < \frac{13}{7} < \frac{10}{3}$

1.25. *a)* $301\frac{3}{100} > 300\frac{1}{300} > 101\frac{1}{100} > 3\frac{2}{3} > 3\frac{5}{10} > 1\frac{1}{4} > \frac{4}{5} > \frac{2}{3}$;

b) $\frac{13}{5} > \frac{13}{9} > 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3} > \frac{3}{4} > \frac{13}{24} > \frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{9}{24}$;

c) 3 001 000 200,031 12 > 30 033 003,033 > 3 030 003;

d) $\frac{77\,077}{70} > \frac{7077}{7} > \frac{7007}{7} > 77{,}77 > 77\frac{1}{7} > 77\frac{7}{70} = 77{,}1 > \frac{7}{7}$;

e) $\frac{152}{1000} > \frac{150}{2000} > \frac{100}{52\,000}$

1.26. *a)* Kilencmillió-húszezer-kétszáztíz egész öt tized, kilencvenezer-kétszázkettő egész százöt ezred;

b) hétezer-százhetvenegy egész hét tized, hetvenegy egész hétszáztizenhét ezred;

c) kétszázmillió-háromszázhuszonötezer-száznyolcvannyolc egész három század; kétmillió-háromezer-kétszázötvenegy egész nyolcezer-nyolcszázhárom tízezred

1.27. *a)* háromszáz egész nyolc tized; háromezer-nyolc; nulla egész háromezer-nyolc százezred; nulla egész háromezer-nyolc milliomod;

b) kilencvenezer-hétszázhárom egész hat tized; kilencszázhétezer-harminchat; kilenc egész hétezer-harminchat százezred; nulla egész kilencszázhétezer-harminchat milliomod

1.28. *a)* 730 100; 73,01; 0,7301; 730,1;

b) 0,01; 1; 0,0001; 0,000 01;

c) 4,5; 4500; 45; 0,045;

d) 3070; 0,0307; 307 000; 0,003 07

1.29. *a)* 100; 1000; 0,36; 36 000;

b) 10; 1000; 320,1; 32 010

1.30. A hiányzó adatok rendre:

a) 560; 56; 5,6; 0,56;

b) 485; 4,85; 0,0485; 0,000 485;

c) 200; 2; 2000; 20;

d) 85 000; 85; 850; 0,085

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (4. old.)

1.31. *a)* $2{,}\dot{2} \cdot 10 = 2{,}222\ldots \cdot 10 = 22{,}22\ldots = 22{,}\dot{2}$;
$2{,}\dot{2} : 10 = 2{,}222\ldots : 10 = 0{,}222\ldots = 0{,}\dot{2}$

b) $36{,}\dot{3}\dot{6} \cdot 10 = 36{,}363\,63\ldots \cdot 10 = 363{,}6363\ldots = 363{,}\dot{6}\dot{3}$;
$36{,}\dot{3}\dot{6} \cdot 100 = 36{,}36363\ldots \cdot 100 = 3636{,}3636\ldots = 3636{,}\dot{3}\dot{6}$;
$36{,}\dot{3}\dot{6} : 100 = 36{,}3636\ldots : 100 = 0{,}363636\ldots = 0{,}\dot{3}\dot{6}$;

c) $1{,}02\dot{1}\dot{8} \cdot 10\,000 = 1{,}021\,818\,181\ldots \cdot 10\,000 = 10\,218{,}1818\ldots = 10\,218{,}\dot{1}\dot{8}$

1.32. $a = -1$; $b = \frac{1}{11}$; $c = -\frac{3}{4}$; $d = \frac{7}{3}$; $e = \frac{9}{2}$; $f = \frac{1}{7}$; $g = -8$; $h = \frac{11}{101}$; $i = -\frac{1}{2}$; $j = -\frac{2}{3}$;

$k = \frac{1}{37}$; $l = 0$

1.33. *a)* $p = \frac{13}{4}$; $q = \frac{13}{5}$; $r = \frac{13}{3}$; $s = \frac{13}{6}$; $t = \frac{13}{2}$; $u = \frac{13}{7}$;

b) $i = \frac{112}{9}$; $j = \frac{71}{12}$; $k = \frac{295}{28}$; $l = \frac{107}{20}$; $m = \frac{173}{60}$; $n = \frac{1873}{100}$;

c) $c = -\frac{23}{7}$; $d = -\frac{49}{9}$; $e = -\frac{41}{3}$; $f = -\frac{70}{69}$; $g = -\frac{51}{10}$; $h = -\frac{40}{19}$

1.34. *a)* $a = 0{,}25$; $b = 0{,}4$; $c = 1{,}3$; $d = 7{,}35$; $e = 0{,}68$; $f = 0{,}42$;

b) $g = -35{,}5$; $h = 1{,}625$; $i = -1{,}3$; $j = 2{,}16$; $k = 125{,}125$; $l = 16{,}665$;

c) $m = -1{,}6\dot{6}$; $n = 1{,}\dot{8}$; $o = -5{,}1\dot{6}$; $p = 0{,}91\dot{6}$; $q = -4{,}7\dot{3}$; $r = 1{,}3\dot{8}$;

d) $s = 1{,}\dot{0}\dot{9}$; $t = -1{,}\dot{3}\dot{6}$; $u = -0{,}\dot{6}\dot{9}$; $v = -3{,}3\dot{1}\dot{8}$; $x = 1{,}76\dot{3}$; $y = -15{,}\dot{1}\dot{5}$

1.35. *a)* $p = 0{,}\dot{1}42857\dot{1}$; $q = 0{,}\dot{4}28571\dot{4}$; $r = 0{,}\dot{2}85714\dot{2}$; $s = 0{,}\dot{8}57142\dot{8}$; $t = 0{,}\dot{5}71428\dot{5}$; $u = 0{,}\dot{7}14285\dot{7}$. Észrevehetjük, hogy az ismétlődő szakaszban ugyanolyan sorrendben követi egymást hat számjegy.

b) $g = 0{,}\dot{7}\dot{3}$; $h = 0{,}0\dot{1}$; $i = 0{,}\dot{6}\dot{9}$; $j = 0{,}\dot{1}\dot{0}$; $k = 1{,}0\dot{1}$; $l = 0{,}\dot{5}3\dot{1}$. Az ismétlődő szakasz a törtrész számlálójából kitalálható.

1.36. *a)* $e = 2\frac{3}{5} = 2{,}6$; $f = 3\frac{3}{4} = 3{,}75$; $g = 15\frac{3}{10} = 15{,}3$;

$h = 5\frac{17}{50} = 5{,}34$; $i = 10\frac{12}{15} = 10\frac{4}{5} = 10{,}8$; $j = 2\frac{17}{40} = 2{,}425$;

b) $k = 1\frac{1}{3} = 1{,}\dot{3}$; $l = 2\frac{7}{9} = 2{,}\dot{7}$; $m = 5\frac{4}{33} = 5{,}\dot{1}\dot{2}$;

$n = 2\frac{13}{30} = 2{,}4\dot{3}$; $o = 1\frac{25}{54} = 1{,}4\dot{6}2\dot{9}$; $p = 2\frac{8}{15} = 2{,}5\dot{3}$;

c) $q = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$; $r = -3\frac{10}{30} = -3\frac{1}{3} = -3{,}\dot{3}$; $s = -1\frac{5}{10} = -1{,}5$;

$t = 6\frac{1}{3} = 6{,}\dot{3}$

1.37. $a = \frac{5}{4}$; $b = \frac{14}{5}$; $c = \frac{33}{50}$; $d = \frac{62}{25}$; $e = \frac{79}{40}$; $f = \frac{777}{100}$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (5. old.)

1.38. *a)* Véges tizedestört alakba írható: *a)*; *b)*; *d)*; *f)*.

b) Végtelen tizedestört alakba írható: *j)*.

1.39. *a)* $\frac{7}{2}$; $-\frac{5}{3}$; $\frac{1}{33}$; $-\frac{4}{11}$; $\frac{56}{45}$; 0

b) $\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$; $-\frac{36}{60}=-\frac{3}{5}$; $\frac{99}{3}=33$; $-\frac{44}{16}=-\frac{11}{4}$; $\frac{45}{56}$; a 0-nak nincs reciproka

1.40.

x	3	-2	-11	11	0	$-9{,}9$	0	-20	-30	20	30	
$-x$	-3	2	11	-11	0	9,9	0	20	30	-20	-30	
$\lvert x\rvert$	3	2	11	11	0	9,9	0	20	30	20	30	
$\lvert -x\rvert$	3	2	11	11	0	9,9	0	20	30	20	30	-2

Az utolsó oszlopba nem írható szám. Nincs olyan szám, amelynek (az ellentettjének) az abszolútértéke negatív lenne.

1.41. **A:** Igaz. Ha a szám nem negatív, akkor az abszolútértéke maga a szám. Ha a szám negatív, akkor az ellentettje pozitív, így nagyobb a számnál.
B: Hamis. A negatív számokra nem igaz. **C:** Igaz.

1.42. *a)* -9; *b)* $|-9|=9$; *c)* $|-9|=9$; *d)* $-|9|=-9$;
e) $\big||-9|\big|=9$; *f)* $-\big(-(-9)\big)=-9$; *g)* $\big|-(-9)\big|=9$; *h)* $-\big|-(-9)\big|=-9$

1.43. **A:** nem nagyobb; **B:** nem kisebb; **C:** nem nagyobb; **D:** nem nagyobb; **E:** nem nagyobb.

1.44. **A:** igaz; **B:** igaz; **C:** hamis (pl. $0=\frac{0}{1}$); **D:** hamis (minden negatív szám reciproka is negatív); **E:** igaz; **F:** hamis (pl. $-1=\frac{1}{-1}$) **G:** igaz; **H:** hamis (pl. -2); **I:** hamis (pl. $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$).

Hatványozás, számok normálalakja

1.45. *a)* $2^6=64$; *b)* $(-3)^4=81$; *c)* $(-4)^2\cdot 5^3=2000$; *d)* $(-1{,}1)^3\cdot(-3)^2=-11{,}979$;
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$; *f)* $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

1.46. *a)* 8; 9; 25; -27; 216; 1; -1;
b) 2,0736; $-32{,}768$; 6,25; 9,61; 10,4976 $-10{,}4976$; -1;
c) $\frac{8}{27}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{125}{343}$; $\frac{36}{25}$; 0; $\frac{25}{9}$; 16

1.47.

a	0	1	-1	2	-2	3	4	5	10	-10	0,1	0,5
a^0	–	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a^1	0	1	-1	2	-2	3	4	5	10	-10	0,1	0,5
a^2	0	1	1	4	4	9	16	25	100	100	0,01	0,25
a^3	0	1	-1	8	-8	27	64	125	1000	-1000	0,001	0,125

1.48. *a)* 2; *b)* 3; *c)* 4; *d)* 2; *e)* 0; *f)* 6; *g)* 1; *h)* 2; *i)* 5

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (6. old.)

1.49. *a)* 2; −2; *b)* 3; *c)* 100; *d)* $\frac{5}{10}$; *e)* $-\frac{1}{2}$; *f)* 0,2

1.50. A hiányzó jelek rendre:

a) <, >; *b)* <, <; *c)* >, >; *d)* >, <;

e) <, >, <; *f)* >, <, >; *g)* <, =, <

1.51. *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz. *d)* Igaz. *e)* Hamis. *f)* Hamis. *g)* Igaz.

1.52. A hiányzó adatok rendre:

a) 2; 3; 5; 7; 6 és 64; *b)* 2; 0; 1; 3; 2 és 9

1.53. A hiányzó adatok rendre:

a) 3; 5; 7; 9; 1 000 000 000; *b)* 3; 4; 5; 6; 1 000 000;

c) 4; 6; 8; 9; 1 000 000 000; *d)* 0; 2; 5; 6; 1 000 000

1.54. A hiányzó adatok rendre:

a) 45; 450; 4500; 45 000; 4; *b)* 560; 56 000; 5 600 000; 6;

c) 20; 2000; 200 000; 5; *d)* 28,5; 2850; 2 850 000; 6;

e) 5; 500; 50 000; 4; *f)* 125; 12 500; 12 500 000; 7;

g) 120 000; 1 200 000 000; 9

1.55. A hiányzó adatok rendre:

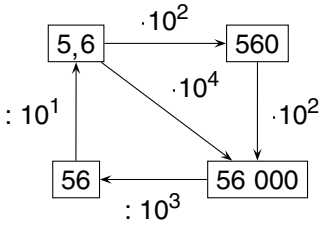
a) 2; 2; 2; 6; *b)* 3; 3; 3; 9; *c)* 1; 1; 1; 1; 4; *d)* 1; 2; 1; 2; 6;

e) 1; 2; 2; 5; *f)* 1; 3; 2; 6; *g)* 3; 3; 3; 7

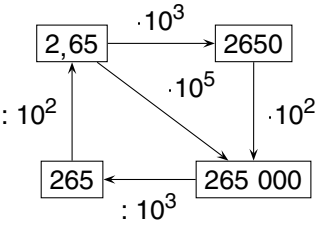
1.56. A hiányzó adatok rendre:

a) 4; 3; 2; 1; 10; *b)* 5; 3; 1; 10; *c)* 4; 2; 5; 1; 10; *d)* 3; 5; 2; 3; 1000

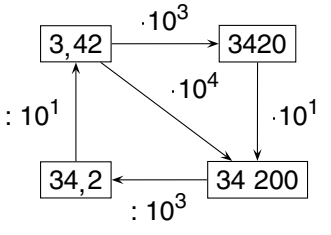
1.57. *a)*



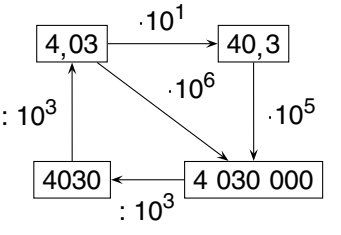
b)



c)



d)



1.58. *a)* 2; *b)* 0; *c)* 6; *d)* 2; *e)* 1; *f)* 3; *g)* 3; *h)* 1; *i)* 2

1.59. *a)* $5{,}76 \cdot 10^2$; $4{,}718 \cdot 10^3$; $3{,}5 \cdot 10^1$; $6 \cdot 10^1$; $7{,}18 \cdot 10^2$; $1{,}52 \cdot 10^3$;

b) $1{,}57 \cdot 10^5$; $5{,}484 \cdot 10^5$; $1{,}26 \cdot 10^6$; $1{,}5 \cdot 10^7$;

c) $3{,}702 \cdot 10^3$; $3{,}702 \cdot 10^2$; $3{,}7002 \cdot 10^4$; $3{,}7002 \cdot 10^3$; $3{,}702 \cdot 10^0$; $3{,}72 \cdot 10^4$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (7. old.)

1.60. *a)* $5{,}4767 \cdot 10^2$; $2{,}985 \cdot 10^1$; $1{,}5207 \cdot 10^3$; $4{,}7284 \cdot 10^3$;

b) $-2{,}394 \cdot 10^2$; $-1{,}5627 \cdot 10^3$; $-1{,}387 \cdot 10^1$; $-7{,}9581 \cdot 10^2$

1.61. *a)* 1070; 25,8; 49 600; 1 500 000;

b) 88 050; 777 000; 111; 30 500 000

1.62. *a)* $7{,}5 \cdot 10^3 = 7500$; $1{,}2 \cdot 10^2 = 120$;

b) 38 600 < 210 000, 171 400-zal; 540 000 > 62 000, 478 000-rel

1.63. $a = 7 \cdot 10^2$; $c = 9{,}7 \cdot 10$; $d = 1{,}35 \cdot 10^4$; $e = 2{,}5 \cdot 10^4$; $h = 4{,}701 \cdot 10^3$; $j = 1{,}475 \cdot 10^2$; $k = 1{,}8 \cdot 10^2$; $l = 1 \cdot 10^7$; $m = 1 \cdot 10^1$; $n = 1 \cdot 10^3$; $o = 3{,}63 \cdot 10^0$; $p = 1 \cdot 10^0$
Normálalakban írtuk fel a *b*, *f*, *g* és *i* számokat.

1.64. *a)* 3; 2; 5; 6; $9{,}450\,03 \cdot 10^5$; *b)* 3; 2; 1; $7{,}0312 \cdot 10^2$;

c) 3; 2; 4; $1{,}928 \cdot 10^3$; *d)* 4; 3; 6; 2; 5; $3 \cdot 10^5$

1.65. *a)* 7642,001; 764 200,1; $7{,}642\,001 \cdot 10^6$;

b) 13,208 101; 0,132 801 01; $1{,}328\,010\,1 \cdot 10^3$;

c) −9090,909; $-9{,}090\,909 \cdot 10^4$; −0,090 909 09; *d)* $7{,}3 \cdot 10^5$; 0,73; 73

1.66. *a)* $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$; *b)* $3^5 \cdot 3^3 = 3^{5+3} = 3^8$; *c)* $7^4 \cdot 7^4 = 7^8$;

d) $13^4 \cdot 13^1 = 13^{4+1} = 13^5$; *e)* $5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 5^9$;

f) $6^1 \cdot 6^0 = 6 \cdot 1 = 6 = 6^{1+0} = 6^1$; *g)* $3^2 \cdot 3^{40} = 3^{2+40} = 3^{42}$;

h) $5^{15} \cdot 5^{11} = 5^{15+11} = 5^{26}$; *i)* $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$

1.67. *a)* 3 tényező, 4 tényező, $2^{3+4} = 2^7$; *b)* 5 tényező, 2 tényező, $4^{5+2} = 4^7$;

c) 2 tényező, 3 tényező, $(-3)^{2+3} = (-3)^5$;

d) 2 tényező, 3 tényező, 2 tényező, $7^{2+3+2} = 7^7$;

e) $(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 5 = 5^{4+1} = 5^5$; *f)* $(11 \cdot 11 \cdot 11) \cdot 1 = 11^3 \cdot 11^0 = 11^{3+0} = 11^3$;

g) 83 tényező, 5 tényező, $2^{83+5} = 2^{88}$; *h)* 73 tényező, 37 tényező, $10^{73+37} = 10^{110}$

1.68. *a)* $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$; *b)* $2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$; *c)* $3^4 \cdot 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$;

d) $3^4 \cdot 3^{97} = 3^{4+97} = 3^{101}$; *e)* $6^3 \cdot 6^0 = 6^{3+0} = 6^3$; *f)* $10 \cdot 10^{98} = 10^{1+98} = 10^{99}$;

g) $7 \cdot 7^0 = 7^{1+0} = 7$; *h)* $(-2)^2 \cdot (-2)^h = 2^{2+h}$, h tetszőleges szám lehet

1.69. *a)* 7^{10}; *b)* 3^{15}; *c)* 20^{22}; *d)* $(-5)^{13}$;

e) $2{,}2^8$; *f)* $1{,}25^6$; *g)* $\left(\frac{4}{3}\right)^4$; *h)* $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$;

i) $(-1)^{187} = -1$; *j)* $(-5)^2$; *k)* $0^{114} = 0$; *l)* 10^{100}

1.70. *a)* $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$;

b) $(3^5)^4 = 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 = 3^{5+5+5+5} = 3^{5 \cdot 4} = 3^{20}$;

c) $(5^3)^3 = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3+3} = 5^{3 \cdot 3} = 5^9$;

d) $(10^{10})^4 = 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} = 10^{10+10+10+10} = 10^{10 \cdot 4} = 10^{40}$;

e) $(7^3)^{20} = 7^{\underbrace{3 + \ldots + 3}_{20 \text{ tag}}} = 7^{3 \cdot 20} = 7^{60}$;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (8. old.)

f) $(13^5)^8 = \underbrace{13^5 \cdot 13^5 \cdot \ldots \cdot 13^5}_{8 \text{ tényező}} = 13^{\overbrace{5+5+\ldots+5}^{8 \text{ tag}}} = 13^{5\cdot 8} = 13^{40}$;

g) $(9^0)^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 9^{0\cdot 5} = 1$;

h) $\left((2^4)^2\right)^3 = (2^4)^2 \cdot (2^4)^2 \cdot (2^4)^2 = 2^{4\cdot 2} \cdot 2^{4\cdot 2} \cdot 2^{4\cdot 2} = 2^{4\cdot 2\cdot 3} = 2^{24}$

1.71. *a)* $7^{7\cdot 4} = 7^{28}$; *b)* $6^{5\cdot 4} = 6^{20}$; *c)* $(-2)^{5\cdot 2} = (-2)^{10}$;
d) $17^{17\cdot 3} = 17^{51}$; *e)* $11^{5\cdot 2} = 11^{10}$; *f)* $11^{2\cdot 5} = 11^{10}$;
g) $1^{8\cdot 112} = 1^{896} = 1$; *h)* $9^{0\cdot 16} = 9^0 = 1$; *i)* $(3^{5\cdot 4})^3 = 3^{5\cdot 4\cdot 3} = 3^{60}$

1.72. *a)* $2^6 = 64$; *b)* $10^6 = 1\,000\,000$; *c)* $13^0 = 1$; *d)* $2^6 = 64$;
e) $2^4 = 16$; *f)* 5^{25}

1.73. *a)* $3^6 < 3^9$; *b)* $(2^2)^{(3^2)} = 2^{18}$; $\left((2^2)^3\right)^2 = 2^{12}$; $2^{(2^3)^2} = 2^{64}$; $\left(2^{(2^3)}\right)^2 = 2^{16}$; $2^{2^{3^2}} = 2^{512}$;
$2^{12} < 2^{16} < 2^{18} < 2^{64} < 2^{512}$; *c)* $7^{7^{0^7}} = (7^7)^{0^7} = \left((7^7)^0\right)^7 = 1$

1.74. *a)* $2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4$; *b)* $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$; *c)* $7^4 : 7^3 = 7^{4-3} = 7^1$;
d) $5^2 : 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1$; *e)* $(-1)^5 : (-1)^3 = (-1)^{5-3} = (-1)^2 = 1$;
f) $6^{25} : 6^{12} = 6^{13}$; *g)* $10^{90} : 10 = 10^{89}$; *h)* $19^{20} : 19^{10} = 19^{10}$

1.75. *a)* $(13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13) : (13 \cdot 13 \cdot 13) = 13^{4-3} = 13^1$;

b) $\underbrace{(4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4)}_{14 \text{ tényező}} : \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4)}_{11 \text{ tényező}} = 4^{14-11} = 4^3$;

c) $\underbrace{(1{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot \ldots \cdot 1{,}7)}_{99 \text{ tényező}} : \underbrace{(1{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot \ldots \cdot 1{,}7)}_{98 \text{ tényező}} = 1{,}7^{99-98} = 1{,}7^1$;

d) $\big((-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)\big) : \big((-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)\big) = (-7)^{4-4} = (-7)^0 = 1$;

e) $(0{,}1)^{20-1} = 0{,}1^{19}$

1.76. *a)* $2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4$; *b)* $31^6 : 31^5 = 31^{6-5} = 31^1 = 31$;
c) $10^{10} : 10^{10} = 10^{10-10} = 10^0 = 1$

1.77. *a)* 10^{66}; *b)* 5^3; *c)* 2^6; *d)* 12^2; *e)* $1^{1000} = 1$

1.78. *a)* 6; *b)* 10; *c)* 1; *d)* 0

1.79. *a)* $3^4 \cdot 5^4$; *b)* $(-2)^3 \cdot 3^3$; *c)* $2^3 \cdot (-3)^3$; *d)* $2^6 \cdot 7^6$; *e)* $3^9 \cdot 3^9$; *f)* $10^8 \cdot 10^8$;
g) $4^8 \cdot 25^8$; *h)* $2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^7$; *i)* $3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$; *j)* $0{,}1^6 \cdot 10^6$

1.80. *a)* 10^3; *b)* 20^5; *c)* 60^9; *d)* 8^2; *e)* $0^8 = 0$; *f)* 7^7; *g)* $55^0 = 1$;
h) $(-3)^6$; *i)* 4^5; *j)* 992^{11}; *k)* $1^5 = 1$; *l)* $1^{11} = 1$

1.81. *a)* $\frac{2^4}{3^4}$; *b)* $\frac{5^3}{7^3}$; *c)* $\frac{1^4}{10^4}$; *d)* $\frac{(-3)^7}{4^7}$; *e)* $\frac{0{,}1^2}{0{,}2^2}$; *f)* $\frac{11^{84}}{12^{84}}$

1.82. *a)* $\left(\frac{7}{2}\right)^5$; *b)* $\left(\frac{23}{50}\right)^3$; *c)* $\left(-\frac{2}{11}\right)^5$; *d)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$; *e)* $\left(-\frac{4}{3}\right)^4$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (9. old.)

1.83. *a)* $\frac{4^5}{6^5} = \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$; *b)* $\frac{100^{10}}{50^{10}} = 2^{10}$;

c) $\frac{8^3}{28^3} = \left(\frac{8}{28}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3} = \frac{8}{343}$;

d) $\frac{(-10)^5}{15^5} = \left(-\frac{10}{15}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = -\frac{32}{243}$; *e)* $10^5 = 100\,000$;

f) $\left(\frac{0{,}16}{0{,}04}\right)^3 = \left(\frac{16}{4}\right)^3 = 4^3 = 64$; *g)* $\left(\frac{6}{24}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1^4}{4^4} = \frac{1}{256}$

1.84. *a)* 3; *b)* 4; *c)* 3; 3; *d)* 3; *e)* 100; *f)* 3; *g)* 7;
h) ha az első keretbe 2^n kerül, akkor a másodikba $2 \cdot n$, például $(2^3)^2 = 2^6$; *i)* 6

1.85. $(2^3)^2 = (2^2)^3 = 2^4 \cdot 2^2 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^3 \cdot 2^1 \cdot 2^2 = 4^2 \cdot 8^0 \cdot 2^2 = 8^2 = 4^3 = 2^4 \cdot 4 = 2^3 \cdot 8 =$
$= (2^2)^2 \cdot 4 = 2^{2^2} \cdot 2^2 = 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^0$ vagy $2^2 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^0 \cdot 2^0$;...

1.86. *a)* $(3{,}2 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^3) = (3{,}2 \cdot 5) \cdot 10^{4+3} = 16 \cdot 10^7 = 1{,}6 \cdot 10^1 \cdot 10^7 = 1{,}6 \cdot 10^{1+7} = 1{,}6 \cdot 10^8$;
b) $780\,000 : 1200 = (7{,}8 \cdot 10^5) : (1{,}2 \cdot 10^3) = (7{,}8 : 1{,}2) \cdot 10^{5-3} = 6{,}5 \cdot 10^2$;
c) $(3 \cdot 10^2)^4 = 3^4 \cdot 10^{2 \cdot 4} = 81 \cdot 10^8 = 8{,}1 \cdot 10^1 \cdot 10^8 = 8{,}1 \cdot 10^9$;
d) $3{,}75 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^4 = (3{,}75 \cdot 4) \cdot 10^{4+4} = 15 \cdot 10^8 = 1{,}5 \cdot 10^1 \cdot 10^8 = 1{,}5 \cdot 10^9$;
e) $1{,}25 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^5 = 10 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^9$

1.87. *a)* $1{,}2 \cdot 10^7$; *b)* $6{,}3 \cdot 10^{10}$; *c)* $1{,}024 \cdot 10^{63}$; *d)* $9 \cdot 10^8$; *e)* $8 \cdot 10^2$;
f) $1{,}2 \cdot 10^{17}$; *g)* $2{,}5 \cdot 10^3$; *h)* $2{,}56 \cdot 10^6$; *i)* $1{,}44 \cdot 10^{10}$; *j)* 9

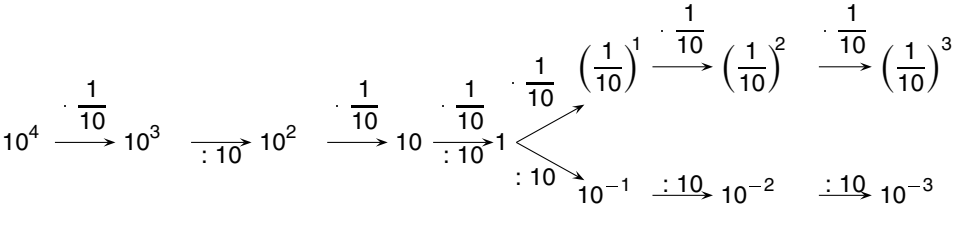
1.88. A hiányzó értékek rendre: *a)* 0; 1; 2; 4; 5; *b)* 4; 2; 1; 0; 1; *c)* 8; 5; 6; 2; 0,1;
d) 3; 2; 1; 1; 2; *e)* 3; 4; 2; 1

1.89. *a)* 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01;
b) 0,0001; 0,000 01; 0,000 001; 0,000 000 1; 0,000 000 01

1.90. *a)* =; *b)* =; *c)* =; *d)* <

1.91. A hiányzó értékek: felső sor: −3; −4; −5; alsó sor: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,000 01

1.92.



1.93. *a)* 10^{-3}; *b)* 10^{-4}; *c)* 10^{-3}; *d)* 10^0; *e)* 10^{-5}; *f)* $\frac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1}$;
g) $10^{-4} \cdot 10^2 = 10^{-2}$; *h)* 10^{-4}

1.94. *a)* $1{,}2 \cdot 10^{-1}$; *b)* $2 \cdot 10^{-2}$; *c)* $2{,}03 \cdot 10^{-2}$; *d)* $9{,}66 \cdot 10^{-2}$; *e)* $1 \cdot 10^{-4}$;
f) $3{,}33 \cdot 10^{-1}$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (10. old.)

1.95. *a)* 20 000; *b)* 37; *c)* 0,37; *d)* 0,000 060 6; *e)* 9,81

1.96. A normálalak és a hiányzó kitevők: *a)* $7{,}304 \cdot 10^{3}$; 2; 4; *b)* -1; -3; $1{,}2 \cdot 10^{-2}$;
c) -1; -6; $1{,}2001 \cdot 10^{-2}$; *d)* 2; 5; 3; $1 \cdot 10^{4}$

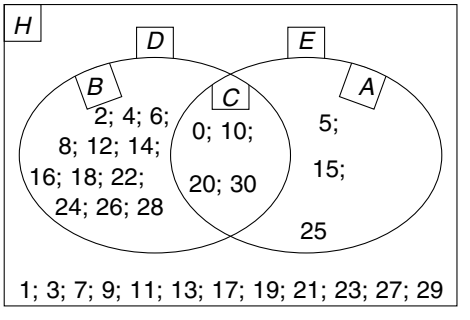
1.97. A hiányzó számok és a normálalak:
a) 0,423 94; 42 394; $4{,}2394 \cdot 10^{1}$; 4239,4;
b) 0,327 68; 327 680; $3{,}2768 \cdot 10^{4}$; 3276,8;
c) 36; $3{,}6 \cdot 10^{-1}$; 0,0036; 0,036; 0,36;
d) 505; 50,5; $5{,}05 \cdot 10^{-3}$; 0,505;
e) 0,0009; 0,9; 0,000 009; $9 \cdot 10^{-3}$; 0,09

1.98. *a)* $2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{7} = (2{,}5 \cdot 4) \cdot 10^{-3+7} = 10 \cdot 10^{4} = 1 \cdot 10^{5}$;
b) $8 \cdot 10^{-4} : (2 \cdot 10^{-2}) = (8 : 2) \cdot 10^{-4-(-2)} = 4 \cdot 10^{-2}$;
c) $(3 \cdot 10^{-3})^{5} = 3^{5} \cdot 10^{-3 \cdot 5} = 243 \cdot 10^{-15} = 2{,}43 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-15} = 2{,}43 \cdot 10^{-13}$

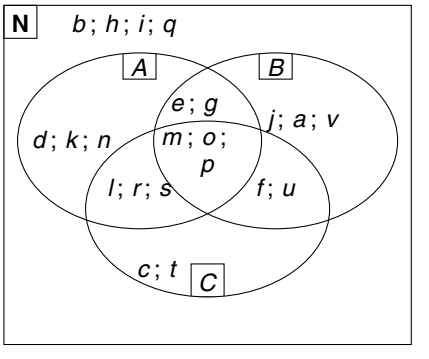
1.99. *a)* $7{,}2 \cdot 10^{-1} : (6 \cdot 10^{-4}) = 1{,}2 \cdot 10^{3}$; *b)* $1{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{4} = 2 \cdot 10^{1}$;
c) $4 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-10}$; *d)* $(2 \cdot 10^{-1})^{10} = 1{,}024 \cdot 10^{-7}$;
e) $9{,}6 \cdot 10^{3} : (6{,}4 \cdot 10^{6}) = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

Számelmélet

1.100. E = {5-tel nem osztható számok}



1.101.



1.102. *a)* $1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$; *b)* $1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$;
c) $1 \cdot 72 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$; *d)* $1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$;
e) $1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$

1.103. *a)* 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48; *b)* 1; 7; 49;
c) 1; 2; 5; 10; 25; 50; *d)* 1; 3; 17; 51; *e)* 1; 2; 4; 13; 26; 52

1.104.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5	2	6	2	6	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8

a) 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29 a prímszámok.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (11. old.)

b) 1; 4; 9; 16; 25, a négyzetszámok.

1.105.

az n természetes szám	–	31	49	77	81	45	64	40	36	48
n osztóinak a száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Keress más megoldásokat!

a) A négyzetszámoknak. *b)* Nem igaz.

c) 1-hez csak 1-et írhatunk. A páros számok közül a 2 fölé csak a 2, a 3 fölé csak a 4, az 5 fölé csak a 16 írható, de ezek 30-nál kisebbek!

1.106. *a)* A prímszámokat.

b) A prímszámok 200-ig: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97; 101; 103; 107; 109; 113; 127; 131; 137; 139; 149; 151; 157; 163; 167; 173; 179; 181; 191; 193; 197; 199

1.107. 103: 103; 104: 2; 13; 106: 2; 53; 107: 107; 109: 109; 110: 2; 5; 11; 111: 3; 37; 113: 113; 114: 2; 3; 19; 115: 5; 23; 116: 2; 29; 117: 3; 13; 118: 2; 59; 119: 7; 17; 120: 2; 3; 5; 121: 11; 122: 2; 61; 123: 3; 41; 124: 2; 31; 125: 5; 126: 2; 3; 7; 127: 127; 118: 2; 59; 119: 7; 17; 120: 2; 3; 5; 121: 11; 122: 2; 61; 123: 3; 41; 124: 2; 31; 125: 5; 126: 2; 3; 7; 127: 127; 128: 2; 129: 3; 43; 130: 2; 5; 13; 131: 131; 132: 2; 3; 11; 133: 7; 19; 134: 2; 67; 135: 3; 5; 136: 2; 17; 137: 137

1.108. *a)–b)* Nincs ilyen szám;

c) 4; 24; 44; 64; 84; 104; 124; 144; 164; 184; 204; 224; 244; 264; 284; 304; 324; 344; 364; 384;

d) 24; 64; 104; 144; 184; 224; 264; 304; 344; 384

1.109. *a), c)* 0; 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160; 180; 200;
b), d) 0; 40; 80; 120; 160; 200;
e), f) 0; 50; 100; 150; 200;
g), h) 0; 30; 60; 90; 120; 150; 180

1.110. *a)* 1800; 1820; 1840; 1860; 1880; 1900; *b)* 1800; 1830; 1860; 1890;
c) 1800; 1840; 1880; *d)* 1800; 1850; 1900

1.111. *a)* Hamis (például 111). *b)* Igaz.
c) Igaz (ilyen szám csak egy van, a 999, és $999 = 27 \cdot 37$).
d) Hamis (például 102; 128; 988).

