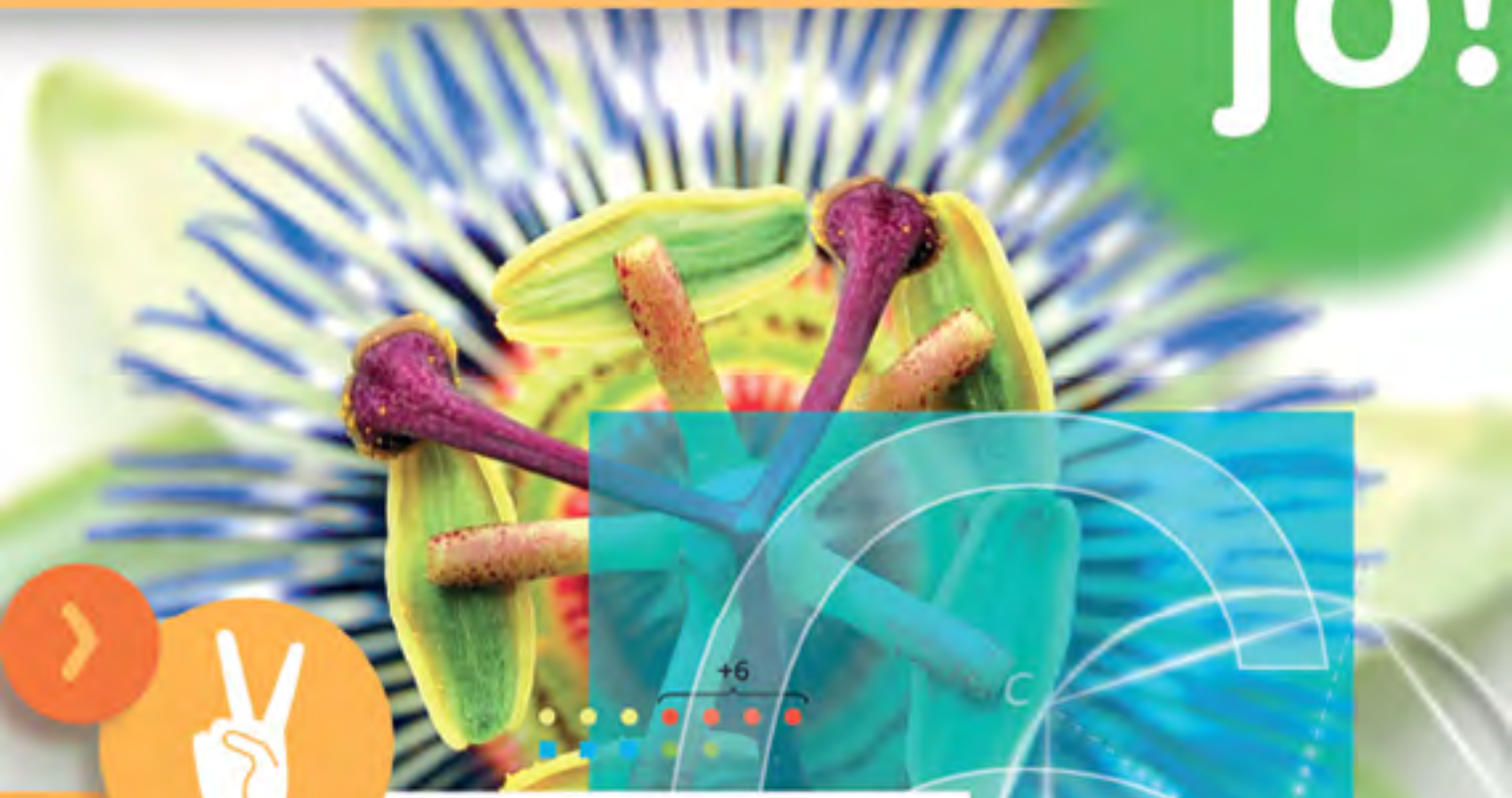
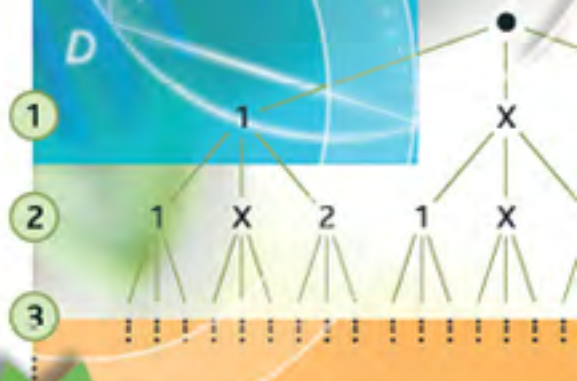
jó!



GONDOLKODNI JÓ!

MATEMATIKA 6.

HAJDU SÁNDOR
ANDRÁSI TIBORNÉ
CZEGLÉDY ISTVÁN
CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ
NOVÁK LÁSZLÓNÉ
ZANKÓ ISTVÁNNÉ



Kerettanterv 2012

OFI

A kiadvány 2019. 02. 15-én tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott
a TKV/115-11/2019. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet: Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára – 2.2.03. (Matematika),
2.3.1.1. (Emelt matematika – A variáció), 2.3.1.2. (Emelt matematika – B variáció),
5. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára – 5.2.04. (Matematika)
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
GYŐRFI LÁSZLÓNÉ, KEMPFNER ZSÓFIA

Alkotószerkesztő: DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az előző kiadásokat bírálták:
ELŐD ISTVÁNNÉ ny. felelős szerkesztő
DR. HETYEI GÁBOR tanszékvezető főiskolai tanár
KANÁSZ LÁSZLÓ ny. vezetőtanár, okl. villamosmérnök
KARÁDI KÁROLYNÉ ny. tanár, szaktanácsadó
KÖVES GABRIELLA főiskolai adjunktus
LAJOS JÓZSEFNÉ tanár, OPI-munkatárs
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár
DR. SÜMEGI LÁSZLÓ egyetemi adjunktus
TÜSKÉS GABRIELLA matematika szaktárgyi szakértő

Felelős szerkesztő: BOSZNAI GÁBOR

Szerkesztő: CSÍK ZOLTÁN

Borítóterv és tipográfia: H-MOLL GRAFIKA

Fotó és grafika: ANN LUNDIN

© dr. Andrási Tiborné, dr. Czeglédy István, dr. Czeglédy Istvánné, dr. Hajdu Sándor,
Novák Lászlóné, Zankó Istvánné, Eszterházy Károly Egyetem, 2019

ISBN 978-963-19-8146-9 (ISBN 978-963-16-4500-2)

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • E-mail: kiado@ofi.hu

Kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor • Raktári szám: NT-4198-8/UJ-K
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Knausz Valéria
Terjedelem: 33,48 (A/5) ív • Tömeg: 528 gramm • 5. átdolgozott kiadás, 2019
Nyomdai előkészítés: WeeP Bt.

Nyomta
Felelős vezető:

magyar
nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ 7

1. SZÁMOK ÉS MŰVELETEK 9

Számok írása, olvasása, ábrázolása 9
Hatványozás 12
Érdekes fejtörő feladatok 15
Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel 18
Mérés, mértékegységek 20
Gyakoroljuk a mértékegységekről tanultakat! 24
Kerekítés, pontos érték, közelítő érték 26
A mérés pontosságának jelzése 29
Ismerkedés a számelmélettel 30
Osztó, többszörös 30
Közös osztók, legnagyobb közös osztó 31
Közös többszörösök, legkisebb közös többszörös 32
Mit árulnak el a szám utolsó számjegyei? 33
Mit mutat meg a számjegyek összege 36
Prímszámok, összetett számok 36
Vegyes oszthatósági feladatok 39
Egész számok 43
Az egész számok értelmezése, összehasonlítása 43
Egész számok összeadása, kivonása 45
Egész számok szorzása egész számmal 49
Egész számok osztása egész számmal 52
Derékszögű koordináta-rendszer 54
Az egész számokról tanultak kiegészítése 55
Mit tanultunk a törtekről? 57
A törtek értelmezése 57
Egyszerűsítés, bővítés 60
Törtek összehasonlítása 62
Törtek összadása, kivonása 64
Törtek szorzása 67
Törtek szorzása természetes számmal 67
Természetes szám szorzása törttel 68
Tört szorzása törttel 70

Szorzás tizedestört alakú számmal ... 73
A reciprok fogalma ... 76
Törtek osztása ... 77
Törtek osztása természetes számmal ... 77
Osztás törttel ... 78
Osztás tizedestört alakú számmal ... 81
Ismerkedés a racionális számokkal ... 84
Gyakorló- és fejtörő feladatok ... 88
Tudáspróba ... 92

2. GEOMETRIAI VIZSGÁLATOK, SZERKESZTÉSEK ... 93
Eszközeink használata ... 93
Geometriai alapismeretek ... 95
Alakzatok kölcsönös helyzete, távolsága ... 98
A kör. A kör húrja, érintője ... 102
Szerkesztések ... 104
A szögekről tanultak kiegészítése ... 108
Ismerkedés a sokszögekkel ... 112
Háromszögek ... 115
Négyszögek ... 119
Gyakorló- és fejtörő feladatok ... 122
Tudáspróba ... 130

3. ÖSSZEFÜGGÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS ... 131
Grafikonok, táblázatok ... 131
Két szám aránya ... 133
Egyenes arányosság ... 135
Fordított arányosság ... 140
Százalékszámítás ... 146
A százalékérték kiszámítása ... 146
Kördiagramok ... 149
Az alap kiszámítása ... 150
A százalékláb kiszámítása ... 152
Gyakoroljuk a százalékszámítást ... 154
Összetett százalékszámítási feladatok ... 155
Arányos osztás ... 159
Valószínűségi kísérletek ... 161
Gyakorló- és fejtörő feladatok ... 164
Tudáspróba ... 166

4. TENGELYES TÜKRÖZÉS ... 167
Mit látunk a tükörben? ... 167
A tengelyes tükrözés tulajdonságai ... 169
A tükörkép megszerkesztése ... 173
Tengelyesen tükrös alakzatok ... 176
Tengelyesen tükrös háromszögek ... 180
Tengelyesen tükrös háromszög szerkesztése ... 182
Tengelyesen tükrös háromszög területe ... 185
Szabályos sokszögek ... 187
Tengelyesen tükrös négyszögek ... 189
A deltoid ... 190
A deltoid területe ... 192
A rombusz ... 194
A húrtrapéz ... 196
Szabályos testek ... 198
Gyakorló- és fejtörő feladatok ... 198
Tudáspróba ... 202

5. NYITOTT MONDATOK ... 203
Egyenletek, egyenlőtlenségek ... 203
A műveletek közti összefüggések alkalmazása ... 207
Az egyenlet két oldalának egyenlő változtatása ... 209
Az egyenlőtlenség két oldalának egyenlő változtatása ... 214
Szöveges feladatok megoldása egyenlettel ... 216
Gyakorlófeladatok ... 220
Tudáspróba ... 222

6. ÖSSZEFOGLALÓ ... 223
Mit tanultunk a halmazokról? ... 223
Számtan, algebra, arányosság ... 224
Mérés, geometria ... 231
Képességpróbák ... 235
Érdekes feladatok ... 243

7. KISLEXIKON ... 245

A Wikipédiáról származnak a következő fotók (a szám az oldalszámot, a betű az oldalon belüli sorrendet jelöli, a kép után a szerző, majd zárójelben a licenc típusa látható, ahol nincs, az szabad felhasználású kép.
Bővebben: http://commons.wikimedia.org/wiki/Commons/Copyright_tags): 9, 13 Booyabazooka (cc-by-sa 3.0), 18, 20b Stanislaw Szydo (cc-by-sa 3.0), 20c, 21 Armin Kübelbeck (cc-by-sa 3.0), 29 Dvortygirl (cc-by-sa 3.0), 47 Fizykaa (cc-by-sa 3.0), 78, 80 Nevit Dilmen (cc-by-sa 3.0), 89, 93a Gubbubu (cc-by-sa 3.0), 93b, 110 Frank Vincentz (cc-by-sa 3.0), 131, 138, 139 Craig Franklin (cc-by-sa 3.0), 177 Jon Zander (cc-by-sa 3.0), 203
Ezenkívül külön köszönet Mohácsi Flórának és Dippold Andrásnak a 20. oldalon látható vitorlásfotóért, valamint a Hotelinfo Kft.-nek a 157. oldalon található Gombóc Artúr-képért.

MÉRTÉKEGYSÉGEK

Hosszúságmérés: alapegysége a **méter** (jele: m).

A Párizson átmenő délkör hossza körülbelül 40 000 000 m = 40 000 km.

Tömegmérés: alapegysége a gramm (jele: g), az SI-ben a **kilogramm** (jele: kg).

1000 g = 1 kg, az 1 dm^3 tiszta 4 °C-os víz tömege.

Nagyobb tömeg mérésére használják a **tonnát** (jele: t). 1 t = 1000 kg.

A dekagrammot a legtöbb országban nem ismerik. Magyarországon a mindennapi életben a dkg rövidítést alkalmazzuk, de hivatalosan a dag rövidítés a szabványos.

Elvétve használják még a **mázsát** (jele q). 1 q = 100 kg. A mázsa Magyarországon nem szabványos mértékegység.

Űrtartalommérés: alapegysége a **liter** (jele: l).

1 l ≈ 1 dm^3 (nagyon kicsi az eltérés). 1000 l ≈ 1 m^3.

Az egység ezerszeresét **kilo**, százszorosát **hekto**, tízszeresét **deka**, tizedrészét **deci**, századrészét **centi**, ezredrészét **milli** **előtagok** segítségével fejezzük ki.

Az alapegység hányszorosa (mekkora része)	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Hosszúságmérés mértékegységei Jelölés	kilo-méter km			**méter** m	deci-méter dm	centi-méter cm	milli-méter mm
Tömegmérés mértékegységei Jelölés	**kilo-gramm** kg		deka-gramm dkg, dag	gramm g	deci-gramm dg	centi-gramm cg	milli-gramm mg
Űrtartalommérés mértékegységei Jelölés		hekto-liter hl		**liter** l	deci-liter dl	centi-liter cl	milli-liter ml

Időmérés mértékegységei:

óra (= hora; jele: h); 1 **nap** = 24 h;

perc (= minutum; jele: min); 1 h = 60 min;

másodperc (= secundum; jele: s); 1 min = 60 s.

Nagyobb időtartam mérésére használjuk az évet: 1 év ≈ 365 nap.

A Föld 1 nap alatt végez egy teljes fordulatot a saját tengelye körül, és 1 év (körülbelül 365 nap és 6 óra) alatt halad végig a Nap körüli pályáján.

ELŐSZÓ

KEDVES GYEREKEK!

Ezt a könyvet – hasonlóan az ötödikes könyvhöz – úgy állítottuk össze, hogy a korábbi ismereteitekre támaszkodva, egyre nehezebb feladatok megoldásával juthattok el az új ismeretekhez. Reméljük, hogy a több száz érdekes, gondolkodtató feladat megoldásával nemcsak a **logikus gondolkodásotok és a problémamegoldó képességetek** fejlődik, hanem meg is szeretitek a matematikát.

„A matematika érdekes és szép is: az emberi gondolat izgalmas és szép kalandja. A matematika szépsége nem valami járulékony dolog, hanem a matematikának a lényegéhez tartozik. A valódi igazság mindig szép, és a valódi szépség mindig igaz." (*Rényi Alfréd*)

„A matematika tudása kincs. Közkinccsé tenni azt jelenti, hogy mindenki képességei szerint merítsen a tudás kincsestárából. Aki többet merít, mert többre van igénye és képessége, azt nem mástól veszi el." (*Varga Tamás*)

Kék háttéren érdekes megjegyzéseket, történeti vonatkozásokat, illetve a történelem tantárgyhoz kapcsolódó ismereteket olvashatsz.

Figyeld meg!

Színes alapra nyomtattuk azokat az értelmezéseket, magyarázatokat, amelyeket nemcsak meg kell értened, hanem meg is kell tanulnod. A fontos **értelmezéseket, összefüggéseket** és **szabályokat** ezzel a színnel, az új **elnevezéseket, fogalmakat** vastag piros betűkkel emeltük ki.

A margón sokszor találsz olyan példákat, amelyek segítik az új ismeretek megértését.

1. példa

A kidolgozott mintapéldákat ilyen keretbe írtuk.

Ha a mintapéldák megoldását gondosan tanulmányozod, akkor sok segítséget kaphatsz a tananyag jobb megértéséhez, illetve a feladatok megoldásához.

A margón további magyarázatokat, szemléltető ábrákat is találhatsz.

FELADATOK

1 A legegyszerűbb alapozó feladatok sorszámát üres karikába szedtük.

5 A tanultak közvetlen alkalmazását szolgáló gyakorlófeladatok jele.

12 Az önálló ötletet kívánó fejtörő feladatokat csillag jelöli.

Az itt olvasható rávezető kérdések, magyarázatok segíthetik a feladatok helyes megoldását.

Figyelempróba

30

Ilyen színű hátérre nyomtattuk azokat a feladatokat, amelyek **célja az olvasási képességed fejlesztése**. Nem csak a matematika tanulása során fontos, hogy képes legyél **a szövegeket elemezni, helyesen értelmezni**. Ezeknek a feladatoknak a megoldása általában nem különleges ötleteket, hanem figyelmes, értelmező olvasást igényel.

Kísérletezz!

31

Fontos, hogy a tanultakat nemcsak a matematikaórákon, hanem **a mindennapi életben is képes legyél alkalmazni**. A zöld háttérre nyomtatott feladatok elsősorban ezt a képességedet bontakoztathatják ki.

Többet ésszel …



A legtöbb oldal alján érdekes, fejtörő feladatokat találsz. Ha ezeket meg tudod oldani, akkor jogosan mutathatod fel a győzelem jelét.

A könyv margóján szürke pontsor jelzi a mélyebb meggondolásokat igénylő **kiegészítő anyagrészeket**. Ezeknek az anyagrészeknek a többsége az emelt szintű képzésben részt vevők számára és a nyolcosztályos gimnáziumokban kötelező tananyag. Ezek a fejezetek kibővítik, elmélyíthetik a matematikai ismereteidet, fejleszthetik a problémameglátó és -megoldó képességedet. Ha kellően fel akarsz készülni a középiskolai tanulmányokra, akkor célszerű tanulmányoznod ezeket a fejezeteket, megoldanod az itt található feladatokat.

bővített szint

B7 A kiegészítő feladatok sorszáma **B** betűvel kezdődik.

A feladatgyűjteményekre a margón is felhívjuk a figyelmedet. Például:

Gyakorló
5.46–5.47.;

Feladatgyűjtemény
3.3.29–35.

A tankönyv minden olyan szükséges tananyagrészt tartalmaz, amely az átlagos matematikatudás eléréséhez elegendő. Ha ennél többre törekedsz, akkor további feladatgyűjteményekre is szükséged lehet.

Hajdu Sándor (szerk.): **Matematika 6. gyakorló**
A legfontosabb ismeretek átismétlésében, gyakorlásában segít.

Hajdu Sándor (szerk.): **Matematika 5–6. Feladatgyűjtemény**
Összetett feladatokat tartalmaz.

Hajdu Sándor (szerk.): **Matematika 6. Felmérő feladatsorok. Gondolkodni jó!**
A feladatsorok megoldásával ellenőrizheted a tudásod.

Hajdu Sándor (szerk.): **Matematika 6. tankönyv feladatainak megoldása**
Az 6. osztályos tankönyv feladatainak megoldását tartalmazza.

1. SZÁMOK ÉS MŰVELETEK



Ebben a fejezetben alaposan átismételjük, begyakoroljuk, majd jelentősen kibővítjük a számokról és a műveletekről korábban tanultakat. Ezeket az ismereteket alkalmazzuk mérések végzésében, mértékegységek átváltásában, szöveges feladatok megoldásában.

SZÁMOK ÍRÁSA, OLVASÁSA, ÁBRÁZOLÁSA

1. példa

Értelmezzük a következő számokat:

Európa a második legkisebb kontinens, területe:
tízmillió-ötszáznyolcezer négyzetkilométer.

A Föld térfogata:
egybillió-nyolcvanhárommilliárd-kétszázhétmillió-háromszázezer köbkilométer.

Írjuk **helyiérték-táblázatba** a számokat:

Tízbillió	Egybillió	Százmilliárd	Tízmilliárd	Egymilliárd	Százmillió	Tízmillió	Egymillió	Százezer	Tízezer	Egyezer	Száz	Tíz	Egy	Tized	Század	
						1	0	5	0	8	0	0	0			Alakiértékek
	1	0	8	3	2	0	7	3	0	0	0	0	0			

Helyiértékek

Összegalakok:

$10\,508\,000 = 1 \cdot 10\,000\,000 + 0 \cdot 1\,000\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 0 \cdot 10\,000 + 8 \cdot 1000$

$1\,083\,207\,300\,000 = 1 \cdot 1\,000\,000\,000\,000 + 0 \cdot 100\,000\,000\,000 +$
$+ 8 \cdot 10\,000\,000\,000 + 3 \cdot 1\,000\,000\,000 + 2 \cdot 100\,000\,000 + 0 \cdot 10\,000\,000 +$
$+ 7 \cdot 1\,000\,000 + 3 \cdot 100\,000$

A mindennapi életben egymilliónál nagyobb számokkal is találkozhatunk.

Ha a számokat betűvel írjuk, akkor kétezerig egybeírjuk, kétezren felül az egyesektől számított hármas csoportok szerint tagoljuk a számokat, és a csoportok közé kötőjelet teszünk.

A millió igen nagy szám. Egymillió szem búza megtölt egy zsákot.

Egymillió évvel ezelőtt még csak előemberek éltek a Földön.

Jelenleg Magyarországon körülbelül tízmillió, az Európai Unióban 495 millió, Kínában több mint egymilliárd ember él.

Figyeld meg!

Egymillió: $1\,000\,000 = 1000 \cdot 1000$

Egymilliárd: $1\,000\,000\,000 = 1000 \cdot 1\,000\,000$, azaz **ezermillió**

Egybillió: $1\,000\,000\,000\,000 = 1000 \cdot 1\,000\,000\,000$, azaz **ezermilliárd**

Ha leraknál hosszában egymás után egymillió darab 20 cm hosszú ceruzát, akkor milyen hosszú „vonalat" kapnál?

FELADATOK

◉ *Például:*
ötezer-huszonhat =
= 5026 =
= 5 · 1000 + 2 · 10 + 6 · 1

1 Írd le számjegyekkel a következő számokat, majd írd le összegalakban!

a) Huszonötezer-kétszázöt;
b) kétmillió-huszonkétezer-négyszáznyolc;
c) kétszázötezer-huszonöt;
d) huszonötezermillió-negyvenkettő

2 Elemezd a 460 046 795 002-t alaki- és helyiérték szerint!

a) Milyen számjegy áll az ezermilliós helyiértéken? Mennyi a tényleges értéke?
b) A nagyobb helyiértéken álló 6-os számjegynek mennyi a tényleges értéke?
c) A kisebb helyiértéken álló 4-es számjegy milyen értéket jelent?
d) Melyik helyiértéken áll a legnagyobb alakiértékű számjegy?

◉ *A számok helyesírásának szabályát a 9. oldalon, a margón olvashatod.*

3 *a)* Írd le a következő számokat helyiérték szerinti bontásban, összegalakban!

3 002 406; | 400 023 077; | 56 000 000 045

b) Írd le betűkkel az 1056; 987; 1998 számok nevét!
Milyen szabály szerint írjuk a 2000-nél nem nagyobb számok nevét?

c) Írd le betűkkel a következő számok nevét:

3060; | 2087; | 130 098 005

Milyen szabály szerint írjuk a 2000-nél nagyobb számok nevét?

4 Írd le a számokat számjegyekkel!

Tízmillió, | tízezer, | ezermillió (milliárd), | egy, | ezer, | százezer, | tízmilliárd, | tíz.

Rendezd ezeket a számokat növekvő sorrendbe!



2. példa

Az ábrán egy pontos mérleg kijelzője látható.
Hogyan olvasható ki, és mit jelent ez az érték?

A tízes számrendszerben a helyiértékek sorozatát az egynél kisebb helyiértékekre is folytathatjuk. Mit jelent a tízes számrendszerben a 65,432?

Alakiértékek:	6	5	4	3	2
Helyiértékek:	tíz	egy	tized	század	ezred
Tényleges értékek:	hatvan	öt	négy tized	három század	két ezred

Összegalakban: $6 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{1000}$

Kiolvasva: hatvanöt egész négyszázharminckét ezred.

◉ *A becsléssel kapott eredmény hány perc, hány óra, hány nap?*

Mérd meg! Hány másodperc alatt számlálsz el egyesével?

31-től 40-ig ☐ s; 231-től 240-ig ☐ s; 3231-től 3240-ig ☐ s;
23 231-től 23 240-ig ☐ s; 231 231-től 231 240-ig ☐ s.

Becsüld meg, mennyi idő alatt számlálnál el egyesével 1-től egymillióig!

FELADATOK

5 Írd le betűkkel és összegalakban a következő számokat:

a) 95,64; *b)* 507,692; *c)* 6040,015; *d)* 1500,105

6 *a)* Írd föl tizedestört alakban a következő számokat:

$\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10\,000}$; $\frac{1}{100\,000}$

b) Írd fel törtalakban, majd rendezd a számokat növekvő sorrendbe:

0,01; 0,0001; 0,1; 0,000 01; 0,000 001; 0,001; 1;

c) Írd le számjegyekkel a következő számokat:

u = kétszázhétmillió-tizenöt egész ötvenhét század;

v = ezernyolcszáznegyvennyolc egész negyvennyolc ezred;

x = nulla egész száznegyvenötezer-kétszáztizenegy milliomod

d) Írd fel tizedestört alakban a következő számokat:

$\frac{23}{10}$; $\frac{213}{10}$; $\frac{213}{100}$; $\frac{456}{10\,000}$; $\frac{231\,456}{10\,000}$

e) Írd fel a számokat törtalakban, majd rendezd őket csökkenő sorrendbe:

0,09; 0,0321; 0,2; 0,000 987; 0,000 789; 2,001; 2,01

◉ *A törtrészben is figyelj a számjegyek helyiértékére!*

◉ *Például:*

$\frac{5148}{100} = \frac{5100}{100} + \frac{48}{100} = 51\frac{48}{100} = 51,48$

7 Írd le számjegyekkel!

a) 5 ezres + 3 tízes + 4 egyes + 5 tized + 3 század;

b) 7 ezres + 3 százas + 5 egyes + 6 tized + 3 ezred;

c) 3 tízezres + 2 tízes + 3 század + 5 ezred

Gyakorló
1.10–1.16.,
4.01–4.03;
Feladatgyűjtemény
1.1.27., 1.1.38–48.

8 Elemezd a 3985,607-et alaki- és helyiérték szerint!

Mely helyiértéken állnak az egyes számjegyek?

Mennyi az alakiértékük, illetve a tényleges értékük?

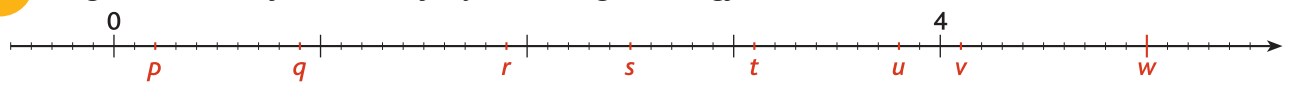
9 Sorold fel a következő számok

a) egyes szomszédait; *b)* tized szomszédait; *c)* század szomszédait!

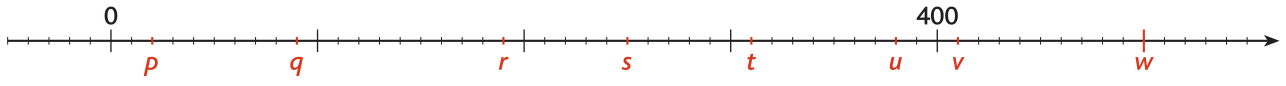
u = 46,573; *v* = 29,608; *w* = 15,004; *x* = 9,995

10 Megközelítően mely számok helyét jelöltük meg a számegyeneseken?

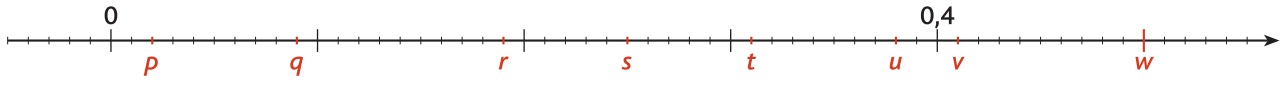
a)



b)



c)



Tegyél a 4 és az 5 közé egy matematikai jelet úgy, hogy egy 4 és 5 közé eső nem egész számot kapj!

HATVÁNYOZÁS



*			
*	*		
*	*	*	
*	*	*	*

Sok olyan feladat van, amelynek a megoldásához egy számot ismételten önmagával kell szoroznunk.

1. példa

Hányféleképpen állítható be egy négyjegyű számkódos zár?

Az első számjegyet 10-féleképpen választhatjuk ki.

Bárhogyan választjuk is ki az első számjegyet, a második számjegyet ismét 10-féleképpen választhatjuk ki, ezért az első két számjegyet $(10 \cdot 10 =)$ 100-féleképpen.

A harmadik számjegyet is 10-féleképpen választhatjuk ki, vagyis az első három számjegy $(10 \cdot 10 \cdot 10 =)$ 1000-féleképpen állítható be.

Az előzőektől függetlenül a negyedik számjegy is 10-féleképpen választható ki, tehát a négyjegyű kód $(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =)$ 10 000-féleképpen állítható be.

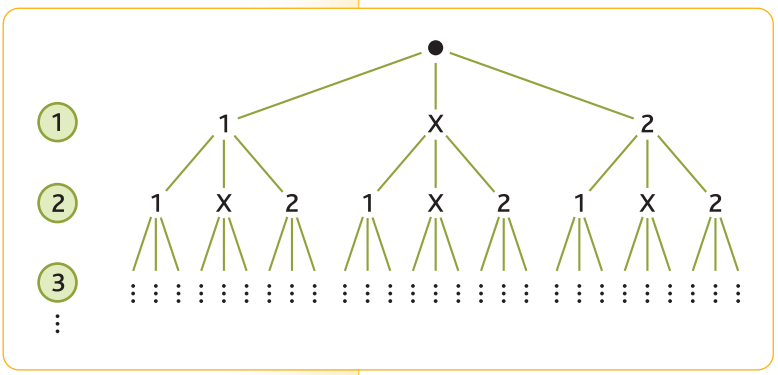
ISKOLATOTÓ			
5.a.–5.b.	1	X	2
6.a.–6.b.	1	X	2
5.c.–6.c.	1	X	2
7.a.–7.b.	1	X	2
8.a.–8.b.	1	X	2
7.c.–8.c.	1	X	2

2. példa

Az iskolai sportnapon 6 mérkőzést játszanak.

Az eredményekre ezzel a totószelvénnyel lehet fogadni. Ha arra tippelünk, hogy az első csapat győz, akkor az 1-et karikázzuk be, ha a második csapat győzelmére fogadunk, akkor a 2-t, ha úgy gondoljuk, hogy döntetlen lesz a mérkőzés, akkor az X-et. Hányféleképpen tölthetjük ki a szelvényt?

Az első sorban vagy az 1-et, vagy az X-et, vagy a 2-t karikázzuk be.



1 sort 3-féleképp tölthetünk ki.

Bárhogy is töltjük ki az első sort, a második sorban is vagy az 1-et, vagy az X-et, vagy a 2-t karikázhatjuk be.

Ezért 2 sort $(3 \cdot 3 =)$ 9-féleképp tölthetünk ki.

3 sort $(3 \cdot 3 \cdot 3 =)$ 27-féleképpen,

⋮

6 sort $(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =)$ 729-féleképp tölthetünk ki.

Régi magyar találós kérdés.

4000 évvel ezelőtti egyiptomi találós kérdés.

a) Jankó elment Piripócsra. Találkozott három tóttal. Három tótnak három zsákja. Három zsákban három macska. Hányan mentek Piripócsra?

b) Van 7 ház. Minden házban 7 macska. Minden macska megfogott 7 egeret. Minden egér gyomrában 7 szem búza volt. Minden szem búzából 7 búzakalász termett volna. Minden kalászban 7 szem búza lett volna.

Hány búzaszem termett volna összesen azokból a búzaszemekből, amelyek az egerek gyomrában voltak?

Figyeld meg!

Ha egy számot például **6-szor veszünk tényezőként, akkor a szám hatodik hatványáról beszélünk.**

Alap, Kitevő

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$

Szorzatalak — Hatványalak — Hatványérték

Megállapodás szerint:
$3 = 3^1$ (3 az elsőn)
$3 \cdot 3 = 3^2$ (3 a másodikon vagy 3 a négyzeten)
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ (3 a harmadikon vagy 3 a köbön)
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ (3 a negyediken) ...

Megállapodás szerint: $2^0 = 1$, $3^0 = 1$, $4^0 = 1$, ..., $10^0 = 1$ stb.

Megállapodás szerint: A 0^0 hatványt nem értelmezzük.

A legtöbb országban a **természetes számok helyiértékeit a tízes számrendszerben** a következő rendszer szerint nevezik el:

10^0	egy	10^6	**millió**	10^{12}	**billió**	10^{18}	**trillió**
10^1	tíz	10^7	tízmillió	10^{13}	tízbillió	10^{19}	tíztrillió
10^2	száz	10^8	százmillió	10^{14}	százbillió	10^{20}	száztrillió
10^3	ezer	10^9	ezermillió	10^{15}	ezerbillió	10^{21}	ezertrillió
10^4	tízezer	10^{10}	tízezermillió	10^{16}	tízezerbillió	10^{22}	tízezertrillió
10^5	százezer	10^{11}	százezermillió	10^{17}	százezerbillió	10^{23}	százezertrillió

Figyeld meg!

A **billió** elnevezésben a **bi-** előtag jelentése: **2**

Ugyanis egybillió = $1\,000\,000^2$

A **trillió** elnevezésben a **tri-** jelentése: **3**

egytrillió = $1\,000\,000^3$

A mindennapi életben az ezermilliót **milliárdnak**, az ezerbilliót ritkán **billiárdnak** is nevezik.

Vannak országok, ahol például a billió és a trillió mást jelent, mint nálunk.

FELADATOK

B1

a) Írd föl hatványalakban!

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$; $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$; 5; $0 \cdot 0 \cdot 0$; $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23$

◉ *Például:* $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$

b) Írd föl hatványalakban!

$10 \cdot 10 \cdot 10$; 10; $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

c) Írd föl szorzatalakban, majd számítsd ki a hatvány értékét!

10^5; 10^1; 10^4; 10^2; 10^6; 1^9; 2^4; 4^2; 2^8; 8^2

◉ *Például:* $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

d) Írd föl 10 hatványaként!

tíz; száz; millió; százezer; tízezer

◉ *Például:* ezer = $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

B2 Melyik szám nagyobb?

a) 1^3 vagy 1^6; *b)* 2^3 vagy 3^2; *c)* 2^5 vagy 5^2; *d)* 4^5 vagy 5^4

A Rubik-kockán összesen **negyvenháromtrillió-kétszázötvenkettőbilliárd-hárombillió-kettőszázhetvennégymilliárd-négyszáznyolcvankilencmillió-nyolcsszázötvenhatezer** eltérő állás hozható létre.



Hogyan írjuk ezt számjegyekkel?

A: 430 252 003 274 489 856 000 **B:** 43 252 300 274 489 856 000

C: 43 252 003 274 489 856 000 **D:** 43 252 3 274 489 856 000

◉ *Karikázd be a helyes válasz betűjelét!*

bővített szint

B3 *a)* Írd föl hatványalakban, majd számítsd ki annak a négyzetnek a területét, amelynek egy oldala:
1 egység; | 4 egység; | 25 egység; | 100 egység; | *a* egység!

b) Írd föl hatványalakban, majd számítsd ki annak a kockának a térfogatát, amelynek egy éle: 1 egység; | 4 egység; | 25 egység; | 100 egység; | *a* egység!

B4 Melyik szám nagyobb? Mennyivel?

a) 10^3 vagy 10^4; *b)* 10 000 vagy 100^2; *c)* 10^5 vagy 1 000 000;
d) 10^6 vagy 10^2; *e)* 1000^2 vagy 10^5; *f)* 10^7 vagy 1 000 000

B5 Melyik szám nagyobb? A nagyobbik hányszorosa a másiknak?

a) 100 000 vagy 10^5; *b)* 1 000 000 vagy 100^3; *c)* 10^4 vagy 100^1;
d) tízezer vagy 10^1; *e)* 10^6 vagy ezer; *f)* 100^3 vagy 10^7

B6 Írd föl a tényezőket és a szorzatot is 10 hatványaként!

Például: $100 \cdot 1000 = 100\,000 = 10^5$
másrészt $100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$
ezért $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$;
Hasonlóan: $100^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000 = 10^6$
másrészt $100^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10)$
ezért $10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^6$

a) $10\,000 \cdot 10$; *b)* 100^4; *c)* $100 \cdot 100$;
d) $10\,000^3$; *e)* $1000 \cdot 10\,000$; *f)* $(\text{egymillió})^2$;
g) egymillió · tízezer; *h)* $100^2 \cdot 1000^3 \cdot 10$

Gyakorló
1.32–1.39.;
Feladatgyűjtemény
1.2.50–53., 1.2.55.

B7 Írd föl az osztandót, az osztót és a hányadost is tíz hatványainak segítségével!

Például: $10\,000 : 100 = 100 = 10^2$;
másrészt $10\,000 : 100 = 10^4 : 10^2$;
ezért $10^4 : 10^2 = 10^2$, másképp írva: $\frac{10^4}{10^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}{\cancel{10} \cdot \cancel{10}} = 10 \cdot 10 = 10^2$

a) 100 000 : 100; *b)* 100 : 1000; *c)* 1 000 000 : 1000
d) 100 : 100 000; *e)* 10 000 : 10 000; *f)* $\frac{1}{10} : 1000$

B8 Számítsd ki a műveletek eredményét!

a) $3{,}8 \cdot 10^3$; *b)* $4{,}6 \cdot 10^5$; *c)* $41{,}3 \cdot 10^2$;
d) 3,608 : 10; *e)* $7{,}015 : 10^2$; *f)* 0,725 : 10;
g) $0{,}000\,75 \cdot 1000$; *h)* $5{,}6 \cdot 10^4 \cdot 7 : 10^2$; *i)* $6{,}9 \cdot 10^5 : (8 \cdot 10^2)$

◉ *Például:*
$5{,}7 \cdot 10^3 = 5{,}7 \cdot 1000 =$
$= (5 + 0{,}7) \cdot 1000 =$
$= 5000 + 700 = 5700$



Két különböző színű dobókockával dobunk. Hányféle kimenetele lehet a dobásoknak?

◗ bővített szint

ÉRDEKES FEJTÖRŐ FELADATOK

B9 *a)* A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány háromjegyű szám állítható elő, ha egy-egy számban egy számjegy legfeljebb egyszer fordulhat elő?

b) Mennyi az így előállított legnagyobb és legkisebb szám különbsége?

c) Hány olyan négyjegyű szám állítható elő az előző számjegyekből, amely százas helyiértékű számjegyének alakiértéke 5, és minden számjegy többször is előfordulhat a számban?

B10 *a)* Egy ingaóra ütéssel jelzi a fél és az egész órákat, máskor nem üt. A fél órákat egy, az egész órákat annyi ütés jelzi, ahány órát mutat az óra.

Mikor üt az óra háromszor egyet egymás után?

b) Kukutyin és Piripócs 12 km-re vannak egymástól. Kukutyinból egy gyalogos, Piripócsról egy kerékpáros indul el egyszerre a másik falu felé. A kerékpáros 3-szor olyan gyorsan halad, mint a gyalogos. Ha a kerékpáros 12 km-t tesz meg óránként, akkor mennyi idő múlva találkoznak?

Amikor találkoznak, akkor melyikük van messzebb Piripócstól?

c) Egy legelőn bárányok és libák vannak. Jancsi megszámlálta, hogy összesen 100 lábuk és 30 fejük van. Hány bárány és hány liba van a legelőn?

d) Egy üveg dugóval együtt 29 Ft-ba kerül. Az üveg 25 Ft-tal drágább, mint a dugó. Mennyibe kerül az üveg?

e) Egy raktárból 21 egyenlő nagyságú tartályt kell elszállítani 3 tehergépkocsival. A tartályok közül 7 tele van, 7 üres, 7 pedig félig van. Hogyan rakhatók föl a tartályok a 3 kocsira úgy, hogy mindegyikre ugyanannyi tömeg jusson? (A tartályok tartalmát nem lehet átönteni.)



B11 Egy folyóvíz partjára 12 katona érkezett. Át akartak kelni a folyón, de a közelben nem volt híd. Találkoztak két fiúval, akiknek volt egy kis csónakjuk. A csónak vagy egy katonát bírt el, vagy két fiút, de egy katonát és egy fiút már nem. Hogyan kelhettek át ennek a csónaknak a segítségével?

Többet ésszel ...

a) Egy kétjegyű szám első számjegye kétszerese a másodiknak. Hány ilyen szám van?

b) Egy 190 oldalas könyv első kettő és az utolsó oldalát nem számozták. Hányszor írták le a 0 számjegyet?

c) Autóbuszon az 5 4 2 1 2 7 számú jegyet kaptuk. A számjegyek közé írj műveleti jeleket és zárójelet úgy, hogy 100 legyen az eredmény!

Növeld a 666-ot másfélszeresére úgy, hogy semmilyen számtani műveletet ne végezz vele!

Tréfás feladat!

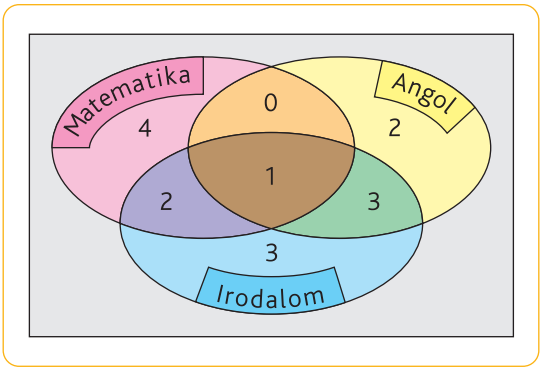
Huba gyufaszálból két igaz állítást rakott ki az asztalra:



Vajon hogyan fejezi be ezt a kirakást úgy, hogy ez is igaz legyen?



Rajzolj halmazábrát!



B12 *a)* Egy kiránduláson 29 tanuló közül 2 gyerek nem játszott, 14-en labdáztak, 16-an kergetőztek. Hány olyan tanuló volt, aki labdázott és kergetőzött is? Hány olyan tanuló volt, aki labdázott, de nem kergetőzött?

b) Az egyik héten az osztály matematikából, angolból és magyar irodalomból írt dolgozatot. A halmazábrán a dolgozatot jelesen megíró tanulók számát tüntetjük föl.

Hány tanuló írt jeles dolgozatot az egyes tantárgyakból?

Hány tanulónak lett pontosan egy dolgozata jeles?

Hány tanuló írt matematikából jeles dolgozatot, de angolból nem?

Hány dolgozatra írtak jeles osztályzatot?

c) Egy kiránduló csoport minden tagja gyűjtött terméseket a kiránduláson. Tízen szedtek gesztenyét, nyolcan makkot, hatan csipkebogyót. Gesztenyét és makkot hatan szedtek, gesztenyét és csipkebogyót négyen, makkot és csipkebogyót hárman. Hány tagja lehetett a csoportnak?

B13 *a)* Hányféleképp olvasható le az ábrákról a MATEK, illetve a HATODIKOS szó?

M A T E K
A T E K
T E K
E K
K

H A T O D I K O S
A T O D I K O S
T O D I K O S
O D I K O S
D I K O S
I K O S
K O S
O S
S

b) Rendezd el egy-egy hárombetűs, négybetűs, hatbetűs stb. szó betűit ezekhez az ábrákhoz hasonlóan!

Az így elkészített ábrákról hányféleképpen olvashatók le az egyes szavak?

B14 *a)* A hatodikosok kieséses rendszerben megrendezett asztalitenisz-bajnokságán 16-an indulnak, tehát az első fordulóban 8 mérkőzést, a másodikban 4-et stb. játszanak.

Az első két fordulóra totószelvényt bocsátanak ki. Hányféleképpen tölthető ki az első, illetve a második forduló szelvénye? (Az asztaliteniszben nincs döntetlen.)

b) A kieséses formában megrendezett iskolai asztalitenisz-bajnokságon 129-en indulnak. Ha egy fordulóban páratlan számú játékos van, akkor egy játékos sorsolás alapján jut tovább, a többiek megmérkőznek, és csak a győztes jut a következő fordulóba, míg végül a döntő győztese lesz a bajnok. Minden mérkőzés eredményét egy táblázatban rögzítik.

Hányadik sorba írják a döntő eredményét?

Hány sor telt volna be a füzetben, ha 2, 3, 4, 5, 8, 9 , illetve 137 tanuló indult volna?

Gyakorló
1.01–1.09.;
Feladatgyűjtemény
1.1.14–48.



Figyelempróba

Peti édesapjának 5 fia van. Életkoruk szerint rendre:

1. Albi, 2. Boldi, 3. ____ 4. Dani; 5. Elek

Az alábbiak közül melyik betűvel kezdődik a harmadik fiú neve?

A *C* *G* *L* *P* *S* *X*

bővített szint

1. példa

Klári arra gondol, hogy a nyaralásra labdát is visz magával. 4 labdája van. Hányféleképp választhat ki valahányat a labdái közül?

Ha egy halmaz elemei közül valamennyit kiválasztunk, akkor a halmaz egy részhalmazát kapjuk. Magát a halmazt és az üres halmazt is a halmaz részhalmazai közé soroljuk.



1. megoldás

Meg kell állapítanunk, hogy egy négyelemű halmaznak hány részhalmaza van.

A négy labdát jelölje: *a, b, c, d*

Klári egyféleképp választhatja ki mind a négy labdát: {*a, b, c, d*}

Három labdát négyféleképp választhat ki, hiszen vagy a *d*-t, vagy a *c*-t, vagy a *b*-t, vagy az *a*-t hagyja ki:

{*a, b, c*}; {*a, b, d*}; {*a, c, d*}; {*b, c, d*}

Két labdát hatféleképp választhat ki:

{*a, b*}; {*a, c*}; {*a, d*}; {*b, c,*}; {*b, d*}; {*c, d*}

Egy labda kiválasztására négy lehetősége van:

{*a*}; {*b*}; {*c*}; {*d*}

Egy lehetőség az is, hogy egy labdát sem visz magával.

Végeredményben 16-féleképpen dönthet: $1+4+6+4+1=16$

2. megoldás

Hogyan csomagolhat Klári?

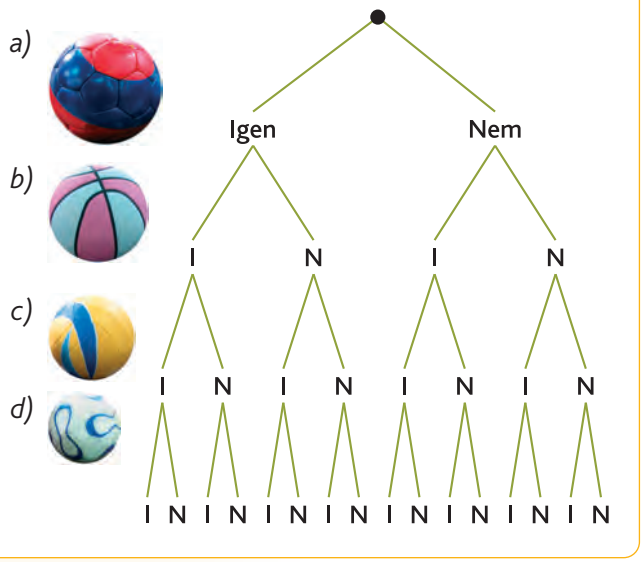
Kézbeveszi az *a* labdát. Vagy kiválasztja, vagy sem. 2-féle lehetőség.

Ezután a *b* labdát vagy kiválasztja, vagy sem. Az első két labdáról $(2\cdot2=)$ 4-féleképpen dönthet.

Hasonlóan az első három labdáról $(2\cdot2\cdot2=)$ 8-féleképpen,

a négy labdáról $(2\cdot2\cdot2\cdot2=)$ 16-féleképpen dönthet.

A négyelemű halmaznak $(2\cdot2\cdot2\cdot2=)$ 16 részhalmaza van.



Hókusz Pókusz süvegén bronz, ezüst és arany csillagok vannak. Négy kivétellel mind bronz, négy kivétellel mind ezüst és négy kivétellel mind arany. Hány csillag van Hókusz Pókusz mágus süvegén?

Egy szállodaláncnak 8 szállodája van. Minden szállodának 8 emelete, minden emeleten 8 szobával. A szállodák közül egyet teljesen, egy másiknak egy teljes emeletét, egy harmadiknak egy szobáját foglalta le a Teve Travel utazási iroda. Hány nem Teve Traveles szobája maradt a szállodaláncnak?

SZORZÁS, OSZTÁS 10-ZEL, 100-ZAL, 1000-REL ...

1. példa

Írjuk be a helyiérték-táblázatba a 45; a 0,057 és az 1,36 10-szeresét, 100-szorosát, 1000-szeresét!

Tízezer	Egyezer	Száz	Tíz	Egy	Tized	Század	Ezred
			4	5			
		4	5	0			
	4	5	0	0			
4	5	0	0	0			

$1 \cdot 45 = 45$
$10 \cdot 45 = 450$
$100 \cdot 45 = 4500$
$1000 \cdot 45 = 45000$

				0	0	5	7
				0	5	7	
				5	7		
			5	7			

$1 \cdot 0{,}057 = 0{,}057$
$10 \cdot 0{,}057 = 0{,}57$
$100 \cdot 0{,}057 = 5{,}7$
$1000 \cdot 0{,}057 = 57$

				1	3	6	
			1	3	6		
		1	3	6			
	1	3	6	0			

$1 \cdot 1{,}36 = 1{,}36$
$10 \cdot 1{,}36 = 13{,}6$
$100 \cdot 1{,}36 = 136$
$1000 \cdot 1{,}36 = 1360$

Emlékeztető

Ha 10-zel szorzunk egy számot, akkor a szorzandó minden számjegye 1-gyel nagyobb helyiértékű helyre kerül a szorzatban.

Ha 100-zal szorzunk egy számot, akkor a szorzandó minden számjegye 2-vel nagyobb helyiértékű helyre kerül a szorzatban.

Ha 1000-rel szorzunk egy számot, akkor a szorzandó minden számjegye 3-mal nagyobb helyiértékű helyre kerül a szorzatban.

Ha 10 000-rel szorzunk egy számot, akkor a szorzandó minden számjegye ...

Fejezd be önállóan a szabályt!

FELADATOK



11 Mennyit ér

a) 10 db kéteurós, 100 db kéteurós, 1000 db kéteurós;

b) 10 db öteurós, 10 db ötveneurós, 10 db ötszázeurós?

12 A következő sorozatban minden elem tizedrésze a közvetlenül utána állónak. Írd fel a sorozat első öt elemét!

a) 6; 60; ☐; ☐; ☐

b) 0,0006; ☐; ☐; ☐; ☐

13 Számítsd ki a szorzatokat!

a) $53{,}5 \cdot 100$; *b)* $0{,}053 \cdot 1000$; *c)* $2{,}48 \cdot 100$; *d)* $0{,}8 \cdot 10\,000$

Két természetes szám összege 968. Az egyik szám 0-ra végződik. Elhagyva ezt a 0-t, éppen a másik tagot kapjuk. Melyik ez a két szám?

2. példa

Írjuk be a helyiérték-táblázatba a 62 000 és a 32,5 számokat, illetve e számok $\frac{1}{10}$ részét, $\frac{1}{100}$ részét, $\frac{1}{1000}$ részét!

Emlékeztető

Ha 10-zel osztunk egy számot, akkor az osztandó minden számjegye 1-gyel kisebb helyiértékű helyre kerül a hányadosban.

Ha 100-zal osztunk egy számot, akkor az osztandó minden számjegye 2-vel kisebb helyiértékű helyre kerül a hányadosban.

Ha 1000-rel osztunk egy számot, akkor az osztandó minden számjegye ...

Fejezd be önállóan a szabályt!

62 000 : 1 = 62 000
62 000 : 10 = 6 200
62 000 : 100 = 620
62 000 : 1000 = 62

32,5 : 1 = 32,5
32,5 : 10 = 3,25
32,5 : 100 = 0,325
32,5 : 1000 = 0,0325

Tízezer	Egyezer	Száz	Tíz	Egy	Tized	Század	Ezred	Tízezred
6	2	0	0	0				
	6	2	0	0				
		6	2	0				
			6	2				

				3	2	5		
					3	2	5	
					0	3	2	5
					0	0	3	2	5

FELADATOK

14 *a)* Hány méter a 20 000 méter hosszú út
egy tized része; egy század része; egy ezred része?

b) Hány kilogramm a 360 kg liszt
egy tized része; egy század része; egy ezred része?

15 A következő sorozatban minden elem tizedrésze a közvetlenül előtte állónak. Írd fel a sorozat első öt elemét!

a) 52 000; ____ ; ____ ; ____ ; ____

b) 4,9; ____ ; ____ ; ____ ; ____

16 Számítsd ki a hányadosokat!

a) 58,6 : 10; *b)* 2,38 : 100; *c)* 25,16 : 1000; *d)* 2800 : 1000

17 Egy sorozatban minden elem tízszerese a közvetlenül előtte állónak. A sorozat hatodik eleme 1000. Írd fel a sorozat első tizenkét elemét! Mennyi a második és az ötödik elem szorzata?

Melyik két elem szorzata 1? Keress több megoldást!

Gondoltam egy számra. Elvettem belőle 222-t. A kapott eredményt osztottam 1000-rel. 22 lett az eredmény. Melyik számra gondoltam?

MÉRÉS, MÉRTÉKEGYSÉGEK



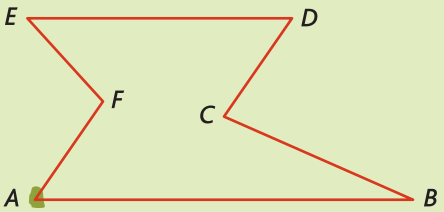
Mérj és számolj!

HOSSZÚSÁGMÉRÉS

Emlékeztető

1 mm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 cm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 dm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 m $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ 1 km

18



Az ábra egy vitorlás útvonalát szemlélteti, amely az *A*-val jelzett szigetről indult, és oda is tért vissza. Mekkora utat tett meg a vitorlás, ha a valóságban minden 10 000-szer akkora, mint a térképen?

Gyakorló
1.40., 4.16–4.22., 4.42–4.48., 7.01–7.13., 7.18–7.20., 7.23–7.25.;
Feladatgyűjtemény
6.1.06–16., 6.1.21–28.

19 Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket!

a) 1 m = ☐ cm = 10 ☐ = ☐ mm

b) 2,56 m = ☐ mm = 25,6 ☐ = 256 ☐

c) 36,6 cm = ☐ mm = ☐ dm = ☐ m

d) 0,48 km = 4800 ☐ = ☐ m = ☐ mm

TÖMEGMÉRÉS



Emlékeztető

1 mg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 cg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 dg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 g $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ 1 kg $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ 1 t

Magyarországon használjuk a **dekagrammot**. 1 kg = 100 **dkg** (dag).
Sokszor használják még a **mázsát** is (jele: **q**). 1 q = 100 kg.

A dekagramm hivatalos rövidítése: **dag**. *A mindennapi életben a* **dkg** *rövidítést használjuk.*

20 Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket!

a) 1 kg = ☐ dkg = ☐ g = 1 000 000 ☐

b) 4,6 kg = ☐ dkg = ☐ g = 46 000 ☐

c) 500 kg = ☐ t = ☐ dkg = ☐ g



Egy 15 cm hosszú vakond percenként átlagosan 3 m utat tesz meg a járataiban. Hány másodperc telik el addig, amíg egy 15 m hosszú járaton végighalad?

A: 150 másodperc; **B:** 300 másodperc; **C:** 303 másodperc

ŰRTARTALOMMÉRÉS



Emlékeztető

1 ml $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 cl $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 dl $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ 1 l $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ 1 hl (hektoliter)

21 Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket!

a) 1 l = ☐ dl = 100 ☐ = 1000 ☐

b) 3,185 l = ☐ dl = 318,5 ☐ = ☐ ml

c) 4,5 hl = ☐ l = ☐ dl

d) ☐ hl = 94,65 l = 9465 ☐ = ☐ dl

IDŐMÉRÉS

Emlékeztető

1 év = 365 nap (szökőévben 366 nap, közelítő számításokban 360 nap)
1 év = 12 hónap = 52 hét (+ 1 vagy 2 nap)
1 hét = 7 nap
1 nap = 24 óra (az óra jele: h, a latin hora szó kezdőbetűje)
1 óra = 60 perc (a perc jele: min, a latin minutum szóból)
1 perc = 60 másodperc (a másodperc jele: s, a secundum latin szóból)

22 *a)* Hány óra egy hét, a szeptember hónap, egy szökőév?

b) Hány perc egy nap?

c) Hány másodperc telik el délelőtt 9 órától este 7 óráig?

Gyakorló
7.27–7.30.;
Feladatgyűjtemény
6.1.29–33.

23 Egy autó 1 s (másodperc) alatt 20 m-t halad egyenletes mozgással.

a) Mekkora utat tesz meg 2 s, 3 s, 1 min (perc) alatt ugyanilyen sebességgel?

b) Ugyanekkora sebességgel haladva mekkora utat tesz meg 2 h (óra) alatt?

24 A hang a levegőben 1 s alatt 340 m távolságra jut el. Milyen távol van a zivatarfelhő, ha a mennydörgést a villámlás után fél perc múlva halljuk?

25 *a)* **A Budapesten, az Ötvenhatosok terén működött „Időkerék” a világ egyik legnagyobb homokórája. Átmérője 8 m. Vörös gránitból, rozsdamentes acélból és golyóálló üvegből készült.**

A homokórán 5,4 dkg homok 3 perc alatt pereg le. Mennyi homok pereg le másodpercenként?

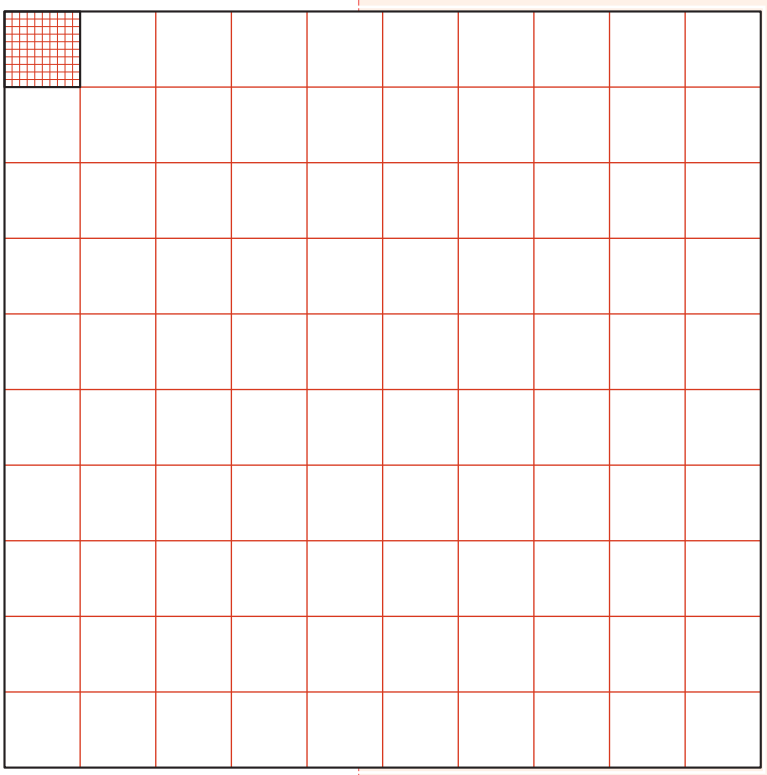
b) Egy tenyészetben 8 órakor 1 mg élesztőgomba van. Az élesztőgomba tömege óránként a tízszeresére nő. Tíz óra múlva mennyi élesztőgomba lesz a tenyészetben?



TERÜLETMÉRÉS, TÉGLATEST FELSZÍNE

Emlékeztető

A területmérés mértékegységei (az egységnyi négyzetek területe):



$1\ mm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ cm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ dm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ m^2$

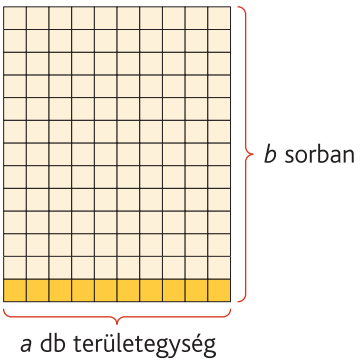
$1\ m^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ a \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ ha \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} 1\ km^2$

A 10 m oldalú négyzet területe **1 ár**; jele: **1 a**
Az árt Magyarországon nem használjuk.

A 100 m oldalú négyzet területe **1 hektár**; jele: **1 ha**

A téglalap területe: $T = a \cdot b$

Az a és b a két szomszédos oldal hossza.



26 Az előző ábrák segítségével magyarázd meg a hosszúság-mértékegységek és a terület-mértékegységek váltószáma közti összefüggést!

Írd be a hiányzó mérőszámokat!

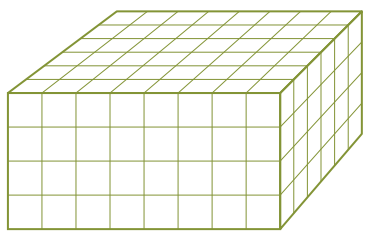
a) 5,38 m^2 = ☐ dm^2 = ☐ cm^2 = ☐ mm^2

b) ☐ km^2 = 63,1 ha = ☐ a = ☐ m^2

Gyakorló
7.34–7.41

27 Számítsd ki a téglalap kerületét, illetve területét, ha szomszédos oldalai:

a) 100 cm, 55,4 cm; *b)* 0,75 km, 500 m; *c)* 1000 dm, 48,56 dm



28 Mennyi az ábrán látható téglatest felszíne?
Válassz egységet! Vázold fel a téglatest hálóját!

29 Mennyi a téglatest felszíne, ha egy csúcsba futó éleinek hossza:

a) 25 mm, 40 mm, 100 mm; *b)* 20 cm, 4,5 dm, 1 dm?

TÉRFOGATMÉRÉS

Emlékeztető

A térfogatmérés mértékegységei (az egységnyi kockák térfogata):

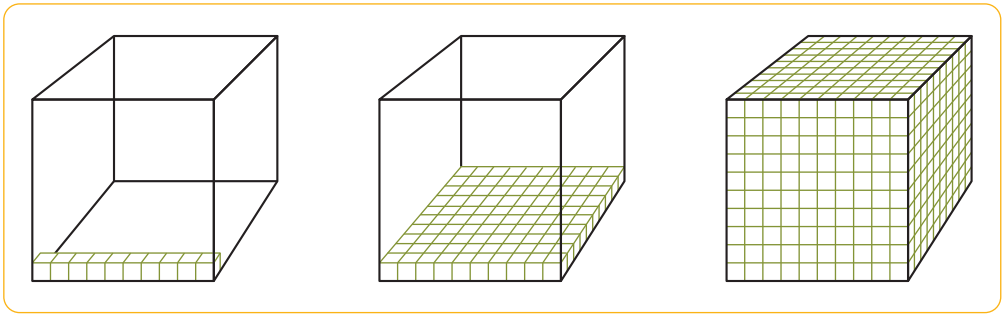
$1\ mm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ cm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ dm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} 1\ m^3$

A mértékegységek közti további összefüggések:

1 liter ≈ 1 dm^3 (nagyon kicsi az eltérés), ezért 1 m^3 ≈ 10 hl.

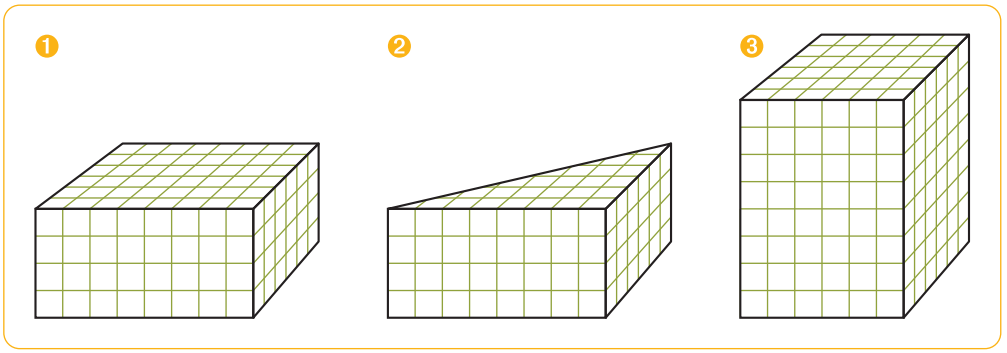
1 kg = 1 liter 4 °C-os tiszta víz tömege.

30 *a)* Magyarázd meg a hosszúság-mértékegységek és a térfogat-mértékegységek váltószáma közti összefüggést!



b) Tekintsd egységnek az ábrán egy kis kocka térfogatát!

Mennyi a térfogatuk a következő testeknek?



---

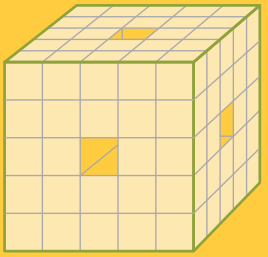
31 Számítsd ki a téglatestek térfogatát, ha az egy csúcsban találkozó éleik:

a) 20 cm, 50 cm, 48 cm; *b)* 25 dm, 40 dm, 12,6 dm; *c)* 1 m, 548 cm, 20 dm

Keress olyan téglalapokat, amelyek kerületének és területének mérőszáma megegyezik!

Fejtörő!

1 cm^3-es kis kockákból 5 cm élhosszúságú kockát állítunk össze, majd mindegyik lapjának közepétől a szemközti lap közepéig kivesszük a kis kockákat.



❶ Mekkora lesz a megmaradt test térfogata?

A: 119 cm^3; B: 112 cm^3; C: 111 cm^3; D: 95 cm^3

❷ Mekkora lesz a megmaradt test felszíne?

A: 144 cm^2; B: 198 cm^2; C: 192 cm^2; D: 150 cm^2

◉ Jelöld meg a helyes válaszok betűjelét!

GYAKOROLJUK A MÉRTÉKEGYSÉGEKRŐL TANULTAKAT!

Megfigyelted az adott mennyiségek mértékegységeit?

B15 Számítsd ki a téglatest felszínét, ha egy csúcsba futó élei:

a) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 2$ cm;
b) $a = 1{,}5$ dm, $b = 320$ mm, $c = 10$ cm;
c) $a = 5{,}6$ dm, $b = 10$ dm, $c = 1$ m

Vázold fel az *a)* feladatban adott téglatest hálóját!
Add meg a felszínt többféle mértékegység segítségével!

Olyan mértékegységet válassz, amellyel el tudod végezni a számításokat!

B16 Számítsd ki a kocka felszínét, ha egy éle:

a) $a = 5$ dm; *b)* $a = 2{,}3$ cm; *c)* $a = 0{,}1$ m

Vázold fel a *b)* feladatban adott kocka hálóját!
Add meg a felszínt többféle mértékegység segítségével!

B17 Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 1 m^3 = ☐ dm^3 = ☐ cm^3 = ☐ mm^3

b) ☐ mm^3 = 5600 cm^3 = ☐ dm^3 = ☐ m^3

c) 400 hl = ☐ m^3 = ☐ l = ☐ dm^3 = ☐ dl

d) 0,04 l = ☐ dl = ☐ cl = ☐ ml = ☐ cm^3

B18 Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 0,25 t = ☐ kg = ☐ dkg (dag) = ☐ g

b) 250 g = ☐ dkg (dag) = ☐ kg

c) 250 kg = ☐ dkg (dag) = ☐ g = ☐ t

B19 Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 135 min (perc) = ☐ s (másodperc) = ☐ h (óra)

b) 3,5 nap = ☐ hét = ☐ h (óra) = ☐ min (perc)

c) 2,4 h (óra) = ☐ nap = ☐ min (perc) = ☐ s (másodperc)

d) 9000 s (másodperc) = ☐ min (perc) = ☐ h (óra)

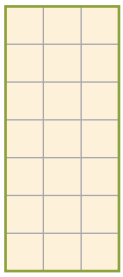
Figyelj a különböző mértékegységekre!

B20 Add meg a téglatestek térfogatát többféle mértékegység segítségével, ha az egy csúcsban találkozó éleik:

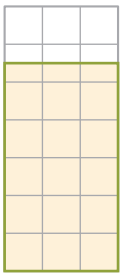
a) $a = 3{,}7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 2$ cm; *b)* $a = 40$ cm, $b = 5$ dm, $c = 285$ mm;
c) $a = b = 65$ cm, $c = 1{,}12$ m; *d)* $a = 0{,}6$ m, $b = 4$ dm 5 cm, $c = 75$ mm!

B21 Tekintsd egységnek a négyzetrács egy kis négyzetének a területét! Mekkora a területük a következő, sárgára színezett síkidomoknak?

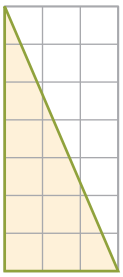
a)



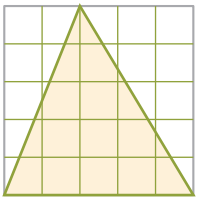
b)



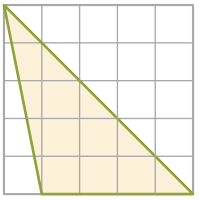
c)



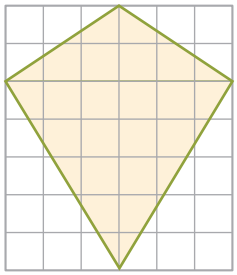
d)



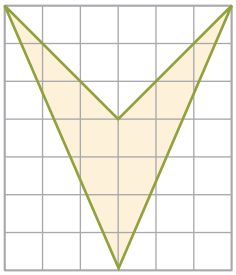
e)



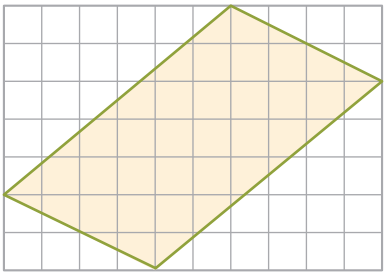
f)



g)



h)



B22 Mennyivel egyenlő?

a) 3 ha 25 m^2	**A:** 3025 m^2	**B:** 325 m^2	**C:** 30 025 m^2
b) 450 ha	**A:** 45 km^2	**B:** 0,45 km^2	**C:** 4,5 km^2
c) 5 m^2 16 cm^2	**A:** 50 016 cm^2	**B:** 5016 cm^2	**C:** 516 cm^2

B23 Pótold a hiányzó mérőszámokat!

a) 1 m = ☐ dm = ☐ cm = ☐ mm

b) 1 m^2 = ☐ dm^2 = ☐ cm^2 = ☐ mm^2

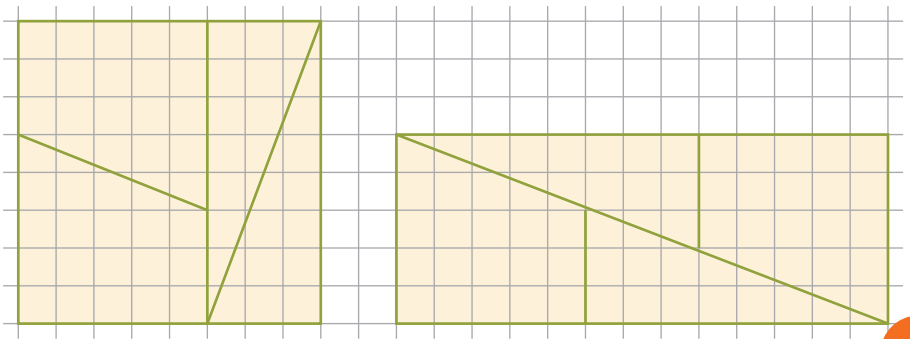
c) 3,64 m^2 = ☐ dm^2 = ☐ cm^2 = ☐ mm^2

d) 5360 cm^2 = ☐ dm^2 = ☐ m^2

Készíts négyzetrácsos papírból 8 egység oldalú négyzetet!

Darabold fel az ábra szerint, és utána rakd össze téglalappá! Határozd meg mindkét idom területét!

Hogyan magyarázhatjuk meg a tapasztaltakat?



KEREKÍTÉS, PONTOS ÉRTÉK, KÖZELÍTŐ ÉRTÉK

1. példa

Nap	H	K	Sz	Cs	P	H	K	Sz	Cs	P
Idő (perc)	20	18	19	21	22	21	19	20	21	19

Ani metróval jár iskolába. Tíz napon át mérte az utazási idejét, és ezeket az adatokat kapta.

Nap	H	K	Sz	Cs	P	H	K	Sz	Cs	P
Idő (perc)	17	20	17	25	24	18	17	19	22	21

Bea busszal szokott iskolába jönni. Ő is mérte az utazási időit.

Megközelítően hány perc alatt ér Ani, illetve Bea az iskolába?

◉ Megfigyelted? Hogyan számítjuk ki több mennyiség átlagát?

Ani **átlagos** utazási ideje:

$(20 + 18 + 19 + 21 + 22 + 21 + 19 + 20 + 21 + 19) : 10 = 20$ (perc)

Bea átlagos utazási ideje:

$(17 + 20 + 17 + 25 + 24 + 18 + 17 + 19 + 22 + 21) : 10 = 20$ (perc)



Mindkét kislány mondhatja, hogy körülbelül 20 perc alatt ér az iskolába. Ám ez a **közelítő érték** mást jelent Ani, és mást Bea esetében.

Ani legalább 18 és legfeljebb 22 percet utazik:

$$18 \text{ perc} \leqq t_{\text{Ani}} \leqq 22 \text{ perc}$$

Bea legalább 17 és legfeljebb 25 percet utazik:

$$17 \text{ perc} \leqq t_{\text{Bea}} \leqq 25 \text{ perc}$$

Ha 20 percet számítanak az utazásra, akkor Ani 2 percet, Bea 5 percet is késhet. Ani esetében a közelítő érték pontosabban fejezi ki a tényleges utazási időt. Bea esetében nagyobb lehet az eltérés egy mért adat és a közelítő érték között.

◉ Gyűjtőmunka
Te is jegyezd fel 10 napon át az iskolába utazásod idejét. Összesítsétek osztályszinten az adatokat. Közelítőleg hány percet utaztok átlagosan naponta?

Figyeld meg!

Sok feladat megoldása során nincs szükségünk a pontos értékre, vagy a pontos értéket nem is határozhatjuk meg. Ilyenkor **közelítő értékkel** számolunk. Ebben az esetben ismernünk kell azt is, hogy mennyire térhet el a **valódi érték** a **közelítő értéktől**.

Kerekítéssel is közelítő értéket adunk meg.

2. példa

Megvizsgáljuk, hogy a következő két esetben ugyanazt jelenti-e az 1800 Ft.

Egy korsó 1800 Ft-ba kerül. Hány forintba kerül 3 ugyanilyen korsó?

Klári édesanyja azt mondta, hogy hetenként körülbelül 1800 Ft-ot költ húsra.

Hány forintot költhet húsra 3 hét alatt?



Az első esetben a korsó ára **pontos érték**. A korsó pontosan 1800 Ft-ba kerül.

A korsó ára: $K = 1800$ Ft (**pontosan egyenlő**)

3 korsó $(3 \cdot 1800 \text{ Ft} =)$ 5400 Ft

A második esetben a húsra költött összeg **közelítő érték.** Klári édesanyja valószínűleg százasra kerekítve adta meg a költségeket. Ebből azt tudjuk meg, hogy 1750 Ft-nál nem költ kevesebbet, mert akkor 1700 Ft-ot mondott volna, de a költség nem éri el az 1850 Ft-ot sem, mert akkor már 1900 Ft-ot mondott volna.

A húsra költött pénz: $H \approx 1800$ Ft (**megközelítően egyenlő**)

A hús árára igaz a következő egyenlőtlenség:

$$1750 \leqq H < 1850 \text{ Ft}$$



Ezt számegyenesen így ábrázolhatjuk:

Figyeljük meg, hogy az 1750 helyére tömör karikát rajzolunk, mert onnan fölfelé kerekítünk. Az 1850 helyén lévő üres karika jelzi, hogy ezt az értéket már nem 1800-ra kerekítjük.

A húsra költött pénz legfeljebb 50 Ft-tal tér el az 1800 Ft-tól. 3 hét alatt az eltérések megháromszorozódhatnak:

$$3 \cdot 1750 \leqq 3 \cdot H < 3 \cdot 1850 \text{ Ft}$$

$$5250 \leqq 3 \cdot H < 5550 \text{ Ft}$$

Emlékeztető

Egy számot úgy **kerekítünk** tízesre (százasra, ezresre, ...), hogy a szám helyett a legközelebbi kerek tízest (százast, ezrest, ...) vesszük. Ha a szám 5-re (50-re, 500-ra, ...) végződik, akkor megállapodás szerint felfelé kerekítünk.

Egy tizedestörtet úgy kerekítünk egészre (tizedre, századra, ezredre, ...), hogy a szám helyett a legközelebbi kerek egészet (tizedet, századot, ezredet, ...) vesszük. Ha a szám 5 tizedre (5 századra, 5 ezredre, ...) végződik, akkor megállapodás szerint felfelé kerekítünk.

◉ *Például:*

748 ≈ 750; 463 ≈ 460;
748 ≈ 700; 463 ≈ 500;
748 ≈ 1000; 463 ≈ 0

5,8745 ≈ 6;
5,8745 ≈ 5,9;
5,8745 ≈ 5,87;
5,8745 ≈ 5,875

FELADATOK

32 Kerekítsd a

950; | 6857; | 16 498; | 145 682; | 5163,5; | 76,46; | 2,3; | számokat

a) tízesre; *b)* százasra; *c)* ezresre; *d)* tízezresre!

A következő két esetben ugyanazt jelenti-e a 120?

Bizonyos kialakítású Boeing 737-700 típusú utasszállító repülőgépen 120 fő a férőhelyek száma. Hány fő utazhat 4 ilyen repülőgépen?

A Desiro motorvagonokon körülbelül 120 ember fér el. Hányan férhetnek el egy 4 motorvagonból álló szerelvényen?

◉ *Részletesen indokold a válaszod!*

◉ *Keress hasonló példát!*

Anna ráállt a 0,1 kg pontossággal mérő mérlegre, amely 38,6 kg-ot mutat. Megeszik valamennyi epret. Ezután újra ráállt a mérlegre, és a kijelzőn 38,8 kg olvasható. Legalább (illetve legfeljebb) mennyi epret ehetett meg Anna?

◉ *Az eper tömegét dekagramm pontossággal add meg!*

Hogyan „kerekítenek” a pénztárnál, ha készpénzzel fizetünk?



33 A következő adatok közül melyiket célszerű kerekített értékkel helyettesíteni?

a) A távolugrónak a versenyen mért ugrása: 712 cm.

b) A vízcsap a cseresznyefától 712 cm-re van.

c) Egy község lakossága 2010-ben 7827 fő volt.

d) Egy takaró bolti ára 7827 Ft.

34 Melyek azok a természetes számok, amelyeknek

a) tízesre kerekített értéke 0; *b)* százasra kerekített értéke 0;

c) ezresre kerekített értéke 0; *d)* tízezresre kerekített értéke 0?

Mit szemléltet az ábrán a piros „pötty”, illetve az üres karika?

35 Egy x szám tízesre kerekített értéke 340. A számegyenesnek kiszíneztük azt a részét, ahol az x szám elhelyezkedhet:



a) Milyen egész számot jelenthet az x?

b) Melyik a legkisebb, illetve legnagyobb érték, amelyet az x felvehet?

c) Hány egység hosszú a kiszínezett szakasz?

36 Az *a)–d)* feladatok mindegyikéhez külön készíts számegyenest! Jelöld azokat a számokat, amelyeknek

Az a)–d) feladatok mindegyikéhez külön készíts számegyenest!

a) tízesre kerekített értéke 4000; *b)* százasra kerekített értéke 4000;

c) ezresre kerekített értéke 4000; *d)* ezresre kerekített értéke 40 000!

A számegyenesnek hány egység hosszú szakaszát jelölted meg az *a)–d)* feladatokban?

37 Kerekítsd a | 4,5483; | 10,671; | 0,3878; | 0,5555; | 0,0028 | számokat

a) egészre; *b)* tizedre; *c)* századra; *d)* ezredre!

38 Mely számjegyek írhatók a keret helyére, hogy a kerekítés helyes legyen?

a)	5,6☐ ≈ 5,7;	5,7☐ ≈ 5,7;	5,☐6 ≈ 5,7 (tizedre kerekítünk)
b)	36☐8 ≈ 3700;	3☐68 ≈ 3700;	368☐ ≈ 3700 (százasra kerekítünk)
c)	4☐39 ≈ 5000;	5☐78 ≈ 5000;	☐68 ≈ 0 (ezresre kerekítünk)
d)	3,☐6 ≈ 3;	2,☐6 ≈ 3;	☐,35 ≈ 3 (egészre kerekítünk)
e)	4,☐5 ≈ 0;	3☐,5 ≈ 40;	☐3,6 ≈ 40 (tízesre kerekítünk)
f)	5,☐7 ≈ 6;	3,9☐ ≈ 4,0;	6,☐3 ≈ 6,0 (tizedre kerekítünk)

Fejtörő!

Az $x \approx$ ☐ kerekítés melyiket **nem** jelentheti az alábbi egyenlőtlenségek közül?

A: $2{,}6 \leqq x < 2{,}7$ **B:** $2{,}65 \leqq x < 2{,}75$; **C:** $2{,}695 \leqq x < 2{,}705$

Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

A MÉRÉS PONTOSSÁGÁNAK JELZÉSE

Emlékeztető

A mennyiségek mérésének pontosságát jelezhetjük a tizedesjegyek számával.

Például:

A pózna magassága: $P \approx 5$ m. Jelentése: $4{,}5\text{ m} \leqq P < 5{,}5\text{ m}$
Az eltérés legfeljebb 0,5 m = 5 dm lehet.

A léc hossza: $L \approx 5{,}0$ m. Jelentése: $4{,}95\text{ m} \leqq L < 5{,}05\text{ m}$
Az eltérés legfeljebb 0,05 m = 5 cm lehet.

A gázcső hossza: $G \approx 5{,}00$ m. Jelentése: $4{,}995\text{ m} \leqq G < 5{,}005\text{ m}$
Az eltérés legfeljebb 0,005 m = 5 mm lehet.



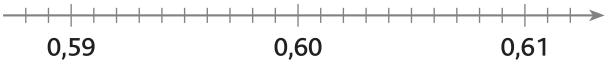
FELADATOK

39 Jelöld számegyenesen azokat a számokat, amelyeknek

a) tizedre kerekített értéke 0,6;



b) századra kerekített értéke 0,60;



c) ezredre kerekített értéke 0,600!



A számegyenesnek hány egység hosszúságú szakaszát jelölted meg az a)–c) feladatokban? Más értéket jelölhet-e a 0,6; 0,60; 0,600?

Mire utalhatnak a hatos után írt nullák?

---

40 Mindegyik feladathoz más-más számegyenest készíts! Jelöld a számegyenesen azokat a számokat, amelyeknek

a) tizedre kerekített értéke 4,3;

b) századra kerekített értéke 4,30;

c) ezredre kerekített értéke 4,300!

A számegyenesen hány egység hosszúságú szakaszt jelöltél meg az egyes feladatokban?

---

41 A liftben 300 kg terhelés felett kigyullad a „túlterhelt” jelzés. Öten szálltak be a liftbe. Tömegük egyenként (kilogramm pontossággal mérve):

54 kg; 72 kg; 48 kg; 51 kg; 76 kg

Biztos, lehetséges vagy lehetetlen, hogy a „túlterhelt” jelzés kigyullad?

42

Mérd meg deciméter pontossággal szobád adatait! Számítsd ki a padló területét, illetve a szoba térfogatát! Legfeljebb mekkora hibát követhettél el azért, mert mérésed közelítő pontosságú volt?

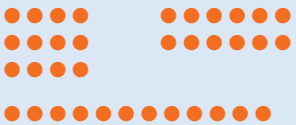
Gyűjtőmunka

Mértékváltás után számolhatsz!

ISMERKEDÉS A SZÁMELMÉLETTEL

OSZTÓ, TÖBBSZÖRÖS

Az ókori görögök kavicsokat rakosgatva figyelték meg a számok tulajdonságait. Például a 12-t többféleképpen tudták kirakni:



Így fedezték fel a számok osztóit. A görög számelmélet eredményeit Eukleidész foglalta össze i. e. 300 körül írt könyvében.

Tekintsük át a korábban tanultakat!

Ha a 60-at elosztjuk 7-tel, akkor maradékul 4-et kapunk. 60 hetes maradéka 4. Ezt így is írhatjuk: $60 : 7 = 8$ (4)

A 60 nem osztható 7-tel, a 60 nem többszöröse 7-nek. $60 = 7 \cdot 8 + 4$

Ha a 70-et elosztjuk 7-tel, akkor maradékul 0-t kapunk. 70 hetes maradéka 0. Ezt így is írhatjuk: $70 : 7 = 10$ (0)

A 70 **osztható** 7-tel, a 7 **osztója** 70-nek, a 70 **többszöröse** 7-nek. $70 = 7 \cdot 10$

A 70 pozitív **osztópárjai**:

1 és 70,	mert	$1 \cdot 70 = 70$;
2 és 35,	mert	$2 \cdot 35 = 70$;
5 és 14,	mert	$5 \cdot 14 = 70$;
7 és 10,	mert	$7 \cdot 10 = 70$

Például:
$28 : 1 = 28$;
$28 : 28 = 1$

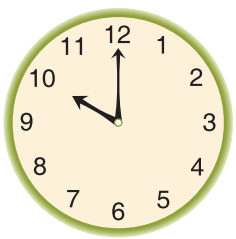
Emlékeztető

Egy *a* egész szám osztói azok az egész számok, amelyek osztópárjukkal megszorozva az *a* számot adják.

Egy egész szám pozitív osztói azok az egész számok, amelyekkel osztva a számot a hányados pozitív egész szám, a maradék pedig 0.

Minden egész szám osztható 1-gyel és önmagával.

FELADATOK



Gyakorló
1.41–1.46.



43 *a)* Ha most 10 óra van, akkor hány órát fog mutatni az óra
24 óra múlva; | 50 óra múlva; | 168 óra múlva?

b) Ha április elseje vasárnapra esik, akkor milyen napra esik
április tizedike; | május elseje; | augusztus huszadika?

c) Ha most január van, akkor milyen hónap lesz
12 hónap múlva; | 15 hónap múlva; | 160 hónap múlva?

44 40 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú lapokkal egy téglalap alakú területet szeretnének a kertben lefedni.

Hányféleképpen valósíthatják ezt meg, ha 96 db ilyen lapjuk van, és mindegyiket fel kívánják használni?

45 Sorold fel a következő számok pozitív osztóit!

$a = 1$; | $b = 24$; | $c = 25$; | $d = 29$; | $e = 90$; | $f = 120$

KÖZÖS OSZTÓK, LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ

1. példa

Egy vetélkedőn 72 fiúból és 60 lányból egyenlő létszámú csapatokat alakítunk ki. Szeretnénk, hogy minden csapatban ugyanannyi fiú legyen, és bármely két csapatban a lányok száma is megegyezzék. Hány csapatot alakíthatunk ki úgy, hogy a lehető legtöbb ilyen csapat legyen?



A fiúk csoportját annyiféleképp oszthatjuk egyenlő részekre, ahány osztója van a 72-nek.

A 72 osztói: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 8, 9, **12**, 18, 24, 36, 72

A lányok csoportját annyiféleképp oszthatjuk egyenlő részekre, ahány osztója van a 60-nak.

A 60 osztói: **1**, **2**, **3**, **4**, 5, **6**, 10, **12**, 15, 20, 30, 60

A fiúk, illetve a lányok csoportját ugyanannyi egyenlő részre kell osztanunk, ezért keressük meg a 60 és a 72 **közös osztóit**: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **12**

Mivel a lehető legtöbb csapatot szeretnénk kialakítani, a **közös osztók** közül a **legnagyobb** adja a megoldást:

12 csapatot alakítunk ki, csapatonként 5 lánnyal és 6 fiúval.

Jegyezd meg!

Több szám közös osztói azok a számok, amelyek az adott számok mindegyikének osztói.

Ezek közül a legnagyobb közös osztó minden közös osztónak többszöröse.

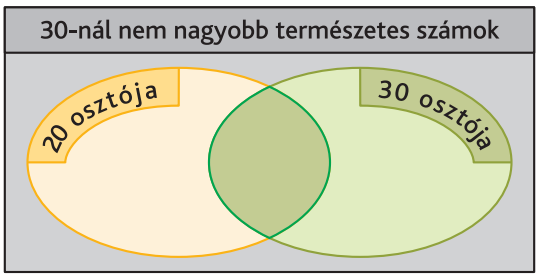
A 72 és a 60 legnagyobb közös osztója 12. Jelölés: $(72; 60) = 12$

FELADATOK

46 Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábra megfelelő helyére!

Olvasd le a közös osztókat!

Határozd meg a legnagyobb közös osztót!



47 Sorold fel a két szám összes osztóját!

Válaszd ki a legnagyobb közös osztót!

a) 20 és 60; *b)* 28 és 45; *c)* 25 és 30; *d)* 180 és 120

Gyakorló 1.47–1.48.

Fejtörő!

Panka és Manka dolgozatot írtak. Ha Panka érdemjegyét 3-mal, Mankáét 2-vel szoroznám, és elárulnám a két szorzat négy közös osztóját, rögtön tudnád, melyikük hányast kapott. De csak annyit árulok el, hogy a két szorzat nem egyezik meg. Ki tudod-e találni így is az érdemjegyeket?

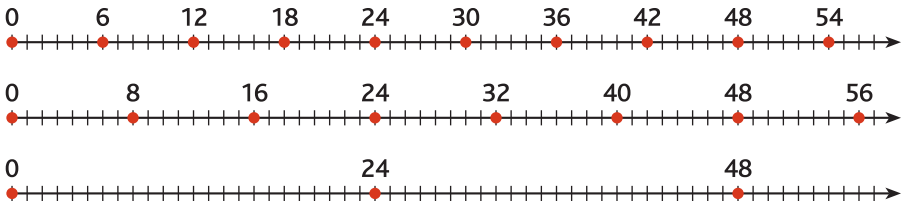
KÖZÖS TÖBBSZÖRÖSÖK, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

2. példa



Egy térről 6 percenként indul autóbusz, 8 percenként villamos. Pontosan délben egyszerre indul az autóbusz és a villamos. Mikor indul még egyszerre busz és villamos erről a térről?

Olyan számokat kell keresnünk, amelyek a 6-nak és a 8-nak is **többszörösei**.



A 6 többszörösei: 0, 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, 60, 66, **72**, ...

A 8 többszörösei: 0, 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, 80, ...

A 6 és a 8 pozitív **közös többszörösei**: **24**, **48**, **72**, ...

A 24., 48., 72. stb. percben egyszerre indul autóbusz és villamos.

Figyeljük meg, hogy a közös többszörösök a 24-nek a többszörösei.

Jegyezd meg!

Két (vagy több) számnak végtelen sok közös többszöröse van.

A pozitív közös többszörösök közül a legkisebb a többi közös többszörösnek osztója. Ezt nevezzük az adott számok **legkisebb közös többszörösének**.

Például a 6 és a 8 legkisebb közös többszöröse 24. Jelölés: $[6; 8] = 24$

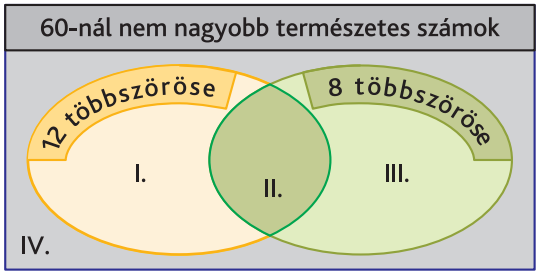
FELADATOK

Gyakorló
1.49–1.53.

48 Sorold fel a két szám néhány többszörösét addig, amíg legalább két közös többszöröst nem találsz!

Karikázd be a legkisebb (pozitív) közös többszöröst!

a) 6 és 18; *b)* 4 és 5; *c)* 10 és 15; *d)* 25 és 30



49 Írd be a számokat a halmazábra megfelelő helyére!

A IV. részbe csak néhány számot írj!

Melyek a két szám közös többszörösei?

Mi a legkisebb közös többszörösük?

Fejtörő!

Hány olyan természetes szám van 1-től 199-ig, amelyik nem osztható **sem** 2-vel, **sem** 5-tel?

MIT ÁRULNAK EL A SZÁM UTOLSÓ SZÁMJEGYEI?

FELADAT

50 Ábrázold (feladatonként külön) koordináta-rendszerben, hogy a 20-nál nem nagyobb természetes számok mit adnak maradékul

a) 10-zel osztva; *b)* 2-vel osztva; *c)* 5-tel osztva!

3. példa

3000 Ft; 3140 Ft; 3146 Ft; 3145 Ft; 3143 Ft

Az előző értékek közül melyek fizethetők ki csupa

a) tízforintossal; **b)** kétforintossal; **c)** ötforintossal?

Tételezzük fel, hogy van kétforintos érme.

a A kerek tízesek, kerek százasok, kerek ezresek mindig oszthatók 10-zel:

10 = 1 · 10 100 = 10 · 10 1000 = 100 · 10

A 300**0** Ft 300 db 10 Ft-ossal, a 314**0** Ft 314 db 10 Ft-ossal kifizethető.

A 314**6** nem osztható 10-zel, 10-zel osztva 6-ot ad maradékul. Vagyis a 3146 Ft-ból 3140 Ft kifizethető csupa 10 Ft-ossal, de a maradék 6 Ft nem.

Hasonlóan a 314**5** Ft és a 414**3** Ft sem fizethető ki csupa 10 Ft-ossal.

Mire végződhetnek a 10-zel osztható számok?

b A 10 Ft-os felváltható 5 db 2 Ft-osra. Vagyis a 10-zel osztható számok mindig oszthatók 2-vel is. Ezért a 300**0** Ft és a 314**0** Ft kifizethető csupa 2 Ft-ossal.

314**6** Ft-ból 3140 Ft kifizethető csupa 2 Ft-ossal, és a maradék 6 Ft is, mivel a 6 osztható 2-vel. Ugyanakkor a 314**5** Ft és a 314**3** Ft nem fizethető ki csupa 2 Ft-ossal, mivel az 5, illetve a 3 nem osztható 2-vel.

Mire végződhetnek a 2-vel osztható számok?

c A 10 Ft-os felváltható 2 db 5 Ft-osra. Tehát a 10-zel osztható számok mindig oszthatók 5-tel is. Ezért a 300**0** Ft és a 314**0** Ft kifizethető csupa 5 Ft-ossal is. 314**5** Ft-ból 3140 Ft kifizethető csupa 5 Ft-ossal, és a maradék 5 Ft is.

Ellenben a 314**6** Ft és a 314**3** Ft nem fizethető ki csupa 5 Ft-ossal, mivel a **6**, illetve a **3** nem osztható 5-tel.

Mire végződhetnek az 5-tel osztható számok?

Minden természetes szám fölírható ezekhez a számokhoz hasonló alakban a tízes számrendszerben:

7 =	0 · 10 + 7
40 =	4 · 10 + 0
55 =	5 · 10 + 5
58 =	5 · 10 + 8
3456 =	345 · 10 + 6
876 543 =	87 654 · 10 + 3
☐☐ =	☐ · 10 + ☐

Az utolsó számjegyet kell vizsgálnunk.

Osztható 10-zel, 2-vel, 5-tel.

Emlékeztető

Egy szám 10-zel, 2-vel, 5-tel osztva ugyanannyit ad maradékul, mint amennyit az utolsó számjegye.

A 10-zel osztható számok utolsó számjegye 0.

A tízesek mindig oszthatók 2-vel, illetve 5-tel, ezért pontosan

azok a számok oszthatók 2-vel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 2-vel;

azok a számok oszthatók 5-tel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 5-tel.

FELADAT

Gyakorló
1.54–1.58.

51 Mit mondhatsz azokról a számokról, amelyeket pirossal kell aláhúznod?

a) 53, | 504, | 6402, | 52 410, | 63 333, | 949 615, | 140 001, | 403

Húzd alá az előző számok közül pirossal azokat a számokat, amelyeknek a kettes maradéka 0, kékkel azokat, amelyeknek a kettes maradéka 1!

b) 59, | 65, | 40, | 517, | 518, | 672, | 673, | 675, | 804, | 916, | 1050, | 9411

Húzd alá az előző számok közül pirossal azokat a számokat, amelyeknek az ötös maradéka 0, kékkel azokat, amelyeknek az ötös maradéka 1, feketével azokat, amelyeknek az ötös maradéka 2, és így tovább, más-más színnel a különböző ötös maradékúakat!

Összesen hány csoportot találhatsz ilyen módon?

c) Írj föl 3-3 olyan négyjegyű számot, amelyek tízes maradéka: 0, 1, 2, ...

Hány ilyen csoport van?



⊙ Mire végződhetnek a 25-tel osztható számok?

4. példa

Andor gazdának 2300 l, Bálintnak 2375 l, Cirillnek 2348 l bora termett.

Melyikük tudja maradék nélkül kimérni a borát

a) 100 l-es hordókba; **b)** 25 l-es kannákba; **c)** 4 l-es palackokba?

a A kerek százasok, kerek ezresek, ... mindig oszthatók 100-zal.

2300 l borral 23 db 100 l-es hordó maradék nélkül teletölthető.

A 2375 nem osztható 100-zal, 100-zal osztva 75 maradékot ad. Vagyis a 2375 l-ből 2300 l-rel teletölthető 23 hordó, de a maradék 75 l-rel már nem tölthető meg egy hordó sem.

Hasonlóan a 2348 l borral sem tölthető meg maradék nélkül valahány 100 l-es hordó.

b A 100 l-es hordóból 4 db 25 l-es kanna maradék nélkül megtölthető, ezért 2300 l borral maradék nélkül teletölthető valahány 25 l-es kanna.

A 2375 l-ből 2300 l-rel teletölthető valahány 25 l-es kanna, és a fennmaradó 75 l-rel is pontosan teletölthető 3 ilyen kanna, mert 75 osztható 25-tel.

A 2348 l-ből 2300 l-rel teletölthető valahány 25 l-es kanna, de a fennmaradó 48 l-rel már nem, mert 48 nem osztható 25-tel.

C A 100 l-es hordóból 25 db 4 l-es palack maradék nélkül megtölthető, ezért 2300 l borral maradék nélkül teletölthető valahány 4 l-es palack.

A 2348 l-ből 2300 l-rel teletölthető valahány 4 l-es palack. A fennmaradó 48 l-rel is maradék nélkül megtölthető még 12 ilyen 4 l-es palack, mert 48 osztható 4-gyel.

A 2375 l-ből 2300 l-rel teletölthető valahány 4 l-es palack, de a fennmaradó 75 l-rel már nem, mert 75 nem osztható 4-gyel.

◉ *Mire végződhetnek a 4-gyel osztható számok?*

Minden természetes szám fölírható ezekhez a számokhoz hasonló alakban a tízes számrendszerben:

$24 = 0 \cdot 100 + 24$
$200 = 2 \cdot 100 + 0$
$375 = 3 \cdot 100 + 75$
$376 = 3 \cdot 100 + 76$
$687\,362 = 6837 \cdot 100 + 62$
$\square\square = \square \cdot 100 + \square\square$

Az utolsó két számjegyből álló számot vizsgáljuk.

Osztható 100-zal, 4-gyel, 20-szal, 25-tel, 50-nel.

◉ *Például:*
2100; 5000; 25 300 *osztható 100-zal;*
2100; 5024; 25 308 3000; 3080; 25 372 *osztható 4-gyel;*
2100; 5075; 3025; 25 350 *osztható 25-tel;*
2100; 5020; 2140; 5060; 5080; 50 000 *osztható 20-szal;*
2100; 5000; 25 350 *osztható 50-nel.*

Jegyezd meg!

Egy szám 100-zal, 4-gyel, 25-tel osztva ugyanannyit ad maradékul, mint amennyit az utolsó két számjegyéből álló szám.

A százzal osztható számok utolsó két számjegye 0.

A százasok mindig oszthatók 4-gyel, illetve 20-szal, 25-tel, 50-nel, ezért pontosan **azok a számok oszthatók 4-gyel, illetve 20-szal, 25-tel, 50-nel, amelyekben az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4-gyel,** illetve **20-szal, 25-tel, 50-nel.**

FELADAT

52 0, | 6, | 8, | 5, | 25, | 28, | 40, | 50, | 72, | 75, | 78, | 100, | 102, | 125, | 722, | 775, | 6800, | 7550, | 64 316, | 93 333, | 75 057, | 80 000, | 156 625

a) Húzd alá az előző számok közül pirossal a 100-zal osztható számokat, kékkel a 4-gyel osztható számokat, zölddel a 25-tel osztható számokat!

b) Ábrázold halmazábrán a 4-gyel, 25-tel, 100-zal osztható számok halmazát! Írd be a felsorolt számokat a halmazábrába!

Gyakorló 1.59–1.64.

Fejtörő!

Postás Samu a Fermat utca páros oldalán a legnagyobb házszámtól visszafelé haladva minden ötödik házba vitt valami küldeményt. Az ötödik küldemény egy Abacus matematikai folyóirat volt a 18-as házhoz.

Hányas házszámhoz vitte az első küldeményt Samu?

◉ *Készíts rajzot az utcáról!*

Egy téglatest egyik éle 4 cm, a másik két élének mérőszáma is egész szám. A következő értékek közül melyik **nem lehet** a téglatest térfogata?

A: $V = 540\ \text{cm}^3$; **B:** $V = 572\ \text{cm}^3$; **C:** $V = 482\ \text{cm}^3$; **D:** $V = 600\ \text{cm}^3$

◉ *Jelöld meg annak az értéknek a betűjelét, amely nem lehet a test térfogata!*

5. példa

Az alábbi három szám közül melyik osztható 8-cal?

$a = 696$; $b = 342\,023\,496$; $c = 609\,648\,074$

$a = 696 = 640 + 56 = 8 \cdot 80 + 8 \cdot 7 = 8 \cdot 87$; a 696 osztható 8-cal.

$b = 342\,023\,\mathbf{496} = 342\,023\,000 + \mathbf{496} = 342\,023 \cdot 1000 + \mathbf{496}$

$c = 609\,648\,\mathbf{074} = 609\,648\,000 + \mathbf{74} = 609\,648 \cdot 1000 + \mathbf{74}$

A b szám és a c szám felbontható egy 1000-rel osztható szám és egy legfeljebb háromjegyű szám összegére. Mivel $1000 = 8 \cdot 125$, ezért minden 1000-rel osztható szám (tehát a kéttagú összegek első tagja is) osztható 8-cal. Ezért **egy természetes szám pontosan akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három számjegyéből álló (legfeljebb háromjegyű) szám osztható 8-cal.**

A b osztható 8-cal, mert 496 (= 480 + 16) osztható 8-cal.

A c nem osztható 8-cal, mert 74 nem osztható 8-cal.

FELADAT

Alkalmazzuk az 5. példában látott ötletet.

53 Az $u = 75\,689\,550$ és a $v = 49\,345\,625$ közül melyik osztható 125-tel?

Fogalmazd meg a 125-tel való oszthatóság szabályát!

MIT MUTAT MEG A SZÁMJEGYEK ÖSSZEGE?

6. példa

Bontsuk fel egy 9-cel (illetve 3-mal) osztható szám és egy egyjegyű szám összegére az alábbi számokat.

a) ❶ 1; ❷ 10; ❸ 100; ❹ 1000; ❹ 10 000

b) ❶ 7; ❷ 70; ❸ 700; ❹ 7000; ❹ 70 000

Fogalmazzuk meg a tapasztaltakat.

A b) feladat megoldása során alkalmazzuk az a) feladatban felismert összefüggést!

Az 1, a 10, a 100, az 1000 stb. 9-es és 3-as maradéka 1.

a)

$$\begin{aligned} 1 &= 0 + 1 \\ 10 &= 9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 1\,000 &= 999 + 1 \\ 10\,000 &= 9999 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ez a tag osztható 9-cel és 3-mal.

b)

$$\begin{aligned} 7 &= 1 \cdot 7 = 0 \cdot 7 + 7 \\ 70 &= 10 \cdot 7 = 9 \cdot 7 + 7 \\ 700 &= 100 \cdot 7 = 99 \cdot 7 + 7 \\ 7\,000 &= 1\,000 \cdot 7 = 999 \cdot 7 + 7 \\ 70\,000 &= 10\,000 \cdot 7 = 9999 \cdot 7 + 7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ez a tag osztható 9-cel és 3-mal.

A 9-cel osztható számok oszthatók 3-mal is, ezért „melléktermékként" megfigyelhetjük a 3-mal való oszthatóságot is. A 7 tízes, a 7 százas vagy a 7 ezres hármas maradéka annyi, mint a 7 egyesnek, vagyis 1.

A 7 tízes, a 7 százas, a 7 ezres mindegyikének a kilences maradéka 7.

Mit kaptunk volna, ha 5 tízest, 5 százast stb. vizsgáltunk volna?

7. példa

Az alábbi három szám közül melyik osztható 9-cel, melyik osztható 3-mal?

$a = 6732$; $b = 342\,023\,496$; $c = 609\,648\,074$

$a = 600 + 700 + 30 + 2 = (999 \cdot 6 + 6) + (99 \cdot 7 + 7) + (9 \cdot 3 + 3) + 2$

Csoportosítsuk célszerűen az előző összeget:

$a = \underbrace{(999 \cdot 6 + 99 \cdot 7 + 9 \cdot 3)}_{\text{Ez osztható 9-cel, mert az összeg minden tagja osztható 9-cel, ezért 3-mal is.}} + \underbrace{(6 + 7 + 3 + 2)}_{\text{A számjegyek összegét kell vizsgálnunk.}}$

A 6732 osztható 9-cel és 3-mal, mivel a számjegyeinek összege $(6 + 7 + 3 + 2 = 18)$ osztható 9-cel és 3-mal is.

A b szám számjegyeinek összege: $3 + 4 + 2 + 0 + 2 + 3 + 4 + 9 + 6 = 33$

A $b = 342\,023\,496$ nem osztható 9-cel, de osztható 3-mal.

A c szám számjegyeinek összege: $6 + 0 + 9 + 6 + 4 + 8 + 0 + 7 + 4 = 44$

A $c = 609\,648\,074$ nem osztható sem 9-cel, sem 3-mal.

Ha egy összeg minden tagja osztható egy számmal, akkor az összeg is osztható azzal a számmal.

Ha egy kéttagú összeg egyik tagja osztható egy számmal, a másik tagja nem, akkor az összeg sem osztható az adott számmal.

Jegyezd meg!

Egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, illetve **3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel,** illetve **3-mal.**

FELADAT

54 Húzd alá pirossal a 9-cel osztható, kékkel a 3-mal osztható számokat!

Mit mondhatsz azokról a számokról, amelyeket pirossal és kékkel is aláhúztál?

a)	356;	42 351;	549 927;	666 666;	555 555;	136 206;	1 347 214
b)	576;	56 798;	111 111;	212 121;	606 060;	354 543;	2 456 789
c)	300;	17 010;	100 701;	555 777;	888 888;	600 000;	3 333 333

Ábrázold közös halmazábrán a következő halmazokat:

$H = \{3\text{-mal osztható számok}\}$; $K = \{9\text{-cel osztható számok}\}$

Az alaphalmaz: $\mathbb{N} = \{\text{Természetes számok}\}$

Mely számok kerülnek a H és a K halmaz közös részébe?

Melyek azok a számok, amelyek 3-mal oszthatók, de 9-cel nem?

Melyek azok a számok, amelyek 9-cel oszthatók, de 3-mal nem?

A 0 a halmazábra mely részébe kerül?

Egy-egy számjegy hiányzik a következő négyjegyű számokból:

657□; 93□0; □157; 5□00; 111□

Írj a keretek helyébe számjegyeket úgy, hogy a számok oszthatók legyenek

a) 2-vel; *b)* 5-tel; *c)* 4-gyel; *d)* 10-zel; *e)* 25-tel; *f)* 100-zal;

g) 3-mal; *h)* 9-cel; *i)* 6-tal; *j)* 15-tel; *k)* 75-tel; *l)* 1000-rel

PRÍMSZÁMOK, ÖSSZETETT SZÁMOK

8. példa

Keressük meg a 90, az 59, az 1 és a 0 összes pozitív osztóját.

Alkalmazzuk az osztha-tósági szabályokat. Például a 2 és a 45 osztó-párok, mert
$2 \cdot 45 = 90$

A 90 **osztópárjai**:
1 és 90; 2 és 45, 3 és 30; 5 és 18; 6 és 15; 9 és 10.
Az 59 osztható 1-gyel és 59-cel. Az 59-nek **két pozitív osztója van.**
Minden pozitív egész szám osztható 1-gyel és önmagával.
Az 1-nek csak egy pozitív osztója van, önmaga.
A 0 minden pozitív egész számmal osztható. Például

$$0 : 123 = 0, \quad \text{mert} \quad 0 \cdot 123 = 0$$

A 0 nem osztója egyik pozitív természetes számnak sem.

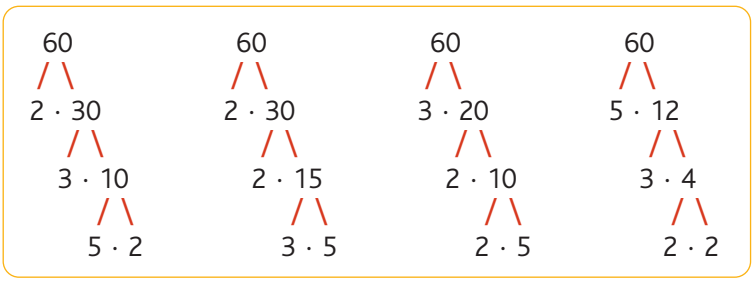
Értelmezések

Prímszámok például:
2; 3; 5; 7; 11; ... 59
Összetett számok:
4; 6; 8; 9; ... 60

Prímszámnak vagy **törzsszámnak nevezzük azt a természetes számot, amelynek pontosan két osztója van** (az 1 és önmaga).
Összetett számnak nevezzük azt a pozitív természetes számot, amelynek kettőnél több pozitív osztója van.
Az 1 és a 0 nem prímszám és nem összetett szám.

Bármelyik összetett szám fölírható egy prímszám és egy másik természetes szám szorzataként. Ha a másik szám nem prímszán, akkor azt is felbonthatjuk egy prímszám és egy természetes szám szorzatára. Akkor fejezzük be az eljárást, ha már mindegyik tényező prímszám. Egy számot esetleg többféle úton is felbonthatunk, de végül mindig ugyanazokat a prímtényezőket kapjuk.

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$



Figyeld meg!

Minden összetett szám fölbontható prímszámok szorzatára, és ez a fölbontás a sorrendtől eltekintve egyértelmű.

FELADATOK

55 Bontsd prímszámok szorzatára a következő számokat:
$a = 14$; $b = 23$; $c = 28$; $d = 56$; $e = 112$; $f = 2300$; $g = 10\,000$

56 Mely számok akadnak fenn **Eratoszthenész** görög matematikus **szitáján**?

Felírjuk a természetes számokat például 1-től 100-ig.

Az 1-et kivesszük, mert 1-gyel minden szám osztható.

Bekarikázzuk a 2-t, majd pirossal áthúzzuk a 2 többszöröseit.

Bekarikázzuk a következő olyan számot, a 3-at, amely nincs megjelölve, és kékkel áthúzzuk a 3 többszöröseit.

