Czapáry Endre – Korom Pál

Matematika

gyakorló feladatlapok

a középiskolák 9. évfolyama számára

Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest

A kiadvány 2013. 05. 08-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/3851-16/2013. számú határozattal.
A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet:
3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04;
4. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára 4.2.04;
5. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára 5.2.04
6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépikoslák 9–12. évfolyama számára 6.2.03
megnevezésű kerettanterv előírásainak
és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002. (V. 24.)].

Lektorok: Beck Zsuzsa és Füleki Lászlóné

Ábrákat készítette: Dr. Fried Katalin

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban kirendelt szakértők neve:
Hajba Tamás, Herczegné Kaszás Judit, Zarubay Attila

© Czapáry Endre, Korom Pál, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt., 2013

ISBN 978-963-19-7623-6

Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.
a Sanoma company

www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80 200 788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 16102/F/NAT
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 16,48 (A/5) ív
Tömeg: 320 gramm
1. kiadás, 2013
Tördelés: Könyv Művek Bt.

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben,
a nyomda alapításának 131. esztendejében
Felelős vezető: Fazekas Péter vezérigazgató
Telefon: 66/887-400
http://www.gyomaikner.hu
E-mail: knernyomda@gyomaikner.hu

MatFgy-09-tart:Tartalom 2013.05.20. 20:00 Page 3

Tartalom

		Megoldások
Bevezető	**5**	
Halmazok	**6**	**91**
1. feladatlap: Halmaz és részhalmaz	6	91
2. feladatlap: Számhalmazok	8	91
3. feladatlap: Műveletek halmazokkal	10	92
4. feladatlap: Intervallumok	12	93
5. feladatlap: Ponthalmazok	14	94
Függvények	**17**	**95**
6. feladatlap: Függvények, hozzárendelés	17	95
7. feladatlap: Lineáris függvények	21	96
8. feladatlap: Abszolútérték-függvények	23	97
9. feladatlap: Másodfokú függvények	25	98
10. feladatlap: Függvényvizsgálat	28	99
11. feladatlap: A négyzetgyök-függvény és a harmadikhatvány-függvény	32	101
12. feladatlap: A lineáris törtfüggvények	34	102
Számelmélet	**37**	**103**
13. feladatlap: Oszthatóság	37	103
14. feladatlap: Prímszámok, összetett számok	39	104
15. feladatlap: A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös	40	105
16. feladatlap: Számrendszerek	41	105
Hatványozás	**44**	**107**
17. feladatlap: Egész kitevős hatványok	44	107
18. feladatlap: Számok normálalakja	45	108
Polinomok, algebrai törtek	**48**	**108**
19. feladatlap: Polinomok	48	108
20. feladatlap: Polinomok szorzása	49	109
21. feladatlap: Nevezetes szorzatok	51	110
22. feladatlap: Polinomok tényezőkre bontása	53	111
23. feladatlap: Algebrai törtek	56	112
Egyenletek, egyenlőtlenségek	**57**	**113**
24. feladatlap: Egyenlet grafikus megoldása	57	113
25. feladatlap: Egyenlet megoldása értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálatával	61	115
26. feladatlap: Egyenlet megoldása szorzattá alakítással	62	116

MatFgy-09-tart:Tartalom 2013.05.20. 20:00 Page 4

		Megoldások
27. feladatlap: Egyenlet megoldása rendezéssel 1.	64	116
28. feladatlap: Egyenlet megoldása rendezéssel 2.	65	117
29. feladatlap: Szöveges feladatok	66	119
30. feladatlap: Elsőfokú egyenlőtlenségek	67	120
31. feladatlap: Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek	70	121
Geometria	**72**	**122**
32. feladatlap: Geometriai alapfogalmak 1.	72	122
33. feladatlap: Geometriai alapfogalmak 2.	74	123
34. feladatlap: A háromszög nevezetes vonalai	76	123
35. feladatlap: A Thalész-tétel, érintőnégyszögek	78	124
36. feladatlap: Tengelyes tükrözés	79	124
37. feladatlap: Pontra vonatkozó tükrözés	81	125
38. feladatlap: Pitagorasz tételének alkalmazása	83	125
39. feladatlap: Pont körüli elforgatás	84	126
Statisztika	**85**	**127**
40. feladatlap: A statisztika alapjai 1.	85	127
41. feladatlap: A statisztika alapjai 2.	88	128
Megoldások	**91**	

Bevezető

A feladatlap-gyűjtemény elsősorban a középiskolai matematika tananyag gyakorlásának céljából készült. A tematikus sorrendben felépülő feladatlapok segítik az órai munkát, a szakköri, illetve korrepetáló foglalkozást, az önálló gyakorlást vagy a középszintű matematikai érettségire való felkészülést.

A feladatlap-gyűjtemény alapvetően a középiskolai 3 órás matematika kerettanterv követelményéhez igazodik. (3 sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára: 3.2.04.; 6. sz. melléklet: Kerettanterv a szakközépiskolák 9–12. évfolyama számára: 6.2.03.)

A feladatlap-gyűjtemény jó kiegészítője minden olyan tankönyvnek, amely a 3 órás kerettantervhez készült.

A feladatlapok feldolgozását két fontos egység segíti. Az első egységcsoport a minden nagyobb téma előtt a témához kapcsolódó elméleti emlékeztető. Ezek a részek az adott témához tartozó definíciókat, tételeket, illetve a fontosabb eljárásokat, módszereket tartalmazzák. A másik alapvető egység pedig a feladatlap-gyűjtemény végén található megoldások, amelyek az eredményeken túl az azokhoz vezető fontosabb lépéseket is magukban foglalják.

A feladatlap-gyűjtemény készítésekor elsődleges cél volt, hogy lehetőleg minden feladatot a feladatlap oldalain oldjon meg a tanuló. (Előfordul, hogy a levezetés hosszúsága vagy az ábrák bonyolultsága a füzet használatát teszi szükségessé.)

CIMOLD2 / 2– 5. old. 2013. május 17. –11:54

MatFgy-09-01:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:01 Page 6

Halmazok

1. feladatlap

Halmaz és részhalmaz

EMLÉKEZTETŐ

halmaz: Egy összességet akkor tekintünk halmaznak, ha tetszőleges dologról egyértelműen eldönthető, hogy a halmazhoz tartozik-e, vagy sem. Minden elemet csak egyszer veszünk figyelembe, és nem számít az elemek sorrendje. Pl. halmaz az {osztály tanulói}, és nem halmaz a {szép autók} összessége.

halmaz megadása:

szöveges forma: Kapcsos zárójelpárban ({}) leírjuk a halmaz elemeire jellemző tulajdonságot, illetve összefüggést. Pl. {hárommal osztható számok}.

felsorolásforma: Kapcsos zárójelpárban ({}) felsoroljuk a halmaz elemeit. Pl. $\{a; b; c; d\}$. Végtelen sok elemű halmaz esetén az első néhány elem megmutatja a képzési szabályt, a többi elemre pedig három pont (…) megadásával hivatkozunk. Pl. {3; 6; 9; …}. Ha a halmaz elemszáma nagy, de véges, úgy a három pont után kiírjuk az utolsó elemet. Pl. {3; 6; 9; …; 60}.

számhalmazforma: x képviseli a halmaz egy tetszőleges elemét, melyre jellemző tulajdonságokat a függőleges választóvonal után soroljuk fel. Pl. $\{x|\ x$ egész és $5 < x < 40\}$.

halmaz elnevezése: A halmazok jelölésére nagybetűket (A, B, C stb.) használunk, melyet a (:=) jellel rendelünk hozzá. Pl. $A :=$ {németjuhász-tulajdonosok}.

halmaz eleme: A halmaz elemének lenni kapcsolatot az $\in$ relációs jellel adjuk meg. Pl. $a \in C$. Tagadás: b nem eleme D-nek, $b \notin D$.

halmaz elemszáma: A halmaz – elemeinek számát tekintve – lehet véges, illetve végtelen halmaz. A halmaz elemszámát abszolútérték zárójelpárral jelöljük. Pl. $|\{\text{törzsszámok}\}| = \text{végtelen}$; $|\{1; 3; 9\}| = 3$.

üreshalmaz: Elem nélküli halmaz. Jelölése: {} vagy $\varnothing$.

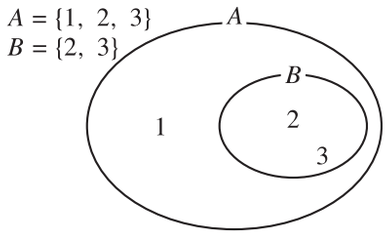
halmazok egyenlősége: Ha két halmaz elemei megegyeznek, akkor a két halmaz egyenlő. Pl. $\{a; b; c\} = \{b; c; a\}$; $A = B$.

részhalmaz: Ha A halmaz minden eleme eleme egy másik B halmaznak, akkor A halmaz a B halmaz részhalmaza. Pl. $A =$ {hétfő, kedd} és $B =$ {a hét napjai}, akkor A részhalmaza B-nek. Jelölése: $A \subseteq B$. Tagadás: C nem részhalmaza D-nek: $C \not\subset D$.

valódi részhalmaz: Egy adott halmaz esetén egy részhalmaz valódi, ha a halmaznak van a részhalmazhoz nem tartozó eleme. Jelölése: $A \subset B$.

nem valódi részhalmazok: Minden halmaz részhalmaza ($A \subseteq A$) saját magának, valamint az üreshalmaz minden halmaznak részhalmaza ($\{\} \subseteq A$). Adott halmaz esetén önmagát nem tekintjük valódi részhalmaznak.

Venn-diagram: A halmazok zárt görbékkel határolt síktartományokkal történő szemléltetése.



FELADATOK

1.1. Karikázd be az alábbi összességek közül a halmazok betűjelét, a nem halmazokét pedig húzd át!

$A :=$ {szép házak}; $B :=$ {23 többszörösei};

$C :=$ {az osztályod tanulói}; $D_1 :=$ {a 6 pozitív osztói};

$D_2 :=$ {nem túl magas épületek}; $E :=$ {az év napos napjai};

$F :=$ {okos tanulók}; $G :=$ {az osztály kitűnő tanulói}.

1.2. A következő halmazokat felsorolásformával add meg!

$A :=$ {egyjegyű, pozitív páros számok} = ...;

$H :=$ {hétköznapok} = ...;

$X :=$ {a három alapszín} = ...;

$Y :=$ {100-nál kisebb pozitív páros számok} = ...;

$W :=$ {prímszámok} = ...

1.3. A következő halmazokat számhalmazformával add meg!

$A := \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} =$ .....;

$H :=$ {7-nél kisebb egész számok} = ...;

$X :=$ {1-nél nem kisebb, 6-nál kisebb egészek} = ...;

$Y :=$ {–1-nél nagyobb, 5-nél nem nagyobb egészek} = ...

1.4. Döntsd el, hogy a felsorolt elemek mely halmazoknak elemei és melyeknek nem! Használd az *eleme* és a *nem eleme* jelölést!

$A :=$ {a tízes számrendszer számjegyei}; $B :=$ {március napjai}; $C :=$ {a 60 pozitív osztói}.

$a = 2$; $b = 9$; $c = 30$; $d = 100$.

a	b	c	d	elemek / halmazok
$a \in A$				A
				B
				C
				{–2; 0; 2}

1.5. Add meg az alábbi halmazok elemeit és elemszámát!

$A :=$ {a 10 011 számjegyei} = ...; $|A| =$ .....

$B :=$ {pozitív kétjegyű számok} = ...; $|B| =$ .....

$C :=$ {a hét napjai} = ...; $|C| =$ .....

$D :=$ {negatív egész számok} = ...; $|D| =$ .....

1.6. Az alábbi halmazok közül válaszd ki azokat, amelyek egyenlők egymással!

$A := \{a; b; c\}$; $B := \{c; b; a\}$; $C := \{a; d; c;\}$;

$D := \{c; c; d; d; a; a\}$; $E := \{c; b; b; b; a\}$; $F := \{a; a; a; a; d; c\}$.

1.7. Az alábbi halmazok közül válaszd ki azokat, amelyek közül az egyik halmaz a másik halmaz részhalmaza!

$M_1 := \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $M_2 := \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;

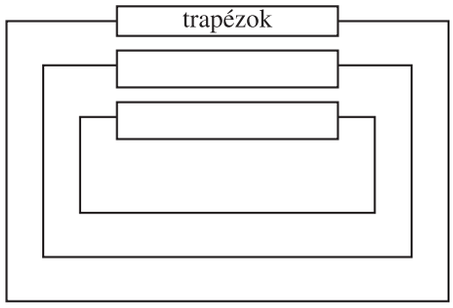
$M3 :=$ {az 50-nél kisebb prímszámok halmaza}; $M_4 := \{\}$;

$M_5 :=$ {a páros prímszámok halmaza}; $M_6 :=$ {a sokszögek halmaza};

$M_7 :=$ {a derékszögű háromszögek halmaza}; $M_8 :=$ {a háromszögek halmaza}.

Ábrázold Venn-diagrammal a halmazok közötti összefüggéseket!

1.8. Az ábrán látható külső téglalap a trapézok halmazát ábrázolja. Mit írnál a belső téglalapokhoz?



1.9. Ábrázold Venn-diagramon

a) a deltoidok és a rombuszok halmazát!

b) az egész számok és a páros számok halmazát!

1.10. Adott az $U := \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ halmaz. Állapítsd meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek valódi részhalmazai és melyek nem valódi részhalmazai U-nak!

$A := \{1; 3; 5; 7\}$; $B := \{2; 4; 6; 8\}$; $C := \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;

$D := \{1\}$; $E := \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; $F := \varnothing$.

Valódi részhalmaz: Nem valódi részhalmaz:

. . . .

MatFgy-09-01:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:01 Page 9

FELADATOK

2.1. Az alábbi számokat írd azon számhalmaz jele alá, amelyiknek eleme!

$2;\ -1{,}3;\ 0;\ \frac{2}{4};\ 0{,}\dot{2};\ \sqrt{2};\ \frac{8}{2};\ -0{,}\dot{9}1\dot{8};\ -\sqrt{9};\ \pi.$

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

....

2.2. Az alábbi számhalmazokat add meg felsorolással!

$A := \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 6\} =$ .....;

$B := \{x \mid x \in \mathbb{N}, 6 \le x\} =$ .....;

$C := \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le -4\} =$ .....;

$D := \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \le 3\} =$ .....;

$E := \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| \le 4\} =$ .....;

$F := \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \le x \le 4\} =$ .....;

$G := \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1 \text{ és } x = \frac{a}{7}, a \in \mathbb{N}\} =$ ..... .

2.3. A felsorolással megadott számhalmazokat írd fel a megszokott halmazmegadással!

$A := \{3; 4; 5; 6; 7\} =$ .....;

$B := \{100; 101; 102; \ldots\} =$ .....;

$C := \{-1; -2; -3; -4; -5\} =$ .....;

$D := \{0; 1; 2; 3; ...\} =$ ..... .

2.4. *a)* Írj le legalább egy $\frac{7}{9}$ és $\frac{8}{9}$ közé eső racionális számot $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b egész számok!

Válasz: ..... .

b) Írj le legalább két $\frac{3}{5}$ és $\frac{4}{5}$ közé eső racionális számot $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b egész számok!

Válasz: ..... .

2.5. Melyik nagyobb a $\frac{9}{19}$ vagy a $\frac{99}{199}$ racionális számok közül? Mennyivel?

Válasz: ..... .

2.6. $M := \left\{-1; \frac{1}{2}; 0; \frac{2}{3}; -8; 12; \frac{7}{3}; 2{,}5; 3; -1\frac{3}{4}\right\}.$

a) Rendezd a halmaz elemeit növekvő sorrendbe!

.....

b) Legyen $x \in M$ és $x \in \mathbb{N}$. Írd le ezt a két feltételt kielégítő x számok halmazát!

$A := \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$.

c) Legyen $x \in M$ és $x \in \mathbb{Z}$. Írd le ezt a két feltételt kielégítő x számok halmazát!

$B := \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$.

d) Milyen reláció (kapcsolat) van az A és B halmaz között? $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) Legyen $x \in M$ és $x \in \mathbb{Q}$. Írd le ezt a két feltételt kielégítő számok halmazát!

$C := \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$.

f) Írd le azoknak a számoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő két feltételt: $x \geq 0$ és $x \in M$!

$D := \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

FELADATOK

3.1. $U := \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $A := \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B := \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Készítsd el a halmazokat ábrázoló Venn-diagramot, majd határozd meg a kérdezett halmazok elemeit!

a) $A \cup B =$ ……; *b)* $A \cap B =$ …… ;

c) $A \setminus B =$ ……; *d)* $B \setminus A =$ …… ;

e) $\overline{A} =$ ……; *f)* $\overline{B} =$ …… .

3.2. Adott az $A \cap B = \{3; 4\}$, $A = \{1; 2; 3; 4\}$ és $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ halmaz.

a) $B =$ ……; *b)* $A \setminus B =$ …… .

3.3. Adott az $A \setminus B = \{a; b\}$, $B \setminus A = \{e; f; g\}$ és $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g\}$ halmaz.

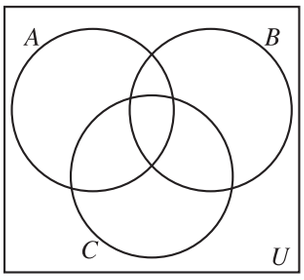
a) $A =$ ……; *b)* $B =$ …… .

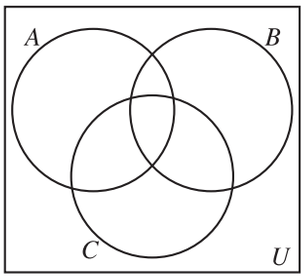
3.4. Adott az $A \setminus B = \emptyset$, $B \cap A = \{e; f\}$ és $A \cup B = \{c; d; e; f; g\}$ halmaz.

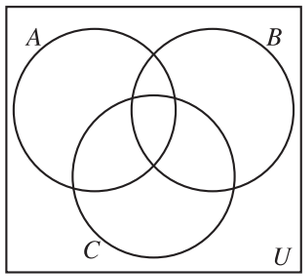
a) $A =$ ……; *b)* $B =$ …… .

3.5. Vonalkázd be a Venn-diagramokon a következő halmazokat!

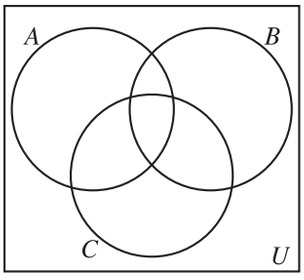
a) $A \cup B \cup C$; *b)* $(A \cup C) \setminus B$; *c)* $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$;

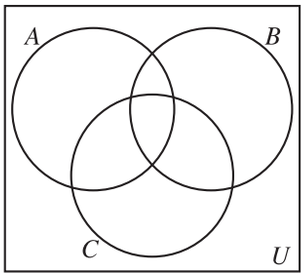


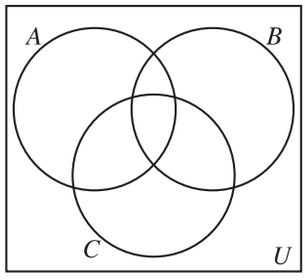




d) $(\overline{A} \cup B) \setminus C$; *e)* $(\overline{A} \setminus C) \cap B$; *f)* $\overline{A \cap B} \cap C$.

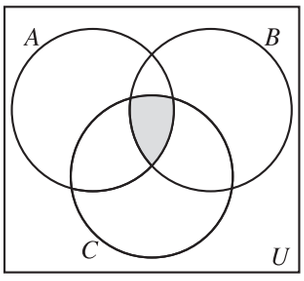


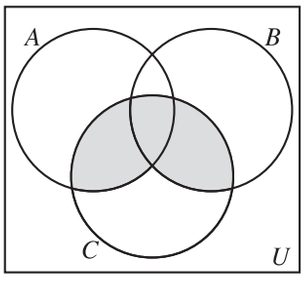


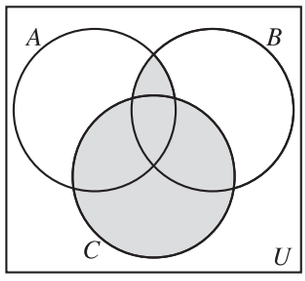


3.6. Fejezd ki halmazműveletek segítségével az alábbi árnyékolt halmazokat!

a) ……; *b)* ……; *c)* …… .

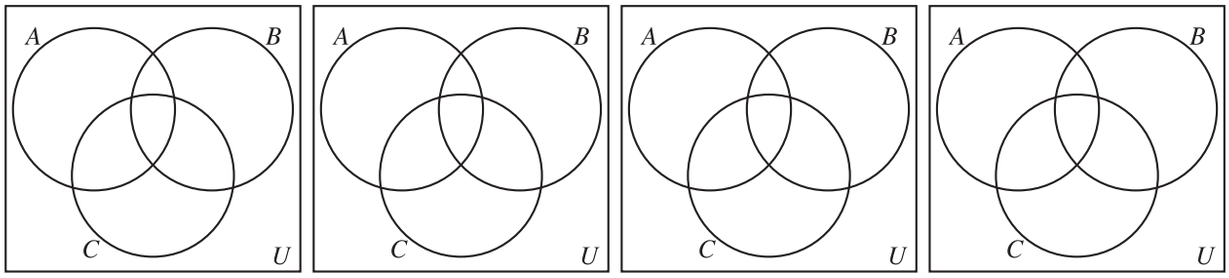




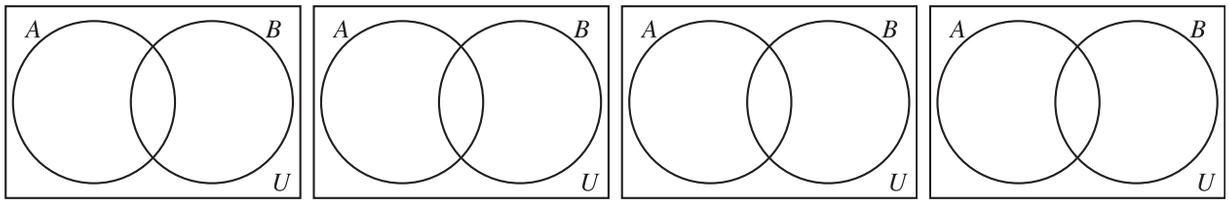


3.7. Venn-diagram használatával döntsd el, hogy melyek azonosságok!

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; *b)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;



c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; *d)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.



4. feladatlap

Intervallumok

EMLÉKEZTETŐ

számegyenes: Olyan egyenes, amelyen adott a pozitív irány, és kijelölt a nullához és az egyhez rendelt pont. A számegyenest a valós számok szemléltetésére használjuk, mivel minden valós számhoz kölcsönösen és egyértelműen megadható az egyenes egy pontja.

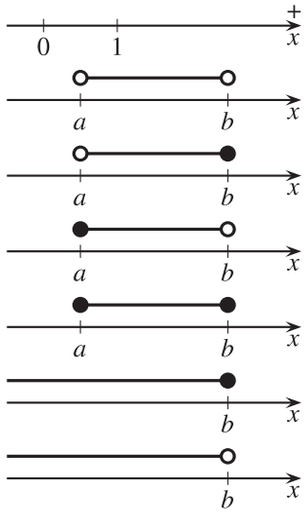
nyílt intervallum: Az $\{x \mid x$ valós és $a < x < b\}$ számhalmaz, egyszerű írásmóddal: $a < x < b$. Jelölése: $]a;b[$.

balról nyílt, jobbról zárt intervallum: Az $\{x \mid x$ valós és $a < x \leq b\}$ számhalmaz, egyszerű írásmóddal: $a < x \leq b$. Jelölése: $]a;\ b]$.

balról zárt, jobbról nyílt intervallum: Az $\{x \mid x$ valós és $a \leq x < b\}$ számhalmaz, egyszerű írásmóddal: $a \leq x < b$. Jelölése: $[a;b[$.

zárt intervallum: Az $\{x \mid x$ valós és $a \leq x \leq b\}$ számhalmaz, egyszerű írásmóddal: $a \leq x \leq b$. Jelölése: $[a;b]$.

végtelen határú intervallum: Az $\{x \mid x$ valós és $x \leq b\}$ vagy $\{x \mid x$ valós és $x < b\}$ számhalmaz esetén a bal oldali határpont a mínusz végtelen $(-\infty)$. Ekkor az intervallum jelölése: $]-\infty;b]$ vagy $]-\infty;b[$.



FELADATOK

4.1. Add meg az alábbi intervallumok számhalmazformáját, valamint ábrázold számegyenesen azokat!

Intervallum	Számhalmazforma	Számegyenes
a) $[-3;\ 4[$		

. . . . . .

b) $\left]\frac{3}{4};\ 3{,}5\right[$.

. . . . . .

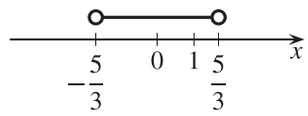
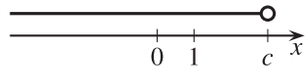
c) $\left]-\infty;\ \frac{5}{2}\right]$.

. . . . . .

4.2. Add meg az alábbi számhalmazok intervallumformáját, valamint ábrázold számegyenesen azokat!

	Számhalmazforma	**Intervallum**	**Számegyenes**
a)	$-3 < x \leq 5$.	. . . . .	
b)	$-4 < x$.	. . . . .	

4.3. Olvasd le a számegyenesekről az intervallumokat, és add meg a számhalmazformájukat is!

	Számegyenes	**Intervallum**	**Számhalmazforma**
a)		. . . . .	. . . . .
b)		. . . . .	. . . . .

4.4. Az intervallumok egyesítését ábrázold számegyenesen, és a halmazokat írd le intervallumjelöléssel!

a) $A := \left]-3;\ 2\right] \cup \left[0;\ 5\right[$.

$A :=$

b) $B := \left]-2;\ 2\right[\cup \left[-2;\ +\infty\right[$.

$B :=$

4.5. Az intervallumok közös részét ábrázold számegyenesen, és a halmazokat írd le intervallumjelöléssel!

a) $A := \left]-3;\ 2\right] \cap \left[0;\ 5\right[$.

$A :=$

b) $B := \left]-2;\ 1\right] \cap \left[-3;\ 4\right[$.

$B :=$

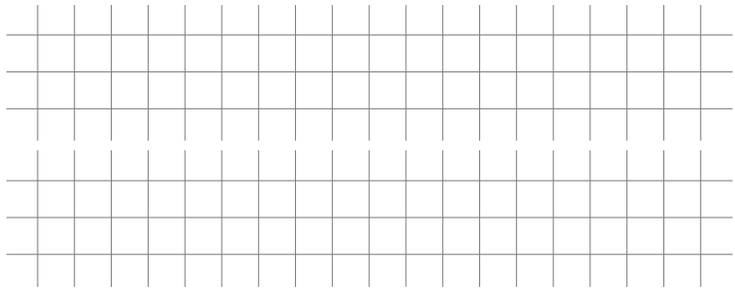
4.6. Az intervallumok különbségeit ábrázold számegyenesen, és a halmazokat írd le intervallumjelöléssel!

a) $A :=]-3;2] \setminus [0;5[$.

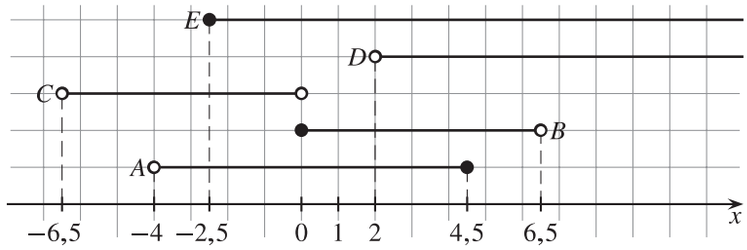
$A :=$

b) $B := [0;\ 5[\setminus]-3;\ 2]$.

$B :=$



4.7. Olvasd le a számegyenesről a halmazokat, és határozd meg a műveletek által képzett intervallumokat!



a) $(B \cup C) \cap A =$

b) $(E \setminus D) \cap C =$

c) $(A \cap B) \cap D =$

d) $\overline{D} \cap E =$

5. feladatlap

Ponthalmazok



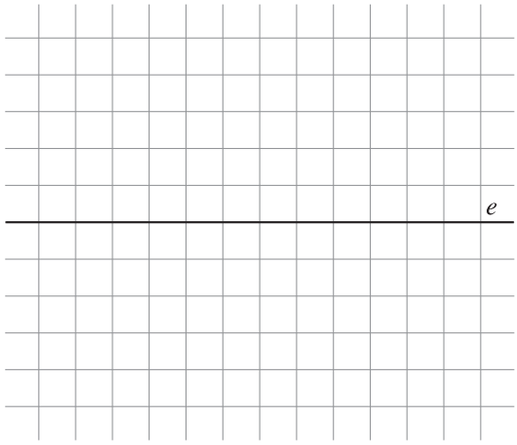
EMLÉKEZTETŐ

körvonal: A sík olyan pontjainak halmaza, amelyek a sík egy megadott pontjától egy megadott távolságra vannak. Az adott pont a **kör középpontja**, az adott távolság a **kör sugara**.
kör belső pontja: A sík azon pontja, amely a kör középpontjától a sugárnál kisebb távolságra található.
körlemez: A kör belső pontjainak halmaza.
kör külső pontja: A sík azon pontja, amely a kör középpontjától a sugárnál nagyobb távolságra található.
egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza: Az adott egyenessel párhuzamos és az egyenestől az adott távolságra lévő két egyenes pontjainak halmaza.

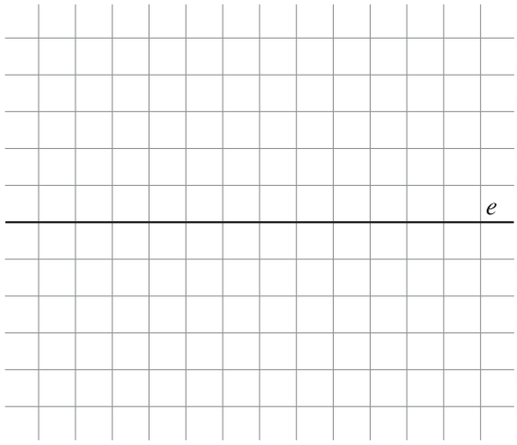
FELADATOK

5.1. Jelöld színessel az alábbi ponthalmazokat! (A négyzetháló 0,5 cm beosztású.)

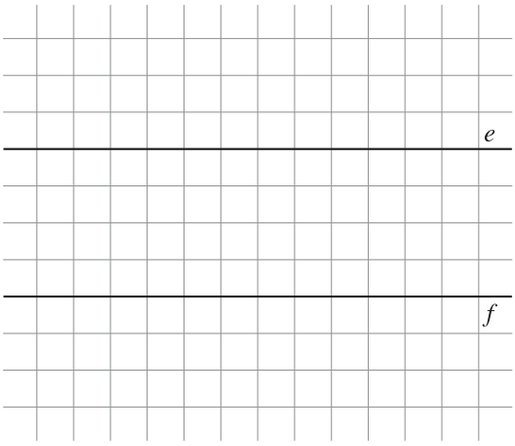
a) {az e egyenestől legfeljebb 2 cm-re lévő pontok}.



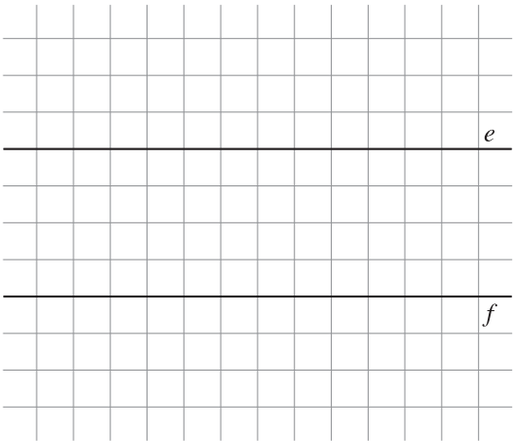
b) {az e egyenestől nagyobb mint 1,5 cm távolságra lévő pontok}.



c) {az *e* egyenestől legfeljebb 1,5 cm-re és az *f* egyenestől legalább 1 cm-re lévő pontok}.

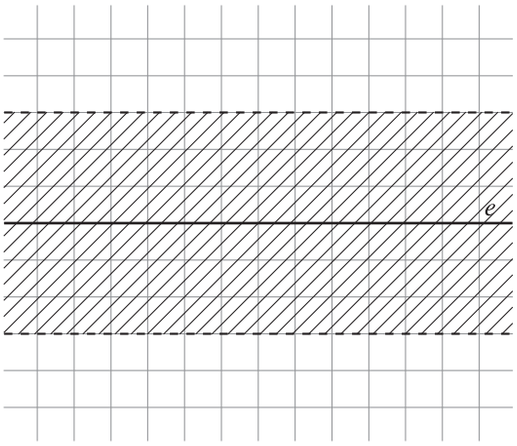


d) {az *e* egyenestől kisebb mint 1,5 cm távolságra és az *f* egyenestől nagyobb mint 1 cm távolságra lévő pontok}.



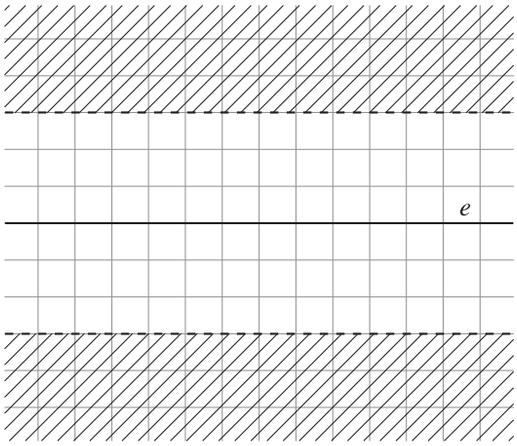
5.2. Határozd meg a következő ponthalmazokat! (A négyzetháló 0,5 cm beosztású.)

a)



. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

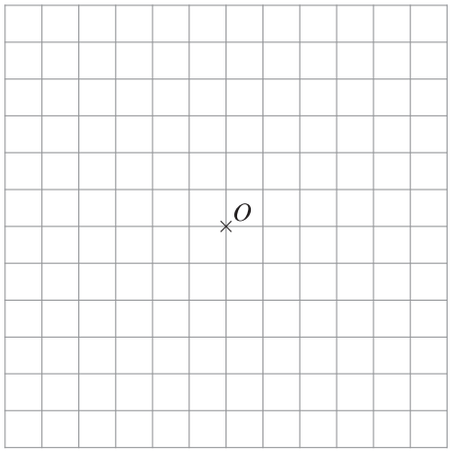
b)



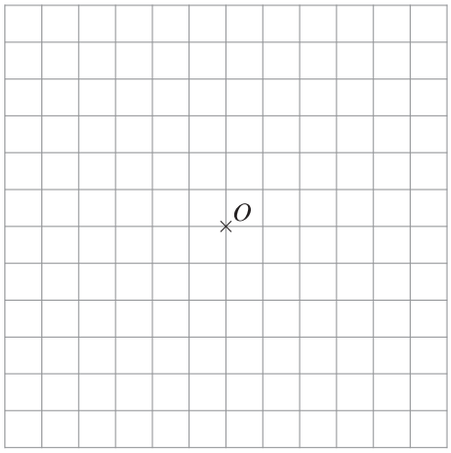
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5.3. Jelöld színessel az alábbi ponthalmazokat! (A négyzetháló 0,5 cm beosztású.)

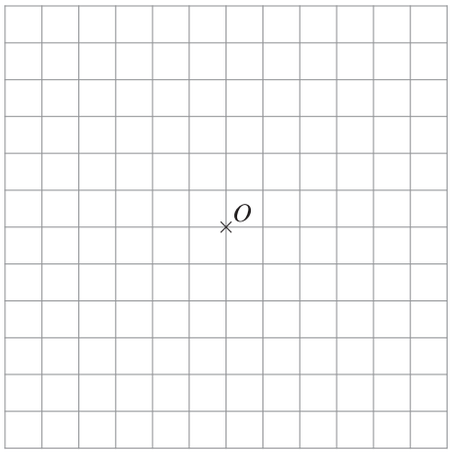
a) {az *O* ponttól legfeljebb 2,5 cm-re lévő pontok}.



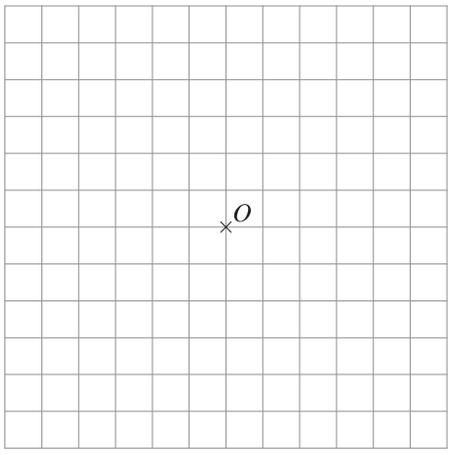
b) {az *O* ponttól kisebb mint 2,5 cm távolságra lévő pontok}.



c) {az O ponttól legalább 2 cm-re és legfeljebb 3 cm-re lévő pontok}.

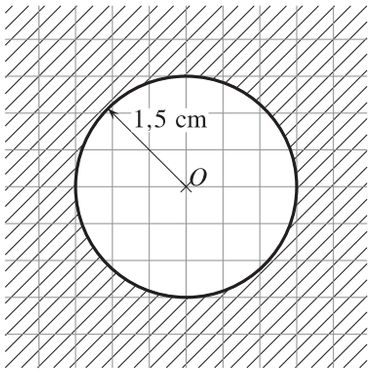


d) {az O ponttól nagyobb mint 2 cm és kisebb mint 3 cm távolságra lévő pontok}.



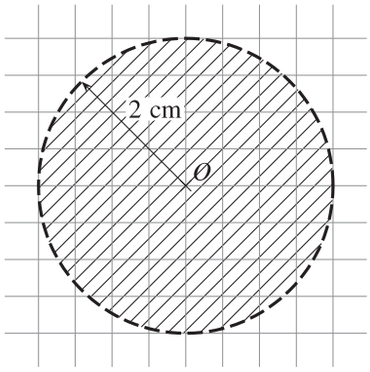
5.4. Határozd meg a következő ponthalmazokat! (A négyzetháló 0,5 cm beosztású.)

a)



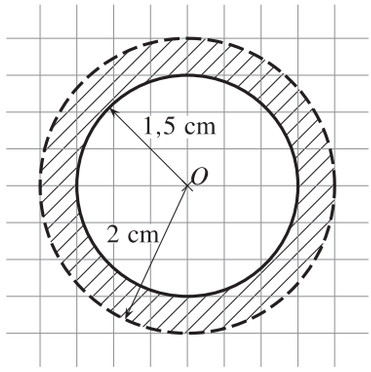
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

b)



. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

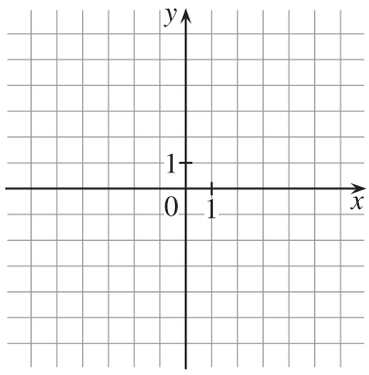
c)



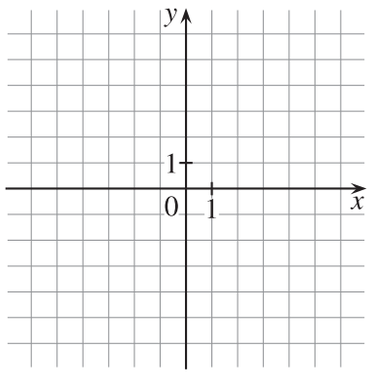
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

5.5. Szerkeszd meg a jelzőszámaikkal megadott ponthalmazokat!

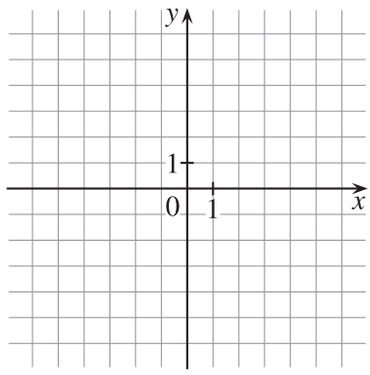
a) $\{(x; y) \mid -2 < x \leq 3\}$.



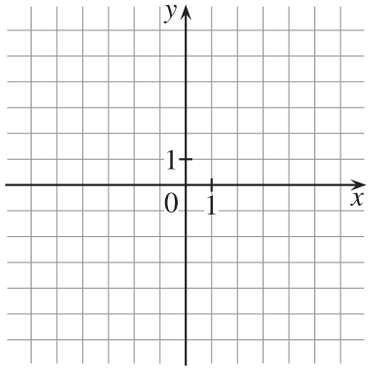
b) $\{(x; y) \mid x \leq -2 \text{ vagy } 3 \leq x\}$.

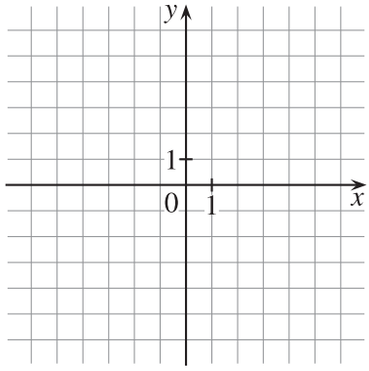


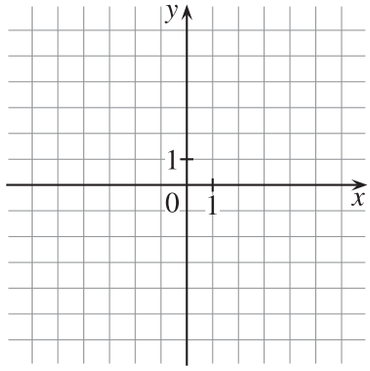
c) $\{(x; y) \mid |x| \leq 3\}$.



d) $\{(x; y) \mid x < 3 \text{ és } y < 2\}$. *e)* $\{(x; y) \mid x \leq 3 \text{ és } |y| \leq 2\}$. *f)* $\{(x; y) \mid x = 2 \text{ vagy } y = -1\}$.

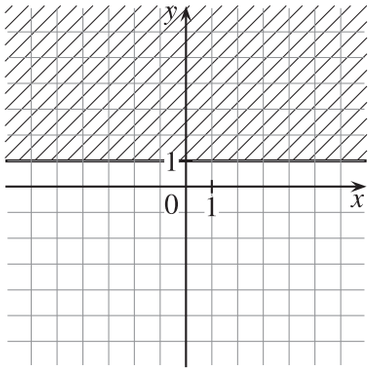






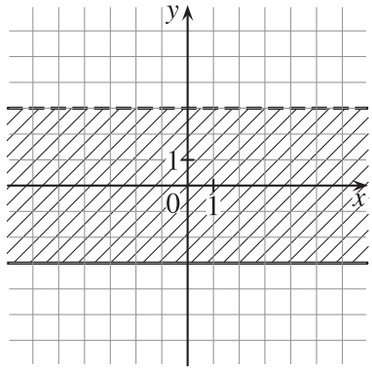
5.6. Határozd meg a következő ponthalmazokat!

a)



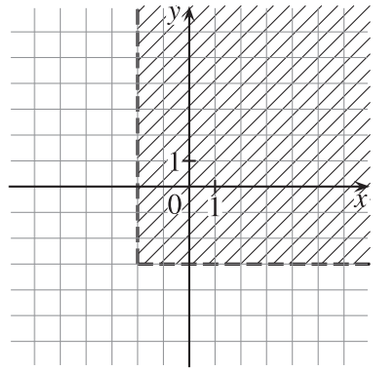
.....
.....
.....

b)



.....
.....
.....

c)



.....
.....
.....

Függvények

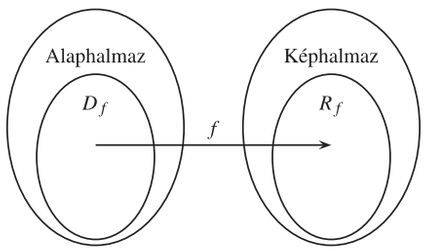
6. feladatlap

Függvények, hozzárendelés

EMLÉKEZTETŐ

hozzárendelési szabály: Az a rendezési elv, amely segítségével az értelmezési tartomány adott eleméhez meghatározhatjuk az értékkészletbeli elemet. **Egyértelmű hozzárendelés** esetén egy elemhez pontosan egy elemet rendelünk. **Nem egyértelmű hozzárendelésnél** egy elemhez kettő vagy több elemet rendelünk, de ez nem függvény. A **kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés** olyan egyértelmű hozzárendelés, amelynek megfordítottja (inverze) is függvény.

függvény: Olyan hozzárendelés, amely egy halmaz elemeihez egy másik halmaz elemeit rendeli, és minden elemhez pontosan egy elem tartozik. Azt a halmazt, amelynek elemeihez rendelünk, **értelmezési tartománynak** (jele: D_f), azt a halmazt pedig, amelynek elemeit rendeljük, **képhalmaznak** nevezzük.



értékkészlet (jele: R_f)**:** A képhalmaz azon részhalmaza, amelynek elemei szerepelnek a hozzárendelésben.

helyettesítési érték: Az értékkészlet azon eleme, amelyet a helyhez rendelünk.

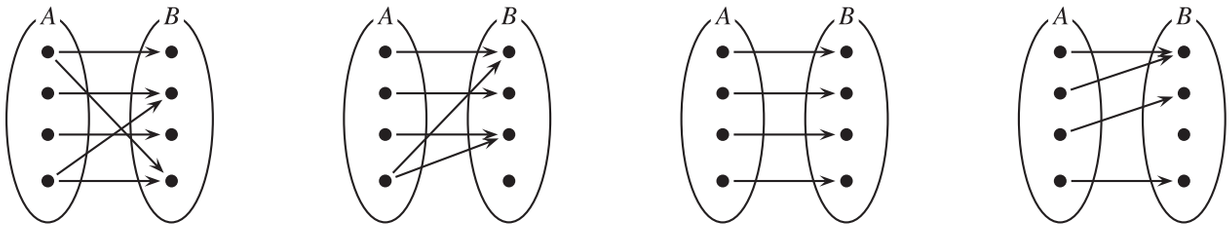
függvény megadása: A függvény meghatározásának tartalmaznia kell az értelmezési tartományt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt. A függvényt kisbetűvel jelöljük: $f:\{\text{értelmezési tartomány}\}\to\{\text{képhalmaz}\},\ x\mapsto f(x)$.
függvény egyenlősége: Két függvény egyenlő, ha azonos az értelmezési tartományuk, és ugyanazon helyen ugyanaz a függvényértékük. Tehát: $f=g$, ha $D_f=D_g$ és az értelmezési tartomány minden x pontjára $f(x)=g(x)$ teljesül.
zérushely: A valós függvény értelmezési tartományának azon eleme, amelynek helyettesi értéke 0. $f(\text{zérushely})=0$.
függvény ábrázolása: A valós f függvény grafikonja az $\{(x;f(x))\mid x\in D_f\}$ ponthalmaz.

FELADATOK

6.1. Döntsd el, hogy melyik hozzárendelés függvény! *(Karikázd be!)*

a) $\{\text{emberek}\}\xrightarrow{\text{tulajadonviszony}}\{\text{kutyák}\}$;
b) $\{\text{tanulók}\}\xrightarrow{\text{tulajadonviszony}}\{\text{diákigazolványok}\}$;
c) $\{\text{emberek}\}\xrightarrow{\text{tulajadonviszony}}\{\text{autók}\}$;
d) $\{\text{gyermekek}\}\xrightarrow{\text{rokoni kapcsolat}}\{\text{édesanyák}\}$;
e) $\{\text{anyukák}\}\xrightarrow{\text{rokoni kapcsolat}}\{\text{gyermekek}\}$;
f) $\{\text{tanulók}\}\xrightarrow{\text{tulajadonviszony}}\{\text{tankönyvek}\}$.

6.2. Döntsd el, hogy az alábbi hozzárendelések közül melyik egyértelmű, melyik nem egyértelmű, és melyik kölcsönösen egyértelmű!



a) *b)* *c)* *d)*

Egyértelmű hozzárendelés:	Nem egyértelmű hozzárendelés:	Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés:

6.3. Adott két halmaz. $M_1:=\{1;2;3;4\}$, $M_2:=\{\text{kék; fehér; fekete}\}$. Rendeld hozzá az M_1 halmaz elemeihez az M_2 halmaz elemeit *a)* egyértelműen; *b)* nem egyértelműen; *c)* kölcsönösen egyértelműen! Írd le az elempárokat! (Például: $1\mapsto$ kék; … .)

6.4. Adj meg függvényeket a következő halmazok segítségével!

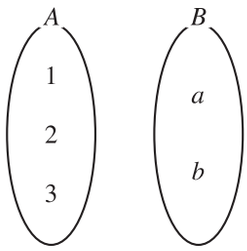
a) Az értelmezési tartomány három történelmi esemény, az értékkészlet pedig a történelmi események évszámai.

b) Az értelmezési tartomány három író, az értékkészlet pedig az írók egy-egy műve.

c) Az értelmezési tartomány elemei az 5; 6; 7; 8 számok, az értékkészlet e számok 1-nél nagyobb osztója. (Ha több osztó is létezik, akkor válaszd ki az egyiket!)

d) Az értelmezési tartomány elemei egy félkör pontjai, az értékkészlet elemei e félkör átmérőjének pontjai. Készíts ábrát!

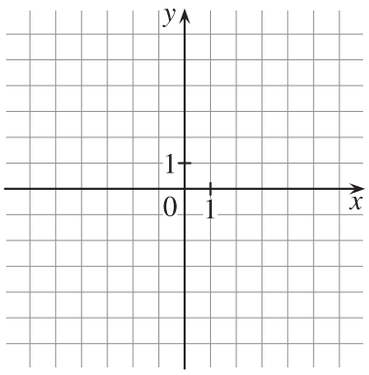
6.5. Az értelmezési tartomány elemei az 1; 2; 3 számok, az értékkészlet elemei az *a*, *b* betűk. Hányféle módon rendelhetjük az adott számokhoz az adott betűket?



6.6. Ábrázold grafikonon a következő hozzárendeléseket!
Melyik függvény és melyik nem az?

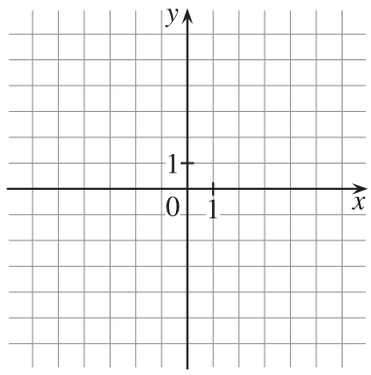
a)

x	−5	−3	−1	0	1	3	5	6
y	5	1	0	3	5	1	0	3



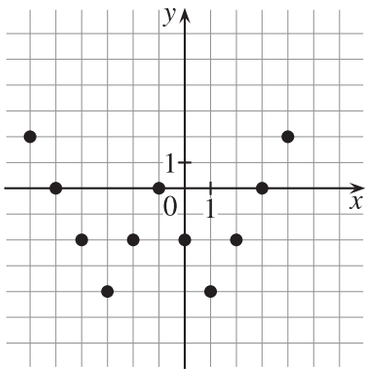
b)

x	−2	−1	0	1	−2	−1	1
y	5	1	0	3	−5	−1	−3



6.7. Olvasd le a grafikonról a hozzárendelések értelmezési tartományát és értékkészletét! Melyik függvény és melyik nem az?