1.112. *a)* Igaz; *b)* hamis (például 103); *c)* hamis (például 1014); *d)* igaz; *e)* igaz; *f)* hamis (például 10); *g)* igaz.

1.113. 10; 5; 2; 1

1.114. *a)* 1992; 2004; 112; 6840; 5620; 8024; 9028; 10 500;

b) 525; 3750; 4625; 10 500; *c)* 6840; 5620; 10 500; *d)* 3750; 10 500;

e) 1992; 112; 6840; 8024; *f)* 6840; *g)* 3750; 10 500;

h) nincs közöttük; *i)* 10 500; *j)* 3750; 4625; 10 500

1.115. *a)* 34 (a 0 is ilyen); *b)* 66; *c)* 101 (300 és 600 is ilyen).

1.116. *A* is, *B* is, *C* is 167 elemű halmaz, mert 500 szám közül minden 3-adikat vesszük. Az egyenlőség úgy is belátható, hogy a halmazok elemeit párokba állítjuk.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (12. old.)

Például $a + b = 999$, ahol a az A-ból, b a B-ből van, vagy $2 \cdot c = b$, minden C-beli c-hez van pontosan egy B-beli pár.
Az A elemei 3-mal nagyobbak a B elemeinél, a B elemei a C-beliek kétszeresei.
$A = \{3,\ 9,\ \ldots,\ 993,\ 999\}$; $B = \{0,\ 6,\ \ldots,\ 990,\ 996\}$; $C = \{0,\ 3,\ \ldots,\ 495,\ 498\}$.

1.117. *a)* $1+2$; *b)* $4+2$; $1+2$; $4+4+1$; *c)* $4+2$; $7+2$; *d)* $1+2$; $2+4$; $1+2+2+4$

1.118. *a)* 12; 21; *b)* 12; 21; 24; 42; *c)* nincs; *d)* 36; 63;
e) 12; 21; 15; 51; 18; 81; *f)* 36; 63; 39; 93; 69; 96

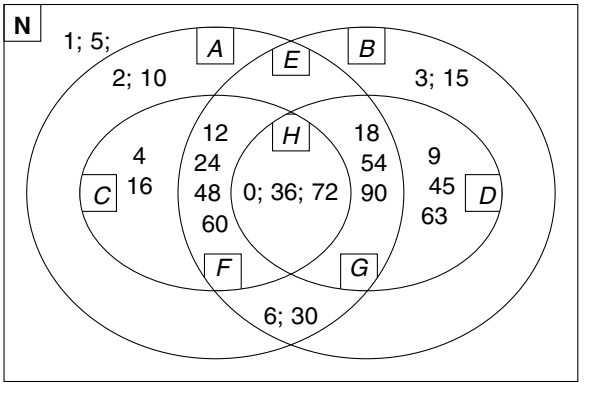
1.119. *a)* 2; 5; 8; *b)* 2; 5; 8; *c)* 2; 5; 8; *d)* 2; 5; 8; *e)* 1; 4; 7;
f) 0; 3; 6; 9; *g)* 1; 4; 7; *h)* 0; 3; 6; 9

1.120. *a)* 2; 5; 8; *b)* 0; 3; 6; 9; *c)* nincs megoldás; *d)* bármely számjegy beírható.

1.121. *a)* 2; 5; 8; *b)* 0; 4; 8; *c)* 0; 5;
d) 2; 8 (az *a)* megoldásai közül a párosok); *e)* 8 (az *a)* és *b)* közös része);
f) 5 (az *a)* és *c)* közös része); *g)* 0; 8

1.122. *a)* Hamis (például 11); *b)* hamis (például 99);
c) igaz (mert ekkor 2-vel és 3-mal is osztható); *d)* igaz;
e) hamis, mert a 9-cel való oszthatóság csak a számjegyek összegétől függ, és nem függ a számjegyek sorrendjétől (sem a számjegyek számától);
f) igaz.

1.123. *a)*



b) $E = \{6$ többszörösei$\}$;
$F = \{12$ többszörösei$\}$;
$G = \{18$ többszörösei$\}$;
$H = \{36$ többszörösei$\}$.

1.124. Igaz, mert egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint amikor a számjegyeinek az összegét osztjuk 9-cel. (Próbáld ki!)

1.125. *a)* u, v, w, x, z; *b)* v, w, z; *c)* v, x, z

1.126. *a)* 12; *b)* 10; *c)* 6; *d)* 30; *e)* 34; *f)* 25; *g)* 8; *h)* 11

1.127. *a)* $2^3 \cdot 5$; *b)* $2^2 \cdot 3 \cdot 7$; *c)* $2^2 \cdot 7^2$; *d)* 2^9; *e)* $2^3 \cdot 5^3$; *f)* $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

1.128. *a)* $(78; 195) = 39$; $[78; 195] = 390$; *b)* $(120; 160) = 40$; $[120; 160] = 480$;
c) $(336; 480) = 48$; $[336; 480] = 3360$; *d)* $(343; 243) = 1$; $[343; 243) = 83\,349$;
e) $(666; 185) = 37$; $[666; 185] = 3330$; *f)* $(384; 486) = 6$; $[384; 486] = 31\,104$

1.129. *a)* 6; 10; 15; 1; 1; 12; *b)* 3; 25; 8; 1;
c) 90; 150; 45; 120; 45; 72; *d)* 120; 150; 320; 735

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (13. old.)

1.130. *a*-nak osztója *w* és *y*; *b*-nek osztója *x* és *y*; *c*-nek osztója *w* és *x*; *d*-nek osztója *w* és *x*.

1.131. *a)* Lnko: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^5$; lkkt: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7^7$; *b)* lnko: $2 \cdot 3^9 \cdot 11^2$; lkkt: $2^{11} \cdot 3^{18} \cdot 11^4 \cdot 13^2 \cdot 19$;
c) lnko: 1; lkkt: $2 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 101^2$; *d)* lnko: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; lkkt: $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$

1.132. *a)* $[1; 2; 3; 4] = 12$, 12 naponként.

b) $[1; 2; 3; 4; 5; 7] = 420$, 420 naponként vannak egyszerre mind a hatan az uszodában. A nyolc év alatt $6 \cdot 365 + 2 \cdot 366 = 2922$ nap van, $2922 < 7 \cdot 420$, tehát ha ténylegesen csak a felsorolt napokon jártak az uszodában, akkor legfeljebb 6-szor találkoztak össze hatan egymással.

1.133. *a)* $[17; 13] = 17 \cdot 13 = 221$. 221 évenként jelenik meg mindkét kabócafaj egyszerre.

b) Lefeljebb 3-szor, de legalább 2-szer.

1.134. *a)* Ábel sorszáma többszöröse 2-nek, 5-nek, 9-nek és 7-nek, és mivel ő az egyetlen ilyen (egyedül késett), ez a *legkisebb* közös többszörös. Ábel sorszáma: $[2; 5; 9; 7] = 630$ a névsor utolsó sorszáma, tehát 630-an járnak az iskolába.

b) Mivel minden 6. tanuló focizik, és 6 osztója a 630-nak, eldönthető, hogy Ábel focizik.

1.135. A legnagyobb közös osztó minden esetben 1. A legkisebb közös többszörösök:
a), *b)* 27 720; *c)*, *d)*, *e)* 360 360; *f)* 720 720

1.136. *a)* $\frac{2 \cdot 11^2}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}$; *b)* $\frac{2 \cdot 3 \cdot 29}{5 \cdot 19}$; *c)* $\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11}{3}$

1.137. *a)* $\frac{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2}$ és $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2}$;

b) $\frac{2^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17}$ és $\frac{3^5 \cdot 13 \cdot 17^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17}$

1.138. *a)* 5,4; 4,68; 11,1; *b)* 44,64; 99,731; 59,79; *c)* 1269,814; 2,1796;
d) 8332,4493; 769,0072

1.139. *a)* 1,95; 45,72; 308,7; *b)* 17,372; 85,8286; 37,609 588;
c) 4 382 152,32; 2761,124 502 8; 51326395,23525

1.140. *a)* 340,4; 77; 23 023; *b)* 0,0154; 9955; 36,524; *c)* 2,1021; 250; 10,125;
d) $356,\dot{6}$; $0,40\dot{1}42857\dot{}$; $5,50\dot{9}$

1.141. *a)* 11; 2; −10; −11; *b)* −2; −2; 8; 12; *c)* 0; 0; 0; −22;
d) 15; 100; −683; *e)* 0; −200; −117; *f)* 28

1.142. *a)* −14,41; −17,3; −5,4; *b)* −55,5; 33,33; −9,965; *c)* 11,33; 2; 3128,1687;
d) −279,85002; 56,29493

1.143. *a)* $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; $\frac{100}{16} = \frac{25}{4}$; $\frac{360}{420} = \frac{6}{7}$; $\frac{615}{123} = 5$; $\frac{32}{448} = \frac{1}{14}$; $\frac{280}{168} = \frac{5}{3}$

b) $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{30}{20}$; $\frac{7}{16} = \frac{14}{32} = \frac{21}{48} = \frac{28}{64} = \frac{35}{80} = \frac{42}{96} = \frac{70}{160}$;

$\frac{13}{9} = \frac{26}{18} = \frac{39}{27} = \frac{52}{36} = \frac{65}{45} = \frac{78}{54} = \frac{130}{90}$; $\frac{34}{45} = \frac{68}{90} = \frac{102}{135} = \frac{136}{180} = \frac{170}{225} = \frac{204}{270} = \frac{340}{450}$;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (14. old.)

$\frac{7}{60}=\frac{14}{120}=\frac{21}{180}=\frac{28}{240}=\frac{35}{300}=\frac{42}{360}=\frac{70}{600}$; $\frac{20}{9}=\frac{40}{18}=\frac{60}{27}=\frac{80}{36}=\frac{100}{45}=\frac{120}{54}=\frac{200}{90}$;

$\frac{25}{18}=\frac{50}{36}=\frac{75}{54}=\frac{100}{72}=\frac{125}{90}=\frac{150}{108}=\frac{250}{180}$; $\frac{9}{100}=\frac{18}{200}=\frac{27}{300}=\frac{36}{400}=\frac{45}{500}=\frac{54}{600}=\frac{90}{1000}$.

1.144. *a)* $\frac{23}{6}$; $\frac{74}{35}$; $\frac{97}{36}$; $\frac{15}{7}$; *b)* $\frac{37}{24}$; $\frac{109}{60}$; $\frac{16}{45}$; $\frac{13}{42}$; *c)* $\frac{1}{22}$; $\frac{41}{21}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{27}{64}$;

d) $\frac{1}{90}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{56}$; $\frac{1}{110}$; *e)* $\frac{5}{12}$; $\frac{19}{24}$; $\frac{79}{80}$; *f)* $\frac{1}{30}$; $\frac{87}{60}$; $\frac{71}{72}$

1.145. *a)* $\frac{1}{14}$; $\frac{5}{2}$; *b)* $\frac{1}{16}$; 0; *c)* $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{14}$

1.146. *a)* $\frac{63}{40}$; $\frac{20}{3}$; $\frac{7}{4}$; *b)* $\frac{3}{20}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; *c)* $\frac{297}{448}$; $\frac{6}{7}$

1.147. *a)* $\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{30}{42}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$; *b)* $\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{11}=\frac{18}{88}=\frac{9}{44}$; *c)* $\frac{7}{8}\cdot\frac{20}{21}=\frac{140}{168}=\frac{5}{6}$;

d) $\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{6}=\frac{12}{5}$

Más megoldásai is vannak a feladatnak.

1.148. *a)* $-\frac{63}{5}$; $-\frac{51}{2}$; *b)* $\frac{20}{9}$; $\frac{3}{2}$; *c)* 126; -6

1.149. *a)* 188; 80; *b)* -14; 15; *c)* $\frac{166}{91}$; $\frac{40}{21}$

1.150. *a)* 15; *b)* 20,77

1.151. Együtt 9 óra, egyenként 18 óra; *b)* 240; 270; 160; 540;

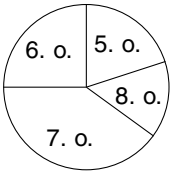
c) Elemér 120 m^2-t, Dénes 75 m^2-t, Gabi 100 m^2-t ás fel.

1.152. 60 000 Ft élelemre; 45 000 Ft rezsire; 75 000 Ft jut másra.

1.153. *a)* Viki 8, Erika 6, Judit 4 gombócot evett.

b) 10 gombócot; *c)* 20 gombóc maradt. $\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$ rész.

1.154. *a)* Az 5. osztály 720 kg-ot, az összesnek az $\frac{1}{5}$-ét; a 6. osztály 900 kg-ot, az összes papír $\frac{1}{4}$-ét; a 7. osztály 1440 kg-ot, az összes papír $\frac{2}{5}$-ét; a 8. osztály 540 kg-ot, a $\frac{3}{20}$-át az összesnek.



Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (15. old.)

1.155. *a)*

hírek	zene	beszél-getések	reklám

b) 3 óra 12 perc a reklám, a nap $\frac{2}{15}$-e.



Műveletek

1.156. *a)* -2; *b)* 13; *c)* 8,5; *d)* 0

1.157. *a)* $7 - (11 - 16 - 1 - 9) = 22$; *b)* $-[3 - (11 + 8) - (7 + 6) - 2 - 9] = 40$;

c) $-(1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7) = 26$; *d)* $1 - (2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7) = 24$;

e) $5 - [10 + 20 - (30 + 25) - 60] + 5 = 95$

Van-e a fentieknél nagyobb eredmény?

1.158. *a)* $-\frac{135}{56} = -2\frac{23}{56}$; *b)* $-\frac{1}{24}$; *c)* $-\frac{20}{8} = -2\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{33}{40}$; *e)* $9\frac{1}{6}$

1.159. *a)* 110 Ft-ot; *b)* Zolinak 505 Ft-ja, Tibinek 295 Ft-ja;

c) 3 t 730 kg; *d)* 6 óra 39 percet.

1.160. *a)* +8; −14; −15; −75; *b)* +224; −48; −15; −18; *c)* +28; +15; −120; +1512

1.161. *a)* −56; 0; *b)* 1; $\frac{1}{3}$; *c)* 1; 1

1.162. *a)* $5 : (10 : 12 : 20) = 120$; *b)* $7 \cdot 8 : (12 : 6) \cdot 60 = 1680$;

c) $128 : \left[512 : (256 \cdot 64) : 32 : 8 : 4 : 16 : 2\right] = 2^{27} = 134\,217\,728$;

d) $100 : (100 : 100 : 100 : 100) = 100^4 = 100\,000\,000$;

e) $2 : \left[2 : (2 \cdot 2) : 2 : (2 \cdot 2) : 2 : 2\right] = 2^7 = 128$

Található-e nagyobb eredmény?

1.163. *a)* $23\frac{4}{5}$ m^2-t, ha a hét minden napján dolgozik; 17 m^2-t, ha hétfőtől péntekig.

b) 248 Ft; *c)* $1\frac{1}{3}$ km-t; *d)* Zoli $29\frac{1}{4}$ km-t, édesapjuk $48\frac{3}{4}$ km-t.

1.164. *a)* $\frac{5}{18}$; *b)* $2\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{1}{4}$

1.165. *a)* 121; *b)* 0; *c)* −6; *d)* 3087; *e)* 55

1.166. *a)* −2; *b)* −15; *c)* 50; *d)* 1; *e)* 5

1.167. *a)* 147,342; 150 342; 1 503 420; 1 503 390; 15 033,9;

b) 1,9765; 12,9765; 0,012 976 5; 0,112 976 5; 1129,765;

c) 37 000; 37 000; 470; 500; 0,5; *d)* 0,96; 1,36; 136; 100; 0,1

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (16. old.)

1.168. *a)* 146; 100; 302 000; 100 000; *b)* 100 000; 0,01; 100 000; 0,1

1.169. *a)* egyenlő; *b)* egyenlő; *c)* $3{,}5 \cdot 0{,}8 < 5{,}2 \cdot 0{,}6$

1.170. *a)* $\frac{7}{20}$ rész.

b)

összes havi	250 000	370 000	650 000
I. harmad	100 000	148 000	260 000
II. harmad	62 500	92 500	162 500
III. harmad	87 500	129 500	227 500

1.171. *a)* 4 : 6 : 5 : 5. A negyedik is 17 500 Ft-ot kapott.

b) 10 000 Ft; 15 000 Ft; 12 500 Ft; 12 500 Ft.

1.172. *a)* $\frac{1}{5} = 0{,}2$ rész maradt délutánra. 200 m^2-t ásott kedd délig. *b)* 30 m^2

1.173. *a)* $-9{,}44$; *b)* 0,71; *c)* 20,3; *d)* 8,9; *e)* $-19{,}2525$; *f)* 0

1.174. *a)* $2\frac{7}{36}$; *b)* $-\frac{91}{100}$; *c)* $\frac{59}{180}$; *d)* $1\frac{9}{32}$

1.175. *a)* 6 cm, 8 cm, 10 cm, derékszögű háromszög.

b) (1) 2 cm, 16 cm; (2) 6 cm, 12 cm; (3) 8 cm, 10 cm.

1.176. Az első örökös 1,8 millió Ft-ot, a többi 2,4-2,4 millió Ft-ot kapott fejenként.

1.177. 4,2; 4,9; 5,32; 5,88 (millió Ft).

1.178. *a)* 280 : 320; *b)* 144; 240; *c)* 50°; 60°; 70°

Százalékszámítás

1.179. *a)* 8 Ft; 80 Ft; 200 Ft; 400 Ft; 800 Ft; *b)* 720 Ft; 1200 Ft; 1500 Ft

1.180. *a)* 4200 dm^3; 4620 dm^3; 9240 dm^3; 2100 dm^3; 6300 dm^3; 8400 dm^3;

b) 420 dm^3; 14 420 dm^3; 18 200 dm^3; 18 620 dm^3; 17 220 dm^3;

c) 700 dm^3; 7000 dm^3; 3500 dm^3; 10 500 dm^3; 21 000 dm^3

1.181. *a)* 48; 480; 1680; 2880;

b) (1) 1248 Ft; 1680 Ft; 2880 Ft; (2) 1152 Ft; 720 Ft; −480 Ft (tehát „fizetnek, ha megvesszük”).

c) (1) 300; 240; 360; 600; 900; 960; (2) 300; 960; 900; 600; 240; 360

1.182. *a)* 800 Ft; *b)* 540 Ft; *c)* 900 Ft; *a)*-nál és *c)*-nél változatlan;

d) $a \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}25 = a$; $a \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}9a$; $a \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}8 = a$

1.183. A család nettó jövedelme 210 000 Ft.

a) Élelemre 84 000 Ft, rezsire 63 000 Ft jut.

d) $B \cdot 0{,}7 = N$, $N \cdot 0{,}4 = É$; $N \cdot 0{,}3 = R$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (17. old.)

1.184. *a)* 330 Ft; 345 Ft; 360 Ft; 375 Ft; 300 Ft; *b)* 20%-a

1.185. *a)* 35 kg; *b)* 56 kg; *c)* 17,5 kg; *d)* 91 kg

1.186. *a)* 600 Ft; *b)* 15 000 Ft; *c)* 55 Ft; *d)* 900 Ft

1.187. *a)* 6200 Ft; *b)* 1200 Ft; *c)* 13 500 Ft; *d)* 9150 Ft

1.188. *a)* 400; *b)* 900 Ft; *c)* 400; *d)* 9500; *e)* 36; *f)* 30

1.189. *a)* 2,48 millió forintot;

b) Kiss: 40 ha, Szabó: 48 ha, Nagy: 72 ha; nincs több terület.

1.190. A táblázat hiányzó adatai rendre: 70; 420; 2100; 2520; 4200; 5040; 6300;
6; 36; 180; 216; 360; 432; 540;
2,5; 15; 75; 90; 150; 180; 225

1.191. *a)* 18; 906; 3860; 11 210; 34 200; 1 000 000;

b) 1,8; 90,6; 380,6; 1102,1; 340,2; 100 000;

c) 1; 52; 212; 784,5; 190; 55 500;

d) 0,3; 15,6; 636; 2,352; 540; 16 480;

e) 0,24; 120,8; 52,08; 1881,6; 576; 13,18

1.192.

a \ *e*	1200	720	3000	12	36	360	15 000	1500
1200	100%	60%	250%	1%	3%	30%	1250%	125%
2400	50%	30%	125%	0,5%	1,5%	15%	625%	62,5%
15 000	8%	4,8%	20%	0,08%	0,24%	2,4%	100%	10%
200	600%	360%	1500%	6%	18%	180%	7500%	750%
30 000	4%	2,4%	10%	0,04%	0,12%	1,2%	50%	5%

1.193. *a)* 242 000 Ft; *b)* 106 500 t fát (megközelítőleg);

c) 12 000 kg; 14 400 kg; 17 280 kg $\approx$ 17 300 kg; 20 736 kg $\approx$ 20 700 kg növényt.

1.194. *a)* Körülbelül 76 000 m^3; 72 200 m^3; 68 600 m^3; 65 200 m^3 víz lesz benne.

b) 46 080 Ft-ba.

1.195. *a)* Körülbelül 59%; *b)* közelítőleg 1 000 000 t

1.196. *a)* Ha nem akarják felhasználni év közben a pénz egy részét sem, jobb ha az éves lekötést választják, mert így a kamat bruttó 350 000 Ft, míg a havi lekötés esetén csak 308 386 Ft.

b) 25 000; 25 125; 25 250; 25 376; 25 504; 25 631; 25 759; 25 888; 26 018; 26 147; 26 278; 26 410

c) Nem, mert havi lekötés esetén minden hónap végén emelkedik (az évi kamat $\frac{1}{12}$ részével) a százalékalap. Valójában kamatos kamat jár az utóbbi esetben.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (18. old.)

2. Grafikonok, függvények, sorozatok

Grafikonok, diagramok

2.01. A táblázatból hiányzó adatok rendre: 7; 5,5; 4; −2; −2; −2; −3,5; −8

a) $t > 4$ min 40 s; *b)* $t = 2$ min

c) 0 min–6 min időtartamban percenként 1,5 °C-kal,
6 min–9 min időtartamban percenként 0 °C-kal (állandó),
9 min-től kezdődő időtartamban percenként 1,5 °C-kal.

d) −2 °C-on. Azt keressük, hogy mely intervallumban állandó a hőmérséklet. Ugyanis a folyadék hőmérséklete addig a fagyponton marad, amíg az összes folyékony anyag meg nem szilárdul.

e) 3 percen át tartott az oldat megfagyása (−2 °C hőmérsékleten).

2.02. A táblázatból hiányzó adatok rendre: −10; 15; 40; 40; 40; 40; 30; −10

a) $t > 10$ min *b)* $t = 3$ min és $t = 12$ min 30 s

c) Nincs ilyen időpont, az anyag hőmérséklete nem emelkedik 40 °C fölé.

d) 0 min–6 min időtartamban percenként $\approx$ 8,3 °C-kal nőtt a hőmérséklet.
6 min–10 min időtartamban percenként 0 °C-kal nőtt, vagyis állandó volt a hőmérséklet.

e) 6 percen át növekedett az oldat hőmérséklete.

f) 40 °C-on forrt fel az oldat. A hőmérséklete nem emelkedett a forráspontja fölé.

g) 4 percen át forralták az oldatot.

h) A 10. min-től kezdődő időtartamban percenként 10 °C-kal csökkent a hőmérséklet.

2.03. *a)* Egy folyadékot melegítünk a forráspontjáig. Az időmérés megkezdése előtt 6 perccel −80 °C a hőmérséklete. 10 percen át egyenletesen percenként 20 °C-kal nő a hőmérséklete. Az időmérés megkezdésekor 40 °C-os, majd 4 perc múlva éri el a forráspontot, amely 120 °C. Ezen a hőfokon marad a hőmérséklete.

b) Az ábra szemlélteti a víz állapotváltozásait. Az időmérés megkezdése előtt 5 perccel −100 °C-os jeget melegítenek. Percenként 50 °C-kal nő a hőmérséklete, így 2 perc alatt eléri az olvadáspontot, 0 °C-ot.
3 perc alatt, 0 °C-on elolvad a jég. Az időmérés megkezdésekor kezdik melegíteni a 0 °C-os vizet, percenként 25 °C-kal nő a hőmérséklete. Az időmérés megkezdése utáni 4. percben éri el a forráspontot, a 100 °C-ot. Ezen a hőfokon forr a víz.

c) Folyadék (lehet víz) hűtését szemlélteti a grafikon. Az időmérés megkezdése előtt 5 perccel 70 °C a hőmérséklete.
Percenként 20 °C-kal csökken a hőmérséklete, és az időmérés megkezdése előtt 1,5 perccel eléri a fagyáspontot, a 0 °C-ot. Az időmérés megkezdése után 3 perc múlva megfagy a teljes mennyiség, ezután tovább csökken a hőmérséklete, percenként 10 °C-kal. Az időmérés megkezdése utáni 7. percben eléri a −40 °C-ot.

d) Az időmérés megkezdése előtt 6 perccel állandó a folyadék hőmérséklete, 240 °C. Lehet, hogy ez forráspontja a folyadéknak. Az időmérés megkezdése előtt 4 perccel hűteni kezdik a folyadékot, percenként 40 °C-kal. Az időmérés megkezdésétől 3 percen át 80 °C a folyadék hőmérséklete. Ez lehet a folyadék fagyáspontja. 3 perc alatt megfagy a teljes mennyiség, ezután újra csökken az anyag hőmérséklete percenként 80 °C-kal, és a 6. percben eléri a −160 °C-ot.

2.04. *a)* Barackból, körülbelül 15 t-val több. *b)* 1992-ben és 1993-ban. *c)* 1991-ben.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (19. old.)

2.05. *a)* Például egy sietős ember mozgását írhatja le a grafikon.
Az időmérés megkezdése előtt a megfigyelési ponttól 250 m távolságra áll. Az időmérés megkezdésekor elindul a megfigyelési pont felé, és 4 percen át percenként 100 m-t tesz meg. Az elindulás után 2 és fél perc múlva ér a megfigyelési ponthoz, innen továbbhalad. A 4. percben a megfigyelési ponttól 150 m-re megáll.

b) Például egy turista mozgását írhatja le a grafikon.
Az időmérés előtt 5 órával a megfigyelési ponttól 4 km távolságra van.
Az időmérés megkezdése előtt 3 órával éri el a megfigyelési pontot, innen továbbhalad ugyanakkora sebességgel.
Az időmérés megkezdése előtt 1 órával, a megfigyelési ponttól 2 km távolságra megáll, és 3 órán át várakozik. Az időmérés megkezdése után 2 órával elindul távolodva a megfigyelési ponttól, és 1 óra alatt 1 km-t tesz meg.
Ekkor gyorsít, és óránként 2 km-t megtéve halad tovább 2 órán át.
Az időmérés megkezdése után 4 órával a megfigyelési ponttól 7 km távolságban visszafordul, és 2 órán át közeledik a megfigyelési ponthoz óránként 3 km-t megtéve.
A megfigyelési ponttól 1 km távolságban megáll.

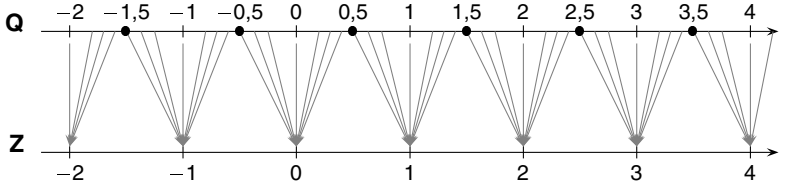
c) Például egy személygépkocsi mozgását szemléltetheti a grafikon.
Az időmérés megkezdése előtt 5 órával a megfigyelési ponttól 200 km távolságra van, amikor elindul a megfigyelési pont felé, és óránként 100 km-t tesz meg.
2 óra alatt a megfigyelési ponthoz ér, továbbhalad, és egy óra múlva, ellenkező irányban lesz 100 km-re a megfigyelési ponttól. Ott visszafordul, egy óra alatt 50 km-t tesz meg, és megáll. Két órán át várakozik. Az időmérés után 1 órával elindul, és óránként 50 km-t megtéve, 2 órán át távolodik a megfigyelési ponttól.
Az időmérés megkezdése utáni 4. órában visszafordul, egy óra alatt 100 km-t megtesz, ekkor lassít, és óránként 50 km-t megtéve folytatja az utat. Közben az 5. órában halad át a megfigyelési ponton.

d) Például egy hangya mászkál szalmaszálon.
Az időmérés megkezdése előtt 6 másodperccel 2 cm-rel a megfigyelési pont alatt van.
2 másodpercen át lefelé halad, másodpercenként 0,5 cm-t tesz meg.
1 másodpercig áll, majd felfelé mászik 3 másodpercen át, másodpercenként 1 cm-t.
Az időmérés megkezdésekor megáll 1 cm-rel a megfigyelési pont fölött, és 2 másodpercig pihen.
Ezután 1 másodpercig 0,5 cm-t tesz meg lefelé, majd 1 másodpercen át áll.
Az időmérés 4. perce végén felfelé indul, és másodpercenként 1 cm-t megtéve halad.

2.06. *a)* A grafikon 5 egységgel „balra” tolódik. *b)* A grafikon 10 egységgel „jobbra” tolódik.

Hozzárendelések vizsgálata

2.07. A táblázat második sora: −5; −5; −1; −2; 0; 2; 3; 39; 40
A hozzárendelés egyértelmű.



2.08. A táblázatok második sora:

a) 0; 4; 0; 4; 2; 0; 0; 3; 0;
b) 0; 0; 1; 1; 1; 3; 0; 0; 2;
c) 0; 4; 5; 0; 8; 7; 5; 1; 7;
d) 0; 4; 5; 9; 17; 0; 10; 18; 0

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (20. old.)

2.09.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	4	3	2	1	0	-1	-2
$g(x)$	-1	0	1	2	1	0	-1	-2
$h(x)$	5	4	3	2	1	0	1	2
$i(x)$	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2

2.10. A kézenfekvő lineáris és másodfokú függvényen kívül végtelen sok megoldást kaphatunk, *például* az abszolútérték-függvény vagy a másodfokú függvény különböző változataiként.
$|x-1|+1$; $|x-2|$; $|x-3|-1$; ...; $5-(x+1)^2$
Természetesen végtelen sok olyan szabály írható fel, amely lényegesen eltér az előzőktől.
Példaként töltsük ki a táblázatot a következő összefüggések alkalmazásával:
$f(x)=-x+2$; $g(x)=|x-2|$; $h(x)=-|x+2|+4$; $i(x)=x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	4	3	2	1	0	-1	-2
$g(x)$	5	4	3	2	1	0	1	2
$h(x)$	3	4	3	2	1	0	-1	-2
$i(x)$	9	4	1	0	1	4	9	16

2.11. Az első három grafikon az $x \mapsto \frac{1}{2}x$ leképezési szabállyal értelmezhető.

a) Egy cipó tömege $\frac{1}{2}$ kg. Mennyi a tömege 0 db; 1 db, x db cipónak?
Értelmezési tartomány: **N**. Értékkészlet: $\left\{0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots\right\}$.

b) Egy másodperc alatt $\frac{1}{2}$ dm^3 víz folyik ki a csapból. Mennyi víz folyik ki különböző időtartamok alatt?
Értelmezési tartomány = Értékkészlet = {Tetszőleges nemnegatív számok}.

c) Egy anyagot melegítenek. Másodpercenként $\frac{1}{2}$ °C-kal növekszik a hőmérséklete. Hány Celsius-fok volt a hőmérséklete különböző időpontokban, ha az időmérést akkor kezdték, amikor az anyag 0 °C-os volt? Értelmezési tartomány = Értékkészlet = = {Tetszőleges számok}. (Vagyis a számegyenes tetszőleges pontjának megfelelő számok.)

A következő három grafikon az $x \mapsto 4-x$ szabállyal értelmezhető.

d) Egy természetes szám és egy egész szám összege 4. Mi lehet ez a két szám. Értelmezési tartomány = **N**; Értékkészlet = {5-nél kisebb egész számok}.

e) Egy tartályban 4 l víz van, amely egy csapon át 4 perc alatt kifolyik. Mennyi víz van a tartályban az egyes időpontokban?
Értelmezési tartomány = Értékkészlet = {0 és 4 közötti számok}.

f) Két szám összege 4. Mi lehet ez a két szám?
Értelmezési tartomány = Értékkészlet = {Tetszőleges számok}.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (21. old.)

Egyenes arányosság

2.12. *a)*

x	1	2	3,5	5	7,5	9
y	2	4	7	10	15	18
$y : x$	2	2	2	2	2	2

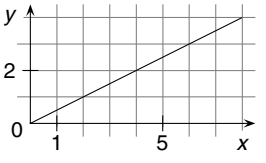
b)

x	2	4	6	9	10	12
y	1	2	3	4,5	5	6
$y : x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

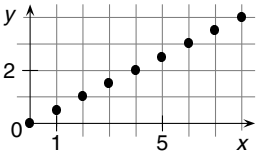
c)

x	2	4	6	8	10	11
y	3	6	9	12	15	16,5
$y : x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

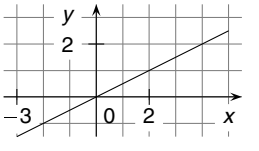
2.13. *a)*



b)



c)



Mindhárom feladatban meghatározandó értékek: $\frac{1}{2} \cdot 0$; $\frac{1}{2} \cdot 1$; $\frac{1}{2} \cdot 2$; ...; $x \mapsto \frac{1}{2}x$

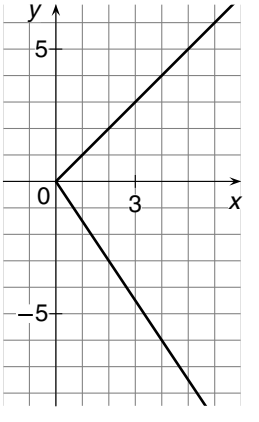
a) Értelmezési tartomány = Képhalmaz = {Tetszőleges nemnegatív számok}.

b) Értelmezési tartomány: **N**. Képhalmaz például: {Tetszőleges nemnegatív számok} vagy {Az $\frac{1}{2}$ nemnegatív egész számú többszörösei}.

c) Értelmezési tartomány = Képhalmaz = {Tetszőleges számok}.

Ha a déli irányú elmozdulást tekintjük pozitívnak: $x \mapsto -\frac{1}{2}x$

d) A teherautó mozgását leíró összefüggés: $x \mapsto x$.
Értelmezési tartomány = Értékkészlet = {Tetszőleges nemnegatív számok}.
A személyautó mozgását leíró összefüggés: $x \mapsto -1{,}5x$.
Értelmezési tartomány = {Tetszőleges nemnegatív számok}.
Értékkészlet = {Tetszőleges nempozitív számok}.



2.14. *a)*

x	1	2	3	6	9	12	15
y	1	2	3	6	9	12	15
$y : x$	1	1	1	1	1	1	1

b)

x	1	2	3	6	9	12	15
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3	4	5
$y : x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

c)

x	1	2	3	6	9	12	15
y	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	4	8	12	16	20
$y : x$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (22. old.)

2.15. *a)* $x \mapsto \frac{1}{2}x$. y: $-\frac{3}{2}$; -1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$. $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ a $(0;0)$ kivételével.

b) $x \mapsto x$. y: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. $\frac{y}{x} = 1$ a $(0;0)$ kivételével.

c) $x \mapsto \frac{3}{2}x$. y: $-\frac{9}{2}$; -3; $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$; 3; $\frac{9}{2}$. $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ a $(0;0)$ kivételével.