Folytatjuk az eljárást mindig a következő meg nem jelölt számmal.

a) Mely számokat karikáztuk be ezzel az eljárással?

b) **Ikerprímeknek nevezünk két prímszámot, ha különbségük 2.** Gyűjtsd ki a 100-nál kisebb ikerprímeket!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

VEGYES OSZTHATÓSÁGI FELADATOK

9. példa

Az alaphalmaz: $U = \{20\text{-nál nem nagyobb természetes számok}\}$

Feladatonként ábrázoljuk közös halmazábrán a szereplő halmazokat.

a) $K = \{2\text{-vel osztható számok}\}$; $H = \{3\text{-mal osztható számok}\}$

Melyek azok a számok, amelyek K-nak **és** H-nak is elemei?

Melyek azok a számok, amelyek K-nak **vagy** H-nak elemei?

b) $K = \{2\text{-vel osztható számok}\}$; $M = \{2\text{-vel **nem** osztható számok}\}$

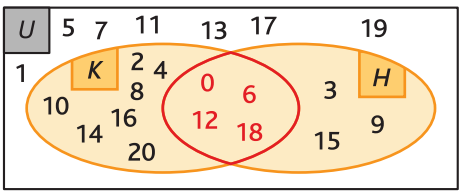
Milyen kapcsolatot vehetünk észre a két halmaz között?

c) $K = \{2\text{-vel osztható számok}\}$; $N = \{4\text{-gyel osztható számok}\}$

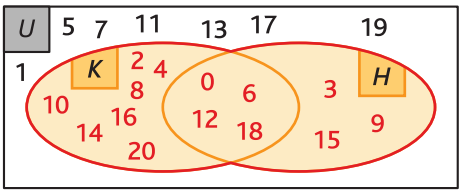
Melyik halmaz **részhalmaza** a másiknak?

a) A K és H halmaz **közös részébe**, más szóval **metszetébe** tartoznak azok a számok, amelyek K-nak **és** H-nak is elemei.

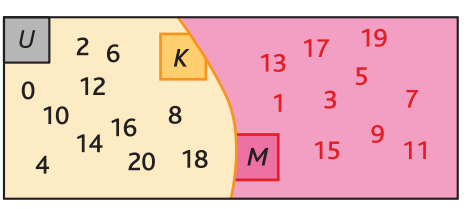
Ezek a számok (az alaphalmaz elemei közül) a 2 és a 3 közös többszörösei.



A K és H halmaz **egyesítettjébe**, más szóval **uniójába** tartoznak azok a számok, amelyek K-nak **vagy** H-nak elemei. A két halmaz egyesítettjébe azok a számok tartoznak, amelyek **legalább az egyik** halmaznak elemei.

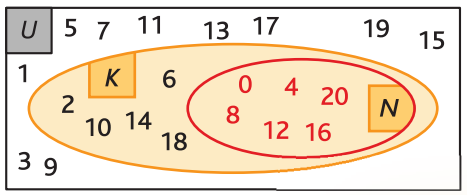


b) Az M halmazba tartoznak az alaphalmaznak azok az elemei, amelyek **nem** elemei a K halmaznak. Az M halmaz a K halmaznak az alaphalmazra vonatkozó **komplementere**, **kiegészítő halmaza**.



A K halmaznak és a kiegészítő halmazának az egyesítettje az alaphalmaz.

A K halmaznak és a kiegészítő halmazának nincs közös eleme.



c Minden 4-gyel osztható szám osztható 2-vel. Az N halmaz minden eleme a K halmaznak is eleme. Az N halmaz **részhalmaza** a K halmaznak.

Van olyan 2-vel osztható szám, amelyik nem osztható 4-gyel. Az N **valódi részhalmaza** a K halmaznak.

10. példa

Melyik állítás igaz, melyik hamis?

a) **A:** Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel.
B: Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel.

b) **C:** Ha egy szám osztható 4-gyel és 5-tel, akkor osztható 20-szal.
D: Ha egy szám osztható 20-szal, akkor osztható 4-gyel és 5-tel.

a Az **A** igaz. Minden olyan esetben, amikor egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is. Az ilyen szerkezetű kijelentések esetében sokszor használjuk a következő kifejezéseket:

Ha egy szám osztható 4-gyel **akkor** a szám osztható 2-vel.

Ez elégséges feltétele annak, hogy egy szám osztható legyen 2-vel, de nem szükséges feltétel, mert nemcsak a 4-gyel osztható számok oszthatók 2-vel.

Ez szükséges feltétele annak, hogy a szám osztható legyen 4-gyel, de nem elégséges feltétele, mert nem minden 2-vel osztható szám osztható 4-gyel.

A fentiek alapján a **B** állítás hamis.

Megfigyelted az osztha-tósági szabályok logikai szerkezetét?

b A **C** és a **D** állítás is igaz. *Ha egy szám osztható 4-gyel és 5-tel, az* **szükséges és elégséges feltétele** *annak, hogy a szám osztható legyen 20-szal.* Ezt így is kifejezhetjük:

Egy szám **akkor és csak akkor** osztható 20-szal, **ha** osztható 4-gyel és 5-tel.

Egy szám **pontosan akkor** osztható 20-szal, **ha** osztható 4-gyel és 5-tel.

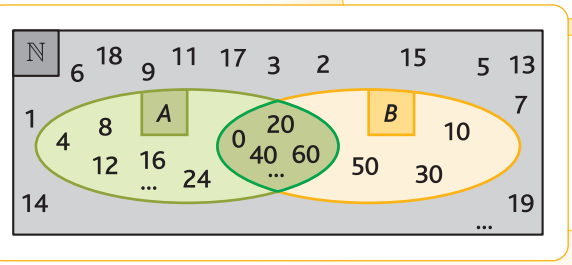
11. példa

Ábrázoljuk közös halmazábrán a következő halmazokat!

Alaphalmaz: $\mathbb{N} = \{\text{Természetes számok}\}$;

$A = \{\text{4-gyel osztható számok}\}$; $B = \{\text{10-zel osztható számok}\}$

Mely számok kerülnek az A és a B halmaz közös részébe?



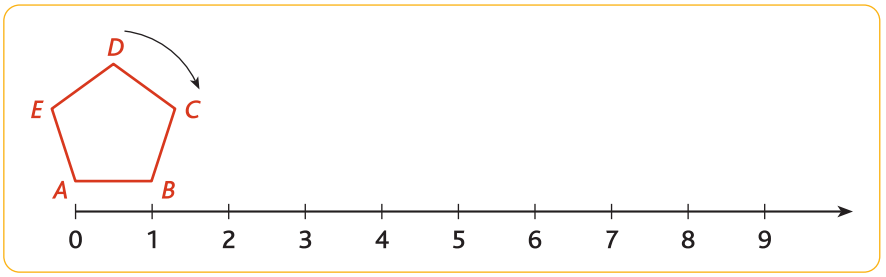
A két halmaz közös részébe kerülnek azok a természetes számok, amelyek 4-nek **és** 10-nek is többszörösei.

Figyeljük meg, hogy a két halmaz közös részébe nem csak a (4 · 10 =) 40-nel osztható számok kerülnek!

B24 *a)* Gördíts csúszás nélkül egy 1 egység oldalú szabályos ötszöget a számegyenesen!

Melyik betűvel jelölt csúcs kerül a számegyenes 10-es, 11-es, 12-es, 215-ös, 217-es, 218-as, 219-es számára?

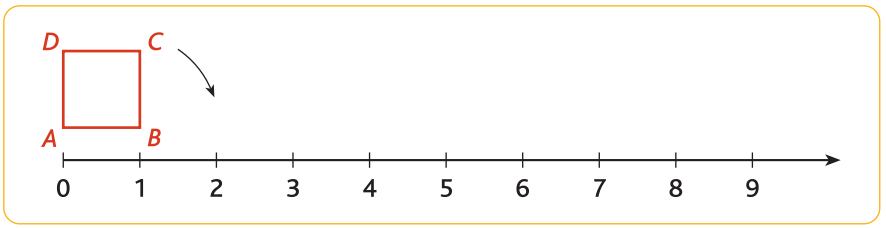
Sorolj föl néhány olyan számot, amelyre az *E* csúcs kerülhet!



b) Gördíts csúszás nélkül egy 1 egység oldalú négyzetet a számegyenesen!

Hová kerül az *A* csúcs az 1., a 2., a 15., a 75. körülgördítés után?

Sorolj föl 10 olyan számot, amelyikre a *C* csúcs kerülhet!



c) Melyek azok a számok, amelyekre az ötszög **és** a négyszög *A* csúcsa kerülhet?

B25 $k = 2\square$; $l = 7\square$; $m = 12\square$; $n = 23\square\square$;

$o = 2\square 5$; $p = \square 33$; $r = \square\square 00$

Egészítsd ki az előző számokat úgy, hogy

a) oszthatók legyenek 2-vel;

b) oszthatók legyenek 4-gyel;

c) oszthatók legyenek 5-tel;

d) 5-tel oszthatók legyenek, de 25-tel ne;

e) 25-tel oszthatók legyenek, de 5-tel ne;

f) 4-gyel és 5-tel is oszthatók legyenek!

B26

a) Egy ünnepélyen 400-nál kevesebb gyerek vesz részt. Ha kettesével, hármasával, négyesével, ötösével vagy hatosával állnak sorba, akkor a végén mindig egy gyerek kimarad, de ha hetesével állnak, akkor egy gyerek sem marad ki. Hány gyerek vesz részt az ünnepélyen?

b) Egy torony tetejére hosszú lépcsősor vezet.

Ha kettesével számláljuk a lépcsőket, akkor 1 marad. Ha hármasával számláljuk, akkor 2 marad. Ha négyesével számláljuk, akkor 3 marad. Ha ötösével számláljuk, akkor 4 marad. Ha hatosával számláljuk, akkor 5 marad. Ha azonban hetesével számláljuk, akkor nem marad semmi.

Hány lépcső visz föl a torony tetejére, ha a torony nem magasabb 20 m-nél, és egy-egy lépcsőfok magassága 16 cm?

Figyelempróba



bővített szint

A margón látható 3×3-as négyzet mezőibe írjuk be a számokat 1-től 9-ig úgy, hogy a sorok mellett lévő számok a sorokban előforduló, az oszlopok alatt lévő számok az oszlopokban szereplő számok legkisebb közös többszörösei legyenek.

Például ha az első oszlopba az 1-et, 3-at és 7-et írnánk valamilyen sorrendben, akkor alá a legkisebb közös többszörösük, a 21 kerülne.

Fejtörő!

			12
			90
			168
63	40	6	

Gyakorló
1.60.;
Feladatgyűjtemény
1.3.21–36.

B27 Bontsd fel a 48-at

a) két páros szám szorzatára; *b)* két páratlan szám szorzatára;
c) egy páros és egy páratlan szám szorzatára;
d) két tízzel osztható szám szorzatára;
e) két 4-gyel osztható szám szorzatára;
f) két 3-mal osztható szám szorzatára;
g) két 3-mal nem osztható szám szorzatára;
h) egy 3-mal osztható és egy 3-mal nem osztható szám szorzatára;
i) egy 9-cel és egy 4-gyel osztható szám szorzatára!

B28 Bontsd fel a 320-at

a) két páros szám szorzatára; *b)* két páratlan szám szorzatára;
c) két 10-zel osztható szám szorzatára;
d) egy 3-mal osztható és egy 3-mal nem osztható szám szorzatára;
e) két 4-gyel osztható szám szorzatára!

⊙ Egy feladaton belül ugyanaz a keret ugyanazt a számjegyet jelenti. Ahol lehet, keress több megoldást!

B29 Írj egy-egy számjegyet a különböző keretek helyére úgy, hogy

a) 2-vel osztható összeget kapj; *b)* 4-gyel osztható összeget kapj;
c) 5-tel osztható összeget kapj; *d)* 3-mal osztható összeget kapj!

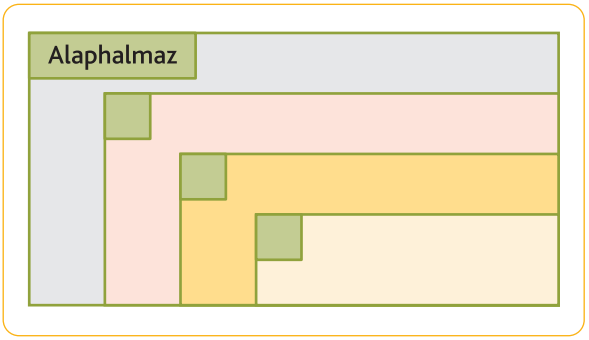
❶ $342+21\square$; ❷ $47\square+26\square$; ❸ $38\square+12\bigcirc$

⊙ Egy feladaton belül ugyanaz a keret ugyanazt a számjegyet jelenti. Keresd meg az összes lehetséges megoldást!

B30 Hány olyan számjegy írható a különböző keretek helyére úgy, hogy 10-zel osztható összeget kapj?

a) $14\,72\square+342\square$; *b)* $14\,72\bigcirc+342\square$; *c)* $19\bigcirc8+298\square$;
d) $21\cdot(27\square+37\bigcirc)$; *e)* $24\cdot(55+97\bigcirc)$

B31 Írd be a címkéket és a számokat a halmazábrába!



$A=\{32\text{ osztója}\}$; $B=\{16\text{ osztója}\}$; $C=\{8\text{ osztója}\}$

Az *alaphalmaz* legyen a 40-nél nem nagyobb természetes számok halmaza.

Határozd meg a három szám közös osztóit!

Határozd meg a három szám *legnagyobb közös osztóját*!

Többet ésszel …

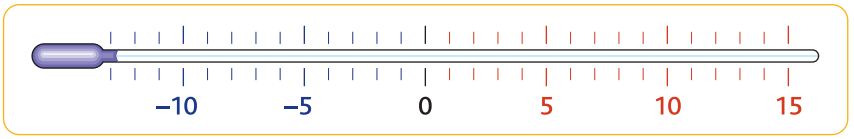
Egy versenyen biciklik és triciklik indultak, összesen 40 kerék gördült át a rajtvonalon. Három és fél óra elteltével már 9 bicikli és 4 tricikli teljesítette a távot. Hány bicikli indult a versenyen?

EGÉSZ SZÁMOK

AZ EGÉSZ SZÁMOK ÉRTELMEZÉSE, ÖSSZEHASONLÍTÁSA

FELADATOK

57 *a)* Jelöld a hőmérőn a hőmérsékleteket!



Fagypont felett 3 °C, 7 °C, azaz +3 °C, +7 °C

Fagypont alatt 3 °C, 7 °C, azaz –3 °C, –7 °C.

b) Rendezd a leghidegebb értéktől a legmelegebbig ezeket az adatokat!

c) Mennyi lesz a hőmérséklet, ha 0 °C-ról nő 7 °C-kal, majd csökken 7 °C-kal?

Gyakorló
2.01–2.02.;
Feladatgyűjtemény
2.1.04–06.

58 *a)* Ábrázold számegyenesen, majd rendezd növekvő sorrendbe a következő **egész számokat**: 0; –2; +2; –5; +7; –10; +10

b) Színezd a számegyenesen pirosra a **pozitív egész** számok helyét, kékre a **negatív egész** számok helyét! Minden egész szám helyét beszínezted?



59 Írd le a mennyiségeket és ellentettjüket a matematika nyelvén is!

a) 15 Ft készpénz: ____ Ft; ellentettje: ____

b) Tengerszint alatt 20 m: ____ m; ellentettje: ____

c) 0 °C hőmérséklet ____ °C; ellentettje: ____

d) Hová jut a tengeralattjáró, ha a tengerszintről előbb süllyed 25 m-t, majd emelkedik 25 m-t?

e) Hová jut a hajó, ha észak felé halad 10 km-t, majd dél felé 10 km-t?

A kínaiak *A matematika kilenc könyvében* foglalták össze az i e. I. évezredben élt matematikusok felfedezéseit. A VIII. könyvben foglalkoznak a negatív számokkal. A pozitív számokat piros, a negatívokat fekete pálcikákkal jelölték.
A VII. században Indiában *Brahmagupta* a negatív számokat „adósságnak”, a pozitívokat „tulajdonnak” nevezte, és már megfogalmazta a számolási szabályokat is.

1. példa

Kunigundának 10 tallérja van, Zénónak 10 tallér adóssága.
Ha összeházasodnak, mennyi lesz a közös „vagyonuk”?



A két „vagyon” egymás **ellentettje**.
(+10) + (–10) = 0
A közös „vagyon” 0 tallér lesz.

Sorolj fel száz közvetlenül egymás után következő egész számot úgy, hogy az összegük 50 legyen!

Többet ésszel …

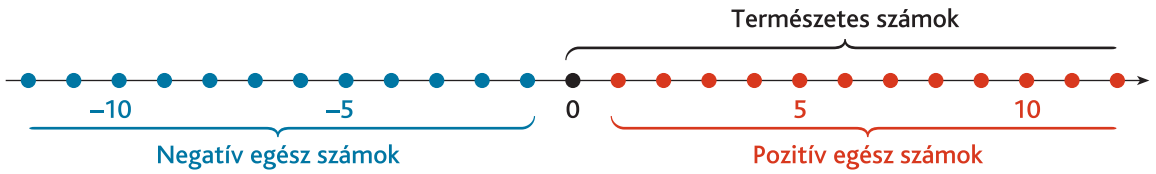
Emlékeztető

A pozitív számok + előjelét sokszor nem írjuk ki.

Ha egy mennyiség két ellentétes irányban változhat, akkor azt **pozitív**, illetve **negatív** mérőszámokkal fejezhetjük ki. A pozitív számokat **plusz előjellel**, a negatív számokat **mínusz előjellel** jelöljük.

A 0 se nem pozitív, se nem negatív szám, tehát nincs előjele.

A 0-t, a pozitív egész számokat és a negatív egész számokat együtt egész számoknak nevezzük:



Gyűjtőmunka
Keress az Atlasz Világtérképén tengerszint alatti földrajzi helyeket!
Hol van a földfelszín legmélyebb pontja?

Az egész számok halmazát $\mathbb{Z}$ betűvel szokás jelölni. A természetes számok halmazát $\mathbb{N}$ betűvel jelöljük, a pozitív egész számok halmazát $\mathbb{Z}^+$ jellel.

Például a +6 és –6 egymás **ellentettjei**. A 0 ellentettje önmaga.

Ha egy számhoz hozzáadjuk az ellentettjét, akkor az összeg 0.

Például: $(+6) + (-6) = 0$

Egy számnak a 0-tól való távolsága a számegyenesen a szám **abszolútértéke**.

Minden pozitív szám és a 0 abszolútértéke maga a szám.

Minden negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje.

Például: +7 abszolútértéke +7, jelölés: $|+7| = +7$;
0 abszolútértéke 0, jelölés: $|0| = 0$;
–7 abszolútértéke +7, jelölés: $|-7| = -(-7) = +7$

FELADATOK

Gyakorló 2.03.–2.06.

60 *a)* Ábrázold számegyenesen a számokat *pirossal*, az ellentettjüket *kékkel*!



0; –5; –7; +3; +9; –10; +11

b) Írd fel növekvő sorrendben az előző egész számokat!

c) Írd fel az előző számok abszolútértékét!

Gyűjtőmunka

Gyálarét Magyarország legalacsonyabb földrajzi pontja.

Határozzuk meg Magyarország néhány nevezetes földrajzi helye **legalacsonyabb** pontjának a tengerszinthez viszonyított helyzetét. A táblázatban megadjuk a föld- (illetve víz-) felszín tengerszint feletti magasságát, majd a nevezetesség ehhez viszonyított mélységét.

Földrajzi hely	Nevezetesség	Tengerszint felett	Mélység	Tényleges helyzet
Kővágószőlős	Legmélyebb bánya	+228 m	–1400 m	
Gyálarét	Legalacsonyabb pont	+76 m	0 m	
Hévíz	Legmélyebb tó	+109 m	–38 m	
István-lápa	Legmélyebb barlang	+562 m	–253 m	

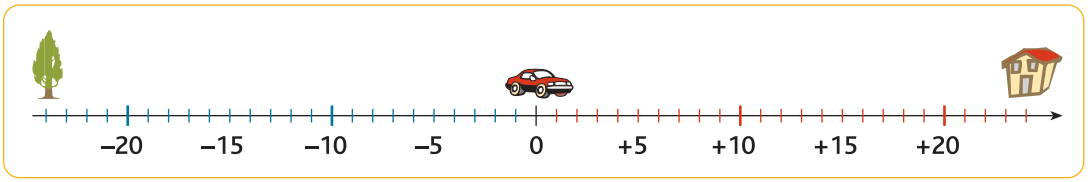
EGÉSZ SZÁMOK ÖSSZEADÁSA, KIVONÁSA

FELADATOK

61 Írd le a matematika nyelvén a mozgások eredményét!

(+ pozitív irány, – negatív irány)

A következő feladatokban a kis autó mindig a 0 pontból indul. Hová érkezik?



a) A kis autó a ház felé néz, előrehalad 8 egységet, majd a fa felé fordulva szintén előrehalad 5 egységet.
A kis autó a ház felé néz, előrehalad 8 egységet, majd tolat 5 egységet.

b) A kis autó a ház felé néz, előrehalad 8 egységet, majd a fa felé fordulva szintén előrehalad 15 egységet.
A kis autó a ház felé néz, előrehalad 8 egységet, majd tolat 15 egységet.

c) A kis autó a fa felé néz, előrehalad 7 egységet, majd tolat 13 egységet.
A kis autó a fa felé néz, előrehalad 7 egységet, majd a ház felé fordulva szintén előrehalad 13 egységet.

d) A kis autó a fa felé néz, előrehalad 4 egységet, majd a ház felé fordulva tolat 6 egységet.
A kis autó a fa felé néz, előrehalad 4 egységet, majd újra 6 egységet.

e) A kis autó a ház felé néz, előrehalad 5 egységet, majd a fa felé fordulva tolat 5 egységet.
A kis autó a ház felé néz, előrehalad 5 egységet, majd újra 5 egységet.

Például:

(+8) + (–5) = ☐

(+8) – (+5) = ☐

Megállapodás: Amerre a kis autó néz, az adja a szám előjelét (+ pozitív irány, – negatív irány).
Ha előre halad a kis autó, akkor összeadásról, ha tolat, akkor kivonásról van szó.

---

62 Írd le a matematika nyelvén a következő feladatokat! (A „vagyon” mindig készpénzből és adósságcédulából áll.) Mennyi lesz a vagyona

a) Abigélnek, ha +12 tallér „vagyona” van, és elkölt 12 tallért;

b) Bendegúznak, ha +12 tallér „vagyona” van, és elkölt 22 tallért;

c) Cintiának, ha +12 tallér „vagyona” van, és „szerez” 22 tallér adósságot;

d) Domonkosnak, ha –12 tallér „vagyona” van, és kap 12 tallért;

e) Etának, ha –12 tallér „vagyona” van, és átvállalnak tőle 12 tallérról szóló adósságcédulát;

f) Fruzsinának, ha –12 tallér „vagyona” van, és elkölt 12 tallért;

g) Gerhardnak, ha –12 tallér „vagyona” van, és elkölt 10 tallért?

Például:

+12 + (–22) = ☐

–12 + (+12) = ☐

–12 – (–12) = ☐

Gyakorló
2.07–2.13.;
Feladatgyűjtemény
2.1.10–13.,
2.2.20–21.

---

63 Folytasd a sorozatot még öt elemmel!

a) Az előző elemhez mindig +5-öt adunk: –15; ☐; ☐; ☐; ☐; ☐

b) Az előző elemből mindig +5-öt kivonunk: +10; ☐; ☐; ☐; ☐; ☐

c) Az előző elemből mindig +3-at kivonunk: –15; ☐; ☐; ☐; ☐; ☐

d) Az előző elemhez mindig –4-et adunk: +10; ☐; ☐; ☐; ☐; ☐

e) Az előző elemből mindig –4-et kivonunk: +10; ☐; ☐; ☐; ☐; ☐

2. példa

Három kiindulási helyzetben vizsgáljuk, hogyan változik a gyerekek „vagyona”.

Mindhármuk „vagyona” adósságcédulából és készpénzből áll.

❶ Anna vagyona: ❷ Bea vagyona: ❸ Csilla vagyona:



Jelmagyarázat:
●; ●: 1 Ft készpénz, +1 Ft
■; ■: 1 Ft adósság, −1 Ft

Megállapodás

Az egész számok hozzáadását és kivonását úgy értelmezzük, hogy a természetes számokra tanult összefüggések érvényben maradjanak.

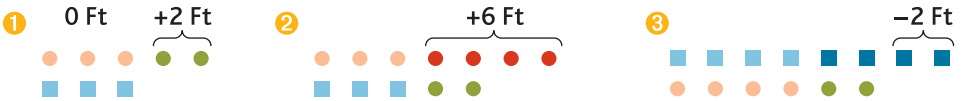
Ha a gyerekek 0 Ft-ot kapnak, akkor nem változik a „vagyonuk”.

$0 + 0 = 0$; $(+4) + 0 = +4$; $(-4) + 0 = -4$

Bármely n egész számhoz 0-t adva az eredmény n lesz.

A **0 hozzáadása** az egész számok körében is ugyanazt jelenti, mint a természetes számok körében.

Minden gyerek 2 Ft készpénzt kap. Mennyi lesz így a „vagyonuk”?



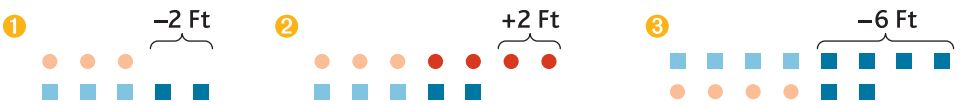
Mindhárom gyerek „vagyona” **2 Ft-tal nő**:

$0 + (+2) = +2$; $(+4) + (+2) = +6$; $(-4) + (+2) = -2$

Ha 2-vel növeljük a hozzáadandót (0 helyett +2-t adunk hozzá), akkor 2-vel nő az összeg.

Pozitív számot úgy **adunk hozzá** egy számhoz, hogy **növeljük** a számot a hozzáadandó abszolútértékével.

Minden gyerek 2 Ft-tal növeli az adósságát. Mennyi lesz így a „vagyonuk”?



Mindhárom gyerek „vagyona” **2 Ft-tal csökken**:

$0 + (-2) = -2$; $(+4) + (-2) = +2$; $(-4) + (-2) = -6$

Ha 2-vel csökkentjük a hozzáadandót (0 helyett −2-t adunk hozzá), akkor 2-vel csökken az összeg.

Negatív számot úgy **adunk hozzá** egy számhoz, hogy **csökkentjük** a számot a hozzáadandó abszolútértékével.

Ha a gyerekektől 0 Ft-ot vesznek el, akkor nem változik a „vagyonuk”.

$0 - 0 = 0$; $(+4) - 0 = +4$; $(-4) - 0 = -4$

Ha bármely n egész számból 0-át kivonunk, az eredmény n lesz.

A **0 kivonása** az egész számok körében is ugyanazt jelenti, mint a természetes számok körében.

Minden gyerek elkölt 2 Ft-ot. Mennyi lesz így a „vagyonuk”?



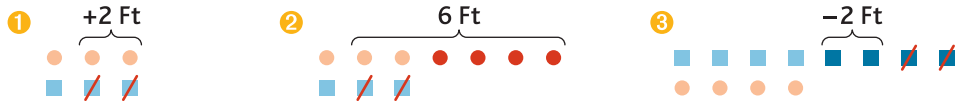
Mindhárom gyerek „vagyona” **2 Ft-tal csökken**:

$0 - (+2) = -2$; $(+4) - (+2) = +2$; $(-4) - (+2) = -6$

Ha 2-vel növeljük a kivonandót (0 helyett +2-t vonunk ki), akkor 2-vel csökken a különbség.

Pozitív számot úgy **vonunk ki** egy számból, hogy **csökkentjük** a számot a kivonandó abszolútértékével.

Minden gyerektől átvállalnak 2 Ft adósságot. Mennyi lesz így a „vagyonuk”?



Mindhárom gyerek „vagyona” **2 Ft-tal nő**:

$0 - (-2) = +2$; $(+4) - (-2) = +6$; $(-4) - (-2) = -2$

Ha csökkentjük a kivonandót (0 helyett –2-t vonunk ki), akkor nő a különbség.

Negatív számot úgy **vonunk ki** egy számból, hogy **növeljük** a számot a kivonandó abszolútértékével.

A fenti értelmezés alapján **az egész számok összeadása és kivonása közötti összefüggés továbbra is érvényben marad**. Például:

$(+10) - (-6) = +16$, mert $(+16) + (-6) = +10$

Az összeg tagjai az egész számok körében is

felcserélhetők: $(+12) + (-16) = (-16) + (+12)$,

csoportosíthatók: $[(+10) + (-16)] + (+16) = (+10) + [(-16) + (+16)] = +10$

FELADAT

64 Gyakorold az összeadást, kivonást!

a) $(+25) + (-18)$; *b)* $(+15) + (-23)$; *c)* $(+13) + (-13)$;
d) $(-15) + (-33)$; *e)* $(-15) + (+33)$; *f)* $(-15) + (+13)$;
g) $(+18) - (+10)$; *h)* $(+11) - (+17)$; *i)* $(-13) - (+13)$;
j) $(+15) - (-13)$; *k)* $(-19) - (-13)$; *l)* $(-13) - (-19)$

Szükség esetén használj eszközt!

Fejtörő!

A Duna vize a Margit-sziget alatt északról dél felé folyik, és másodpercenként 15 dm-t halad előre, tekintsük ezt +15 dm-nek.

Egy vadkacsa úszik a Dunán, és a vízhez viszonyítva másodpercenként 6 dm-t tesz meg. Írd ezt le a matematika nyelvén, ha a kacsa észak felé úszik, illetve ha dél felé úszik!

Hány decimétert tesz meg másodpercenként a parthoz viszonyítva, ha észak felé úszik, illetve ha dél felé úszik? Írd le a matematika nyelvén!



Az előzőkben megfigyelhettük:

Negatív szám hozzáadását helyettesíthetjük ellentettjének kivonásával:

$(+10) + (-16) = (+10) - (+16) = 10 - 16 = -6$

$(-15) + (-20) = (-15) - (+20) = -15 - 20 = -35$

Negatív szám kivonását helyettesíthetjük ellentettjének hozzáadásával:

$(+20) - (-10) = (+20) + (+10) = 20 + 10 = 30$

$(-25) - (-12) = (-25) + (+12) = -25 + 12 = -13$

A fenti összefüggések felismerése után nem szükséges megkülönböztetnünk az összeadás jelét és a plusz előjelet, illetve a kivonás jelét és a mínusz előjelet.

FELADATOK

65 A hiányzó számok pótlása után számítsd ki az eredményt!

Például:
$(-7) - (+6) = -7 - 6 = -13$

Gyakorló
2.14–2.18.

a) $(+5) + (-3) = 5 - \square = \square$;
b) $(-4) + (+9) = -4 + \square = \square$;
c) $(+8) + (-8) = 8 - \square = \square$;
d) $(-10) + (+3) = -10 + \square = \square$;
e) $(+9) - (+5) = 9 - \square = \square$;
f) $(-7) - (+6) = -7 - \square = \square$;
g) $(+4) - (+7) = 4 - \square = \square$;
h) $(-6) - (+6) = -6 - \square = \square$;
i) $(+5) - (-3) = 5 + \square = \square$;
j) $(-8) - (-5) = -8 + \square = \square$

Mivel a kivonás helyettesíthető a kivonandó ellentettjének hozzáadásával, alkalmazhatjuk az összeg tagjainak felcserélhetőségéről és csoportosíthatóságáról tanultakat.

66 Írd egyszerűbb alakba, majd határozd meg az eredményt!

A többtagú műveletsorokat könnyebben kiszámítható formában írhatjuk föl.

Például: $(+24) + (-28) - (-26) - (+12) = 24 - 28 + 26 - 12 = 50 - 40 = 10$

a) $(+7) + (-5) - (+2) - (-9)$;
b) $(-8) - (-6) - (-10) - (+10)$;
c) $(+17) + (-15) - (+2) - (-15)$;
d) $(+72) - (-50) + (-20) - (+12)$;
e) $(-25) - (-25) - (+5) + (-15)$;
f) $(+32) - (+16) - (-18) + (-24)$;
g) $(-35) - (-15) + (-20) - (+40)$;
h) $(+48) - (+48) - 0 + (-50)$

67 Mely egész számok írhatók a keretek helyébe úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $15 + \square = 28$;
b) $25 + \square = 18$;
c) $10 + \square = \square + 10$;
d) $13 - \square = 8$;
e) $15 - \square = 28$;
f) $20 - \square = \square - 10$;
g) $\square - 12 = -8$;
h) $\square - 7 = -12$;
i) $\square + 5 = \square - 1$

Írd le a kis autó mozgását a matematika nyelvén! Legyen a keleti irány pozitív, az előre haladás hozzáadás.

Ábel egy távirányításos kis autóval játszik. Egy jeltől indulva az autó kelet felé *előre halad* 15 m-t, majd keletre nézve *tolat* 25 m-t. Újra kelet felé *előre halad* 20 m-t, végül nyugatra fordulva *előre halad* 30 m-t.

Mekkora távolságra áll a kis autó a jeltől? Merre kell fordítani, ha Ábel előre haladva szeretné a jelhez visszavezetni a kis autót?

EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA EGÉSZ SZÁMMAL

3. példa

Zénó vagyona éppen 0 tallér, amely adósságcédulákból és készpénzből áll.

Az 1 tallér jele: ●; az 1 tallér adósság jele: ■

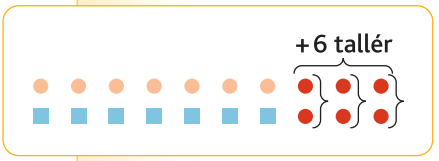
Vizsgáljuk meg Zénó vagyonának különböző változásait.

a) Mennyi lenne Zénó vagyona, ha kapna 2 tallért 3-szor egymás után?

Összegalakban: $(+2) + (+2) + (+2) = +6$

Szorzatalakban: $(+3) \cdot (+2) = +6$

Zénó vagyona 6 tallér lenne.

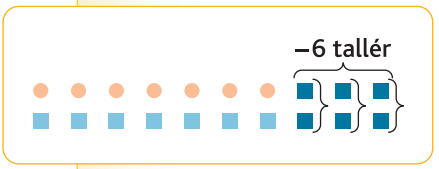


b) Mennyi lenne Zénó vagyona, ha 2-2 tallér veszteség miatt adósságcédulát kapna 3-szor egymás után?

Összegalakban: $(-2) + (-2) + (-2) = -6$

Szorzatalakban: $(+3) \cdot (-2) = -6$

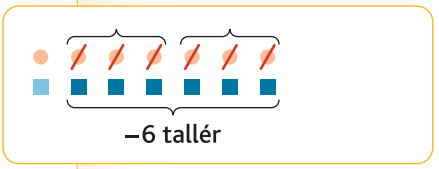
Zénó „vagyona” 6 tallérról szóló adósságcédula lenne.



c) Mennyi lenne Zénó vagyona, ha elvennének tőle 3 tallért 2-szer egymás után? Most nem ismételt összeadásról van szó, de kézenfekvőnek látszik a következő szorzat értelmezése:

$$(-2) \cdot (+3) = -6$$

Zénó „vagyona” 6 tallérról szóló adósságcédula lenne.

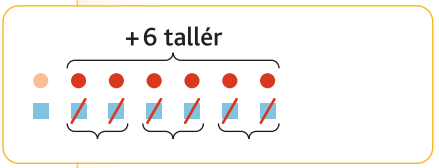


d) Mennyi lenne Zénó vagyona, ha átvennének tőle 2 adósságcédulát 3-szor egymás után?

Értelmezhetjük a következő szorzatot:

$$(-3) \cdot (-2) = +6$$

Zénó „vagyona” 6 tallér lenne.



Az új értelmezés szerint is **felcserélhető** a szorzat két tényezője:

$$(-2) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-2)$$

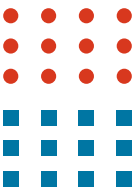
Hasonlítsd össze a b) és a c) példa megoldását!

Ha a szorzó pozitív természetes szám, akkor a szorzást ismételt összeadásként értelmezhetjük, bármilyen szám is a szorzandó. Például:

$$(+4) \cdot (+3) = \underbrace{(+3) + (+3) + (+3) + (+3)}_{4 \text{ tag}} = +12$$

$$(+4) \cdot (-3) = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + (-3)}_{4 \text{ tag}} = -12$$

$$(+4) \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + 0}_{4 \text{ tag}} = 0$$



Ha a szorzó nem pozitív egész szám, akkor más összefüggésből kell kiindulni.

A pozitív egész számok körében a szorzat tényezői felcserélhetők.

Úgy értelmezzük a szorzást az egész számok körében, hogy a tényezők felcserélhetők maradjanak.

$$(+3) \cdot (+4) = +12 = (+4) \cdot (+3)$$
$$0 \cdot (+4) = 0 = (+4) \cdot 0$$
$$(-3) \cdot (+4) = -12 = (+4) \cdot (-3)$$

4. példa

Hogyan változik a szorzat, ha a szorzandó pozitív szám, és a szorzót 1-gyel, 2-vel, 3-mal stb. csökkentjük? Induljunk ki a $(+3) \cdot (+4)$ szorzatból.

A szorzandó és a szorzó pozitív egész szám. Ha a pozitív szorzót minden lépésben 1-gyel csökkentjük, akkor a szorzat minden lépésben 4-gyel csökken.

Értelmezzük úgy a szorzást, hogy a szorzat 0 szorzó és negatív egész szám szorzók esetén is így változzék.

Figyeld meg! A szorzat abszolútértékét megkapjuk, ha a tényezők abszolútértékét összeszorozzuk.

$(+3) \cdot (+4) = +12$
$(+2) \cdot (+4) = +8$
$(+1) \cdot (+4) = +4$
$0 \cdot (+4) = 0$
$(-1) \cdot (+4) = -4$
$(-2) \cdot (+4) = -8$
$(-3) \cdot (+4) = -12$

5. példa

Hogyan változik a szorzat, ha a szorzandó negatív szám, és a szorzót 1-gyel, 2-vel, 3-mal stb. csökkentjük? Induljunk ki a $(+3) \cdot (-4)$ szorzatból.

A szorzandó negatív szám. Ha a pozitív egész szám szorzót 1-gyel, 2-vel, 3-mal stb. csökkentjük, akkor a szorzatból lépésenként -4-et (4 adósságcédulát) veszünk el, ezért a szorzat lépésenként 4-gyel nő.

Értelmezzük úgy a szorzást, hogy a szorzat 0 szorzó és negatív egész szám szorzók esetén is így változzék.

A szorzat abszolútértéke itt is megegyezik a tényezők abszolútértékének szorzatával.

$(+3) \cdot (-4) = -12$
$(+2) \cdot (-4) = -8$
$(+1) \cdot (-4) = -4$
$0 \cdot (-4) = 0$
$(-1) \cdot (-4) = +4$
$(-2) \cdot (-4) = +8$
$(-3) \cdot (-4) = +12$

	Pozitív szám	0	Negatív szám
Pozitív szám	Pozitív szám	0	Negatív szám
0	0	0	0
Negatív szám	Negatív szám	0	Pozitív szám

Értelmezés

Az egész számok szorzásának „szabálya”:

Pozitív számszor **pozitív** szám – a szorzat **pozitív** szám.

Pozitív számszor **negatív** szám – a szorzat **negatív** szám.

Negatív számszor **pozitív** szám – a szorzat **negatív** szám.

Negatív számszor **negatív** szám – a szorzat **pozitív** szám.

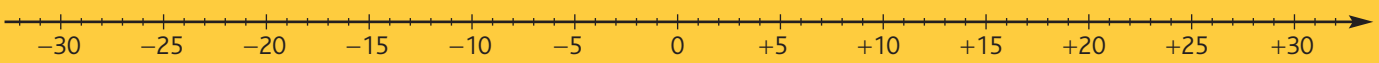
Nulla szorozva bármely számmal – a szorzat **nulla**.

Bármely szám **nullával** szorozva – a szorzat **nulla**.

A szorzat abszolútértéke egyenlő a tényezők abszolútértékének szorzatával.

Fejtörő!

Bolha ugrál a számegyenes mentén. Másodpercenként -4-et (negatív irányba 4-et) ugrik. Hol volt 6 másodperccel ezelőtt, ha most a -8-on áll?



Karikázd be a helyes egyenlet betűjelét! Írd be az eredményt!

Az alábbiak közül melyik egyenlettel számítható ki a helyes válasz?

A: $8 + (+6) \cdot (-4) =$ ☐ ; **B:** $-8 - (-6) \cdot (-4) =$ ☐ ; **C:** $-8 + (-6) \cdot (-4) =$ ☐

FELADATOK

68 A szorzat változásait alkalmazva töltsd ki a táblázatokat!

a) Legyen $y = (+2) \cdot x$

x	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
y													

b) Legyen $y = (+3) \cdot x$

x	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
y													

c) Legyen $y = (-2) \cdot x$

x	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
y													

d) Legyen $y = (-3) \cdot x$

x	+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
y													

---

69 Gyakorold a szorzást!

a) $(+5) \cdot (+200)$; *b)* $(+40) \cdot (-25)$; *c)* $(-2000) \cdot (+5)$;
d) $(-8) \cdot (+250)$; *e)* $(-50) \cdot (-60)$; *f)* $(+5000) \cdot (-8)$;
g) $(-4) \cdot (-600)$; *h)* $(-80) \cdot (+70)$; *i)* $(-4000) \cdot (-3)$;
j) $(+6) \cdot (-500)$; *k)* $(-25) \cdot (-20)$; *l)* $(+3000) \cdot (+6)$;
m) $0 \cdot (+1350)$; *n)* $0 \cdot (-2320)$; *o)* $(-10\,000) \cdot 0$

Gyakorló
2.19–2.20., 2.22.

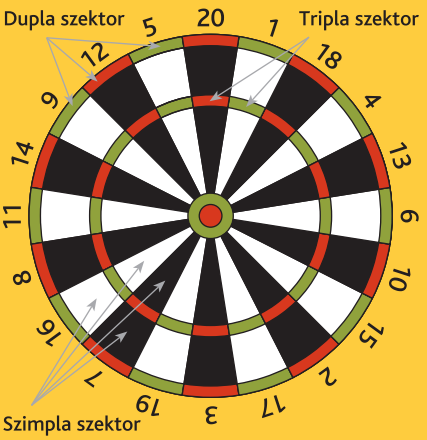
---

70 Értelmezzük a többtényezős szorzatot!

a) $(+5) \cdot (-4) \cdot (+50)$; $(-8) \cdot (-5) \cdot (+10)$; $(-15) \cdot (-4) \cdot (+20) \cdot (-5)$
b) $(-4) \cdot (-5) \cdot (-4)$; $(-9) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-6)$; $(+5) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (+4) \cdot (-5)$
c) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$; $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$
d) $(-5) \cdot (-4) \cdot 0$; $(-6) \cdot 0 \cdot (-9) \cdot (-6)$; $(-5) \cdot (-9) \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-7)$
e) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$; $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$; $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

A szorzás balról jobbra haladva is elvégezhető. Ennek alapján állapítsd meg, hogy mikor lesz pozitív, és mikor negatív a többtényezős szorzat előjele!

A Darts játékban nyilakkal dobnak egy kör alakú céltábla különböző pontértékű szektoraira. A táblán 1-től 20-ig minden érték, ezek duplája és triplája dobható, illetve a tábla közepén lévő zöld körgyűrűbe találva 25, a piros körbe (a „Bull”-ba) dobva ennek duplája, 50 pont szerezhető. A játék egyik típusában mindenki 501 pontról indul, és 9 dobás értékét levonogatva kell 0-ig jutni úgy, hogy az utolsó dobás dupla kell, hogy legyen (duplának számít az 50 is).



Egy lehetséges jó dobássorozat (T = tripla, D = dupla):
T20, T20, T20, T20, T20, T20, T17, T18, D18, azaz
$501 - 6 \cdot (3 \cdot 20) - 3 \cdot 17 - 3 \cdot 18 - 2 \cdot 18 = 0$

a) Keress olyan dobássorozatokat, amelyek hat darab T20-szal kezdődnek!
b) Kilenc triplával el lehet-e érni a 0-t? (Tekintsünk el a befejező dupla szabálytól.)

Írd fel a matematika nyelvén is a dobásokat!

Ebben a fejezetben olyan osztásokat végzünk, amelyekben az osztandóban maradék nélkül megvan az osztó. Az osztandó, az osztó és a hányados is egész szám.

EGÉSZ SZÁMOK OSZTÁSA EGÉSZ SZÁMMAL

FELADAT

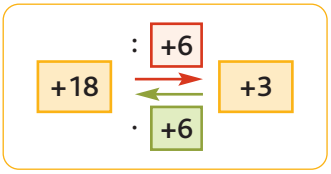
71 Mely egész számok írhatók a keretek helyébe?

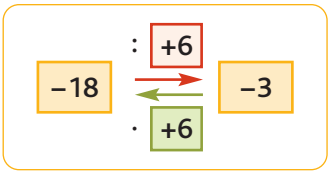
a) $\square \cdot (+15) = +75$; $(+20) \cdot \square = +140$; $\square \cdot (+10) = 0$

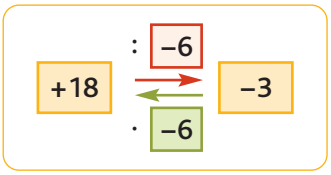
b) $(-5) \cdot \square = -60$; $(-8) \cdot \square = +200$; $(+12) \cdot \square = -72$

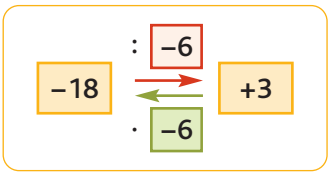
c) $\square \cdot (+10) = -70$; $\square \cdot (-100) = -5600$; $\square \cdot (-100) = 7000$

d) $\square \cdot 0 = 0$; $(-50) \cdot \square = 0$; $\square \cdot 0 = -650$









A pozitív számok körében a pozitív egész számmal való osztást a szorzás fordított műveleteként értelmeztük:

$(+18) : (+6) = (+3)$, mert $(+3) \cdot (+6) = +18$

Ugyanígy értelmezhetjük az osztást, ha az osztandó tetszőleges egész szám, az osztó pedig nullától különböző egész szám:

$(-18) : (+6) = (-3)$, mert $(-3) \cdot (+6) = -18$

$(+18) : (-6) = (-3)$, mert $(-3) \cdot (-6) = +18$

$(-18) : (-6) = (+3)$, mert $(+3) \cdot (-6) = -18$

Bármely számot 0-val megszorozva 0-át kapunk eredményül.

Ha az osztandó nulla, és az osztó nem nulla, akkor a hányados nulla:

$0 : 15 = 0$, mert $0 \cdot 15 = 0$

Ha az osztó 0, akkor a hányadost nem értelmezhetjük.

Például: $15 : 0 = \square$ A $\square$ helyébe egy szám sem írható, mert a $\square \cdot 0 = 15$ egyenletnek nincs megoldása.

$0 : 0 = \square$ A $\square$ helyébe bármely szám beírható lenne, mert a $\square \cdot 0 = 0$ egyenlet igazsághalmaza az alaphalmaz.

Fejtörő!

Karikázd be a helyes egyenlet betűjelét. Írd be az eredményt!

Egy bolha ugrál a számegyenes mentén. Minden másodpercben +4-et ugrik. Mikor volt a −28-as ponton, ha most a 0-nál áll?

Az alábbiak közül melyik egyenlettel számítható ki a helyes válasz?

A: $(-28) : (+4) = \square$; **B:** $(-28) : (-4) = \square$; **C:** $(-28) \cdot (-4) = \square$

Értelmezés

Az osztó sohasem lehet nulla.

Ha az osztandó és az osztó

előjele megegyezik, akkor a hányados előjele pozitív;

előjele különbözik, akkor a hányados előjele negatív.

A hányados abszolútértékét úgy kapjuk, hogy az osztandó abszolútértékét elosztjuk az osztó abszolútértékével.

Ha az osztandó nulla, akkor a hányados is nulla.

AZ OSZTANDÓ \ AZ OSZTÓ	Pozitív szám	0	Negatív szám
Pozitív szám	Pozitív szám	NINCS ÉRTELMEZVE	Negatív szám
0	0		0
Negatív szám	Negatív szám		Pozitív szám

6. példa

Számítsuk ki a következő műveletsor eredményét!

$(-550) - (-35) \cdot (+40) + (-5000) : (-20) =$

Tervezzük meg a műveletek sorrendjét!

$$(-550) - \underset{-1400}{\underbrace{(-35) \cdot (+40)}} + \underset{+250}{\underbrace{(-5000) : (-20)}} = (-550) - (-1400) + (+250) =$$

(3) (1) (4) (2)

$-550 + 1400 + 250 = 1100$

Ügyeltél a helyes műveleti sorrendre?

FELADATOK

72 Gyakorold az osztást! Ellenőrizd az eredményt!

a) $(+300) : (+6)$; *b)* $(+48\,000) : (-100)$; *c)* $(-6400) : (-80)$;

d) $(-240) : (+8)$; *e)* $(-56\,000) : (+1000)$; *f)* $(+3600) : (-90)$

73 Számítsd ki kétféleképpen (ha lehet) az eredményt!

a) $(25 - 10) \cdot (-8)$; *b)* $(-100) \cdot (16 - 51)$; *c)* $(45 - 15) \cdot (-200)$;

d) $(-60 + 5) \cdot (+3)$; *e)* $(+1000) \cdot (-8 + 31)$; *f)* $(-31 + 31) \cdot (-550)$;

g) $(-72 - 36) : (-6)$; *h)* $(-1000) : (-10 - 40)$; *i)* $(800 - 200) : (-40)$;

j) $(48 - 60) : (+4)$; *k)* $(+5000) : (-25 + 25)$; *l)* $(-60 + 60) : (-30)$

Egy összeg (különbség) egy számmal tagonként is szorozható vagy osztható.

Osztható-e egy szám egy összeggel tagonként?

$30 : (2 + 3) \neq 30 : 2 + 30 : 3$

74 Tervezd meg a műveleti sorrendet, számítsd ki az eredményt!

a) $-600 + (-2500) : (+50)$; *b)* $50 \cdot (-200) - 1600 - (-3000) : (-100)$;

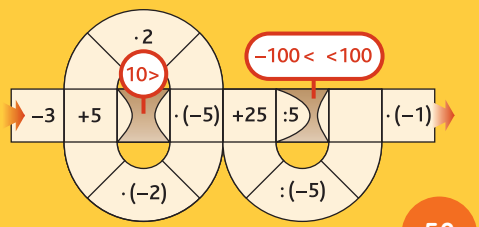
c) $1300 - (-30) \cdot (-100)$; *d)* $-7200 : (-60) + 840 - 250 \cdot (-40)$;

e) $-20 \cdot (-80) - (-1) \cdot (-5)$; *f)* $-300 + (-80) \cdot (+25) - (-60) \cdot (+20)$

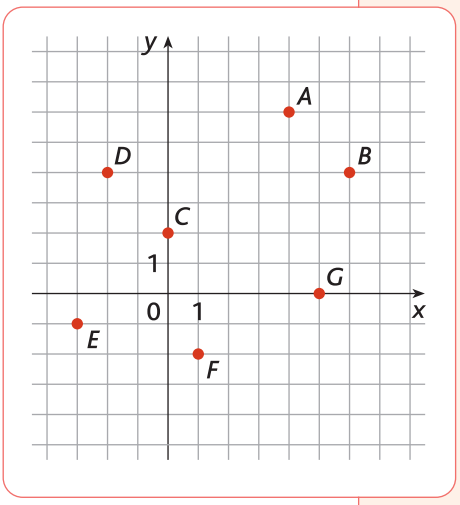
Gyakorló
2.21., 2.23–2.26., 2.28–2.30., 2.36.;
Feladatgyűjtemény
2.2.22–36.

10-zel indulva „haladj át” az itt látható ábrán, minden mezőn az ott látható művelet elvégzésével. Az alagutakon csak a táblákon látható feltételeknek megfelelve hajthatsz át. Ha többfelé is mehetsz, dönts! Melyik útvonalon haladva jutsz ki a legnagyobb számmal?

Írd le az egyes útvonalakon történteket a matematika nyelvén!



DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER



Emlékeztető

A derékszögű koordináta-rendszer segítségével *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést* hozhatunk létre a sík pontjai és a rendezett számpárok között.

A síkon felveszünk két egymásra merőleges számegyenest úgy, hogy a nulla pontjukban illeszkedjenek egymásra. A két számegyenest ***x* tengelynek** és ***y* tengelynek** szokták nevezni. A tengelyek közös pontja a kezdőpont, idegen szóval **origó**.

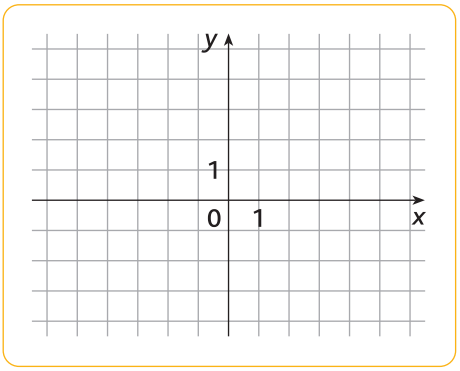
Ha egy pontból merőlegest húzunk az x tengelyre, akkor a metszéspontban leolvashatjuk a pont első **jelzőszámát**. Az első jelzőszám, az abszcissza megmutatja, hogy a pont (pozitív vagy negatív irányban) milyen távol van az y tengelytől.

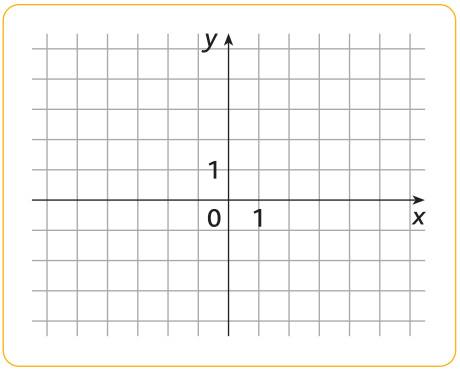
Ha egy pontból merőlegest húzunk az y tengelyre, akkor a metszéspontban leolvashatjuk a pont második jelzőszámát. A második jelzőszám, az ordináta megmutatja, hogy a pont (pozitív vagy negatív irányban) milyen távol van az x tengelytől.

Például az ábrán adott pontok jelzőszámai, a koordinátái:

$A(4; 6)$, $B(6; 4)$, $C(0; 2)$, $D(-2; 4)$, $E(-3; -1)$, $F(1; -2)$, $G(5; 0)$

Gyakorló 2.32.–2.35.





FELADATOK

75 *a)* Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat:

$A(-6; 4)$, $B(-6; 0)$, $C(3; 0)$, $D(3; 6)$, $E(0; 8)$

Kösd össze rendre az A, B, C, D, E pontot! Egészítsd ki az ábrát úgy, hogy egy tornyos épület rajzát kapd! Add meg az új „sarokpontok” jelzőszámait!

A pontok első jelzőszámát jelölje x, a második jelzőszámát y.

b) Ábrázold pirossal azokat a pontokat, amelyek jelzőszámai megegyeznek: $y = x$

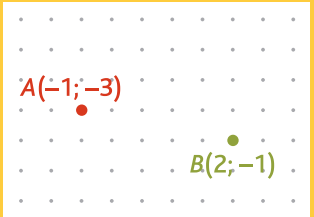
Ábrázold *kékkel* azokat a pontokat, amelyek második jelzőszáma ellentettje az első jelzőszámának: $y = -x$

Van-e olyan pont, amelyre mindkét összefüggés igaz?

c) Színezd *kékkel* azokat a pontokat, amelyeknek a második jelzőszáma kisebb az első jelzőszámánál: $y < x$

Színezd *pirossal* azokat a pontokat, amelyeknek a második jelzőszáma nagyobb az első jelzőszámánál: $y > x$

Jelöld *feketével* a többi pontot a koordináta-rendszerben! Milyen összefüggés igaz ezeknek a pontoknak a jelzőszámaira?



Egy derékszögű koordináta-rendszerben bejelöltünk két pontot. Utána töröltük a tengelyeket. Rajzold be a kitörölt koordináta-tengelyeket!

Vigyázz! A megszokotthoz képest elforgattuk a koordináta-rendszert.

AZ EGÉSZ SZÁMOKRÓL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE

FELADATOK

B32 Írd föl egyszerűbb alakban, majd határozd meg az eredményt!

a) (+7) – (+5) + (–2) – (–9);
b) (–8) – (–6) – (+10) + (–10);
c) (+17) – (+15) + (–2) – (–15);
d) (+72) – (–50) – (+20) + (–12);
e) (–25) – (–25) + (–5) – (+15);
f) (+32) + (–16) – (–18) – (+24);
g) (+2,7) – (–3,5) – (+2,75);
h) (+7) – (+5,3) + (–2,3) – (–2);
i) (–7,1) – (+3,2) – (–0,50);
j) (+1) – (+0,8) – (–5,7) + (–2,6);
k) (–5,3 + 2,7) – (3,6 – 0,4);
l) –(–4,5 – 3,5) + (–5,3 + 2 – 1,7);
m) –(3,3 – 3,7) – (2,7 + 1,3);
n) (–3,7 – 2,3) – (7,2 – 5 + 2,8)

Az egész számokra tanult műveleti eljárásokat alkalmazhatjuk a tizedestörtekre is.

B33 Írd föl zárójelek alkalmazásával a következő feladatokat, majd határozd meg az eredményt!

a) 6,4-ből kivonunk 1,2-nél 3-mal nagyobb számot.
b) 6,4-nél 3-mal nagyobb számból kivonunk 1,2-et.
c) 6,4-nél 3-mal nagyobb számból kivonunk 1,2-nél 3-mal többet.
d) 6,4-ből kivonunk 1,2-nél 3-mal kisebb számot.
e) 6,4-nél 1,2-del kisebb számot kivonunk a 3-ból.
f) 6,4-et kivonunk az 1,2-nél 3-mal kisebb számból.
g) 6,4-et kivonunk a 3-nál 1,2-del kisebb számból.

B34 Gyakorold a szorzást!

a) (–25) · (+4); (–2,5) · (+4); (+2,5) · (–4); (–2,5) · (–4);
b) (+15) · (–6); (+0,15) · (–6); (–1,5) · (–6); (–0,015) · (+6);
c) –546 · (–10 000); 369 · (–100 000); 5005 · 1 000 000;
d) –47,89 · (–10 000); –0,0045 · (+100); +0,405 · (–10 000)

Értelmezés

$(-2)^0 = +1$ **Minden nullától különböző szám nulladik hatványa 1.**

$(-2)^1 = -2$ **Minden szám első hatványa maga a szám.**

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

A negatív számok szorzásának szabályából következik, hogy
negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív,
negatív szám páratlan kitevőjű hatványa negatív.

A negatív számok hatványait ugyanúgy értelmezzük, mint a természetes számokéit (ha a kitevő természetes szám).

Egy negatív számnak mely hatványai lesznek negatívok és melyek pozitívok? Gondolj a negatív számok szorzásáról tanultakra!

Figyelempróba

Mennyi a harmadik legnagyobb negatív egész szám második legkisebb pozitív kitevőjű hatványának és a második legnagyobb negatív egész szám harmadik legkisebb pozitív kitevőjű hatványának összege?

Megállapodás

A négy alapműveletet és hatványozást tartalmazó műveletsorokban

❶ először a hatványozásokat, $156 - 16 \cdot 2^3 + 7000 : 10^2 =$

❷ ezután a szorzásokat és az osztásokat, $= 156 - 16 \cdot 8 + 7000 : 100 =$

❸ végül az összeadásokat és a kivonásokat végezzük el. $= 156 - 128 + 70 = 98$

A zárójelek módosíthatják a műveletek elvégzésének sorrendjét.

7. példa

Írjunk be az x helyére különböző egész számokat!

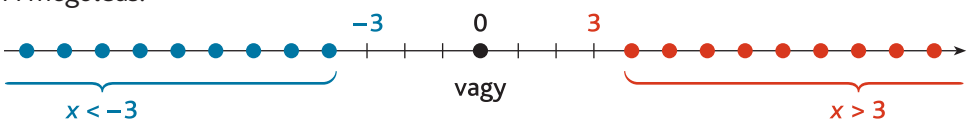
Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $|x| > 3$

Alaphalmaz az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$

Ábrázoljuk számegyenesen a megoldáshalmazt!

Mit mondhatunk a ki nem színezett pontokhoz tartozó számokról?

A megoldás:



FELADATOK

B35 Számítsd ki a hatványok értékét! Hogyan változik az előjel?

$(-3)^0$;	$(-3)^1$;	$(-3)^2$;	$(-3)^3$;	$(-3)^4$;	$(-3)^5$;	$(-3)^6$;
$(-1)^0$;	$(-1)^1$;	$(-1)^2$;	$(-1)^3$;	$(-1)^4$;	$(-1)^{57}$;	$(-1)^{684}$;
$(-10)^0$;	$(-10)^1$;	$(-10)^2$;	$(-10)^6$;	$(-10)^9$;	$(-10)^{12}$;	$(-10)^{15}$

B36 Figyelj a műveletek sorrendjére!

a) $15{,}6 + 13{,}4 : 4 - 2{,}5 \cdot 4$;

b) $14{,}55 : 75 - 0{,}000\,15 \cdot 1000$;

c) $22{,}5 \cdot 2^3 + 4{,}8 : 16 \cdot 10^2 - 10^2$;

d) $70 - 64 : 4^2 + 200 : 10^3 + 3 \cdot 25$

Gyakorló
2.27., 2.31.;
Feladatgyűjtemény
2.2.37.,
4.2.15., 4.2.17–30.

B37 *a)* Sorold fel azokat az egész számokat, amelyek abszolútértéke kisebb 5-nél! Ábrázold ezeket a számokat számegyenesen!

Miben különbözik a b) és c) egyenlőtlenség megoldáshalmaza?

b) Jelöld a számegyenesen az $|x| < 7$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát! Az alaphalmaz az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$

c) Jelöld számegyenesen az $|x| \leqq 7$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát! Az alaphalmaz: $\mathbb{Z}$

Fejtörő!

Folytasd a sorozatokat 5-5 taggal!

Két sorozat képzési szabálya a következő:

a: $1 \xrightarrow{\cdot(-1)} -1 \xrightarrow{\cdot(-2)} 2 \xrightarrow{\cdot(-1)} -2 \xrightarrow{\cdot(-2)} 4 \xrightarrow{\cdot(-1)} -4 \xrightarrow{\cdot(-2)} 8 \xrightarrow{\cdot(-1)} \ldots$

b: $1 \xrightarrow{\cdot(-1)} -1 \xrightarrow{\cdot 2} -2 \xrightarrow{\cdot(-1)} 2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot(-1)} -4 \xrightarrow{\cdot 2} -8 \xrightarrow{\cdot(-1)} \ldots$

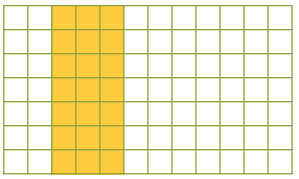
A sorozatok hányadik tagjai fognak megegyezni? Miért?

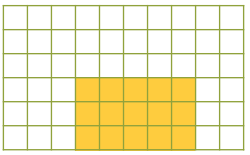
MIT TANULTUNK A TÖRTEKRŐL?

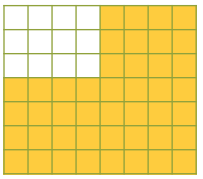
A TÖRTEK ÉRTELMEZÉSE

FELADATOK

76 A téglalap területének mekkora részét színeztük ki? Írd föl többféleképp!

a) 

b) 

c) 

---

77 Rajzolj 12 egység hosszú, 5 egység széles téglalapokat! Színezd ki a területük

a) $\frac{1}{4}$; *b)* $\frac{3}{5}$; *c)* $\frac{17}{30}$; *d)* $\frac{59}{60}$; *e)* $\frac{0}{6}$; *f)* $\frac{12}{12}$; *g)* $\frac{25}{12}$

részét!

---

78 Jelölj ki a négyzetrácsos füzetedben olyan téglalapokat, amelyeknek az oldalai 8 egység, illetve 10 egység hosszúak! Egy ilyen téglalap területét tekintsd egységnyinek! Színezz ki

a) $\frac{4}{5}$; *b)* $\frac{5}{4}$; *c)* $\frac{8}{20}$; *d)* $\frac{20}{8}$; *e)* $\frac{17}{10}$; *f)* 0,6; *g)* 1,2

egységnyi területet!

*A tört alakban írt számokat néha **közönséges törteknek** is nevezik, ha meg kívánják különböztetni őket a tizedestörtektől.*

---

79 1 kg lisztnek mennyi az

a) $\frac{1}{2}$ része, $\frac{2}{2}$ része, $\frac{9}{2}$ része; *b)* $\frac{1}{4}$ része, $\frac{3}{4}$ része, $\frac{4}{4}$ része;

c) $\frac{0}{5}$ része, $\frac{1}{5}$ része, $\frac{3}{5}$ része; *d)* $\frac{5}{5}$ része, $\frac{9}{5}$ része, $\frac{10}{5}$ része?

1 kg = ☐ dkg (dag)

1. példa

Ambrus felásta egységnyi (1 ár) területű kertjének 3 ötöd részét. Bernát a 3 egység (3 ár) területű kertje egyötöd részét ásta fel. Melyikük ásott fel nagyobb területet?

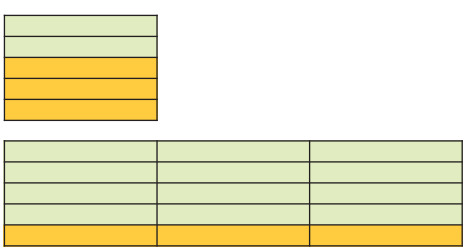
*Az **ár** ritkán használt terület-mértékegység.*
1 ár = 100 m²

Ambrus egységnyi területű kertjét 5 egyenlő részre osztotta, és ezekből az ötödrészekből felásott 3-at.

Így ásta fel a kert 3 ötöd részét.

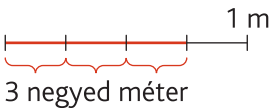
Bernát a 3 egység területű kertet 5 egyenlő részre osztotta, és így ásta fel a 3 egységnyi terület ötödrészét.

Mindkét gazda $\frac{3}{5}$ egység területet ásott fel.



Emlékeztető

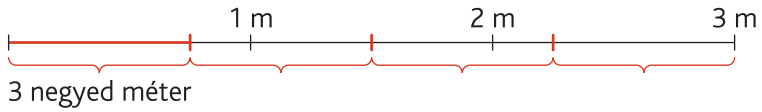
A törtet kétféleképpen értelmeztük.



3 negyed = $\frac{3}{4}$ ← számláló, törtvonal, nevező

Ha például egy egészet négy egyenlő részre osztunk, és a részekből 3-at veszünk, akkor 3 negyedet kapunk.

Ha 3 egésznek az egynegyed részét vesszük, akkor 3 negyedet kapunk.



3 negyed = $\frac{3}{4}$ ← osztandó, osztás jele, osztó

A törteket már az ókorban (Mezopotámiában, Kínában, Egyiptomban, a görög városállamokban stb.) több mint kétezer évvel ezelőtt ismerték a matematikusok. Az ókori Egyiptomban a $\frac{2}{3}$-on kívül csak olyan törtekkel számoltak, amelyeknek 1 volt a számlálójuk. A többi törtet ezek összegeként állították elő. Később a hinduk már úgy jelölték a törteket, mint mi, és ismerték a törtekkel való számolás szabályait is.

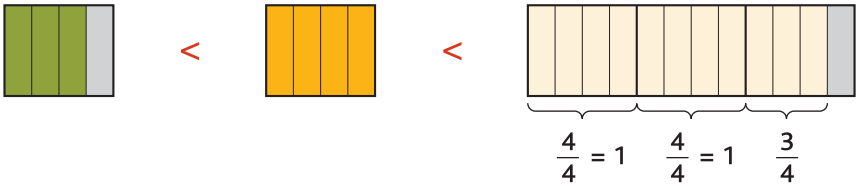
2. példa

Csaba $\frac{3}{4}$ hektáron vetett el borsót, 1 hektáron árpát és $\frac{11}{4}$ hektáron kukoricát.

Árpát vagy borsót vetett-e nagyobb területen?

Árpát vagy kukoricát vetett-e nagyobb területen?

Borsó: $\frac{3}{4}$ ha Árpa: 1 ha = $\frac{4}{4}$ ha Kukorica: $\frac{11}{4}$ ha



Mivel 1 ha = $\frac{4}{4}$ ha, $\frac{3}{4}$ ha < 1 ha < $\frac{11}{4}$ ha; $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$

Például:

$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$

Emlékeztető

Egy tört értéke (amikor a nevező pozitív szám),

1-nél nagyobb, ha a számlálója nagyobb, mint a nevezője,

1-nél kisebb, ha a számlálója kisebb, mint a nevezője,

1, ha a számlálója és a nevezője megegyezik.

Az 1-nél nagyobb törteket felírhatjuk egy egész szám és egy 1-nél kisebb törtszám összegeként, **vegyesszám** formájában.

Fejtörő!

Egy négyzetet darabolj fel 7 négyzetre! A darabolással kapott egy-egy négyzet területe mekkora része az eredeti négyzet területének?

Egy kocka alakú torta teteje és oldallapjai csokimázzal vannak bevonva. Legkevesebb vágással hogyan osztható el 9 gyerek között úgy, hogy mindegyikünknek ugyanannyi tészta, töltelék és csokimáz jusson?

FELADATOK

80 Képezd az összes olyan törtet, amelynek **számlálója** az $S = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, **nevezője** az $L = \{2; 4; 6; 8\}$ halmaznak az eleme! Válaszd ki közülük

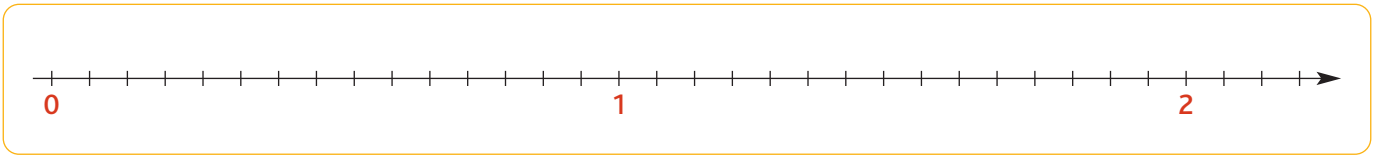
a) az 1-nél nagyobbakat; *b)* az 1-nél kisebbeket; *c)* az 1-gyel egyenlő értékűeket!

d) Képezd az összes olyan értelmezhető törtet is, amelynek számlálója az S, nevezője az $M = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ halmaznak az eleme!

◉ *Mivel nem lehet egyenlő egy tört nevezője?*

81 Ábrázold számegyenesen a következő törteket! Melyik kisebb 1-nél, melyik nagyobb 1-nél, melyik egyenlő 1-gyel?

$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{18}{15}$; $\frac{25}{15}$



82 *a)* Írd föl a következő törtek közül az 1-nél nagyobbakat vegyesszámalakban!

$\frac{54}{10}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{24}{5}$; $\frac{28}{7}$; $\frac{35}{56}$; $\frac{85}{25}$

◉ *Például*

$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

b) Írd föl a következő vegyesszámokat törtalakban!

$4\frac{3}{10}$; $2\frac{3}{100}$; $3\frac{8}{25}$; $10\frac{3}{8}$; $1\frac{3}{5}$; $5\frac{4}{5}$; $1\frac{2}{3}$

◉ *Például*

$5\frac{4}{5} = \frac{25}{5} + \frac{4}{5} = \frac{29}{5}$

83 Válaszolj a következő kérdésekre, és ábrázold a választ! Írd le számokkal is!

a) Hány kettedből tudsz előállítani két egészet, öt egészet, hét egészet?

b) Hány harmadból tudsz előállítani négy egészet, tíz egészet?

c) Hány ötödből lehet előállítani egy egész négy ötödöt?

d) Hány hatodból lehet előállítani négy egész öt hatodot?

e) Hány nyolcadból lehet előállítani egy egész egy kettedet?

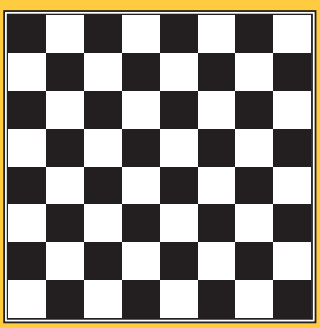
f) Hány tizedből lehet előállítani nulla egész nyolc tizedet?

g) Hány tizenkettedből lehet előállítani öt egész öt hatodot?

Gyakorló
3.01–3.06.;
Feladatgyűjtemény
3.1.06–12.

Fejtörő!

Egy sakktábla minden mezőjére tegyünk egy-egy fekete, fehér vagy piros korongot. Induljunk a bal felső fekete mezőről, balról jobbra haladva, a sor végén a következő sor elejéről folytatva.
A korongokat a következő sorrendben tegyük le: fekete, fehér, piros, fekete, fehér, piros és így tovább. A sakktábla mezőinek hányad részén lesz a mező színével megegyező színű korong?



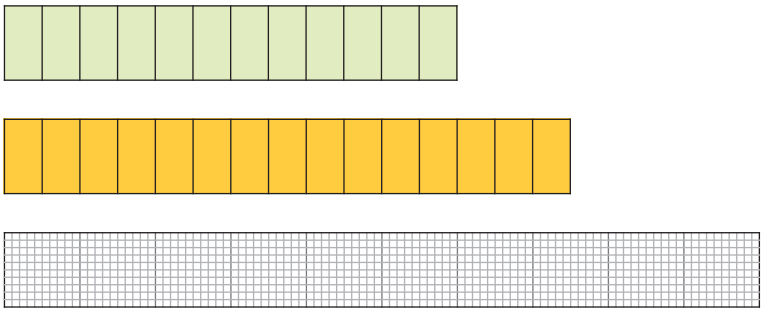
Hány óra

másfél nap ____ ; **harmadfél** nap ____ ; **negyedfél** nap ____ ?

EGYSZERŰSÍTÉS, BŐVÍTÉS

FELADAT

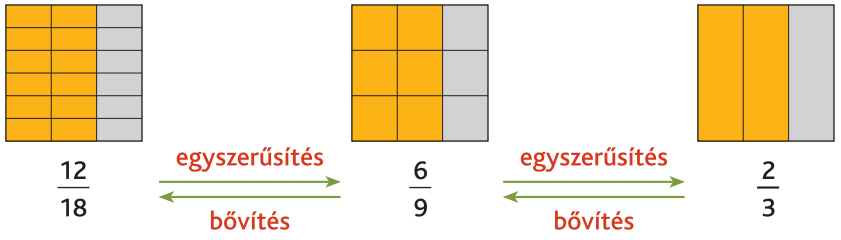
84 Válaszolj a következő kérdésekre, és ábrával szemléltesd válaszod!



a) Hány tizenketted van egy egészben?
b) Hány tizenketted van egy negyedben?
c) Hány tizenketted van egy harmadban?
d) Hány tizenötöd van egy ötödben?
e) Hány tizenötöd van három ötödben?
f) Hány tizenötöd van hét ötödben?
g) Hány század van öt tizedben; két egész öt tizedben?

3. példa

Nagyi a két unokája számára minden második napon egy tepsi süteményt süt. Kedden az unokák a sütemény $\frac{12}{18}$ részét, csütörtökön a sütemény $\frac{6}{9}$ részét, szombaton a $\frac{2}{3}$ részét ették meg. Hasonlítsuk össze, hogy a különböző napokon a sütemény mekkora részét fogyasztották el.



Mindhárom napon a sütemény ugyanakkora részét fogyasztották el, csupán más-más törtrészek segítségével fejeztük ki ezt a törtrészt:

Egyszerűsítés: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Bővítés: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

Emlékeztető

A törtet egyszerűsítjük, ha a törtet nagyobb törtrészekből állítjuk elő.

Például a harmad nagyobb törtrész, mint a kilenced, mert az egészet kevesebb egyenlő részre osztjuk.

A törtet bővítjük, ha a törtet kisebb törtrészekből állítjuk elő.

Például a kilenced kisebb törtrész, mint a harmad, mert az egészet több egyenlő részre osztjuk.

Többet ésszel ...

Adjuk meg az összes olyan törtet, amely $\frac{5}{8}$-dal egyenlő, továbbá nevezőjüknek és számlálójuknak a különbsége 27.

A törtek bővítése és egyszerűsítése összefügg a hányados változásaival.

A hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk.

$$10 : 25 \xrightarrow{:5} 2 : 5 \qquad 10 : 25 \xrightarrow{\cdot 4} 40 : 100$$

$10 : 25 = 2 : 5 = 0{,}4$ $\qquad$ $10 : 25 = 40 : 100 = 0{,}4$

Fogalmazzuk át a törteknél használt elnevezésekkel:

hányados = tört; osztandó = számláló; osztó = nevező

Emlékeztető

A tört értéke nem változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk.

Például: $\frac{10}{25} = \frac{10:5}{25:5} = \frac{2}{5}$, illetve $\frac{10}{25} = \frac{10 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{40}{100}$

- *Egyszerűsítés:* $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
- *Bővítés:* $\frac{10}{25} = \frac{40}{100}$

4. példa

Írjuk fel a 3,2-et századokban, ezredekben.

Írjuk fel a tizedestörtet törtalakban, majd bővítsük a törtet.

$3{,}2 = \frac{32}{10} = \frac{320}{100} = 3{,}20$ — A számlálót és a nevezőt 10-zel szoroztuk.

$3{,}2 = \frac{32}{10} = \frac{320}{100} = \frac{3200}{1000} = 3{,}200$ — A számlálót és a nevezőt 100-zal szoroztuk.

3,2-nek a 3,20, illetve a 3,200 bővített alakjai.

5. példa

Írjuk fel a 5,700-et századokban, tizedekben.

Írjuk fel a tizedestörtet törtalakban, majd egyszerűsítsük a törtet.

$5{,}700 = \frac{5700}{1000} = \frac{570}{100} = 5{,}70$ — A számlálót és a nevezőt 10-zel osztottuk.

$5{,}700 = \frac{5700}{1000} = \frac{57}{10} = 5{,}7$ — A számlálót és a nevezőt 100-zal osztottuk.

5,700-nek az 5,70, illetve az 5,7 egyszerűsített alakjai.

Emlékeztető

Ha a tizedestört végére 0-kat írunk, bővítjük a tizedestörtet.

Ha a tizedestört végéről 0-kat hagyunk el, egyszerűsítjük a tizedestörtet.

Ezekben az esetekben a tizedestört értéke nem változik.

Pál megjelölte a mérőszalagon az 1 m $\frac{3}{4}$-ét és $\frac{4}{5}$-ét. Hány milliméter távolságra van a két jel egymástól? **Fejtörő!**

Ha egy tört *számlálóját* is és *nevezőjét* is e két szám *legnagyobb közös osztójával osztjuk*, akkor olyan törtet kapunk, amely **tovább már nem egyszerűsíthető**. Ez azt jelenti, hogy a törtet a lehető legnagyobb törtrészekből állítjuk elő.

Például: $\frac{240}{160} = \frac{120}{80}$. A $\frac{120}{80}$ azonban nem a „legegyszerűbb” alakja a törtnek.

(240; 160) = 80. Ennek felhasználásával:

$\frac{240}{160} = \frac{240 : 80}{160 : 80} = \frac{3}{2}$

A $\frac{240}{160}$ törtnek tovább már nem egyszerűsíthető alakja $\frac{3}{2}$ mert (3; 2) = 1.

FELADATOK

Megtaláltad a számláló és a nevező közös osztóit?

85 Egyszerűsítsd, majd rendezd növekvő sorrendbe a törteket!

a) $\frac{5}{10}$; $\frac{4}{20}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{12}{3}$; $\frac{25}{20}$; *b)* $\frac{30}{100}$; $\frac{700}{10\,000}$; $\frac{900}{1000}$; $\frac{210}{10}$; $\frac{230}{1010}$;

c) 2,300; 5,170; 8,000; 400,50; 30,500; 0,0040

86 Írd be a hiányzó számokat!

a) $\frac{3}{4} = \frac{\square}{8} = \frac{12}{\square} = \frac{21}{\square} = \frac{\square}{64} = \frac{\square}{40} = \frac{75}{\square} = \frac{\square}{1000}$;

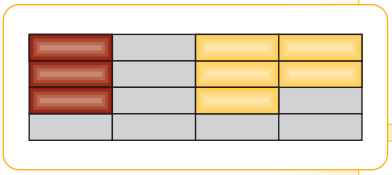
b) $\frac{3}{10} = 0,\square = \frac{30}{\square} = 0,\square = \frac{3000}{\square} = 0,\square$;

c) $4,07 = 4,\square\square\square = \square,\square\square\square\square = \square,\square\square\square\square\square\square$

Gyakorló
3.07–3.13.;
Feladatgyűjtemény
3.2.09–10.

TÖRTEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

6. példa



Karola a tepsi sütemény $\frac{3}{16}$ részét, Leó az $\frac{5}{16}$ részét ette meg.
Melyikük evett meg nagyobb adagot?

Leó az egyenlő részekből többet fogyasztott, mint Karola: $\frac{3}{16} < \frac{5}{16}$

Emlékeztető

Egyenlő nevezőjű törtek közül az a nagyobb, amelynek a számlálója nagyobb (ha a számláló és a nevező is pozitív szám).

Például: $\frac{3}{16} < \frac{5}{16}$ *mert* $3 < 5$

Fejtörő!

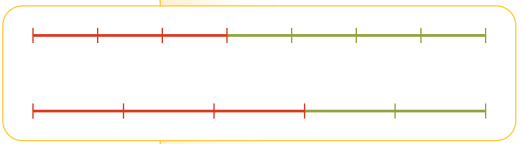
Keress $\frac{6}{8}$ és $\frac{7}{8}$ között két olyan törtet, amelyek különbsége $\frac{1}{10}$!

7. példa

Két lány egyenletes (de nem ugyanakkora) sebességgel sétál végig egy túraútvonalon. Abigél 7 óra alatt, Bella 5 óra alatt teszi meg az utat. Indulás után 3 óra elteltével melyikük tesz meg több utat?

Abigél óránként az út $\frac{1}{7}$ részét, 3 óra alatt $\frac{3}{7}$ részét teszi meg.

Bella 1 óra alatt az út $\frac{1}{5}$ részén, 3 óra alatt $\frac{3}{5}$ részén halad végig.



Az $\frac{1}{5}$ rész hosszabb útszakasz, mint az $\frac{1}{7}$ rész, mivel kevesebb egyenlő részre osztjuk az utat. Így a 3 óra alatt megtett $\frac{3}{5}$ rész is nagyobb, mint a $\frac{3}{7}$ rész: $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$.

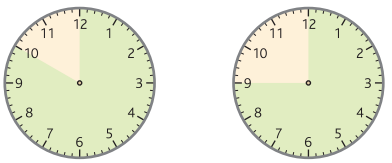
Emlékeztető

Egyenlő számlálójú törtek közül az a nagyobb, amelynek a nevezője kisebb (ha a számláló és a nevező is pozitív szám).

◉ *Például:* $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$ *mert* $5 < 7$

8. példa

Hédi $\frac{5}{6}$ óra alatt, Máté $\frac{3}{4}$ óra alatt készítette el a házi feladatokat. Melyikük dolgozott hosszabb ideig?



1. megoldás: Alakítsuk azonos nevezőjűvé a törteket.

$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $\frac{10}{12} > \frac{9}{12}$

2. megoldás: Alakítsuk azonos számlálójúvá a törteket.

$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$; $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{15}{18} > \frac{15}{20}$

$\frac{5}{6}$ óra = ☐ perc

$\frac{3}{4}$ óra = ☐ perc

Emlékeztető

Különböző nevezőjű és számlálójú törteket például úgy hasonlíthatunk össze, hogy azonos nevezőjűvé vagy azonos számlálójúvá alakítjuk azokat.

◉ *Alkalmazzuk a törtek bővítéséről és egyszerűsítéséről tanultakat.*

FELADATOK

87 Hasonlítsuk össze a következő törteket. Melyik kisebb, melyik nagyobb?

a) $\frac{5}{6} \square \frac{7}{6}$; *b)* $\frac{6}{5} \square \frac{2}{5}$; *c)* $\frac{23}{100} \square \frac{27}{100}$; *d)* $\frac{8}{7} \square \frac{8}{3}$; *e)* $\frac{15}{16} \square \frac{15}{13}$;

f) $\frac{23}{10} \square \frac{23}{100}$; *g)* $\frac{5}{6} \square \frac{2}{3}$; *h)* $\frac{6}{5} \square \frac{3}{2}$; *i)* $\frac{10}{16} \square \frac{20}{26}$; *j)* $\frac{24}{27} \square \frac{36}{40}$

Írj számjegyeket a betűk helyére úgy, hogy

a) a lehető legnagyobb; *b)* a lehető legkisebb

törtet kapd!

CSODÁS BALATON

◉ *Az azonos betűk azonos, a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek.*

TÖRTEK ÖSSZEADÁSA, KIVONÁSA

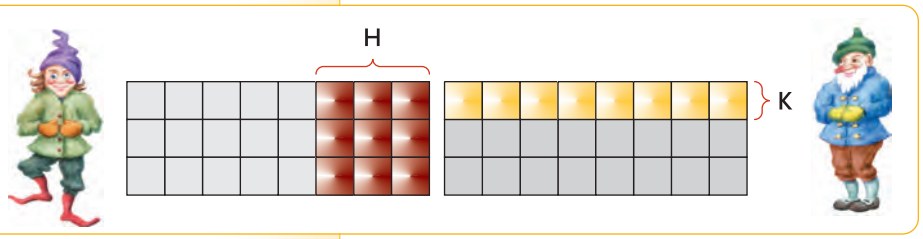
1. példa

Hófehérke két ugyanakkora tepsi bélest sütött a hét törpének.

Hapci megette az egyik tepsi béles $\frac{3}{8}$ részét, Kuka a másik $\frac{1}{3}$ részét.

a) Mennyi bélest ettek meg összesen? b) Mennyi béles maradt a többieknek?

a) Hapci és Kuka összesen ennyi tepsi bélest evett: $\frac{3}{8}+\frac{1}{3}$



Fejezzük ki az összeg két tagját ugyanazzal a törtrésszel, vagyis **hozzuk közös nevezőre** a két törtet: $\frac{9}{24}+\frac{8}{24}=\frac{17}{24}$.

A két törpe $\frac{17}{24}$ tepsi bélest evett meg.

b) Két tepsi, vagyis $\frac{48}{24}$ tepsi béles volt, ebből Kukáék $\frac{17}{24}$ tepsi bélest megettek:

$2-\frac{17}{24}=\frac{48}{24}-\frac{17}{24}=\frac{31}{24}=1\frac{7}{24}$. Vagyis $1\frac{7}{24}$ tepsi béles maradt.

Alkalmazzuk a törtek bővítéséről és egyszerűsítéséről tanultakat.

Emlékeztető

Különböző nevezőjű törteket úgy tudunk összeadni (vagy kivonni), hogy először azonos nevezőjű törtekké alakítjuk őket. Az így kapott számlálók összege (különbsége) lesz az eredmény számlálója, a közös nevező pedig az eredmény nevezője.

Két vagy több törtet is végtelen sokféleképpen írhatunk fel azonos nevezőjű törtek formájában. Ezek közül az a legegyszerűbb, amikor **a nevezők legkisebb közös többszörösét választjuk a törtek nevezőjéül.**

FELADATOK

Figyelempróba

88

a) 120 dkg szilva $\frac{1}{5}$ részét Ági, $\frac{1}{4}$ részét Bea, $\frac{1}{3}$ részét Cili ette meg.

A szilva mekkora része maradt meg Dórinak?

Hány dekagramm szilvát evett meg külön-külön a négy lány?

b) Egy asszony eladta a piacra hozott tojásainak a felét és egy fél tojást, majd az így maradt tojásoknak a felét és egy fél tojást. (Persze közben egy tojást sem tört fel.) Ezután 13 tojása maradt.

Hány tojást hozott az asszony a piacra?

FELADATOK

89 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$; $\frac{21}{9}+\frac{2}{9}+\frac{7}{9}$; $\frac{15}{7}-\frac{9}{7}$; $\frac{21}{10}-\frac{16}{10}$; $\frac{25}{5}-\frac{9}{5}+\frac{7}{5}$

b) $\frac{5}{6}+\frac{4}{3}$; $\frac{11}{12}+\frac{2}{3}+\frac{7}{4}$; $\frac{13}{5}-\frac{3}{2}$; $\frac{9}{8}-\frac{5}{6}$; $\frac{24}{14}-\frac{5}{7}+\frac{3}{2}$

◉ *Mi lehet a közös nevező?*

---

90 Gyakorold a tizedestörtek összeadását!

◉ *Mire vigyázzunk a számok egymás alá írásakor?*

a) 2756 + 9373; b) 27,56 + 93,73; c) 0,2756 + 0,9373;

d) 317,645 + 9,27; e) 507,8 + 6,487 + 93,85; f) 90,008 + 347 + 26,7

---

91 Felcserélés vagy csoportosítás alkalmazásával könnyen kiszámíthatod az eredményt:

a) 98 + 327 + 102; b) 36 + 0,79 + 1,4 + 44 + 0,21; c) 1,48 + 6,5 + 2,02

---

92 Gyakorold a törtek összeadását!

Gyakorló 3.14.–3.31.

a) $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$; b) $\frac{24}{15}+\frac{14}{15}+\frac{6}{15}+\frac{1}{15}$; c) $\frac{21}{12}+\frac{1}{12}+\frac{17}{12}+\frac{9}{12}$;

d) $\frac{2}{5}+\frac{6}{3}+\frac{1}{5}+\frac{4}{3}$; e) $\frac{12}{15}+\frac{13}{10}+\frac{9}{15}+\frac{7}{10}$; f) $\frac{11}{12}+\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{9}{4}+\frac{4}{3}$;

g) $3\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+1\frac{1}{5}$; h) $10\frac{12}{25}+3\frac{15}{20}+2\frac{7}{10}$; i) $5\frac{11}{12}+2\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2$

---

93 Gyakorold a tizedestörtek kivonását! Végezd el az ellenőrzést is!

◉ *Kétféleképpen ellenőrizheted az eredményt!*

a) 83,6 – 47,8; b) 503,62 – 40,5; c) 624 – 512,94;

d) 567,52 – 65,107; e) 20,5 – 7,74; f) 267,05 – 167,1;

g) 710,3 – 29,28; h) 15,204 – 14,23; i) 56,8 – 27,5 – 13,4 + 48

---

94 Végezd el a kivonásokat! Ahol lehet, *egyszerűsítsd az eredményt*!

a) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}$; b) $\frac{9}{5}-\frac{4}{5}$; c) $\frac{16}{15}-\frac{6}{15}$; d) $\frac{30}{12}-2$; e) $5-\frac{5}{25}$;

f) $\frac{7}{3}-\frac{3}{7}$; g) $\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$; h) $\frac{18}{15}-\frac{9}{12}$; i) $\frac{10}{12}-\frac{6}{9}$; j) $\frac{7}{3}-\frac{5}{45}$

---

95 Keress többféle megoldási módot!

a) $4\frac{7}{8}-2\frac{3}{8}$; b) $4\frac{1}{6}-2\frac{5}{6}$; c) $\frac{18}{10}-1\frac{3}{20}$; d) $4\frac{12}{15}-\frac{9}{6}$



Hány percig tart az a matematikaverseny, amelyben 12 perc és a maradék percek $\frac{1}{3}$-ának elteltével még 32 perc van hátra?

Fejtörő!

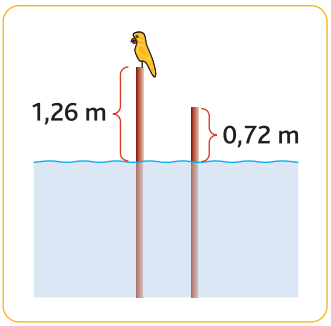


96

a) Egy versenyen Gábor egyik kislabdadobása 27,86 m volt, 13,86 m-rel kevesebb, mint Kálmáné. Milyen távolságra dobta Kálmán a kislabdát?

b) Péter a hét négy napján 75 km-t, 89,6 km-t, 55 km-t és 30,4 km-t kerékpározott, de így is 26 km-rel kevesebbet, mint Pál. Hány kilométert tett meg Pál?

c) Kati 12 óra alatt 45,6 kg málnát szedett le, 18,7 kg-mal többet, mint Juli, aki 10 óra hosszat dolgozott. Mennyi málnát szedett le Juli?



97

A folyóba két cölöpöt vertek le. Az egyikből 1,26 m, a másikból 0,72 m látszik ki a víz fölött.

a) Mennyi a különbség a cölöpök víz feletti magassága között?

b) Mennyi lesz a különbség a cölöpök víz feletti magassága között, ha a folyó vízszintje 0,60 m-t emelkedik?

c) Mennyi lesz a különbség a cölöpök víz feletti magassága között, ha a folyó vízszintje 0,72 m-t süllyed?

Gyakorló
4.28–4.37.;
Feladatgyűjtemény
3.3.20–21.,
3.3.23–24.,
4.2.04–09.

98 Az egy sorban lévő feladatok eredményeit hasonlítsd össze, és magyarázd meg!

a)	$15{,}7 - (0{,}28 + 4{,}1 + 6{,}03)$;	$15{,}7 - 0{,}28 - 4{,}1 - 6{,}03$
b)	$23{,}12 - (8{,}65 + 71{,}2 + 0{,}697)$;	$23{,}12 - 8{,}65 - 71{,}2 - 0{,}697$
c)	$12{,}4 - (11{,}25 - 7{,}6)$;	$12{,}4 - 11{,}25 + 7{,}6$
d)	$54{,}31 - (421{,}5 - 397{,}05)$;	$54{,}31 - 421{,}5 + 397{,}05$

99 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$; *b)* $\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right)$; *c)* $2\frac{3}{4} - \left(1\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)$

100 Írd fel *egyenlettel* is az adatok közti összefüggést!

a) Ha egy törthöz $\frac{3}{4}$-et hozzáadunk, $\frac{5}{2}$-et kapunk. Melyik ez a tört?

b) Ha egy törthöz hozzáadunk $\frac{5}{8}$-ot, akkor $\frac{3}{7}$-et kapunk. Melyik ez a tört?

c) Két tört összege $\frac{5}{8}$. Az egyik tört 1-gyel nagyobb a másiknál. Melyik ez a két tört?

d) Két tört különbsége $\frac{3}{2}$. Az egyik $\frac{4}{3}$-dal kisebb a másiknál. Melyik ez a két tört?

◉ *Például:*

$\frac{\square}{\square} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$

Minden feladatnál ellenőrizd az eredményt!

101 *a)* Egy téglalap oldalainak hossza $\frac{3}{4}$ dm; $\frac{2}{3}$ dm. Mekkora a **kerülete**?

K = a + b + a + b

b) Egy négyzet oldala $3\frac{4}{5}$ cm. Hány centiméter a kerülete?

K = a + a + a + a

TÖRTEK SZORZÁSA

TÖRTEK SZORZÁSA TERMÉSZETES SZÁMMAL

1. példa

Számítsuk ki a $\frac{7}{24} \cdot 8$ szorzat értékét.

1. megoldás: $\frac{7}{24} \cdot 8 = \frac{7 \cdot 8}{24} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$

Elvégeztük az egyszerűsítést.

$\frac{7}{24} \cdot 8 = \frac{7 \cdot \cancel{8}^{1}}{\cancel{24}_{3}} = \frac{7}{3}$

Ha lehet, akkor célszerű még a szorzás elvégzése előtt egyszerűsíteni.

2. megoldás: $\frac{7}{24} \cdot 8 = \frac{7}{24 : 8} = \frac{7}{3}$

Egy tört (hányados) **értéke annyiszorosára változik, ahányszorosára változtatjuk a számlálóját** (az osztandót) **anélkül, hogy a nevezőjét** (az osztót) **változtatnánk.**

Egy tört (hányados) **értéke annyiszorosára változik, ahányad részére változtatjuk a nevezőjét** (az osztót) **anélkül, hogy a számlálóját** (az osztandót) **változtatnánk.**

FELADATOK

102 Írd fel az összegeket szorzat formájában! Számítsd ki a szorzat értékét is!

a) $\frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8}$; *b)* $\frac{7}{13} + \frac{7}{13}$; *c)* $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}$

Hogyan értelmeztük a szorzást a természetes számok körében?

103 Végezd el a szorzást, az eredményt írd vegyesszám alakban!

a) $\frac{3}{7} \cdot 5$; *b)* $\frac{5}{8} \cdot 7$; *c)* $\frac{7}{5} \cdot 8$; *d)* $\frac{7}{8} \cdot 6$; *e)* $\frac{7}{18} \cdot 27$; *f)* $\frac{24}{36} \cdot 15$;

g) $\frac{7}{8} \cdot 8$; *h)* $\frac{7}{8} \cdot 4$; *i)* $\frac{6}{9} \cdot 3$; *j)* $\frac{9}{36} \cdot 12$; *k)* $\frac{72}{45} \cdot 5$; *l)* $\frac{72}{18} \cdot 0$

Gyakorló 3.32–3.34.; *Feladatgyűjtemény* 3.3.28., 3.3.31.

104 Írd fel a *szorzatokat* összeg formájában! Számítsd ki az összeg értékét is!

a) $\frac{3}{7} \cdot 3$; *b)* $\frac{2}{21} \cdot 5$; *c)* $\frac{5}{48} \cdot 6$; *d)* $\frac{7}{41} \cdot 4$; *e)* $\frac{3}{2} \cdot 3$

105 Számítsd ki a szorzatokat kétféleképpen!

a)	$\frac{5}{8} \cdot 2$;	$\frac{7}{25} \cdot 5$;	$\frac{19}{36} \cdot 9$;	$\frac{3}{28} \cdot 14$;	$\frac{23}{15} \cdot 3$
b)	$\frac{3}{8} \cdot 2$;	$\frac{7}{16} \cdot 8$;	$\frac{2}{9} \cdot 3$;	$\frac{3}{21} \cdot 7$;	$\frac{7}{28} \cdot 4$

Alkalmazhatjuk a hányados változásáról tanultakat.

106 Végezd el a szorzásokat! Keress többféle megoldási módot!

a) $2\frac{3}{4} \cdot 5$; *b)* $4\frac{3}{6} \cdot 2$; *c)* $5\frac{1}{6} \cdot 3$; *d)* $3\frac{9}{15} \cdot 25$; *e)* $1\frac{12}{45} \cdot 15$

Például: $2\frac{3}{4} \cdot 5 = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot 5$

◉ *Az 1. példában látott megoldási módok közül melyiket célszerű alkalmaznunk?*

107 *a)* Végezd el a műveleteket!

$\frac{2}{3} \cdot 3$; $\frac{4}{7} \cdot 7$; $\frac{5}{9} \cdot 9$; $\frac{15}{11} \cdot 11$; $\frac{7}{25} \cdot 25$; $\frac{8}{17} \cdot 17$

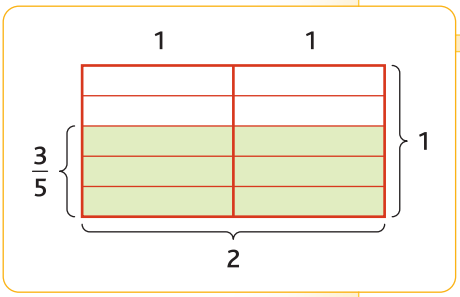
b) Melyik egész számot írhatjuk a betű helyére, hogy igaz kijelentést kapjunk?

$\frac{4}{5} \cdot x = 4$; $\frac{11}{25} \cdot y = 11$; $\frac{34}{72} \cdot z = 34$; $\frac{49}{36} \cdot u = 49$; $\frac{54}{17} \cdot v = 54$

› TERMÉSZETES SZÁM SZORZÁSA TÖRTTEL

2. példa

Határozzuk meg a két egységnégyzetből álló téglalap területének $\frac{3}{5}$ részét.



Írjuk föl a színezett területet kétféleképpen.

❶ $T = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}$ (területegység)

Vagyis a terület: $\frac{3}{5}$ területegység 2-szerese.

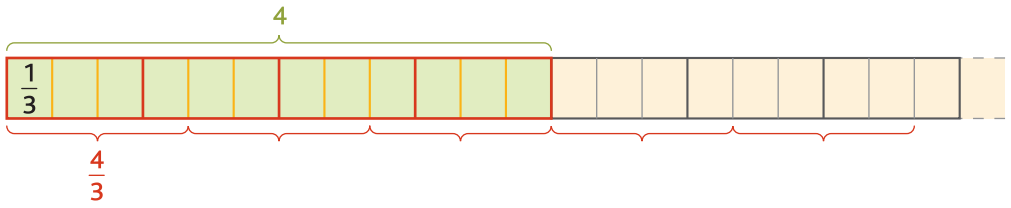
❷ $T = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ (területegység), a 2 területegység $\frac{3}{5}$ része.

3. példa

Számítsuk ki 4-nek az $\frac{5}{3}$ részét, illetve az $\frac{5}{3}$-szorosát!

4-nek az $\frac{1}{3}$ része: $\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3}$

4-nek az $\frac{5}{3}$ része a 4 egész $\frac{1}{3}$ részének az 5-szöröse: $\frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$



4-nek az $\frac{5}{3}$ szorosa:

$4 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

Többet ésszel …

Melyik több, három almának a fele, vagy két almának a háromnegyede?

Figyelemprőba

Hófehérke most pitét sütött a hét törpének. Mindegyik törpe megette a pite $\frac{5}{42}$ részét. A maradékot viszont Hófehérke ette meg.

Hófehérke több vagy kevesebb pitét evett-e meg, mint egy-egy törpe?

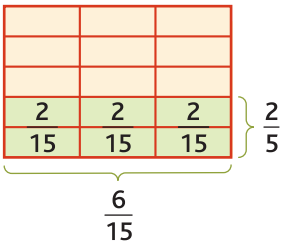
Figyeld meg!

Valamely mennyiség törtrészét kiszámíthatjuk úgy is, hogy a mennyiséget megszorozzuk a törttel.

◉ *Például: 8-nak a* $\frac{2}{3}$ *része* $= 8 \cdot \frac{2}{3}$

4. példa

Határozzuk meg $\frac{2}{15}$-nek a 3-szorosát.



1. megoldás: $\frac{2}{15} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$;

2. megoldás: $\frac{2}{15} \cdot 3 = \frac{2}{15 : 3} = \frac{2}{5}$ A $\frac{2}{15}$ rész 3-szorosa: $\frac{2}{5}$ rész.

Összegzés

Törtet egész számmal és egész számot törttel úgy is szorozhatunk, hogy a tört számlálóját megszorozzuk az egész számmal – ez lesz az új tört számlálója –, a nevezőt pedig változatlanul írjuk az új tört nevezőjébe.

Törtet úgy is szorozhatunk egy 0-tól különböző egész számmal, hogy a tört nevezőjét osztjuk az egész számmal – ez lesz az új tört nevezője – a tört számlálóját pedig változatlanul írjuk az új tört számlálójába. (Ezt akkor célszerű alkalmazni, ha a tört nevezőjének osztója az egész szám.)

Az előzőkből következik: Ha a törtet a nevezőjével szorozzuk, akkor eredményül a tört számlálóját kapjuk.

◉ *Például:*

$8 \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{24} \cdot 8 = \frac{7 \cdot 8}{24}$

$\frac{7}{24} \cdot 8 = \frac{7}{24 : 8} = \frac{7}{3}$

$\frac{7}{8} \cdot 8 = \frac{7}{8 : 8} = \frac{7}{1} = 7$

FELADATOK

◉ *Mit állapíthatsz meg?*

108 Számítsuk ki

a) 60-nak az $\frac{5}{3}$ részét és a $60 \cdot \frac{5}{3}$ szorzatot;

b) 6-nak a $\frac{7}{18}$ részét és a $6 \cdot \frac{7}{18}$-ot; *c)* 8-nak az $\frac{5}{3}$ részét és a $8 \cdot \frac{5}{3}$-ot!

◉ *Gyakorló 3.35–3.36.*

109 Írd le, mit fejeznek ki az egyes szorzatok!

a) $5 \cdot \frac{2}{3}$ és $\frac{2}{3} \cdot 5$; *b)* $0 \cdot \frac{5}{6}$ és $\frac{5}{6} \cdot 0$; *c)* $3 \cdot \frac{4}{7}$ és $\frac{4}{7} \cdot 3$

A szorzás műveletének mely tulajdonságát tudod megfogalmazni?

Figyelempróba

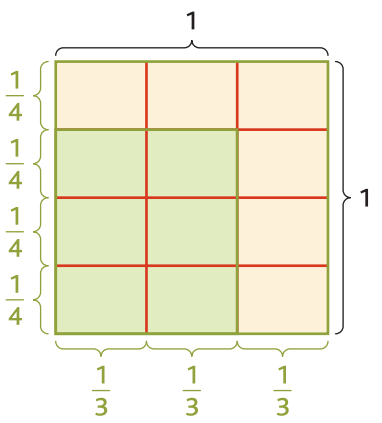
Hófehérke ismét bélest sütött a törpéknek. Hétfőn, és utána naponta Morgó megeszi az eredeti teljes béles $\frac{1}{15}$ részét.

Másnap, és utána minden következő napon egy-egy újabb törpe csatlakozik, és ők is ugyanannyi bélest esznek meg naponta, mint Morgó.

Melyik nap fogy el a béles? Hány törpe fogyasztotta el? Az utolsó napon hány törpe evett a bélesből?

TÖRT SZORZÁSA TÖRTTEL

5. példa



Az ábrán látható négyzet oldalai 1 egységnyi hosszúak.
Határozzuk meg a zöldre színezett területet.
Hogyan olvasható ki és mit jelent ez az érték?
A négyzet egyik oldalát 3 egyenlő részre, a másik oldalát 4 egyenlő részre osztottuk.

Egy kis téglalap területe $\frac{1}{12}$ területegység.

A zöld színű terület 6 ilyen téglalapból áll, $T = \frac{6}{12}$ egység.

Írjuk fel a területet szorzat formájában.

A zöld színű téglalap egyik oldala $\frac{2}{3}$, a másik $\frac{3}{4}$ hosszúságegység.

A területe: $T = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ területegység.

Eredményünket hasonlítsuk össze az előbb meghatározott területtel:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4}, \text{ illetve } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3}$$

6. példa

Rajzold le a fenti négyzetet a füzetedbe. Színezd ki sárgával a $\frac{2}{3}$ részét, majd a sárgára színezett rész $\frac{3}{4}$ részét színezd át kékre.
Milyen színű lett?
Ez hányad része az eredeti négyzetnek?

Számítsuk ki az előző példában látható négyzet területe $\frac{2}{3}$ részének a $\frac{3}{4}$ részét.

A négyzet területe $T = 1$ területegység. Ennek a $\frac{2}{3}$ része $1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ területegység.

$\frac{2}{3}$ területegység $\frac{1}{4}$ része $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12}$ területegység.

$\frac{2}{3}$ területegység $\frac{3}{4}$ része az $\frac{1}{4}$ részének a 3-szorosa, azaz

$$\frac{2}{12} \cdot 3 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ területegység.}$$

$\frac{2}{3}$-nak a $\frac{3}{4}$ része éppen annyi, mint $\frac{2}{3}$-nak a $\frac{3}{4}$-szerese: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4}$

Figyelempróba

Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

Egy egyliteres üveg $\frac{4}{5}$ részéig volt megtöltve vízzel. Az üveget kitették a napra, ezért elpárolgott a benne lévő víz $\frac{3}{8}$ része. Mennyi víz maradt az üvegben?

A: $\frac{12}{40}$ l; B: $\frac{1}{2}$ l; C: $\frac{7}{13}$ l; D: $\frac{1}{3}$ l

Figyeld meg!

Törtet törttel úgy is szorozhatunk, hogy a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával.

Számolásunkat gyorsíthatjuk úgy, hogy nem számítjuk ki rögtön az elején a szorzatokat, hanem ha lehet, először egyszerűsítünk. Például:

$$\frac{25}{12} \cdot \frac{21}{10} = \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 7}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 2} = \frac{35}{8}$$

Egyszerűbben:

$$\frac{25}{12} \cdot \frac{21}{10} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{12}} \cdot \underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 2} = \frac{35}{8}$$

FELADATOK

110 Rajzolj egy 12 cm hosszú szakaszt! Jelöld a $\frac{3}{4}$ részének a $\frac{2}{3}$-át!

a) Írd fel *műveletek* segítségével is, hogy mekkora részét kaptad az eredeti szakasznak!

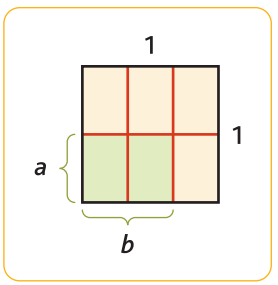
b) Hány centiméter az így kapott szakasz?

111 *a)* Milyen hosszú az *a*, illetve a *b* szakasz?

b) Hány területegység a zöld rész területe?

c) Írd fel a zöld rész területét szorzat alakjában is!

Hányféleképpen írhatod fel?



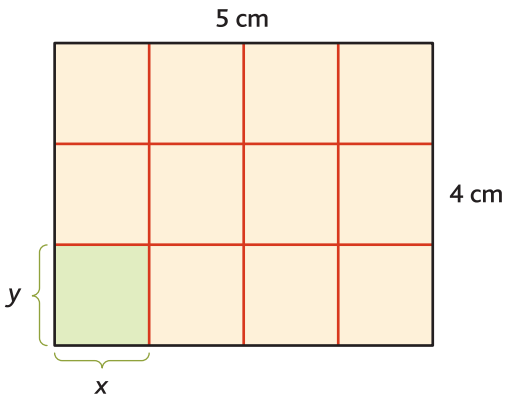
112 *a)* Hány négyzetcentiméter a téglalap területe?

b) Mekkora része a zöldre színezett terület az eredeti téglalap területének?

c) Hány négyzetcentiméter a zöldre színezett rész területe?

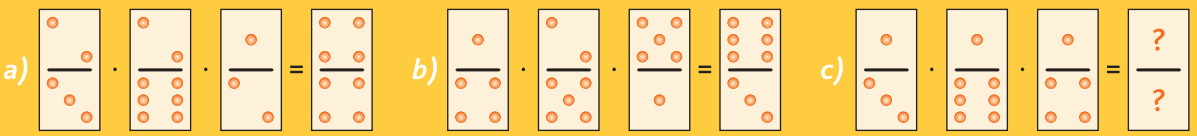
d) Milyen hosszú az *x*, illetve az *y* szakasz?

e) Írd fel a zöldre színezett területet szorzat alakjában is kétféleképpen!

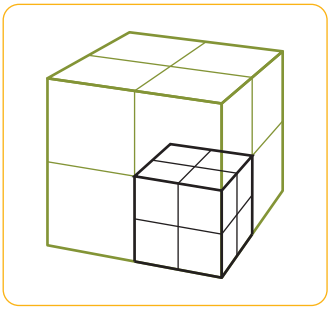


Fejtörő!

A dominók jelentsenek most törtszámokat, a felső félen lévő szám legyen a számláló, az alsó félen lévő a nevező. Tedd igazzá az egyenleteket minden esetben egyetlen dominó megfordításával!



Melyik dominó lehet a *c)* feladatban az egyenlőség jobb oldalán?



113 Rakj ki a színesrúdkészlet elemeiből egy olyan kockát, amelynek élei 4 kis fehér kocka együttes élhosszával egyenlők!

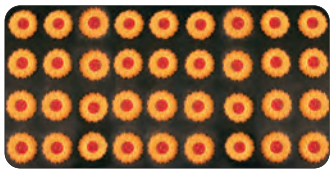
Legyen ez az egység.

Vedd mindegyik élnek a felét!

a) Mekkora része az így keletkezett kis kocka *térfogata* az eredeti kocka *térfogatának*? Írd fel szorzat alakjában is a térfogatot!

b) Mekkora része az így keletkezett kis kocka *felszíne* az eredeti kocka *felszínének*? Írd fel *műveletekkel* is a felszínt!

Figyelempróba



114

a) Egy tálcán 36 süti volt. Ági megette a $\frac{2}{9}$ részét, Béla a maradék $\frac{1}{4}$ részét. Hány süti maradt a tálon? Mekkora része ez a 36 sütinek?

b) Háromnapos kirándulásra 30 km gyalogtúrát tervezünk. Az első nap ennek a $\frac{2}{5}$ részét, a második nap az első napon megtett út felét gyalogoltuk végig. A tervezett út mekkora része maradt a harmadik napra? Hány kilométer ez?