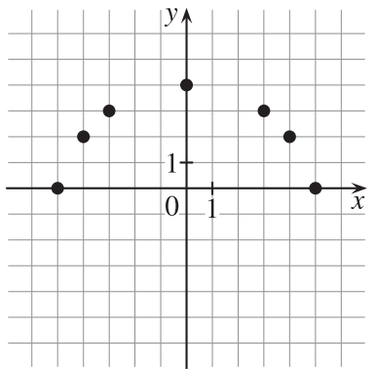
a)



ÉT :=

ÉK :=

b)

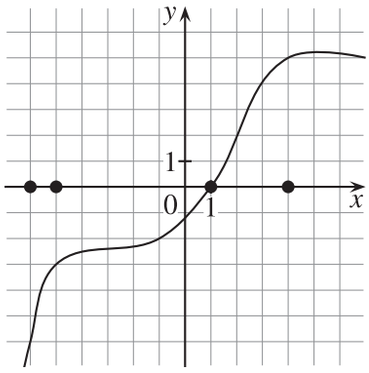


ÉT :=

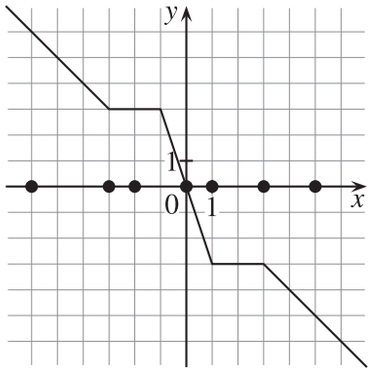
ÉK :=

6.8. A grafikon segítségével határozd meg az adott x értékekhez tartozó y értékeket!

a)

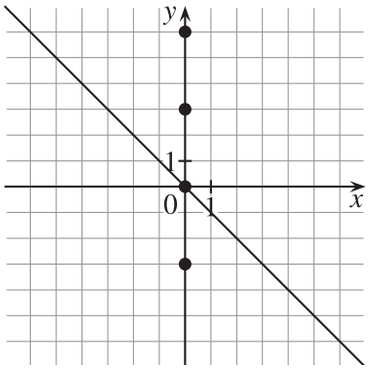


b)

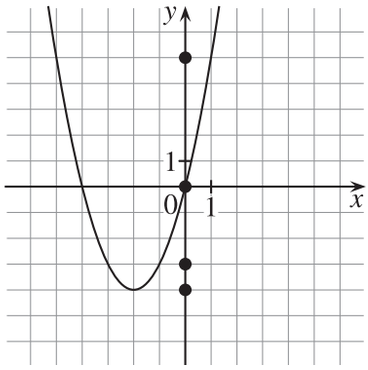


6.9. Az y tengelyen adott pontokhoz keresd meg a hozzájuk tartozó grafikonpontokat, majd a kapott grafikonpontokhoz tartozó x értékeket!

a)

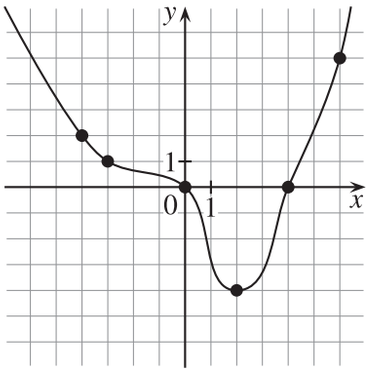


b)

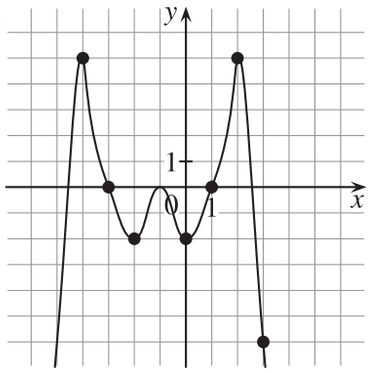


6.10. A grafikonon adott pontokhoz keresd meg a hozzájuk tartozó x tengelyen és az y tengelyen lévő pontokat!

a)

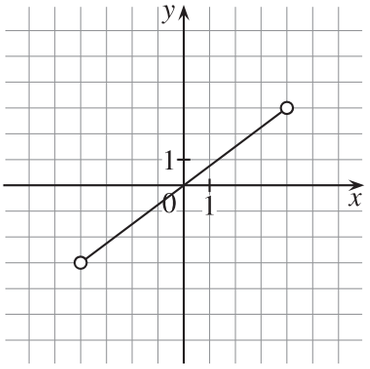


b)



6.11. A grafikon segítségével határozd meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet!

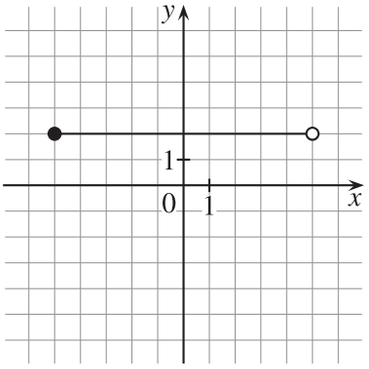
a)



ÉT :=

ÉK :=

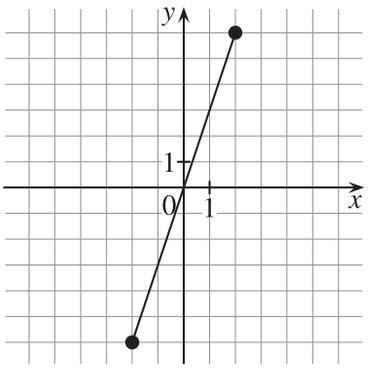
b)



ÉT :=

ÉK :=

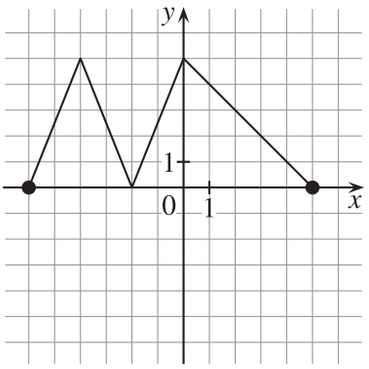
c)



ÉT :=

ÉK :=

d)



ÉT :=

ÉK :=

MatFgy-09-01:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:01 Page 21

7. feladatlap

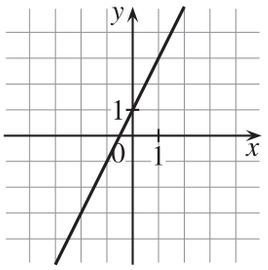
Lineáris függvények

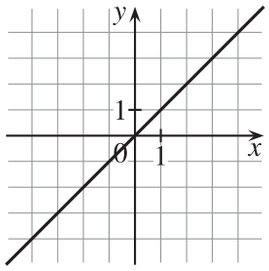
EMLÉKEZTETŐ

lineáris függvény: Azokat a függvényeket nevezzük lineáris függvénynek, amelyeknek a grafikonja egyenes.

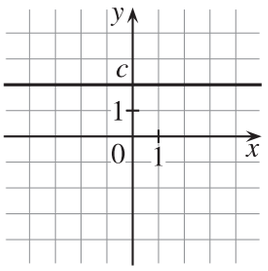
elsőfokú függvény: Az $x \mapsto mx + b$ $(m \neq 0)$ hozzárendeléssel definiált függvény lineáris függvény. m a függvény **meredeksége**, b a **konstans tag**.

egyenes arányosság: Az $x \mapsto mx$ $(m \neq 0)$ hozzárendeléssel definiált függvény, vagyis olyan elsőfokú függvény, amelynek konstans tagja 0.





konstans függvény: Az $x \mapsto c$ hozzárendeléssel definiált függvény.



FELADATOK

7.1. Ábrázold a következő egyenes arányosságokat

a) $a(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x;$

b) $b(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x;$

c) $c(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x;$

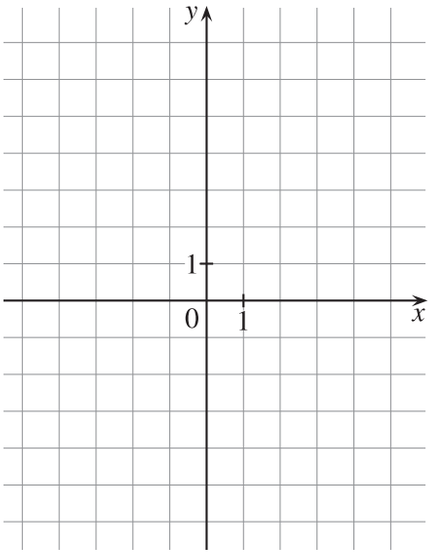
d) $d(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -3x;$

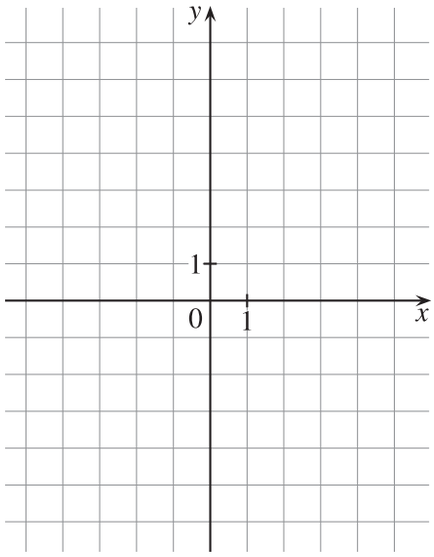
e) $e(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x;$

f) $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2}{3}x;$

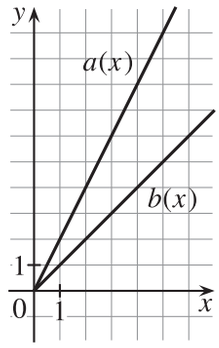
g) $g(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5}{2}x;$

h) $h(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{2}{5}x.$



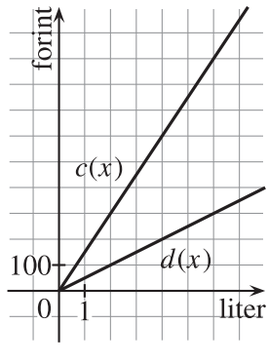


7.2. Olvasd le a valós számokon értelmezett lineáris függvények (egyenes arányosságok) hozzárendelési szabályát!



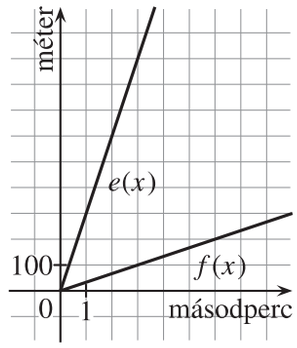
$a(x) =$

$b(x) =$



$c(x) =$

$d(x) =$



$e(x) =$

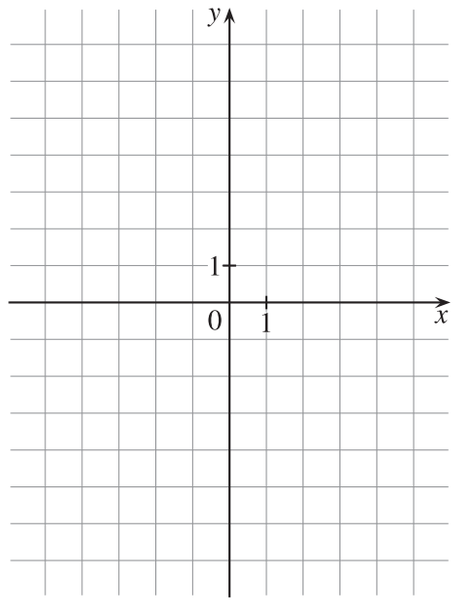
$f(x) =$

7.3. Ábrázold a következő lineáris függvényeket!

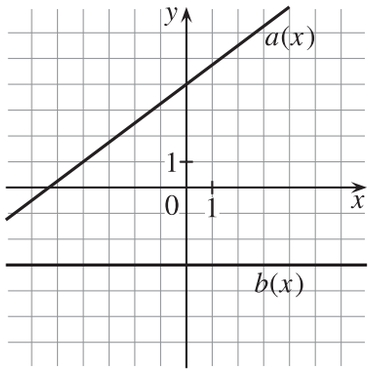
a) $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 3;$

b) $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x + 2;$

c) $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x - 4.$

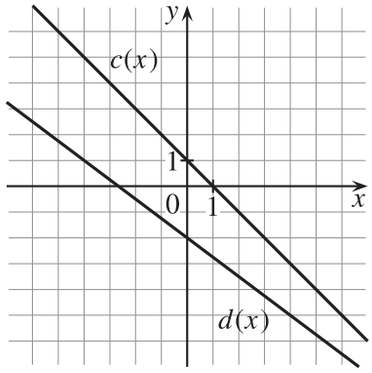


7.4. Olvasd le a következő, valós számokon értelmezett lineáris függvények hozzárendelési szabályát!



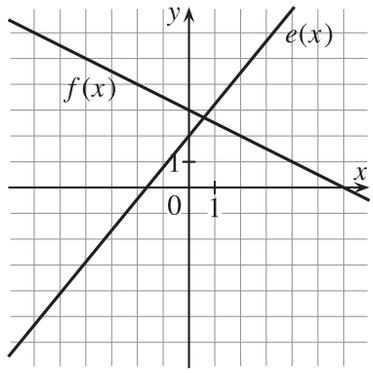
$a(x) =$

$b(x) =$



$c(x) =$

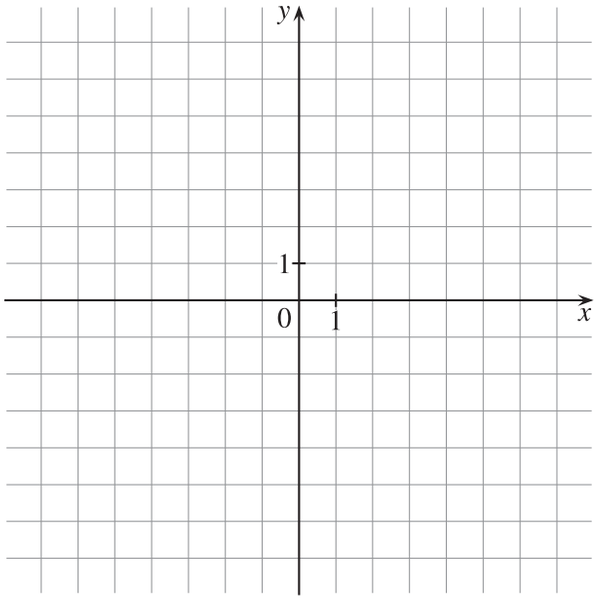
$d(x) =$



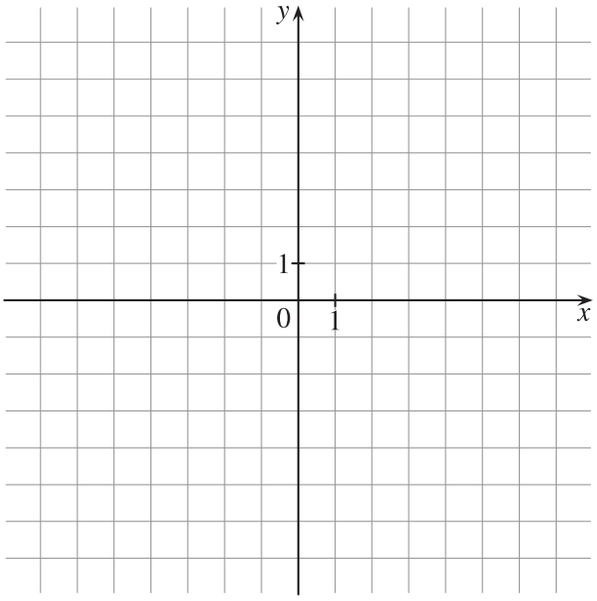
$e(x) =$

$f(x) =$

7.5. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$ függvényt, és állapítsd meg, hogy az $x = -2$; 0; 1; 2 helyettesítési értékekhez mely y értékek tartoznak!



7.6. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ függvényt, és állapítsd meg, hogy az $y = -5$; -3; 0; 1 függvényértékekhez mely x értékek tartoznak!



8. feladatlap

Abszolútérték-függvények

EMLÉKEZTETŐ

abszolútérték: Pozitív szám abszolútértéke maga a szám, negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje (egy pozitív szám), és a nulla abszolútértéke a nulla.

abszolútérték-függvény: $x \mapsto |x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0, \\ -x, \text{ ha } x < 0. \end{cases}$

FELADATOK

8.1. Számold ki a következő értékeket!

a) $-\left|\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right| + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) =$

b) $\left|\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{2}{25}\right) - 8\right| =$

c) $2\frac{2}{5} - \left|1 - \left|2 - \frac{11}{3}\right|\right| =$

d) $[(6{,}41 - 7{,}32) - |3{,}56 - 5{,}67|] \cdot 100 =$

8.2. Melyik kifejezés nagyobb az alábbi kifejezésekben, ha $a = 5$, $b = -4$, $c = 0$?

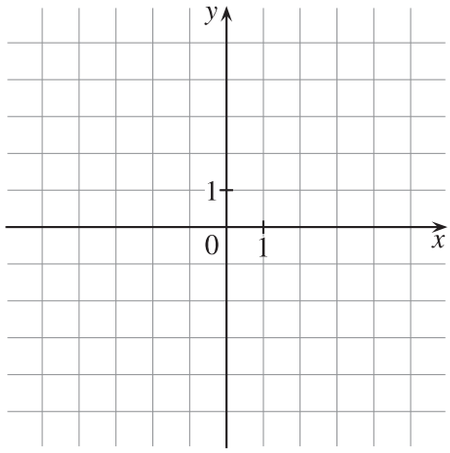
a) $|a + 2b|$ $|a| + |2b|$;

b) $|a - 2b|$ $|a| - |2b|$;

c) $|a + b + c|$ $|a| + |b| + |c|$.

8.3. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - 1|$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| - 1$ függvényt értéktáblázat segítségével!

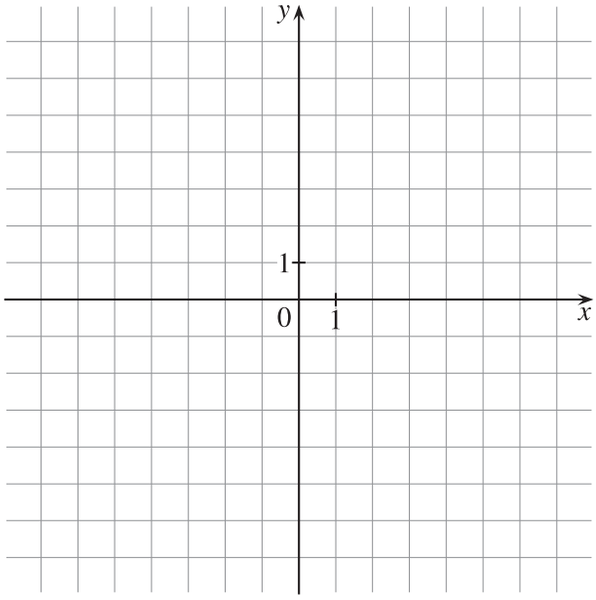
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\|x - 1\|$								
$\|x\| - 1$								



8.4. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x) = |x - 4|$; $g(x) = |x - 1|$;

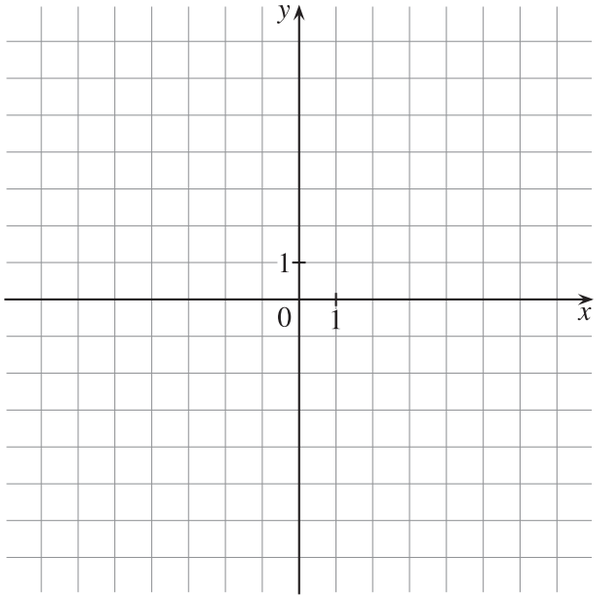
$h(x) = |x + 2|$; $i(x) = |x + 3|$.



8.5. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x) = |x| + 4$; $g(x) = |x| + 1,5$;

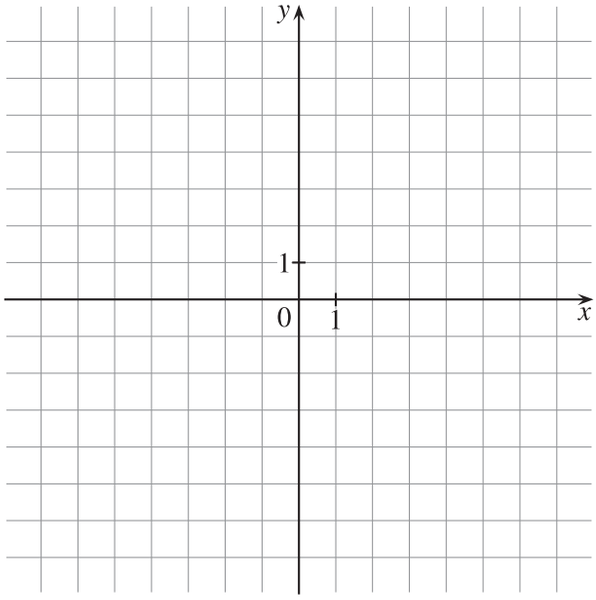
$h(x) = |x| - 2,5$; $i(x) = |x| - 3$.



8.6. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x)=|x+2|-3;$ $g(x)=|x-3|+1;$

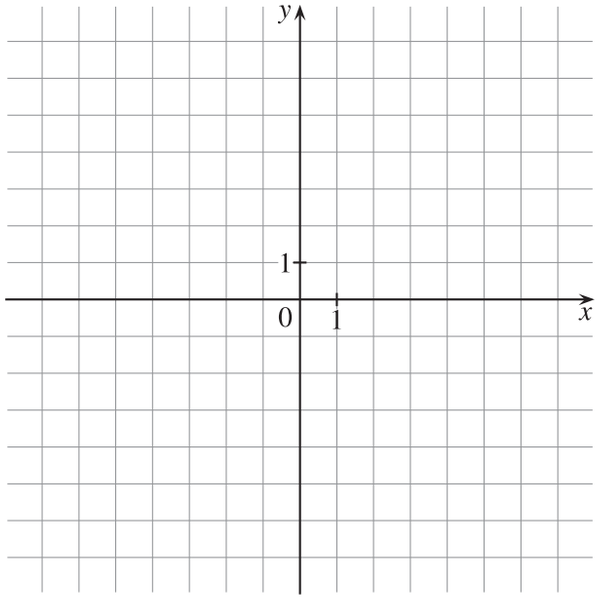
$h(x)=|x+1|+4;$ $i(x)=|x-4|-2.$



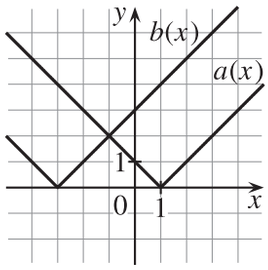
8.7. Ábrázold a következő függvényeket!

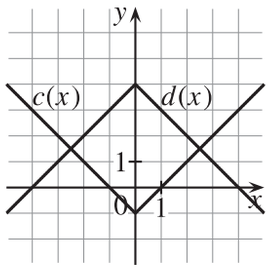
$f(x)=-|x|;$ $g(x)=-|x-2|+3;$

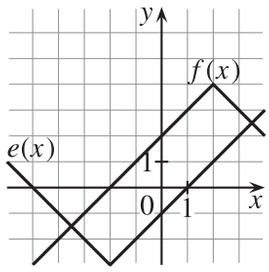
$h(x)=-|x+3|+2;$ $i(x)=-|x|-3.$

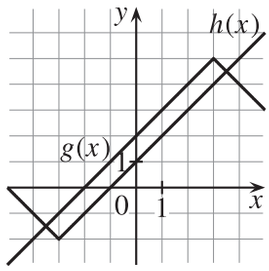


8.8. Olvasd le a következő, valós számokon értelmezett abszolútérték-függvények hozzárendelési szabályát!









$a(x)=$ $c(x)=$ $e(x)=$ $g(x)=$

$b(x)=$ $d(x)=$ $f(x)=$ $h(x)=$

9. feladatlap

Másodfokú függvények

EMLÉKEZTETŐ

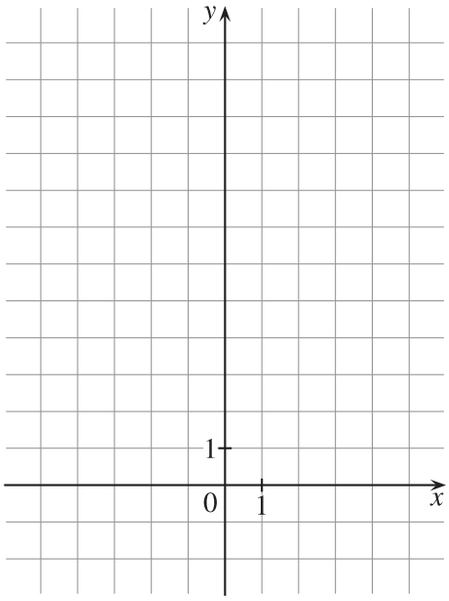
másodfokú függvény: Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto ax^2+bx+c \quad (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ alakra hozható függvényt másodfokú függvénynek nevezzük. A függvény transzformálásánál használt alakja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto a(x-u)^2+v \quad (a,u,v\in\mathbb{R}, a\neq 0)$.

másodfokú függvény rendezett alakja: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$.

másodfokú függvény grafikonjának neve: Parabola.

FELADATOK

9.1. Ábrázold az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-1)^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$ függvényt értéktáblázat segítségével!

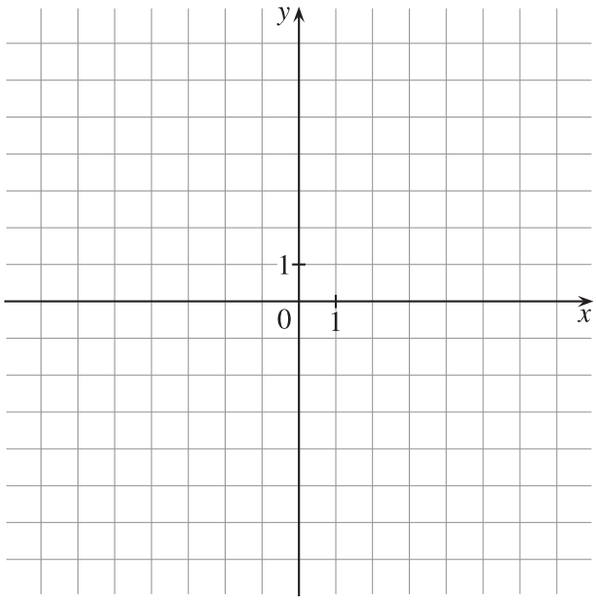


x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$(x-1)^2$								
x^2-1								

9.2. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x) = (x+4)^2$; $g(x) = (x+1)^2$;

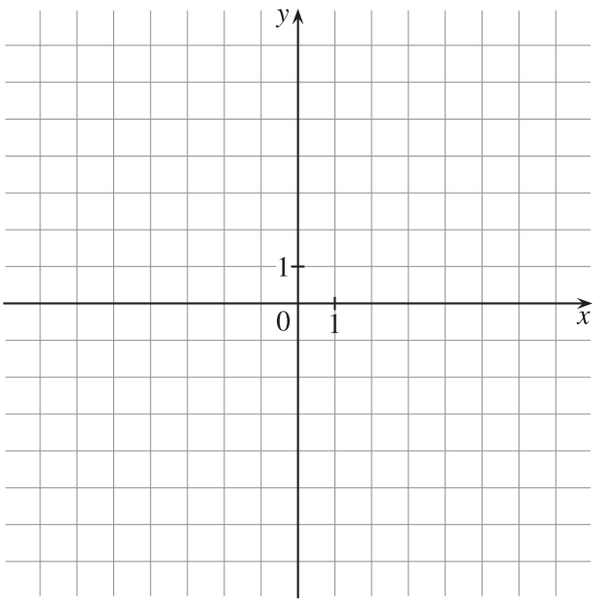
$h(x) = (x-2)^2$; $i(x) = (x-3)^2$.



9.3. Ábrázold a következő függvényeket!

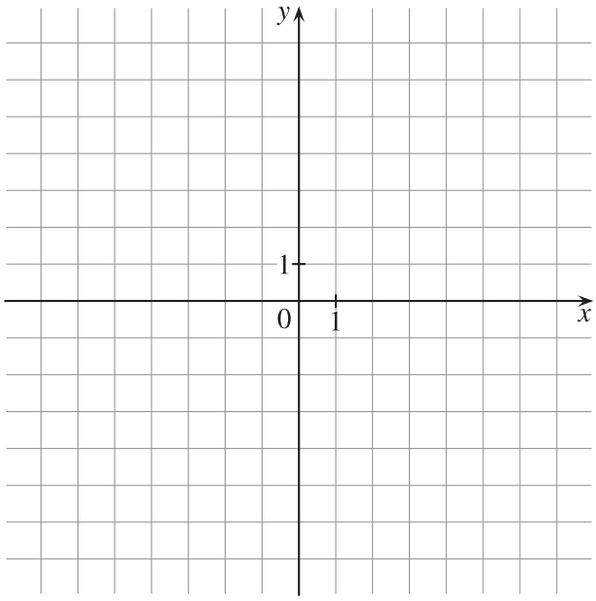
$f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = x^2 + 0,5$;

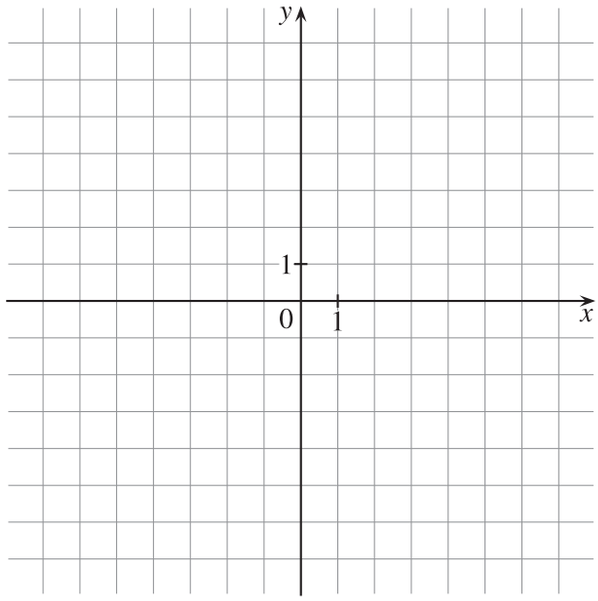
$h(x) = x^2 - 2,5$; $i(x) = x^2 - 6$.



9.4. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x)=(x-1)^2-2;$ $g(x)=(x+2)^2-3;$ $h(x)=(x-4)^2+4;$ $i(x)=(x+1)^2+1.$

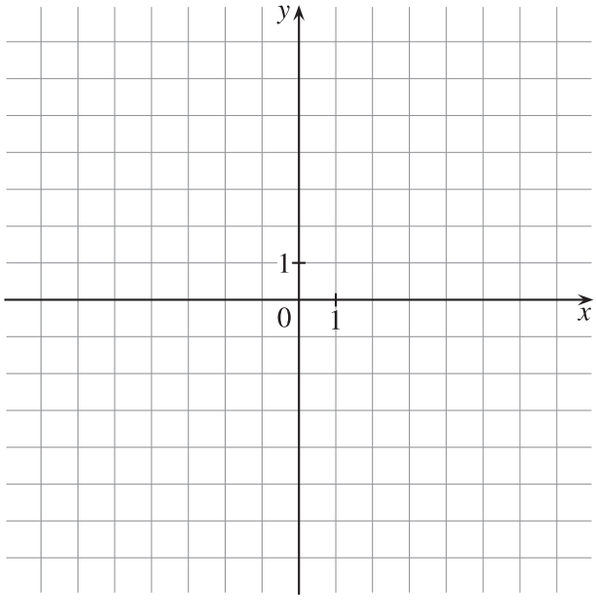




9.5. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x)=-x^2;$ $g(x)=-x^2+2;$

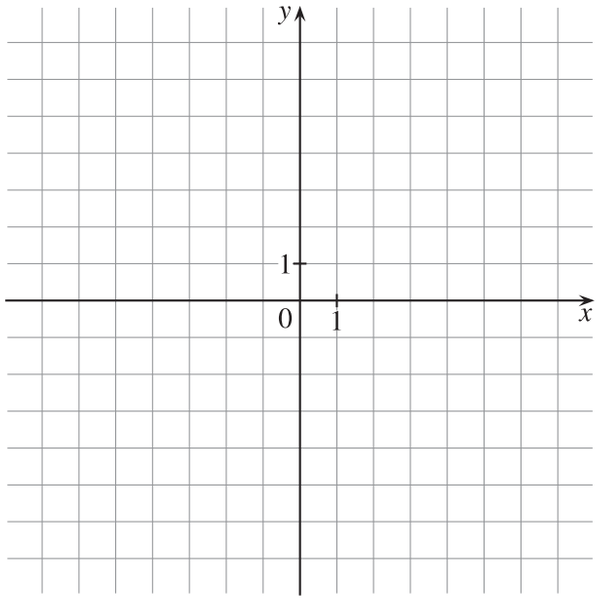
$h(x)=-(x-3)^2+4;$ $i(x)=-(x+5)^2-1.$



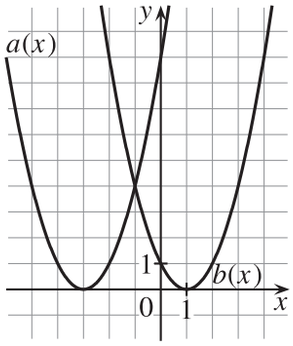
9.6. Ábrázold a következő függvényeket!

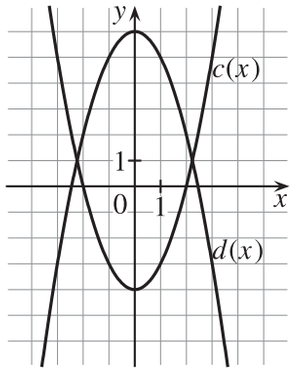
$f(x)=2x^2;$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2;$

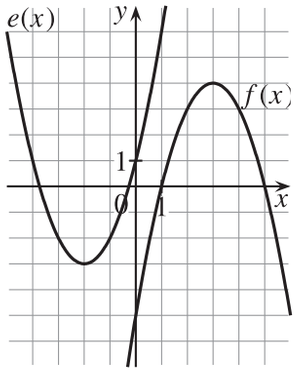
$h(x)=3x^2-8;$ $i(x)=\frac{1}{3}(x-4)^2.$

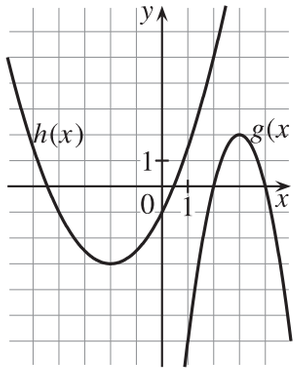


9.7. Olvasd le a következő, valós számokon értelmezett függvények hozzárendelési szabályát!





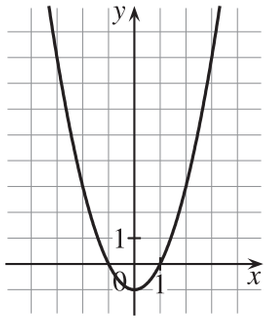


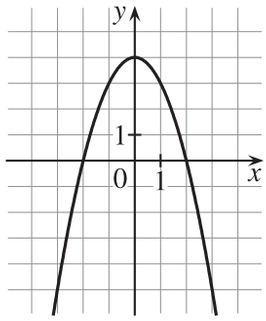


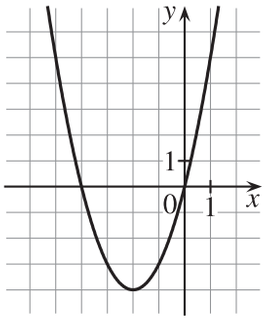
$a(x) =$ $c(x) =$ $e(x) =$ $g(x) =$

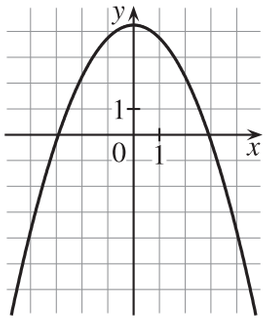
$b(x) =$ $d(x) =$ $f(x) =$ $h(x) =$

9.8. Olvasd le, hogy a következő, valós számokon értelmezett függvények hol metszik az x tengelyt, és döntsd el, hogy az értelmezési tartomány mely értékeinél nemnegatívok a függvények!









x tengely metszete: x tengely metszete: x tengely metszete: x tengely metszete:

nemnegatív tartomány: nemnegatív tartomány: nemnegatív tartomány: nemnegatív tartomány:

10. feladatlap

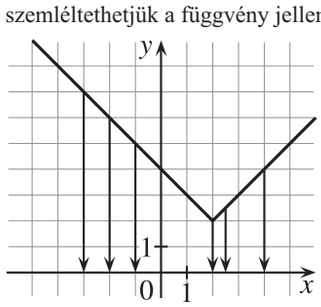
Függvényvizsgálat

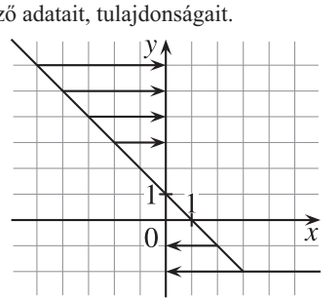
EMLÉKEZTETŐ

függvényvizsgálat: Egyszerűbb függvények grafikonján jól szemléltethetjük a függvény jellemző adatait, tulajdonságait.

értelmezési tartomány: Az értelmezési tartományt az x tengelyen olvassuk le. (Szemléletesen az értelmezései tartomány az x tengely azon pontjai, amelyekhez tartozik grafikonpont.)

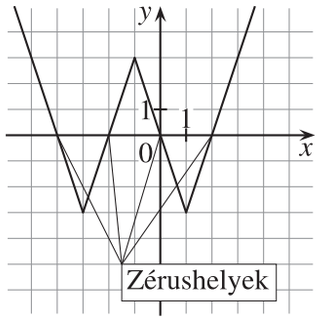
értékkészlet: Az értékkészlet elemei azok az y tengely pontok, amelyekhez grafikonpont tartozik.

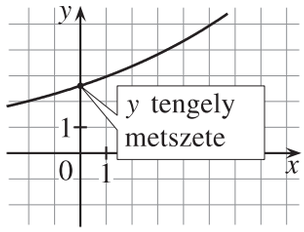




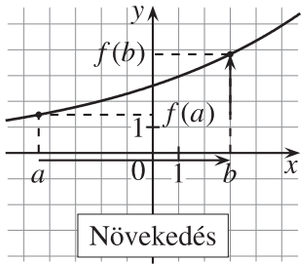
zérushely: Zérushelyek az értelmezési tartomány azon elemei, amelyeknél a függvény helyettesítési értéke zérus. ($f(x) = 0$.)

tengelypont: Az $x = 0$ helyen vett helyettesítési érték. Az y tengely azon pontja, ahol elmetszi a grafikon.

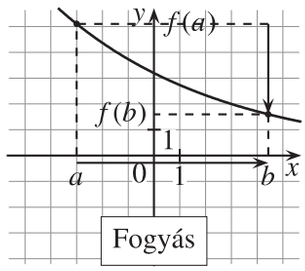




növekedés: A növekedés vizsgálatakor az értelmezési tartomány azon részhalmazát adjuk meg, amelynek növekvő elemeihez tartozó függvényértékek növekednek. ($f(a) \le f(b)$, ha $a < b$.) Amennyiben a nagyobb helyhez határozottan nagyobb helyettesítési érték tartozik ($f(a) < f(b)$, ha $a < b$), akkor **szigorúan monoton növekedésről** beszélünk.

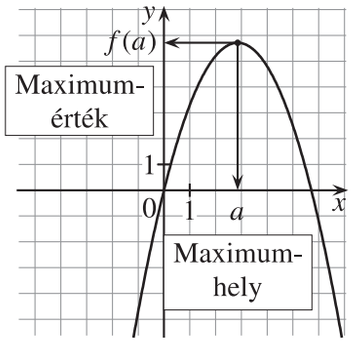


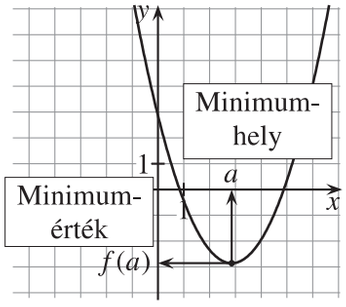
fogyás: A fogyás vizsgálatakor az értelmezési tartomány azon részhalmazát adjuk meg, amelynek növekvő elemeihez tartozó függvényértékek csökkenek. ($f(a) \ge f(b)$, ha $a < b$.) Amennyiben a nagyobb helyhez határozottan nagyobb helyettesítési érték tartozik ($f(a) > f(b)$, ha $a < b$), akkor **szigorúan monoton fogyásról** beszélünk.



maximumérték: Az értékkészlet legnagyobb elemét **maximumértékne**k nevezzük, és azt a helyet (x), ahol a legnagyobb értéket felveszi, **maximumhelynek** nevezzük. A maximumértéket az y tengelyen olvashatjuk le.

minimumérték: Az értékkészlet legkisebb elemét **minimumértéknek** nevezzük, és azt a helyet (x), ahol a legkisebb értéket felveszi, **minimumhelynek** nevezzük. A minimumértéket az y tengelyen olvashatjuk le.

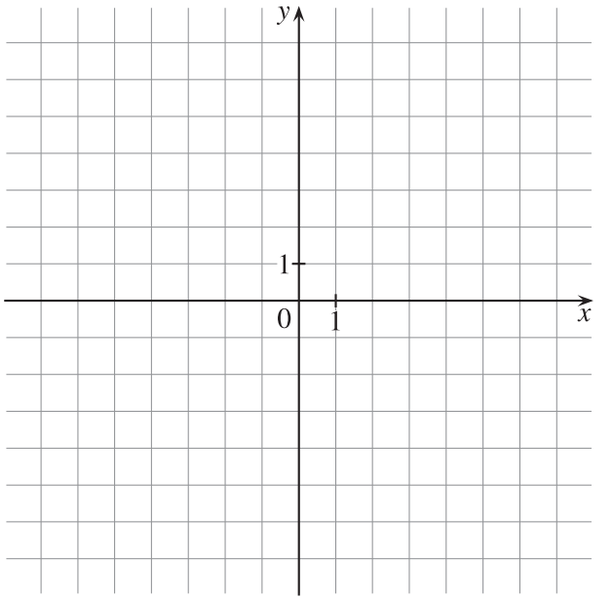




szélsőérték: A maximum- és minimumértékeket együttesen szélsőértékeknek nevezzük.

FELADATOK

10.1. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 2$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!



Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 30

10.2. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{3}{2}x + 4$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

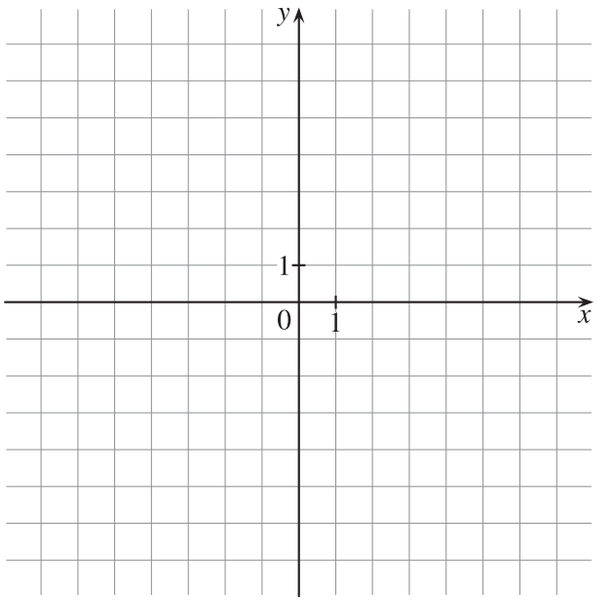
Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....



10.3. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 1$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

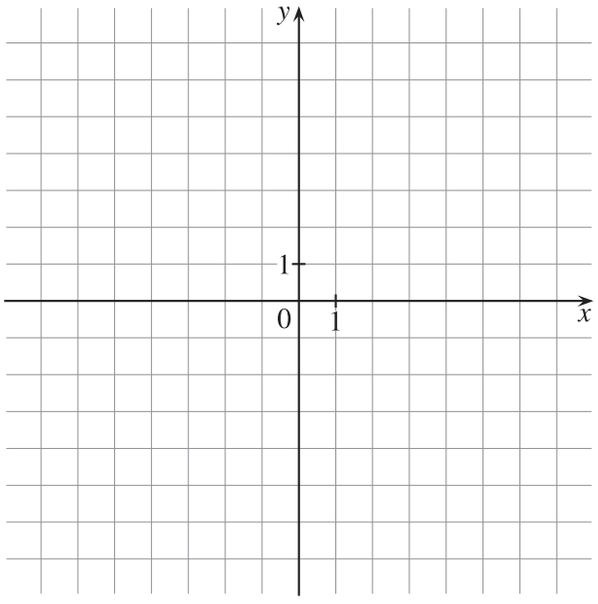
Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....



10.4. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -(x-2)^2 + 4$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

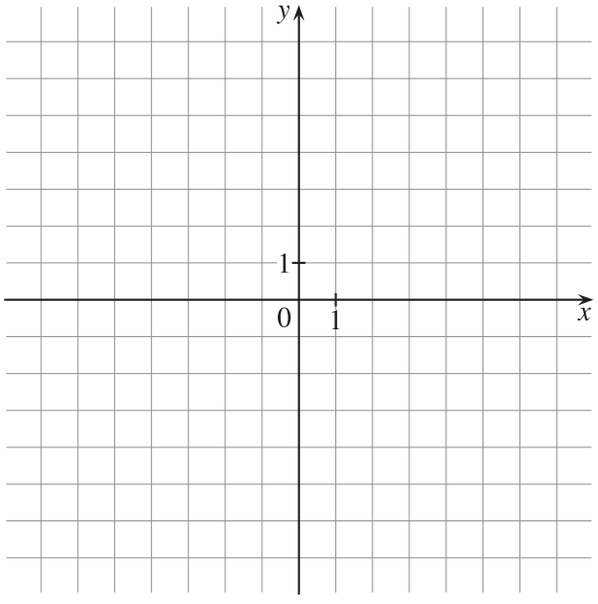
Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....



MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 31

10.5. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x+1|-3$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

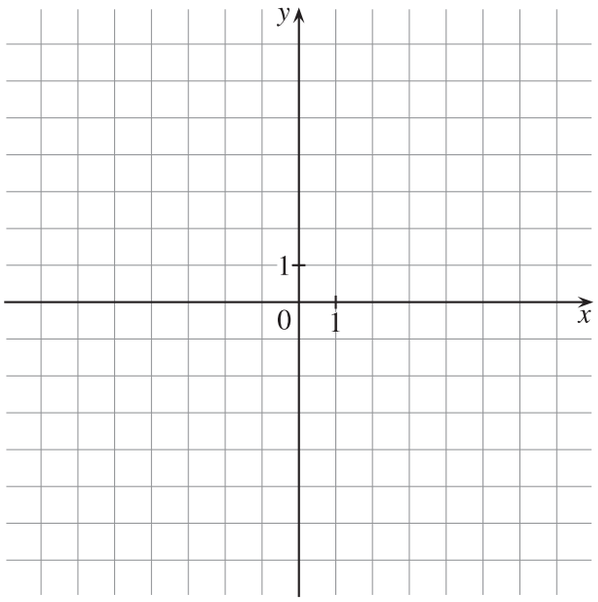
Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....



10.6. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -|x+3|+4$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

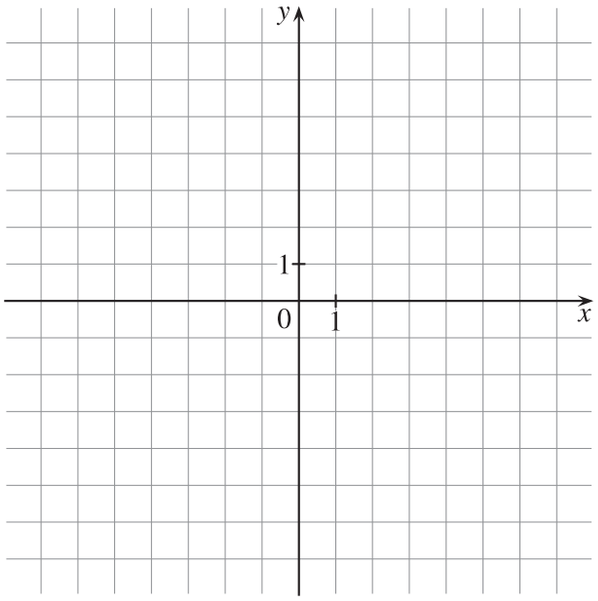
Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....



10.7. Ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

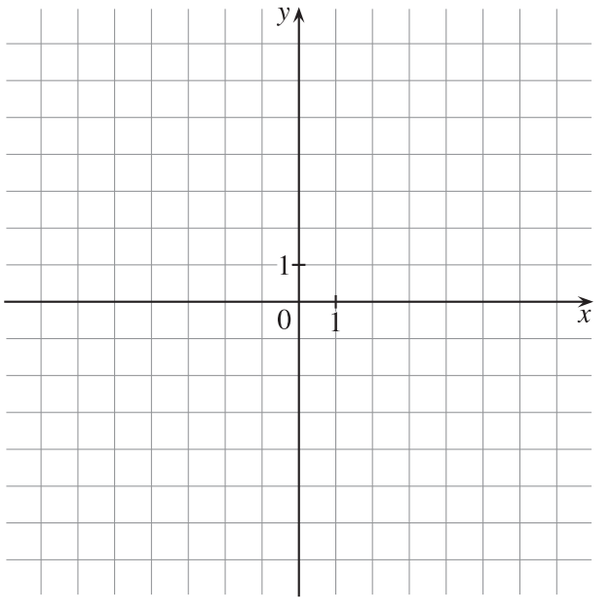
Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....

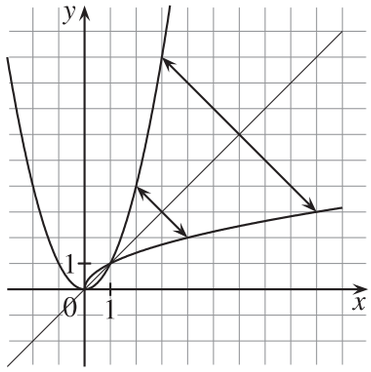


MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 32

11. feladatlap

A négyzetgyökfüggvény és a harmadikhatvány-függvény

EMLÉKEZTETŐ



négyzetgyök (jele: $\sqrt{a}$)**:** Legyen az a nemnegatív valós szám ($a \in \mathbb{R}$ és $a \geq 0$)! Ekkor a $\sqrt{a}$-n azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek négyzete a: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. $\sqrt{a}$-t az a szám négyzetgyökének nevezzük.

négyzetgyökfüggvény: Az $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt négyzetgyökfüggvénynek nevezzük.

a négyzetgyökfüggvény grafikonja: A négyzetgyökfüggvény grafikonja és a másodfokú függvény grafikonjának jobb ága egymásnak a tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan, így a négyzetgyökfüggvény grafikonja tulajdonképpen egy fektetett fél **parabola**.