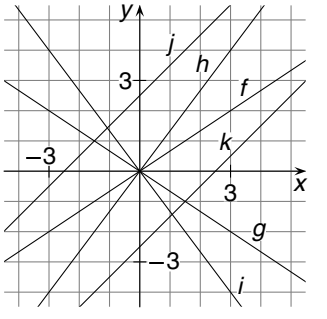
d) $x \mapsto 3x$. y: -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9. $\frac{y}{x} = 3$ a $(0;0)$ kivételével.

e) $x \mapsto -2x$. y: 6; 4; 2; 0; -2; -4; -6. $\frac{y}{x} = -2$ a $(0;0)$ kivételével.

f) $x \mapsto -x$. y: 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3. $\frac{y}{x} = -1$ a $(0;0)$ kivételével.

g) $x \mapsto -\frac{1}{2}x$. y: $\frac{3}{2}$; 1; $\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{1}{2}$; -1; $-\frac{3}{2}$. $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$ a $(0;0)$ kivételével.

2.16. Az első négy függvény egyenes arányosság. A grafikonjuk az origón átmenő egyenes.

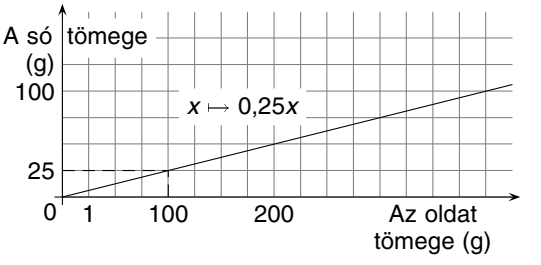


2.17. *a)* Egyenes arányosság. $x \mapsto 30x$.
Értelmezési tartomány: **N**, képhalmaz: **Q**.

1 db	30 Ft;	240 Ft	8 db;
2 db	60 Ft;	330 Ft	11 db;
15 db	450 Ft;	90 Ft	3 db;
		1800 Ft	60 db

b) Egyenes arányosság.
$x \mapsto 0{,}25x$. 25%-os oldat.
Értelmezési tartomány, értékkészlet:
„minden” nemnegatív szám:

20 g oldat:	5 g só;
60 g oldat:	15 g só;
200 g oldat:	50 g só;
7,5 g só:	30 g oldatban;
87,5 g só:	350 g oldatban;
200 g só:	800 g oldatban.



c) Az elegy (százalékos) töménysége és a hozzáadott mennyiség tömege között nincs egyenes vagy fordított arányosság. Az értelmezési tartomány a nemnegatív racionális számok halmaza, az értékkészlet a 20 és a 40 közé eső számok halmaza. (A keverés utáni oldat töménysége biztosan több lesz 20%-nál, és biztosan kevesebb lesz 40%-nál, hiszen két ilyen töménységű oldatot kevertünk össze.)

Ha az oldat 40%-os, akkor 1 grammjában $\frac{40}{100}$ g tiszta (100%-os) oldott anyag van.

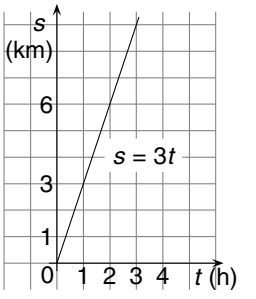
100 grammjában: $100 \cdot \frac{40}{100}$ g = 40 g.

Keverés után: $100 \cdot \frac{40}{100} + 50 \cdot \frac{20}{100} = 150 \cdot \frac{x}{100}$, $\quad x \approx 33{,}3$ g.

100 g 40%-os és 50 g 20%-os oldat keverésével 150 g 33,3%-os oldatot nyerünk.
A további eredmények: 30%-os; 25%-os; 22%-os töménységű oldatokat kapunk.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (23. old.)

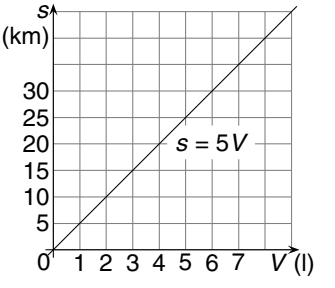
d) Egyenes arányosság. Az értelmezési tartomány és az értékkészlet a nemnegatív számok halmaza. $s = 3t$.



idő (h)	1	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{6}$	2,5	4
út (km)	3	1	5	9	0,5	7,5	12

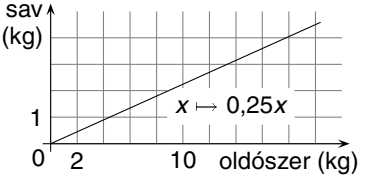
e) Nem egyenes (fordított) arányosság.
Értelmezési tartomány, értékkészlet: a pozitív számok halmaza,
$v \cdot t = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$; $4{,}5 \cdot t = 7{,}5$; $t = \frac{5}{3}$ h; $\frac{5}{3}$ óra alatt.
$15 \cdot t = 7{,}5$; $t = \frac{1}{4}$ h; $\frac{1}{2}$ óra alatt.

f) Egyenes arányosság. Értelmezési tartomány, értékkészlet: a nemnegatív számok halmaza, $s = 5V$ (V a térfogat jele).



benzin (l)	5	0,5	1	1,5	2	7,5	27,5	24
út (km)	25	2,5	5	7,5	10	37,5	137,5	120

g) Egyenes arányosság. Értelmezési tartomány, értékkészlet: a nemnegatív számok halmaza, $y = 0{,}25x$; x: a sav tömege (kg); y: az oldószer tömege (kg).



x (kg)	1	0,1	7,5	$2\frac{2}{3}$	25	48
y (kg)	0,25	0,025	1,875	$\frac{2}{3}$	6,25	12

h) Nem egyenes (fordított) arányosság. Értelmezési tartomány: a pozitív egészek halmaza (edények száma). Értékkészlet: a pozitív számok halmaza (az edényfajták térfogata).
$x \cdot V = 300$;
x: az edények száma; V: az edények térfogata.

x (db)	15	6	200	2	50
V (l)	20	50	1,5	150	6

2.18. *a)* 2 nap; *b)* 8 nap. **2.19.** 6 tyúk.

2.20. *a)* 16 ember; *b)* 14 kg-ot **2.21.** *a)* 57,6 l; *b)* 38,4 l

2.22. A táblázatból hiányzó számok rendre:

a) 0; 4; 8; 10; 20; 30; 32; 40; 50; 60

b) 0; 5; 10; 12,5; 25; 37,5; 40; 50; 62,5; 75

c) 0; 2; 4; 5; 10; 15; 16; 20; 25; 30

Azonos alap mellett egyenes arányosság van a százalékláb és a százalékérték között.
Ha a százalékláb egyenlő, nagyobb összeghez nagyobb, kisebb összeghez kisebb *százalékérték* tartozik.
Ha a százalékérték egyenlő, nagyobb összeghez kisebb, kisebb összeghez nagyobb *százalékláb* tartozik.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (24. old.)

Lineáris függvény

2.23. *a)* $(200 \cdot 0 + 160)$ Ft; $(200 \cdot 1 + 160)$ Ft; $(200 \cdot 2 + 160)$ Ft; ...; $(200 \cdot 10 + 160)$ Ft; ...; $(200 \cdot x + 160)$ Ft. Az x tetszőleges nemnegatív szám lehet.

b) $(1200 - 80 \cdot 0)$ Ft; $(1200 - 80 \cdot 1)$ Ft; $(1200 - 80 \cdot 2)$ Ft; ...; $(1200 - 80 \cdot 10)$ Ft; ...; $(1200 - 80 \cdot x)$ Ft. $0 \leqq x \leqq 15$, ha $x > 15$, akkor Beának adóssága marad.

c) $(80 \cdot 0 - 200)$ Ft; $(80 \cdot 1 - 200)$ Ft; $(80 \cdot 2 - 200)$ Ft; ...; $(80 \cdot 10 - 200)$ Ft; ...; $(80 \cdot x - 200)$ Ft. $0 \leqq x$. Ha $x < 25$, akkor a negatív értékű kifejezést úgy értelmezzük, hogy Csaba kap pénzt.

2.24. *a)* $e(x) = x$; $f(x) = x - 4$; $g(x) = x - 2$; $h(x) = x + 3$; $i(x) = x + 5$;

b) $a(x) = \frac{1}{2}x$; $b(x) = \frac{1}{2}x + 2$; $c(x) = \frac{1}{2}x - 3$;

$d(x) = -\frac{1}{2}x$; $e(x) = -\frac{1}{2}x + 2$; $f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$

2.25. Mindegyik grafikon egyenes.

a) Az egyenesek ugyanabban a pontban, a $(0; 4)$ pontban metszik az y tengelyt.

b) Az egyeneseknek ugyanakkora a meredeksége, párhuzamosak egymással.

2.26. *a)* $x \mapsto \frac{2}{3}x$. y: -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6. $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, a $(0; 0)$ kivételével.

b) $x \mapsto -\frac{4}{3}x$. y: 12; 8; 4; 0; -4; -8; -12. $\frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$, a $(0; 0)$ kivételével.

c) $x \mapsto \frac{2}{3}x + 6$. y: 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12.

d) $x \mapsto \frac{2}{3}x - 8$. y: -14; -12; -10; -8; -6; -4; -2.

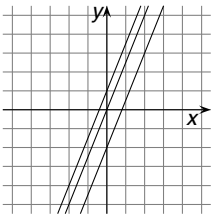
e) $x \mapsto -\frac{4}{3}x + 4$. y: 16; 12; 8; 4; 0; -4; -8.

f) $x \mapsto -\frac{4}{3}x - 3$. y: 9; 5; 1; -3; -7; -11; -15.

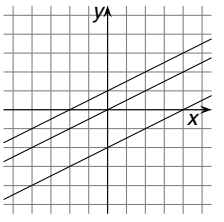
g) $x \mapsto 13$. y: mindenütt 13.

h) $x \mapsto -10$. y: mindenütt -10.

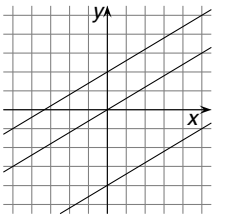
2.27. *a)*



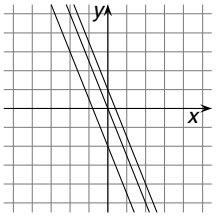
b)



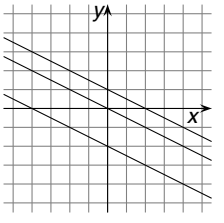
c)



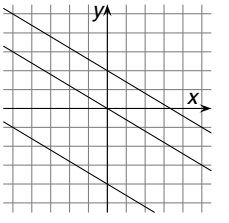
d)



e)



f)



2.28. *a)* $x \mapsto -\frac{3}{2}x+3$; $x \mapsto \frac{4}{3}x-8$; *b)* $x \mapsto -\frac{3}{2}x-3$; $x \mapsto \frac{4}{3}x+8$; *c)* $x \mapsto \frac{2}{3}x+2$; $x \mapsto -\frac{3}{4}x+6$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (25. old.)

2.29. *a)*

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{3}{5}$	2	$2\frac{2}{5}$	4	6	8

b)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	4	$4\frac{2}{5}$	$4\frac{4}{5}$	$5\frac{1}{5}$	$5\frac{3}{5}$	6	$6\frac{2}{5}$	8	10	12

c)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	-6	$-5\frac{3}{5}$	$-5\frac{1}{5}$	$-4\frac{4}{5}$	$-4\frac{2}{5}$	-4	$-3\frac{3}{5}$	-2	0	2

d)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	-2	$-2\frac{2}{5}$	-4	-6	-8

e)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	4	$3\frac{3}{5}$	$3\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$	$2\frac{2}{5}$	2	$1\frac{3}{5}$	0	-2	-4

f)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	-6	$-6\frac{2}{5}$	$-6\frac{4}{5}$	$-7\frac{1}{5}$	$-7\frac{3}{5}$	-8	$-8\frac{2}{5}$	-10	-12	-14

g)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{5}$	2	4	6

h)

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20
s (km)	4	4	4	4	4	4	$3\frac{3}{5}$	2	0	-2

Az idő és elmozdulás közti kapcsolat szabálya:

a) $t \mapsto \frac{2}{5}t$; *b)* $t \mapsto \frac{2}{5}t + 4$; *c)* $t \mapsto \frac{2}{5}t - 6$;

d) $t \mapsto -\frac{2}{5}t$; *e)* $t \mapsto -\frac{2}{5}t + 4$; *f)* $t \mapsto -\frac{2}{5}t - 6$;

g) $t \mapsto \frac{2}{5}(t-5)$, ha $t \geqq 5$; $t \mapsto 0$, ha $0 \leqq t < 5$;

h) $t \mapsto -\frac{2}{5}(t-5)$, ha $t \geqq 5$; $t \mapsto 4$, ha $0 \leqq t < 5$

Az értelmezési tartomány a nemnegatív számok halmaza.

2.30. A keresett függvények szabálya:

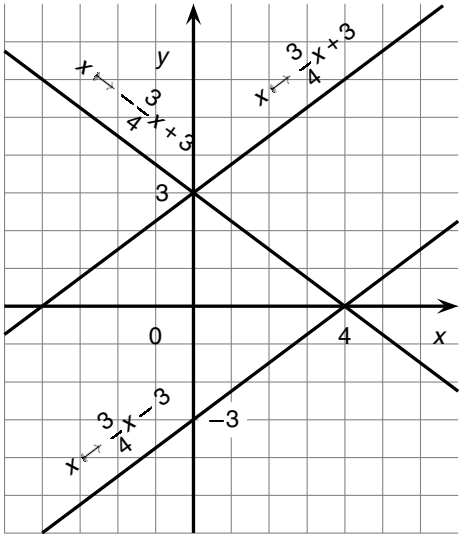
a) $f(x) = -\frac{3}{5} - 4$; *b)* $f(x) = \frac{2}{7}x + 2$; *c)* $f(x) = \frac{5}{4}x$; *d)* $f(x) = -3x + 5$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (26. old.)

Egyenlet, egyenlőtlenség grafikus megoldása

2.31. *a)* (1) $x \geqq -3$; (2) $x = -3$; (3) $x \leqq -3$; *b)* (1) $x > 5$; (2) $x = 5$; (3) $x < 5$;
c) (1) $x > -2$; (2) $x = -2$; (3) $x < -2$

2.32. *a)* $x = 4$; *b)* $x \geqq 4$;
c) $x = 0$; *d)* $x < 0$;
e) nincs megoldása;
f) azonos egyenlőtlenség;
g) azonosság;
h) nincs megoldása.



2.33. *a)* Azonosság; *b)* $x = 0$;
c) nincs megoldás; *d)* $x = 6$

2.34. *a)* $x > 0$; *b)* azonos egyenlőtlenség;
c) azonos egyenlőtlenség.

2.35. *a)* $-2 < x < 2$; *b)* $x > 1$;
c) $x_1 = -3$; $x_2 = 6$

2.36. $25 - \frac{3}{4}x = 10 + \frac{1}{2}x$; $x = 12$. 12 perc múlva.

2.37. *Például:*

a) A megfigyelési ponttól 30 m távolságból indul egy gyalogos a megfigyelési pont felé, és 20 s alatt 15 m utat tesz meg. Ugyanakkor elindul a megfigyelési ponttól ellenkező irányban 15 m távolságban lévő kerékpár a gyalogossal szemben, és 10 s alatt tesz meg 15 m-t. Mikor találkoznak? (Az indulás után 20 s-mal).

b) Egy 30 °C-os anyagot hűteni kezdenek, és 20 s alatt 15 °C-kal csökken a hőmérséklete. Egy másik anyag hőmérséklete −15 °C, ezt ugyanakkor melegíteni kezdik, és 10 s alatt 15 °C-kal nő a hőmérséklete. Mikor lesz a két anyag hőmérséklete egyenlő? (A folyamat 20. másodpercében.)

Sorozat

2.38. *a)* $n \mapsto 4n - 4$; 0; 4; 8; ... $a_{50} = 4 \cdot 50 - 4 = 196$.

A 4-gyel osztható természetes számok sorozata.

$n \mapsto 4n - 3$; 1; 5; 9; ... $a_{50} = 4 \cdot 50 - 3 = 197$.

A 4-gyel osztva 1 maradékot adó természetes számok.

$n \mapsto 4n - 2$; 2; 6; 10; ... $a_{50} = 4 \cdot 50 - 2 = 198$.

$n \mapsto 4n - 1$; 3; 7; 11; ... $a_{50} = 4 \cdot 50 - 1 = 199$.

b) $a_1 = 72$; $a_2 = 36$; $a_3 = 24$; $a_4 = 18$; $a_5 = 72 \cdot 5 = 14{,}4$; $a_6 = 12$; $a_7 = \frac{72}{7}$; $a_8 = 9$;

$a_9 = 8$; $a_{10} = 7{,}2$; $a_{11} = \frac{72}{11}$; $a_{12} = 6$; ...

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (27. old.)

c) $a_1 = 5$; $a_2 = a_1 \cdot 2^1 = 10$; $a_3 = a_2 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^2 = 20$; $a_4 = a_3 \cdot 2 = (a_1 \cdot 2^2) \cdot 2 = a_1 \cdot 2^3 = 40$; $a_5 = a_4 \cdot 2 = (a_1 \cdot 2^3) \cdot 2 = a_1 \cdot 2^4 = 80$.

Megfigyelhető az általános összefüggés: $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$.

A szabályt alkalmazva: $a_{12} = a_1 \cdot 2^{10} = 5 \cdot 1024 = 5120$.

d) $a_4 = 12$; $a_3 = 6$; $a_2 = 3$; $a_1 = 1{,}5$; $a_5 = 24$; $a_6 = 48$; ...

2.39. *a)* $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2$; $a_3 = 1 + 2 + 3$; $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$; ...

Például:

$$a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \underbrace{(1 + 6)}_{7} + \underbrace{(2 + 5)}_{7} + \underbrace{(3 + 4)}_{7} = 3 \cdot (1 + 6) = 21.$$

$$a_7 = \underbrace{(1 + 7)}_{8} + \underbrace{(2 + 6)}_{8} + \underbrace{(3 + 5)}_{8} + \underbrace{4}_{0{,}5 \cdot 8} = 3{,}5 \cdot (1 + 7) = \frac{7}{2} \cdot (1 + 7)$$

A felismert szabályt alkalmazva:

$$a_8 = \frac{8}{2} \cdot (1+8) = 36;\ a_9 = \frac{9}{2} \cdot (1+9) = 45;\ a_{10} = \frac{10}{2} \cdot (1+10) = 55;\ a_{15} = \frac{15}{2} \cdot (1+15) = 120$$

b) $a_1 = (-2)^1$; $a_2 = (-2)^2$; $a_3 = (-2)^3$; ...; $a_6 = (-2)^6 = 64$; $a_7 = (-2)^7 = -128$; $a_{15} = (-2)^{15} = -32\,768$

c) $a_1 = \dfrac{1 + (-1)^1}{1} = 0$; $a_2 = \dfrac{1 + (-1)^2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$; $a_3 = \dfrac{1 + (-1)^3}{3} = 0$; $a_4 = \dfrac{1 + (-1)^4}{4} = \dfrac{1}{2}$;

$a_5 = \dfrac{1 + (-1)^5}{5} = 0$; $a_6 = \dfrac{1 + (-1)^6}{6} = \dfrac{1}{3}$; $a_7 = 0$; $a_8 = \dfrac{1}{4}$; $a_9 = 0$; $a_{10} = \dfrac{1}{5}$; ...; $a_{15} = 0$.

Vegyes szöveges feladatok

2.40. *a)* Legyen a gyümölcs egységára x, tömege y.
Értelmezési tartomány = {Pozitív egész számok}.
$x \cdot y = 2400$ (ennyi pénzem van). Fordított arányosság.
24 kg-ot; 48 kg-ot; 6 kg-ot; 16 kg-ot; 8 kg-ot.
160 Ft-ba; 240 Ft-ba; 60 Ft-ba; 96 Ft-ba.

b) Legyen a szőlő tömege x, ára y. Értelmezési tartomány = {Tetszőleges nemnegatív számok}.
$y = 160 \cdot x$. Egyenes arányosság.
1600 Ft-ba; 6400 Ft-ba; 160 Ft-ba; 1200 Ft-ba; 600 Ft-ba.
2 kg-ot; 6 kg-ot; 8,25 kg-ot; 9,6 kg-ot.

c) Legyen a tojások száma x; az ára y. Értelmezési tartomány = {Természetes számok}.
Nem lineáris függvény és nem fordított arányosság.
960 Ft-ba; 170 Ft-ba; 1450 Ft-ba; 1510 Ft-ba; 1600 Ft-ba.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (28. old.)

d) Legyen a pogácsák száma x, a maradék pénzem y. Értelmezési tartomány: $0 \leqq x \leqq 25$; x természetes szám.
$y = 1000 - 40x$. Lineáris függvény, nem egyenes arányosság.
800 Ft; 600 Ft; 400 Ft; 200 Ft.

e) Legyen a csapból 1 perc alatt kifolyó víz űrtalrtalma x, a kád megtöltéséhez szükséges idő y. Értelmezési tartomány = {Pozitív számok}.
$x \cdot y = 150$. Fordított arányosság.
50 perc; 12,5 perc; 10 perc; 7,5 perc; 12 perc alatt.
10 l; 30 l; 12,5 l; 1 l víz folyik ki 1 perc alatt.

f) Legyen az eltelt idő x, a kádban maradt vízmennyiség y.
Értelmezési tartomány = {20-nál nem nagyobb nemnegatív számok}.
$y = 240 - 12 \cdot x$. Lineáris függvény, nem egyenes arányosság.
216 l; 180 l; 60 l; 0 l.
Az 50 perc nem tartozik bele az általunk meghatározott értelmezési tartományba. Ha az értelmezési tartomány: {Nemnegatív számok}, akkor az összefüggés szabálya:

$$\left.\begin{array}{ll} y = 240 - 12 \cdot x, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 20; \\ y = 0, & \text{ha } 20 < x \end{array}\right\}$$ 50 perc múlva 0 l víz lesz a kádban.

0,5 perc múlva; 2,5 perc múlva; 5 perc múlva; 19 perc múlva.

g) Legyen az erőgépek száma x, a munka elvégzéséhez szükséges idő y.
Értelmezési tartomány = {Pozitív egész számok}.
$x \cdot y = 36$. Fordított arányosság.
18 óra alatt; 12 óra alatt; 7,2 óra = 7 óra 12 perc alatt; 3 óra alatt.
4 gép; 6 gép; 8 gép; 24 gép.

h) A szerelő óránként (minden megkezdett óráért) 3500 Ft-ot számláz. Értelmezési tartomány = {Pozitív egész számok}. Ezen az értelmezési tartományon a hozzárendelés szabálya, ha x a szerelési idő:
$y = 2800 + 3500 \cdot x$. Lineáris függvény, nem egyenes arányosság.
9800 Ft-ot; 16 800 Ft-ot; 27 300 Ft-ot (6,5 óra helyett 7 órát számított).
3 órán át. 18 550 Ft-ról nem adhatott számlát, mert 4,5 nem eleme az értelmezési tartománynak.

i) Legyen a csónak sebessége x, az út megtételéhez szükséges idő y.
Értelmezési tartomány = {Pozitív számok}.
$x \cdot y = 60$. Fordított arányosság.
10 óra alatt; 2,5 óra alatt; 6 óra alatt.
15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

3. Algebrai kifejezések

Ismerkedés az algebrai kifejezésekkel

3.02. *a)* $a + 45$; *b)* $420 - b$; *c)* $c - 25$; *d)* $d + 47$; *e)* $100 - e$

3.03. *a)* $2 \cdot 1200$ Ft; $6 \cdot 1200$ Ft; $x \cdot 1200$ Ft; $2 \cdot x \cdot 1200$ Ft; $(x + 2) \cdot 1200$ Ft;
b) $150 \cdot 220$ Ft; $150 \cdot 1000$ Ft; $150 \cdot y$ Ft; $150 \cdot 4 \cdot y$ Ft; $150 \cdot (y - 250)$ Ft;
c) $36\,000 : 12$; $36\,000 : 180$; $36\,000 : z$; $36\,000 : (z + 5)$; $36\,000 : (3 \cdot z)$;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (29. old.)

d) $d : 52$; $d : 48$; $d : u$; $d : (2 \cdot u)$; $d : (15 + u)$;

e) $1800 : 45$; $405 : 45$; $v : 45$; $3 \cdot v : 45$; $(v + 90) : 45$

3.04. *a)* $a \cdot 2$ vagy $2 \cdot a$; *b)* $a \cdot b$ vagy $b \cdot a$; *c)* $a + b$ vagy $b + a$;

d) $b - a$; *e)* $2 \cdot a + 3 \cdot b$; *f)* $(2 \cdot a + b) \cdot 3$

3.05. *a)* $a \cdot b + c$; *b)* $(a + b) \cdot c$; *c)* $a + b \cdot c$; *d)* $a \cdot (b + c)$

3.06. *a)* **B**; *b)* **A**; *c)* A megfelelő kifejezés ez lenne: $7 \cdot (x - y) \cdot z$.
A **C** kifejezésnek a következő kijelentés felel meg:
Az x 7-szeresének és y-nak a különbsége szorozva z-vel.

3.07. *a)* $x \cdot y$; *b)* $(2 \cdot x) \cdot y = 2 \cdot x \cdot y$; *c)* $x \cdot (y + 2)$

3.08. *a)* 2; -5; -3; 4; 3;

b) 4; -5; -3; 63; 5,28;

c) 1; -1; $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{5}{4}$

Algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározása

3.09. *a)* 6,5; 4,9; 11,8; -5; *b)* 2; $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$; 0; $\frac{2}{3}$;

c) $\frac{5}{3}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{13}{2}$; $-\frac{17}{4}$; *d)* -6; 5,75; $\frac{9}{2}$;

e) 1,3; $-\frac{9}{8}$; 2; *f)* $-1{,}375$; $-1{,}1$; 0,8;

g) $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$; $-0{,}4$; 1,44

3.10. *a)* 4; 8; 48; 16; -16;

b) $(-2)^0 = 1$; $(-(-2))^1 = 2^1 = 2$; $2 \cdot (-(-2))^3 = 16$; $((-2) \cdot (-2))^2 = 16$; -10;

c) $(-1)^5 = -1$; $(-(-1))^5 = 1$; $(3 \cdot (-1))^3 = -27$; $3 \cdot (-1)^3 = -3$; $-(-1)^5 = 1$

3.11. *a)* $2 + 3 \cdot (-3)^2 = 2 + 3 \cdot 9 = 2 + 27 = 29$;

$2 + (3 \cdot (-3))^2 = 2 + (-9)^2 = 2 + 81 = 83$;

$(2 + (3 \cdot (-3))^2 = (2 - 9)^2 = (-7)^2 = 49$;

b) 0; 16; -4; *c)* 214; 0; -18; *d)* 0; 0; 1;

e) 4; 0; 12; *f)* 12; 8; 10; *g)* 3; -1; $\frac{1}{4}$

3.12. *a)* 5; 3; 25. *b)* 20; -16; 68.

3.13. *a)* $K = 2a + 2b$: 16; 21; 30; 8,2; 80 (cm);

$T = ab$: 15; 20; 50; 3,64; 300 (cm^2)

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (30. old.)

b) $K = 8a$: 8; 16; 40; 80; 0,8 (cm);
$T = 3a^2$: 3; 12; 75; 300; 0,03 (cm^2)

c) A rajz alapján $b > 2a$. Ezért az 1. és a 4. adatpár nem felel meg az ábrának.
$K = 6a + 2b$: —; 22; 58; —; 3 (cm);
$T = 3ab - 4a^2$: —; 14; 110; —; 0,32 (cm^2)

3.14. *a)* $\frac{a+c}{2} \cdot m$: 25; 68; 10,5; 15; 6,48;

b) $\frac{4a \cdot m}{2}$: 4; 14; 50; 320; 0,08;

c) $\frac{4a \cdot m}{2}$; 4; 16; 60; 240; 0,16;

d) $\frac{10a \cdot m}{2}$: 10; 40; 150; 600; 0,4

3.15. *a)* $T = \frac{e \cdot f}{2}$: 14; 50; 0,45; 100; 5;

b) $T = 0{,}75 \cdot e^2$: 27; 0,48; 60,75; 75; 12

3.16. *a)* $A = 3aM + am$: 11,8; 139,2; 477; 4,8;

b) $A = a^2 + 2am$: 10,8; 24,6; 98,4; 193,2;

c) $A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot M$: 43,96; 150,72; 747,32; 18,777;

d) $A = 16a^2$: 16; 144; 4; 1600

3.17. *a)* 3; 1; −2; 11; *b)* 3; 0; 0; 12,5;
c) 0; −40; −3,6; 0; *d)* 15; −25; 6; 0

3.18. *a)* −6; −4; −18; −4; *b)* 4; 0; 36; 0;
c) 0; 8; −18; −4; *d)* −14; −12; −36; −6

Egynemű, különnemű algebrai kifejezések

3.19. *a)* 2; −1; 0; $2x$; $\frac{x}{2}$; $-5x$; x; x^2; $5x^2$;

b) 3; 4; 0,5; $5y$; $-y$; $\frac{y}{2}$; xy; $x \cdot 2 \cdot y$; $3yx$

3.20. $-x$; 2; $\frac{3x}{5}$; $-\frac{6}{5}$; $x \cdot 1{,}5$; -3; $3 \cdot x \cdot 5$; -30

3.21. Olyan algebrai kifejezéseket kell felírni, amelyek az adott kifejezéstől legfeljebb együtthatóikban különböznek; változóikban, illetve ezek kitevőiben megegyeznek. *Például*:
A $2x$ kifejezéssel egynemű az x; $-3{,}5x$; $x \cdot 0{,}7$.

Az $5cd$ kifejezéssel egynemű a $-cd$; $\frac{cd}{2}$; $1{,}85cd$; $\frac{2cd}{3}$.

A $-\frac{ax}{4}$ kifejezéssel egynemű az ax; $7{,}8ax$; $-0{,}8ax$; $\frac{ax}{3}$.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (31. old.)

Egynemű kifejezések összevonása

3.22. *a)* $5a + 2{,}5$; *b)* $1{,}5b - 6$; *c)* $-1{,}8$; *d)* $-14d - 1$;

e) $\frac{3}{2} - \frac{2e}{6} + \frac{5e}{6} - \frac{8}{2} - \frac{6e}{6} = -\frac{5}{2} - \frac{3e}{6} = -\frac{5}{2} - \frac{e}{2}$;

f) $-\frac{3}{2}f - \frac{3}{2}$; *g)* $\frac{15}{14}g - \frac{1}{14}$; *h)* $-\frac{2}{5}h + \frac{19}{20}$

3.23. *a)* $8{,}4x + 5{,}1y$; *b)* $-11a + 10b$; *c)* $-3x - 5y$; *d)* $-14a + 20b$;

e) $4y$; *f)* $\frac{3}{8}a + \frac{b}{4}$; *g)* $5{,}6x - y$; *h)* $\frac{1}{5}a$;

i) $18 - 3a - 3b$; *j)* $-x - y$; *k)* $\frac{y}{2}$; *l)* 0

3.24. A két kiszámított érték egyenlő:

a) 2; *b)* 73; *c)* -7; *d)* 122; *e)* 8; *f)* $-\frac{1}{8}$;

g) $-7{,}6$; *h)* $-\frac{3}{5}$; *i)* 15; *j)* -1; *k)* 1; *l)* 0

3.25. *a)* $17x - 13$; *b)* $3a - 7b$; *c)* $40x - 20$; *d)* x; *e)* $4ay$

3.26. *a)* $2{,}5a$; $1{,}5$; *b)* $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y$; 6; *c)* $0{,}7y$; $-2{,}45$;

d) $-5{,}4b$; $4{,}5$; *e)* $3b$; $-\frac{5}{2}$; *f)* $\frac{5}{4}x - y$; $\frac{33}{8}$;

g) $\frac{2}{7}x$; $\frac{1}{7}$; *h)* $-\frac{1}{10}b$; $\frac{1}{12}$; *i)* $2y$; -7;

j) $\frac{7}{8}a$; $\frac{21}{40}$; *k)* x; $\frac{1}{2}$; *l)* $0{,}4y$; $-1{,}4$

3.27. *a)* $-4a$; -8; *b)* $12{,}6m - 6{,}7n$; $-19{,}3$; *c)* $14{,}8x + 6{,}8y$; $-6{,}2$;

d) $24 - 7{,}8x$; $47{,}4$; *e)* $1 - 6\frac{5}{6}x = 1 - \frac{41}{6}x$; $-7\frac{1}{5}$; *f)* $\frac{8}{9}a - 5\frac{1}{16}$; $-\frac{307}{48} = -6\frac{19}{48}$

3.28. *a)* $a + (a + 250) + (a - 300) = 3a - 50$ (Ft).

b) $3b - [(b + 70 + b] = 3b - 2b - 70 = b - 70$ (forinttal).

c) $c + \left(\frac{5}{3}c + 50\right) + \left(\frac{5}{6}c - 40\right) = \frac{6}{6}c + \frac{10}{6}c + 50 + \frac{5}{6}c - 40 = \frac{21}{6}c + 10 = \frac{7}{2}c + 10$ (Ft).

d) $d + \left(\frac{4}{5}d - 120\right) - \left(\frac{3}{4}d + 120\right) = \frac{21}{20}d - 240$ (Ft).

Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.29. *a)* Az alma ára forintban: $5 \cdot 130 = 650$; $3 \cdot 5 \cdot 130 = 3 \cdot 650 = 1950$; $4 \cdot 5 \cdot 130 = 2600$; $130x$; $390x$; $520x$

b) A körte ára forintban: $5 \cdot k$; $4 \cdot 5 \cdot k$; xk; $4xk$

c) A vezeték ára forintban: $3 \cdot v$; $7{,}5v$; $a \cdot v$; $2x \cdot v$; $2v^2$

3.30. *a)* $6a^2$; *b)* $15a^2$; *c)* $12a^2$

3.31. *a)* $16ab$; *b)* $48ab$; *c)* $42ab$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (32. old.)