⊙ *Ha egy szorzatnak kettőnél több tényezője van, a törtek szorzását akkor is úgy végezhetjük el, hogy a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával. A vegyesszámot először célszerű törtalakba írni.*

115 Számítsd ki a szorzatokat!

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$; $\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{8}$; $\frac{7}{14}\cdot\frac{3}{2}$; $\frac{16}{25}\cdot\frac{15}{12}$; $\frac{13}{17}\cdot\frac{17}{13}$; $\frac{18}{24}\cdot\frac{20}{30}$

b) $\frac{12}{35}\cdot\frac{75}{28}\cdot\frac{49}{20}$; $\frac{20}{15}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{5}{6}$; $\frac{55}{15}\cdot\frac{0}{9}\cdot\frac{6}{11}$; $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{21}\cdot 1$

c) $\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{28}$; $\frac{33}{25}\cdot\frac{15}{11}$; $\frac{12}{34}\cdot\frac{86}{3}$; $\frac{7}{2}\cdot\frac{16}{49}$

d) $2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{1}{2}$; $3\frac{4}{7}\cdot 2\frac{4}{5}$; $1\frac{5}{6}\cdot 3\frac{3}{11}$; $4\frac{2}{3}\cdot 1\frac{2}{7}$

Gyakorló
3.37–3.42.;
Feladatgyűjtemény
3.3.41–42.

116 Egy bolha ugrál a számegyenes mentén. Minden ugrása $\frac{8}{5}$ egység, és a számegyenes pozitív irányába halad. Most éppen a 0 számon van.

a) Hol lesz 1, 2, 3, 25, 100, 100 000 ugrás után?

b) Hol volt 1, 2, 3, 50, 8000 ugrással ezelőtt?

⊙ *Írd le a számítás tervét!*

Fejtörő!

Melyik az a szám, amelynek a felét a harmadával megszorozva 54-et kapunk?

Ha egy négyzet egyik oldalát az oldal $\frac{2}{3}$ részével növeljük, a szomszédos oldalát az oldal $\frac{2}{3}$ részével csökkentjük, akkor hogyan változik a területe?

Ha $\frac{A}{B}=\frac{1}{4}$ és $\frac{B}{C}=\frac{3}{8}$, akkor mivel egyenlő $\frac{A}{C}$?

⊙ *Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!*

A: $\frac{A}{C}=\frac{1}{8}$; B: $\frac{A}{C}=\frac{3}{4}$; C: $\frac{A}{C}=\frac{8}{12}$; D: $\frac{A}{C}=\frac{3}{32}$

SZORZÁS TIZEDESTÖRT ALAKÚ SZÁMMAL

FELADATOK

117 Számítsd ki a $25 \cdot 4$ szorzat értékét! Határozd meg a következő szorzatokat a szorzat változásáról tanultakat alkalmazva!

Figyeltél a szorzat változásaira?

a) $25 \cdot 40$; *b)* $2{,}5 \cdot 40$; *c)* $0{,}25 \cdot 40$; *d)* $25 \cdot 0{,}4$; *e)* $2{,}5 \cdot 0{,}04$

118 Számítsd ki a $125 \cdot 8$ szorzat értékét! Az eredmény alapján határozd meg, hogy a betű melyik számot jelenti!

$12{,}5 \cdot a = 100$;	$12{,}5 \cdot b = 10$;	$125 \cdot c = 10\,000$;	$1250 \cdot d = 100$;
$e \cdot 80 = 1000$;	$f \cdot 8 = 10$;	$g \cdot 0{,}08 = 10$;	$h \cdot 0{,}8 = 1$

119 Írd a tizedestörtet törtalakba, majd a szorzások elvégzése után a szorzatot tizedestört alakba!

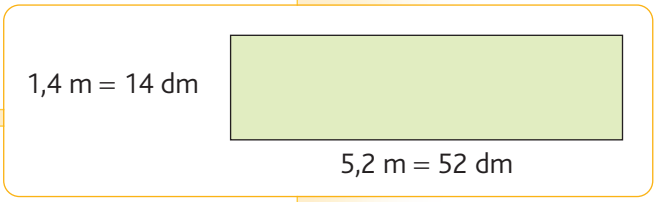
a) $0{,}13 \cdot 0{,}3$; *b)* $2{,}7 \cdot 0{,}9$; *c)* $1{,}01 \cdot 0{,}07$; *d)* $5{,}1 \cdot 0{,}001$

120 Adott a téglalap két oldala. Váltsd át a mértékegységeket úgy, hogy az oldalak hosszúságának mérőszáma egész szám legyen! Számítsd ki a téglalap területét! Add meg az eredményt négyzetdeciméterben is!

a) $a = 2{,}3$ dm; $b = 4{,}5$ dm; *b)* $a = 3{,}25$ dm; $b = 3{,}32$ dm

7. példa

Számítsuk ki a téglalap területét.



1. megoldás:

$$T = 5{,}2 \cdot 1{,}4 \text{ m}^2$$

Hogy a szorzást el tudjuk végezni, váltsuk át a métert deciméterre:

$$5{,}2 \text{ m} = 52 \text{ dm}; \quad 1{,}4 \text{ m} = 14 \text{ dm};$$

$$T = 52 \cdot 14 \text{ dm}^2 = 728 \text{ dm}^2$$

Váltsuk át eredményünket négyzetméterre:

$$T = 728 \text{ dm}^2 = 7{,}28 \text{ m}^2$$

Kövessük végig a műveleteket:

$$5{,}2 \cdot 1{,}4 = (52 \cdot 14) : 100 = 728 : 100 = 7{,}28$$

2. megoldás:

Írjuk át a tizedestörteket törtalakba, és végezzük el így a szorzást:

$$5{,}2 \cdot 1{,}4 = \frac{52}{10} \cdot \frac{14}{10} = \frac{52 \cdot 14}{10 \cdot 10} = \frac{728}{100} = 7{,}28$$

Az $5{,}2 \cdot 1{,}4$ szorzatot úgy számítottuk ki, hogy az $52 \cdot 14$ szorzat értékét osztottuk 100-zal.

$1 \text{ m}^2 = \square \text{ dm}^2$

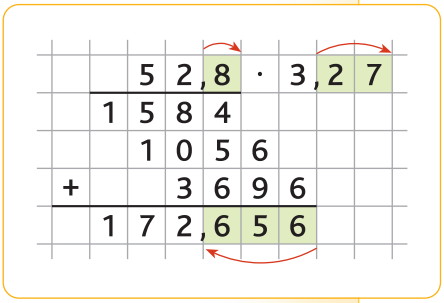
$1 \text{ dm}^2 = \square \text{ m}^2$

8. példa

Számítsuk ki az $52{,}8 \cdot 3{,}27$ szorzat értékét.

A szorzás elvégzése előtt *becsüljük* meg az eredményt.

A szorzandó kerekített értéke 50, a szorzóé 3. A szorzatuk 150. Ennél a szorzat valódi értéke nagyobb lesz, mert mindkét tényezőt lefelé kerekítettük.



Ha az 52,8-et szorozzuk 10-zel, 528-at kapunk. Ha a 3,27-ot szorozzuk 100-zal, 327-et kapunk. Az $528 \cdot 327$ szorzást a természetes számok körében már el tudjuk végezni.

A szorzást úgy végezhetjük el, mint a természetes számok körében.

A szorzat változásait figyelembe véve ekkor a kapott szorzat $(10 \cdot 100 =)$ 1000-szerese lesz az eredeti szorzat tényleges értékének. Ezért a kapott szorzatot osztanunk kell 1000-rel.

A kapott szorzatban (1 + 2 =) 3 tizedesjegyet ki kell jelölnünk.

Az eredmény „összhangban van” a becsült értékkel.

Jegyezd meg!

A tizedestörtek körében úgy szorozhatunk, mint a természetes számok körében, de a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk, amennyi együttvéve van a tényezőkben.

9. példa

Számítsuk ki a $65{,}4 \cdot 0{,}001$ szorzat értékét.

1. megoldás: a 65,4 ezredrészét kell kiszámolnunk:

$$65{,}4 \cdot 0{,}001 = 65{,}4 : 1000 = 0{,}0654$$

2. megoldás: alkalmazzuk a tizedestörtekkel való szorzás szabályát:

$$65{,}4 \cdot 0{,}001 = 0{,}0654$$

FELADATOK

121 **$128 \cdot 54 = 6912$**

A szorzat változásainak felhasználásával határozd meg a szorzatok értékét!

a) $\frac{128}{10} \cdot 54$; $12{,}8 \cdot 54$; *b)* $\frac{128}{100} \cdot 54$; $1{,}28 \cdot 54$;

c) $128 \cdot \frac{54}{100}$; $128 \cdot 0{,}54$; *d)* $\frac{128}{100} \cdot \frac{54}{10}$; $1{,}28 \cdot 5{,}4$

Hasonlítsd össze a szorzatok értékét!



Hány kilométert tesz meg óránként Tomi vitorlása, ha 9,5 **csomós** sebességgel hasítja a hullámokat? Az 1 csomós sebesség azt jelenti, hogy 1 óra alatt 1 **tengeri mérföldet**, vagyis 1,852 km-t tesz meg a hajó.

122 Számítsd ki!

Először becsüld meg a szorzatok értékét!

a)	54,6 · 6,7;	60,01 · 2,15;	34,25 · 10,4;	25 · 0,23;
b)	150,3 · 2,5;	4,85 · 1,12;	20,4 · 9,06;	2,04 · 90,6;
c)	20,6 · 0,0037;	40 · 0,100;	0,008 · 300,08;	24,024 · 0,0001;
d)	234,5 · 0,1;	0,01 · 53,8;	345,2 · 0,001;	0,000 1 · 96,5

123 *a)* Ha egy számot elosztok 22,65-dal, akkor a hányados 184,5 lesz. Melyik ez a szám?

Írd fel egyenlettel az adatok közötti összefüggést!

b) Egy számsorozat első eleme 5,8; minden további elemét megkapod, ha az őt megelőzőnek veszed az 1,2-szeresét.
Írd fel a sorozat harmadik és ötödik elemét!

c) Hány kilométert tettünk meg, ha egy óra alatt 3,6 km-t haladtunk, és 2,6 óráig mentünk?
Hány kilométert tettünk meg ugyanilyen tempóban 3 óra 24 perc alatt?

0,1 óra = ☐ perc

24 perc = ☐ óra

124 A következő szorzatok eredményét törtalakban és tizedestört alakban is határozd meg!

Keress többféle megoldási tervet! Állapítsd meg, melyik terv szerint célszerű számolni!

a) $1{,}8 \cdot \frac{1}{2}$; *b)* $0{,}8 \cdot \frac{3}{4}$; *c)* $2{,}8 \cdot \frac{1}{7}$; *d)* $\frac{3}{5} \cdot 2{,}7$; *e)* $\left(1\frac{3}{5} + 0{,}8\right) \cdot \frac{3}{8}$

125 Mennyit mutatna a benzinkút kijelzője, ha 1 l benzin 1,28 € lenne, és az autókba ennyit tankolnánk? **Az eredményt századra kerekítve add meg!**

Autótípus	Személyautó	Teherautó	Forma–1-es
Mennyiség	52,5 liter	100 liter	136 liter
Kijelző			

126 *a)* Ha egy számot elosztok 2,45-dal, akkor 3,6-et kapok hányadosul. Melyik ez a szám?

Írd fel egyenlettel is a megoldás menetét!

b) Mennyi 2,04 és 0,5 összegének a 8,65-szorosa?

c) Számítsd ki 7,25 és 4,62 különbségének a 0,65 részét!

d) Ha két szám összegét elosztjuk 4,56-dal, akkor 5,1-et kapunk hányadosul. Mennyi a két szám összege? Melyik ez a két szám?

Hány ilyen számpárt találhatunk?

127 *a)* Egy szabályos hatszög egy oldalának hossza 14,16 dm. Hány centiméter a kerülete?

A szabályos sokszög minden oldala és minden szöge egyenlő nagyságú.

b) Egy téglalap oldalainak hossza $a = 5{,}2$ cm, $b = 12{,}8$ cm. Hány négyzetdecimétert a *területe*? Hány méter a *kerülete*?

c) Egy téglalap egyik oldala 4,5 cm, a másik oldala ennek a 2,1-szerese. Hány decimétert a téglalap *kerülete*? Hány négyzetdecimétert a téglalap *területe*?

Gyakorló 4.49–4.60.; *Feladatgyűjtemény* 4.2.10.

128 Egy téglatest egy csúcsából induló éleinek hossza 3,8 cm; 52 mm; 1,26 dm. Hány négyzetcentimétert a *felszíne*? Hány köbcentimétert a *térfogata*?

Melyik betű melyik számot jelenti a tizedestörtek szorzásában?

		C	,	B	·	A , B
	C	A	A			
+	C	B				
A	D	,	E	A		

Fejtörő!

A RECIPROK FOGALMA

FELADAT

129 Végezd el a szorzásokat! Tapasztalatodat fogalmazd meg!

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}$; $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4}$; $\frac{1}{5} \cdot 5$

◉ Figyeld meg az előző feladat eredményeit!

130 Milyen értékeket vehetnek fel a betűk?

$\frac{3}{8} \cdot x = 1$; $5 \cdot y = 1$; $\frac{5}{3} \cdot z = 1$; $2 \cdot a = 1$; $b \cdot \frac{1}{2} = 1$

◉ Keress olyan számot, amely megegyezik a reciprokával!

Meghatározás

Egy szám reciprokán azt a számot értjük, amellyel az eredeti számot megszorozva a szorzat értéke 1.

3 reciproka	$\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{3}$	reciproka 3,	mert $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$;
10 reciproka	$\frac{1}{10}$ és $\frac{1}{10}$	reciproka 10,	mert $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$;
$\frac{2}{3}$ reciproka	$\frac{3}{2}$ és $\frac{3}{2}$	reciproka $\frac{2}{3}$,	mert $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$;
$3{,}7 = \frac{37}{10}$ reciproka	$\frac{10}{37}$,		mert $\frac{37}{10} \cdot \frac{10}{37} = 1$

Figyeld meg!

A **0-nak nincs reciproka**, mert nem találhatunk olyan számot, amelyet 0-val megszorozva 1-et kapnánk eredményül. Ez összhangban van azzal a megállapítással, hogy a 0-val való osztás nem értelmezhető.

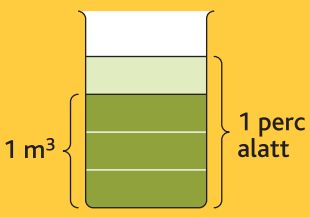
$0 \cdot \frac{1}{0} \neq 1$

FELADAT

Gyakorló
3.43–3.44., 3.48.

131 Írd fel a számok reciprokát, ha értelmezhető!

$\frac{3}{2}$; $\frac{4}{8}$; 5; $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{0}{6}$; 1; 0; 12



Ha egy csapon át 1 perc alatt $\frac{4}{3}$ m³ víz folyik ki, akkor hány perc alatt folyik ki 1 m³ víz ezen a csapon?

Igazold válaszod helyességét!

Írd fel $2 + \frac{2}{3}$ reciprokát két egész szám hányadosaként!

◉ 2008-ban érettségi feladat volt.

TÖRTEK OSZTÁSA

TÖRTEK OSZTÁSA TERMÉSZETES SZÁMMAL

FELADATOK

132 Hány méter jut egy-egy lánynak, ha 4 kislány között egyenlően elosztunk

a) $\frac{8}{5}$ m; *b)* $\frac{12}{10}$ m; *c)* $\frac{20}{3}$ m; *d)* $\frac{16}{25}$ m; *e)* $\frac{32}{100}$ m szalagot?

133 Hány kilogramm jut egy-egy bocsnak, ha 3 bocs között egyenlően elosztunk

a) $\frac{1}{2}$ kg; *b)* $\frac{1}{5}$ kg; *c)* $\frac{1}{4}$ kg; *d)* $\frac{1}{8}$ kg; *e)* $\frac{1}{10}$ kg málnát?



134 Végezd el az osztást, ahol lehet, kétféleképpen! Ezután az osztandót szorozd meg az osztó reciprokával! Hasonlítsd össze az eredményeket!

a) $\frac{1}{2} : 5$; *b)* $\frac{12}{7} : 6$; *c)* $\frac{11}{12} : 3$; *d)* $2 : 5$; *e)* $\frac{3}{4} : 6$; *f)* $\frac{1}{2} : 0$;

g) $\frac{6}{5} : 3$; *h)* $\frac{12}{7} : 4$; *i)* $\frac{8}{9} : 3$; *j)* $\frac{15}{8} : 4$; *k)* $\frac{18}{17} : 6$; *l)* $\frac{0}{3} : 5$

Fogalmazd meg és indokold a tapasztaltakat!

Gyakorló 3.45–3.47.

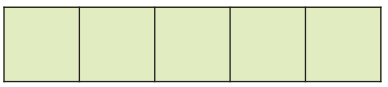
1. példa

A téglalap területe egységnyi. Színezzük ki a $\frac{4}{5}$ részének

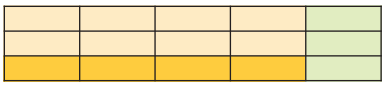
a) a harmadát;



b) a felét.



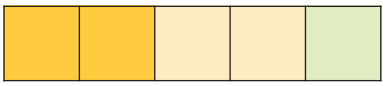
Törtet természetes számmal úgy is oszthatunk, hogy (változatlan számláló mellett) **a tört nevezőjét szorozzuk a természetes számmal.**



Az ábráról leolvasható:

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

Törtet természetes számmal úgy is oszthatunk, hogy (változatlan nevező mellett) **a tört számlálóját osztjuk a természetes számmal.**



A $\frac{4}{5}$ fele, vagyis az $\frac{1}{2}$ része:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 : 2}{5} = \frac{2}{5}$$

Ez utóbbi eljárást akkor használjuk, ha a számláló maradék nélkül osztható a természetes számmal.

Figyeld meg!

0-tól különböző természetes számmal úgy is oszthatunk egy számot, hogy az osztó reciprokával megszorozzuk azt.



Daniel Defoe egy Alexander Selkirk nevű skót tengerészről mintázta híres regényhősét, aki négy évig élt egy Chiléhez közeli szigeten.

OSZTÁS TÖRTTEL

FELADAT

135 Robinson Crusoe naplójából: „A puskaport kisebb adagokra osztottam el. Így bármi történjék, nem vet lobbot egyszerre az egész. Azonkívül az egyes dobozokat egymástól olyan messze igyekeztem elhelyezni, hogy a láng át ne terjedhessen. Körülbelül két hétig tartott ez a munka."

60 kg puskaporból hány csomag készíthető, ha egy csomag tömege:

a) 5 kg; *b)* 2 kg; *c)* 1 kg; *d)* $\frac{1}{2}$ kg; *e)* $\frac{1}{3}$ kg?

2. példa

5 kg burgonya ára 360 Ft. Hány forint 1 kg burgonya ára?

$360 : 5 = 72$, 360 Ft-nak az $\frac{1}{5}$ része $= 360 \cdot \frac{1}{5} = 72$ (Ft); $360 : \mathbf{5} = 360 \cdot \mathbf{\frac{1}{5}}$

3. példa

$\frac{1}{4}$ kg dió ára 240 Ft. Hány forint 1 kg dió ára?

$240 : \frac{1}{4} = 960$, hiszen $\frac{1}{4}$ kg-nak az 1 kg a 4-szerese.

Ezért $240 \cdot 4 = 960$ (Ft), $240 : \mathbf{\frac{1}{4}} = 240 \cdot \mathbf{4}$

4. példa

$\frac{3}{4}$ m selyem ára 750 Ft. Hány forint 1 m selyem ára?

$750 : \frac{3}{4} = 1000$. A $\frac{3}{4}$ m-nek az 1 m a $\frac{4}{3}$-szorosa, hiszen $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$.

Ezért $750 : \frac{3}{4} = \overset{\mathbf{250}}{\cancel{750}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}_{\mathbf{1}}} = 250 \cdot 4 = 1000$ (Ft), $750 : \mathbf{\frac{3}{4}} = 750 \cdot \mathbf{\frac{4}{3}}$

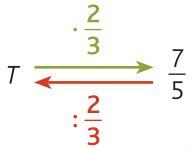
5. példa

Hány hektár az a földterület, amelynek $\frac{2}{3}$ része $\frac{7}{5}$ ha?

A földterület mérőszámát jelöljük T-vel.

A T-nek a $\frac{2}{3}$ része, azaz $\frac{2}{3}$-szorosa: $T \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{5}$ (ha)

A $\frac{2}{3}$ részből következtethetünk az 1 egészre, azaz osztunk $\frac{2}{3}$-dal: $T = \frac{7}{5} : \frac{2}{3}$, »»



Gyakorló
3.49–3.50.

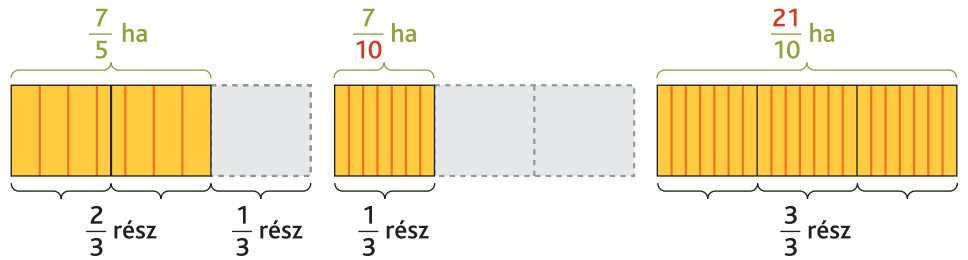
$\frac{2}{3}$ része $\frac{7}{5}$ (ha)

$\frac{1}{3}$ része ennek a fele

$\frac{7}{5} : 2 = \frac{7}{5 \cdot 2}$ (ha)

$\frac{3}{3}$ része az $\frac{1}{3}$ rész 3-szorosa:

$\frac{7}{5 \cdot 2} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$ (ha)



Tehát a teljes földterület a $\frac{7}{5}$ hektárnak a $\frac{3}{2}$-szerese: $T = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$

Vagyis $T = \frac{7}{5} : \frac{2}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{10}$ (ha). A $\frac{21}{10}$ ha-nak a $\frac{2}{3}$ része $\frac{7}{5}$ ha.

A $\frac{2}{3}$-dal való osztást a reciprokával,

$\frac{3}{2}$-del való szorzással helyettesíthetjük.

Ellenőrzés:

$\frac{21}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{10}_{5}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} = \frac{7}{5}$

Egy mennyiség törtrészéből úgy számítjuk ki az egész mennyiséget, hogy a mennyiség mérőszámát osztjuk a törtrész mérőszámával.

Jegyezd meg!

Egy számot törttel úgy is oszthatunk, hogy az osztó tört reciprokával szorozzuk a számot.

Például:

$\frac{7}{5} : \frac{2}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{10}$

FELADATOK

136 Számítsd ki a sorozat első öt elemét!

a) Az első elem 4, minden további elem az előző elem fele.

b) Az első elem $\frac{12}{5}$, minden további elem az előző elem harmada.

---

137 Végezd el az osztásokat, ahol lehet egyszerűsíts! Ellenőrizd a munkád!

A vegyesszámot először alakítsd át törtté!

a) $\frac{3}{8} : \frac{1}{2}$; *b)* $\frac{15}{14} : \frac{5}{7}$; *c)* $\frac{12}{25} : \frac{5}{6}$; *d)* $5 : \frac{3}{4}$; *e)* $12 : \frac{3}{5}$;

f) $\frac{17}{12} : \frac{12}{17}$; *g)* $\frac{0}{6} : \frac{1}{2}$; *h)* $\frac{5}{6} : \frac{0}{10}$; *i)* $4\frac{6}{7} : \frac{3}{2}$; *j)* $5\frac{3}{8} : 2\frac{1}{4}$;

k) $4\frac{15}{21} : 5\frac{1}{7}$; *l)* $1\frac{36}{48} : \frac{3}{2}$; *m)* $\frac{56}{48} : \frac{7}{6}$; *n)* $\frac{100}{60} : \frac{50}{100}$; *o)* $\frac{45}{15} : \frac{72}{24}$

---

138 Mely számok írhatók a betűk helyére?

a) $x \cdot 2 = \frac{3}{4}$; *b)* $\frac{7}{5} \cdot a = 4$; *c)* $\frac{3}{4} \cdot b = \frac{7}{6}$; *d)* $\frac{2}{3} \cdot y = 1$;

e) $\frac{x}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$; *f)* $\frac{x}{2} : \frac{7}{8} = \frac{4}{7}$; *g)* $\frac{7}{4} : \frac{x}{8} = \frac{21}{18}$; *h)* $x \cdot \frac{5}{7} = x : \frac{7}{5}$

Gyakorló 3.51–3.54.

139 Végezd el a műveleteket! Ügyelj a műveleti sorrendre!

Ha lehet, többféleképpen is számold ki az eredményt!

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} : 2$; b) $\frac{1}{5} : 4 \cdot \frac{2}{3}$; c) $\frac{5}{6} : \frac{5}{6} : \frac{5}{6}$; d) $\frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 4$;

e) $\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$; f) $\frac{5}{6} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$; g) $\frac{3}{4} : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)$; h) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)$;

i) $\frac{7}{3} - \frac{4}{5} : \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$; j) $\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$; k) $\frac{7}{3} - \left(\frac{4}{5} : \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$

140 a) Írd fel a sorozat 4. és 7. elemét, ha első eleme $\frac{5}{3}$ és minden további eleme az őt megelőzőnek reciproka!

Add meg a sorozat 100. és 201. elemét is!

Írd fel a szabályt többféleképpen is.

b) Mi lehet a szabály? Határozd meg a sorozat következő 3 elemét!

1; $\frac{4}{3}$; $\frac{16}{9}$; ☐; ☐; ☐

c) Írd fel a sorozat első három elemét, ha tudod, hogy az ötödik eleme $\frac{4}{7}$, és minden eleme az őt megelőzőnek $\frac{3}{4}$ része.

d) Egy sorozat 3. eleme $2\frac{3}{4}$, minden eleme az őt megelőzőnek az $\frac{1}{2}$ része.

Számítsd ki a sorozat 1., 2., 4. elemét!

e) Egy sorozat 4. eleme $\frac{7}{2}$, minden eleme a rá következőnek a $\frac{2}{3}$-szorosa.

Határozd meg a sorozat 3. és 5. elemét!

Figyelempróba

141

a) Melyik az a szám, amelynek a $\frac{3}{4}$ része $\frac{21}{20}$?

b) A $\frac{3}{4}$ melyik számnak a $\frac{21}{20}$ része?

c) Melyik szám $\frac{4}{3}$ része egyenlő a $\frac{3}{4}$-szeresével?

d) Eddig eltelt a napból annyi idő, mint amennyi a hátralevőnek a $\frac{3}{5}$ része. Hány óra van?

Ami a mesékből kimaradt.



„Háromszáz szakácsnő főzte az ebédemet, kis melléképületekben, amelyek a házam körül sorakoztak; itt élt egész konyhaszemélyzetem, az összes többi családtaggal.” – mesélte Gulliver liliputi élményeiről.

Egy alkalommal 20 cukrász készített $10\frac{3}{5}$ liligramm lisztből kalácsot. Ehhez 9 vödör vizet öntöttek egy üstbe, ami így $\frac{3}{4}$-éig telt meg. Végül az óriási sütő $\frac{3}{5}$ részét foglalta el a 6 egyforma tepsi, amelyben a kalácsok sültek.

a) Mennyi liszttel dolgozott egy cukrász, ha mind egyenlő mennyiséget készítettek?

b) Az üst mekkora részét töltené meg 1 vödör víz, 12 vödör víz?

c) Egy-egy tepsi területe mekkora része a sütő területének?

142 *a)* Egy téglalap területe $\frac{48}{5}$ dm², egyik oldala $\frac{4}{3}$ dm. Mekkora a kerülete?

b) Egy autó $\frac{5}{4}$ óra alatt 80 km-t tett meg. Mennyi utat tett meg 1 óra alatt?

c) Mikor halad gyorsabban egy autó, ha $\frac{3}{2}$ óra alatt 120 km-t tesz meg, vagy ha $\frac{2}{3}$ óra alatt 60 km-t? Indokolj!

d) Melyik anyagnak nagyobb a sűrűsége, amelyből 8,7 dm³ tömege $\frac{3}{4}$ kg, vagy amelyből $\frac{6}{5}$ dm³ tömege $\frac{2}{3}$ kg?

e) Egy téglalap egyik oldala $\frac{2}{5}$ része a kerületének.
Mekkora a területe, ha a kerülete $\frac{42}{8}$ cm?

Gyakorló
3.55–3.59.;
Feladatgyűjtemény
3.3.27–30.,
3.3.32–40.,
3.3.43–64.,

OSZTÁS TIZEDESTÖRT ALAKÚ SZÁMMAL

6. példa

A 0,145 km hosszú kerítés mentén hányszor helyezhető el egymás után a
a) 0,001 km hosszú méterrúd; **b)** 0,000 1 km hosszú narancssárga rúd?

Határozzuk meg a következő hányadosok értékét:
a 0,145 : 0,001 = ? **b** 0,145 : 0,000 1 = ?

1. megoldás

Írjuk fel a számokat törtalakban, és alkalmazzuk a törttel való osztás szabályát:

a $\frac{145}{1000} : \frac{1}{1000} = \frac{145}{1000} \cdot 1000 = 145;$

b $\frac{145}{1000} : \frac{1}{10\,000} = \frac{145}{1000} \cdot 10\,000 = 1450$

2. megoldás

Váltsuk át a mértékegységeket: 0,145 km = 145 m = 1450 dm

a 0,145 : 0,001 = 145 : 1 = 145;

b 0,145 : 0,000 1 = 1450 : 1 = 1450

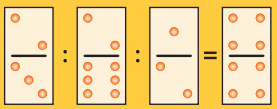
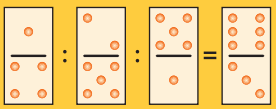
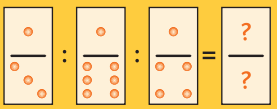
Ugyanazzal a számmal szorozzuk az osztandót és az osztót, a hányados nem változik.

Megfigyelhettük, hogy
0,001-del úgy osztunk, hogy a reciprokával, 1000-rel szorzunk;
0,000 1-del úgy osztunk, hogy a reciprokával, 10 000-rel szorzunk.

◉ *Fogalmazzuk meg önállóan a 0,1-del, 0,01-dal való osztás szabályát.*

Fejtörő!

A dominók jelentsenek most törtszámokat, a felső félen lévő szám legyen a számláló, az alsó félen lévő a nevező. Tedd igazzá az egyenleteket minden esetben egyetlen dominó megfordításával!

a)  *b)*  *c)* 

◉ *Vesd össze a feladatot a 71. oldal alján lévővel! Miben különböznek a megoldások? Miért?*

Többet ésszel ...

Ha M A N Ó : 0 , 1 = M A N Ó K, akkor milyen számjegyet jelöl a K ?

FELADATOK

143 Az osztás elvégzése előtt állapítsd meg, hogy a hányados egészrésze hány számjegyből áll! Az osztás elvégzése után ellenőrizd az eredményt! Például:

3 4 5,6 : 8 1 = □,... Az egészrész egy számjegyből áll.

```
3 4 5,6 : 8 1 = 4,2 6
  2 1 6
    5 4 0
      5 4     A maradék 0,54
```

```
    4,2 6 · 8 1
  3 4 0 8
  3 4 5,0 6
```

```
  3 4 5,0 6
+     0,5 4
  3 4 5,6 0
```

a)	973 : 7;	4842 : 6;	5340 : 75;	560 : 64;	1522 : 40
b)	65,89 : 45;	3,709 : 38;	6,456 : 66;	9,234 : 35;	5,555 : 55
c)	480 : 10;	487 : 10;	48,7 : 10;	480 : 100;	480 : 1000
d)	0,345 : 10;	23,56 : 1000;	25,00 : 100;	50,05 : 100;	35 000 : 10 000

Hogyan osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, 10 000-rel?

144 Számítsd ki a **48 : 12** hányados értékét, majd ennek segítségével add meg a következő hányadosok értékét!

a)	24 : 12;	96 : 12;	48 : 24;	48 : 48;	48 : 36
b)	4,8 : 12;	0,48 : 12;	48 : 1,2;	4,8 : 1,2;	4,8 : 0,12

Megfigyelted az osztandó, illetve az osztó változásait?

7. példa

Mennyi a következő hányados értéke? 45,2 : 0,26

Hogyan becsüljük a hányadost?

A hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a (0-tól különböző) számmal szorozzuk.

Most azt akarjuk, hogy az osztó egész szám legyen (hiszen egész számmal már tudunk osztani), ezért megszorozzuk 100-zal. De ezt csak úgy tehetjük, hogy az osztandót is megszorozzuk 100-zal.

45,2 : 0,26 = 4520 : 26 = *x*; Becslés: $100 < x < 200$

```
4 5 2 0 : 2 6 = 1 7 3,8
1 9 2
  1 0 0
    2 2 0
      1 2
```

Ellenőrzés:

```
1 7 3,8 · 0,2 6
3 4 7 6
1 0 4 2 8
4 5,1 8 8
```

```
  4 5,1 8 8
+   0,0 1 2
  4 5,2 0 0
```

A maradék 0,012. (A maradékot mindig az eredeti osztóhoz viszonyítjuk.)

Emlékeztető

Ha egy osztásban az osztó tizedestört, akkor úgy alakítjuk az osztót és az osztandót, hogy az osztó egész szám legyen és a hányados értéke ne változzék.

Például, ha az osztóban tized van, akkor 10-zel, ha század van, akkor 100-zal stb. szorozzuk az osztót és az osztandót is.

8. példa

Végezzük el a következő osztást! 23,5 : 1,6

Alkalmazzuk a tört osztásáról tanultakat.

Írjuk át mindkét számot törtalakba: $23{,}5 : 1{,}6 = \frac{235}{10} : \frac{16}{10}$

Törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk:

$$\frac{235}{10} : \frac{16}{10} = \frac{235}{10} \cdot \frac{10}{16} = \frac{235}{16}$$

Ezt a szorzást pedig korábbi ismereteink alapján el tudjuk végezni.

Összefoglalva: $23{,}5 : 1{,}6 = 235 : 16 = 14{,}6875$

FELADATOK

145 Hányszorosa

a) 3 a 4-nek; *b)* 0,15 a 4-nek; *c)* 0,5 a 0,1-nek; *d)* 0,2 a 0,02-nak?

146 Mennyivel kell szoroznod az osztandót és az osztót, hogy el tudd végezni az osztást? Végezd el a bővítéseket! (Két tizedesjegyig számolj!)

a) 235 : 1,56; *b)* 1,25 : 0,003; *c)* 56,83 : 12; *d)* 10,02 : 3,225

◉ *A bővítés után az osztó egész szám?*

147 Számítsd ki a hányadosokat! (Két tizedesjegyig dolgozz!)

a) 28,6 : 1,6; *b)* 142,68 : 12,6; *c)* 82,63 : 24,7; *d)* 512,29 : 48,72;
e) 149,7 : 56,78; *f)* 19,1 : 22,4; *g)* 0,56 : 0,6; *h)* 0,128 : 1,28;
i) 3,56 : 0,725; *j)* 3,5 : 0,01; *k)* 3,5 : 0,0001; *l)* 3,5 : 0,000 01

◉ *Végezz ellenőrzést is!*

148 Milyen hosszú annak a téglalapnak az egyik oldala, amelynek területe 148,60 m^2, és a másik oldala 22,6 m hosszú?

Gyakorló 4.64–4.71., 9.14.; *Feladatgyűjtemény* 4.2.11–14.

149 *a)* Egy négyzet kerülete 25,6 dm. Hány négyzetcentiméter a területe?

b) Egy téglalap egyik oldala 2,25 dm, ez az oldal a másik oldalnak 1,25-szorosa. Számítsd ki a téglalap kerületét, területét!

150 *a)* Írd fel a sorozat első három elemét, ha a 4. eleme 3,56, és minden eleme az előtte lévőnek 1,5-szerese!

b) Írd fel a sorozat 4. és 5. elemét, ha a 3. eleme 0,7, és bármelyik eleme az őt követőnek 1,5-szerese!

151 Az alábbi műveletsorokban az osztásokat század pontosságig végezd!

a) 42,6 : 28 – 2,35 · 0,85; *b)* (13,8 + 4,4) : 5,2;
c) 149,12 : (63,8 – 22,5); *d)* 0,12 : (1,56 : 0,05)

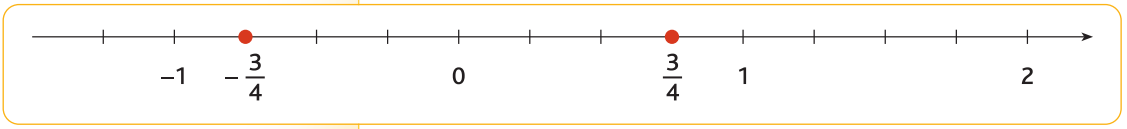
Mit jelent a „század pontosság”? Hány tizedesjegyig kell elvégezni az osztást?

◉ *Megtervezted a műveletek sorrendjét?*

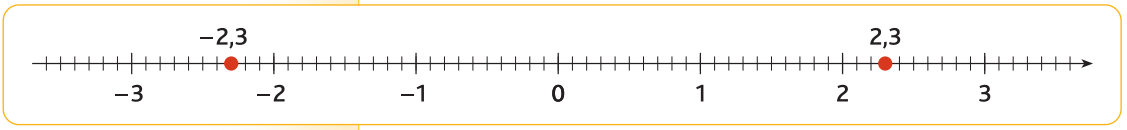
ISMERKEDÉS A RACIONÁLIS SZÁMOKKAL

Az egészekhez hasonlóan a törtszámoknak is képezhetjük az ellentettjét:

$\frac{3}{4}$ ellentettje $-\frac{3}{4}$, mert $\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=0$.



$-2{,}3$ ellentettje $2{,}3$, mert $-2{,}3+2{,}3=0$.



A szám és az ellentettje egyenlő távolságra van a 0-tól. A 0 ellentettje önmaga.

Emlékeztető

Az egész számokat és a törtszámokat együtt racionális számoknak nevezzük:

Pozitív egész számok: 1, 2, 3, ...
Nulla: 0
Negatív egész számok: −1, −2, −3, ...
} Természetes számok
} Egész számok

Pozitív törtszámok: $\frac{1}{3}$; $\frac{13}{10}$ stb.

Negatív törtszámok: $-\frac{2}{5}$; $-\frac{37}{12}$ stb.

} Racionális számok

A racionális számok (végtelen sokféleképpen) felírhatók két egész szám hányadosaként törtalakban úgy, hogy a nevező nem nulla. Például:

$2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{-6}{-3}=\ldots$

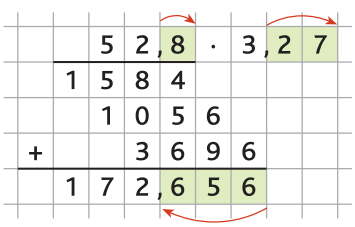
$-2=\frac{-2}{1}=\frac{2}{-1}=\frac{-4}{2}=\frac{4}{-2}=\ldots$

$2{,}5=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}=\frac{15}{6}=\frac{20}{8}=\frac{-20}{-8}=\ldots$

$0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=\frac{0}{-3}=\ldots$

$-\frac{3}{4}=\frac{-6}{8}=\frac{6}{-8}=\frac{-15}{20}=\ldots$

$-2{,}5=\frac{-5}{2}=\frac{-10}{4}=\frac{20}{-8}=\ldots$



Mindegyik racionális szám fölírható vagy véges tizedestört alakban, vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban. Például:

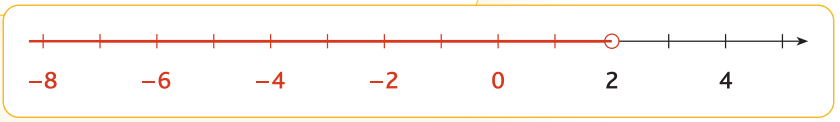
$2=2{,}0$; $0=0{,}0$; $\frac{7}{4}=1{,}75$; $\frac{-7}{4}=-1{,}75$;

Jelölés: $\frac{37}{55}=0{,}6727272\ldots=0{,}6\dot{7}\dot{2}$

1. példa

Ábrázoljuk a 2-nél kisebb racionális számokat a számegyenesen.

A számegyenes bármilyen kicsi darabján végtelen sok racionális szám található. Nem folyamatosan töltik ki a számegyenest, de **végtelen sűrűn** helyezkednek el. Ezért a 2-nél kisebb racionális számokat így jelölhetjük a számegyenesen.



Megjegyzés: A számegyenesen a racionális számok „között” (végtelenül sűrűn) végtelen sok nem racionális szám helyezkedik el. Ezekkel később ismerkedünk meg.

2. példa

Számítsuk ki a következő műveletek eredményét.

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)$; b) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{10}{7}\right)$; c) $\left(-\frac{8}{3}\right):\left(+\frac{6}{5}\right)$

A tört alakban írt negatív számokkal a törtekre, illetve a negatív egészekre tanult szabályok együttes alkalmazásával számolhatunk.

a) A negatív egészekre tanultak alapján egyszerűbb alakban, zárójelek nélkül felírjuk a törteket, majd közös nevezőre hozás után kiszámítjuk az eredményt.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=-\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{-9+10}{12}=\frac{1}{12}$$

b) Megállapítjuk a szorzat előjelét: két negatív szám szorzata pozitív szám lesz. Ezután alkalmazzuk a törtek szorzásának a szabályát. A szorzás elvégzése előtt egyszerűsíthetünk.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{10}{7}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{7}=\frac{3\cdot\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot 7}=\frac{6}{7}$$

c) Megállapítjuk a hányados előjelét: egy negatív szám és egy pozitív szám hányadosa negatív szám lesz. Ezután alkalmazzuk a törtek osztásának a szabályát. Az osztó reciprok értékével való szorzás elvégzése előtt egyszerűsíthetünk.

$$\left(-\frac{8}{3}\right):\left(+\frac{6}{5}\right)=\left(-\frac{8}{3}:\frac{6}{5}\right)=-\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 5}{3\cdot\underset{3}{\cancel{6}}}=-\frac{20}{9}$$

3. példa

Egy tengeralattjárónak a tengerszinthez viszonyított helyzete $-\frac{3}{8}$ km. Ez a tenger mélységének $\frac{2}{5}$ része. Határozzuk meg a tengerfenéken lévő kő helyzetét.



A $\frac{2}{5}$ részből következtetünk az egész mélységre.

$$\left(-\frac{3}{8}\right):\left(\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{15}{16}\ \text{(km)}$$

A kő helyzete a tengerszinthez képest: $-\frac{15}{16}$ km, vagyis $\frac{15}{16}$ km mélyen van.

Az előjelet a korábban tanultak alapján határozzuk meg.

Készítsünk **nem** racionális számokat! A következő két végtelen tizedestörtben **ne legyen ismétlődő szakasz**! Hogyan folytatódhatnak a számok?

$a = 0{,}12345678910111213\ldots$ $b = 7{,}1010010001000001\ldots$

Fogalmazd meg a felismert szabályt!

FELADATOK

4 négyzetrácsbeosztás lehet az egység.

152 Ábrázold számegyenesen, majd rendezd növekvő sorrendbe a következő racionális számokat!

$0;\quad -2;\quad +2;\quad -2{,}25;\quad -2{,}75;\quad +\frac{7}{2};\quad +\frac{7}{4};\quad -\frac{5}{2};\quad +\frac{5}{4}$

153 Írj a törtekben a betűk helyére olyan egész számokat, hogy a törtek

a) -1-nél kisebbek legyenek;

b) -2-nél nagyobbak és 0-nál kisebbek legyenek;

c) $-\frac{3}{4}$-nél nagyobbak és $\frac{1}{3}$-nál kisebbek legyenek!

$\frac{a}{4};\quad \frac{b}{2};\quad -\frac{3}{c};\quad +\frac{0}{d};\quad \frac{e}{f};\quad \frac{g}{5};\quad -\frac{h}{4}$

154 Számítsd ki az eredményt!

Alkalmazd együttesen a törtekre, illetve a negatív egészekre tanult szabályokat!

a) $\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right);$

b) $\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{7}{6}\right)+\left(-\frac{8}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right);$

c) $\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{9}{7}\right)+\left(-\frac{8}{7}\right)-\left(-\frac{1}{7}\right);$

d) $\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right);$

e) $\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right);$

f) $\left(+\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right);$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(+\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right);$

h) $\left(-\frac{8}{5}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right);$

i) $\left(+\frac{32}{9}\right)+\left(-\frac{20}{6}\right)-\left(-\frac{11}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right);$

j) $\left(+\frac{12}{7}\right)+\left(-\frac{15}{2}\right)-\left(-\frac{13}{14}\right);$

k) $\left(+\frac{35}{4}\right)+\left(-\frac{20}{25}\right)-\left(-\frac{11}{20}\right)-(+2{,}3);$

l) $\left(+\frac{28}{35}\right)+\left(-\frac{45}{18}\right)-\left(-\frac{13}{65}\right)$

Gyakorló
3.06., 3.13., 3.60–3.70., 4.03–4.06., 4.31–4.32., 4.36–4.37., 4.72–4.74., 9.02–9.04.;
Feladatgyűjtemény
3.1.13–17., 3.2.11–17.

Fejtörő!



Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

Egy, a tó fölé behajló ágon, a vízszinthez viszonyítva $+\frac{8}{3}$ m magasan ül egy kárókatona. Alatta, a vízszinthez képest $-\frac{19}{6}$ m-en lapul egy rák. A kárókatonától és a ráktól egyenlő távolságra lebeg egy állat.

a) Az alábbiak közül melyik állatról lehet szó?

A: Halról. **B:** A víz színén pihenő békáról. **C:** Szitakötőről.

b) A lebegő állat mekkora távolságra van a vízszinttől?

A $\frac{3}{7}$ tört tizedestört alakjában az alábbiak közül mely számjegy áll a tizedesvessző után a 2010. helyen?

A: 4; **B:** 2; **C:** 8; **D:** 5; **E:** 7; **F:** 1

155 Számítsd ki az eredményt!

a) $(+2{,}48) + (-3{,}15) - (-2{,}4)$; *b)* $(-5{,}6) - (+3{,}12) + (-4{,}05)$;

c) $(-2{,}7) - (-2{,}7) + (-2{,}7)$; *d)* $(-1{,}1) - (+1{,}01) - (-1{,}001)$

Alkalmazhatók a negatív egészekre tanult szabályok.

---

156 Keress olyan racionális számokból álló sorozatokat, amelyeknek az adott számok a harmadik, a negyedik és az ötödik elemük! Írd fel a sorozatok első tíz elemét! Fogalmazd meg a felismert szabályt legalább két alakban!

a) $\square, \square, +37, +31, +25, \square, \square, \square, \square, \square$

b) $\square, \square, -19, -11, -3, \square, \square, \square, \square, \square$

c) $\square, \square, -5{,}6, -1{,}5, +2{,}6, \square, \square, \square, \square, \square$

d) $\square, \square, -\frac{5}{3}, -\frac{9}{6}, -\frac{4}{3}, \square, \square, \square, \square, \square$

---

157 Határozd meg a szorzat előjelét, majd végezd el a szorzást!

a) $-\frac{33}{25} \cdot \left(-\frac{15}{11}\right)$; *b)* $\frac{12}{34} \cdot \left(-\frac{86}{3}\right)$; *c)* $-4\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{2}{7}\right)$; *d)* $-\frac{13}{96} \cdot 0$;

e) $-3{,}3 \cdot 6{,}12$; *f)* $100 \cdot (-0{,}01)$; *g)* $-4{,}2 \cdot (-0{,}52)$; *h)* $-\frac{1}{2} \cdot (-0{,}75)$;

i) $\left(-\frac{13}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{9}\right) \cdot \left(-\frac{30}{13}\right)$; *j)* $(-0{,}05) \cdot (-200) \cdot (-0{,}25)$

---

158 Állapítsd meg a hányados előjelét! Végezd el az osztásokat!

a) $(-5) : \frac{3}{4}$; *b)* $\left(-\frac{4}{9}\right) : \frac{5}{3}$; *c)* $12 : \left(-\frac{3}{5}\right)$; *d)* $\left(-\frac{4}{9}\right) : \frac{20}{27}$;

e) $1\frac{13}{8} : (-5)$; *f)* $\frac{0}{6} : \left(-\frac{1}{2}\right)$; *g)* $2 : \left(-\frac{4}{3}\right)$; *h)* $\left(-\frac{12}{3}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right)$;

i) $2\frac{1}{4} : \left(-\frac{3}{8}\right)$; *j)* $\left(-\frac{15}{28}\right) : \left(-4\frac{2}{7}\right)$; *k)* $4\frac{15}{21} : 5\frac{1}{7}$; *l)* $1\frac{36}{48} : \left(-\frac{3}{2}\right)$

A vegyesszámokat először alakítsd át törtté!

Ellenőrizd a munkád! Ahol lehet, egyszerűsíts!

---

159 Végezd el a számításokat!

a) $\frac{1}{3} : \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{14}$; *b)* $\left(3\frac{4}{5} - \frac{19}{25}\right) : \frac{1}{2}$; *c)* $3\frac{4}{5} : \left(-\frac{19}{25}\right) : \frac{1}{2}$;

d) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-1\frac{3}{4}\right) : \frac{5}{8}$; *e)* $\frac{1}{3} - \frac{4}{5} : \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$; *f)* $\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$;

g) $\frac{1}{3} - \left(\frac{4}{5} : \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$; *h)* $\frac{1}{3} - \frac{4}{5} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$

Megtervezted a műveleti sorrendet?

---

160 Melyik érték nagyobb?

$(+2)^5$ vagy $(-2)^5$; $(+2)^6$ vagy $(-2)^6$; $(-5)^2$ vagy $(-2)^5$;

$(+6)^3$ vagy $(+6)^5$; $(-6)^3$ vagy $(-6)^5$; $(-3)^4$ vagy $(+3)^3$

GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

◉ *Lásd a 9. oldalt.*

B38 Készíts helyiérték-táblázatot, és helyezd el benne a következő számokat!

3,28; | 3,028; | 3,020 8; | 3,200 8; | 0,202 02

Gyakorló
1.21.–1.31.,
3.60–3.70.,
4.75–4.92.

B39 Vizsgálódjunk a tízes számrendszerben fölírt természetes számok körében!

a) Hány háromjegyű, ötjegyű, hétjegyű, kilencjegyű szám van?

b) Hány ötjegyű természetes szám írható föl úgy, hogy mindegyik számjegye páratlan szám?

c) Írj le egy ötjegyű természetes számot, amelyben nincs 9-es számjegy! Írd le azt a számot is, amelynek minden számjegye 1-gyel nagyobb az eredeti szám megfelelő számjegyeinél! Mennyivel növekedett az új szám az eredetihez képest?

◉ *Hogyan osztunk 100-zal (1000-rel 10 000-rel)?*

B40 *a)* Hány százforintossal fizethető ki 25 000 Ft; 3 000 000 Ft?

b) Írd le a következő számokat helyiértékes írásmóddal:

3 egész 27 tízezred; | 8 egész 8 ezred; | 7 egész 148 milliomod!

Számítsd ki a legnagyobb és a legkisebb szám összegét és különbségét!

◉ *Hogyan szorzunk tizedestörtet 10-zel, 100-zal, 1000-rel?*

B41 Végezd el a szorzásokat!

a) 2,581 · 10; *b)* 2,581 · 100; *c)* 2,581 · 1000; *d)* 2,581 · 10 000

B42 Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből véletlenszerűen háromjegyű számokat képezünk úgy, hogy egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk.

A következő események közül melyiknek a bekövetkezése **biztos**, melyiké **lehetséges** és melyiké **lehetetlen**?

◉ *Lásd a 34–35. oldalt.*

A: 500-nál kisebb számot kapunk.
E: 1-gyel osztható számot kapunk.
K: 2-vel osztható számot kapunk.
L: 5-tel osztható számot kapunk.
N: 4-gyel osztható számot kapunk.
O: 25-tel osztható számot kapunk.

Figyelempróba

B43 *a)* Írj fel két különböző kétjegyű számot! Jelölje a nagyobbikat *a*, a kisebbiket *b*! Képezz két négyjegyű számot úgy, hogy először az *a* számot a *b* szám elé írod, majd a *b*-t az *a* elé! Vond ki az így kapott nagyobb négyjegyű számból a kisebbet! A különbséget oszd el az *a* és a *b* szám különbségével! A hányadoshoz adj hozzá 1-et! Mit kaptál eredményül?

◉ *Több különböző számpárral is végezd el a számítást!*

b) Válassz ki három, 0-tól különböző egyjegyű természetes számot! Ezekből kettőt-kettőt kiválasztva képezz belőlük hat különböző kétjegyű számot! Add össze ezeket, és az összegüket oszd el a három kiválasztott egyjegyű szám összegével! A hányadosból vonj ki 22-t! Mit kaptál eredményül?

◉ *Mindig ezt az eredményt kapod?*



2,4 kg narancsot vettünk 720 Ft-ért. A hámozás után azt tapasztaltuk, hogy a narancshéj tömege egyötöd része a hámozott narancs tömegének. Mennyibe került a hámozott narancs 1 kg-ja?

B44 Alakítsd át az egyes sorokban lévő törteket úgy, hogy a nevezőjük egyenlő legyen, majd rendezd nagyság szerint növekvő sorozatba azokat!

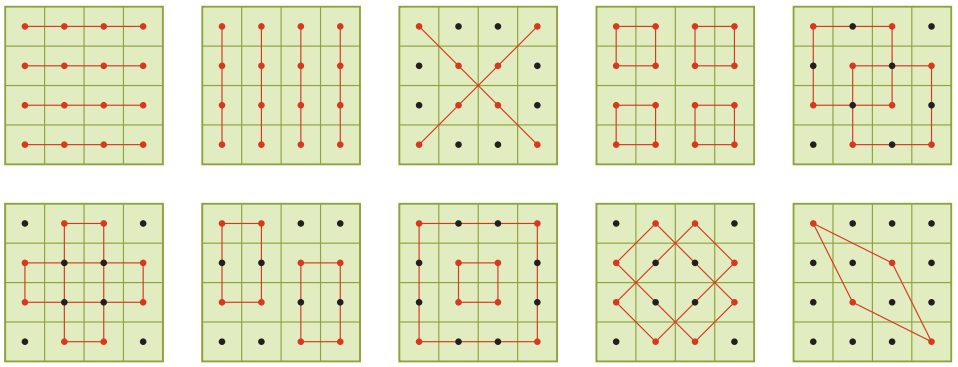
a) $\frac{2}{8}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{4}$; $-\frac{3}{8}$; $\frac{18}{24}$; $-\frac{100}{64}$; $\frac{24}{16}$; $\frac{26}{32}$

b) $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{6}$; $\frac{9}{4}$; $-\frac{6}{2}$; $-\frac{48}{54}$; $-\frac{300}{36}$; $\frac{63}{18}$; 5

B45 Ez a bűvös négyzet azért nevezetes, mert *Dürer Melankólia* című képén látható. Az alsó sorban a 15 és a 14 számok a kép keletkezésének évszámát (1514) jelzik.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

a) Számítsd ki a Dürer-féle bűvös négyzet következő rajzokon jelzett 4-4 számának összegét!





b) Keress további számnégyeseket a bűvös négyzetben, amelyeknek az összege ugyanannyi, mint az előző ábrán jelzett számnégyeseké!

c) Határozd meg ezeken a bűvös négyzetekben is az előző rajzokon jelzett 4-4 szám összegét!

Milyen kapcsolat van az eredeti bűvös négyzet és ez utóbbi négyzetek között?

48	9	6	39
15	30	33	24
27	18	21	36
12	45	42	3

3,2	0,6	0,4	2,6
1,0	2,0	2,2	1,6
1,8	1,2	1,4	2,4
0,8	3,0	2,8	0,2

4	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	2
$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	3
1	$\frac{15}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$

B46 *a)* Elköltöttem 500 Ft-nak a $\frac{3}{4}$ részét. Hány forintot költöttem el?

b) Felástam kertünknek a $\frac{2}{5}$-szörösét. Mekkora részét ástam fel?

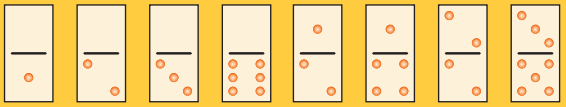
Mekkora részét kell még felásnom?

c) A „vagyonom” 500 Ft adósságból áll. Ennek törlesztettem a $\frac{3}{4}$ részét.

Hány forint lett így a vagyonom? Hányszorosa ez az 500 Ft adósságomnak?

Készíts a következő dominókból olyan bűvös négyzetet, ahol mind a 4 sorban és mind a 4 oszlopban a pöttyök összege 8. **Fejtörő!**

A dominók állhatnak vízszintesen és függőlegesen is. Keress többféle megoldást!



B47 Végezd el a tagok ügyes csoportosításával a következő műveleteket!

a) $\frac{1}{4}+\frac{4}{5}+\frac{7}{9}+\frac{3}{4}+\frac{2}{9}$;

b) $\frac{3}{4}-\frac{7}{3}+\frac{5}{2}-\frac{9}{4}+\frac{8}{6}$;

c) $0{,}76+4{,}35+3{,}24$;

d) $0{,}68-3{,}8+1{,}2-0{,}4+3$;

e) $2{,}75+\frac{7}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$;

f) $2{,}7-(-3{,}25)+\frac{6}{8}-\frac{7}{10}+(-1)$

B48 Hasonlítsd össze a két-két műveletsort!
Írd közéjük az $=$, $<$, $>$ jelek közül a megfelelőt!

a) $\frac{6}{4}-\left(\frac{7}{5}+\frac{8}{6}\right)\square\ \frac{6}{4}-\frac{7}{5}+\frac{8}{6}$;

b) $\frac{12}{15}-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)\square\ \frac{12}{15}-\frac{5}{3}-\frac{1}{6}$;

c) $0{,}68-(1{,}5-6)\square\ 0{,}68-1{,}5+6$;

d) $4-(3{,}4+3)\square\ 4-3{,}4-3$

B49 A szorzás, illetve az osztás elvégzése előtt egyszerűsítsd a törteket!

a) $\frac{10}{35}\cdot\frac{49}{14}$;

b) $\frac{28}{63}\cdot\left(-\frac{70}{50}\right)$;

c) $\left(-\frac{105}{315}\right)\cdot\frac{125}{225}\cdot\frac{256}{64}$;

d) $\frac{585}{143}:\frac{1925}{825}$;

e) $\frac{1000}{8000}:\frac{624}{348}$;

f) $\left(-\frac{140}{700}\right):\left(-\frac{198}{2145}\right)$

B50 Számítsd ki a következő műveletsorok eredményét!

a) $\frac{14}{15}-\frac{25}{20}+\frac{24}{60}\cdot(-12)$;

b) $\frac{64}{60}+\frac{18}{180}\cdot(-4)-\frac{75}{180}-(-2)$;

c) $\frac{45}{54}-\frac{205}{72}-\frac{25}{54}\cdot(-3)$;

d) $-\frac{85}{84}+\frac{15}{196}\cdot 5-\frac{25}{196}\cdot(-5)$;

e) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot 24-1$;

f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\cdot 24-1$;

g) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{6}\cdot 24-1\right)$;

h) $\left(\frac{18}{8}-\frac{3}{6}\right):4\cdot 3-1$;

i) $\frac{18}{8}-\frac{3}{6}:(4\cdot 3-1)$;

j) $\frac{18}{8}-\frac{3}{6}:4\cdot 3-1$

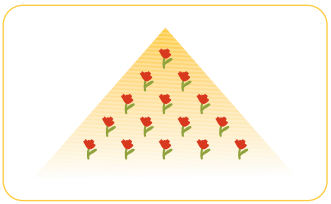
Mit veszel észre, ha összehasonlítod az e), f), g), illetve a h), i), j) feladatokat?

Fogalmazd meg a tapasztaltakat!

B51 Többet ésszel ...

a) Öt vándor világgá ment. 5-nek legalább 5 tallér volt a zsebében, 4-nek legalább 10 tallér, 3-nak legalább 15 tallér, 2-nek legalább 20 tallér, végül 1-nek legalább 25 tallér. Összesen hány tallér volt náluk?

b) Lilla és Nóra háromszög alakú virágágyásba árvácskákat ültetnek, összesen 40 sorba. Az első sorba 1, a másodikba 2, a harmadikba 3 és így tovább, a 40. sorba 40 virág kerül. Lilla az első 27 sorban ültette el a virágokat, Nóra az utolsó 13 sorban. Melyikük ültetett többet? Mennyivel?



Végezd el a következő kivonásokat! $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$ $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=$ $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=$

A tapasztaltak alkalmazásával hajtsd végre a következő összeadást! $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=$

bővített szint

B52 Csoportosítsd a mondatokat aszerint, hogy a „szám”, „pozitív szám”, „negatív szám” kifejezések helyére konkrét racionális számokat írva mindig igaz; mindig hamis kijelentést kapunk; illetve van olyan szám, amelyre igaz; van olyan szám, amelyre hamis a kapott kijelentés.

*Ha mindig igaz, akkor írj a mondat után **I** betűt, ha mindig hamis, akkor írj utána **H** betűt! Ha lehet igaz és hamis is a kapott mondat, akkor **L** betűt írj a téglalapba!*

A: Ha egy számból kivonunk egy számot, akkor a különbség kisebb, mint a kisebbítendő. ☐

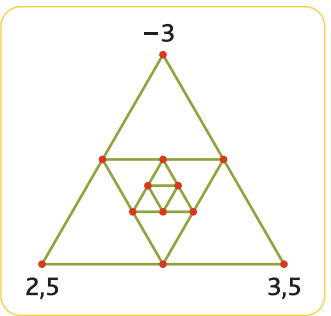
B: Ha pozitív számból negatív számot vonunk ki, akkor negatív szám a különbség. ☐

C: Ha a kivonandóhoz hozzáadunk egy számot, és a kisebbítendőt változatlanul hagyjuk, akkor a különbség csökken. ☐

D: Ha a kisebbítendőhöz hozzáadunk egy számot, és a kivonandót változatlanul hagyjuk, akkor a különbség nő. ☐

E: Ha a kisebbítendőhöz és a kivonandóhoz ugyanazt a számot adjuk hozzá, akkor a különbség nem változik. ☐

B53 Egy háromszög csúcsaihoz tetszés szerinti három számot írunk, az oldalak középpontjára a két csúcsnál lévő szám **számtani közepét**. Folytasd az eljárást az oldalak középpontja által meghatározott háromszögekkel az ábra szerint! Számítsd ki az egyes háromszögek csúcsainál lévő három-három szám összegét! **Igazold a felismert összefüggést!**



B54 Egy háromjegyű szám jegyeinek összege az a kétjegyű szám, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti szám harmadik számjegyét letakarjuk.

a) Mennyi az első és a harmadik számjegy összege?

b) Hány ilyen szám van?

B55 Írd le (esetleg többféleképpen is) a számítás tervét!

a) Gondoltam két számot. Az összegük 128,8. Az egyik 39,75-dal több, mint a másik. Melyik ez a két szám?

b) Egy számot 72-vel osztottunk, hányadosul 39-et kaptunk, az osztás maradéka 21. Melyik számot osztottuk?

c) 39 650-et egy számmal osztottuk, 543-at kaptunk hányadosul és 11-et maradékul. Mi volt az osztó?

B56 Írd be a hiányzó műveleti jeleket és zárójeleket!

Fejtörő!

4,8 2 10 = 5; 4,8 2 10 = 0,24; 4,8 2 10 = 4,6;

4,8 2 10 = 0,96; 4,8 2 10 = 0,28; 4,8 2 10 = 0,68

Bővített szint

Tedd igazzá

a) **1 gyufa** áthelyezésével; **b)** **2 gyufa** áthelyezésével;

c) **3 gyufa** áthelyezésével; **d)** **4 gyufa** áthelyezésével!



Ha holnap előtt 4 nappal vasárnap volt, akkor milyen nap lesz 4 nappal tegnap után?

Figyelemprőba

TUDÁSPRÓBA

161

1 Kerekítsd a következő számokat

ezresre: 29 500 ≈ ☐ ;

százasra: 49,5 ≈ ☐ ;

egészre: 4,648 ≈ ☐ ;

századra: 2,563 ≈ ☐ !

2 Írd be a hiányzó mérőszámokat!

3,48 m = ☐ dm = ☐ mm = ☐ cm;

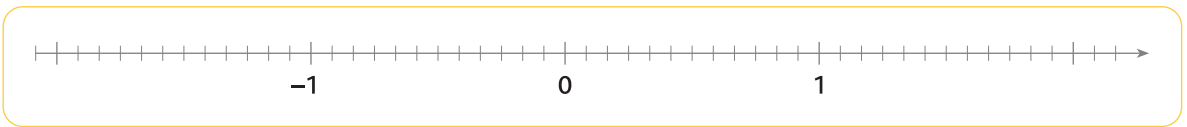
540 kg = ☐ t = ☐ dkg (dag) = ☐ g

3 Húzd alá a 10-zel osztható, karikázd be a 4-gyel osztható számokat!

3560; 3450; 4468; 5357; 6000; 8100

4 Ábrázold számegyenesen, és rendezd nagyság szerint sorba a törteket!

$\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{12}$; $\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{3}$; $\frac{0}{2}$; $-\frac{7}{4}$; $\frac{11}{6}$



5 Végezd el a műveleteket! A törtek esetén, ha lehet, végezz egyszerűsítést!

a) (+5) – (–7) + (–3); *b)* (–3) · (+10); *c)* (–12) : (–4); *d)* (+35) · 0 : (–2);

e) 56,8 – 2,78; *f)* 45,6 · 0,002; *g)* 5,68 : 7,5; *h)* 0,56 : 0,000 01;

i) $\frac{11}{12}+\frac{9}{4}-\frac{1}{3}$; *j)* $\left(-\frac{4}{9}\right):\frac{8}{27}$; *k)* $\frac{2}{3}:\frac{16}{15}$; *l)* $\frac{48}{25}\cdot\frac{15}{16}$

6 Egy ház felújításához $\frac{4}{5}$ hüvelyk vastagságú deszkára van szükség. A kereskedőnél csak 1 hüvelyk, $\frac{3}{2}$ hüvelyk, $\frac{3}{4}$ hüvelyk és $\frac{6}{5}$ hüvelyk vastagságú deszkát találtak.

a) A deszkák közül melyiket válasszák, ha a keresettnél vékonyabb deszka már nem felel meg a célnak, de a kiválasztott deszkából a lehető legkevesebbet szeretnék legyalulni?

b) 1 hüvelyk ≈ 2,5 cm. Hány millimétert kellett legyalulniuk a kiválasztott deszkából?



7 Gábor Budapesten, hétfőn este 10 órakor SMS-t kapott Idától, aki légiutas-kísérő. Ida megírta, hogy ott kedd reggel 6 óra van. A táblázatból kiolvasható, hogy amikor Budapesten déli 12 óra van, akkor néhány más helyen mennyi az idő. Ez alapján döntsd el, hogy hol tartózkodhatott Ida az üzenet írása közben!

Hely	Budapest	Thaiföld	New York	Tokió
Időpont	Déli 12 óra	Délután 6 óra	Reggel 6 óra	Este 8 óra

2. GEOMETRIAI VIZSGÁLATOK, SZERKESZTÉSEK

Ebben a fejezetben nemcsak átismételjük, hanem pontosítjuk és kiegészítjük a korábban tanult geometriai fogalmakat.



Eukleidész

A geometriát az ókori görögök fejlesztették tudománnyá. Eukleidész (i. e. 300 körül) görög matematikus az Elemek című könyvében logikus gondolkodás segítségével alkotta meg az úgynevezett euklideszi geometria alapjait. Könyve a Biblia után a legtöbbször kiadott mű. A XIX. századig tankönyvként használták.



A két Bolyai szobra Marosvásárhelyen

Bolyai Farkas (1775–1856) az első igazán jelentős magyar matematikus. Sok fontos matematikai művet alkotott. Leghíresebb a párhuzamossággal foglalkozó könyve, amely előkészítette fia felfedezéseit.

Bolyai János (1802–1860) a legnagyobb magyar matematikus, akinek (az orosz Lobacsevszkijjel egy időben) először sikerült jelentősen továbbfejlesztenie az euklideszi geometriát. 1823-ban írta édesapjának: „Semmiből egy új, más világot teremtettem." Ebben a munkájában megalapozta a térről alkotott modern szemléletet az ún. görbült tereket vizsgálva.

Valójában mi is egy görbült felületen, egy majdnem szabályos gömbön élünk. A gömb felszínén sok minden más, mint a síkon. Például Philippe Boulanger könyvében két repülőszőnyeg-versenyző, akik egymástól 500 méterre, az Egyenlítőre merőlegesen, azonos magasságban, sohasem változtatva irányt akarták megkerülni a Földet, szerencsétlenségükre azonos sebességgel haladtak, így az Északi-sarknál összeütköztek.

ESZKÖZEINK HASZNÁLATA

OLVASMÁNY

„A szerkesztés megbízhatósága a használt eszközök pontosságától s attól függ, milyen gonddal dolgozunk. [...]

[...] Gyakorlati szempontból igen fontos, hogy rajzeszközeink lehetőleg pontosak legyenek, s így rajzunk a kifogástalannak képzelt szerkesztést jól megközelítse. A ceruza hegyes legyen, és ha hegye elkopott, újból hegyezni kell. Keményebb grafittal pontosabban rajzolunk. A körzőnél a hegyezés helyett élezés a célszerűbb, mert az él kevésbé kopik. A vonalzó éle egyenes legyen. Ezt vonalzók élének egymás mellé fektetésével ellenőrizhetjük. A körző tűje igen hegyes legyen, hogy ne csússzék. A körző szárai ne lötyögjenek, hogy a kör rajzolásakor a nyílás megmaradjon. [...]

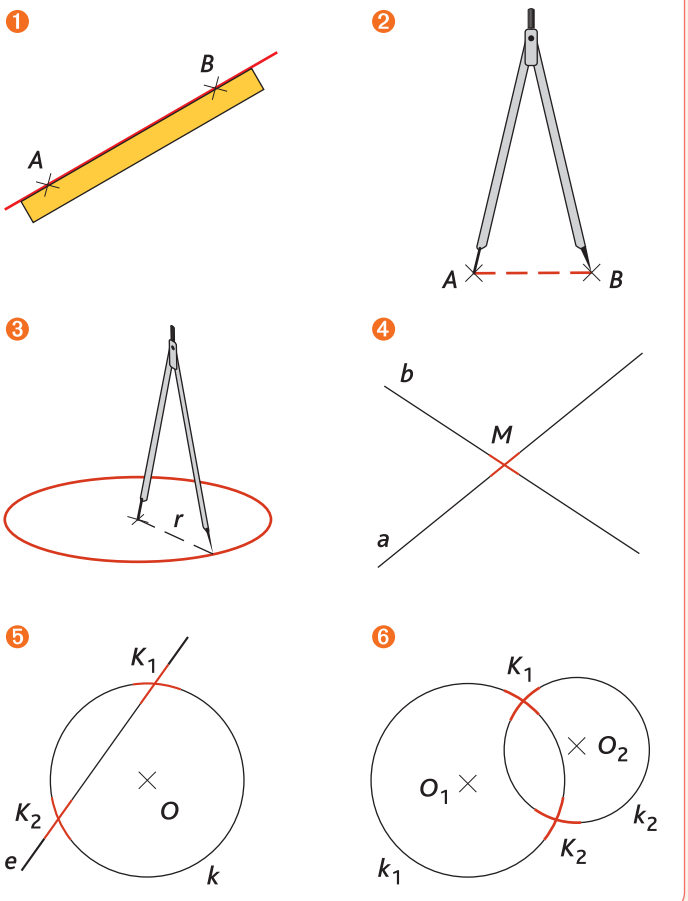
Lényeges az is, hogy gondosan rajzoljunk, s a gondos munkában gyakorlatra tegyünk szert. [...]

Ne feledjük, hogy a legfinomabb eszközökkel és a leggondosabb munkával is csak megközelítjük az elvben kifogástalan szerkesztést."

◉ *Részletek Hajós György Bevezetés a geometriába című egyetemi tankönyvéből*

◉ *A szerkesztés segédvonalait halványan húzzuk, hogy az eredményt egy áthúzással kihangsúlyozhassuk.*

ALAPSZERKESZTÉSEK



A legegyszerűbb eszköz a **vonalzó** és a **körző**. A legegyszerűbb lépések, amelyeket ezekkel az eszközökkel megtehetünk, a következők:

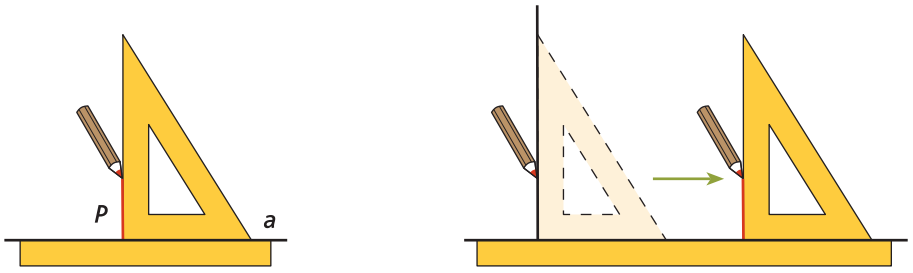
1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton áthaladó egyenest.
   Az ókori görögök porban rajzolták meg geometriai ábráikat. Egy zsinór két végére kötött szögekkel feszítették ki az egyenest.
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk. A görögök a zsinór két végére kötött szögekkel rajzolták meg a kört is.
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.
5. Kör és az azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük.
6. Két egymást metsző kör mindkét metszéspontját megkereshetjük.

A szerkeszthetőség kérdésénél feltesszük, hogy van tetszőlegesen hosszú vonalzónk és tetszőlegesen nagy nyílású körzőnk is.

Az egyenes vonalzón és a körzőn kívül használjuk a derékszögű vonalzót is:

Merőleges egyenesek rajzolása derékszögű és egy másik vonalzóval:

Párhuzamos egyenesek rajzolása derékszögű és egy másik vonalzóval:



Amit derékszögű vonalzóval megrajzolhatunk, az megszerkeszthető egyélű vonalzóval és körzővel is.

A derékszögű vonalzóval való rajzolást az általános iskolában szerkesztésnek tekinthetjük.

Fejtörő!

Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

Egy négyzetet négy egyenessel a lehető legtöbb részre osztunk. Hány részt kapunk?

A: 5; **B:** 8; **C:** 9; **D:** 10; **E:** 11

GEOMETRIAI ALAPISMERETEK

Emlékszel?

A mindennapi életben különböző tárgyakkal találkozunk.

A geometriában a tárgyakat testeknek nevezzük, ha csak az alakjukat és a méreteiket vesszük figyelembe.

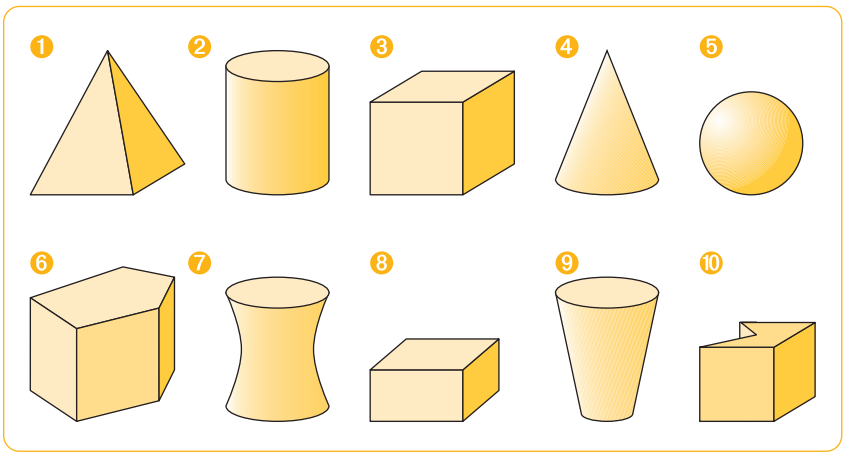
A testet felület határolja (felületek határolják).

Figyeljük meg, hogy a mindennapi életben is használt szavak (például egy élőlény „teste”, „hasáb” fa, „tégla”) jelentése a matematikai szaknyelvben sokszor módosul.



FELADATOK

1 Vizsgáld meg, hogy a felsorolt állítások mely testekre igazak!



A: Csak síklapok határolják.

B: Határoló lapjai közt van síklap.

C: Csak téglalapok határolják.

D: Minden (határoló) lapja sokszög.

E: Van két egybevágó lapja.

F: Van két egymással párhuzamos éle.

G: Van két egymással párhuzamos lapja.

H: Van két egymásra merőleges éle.

I: Nincs éle.

J: Minden csúcsban legalább két egymásra merőleges él találkozik.

K: Minden csúcsban csak egymásra merőleges élek találkoznak.

◉ *A ❸ test kocka, a ❽ test téglatest.*

Négy gyerek összebeszélt, és kiválasztott egy testet a fenti ábrán látható 10 test közül. (Mind a négyen ugyanazt a testet választották!)

A gyerekek egy-egy állítást mondtak erről a testről. Később kiderült, hogy három gyerek állítása igaz volt, egy gyereké hamis.

Jenő: Csak síklapok határolják a testet.

Kornél: 12 éle van a testnek, de ezek nem mind egyenlő hosszúak.

Linda: Nemcsak téglalapok határolják a testet.

Malvin: A test mindegyik lapjához található vele párhuzamos lap.

Melyik testre gondolt a négy gyerek, és melyikük állítása hamis?

Fejtörő!

◉ *Írd be a téglalapba annak a testnek a sorszámát, amelyre a négy gyerek gondolt!*

◉ *Húzd alá annak a gyereknek a nevét, akinek az állítása hamis volt!*

Ha a fénysugár merőlegesen esik egy fehér kartonlapra, akkor az itt látható árnyékok közül melyik **nem lehet** egy kocka árnyéka?

A: 

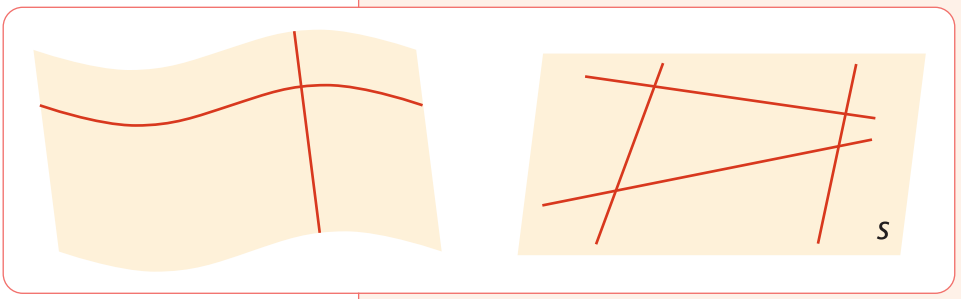
B: 

C: 

D: 

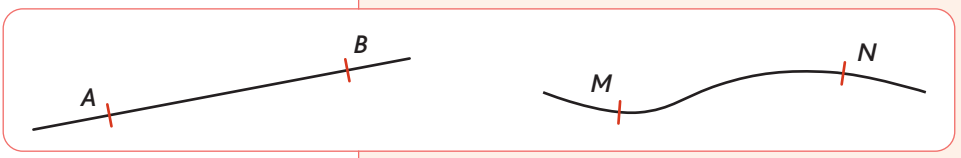
◉ *Karikázd be a betűjelét!*

Emlékeztető

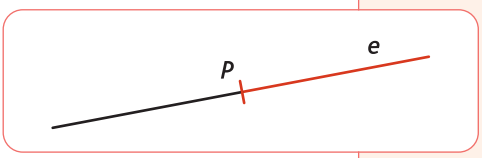


Ha a felületet feldaraboljuk, akkor a felületdarabokat **vonalak** határolják.

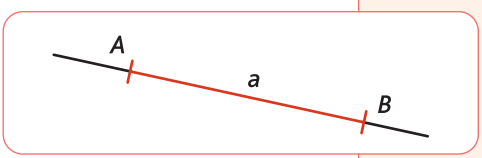
A vonal lehet görbe, egyenes vagy törött. A síkon minden irányban húzhatunk egyenest.



Ha a vonalat feldaraboljuk, akkor a vonaldarabokat **pontok** határolják. A pontokat általában nagybetűkkel jelöljük.

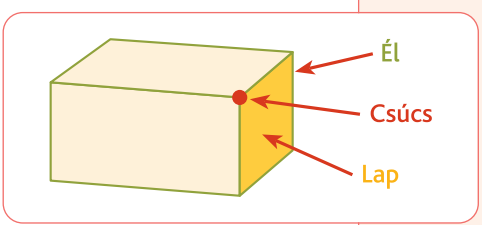


Az egyenest egy pontja két **félegyenesre** bontja. A pont hozzátartozik mindkét félegyeneshez.



Az egyenes két pontja közé eső darabját **szakasznak** nevezzük.

A szakaszt két végpontjával (*AB*) vagy kisbetűvel (*a*) jelölhetjük.

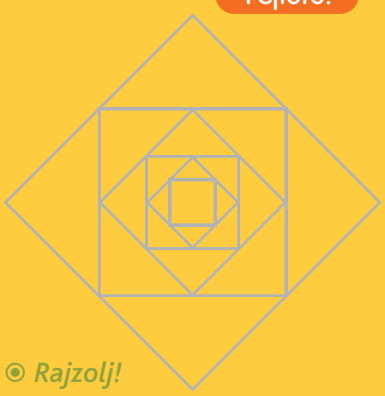


A testet határoló felületdarabok is vonalakban csatlakoznak egymáshoz. **Ha a testet síklapok határolják, akkor a lapokat határoló vonaldarabokat a test éleinek nevezzük. Az élek a test csúcsaiban kapcsolódhatnak egymáshoz.**

A testeket, síkokat, felületeket, síkidomokat, egyeneseket, vonalakat, pontokat stb. **együtt alakzatoknak nevezzük.**

Az alakzatok mindegyikét **ponthalmaznak** is tekinthetjük.

Fejtörő!



◉ *Rajzolj!*

a) Átrajzolható-e a margón látható hat négyzetből álló ábra egyetlen ceruzavonallal? Egyik vonalat sem húzhatod át kétszer!

◉ *Jelöld meg a* ***b)*** *feladat helyes válaszát!*

b) Hány különböző négyzetet tudunk rajzolni úgy, hogy a négyzetek csúcspontjai az ábrán látható négyzetrács pontjai legyenek?



Két négyzetet különbözőnek tekintünk, ha valamelyik csúcspontjuk különböző.

A: 9; **B:** 10; **C:** 14; **D:** 18; **E:** 20

Minifalván összesen 4 egyenes utca van. Az utcák kereszteződésénél egy-egy vízcsap áll.

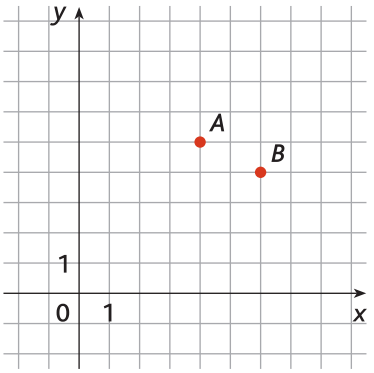
a) Hány utcai vízcsap lehet a településen, ha csak az útkereszteződésekben van vízcsap?

b) Hány vízcsap lehet akkor, ha 6 utca van, és minden utcában 4 vízcsap áll?

ALAKZATOK KÖLCSÖNÖS HELYZETE, TÁVOLSÁGA

FELADATOK

2 Határozd meg az A és B pont **koordinátáit** (jelzőszámait)!



a) Hány **egység** távolságra van az A pont az x tengelytől; az y tengelytől?

b) Jelöld meg és nevezd el az A ponthoz legközelebb lévő pontot az x tengelyen; az y tengelyen!

Írd a pontok mellé a jelzőszámaikat is!

c) Keress olyan rácspontokat, amelyek az A ponttól pontosan 3 egység távolságra vannak! Írd le a jelzőszámaikat!

3 Rajzolj egy derékszögű koordináta-rendszert!

a) Színezd pirosra az x tengelytől 3 egység távolságra lévő rácspontokat!

Hol helyezkednek el ezek a pontok?

b) Színezd kékre az y tengelytől 5 egység távolságra lévő rácspontokat!

Hol helyezkednek el ezek a pontok?

c) Betűzd meg azokat a pontokat, amelyeket két színnel színeztél ki, add meg a jelzőszámaikat! Milyen sokszöget határoznak meg ezek a pontok?

Hány hosszúságegység ennek a sokszögnek a kerülete?

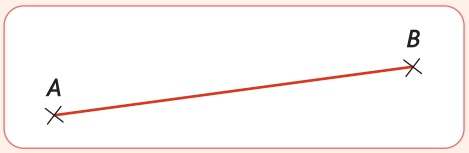
Hány területegység ennek a sokszögnek a területe?

Gyakorló 8.01–8.02.; Feladatgyűjtemény 6.2.02–07.

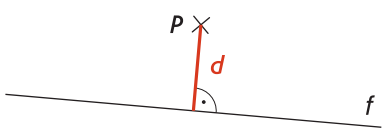
Emlékeztető

Az A és a B pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.

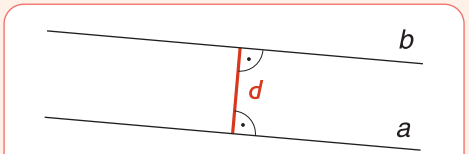
Ha nem érthető félre, akkor a szakaszt és a szakasz hosszát is AB-vel jelöljük.



Pont és egyenes távolsága (ez 0 is lehet, ha a P illeszkedik az f-re):



Párhuzamos egyenesek távolsága (ez a távolság 0 is lehet, ha a egybeesik b-vel):



A pont és egyenes távolsága a pontot az egyenessel összekötő, az egyenesre merőleges szakasz hossza.

◉ A pontot az egyenes pontjaival összekötő szakaszok közül a pontból az egyenesre húzott merőleges szakasz a legrövidebb.

A párhuzamos egyeneseket összekötő szakaszok közül a rájuk merőleges a legrövidebb. Ezért ennek a szakasznak a hossza a két párhuzamos egyenes távolsága.

Figyelemprőba

Anna, Bea és Cili egy egyenes utca páros oldalán laknak. Anna 200 m-re lakik Beától és 320 m-re Cilitől. Milyen messze lakhat Bea Cilitől?

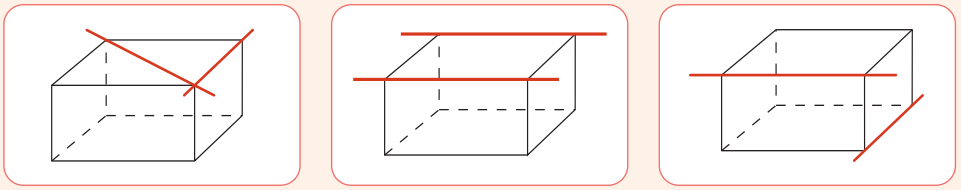
Bea és Cili lakásától egyenlő távolságra, az út páros oldalán áll egy hársfa. Milyen messze lehet a hársfa Annáék lakásától?

◉ Hány megoldást találtál?

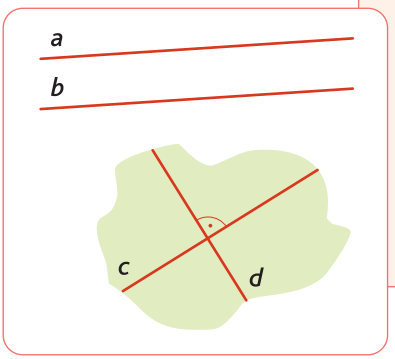
EGYENESEK KÖLCSÖNÖS HELYZETE

Két (különböző) egyenes lehet

metsző, **párhuzamos,** **kitérő.**



Két különböző párhuzamos vagy két metsző egyenesre mindig pontosan egy sík fektethető. A kitérő egyenesekre nem fektethető sík.



Ha az a és a b egyenes egymással **párhuzamos**, akkor azt így jelöljük: $a \parallel b$

Megállapodás szerint az egyenest önmagával párhuzamosnak tekintjük.

Merőlegesen metszi egymást a két egyenes, ha a síkot négy egybevágó síknegyedre osztja.

Jelölés: $c \perp d$ (az ábrán kis pont jelöli a merőlegességet).

A metsző egyenesek távolsága 0.

FELADATOK

4 Gyűjtőmunka

Végy a kezedbe két szívószálat és egy rajzlapot! Tekintsd a szívószálat egyenesnek, a rajzlapot síknak! Helyezd el a két egyenest úgy, hogy

a) egymással párhuzamosak legyenek;

b) legyen egy közös pontjuk;

c) ne legyenek párhuzamosak, és ne legyen közös pontjuk (kitérők legyenek)!

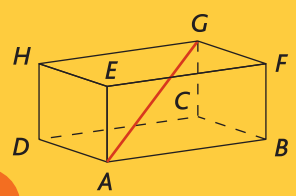
Vizsgáld meg mindhárom esetben, hogy illeszthető-e sík a két egyenesre!

Használhatod a derékszögű vonalzót.

5 *a)* Rajzolj egy a egyenest! Jelölj meg rajta egy P pontot! Szerkessz merőleges egyenest a P ponton át az a-ra! Jelöld ezt b-vel! Szerkessz párhuzamos egyenest az a egyenessel! Jelöld ezt az egyenest c-vel! Írd le jelekkel, hogy milyen helyzetben van a b és a c egyenes!

b) Rajzolj egy c egyenest! Jelölj ki rajta egy A és rajta kívül egy B pontot! Szerkessz az A pontban merőleges egyenest a c egyenesre! Jelöld azt a-val! Ezután szerkessz a B pontból merőleges egyenest a c-re! Jelöld ezt az utóbbi egyenest b-vel! Milyen helyzetben lehet az a és a b egyenes?

Gyakorló 8.04–8.06.; *Feladatgyűjtemény* 6.2.11–13.



Megrajzoltuk az ábrán a téglatest AG **testátlóját**.

Hány **lapátlója** van a téglatestnek? Hány olyan lapátló van, amelynek az egyenese metszi az AG testátló egyenesét?

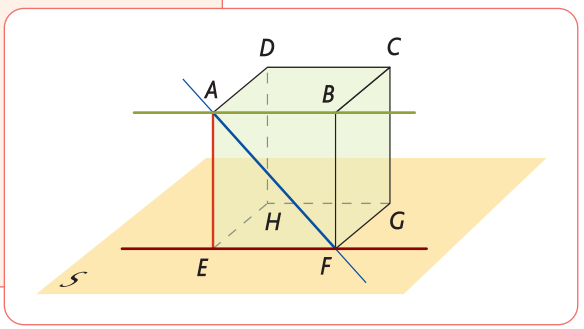
Van-e olyan lapátló, amelyik párhuzamos az AG testátlóval?

PONT ÉS SÍK KÖLCSÖNÖS HELYZETE

❶ A pont rajta van a síkon, **illeszkedik** a síkra. Például: a kocka E csúcsa illeszkedik az S síkra.

❷ A pont a síkon kívül van. Például: a kocka A csúcsa nincs rajta az S síkon, **nem illeszkedik** erre a síkra.

Az A pont és az S sík távolsága a pontból a síkra bocsátott merőleges AE szakasz hossza. Az A pontot az S síkkal összekötő szakaszok közül ez a legrövidebb.



EGYENES ÉS SÍK KÖLCSÖNÖS HELYZETE

❶ Az egyenesnek nincs közös pontja a síkkal, **párhuzamos** vele.

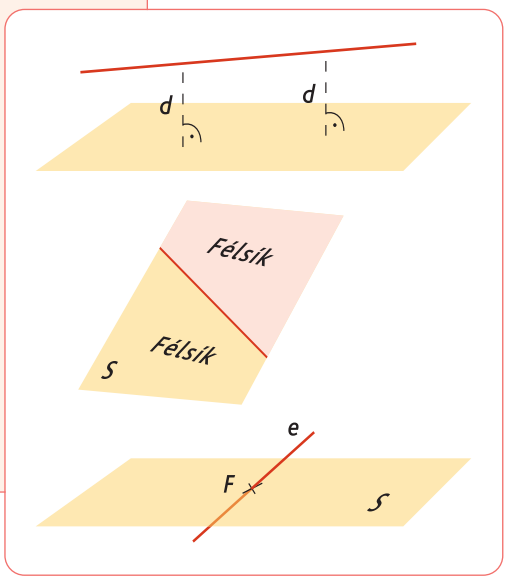
Például az előző ábrán az AB él egyenese párhuzamos az S síkkal, a távolság közöttük a síkra merőleges AE szakasz hossza.

❷ Az egyenes rajta van a síkon, azaz illeszkedik a síkra.

Például a fenti ábrán az EF él egyenese **illeszkedik** az S síkra, a köztük lévő távolság 0. **A síkot és a rá illeszkedő egyenest egymással párhuzamosnak tekintjük.** A síkra illeszkedő egyenes a síkot két **félsíkra** osztja, az egyenes mindkét félsíkhoz hozzátartozik.

❸ Az egyenesnek egy közös pontja van a síkkal, **metszi** (döfi) a síkot.

Például a fenti ábrán az AE él egyenese merőlegesen metszi az S síkot, azaz derékszöget zár be a síkkal. Az AF átló (lapátló) egyenese 45°-os szögben metszi a síkot, az F a **döféspont**.



FELADATOK

6 Helyezd el az egyenest úgy, hogy

a) rajta legyen a síkon;
b) egy közös pontja legyen a síkkal;
c) legyen két közös pontja a síkkal;
d) ne legyen közös pontja a síkkal!

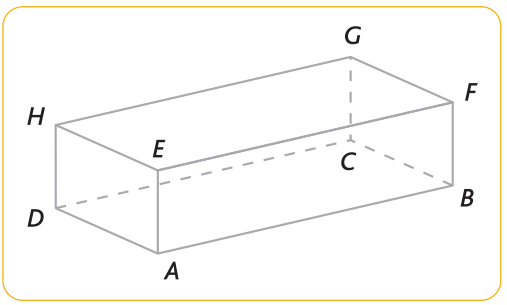
◉ *Végy a kezedbe egy szívószálat és egy papírlapot! Tekintsd a szívószálat egyenesnek, a papírlapot síknak!*

7 Színezd *feketére* a téglatest AB élét!

a) Színezd *kékre* azokat az éleit, amelyeknek nincs közös pontjuk a fekete éllel, de egy síkban vannak azzal! Milyen helyzetben van a fekete és egy kék él?

b) Színezd *zöldre* azokat az éleit, amelyek nem fekszenek egy síkban a fekete éllel! Milyen helyzetben van a fekete él és egy zöld él?

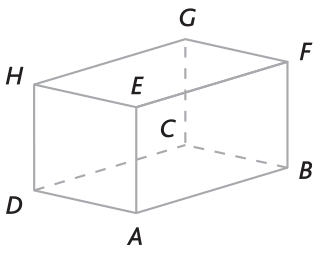
c) Milyen helyzetben van a fekete él és egy be nem színezett él?



Az előző feladatban látható téglatestben az EC testátló vagy az EB lapátló zár be nagyobb szöget az $ABCD$ síkkal?

$ECA\sphericalangle$ ☐ $EBA\sphericalangle$

◉ *Írd be a fehér négyzetbe a <, >, = jelek közül a megfelelőt!*

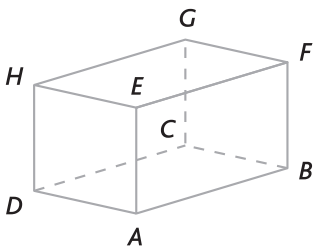


8 Színezd feketére a téglatest *HE* élét!

a) Jelöld meg kékkel azokat a lapjait, amelyeknek nincs közös pontjuk a fekete éllel! Milyen helyzetben van a fekete él és egy kékkel jelölt lap?

b) Jelöld meg zölddel azokat a lapjait, amelyeknek pontosan egy közös pontjuk van a fekete éllel! Milyen helyzetben van a fekete él és egy zölddel jelölt lap?

c) Milyen helyzetben van a fekete él és egy be nem színezett lap?



9 Színezd pirosra a téglatest *EFGH* lapját!

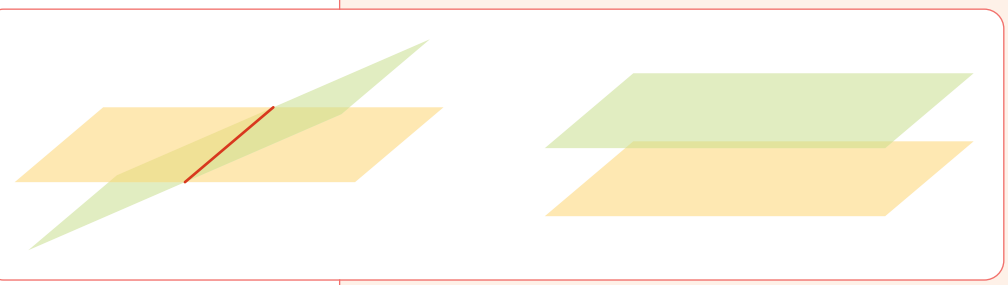
a) Színezd kékre azokat az éleit, amelyeknek nincs közös pontjuk a piros lappal! Milyen helyzetben van a piros lap és egy kék él?

b) Színezd zöldre azokat az éleit, amelyeknek egy közös pontjuk van a piros lappal! Milyen helyzetben van a piros lap és egy zöld él?

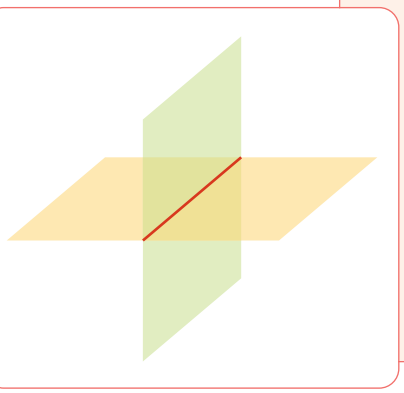
c) Milyen helyzetben van a piros lap és egy be nem színezett él?

SÍKOK KÖLCSÖNÖS HELYZETE

Két sík lehet **metsző**, vagy lehet **párhuzamos**.



Két párhuzamos sík esetén az egyik sík pontjai állandó távolsága vannak a másik síktól. Ez az állandó távolság a **párhuzamos síkok távolsága**.



A síkot önmagával párhuzamosnak tekintjük (ekkor a párhuzamos síkok távolsága 0).

A nem párhuzamos síkok pontosan egy egyenesben, **metszésvonalban** metszik egymást. A **két sík távolsága** ekkor is 0.

Egy sík a teret két egybevágó **féltérre** bontja.

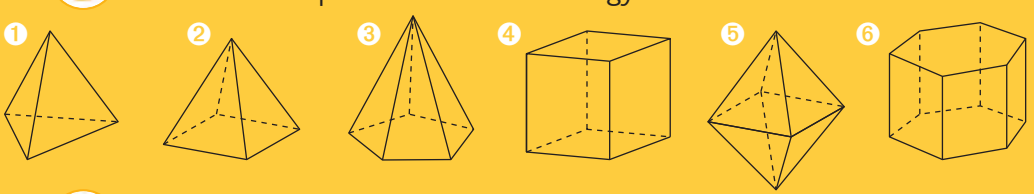
Két (különböző) párhuzamos sík a teret három részre osztja.

Két metsző sík a teret négy részre osztja.

Ha a keletkezett négy térrész egybevágó, akkor a síkok **merőlegesek** egymásra.

Fejtörő!

Legalább hányféle színes lapból tudnád elkészíteni ezeket a testeket úgy, hogy a szomszédos lapok különböző színűek legyenek?



Egy kocka lapjaira fektetett síkok hány részre osztják a teret?

◉ *Szomszédos két lap, ha van közös élük.*

◉ *Használhatod a 3–5. osztályos Eszköztár kivágható testhálóit.*

FELADATOK

10 Helyezz el két síkot (két lapot) úgy, hogy

a) ne legyen közös pontjuk; *b)* egy közös pontjuk legyen;

c) több közös pontjuk legyen!

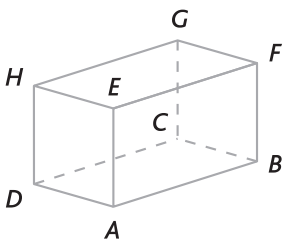
Milyen alakzatot határoznak meg a közös pontok?

Kísérletezz!

◉ *Mindegyik elhelyezés sikerült?*

11 Színezd pirosra a téglatest *AEHD* lapját!

Jelöld meg azokat a lapokat, amelyeknek van közös pontjuk a pirosra színezett lappal! Hány lapot nem jelöltél meg? Milyen tulajdonságúak ezek?



12 Válassz ki a téglatesten egy csúcsot!

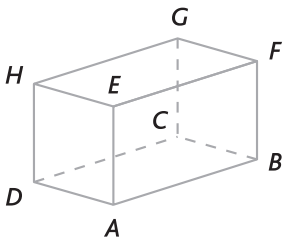
Állapítsd meg ennek a távolságát a téglatest egyes

a) csúcsaitól; *b)* éleitől; *c)* lapsíkjaitól!

13 Válaszd ki a téglatest *AB* élét!

Állapítsd meg ennek az élnek a távolságát a téglatest

a) csúcsaitól; *b)* *AB* éllel párhuzamos éleitől; *c)* lapsíkjaitól!



14 Hány részre osztja az egyenest

a) egy pontja; *b)* két pontja; *c)* három pontja?

Négy, öt, illetve több pont esetén is határozd meg a részek számát!

◉ *Keress szabályt!*

15 Hány egyenest határozhat meg három pont, ha

a) a három pont egy egyenesen van; *b)* a három pont nincs egy egyenesen?

16 Hány egyenest határozhat meg négy pont, ha

a) a négy pont egy egyenesen van;

b) a négy pont közül három van egy egyenesen;

c) a négy pont közül semelyik három nincs egy egyenesen?

17 Keress a tanterem (mint téglatest) élei között

a) 3 olyat, amelyek páronként egymásra merőlegesek;

b) 3 olyat, amelyek páronként kitérők;

c) olyanokat, amelyek egy kiválasztott éllel párhuzamosak!

Gyűjtőmunka

◉ *A vizsgálatok során hogyan használhatjátok a függőónt és a vízszintezőt?*

18 Keress a tanterem (mint téglatest) falsíkjai között

a) egy kiválasztott lapsíkkal párhuzamosakat;

b) három olyat, amelyek egymásra páronként merőlegesek!

c) Találhatók-e kitérő falsíkok?

A KÖR. A KÖR HÚRJA, ÉRINTŐJE

FELADATOK

Kísérletezz!

19 Jelölj ki a füzetedben egy P pontot!

A P ponttól 3 cm távolságra lévő pontokat színezd pirossal!

A P ponttól 3 cm-nél kisebb távolságra lévő pontokat színezd kékkel!

Mi jellemzi a be nem színezett pontok összességét?

Milyen alakzatot alkotnak a beszínezett pontok?

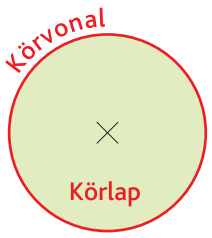
---

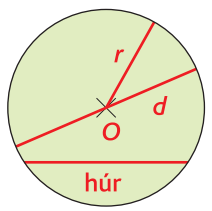
20 Rajzolj 3 cm sugarú kört!

Helyezz el egymással párhuzamos szívószálakat úgy, hogy

| 1 cm, | 2 cm, | 3 cm, | 4 cm, | 5 cm | távolságra legyenek a kör középpontjától!

Figyeld meg, hogy a szívószálaknak hány közös pontjuk van a körvonallal!





Értelmezések

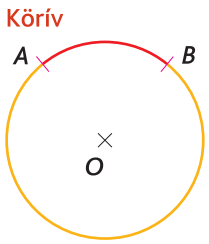
Egy síkban egy adott ponttól megadott (0-tól különböző) **távolságra lévő pontok halmazát körvonalnak** (körnek), **az adott pontot a kör középpontjának nevezzük.**

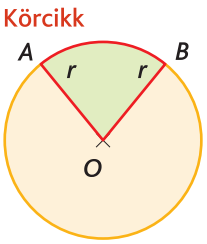
Egy síkban egy adott ponttól a megadottnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmazát körlapnak nevezzük. (Ha nem érthető félre, akkor a körlapot is szokták körnek nevezni.)

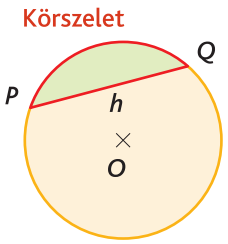
A középpontot és a körvonal egy pontját összekötő szakasz (illetve ennek a szakasznak a hossza) a kör **sugara**. (A sugarat a latin eredetű **rádiusz** szó rövidítéseként általában r betűvel jelöljük.)

A körvonal két pontját összekötő szakasz a kör egy **húrja**.

A kör középpontján átmenő húrt a kör **átmérőjének** nevezzük. (Az átmérőt a görög eredetű **diaméter** szó rövidítéseként gyakran d betűvel jelöljük.)



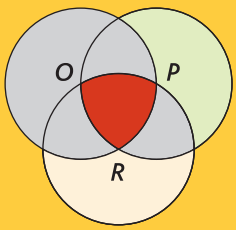




A körvonalat két pontja két **körívre** bontja.

A körlapot két sugár két **körcikkre**, egy húr két **körszeletre** darabolja.

Többet ésszel ...



A különböző mezők pontjai mekkora távolságra vannak az O, a P és az R pontoktól? Egészítsd ki az állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

A: A piros mező pontjai **legfeljebb** ☐ cm-re vannak az O, a P és az R ponttól.

B: A zöld mező pontjai ☐ 1 cm-re vannak az R ponttól.

C: A fehér mező pontjai ☐ 2 cm-re vannak a P ponttól.

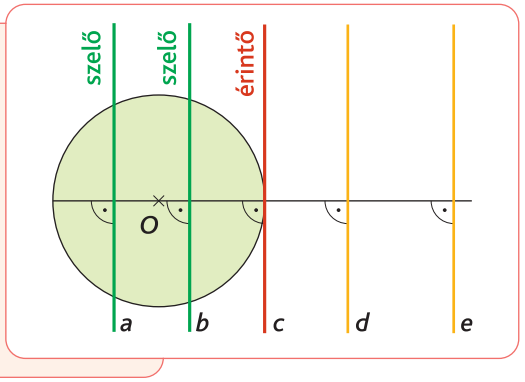
Értelmezések

Az ábrán az egyenesek közül az a és a b egyenesnek kettő, a c egyenesnek egy közös pontja van a körvonallal.

A d és az e egyenesnek nincs közös pontja a körvonallal.

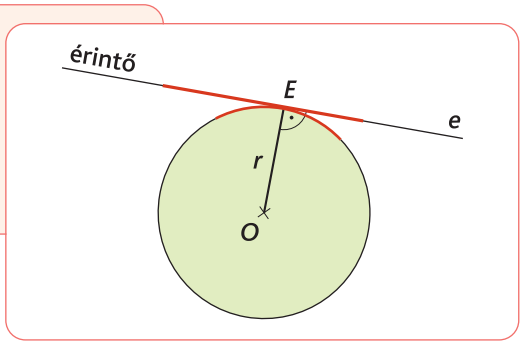
Azt az egyenest, amelynek a körvonallal két közös pontja van, **szelőnek** nevezzük. A szelő és a középpont távolsága kisebb a sugárnál.

Azt az egyenest, amelynek a körvonallal egy közös pontja van, **érintőnek** nevezzük. Az érintő és a középpont távolsága egyenlő a sugárral. **Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.**



Az ábrán az e egyenes az E pontban érinti a kört. Az E pontban mindkét irányból törés nélkül tudunk átmenni az egyenesről a körre, illetve a körről az egyenesre.

Az érintőt csak akkor tekintjük szerkesztettnek, ha megszerkesztettük az érintési pontot.



FELADATOK

21 Egy 3 cm sugarú körbe húzz egész centiméter hosszúságú húrokat!

a) Hány különböző hosszúságú húr húzható?

b) Szerkeszd meg a kör középpontjának a húroktól való távolságát!

Hasonlítsd össze a távolságokat!

Használhatod a derékszögű vonalzót is a szerkesztésekhez!

---

22 *a)* Rajzolj egy O pontot, és húzz köré 25 mm sugárral kört! Jelölj meg a körívén egy E pontot, és szerkessz olyan érintőt, amely a kört az E pontban érinti!

b) Rajzolj egy P pontot, és húzz köré 28 mm sugarú kört! Szerkeszd meg a kör egy szelőjét úgy, hogy 15 mm távolságra legyen a kör középpontjától!

Szerkessz ezzel a szelővel párhuzamosan érintőt a körhöz!

Először húzd meg az egyik sugarat.

c) Húzz egy egyenest, és jelölj ki rajta egy F pontot! Szerkessz köröket úgy, hogy az F pontban érintsék ezt az egyenest! Hány megoldást találsz?

Hol helyezkedik el ezeknek az érintő köröknek a középpontja?

Két félsíkban gondolkodj!

d) Rajzolj egy egyenest! Szerkessz 2,3 cm-es sugarú köröket úgy, hogy érintsék ezt az egyenest! Hány megoldást találsz?

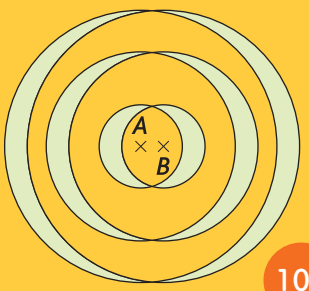
Hol helyezkedik el ezeknek az érintő köröknek a középpontja?

---

a) Van egy radírunk és egy régi, rozsdás körzőnk, ami beragadt, így csak egyféle nyílásszögben tudjuk használni. Rajzoltunk ezzel a nyílásszöggel egy kört. Hogyan tudnánk egy kisebb sugarú kört is rajzolni eszközeinkkel?

b) Rajzold le a következő ábrát!

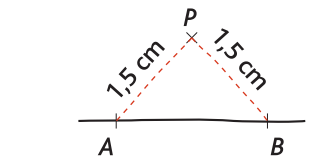
Kísérletezz!

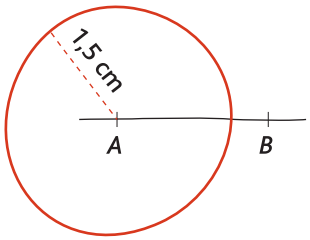


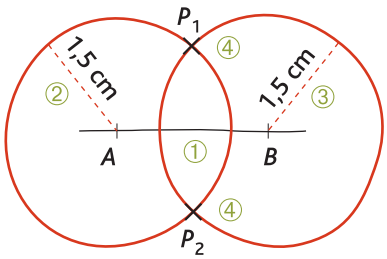
SZERKESZTÉSEK

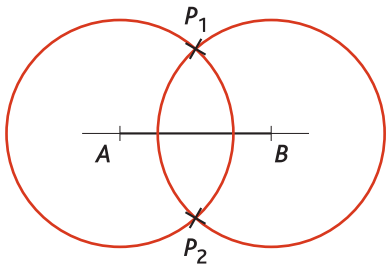
1. példa

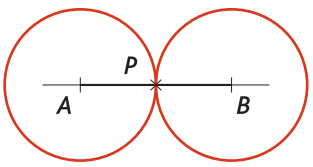
Rajzoljunk 2 cm hosszú szakaszt. Jelöljük a végpontjait A-val és B-vel. Szerkesszünk P pontot úgy, hogy az A és a B ponttól is 1,5 cm távolságra legyen.

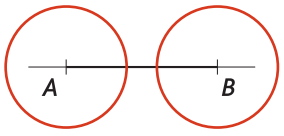












❶ A feladat értelmezése

Készítsünk vázlatot.

❷ Összefüggések keresése

A keresett P pont az A ponttól 1,5 cm távolságra van, tehát illeszkedik az A középpontú, 1,5 cm sugarú körvonalra. A P pont a B ponttól is 1,5 cm távolságra van, tehát illeszkedik a B középpontú, 1,5 cm sugarú körvonalra is. A P pont a két körvonal metszéspontja.

❸ A szerkesztés megtervezése

Jelöljük a terven a szerkesztés lépéseit.