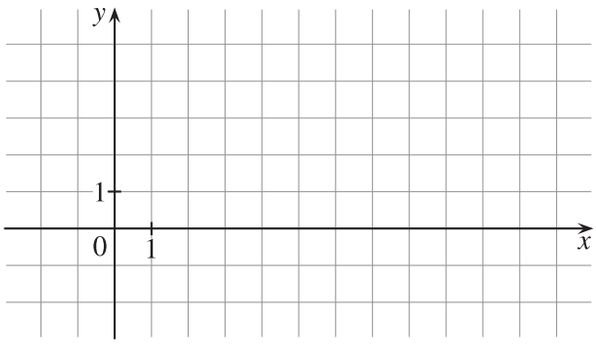
FELADATOK

11.1. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$\sqrt{25}$; $-\sqrt{4}$; $\sqrt{-1}$; $\sqrt{0}$; $-\sqrt{\frac{16}{9}}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{-100}$; $\sqrt{20}$.

11.2. Az értéktáblázat segítségével ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

x	-1	0	1	2	3
$\sqrt{x}$					

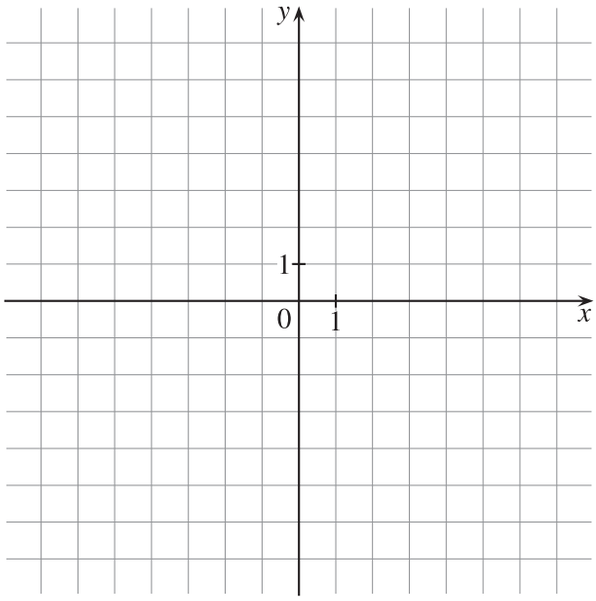


Értelmezési tartomány: .....
Értékkészlet: .....
Zérushely: .....
Tengelypont: .....
Növekedés: .....
Csökkenés: .....
Minimumhely: .....
Minimumérték: .....
Maximumhely: .....
Maximumérték: .....

11.3. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=-\sqrt{x+6}$;

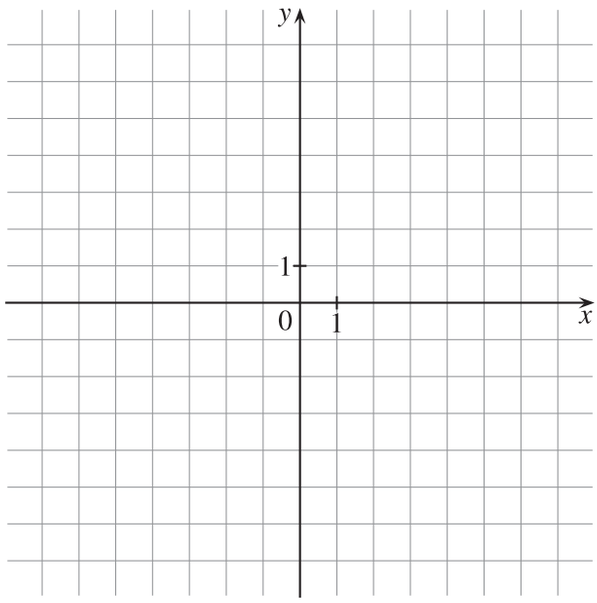
$h(x)=\sqrt{x}-5$; $i(x)=-\sqrt{x+3}+3$.



11.4. Ábrázold a következő függvényeket!

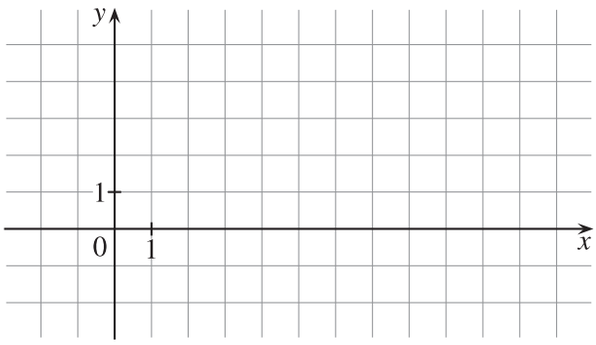
$f(x)=2\sqrt{x}+1$; $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+4}+3$;

$h(x)=-3\sqrt{x}$.



11.5. Az értéktáblázat segítségével ábrázold az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

x	-2	-1	0	1	2
x^3					



Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

Zérushely: .....

Tengelypont: .....

Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Minimumhely: .....

Minimumérték: .....

Maximumhely: .....

Maximumérték: .....

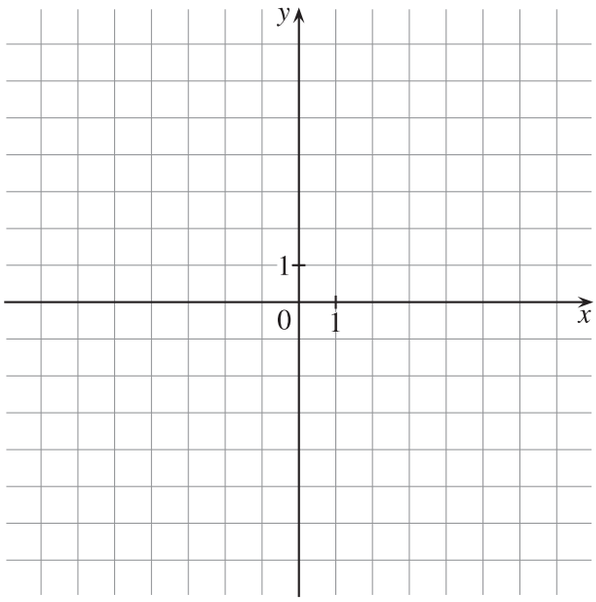
11.6. Ábrázold a következő függvényeket!

$f(x) = (x+4)^3$;

$g(x) = x^3 - 4$;

$h(x) = -(x-5)^3$;

$i(x) = -(x+2)^3 + 5$.



11.7. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

a) Az $f(x) = \sqrt{x+1}$ függvény értelmezési tartománya részhalmaza a nemnegatív valós számoknak.

.

b) Az $f(x) = \sqrt{x-1}$ függvény értelmezési tartománya részhalmaza a nemnegatív valós számoknak.

c) Az $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény grafikonja fél parabola.

d) Az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja parabola.

12. feladatlap

A lineáris törtfüggvények

EMLÉKEZTETŐ

lineáris törtfüggvény: Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ alakú függvényt a lineáris törtfüggvény alapfüggvényének nevezzük.

fordított arányosság: Ha két változó mennyiség összetartozó értékeinek a szorzata (0-tól különböző) állandó, akkor azt mondjuk, hogy a két mennyiség fordítottan arányos.

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 35

FELADATOK

12.1. Döntsd el a következő mennyiségekről, hogy fordított arányban állnak-e egymással!
a) Egy medencét több csappal is feltölthetünk. A csapok száma és a feltöltési idő közötti kapcsolatot a táblázat tartalmazza.

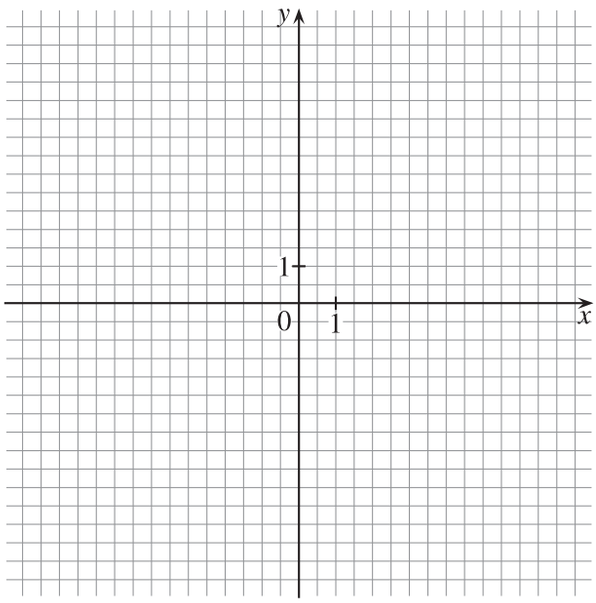
Csapok száma:	1	2	3	4	5
Feltöltés ideje (perc):	136,8	68,4	45,6	34,2	26,8

b) Palackozott üdítőitalt többtagú társaságnak öntünk ki úgy, hogy mindenkinek ugyanannyi jusson.

Kitöltött mennyiség (dl/fő):	3,32	2,49	1,992	1,66	1,245
A társaság létszáma:	3	4	5	6	8

12.2. Az értéktáblázat segítségével ábrázold az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt, és a grafikon alapján írd le különböző tulajdonságait!

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	–1	–2	–3	–4
$\frac{1}{x}$															



Értelmezési tartomány: .....

Értékkészlet: .....

Zérushely: .....

Tengelypont: .....

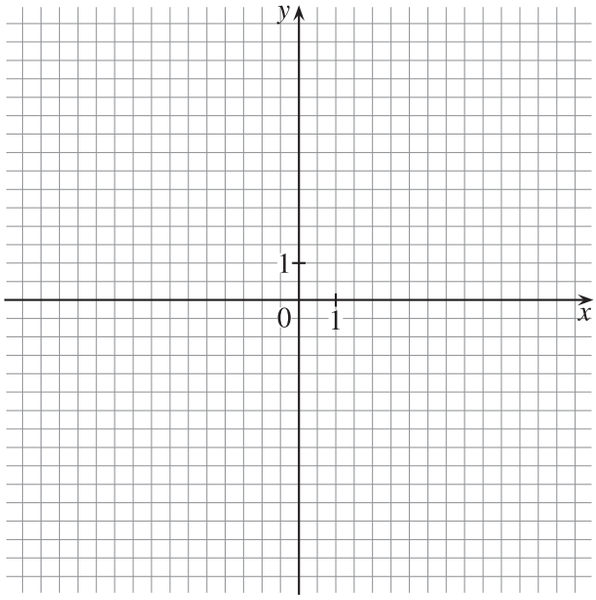
Növekedés: .....

Csökkenés: .....

Szélsőértékek: .....

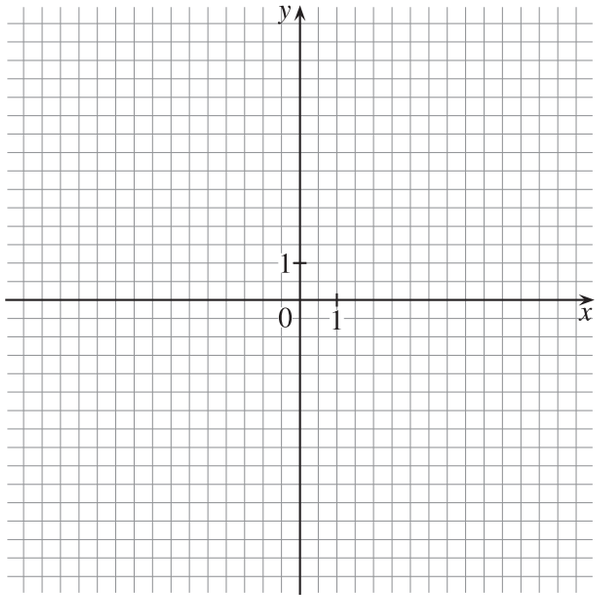
12.3. Ábrázold a következő függvényt!

$$f(x)=\frac{1}{x-2}.$$



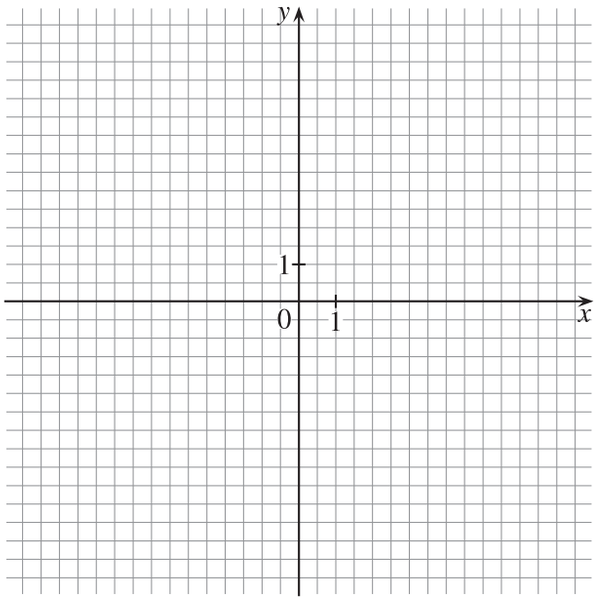
12.4. Ábrázold a következő függvényt!

$$g(x)=\frac{1}{x+1}.$$



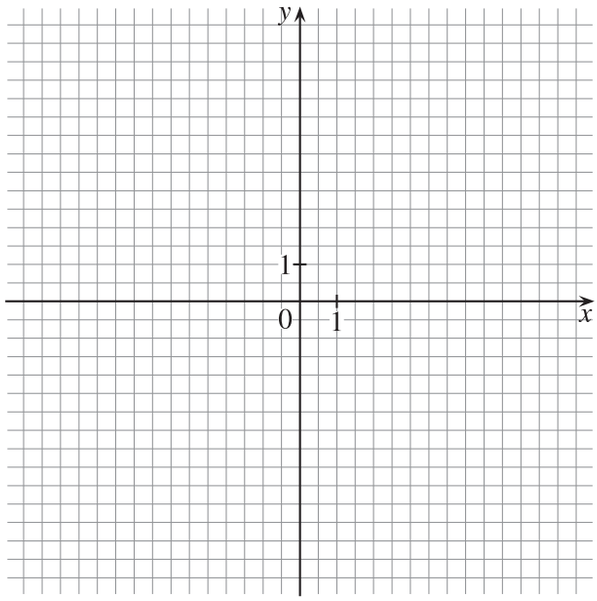
12.5. A transzformációs szabályok segítségével ábrázold a következő függvényt!

$$f(x)=-\frac{1}{x}+1.$$



12.6. A transzformációs szabályok segítségével ábrázold a következő függvényt!

$$g(x)=\frac{4}{x+1}-1.$$



MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 37

13. feladatlap

Oszthatóság

EMLÉKEZTETŐ

osztó: Jelöljön a egy pozitív és b egy nem negatív egész számot. Az a szám a b szám osztója, ha van olyan c pozitív egész szám, amellyel megszorozva a-t, a b számot kapjuk. $b = c \cdot a$. Jelölése: $a \mid b$. (Olvasd: a osztója b-nek.) Ha az a szám **nem osztója** b számnak, akkor annak jelölése: $a \nmid b$. Pl. a $6 \mid 42$ (6 osztója 42-nek), mert létezik a 7 pozitív egész szám, amellyel 6-ot megszorozva 42-t kapunk. Az $5 \nmid 42$ (5 nem osztója 42-nek), mert nem létezik olyan pozitív egész szám, amellyel megszorozva 5-öt, 42-t kapunk.

oszthatósági szabályok: Néhány esetben könnyű eldönteni, hogy egy pozitív egész szám mely számokkal osztható. Ezeket az eseteket az oszthatósági szabályok írják le:

1. Egy szám osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel. Pl. 430 osztható 2-vel, mert a 0 osztható 2-vel.
2. Egy szám osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 4-gyel. Pl. 3456 osztható 4-gyel, mert 56 osztható 4-gyel.
3. Egy szám osztható 8-cal, ha az utolsó három számjegyéből képzett szám osztható 8-cal. Pl. 3696 osztható 8-cal, mert 696 osztható 8-cal.
4. Egy szám osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye osztható 5-tel. Pl. 435 osztható 5-tel, mert az 5 (mint utolsó számjegy) osztható 5-tel. (Egy szám osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik.)
5. Egy szám osztható 25-tel, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 25-tel. Pl. 475 osztható 25-tel, mert a 75 osztható 25-tel.
6. Egy szám osztható 125-tel, ha az utolsó három számjegyéből képzett szám osztható 125-tel. Pl. 4375 osztható 125-tel, mert a 375 osztható 125-tel.
7. Egy szám osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. Pl. 246 osztható 3-mal, mert $2 + 4 + 6 = 12$ osztható 3-mal.
8. Egy szám osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel. Pl. 585 osztható 9-cel, mert $5 + 8 + 5 = 18$ osztható 9-cel.

FELADATOK

13.1. Döntsd el, hogy a felsorolt elemek mely számoknak osztói! Használd az *osztója* és a *nem osztója* jelölést!

$a = 6$; $b = 15$; $c = 21$; $d = 420$;
$e = 78$; $f = 2835$; $g = 660$.

a	b	c	d	osztó / osztandó
$a \mid e$				e
$a \nmid f$				f
				g
				6300

13.2. Döntsd el az alábbi számokról, hogy melyik halmazba tartoznak! A halmazok viszonyáról készíts Venn-diagramot!

4344; 486; 48; 23;
8; 0; 76; 1110.

A := {2-vel osztható számok} = ...

B := {4-gyel osztható számok} = ...

C := {8-cal osztható számok} = ...

Nemnegatív egészek

13.3. Döntsd el az alábbi számokról, hogy melyik halmazba tartoznak! A halmazok viszonyáról készíts Venn-diagramot!

625; 5; 0; 270;
9850; 75; 121.

A := {5-tel osztható számok} = ...

B := {25-tel osztható számok} = ...

C := {125-tel osztható számok} = ...

Nemnegatív egészek

13.4. Döntsd el az alábbi számokról, hogy melyik halmazba tartoznak! A halmazok viszonyáról készíts Venn-diagramot!

4344; 486; 48;
23; 0; 1110.

A := {3-mal osztható számok} = ...

B := {9-cel osztható számok} = ...

Nemnegatív egészek

13.5. Írj x, y és z helyére számjegyeket úgy, hogy

$\overline{23x450}$ osztható legyen 3-mal; $\overline{44325y}$ osztható legyen 4-gyel; $\overline{53028z}$ osztható legyen 6-tal!

x	y	z

13.6. Melyik az a prímszám, amelyikhez 9-et adva prímszámot kapunk? Lehet-e több is? (Számolj a füzetedben!)

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 39

13.7. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz (karikázd be), melyik hamis!

a) A 0-nak az összes pozitív egész szám osztója.

b) Ha a 2 nem osztója egy pozitív egész számnak, akkor annak duplája sem osztható 2-vel.

c) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor annak tízszerese is osztható hárommal.

d) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor 30-cal is osztható.

e) Ha egy 5-tel osztható számhoz 5-tel nem osztható számot adunk, akkor 5-tel osztható számot kapunk.

f) Két 7-tel osztható szám összege osztható 7-tel, de a különbség nem mindig osztható 7-tel.

14. feladatlap

Prímszámok, összetett számok

EMLÉKEZTETŐ

prímszámok: Azokat az 1-nél nagyobb egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztójuk van, prímszámoknak nevezzük. A prímszámnak 2 osztója van: 1 és önmaga. Végtelen sok prímszám létezik.

összetett szám: Azokat az 1-nél nagyobb egész számokat, amelyeknek legalább három osztója van, összetett számoknak nevezzük.

számelmélet alaptétele: Minden összetett szám felbontható prímtényezők szorzatára, és a felbontás sorrendtől eltekintve egyértelmű.

prímtényezős alak: Egy pozitív egész szám prímtényezős alakja olyan szorzat, amelynek minden tényezője prímszám, és azonos tényezők esetén alkalmazzuk a hatvány alakú írásmódot. Pl.: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

FELADATOK

14.1. Írd fel a számok prímtényezős alakját és döntsd el, hogy melyek egyenlők!

a) $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$ ..... ; *b)* $b = (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 11 =$ ..... ;

c) $c = (-2) \cdot (-3) \cdot 6 =$ ..... ; *d)* $d = 1^5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 1^4 =$ ..... ;

e) $e = 30 \cdot 18 =$ ..... ; *f)* $f = (-22)^2 \cdot (-1) \cdot (-2)^3 =$ ..... ;

g) $g = 36 =$ ..... ; *h)* $h = 540 =$ ..... .

14.2. Bontsd prímtényezőkre a következő számokat, és állapítsd meg az osztók számát!

a) $36 =$ ..... ; *b)* $32 =$ ..... ;

c) $1260 =$ ..... ; *d)* $4875 =$ ..... .

14.3. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz (karikázd be), melyik hamis!

a) Két prímszám összege nem lehet prímszám.

b) Két egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 2-vel.

c) Három egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 6-tal.

d) Három egymást követő pozitív egész szám szorzata biztosan nem osztható 12-vel.

e) Létezik két egymást követő páros szám, melyek szorzata osztható 32-vel.

f) 27-nek 3 osztója van.

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 40

15. feladatlap

A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös

EMLÉKEZTETŐ

közös osztó: Két vagy több pozitív egész szám közös osztója az a szám, amely az adott számok mindegyikének osztója.
legnagyobb közös osztó: Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóján a közös osztók közül a legnagyobbat értjük.
Jelölése: $(a; b)$ vagy $(a; b; ...; i)$.
Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját a számok törzstényezős felbontásából a következőképpen határozzuk meg: valamennyi közös törzstényezőt az előforduló legkisebb kitevővel vesszük, és ezeket a hatványokat összeszorozzuk.
Pl. $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 2 \cdot 3^4 \cdot 11) = 2 \cdot 3^2$.
relatív prímek: Ha két pozitív egész számnak egyetlen közös osztója van, az 1, akkor a két számot relatív prímszámnak mondjuk.
Pl. $(15;\ 32) = 1$.
közös többszörös: Két vagy több pozitív egész szám közös többszöröse az a szám, amelynek az adott számok osztói.
legkisebb közös többszörös: Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösén a közös többszörösei közül a legkisebbet értjük.
Jelölése: $[a; b]$ vagy $[a; b; ...; i]$.
Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét a számok törzstényezős felbontásából a következőképpen határozzuk meg:
valamennyi előforduló törzstényezőt az előforduló legnagyobb kitevővel vesszük, és ezeket a hatványokat összeszorozzuk.
Pl. $\left[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 2 \cdot 3^4 \cdot 11\right] = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$.

FELADATOK

15.1. Készítsd el a számok prímtényezős alakját, és határozd meg a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst!

a) $1512 =$ ..... $1656 =$ .....

$(1512;\ 1656) =$ ..... ; $[1512;\ 1656] =$ ..... .

b) $11\ 025 =$ ..... $17325 =$ .....

$(11\ 025;\ 17\ 325) =$ ..... ; $[11\ 025;\ 17\ 325] =$ ..... .

15.2. Egyszerűsítsd az alábbi törteket!

a) $\frac{60}{156} =$ ..... ;

b) $\frac{1485}{594} =$ ..... ;

c) $\frac{1170}{4095} =$ ..... .

15.3. Végezd el a következő összevonásokat!

a) $\frac{5}{6}-\frac{5}{4}+\frac{4}{10}=$ ..... ;

b) $\frac{3}{44}+\frac{1}{12}-\frac{4}{21}=$ ..... ;

c) $\frac{27}{50}-\frac{5}{12}-\frac{2}{45}=$ ..... .

15.4. Kiemeléssel alakítsd szorzattá a következő többtagú kifejezéseket (polinomokat)!

a) $24x+36=$ ..... ;

b) $540x-450=$ ..... ;

c) $165x-231y+99=$ ..... ;

d) $-192x-216y-600=$ ..... .

15.5. Melyik az a legkisebb szám, amely osztható 30-cal és 42-vel?

15.6. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz (karikázd be), melyik hamis!

a) Két különböző prímszám relatív prímszám.

b) Ha egy tört számlálója és nevezője relatív prím, akkor már nem egyszerűsíthető tovább.

c) Ha két szám legkisebb közös többszöröse 23, akkor nem lehetnek relatív prímek.

d) Ha két szám legnagyobb közös osztója 27, akkor nem lehet a legkisebb közös többszörösük 27.

e) Ha két szám közös osztója 6, de ez nem a legnagyobb közös osztó, akkor egyik szám sem lehet 6.

16. feladatlap

Számrendszerek

EMLÉKEZTETŐ

számok helyiértékes számítási rendszere: Minden szám felírható tíz jellel, azáltal, hogy minden jelnek alakiértéket és helyiértéket tulajdonítunk.

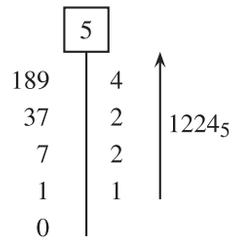
(Pl. A ||||||

számrendszer alapja: Megmutatja, hogy az egész számot hányasával csoportosítjuk; **számrendszer jelölése:** A számrendszer alapját a szám jobb alsó indexeként adjuk meg. A tízes számrendszerben megadott számoknál nem szokás a az alapot feltüntetni. Pl. 234_5, 234_8, $234_{10} = 234$.

átváltás tízes számrendszerbe: A tízestől eltérő számrendszerbeli számot úgy válthatjuk át, hogy a helyiértéken lévő szám alaki értékét megszorozzuk a helyiértéknek az alap megfelelő hatványával, majd az így kapott szorzatokat összeadjuk. Pl. $4021_5 = 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 511$.

átváltás tízes számrendszerből: Egy tízes számrendszerben adott szám tízestől eltérő *r* alapú számrendszerbe való felírásának egyik módszere nagyon hasonlít a prímtényezőkre bontásra. Húzzunk egy függőleges vonalat, majd a bal oldalára írjuk le a számot. Az adott számot elosztjuk az új számrendszer *r* alapjával. Azt, hogy hányszor van meg a számban az alap, a szám alá írjuk, a maradékot pedig a vonal jobb oldalára a szám mellé. A bal oldalon lévő számot hasonló módon ismét elosztjuk az alappal, és az eljárást folytatjuk egészen addig, amíg a bal oldalon nulla nem jelenik meg. Ekkor a szám új számrendszerbeli alakját lentről felfelé olvashatjuk el.

189 átírása 5 alapú számrendszerbe



FELADATOK

16.1. Kati nem tízes alapú számrendszerbeli számokat kezdett átváltani tízes számrendszerbeli számmá. Határozd meg a számok számrendszerbeli alapját! Számold ki a tízes számrendszerbeli értéküket!

a) $2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 =$ ..... ; *b)* $2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 =$ ..... ;

c) $2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 =$ ..... ; *d)* $5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 3 =$ ..... .

16.2. Váltsd át tízes számrendszerbe a következő számokat!

a) $24_5 =$ ..... ; *b)* $13_4 =$ ..... ;

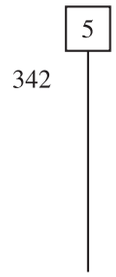
c) $223_5 =$ ..... ; *d)* $123_4 =$ ..... .

16.3. Alakítsd át a tízes alapú számokat 5-ös alapú számrendszerbe!

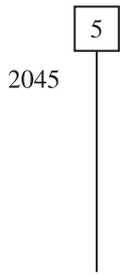
a)



b)



c)



16.4. Számítsd ki a 2 hatványait, és váltsd át tízes számrendszerbe a következő kettes számrendszerbeli számokat!

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1

a) $101_2 =$ ..... ;

b) $100_2 =$ ..... ;

c) $111_2 =$ ..... ;

d) $110_2 =$ ..... .

16.5. Váltsd át tízes számrendszerbe a következő kettes számrendszerbeli számokat!

a) $10111_2 =$ ..... ;

b) $1001101_2 =$ ..... ;

c) $111001_2 =$ ..... ;

d) $11001100_2 =$ ..... .

16.6. Alakítsd át a tízes alapú számokat 2-es alapú számrendszerbe!

a) 9 | 2

b) 19 | 2

c) 28 | 2

16.7. Alakítsd át a tízes alapú számokat 2-es alapú számrendszerbe!

a) 32 | 2

b) 50 | 2

c) 100 | 2

16.8. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz (karikázd be), melyik hamis!

a) A 253 nem lehet 4-es számrendszerbeli szám.

b) A 19 502 lehet 9-es számrendszerben megadott szám.

c) A hármas számrendszerben a számok leírásához négy számjegy szükséges.

d) $101_3 \neq 101_2$.

e) $11_3 = 100_2$.

f) $101_3 \neq 1010_2$.

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 44

17. feladatlap

Egész kitevős hatványok

EMLÉKEZTETŐ

pozitív egész kitevőjű hatványok: Bármely szám első hatványa önmaga. ($a^1 = a$, ahol $a \in \mathbb{R}$.) Egynél nagyobb egész szám kitevőjű számot annyiszor szorozzuk meg önmagával, amennyit a kitevő mutat. ($a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}^{n \text{ db}}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$.) Pl.: $2^1 = 2$; $(-2)^1 = -2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$; $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$.

permanenciaelv: A hatvány fogalmát úgy terjesztjük ki az egész számok körére, hogy a pozitív egész számokra érvényes azonosságok továbbra is érvényben maradjanak.

negatív egész kitevőjű hatvány: Bármely nullától különböző szám negatív egész kitevőjű hatványán, a szám reciprokának ellentett kitevőjű hatványát értjük. ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$). Pl. $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$.

nulla kitevőjű hatvány: Bármely nullától különböző szám nulla kitevőjű hatványa 1. ($a^0 = 1$, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

Pl. $3^0 = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$.

hatványozás azonosságai: Az $a = 0$ csak a pozitív egész kitevőjű hatványok esetén érvényes, és $b \neq 0$, amennyiben b a nevezőben található.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ vagy másképpen $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;
4. $a^n : b^n = (a : b)^n$ vagy másképpen $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$;
5. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} = \left(a^n\right)^m$.

FELADATOK

17.1. Számítsd ki a következő számokat!

a) $2 \cdot 10^{-2} + 12 \cdot 10^{-3} + 375 \cdot 10^{-4} =$ .....;

b) $4 \cdot 2^{-1} + 20 \cdot 2^{-2} + 24 \cdot 2^{-3} =$ .....;

c) $1{,}8 \cdot 3^{-1} + 1{,}8 \cdot 3^{-2} - 5{,}4 \cdot 3^{-3} =$ .....

17.2. Hozd egyszerűbb alakúra a következő kifejezéseket!

a) $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{11} \cdot 2^{-3} \cdot 3^4 \cdot 5^{-4} =$ .....;

b) $a^{-4} \cdot b^5 \cdot c^7 \cdot a^6 \cdot b^{11} \cdot c^5 \cdot a^{-9} \cdot b^{-2} \cdot c^{-12} =$ .....;

c) $x^{20} \cdot y \cdot x^4 \cdot z^{-6} \cdot x^{-13} \cdot y^{-4} \cdot z^3 \cdot x^{10} \cdot z^{-10} =$ .....

17.3. Hozd egyszerűbb alakúra a következő kifejezéseket!

a) $\dfrac{2^8 \cdot 3^{-5} \cdot 5^{11}}{2^{-3} \cdot 3^{-6} \cdot 5^6} =$ ..... ;

b) $\dfrac{a^4 \cdot b^{-6} \cdot c^{-3}}{a^{-7} \cdot b^{-2} \cdot c^5} =$ ..... ;

c) $\dfrac{x^{-3} \cdot z^7}{x^{-3} \cdot y^{-6} \cdot z^4} =$ ..... .

17.4. Írd fel a következő számokat 2 hatványaként!

a) $\dfrac{16^3 \cdot 8^{-2} \cdot 2^6 \cdot 4^{-3}}{32^3 \cdot 64^{-2}} =$ ..... ;

b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^5 \cdot 16^2 \cdot \dfrac{1}{8^{-4}} \cdot \dfrac{2}{128} =$ ..... .

17.5. Prímtényezős felbontás segítségével hozd egyszerűbb alakra!

a) $\dfrac{48^3 \cdot 50^4 \cdot 36^2}{96^2 \cdot 60^2 \cdot 75^3} =$ ..... ;

b) $\dfrac{72^5 \cdot 90^3 \cdot 328^6}{(70 \cdot 63)^3 \cdot 24^8} =$ ..... .

17.6. Töltsd ki a megfelelő kitevőket!

a) $16^9 = 8^{\square} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\square} = 64^{\square} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\square}$; *b)* $27^8 = 3^{\square} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\square} = 81^{\square} = \left(\dfrac{1}{729}\right)^{\square}$.

17.7. Számológép használata nélkül döntsd el, melyik nagyobb!

a) 10^{30} vagy 20^{20}; *b)* 3^{15} vagy 5^{10}.

18. feladatlap

Számok normálalakja

EMLÉKEZTETŐ

számok normálalakja: A $q \cdot 10^k$ alakú számot a szám normálalakjának mondjuk, ha $1 \le |q| < 10$ és k egész szám.
mantissza: q a normálalakú szám mantisszája.

FELADATOK

18.1. Fejezd ki normálalakban a következő számokat!

a) 6 240 000 000 = ... ; *b)* –5 430 000 = ... ;

c) 1000 = ... ; *d)* 0,001 23 = ... ;

e) –0,000 034 = ... ; *f)* 0,001 = ... ;

g) $\dfrac{1}{80} =$ ..... .

18.2. A normálalakú számokat írd át a tízes számrendszerbeli alakba!

a) $2,47\cdot10^{3} =$ ..... ; *b)* $10^{5} =$ ..... ;

c) $-5,6\cdot10^{4} =$ ..... ; *d)* $3,42\cdot10^{-5} =$ ..... ;

e) $-10^{-3} =$ ..... ; *f)* $-1,66\cdot10^{-8} =$ ..... .

18.3. Add meg a következő szorzatok eredményét normálalakban!

a) $2,4\cdot10^{6}\cdot3\cdot10^{-3} =$ ..... ; *b)* $\left(-2\cdot10^{-4}\right)\cdot1,35\cdot10^{-3} =$ ..... ;

c) $2,4\cdot10^{6}\cdot3,1\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{4} =$ ..... ; *d)* $-10^{3}\cdot\left(-1,25\cdot10^{8}\right)\cdot\left(-5\right)\cdot10^{4} =$ ..... .

18.4. Alakítsd normálalakúra a következő számokat!

a) $247\cdot10^{3} =$ ..... ; *b)* $0,0234\cdot10^{-3} =$ ..... ;

c) $54,7\cdot10^{-4} =$ ..... ; *d)* $-0,134\cdot10^{7} =$ ..... .

18.5. Add meg a következő hányadosok eredményét normálalakban!

a) $\dfrac{4,84\cdot10^{5}}{4\cdot10^{2}} =$ ..... ; *b)* $\dfrac{4,84\cdot10^{5}}{4\cdot10^{-4}} =$ ..... ;

c) $-\dfrac{7,26\cdot10^{-8}}{1,21\cdot10^{2}} =$ ..... ; *d)* $-\dfrac{1,35\cdot10^{-5}}{5\cdot10^{-2}} =$ ..... .

18.6. Végezd el a műveleteket, és add meg az eredményt normálalakban!

a) $\dfrac{8\cdot10^{-4}\cdot4,5\cdot10^{9}}{1,2\cdot10^{-6}\cdot10^{5}} =$ ..... ;

b) $\dfrac{2,25\cdot10^{-3}\cdot8,82\cdot10^{14}}{2,1\cdot10^{9}\cdot1,5\cdot10^{5}} =$ ..... .

18.7. Alakítsd át a következő számokat úgy, hogy mindegyikben a tízhatvány 10^3 legyen!

a) $2,33\cdot10^{6} =$ ..... ;

b) $2,34\cdot10^{2} =$ ..... ;

c) $-2,35\cdot10^{-1} =$ ..... ;

d) $-23,6 =$ ..... .

18.8. A prefixumtáblázat segítségével váltsd át méterbe és alakítsd át normálalakúvá a következő mennyiségeket!

a) 200 nm = ... ;

b) 45 mm = ... ;

c) 260 pm = ... ;

d) 76 Gm = ... ;

e) 800 Mm = ... ;

f) 5,63 Tm = ...

Előtag (prefixum)	Jele	Decimális szorzó
tera-	T	10^{12}
giga-	G	10^{9}
mega-	M	10^{6}
kilo-	k	10^{3}
hekto-	h	10^{1}
deka-	da	10^{2}
deci-	d	10^{-1}
centi-	c	10^{-2}
milli-	m	10^{-3}
mikro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
piko-	p	10^{-12}
femto-	f	10^{-15}
atto-	a	10^{-18}

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 48

19. feladatlap

Polinomok

EMLÉKEZTETŐ

algebrai kifejezés: Algebrai kifejezést kapunk, ha benne számokkal és változókkal csak az összeadást, kivonást, szorzást, osztást, hatványozást és gyökvonást véges számban alkalmazzuk. Pl.: $\frac{ax+b}{ay-b}$; $x^2-2xy+y^2$; $\sqrt{3x^2-\frac{1}{2}x}$.

egytagú algebrai kifejezés: Olyan algebrai kifejezés, amelyben a számokra és betűkre csak a szorzást és a pozitív kitevőjű hatványozást alkalmazzuk.

rendezett egytagú algebrai kifejezés: A rendezett egytagban balról jobbra haladva egy szám és különböző változók (betűk) valamilyen hatványai szerepelnek. Pl. rendezett egytag: $2\cdot x^2\cdot y$; nem rendezett egytag: $x^2\cdot 2\cdot y$; $x^2\cdot y\cdot 2$.

együttható: A rendezett egytagban szereplő számot az egytag együtthatójának nevezzük. Pl. $\frac{1}{4}x^2$ együtthatója $\frac{1}{4}$; x^2 együtthatója 1; a $-x^2$ együtthatója -1.

egynemű egytagok: Két tagot egyneműnek mondunk, ha legfeljebb az együtthatókban különböznek. Pl. az $\frac{1}{3}ax^2$, ax^2 és $-3ax^2$ kifejezések egyneműek.

többtagú algebrai kifejezések: Az egytagú kifejezések összege vagy különbsége. Pl. kéttagú kifejezés: $4a+2$; háromtagú kifejezés: $5xy+2ab-ax^2$.

egész kifejezés: Olyan egytagú kifejezés, amelynek nevezőjében nincs változó.

polinom: Rendezett többtagú egész kifejezés. Pl. $3xy+\frac{5}{2}ab^2+0,23$.

egytagú kifejezés fokszáma: A kifejezésben szereplő betűk fokszámának összegét a tag fokszámának nevezzük. Pl. a $-5ab^2c^3$ egytagú kifejezés fokszáma 6 (az a kitevője 1). A 123 egytagú kifejezés fokszáma 0, mert nem tartalmaz betűket.

polinom fokszáma: A polinomban szereplő egytagok fokszámai közül a legnagyobbat a polinom fokszámának tekintjük. Pl. $-ax^2 + 5xy + 2ab + 1$ polinom, melynek négy változója a, b, x és y harmadokú, mert a tagjainak fokszáma közül az $1 + 2 = 3$ a legnagyobb. (A tagok fokszáma sorrendben: 3, 2, 2, 0.)

FELADATOK

19.1. Rendezd a következő egytagokat!

a) $2x^2 5y = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *b)* $x^3y^2 7xy = \ldots\ldots\ldots\ldots$; *c)* $2a3b2ab = \ldots\ldots\ldots$;

d) $y^3 4x^2 5a^2(-2) = \ldots\ldots\ldots$; *e)* $x^3b^2y^2(-x)^2(-3) = \ldots\ldots\ldots$.

19.2. Állapítsd meg a következő polinomok tagjainak fokszámát, majd határozd meg a polinomok fokszámát is!

a) $p(x) = 3x^3y^3 - 4x^2y + 5xy^2$;

b) $q(x) = -a^2x^2y^2 - 3ax^5 + 5x^6y^3$;

c) $r(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 5$;

d) $s(x) = -x^7 - 4x^2 + 5x - 1$.

19.3. Az alábbi két polinomból írd a táblázatba a megfelelő tagot!

	$p(x) = 2x^3y + 4x^2y + xy + 5$	$p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x$
Konstans tag		
Elsőfokú tag		
Másodfokú tag		
Harmadfokú tag		

MatFgy-09-02:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:02 Page 49

19.4. A leírás alapján azonosítsd az alábbi kifejezésekben a meghatározott kifejezéseket!

$\left(34xy^2 - a^3b^2c\right)\left(34xy^2 - a^3b^2c\right) + 5d\left(34xy^2 - a^3b^2c\right)xyz - a^3b^2c$

a) Mi az első tag második tényezője első tagjának második tényezője?

b) Mi a második tag harmadik tényezője második tagjának második tényezője?

c) Mi az első tag első tényezője második tagjának együtthatója?

19.5. Az alábbi kifejezések közül válogasd ki a polinomokat!

x^2; 2^x; $\frac{1}{x}$; $\frac{x}{2}$; $\frac{3a^2b}{5}$; $x^2 - 2x + 3$; $\frac{x+2}{x-2}$; 5; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Polinomok: .....

.....

.....

19.6. Adottak az x^2; $-2x$; a^4b^3; $x^2 + 2x$; $\frac{1}{3}y^3 - 3y$; $a^2b + ab^2 + b^3$; $x^3 + x^2 + x + 1$; $-\frac{2}{3}x^3 + x$; $-4a^2b + 5ab$; $\frac{a}{b}$ polinomok.

a) Melyek az egyváltozós polinomok? .....;

.....;

b) Melyek a többváltozós polinomok?.....;

c) Melyek az x változóra nézve elsőfokú polinomok?.....;

d) Melyek az x változóra nézve másodfokú polinomok?.....;

e) Melyek az egytagúak? .....;

f) Add meg az egytagúak együtthatóit! ..... .

20. feladatlap

Polinomok szorzása

EMLÉKEZTETŐ

egytagok szorzata: Egytagok szorzata egytag. A szorzat együtthatója a tényezők együtthatójának szorzata. Az egytagban szereplő közös alapú hatványokat összeszorozzuk, a különböző alapú hatványok szorzatát csak jelöljük. Pl. $\left(2x^2y^3\right)\cdot\left(3x^3z\right) = 6x^5y^3z$.

többtag szorzása többtaggal: Többtagot többtaggal úgy szorzunk, hogy az egyik többtag minden tagját megszorozzuk a másik többtag minden tagjával, és a kapott szorzatokat összevonjuk.

FELADATOK

20.1. Bontsd fel a zárójeleket, és vond össze az egynemű tagokat!

a) $\left(23x^2-42x+31\right)-\left(-13x^2-5x+1\right)+\left(6x^2-x-25\right)=$ .....

.....

.....;

b) $2\left(3x^2-4x+6\right)+3\left(-20x^2-x+7\right)-5\left(-x^2+3x-11\right)=$ .....

.....

.....;

c) $-\frac{1}{2}\left(4x^2-2x-3\right)+\frac{1}{3}\left(-6x^2-x+2\right)=$ .....

.....

.....;

d) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^2-3x-4\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^2-2x+6\right)=$ .....

.....;

.....

20.2. Bontsd fel a zárójeleket, és vond össze az egynemű tagokat!

a) $x\left(x^3-10x^2+4x-1\right)-x^2\left(4x^2-3x+2\right)=$ .....

.....;

b) $-2x\left(2x^3-3x^2-3x-2\right)-x^3\left(4x^2-3x+3\right)=$ .....

.....;

c) $-3x\left(x^3-x^2+2x+4\right)-2x^2\left(-8x^3-3x+2\right)=$ .....

.....;

d) $-5x\left(-6x^3+10x^2+10x+1\right)-5x^2\left(-x^2+4x-2\right)=$ .....

.....

.....

20.3. Végezd el a következő szorzásokat, és vond össze az egynemű tagokat!

a) $(x+2)(3x-4)+(3-x)(2-2x)=$ .....

.....;

b) $(2x-5)(-x+4)-(2x+6)(3x+2)=$ .....

.....;

c) $-2(2x-5)(2x+4)-3(6x+2)(5x+3)=$ .....

.....;

d) $-5(3x-1)(-3x+2)-4(x-1)(3x-2)=$ .....

..... .

20.4. Végezd el a következő szorzásokat, és vond össze az egynemű tagokat!

a) $(3x+2)\left(3x^2+2x-4\right)+\left(x^2-7x-3\right)(-2x-1)=$ .....

.....;

b) $(8x-2)\left(-2x^2-6x+3\right)-\left(x^2+2x+6\right)(2x+12)=$ .....

.....;

c) $-2\left(5x^2-2x-5\right)(7x-3)-3(5x-2)\left(5x^2-5x+3\right)=$ .....

..... .

21. feladatlap

Nevezetes szorzatok

EMLÉKEZTETŐ

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$: Két tag összegének és ugyanazon két tag különbségének a szorzata a két tag négyzetének a különbségével egyenlő.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$: **Két tag összegének a négyzete:** az első tag négyzetéhez hozzáadjuk az első és a második tag kétszeres szorzatát és a második tag négyzetét.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$: **Két tag különbségének a négyzete:** az első tag négyzetből levonjuk az első és a második tag kétszeres szorzatát és hozzáadjuk a második tag négyzetét.

Két tag összegének és különbségének köbe: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

FELADATOK

21.1. A megfelelő nevezetes szorzat alkalmazásával alakítsd többtagú kifejezéssé a hatványokat!

a) $(x+1)^2=$ .....; *b)* $(u-2)^2=$ .....;

c) $(a+3)^2=$ .....; *d)* $(4-y)^2=$ .....;

e) $(x+y)^2 =$ ..... ; *f)* $(u-v)^2 =$ ..... .

21.2. A megfelelő nevezetes szorzat alkalmazásával alakítsd többtagú kifejezéssé a hatványokat!

a) $(2x+5)^2 =$ ..... ; *b)* $(3u-6)^2 =$ ..... ;

c) $\left(\frac{2}{3}a+3\right)^2 =$ ..... ; *d)* $\left(\frac{4}{5}-5y\right)^2 =$ ..... .

21.3. A megfelelő nevezetes szorzat alkalmazásával alakítsd többtagú kifejezéssé a hatványokat!

a) $(2x+3y)^2 =$ ..... ; *b)* $(3u-4v)^2 =$ ..... ;

c) $(2a+7by)^2 =$ ..... ; *d)* $\left(\frac{4}{7}ax-\frac{5}{8}by\right)^2 =$ ..... .

21.4. A megfelelő nevezetes szorzat alkalmazásával alakítsd többtagú kifejezéssé a hatványokat!

a) $(x-1)(x+1) =$ ..... ; *b)* $(u-2)(u+2) =$ ..... ;

c) $(3+y)(3-y) =$ ..... ; *d)* $(u+v)(u-v) =$ ..... .

21.5. A megfelelő nevezetes szorzat alkalmazásával alakítsd többtagú kifejezéssé a hatványokat!

a) $(2x+y)(2x-y) =$ ..... ;

b) $\left(\frac{2}{3}u+v\right)\left(\frac{2}{3}u-v\right) =$ ..... ;

c) $(4x+5y)(4x-5y) =$ ..... ;

d) $\left(\frac{1}{2}u+3v\right)\left(\frac{1}{2}u-3v\right) =$ ..... .

21.6. Hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a) $(a+b)^2-(a-b)^2-4ab=$ ..... ;

b) $(a+b)^2+(a-b)^2-2(a+b)(a-b)=$ ..... ;

c) $(a-2b)^2-(a-3b)(a+3b)=$ ..... ;

d) $(2a+b)^2-2(a+b)^2=$ ..... .

21.7. A megfelelő nevezetes szorzat alkalmazásával alakítsd többtagú kifejezéssé a hatványokat!

a) $(x+1)^3=$ ..... ; *b)* $(y-2)^3=$ ..... ;

c) $(x+y)^3=$ ..... ; *d)* $(3-y)^3=$ ..... ;

e) $(ab+5)^3=$ ..... ; *f)* $(6-xy)^3=$ ..... .

21.8. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz (karikázd be), melyik hamis!

a) Az $(a+b)^2$ szorzat kéttagú kifejezéssé alakítható át.

b) Az $(a-b)^2$ szorzat háromtagú kifejezéssé alakítható át.

c) Az $(a-b)(a+b)$ kifejezés azonos az $(a-b)^2$ kifejezéssel.

d) Az $(a-b)(a+b)$ szorzat kéttagú kifejezéssé alakítható át.

e) Az $(a+b)^2$ és $(a-b)^2$ kifejezések átalakítása után az a^2 és b^2 tagok előjele mindig pozitív.

f) Az $(a+b)^2$ és $(a-b)^2$ kifejezések átalakítása után a $2ab$ tagok előjele mindig pozitív.

22. feladatlap

Polinomok tényezőkre bontása

EMLÉKEZTETŐ

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$. $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

kéttagú polinom szorzattá alakítása: Amennyiben szorzattá alakítható a kifejezés, úgy alapvetően két módszerrel érdemes próbálkozni: a közös tényezők kiemelésével, és/vagy az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonossággal.

háromtagú polinom szorzattá alakítása: Általában kiemeléssel és/vagy az $a^2\mp 2ab+b^2=(a\mp b)^2$ azonosság alkalmazása a célravezető.

négytagú polinom szorzattá alakítása: A kiemelésen kívül sok lehetőség adódik. Az egyik említésre méltó a csoportosítva kiemelés. Pl. $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$.

MatFgy-09-03:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:04 Page 54

FELADATOK

22.1. Kiemeléssel alakítsd szorzattá a következő kéttagú polinomokat! (Vigyázz! Kiemeléskor a zárójelben pontosan ugyanannyi tagnak kell szerepelnie, mint az eredeti kifejezésben!)

a) $2x^2 + 6x =$ ..... ; *b)* $x^3y + 5x^2y =$ ..... ;

c) $3x^2y + 3xy =$ ..... ; *d)* $12y + 24y^2 =$ ..... ;

e) $-x^2 - 2 =$ ..... ; *f)* $x(2-a) - 2(2-a) =$ ..... ;

g) $3x(x+y) + 4y(x+y) =$ ..... .

22.2. Csoportosítva kiemeléssel alakítsd szorzattá a következő polinomokat!

a) $2a + ax + 2b + bx =$ ..... ;

b) $ax - 3a + bx - 3b =$ ..... ;

c) $5x - 25 + ax - 5a =$ ..... ;

d) $x^2 - 3x - yx + 3y =$ ..... ;

e) $4x + 12 - bx - 3b =$ ..... ;

f) $5x^3 - 10x^2y - yx + 2y^2 =$ ..... .

22.3. Az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosság alkalmazásával alakítsd szorzattá a következő kéttagú polinomokat!

a) $x^2 - y^2 =$ ..... ; *b)* $a^2 - 1 =$ ..... ;

c) $x^2 - 4 =$ ..... ; *d)* $9 - a^2 =$ ..... ;

e) $4x^2 - y^2 =$ ..... ; *f)* $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{25}y^2 =$ ..... ;

g) $\frac{1}{81}x^2 - 64 =$ ..... ; *h)* $4a^4x^2 - b^6y^4 =$ ..... .

22.4. Az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosság alkalmazásával alakítsd szorzattá a következő kéttagú polinomokat!

a) $(x+2)^2 - 9^2 =$ ..... ;

b) $x^2 - (x-2)^2 =$ ..... ;

c) $(2x-3y)^2 - 9y^2 =$ ..... ;

d) $(2x-1)^2 - (x+3)^2 =$ ..... .