3.32. *a)* $24a^3$; *b)* $30a^3$

3.33. *a)* $27a^2b$; *b)* $84a^2b$

3.34. *a)* x^3; a^4; $(-b)^5 = -b^5$; *b)* $c^2 \cdot d^3$; $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$; $(x \cdot y)^2 = x^2y^2$;

c) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$; $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; $ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab$;
$-a \cdot a \cdot a$; $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$; $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$;

d) $(x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^5$; $z \cdot (z \cdot z \cdot z) = z^4$; $(a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6$;
$c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot 1 = c^5$; $(d \cdot d) \cdot (d \cdot d) \cdot (d \cdot d) = d^6$; $(y \cdot y \cdot y) \cdot (y \cdot y \cdot y) \cdot (y \cdot y \cdot y) = y^9$

3.35.

a)	$6x$;	$-20x$;	$12x$;	$2{,}43x$;
b)	$-10y$;	$0{,}001y$;	$6y$;	$-0{,}035y$;
c)	$\frac{2}{3}z$;	$\frac{2}{5} \cdot z$;	$-\frac{4z}{17}$;	$-7z$;
d)	$12v^5$;	$-2v^7$;	$-v^4$;	$-0{,}4v^6$;
e)	$12x^4$;	$10z^3$;	$12a^3$;	$6c^7$;
f)	$\frac{c^6}{10}$;	$\frac{3x^4}{4}$;	$-\frac{3z^3}{8}$;	$-\frac{u^6}{3}$

3.36.

a)	x^2;	x;	x^2;	x^2;
b)	$2y$;	$4y$;	$\frac{1}{3}y^4$;	$\frac{1}{2}y^3$

3.37.

a)	$4a$;	$5a$;	$-0{,}8a$;	$-90a$;
b)	$-1{,}5b$;	$-50b$;	$0{,}06b$;	$5b$;
c)	$\frac{3}{2}c$;	$-2c$;	$\frac{3}{4}c$;	$\frac{-5}{4}c$;
d)	$4d^2$;	$4d^3$;	$\frac{1}{2}d^2$;	4;
e)	$\frac{15e^2}{8}$;	-6;	$\frac{5e^2}{14}$;	$\frac{2e}{3}$

Többtagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel

3.38.

a)	$2a - 4$;	$3x - 12$;	$5y + 30$;	$4z + 20$;
b)	$-4b + 12$;	$-5c - 10$;	$-3d + 9$;	$-7e - 42$;
c)	$-12 + 3a$;	$30 - 5b$;	$-16 + 8c$;	$60 - 15d$;
d)	$1{,}2x - 4{,}8$;	$-5{,}2y - 6{,}24$;	$-12{,}4 + 3{,}1z$;	$15{,}6 - 5{,}2x$;
e)	$12 - 4a$;	$-6 - 2a$;	$-15 + 3a$;	$-14 + 5a$;
f)	$\frac{1}{2}a - 1$;	$\frac{10}{3} - \frac{2}{3}b$;	$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}c$;	$-1 - \frac{4}{3}d$;
g)	$3x + 3y$;	$-2x + 2y$;	$3{,}5x + 3{,}5y + 3{,}5z$;	$-4{,}2x + 4{,}2y + 4{,}2z$;
h)	$6a - 3$;	$12 - 16a$;	$25a - 30$;	$18a - 6$

3.39. *a)* $-2a - 2b - 2c$; $-3a + 3b + 3c$; $-4a + 4b - 4c$;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (33. old.)

b) $\frac{5}{2}-\frac{1}{3}x$; $\frac{8}{3}-\frac{1}{2}x$; $-\frac{5}{2}+2x$;

c) $10{,}2-6x$; $-10{,}5-15x$; $24-2{,}4x$;

d) $3a+8b$; $7{,}75a-4{,}96b$; $-1{,}2a+0{,}6b$;

e) $-\frac{10}{3}a-\frac{15}{4}b+4c$; $-a-2b-3c$

3.40. *a)* a^2-2a; b^2+3b; c^2-4c; d^2+5d;

b) $5x-x^2$; $6x-2x^2$; $7x+3x^2$; $8x+4x^2$;

c) a^2-2ab; b^2-2ab; a^2+2ab; b^2+2ab;

d) $-x^2-xy$; $-2xy-y^2$; $3x^2+4xy$;

e) $2x-x^2-xy$; $-3y-xy-y^2$; $-x^2-\frac{1}{2}x+xy$;

f) $3{,}4x^3+17x$; $2{,}8x^3+2{,}8x^2y$; $-0{,}6x^5+1{,}2x^3$;

g) $-1{,}2x^2-1{,}2x^3-1{,}2x^4$; $-2x^2y-2x^2y^2-2xy^2$

3.41. *a)* a^2-a; 2; $-2a+6$; 2; $a-\frac{4}{5}$; $\frac{6}{5}$;

b) $-6{,}2a+8$; $-4{,}4$; $9a-18$; 0; $a+\frac{2}{5}$; $\frac{12}{5}$;

c) $2a+4$; 8; $-8+4a$; 0; $1+2a$; 5

3.42. *a)* $T=2xy+2xz=2x(y+z)$; *b)* $T=3ab+3ac=3a(b+c)$;

c) $T=12uv+8u^2=4u(3v+2u)$; *d)* $2x^2+8xy=2x(x+4y)$;

e) $T=12a^2+30a=3a(4a+10)$; *f)* $T=20u^2+24u=4(5u+6)$;

g) $T=2ab+8ac+4ad+14a=2a(b+4c+2d+7)$;

h) $T=4ab+16a^2+12ac+48a=4a(b+4a+3c+12)$

3.43. *a)* $A=2(ab+ac+bc)=2ab+2ac+2bc$; $A=84{,}9\ \text{cm}^2$;

b) $K=2(x+y)=2x+2y$; $K=16$ cm

3.44. *a)* $4x+3$; $-2{,}5x+4$; $-20x+40$;

b) $-5y+4$; $-50+30y$; $0{,}75y+1{,}25$;

c) $\frac{18}{20}z+\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}+\frac{3z}{50}$; $\frac{10}{3}-\frac{2z}{3}$;

d) $-1-100v$; $0{,}3+\frac{1}{2}v$; $\frac{2}{3}v-1$

Többtagú kifejezések szorzattá alakítása kiemeléssel

3.45. *a)* 6; *b)* 25; *c)* 24; *d)* -5; *e)* 2,5; *f)* -14

3.46. *a)* $5x-6$; *b)* $5y+3$; *c)* $2z+5$; *d)* $4-6u$;

e) $2v-\frac{5}{3}$; *f)* $\frac{w}{8}-\frac{2}{9}$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (34. old.)

3.47. *a)* $2x^5 - x^2 = x^2(2x^3 - 1)$; *b)* $2y^3 - 6y = 2y(y^2 - 3)$;
c) $12z^4 + 6z^3 = 6z^3(2z + 1)$; *d)* $7{,}5v^6 + 15v^3 = 7{,}5v^3(v^3 + 2)$;
e) $8a^3 - 6a^2 = 2a^2(4a - 3)$; *f)* $15b^4 - 10b^2 = 5b^2(3b^2 - 2)$

3.48. *a)* $3(x+1)$; $4(x-1)$; $2{,}5(x+1)$; $3{,}4(1-x)$;
b) $2(x-2)$; $3(x+2)$; $2(2x+1)$; $5(2x+1)$;
c) $3(x-6)$; $4(6-x)$; $4(2x+3)$; $3(3x-2)$;
d) $\frac{3}{2}(x+1)$; $\frac{4}{3}(1-x)$; $\frac{5}{2}(x-1)$; $\frac{2}{5}(x+1)$;
e) $\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)$; $\frac{3}{10}\left(x-\frac{8}{3}\right)$; $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}-x\right)$; $\frac{2}{7}\left(3+\frac{2x}{3}\right)$

Megjegyzés: Egy többtagú algebrai kifejezésből számot kiemelni (és így szorzattá alakítani) nagyon sokféleképpen lehet. *Például:* $6 + 4x = 4\left(\frac{6}{4} + x\right) = 3\left(2 + \frac{4}{3}x\right)$ stb.

3.49. *a)* $x(x+2)$; $a(a^2-2)$; $y(1-y)$; $b(1-2b)$;
b) $3a(1+2a)$; $b^2(b-4)$; $b(5b+2)$; $7b^2(1+2b)$

3.50. *a)* $3{,}6a + 7{,}2 = 3{,}6(a+2) = 3{,}6 \cdot (-2+2) = 0$;
b) $7b - 3{,}5 = 3{,}5(2b-1) = 3{,}5(2 \cdot 2 - 1) = 10{,}5$;
c) $-1{,}5c + 2{,}5 = 0{,}5(-3c+5) = 0{,}5 \cdot (-3 \cdot 3{,}2 + 5) = -2{,}3$

4. Egyenletek, egyenlőtlenségek

4.01. *a)* $a = 3$; megoldható, ha az alaphalmaz: **N**; **Z**; **Q**; $\mathbf{Q}^+$.

b) $b = \frac{8}{3}$; megoldható, ha az alaphalmaz: **Q**; $\mathbf{Q}^+$.

c) $c = -\frac{17}{7}$; megoldható, ha az alaphalmaz: **Q**.

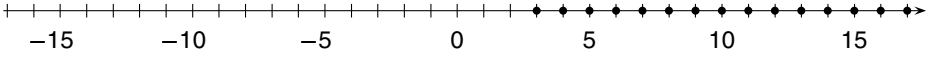
d) $d = 0$; megoldható, ha az alaphalmaz: **N**; **Z**; **Q**.

e) $e = -3$; megoldható, ha az alaphalmaz: **Z**; **Q**.

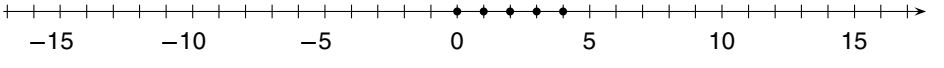
f) $f = \frac{19}{3}$; megoldható, ha az alaphalmaz: **Q**; $\mathbf{Q}^+$.

4.02. Azonosság az *a)* és a *c)* egyenlet.

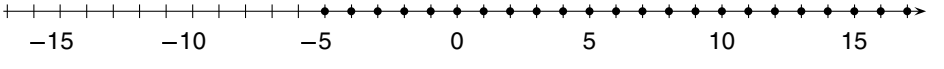
4.03. *a)*



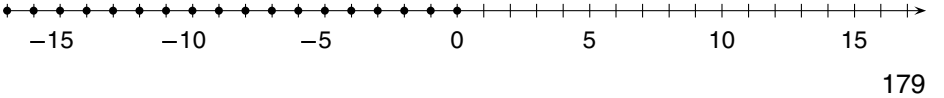
b)



c)

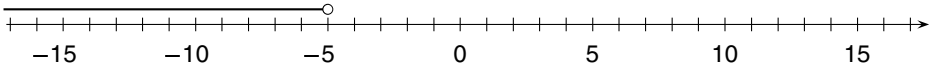


d)

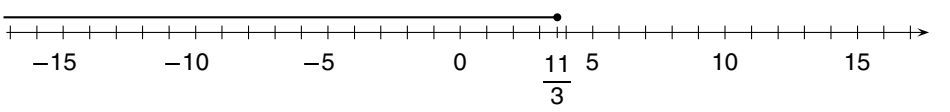


Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (35. old.)

e)



f)



4.04. *a)* $x > -2$; $5x > -10$; $2x + 5 > 1$; $3x + 2 > 2x$; ...
b) $x \leqq 4$; $5x \leqq 20$; $2x + 5 \leqq 13$; $3x + 2 \leqq 2x + 6$; ...
A két oldal egyenlő változtatásával tetszőleges számú olyan egyenlőtlenséget írhatunk fel, amely a feltételnek megfelel.

4.05. *a)* Például: $-5 \leqq x \leqq 1$; $-6 < x \leqq 1$; $-5{,}3 < x < 2$; ...
b) Például: $-1 \leqq x \leqq 4$; $-2 < x < 5$; $-1{,}5 < x < 4{,}5$; ...
c) $-5 < x \leqq 1$; *d)* $-1 \leqq x < 4$

4.06. Azonos egyenlőtlenség: *a)* $5 > 3$; *e)* $|x + 1| \geqq 0$; *f)* $x^2 + 10 > 0$

4.07. *a)* $a = -3$; *b)* $b = 2$; *c)* $c = 3$; *d)* $d = 4$; *e)* $e = 5$; *f)* $f = -1$;
g) $g = -2$; *h)* $h = \frac{4}{3}$; nem megoldás; *i)* azonosság; *j)* nincs megoldás;
k) $k = 6$; *l)* $l = 0$

4.08. *a)* $a = 3$; *b)* $b = -20$; *c)* azonosság; *d)* nincs megoldás; *e)* $e = 0$;
f) $f = 1$; *g)* $g = -1$; *h)* nincs megoldás; *i)* azonosság; *j)* $j = 2$

4.09. *a)* $a = -\frac{3}{2}$; *b)* nincs megoldás; *c)* $c = 3$; *d)* $d = 0$; *e)* azonosság;
f) $f = -2$; *g)* azonosság; *h)* $h = \frac{5}{2}$; *i)* $i = 1$; *j)* nincs megoldás

4.10. *a)* $a = \frac{7}{5}$; *b)* $b = -5$; *c)* azonosság; *d)* nincs megoldás; *e)* azonosság;
f) $f = \frac{8}{5} = 1{,}6$; *g)* $g = -\frac{5}{6}$; *h)* azonosság; *i)* nincs megoldás; *j)* $j = -\frac{1}{14}$

4.11. *a)* $a > 3$; egész szám; *b)* $a > 3$; az a racionális szám;
c) $a \geqq 3$; racionális szám; *d)* $a \geqq 3$; természetes szám.

4.12. *a)* $a > 16{,}5$, nem megoldás; *b)* $b \geqq \frac{4}{5}$, racionális; *c)* azonos egyenlőtlenség;
d) nincs megoldás; *e)* $e < \frac{7}{5}$, természetes szám: 0; 1; *f)* $1 > 3$, nincs megoldás.

4.13. *a)* $a > -\frac{2}{3}$; *b)* $b \leqq 0$; *c)* $c \leqq -5$; *d)* $d < -\frac{2}{3}$; *e)* $e < 10$; *f)* $f \geqq 0$

4.14. *a)* $a = 4$; *b)* $b = -1$; *c)* $c = 5$; *d)* $d = -2$; *e)* $e = \frac{19}{2}$; *f)* $f = -7$;
g) $g = \frac{1}{2}$; *h)* $h = -2$; *i)* $i = 3$; *j)* nincs megoldás; *k)* $k = -\frac{2}{5}$; *l)* $l = 8$;
m) azonosság; *n)* $n = \frac{9}{4}$; *o)* $o = 8$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (36. old.)

4.15. *a)* $a > -1$; *b)* $b \leqq 5$; *c)* $c \geqq \frac{9}{17}$; *d)* $d < 0$; *e)* $e < -\frac{5}{2}$; *f)* $f > 1$;
g) $g \leqq 12$; *h)* $h \leqq \frac{7}{4}$; *i)* $i > 3$; *j)* $j < 0$

4.16. *a)* $a = -\frac{1}{3}$; *b)* $b = -\frac{2}{15}$; *c)* $c = \frac{9}{4}$;
d) $d = 9$; *e)* $e = -\frac{2}{3}$; *f)* $f > 2$;
g) $g \geqq -3$; *h)* $h \geqq -\frac{8}{3}$

4.17. *a)* $a_1 = 9$; $a_2 = -10$; $a_3 = 7$; *b)* $b = -1$; *c)* $c_1 = -1$; $c_2 = 8$; $c_3 = -3$;
d) $d = 4$; *e)* $e = -1$; *f)* $f_1 = 0$; $f_2 = 3$; $f_3 = \frac{1}{3}$; $f_4 = -4$;
g) $g_1 = -\frac{2}{3}$; $g_2 = \frac{1}{4}$; *h)* $h_1 = -3$; $h_2 = 0$; $h_3 = 2$

4.18. *a)* $a = 3$; *b)* $b = 2$; *c)* $c = -1$; *d)* $d = -10$; *e)* $e < 4\frac{4}{5}$, $e \leqq 4$ (egész szám);
f) $f \geqq 0$ (egész szám); *g)* nincs megoldás; *h)* azonos egyenlőtlenség;
i) $i = \frac{3}{2}$, nem egész szám, az egyenletnek nincs megoldása; *j)* azonosság.

4.19. *a)* $a = -\frac{1}{20}$; *b)* $b < \frac{7}{5}$; *c)* $c = -216$; *d)* $d \geqq 14$; *e)* $e \geqq 2$;
f) azonosság; *g)* $g = 0$; *h)* $h = 9$; *i)* $i \leqq 3$; *j)* $j = 5$; *k)* $k = \frac{12}{5}$;
l) $l = 13$; *m)* $m = 13$; *n)* $n = \frac{16}{29}$

4.20. *a)* $a = -3$; *b)* $b = 10$; *c)* $c = 13$; *d)* $d = 9$; *e)* $e = 24$; *f)* $f = 7$

4.21. *a)* $a \geqq -10$; *b)* azonos egyenlőtlenség; *c)* $c < 3$; *d)* $d \leqq \frac{26}{3}$; *e)* $e \leqq -2$;
f) $f < 32$; *g)* $g < \frac{1}{2}$; *h)* $h > -\frac{35}{2}$; *i)* $i > \frac{9}{4}$; *j)* $j \leqq 15$; *k)* $k \geqq \frac{7}{5}$;
l) $l < -\frac{19}{9}$

Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok

4.22. *a)* 2 kg és 4 kg; *b)* 16, 24; *c)* Robinak 442, Pistinek 758;
d) 60 és 86 darab; *e)* 135, 60 és 45; *f)* 67 db; 35 db és 70 db

4.23. *a)* 15,5 és 19,5; *b)* 28 és 94; *c)* 12 és 48; *d)* 15; *e)* 52; *f)* 32;
g) $5x + 2{,}5 \geqq 30$; $x \geqq 5{,}5$; *h)* $3x - 10 < 50$; $x < 20$

4.24. *a)* 134 km, 67 km és 99 km; *b)* 25; *c)* 144 Ft; *d)* 438 Ft;
e) 250 Ft, ill. 215 Ft.

4.25. *a)* 2; *b)* 2; *c)* 40; *d)* 15 dl-esek az üvegek.

4.26. *a)* 86 és 50; *b)* 60; *c)* 1411 és 1079; *d)* $0{,}3x + 18 > 0{,}75x$; $x < 40$

4.27. *a)* Bármely szám megoldása; *b)* 47; *c)* 40

4.28. *a)* 300 Ft; *b)* 46; *c)* 8 db 132 Ft-os és 6 db 185 Ft-os édességet vett;
d) 100 db-ot az 1250 Ft-osból és 60 db-ot a 980 Ft-osból.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (37. old.)

4.29. *a)* 24 és 36; *b)* $\frac{5}{8}$; *c)* 540 és 40; *d)* 294 és 32; *e)* 35 és 40

4.30. *a)* $2x - 6 = x$; $x = 6$. Az egyik kosárban 6 kg, a másikban 12 kg alma van.

b) $2x - 6 = x + 6$; $x = 12$. Az egyikben 24 kg, a másikban 12 kg alma van.

c) $2x + 6 = 3(x - 6)$; $x = 24$. Az első kosárban 48 kg, a másodikban 24 kg alma van.

4.31. *a)* $10x + 20x = 660$; $x = 22$. 22 db 10 Ft-ossal és 22 db 20 Ft-ossal fizetünk.

b) $10x + 20(x + 5) = 700$; $x = 20$. A 10 Ft-osok száma 20, a 20 Ft-osok száma 25.

c) $20 \cdot 2x + 10x = 800$; $x = 16$. A 10 Ft-osok száma 16, a 20 Ft-osok száma 32 db.

4.32. *a)* $4a = a + 27$; $a = 9$ cm.

b) $(3x + 4x) \cdot 2 = 35$; $x = 2{,}5$. $a = 3x = 7{,}5$ cm; $b = 4x = 10$ cm.

c) $(x + x + 2{,}4) \cdot 2 = 32{,}8$; $x = 7$. A téglalap oldalai 7 cm és 9,4 cm.

d) $6a - 2a = 24$; $a = 6$ cm.

e) $2x + (x - 7) + (x + 5) = 24$; $x = 6{,}5$. Nincs ilyen trapéz, mert a kisebb alapra $x - 7 = -0{,}5$ cm-t kaptunk.

f) $0 < x + 2x + (x + 12) < 48$; $0 < 4x < 36$; $0 < x < 9$ (cm).
Teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek is.
$x + 2x > x + 12$; $x > 6$. Tehát $6 < x < 9$ (cm).

4.33. *a)* $48^\circ + 65^\circ + \alpha = 180^\circ$; $\alpha = 67^\circ$.

b) $\alpha + (\alpha + 12^\circ) + (\alpha + 18^\circ) = 180^\circ$. A háromszög szögei: 50°; 62°; 68°.

c) $(\alpha + 15^\circ) \cdot 2 + \alpha = 180^\circ$; 50°; 65°; 65°.

d) $4x + 7x + (7x - 45^\circ) = 180^\circ$; $x = 12{,}5^\circ$. A háromszög szögei: 50°; $87{,}5^\circ$; $42{,}5^\circ$.

e) $(\alpha - 45^\circ) + \alpha + (3\alpha + 20^\circ) = 180^\circ$; $\alpha = 41^\circ$; $\beta = \alpha - 45^\circ = -4^\circ$. Nincs ilyen háromszög.

4.34. *a)* $6 \cdot b = 72$; $b = 12$ cm; *b)* $\frac{10 \cdot m}{2} = 45$; $m = 9$ cm; *c)* $\frac{12 \cdot e}{2} = 60$; $e = 10$ cm;

d) $10 \cdot m = 8 \cdot 5$; $m = 4$ cm; *e)* $\frac{(12 + 8) \cdot m}{2} = 50$; $m = 5$ (cm);

f) $\frac{(x + 2x) \cdot 4{,}8}{2} = 43{,}2$; $x = 6$. Az alapok hossza 6 cm és 12 cm.

g) $\frac{(x + x + 1{,}6) \cdot 3{,}5}{2} = 16{,}8$; $x = 4$. A trapéz alapjai 4 cm és 5,6 cm.

h) $\frac{7{,}5 \cdot (7{,}5 + x)}{2} = 45$; $x = 4{,}5$ (cm).

5. Mérés; terület, felszín, térfogat

Mértékegységek átváltása

5.01. 1 km $\overset{\boxed{1000}}{>}$ 1 m $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 dm $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 cm $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 mm

a) 6,5 km = 6500 m = 65 000 dm = 650 000 cm;

b) 40 000 km = 40 000 000 m = 400 000 000 dm;

c) 0,0065 km = 6,5 m = 65 dm = 650 cm = 6500 mm;

d) 525 km = 525 000 m = 5 250 000 dm = 52 500 000 cm;

e) 0,005 25 km = 5,25 m = 52,5 dm = 525 cm = 5250 mm;

f) 0,4 km = 400 m = 4000 dm = 40 000 cm = 400 000 mm;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (38. old.)

g) 5,2 km = 5200 m = 520 000 cm = 5 200 000 mm;

h) 0,54 km = 5400 dm = 54 000 cm = 540 000 mm;

i) 0,000 45 km = 0,45 m = 4,5 dm = 45 cm = 450 mm

5.02. 1 t > 1 kg > 1 dkg > 1 g > 1 dg > 1 cg > 1 mg
[1000] [100] [10] [10] [10] [10]

a) 54,75 t = 54 750 kg = 5 475 000 dkg = 54 750 000 g;

b) 0,652 t = 652 kg = 65 200 dkg = 652 000 g;

c) 0,75 t = 750 kg = 75 000 dkg = 750 000 g;

d) 0,058 t = 58 kg = 5800 dkg = 58 000 g;

e) 0,0753 kg = 75,3 g = 753 dg = 7530 cg = 75 300 mg;

f) 0,0015 kg = 0,15 dkg = 1,5 g = 15 dg = 1500 mg;

g) 0,000 58 kg = 0,058 dkg = 0,58 g = 5,8 dg = 58 cg;

h) 23 kg = 2300 dkg = 230 000 dg = 23 000 000 mg

5.03. 1 hl > 1 l > 1 dl > 1 cl > 1 ml
[100] [10] [10] [10]

a) 7,5 hl = 750 l = 7500 dl = 75 000 cl;

b) 5000 hl = 500 000 l = 5 000 000 dl = 500 000 000 ml;

c) 0,0042 hl = 0,42 l = 4,2 dl = 42 cl = 420 ml;

d) 6500 hl = 650 000 l = 6 500 000 dl = 65 000 000 cl;

e) 0,0455 hl = 4,55 l = 45,5 dl = 455 cl = 4550 ml;

f) 6,54 hl = 654 l = 6540 dl = 65 400 cl = 654 000 ml;

g) 25 hl = 2500 l = 250 000 cl = 2 500 000 ml

5.04. *a)* 1 m = 10^2 cm = 10^3 mm = 10^1 dm;

b) 1 km = 10^3 m = 10^4 dm = 10^6 mm = 10^5 cm;

c) 1 mm = $0{,}1^1$ cm = $0{,}1^2$ dm = $0{,}1^3$ m;

d) 1 cm = 10^1 mm = $0{,}1^1$ dm = $0{,}1^2$ m;

e) 1 dm = $0{,}1^1$ m = 10^1 cm = $0{,}1^4$ km

5.05. *a)* 1 kg = 10^2 dkg = 10^3 g; *b)* 1 g = $0{,}1^1$ dkg = $0{,}1^3$ kg;

c) 1 t = 10^3 kg = 10^5 dkg = 10^6 g; *d)* 1 dkg = $0{,}1^2$ kg = $0{,}1^5$ t = 10^1 g;

e) 1 g = 10^1 dg = 10^2 cg = 10^3 mg;

f) 1 dg = $0{,}1^1$ g = $0{,}1^2$ dkg = 10^1 cg = 10^2 mg

5.06. *a)* 1 l = 10^1 dl = 10^2 cl = 10^3 ml; *b)* 1 hl = 10^2 l = 10^3 dl = 10^4 cl = 10^5 ml;

c) 1 ml = $0{,}1^2$ dl = $0{,}1^3$ l = $0{,}1^1$ cl; *d)* 1 cl = $0{,}1^1$ dl = 10^1 ml = $0{,}1^2$ l;

e) 1 dl = $0{,}1^1$ l = $0{,}1^3$ hl = 10^1 cl = 10^2 ml

5.07. *a)* 6,2 hl = $6{,}2 \cdot 10^2$ l = $6{,}2 \cdot 10^3$ dl = $6{,}2 \cdot 10^4$ cl = $6{,}2 \cdot 10^5$ ml $\approx 6{,}2 \cdot 10^5$ cm^3;

b) 4,3 m^3 = $4{,}3 \cdot 10^3$ dm^3 $\approx 4{,}3 \cdot 10^3$ l = $4{,}3 \cdot 10^5$ cl $\approx 4{,}3 \cdot 10^6$ cm^3;

c) 0,02 m^3 $\approx 0{,}2 \cdot 10^0$ hl = $2 \cdot 10^1$ l $\approx 2 \cdot 10^1$ dm^3 $\approx 2 \cdot 10^4$ ml;

d) 3,5 m^3 $\approx 3{,}5 \cdot 10^1$ hl $\approx 3{,}5 \cdot 10^3$ dm^3 $\approx 3{,}5 \cdot 10^4$ dl = 3 500 000 ml

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (39. old.)

Síkidomok kerülete, területe

5.08. 1 km $\underset{\boxed{1000}}{>}$ 1 m $\underset{\boxed{10}}{>}$ 1 dm $\underset{\boxed{10}}{>}$ 1 cm $\underset{\boxed{10}}{>}$ 1 mm

1 km^2 $\underset{\boxed{1\,000\,000}}{>}$ 1 m^2 $\underset{\boxed{100}}{>}$ 1 dm^2 $\underset{\boxed{100}}{>}$ 1 cm^2 $\underset{\boxed{100}}{>}$ 1 mm^2

1 km^2 $\underset{\boxed{100}}{>}$ 1 ha $\underset{\boxed{10\,000}}{>}$ 1 m^2

a) 1 km^2 = 10^2 ha = 10^6 m^2 = 10^8 dm^2 = 10^{10} cm^2;

b) 1 dm^2 = $0{,}1^2$ m^2 = 10^2 cm^2 = 10^4 mm^2;

c) 1 m^2 = $0{,}1^4$ ha = $0{,}1^6$ km^2 = 10^2 dm^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2

5.09. *a)* 6,5 m^2 = 6,5 · 10^2 dm^2 = 6,5 · 10^4 cm^2 = 6,5 · 10^6 mm^2;

b) 0,5 m^2 = 0,5 · 10^2 dm^2 = 5 · 10^3 cm^2 = 5 · 10^5 mm^2;

c) 0,5 m^2 = 5 · 10^1 dm^2 = 5 · 10^3 cm^2 = 5 · 10^5 mm^2 = 500 000 mm^2;

d) 3,5 km^2 = 3,5 · 10^2 ha = 3,5 · 10^6 m^2 = 3,5 · 10^{10} cm^2 = 3,5 · 10^{12} mm^2;

e) 1500 km^2 = 1,5 · 10^5 ha = 1,5 · 10^9 m^2 = 1 500 000 000 m^2

5.10. *a)* K = 18 cm; T = 20 cm^2; *b)* K = 9,6 cm; T = 5,12 cm^2;

c) K = 36 cm; T = 80 cm^2; *d)* K = 900 m; T = 20 000 m^2;

e) $K = 2\frac{5}{6}$ m; $T = \frac{1}{2}$ m^2; *f)* $K = 3\frac{5}{36}$ m; $T = \frac{1}{2}$ m^2

5.11. *a)* T = 40 egység; *b)* T = 25 egység; *c)* T = 20 egység

5.12. *a)* $K \approx 2 \cdot (26 + 14)$ mm = 80 mm; $T \approx 26 \cdot 11$ mm^2 = 286 mm^2;

b) $K \approx 2 \cdot (20 + 22)$ mm = 84 mm; $T \approx 20 \cdot 20$ mm^2 = 400 mm^2;

c) $K \approx 4 \cdot 22$ mm = 88 mm; $T \approx 22 \cdot 18$ mm^2 = 396 mm^2

A mérések pontatlansága miatt a kerület 4 mm-rel, a terület akár 40 mm^2-rel is eltérhet ezektől az értékektől.

5.13. *a)* K = 14 cm; T = 8 cm^2; *b)* K = 24 cm; T = 27 cm^2;

c) K = 18 cm; T = 14 cm^2; *d)* K = 14,6 cm; T = 14,4 cm^2;

e) K = 18 cm; T = 18 cm^2; *f)* K = 12 cm; T = 9 cm^2

5.14. *a)* $BC \approx 3$ cm; $m_a \approx 2{,}9$ cm; $K \approx (4{,}5 + 3) \cdot 2 = 15$ cm; $T \approx 4{,}5 \cdot 2{,}9 \approx 13{,}1$ (cm^2);

b) $DA \approx 2{,}9$ cm; $K \approx (5 + 2{,}9) \cdot 2 = 15{,}8$ (cm); $T = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ (cm^2);

c) $AB \approx 4$ cm; $BC \approx 3$ cm; $m_a \approx 2{,}7$ cm; $K \approx (4 + 3) \cdot 2 = 14$ (cm);
$T \approx 4 \cdot 2{,}7 \approx 10{,}8$ (cm^2);

d) $K = (56 + 42) \cdot 2 = 196$ mm; $T = 56 \cdot 30 = 1680$ (mm^2)

5.15. *a)* T = 18 cm^2; m_b = 4,5 cm; *b)* T = 21,6 cm^2; b = 4 cm;

c) a = 3 cm; b = 2,4 cm; *d)* $m_a \approx 5{,}8$ dm; m_b = 5 dm;

e) a = 12 cm; m_b = 4 cm

5.16. *a)* T = 12 területegység; *b)* T = 12; területegység *c)* T = 12 területegység.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (40. old.)

5.17. *a)* $T = \frac{35 \cdot 20}{2} = 350\ (\text{mm}^2)$; *b)* $T = \frac{30 \cdot 10}{2} = 150\ (\text{mm}^2)$ *c)* $T = \frac{38 \cdot 20}{2} = 380\ (\text{mm}^2)$

5.18. *a)* $K = 14{,}0$ cm; *b)* $K = 11{,}0$ cm; *c)* $K = 28$ cm; *d)* $K = 14{,}0$ cm

5.19. *a)* $T = 10{,}8\ \text{cm}^2$; *b)* $T = 12{,}0\ \text{cm}^2$; *c)* $T = 15{,}5\ \text{cm}^2$; *d)* $T = 28{,}8\ \text{cm}^2$

5.20. *a)* A szerkesztés lépései:
1. lépés: az $ABC\triangle$ megszerkesztése,
2. lépés: a háromszög tükrözése az AC oldalra.

$K = (2{,}8 + 3{,}6) \cdot 2 = 12{,}8$ (cm); $BD \approx 3{,}9$ cm; $T \approx \frac{5 \cdot 3{,}9}{2} \approx 9{,}8\ (\text{cm}^2)$

b) A szerkesztés lépései:
1. lépés: az $ABD\triangle$ megszerkesztése,
2. lépés: az AC szimmetriatengely szerkesztése,
3. lépés: az $EBC\sphericalangle = 75^\circ$ szerkesztése a BD átló egyik végpontjára.

$BC \approx 5{,}8$ cm; $AC \approx 8{,}2$ cm; $K = (3 + 5{,}8) \cdot 2 = 17{,}6$ (cm);

$T \approx \frac{3 \cdot 8{,}2}{2} = 12{,}3\ (\text{cm}^2)$

c) A szerkesztés lépései:
1. lépés: az $ABD\triangle$ megszerkesztése;
2. lépés: BD felezőmerőlegesére A-ból rámérjük az AC átlót.

$AB \approx 3{,}2$ cm; $BC \approx 4$ cm; $K \approx (3{,}2 + 4) \cdot 2 = 14{,}4$ (cm); $T = 12\ (\text{cm}^2)$

d) A szerkesztés lépései:
1. lépés: az $ABD\triangle$ megszerkesztése;
2. lépés: BD felezőmerőlegesére A-ból rámérjük az AC átlót.

$BD \approx 2{,}8$ cm; $BC \approx 2{,}5$ cm; $K = (36 + 25) \cdot 2 = 122$ (mm);

$T = \frac{5{,}4 \cdot 2{,}8}{2} \approx 7{,}6\ (\text{cm}^2)$

5.21. *a)* $T = 8\ \text{m}^2$; *b)* $f = 3{,}75$ m; *c)* $T = 7{,}82\ \text{cm}^2$;
d) $e = 7$ cm; *e)* $T = 13{,}6\ \text{cm}^2$; *f)* $f = 1{,}6$ m

5.22. $T = \frac{e \cdot f}{2} \approx \frac{28 \cdot 67}{2}\ \text{mm}^2 = 938\ \text{mm}^2$; $T = a \cdot m \approx 36 \cdot 26\ \text{mm}^2 = 936\ \text{mm}^2$
Az eltérés a mérések pontatlanságából adódik.

5.23. *a)* $m \approx 2{,}8$ cm; $K = 4{,}5 \cdot 4 = 18$ (cm); $T \approx 4{,}5 \cdot 2{,}8 = 12{,}6\ (\text{cm}^2)$;

b) $AB = 4$ cm; $K = 4 \cdot 4 = 16$ (cm); $T = \frac{6{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 15{,}36\ (\text{cm}^2)$;

c) $m \approx 4{,}1$ cm; $K = 4{,}2 \cdot 4 = 16{,}8$ (cm); $T \approx 4{,}2 \cdot 4{,}1 \approx 17{,}2\ (\text{cm}^2)$;

d) $K = 16$ cm; $T = 4 \cdot 2{,}8 = 11{,}2\ (\text{cm}^2)$

5.24. Négyzet: $T = a^2$; $T = a \cdot b$; $T = a \cdot m_a$; $T = \frac{e \cdot f}{2}$

Rombusz: $T = a \cdot m_a$; $T = \frac{e \cdot f}{2}$. Paralelogramma: $T = a \cdot m_a$

Téglalap: $T = a \cdot b$; $T = a \cdot m_a$. Deltoid: $T = \frac{e \cdot f}{2}$

5.25. A hozzárendelés nem egyértelmű, mert egy-egy négyszög területe különböző szabályokkal kiszámítható.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (41. old.)