❹ A szerkesztés elvégzése

Mivel a két körvonal két pontban metszi egymást, a feladatnak két megoldása van. Ezeket P_1-gyel és P_2-vel jelöljük.

❺ A megoldás igazolása

A körvonal azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyek a kör középpontjától adott távolságra vannak. Az A és a B ponttól is 1,5 cm-re lévő pontok csak az előbb megszerkesztett két körvonal metszéspontjai lehetnek.

❻ További észrevételek

Ha a megszerkesztendő pont távolsága a szakasz hosszúságának a fele lenne, akkor a feladatnak egy megoldása lenne.

Ha a megszerkesztendő pont távolsága a szakasz felénél rövidebb lenne, akkor a két körvonalnak nem lenne közös pontja, a feladatnak nem lenne megoldása.

Kísérletezz!

A 4 cm-t kimérheted.

Készíts egy papírlapon hajtogatással

a) 4 cm oldalú négyzetet, *b)* 4 cm átlójú négyzetet!

FELADATOK

23 Minden feladathoz külön-külön rajzolj egy A és egy B pontot egymástól 3 cm távolságra! Keress olyan pontokat a síkban, amelyek

a) az A és a B ponttól egyaránt 2 cm távolságra vannak;

b) az A és a B ponttól egyaránt 1,5 cm távolságra vannak;

c) az A-tól 2 cm, a B-től 3 cm távolságra vannak;

d) az A-tól 1,5 cm, a B-től 1 cm távolságra vannak!

---

24 Rajzolj egy 6 cm hosszúságú szakaszt! Jelöld a végpontjait A-val, illetve B-vel! Szerkessz pontokat úgy, hogy az AB szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra, például:

3 cm-re; | 3,5 cm-re; | 4 cm-re; | 4,5 cm-re; | 5 cm-re | legyenek!

Kösd össze a kapott pontokat! Mi a sejtésed, milyen alakzatra illeszkednek azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak az AB szakasz két végpontjától?

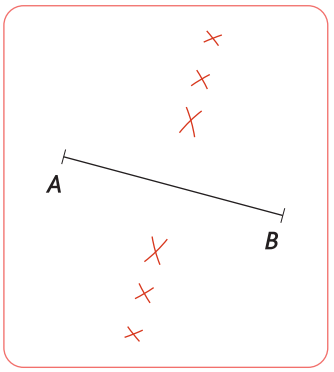
Emlékszel?

A szakaszfelező merőleges a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban.

Az előző meghatározás két állításra bontható:

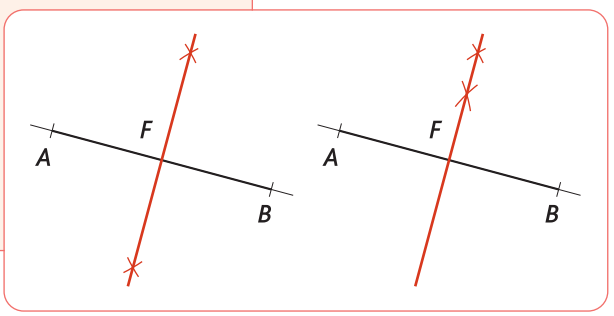
❶ Ha egy pont (a síkban) egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, akkor rajta van a szakaszfelező merőlegesen.

❷ Ha egy pont rajta van a szakaszfelező merőlegesen, akkor egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól.



Mivel az egyenest két pontja meghatározza, elegendő két olyan pontot megszerkesztenünk, amely a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra van.

Ha ezeken a pontokon át egyenest húzunk, akkor megkapjuk a szakaszfelező merőlegest, illetve az AB szakasz felezőpontját (az ábrán az F pont).



FELADAT

25 Rajzolj minden feladathoz 67 mm-es szakaszt! A felezőmerőlegesről tanultakat alkalmazva szerkeszd meg a szakasz

a) $\frac{1}{2}$ részét; *b)* $\frac{1}{4}$ részét; *c)* $\frac{5}{4}$ részét; *d)* $\frac{3}{8}$ részét!

Ha már megismerted valamely szerkesztőprogram alkalmazását, akkor annak segítségével is oldd meg a feladatot!

Adott A és B pont a síkon. Szerkessz csak körző használatával olyan C pontot, hogy A, B, C egy egyenesre essenek!

Fejtörő!

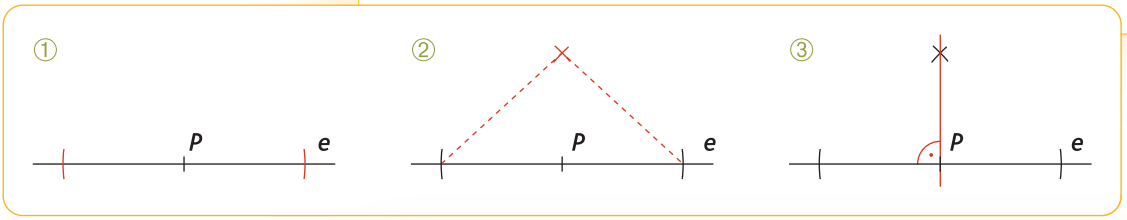
A vonalzót csak ellenőrzésre használd!

Hogyan oldanánk meg papírhajtogatással?

2. példa

Szerkesszünk az e egyenesre merőleges egyenest, amely átmegy az e egyenes adott P pontján.

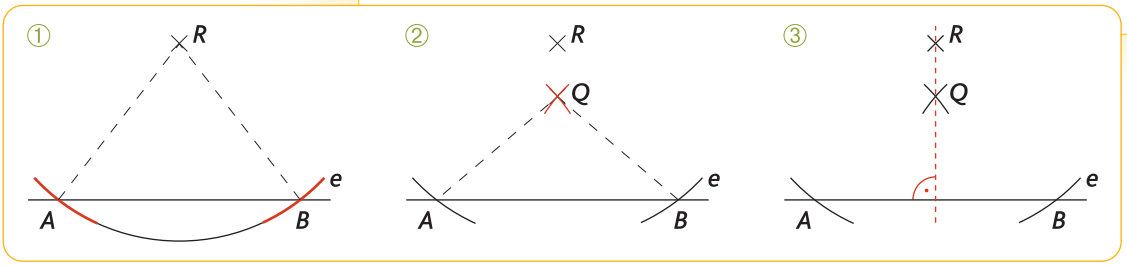
① A P pontot egy szakasz felezőpontjának tekintjük. Az egyenesen a P ponttól egyenlő távolságra körzővel felmérjük a szakasz két végpontját.
② Megszerkesztjük a szakasz felezőmerőlegesének egy (P-től különböző) pontját.
③ A kapott ponton és a P ponton át egyenest húzunk.



3. példa

Szerkesszünk az e egyenesre merőleges egyenest egy külső R pontból.

① Az R pontból mint középpontból olyan körívet húzunk, amely az e egyenest két pontban, A-ban és B-ben metszi. A két metszésponttól egyenlő távolságra van az R pont, ezért az R pont az AB szakasz felezőmerőlegesének egy pontja.
② Megszerkesztjük a szakaszfelező merőleges egy másik (Q) pontját.
③ Az R és a Q ponton át húzott egyenes merőleges az e egyenesre.



FELADAT

A körzőt és a vonalzó egy élét használhatod.

26 *a)* Rajzolj egy e egyenest! Vegyél föl rajta egymástól 5 cm távolságra A és B pontot! **Szerkessz** az A és a B ponton át az e egyenesre merőleges egyeneseket! Az e egyenesnek ugyanazon a partján mérj fel a merőlegesekre 2-2 cm-t! Kösd össze a kapott pontokat! A négy pont milyen négyszöget határoz meg? Mit mondhatsz a négyszög szomszédos és szemközti oldalairól?

b) **Szerkessz** adott e egyenestől 2 cm távolságra az e-vel párhuzamos egyenest!

c) Rajzolj egy egyenest és rajta kívül egy pontot! **Szerkeszd** meg a pont és az egyenes távolságát!

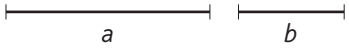
Fejtörő!

Mikor nem szerkeszthető meg a rombusz?

Rajzolj egy e egyenest, és vegyél fel rajta kívül egy P pontot. Szerkessz $\underline{\qquad a \qquad}$ oldalú rombuszt, amelynek egyik csúcsa a P pont, két másik csúcsa az e egyenesen van.

4. példa

Szerkesszünk olyan téglalapot, amelynek két szomszédos oldala:



❶ A feladat értelmezése

Vázlatkészítés, jelölések.

❷ Összefüggések keresése

$a \perp b$, $a \perp d$, $a \parallel c$, $b \parallel d$, $a = c$, $b = d$

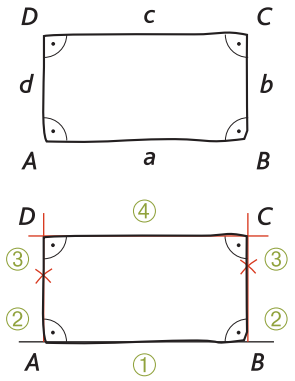
❸ A szerkesztés megtervezése

① Lemásoljuk az a szakaszt, végpontjai A, B.

② Merőlegest szerkesztünk a szakaszra az A és a B pontban.

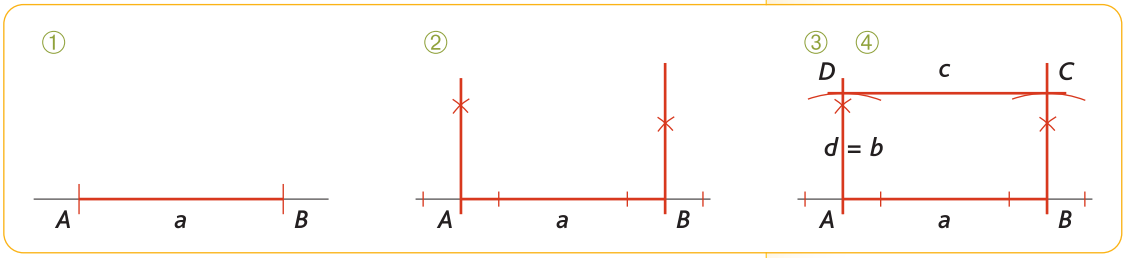
③ A merőlegesekre rámérjük a b szakaszt, megkapjuk a C és a D pontot.

④ Összekötjük a C és a D pontot.



❹ A szerkesztés elvégzése

A szerkesztést körzővel és a vonalzó egy élével végezzük.



❺ A megoldás igazolása

A szerkesztés alapján a négyszög szögei derékszögek, szemközti oldalai egyenlők.

❻ További észrevételek

A szerkesztés más lépésekkel is elvégezhető.

FELADAT

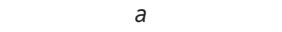
27 Szerkeszd meg a téglalapokat, számítsd ki a hiányzó adatokat!

a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 3{,}2$ cm, $K = ?$, $T = ?$

b) $a = 3{,}8$ cm, $b = 3{,}8$ cm, $K = ?$, $T = ?$

c) $a = 2{,}6$ cm, $b = ?$, $K = 10{,}4$ cm, $T = ?$

d) $a = 3{,}5$ cm, $b = ?$, $K = ?$, $T = 12{,}25$ cm^2

e) Adott 

, a b oldal az a oldal $\frac{3}{4}$ része.

Gyakorló
8.03., 9.48.;
Feladatgyűjtemény
6.2.14–19., 6.2.26.

Adott egy téglalap két szomszédos oldalának összege és különbsége:

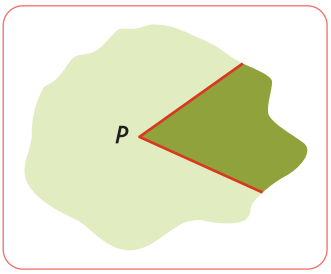


Szerkeszd meg a téglalapot!

Fejtörő!

Hogyan szerkeszthető meg az a oldal?

A SZÖGEKRŐL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE



A SZÖG ÉRTELMEZÉSE

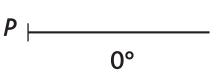
Egy adott pontból kiinduló két félegyenes szöget (szögvonalat) **alkot**. Az adott pont a **szög csúcsa**, a félegyenesek a **szög szárai**. A szög szárai a síkot két **szögtartományra** bontják.

Ha nem érthető félre, akkor a szögtartományt is szokás szögnek nevezni.

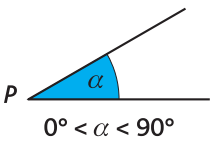
A SZÖGEK FAJTÁI

Konvex szögek

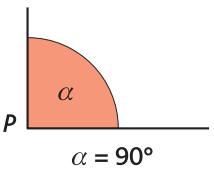
nullszög



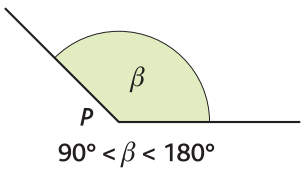
hegyesszög



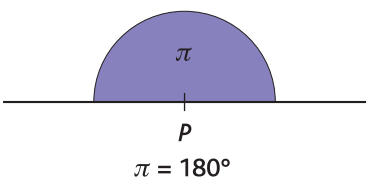
derékszög



tompaszög

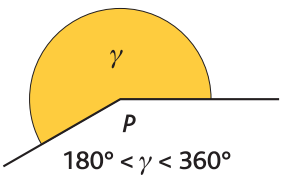


egyenesszög

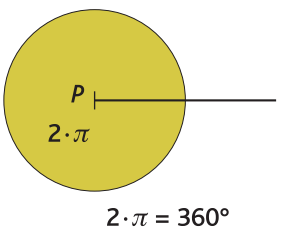


Konkáv (nemkonvex) szögek

homorúszög



teljesszög



A SZÖGEK MÉRÉSE

◉ Például a derékszög nagysága az egyenesszög fele:

$$\frac{\pi}{2} = 90°$$

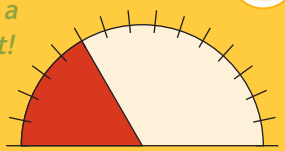
Szögméréskor azt állapítjuk meg, hogy a megmérendő szögtartomány hányszorosa az egységül választott szögtartománynak.

Két egységet fogunk gyakrabban használni: a **fokot** (° jelöli) és az **egyenesszöget**, ezt a **π** (olvasd: „pí") görög betűvel jelöljük.

1 π = 180°; 1° = 60′ (szögperc); 1′ = 60″ (szögmásodperc)

Fejtörő!

◉ Jelöld meg a helyes választ!



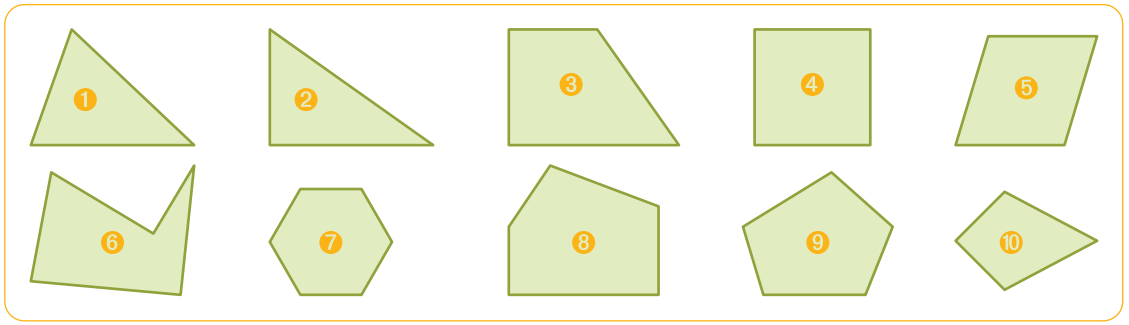
Az itt látható parkolóórán a pirossal jelölt körcikk a még hátralévő parkolóidőnket mutatja. Már csak legfeljebb annyi percig parkolhatunk, ahány fokos **középponti szöget** zárnak be a piros körcikket közrefogó sugarak.

Legfeljebb hány percig lehetünk még a parkolóban?

A: 5 percig; **B:** 50 percig; **C:** 60 percig; **D:** 75 percig

FELADATOK

28 Sorold fel azoknak a sokszögeknek a sorszámát, amelyekre igaz az állítás!



A: Van hegyesszöge.
B: Van derékszöge.
C: Van tompaszöge.
D: Van konkáv (nemkonvex) szöge.
E: Minden szöge egyenlő.
F: Minden szöge hegyesszög.
G: Minden szöge derékszög.
H: Minden szöge tompaszög.
I: Minden szöge konkáv szög.
J: Minden szöge különböző.

---

29 *a)* Rajzolj különböző fajta szögeket (hegyesszöget, derékszöget, tompaszöget, homorúszöget)! Becsüld meg (fokban) a nagyságukat! Mérd meg szögmérővel a szögeket!

Hasonlítsd össze a becsült értékeket a mérési adatokkal!

Hogyan mérjük meg a homorúszögeket?

b) Rajzolj $\alpha = 47°$-os; $\beta = 118°$-os; $\gamma = 270°$-os szöget!

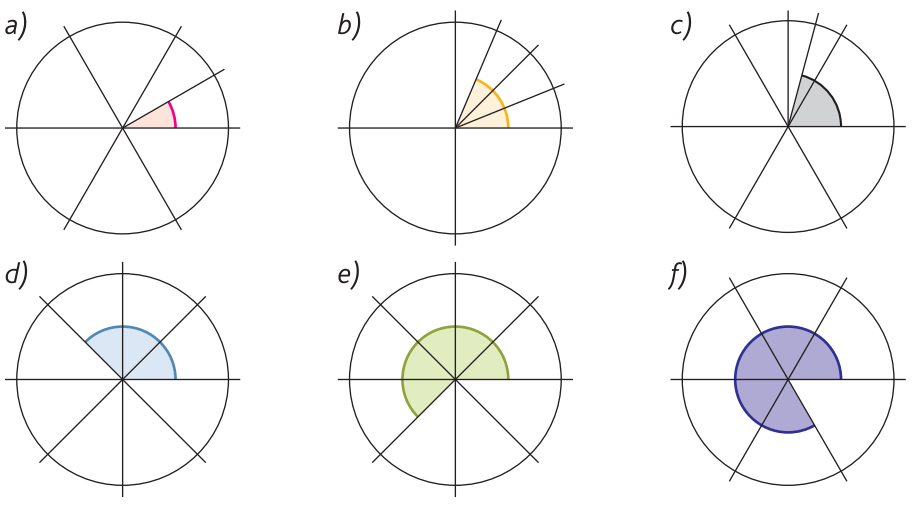
Gyakorló 8.12.–8.16.

---

30 Mekkorák a kör két sugara által közrezárt, színezett **középponti szögek**?

Először az egyenesszög (π), majd a fok legyen az egység.

⊙ A derékszög, illetve az egyenesszög mekkora részéről van szó?

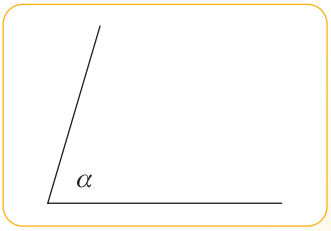


Képzeljük el, hogy az előző ábrán színezett szögek egy-egy ugyanolyan torta szeletei. Mennyi tortát állíthatnánk össze belőlük?

A: Kevesebb, mint $2\frac{1}{4}$-et;. **B:** Pontosan $2\frac{1}{4}$-et; **C:** Több, mint $2\frac{1}{4}$-et

Fejtörő!

⊙ Jelöld meg a helyes választ!



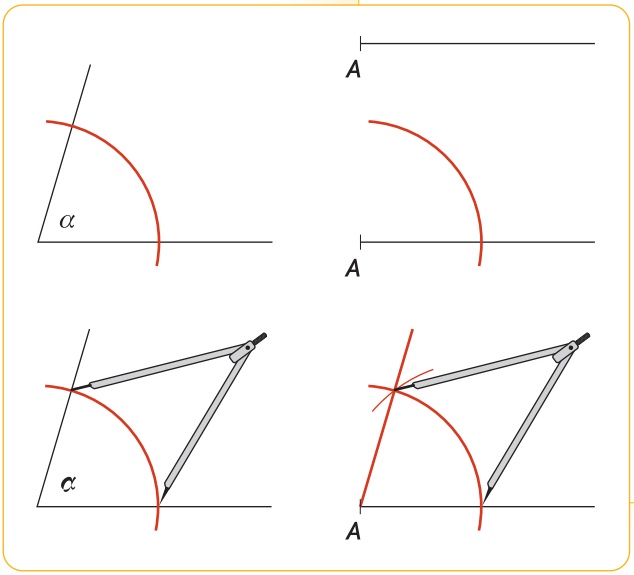
SZÖGMÁSOLÁS

1. példa

Az ábrán látható szöget kell átmásolnunk.

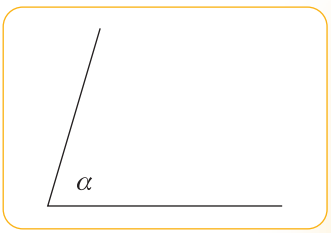
Szükségünk lesz a következő fogalomra:

A kör két sugara által alkotott szöget középponti szögnek nevezzük.



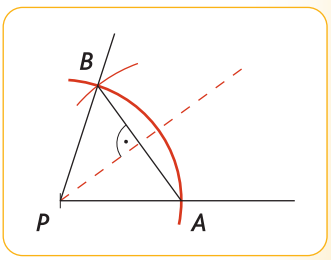
1. Húzzunk félegyenest. Ez a félegyenes lesz a szög egyik szára.
2. Az adott szög csúcsa köré körívet húzunk.
3. Ugyanazzal a sugárral a félegyenes kezdőpontjából körívet húzunk.
4. Körzőnyílásba vesszük az adott középponti szöghöz tartozó húr hosszát.
5. Átmásoljuk a körívre a szárból kiindulva ezt a húrt, majd megszerkesztjük a hozzá tartozó középponti szöget.

SZÖGFELEZÉS



2. példa

Felezzünk meg egy adott szöget.



Tekintsük ezt a szöget egy kör középponti szögének, azaz húzzunk a szög csúcsa köré körívet, amely a szög szárait az A és a B pontban metszi.

Rajzoljuk meg az AB húrt is.

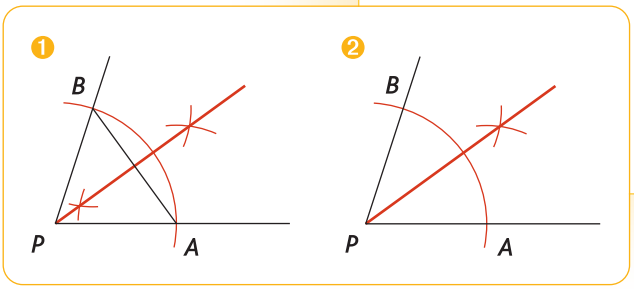
Áttetsző papírra lemásoljuk ezt a szöget és a hozzá tartozó körívet.

Ha kettéhajtva megfelezzük, a következőket figyelhetjük meg:

– a szögfelező egyúttal az AB húr felezőmerőlegese;

– a szögfelező felezi az AB ívet is;

– a szögfelező átmegy a szög P csúcsán.



1. A szögfelezést visszavezethetjük az AB húr felezőmerőlegesének megszerkesztésére:
2. Mivel az AB húr felezőmerőlegese átmegy a szög P csúcsán, egyszerűsíthetjük a szerkesztést.

FELADATOK

31 *a)* Rajzold meg szögmérő alkalmazásával a következő szögeket!

$\alpha = 56°$; $\beta = 75°$; $\gamma = 100°$; $\delta = 150°$

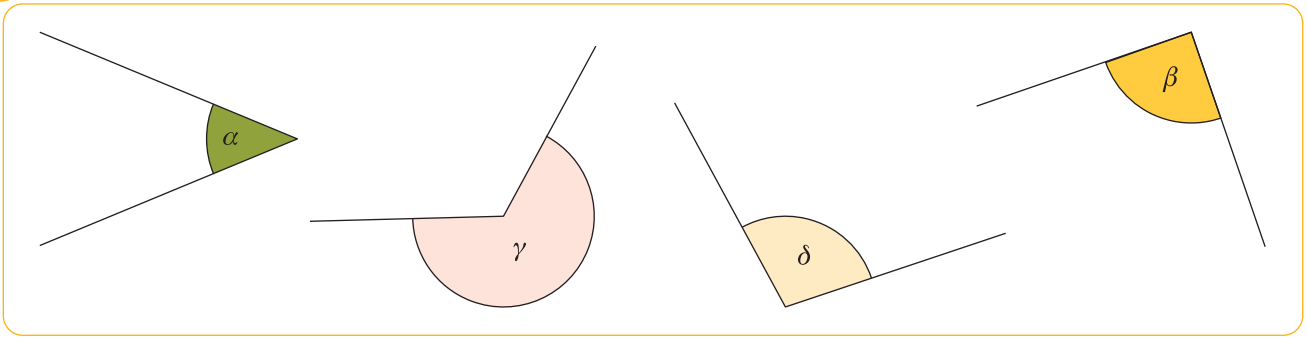
Másold le a megrajzolt szögeket! Szögmérő segítségével ellenőrizd a másolás helyességét!

b) Másolással szerkeszd meg a következő szögeket!

$\alpha + \beta$ $\beta + \gamma$ $\gamma - \alpha$ $\gamma + \delta$ $\delta - \alpha$

Feladatgyűjtemény 6.2.23–24.

32 *a)* Mérd meg a következő szögeket! Rajzolj ilyeneket a füzetedbe!



b) Minden szög alá írd oda, hogy milyen fajta!

c) Másold le és felezd meg ezeket a szögeket!

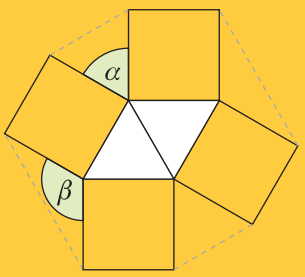
33 Rajzolj egy 180°-nál kisebb szöget! Szerkeszd meg az

a) $\frac{1}{2}$ részét; *b)* $\frac{3}{2}$ részét; *c)* $\frac{1}{4}$ részét; *d)* $\frac{1}{8}$ részét; *e)* $\frac{3}{4}$ részét!

◉ Ha már tudsz szerkesztőprogrammal dolgozni, akkor annak segítségével is oldd meg a feladatot!

Fejtörő!

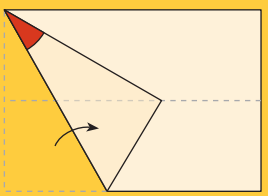
Az ábrán a fehérre színezett szabályos háromszögek szögei 60°-osak. Hány fokos az α-val, illetve a β-val jelölt szög?



Hajts félbe egy téglalap alakú papírcsíkot, majd hajtsd a felező vonalig az ábra szerint.

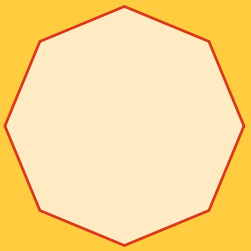
Mi a sejtésed? Mekkora a kiszínezett szög?

Tudnád ezt bizonyítani?

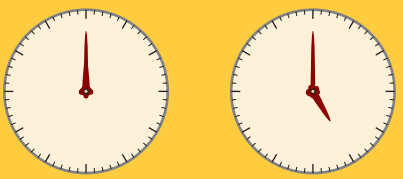


Négyzetből hajtogatással „szerkessz” **szabályos nyolcszöget**!

Mi a sejtésed? Hány fokosak a szögei?



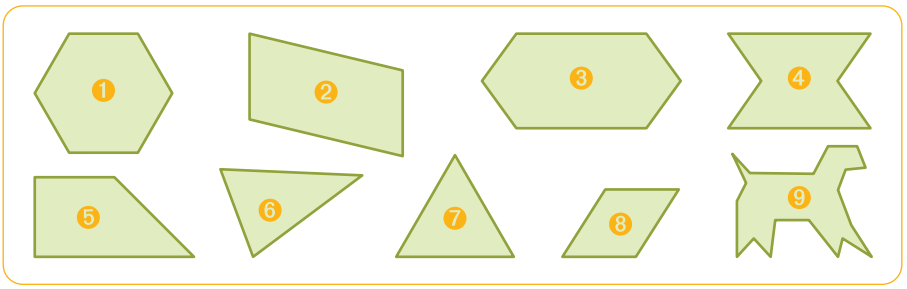
Déli 12 óra és délután 5 óra között hányszor merőlegesek a mutatók?



ISMERKEDÉS A SOKSZÖGEKKEL

FELADAT

34 Válaszd ki a sokszögek közül azokat, amelyekre igaz az állítás!



A: Minden szöge konvex.

B: Van tükörtengelye.

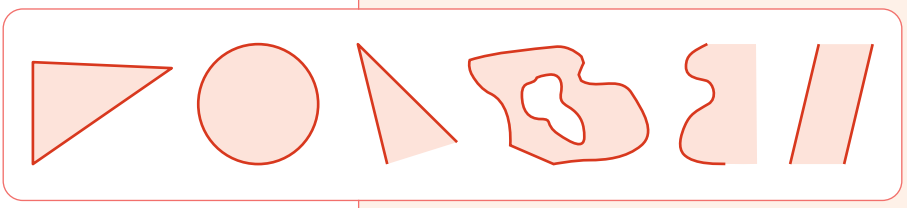
C: Nincs derékszögnél nagyobb szöge.

D: Van konkáv szöge.

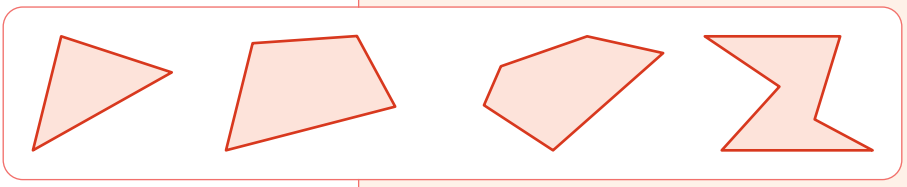
E: Van olyan átlója, amely a sokszögön kívül halad.

F: Egyetlen vágással kettőnél több darabra is széteshet.

Emlékeztető



Ha a síkot (egyenes vagy görbe) vonalakkal feldaraboljuk, akkor **síkidomokat** kapunk. A körlap, a szögtartomány, a négyzet, két párhuzamos egyenes közé eső síkrész, a félsík stb. síkidomok.



A háromszögek, négyszögek, ötszögek stb., vagyis az **egyszerű sokszögek** speciális síkidomok.

Az egyszerű sokszöget egyetlen záródó töröttvonal, sokszögvonal határolja.

A sokszög a síknak az a része, amely ezen a töröttvonalon belül van.

A sokszögnek ugyanannyi oldala van, mint ahány csúcsa.

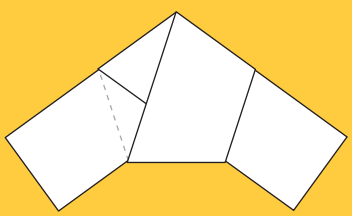
A sokszög szomszédos oldalai nem esnek egy egyenesbe.

Az **egyszerű sokszög** mindegyik csúcsához két oldal csatlakozik.

Az **egyszerű sokszög** oldalai csak a csúcsokban találkoznak.

A sokszöget határoló oldalak hosszúságának összegét a sokszög kerületének nevezzük.

Gyűjtőmunka



Egy ilyen párhuzamos oldalú papírcsíkon óvatosan csomót kötöttünk.

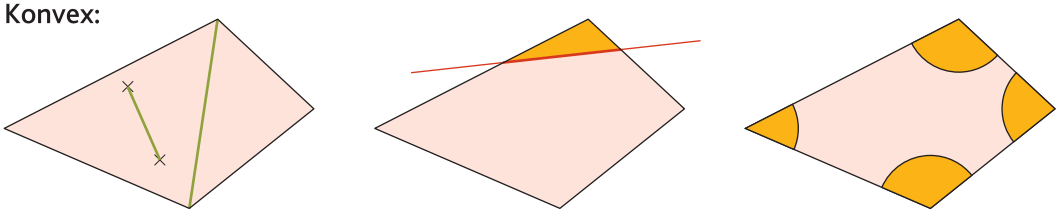
A csomó által alkotott ötszög minden oldala és szöge egyenlő, tehát **szabályos**.

Próbáld ki!

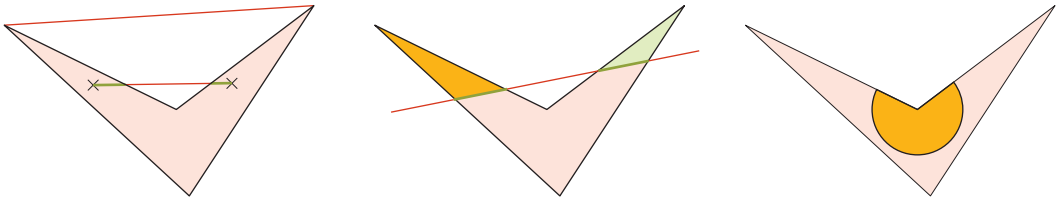
KONVEX SOKSZÖG

Bármely két pontját összekötő szakasz a sokszögön belül van.
Bármely egyenes vágással két darabra esik szét.
Minden szöge kisebb az egyenesszögnél.

Konvex:

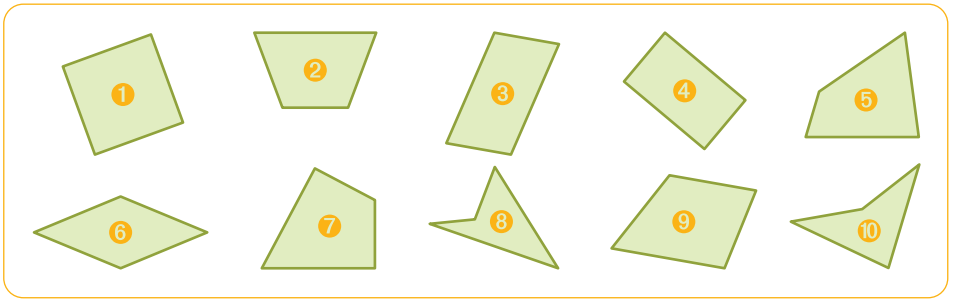


Konkáv (nemkonvex):



FELADATOK

35 Válaszd ki a négyszögek közül azokat, amelyekre teljesül az állítás!

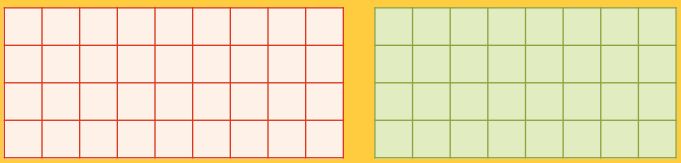


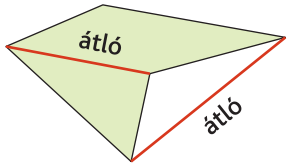
A: Van tükörtengelye.
B: Átlói egyenlő hosszúak.
C: Van konkáv szöge.
D: Szemközti szögei egyenlők.
E: Van párhuzamos oldalpárja.
F: Minden szöge derékszög.
G: Két-két szomszédos oldala egyenlő.
H: Átlói merőlegesek egymásra.
I: Bármely egyenes vágással két darabra esik szét.
J: Két-két szemközti oldala párhuzamos.
K: Két-két szemközti oldala egyenlő.

Gyakorló
8.17–8.20.;
Feladatgyűjtemény
6.3.04.

Darabold fel két egyenes vágással (külön-külön) a két téglalapot, majd a darabokból rakj össze négyzetet!

Többet ésszel ...

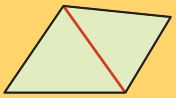
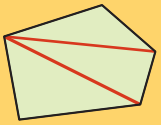
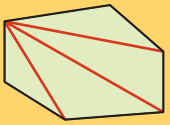




1. példa

Hány átló húzható a háromszög egy csúcsából, a négyszög egy csúcsából, az ötszög, a hatszög, ... az n oldalú sokszög egy csúcsából?

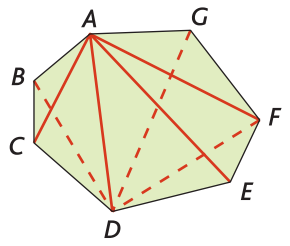
A sokszög két nem szomszédos csúcsát összekötő szakaszt átlónak nevezzük.

Sokszögek	háromszög	négyszög	ötszög	hatszög
				
Az átlók száma	0	1	2	3

Az n oldalú sokszög egy csúcsából húzható átlók száma:

$$n - 3$$

Azaz az egy csúcsból húzható átlók száma 3-mal kevesebb, mint a csúcsok száma, mert nem húzhatunk átlót a kiindulási csúcsba és a két szomszédos csúcsba.

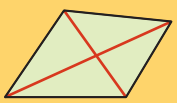
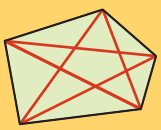
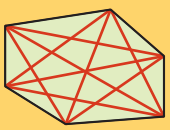


2. példa

Hány átló húzható a háromszögbe, a négyszögbe, az ötszögbe, a hatszögbe, ... az n oldalú sokszögbe?

Minden csúcsból a csúcsok számánál 3-mal kevesebb csúcs felé, így n csúcsból $n \cdot (n - 3)$ csúcs felé húzhatunk átlót.

Mivel egy-egy átló két csúcshoz tartozik (például az AD átló az A csúcshoz is és a D csúcshoz is), ezért a következő összefüggés igaz:

Sokszögek	háromszög	négyszög	ötszög	hatszög
				
Az átlók száma	$3 \cdot 0 : 2 = 0$	$4 \cdot 1 : 2 = 2$	$5 \cdot 2 : 2 = 5$	$6 \cdot 3 : 2 = 9$

Az n oldalú sokszögbe húzható átlók száma:

$$n \cdot (n - 3) : 2$$

Fejtörő!



Egy konvex ötszög, illetve egy konvex hatszög alakú kastélykert átlói mentén sövényfalat ültettek.

a) Hány részre oszthatja a sövény a kerteket?

b) Hány átjáró van összesen, ha bármely két sövénnyel elválasztott rész közé vágtak egy átjárót?

Van-e olyan sokszög, amelyben az átlók száma

0-szorosa; 1-szerese; 2-szerese, 3-szorosa; 4-szerese; 5-szöröse; az oldalak számának?

Fogalmazd meg, majd bizonyítsd sejtésedet!

HÁROMSZÖGEK

Emlékeztető

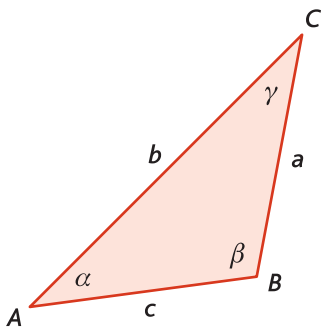
A **háromszögben** a csúcsokat általában nagybetűvel (például: A, B, C), magát a háromszöget a három csúcsával jelöljük: $ABC\triangle$

Az oldalakat ugyanazzal a kisbetűvel szoktuk jelölni, mint amilyen nagybetűvel a szemben fekvő csúcsot jelöljük (például: a, b, c).

Jelölhetjük az oldalakat a végpontjaik segítségével is (BC, AC, AB).

A háromszög **belső szögeit** a csúcsoknak megfelelő görög betűkkel jelölhetjük (például: α, β, γ). Jelölhetjük a szögeket a csúcspont segítségével is, ilyenkor a középső betű a szög csúcsa (például: $CAB\sphericalangle = \alpha = A\sphericalangle$).

A háromszög kerülete: $K = a + b + c$



$K = a + b + c$

FELADATOK

36 *a)* Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai: 3 cm, 52 mm, 0,6 dm!

b) Számítsd ki a háromszög kerületét!

c) Mérd meg, majd add össze a háromszög három belső szögét!

Értelmezd a feladatot! Vázolj fel egy háromszöget!

Készíts tervet!

---

37 Szerkessz háromszöget, amelynek az AB oldala 51 mm, az AC oldala 3 cm, a BC oldala

a) 0,38 dm hosszú; *b)* 0,86 dm hosszú; *c)* 0,15 dm hosszú!

Figyeltél a mértékegységekre?

Mi az oka annak, ha nem sikerül megszerkesztened a háromszöget?

---

38 Válassz ki hármat az adott szakaszok közül, és szerkessz belőlük háromszöget!

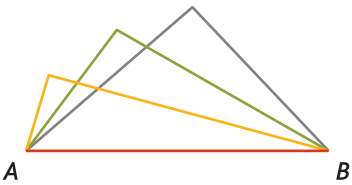


Hány különböző megoldást találtál?

HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG

A két pont távolságáról tanultak alapján beláthatjuk a következő összefüggést a háromszög oldalai között:

A háromszög bármely két oldalának az összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal.



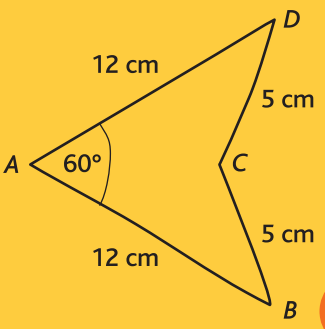
Egy háromszög két oldalának a hossza: $a = 7$ cm; $b = 15$ cm;

Az alábbiak közül mekkora lehet a háromszög kerülete?

A: $K = 28$ cm; **B:** $K = 35$ cm; **C:** $K = 44$ cm; **D:** $K = 50$ cm

Jelöld meg a helyes választ!

Többet ésszel ...



Ödömér az itt látható vázlatot készítette. Magyarázd meg neki, hogy miért nem sikerül megszerkesztenie ezt a négyszöget!

FELADATOK

⊙ Ha már tudsz szerkesztőprogrammal dolgozni, akkor annak segítségével is oldd meg a c) feladatot!

Gyakorló
8.22–8.26.
8.50–8.51.;
Feladatgyűjtemény
6.3.07–10.,
6.3.12–14.,
7.5.01–02.

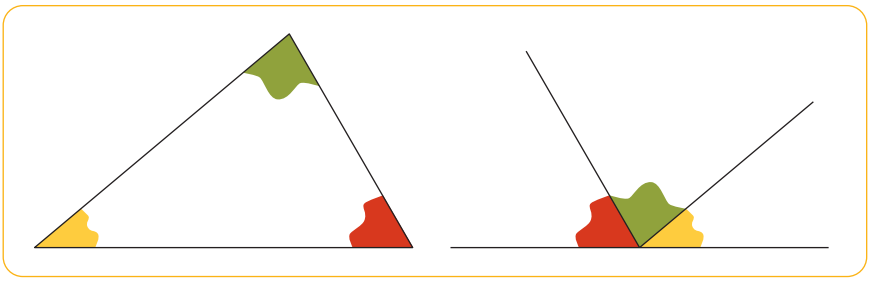
39 *a)* Rajzolj egy 4 cm hosszú AB szakaszt! A B végpontjára rajzolj 60°-os szöget! Az A végpontjához illessz szívószálat úgy, hogy körülbelül 10°-os, 20°-os, 30°-os stb. szöget zárjon be az AB szakasszal! A szívószálat tekintsük félegyenesnek. A szívószál melyik helyzetétől kezdve nem zár közre háromszöget az AB szakasz és a két félegyenes? Miért?

b) Rajzolj tetszőleges háromszöget! Egy félegyenesből kiindulva, szögmásolással add össze a három belső szögét!

c) Rajzolj tetszőleges háromszöget! Mérd meg, majd add össze a szögeit!

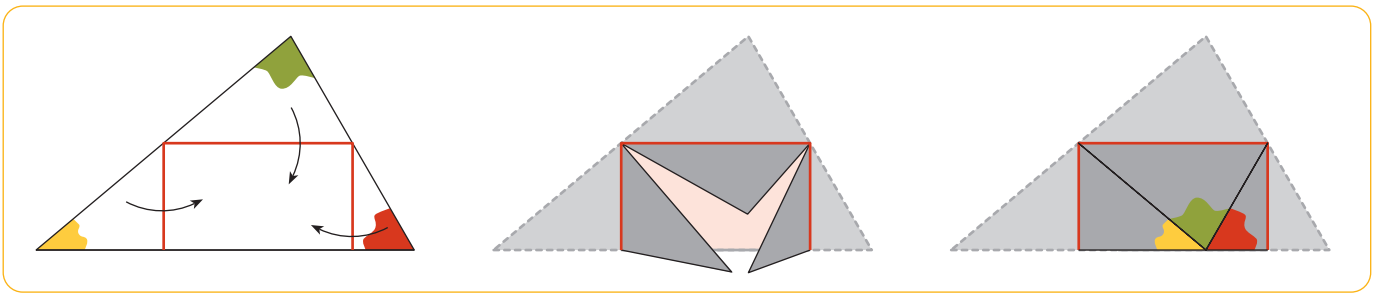
d) Egy háromszög 4 cm hosszú oldalán fekvő két belső szög 100° és 90°. Rajzolj ilyen háromszöget!

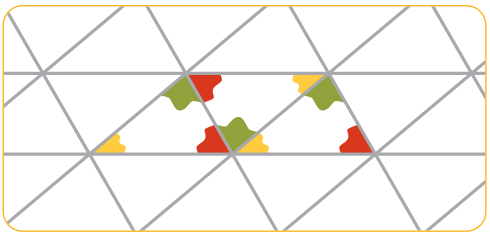
e) Több háromszögön végzett vizsgálat alapján fogalmazd meg a sejtésedet!



Méréssel, szögmásolással, hajtogatással a következő összefüggést vettük észre a háromszög **belső szögei** között:

Bármely háromszög belső szögeinek összege egyenesszög, vagyis 180°.



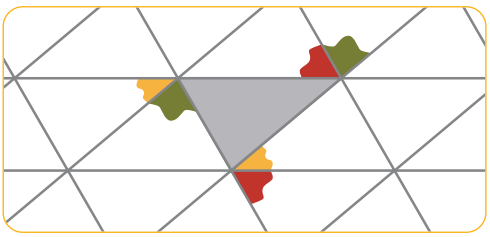


Ezt az összefüggést most parkettázással is megfigyelhetjük.

Parkettázzuk a síkot egybevágó háromszögekkel.

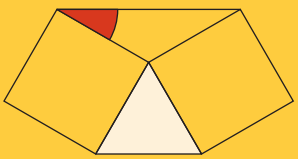
Láthatjuk, hogy egymás mellé kerülnek a háromszög különböző szögei, és valóban egyenesszöget alkotnak.

A háromszög egyik belső szöge és a mellette lévő külső szöge egyenesszögre egészíti ki egymást.



Hasonlítsuk össze a háromszög egyik külső szögét a nem mellette lévő két belső szöggel.

Fogalmazzunk meg sejtést a háromszög külső szögeinek összegéről. Az ábra segítségével igazoljuk sejtésünket.



Egy egyenlő oldalú (szabályos) háromszög két oldalára egy-egy négyzetet szerkesztettünk.

Határozd meg az ábrán pirossal színezett szög nagyságát!

FELADATOK

40 *a)* Egy háromszög két belső szöge 45° és 62°.
Rajzolj ilyen háromszöget! Mekkora a háromszög harmadik szöge?

b) Egy háromszög AB oldala 15 cm, a két belső szöge: $A\sphericalangle = 90°$, illetve $B\sphericalangle = 89°$. Megszerkeszthető ez a háromszög?

c) Lehet-e egy háromszög két belső szöge 98° és 89°? Miért?

---

41 Vázolj föl háromszöget, amelynek

a) van tompaszöge;
b) minden szöge tompaszög;
c) van derékszöge;
d) legalább két derékszöge van;
e) minden szöge hegyesszög;
f) legalább két tompaszöge van!

---

42 *a)* Egy háromszög minden belső szöge egyenlő.
Mekkorák a háromszög belső szögei? Rajzolj ilyen háromszöget!

b) Egy háromszög minden oldala 5 cm. Szerkessz ilyen háromszöget! Állapítsd meg (mérés nélkül), hogy hány fokosak ennek a háromszögnek a szögei!

Értelmezések

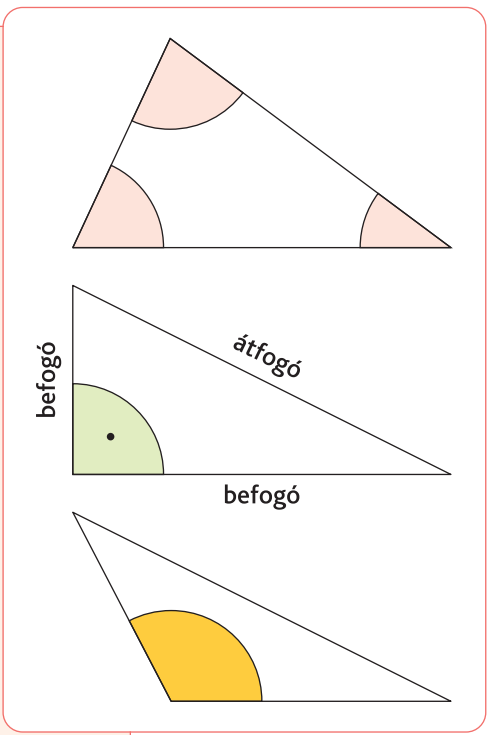
Hegyesszögű háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha minden szöge hegyesszög.

Derékszögű háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha van derékszöge. A derékszöget bezáró két oldalt **befogónak**, a derékszöggel szemközti oldalt **átfogónak** nevezzük.

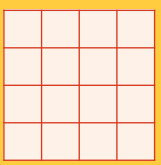
Tompaszögű háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha van tompaszöge.

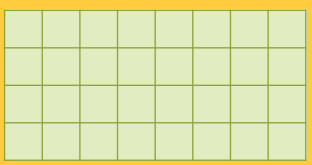
A háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért a háromszög mindegyik szöge kisebb 180°-nál.

Mivel 2 derékszög = $2 \cdot 90° = 180°$, és 2 tompaszög > $2 \cdot 90°$, tehát nagyobb 180°-nál, ezért **a háromszög belső szögei közt legfeljebb egy hegyesszögnél nagyobb szög lehet**.



Darabold át a téglalapot minél többféleképpen egyenlő szárú háromszöggé!

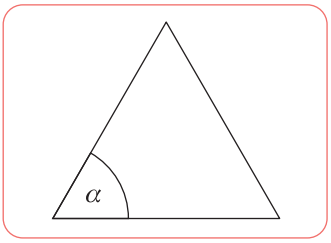




Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott
a kerülete:
valamint az alap és a szár különbsége:

Kísérletezz!

Áttetsző papírra szerkesszünk 3 cm oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszöget. A tankönyv ábrájára helyezve belátható, hogy az áttetsző papírra szerkesztett egyenlő oldalú háromszög bármelyik szöge egyenlő az ábra α szögével.

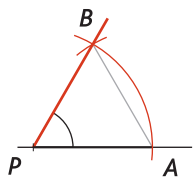


Értelmezés

Szabályos háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha minden oldala egyenlő. A szabályos háromszög minden szöge egyenlő.

A háromszög belső szögeinek összegéből meghatározhatjuk a szabályos háromszög egy szögét:

$$\alpha = 180° : 3 = 60°$$



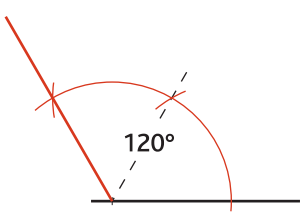
Ezt az összefüggést alkalmazva, körzővel és vonalzóval megszerkeszthetjük a 60°-os szöget. Az ábrán: $PA = PB = AB$

Szögfelezéssel, szögek összegének és különbségének a megszerkesztésével egyéb szögeket is szerkeszthetünk. Például:

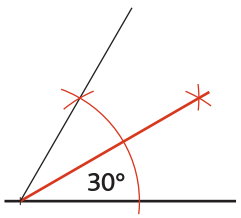
$\alpha = 60° + 60° = 120°$; $\beta = 60° : 2 = 30°$; $\gamma = 60° + 60° : 2 = 90°$;

$\delta = 60° : 2 + 30° : 2 = 45°$ szögek szerkesztése:

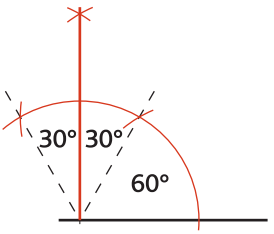
120°-os szög:



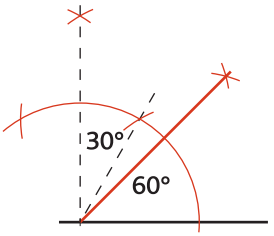
30°-os szög:



90°-os szög:



45°-os szög:



FELADATOK

43 Szerkessz

a) 60°-os; *b)* 30°-os; *c)* 15°-os; *d)* 120°-os; *e)* 240°-os; *f)* 90°-os; *g)* 270°-os; *h)* 45°-os; *i)* 105°-os; *j)* 75°-os; *k)* 225°-os szöget!

A 45°-os szöget is szerkeszd!

44 Rajzolj 6 cm-es szakaszt! A két végpontjára szerkessz 45°-os, illetve 60°-os szöget! Mekkora a keletkezett háromszög harmadik szöge?

Feladatgyűjtemény
6.3.06., 6.3.26.

45 Szerkessz egy 75°-os szöget! A két szögszárra mérj fel 4 cm-t, illetve 5 cm-t! Mekkora a végpontok összekötésével kapott háromszög másik két szöge?

A szögeket is szerkeszd!

46 Szerkessz háromszöget, ha egy oldala 4 cm, két szöge 30° és 90°!
Hány megoldást találtál?

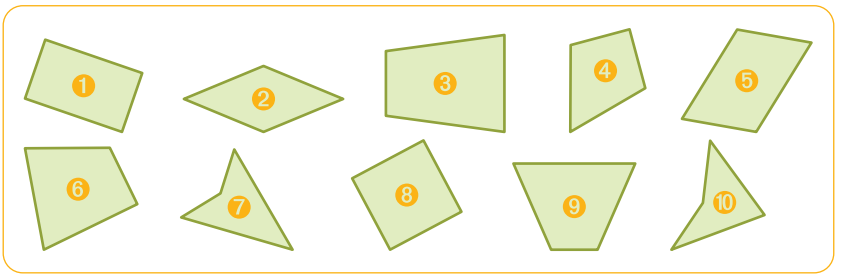
Többet ésszel ...

Mekkora annak a háromszögnek a legnagyobb szöge, amelynek egyik szöge 2 ötöd része, a másik szöge 0,6-szerese a harmadik szögnek?

NÉGYSZÖGEK

FELADAT

47 Az alaphalmaz a következő **négyszögek** halmaza:



Sorold fel a következő halmazokhoz tartozó négyszögek sorszámát!

A = {Van párhuzamos oldalpárja};

B = {A szemben fekvő oldalai egyenlők};

C = {Minden oldala egyenlő};

D = {A szemben fekvő oldalai párhuzamosak};

E = {Van merőleges oldalpárja};

F = {Minden szöge egyenlő};

G = {Pontosan három derékszöge van}

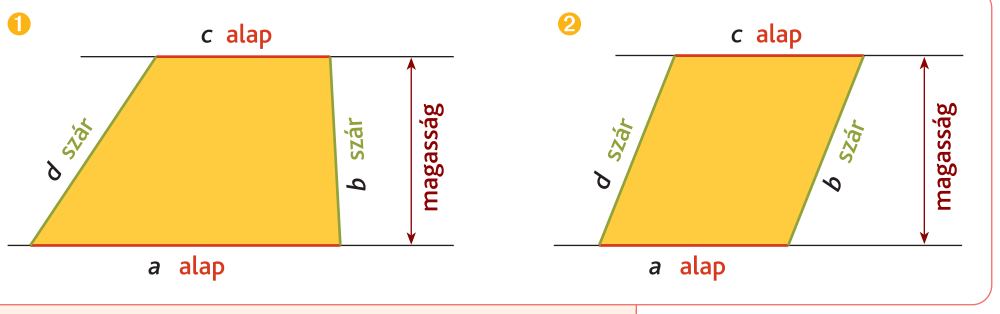
Értelmezések

Azokat a négyszögeket, amelyeknek van párhuzamos oldalpárjuk, trapézoknak nevezzük. A párhuzamos oldalak a trapéz **alapjai**.

A trapéznak a másik két oldala nem feltétlenül párhuzamos, de lehet párhuzamos is.

A nem feltétlenül párhuzamos oldalak a trapéz **szárai**.

A két alap távolsága a trapéz **magassága**.



1. példa

Mérjük meg az előző ábrán lévő trapézok oldalait, és határozzuk meg a kerületüket!

A trapéz kerülete: $K = a + b + c + d$

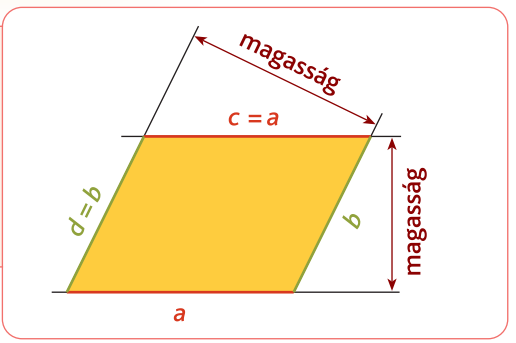
1. $41\text{ mm} + 25\text{ mm} + 23\text{ mm} + 30\text{ mm} = 119\text{ mm}$
2. $25\text{ mm} + 27\text{ mm} + 25\text{ mm} + 27\text{ mm} = 2 \cdot 25\text{ mm} + 2 \cdot 27\text{ mm} = 104\text{ mm}$

Értelmezések

Paralelogrammának nevezzük az olyan trapézt, amelynek két párhuzamos oldalpárja van, vagyis szemközti oldalai párhuzamosak.

(Paralel jelentése: párhuzamos.)

A paralelogrammának két magassága van, mivel két párhuzamos oldalpárja van.



2. példa

Határozzuk meg az előző lap alján lévő ábrán látható paralelogramma kerületét.

Figyeld meg! A paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak.

$K = a + b + c + d = \underbrace{a + b} + \underbrace{a + b} = 2 \cdot (a + b)$ vagy $K = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

$K = 2 \cdot (30\text{ mm} + 23\text{ mm}) = 2 \cdot 53\text{ mm} = 106\text{ mm} = 10{,}6\text{ cm}$

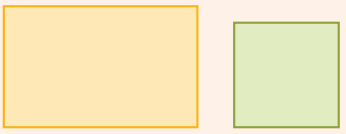
Megfigyelted? A négyzet rombusz is és téglalap is.

Értelmezés

Rombusznak nevezzük az olyan paralelogrammát, amelynek mind a négy oldala egyenlő.



Téglalapnak nevezzük az olyan paralelogrammát, amelynek mind a négy szöge egyenlő, azaz a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.



3. példa

Határozzuk meg a fenti piros rombusz kerületét.

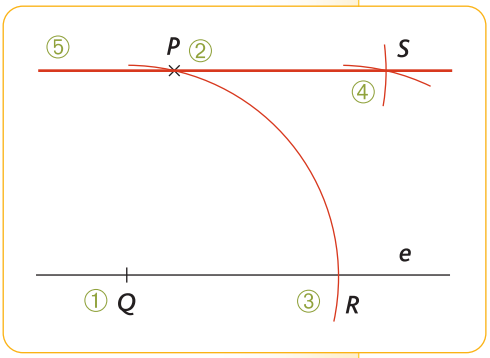
A rombusznak mind a négy oldala egyenlő hosszú.

$K = 4 \cdot a = 4 \cdot 20\text{ mm} = 80\text{ mm} = 8{,}0\text{ cm}$

4. példa

Adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont.

Szerkesszünk az e egyenessel párhuzamos egyenest a P ponton keresztül.



Egy rombusz megszerkesztésére vezethetjük vissza a feladatot:

① Az e egyenesen felveszünk egy Q pontot.

② A QP távolságot körzőnyílásba vesszük.

③ A Q pontból QP sugarú körívvel kimetsszük az e egyenesen az R pontot.

④ A P pontból és az R pontból is QP sugarú körívet húzunk. A két körív metszéspontja az S pont.

⑤ Meghúzzuk a PS egyenest.

Az így megszerkesztett P, Q, R, S pont egy rombusz négy csúcsa, amelynek a szemközti **oldalegyenesei** egymással párhuzamosak:

$$PS \parallel QR = e$$

Fejtörő!

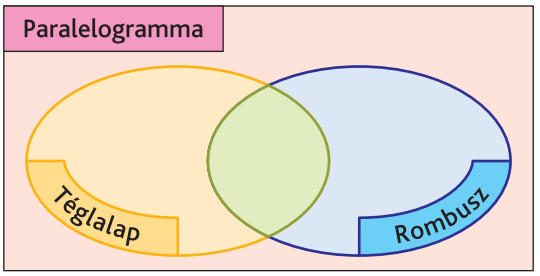
A 75°-os szöget is szerkeszd!

Szerkessz rombuszt, ha az egyik szöge 75°-os, és ennyi a kerülete:

Emlékeztető

A **négyzet** olyan paralelogramma, amelynek mind a négy oldala egyenlő, és szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, ezért **a négyzet rombusz is és téglalap is**.

Zöldre színeztük a halmazábrának azt a részét, ahová a négyzetek kerülnek.

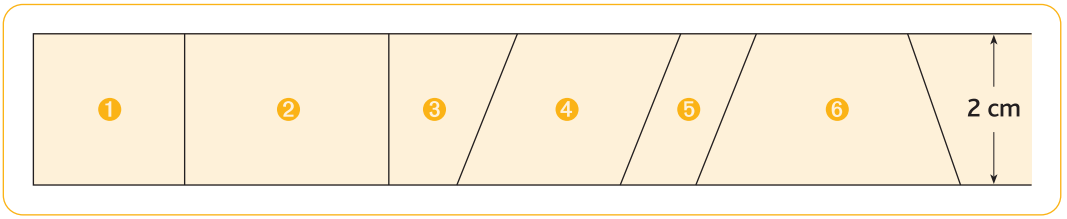


FELADATOK

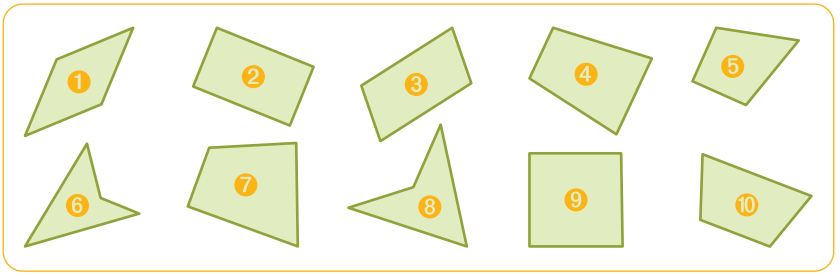
48 Készíts 2 cm széles csíkot kartonpapírból!
Vágj ki belőle négyszögeket az ábrához hasonló módon!

Mi a közös tulajdonságuk a kapott négyszögeknek?

Számítsd ki a hat négyszög kerületét!



49 Az ábrán látható négyszögek halmazára a következő állítások közül melyik igaz?



A: Amelyiknek van párhuzamos oldalpárja, az paralelogramma.

B: Amelyik paralelogramma, annak van párhuzamos oldalpárja.

C: Amelyiknek van tükörtengelye, az paralelogramma.

D: Van olyan paralelogramma, amelynek van tükörtengelye.

E: Amelyiknek az átlói egyenlő hosszúak, az négyzet.

F: Van olyan paralelogramma, amelynek nincs tükörtengelye.

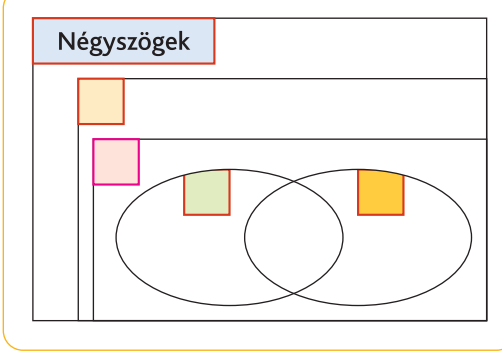
Az állítások közül melyik igaz a négyszögek bármely halmazára?

Gyakorló
8.63–8.66.;
Feladatgyűjtemény
6.3.15–32.

50 *a)* Rajzolj ilyen halmazábrát!

A = {Trapéz}; B = {Téglalap}; C = {Rombusz};
D = {Négyzet}; E = {Paralelogramma}

Írd be a halmazábrába a címkék betűjelét és az előző feladat négyszögeinek sorszámát!



b) Válaszd ki az igaz állításokat!

A: Minden trapéz paralelogramma.

B: Minden paralelogramma trapéz.

C: Minden rombusz paralelogramma.

D: Van olyan négyzet, amely nem rombusz.

E: Van olyan téglalap, amely négyzet.

F: Ha egy négyszög rombusz is és téglalap is, akkor az négyzet.

GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

Gyakorló 7.38.–7.46.; Feladatgyűjtemény 6.1.16–33.

51 Egészítsd ki a következő feladatokat!

a) 0,038 km = ☐ m = ☐ dm = ☐ cm

b) 56 000 mm = ☐ dm = ☐ cm = ☐ km = ☐ m

c) 5,36 km^2 = ☐ ha = ☐ m^2

d) 49 000 000 mm^2 = ☐ cm^2 = ☐ dm^2 = ☐ m^2

e) 1,45 m^3 = ☐ hl = ☐ dm^3 = ☐ dl

f) 56 000 cm^3 = ☐ cl = ☐ dl = ☐ dm^3 = ☐ hl

g) 1,45 t = ☐ kg = ☐ dkg (dag)

h) 450 g = ☐ dkg (dag) = ☐ kg = ☐ mg

i) 15° = ☐ ' (szögperc) = ☐ '' (szögmásodperc)

j) 3,5 nap = ☐ h (óra) = ☐ min (perc) = ☐ hét

Gyűjtőmunka

Gyűjts dobozokat! A téglatestek között legyen kocka alakú is.

52

a) Készítsd el egy 4 cm élű kocka hálóját! Számítsd ki a felszínét!

b) Rajzold rá és mérd meg a lapok átlóit, a **lapátlókat**! (Úgy állítsd össze a testet, hogy a lapátlók rajza a test belsejébe kerüljön!)

c) A kocka lezárása előtt szívószálból készítsd el egyik **testátlóját**, vagyis a kocka két átellenes csúcsát összekötő átlót!

Melyik a hosszabb, a lapátló vagy a testátló?

d) Számítsd ki a kocka térfogatát!

Kísérletezz!

Használhatod a 3–5. osztályos Eszköztár kivágható testhálóit is!

53

a) Készítsd el egy téglatest hálóját, ha az alapélei 3 cm-esek és az oldaléle 5 cm!

b) A test lezárása előtt szívószálból készítsd el egyik testátlóját! Hány testátlója van? Mi mondható el ezekről?

c) Számítsd ki a téglatest (négyzetes oszlop) felszínét!

d) Számítsd ki a téglatest (négyzetes oszlop) térfogatát!

54

a) Készítsd el egy téglatest hálóját, ha egy csúcsban találkozó élei 3 cm; 4 cm; 5 cm!

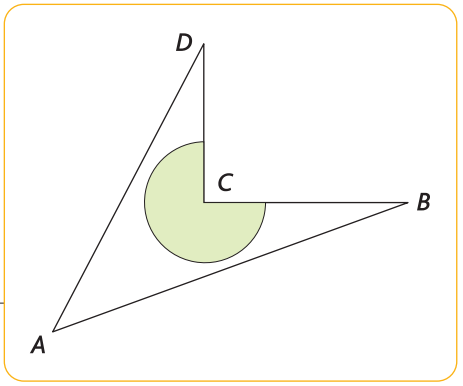
b) Rajzold rá és mérd meg a lapátlókat! Hányféle lapátlója van?

c) A test lezárása előtt szívószálból készítsd el egyik testátlóját! Hányféle testátlója van?

d) Számítsd ki a téglatest felszínét, térfogatát!

55 *a)* Mérd meg a négyszög belső szögeit!
(Vigyázz a $DCB\sphericalangle$ nagyságának megállapításakor!)
Mérd meg az oldalait, és add meg a kerületét!

b) Rajzolj különböző konvex és konkáv négyszögeket! Mérd meg a belső szögeiket!
Mérd meg az oldalak és az átlók hosszúságát!
Határozd meg a kerületüket!



56 Szerkeszd meg az egyenesszög
a) $\frac{1}{2}$ részét; *b)* $\frac{1}{4}$ részét; *c)* $\frac{5}{4}$ részét; *d)* $\frac{3}{8}$ részét; *e)* $\frac{15}{8}$ részét!
Hány fokos szögeket kaptál?

57 Szerkessz háromszöget, amelynek az oldalai 5 cm, 7 cm és 8 cm-esek! Számítsd ki a háromszög kerületét!

58 Szerkessz derékszögű háromszöget, amelynek az egyik oldala 3 cm, a másik 4 cm hosszú! Mérd meg a kapott háromszög szögeit!
Határozd meg a háromszög kerületét!

◉ *A derékszögű háromszög mely oldalairól lehet szó?*

59 A derékszögű koordináta-rendszerben egy derékszögű háromszög ($ABC\triangle$) két csúcspontja $A(0; 0)$, $B(6; 0)$. Add meg jelzőszámaival a C csúcspontot, a jelzőszámok csak egészek lehetnek!
Színezd pirossal azokat a pontokat, amelyek megoldást adnak!

◉ *Keress több megoldást!*

60 *a)* Hány oldalú az a sokszög, amelyben egy csúcsból 4 átló húzható?
b) Hány oldalú az a sokszög, amelyet egy csúcsból húzható átlókkal 6 háromszögre bonthatunk?

Gyakorló 7.47–7.56.

61 *a)* Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek van párhuzamos oldalpárjuk!
b) Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek két-két szemben fekvő oldaluk párhuzamos! Hasonlítsd össze a szemben fekvő oldalak hosszát!
c) Mérd meg a megrajzolt négyszögek szögeit! Két-két szomszédos szöget adj össze! Figyeld az eredményt! Mit tapasztalsz?
d) Határozd meg a megrajzolt négyszögek kerületét!

◉ *Hogyan nevezzük az a) és b) feladatban megrajzolt négyszögeket?*

62 *a)* Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek minden szögük egyenlő!
b) Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek minden oldaluk egyenlő!
c) Szerkessz téglalapot, amelynek oldalai 3,5 cm, illetve 0,52 dm hosszúak! Számítsd ki a téglalap területét!

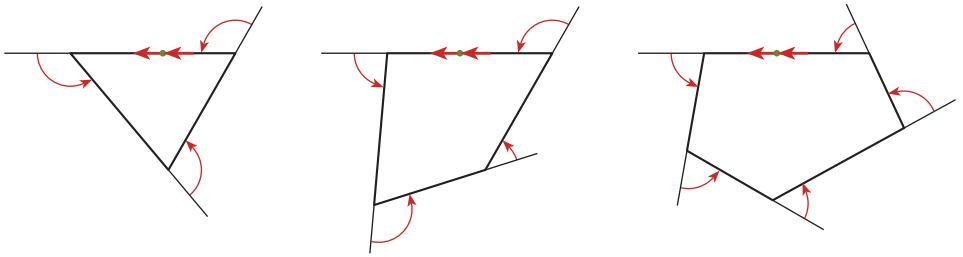
◉ *Hogyan nevezzük az a) és b) feladatban megrajzolt négyszögeket?*

Darabold át a **húrtrapézt** egyenlő szárú háromszöggé!



Fejtörő!

B1 A térképen zöld pöttyel jelölt szigetről indulsz nyugati irányban egy motorcsónakkal. Egy konvex sokszögvonal alakú pályán siklasz végig.



Végül újra nyugati irányban haladva jutsz vissza a kiindulási helyre.

A sokszögvonal alakú pálya csúcsainál akkora szöggel kell elfordulnod, amekkora a **sokszög külső szöge**.

Összesen hány fokkal fordulsz el a pályán végighaladva, ha a pálya alakja

a) háromszög; b) négyszög; c) ötszög; d) tetszőleges konvex sokszög?

B2 *a)* Rajzolj egy e egyenest! Keress olyan pontokat a síkban, amelyek 1,2 cm távolságra vannak az e egyenestől!

Színezd *kékre* azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek legfeljebb 0,12 dm távolságra vannak az e egyenestől, *pirosra* azoknak a halmazát, amelyek legalább 12 mm távolságra vannak az e-től!

b) Rajzolj egy f egyenest! Szerkeszd meg azoknak a síkbeli pontoknak a halmazát, amelyek 16 mm távolságra vannak az f egyenestől! Fogalmazd meg észrevételed!

c) Szerkessz párhuzamos egyenespárt! Rajzolj pontokat úgy, hogy egyenlő távolságra legyenek a két egyenestől!

◉ *Vannak lila pontok a rajzodon?*

Kísérletezz!

B3 Hány oldalú lehet az a sokszög, amely egy egyenes vágással

a) egy háromszögre és egy négyszögre; *b)* egy háromszögre és egy ötszögre;

c) két háromszögre; *d)* két négyszögre; *e)* két ötszögre vágható?

◉ *Keress több megoldást!*

B4 Hány részre oszthatja a síkot három egyenese?

◉ *Szívószálakkal kísérletezz!*

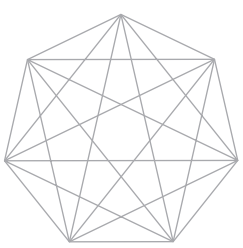
B5 Hány részre oszthatja a teret három sík?

◉ *Papírlapokkal kísérletezz!*

B6 Helyezz el 5 pontot a síkon úgy, hogy azok

a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 4; *e)* 5; *f)* 6; *g)* 7;

h) 8; *i)* 9; *j)* 10; *k)* 11 egyenest határozzanak meg!



B7 Rajzolj sokszöget és rajzold meg annak minél több átlóját úgy, hogy a ceruzát ne emeld föl, és egyetlen vonalon se haladj végig kétszer! (Az átlók metszhetik egymást.) Melyek azok a sokszögek, amelyek így megrajzolhatók összes átlójukkal együtt?

B8 Hány oldalú az a sokszög, amelynek pontosan annyi átlója van, mint ahány oldala?

B9 *a)* Kösd össze egy körvonal szomszédos negyedelő pontjait!
Milyen négyszöget kapsz?

b) Egy 2,5 cm sugarú körbe húzz két átmérőt! Az átmérők 60°-os szöget zárjanak be egymással. Kösd össze a négy végpontot! Milyen négyszöget kapsz?

B10 *a)* Egy hajó kormányosa vagy. Azt az utasítást kapod, hogy 45°-kal térj el az eddig követett iránytól. Egyértelmű ez az utasítás? Miért?

b) Egy hajó kormánykerekét balra elfordítod 450°-kal. Hogyan lehetséges ez?

c) Három óra alatt hány fokkal fordul el az óra nagymutatója?

B11 Mekkorák a háromszög szögei?

a) A háromszög egyik szöge α, a másik α-nál 15°-kal kisebb, a harmadik pedig α-nál 36°-kal nagyobb.

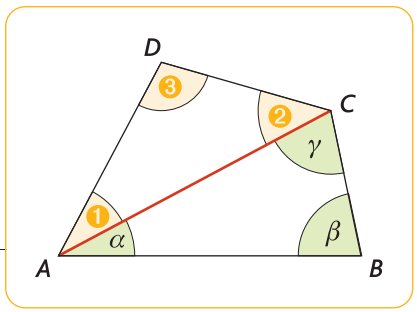
b) A háromszög két szögének különbsége 45°, összege 75°.

c) A háromszög β szöge ötszöröse az α szögnek, a γ szöge 30°-kal kisebb az α szögnél.

d) A háromszög β szöge kétszerese az α szögnek, a γ szöge 40°-kal nagyobb, mint az α fele.

B12 *a)* Mekkora a téglalap belső szögeinek összege?

b) Rajzolj tetszőleges négyszöget! Jelöld a csúcsait!
Az A csúcsból kiinduló átló segítségével bontsd két háromszögre! Jelöld a keletkezett belső szögeket!
Határozd meg mérés nélkül a négyszög belső szögeinek összegét!

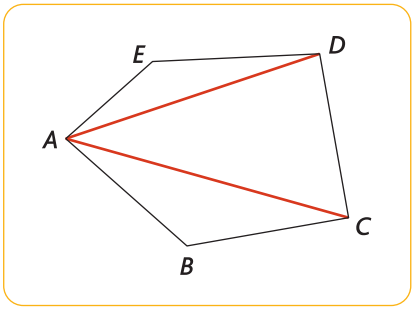


B13 Rajzolj tetszőleges ötszöget! Jelöld a csúcsait!

a) Egy csúcsából kiinduló átlók segítségével bontsd háromszögekre az ötszöget! Hány háromszög keletkezett?

b) Az így keletkezett háromszögek belső szögeit jelöld különböző színű α, β, γ betűkkel, majd ezek segítségével (mérés nélkül) határozd meg az ötszög belső szögeinek összegét!

c) Egészítsd ki az ötszöget olyan sokszögekké, amelyek belső szögeinek az összege
1 · 180°-kal; 2 · 180°-kal; 3 · 180°-kal több, mint az ötszög belső szögeinek összege! Milyen sokszögeket kapsz?

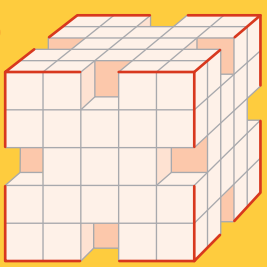


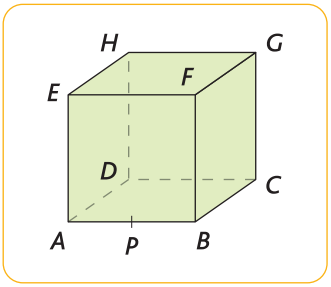
Fejtörő!

1 cm^3-es kis kockákból 5 cm élhosszúságú kockát ragasztunk össze, majd mindegyik élének közepéről kiemelünk egy-egy egységkockát. Ezután ezt a testet piros festékbe mártjuk, végül – száradás után – egységkockákra bontjuk.

Hány olyan kis kockát kapunk, amelyek pirosra festett lapjainak száma

0: ; 1: ; 2: ; 3: ; 4: ?

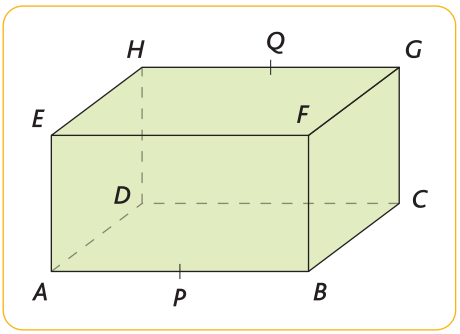




B14 A kocka élvázmodelljével vagy egy „nyitott” kockával végezheted a vizsgálatokat. (A P az AB él felezőpontját jelöli.)

a) Melyik hegyesszögű, melyik derékszögű, melyik tompaszögű az $EFP\triangle$; $BFG\triangle$; $AFG\triangle$; $PFG\triangle$; $FPD\triangle$; $ACF\triangle$ közül?

b) Keresd meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek egyenlő távolságra vannak az $ABFE$ és az $ADHE$ lap síkjától!



B15 Az ábrán látható téglatest AB élének felezőpontja P, a GH él felezőpontja Q. AB éle 4 cm, AD éle 3 cm, AE éle 2 cm hosszú.

a) Sorold föl az FG él egyenesével párhuzamos; arra merőleges; azzal kitérő élegyeneseket!

b) Az A csúcstól melyik csúcs van a legtávolabb?

c) Határozd meg az A csúcs és az élek távolságát!

d) Keress olyan pontokat, amelyek az A és a B csúcstól egyenlő távolságra vannak a téglatest felületén; belsejében!

e) Keresd meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek egyenlő távolságra vannak a $BCGF$ és az $ADHE$ lap síkjától!

f) Hányféle legrövidebb út vezet az A csúcsból a G csúcsba a téglatest élei mentén; felületén; belsejében?

g) Számítsd ki a téglatest felszínét! *h)* Számítsd ki a téglatest térfogatát!

A felszín kiszámításához a Kislexikonban segítséget találsz.

◉ *Gyakorló*
7.73., 7.78., 7.83., 7.88.;
Feladatgyűjtemény
6.5.10–11.,
7.5.03., 7.5.05–08.

Kísérletezz!

B16 Létezik-e olyan test a kockán kívül, amelynek minden lapja egyenlő nagyságú négyzet? Próbálj ilyen testet összeállítani csöppnyi gyurma segítségével a színesrúdkészlet kis kockáiból, vagy kockacukorból!

Hány kis kockát használtál fel?

◉ *Mindegyik 1 cm³-es kis kockát föl kell használnunk, és a kis kockákat nem darabolhatjuk föl. Van-e a fölépíthető téglatestek között kocka?*

B17 Számítsd ki a fölépíthető téglatestek felszínét és térfogatát!

a) Hányféle téglatest építhető föl 24 db 1 cm³-es kockából?

b) Hányféle téglatest építhető föl 27 db 1 cm³-es kockából?

c) Hányféle téglatest építhető föl 29 db 1 cm³-es kockából?

Kísérletezz!

B18 Hányféle háromszög rakható össze 2 cm-es, 3 cm-es, 4 cm-es, 5 cm-es pálcikákból, ha mindegyik pálcikából csak egy van?

Fejtörő!

A téglalapból két vágással vágd ki a lehető legnagyobb területű rombuszt!

a) Darabolj át két vágással egy téglalapot két egybevágó rombusszá!

b) Darabolj át két egybevágó rombuszt egy téglalapba!

c) Darabolj át egy rombuszt két egybevágó téglalapba!

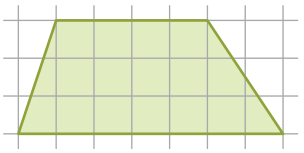
◗ bővített szint

B19 Szerkessz (szögmérő használata nélkül) olyan háromszöget, amelynek az a oldala 3 cm hosszú, és az a oldalon lévő belső szögei $\beta = 60°$ és $\gamma = 45°$! Szerkeszd meg a β és a γ szögfelezőit is!

Mekkora szöget zárnak be a szögfelezők?

◉ *Ne mérj, hanem számolj!*

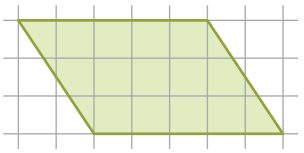
B20 Parkettázd ilyen trapézokkal a síkot!



Színezd azonos színűre a megegyező nagyságú szögeket! Mit figyelhetsz meg?

Ugyanezekkel a trapézokkal tudnád-e többféleképp parkettázni a síkot? Bármilyen trapézzal parkettázható a sík?

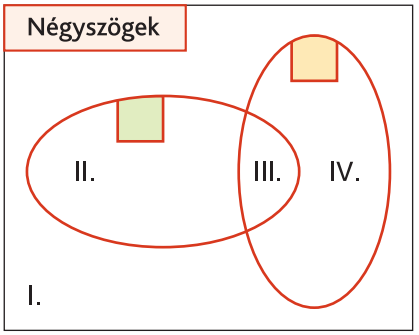
B21 Parkettázd ilyen paralelogrammákkal a síkot!



Színezd azonos színűre a megegyező nagyságú szögeket!

Mit figyelhetsz meg? Bármilyen paralelogrammával parkettázható a sík?

B22 **Mindegyik feladathoz rajzolj olyan halmazábrát, mint amilyet itt látsz, csak nagyobbat!**



Rajzolj minden részbe egy-egy négyszöget! Az egyes síkrészekbe milyen síkidomok kerülnek? Vonalkázd be a halmazábrának azt a részét, ahová nem kerül elem!

Az egyes feladatokban a címkék jelentése:

a) A = {Van párhuzamos oldalpárja};
B = {Van tükörtengelye}

b) A = {Szemközti oldalai egyenlők};
B = {Szemközti oldalai párhuzamosak}

c) A = {Minden oldala egyenlő};
B = {Minden szöge egyenlő}

d) A = {Konvex};
B = {Konkáv}

B23 A derékszögű koordináta-rendszerben rajzold meg az $(1; -1)$, a $(4; 2)$ és a $(7; -1)$ pontot!

◉ *Minden feladathoz rajzolj külön koordináta-rendszert!*

Keress meg minden megoldást!

A $K(-2; 2)$, $L(2; 2)$, $M(1; -7)$, $N(4; -4)$, $O(0; 0)$ és $P(5; -4)$ pontok közül válassz ki egyet-egyet úgy, hogy a megrajzolt három ponttal együtt

a) trapézt; *b)* paralelogrammát; *c)* téglalapot; *d)* rombuszt határozzanak meg!

B24 Szerkessz téglalapot 2,5 cm-es és 4 cm-es oldalakkal!

a) Mérd meg, hogy mekkora szöget zárnak be az átlói!

b) Mekkora távolságra van az átlók metszéspontja a csúcsoktól?

c) Mekkora távolságra van az átló a csúcsoktól?

d) Számítsd ki a téglalap kerületét és területét!

Hogyan lehet egy 6 cm oldalú négyzetet

a) 5 egybevágó,

b) 10 egybevágó négyzetre szabdalni?

Kísérletezz!



B25 Három adóállomás, az A, a B és a C mozgat két robotot.
Jelöld a füzetedben A, B és C pontokkal az adók helyét!

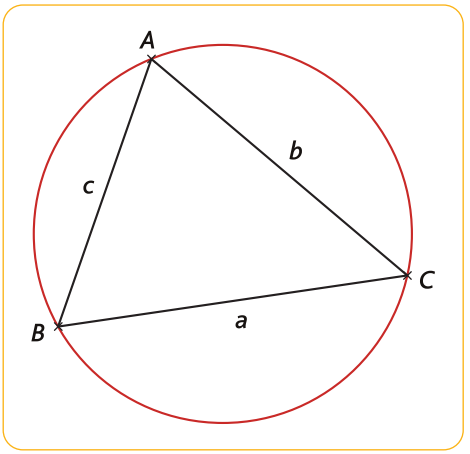
Az 1. robot úgy mozog, hogy mindig egyenlő távolságra van az A és a B adóállomástól.

A 2. robot úgy mozog, hogy mindig egyenlő távolságra van a B és a C adóállomástól.

a) Szerkeszd meg *kékkel* az 1., *pirossal* a 2. robot útját!

b) Jelöld K-val azt a pontot, ahol a két robot összeütközhet! Hasonlítsd össze a K pontnak a három adóállomástól való távolságát! Igazold sejtésedet!

c) Helyezd el a három adóállomást úgy, hogy a két robot ne ütközhessen össze!



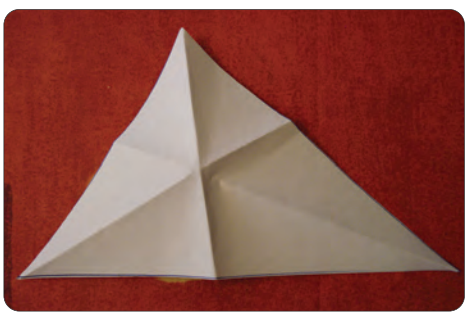
d) Munkába állítanak egy 3. robotot, amely úgy mozog, hogy mindig egyenlő távolságra legyen az A és a C állomástól. Szerkeszd meg a 3. robot útját! Vajon ez a robot is áthaladhat az „ütközési ponton”? Indokold válaszodat?

e) Például, ha a GeoGebra szerkesztőprogrammal dolgozunk, akkor a programmal megrajzoltathatjuk a **háromszög köré írható kört**. Viszont a program nem jelöli meg a kör középpontját. Hogyan **szerkeszthető meg** a körvonal középpontja?

f) Rajzolj tetszőleges hegyesszögű háromszöget! Szerkeszd meg a háromszög köré írható kört!

g) Rajzolj egy tompaszögű háromszöget! Szerkeszd meg a háromszög köré írható kört! Mit veszel észre?

h) Rajzolj egy derékszögű háromszöget! Szerkeszd meg a háromszög köré írható kört! Mi a sejtésed? Hol helyezkedik el a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja?



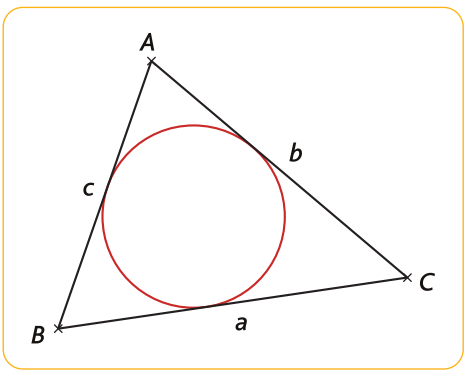
B26 *a)* Vágj ki papírból tetszőleges háromszöget! Hajtogatással hozd létre a háromszög belső szögeinek szögfelezőit! Fogalmazd meg sejtésedet!

b) Szemléltesd azt, hogy **a szögfelezők pontjai egyenlő távolságra vannak a felezett szög száraitól**!

c) Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm hosszúak! Betűzd a csúcsokat a szokásos módon! Szerkeszd meg a B és a C csúcsnál lévő belső szögek szögfelezőit! A két szögfelező metszéspontját jelöld K-val!

Mérd meg, hogy milyen távolságra van a K pont a háromszög oldalaitól!

Vajon az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője áthalad-e a K ponton? Fogalmazd meg, majd próbáld igazolni sejtésedet!

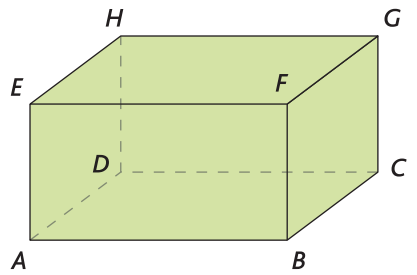


d) Felvázoltuk egy háromszög **beírható körét**. Hogyan szerkeszthető meg a beírható kör középpontja és sugara?

e) Rajzolj háromszöget! Szerkeszd meg a beírható körét!

◗ bővített szint

B27 Az ábrán látható téglatest AB éle 4 cm, AD éle 3 cm, AE éle 2 cm hosszú.



a) Mekkora távolságra van az E pont az $ABCD$ lap síkjától?

b) Milyen helyzetű az EG **lapátló** egyenese és az $ABCD$ lap síkja? Mekkora távolságra van egymástól az EG átló egyenese és az $ABCD$ lap síkja?

c) Milyen helyzetű az EC **testátló** egyenese és az $ABCD$ lap síkja?

d) Milyen helyzetű az AC **lapátló** egyenese és az $ABCD$ lap síkja?

e) Milyen helyzetű az EA él egyenese és az $ABCD$ lap síkja?

f) Milyen helyzetűek a téglatest **szemközti** lapjai? Mekkora távolságra vannak egymástól ennek a téglatestnek a szemközti lapjai?

g) Milyen helyzetűek a téglatest **szomszédos** lapjai?

h) Milyen helyzetű a BF él egyenese és az EH él egyenese. Mi a sejtésed, mekkora távolságra van egymástól ez a két egyenes?

B28 Ilyen lapokat készítsetek, mindegyikből többet, vagy használjátok a síkmértani modellező készlet lapjait!

Öntapadó árazó szalaggal dolgozhatsz.

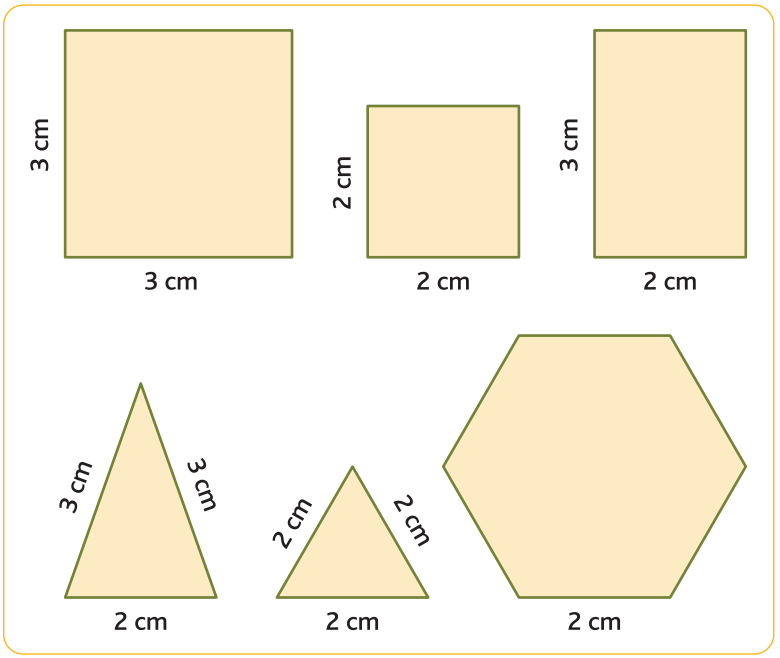
a) Hány különböző alakú testet tudsz összeállítani ezekből a lapokból?

Hány élük, lapjuk és csúcsuk van ezeknek a testeknek?

b) Vázold fel a testek hálóját!

c) Vizsgáld a testek éleinek és lapjainak kölcsönös helyzetét!

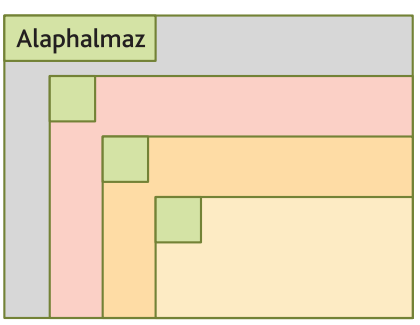
d) Átdarabolással és méréssel határozd meg ezeknek a lapoknak a területét! Számítsd ki az összeállítható testek felszínét!



B29 Legyen az alaphalmaz a négyszögek halmaza, tekintsük a következő halmazokat:

P = {Paralelogrammák}; R = {Rombuszok}; T = {Trapézok}.

Írd be a halmazábrába a megfelelő címkéket!



Melyik állítás igaz, Melyik hamis?

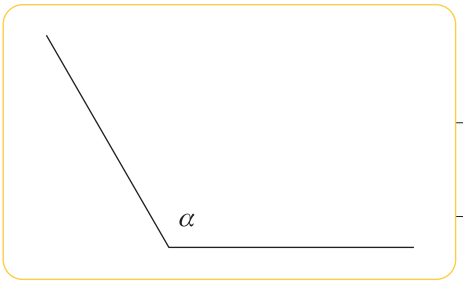
A: Ha egy négyszögnek minden oldala egyenlő, az **elégséges feltétele** annak, hogy a négyszög paralelogramma legyen.

B: Ha egy négyszögnek van párhuzamos oldalpárja, az **szükséges feltétele** annak, hogy a négyszög paralelogramma legyen.

C: Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldalpárja, az **szükséges feltétele** annak, hogy a négyszög trapéz legyen.

TUDÁSPRÓBA

63

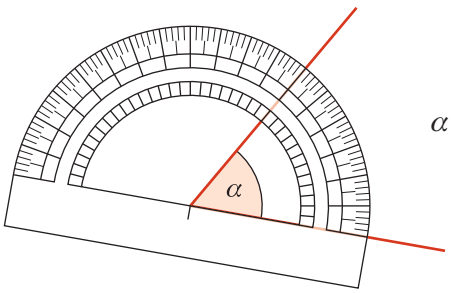


1 Másold le (szerkesztéssel) az α szöget!

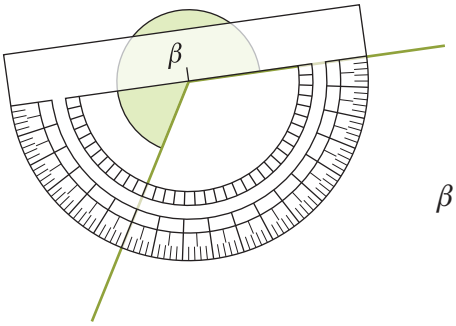
Szerkeszd meg a $\frac{3}{4}\alpha$ szöget!

2 Egy háromszög két belső szöge 75° és 15°.
Mekkora a harmadik belső szög?

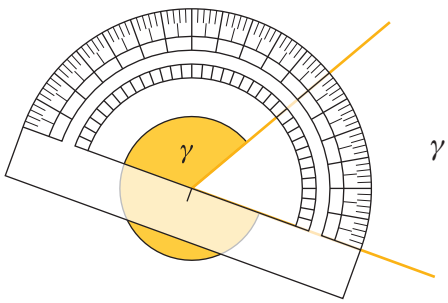
3 Hány fokosak az alábbi α, β, γ, δ, szögek?



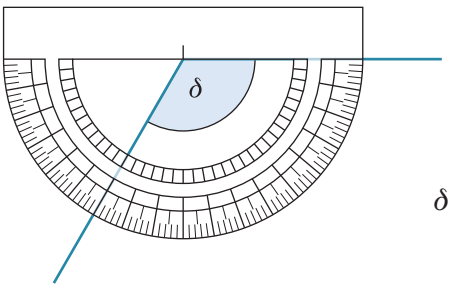
$\alpha =$ ____



$\beta =$ ____



$\gamma =$ ____



$\delta =$ ____

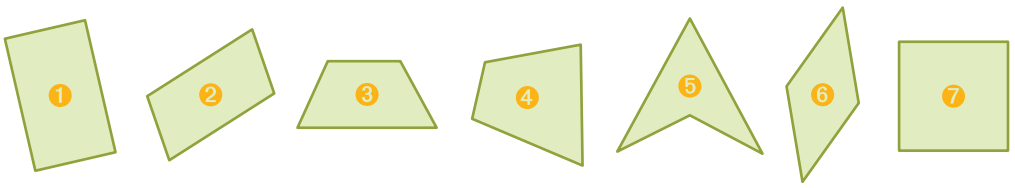
4 Vázold fel egy téglatest hálóját, ha egy csúcsban találkozó éleinek hossza 1,5 cm; 2 cm; 3 cm!

Számítsd ki a téglatest felszínét! Számítsd ki a téglatest térfogatát!

5 Szerkessz derékszögű háromszöget, amelynek befogói 2,4 cm és 3,2 cm hosszúak! Mérd meg a szögeit!

Számítsd ki a kerületét és a területét!

6 Sorold fel a megfelelő négyszögek sorszámát!



A: Paralelogrammák: ____

B: Rombuszok: ____

C: Konvex négyszögek: ____

D: Trapézok: ____

3. ÖSSZEFÜGGÉSEK, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS



A matematika egyik legfontosabb feladata, hogy a természeti folyamatokat, a mindennapi életben előforduló **összefüggéseket** leírja. Így lehetővé válik az alkotó tevékenység megtervezése.

GRAFIKONOK, TÁBLÁZATOK

Két halmaz elemei között különböző kapcsolatok, idegen szóval **relációk** állhatnak fenn. Korábban láttuk, hogy **nyíllal, szabállyal, táblázattal, grafikonnal, diagrammal** jelezhetjük, hogy az első halmaz egyes elemeinek mely elemek felelnek meg a második halmazból. (A két halmaz nem föltétlenül különböző.)

1. példa

Egy kereskedő táblázatba foglalta, hogy hány gépkocsit értékesített havonta az év első felében:

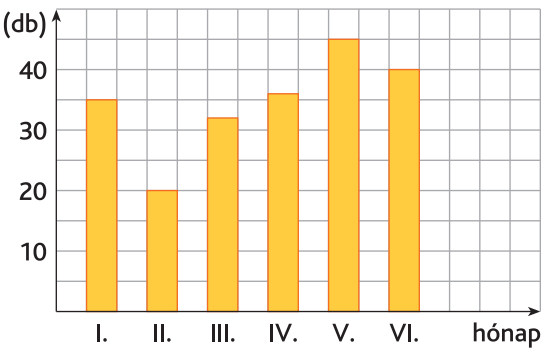
Hónap	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Gépkocsi (db)	35	20	32	36	45	40

Készítsünk oszlopdiagramot a táblázat alapján.

Az 1. („vízszintes”) **tengelyen** jelölhetjük a hónapokat.

A 2. („függőleges”) **tengelyen** az eladott gépkocsik darabszámát.

A diagramról is leolvasható például, hogy a kereskedő februárban adta el a legkevesebb autót, májusban a legtöbbet.



FELADATOK

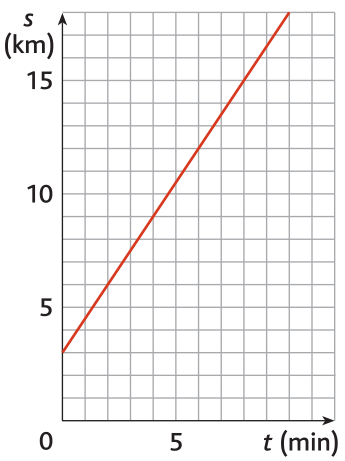
1 Egy motorkerékpáros mozgását szemlélteti a grafikon. A motorkerékpáros a 3-as kilométerkőtől indul.

a) Töltsd ki a táblázatot!

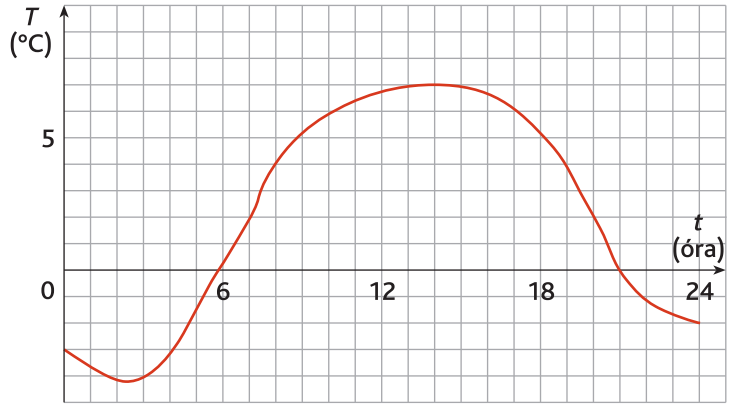
t: idő (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
s: távolág (km)								

b) Mekkora távolságra lesz a 0-s kilométerkőtől a motorkerékpáros 15 perc múlva, ha ugyanilyen sebességgel mozog?

c) Hány perc múlva lesz a 24-es kilométerkőnél?



Gyakorló 9.26–9.28., 9.31.; *Feladatgyűjtemény* 5.1.08–18.



2 Egy szerkezet folyamatosan mérte és lerajzolta egy napon a hőmérséklet változását.

a) Mikor volt a leghidegebb?

b) Mikor volt a legmelegebb?

c) Mikor volt a hőmérséklet 4,5 °C?

d) Hány fok volt a hőmérséklet 15 óra 30 perckor?

e) Mely időszakban növekedett a hőmérséklet?

f) Melyik időszakban csökkent a hőmérséklet?

Mennyi lesz az alkohol hőmérséklete
1 perc múlva;
2 perc múlva;
3 perc múlva;
⋮
t perc múlva?

3 –15 °C-os alkoholt melegíteni kezdünk.
Percenként 4 °C-kal nő a hőmérséklete.

a) Készíts táblázatot és grafikont az alkohol hőmérsékletének változásáról!
Írd föl a mennyiségek közti összefüggés szabályát!

b) Mikor lesz az alkohol hőmérséklete 10 °C?

c) Mikor lesz az alkohol hőmérséklete 0 °C-nál nagyobb?

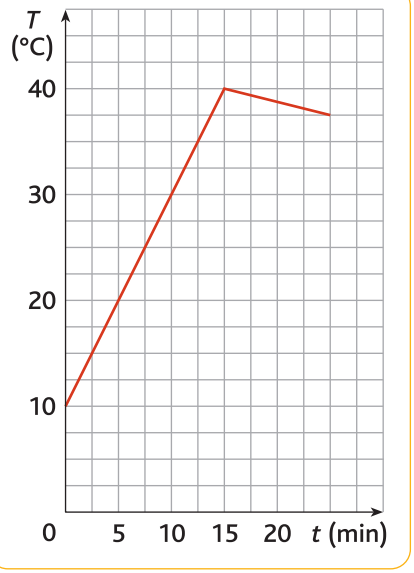
Célszerűen válassz egységet! Például a hőmérséklet (függőleges) tengelyen egy rácsbeosztás 2 °C-ot vagy 4 °C-ot jelentsen.

4 40 °C-os vizet hűtünk. Percenként 6 °C-kal csökken a hőmérséklete.

a) Készíts táblázatot és grafikont a víz hőmérsékletének változásáról!

b) Fogalmazd meg a matematika nyelvén, hogyan függ a víz hőmérséklete (T) az eltelt időtől (t)!

c) Hányadik perc után lesz a víz hőmérséklete 10 °C-nál kisebb?



5 Vizet gázlángra helyeztünk, majd bizonyos idő után elzártuk a gázlángot. A víz hőmérsékletének változását a grafikon szemlélteti.

a) Mikor kapcsoltuk ki a fűtést a vízmelegítő edény alatt?

b) Írd be a táblázatba a víz hőmérsékletét az egyes időpontokban!

t: idő (min)	0	5	10	15	20	25
T: hőmérséklet (°C)						

c) Melyik volt gyorsabb, a melegedés vagy a lehűlés folyamata?

Gyűjtőmunka

Mérd meg otthon, hány fokos fürdővízben fürdesz!
Mérd meg 5 perces időközökben, hogyan csökken a fürdővíz hőmérséklete!
Mennyi idő után nem hűl tovább? Ábrázold az értékeket grafikonon!

KÉT SZÁM ARÁNYA

1. példa

Egy futballcsapat 15 mérkőzésből 12-t megnyert.

A mérkőzéseinek mekkora részét nyerte meg?



Azt kell meghatároznunk, hogy 12 mekkora része (vagy másképpen hányszorosa) 15-nek.

$12 : 15 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Nem változik az arány értéke, ha a benne szereplő mennyiségeket megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a pozitív számmal.

12 a 15-nek $\frac{4}{5}$ része, vagy másképpen $\frac{4}{5}$-szöröse, 0,8-szerese.

Mérkőzéseinek $\frac{12}{15}$ részét $\left(\frac{12}{15}\text{-szörösét}\right)$ nyerte meg a csapat.

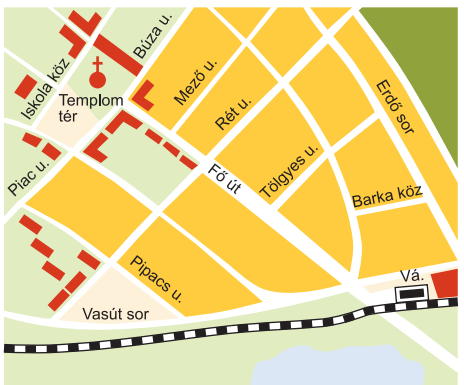
2. példa

Az ábrán egy térkép kis részlete látható.

Ami a térképen 1 cm, az a valóságban 20 000-szer akkora.

a) Mekkora távolságra van a vasútállomás a templomtól?

b) A templomtól 340 m-re az állomás felé van egy közlekedési lámpa. Mutasd meg a lámpa helyét a térképen!



a) A templom az állomástól 5 cm távolságra van a térképen.

A térkép **méretaránya** 1 : 20 000.

Ez azt jelenti, hogy a valódi távolság 20 000-szerese a térképen mért távolságnak:

$x = 20\,000 \cdot 5\text{ cm} = 100\,000\text{ cm} = 1000\text{ m} = 1\text{ km}$

A vasútállomás 1000 m-re van a templomtól.

b) A térképen megrajzolt távolság a valódi távolság $\frac{1}{20\,000}$ része.

$y = (340\text{ m}) : 20\,000 = (340\,000\text{ mm}) : 20\,000 = 17\text{ mm}$

A Fő út és a Rét utca sarkán van a közlekedési lámpa.

Emlékszel?

Két szám hányadosát másképpen két szám arányának is nevezzük.

Két szám aránya megmutatja, hogy az első szám hányszorosa a másodiknak.

◉ *Például 8 és 3 aránya*

$8 : 3 = \frac{8}{3}$

Az egyik hatodik osztályban a fiúk és lányok számának aránya 5 : 3.

Mennyi a lányok és a fiúk számának aránya?

A: 12 : 20; **B:** 15 : 9; **C:** 18 : 10; **D:** 12 : 15

◉ *Hogyan változik az arány értéke, ha a benne szereplő mennyiségeket felcseréljük?*

FELADATOK

Gyakorló
4.93–4.95.,
9.21–9.23., 9.36–9.43.;
Feladatgyűjtemény
4.4.05., 5.2.03.

6 Fejezd ki a számok arányát törtalakban és tizedestört alakban is!

a) Hányszorosa a 20 az 5-nek, illetve az 5 a 20-nak?

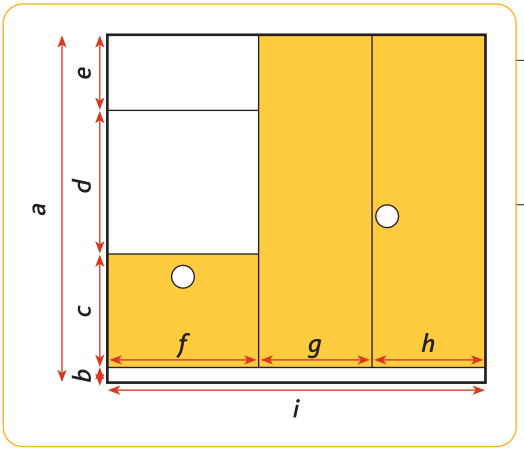
b) Pótold a hiányzó számokat! $4 : 6 = 2 : \square = \square : 18 = 100 : \square$

c) Mekkora része a 6-nak a 4? Mekkora része a 6 a 4-nek?

7 Fejezd ki az adott mennyiségek arányát többféle alakban!

a) Egy gazda 8000 kg-ról 12 000 kg-ra növelte a termés mennyiségét.

b) Egy áru ára 7500 Ft-ról 5000 Ft-ra csökkent a kiárusításkor.



8 Az ábrán 1 : 40 arányban egy szekrénysor kicsinyített képe látható. Határozd meg, hogy az ábrán betűvel jelölt méretek mekkorák a valóságban!

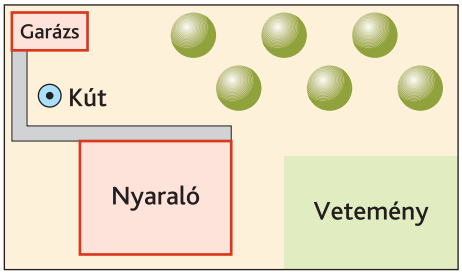
9 Néhány áru idei és tavalyi árának aránya 11 : 10.

Mennyibe kerül idén az áru, ha tavaly 2200 Ft volt az ára?

Mennyibe került tavaly az áru, ha most 2200 Ft az ára?

10 Készítsd el szobátok alaprajzát!

Alkalmasan válaszd meg a méretarányt!



11 Az ábrán Bükkös egy kertjének 1 : 800 arányban kicsinyített alaprajza látható.

a) Milyen széles, milyen hosszú a kert, a veteményes kert, a nyaraló, a garázs a valóságban?

b) A kúttól 29,6 m távolságra kelet felé van egy körtefa, dél felé 12 m távolságra van egy pad. Mutasd meg a helyüket a térképen!



12 Az ábrán Bükkös 1 : 30 000 arányban kicsinyített térképének részlete látható.

a) Milyen távol van az iskolától a tó, az erdő, a híd, a szőlő és a templom a valóságban?

b) A templomtól 450 m távolságra észak felé van egy vadászház, nyugat felé 150 m-re van egy bolt. Mutasd meg a helyüket a térképen!

Mit értünk két alakzat távolságán?

Az 1 : 2 : 3 arány nem műveletsor. Így írjuk fel tömören az első és második szám közti 1 : 2, a második és a harmadik szám közti 2 : 3, valamint az első és a harmadik közti 1 : 3 arányt.

Melyik az a három természetes szám, amelyek aránya 1 : 2 : 3, és négyzeteik összege 350?

13 Méretarány: 1 : 200 000. Határozd meg az egyes falvak valódi távolságát egymástól!

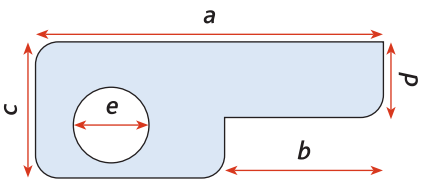
◉ *Mikor kisebb az arány értéke 1-nél?*



14 Az ábrán egy alkatrész 25 : 1 arányban nagyított képe látható. Határozd meg, hogy az ábrán betűvel jelölt méretek mekkorák a valóságban!