22.5. Döntsd el, hogy a következő kifejezések közül melyik alakítható szorzattá! Amennyiben lehetséges, végezd el a szorzattá alakítást!

a) $x^2 + 4 =$ ..... ; *b)* $x^2 - 4 =$ ..... ;

c) $x^2 - 9 =$ ..... ; *d)* $2x^2 + 4 =$ ..... .

22.6. Kiemelés és az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosság alkalmazásával alakítsd szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $2x^2 - 18 =$ ..... ; *b)* $ax^2 - 25a =$ ..... ;

c) $-3a^3 + 12a =$ ..... ; *d)* $-a^2x^2 + \frac{x^2}{4} =$ ..... ;

e) $\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{12} =$ ..... ; *f)* $-\frac{5}{16}x^3 + 20x =$ ..... .

22.7. Az $a^2 \mp 2ab + b^2 = (a \mp b)^2$ azonosság alkalmazásával alakítsd szorzattá a következő háromtagú polinomokat!

a) $x^2 + 2x + 1 =$ ..... ; *b)* $a^2 - 4a + 4 =$ ..... ;

c) $x^2 + 6x + 9 =$ ..... ; *d)* $16 - 8a + a^2 =$ ..... ;

e) $4x^2 + 4xy + y^2 =$ ..... ; *f)* $4x^2 + 4xy^2 + y^4 =$ ..... .

22.8. Kiemeléssel és az $a^2 \mp 2ab + b^2 = (a \mp b)^2$ azonosság alkalmazásával alakítsd szorzattá a következő háromtagú polinomokat!

a) $2a^2 - 12a + 18 =$ ..... ; *b)* $3ba^2 - 24ba + 48b =$ ..... .

22.9. Az $a^3 \mp b^3 = (a \mp b)\left(a^2 \pm ab + b^2\right)$ azonosságok alkalmazásával alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $x^3 - 8 =$ ……; *b)* $x^3 + 27 =$ ……;

c) $125 - x^3 =$ ……; *d)* $64 + x^3 =$ …… .

23. feladatlap

Algebrai törtek

EMLÉKEZTETŐ

algebrai tört: Két polinom hányadosát algebrai törtnek nevezzük, ha a tört nevezője legalább elsőfokú polinom. Pl. $\frac{3x^2 + ab - x}{3x}$; $\frac{2}{x}$; $\frac{x^2 - 1}{1 + x^2}$.

FELADATOK

23.1. Egyszerűsítsd az alábbi algebrai törteket! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\frac{6a^2b}{9a^4} =$ ……; *b)* $\frac{66a^2x^5}{54abx^3} =$ ……;

c) $\frac{36a^3b^2x}{62ab^2x^3} =$ ……; *d)* $\frac{2(a-2)^2}{a(a-2)^2} =$ …… .

23.2. Alakítsd szorzattá az algebrai törtek számlálóit és nevezőit, majd egyszerűsítsd a törteket! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\frac{2x + 2y}{3x + 3y} =$ ……; *b)* $\frac{ay - ax}{bx - by} =$ ……;

c) $\frac{x^2 - 25}{x + 5} =$ ……; *d)* $\frac{49 - y^2}{7 - y} =$ …… .

23.3. Alakítsd szorzattá az algebrai törtek számlálóit és nevezőit, majd egyszerűsítsd a törteket! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} =$ ……; *b)* $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} =$ ……;

c) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} =$ ……; *d)* $\frac{2x^2 + 20x + 50}{3x^2 + 15x} =$ …… .

23.4. Hozd közös nevezőre az alábbi algebrai törteket! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{2} =$ ……; *b)* $\frac{2}{a^3} - \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a} =$ ……;

c) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} =$ ……; *d)* $\frac{2}{x+1} + \frac{2}{1-x} =$ …… .

23.5. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+3}=$ ..... ;

b) $\dfrac{5x^2-20}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{4x+8}{10x-20}=$ ..... .

23.6. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\dfrac{3x-2}{9x^2-12x+4}:\dfrac{3x+2}{9x^2-4}=$ ..... ;

b) $\dfrac{4x^2+20x+25}{4x^2-25}:\dfrac{2x+5}{2x-5}=$ ..... .

Egyenletek, egyenlőtlenségek

24. feladatlap

Egyenlet grafikus megoldása

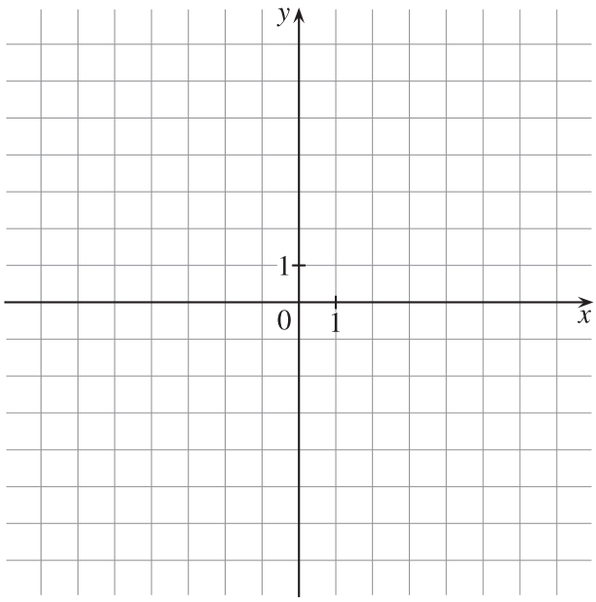
EMLÉKEZTETŐ

egyenlet grafikus megoldásának módszere: Az egyenlet mindkét oldalát a változó egy-egy függvényeként fogjuk fel. A függvényeket közös koordináta-rendszerben ábrázolva leolvassuk a grafikonok metszéspontjához tartozó változóértékeket.

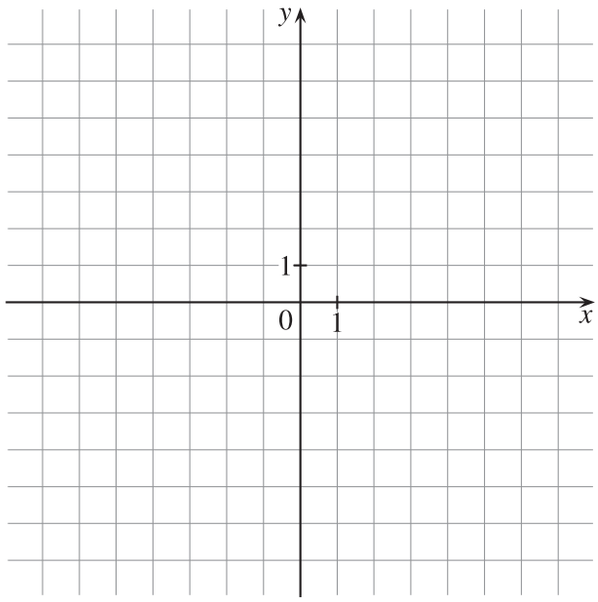
FELADATOK

24.1. Grafikus úton keresd meg a következő egyenletek megoldáshalmazát!

a) $2x-2=7-x$;

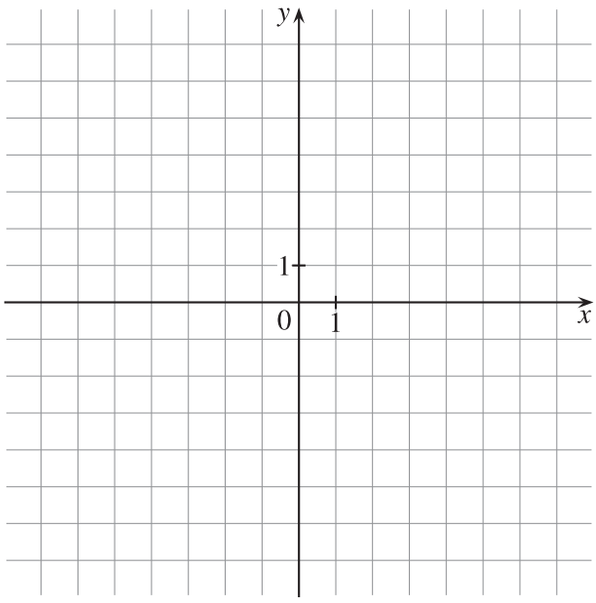


b) $2x-4=-3x+1$;

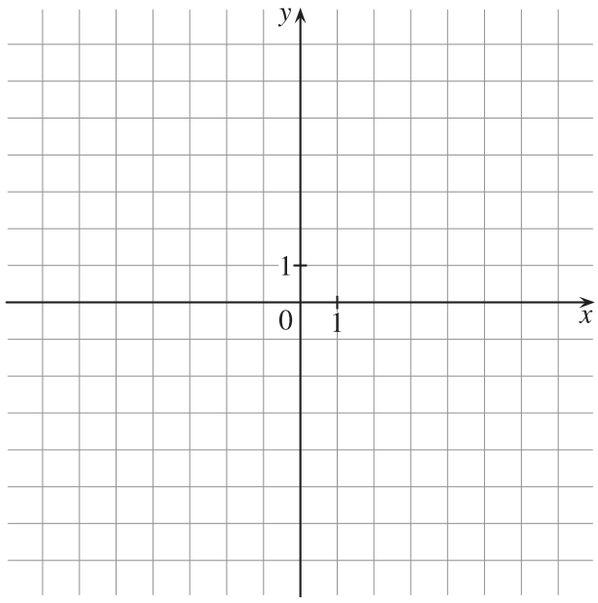


MatFgy-09-03:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:04 Page 58

c)

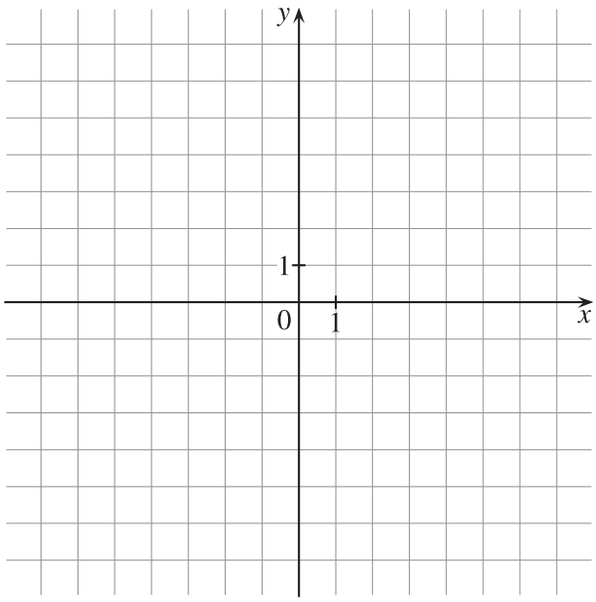


d)

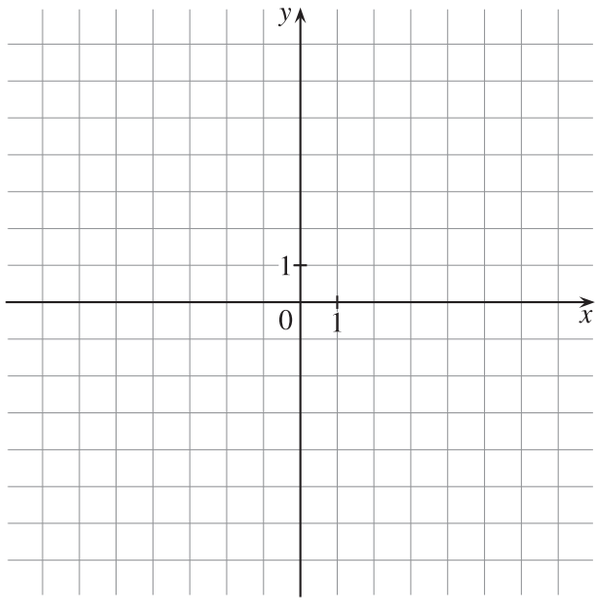


24.2. Grafikus úton keresd meg a következő egyenletek megoldáshalmazát!

a) $(x+2)^2 = -x$;

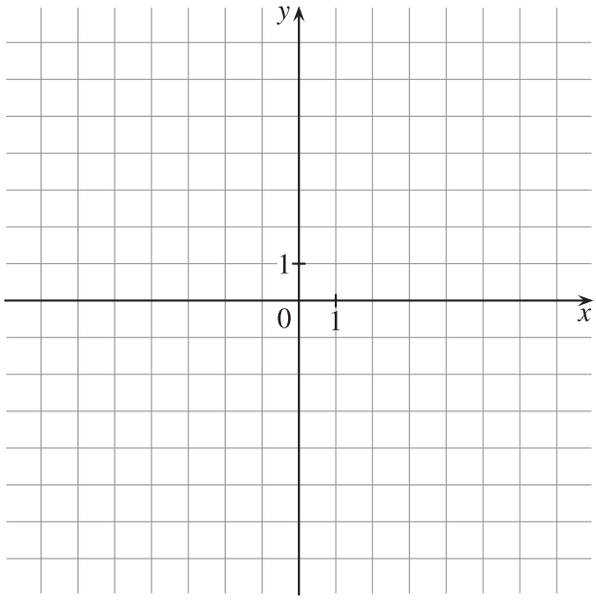


b) $(x-3)^2 - 1 = 3$.

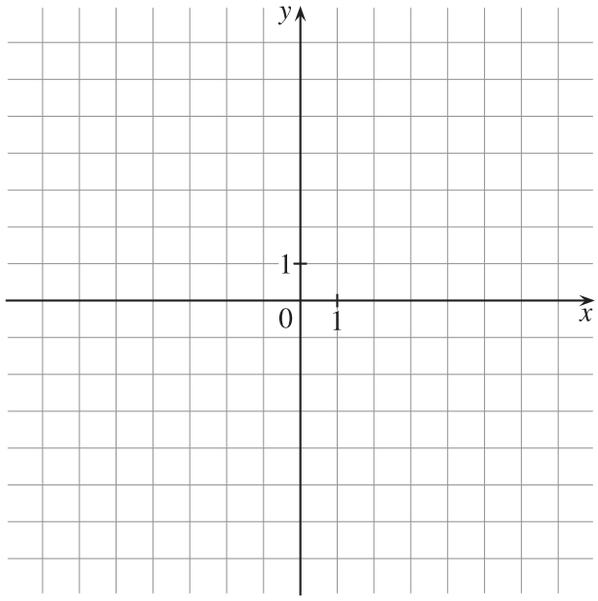


24.3. Grafikus úton keresd meg a következő egyenletek megoldáshalmazát!

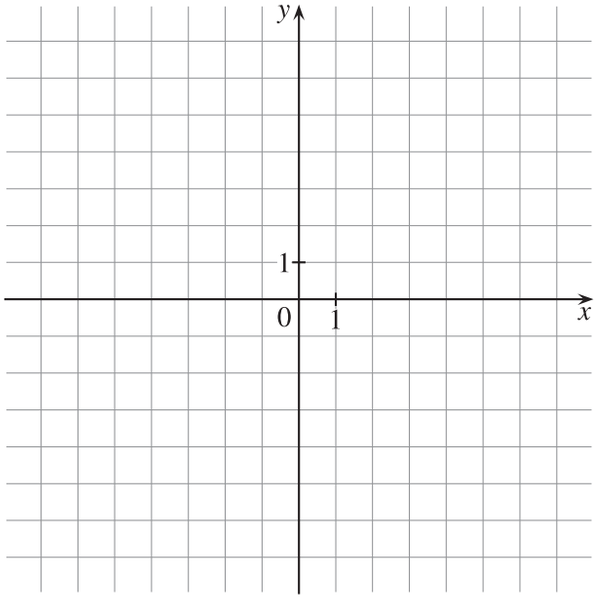
a) $|x| = 3$;



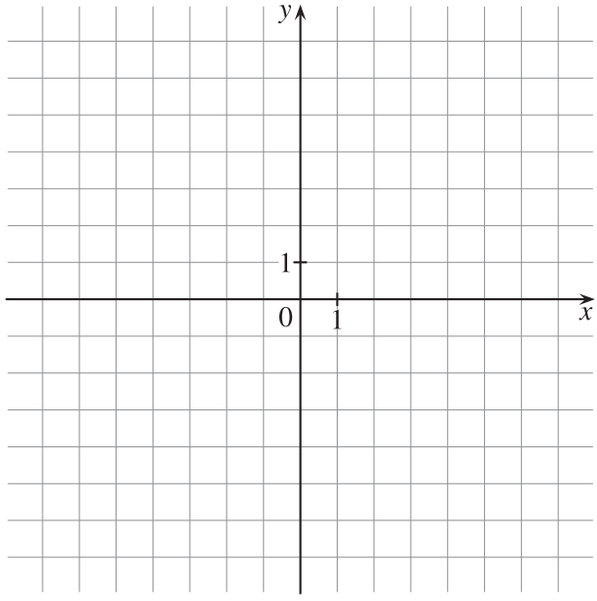
b) $-|x| = x + 3$;



c) $|x - 2| + 1 = x + 1$;

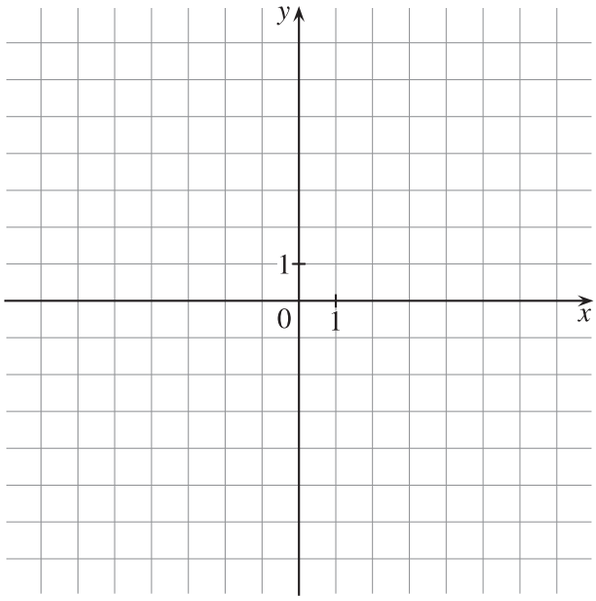


d) $|x + 2| + 2 = x + 4$.

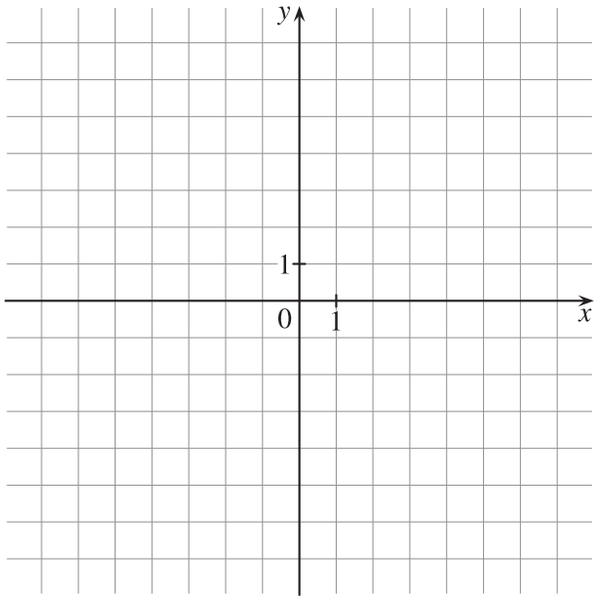


24.4. Grafikus úton keresd meg a következő egyenletek megoldáshalmazát!

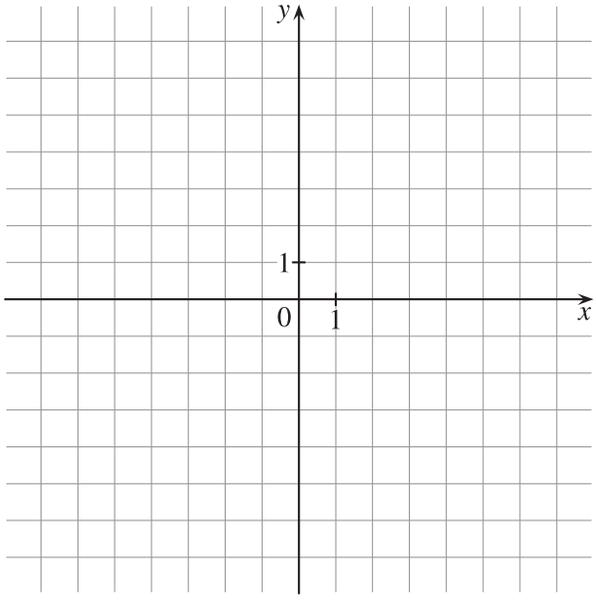
a) $(x-2)^2 = -(x-2)^2 + 2;$



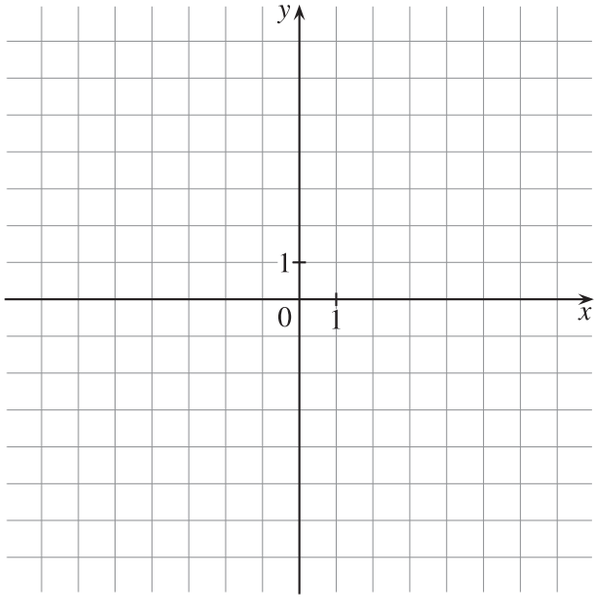
b) $(x+3)^2 - 1 = (x+1)^2 - 1;$



c) $-(x+1)^2 + 4 = (x-2)^2 - 1;$



d) $-(x+2)^2 + 4 = (x+1)^2 - 1.$



MatFgy-09-03:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:04 Page 61

25. feladatlap

Egyenlet megoldása értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálatával

EMLÉKEZTETŐ

értelmezési tartomány vizsgálata: Az egyenlet algebrai megoldása előtt érdemes az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartományát megkeresni, mert az egyenlet csak akkor oldható meg, ha a kifejezések értelmezési tartományainak van közös része. Ha nincs közös rész, akkor az egyenlet biztosan nem oldható meg. Pl. a $\sqrt{x-1}-\sqrt{-x}=0$ egyenlet biztosan nem oldható meg, hiszen $\sqrt{x-1}$ értelmezhető, ha $x\geq 1$, és $\sqrt{-x}$ értelmezhető, ha $x\leq 0$. A két feltétel egyszerre soha nem teljesülhet.
értékkészlet vizsgálata: Az egyenletmegoldást sok esetben leegyszerűsíti, ha az egyenletben szereplő kifejezések értékkészletét ellenőrizzük, hiszen az egyenlet csak akkor oldható meg, ha a kifejezések értékkészleteinek van közös része. Pl. $\sqrt{x}=-2$ egyenletnek biztosan nincs megoldása, mert a négyzetgyökfüggvény csak nemnegatív értéket vehet fel, így soha nem lehet –2.

FELADATOK

25.1. Az egyenletek értékkészletének vizsgálatával állapítsd meg, hogy melyik egyenlet oldható meg! Jelöld *M*-mel a megoldható és *N*-nel a nem megoldható feladatot! Amennyiben az egyenlet megoldható, keresd meg a megoldásokat is! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\sqrt{x-2}=-2;$

b) $\sqrt{x+2}=0;$

c) $\sqrt{x-2}+4=0;$

d) $\sqrt{x}=-9;$

e) $|x+3|=-1;$

f) $|x-1|=0.$

25.2. Az egyenletek értékkészletének vizsgálatával állapítsd meg, hogy melyik egyenlet oldható meg! Jelöld *M*-mel a megoldható és *N*-nel a nem megoldható feladatot! Amennyiben az egyenlet megoldható, keresd meg a megoldásokat is! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\sqrt{x-2}=-\sqrt{x-3};$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=0;$

c) $\sqrt{x-2}+|x-2|=0;$

d) $|x-2|=-|x+2|.$

25.3. Az értékkészlet vizsgálatával oldd meg a következő egyenleteket! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=0;$

b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-y}=0;$

c) $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=0;$

d) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-y}+\sqrt{z}=0.$

25.4. Állapítsd meg az egyenletek megoldhatóságát az értelmezési tartomány vizsgálatával! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x};$

b) $\sqrt{x-1}-\sqrt{-2-x}=0;$

c) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x};$

d) $\sqrt{x-5}=\sqrt{x-5}.$

25.5. Állapítsd meg az egyenletek megoldhatóságát az értelmezési tartomány és értékkészlet együttes vizsgálatával! (Ha szükséges dolgozz a füzetedben!)

a) $\sqrt{x-2}=2-x;$ *b)* $\sqrt{x+2}=-3-x.$

26. feladatlap

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással

EMLÉKEZTETŐ

egyenlet megoldása szorzattá alakítással: Az eljárás lényege abban áll, hogy az egyenlet egyik oldalán kizárólag a 0 szerepel. Ekkor, ha sikerül szorzattá alakítani az egyenlet másik oldalát, könnyebben megoldható egyenleteket kaphatunk, mivel a tényezők 0 voltát egyenként vizsgálhatjuk meg. Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0. Pl. az $(x-2)(x-1)(x+2)=0$ egyenlet megoldásai az $(x-2)=0$, az $(x-1)=0$ és az $(x+2)=0$ egyenletek megoldásai. (A megoldások: $x_1=2,\ \ x_2=1,\ \ x_3=-2.$)

FELADATOK

26.1. Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $(2x+4)(10-5y)=0;$ *b)* $(2x+1)(8-y)(z+4)=0;$

c) $(4-x)(3y+5)\left(\frac{1}{2}z-1\right)=0;$ *d)* $\left(\frac{1}{3}x-1\right)\left(\frac{2}{5}y-1\right)\left(\frac{1}{2}z-1\right)=0;$

e) $2x(3y-6)\left(\frac{1}{3}z-2\right)=0;$ *f)* $3xy(2z-3)=0.$

26.2. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(x-2)(x+3)=0;$ *b)* $(4-x)(-0{,}25+x)=0;$

c) $(5x-2)(3x+3)(2x-6)=0;$ *d)* $(0{,}4-x)(-0{,}125+x)(2x+1{,}26)=0.$

26.3. Alakítsd szorzattá az egyenletek bal oldalát, és oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x(x-1,5)+2(x-1,5)=0;$

b) $x(x+4)-\frac{3}{2}(x+4)=0;$

c) $\frac{x}{2}(2x+3)-3(2x+3)=0;$

d) $x\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)=0;$

e) $2x\left(\frac{1}{2}x-3\right)+10\left(\frac{1}{2}x-3\right)=0;$

f) $x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-9\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=0.$

26.4. Csoportosítva kiemelés módszerével alakítsd szorzattá az egyenletek bal oldalát, és oldd meg az egyenleteket! (Az *a* és a *b* paraméterek.)

a) $x^2+2x+3x+6=0;$

b) $x^2-5x+4x-20=0;$

c) $x^2+4x+4x+16=0;$

d) $x^2-3x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0;$

e) $ax+a+x+1=0;$

f) $bx-5b+4x-20=0.$

26.5. A nevezetes azonosságok használatával vagy a kiemelés módszerével alakítsd szorzattá a zárójelben lévő kifejezéseket, majd alakítsd szorzattá az egyenletek bal oldalát és keresd meg az igazsághalmazukat!

a) $\left(x^2+4x+4\right)+\left(x^2+2x\right)=0;$

b) $2\cdot\left(x^2-6x+9\right)-\left(x^2-3x\right)=0;$

c) $\left(x^2-10x+25\right)+\left(x^2-5x\right)=0;$

d) $\left(x^2+8x+16\right)+(3x+12)=0.$

MatFgy-09-03:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:04 Page 64

27. feladatlap

Egyenlet megoldása rendezéssel 1.

EMLÉKEZTETŐ

egyenlet algebrai megoldása: Az algebrai megoldás a mérlegelven alapul, vagyis ha egy egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk, kivonjuk ugyanazt a számot, valamint szorozzuk vagy osztjuk ugyanazzal a (nem 0) számmal, akkor az egyenlet igazsághalmaza nem változik.

FELADATOK

27.1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $-2,56-4,7x-3,45+5,81x=2,45-3,1x-2,46+2,21x$;

b) $1,83+2,34x-4,27-4,34x=0,45-3,1x+2,11+2,1x$.

27.2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $2(3x-11)-3(4x+5)=-(2x+7)-2(x+12)$;

b) $-(2x-11)-2(5-2x)=4(3x-1)-2(3x+1,5)$.

27.3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $-2\big(3x+5-\big(x-4-3(-2x-4)\big)\big)=6x+11$;

b) $0,2\big(7-x-2\big(3-6x+5(10x+3)\big)\big)=-21x+0,6$.

27.4. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(2x+5)(3x-1)+(3x-4)(2-3x)=-3x^2+28x+17$;

b) $2(x+2)(3-x)-3(2x-3)(2x-1)=-14x^2+13x-23$;

c) $-(2x-3)(5x-1)-2(3-2x)(4-6x)=-34x^2+68x-28$.

27.5. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(x+2)^2+4x=(x+7)^2-39;$

b) $(2x-2)^2+3x=4(2-x)^2-1;$

28. feladatlap

Egyenlet megoldása rendezéssel 2.

EMLÉKEZTETŐ

algebrai törteket tartalmazó egyenlet megoldása: Algebrai törtet vagy törteket tartalmazó egyenletek egyik megoldási lehetősége a közös nevezőre hozás. Ekkor a nevezők legkisebb közös többszörösét választjuk közös nevezőnek. Fontos ügyelni arra, hogy a nevezőben lévő kifejezés nem lehet 0.

kikötés: Ezeket a lehetőségeket a megoldás megkezdése előtt érdemes megkeresni. Pl. az $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$ egyenlet mindkét oldalát ha kikötés nélkül megszoroznánk $(x-3)$-mal, akkor $x=3$-at kapnánk megoldásnak, de láthatjuk, hogy az egyenletnek a 3 nem lehet megoldása, mert a nevezőben 0 állna. A kikötéssel kizártuk volna a hamis gyök elfogadásának lehetőségét.

FELADATOK

28.1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{x}{480}-\frac{x}{540}=2;$ *b)* $\frac{x}{72}-\frac{5x}{396}=2;$ *c)* $\frac{11x}{364}-\frac{2x}{819}=2.$

28.2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{3-x}{x-10}+4=\frac{5x+3}{x-10};$ *b)* $\frac{2x-1}{2x+3}-3=\frac{1-2x}{2x+3}.$

28.3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{4}{x(2x+3)}-\frac{1}{x}=\frac{3}{2x+3};$ *b)* $\frac{2}{x}-\frac{1}{x(x-4)}=\frac{5}{x-4};$

c) $\frac{5}{x}-\frac{2}{x(2-3x)}=-\frac{1}{3x-2}.$

28.4. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{x+2}{x-2}-2\frac{1-x}{x+3}=3;$ *b)* $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{x+1}{x-4}=3.$

28.5. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-4}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}=0;$ *b)* $\frac{x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x-5}-\frac{4}{x^2-25}=0.$

28.6. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\frac{x^2+3x+1}{(x-3)^2}+\frac{x+7}{x-3}-2=0;$ *b)* $\frac{2x-5}{(x+2)^2}+1=\frac{x-1}{x+2}.$

29. feladatlap

Szöveges feladatok

FELADATOK

29.1. Zsóka és Bori összesen 7000 Ft zsebpénzt kapnak. Zsóka zsebpénzének 20%-a 400 Ft-tal kevesebb, mint Bori zsebpénzének $\frac{2}{5}$ része. Melyik lány kap kevesebb pénzt, és mennyivel?

29.2. Andor és Botond testvérek. Életkoruk összege most 24 év. Amikor ez az összeg megkétszereződik, a fiatalabb testvér épp 4 évvel lesz idősebb, mint a bátyja most. Hány éves az idősebb testvér most?

MatFgy-09-03:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:04 Page 67

29.3. Cili és Dorka együtt 100 kg. Ha Dorka tömegéből 3 kg-ot elvennénk és hozzáadnánk Cili tömegéhez, épp egyenlőek lennének. Hány kg most Cili?

29.4. Vince és Zoli nyári munkát vállalt. Egy kúthoz kellett gödröt ásni. Vince egyedül 4 nap alatt, Zoli 6 nap alatt ásta ki. Mennyi idő alatt végeznek a munkával, ha együtt dolgoznak?

29.5. Flórának egy vastag könyvet kell elolvasnia. Tervei szerint 20 nap alatt tudja kiolvasni. Ha naponta 10 oldallal többet olvasna a tervezetthez képest, 4 nappal előbb végezne az olvasással. Hány oldalas a könyv?

30. feladatlap

Elsőfokú egyenlőtlenségek

EMLÉKEZTETŐ

elsőfokú egyenlőtlenség algebrai megoldásának fontosabb szabályai:

1. Ha az adott egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt a valós számot hozzáadjuk vagy kivonjuk, a reláció nem változik. Pl. $x+2\le 6 \Leftrightarrow x\le 4$.
2. Ha az adott egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív valós számmal szorozzuk vagy osztjuk, a reláció nem változik. Pl. $3x\le 6 \Leftrightarrow x\le 2$.
3. Ha az adott egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív valós számmal szorozzuk vagy osztjuk, a reláció ellenkezőre változik. Pl. $-2x\le 6 \Leftrightarrow x\ge -3$.

Ismeretlent tartalmazó kifejezéssel vizsgálat nélkül nem szorozhatjuk vagy oszthatjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát!

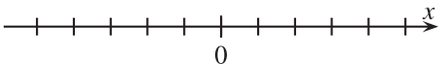
FELADATOK

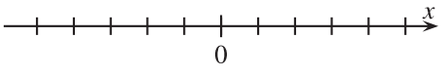
30.1. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

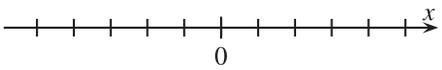
a) $2x+7<5$ ..... ; *b)* $-2x-7<-5$ ..... ;

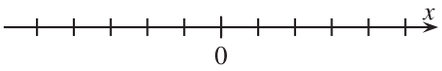
c) $-2x+7<5$ ..... ; *d)* $2x+7<-5$ ..... .

30.2. Ábrázold számegyenesen a megoldáshalmazokat!

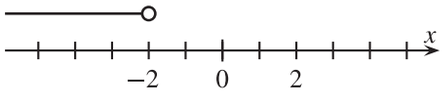
a) $\frac{5}{x-1} > 0;$ 

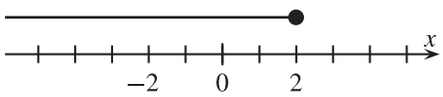
b) $\frac{-2}{x+1} < 0;$ 

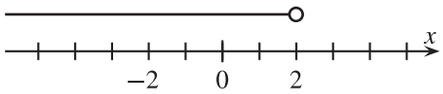
c) $\frac{3}{-x-1} > 0;$ 

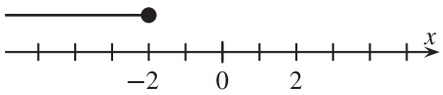
d) $\frac{-4}{-x+1} < 0.$ 

30.3. Kösd össze az egyenlőtlenségeket a megoldásukat ábrázoló számegyenessel!

a) $\frac{-8}{x-2} \geq 0;$ 1. 

b) $3x+6 \leq 0;$ 2. 

c) $\frac{10}{x+2} < 0;$ 3. 

d) $-4x+6 \geq -2.$ 4. 

30.4. Add meg a következő egyenlőtlenségek megoldásait intervallumokkal!

a) $\frac{x+2}{x-5} > 0;$

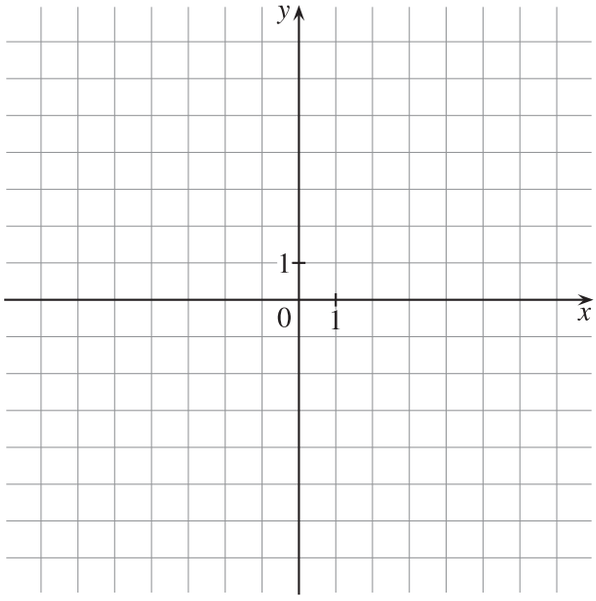
b) $\frac{3x+9}{x-1} < 0;$

c) $\dfrac{2x+5}{3x+6} \le 0;$

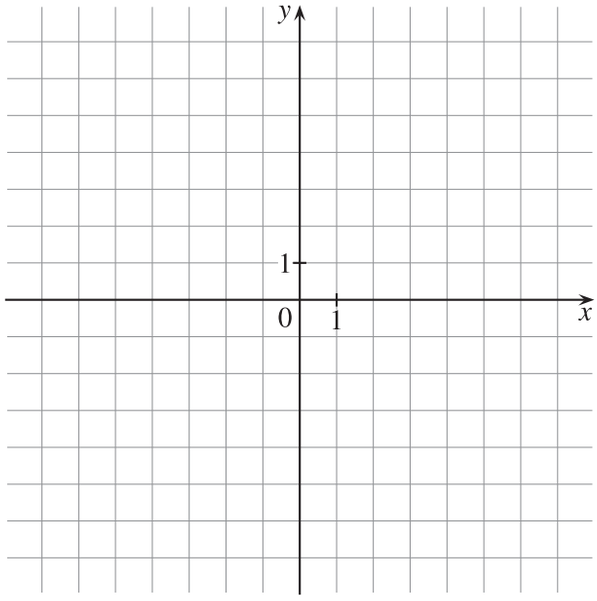
d) $\dfrac{5x-10}{2x+6} \ge 0.$

30.5. Oldd meg grafikusan!

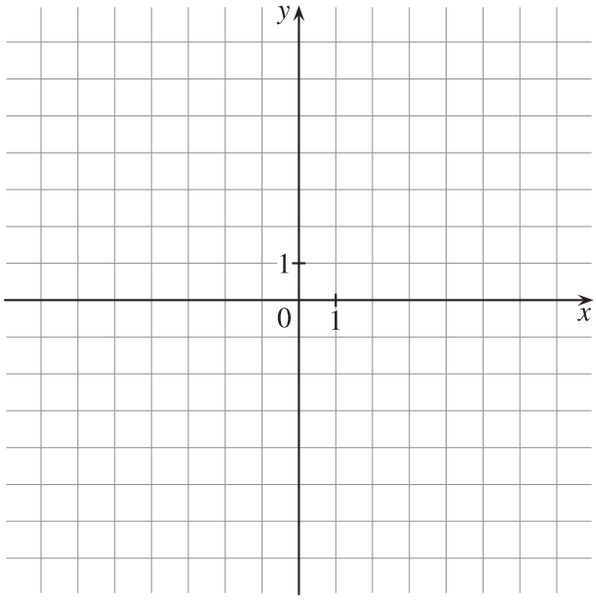
a) $|x-3|-2 \ge 0;$



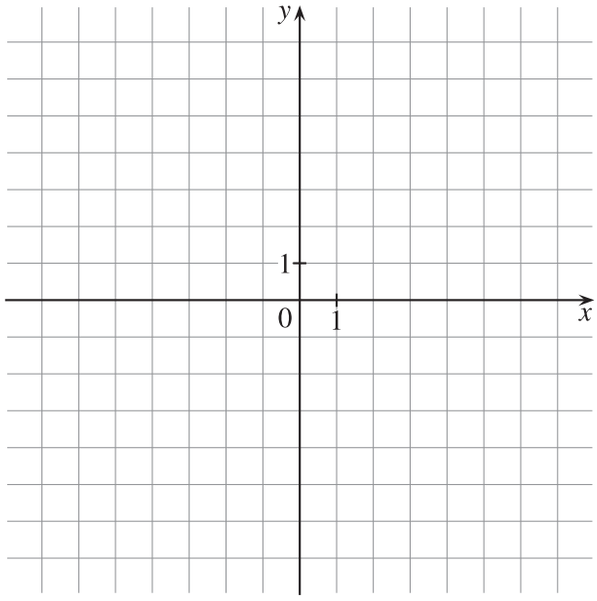
b) $x^2 - 4 < 0;$



c) $-(x-1)^2 + 4 > |x+2| - 1;$



d) $\dfrac{x}{2} + 2 \le -|x-3| + 5.$



MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 70

31. feladatlap

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek

EMLÉKEZTETŐ

elsőfokú kétismeretlenes egyenlet: Olyan egyenlet, amely pontosan két változó elsőfokú kifejezését tartalmazza.

Általános alakja: $ax+by=c$, hol az x , y a két változó, a, b és c pedig valós számok. Pl. $-2x+\frac{1}{3}y=0$.

kétismeretlenes egyenlet megoldása: Azon rendezett számpárok kiszámítása, amelyeket behelyettesítve az egyenletbe, igaz kijelentést kapunk. (Az elsőfokú kétismeretlenes egyenlet megoldásai derékszögű koordináta-rendszerben egyenest alkotnak.) Pl. $2x + y = 5$ egyenlet megoldásai a (2; 1) (illetve $x = 2$ és $y = 1$), (0; 5) stb. Az egyenletnek végtelen sok megoldása van, ezeket megadhatjuk úgy is, hogy $x\in\mathbb{R}$, $y=5-2x$.

kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer: Ugyanannak a két változónak legalább két elsőfokú egyenlete egyenletrendszert alkot.

Az egyenletrendszer általános alakja: $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$, ahol az x, y a két változó, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 és c_2 pedig valós számok.

egyenletrendszer gyöke: Minden egyenletet kielégítő számpár.

egyenletrendszer megoldásának módszerei:

egyenlő együtthatók módszere: Az elsőfokú egyenletrendszer megoldásának azon módszere, amelynél az egyik változó együtthatóit egyenlővé tesszük. Például az általános alakra hozott egyenletrendszer egyik változójának együtthatóit a legkisebb közös többszörösükre bővítjük, oly módon, hogy az egyenletek mindkét oldalát a megfelelő számokkal megszorozzuk. Majd az egyenleteket kivonjuk egymásból, és az így kapott egyismeretlenes egyenletet megoldjuk. A megoldás egyik eredeti egyenletbe történő visszahelyettesítésével megkapjuk a másik változó értékét. Pl. a $\begin{cases}2x+3y=8\\-5x+2y=-1\end{cases}$ egyenletrendszerből az y-t küszöböljük ki. Együtthatóinak legkisebb közös többszöröse $[2; 3] = 6$. Az első egyenletet 2-vel, a másodikat 3-mal kell beszorozni. $\begin{cases}4x+6y=16\\-15x+6y=-3\end{cases}$. A felső egyenletből kivonva az alsó egyenletet, $19x=19$ egyismeretlenes egyenletet kapunk. A megoldás $x = 1$, melyet a felső egyenletbe helyettesítve $(2+3y=8)$ egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Megoldása $y = 2$. Így az egyenletrendszer megoldása $x = 1$, $y = 2$.

behelyettesítő módszer: Az egyenletrendszer megoldásának olyan módszere, ahol az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót, és a többi egyenletben az így kapott kifejezést a változó helyére helyettesítjük. Pl. $\begin{cases}2x+3y=8\\-5x+2y=-1\end{cases}$ esetén a felső egyenletből x-et kifejezve $x=\frac{8-3y}{2}$-t kapunk, melyet a második egyenletbe behelyettesítve $-5\frac{8-3y}{2}+2y=-1$ elsőfokú egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldása $y = 2$, melyet az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk az $x = 1$-et is. Az egyenletrendszer megoldása tehát: $x = 1$, $y = 2$.

FELADATOK

31.1. Oldd meg a következő egyenletrendszereket az egyenlő együtthatók módszerével! (A füzetedben dolgozz!)

a) $\begin{cases}2x+y=4\\3x-y=6\end{cases}$; $x =$ ..... ; $y =$ ..... .

b) $\begin{cases}5x+3y=14\\2x-3y=7\end{cases}$; $x =$ ..... ; $y =$ ..... .

c) $\begin{cases}5x+3y=14\\x-1,5y=10,5\end{cases}$; $x =$ ..... ; $y =$ ..... .

d) $\begin{cases}4x+7y=40\\2x-y=3\end{cases}$; $x =$ ..... ; $y =$ ..... .

e) $\begin{cases}5x+3y=14\\2x+3y=6\end{cases}$. $x =$ ..... ; $y =$ ..... .

31.2. Oldd meg a következő egyenletrendszereket a behelyettesítő módszerrel! (A füzetedben dolgozz!)

a) $\begin{cases} 2x-y=12 \\ x+5y=8 \end{cases}$; $x=$ .....; $y=$ ..... .

b) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ y=-x+6 \end{cases}$; $x=$ .....; $y=$ ..... .

c) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-5y=2 \end{cases}$; $x=$ .....; $y=$ ..... .

d) $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 7x-5y=4 \end{cases}$; $x=$ .....; $y=$ ..... .

e) $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{3}{4}x+1 \end{cases}$. $x=$ .....; $y=$ ..... .

31.3. Oldd meg a racionális számok halmazán a következő egyenletrendszereket, és ellenőrizd a gyököket! (A füzetedben dolgozz!)

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2(x+2y)-3(x+3y)=5 \end{cases}$; $x=$ .....; $y=$ ..... .

b) $\begin{cases} 2(x+1)=3(y-1)+14 \\ 4x-3(2x+y-1)=2(-x+y)+8 \end{cases}$; $x=$ .....; $y=$ ..... .

31.4. Ha két szám (*a* és *b*) közül az első kétszereséhez hozzáadjuk a második szám háromszorosát, akkor 4-et kapunk. De ha az első szám 4-szereséhez adjuk hozzá a második szám 8-szorosát, akkor az összeg 0. Melyik ez a két szám?

31.5. Egy tízes számrendszerben felírt kétjegyű számban felcseréltük a számjegyeket. Ekkor 9-cel nagyobb számot kaptunk. A két szám összege 55. Melyik ez a kétjegyű szám?

MEGOLDÁS

	A tízesek helyiértéke	Az egyesek helyiértéke
Az eredeti szám		
A második szám		

Az eredeti szám: ..... . A második szám: ..... .

Melyik nagyobb? ..... . Mennyivel? ..... .

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 72

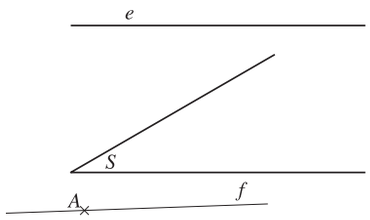
32. feladatlap

Geometriai alapfogalmak 1.

EMLÉKEZTETŐ

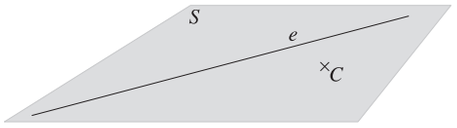
pont: Geometriai alapfogalom. Jele: nagybetű, pl. A, B, C, …

egyenes: Geometriai alapfogalom. Jele: kisbetű, pl.: a, b, c, …



sík: Geometriai alapfogalom. Ábrán félegyenesekkel, vagy sík alakzattal jelölik. Jele: S, S_1, S_2, …

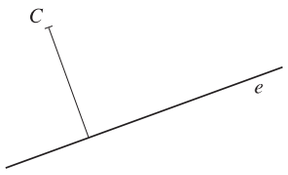
illeszkedés: Geometriai alapfogalom. Jelölése: $\in$ (illeszkedik) vagy $\notin$ (nem illeszkedik). Pl. $A \in f$; $B \notin f$; $f \notin S$; $f \notin S$; $e \in S$; $e \in S$; $C \in S$; $B \notin S$.





két pont távolsága: A két pontot összekötő egyenes szakasz hosszúsága. Jele: pl. $d(A, B)$.

pont és egyenes távolsága: A pontból az egyenesre húzott merőleges szakasz hosszúsága. Jele: pl. $d(C, e)$.



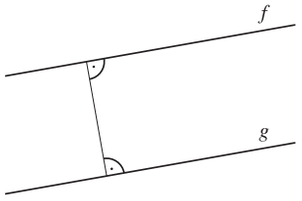
két metsző egyenes távolsága: Nulla.

két párhuzamos egyenes távolsága: A két egyenes egy-egy pontját összekötő, a két egyenesre merőleges szakasz hossza.

pont és sík távolsága: A pontból a síkra húzott merőleges szakasz hosszával egyenlő.

közös ponttal rendelkező egyenes és sík távolsága: Nulla.

sík és vele párhuzamos egyenes távolsága: Az egyenes tetszőleges pontjából a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszával egyenlő.



FELADATOK

32.1. Az igaz állítások betűjelét karikázd be, a hamis állítását pedig húzd át!

a) Két metsző egyenesnek legalább két közös pontja van.

b) Két párhuzamos egyenesnek lehet közös pontja.

c) Két párhuzamos egyenes, ha nincs közös pontjuk, akkor kifeszít egy síkot.

d) A kitérő egyenesek egy síkban vannak.

e) Ha két sík nem párhuzamos, akkor metszésvonaluk egy egyenes.

f) Egy síkot metsző egyenesnek több közös pontja is lehet a síkkal.

32.2. Az igaz állítások betűjelét karikázd be, a hamis állítását pedig húzd át!

a) Az EF és az FG élek egyenesei metsző egyenesek.

b) Az FG és a BC élek egyenesei párhuzamosak.

c) A *HG* és az *EF* élek egyenesei kitérők.

d) A *HD* él és az *AF* lapátló nem kitérő egyenesek.

e) Az *EH* és az *AD* élek egyenesei metsző egyenesek.

f) A *DC* egyenes párhuzamos önmagával és az *EF* egyenessel.

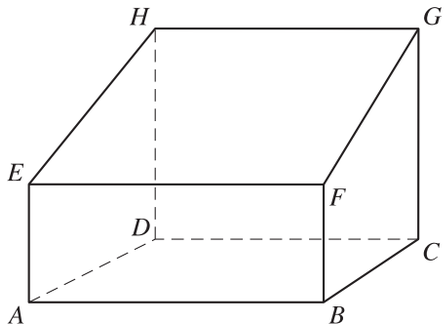
g) Az *EFGH* sík és az *ABCD* síkok metsző síkok.

h) Az *ABFE* sík és a *DCGH* sík nem párhuzamos egymással.

i) Az *FBCG* sík és a *DCGH* sík metszésvonala az *FG* egyenes.

j) A *CG* egyenes párhuzamos az *ADHE* síkkal.

k) Az *EH* egyenes nem döfi az *ABCD* síkot.