Paralelogramma: $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$. Deltoid: $T = \frac{e \cdot f}{2}$

Rombusz: $T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}$. Négyzet: $T = a^2 = a \cdot m_a = \frac{e^2}{2}$

5.26. A terület minden esetben 15 területegység.

5.27. *a)* $K \approx (30 + 21 + 28)$ mm = 79 mm; $T \approx \frac{30 \cdot 18}{2}$ mm^2 = 270 mm^2;

b) $K \approx (28 + 24 + 19)$ mm = 71 mm; $T \approx \frac{28 \cdot 16}{2}$ mm^2 = 224 mm^2;

c) $K \approx (21 + 30 + 46)$ mm = 97 mm; $T \approx \frac{46 \cdot 10}{2}$ mm^2 = 230 mm^2

A mérés pontatlansága miatt a kerület 3 mm-rel, a terület 25 mm^2-rel is eltérhet ezektől az értékektől.

5.28. A B csúcshoz tartozó magasság megszerkesztése után kiszámítható a terület.

a) $T \approx \frac{3{,}3 \cdot 11{,}3}{2} \approx 18{,}6$ (cm^2); *b)* $T \approx \frac{3{,}5 \cdot 15{,}8}{2} \approx 27{,}7$ (cm^2)

5.29. *a)* $T = 10$ cm^2; *b)* $T = 4{,}9$ cm^2; *c)* $T = 13.52$ cm^2;

d) Az adatokból nem határozható meg a terület.

5.30. *a)* $T = 10{,}8$ cm^2; $m_b = 5{,}4$ cm; *b)* $T = 7{,}2$ cm^2; $b = 4{,}5$ cm;

c) $m_a = 3{,}2$ cm; $m_b = 4{,}8$ cm; *d)* $a = 5{,}12$ cm; $m_b = 4$ cm;

e) $a = 5$ cm; $b = 6{,}4$ cm

5.31. *a)* $c = 5$ cm; $K = 12$ cm; $T = 6$ cm^2;

b) $a \approx 2{,}9$ cm; $c \approx 5{,}8$ cm; $K \approx 13{,}7$ cm; $T \approx 7{,}3$ cm^2;

c) $b \approx 4{,}5$ cm; $K \approx 14{,}5$ cm; $T \approx 9$ cm^2;

d) $a + 1{,}5a = 6$; $a = 2{,}4$ cm; $b = 3{,}6$ cm; $c \approx 4{,}3$ cm; $K \approx 10{,}3$ cm; $T \approx 4{,}3$ cm^2;

e) $b \approx 5{,}5$ cm; $a = 3{,}2$ cm; $K \approx 15{,}1$ cm; $T \approx 8{,}8$ cm^2

5.32. *a)* $b \approx 3$ cm; $K \approx 9{,}2$ cm; $= 4$ cm^2;

b) $a \approx 2{,}6$ cm; $m_a \approx 4{,}8$ cm; $K \approx 12{,}6$ cm; $T \approx 6{,}2$ cm^2;

c) $\frac{5a}{4} + \frac{5a}{4} + a = 14$; $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $m_a \approx 4{,}6$ cm; $T \approx 9{,}2$ cm^2;

d) $a = 6$ cm; $K = 16$ cm; $T = 12$ cm^2

5.33. *a)* $c \approx 4{,}4$ cm; $b \approx 4{,}4$ cm; $K \approx 13{,}3$ cm; $T \approx 8{,}6$ cm^2;

b) A háromszög derékszögű; $K \approx 14$ cm; $T \approx 6$ cm^2;

c) $a \approx 5$ cm; $m_a \approx 2{,}8$ cm; $K \approx 12{,}8$ cm; $T \approx 7$ cm^2;

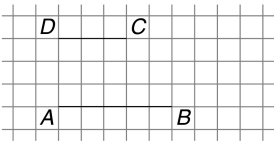
d) $b \approx 4{,}6$ cm; $c \approx 6{,}2$ cm; $m_a \approx 4{,}4$ cm; $K \approx 16{,}4$ cm; $T \approx 12{,}3$ cm^2

5.34. Mindegyik átdarabolási feladat többféleképpen megoldható.
A területek rendre: 24; 24; 30 területegység.

5.35. Mindegyik átdarabolási feladat többféleképpen megoldható.
A területek rendre: 24; 20; 24 területegység.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (42. old.)

A szakaszokat az A, B, C, D végpontoknál összesen 2 rácsegységgel kell kiegészíteni. Így az általuk meghatározott *trapéz középvonala* 5 egység, *területe* 15 területegység.



Például jelölje: $(a; c)$, ha az A pontnál 1 egységgel és a C pontnál is 1 egységgel egészítjük ki a szakaszt;
$(a; a)$, ha az A pontnál 2 egységgel egészítjük ki.

Megoldások:
$(a; a)$; $(a; b)$; $(a; c)$; $(a; d)$; $(b; b)$; $(b; c)$; $(b; d)$; $(c; c)$; $(c; d)$; $(d; d)$.
Az $(a; d)$ és a $(b; c)$ megoldás egybevágó.

a) $c \approx 2{,}0$ cm; $\alpha = \beta \approx 57^\circ$; $K \approx 15{,}6$ cm; $T \approx 12{,}8$ cm^2;

b) $d \approx 2{,}8$ cm; $m \approx 2{,}7$ cm; $\beta = 65^\circ$; $K \approx 13{,}8$ cm; $T \approx 10{,}8$ cm^2;

c) $\frac{3a}{2} + a = 15$; $5a = 30$;
$a = 6$ cm; $b = c = d = 3$ cm; $\alpha = \beta = 60^\circ$; $m \approx 2{,}6$ cm; $T \approx 11{,}7$ cm^2;

d) $b \approx 3$ cm; $c \approx 3{,}8$ cm; $d \approx 2{,}7$ cm; $K = 15{,}5$ cm; $T \approx 12{,}7$ cm^2

a) $T = 12$ cm^2; $T_{\text{négyszög}} = 9$ cm^2; $T_{\text{háromszög}} = 3$ cm^2;

b) A két kerület aránya: $14 : 2 = 7 : 1$. A két terület: $3{,}92$ cm^2; $27{,}44$ cm^2.

c) A paralelogrammát a két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja. Ezek közül kettő-kettő egybevágó. A paralelogramma terület 16 cm^2, egy-egy háromszög területe 4 cm^2.

a) $K \approx 10{,}8$ cm; $T \approx 6{,}5$ cm^2;

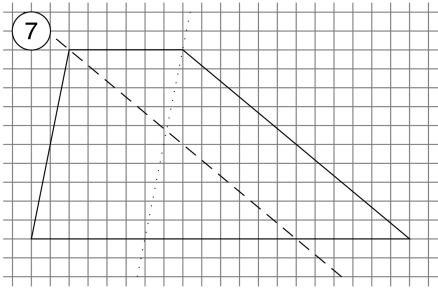
b) $K \approx 9{,}56$ cm; $T \approx 5$ cm^2;

c) $K \approx 8{,}4$ cm; $T \approx 4{,}8$ cm^2

a) $T = 64$ cm^2; *b)* $m = 3{,}5$ cm; *c)* $a = 10$ cm; *d)* $c = 5$ cm;

e) $m = 3$ cm

A háromszög területe 60 területegység.
Az adott trapézok területe rácsnégyzetben:



$T_1 = 72$; $T_2 = 48$; $T_3 = 72$;
$T_4 = 60$; $T_5 = 78$; $T_6 = 100$;
$T_7 = 130$; $T_8 = 60$; $T_9 = 50$

a) Az $ABC\triangle$-gel egyenlő területű a 4. és a 8. trapéz.

b) Az $ABC\triangle$ területénél kisebb területű a 2. és a 9. trapéz.

c) Az $ABC\triangle$ területénél nagyobb területű az 1., 3., 5., 6. és 7. trapéz.

A háromszög területével azonos területű trapézt kaphatunk például a 7.-ből az ábrán látható módon.

$T \approx \frac{49 \cdot 11}{2}$ mm^2 + $\frac{49 \cdot 19}{2}$ mm^2 = 368 mm^2;

$T \approx \frac{30 \cdot 23}{2}$ mm^2 + $\frac{30 \cdot 27}{2}$ mm^2 = 375 mm^2.

Az eltérés a mérés pontatlanságából adódik.

c) $K \approx 30{,}1$ cm; $T \approx 72{,}3$ cm^2; *d)* $K \approx 18{,}8$ m; $T \approx 28{,}3$ m^2;

e) $K \approx 31{,}4$ cm; $T \approx 78{,}5$ cm^2; *f)* $K \approx 20{,}1$ cm; $T \approx 32{,}2$ cm^2;

g) $K \approx 7{,}5$ cm; $T \approx 4{,}5$ cm^2; *h)* $K \approx 3{,}14$ m; $T \approx 0{,}79$ m^2

5.44.

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
r	26 cm	13 cm	4,1 cm	2,9 cm	2,6 cm
d	52 cm	26 cm	8,3 cm	5,8 cm	5,2 cm
K	163,3 cm	81,6 cm	26 cm	18,1 cm	16,3 m
T	2122,6 cm^2	530,7 cm^2	53,8 cm^2	26 cm^2	21,1 m^2

5.45. *a)* $i \approx 2{,}62$ cm, $t \approx 13{,}08$ cm^2; *b)* $i \approx 13{,}1$ cm, $t \approx 65{,}4$ cm^2;

c) $i \approx 39{,}3$ cm, $t \approx 196$ cm^2; *d)* $i \approx 1{,}15$ m, $t \approx 1{,}26$ m^2;

e) $i \approx 4{,}61$ m, $t \approx 5{,}04$ m^2; *f)* $i \approx 9{,}21$ m, $t \approx 10{,}1$ m^2;

g) $i \approx 1{,}26$ dm, $t \approx 0{,}50$ dm^2; *h)* $i \approx 0{,}63$ dm, $t \approx 0{,}25$ dm^2;

i) $i \approx 1{,}89$ dm, $t \approx 0{,}75$ dm^2

5.46. A körgyűrű területe: $T = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.

Az x segítségével kiszámítható a hiányzó sugár: $R = r + x$; $r = R - x$.

Az $R^2 - r^2$ kifejezés szorzattá alakításával másképp is kiszámítható a terület:

$T = (R^2 - r^2)\pi = (R + r)\underbrace{(R - r)}_{x}\pi$; $R - r = x$; $R + r = (r + x) + r = 2r + x$;

$R + r = R + (R - x) = 2R - x$; $T = (R^2 - r^2)\pi = (2r + x)x \cdot \pi = (2R - x)x \cdot \pi$.

a) $T \approx 236$ cm^2; *b)* $T \approx 1{,}04$ m^2; *c)* $T \approx 113$ cm^2; *d)* $T \approx 2{,}36$ dm^2;

e) $T \approx 87{,}9$ cm^2; *f)* $T \approx 113$ dm^2, $r = 0$ dm, nem körgyűrű.

5.47. *a)* $T_{\bigcirc} = 78{,}5$ cm^2; *b)* $T_{\square} = 100$ cm^2;

c) A hulladék területe: 21,5 cm^2; a négyzet területének 21,5%-a.

5.48. *a)* $T_{\bigcirc} = 78{,}5$ cm^2; *b)* $T_{\square} = 50$ cm^2;

c) A hulladék területe: 28,5 cm^2; a kör területének $\approx$ 36%-a.

Felszín, térfogat

5.49. 1 m $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 dm $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 cm $\overset{\boxed{10}}{>}$ 1 mm

1 m^3 $\overset{\boxed{1000}}{>}$ 1 dm^3 $\overset{\boxed{1000}}{>}$ 1 cm^3 $\overset{\boxed{1000}}{>}$ 1 mm^3

a) 500 m^3 = 500 000 dm^3 = 500 000 000 cm^3;

b) 0,005 m^3 = 5 dm^3 = 5000 cm^3 = 5 000 000 mm^3;

c) 0,0025 m^3 = 2,5 dm^3 = 2500 cm^3 = 2 500 000 mm^3;

d) 2,5 m^3 = 2500 dm^3 = 2 500 000 cm^3 = 2 500 000 000 mm^3;

e) 0,000 45 m^3 = 0,45 dm^3 = 450 cm^3 = 450 000 mm^3;

f) 0,15 km^3 = 150 000 000 m^3 = 150 000 000 000 dm^3

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (44. old.)

5.50. *a)* $75\ m^3 \approx 750\ hl \approx 75\,000\ dm^3 \approx 75\,000\ l$;
b) $35\,000\ m^3 \approx 350\,000\ hl \approx 35\,000\,000\ dm^3 \approx 35\,000\,000\ l$;
c) $0{,}0045\ hl \approx 0{,}45\ dm^3 \approx 0{,}45\ l = 4{,}5\ dl \approx 450\ cm^3$;
d) $5\ m^3 \approx 5000\ l \approx 5000\ dm^3 \approx 50\,000\ dl$;
e) $0{,}0045\ hl = 0{,}45\ l \approx 0{,}45\ dm^3 = 450\ cm^3 \approx 450\ ml$;
f) $68\ hl = 6800\ l \approx 6800\ dm^3 \approx 68\,000\ dl \approx 6\,800\,000\ cm^3$;
g) $25\ m^3 \approx 250\ hl = 25\,000\ l \approx 25\,000\ dm^3$;
h) $0{,}056\ m^3 \approx 0{,}56\ hl = 56\ l \approx 56\ dm^3 \approx 56\,000\ ml$;
i) $0{,}025\ hl = 2{,}5\ l \approx 2{,}5\ dm^3 = 2500\ cm^3 \approx 2500\ ml$

5.51. *a)* $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$;
b) $1\ cm^3 = 10^3\ mm^3 = 0{,}1^3\ dm^3 = 0{,}1^6\ m^3$;
c) $1\ dm^3 = 10^3\ cm^3 = 10^6\ mm^3 \approx 10^0\ l = 10^2\ cl = 10^3\ ml$;
d) $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 \approx 10^3\ l = 10^1\ hl = 10^4\ dl$;
e) $1\ dm^3 = 0{,}1^3\ m^3 = 10^3\ cm^3 \approx 10^1\ dl = 0{,}1^2\ hl = 10^2\ cl$

5.52. *a)* $A = 52\ cm^2$; $V = 24\ cm^3$; *b)* $A = 71{,}28\ cm^2$; $V = 38{,}88\ cm^3$;
c) $A = 32\ cm^2$; $V = 12\ cm^3$; *d)* $A = 37{,}5\ cm^2$; $V = 15{,}625\ cm^3$

5.53. Ha a térfogat és két oldal adott, akkor a harmadik oldalt a térfogat képletéből kifejezhetjük:

Például: $V = abc$; $c = \dfrac{V}{ab}$.

Ha a felszín és két oldal adott, akkor a hiányzó oldalt ki kell fejezni a felszín képletéből.

$A = 2ab + 2ac + 2bc$; $A - 2ab = (2a + 2b)c$; $c = \dfrac{A - 2ab}{2a + 2b}$

Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
a (cm)	5	2,3	0,6	8	5	5	2,5	2	4	5,3
b (cm)	4	4,5	120	8	4	5	2,3	5	4	7,2
c (cm)	7	7,2	5	8	3	5	6,0	28,6	4	—
A (cm^2)	166	118,6	1350	384	94	150	69,1	420	96	69,8
V (cm^3)	140	74,52	360	512	60	125	34,5	286	64	—

A 10. oszlop adataival nem adható meg téglatest.

5.54. *a)* $A_{kocka} = 54\ cm^2$; $6 \cdot a^2 = 54\ cm^2$; $a^2 = 9\ cm^2$; $a = 3\ cm$;
$V = 3^3\ cm^3 = 27\ cm^3$;

b) $V_{kocka} = 64\ cm^3$; ebből következik, hogy a kocka éle 4 cm;
$A_{kocka} = 6 \cdot 4^2\ cm^2 = 96\ cm^2$;

c) $340\ cm^2 = 2 \cdot (5 \cdot 8 + 5 \cdot x + 8 \cdot x)\ cm^2$; $170 = 40 + 13 \cdot x$; $130 = 13x$; $10 = x$.
A téglatest harmadik éle 10 cm. $V = 10 \cdot 8 \cdot 5\ cm^3 = 400\ cm^3$.

d) $304\ cm^2 = 2 \cdot 4^2\ cm^2 + 4 \cdot 4 \cdot x\ cm^2$; $304 = 32 + 16x$; $272 = 16x$; $17 = x$.
A test magassága 17 cm.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (45. old.)

5.55. *a)* $a : b : c = 2 : 3 : 5$; $a = 4$ cm, ezért az egység az arányban: $\frac{4\text{ cm}}{2} = 2$ cm, így $b = 3 \cdot 2\text{ cm} = 6\text{ cm}$; $c = 5 \cdot 2\text{ cm} = 10\text{ cm}$.

$A = 2 \cdot (4 \cdot 6\text{ cm}^2 + 4 \cdot 10\text{ cm}^2 + 6 \cdot 10\text{ cm}^2) = 2 \cdot (24 + 40 + 60)\text{ cm}^2 = 248\text{ cm}^2$;

$V = 4 \cdot 6 \cdot 10\text{ cm}^3 = 240\text{ cm}^3$

b) A téglatest élei: $a + b + c = 48$ dm; $a : b : c = 3 : 4 : 5$;

$a = \frac{48\text{ dm}}{12} \cdot 3 = 12\text{ dm}$; $b = \frac{48\text{ dm}}{12} \cdot 4 = 16\text{ dm}$; $c = \frac{48\text{ dm}}{12} \cdot 5 = 20\text{ dm}$

A téglatest térfogata: $V = 12 \cdot 16 \cdot 20\text{ dm}^3 = 3840\text{ dm}^3$;
3840 liter víz fér el az edényben.

c) $a : b = 4 : 3$; $K = 112$ cm; $\frac{K}{2} = a + b = 56$ cm.

$a = \frac{56\text{ cm}}{7} \cdot 4 = 32\text{ cm}$; $b = \frac{56\text{ cm}}{7} \cdot 3 = 24\text{ cm}$.

A téglatest térfogata: $V = 32 \cdot 24 \cdot 30\text{ cm}^3 = 23\,040\text{ cm}^3 = 23{,}04\text{ dm}^3$.
A téglatest felszíne: $A = 2 \cdot (32 \cdot 24 + 32 \cdot 30 + 30 \cdot 24)\text{ cm}^2 = 4896\text{ cm}^2 \approx 49\text{ dm}^2$.

5.56. *a)* $V = 42\text{ cm}^3$. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ alapján az élek 2 cm; 3 cm és 7 cm-esek.

b) $A = 2[2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7]$, $A = 82\text{ cm}^2$.

5.57. $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, az élei tehát 5, 7 és 11, vagy 1, 5 és 77, vagy 1, 7 és 55, vagy 1, 11 és 35 cm-esek. Az élek mérőszámai között vagy 1, vagy 3 prímszám van.

5.58. *a)* 8 darab téglatest.

b) A téglatest felszínét kétszeresére [$2 \cdot (6 \cdot 9 + 6 \cdot 12 + 9 \cdot 12)\text{ cm}^2 = 468\text{ cm}^2$] változtatjuk, mert egy-egy vágás mindig két párhuzamos lapnak a területével növeli a téglatest felszínét. A feldarabolt testek együttes felszíne $2 \cdot 468\text{ cm}^2$.

5.59. Az arányból következik, hogy az oldallap 2 alaplappal lefedhető, így
$A = 10 \cdot t_{\text{alap}} = 490\text{ cm}^2$;
$t_{\text{alap}} = 49\text{ cm}^2$, ebből következik, hogy az alapél 7 cm, az oldalél 14 cm;
$V = 49 \cdot 14\text{ cm}^3 = 686\text{ cm}^3$.
A feldarabolással nyert négyzetes oszlop:

$V = \frac{686\text{ cm}^3}{4} = 171{,}5\text{ cm}^3$; $A = 4 \cdot 49\text{ cm}^2 = 196\text{ cm}^2$

5.60. $2a^2 + 4 \cdot 2{,}5a^2 = 192$.

Ez a hasáb egy olyan négyzetes oszlop, amelynek alapéle a, magassága $2{,}5a$.
$2a^2 + 10a^2 = 192$; $12a^2 = 192$; $a^2 = 16$; $a = 4$.
A test térfogatának mérőszáma: $4 \cdot 4 \cdot 10 = 160$.

5.61. *a)* A négyzetes oszlop magassága 10 cm.

$A = 2 \cdot 4^2\text{ cm}^2 + 4 \cdot 4\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 192\text{ cm}^2$; $V = 16\text{ cm}^2 \cdot 10\text{ cm} = 160\text{ cm}^3$.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (46. old.)

b) $614{,}4\ \text{dm}^3 = t_a \cdot 9{,}6\ \text{dm}$; $64\ \text{dm}^2 = t_a$. A négyzetes oszlop alapéle: 8 dm;
$A = 2 \cdot 64\ \text{dm}^2 + 4 \cdot 8\ \text{dm} \cdot 9{,}6\ \text{dm} = 128\ \text{dm}^2 + 307{,}2\ \text{dm}^2 = 435{,}2\ \text{dm}^2$.

c) $360\ \text{cm}^2 = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot 2a = 2a^2 + 8a^2 = 10a^2$; $a^2 = 36\ \text{cm}^2$; $a = 6$ cm;
$m = 12$ cm; $V = 36\ \text{cm}^2 \cdot 12\ \text{cm} = 432\ \text{cm}^3$.

d) $a = 4$ cm; $8a + 4m = 80$; $32 + 4m = 80$; $m = \frac{48}{4}$; $m = 12$ cm.
$V = 4^2 \cdot 12$; $V = 192\ \text{cm}^3$.

5.62. $8a + 4m = 36a$; $4m = 28a$; $m = 7a$.
a) $A = 2a^2 + 4a \cdot 7a$, $A = 30a^2$; *b)* $V = a^2 \cdot 7a$, $V = 7a^3$

5.63. $a_1 = 24$ cm; $A_1 = 6 \cdot 24^2\ \text{cm}^2 = 3456\ \text{cm}^2$;
$a_2 = 0{,}8 \cdot 24\ \text{cm} = 19{,}2\ \text{cm}$; $A_2 = 6 \cdot 19{,}2^2\ \text{cm}^2 = 2211{,}84\ \text{cm}^2$.
$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2211{,}84}{3456} = 0{,}64$. A kisebbik kocka felszíne 64%-a az eredetinek.
$V_1 = 24^3\ \text{cm}^3 = 13\,824\ \text{cm}^3$; $V_2 = 19{,}2^3\ \text{cm}^3 = 7077{,}888\ \text{cm}^3$.
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{7077{,}888}{13\,824} = 0{,}512$. A kisebbik kocka térfogata 51,2%-a az eredetinek.
(A kocka *méreteitől függetlenül* igaz, hogy ha $a_1 : a_2 = 0{,}8 : 1$, azaz $a_2 = 0{,}8a_1$, akkor
$\frac{A_2}{A_1} = \frac{6 \cdot 0{,}8a_1 \cdot 0{,}8a_1}{6 \cdot a_1 \cdot a_1} = 0{,}8^2 = 0{,}64$, tehát 64%.
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(0{,}8a_1)^3}{a_1^3} = 0{,}8^3 = 0{,}512$, tehát 51,2%.

5.64. $a = 8$ cm; $m = 16$ cm; $a' = 10$ cm; $m' = 20$ cm
$A = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 16$; $A = 640\ \text{cm}^2$; $V = 8^2 \cdot 16$; $V = 1024\ \text{cm}^3$
a) $A_1 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 16$; $A_1 = 840\ \text{cm}^2$; $V_1 = 10^2 \cdot 16$; $V_1 = 1600\ \text{cm}^3$;
b) $A_2 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 20$; $A_2 = 768\ \text{cm}^2$; $V_2 = 8^2 \cdot 20$; $V_2 = 1280\ \text{cm}^3$;
c) Mind a felszín, mind a térfogat az *a)* esetben lesz nagyobb.
d) $\frac{840 - 640}{640} \cdot 100\% = 31{,}25\%$, $\frac{768 - 640}{640} \cdot 100\% = 20\%$, tehát az *a)* esetben 31,25%-kal, a *b)* esetben 20%-kal nőtt a felszín.
$\frac{1600 - 1024}{1024} \cdot 100\% = 56{,}25\%$, $\frac{1280 - 1024}{1024} \cdot 100\% = 25\%$, tehát az *a)* esetben 56,25%-kal, a *b)* esetben 25%-kal nőtt a térfogat.

5.65. $V = a^2 \cdot m$; az m magasság p%-a $\frac{mp}{100}$, az új magasság $m + \frac{mp}{100} = m\left(1 + \frac{p}{100}\right)$,
az új alapél $a\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.
A térfogat változása $\Delta V = \frac{V_1 - V}{V} \cdot 100\%$, $\Delta V = \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 1\right] \cdot 100\%$.

5.66. $V = a^2 \cdot 2a$; $V = 2a^3$. $A = 2a^2 + 4 \cdot a \cdot 2a$; $A = 10a^2$.
$V\ (\text{cm}^3) = A\ (\text{cm}^2)$ alapján $10a^2 = 2a^3$; $a = 5$ cm esetén teljesül a feltétel.

5.67. $V = t_{\text{alap}} \cdot m$ („mélység”); $t_a = 4\ \text{ha} = 4 \cdot 10^4\ \text{m}^2 = 40\,000\ \text{m}^2$; $m = 0{,}35$ m;
$V = 40\,000\ \text{m}^2 \cdot 0{,}35\ \text{m} = 14\,000\ \text{m}^3$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (47. old.)

5.68. *a)* Derékszögű háromszög alapú hasáb; a harmadik alapél (a derékszögű háromszög átfogója) 5 cm. Ennek ismeretében a felszín

$A = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}\ \text{cm}^2 + 6 \cdot (3 + 4 + 5)\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2 + 72\ \text{cm}^2 = 84\ \text{cm}^2$;

b) Egyenlő szárú háromszög alapú hasáb; a háromszög magassága 4,8 cm,

$A = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4{,}8}{2}\ \text{cm}^2 + 4 \cdot (5 + 3 + 5)\ \text{cm}^2 = 14{,}4\ \text{cm}^2 + 52\ \text{cm}^2 = 66{,}4\ \text{cm}^2$

5.69. *a)* Paralelogramma alapú hasáb;

$A = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5\ \text{dm}^2 + 3{,}2 \cdot (3 + 2 + 3 + 2)\ \text{dm}^2 = 9\ \text{dm}^2 + 32\ \text{dm}^2 = 41\ \text{dm}^2$;

$V = 3 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}2\ \text{dm}^3 = 14{,}4\ \text{dm}^3$;

b) Trapéz alapú hasáb:

$A = 2 \cdot \frac{24 + 10}{2} \cdot 12\ \text{cm}^2 + (10 + 13 + 24 + 15) \cdot 5\ \text{cm}^2 = 718\ \text{cm}^2$;

$V = \frac{24 + 10}{2} \cdot 12 \cdot 5\ \text{cm}^3 = 1020\ \text{cm}^3$

5.70. *a)* A rombusz alapú hasáb hiányzó adata a rombusz magassága, 3,5 cm.

$A = 2 \cdot 4 \cdot 3{,}5\ \text{cm}^2 + 10 \cdot 16\ \text{cm}^2 = 28\ \text{cm}^2 + 160\ \text{cm}^2 = 188\ \text{cm}^2$;

$V = 4 \cdot 3{,}5 \cdot 10\ \text{cm}^3 = 280\ \text{cm}^3$

b) A derékszögű trapéz alapú hasáb hiányzó adata a negyedik alapél, 5,4 cm.

$A = 2 \cdot \frac{4 + 6}{2} \cdot 5\ \text{cm}^2 + 10 \cdot (4 + 5 + 6 + 5{,}4)\ \text{cm}^2 = 50\ \text{cm}^2 + 204\ \text{cm}^2 = 254\ \text{cm}^2$;

$V = 25 \cdot 10\ \text{cm}^3 = 250\ \text{cm}^3$

5.71. *a)* Egyenlő szárú háromszög alapú hasáb; a háromszög magassága 1,5 cm.

$A = 2 \cdot \frac{4 \cdot 1{,}5}{2}\ \text{cm}^2 + (2{,}5 + 2{,}5 + 4) \cdot 4\ \text{cm}^2 = 42\ \text{cm}^2$;

$V = \frac{4 \cdot 1{,}5}{2} \cdot 4\ \text{cm}^3 = 12\ \text{cm}^3$;

b) A háromszögben a 3 cm-es oldalhoz tartozó magasság $\approx 2{,}4$ cm.

$A = 2 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}4}{2}\ \text{cm}^2 + (2{,}6 + 2{,}8 + 3) \cdot 5\ \text{cm}^2 \approx 49\ \text{cm}^2$;

$V = \frac{3 \cdot 2{,}4}{2} \cdot 5\ \text{cm}^3 = 18\ \text{cm}^3$;

c) A paralelogrammában az 5 cm-es oldalhoz tartozó magasság 2 cm.

$A = 2 \cdot (5 \cdot 2)\ \text{cm}^2 + (2 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 2\ \text{cm}^2 = 56\ \text{cm}^2$;

$V = (5 \cdot 2) \cdot 2\ \text{cm}^3 = 20\ \text{cm}^3$;

d) A deltoid másik átlója ≈ 3 cm.

$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 3}{2}\ \text{cm}^2 + (2 \cdot 2 + 2 \cdot 4) \cdot 4\ \text{cm}^2 = 63\ \text{cm}^2$;

$V = \frac{5 \cdot 3}{2} \cdot 4\ \text{cm}^3 = 30\ \text{cm}^3$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (48. old.)

5.72. *a)* $9{,}06\ \text{dm}^3 = 2 \cdot m\ \text{dm}^3$; $m = 4{,}53$ dm;

b) $21{,}5\ \text{dm}^3 = 8{,}6 \cdot m\ \text{dm}^3$; $m = \frac{21{,}5}{8{,}6}\ \text{dm} = 2{,}5$ dm;

c) $0{,}06\ \text{m}^3 = 60\ \text{dm}^3$; $60\ \text{dm}^3 = 3 \cdot m\ \text{dm}^3$; $m = 20$ dm

5.73. *a)* $2000\ \text{cm}^3 = t_{\text{alap}} \cdot 8\ \text{dm}^3$; $t_a = \frac{2000}{8}\ \text{dm}^2 = 250\ \text{dm}^2$;

b) $0{,}048\ \text{dm}^3 = t_a \cdot 0{,}2\ \text{dm}^3$; $t_a = 0{,}24\ \text{dm}^2$;

c) $583{,}2\ \text{dm}^3 = t_a \cdot 16{,}2\ \text{dm}^3$; $t_a = 36\ \text{dm}^2$

5.74. A 20 m „magas”, 6,4 m^2 alapterületű háromszög alapú hasáb térfogata:
$V = 6{,}4 \cdot 20\ \text{m}^3 = 128\ \text{m}^3$; $V = 128\,000\ \text{dm}^3 \approx 128\,000$ l $= 1280$ hl

5.75. $t_a = \frac{21 + 4{,}5}{2} \cdot 4{,}8\ \text{m}^2 = 61{,}2\ \text{m}^2$; $V = 61{,}2 \cdot 6000\ \text{m}^3 = 367\,200\ \text{m}^3$;

15%-a kő: $367\,200\ \text{m}^3 \cdot 0{,}15 = 55\,080\ \text{m}^3$: 85%-a föld: $367\,200\ \text{m}^3 \cdot 0{,}85 = 312\,120\ \text{m}^3$

5.76. $t_a = \frac{1{,}2 + 0{,}8}{2} \cdot 0{,}7\ \text{m}^2 = 0{,}7\ \text{m}^2$; $V = 0{,}7 \cdot 120\ \text{m}^3 = 84\ \text{m}^3$

5.77. Téglatest; amelynek élei: 6 cm, 4 cm, 3 cm hosszúak.

5.78. A csatornán 1 másodperc alatt annyi köbméter víz folyik át, amennyi annak a trapéz alapú hasábnak a térfogata, amelynek alapterülete a csatorna keresztmetszetével egyenlő, és a „magassága” 1,5 m (amennyit a víz 1 másodperc alatt megtesz).

A csatorna keresztmetszetének területe: $\frac{2{,}4 + 1}{2} \cdot 0{,}8\ \text{m}^2 = 1{,}36\ \text{m}^2$.

1 másodperc alatt átfolyó vízmennyiség: $1{,}36 \cdot 1{,}5\ \text{m}^3 = 2{,}04\ \text{m}^3$.
1 nap alatt átfolyó vízmennyiség: $24 \cdot 3600 \cdot 2{,}04\ \text{m}^3 = 176\,276\ \text{m}^3$.

5.79. *a)* Négyzetes oszlop (réteg); *b)* alapterülete 64 cm^2; magassága 2 cm;

c) $A = 8 \cdot 24\ \text{cm}^2 = 192\ \text{cm}^2$; $V = 64 \cdot 2\ \text{cm}^3 = 128\ \text{cm}^3$

5.80. *a)* Egy olyan négyzetes hasáb, amelynek alapterülete: a^2; magassága: $\frac{b}{4}$;

b) $A = 2a^2 + a \cdot b = a \cdot (2a + b)$; $V = a^2 \cdot \frac{b}{4}$

5.81. *a)* Az L keresztmetszet területe:
$t_a = 40 \cdot 3{,}5\ \text{mm}^2 + 36{,}5 \cdot 3{,}5\ \text{mm}^2 = 76{,}5 \cdot 3{,}5\ \text{mm}^2$; $t_a = 267{,}75\ \text{mm}^2$.
A szögvas térfogata: $V = 267{,}75 \cdot 5000\ \text{mm}^3 = 1\,338\,750\ \text{mm}^3 = 1338{,}75\ \text{cm}^3$;
1 cm^3 vas tömege 7,8 g;
$1338{,}75\ \text{cm}^3$ vas tömege $1338{,}75 \cdot 7{,}8$ g $= 10\,442{,}25$ g $\approx 10{,}44$ kg

b) $t_a = 12 \cdot 2\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 2\ \text{cm}^2 = 28\ \text{cm}^2$; $V = 28 \cdot 250\ \text{cm}^3 = 7000\ \text{cm}^3$;
1 cm^3 alumínium tömege 2,7 g;
$7000\ \text{cm}^3$ alumínium tömege $7000 \cdot 2{,}7$ g $= 18\,900$ g $= 18{,}9$ kg

5.82. *a)* $AC = 8$ cm; $DB = 6$ cm. (Szerkesztés utáni mérés alapján.)

$A = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 5^2\ \text{cm}^2 = 148\ \text{cm}^2$; $V = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 5\ \text{cm}^3 = 120\ \text{cm}^3$;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (49. old.)

b) A hasáb hálója: 2 db egybevágó szabályos hatszög, amelynek oldalai 6 cm-esek, és 6 db egybevágó négyzet, amelynek oldalai szintén 6 cm-esek.

$t_{alap} = 6 \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2}\ \text{cm}^2 = 93{,}6\ \text{cm}^2$; $A = 2 \cdot 93{,}6\ \text{cm}^2 + 6 \cdot 6^2\ \text{cm}^2 = 403{,}2\ \text{cm}^2$;

$V = 93{,}6 \cdot 6\ \text{cm}^3 = 561{,}6\ \text{cm}^3$

5.83. $\varrho = 1{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

a) Paralelogramma alapú hasábon négyzetes oszlop áll.
$V \approx (0{,}44 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}1 + 0{,}15^2 \cdot 0{,}2)\ \text{cm}^3 \approx 0{,}02\ \text{cm}^3$; $m \approx 0{,}024$ g;

b) Rombusz alapú hasábban szabályos hatszög keresztmetszetű furat van.