◉ *Mikor nagyobb az arány értéke 1-nél?*

◉ *Mikor lenne az arány értéke éppen 1?*



15 Az ábrán egy baktérium 500 : 1 arányban nagyított képe látható. Határozd meg a baktérium valóságos méreteit!



EGYENES ARÁNYOSSÁG

FELADAT

16 Milyen értékeket vehet föl az x, illetve az y az egyes feladatokban?

Fogalmazd meg a mennyiségek közti összefüggések szabályát többféleképpen!

a) Ha egy átlagos tojás tömege 6 dkg,. hány dekagramm 0, 1, 2, ... ugyanilyen tojás? Az x a tojások száma (db); y a tojások tömege (dkg).

x	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	5,6	0,08	–4
y										

b) 1 m vezeték tömege 5 dkg. Mennyi a tömege 0 m, 1 m, 2 m, ... ugyanilyen vezetéknek? Az x a vezeték hossza (m); y a vezeték tömege (dkg).

x	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	5,6	0,08	–4
y										

c) Ha 1 másodperc alatt 3,5 dl víz folyik ki a csapból, mennyi víz folyik ki 0 s, 1 s, 2 s, ... alatt? Az x az eltelt idő (s); y a kifolyt víz térfogata (dl).

x	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	5,6	0,08	–4
y										

Manófalván Szorgos Muki 11 dm² kert gondozásáért 55 szem mogyorót kapott. Lusti Móka csak 3 dm² kert gondozását vállalta. Ő hány szem mogyorót érdemelt a munkájáért (ha elvégezte azt)?

A: 3 szemet; **B:** 12 szemet; **C:** 15 szemet; **D:** 20 szemet

Többet ésszel ...

◉ *Jelöld meg a helyes választ!*

Az egyik süteményreceptben a sajtos rúdhoz való sajt, margarin, liszt és főtt burgonya (dkg-mal mért) tömegének aránya: 15 : 12 : 18 : 15.

Más tepsiben sütve melyik arány **nem felel** meg az eredeti összetételnek?

A: 8 : 6 : 10 : 8; **B:** 5 : 4 : 6 : 5; **C:** 20 : 16 : 24 : 20; **D:** 10 : 8 : 12 : 10

Többet ésszel ...

◉ *Jelöld meg a hibás arányt!*



1. példa

Egy facsavar ára 4 Ft. Hány forintba kerül 0, 1, 2, ... facsavar?

Határozzuk meg a költség és a csavarok számának arányát.

Ábrázoljuk grafikonon az összetartozó értékpárokat.

Jelölje n a csavarok számát, k a költséget.

A csavarok számának változásával arányosan változik a költség is.

n (db)	0	1	2	3	4	5	6
k (Ft)	0	4	8	12	16	20	24
$k : n$	–	4	4	4	4	4	4

0 csavar ára $4 \cdot 0$ (Ft)

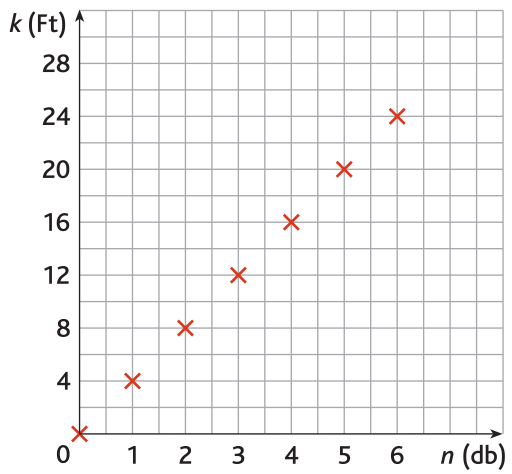
1 csavar ára $4 \cdot 1$ (Ft)

2 csavar ára $4 \cdot 2$ (Ft)

⋮

n csavar ára $4 \cdot n$ (Ft)

Az összefüggés szabálya: $n \mapsto 4 \cdot n$ másképp írva: $k = 4 \cdot n$



A költségek és a csavarok számának az **aránya** azt mutatja meg, hogy egy darab csavarért mennyit kellett fizetnünk. Ez az arány mindig ugyanaz, akárhány csavart vettünk:

$4 : 1 = 4$; $8 : 2 = 4$; $12 : 3 = 4$; $16 : 4 = 4$; ...

A $0 : 0$ arányt nem értelmezzük, mert 0-val nem osztunk.

Az összefüggés szabályát így is felírhatjuk:

$k : n = 4$, ha $n \neq 0$

A feladatot a *természetes számok halmazán értelmezzük* (nem beszélhetünk például –3, két és fél stb. csavarról), ezért a grafikon pontjait nem kötjük össze folytonos vonallal.

Figyeld meg!

Ahányszorosára változik a csavarok száma, ugyanannyiszorosára változik a csavarok ára is.

Fejtörő!



Tüski, a sün és Mukk, az egér együtt elindultak egy tisztásra, az erdei bálba. Mukk izgalmában nem tudott Tüskivel együtt menni, folyton előreszaladt a tisztásig, onnan vissza Tüskiig. Ezt könnyen megtehette, mert kétszer olyan sebesen ment, mint Tüski. Amikor Mukk harmadszorra is visszaérkezett Tüskihez, többet nem futott előre, együtt mentek a bálba. Elindulásuk után az egyes találkozásokig a teljes út mekkora részét tette meg Tüski?

A következő távokat mind **4 cm**-nek mértük, igaz, különböző méretarányú térképeken. Melyik távolság melyik méretarányhoz tartozhat?

Kösd össze a megfelelőket, majd számítsd ki a valódi távolságokat!

1 : 170 000 000	a Csepeli HÉV vonalának hossza
1 : 35 000 000	a New York – Lisszabon légi út hosszúsága
1 : 5 000 000	a Drapál János utca hossza
1 : 170 000	a Budapest – Nyíregyháza távolság légvonalban
1 : 5000	a Püthagorasz és az Euler kráter távolsága a Holdon

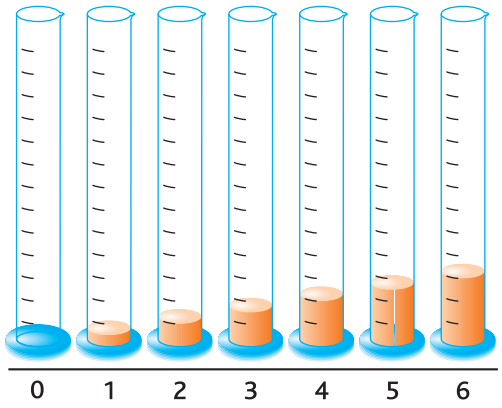
2. példa

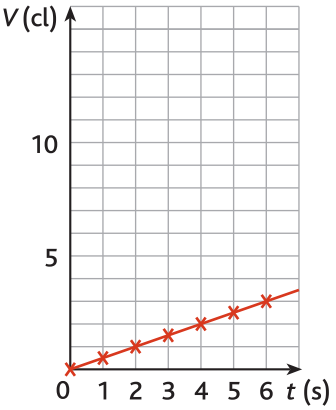
Az A csapon 1 másodperc alatt $\frac{1}{2}$ cl, a B csapon 1 másodperc alatt 2 cl narancslé folyik a mérőhengerbe.

Ábrázoljuk grafikonon, hogy a két különböző csapon mennyi narancslé folyik ki 0, 1, 2, ..., 6 másodperc alatt.

Jelölés: V térfogat (cl); t idő (s)

Az A csapon:

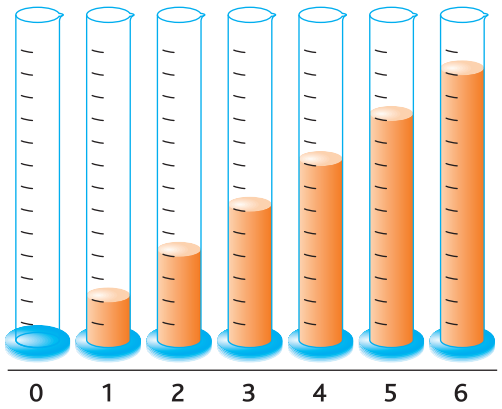


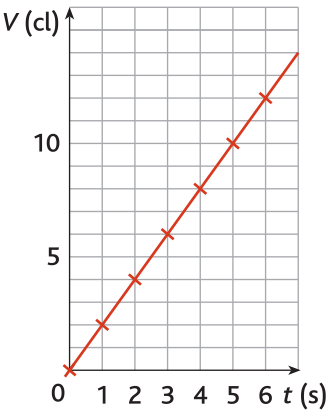


t (s)	0	1	2	3	4	5	6
V (cl)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$V:t$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Az összefüggés szabálya: $t \mapsto \frac{1}{2} \cdot t$

A B csapon:





t (s)	0	1	2	3	4	5	6
V (cl)	0	2	4	6	8	10	12
$V:t$	–	2	2	2	2	2	2

Az összefüggés szabálya: $t \mapsto 2 \cdot t$

A kifolyó narancslé mennyisége *folyamatosan növekszik*, és a növekedés *arányos* az idő múlásával. A derékszögű koordináta-rendszerben *egyenes vonallal* összeköthetjük az összetartozó értékpárokat ábrázoló pontokat.

A $V:t$ arány éppen az 1 másodperc alatt kifolyó narancslé mennyisége.

Ha kevés narancslé folyik ki másodpercenként, akkor ez az arány kicsi, és az összefüggést jelképező grafikon egyenesének **meredeksége** is kicsi.

Ha több narancslé folyik ki másodpercenként, akkor ez az arány nagyobb, és a grafikon egyenesének **meredeksége** is nagyobb.



3. példa

12 m^3 építkezési hulladék tömege 18 t.

Hány tonna 7 m^3 ugyanilyen építkezési hulladék?

1. megoldás Következtetés

Meghatározzuk, hogy hányszorosára változik a térfogat.

Ahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiszorosára változik a másik mennyiség is.

: 12 ↓	12 m^3	hulladék tömege	18 t ↓ : 12
	1 m^3	hulladék tömege	18 t : 12 = 1,5 t
· 7 ↓	7 m^3	hulladék tömege	1,5 t · 7 = 10,5 t ↓ · 7

V (m^3)	12	7
m (t)	18	x
$m : V$	1,5	1,5

2. megoldás Aránypár

Kiszámítjuk a tömeg (m) és a térfogat (V) arányát.

Mivel az *összetartozó értékpárok aránya állandó*,

ezért $x : 7 = 18 : 12 = 1{,}5$,

vagyis $x = 1{,}5 \cdot 7 = 10{,}5$ (t).

Emlékszel?

Ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, és a másik mennyiség értéke is ugyanannyiszorosára változik, akkor a két mennyiség egymással egyenesen arányos.

Két változó mennyiség egyenesen arányos, ha összetartozó értékpárjaik aránya állandó.

A 0-hoz mindig 0 tartozik, de a 0 : 0 arányt nem értelmezzük.

Tehát a (0; 0) értékpár kivétel.

Az 1. példában a csavarok száma és a költség egyenesen arányos mennyiségek. Az összetartozó mennyiségek mérőszámának aránya mindig ugyanaz a szám a (0; 0) értékpártól eltekintve.

A 2. példában szintén egyenes arányosság áll fenn a csap nyitva tartásának időtartama és a kifolyt folyadék mennyisége között. Az összetartozó értékpárok aránya itt is állandó.

Ugyanezt az összefüggést figyelhettük meg a 3. példában is.

Többet ésszel …

Egy gerendát méteres darabokra fűrészelnek. Egy ilyen darab lefűrészelése másfél percet vesz igénybe. Hány perc alatt fűrészelnek fel egy 6 méteres gerendát?

Fejtörő!

a) Mennyi idő alatt ér a Nap fénye a Földre, ha a Nap és a Föld távolsága 150 000 000 km, és a fény 1 másodperc alatt 300 000 km-t tesz meg?

b) Mekkora távolságra van a Neptunusz a Naptól, ha 4 óra 12 perc alatt teszi meg a fény ezt a távolságot?

FELADATOK

17 Egyenletes sebességgel kocogó kislány másodpercenként 2,5 m utat tesz meg.
Jelölés: t idő (s); s út (m)

a) Mekkora távolságra jut a kislány 0 s, 1 s, 2 s, 3 s, ..., 10 s, 60 s alatt? Készíts táblázatot! Számítsd ki a megtett út és az eltelt idő arányát $(s : t)$ is! Mely értékpár esetében nem számíthatjuk ki az arányt?

b) Milyen összefüggés van az eltelt idő és a megtett út között?

c) Ábrázold grafikonon az idő és a megtett út közti összefüggést!

◉ *Fogalmazd meg a szabályt többféle alakban!*

◉ *Összeköthetők-e folytonos vonallal a grafikon pontjai?*

---

18 0 °C-os vizet egyenletesen melegítünk. 8 perc alatt 24 °C-ra melegszik fel.
Jelölés: t idő (min); T hőmérséklet (°C)

a) Foglald táblázatba, hogy 0 min, 1 min, 2 min, ..., 18 min alatt mennyire melegszik fel a víz! Számítsd ki az összetartozó értékpárok arányát is!

b) Milyen összefüggés van az eltelt idő és a hőmérséklet-változás között?

c) Ábrázold a két mennyiség összefüggését grafikonon!

◉ *Fogalmazd meg a szabályt többféle alakban!*

19 Válaszd ki a felsorolt mennyiségpárok közül az *egyenesen arányosakat*! Egyenes arányosság esetén számítsd ki a hiányzó mennyiséget!

Figyelempróba

a) 23 dkg felvágott ára 276 Ft. Mennyibe kerül 1 kg 25 dkg (dag) felvágott?

b) Móric 7 éves korában 21 kg. 70 éves korában mennyi lesz Móric tömege?

c) 8 m 50 cm szalag 391 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül 3 m 50 cm hosszú, ugyanilyen szalag?

d) Egy hűvös tavaszi napon, reggel 6 óra 35 perckor +3 °C a hőmérséklet. Mekkora lesz a hőmérséklet ugyanaznap, délután 2 óra 45 perckor?

e) 4 ember 12 nap alatt tud elvégezni egy munkát. 6 ember ugyanakkora munkatempóval hány nap alatt végezné el ezt a munkát?

f) 5,8 m vascső tömege 41,76 kg. Mennyi a tömege 9,5 m hosszú, ugyanilyen vascsőnek?

g) 6 egyforma teljesítményű szivattyú 4 óra alatt 18 000 m^3 vizet juttat el az öntözőcsatornákba. 4 ugyanilyen szivattyú 7 óra alatt hány köbméter vizet szivattyúz ki?

◉ *Készíts többféle megoldási tervet!*

A Naprendszer arányainak szemléltetésére a világ számos helyén építettek különböző nagyságú valósághű modellt. Hazánkban Kecskeméten, a városházától a Planetáriumig vezető út mentén látható egy 1 : 3 300 000 000 méretarányú kicsinyített Naprendszer. A méret- és távolságarányos modellben a Nap 41,8 cm-es bronzgömbként, az égitestek egy-egy ilyen Napot ábrázoló gömbbe süllyesztve jelennek meg.

Gondolatban mi is építsünk fel egy Naprendszer-modellt.
A méretarány legyen 1 : 100 000 000.

a) Az iskola elé képzeljük el a Nap modelljét. Hány méter lenne a modell átmérője, ha a Nap átmérője a valóságban: ≈1 400 000 km = 1 400 000 000 m?

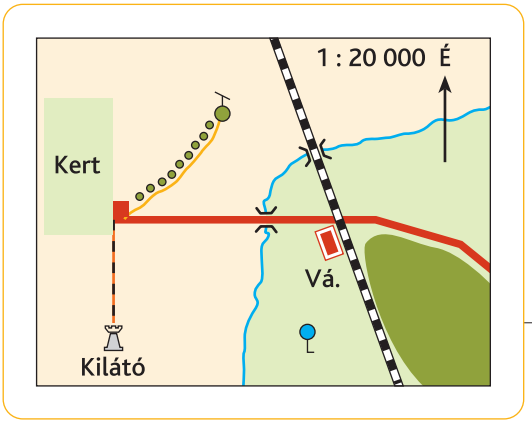
b) A Föld a Naptól 150 000 000 km távolságra kering. A modellünkben mekkora távolságra lenne a Föld modellje az iskolától (a Nap modelljétől)?

c) Mekkora lenne a Föld modelljének az átmérője, ha a Föld átmérője a valóságban: ≈12 750 km = 12 750 000 m? Mihez tudnád hasonlítani?

d) A Szaturnusz a Naptól ≈1 500 000 000 km távolságra kering. A modellünkben mekkora távolságra lenne a Szaturnusz (lásd a képen) az iskolától?



A Szaturnusz egy ausztrál modellben



20 A térképvázlaton mért távolságok és a valódi távolságok aránya 1 : 20 000.

a) Milyen távolságra vannak egymástól a különböző tereptárgyak a valóságban?

b) Mérd meg a térképvázlaton, hogy a kilátóból nézve milyen irányban vannak a különböző tereptárgyak! Mekkorák a mért szögek a valóságban?

c) Mekkora a kert területe a valóságban?

21 Egy kerékpáros az 5-ös kilométerkőtől indul el a 0-s kilométerkőnél lévő útkereszteződés felé. 4 percenként tesz meg 1 km-t.

a) Ábrázold grafikonon a kerékpáros mozgását!

b) Hol lesz a kerékpáros 15 perc múlva?

c) Mikor lesz a kerékpáros 2,25 km távolságra a 0-s kilométerkőtől?

Gyakorló
5.07–5.40.;
Feladatgyűjtemény
4.4.10., 4.4.12.

FORDÍTOTT ARÁNYOSSÁG

FELADATOK

22 36 m^2 területű, téglalap alakú parcellába fűmagot vetünk. Mekkorák lehetnek a parcella oldalai?

Az egyik oldal hossza p (m), a másik oldal hossza q (m).

a) A négyzetrácsos füzetbe rajzolj ilyen téglalapokat! (Egy beosztás feleljen meg 1 m-nek.)

b) Milyen p, illetve q értékek mellett értelmezhető a feladat?

c) Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat! Összeköthetők-e folytonos vonallal a pontok?

Fogalmazd meg az oldalak közti összefüggés szabályát többféleképpen!

Gyakorló
5.81–5.84.;
Feladatgyűjtemény
5.2.04.

Többet ésszel ...

Kata gyűjtötte az egyforintos és a kétforintos pénzérméket, amíg ki nem vonták azokat a forgalomból. Akkor megszámolta: 508 db egyforintosa és 296 db kétforintosa volt. Hány darab

a) 10 forintost; ***b)*** 5 forintost; ***c)*** 20 forintost; ***d)*** 100 forintost kaphatott volna Kata, ha ezekre az érmékre váltotta volna be a pénzét?

e) Kata 22 db egyforma pénzérmét kapott az összegyűjtött pénzéért. Hány forintosok voltak ezek az érmék?

Például, ha 10 forintosok helyett 5 forintosokat kér, akkor több vagy kevesebb érmét kap? És ha 20 forintosokat kér?

Irén 10 napot töltött Tokelau szigetén napi 72 €-ért. Hány napot tölthetett volna el ugyanezért az összegért, ha csak 48 € lett volna a napi költség?

Mennyit költött összesen? Hány napra lett volna ez elegendő?

Ha Bécs Budapesttől 1 cm-re fekszik légvonalban az Atlasz 1 : 25 000 000 méretarányú *Európa domborzata* térképén, akkor mekkora a két város távolsága az 1 : 100 000 000 méretarányú Föld országai térképén?

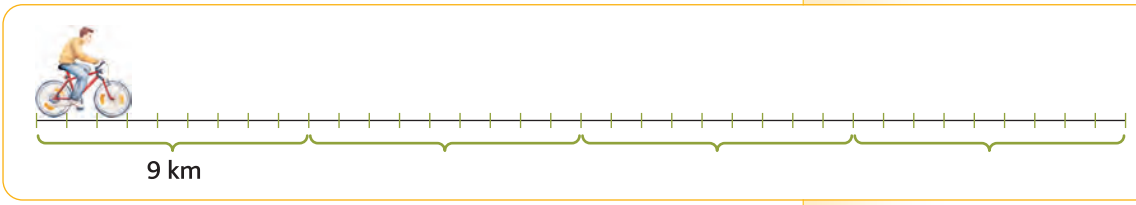
1. példa

A vasútállomás és a turistaház távolsága 36 km. Különböző sebességgel, egyenletes tempóban haladva mennyi idő alatt tenné meg ezt az utat Benő?

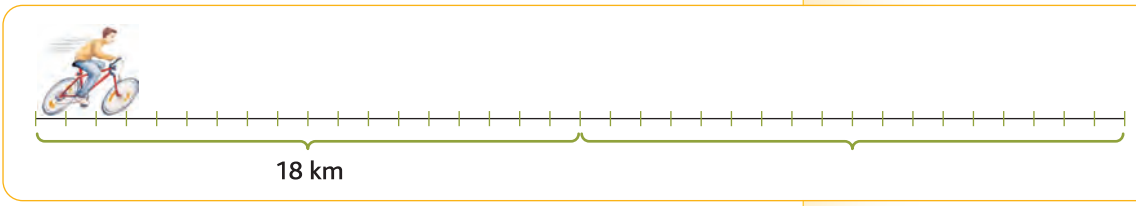
Ha Benő áll, vagyis 0 km-t tesz meg óránként, akkor sohasem jut el a célba.

A feladat erre az esetre nem értelmezhető.

Ha Benő például kerékpárral óránként 9 km-t haladna, akkor 4 óra alatt tenné meg az utat.

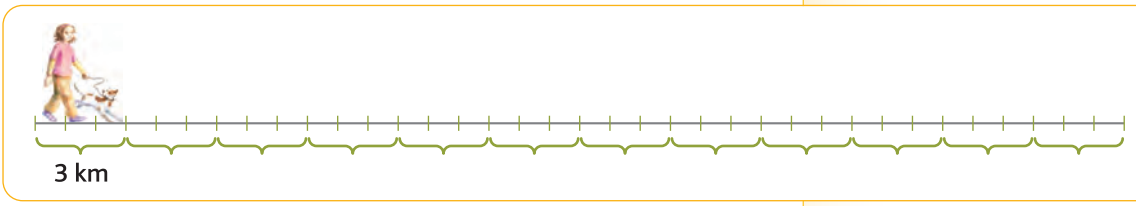


Ha Benő megkétszerezné a sebességét, akkor felényi, azaz $\frac{1}{2}$-szer annyi idő alatt érne célba.



Ha Benő (kismotorral) 4-szer akkora sebességgel haladna, akkor az út megtételéhez szükséges idő negyedére, vagyis $\frac{1}{4}$-szeresére változna.

Gyalogosan óránként csak harmadát bandukolná végig a kerékpárral megtett útnak, ezért az út 3-szor annyi ideig, 12 óráig tartana.

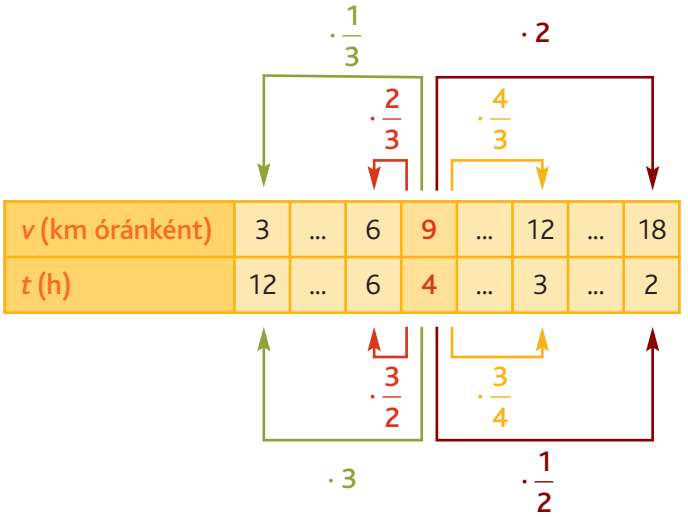


Ha Benő sebessége ellenszél miatt $\frac{2}{3}$-szorosára csökkenne, akkor az út megtételéhez szükséges idő $\frac{3}{2}$-szeresére nőne.

Ahányszorosára nő a sebesség, **ugyanannyiad részére csökken** az út megtételéhez szükséges idő.

Másrészt, **ahányad részére csökken** a sebesség, **ugyanannyiszorosára nő** az út megtételéhez szükséges idő.

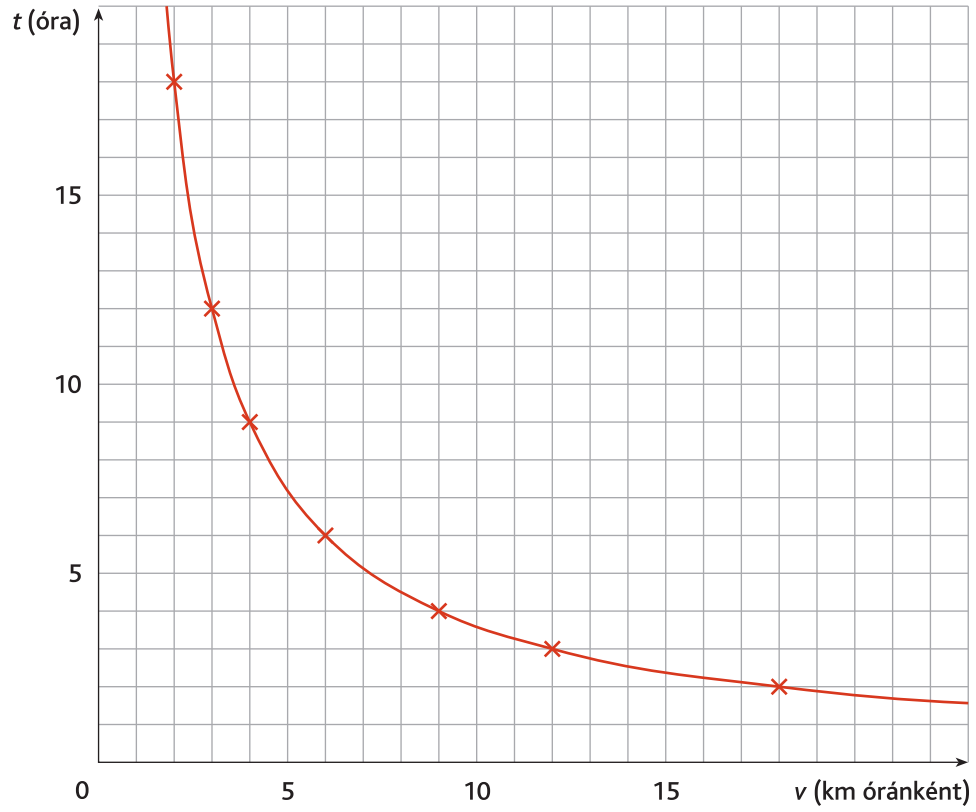
»»



A táblázatban jelölje v az 1 óra alatt megtett utat, t az út megtételéhez szükséges időt.

v (km óránként)	0	1	2	3	4	6	9	10	12	18	36	45	72
t (h)	–	36	18	12	9	6	4	3,6	3	2	1	0,8	0,5
$v \cdot t$ (km)		36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36

Megfigyelhetjük, hogy az összetartozó értékpárok szorzata $(v \cdot t)$ állandó, mindig 36.



Ha feltételezzük, hogy Benő tetszőlegesen választja meg a sebességét, akkor az összetartozó értékpárokat jelölő pontokat folytonos vonallal összeköthetjük.

Például az 1 óra alatt megtett út és az adott út megtételéhez szükséges idő fordítottan arányos mennyiségek.

Emlékszel?

Ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, és a másik mennyiség annak reciprokszorosára változik, akkor a két mennyiség fordítottan arányos.

Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha összetartozó értékpárjaik szorzata nullától különböző állandó.

A 0-ra nem értelmezhető az összefüggés.

Figyelempróba

Az egyes termekért a bérleti díjat az alapterülettel arányosan kell fizetni.

Egy 960 m^2-es, különböző labdajátékokra berendezhető terem bérleti díja óránként 4800 Ft.

a) Mennyit fizessen egy-egy sportoló óránként, ha a termet
A: 10-en; B: 12-en; C: 15-en; D: 20-an használják?

b) Dani óránként 600 Ft-ot fizet. Hányan fociznak a teremben?

c) Mennyit fizetne Dani óránként, ha a kisebb, 640 m^2-es termet használnák, ugyanazzal a társasággal teremfocizva, ugyanolyan négyzetméterenkénti bérleti díj mellett?

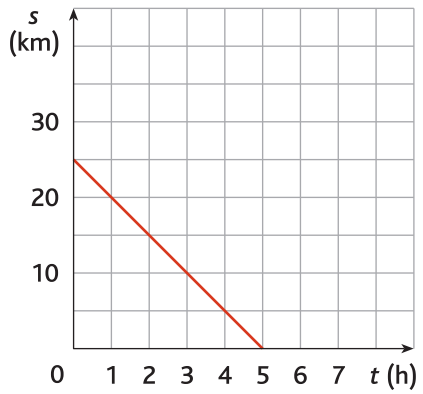
2. példa

Egy gyalogos 25 km-re van tőlünk, és óránként 5 km-t haladva egyenletesen közeledik felénk. Milyen távol lesz tőlünk 1 óra, 2 óra, ... múlva?

Jelölés: t idő; s távolság

Foglaljuk táblázatba az összetartozó adatokat.

t (óra)	0	1	2	3	4	5
s (km)	25	20	15	10	5	0



Az idő növekedésével nem arányosan csökken a tőlünk való távolság.

Az összetartozó értékpároknak sem a hányadosa, sem a szorzata nem állandó.

Nincs sem egyenes arányosság, sem fordított arányosság az eltelt idő és a távolság között.

FELADATOK

23 A megtermelt alma elszállításához 160 ládára van szükség, ha egy-egy ládába 12 kg alma fér. Hány olyan ládára van szükség, amelybe

a) 6 kg; *b)* 24 kg; *c)* 4 kg; *d)* 18 kg; *e)* 15 kg alma fér?

24 Készíts táblázatot! Fogalmazd meg a változó mennyiségek közti összefüggés szabályát többféleképp!

Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat! Összeköthetjük-e folytonos vonallal a pontokat?

a) Ha 6 tehén legel a legelőn, akkor 10 napra elég a fű. Hány napra elég a fű, ha 1, 2, ..., tehén legel, és a fű növését nem vesszük figyelembe? n a tehenek száma; t az idő (nap).

b) 4 ember 12 óra alatt nyírná le a füvet egy nagy parkban. Ugyanilyen tempóban dolgozva hány óra alatt készült volna el ezzel a munkával

1 ember; | 2 ember; | 3 ember; | 6 ember; | 8 ember; | 12 ember; | 16 ember?



25 Egy munkacsoport 18 nap alatt végzi el egy erdő telepítését.

a) Hány nap alatt végzik el, ha 2-szer, 3-szor, 4-szer, 6-szor annyian dolgoznak? (Tételezzük fel, hogy a dolgozók munkateljesítménye egyenlő.)

b) Hány nap alatt végzik el a munkát, ha a csoportnak csak az

$\frac{1}{2}$ része, | $\frac{1}{3}$ része, | $\frac{2}{3}$ része, | $\frac{3}{5}$ része dolgozik?

Gyakorló
5.85–5.87.
Feladatgyűjtemény
5.2.09.

Fejtörő!

8 robot gyártósor 18 óra alatt készítené el a megrendelt chipeket. Hány óra alatt végezné el a munkát

a) 1, *b)* 2, *c)* 6, *d)* 12; *e)* 16

azonos teljesítményű robotsor?

bővített szint

26 *a)* Az egyik kertben 18 sorba soronként 15 fát ültettek. A másik kertbe is ugyanannyi fát ültettek, de itt egy sorba 10 fa került. Hány sorba ültették a fákat a másik kertben?

b) Két ládába ugyanannyi dobozt helyeztek. Az egyikben 16 sorban, soronként 25 doboz van. Hány sorba helyezték el a másik ládában a dobozokat, ha abban mindegyik sorba 20 doboz került?

3. példa

Irén néni 5 kg-ot vásárolt a kilogrammonként 60 Ft egységárú céklából.

Hány kilogrammot vásárolhatott volna ugyanezért a pénzért, ha 1 kg cékla csak 24 Ft-ba került volna?

1. megoldás **Következtetés**

Az egységár *csökkenésével* arányosan *több* árut,

az egységár *növekedésével* arányosan *kevesebb* árut

vásárolhat ugyanannyi pénzért. Ezért a két mennyiség *fordítottan arányos*.

	$60\,\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$	egységárúból	5 kg	
: 60				· 60
	$1\,\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$	egységárúból	300 kg	
· 24				: 24
	$24\,\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$	egységárúból	12,5 kg	

Ugyanannyi pénzért Irén néni 12,5 kg céklát vásárolhatott volna.

2. megoldás **A fordított arányosság értelmezése alapján**

$á\left(\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}\right)$	60	24
m (kg)	5	x
$m \cdot á$ (Ft)	300	300

Jelölje $á$ az 1 kg cékla árát, m a 300 Ft-ért vásárolható cékla tömegét. Az összetartozó értékpárok szorzata állandó:

$24 \cdot x = 60 \cdot 5 = 300$

$x = 300 : 24 = 12{,}5$ (kg)

3. megoldás **Alkalmazzuk a fordított arányosság szabályát!**

Ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annak reciprokszorosára változik a másik mennyiség.

$\cdot \frac{24}{60}$

$á\left(\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}\right)$	60	...	24
m (kg)	5		x

$\cdot \frac{60}{24}$

Milyen arányosság van a mérőszám és a mértékegység között?

Az ókori római **tömeg-mértékegységek** koronként változtak.

144 **denarius** ezüst hány **uncia**; hány **acripulum**, hány **libra** volt, ha

1 libra = 12 uncia; 1 uncia = 8 denarius; 1 denarius = 3 acripulum volt?

bővített szint

FELADATOK

27 Válaszd ki a fordítottan arányos mennyiségeket! Határozd meg a hiányzó adatokat!

Mely összefüggések grafikonját lehet folytonos vonallal ábrázolni?

a) 9 tehén számára 8 napig elegendő a takarmány. Ugyanez a takarmány hány napig lenne elég 4 tehénnek?

b) János arasza 21 cm-es. Ő 12 arasz hosszúnak mérte a könyvespolcot. Juli viszont ugyanezt a polcot 15 arasznak találta. Milyen hosszú Juli arasza?

c) Tasziló 2500 Ft-ért inget vásárolt, és így 7500 Ft-ja maradt. Hány forintja maradt volna, ha a 3500 Ft-os inget vásárolta volna meg?

d) Tegyük fel, egy USA dollár 225 Ft-ot, egy angol font 432 Ft-ot ér. Hány fontba kerül az a hajóút, amelyért 120 dollárt kértek?

e) Egy osztály a tavaszi kirándulásához autóbuszt bérelt. 28-an vettek részt a kiránduláson, így személyenként 4800 Ft-ot fizettek az útért. Mennyit fizetett volna egy-egy résztvevő, ha 42-en mentek volna a kirándulásra? (A díj csak a megtett kilométerek számától függött, mindegy hányan voltak a buszon.)

f) Egy autó 75 km-es távon 4,2 l benzint fogyaszt. Mennyi a fogyasztása (azonos körülményeket feltételezve) 350 km-en?



28 Egy gázforraló 45 másodperc alatt melegít fel 0 °C-ról 15 °C-ra 20 cm^3 vizet.

Gyakorló
5.88–5.94.;
Feladatgyűjtemény
5.2.10.

a) Hány másodpercre lett volna szükség, ha 0 °C-ról

10 °C-ra; | 17 °C-ra; | 23,5 °C-ra melegítettük volna fel a 20 cm^3 vizet?

b) Hány fokra melegített volna fel 45 másodperc alatt

2-szer; | 3-szor; | 15-ször; | $\frac{2}{3}$-szor annyi vizet a gázláng?

c) Hány másodperc alatt melegített volna fel a gázforraló 0 °C-ról 15 °C-ra

3-szor; | 5-ször; | 9-szer; | $\frac{1}{4}$-szer annyi vizet?

29 Grafikonon ábrázoltuk, hogy adott idő alatt mekkora sebességgel haladva tesz meg 180 m-t egy jármű.

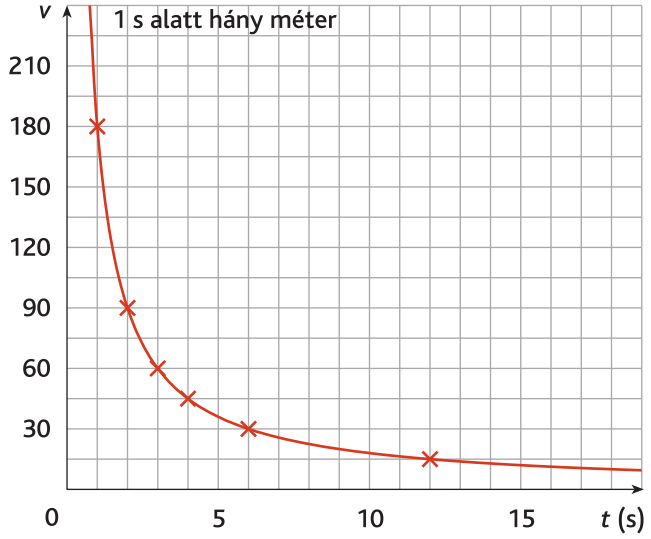
Készíts táblázatot! Fogalmazd meg a szabályt többféleképpen! A szabály segítségével ellenőrizheted, hogy jól töltötted-e ki a táblázatot.

Van-e egyenes vagy fordított arányosság a két mennyiség közt?

v: egyenletesen mozgó jármű sebessége (hány métert tesz meg másodpercenként);

t: a 180 m megtételéhez szükséges idő (s).

Milyen járművek haladhatnak a grafikonon megjelölt sebességekkel?



bővített szint

SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS



Beregben és Szatmárban, a Szamos és a Tisza árterein termett szilvából még manapság is hatalmas rézüstökben főzik a lekvárt. 160 kg szilva főzése folytonos keverés mellett kora hajnaltól késő éjszakáig tart.

A SZÁZALÉKÉRTÉK KISZÁMÍTÁSA

1. példa

Zsiga bácsiék 160 kg szilvából lekvárt főznek. A lekvár tömege a szilva tömegének $\frac{20}{100}$ része.
Hány kilogramm lekvár készülhet a 160 kg szilvából?

160 kg-nak az $\frac{1}{100}$ **részét** más szóval **1 százaléknak** mondjuk. Jelölés: **1%**

160 kg-nak a $\frac{20}{100}$ **részét** más szóval **20 százaléknak** mondjuk. Jelölés: **20%**

160 kg-nak a $\frac{100}{100}$ **része** önmaga, azaz 160 kg. Ez az egész, a **100%**.

1. megoldás **Következtetés**

	100%	$\frac{100}{100}$ rész	160 kg	
: 100				: 100
	1%	$\frac{1}{100}$ rész	(160 kg) : 100 = 1,60 kg	
· 20				· 20
	20%	$\frac{20}{100}$ rész	(1,60 kg) · 20 = 32 kg	

2. megoldás **A századrész kiszámítása**

Egy mennyiség $\frac{20}{100}$ része egyenlő a $\frac{20}{100}$-szorosával, vagyis 0,20-szorosával.

(160 kg) · 0,20 = 32 kg

32 kg lekvár készülhet a 160 kg szilvából.

3. megoldás **Egyszerűsítés után a törtrész kiszámítása**

Vegyük észre a következőt: $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

A 160 kg $\frac{1}{5}$ részét kell maghatároznunk: (160 kg) · $\frac{1}{5}$ = (160 kg) : 5 = 32 kg

32 kg lekvár készülhet a 160 kg szilvából.

Gyűjtőmunka

A mindennapi életben hol (például mely áruk csomagolásán) találkozhatunk a százalékszámítással?

Értelmezések

A $\frac{20}{100}$ részt másképpen **20 százaléknak** is mondjuk és **20%** formájában írhatjuk.

A feladatban szereplő adatok elnevezése

Alap: $a = 160$ kg $\left(\frac{100}{100}\text{ rész};\ 100\%\right)$

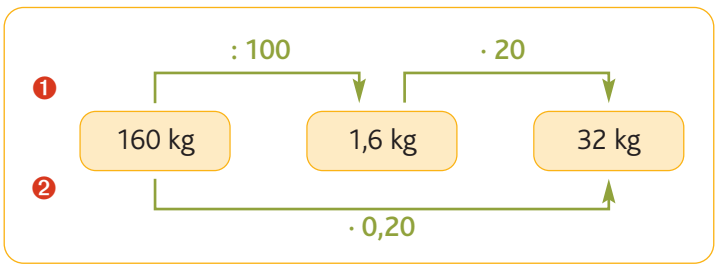
Százalékérték: $e = 32$ kg $\left(\frac{20}{100}\text{ rész};\ 20\%\right)$

Százalékláb: $p = 20$ (a 20%-ból)

A p a latin percent (százalék) szó rövidítése.

Hasonlítsuk össze az első két megoldás gondolatmenetét.

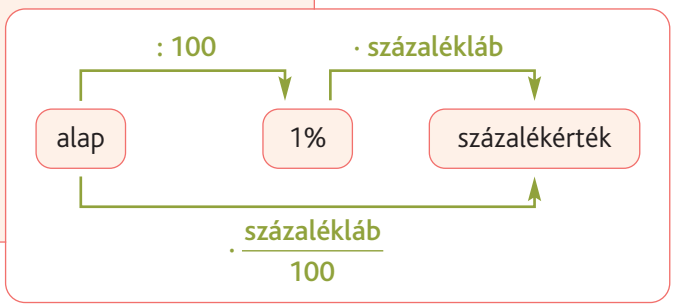
$$e = (\underbrace{a : 100}_{1\%}) \cdot p = a \cdot (p : 100)$$



Megjegyezted?

A százalékértéket – az alap és a százalékláb ismeretében – **úgy is kiszámíthatjuk, hogy az alap 1%-át szorozzuk a százaléklábbal.**

Vagy másképpen: **a százalékértéket úgy is kiszámíthatjuk, hogy az alapot szorozzuk a százalékláb századrészével.**



FELADATOK

30 Számítsd ki következtetéssel is, szorzással is, hogy 4800-nak mennyi

Gyakorló 5.41–5.44.

a)	az $\frac{1}{2}$ része,	a $\frac{2}{2}$ része,	a $\frac{0}{2}$ része,	az $\frac{5}{2}$ része,
b)	a $\frac{0}{10}$ része,	a $\frac{7}{10}$ része,	a $\frac{10}{10}$ része,	a $\frac{17}{10}$ része,
c)	a $\frac{0}{100}$ része,	az $\frac{5}{100}$ része,	a $\frac{100}{100}$ része,	a $\frac{200}{100}$ része!

31 Számítsd ki kétféleképpen, hogy mennyi

400 Ft 15%-a, | 800 m 75%-a, | 250 kg 120%-a, | 5,6 t 100%-a!

Húzd alá pirossal az *alapot*, zölddel a *százalékértéket*, kékkel a *százaléklábat*!



Pistinek csak hármasa, négyese és ötöse van matematikából. Mindegyikből legalább egy. Összesen 5 jegye van és a jegyek átlaga 4,00. A jegyek 20%-a 5-ös. Hány hármasa, négyese, ötöse van Pistinek matematikából?

Többet ésszel ...

◉ *Mekkora a százaléklláb, ha a százalékérték egyenlő az alappal, kisebb az alapnál, nagyobb az alapnál?*

32 Mekkora része az alapnak a kiszámított százalékérték?

a) Mennyi 1 m-nek | az 1%-a, | a 10%-a, | a 20%-a, | a 25%-a, | az 50%-a, | a 75%-a, | a 99%-a, | a 100%-a, | a 173%-a, | a 200%-a?

b) Mennyi 1 kg-nak | a 2%-a, | az 5%-a, | az 500%-a, | a 0,25%-a?

c) Mennyi 2500 Ft-nak az | 1%-a, | a 20%-a, | az 50%-a, | a 100%-a?

33 *a)* Az alpakka nevű fémötvözetnek a 60%-a réz.
Egy alpakkakanál 5,8 dkg, egy villa 4,7 dkg, egy kés 5,2 dkg.
Hány gramm réz van bennük?

◉ *Vigyázz! Többet is, kevesebbet is mondhattam a tényleges távolságnál.*

b) Egy erdő távolságát 600 m-re becsülöm. Távolságbecslés esetén legfeljebb 5%-os hibát szoktam elkövetni. Milyen távol lehet az erdő a valóságban?

34 Válaszd ki, hogy melyik állítás igaz, melyik nem!

◉ *Válaszod indokold!*

A: Egy mennyiség ötödrésze egyenlő a mennyiség 20%-ával.

B: Egy mennyiség 35%-a egyenlő a mennyiség 0,35 részével.

C: Egy mennyiség 56%-a egyenlő 0,56-dal.

D: Egy síkidom területének ötszöröse megegyezik a terület 500%-ával.

◉ *A 20%-kal való csökkentés hányszoros változtatást jelent?*

E: Ha csökkentjük egy 10 000 Ft-os termék árát 20%-kal, majd az így kapott árat növeljük 20%-kal, akkor a termék ára nem változik.

F: Ha egy mennyiséget megnövelek a 25%-ával, majd az így kapottat a 35%-ával, akkor pontosan azt kapom, mint ha először 35%-ával, majd utána 25%-ával növeltem volna az adott mennyiséget.

G: 20 kg alma 50%-a 10.

H: 60 dió 5%-a 3 dió.

Gyakorló
5.45–5.52.;
Feladatgyűjtemény
4.3.03.

35 Egy áru értéke áfa (általános forgalmi adó) nélkül 800 Ft.

a) Mennyit kell fizetni az áruért, ha az áfa az áru értékének 15%-a?

b) Hány forinttal nő az áru ára, ha az áfát 15%-ról 20%-ra emelik?

◉ *Az új ár az eredetinek hány százaléka?*

36 A következő ábrákon néhány gép eredeti árát és a százalékban adott engedményt látjuk. Hány forintért vásárolhatók meg így az egyes gépek?







Fejtörő!

Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek (a százastól kezdve) növekvő sorrendben követik egymást? Mekkora része, illetve hány százaléka ez az összes háromjegyű számnak?

KÖRDIAGRAMOK

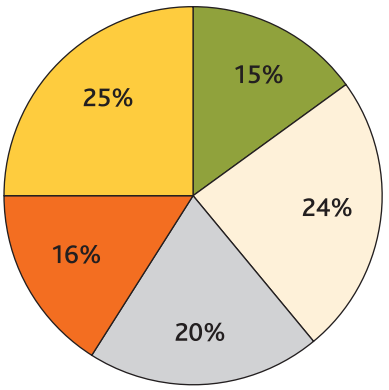
Úgynevezett **kördiagrammal** szemléltethetjük, hogy **az egész mennyiség milyen részekből tevődik össze, és hogy ezek a részek hány százalékát** (mekkora részét) **alkotják az egésznek.**

2. példa

Egy család havi nettó jövedelme májusban 310 000 Ft volt.

A kördiagram szemlélteti, hogy a család mire költötte a jövedelmét.

Törlesztések; Közlekedés, autó; Ruházkodás, egyéb; Élelem, tisztítószerek; Lakás, gáz, világítás, víz stb.



Mire mennyit költött ez a család májusban?

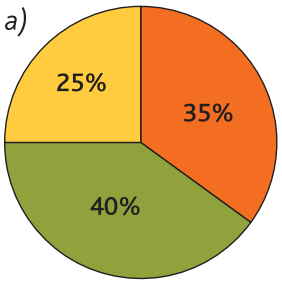
Törlesztés a jövedelem	15%-a:	310 000 · 0,15 = 46 500 (Ft)
Közlekedés, autó,	20%:	310 000 · 0,20 = 62 000 (Ft)
Ruházkodás, egyéb,	16%:	310 000 · 0,16 = 49 600 (Ft)
Élelem, tisztítószerek,	24%:	310 000 · 0,24 = 74 400 (Ft)
Lakásfenntartás,	25%:	310 000 · 0,25 = 77 500 (Ft)
Összesen:	100%	310 000 (Ft)

FELADATOK

37 A kördiagramok alapján számítsd ki az egyes mennyiségeket!

Gyakorló
5.59., 5.61.–5.63.

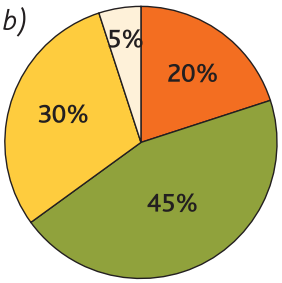
a)



1200 kg gyümölcsből

lekvár; gyümölcslé; piacon értékesítve

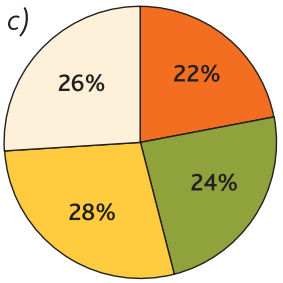
b)



5400 Ft-ból

könyv; mozi; uzsonna; egyéb;

c)



750 tanulóból

alsós lány; felsős lány; alsós fiú; felsős fiú

Fejtörő!

Rezső laptopjának egyik meghajtóján még 25% szabad terület van.

a) Mekkora ez a terület, ha a meghajtó kapacitása 66,8 GB (gigabájt)?

A: 0,25 GB; B: 16,7 GB; C: 25 GB; D: 32,4 GB

b) Hány fokos a kördiagramon a szabad területet jelképező körcikk?

A: 25°-os; B: 75°-os; C: 90°-os; D: 135°-os

Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

AZ ALAP KISZÁMÍTÁSA

FELADAT

38 Hány kilogrammnak a) a 0,1 része 45 kg; b) a 0,5 része 3,5 kg; c) a 2,5 része 0,75 kg; d) a 0,01 része 4 kg; e) a 0,25 része 0,5 kg?

3. példa

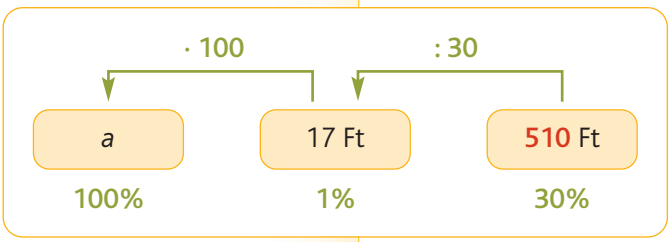
Elköltöttem a pénzem 30%-át, 510 Ft-ot. Mennyi pénzem volt?

1. megoldás **Következtetés**

30%-a $\left(\frac{30}{100}\text{ része}\right)$: 510 Ft,

1%-a $\left(\frac{1}{100}\text{ része}\right)$: $\frac{510}{30}$ Ft = 17 Ft,

100%-a $\left(\frac{100}{100}\text{ része}\right)$: $100 \cdot 17$ Ft = 1700 Ft



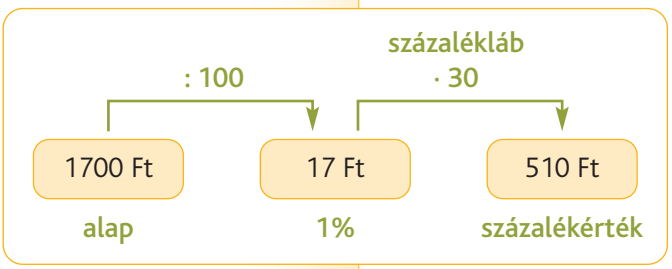
A megoldás gondolatmenete:

Százalékérték: $e = 510$ Ft (30%)

Százalékláb: $p = 30$

Alap: $a = 1700$ Ft (100%)

Azaz 1700 Ft-om volt.



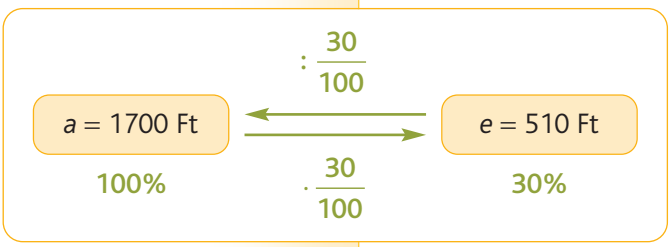
Ellenőrzés:

1700 Ft-nak mennyi a 30%-a?

1700 : 100 = 17; 17 · 30 = 510 (Ft)

510 Ft valóban 1700 Ft-nak a 30%-a.

2. megoldás **Törtrészből az 1 egész kiszámítása**



Hány forintnak a $\frac{30}{100}$ része 510 Ft?

510 : 0,30; 5100 : 3 = 1700 (Ft)

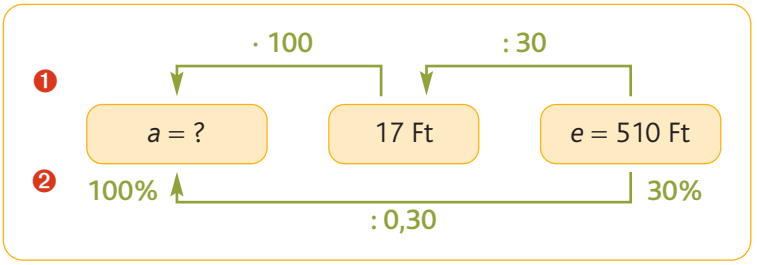
Ellenőrzés: 1700 · 0,30 = 510 (Ft)

Az ábrán látható a megoldás menete.

A százalékértékből, vagyis az alap $\frac{30}{100}$ részéből $\left(\frac{30}{100}\text{-szorosából}\right)$ úgy is kiszámíthatjuk a $\frac{100}{100}$ részt, vagyis az a-t, hogy a százalékértéket (az e-t) osztjuk $\frac{30}{100}$-dal azaz 0,30-dal.

Hasonlítsuk össze a két megoldás gondolatmenetét.

$$a = (\underbrace{e : p}_{1\%}) \cdot 100 = e : (p : 100)$$



Figyeld meg!

A százalékláb és a százalékérték ismeretében az **alapot úgy is kiszámíthatjuk,** hogy először következtetünk az 1%-ra, majd ebből a 100%-ra. Ez azt jelenti, **hogy a százalékértéket osztjuk a százaléklábbal, és ezt a hányadost szorozzuk 100-zal.**

Vagy másképpen: **Az alapot úgy is kiszámíthatjuk, hogy a százalékértéket osztjuk a százalékláb századrészével.**

◉ *Lásd az előző ábrát.*

FELADATOK

39 Melyik számnak

a) 1%-a 4;	*b)* 1%-a 20;	*c)* 1%-a 5,8;	*d)* 100%-a 10;
e) 50%-a 24;	*f)* 20%-a 15;	*g)* 25%-a 100;	*h)* 10%-a 0,467;
i) 200%-a 148,6;	*j)* 1000%-a 0,2;	*k)* 75%-a 9;	*l)* 120%-a 18;
m) 8%-a 28,8;	*n)* 7%-a 72,17;	*o)* 11%-a 50,358;	*p)* 29%-a 10,44?

◉ *Az egésznek mekkora része a 10%-a; 20%-a; 25%-a; 50%-a; 75%-a; 100%-a; 200%-a; 500%-a; 1000%-a?*

40 *a)* Egy értékesítési szövetkezet gazdái 650 hektáron vetettek gabonaféléket. Ez a tulajdonukban lévő összes földterület 40%-a. Összesen hány hektár földje van a szövetkezet gazdáinak?

b) Egy osztály kirándulást szervezett. A költségek 24%-át, 15 000 Ft-ot sikerült gesztenyegyűjtéssel előteremteni. Hány forintba került a kirándulás?

c) Egy város lakossága 15%-kal gyarapodott tíz év alatt. Hányan laktak 10 évvel ezelőtt a városban, ha ez a növekmény 7500 főt jelent?

d) Egy földterület felásásának 60%-ával végeztem. Ekkor megállapítottam, hogy még 200 m^2-t kell felásnom. Hány négyzetméter felásását terveztem?

e) Hány forintot kellett kölcsönkérnem, és eredetileg hány forintom volt, ha elköltöttem pénzemnek a 150%-át, 2700 Ft-ot?

Gyakorló
5.64.–5.73.

41 Egy laptop vásárlásakor a teljes ár 25%-át, 64 500 Ft-ot kellett fizetnem.

a) Mennyi volt a laptop teljes vételára? Számolj többféle terv alapján!

b) A laptop árának hány százalékát nem fizettem ki a vásárláskor? Hány forintot nem fizettem ki?



Melyik az a szám, amelynek a $\frac{3}{4}$ része 2-vel kisebb, mint a 80%-a?

Többet ésszel …

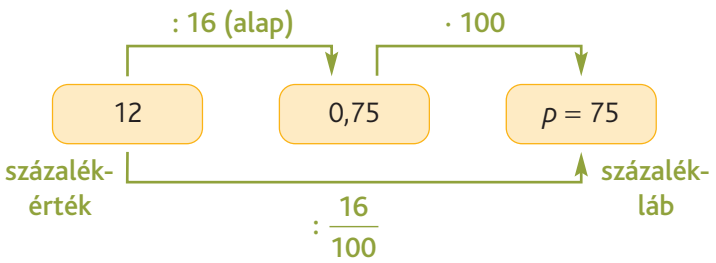
◉ *A $\frac{3}{4}$ rész hány százalék?*



A SZÁZALÉKLÁB KISZÁMÍTÁSA

4. példa

Az iskolai sakkbajnokságon az első helyezett a lehetséges 16 pontból 12-t megszerzett. A megszerezhető pontoknak mekkora részét, hány százalékát szerezte meg a tanuló?



12 a 16-nak a $\frac{12}{16}$ része $\left(\frac{12}{16}\text{-szorosa}\right)$.

Fejezzük ki ezt az arányt századrészekben.

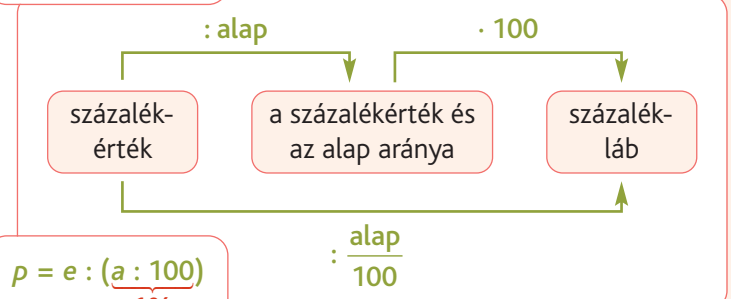
$\frac{12}{16} = 0,75 = \frac{75}{100}$

A tanuló a pontszámok $\frac{75}{100}$ részét, vagyis 75%-át szerezte meg.

Alap:	16 pont	Ennyi a megszerezhető pont. Ez a 100%.
Százalékérték:	12 pont	Ennyit szerzett meg.
Százalékláb:	$p = 75$	Ennyi százalékát nyerte meg a pontoknak.

$p = (e : a) \cdot 100$

Figyeld meg!



$p = e : (a : 100)$
1%

A százaléklábat az alap és a százalékérték ismeretében **úgy is meghatározhatjuk, hogy a százalékérték és az alap arányát szorozzuk 100-zal**.

Másképpen: **A százaléklábat úgy is kiszámíthatjuk, hogy a százalékértéket osztjuk az alap századrészével.**

A százalékláb azt mutatja meg, hogy a százalékérték mekkora része (azaz hány századrésze, hány százaléka) az alapnak.

Fejtörő!

© 2008-ban érettségi feladat volt. Indokold válaszod!

Egy fordítóiroda angol és német fordítást vállal. Az irodában 50 fordító dolgozik, akiknek 70%-a angol nyelven, 50%-a német nyelven fordít.

Hány fordító, a fordítók hány százaléka dolgozik mindkét nyelven?

Figyelempróba

Egy szálloda hirdette: **Négy éjszakát fizet, ötöt kap!**

a) Hány százalékos kedvezményt ígért a reklám?

A: 10%-os; B: 20%-os; C: 25 %-os; D: 40%-os

b) Így 5 éjszakáért összesen csak 21 200 Ft-ot kellett fizetnem. Mennyi kedvezményt kaptam?

Többet ésszel ...

Egy szállodában 105 embert tudnak elhelyezni kétágyas, vagy háromágyas szobákban. A szobák hány százaléka háromágyas a szállodában, ha a kétágyas szobák száma 60%-a a háromágyas szobák számának?

5. példa

Egy cipőt egy kereskedő 8000 Ft-ért szerzett be, majd 10 000 Ft-ért adott el.
Hány százalékkal emelte meg a beszerzési árat a kereskedő?



1. megoldás

Először meghatározzuk, hogy 10 000 Ft hány százaléka 8000 Ft-nak, majd ebből következtetünk a növekedés mértékére.

Figyeljük meg az előző oldalon levő ábrát.

Alap: 8000 Ft (100%)

Százalékérték: 10 000 Ft

Százalékláb: x

$$\frac{10\,000}{8000} \cdot 100 = x$$

$$125 = x$$

Az új ár a beszerzési ár 125%-a.

A beszerzési ár 100%, tehát 25% az áremelés mértéke.

2. megoldás

10 000 Ft – 8000 Ft = 2000 Ft. Ennyi az árnövekedés.

Meg kell határozni, hogy 2000 Ft hány százaléka a 8000 Ft-nak:

$$2000 : 8000 = 0{,}25$$

$$0{,}25 \cdot 100 = 25$$

Az áremelés 25%-os.

◉ *Mi a különbség?*
Valahány százalékra emelte az árát.
Valahány százalékkal emelte az árát?

◉ *Figyeljük meg:*
A 2000 Ft egynegyed része a 8000 Ft-nak.
Mennyi a 100% egynegyede?

FELADATOK

42 Mekkora része, illetve hány százaléka 200 Ft-nak

2 Ft; 20 Ft; 200 Ft 100 Ft; 250 Ft; 168 Ft; 356 Ft?

43 *a)* Egy osztály eddig 120 kg papírhulladékot gyűjtött. A tervük 240 kg volt. Hány százalékát gyűjtötték a tervezettnek eddig?

b) Úgy terveztük, hogy a kirándulásunkon 5 km-es gyalogtúrát teszünk. 2 km után megpihentünk. Hány százalékát tettük meg eddig utunknak?
Hány százaléka van még hátra az útnak?

c) Egy piaci árus 80 kg burgonyából eladott 30 kg-ot.
Hány százalékát adta el a burgonyának?

d) Egy 500 Ft-os sampon árából 80 Ft-ot elengedtek.
Hány százalékos volt az árcsökkenés?

◉ *A 2 km mekkora része az 5 km-nek?*

Gyakorló
5.74–5.80., 9.29.

44 Egy iskola felső tagozatára 720 tanuló jár. 180 ötödik osztályos, 216 hatodik osztályos, 198 hetedik osztályos. A többiek nyolcadikosok. A tanulók hány százaléka jár az egyes osztályokba?

Fejtörő!

Melyik kedvezmény hány százalékos árcsökkentést jelent?

a) Két doboz vásárlása esetén a második doboz fél áron kapható.

b) Két doboz vásárlásakor a dobozonkénti 325 Ft helyett a két dobozért 520 Ft-ot számolnak.

GYAKOROLJUK A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁST

A forintnak forint, a hosszúságnak hosszúság, a tömegnek tömeg a megfelelő százaléka.

45 Mennyi

a) 16 000 Ft-nak az	1%-a,	20%-a,	50%-a,	150%-a;
b) 28 000 m-nek az	1%-a,	25%-a,	75%-a,	100%-a;
c) 20 000 kg-nak az	1%-a,	15%-a,	43%-a,	120%-a?

46 *a)* Egy könyv ára 980 Ft volt, de leszállították az árát 40%-kal. Mennyibe kerül így a könyv?

b) Egy vállalkozó egy munkáért 126 000 Ft-ot kapott. Ennek az összegnek a 24%-át szállításra költötte. A maradék 40%-ából anyagot vásárolt.

Mennyi pénze maradt a költségek levonása után?

c) Gedeon 30%-os árleszállítás után 1470 Ft-ért vett meg egy nadrágot.

Hány forintot takarított meg?

47 *a)* Hogyan számítjuk ki a százalékértéket, ha ismerjük az alapot és a százaléklábat?

b) Hogyan számítjuk ki az alapot a százalékláb és a százalékérték ismeretében?

c) 5000 Ft-ot gyűjtöttél takarékban. Ha a bank évi 8%-os kamatot fizet érte, egy év múlva hány forintot kapsz kézhez?

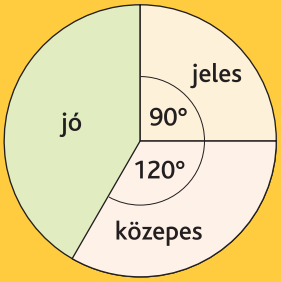
d) A Nyíregyháza–Budapest távolságból megtettünk 62 km-t. Ez a teljes út 25%-a. Hány kilométer van még hátra?

e) Egy ház alapterületének 58%-a a háló-, dolgozó- és a nappali szoba alapterülete. Hány négyzetméter a lakás alapterülete, ha a felsorolt szobák alapterületének összege 70 m^2?

48 *a)* 200 g csokoládét ossz szét két gyerek között úgy, hogy az egyik a 20%-át, a másik a 80%-át kapja!

b) 20 € van a zsebemben. Ez az összes pénzemnek a 25%-a. Hány euróm van összesen?

c) Egy személygépkocsi fogyasztása megfelelő sebességi fokozatban a végsebesség 60%-ánál optimális (adott körülmények között a legkevesebb). Ede gépkocsijának fogyasztása akkor optimális, ha óránként 90 km-t tesz meg. Mekkora ennek a gépkocsinak a végsebessége?



Érettségi feladatok voltak 2006-ban, illetve 2008-ban.

Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen?

Egy iskolában 120 tanuló érettségizett matematikából. Nem volt sem elégtelen, sem elégséges dolgozat. Az eredmények eloszlását a mellékelt kördiagram szemlélteti. Hányan kaptak jeles, jó, illetve közepes osztályzatot?

ÖSSZETETT SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSI FELADATOK



6. példa

A Csiribá összes trükkje című könyv ára 3825 Ft volt. Mivel a vásárlók túl drágának találták, nem vették meg, ezért 12%-kal olcsóbban kínálták. De még így sem vették meg, ezért újabb 8%-os árleszállítást hajtottak végre. Így már megvették a könyvet. Hány forinttal lett olcsóbb a könyv?

1. megoldás

Először kiszámítjuk a 3825 Ft 12%-át $\left(\text{másképpen } \frac{12}{100} \text{ részét}\right)$, majd meghatározzuk az ezzel csökkentett ár 8%-át $\left(\frac{8}{100} \text{ részét}\right)$, s ennyivel ismét csökkentjük a könyv árát.

3825 Ft-nak a 12%-a: $3825 \cdot 0{,}12 = 459 \approx 460$ (Ft)

Ez 460 Ft-os kedvezményt jelent. A könyv ára $3825 \text{ Ft} - 460 \text{ Ft} = 3365 \text{ Ft}$ lett.

3365 Ft-nak a 8%-a: $3365 \cdot 0{,}08 = 269{,}2 \approx 270$ (Ft)

Ez tehát 270 Ft kedvezményt jelent.

A könyv ára így: $3365 \text{ Ft} - 270 \text{ Ft} = 3095 \text{ Ft}$

A **kétszeres árleszállítás után** 3095 Ft lett a könyv ára, azaz 730 Ft-tal lett olcsóbb.

A 12%-os változás 0,12-szoros, a 8%-os változás 0,08-szoros változást jelent.

Az egy- és kétforintos pénzérmék hiánya miatt végig 5-tel osztható értékekre „kerekítünk”.

2. megoldás

Ha a 3825 Ft-os könyv árát 12%-kal csökkentették, akkor most az eredeti árnak csak a 88%-át kellene fizetnünk.

3825 Ft-nak a 88%-a 3365 Ft, mert

$3825 \cdot 0{,}88 = 3366 \approx 3365$ (Ft).

Ha ezt **ismét csökkentik** 8%-kal, akkor **az újabb árnak** csak a 92%-át kell fizetnünk, azaz 3097 Ft-ot, mert

$3365 \cdot 0{,}92 = 3095{,}8 \approx 3095$ (Ft).

Így is azt kaptuk, hogy az új ár 3095 Ft.

Fogalmazd meg, hogy miért 88%-ot!

Figyeljük meg számításunk menetét.

3825 Ft-nak először a 88%-át kellett meghatározni, majd a kapott értéknek a 92%-át. Azaz:

$(3825 \cdot 0{,}88) \cdot 0{,}92 = 3096{,}72 \approx 3095$ (Ft)

Ezt így is írhatjuk:

$3825 \cdot (0{,}88 \cdot 0{,}92) = 3825 \cdot 0{,}8096 \approx 3095$ (Ft)

A kétszeres árcsökkentés éppen olyan árcsökkenést eredményezett, mintha egyszer csökkentették volna a könyv árát az eredeti ár 80,96%-ára.

Figyeld meg, hogy a 12%-os, majd a kapott érték 8%-os csökkenése nem 20%-os árcsökkenést jelent!

bővített szint

Egy kereskedő eladta a piacra vitt almáinak 50%-át és még 2 kg-ot, majd a maradék 50%-át és még 2 kg-ot. Így 8 kg almája maradt eladatlan. Hány kilogramm almát vitt a kereskedő a piacra?

Figyelempróba

7. példa

Egy termék előállítási költsége 580 Ft volt. Ezt a vállalkozó felemelte 25%-kal, majd a megnövelt árat a 20%-os forgalmi adóval is megemelte. Hány forintot kell fizetnünk így a termékért?

Hány százaléka a termék ára az előállítási költségnek?

Az 580 Ft-nak a 25%-os növekedése azt jelenti, hogy az új ár a réginek **125%**-a (100% + 25%).

Az 580-nak a 125%-a $\left(\frac{125}{100}\text{ része}\right)$: $580\text{ Ft} \cdot \frac{125}{100} = 725\text{ Ft}$, azaz

$$580 \cdot 1{,}25 = 725$$

Látjuk, hogy a 25%-os növekedés azt jelenti, hogy az adott mennyiségnek az 1,25-szorosát kell venni.

Ezt az új árat növelték 20%-kal (**120%**-ára):

$$725 \cdot 1{,}20 = 870$$

Az eredetileg 580 Ft-os termékért 870 Ft-ot kell fizetnünk.

A 25%-kal, majd a 20%-kal történő áremelés éppen azt jelenti, mintha a termék árát csak egyszer emelték volna 50%-kal, mert

$$(580 \cdot 1{,}25) \cdot 1{,}20 = 580 \cdot (1{,}25 \cdot 1{,}20) = 580 \cdot 1{,}50 = 870$$

580 Ft-nak 1,50-szorosa azt jelenti, hogy 580 Ft-nak a $\frac{150}{100}$ részét, azaz 150%-át számítottuk ki. (Az áru ára 50%-kal nagyobb az előállítási költségnél.)

Foglaljuk össze számításunkat:

$$(580 \cdot 1{,}25) \cdot 1{,}20 = 870$$

Az 50% a vállalkozó haszna, illetve az állam adóbevétele.

A 25%-os, majd az új ár 20%-os növekedése nem 45%-os növekedést eredményez.

Megfigyelted?

A többszöri árcsökkenés vagy árnövekedés mértéke nem a százaléklábak összegével egyenlő.

Lásd a 6. és a 7. példát.

Figyelempróba

B1

a) Az állatkert 184,8 millió Ft pályázati pénzből felújíttatta a medvék lakhelyét. Az összeg 37,1%-ából a fedett részt, 15,6%-ából a kifutót építették át. Hány forintot költöttek a fedett, mennyit a nyitott részre? Mennyi egyéb költség merült fel?

b) A 140 m-szer 200 m-es, téglalap alakú kifutó egyik oldalát 1,5 szeresére növelték, a másik oldal nagysága változatlan maradt. Hány százalékkal növekedett a területe? Hány százalékkal növekedett a kerítés hossza?

Gyakorló
5.53–5.58., 5.60.;
Feladatgyűjtemény
4.4.03., 4.4.11.,
4.4.13., 6.1.08.

Fejtörő!

Indokold a válaszod!

Mikor járna jobban édesapád: ha januárban 7%-kal, majd ősszel 10%-kal emelnék a fizetését, vagy ha először 10%-kal, majd 7%-kal emelnék?

Adjuk össze a 21-nél nem kisebb és 45-nél nem nagyobb természetes számokat. Ha az összegből elhagyunk egy tagot, akkor az eredeti összeg 96%-át kapjuk. Melyik számot hagytuk el?

B2

a) Írd fel azt a sorozatot, amelynek első eleme 5, és minden további elem az őt közvetlenül megelőzőnek 110%-a! (5 elemet írj fel!)

b) Egy sorozat 3. eleme 8,6. Minden eleme az őt megelőzőnek a 86%-a. Írd fel az első két elemet, valamint a 4. és az 5. elemet!

Hányszoros változásnak felel meg a 110%-os változás?

B3

a) A kertünk területe 200 m^2. Felástuk a 75%-át, majd a felásott terület 30%-ába magot vetettünk. Hány négyzetméter van bevetve?

b) Szorgos úr bruttó jövedelme havi 165 000 Ft. Januárban 5%-os fizetésemelést kapott, majd novemberben ismét emelték a fizetését 4%-kal.

Hány forint lett az év végén a bruttó havi jövedelme?

A bruttó keresetét nem kapja meg a dolgozó, ebből levonják a nyugdíjjárulékot, az adót stb.

c) Egy cipő ára 12 500 Ft volt. Ezt az árat 20%-kal *megemelték*. Mivel a cipőt így nem vették meg, 10%-kal *leszállították* az árát. Hány forintba került így a cipő?

d) Egy 15 600 Ft-os korcsolya árát először *leszállították* 15%-kal, majd később ezt az *új árat emelték* 15%-kal. Hány forintba kerül így ez a korcsolya?

Becsüld meg! Kevesebb vagy több lesz-e az új ár?

e) Egy 15 600 Ft-os szobabicikli árát először *felemelték* 15%-kal, majd ezt az *új árat* később *leszállították* 15%-kal. Hány forintba kerül így ez a szobabicikli?

B4

Figyelempróba

a) Melyik az a szám, amelynek a kétszerese 5,6-del több a számnál?

b) Erdei iskolában az 5. osztály 250 facsemetét ültetett el. A 6. osztály ennek a mennyiségnek a 120%-ánál 20-szal kevesebbet. Mennyit ültetett el a két osztály együtt?

c) Egy osztály fiútanulóinak száma 5-tel kevesebb, mint a leánytanulók számának háromszorosa. Hány fiú és hány leány jár ebbe az osztályba, ha a lánytanulók számának 250%-a egyenlő az osztály létszámával?

B5

a) Egy iskola tanulóinak 56%-a, 434 tanuló fiú. A fiúk 29%-a jár valamilyen szakkörre. Hány tanuló jár az iskolába? Hány fiú jár szakkörre?

Milyen pontossággal kell számolnod?

b) Egy munkacsapat létszáma 20%-kal csökkent, de a dolgozók 30%-kal túlteljesítették az egyéni vállalásaikat. Így 520 munkadarab készült el. Hány munkadarab teljesítését vállalta eredetileg a munkacsapat vezetője?

c) Melyik az a szám, amely 30%-ának 40%-a 60?

Írd fel egyenlettel is megoldásod menetét!

d) Egy heverő árát először 15%-kal emelték, majd 20%-kal csökkentették, így 4000 Ft-tal lett olcsóbb, mint eredetileg volt. Mennyibe került eredetileg a heverő? Hány százalékkal változott az eredeti árhoz képest a heverő ára?

Szerencsen 2008-ban, a Csokoládé Fesztiválon elkészítették a világ eddigi legnagyobb csokoládészobrát, amelyet egy közel 400 kg-os 20% kakaótartalmú bevonómassza-tömbből Ekker Róbert szobrászművész a helyszínen faragott ki. A szobor Gombóc Artúr figuráját ábrázolta, mely végül 239 kg-os tömegével megdöntötte az addigi világrekordot.

A csokoládétömb hány százaléka ment „veszendőbe” a kifaragás során?

A csokoládé Gombóc Artúr hány kilogramm kakaót tartalmazott?



Figyelempróba

B6

a) Egy kiránduláson az első napra tervezett utamnál 20%-kal többet, 12 km-t tettem meg. Hány kilométer megtételét terveztem eredetileg az első napra?

b) Ha pénzemhez még hozzáveszem annak 20%-át, majd elköltök belőle 5000 Ft-ot, pontosan 5000 Ft-tal kevesebb pénzem lesz, mint az eredeti összeg 1,2-szerese. Hány forintom volt eredetileg?

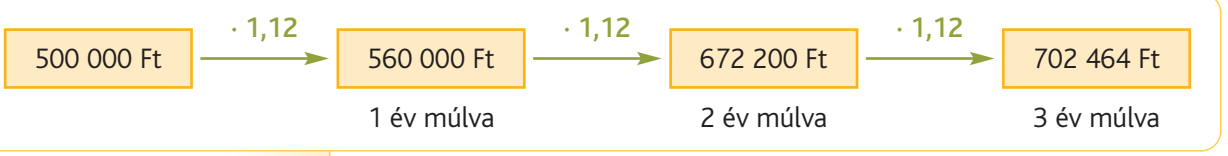
c) Hány forintom lehetett, ha először elköltöttem a 70%-át, azután növeltem az eredeti összeg 60%-ával, és ugyanannyi pénzem lett, mint vásárlás előtt? Válaszod indokold!

8. példa

Hajnal 500 000 Ft-ot kötvénybe fektetett, amelyért évenként 12% kamatot fizetnek. Hány forintot kap kézhez a kötvényéért 3 év múlva?

Betétnek nevezzük a banknál kamatozó pénzösszeget. Ennek egy fajtája a kötvény.

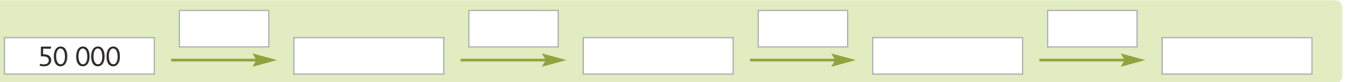
Minden év végén a kamatot hozzáírják a betéthez, ezért az év végére már az egy évvel korábbi összeg 112%-a, vagyis 1,12-szorosa lesz a betét.



Három év múlva 702 464 Ft-ot kap kézhez.

B7 Mit írjunk a nyilak fölé? Írd be a téglalapokba a hiányzó mennyiségeket!

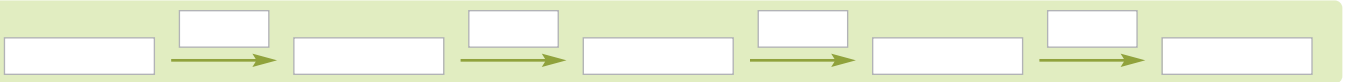
a) Rita szülei 50 000 Ft-ot betettek a takarékba. Évenként 8% kamatot kapnak érte. Mennyire szaporodik a pénzük 4 év alatt?



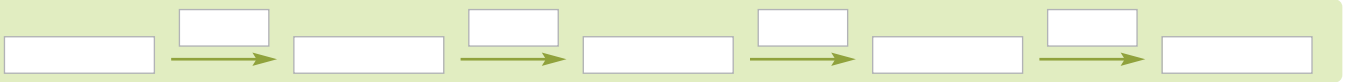
b) Ida megtakarított pénzét egy vállalkozásba fektette, ami 4 éven át évi 20%-os hasznot hozott. A 4. év végén 414 720 Ft-ot kapott kézhez. Hány forintot fektetett be ebbe a vállalkozásba?



c) Egy erdő faállományának mennyisége évenként 10%-kal nő. Hány köbméter fa volt az erdőben két évvel ezelőtt, és hány köbméter fa lesz két év múlva, ha most 726 000 köbméter fa van az erdőben?



d) Egy eszköz értéke évente 30%-kal csökken. Mekkora lesz az értéke 4 év múlva, ha most 200 000 Ft-ot ér?



ARÁNYOS OSZTÁS

1. példa

Osszuk fel a következő ábrán látható 10 cm hosszú szakaszt két olyan szakaszra, amelyek aránya 2 : 3.



Osszuk a szakaszt 5 egyenlő részre.

1 rész hossza 2 cm.

Ezen egyenlő részekből 2 adja az *a* szakaszt,

3 adja a *b* szakaszt.

$a = 2\text{ cm} \cdot 2 = 4\text{ cm}$; $b = 2\text{ cm} \cdot 3 = 6\text{ cm}$

Ellenőrzés:

A szakaszok aránya: $\frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{2}{3}$; összegük: $4\text{ cm} + 6\text{ cm} = 10\text{ cm}$.

A részek összege egyenlő az egésszel.

Figyeljük meg, hogy amikor **2 : 3 arányban osztottunk fel** egy mennyiséget, akkor **először 5 egyenlő részre osztottuk azt, majd az egyenlő részekből vettünk 2-t, illetve 3-at**.

2 rész a mennyiség $\frac{2}{5}$ része volt, 3 rész pedig a $\frac{3}{5}$ része: $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$.

2. példa

Anna és Bea 18 db mangót vásárolt. Anna 2 €-t, Bea 7 €-t adott a mangóért. Hány darab mangó jutott egy-egy lánynak, ha a kifizetett pénz arányában osztották el a gyümölcsöt?

Összesen 9 €-t fizettek. Számítsuk ki, hogy 1 €-ért hány mangó jár. Osszuk a 18 mangót 9 egyenlő részre, és ebből vegyünk 2 részt, illetve 7 részt.

$18\text{ db} : 9 = 2\text{ db}$; $2 \cdot 2\text{ db} = 4\text{ db}$; $7 \cdot 2\text{ db} = 14\text{ db}$



Anna 4 db, Bea 14 db mangót kapott.

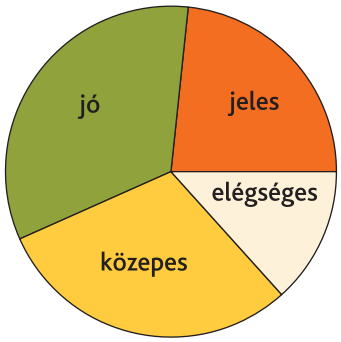
Ellenőrzés:

Arányuk: $\frac{4\text{ db}}{14\text{ db}} = \frac{2}{7}$; összegük: $4\text{ db} + 14\text{ db} = 18\text{ db}$.

3. példa

Osztályzat	5	4	3	2	1	Össz.
Tanuló	7	10	9	4	0	30

Egy 6. osztály félévi matematikajegyeit táblázatba foglaltuk. Készítsünk **kördiagramot** az osztályzatok megoszlásából.



30 tanuló $\frac{7}{30}$ része jeles, $\frac{10}{30}$ része jó, $\frac{9}{30}$ része közepes, $\frac{4}{30}$ része elégséges.

A teljesszöget 7 : 10 : 9 : 4 arányban kell felosztanunk. (7 + 10 + 9 + 4 = 30)

$360° : 30 = 12°$

$7 \cdot 12° = 84°$, $10 \cdot 12° = 120°$, $9 \cdot 12° = 108°$, $4 \cdot 12° = 48°$

A jeleseket 84°-os középponti szögű körcikk szemlélteti, a jókat 120°-os, a közepeseket 108°-os, az elégségeseket 48°-os.

Ellenőrzés: $84° + 120° + 108° + 48° = 360°$

Egy tanulónak a teljesszög egy harmincad része, 12° felel meg

FELADATOK

B8

Rakjatok 12 ötforintost a padotokra! Osszátok el két gyerek között az ötforintosokat úgy, hogy az egyiknek kétszer annyi jusson, mint a másiknak! Hány ötforintost kap az egyik, hányat a másik tanuló?

Csoportmunka

Gyakorló
4.96.–4.97.;
Feladatgyűjtemény
4.4.01.–02., 4.4.06., 4.4.08.

B9

a) Ossz szét két gyerek között 500 Ft-ot 2 : 3 arányban!

b) Egy testvérpár nyári diákmunkán fagylaltot árult. Egyikük 5 napig, másikuk 15 napig dolgozott. A munkáért 150 000 Ft-ot kaptak. A pénzt a ledolgozott munkanapok arányában osztják el egymás között. Mennyi ez az arány?

Mekkora részét kapják a testvérek külön-külön a 150 000 Ft-nak?

Hány forintot kapnak a testvérek külön-külön?

c) Az egyik osztály 50 kg, a másik 100 kg papírt gyűjtött. A papírért kapott pénzt az általuk gyűjtött papír tömegének arányában osztják fel.

Mennyi ez az arány? Mekkora részét kapják az egyes osztályok a pénznek?

d) Ossz fel 120 000 Ft-ot két ember között 3 : 7 arányban!

Mekkora részét kapja egy-egy ember a 120 000 Ft-nak?

Hány századrészét kapja egy-egy ember a 120 000 Ft-nak?

Hány forintot kapnak külön-külön?



Egy 6 cm hosszú papírcsík hajtogatásával kísérletezhetsz.

B10

Végy föl egy 6 cm hosszú szakaszt! Szerkesztéssel oszd fel két részre úgy, hogy a részek hosszúságának aránya 3 : 1 legyen!

2006-ban érettségi feladat volt.

Egy háromszög belső szögeinek aránya 2 : 5 : 11.
Hány fokos a legkisebb szög?

bővített szint

VALÓSZÍNŰSÉGI KÍSÉRLETEK

1. példa

Marci és Nóra a közösen vásárolt tombolán a remélt csokoládétorta helyett egy labdát nyert. Ezért elhatározták, hogy pénzfeldobással döntik el, kié legyen a labda. 25-ször feldobnak három pénzérmét, egy húszforintost, egy tízforintost és egy ötforintost.

Marci pontot kap, ha — **M:** három kép (K) vagy három írás (I) van felül.

Nóra pontot kap, ha — **N:** a három érme közül kettőn kép van felül.

Senki sem kap pontot, ha — **S:** két érmén írás, egyen kép van felül.

Azé a labda, aki több pontot szerez a kísérletben.

Vajon igazságos volt-e ez a sorsolás?

A **kísérlet** egy lehetséges eredménye:

	I	K	I	I	I	K	I	I	K	I	K	K	K	I	I	K	I	I	K	K	K	K	K	I	K
	K	K	K	K	I	K	K	I	K	I	I	K	K	I	K	I	K	K	I	I	K	I	K	I	I
	K	K	K	I	K	I	I	I	I	K	K	K	K	I	I	I	K	K	K	I	K	I	I	I	K
M	–	•	–	–	–	–	–	•	–	–	–	•	•	•	–	–	–	–	–	–	•	–	–	•	–
N	•	–	•	–	–	•	–	–	•	–	•	–	–	–	–	–	•	•	•	–	–	–	•	–	•
S	–	–	–	•	•	–	•	–	–	•	–	–	–	–	•	•	–	–	–	•	–	•	–	–	–

Nórához pártolt a szerencse. A 25 dobás során az **N esemény** 10-szer, az **M** esemény 7-szer következett be. Ezt úgy is mondjuk, hogy az **N** esemény **gyakorisága** 10 volt, az **M** eseményé 7.

Ez a 25 dobásnak egy lehetséges kimenetele. Megismételve a kísérletet nagy valószínűséggel más lenne az eredmény.

Értelmezés

Különböző kísérletek eredményét összehasonlíthatjuk, ha azt vizsgáljuk, hogy a megfigyelt esetek mekkora részében, hány százalékában következett be az esemény. Ezt az értéket nevezzük az esemény **relatív gyakoriságának**.

Az **M** esemény relatív gyakorisága ebben a kísérletben: $\frac{7}{25} = 0{,}28$. Az **M** esemény a dobások 28%-ában következett be.

Az **N** esemény relatív gyakorisága: $\frac{10}{25} = 0{,}40$. Az **N** esemény a dobások 40%-ában következett be.

Az **S** esemény relatív gyakorisága: $\frac{8}{25} = 0{,}32$, azaz 32%.

»»

»» Hogyan dönthetjük el, hogy igazságos volt-e a sorsolás?

Gyűjtsük össze a **lehetséges eseteket**, azt, hogy a kísérletnek hány tényleges konkrét kimenetele lehet. **Minden konkrét kimenetel ugyanakkora eséllyel következhet be.**

20	I	I	I	I	K	K	K	K
10	I	I	K	K	I	I	K	K
5	I	K	I	K	I	K	I	K
	M	S	S	N	S	N	N	M

Az **M** esemény szempontjából a 8 lehetséges eset közül 2 **kedvező eset** van. Ha nagyon sokszor végezzük el a kísérletet, akkor az esetek mintegy $\frac{2}{8} = 0{,}25$ részében, vagyis 25%-ában várható, hogy bekövetkezik az **M** esemény.

Az **N**, illetve az **S** esemény szempontjából a 8 lehetséges eset közül 3 kedvező eset van.

Ha sokszor végezzük el a kísérletet, akkor az eseteknek körülbelül a $\frac{3}{8} = 0{,}375$ részében, azaz 37,5%-ában az **N** esemény, illetve 37,5%-ában az **S** esemény bekövetkezése várható.

Nem volt igazságos a sorsolás, mert az **N** esemény bekövetkezésének nagyobb volt a **valószínűsége**, mint az **M** esemény bekövetkezésének.

Nyerhet Marci is. Ám nagy számú dobás esetén ennek kisebb a valószínűsége, mint annak, hogy Nóra nyer.

FELADATOK

Kísérletezz!

49 Végezzétek el 20-szor az 1. példában leírt pénzfeldobásos kísérletet! A dobások eredményét rögzítsétek táblázatban!

a) Számítsátok ki az **M** és az **N** esemény relatív gyakoriságát az általatok végzett kísérletben!

b) Az összes kísérlet figyelembevételével is számítsátok ki a relatív gyakoriságokat!

Nem gurulnak szét a pénzérmék, ha például átlátszó fedelű joghurtos pohárba tesszük őket, és dobás helyett jól megrázzuk a poharat.

Közösen dolgozzatok. Szervezzétek meg a munkát!

50 Dobjatok fel 40-szer két különböző pénzérmét! Figyeljétek meg a következő eseményeket:

A: Mindkét pénzérmén írás van felül. (I I)

B: Mindkét pénzérmén kép van felül. (K K)

C: Az egyik érmén kép, a másikon írás van felül. (K I)

A dobások eredményét rögzítsétek táblázatban!

a) A kísérlet elvégzése előtt becsüljétek meg, hogy a 40 dobás mekkora részében, illetve hány százalékában fog bekövetkezni az **A**, a **B** és a **C** esemény!

b) A kísérlet elvégzése után számítsátok ki, hogy a 40 dobás mekkora részében, illetve hány százalékában következtek be az egyes események!

Hasonlítsátok össze a becsült és a kísérletben kapott értékeket!

51 Dobjatok fel 50-szer egy dobókockát! Becsüljétek meg, majd határozzátok meg a következő események relatív gyakoriságát!

A dobások eredményét rögzítsétek táblázatban!

N: 3-nál nagyobb számot dobtunk.

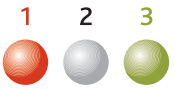
K: 3-nál kisebb számot dobtunk.

P: Páros számot dobtunk.

Q: Páratlan számot dobtunk.

2. példa

Átlátszó fedelű pohárba tegyünk három különböző színű golyót. Rázzuk meg, majd jegyezzük le, hogy a kissé megdöntött pohár alján milyen sorrendben helyezkednek el. Az ábrán megrajzolt sorrend legyen az alapsorrend.



Először becsüljük meg, majd a kísérletet 20-szor elvégezve határozzuk meg a következő események relatív gyakoriságát.

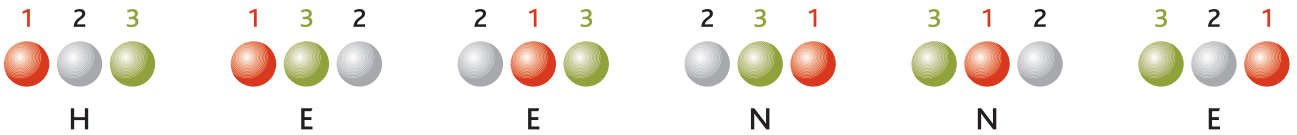
H: Az összerázás után három golyó lesz az eredeti helyén.

K: Az összerázás után pontosan két golyó lesz az eredeti helyén.

E: Az összerázás után pontosan egy golyó lesz az eredeti helyén.

N: Az összerázás után nulla golyó lesz az eredeti helyén.

Becslés: Soroljuk fel az összes lehetséges esetet. Vizsgáljuk meg, hogy mely esetben hány golyó kerül az eredeti helyére.



Az összes lehetséges eset száma: 6

Egyféle olyan kimenetel lehetséges, amelyben bekövetkezik a **H** esemény. Ezért ha sokszor végezzük el a kísérletet, akkor az eseteknek körülbelül az $\frac{1}{6}$ részében, közel 17%-ában várható a **H** esemény bekövetkezése.

A **K** esemény sohasem következhet be. (**Miért?**) **Lehetetlen esemény.**

Háromféle olyan kimenetel lehetséges, amelyben bekövetkezik az **E** esemény. Ezért az eseteknek körülbelül a $\frac{3}{6}$ részében, vagyis 50%-ában várható az **E** esemény bekövetkezése.

Kétféle olyan kimenetel lehetséges, amelyben bekövetkezik az **N** esemény. Ezért az eseteknek körülbelül a $\frac{2}{6}$ részében, mintegy 33%-ában várható az **N** esemény bekövetkezése.

Vegyük észre: $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+0=\frac{6}{6}=1$

FELADAT

52 Dobj fel 25-ször két dobókockát! A dobások eredményét rögzítsd táblázatban! Becsüld meg, majd határozd meg a következő események relatív gyakoriságát! A dobott számok szorzata:

Gyakorló 9.60.–9.70.

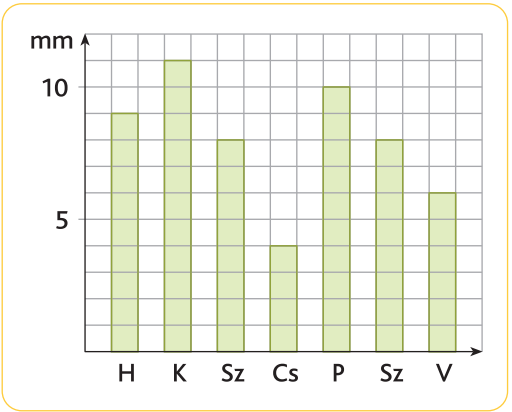
K: 9; **P:** páros; **L:** 12; **Q:** páratlan; **M:** 21; **R:** kisebb 40-nél

Az előző események közül melyik **biztos esemény**, melyik esemény **lehetséges, de nem biztos** és melyik esemény **lehetetlen**?

Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora az esélye annak, hogy Pál elsőre kitalálja a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát?

© 2008-ban érettségi feladat volt.

GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK



B11 A grafikon azt szemlélteti, hogy egy esős időszakban a hét mely napján hány milliméter eső esett.

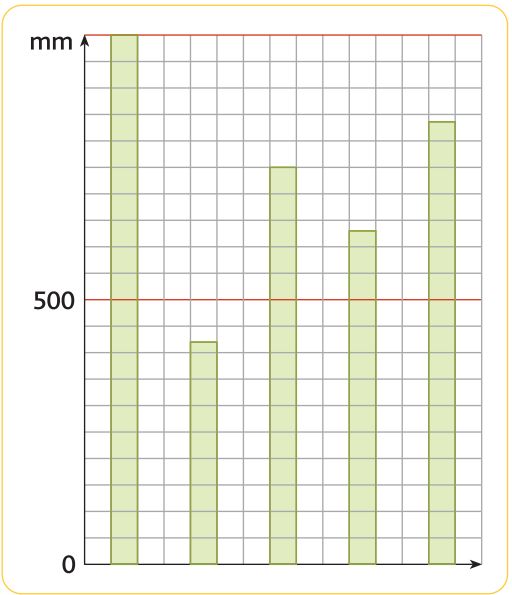
◉ *Lásd a kislexikonban a* milliméter *2. címszót.*

a) Mely napon esett a legtöbb eső?

b) Hány milliméterrel esett több eső kedden, mint vasárnap?

c) Átlagosan hány milliméter eső esett naponta a hét folyamán?

d) Ha vasárnap estig esik még 14 mm eső, akkor hogyan változik a *c)* pontban kiszámított átlag?



◉ *Mindegyik feladatban jelöld meg a helyes választ!*

B12 Öt nagyváros évi csapadékmennyiségét ábrázolja a grafikon egy adott évben.

A városok közül Madridban hullott a legkevesebb csapadék. Budapesten 1,5-szer annyi csapadékot mértek, mint Madridban. Ez alig volt több, mint a Zürichben lehullott csapadék 60%-a. Rómában viszont 206 mm-rel több hullott, mint Budapesten.

A diagramról leolvasható Hamburg évi csapadékmennyisége is.

◉ *Melyik oszlop melyik város csapadékmennyiségét jelöli? Írd a diagram megfelelő oszlopa alá a városok kezdőbetűjét!*

❶ Hány milliméter csapadék hullott Madridban az adott évben?

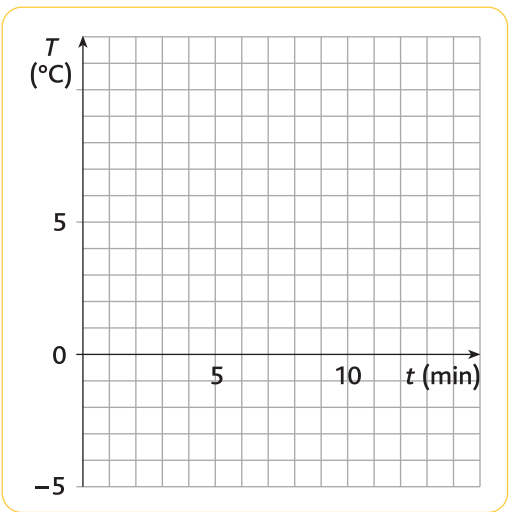
A: 420 mm; **B:** 450 mm; **C:** 525 mm; **D:** 1000 mm

❷ Mennyi csapadék hullott Hamburgban?

A: 630 mm; **B:** 750 mm; **C:** 836 mm; **D:** 1000 mm

❸ Hol hullott a legtöbb csapadék?

A: Budapesten; **B:** Hamburgban; **C:** Zürichben



B13 Két gázlángon vizet, illetve alkoholt melegítünk egyidejűleg.

Az alkohol kezdeti hőmérséklete −4 °C, a vízé 5 °C.

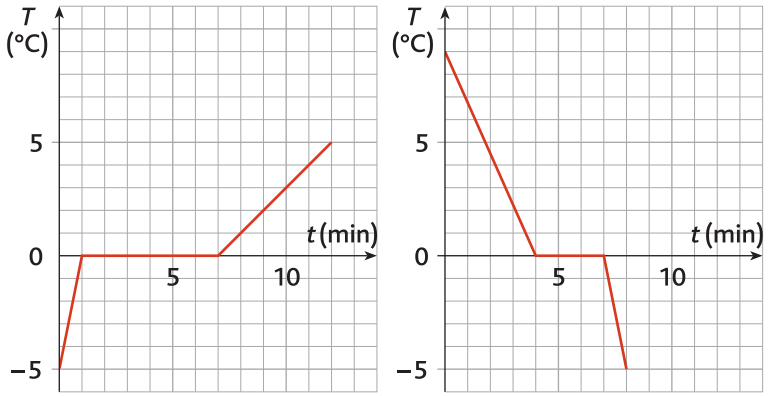
Az alkohol hőmérséklete percenként 2 °C-kal, a vízé 2 percenként 1 °C-kal nő.

a) Ábrázold kétféle színnel közös grafikonon az alkohol, illetve a víz hőmérsékletének időbeli változását!

b) Mikor lesz egyenlő az alkohol és a víz hőmérséklete?

Mennyi lesz ekkor a hőmérséklet?

B14 Egy kis tálkában vizet helyeztünk a hűtőszekrény mélyhűtő rekeszébe. Amikor megfagyott, kivettük, hogy felolvadjon.



a) A két grafikon közül melyik a fagyásé és melyik az olvadásé?

b) Mettől meddig nőtt a víz hőmérséklete az olvadási folyamatban?

c) Melyik időszakban volt teljes egészében szilárd halmazállapotú a víz a fagyasztási kísérletnél? **A víz fagyáspontja 0 °C. Ezen a hőmérsékleten jég és víz is előfordulhat.**

d) Mi történt a fagyasztási kísérletben a 3. perctől a 8. percig bezárólag?

e) Mely anyag felmelegedési üteme a gyorsabb? A vízé vagy a jégé?

Gyakorló
4.98.–4.99.

B15 Diagramon ábrázoltuk, hogy egy táborban naponta hány lány ment el a vitorlázni. Egészítsd ki a diagramot!

Hány lányt jelölhet egy szimbólum?

A diagramon csak a negyedik sor készült el hiánytalanul.

Hétfő		10 lány
Kedd		lány
Szerda		30 lány
Csütörtök		25 lány

B16 Bizonyos mennyiségű szörp palackozásához 2,5 dl-es üvegekből 432 db kell.

a) Hány palackra van szükségünk, ha a 2,5 dl-esek helyett 4-szer akkora űrtartalmú palackokat használunk?

b) Hány palack szükséges, ha a 2,5 dl-esek helyett 6 dl-eseket használunk?

Figyelempróba

B17 Joli néni karácsonyra 1260 Ft-ért 2 kg-os élő halat vásárolt. Tisztításkor a hal 30%-a a szemétbe került.

a) Hány forintba került Joli néninek 1 kg tisztított halhús?

b) Hány százalékkal lett volna drágább 1 kg szeletelt hal, ha 1 kg 75 dkg-ért 2520 Ft-ot kértek?

B18 Egy áruházban a kinézett fényképezőgép 60 000 Ft-os árából 25%-ot elengednek. Egy másik áruházban 60 000 Ft-ba kerül ez a gép, de egy kiegészítő objektívet adnak hozzá ajándékba. Ezt az objektívet, amelynek mindkét helyen 14 000 Ft az ára, mindenképpen szeretném megvenni.

Melyik áruházban célszerű megvásárolnom ezeket az eszközöket?

Bővített szint

Többet ésszel ...

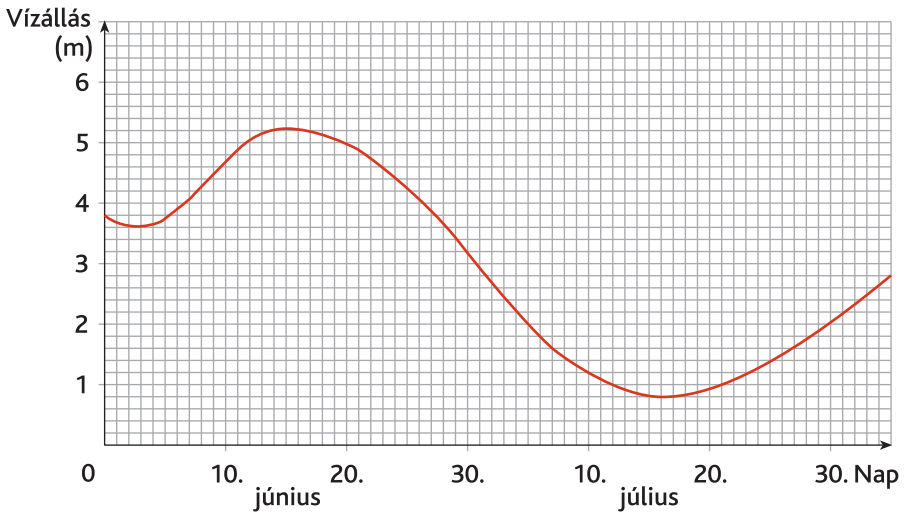
A 10, 20, és 50 eurócentesek ún. „északi aranyból” készülnek, melynek 89%-a réz, 5%-a alumínium, 5%-a cink és 1%-a ón. Van 1 db 50 centesünk, 2 db 20 centesünk, és 1 db 10 centesünk. Hány százaléka réz az 1 eurónknak?

Süsü meglátogatta 49 fejű dédapját. Vitt magával 25 vadkörtét. Hogyan ossza szét a vadkörtéket, hogy dédapja 49-szer annyit kapjon, mint ő?

TUDÁSPRÓBA

53

1 Egy folyó nyári vízszintingadozását szemlélteti a grafikon. 1,6 m alatti vízállás esetén már nem járhatnak a hajók.



a) Mettől meddig nem járhattak a hajók a folyón?

b) Mikor volt a legmagasabb a vízállás?

c) Milyen magasan állt ekkor a víz?

d) Hogyan változott a vízállás június 23-tól július 13-ig?

2 33,4 m hosszú műanyag cső ára 6179 Ft.
Mennyibe kerül 50,1 m hosszú ugyanilyen cső?

3 Bizonyos mennyiségű étel tartósításához 4 dl-es konzervdobozokból 324 db-ra van szükség.

a) Hány konzervdobozra van szükségünk, ha a 4 dl-esek helyett 6-szor akkora űrtartalmú dobozokat használunk?

b) Hány konzervdobozt tölthetünk meg ugyanennyi étellel, ha a konzervdobozok űrtartalma $\frac{3}{5}$ része a 4 dl-es konzervdobozok űrtartalmának?

c) Hány dobozra van szükség, ha a 4 dl-esek helyett 9 dl-eseket használunk?

4 Mennyi 4000 Ft-nak

a) 1%-a;

b) 25%-a;

c) 100%-a;

d) 150%-a;

e) 68%-a;

f) 2,5%-a

5 Andor vásárláskor 9600 Ft kedvezményt kapott, amely az áru eredeti árának 8%-át tette ki. Hány forintba került eredetileg az áru?

Fejtörő!

Győző novemberig matematikából 2 db 4-es osztályzatot kapott.

a) Hány 5-öst kapott, ha a 4-es és az 5-ös osztályzatok aránya 1 : 3?

b) Hány 4-est kapott egész évben, ha 32%-kal kevesebb 4-est kapott, mint 5-öst és egész évben 25 db 5-öst szerzett?

4. TENGELYES TÜKRÖZÉS

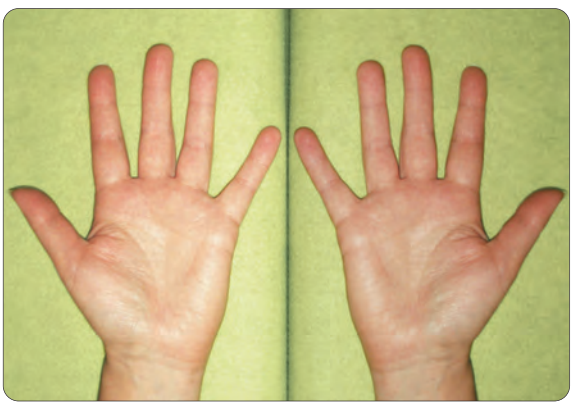


Az elmúlt években tükörrel, hajtogatással, rajzzal hoztunk létre tükrös alakzatokat. Ebben az évben összegyűjtjük és rendszerezzük az ilyen alakzatok tulajdonságait, és alkalmazzuk azokat geometriai feladatok megoldásában.

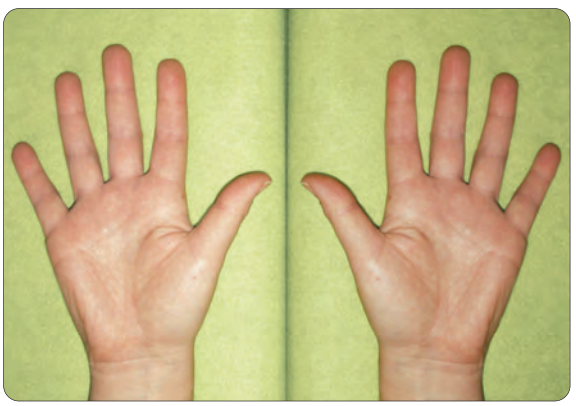
MIT LÁTUNK A TÜKÖRBEN?

Mindennapos tapasztalat, hogy a síktükörben, ablaküvegben, sima vízfelületen látjuk önmagunkat és a körülöttünk lévő tárgyakat. A síktükörben a lány képe olyan távolságra látszik a tükörben, mint amekkora a lány és a tükör távolsága, a nagyságuk megegyezik. A két lány mégsem teljesen egyforma. Az egyik a jobb kezében tartja a fésűt, a másik a balban. A síktükörben a jobb és a bal oldal felcserélődik.

Például a tükörben olyannak látjuk
a bal tenyerünket, mintha
a kép a jobb tenyerünk lenne,



a jobb tenyerünket, mintha
a kép a bal tenyerünk lenne.

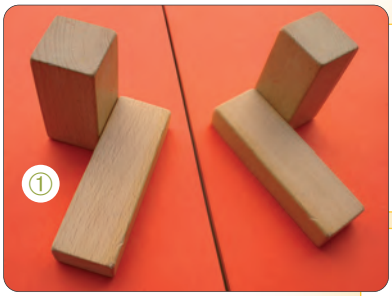


A tükörben olyannak látjuk a bal cipőt,
mintha a kép a jobb cipő lenne,



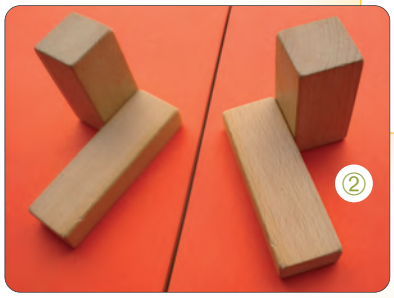
a jobb cipőt, mintha
a kép a bal cipő lenne.





1. példa

Építsük fel az ① testet.
Helyezzük tükör elé. Figyeljük meg az ① test tükörképét.
Építsük fel a ② testet úgy, hogy azonos legyen az ① test tükörképével. Figyeljük meg a ② test tükörképét is.



Ha az ① test mellé egy üveglapot merőlegesen az asztalra helyezünk, akkor az ① test üvegben látható képe és a ② test egymással fedésbe hozható.
A ② test tükörképe is fedésbe hozható az ① testtel. A két test kölcsönösen egymás tükörképe.
Ekkor a két test megfelelő pontjai egyenlő távolságra vannak az üveglaptól.



2. példa

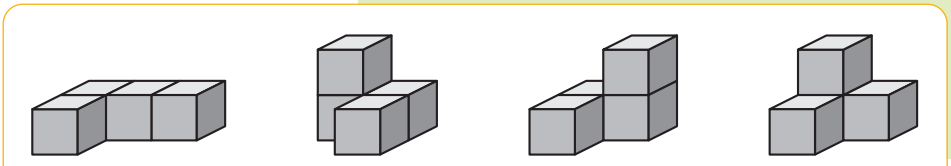
Építsük fel az ① testtel azonos ③ testet. Lehet-e az így elkészített ③ test az ① test tükörképe?

Akárhogyan is próbálkozunk, a ③ testet nem tudjuk úgy állítani, ahogyan az ① testet a tükörben látjuk.

FELADATOK

Kísérletezz!

1 Építsd föl például a színesrúdkészlet kis kockáiból vagy kockacukorból (kevés gyurma segítségével) a rajzzal adott testeket és azok tükörképét!



Üveglap segítségével ellenőrizd, hogy az eredeti testnek az üveglapban látható képe azonos-e a felépített „tükörképpel”!

2 Öt-öt kis kockából építs föl minél többféle tükrös testpárt!
Ellenőrizd, hogy valóban tükrös testpárt építettél-e! Válaszd ki azokat a testpárokat, amelyek valamilyen mozgással egymásba vihetők!

Kísérletezz!

Melyik két forma összeillesztésével kapunk tükrös alakzatot?
Az összeillesztést négyzetrácsos füzetben rajzold meg!

Minden alakzatot csak egyszer használhatsz fel!

A TENGELYES TÜKRÖZÉS TULAJDONSÁGAI

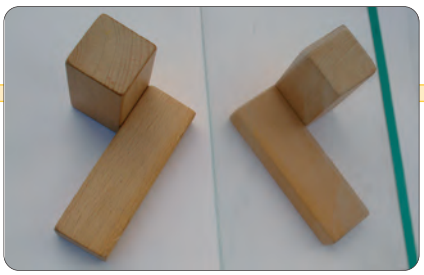
1. példa

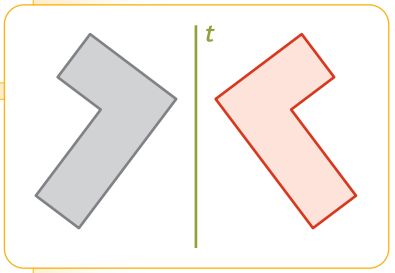
Építsünk testet a füzet lapjára. Rajzoljuk körül a test alapját feketével. Állítsunk tükröt a füzetlapra merőlegesen. Húzzuk meg a tükör helyét (t) a lapon.

Építsük meg a test tükörképét is, ennek az alapját színessel húzzuk körül.

a) Figyeljük meg a füzetlap síkjában feketével és színessel megrajzolt alakzatokat.