32.3. Szerkesztéssel és méréssel állapítsd meg a következő távolságokat! (Az *e* és *f* egyenesek párhuzamosak.)

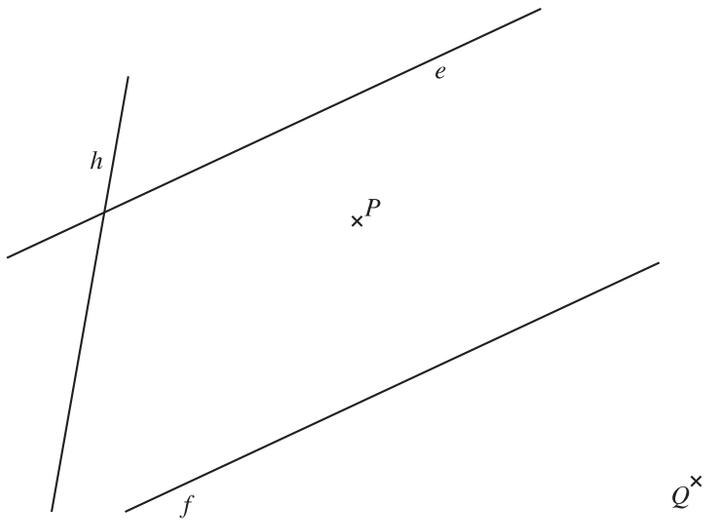
a) $d(P, h) =$ ..... ;

b) $d(Q, f) =$ ..... ;

c) $d(h, f) =$ ..... ;

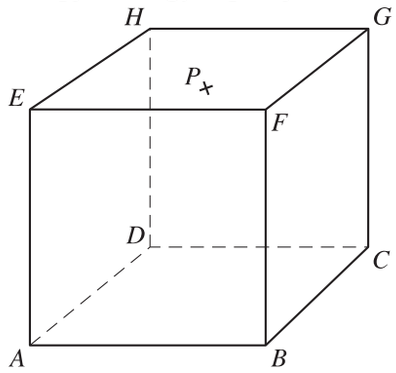
d) $d(P, Q) =$ ..... ;

e) $d(e, f) =$ ..... .



32.4. Az ábrán látható kocka éle 7 cm, a *P* pont a kocka *EFGH* fedőlapjának egyik pontja. Mekkora a *P* pontnak az *ABCD* laptól mért távolsága?

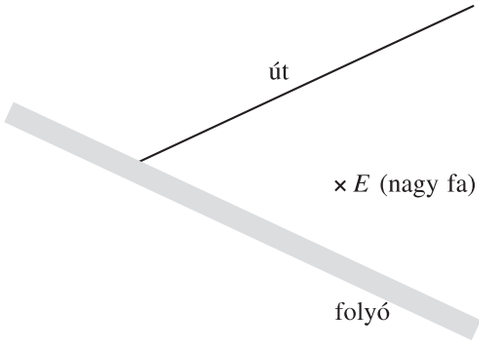
Válasz: ..... .
(Szerkeszd meg az *EBG* háromszöget!)



MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 74

32.5. Szerkesztéssel állapítsd meg, hogy a nagy fa (E) milyen messze van az úttól és a folyótól!

Válasz: .....



(Ami a rajzon 1 mm, az a valóságban 1 m)

33. feladatlap

Geometriai alapfogalmak 2.

EMLÉKEZTETŐ

pótszögek: Összegük 90°.

kiegészítő szögek: Összegük 180°.

mellékszögek: Egyik száruk közös, a másik száruk egy egyenest alkot; összegük 180°.

csúcsszögek: A két szög szárai páronként egymás meghosszabbításai.

egyállású szögek: Konvex szögek és száraik páronként egyező irányúak; nagyságuk egyenlő.

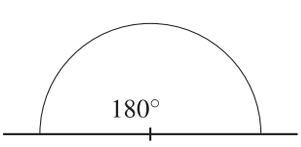
váltószögek: Konvex szögek és száraik páronként ellentétes irányúak; nagyságuk egyenlő.

merőleges szárú szögek: Száraik páronként merőlegesek; ha mindkét szög hegyesszög vagy mindkét szög tompaszög, akkor egyenlők, ha az egyik szög hegyesszög, a másik tompaszög, akkor kiegészítő szögek.

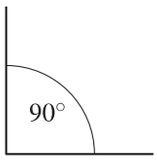
1. **tétel:** A háromszög belső szögeinek összege 180°. ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$.)
2. **tétel:** A háromszög bármelyik külső szöge a nem mellette lévő két belső szög összegével egyenlő. ($\gamma' = \alpha + \beta$; $\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \alpha + \gamma$.)

FELADATOK

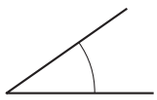
33.1. Írd a megfelelő szögek alá a nevüket!



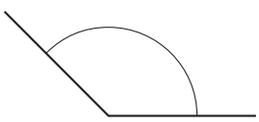
a) .....



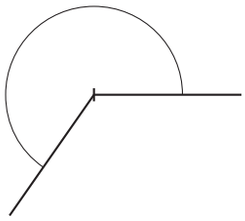
b) .....



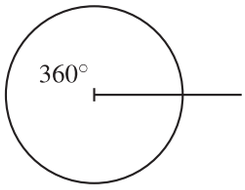
c) .....



d) .....

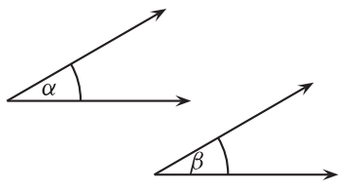


e) .....

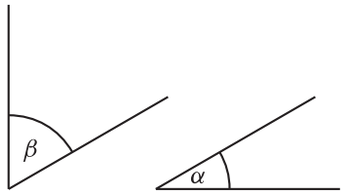


f) .....

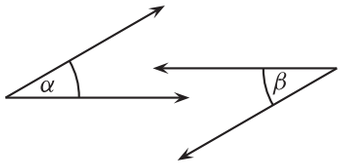
33.2. A meghatározások alapján írd a szögpárok ábrája alá a megfelelő elnevezésüket!



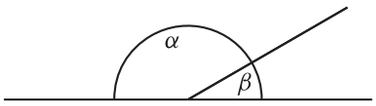
a) .....



b) .....

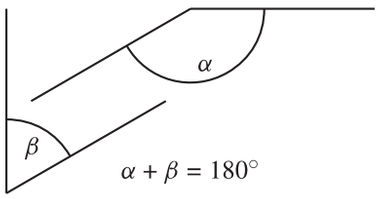


c) .....



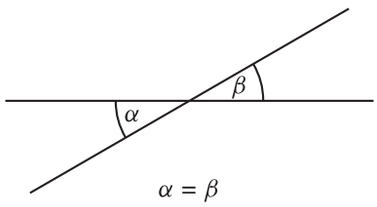
$\alpha + \beta = 180°$

d) .....



$\alpha + \beta = 180°$

e) .....



$\alpha = \beta$

f) .....

33.3. Az alábbi alakzatokon egyes szögeket megjelöltünk. Az *ABCD* négyszög téglalap és *EF*||*AB*. Az *e* körérintő. A megjelölt szögek közül:

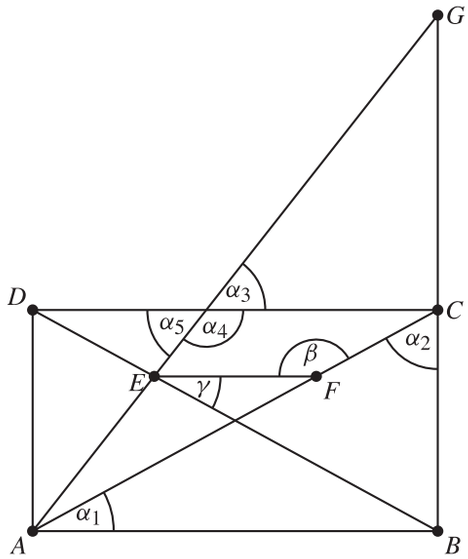
pótszögek: ..... kiegészítő szögek: .....

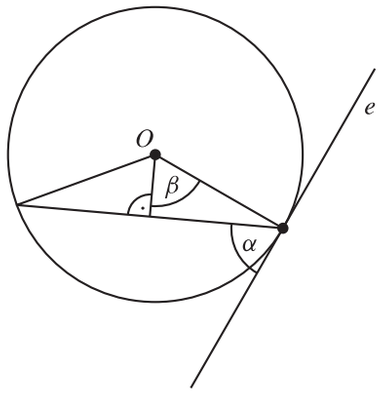
mellékszögek: ..... csúcsszögek: .....

egyállású szögek: ..... váltószögek: .....

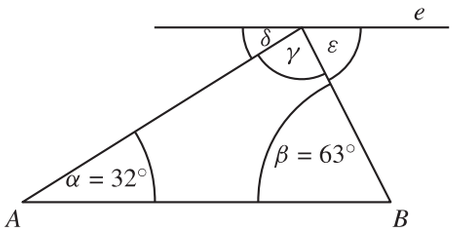
merőleges szárú szögek: .....

(Írd be a pontozott helyekre a megfelelő szögeket!)





33.4. Határozd meg a δ és az ε szögek nagyságát! Az *e* egyenes párhuzamos az *AB* szakasszal!



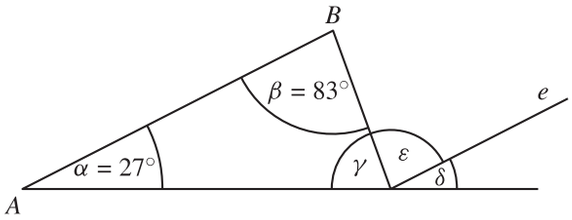
$\delta =$ .....

$\varepsilon =$ .....

Mekkora a γ szög?

$\gamma =$ .....

33.5. Határozd meg a δ és az ε szögek nagyságát! Az e egyenes párhuzamos az AB szakasszal!



$\delta =$ .....

$\varepsilon =$ .....

Mi a kapcsolat a γ, a δ és az ε szögek között?

33.6. Egy ABC háromszög egyik szöge 65°-os.

a) Mekkora az ehhez a szöghöz tartozó külső szög?

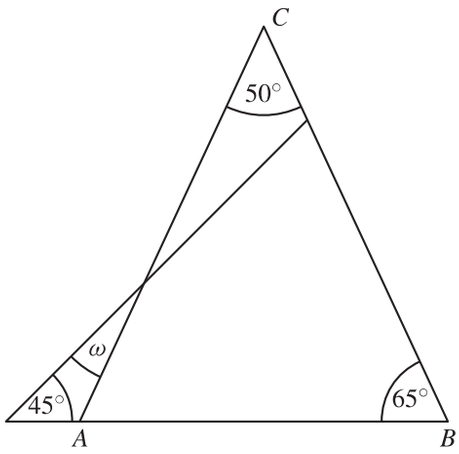
A külső szög: .....

b) Mekkora a háromszög másik két szögének összege?

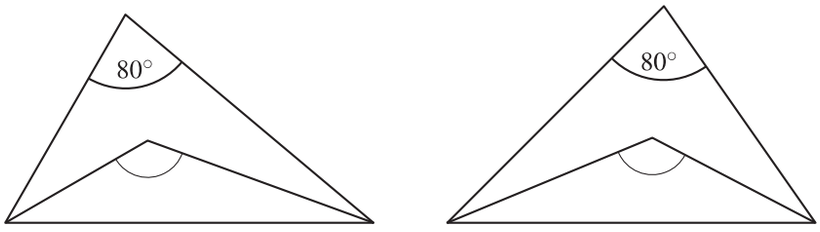
A másik két szög összege: .....

c) Mekkora az ω-val jelölt szög?

$\omega =$ ..... .



33.7. Az ábrán két olyan háromszöget látunk, amelyeknek egyik szöge 80°-os. Melyik háromszögben nagyobb a másik két szög felezője alkotta szög?



Válasz: ..... .

34. feladatlap

A háromszög nevezetes vonalai

EMLÉKEZTETŐ

oldalfelező merőleges: Az oldal felezőpontján átmenő és az oldalra merőleges egyenes.

háromszög köré írható kör: A kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, a kör sugara a metszéspont és a háromszög bármelyik csúcsa közötti távolság.

háromszög súlyvonala: A háromszög csúcsát és a csúccsal szemközti oldal felezőpontját összekötő egyenes.

háromszög középvonala: A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakasz.

háromszög magasságvonala: A háromszög csúcsából a csúccsal szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenes.

szögfelező: A háromszög belső szögét megfelező egyenes.

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 77

FELADATOK

34.1. Szerkeszd meg a háromszögek oldalfelező merőlegeseit, ha $AB = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

a)

b) Mit állíthatunk az oldalfelező merőlegesekről?

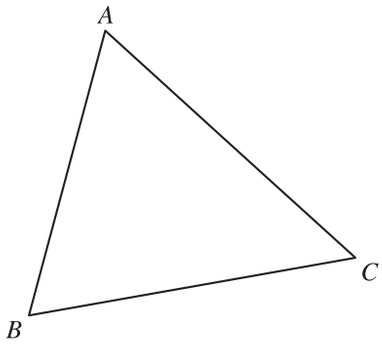
c) Mérd meg, hogy milyen messze vannak a háromszög csúcspontjai az oldalfelező merőlegesek metszéspontjától (M)!

A távolságok: .....

d) Szerkeszd meg a háromszög köré írható kört!

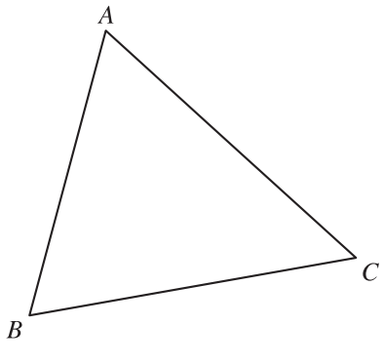
34.2. *a)* Szerkeszd meg a háromszög súlyvonalait!

b) Mit mondhatunk a súlyvonalakról?



34.3. *a)* Szerkeszd meg a háromszög középvonalait!

b) Mit mondhatunk a középvonalakról?



34.4. *a)* Szerkeszd meg a háromszögek magasságvonalait, ha $AB = 6$ cm, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

b) Mit állapíthatunk meg a magasságvonalakról?

c) A háromszög belső szöge az A csúcsnál 55°-os, a B csúcsnál 65°-os. Mekkora szöget zárnak be egymással a háromszög magasságai? (A számolást a füzetben végezd el!)

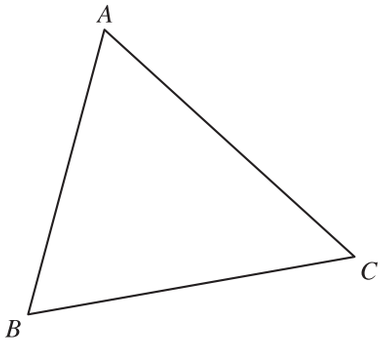
34.5. *a)* Szerkeszd meg a háromszög belső szögfelezőit, ha $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $\beta = 60^\circ$!

b) Mit állíthatunk a háromszög belső szögfelezőiről?

c) Szerkeszd meg a beírható kör sugarát, és mérd le vonalzóval!

A sugár hossza: .....

d) Szerkeszd meg a beírható kört!



35. feladatlap

A Thalész-tétel, érintőnégyszögek

EMLÉKEZTETŐ

Thalész tétele: Ha egy szakasz, mint átmérő fölé kört rajzolunk, és két végpontját összekötjük a kör bármelyik más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

Thalész tételének megfordítása: Ha egy szakasz egy adott pontból derékszögben látszódik, akkor a pont rajta van a szakasz fölé mint átmérő fölé rajzolt körön. Vagy: Derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja.

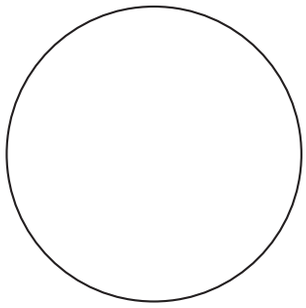
érintősokszög: Az olyan sokszöget, amelynek oldalai egy kör érintői, érintősokszögnek nevezzük.

érintőnégyszögekre vonatkozó tétel: Az érintőnégyszög két-két szemközti oldalának összege egyenlő.

A tétel megfordítása: Ha egy konvex négyszög két-két szemközti oldalának összege egyenlő, akkor ez a négyszög érintőnégyszög.

FELADATOK

35.1. Keresd meg az adott kör ismeretlen középpontját, ha csak egy derékszögű vonalzó áll rendelkezésedre!

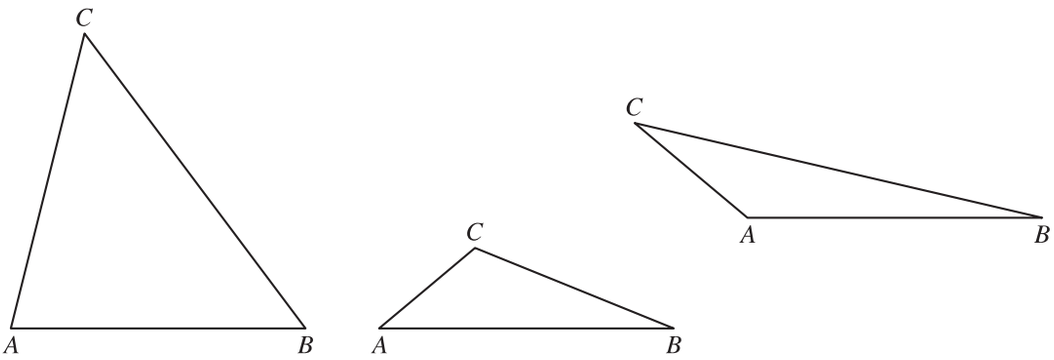


35.2. *a)* Az $ABCD$ paralelogramma AB és BC oldalai mint átmérők fölé szerkesztett körök a B ponton kívül még egy M pontban is metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az A, M és a C pontok egy egyenesre esnek!

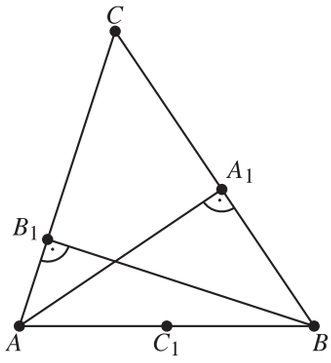
b) Mekkora az $AMB\sphericalangle$?

35.3. Egy kör valamelyik húrjának egyik végpontjához vezető sugár mint átmérő fölé rajzolj kört! Bizonyítsd be, hogy ez a félkör az adott húrt felezi! (Alkalmazd Thalész tételét!)

35.4. *a)* Szerkeszd meg az *ABC* háromszög *AC* és *BC* oldalaihoz tartozó magasságokat az *AB* oldal fölé rajzolt Thalész-féle kör segítségével!



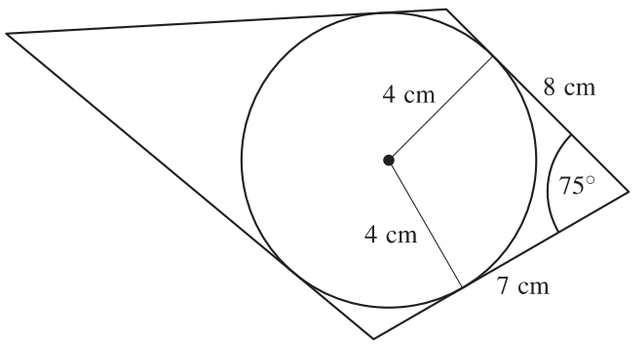
b) Húzd meg egy háromszög két magasságát! Bizonyítsd be, hogy a magasságok talppontjai a harmadik oldal felezőpontjától egyenlő távolságra vannak! (A bizonyítást ide írd le!)



35.5. Egy érintőnégyszög három oldala 6, 7, 8 méter, a felírt sorrendben. Mekkora a negyedik oldala?

Válasz: . . . . . .

35.6. Szerkessz érintőnégyszöget, ha a négyszögbe írt kör sugara 4 cm, a négyszög két szomszédos oldala 7 és 8 cm, és az általuk bezárt szög 75°. Tekintsd a feladatot megoldottnak! (A szerkesztést a füzetedben végezd el!)



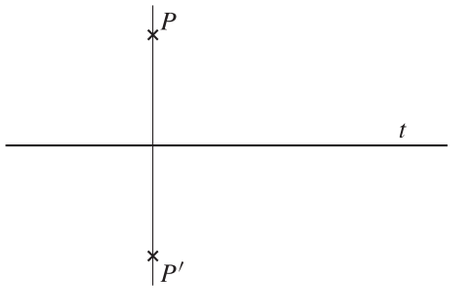
36. feladatlap

Tengelyes tükrözés

EMLÉKEZTETŐ

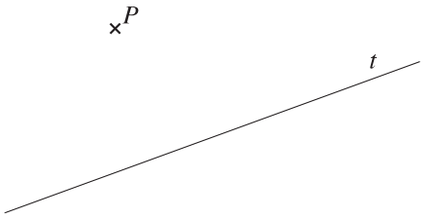
egyenesre vonatkozó tükrözés: A *t* egyenes minden pontjához rendeljük önmagát. A *t* egyenesre nem illeszkedő, tetszőleges *P* ponthoz rendeljük hozzá a *P′* pontot úgy, hogy a *PP′* szakaszt a *t* egyenes merőlegesen felezze. Ekkora a *P* tárgypont képpontja a *P′* pont, és megfordítva, *P′*-t nevezve tárgypontjának, a *P′* pont képpontja *P*. Ezt a következőképpen jelölhetjük: $P \to P'$ és $P' \to P$.

egyenesre vonatkozó tükrözés tulajdonságai: Az egyenesre vonatkozó tükrözés szögtartó, távolságtartó, párhuzamosságtartó. A *t* tengely képe önmaga. Megváltoztatja a síkidom körüljárási irányát.

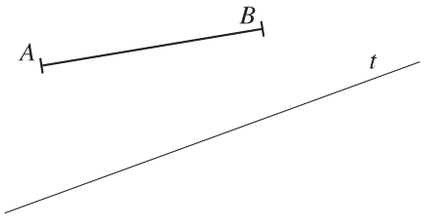


FELADATOK

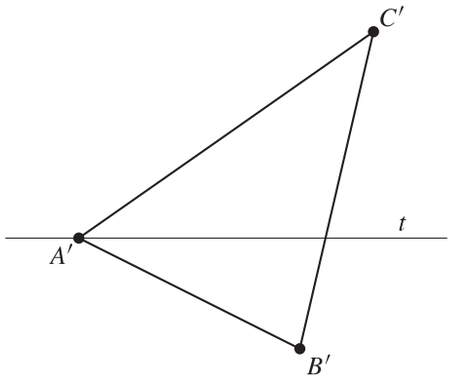
36.1. Adott egy t egyenes és egy P pont. Szerkeszd meg a P pontnak a t egyenesre vonatkozó tükörképét!



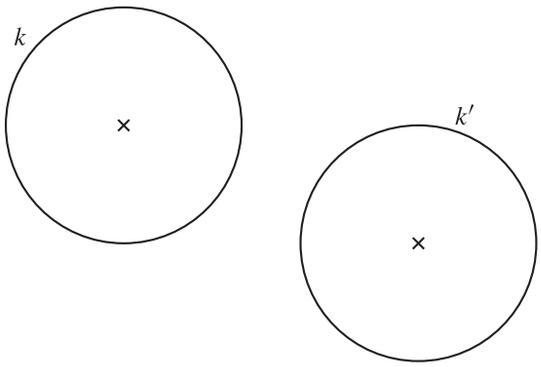
36.2. Szerkeszd meg az AB szakasznak a t egyenesre vonatkozó tükörképét!



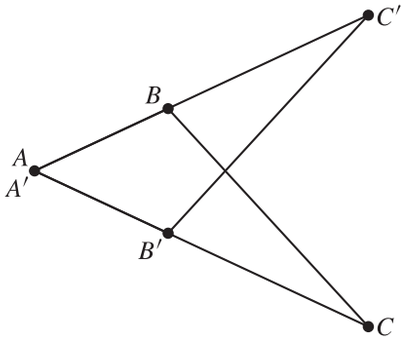
36.3. Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelynek egy adott t egyenesre vonatkozó tükörképe az $A'B'C'$ háromszög!



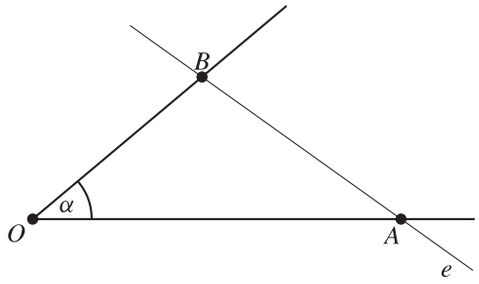
36.4. A k és a k' körök egymás tükörképei. Szerkeszd meg a tükrözés tengelyét!



36.5. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egymás tükörképei. Szerkeszd meg a tükrözés tengelyét!



36.6. Az α szög szárait az e egyenes az A és a B pontban úgy metszi, hogy $OA \neq OB$.

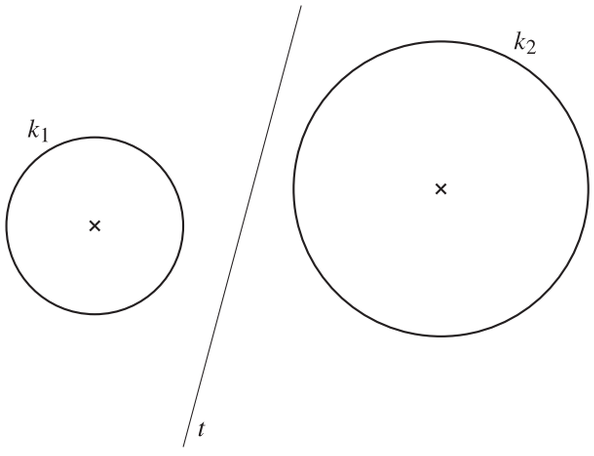


a) Tükrözd az AB egyenest a szögfelezőre!

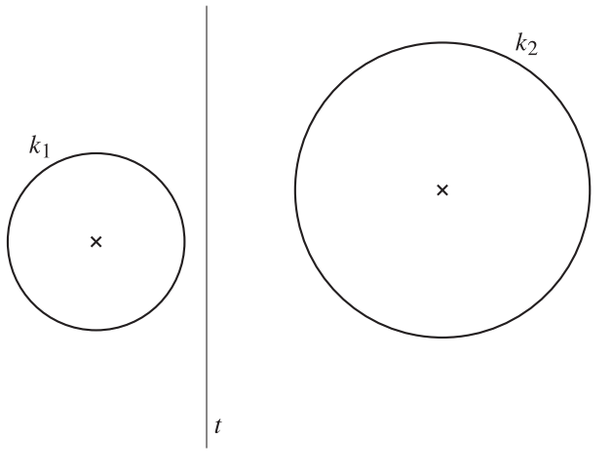
b) Az AB egyenesnek van-e olyan pontja, amelynek a képe önmaga?

Válasz: .....
Jelöld meg a pontot!

36.7. Szerkeszd meg a k_1 körnek azt a pontját, amely a k_2 kör valamelyik pontjának a t tengelyre vonatkozó tükörképe! Szerkeszd meg a tükrözéssel egymáshoz rendelt pontpárokat a k_1 és a k_2 körön!



36.8. Szerkessz olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek a szimmetriatengelye a t egyenes, az egyik csúcsa a k_1 körön, a másik csúcsa a k_2 körön van! Szerkeszthető-e mindig a feltételt kielégítő háromszög?

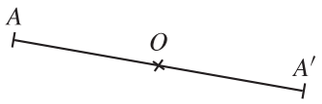


37. feladatlap

Pontra vonatkozó tükrözés

EMLÉKEZTETŐ

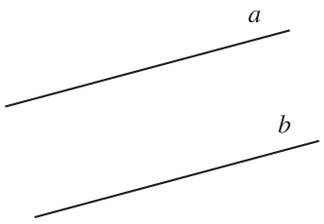
pontra vonatkozó tükrözés: Jelöljünk ki a síkon egy O pontot. Rendeljünk hozzá a sík minden egyes pontjához egy-egy pontot a síkon a következőképpen: *a)* Az O ponthoz rendeljük hozzá önmagát: $O \to O$. *b)* A sík O-tól különböző tetszőleges A pontjához rendeljük hozzá az A' pontot úgy, hogy az AA' szakasznak az O pont felezőpontja legyen.



pontra vonatkozó tükrözés tulajdonságai: Szakasztartó, távolságtartó, párhuzamosságtartó és szögtartó. A tárgysokszög és a képsokszög körüljárási iránya megegyezik.

FELADATOK

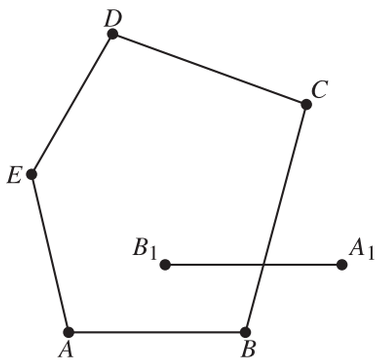
37.1. *a)* Szerkeszd meg azt a pontot, amelyre tükrözve egy adott a egyenest, az egy vele párhuzamos adott b egyenesbe megy át!



b) Lehetséges-e az, hogy két metsző egyenes esetén az egyik egyenes a másiknak egy megfelelő O pontra vonatkozó tükörképe legyen?

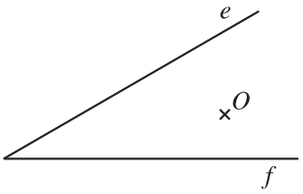
Válasz: ....., mert ..... .

37.2. A mellékelt ábra hiányos. Az ábrán egy $ABCDE$ ötszöget és az AB oldalának valamilyen pontra vonatkozó tükörképét, az A_1B_1 szakaszt láthatjuk; $A \to A_1$, $B \to B_1$, tehát $AB \parallel A_1B_1$ és $AB = A_1B_1$. Szerkeszd meg az ötszög képét!

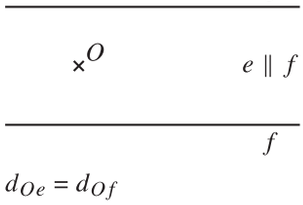


37.3. *a)* Adott két egyenes és egy O pont. Szerkessz a két egyenesen olyan pontpárokat, amelyek az O pontra tükrösek!

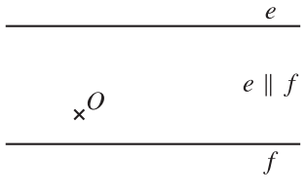
b)



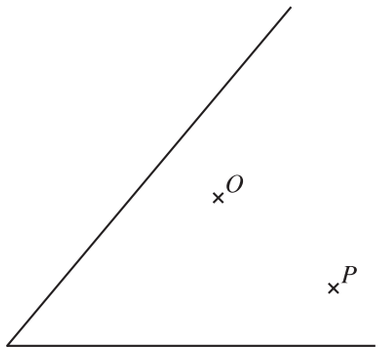
c)



d)



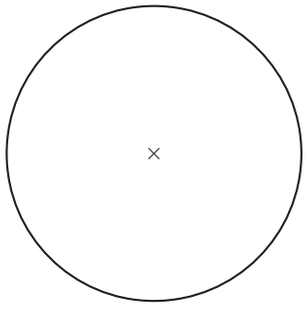
37.4. Adott egy szög, a szögtartományban két pont, O és P. Szerkessz olyan paralelogrammát, amelynek a középpontja az O pont, két szemközti csúcsa az adott egyeneseken van, a másik két szemközti csúcsa közül az egyik P pont!



37.5. Keress a nyomtatott nagybetűkkel írott ábécében olyan betűket, amelyek középpontosan szimmetrikusak!

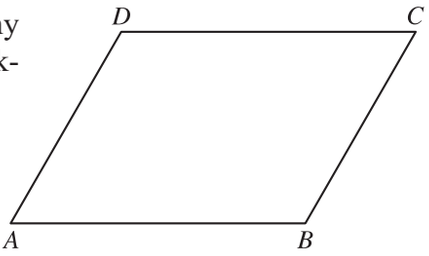
Ilyen betűk: ..... .

37.6. Tükrözd a kört egyik pontjára! A tárgykörnek és a képkörnek hány közös pontja van?



Válasz: ..... .

b) Jelöld az $ABCD$ paralelogramma középpontját O-val! Hány közös pontja van az ABO és a CDO háromszög köré írható körök-nek?



37.7. Szerkessz paralelogrammát, ha adott a két oldala: $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, és az egyik átló 6 cm!

37.8. A paralelogramma két magassága 60°-os szöget zár be egymással, és a két magasság egyenlő. Szerkessz a feltételnek megfelelő paralelogrammát!

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 83

38. feladatlap

Pitagorasz tételének alkalmazása

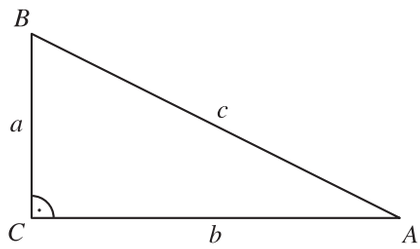
EMLÉKEZTETŐ

befogó: A derékszögű háromszögben a derékszög szögszárát képező oldal. Egy derékszögű háromszögben két befogó van.

átfogó: A derékszöggel szemközti oldal.

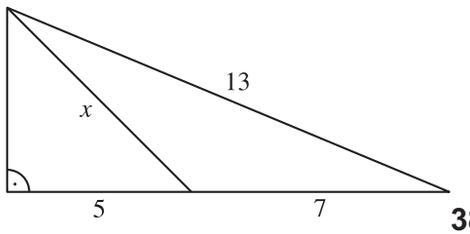
Pitagorasz tétele: Derékszögű háromszögben az átfogó hosszának négyzete egyenlő a befogóhosszak négyzetének összegével.

Pitagorasz tételének megfordítása: Ha egy háromszög oldalai között fennáll, hogy két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

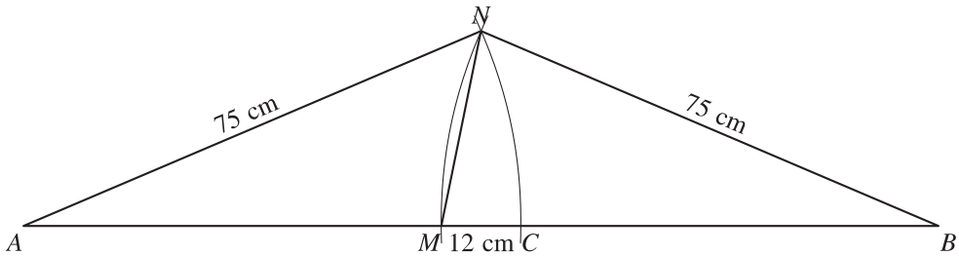


FELADATOK

38.1. Számítsd ki az x szakasz hosszát a közölt adatok alapján!



38.2. Milyen hosszú az MN szakasz?

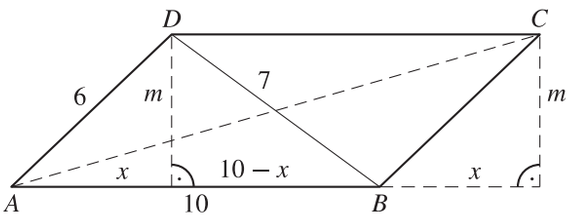


$d(A, C) = d(A, N) = d(B, N) = d(B, M)$. $\quad d(M, C) = 12$ cm.

Megoldás

$d(M, N) =$ .....

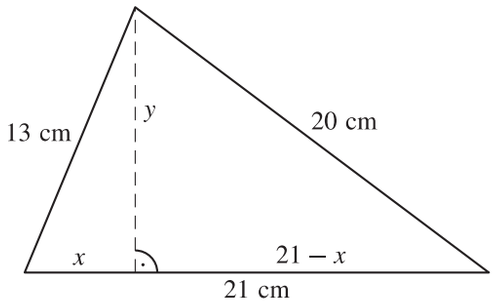
38.3. Számítsd ki az $ABCD$ paralelogramma területét az ábrán látható adatokból! Mekkora a paralelogramma másik átlója?



Megoldás

$d(A, C) =$ .....

38.4. Egy háromszög oldalai 13 cm; 20 cm és 21 cm. Számítsd ki a 21 cm-es oldalhoz tartozó magasságot!



$x =$ .....

$y =$ .....

39. feladatlap

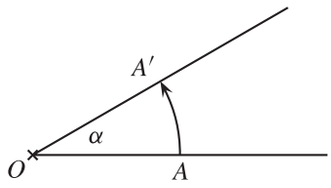
Pont körüli elforgatás

EMLÉKEZTETŐ

pont körüli elforgatás: Jelöljünk ki az irányított síkban egy O pontot, és adjunk meg egy α (előjeles) mértékkel rendelkező, a $0° < |\alpha| < 360°$ feltételt kielégítő forgásszöget. Rendeljünk hozzá a sík minden egyes pontjához a síkon egy-egy pontot a következőképpen:

a) Az O ponthoz rendeljük hozzá önmagát: $O \to O$.

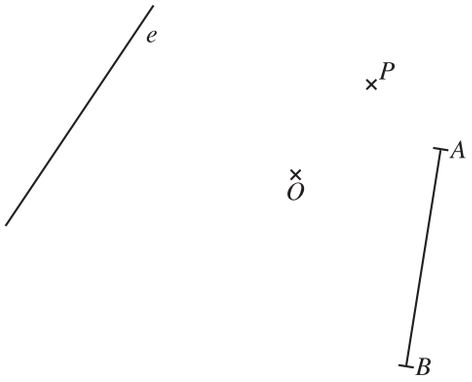
b) A sík O-tól különböző tetszőleges A pontjához rendeljük hozzá az A' pontot úgy, hogy $OA = OA'$ legyen, és az OA félegyenest az O pont körül α szöggel elforgatva az OA' félegyenesre illeszkedjen.



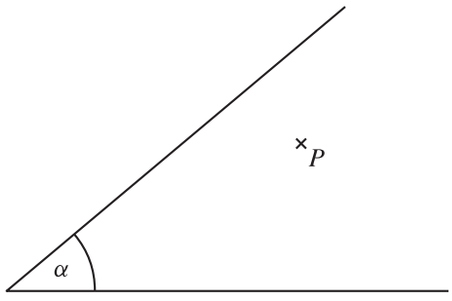
pont körüli elforgatás tulajdonságai: Távolságtartó, illeszkedéstartó, szögtartó, párhuzamosságtartó. A képsokszög megtartja a tárgysokszög körüljárási irányát.

FELADATOK

39.1. Adott a síkon egy O pont. Forgasd el az O pont körül a síkot 45°-kal, az óramutató járásával ellenkező irányban! Szerkeszd meg a P pont, az AB szakasz és az e egyenes képét!



39.2. Az α szögtartományban kijelöltünk egy P pontot. Forgasd el a szöget P pont körül az óramutató járásával megegyező irányban 60°-kal!

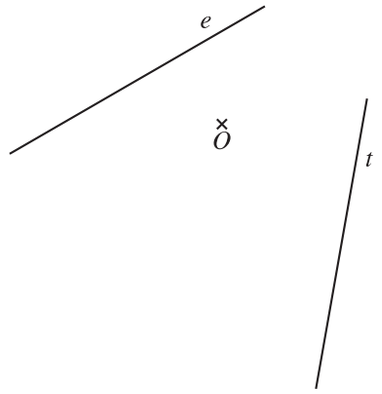


Az adott szög α. Mekkora a szög képe?

Válasz: .....

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 85

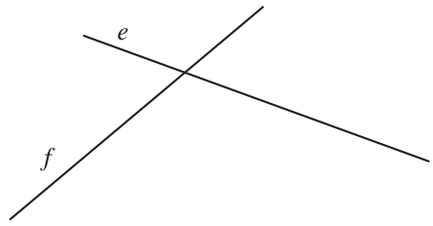
39.3. Forgasd el az *O* pont körül az *e* egyenest úgy, hogy a képe az *f* egyenessel párhuzamos legyen!



Hány megoldás van?

Válasz: .....

39.4. Szerkeszd meg azt az *O* pontot, amely körül elforgatva a síkot, az *e* egyenes képe az *f* egyenes lesz!



Hány megoldás van?

Válasz: .....

39.5. Jelölj ki egy *e* és egy azt metsző *f* egyenest! Jelölj ki az *e* egyenesen egy *A*, az *f* egyenesen egy *B* pontot! (Mindkét pont különbözzön a metszésponttól.) Szerkeszd meg azt az *O* pontot, amely körül elforgatva a síkot, az *e* egyenes képe az *f* egyenes, az *A* pont képe a *B* pont lesz!

Statisztika

40. feladatlap

A statisztika alapjai 1.

EMLÉKEZTETŐ

statisztikai sokaság: A megfigyelt elemek halmaza.

egyed: A megfigyelt sokaság eleme.

ismérv: A megfigyelt tulajdonság.

adat: A statisztikai sokaság egyedeinek megfigyelt tulajdonsága.

gyakoriság: A kérdéses adat előfordulásának száma.

relatív gyakoriság: A kérdéses adat gyakorisága és az összes adat hányadosa.

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 86

FELADATOK

40.1. Karcsi nyáron cukrászdában dolgozott. Egyik nap felmérést készített, hogy két óra alatt milyen ízű fagylaltból mennyit vesznek. Megfigyelését a következő táblázatba gyűjtötte.

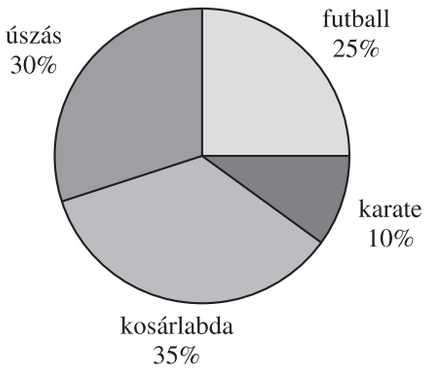
Fagylalt	Csokoládé	Vanília	Eper	Citrom	Kávé	Banán
Vásárolt gombócok száma	15	10	12	19	6	8

a) Készíts kördiagramot az adatokból!

b) Mennyi a csokoládéfagylalt-fogyasztás relatív gyakorisága?

c) A megvásárolt gombócok hány százaléka volt gyümölcsfagylalt?

40.2. Az itt látható kördiagram egy 40 fős osztály kedvenc sportágait mutatja.



a) Hány tanuló kedvence a kosárlabda?

b) Készíts oszlopdiagramot!

c) Mennyi az úszásért rajongók gyakorisága, mennyi a relatív gyakoriságuk?

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 87

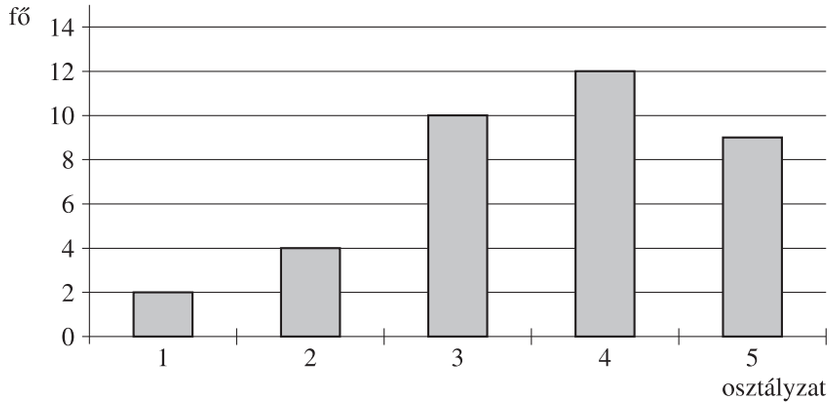
40.3. Egy szupermarket parkolójában összeszámolták a délután 15.00 és 16.00 óra között ott parkoló Zoo márkájú autókat.

Típus	Hamster	Mouse	Parrot	Horse	Bustard
Gyakoriság	46	38	17	18	21
Relatív gyakoriság					

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait!

b) Készíts oszlopdiagramot!

40.4. A lenti oszlopdiagram egy osztály történelem témazáró dolgozatainak eredményeit mutatja.



a) Készíts táblázatot!

b) Hány fős az osztály?

c) A tanulók hány százaléka írt legalább jó dolgozatot?

d) Mennyi a közepes osztályzat relatív gyakorisága?

e) Állíthatjuk-e, hogy az a dolgozatok „jól sikerültek”?

41. feladatlap

A statisztika alapjai 2.

EMLÉKEZTETŐ

módusz: A statisztikai sokaságban leggyakrabban szereplő adat.

medián: A statisztikai sokaság növekvő sorrendbe rendezett adatok mediánja páratlan számú adat esetén a középső elem, páros adatszám esetén a két középső elem számtani közepe.

terjedelem: A statisztikai sokaságban előforduló legnagyobb és legkisebb adat különbsége.

számtani közép: A statisztikai sokaságban szereplő adatok összegének és az adatok számának hányadosa. A számtani közepet átlagnak is szoktuk nevezni.

Jelölése: $\bar{x}$. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

átlagos négyzetes eltérés: A következő összefüggéssel számolható ki: $\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

szórás: A szórás az átlagos négyzetes eltérés négyzetgyöke: $\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.

FELADATOK

41.1. Egy 48 fős turistabuszon az idegenvezető kíváncsi volt, hányan beszélnek valamilyen idegen nyelven. Az utasok bevallása szerint mindenki maximum egy idegen nyelven beszélt. Angolul az utasok fele, olaszul 8-an, németül a többi utas $\frac{3}{4}$ része. A többiek nem beszéltek semmilyen idegen nyelven.

a) Készíts táblázatot!

b) Mennyi a németül beszélők relatív gyakorisága?

c) Az utasok hány százaléka nem beszél idegen nyelvet?

MatFgy-09-04:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:05 Page 89

41.2. Egy középiskola 9. osztályában felmérést végeztek, hogy kinek hány testvére van.

Testvérek száma	0	1	2	3	4	5
Diákok	4	9	8	3	2	1

a) Mekkora az adatsokaság terjedelme?

b) Átlagosan hány testvére van egy diáknak ebben az osztályban?

c) Mennyi a módusz?

41.3. Egy statisztikai felmérés kedvéért megkérdezték néhány járókelőtől, hogy hányas cipőt hord. A következő válaszokat kapták: 41, 36, 38, 38, 43, 42, 37, 38, 36, 41, 39, 43, 43, 38.

a) Mekkora a sokaság terjedelme?

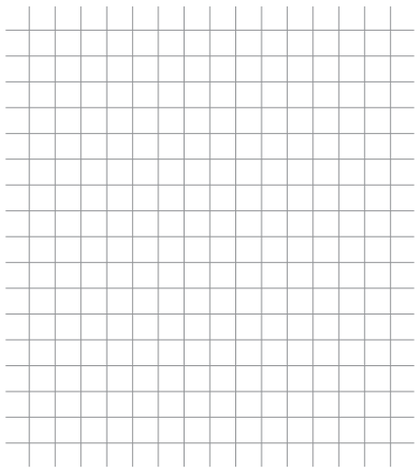
b) Mennyi a szórás?

c) Szerepel-e a medián az adatok között?

41.4. A következő táblázat egy évfolyam dolgozateredményeit mutatja.

Osztályzat	5	4	3	2	1
A osztályból	4	8	12	3	2
B osztályból	5	10	7	6	0
C osztályból	3	6	2	15	4

a) Készíts oszlopdiagramot a teljes évfolyamra!



b) Mennyi az egyes osztályok átlaga?

c) Mekkora a B osztály osztályzatainak módusza?

d) Mekkora a teljes évfolyam mediánja?

e) Az évfolyam hány százaléka ért el közepes eredményt?

41.5. Adj meg egy olyan hatelemű halmazt, amelynek
a) átlaga 3,2;

b) módusza 7;

c) mediánja 5;

d) szórása 0!

41.6. Adj meg egy olyan ötelemű halmazt, amelynek
a) átlaga 3,2;

b) módusza 7;

c) mediánja 2;

d) szórása 0!

MatMgy-09-1k:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:08 Page 91

Megoldások

1. feladatlap

1.1. Halmazok: B, C, D_1, G. Nem halmazok: A, D_2, E, F.

1.2. $A := \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$; $H := \{\text{hétfő; kedd; …; péntek}\}$; $X := \{\text{piros; sárga; kék}\}$; $Y := \{98;\ \ldots;\ 2\}$; $W := \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ \ldots\}$.

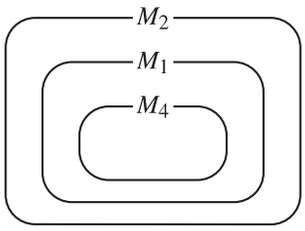
1.3. $A := \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \le x \le 5\}$; $H := \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 7\}$; $X := \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x < 6\}$; $Y := \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \le 5\}$.

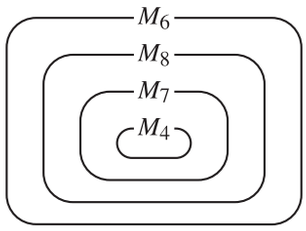
1.4. $a \in A$; $b \in A$; $c \notin A$; $d \notin A$; $a \in B$; $b \in B$; $c \in B$; $d \notin B$; $a \in C$; $b \notin C$; $c \in C$; $d \notin C$; $a \in \{-2;\ 0;\ 2\}$; $b, c, d \notin \{-2;\ 0;\ 2\}$.

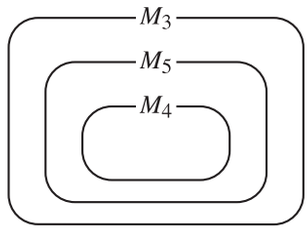
1.5. $|A| = |\{0;\ 1\}| = 2$; $|B| = |\{10;\ \ldots;\ 99\}| = 90$; $|C| = |\{\text{hétfő; …; vasárnap}\}| = 7$; $|D| = |\{-1;\ -2;\ -3;\ \ldots\}| = \text{végtelen}$.

1.6. $A = B = E$; $C = D = F$.

1.7. $M_4 \subseteq M_1 \subseteq M_2$; $M_4 \subseteq M_5 \subseteq M_3$; $M_4 \subseteq M_7 \subseteq M_8 \subseteq M_6$.



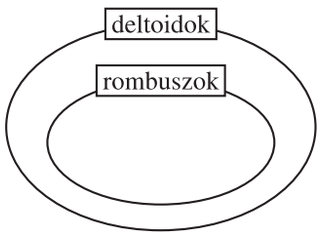




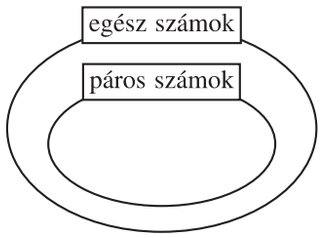
1.8. A részhalmazsorozat két bármelyik eleme lehet a megoldás, ugyanilyen sorrendben.

$\{\text{trapézok}\} \supseteq \{\text{paralelogrammák}\} \supseteq \begin{Bmatrix}\{\text{rombuszok}\}\\ \{\text{téglalapok}\}\end{Bmatrix} \supseteq \{\text{négyzetek}\}$

1.9. *a)*



b)



1.10. Valódi részhalmaz: A; B; D; E; F. Nem valódi: C.

1.11. $\varnothing$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{1;\ 2\}$.

1.12. *a)* H; *b)* I; *c)* I; *d)* I; *e)* H; *f)* I; *g)* H; *h)* I.

2. feladatlap

2.1. Az $\mathbb{N}$ halmaz alatt: $2;\ 0;\ \frac{8}{2}$. A $\mathbb{Z}$ halmaz alatt: $2;\ 0;\ \frac{8}{2};\ -\sqrt{9}$. A $\mathbb{Q}$ halmaz alatt: $2;\ -1{,}3;\ 0;\ \frac{2}{4};\ 0{,}\dot{2};\ \frac{8}{2};\ -0{,}\dot{9}1\dot{8};\ -\sqrt{9}$. Az $\mathbb{R}$ halmaz alatt: $2;\ -1{,}3;\ 0;\ \frac{2}{4};\ 0{,}\dot{2};\ \sqrt{2};\ \frac{8}{2};\ -0{,}\dot{9}1\dot{8};\ -\sqrt{9};\ \pi$.