$V \approx \left(0{,}6 \cdot 0{,}5 - 6 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}17}{2}\right) \cdot 0{,}2\ \text{cm}^3 \approx 0{,}04\ \text{cm}^3$; $m \approx 0{,}048$ g;

c) Hatszög alapú hasábban (a magasság feléig) téglatest alakú vájat van.

$V \approx \left(0{,}3 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}3 + \frac{0{,}35 \cdot 0{,}1}{2} \cdot 0{,}3 - 0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}15\right)\ \text{cm}^3 \approx 0{,}035\ \text{cm}^3$; $m \approx 0{,}04$ g

5.84. *a)* $A \approx 2 \cdot (1^2 \cdot 3{,}14)\ \text{dm}^2 + (2 \cdot 1 \cdot 3{,}14) \cdot 1\ \text{dm}^2 = 12{,}56\ \text{dm}^2$;
$V \approx (1^2 \cdot 3{,}14) \cdot 1\ \text{dm}^3 = 3{,}14\ \text{dm}^3$;

b) $A \approx 2 \cdot (2{,}5^2 \cdot 3{,}14)\ \text{cm}^2 + (2 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}14) \cdot 4\ \text{cm}^2 \approx 102\ \text{cm}^2$;
$V \approx (2{,}5^2 \cdot 3{,}14) \cdot 4\ \text{cm}^3 = 78{,}5\ \text{cm}^3$;

c) $A \approx 2 \cdot (12^2 \cdot 3{,}14)\ \text{cm}^2 + (2 \cdot 12 \cdot 3{,}14) \cdot 4\ \text{cm}^2 \approx 1206\ \text{cm}^3$;
$V \approx (12^2 \cdot 3{,}14) \cdot 4\ \text{cm}^3 \approx 1809\ \text{cm}^3$;

d) $A \approx 2 \cdot (2^2 \cdot 3{,}14)\ \text{cm}^2 + (4 \cdot 3{,}14) \cdot 2\ \text{cm}^2 \approx 50{,}2\ \text{cm}^2$;
$V \approx (2^2 \cdot 3{,}14) \cdot 2\ \text{cm}^3 \approx 25{,}1\ \text{cm}^3$;

e) $A \approx 2 \cdot (1{,}7^2 \cdot 3{,}14)\ \text{cm}^2 + (3{,}4 \cdot 3{,}14) \cdot 3500\ \text{cm}^2 \approx 37\,384\ \text{cm}^2$;
$V \approx (1{,}7^2 \cdot 3{,}14) \cdot 3500\ \text{cm}^3 \approx 31\,761\ \text{cm}^3$;

f) $A \approx 2 \cdot (3^2 \cdot 3{,}14)\ \text{cm}^2 + (6 \cdot 3{,}14) \cdot 3\ \text{cm}^2 \approx 113\ \text{cm}^2$;
$V \approx (3^2 \cdot 3{,}14) \cdot 3\ \text{cm}^3 \approx 84{,}8\ \text{cm}^3$

5.85. *a)* Egy körülforgás után a kerék $2r\pi$ hosszú, 3 cm széles téglalap alakú nyomot hagy.
$t = 60 \cdot 3{,}14 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 565{,}2\ \text{cm}^2$;

b) $t = 0{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5\ \text{m}^2 = 2{,}826\ \text{m}^2$;

c) $t = 1000 \cdot 70 \cdot 3{,}14 \cdot 8\ \text{cm}^2$; $t = 1\,758\,400\ \text{cm}^2 = 175{,}84\ \text{m}^2$

5.86. *a)* Az 1,5 km hosszú henger térfogata:
$V = 0{,}6^2 \cdot 3{,}14 \cdot 15\,000\ \text{dm}^3 = 16\,956\ \text{dm}^3$; $16\,956\ \text{dm}^3 \approx 16\,956$ l $= 169{,}56$ hl;

b) A 4 m $\frac{3}{4}$ része: 3 m (ez a „vízhenger” magassága); $d = 140$ cm; $r = 70$ cm $= 7$ dm;

$m_{víz} = 30$ dm; $V_{víz} = 7^2 \cdot 3{,}14 \cdot 30\ \text{dm}^3 = 4615{,}8\ \text{dm}^3$; $4615{,}8$ l $= 46{,}158$ hl;

c) A gőzgép hengere percenként 60-szor „telik meg” gőzzel.
$d = 38$ cm; $r = 19$ cm $= 0{,}19$ m; $l = m = 0{,}75$ m

$V_{henger} = 0{,}19^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}75\ \text{m}^3 = 0{,}085\,015\,5\ \text{m}^3 \approx 0{,}085\ \text{m}^3$.

1 perc alatt a gőz térfogata: $60 \cdot 0{,}085\ \text{m}^3 = 4{,}25\ \text{m}^3$;

d) $d = 1{,}8$ m; $r = 9$ dm; $V = 800\ \text{dm}^3$; 8 hl $= 800$ l $\approx 800\ \text{dm}^3$.

$m = \frac{800}{9^2 \cdot 3{,}14}$ dm $= \frac{800}{254{,}34}$ dm $\approx 3{,}14$ dm-t süllyed a víz szintje;

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (50. old.)

e) A víz térfogata: $V_{\text{kocka}} - V_{\text{henger}}$.

$8^3\ \text{dm}^3 = 4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 8\ \text{dm}^3 = (512 - 401{,}92)\ \text{dm}^3 = 110{,}08\ \text{dm}^3$.

A kocka kitöltetlen részébe 110 l víz fér. Ez a henger térfogatának $\approx$ 27%-a.

5.87. *a)* $t_p = 1{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 4\ \text{m}^2 = 17{,}584\ \text{m}^2$;

b) $\frac{t_p}{2} = \frac{0{,}15 \cdot 3{,}14 \cdot 4}{2}\ \text{m}^2 = 0{,}9420\ \text{m}^2 = 94{,}20\ \text{dm}^2 \approx 1\ \text{m}^2$.

Befestéséhez $\approx$ 0,2 kg festék kell.

c) $t = \left(\frac{16 \cdot 3{,}14}{2} + 2\right) \cdot 80\ \text{cm}^2$; $t = 2169{,}6\ \text{cm}^2$

d) 1 darab cső elkészítéséhez: $(13{,}2 \cdot 3{,}14 + 2) \cdot 80\ \text{cm}^2 = 3475{,}84\ \text{cm}^2$ lemez kell.

50 darab cső elkészítéséhez: $50 \cdot 3475{,}84\ \text{cm}^2 = 173\,792\ \text{cm}^2 \approx 1738\ \text{dm}^2$ lemez kell.

5.88. *a)* $d = 1{,}20$ m; $r = 0{,}6$ m; $m_{\text{víz}} = 6$ m. $V_{\text{víz}} = 0{,}6^2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\ \text{m}^3 = 6{,}7824\ \text{m}^3$;

b) $m_{\text{kút}} = 10$ m; $V_{\text{kút}} = 0{,}6^2 \cdot 3{,}14 \cdot 10\ \text{m}^3 = 11{,}304\ \text{m}^3$

5.89. *a)* $d = 8$ cm $= 0{,}8$ dm; $r = 0{,}4$ dm;

$V_{\text{víz}} = 0{,}75\ \text{dm}^3$; $m_{\text{víz}} = \frac{0{,}75}{0{,}4^2 \cdot 3{,}14}\ \text{dm} = \frac{0{,}75}{0{,}5024}\ \text{dm} \approx 1{,}5\ \text{dm}$;

b) A 4 cm élű kocka $4^3\ \text{cm}^3 = 64\ \text{cm}^3$ vizet szorít ki, így az össztérfogat:

$750\ \text{cm}^3 + 64\ \text{cm}^3 = 814\ \text{cm}^3$.

A víz felszíne $m = \frac{814}{4^2 \cdot 3{,}14}\ \text{cm} \approx 162$ cm-re emelkedik.

5.90. $\varrho = 7{,}6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

a) Négyzetes hasábban egy hengeres furat van.

$V \approx (3{,}6^2 - 1{,}^2 \cdot \pi) \cdot 1{,}6\ \text{cm}^3 \approx 14{,}7\ \text{cm}^3$; $m \approx 110$ g;

b) Téglatesthez két félhenger csatlakozik, amelyekben egy-egy hengeres furat van.

$V \approx (7{,}0 \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}0 + 2{,}3^2 \cdot \pi \cdot 1{,}7 - 0{,}5^2 \cdot \pi \cdot 1{,}7)\ \text{dm}^3 \approx 121\ \text{dm}^3$; $m \approx 920$ kg;

c) Hatszög alapú hasábhoz körhenger csatlakozik.

$V \approx \left[\left(6 \cdot \frac{5{,}0 \cdot 4{,}3}{2}\right) \cdot 4{,}0 + 2{,}2^2 \cdot \pi \cdot 5{,}5\right]\ \text{cm}^3 \approx 342\ \text{cm}^3$; $m \approx 2{,}60$ kg

5.91. *a)* $A_h = 180{,}1\ \text{cm}^2$; $r = 3{,}7$ cm; $A_h - 2 \cdot r^2 \cdot \pi = t_{\text{palást}}$;

$180{,}1\ \text{cm}^2 - 2 \cdot 3{,}7^2 \cdot 3{,}14\ \text{cm}^2 \approx 94\ \text{cm}^2 = t_p$; $m = \frac{94}{2 \cdot 3{,}7 \cdot 3{,}14}\ \text{cm} \approx 4$ cm;

b) $V_h = 3{,}7^2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\ \text{cm}^3 \approx 172\ \text{cm}^3$

5.92. A négyzetes oszlopból „hiányzik” az adott átmérőjű henger:

$V = V_{\text{oszlop}} - V_{\text{henger}}$;

$V = 5^2 \cdot 18{,}2\ \text{cm}^3 - 0{,}9^2 \cdot 3{,}14 \cdot 18{,}2\ \text{cm}^3 = 18{,}2 \cdot (5^2 - 0{,}9^2 \cdot 3{,}14)\ \text{cm}^3$;

$V \approx 408{,}7\ \text{cm}^3$. A vastest tömege: $408{,}7 \cdot 7{,}8$ g $= 3187{,}86$ g.

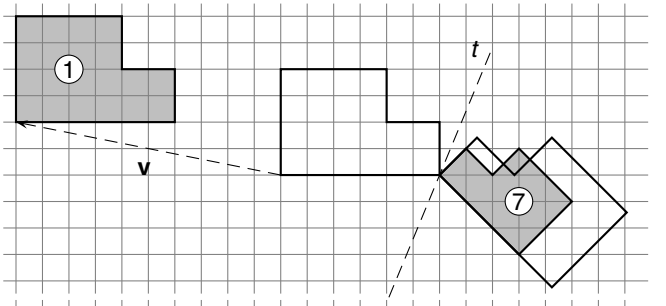
6. Geometriai transzformációk

Mi lehet a szabály?

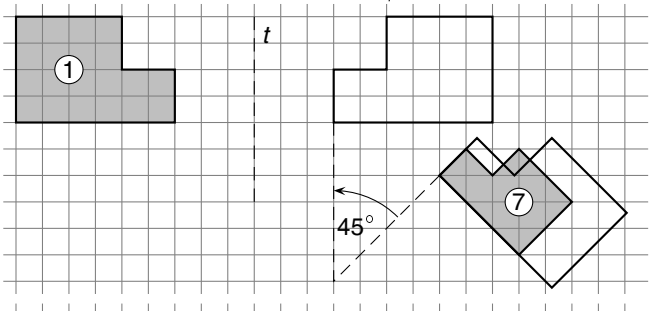
6.01. (1) A *B* és a *C* képernyőn. (2) A *B* képernyőn. (3) A *B* képernyőn.
A *B* kép hasonló az eredetihez.

6.02. Hasonló alakzatok az ①, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑨, ⑪ és ⑫. Ezek kicsinyítéssel, nagyítással, illetve eltolással, forgatással, tükrözéssel egymásba vihetők. Az ① alakzatból a ② „vízszintes” nyújtással, a ③ „vízszintes”, a ⑩ „függőleges” zsugorítással, valamint eltolással, a ⑩ esetén pedig elforgatással kaphatjuk. A ⑧ alakzat az összes többihez képest torzított.
Általában többféle transzformációval kaphatjuk meg egyik alakzatból a másikat. Például a ⑦-ből az ①-et:

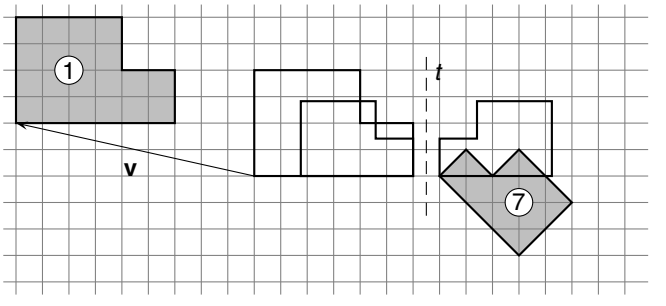
Nagyítás, tükrözés, eltolás.
Jelölhetjük: N, T, E.



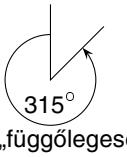
Nagyítás, elforgatás 45°-kal, tükrözés.
Jelölhetjük: N, F45, T.



Elforgatás 45°-kal, tükrözés, nagyítás, eltolás.
Jelölhetjük: F45, T, N, E.
Nagyon sok más megoldás van.
A forgatás szögét az óramutató járásával ellenkező irányban mérjük.



Például: 

helyett ezt írjuk: 

„Nyújtás”, „zsugorítás” azt jelenti, hogy „függőlegesen” nem ugyanannyiszorosára változtattuk a méreteket, mint „vízszintesen”. A „torzítás” azt jelenti, hogy az esetleges nagyítás, kicsinyítés, nyújtás vagy zsugorítás mellett még meg is „döntjük” a képet.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (52. old.)

Az alábbi jelölésekkel táblázatba rendeztük a lehetséges transzformációkat.

T: tükrözés (a tengely nem feltétlenül párhuzamos a rács egyeneseivel!); F45: forgatás 45°-kal; F90: forgatás 90°-kal; F180: forgatás 180°-kal; stb.; K: kicsinyítés; N: nagyítás; t: torzítás (döntés); Zs: zsugorítás (nem arányos kicsinyítés); Ny: nyújtás (nem arányos nagyítás).

Keress más, egyszerűbb megoldásokat!

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
①		Ny, E	Zs, E	N, T, E	T	F180	K, T, E	t, E	E	Zs, F180	F90, E	K, F90, E
②	Zs, E		Zs, E	Ny, T, E	Zs, T, E	Zs, F180	Zs, T, E	t, Zs, E	Zs, E	Zs, F180	Zs, F90, E	Zs, F90, E
③	Ny, E	NY, E		Ny, T, E	Ny, T, E	Ny, F180	Ny, K, T, E	t, Ny, E	Ny, E	Ny, K, F180	Ny, F90 (E)	Zs, F90, E
④	K, T, E	Zs, T, E	Zs, T, E		K, F90, E	K, T, E	K, F225, E	t, K, T, E	K, T, E	Zs, T, E	K, T, E	K, T, E
⑤	T	Ny, T, E	Zs, T, E	N, F270, E		T	K, F135, E	t, T	T, E	Zs, T, E	T, E	K, T, E
⑥	F180	Ny, F180	Zs, F180	N, T, E	T		K, T, E	t, F180	F180	Zs, E	F270, E	K, F270 E
⑦	N, T, E	Ny, T, E	Zs, N, T, E	N, F135, E	N, F225, E	N, T, E		t, N, T, E	N, T, E	Ny, K, T, E	N, T, E	K, T, E
⑧	t, E	t, Ny, E	t, Zs, E	t, N, T, E	t, T	t, F180	t, K, T, E		t, E	t, Zs, F180	t, F90, E	t, K, F90, E
⑨	E	Ny, E	Zs, E	N, T, E	T, E	F180	K, T, E	t, E		Zs, F180	F90, E	K, F90, E
⑩	Ny, F180	Ny, F180	Zs, N, F180	Ny, T, E	Ny, T, E	Ny, E	Zs, N, T, E	t, Ny, F180	Ny, F180		Ny, F270 (E)	Zs, F270, E
⑪	F270, E	Ny, F270, E	Zs, F270 (E)	N, T, E	T, E	F90, E	K, T, E	t, F270, E	F270, E	Zs, F90 (E)		K (E)
⑫	N, F270, E	Ny, F270, E	Ny, F270, E	N, T, E	N, T, E	N, F90, E	N, T, E	t, N, F270, E	N, F270, E	Ny, F90, E	N (E)	

Az ① alakzat *a)* nagyított képe: ④; *b)* kicsinyített képe: ⑦, ⑫;

c) egybevágó képe: ①, ⑤, ⑥, ⑨, ⑪.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (53. old.)

6.03. Az ① ábrából kapott

ábra: transzformáció lehet:

② kicsnyítés és eltolás;

③ kicsinyítés, nyújtás, forgatás 60°-kal és eltolás;

④ zsugorítás és eltolás;

⑤ tükrözés;

⑥ elforgatás 60°-kal és eltolás; vagy tükrözés és tükrözés; vagy elforgatás 120°-kal;

⑦ tengelyes tükrözés és eltolás;

⑧ 180°-os elforgatás;

⑨ eltolás; vagy két egymás utáni 180°-os elforgatás;

⑩ torzítás és eltolás;

⑪ nagyítás és eltolás.

a) Az ① nagyított képe a ⑪; *b)* kicsinyített képe a ②;

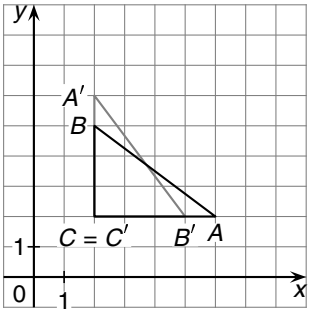
c) egybevágó képei: ①, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨.

A többi ábrából is hasonló vizsgálódással kapjuk meg a megoldást.

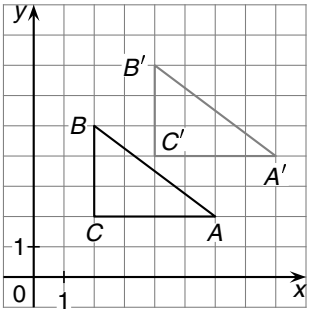
6.04.

		Az *A* deltoid elforgatottja:							
		B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*A*
A szög nagysága	jobbra forgatva	315°	270°	225°	180°	135°	90°	45°	0°
	balra forgatva	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°

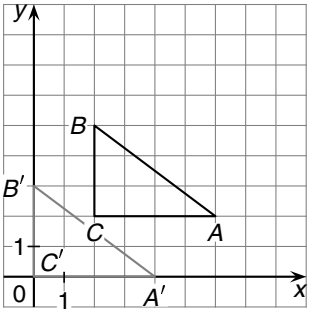
6.05. *a)*



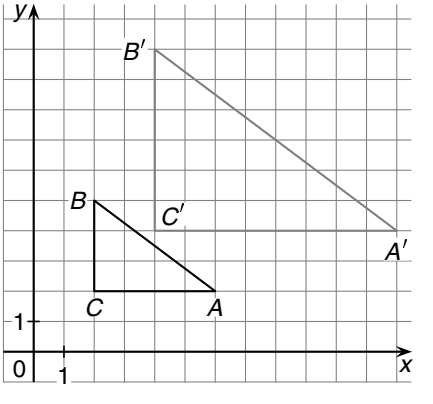
b)



c)

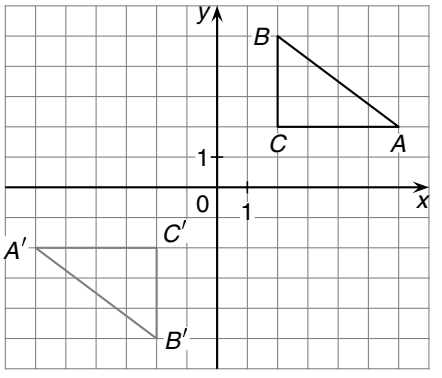


d)



Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (54. old.)

e)



	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
A'	(2; 6)	(8; 4)	(4; 0)	(12; 4)	(−6; −2)
B'	(5; 2)	(4; 7)	(0; 3)	(4; 10)	(−2; −5)
C'	(2; 2)	(4; 4)	(0; 0)	(4; 4)	(−2; −2)

Minden feladatban hasonló háromszöget kaptunk. Az *a)*, *b)*, *c)* és *e)* feladatban a kapott háromszög egybevágó az $ABC\triangle$-gel.

6.06. Az ① ábrából az O pont körüli elforgatással kaptuk a többi ábrát.

		Az ① ábra elforgatottja:				
		②	③	④	⑤	⑥
A szög nagysága	jobbra forgatva	60°	120°	180°	240°	360°
	balra forgatva	300°	240°	180°	120°	60°

Az ① és a ④ ábra megfelelő szakaszai párhuzamosak, az elfordulás szöge mindkét irányban 180°. A megfelelő szakaszok szintén párhuzamosak a ② és ⑤, illetve a ③ és ⑥ ábrán is.

6.07. **A: 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9.** **B: 2., 5., 6.** **C: 1., 7.** **D: 1.** **E: 1., 2., 7., 8.** **F: 1., 2., 8.**

Eltolás

6.08. *a)* $A(3;2)$; $B(9;2)$; $C(11;4)$; $D(4;4)$; $E(1;4)$; $F(4;5)$; $G(10;5)$; $H(4;10)$

b) $A \to A'(-9;2)$; $B \to B'(-3;2)$; $C \to C'(-1;4)$; $D \to D'(-8;4)$;
$E \to E'(-11;4)$; $F \to F'(-8;5)$; $G \to G'(-2;5)$; $H \to H'(-8;10)$;
$P(x;y) \to P'(x-12;y)$

c) $A \to A''(3;-2)$; $B \to B''(9;-2)$; $C \to C''(11;-4)$; $D \to D''(4;-4)$;
$E \to E''(1;-4)$; $F \to F''(4;-5)$; $G \to G''(10;-5)$; $H \to H''(4;-10)$;
$P(x;y) \to P''(x;-y)$.

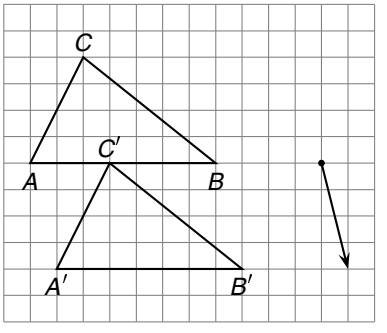
d) $A \to A'''(-3;-2)$; $B \to B'''(-9;-2)$; $C \to C'''(-11;-4)$; $D \to D'''(-4;-4)$;
$E \to E'''(-1;-4)$; $F \to F'''(-4;-5)$; $G \to G'''(-10;-5)$; $H \to H'''(-4;-10)$;
$P(x;y) \to P'''(-x;-y)$

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (55. old.)

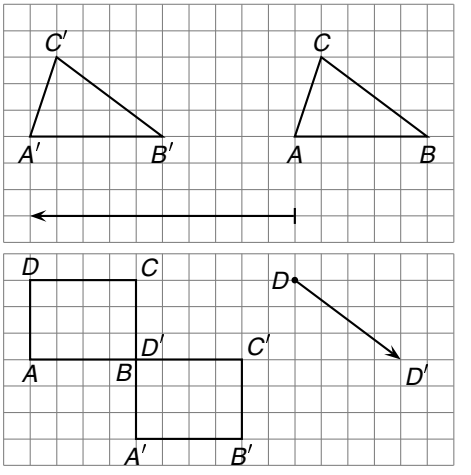
6.09. A megfelelő oldal szögek egyenlők.
A megfelelő oldalak párhuzamosak.

6.10. *a)* Az eltolás vektorának hossza $2 \cdot AB$.

b)



c)



6.11. *a)* Az A' helyére B', a B' helyére A' kerül.

b) Az $A'B'$ szakaszt egy rácsnégyzet-átlóval rövidíteni kell.

c) Az $A'B'$ szakaszt úgy kell elmozdítani, hogy $AB \parallel A'B'$ teljesüljön.

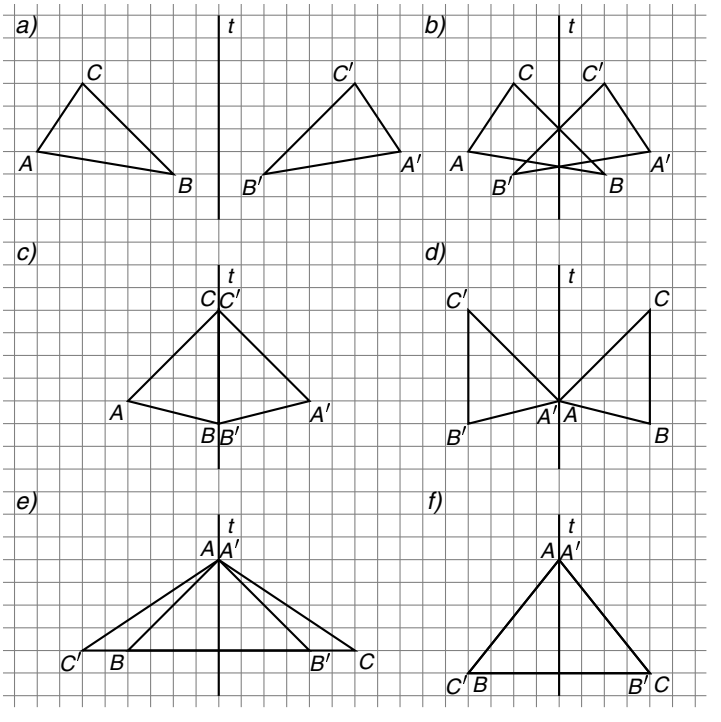
6.12. A P' pontot az O' körül elforgatjuk:

a) $+90^\circ$-kal; *b)* -90°-kal; *c)* 180°-kal

6.13. *a)* $(4; -2)$; *b)* $(-2; 6)$; *c)* $(4; -2)$

Tengelyes tükrözés

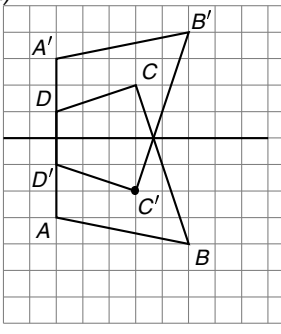
6.14.



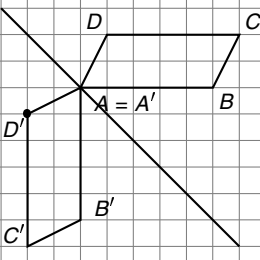
6.15. A hiányzó szavak: *a)* felezőmerőlegese; *b)* szögfelezője.

6.16. Mivel $e = e'$, ezért az e egyenesnek a k' körrel is pontosan egy közös pontja van, vagyis az e egyenes a k' körnek is érintője.

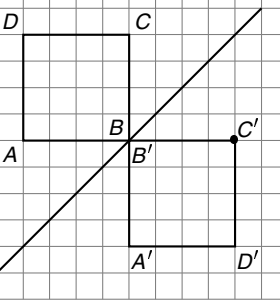
6.17. *a)*



b)

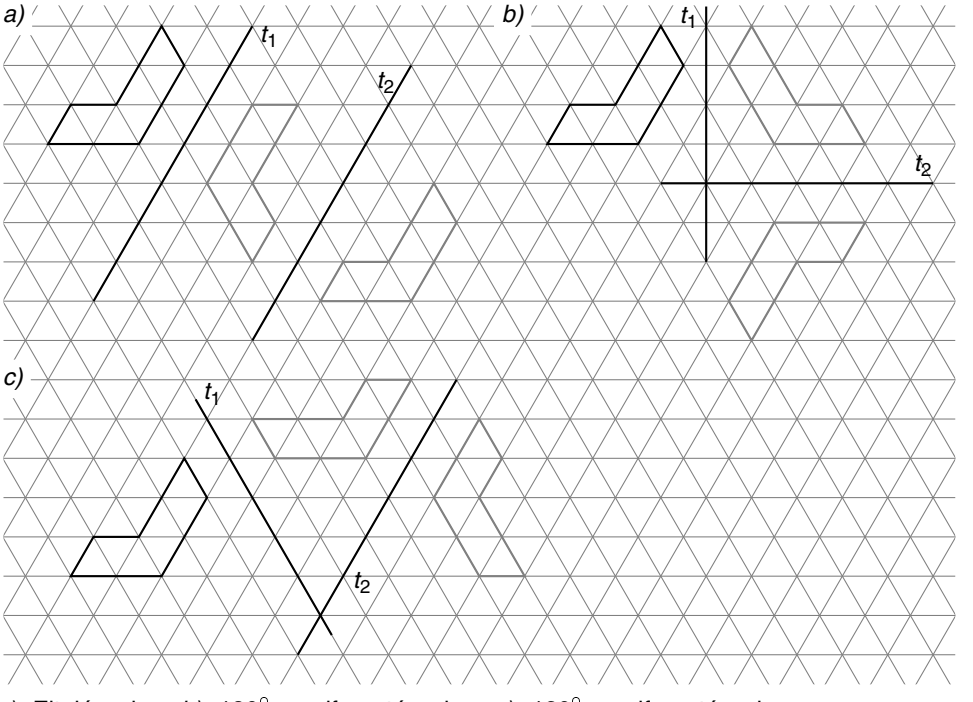


c)



6.18. A tükrözés távolság- és szögtartó, tehát a megfelelő szakaszok és a szögek egyenlők.

6.19.



a) Eltolással; *b)* 180°-os elforgatással; *c)* 120°-os elforgatással.

6.20. *a)* Az 1. és a 3. háromszögnél a körüljárás iránya megegyezik. A megfelelő oldalak párhuzamosak, a megfelelő szögek egyállásúak. A megfelelő csúcsok távolsága 10 cm.

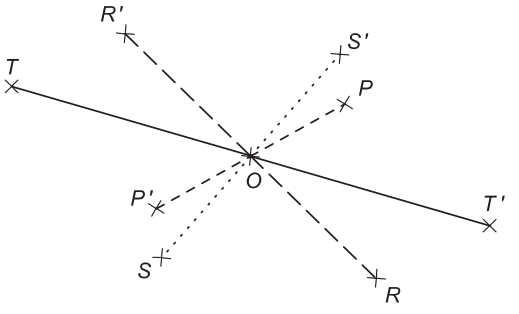
b) Az 1. és a 3. háromszögnél a körüljárás iránya megegyezik. A megfelelő oldalak párhuzamosak, a megfelelő szögek váltószögek.

c) Az 1. és a 3. háromszögnél a körüljárás iránya megegyezik. A megfelelő oldalon áthaladó egyenesek 120°-os szöget zárnak be.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (57. old.)

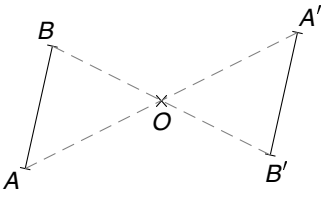
Középpontos tükrözés

6.21. *a)*

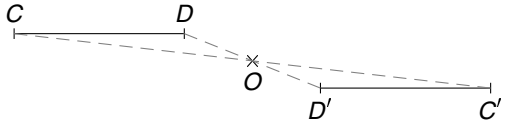


b) A PP' szakasz felezőpontja a szimmetria-középpont.

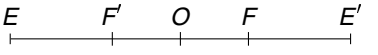
6.22. *a)*



b)



c)



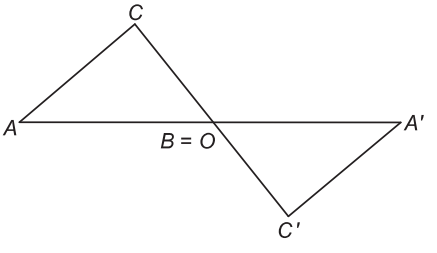
d) Az $ABA'B'$ négyszög paralelogramma.

6.23. *a)* Rombuszt kapunk, amelynek oldala az egyenlő szárú háromszög szára.

b) Paralelogrammát kapunk, amelynek két szomszédos oldala az egyenlő szárú háromszög alapja, illetve szára.

6.24. *a)* $C\sphericalangle = C'\sphericalangle$; *b)* $D\sphericalangle = D'\sphericalangle$; *c)* $E\sphericalangle = E'\sphericalangle$; *d)* $F\sphericalangle = F'\sphericalangle$.
Váltószögeket kapunk. Ha a tükrözés középpontja a szög csúcsa, akkor speciális váltószöget, csúcsszöget kapunk.

6.25. *Például:*



Fordított állású szögpárok az $A\sphericalangle$ és $A'\sphericalangle$; $B\sphericalangle$ és $B'\sphericalangle$; $C\sphericalangle$ és $C'\sphericalangle$.

6.26. *a)* A két alakzat együtt paralelogramma.

b) A paralelogramma középpontos tükörképe önmaga.

6.27. *a)* A szimmetria-középpont az AB szakasz felezőmerőlegesén legyen úgy, hogy $AOB\sphericalangle = 90^\circ$

b) Az AB szakasz felezőmerőlegesén bárhol, kivéve a felezési pont.

c) $AOB\sphericalangle = 90^\circ$ *d)* Bárhol, kivéve az AB szakasz egyenesének pontjait.

e) és *f)* Nincs ilyen O pont.

6.28. A három pont közül bármelyik lehet szimmetria-középpont, ezért 3 paralelogramma szerkeszthető.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (58. old.)

6.29. A trapéz és középpontos tükörképe együtt paralelogramma.

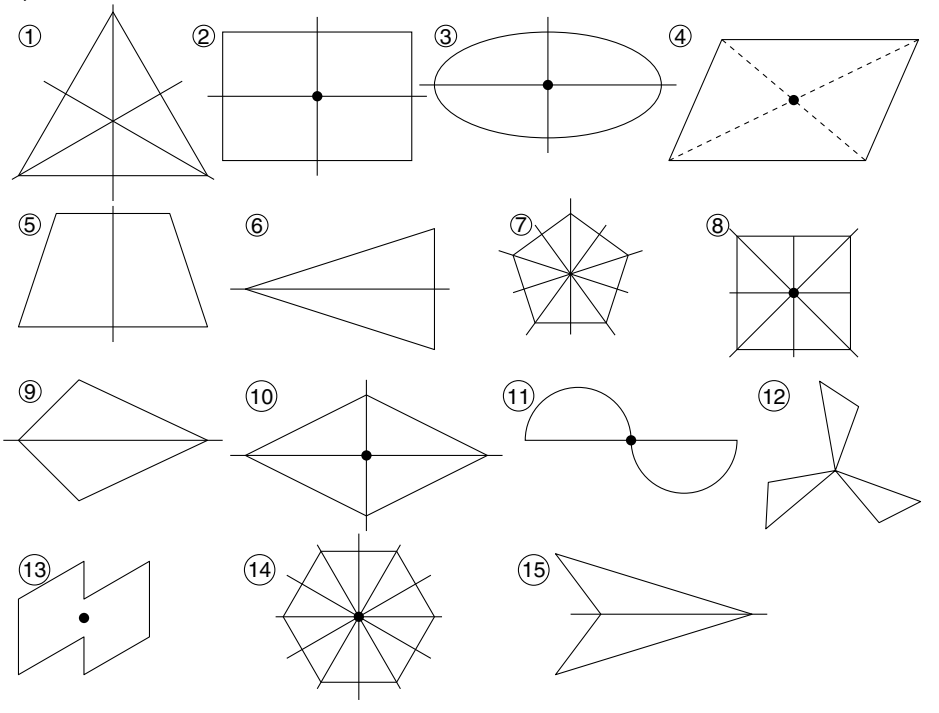
6.30. A 8. szög

a) egyállású szögei: 6.; *b)* váltószögei: 2., 4.; *c)* társszögei: 1., 5.;

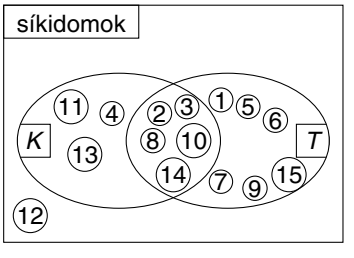
d) A 3. és 7. szögek váltószögek.