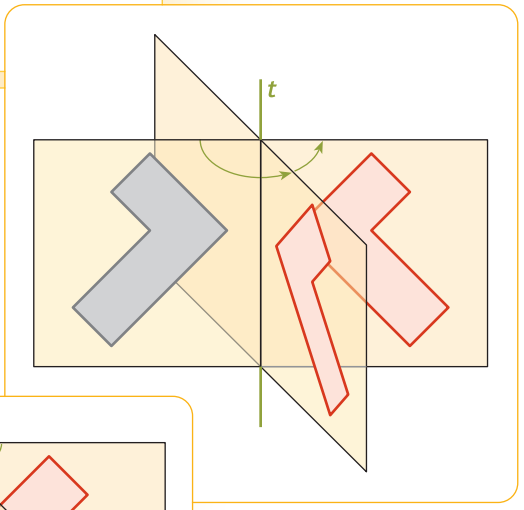
b) Másoljuk át áttetsző lapra a teljes ábrát. Próbáljuk meg az áttetsző papírlap mozgatásával a színes ábrával lefedni a füzetlapon lévő fekete ábrát.





a Az egyik lehetséges megoldást mutatja a fénykép.

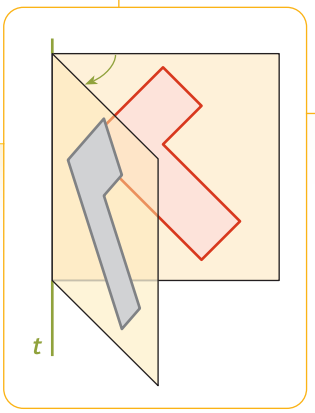
Tükörrel ellenőrizhetjük, hogy a feketével rajzolt alakzat képe a színessel rajzolt alakzat, a színessel rajzolt alakzat képe a feketével rajzolt alakzat.



b Ha az áttetsző lapot a füzetlap síkjában mozgatjuk, akkor nem tudjuk kölcsönösen fedésbe hozni a fekete és a színes ábrát.

Ha az áttetsző lapot átfordítjuk, akkor a fekete és a színes alakzat kölcsönösen fedésbe hozható. Az átfordítással a síkot 180°-kal elforgattuk a t egyenes körül. Így nemcsak a két alakzat, hanem a sík minden pontja helyet cserél a tükörképével.

A t körüli 180°-os elforgatás a sík félbehajtásával is megmutatható. Így azt is igazolhatjuk, hogy minden pont ugyanakkora távolságra van a t-től, mint a képe.



Játék

A következő játékot egy papírlapon kell játszani. A lap egyik szimmetriatengelyét jelöljük be.

Az A játékos a lap egyik felén kijelöl egy pontot, majd a B játékos megpróbálja minél pontosabban megjelölni a szimmetriatengely túloldalán a pont tükörképének lehetséges helyét.

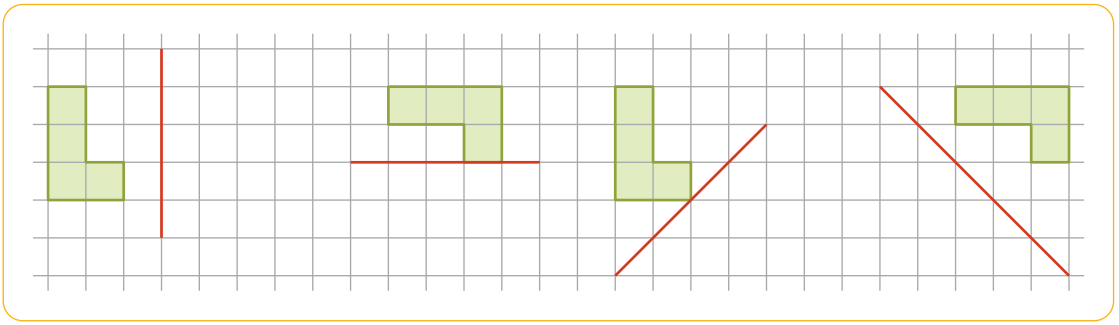
A tipp megjelölése után a lapot félbehajtva és fény felé tartva lemérhető az eltérés. Ezután a B játékos jelöl ki egy pontot, és az A játékos tippel. A játékot az nyeri, akinél öt tippelésből kevesebb milliméter az eltérések összege.



FELADATOK

Használd a tükröt!

3 Rajzold meg az ábra tükörképét úgy, hogy a tükröt a pirossal rajzolt egyenesre teszed!



Használj például pausz-papírt.

4 A következő feladatokat vonalzó, körző használata nélkül, csupán papírhajtogatással oldd meg!

a) Jelölj ki a lapon két pontot! Keresd meg azokat a pontokat, amelyek a két ponttól egyenlő távolságra vannak!

b) Állíts elő párhuzamos egyenespárt! Jelöld ki azokat a pontokat, amelyek a két egyenestől ugyanakkora távolságra vannak!

Gyakorló
8.27–8.33.

c) Állíts elő két egyenest úgy, hogy messék egymást! Határozd meg a lapon azokat a pontokat, amelyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak!

d) Jelölj ki a lapon egy egyenest és az egyenesen kívül két pontot! Hajtogatással határozd meg az egyenesnek azt a pontját, amely a két adott ponttól egyenlő távolságra van!

*Melyik alakzat **egybevágó** az eredeti háromszöggel, vagyis ugyanolyan alakú és méretű, mint az eredeti háromszög?*

*Melyik **tükörképe** az eredeti háromszögnek?*

*Melyik **hasonló** az eredeti háromszöghöz, vagyis ugyanolyan alakú, mint az eredeti háromszög?*

5 Derékszögű koordináta-rendszerben ábrázold az $ABC\triangle$-et, ha $A(-4; 2)$; $B(0; 4)$; $C(-4; 4)$! Változtasd a háromszög pontjainak koordinátáit (jelzőszámait) az utasítások szerint, és rajzold meg különböző színekkel a változtatások után kapott alakzatokat is!

Hasonlítsd össze az eredeti háromszöget és a kapott alakzatot!

a) Az első jelzőszám ne változzék, a másodikat szorozd meg -1-gyel!

b) Mindkét jelzőszámból vonj ki 5-öt!

c) Mindkét jelzőszámot szorozd meg -1-gyel!

d) Az első jelzőszámot szorozd meg -1-gyel, a másodikat ne változtasd!

e) Mindkét jelzőszámot szorozd meg 2-vel!

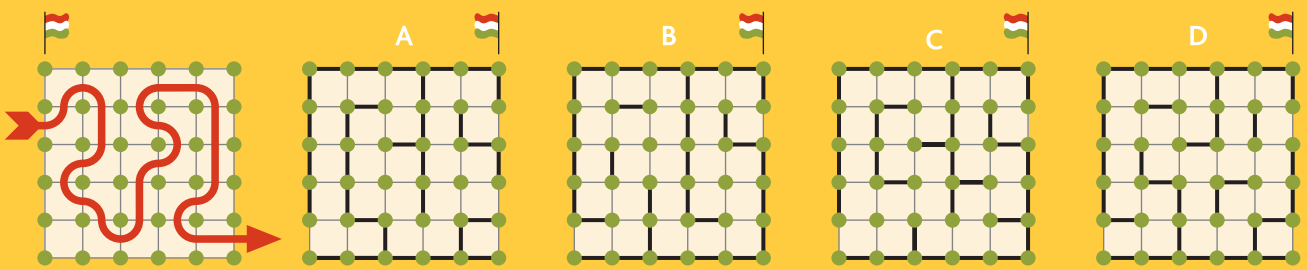
f) Mindkét jelzőszámot oszd el -2-vel!

g) Cseréld fel a két jelzőszámot!

Jelöld meg a helyes választ!

Melyik labirintusból kivezető út **tükörképét** láthatod az első ábrán?

Vigyázz, lehet, hogy több megoldás is van!

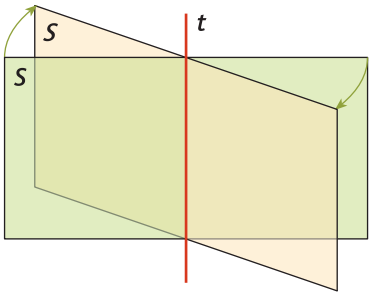


Figyeld meg!

A tengelyes tükrözés megadható a tengellyel.

Ha a síkot egy egyenese – **a tengely** – körül 180°-kal elforgatjuk, akkor az elforgatással helyet cserélő pontpárok, szakaszpárok és bármilyen alakzatpárok kölcsönösen egymás tükörképei.

A tengely minden pontjának tükörképe önmaga, és ez a tulajdonság csak a tengely pontjaira igaz.

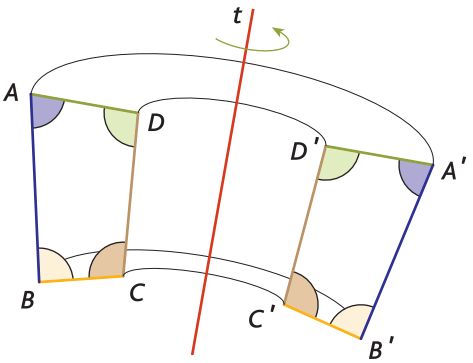


Mivel a sík 180°-os elforgatásával bármely alakzat kölcsönösen fedésbe hozható a tükörképével, ezért **bármelyik alakzat egybevágó a tükörképével**.

Ebből az is következik, hogy

minden szakasz egyenlő hosszúságú a tükörképével;

minden szög egyenlő nagyságú a tükörképével.

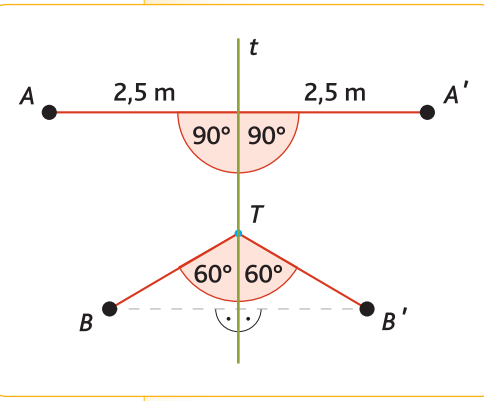


2. példa

Egy tornateremben az egyik falat tükör borítja. Rajzold le az egyes gyerekek és tükörképük mozgását! **Ami a valóságban 1 m, az a rajzon 1 cm legyen.**

Anett 2,5 m távolságra áll a tükörtől, majd a tükörrel 90°-os szöget bezáró egyenes úton a tükörhöz megy.

Berta 1,7 m-re áll a tükörtől, majd a tükörrel 60°-os szöget bezáró egyenes úton a tükörhöz megy.



A gyerekek ugyanakkora távolságra vannak a tükörtől, mint a tükörképeik.

Anett tükörképe is a tükörrel 90°-os szöget bezáró egyenes úton megy a tükörhöz.

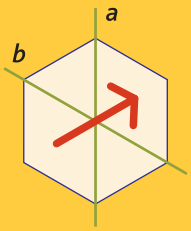
Berta tükörképe is a tükörrel 60°-os szöget bezáró egyenes úton megy a tükörhöz. A tükörnél ugyanabban a T pontban találkozik Berta és a tükörképe.

Fejtörő!

Az első ábrán látható átlátszó hatszöget először az a, majd a b átlója mentén 180°-kal megforgatjuk. Mit látunk ekkor?

Vigyázz, az első forgatás után a b átló is máshogyan látszódhat szemből!

Jelöld meg a helyes választ!



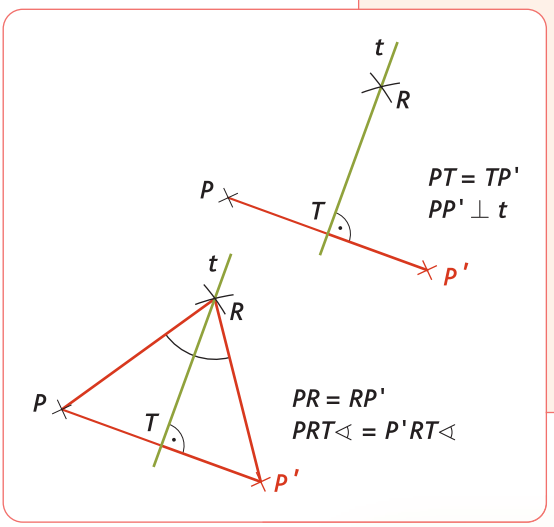
A: 

B: 

C: 

D: 

Figyeld meg!



A pont és a tükörképe egyenlő távolságra van a tengelytől.

A pontot a tükörképével összekötő szakasz merőleges a tükörtengelyre, ha a pont és a tükörképe nem esik egybe.

A tengelyes tükrözés megadható egy ponttal és a tükörképével, ha e két pont különböző. Ugyanis, ha ismerjük egy adott P pont P' tükörképét, és $P \neq P'$, akkor a tengely a PP' szakasz **felezőmerőlegese**.

Az előző gondolatmenetből az is következik, hogy *a pont és a tükörképe egyenlő távolságra van a tengely bármelyik pontjától*.

A $PRT\sphericalangle$ és a $P'RT\sphericalangle$ is tükrös, tehát a szög és tükörképe egyenlők.

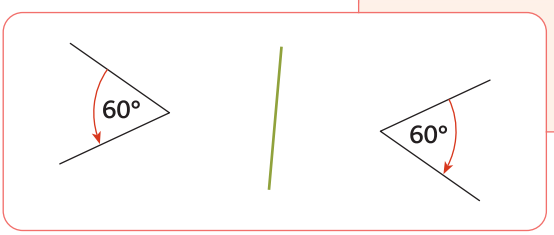
3. példa



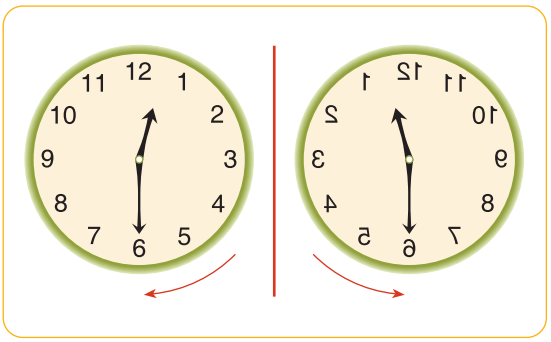
Nóra 3 m távolságra áll a tükörtől, a tükörrel szemben, és egyik karját előrenyújtja. Ezzel a kéztartással balra át!-ot csinál.

Nóra 90°-kal elfordul balra. A tükörképe 90°-kal jobbra fordul el. Az elfordulás szöge ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú.

Figyeld meg!



Az elfordulás szögének és tükörképének a nagysága egyenlő, de ellentétes irányú. Ebből következik, hogy **a tengelyes tükrözés ellenkezőjére változtatja a körüljárás irányát**.



Például:

A tükörben az óra mutatói ellenkező irányban látszanak haladni, mint a valóságban.

Gyakorló 8.44.;
Feladatgyűjtemény 6.4.01–13.

Fejtörő!

Írd a kis négyzetbe az I betűt, ha igaz az állítás, illetve a H betűt, ha hamis!

A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

Az óra mutatói tükrös helyzetűek:

A: 2 órakor és fél 5-kor; ☐

B: 4 órakor és 8 órakor; ☐

C: fél 9-kor és fél 4-kor; ☐

D: éjfélkor és fél 6-kor; ☐

E: éjfél után 20 perccel és 11 óra után 40 perccel ☐

A TÜKÖRKÉP MEGSZERKESZTÉSE

A tengelyes tükrözés tulajdonságait felhasználva előállíthatjuk a síkbeli alakzat tükörképét anélkül, hogy a síkot a tengely mentén félbehajtanánk, vagy a tengely körül 180°-kal elforgatnánk.

1. példa

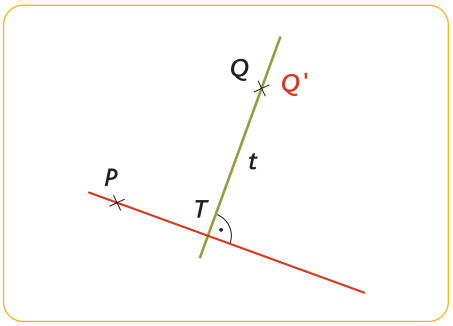
Szerkesszük meg egy adott pont tükörképét.

1. megoldás

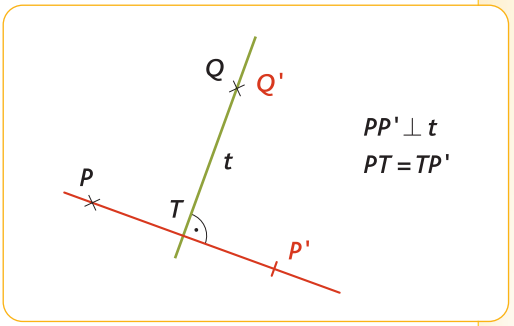
Ha a Q pont a tengelyen van, akkor a tükörképe önmaga: $Q' = Q$

A tengely a síkot két félsíkra osztja. Ha a P pont az egyik félsíkban van, és nem pontja a tengelynek, akkor a tükörképe (a P') a másik félsíkba kerül.

A ponton át a tengelyre merőleges egyenest húzunk, majd ...

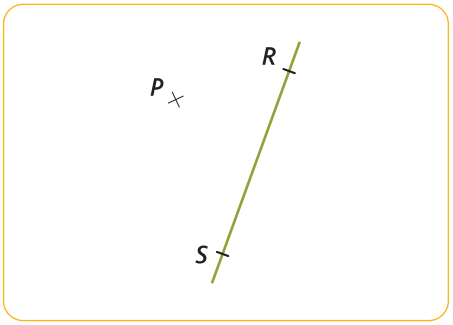


... annak a tengelyen túli meghosszabbítására felmérjük az eredeti pont és a tengely közti szakasz hosszát.

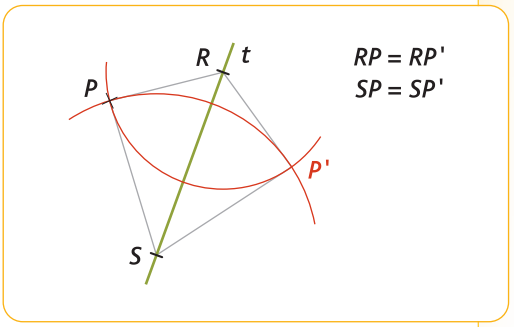


2. megoldás

A tengelyen kijelöljük az R és az S pontot:



Az R pontból RP sugárral, az S pontból SP sugárral körívet húzunk. A körívek metszéspontjai: P és P'.



A tengelyes tükrözés tulajdonságait alkalmazva igazold önállóan a két szerkesztési mód helyességét!

Ha már ismersz valamely szerkesztőprogramot, akkor annak segítségével is hajtsd végre a tengelyes tükrözést!

Ha egy könyvet tükör elé tartasz, a betűk **tükörírásban** látszanak.

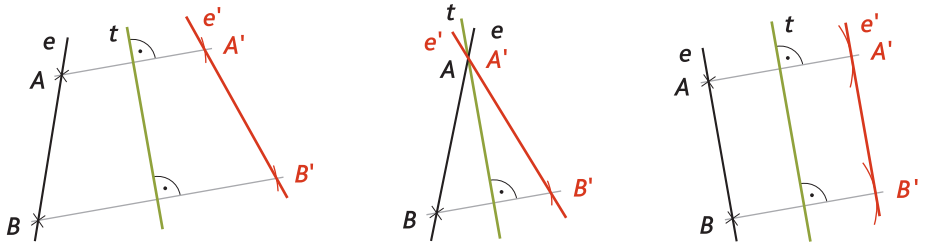
a) El tudod-e olvasni ezt a verset, amit Alice a Tükörházban lévő könyvben látott? (Lewis Carroll: Alice Tükörországban, Tótfalusi István fordítása.)

b) Tükörírást láthatsz a bélyegzőkön is. Ezek használata közben is tükrözünk. Tervezz egy saját bélyegzőt, tükörírással!

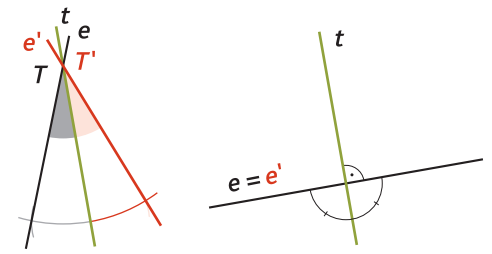
A GRUFFACSÓR
Nézsonra járt, nyálkás brigyók
turboltak, purrtak a zepén
nyamlongott mind a pirityók,
bröftyent a mamsi plény.

2. példa

Szerkesszük meg egy adott egyenes tükörképét.

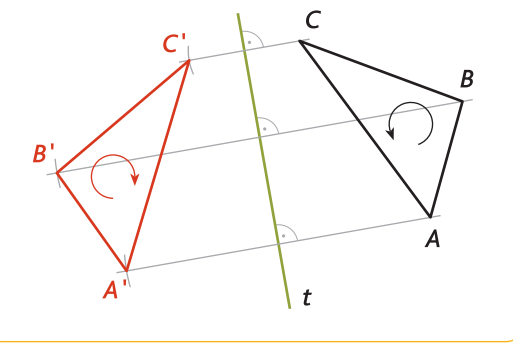


Az egyenest (e) két pontja meghatározza, ezért elegendő két (A és B) pontját tükrözzünk. Az AB egyenes tükörképe az $A'B'$ egyenes.



Ha az egyenes (e) metszi a tengelyt (t) a T pontban, akkor a tükörképe is ebben a pontban metszi a tengelyt. Az egyenes ugyanakkora szöget zár be a tükörtengellyel, mint a képe a másik félsíkban. Ebből az is következik, hogy ha az egyenes merőleges a tükörtengelyre, akkor tükörképe önmagának.

3. példa



Rajzoljunk egy ABC háromszöget és egy t tengelyt. Tükrözzük a háromszöget a t tengelyre.

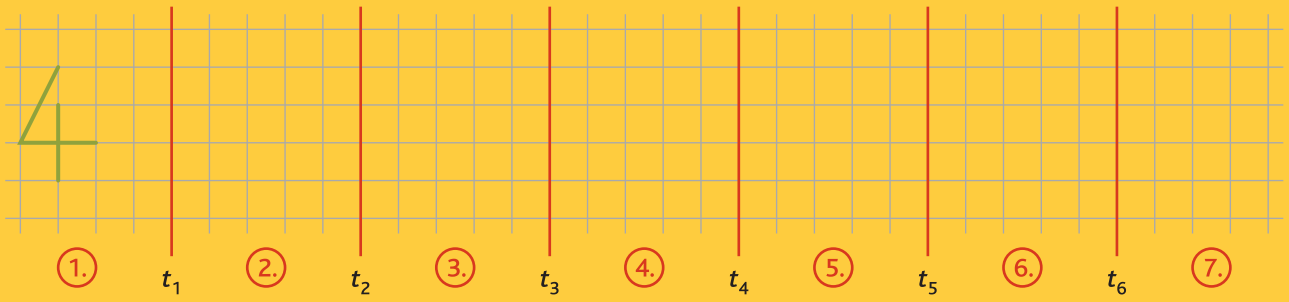
Rendre tükrözzük a háromszög három csúcspontját.

Az így kapott A', B', C' pontokat összekötve megkapjuk az $ABC\triangle$-nek az $A'B'C'\triangle$ tükörképét.

Itt is megfigyelhetjük, hogy a tengelyes tükrözés ellenkezőjére változtatja a körüljárás irányát.

Kísérletezz!

Tükrözd az adott négyest a t_1 tengelyre, a tükörképet a t_2 tengelyre és így tovább. Ha gondolatban tovább folytatjuk a tükrözést, az első négyesnek hányadik négyes lehet még a tükörképe? És a másodiknak? A 23. négyes melyik négyesnek lehet a tükörképe?



FELADATOK

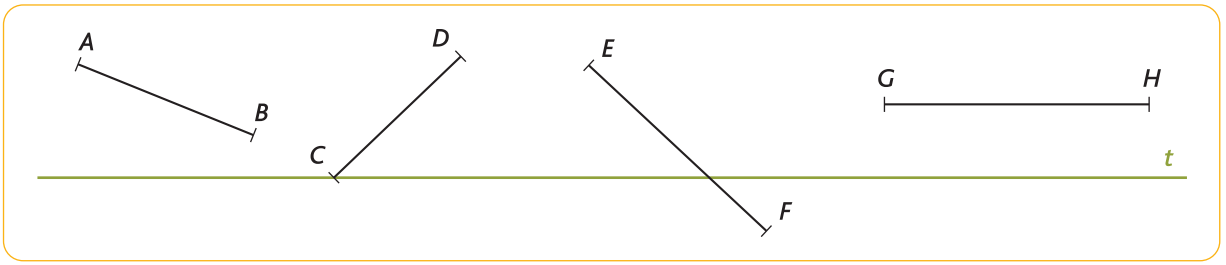
6 Jelölj ki egy adott t tengelytől 2 cm távolságra egy A pontot!
Szerkeszd meg az A pont tükörképét!

Keress a tengelyen olyan pontokat, amelyek az A ponttól 4 cm távolságra vannak! Hány ilyen pont van? Mekkora távolságra vannak ezek az A' ponttól?

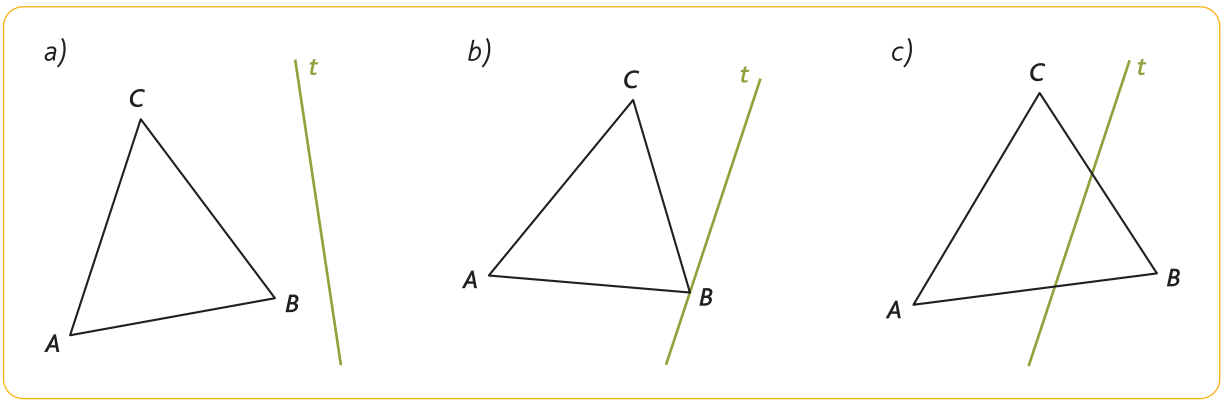
Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelynek csúcsai az A, az A' pont és a tengelyen kapott pontok egyike?

7 Szerkesztéssel másold le a szakaszokat úgy, hogy körülbelül olyan helyzetben legyenek a tengellyel, mint az ábrán!
Szerkeszd meg a tükörképüket!

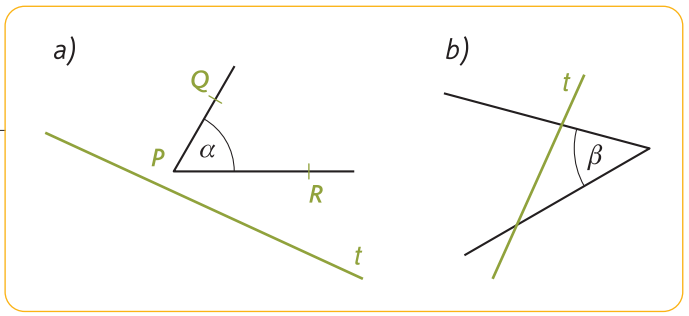
Szerkeszd meg a szakasz végpontjainak a tükörképét!



8 Az oldalak átmásolásával szerkeszd meg a háromszögeket, és húzd meg a tengelyeket az ábrához hasonlóan! Szerkeszd meg a háromszögek tükörképét!



9 Másold le a szögeket a füzetedbe! Húzd meg a tükörtengelyeket az ábrán láthatóhoz hasonlóan, és szerkeszd meg a szögek tükörképét!



10 Tükrözz egy téglalapot az egyik átlóegyenesére! Színezd ki az eredeti téglalapnak és a tükörképének a közös részét! Milyen sokszöget kaptál?

Gyakorló 8.38–8.43., 9.47.

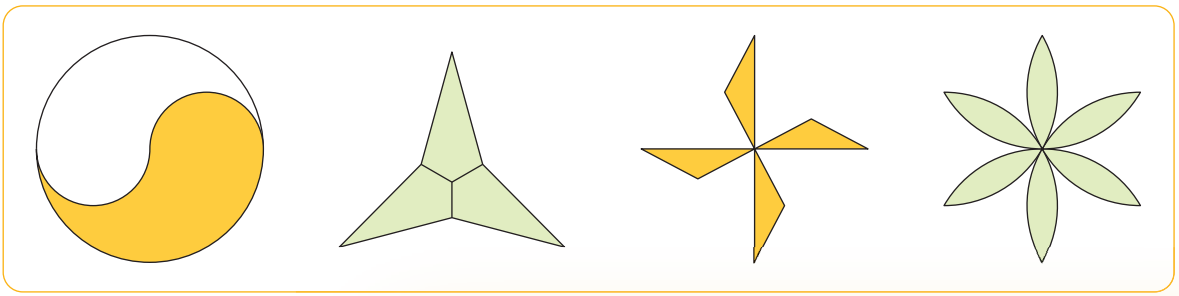
Adott a síkon egy A, egy B és egy C pont úgy, hogy C nem az AB egyenesen fekszik. Csak körző használatával szerkeszd meg a C pont AB egyenesre vett tükörképét! Az AB egyenest se húzd meg, csak képzeld el!

Fejtörő!

TENGELYESEN TÜKRÖS ALAKZATOK

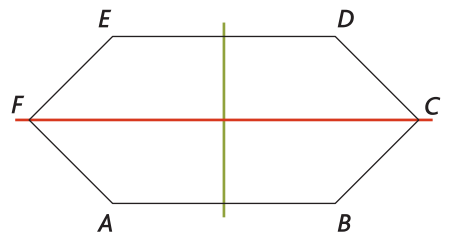
FELADAT

11 Zsebtükörrel állapítsd meg, hogy hány olyan tengely van, amelyre az egyes rajzokat tükrözve a tükörkép az eredeti rajzot fedi!

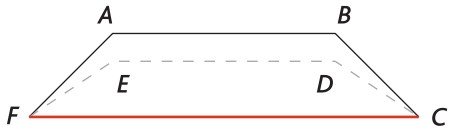


1. példa

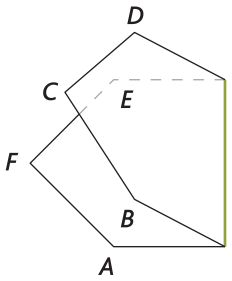
Hány olyan tengely van, amelyre ezt a hatszöget tükrözve a tükörkép és az eredeti hatszög kölcsönösen fedi egymást?



Másoljuk le áttetsző papírra a hatszöget. Ha a másolatot az *FC* egyenes körül 180°-kal elforgatjuk, akkor az eredeti ábrával fedésbe hozható.

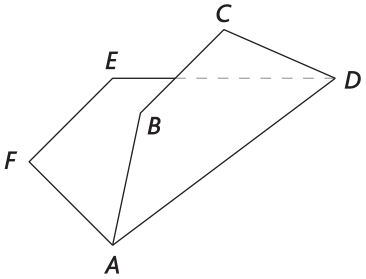


Ha a hatszöget az *FC* átló mentén kettéhajtjuk, akkor az *A* csúcsa az *E*-vel, a *B* csúcsa a *D*-vel fedésbe kerül.



Ha az *AB* oldal felezőmerőlegese körül forgatjuk el 180°-kal, akkor a kép szintén fedi az eredeti hatszöget.

Az *AB* felezőmerőlegese mentén kettéhajtva a hatszöget a *C* csúcsa az *F*-fel, az *A* csúcsa a *B*-vel, a *D* csúcsa az *E* -vel kerül fedésbe.



Ha más egyenesre tükrözzük a hatszöget, akkor a kép nem fedi az eredeti ábrát.

Két olyan egyenest találtunk, amelyre ezt a hatszöget tükrözve a tükörkép és az eredeti hatszög kölcsönösen fedi egymást.

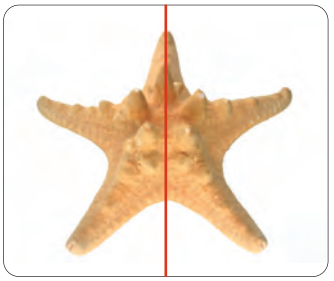
Gyűjtőmunka

Kettéhajtott papírlapból vágj ki különböző alakzatokat úgy, hogy szétnyitva tengelyesen tükrösek legyenek!

Jegyezd meg!

Egy síkbeli alakzat akkor tengelyesen szimmetrikus, ha van olyan egyenes, amelyre az alakzatot tükrözve az alakzat és a tükörképe kölcsönösen fedik egymást.

Az ilyen tulajdonságú egyenes az alakzat szimmetriatengelye.



A természetben sokszor fölfedezhetünk szép szimmetrikus alakzatokat.

A képek hókristályokat ábrázolnak körülbelül tizenötszörös nagyításban.



Sokszor megfigyelhetjük levelek, virágok, rovarok stb. szimmetriáját:



Amikor azt mondjuk, hogy ez a levél vagy virág tengelyesen szimmetrikus, akkor matematikai fogalommal jellemezzük a növényt. Az adott növényre legjellemzőbb általános tulajdonságot emeljük ki.

A valóságban ezek a levelek és virágok sok apró részletben eltérnek a tengelyes szimmetriától. Ezektől a részletektől a matematikai jellemzés során eltekintettünk.



Az építészek, művészek is sokszor alkalmazzák a tengelyes szimmetriát. Például a Mátyás-templom egyik bejáratának itt látható képén sok tengelyesen szimmetrikus részletet figyelhetünk meg.



Keress olyan részleteket, ahol a mester a művészi hatás kedvéért eltért a tengelyes szimmetriától!

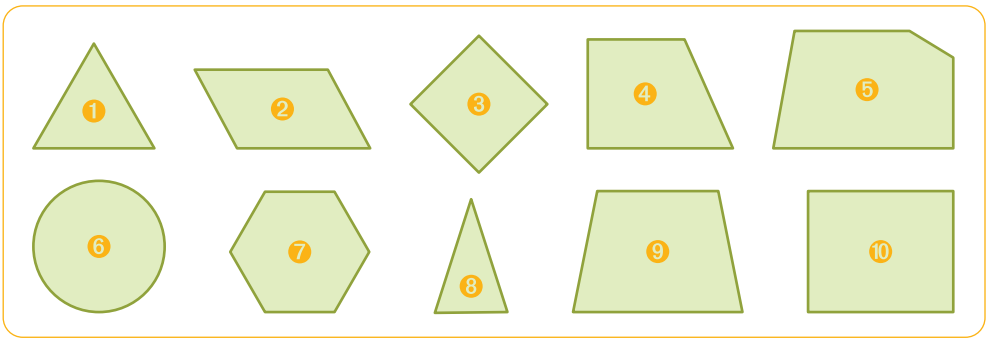
Hogyan lehet 12 gyufaszálból hat egyenlő területet bekeríteni úgy, hogy az alakzat tükrös legyen?

FELADATOK

Gyakorló
8.45–8.49.;
Feladatgyűjtemény
6.4.14–16.

12 Tervezz négyzetrácsra olyan alakzatokat, amelyeket ketté lehet hajtani úgy, hogy a két oldal pontosan fedje egymást! Rajzold meg a hajtás helyét!

13 Csoportosítsd tükrösségük szerint a következő síkidomokat!



Melyik síkidomra igaz, hogy

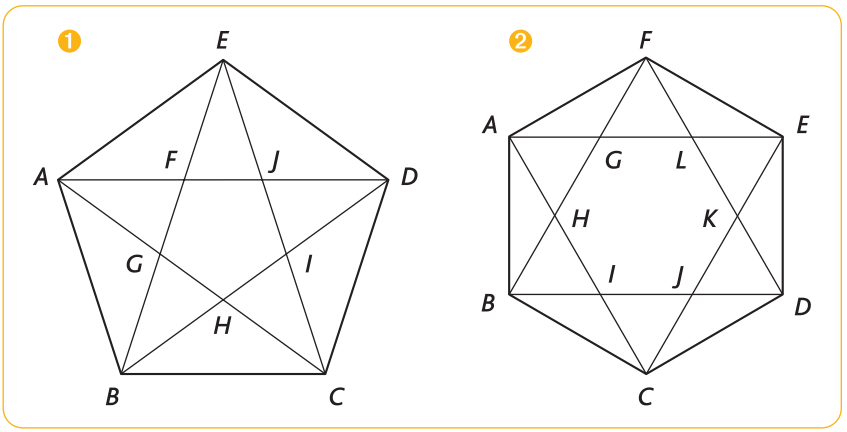
a) pontosan egy;
b) pontosan két;
c) legalább három;
d) legfeljebb három;
e) négy vagy annál több;
f) végtelen sok szimmetriatengelye van;
g) nincs szimmetriatengelye?

A síkidomok számával válaszolj az előző kérdésekre!

◉ Ha valamelyik alakzat tükrösségében bizonytalan vagy, akkor áttetsző papír segítségével elvégezheted a vizsgálatot.

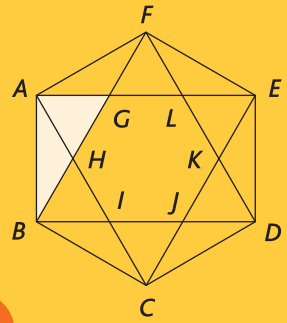
14 Csúcsaik betűjelével adj meg az ábrákon olyan háromszögeket, amelyeknek

a) nincsen szimmetriatengelyük;
b) pontosan egy szimmetriatengelyük van;
c) pontosan két szimmetriatengelyük van;
d) pontosan három szimmetriatengelyük van!



15 Keress a 14. feladat ábráin olyan négyszögeket, amelyek egymás tükörképei! Add meg két pontjával a tengelyt is!

16 Keress a 14. feladat ábráin tengelyesen szimmetrikus négyszögeket, ötszögeket, hatszögeket, hétszögeket, nyolcszögeket!

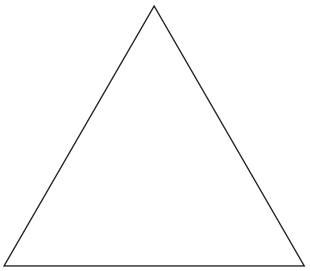


Keress a szabályos hatszögön olyan háromszöget, amely az ABG háromszöggel nem tükrös, de két egymás utáni tükrözéssel fedésbe hozható vele!
Jelöld a két tengelyt t_1-gyel és t_2-vel!

Egy csiga, majd egy bogár a tükörbe néz. Melyikük láthat tengelyesen szimmetrikus képet?

A: Csak a csiga. **B:** Csak a bogár. **C:** Mindkettő. **D:** Egyik sem.

17 Szerkessz 4 cm oldalhosszúságú *szabályos háromszöget*! Szerkeszd meg két oldalának a felezőpontját! A két felezőponton át húzz egy t egyenest! Tükrözd a háromszöget a t egyenesre!



a) A két háromszög közös része milyen sokszög?

Hány tükörtengelye van ennek a sokszögnek? Mekkorák a belső szögei?

A közös rész területe mekkora része az eredeti háromszög területének?

b) Milyen sokszöget fed le együtt az eredeti háromszög és a tükörképe?

Hány szimmetriatengelye van ennek a sokszögnek? Mekkorák a *belső szögei*?

---

18 Rajzolj egy 3 cm sugarú kört, és húzd meg az egyik szelőjét! Tükrözd a kört erre a szelőre!

Van-e olyan szelő, amelyre tükrözve a kört, a kör tükörképe saját magának?

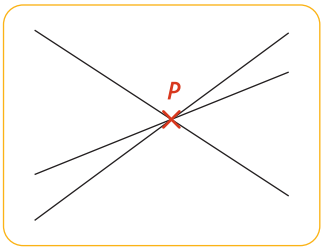
2. példa

Vizsgáljuk meg néhány egyszerű alakzat tengelyes szimmetriáját áttetsző papír segítségével.

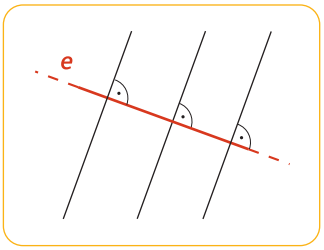


Kísérletezz!

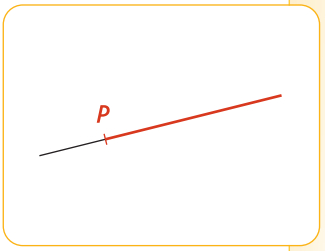
A *pont* szimmetrikus az összes rá illeszkedő egyenesre.



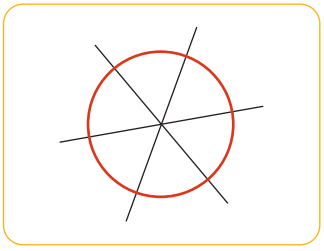
Az *egyenes* szimmetrikus a rá merőleges egyenesekre és saját magára is.



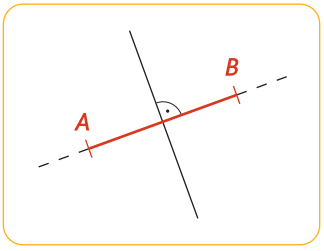
A *félegyenes* csak a rá illeszkedő egyenesre szimmetrikus.



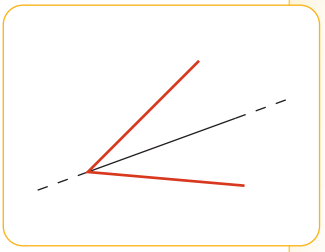
A *kör* szimmetrikus a középpontján átmenő minden szelőre.



A *szakasz* szimmetrikus a felezőmerőlegesére és a rá illeszkedő egyenesre.

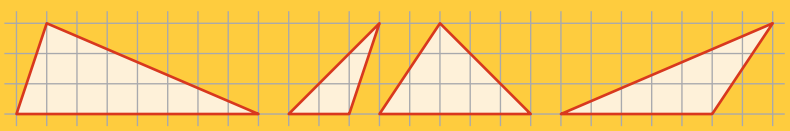


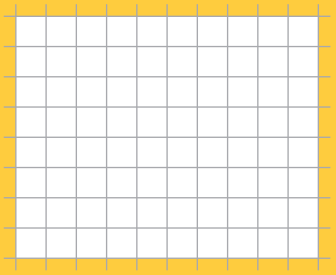
A *szög* szimmetrikus a szögfelező egyenesére.



A *sík* szimmetrikus minden egyenesére.

A négy háromszöget rajzold úgy egymás mellé, hogy egy tükrös négyszög keletkezzen.

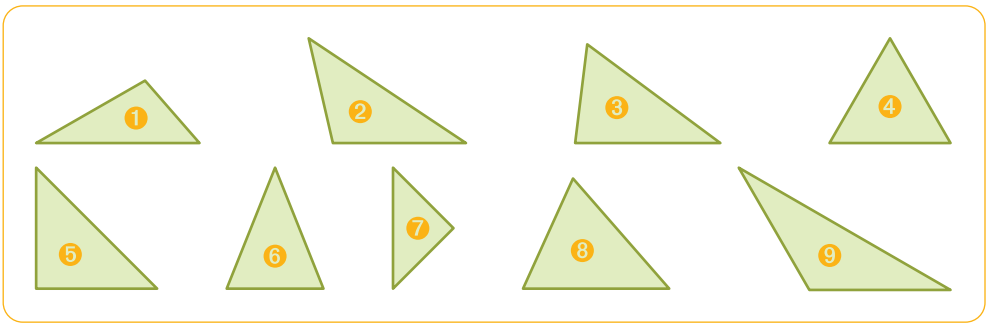




TENGELYESEN TÜKRÖS HÁROMSZÖGEK

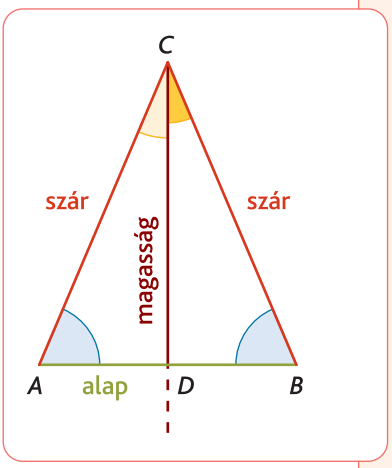
FELADAT

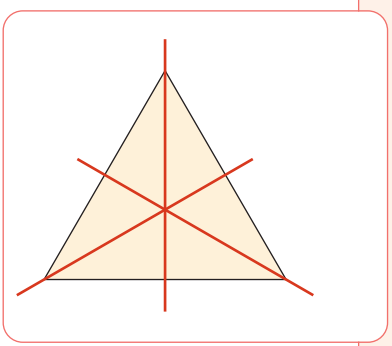
19 Válaszd ki a következő háromszögek közül a megadott tulajdonságúakat!



A: Van két egyenlő oldala.
B: Minden oldala különböző.
C: Van két egyenlő szöge.
D: Pontosan egy szimmetriatengelye van.
E: Van tompaszöge.
F: Legalább egy szimmetriatengelye van.
G: Minden szöge egyenlő.
H: Pontosan két szimmetriatengelye van.
I: Szabályos háromszög.
J: Tengelyesen tükrös háromszög.

A háromszögek sorszámát írhatod a megfelelő helyre.





Figyeld meg!

Minden **tengelyesen szimmetrikus háromszögnek** van két egyenlő hosszú oldala, és ha egy háromszögnek van két egyenlő hosszú oldala, akkor az tengelyesen szimmetrikus (tükrös).

$$AC = BC$$

Az egyenlő oldalakat **száraknak** nevezzük.

A tükrös háromszöget **egyenlő szárú háromszögnek** is nevezzük.

Az egyenlő szárú háromszög harmadik oldalát **alapnak** nevezzük.

Az alapon fekvő belső szögek egyenlők:

$$CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle$$

A **szimmetriatengely** merőlegesen felezi az alapot:

$$AB \perp CD, \quad AD = DB$$

A szimmetriatengely háromszögön belüli része a C **csúcsnak az alaptól való távolsága**. Ezt a távolságot az egyenlő szárú háromszög **alaphoz tartozó magasságának** nevezzük.

Tetszőleges háromszög magasságának értelmezését a 250. oldalon találod meg.

A szimmetriatengely felezi a szárak szögét, a **szárszöget**:

$$ACD\sphericalangle = BCD\sphericalangle$$

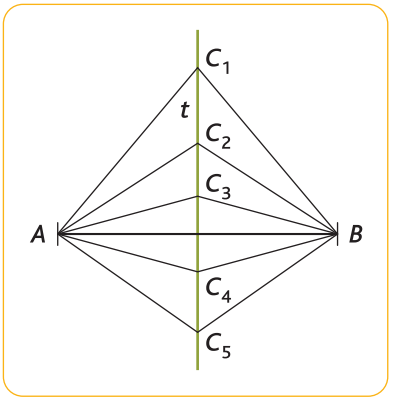
A szabályos háromszög is tengelyesen szimmetrikus háromszög. Három szimmetriatengelye van.

Hová kellene helyezned a négyzet ábráján egy tükröt, hogy a tükörbe nézve

a) az eredetinél kisebb négyzetet láss;
b) egy hatszöget láss;
c) egy nem négyzet téglalapot láss;
d) egy nyolcszöget láss?

Megszerkesztettük az AB szakasz felezőmerőlegesét, és a kapott tengelyen megjelöltünk néhány pontot. Ezeket a pontokat összekötöttük az *AB* szakasz végpontjaival. A kapott háromszögek mindegyike tengelyesen szimmetrikus (tengelyesen tükrös).

A tengelyes tükrözés tulajdonságaiból következtettünk a tengelyesen tükrös (szimmetrikus) háromszög tulajdonságaira.



FELADATOK

20 Kísérletezz!

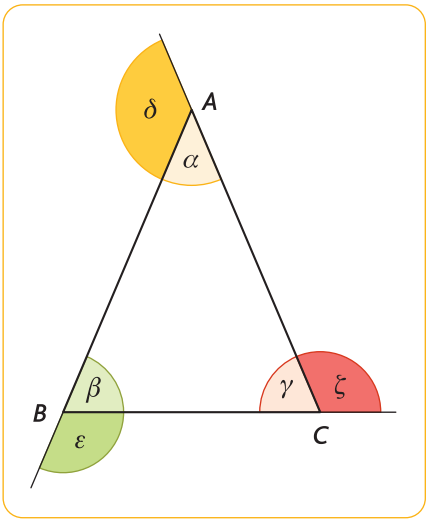
Szívószálból vágj le 2 cm-es, 3 cm-es, 4 cm-es és 5 cm-es darabokat, mindegyikből többet is. Mely darabokból lehet egyenlő szárú háromszöget összerakni?

◉ *Készíts táblázatot, és gyűjtsd össze a lehetőségeket!*

21 Írd be a táblázatba a hiányzó szögeket, ha $AC = AB$! (ζ: ejtsd zéta.)

Gyakorló
8.50–8.51.;
Feladatgyűjtemény
6.3.07., 6.4.28–34.

	α	β	γ	δ	ε	ζ
a)	30°					
b)		45°				
c)				100°		
d)					120°	
e)	100°					
f)			36°			
g)	90°					
h)		90°				
i)				60°		



Arcunk látszólag tengelyesen szimmetrikus. Valóban az?

A lenti három kép közül a középső egy lány valódi arcát mutatja, a két szélső pedig, ha a jobb arca, illetve a bal arca lenne tükrözve.

◉ *Tükör vagy számítógép segítségével te is elkészítheted saját „bal-arcos" és „jobb-arcos" portrédat!*



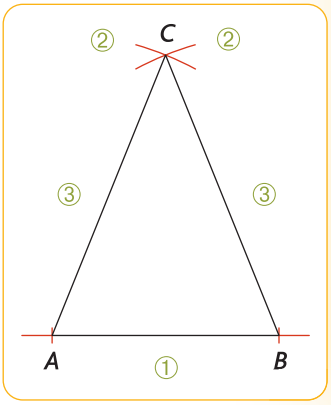




TENGELYESEN TÜKRÖS HÁROMSZÖG SZERKESZTÉSE

1. példa

Szerkesszünk olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapja 3 cm, a szára 4 cm.



A szárak egyenlősége miatt a háromszög mindhárom oldalát ismerjük. A három oldalból pedig egyértelműen megszerkeszthető a háromszög.

① Egy egyenesre felmérjük a 3 cm-es alapot, a végpontjait jelöljük *A*-val és *B*-vel.

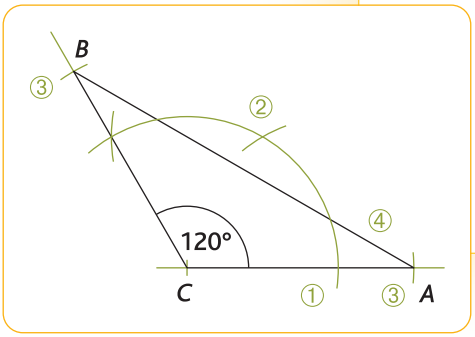
② Az *A*, majd a *B* pontból 4 cm-es sugárral körívet húzunk úgy, hogy legyen metszéspontjuk. A metszéspont legyen *C*.

③ A *C* pontot összekötjük az alap két végpontjával.

A *C* pontot az egyenes másik oldalán is megszerkeszthetjük. Az így kapott háromszög tükörképe az előzőleg megszerkesztett háromszögnek, tehát egybevágó azzal. Ezért ezt nem tekintjük más megoldásnak.

2. példa

Szerkesszünk tompaszögű egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárai 3 cm-esek, szárszöge 120°-os.



① *C* kezdőpontú félegyenest rajzolunk.

② *C* középponttal, tetszőleges sugárral körívet rajzolunk. A sugár hosszát a körívre kétszer felmérve megszerkesztjük a 120°-os szöget.

③ A *C* csúcsból kiindulva a szög száraira kimérjük a 3 cm-es szakaszokat. Megkapjuk az alap *A* és *B* végpontjait.

④ Összekötjük az *A* és a *B* pontot.

FELADATOK

Mindig sikerülni fog? Miért?

22 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha

a) az alapja 4,8 cm, szára 3,6 cm; *b)* az alapja 5,6 cm, szára 2,1 cm;

c) a kerülete 12 cm, az alapja ugyanakkora, mint a szára;

d) a szára 6 cm, az alapja a szár fele; *e)* az alapja 6 cm, a szára az alap fele!

23 Szerkessz egy 3 cm oldalú négyzetet! Húzd meg mindkét átlóját! Milyen háromszögeket kaptál?

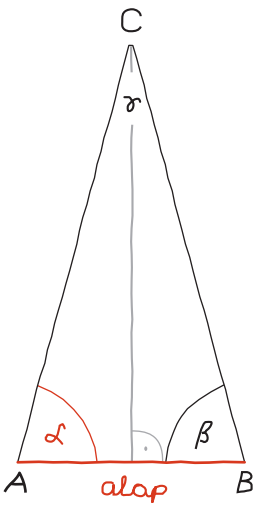
A nevezetes szögek szerkesztésével a 118. oldalon foglalkoztunk.

24 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárai 4 cm-esek, szárszöge

a) 45°-os; *b)* 90°-os; *c)* 135°-os; *d)* 60°-os!

3. példa

Szerkesszünk olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapja 3 cm, az alapon fekvő szöge 75°.



A 3. és a 4. példa megoldása során részletesen áttekinthetjük, hogy hogyan oldjuk meg a szerkesztéses feladatokat. Ezek olyan tanácsok, amelyek minden szerkesztési feladat megoldásában segítségünkre lehetnek.

A feladat értelmezése

Készítsünk vázlatot, vagyis rajzoljuk le, mintha már megszerkesztettük volna a háromszöget.

Jelöljük a csúcsokat A-val, B-vel, C-vel, a szögeket α-val, β-val, γ-val!

Mit ismerünk? $AB = 3$ cm; $\alpha = 75°$

Az összefüggések felkutatása

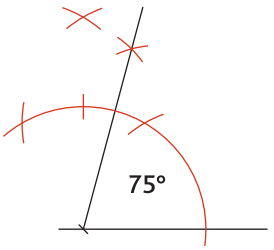
A háromszög tengelyesen szimmetrikus, a szimmetriatengelye az AB oldal felezőmerőlegese.

A C csúcsa a szimmetriatengelyen van.

Az alapon nyugvó szögei egyenlők: $\alpha = \beta = 75°$

A szárai egyenlő hosszúak: $AC = BC$

Szögeinek összege 180°, ezért a szárszöge: $\gamma = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$



A szerkesztés megtervezése

Például: az első két felismert összefüggés alapján elvégezhetjük a szerkesztést. Külön megszerkesztjük az α-t.

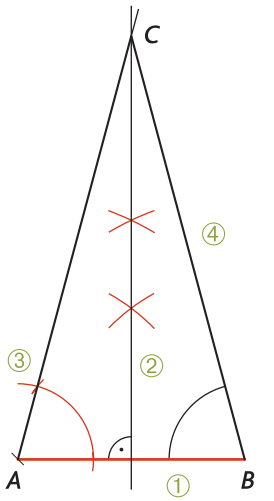
$\alpha = 75° = 60° + 15°$

① Meghúzzuk a 3 cm-es alapot, a végpontjait jelöljük A-val és B-vel.

② Megszerkesztjük az alap felezőmerőlegesét.

③ Az alap A végpontjába másoljuk a megszerkesztett α szöget úgy, hogy az egyik szára az alap legyen, a másik szára messe az alap felezőmerőlegesét. A metszéspont a keresett C csúcs.

④ A csúcsokat összekötjük.



A szerkesztés végrehajtása

Szerkeszd meg önállóan a háromszöget!

Mit mondhatunk még el a feladatról?

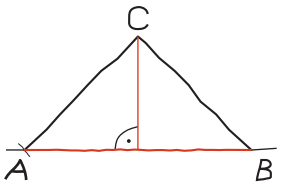
Megszerkeszthető a háromszög úgy is, hogy az alap felezőmerőlegesének megszerkesztése helyett a B csúcsnál is rámásoljuk az alapra a 75°-os szöget.

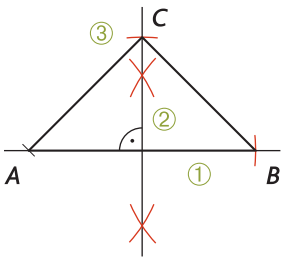
Egy négyfejű sárkányra felesége feladta négy különböző színű csokornyakkendőjét (minden nyakra egyet). A sárkány tükörbe nézve elégedetlen volt, és (a tükörben) balról az első fej kicserélte nyakkendőjét a negyedik fejjel, majd a második a harmadikkal. Így a tükörben nézve balról az első fejen piros, a másodikon kék, a harmadikon zöld, a negyediken fekete nyakkendő látható végül. Színezd ki, hogyan adta fel a sárkányra a felesége a csokornyakkendőket!

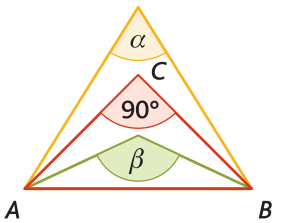


4. példa

Szerkesszünk olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapja 3 cm, az alaphoz tartozó magassága 1,5 cm.







A feladat értelmezése

Készítsünk vázlatot.

Az összefüggések felkutatása

A C csúcs az alap felezőmerőlegesén van. Mivel a magasság $m = 1{,}5$ cm, a C csúcs 1,5 cm-re van az alaptól.

A szerkesztés megtervezése

① Az alap megrajzolása.

② Az alap felezőmerőlegesének megszerkesztése.

③ A C csúcs megszerkesztése.

A szerkesztés végrehajtása

A szerkesztés helyességének igazolása

A C csúcs az alap felezőmerőlegesén van, ezért $AC = BC$.

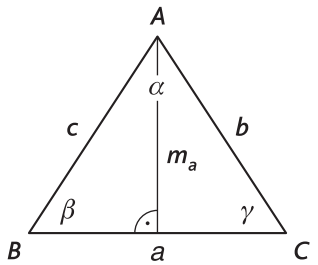
Mit mondhatunk még el a feladatról?

Észrevehetjük, hogy az $m = AB : 2$. Ezért az $ABC\triangle$ egy négyzet fele, tehát **egyenlő szárú derékszögű háromszög**.

Ha $m > AB : 2$, akkor az egyenlő szárú háromszög *hegyesszögű*,

ha $m < AB : 2$, akkor az egyenlő szárú háromszög *tompaszögű*.

FELADATOK



B1 Szerkessz tükrös háromszöget a következő adatokból!
Az adatokat a rajz segítségével állapítsd meg!

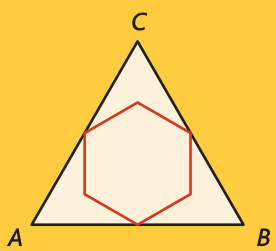
a) $a = 35$ mm, $\beta = 60°$;
b) $a =$ fél dm, $\gamma = 45°$;
c) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm;
d) $a = 0{,}4$ dm, $m_a = 4{,}5$ cm;
e) $a = 4$ cm, $\alpha = 60°$;
f) $a = 6$ cm, $\alpha = 105°$;
g) $b = 3{,}8$ cm, $\alpha = 45°$;
h) $a = 0{,}4$ dm, $m_a = 4$ cm

B2 Egy szimmetrikus háromszög egyik oldala 6 cm, a másik két oldala is egész centiméter hosszúságú és nem nagyobb 6 cm-nél.

Mekkora lehet a másik két oldal?

Szerkessz ilyen háromszögeket!

Gyakorló
8.52–8.54.



Szabályos háromszögbe hajtogatással „szerkessz” **szabályos hatszöget**! Mi a **sejtésed**? Hány fokosak a belső szögei?

Hajtogatással bizonyítható-e a sejtésed?

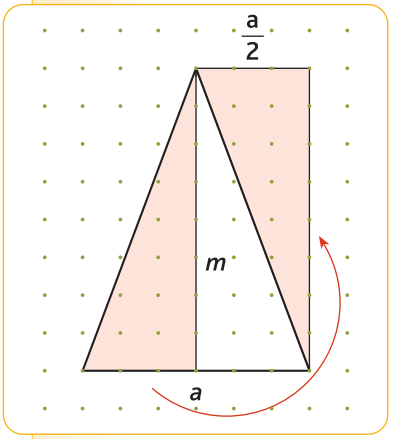
TENGELYESEN TÜKRÖS HÁROMSZÖG TERÜLETE

5. példa

Számítsuk ki az egyenlő szárú háromszög területét, ha az alapja 3 cm, az alaphoz tartozó magassága 4 cm.

1. megoldás

Ha a háromszöget a szimmetriatengelye mentén félbevágjuk, két egybevágó derékszögű háromszöget kapunk. Ezekből a darabokból téglalapot illeszthetünk össze. A téglalap egyik oldala az egyenlő szárú háromszög alapjának a fele, a másik oldala a háromszög magassága.



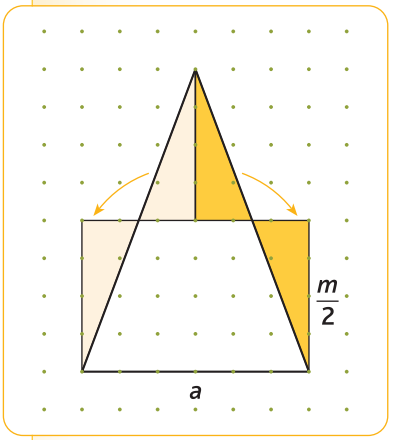
A háromszög területe: $T = \frac{3}{2} \cdot 4\ \text{cm}^2 = 6\ \text{cm}^2$

Általánosan is helyes a gondolatmenet, az alapot a-val, a háromszög magasságát m-mel jelölve:

$$T = \frac{a}{2} \cdot m$$

2. megoldás

A háromszöget a magassága felénél, az alappal párhuzamos egyenessel elvágva is darabolhatjuk. A lemetszett kis háromszöget a szimmetriatengelye mentén vágjuk ketté. A darabokból most is téglalapot állíthatunk elő.

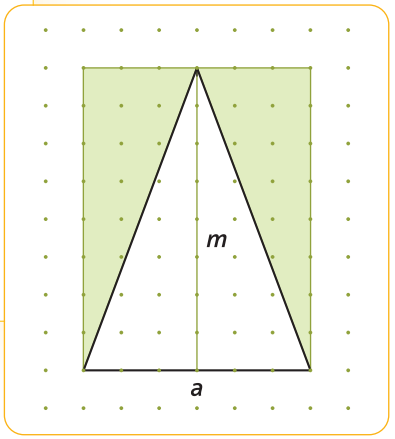


A háromszög területe: $T = 3 \cdot (4 : 2)\ \text{cm}^2 = 3 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2 = 6\ \text{cm}^2$

Általánosan: $T = a \cdot \frac{m}{2}$

3. megoldás

A szimmetrikus háromszöget kiegészíthetjük téglalappá. Ennek egyik oldala a háromszög alapja, a másik oldala a háromszög magassága. Az egyenlő szárú háromszög területe fele a befoglaló téglalap területének.



A háromszög területe: $T = (3 \cdot 4\ \text{cm}^2) : 2 = \frac{3 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = 6\ \text{cm}^2$

Általánosan: $T = \frac{a \cdot m}{2}$

Mennyi egy szakasz, egy félegyenes és egy négyzet szimmetriatengelyei számának összege?

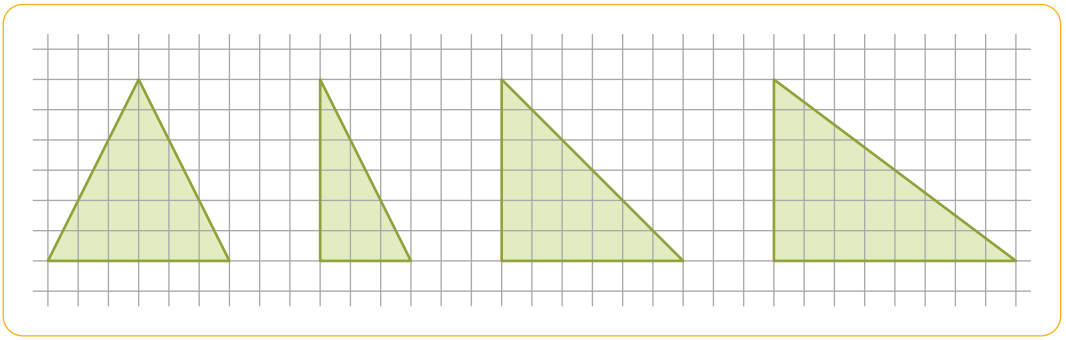
A: 5; **B:** 6; **C:** 7; **D:** 8; **E:** végtelen sok

Fejtörő!

Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

FELADATOK

B3 Határozd meg a négyzetrácsba rajzolt háromszögek területét!



A területegység egy kis négyzet területe.

Gyakorló
7.50–7.63.;
8.55–8.56.

B4 Határozd meg az egyenlő szárú háromszög területét, ha

a) $a = 4$ cm, $m = 6$ cm; *b)* $a = 4{,}3$ cm, $m = 24$ mm;

c) $a = 35$ cm, $m = 4$ dm; *d)* $a = 1{,}3$ m, $m = 2$ dm!

A háromszög alapját a, a hozzá tartozó magasságát m jelöli.

◉ Keress minél több megoldást!

B5 Jelölj ki a koordináta-rendszerben olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek a csúcsai rácspontok, az egyik csúcsa a (3; 2) pontban van, és területe 9 kis rácsnégyzet!

◉ Rajzold meg a derékszögű koordináta-rendszert!

B6 A derékszögű koordináta-rendszerben fölvettünk két pontot: $M(5; 5)$, $N(3; 3)$

Legyenek ezek egy egyenlő szárú háromszög csúcsai. Mely rácspontokon lehet a harmadik csúcs, ha csak az 1. síknegyed pontjait vizsgáljuk?

B7 Egy egyenlő szárú háromszög alapjának mérőszáma egész szám. Az alap hossza egyenlő a magassággal. Területének mérőszáma 100-nál kisebb természetes szám. Mekkora lehet az alapja, mennyi a területe?

B8 Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm. Az alapon lévő szögek 45°-osak. Mekkora a háromszög területe?

◉ Mindig sikerülni fog? Miért?

B9 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha

a) a kerülete 15 cm, és az egyik szöge 60°;

b) a kerülete 16 cm, és az alap feleakkora, mint a szár;

c) a kerülete 16 cm, és a szár feleakkora, mint az alap!

A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a háromszögek területét!

B10 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha

a) az alapja 4 cm, és két szöge közül az egyik kétszerese a másiknak;

b) az alapja 5 cm, és két szöge közül az egyik háromszorosa a másiknak!

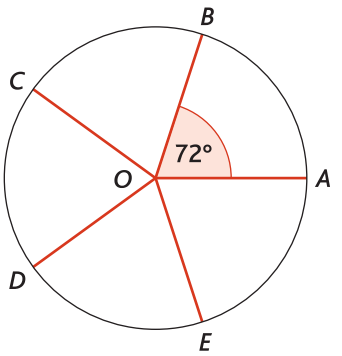
A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a háromszögek területét!

SZABÁLYOS SOKSZÖGEK

1. példa

3 cm sugarú körbe úgy húzzunk sugarakat, hogy azok a körlapot öt egybevágó részre bontsák. Húzzuk meg a körvonal ötödrészeihez tartozó húrokat is.

Milyen tulajdonságú sokszöget kapunk?



Ugyanabban a körben az egyenlő középponti szögekhez egyenlő körívek és egyenlő húrok tartoznak.

A teljes körvonalhoz tartozó középponti szög teljesszög, 360°.

A körvonal $\frac{1}{5}$ részéhez tartozó középponti szög:

$$360° : 5 = 72°$$

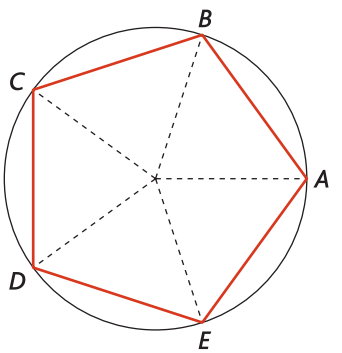
Vegyünk föl két sugarat (*OA* és *OB*) úgy, hogy 72°-os szöget zárjanak be. Az *AB* húrt körzőnyílásba véve öt egyenlő ívre oszthatjuk a körvonalat.

A szomszédos osztópontokat összekötve **egyenlő oldalú ötszöget** kapunk.

Rajzoljuk meg áttetsző papírra is az ötszöget. Hajtogatással keressük meg a tükörtengelyeit.

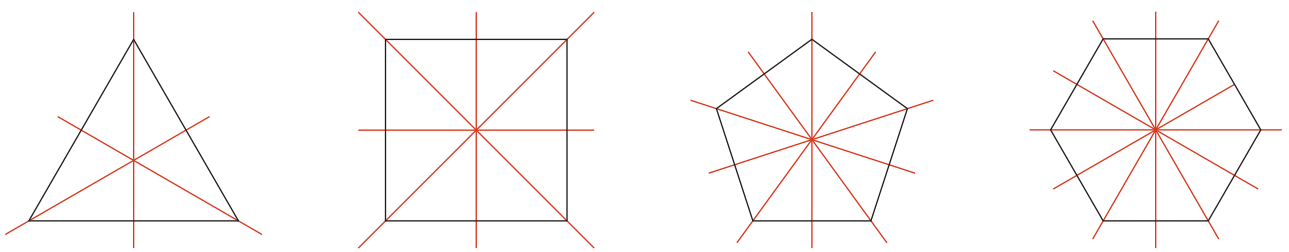
Öt tükörtengelye van.

Ismételt hajtogatással meggyőződhetünk arról is, hogy ennek az ötszögnek **bármelyik két belső szöge egyenlő** (a belső szögek valamelyik tengelyre tükrözve egymás tükörképei).



Értelmezés

Szabályos sokszögeknek nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeknek minden oldaluk és minden szögük egyenlő.



A szabályos sokszögekben az oldalak felezőmerőlegesei és a szögfelezők a szimmetria tengelyek. Ha az oldalak száma páratlan, akkor bármely oldal felezőmerőlegese egybeesik a szemközti szög szögfelezőjével. Ha az oldalak száma páros, akkor a szemközti oldalak felezőmerőlegesei, illetve a szemközti szögek szögfelezői esnek egybe.

A szabályos sokszögnek annyi szimmetriatengelye van, ahány oldala.

A szabályos sokszög csúcsait a kör kerületének egyenlő részekre osztásával kaptuk. Minden szabályos sokszög körbe írható. Szimmetriatengelyei egy pontban, a köré írható kör középpontjában találkoznak.

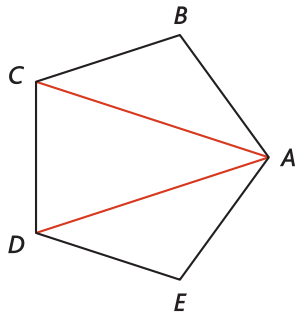
◉ *Gauss (1777–1855) német matematikus bizonyította, hogy nem mindegyik szabályos sokszög szerkeszthető meg körzővel és egyélű vonalzóval. Lásd a Kislexikonban, a 245. és 252. oldalon.*

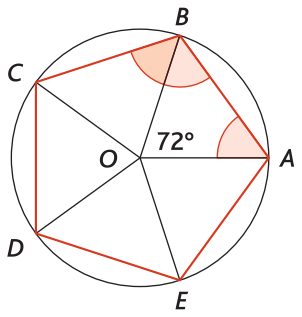
bővített szint

2. példa

Mekkorák a szabályos ötszög belső szögei?

Hogyan számítható ki a területe, ha egy oldala 2 cm?





1. megoldás

Az ötszöget egy csúcsából kiinduló átlókkal három háromszögre bonthatjuk, ezért az ötszög belső szögeinek összege:

$$3 \cdot 180° = 540°$$

A szabályos ötszög minden belső szöge egyenlő. Egy belső szöge:

$$540° : 5 = 108°$$

Az ötszög területe a három egyenlő szárú háromszög területének összege.

A szükséges adatokat méréssel állapítjuk meg.

2. megoldás

Kössük össze az ötszög csúcsait a köré írható kör középpontjával. Öt egybevágó egyenlő szárú háromszöget kapunk. Egy ilyen egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge:

$$(180° - 72°) : 2 = 54°$$

Ennek kétszerese a szabályos ötszög egy belső szöge:

$$2 \cdot 54° = 108°$$

Az ötszög területe egy ilyen egyenlő szárú háromszög területének ötszöröse.

FELADATOK

Gyakorló
8.70–8.72.;
Feladatgyűjtemény
6.3.08–09.

B11 Szerkessz 4 cm sugarú körbe szabályos

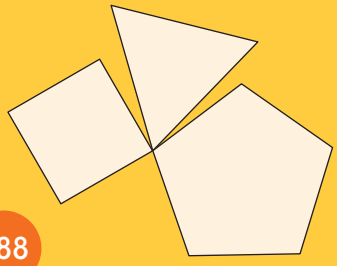
a) háromszöget; *b)* négyszöget; *c)* hatszöget; *d)* nyolcszöget!

Szerkeszd meg a szimmetriatengelyeit! Számítsd ki a területét!

B12 A szabályos négyszög 4, az ötszög 5, a nyolcszög 8, a tízszög 10 egybevágó egyenlő szárú háromszögből rakható össze. Mekkorák ezeknek a háromszögeknek a szögei?

B13 Egybevágó négyzetekkel parkettázd a síkot! Hányféle megoldást találsz?

Milyen más egybevágó szabályos sokszögekkel parkettázható a sík?

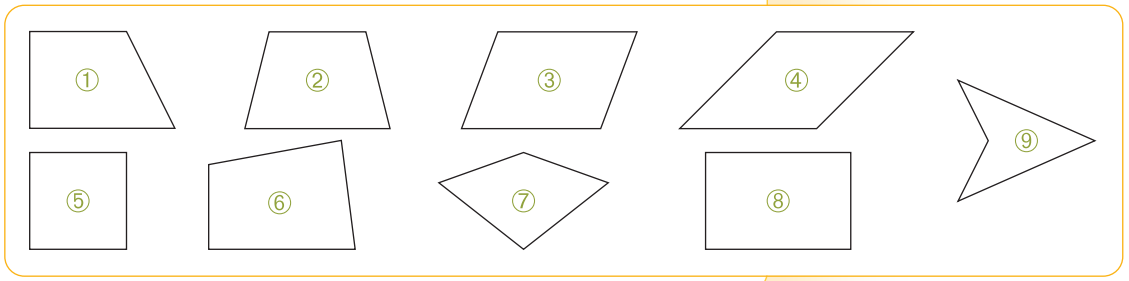


Legfeljebb hány különböző szabályos sokszög csúcsa illeszthető össze egy pontban úgy, hogy a sokszögek ne fedjék egymást? Mely szabályos sokszögek rakhatók a szabályos háromszög helyére az ábrán?

TENGELYESEN TÜKRÖS NÉGYSZÖGEK

1. példa

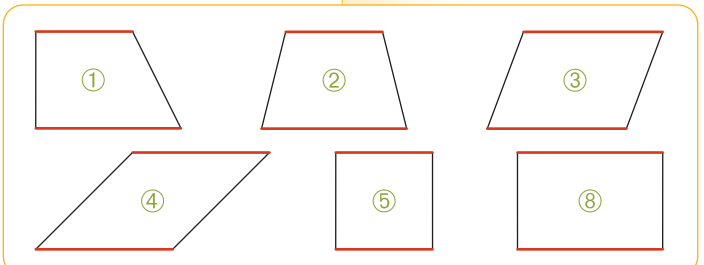
Csoportosítsuk különböző szempontok szerint a következő négyszögeket.



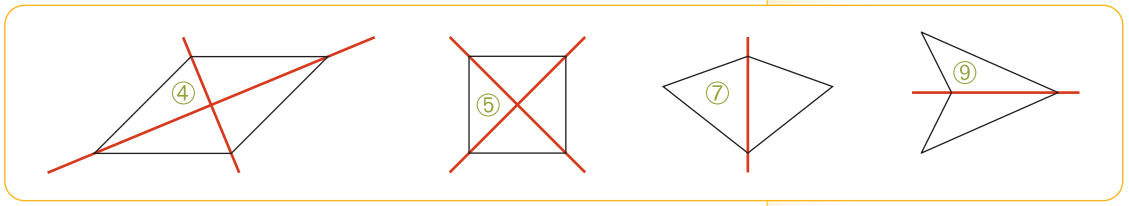
❶ **Van párhuzamos oldalpárjuk**

Azt a négyszöget, amelynek van párhuzamos oldalpárja, trapéznak nevezzük.

Minden **paralelogramma**, így a **rombusz**, a **téglalap** (és ezért a **négyzet** is) trapéz.



❷ **Van csúcsukon átmenő szimmetriatengelyük**



Azt a négyszöget, amelynek van csúcsain átmenő szimmetriatengelye, deltoidnak nevezzük. A **rombusz** (és ezért a **négyzet** is) deltoid.

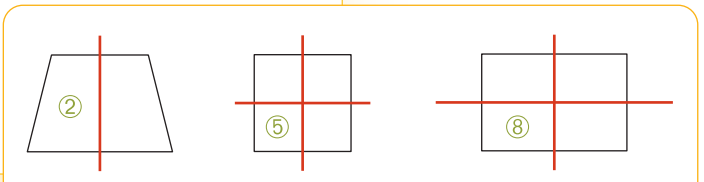
❸ **Két-két szomszédos oldaluk egyenlő**

Ugyanazokat a négyszögeket, a deltoidokat kapjuk, mint az előző szempont szerint válogatva.

❹ **Van csúcsukon át nem menő szimmetriatengelyük**

Speciális trapézokat kaptunk. **Azt a négyszöget, amelynek van csúcsain át nem menő szimmetriatengelye, húrtrapéznak nevezzük.**

A **téglalap** (és ezért a **négyzet** is) húrtrapéz.



Egy négyszögnek pontosan két szimmetriatengelye van. Az alábbiak közül melyik halmazba **nem tartozhat**:

A = {Trapézok}; **B** = {Téglalapok}; **C** = {Deltoidok};
D = {Négyzetek}; **E** = {Rombuszok}; **F** = {Paralelogrammák}

Többet ésszel ...

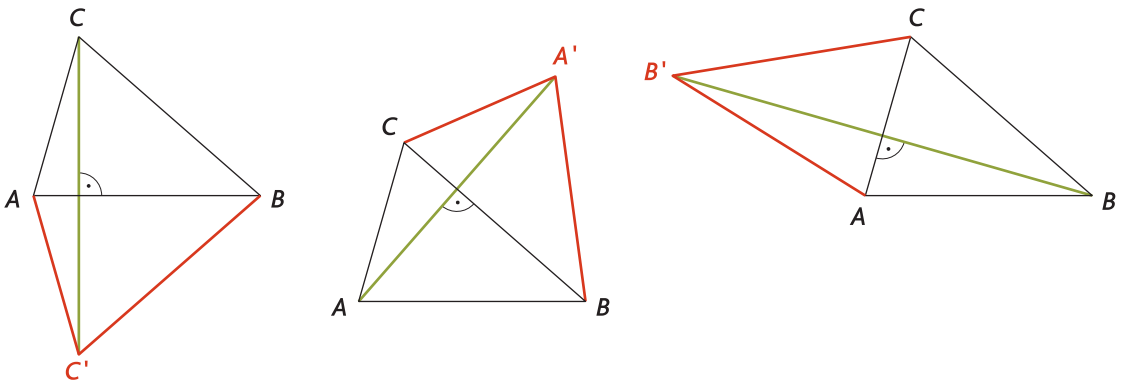
Karikázd be a megfelelő halmaz (halmazok) betűjelét!

A DELTOID

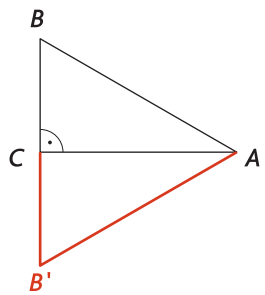
2. példa

Tükrözzünk mindhárom oldalára külön-külön egy
a) hegyesszögű; **b)** derékszögű; **c)** tompaszögű háromszöget.

a Mindhárom esetben tükrös négyszöget kapunk:

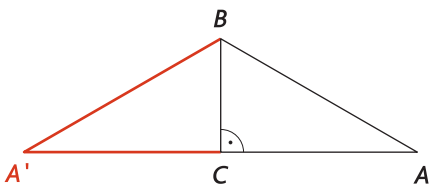


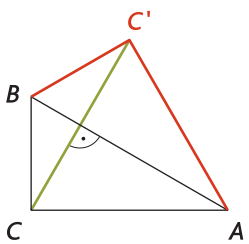
b A tengely az egyik befogó egyenese



Tükrös háromszöget kapunk.

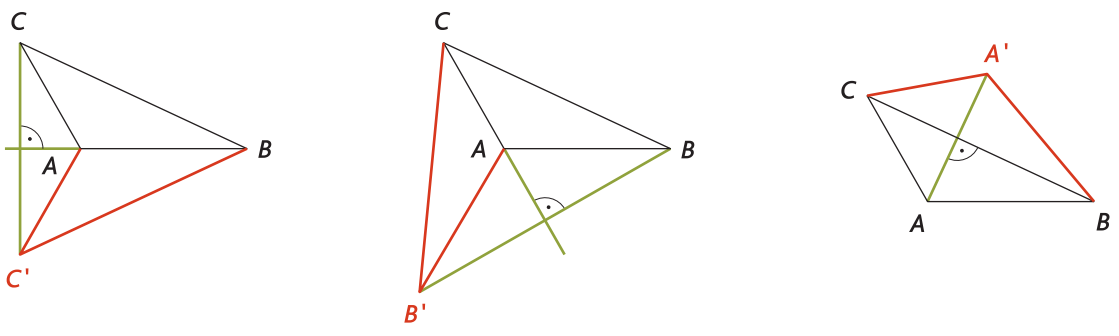
A tengely az átfogó egyenese:





Tükrös négyszöget kapunk.

c Mindhárom esetben tükrös négyszöget kapunk:



Gyakorló 8.63.; *Feladatgyűjtemény* 6.4.35–48.

Ha a háromszöget egyik oldalegyenesére tükrözve négyszöget kapunk, akkor ez a négyszög szimmetrikus az egyik átlójára.

Figyeld meg!

A deltoid olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek van a csúcsain átmenő szimmetriatengelye.

A tengelyes szimmetriából következtethetünk a deltoid tulajdonságaira.

A deltoid két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú:

$$AB = BC; \quad AD = DC$$

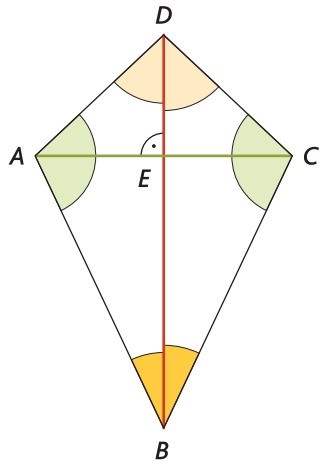
Van két szemközti szöge, amely egyenlő:

$$DAB\sphericalangle = DCB\sphericalangle$$

A **szimmetriaátló** egyenese merőlegesen felezi a másik átlót:

$$DB \perp AC \text{ és } AE = EC$$

A szimmetriaátló egyenese felezi a deltoid két szögét.



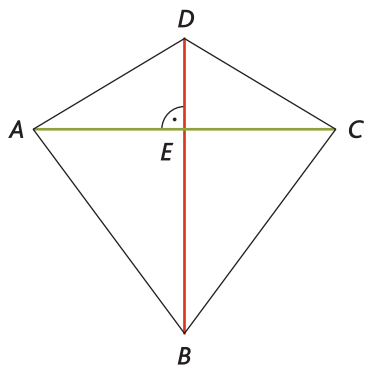
3. példa

Szerkesszünk közös, 4,0 cm-es alapra két tükrös háromszöget úgy, hogy az egyik háromszög szárai 2,3 cm, a másikéi 3,4 cm hosszúak.

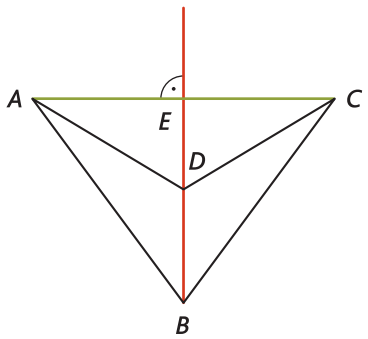
Korábban is felhasználtuk, hogy ha két egyenlő szárú háromszögnek közös az alapja, akkor közös a szimmetriatengelye is.

Két közös, 4 cm-es alapú egyenlő szárú háromszög

konvex deltoidot alkot, ha a háromszögeket a közös alap egyenesének különböző partjára szerkesztjük;



nemkonvex, **konkáv deltoidot** alkot, ha a háromszögeket a közös alap egyenesének azonos partjára szerkesztjük.



Változtass meg egy adatot úgy, hogy ne legyen megoldása a feladatnak!

Változtass meg egy adatot úgy, hogy csak egy megoldása legyen a feladatnak!

A három-három szög közül melyek lehetnek egy deltoid belső szögei?

A: 50°, 65°, 65°; **B:** 80°, 65°, 75°; **C:** 90°, 120°, 75°; **D:** 90°, 120°, 80°

Egy deltoid két oldalának a hossza 3 cm, 7 cm. Az alábbiak közül milyen hosszú lehet a szimmetriaátlója?

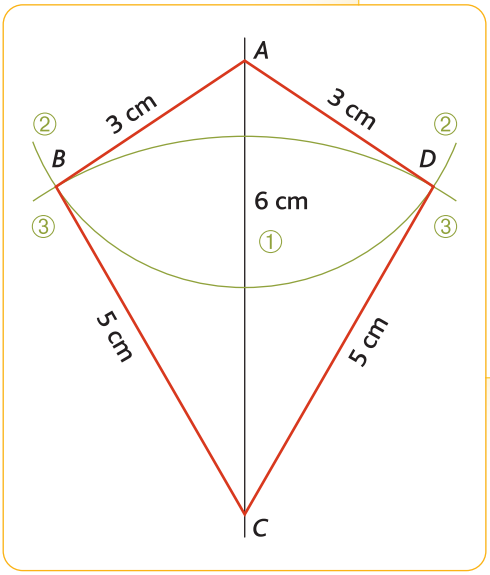
A: 3 cm; **B:** 7 cm; **C:** 10 cm; **D:** 13 cm

Fejtörő!

A helyes válasz betűjelének bekarikázásával válaszolj a kérdésre! Indokold a válaszod!

4. példa

Szerkesszünk deltoidot, amelynek a szimmetriaátlója 6 cm, oldalai 3 cm, illetve 5 cm hosszúak.



A deltoid értelmezése alapján két olyan tükrös helyzetű háromszöget kell megszerkesztenünk, amelynek közös oldala a deltoid szimmetriaátlója.

A szerkesztés terve

① Felvesszük a 6 cm-es AC szakaszt.

② Az A pontból 3 cm-es sugárral körívet húzunk.

③ A C pontból 5 cm-es sugárral húzott körívvel elmetsszük az előző körívet. Megkapjuk a deltoid B és D csúcsát.

④ Végül a csúcspontokat megfelelően összekötjük.

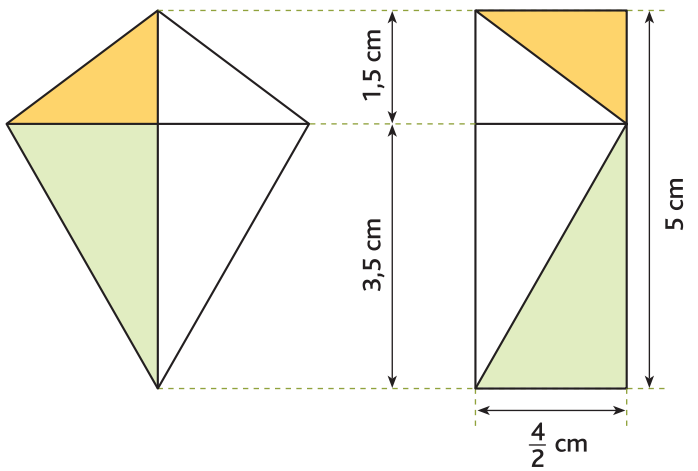
A 4. példában három jól megválasztott adatból egyértelműen megszerkeszthettük a deltoidot. A 3. példában viszont három adat nem határozta meg a deltoidot egyértelműen, két nem egybevágó megoldást kaptunk.

A DELTOID TERÜLETE

5. példa

Egy deltoid szimmetriaátlója 5 cm, a másik átlója 4 cm hosszú. A szimmetriaátló egyik végpontjától 1,5 cm távolságra van a másik átló.

Határozzuk meg a deltoid területét.



Két nem egybevágó deltoid szerkeszthető ezekből az adatokból.

A konvex deltoid területe két közös alapú, egyenlő szárú háromszög területének összegeként írható föl.

Az egyik háromszög magassága 3,5 cm, a másiké 1,5 cm. A deltoid területe:

$$T = 3{,}5 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2 + 1{,}5 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2$$

Az összeg szorzásáról tanultak alapján:

$$T = (3{,}5 + 1{,}5) \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2$$

Az ábra segítségével magyarázd el, hogyan darabolható át a konvex deltoid téglalappá!

A konvex deltoid terülte a két átló szorzatának a fele:

$$T = 5 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2 = \frac{5 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = 10\ \text{cm}^2$$

›››

A konkáv deltoid területe két közös alapú, egyenlő szárú háromszög területének különbségeként írható föl. Az egyik háromszög magassága 6,5 cm, a másiké 1,5 cm. A deltoid területe:

$$T = 6{,}5 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2 - 1{,}5 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2$$

A különbség szorzásáról tanultak alapján:

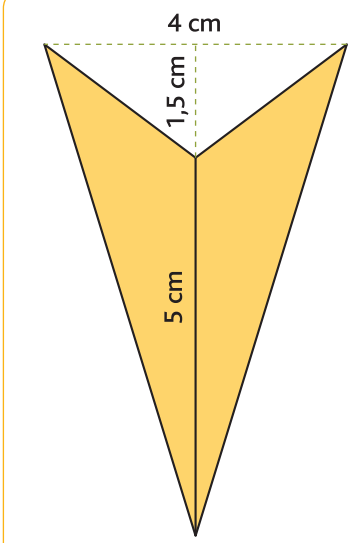
$$T = (6{,}5 - 1{,}5) \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2$$

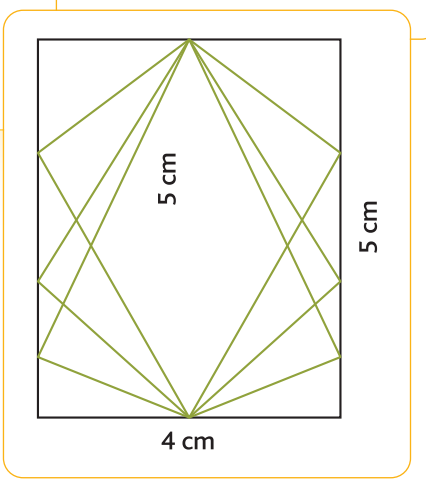
Végeredményben a konkáv deltoid esetén is azt kapjuk,hogy a terület a két átló szorzatának a fele:

$$T = 5 \cdot \frac{4}{2}\ \text{cm}^2 = \frac{5 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = 10\ \text{cm}^2$$

Igazolható, hogy minden olyan deltoidnak, amelynek az átlói 5 cm és 4 cm hosszúak, a területe egyenlő.

Mindegyikre igazolható, hogy a területe a 4 cm és 5 cm oldalhosszúságú téglalap területének a fele.

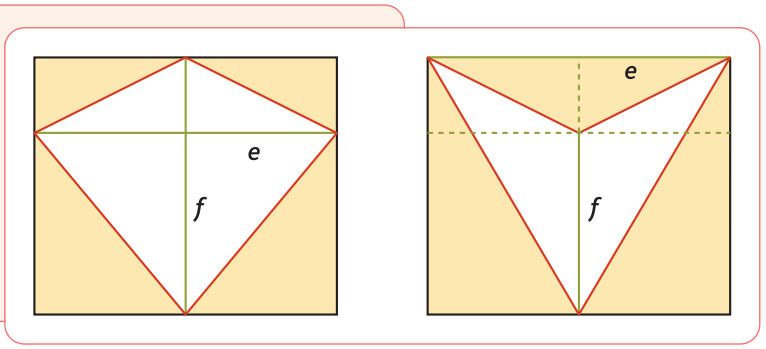




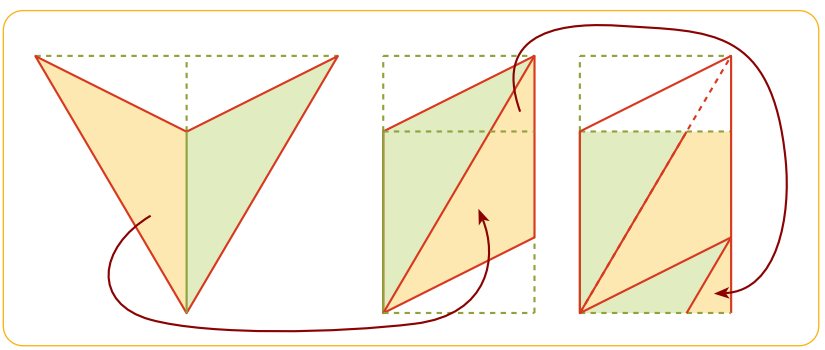
Tétel

Ha a deltoid átlóinak hossza e és f, akkor a deltoid területe:

$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$



A deltoid területét például téglalappá való kiegészítéssel vagy téglalappá történő átdarabolással határozhatjuk meg
Figyeljük meg az ábrán a konkáv deltoid több lépéses átdarabolását.

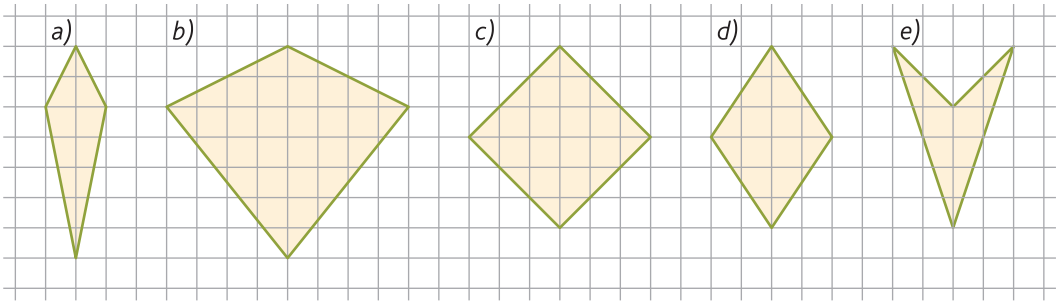


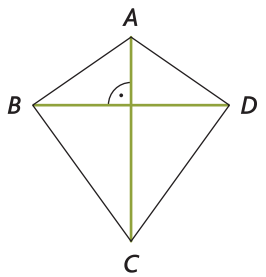
FELADATOK

25 Határozd meg a négyzetrácsba rajzolt deltoidok területét!

A második deltoid átdarabolásával mutasd meg, hogyan darabolható át téglalappá a konvex deltoid!

A területegység egy kis négyzet területe.





26 Szerkessz deltoidot, ha adott két oldala és a szimmetriaátlója!

a) $AB = 2{,}4$ cm; $BC = 3{,}2$ cm; $AC = 4{,}0$ cm

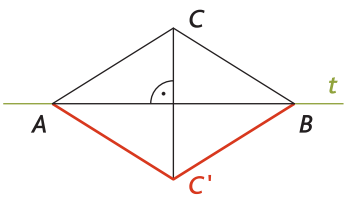
b) $AB = 3{,}5$ cm; $BC = 4{,}0$ cm; $AC = 3{,}1$ cm

c) $AB = 4{,}8$ cm; $BC = 2{,}6$ cm; $AC = 2{,}8$ cm

d) Szerkessz deltoidot, ha adott két oldala és a nem szimmetriaátlója!

$AB = 2{,}4$ cm; $BC = 3{,}2$ cm; $BD = 4{,}0$ cm

A ROMBUSZ



6. példa

Tükrözzük az ABC egyenlő szárú háromszöget az alapjára.

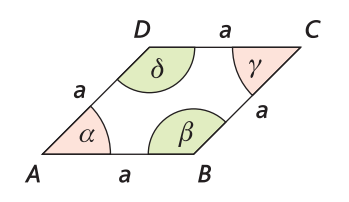
Milyen négyszöget alkot az eredeti háromszög és a tükörképe együtt?

Mekkora a keletkezett négyszög területe, ha az eredeti háromszög AB alapja 4 cm hosszú, az alaphoz tartozó magassága 1,5 cm?

Az egyenlő szárú háromszög alapjának egyenesére tükrözve olyan deltoidot kapunk, amelynek mind a négy oldala egyenlő. Az ilyen deltoiddal, a **rombusszal** már korábban megismerkedtünk. Mivel a rombusz speciális deltoid, a területét kiszámíthatjuk a deltoid esetén igazolt képlet segítségével.

A rombusz átlóinak hossza: $e = AB = 4$ cm; $f = CC' = 3$ cm.

$$T = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$$ a rombusz területe 6 cm^2.



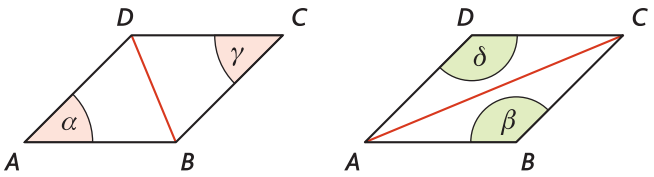
7. példa

Hasonlítsuk össze a rombusz szemközti szögeinek nagyságát.

Bizonyítsuk sejtésünket.

Az előző példa alapján beláthatjuk, hogy a rombusz mindkét átlójára szimmetrikus, ezért két-két szemközti szöge egyenlő:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta$$



Figyeld meg!

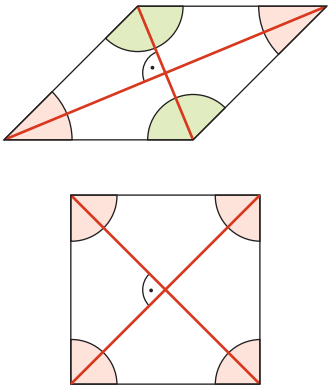
A **rombusz** egyenlő oldalú deltoid, ezért rendelkezik a deltoid tulajdonságaival.

A rombusz mindkét átlójára szimmetrikus, ebből következik:

- mindkét átlója két egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontja;
- az átlók kölcsönösen felezik egymást;
- az átlói merőlegesek egymásra;
- két-két szemközti szöge egyenlő;
- az átlók felezik a szögeket.

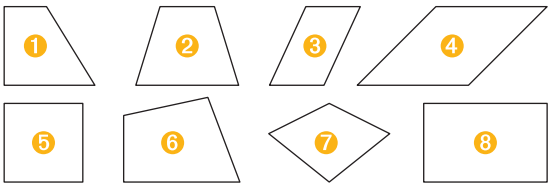
A rombusz paralelogramma, tehát a szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.

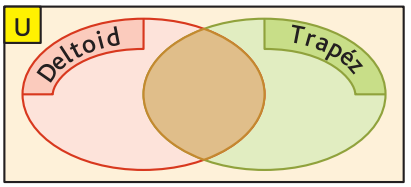
A négyzet olyan rombusz, amelynek a szögei is egyenlők.



FELADATOK

27 Írd be a halmazábra megfelelő részébe a négyszögek sorszámát!





28 Szerkessz rombuszt, ha adott

a) egy oldala és egy átlója: $a = 3$ cm, $e = 2$ cm;

b) két átlója: $e = 3$ cm; $f = 4$ cm!

Gyakorló
8.57–8.60.,
8.64–8.66.

A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van. ☐

B: Minden rombusznak van két szimmetriatengelye. ☐

C: Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van ☐

◉ 2008-ban érettségi feladat volt.

◉ Írd be az állítás után az I, illetve a H betűk közül a megfelelőt!

Vilma a 27. feladatban látható négyszögek közül kiválasztott egyet, és négy igaz, egy hamis állítást mondott róla:

A: Deltoid. **B:** Nem téglalap. **C:** Paralelogramma.

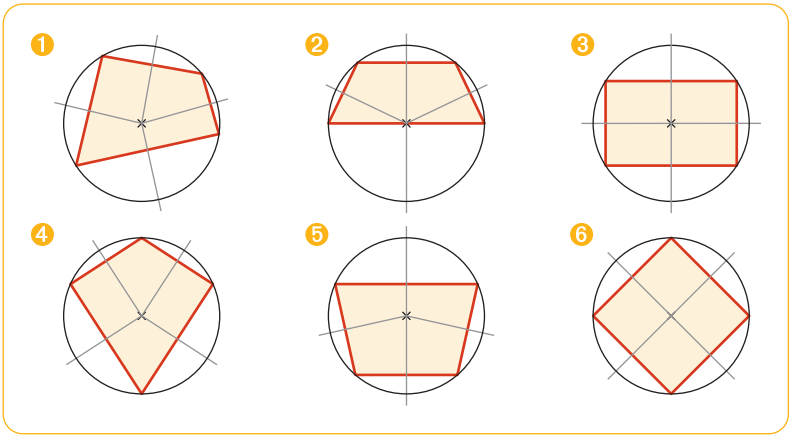
D: Nem trapéz. **E:** Legalább két tükörtengelye van.

Írd ide a kiválasztott négyszög számát! ☐

Fejtörő!

◉ Karikázd be a hamis állítás betűjelét!

A HÚRTRAPÉZ



Mindegyik körön kijelöltünk négy pontot, és a szomszédos pontokat összekötöttük. Így olyan négyszögeket kaptunk, amelyeknek négy-négy oldala a kör egy-egy húrja. Az ilyen négyszögeket **húrnégyszögeknek** nevezzük.

A húr középpontja a húr két végpontjától egyenlő távolságra van, ezért a húrnégyszög oldalfelező merőlegesei átmennek a kör középpontján, vagyis a kör középpontjában metszik egymást.

FELADATOK

Figyelempróba

B14 Az előző ábra rajzainak sorszámával válaszolj! Melyik húrnégyszögre igaz?

a) Van két pár párhuzamos oldala.

b) Tengelyesen szimmetrikus.

c) Van két egyenlő oldala.

d) Van két egyenlő szöge.

e) Pontosan egy szimmetriatengelye van.

f) Van csúcsain átmenő szimmetriatengelye.

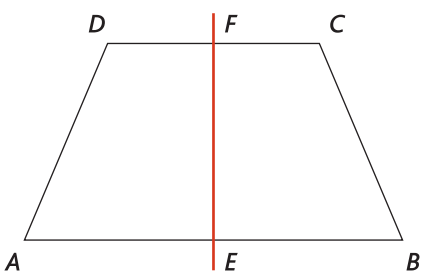
g) Van csúcsain át nem menő szimmetriatengelye.

h) Átlói egyenlők.

Gyakorló
8.67.–8.69.

B15 Rajzolható-e olyan húrtrapéz, amelynek

a) van két egyenlő oldala;
b) minden oldala különböző;
c) minden oldala egyenlő;
d) két-két szemben fekvő oldala egyenlő?



Megfigyelések

A tengelyesen tükrös négyszögek között találunk olyanokat, amelyeknek van csúcspontot nem tartalmazó tükörtengelye.

A tengely a két szemközti oldal felezőmerőlegese, ezért ez a két oldal párhuzamos egymással, tehát az ilyen négyszög trapéz.

A párhuzamos oldalak az alapok. A másik két oldal a két szár.

A tükrösség miatt a szárak felezőmerőlegesei a tükörtengelyen metszik egymást. Ez a metszéspont mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van. Ezért ha a trapéznak van az alapokat felező tükörtengelye, akkor kör rajzolható köré. Az ilyen trapézt **húrtrapéznak** nevezzük.

A tengelyes szimmetriából következtethetünk a húrtrapéz tulajdonságaira.

A húrtrapéz szárai egyenlő hosszúak:

$$AD = BC$$

Az átlói egyenlő hosszúak:

$$AC = BD$$

Az átlók metszéspontja illeszkedik a tengelyre.

A közös alapon fekvő szögei egyenlők:

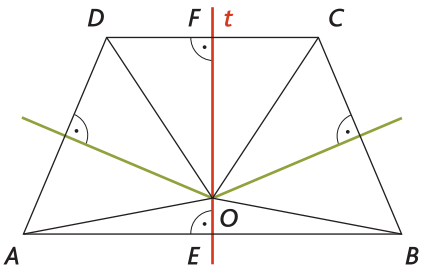
$$\alpha = \beta; \quad \gamma = \delta$$

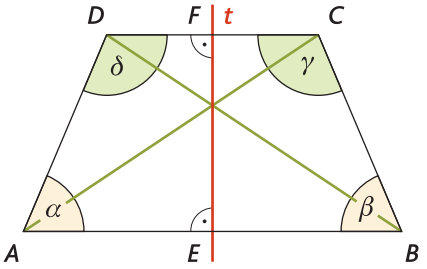
Az egy száron fekvő szögek összege:

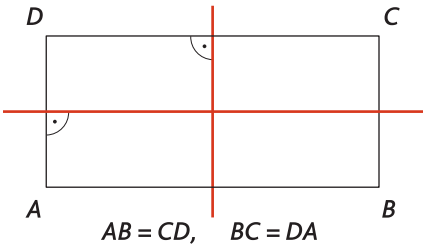
$$\alpha + \delta = 180°; \quad \beta + \gamma = 180°$$

Ha a húrtrapéz alapjai is egyenlők, akkor az ilyen húrtrapéz **téglalap**. A téglalap bármelyik két szemközti oldala lehet a húrtrapéz alapja. A téglalap két-két szemközti oldalának felezőmerőlegese tükörtengely.

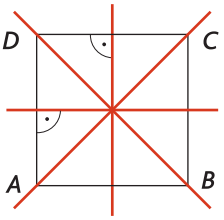
Ha a húrtrapéz minden oldala egyenlő, akkor az ilyen húrtrapéz **négyzet**. A négyzet szimmetrikus két-két szemközti oldalának a felezőmerőlegesére (téglalap-tulajdonság), és szimmetrikus a két átló egyenesére (rombusztulajdonság). Ezért a négyzet olyan húrtrapéz, amelynek négy szimmetriatengelye van.







$AB = CD, \quad BC = DA$



$AB = BC = CD = DA$

Fejtörő!

Az ábrán egy kocka képe látható. A P, a Q és az R pontok felezik a megfelelő éleket, az O pont felezi a lapátlót. Az ábrán látható pontok közül köss össze néhányat úgy, hogy az adott tulajdonságú alakzatot kapd!

Írd be a kapott alakzatot csúcsai segítségével! Keress több megoldást!

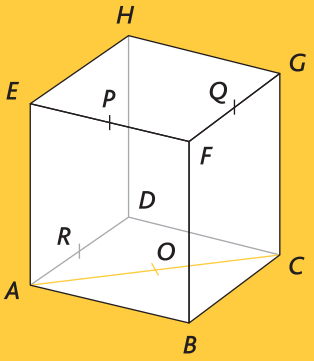
a) Háromszög, pontosan egy tükörtengelye van. ____ ____

b) Háromszög, legalább két tükörtengelye van. ____ ____

c) Deltoid, legfeljebb egy tükörtengelye van. ____ ____

d) Húrtrapéz, pontosan két tükörtengelye van. ____ ____

e) Húrtrapéz, pontosan egy tükörtengelye van. ____ ____

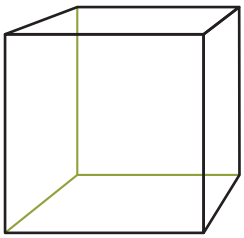


A kockán ábrázolt pontokra figyelj! Melyik az a négyszög, amelyik nem húrtrapéz, de pontosan két szimmetriatengelye van?

A: *APQO*; **B:** *ACGE*; **C:** *HRBQ*; **D:** *ABCD*; **E:** *HPBQ*

SZABÁLYOS TESTEK

Hexaéder (kocka)



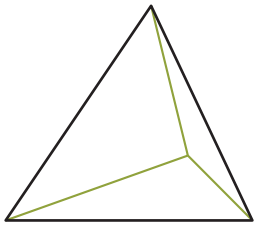
Megfigyelések

A kocka olyan test, amelynek minden lapja egybevágó szabályos sokszög, és a szomszédos lapjai által bezárt lapszögek is azonos nagyságúak. A kocka köré gömb írható (úgy, hogy a kocka minden csúcsa a gömbfelületre illeszkedik).

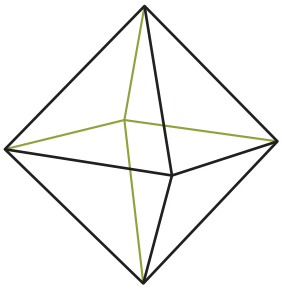
Öt olyan test van, amely rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal.

Vizsgáld meg, hogy ezeket a testeket milyen szabályos sokszögek határolják!

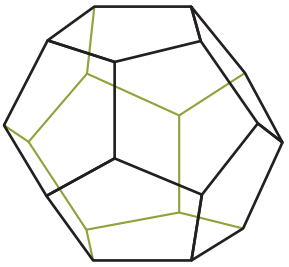
Tetraéder



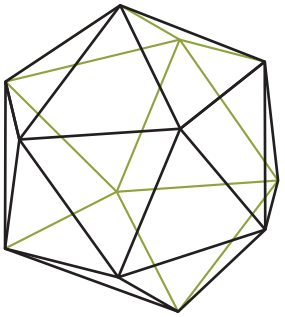
Oktaéder



Dodekaéder

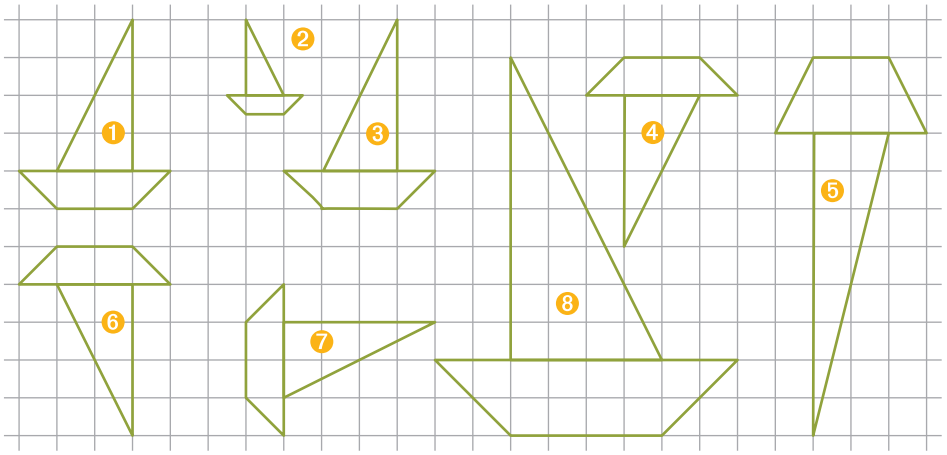


Ikozaéder



GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

B16 Hogyan kaphatjuk az ❶ ábrából a többi ábrát?



Hogyan kaphatjuk a ❷, ❸ stb. ábrából a többit?

Többet ésszel ...

A helyes válasz betűjelének bekarikázásával válaszolj. Indokold a válaszod!

Melyik két szög lehet egy egyenlő szárú háromszög két szöge?

A: 90°, 120°; B: 60°, 70°; C: 45°, 65°; D: 60°, 60°

Egy tükrös háromszög egyik belső szöge 70°. Melyik **nem lehet** a másik két szöge?

A: 55°, 55°; B: 40°, 70°; C: 75°, 75°

bővített szint

B17 *a)* Rajzolj olyan nagybetűket, amelyeknek van szimmetriatengelyük!

b) Melyek azok a számjegyek, amelyeknek van szimmetriatengelyük?

c) Hány olyan kétjegyű, háromjegyű, négyjegyű számot írhatunk föl, amelynek van szimmetriatengelye?

◉ Keress olyan betűtípust a számítógépen, amelyikben egyik betű sem szimmetrikus!