2.2. $A := \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; $B := \{6;\ 7;\ 8;\ 9;\ \ldots\}$; $C := \{\}$; $D := \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$; $E := \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $F := \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $G := \left\{\frac{1}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{3}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{7};\ \frac{6}{7}\right\}$.

2.3. $A := \{x \mid x \in \mathbb{N};\ 3 \le x \le 7\}$; $B := \{x \mid x \in \mathbb{N};\ 100 \le x\}$; $C := \{x \mid x \in \mathbb{Z};\ -5 \le x \le -1\}$; $D := \{x \mid x \in \mathbb{N};\ 0 \le x\}$.

2.4. *a)* $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$, $\frac{8}{9}=\frac{16}{18}$. $\frac{14}{18}<\frac{15}{18}<\frac{16}{18}$ vagyis $\frac{7}{9}<\frac{5}{6}<\frac{8}{9}$.

b) $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$, $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$. $\frac{9}{15}<\frac{10}{15}<\frac{11}{15}<\frac{12}{15}$, vagyis $\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{11}{15}<\frac{4}{5}$.

2.5. $\frac{9}{19}=\frac{9\cdot199}{19\cdot199}=\frac{1791}{3781}$ $\frac{19}{199}=\frac{19\cdot19}{19\cdot199}=\frac{361}{3781}$, vagyis $\frac{9}{19}>\frac{19}{199}$. A különbség: $\frac{1430}{3781}$.

2.6. *a)* $-8;\ -1\frac{3}{4};\ -1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{3};\ 2{,}5;\ 3;\ 12$. *b)* $A:=\{0;\ 3;\ 12\}$; *c)* $B:=\{-8;\ -1;\ 0;\ 3;\ 12\}$;

d) $A\subseteq B$. *e)* $C:=\left\{-1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{2}{3};\ -8;\ 12;\ \frac{7}{3};\ 2{,}5;\ 3;\ -1\frac{3}{4}\right\}$, vagy $C:=M$.

f) $D:=\left\{\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{2}{3};\ 12;\ \frac{7}{3};\ 2{,}5;\ 3\right\}$; *g)* $E:=\left\{\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{3};\ 2{,}5;\ 3\right\}$; *h)* $F:=\{\}$.

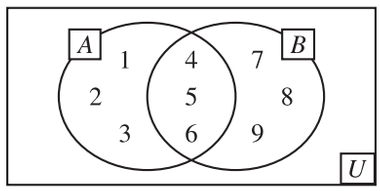
2.7. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{12}$, $\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{28}{15}$, $\frac{3}{4}:\frac{5}{3}=\frac{9}{20}$. Minden kifejezés felírható két egész szám hányadosaként, tehát racionálisak.

3. feladatlap

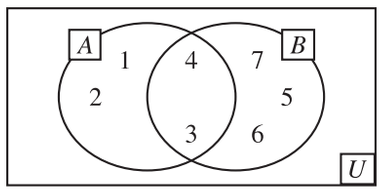
3.1. *a)* $A\cup B=U=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$;

b) $A\cap B=\{4;\ 5;\ 6\}$; *c)* $A\setminus B=\{1;\ 2;\ 3\}$; *d)* $B\setminus A=\{7;\ 8;\ 9\}$;

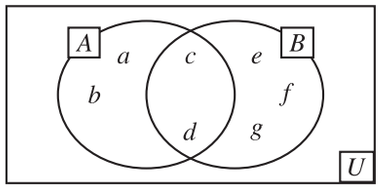
e) $\overline{A}=\{7;\ 8;\ 9\}$. *f)* $\overline{B}=\{1;\ 2;\ 3\}$.



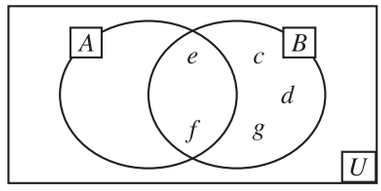
3.2. *a)* $B=\{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$; *b)* $A\setminus B=\{1;\ 2\}$.



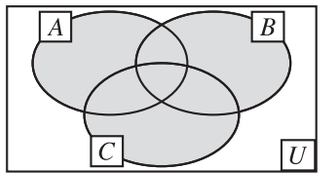
3.3. *a)* $A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$; *b)* $B=\{c;\ d;\ e;\ f;\ g\}$.



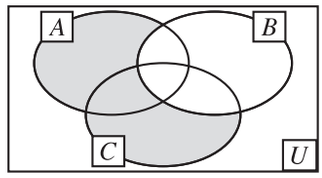
3.4. *a)* $A=\{e;\ f\}$; *b)* $B=\{c;\ d;\ e;\ f;\ g\}$.



3.5. *a)*

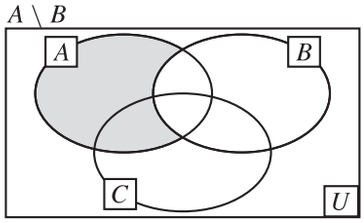


b)

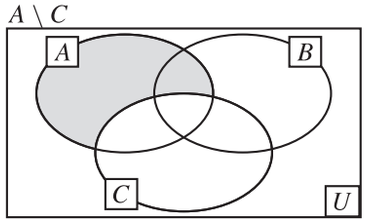


c)

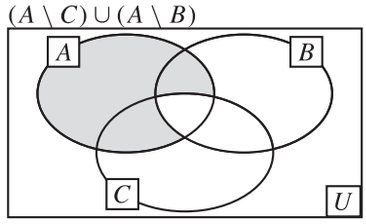
$A\setminus B$



$A\setminus C$

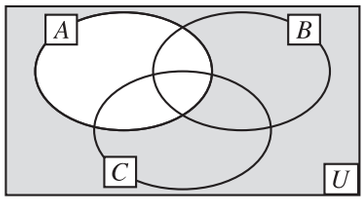


$(A\setminus C)\cup(A\setminus B)$

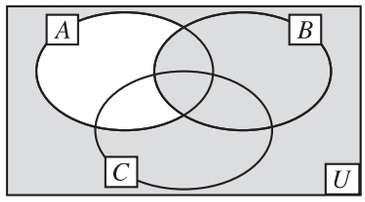


d)

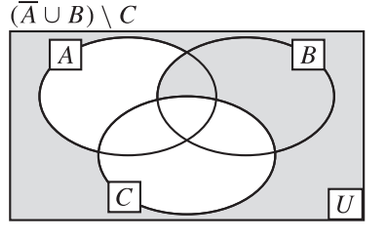
$\overline{A}$



$\overline{A} \cup B$

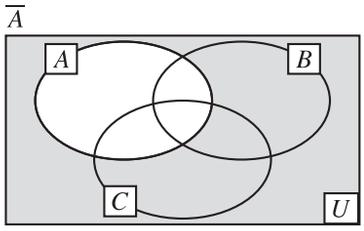


$(\overline{A} \cup B) \setminus C$

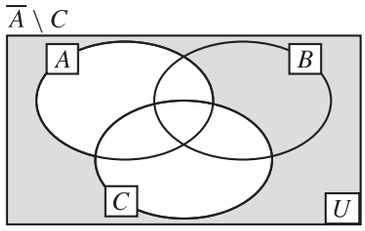


e)

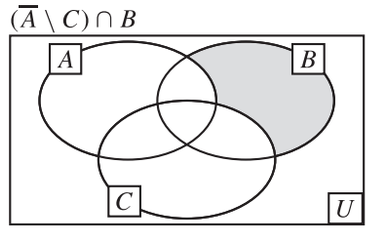
$\overline{A}$



$\overline{A} \setminus C$

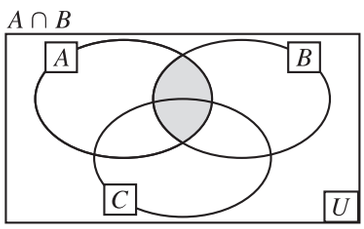


$(\overline{A} \setminus C) \cap B$

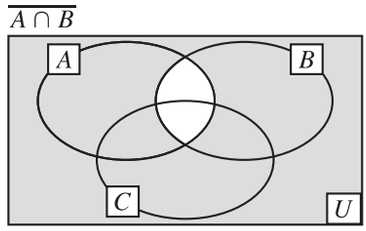


f)

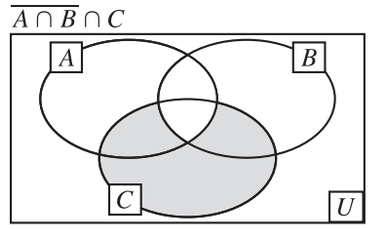
$A \cap B$



$\overline{A \cap B}$

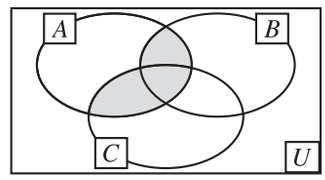


$\overline{A \cap B} \cap C$

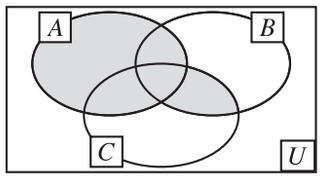


3.6. Egy-egy lehetséges megoldás. *a)* $A \cap B \cap C$; *b)* $(A \cup B) \cap C$; *c)* $(A \cap B) \cup C$.

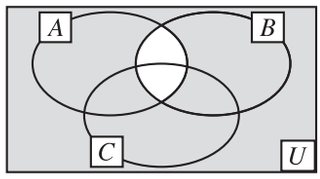
3.7. A kifejezések mindkét oldalának Venn-diagramja megegyezik, *a)* így a kifejezések azonosságok.



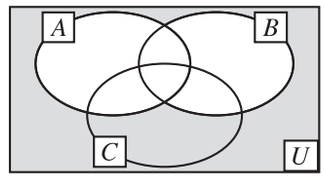
b)



c)

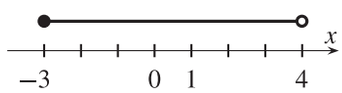


d)

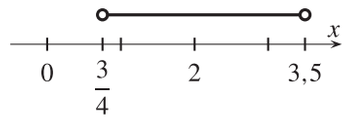


4. feladatlap

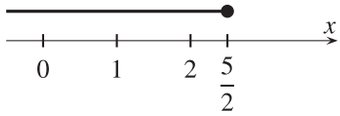
4.1. *a)* $-3 \le x < 4$,



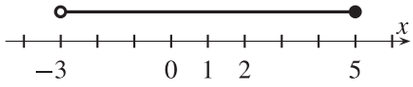
b) $\frac{3}{4} < x < 3{,}5$,



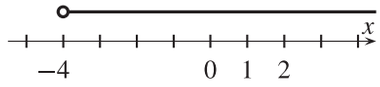
c) $x \le \frac{5}{2}$,



4.2. *a)* $]-3;\ 5]$

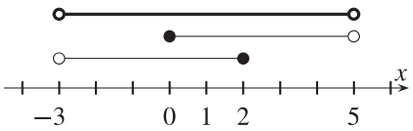


b) $]-4;\ +\infty[$

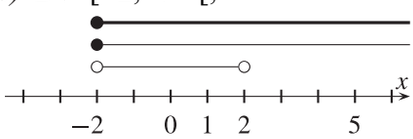


4.3. *a)* $\left]-\frac{5}{3};\ \frac{5}{3}\right[$, $-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3}$; *b)* $]-\infty;\ c[$, $x < c$.

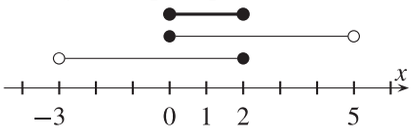
4.4. *a)* $A :=]-3;\ 5[$,



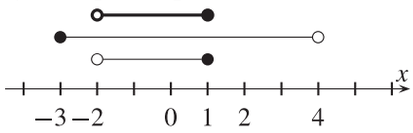
b) $B := [-2;\ +\infty[$,



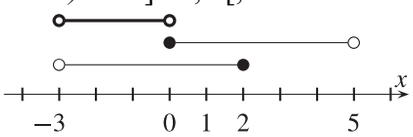
4.5. *a)* $A := [0;\ 2]$,



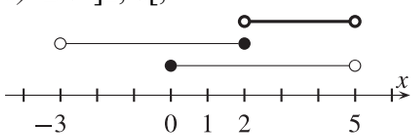
b) $B :=]-2;\ 1]$,



4.6. *a)* $A :=]-3;\ 0[$,



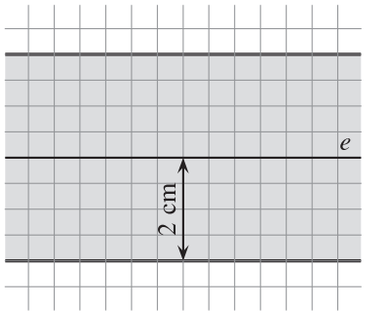
b) $B :=]2;\ 5[$,



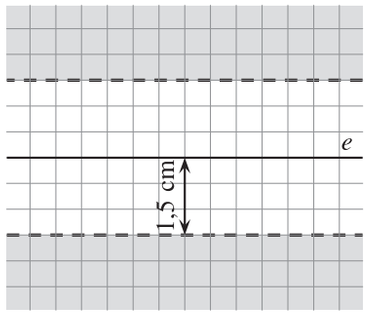
4.7. *a)* A; *b)* $(E \setminus D) \cap C = [-2{,}5;\ 0[$; *c)* $A \cap B = [0;\ 4{,}5]$; $(A \cap B) \cap D =]2;\ 4{,}5]$;
d) $\overline{D} =]-\infty;\ 2]$; $\overline{D} \cap E = [-2{,}5;\ 2]$.

5. feladatlap

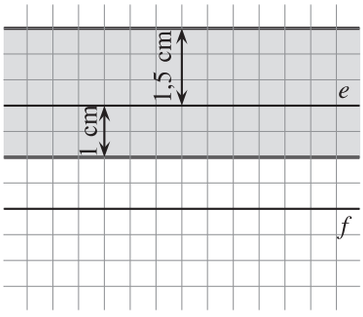
5.1. *a)*



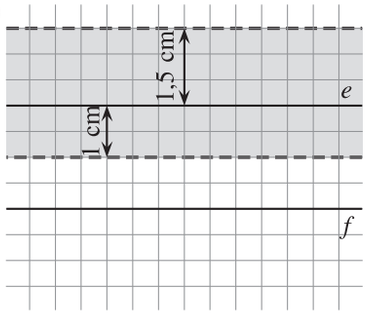
b)



c)



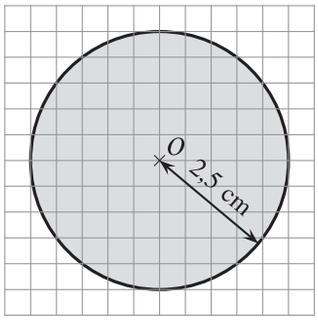
d)



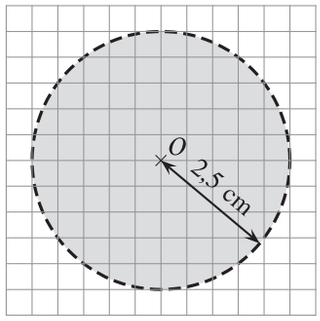
5.2. *a)* {az *e* egyenestől kisebb mint 1,5 cm-re lévő pontok};

b) {az *e* egyenestől nagyobb mint 1 cm-re lévő pontok}.

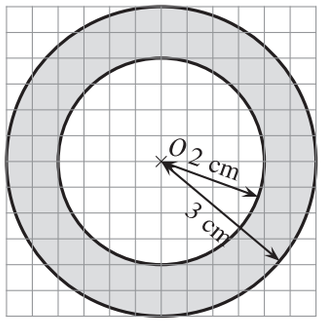
5.3. *a)*



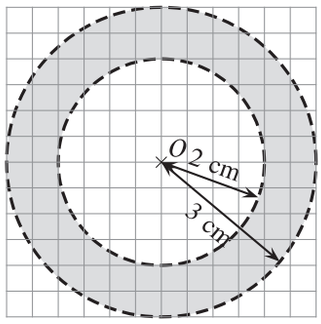
b)



c)

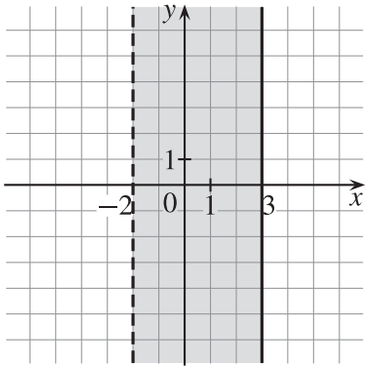


d)

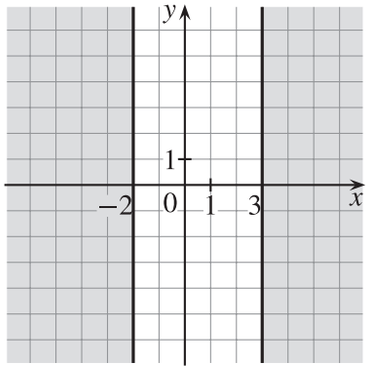


5.4. *a)* {az *O* ponttól legalább 1,5 cm-re lévő pontok};
c) {az *O* ponttól kevesebb mint 2 cm-re lévő pontok};
d) {az *O* ponttól kevesebb mint 2 cm-re és legalább 1,5 cm-re lévő pontok}.

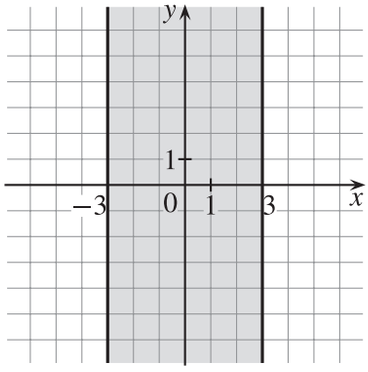
5.5. *a)*



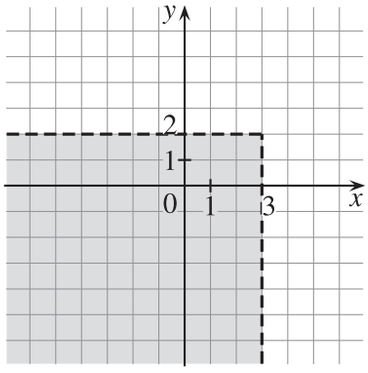
b)



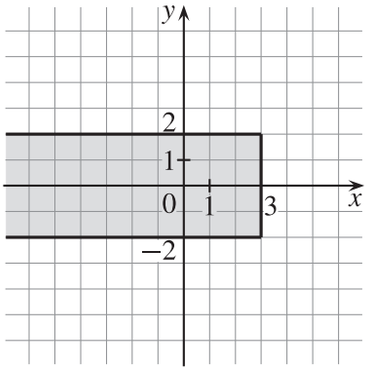
c)



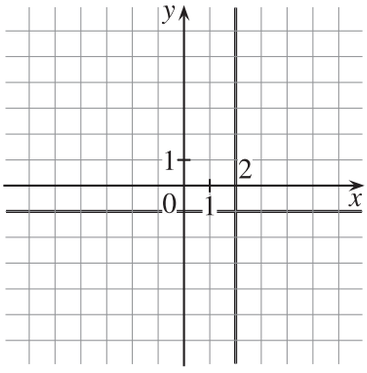
d)



e)



f)



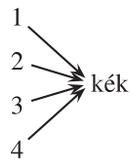
5.6. *a)* $\{(x;y)\,|\,y \geq 1\}$; *b)* $\{(x;y)\,|\,y < 3 \text{ és } -3 \leq y\}$; *c)* $\{(x;y)\,|\,x > -2 \text{ és } y > -3\}$.

6. feladatlap

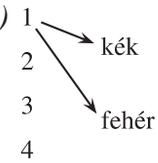
6.1. *a)* Nem függvény, mivel egy embernek több kutyája is lehet.
b) Függvény, mert egy diáknak csak egy diákigazolványa lehet.
c) Nem függvény, mivel egy embernek több autója is lehet.
d) Függvény, mivel egy gyermeknek csak egy anyukája lehet.
e) Nem függvény, mivel egy anyukának több gyermeke lehet.
f) Nem függvény, mivel egy tanulónak több tankönyve lehet.

6.2. *a)* Nem egyértelmű; *b)* Nem egyértelmű; *c)* Kölcsönösen egyértelmű; *d)* Egyértelmű.

6.3. A feladatoknak sok megoldása lehet. Egy-egy példa: *a)*

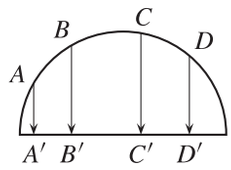


b)



c) Nem lehet kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést megadni, mert nincs elegendő elem a képhalmazban.

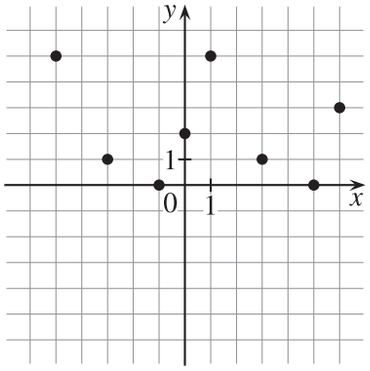
6.4. *c)* Pl. vagy 3 vagy 6, vagy 4 vagy 8. *d)*

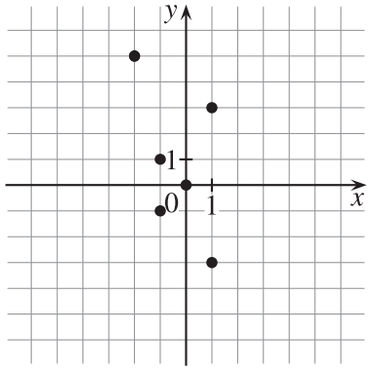


6.5. Nyolcféle hozzárendelés lehetséges.

$1 \mapsto a$	$1 \mapsto a$	$1 \mapsto a$	$1 \mapsto a$	$1 \mapsto b$	$1 \mapsto b$	$1 \mapsto b$	$1 \mapsto b$
$2 \mapsto a$	$2 \mapsto a$	$2 \mapsto b$	$2 \mapsto b$	$2 \mapsto a$	$2 \mapsto a$	$2 \mapsto b$	$2 \mapsto b$
$3 \mapsto a$	$3 \mapsto b$	$3 \mapsto a$	$3 \mapsto b$	$3 \mapsto a$	$3 \mapsto b$	$3 \mapsto b$	$3 \mapsto a$

6.6. *a)* Függvény; *b)* Nem függvény:





6.7. Mind a két hozzárendelés függvény.
a) É.T. = {–6; –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4}, É.K. = {–4; –2; 0; 2};
b) É.T. = {–5; –4; –3; 0; 3; 4; 5}, É.K. = {0; 2; 3; 4}.

6.8. *a)* (–6; –6), (–5; –3), (1; 0); (4; 5); *b)* (–6; 6), (–3; 3), (–2; 3), (0; 0); (1; –3), (3; –3), (5; –5).

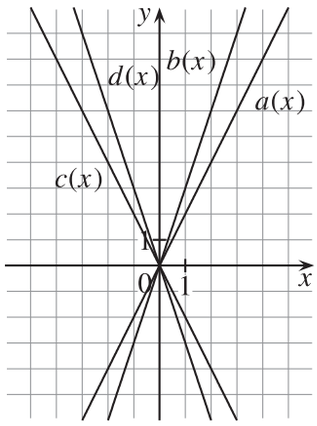
6.9. *a)* (–6; 6), (–3; 3), (0; 0); (3; –3); *b)* (–5; 5), (–4; 0), (–3; –3), (–2; –4), (–1; –3); (0, 0); (1; 5).

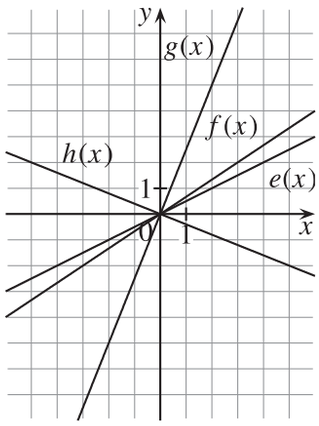
6.10. *a)* (–4; 2), (–3; 1), (0; 0), (2; –4), (4; 0), (5, 5).
b) (–4; 5), (–3; 0), (–2; –2), (0; –2), (1; 0), (3; –6).

6.11. *a)* É.T. =]–4; 4[, É.K. =]–3; 3[; *b)* É.T. = [–5; 5[, É.K. = {2};
c) É.T. = [–2; 2], É.K. = [–6; 6]; *d)* É.T. = [–6; 5], É.K. = [0; 5].

7. feladatlap

7.1.





7.2.

$a(x) = 2x;$

$b(x) = x$

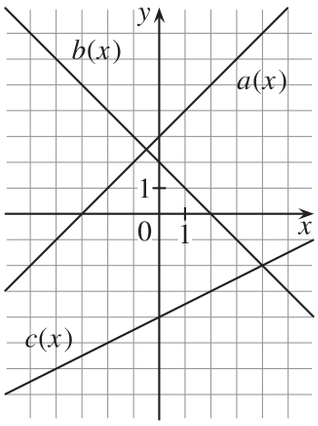
$c(x) = \frac{300}{2}x \ \left(\text{Ft}/\text{l}\right);$

$d(x) = 50x \ \left(\text{Ft}/\text{l}\right);$

$e(x) = 300x \ \left(\text{m}/\text{s}\right);$

$f(x) = \frac{100}{3}x \ \left(\text{m}/\text{s}\right);$

7.3.

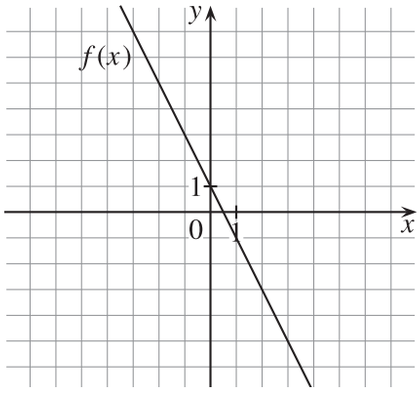


7.4. $a(x)=\frac{3}{4}x+4;\quad b(x)=-3;$

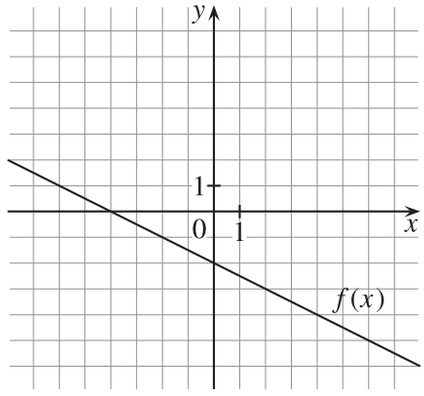
$c(x)=-x+1;\quad d(x)=-\frac{3}{4}x-2;$

$e(x)=\frac{7}{6}x+2;\quad f(x)=-\frac{1}{2}x+3.$

7.5. $-2\mapsto 5;\ 0\mapsto 1;\ 1\mapsto -1;\ 2\mapsto -3.$



7.6. $6\mapsto -5;\ 2\mapsto -3;\ -4\mapsto 0;\ -6\mapsto 1.$



8. feladatlap

8.1. *a)* $-\left|-\frac{1}{12}\right|+\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{6};$ *b)* $\left|\frac{15}{2}-\frac{16}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2};$

c) $2\frac{2}{5}-\left|1-\left|-\frac{5}{3}\right|\right|=2\frac{2}{5}-\left|1-\frac{5}{3}\right|=2\frac{2}{5}-\left|-\frac{2}{3}\right|=2\frac{2}{5}-\frac{2}{3}=\frac{26}{15};$

d) $\left[(-0,91)-|-2,11|\right]\cdot 100=(-3,02)\cdot 100=-302.$

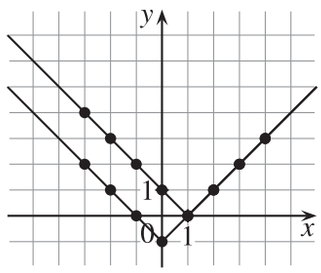
8.2. *a)* $|a+2b|=|5+2(-4)|=|-3|=3,\ \ |a|+|2b|=|5|+|2(-4)|=5+8=13.$ Tehát $|a+2b|<|a|+|2b|;$

b) $|a-2b|=|5-2(-4)|=|5+8|=13,\ \ |a|-|2b|=|5|-|2(-4)|=5-8=-3.$ Tehát $|a-2b|>|a|-|2b|;$

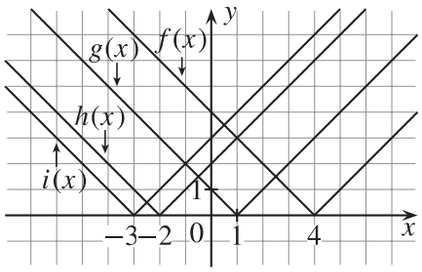
c) $|a+b+c|=|5-4+0|=1,\ \ |a|+|b|+|c|=5+4+0=9.$ Tehát $|a+b+c|<|a|+|b|+|c|.$

8.3.

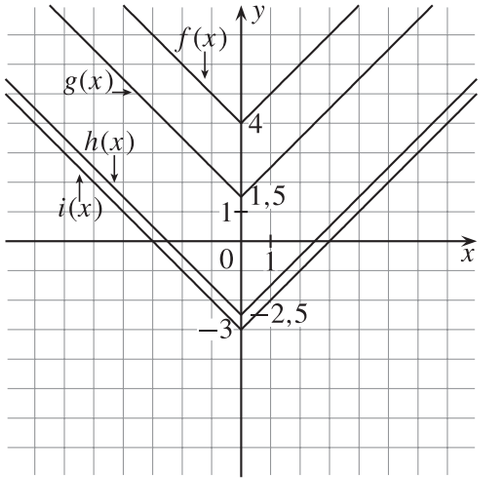
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\lvert x-1\rvert$	4	3	2	1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert-1$	2	1	0	-1	0	1	2	3



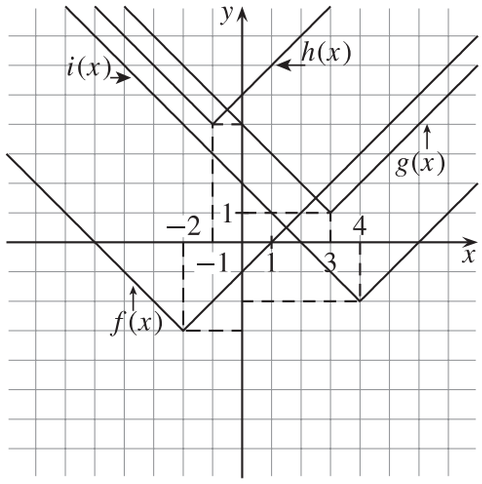
8.4.



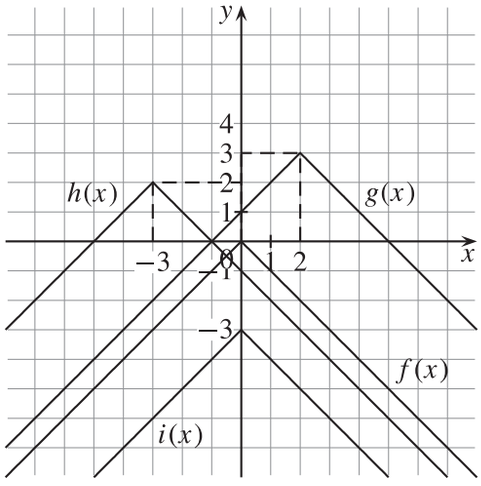
8.5.



8.6.



8.7.



8.8. $a(x) = |x-1|$;

$b(x) = |x+3|$;

$c(x) = |x| - 1$;

$d(x) = -|x| + 4$;

$e(x) = |x+2| - 3$;

$f(x) = -|x-2| + 4$;

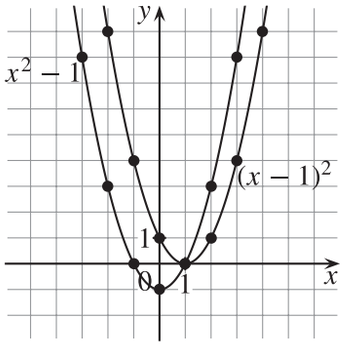
$g(x) = -|x-3| + 5$;

$h(x) = |x+3| - 2$.

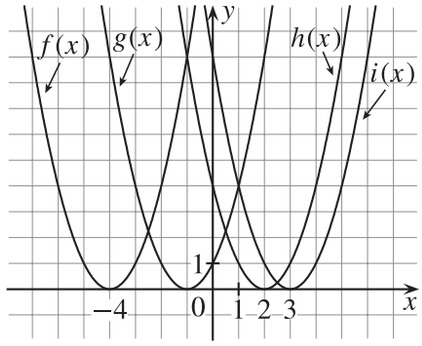
9. feladatlap

9.1.

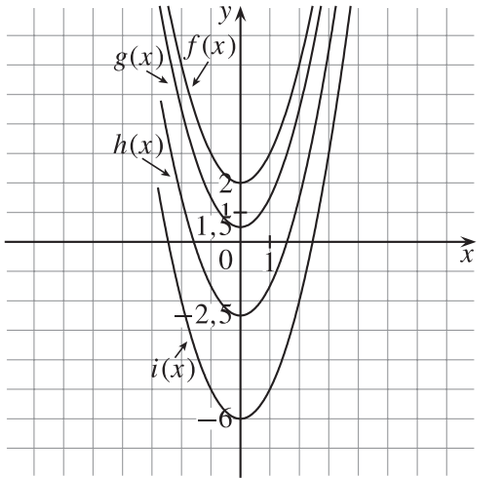
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9
x^2-1	8	3	0	-1	0	3	8	15



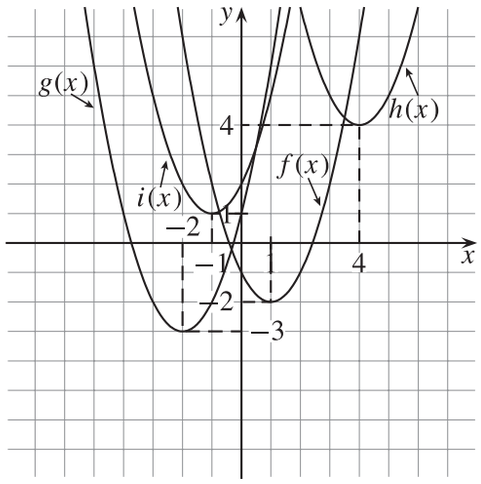
9.2.



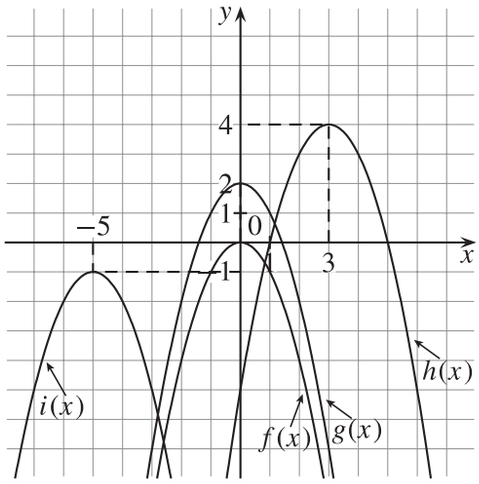
9.3.



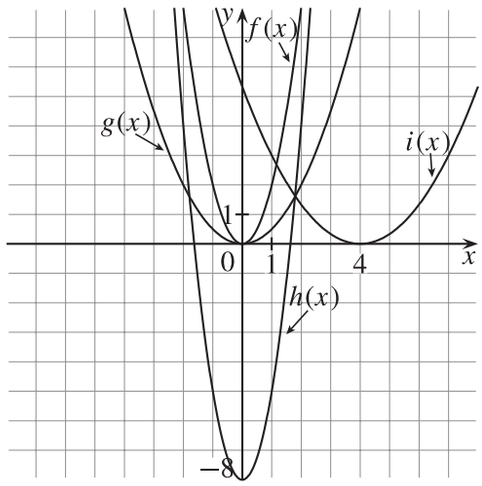
9.4.



9.5.



9.6.

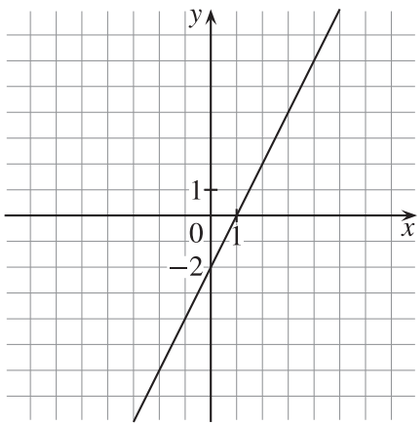


9.7. $a(x)=(x+3)^2$; $b(x)=(x-1)^2$; $c(x)=x^2-4$; $d(x)=-x^2+6$; $e(x)=(x+2)^2-3$; $f(x)=-(x-3)^2+4$; $g(x)=-(x-3)^2+2$; $h(x)=(x+2)^2-3$.

9.8. *a)* $x_1=-1$ és $x_2=1$. $x\le -1$ vagy $1\le x$. *b)* $x_1=-2$ és $x_2=2$. $-2\le x\le 2$. *c)* $x_1=-4$ és $x_2=0$. $x\le -4$ vagy $0\le x$. *d)* $x_1=-3$ és $x_2=3$. $-3\le x\le 3$.

10. feladatlap

10.1. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.
Értékkészlet: $\mathbb{R}$.
Zérushely: $x=1$.
Tengelypont: $y=-2$.
Növekedés: Szigorúan monoton nő.
Csökkenés: —.
Minimumhely: —. Minimumérték: —.
Maximumhely: —. Maximumérték: —.



10.2. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $\mathbb{R}$.

Zérushely: $x = \frac{8}{3}$.

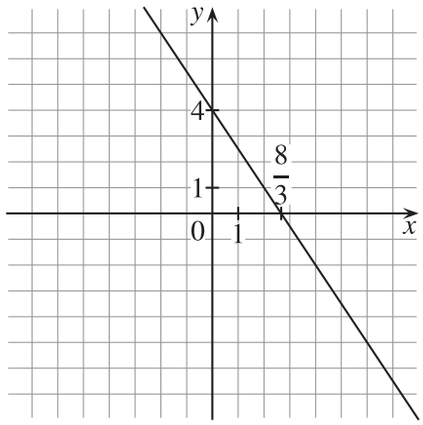
Tengelypont: $y = 4$.

Növekedés: —.

Csökkenés: Szigorúan monoton csökken.

Minimumhely: —. Minimumérték: —.

Maximumhely: —. Maximumérték: —.



10.3. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $[-1;+\infty[$.

Zérushely: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

Tengelypont: $y = -1$.

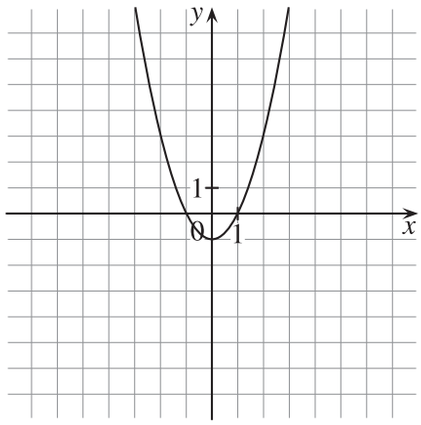
Növekedés: $0 \le x$ esetén szigorúan monoton növekszik.

Csökkenés: $x \le 0$ esetén szigorúan monoton csökken.

Minimumhely: $x = 0$.

Minimumérték: $y = -1$.

Maximumhely: —. Maximumérték: —.



10.4. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $]-\infty;4]$.

Zérushely: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

Tengelypont: $y = 0$.

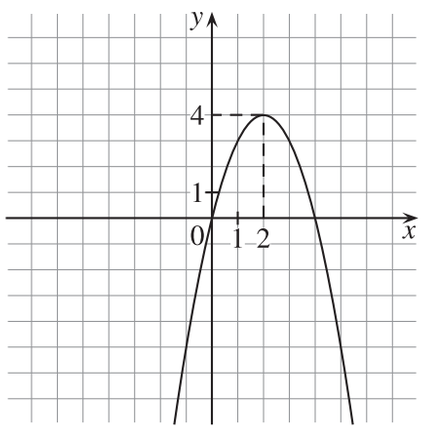
Növekedés: $x \le 2$ esetén szigorúan monoton növekszik.

Fogyás: $2 \le x$ esetén szigorúan monoton csökken.

Minimumhely: —. Minimumérték: —.

Maximumhely: $x = 2$.

Maximumérték: $y = 4$.



10.5. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $[-3;+\infty[$.

Zérushely: $x_1 = -4$; $x_2 = 2$.

Tengelypont: $y = -2$.

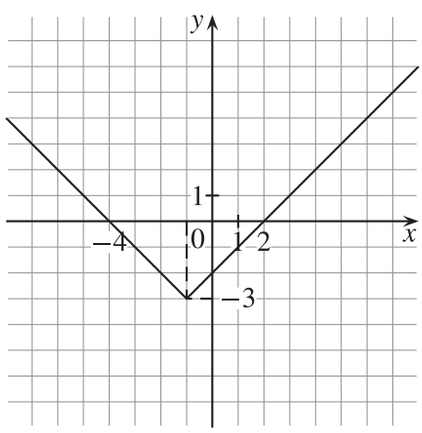
Növekedés: $-1 \le x$ esetén szigorúan monoton növekszik.

Fogyás: $x \le -1$ esetén szigorúan monoton csökken.

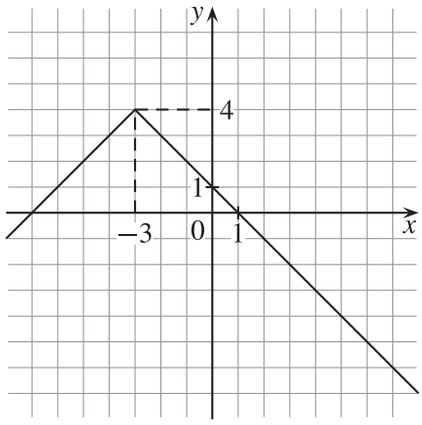
Minimumhely: $x = -1$.

Minimumérték: $y = -3$.

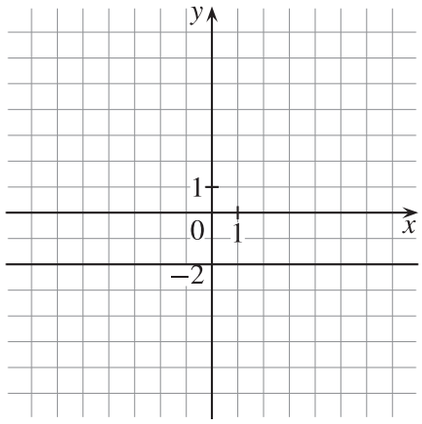
Maximumhely: —. Maximumérték: —.



10.6. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.
Értékkészlet: $]-\infty;4]$.
Zérushely: $x_1=-7;\ x_2=1$.
Tengelypont: $y=1$.
Növekedés: $x\le -3$ esetén szigorúan monoton növekszik.
Fogyás: $-3\le x$ esetén szigorúan monoton csökken.
Minimumhely: —. Minimumérték: —.
Maximumhely: $x=-3$.
Maximumérték: $y=4$.



10.7. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.
Értékkészlet: $\{-2\}$.
Zérushely: —.
Tengelypont: $y=-2$.
Növekedés: A valós számok halmazán monoton növekvő.
Fogyás: A valós számok halmazán monoton csökkenő.
Minimumhely: $\mathbb{R}$.
Minimumérték: $y=-2$.
Maximumhely: $\mathbb{R}$.
Maximumérték: $y=-2$.

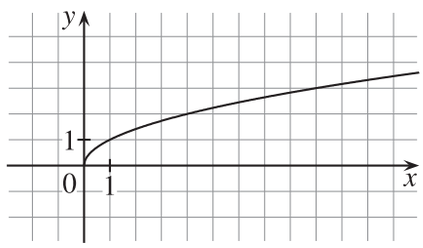


11. feladatlap

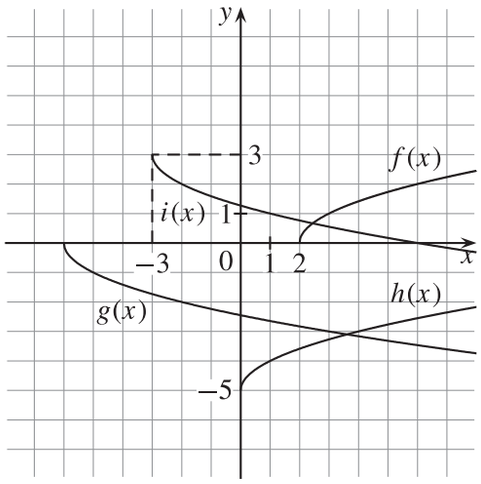
11.1. $\sqrt{25}=5;\ -\sqrt{4}=-2;\ \sqrt{-1}$ = Nem értelmezett; $\sqrt{0}=0;\ -\sqrt{\frac{16}{9}}=-\frac{4}{3};\ \sqrt{1}=1;\ \sqrt{0,01}=0,1;$ $\sqrt{2};\ \sqrt{-100}$ = Nem értelmezett; $\sqrt{20}$. A sorrend: $-\sqrt{4};\ -\sqrt{\frac{16}{9}};\ \sqrt{0};\ \sqrt{0,01};\ \sqrt{1};$ $\sqrt{2};\ \sqrt{20};\ \sqrt{25}$.

11.2. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-$.
Értékkészlet: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-$.
Zérushely: $x=0$.
Tengelypont: $y=0$.
Növekedés: $0\le x$ esetén szigorúan monoton növekszik.
Csökkenés:—.
Minimumhely: $x=0$. Minimumérték: $y=0$.
Maximumhely: —. Maximumérték: —.

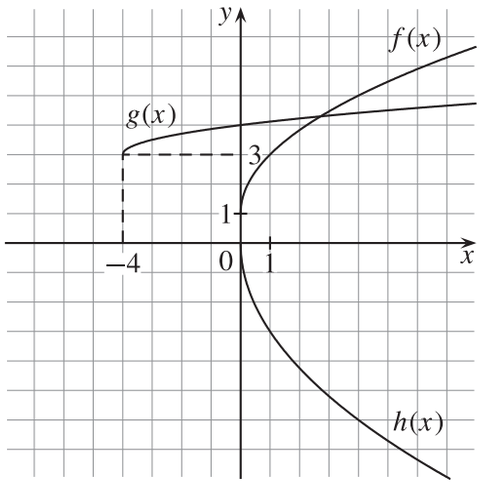
x	-1	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	—	0	1	2	3



11.3.



11.4.



11.5. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $\mathbb{R}$.

Zérushely: $x = 0$.

Tengelypont: $y = 0$.

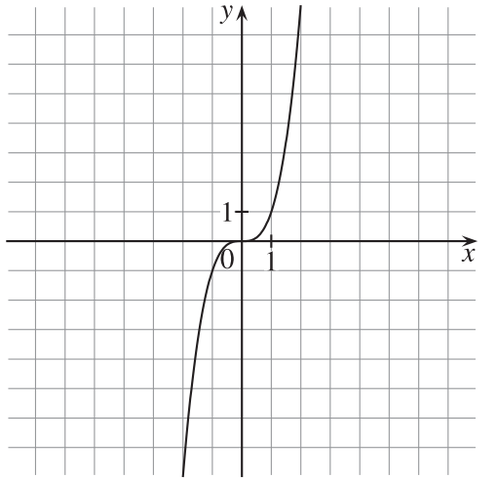
Növekedés: Szigorúan monoton növekszik.

Csökkenés: —.

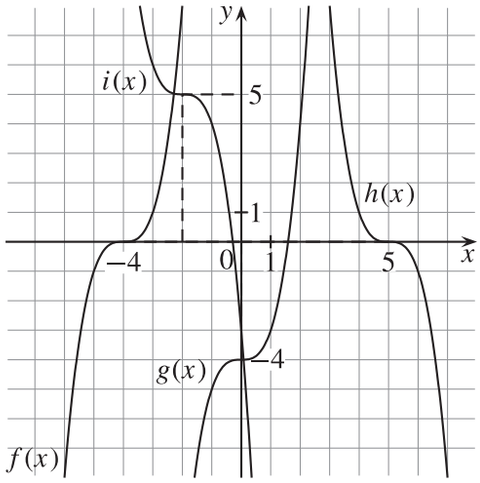
Minimumhely: —. Minimumérték: —.

Maximumhely: —. Maximumérték: —.

x	−2	−1	0	1	2
x^3	−8	−1	0	1	8



11.6.



11.7. *a)* Hamis, mert a függvény értelmezési tartománya $[-1; +\infty[$; *b)* Igaz, mert a függvény értelmezési tartománya $[1; +\infty[$; *c)* Igaz. *d)* Hamis.

12. feladatlap

12.1. *a)* Nem fordított arányosság, mivel a mennyiségek összetartozó értékeinek szorzata nem állandó.

Csapok száma	1	2	3	4	5
Feltöltés ideje (perc)	136,8	68,4	45,6	34,2	26,8
Szorzat	136,8	136,8	136,8	136,8	134

b) Fordított arányosság, mivel a mennyiségek összetartozó értékeinek szorzata állandó.

Kitöltött mennyiség (dl/fő)	3,32	2,49	1,992	1,66	1,245
A társaság létszáma	3	4	5	6	8
Szorzat	9,96 dl	9,96 dl	9,96 dl	9,96 dl	9,96 dl

12.2.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4
$\frac{1}{x}$	–	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Értékkészlet: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

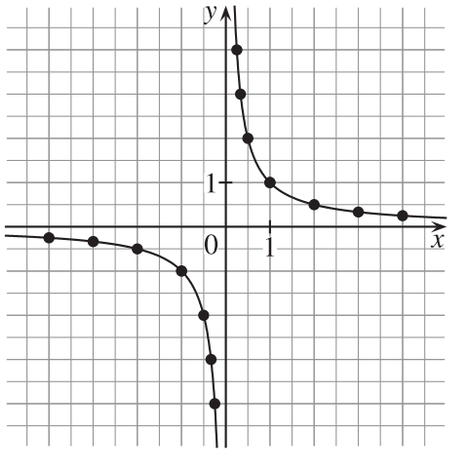
Zérushely: —

y-tengely metszete: —

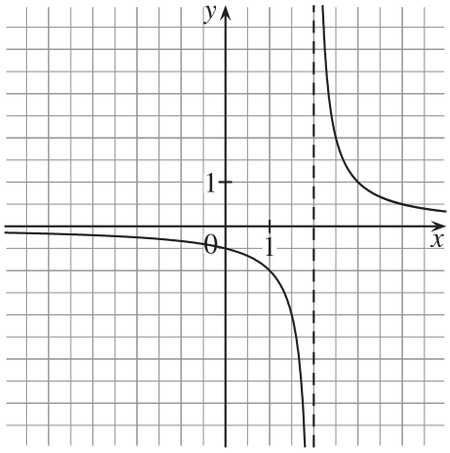
Növekedés: —

Csökkenés: Szigorúan monoton csökken, ha $x < 0$ vagy $0 < x$.

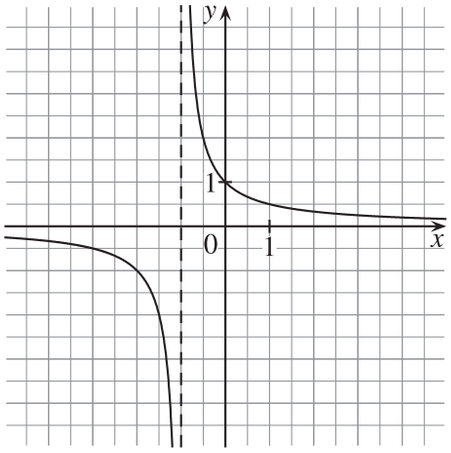
Szélsőértékek: —



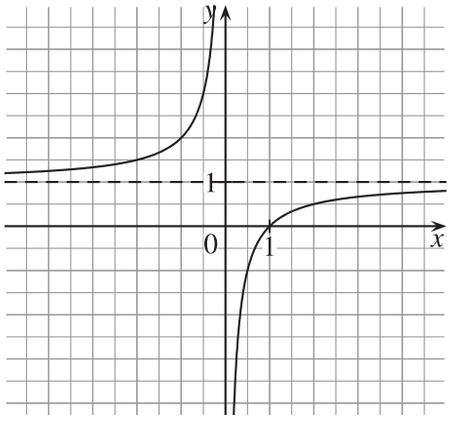
12.3.



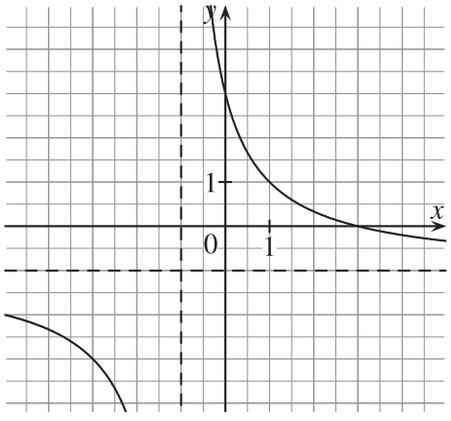
12.4.



12.5.



12.6.



13. feladatlap

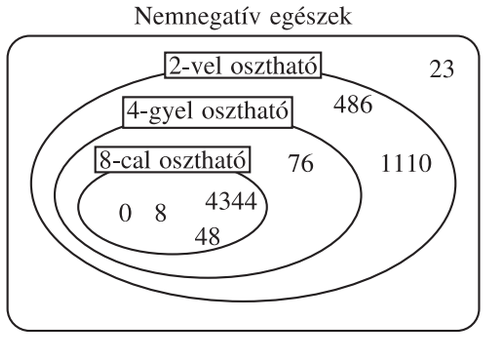
13.1.

a	b	c	d	osztó / osztandó
$a \mid e$	$b \nmid e$	$c \nmid e$	$d \nmid e$	e
$a \nmid f$	$b \mid f$	$c \mid f$	$d \nmid f$	f
$a \mid g$	$b \mid g$	$c \nmid g$	$d \nmid g$	g
$a \mid 6300$	$b \mid 6300$	$c \mid 6300$	$d \mid 6300$	6300

13.2. A := {2-vel osztható számok} = {0; 8; 48; 76; 486; 1110; 4344};

B := {4-gyel osztható számok} = {0; 8; 48; 76; 4344};

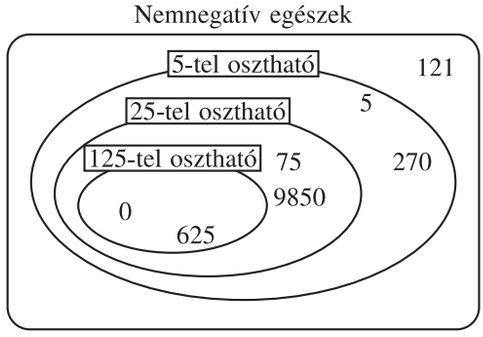
C := {8-cal osztható számok} = {0; 8; 48; 4344}.



13.3. A := {5-tel osztható számok} = {0; 5; 75; 270; 625; 9850};

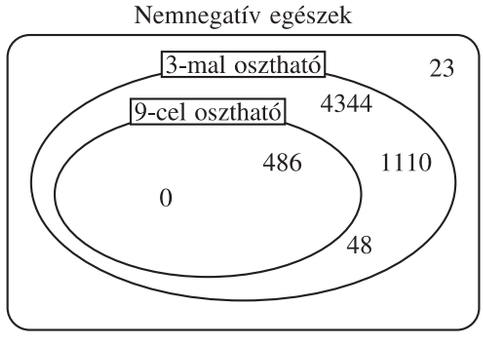
B := {25-tel osztható számok} = {0; 75; 625; 9850};

C := {125-tel osztható számok} = {0; 625}.



13.4. A := {3-mal osztható számok} = {0; 48; 486; 1110; 4344};

B := {9-cel osztható számok} = {0; 486}.



13.5. *a)* Egy egész szám akkor osztható hárommal, ha a számjegyeinek összege osztható hárommal. A számjegyek összege $14 + x$. $x = 1; 4; 7$ számjegyek esetén kapunk hárommal osztható összegeket. A megoldások: 231 450; 234 450; 237 450.
b) 4-gyel akkor osztható az egész szám, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel. 52 és 56 a két lehetséges végződés. A megoldások: 443 252; 443 256. $y = 2; 6$.
c) 6-tal akkor osztható az egész szám, ha 2-vel is és 3-mal is osztható, tehát az utolsó számjegy csak páros lehet. A páros számjegyek közül azonban az a jó, amelyikre a számjegyek összege 3-mal osztható. A megoldások: 530 280; 530 286. $z = 0; 6$.

13.6. A 9-nél nem kisebb prímszámok mind páratlanok, ezért csak páros prímet adhatunk 9-hez. Az egyetlen páros prím a 2. $9 + 2 = 11$, ami prím. Tehát 2 az egyetlen megoldás.

13.7. *a)* Igaz, mert bármelyik egész szám 0-val szorozva 0-t ad eredményül.
b) Hamis, mert éppen a duplázással vált 2-vel oszthatóvá a szám. *c)* Igaz.
d) Hamis, mivel a 18 osztható 3-mal, de nem osztható 30-cal.
e) Hamis, mert 25-höz 1-et adva 26-ot kapunk, vagyis 5-tel nem osztható számot.
f) Hamis, mert ugyanazzal a számmal osztható két szám összege és különbsége is osztható ugyanazzal a számmal.

14. feladatlap

14.1. *a)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; *b)* $2^5 \cdot 11^2$; *c)* $2^2 \cdot 3^2$; *d)* $2^2 \cdot 3^2$; *e)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; *f)* $2^5 \cdot 11^2$; *g)* $2^2 \cdot 3^2$; *h)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.
Az egyenlők: $a = e = h$; $b = f$; $c = d$.

14.2. *a)* $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Az osztók száma: $(2+1) \cdot (2+1) = 9$; *b)* $32 = 2^5$. Az osztók száma: $5 + 1 = 6$;
c) $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Az osztók száma: $(2+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 36$; *d)* $4875 = 3 \cdot 5^3 \cdot 13$.
Az osztók száma: $(1+1) \cdot (3+1) \cdot (1+1) = 16$.

14.3. *a)* Hamis, mert például 2 + 3 = 5; *b)* Igaz, mivel minden második szám páros, így a két szám között mindenképpen akad páros, vagyis a szorzatuk páros; *c)* Igaz, mivel a számok között biztosan szerepel hárommal osztható, és páros is; *d)* Hamis, hiszen $2\cdot 3\cdot 4 = 24$ osztható 12-vel; *e)* Igaz, például $16\cdot 18 = 288$ osztható 32-vel; *f)* Hamis, hiszen $27 = 3^3$, vagyis osztóinak száma 4.

15. feladatlap

15.1. *a)* A két szám prímtényezős felbontása: $1512 = 2^3\cdot 3^3\cdot 7$, $1656 = 2^3\cdot 3^2\cdot 23$. A legnagyobb közös osztó: $2^3\cdot 3^2 = 72$. A legkisebb közös többszörös: $2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 23 = 34\ 776$; *b)* A két szám prímtényezős felbontása: $11\ 025 = 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2$, $17\ 325 = 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$.

A legnagyobb közös osztó: $3^2\cdot 5^2\cdot 7 = 525$. A legkisebb közös többszörös: $3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11 = 121\ 275$.

15.2. A számlálók és nevezők prímtényezőkre bontása után, a közös tényezőkkel egyszerűsíthetünk.

a) $\frac{60}{156} = \frac{2^2\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 3\cdot 13} = \frac{5}{13}$; *b)* $\frac{1485}{594} = \frac{3^3\cdot 5\cdot 11}{2\cdot 3^3\cdot 11} = \frac{5}{2}$; *c)* $\frac{1170}{4095} = \frac{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13}{3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13} = \frac{2}{7}$.

15.3. A nevezők legkisebb közös többszöröse lesz a közös nevező.

a) $\frac{5}{6} - \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{2\cdot 3} - \frac{5}{2^2} + \frac{2}{5} = \frac{50 - 75 + 24}{2^2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{1}{60}$.

b) $\frac{3}{44} + \frac{1}{12} - \frac{4}{21} = \frac{3}{2^2\cdot 11} + \frac{1}{2^2\cdot 3} - \frac{4}{3\cdot 7} = \frac{63 + 77 - 176}{2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = -\frac{36}{924} = -\frac{3}{77}$.

c) $\frac{27}{50} - \frac{5}{12} - \frac{2}{45} = \frac{27}{2\cdot 5^2} - \frac{5}{2^2\cdot 3} - \frac{2}{3^2\cdot 5} = \frac{486 - 375 - 40}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2} = \frac{71}{900}$.

15.4. Az együtthatókat és a konstans tagot prímtényezőkre bontjuk, majd a közös tényezőket kiemeljük.

a) $24x + 36 = 2^3\cdot 3x + 2^2\cdot 3^2 = 2^2\cdot 3(2x + 3) = 12(2x + 3)$;

b) $540x - 450 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5x - 2\cdot 3^2\cdot 5^2 = 2\cdot 3^2\cdot 5(6x + 5) = 90(6x + 5)$;

c) $165x - 231y + 99 = 3\cdot 5\cdot 11x - 3\cdot 7\cdot 11y + 3^2\cdot 11 = 3\cdot 11(5x - 7y + 3) = 33(5x - 7y + 3)$;

d) $-192x - 216y - 600 = -2^6\cdot 3x - 2^3\cdot 3^3 y - 2^3\cdot 3\cdot 5^2 = -2^3\cdot 3\cdot\left(2^3 x + 3^2 y + 5^2\right) =$

$= -24(8x + 9y + 25)$.

15.5. A két szám legkisebb közös többszöröse a megoldás: [30; 42] = 210.

15.6. *a)* Igaz; *b)* Igaz; *c)* Hamis, mert 23 és 1 legnagyobb közös osztója 1; *d)* Hamis, mert, ha a két szám 27, akkor a legkisebb közös többszörösük is 27; *e)* Igaz, mert a legnagyobb közös osztó a közös osztók közül a legnagyobb.

16. feladatlap

16.1. *a)* Ötös számrendszerbeli szám. Értéke: 66_{10}; *b)* Négyes számrendszerbeli szám. Értéke: 45_{10}; *c)* Hármas számrendszerbeli szám. Értéke: 25_{10}; *d)* Nyolcas számrendszerbeli szám. Értéke: 379_{10}.

16.2. *a)* $24_5 = 2\cdot 5 + 4 = 14_{10}$; *b)* $13_4 = 1\cdot 4 + 3 = 7_{10}$; *c)* $223_5 = 2\cdot 5^2 + 2\cdot 5 + 3 = 63_{10}$;

d) $1\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 3 = 27_{10}$.

16.3. *a)* 243_5; *b)* 2332_5; *c)* 31140_5.

5	
73	3
14	4
2	2
0	

5	
342	2
68	3
13	3
2	2
0	

5	
2045	0
409	4
81	1
16	1
3	3
0	

16.4.

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1
256	128	64	32	16	8	4	2	1

a) $101_2 = 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5$; *b)* $100_2 = 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 = 4$; *c)* $111_2 = 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = 7$;

d) $110_2 = 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 6$.

16.5. *a)* $10111_2 = 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1 = 23_{10}$;

b) $1001101_2 = 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 0\cdot 16 + 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1 = 77_{10}$;

c) $111001_2 = 1\cdot 32 + 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1 = 57_{10}$;

d) $11001100_2 = 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 0\cdot 16 + 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 = 204_{10}$.

16.6. *a)* 1001_2; *b)* 10011_2; *c)* 11100_2.

2	
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

2	
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

2	
28	0
14	0
7	1
3	1
1	1
0	

16.7. *a)* 100000_2; *b)* 110010_2; *c)* 1100100_2.

2	
32	0
16	0
8	0
4	0
2	0
1	1
0	

2	
50	0
25	1
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

2	
100	0
50	0
25	1
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

16.8. *a)* Igaz, mivel az 5 nem tartozik a négyes számrendszer számjegyei {0; 1; 2; 3} közé;

b) Hamis, mert a 9 nem lehet a kilences számrendszer számjegye;

c) Hamis, mert csak három {0; 1; 2} számjegy szükséges;

d) Igaz, mert $101_3 = 9 + 1 = 10_{10}$, valamint $101_2 = 4 + 1 = 5_{10}$;

e) Igaz, mert $11_3 = 3 + 1 = 4_{10}$, valamint $100_2 = 4_{10}$;

f) Hamis, mert $101_3 = 9 + 1 = 10_{10}$, valamint $1010_2 = 8 + 2 = 10_{10}$.

17. feladatlap

17.1. *a)* $2\cdot10^{-2}+12\cdot10^{-3}+375\cdot10^{-4}=\frac{2}{10^2}+\frac{12}{10^3}+\frac{375}{10^4}=0,02+0,012+0,0375=0,0695;$

b) $4\cdot2^{-1}+20\cdot2^{-2}+24\cdot2^{-3}=\frac{4}{2}+\frac{20}{2^2}+\frac{24}{2^3}=2+5+3=10;$

c) $1,8\cdot3^{-1}+1,8\cdot3^{-2}-5,4\cdot3^{-3}=\frac{1,8}{3}+\frac{1,8}{3^2}-\frac{5,4}{3^3}=0,6+0,2-0,2=0,6.$

17.2. *a)* $2^5\cdot3^7\cdot5^{11}\cdot2^{-3}\cdot3^4\cdot5^{-4}=2^{5+(-3)}\cdot3^{7+4}\cdot5^{11+(-4)}=2^2\cdot3^{11}\cdot5^7;$

b) $a^{-4}\cdot b^5\cdot c^7\cdot a^6\cdot b^{11}\cdot c^5\cdot a^{-9}\cdot b^{-2}\cdot c^{-12}=a^{-7}\cdot b^{14}\cdot c^0=a^{-7}\cdot b^{14};$

c) $x^{20}\cdot y\cdot x^4\cdot z^{-6}\cdot x^{-13}\cdot y^{-4}\cdot z^3\cdot x^{10}\cdot z^{-10}=x^{21}\cdot y^{-3}\cdot z^{-13}.$

17.3. *a)* $\frac{2^8\cdot3^{-5}\cdot5^{11}}{2^{-3}\cdot3^{-6}\cdot5^6}=2^{8-(-3)}\cdot3^{-5-(-6)}\cdot5^{11-6}=2^{11}\cdot3\cdot5^5;$

b) $\frac{a^4\cdot b^{-6}\cdot c^{-3}}{a^{-7}\cdot b^{-2}\cdot c^5}=a^{4-(-7)}\cdot b^{-6-(-2)}\cdot c^{-3-5}=a^{11}\cdot b^{-4}\cdot c^{-8};$

c) $\frac{x^{-3}\cdot z^7}{x^{-3}\cdot y^{-6}\cdot z^4}=x^{-3-(-3)}\cdot y^{-(-6)}\cdot z^{7-4}=x^0\cdot y^6\cdot z^3=y^6\cdot z^3.$

17.4. *a)* $\frac{16^3\cdot8^{-2}\cdot2^6\cdot4^{-3}}{32^3\cdot64^{-2}}=\frac{\left(2^4\right)^3\cdot\left(2^3\right)^{-2}\cdot2^6\cdot\left(2^2\right)^{-3}}{\left(2^5\right)^3\cdot\left(2^6\right)^{-2}}=\frac{2^{12}\cdot2^{-6}\cdot2^6\cdot2^{-6}}{2^{15}\cdot2^{-12}}=\frac{2^6}{2^3}=2^3=8;$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot16^2\cdot\frac{1}{8^{-4}}\cdot\frac{2}{128}=\left(\frac{1}{2^2}\right)^5\cdot\left(2^4\right)^2\cdot\frac{1}{\left(2^3\right)^{-4}}\cdot\frac{2}{2^7}=\frac{1}{2^{10}}\cdot2^8\cdot\frac{1}{2^{-12}}\cdot2^{-6}=2^{-10}\cdot2^8\cdot2^{12}\cdot2^{-6}=2^4=16.$

17.5. Prímtényezős felbontás segítségével hozd egyszerűbb alakra!

a) $\frac{48^3\cdot50^4\cdot36^2}{96^2\cdot60^2\cdot75^3}=\frac{\left(2^4\cdot3\right)^3\cdot\left(2\cdot5^2\right)^4\cdot\left(2^2\cdot3^2\right)^2}{\left(2^5\cdot3\right)^2\cdot\left(2^2\cdot3\cdot5\right)^2\cdot\left(3\cdot5^2\right)^3}=\frac{2^{12}\cdot3^3\cdot2^4\cdot5^8\cdot2^4\cdot3^4}{2^{10}\cdot3^2\cdot2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot3^3\cdot5^6}=\frac{2^{20}\cdot3^7\cdot5^8}{2^{14}\cdot3^7\cdot5^8}=2^6=64;$

b) $\frac{72^5\cdot90^3\cdot28^6}{(70\cdot63)^3\cdot24^8}=\frac{\left(2^3\cdot3^2\right)^5\cdot\left(2\cdot3^2\cdot5\right)^5\cdot\left(2^2\cdot7\right)^6}{\left(2\cdot5\cdot7\cdot7\cdot3^2\right)^3\cdot\left(2^3\cdot3\right)^8}=\frac{2^{15}\cdot3^{10}\cdot2^5\cdot3^{10}\cdot5^5\cdot2^{12}\cdot7^6}{2^3\cdot5^3\cdot7^6\cdot3^6\cdot2^{24}\cdot3^8}=$

$=\frac{2^{32}\cdot3^{20}\cdot5^5\cdot7^6}{2^{27}\cdot3^{14}\cdot5^3\cdot7^6}=2^5\cdot3^6\cdot5^2.$

17.6. *a)* A bal oldali hatvány: $16^9=\left(2^4\right)^9=2^{36}.$ A jobb oldali hatványok: $2^{36}=\left(2^3\right)^{12}=8^{12}.$ $2^{36}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-18}.$ $2^{36}=\left(2^6\right)^6=64^6.$ $2^{36}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-36};$

b) $27^8=\left(3^3\right)^8=3^{24}.$ $27^8=3^{24}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-12}.$ $27^8=3^{24}=\left(3^4\right)^6=81^6.$ $27^8=3^{24}=\left(3^6\right)^4=\left(\frac{1}{729}\right)^{-4}.$

17.7. *a)* 10^{30} vagy 20^{20}. $\left(10^3\right)^{10}$ vagy $\left(20^2\right)^{10}$, vagyis 1000^{10} vagy 400^{10}. A 10^{30} a nagyobb.

b) 3^{15} vagy 5^{10}. $\left(3^3\right)^5$ vagy $\left(5^2\right)^5$. 27^5 vagy 25^5. A 3^{15} a nagyobb.

18. feladatlap

18.1. *a)* $6,24\cdot10^{9}$; *b)* $-5,43\cdot10^{6}$; *c)* 10^{3}; *d)* $1,23\cdot10^{-3}$; *e)* $-3,4\cdot10^{-5}$; *f)* 10^{-3}; *g)* $1,25\cdot10^{-2}$.

18.2. *a)* 2470; *b)* 100 000; *c)* −56 000; *d)* 0,000 034 2; *e)* −0,001; *f)* −0,000 000 016 6.

18.3. A tényezők felcserélhetőségének felhasználásával a mantisszákat írjuk előre, a tízhatványokat pedig hátra. Végezzük el a mantisszákkal és a tízhatványokkal a kijelölt műveleteket!

a) $2,4\cdot10^{6}\cdot3\cdot10^{-3}=2,4\cdot3\cdot10^{6}\cdot10^{-3}=7,2\cdot10^{3}$;

b) $\left(-2\cdot10^{-4}\right)\cdot1,35\cdot10^{-3}=-2\cdot1,35\cdot10^{-4}\cdot10^{-3}=-2,7\cdot10^{-7}$;

c) $2,4\cdot10^{6}\cdot3,1\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{4}=2,4\cdot3,1\cdot5\cdot10^{6}\cdot10^{-3}\cdot10^{4}=37,2\cdot10^{7}=3,72\cdot10^{8}$;

d) $-10^{3}\cdot\left(-1,25\cdot10^{8}\right)\cdot(-5)\cdot10^{4}=-1\cdot(-1,25)\cdot(-5)\cdot10^{3}\cdot10^{8}\cdot10^{4}=-6,75\cdot10^{15}$.

18.4. *a)* $247\cdot10^{3}=2,47\cdot10^{2}\cdot10^{3}=2,47\cdot10^{5}$; *b)* $0,0234\cdot10^{-3}=2,34\cdot10^{-2}\cdot10^{-3}=2,34\cdot10^{-5}$;

c) $54,7\cdot10^{-4}=5,47\cdot10^{1}\cdot10^{-4}=5,47\cdot10^{-3}$; *d)* $-0,134\cdot10^{7}=-1,34\cdot10^{-1}\cdot10^{7}=-1,34\cdot10^{6}$.

18.5. A mantisszákat és a tízhatványokat külön osztjuk el egymással.

a) $\dfrac{4,84\cdot10^{5}}{4\cdot10^{2}}=\dfrac{4,84}{4}\cdot\dfrac{10^{5}}{10^{2}}=1,21\cdot10^{3}$; *b)* $\dfrac{4,84\cdot10^{5}}{4\cdot10^{-4}}=\dfrac{4,84}{4}\cdot\dfrac{10^{5}}{10^{-4}}=1,21\cdot10^{9}$;

c) $-\dfrac{7,26\cdot10^{-8}}{1,21\cdot10^{2}}=-\dfrac{7,26}{1,21}\cdot\dfrac{10^{-8}}{10^{2}}=-6\cdot10^{-10}$;

d) $-\dfrac{1,35\cdot10^{-5}}{5\cdot10^{-2}}=-\dfrac{1,35}{5}\cdot\dfrac{10^{-5}}{10^{-2}}=-0,27\cdot10^{-3}=-2,7\cdot10^{-4}$.

18.6. *a)* $\dfrac{8\cdot10^{-4}\cdot4,5\cdot10^{9}}{1,2\cdot10^{-6}\cdot10^{5}}=\dfrac{8\cdot4,5}{1,2\cdot1}\cdot\dfrac{10^{-4}\cdot10^{9}}{10^{-6}\cdot10^{5}}=30\cdot10^{6}=3\cdot10^{7}$;

b) $\dfrac{2,25\cdot10^{-3}\cdot8,82\cdot10^{14}}{2,1\cdot10^{9}\cdot1,5\cdot10^{5}}=\dfrac{2,25\cdot8,82}{2,1\cdot1,5}\cdot\dfrac{10^{-3}\cdot10^{14}}{10^{9}\cdot10^{5}}=6,3\cdot10^{-3}$.

18.7. *a)* $2,33\cdot10^{6}=233\cdot10^{4}$; *b)* $2,34\cdot10^{2}=0,0234\cdot10^{4}$; *c)* $-2,35\cdot10^{-1}=-0,0000235\cdot10^{4}$;

d) $-23,6=-0,00236\cdot10^{4}$.

18.8. *a)* $200\cdot10^{-9}=2\cdot10^{2}\cdot10^{-9}=2\cdot10^{-7}$ m. *b)* $45\cdot10^{-3}=4,5\cdot10^{1}\cdot10^{-3}=4,5\cdot10^{-2}$ m.

c) $260\cdot10^{-12}=2,6\cdot10^{2}\cdot10^{-12}=2,6\cdot10^{-10}$ m. *d)* 76 Gm $=76\cdot10^{9}=7,6\cdot10^{1}\cdot10^{9}=7,6\cdot10^{10}$ m.

e) 800 Mm $=800\cdot10^{6}=8\cdot10^{2}\cdot10^{6}=8\cdot10^{8}$ m. *f)* 5,63 Tm $=5,63\cdot10^{12}$ m.

19. feladatlap

19.1. *a)* $10x^{2}y$; *b)* $7x^{4}y^{3}$; *c)* $12a^{2}b^{2}$; *d)* $-40a^{2}x^{2}y^{3}$; *e)* $-3b^{2}x^{5}y^{2}$.

19.2. *a)* Az első tag hatodfokú, a második és a harmadik tag pedig harmadfokú. A polinom hatodfokú; *b)* Az első és a második tag hatodfokú, a harmadik tag pedig kilencedfokú. A polinom kilencedfokú; *c)* Az első tag harmadfokú, a második másodfokú, a harmadik tag elsőfokú, az utolsó tag a konstanstag, nulladfokú. A polinom harmadfokú; *d)* $s(x)=-x^{7}-4x^{2}+5x-1$. Az első tag hetedfokú, a második tag másodfokú, a harmadik tag elsőfokú, az utolsó tag a nulladfokú (konstans) tag. A polinom hetedfokú.

19.3.

	$p(x)=2x^3y+4x^2y+xy+5$	$p(x)=x^4-x^3+2x^2+x$
Konstans tag	5	0
Elsőfokú tag	—	x
Másodfokú tag	xy	$2x^2$
Harmadfokú tag	$4x^2y$	$-x^3$

19.4. *a)* Az első tag a $\left(34xy^2-a^3b^2c\right)\left(34xy^2-a^3b^2c\right)$, a második tényező a $\left(34xy^2-a^3b^2c\right)$ kifejezés. Az első tag a $34xy^2$ kifejezés, amelynek második tényezője az x. *b)* b^2; *c)* -1.

19.5. A polinomok: x^2; $\frac{x}{2}$; $\frac{3a^2b}{5}$; x^2-2x+3; 5; $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

19.6. Az $\frac{a}{b}$ kifejezés nem polinom.

a) Az egyváltozós polinomok: x^2; $-2x$; x^2+2x; $\frac{1}{3}y^3-3y$; x^3+x^2+x+1; $-\frac{2}{3}x^3+x$;

b) A többváltozós polinomok: a^4b^3; $a^2b+ab^2+b^3$; $-4a^2b+5ab$;

c) Az x változóra nézve elsőfokú polinomok: $-2x$;

d) Az x változóra nézve másodfokú polinomok: x^2; x^2+2x;

e) Az egytagúak: x^2; $-2x$; a^4b^3; *f)* Az egytagúak együtthatói: 1; –2; 1.

20. feladatlap

20.1. *a)* $23x^2-42x+31+13x^2+5x-1+6x^2-x-25=42x^2-38x+5$;

b) $6x^2-8x+12-60x^2-3x+21+5x^2-15x+55=-49x^2-26x+88$;

c) $-2x^2+x+\frac{3}{2}-2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=-4x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{6}$;

d) $\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}x-2+\frac{1}{2}x^2-3x+9=\frac{2}{3}x^2-\frac{9}{2}x+7$.

20.2. *a)* $x^4-10x^3+4x^2-x-4x^4+3x^3-2x^2=-3x^4-7x^3+2x^2-x$;

b) $-4x^4+6x^3+6x^2+4x-4x^5+3x^4-3x^3=-4x^5-x^4+3x^3+6x^2+4x$;

c) $-3x^4+3x^3-6x^2-12x+16x^5+6x^3-4x^2=16x^5-3x^4+9x^3-10x^2-12x$;

d) $30x^4-50x^3-50x^2-5x+5x^4-20x^3+10x^2=35x^4-70x^3-40x^2-5x$.

20.3. *a)* $3x^2-4x+6x-8+6-6x-2x+2x^2=5x^2-6x-2$;

b) $-2x^2+8x+5x-20-6x^2-4x-18x-12=-8x^2-9x-32$;

c) $-2\left(4x^2+8x-10x-20\right)-3\left(30x^2+18x+10x+6\right)=$

$=-8x^2-16x+20x+40-90x^2-54x-30x-18=-98x^2-80x+22$;

d) $-5\left(-9x^2+6x+3x-2\right)-4(3x^2-2x-3x+2)=45x^2-30x-15x+10-12x^2+8x+12x-8=$

$=33x^2-25x+2.$

20.4. *a)* $\left(9x^3+6x^2-12x+6x^2+4x-8\right)+\left(-2x^3-x^2+14x^2+7x+6x+3\right)=$

$=9x^3+6x^2-12x+6x^2+4x-8-2x^3-x^2+14x^2+7x+6x+3=7x^3+25x^2+5x-5;$

b) $\left(-16x^3-48x^2+24x+4x^2+12x-6\right)-\left(2x^3+12x^2+4x^2+24x+12x+72\right)=$

$=-16x^3-48x^2+24x+4x^2+12x-6-2x^3-12x^2-4x^2-24x-12x-72=-18x^3-60x^2-78;$

c) $-2\left(5x^2-2x-5\right)(7x-3)-3(5x-2)\left(5x^2-5x+3\right)=$

$=-2\left(35x^3-15x^2-14x^2+6x-35x+15\right)-3\left(25x^3-25x^2+15x-10x^2+10x-6\right)=$

$=-70x^3+30x^2+28x^2-12x+70x-30-75x^3+75x^2-45x+30x^2-30x+18=$

$=-145x^3+163x^2-17x-12.$

21. feladatlap

21.1. *a)* $x^2+2x+1;$ *b)* $u^2-4u+4;$ *c)* $a^2+6a+9;$ *d)* $16-8y+y^2;$ *e)* $x^2+2xy+y^2;$
f) $u^2-2uv+v^2.$

21.2. *a)* $4x^2+20x+25;$ *b)* $9u^2-36u+36;$ *c)* $\frac{4}{9}a^2+4a+9;$ *d)* $\frac{16}{25}-8y+25y^2.$

21.3. *a)* $4x^2+12xy+9y^2;$ *b)* $9u^2-24uv+16v^2;$ *c)* $4a^2+28aby+49b^2y^2;$

d) $\frac{16}{49}a^2x^2-\frac{5}{7}abxy+\frac{25}{64}b^2y^2.$

21.4. *a)* $x^2-1;$ *b)* $u^2-4;$ *c)* $9-y^2;$ *d)* $u^2-v^2.$

21.5. *a)* $4x^2-y^2;$ *b)* $\frac{4}{9}u^2-v^2;$ *c)* $16x^2-25y^2;$ *d)* $\frac{1}{4}u^2-9v^2.$

21.6. *a)* $\left(a^2+2ab+b^2\right)-\left(a^2-2ab+b^2\right)-4ab=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2-4ab=0;.$

b) $\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ab+b^2\right)-2\left(a^2-b^2\right)=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2-2a^2+2b^2=4b^2;$

c) $\left(a^2-4ab+4b^2\right)-\left(a^2-9b^2\right)=a^2-4ab+4b^2-a^2+9b^2=-4ab+13b^2;.$

d) $\left(4a^2+4ab+b^2\right)-2\left(a^2+2ab+b^2\right)=4a^2+4ab+b^2-2a^2-4ab-2b^2=2a^2-b^2.$

21.7. *a)* $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1;$ *b)* $(y-2)^3=y^3-6y^2+12y-8;$

c) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3;$ *d)* $(3-y)^3=27-27y+9y^2-y^3;$

e) $(ab+5)^3=a^3b^3+15a^2b^2+75ab+125;$ *f)* $(6-xy)^3=216-108xy+18x^2y^2-x^3y^3.$

21.8. *a)* Hamis mert háromtagú kifejezéssé alakítható át. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz. *e)* Igaz.
f) Hamis, mert az $(a-b)^2$ esetén az előjel negatív.

MatMgy-09-2k:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:09 Page 111

22. feladatlap

22.1. *a)* $2x^2+6x=2x(x+3)$; *b)* $x^3y+5x^2y=x^2y(x+5)$; *c)* $3x^2y+3xy=3xy(x+1)$;

d) $12y+24y^2=12y(1+2y)$; *e)* $-x^2-2=-\left(x^2+2\right)$; *f)* $x(2-a)-2(2-a)=(2-a)(x-2)$;

g) $3x(x+y)+4y(x+y)=(x+y)(3x+4y)$.

22.2. *a)* $2a+ax+2b+bx=a(2+x)+b(2+x)=(2+x)(a+b)$;

b) $ax-3a+bx-3b=a(x-3)+b(x-3)=(x-3)(a+b)$;

c) $5x-25+ax-5a=5(x-5)+a(x-5)=(x-5)(5+a)$;

d) $x^2-3x-yx+3y=x(x-3)-y(x-3)=(x-3)(x-y)$;

e) $4x+12-bx-3b=4(x+3)-b(x+3)=(x+3)(4-b)$;

f) $5x^3-10x^2y-yx+2y^2=5x^2(x-2y)-y(x-2y)=(x-2y)\left(5x^2-y\right)$.

22.3. *a)* $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$; *b)* $a^2-1=(a-1)(a+1)$; *c)* $x^2-4=(x-2)(x+2)$;

d) $9-a^2=(3-a)(3+a)$; *e)* $4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$;

f) $\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{25}y^2=\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y\right)$; *g)* $\frac{1}{81}x^2-64=\left(\frac{1}{9}x-8\right)\left(\frac{1}{9}x+8\right)$;

h) $4a^4x^2-b^6y^4=\left(2a^2x-b^3y^2\right)\left(2a^2x+b^3y^2\right)$.

22.4. *a)* $(x+2)^2-9^2=\left[(x+2)-3\right]\left[(x+2)+3\right]=(x-1)(x+5)$;

b) $x^2-(x-2)^2=\left[x-(x-2)\right]\left[x+(x-2)\right]=2(2x-2)=4(x-1)$;

c) $(2x-3y)^2-9y^2=\left[(2x-3y)-3y\right]\left[(2x-3y)+3y\right]=(2x-6y)2x=4x(x-3y)$;

d) $(2x-1)^2-(x+3)^2=\left[(2x-1)-(x+3)\right]\left[(2x-1)+(x+3)\right]=(x-4)(3x+2)$.

22.5. *a)* $x^2+4=$ nem alakítható szorzattá. *b)* $x^2-4=(x-2)(x+2)$;

c) $x^2-9=(x-3)(x+3)$; *d)* $2x^2+4=2\left(x^2+2\right)$.

22.6. *a)* $2x^2-18=2\left(x^2-9\right)=2(x-3)(x+3)$; *b)* $ax^2-25a=a\left(x^2-25\right)=a(x-5)(x+5)$;

c) $-3a^3+12a=-3a\left(a^2-4\right)=-3a(a-2)(a+2)$;

d) $-a^2x^2+\frac{x^2}{4}=-x^2\left(a^2-\frac{1}{4}\right)=-x^2\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)$;

e) $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\left(4x^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{2}\right)$;

f) $-\frac{5}{16}x^3+20x=-5x\left(\frac{1}{16}x^2-4\right)=-5x\left(\frac{1}{4}x-2\right)\left(\frac{1}{4}x+2\right)$.

22.7. *a)* $x^2+2x+1=(x+1)^2$; *b)* $a^2-4a+4=(a-2)^2$; *c)* $x^2+6x+9=(x+3)^2$;

d) $16-8a+a^2=(4-a)^2$; *e)* $4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2$; *f)* $4x^2+2xy^2+y^4=\left(2x+y^2\right)^2$.

22.8. *a)* $2a^2-12a+18=2\left(a^2-6a+9\right)=2(a-3)^2$;

b) $3ba^2-24ba+48b=3b\left(a^2-8a+16\right)=3b(a-4)^2$.

22.9. *a)* $x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$; *b)* $x^3+27=(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$;

c) $125-x^3=(5-x)\left(25+5x+x^2\right)$; *d)* $64+x^3=(4+x)\left(16-4x+x^2\right)$.

23. feladatlap

23.1. *a)* $\frac{6a^2b}{9a^4}=\frac{2b}{3a^2}$; *b)* $\frac{66a^2x^5}{54abx^3}=\frac{11ax^2}{9b}$; *c)* $\frac{36a^3b^2x}{62ab^2x^3}=\frac{18a^2}{31x^2}$; *d)* $\frac{2(a-2)^2}{a(a-2)^2}=\frac{2}{a}$.

23.2. *a)* $\frac{2x+2y}{3x+3y}=\frac{2(x+y)}{3(x+y)}=\frac{2}{3}$. *b)* $\frac{ay-ax}{bx-by}=\frac{a(y-x)}{-b(y-x)}=-\frac{a}{b}$;

c) $\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=x-5$; *d)* $\frac{49-y^2}{7-y}=\frac{(7-y)(7+y)}{7-y}=7+y$.

23.3. *a)* $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y}{x-y}$;

b) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}=\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+3}{x-3}$; *c)* $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$;

d) $\frac{2x^2+20x+50}{3x^2+15x}=\frac{2\left(x^2+10x+25\right)}{3x(x+5)}=\frac{2(x+5)^2}{3x(x+5)}=\frac{2(x+5)}{3x}$.

23.4. *a)* $\frac{1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2a}+\frac{a}{2a}=\frac{a+2}{2a}$; *b)* $\frac{2}{a^3}-\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a^3}-\frac{3a}{a^3}+\frac{a^2}{a^3}=\frac{2-3a+a^2}{a^3}$;

c) $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)}-\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3(x+1)-2(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x+3-2x+4}{(x-2)(x+1)}=$

$=\frac{x+7}{(x-2)(x+1)}$; *d)* $\frac{2}{x+1}+\frac{2}{1-x}=\frac{2(1-x)}{(x+1)(1-x)}+\frac{2(x+1)}{(x+1)(1-x)}=\frac{2(1-x)+2(x+1)}{(x+1)(1-x)}=$

$=\frac{2-2x+2x+2}{(x+1)(1-x)}=\frac{4}{(x+1)(1-x)}$.

23.5. *a)* $\frac{x-3}{x^2-6x+9}\cdot\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{x-3}{(x-3)^2}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=1$;

b) $\frac{5x^2-20}{x^2+4x+4}\cdot\frac{4x+8}{10x-20}=\frac{5\left(x^2-4\right)}{(x+2)^2}\cdot\frac{4(x+2)}{10(x-2)}=\frac{5(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}\cdot\frac{4(x+2)}{10(x-2)}=2$.

23.6. *a)* $\frac{3x-2}{9x^2-12x+4}:\frac{3x+2}{9x^2-4}=\frac{3x-2}{(3x-2)^2}:\frac{3x+2}{(3x+2)(3x-2)}=\frac{3x-2}{(3x-2)^2}\cdot\frac{(3x+2)(3x-2)}{3x+2}=1$;

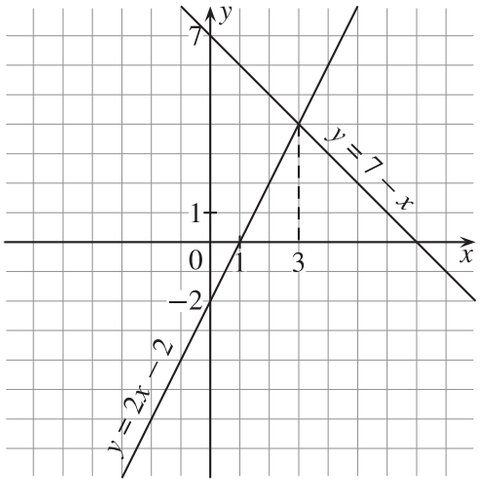
b) $\frac{4x^2+20x+25}{4x^2-25}:\frac{2x+5}{2x-5}=\frac{(2x+5)^2}{(2x+5)\cdot(2x-5)}:\frac{2x+5}{2x-5}=\frac{(2x+5)^2}{(2x+5)\cdot(2x-5)}\cdot\frac{2x-5}{2x+5}=1$.

MatMgy-09-2k:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:09 Page 113

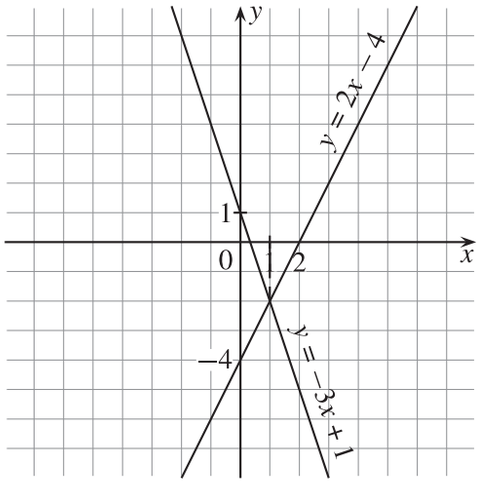
24. feladatlap

24.1. A grafikonok metszéspontja alapján a megoldás:

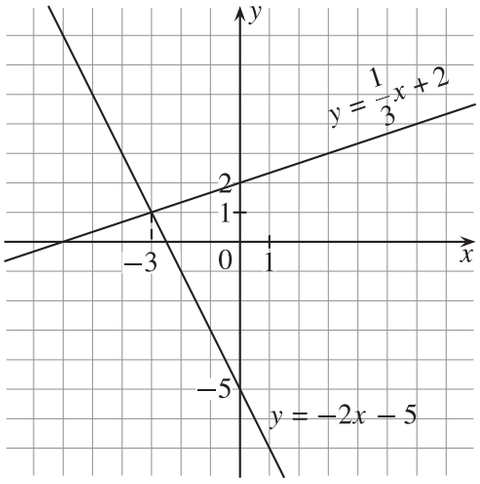
a) $x = 3$;



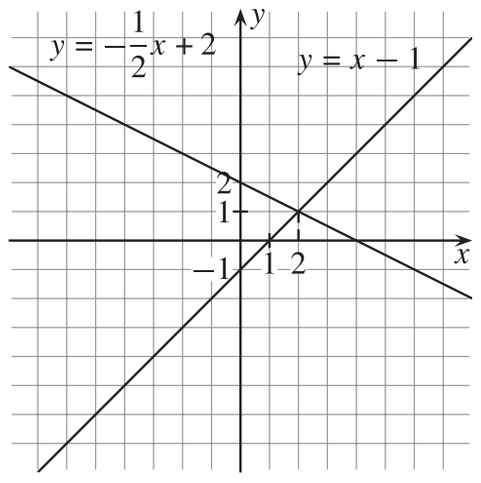
b) $x = 1$;



c) $x = -3$;

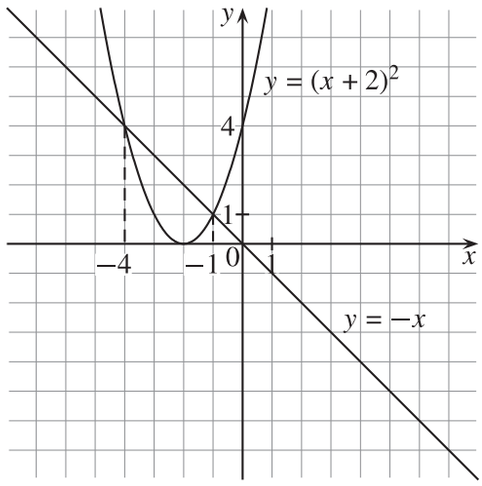


d) $x = 2$.

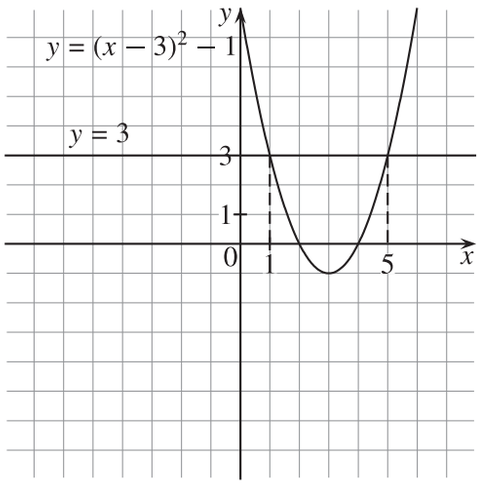


24.2. A grafikonok metszéspontjai alapján a megoldás:

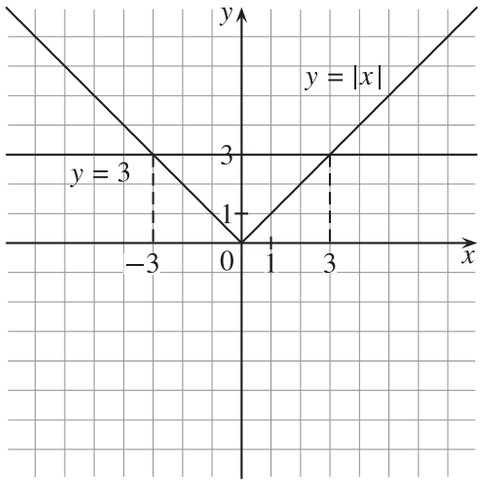
a) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$;



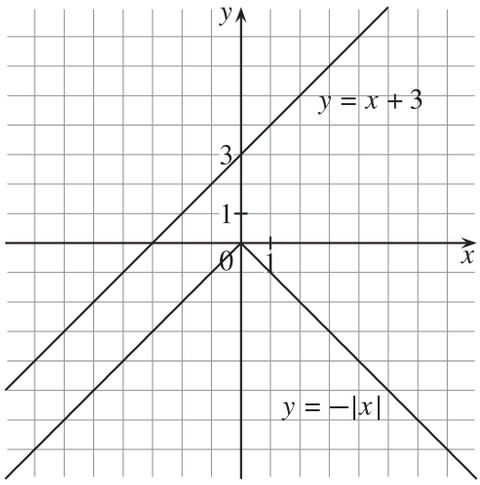
b) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$;



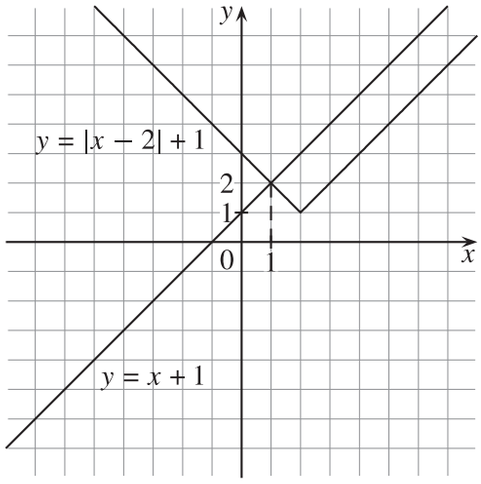
24.3. *a)* $x_1 = -3, \quad x_2 = 3$;



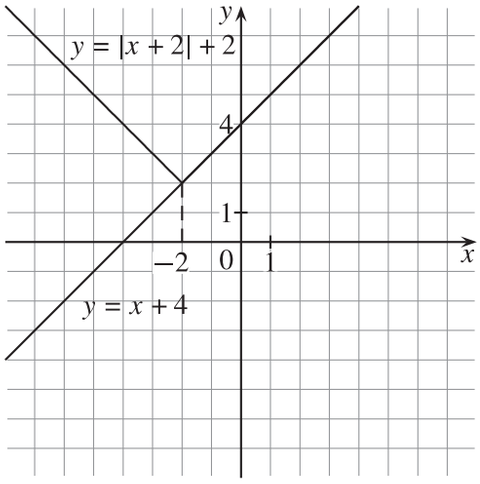
b) Nincs megoldás;



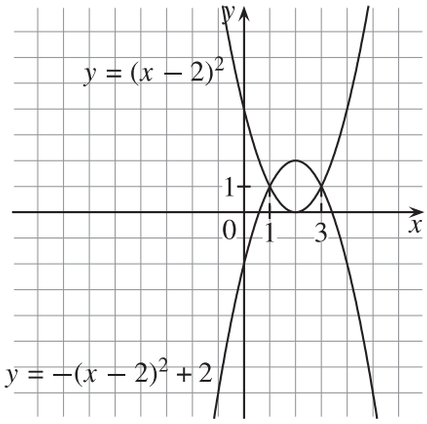
c) $x = 1$;



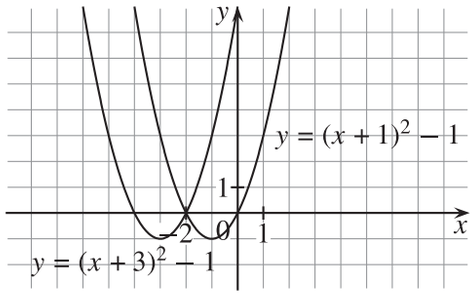
d) $[-2;+\infty[$.



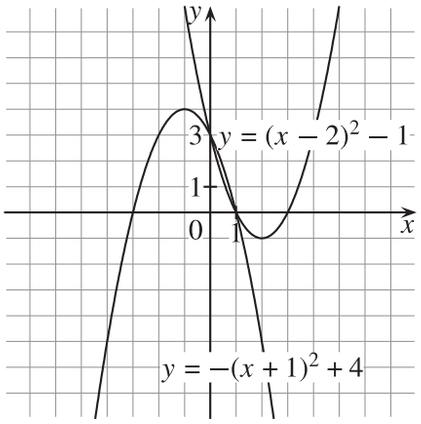
24.4. *a)* $x_1 = 1,\ x_2 = 3;$



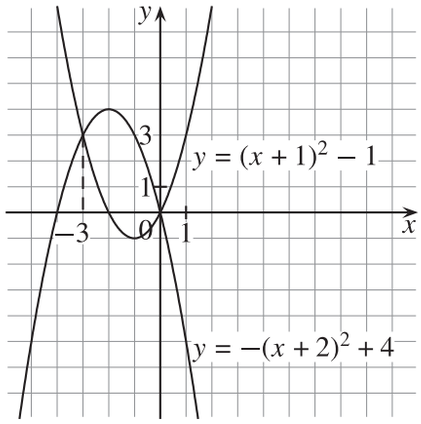
b) $x = -2;$



c) $x_1 = 0,\ x_2 = 1;$



d) $x_1 = -3,\ x_2 = 0.$



25. feladatlap

25.1. *a)* A négyzetgyökös kifejezés bármely valós helyettesítési értékre nemnegatív értékű lesz, így nincs megoldás! *b)* A négyzetgyökfüggvény 0-nál veszi fel a 0 értéket, tehát $x + 2 = 0$. A megoldás: $x = -2$. *c)* Egy nemnegatív $\left(\sqrt{x-2}\right)$ és egy pozitív (4) kifejezés összege nem lehet 0. Nincs megoldás. *d)* A négyzetgyökös kifejezés nem lehet negatív. Nincs megoldás. *e)* Mivel az abszolútértékes kifejezés nem vehet fel negatív értéket, nincs megoldás. *f)* Az abszolútértékes kifejezés 0-nál vesz fel 0 értéket, így az $x - 1 = 0$ egyenlet megoldása az egyetlen megoldás: $x = 1$.

25.2. Két nemnegatív kifejezés összege csak akkor lehet 0, ha mind a két kifejezés 0. *a)* Alakítsuk át a kifejezést két nemnegatív kifejezés összegére: $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}$. Az első kifejezés csak akkor 0, ha $x = 2$, a második pedig akkor, ha $x = 3$. Egyszerre a két kifejezés tehát nem lehet 0, nincs megoldás. *b)* Nincs megoldás. *c)* $x = 2$. *d)* Nincs megoldás.

25.3. Két nemnegatív kifejezés összege csak akkor lehet 0, ha mind a két kifejezés 0. *a)* $x = 2;$ $y = -3$. *b)* $x = -2;$ $y = 3$. *c)* $x = -1;$ $y = 1;$ $z = 0$. *d)* $x = -2;$ $y = 3;$ $z = 0$.

25.4. *a)* A bal oldali kifejezés értelmezési tartománya: $[2; +\infty[$, a jobb oldali kifejezés értelmezési tartománya $]-\infty; 1]$. Mivel a két értelmezési tartomány metszete üres, így biztosan nincs megoldás.

b) A bal oldali kifejezés értelmezési tartománya: $[1; +\infty[$, a jobb oldali kifejezés értelmezési tartománya $]-\infty; -2]$. Mivel a két értelmezési tartomány metszete üres, így biztosan nincs megoldás.

c) A bal oldali kifejezés értelmezési tartománya: $[2;+\infty[$, a jobb oldali kifejezés értelmezési tartománya $]-\infty;2]$. A két halmaz közös része a $\{2\}$. Behelyettesítve egyenlőséget kapunk, így $x=2$.
d) A bal oldali és a jobb oldali kifejezés azonos, értelmezési tartományuk: $[5;+\infty[$, így a megoldás $x\in[5;+\infty[$.

25.5. *a)* Bal oldali kifejezés értelmezési tartománya: $[2;+\infty[$. A nemnegatív értékkészlet miatt a jobb oldali kifejezés is nemnegatív, *x* lehetséges értékei: $]-\infty;2]$. Az egyetlen közös elem, a 2, kielégíti az egyenletet. A megoldás: $x=2$. *b)* A bal oldali kifejezés értelmezési tartománya: $[-2;+\infty[$. A jobb oldali kifejezés nemnegatív, ha $x\in]-\infty;-3]$. Nincs megoldás.

26. feladatlap

26.1. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. *a)* $(2x+4)=0$ vagy $(10-5y)=0$. $x=-2$ és $y\in\mathbb{R}$ vagy $y=2$ és $x\in\mathbb{R}$. *b)* $x=-\frac{1}{2}$, és $y,z\in\mathbb{R}$, vagy $y=8$, és $x,z\in\mathbb{R}$, vagy $z=-4$ és $x,y\in\mathbb{R}$. *c)* $x=4$ és $y,z\in\mathbb{R}$, vagy $y=-\frac{5}{3}$ és $x,z\in\mathbb{R}$, vagy z = 2 és $x,y\in\mathbb{R}$. *d)* $x=3$ és $y,z\in\mathbb{R}$ vagy $y=\frac{5}{2}$ és $x,z\in\mathbb{R}$, vagy $z=2$ és $x,y\in\mathbb{R}$. *e)* $x=0$ és $y,z\in\mathbb{R}$, vagy $y=2$ és $x,z\in\mathbb{R}$, vagy $z=6$ és $x,y\in\mathbb{R}$. *f)* $x=0$ és $y,z\in\mathbb{R}$, vagy $y=0$ és $x,z\in\mathbb{R}$ vagy $z=\frac{3}{2}$ és $x,y\in\mathbb{R}$.

26.2. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. *a)* $(x-2)=0$ vagy $(x+3)=0$. $x_1=2$, $x_2=-3$. *b)* $x_1=4$, $x_2=0{,}25$. *c)* $x_1=\frac{2}{5}$, $x_2=-1$, $x_3=3$. *d)* $x_1=0{,}4$, $x_2=0{,}125$, $x_3=-0{,}63$.

26.3. *a)* $(x-1{,}5)(x+2)=0$. $x_1=1{,}5$, $x_2=-2$. *b)* $(x+4)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$. $x_1=-4$, $x_2=\frac{3}{2}$.
c) $(2x+3)\left(\frac{x}{2}-3\right)=0$. $x_1=-1{,}5$, $x_2=6$. *d)* $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$. $x=1{,}5$.
e) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)(2x+10)=0$. $x_1=6$, $x_2=-5$. *f)* $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(x-9)=0$. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=9$.

26.4. *a)* $x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)=0$. $x_1=-3$, $x_2=-2$.
b) $x(x-5)+4(x-5)=(x-5)(x+4)=0$. $x_1=-4$, $x_2=5$.
c) $x(x+4)+4(x+4)=(x+4)(x+4)=0$. $x=-4$.
d) $x(x-3)+\frac{1}{2}(x-3)=(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=3$.
e) $a(x+1)+(x+1)=(x+1)(a+1)=0$. $x=-1$, ha $a\neq-1$, vagy $x\in\mathbb{R}$, ha $a=-1$.
f) $b(x-5)+4(x-5)=(x-5)(b+4)=0$. $x=5$, ha $b\neq-4$, vagy $x\in\mathbb{R}$, ha $b=-4$.

26.5. *a)* $(x+2)^2+x(x+2)=(x+2)(x+2+x)=(x+2)(2x+2)=2(x+2)(x+1)=0$. $x_1=-2$, $x_2=-1$. *b)* $2\cdot(x-3)^2-x(x-3)=(x-3)(2\cdot x-6-x)=(x-3)(x-6)=0$. $x_1=3$, $x_2=6$.
c) $(x-5)^2+x(x-5)=(x-5)(x-5+x)=(x-5)(2x-5)=0$. $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=5$.
d) $(x+4)^2+3(x+4)=(x+4)(x+4+3)=(x+4)(x+7)=0$. $x_1=-7$, $x_2=-4$.

,

27. feladatlap

27.1. Az egyenletek mindkét oldalán összevonjuk az egynemű kifejezéseket.

a) $1{,}11x - 6{,}01 = -0{,}89x - 0{,}01$. $x = 3$. *b)* $-2x - 2{,}44 = -x + 2{,}56$. $x = -5$.

27.2. *a)*
$$6x - 22 - 12x - 15 = -2x - 7 - 2x - 24$$
$$-6x - 37 = -4x - 31$$
$$-6 = 2x$$
$$x = -3$$

b)
$$-2x + 11 - 10 + 4x = 12x - 4 - 6x - 3$$
$$1 + 2x = 6x - 7$$
$$8 = 4x$$
$$x = 2$$

27.3. *a)* A sokféle megoldás közül az egyik, hogy az összes zárójelet felbontjuk.

$$-2\{3x + 5 - [x - 4 - 3(-2x - 4)]\} = 6x + 11$$
$$-6x - 10 + 2[x - 4 - 3(-2x - 4)] = 6x + 11$$
$$-6x - 10 + 2x - 8 - 6(-2x - 4) = 6x + 11$$
$$-6x - 10 + 2x - 8 + 12x + 24 = 6x + 11$$
$$8x + 6 = 6x + 11$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

b)
$$1{,}4 - 0{,}2x - 0{,}4[3 - 6x + 5(10x + 3)] = -21x + 0{,}6$$
$$1{,}4 - 0{,}2x - 1{,}2 + 2{,}4x - 2(10x + 3) = -21x + 0{,}6$$
$$1{,}4 - 0{,}2x - 1{,}2 + 2{,}4x - 20x - 6 = -21x + 0{,}6$$
$$-17{,}8x - 5{,}8 = -21x + 0{,}6$$
$$3{,}2x - 5{,}8 = 0{,}6$$
$$3{,}2x = 6{,}4$$
$$x = 2$$

27.4. *a)*
$$6x^2 - 2x + 15x - 5 + 6x - 9x^2 - 8 + 12x = -3x^2 + 28x + 17$$
$$-3x^2 + 31x - 13 = -3x^2 + 28x + 17$$
$$31x - 13 = 28x + 17$$
$$3x = 30$$
$$x = 10$$

b)
$$2(3x - x^2 + 6 - 2x) - 3(4x^2 - 2x - 6x + 3) = -14x + 13x - 23$$
$$6x - 2x^2 + 12 - 4x - 12x^2 + 6x + 18x - 9 = -14x^2 + 13x - 23$$
$$-14x^2 + 26x + 3 = -14x^2 + 13x - 23$$
$$13x = -26$$
$$x = -2$$

c)
$$-(10x^2 - 2x - 15x + 3) - 2(12 - 18x - 8x + 12x^2) = -34x^2 + 68x - 28$$
$$-10x^2 + 2x + 15x - 3 - 24 + 36x + 16x - 24x^2 = -34x^2 + 68x - 28$$
$$-34x^2 + 69x - 27 = -34x^2 + 68x - 28$$
$$x = -1$$

27.5. *a)*
$$(x + 2)^2 + 4x = (x + 7)^2 - 39$$
$$x^2 + 4x + 4 + 4x = x^2 + 14x + 49 - 39$$
$$8x + 4 = 14x + 10$$
$$-6x = 6$$
$$x = -1$$

b)
$$4x^2 - 8x + 4 + 3x = 4(4 - 4x + x^2) - 1$$
$$4x^2 - 8x + 4 + 3x = 16 - 16x + 4x^2 - 1$$
$$-5x + 4 = 16 - 16x - 1$$
$$11x = 11$$
$$x = 1$$

28. feladatlap

28.1. Készítsük el a számok prímtényezős felbontását, és határozzuk meg a legkisebb közös többszöröst!

a) $\dfrac{x}{2^5\cdot 3\cdot 5}-\dfrac{x}{2^2\cdot 3^3\cdot 5}=2$

$\dfrac{9x}{2^5\cdot 3^3\cdot 5}-\dfrac{8x}{2^5\cdot 3^3\cdot 5}=2$

$\dfrac{9x-8x}{2^5\cdot 3^3\cdot 5}=2$

$x=2^6\cdot 3^3\cdot 5=8640$

b) $\dfrac{x}{2^3\cdot 3^2}-\dfrac{5x}{2^2\cdot 3^2\cdot 11}=2$

$\dfrac{11x-5\cdot 2x}{2^3\cdot 3^2\cdot 11}=2$

$x=2^4\cdot 3^2\cdot 11=1584$

c) $\dfrac{11x}{2^2\cdot 7\cdot 13}-\dfrac{2x}{3^2\cdot 7\cdot 13}=2$

$\dfrac{99x-8x}{2^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13}=2$

$91x=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13$

$x=72$

28.2. Hozzuk közös nevezőre a törteket! Ne feledkezzünk meg a kikötésről!

a) $x\neq 10$

$\dfrac{3-x}{x-10}+\dfrac{4(x-10)}{x-10}=\dfrac{5x+3}{x-10}$

$3-x+4(x-10)=5x+3$

$3-x+4x-40=5x+3$

$3x-37=5x+3$

$2x=-40$

$x=-20$

b) $x\neq -1{,}5$

$\dfrac{2x-1}{2x+3}-\dfrac{3(2x+3)}{2x+3}=\dfrac{1-2x}{2x+3}$

$2x-1-3(2x+3)=1-2x$

$2x-1-6x-9=1-2x$

$-4x-10=1-2x$

$2x=-11$

$x=-5{,}5$

28.3. *a)* $x\neq 0$ és $x\neq -1{,}5$

$\dfrac{4}{x(2x+3)}-\dfrac{2x+3}{x(2x+3)}=\dfrac{3x}{x(2x+3)}$

$4-(2x+3)=3x$

$4-2x-3=3x$

$5x=1$

$x=\dfrac{1}{5}$

b) $x\neq 0$ és $x\neq 4$

$\dfrac{2(x-4)}{x(x-4)}-\dfrac{1}{x(x-4)}=\dfrac{5x}{x(x-4)}$

$2(x-4)-1=5x$

$2x-8-1=5x$

$3x=-9$

$x=-3$

c) $x\neq 0$ és $x\neq \dfrac{2}{3}$ $\quad\dfrac{5(2-3x)}{x(2-3x)}-\dfrac{2}{x(2-3x)}=-\dfrac{x}{-(2-3x)x}$

$5(2-3x)-2=x$

$10-15x-2=x$

$8=16x$

$x=0{,}5$

28.4. *a)* $x\neq 2$ és $x\neq -3$

$\dfrac{(x+2)(x+3)-2(1-x)(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{3(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)}$

$x^2+3x+2x+6-2\left(x-2-x^2+2x\right)=3\left(x^2-2x+3x-6\right)$

$x^2+3x+2x+6-2x+4+2x^2-4x=3x^2-6x+9x-18$

$-x+10=3x-18$

$4x=28$

$x=7$

b) $x \neq 4$ és $x \neq 5$

$$\frac{(2x-5)(x-4)+(x+1)(x-5)}{(x-5)(x-4)} = \frac{3(x-4)(x-5)}{(x-5)(x-4)}$$

$$2x^2-8x-5x+20+x^2-5x+x-5 = 3\left(x^2-5x-4x+20\right)$$

$$3x^2-17x+15 = 3x^2-15x-12x+60$$

$$-17x+15 = -27x+60$$

$$10x = 45$$

$$x = 4{,}5$$

28.5. A közös nevezőre hozás során használjuk az $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ azonosságot!

a) $x \neq 2$ és $x \neq -2$

$$\frac{(x+3)(x-2)-(x-4)(x+2)-1}{x^2-4} = 0$$

$$(x+3)(x-2)-(x-4)(x+2)-1 = 0$$

$$x^2-2x+3x-6-\left(x^2+2x-4x-8\right)-1 = 0$$

$$x^2-2x+3x-6-x^2-2x+4x+8-1 = 0$$

$$3x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

b) $x \neq 5$ és $x \neq -5$

$$\frac{(x-1)(x-5)-(x+3)(x+5)-4}{x^2-25} = 0$$

$$(x-1)(x-5)-(x+3)(x+5)-4 = 0$$

$$x^2-5x-x+5-\left(x^2+5x+3x+15\right)-4 = 0$$

$$x^2-5x-x+5-x^2-5x-3x-15-4 = 0$$

$$-14x-14 = 0$$

$$-14x = 14$$

$$x = -1$$

28.6. *a)* $x \neq 3$

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-3)^2}+\frac{(x+7)(x-3)}{(x-3)^2}-\frac{2(x-3)^2}{(x-3)^2} = 0$$

$$\frac{x^2+3x+1+(x+7)(x-3)-2(x-3)^2}{(x-3)^2} = 0$$

$$x^2+3x+1+(x+7)(x-3)-2(x-3)^2 = 0$$

$$x^2+3x+1+x^2-3x+7x-21-2\left(x^2-6x+9\right) = 0$$

$$x^2+3x+1+x^2-3x+7x-21-2x^2+12x-18 = 0$$

$$19x-38 = 0$$

$$19x = 38$$

$$x = 2$$

b) $x \neq -2$

$$\frac{2x-5}{(x+2)^2}+\frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$2x-5+(x+2)^2 = (x-1)(x+2)$$

$$2x-5+x^2+4x+4 = x^2+2x-x-2$$

$$6x-1 = x-2$$

$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

29. feladatlap

29.1. Ha Zsóka x forintot kapott, akkor Bori $7000-x$ forintot. Zsóka zsebpénzének 20%-a $\frac{20\cdot x}{100} = 0{,}2x$, Bori zsebpénzének $\frac{2}{5}$ része: $\frac{2}{5}(7000-x)$. Az összefüggés: $0{,}2x+400 = \frac{2}{5}(7000-x)$. A megoldás után $x = 4000$ Ft, így Zsóka 4000 Ft-ot, Bori pedig 3000 Ft-ot kapott. Tehát Bori kapott kevesebbet 1000 Ft-tal.

29.2. Ha Andor most x éves, akkor Botond életkora $24 - x$ év. Az életkoruk összege (24 év) 12 év múlva kétszereződik meg, hiszen ekkor mindketten 12 évvel lesznek idősebbek. Az összefüggés: $(x+12)-4=24-x$. $x=8$. Andor tehát most 8 éves, Botond pedig 16 éves.

29.3. Ha Cili tömege x kilogramm, akkor Dorka $100 - x$ kilogramm tömegű.
Az összefüggés: $(100-x)-3=x+3$. $x=47$. Cili tömege tehát 47 kg.

29.4. Vince egynap alatt a gödör $\frac{1}{4}$-ed részét ásná ki, Zoli pedig az $\frac{1}{6}$-od részét. x nap alatt a gödör $\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x$ részét ássák ki. Az egész gödör kiásására vonatkozó összefüggés: $\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x=1$.
$3x+2x=12$. $x=2{,}4$ nap.

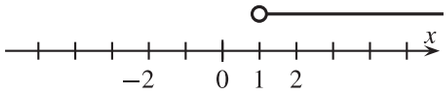
29.5. x jelentse azt az oldalmennyiséget, amelyet kezdetben olvasott volna egy nap alatt. Így a könyv oldalainak száma: $20x$. Az összefüggés: $(x+10)16=20x$. $x=40$. A könyv tehát 800 oldalas.

30. feladatlap

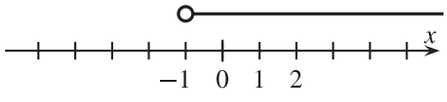
30.1. *a)* $x<-1$; *b)* $x>-1$; *c)* $x>1$; *d)* $x<-6$.

30.2. A törtkifejezés értéke a nevező előjelétől függ.

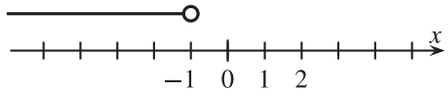
a) A törtkifejezés értéke pozitív, ha $x-1>0$. $x>1$;



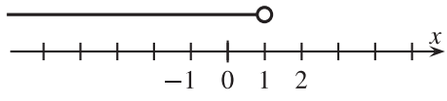
b) A törtkifejezés értéke negatív, ha $x+1>0$. $x>-1$;



c) A törtkifejezés értéke pozitív, ha $-x-1>0$. $-1>x$;



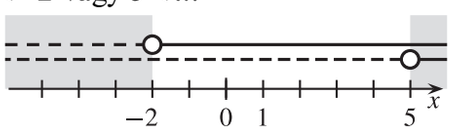
d) A törtkifejezés értéke negatív, ha $-x+1>0$. $1>x$.



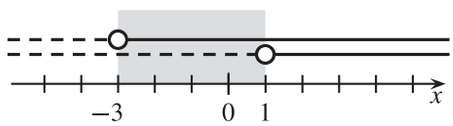
30.3. A párosítások: *a)* 3; *b)* 4; *c)* 1; *d)* 2.

30.4. A törtkifejezés értéke akkor pozitív, ha a számláló és nevező vagy egyaránt pozitív, vagy egyaránt negatív. Ha a számláló és nevező ellenkező előjelű, akkor a törtkifejezés értéke negatív. A törtkifejezés értéke csak akkor lehet 0, ha a számláló 0. Egy lehetséges megoldási módszer, ha a számegyenesen feltüntetjük a számláló és nevező pozitív és negatív tartományát egyaránt. Ekkor leolvasható a megoldás tartománya. (A nevezőben lévő kifejezés nem lehet 0.)

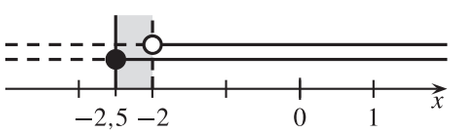
a) $x<-2$ vagy $5<x$.



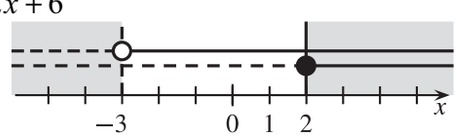
b) $-3<x<1$.



c) $-2{,}5\le x<-2$.

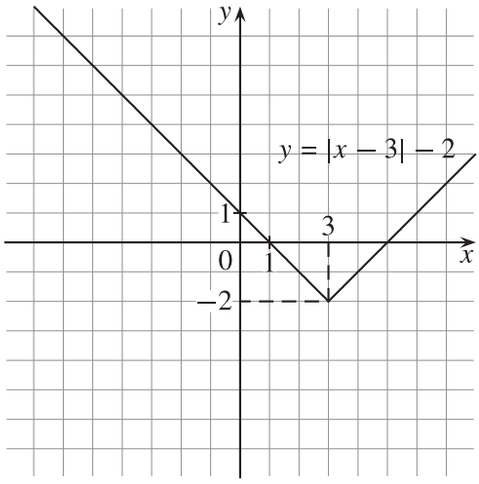


d) $\frac{5x-10}{2x+6}\ge 0$; $x<-3$ vagy $2\le x$.

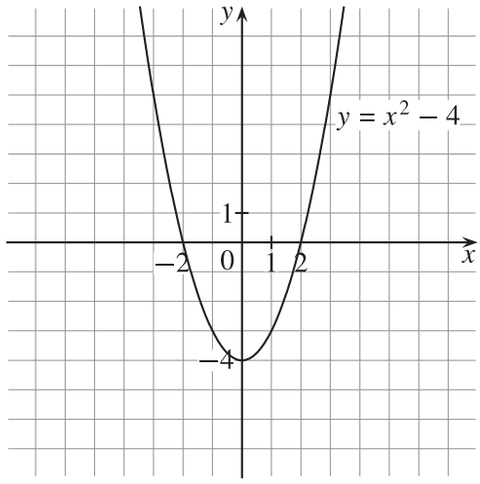


30.5.

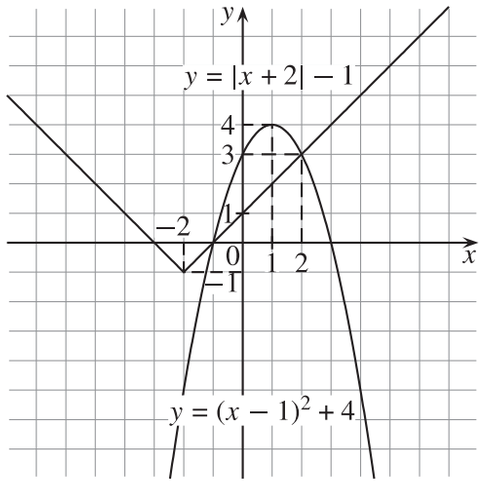
a) A megoldáshalmaz az x tengelyen lévő és az x tengely feletti grafikonpontokhoz tartozik. $x \le 1$ vagy $5 \le x$.



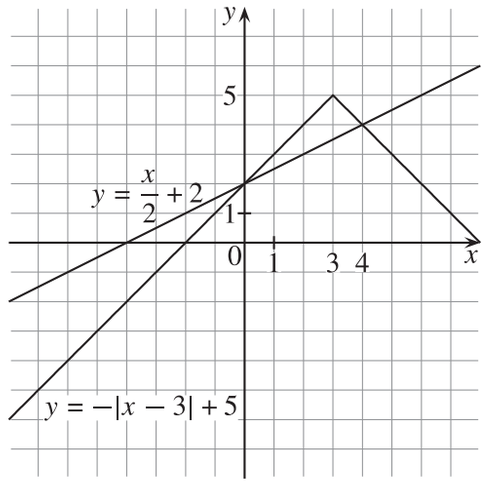
b) A megoldáshalmaz az x tengely alatti grafikonpontokhoz tartozik. $-2 < x < 2$.



c) A parabolának azon pontjai a jók, amelyek az abszolútérték-grafikon felett vannak. $-1 < x < 2$.



d) Azokhoz az abszolútérték-grafikonpontokhoz tartozó x-ek a jók, amelyek az egyenes felett vannak, valamint az egyenlőség miatt a grafikonok metszéspontjához tartozó x-ek is. $0 \le x \le 4$.



31. feladatlap

31.1. *a)* Adjuk össze az egyenlet mindkét oldalát: $5x = 10$. $x = 2$, $y = 0$; *b)* Adjuk össze az egyenlet mindkét oldalát: $7x = 21$. $x = 3$, $y = -\frac{1}{3}$; *c)* Az első egyenlethez adjuk hozzá a második egyenlet kétszeresét: $7x = 35$. $x = 5$, $y = -\frac{11}{3}$; *d)* Az első egyenlethez adjuk hozzá a második egyenlet 7-szeresét: $18x = 61$. $x = \frac{61}{18}$, $y = \frac{34}{9}$; *e)* Vonjuk ki egymásból a két egyenletet: $3x = 8$. $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{9}$.

31.2. Bármelyik egyenletből kifejezhetjük bármelyik ismeretlent. A megoldásban példaként csak az egyik megoldási lehetőség szerepel. *a)* A második egyenletből: $x = 8 - 5y$. Behelyettesítve az első egyenletbe: $2(8-5y) - y = 12$. $x = \frac{68}{11}$, $y = \frac{4}{11}$; *b)* A második egyenletből már nem kell kifejezni *y*-t. Behelyettesítve az első egyenletbe: $2x + 3(-x + 6) = 4$. $x = 14$, $y = -8$; *c)* Az első egyenletből: $y = 7 - 2x$. Behelyettesítve a második egyenletbe: $2x - 5(7 - 2x) = 2$. $x = \frac{37}{12}$, $y = \frac{10}{12}$; *d)* Az első egyenletből: $x = \frac{12 - 4y}{3}$. Behelyettesítve a második egyenletbe: $7 \cdot \frac{12 - 4y}{3} - 5y = 4$. $x = \frac{76}{43}$, $y = \frac{72}{43}$; *e)* Mind a két egyenletből az *y* kifejezett. Tegyük egyenlővé az egyenleteket! $-\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{4}x + 1$. $x = \frac{8}{5}$, $y = \frac{11}{5}$.

31.3. *a)* Az első egyenletből fejezzük ki *x*-et! $x = 1 - 2y$. Helyettesítsük be a második egyenletbe: $2(1 - 2y + 2y) - 3(1 - 2y + 3y) = 5$. $x = 5$, $y = -2$. *b)* Az első egyenlet átalakítva: $2x - 3y = 9$. A második egyenlet átalakítva: $4x - 6x - 3y + 3 = -2x + 2y + 8$. A második egyenletből kiesik az *x*. $x = 3$, $y = -1$.

31.4. $\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$. $a = 8$, $b = -4$.

31.5.

	A tízesek helyiértéke	Az egyesek helyiértéke
Az eredeti számban	x	y
A második szám	y	x

Az eredeti szám: $10x + y$. A második szám: $10y + x$. Melyik nagyobb? A második. Mennyivel? 9-cel.

$\begin{cases} 10x + y + 9 = 10y + x \\ 10x + 10y + x + y = 55 \end{cases}$. $x = 2$, $y = 3$.

32. feladatlap

32.1. *a)* Hamis, mert ha két közös pontjuk lenne, akkor a két egyenes egybeesne, azonos lenne. A metsző egyeneseknek csak egy közös pontjuk lehet. *b)* Igaz. Ha két egyenes egybeesik, akkor párhuzamosak és minden pontjuk közös pont. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Hamis. Ha már az egyenes két pontja közös a síkkal, akkor az egyenes benne fekszik a síkban, tehát nem metsző egyenes.

32.2. *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Igaz. *g)* Igaz. *h)* Hamis. *i)* Hamis. *j)* Igaz. *k)* Hamis.

32.3. *a)* A *P* pontból bocsássunk merőlegest a *h* egyenesre. A távolság a *P* pont és a metszéspont közötti szakasz hossza lesz. $d(P, h) = 3{,}4$ cm;
b) A *Q* pontból bocsássunk merőlegest az *f* egyenesre! A távolság a *Q* pont és a metszéspont közötti szakasz hossza lesz. $d(Q, f) = 2{,}9$ cm; *c)* A két egyenes metszi egymást, így távolságuk $d(h, f) = 0$; *d)* A *P* és *Q* pontot összekötő szakasz hossza $d(P, Q) = 5{,}8$ cm; *e)* A két egyenes párhuzamos. Az egyik egyenes egy tetszőleges pontjából a másik egyenesre merőlegest kell bocsátani, és a pontot és metszéspontot összekötő szakasz metszéspontja lesz a két egyenes távolsága. $d(e, f) = 3{,}8$ cm.

MatMgy-09-2k:Elrendezés 1 2013.05.20. 20:09 Page 123

32.4. 7 cm, mert a kocka szemközti lapjainak a távolsága megegyezik az oldalélének a hosszával. Az *EBG* háromszög minden oldalának hossza a kocka lapátlójának hosszával egyezik meg. Szerkesszük meg egy 7 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóját, majd ezzel az oldallal szerkesszünk egy egyenlő oldalú háromszöget!

32.5. Bocsássunk merőlegest az *E* pontból a folyó és az út egyenesére, majd mérjük meg a pont és a metszéspontok közötti szakasz hosszát!

33. feladatlap

33.1. *a)* egyenesszög; *b)* derékszög; *c)* hegyesszög; *d)* tompaszög; *e)* homorúszög; *f)* teljesszög.

33.2. *a)* egyállású szögek; *b)* pótszögek; *c)* váltószögek; *d)* kiegészítő szögek, vagy mellékszögek; *e)* kiegészítő szögek; *f)* csúcsszögek.

33.3. Pótszögek: (α_1, α_2); (γ, α_2). Kiegészítő szögek: (α_5, α_4), (α_3, α_4), (β, γ). Mellékszögek: (α_5, α_4), (α_3, α_4). Csúcsszögek: (α_5, α_3). Egyállású szögek: nincsenek. Váltószögek: (α_5, α_3). Merőleges szárú szögek: (α, β).

33.4. $\delta = 32°$, mert α-val váltószög. $\varepsilon = 63°$, mert β-val váltószög. A δ, a γ és az ε egyenesszöget alkotnak, így $\gamma = 180° - 32° - 63° = 85°$.

33.5. $\delta = 27°$, mert α-val egyállású szög. $\varepsilon = 83°$, mert β-val váltószög. A γ, az ε és a δ egyenesszöget alkotnak.

33.6. *a)* A külső szög nagysága $180° - 65° = 115°$. *b)* A másik két szög összege: $180° - 65° = 115°$. *c)* A $65°$-os és $50°$-os szöggel meghatározott háromszög harmadik belső szöge: $180° - 65° - 50° = 65°$. Ez a szög külső szöge a $45°$-os és ω szöggel meghatározott háromszögnek. Az $\omega = 65° - 45° = 20°$.

33.7. A két szög egyenlő. A háromszög másik két belső szögének összege: $180° - 80° = 100°$. A szögfelezők ennek az összegnek az összetevőit felezik. Így az egyíves szöget tartalmazó háromszögnek a másik két belső szögének az összege $50°$. Az egyíves szög $130°$.

34. feladatlap

34.1. *a)* Az oldalakra mint szakaszokra kell a szakaszfelező merőlegeseket szerkeszteni. *b)* Az oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik egymást. *c)* A metszéspont és a csúcsok távolsága mind a három esetben megegyezik. *d)* Metszéspont–középpontú és metszéspont-csúcs távolságú sugarú kört kell húzni.

34.2. *a)* Szerkesszük meg az oldalak oldalfelező pontjait. Súlyvonal a csúcs és a csúccsal szemközti oldal felezőpontját összekötő egyenes. *b)* A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

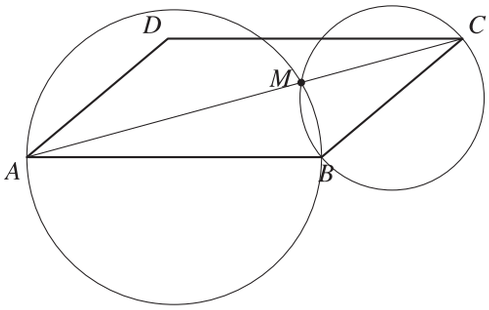
34.3. Szerkesszük meg a három oldal oldalfelező pontját. Az oldalfelező pontokat összekötő szakasz a középvonal. *b)* A középvonal párhuzamos a harmadik oldallal, és hossza az oldal hosszának fele.

34.4. *a)* A háromszög magasságvonala a csúcsból a szemközti oldalra bocsátott merőleges egyenes. *b)* A három magasságvonal egy pontban metszi egymást. *c)* $60°$, $55°$, $65°$.

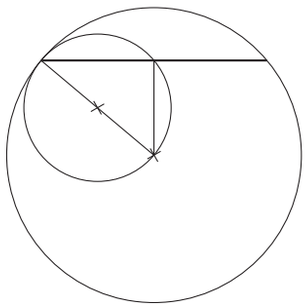
34.5. *b)* A belső szögfelezők egy pontban metszik egymást. *c)* A sugár hosszának megállapításához a metszéspontból valamelyik oldalra merőlegest kell bocsátani. A beírható kör sugarának hossza e merőleges oldal és a metszéspont közé eső szakasz hossza lesz. *d)* A beírható kör középpontja a metszéspont.

35. feladatlap

35.1. Vegyünk fel a köríven két-két derékszögű háromszöget. A két átmérő metszéspontja határozza meg a kör középpontját.



35.2. *a)* Thalész tétele szerint az $AMB\sphericalangle$ és a $BMC\sphericalangle$ derékszög. Mivel ezek egyenesszöggé egészítik ki egymást, így egy egyenest határoznak meg. Az A, M és C pont egy egyenesre esik. *b)* A szög $90°$.



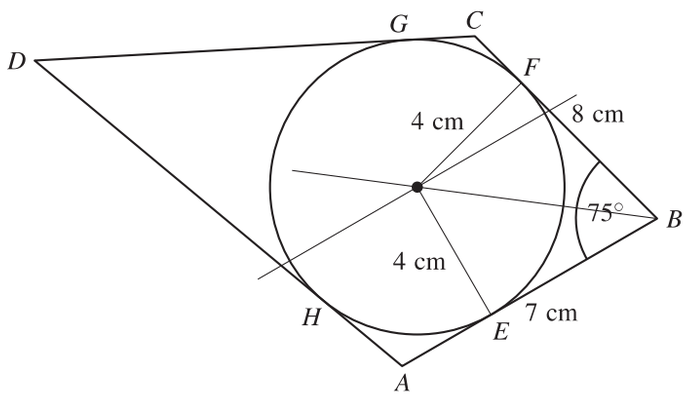
35.3. A kör középpontjából a húrra bocsátott merőleges átmegy a húr felezőpontján. Mivel a felezőmerőleges merőleges a húrra, így a metszéspontjuknak rajta kell lennie a kör középpontját és a húr végpontját összekötő szakasz mint átmérő fölé rajzolt Thalész-körön.

35.4. *a)* Az AB oldal fölé mint átmérő fölé rajzoljunk Thalész-kört. Ahol a kör elmetszi a másik két oldal egyenesét, ott lesznek a keresett magasságok talppontjai.

b) Mivel a magasságpontok rajta vannak az AB oldal mint átló fölé rajzolt Thalész-körön, és ennek a körnek a középpontja épp az AB oldal felezőpontja, így természetes, hogy a talppontok mint a kör pontjai egyenlő távolságra vannak a kör középpontjától.

35.5. Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege megegyezik. Az adott sorrend miatt a 6 cm-es és 8 cm-es oldalak vannak egymással szemben, összegük 14 cm. Az ismeretlen oldal így 14 cm – 7 cm = 7 cm hosszúságú.

35.6. Vegyük fel az AB 7 cm hosszúságú szakaszt. A B pontra szerkesszünk 75 fokos szöget, majd mérjünk fel a másik szögszárra 8 cm-t. Így megkapjuk a C csúcsot. Szerkesszük meg a szögfelezőt, majd a szakasztól 4 cm-re húzzunk párhuzamost. Ahol a párhuzamos és a szögfelező metszi egymást, ott lesz a beírható kör középpontja. A középpontból húzzuk meg a 4 cm sugarú kört. Megkapjuk az E és F érintési pontokat. A C csúcsból húzzunk CF sugarú kört, ez kimetszi a körből a G pontot. Hasonló eljárással megkapjuk a H pontot is. A D csúcs az AH és a CG egyenes metszéspontja lesz.



36. feladatlap

36.1. A P pontból bocsássunk merőlegest a t egyenesre, így megkapjuk a T metszéspontot. T pontból az egyenes másik oldalára mérjük fel a PT távolságot. Ezzel megkaptuk a tükörképet.

36.2. Tükrözzük egyenként az A és a B pontot, majd kössük össze a tükörképpontokat!

36.3. Tükrözzük a tengelyre a tükörképháromszöget, így megkapjuk az eredeti háromszöget, hiszen az alakzat tükörképének tükörképe az eredeti alakzatot adja.

36.4. A tengely a két kör középpontját összekötő szakasz szakaszfelező merőlegese.

36.5. A tengelyt megkapjuk, ha például a C (pont) és a C' (tükörképpont) pontok által meghatározott szakasz szakaszfelező merőlegesét meghúzzuk. (Ennek az egyenesnek át kell mennie az $A \equiv A'$ ponton.)

36.6. *b)* Van, az AB és az $A'B'$ szakasz metszéspontja.

36.7. Tükrözzük a k_1 kört a tengelyre. Ahol a tükörkép elmetszi a k_2 kört, azok a keresett pontok. A metszéspontot tükrözzük vissza az eredeti k_1 körre!

36.8. Tükrözzük a k_1 kört a tengelyre. Ahol a tükörkép elmetszi a k_2 kört, az a háromszög egyik pontja. A metszéspontot tükrözzük vissza az eredeti k_1 körre! Ez a háromszög másik csúcsa. A metszéspont és tükörképének távolságával elmetszve a tengelyt megkapjuk a harmadik csúcsot. A három pont a keresett egyenlő oldalú háromszög csúcspontjait adja meg.

37. feladatlap

37.1. *a)* A két egyenes között elhelyezkedő, tőlük egyenlő távolságra lévő párhuzamos egyenes tartalmazza a megfelelő pontokat. Szerkesszünk merőlegest a két egyenesre, A merőleges egyenes egyenesek közé eső szakaszának felezőpontja egy megfelelő pont.
b) Nem, mert az egyenes és a pontra vonatkoztatott tükörképe párhuzamos.

37.2. A tükrözés középpontja az AA_1 és BB_1 szakaszok metszéspontja.

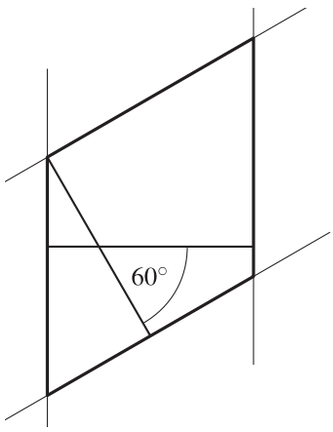
37.3. *a)* Középpontosan tükrözzük az e egyenest az O pontra (e')! Ahol az e' elmetszi az f egyenest, azt a pontot tükrözzük vissza az e egyenesre, így megkapjuk az egyetlen pontpárt. *b)* Mivel a két egyenes párhuzamos és az O a két egyenes között, tőlük egyenlő távolságra van, így gyakorlatilag végtelen sok pontpár akad. például húzzunk O-n keresztül egyenest. Ahol metszi a két párhuzamos egyenest, ott van egy megfelelő pontpár. *c)* Mivel O a két egyenestől nem egyenlő távolságra van, ezért nincs megfelelő pontpár.

37.4. Az egyik szögszárat tükrözzük O-ra. A másik szár és a tükörkép metszéspontját tükrözzük vissza a tükrözött szögszárra, így megkapjuk a paralelogramma két szemközti csúcsát. Ha P-t is tükrözzük az O-ra, akkor a paralelogramma összes csúcsa adottá válik.

37.5. H, I, O, S, X, Z.

37.6. *a)* Egyetlen közös pontjuk van, a kiválasztott középpont.
b) Egyetlen közös pontjuk van, az O.

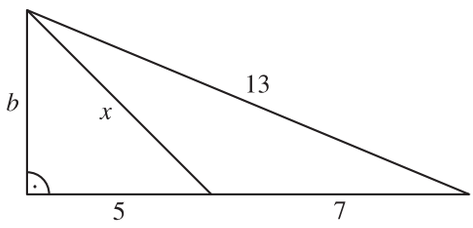
37.7. Vegyük fel az átlót. Majd az átló egy-egy végpontjából húzzunk a és b sugarú körívet. A körívek metszéspontja megadja a paralelogramma harmadik csúcsát. Azt tükrözve az átló felezőpontjára adottá válik a negyedik csúcs.



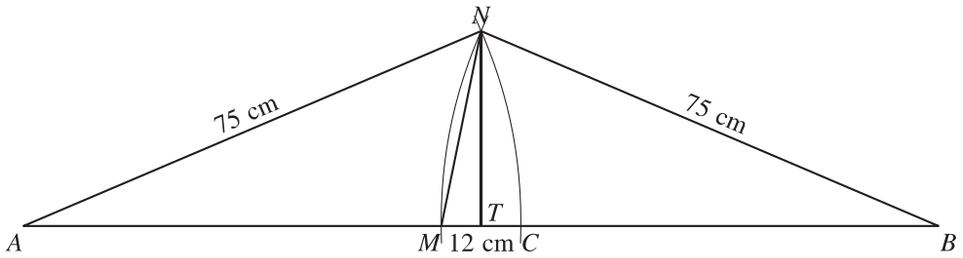
37.8. Szerkesszük meg a paralelograma középpontján átmenő, így egymást felező, egymással 60°-os szöget bezáró két magasságot. A magasságok végpontjaira szerkesszünk a magasságra merőleges egyeneseket. Ezek az egyenesek metszéspontjai adják a paralelogramma négy csúcspontját.

38. feladatlap

38.1. A nagy derékszögű háromszögnek az egyik befogója is adott: 12, így a b oldal $b^2 = 13^2 - 12^2 = 25$. $b = 5$.
$x^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

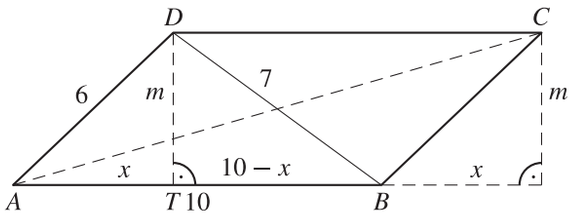


38.2. A $d(A, M) = d(C, B) = 75 - 12 = 63$ cm. A $d(A, T) = 63 + 6 = 69$ cm. Az ATN derékszögű háromszögben $d(N, T) = \sqrt{75^2 - 69^2} = 29{,}4$ cm. A TMN derékszögű háromszögben: $d(N, M) = \sqrt{6^2 + 864} = 30$ cm.



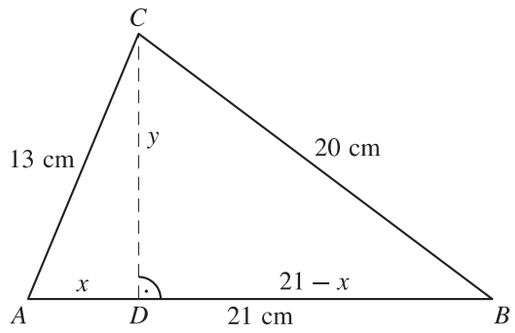
38.3. Az ATD derékszögű háromszögre: $m^2 = 6^2 - x^2$. A BTD derékszögű háromszögre: $m^2 = 7^2 - (10 - x)^2$. A két egyenletet egyenlővé téve: $36 - x^2 = 49 - \left(100 - 20x + x^2\right)$.

$x = 4{,}35$ cm. $m = \sqrt{36 - 4{,}35^2} = 4{,}13$. A terület $T = \dfrac{a \cdot m}{2} = 20{,}65$ cm.



38.4. Az ADC derékszögű háromszög közötti összefüggés: $y^2 = 13^2 - x^2$. A BDC derékszögű háromszög oldalai közötti: összefüggés: $y^2 = 20^2 - (21 - x)^2$. A két egyenletből: $13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$. $x = 5$.

$y^2 = 13^2 - 5^2 = 144$. $y = 12$ cm.

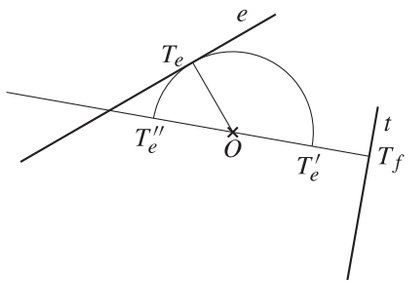


39. feladatlap

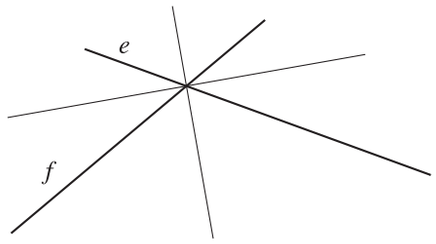
39.1. Az AB szakasz végpontjait forgassuk el és kössük össze őket, így kapjuk meg az AB szakasz képét. Az e egyenes elforgatásához jelöljünk ki az egyenesen két pontot, és azokat forgassuk el!

39.2. A szög szárain jelöljünk ki egy-egy pontot, és a csúcsponttal együtt forgassuk el a kijelölt pontokat is. A pontokat összekötve megkapjuk a szög képét. A szög képének nagysága megegyezik az eredeti szög nagyságával.

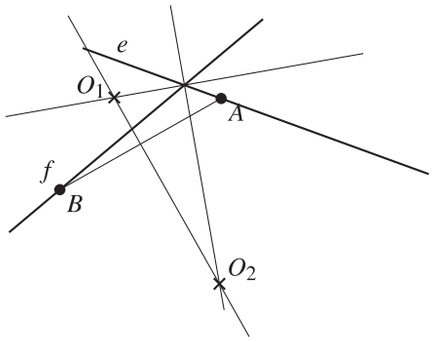
39.3. Bocsássunk merőlegeseket az O pontból az egyenesekre. Akkor párhuzamos a két egyenes, ha a merőlegesek egybeesnek. Tehát az O körüli elforgatás szöge a két merőleges egyenes hajlásszöge. Két hajlásszög van, így két megoldás lehetséges.



39.4. Az elforgatás középpontja a két egyenes szögfelező egyenesén kell, hogy legyen. A metsző egyenesek szögfelezőinek bármelyik pontja alkalmas forgatási középpontnak. Végtelen sok megoldás lehetséges.



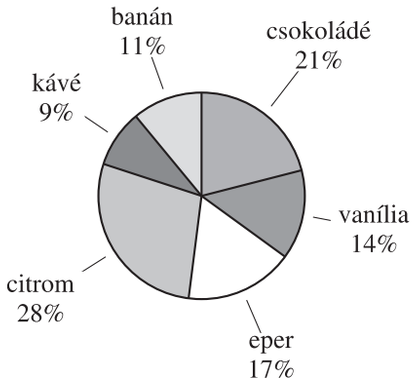
39.5. Az elforgatás középpontja egyrészt rajta van a két metsző egyenes szögfelezőin, továbbá a középpont rajta van a két kijelölt pontot összekötő szakasz felezőmerőlegesén, mert egyenlő távolságra van a ponttól és a pont képétől. Vagyis a szögfelezőkből a két pontot összekötő szakasz felezőmerőlegese metszi a ki a forgatás középpontját.



40. feladatlap

40.1.

a)



b) A relatív gyakoriságot megkapjuk, ha az adott gombócmennyiséget elosztjuk az összes gombóc számával (70).

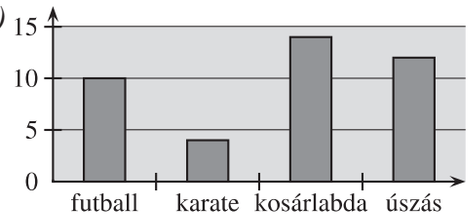
Fagylalt	Csokoládé	Vanília	Eper	Citrom	Kávé	Banán
Relatív gyakoriság	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{19}{70}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{4}{35}$

c) Gyümölcsfagylalt az eper, citrom, kávé, banán. Gyümölcsfagylaltgombócok száma: 45. 64,3%.

40.2. *a)*

futball	karate	kosárlabda	úszás
10	4	14	12

b)

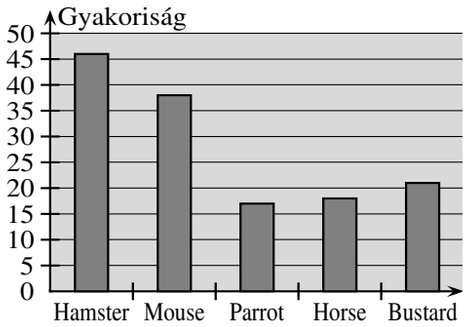


c) Gyakoriság: 12. A relatív gyakoriság: $\frac{12}{40} = 0,3$.

40.3. *a)*

Típus	Hamster	Mouse	Parrot	Horse	Bustard
Gyakoriság	46	38	17	18	21
Relatív gyakoriság	0,33	0,27	0,12	0,13	0,15

b)



40.4. *a)*

Osztályzat	1	2	3	4	5
Tanulók száma	2	4	10	12	9

c) Legalább jó dolgozat a 4-es vagy az 5-ös osztályzatú. Összesen 21 ilyen dolgozat van. $\frac{21}{37} \cdot 100 = 56,8\%$. *d)* $\frac{10}{37}$ a közepes osztályzat relatív gyakorisága.

e) Átlag: $\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 9}{37} \approx 3,6$. Amennyiben 3,5 felett jónak tekintjük a dolgozatokat, akkor a dolgozatok jól sikerültek.

41. feladatlap

41.1. *a)*

Idegen nyelv	angol	olasz	német	semmi
Utas	24	8	12	4

b) A németül beszélők relatív gyakorisága: $\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$.

c) Idegen nyelvet nem beszélők aránya százalékban: $\frac{4}{48}\cdot 100=8{,}3\%$.

41.2. *a)* Az adatsokaság terjedelme: Maximális elem–minimális elem = 5 – 0 = 5.

b) A diákok száma: 27. A testvérek átlagos száma: $\frac{0\cdot 4+1\cdot 9+2\cdot 8+3\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 1}{27}=\frac{47}{27}=1{,}74$.

c) Módusz a legtöbbet előforduló testvérszám: 1.

41.3. *a)* A legkisebb méret 36, a legnagyobb méret 43. A terjedelem: 43 – 36 = 7.

b) Készítsük el a táblázatot:

Cipőméret	36	37	38	39	40	41	42	43
Diákok	2	1	4	1	0	2	1	3

Az átlagméret: $\frac{553}{14}=39{,}5$. A szórásnégyzet:

$$\frac{2\cdot(36-39{,}5)^2+(37-39{,}5)^2+4\cdot(38-39{,}5)^2+(39-39{,}5)^2+2\cdot(41-39{,}5)^2+(42-39{,}5)^2+3\cdot(43-39{,}5)^2}{14}=6{,}25.$$

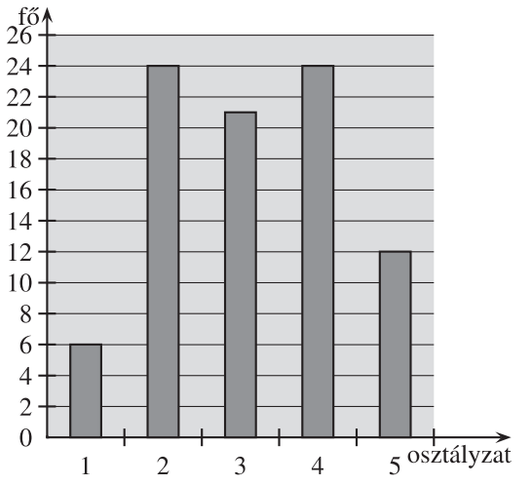
A szórás: $\sqrt{\text{szórásnégyzet}}=2{,}5$. *c)* Medián: $\frac{38+39}{2}=38{,}5$. Tehát nem szerepel az adatok között.

41.4. *a)* Érdemes elkészíteni az összesítő táblázatot.

Osztályzat	5	4	3	2	1
Diákok	12	24	21	24	6

b) Az átlagok meghatározhatók, ha az osztályzatokat osztályonként összeadjuk, és az osztálylétszámmal elosztjuk.

Osztályok	A	B	C
Osztályzatok összege	96	98	79
Létszám	29	28	30
Átlag	3,31	3,50	2,63



c) A *B* osztályban a 4-es fordul elő legtöbbször. A módusz 4.

d) 87 diák van. A növekvő sorrendben rendezett sorozatban a 44. helyen 3-as áll. Így a medián 3.

e) 87 diákból 21 ért el közepes eredményt, ez 24,1%.

41.5. *a)* Pl. 3; 3; 3; 3; 3; 4,2; *b)* 1; 2; 7; 7; 7; 9; 9; *c)* 1; 1; 4; 6; 9; 9; *d)* 5; 5; 5; 5; 5; 5;

41.6. *a)* 3; 3; 3; 3; 4; *b)* 3; 5; 7; 7; 11; *c)* 0; 1; 2; 2; 3; *d)* 4; 4; 4; 4; 4.