Szimmetriák vizsgálata

6.31. *a), b)*



c)



7. Alakzatok előállítása, vizsgálata

Térelemek

7.01. *a)* (1) *E*, *D*; (2) *F*, *H*; (3) nincs ilyen; *b)* (1) *F*, *C*, *D*; (2) *G*; *c)* *F*, *G*, *H*

7.02. *a)* Egyenlő szárú derékszögű háromszög.

b) Derékszögű háromszög. *c)* Szabályos háromszög.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (59. old.)

7.03. *a)* Derékszögű háromszög: $EGH\triangle$, $EFG\triangle$, $EGC\triangle$, $GEA\triangle$.

b) Egyenlő szárú háromszög: $EGH\triangle$, $EGF\triangle$, $EGB\triangle$, $EGD\triangle$.

c) Derékszögű egyenlő szárú háromszög: $EHG\triangle$, $EFG\triangle$.

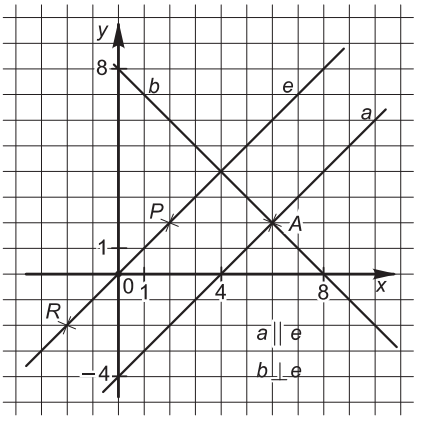
d) Szabályos háromszög: $EGB\triangle$, $EGD\triangle$.

7.04.

		Metszéspontok	
	egyenes	*x* tengelyt	*y* tengelyt
a)	a	4	−4
	b	8	8
b)	c	−6	6
	d	−2	−2
c)	f	−4	4
	g	−10	−10

Például:

a)



Vektorok

7.05. *a)* A vektor végpontját jelölő jelzőszám hárommal nagyobb a vektor kezdőpontját jelölőnél.

b) A vektor végpontját jelölő jelzőszám hárommal kisebb a vektor kezdőpontját jelölőnél.

7.06. *a)* Egyenlő vektorok: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$;

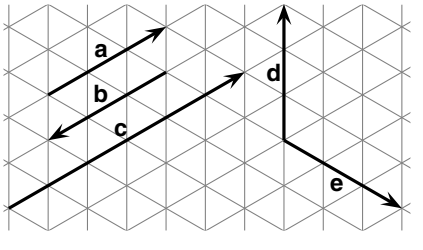
b) Ellentétes vektorok: $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DE}$.

7.07. *a)* $\mathbf{a} = \mathbf{g}$; *b)* $\mathbf{a}$-val egyirányú a $\mathbf{c}$ és a $\mathbf{g}$. *c)* $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{d}| = |\mathbf{e}| = |\mathbf{g}| = |\mathbf{h}|$;

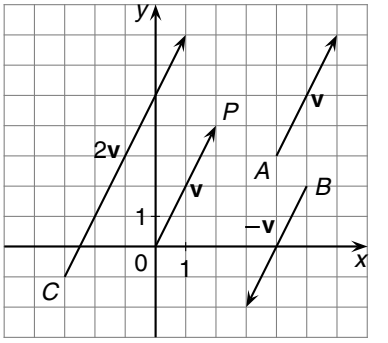
d) $-\mathbf{a} = \mathbf{e} = \mathbf{h}$

7.08. *a)* $-\mathbf{a} = \mathbf{b}$; *b)* $2\mathbf{a} = \mathbf{c}$;

c) A $\mathbf{d}$ $+60^\circ$-os szöget, az $\mathbf{e}$ -60°-os szöget zár be az $\mathbf{a}$-val.



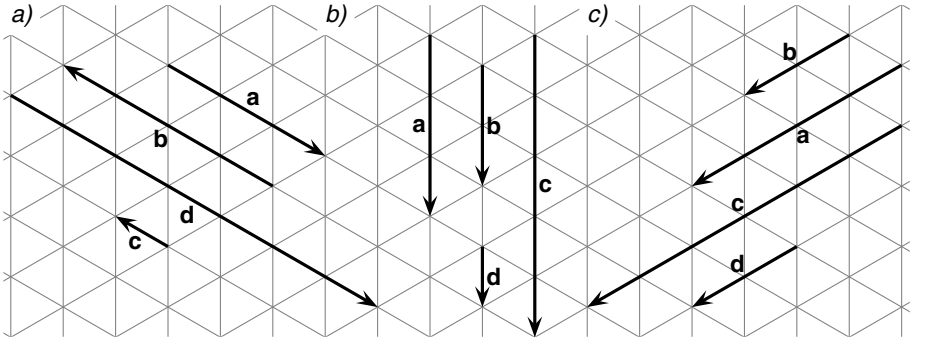
7.09.



7.10. *a)* A −2 pontba; *b)* a −3 pontba; *c)* a −9 pontba.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (60. old.)

7.11. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$; $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{d}$.



Szögek

7.12. *a)* *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, *AG* átlók;
b) *AH* átló; *c)* *AI*, *AJ*, *AK* átlók.

7.13.

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*
fok	30	60	90	120	150	180
d.sz.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
e.sz.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

7.14. $\frac{\pi}{3}=60^\circ$; $\frac{2\pi}{3}=120^\circ$; $\frac{5\pi}{3}=300^\circ$; $\frac{\pi}{2}=90^\circ$

7.15. $\frac{\pi}{6}=30^\circ$; $\frac{4\pi}{3}=240^\circ$; $\frac{\pi}{3}=60^\circ$; $\frac{3\pi}{2}=270^\circ$; $\frac{5\pi}{6}=150^\circ$; $\frac{7\pi}{6}=210^\circ$

7.16. *a)* $15^\circ=900'$; *b)* $150^\circ=9000'$; *c)* $60^\circ=3600'$

7.17. *a)* $1200'=20^\circ$; *b)* $300'=5^\circ$; *c)* $150'=2{,}5^\circ$;
d) $270'=4{,}5^\circ$ *e)* $615'=10{,}25^\circ$; *f)* $504'=8{,}4^\circ$

7.18. *a)* $1{,}5'=90''$; *b)* $50'=3000''$; *c)* $150'=9000''$;
d) $1^\circ10'=4200''$; *e)* $4^\circ20'40''=15\,640''$

7.19. *a)* 11 óra 55 perc; *b)* 12 óra 7 perc 30 másodperc;
c) 12 óra 2 perc 30 másodperc; *d)* 11 óra 50 perc.

7.20. *a)* $+60^\circ$; *b)* -60°; *c)* $+90^\circ$; *d)* -90°; *e)* $+9^\circ$; *f)* -9°;
g) $+36^\circ$; *h)* -36°; *i)* $+180^\circ$; *j)* -180°; *k)* $+270^\circ$; *l)* -270°;
m) $+360^\circ$; *n)* -360°; *o)* $+540^\circ$; *p)* -540°

7.21. Az óra számlapja 12 egyenlő részre van osztva, a számlap középpontjából két ilyen szomszédos beosztáshoz húzott félegyenes tehát 30°-os szöget zár be egymással. Tehát a

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (61. old.)

kismutató egy óra alatt 30°-os szöget súrol, míg a nagymutató ennek 12-szeresét, 360°-ot. Az óramutató negatív forgásirányban fordul el.

a) A nagymutató $4 \cdot (-30^\circ)$-kal, a kismutató $\dfrac{4 \cdot (-30^\circ)}{12} = -10^\circ$-kal fordult el.

(Hallgatólagosan feltételezzük, hogy a 12-es az óra számlapjának legfelső pontja.)
Hasonlóan adódik, hogy a keresett szögek

b) -180° és $2 \cdot (-30^\circ) + \dfrac{-180^\circ}{12} = -75^\circ$; *c)* -240° és $3 \cdot (-30^\circ) + \dfrac{-240^\circ}{12} = -110^\circ$

a) 60°; *b)* 135°; *c)* 70°.
A mutatók által bezárt szögön a nem nagyobbat értjük.
Ha például a nagymutató állásától az óramutató járásával megegyező irányban számítjuk a szögeket, akkor

a) -60°; *b)* -225°; *c)* -290°

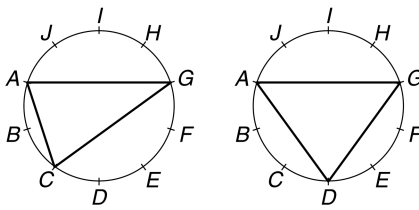
a) -360° és -30°; *b)* -270° és $-22^\circ 30'$; *c)* -240° és -20°.
(A szögek nagymutató, kismutató sorrendben adottak.)

a)	0°;	360°;	720°;	...,	illetve	-360°;	-720°; ...
b)	60°;	420°;	780°;	...,	illetve	-300°;	-660°; ...
c)	180°;	540°;	900°;	...,	illetve	-180°;	-540°; ...

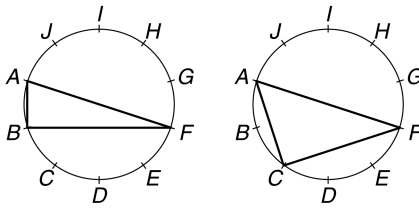
omok, sokszögek

$k \approx 10 \cdot 12$ mm = 120 mm. (Pontosabban mérve: $K \approx 123{,}6$ mm.)

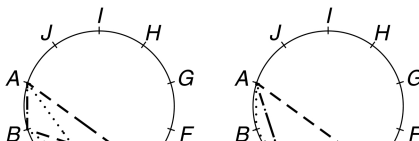
A 10 osztópont közül $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$-féleképpen választható ki a háromszög három csúcspontja. A kapott háromszögek között sok egybevágót találunk. A tízszög középpontja egyben a keresett háromszög köré írható körének középpontja.



a) A háromszög köré írható körének középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében van. A kapott háromszögek között lényegében két különböző (nem egybevágó) van, a többi ezek valamelyikével egybevágó.



b) A háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja. Két nem egybevágó megoldás van.



c) A háromszög köré írható kör középpontja kívül esik a háromszögön. Négy nem egybevágó megoldás van. Az $ABC\triangle$, $ABD\triangle$, $ABE\triangle$ és $ACE\triangle$ tompaszögű.

d) Két nem egybevágó tompaszögű, egyenlő

$K \approx 8 \cdot 15$ mm = 120 mm. (Pontosabban mérve: $K \approx 122{,}5$ mm.)

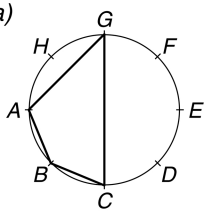
A 8 osztópont közül $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$-féleképpen választható ki a négyszög négy csúcspontja. A kapott négyszögek között sok egybevágó van.

a) Például az *ABCG*, *ACEF* négyszög ilyen. Keress további megoldásokat!

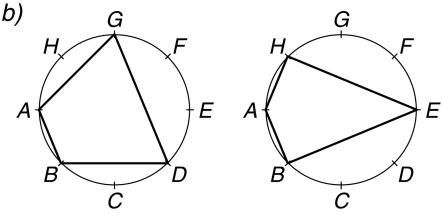
b) Például az *ABDG* és *ABEH* négyszög ilyen. Keress további megoldásokat!

c) Például az *ACEG* négyszög ilyen. Keress további megoldásokat!

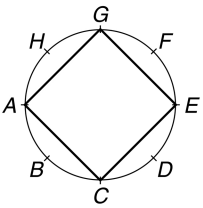
a)



b)



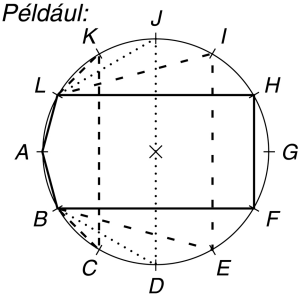
c)

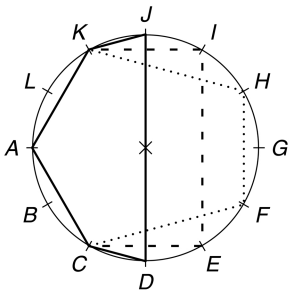


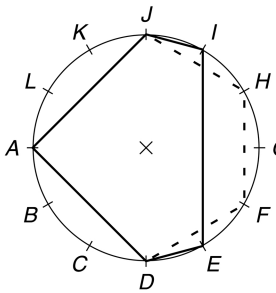
$K \approx 12 \cdot 10{,}5$ mm = 126 mm. (Pontosabban mérve: $K \approx 124{,}2$ mm.)

12 osztópont közül $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$-féleképpen választható ki az ötszög öt csúcspontja. A kapott ötszögek között sok egybevágó lesz.

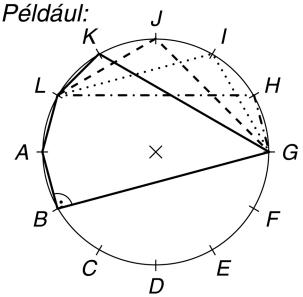
a) Például:

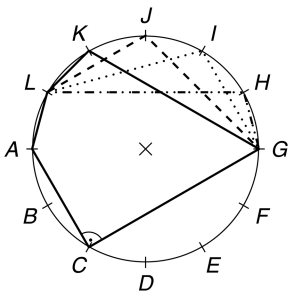


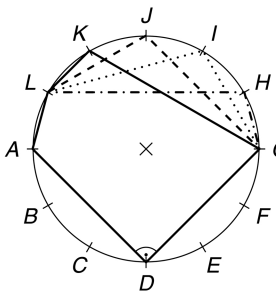




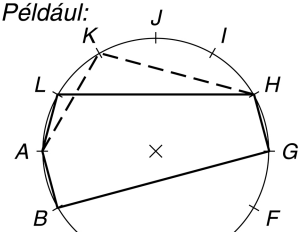
b) Például:

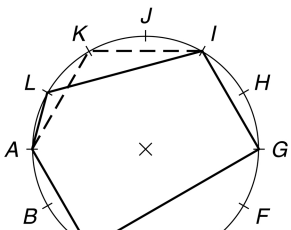


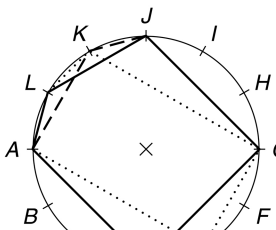




c) Például:

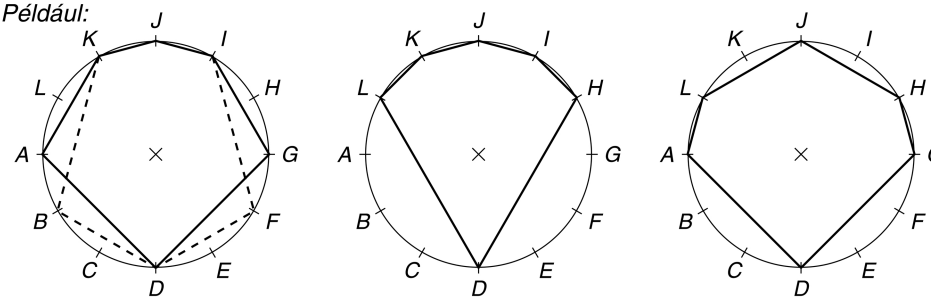




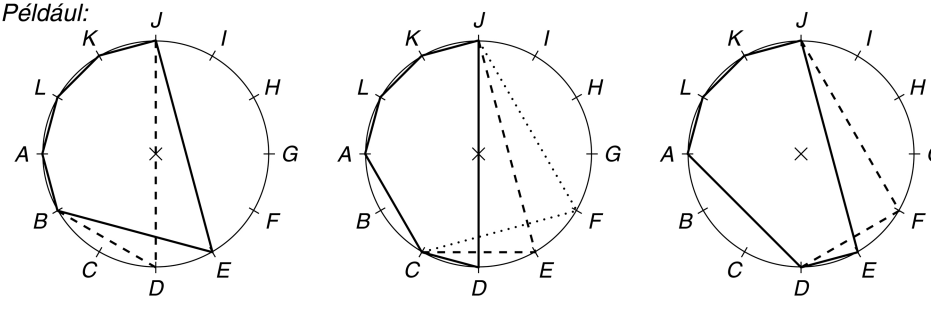


12 osztópont közül $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924$-féleképpen választható ki a hatszög hat csúcspontja. A kapott hatszögek között sok egybevágó van.

a) Például:



b) Például:



c) A szabályos hatszögnek 6 szimmetriatengelye van.

A hat oldal összege a hatszög kerülete. Saját megoldásaid alapján számolj!

mszögek

a)

a	2	4	6	8	10
b	11	10	9	8	7
c	11	10	9	8	7

b)

a	8	8	8
b	7	6	5
c	9	10	11

7.34. A háromszög egyenlő szárú.

a	2	4	6
b	7	6	5
c	7	6	5

a) A háromszög harmadik csúcsa $C_1(4;6)$, $C_2(5;5)$ és $C_3(6;4)$ pont lehet.

b) A háromszög harmadik csúcsa $C_1(1;9)$, $C_2(2;8)$, $C_3(8;2)$ és $C_4(9;1)$ pont lehet.

c) A háromszög harmadik csúcsa $C_1(3;7)$ és $C_2(7;3)$ lehet.

d) A háromszög harmadik csúcsa a $C(5;5)$ pont.

a) $A(-3;0)$; $B(0;6)$. *b)* A háromszög derékszögű. *c)* $T = 9$ négyzetterület.

A háromszög belső szögeinek összege 180°. a háromszög belső szögei lehetnek:

b) 38°; 42°; 100°; *c)* 30°; 60°; 90°; *e)* 60°; 60°; 60°

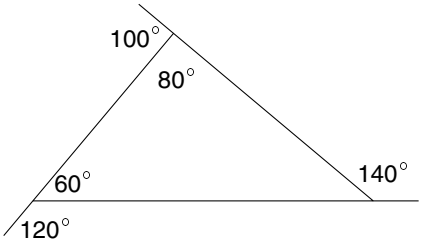
a) 20°; 20°; 140°; 40°; 40°; 100°; 60°; 60°; 60°; 80°; 80°; 20°

b) 15°; 90°; 75°; 30°; 90°; 60°; 45°; 90°; 45°

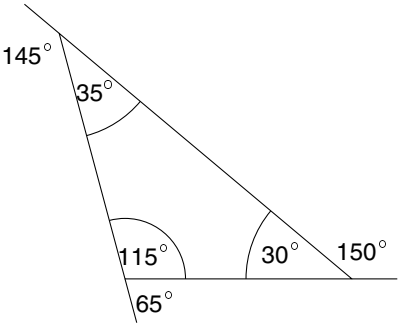
7.40. *a)* 40°; 60°; 80°; *b)* 50°; 60°; 70°;
c) 50°; 50°; 80°; *d)* 36°; 36°; 108°

7.41. *a)* $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 40^\circ$; $\delta = 50^\circ$; *b)* $\alpha = 50^\circ$; $\delta = 40^\circ$; *c)* $\alpha = 135^\circ$; $\beta = 25^\circ$

7.42. *a)*



b)



7.43. A háromszög külső szögeinek összege 360°. Külső szögek lehetnek:
b) 80°; 120°; 160°; *c)* 200°; 80°; 80°; *e)* 120°; 120°; 120°;
f) $180^\circ + 100^\circ + 80^\circ = 360^\circ$, de a külső szög nem lehet 180°-os.

7.44. *d)* Nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség: $7\text{ cm} > 3\text{ cm} + 3{,}5\text{ cm}$.
A többi feladatban megszerkeszthető a háromszög.
(Lásd alapszintű tankönyv 212. oldal, emeltszintű tankönyv 278. oldal.)

a) $45{,}5^\circ$; $45{,}5^\circ$; 89°; $K = 17\text{ cm}$; $T = \frac{7 \cdot 3{,}6}{2}\text{ cm}^2 = 12{,}6\text{ cm}^2$

b) 90°; 49°; 41°; $K = 12\text{ cm}$; $T = \frac{3 \cdot 4}{2}\text{ cm}^2 = 6\text{ cm}^2$

c) $72{,}5^\circ$; $72{,}5^\circ$; 35°; $K = 13\text{ cm}$; $T = \frac{3 \cdot 4{,}8}{2}\text{ cm}^2 = 7{,}2\text{ cm}^2$

7.45. *a)* 2,4 cm; 3,6 cm; 4,8 cm; *b)* 2,8 cm; 2,8 cm; 4,2 cm;
c) 3,6 cm; 3,6 cm; 6 cm; *d)* 4,5 cm; 6 cm; 7,5 cm;
e) 2,1 cm; 3,5 cm; 4,9 cm; *f)* nincs ilyen háromszög;
g) 2 cm; 6 cm; 6 cm; *h)* 5 cm; 5 cm; 5 cm

7.46. *a)* 3 cm; 4,5 cm; 6 cm; *b)* 4,5 cm; 7,5 cm; 7,5 cm;
c) 3,2 cm; 4,8 cm; 4,8 cm; *d)* 3,6 cm; 4,8 cm; 6 cm;
e) 1 cm; 4 cm; 4 cm; *f)* 2,8 cm; 5,6 cm; 7 cm;
g) nincs ilyen háromszög.

7.47. Két oldalból és a közrezárt szögből egyértelműen szerkeszthető háromszög, ha a szög kisebb 180°-nál.
(Lásd alapszintű tankönyv 212. oldal, bővített tankönyv 278. oldal., 2. példa.)
c) Nem szerkeszthető.

7.48. Egy oldalból és két szögből egyértelműen szerkeszthető háromszög, ha a két szög összege kisebb, mint 180°.
(Lásd alapszintű tankönyv 213. oldal, bővített tankönyv 279. oldal., 4. példa.)
b) $\beta + \gamma = 180^\circ$, nem szerkeszthető meg. *c), d)* $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (65. old.)

7.49. *a), b)* Két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög adott, a háromszög egyértelműen megszerkeszthető.
(Lásd alapszintű tankönyv 214. oldal, bővített tankönyv 280. oldal., 5. példa.)
c), d) (Lásd bővített tankönyv 283. oldal., 6. példa.)

7.50. A háromszögek szerkesztése c. fejezet kidolgozott mintapéldái szerint.

Négyszögek

7.51. *a)* rombusz; *b)* húrtrapéz vagy deltoid; *c)* rombusz; *d)* téglalap;
e) négyzet; *f)* szögei egyenlők vagy átlói egyenlők.

7.52. **A:** igaz. **B:** igaz. **C:** igaz.
D: hamis. Ha a deltoid átlói felezik egymást, akkor az rombusz.
E: hamis. Ha a paralelogramma átlói egyenlők, akkor az téglalap (ezen belül lehet négyzet).
F: hamis. Ha egy négyszögnek van három szimmetriatengelye, akkor négy szimmetriatengelye van.

7.53.

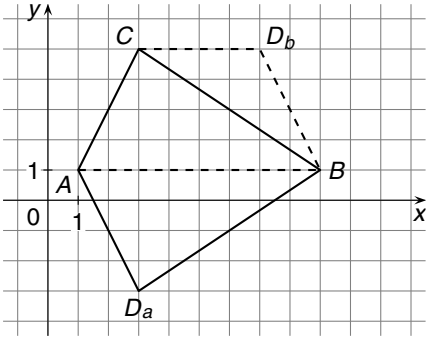
a)	*ABCJ*;	*BCDF*;	*CDEG*;	*DEAH*;	*EABI*;
	AHIJ;	*BIJF*;	*CJFG*;	*DFGH*;	*EGHI*;
	AGBD;	*BHCE*;	*CIDA*;	*DJEB*;	*EABI*;
b)	*ABCJ*;	*BCDF*;	*CDEG*;	*DEAH*;	*EABI*;
c)	*AHIJ*;	*BIJF*;	*CJFG*;	*DFGH*;	*EGHI*;
	AGBD;	*BHCE*;	*CIDA*;	*DJEB*;	*EFAC*

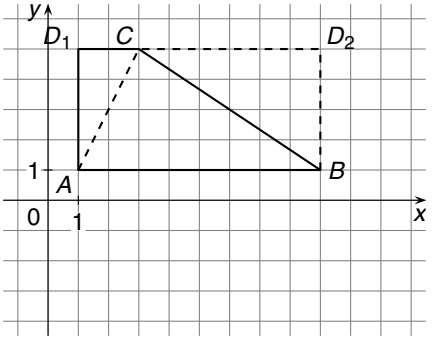
7.54.

a)	$DAB\sphericalangle = 100^\circ$;	$ABC\sphericalangle = 70^\circ$;	$BCD\sphericalangle = 70^\circ$;	$CDA\sphericalangle = 120^\circ$;
b)	$DAB\sphericalangle = 115^\circ$;	$ABC\sphericalangle = 75^\circ$;	$BCD\sphericalangle = 70^\circ$;	$CDA\sphericalangle = 100^\circ$;
c)	$DAB\sphericalangle = 105^\circ$;	$ABC\sphericalangle = 45^\circ$;	$BCD\sphericalangle = 150^\circ$;	$CDA\sphericalangle = 60^\circ$;
d)	$DAB\sphericalangle = 120^\circ$;	$ABC\sphericalangle = 60^\circ$;	$BCD\sphericalangle = 120^\circ$;	$CDA\sphericalangle = 60^\circ$

7.55. *a)* $DAB\sphericalangle = 70^\circ$; $BCD\sphericalangle = 110^\circ$; *b)* $DAB\sphericalangle = 75^\circ$; $BCD\sphericalangle = 105^\circ$;
c) $DAB\sphericalangle = 90^\circ$; $BCD\sphericalangle = 90^\circ$; *d)* $DAB\sphericalangle = 30^\circ$; $BCD\sphericalangle = 150^\circ$

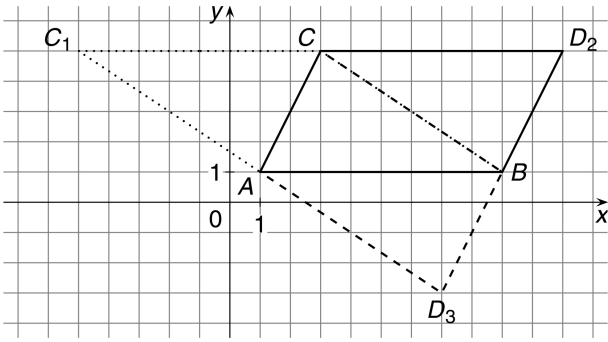
7.56. *a)* Pl.: $D_a(3;-3)$; *b)* Pl.: $D_b(7;5)$; *d)* Pl.: $D_1(1;5)$, $D_2(9;5)$





Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (66. old.)

c) $D_1(-5;5)$, $D_2(11;5)$, $D_3(7;-3)$.



a) *LCFI*; *BEHK*;

b) *ADEL*; *ADFK*; *LEFK*; *LFGJ*; *KFGJ*; *ABIJ*; *ACHJ*; *BCHI*; *BDGI*; *CDGH*; *BFHL*; *CEIK*;

c) *ABHI*; *ACGI*; *BCGH*; *BCIJ*; *BDHI*; *CDHI*; *LDEK*; *LDFJ*; *KEFJ*; *AEFL*; *AEGK*; *LFGK*;

d) *ABGL*; *ACGK*; *DEJC*; *DFJB*; *GHAF*; *GIAE*; *JKDI*; *JLDH*

A négyszög belső szögeinek összege 360°. Négyszög belső szögei lehetnek:

b) 90°; 60°; 120°; 90°; *c)* 200°; 40°; 20°; 80°

a) $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ$; $\alpha = 36^\circ$; $\beta = 72^\circ$; $\gamma = 108^\circ$; $\delta = 144^\circ$;

b) $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 5\alpha = 360^\circ$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 120^\circ$; $\delta = 150^\circ$;

c) $\alpha+\alpha+20^\circ+\alpha+40^\circ+\alpha+60^\circ = 360^\circ$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 80^\circ$; $\gamma = 100^\circ$; $\delta = 120^\circ$

a) 120°; 80°; 80°; 80°; *b)* 160°; 60°; 80°; 60°;

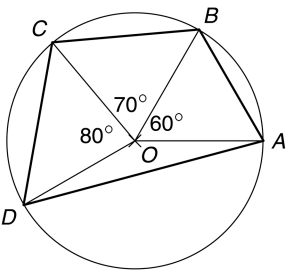
c) 160°; 40°; 120°; 40°

$A\sphericalangle = 75^\circ$; $B\sphericalangle = 115^\circ$;
$C\sphericalangle = 105^\circ$; $D\sphericalangle = 65^\circ$

a) 130°; 90°; 80°; 60°;

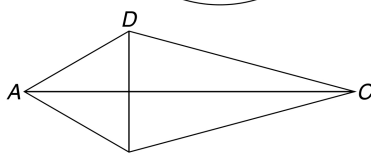
b) 105°; 60°; 70°; 125°;

c) 100°; 105°; 75°; 80°

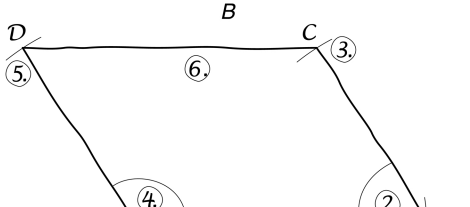


a) Deltoidot kapunk.

b) Az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsnál lévő belső szögek rendre: 60°, 135°, 30°, 135°.
Az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsnál lévő külső szögek rendre: 120°, 45°, 150°, 45°



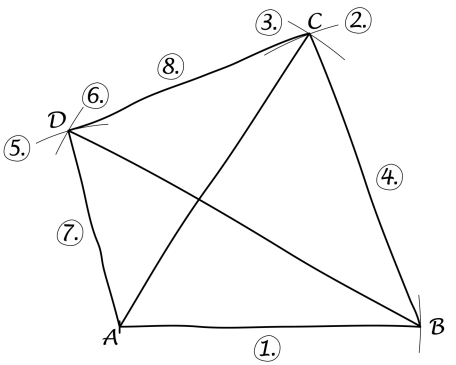
c) Átlói: 4 cm és megközelítőleg 11 cm.
$T \approx 22\ \text{cm}^2$



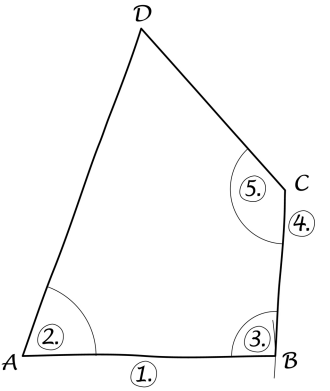
a) Vázlat: a szerkesztés terve:
① Felvesszük az *AB* oldalt.
② Az *AB* szakasz *B* végpontjába rámásoljuk a külön megszerkesztett β

④ Az AB szakasz A végpontjába másoljuk az α szöget.
⑤ Az α szög másik szárára rámásoljuk az AD oldalt.
⑥ Összekötjük a C és a D pontot.

b) Vázlat:



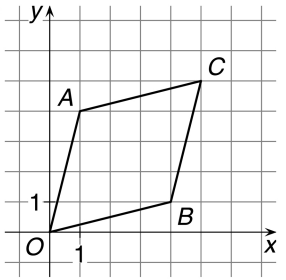
c) Vázlat:



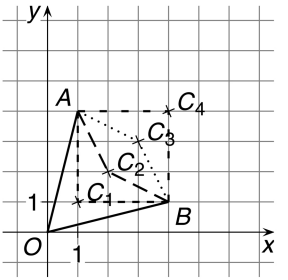
a) $C(5;5)$; *b)* $C_1(1;1)$, $C_2(2;2)$, $C_3(3;3)$, $C_4(4;4)$;

c) A csillaggal jelölt pontok bármelyike lehet a negyedik csúcs.
Például $C_1(3;5)$, $C_2(5;4)$, $C_3(4;3)$, $C_4(1;2)$.

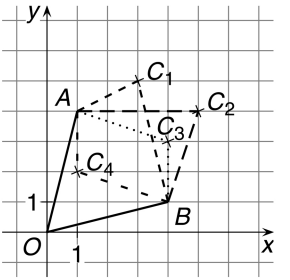
a)



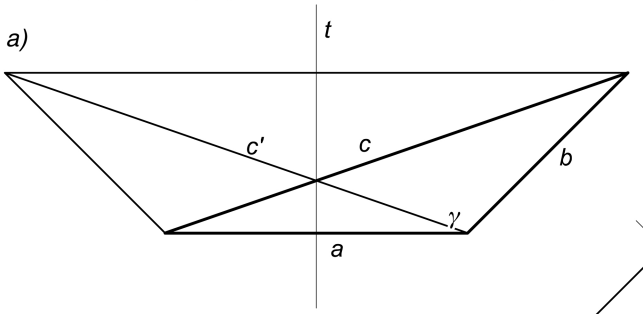
b)



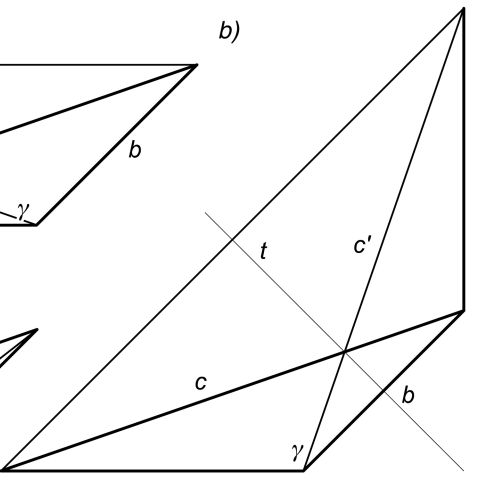
c)



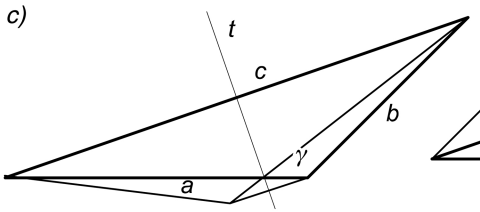
a)



b)



c)



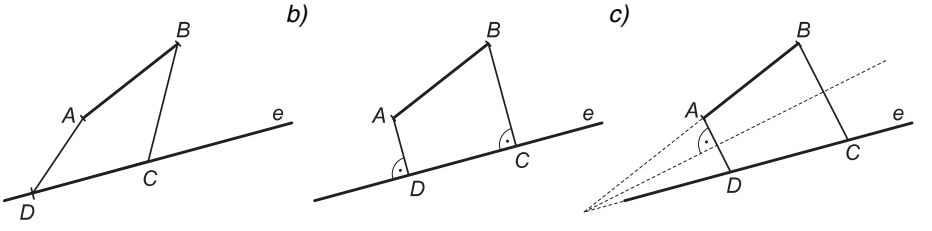
7.67. *a)* 130°; 40°; 10°; *b)* 70°; 60°; 50°; *c)* 75°; 80°; 25°

7.68. *a)* Több megoldás van. *Például* az első ábrán $AB = BC = CD$. Keress további megoldásokat!

b) Több megoldás van. *Például* a második ábrán $D\sphericalangle = C\sphericalangle = 90^\circ$. Keress további megoldásokat!

c) Egy megoldás van.

a) *b)* *c)*



7.69. **A:** hamis; **B:** hamis; **C:** igaz;
D: igaz, a négyszög rombusz, és minden rombusz deltoid;
E: igaz, mert a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és ha ezenkívül egyenlők is, akkor az négyzet;
F: hamis.