Gyakorló
8.36.

B18 *a)* Rajzolj szögmérővel 80°-os szöget! Szerkeszd meg a szimmetriatengelyét!

b) Rajzolj szögmérővel 280°-os szöget! Szerkeszd meg a szimmetriatengelyét!

c) Szerkessz 120°-os szöget! Szerkeszd meg a $\frac{3}{4}$ részét!

d) Szerkessz 75°-os szöget! Szerkeszd meg a $\frac{3}{2}$ részét!

B19 Egy egyenlőszárú háromszög szárszöge négyszerese az alapszögnek.

Mekkorák a háromszög szögei?

Szerkeszd meg a háromszöget, ha az alapja $\frac{3}{4}$ dm!

B20 Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 20 cm.

a) Mekkorák az oldalai, ha a szára 2 cm-rel hosszabb az alapnál?

b) Mekkorák az oldalai, ha az alapja 2 cm-rel hosszabb a száránál?

B21 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha alapja (a) és szára (b):

a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm; *b)* $a = 4$ cm, $b = 3$ cm; *c)* $a = 5$ cm, $b = 2$ cm

---

B22 A koordináta-rendszerben megadtunk egy szakaszt az $A(2; 5)$ és a $B(5; 2)$ pontokkal. Tükrözd a szakaszt az y tengelyre!

Állapítsd meg a tükrözéssel kapott pontok koordinátáit (jelzőszámait)!

A megfelelő pontokat összekötve milyen sokszöget kaptál?

Gyakorló
8.34.–8.35., 8.37.

B23 Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszöget, ha a csúcspontok koordinátái (jelzőszámai) $A(-3; 0)$, $B(3; -1)$, $C(5; 5)$!

Vedd fel a $P(4; 4)$ és a $Q(7; 7)$ pontot, és húzd meg a PQ egyenest! Ez lesz a tükörtengely. Tükrözd az ABC háromszöget a tükörtengelyre, majd add meg az új háromszög csúcsainak koordinátáit! Fogalmazd meg észrevételedet!

B24 *a)* Egyenlő hosszúságú pálcikákból rakj ki rombuszokat!
Miben különböznek egymástól ezek a rombuszok?

b) Szerkessz rombuszt, ha oldala $a = 2{,}5$ cm, egyik átlója $e = 2$ cm!

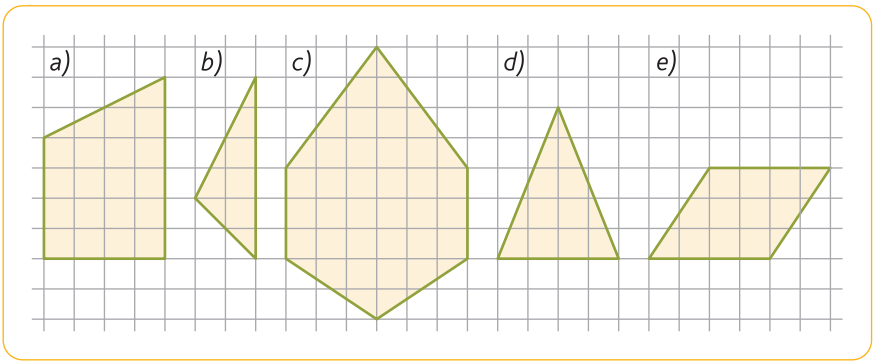
c) Szerkessz rombuszt, ha oldala és egyik átlója $a = e = 3$ cm!
Mekkorák ennek a rombusznak a szögei?

d) Egy rombusz oldala 3 cm, egyik szöge 135°. Hány fokosak a rombusz többi szögei?
Szerkeszd meg ezt a rombuszt!

e) Egy rombusz egyik szöge 75°. Egyik átlója 6 cm. Szerkeszd meg a rombuszt!

Kísérletezz!

B25 Egy háromszöget az egyik oldalára tükröztünk, és így egy olyan téglalapot kaptunk, amelynek a területe 100 cm^2. Milyen háromszöget tükrözhettünk?



B26 Állapítsd meg az alakzatokról, hogy melyek tengelyesen szimmetrikusak!

Rajzold meg a szimmetriatengelyüket!

Amelyik nem tükrös, azt másold le a füzetedbe, és egészítsd ki úgy, hogy tükrös legyen!

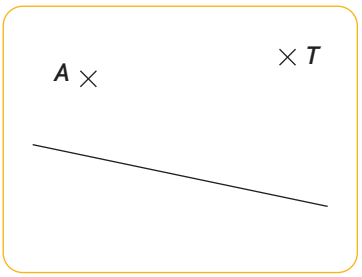
◉ Az alakzat betűjelével válaszolj!

B27 Szerkessz rombuszt, ha oldala 4 cm és egyik belső szöge 120°!

Tükrözd ezt a rombuszt a 120°-os szög mindkét szárára!

A három rombusz együtt milyen sokszöget alkot?

Hány szimmetriatengelye van ennek a sokszögnek?



B28 Egy egyenes folyóparttól nem messze áll egy akol (A) és egy tanya (T). A gazda reggel úgy megy a tanyáról az akolba, hogy közben megmeríti vedreit a folyóban, hogy megitassa a jószágokat.

A folyópart mely pontjához menjen a gazda, ha a lehető legrövidebb úton akar

a) az akolhoz jutni; *b)* vizet cipelni?

B29 Egy háromszöget mindhárom oldalára tükrözünk.

a) Milyen sokszögeket alkothat a négy háromszög együtt?

b) Milyen háromszöget tükröztünk, ha a négy háromszög együtt szintén háromszöget alkot?

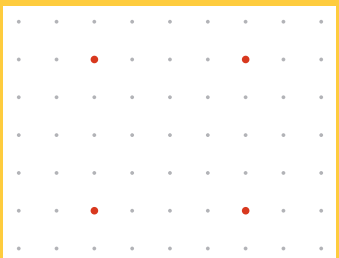
Mekkorák a kapott háromszög szögei? Van-e szimmetriatengelye?

◉ A paralelogrammák szomszédos szögei hány fokra egészítik ki egymást?

B30 *a)* Egy rombusz egyik szöge ötszöröse a másiknak. Egyik átlója 6 cm.

Szerkeszd meg a rombuszt!

b) Mekkorák a deltoid szögei, ha tudjuk, hogy van derékszöge, és van olyan szöge is, amely kétszerese egy másiknak?



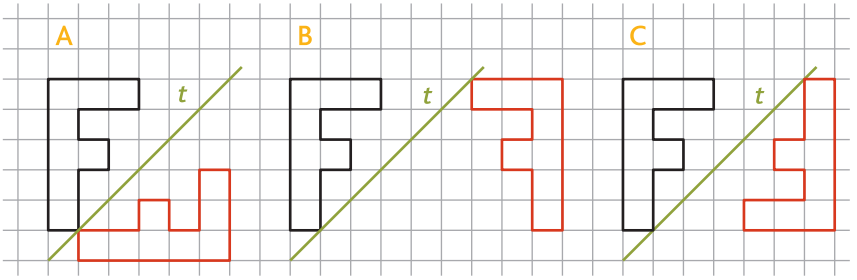
A pontrácson látható négyzetnek két csúcsát helyezd át másik rácspontra úgy, hogy a létrejövő síkidomnak pontosan

a) egy, *b)* kettő, *c)* három szimmetriatengelye legyen!

Keress több megoldást!

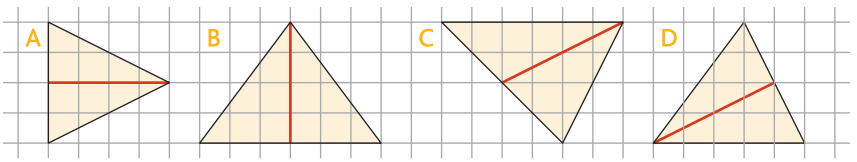
› bővített szint

B31 A mellékelt ábrák közül karikázd be a helyes tengelyes tükrözés betűjelét!



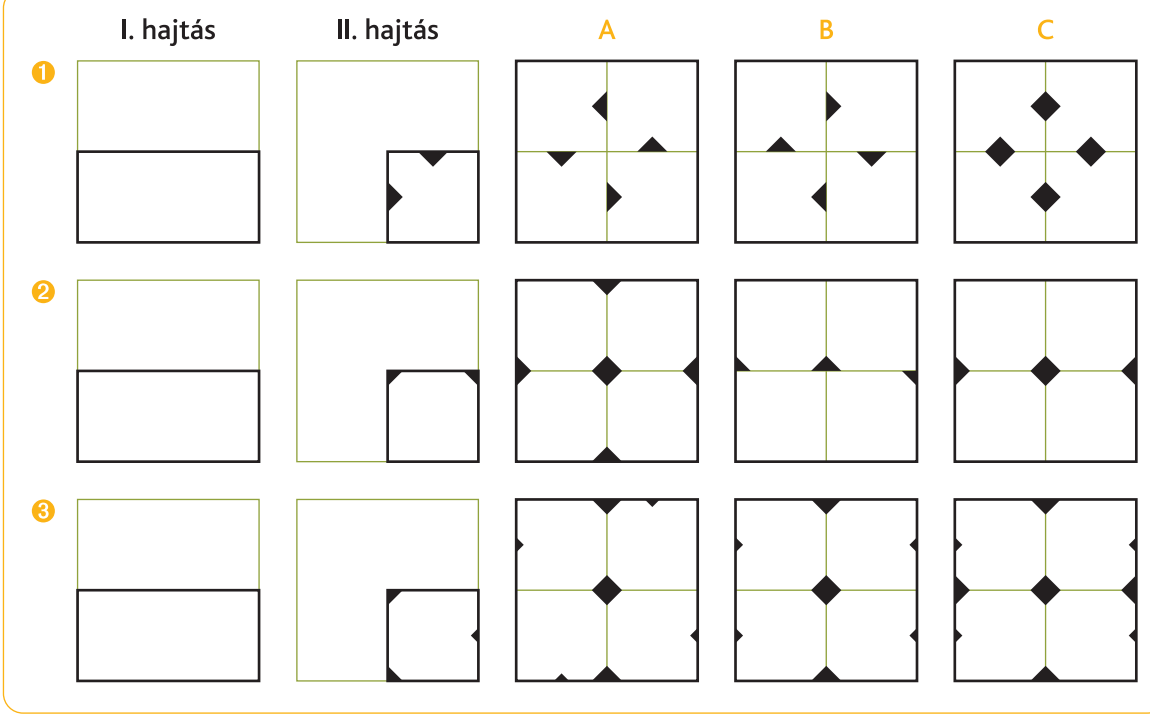
B32 A háromszögek közül melyikbe rajzoltuk be hibásan a tükörtengelyt?

A hibás ábra betűjelének bekarikázásával válaszolj!



B33 Négyzet alakú papírlapot kétszer összehajtunk, majd az ábrán befeketített részt kivágjuk belőle.

Az **A**, **B**, **C** alakzatok közül melyikhez jutunk a papírlap széthajtása után?



B34 Van-e a kockának olyan **síkmetszete**, amely

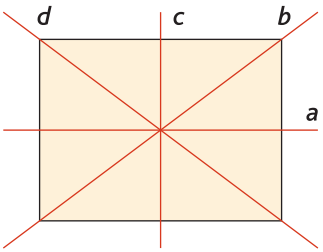
a) téglalap; *b)* rombusz; *c)* trapéz; *d)* négyzet;
e) szabályos háromszög; *f)* tompaszögű háromszög;
g) szabályos hatszög; *h)* szabályos nyolcszög?

TUDÁSPRÓBA

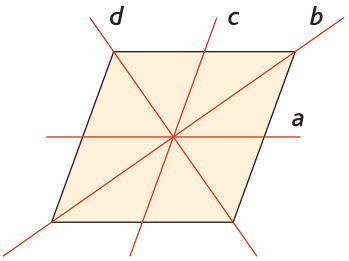
29

1 Az alakzatokon keresztül egyeneseket húztunk (ezeket kisbetűkkel jelöltük).

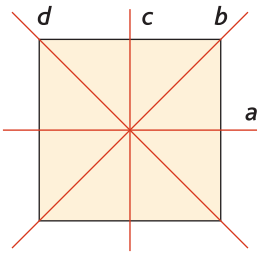
a) Téglalap:



b) Rombusz:



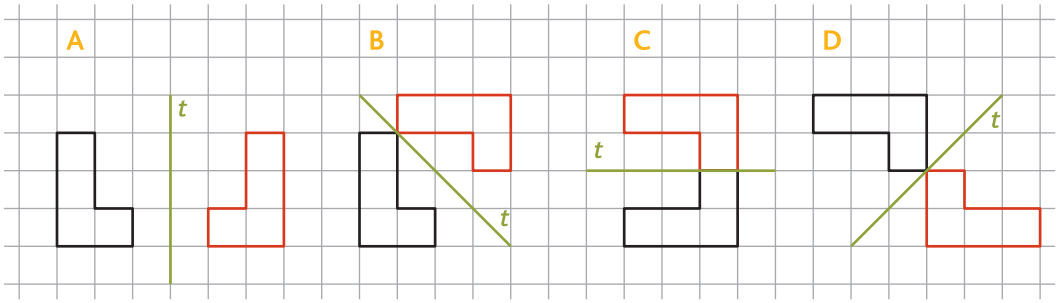
c) Négyzet:

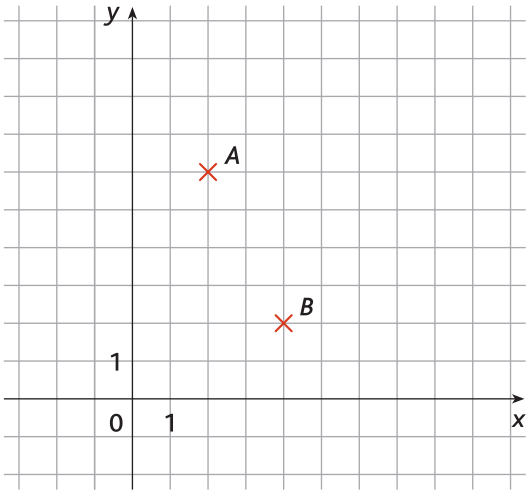


Melyik egyenesre szimmetrikus az alakzat?

Az egyenes betűjelével válaszolj a kérdésre!

2 Az alábbi ábrák közül karikázd be a **hibás** tengelyes tükrözés betűjelét!





3 A koordináta-rendszerben megadtuk egy egyenlő szárú háromszög két csúcsát. Melyik rácspont lehet a harmadik csúcs? Hány ilyen pont van?

4 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapja 4 cm, szárai 25 mm-esek! Tükrözd a háromszöget az egyik szárának egyenesére!

Milyen síkidomot alkot együtt az eredeti háromszög és a tükörképe?

Számítsd ki ennek a síkidomnak a kerületét!

5 Szerkessz deltoidot, amelynek a szimmetriaátlója 48 mm hosszú, a másik átló ennek kétharmad része, és a deltoidnak pontosan egy derékszöge van!

Figyelempróba

Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

Melyik **húrnégyszögnek** van pontosan két szimmetriatengelye?

A: A nem rombusz téglalapnak.
B: A nem négyzet deltoidnak.
C: A nem téglalap rombusznak.
D: A nem téglalap húrtrapézznak.

5. NYITOTT MONDATOK



A tudományokban és a mindennapi életben is fontos, hogy a mennyiségek közti összefüggések alkalmazásával ismert adatokból **ismeretlen** értékeket tudjunk meghatározni, azaz **egyenleteket** tudjunk megoldani. Például, ha ismerjük az autónk sebességét és az út hosszát, akkor egy egyszerű egyenlet megoldásával meghatározhatjuk, hogy mennyi idő alatt jutunk célba. A holdutazáshoz viszont a tudósoknak rengeteg, nagyon bonyolult egyenletet kellett megoldaniuk.

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. példa

Egészítsük ki a **nyitott mondatot** a következő négyszögek valamelyikével.

$U =$ { ① ② ③ ④ }

A ..... négyszögnek van párhuzamos oldalpárja.

Mely esetben kapunk igaz, mely esetben hamis állítást?

*Nyitott mondatnak nevezünk egy állítást, ha benne betűvel, kiponto-zással, névmással stb. jelölt olyan **változó** fordul elő, amelynek helyébe egy alaphalmaz elemeit helyettesíthetjük be.*

A feladat szerint csak a felsorolt négyszögekkel foglalkozunk. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy ennek a nyitott mondatnak az **alaphalmaza** az U.

Behelyettesítjük az alaphalmaz elemeit a nyitott mondatba:

A ① négyszögnek van párhuzamos oldalpárja. **Igaz** kijelentést kaptunk.

A ② négyszögnek van párhuzamos oldalpárja. Hamis kijelentést kaptunk.

A ③ négyszögnek van párhuzamos oldalpárja. Hamis kijelentést kaptunk.

A ④ négyszögnek van párhuzamos oldalpárja. **Igaz** kijelentést kaptunk.

A ① és a ④ **megoldása** a nyitott mondatnak.

A ② és a ③ **nem megoldása** a nyitott mondatnak.

A nyitott mondat **igazsághalmaza**: $I =$ { ① ④ }

Hogyan nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek van párhuzamos oldalpárjuk?

2. példa

Oldjuk meg a következő nyitott mondatot: $2 + x < 7$

Alaphalmaz: $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Megoldás a következő oldalon.

A nyitott mondat megoldásainak halmaza a nyitott mondat igazsághalmaza.

Helyettesítsük be az alaphalmaz elemeit. Például:

$2 + (-2) < 7$ Igaz kijelentés, ezért a -2 megoldás.

$2 + 5 < 7$ Hamis kijelentés, az 5 nem megoldása a nyitott mondatnak.

Igazsághalmaz: $I = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

3. példa

Megfigyelted a természetes számok halmazának jelölését?

Az alaphalmaz mely elemei teszik igazzá a nyitott mondatot? $\square + 3 = 2$

Alaphalmaz: $\mathbb{N} = \{\text{Természetes számok}\}$

Van-e olyan alaphalmaz, amelyen van megoldása az egyenletnek?

Nincs olyan természetes szám, amelyet $\square$ helyére írva igaz kijelentést kapunk.

Az igazsághalmaznak nincs egyetlen eleme sem: $I = \{\ \}$, **üres halmaz**.

Emlékeztető

A példák állításaiban az üres helyre, a keret vagy a betű helyére sorra **behelyettesíthetjük** az **alaphalmaz** elemeit. Az ilyen hiányos állítást **nyitott mondatnak** nevezzük.

Ha a nyitott mondatba behelyettesítjük az alaphalmaz egy elemét, akkor igaz vagy hamis **kijelentést** kapunk. Az alaphalmaznak azok az elemei tartoznak az **igazsághalmazba**, amelyeket behelyettesítve a nyitott mondatba igaz kijelentéseket kapunk. Az igazsághalmazt más szóval **megoldáshalmaznak** mondjuk.

Az igazsághalmaz elemeit a nyitott mondat megoldásainak nevezzük.

A következő nyitott mondatokat **egyenleteknek** nevezzük:

$$2 \cdot x + 3 = 15 - x; \qquad 4 \cdot (a + 2) = 4 \cdot a + 8$$

Az egyenletben két kifejezést az egyenlőség jelével kapcsolunk össze.

Értelmezd a következő jeleket! Kösd össze azokat, amelyeknek megegyezik a jelentésük!

$>$ $<$ $\geqq$ $\leqq$

$\not<$ $\not>$ $\ngeqq$ $\nleqq$

A következő nyitott mondatok úgynevezett **egyenlőtlenségek**:

$$x < 6; \qquad x + 1 > y; \qquad a - 13 \leqq 56; \qquad b + 0{,}25 \geqq b + 1{,}8;$$

$$u + 0{,}5 \not< 0{,}75; \qquad v + w \not> 8; \qquad z \ngeqq 1; \qquad 3 \nleqq 5 + t; \qquad x + y \neq 0$$

Az egyenlőtlenségekben két kifejezést a „kisebb”, „nagyobb”, „kisebb vagy egyenlő”, „nagyobb vagy egyenlő”, „nem egyenlő” stb. jelével kapcsolunk össze.

Ha nem mondunk mást, akkor az alaphalmaz a tanult számok legbővebb halmaza, vagyis esetünkben a **racionális számok halmaza**.

FELADATOK

1 A következő egyenletek mellett ott találod az alaphalmazukat is. Keresd meg az igazsághalmazukat! Mely egyenleteknek nincs megoldása? Mely egyenlet igazsághalmaza egyezik meg az alaphalmazzal?

a) $x + 5 = 1$, $A = \{\text{Egész számok}\}$; *b)* $a + 9 = 8$, $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;

c) $a + 9 = 8$, $C = \{0; 1; 2; 3\}$; *d)* $3 \cdot y - 2 = 3$, $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$;

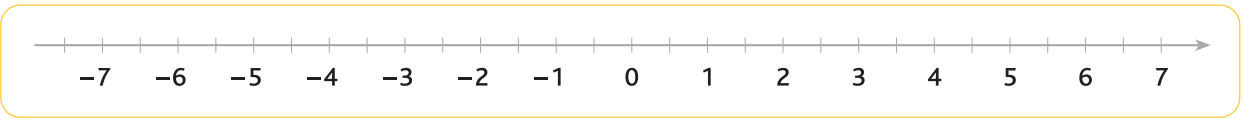
e) $3 \cdot y - 2 = 3$, $E = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{6}{3}\right\}$;

f) $x \cdot 2 + 2 = (x + 1) \cdot 2$, $H = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right\}$;

g) $|x+2|=x+2$, $V=\{-2;0;1;2;3;4;5\}$;
h) $|x+2|=x+2$, $W=\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$;
i) $(x-1)\cdot(x+2)=0$, $L=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

◉ | | *az abszolútérték jele (lásd 44. o.)*

2 Mindhárom feladathoz rajzolj egy-egy ilyen számegyenest!



Az alaphalmaz a számegyenesen ábrázolt számok halmaza.

Az egyes feladatokban az első nyitott mondat igazsághalmazát *kék*, a másodikét *piros*, a harmadikét *zöld* színnel ábrázold a számegyenesen! Mit tapasztalsz?

◉ *Szomszédoddal beszéljétek meg tapasztalataitokat. Észrevételeiteket fogalmazzátok meg közösen.*

a) $2\cdot(a-1)<a-2$ $\quad 2\cdot(a-1)=a-2$ $\quad 2\cdot(a-1)>a-2$

b) $b+6<2\cdot(b+6)$ $\quad b+6=2\cdot(b+6)$ $\quad b+6>2\cdot(b+6)$

c) $3\cdot c+12<3\cdot(c+4)$ $\quad 3\cdot c+12=3\cdot(c+4)$ $\quad 3\cdot c+12>3\cdot(c+4)$

4. példa

Gondolj egy számra! Adj hozzá kétszer annyit, majd 21-et! Oszd el az eredményt 3-mal, majd vond ki belőle azt a számot, amelyre eredetileg gondoltál!

7 a végeredmény, igaz?

Vajon bármely gondolt szám esetén tényleg 7 a végeredmény?

◉ *Például*
A gondolt szám 15.
15 + 30 = 45; 45 + 21 = 66
66 : 3 = 22; 22 – 15 = 7

Mivel nem mondtunk mást, az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

Írjuk fel egyenlettel az adatok közti összefüggést.

A gondolt szám: x

Hozzáadjuk a 2-szeresét: $x+2\cdot x=3\cdot x$ (a szám 3-szorosát kapjuk).

Hozzáadunk 21-et: $3\cdot x+21$

Osztjuk 3-mal: $(3\cdot x+21):3$

Kivonjuk belőle az eredeti számot: $(3\cdot x+21):3-x$

Tehát az utasításokat követve ezt az egyenletet írhatjuk föl:

$$(3\cdot x+21):3-x=7$$

Az összeget úgy is oszthatjuk 3-mal, hogy minden tagját elosztjuk 3-mal:

$$x+7-x=7$$

Ha most az x-szel jelölt számból elvesszük az x-et, akkor valóban 7-et kapunk, bármilyen számra is gondoltunk eredetileg:

$$7=7$$

Ennek az egyenletnek az igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal.

$(3\cdot x+21):3=$
$=(3\cdot x):3+21:3=?$

Menjen ki néhány tanuló az asztalhoz. Állítsátok őket két csoportba úgy, hogy a két csoportban megegyezzen

a) a fiúk és a lányok számának összege;

b) a fiúk és a lányok számának szorzata;

c) a sötét szemű és a világos szemű gyerekek számának különbsége!

◉ *Találjatok ki más szempontokat is a csoport két részre bontására! Szükség esetén egészítsétek ki a csoportot!*

Értelmezés

Az olyan egyenletet, amelynek igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal, azonosságnak nevezzük.

❶ $x - (-5) = x + (+5)$ Ez az egyenlet azonosság, az alaphalmaz bármilyen számhalmaz lehet.

Mit értünk egy negatív szám abszolútértékén?

❷ $|x| = -x$ Ez nem azonosság az eddig tanult számok halmazán, de azonosság annak részhalmazán, a negatív számok halmazán.

Értelmezés

Az olyan egyenlőtlenséget, amelynek igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal, azonos egyenlőtlenségnek nevezzük.

❶ $x - (-5) > x$
$x + 5 > x$ Ez azonos egyenlőtlenség, az alaphalmaz bármilyen számhalmaz lehet.

❷ $x \cdot 5 > x$ Ez nem azonos egyenlőtlenség az eddig tanult számok halmazán, de azonos egyenlőtlenség annak részhalmazán, a pozitív számok halmazán.

FELADATOK

Figyeld meg a racionális számok halmazának jelölését!

3 Sorold fel az egyenletek, illetve az egyenlőtlenségek betűjelét! Az alaphalmaz a tanult számok halmaza, $\mathbb{Q} = \{\text{Racionális számok}\}$

a) $x + 7 = x \cdot 2 + 1$; *b)* $3 + x \neq 3 + (-2) + x \cdot 3$;

c) $x \cdot (-3) \leqq x$; *d)* $x \cdot 7 = (x \cdot 2) \cdot \frac{7}{2}$

A megoldáshoz hozzátartozik az ellenőrzés is.

Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

Karikázd be az azonosságok, illetve az azonos egyenlőtlenségek betűjelét!

Az alaphalmaz minden eleméről el kell döntenünk, hogy megoldása-e az egyenletnek, vagy sem. „Tervszerűen” próbálkozz!

4 Oldd meg az egyenleteket próbálgatással!

Az alaphalmaz: $A = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

a) $x \cdot (-4) = 12$; *b)* $x - 5 = -2$;

c) $2 \cdot x + 5 = 8$; *d)* $x + (-1) = x - (+1)$;

e) $(x - 3) \cdot (x - 2) = 0$; *f)* $|x + 4| = x + 4$;

g) $2 \cdot (x + 2) - 1 = 2 \cdot x + 5$; *h)* $3 \cdot (x - 1) = 3 \cdot x - 3$

Gyakorló 6.01–6.13.

Sorold föl az azonosságok betűjelét! Írd föl azoknak az egyenleteknek a betűjelét is, amelyeknek az igazsághalmaza az üres halmaz!

Fejtörő!

Bontsd fel a 66-ot két szám összegére úgy, hogy az egyik szám egyötöde egyenlő legyen a másik szám egyhatodával!

Egy fél tégla és 2 kg homok tömege megegyezik egyharmad tégla és 3 kg homok tömegével. Mennyi a tömege egy téglának?

Többet ésszel ...

Az egyik faluból két apa és ezeknek az apáknak egy-egy fia költözik el. Így a falu lakóinak száma 3-mal csökken. Hogyan lehetséges ez?

A MŰVELETEK KÖZTI ÖSSZEFÜGGÉSEK ALKALMAZÁSA

1. példa

Mely számok írhatók a keretbe úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen?
Az alaphalmaz a tanult számok halmaza: $\mathbb{Q}$ = {Racionális számok}

$\square + 7 = 3$; $\square - 5 = 10$; $\square \cdot 4 = 34$; $\square : 7 = -3$

Egyszerű egyenleteket több ezer évvel ezelőtt, Babilonban és Egyiptomban már meg tudtak oldani. Később az ókori görög, indiai, kínai matematikusok olyan bonyolult egyenleteket is megoldottak, amelyekkel az általános iskolában nem foglalkozunk.

Az ókorban elért eredményeket az arabok fejlesztették tovább. Az európaiak tőlük tanulták az egyenletmegoldás módszereit.

Alkalmazzuk a műveletek közti összefüggéseket:

$\square + 7 = 3$ $\qquad \square \underset{-7}{\overset{+7}{\rightleftarrows}} \boxed{3}$ A 7 hozzáadása előtt 7-tel kevesebb volt.

$\square = 3 - 7$

$\square = -4$ $\qquad$ Ellenőrzés: $-4 + 7 = 3$

$\square - 5 = 10$ $\qquad \square \underset{+5}{\overset{-5}{\rightleftarrows}} \boxed{10}$ Az 5 elvétele előtt 5-tel több volt.

$\square = 10 + 5$

$\square = 15$ $\qquad$ Ellenőrzés: $15 - 5 = 10$

$\square \cdot 4 = 34$ $\qquad \square \underset{:4}{\overset{\cdot 4}{\rightleftarrows}} \boxed{34}$ A 4-gyel való szorzás előtt negyedrésze volt.

$\square = 34 : 4$

$\square = 8{,}5$ $\qquad$ Ellenőrzés: $8{,}5 \cdot 4 = 34$

$\square : 7 = -3$ $\qquad \square \underset{\cdot 7}{\overset{:7}{\rightleftarrows}} \boxed{-3}$ A 7-tel való osztás előtt 7-szer annyi volt.

$\square = (-3) \cdot 7$

$\square = -21$ $\qquad$ Ellenőrzés: $-21 : 7 = -3$

FELADAT

5 Mely számok írhatók a betűk helyére úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen?
Az alaphalmaz a tanult számok halmaza.

a) $x + 56{,}7 = 67{,}8$; $\quad 6{,}78 + y = 17{,}5$; $\quad u + (-3) = 0$; $\quad 6 + v = -8$

b) $x - 25{,}4 = 13{,}23$; $\quad 45{,}8 - y = 10{,}75$; $\quad u - (-5) = 10$; $\quad 10 - v = 20$

c) $x : 15 = 5$; $\quad 6{,}5 \cdot y = 45{,}5$; $\quad u : (-13) = 39$; $\quad 16 \cdot v = -96$

d) $\frac{x}{5} \cdot 3 = \frac{21}{5}$; $\quad \frac{y}{50} \cdot 5 = \frac{21}{10}$; $\quad \frac{u}{5} : 3 = \frac{2}{15}$; $\quad \frac{5}{6} : \frac{v}{3} = \frac{1}{2}$

Ellenőrizd megoldásod helyességét! Írd be a betű helyére a számot, hajtsd végre a műveletet, majd hasonlítsd össze az eredményt a jobb oldalon álló számmal!

Melyik az a szám, amelyhez egynegyedét adva 15-öt kapunk?

Ókori egyiptomi feladat.

2. példa

Ha egy szám 5-szöröséhez 6-ot adunk, és az eredményt osztjuk 7-tel, akkor végeredményül 8-at kapunk. Melyik ez a szám?

Az adatok közötti összefüggések felírása egyenlettel:

Az ismeretlen számot jelölje:	x
A számot szorozzuk 5-tel:	$5 \cdot x$
A szorzathoz 6-ot adunk:	$5 \cdot x + 6$
Az eredményt osztjuk 7-tel:	$(5 \cdot x + 6) : 7$
Végeredményül 8-at kapunk:	$(5 \cdot x + 6) : 7 = 8$

Figyeld meg az egyenlet felírásának gondolatmenetét szemléltető ábrát!

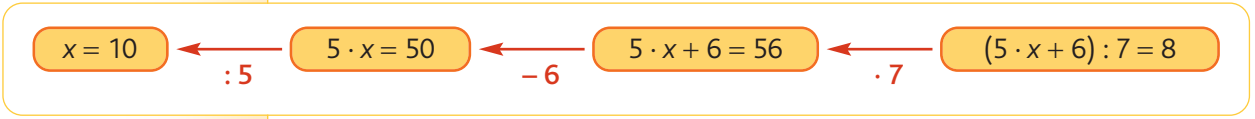


Megoldás:

Több lépésben is alkalmazhatjuk a műveletek közti összefüggéseket.

Mielőtt osztottunk 7-tel, 7-szer annyi volt:	$5 \cdot x + 6 = 56$
A 6 hozzáadása előtt 6-tal kevesebb volt:	$5 \cdot x = 50$
Az 5-tel való szorzás előtt ötödrésze volt:	$x = 10$

Kövesd a megoldás lépéseit az ábra segítségével!



Az egyenlet megoldásának ezt a módját nevezzük **lebontogatásnak**.

Ellenőrzés: A 10 ötszöröse: 50. Ehhez 6-ot adunk: 56. Osztjuk 7-tel: 8.

A szöveges feladat megoldását mindig a szöveg alapján ellenőrizzük.

Válasz: A keresett szám 10.

A szöveges feladat kérdésére mindig szöveges választ adunk.

FELADATOK

Gyakorló 6.14–6.15.

6 Írd föl egyenlettel az adatok közti összefüggést, és oldd meg az egyenletet! A szöveg alapján igazold a megoldás helyességét! Alaphalmaz: $\mathbb{Q}$

Az ellenőrzés hozzátartozik az egyenlet megoldásához.

A szöveges feladatot a szöveg alapján ellenőrizzük.

a) Ha egy szám 4-szereséből kivonunk 10-et, akkor 20-at kapunk. Melyik ez a szám?

b) Ha egy számot osztunk 4-gyel, és a hányadosból kivonunk 24-et, akkor 32-t kapunk. Melyik ez a szám?

7 Fogalmazz szöveget a következő feladatokhoz! Alaphalmaz: $\mathbb{Q}$ Oldd meg ezeket az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást!

Ügyelj arra, hogy mit jelent a zárójel!

a) $6 \cdot a + 12 = 54$; $b \cdot (6 + 12) = 54$; $6 \cdot (c + 12) = 54$

b) $(d + 7) : 15 = 10$; $e : (7 + 15) = 10$; $7 + 15 : f = 10$

Fejtörő!

Tréfás népi fejtörő.

Hány éves Palkó, ha az életkorát firtató kérdésre így válaszol?

— „Annyi, amennyi. Anyámasszony kétannyi. Apámuram öttel több. Hárman vagyunk száz esztendősök”.

AZ EGYENLET KÉT OLDALÁNAK EGYENLŐ VÁLTOZTATÁSA

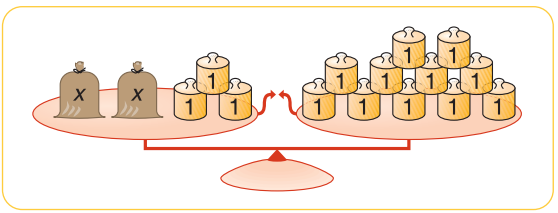
1. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $2 \cdot x + 3 = 11$. Alaphalmaz: $\mathbb{Q}$

Az egyenlet két oldalát egy mérleg két serpenyőjéhez hasonlíthatjuk.

Az egyenlőség a mérleg egyensúlyi helyzetét jelenti.

A mérleg bal oldali serpenyőjén két ugyanakkora csomag és 3 kg tömegű súly, a jobb oldali serpenyőjén 11 kg tömegű súly van.

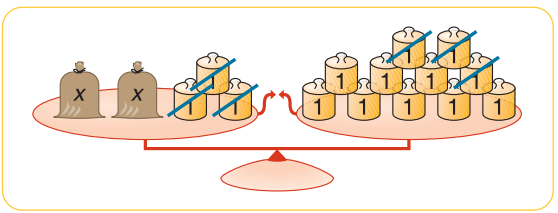


Hány kilogramm egy csomag, ha a mérleg egyensúlyban van?

A csomag ismeretlen tömegét x-szel jelöljük.

Ha azonosan változtatjuk a két oldalt, akkor az egyensúlyi helyzet megmarad.

A mérleg mindkét serpenyőjéről levehetünk 3 kg-ot. (Áthúzással jeleztük.)

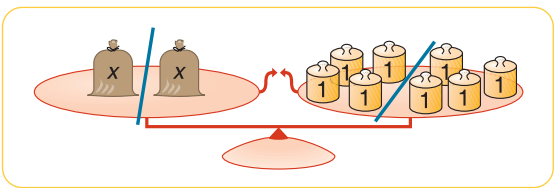


Az egyenlet mindkét oldalából elvehetünk 3-at (az egyenlet jobb oldala mellé írva jelöltük):

$2 \cdot x + 3 = 11 \quad / -3$

A $2 \cdot x = 8$ egyenletet kapjuk.

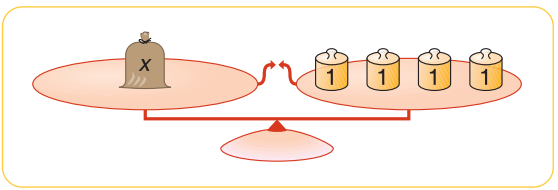
Mindkét serpenyőn megfelezzük a tömeget:



Az egyenlet mindkét oldalát osztjuk 2-vel ($2 \neq 0$):

$2 \cdot x = 8 \quad / : 2$

Leolvasható, hogy hány kilogramm egy csomag.



Leolvasható az x értéke:

$x = 4$

Behelyettesítéssel igazoljuk a megoldás helyességét: $2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

$11 = 11$

A két oldal egyenlő változtatásának módszerét az európai matematikusok Al-Hvarizmi (i. sz. 820 körül) perzsa-arab matematikus Hiszáb al-dzsabr valmukábala című könyvéből ismerték meg, miután a könyvet latinra fordították. Al-Hvarizmi rendszerezte a görög és az indiai matematikusok eredményeit, de azon túlmenően kidolgozta az egyenletmegoldás általánosan alkalmazható eljárását.

Erre a lépésre utal a könyv címében a „dzsabr”, magyarul „helyrerakás” szó.

Erre a lépésre utal a könyv címében a „mukábala”, magyarul „egyszerűsítés” szó.

Al-Hvarizmi könyvének címét nem tudták lefordítani, így került be az al-dzsabr szó az európai nyelvekbe. Ebből származik az algebra szavunk. Al-Hvarizmi nevének hibás átírásából származik az algoritmus (= eljárás) szó.

Figyelempróba

Három barát közül a két könnyebb feláll a mérlegre, és azt látja, hogy tömegük 62 kg. Ezután a harmadik gyerek helyet cserél a legkönnyebbel, ekkor együttes tömegüket 68 kg-nak találják. Hány kilogramm a gyerekek tömege külön-külön, ha a két nehezebb között 2 kg a különbség?

2. példa

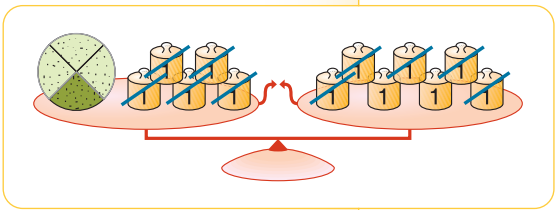
Oldjuk meg a következő egyenletet: $\frac{x}{4} + 5 = 7$. Alaphalmaz: $\mathbb{Q}$

Törtrészeket is rakhatunk a „mérleg” serpenyőire.

Az x jelentse egy dinnye tömegét.

A mérleg bal oldali serpenyőjén egy dinnye $\frac{1}{4}$ része és 5 kg tömegű súly, a jobb oldali serpenyőn 7 kg tömegű súly van.

Hány kilogramm volt az egész dinnye, ha a mérleg egyensúlyban van?

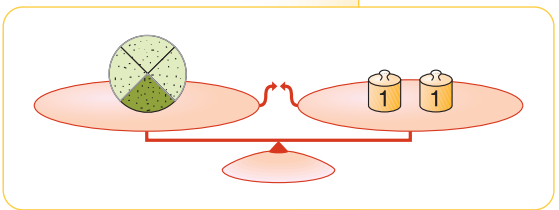


A mérleg mindkét serpenyőjéről levehetünk 5 kg-ot.

Az egyenlet mindkét oldalából elvehetünk 5-öt:

$\frac{x}{4} + 5 = 7 \quad / - 5$

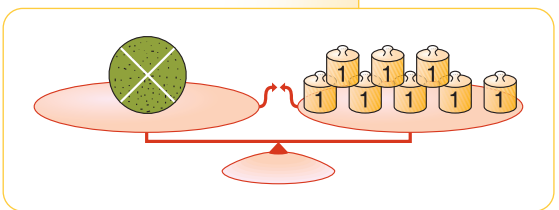
Az $\frac{x}{4} = 2$ egyenletet kapjuk.



A mérleg mindkét serpenyőjén megnégyszerezhetjük a tömeget.

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozhatjuk 4-gyel:

$\frac{x}{4} = 2 \quad / \cdot 4$



Megkapjuk az egész dinnye tömegét.

Leolvashatjuk a megoldást:

$x = 8$

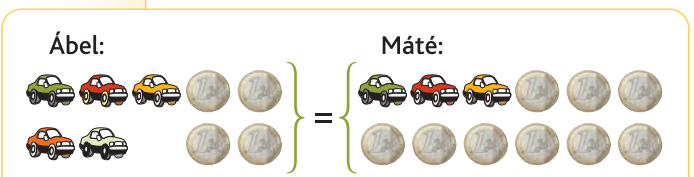
A dinnye tömege 8 kg.

Behelyettesítéssel igazoljuk a megoldás helyességét: $\frac{8}{4} + 5 = 2 + 5 = 7$

3. példa

Ábelnek 5 kis autója és 4 €-ja van. Máté „vagyona” 3 kis autó és 9 €. A két gyerek „vagyonának” az értéke megegyezik. Hány eurót ér egy kis autó, ha mindegyik kis autó ugyanannyiba kerül?

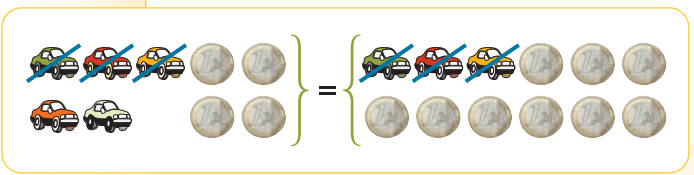
A két oldal egyenlő változtatásával egyre egyszerűbb egyenleteket kaphatunk.



Jelöljük a-val egy kis autó árát.

$5 \cdot a + 4 = 3 \cdot a + 9$

Mindkét „vagyonból” vegyünk el 3 kis autót.



Az egyenlet mindkét oldalából vegyük el a $3 \cdot a$ szorzatot.

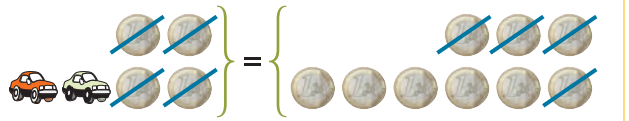
$5 \cdot a + 4 = 3 \cdot a + 9 \quad / - 3 \cdot a$

A $2 \cdot a + 4 = 9$ egyenletet kapjuk.

›››

»»

Mindkét „vagyonból” vegyünk el 4 €-t.

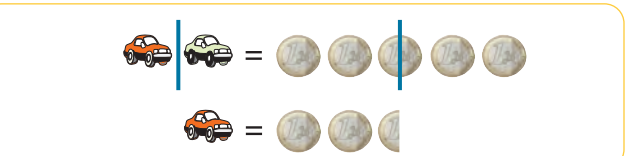


Az egyenlet mindkét oldalából vegyünk el 4-et.

$2 \cdot a + 4 = 9 \quad / - 4$

A $2 \cdot a = 5$ egyenletet kapjuk.

Felezzük meg mindkét „vagyont”, majd olvassuk le az eredményt.



Az egyenlet mindkét oldalát osszuk 2-vel.

$2 \cdot a = 5 \quad / : 2$

$a = 2{,}5$

2,5 €-ba került egy kis autó.

Ellenőrzés: Ábel vagyona 5 kis autó ára meg 4 €: $5 \cdot 2{,}50\ € + 4\ € = 16{,}50\ €$

Máté vagyona 3 kis autó ára meg 9 €: $3 \cdot 2{,}50\ € + 9\ € = 16{,}50\ €$

Figyeld meg! Egyenlően változtatjuk a két oldalt.

FELADATOK

8 Figyeld meg, hogyan változik az egyenlet mindkét oldala a megoldás során!

$3 \cdot x - 5 = x + 9$ /.....

$3 \cdot x = x + 14$ /.....

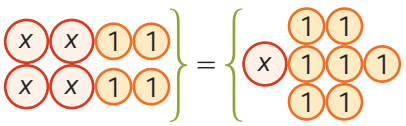
$2 \cdot x = 14$ /.....

$x = 7$ /.....

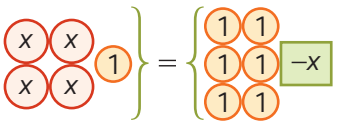
Írd be az egyenlő változtatás lépéseit!

9 Az ábrák egyenleteket szemléltetnek. Az (1) +1-et jelent.
Az (x) jelöli a keresett (ismeretlen) értékét, a $-x$ az (x) ellentettje.

a)



b)



Rakd ki ezeket a példákat az Eszköztár adósság és készpénz modelljeivel!

Határozd meg az x értékét!

10 Oldd meg az egyenleteket! Alaphalmaz: $\mathbb{Q}$

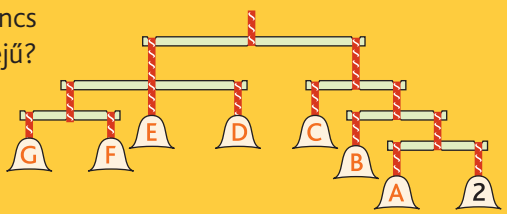
a) $5 \cdot a + 17 = 52$;
b) $78 + 4 \cdot b = 7 \cdot b$;
c) $2 \cdot c - 3 = c + 17$;
d) $9 \cdot d - 8 = 73$;
e) $75 - 2 \cdot e = 3 \cdot e$;
f) $4 \cdot f + 8 = f - 22$;
g) $g + 108 = 5 \cdot g$;
h) $7 \cdot h - 20 = 3 \cdot h$;
i) $48 - i = 25 - i$

Ellenőrizd a megoldást!

Figyelempróba

A sárkánykirályoknak csak páratlan számú fejük lehet, hogy mindig tudjanak döntést hozni. Az északi, a déli, a keleti és a nyugati sárkánykirály közül a legtöbb fejjel büszkélkedőnek 9, a legkevesebbel rendelkezőnek 5 feje van. A déli királynál csak a nyugatinak van több feje, viszont a keletinek nincs több feje, mint az északinak. Kinek hány feje lehet, ha egyikük hétfejű?

Ebben a harangjátékban a harangok (egész mérőszámú) tömege különböző is lehet. Adjuk meg az egyes tömegeket, ha a jobb szélső harang tömege 2 dkg, és mindenhol egyensúly van!



4. példa

Oldjuk meg a két oldal egyenlő változtatásával a következő egyenletet, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$).

$$\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}=1{,}7\cdot x-0{,}9$$

Úgy is dolgozhatunk, hogy a tizedestörteket írjuk fel törtalakban:
$1{,}7=\frac{17}{10}$; $0{,}9=\frac{19}{10}$

Írjuk át a törteket tizedestört alakba:

$0{,}5\cdot x+0{,}75=1{,}7\cdot x-0{,}9$	/ + 0,9	Adjunk mindkét oldalhoz 0,9-et.
$0{,}5\cdot x+1{,}65=1{,}7\cdot x$	/ – 0,5 · x	Vegyünk el mindkét oldalból 0,5 · x-et.
$1{,}65=1{,}2\cdot x$	/ : 1,2	Osszuk el mindkét oldalt 1,2-del.
$1{,}65:1{,}2=x$		
$1{,}375=x$		

Az eredeti egyenletbe helyettesítsünk be!

Ellenőrzés:

A bal oldal értéke: $\frac{1}{2}\cdot 1{,}375+\frac{3}{4}=0{,}5\cdot 1{,}375+0{,}75=0{,}6875+0{,}75=1{,}4375$

A jobb oldal értéke: $1{,}7\cdot 1{,}375-0{,}9=2{,}3375-0{,}9=1{,}4375$

Az $x=1{,}375$ kielégíti az egyenletet és eleme az alaphalmaznak is (mert 1,375 racionális szám), tehát **megoldása** az egyenletnek.

5. példa

Oldjuk meg az egyenletet, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$).

$$\left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot x-\frac{1}{2}=x-\frac{2}{3}\cdot x$$

Most miért nem szerencsés a törteket tizedestört alakban felírni?

$\left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot x-\frac{1}{2}=x-\frac{2}{3}\cdot x$		Végezzük el a lehetséges átalakításokat (összeadásokat, kivonásokat).
$\frac{7}{4}\cdot x-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot x$		Hozzuk közös nevezőre a törteket. **A legkisebb közös többszörös: 12**
$\frac{21}{12}\cdot x-\frac{6}{12}=\frac{4}{12}\cdot x$	/ · 12	Szorozzuk mindkét oldalt a közös nevezővel.
$21\cdot x-6=4\cdot x$	/ + 6	Adjunk mindkét oldalhoz 6-ot.
$21\cdot x=4\cdot x+6$	/ – 4 · x	Vegyünk el mindkét oldalból 4 · x-et.
$17\cdot x=6$	/ : 17	Osszuk el mindkét oldalt 17-tel.
$x=\frac{6}{17}$		

Bővítsük a törteket úgy, hogy azonos legyen a nevezőjük.
Például: $\frac{21}{12}\cdot 12=21$
Mit kapunk eredményül, ha egy törtet a nevezőjével szorzunk meg?

Az eredeti egyenletbe helyettesítjük be a kapott x értéket.

Ellenőrzés:

Bal oldal: $\left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{6}{17}-\frac{1}{2}=\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{17}-\frac{1}{2}=\frac{21}{34}-\frac{1}{2}=\frac{21}{34}-\frac{17}{34}=\frac{4}{34}=\frac{2}{17}$

Jobb oldal: $\frac{6}{17}-\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{17}=\frac{6}{17}-\frac{4}{17}=\frac{2}{17}$

Mivel a két oldal helyettesítési értéke egyenlő, és az $x=\frac{6}{17}$ eleme a racionális számok halmazának, ezért megoldása az egyenletnek.

6. példa

Oldjuk meg az egyenletet a *mérlegelv* alkalmazásával, illetve *lebontogatással*.

$$(4 \cdot x - 3) : 5 = 9$$

Ha nem mondjuk meg külön, akkor mi az egyenlet alaphalmaza?

Az egyenlet mindkét oldalát szorozhatjuk 5-tel.	$(4 \cdot x - 3) : 5 = 9$	Mielőtt 5-tel osztottunk, 5-ször ekkora volt az eredmény.
Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk 3-mat.	$4 \cdot x - 3 = 45$	Mielőtt levontunk 3-at, az értéke 3-mal nagyobb volt.
Az egyenlet mindkét oldalát osztjuk 4-gyel.	$4 \cdot x = 48$	Mielőtt 4-gyel szoroztunk, az értéke a negyede volt.
	$x = 12$	

Hasonlítsuk össze a „lebontogatást” és a két oldal egyenlő változtatását, vagyis a „mérlegelv” alkalmazását.

Ellenőrzés: Behelyettesítéssel igazoljuk a megoldás helyességét:

Bal oldal: $(4 \cdot 12 - 3) : 5 = (48 - 3) : 5 = 45 : 5 = 9$

Jobb oldal: 9

Mit jelent az, hogy az $x = 12$ megoldása az egyenletnek?

FELADATOK

B1 Oldd meg az egyenleteket, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza!

a) $\frac{2}{5} \cdot x - \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = 2$;

b) $\frac{3}{8} \cdot x + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$;

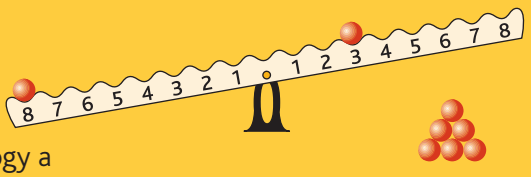
c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{4} = \frac{5}{3}$;

d) $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$;

e) $\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{4}$;

f) $\left(\frac{1}{2} \cdot x - 0{,}5x\right) \cdot 15 = 5 \cdot x$

Az itt látható mérleghinta akkor van egyensúlyban, ha a két oldalán a golyók alatti számok összege megegyezik. (Mindegyik piros golyó tömege 1 g.)



a) A jobb oldal mely száma fölé tehetsz úgy még egy golyót, hogy a

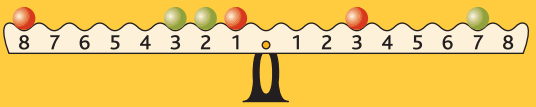
❶ jobb oldal maradjon magasabban; ❷ a bal oldal kerüljön magasabbra?

b) Hogyan tehetsz fel még 2 golyót a jobb oldalra úgy, hogy egyensúly álljon be?

Találsz-e több megoldást?

c) Fel tudsz tenni mindkét oldalra további 3-3 golyót úgy, hogy egyensúly legyen, és ne legyen olyan szám, ami fölött mindkét oldalon van golyó?

A zöld golyók tömege ismeretlen, ám a zöld golyók tömegének is mindig annyiszorosát kell figyelembe venni, ahányas helyen áll a golyó.



a) Ha levesszük a 2-esen álló zöld golyót a bal oldalról, akkor a jobb oldalon hová tegyük át a zöld golyót, ha azt akarjuk, hogy megmaradjon az egyensúly?

b) Hány gramm a tömege a zöld golyónak? Rakosgatással állapítsd meg!

bővített szint

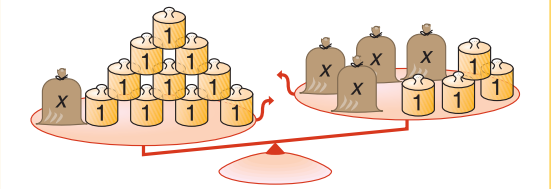
AZ EGYENLŐTLENSÉG KÉT OLDALÁNAK EGYENLŐ VÁLTOZTATÁSA

1. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget. $x + 10 > 4 \cdot x + 4$. Alaphalmaz: $\mathbb{Q}$

Súlyokat és egyenlő tömegű csomagokat rakunk egy mérleg két serpenyőjére.

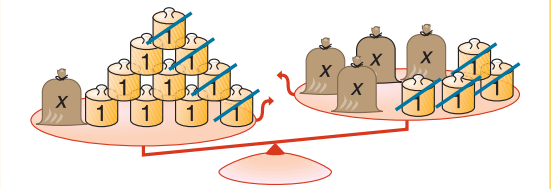
Az x jelentse egy csomag tömegét.



1 csomag és 10 kg súly tömege nagyobb, mint 4 csomag és 4 kg súly tömege. Hány kilogramm lehet egy csomag tömege?

$$x + 10 > 4 \cdot x + 4$$

A mérleg mindkét serpenyőjéről levehetünk 4 kg-ot, a mérleg állása nem változik:

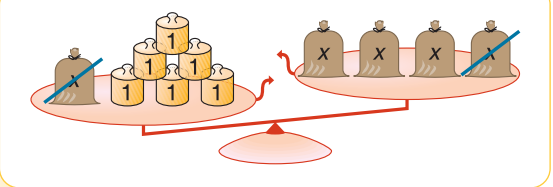


Az egyenlőtlenség mindkét oldalából elvehetünk 4-et, az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$x + 10 > 4 \cdot x + 4 \quad / - 4$

Az $x + 6 > 4 \cdot x$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A mérleg mindkét serpenyőjéről levehetünk egy csomagot, a mérleg állása nem változik:

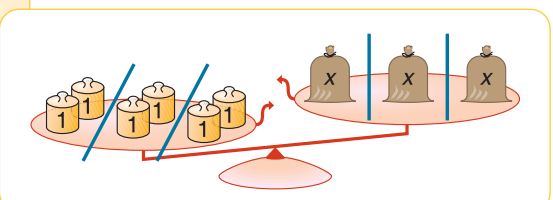


Az egyenlőtlenség mindkét oldalából elvehetünk x-et, az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$x + 6 > 4 \cdot x \quad / - x$

A $6 > 3 \cdot x$ egyenlőtlenséget kapjuk.

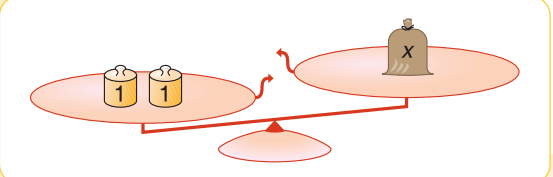
A mérleg mindkét serpenyőjén harmadolhatjuk a tömegeket, a mérleg állása nem változik:



Az egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztathatjuk 3-mal, az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$6 > 3 \cdot x \quad / : 3$

Leolvasható a megoldás:



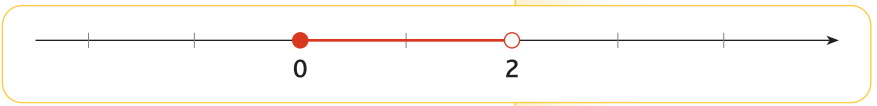
A kapott egyenlőtlenség:

$2 > x$

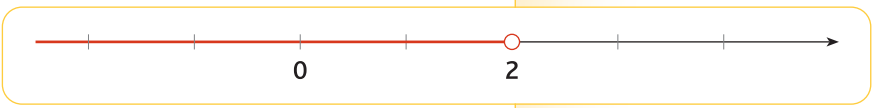
Egy csomag tömege kisebb 2 kg-nál.

»»

Ha tényleges csomag tömegéről van szó, akkor a tömeg mérőszáma csak nemnegatív szám lehet: $0 \leqq x < 2$



Ha a „csomag tömege” csak jelképesen jelenti az ismeretlen értékét, akkor az x lehet negatív is: $x < 2$



Ellenőrzés:

Helyettesítsünk be a megoldásnak megfelelő, illetve meg nem felelő értékeket.

A 2-nél kisebb értékekre a bal oldal helyettesítési értéke valóban nagyobb a jobb oldal helyettesítési értékénél. A 2-nél nagyobb értékekre ez nem teljesül.

x	0	1	2	3	4
Bal oldal (B)	10	11	12	13	14
Jobb oldal (J)	4	8	12	16	20
B > J	igen	igen	nem	nem	nem

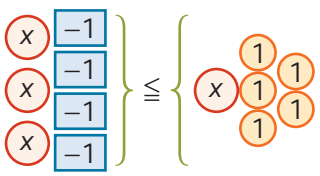
FELADATOK

B2 Az ábrák egyenlőtlenségeket szemléltetnek. Az (1) +1-et, a [−1] −1-et jelent. Az (x) jelöli a keresett (ismeretlen) értékét, a [−x] az (x) ellentettje.

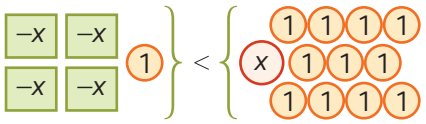
Rakd ki ezeket a példákat az Eszköztár adósság és készpénz modelljeivel!

Oldd is meg az egyenlőtlenségeket!

a)



b)



B3 Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza!

Végezz ellenőrzést is!

a) $3{,}6 \cdot x - 2{,}5 = 4{,}8 \cdot x + 1{,}1$;

b) $3 - 4{,}2 \cdot x \leqq x + 13{,}4$;

c) $x + 2{,}25 = 2{,}25 - x$;

d) $2 \cdot x - 4{,}6 = -4{,}6 + 2 \cdot x$;

e) $3{,}1 - 2{,}3 \cdot x \geqq 0{,}7 \cdot x + 0{,}1$;

f) $0{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot x = x - 2$

Gyakorló
6.16–6.24.

B4 Egyenlő, m tömegű csomagokat mérünk. Határozd meg az m értékét! Készíts minden feladathoz alkalmasan beosztott számegyenest, és ábrázold, hogy milyen határok között változhat egy csomag tömegének értéke!

Gondolj arra is, hogy a tömeg mérőszámai milyen értékeket vehetnek föl!

a) $6 \cdot m + 1 \leqq 19$; *b)* $8 \cdot m + 15 < 11 \cdot m$; *c)* $5 \cdot m + 16 > 6$

Figyelempróba

A tóban, illetve a tó körül kétszer annyi pinty él, mint ponty, öttel több harcsa, mint szárcsa és hárommal kevesebb teknős lakik ott, mint pinty. Hány ponty élhet a tóban, ha tudjuk hogy kevesebb a teknős, mint a harcsa, és a tó vizén két szárcsa úszkál?



Pisti ma kétszer annyi idős, mint Orsi. Négy évvel ezelőtt azonban Pisti több mint háromszor annyi idős volt, mint Orsi, de nem volt négyszer annyi idős. Hány évesek most, ha mindketten ma ünneplik a születésnapjukat?

SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETTEL



1. példa

Három gyerek mindegyikénél van valamennyi pénz. Orsinál kétszer annyi, mint Zsófinál, Emilinél 50 Ft-tal kevesebb, mint Orsinál. Hány forintjuk van külön-külön, ha együttesen 400 Ft-juk van?

❶ A szöveg értelmezése

A szöveg figyelmes elolvasása után úgy látjuk, hogy minden adat szükséges a feladat megoldásához.

Nem tudjuk, hogy Zsófinak mennyi pénze van.

Orsinak **kétszer annyi** pénze van, mint Zsófinak;

Emilinek **50 Ft-tal kevesebb**, mint Orsinak.

Összesen 400 Ft-juk van.

❷ Összefüggések keresése

Nem tudjuk, hogy hány forintjuk van külön-külön, de **az adatok között találunk összefüggéseket**.

A Zsófinál lévő pénzt jelölje: x.

Ekkor Orsinál (kétszer annyi): $2 \cdot x$ forint van.

Emilinél (50 Ft-tal kevesebb, mint Orsinál): $2 \cdot x - 50$ forint van.

❸ Megoldási terv

Ha a gyerekeknél lévő pénzt összeadjuk, akkor 400 Ft-ot kapunk.

Írjuk fel a tervnek megfelelő egyenletet:

$$x + 2 \cdot x + (2 \cdot x - 50) = 400$$

❹ Becslés

Zsófinak nem lehet 100 Ft-nál többje, mert ekkor Orsinak 200 Ft-nál, Emilinek 150 Ft-nál több pénze lenne, ezek összege pedig több, mint 400 Ft.

De ha Zsófinak 50 Ft-nál kevesebb pénze lenne, akkor Orsinak 100 Ft-nál, Emilinek 50 Ft-nál is kevesebb pénze lenne, ezek összege (kevesebb, mint 200 Ft) pedig jóval kisebb, mint a náluk lévő pénz összege, azaz 400 Ft.

A becslésünk: Zsófinak 50 Ft-nál több, de 100 Ft-nál kevesebb pénze van.

Itt a zárójel befolyásolja-e a műveleti sorrendet?

❺ Az egyenlet megoldása

$$x + 2 \cdot x + (2 \cdot x - 50) = 400 \qquad \text{/ A zárójel elhagyható}$$
$$x + 2 \cdot x + 2 \cdot x - 50 = 400 \qquad \text{/ Összeadhatjuk az ismeretleneket}$$
$$5 \cdot x - 50 = 400 \qquad \text{/ + 50}$$
$$5 \cdot x = 450 \qquad \text{/ : 5}$$
$$x = 90$$

❻ Válasz:

Zsófinak **90** Ft-ja,

Orsinak $(2 \cdot 90 =)$ 180 Ft-ja,

Emilinek $(2 \cdot 90 - 50 =)$ 130 Ft-ja van.

›››

›››

7 Ellenőrzés

Orsinál 180 Ft van, amely kétszerese Zsófi 90 Ft-jának. Emilinek 130 Ft-ja van, amely Orsi pénzénél 50 Ft-tal kevesebb; $180\text{ Ft} - 50\text{ Ft} = 130\text{ Ft}$.

Pénzük összege: $180\text{ Ft} + 90\text{ Ft} + 130\text{ Ft} = 400\text{ Ft}$

Eredményünk megfelel a feladat szövegének. Becslésünk szerint 50 Ft-nál több, 100 Ft-nál kevesebb pénze van Zsófinak. Eredményünk megfelel a becsült értéknek, hiszen Zsófinak 90 Ft-ja van.

Szöveges feladat megoldásának ellenőrzésénél a feladat szövegét követjük.

Vagyis nem elegendő az egyenletbe (egyenlőtlenségbe) behelyettesítenünk a megoldást.

2. példa

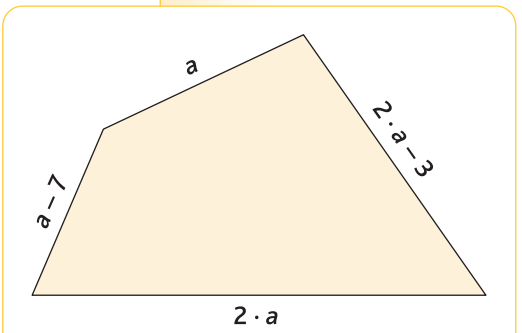
Egy négyszög kerülete $K = 20$ cm. A b oldal 7 cm-rel rövidebb, mint az a oldal, a c oldal pedig kétszerese az a oldalnak. A d oldal 3 cm-rel rövidebb a c oldalnál. Határozzuk meg a négyszög oldalainak a hosszúságát.

Értelmezés, összefüggések keresése

Egy négyszög oldalainak a hosszúságát kell kiszámítanunk, ezért a pozitív számok halmazában keressük a megoldást.

Egy szakasz hossza milyen értékeket vehet fel?

Mivel a b oldalt és a c oldalt az a oldalhoz hasonlítjuk, az oldalakat célszerű az a oldal segítségével kifejeznünk.



A b oldal 7 cm-rel rövidebb, mint az a oldal: $b = a - 7$ (cm)

A c oldal kétszerese az a oldalnak: $c = 2 \cdot a$ (cm)

A d oldal 3 cm-rel rövidebb a c oldalnál, és $c = 2 \cdot a$, ezért $d = 2 \cdot a - 3$ (cm)

Terv, nyitott mondat

Az oldalak mérőszámának az összege megegyezik a kerület mérőszámával (20-szal). Felírhatjuk az adatok közti összefüggést:

$$a + (a - 7) + 2 \cdot a + (2 \cdot a - 3) = 20$$

Az egyenlet bal oldalán álló összeget zárójelek nélkül is felírhatjuk.

Összeadhatjuk az ismeretleneket, továbbá a 7 és a 3 kivonása helyettesíthető a 10 kivonásával.

Megoldás

$$\begin{aligned} a + a - 7 + 2 \cdot a + 2 \cdot a - 3 &= 20 \\ 6 \cdot a - 10 &= 20 \qquad / + 10 \\ 6 \cdot a &= 30 \qquad / : 6 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Az eredmény kielégíti a felírt egyenletet.

Ellenőrzés: Ha az egyenletben az 5-öt az a helyére behelyettesítjük, akkor igaz egyenlőséget kapunk:

Bal oldal: $5 + (5 - 7) + 2 \cdot 5 + (2 \cdot 5 - 3) = 5 - 2 + 10 + 7 = 20$

Jobb oldal: 20

Az $a = 5$ cm ennek ellenére nem megoldás, ugyanis: $b = 5 - 7 = -2$, nem pozitív szám. A négyszög oldalának a hossza azonban csak pozitív érték lehet.

Miért fontos, hogy a szöveg alapján ellenőrizzük a megoldást?

Válasz: Nincs olyan négyszög, amely a feltételeknek eleget tesz.

Egy anya 30 évvel idősebb 8 éves fiánál.

Hány évvel ezelőtt volt az anya 11-szer annyi idős, mint a fia?

Hány év múlva lesz az anya háromszor annyi idős, mint a fia?

Többet ésszel ...

A SZÖVEGES FELADAT MEGOLDÁSÁNAK MENETE



Pólya György (1887–1985) magyar származású matematikus, a matematikatanítás nemzetközileg elismert szaktekintélye írta le először a problémamegoldás lépéseit. Ha ezeket a lépéseket következetesen végrehajtod, akkor könnyebben boldogulhatsz a feladatok megoldásával.

❶ Értelmezd a feladatot!

Vizsgáld meg, hogy *mely adatok szükségesek* a megoldáshoz, melyek nem! (Az is lehet, hogy ezt csak később – esetleg a feladat megoldása után – tudod eldönteni.)

❷ Keress az adatok között összefüggéseket!

Próbáld az egyik adatot kifejezni egy másik segítségével!

Keresd meg azokat az ismereteket, amelyek az adatok közti összefüggések felírásához szükségesek!

❸ Készíts megoldási tervet!

Írd fel a tervnek megfelelő *nyitott mondatot*!

Vizsgáld meg, hogy célszerűen jelölted-e az ismeretlen mennyiségeket!

❹ Végezz becslést!

❺ Hajtsd végre a tervedet! Oldd meg a feladatot!

❻ Válaszolj a kérdésre!

❼ Ellenőrizd, hogy a megoldás megfelel-e a feladat szövegének!

A szöveges feladatok megoldásának a helyességét *a szöveg alapján kell ellenőriznünk*. Előfordulhat, hogy ha az egyenletbe helyettesítjük be a kapott értéket, akkor igaz egyenlőséget kapunk, de ez az érték mégsem megoldása a feladatnak.

Mindig ellenőrizd, hogy a megoldás nem mond-e ellent a gyakorlatnak! Hasonlítsd össze a megoldást a becsült értékkel!

Nézd meg ismét, hogy *mely adatok voltak szükségesek*, s melyek nem a feladat megoldásához!

FELADATOK

⊙ Írd fel az adatok közti összefüggést egyenlettel, egyenlőtlenséggel! Döntsd el, hogy mi lehet az alaphalmaz! Határozd meg az igazsághalmazt! Hogyan ellenőrizzük a szöveges feladatok megoldását?

11 *a)* Bea 3 kg epret vásárolt, és 480 Ft-ért málnát. Így összesen annyit fizetett, mint ha 5 kg epret vásárolt volna. Mennyibe került 1 kg eper?

b) Egy táborban ötször annyi hatodikos tanuló van, mint ötödik osztályos. A hetedikesek száma 12-vel több, a nyolcadikosoké 10-zel kevesebb, mint az ötödikeseké. Hány ötödikes, hatodikos, hetedikes, nyolcadikos tanuló van a táborban, ha összesen 194-en vannak?

c) Lacinak kétszer annyi, Misinek háromszor annyi, Nándinak pedig 100 Ft-tal kevesebb pénze van, mint Kálmánnak. A négy fiú közösen sem tudja megvenni a 4100 Ft-os labdát. Hány forintjuk lehet?

Többet ésszel ...



Egy kifutóban struccok, valamint egypúpú és kétpúpú tevék vannak. Összesen 15 fej, 44 láb és 11 púp van a kifutóban. Hány egypúpú teve van köztük, ha a struccok száma kétszerese a kétpúpú tevék számának?

Lassie elhatározta, hogy hazatér. Az utat hazafelé 4 nap alatt tette meg. Az első napon a teljes út 5 nyolcadát, a második napon a teljes út 1 tizenkettedét, a harmadik nap 5 km-t tett meg. Végül a negyedik napon még a teljes út egynegyede várta. Hány kilométert tett meg összesen?

12

Figyelempróba



a) Egy kerékpáros az első órában kétszer annyi utat tett meg, mint a másodikban, a harmadik óra alatt 8 km-rel kevesebbet, mint az első két órában együttvéve. Így három óra alatt meg is érkezett a 43 km távolságra levő turistaházba. Hány kilométert kerékpározott az első, hányat a második, illetve a harmadik órában? Átlagosan hány kilométert tett meg egy óra alatt?

b) Egy kereskedő hétfőn és kedden ugyanannyi almát adott el, szerdán 45 kg-mal többet, mint hétfőn, csütörtökön 245 kg-ot. Pénteken ötször annyi almát vásároltak tőle, mint hétfőn, így pénteken egy nap alatt ugyanannyit adott el, mint az előző négy nap együttvéve. Mennyi almát adott el az egyes napokon?

c) Albert könyvszekrényének első polcán háromszor annyi, második polcán négyszer annyi könyv van, mint íróasztalának fiókjában. A könyvszekrény többi polcán még 125 könyv van. Hány könyvet tarthat Albert a könyvszekrényében és hányat az íróasztal fiókjában, ha összesen 212 könyve van?

◉ Készíts rajzot a megoldás megtervezéséhez!

13

Írd fel az adatok közti összefüggést egyenlettel, majd oldd meg az egyenletet!

a) Gondoltam egy számot. Osztottam 3-mal, majd a hányadosból elvettem 15-öt. Ekkor 15-öt kaptam. Melyik számra gondoltam?

b) Gondoltam egy számot. Elvettem belőle 15-öt, majd a különbséget osztottam 3-mal. Ekkor 15-öt kaptam. Melyik számra gondoltam?

◉ Ne feledkezz meg az ellenőrzésről!

Megfigyelted a műveletek sorrendjét?

14

a) Négy barát a közösen művelt kertben termett almát egyenlően szétosztotta. Barna a neki jutott részből 25 kg-ot elküldött az édesanyjának, 120 kg-ot eladott, ekkor 150 kg almája maradt. Mennyi alma termett a kertben?

b) Egy hatodik osztályból (betegség miatt) három tanuló nem jöhetett el a kirándulásra. A többi hatodikos gyerek 4 egyenlő létszámú csoportot alakított ki. Mártiékhoz 3 ötödikes lány is csatlakozott, így 9-en alkottak egy csoportot. Hány tanuló jár ebbe a hatodik osztályba?

Gyakorló
6.34–6.62.

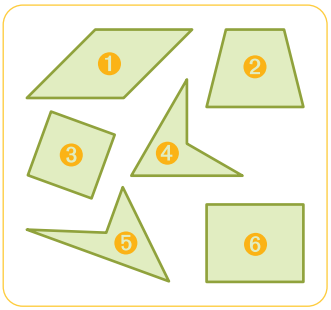
A Csizmás kandúr című bábjáték bemutatójára sok néző gyűlt össze. Ezek fele és még egy fő gyerek volt. Az őket kísérő anyukák száma kettővel volt több, mint a jelenlévők negyedrésze, az apák száma pedig hárommal volt több, mint a közönség hatodrésze. Más nem is volt ott. Hány anyából, apából és gyerekből állt a nézősereg?



Vitéz Palkó az első csapással levágta a királylányt elrabló sárkány fejeinek egyharmadát és még kettőt. A második csapással is a maradék fejek egyharmad részét és még kettőt, míg a harmadik csapással megint a megmaradt fejek egyharmad részét és még kettőt. Még így is két megmaradt fej okádta rá a tüzet. Hány feje volt a sárkánynak?

GYAKORLÓFELADATOK

Írd az igazsághalmazba a megfelelő négyszögek sorszámát!



B5 Oldd meg a nyitott mondatot!

Az alaphalmaz az ábrán lévő négyszögek halmaza

a) A ☐ síkidomnak van derékszöge. $I = \{$ ☐ $\}$

b) A ☐ síkidomnak minden szöge derékszög. $I = \{$ ☐ $\}$

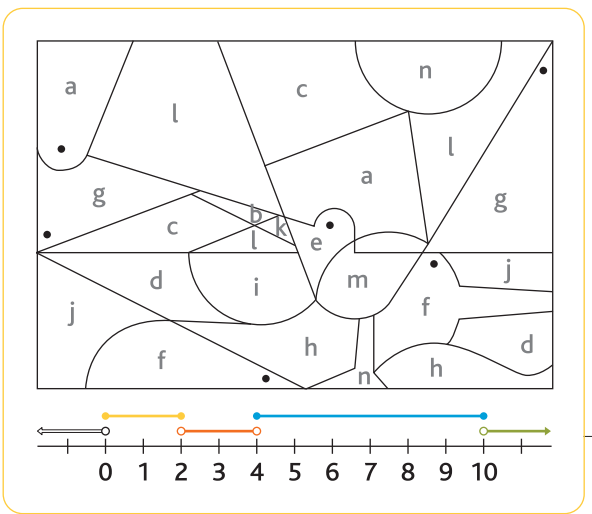
c) A ☐ síkidomnak van párhuzamos oldalpárja. $I = \{$ ☐ $\}$

d) A ☐ síkidomnak van merőleges oldalpárja. $I = \{$ ☐ $\}$

e) A ☐ síkidomnak minden oldala egyenlő. $I = \{$ ☐ $\}$

f) A ☐ síkidom tengelyesen tükrös. $I = \{$ ☐ $\}$

g) A ☐ síkidomot csak szakaszok határolják. $I = \{$ ☐ $\}$



B6 Oldd meg az egyenleteket és egyenlőtlenségeket, majd az ábra megfelelő változóval jelölt területét színezd ki a változó értékének megfelelő színnel!

$a \cdot 6 + 12 = 54$;
$45 \cdot b - 13 = 59$;
$7 + 15 : c = 10$;
$d : (7 + 15) = 10$;
$6 \cdot (e + 12) = 54$;
$(f + 7) : 15 = 10$;
$7 \cdot g - 16 = 5 \cdot g + 4$;
$h : 48 + 19 = 61$;
$4 \cdot i = 5 \cdot i$;
$120 - 5 \cdot j = 6 \cdot j - 1$;
$7 \cdot k + 6 = 22 \cdot k$;
$5 \cdot l + 7 = 42$;
$25 + 3 \cdot m \quad m - 39$;
$n \cdot (6 + 12) = 54$

B7 Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Alaphalmaz a tanult számok halmaza.

a) $a : 5 + 3 < 18$;
b) $40 \cdot b < 15 \cdot b + 8$;
c) $c : 100 < 0{,}065$;
d) $1000 \cdot d - 130 > 95$;
e) $3 \cdot x + 21 \geqq 35 - x$;
f) $48 - 2 \cdot y \leqq 3 \cdot y + 18$;
g) $17 - u + 3 \neq 2 \cdot u - 3 \cdot u$;
h) $25 + 3 \cdot v \quad v - 39$

B8 Írd fel a matematika nyelvén azt a számot, amely

a) 6 és 3 összege, 6 és *a* összege;
b) 6 és 3 szorzata, 6 és *b* szorzata;
c) 6 és 3 hányadosa, 6 és *c* hányadosa;
d) 3 és 6 hányadosa, *d* és 6 hányadosa;
e) 6 és 2 szorzatánál 3-mal kisebb, 6 és *e* szorzatánál 3-mal kisebb;
f) 6 és 2 hányadosánál 3-mal nagyobb, *f* és 2 hányadosánál 3-mal több!

Többet ésszel …

Kinga 191 cm magasra tud felnyúlni, Juli 197 cm magasra. Lábujjhegyre állva mindketten még 5-5 cm-rel tudják növelni magasságukat. Juli 42 cm magasat tud ugrani. Milyen magas széken állva tud Kinga pont olyan magasra felérni, mint Juli ugorva?

B9 Fogalmazz szöveget a feladatokhoz! Add meg az alaphalmazt is! Oldd meg ezeket az egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

Ellenőrizd a megoldást!

a) $8 \cdot a + 5 = 3 \cdot a - 20$; *b)* $4 \cdot b + 5 < b - 1$; *c)* $4 \cdot c - 7{,}2 = c + 12{,}6$;

d) $17 \cdot d - 153 > d + 81$; *e)* $8 \cdot e - 5 \cdot e = 24 + e$; *f)* $6 \cdot f + 5 - 4 \cdot f \leqq f + 14$;

g) $85 - g = 24 + 6 \cdot g$; *h)* $4 \cdot h : 6 = h - 5$; *i)* $5 \cdot x + 14 - 3 \cdot x \geqq 42 - x$;

j) $y : 5 + 3 = 2{,}6$; *k)* $(5 + k) : 5 \leqq 2{,}5$; *l)* $25 - 2 \cdot z < 6 \cdot z - 23$

B10 Pistinek kétszer annyi pénze van, mint Orsinak. Kettőjüknek kevesebb van 200 Ft-nál. Legfeljebb mennyi pénze lehet Pistinek, mennyi Orsinak?

Figyelempróba

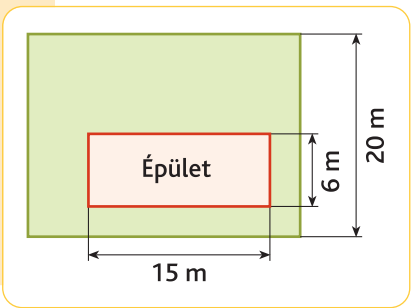
B11 *a)* Egy háromszög kerülete 17 cm. A b oldal 2 cm-rel rövidebb, a c oldal 4 cm-rel hosszabb, mint az a oldal. Mekkorák a háromszög oldalai?

Kerüld el a csapdát!

b) Egy téglalap alakú telek egyik oldala 20 m. A telek be nem épített területe 2-szerese az épület alapterületének.

Az ábrán látható az épület és a telek alaprajza. A ház egyik oldala 6 m, a másik oldala 15 m.

Milyen hosszú a telek másik oldala?



B12 Írd föl egyenlettel az adatok közti összefüggést, és oldd meg az egyenletet!

Ügyelj a helyes műveleti sorrendre!

A szöveg alapján igazold a megoldás helyességét!

a) Ha egy szám 7-szereséből kivonunk 87-et, akkor magát a számot kapjuk. Melyik ez a szám?

b) Gondoltam egy számra. Elosztottam 4-gyel, a hányadosból kivontam 5-öt, majd a különbséget szoroztam 6-tal. Ekkor 54-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

c) Ha egy szám 6-szorosához hozzáadunk 90-et, akkor a szám 9-szeresénél 15-tel többet kapunk. Melyik ez a szám?

d) Egy szám és 15 összegének 5-szöröse 80-nál 25-tel nagyobb. Melyik ez a szám?

e) Ha 67,5-nek és egy szám 3-szorosának a különbségét osztjuk 8-cal, akkor a szám 3-szorosát kapjuk. Melyik ez a szám?

Feladatgyűjtemény 5.4.01–19.

B13 Fogalmazz szöveget a feladatokhoz! Add meg az alaphalmazt is! Oldd meg ezeket az egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

Írd fel a megoldás tervét egyenlettel!

a) $x \xrightarrow[\square\,4]{\cdot 4} 4 \cdot x \xrightarrow[\square\,8]{+ 8} \underbrace{4 \cdot x + 8}_{24}$; *b)* $x \xrightarrow[\square\,8]{+ 8} x + 8 \xrightarrow[\square\,4]{\cdot 4} \underbrace{4 \cdot (x + 8)}_{24}$;

c) $x \xrightarrow[\square\,6]{: 6} x : 6 \xrightarrow[\square\,3]{- 3} \underbrace{x : 6 - 3}_{2}$; *d)* $x \xrightarrow[\square\,3]{- 3} x - 3 \xrightarrow[\square\,6]{: 6} \underbrace{(x - 3) : 6}_{2}$



Két hajótörött egy lakatlan szigeten 5600 aranytallért talál. 45 tallért félretesznek, amiből a hazautazást szeretnék fedezni, a maradékon viszont az életkoruk arányában megosztoznak. Hány tallér jut egynek-egynek, ha a fiatalabb 25, az idősebb 30 éves?

Hogyan számíthatjuk ki a téglalap kerületét?

15 Egy téglalap kerülete 42 cm, két szomszédos oldalának különbsége 5 cm.

a) Vázold föl a téglalapot! Jelöld az egyik ismeretlen oldalt x-szel!
Fejezd ki a szomszédos oldal hosszát is az x segítségével!

b) Írd föl ezekkel a kifejezésekkel a kerületet!

c) Írd föl az adatok közti összefüggést egyenlettel, majd oldd meg az egyenletet!

d) Ellenőrizd a megoldást!



16 *a)* Ha egy szám 24-szereséhez 152-t adunk, akkor 500-at kapunk. Melyik ez a szám?

b) Bea 8 kg szilvát vásárolt. A visszavitt üres üvegekért visszajárt neki 320 Ft. Így 160 Ft-ot kellett fizetnie. Mennyibe került 1 kg szilva?

c) Egy zsinórból Csaba levágott 24 m-t, majd a maradékot 12 egyenlő darabra vágta. Így egy-egy darab hosszúsága 15 m lett. Milyen hosszú volt eredetileg a zsinór?

d) Dénes a heti zsebpénzét 7 egyenlő részre osztotta, és mindennap ugyanannyit költött el. Amikor a hét utolsó napján 120 Ft-ért fagylaltot vett, akkor maradt még 30 Ft-ja. Hány forint zsebpénze volt azon a héten?

e) 28 egyforma zsák árpából takarmányozásra felhasználtak 460 kg-ot, így még 1360 kg árpa maradt. Hány kilogramm árpa volt egy-egy zsákban?

f) Ha egy szám ötszöröséből elveszünk 40-et, akkor ugyanannyit kapunk, mint ha a kétszereséhez 104-et adunk. Melyik ez a szám?

TUDÁSPRÓBA

17

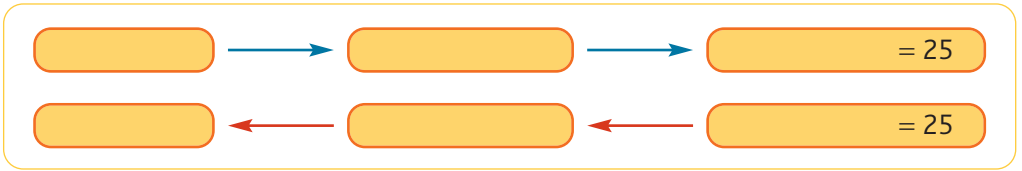
Ellenőrizd a megoldást!

1 Oldd meg az egyenletet és egyenlőtlenséget a tanult számok halmazán!

a) $3 \cdot x + 5 = 29$; *b)* $y : 5 + 7{,}2 \leqq -2$

Fejezd be az ábrát a szöveg alapján! Írj róla egyenletet!

2 Gondoltam egy számra, megszoroztam 5-tel, a szorzatból kivontam 100-at. Így 25-öt kaptam. Melyik számra gondoltam?



3 Jancsi 3 kg körtét és 5 db 45 Ft-os zöldpaprikát vásárolt 675 Ft-ért. Mennyibe került 1 kg körte?

Szerkeszd meg a háromszöget!

4 Egy háromszög kerülete 27 cm. Az a oldala kétszer olyan hosszú, mint a b oldala, a c oldala 8 cm-rel rövidebb, mint az a oldala. Mekkorák az oldalak?

Többet ésszel ...

Egy családban 6 gyerek volt, néhány lány és minden lánynak két fiútestvére. Hány lány és hány fiú volt a családban?

6. ÖSSZEFOGLALÓ



Feladatok megoldásával ismételjük át a tanultakat.

MIT TANULTUNK A HALMAZOKRÓL?

1 Az U **alaphalmaz** legyen az osztály tanulóinak **halmaza**. Akinek félévkor közepese volt matematikából, tartsa fel a bal kezét, akinek történelemből, tartsa fel a jobb kezét!

a) Hány tanulónak volt matematikából **és** történelemből is közepese?

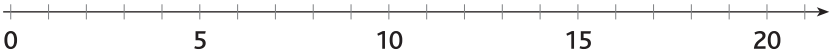
Hány tanulónak volt matematikából **vagy** történelemből közepese?

b) Ábrázoljuk **halmazábrán** a matematikából (M), illetve történelemből (T) közepes tanulók halmazát. Írjuk be az ábra részeibe, hány tanuló tartozik oda.

2 Az U alaphalmaz a 20-nál nem nagyobb **természetes számok** halmaza.

a) $A = \{3$ többszöröse$\}$. Sorold föl az A halmaz **elemeit**!

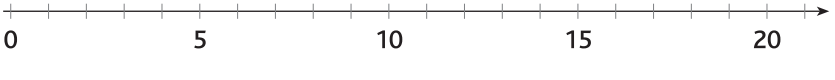
$B = \{3$-nak **nem** többszöröse$\}$



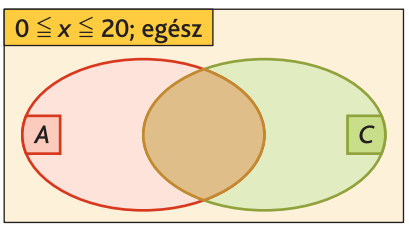
Jelöld a számegyenesen *pirossal* az A halmaz elemeit!

Hogyan olvashatók le a számegyenesről a B halmaz elemei?

b) $C = \{5$ többszöröse$\}$. Sorold föl a C halmaz elemeit! A számegyenesen karikázd be *pirossal* az *a)* feladatban szereplő A halmaz, *kékkel* a C halmaz elemeit! Értelmezd azoknak a számoknak a halmazát, amelyeket pirossal **és** kékkel is bekarikáztál!



Írd be közös halmazábrába az A és a C halmaz elemeit! Mely számok tartoznak az A halmaz és a C halmaz **közös részébe**?



c) Sorold fel a következő halmaz elemeit!

$K = \{5$-nek többszöröse **és** 3-nak **nem** többszöröse$\}$

d) Sorold föl azokat az elemeket, amelyek az A halmaz és a C halmaz közül **legalább** az egyiknek elemei!

---

3 Az alaphalmaz legyen a **racionális számok** halmaza. (Jele: $\mathbb{Q}$)

A $2 \cdot x - 3 \leqq 6$ egyenlőtlenség **igazsághalmaza** az A halmaz.

Az $x - 3 > -6$ egyenlőtlenség **igazsághalmaza** a B halmaz.

a) Ábrázold számegyenesen pirossal az A, kékkel a B számhalmazt!

b) Mely számok tartoznak az A és a B **közös részébe**?

c) Mely számok tartoznak az A és a B **egyesítettjébe**?

◉ Mely számokat nevezzük racionális számoknak?

◉ Mit értünk egy nyitott mondat igazsághalmazán?

SZÁMTAN, ALGEBRA, ARÁNYOSSÁG

$60 : 7 = 8$ (4)

$60 = 7 \cdot 8 + 4$

Emlékszel? Hogyan ellenőrizzük a maradékos osztást?

Emlékeztető

Ha a 60-at elosztjuk 7-tel, akkor maradékul 4-et kapunk. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a 60 **hetes maradéka** 4.

Ha egy A természetes szám hetes maradéka 4, akkor ez így írható:

$$A = 7 \cdot a + 4, \text{ ahol az } a \text{ természetes szám.}$$

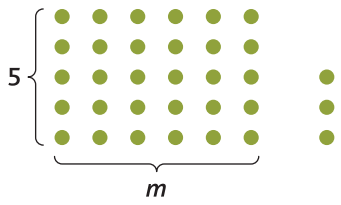
Ha 70-et elosztjuk 7-tel, akkor maradékul 0-t kapunk. A 70 hetes maradéka 0, vagyis a 70 **osztható** 7-tel, a 7-nek **többszöröse** a 70.

Ha egy B természetes szám osztható 7-tel, akkor ez így írható:

$$B = 7 \cdot b, \text{ ahol a } b \text{ természetes szám.}$$

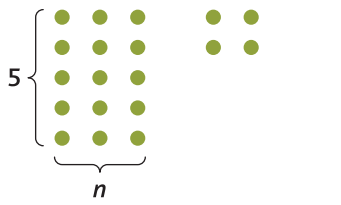
1. példa

Egy M természetes szám ötös maradéka 3. egy N természetes szám ötös maradéka 4. A két szám összege 5-tel osztva mennyit ad maradékul?



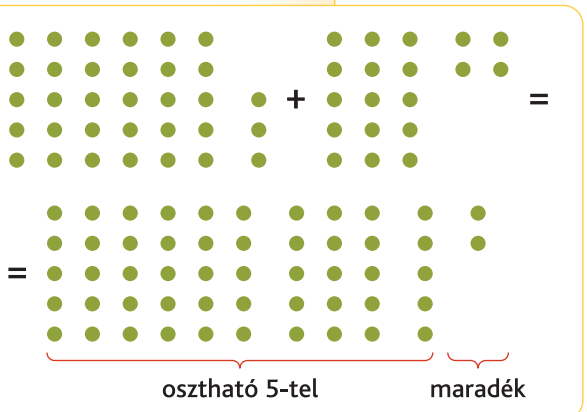
A maradékokkal számolva válaszolhatunk a kérdésre:
Vegyünk annyi korongot, mint amennyi az első szám, vagyis M korongot (lásd az ábrát). A korongokat ötösével csoportosítva kimarad 3 korong.

$$M = 5 \cdot m + 3$$



Vegyünk ezekhez annyi korongot, mint amennyi a második szám (N-et). Rakjuk ezeket is ötös csoportokba, kimarad 4 korong:

$$N = 5 \cdot n + 4$$



Rakjuk ki a két szám összegét.

$$M + N = (5 \cdot m + 3) + (5 \cdot n + 4) =$$
$$= (5 \cdot m + 5 \cdot n) + (3 + 4)$$

Nincs ötös csoportba rakva $3 + 4 = 7$ korong.

A maradékok összegéből, vagyis a 7 korongból egy ötös csoport alkotható, és kimarad 2 korong.

$$M + N = \underbrace{(5 \cdot m + 5 \cdot n + 5)}_{\text{osztható 5-tel}} + \underbrace{2}_{\text{maradék}}$$

Így a két szám összegét ötös csoportokban kirakva 2 korong marad meg, vagyis a két szám összege 5-tel osztva 2-t ad maradékul. Ennyit ad maradékul ötös maradékainak összege is: $3 + 4 = 5 \cdot 1 + 2$

bővített szint

2. példa

Egy K természetes szám ötös maradéka 2. A szám 4-szerese 5-tel osztva mennyit ad maradékul?

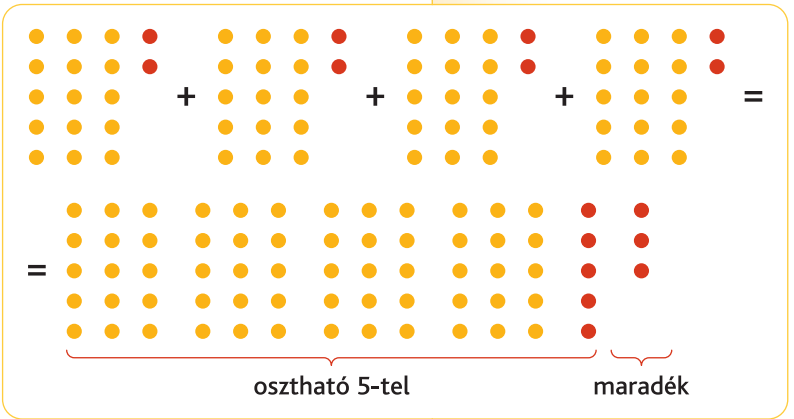
A maradékkal számolhatunk.

A K az 5 valamely többszörösénél 2-vel nagyobb: $K = 5 \cdot k + 2$

A K szám 4-szerese:

$4 \cdot K = 4 \cdot (5 \cdot k + 2) = 20 \cdot k + 8$

$4 \cdot K = \underbrace{20 \cdot k + 5}_{\text{osztható 5-tel}} + \underbrace{3}_{\text{maradék}}$



A K szám 4-szerese 5-tel osztva 3-at ad maradékul, ugyanannyit, mint 5-ös maradékának 4-szerese.

3. példa

Egy A természetes szám ötös maradéka 3; egy B természetes szám ötös maradéka 4. A két szám szorzata 5-tel osztva mennyit ad maradékul?

Az A az 5 valamely többszörösénél 3-mal nagyobb: $A = 5 \cdot a + 3$

A B az 5 valamely többszörösénél 4-gyel nagyobb: $B = 5 \cdot b + 4$

$A \cdot B = (5 \cdot a + 3) \cdot (5 \cdot b + 4) = 25 \cdot a \cdot b + 20 \cdot a + 15 \cdot b + 12$

$A \cdot B = \underbrace{(25 \cdot a \cdot b + 20 \cdot a + 15 \cdot b + 10)}_{\text{osztható 5-tel}} + \underbrace{2}_{\text{maradék}}$

A két szám szorzata 5-tel osztva 2-t ad maradékul. Ennyit ad maradékul ötös maradékainak szorzata is: $3 \cdot 4 = 5 \cdot 2 + 2$

Minden tagot minden taggal szorzunk.

Az előző három példában megfigyelt összefüggéseket alkalmazva hogyan határozható meg, hogy egy szám 4-gyel (9-cel) osztva mennyit ad maradékul?

Lapozz a 33–37. oldalra, ismételd át az oszthatósági szabályokat!

Többet ésszel …

$A = 3628$; $B =$ 561X, ahol X a tízes számrendszer számjegye.

a) Mivel lehet egyenlő az X számjegy, ha az A és a B összegének 4-es maradéka 3?

b) Mivel lehet egyenlő az X számjegy, ha az A és a B szorzatának 5-ös maradéka 3?

c) Az A^9 9-cel osztva mit ad maradékul?

Mely számok oszthatók 2-vel; 5-tel, 10-zel; melyek oszthatók 4-gyel; 25-tel; 100-zal?

Az igaz állítás után írd be az I *, a hamis után a* H *betűt!*

4 A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?.

A: **Ha** egy szám osztható 5-tel, **akkor** osztható 10-zel is. ☐

B: **Ha** egy szám osztható 10-zel, **akkor** osztható 5-tel is. ☐

C: **Minden** 5-tel osztható szám osztható 10-zel. ☐

D: **Van** olyan 25-tel osztható szám, amely **nem** osztható 5-tel. ☐

E: **Minden** 100-zal osztható szám osztható 25-tel és 4-gyel is. ☐

F: **Ha** egy szám osztható 4-gyel, **akkor** osztható 2-vel is. ☐

A c)-ben vizsgáld külön a páros, illetve a páratlan sorszámú elemeket!

5 Egy-egy sorozat néhány elemét adtuk meg.
Keress szabályokat a sorozatokhoz, majd add meg a 20. elemüket!

a) 0; 5; 10; 15; ...; *b)* 2; 7; 12; 17; ...; *c)* 1; 4; 5; 8; 9; 12; ...

Az osztókat a természetes számok körében keresd!

A természetes számok halmazának jele: $\mathbb{N}$

6 Keresd meg a következő **természetes számok** összes **osztóját**!

$a = 1$; $b = 12$; $c = 31$; $d = 36$; $e = 64$; $f = 87$; $g = 100$

Mely számoknak van pontosan egy osztójuk?

Mely számoknak van pontosan két osztójuk?

Mely számoknak van páratlan számú osztójuk?

Emlékszel a tört kétféle értelmezésére?

7 *a)* Mennyi 1 kg-nak a $\frac{4}{5}$ része? Mennyi 4 kg-nak az $\frac{1}{5}$ része?

b) Mennyi 1 l-nek a $\frac{7}{8}$ része? Mennyi 7 l-nek az $\frac{1}{8}$ része?

c) Hány méter $\frac{3}{4}$ része $\frac{3}{4}$ m? Hány méternek az $\frac{1}{4}$ része $\frac{3}{4}$ m?

d) 1 l-nek mekkora része $\frac{8}{5}$ l? 8 l-nek mekkora része $\frac{8}{5}$ l?

Órákba átírva mely percértékek fejezhetők ki véges tizedestört alakban?

8 Fejezd ki a perceket órákban! A mérőszámokat **törtalakban** és **tizedestört alakban** is add meg!

1 min;	10 min;	12 min;	13 min;	15 min;	25 min;
40 min;	45 min;	50 min;	100 min;	120 min;	145 min

Különböző-e a B és a C halmaz? Miért?

9 *a)* Ábrázold számegyenesen a következő számhalmazokat!

$A = \{\text{Negatív számok}\}$; $B = \{\text{Nemnegatív számok}\}$; $C = \{\text{Pozitív számok}\}$

b) Írd föl a számok reciprokát: 5; $\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{5}$; 0,01; 0; $2\frac{1}{5}$!

c) Írd föl növekvő sorrendben: 2,5; 2,45; −5,68; 0,125; 2,75!

Hogyan írhatjuk át a törteket tizedestört alakba?

10 *a)* Egyszerűsítsd a törteket! $\frac{48}{32}$; $\frac{52}{24}$; $\frac{100}{625}$; $\frac{144}{120}$; $\frac{405}{135}$

b) Írd föl (egyszerűsítés után) a törteket tizedestört alakban!
Melyik lesz **véges tizedestört**, melyik **végtelen szakaszos tizedestört**?

11 Ismételjük át a **törtekkel** végzett műveleteket.

a) $\frac{25}{15}+\frac{22}{30}$; $\frac{15}{18}+\frac{21}{30}$; $3\frac{16}{28}+2\frac{20}{35}$; $\frac{12}{36}+\frac{25}{30}+\frac{25}{75}+\frac{22}{24}$

b) $\frac{20}{28}-\frac{12}{42}$; $\frac{28}{35}-\frac{12}{18}$; $5\frac{18}{54}-2\frac{18}{81}$; $\frac{78}{39}-\frac{21}{30}-\frac{14}{35}+\frac{12}{20}$

c) $\frac{11}{10}\cdot 7$; $\frac{11}{10}\cdot 5$; $\frac{20}{49}\cdot 21$; $\frac{15}{28}:7$; $\frac{15}{28}:5$; $12\frac{11}{20}:4$

d) $\frac{21}{10}\cdot\frac{20}{49}$; $\frac{12}{18}\cdot\frac{11}{33}$; $\frac{75}{36}\cdot\frac{24}{50}$; $\frac{42}{35}:\frac{24}{56}$; $\frac{30}{75}:\frac{20}{50}$; $4\frac{15}{45}:1\frac{11}{15}$

◉ *Hogyan adunk össze, illetve vonunk ki egymásból különböző nevezőjű törteket?*

◉ *Fogalmazd meg a törtek szorzásának és osztásának a szabályát!*
Hogyan célszerű a vegyes számmal számolnunk?

12 Ismételjük át az **egész számokkal** végzett műveleteket.

a) $(-5)+(+3)$; $(+4)+(-18)$; $(-35)+(+35)$; $(-28)+(+15)+(-12)+(+45)$

b) $(+5)-(-7)$; $(-8)-(+2)$; $(-13)-(-20)$; $(+45)-(-18)+(-28)-(+10)$

c) $(+7)\cdot(+3)$; $(+9)\cdot(-15)$; $(-10)\cdot(-28)$; $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$

d) $(+36):(-4)$; $(-72):(-8)$; $(-100):(+5)$; $(-24)\cdot(+25):(-12)\cdot(+10)$

◉ *Mikor pozitív, illetve negatív két (vagy több) szám szorzata (hányadosa)?*

13 Ismételjük át a **tizedestörtekkel** végzett műveleteket.

a) $-2{,}2-(-3{,}05)+12{,}5-8{,}56$; $15{,}025-4{,}6+(-0{,}175)-3{,}4$

b) $-4{,}3\cdot 100$; $0{,}0205\cdot(-1000)$; $-4{,}005\cdot(-10)$; $0{,}05\cdot 10\,000$

c) $34{,}12\cdot 0{,}1$; $-30{,}03\cdot(-0{,}01)$; $700\cdot(-0{,}001)$; $0{,}05\cdot 0{,}005$

d) $(-4{,}035)\cdot(+5{,}08)$; $(-3{,}56)\cdot(-12{,}5)$; $(+450{,}5)\cdot(-0{,}0024)$

e) $23:25$; $34{,}08:200$; $0{,}024:60$; $-2{,}64:(-15)$; $-0{,}6:25$

f) $45:10$; $20{,}8:1000$; $0{,}25:100$; $25{,}2:(-100)$; $-3:10\,000$

g) $5:0{,}1$; $0{,}45:0{,}01$; $20:0{,}001$; $-5:(-0{,}001)$; $0{,}01:0{,}01$

h) $4:0{,}9$; $4{,}95:0{,}22$; $56:0{,}021$; $305{,}7:3{,}75$; $0{,}0068:2{,}5$

◉ *Ügyelj a helyiértékekre!*

◉ *A szorzat, illetve a hányados változásaival igazold számításod helyességét!*

14 Mit tanultunk a **műveletek sorrendjéről**? Számítsd ki az eredményt!

a) $3{,}4+2{,}6\cdot 0{,}01$; $(3{,}4+2{,}6)\cdot 0{,}01$; $34{,}3\cdot 2-0{,}25\cdot 3$

b) $5{,}8:2-2{,}5\cdot 10$; $(5{,}8:2-2{,}5)\cdot 10$; $5{,}8:(2-2{,}5)\cdot 10$

c) $3\cdot 6:4$; $(3\cdot 6):4$; $3\cdot(6:4)$; $8:2\cdot 3$; $8:(2\cdot 3)$

◉ *Tervezd meg a műveletek sorrendjét!*
Hogyan módosíthatja a zárójel a műveleti sorrendet?

15 Mit tanultunk a **hatványozásról**? Melyik az **alap**, melyik a **kitevő**?

a) Írd föl **szorzatalakban**! Számítsd ki a **hatványértéket**!

2^5; 5^2; 0^5; 5^0; 1^{56}; $(-1)^{57}$; $(-1)^{58}$; $(0{,}1)^3$; 10^6

b) Írd föl **hatványalakban** a szorzatokat! Számítsd ki az értéküket!

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$; $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$; $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

◉ *Negatív szám hatványa lehet-e negatív? Lehet-e pozitív?*
Indokold meg a válaszod!

Figyelempróba

Mindegyik állítás után írd oda, hogy igaz-e, vagy hamis!

A: Két pozitív egész közül az a nagyobb, amelynek az abszolútértéke nagyobb. ☐

B: Két egész szám közül az a nagyobb, amelynek az abszolútértéke nagyobb. ☐

C: Negatív szám egész kitevőjű hatványa pozitív és negatív is lehet. ☐

◉ *2006-ban érettségi feladat volt.*

◉ Mit mutat meg két szám aránya? Melyik arány nem értelmezhető?

◉ A b) és a c) feladatban számítással is határozd meg a részek nagyságát!

16 *a)* Mennyi 0,1 és 4; 4 és 0,1; 17 és 17; 0 és 5; 5 és 0 **aránya**?

b) Rajzolj egy 7,2 cm hosszúságú szakaszt! Szerkesztéssel oszd fel két részre úgy, hogy a részek hosszúságának aránya 3 : 5 legyen!

c) Szerkessz egy 120°-os szöget! Szerkesztéssel oszd fel két részre úgy, hogy a részek nagyságának az aránya 1 : 7 legyen!

d) A 4. osztályosok 125 kg vadgesztenyét gyűjtöttek, az 5. osztályos tanulók 175 kg-ot. Összesen 8700 Ft-ot kaptak a vadgesztenyéért. A kapott pénzből mennyi jutott a negyedikes, mennyi az ötödikes tanulóknak?

◉ Milyen értékekre értelmezhetjük az összefüggést az egyes feladatokban?

◉ Megvizsgáltad az összetartozó értékpárok hányadosát, illetve szorzatát? Miért kell ezt megvizsgálnunk?

17 A következő feladatok közül melyekben van **egyenes arányosság**, melyekben van **fordított arányosság** a mennyiségek között?

a) Arnold 24-szer fordul, míg ötliteres kannával megtölt egy kádat. Hány fordulóra lenne szüksége, ha 12 literes vödörrel dolgozna?

b) Botond 10 fekvőtámaszt tud egyszerre megcsinálni. Szorgalmasan edzeni kezd, és hetenként 3-mal növeli az egyfolytában megcsinált fekvőtámaszok számát. 6 hét múlva hány fekvőtámaszt tud megcsinálni egyfolytában?

c) Cili kerékpárral 2 és fél óra alatt 40 km utat tesz meg. Ugyanilyen sebességgel hány kilométert tenne meg 3 és fél óra alatt?



18 Tavaszi fásítás során 10 gyerek 100 facsemetét ültetett el egy nap alatt. Ugyanilyen munkatempóval

a) hány facsemetét ültettek volna el 15-en egy nap alatt;

b) hány nap alatt ültettek volna el 10-en 250 facsemetét;

c) 100 facsemetét 2 gyerek hány nap alatt ültetett volna el;

d) 2000 facsemetét 5 gyerek hány nap alatt ültetett volna el;

e) 50 gyerek hány nap alatt ültetett volna el 250 facsemetét?

Figyelempróba

◉ Ödömér néha pontatlanul fogalmaz. Segíts neki kijavítani a hibákat! Írd le helyesen a hibás meghatározásokat!

Ugyanazt jelenti? „Kettővel növelni?" „Kétszeresére növelni?"

19 Ödömér így értelmezte az egyenes és a fordított arányosságot:

a) Két mennyiség egyenesen arányos, ha amennyivel változik az egyik mennyiség, ugyanannyival változik a másik mennyiség.

b) Két mennyiség egyenesen arányos, ha az összetartozó értékpárok aránya állandó.

c) Két mennyiség fordítottan arányos, ha amennyivel nő az egyik mennyiség, ugyanannyival csökken a másik mennyiség.

d) Két mennyiség fordítottan arányos, ha az összetartozó értékpárok szorzata nullától különböző állandó.

Melyik helyes, melyik hibás a meghatározásokból?

Fejtörő!

A 10-es számrendszer összes különböző alakiértékű számjegyét felhasználva írjunk fel öt olyan számot, amelyek úgy aránylanak egymáshoz, mint az 1 : 2 : 3 : 4 : 5.

Zimbabwébe szeretnék telefonálni. A nemzetközi 8-as zónába, ahová Zimbabwe tartozik, a kapcsolási díj 1,25 Ft hívásonként, a beszélgetés 162,5 Ft percenként. Mennyibe kerül egy 13 perces hívás?

20 Négy nap alatt napi 6 óra gyaloglással 12 gyerek 72 km-t tett meg egy országjáró túrán. Ugyanilyen sebességgel haladva

a) napi 4 óra gyaloglással hány nap alatt tennék meg a 72 km-t;

b) 12 nap alatt napi 5 óra gyaloglással hány kilométert tennének meg;

c) 24 gyerek 8 nap alatt napi 3 óra gyaloglással hány kilométert tenne meg?

Tételezzük fel, hogy a túrázók sebessége mindig ugyanakkora volt.

---

21 Volt 500 Ft-om. Ehhez kaptam 250 Ft-ot.

a) Hány **százalékkal** növekedett a pénzem?

b) Hányszorosa lett így az eredetinek?

c) Hány százaléka lett így az eredetinek?

---

22 Hogyan számítjuk ki az **alapot**, a **százalékértéket**, illetve a **százaléklábat**?

a) 500 Ft-om volt. Elköltöttem belőle 300 Ft-ot. Mekkora részét költöttem el a pénzemnek?

b) Egy terület fásításának 35%-át végezték el, amely 0,7 ha-nak felel meg. Hány hektárt kell összesen fásítaniuk?

c) Egy 20 000 Ft-os tábor árát 25%-kal növelték. Hány forintba került így a tábor?

d) Egy 400 m^2 területű ásatáson már feltártak 300 m^2-t. Hány százalékát tárták fel az ásatásnak? Hány százalékát kell még feltárni?

Segítségért lapozz a tankönyv 147., 151., 152. oldalára!

---

23 Határozd meg a diagramok alapján az egyes mennyiségeket!

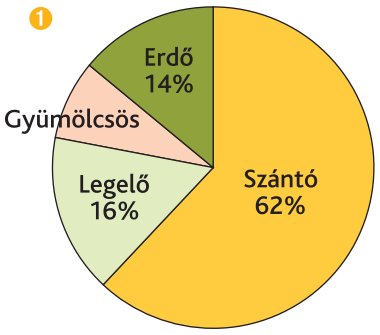
a) Egy gazdaság 8000 ha földterületének hány százaléka gyümölcsös? Hány hektár gyümölcsösük van?

Lásd az ❶ diagramot.

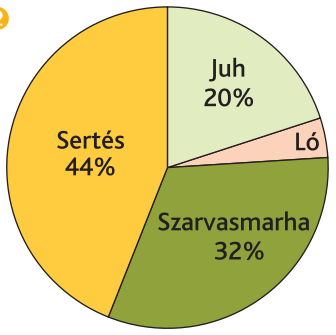
b) A gazdaság 4500 db-os állatállományának hány százaléka ló? Hány lovuk van?

Lásd a ❷ diagramot.

❶



❷



---

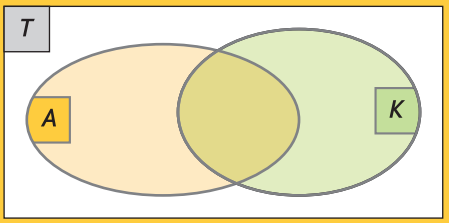
24 Takarékos Tamás 200 000 Ft-ot állandó kamatozású kötvénybe fektet. Az évenkénti kamat 10%. Mennyi lesz a pénze 1 év, 2 év, 3 év múlva, ha közben nem veszi ki a kamatot, és a következő évben a kamattal növelt összeg kamatozik?

Egy iskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.

a) Készíts halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével!

b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban?

2005-ben érettségi feladat volt.



◉ *Például:*
5 + 20 (=25); $a + x$

25 Írd föl a matematika nyelvén!

a) 5-nél 20-szal nagyobb; a-nál x-szel nagyobb

b) $\frac{2}{3}$-nak az 5-szöröse; b-nek a 3,5-szerese

c) 24-nek a $\frac{2}{3}$ része; c-nek a $\frac{4}{5}$ része

d) 21 egyharmadánál 5-tel kevesebb; d egynegyedénél 3-mal kevesebb

e) 250-nek a 30%-a; e-nek a 120%-a

◉ *A 218. oldalon foglaltuk össze a szöveges feladatok megoldásának menetét.*

◉ *Hogyan ellenőrizzük a szöveges feladat megoldását?*

26 Az adatok közötti összefüggést írd föl **egyenlettel**. Oldd meg a feladatot!

a) Ha egy szám 3-szorosához 15-öt adunk, akkor a szám 5-szörösét kapjuk. Melyik ez a szám?

b) Pista pénze 150 Ft-tal kevesebb Robi pénzének kétszeresénél. Kettőjüknek összesen 600 Ft-juk van. Hány forintja van Pistának, illetve Robinak?

c) Ha egy edényt $\frac{3}{4}$ részéig megtöltenek vízzel, és még 1 l-t hozzáöntenek, akkor az edényt $\frac{4}{5}$ részéig töltik meg. Hány literes az edény?

d) Melyik az a szám, amelynek 3-szorosához 525-öt adva 234-et kapunk?

◉ *A nyitott mondatok közül melyik*
egyenlet;
azonosság;
egyenlőtlenség;
azonos egyenlőtlenség?
Figyeld meg az egyes számhalmazok jelölését!

27 Oldd meg a mérlegelv alkalmazásával az egyenleteket és az egyenlőtlenségeket az adott alaphalmazon!

a) $2 \cdot a - 3 = 5$, $\mathbb{Z} = \{\text{Egész szám}\}$

b) $3 \cdot (b + 2) = 5$, $\mathbb{N} = \{\text{Természetes szám}\}$

c) $(4 \cdot c - 5) : 2 + 0{,}5 = 2 \cdot c - 2$, $\mathbb{Q} = \{\text{Racionális szám}\}$

d) $\frac{3}{4} \cdot d - \frac{5}{8} \leqq \frac{3}{2}$, $\mathbb{Q}^- = \{\text{Negatív racionális szám}\}$

e) $\frac{2 \cdot e}{15} + 4 > 6$, $\mathbb{Q}^+ = \{\text{Pozitív racionális szám}\}$

f) $\frac{3 \cdot f - 5}{2} < f$, $\mathbb{N} = \{\text{Természetes szám}\}$

◉ *Készíts vázlatot! Hogyan ellenőrizhető a megoldás?*

◉ *Mit tudunk a háromszög belső szögeinek összegéről?*

28 Az adatok közötti összefüggést írd föl egyenlettel, úgy oldd meg a feladatot!

a) Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz egyik alapja 12 cm-rel hosszabb, a szárai 1 cm-rel rövidebbek, mint a másik alapja. A kerülete 34 cm.
Mekkorák a trapéz oldalai? **Szerkeszd meg ezt a trapézt!**

b) Egy háromszög α szöge 1,5-szerese a β szögnek. A $\gamma = 45°$.
Mekkorák a háromszög szögei? Rajzolj ilyen háromszöget, ha $a = 6$ cm!

Többet ésszel …

Két vándor megy A-ból B-be. Az első 15 perc alatt tesz meg 1 kilométert, a másik 12 és fél perc alatt. Milyen messze van a két helység egymástól, ha az első vándor 1 és negyed órával korábban indult el, mint a második, és fél órával hamarabb érkezik meg?

29 Becsüld meg, majd mérd meg a pad lapjának hosszúságát, szélességét!

Gyűjtőmunka

a) Becslés: hosszúság; H ≈ ☐ cm; szélesség; Sz ≈ ☐ cm

b) Mérés: H ≈ ☐ cm = ☐ dm = ☐ m; Sz ≈ ☐ cm = ☐ dm = ☐ m

c) Hasonlítsd össze a mért adatokat a becsült adatokkal! Mekkora az eltérés? A mért adatnak hány százaléka az eltérés?

d) Számítsd ki a pad lapjának **területét** négyzetcentiméter pontossággal! Fejezd ki a kapott értéket négyzetdeciméterben és négyzetméterben!

◉ *Mit jelent az, hogy* 1 cm *pontossággal mérünk? Legfeljebb mekkora lehet a mérés hibája?*

30 Mérd meg egy **téglatest** alakú doboz **éleit**! Számítsd ki a **felszínét**, **térfogatát**! Képzeljük el, hogy a doboz minden élét kétszeresére növeljük. A megnövelt doboz felszíne, illetve térfogata hányszorosa az eredeti doboz felszínének, illetve térfogatának?

◉ *Szükség esetén lapozz a Kislexikonban a felszín, illetve a térfogatmérés címszóhoz!*

31 *a)* Becsüld meg, majd mérd meg centiméter pontossággal a szobátok falainak, az ajtónak stb. a méreteit!

b) Hány négyzetcentiméter padlószőnyeggel borítható be a szobátok padlója?

c) Hány köbméter (hány liter, hány hektoliter) levegő van a szobátokban?



32 Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket!

a) 5400 mm = 54 ☐ = ☐ cm; 54 m = ☐ km = 5400 ☐

b) 0,45 km = 4500 ☐ = ☐ cm; 0,45 dm = ☐ m = 45 ☐

c) 1520 dl = ☐ dm^3 = ☐ l; 5,6 hl = ☐ m^3 = ☐ l

d) 3,48 m^3 = ☐ hl = ☐ dm^3 = ☐ l = 348 000 ☐

e) 5,6 t = ☐ kg = ☐ dkg; 5,6 kg = ☐ g

f) 545 dkg = ☐ g = ☐ kg; 545 kg = ☐ t = 54 500 ☐

g) 2,3 m^2 = ☐ dm^2 = ☐ cm^2; 3200 mm^2 = ☐ cm^2

h) 520 ha = 5,2 ☐ = ☐ m^2; 520 mm^2 = ☐ dm^2

i) 2,4 h = 0,1 ☐ = ☐ min; 45 min = ☐ h = ☐ s

j) 0,5 hét = ☐ nap = ☐ h; 4500 min = ☐ s = ☐ h

◉ *Az idő mértékegységeinek jelölése:*
h (óra), min (perc), s (másodperc).

33 *a)* Szerkessz **háromszöget**, ha oldalainak hossza $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm! Jelöld a szokásos módon a háromszög szögeit, csúcsait!

Ellenőrizd, hogy helyesen mérted-e meg a szögek nagyságát!

b) Mérd meg a háromszög **belső szögeit**, számítsd ki a **belső szögek** összegét!

c) Számítsd ki a háromszög **kerületét**, **területét**!

d) **Tükrözd** a háromszöget külön-külön mindhárom oldalegyenesére! Milyen síkidomokat határoz meg az eredeti háromszög és egy-egy **tükörképe**?

Minden tükrözés előtt újra szerkeszd meg az eredeti háromszöget!

e) Szerkeszd meg újra az eredeti háromszöget, végy fel tetszőlegesen egy **tükörtengelyt**, és szerkeszd meg a háromszög tükörképét!

Keress egyenlő szögeket, egyenlő szakaszokat!

Sorold föl a **tengelyes tükrözés** tulajdonságait!

---

34 *a)* Szerkessz téglalapot, ha oldalainak hossza $a = 3$ cm, $b = 5$ cm!

Lapozz a tankönyv 107. oldalára!

b) Számítsd ki a kerületét, területét!

c) Szerkeszd meg a tükörtengelyeit! Hány tükörtengelye van?

---

35 a) Szerkessz 5 cm oldalú négyzetet! A csúcsait jelölje: A, B, C, D

Szerkeszd meg a CD oldal felezőpontját (F)!

b) Húzd meg az AF egyenest! Ez lesz a tükörtengely.

Tükrözd a négyzetet az AF egyenesre!

c) Milyen síkidom az előbbi két négyzet közös része?

---

36 Húzz egy t egyenest, ez legyen a tükörtengely!

Lapozz a tankönyv 179. oldalára!

Húzz egy e egyenest úgy, hogy az e és a képe, az e'

a) 60°-os szöget zárjon be egymással; *b)* merőleges legyen egymásra;

c) párhuzamos legyen egymással; *d)* megegyezzen egymással!

---

37 Szerkessz tengelyesen szimmetrikus háromszöget, ha

Lapozz a tankönyv 182–185. oldalára!

a) az alapja 4 cm, a szára 5 cm;

b) az alapja és az alaphoz tartozó magassága is 4 cm;

c) az alapja 6 cm, az alapon fekvő szöge 30°;

d) az alapja 5 cm, a szárszöge 120°!

Sorold föl a tengelyesen szimmetrikus háromszög tulajdonságait!

Mérd meg a szükséges adatokat, és számítsd ki a megszerkesztett háromszögek kerületét és területét!

---

38 Szerkessz **egyenlő szárú háromszöget**, ha az alapja 6 cm, a szára 5 cm!

Tükrözd a háromszöget

a) az alap egyenesére; *b)* az egyik szár egyenesére!

Az eredeti háromszög és a tükörképe együtt milyen síkidomot alkot?

Fejtörő!

Rajzolj négyzetrácsos lapra 8 egység oldalhosszúságú négyzetet!

Darabold fel négy egybevágó szimmetrikus alakzatra úgy, hogy a felosztással az eredeti négyzet ne legyen tükrös!

39 Szerkessz **deltoidot**, ha

a) a **szimmetriaátlója** 6 cm, két oldala 4 cm és 3 cm;

b) két oldala 3 cm és 5 cm, az adott két oldal által közbezárt szög 105°;

c) a szimmetriaátlója 8 cm, a szimmetriaátló által felezett szögei 210° és 60°!

Mérd meg a szükséges adatokat, és számítsd ki a megszerkesztett deltoidok kerületét!

① A feladat értelmezése, vázlat készítése.
② Összefüggések megkeresése.
③ Tervkészítés.
④ Szerkesztés.
⑤ A megoldás igazolása
⑥ További észrevételek.

---

40 Szerkessz **rombuszt**, ha

a) **átlóinak** hossza 6 cm és 4 cm; *b)* oldala 5 cm hosszú, egy szöge 75°!

Mérd meg a szükséges adatokat, és számítsd ki a megszerkesztett rombuszok kerületét! Rajzold meg a rombuszok szimmetriatengelyeit!

◉ Sorold föl a rombusz tulajdonságait!

---

41 Szerkessz **húrtrapézt**, ha a **köré írható kör** sugara $r = 2{,}5$ cm, az egyik **alapja** $a = 4$ cm, az egyik **szára** $b = 2$ cm! Hány megoldás van?

◉ Sorold föl a húrtrapéz tulajdonságait!

---

42 4 cm sugarú körbe szerkessz **szabályos nyolcszöget**!

a) Mennyi a belső szögeinek az összege; mekkora egy belső szöge?

b) A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a kerületét!

c) *Piros* ceruzával húzd meg a csúcsokon átmenő, *kékkel* az oldalfelező szimmetriatengelyeit!

◉ A kör középpontján átmenő átlók hány fokos szöget zárnak be egymással? A szögeket számítással határozd meg!

---

43 *a)* Szerkeszd meg egy szakasz **felezőmerőlegesét**; **felezőpontját**!

b) Szerkessz egy egyenesre adott pontjában merőleges egyenest!

c) Szerkessz egy egyenesre merőleges egyenest egy adott külső pontból!

d) Szerkessz egy egyenessel **párhuzamos** egyenest egy adott külső ponton keresztül!

e) Szerkessz 60°-os, 45°-os, 75°-os, 135°-os, 225°-os szöget!

Felezd meg a megszerkesztett szögeket, írd föl az így keletkezett szögek nagyságát egész fokok és szögpercek segítségével!

◉ Lásd 105. oldal.

◉ Hogyan hajtható végre egy tetszőleges szög másolása; felezése?

◉ Lásd 110. oldal.

---

44 *a)* Egy háromszög egyik oldala $a = 6$ cm hosszú. Az a oldalon fekvő két **belső szöge**: $\beta = 45°$; $\gamma = 60°$. Szerkeszd meg a háromszöget!

Határozd meg a háromszög harmadik szögének nagyságát!

b) Egy háromszög egyik belső szöge α, a másik szöge ennél 30°-kal nagyobb, a harmadik α-nak háromszorosa. Mekkorák a háromszög belső szögei?

A háromszög *legrövidebb* oldalának hosszúsága 2 cm. Szerkeszd meg a háromszöget! Számítsd ki a háromszög kerületét!

◉ A szögeket is szerkeszd!

◉ Mennyi a háromszög belső szögeinek összege?

◉ Vajon melyik szög van a legrövidebb oldallal szemben?

Fejtörő!

Egy háromszög oldalhosszúságai egész számok. Két oldala 3 cm és 7 cm. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak-e vagy hamisak!

A: A háromszög harmadik oldala lehet 9 cm. ☐

B: A háromszög harmadik oldala lehet 10 cm. ☐

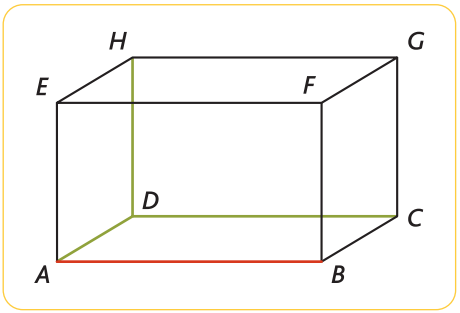
◉ 2007-ben érettségi feladat volt.

A körrel kapcsolatos fogalmakat a 102. és 103. oldalon találod meg.

45 *a)* Rajzolj egy 2,5 cm sugarú **kört** (körvonalat)! A **középpontját** jelöld *O*-val! Húzd meg a kör egyik **átmérőjét**, a végpontjait jelöld *A*-val és *B*-vel!

Szerkessz ezzel az átmérővel párhuzamosan egy **érintőt**! Az érintési pontot jelöld *E*-vel!

Az ábra jelöléseivel válaszolj!



46 Végy a kezedbe egy **téglatestet**, például egy üres dobozt!

a) Mérd meg a téglatest **csúcsainak távolságát**!

b) Jelöld meg a téglatest *AB* élét! Mérd meg a megjelölt élnek a csúcsoktól való távolságát! Mérd meg a megjelölt élnek a többi vele párhuzamos éltől való távolságát!

c) Hány él **metszi** a megjelölt élt? Hány él **párhuzamos**, illetve hány **kitérő** a megjelölt éllel?

d) Milyen helyzetűek a téglatest egybevágó **lapjai**? Lehet-e mutatni kitérő lapokat?

e) A megjelölt él egyenese hány lap síkját **döfi** és hány lap síkjával **párhuzamos**?

f) Hány részre osztja a teret a 6 lap síkja?

g) Szerkeszd meg a téglatest **testhálóját**, számítsd ki a **felszínét** és **térfogatát**!

Az eredményeket legalább három mértékegységgel kifejezve add meg!

47 *a)* Add meg a téglatest térfogatát és felszínét, ha egy csúcsban találkozó éleinek hossza: 0,75 dm; 23 cm; 0,06 m!

b) Add meg a kocka térfogatát és felszínét ha éleinek hossza: 0,5 dm!

Írd be a kis négyzetbe az I *(igaz) vagy a* H *(hamis) betűk közül a megfelelőt!*

48 A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Minden kocka téglatest. ☐

B: Minden téglatest kocka. ☐

C: Van olyan téglatest, amely nem kocka. ☐

D: Van olyan kocka, amely nem téglatest. ☐

E: Ha egy testet hat egybevágó téglalap határol, akkor az kocka. ☐

F: Ha egy téglatestnek van három egybevágó lapja, akkor legalább négy lapja egybevágó. ☐

Az adatokat rendezd táblázatba!

49 *a)* Egy téglatest egyik éle 15 cm. A másik éle ennél 5 cm-rel kisebb, egy harmadik él hossza az előző két él hosszának az összegével egyenlő. Mennyi a téglatest felszíne és térfogata?

b) Egy téglatest minden élének hosszúsága egész szám. Egyik lapjának a területe 24 cm^2. Mekkorák lehetnek a téglatest élei és mennyi lehet a téglatest felszíne és térfogata, ha

A: a legrövidebb éle 4 cm-rel rövidebb a leghosszabb élénél;

B: a legrövidebb éle 5 cm-rel rövidebb a leghosszabb élénél?

---

50 Számítsd ki a 15 cm élhosszúságú tömör alumíniumkocka tömegét, ha 1 cm^3 alumínium tömege 2,7 g!

KÉPESSÉGPRÓBÁK

51 Lotte két hétig táborozni volt. Táblázatban, színezéssel jelölte, hogy az egyes napokon milyen foglalkozásokon vett részt.

Nap	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Városnézés														
Kajakozás														
Fürdőzés														
Kirándulás														

A: Lotte legtöbbször a fürdőzésen vett részt.

B: Amelyik napon kajakozott, azon a napon fürdött is.

C: A városnézés mindig egy kirándulás része volt.

D: Volt olyan nap, amikor egyetlen foglalkozáson sem vett részt Lotte.

Karikázd be annak az állításnak a jelét, amelyik valótlant állít!

52 Egy kisvárosban két szálloda van, amelyek egyforma színvonalon nyújtják a szolgáltatásaikat. A Vár Hotelben napi 45 €-ba kerül az ellátás, a Fény Szállóban napi 40 €-ba. Ám a Fény Szállóban 20 € egyszeri takarítási díjat is felszámolnak, akárhány napot tölt is a vendég náluk.

Figyelempróba

a) Írd be a táblázatba, hogy az egyes szállodákban mennyibe kerül 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 napra a szállás (a takarítást is beszámítva)!

Napok száma	1	2	3	4	5	6	7
Vár Hotel	€	€	€	€	€	€	€
Fény Szálló	€	€	€	€	€	€	€

b) Ubul 3, Valter 6 napot tölt a városban. Kinek melyik szállodában érdemes megszállnia?

A: Ubulnak a Vár Hotelben, Valternak a Fény Szállóban.

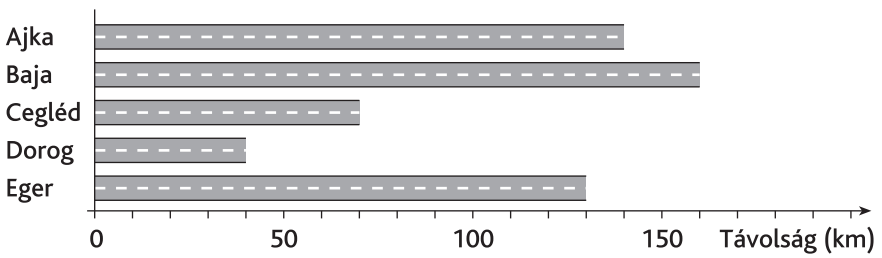
B: Valternak a Vár Hotelben, Ubulnak a Fény Szállóban.

C: Mindkettőjüknek a Vár Hotelben.

D: Mindkettőjüknek a Fény Szállóban.

Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

53 A diagram azt szemlélteti, hogy ezek a városok közúton hány kilométerre vannak Budapesttől.



A diagram alapján töltsd ki a táblázatot!

Város	Ajka	Baja	Cegléd	Dorog	Eger
Távolság (km)					

Ábelnek 3 lány- és 4 fiútestvére van. Testvére, Bea L leánytestvérrel és F fiútestvérrel büszkélkedhet. Mivel egyenlő az $L \cdot F$ szorzat?

A: $L \cdot F = 9$; **B:** $L \cdot F = 10$; **C:** $L \cdot F = 12$; **D:** $L \cdot F = 15$

Többet ésszel ...

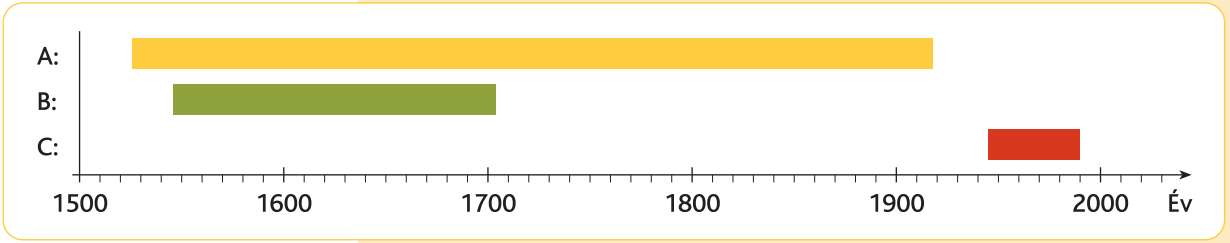
Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

54 Mátyás király halála után Magyarország meggyengült, és nem tudott ellenállni a török hadaknak. A mohácsi csatavesztés után, a XVI. század közepén a török elfoglalta Budát és az ország középső harmadát

Magyarország három részre szakadt. Az ország nyugati és északi része Habsburg fennhatóság alatt maradt. A törököket a XVII. század végén sikerült kiűzni. Ezután az egész ország hosszú időre a Habsburgok birodalmához tartozott. A XX. században újra idegen (szovjet) megszállás alá került az ország. A diagram azt szemlélteti, hogy mettől meddig tartott a török hódoltság, a Habsburg fennhatóság, illetve a szovjet megszállás.

A helyes válasz betűjelének bekarikázásával válaszolj a kérdésekre!

a) Melyik betűvel jelzett sáv szemlélteti a török hódoltságot?



b) Körülbelül hány évig tartott a török hódoltság?

A: 45 évig; **B:** 160 évig; **C:** 300 évig; **D:** 400 évig

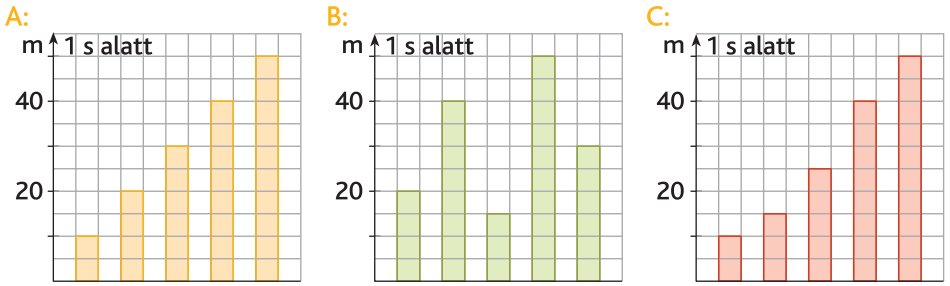
c) Mikor szűnt meg végleg a Habsburgok uralma Magyarországon?

A: 1698-ban; **B:** 1848-ban; **C:** 1918-ban; **D:** 1988-ban

55 Táblázatba foglaltuk, hogy egyes madarak kitartóan repülve másodpercenként hány méter utat tesznek meg.

A madár neve	Fecske	Galamb	Kócsag	Sólyom	Varjú
Hány méter 1 s alatt	25 m	40 m	10 m	50 m	15 m

a) Karikázd be a táblázat alapján helyesen elkészített diagram betűjelét!



b) A helyes diagramban írd a megfelelő oszlopok alá az egyes madarak nevének kezdőbetűjét!

Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

c) Hány kilométert tesz meg 5 óra alatt a fecske az adott sebességgel a tenger felett, egyenes vonalban repülve?

A: 125 km-t; **B:** 250 km-t; **C:** 350 km-t; **D:** 450 km-t

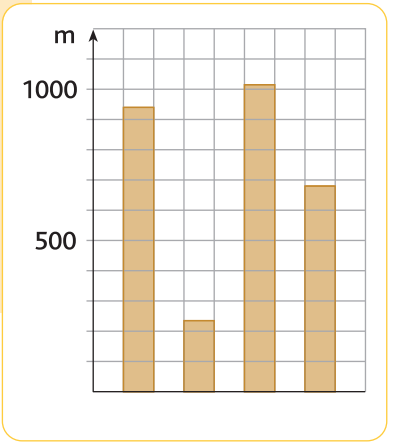
Figyelempróba

Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

Anna, Bea és Cili két-két szabályos dobókockával dobtak. A dobások után minden egyes kockán más-más szám volt felül. Anna dobott számainak összege 9 volt, Beáé 5, míg Cilié 7. Legalább egy olyan lány volt, aki két egymás utáni számot dobott. Ki dobta a 3-as számot?

A: Anna; **B:** Bea; **C:** Cili; **D:** Senki sem

56 A diagram négy magyarországi hegycsúcs tengerszint feletti magasságát szemlélteti. Magyarországon nincsenek égbetörően magas hegycsúcsok. Csak a Kékes magassága haladja meg az 1000 m-t. A Mecsekben fekvő Zengő a Kékesnél 335 m-rel alacsonyabb. A diagramról leolvasható még a Csóványos és a Gellért-hegy magassága is. Az ábrázolt hegycsúcsok közül a Gellért-hegy a legalacsonyabb.



a) Írd az oszlopok alá a megfelelő hegycsúcs nevének kezdőbetűjét!

b) Olvasd le a diagramról a Csóványos tengerszint feletti magasságát!

57 Benő egy műszer segítségével megállapítja, hogy 100 km-enként hány liter benzint fogyaszt a gépkocsija. Mindennap 400 km-t utazik, de az útviszonyoktól függően a gépkocsi fogyasztása nem mindig ugyanannyi.

Táblázatba foglalta a hét első három napján mért adatokat.

Út	1. szakasz	2. szakasz	3. szakasz	4. szakasz
Hétfői fogyasztás	6,4 l	5,6 l	6,8 l	5,2 l
Keddi fogyasztás	6,0 l	6,2 l	6,0 l	6,4 l
Szerdai fogyasztás	6,0 l	5,6 l	5,8 l	5,7 l

a) Szerdán melyik szakaszon volt legkisebb a gépkocsi fogyasztása?

A: Az 1.-n; **B:** A 2.-on; **C:** A 3.-on; **D:** A 4.-en

b) Melyik napon mért fogyasztást szemlélteti az oszlopdiagram?

A: A hétfőit; **B:** A keddit; **C:** A szerdait; **D:** Egyiket sem

c) Mennyi volt a gépkocsi 100 km-re eső átlagos fogyasztása hétfőn?

A: 6,4 l; **B:** 6,2 l; **C:** 6,0 l; **D:** 5,8 l

d) Mely napon volt alacsonyabb a 100 km-re eső átlagos fogyasztás, mint hétfőn?

A: Csak kedden. **B:** Csak szerdán.

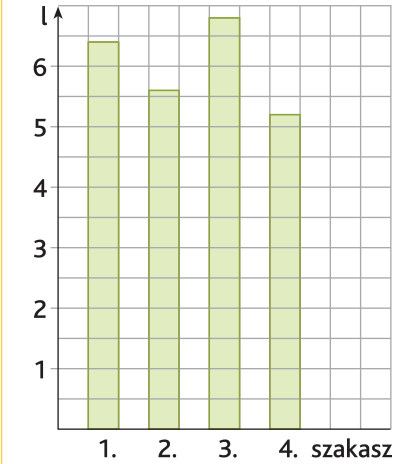
C: Egyik napon sem. **D:** Mindkét napon.

e) Benő mérése szerint csütörtökön az első három szakaszon ugyanannyit fogyasztott az autó, mint hétfőn, ám a 4. szakaszon 6,0 litert.

Hogyan változott a gépkocsi 100 km-re eső átlagos fogyasztása a hétfői átlagos fogyasztáshoz képest?

A: 0,2 l-rel nőtt; **B:** 0,8 l-rel nőtt;

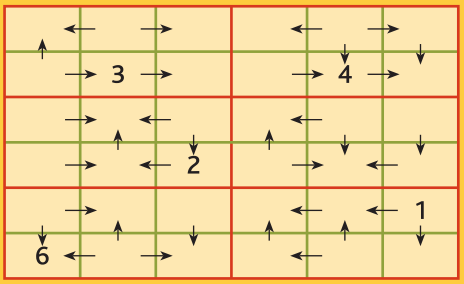
C: 0,2 l-rel csökkent; **D:** Nem változott

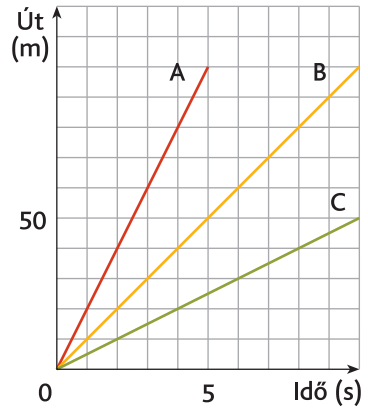


◉ *Hogyan számítjuk ki négy szám átlagát?*

Az itt látható 6 × 6-os táblázatot hat kisebb, pirossal határolt 2 × 3-as táblázatra osztottunk. Írd be a táblázatba a 12 osztóit úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a pirossal határolt kisebb téglalapokban is egy osztó csak egyszer forduljon elő. Ha egy piros téglalapon belül egy szám osztója a szomszédjának, akkor nyíl mutat a többszörösre. Néhány számot már beírtunk segítségül.

◉ *Először írd fel 12 osztópárjait!*





58 Az ábrán egy kerékpáros, egy segédmotoros és egy motorkerékpáros **idő-út grafikonja** látható. A motorkerékpáros haladt leggyorsabban, a kerékpáros a leglassabban.

a) Karikázd be a kerékpáros grafikonjának betűjelét!

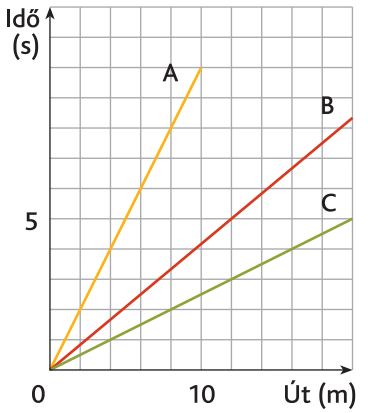
b) Hány métert tett meg 2 másodperc alatt a motorkerékpáros?

A: 40 m-t; **B:** 20 m-t; **C:** 10 m-t

c) Mennyi idő alatt tett meg 30 m-t a segédmotor-kerékpáros?

A: 6 s; **B:** 3 s; **C:** 1,5 s

◉ *Milyen összefüggés van az eltelt idő és az egyes járművek által megtett út között? Indokold válaszod!*



59 Az ábrán egy kerékpáros, egy kocogó fiú és egy sétáló gyalogos **út-idő grafikonja** látható. A kerékpáros haladt a leggyorsabban, a sétáló a leglassabban.

a) Karikázd be a kerékpáros grafikonjának betűjelét!

b) Hány métert tett meg 5 másodperc alatt a kocogó fiú?

A: 8 m-t; **B:** 10 m-t; **C:** 12 m-t

c) Mennyi idő alatt tett meg 10 m-t a gyalogos?

A: 15 s; **B:** 10 s; **C:** 5 s

60 Gerda, Hédi és Ingrid egy kirándulásra összeadott 80 €-t. Gerda adta a pénz egynegyedét, Hédi a 40%-át, Ingrid a többit. A kiránduláson 72 €-t költöttek el úgy, hogy mindegyikük ugyanannyit költött. A kirándulás után kinek kell még fizetnie, és ki az, aki pénzt kap vissza?

	Gerda	Hédi	Ingrid
Befizetés a kirándulás előtt	€	€	€
Költekezés a kiránduláson	€	€	€
Utólag még fizetnie kell	€	€	€
Visszakap pénzt a kirándulás után	€	€	€

a) Töltsd ki a táblázatot!

b) A 80 € hány százalékát fizette be Ingrid?

A: 15%-át; **B:** 25%-át; **C:** 35%-át; **D:** 45%-át

Fejtörő!

Ibi, Joli, Kitti és Lili osztálytársak. Különböző osztályzatuk volt matekból, de egyikük sem bukott meg. Kinek hányasa volt matekból, ha erre a kérdésünkre a következő válaszokat adták, amelyek mindegyike egy igaz és egy hamis részt tartalmazott?

◉ *Írd be a kis négyzetbe, kinek hányasas volt matekból!*

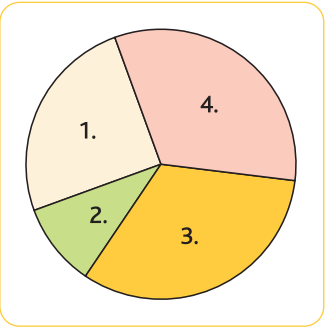
Ibi: Lili osztályzata jeles, Kittié jó. **Ibi:** ☐

Joli: Lili osztályzata jó, Kittié elégséges. **Joli:** ☐

Kitti: Ibi osztályzata jó, Jolié elégséges. **Kitti:** ☐

Lili: Ibi osztályzata elégséges, Jolié közepes. **Lili:** ☐

61 A kördiagramon egy zöldséges egynapi bevételének eloszlása látható, tehát az, hogy a bevétel mekkora része származott konzervek, zöldségek, gyümölcsök, illetve egyéb áru eladásából.



a) A zöldségfélék eladásából a bevétel 25%-a származott.
Karikázd be a zöldségféléket szemléltető körcikk sorszámát!

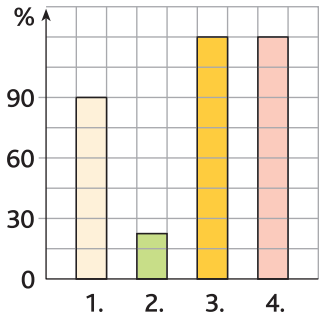
b) Aznap a zöldségesnek mintegy 120 000 Ft bevétele volt.
Körülbelül hány forint bevétele volt a zöldségfélék eladásából?

A: 20 000 Ft; **B:** 25 000 Ft; **C:** 30 000 Ft; **D:** 50 000 Ft

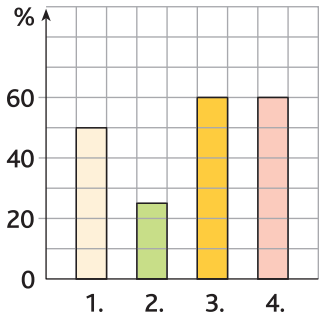
c) Oszlopdiagrammal is ábrázoltuk a bevételnek a kördiagramon látható eloszlását.

◉ Karikázd be a helyesen megszerkesztett oszlopdiagram betűjelét!

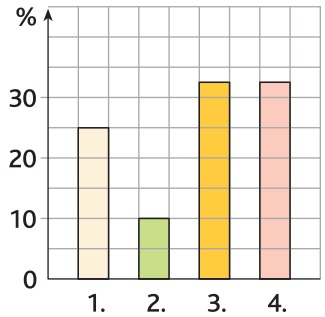
A:



B:



C:



---

62 Egy kert füvesítéséhez 6,5 kg fűmagra van szükség.

◉ Karikázd be a helyes válaszok betűjelét!

a) Legalább hány zacskó fűmagot vegyünk, ha egy zacskóban 350 g mag van?

A: 13-at; **B:** 15-öt; **C:** 17-et; **D:** 19-et

b) Hány dekagramm fűmag marad meg, ha az előírásoknak megfelelő mennyiségű fűmagot szórunk ki?

A: 10 dkg; **B:** 15 dkg; **C:** 20 dkg; **D:** 25 dkg

---

63 Egy hajó kormányosa tudta, hogy a hajófedélzet padlózata és a legalacsonyabb híd alja között $1\frac{3}{4}$ öl a távolság.

◉ Az öl, a láb régi hosszmérték,
1 öl = 6 láb.

a) Legfeljebb hány sor ládát rakathatott a fedélzet padlózatára egymás fölé, ha egy-egy láda magassága 1 láb volt?

A: 8 sort; **B:** 9 sort; **C:** 10 sort; **D:** 11 sort

◉ Magyarországon 1 öl = 1896 mm volt, és tegyük fel, hogy magyar volt a kormányos.

b) Hány milliméter volt a távolság a hajófedélzet padlózata és a híd alja közt?

A: 3318 mm; **B:** 1750 mm; **C:** 2648 mm; **D:** 3750 mm

Figyelempróba

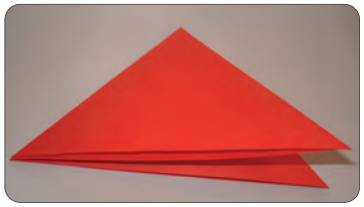
A társadalombiztosítási azonosító jelet (a TAJ-számot) a következő szabály szerint képezik: Az első nyolc számjegy egymás után sorban kerül kiosztásra, a kilencedik, ellenőrző számjegyet úgy képezik, hogy a páratlan helyen álló számjegyeket 3-mal, a páros helyen állókat pedig 7-tel szorozzák. Az így kapott számokat összeadják, elosztják 10-zel, és az osztás maradékát hozzáírják a sorban kiadott 8 számjegyhez kilencedik számként. A következők közül melyik nem lehet valaki TAJ-száma?

A: 464 646 466; **B:** 151 515 151; **C:** 737 373 738; **D:** 001 100 110

◉ Nézz utána, hogy élete során milyen azonosítószámokat kaphat egy-egy magyar állampolgár!

Kísérletezz!

64 Négyzet alakú papírlapot kétszer összehajtunk az átlói mentén, majd kivágunk belőle kis darabkákat.





Az **A**, **B**, **C** alakzatok közül melyiket kapjuk a papírlap széthajtása után?

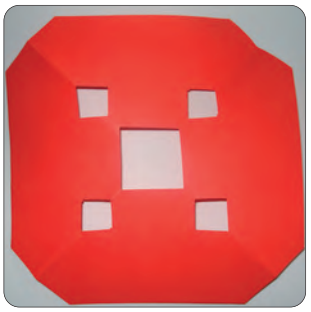
Szükség esetén hajtsd végre a hajtogatást és a kivágást!

Karikázd be a helyes alakzat betűjelét!

A:



B:



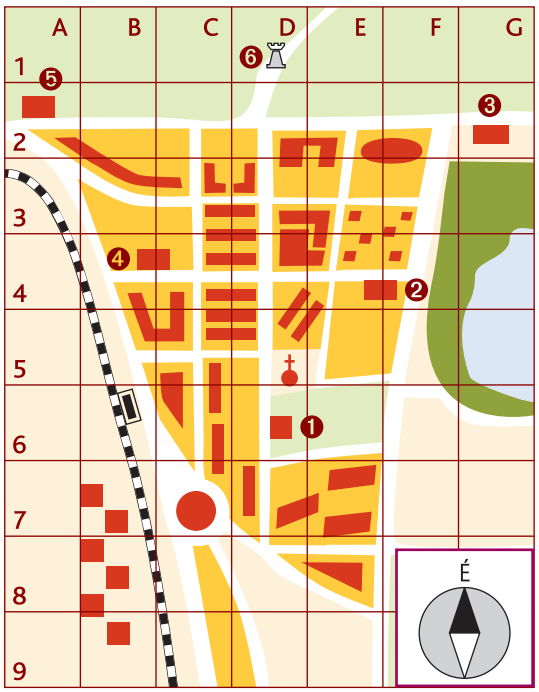
C:



---

65 Az ábrán Mégnincsfalva térképe látható.

A térkép méretaránya 1 : 20 000.



a) Értelmezd a térkép méretarányát!

Ami a térképen 1 cm, az a valóságban

A: 2 m; **B:** 20 m **C:** 200 m; **D:** 2 km

b) Melyik mezőben van az ❶ számmal jelölt iskola?

A: (B; 5); **B:** (C; 4); **C:** (D; 6)

c) Cili az ❶ számmal jelölt iskolából északi irányban indul el. 400 m után keletre fordul. Még 300 m-t gyalogolva eléri a célját. Mely számmal jelzett épülethez jut?

A: ❷-vel; **B:** ❸-mal; **C:** ❹-gyel; **D:** ❺-tel

d) Melyik irányba fogunk nézni, ha az északi irányból jobbra elfordulunk 135°-kal?

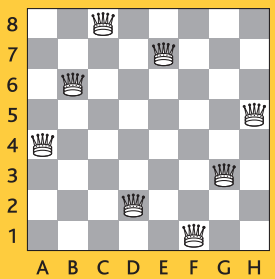
A: Északkeleti; **B:** Délkeleti;

C: Délnyugati; **D:** Északnyugati

e) Ha a ❻ számmal jelzett kilátóból dél felé nézünk, akkor hány fokkal kell elfordulnunk, hogy a ❹ számmal jelzett épület irányába nézzünk?

A: Jobbra 30°-kal. **B:** Jobbra 45°-kal.

C: Balra 30°-kal. **D:** Balra 45°-kal.



Gauss (1777–1855), a nagy német matematikus megoldotta azt a feladatot, hogyan állítható fel a sakktáblán nyolc királynő úgy, hogy egymást kölcsönösen ne üthessék, vagyis egyetlen sorban, oszlopban, illetve átlós sorban ne legyen kettő. Gauss megállapította, hogy 92 megoldás lehetséges. Közülük egyet bemutatunk. Tükrözéssel keress új megoldásokat!

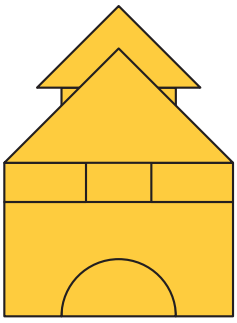
66 A fényképen egy játékkockákból készült építmény látható.
Ödömér szerette volna megrajzolni az építmény **elölnézetét**, **felülnézetét** és **oldalnézetét**. Az egyik rajza hibás lett.

Kísérletezz!

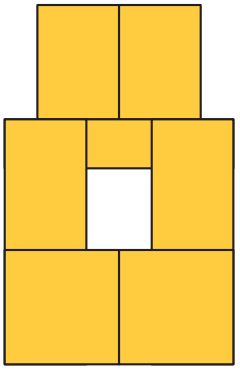


Keresd meg a hibát! Karikázd be a hibás ábra betűjelét!

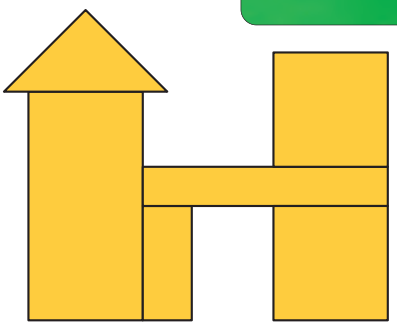
A: Elölnézet



B: Felülnézet



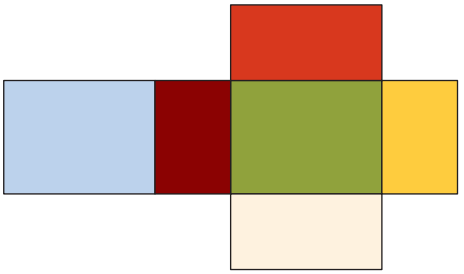
C: Oldalnézet



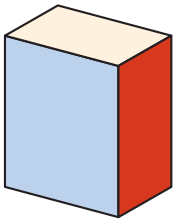
---

67 *a)* Az alábbiak közül melyik téglatest hálóját rajzoltuk meg?

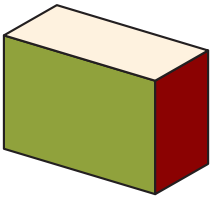
Karikázd be a megfelelő téglatest betűjelét!



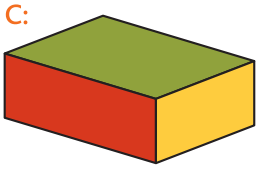
A:



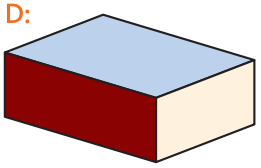
B:



C:



D:



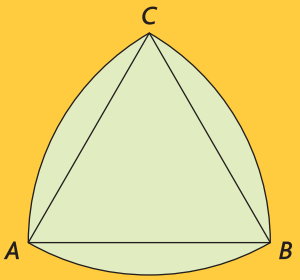
b) Határozd meg a hálójával adott téglatest felszínét, ha a téglatest éleinek hossza: 4 cm; 3 cm; 2 cm!

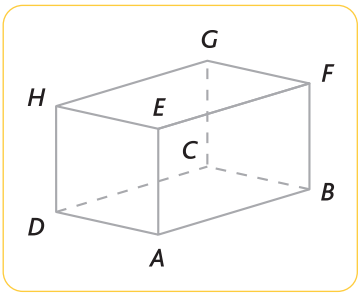
Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

A: 24 cm^2; B: 26 cm^2; C: 48 cm^2; D: 52 cm^2

Készítsd el kartonlapból az ábrán látható alakzat két példányát. Ehhez szerkessz szabályos háromszöget, majd minden csúcsából vedd körzőnyílásba az egyik szemközti csúcsot, és ezzel a sugárral húzott körívvel kösd össze a másik csúccsal. Az így elkészült két alakzatot rögzítsd rajzszöggel (és ragasztóval) egy parafadugóhoz úgy, hogy az alakzat „csúcsai” pont egymással szemben legyenek a dugó két oldalán. Tegyél az így elkészült „kerékre” egy füzetet! Gördítsd el a keréken! Mit tapasztalsz? Meg tudod magyarázni?

Kísérletezz!





68 Az ábrán egy téglatest látható.

a) Rajzold be a téglatestbe az ACG háromszöget!

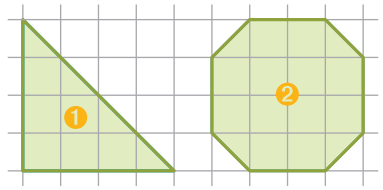
b) Az alábbi állítások közül melyik helyes?

A: Az ACG tompaszögű, egyenlő szárú háromszög.

B: Az ACG derékszögű, egyenlő szárú háromszög.

C: Az ACG hegyesszögű, különböző oldalú háromszög.

D: Az ACG derékszögű, különböző oldalú háromszög.



69 Az alábbiak közül melyik állítás igaz az ábrán látható két sokszögre?

A: Az ❶ sokszög kerülete nagyobb, de területük egyenlő.

B: A ❷ sokszög területe nagyobb, de kerületük egyenlő.

C: Kerületük és területük is egyenlő.

D: Kerületük és területük is különböző.

Figyelempróba

70 Ádám egy kisgépet szeretne vásárolni, ám csak 20 000 Ft-ja van. A kiszemelt gép két áruházban is kapható, mindkettőben 75 000 Ft-ba kerül.

Mindkét áruházban hitelre is megvehető a gép:

Az X áruházban a vételár 20%-át és 4000 Ft kezelési költséget kell vásárláskor fizetni, az Y áruházban csak a vételár 25%-át.

a) Melyik áruházban tudja megvásárolni Ádám a gépet?

A: Csak az X-ben. **B:** Csak az Y-ban. **C:** Mindkettőben.

b) Az X áruházban a vételár 20%-ának a kifizetése után fennmaradó, hitelbe kapott összeg 12%-át kell 10 hónapon keresztül törlesztenie. A 4000 Ft-tal együtt számított teljes összeg kifizetése után hány forinttal fizetne többet az eredeti vételárnál?

A: 34 000 Ft-tal. **B:** 16 000 Ft-tal. **C:** 12 000 Ft-tal. **D:** 10 000 Ft-tal.

71 Egy zöldségboltban 12 (egyforma) láda almából eladtak 120 kg-ot, így 7 tele láda és még 5 kg alma maradt.

a) Az alábbi egyenletek közül melyik fejezi ki az adatok közti kapcsolatokat?

A: $12 \cdot x - 120 = 7 \cdot x + 5$; **C:** $120 - 12 \cdot x = 7 + 5 \cdot x$;

C: $12 \cdot x + 120 = 7 \cdot x - 5$; **D:** $120 \cdot x - 12 = 5 \cdot x + 7$

b) Hány kilogramm alma volt egy ládában?

A: $x = 5$ kg; **B:** $x \approx 6{,}6$ kg; **C:** $x \approx 13$ kg; **D:** $x = 25$ kg

Fejtörő!

Melyek azok a kétjegyű számok, amelyekhez 4-et adva a számjegyeik összege felére csökken?

ÉRDEKES FELADATOK

B1 3 város és 2 falu között a következő utazási lehetőség van:

– két-két város között gyorsvonat,

– város és falu között személyvonat,

– két falu között autóbusz.

Eljuthatunk-e valamelyik városból a másikba csak személyvonattal?

Eljuthatunk-e az egyik faluból a másikba úgy, hogy az autóbuszt nem vesszük igénybe?

B2 Valaki három különböző levelet ír, és három különböző címre megcímez három borítékot. Ezután kimegy a szobából, és az olvasni nem tudó kislánya beteszi a leveleket a borítékokba.

Hány olyan eset van, hogy egyik levél sem kerül a megfelelő borítékba?



B3 Hat kislány összefogódzkodva körtáncot jár. Hányféleképpen alkothatnak egy kört? (Két kör különböző, ha valakinek valamelyik szomszédja más lesz.)

B4 *a)* Csak a P, T, U, V betűk és tíz számjegy felhasználásával hány három betűből és három számjegyből álló gépkocsirendszám készíthető, ha egy rendszámban ugyanaz a betű és szám is ismétlődhet (például: TTU 332 rendszám is lehetséges) és a számozás 001-gyel kezdődik?

b) Hány rendszám kezdődhet T-vel? Mekkora része ez az *a)* pontban meghatározott rendszámok számának?

c) Hány rendszám kezdődhet PP-vel? Mekkora része ez az *a)* pontban meghatározott rendszámok számának?

d) Tételezzük föl, hogy az *a)* pontban meghatározott összes rendszámot kiadták, és a tulajdonosaik között kisorsolnak egy garázst. Mi a valószínűsége annak, hogy egy T-vel kezdődő rendszámú autó tulajdonosa nyer? Mi a valószínűsége annak, hogy egy PP-vel kezdődő rendszámú autó tulajdonosa nyer?

◉ *Fel tudod használni a b), illetve a c) pontban kiszámított eredményeket?*

B5 *a)* Egy agár kergeti a nyulat, amely 90 nyúlugrás előnyben van. Amíg a nyúl 10-et ugrik, az agár 7 ugrást tesz, de az agár két ugrásának a hossza a nyúl öt ugrásának a hosszával ér fel. Hány ugrás után éri utol az agár a nyulat?

◉ *Régi fejtörő feladatok.*

b) Egy kisfiú összegyűjtött pókokat és cserebogarakat, összesen 8 darabot. Mennyi ebből a pók, és mennyi a cserebogár, ha összesen 54 lábuk van?

◉ *A póknak 8, a cserebogárnak 6 lába van.*

c) Az asztalon 3 dobókocka van: egy fehér, egy fekete és egy piros. Hány tippet kell készítenünk ahhoz, hogy biztosan eltaláljuk az egyes kockák felső lapján levő pötyök számát?

d) Bizonyítsuk be, hogy egy 51 tagú társaságban biztosan van olyan ember, akinek páros számú ismerőse van a társaságban.

Annának kedden 5 órája van, mégpedig matematika (*M*), német (*N*), testnevelés (*T*), angol (*A*) és biológia (*B*). Tudjuk, hogy a matematikaórát testnevelés követi, és az utolsó óra német. Írd le Anna keddi órarendjének összes lehetőségét!

Fejtörő!

◉ *2010-ben érettségi feladat volt.*

B6 Mekkora a téglatest alakú tartály térfogata, ha élei: 3,5 m; 1,8 m; 1,5 m hosszúságúak?

a) Hány tonna víz fér a tartályba, ha 1 l víz tömege 1 kg?

b) Hány tonna olaj fér a tartályba, ha 1 dm^3 olaj tömege 0,78 kg?

c) Mennyi az „üres” tartályban levő levegő tömege, ha 1 m^3 levegő tömege 1,3 kg?

d) Hány kilogramm homok fér a tartályba, ha 1 m^3 homok tömege 2,15 t?

Figyelempróba

B7 A következő feladatokat régi vetélkedőkön kapták a kis matematikusok.

a) Az általános iskolai országos matematikaverseny első fordulóján az egyik iskolában 34-en indultak. A versenyzőknek három-három feladatot kellett megoldaniuk.

– Az első feladatot 23-an, a második feladatot 17-en, a harmadik feladatot 19-en oldották meg hibátlanul.

– Az első és második feladatot 10-en, a második és harmadik feladatot 7-en, az első és harmadik feladatot 18-an oldották meg kifogástalanul.

– Mindhárom feladatot összesen 7-en oldották meg hibátlanul.

Hányan nem oldottak meg egy feladatot sem?

◉ Rajzolj halmazábrát! Tüntesd fel rajta a feladat adatait!

b) Gábor és Tamás ugyanabban a városban laknak. Érdekes a telefonszámuk.

– Gábor telefonszáma öt különböző számjegyből áll, amelyek összege 10.

– Tamás telefonszáma is ötjegyű, és ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza, mint Gáboré, de ezek ellenkező sorrendben követik egymást.

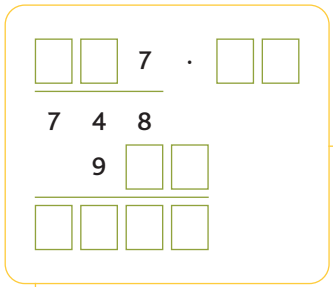
– Gábor telefonszáma osztható 7-tel.

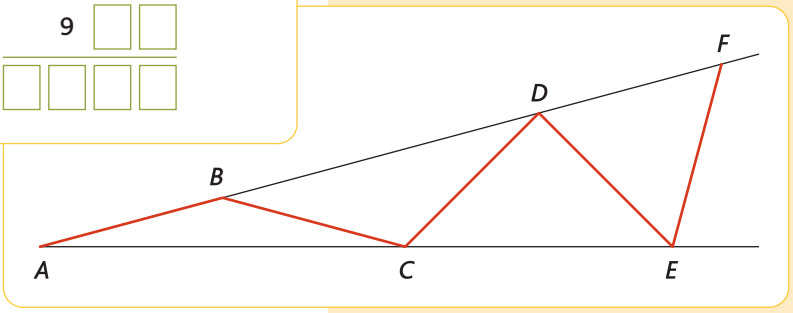
– Ha a két telefonszámot összeadjuk, akkor az összegükben valamennyi számjegy azonos!

Mennyi Gábor és Tamás telefonszáma?

◉ Melyik öt különböző számjegy összege 10?

c) Keresd meg és írd a keretekbe a megfelelő számjegyeket!





d) Szerkessz 15°-os szöget, majd a szög csúcsától a vázlatban megjelölt módon mérj fel egymás után ötször 2,5 cm-es szakaszokat:

$AB = BC = CD = DE = EF$!

Mekkora a DEF szög?

Meddig tudnád folytatni a szakaszok rámérését?

◉ Lapozz a 112. oldalra!

B8 *a)* Szerkessz 3 cm sugarú körbe 3,6 cm hosszúságú **húrt**, a végpontjait jelöld A-val és B-vel! Szerkeszd meg az AB húr felezőmerőlegesét!

b) Pohár segítségével rajzolj körívet! Szerkeszd meg a körvonal középpontját!

◉ Hogyan alkalmazhatók az a) feladatban tapasztaltak a b) feladat megoldásában?

Többet ésszel ...

Egy kémcsőben 10 cm^3 tej van, a másikban 10 cm^3 víz. Átöntünk 1 cm^3 tejet a vízbe, azt jól összekeverjük, majd a keverékből visszaöntünk 1 cm^3-t a tejbe. A tejben lesz több a víz, vagy a vízben lesz több a tej a kétszeri átöntés után?

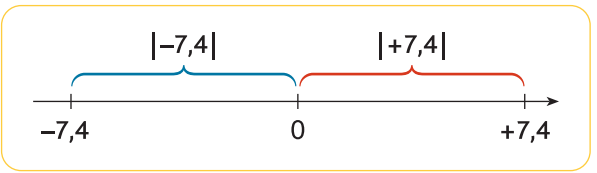
7. KISLEXIKON

A szövegben dőlt betűvel jeleztük, ha az adott fogalom külön szócikként is szerepel.

Zárójelben, zöld számjegyekkel szedve utalunk azokra az oldalakra, ahol az adott fogalmat értelmezzük, illetve ahol az adott fogalmat más fogalmak értelmezésére alkalmazzuk.

Abszolútérték: azt fejezi ki, hogy egy szám a számegyenesen milyen távol van a 0-tól (44. oldal).

A *nemnegatív számok* abszolútértéke egyenlő a számmal. A *negatív számok* abszolútértéke egyenlő a szám *ellentettjével*.



PÉLDÁUL: $|7{,}4| = 7{,}4$; $|0| = 0$; $|-7{,}4| = -(-7{,}4) = 7{,}4$

Alakiérték: *PÉLDÁUL* a tízes számrendszerben a számok alakja 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alakiértéke: nulla, egyes, ... , kilences. A kettes számrendszerben csak 0 és 1 (9. oldal).

Alakzat: a *test*eket, *felület*eket, *vonal*akat, *pont*okat stb. nevezzük így is (96. oldal).

Alap: → **1.** *Háromszög, egyenlő szárú* (180. oldal); *paralelogramma, trapéz* (119. oldal). **2.** *Hatványozás* (13. oldal). **3.** Százalékszámítás (150–151. oldal)

Alaphalmaz: a vizsgálatban szóba jövő elemek összessége. *PÉLDÁUL* adott alaphalmazban keressük az *egyenlet*ek megoldását (204. oldal).

Állítás: Kijelentés; lehet igaz, vagy hamis.

Ár: Terület-mértékegység, jele: a, a 10 m oldalú *négyzet* területe (22. oldal).

Arány: Két szám hányadosát másképpen két szám arányának is nevezzük. *PÉLDÁUL:* 3 és 2 aránya $3 : 2 = 1{,}5$ (133. oldal).

Átlag: Több mennyiség átlagát (számtani közepét) úgy számítjuk ki, hogy a mennyiségek összegét osztjuk a darabszámukkal (26. oldal).

Átfogó: (117. oldal) → *Háromszög, derékszögű.*

Átló: a *sokszög*, vagy sokszöglapokkal határolt *test* két nem szomszédos *csúcs*át összekötő *szakasz* (114. oldal). → *Sokszög, test.*

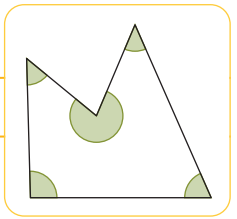
Átmérő: a *kör* középpontján átmenő *húr* (102. oldal) → *Kör; gömb.*

Azonos egyenlőtlenség: olyan *egyenlőtlenség*, amely az *alaphalmaz* minden *elemére* igaz. *PÉLDÁUL:* $x \cdot 3 > 0$ a *pozitív számok halmazán* azonos egyenlőtlenség, *az egész számok, a racionális számok* halmazán nem (206. oldal).

Azonosság: olyan *egyenlet*, amely az *alaphalmaz* minden *elem*ére igaz. *PÉLDÁUL:* $(10 \cdot x - 15) : 5 = 2 \cdot x - 3$ a tanult számok halmazán azonosság (206. oldal).

Befogó: (117. oldal) → *Háromszög, derékszögű.*

Belső szög: *PÉLDÁUL* az ábrán a megjelölt szögek az ötszög belső szögei (115–116. oldal). → *Háromszög*.



Bolyai Farkas: Bolyai János apja, magyar matematikus (1775–1856) (93. oldal).

Bolyai János: XIX. századi (1802–1860) magyar matematikus, a nemeuklideszi geometria egyik kidolgozója (93. oldal).

Bővítés: A *tört* értéke nem változik, ha a *számlálóját* és a *nevezőjét* ugyanazzal a (nem nulla) számmal szorozzuk; ezt az eljárást nevezzük a tört bővítésének (60. oldal). → *Törtek*. Ha a tizedestört végére 0-kat írunk, akkor bővítjük a tizedestörtet (61. oldal).

Celsius fok (celziusz): a hőmérséklet egyik egysége. Jele: °C

Centi: az alapmennyiség századrésze (6. oldal).

Csoportosíthatóság: Több szám összeadása, illetve szorzása esetén tetszőlegesen helyezhetjük el a zárójeleket, az eredmény nem változik (47. oldal). *PÉLDÁUL:*

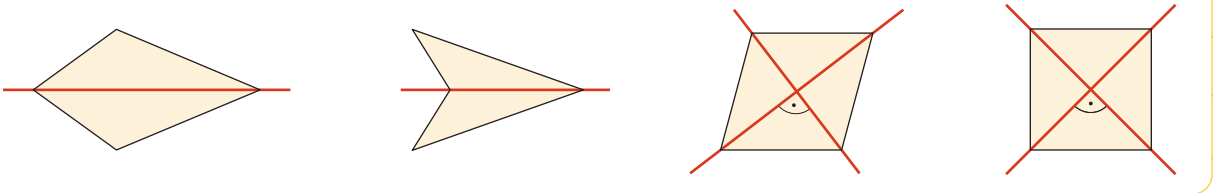
$(53 + 45) + 55 = 53 + (45 + 55)$; $(4 \cdot 25) \cdot 7 = 4 \cdot (25 \cdot 7)$

Csúcs: 1. A *szög* csúcsa (108. oldal). **2.** A *sokszög* oldalai a csúcsokban találkoznak (112. oldal). **3.** Az *él*ek a *test* csúcsaiban kapcsolódnak egymáshoz (96. oldal).

Deci: az alapmértékegység tizedrésze (6. oldal).

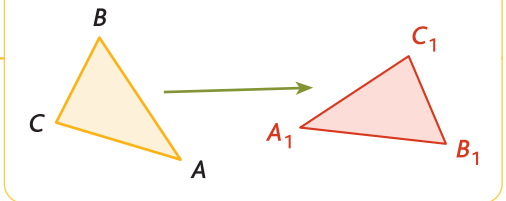
Deka: az alapmértékegység tízszerese (6. oldal).

Deltoid: olyan *négyszög*, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú, van *csúcsain* átmenő *szimmetriatengely*e. A *négyzet* és a többi *rombusz* is deltoid (191. oldal).



Egész számok: $\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}$. Vagyis a zérus, a *pozitív természetes számok* és a pozitív természetes számok *ellentett*jei, a negatív egész számok (44. oldal). → *Racionális számok*.

Egybevágó: két *alakzat*, ha valamilyen mozgatással vagy tükrözéssel kölcsönösen fedésbe hozhatók egymással.



Egyenes arányosság: Két mennyiség egyenesen arányos, ha amennyiben az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a másik mennyiség is ugyanannyiszorosára változik (138. oldal).

Egyenlet: Olyan **nyitott mondat**, amelyben az egyenlőség jelével kapcsolunk össze két kifejezést. A két **kifejezést** az egyenlet **bal oldalának**, illetve **jobb oldalának** nevezzük. Ezekben a kifejezésekben betűkkel, keretekkel stb. jelöljük azokat az **ismeretleneket**, amelyek lehetséges értékeit a megoldás során meg kell határoznunk (204. oldal). → *Alaphalmaz; igazsághalmaz*.

Egyenlő szárú háromszög: (180. oldal) → *Háromszög*.

Egyenlőtlenség: Olyan *nyitott mondat*, amelyben a „kisebb” ($<$), „nagyobb” ($>$), „kisebb vagy egyenlő” ($\leqq$), „nagyobb vagy egyenlő” ($\geqq$), „nem kisebb” ($\not<$), „nem nagyobb” ($\not>$), „nem egyenlő” ($\neq$) stb. jellel kapcsolunk össze két kifejezést (204. oldal). → *Alaphalmaz; igazsághalmaz*.

Egyszerűsítés: A tört értéke nem változik, ha a *számlálóját* és a *nevezőjét* ugyanazzal a (nem nulla) számmal osztjuk (ha mindkettő osztható az adott számmal); ezt az eljárást nevezzük a tört egyszerűsítésének. Tovább nem egyszerűsíthető törtet kapunk, ha a számláló és a nevező *legnagyobb közös osztójával* egyszerűsítünk (60–62. oldal). → *Törtek, legnagyobb közös osztó*.

Él: Síkfelületek metszésvonalát általában élnek nevezzük. *PÉLDÁUL* a *téglatest lap*jai élekben találkoznak (96. oldal).

Elem: → *Halmaz*.

Elégséges feltétel: (40. oldal).

Ellentett: Egy számnak és az ellentettjének az összege 0. *PÉLDÁUL*: $(+3) + (-3) = 0$, ezért a $+3$ és a -3 egymásnak ellentettjei (43–44. oldal).

Előjel: A *pozitív szám*okat pluszjel (+), a *negatív szám*okat mínuszjel (–) jelöli. Ezeket a szám előjelének nevezzük. A 0-nak nincs előjele, mert se nem pozitív, se nem negatív szám (44. oldal).

Eratoszthenész szitája: (39. oldal).

Erdős Pál: XX. századi (1913–1996) magyar matematikus, Wolf-díjas. A matematika „utazó nagykövete”.

Esemény: Egy kísérlet vagy megfigyelés meghatározott kimeneteleinek összessége, amely a kísérlet végrehajtása során vagy bekövetkezik, vagy sem. *PÉLDÁUL* ha két kockával dobunk, akkor ilyen események: Két hatost dobunk. A dobott számok összege kisebb 5-nél (161. oldal).

Biztos esemény, amely a kísérlet során minden esetben bekövetkezik. *PÉLDÁUL*:

Két kockával dobva a számok összege nagyobb 1-nél (163. oldal).

Lehetetlen esemény, amely a kísérletben sohasem következhet be. *PÉLDÁUL*:

Két kockával dobva a számok összege 15 (163. oldal).

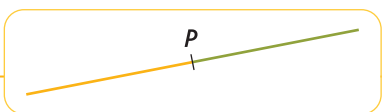
Elemi esemény: a kísérlet egy konkrét kimenetelét elemi eseménynek nevezzük. *PÉLDÁUL*: Két kockával dobva a piros kockán 1-et, a fehéren 5-öt dobunk.

Összetett esemény: egynél több konkrét kimenetel esetén bekövetkezik. *PÉLDÁUL*: Két kockával dobva a számok összege páros. → *Valószínűség; relatív gyakoriság*.

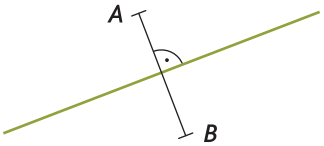
Eukleidész: (i.e. 300 körül) görög matematikus (93. oldal).

Felcserélhetőség: Két szám összeadása esetén a tagok, két szám szorzása esetén a tényezők felcserélhetők, az eredmény nem változik (47–49. oldal).

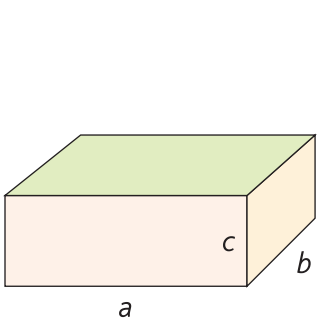
Félegyenes: Az egyenest egy P pontja két félegyenesre bontja. A P pont mindkét félegyenes kezdőpontja (96. oldal).

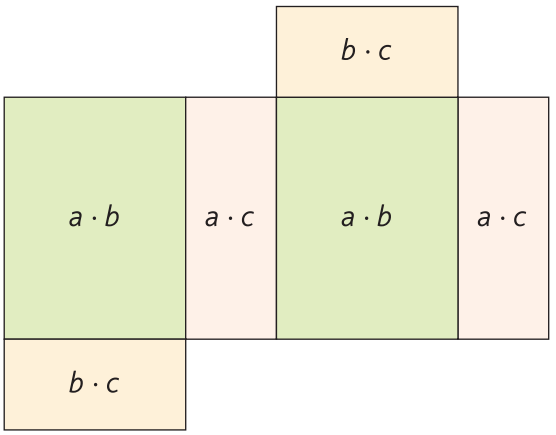


Felezőmerőleges: Az *AB* szakasz felezőmerőlegese azoknak a pontoknak a *halmaza* a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak az *A* és a *B* ponttól (105. oldal). A felezőmerőleges az *AB* szakasz *szimmetriatengelye*.



Felszín: *PÉLDÁUL:* a *téglatest* felszínét úgy számítjuk ki, hogy a testet határoló *lap*ok területét összegezzük.



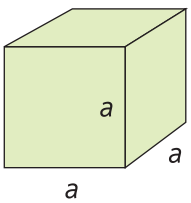


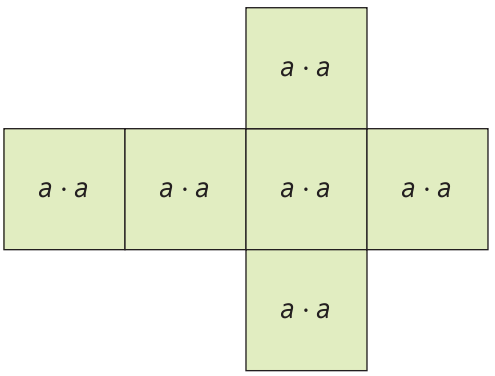
Ha a téglatest lapjait kiterítjük a síkban, akkor a téglatest **hálóját** kapjuk. A téglatest szemközti lapjai *egybevágó*k, ezért ha a téglatest egy *csúcs*ába futó *él*einek a hossza *a*, *b*, *c*, akkor a **téglatest felszíne:**

$A = a \cdot b \cdot 2 + a \cdot c \cdot 2 + c \cdot b \cdot 2$ területegység; más alakban:

$A = (a \cdot b + a \cdot c + c \cdot b) \cdot 2$ területegység.

A *kockát* 6 egybevágó négyzet határolja, ezért a kocka felszíne: $A = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$





Felület: a testet felület (felületek) határolja (határolják) (95. oldal). → *Test, felszín*.

Fordított arányosság: Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha amennyiben az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a másik mennyiség annak reciprokszorosára változik. A fordítottan arányos mennyiségek összetartozó értékpárjainak a szorzata 0-tól különböző állandó (142. oldal).

Gauss, Carl Friedrich (1777–1855) német természettudós és korának legnagyobb matematikusa, a „matematika fejedelme”. A legenda szerint apjának egyik (írásban végzett) számítási hibáját hároméves korában, fejben számolva kijavította. Már diákként jelentős eredményeket ért el, például a szabályos sokszögek szerkeszthetőségével kapcsolatban. A göttingeni egyetemen diáktársa volt *Bolyai Farkasnak*, akivel szoros baráti viszonyt alakított ki. Később is (különböző matematikai problémákról) többékevésbé rendszeresen leveleztek. Árnyékot vetett kapcsolatukra, hogy *Bolyai János* felfedezéséről Gauss azt mondta, az már korábban neki is eszébe jutott (bár ezt Gauss sohasem publikálta).

Gömb; gömbfelület: egy (adott) ponttól, a gömb középpontjától, adott (nem nulla) távolságra levő pontok halmaza a térben;

gömbtest: egy (adott) ponttól, a gömb középpontjától, egy adott (nullától különböző) távolságnál nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a térben.

A *kör*nél tanultakhoz hasonló módon értelmezzük a gömb középpontját, sugarát, *átmérő*jét, *húr*ját, *szelő*jét, *érintő*jét.

Görög ábécé kisbetűi: α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta), ε (epszilon), ζ (zéta), η (éta), τ (théta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mü), ν (nü), ξ (kszi), o (omikron), π (pi), ρ (ró), σ (szigma), τ (tau), υ (üpszilon), φ (fi), χ (khi), ψ (pszi), ω (ómega).

Gyakoriság: (161. oldal) → *Valószínűség*.

Halmaz, elem, eleme: a matematika olyan alapfogalmai, amelyeket nem vezetünk vissza egyszerűbb fogalmakra. → *Alaphalmaz*.

Részhalmaz: *PÉLDÁUL* a 10-zel osztható számok halmaza részhalmaza az 5-tel osztható számok halmazának, mert minden 10-zel osztható szám osztható 5-tel is (17. oldal, 40. oldal).

Üres halmaz: Az a halmaz, amelynek egy eleme sincs. Jele: $\emptyset$;

Kiegészítő halmaz: Egy A halmaz kiegészítő halmaza, más szóval **komplementere** az alaphalmaznak azokból az elemeiből áll, amelyek nem tartoznak bele az A halmazba (39. oldal).

Két (vagy több) halmaz **közös részét** azok az elemek alkotják, amelyek mindkét (mindegyik) halmaznak elemei (39. oldal).

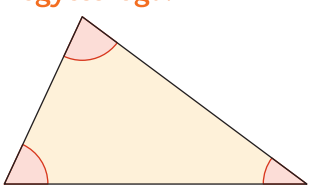
Két (vagy több) halmaz **egyesítése** azokból az elemekből áll, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei (39. oldal).

Háló: (testháló; hálózat) → *Felszín*.

Háromszög: olyan egyszerű *sokszög*, amelynek három oldala, három *csúcs*a, három *belső szög*e van (115. oldal).

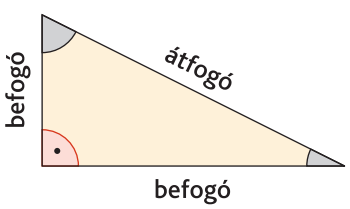
A háromszög szögei alapján lehet (117. oldal):

hegyesszögű:



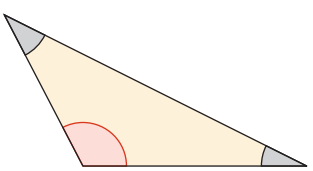
Minden szöge hegyesszög

derékszögű:



Van derékszöge

tompaszögű:

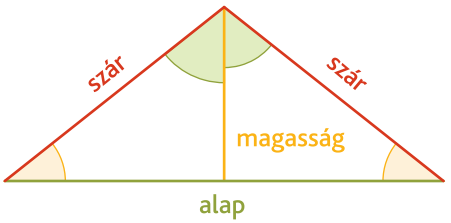


Van tompaszöge

Oldalai szerint speciális háromszög (118., 180–181. oldal):

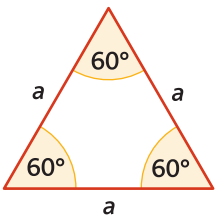
Egyenlő szárú háromszög.

Van tükörtengelye. Két szára és az alapon fekvő két szöge egyenlő.



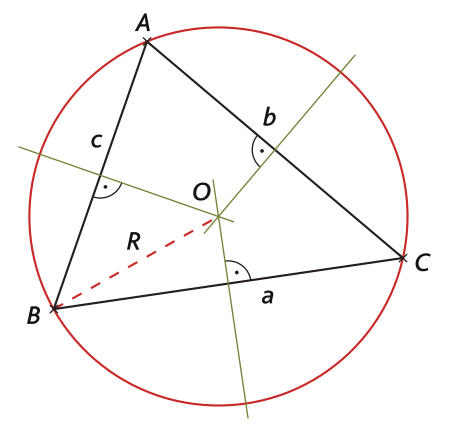
Szabályos háromszög.

Minden oldala és minden szöge egyenlő. A szabályos háromszög speciális egyenlő szárú háromszög.

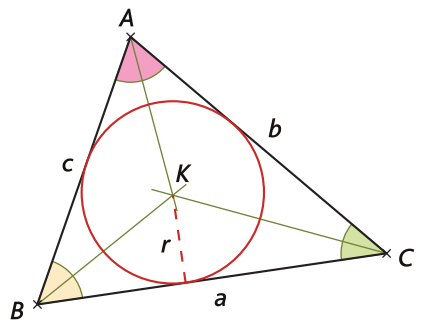


A háromszög belső szögeinek összege 180° (116. oldal).

Háromszög oldalfelező merőlegese, köré írható köre (128. oldal):



Háromszög szögfelezője, beírható köre (128. oldal):



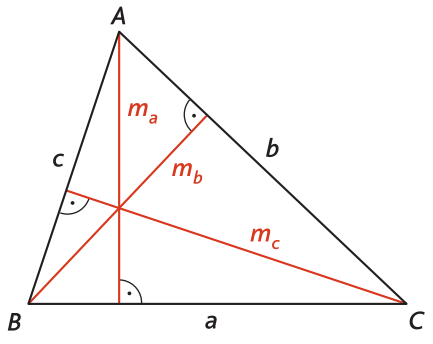
Háromszög-egyenlőtlenség: A *háromszög* bármely két oldala hosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál (115. oldal).

Háromszög magasságvonala, magassága

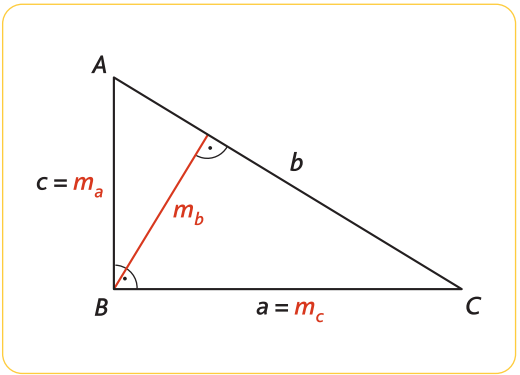
A háromszög csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenest a háromszög magasságvonalának nevezzük.

A háromszög magassága a háromszög csúcsa és a szemközti oldalegyenes távolsága.

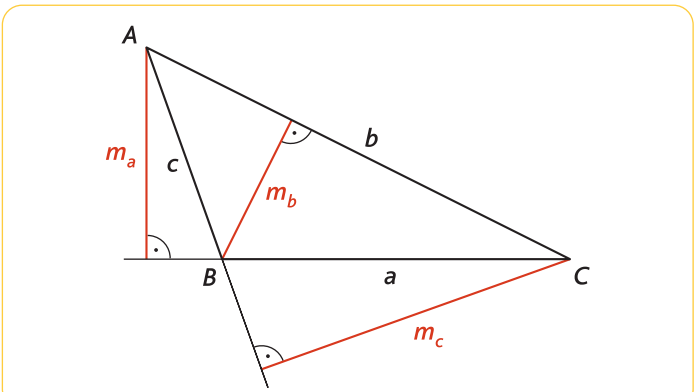
Az a, b, c oldalhoz tartozó magasságot rendre m_a, m_b és m_c jelöli.



A derékszögű háromszög két magassága megegyezik a két befogó hosszával.



Figyeld meg a tompaszögű háromszög magasságvonalait!



Hatvány: *PÉLDÁUL* 3-nak az 5. hatványán olyan öttényezős szorzatot értünk, amelynek minden tényezője 3.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$$

Megállapodás szerint: $3^1 = 3$; $3^0 = 1$

Minden 0-tól különböző szám nulladik hatványa 1. A 0^0 hatványt nem értelmezzük (13. oldal).

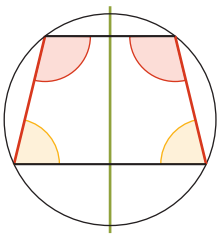
kitevő
alap

Hektár: A földterület mérésének egyik egysége, a 100 m oldalú négyzet területe. Jele: ha. 1 ha = 100 a = 10 000 m^2 (hektár = „hekto ár"). (22. oldal) → *Területmérés*

Hekto: az alapmértékegység százszorosa (6. oldal).

Helyiérték: *PÉLDÁUL* a tízes számrendszerben az 518,315 alakban felírható szám esetén lényeges, hogy egy számjegy a tizedesvesszőtől számítva hol helyezkedik el, azaz mi a helyiértéke. A tizedesvesszőtől balra rendre az egyesek, tízesek, százasok, ezresek stb.; jobbra rendre a tizedek, századok stb. következnek (9–10., 13. oldal). A nem tízes alapú számrendszerek helyiértékei is az alapszám *hatvány*ai.

Hosszúságmérés: egysége az 1 méter (m). A Párizson átmenő délkör hossza körülbelül 40 000 000 m (6., 20. oldal).



Húr: a körvonal két pontját összekötő szakasz neve (102. oldal). → *Kör; gömb*.

Húrtrapéz: az *alap felezőmerőlegesé*re szimmetrikus *trapéz*. Két *szár*a egyenlő hosszúságú. A *négyzet* és a többi *téglalap* is húrtrapéz (189., 196–197. oldal). → *Trapéz*.

Időmérés mértékegységei: (21. oldal)

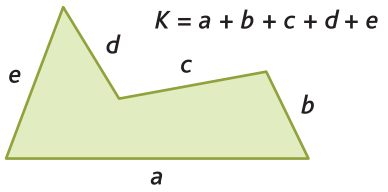
Igazsághalmaz: Megoldjuk az *egyenlet*et (*egyenlőtlenség*et), ha megkeressük az adott *alaphalmaz*nak azokat az elemeit, amelyeket behelyettesítve az egyenletbe (egyenlőtlenségbe), igaz *állítás*okat kapunk. Ezek az elemek az egyenlet (egyenlőtlenség) **megoldásai**. A megoldások összessége az egyenlet (egyenlőtlenség) igazsághalmaza (204. oldal).

Ikerprímek (39. oldal).

Jelzőszám: (54. oldal) → *Koordináta-rendszer*.

Kerekítés: a műveletek eredményét a pontos érték helyett kerekített értékekkel számolva becsüljük meg. Közelítő értékekkel számolunk akkor is, ha mérési eredményekkel dolgozunk. Kerekítéssel is közelítő értéket adunk meg (27. oldal). → *Valódi érték*.

Kerület: A *sokszög* oldalainak hosszát összegezve a sokszög kerületét kapjuk.



Kezdőpont: Origó (54. oldal) → *Koordináta-rendszer*.

Kiegészítő szöge egymásnak két szög, ha összegük 180°.

Kilo: az alapmértékegység ezerszerese (6. oldal).

Kitérő egyenesek: olyan egyenesek a térben, amelyek nem *párhuzamos*ak és nincs közös pontjuk (98. oldal).

Kitevő: (13. oldal). → *Hatvány*

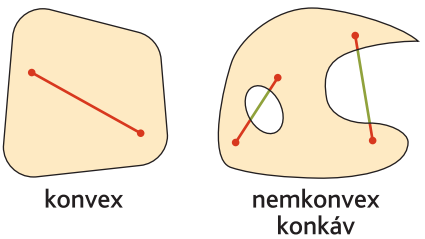
Kocka: olyan *téglatest*, amelynek minden *lap*ja *négyzet*. A kocka az öt *szabályos test* egyike (196. oldal). → *Felszín, térfogatmérés*.

Konkáv: nemkonvex → *Konvex*.

Konvex: *síkidom* (*test*): bármely két pontjának összekötő szakaszát teljes egészében tartalmazza.

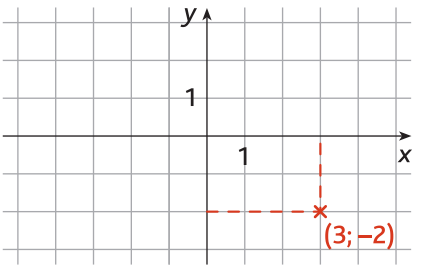
Konvex sokszög: minden szöge konvex (113. oldal).

Konvex szög: 180°-nál kisebb *szögtartomány* (108. oldal).



Koordináta-rendszer: olyan rendszer, amelyben számpárokkal (számhármasokkal) meghatározhatjuk egy pont helyét a síkban (térben) (54. oldal).

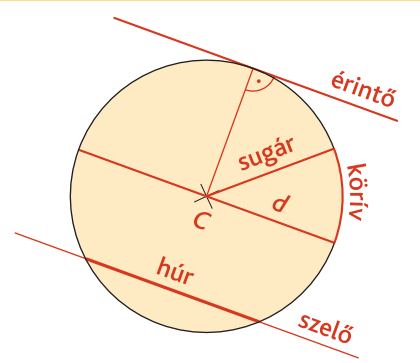
A sík pontjainak a helyét meghatározhatjuk két, a 0 pontjában egymásra illesztett számegyenes segítségével. A tengelyek közös pontja a kezdőpont (origó). A számpár első tagja az első jelzőszám (abszcissza), a második tagja a második jelzőszám (ordináta).



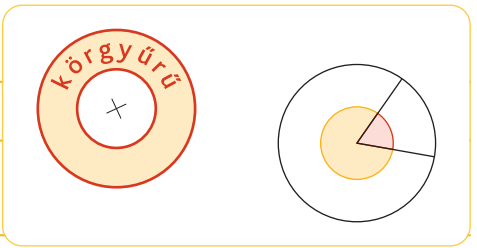
Kör; körvonal: azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy (adott) pontjától, a kör középpontjától ugyanakkora (nem nulla) távolságra vannak;

körlap: azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy (adott) pontjától, a kör középpontjától egy adott (nullától különböző) távolságnál nem nagyobb távolságra vannak (102. oldal). → *Átmérő, húr*.

Átmérő; érintő; húr; körcikk; körív; körszelet; szelő: (102–103. oldal).



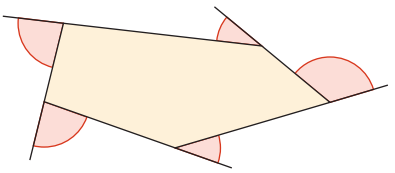
Körgyűrű: két közös középpontú (koncentrikus) kör által határolt síkidom.



Kördiagram: (149., 160. oldal)

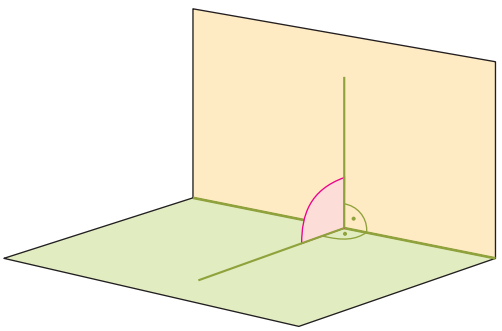
Középponti szög: a *kör* két *sugara* a két középponti szöget határoz meg.

Külső szög: *PÉLDÁUL*: A *háromszög* bármely külső szöge megegyezik a két nem mellette fekvő *belső szög* összegével. Bármely *konvex sokszög* külső szögeinek összege 360° (116., 124. oldal).



Lap: 1. A síknak vonalakkal határolt **tartományát** sokszor lapnak nevezzük. → *Körlap, sokszöglap*. **2.** A *test* lapjai a testet határoló síklapok (96. oldal). → *Felület, felszín*.

Lapszög: Egy egyenesből kiinduló két félsík a teret két lapszögre bontja.



Legalább: *PÉLDÁUL* legalább 10 azt jelenti, hogy nem kevesebb 10-nél; 10-zel egyenlő vagy annál nagyobb.

Legfeljebb: *PÉLDÁUL* legfeljebb 10 azt jelenti, hogy nem több 10-nél; 10-zel egyenlő vagy annál kisebb.

Legkisebb közös többszörös: Több *természetes szám* közös *többszörösei* azok a számok, amelyek mindegyiknek többszörösei. A közös többszörösök között van egy pozitív többszörös, amely az összes többi közös többszörösnek osztója. Ez a legkisebb közös többszörös (32. oldal).

Legnagyobb közös osztó: Több *természetes szám* közös osztói azok a számok, amelyek mindegyiknek osztói. A közös osztók között van egy pozitív osztó, amely az összes többi közös osztónak többszöröse. Ez a legnagyobb közös osztó (31. oldal).

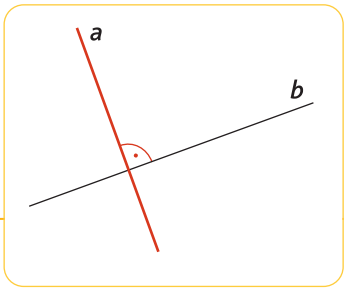
Lovász László: (1948–) *Wolf-díj*as magyar matematikus.

Mérés: a mérés összehasonlítás. A mérendő mennyiséget összehasonlítjuk a választott mértékegységgel. Méréssel csak **közelítő értékhez** juthatunk (29. oldal). A mért mennyiséget a **mértékegység** és a mérőszám együttesen jellemzi. *PÉLDÁUL*: 5 °C

Szabványos mértékegységek: SI. Általában a szabványos mértékegységeket használjuk. → *Hosszúságmérés; időmérés; űrtartalommérés; tömegmérés; térfogatmérés; területmérés* (6., 20–23. oldal).

Régi mértékegységek: hosszúság: *PÉLDÁUL* hüvelyk, arasz, rőf, öl, láb, lépés, mérföld; terület: *PÉLDÁUL* négyszögöl, magyar hold = 1200 négyszögöl; űrtartalom: *PÉLDÁUL* pint, akó (40 pint), messzely, icce, kupa, köböl, mérő, véka; súly, tömeg: *PÉLDÁUL* lat, font (1 font ≈ 32 lat), mázsa; darabmérték: *PÉLDÁUL* tucat, pár.

Merőleges: Egy síkban fekvő *a* és *b* egyenes akkor merőleges egymásra, ha a síkot négy egybevágó síknegyedre darabolja, vagyis derékszöget zár be. Jelölés: $a \perp b$ (97–98. oldal). Vizsgálhatjuk két szakasz, szakasz és egyenes, szakasz és sík, egyenes és sík, két sík merőlegességét (99–100. oldal). Két sík merőleges egymásra, ha a teret négy egybevágó térrészre darabolja.



Mérlegelv: Az *egyenlet, egyenlőtlenség* egyik megoldási módszerének alapelve (209–213., 214. oldal).

Metsző 1. egyenesek: egy közös pontjuk van (98. oldal). **2.** síkok: egy közös metszésvonaluk van (100. oldal).

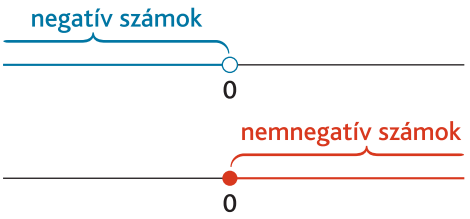
Milli: az alapmértékegység ezredrésze (6. oldal).

Milliméter: 1. Hosszúságegység, a méter ezredrésze, jele: mm (6., 20. oldal). **2.** A lehullott csapadékmennyiség mérésére használatos egység. Ha 15 mm eső esik, akkor például egy vízszintes aljzatú medencében 15 mm magasan áll az esővíz.

Műveletek sorrendje: Ha a műveletsor vegyesen tartalmazza az alapműveleteket és a hatványozást, először a hatványozásokat, majd a szorzásokat és osztásokat végezzük el, végül az összeadásokat és a kivonásokat (56. oldal). A *zárójel* módosíthatja a műveletek elvégzésének a sorrendjét.

Negatív számok: a 0-nál kisebb számok (44. oldal).

PÉLDÁUL: -5; $-2{,}6$



Nemnegatív számok: a 0 és a *pozitív számok*.

Négyszög: olyan *sokszög*, amelynek négy oldala van. A négyszög *belső szög*einek összege 360°.

Négyzet: (speciális *téglalap*, speciális *húrtrapéz*, illetve speciális *deltoid*, speciális *rombusz* (120., 195., 197. oldal) olyan *négyszög*, amelynek minden oldala és minden *szög*e egyenlő. Az a oldalú négyzet *kerülete* $K = 4 \cdot a$, *területe* $T = a \cdot a = a^2$. → *Szabályos sokszög*.

Neumann János: a XX. században (1903–1957) élt magyar származású matematikus, „aki a matematikát nem öncélú módon, hanem a kor igényeinek megfelelően, szinte mindig a felhasználhatóság óhajával művelte, és közben hallatlanul fontos elméleti eredményeket talált". A számítástechnika atyjának is nevezik.

Nevező: (58. oldal) → *Törtek*.

Nyitott mondat: → *Egyenlet, egyenlőtlenség*.

Osztó: egy szám osztója: *PÉLDÁUL* a 24 felírható szorzatalakban a következőképp:
$24 = 1 \cdot 24$; $24 = 2 \cdot 12$; $24 = 3 \cdot 8$; $24 = 4 \cdot 6$. Ezért az 1, a 2, a 3, a 4, a 6, a 8, a 12 és a 24 számokkal osztható a 24 úgy, hogy a hányados egész szám és a maradék 0.
Ezek a számok a 24 (pozitív) osztói (30. oldal).

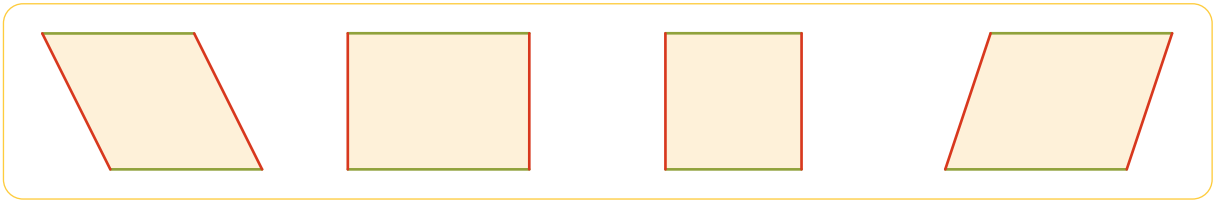
Egység: 1, csak egy pozitív osztója van, saját maga.

Oszthatósági szabályok: (33–35. oldal)

Zérus: 0, minden pozitív egész számmal osztható, hiszen $0 = 1 \cdot 0$; $0 = 2 \cdot 0$; $0 = 3 \cdot 0$; ...; $0 = 100 \cdot 0$; ... Viszont a 0 nem osztója egy pozitív egész számnak sem.

Összetett szám: (38. oldal).

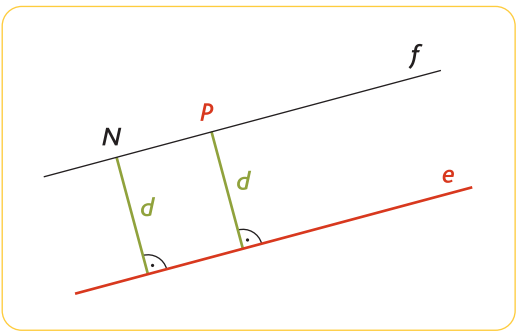
Paralelogramma: (speciális *trapéz*) olyan *négyszög*, amelynek két-két szemközti oldala *párhuzamos*; paralel = párhuzamos. A *négyzet*, a többi *téglalap* és a többi *rombusz* is paralelogramma (119. oldal).



Párhuzamos: *PÉLDÁUL* az e és az f egyenes, mert egy síkban vannak és nem metszik egymást. Az f egyenes minden pontja ugyanakkora távolságra van az e egyenestől. Nem párhuzamos két egyenes, ha nincs egy síkban (kitérő), vagy egy közös pontjuk van (94., 97–98. oldal). Megállapodás szerint minden egyenes párhuzamos saját magával

Egyenes és sík párhuzamossága: (99. oldal).

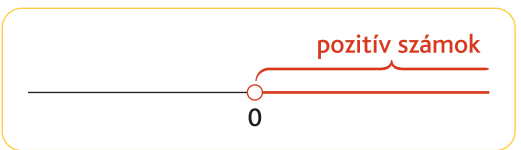
Síkok párhuzamossága: (100. oldal).



Prímszám vagy **törzsszám:** (38. oldal).

Pozitív számok: a 0-nál nagyobb számok (44. oldal).
PÉLDÁUL +5; +2,6.

(A 0 se nem pozitív, se nem negatív szám.)



Racionális számok: azok a tört alakban felírható számok, amelyekben a *számláló* és a nevező is egész szám, és a nevező nem 0 (84. oldal). Az egész számok is felírhatók tört alakban.

PÉLDÁUL: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \ldots$; $-2 = \frac{-2}{1} = \ldots$

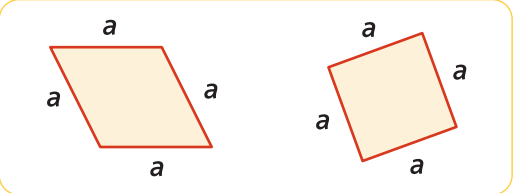
Minden racionális szám felírható vagy **véges tizedestört**, vagy **végtelen szakaszos tizedestört** alakban. → *Tizedestört alak*.

Végtelen sok nemracionális, **irracionális** szám van. A racionális számok és az irracionális számok együtt töltik ki a számegyenest. A racionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}$

Reciprok: (= fordított érték). A számot a reciprokával megszorozva 1-et kapunk. *PÉLDÁUL* $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$.
A $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{2}$ reciprokai egymásnak. A 0-nak nincs reciproka (76. oldal).

Relatív gyakoriság: Egy *esemény* relatív gyakorisága azt mutatja meg, hogy az összes megfigyelt esetnek mekkora részében következett be az esemény. *PÉLDÁUL* ha egy *valószínűségi* kísérletben 50-szer dobunk egy kockával, és az az esemény, hogy hármast dobunk 11-szer következik be, akkor ennek az eseménynek a relatív gyakorisága ebben a kísérletben $\frac{11}{50} = 0{,}22$, vagyis 22% (161. oldal).

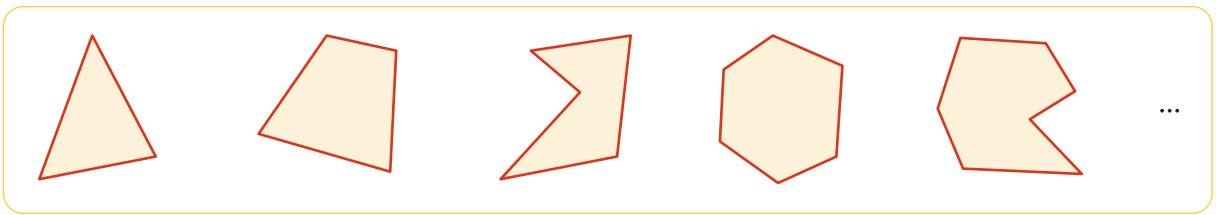
Rombusz: (speciális *paralelogramma*, illetve speciális deltoid) olyan *négyszög*, amelynek mind a négy oldala egyenlő. A *négyzet* is rombusz (120., 195. oldal). Mindkét átlója *szimmetriatengely*.



Síkidom: Ha a síkot (egyenes vagy görbe) vonalakkal feldaraboljuk, akkor síkidomokat kapunk. A *sokszög*, a *kör*, a *szögtartomány* is síkidom.

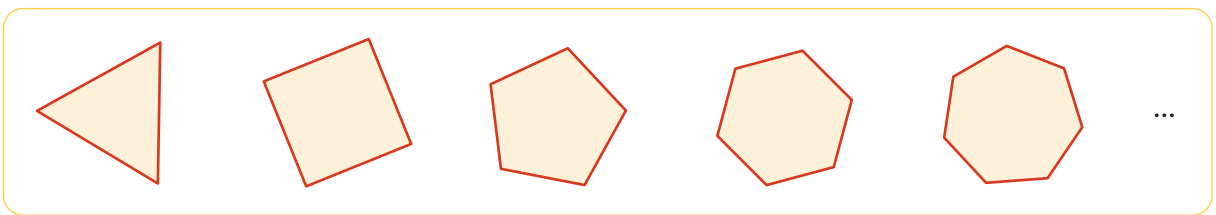
Sokszög: A *háromszög*et, a *négyszög*et, az ötszöget, ... egyszerű sokszögnek nevezzük (112. oldal).

Sokszöglap a síknak az a része, amely a **sokszögvonalon** belül helyezkedik el.



Sugár: a *kör* (*gömb*) középpontját a *körvonal* (*gömbfelület*) egy pontjával összekötő *szakasz* (hossza) (102. oldal). → *Kör; gömb*.

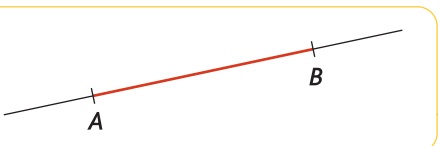
Szabályos sokszög: minden oldala és minden *szög*e egyenlő (187. oldal).



A szabályos sokszögek szerkeszthetőségével kapcsolatban (Eukleidész után) Gauss érte el az első jelentős eredményeket, Megfogalmazta a szerkeszthetőség feltételeit, és megszerkesztette a szabályos tizenhétszöget. A páratlan oldalszámú szabályos sokszögek közül azok szerkeszthetők meg, amelyek oldalszámának prímtényezős felbontásában csak a Fermat-féle prímszámok első hatványai fordulnak elő. Öt Fermat-prímet ismerünk, ezek: a 3, 5, 17, 257 és a 65 537. A képezhető szorzatokat figyelembe véve 31 féle páratlan oldalszámú szabályos sokszög szerkeszthető. A szerkeszthető páros oldalszámú szabályos sokszögek a négyzetből és a páratlan oldalszámú szabályos sokszögekből szögfelezéssel nyerhetők.

Szabályos test: Öt szabályos test van (198. oldal).

Szakasz: Az *AB* szakasz az egyenesnek az a része, amelyik az *A* és a *B* pont közé esik. Az *A* és a *B* pont az *AB* szakasz végpontjai (96. oldal).



Számláló: (58. oldal) → *Törtek*.

Szár: → *Egyenlő szárú háromszög* (180. oldal); *trapéz* (119. oldal).

Százalék: Egy mennyiség 1 százaléka (1%-a) a mennyiség $\frac{1}{100}$ része, a mennyiség 75%-a a menyiség $\frac{75}{100}$ része.

Alap (150–151. oldal), **százalékérték** (146–147. oldal), **százalékláb** (152. oldal).

Szelő: olyan egyenes, amelynek a *körvonal*lal (*gömbfelület*tel) két közös pontja van. A szelő és a középpont *távolság*a kisebb a *sugár*nál (103. oldal). → *Kör; gömb*.

Szerkesztés: Euklideszi szerkesztés esetén csak körzőt és a vonalzó egy élét használhatjuk (94., 104. oldal).

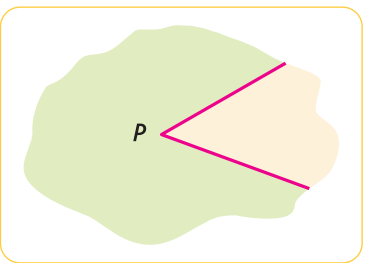
Merőleges egyenesek szerkesztése: (94., 105–106. oldal), *téglalap* szerkesztése: (107. oldal), szögmásolás (110. oldal), szögfelezés (110. oldal).

Szimmetriatengely: → *Tengelyesen szimmetrikus alakzat*.

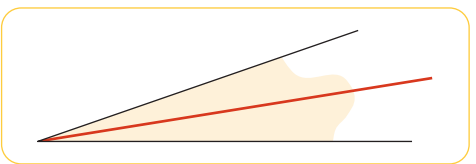
Szögtartomány (szög): Közös P kezdőpontból induló két *félegyenes* a síkot két szögtartományra bontja (108. oldal).

A szögmérés egyik egysége az 1° (fok), a teljesszög $\frac{1}{360}$ része (108. oldal).

A szögek fajtái: nullszög, hegyesszög, derékszög, tompaszög, egyenesszög, homorúszög, teljesszög (108. oldal).



Szögfelező: A *szögtartomány szimmetriatengely*ének a szögtartományba eső *félegyenes*e. Konvex szögeknél azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak a szögtartományban. *Szerkesztése* (110–111. oldal).



Szükséges feltétel: (40. oldal).

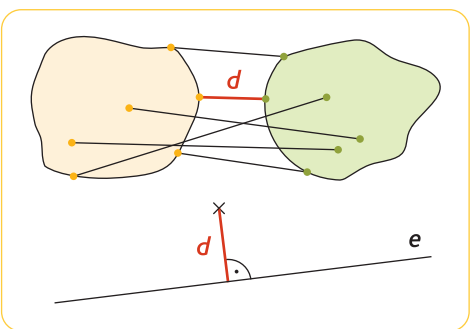
Szükséges és elégséges feltétel: (40. oldal).

Távolság: Az A és a B pont távolsága a síkban és a térben az AB szakasz hossza. Jele: d_{AB} (distancia = távolság). → *Hosszúságmérés*.

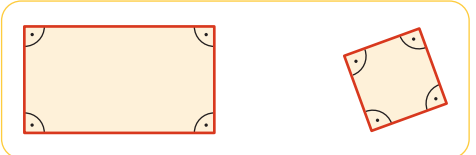
Ponthalmazok távolsága: két ponthalmaz pontjait egymással összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hossza.

Egyenes és pont távolsága: (97. oldal).

Sík és pont távolsága: (99. oldal).



Téglalap: (speciális *húrtrapéz*, speciális *paralelogramma*) olyan *négyszög*, amelyiknek minden *szöge* egyenlő. A *négyzet* is téglalap (120., 197. oldal). Az a, b oldalú téglalap kerülete $K = 2 \cdot (a + b)$, területe $T = a \cdot b$.

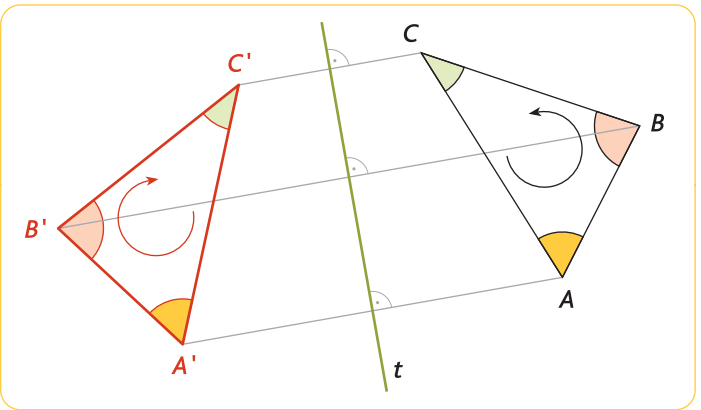


Téglatest: Olyan *test*, amelyet hat *téglalap* határol. A *kocka* is téglatest. Ha a téglatest egy *csúcs*ában találkozó éleinek hossza a, b, c, akkor a téglatest

felszíne: $A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ → *Felszín*.

térfogata: $V = a \cdot b \cdot c$ → *Térfogatmérés*.

Tengelyes tükrözés: Az *alakzat* 180°-os elforgatása a térben a t **tengely** körül. Az alakzat és a tengelyes tükörképe *egybevágó*. Nem síkmozgás, a körüljárás iránya megváltozik (171–172. oldal).



Tengelyesen szimmetrikus alakzat: van **szimmetriatengelye**, amelyre az alakzatot tükrözve az alakzat és a tükörképe kölcsönösen fedik egymást (177. oldal). *PÉLDÁUL*: *szabályos sokszögek, kör.*

Tengelyesen szimmetrikus háromszög (180–181. oldal) → *Háromszög*.

Tengelyesen szimmetrikus négyszög (189–197. oldal) → *Húrtrapéz, deltoid*.

Térelemek: pont, *vonal*, egyenes, *felület*, sík.

Térfogatmérés: Bizonyos testeknek értelmezhetjük a térfogatát, most csak ilyen testekre gondolunk.

A térfogat mérőszáma mindig nemnegatív szám.

Egybevágó testek térfogata egyenlő.

Ha egy testet feldarabolunk, akkor a darabok térfogatának az összege megegyezik az eredeti test térfogatával.

Az egységnyi *él*hosszúságú *kocka* térfogatát szokás térfogategységnek választani. *PÉLDÁUL* az 1 m élhosszúságú kocka térfogata 1 m^3 (1 köbméter) (23. oldal).

A térfogatot V-vel jelöljük (volumen = térfogat, terjedelem).

A téglatest térfogata: $V = a \cdot b \cdot c$, ha egy *csúcs*ában találkozó éleinek hossza a, b és c.

A kocka térfogata: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$, ha éleinek hosszúsága a (23. oldal).

Természetes számok: a nemnegatív egész számok: 0; 1; 2; 3; ... A természetes számok halmazának jele: $\mathbb{N}$ (44. oldal).

Területmérés: Bizonyos *síkidom*oknak értelmezhetjük a területét, most csak ilyen síkidomokra gondolunk.

A terület mérőszáma mindig nemnegatív szám.

Egybevágó síkidomok területe egyenlő.

Ha egy síkidomot feldarabolunk, akkor a darabok területének az összege megegyezik az eredeti síkidom területével.

Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területét szokás területegységnek választani (22. oldal). *PÉLDÁUL* az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe 1 m^2 (1 négyzetméter).

A területet általában T-vel jelöljük (territorium = terület). → *Ár, hektár.*

A téglalap területe: $T = a \cdot b$, ha egy *csúcs*ában találkozó oldalainak a hossza a és b (22. oldal).

A négyzet területe: $T = a \cdot a = a^2$, ha egy oldalának hosszúsága a.

Test: Ha a teret felületekkel feldaraboljuk, akkor testeket kapunk. A *kocka*, a *gömb* stb. testek (95. oldal).

Tizedestört alak: *PÉLDÁUL* $15 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$ a tízes számrendszerben felírható 15,46 alakban (10. oldal). → *Helyiérték, racionális számok.*

Tizedestörtekkel végzett műveletek: (65., 74., 82. oldal).

Többszörös: a 3 (nemnegatív) többszörösei: 0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; ... *PÉLDÁUL* van olyan egész szám, amelyikkel a 3-at megszorozva 24-et kapunk ($3 \cdot 8 = 24$), ezért a 24 többszöröse a 3-nak, illetve a 3 osztója a 24-nek (30. oldal). → *Osztó.*

Tömegmérés: egysége az 1 gramm (jele: g). 1000 g = 1 kg, az 1 l tiszta, 4 °C-os víz tömege (6., 20. oldal).

Törtek: tört alakban írt számok: *PÉLDÁUL* $\frac{3}{4}$. A 3 a **számláló**, a 4 a **nevező** (58. oldal). → *Racionális számok; bővítés, egyszerűsítés.*

Törtek bővítése, egyszerűsítése: (60–62. oldal)

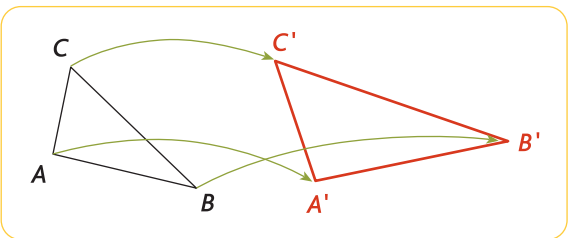
Törtek összehasonlítása: (62–63. oldal)

Törtek összeadása, kivonása: (64. oldal)

Törtek szorzása: (69., 71. oldal), osztása: (77., 79., 81–82. oldal)

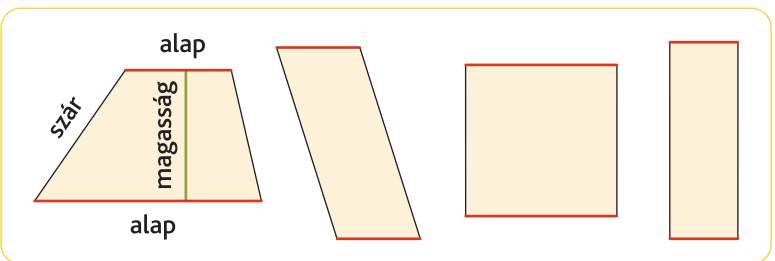
Törtszámok: olyan *racionális szám*ok, amelyek nem *egész szám*ok.

Transzformácó (geometriai): egy ponthalmaz (sík, tér, tetszőleges alakzat) minden pontjához adott szabály szerint hozzárendelünk egy-egy pontot. → *Tengelyes tükrözés.*



Trapéz: olyan *négyszög*, amelynek van *párhuzamos* oldalpárja. A *négyzet*, a többi *téglalap* és a többi *paralelogramma* is trapéz (119. oldal).

Magassága: a két alap távolsága.



Űrtartalommérés: egysége az 1 liter (jele: l). 1 l ≈ 1 dm³. (Az 1 l és az 1 dm³ között nagyon kicsi az eltérés.) (6., 21. oldal)

Valódi érték: Számítási eredmények, darabszámok, méretek stb. elméletileg pontos értéke. A valódi érték helyett, *például* a mérések pontatlansága miatt, sokszor közelítő értékkel dolgozunk (26–29. oldal).

Valószínűség: *PÉLDÁUL* végezzük el a következő kísérletet: Egy világoskék színesrudat dobjunk fel sokszor, és figyeljük meg, hogy 1 cm^2-es vagy 3 cm^2-es lapjára esik-e. Azt tapasztaljuk, hogy sokkal többször érkezik a 3 cm^2-es lapok valamelyikére. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy ennek az eseménynek nagyobb a valószínűsége, mint a másiknak. → *Relatív gyakoriság, esemény* (161–163. oldal).

Vegyesszám: *PÉLDÁUL*: $3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ (59. oldal). → *Tört*ek.

Vonal: térelem; lehet egyenes vagy görbe (96. oldal).

Wolf-díj: Matematikai Nobel-díjnak is nevezik.

Zárójel: módosíthatja a műveletvégzés sorrendjét, illetve a tagok előjelét is, ha előtte mínusz (–) előjel van. Ha a műveletsor többfajta zárójelet is tartalmaz, általában a „belső” zárójel felbontásával kezdjük a megoldást (és belülről haladunk kifelé).