8. Statisztika, valószínűség

Statisztika

8.01. *b)* A napi középhőmérséklet: $3\ ^\circ$C.

8.02. *a)*

Időpont (óra)	3	6	9	12	15	18	21	24
Hőmérséklet ($^\circ$C)	−6	−5	−2	4	2	0	−3	−6

b) A napi középhőmérséklet: $-2\ ^\circ$C.

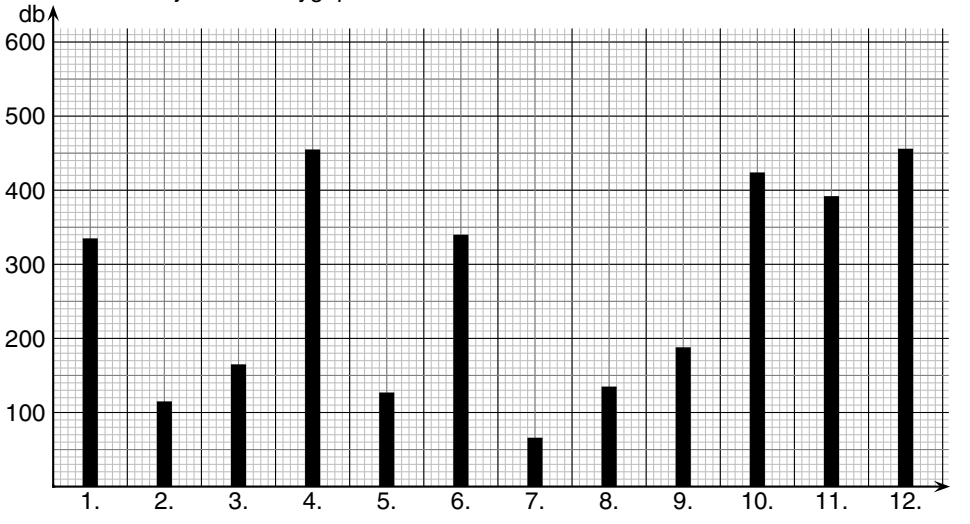
8.03. A gépkocsik számát tekintve 9. helyen álltunk.
Az ezer lakosra jutó gépkocsik USA-hoz viszonyított aránya 1985-ben: 62%; 21%; 31%; 84%; 24 79%; 84%.

8.04.–8.05. Az ezer lakosra jutó telefonok száma és az USA-hoz viszonyított aránya rendre:

390 db, 51%;	220 db, 29%;	230 db, 30%;	620 db, 82%;
360 db, 47%;	610 db, 80%;	110 db, 14%;	140 db, 18%;
220 db, 29%;	620 db, 82%;	450 db, 59%;	900 db, 118%

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (69. old.)

8.06. Az ezer lakosra jutó személygépkocsik száma 1985-ben:



8.07.

Év	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Vezetékes vonal	135	150	170	200	245	300	355	375	380	375
Mobilkészülék	–	10	20	30	45	70	100	155	295	500

8.08.

Év	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Darab	35 000	60 000	73 000	56 000	60 000	64 000	79 000	98 000	105 000

b) Új személygépkocsi értékesítése az adott években összesen:
35 000 db; 73 000 db; 89 000 db; 68 000 db; 74 000 db; 80 000 db; 103 000 db; 129 000 db; 133 000 db.

c) $10\,000\,000 = 10\,000 \cdot 1000$.
A személygépkocsik száma 1985-ben $135 \cdot 10\,000 = 1\,350\,000$.

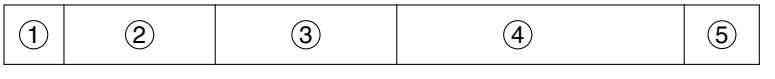
8.09. *a)*

Érdemjegy:	1	2	3	4	5	Összesen:
gyakoriság:	2	5	6	8	4	25

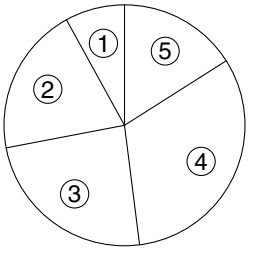
b)

Relatív gyakoriság:	8%	20%	24%	32%	16%	100%

c)



d)

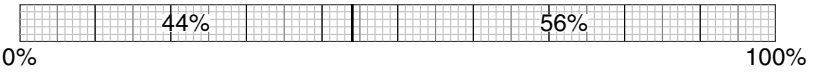


e) Átlag $= \dfrac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{25} = 3{,}28$

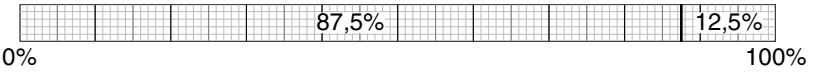
8.10. A matematikaszakkörre a tanulók 15%-a, sportkörre a 10%-a, énekkarra a 6%-a jár.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (70. old.)

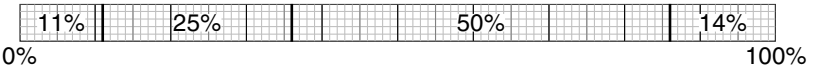
8.11. *a)* A tanulók 44%-a lány, 56%-a fiú.



b) A tanulók 87,5%-a írt, 12,5%-a nem írt dolgozatot.

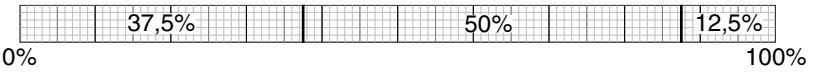


c) A tanulók 11%-a jeles, 25%-a jó, 50%-a közepes, 14%-a elégséges dolgozatot írt.

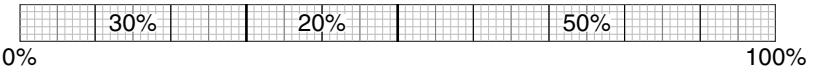


8.12. Az osztály konkrét adataival oldható meg.

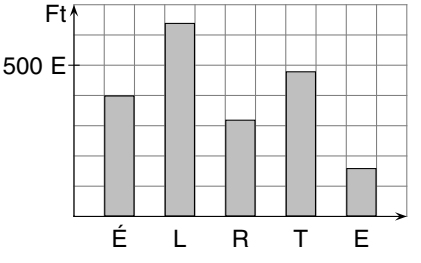
8.13. *a)* A tanulók 37,5%-a szakiskolába, 50%-a szakközépiskolába, 12,5%-a gimnáziumba jelentkezett.



b) A tanulók $\frac{3}{10}$ része, 30%-a nyelvtagozatos, $\frac{1}{5}$ része, 20%-a matematikatagozatos, $\frac{1}{2}$ része, 50%-a normál osztályba jár.

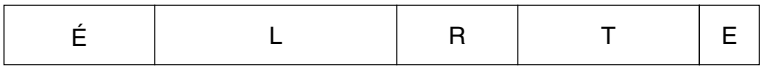


8.14. *a)*

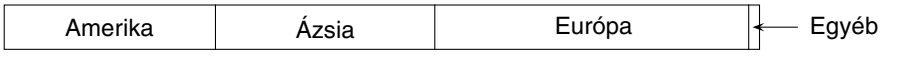


b) A költségek százalékos elosztása:

Élelem:	20%
Lakás:	32%
Ruházkodás:	16%
Tartós cikkek:	24%
Egyéb:	8%



8.15. A világ autógyártásának százalékos megoszlása:
Amerika: 28,0%; Ázsia: 29,0%; Európa: 41,5%; Egyéb: 1,5%

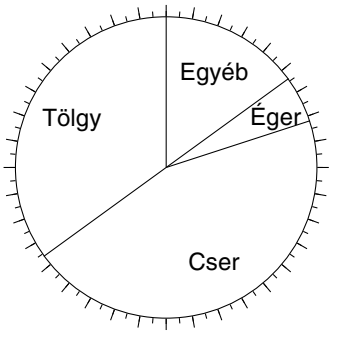


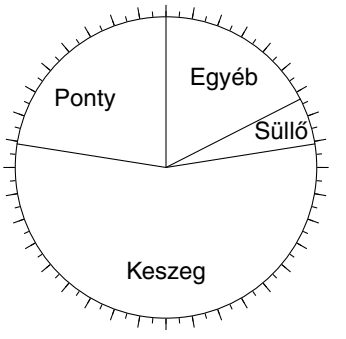
8.16. *a)* 3,6°; 36°; 54°; 90°; 162°; *b)* 5%-a; 20%-a; 40%-a; 37,5%-a

8.17. Az egyes körcikkekhez tartozó középponti szög:
18°; 90°; 144°; 108°, illetve 54°; 45°; 72°; 135°; 54°.
A százalékos megoszlások rendre:
5%; 25%; 40%; 30%, illetve 15%; 12,5%; 20%; 37,5%; 15%

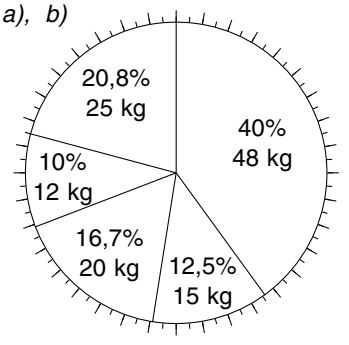
Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (71. old.)

8.18.



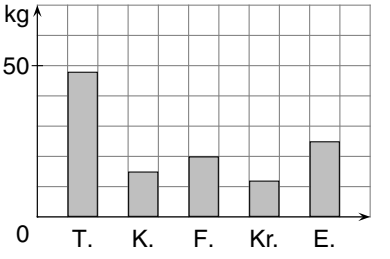


8.19. *a), b)*



Összesen 120 kg-ot adtak el.

c)



d)

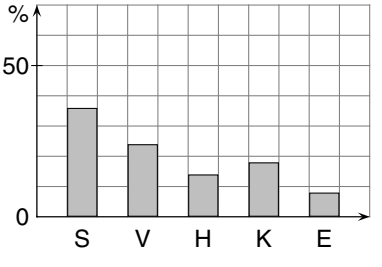
Trappista	Kocka	Füstölt	Krém	Egyéb

8.20. *a)*

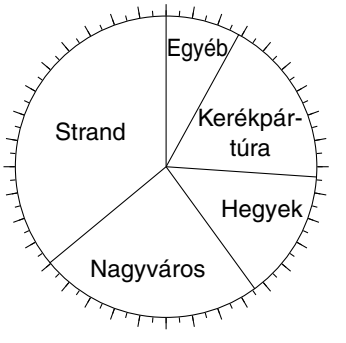
Strand	Nagyváros	Hegyek	Kerékpártúra	Egyéb	Összesen
36%	24%	14%	18%	8%	100%

b), c)

Strand	Nagyváros	Hegyek	Kerékpártúra	Egyéb	Összesen
54	36	21	27	12	150



d)



8.21. *a)* Alexandra esélye $\frac{7}{10}$, Barbaráé $\frac{3}{10}$.

b) Alexandra esélye $\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$, Barbaráé $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.

c) Csak Barbara nyerhet, esélye 1 (100%), Alexandráé 0.

d) Egyformák az esélyek, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ mindkét lány esélye.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (72. old.)

8.22. *a)* $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; *b)* $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; *c)* $\frac{1}{6}$; *d)* $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; *e)* $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

8.23. 0; $\frac{1}{100}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 35; 200; 80; 70

8.24. Dani 29,5%, Viktor 33,75% valószínűséggel talál be $\left(\frac{118}{300} < \frac{81}{240}\right)$. Viktort kell nevezni.

8.25. 70,8% valószínűsége van a tengerbe csapódásnak.

8.26. *a)* Nem igazságos a játék, Ildikónak és Gábornak van a legtöbb esélye a a győzelemre.

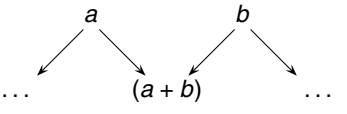
b) Nem lett igazságosabb, a játékosoknak ugyanannyi az esélyük, mint eddig volt.

1 Ft-os	i	i	i	i	f	f	f	f
2 Ft-os	i	i	f	f	i	i	f	f
5 Ft-os	i	f	f	i	i	f	f	i
nyerő	S	I	G	I	I	G	A	G

Az esetek $\frac{1}{8}$ részében András, szintén $\frac{1}{8}$ részében Sanyi, $\frac{3}{8}$ részében Gábor és szintén $\frac{3}{8}$ részében Ildikó nyer.

c) Nincs igaza Andrásnak, az esélyek változatlanok, a játék nem lesz igazságos.

8.27. *a)* Minden szám a felette álló két szám összege:



c) Csak az első két sorban lesznek egyformák, mert a többiben is van 1-es a sor két szélén, de a többi szám nagyobb 1-nél.

d) 10 szám van a 10-edik sorban (*k* szám a *k*-adik sorban).

8.28. *a)* Például 1; 2 balra, 3; 4 középre, 5; 6 jobbra vezessen.

b) Páros balra, páratlan jobbra (vagy 1; 2; 3 balra, 4; 5; 6 jobbra) vezessen.

c)

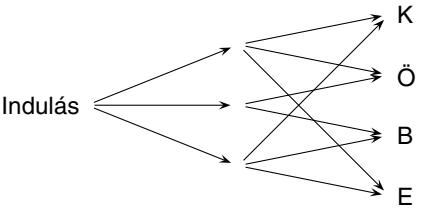
1.	f	f	i	i	f	f	i	i	f	f	i	i	f	f	i	i	f	f	i	i	f	f	i	i
2.	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i	f	i
3.	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
nyer	S	G	G	S	S	I	I	S	G	G	G	I	G	I	I	I	A	G	G	A	A	I	I	A

Nem igazságos a játék. András, illetve Sanyi az esetek $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ részét nyeri, $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ az esélye Gábornak és ugyanennyi Ildikónak is.

d) Gábor nem jól számolt: $\frac{1}{6}$, tehát 16,7% esélye van András és Sanyi nyerésének, és $\frac{1}{3}$, azaz 33,3% esélye van Ildikó és Gábor nyerésének.

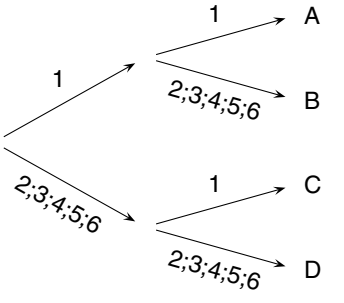
Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (73. old.)

8.29. *a)* Az első dobás eredményétől függetlenül, csak a második dobás dönti el, hogy hova érünk a második lépésben. Ödön javaslata ezért:



b) Eszter szerint mindenkihez kétféle útvonal vezet, ami igaz. Eszter abban téved, hogy nem egyenlő eséllyel lépünk a különböző utakon.
Más példa: Itt a 36 különféle dobáspárból 25 kedvez D-nek és 1 A-nak.

c) Két egymás utáni dobásnak 36 különböző esete lehet. Ezek közül 8 kedvez Katinak; Borinak is és Ödönnek is 10 eset kedvez; Eszter számára szintén 8 a kedvező esetek száma.



8.30. *a)* Igazságos, mindenki $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nyer.

8.31. *a)* 66,7%; *b)* 66,7%; *c)* 44,4%

8.32. *a)* $\frac{8}{15} \cdot 100 \approx 53$; *b)* $\frac{4}{9} \cdot 100 \approx 44{,}4\%$; *c)* [*b)*] visszatevéses húzást.

8.33. *a)* A = 50%, B = 40%, G = 10%;
b) A = 30%, B = 53,73%, G = 16,25%

8.35. *a)* Igen; *b)* Nem; *c)* Igen, ha mindkétszer a saját nevét húzza;

d) Ugyanúgy $\frac{1}{25}$ = 4%, mint ha elsőnek vagy tizediknek húzna.

9. Vegyes feladatok

9.01. *a)* **A**; *b)* **A**; *c)* **C** és **D** is jó.

9.02. *a)* 65 600 FRF; *b)* 19 363 000 ITL; *c)* 137 600 ATS; *d)* 19 560 DM.
Az értékeket ésszerűen kerekítve adjuk meg.

9.03. *a)* Ausztriában 26,70 €, míg Németországban 28,30 € lett 30 liter benzin ára.

b) $58{,}84 < x < 62{,}365$, tehát 58,84 és 62,36 között lehetett a benzin ára holland guldenben számítva.

9.04. 1,02 €; 2,03 €; 2,04 €; 2,99 €; 19,95 €; 6,13 €; 199 €; 99,96 €

9.05. 409; 811; 7994; 2726; 2000; 20 445; 218 080 (GRD)

9.06. *a)* 1 € ≈ 238 Ft;

b) Az egységárak lehetnek: 0,63 €; 1,05 €; 0,09 €; 1,35 €; 4,71 €; 3,95 €; 1,05 €
Az árak rendre: 0,63 €; 2,10 €; 0,54 €; 2,70 €; 4,71 €; 3,95 €; 1,05 €
Összesen: 3720 Ft; 15,68 €. Ha a 3720 Ft-ot számoljuk át, akkor 15,63 €-t kapunk.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (74. old.)

9.07. *a)* Ha 1 USD = 124,871 JPY, akkor 100 USD = 12 487,1 JPY.

b) Ha 1 USD = 255,044 HUF, akkor 100 USD = 25 504 HUF.

9.08. *a)* Az 1950-es évben 2,5 milliárd, az 1900-as évben 1,55 milliárd.

b) 19,2%-os volt a népességnövekedés 1700 és 1750 között.

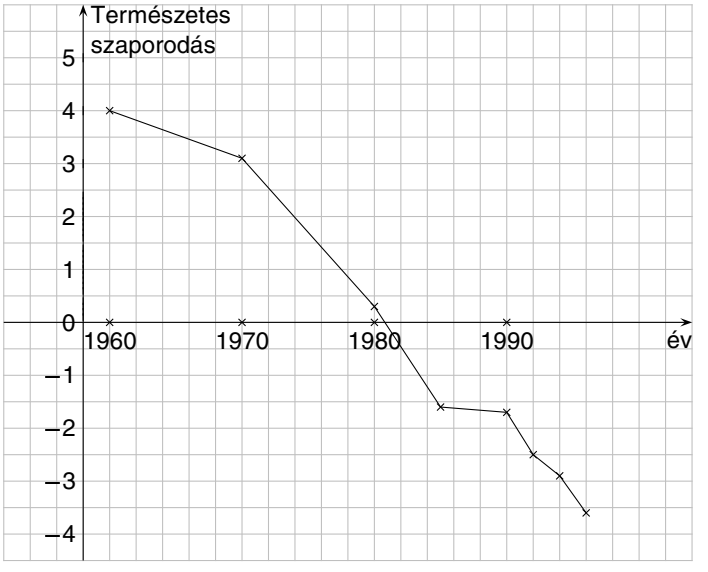
c) 2,4 milliárddal nőtt a lakosság, ez 54,5%-os növekedés 1980-hoz képest.

d) 2001-ben 6,108 milliárd; 2002-ben kb. 6,218 milliárd; 2003-ban kb. 6,330 milliárd.

9.09. *a)* A születések és halálozások számának különbsége 1960-ban 40 000, 1970-ben 30 000, 1980-ban 4000, 1985-ben −18 000, 1990-ben −18 000, 1992-ben −26 000, 1994-ben −30 000, 1996-ban −37 000.

b) A természetes szaporodás 1960-ban 4,0, 1970-ben 3,1, 1980-ban 0,3, 1985-ben −1,6, 1990-ben −1,7, 1992-ben −2,5, 1994-ben −2,9, 1996-ban −3,6.

c)

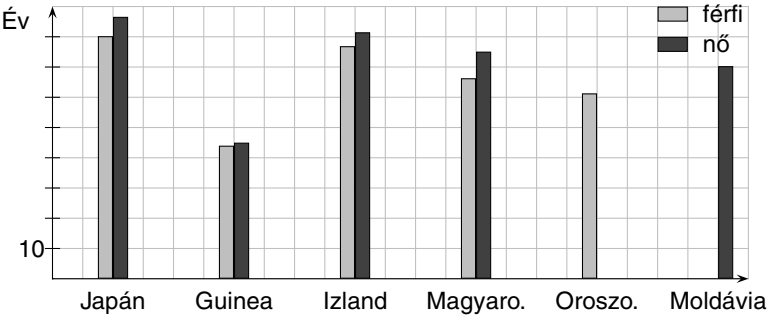


d) Természetes szaporodás: 1960, 1970, 1980-ban; természetes fogyás: 1985, 1990, 1992, 1996-ban.

e) A legmagasabb születési szám 1970-ben, a legalacsonyabb 1996-ban volt. A legmagasabb halálozási szám 1985-ben, a legalacsonyabb 1960-ban volt.

f) A természetes szaporodás −0,6, vagyis természetes fogyásról van szó.

9.10. *a)*



b) A várható átlagos élettartam Japánban a leghosszabb és Guineában a legrövidebb. Az arányuk férfiaknál: 80,2 : 44 ≈ 1,82, nőknél: 86,6 : 45 ≈ 1,92.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (75. old.)

c) A nők várható átlagos élettartamát tekintve 100%-nak, a férfiak átlagosan ennek csak 66,3 : 75,1 ≈ 0,88, azaz 88%-ára számíthatnak, vagyis 12%-kal rövidebb élettartamra. De azért ezt senki ne tekintse magára nézve kötelezőnek, az életmód helyes megválasztásával, a lehetséges örökletes betegségek rendszeres szűrésével az élettartam jelentősen meghosszabbítható még egy magyar férfi esetében is!

9.11. *a)* Jelölje x a 650 Ft-os, $12 - x$ az 550 Ft-os jegyek számát. Egyenlettel felírva: $650x + (12 - x) \cdot 550 = 7300$, ebből $x = 7$. Vagyis 7 db 650 Ft-os és 5 db 550 Ft-ot jegyet vásároltak.

b) $12 \cdot 650 - 7300 = 500$ Ft-tal többe került volna.

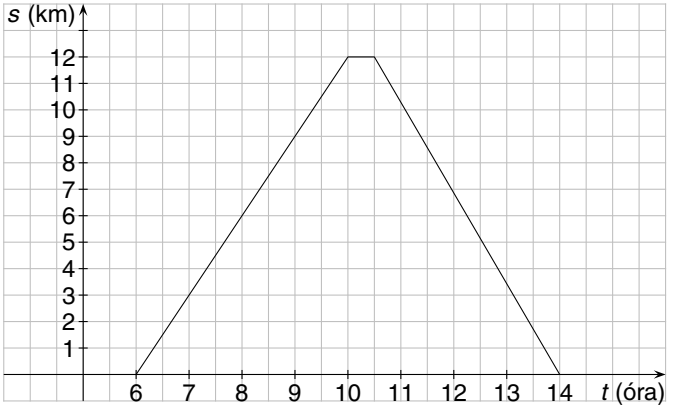
c) Az *a)* pontban leírt egyenlettel: $650x + (12 - x) \cdot 550 = 7300 - 500$. $x = 2$, $12 - x = 10$, tehát 2 db 650 és 10 db 550 Ft-os jegyre futotta volna. A két vödör pattogatott kukorica ára 1000 Ft, a maradék 6300 Ft-ból nem jött volna ki a 12 jegy még az 550 Ft-os áron sem: $12 \cdot 550 = 6600$. A műsorfüzet megvásárlása után maradt volna 7250 Ft-juk. Ebből $650x + (12 - x) \cdot 550 = 7250$, $x = 6{,}5$. A jegyek száma egész szám, tehát 6 db 650 Ft-os és 6 db 550 Ft-os jegyet tudtak volna venni, és még maradt volna 50 Ft-juk.

9.12. *a)* A menetidő felfelé: 12 km sík terepen 3 óra, 300 m emelkedésre $30 \cdot 2$ perc = 1 óra szükséges, összesen 4 óra.

A menetidő lefelé: 3 óra + $30 \cdot 1$ perc = 3,5 óra. A félórás nézelődést is hozzászámítva tehát az útvonal megtételéhez összesen 8 óra szükséges.

b) $14 - 8 = 6$ órakor kell indulni a turistaháztól.

c)



A kilátóból 10 óra 30 perckor kell visszaindulni.

9.13. *a)* Az 1. helyezett $4x$ Ft-ot, a 2. helyezett $2x$ Ft-ot, a 3. helyezett x Ft-ot kapott. $7x$ = = 554 400 Ft, x = 79 200 Ft, a díjak rendre: 316 800 Ft, 158 400 Ft és 79 200 Ft.

b) Két 1. helyezés esetén $4x+4x+2x+x$ = 554 400, x = 50 400. A díjak rendre: 201 600 Ft, 201 600 Ft, 100 800 Ft, 50 400 Ft.

Két 2. helyezés esetén a díjak 246 400 Ft, 123 200 Ft, 123 200 Ft, 61 600 Ft.

Két 3. helyezés esetén a díjak 277 200 Ft, 138 600 Ft, 69 300 Ft, 69 300 Ft.

9.14. *a)* Ha 24 óra felel meg 4,6 milliárd = 4600 millió évnek, akkor 1 óra ≈ 191,7 millió évnek, 1 perc ≈ 3,2 millió évnek felel meg.

b) A mai ember e szerint a meghatározás szerint 1 másodperccel, vagyis körülbelül 4 600 000 000 : $(24 \cdot 60 \cdot 60)$, kerekítve 53 000 évvel ezelőtt jelent meg.

c) A dinoszauruszok kihalása kb. 64 millió évvel ezelőtt következett be.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (76. old.)

9.15. *a)* 1 h = 41,$\dot{6}$ @ 12 h = 500 @ 21 h = 750 @

10 min = 6,9$\dot{4}$ @ 30 min = 20,8 @ 45 min = 31,2 @

1 min = 0,69 @ 6 s = 0,069$\dot{4}$ @ 1 s = 0,011574 @

b) 500@ = 12 h 250@ = 6 h 750@ = 18 h

100@ = 2,4 h 50@ = 1,2 h = 72 min = 4320 s

10@ = 0,24 h = 14,4 min = 86,4 s 1@ = 0,024 h = 1,4 min = 8,64 s

9.16. *a)* 1 s alatt 299 792 458 m = 299 792,485 km $\approx 3 \cdot 10^5$ km.
1 óra alatt $\approx (3 \cdot 10^5) \cdot 3600 = 10\,800 \cdot 10^6 \approx 1{,}1 \cdot 10^9$ km.
1 nap alatt $\approx 2{,}64 \cdot 10^{10}$ km.

b) 8 perc = 480 másodperc.
A megtett út megközelítőleg $3 \cdot 10^8 \cdot 480$ m $= 1440 \cdot 10^8$ m $= 144 \cdot 10^6$ km, azaz eszerint körülbelül 144 millió km a Nap–Föld távolság. (Táblázatból kikeresheted, hogy az amúgy állandóan változó Nap–Föld távolság átlaga kb. 150 millió kilométer.)

c) Megközelítőleg 384 400 : 299 792,485 $\approx (3{,}844 \cdot 10^5) : (3 \cdot 10^5) \approx 1{,}28$ s múlva lenne érzékelhető a Holdon a fény.

9.17. A képen $h \approx 50$ mm, $50 : x = 5 : 3$, ebből $x = 30$, vagyis ez a lepke a valóságban 30 mm.

9.18. $h = 38$ mm, a kicsinyítés aránya: $\frac{38}{150} = \frac{19}{75} \approx 25\%$

9.19. $K = 2r = 40$ m, $r = 6{,}37$ m, $T = 127{,}4$ m^2

9.20. *a)* A lányok számát jelölje x, a fiúk számát $x + 75$, arányuk $x : (x + 75) = 2 : 5$. Átalakítva $2 \cdot (x + 75) = 5x$, ebből $x = 50$, ennyi lány versenyző volt és $50 + 75 = 125$ fiú. Valóban, $50 : 125 = 2 : 5$ *b)* 175

9.21. Zoltán autóval megy, tehát nem sportoló (aki repül), és nem egyetemista (aki Rómába vonattal megy).
Zoltán tehát könyvárus, autóval megy, de nem Londonba és nem Rómába (ahova az egyetemista megy), tehát Párizsba utazik.
Gábor nem Londonba megy, tehát csak ő lehet a Rómába vonattal utazó egyetemista. A sportoló ezek szerint Imre, és repülővel megy Londonba

9.22. Az első megszólaló haja fekete, a neve tehát nem lehet Fekete, de Fehér sem lehet, mert az a második megszólaló neve. Így a neve Vörös, a haja fekete.
A második megszólaló neve Fehér, a haja nem lehet fehér, és fekete sem lehet, mert az az első riportalany hajszíne. Ezért Fehér vörös hajú.
A zongorista Fekete, a haja fehér. Az író haja és a tudós neve „ugyanaz”, tehát Vörös a tudós, Fehér az író.

név	Fekete	Fehér	Vörös
foglalkozás	zongorista	író	tudós
hajszín	fehér	vörös	fekete

9.23. Az év $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ részére járó munkabér $\frac{8}{12} \cdot 1\,200\,000$ Ft $+ \frac{8}{12}$ ló $= 800\,000$ Ft $+ \frac{2}{3}$ ló lenne. A lovász $\frac{1}{3}$ lóval többet, viszont 100 000 Ft-tal kevesebbet kapott. Vagyis $\frac{1}{3}$ ló 100 000 Ft-ot ér, tehát a ló értéke 300 000 Ft.

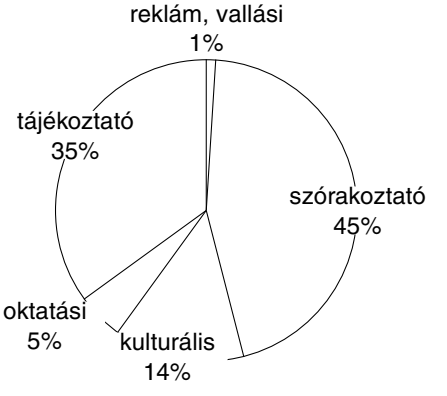
Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (77. old.)

9.24. Abból, hogy 12 fiú és 9 külföldi fiú van, következik, hogy 3 magyar fiú van. Ebből már következik, hogy 2 magyar felnőtt férfi, tehát 6 külföldi felnőtt férfi állt a sorban. A 12 magyar mellett tehát 6 külföldi felnőtt férfi és 9 külföldi fiú, illetve 5 külföldi nő és lány áll a sorban. Ebből már kiszámítható, hogy $12+6+9+5=32$ ember volt ott. A táblázat kitöltése folytatható tovább: 3 magyar fiú, ezért 4 magyar lány, emiatt 3 magyar nő áll a sorban. Az már nem deríthető ki, hogy a külföldi nők között mennyi a felnőttek, illetve a gyerekek száma.

	magyar	külföldi	összesen
nő	3	5	
lánygyerek	4	7	
fiúgyerek	3	9	12
férfi	5	2	6	8
összesen	12	20	32

9.25.

		2000	1995	
Összes műsoridő		23 574 óra	11 787 óra	
Szórakoztató	45%	10 608,3 óra	5304 óra	45%
Tájékoztató	32%	7543,7 óra	4125 óra	35%
Kulturális	16%	3771,8 óra	1650 óra	14%
Oktató	3%	707,2 óra	590 óra	5%
Vallási	2%	471,5 óra	118 óra	1%
Reklám	2%	471,5 óra		



9.26. Szállított utas összesen: 679 058 ezer fő;
(1) 23,1%; (2) 76,3% (3) 0,3% (4) 0,3%
Utaskilométer összesen: 21 918 millió km;
(1) 39,6%; (2) 46,4%; (3) 0,1%; (4) 13,9%
Az 1%-nál kisebb értékeket a szalagdiagramon nem tudjuk ábrázolni.

9.27. *a)* 70%; *b)* 86,8%; *c)* 63,2%; *d)* 0%
Összességében 38% támogatást kap.

9.28. *a)* 125 750 Ft-ot. *b)* 8 695 260 Ft-ot.

9.29. 3 év: 1 046 772 Ft-ot; 10 év: 1 158 120 Ft-ot; 20 év: 1 329 840 Ft-ot.

9.30. *a)* 27 815 280 Ft-ot; *b)* 117 912 Ft-ot.

9.31. A árkülönbözet 4 800 000 Ft. A 20% adó: 960 000 Ft.

a) Nyereség: 3 840 000 Ft, 66,2%

b) $5\,800\,000 \cdot 1{,}1^3 = 7\,719\,800$ Ft. Kamatos kamat: 1 919 800 Ft.

c) Több mint 18%-os kamatnak felelt volna meg.

d) Több mint 22%-os kamatnak. *e)* 27%-os kamatnak.

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (78. old.)

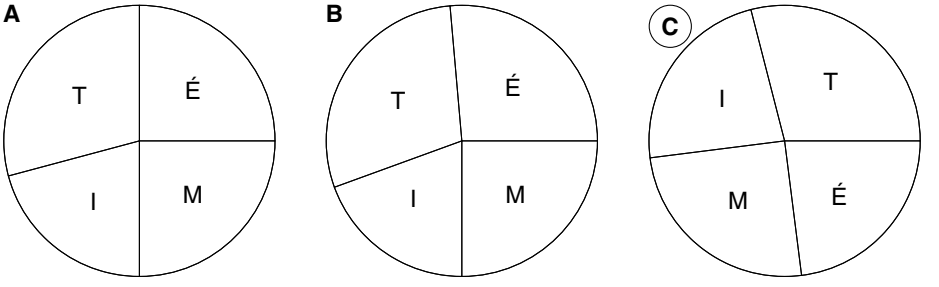
9.32. *a)* 5,80%-os. *b)* 2 928 333 + 14 425 = 2 942 758 (Ft)

c) Május vége után 154 nap múlva.

9.33. *a)* 30 USD; *b)* 6000 €-t; *c)* 10 025 CHF-t

d) Nem fizet kamatot, mert 10 GBP < 100 USD.

9.34. A helyes kördiagram a **C**.



Az **A** és a **B** diagram számítások nélkül kizárható:

A: Nem ugyanannyi tanuló választotta az éneket, mint a matematikát.
A történelmet és az irodalmat együtt nem a tanulók fele választotta.

B: Ugyanannyian választották az irodalmat, mint az éneket. A diagram ezt nem tükrözi.
Az éneket a tanulóknak kevesebb mint egynegyede választotta.

9.35.

1 9	2 7	5	3 3	4 1	
5 9	5		6 9	2	0
	7 3	8 3	6	4	
9 3	2	3		10 8	11 1
2		12 2	13 4		2
14 4	15 5	2	9	16 2	5

9.36.

1 8	2 5	6		3 3	4 6
5 4	4		6 1	2	5
7 2	5	8 2	0		9
	9 5	7	1	10 3	5
11 5		12 6	2	5	
13 1	3	5		14 2	8

Hajdu tankönyv HGYM 2007. augusztus 2. – 19:13 (79. old.)

magyar
nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen