OKTATÁSI HIVATAL

8

Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

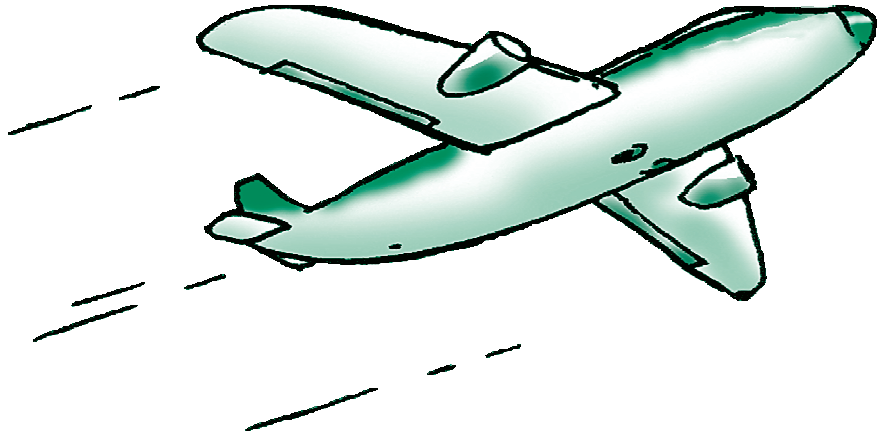
Matematika

Kalandozások a matematikában



Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

Matematika
8. évfolyam



OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2016. április 11-től tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/2751–13/2016. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – 2.2.03 (Matematika),
2.3.1.2 (Emelt matematika – B variáció); 4. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok
7–12. évfolyama számára – 4.2.04 (Matematika); 5. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok
5–12. évfolyama számára – 5.2.04 (Matematika) megnevezésű kerettantervek előírásainak.
A tankönyv összhangban áll a NAT 2012-vel.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
HERCZEGNÉ KASZÁS JUDIT, VARGA ISTVÁN

Lektorok:
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ
középiskolai tanár
PÁLFALVI JÓZSEFNÉ
főiskolai docens
RAJK ÁGNES
középiskolai tanár

Grafikusok: JUHÁSZ LEHEL, FRIED KATALIN, TÉNYI KATI

Fotó: JUHÁSZ LEHEL

A fedél CZAKÓ RITA rajzának felhasználásával készült.

Felelős szerkesztők: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA, DR. KORECZNÉ KAZINCZI ILONA

Anyanyelvi lektorok: DR. FALUSSY BÉLÁNÉ, BÁNKI LÁSZLÓNÉ

© Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin PhD, dr. Korándi József PhD, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta, Oktatási Hivatal (Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet), 2016

ISBN 978-963-19-7940-4

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök • Raktári szám: NT-11880
Tankönyvkiadási koordinációs osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó • Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 27,81 (A/5) ív • Tömeg: 490 gramm • 1. kiadás, 2020
Tördelés, grafika: Könyv Művek Bt. • A szedés $\mathrm{EMT_EX}$ szedőrendszerben készült

Nyomtatta és kötötte a Central Dabasi Nyomda Zrt.
Felelős vezető: Balizs Attila vezérigazgató
Munkaszám:
www.dabasinyomda.hu

Tartalom

Bevezetés. Jelmagyarázat 6

1. Halmazok 7
   - Halmazok, halmazműveletek 7
   - Műveletek halmazokkal 10
   - Ponthalmazok 14

2. A számok világa 16
   - A racionális számok 16
   - A négyzetgyök fogalma 19
   - A π (pi) és más nem racionális számok *(Emelt szintű, választható tananyag)* 21
   - Kis számok 23
   - Egy szám többféle alakja – a normálalak 25
   - Műveletek normálalakban adott számokkal *(Emelt szintű, választható tananyag)* 28
   - Számelmélet 31

3. Algebra 35
   - Műveletek 35
     - Összeadás, szorzás 35
     - Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések 38
     - Műveletek algebrai kifejezésekkel 43
   - Egyenletek, egyenlőtlenségek 46
     - Elemi úton megoldható szöveges feladatok 46
     - A mérlegelv alkalmazása 49
     - Egyenlőtlenségek 52
     - Számokkal kapcsolatos feladatok 57
     - Keverési feladatok 60
     - Mozgásos feladatok 62
     - Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok *(Emelt szintű, választható tananyag)* 65
     - Szöveges feladatok a geometria témaköréből 67
     - Kombinatorikai feladatok 69

4. Transzformációk 72
   - Egybevágósági transzformációk 72
   - Vektorok 74
     - Vektorok bevezetése 74
     - Vektorok összeadása 76
     - Vektorok kivonása 80

Eltolás 82
Pont körüli elforgatás *(Választható tananyag)* 86
Középpontos hasonlóság 89
A középpontos hasonlóság tulajdonságai 92
Szerkesszünk középpontosan hasonló képet! 97
Hasonlóság 101

5. A Pitagorasz-tétel 105
Mérjük meg a hosszát! 105
A Pitagorasz-tétel 107
A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban 110
A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban *(Emelt szintű, választható tananyag)* 113
Pitagoraszi számhármasok *(Emelt szintű, választható tananyag)* 115
Thalész-tétel 117

6. A számológép 120
Mit tud a számológép? 120
A számológép 120
Négyzetgyök 123
Eljárások *(Olvasmány)* 124
Eszközök *(Olvasmány)* 126
Gépek *(Olvasmány)* 127

7. Függvények 129
Lineáris függvények 129
Áttekintés 129
Lineáris függvények meredeksége I. 131
Lineáris függvények meredeksége II. 134
Elsőfokú egyenletek grafikus megoldása 137
Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása 138
Gyakorlati alkalmazások 140
Nemlineáris függvények 143
Az abszolútérték-függvény 144
A másodfokú függvény 146
A fordított arányosság függvénye 149
Függvények grafikonjának mozgatása az x tengellyel párhuzamosan 149
A két függvényeltolás összekapcsolása 152
Tükrözés az x tengelyre 154
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása 156
Sorozatok 160
Mértani sorozat *(Emelt szintű, választható tananyag)* 161

8. Statisztika 164
Milyen ismereteink vannak statisztikából? 164
Adatok ábrázolása diagramon 167
Ábrázolás kördiagramon 171
Hogyan készítsünk kördiagramot? 172

Az adatsokaságot jellemző középértékek 174
Az átlag 174
Módusz, medián 177

9. A tér geometriája 180
A tanult testek áttekintése 180
Gúlák 182
Kúpok 186
A gúla és a kúp térfogata *(Emelt szintű, választható tananyag)* 189
Gömb 191

10. Valószínűségszámítás 195
Áttekintés 196
A valószínűség klasszikus modellje 198
Összetett események valószínűsége *(Emelt szintű, választható tananyag)* 202
Geometriai valószínűség *(Emelt szintű, választható tananyag)* 205

11. Fogalomtár 207

Melléklet (Számok négyzetgyöke) 213

Bevezetés

Ez a tankönyv a Kalandozások a matematikában tankönyvsorozat része. **Tartós tankönyv, ne írj a tankönyvbe! A füzetedben dolgozz!**

A 8. osztályban már a továbbtanulás foglalkoztat bennünket, és ez befolyásolja a matematikatanulást is. Nem mindenki érdeklődik egyformán a matematika iránt, ezért a tankönyvben a feladatokat szintenként megjelöltük (alap, közepes, emelt).

Az alapszint és a közepes szint megfelel a NAT 2012 és a kerettanterv előírásainak. Az emelt szintet a matematika iránt érdeklődő tanulóknak ajánljuk. Ezek megoldása nem tartalmaz új ismereteket, de megoldásuk összetett gondolkodást igényel.

Az egyes anyagrészek mellett a „Választható tananyag" arra vonatkozik, hogy nem tartozik szorosan a tantervben meghatározott anyaghoz, de ha van rá idő, akkor érdemes vele foglalkozni, mert segíti a matematikai szemlélet kialakulását, elmélyülését.

Az „Emelt szintű, választható tananyag" arra utal, hogy az adott téma, problémakör vagy tananyagrész nem tantervi követelmény, de gyorsabban haladó osztályokban feldolgozható, differenciálás céljára használható rész.

Jelmagyarázat

A könyvben a feladatokat nehézségi szintjük szerint más-más módon jelöltük.

A1, A2, . . . , A5, . . . alapszintű.

Az érvényes kerettantervi előírásoknak megfelelő feladatok. Az A betű után álló szám minden esetben a feladat sorszámát jelenti.

Olyan feladatokat jelöltünk így, amelyek egyszerűek, nem igényelnek magas szintű matematikai ismereteket, gondolkodást.

K1, K2, . . . , K5, . . . közepes szintű.

Az érvényes kerettantervi előírásoknak megfelelő feladatok. A K betű után álló szám minden esetben a feladat sorszámát jelenti.

Olyan feladatokat jelöltünk így, amelyek megoldása mindenkitől elvárható, de kicsit összetettebbek, mint az alapszintű feladatok.

E1, E2, . . . , E5, . . . emelt szintű.

Ezeket a feladatokat a matematika iránt érdeklődő tanulóknak ajánljuk, megoldásuk segítheti a sikeres továbbtanulást. Az E betű után álló szám minden esetben a feladat sorszámát jelenti.

Olyan feladatot jelöltünk így, amelyek megoldása magasabb szintű gondolkodást igényel.

Ha egy feladatban az egyik kérdés több gondolkodást igényel, mint a feladat többi része, akkor *-gal jelöltük meg a betűjelét.

Tankönyvünkben a következő színeket használtuk egyes részek kiemelésére:

Fontos tudnivaló

Példa

Jelölés

Érdekesség

Emlékeztető

Vigyázz!

Megjegyzés

Észrevétel

1. Halmazok

A halmazok elmélete a matematika fiatal, mégis igen fontos, alapvető ága. Nincs olyan témakör, amelyben ne szerepelnének a halmazok. A következőkben összefoglaljuk, rendszerezzük, és bővítjük a halmazokról korábban szerzett ismereteinket.

Halmazok, halmazműveletek

A halmaz olyan fogalom, amelyet a mindennapi életből vonatkoztatunk el. Dolgok sokaságát, gyűjteményét értjük rajta. De mit jelent az, hogy sokaság, gyűjtemény? Miknek a sokasága, gyűjteménye?

A *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* kifejezéseket nem tudjuk pontosan megfogalmazni. Ezt a matematikában nem engedhetjük meg, mert amit meghatározunk, annak pontosnak kell lennie. Ezért inkább nem definiáljuk őket.

Fontos tudnivaló

A *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* matematikai **alapfogalmak**, nem határozzuk meg pontosan, hogy mit jelentenek.

A halmaz–elem kapcsolatot sokféleképpen szoktuk mondani: a halmaz elemei; egy halmazban lévő elemek; egy halmazhoz tartozó elemek; a halmazt alkotó elemek stb.

Nagyon fontos feltétel azonban, hogy mindaddig nem nevezhetünk halmaznak valamit, amíg nem tudjuk, hogy mi eleme és mi nem.

Fontos tudnivaló

Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha bármiről el tudjuk dönteni, hogy eleme-e vagy sem.

Például: halmazt alkotnak a természetes számok, de nem halmaz a kerek számok (mert nem tudjuk, hogy mit nevezünk kerek számnak); halmazt alkotnak a háromszögek, de nem halmaz a torz háromszögek (mert nem tudjuk, mit nevezünk torz háromszögnek) stb.

Amennyiben a halmaz elemei között egy elem többször is szerepel, azt azért még nem tekintjük több elemnek. Ha például az A halmaz elemei az 1, a 2, az 1 és a 3, akkor az ugyanaz, mintha az 1-et csak egyszer említenénk: az A halmaz elemei az 1, a 2 és a 3.

A halmazokat általában latin nagybetűkkel jelöljük (például: A, B, H, ...).

Fontos tudnivaló

A halmazokat megadhatjuk az elemeik felsorolásával (például $C = \{10, 20, 30, 40, 50\}$), az elemeik egy tulajdonságával (például $X = \{$a 10-zel osztható, 100-nál kisebb pozitív egész számok$\}$) vagy szemléletesen: halmazábrával, számegyenesen stb., például:



Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemei.

Például: $A = \{$a 10-zel osztható pozitív egész számok$\}$; $B = \{$a 0-ra végződő pozitív egész számok$\}$; $C = \{10, 20, 30, 40, 50, \ldots\}$.

Ez a három halmaz ugyanaz, mert ugyanazok az elemek tartoznak hozzájuk.

Van olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme sincsen.

Fontos tudnivaló

Azt a halmazt, amelynek nincsen egy eleme sem (az elemei száma nulla), **üres halmaznak** nevezzük. Mivel két halmaz akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemei, egyetlen egy üres halmaz van.

Az üres halmaz jele: $\emptyset$ vagy $\{\ \}$.

1.

Üres halmaz például a 10-nél nagyobb páros prímszámok halmaza; a két derékszöggel rendelkező háromszögek halmaza; a konkáv háromszögek halmaza.

Olyan halmaz azonban, amelynek minden az eleme, nincs. Ezért mindig meg kell adnunk azt a halmazt, amelyen egy probléma megoldásait keressük.

Ezt a halmazt **alaphalmaznak** vagy idegen eredetű szóval **univerzumnak** nevezzük. Nincs egységes jelölése, szokás U-val, H-val jelölni. Az alaphalmaznak fontos szerepe van a problémamegoldás szempontjából. Az alaphalmaz feladatonként más és más lehet.

1. példa

Oldjuk meg a $3x - 4 < 0$ egyenlőtlenséget a következő alaphalmazokon!

a) x darabszámot jelöl, ezért *az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza*;

b) x egy rácspont koordinátája, vagyis *az alaphalmaz az egész számok halmaza*;

c) x relatív gyakoriságot jelöl, tehát *az alaphalmaz a* $[0; 1]$ *intervallumba eső racionális számok.*

Fogalmazzuk meg, mennyiben változik a megoldás, ha más az alaphalmaz!

Ha $3x - 4 < 0$, akkor $3x < 4$ ezért $x < \frac{3}{4}$.

a) A pozitív egész számok körében ennek az egyenlőtlenségnek *nincs megoldása*.

b) Az egész számok körében a megoldások: $0;\ -1;\ -2;\ -3;\ \ldots$

c) A $[0; 1]$ intervallumba eső racionális számok körében a $\frac{3}{4}$-nél kisebb pozitív racionális számok az egyenlőtlenség megoldásai: $0 \leq x < \frac{3}{4}$, $x \in \mathbf{Q}$.

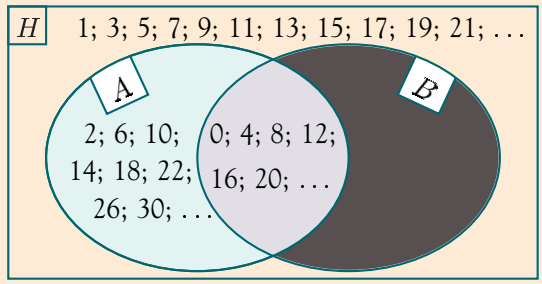
Látjuk, hogy ugyanannak az egyenlőtlenségnek az alaphalmaztól függően más és más a megoldása.

2. példa

Legyen a H alaphalmaz a természetes számok halmaza, A a 2 többszöröseinek, B a 4 többszöröseinek halmaza!

Minden páros szám az A-ban van, vagyis a páratlan természetes számok az A-n kívülre esnek.

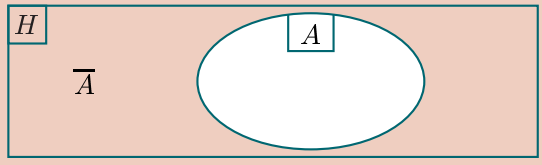
4 minden többszöröse a 2-nek is többszöröse, ezért a B halmaz A-n kívül eső részében nincs elem, üres.



Fontos tudnivaló

Ha B halmaz minden eleme benne van az A halmazban, akkor azt mondjuk, hogy B része A-nak, vagy más szóval A tartalmazza B-t. Jele: $B \subseteq A$, $A \supseteq B$.

Ha a H alaphalmaz elemeiből elhagyjuk az A halmaz elemeit, akkor ismét halmazt kapunk. Ennek a halmaznak a neve A kiegészítő halmaza (vagy komplementer) halmaza. Jele: $\overline{A}$.



Feladatok

A1 Melyik nem halmaz az alábbiak közül? Indokold a válaszodat! Keresd a választ a következő kérdésre! El lehet-e dönteni bármiről, hogy teljesül-e rá az adott tulajdonság?

A: a hét napjai;

B: a hét szerencsés napjai;

C: a Föld országai;

D: a veszélyes sípályák;

E: a vonzó színek;

F: a szőke emberek;

G: a magas emberek;

H: a 190 cm-nél magasabb emberek.

A2 Melyik halmaz, melyik nem?

A: a háromszögek;

B: a négyzetek;

C: a sík pontjai;

D: a körök;

E: a szabályos síkidomok;

F: az érdekes síkidomok.

A3 Válaszd ki azokat a halmazokat, amelyeknek ugyanazok az elemei!

$A = \{25\text{-tel osztható páratlan pozitív egész számok}\}$;

$B = \{\text{derékszögű háromszögek}\}$;

$C = \{100\text{-zal osztható pozitív egész számok}\}$;

$D = \{\text{olyan háromszögek, amelyeknek három hegyesszöge van}\}$;

$E = \{\text{olyan háromszögek, amelyekben két hegyesszög összege annyi, mint a harmadik szög}\}$;

$F = \{25\text{-re vagy } 75\text{-re végződő pozitív egész számok}\}$;

$G = \{\text{azok a háromszögek, amelyeknek minden szöge } 90^\circ\text{-nál kisebb}\}$;

$H = \{\text{a } 00\text{-ra végződő pozitív egész számok}\}$.

A4 Legyen az alaphalmaz $H = \{\text{négyszögek}\}$!

$A = \{\text{legalább egy derékszöggel rendelkező négyszögek}\}$;

$B = \{\text{legalább két derékszöggel rendelkező négyszögek}\}$;

$C = \{\text{legalább három derékszöggel rendelkező négyszögek}\}$;

$D = \{\text{legalább négy derékszöggel rendelkező négyszögek}\}$;

$E = \{\text{derékszöggel nem rendelkező négyszögek}\}$.

a) Vannak-e egyenlők a fenti halmazok között? Melyek ezek?

b) Vannak-e olyan halmazok, amelyek közül az egyik részhalmaza a másiknak?

c) Van-e a fenti halmazok között két olyan halmaz, amelyek közül az egyik komplementere a másiknak?

d) Mi lesz az egyes halmazok komplementerhalmaza?

K5 Keress olyan alaphalmazt, amelynek 10 eleme van! Keress hozzá olyan A és B halmazokat, amelyekre $A \subseteq B$, és B kiegészítő halmazának 3 eleme van!

K6 Legyen $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$! Mivel egyenlő az A és a B halmaz, ha $\overline{A} = B$ és $\overline{B} = \{1, 5\}$?

K7 Legyen $H = \{\text{az 1-nél nagyobb természetes számok}\}$, $A = \{\text{a prímszámok}\}$! Mi az $\overline{A}$?

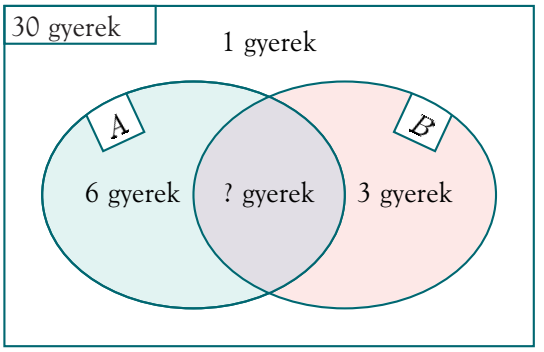
Műveletek halmazokkal

1. példa

Az ősz folyamán két kirándulást szerveztek a 8. osztályos tanulók: szeptemberben egy gyalogtúrát, októberben pedig egy kerékpáros túrát. 6 gyerek volt, aki csak a gyalogtúrára ment el, 3 pedig csak a kerékpáros túrára. A 30 tanuló közül csak 1 gyerek nem tudott elmenni egyik kirándulásra sem.

Hány gyerek vett részt a gyalogtúrán; a kerékpáros túrán; mindkét kiránduláson?

Készítsünk halmazábrát! Az alaphalmaz az osztály tanulói, az A halmaz a gyalogtúrán részt vevők, a B a kerékpáros túrán részt vevők halmaza. Olvassunk a halmazábráról!



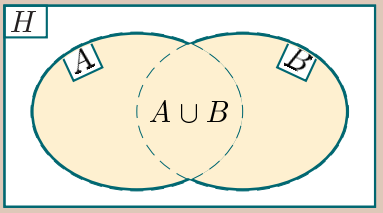
Az osztály létszáma 30. 1 gyerek nem ment el egyik túrára sem, 6 csak a gyalogtúrán volt ott, 3 csak a kerékpáros túrán. A maradék $30 - 1 - 6 - 3 = 20$ gyerek részt vett mindkét kiránduláson.

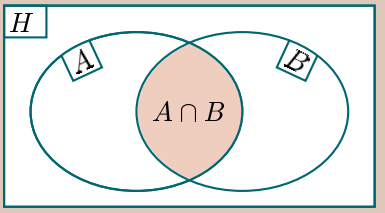
A gyalogtúrán 26, a kerékpáros túrán 23 diák vett részt. 20 gyerek mindkét kiránduláson ott volt.

Elnevezések, jelölések

Azt a halmazt, amely az A és a B halmaz minden elemét együtt tartalmazza, az A és a B halmazok egyesítésének vagy unió-jának nevezzük. Jele: $A \cup B$.

Észrevetted? $A \cup B = B \cup A$.





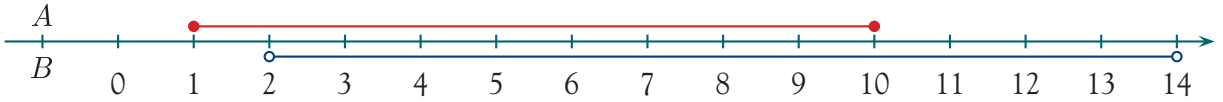
Azt a halmazt, amely az A és a B halmaz közös elemeit tartalmazza, az A és a B halmazok metszetének nevezzük. Jele: $A \cap B$. Észrevetted? $A \cap B = B \cap A$.

2. példa

Legyen a H alaphalmaz a racionális számok halmaza! Legyen A azon x racionális számok halmaza, amelyekre $1 \leq x \leq 10$, B pedig azon x racionális számok halmaza, amelyekre $2 < x < 14$!

Írjuk fel, milyen összefüggés teljesül az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazokra!

Mi jellemzi az $1 \leq x \leq 2$ és a $10 < x < 14$ halmazokat?



Az ábráról leolvashatjuk: $A \cup B$: azon x racionális számok halmaza, amelyekre $1 \leq x < 14$;
$A \cap B$: azon x racionális számok halmaza, amelyekre $2 < x \leq 10$.

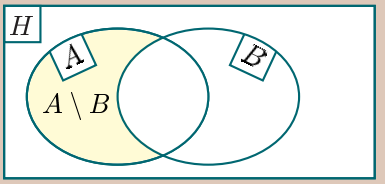
Azok az x számok, amelyekre $1 \leq x \leq 2$ teljesül, hozzá tartoznak az A halmazhoz, de nem elemei a B-nek. Ezt úgy mondjuk, hogy *az A és a B halmaz különbsége, az A halmazból kivonjuk a B halmazt.* A $10 < x < 14$ ennek megfelelően a B halmazból kivonva az A halmazt.

Elnevezések, jelölések

Az A halmaz elemei közül elhagyva a B halmaz elemeit, az A-ból B halmazt kapjuk. Jele: $A \setminus B$.

Észrevetted? $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Figyeld meg! $H \setminus A = \overline{A}$



3. példa

Legyen a H alaphalmaz a négyszögek halmaza! Legyen A a tengelyesen szimmetrikus négyszögek, B a középpontosan szimmetrikus négyszögek halmaza!

Írjuk fel, melyek az $A \cup B$, az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és a $B \setminus A$ halmaz elemei!

$A \cup B$-be olyan négyszögek tartoznak, amelyek tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikusak, ezek a húrtrapézok, a deltoidok és a paralelogrammák.

$A \cap B$-ben azok a négyszögek vannak, amelyek tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikusak, vagyis a rombuszok és a téglalapok.

Az $A \setminus B$ halmazban olyan négyszögek vannak, amelyek tengelyesen szimmetrikusak, de középpontosan nem. Ez lehet húrtrapéz, amely nem téglalap vagy deltoid, amely nem rombusz.

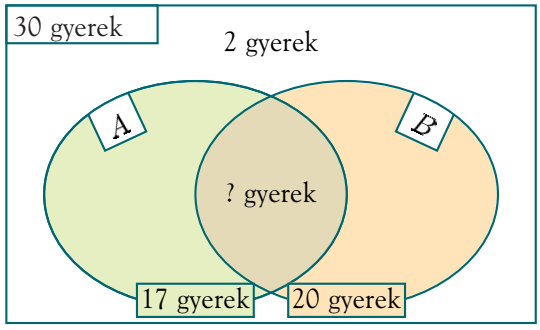
A $B \setminus A$ halmazban olyan négyszögek vannak, amelyek középpontosan szimmetrikusak, de tengelyesen nem. Olyan paralelogramma, amely nem rombusz és nem téglalap.

4. példa

Az osztály 30 tanulója közül 17 olvasott Mark Twaintől regényt. Erich Kästner-regényt 20-an olvastak. 2 gyerek egyik szerzőtől sem olvasott még semmit.

Hány gyerek olvasott a két szerző közül csak Mark Twaintől, illetve csak Erich Kästnertől regényt? Hány gyerek olvasott regényt mindkét szerzőtől?

Ábrázoljuk halmazábrán az adatokat! Az alaphalmaz az osztály tanulói. Az A halmazba kerülnek azok, akik olvastak már Mark Twain-regényt. A B-be azok, akik olvastak már Erich Kästner-regényt.



2 gyerek nem tartozik egyik halmazba sem. A fennmaradó 28 gyerek közül az A halmazba 17 gyerek tartozik, a B-be 20. Ez összesen 37 gyerek lenne, de csak 28 lehet. Miért számoltunk 9-cel több gyereket? Azért, mert van 9 gyerek, aki mindkét szerzőtől olvasott már.

Vagyis az A és a B halmazok közös részébe 9 elem tartozik. A csak az A halmazba tartozó elemek száma ezért $17 - 9 = 8$, a csak a B halmazba tartozó elemek száma pedig $20 - 9 = 11$. Tehát csak Mark Twain regényt 8-an, csak Erich Kästner-regényt 11-en olvastak. Mindkét szerzőtől pedig 9 gyerek olvasott regényt.

5. példa

Egy büfében 3-féle alapanyagot használnak a szendvicskészítéshez: sajtot, tojást és sonkát. Mindegyik szelet kenyérre tesznek ezek valamelyikéből. A pulton látható szendvicsek közül 7 szendvicsen van sajt, 12-n van tojás és 15-ön van sonka. 2 szendvicsen van sajt és tojás, 3 szendvicsen van sajt is és sonka is, 10 szendvicsen van tojás és sonka. Egy olyan szendvics van, amelyen sajt is, tojás is, sonka is van. Hány szendvics van a pulton?

Készítsünk halmazábrát, és írjuk be, hogy az egyes ábrarészekbe hány szendvics jut!

A középső részben (sajtos-tojásos-sonkás) 1 elem van.

A sajtos-tojásos szendvicsek száma 2, de ebből 1 sonkás is, vagyis a csak sajtos-tojásos szendvicsek száma 1.

A tojásos-sonkás szendvicsek száma 10, de ebből 1 sajtos is, így a csak tojásos-sonkásak száma 9.

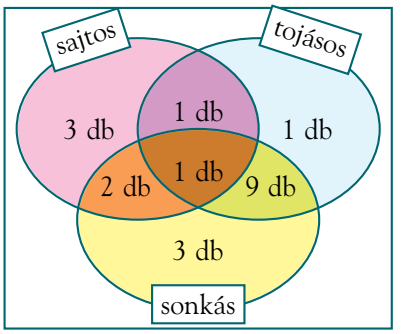
A sajtos-sonkás szendvicsek száma 3, de ebből 1 tojásos is, tehát csak sajtos-sonkás 2 darab.

A sajtos szendvicsek száma 7, de ebből csak sajtos-tojásos 1, csak sajtos-sonkás 2, sajtos-tojásos-sonkás 1.
Így csak sajtos: $7 - 1 - 2 - 1 = 3$ szendvics.

A tojásos szendvicsek száma 12, ebből csak sajtos-tojásos 1, csak tojásos-sonkás 9, sajtos-tojásos-sonkás 1.
Csak tojásos: $12 - 1 - 9 - 1 = 1$ darab.

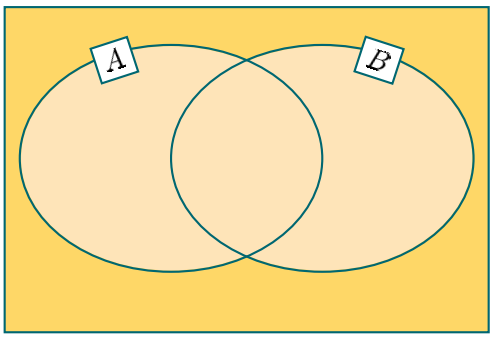
A sonkás szendvicsek száma 15, ebből csak sajtos-sonkás 2, csak tojásos-sonkás 9, sajtos-tojásos-sonkás 1 darab.
Csak sonkás szendvics: $15 - 2 - 9 - 1 = 3$ van.

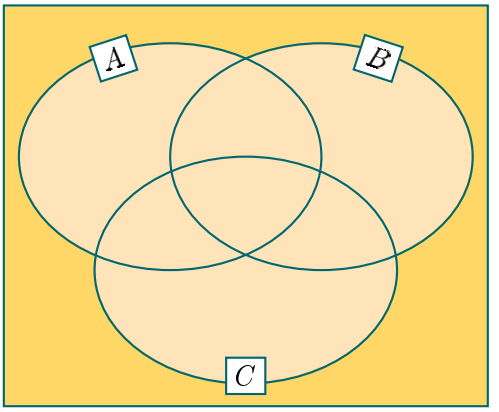
Összesen $3 + 1 + 3 + 1 + 2 + 9 + 1 = 20$ szendvics van a pulton.



Elnevezés, jelölés

Két halmaz (A és B) egyesítése (idegen szóval uniója) az a halmaz, amelynek az elemei beleesnek A-ba vagy B-be. Három halmaz egyesítése az a halmaz, amelynek elemei a három halmaz valamelyikébe esnek.





Az előző példában a három halmaz egyesítése az összes szendvics halmaza.

Feladatok

A1 Legyen A a természetes számok, B a természetes számok ellentettjeinek halmaza! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza. Mivel lehet egyenlő

a) $A \cup B$; *b)* $A \cap B$?

A2 Legyen A a páros egész számok, B a páratlan egész számok halmaza! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza. Mivel lehet egyenlő

a) $A \cup B$; *b)* $A \cap B$?

K3 Legyen A a 100-nál nem nagyobb számok, B a -100-nál nem kisebb számok halmaza! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza. (A feladathoz készíts számegyenest, ha szükséges!) Mivel lehet egyenlő

a) $A \cup B$; *b)* $A \cap B$; *c)* $\overline{A}$; *d)* $\overline{B}$; *e)* $\overline{A} \cup B$; *f)* $\overline{B} \cap A$?

E4 A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2\}$; $A \cap B = \{2\}$. Mi lehet A és B? Készíts halmazábrát, ha szükséges!

A5 A 30 fős osztályban 12 gyerek szereti a testnevelésórákat, 7 szereti az ének-zene órákat. 16 gyerek ezen két óra egyikét sem szereti. Hány gyerek szereti mindkettőt?

A6 A 20 fős vendégsereg ebéd után fagylaltot vett. Vaníliafagylaltot 15-en kértek, csokoládéízűt 10-en. 3-an mindkétféle fagylaltot kértek. A többiek nem ettek fagylaltot. Hányan voltak ők?



A7 Egy 15 fős üdülőtársaságból 10-en úszni mentek. Voltak, akik vízibiciklit béreltek. 3-an úsztak is és vízibicikliztek is. Hányan voltak azok, akik csak vízibicikliztek, ha mindenki volt úszni vagy vízibiciklizni?

K8 Az osztály tanulói múzeumlátogatást szerveztek. Két múzeumot látogattak meg: egy iparművészeti és egy közlekedéstörténeti kiállítást. Mind a 27 gyerek részt vett a programon.
5 gyerek megnézte mindkét kiállítást. Az iparművészetit 6-tal több gyerek látta, mint a közlekedéstörténetit.
Hányan jártak az egyes kiállításokon?

K9 Az osztály 24 tanulója közül 16 tanul angolul, 12 tanul németül. Mindenki tanulja legalább az egyik nyelvet.
a) Hányan tanulják mindkét nyelvet? *b)* Hány gyerek tanul csak egy nyelvet?

K10 Az osztály 26 tanulója közül 7 csak egy nyelvet tanul, a többiek két nyelvet: angolt és franciát.
a) Hányan tanulják mindkét nyelvet?
b) Hányan tanulják az egyes nyelveket, ha angolul 5-tel többen tanulnak, mint franciául?

E11 Az iskolanapon háromféle programon tudnak részt venni a diákok: csillagászati ismeretterjesztő előadáson, koncerten, illetve sportrendezvényen.
Összesen 276 diák jött el az iskolanapra. Mindenki részt vett valamelyik programon.
Mindhárom programra 72-en mentek el.
Az előadást és a koncertet összesen 104-en látogatták meg.
Az előadáson és a sportrendezvényen is részt vettek száma 80.
A koncerten és a sportrendezvényen is részt vevők száma 112 volt.
Az előadást 170-en, a koncertet 190-en látogatták meg.
Hány gyerek ment el csak a sportversenyre?

E12 Megkérdeztünk 24 gyereket, hogy Barnabás, Piroska és Rózsa közül melyikkel vannak jóban.
5-en mind a hármukkal jóban vannak.
8-an vannak azok, akik jóban vannak Barnabással és Piroskával is, de nincsenek jóban Rózsával.
12-en vannak, akik Piroskával és Rózsával jóban vannak.
13-an vannak jóban Barnabással.
Ugyanannyian vannak jóban csak Piroskával, mint csak Rózsával.
Kivel hány gyerek van jóban?

E13 Megkérdeztünk 26 zeneiskolába járó gyereket, hogy milyen hangszeren tanultak vagy tanulnak. Mindenki választott egyet a hegedű, a zongora és a fuvola közül.
10-en tanultak hegedülni, 10-en zongorázni, 18-an a fuvolázni.
2-en tanultak csak hegedülni és zongorázni, 8-an csak zongorázni és fuvolázni.
Hányan tanulnak csak zongorázni? Hányan tanulnak csak hegedülni? Hányan tanulnak csak fuvolázni?

E14 Az alaphalmaznak 25 eleme van. Az A halmazban 10, a B halmazban 16 elem van.
a) Legfeljebb hány elem lehet az A és a B halmaz közös részében?
b) Legalább hány elem van A és B közös részében?
c) Legalább hány elem van A és B egyesítésében?
d) Legfeljebb hány elem lehet A és B egyesítésében?

Ponthalmazok

1.

Tudjuk, hogy a síkban egy rögzített ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza körvonal. Ha nem követeljük meg, hogy síkban vizsgálódjunk, akkor gömbfelületet kapunk.

Tudjuk, hogy a síkban két rögzített ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a két pont által meghatározott szakasz felező merőleges egyenese lesz. Ha térben vizsgáljuk a kérdést, akkor a szakaszt felező merőleges síkot kapjuk.

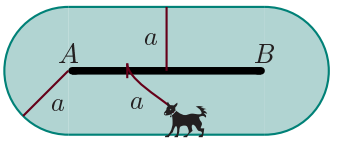
Kiindulásként természetesen nem csak pontot (vagy két pontot) rögzíthetünk, választhatunk másféle térelemeket is.

1. példa

Egy harapós kutyát az udvaron a földhöz rögzített vízszintes vasrúdhoz kötöttek egy pórázzal. A póráz vége a rúd teljes hosszán végig tud csúszni. Szemléltessük egy rajzzal, hogy a kutya az udvar mely részét védi!

Legyen a vasrúd az AB szakasz, a póráz hossza pedig a.

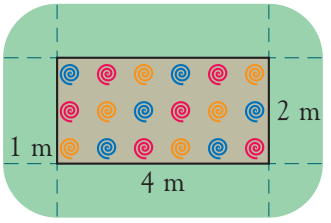
Az ábrán színessel jelölt részt védi a kutya.



2. példa

Egy 2 méterszer 4 méteres téglalap alakú virágágyást körben pázsit díszít. A pázsit széle 1 méterre van a téglalaptól. Készítsünk ezek alapján rajzot a virágágyásról és a pázsitról!

Az ábra zöld része mutatja a fűvel borított részt.



3. példa

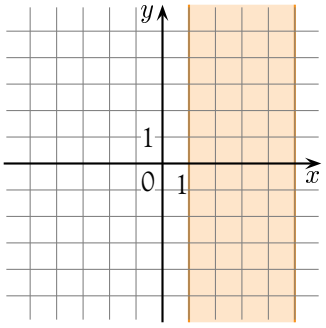
Adjuk meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek

a) első koordinátája 1-nél nem kisebb és 5-nél nem nagyobb;

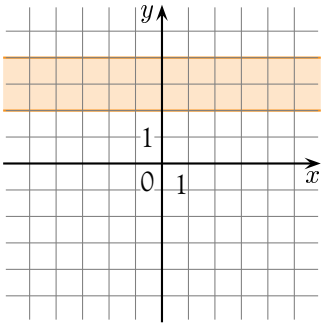
b) második koordinátája 2-nél nem kisebb és 4-nél nem nagyobb.

c) Mi lesz a két ponthalmaz metszete?

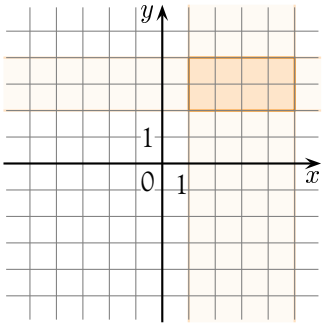
a)



b)



c)

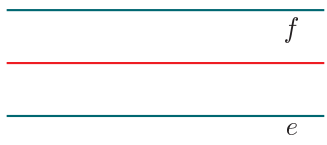


Téglalapot kapunk metszetként.

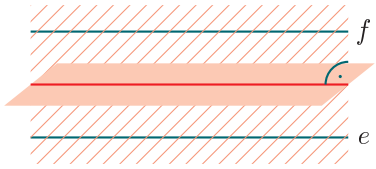
4. példa

Adjuk meg azt a ponthalmazt, amelyet két párhuzamos egyenestől azonos távolságra lévő pontok alkotnak *a)* a két egyenes síkjában; *b)* a térben!

a) A két egyenes között párhuzamosan egy újabb egyenest kapunk, ahogyan ezt az ábra is mutatja.



b) Egy, a két egyenes által meghatározott síkra merőleges síkot kapunk, és a két sík közös egyenese az *a)*-ban kapott ponthalmaz lesz. Az ábra szemlélteti ezt a síkot.



Érdekességek

1. Szerkeszd meg egy háromszögben az M magasságpontot, a körülírt kör K középpontját, az S súlypontot, valamint a KM szakasz F felezőpontját! Ha van rá lehetőséged, akkor használj interaktív szerkesztőprogramot, mert akkor a kész ábrán mozgatni is tudod a kiinduló háromszög csúcsait. Figyeld meg a felsorolt pontok helyzetét!

2. Szerkeszd meg egy háromszögben a három oldalfelező pontot, a három magasságtalppontot, és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjait. Most is nagyon látványos és hasznos, ha interaktív szerkesztőprogrammal hozod létre az ábrát. Mit tapasztalsz az így kapott kilenc ponttal kapcsolatban?

3. Nézz utána a szakirodalomban vagy a világhálón, hogy mit neveznek Euler-egyenesnek, Feuerbach-körnek!

Feladatok

K1 Rajzold meg egy rögzített egyenestől adott távolságra lévő pontok halmazát a síkban!

K2 Hol helyezkednek el a síkban egy rögzített körvonaltól adott távolságra lévő pontok? Készíts ábrát! Hány különböző esetet kapsz?

K3 Adott három nem egy egyenesre illeszkedő pont. Add meg a pontoktól azonos távolságra lévő pontok halmazát a síkban!

K4 Adott három egyenes a síkon. Add meg az egyenesektől azonos távolságra lévő pontok halmazát a síkban! Hány különböző esetet kell megvizsgálni?

K5 Add meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek
a) első koordinátája (-1)-nél nem kisebb és 4-nél nem nagyobb;
b) első koordinátája (-1)-nél nagyobb és 4-nél kisebb!

K6 Add meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek
a) második koordinátája (-2)-nél nem kisebb és 3-nál nem nagyobb;
b) második koordinátája (-2)-nél nagyobb és 3-nál nem nagyobb!

K7 Add meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek
a) első és második koordinátája egyenlő;
b) első és második koordinátájának összege nulla;
c) koordinátáinak szorzata nem negatív;
d) első koordinátája páratlan, a második koordinátája páros szám!

K8 *a)* Adott egy a oldalú négyzet. Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek a négyzet vonalától a távolságra vannak?
b) Adott egy a élű kocka. Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek a kocka felületétől a távolságra vannak?

2. A számok világa

A számok világa

2.

Mindennapi életünkben fontos szerepet játszanak a számok. Elképzelhetetlen az élet nélkülük. Az emberek először dolgokat számláltak, így keletkeztek a természetes számok. Aztán osztozkodtak, ebből jöttek létre a törtek. Az adósság feljegyzése tette szükségessé a negatív számok létrejöttét.

A korábbi években nyomon követtük a számok kialakulását, fejlődését. Most rendszerezzük a megismert fogalmakat, és kitekintünk a tanult számok halmazán kívülre.

A racionális számok

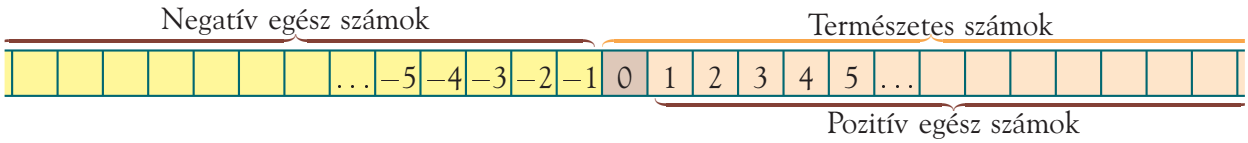
Emlékszel?

A természetes számok a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ... A természetes számok halmazát **N**-nel jelöljük.

A pozitív egész számok az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; ...

A negatív egész számok a −1; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8; ...

A természetes számok és a negatív egész számok együtt alkotják az egész számok halmazát. Ezt a halmazt **Z** jelöli.



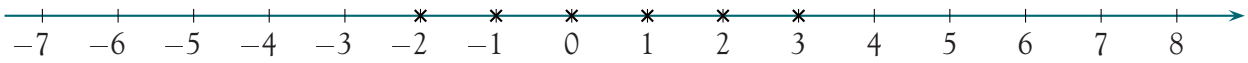
Az egész számok halmaza a pozitív egész számokból, a negatív egész számokból és a 0-ból áll.

1. példa

Van-e olyan egész szám, amely a −3 és a 4 közé esik?

Van-e olyan egész szám, amely a 3 és a 4 közé esik?

A −3 és a 4 közé esik a −2; −1; 0; 1; 2; 3, de a 3 és a 4 közé nem esik egész szám.



Fontos tudnivaló!

Racionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. A racionális számok halmazának jelölése: **Q**.

Például: 2 : 3; 4 : (−1); (−5) : 3; 10 : 2.

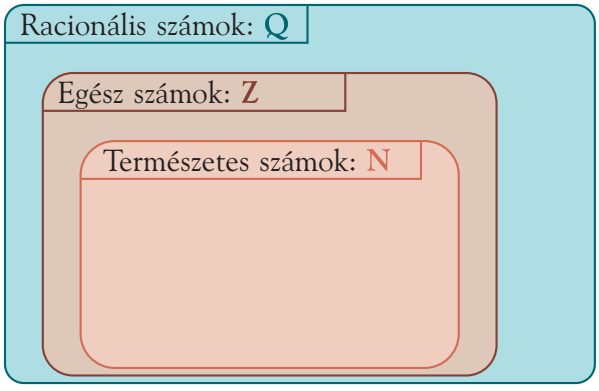
Egy racionális számot többféleképpen is felírhatunk, például: $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $2{,}5 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

A racionális számok tizedestört-alakja lehet véges vagy lehet végtelen szakaszos.

Például $\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots = 0{,}\dot{6}$.

Észrevetted?

Az egész számok is racionális számok.



2. példa

a) Van-e olyan racionális szám, amely a 3 és a 4 közé esik?

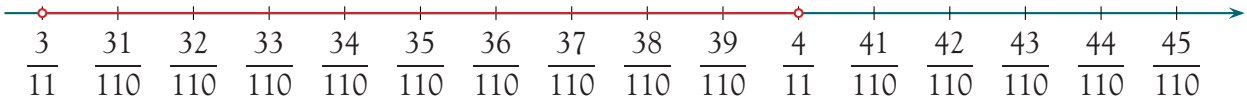
b) Van-e olyan racionális szám, amely a $\frac{3}{11}$ és a $\frac{4}{11}$ közé esik?

c) Van-e olyan racionális szám, amely az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{3}$ közé esik?

a) A 3 és a 4 közé esik például a 3,5. De közé esik a 3,1; a 3,2; a 3,3; …; 3,8; 3,9 is vagy a $3,1\dot{4}\dot{2}$ és még nagyon sok racionális szám. Sőt, akárhány 3 és 4 közé eső racionális számot megadhatunk. Ezek az ábrán a pirossal jelölt intervallumban találhatók.



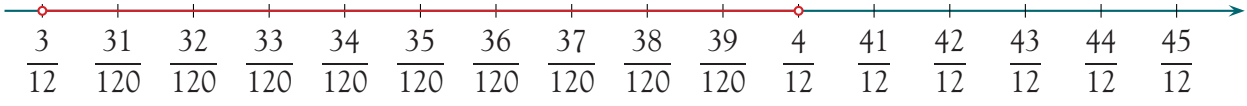
b) A $\frac{3}{11}$ és a $\frac{4}{11}$ közé is esik racionális szám. Ha bővítjük a törteket például 10-zel, akkor a $\frac{30}{110}$ és a $\frac{40}{110}$ között könnyű további racionális számokat találni, például: $\frac{31}{110}$; $\frac{32}{110}$; …; $\frac{39}{110}$. Persze nemcsak ez a kilenc, hanem sokkal több (akárhány) racionális szám megadható a két szám között. Ezek az ábrán a pirossal jelölt intervallumban találhatók.



Másképp is gondolkodhatunk. A tizedestört-alak segítségével is kereshetünk a két szám közé eső racionális számokat. $\frac{3}{11} = 0,272\,727\ldots$; $\frac{4}{11} = 0,363\,636\ldots$. A közéjük eső véges tizedes törtek biztosan racionálisak lesznek. Például: 0,3; 0,35; 0,31 stb.

Keress további, a $\frac{3}{11}$ és a $\frac{4}{11}$ közé eső véges tizedes törteket!

c) Az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{3}$ egy közös nevezője a 12, de közös nevezője a 120 is: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{30}{120}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{40}{120}$. Most már könnyen találunk az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{3}$ közé eső törteket, például: $\frac{31}{120}$; $\frac{32}{120}$; …; $\frac{39}{120}$. Ezek az ábrán a pirossal jelölt intervallumban találhatók.



Most is gondolkodhatunk másképpen is. $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{3} = 0,333\,333\ldots$. E két szám közé esik például a 0,26; a 0,27; a 0,275 55; a 0,3 stb. Ezek is mind véges tizedes törtek (azaz racionális számok).

Keress további véges tizedes törteket, amelyek $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3}$ közé esnek!

Fontos tudnivaló

Bármely két racionális szám között van racionális szám.

Emlékszel?

Ha két egész számot osztunk el egymással, és a hányados végtelen tizedes tört, a *maradékok* között egyszer csak felbukkan egy olyan, amelyik már szerepelt. Ha a maradék ugyanaz, a hányados következő jegye is ugyanaz lesz. A hányados jegyei ezért ugyanabban a sorrendben ismétlődnek. Az ismétlődő részt **szakasznak** nevezzük, a hányadost pedig **végtelen szakaszos tizedes törtnek.**

3. példa

Igazoljuk, hogy $a = 0{,}4\dot{3}$; $b = 0{,}34\dot{3}$; $c = 0{,}334\dot{3}$ számok felírhatók két egész szám hányadosaként, tehát racionális számok!

$$a = 0{,}4\dot{3} = 0{,}1 + 0{,}\dot{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}; \qquad b = 0{,}34\dot{3} = 0{,}01 + \frac{1}{3} = \frac{103}{300};$$

$$c = 0{,}334\dot{3} = 0{,}001 + \frac{1}{3} = \frac{1003}{3000}.$$

Ezek a számok felírhatók két egész szám hányadosaként.

A tizedestört-alakjuk végtelen. Ha pedig két egész szám hányadosa nem véges, akkor végtelen szakaszos tizedes tört.

Feladatok

A1 Ábrázold számegyenesen a következő számokat! Ha nem tudod meghatározni a pontos helyüket, akkor közelítően ábrázold! Állítsd őket nagyság szerinti sorrendbe!

$a = \frac{1}{6}$; $b = -\frac{2}{3}$; $c = 4{,}2$; $d = -0{,}16$; $e = 0{,}\dot{1}\dot{5}$;

$f = 15{,}3$; $g = \frac{31}{2}$; $h = 4\frac{1}{2}$; $i = \frac{4}{25}$; $j = -0{,}\dot{6}$.

A2 Válaszd ki, hogy melyek az egész számok az alábbiak közül! Válaszd ki, melyek a természetes számok!

$a = 4{,}0$; $b = \frac{3}{6}$; $c = -\frac{8}{2}$; $d = \frac{-15}{3}$;

$e = 3{,}\dot{9}$; $f = \frac{0}{-2}$; $g = \frac{42}{3}$; $h = 0$.

A3 Írd helyiérték-táblázatba az alábbi számokat! Állítsd őket nagyság szerint növekvő sorrendbe!

$a = 12{,}637$; $b = 12{,}0637$; $c = 12{,}6370$; $d = 12{,}607$;

$e = 12{,}603$; $f = 12{,}607$; $g = 126{,}37$; $h = 1{,}2637$.

K4 A 41,15; 410,15; 41,51; 14,015 számokat helyiérték-táblázatba írtuk, majd a fejlécet és néhány számjegyet letakartunk. Másold le a táblázatot a füzetedbe! Töltsd ki a fejlécet! Hová kerülhet a tizedesvessző? Írd be a hiányzó számjegyeket! Keress meg minden lehetséges megoldást!

			1			
		4		1		
	4					

K5 Készíts kiselőadást a számok kialakulásáról! Nézd át a korábbi években használt tankönyveidet!

K6 Készíts halmazábrát az egész számok (**Z**) és a természetes számok (**N**) halmazáról! Az alaphalmaz legyen a racionális számok halmaza, **Q**!

Minden halmazrészbe, amelybe lehet, írj legalább két számot!

K7 Az alábbi adatok közül melyeket szoktunk egész számmal, melyet szoktunk törtszámmal megadni? Melyek lehetnek egészre kerekített törtszámok?

a) Az osztály létszáma.
b) Egy ember életkora években.
c) Egy ember tömege kilogrammban.
d) Egy buszon az ülőhelyek száma.
e) Egy lift teherbíró képessége főben.
f) Egy szoba szélessége méterben.

Beszéljétek meg csoportokban, adjatok meg mindegyikre egy-egy lehetséges értéket!

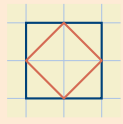
K8 Keress 3-3 olyan racionális számot, amelyek az adott két szám közé esnek!

a) $\frac{3}{5}$ és $\frac{4}{5}$; *b)* $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{3}$; *c)* 0,3 és $\frac{1}{3}$; *d)* $-\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{5}$.

A négyzetgyök fogalma

1. példa

A négyzetrácsos füzetedbe rajzolj olyan négyzetet, amelynek oldala 2 egység! Az oldalfelező pontok is egy négyzetet határoznak meg.



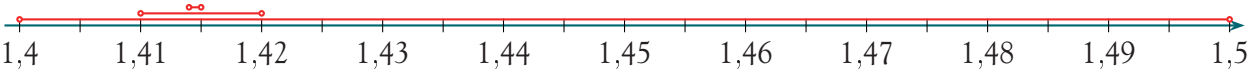
Mekkora a négyzetbe írt **kisebb négyzet** területe? Mekkora az oldala?

A nagy négyzet területe $2 \cdot 2 = 4$ területegység, a kihagyott háromszögek területe egyenként $\frac{1}{2}$ területegység, tehát a megmaradó **kisebb négyzet** területe $4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ területegység.

A **kisebb négyzet** oldalának mérőszáma olyan szám, amelynek négyzete 2. Ilyen számot azonban nem ismerünk. Nem tudjuk, van-e ilyen szám, csak annyit tudunk róla, hogy a négyzete 2. Keressünk (a számológépen) szorzás segítségével megfelelő tizedes törtet!

$$1^2 < 2 < 2^2$$
$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$$
$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$$
$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$$
$$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$$

Azt tapasztaljuk, hogy egy olyan számnál, amelynek a négyzete 2, tudunk kisebb és nagyobb számot találni. Van-e olyan tört, amely éppen egyenlő vele?



Kövessétek nyomon, és próbáljátok meg megérteni a következő gondolatmenet lépéseit!

Ha a négyzet oldala racionális szám, akkor azt felírhatjuk két egész szám hányadosaként. Legyen ennek a tovább nem egyszerűsíthető alakja $\frac{a}{b}$. Ekkor a négyzet területe, azaz a $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

– Lehet-e a és b is páros? Nem, mert akkor még lehetne egyszerűsíteni a törtet.

– Lehet-e, hogy a is és b is páratlan? Nem, mert akkor a négyzetük (a^2 és b^2) is páratlan lenne, tehát a hányadosuk nem lehetne páros.

– Lehet-e, hogy a páratlan és b páros? Nem, mert akkor a^2 páratlan és b^2 páros, de akkor $\frac{a^2}{b^2}$ nem lehetne egész szám.

– Lehet-e, hogy a páros és b páratlan? A páros számok négyzete, vagyis a^2 4-gyel is osztható (pl.: $2^2 = 4$; $4^2 = 16 = 4 \cdot 4$; $6^2 = 36 = 4 \cdot 9$; ...), a b^2 viszont páratlan. Vagyis ha a^2-et elosztjuk b^2-tel és egész számot kapunk, akkor az az egész szám osztható 4-gyel. Igen ám, de $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ami nem osztható 4-gyel.

2.

Tehát nincsen olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2. De a 2 területű négyzet oldala olyan szám, amelynek a négyzete éppen 2. **Vagyis a 2 területű négyzet oldalának hossza nem racionális szám.** Azt mondjuk, hogy **irracionális.**

Jelölés

A 2 területű négyzet oldalának hosszúságát így jelöljük: $\sqrt{2}$, és úgy olvassuk, hogy négyzetgyök 2.

Fontos tudnivaló

Egy **nemnegatív** a szám négyzetgyöke az a **nemnegatív** szám, amelynek négyzete éppen a.

Így jelöljük: $\sqrt{a}$, és így olvassuk: négyzetgyök a. $(\sqrt{a})^2 = a$. **(Figyelj!** $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$)

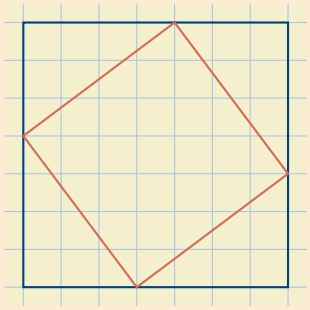
Például: $\sqrt{16} = 4$, mert $4^2 = 16$; $\sqrt{9} = 3$, mert $3^2 = 9$.

Az irracionális szó latin eredetű, jelentése *arányíthatatlan, aránytalan,* átvitt értelemben *képtelen, elképzelhetetlen, valótlan.*

$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373\ldots$. A $\sqrt{2}$ egy közelítését számológépen is megkaphatod.

2. példa

A négyzetrácsos füzetedbe rajzolj olyan négyzetet, amelynek oldala 7 egység! Az oldalakat (az ábra szerint) 3 : 4 arányban osztó pontokat összekötve ismét négyzetet kapunk. (Az oldalaik egyenlő hosszúak és egyenlő szögeket zárnak be egymással.) Mekkora a négyzet területe? Mekkora az oldala?

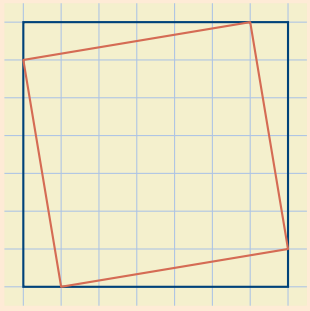


Ismét kiszámítjuk a nagyobb négyzet, illetve egy-egy háromszög területét. $49 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 25$. A kisebb négyzet területe 25 területegység, vagyis az oldalának a hossza 5 egység.

Látjuk tehát, hogy vannak olyan egész számot, amelyek négyzetgyöke is egész szám. Ezeket **négyzetszámoknak** nevezzük.

3. példa

A négyzetrácsos füzetedbe rajzolj olyan négyzetet, amelynek oldala 7 egység. Az oldalakat (az ábra szerint) 1 : 6 arányban osztó pontokat összekötve ismét négyzetet kapunk. (Az oldalaik egyenlő hosszúak és egyenlő szögeket zárnak be egymással.) Mekkora a négyzet területe? Mekkora az oldala?



A terület: $49 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} = 37$. A kisebb négyzet területe 37 területegység, vagyis az oldalának a hossza $\sqrt{37}$ egység.

Feladatok

A1 Keresd meg, hogy az alábbiak közül melyek a négyzetszámok! Ezek mely számok négyzetei?

$a = 1$; $b = 10$; $c = 16$; $d = -1$; $e = 0$; $f = 35$;

$g = 81$; $h = 124$; $i = 144$; $j = 121$; $k = 196$; $l = 169$.

K2 Keresd meg, hogy az alábbi számok mely számok négyzetei! Ha másképp nem megy, próbálkozz szorzással!

$a = 1{,}21$; $b = 4{,}41$; $c = 2{,}25$; $d = 12{,}25$; $e = 8{,}41$; $f = 2{,}56$.

K3 Határozd meg, hogy a $\sqrt{3}$ melyik két egész szám, melyik két tized, melyik két század közé esik!

K4 Ha egy 5 egység oldalú négyzet oldalait sorban 1 : 4 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

K5 Ha egy 5 egység oldalú négyzet oldalait sorban 2 : 3 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

K6 *a)* Ha egy 3 egység oldalú négyzet oldalait sorban 1 : 2 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

b) Ha egy 6 egység oldalú négyzet oldalait sorban 2 : 4 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

E7 Tudsz-e olyan négyzetet rajzolni az egységnégyzetekből álló rácson, amelynek a csúcsai rácspontokra esnek, és a területe $a = 13$; $b = 8$; $c = 10$; $d = 3$ területegység? Dolgozzatok csoportban! Beszéljétek meg az ötleteket!

A π (pi) és más nem racionális számok

(Emelt szintű, választható tananyag)

Tanultunk már olyan számról, amelyet nem közönségestört-alakban adtunk meg.

Emlékszel?

Az r sugarú kör kerületét így számítjuk ki: $K = 2r\pi$. A kör kerületének és átmérőjének aránya minden kör esetén ugyanannyi. Ezt az arányszámot nevezzük π-nek. $\pi = 3{,}14159265\ldots$

A π-vel a kör kerületének meghatározásakor ismerkedtünk meg. Ezt a számot pontosan ismerjük, mert bármelyik számjegyét ki lehet számítani. Ennek ellenére nem tudjuk leírni. **A π irracionális szám.**

1. példa

Nézd meg, mit ír ki a számológéped π-re! Aztán nézd meg, mit ír ki $\frac{22}{7}$-re; $\frac{355}{113}$-ra! Hasonlítsd össze, hogy hányadik tizedesjegyen térnek el először a π-re kapott értéktől!

π-re például 3,141 592 654 adódik.

$\frac{22}{7}$-re például 3,142857143, de tudjuk, hogy ez a szám végtelen szakaszos: $3{,}\dot{1}42\,85\dot{7}$.

$\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,920\,353\,9\ldots$. Ez a tizedes tört is végtelen szakaszos, bár a szakasza túl hosszú ahhoz, hogy kiszámítsuk.

A π azonban végtelen, nem szakaszos tizedes tört.

$\pi = 3{,}14159265\ldots$ $\quad \frac{22}{7} = 3{,}142857142\ldots$ $\quad \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$

Az első eltérés az ezredek a tízmilliomod helyi értéken van.

Ezeket a közelítéseket is használhatod. Ugyanúgy közelítő értékei π-nek, mint a 3,14.

A 7 sugarú kör kerülete a három értékkel számolva:

$2 \cdot 7 \cdot \pi \approx 2 \cdot 7 \cdot \frac{22}{7} = 44$; $\quad 7 \cdot 2 \cdot 3{,}14 = 43{,}96$; $\quad 7 \cdot 2 \cdot \pi = 43{,}982297150257\ldots$.

2.

A Föld sugara körülbelül 6500 km. Ha a Földet egy 6500 km sugarú gömbnek tekintjük, akkor az Egyenlítő hossza $2 \cdot 6500 \cdot \pi$ km $= 13\,000\pi$ km.

A három különböző közelítéssel a következő (kilométerre kerekített) értékeket kapjuk:

$13\,000 \cdot \frac{22}{7} \approx 40\,857$ km; $\quad 13\,000 \cdot 3{,}14 = 40\,820$ km; $\quad 13\,000 \cdot \frac{355}{113} \approx 40\,841$.

Megtudtuk, hogy a $\sqrt{2}$ és a π nem racionális szám. Van-e más irracionális szám?

Azt tanultuk, hogy a racionális számok véges vagy végtelen szakaszos tizedestört-alakba írhatók. Ezért ha olyan tizedes törtet találunk, amely ugyan végtelen, de nem szakaszos, akkor az irracionális szám.

2. példa

Vizsgáljuk meg, hogy a $0{,}1\underset{1}{0}1\underset{2}{00}1\underset{3}{000}1\underset{4}{0000}1\underset{5}{00000}1\ldots$ szám racionális-e vagy sem!

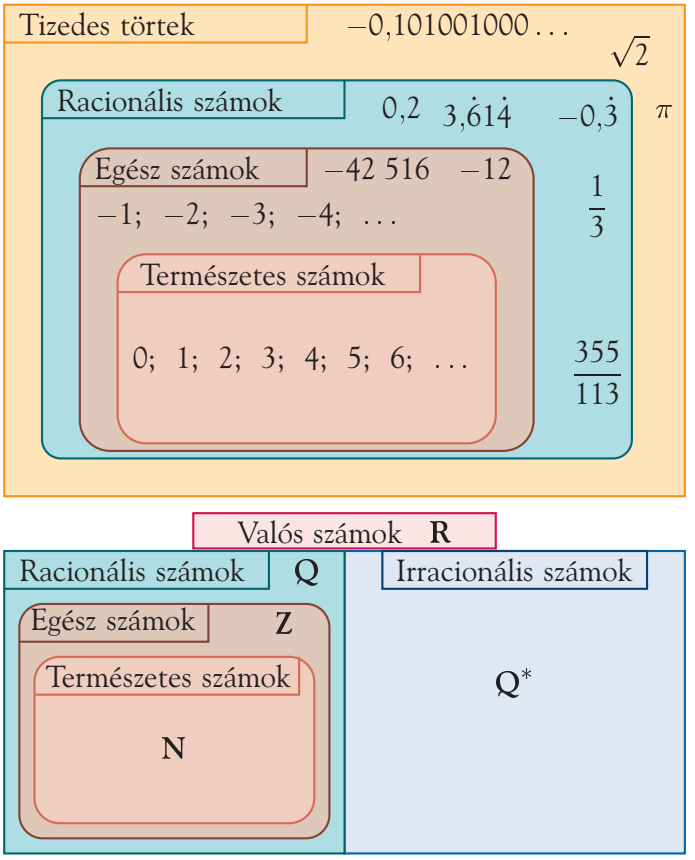
A 10-nek a hatványait (10, 100, 1000, ...) írtuk le egymás után a tizedesvessző mögé. Ez a szám nem lehet véges, mert minden 10 hatvány után következik 10 hatvány. Lehet-e szakaszos? De akkor mi lehet a szakasz? Mekkora lehet a szakasz hossza?

Ha valaki azt mondja, hogy például 23 a szakasz hossza, akkor a 10^{23} után minden 10 hatványban szerepel 23 darab egymást követő 0. Akkor a szakasz csupa 0-ból állna, de ez nem lehetséges, mert így valahonnan kezdve az összes tizedesjegy 0 lenne, pedig nem az. **Tehát ez a szám irracionális.**

Ilyen módszerrel nagyon sok nem szakaszos tizedes törtet lehet készíteni, de az így előállítható számoknál sokkal több az irracionális szám.

A racionális számok tizedestört-alakja lehet véges, lehet végtelen szakaszos.

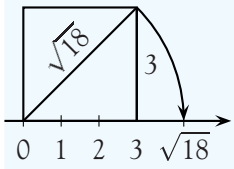
A nem szakaszos végtelen tizedes törtek irracionális számok. Ezek nem írhatóak fel két egész szám hányadosaként. A racionális és irracionális számok halmazának egyesítése a valós számok halmaza, jele **R**. Az irracionális számok halmazát szokás $\mathbf{Q}^*$-gal jelölni.



Érdekesség

Az irracionális számok is rajta vannak a számegyenesen, de a pontos helyüket nem mindig tudjuk meghatározni. Mégis vannak olyan irracionális számok, amelyek pontos helyét meg tudjuk találni a számegyenesen.

Például a 3 egység oldalú négyzet területe egyrészt 9, másrészt az átló által meghatározott két egybevágó derékszögű háromszög területének kétszerese. Ha az átló hosszát e jelöli, akkor ez $\frac{e^2}{2} = 9$, amiből $e = \sqrt{18}$. Mivel a 3 egység oldalú négyzet átlóját meg tudjuk szerkeszteni, a számegyenesre fel tudjuk mérni a 0-tól kiindulva, így a $\sqrt{18}$ helye pontosan meghatározható a számegyenesen.



Feladatok

A1 *a)* Racionális szám-e a $\sqrt{9}$? *b)* Racionális szám-e a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$?

K3 Válogasd szét az alábbi számokat aszerint, hogy racionális számok-e vagy sem!

$a = 1{,}6$; $b = 1{,}\dot{6}$; $c = 1{,}12345678910111213141516171 8\ldots$.

E4 Mondj olyan végtelen nem szakaszos tizedes törtet, amelyben

a) a tizedek helyén 0 áll! *b)* a tizedek és a századok helyén is 0 áll!

c) az első 10 tizedesjegy 0! *d)* minden második tizedesjegy 0!

E5 Mit gondolsz, racionális számok-e ezek? $a = \pi - \pi$; $b = 3{,}141\,592\,653\,589\,8$.

E6 Folytasd úgy a következő számokat, hogy racionális szám végtelen tizedestört-alakját kapd!

a) 1,0; *b)* 0,1; *c)* 3,14; *d)* 2,5.

E7 Folytasd úgy a következő számokat, hogy a kapott végtelen tizedes tört ne legyen racionális szám!

a) 1,0; *b)* 0,1; *c)* 3,14; *d)* 2,5.

Kis számok

Emlékszel még, hogyan jelöltünk nagy számokat? Például a tízmilliót így írtuk le:
$10\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$

Emlékszel még, minek neveztük ezt az alakot?

A hatvány alakban azt a számot, amelyet hatványoztunk (többszöröztünk), alapnak neveztük. Azt a számot, ahányadik hatványra emeltük az alapot (ahányszoroztuk), kitevőnek neveztük. Például: 2^5 kifejezésben 2 az alap, 5 a kitevő.

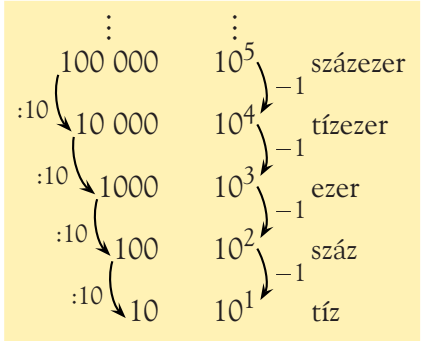
10^7 azt jelenti, hogy a 10-et önmagával 7-szer szorozzuk össze:

Figyeld meg, hogyan változnak a számok a bal oldalon!
Figyeld meg, hogyan változik a jobb oldalon a 10 kitevője!

Hogyan folytathatnánk ennek alapján a bal, illetve a jobb oldalon szereplő számokat?

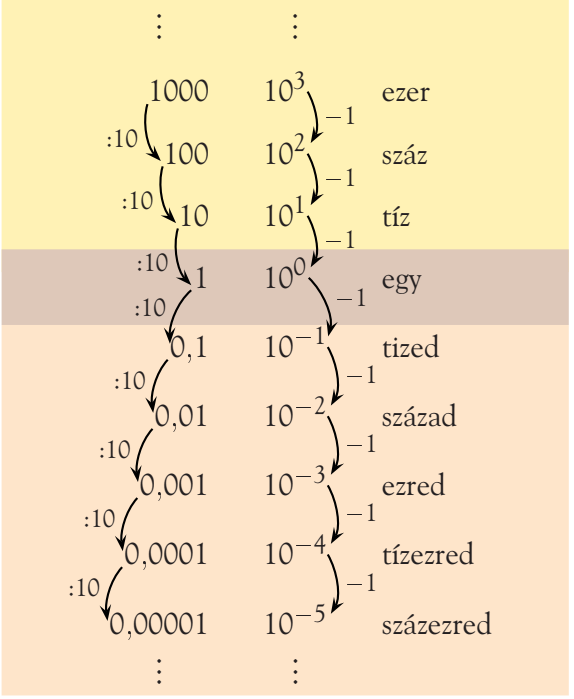
10^3 ← kitevő, ← alap

hatványalak



A bal oldalon az egymást követő számokat úgy kapjuk, hogy 10-zel osztunk.

A jobb oldalon a 10 kitevőit sorban 1-gyel csökkentjük.



Jelölés

A 10-zel való osztás ugyanaz, mint a 0,1-del való szorzás. A 0,1-et így is jelölhetjük: 10^{-1}. Így olvassuk: 10 a (−1)-ediken.

$1 : 10 = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10^{-1}$.

A 100-zal osztás ugyanaz, mint a 0,01-dal való szorzás. A 0,01 jelölése: 10^{-2}, így olvassuk: 10 a (−2)-ediken.

$1 : 100 = \frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}$.

A 10^3-nal való osztás a 10^{-3}-nal (10 a (−3)-adikonnal) való szorzást jelenti. Stb.

$1 : 1000 = \frac{1}{1000} = 0{,}001 = 10^{-3}$.

Észrevetted? $10^0 = 1$.

$\ldots\ 1000 \xrightarrow{:10} 100 \xrightarrow{:10} 10 \xrightarrow{:10} 1 \xrightarrow{:10} 0{,}1 \xrightarrow{:10} 0{,}01 \xrightarrow{:10} \ldots$

$\ldots\ 10^3 \xrightarrow{:10} 10^2 \xrightarrow{:10} 10^1 \xrightarrow{:10} 10^0 \xrightarrow{:10} 10^{-1} \xrightarrow{:10} 10^{-2} \xrightarrow{:10} \ldots$

$\ldots\ 3 \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{-1} -1 \xrightarrow{-1} -2 \xrightarrow{-1} \ldots$

1. példa

A mikroszkopikus tömegek még milligrammban megadva is nagyon kicsiny – szinte kimondhatatlanul kicsi – számok. 1 kg = 1000 g = 1 000 000 mg. 1 mg = 0,000 001 kg.

Egy milligramm a gramm ezredrésze, a kilogramm milliomodrésze.

Egy elektron tömege körülbelül:

0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg =
= 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 g =
= 0,000 000 000 000 000 000 000 000 911 mg

Egy ilyen – az elektron tömegét mg-ban megadó – számot szinte képtelenség felolvasni. Ha mégis fel akarnánk olvasni, akkor mivel az utolsó számjegy (a második 1-es) az ezer kvadrilliomod (vagy kvadrilliárdomod) helyi értéken áll, így az 911 kvadrilliárdomod lehetne.

Ezt a számot leírni is, felolvasni is igen nehéz. (Próbáld meg lediktálni a padtársadnak!)

Tört alakban így is írhatjuk: $\frac{911}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$.

A 911-et tehát elosztottuk 10^{27}-nel, vagy másképp 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001-dal megszoroztuk. Ezt röviden 10^{-27}-nel jelöljük. Ezért ez a szám a $911 \cdot 10^{-27}$.

Feladatok

A1 Írd fel a megadott számokat 10 hatványaiként!

100;	10 000;	0,1;	10;	1;
0,01;	1000;	0,0001;	10 000;	0,001.

A2 Írd fel a következő 10 hatványokat a hatvány alak használata nélkül!

10^1;	10^4;	10^3;	10^0;	10^2;
10^{-1};	10^{-4};	10^{-3};	10^{-6};	10^{-2}.

K3 10-nek melyik hatványával szorzunk, amikor osztunk

10-zel;	100-zal;	1-gyel;	1000-rel;	10 000-rel?

K4 10 melyik hatványával osztunk, amikor szorzunk

10^{-2}-nel;	10^{-1}-nel;	10^0-nal;	10^2-nel;	10^{-3}-nal?

K5 Végezd el a szorzásokat! Mit tapasztalsz?

$10^2 \cdot 10^{-2}$;	$10^1 \cdot 10^{-1}$;	$10^0 \cdot 10^0$;	$10^4 \cdot 10^{-4}$;	$10^3 \cdot 10^{-3}$.

K6 Hány tizedesjegye van a következő hatványoknak?

10^{-2};	10^{-4};	10^{-9};	10^{-1};	10^{-3}.

Egy szám többféle alakja – a normálalak

A nagyon nagy és a nagyon kicsi számok leírása hosszadalmas. Sokszor nem is tudjuk meghatározni egy-egy nagy vagy kicsi szám pontos értékét (csillagközi távolságok, atomi méretek). Akkor is fontos, hogy tudjuk, körülbelül hány jegyű, milyen *nagyságrendű* a szóban forgó adat. Ilyen adatok lejegyzéséhez, a velük való számoláshoz nyújt segítséget a számok normálalakja.

1. példa

Egy számnak többféle alakját írtuk le. Írd be a hiányzó kitevőket!

| | | | |

Minden sorban egy számnak és 10 egy hatványának a szorzata szerepel. Az első tényezőt soronként mindig 10-zel szorozzuk. Ahhoz, hogy ne változzék a szorzat, a 10 hatványaként írt második tényezőt mindig 10-zel osztjuk, vagyis a 10 kitevőjében szereplő szám mindig 1-gyel csökken.

A kitevők sorban: 4; 3; 2; 1; 0; −1; −2; −3; −4; −5. A szám, amelyet felírtunk, a 0,019 46. A $0{,}019\,46 \cdot 10^0$ szorzatban tehát $10^0 = 10^1 : 10 = 1$-et jelöl.

Emlékszel?

Korábban a számoknak azt a felírását, amelyben egy 1 és 10 közé eső számot a 10 egy hatványával szorzunk, **normálalaknak** neveztük.

Mivel eddig 10-nek csak a **pozitív** hatványait használtuk, így csak a 10-nél nagyobb (vagy 10-zel egyenlő) számokat tudtuk normálalakba írni. Most megismertük 10 nem pozitív hatványait is.

Fontos tudnivaló

A számoknak azt a felírását, amelyben egy 1 és 10 közé eső számot a 10 egy hatványával szorzunk, **normálalaknak** nevezzük.

Például az elektronok tömegét kilogrammban adjuk meg, mert a kilogramm a tömeg SI-mértékegysége. Eszerint az elektron tömege körülbelül $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramm.

2. példa

Keresd meg, hogy az alábbi számok közül melyek egyenlőek az 12,54 számmal!

$a = 125{,}4 \cdot 10^{-1}$; $b = 12{,}54 \cdot 10^0$; $c = 12{,}54 \cdot 10^1$; $d = 0{,}1254 \cdot 10^{-2}$;

$e = 0{,}1254 \cdot 10^3$; $f = 12{,}54 \cdot 10^{-1}$; $g = 0{,}1254 \cdot 10^2$; $h = 125{,}4 \cdot 10^0$.

Ha elvégezzük a szorzásokat, akkor ezeket a számokat kapjuk:

$a = 12{,}54$; $b = 12{,}54$; $c = 125{,}4$; $d = 0{,}001\,254$;

$e = 125{,}4$; $f = 1{,}254$; $g = 12{,}54$; $h = 125{,}4$.

Eszerint a; b és g egyenlő 12,54-dal.

3. példa

Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$a = 151{,}42 \cdot 10^{12}$; $b = 151{,}42 \cdot 10^{-18}$; $c = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $d = 15{,}142 \cdot 10^{-12}$;

$e = 15{,}142 \cdot 10^{13}$; $f = 15{,}142 \cdot 10^{-20}$; $g = 151{,}42 \cdot 10^{-23}$; $h = 1514{,}2 \cdot 10^{15}$;

$i = 1514{,}2 \cdot 10^{13}$; $j = 1{,}5142 \cdot 10^{27}$.

Ezeket a számokat ebben a felírásban nehéz összehasonlítani. Ahhoz pedig túl nagyok vagy túl kicsik, hogy beszorozzuk őket. Mindegyik az 1; 5; 1; 4; 2 számjegyekkel kezdődik. Írjuk át mindet normálalakra! Ne felejtsük el: ha a számot 10-zel osztjuk, a 10 kitevőjét 1-gyel növeljük; ha a számot 10-zel szorozzuk, a 10 kitevőjét 1-gyel csökkentjük. Így nem változik a szám és a 10 hatványának a szorzata.

$a = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $b = 1{,}5142 \cdot 10^{-16}$; $c = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $d = 1{,}5142 \cdot 10^{-11}$;

$e = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $f = 1{,}5142 \cdot 10^{-19}$; $g = 1{,}5142 \cdot 10^{-21}$; $h = 1{,}5142 \cdot 10^{18}$;

$i = 1{,}5142 \cdot 10^{16}$; $j = 1{,}5142 \cdot 10^{27}$.

A nagyság szerinti sorrend megállapításában segít, hogy 10 mely hatványával szoroztuk meg az 1,5142-edet. Eszerint: $g < f < b < d < a = c = e < i < h < j$.

4. példa

Fejezd ki a műveletek eredményét 10 hatványaiként!

$10^5 : 10^2$; $10^2 : 10^5$; $10^5 \cdot 10^{-2}$; $10^2 \cdot 10^{-5}$.

$10^5 : 10^2 = 10^3$; $10^2 : 10^5 = 1 : 10^3 = 10^{-3}$, mert 2 darab 10-es szorzatát elosztjuk 5 darab 10-es szorzatával, vagyis 3 darab 10-es szorzatával osztunk.

$10^5 \cdot 10^{-2}$ jelentése: 5 darab 10-es szorzatát elosztjuk 2 darab 10-es szorzatával: $10^5 \cdot 10^{-2} = 10^3$.

$10^2 \cdot 10^{-5}$ jelentése: 2 darab 10-es szorzatát elosztjuk 5 darab 10-es szorzatával. $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{-3}$.

Észrevetted?

$10^5 \cdot 10^{-2} = 10^{5-2} = 10^3$; $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$.

5. példa

Végezd el a következő műveleteket! Fejezd ki az eredményt normálalakban!

$6{,}3 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^5$; $(6{,}3 \cdot 10^3) : (4{,}2 \cdot 10^5)$.

A szorzásban szereplő tényezők sorrendje felcserélhető:

$6{,}3 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^5 = 6{,}3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 26{,}46 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 26{,}46 \cdot 10^8 = 2{,}646 \cdot 10^9$.

$$(6{,}3 \cdot 10^3) : (4{,}2 \cdot 10^5) = \frac{6{,}3 \cdot 10^3}{4{,}2 \cdot 10^5} = \frac{6{,}3}{4{,}2} \cdot \frac{10^3}{10^5} = 1{,}5 \cdot \frac{10^3}{10^5} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Fontos tudnivaló

A 0-nak nincs normálalakja. Nincs olyan 10 hatvány, amellyel a 0-t megszorozva 1 és 10 közé eső számot kapnánk.

Feladatok

A1 Végezd el a szorzásokat a következő normálalakban adott számokban!

a) $1{,}45 \cdot 10^2$; *b)* $2{,}782 \cdot 10^0$; *c)* $4{,}5187 \cdot 10^4$; *d)* $9{,}9 \cdot 10^1$;
e) $3{,}14 \cdot 10^{-1}$; *f)* $1{,}11 \cdot 10^3$; *g)* $6{,}16 \cdot 10^{-4}$; *h)* $1 \cdot 10^{-3}$;
i) $5{,}151 \cdot 10^{-2}$; *j)* $1{,}001 \cdot 10^3$; *k)* $1{,}001 \cdot 10^{-3}$; *l)* $6{,}99 \cdot 10^{-1}$.

A2 Írd normálalakba a következő számokat!

a) 3,14; *b)* 512; *c)* 44,16; *d)* 1;
e) 1000; *f)* 500; *g)* 243,2; *h)* 48,1;
i) 0,103; *j)* 0,001; *k)* 0,052; *l)* 0,0004.

A3 Az alábbiak közül mely számok normálalakja a $4{,}173 \cdot 10^{-2}$?

a) 4173; *b)* $4173 \cdot 10^2$; *c)* $4173 \cdot 10^{-3}$; *d)* $4173 \cdot 10^{-4}$;
e) 0,4173; *f)* $0{,}4173 \cdot 10^1$; *g)* $0{,}4173 \cdot 10^{-1}$; *h)* $0{,}4173 \cdot 10^{-2}$.

K4 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

$a = 25{,}4 \cdot 10^1$; $b = 1{,}98 \cdot 10^2$; $c = 1200 \cdot 10^{-1}$; $d = 28\,793 \cdot 10^{-2}$;
$e = 246\,942 \cdot 10^{-3}$; $f = 567 \cdot 10^2$; $g = 0{,}1 \cdot 10^3$; $h = 2469{,}42 \cdot 10^{-1}$.

Műveletek normálalakban adott számokkal

(Emelt szintű, választható tananyag)

1. példa

Végezd el az összeadásokat!

a) $5{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}8 \cdot 10^3$; *b)* $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1}$; *c)* $1{,}8 \cdot 10^{-12} + 2{,}7 \cdot 10^{-10}$.

a) $5{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}8 \cdot 10^3 = 5200 + 3800 = 9000 = 9 \cdot 10^3$.

Az is igaz, hogy $5{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}8 \cdot 10^3 = (5{,}2 + 3{,}8) \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^3$.

b) $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 28\,000 - 0{,}68 = 27\,999{,}32 = 2{,}799\,932 \cdot 10^4$.

Másrészt $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 28\,000 \cdot 10^{-1} - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 279\,993{,}2 = 2{,}799\,932 \cdot 10^4$.

Vagy $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 2{,}8 \cdot 10^4 - 0{,}0068 \cdot 10^4 = 2{,}799\,932 \cdot 10^4$.

c) $1{,}8 \cdot 10^{-12} + 2{,}7 \cdot 10^{-10} = 0{,}018 \cdot 10^{-10} + 2{,}7 \cdot 10^{-10} = 2{,}718 \cdot 10^{-10}$.

Ahhoz, hogy két normálalakban felírt számot összeadjunk vagy kivonjunk egymásból, szükséges, hogy átírjuk őket olyan alakba, amelyben mindkettőt ugyanazzal a 10-hatvánnyal szorozzuk.

2. példa

Egy fényév körülbelül $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km. A Galaxis átmérője $1{,}6 \cdot 10^5$ fényév.

Hány kilométer a Galaxis átmérője?

Ha egy fényév $9{,}46 \cdot 10^{12}$, akkor $1{,}6 \cdot 10^5$ fényév $1{,}6 \cdot 10^5 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12}$.

A szorzásban a tényezők felcserélhetők, ezért ez a szorzat így is felírható: $1{,}6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^5 \cdot 10^{12}$.

A 10^5 azt jelenti, hogy 5 darab 10-es szorzata, a 10^{12} pedig azt, hogy 12 darab 10-es szorzata. E két szám szorzata 17 darab 10-es tényezőt tartalmaz. $1{,}6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^5 \cdot 10^{12} = 1{,}6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{17}$.

Mivel $1{,}6 \cdot 9{,}46 = 15{,}136$, a Galaxis átmérője $15{,}136 \cdot 10^{17}$ km, normálalakban $1{,}5136 \cdot 10^{18}$ km.

3. példa

A cseppkőbarlangokban a cseppkövek növekedése rendszerint azon múlik, hogy mennyire csapadékos a felszín. A különböző elhelyezkedésű barlangokban a cseppkövek növekedési sebességének aránya igen nagy (akár ezerszeres) is lehet.

Ha egy cseppkőbarlangban egy érintetlen cseppkő évente $5 \cdot 10^{-5}$ métert növekedett $1{,}2 \cdot 10^5$ éven keresztül, akkor most mekkora ez a cseppkő?

Egy év alatt $5 \cdot 10^{-5}$ méter növekedés $1{,}2 \cdot 10^5$ éven keresztül $5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5$ méteres növekedést eredményez.

$5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 = 5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}$.

A 10^{-5} a 10^5-nel való osztást jelenti. $10^5 \cdot 10^{-5} = \frac{10^5}{10^5} = 1$. Így a cseppkő mérete 6 m.

4. példa

Becslések szerint $1{,}5 \cdot 10^8$ évig éltek dinoszauruszok a Földön. A ma élő ember (Homo sapiens sapiens) becslések szerint $3{,}5 \cdot 10^4$ éve jelent meg. Hányszor annyi ideig léteztek élő dinoszauruszok, mint amennyi ideje az értelmes ember létezik?

A két kor hányadosa fejezi ki a keresett arányt: $\frac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}5 \cdot 10^4}$. A kifejezést átírhatjuk $\frac{15 \cdot 10^7}{35 \cdot 10^3} = \frac{15}{35} \cdot \frac{10^7}{10^3}$ alakra. $\frac{15}{35} \approx 0{,}43$, $\frac{10^7}{10^3} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^4$.

$0{,}43 \cdot 10^4$ normálalakban $4{,}3 \cdot 10^3$. Ez az arány kb. 4300, tehát a dinoszauroszok 4300-szor annyi ideig éltek, mint amennyi ideje az értelmes ember létezik.

Fontos tudnivaló

Ha azonos alapú hatványokat szorzunk össze, a kitevők összeadódnak:

$$10^5 \cdot 10^{12} = \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)}_{5 \text{ db}} \cdot \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)}_{12 \text{ db}} =$$

$$= 10^{5+12} = 10^{17}.$$

$$10^7 \cdot 10^{-2} = \frac{10^7}{10^2} = \frac{\overbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}^{7 \text{ db}}}{\underbrace{10 \cdot 10}_{2 \text{ db}}} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{5 \text{ db}} = 10^5.$$

Ha azonos alapú hatványokat osztunk, a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét:

$$\frac{10^7}{10^3} = \frac{\overbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}^{7 \text{ db}}}{\underbrace{\cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}_{3 \text{ db}}} = 10^{7-3} = 10^4.$$

5. példa

A Föld térfogata egy körülbelül 10^4 km élhosszúságú kocka térfogatával egyenlő. Mekkora ez a térfogat?

Az a oldalú kocka térfogata $a \cdot a \cdot a$. Ezért a keresett térfogat $(10^4)^3$ km^3.

$(10^4)^3 = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^4 = 10^{4+4+4} = 10^{4 \cdot 3} = 10^{12}$ (km^3).

6. példa

Mekkora a $4 \cdot 10^5$ m élhosszúságú kocka térfogata?

A $4 \cdot 10^5$ m élhosszúságú kocka térfogata:

$(4 \cdot 10^5)^3 = (4 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^5) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 4^3 \cdot (10^5)^3$ (m^3).

Mivel 10^5 5 darab 10-es szorzata, ennek a köbe $10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 10^{5+5+5} = 10^{5 \cdot 3} = 10^{15}$.

Vagyis a kocka térfogata $4^3 \cdot 10^{15}$ m^3 $= 64 \cdot 10^{15}$ m^3 $= 6{,}4 \cdot 10^{16}$ m^3.

Fontos tudnivaló

Egy hatvány alakban írt szám valamely hatványa kiszámításakor a kitevők összeszorzódnak:

$$(10^4)^3 = (10^4)\cdot(10^4)\cdot(10^4) = \underbrace{(10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)}_{4\text{ db}}\cdot\underbrace{(10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)}_{4\text{ db}}\cdot\underbrace{(10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)}_{4\text{ db}} = 10^{12}.$$

Egy szorzat hatványa a hatványok szorzata: $(4\cdot 5)^3 = 4^3\cdot 5^3$.

2. Feladatok

K1 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = (1{,}5\cdot 10^3)\cdot(2{,}2\cdot 10^2)$; $b = (2{,}1\cdot 10^1)\cdot(4{,}5\cdot 10^5)$; $c = (5{,}2\cdot 10^2)\cdot(2{,}5\cdot 10^4)$;

$d = (6{,}5\cdot 10^7)\cdot(4{,}2\cdot 10^4)$; $e = (2{,}5\cdot 10^7)\cdot(2{,}06\cdot 10^3)$; $f = (7{,}5\cdot 10^3)\cdot(2{,}07\cdot 10^4)$.

K2 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = (3\cdot 10)^4$; $b = (1{,}5\cdot 10)^2$; $c = (0{,}5\cdot 10)^3$;

$d = (4\cdot 10)^5$; $e = (1{,}7\cdot 10)^1$; $f = (6{,}2\cdot 10)^2$.

K3 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = (2\cdot 10^3)^6$; $b = (1{,}5\cdot 10^3)^4$; $c = (1{,}1\cdot 10^7)^3$;

$d = (2{,}5\cdot 10^6)^2$; $e = (0{,}5\cdot 10^2)^3$; $f = (5\cdot 10^3)^3$.

K4 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = \dfrac{5{,}4\cdot 10^8}{0{,}6\cdot 10^3}$; $b = \dfrac{1{,}5\cdot 10^3}{1{,}2\cdot 10^2}$; $c = \dfrac{7{,}5\cdot 10^6}{1{,}5\cdot 10^4}$;

$d = \dfrac{3{,}2\cdot 10^{12}}{1{,}6\cdot 10^{10}}$; $e = \dfrac{1{,}25\cdot 10^{18}}{0{,}5\cdot 10^{13}}$; $f = \dfrac{7{,}2\cdot 10^4}{8\cdot 10^3}$.

K5 Végezd el a szorzásokat!

$5{,}4\cdot 10^2\cdot 0{,}05\cdot 10^2$; $1{,}2\cdot 10^5\cdot 0{,}005\cdot 10^1$; $3{,}14\cdot 10^1\cdot 3{,}5\cdot 10^{-1}$;

$265\cdot 10^{-2}\cdot 15\cdot 10^5$; $4{,}4\cdot 10^3\cdot 5{,}5\cdot 10^{-4}$; $0{,}6\cdot 10^2\cdot 50{,}5\cdot 10^{-3}$;

$2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}04\cdot 10^{-2}$; $2{,}56\cdot 10^{-4}\cdot 31{,}25\cdot 10^{-1}$; $0{,}0008\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}25\cdot 10^7$.

K6 Hány elektronnyi tömeggel egyenlő a mákszem tömege, ha ez utóbbi körülbelül 10^{-6} kg?

E7 *a)* Egy mol anyagban kb. $6\cdot 10^{23}$ db atom van. Egy mol szén tömege 12 g. Hány g egy szénatom?

b) Egy mol oxigén tömege 32 g. Hány gramm egy oxigénatom? (Az oxigén kétatomos gáz!)

c) Egy mol hidrogén tömege 2 g. Hány gramm egy hidrogénatom? (A hidrogén kétatomos gáz!)

d) Egy vízmolekula két hidrogén- és egy oxigénatomból áll (H_2O). Hány gramm az oxigénmolekula?

e) Körülbelül hány molekula van 1 liter (1 kg) vízben?

E8 A Föld felszínének körülbelül egyharmadrésze szárazföld. Ez körülbelül 148 300 000 km^2. A Föld lakossága körülbelül 6 500 000 000 fő.



a) Írd fel a számokat normálalakban!

b) Hány ember jut egy négyzetkilométerre?

Azt az arányszámot, amely kifejezi, hogy átlagosan hány ember jut egy négyzetkilométernyi területre, *népsűrűségnek* nevezzük.

c) Nézz utána, hány négyzetkilométer Magyarország területe és hány fő a lakossága! Írd fel a számokat normálalakban, majd számítsd ki Magyarország népsűrűségét!

d) Nézz utána, hogy melyik Európa legsűrűbben, illetve legritkábban lakott országa!

K9 A tojás egyetlen sejt. A strucctojás a legnagyobb sejt. Az egyik kolibrifajé a legkisebb tojás, tömege kb. 0,4 gramm. Ennek akár $6 \cdot 10^3$-szorosa is lehet a strucctojás tömege.

Ezek szerint hány kilogramm lehet egy ilyen strucctojás?

E10 Egy CD tárkapacitása 640 MB (megabyte, ejtsd: megabájt), ez körülbelül $6{,}4 \cdot 10^8$ byte. Hány CD-re lehet lementeni a 40 GB tárkapacitású merevlemez tartalmát, ha 40%-án van adat? (GB: gigabyte, ejtsd: gigabájt. 1 GB körülbelül 10^9 byte.)

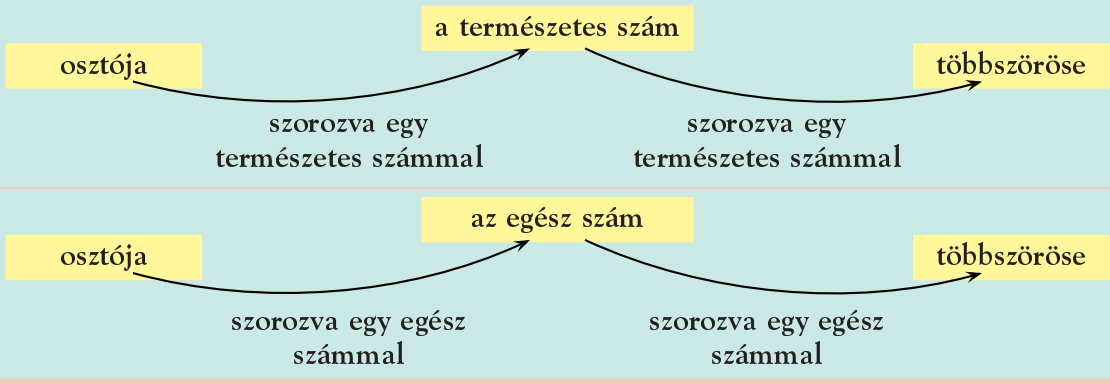
Számelmélet

A matematikának azt az ágát, amely az oszthatósággal, oszthatósági szabályokkal foglalkozik, számelméletnek nevezik. Idézzük fel a korábbi években tanultakat!

A **természetes számok** körében beszéltünk az oszthatóságról. (Az egész számok körében is lehet oszthatóságról beszélni.)

Ha egy természetes számot megszorzunk egy természetes számmal, akkor a szám egy többszörösét kapjuk. Minden természetes szám osztója a saját többszöröseinek.

Fontos tudnivaló



1. példa

Melyek oszthatók az alábbi számok közül 1-gyel, 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 9-cel, 10-zel?
1; 5; 6; 10; 15; 24; 28; 30; 36; 48; 72; 81; 84; 96. Írd táblázatba!

Osztható	1-gyel	2-vel	3-mal	4-gyel	5-tel	6-tal	9-cel	10-zel
1	igen	–	–	–	–	–	–	–
5	igen	–	–	–	igen	–	–	–
6	igen	igen	igen	–	–	igen	–	–
10	igen	igen	–	–	igen	–	–	igen
15	igen	–	igen	–	igen	–	–	–
24	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–
28	igen	igen	–	igen	–	–	–	–
30	igen	igen	igen	–	igen	igen	–	igen
36	igen	igen	igen	igen	–	igen	igen	–
48	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–
72	igen	igen	igen	igen	–	igen	igen	–
81	igen	–	igen	–	–	–	igen	–
84	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–
96	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–

Például: az 5 osztója a 30-nak, mert $5 \cdot 6 = 30$. Így jelöljük: $5 \mid 30$.

A 9 osztója a 72-nek, vagyis $9 \mid 72$, mert $9 \cdot 8 = 72$.

1-gyel és önmagával minden természetes szám osztható.

Azok az 1-nél nagyobb egész számok, amelyeknek e kettőn kívül nincs is más osztója, **prímszámok**. Például: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 ...

A többi 1-nél nagyobb számot **összetett** számnak nevezzük. Például: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14 ...

Minden 1-nél nagyobb természetes számot fel tudunk írni prímszámok szorzataként. Szoktunk egy számot önmagában egytényezős szorzatnak tekinteni. Itt is így kell érteni: a prímszámot egytényezős szorzatnak tekintjük. **A számok ilyen felírását a szám prímtényezős alakjának nevezzük. Minden 1-nél nagyobb természetes szám lehetséges prímtényezős alakjai csak a tényezők sorrendjében térhetnek el.** Például a 24-et felírhatjuk $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ vagy $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$ vagy $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ vagy $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ alakban, de más prímtényezők szorzataként nem.

2. példa

Írjuk fel a 96 prímtényezős felbontását!

Bontsuk osztópárok szorzatára a 96-ot, majd a kapott tényezőket is, amíg csak lehet!
$96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Ezt $2^5 \cdot 3$ alakban is írhatjuk.

Két szám közös osztói azok a számok, amelyek mind a két számnak osztói. Például 75-nek és 60-nak közös osztói az 1, a 3, az 5 és a 15.

Ez a prímtényezős felírásukból is leolvasható: $75 = 3 \cdot 5^2$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Közös prímtényezők a 3 és az 5. Ezekből és az 1-ből – amely minden számnak osztója – a következő közös osztók állíthatók elő: 1; 3; 5; $3 \cdot 5 = 15$.

Két szám legnagyobb közös osztója a közös osztók közül a legnagyobb. Például 75-nek és 60-nak a legnagyobb közös osztója a 15. Jelölése: $(75; 60) = 15$.

Két szám közös többszörösei azok a számok, amelyek mindkét számnak többszörösei. Például a 12 és a 10 közös többszörösei a 0, 60, 120, 180, 240 ...

Két szám legkisebb közös többszöröse a legkisebb pozitív közös többszörösük. Például a 12 és a 10 legkisebb közös többszöröse a 60. Jelölése: $[12; 10] = 60$.

3. példa

Határozzuk meg a következő számokat! $(3; 10)$; $[3; 10]$; $(2; 10)$; $[2; 10]$; $(4; 6)$; $[4; 6]$.

Írjuk fel először az adott számok prímtényezős felbontását! 3; $10 = 2 \cdot 5$; $4 = 2 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$.

$(3; 10) = 1$; $[3; 10] = 30$; $(2; 10) = 2$; $[2; 10] = 10$; $(4; 6) = 2$; $[4; 6] = 12$.

Fontos tudnivaló

Soroljuk fel, milyen oszthatósági szabályokkal ismerkedtünk meg az előző években! Az oszthatósági szabályok **a számok 10-es számrendszerben felírt alakjára**, illetve **a prímtényezős felbontásukra vonatkoznak**.

Egy szám osztható	A 10-es számrendszerben felírt alakról tudjuk:	A prímtényezős felbontásról tudjuk:
2-vel, ha	a felírásában az egyesek helyén páros számjegy áll;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 2.
3-mal, ha	a felírásában a számjegyei összege osztható 3-mal;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 3.
4-gyel, ha	a felírásában az utolsó két helyi értéken álló kétjegyű szám osztható 4-gyel;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel a 2.
5-tel, ha	a felírása 5-re vagy 0-ra végződik;	a prímtényezős felbontásában szerepel az 5.
6-tal, ha	páros szám, és a felírásában a számjegyei összege osztható 3-mal;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és a 3.
8-cal, ha	a felírásában az utolsó három helyi értéken álló háromjegyű szám osztható 8-cal;	a prímtényezős felbontásában legalább háromszor szerepel a 2.
9-cel, ha	a felírásában a számjegyei összege osztható 9-cel;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel a 3.
10-zel, ha	a felírása 0-ra végződik;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és az 5.
25-tel, ha	a felírásában az utolsó két helyi értéken álló kétjegyű szám osztható 25-tel;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel az 5.
100-zal, ha	a felírása 00-ra végződik;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel a 2 is és az 5 is.

Egy szám akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel is és 5-tel is.
Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel is és 3-mal is.
Egy szám akkor és csak akkor osztható 20-szal, ha osztható 4-gyel is és 5-tel is.

Feladatok

A1 Határozd meg a következő számok prímtényezős alakját! Ha valamelyik szám felírásában több egyenlő prímtényező is szerepel, akkor ezek felírásához használj hatvány alakot!

$a = 4$; $b = 10$; $c = 12$; $d = 18$; $e = 20$; $f = 24$;

$g = 25$; $h = 30$; $i = 32$; $j = 40$; $k = 42$; $l = 45$;
$m = 50$; $n = 51$; $o = 54$; $p = 60$; $r = 63$; $s = 64$;
$t = 70$; $u = 72$; $v = 74$; $x = 75$; $y = 80$; $z = 81$.

K2 Add meg a következő számok legkisebb közös többszöröseit!

$a = 10$ és $b = 16$; $a = 12$ és $b = 18$; $a = 12$ és $b = 20$;
$a = 15$ és $b = 16$; $a = 21$ és $b = 18$; $a = 24$ és $b = 20$;
$a = 25$ és $b = 24$; $a = 25$ és $b = 30$; $a = 25$ és $b = 36$.

K3 Add meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!

$a = 10$ és $b = 16$; $a = 12$ és $b = 18$; $a = 12$ és $b = 20$;
$a = 150$ és $b = 160$; $a = 210$ és $b = 186$; $a = 244$ és $b = 20$;
$a = 1250$ és $b = 96$; $a = 1250$ és $b = 120$; $a = 1250$ és $b = 108$.

K4 Mely prímtényezőkkel kell megszorozni a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ számot ahhoz, hogy a kapott szám osztható legyen

a) 4-gyel; *b)* 12-vel; *c)* 9-cel; *d)* 100-zal; *e)* 8-cal; *f)* 18-cal?

K5 Mely prímtényezőkkel kell megszorozni a $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ számot ahhoz, hogy osztható legyen

a) 5-tel; *b)* 15-tel; *c)* 9-cel; *d)* 10-zel; *e)* 11-gyel; *f)* 18-cal?

K6 Keresd meg, hogy az alábbi számok közül melyeknek többszöröse a 84!

a) 14; *b)* 4; *c)* 15; *d)* 7; *e)* 12; *f)* 6;
g) 16; *h)* 24; *i)* 3; *j)* 8; *k)* 21; *l)* 42.

E7 *a)* Tudsz-e olyan természetes számot mondani, amely minden természetes számnak osztója?

b) Tudsz-e olyan természetes számot mondani, amely minden természetes számnak többszöröse?

Vitassátok meg a kapott eredményeket!

E8 *a)* Tudsz-e olyan egész számot mondani, amely minden egész számnak osztója?

b) Tudsz-e olyan egész számot mondani, amely minden egész számnak többszöröse?

Vitassátok meg a kapott eredményeket!

K9 Készíts halmazábrát! Az alaphalmaz a 0 és a 40 közé eső természetes számok halmaza (beleértve a 0-t és a 40-et is). Legyen $A = \{4 \text{ többszörösei}\}$; $B = \{5 \text{ többszörösei}\}$!

a) Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábrába!

b) Írd le az A és a B halmaz közös elemeit!

c) Fogalmazd meg, hogy milyen oszthatósági tulajdonság teljesül A és B közös elemeire!

K10 Készíts halmazábrát! Az alaphalmaz a 0 és a 40 közé eső természetes számok halmaza (beleértve a 0-t és a 40-et is). Legyen $A = \{4 \text{ többszörösei}\}$; $B = \{6 \text{ többszörösei}\}$!

a) Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábrába!

b) Írd le az A és a B halmaz közös elemeit!

c) Fogalmazd meg, hogy milyen oszthatósági tulajdonság teljesül A és B közös elemeire!

Az algebra a matematikának egy igen kiterjedt ága. Sok fontos gyakorlati dolog elméleti hátterével foglalkozik. Feladatai közé tartozik számhalmazok, műveletek, műveleti tulajdonságok vizsgálata.

A számokat betűkkel helyettesítve általánosan is megfogalmazhatunk összefüggéseket. Ezáltal eljutunk egyenletek, egyenlőtlenségek megoldási módszereihez.

Most felelevenítjük, átismételjük és gyakoroljuk a korábbi években tanultakat.

Műveletek

Összeadás, szorzás

A **racionális számok** körében tanultunk műveletekről, valamint azok tulajdonságairól. Mivel ezek a tualjdonságok minden olyan számkörben igazak, amelyekről tanultunk vagy tanulni fogunk, fontos ezeket felidézni, és az ismereteket összefoglalni.

1. példa

Végezzük el az alábbi műveleteket, hasonlítsuk össze a kapott eredményeket, és magyarázzuk meg a tapasztaltakat!

a) $1{,}7 + 3{,}5$; $3{,}5 + 1{,}7$; *b)* $\left(\frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right) + 0{,}7$; $\frac{3}{5} + \left(\frac{7}{10} + 0{,}7\right)$;

c) $4{,}2 - 1{,}7$; $4{,}2 - 3{,}5$; $1{,}7 - 4{,}2$; $3{,}5 - 4{,}2$; *d)* $2 - (0{,}6 - 0{,}7)$; $(2 - 0{,}6) - 0{,}7$.

a) $1{,}7 + 3{,}5 = 5{,}2$ és $3{,}5 + 1{,}7 = 5{,}2$. Az összeadásban a tagok felcserélésével az eredmény nem változik.

b) $\left(\frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right) + 0{,}7 = \left(\frac{6}{10} + \frac{7}{10}\right) + 0{,}7 = \frac{13}{10} + 0{,}7 = 1{,}3 + 0{,}7 = 2$;

$\frac{3}{5} + \left(\frac{7}{10} + 0{,}7\right) = \frac{3}{5} + (0{,}7 + 0{,}7) = \frac{3}{5} + 1{,}4 = \frac{6}{10} + 1{,}4 = 0{,}6 + 1{,}4 = 2$.

Az összeadásban szereplő tagokat tetszőlegesen zárójelezve az eredmény mindig ugyanannyi.

c) $5{,}2 - 1{,}7 = 3{,}5$; $5{,}2 - 3{,}5 = 1{,}7$; $1{,}7 - 5{,}2 = -3{,}5$; $3{,}5 - 5{,}2 = -1{,}7$.

A kivonás az összeadás műveletének megfordítása abban az értelemben, hogy ha ismerjük két szám összegét és az egyik számot, akkor kivonással ki tudjuk számítani a másik számot.

A kivonásban szereplő két szám felcserélésével az eredmény az ellentettjére változik.

d) $2 - (0{,}6 - 0{,}7) = 2 - (-0{,}1) = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$; $(2 - 0{,}6) - 0{,}7 = 1{,}4 - 0{,}7 = 0{,}7$.

A kivonás esetében fontos a zárójelezés.

Foglaljuk össze táblázatba rendezve a fenti tulajdonságokat! A számokat betűkkel jelöltük. A betűk helyére számokat képzelhetünk, ezekkel végezhetjük el a műveletet.

	Kommutativitás (felcserélhetőség)	Asszociativitás (társíthatóság, csoportosíthatóság)
Összeadás	$a + b = b + a$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
Kivonás	$a \neq b$ esetén $a - b \neq b - a$	$c \neq 0$ esetén $a - (b - c) \neq (a - b) - c$
	viszont $a - b = -(b - a)$	viszont $a - (b - c) = (a - b) + c$

Egy szám kivonása ugyanazt eredményezi, mint a szám ellentettjének hozzáadása.

Például: $3{,}5 - (-0{,}4) = 3{,}5 + 0{,}4$; $1{,}7 - 2{,}1 = 1{,}7 + (-2{,}1)$.

3.

2. példa

Végezzük el az alábbi műveleteket, hasonlítsuk össze a kapott eredményeket, és magyarázzuk meg a tapasztaltakat!

a) $1{,}5 \cdot 2{,}4$; $2{,}4 \cdot 1{,}5$;

b) $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot 0{,}6$; $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 0{,}6\right)$;

c) $\frac{18}{5} : \frac{12}{5}$; $\frac{18}{5} : \frac{3}{2}$; $\frac{12}{5} : \frac{18}{5}$; $\frac{3}{2} : \frac{18}{5}$;

d) $5 : \left(\frac{1}{3} : \frac{6}{5}\right)$; $\left(5 : \frac{1}{3}\right) : \frac{6}{5}$.

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ és $\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{5}$. A szorzásban a tényezők felcserélésével az eredmény nem változik.

b) $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot 0{,}6 = \frac{3}{20} \cdot 0{,}6 = 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}09$; $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 0{,}6\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{100}$.

A szorzásban szereplő tényezőket tetszőlegesen zárójelezve az eredmény mindig ugyanannyi.

c) $\frac{18}{5} : \frac{12}{5} = \frac{3}{2}$; $\frac{18}{5} : \frac{3}{2} = \frac{12}{5}$; $\frac{12}{5} : \frac{18}{5} = \frac{2}{3}$; $\frac{3}{2} : \frac{18}{5} = \frac{5}{12}$.

Az osztás a szorzás műveletének megfordítása abban az értelemben, hogy ha ismerjük két szám szorzatát és az egyik tényezőt, akkor osztással ki tudjuk számítani a másik tényezőt (feltéve, hogy az ismert tényező nem 0).

Az osztásban szereplő számok felcserélésével az eredmény a reciprokára változik.

d) $5 : \left(\frac{1}{3} : \frac{6}{5}\right) = 5 : \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) = 5 : \frac{5}{18} = 5 \cdot \frac{18}{5} = 18$;

$\left(5 : \frac{1}{3}\right) : \frac{6}{5} = \left(5 \cdot \frac{3}{1}\right) : \frac{6}{5} = 15 : \frac{6}{5} = 15 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{2}$. Az osztás esetében fontos a zárójelezés.

Foglaljuk össze táblázatba rendezve a fenti tulajdonságokat! A számokat betűkkel jelöltük. A betűk helyére számokat képzelhetünk, ezekkel végezhetjük el a műveletet.

	Kommutativitás (felcserélhetőség)	Asszociativitás (társíthatóság, csoportosíthatóság)
Szorzás	$a \cdot b = b \cdot a$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Osztás	$a \neq b$ esetén $a : b \neq b : a$	$\lvert c\rvert \neq 1$ esetén $a : (b : c) \neq (a : b) : c$
	viszont $a : b = \frac{1}{b : a}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$	viszont $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$ $(b \neq 0, c \neq 0)$

Egy (nem 0) számmal való osztás ugyanazt eredményezi, mint a reciprokával való szorzás.

Például: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{4}{7} : 0{,}2 = \frac{4}{7} \cdot 5$.

Feladatok

A1 Végezd el páronként a következő műveleteket!

a) $2{,}5 + (-5{,}2)$; $(-5{,}2) + 2{,}5$; *b)* $3{,}8 - (-1{,}7)$; $(-1{,}7) + 3{,}8$;

c) $\frac{12}{5} + \frac{-3}{8}$; $\frac{-3}{8} + \frac{12}{5}$; *d)* $\frac{12}{5} - \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} - \frac{12}{5}$;

e) $12{,}5 - 4{,}3$; $-4{,}3 + 12{,}5$; *f)* $-7{,}26 - (-4{,}2)$; $4{,}2 - 7{,}26$;

g) $-4{,}5 + \left(-\frac{4}{5}\right)$; $\frac{4}{5} + 4{,}5$; *h)* $0{,}3 - 0{,}7$; $-(0{,}7) + 0{,}3$.

K2 Végezd el a műveleteket! Mely műveletek eredménye egyenlő? Magyarázd meg, miért!

a) $(41{,}5 - 2{,}7) - 3{,}2$; $41{,}5 - (2{,}7 + 3{,}2)$; $41{,}5 - (2{,}7 - 3{,}2)$;

b) $\frac{1}{2} - \left(2{,}7 - \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{1}{2} - 2{,}7\right) - \frac{1}{5}$; $\left(\frac{1}{2} - 2{,}7\right) + \frac{1}{5}$;

c) $-0{,}2 + \left(\frac{7}{2} - 3{,}3\right)$; $\left(-0{,}2 + \frac{7}{2}\right) - 3{,}3$; $\left(-0{,}2 + \frac{7}{2}\right) + 3{,}3$;

d) $6{,}5 - \frac{4}{5} + 1{,}2$; $6{,}5 + 1{,}2 - \frac{4}{5}$; $6{,}5 - 1{,}2 + \frac{4}{5}$.

K3 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!

a) $1{,}8 - (4{,}3 + 2{,}7) + (2{,}6 - 10{,}2) - 4{,}5$; *b)* $2{,}5 + 4{,}3 - \left(1{,}7 - \left(-\frac{3}{2} + 0{,}25\right)\right)$;

c) $-2{,}8 - \left(\left(\frac{1}{4} - 0{,}125\right) + 10{,}3\right)$; *d)* $4{,}5 + 2{,}5 - (-3{,}2) + \frac{5}{4} + \left(-\frac{4}{5}\right)$.

K4 Hasonlítsd össze, hogy egyenlő-e a műveletsorok eredménye!

a) $\frac{2}{5} + 2{,}8 - 3{,}6$ és $\frac{2}{5} + (2{,}8 - 3{,}6)$; *b)* $4 - 2{,}8 + \left(-\frac{2}{5}\right)$ és $4 - \left(2{,}8 + \left(-\frac{2}{5}\right)\right)$;

c) $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}$ és $\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{2}$; *d)* $-\left(0{,}6 + 3{,}5\right) + \frac{1}{4}$ és $-0{,}6 + 3{,}5 + \frac{1}{4}$.

A5 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$; $\frac{3}{4} : \frac{4}{3}$; *b)* $\frac{2}{5} \cdot 1{,}5$; $1{,}5 \cdot \frac{5}{2}$; *c)* $4{,}5 \cdot \frac{9}{2}$; $\frac{9}{2} : 4{,}5$;

d) $0{,}6 : 0{,}2$; $0{,}2 : 0{,}6$; *e)* $4{,}25 \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \cdot 4{,}25$; *f)* $4{,}25 : \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} : 4{,}25$;

g) $1{,}45 \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} \cdot 1{,}45$; *h)* $1{,}45 : \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} : 1{,}45$.

K6 Végezd el a műveleteket! Mely műveletek eredménye egyenlő? Magyarázd meg, miért!

a) $(1{,}5 \cdot 2{,}4) : \frac{5}{6}$; $1{,}5 \cdot \left(2{,}4 \cdot \frac{5}{6}\right)$; $1{,}5 \cdot \left(2{,}4 : \frac{5}{6}\right)$;

b) $32{,}6 : (4 \cdot 3)$; $(32{,}6 : 4) : 3$; $(32{,}6 \cdot 4) : 3$;

c) $\left(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{3}$; $\frac{1}{2} : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)$; $\frac{1}{2} : \left(\frac{2}{3} : \frac{4}{3}\right)$;

d) $\frac{2}{5} \cdot 0{,}4 : 3$; $\left(\frac{2}{5} \cdot 0{,}4\right) : 3$; $\frac{2}{5} \cdot (0{,}4 : 3)$.

K7 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!

a) $5{,}4 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(0{,}5 : \frac{1}{2}\right)$;

b) $(6{,}5 \cdot 1{,}4) : \left(\left(\frac{2}{5} \cdot 4{,}125\right) : \frac{3}{8}\right)$;

c) $\left(\frac{1}{2} : 0{,}5\right) \cdot \left(\frac{1}{8} : 0{,}125\right)$;

d) $\left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}5\right) : \left(\frac{1}{8} \cdot 0{,}125\right)$.

Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések

3.

1. példa

Végezzük el a műveleteket! Hasonlítsuk össze az eredményeket!

a) $4{,}5 \cdot \frac{1}{4} + 4{,}5 \cdot \frac{2}{5}$; $4{,}5 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$; $4{,}5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$; $\frac{1}{4} + 4{,}5 \cdot \frac{2}{5}$;

b) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\right) \cdot 2{,}8$; $\frac{6}{5} \cdot 2{,}8 + \frac{3}{2}$; $\frac{6}{5} + \frac{3}{2} \cdot 2{,}8$; $\frac{6}{5} \cdot 2{,}8 + \frac{3}{2} \cdot 2{,}8$.

a) $4{,}5 \cdot \frac{1}{4} + 4{,}5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{8} + \frac{9}{5} = \frac{117}{40}$;

$4{,}5 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) = 4{,}5 \cdot \frac{13}{20} = \frac{117}{40}$;

$4{,}5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{9}{8} + \frac{2}{5} = \frac{61}{40}$;

$\frac{1}{4} + 4{,}5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{9}{5} = \frac{41}{20}$;

b) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\right) \cdot 2{,}8 = 2{,}7 \cdot 2{,}8 = 7{,}56$;

$\frac{6}{5} \cdot 2{,}8 + \frac{3}{2} = 3{,}36 + 1{,}5 = 4{,}86$;

$\frac{6}{5} + \frac{3}{2} \cdot 2{,}8 = 1{,}2 + 4{,}2 = 5{,}4$;

$\frac{6}{5} \cdot 2{,}8 + \frac{3}{2} \cdot 2{,}8 = 3{,}36 + 4{,}2 = 7{,}56$.

Azt tapasztaljuk, hogy $4{,}5 \cdot \frac{1}{4} + 4{,}5 \cdot \frac{2}{5} = 4{,}5 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$. Mind a két szorzatban ugyanaz az egyik tényező. A másik két számot úgy is megszorozhatjuk a közös szorzótényezővel, hogy az összegüket szorozzuk. Ezt **kiemelésnek** nevezzük.

Azt is láttuk, hogy $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\right) \cdot 2{,}8 = \frac{6}{5} \cdot 2{,}8 + \frac{3}{2} \cdot 2{,}8$. Egy összeget úgy is megszorozhatunk egy számmal, hogy a tagokat külön-külön szorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk. Ezt **beszorzásnak** nevezzük.

A kiemelés, a beszorzás közös néven a disztributivitás.

Foglaljuk össze táblázatba rendezve a fenti tulajdonságokat! A számokat betűkkel jelöltük. A betűk helyére számokat képzelhetünk, ezekkel végezhetjük el a műveletet.

Disztributivitás:	beszorzás	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$
	kiemelés	$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$ $c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b)$

2. példa

A disztributivitás alapján tudjuk, hogy $(7 + 12) \cdot 8 = 7 \cdot 8 + 12 \cdot 8$ és $8 \cdot (7 + 12) = 8 \cdot 7 + 8 \cdot 12$. Figyeljük meg, hogy igaz marad-e az egyenlőség, ha az összeadás helyett kivonás vagy a szorzás helyett osztás szerepel!

Egyenlő-e $(7-12)\cdot 8$ és $(7\cdot 8-12\cdot 8)$?

$(7-12)\cdot 8=(-5)\cdot 8=-40$;

$7\cdot 8-12\cdot 8=56-96=-40$,

ebben az esetben igaz marad az egyenlőség.

Általánosan: $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$.

Egyenlő-e $(7+12):8$ és $7:8+12:8$?

$(7+12):8=\frac{19}{8}$, ugyanakkor $7:8+12:8=$

$=\frac{7}{8}+\frac{12}{8}=\frac{19}{8}$, vagyis a két eredmény egyenlő.

Általánosan, ha $c\neq 0$:

$$(a+b):c=a:c+b:c.$$

Egyenlő-e $(7-12):8$ és $7:8-12:8$?

$(7-12):8=\frac{-5}{8}$, ugyanakkor $7:8-12:8=$

$=\frac{7}{8}-\frac{12}{8}=-\frac{5}{8}$, vagyis egyenlők.

Általánosan, ha $c\neq 0$:

$$(a-b):c=a:c-b:c.$$

Egyenlő-e $8\cdot(7-12)$ és $(8\cdot 7-8\cdot 12)$?

$8\cdot(7-12)=8\cdot(-5)=-40$;

$8\cdot 7-8\cdot 12=56-96=-40$,

ebben az esetben is igaz marad az egyenlőség.

Általánosan: $c\cdot(a-b)=c\cdot a-c\cdot b$.

Egyenlő-e $8:(7+12)$ és $8:7+8:12$?

$8:(7+12)=\frac{8}{19}$, ugyanakkor $8:7+8:12=$

$=\frac{8}{7}+\frac{8}{12}=\frac{38}{21}\neq\frac{8}{19}$, vagyis nem egyenlők.

Általánosan, ha $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$:

$$c:(a+b)\neq c:a+c:b.$$

Egyenlő-e $8:(7-12)$ és $8:7-8:12$?

$8:(7-12)=\frac{8}{-5}$, ugyanakkor $8:7-8:12=$

$=\frac{8}{7}+\frac{8}{12}=\frac{10}{21}\neq\frac{8}{-5}$, vagyis nem egyenlők.

Általánosan, ha $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a-b\neq 0$:

$$c:(a-b)\neq c:a-c:b.$$

Fontos tudnivaló

Műveletek sorrendje: egy több műveletet tartalmazó kifejezés eredményét általában többféleképpen is kiszámíthatjuk.

Ha a műveletsorban nincsenek zárójelek, akkor először a szorzásokat, osztásokat kell elvégezni. Ezután az összeadásokat, kivonásokat végezzük el. A szorzások és az osztások, illetve az összeadások, kivonások elvégzése során haladhatsz balról jobbra, de az is segíthet, ha úgy gondolsz az osztásokra mint reciprokkal való szorzásokra, a kivonásokra pedig mint az ellentettek hozzáadására.

Például: $6\cdot 8:3:2\cdot 5=\{[(6\cdot 8):3]:2\}\cdot 5$,

de $6\cdot 8:3:2\cdot 5=6\cdot 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 5=6\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 5=40$.

Vagyis $6\cdot 8:3:2\cdot 5=6:3:2\cdot 8\cdot 5=1\cdot 8\cdot 5=40$.

Például: $6+8-3-2+5=\{[(6+8)-3]-2\}+5$,

de $6+8-3-2+5=6+8+(-3)+(-2)+5=5+(-3)+(-2)+6+8=5-5+6+8=14$.

Vagyis $6+8-3-2+5=5-3-2+6+8=0+6+8=14$.

Ha a műveletsorban zárójelek is szerepelnek, akkor megteheted, hogy először a zárójeles kifejezés értékét számítod ki, de azt is lehet, hogy az ismert műveleti szabályok felhasználásával felbontod a zárójelet.

Foglaljuk össze táblázatba rendezve a fenti tulajdonságokat! A számokat betűkkel jelöltük. A betűk helyére számokat képzelhetünk, ezekkel végezhetjük el a műveletet.

	Szorzás	Osztás
Összeadás	$(a+b)\cdot c \overset{\text{beszorzás}}{\underset{\text{kiemelés}}{=}} a\cdot c+b\cdot c$ $c\cdot(a+b) \overset{\text{beszorzás}}{\underset{\text{kiemelés}}{=}} c\cdot a+c\cdot b$	$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, a+b\neq 0$ esetén $(a+b):c \overset{\text{osztás}}{\underset{\text{kiemelés}}{=}} a:c+b:c$ $c:(a+b)\neq c:a+c:b$
Kivonás	$(a-b)\cdot c \overset{\text{beszorzás}}{\underset{\text{kiemelés}}{=}} a\cdot c-b\cdot c$ $c\cdot(a-b) \overset{\text{beszorzás}}{\underset{\text{kiemelés}}{=}} c\cdot a-c\cdot b$	$a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, a+b\neq 0$ esetén $(a-b):c \overset{\text{osztás}}{\underset{\text{kiemelés}}{=}} a:c-b:c$ $c:(a-b)\neq c:a-c:b$

Összeget és különbséget oszthatunk tagonként is, ugyanaz az eredmény. De összeggel, különbséggel nem oszthatunk tagonként, mert nem ugyanaz az eredmény.

Vigyázz!

Egy számot összeggel, különbséggel osztva nem ugyanazt kapod, mintha tagonként osztanál.
Például $8:(4+16)=0{,}4$, de $8:4+8:16=2{,}5$; $\quad 8:(4-16)=-0{,}\dot{6}$, de $8:4-8:16=1{,}5$.

3. példa

Figyeld meg az átalakításokat, és nevezd meg, hogy melyik műveletnek mely tulajdonságát használtuk fel a színessel jelölt egyenlőségekhez! Fejezd be a számolást!

a) $5{,}3+(4+2{,}7)=5{,}3+(2{,}7+4)=(5{,}3+2{,}7)+4=\,?$

b) $(6\cdot 4)\cdot(13\cdot 25)=(6\cdot 4)\cdot(25\cdot 13)=6\cdot\big((4\cdot 25)\cdot 13\big)=6\cdot(100\cdot 13)=\,?$

c) $5-(45+60)\cdot\frac{1}{15}=5-\left(45\cdot\frac{1}{15}+60\cdot\frac{1}{15}\right)=5-(3+4)=5+(-1)\cdot(3+4)=$
$=5+\big((-3)+(-4)\big)=\big(5+(-3)\big)+(-4)=\,?$

d) $\frac{100-75}{5}=(100-75)\cdot\frac{1}{5}=\big(5\cdot(20-15)\big)\cdot\frac{1}{5}=\big((20-15)\cdot 5\big)\cdot\frac{1}{5}=(20-15)\cdot\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)=\,?$

a) $5{,}3+(4+2{,}7)\overset{1.}{=}5{,}3+(2{,}7+4)\overset{2.}{=}(5{,}3+2{,}7)+4=8+4=12$;
1. az összeadás kommutativitása, 2. az összeadás asszociativitása.

b) $(6\cdot 4)\cdot(13\cdot 25)\overset{1.}{=}(6\cdot 4)\cdot(25\cdot 13)\overset{2.}{=}6\cdot\big((4\cdot 25)\cdot 13\big)=6\cdot(100\cdot 13)=6\cdot 1300=7800$;
1. a szorzás kommutativitása, 2. a szorzás asszociativitása.

c) $5-(45+60)\cdot\frac{1}{15}\overset{1.}{=}5-\left(45\cdot\frac{1}{15}+60\cdot\frac{1}{15}\right)=5-(3+4)=5+(-1)\cdot(3+4)\overset{2.}{=}$
$\overset{2.}{=}5+\big((-3)+(-4)\big)\overset{3.}{=}\big(5+(-3)\big)+(-4)=2+(-4)=-2$;
1. disztributivitás (beszorzás), 2. disztributivitás (beszorzás), 3. az összeadás asszociativitása.

d) $\frac{100-75}{5}=(100-75)\cdot\frac{1}{5}\overset{1.}{=}\big[5\cdot(20-15)\big]\cdot\frac{1}{5}\overset{2.}{=}\big[(20-15)\cdot 5\big]\cdot\frac{1}{5}\overset{3.}{=}(20-15)\cdot\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)=$
$=20-15=5$.
1. disztributivitás (kiemelés), 2. a szorzás kommutativitása, 3. a szorzás asszociativitása.

4. példa

Keresd meg az egyenlőket! Indokold meg a választásodat!

$\frac{2,4}{4+8}$; $\frac{2,4}{12}$; $2,4 : (4+8)$; $2,4 : 4 + 2,4 : 8$; $\frac{4+8}{2,4}$; $\frac{4}{2,4} + \frac{8}{2,4}$; $(4+8) : 2,4$; $4 : 2,4 + 8 : 2,4$.

$\frac{2,4}{4+8} = \frac{2,4}{12} = 2,4 : (4+8)$, mert $4 + 8 = 12$ és mert a tört osztást jelent. (Ezek mind 0,2-del egyenlők.)

$\frac{4+8}{2,4} = \frac{4}{2,4} + \frac{8}{2,4} = (4+8) : 2,4 = 4 : 2,4 + 8 : 2,4$, mert összeget oszthatunk tagonként és mert a tört osztást jelent. (Ezek 5-tel egyenlők.)

A $2,4 : 4 + 2,4 : 8$ a többi közül semelyikkel sem egyenlő. (Ez 0,9-del egyenlő.)

5. példa

Keresd meg az egyenlőket! Indokold meg a választásodat!

a) $-(1,4-5)$; $-1,4-5$; $-1,4+5$; $1,4-5$;

b) $-(1,4-5) : 3$; $-1,4 : 3 - 5 : 3$; $-1,4 : 3 + 5 : 3$; $-\frac{1,4-5}{3}$; $\frac{-1,4+5}{3}$; $-\frac{1,4}{3} + \frac{5}{3}$; $\frac{-1,4}{3} - \frac{5}{3}$; $\frac{1,4-5}{-3}$; $(1,4-5) : (-3)$.

a) A (-1)-gyel való szorzás során minden tagot megszorzunk (-1)-gyel.

Ennek alapján $-(1,4-5) = -1,4+5$. (Ezek 3,6-del egyenlők.)

A $-1,4-5 = -6,4$ és a $1,4-5 = -3,6$ nem egyenlő semelyik másikkal.

b) A $-(1,4-5) : 3$ kifejezés így is írható: $\left[(-1)\cdot\left(1,4+(-5)\right)\right]\cdot\frac{1}{3} = \frac{-1,4+5}{3} = (-1,4+5) : 3$. Ezért:

$-(1,4-5) : 3 = -1,4 : 3 + 5 : 3 = -\frac{1,4-5}{3} = \frac{-1,4+5}{3} = -\frac{1,4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1,4-5}{-3} = (1,4-5) : (-3)$.

Ezek 1,2-del egyenlők.

$-1,4 : 3 - 5 : 3 = \frac{-1,4}{3} - \frac{5}{3}$. Ezeknek mind $-6,4 : 3 = 2,1\dot{3}$ az értéke.

Feladatok

K1 Kösd össze az egyenlőket!

$\frac{2}{3}\cdot(4+5)$;	$(2+3)\cdot(4+5)$;	$(2+3)\cdot 4 + (2+3)\cdot 5$;
$\frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{2}{3}\cdot 5$;	$(2+3)\cdot\frac{4}{5}$;	$[2\cdot(4+5)] : [3\cdot(4+5)]$;
$2\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot\frac{4}{5}$;	$\frac{2\cdot(4+5)}{3\cdot(4+5)}$;	$[2\cdot(4+5)] + [3\cdot(4+5)]$.

K2 Az alábbi átalakításokban mely műveletek mely tulajdonságát használtuk fel?

a) $(5 \cdot 7) \cdot 2{,}5 = 5 \cdot (7 \cdot 2{,}5)$;

b) $(5 + 7) \cdot 2{,}5 = 5 \cdot 2{,}5 + 7 \cdot 2{,}5$;

c) $(10 - 5) \cdot \frac{1}{2} = [5 \cdot (2 - 1)] \cdot \frac{1}{2}$;

d) $(6 + 8) \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2}$.

E3 Alakítsd át a kifejezéseket az adott tulajdonságok felhasználásával!

a) $4{,}5 \cdot [(7 + 3) \cdot 0{,}2]$ az összeadás kommutativitása;

b) $4{,}5 \cdot [(7 + 3) \cdot 0{,}2]$ a szorzás kommutativitása;

c) $4{,}5 \cdot [(7 + 3) \cdot 0{,}2]$ a szorzás asszociativitása;

d) $4{,}5 \cdot [(7 + 3) \cdot 0{,}2]$ disztributivitás, beszorzás;

e) $\frac{\big((-5) + (-2)\big)}{5}$ disztributivitás, kiemelés;

f) $4{,}5 \cdot [7 + (3 + 0{,}2)]$ az összeadás asszociativitása.

K4 Döntsd el, hogy helyesek-e az átalakítások! Számítsd ki az egyes eredményeket!

a) $(2 + 1{,}5) + 7 = 1{,}5 + (7 + 2)$;

b) $2{,}5 \cdot (4 + 5{,}2) = (5{,}2 + 4) \cdot 2{,}5$;

c) $2{,}4 \cdot (3 + 6{,}5) = (2{,}4 \cdot 3) + 6{,}5$;

d) $4 \cdot (6{,}5 + 12) = 6{,}5 \cdot 4 + 12 \cdot 4$;

e) $(1{,}5 + 3{,}6) \cdot 4 = 1{,}5 \cdot 4 + 3{,}6$;

f) $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)$;

g) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$;

h) $\frac{1}{5} \cdot 2{,}5 + 2{,}5 \cdot 3 = 2{,}5 \cdot \left(3 + \frac{1}{5}\right)$;

i) $(10 + 7) \cdot (10 + 3) = 10 \cdot (10 + 3) + 7 \cdot (10 + 3) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 3 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 3$.

A5 Számítsd ki az alábbi műveletsorok eredményét!

a) $(1{,}8 + 4{,}2) + 8{,}2$;

b) $5 \cdot (100 + 20 + 6)$;

c) $47 : 3 - 17 : 3$;

d) $2{,}5 \cdot (3 \cdot 4)$;

e) $(100 - 15) \cdot 4$;

f) $1000 : 9 - 1 : 9$.

K6 Melyik átalakítás helyes? Melyik hibás?

a) $-\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{-5 + 7}{3}$; $-\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{5 + 7}{3}$; $-\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{5 - 7}{3}$;

b) $-\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{(-5) \cdot 7}{3}$; $-\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 3}$; $-\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{(-5) \cdot 7}{3 \cdot 3}$;

c) $\frac{4}{5} + 2 \cdot 7 = 2 \cdot \left[\frac{2}{5} + 7\right]$; $\frac{4}{5} + 2 \cdot 7 = \left[\frac{4}{5} + 2\right] \cdot \left[\frac{4}{5} + 7\right]$; $\frac{4}{5} + 2 \cdot 7 = \frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot 7$.

K7 Számítsd ki a műveletek eredményét!

a) $\frac{(3{,}5 + 1{,}5) \cdot 3}{5} \cdot \frac{4}{3}$;

b) $\frac{7}{3} - \frac{3 - 5}{3} \cdot 4$;

c) $4{,}2 \cdot (3{,}3 + 7{,}7 - 2{,}4)$;

d) $\frac{5 - 2{,}5}{5} \cdot (4{,}7 + 2)$;

e) $8{,}8 \cdot \frac{3{,}5 + 4{,}1}{0{,}7} + 8{,}8 \cdot \frac{3{,}5 - 4{,}1}{0{,}7}$;

f) $5{,}7 \cdot \frac{7}{9} - 5{,}7 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot 3{,}3$.

K8 Egy központi fűtéses társasházi lakás fűtésének alapdíja légköbméterenként 0,58 euró. Az egyik ilyen lakás alapja olyan téglalap, amelynek oldalai 7,8 m és 10,2 m. A lakás belmagassága 2,7 m. Hány euró a lakás fűtési alapdíja?

K9 A piacon 0,80 kg paprikáért 384 Ft-ot, 0,45 kg sajtért 540 Ft-ot, $\frac{1}{4}$ kg túróért 450 Ft-ot és 0,75 dkg darált húsért 1200 Ft-ot fizettünk.

Mennyit fizettünk volna, ha ugyanezeken a helyeken ugyanezekből az árukból

a) 1,2 kg paprikát, $\frac{3}{4}$ kg sajtot, fél kg túrót és fél kg darált húst vásároltunk volna?

b) 1,6 kg paprikát, 0,9 kg sajtot, fél kg túrót és 1,5 kg darált húst vásároltunk volna?

Műveletek algebrai kifejezésekkel

A matematikában sokszor van szükség arra, hogy amikor valamit kiszámítunk, akkor a számolásban szereplő számoktól függetlenül is le tudjuk írni a számolás menetét. Ha például egy 4 és egy 6 egység oldalú téglalap területét akarjuk kifejezni, akkor tudjuk, hogy az $4 \cdot 6$ területegység. De általában is tudjuk, hogy ha a téglalap két oldalának mérőszámát a-val és b-vel jelöljük, akkor a téglalap területét úgy számíthatjuk ki, hogy $a \cdot b$.

Ezért nagyon sokszor fordul elő, hogy számok helyett betűket írunk, és azokkal számolunk úgy, mintha számok lennének.

Emlékszel?

A betűs kifejezéseket algebrai kifejezéseknek nevezzük.

A kifejezésben szereplő számszorzókat együtthatóknak nevezzük.

Egy algebrai kifejezés a benne szereplő összeadandók (tagok) száma alapján lehet egytagú vagy többtagú. Egytagú például a $2x$; $3a$; $(-3)z$ stb. Többtagú például a $2x - 6y$; $3a + b$; $a + b + c$ stb.

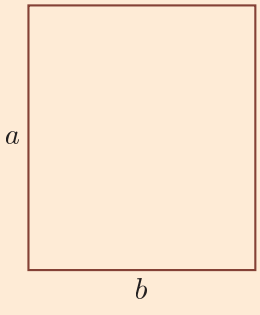
Két egytagú kifejezést egyneműnek nevezünk, ha csak együtthatóikban különböznek.

Az egynemű kifejezéseket össze lehet vonni.

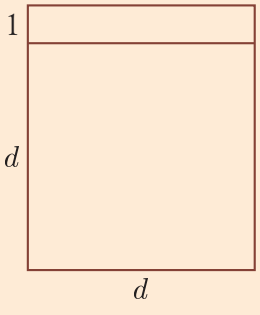
1. példa

Írjuk fel a rajzok alapján az alábbi alakzatok területét!

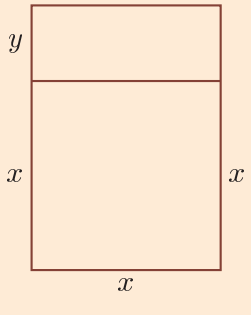
I.



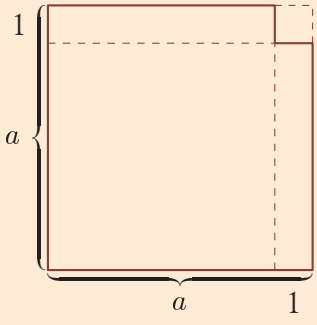
II.



III.

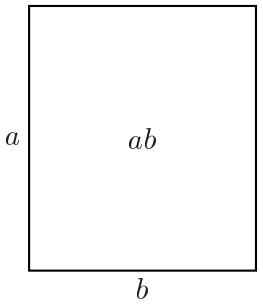


IV.



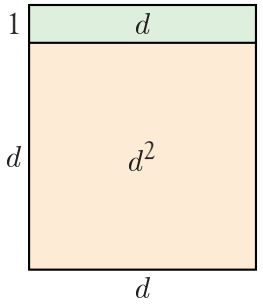
Próbáljuk meg minél többféleképpen megadni a területeket!

I.



A téglalap területe $a \cdot b$, vagy rövidebben ab.

II.

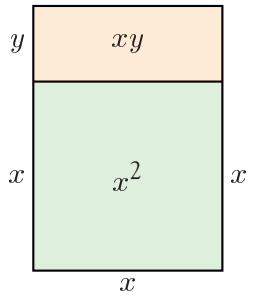


A téglalap területe d és $d + 1$ szorzata, vagyis $d(d + 1)$.

Másképp: a két kis téglalap területösszege: $d^2 + d$.

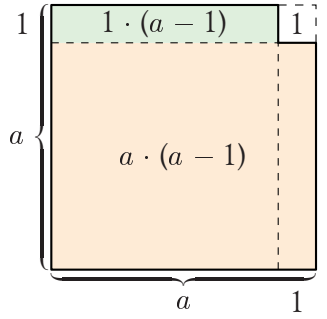
Tehát $d(d + 1) = d^2 + d$.

III.



A téglalap területe egyrészt $x(x + y)$, másrészt $x^2 + xy$. Tehát $x(x + y) = x^2 + y$.

IV.



Az alakzat területe egyrészt $a^2 - 1^2$.

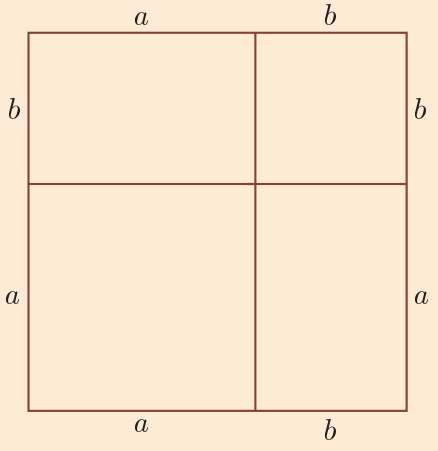
Másképp: $a \cdot (a - 1) + 1 \cdot (a - 1)$.

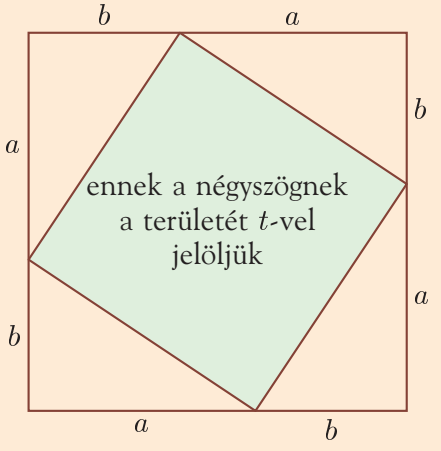
$(a - 1)$-et kiemelhetünk: $(a + 1) \cdot (a - 1)$.

Ennek az alakzatnak a területéből azt kaptuk, hogy $(a - 1) \cdot (a + 1) = a^2 - 1$.

2. példa

Írjuk fel a rajzok alapján az alábbi két alakzat területét!





Mind a két alakzat négyzet, mind a kettőnek ugyanakkora az oldala, tehát a területe is: $(a + b)^2$.

Az egyik négy téglalapra van felbontva, ezek területe egyenként: a^2; ab; b^2; ba. Mivel $ab = ba$, ez így is írható: $a^2 + 2ab + b^2$. Ebből azt kaptuk, hogy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

A másik négyzet négy egybevágó derékszögű háromszögre és egy belső négyszögre van felbontva. A háromszögek területe $\frac{ab}{2}$. A négy háromszög területe összesen $4\frac{ab}{2} = 2ab$. A belső sokszög területét t-vel jelölve a teljes terület $2ab + t$.

Ez viszont ugyanannyi, mint amennyit az imént (a másik feldarabolásra) kaptunk: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + t$. A $2ab$ mindkét kifejezésben szerepel, ha ezt kivonjuk mindkét oldalból, akkor továbbra is egyenlőséget kapunk: $a^2 + b^2 = t$.

3. példa

Folytasd az átalakításokat!

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) =$

$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) =$

$(a - b)(a + b) = a(a + b) - b(a + b) =$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$

$(a - b)(a + b) = a(a + b) - b(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$

Feladatok

K1 Rajzolj olyan téglalapot, amelynek oldalai

a) 2 és b; *b)* $2a$ és 2; *c)* $a + 1$ és a;

d) $a + 1$ és $a - 1$; *e)* $a - 1$ és a; *f)* $a + 1$ és $a + 1$!

Írd fel az alakzatok területét, kerületét! (Az egységet, a-t és b-t tetszőlegesen megválaszthatod, de az egység legyen mindig kisebb, mint a és b, valamint a ne legyen egyenlő b-vel!)

K2 Keress olyan téglalapokat, amelyeknek a területe

a) $2ab$; *b)* $4ab$; *c)* $a^2 + 2a$; *d)* $2a^2 + a$;

e) $ab - b$; *f)* $ab - b^2$; *g)* $b^2 + ab$; *h)* $b^2 + b$!

E3 Keress olyan alakzatokat (nem csak téglalap lehet!), amelyek területe

a) $a^2 - 1$; *b)* $a^2 - b^2$; *c)* $ab + 1$; *d)* $a^2 + 1$;

e) $a^2 + b^2$; *f)* $a^2 + 3a + 3b$; *g)* $a^2 + 2a + b$; *h)* $2a + 3b$!

K4 Legyen a hosszúságegység 5 mm. (A füzeted rácsszélessége.) Megadtuk egy derékszögű háromszög két befogójának hosszát. Készítsd el a 2. példának megfelelő két ábrát, és ennek megfelelően add meg az átfogó hosszát!

a) 1 és 1; *b)* 1 és 2; *c)* 3 és 4; *d)* 4 és 5;

e) 1 és 4; *f)* 2 és 4; *g)* 5 és 12; *h)* 5 és 10.

K5 Egészítsd ki az átalakításokat!

a) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + \square$; *b)* $a\cdot(b-c) = \square\, a\cdot c$;

c) $(a-b)\cdot(c+d) = a\cdot\square - b\cdot\square = \square$;

d) $a\cdot b + a\cdot 2 = \square\cdot(b+2)$; *e)* $b\cdot 5 - a\cdot b = b\cdot\square$;

f) $-xy + 5y = (-y)\cdot\square$; *g)* $-3x + ax = \square\cdot(-3+a)$.

3.

E6 Végezz kiemelést, összevonást az alábbi kifejezésekben!

a) $5aq^2 + 3aq^2 - 6aq^2 + 8aq$; *b)* $2g^2f - 4gf + gf^2 - 3gf$;

c) $7d^2w^2 - 5dw - 4dw - d^2w^2$; *d)* $6g^2f - 4g^2f - 8gf + g^2f^2$;

e) $9py - 7p^2y + p^2y^2 + 3p^2y^2$; *f)* $-nm - 2nm^2 - 9nm + 8nm$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Sokszor adódik olyan probléma, amelyben egy adatról, mennyiségről csak bizonyos összefüggéseket tudunk. Ezen összefüggésekből szeretnénk következtetni arra, hogy mi lehet az ismeretlen adat vagy mennyiség. Néha egyszerű következtetéssel megkapjuk a lehetséges értékeket. Máskor az összefüggéseket algebrai alakban adjuk meg, és azt átalakítva eljuthatunk a megoldáshoz.

Elemi úton megoldható szöveges feladatok

1. példa

Gondoltam egy számot. Hozzáadtam a nála 3-mal nagyobb számot. Így 45,4-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

Ha az eredeti számhoz nem a 3-mal nagyobb számot adtam volna, hanem önmagát, akkor egyrészt az összegük is 3-mal kevesebb lett volna, másrészt a gondolt szám kétszeresét kaptam volna. Ebből az következik, hogy a $45{,}4 - 3 = 42{,}4$ a gondolt szám kétszerese, vagyis a gondolt szám ennek a fele: 21,2.

Ellenőrizzük! Ha a gondolt szám 21,2, akkor a nála 3-mal nagyobb szám a 24,2. Az összegük pedig valóban 45,4.

2. példa

Egy számhoz hozzáadtam a másfélszeresét, és 35,5-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

Ha a gondolt számhoz a másfélszeresét adtam, akkor összesen a két és félszeresét kaptam, vagyis a gondolt szám a $35{,}5 : 2{,}5 = 14{,}2$.

Ellenőrizzük! 14,2 másfélszerese 21,3. A két szám összege pedig valóban 35,5.

3. példa

Egy háromszög kerülete 27 cm, az a és a b oldalának az összege 14 cm, míg a b és a c oldalának az összege 18 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

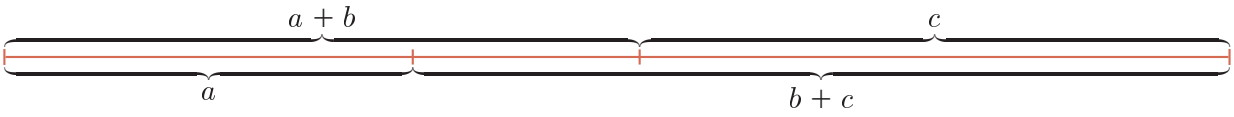
Készítsünk vázlatos rajzot a háromszög kerületéről, oldalairól! Vegyük fel egy szakaszra a kerületet!

Az $a + b$ szakaszt az egyik végpontból felmérve a maradék szakasz a c oldal:

$c = 27\text{ cm} - 14\text{ cm} = 13\text{ cm}$.

A $b + c$ szakaszt a másik végpontból felmérve a megmaradó szakasz az a oldal:

$a = 27\text{ cm} - 18\text{ cm} = 9\text{ cm}$. (A közösen lefedett rész a b szakasz.)



A b szakasz hossza például az $a + b$ és az a különbségéből kapható: $b = 14\text{ cm} - 9\text{ cm} = 5\text{ cm}$.

Az oldalak hossza ezek szerint: $a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $c = 13$ cm.

Ellenőrizzük! $a + b = 14$, $b + c = 18$, $a + b + c = 27$. Ezek megfelelnek a feladatban szereplő adatoknak.

4. példa

Egy számot megszoroztam a kétszeresével, és 0,5-et kaptam. Mi lehetett a gondolt szám?

Ha a szám kétszeresével szorozva 0,5-et kaptam, akkor önmagával szorozva a felét, 0,25-ot, azaz $\frac{1}{4}$-et kaptam volna. Az $\frac{1}{4}$ az $\frac{1}{2}$-nek a négyzete.

Van-e másik szám, amelyet önmagával szorozva $\frac{1}{4}$-et kapunk? Pozitív szám nincs több, hiszen ha $\frac{1}{2}$-nél nagyobb számot veszünk, a négyzete nagyobb lesz $\frac{1}{4}$-nél, ha pedig kisebbet, akkor annak a négyzete is kisebb lesz.

A negatív számok között azonban találunk még egy megoldást: $-\frac{1}{2}$, hiszen $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

A gondolt szám $\frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$ lehetett.

Ellenőrizzük! $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$, illetve $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \frac{1}{2}$.

5. példa

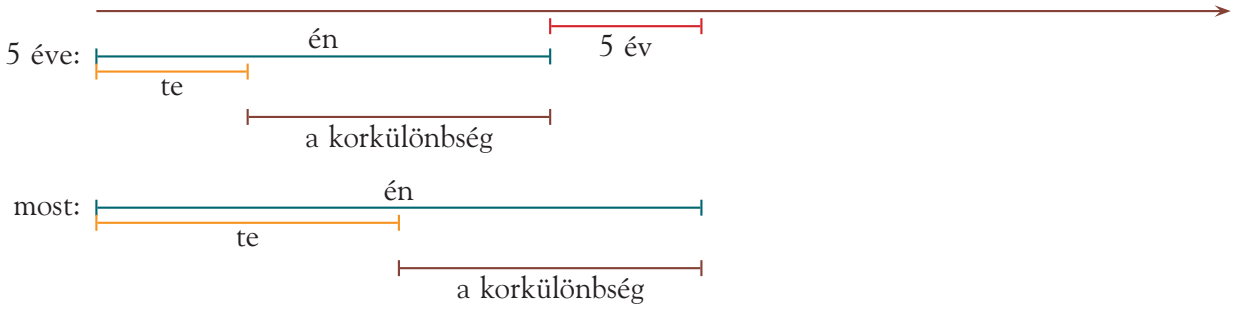
Ma 2-szer annyi idős vagyok, mint te. Öt éve 3-szor annyi idős voltam. Hány évesek vagyunk? Hány év köztünk a korkülönbség?

A köztünk lévő korkülönbség mindig ugyanannyi volt és ugyanannyi lesz, ezért próbáljuk meg ehhez viszonyítani az életkorokat.

A te korod öt éve a korkülönbség fele volt, ma egyenlő vele. Tehát öt év alatt kétszer annyi idős lettél. Ezért öt éve 5 éves voltál, most 10 éves vagy. Én öt éve 15 éves voltam, ma 20 éves vagyok.

Ellenőrizd a megoldást a szöveg alapján!

Készítsünk rajzot, amelyen „időskálán” szemléltetjük a korunkat!



3.

Feladatok

A1 *a)* Két szám közül az egyik 1-gyel nagyobb a másiknál. Az összegük 11. Melyik ez a két szám?

b) Két szám közül az egyik 1-gyel nagyobb, mint a másik. Az összegük 10. Melyik ez a két szám?

c) Két szám közül az egyik 2-vel nagyobb a másiknál. Az összegük 10. Melyik ez a két szám?

d) Két szám közül az egyik 2-vel nagyobb a másiknál. Az összegük 11. Melyik ez a két szám?

e) Két szám különbsége 2, összege 10. Melyik ez a két szám?

f) Két szám különbsége 10, összege 2. Melyik ez a két szám?

g) Két szám összege 6, különbsége 4. Melyik ez a két szám?

h) Két szám összege 4, különbsége 6. Melyik ez a két szám?



A2 Káin és Ábel beszélgetnek. Kiderül, hogy 5 évvel ezelőtt Káin 3 évvel volt idősebb, mint Ábel.

a) Mennyivel idősebb most?

b) Mennyivel volt idősebb 2 évvel ezelőtt?

A3 Káin és Ábel beszélgetnek. Kiderül, hogy Káin most 3 évvel idősebb, mint Ábel.

a) Mennyivel volt idősebb 2 évvel ezelőtt?

b) Mennyivel volt idősebb 12 évvel ezelőtt?

K4 *a)* Két pozitív szám közül az egyik a másiknak kétszerese. A szorzatuk 8. Melyik ez a két szám?

b) Két negatív szám közül az egyik a másiknak kétszerese. A szorzatuk 8. Melyik ez a két szám?

c) Két szám közül az egyik a másik (-2)-szerese. A szorzatuk 8. Melyik lehet ez a két szám?

A5 A bal és a jobb zsebemben ugyanannyi pénz van. A bal zsebemből átteszek a másikba 10 eurót. Mennyivel lesz több a jobb zsebemben?

K6 Arnold 3-szor annyi idős, mint Bence. Bence 10 évvel fiatalabb Arnoldnál. Hány évesek?

K7 Ildinek 23 éves korában született a legidősebb fia. Ildi ma azt mondja, hogy 6 év múlva éppen kétszer annyi idős lesz, mint a fia. Hány évesek ma?

A8 Péter és Palkó életkora együtt 23 év, Péter és Pista életkora együtt 26 év. Melyikük idősebb, Palkó vagy Pista? Mennyivel?

K9 Andi és Bandi életkora együtt 32 év, Bandi és Szandi életkora együtt 26 év.

a) Melyikük idősebb, Andi vagy Szandi? Mennyivel?

b) Ha tudjuk, hogy Andi és Szandi életkora együtt 16 év, mennyi idős Andi és Szandi? És Bandi?

K10 A és B életkora együtt 30 év, B és C életkora együtt 24 év, A és C életkora együtt 20 év.

a) Mennyivel idősebb A, mint B?

b) Mennyivel idősebb B, mint C?

c) Mennyivel idősebb A, mint C?

d) Mennyi idős A, B és C?

K11 Három szakasz hossza páronként 45 mm, 39 mm, 26 mm. Mekkora az egyes szakaszok hossza?

E12 Egy lakásban két egymás mellett lévő, ugyanolyan méretű, négyzet alakú szoba közti falat kivernek, és 1 méterrel odébbraknak. A keletkezett szobák közül a nagyobb így 10 m^2-rel nagyobb. Mekkora volt a négyzet alakú szobák oldalhossza?

E13 Két egymás melletti, négyzet alakú, a oldalú csarnok között lebontják a falat, és 2 méterrel odébb újraépítik. Mekkora lesz a két csarnok területe közt a különbség?

E14 Egy számot megszorzunk a nála 1-gyel nagyobb és a nála 1-gyel kisebb számmal is. A két szorzat különbsége 10. Melyik volt ez a szám?

E15 Két szám közül az egyik 4-gyel nagyobb a másiknál. Az összegük a. Írd fel a két számot a segítségével!

E16 Xavér úgy tudja, hogy Arnold 5 évvel fiatalabb, mint Bence. Yvonne úgy tudja, hogy mindkettőjük éveinek száma 4-gyel osztható.

a) Lehetséges-e, hogy mindketten igazat mondanak?

b) Lehet-e, hogy mindketten tévednek?

c) Lehet-e, hogy Xavér téved, Yvonne nem?

d) Lehet-e, hogy Yvonne téved, Xavér nem?

E17 Xavér azt mondja, hogy Arnold 6 évvel fiatalabb, mint Bence. Yvonne azt mondja, hogy mindkettőjük éveinek száma 4-gyel osztható.

a) Hány évesek lehetnek, ha tudjuk, hogy mindketten általános iskolások?

b) Hány évesek lehetnek, ha tudjuk, hogy mindketten felső tagozatosok?

A mérlegelv alkalmazása

Sok olyan – rendszerint szöveges – feladat van, amelynek a megoldását legegyszerűbben úgy kapjuk meg, ha a benne szereplő összefüggést, összefüggéseket egyenlettel írjuk le, és aztán azt megoldjuk. Az egyenletmegoldás leghatékonyabb módszere a mérlegelv. Összefoglaljuk a korábban tanultakat!

1. példa

Egy szám és a nála 3-mal nagyobb szám összege ugyanannyi, mint a számnál 2-vel nagyobb szám 3-szorosa. Mi lehet ez a szám?

A szöveg olyan összetett, hogy következtetéssel nem könnyű megoldani a feladatot. Jelöljük a gondolt számot betűvel (x), és írjuk fel, hogy a szöveg alapján mit tudunk meg x-ről!

Az eredeti számnál 3-mal nagyobb szám az $x + 3$.

Az eredeti számnál 2-vel nagyobb szám az $(x + 2)$, ennek 3-szorosa pedig $3(x + 2)$. A szöveg szerint tehát az x számra teljesül az $x + (x + 3) = 3(x + 2)$ egyenlőség.

Keressük meg, hogy mely x számra teljesül az egyenlőség, vagyis oldjuk meg az így kapott egyenletet a mérlegelv módszerével!

$$\begin{aligned} x + (x + 3) &= 3(x + 2) && /\text{zárójelek felbontása, összevonás} \\ 2x + 3 &= 3x + 6 && / - 2x \\ 3 &= x + 6 && / - 6 \\ -3 &= x \end{aligned}$$

Ellenőrizzük! Az eredeti szám és a nála 3-mal nagyobb szám összege: $(-3) + ((-3) + 3) = -3$. Az eredeti számnál 2-vel nagyobb szám 3-szorosa: $3 \cdot ((-3) + 2) = 3 \cdot (-1) = -3$. Vagyis (-3) a megoldás.

3.

2. példa

Gondoltam egy számot. Megszoroztam a másfélszeresénél 3-mal nagyobb számmal, és a gondolt szám 3-szorosánál 6-tal nagyobb számot kaptam. Mi lehetett a gondolt szám?

Jelöljük a gondolt számot betűvel (x), és írjuk fel, hogy a szöveg szerint mi igaz rá!

1. A szám másfélszerese $1{,}5x$. A nála 3-mal nagyobb szám a $1{,}5x + 3$. Ezzel szoroztuk a gondolt számot: $x \cdot (1{,}5x + 3)$.

2. A gondolt szám háromszorosa $3x$, ennél 6-tal nagyobb a $3x + 6$. A kapott két szám egyenlő.

Írjuk fel az egyenletet, és oldjuk meg!

$$\begin{aligned} x \cdot (1{,}5x + 3) &= 3x + 6 && /\text{zárójelfelbontás} \\ 1{,}5x^2 + 3x &= 3x + 6 && / - 3x \\ 1{,}5x^2 &= 6 && / : 1{,}5 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Az a szám, amelyet önmagával szorozva 4-et kaptunk, a 2 vagy a (-2) lehetett. Ellenőrizzük! Ha a gondolt szám 2, akkor a másfélszerese 3, az ennél 3-mal nagyobb szám 6. A szorzat $2 \cdot 6 = 12$.

Másrészt a gondolt szám 3-szorosánál 6-tal nagyobb szám a $3 \cdot 2 + 6 = 12$. Ezek valóban egyenlőek.

Ha a gondolt szám -2, akkor a másfélszerese -3, az ennél 3-mal nagyobb szám 0. A szorzat $2 \cdot 0 = 0$.

Másrészt a gondolt számnál 3-szorosánál 6-tal nagyobb szám a $3 \cdot (-2) + 6 = 0$. Ezek is egyenlőek.

Fontos tudnivaló

A mérlegelv lépései:

– Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadva ugyanazt a számot, mennyiséget vagy kivonva belőle ugyanazt, nem változik az egyenlőség.

– Az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem 0 számmal megszorozva, nem változik az egyenlőség.

– Az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem 0 számmal elosztva, nem változik az egyenlőség. 0-val nem lehet osztani.

Figyeljük meg, mi történik, ha 0-val szorozzuk egy egyenlet mindkét oldalát!

$x = x + 1$ semelyik x-re sem teljesül, mert nincs olyan szám, amely egyenlő lenne a nála 1-gyel nagyobb számmal. A 0-szorosa $(0 = 0)$ viszont x minden értéke mellett igaz, mert x-től függetlenül igaz.

$x = 2x$ csak $x = 0$ esetén teljesül. A 0-szorosa $(0 = 0)$ viszont x minden értéke mellett igaz, mert x-től függetlenül igaz.

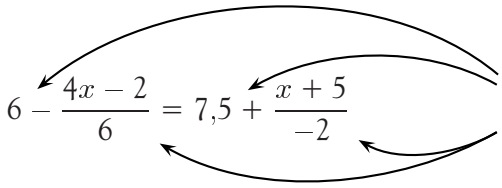
Ha egy egyenlet két oldalát 0-val szorozzuk, akkor attól függetlenül teljesül az x minden értékére, hogy előzőleg teljesült-e vagy sem.

Vigyázz! Az egyenletet nemcsak elosztani nem szabad 0-val (hiszen 0-val nem lehet osztani), de megszorozni sem!

3. példa

Oldjuk meg a $6 - \frac{4x-2}{6} = 7{,}5 + \frac{x+5}{-2}$ egyenletet a racionális számok halmazán!

Az egyenletet többféleképpen is meg lehet oldani. Szorozzunk először a nevezőkkel!



Figyelj! Beszorzáskor minden tagot szorzunk. A szorzat tényezői közül csak az egyiket szorozzuk.

$$\begin{aligned}
36 - (4x-2) &= 45 + (-3)\cdot(x+5) && / \text{ beszorzás}\\
36 - 4x + 2 &= 45 - 3x - 15 && / \text{ rendezés}\\
38 - 4x &= 30 - 3x && / + 4x\\
38 &= 30 + x && / - 30\\
8 &= x
\end{aligned}$$

Ellenőrzés: ha $x = 8$, akkor a bal oldalon $6 - \frac{4x-2}{6} = 6 - \frac{4\cdot 8-2}{6} = 1$ áll; a jobb oldalon $7{,}5 + \frac{x+5}{-2} = 7{,}5 + \frac{8+5}{-2} = 7{,}5 - 6{,}5 = 1$ áll. Ezek egyenlőek, $x = 8$ valóban megoldás.

Oldd meg a feladatot önállóan a füzetedben más módszerrel, például közös nevezőre hozással!

Feladatok

A1 Oldd meg a következő egyenleteket az *egész* számok halmazán! Mindig ellenőrizd a megoldásodat!

a) $2 + x - 6 = 15$; *b)* $2x + 6 = 0$; *c)* $x + 8 + 3x = 12$;

d) $5x + 12 = x - 4$; *e)* $3x + 5 = x + 10$; *f)* $x - 4 - 3x = -2x - 4$;

g) $3(1{,}5x - 4) = 4(0{,}5x + 2)$; *h)* $2\cdot\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\right) = -0{,}4 + \frac{2}{3}x$.

A2 Oldd meg a következő egyenleteket a *racionális* számok halmazán! Mindig ellenőrizd a megoldásodat!

a) $x + 5 + x + 3 - x = 0$; *b)* $2x + 3 - x = 4 - x + 6$;

c) $x + 5 - 4x + \frac{1}{2} = 5 - x + \frac{12}{5}$; *d)* $3 + x + 7 - 4x = 6 + 3x + 1 - \frac{1}{5}$;

e) $5x - 4 + 3x + 5 = 2x - 7 - 8x$; *f)* $3x + 6 + 2x - 10 = 2x - 6 + 3x$;

g) $3 - x + 12 - 8 + 13x = 3\cdot 4x + 7$; *h)* $14x - 14 = 8x - 8$.

K3 Oldd meg a következő egyenleteket a *racionális* számok halmazán! Mindig ellenőrizd a megoldásodat!

a) $3(x + 1) - 4 = 5(x - 2) + 6$; *b)* $4 - (x + 3) + 8 = -12 - x$;

c) $-(3x + 6) + (4 - 2x) = 6 - 3x$; *d)* $5(x-6) - 2(x+5) + 1 = 12x - 6(5-x)$;

e) $5 + 4(x - 2) = x$; *f)* $5{,}7 - (2x + 5) = 1{,}2x + 6$;

g) $4 - 3{,}6(5x - 2{,}5) = 1{,}5(4x - 10)$; *h)* $4 - 1{,}5(6x - 2) = -(3x - 1) + 2x$.

K4 Oldd meg a következő egyenleteket a *racionális* számok halmazán! Mindig ellenőrizd a megoldásodat!

a) $\frac{3+x}{4} = 6$;

b) $5 + \frac{6-x}{3} = 10$;

c) $\frac{x}{2} + 0{,}5 = \frac{3x}{2}$;

d) $\frac{x+3}{2} + 3{,}5 = \frac{x-3}{2}$;

e) $4 - \frac{x-1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{x}{3}$;

f) $\frac{3-x}{5} - \frac{-x+4}{4} = \frac{12x}{5} - \frac{10x}{4}$.

K5 Egy számnál 8-cal kisebb számot 4-gyel osztva ugyanazt kapjuk, mintha a szám 2-szereséhez adnánk 5-öt. Melyik ez a szám?

K6 Az egyik évben januárban a 8,5 órás munkanapok száma 17, a 6 órás munkanapoké 4. Februárban a 8,5 órás munkanapok száma 16, a 6 órás munkanapok száma 4.

a) Egy nyomdász órabére 6,2 euró. Mennyi a januári, és mennyi a februári bére?

b) Egy munkás januárra 1348 euró bért kapott. Mennyi az órabére? Mennyi bért kap februárra?

c) Egy dolgozó februárra 1152 eurót kapott. Mennyi az órabére? Mennyi bért kapott januárra?

d) Egy pék februárra 46,75 euróval kevesebbet kapott, mint januárra. Mennyi az órabére? Mennyi bért kapott januárra és februárra?



Egyenlőtlenségek

1. példa

Oldjuk meg az $5x - 4{,}5 \geq 12$ egyenlőtlenséget a racionális számok halmazán! Ábrázoljuk a megoldáshalmazt!

$5x - 4{,}5 \geq 12 \qquad / + 4{,}5$

$5x \geq 16{,}5 \qquad / : 5$

$x \geq 3{,}3$



2. példa

Oldjuk meg a $-x + 3 < 4$ egyenlőtlenséget a racionális számok halmazán! Ábrázoljuk a megoldáshalmazt!

Többféleképpen is hozzákezdhetünk a megoldáshoz.

Első megoldás:

$$\begin{aligned} -x+3 &< 4 && /-4 \\ -x-1 &< 0 && /+x \\ -1 &< x \end{aligned}$$

Második megoldás:

$$\begin{aligned} -x+3 &< 4 && /-3 \\ -x &< 1 && /+x \\ 0 &< 1+x && /-1 \\ -1 &< x \end{aligned}$$

Harmadik megoldás:

$$\begin{aligned} -x+3 &< 4 && /-3 \\ -x &< 1 && /\cdot(-1) \\ x &> -1 \end{aligned}$$



Észrevetted?

Ha mindkét oldalt kivonjuk, akkor ugyanazt kapjuk, mintha (-1)-gyel szoroztunk volna, de az egyenlőtlenség két oldala felcserélődik. Mintha az egyenlőtlenségjel állása (az egyenlőtlenség iránya) megfordult volna.

Emlékszel?

Ha az egyenlőtlenséget negatív számmal szorozzuk, az egyenlőtlenségjel állása (az egyenlőtlenség iránya) megfordul.

3. példa

Oldjuk meg a $-4x \leq 16$ egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned} -4x &\leq 16 && /+4x \\ 0 &\leq 16+4x && /-16 \\ -16 &\leq 4x && /:4 \\ -4 &\leq x \end{aligned}$$

ez rövidebben:

$$\begin{aligned} -4x &\leq 16 && /:(-4) \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

Fontos tudnivaló

Ha az egyenlőtlenséget negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, az egyenlőtlenségjel állása (az egyenlőtlenség iránya) megfordul.

Figyeljük meg, mi történhet, ha az egyenlőtlenség két oldalát megszorozzuk 0-val!

$x < x+1$ minden x értékre teljesül. 0-val szorozva $(0<0)$ semelyik x érték esetén sem teljesül.

$x \leq x+1$ minden x értékre teljesül. A 0-szorosa $(0 \leq 0)$ ugyancsak teljesül minden x értékre.

$x > x+1$ az x semelyik értékére sem teljesül. A 0-szorosa $(0>0)$ semelyik x értékre sem teljesül.

$x \geq x+1$ semelyik x értékre sem teljesül. A 0-szorosa $(0 \geq 0)$ viszont minden x érték mellett igaz.

Vagyis 0-val szorzással akár hamis, akár igaz egyenlőtlenségből kaphatunk igaz vagy hamis egyenlőtlenséget.

4. példa

Oldjuk meg a $10-\frac{x+4}{5} \leq -\frac{x+5}{-3}-1{,}6$ egyenlőtlenséget a racionális számok halmazán!

Sokféleképpen elindulhatunk. Az egyik lehetőség az, hogy a törtek nevezőjével szorozzuk mind a két oldalt.

$$10 - \frac{x+4}{5} \le -\frac{x+5}{-3} - 1{,}6 \qquad / \cdot 5$$

Figyelj a szorzáskor! A tagokat külön-külön szorozzuk. $-\frac{x+4}{5}$*-nek az 5-szöröse* $-(x+4)$.

$$50 - (x+4) \le -\frac{5x+25}{-3} - 8 \qquad / \cdot (-3)$$

Negatív számmal szorzunk. Figyelj az egyenlőtlenség irányára! Figyelj a szorzáskor is!

$-(x+4)$*-nek a* (-3)*-szorosa* $3(x+4)$. $-\frac{5x+25}{-3}$*-nak a* (-3)*-szorosa* $-(5x+25)$.

$$-150 + 3 \cdot (x+4) \ge -(5x+25) + 24 \qquad / \text{ beszorzás}$$
$$-150 + 3x + 12 \ge -5x - 25 + 24 \qquad / \text{ összevonás}$$
$$-138 + 3x \ge -5x - 1 \qquad / + 5x$$
$$-138 + 8x \ge -1 \qquad / + 138$$
$$8x \ge 137 \qquad / : 8$$
$$x \ge 17{,}125$$



Feladatok

A1 Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán!

a) $2x - 3 > 9 - x$; *b)* $2 + 5x \le 4x - 7$; *c)* $6x - 4 < 4x - 6$;

d) $5x - 5 \le x + 7$; *e)* $16x - 4 < 0$; *f)* $3x + 3 < 3 - 3x$.

K2 Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán!

a) $2(x-5) > 3x + 7$; *b)* $-3(4 - 2x) \ge 2(2 - 3x)$; *c)* $5(x-1) \le x[7 + (-3) \cdot 4]$;

d) $3(2 - x) + 6x \ge 39$; *e)* $5(3 - x) + 2 < 17 - 5x$; *f)* $2{,}5x - 3 > 2(x + 3)$.

K3 Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán!

a) $-x > -1$; *b)* $-x + 6 \ge 2$;

c) $-(x+5) \le -4$; *d)* $4 - 7(x+3) < -5x - 10$;

e) $(-6)(x-1) < -5 + x$; *f)* $12(5x - 6 - x) \le (-12) \cdot (x - 7 + 3x)$;

g) $(-3) \cdot (4x - 2) > \frac{1}{3} \cdot (2x - 6)$; *h)* $2 \cdot (7{,}5x - 2{,}5 - 3x) \le -15x + 1{,}5$;

i) $3\left(-\frac{1}{2}x - 2{,}5\right) - 1{,}5 < 17$; *j)* $-8 - 4{,}5x \ge -12$.

K4 Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán!

a) $\frac{x-2}{5} > 2x + 6$; *b)* $\frac{1}{3}(2x - 6) < 6 - \left(\frac{2}{5}x + 3\right)$;

c) $5 - \frac{2x+3}{4} \ge 3x - 6$; *d)* $x - \frac{5 - 4x}{10} \le \frac{3x - 2}{5}$;

**e)* $3x + \frac{5x+2}{3} > \frac{5x-2}{4}$; **f)* $-\frac{11}{12} - \frac{6x-1}{4} < \frac{-3x-2}{3} - 0{,}5x$;

g) $-\frac{3}{5} + \frac{5x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{5}{2}x - \frac{1}{6} + \frac{2}{7}$; **h)* $-\frac{3}{5} + \frac{10x-3}{4} > \frac{15x-1}{6} + \frac{2}{7}$.

K5 Egy családban márciusban a havi jövedelem harmadánál 80 euróval kevesebbet fizettek ki számlákra, áprilisban az ugyanakkora jövedelemnél 200 euróval nagyobb összeg negyedrészét.

a) Mennyi lehet a család jövedelme, ha a két hónapban ugyanannyi pénzt fizettek ki számlákra? Mennyit költöttek számlákra az egyes hónapokban?

b) Mennyi lehet a jövedelmük, ha az első hónapban többet fizettek ki számlákra, mint a második hónapban? Mennyit költhettek számlákra az egyes hónapokban?

c) Mennyi lehet a család jövedelme, ha az első hónapban kevesebbet fizettek ki számlákra, mint a második hónapban? Mennyit költhettek számlákra az egyes hónapokban?



E6 A hagyományos izzókat 2013-ban elkezdték kivonni a forgalomból. Az energiatakarékos izzó két évig működőképes, a hagyományos izzó fél évig. A 15 wattos energiatakarékos izzó fényereje ugyanakkora, mint a 90 wattos hagyományos izzóé. A hagyományos izzó ára 50 Ft volt.

a) Hányszorosa a hagyományos izzó fogyasztása az új, energiatakarékosénak?

b) Milyen áron éri meg energiatakarékos izzót venni?

c) Hányszorosa ez az ár a hagyományos izzóénak?

E7 Járművek, felvonók maximális utasszámát úgy állapítják meg, hogy az ülőhelyekre és az állóhelyekre jutó személyek össztömege ne haladja meg a teherbíró képességet. Az ülőhelyek száma a járművön található ülések száma.

a) Egy busz teherbíró képessége 7,5 t. A buszon 16 ülőhely van. Legfeljebb mennyi lehet az állóhelyek száma, ha az emberek tömegét átlagosan 75 kg-nak vesszük?

Az utasok átlagtömege 75 kg-nál nagyobb, mert csomagot is visznek magukkal. Legfeljebb mennyi lehet az állóhelyek száma, ha az emberek és csomagjaik együttes tömegét átlagosan 95 kg-nak vesszük?

b) Egy olyan kórházi felvonóban, amelynek teherbíró képessége 960 kg, van egy ülőhely is. Legfeljebb hányan állhatnak a liftben, ha az emberek átlagtömegét 80 kg-nak vesszük?

Egy ember körülbelül $\frac{1}{3}$ négyzetméternyi területen áll (vagy ül). Legalább hány négyzetméter kellene legyen a felvonó alapterülete, hogy valóban beférjen annyi ember, amennyit a tömeg alapján megállapíthatunk?

c) Egy sífelvonó 2 m széles, 3 m hosszú kabinját télen nagyobb tömeggel (sífelszereléssel) és fejenként nagyobb alapterületet elfoglalva; nyáron kisebb tömeggel ugyan, de összepréselődve, vagyis fejenként kisebb alapterületet elfoglalva vesznek igénybe a turisták.

Hány tonna teherbíró képességű legyen a sífelvonó, ha úgy számolunk, hogy az emberek télen a sífelszereléssel kb. 100 kg átlagtömegűek, és legalább $\frac{1}{3}$ m^2-nyi területet foglalnak el; nyáron 80 kg átlagtömegűek, és legalább $\frac{1}{5}$ m^2-nyi helyet foglalnak el?

K8 „A tej élet, erő, egészség!” – tartja a mondás.

Magyarországon általában tehéntejet iszunk. Tehenenként és konkrét tehén esetén is a fejés időpontjától függően, sőt a fejés során is változik a tej összetétele. Ez túlzott sokféleséget okoz, ezért az ipari tejfeldolgozásban szabványoknak megfelelően állítják be a tej összetételét. Zsírtartalom alapján leggyakrabban négyféle tejjel találkozhatunk a boltokban: 3,6%-os, 2,8%-os, 1,5%-os, 0,1%-os. Egy liter tej tömege kb. 1030 g, kerekítve 1000 g. Az, hogy a tej például 3,6%-os, azt jelenti, hogy 1 liter tejben kb. 3,6 g tejzsír van.

A fejlődésben lévő szervezet napi energiaszükséglete kb. 2500 kcal.

A táblázatot másold át a füzetedbe, és ott töltsd ki!

1000 g	3,6%-os tej	2,8%-os tej	1,5%-os tej	0,1%-os tej
Tejzsírtartalom				
Fehérjetartalom				
Tejcukortartalom				
Szárazanyag-tartalom				
Energiatartalom				

Az 1,5%-os (sovány) tej dobozán az olvasható, hogy 100 g tej energiatartalma 44 kcal.

I. Mennyit kell elfogyasztania az 1,5%-os tejből annak, aki teljes napi energiaszükségletét csak ebből a fajta tejből kívánja fedezni?

A 3,6%-os (zsíros) tej 100 grammjának energiaértéke 63 kcal.

II. Mennyivel kevesebbet ihat meg a zsíros tejből az, aki a sovány tej helyett a zsíros tejből fedezi a napi energiaszükségletét?

A tej fehérje- és tejcukortartalma a zsírtartalomtól független.

A tej 87%-a víz, a többi – úgynevezett – szárazanyag. A szárazanyagnak kb. 27%-a fehérje.

III. A tej tömegének hány százaléka a fehérje? Hány gramm ez?

A tej cukortartalma literenként 47 g.

IV. Hány százaléka ez a szárazanyag-tartalomnak?

A tejcukor tápértéke grammonként kb. 3,95 kcal, a tejzsíré 9,3 kcal, míg a fehérjéé 4 kcal.

V. Ezekből az adatokból számítsátok ki 100 g 1%-os tej energiatartalmát!

A fejlődésben lévő szervezet napi tápanyagigénye kb. 63 g fehérje, 90 g zsír és 360 g szénhidrát (például a cukorban, gabonában van, de a cukor – a gabonával szemben – egészségtelen).

VI. Tegyetek fel további kérdéseket az osztályban, és válaszoljátok meg ezeket!

VII. A kcal az energia egyik elavult mértékegysége. Az energia SI-mértékegysége – ahogy azt fizikából már tanultátok – a Joule (J). Keressétek meg, hogy egy kcal hány kJ, és számítsátok át a kcal-ban kapott értékeket kJ-ra!

K9 Korunk népbetegsége az elhízás. Sajnos már a fiatalok körében is meglehetősen sok a túlsúlyos, elhízott. A helyes testsúly elérése és megőrzése nemcsak esztétikai, hanem egészségügyi kérdés is. A túlsúly cukorbetegséget, magas vérnyomást, keringési- és szívbetegségeket, agyvérzést okozhat. A dohányzás és alkoholfogyasztás mellett az egyik legjelentősebb rizikófaktor. A túlsúlyból eredő megbetegedések száma hazánkban növekvő tendenciát mutat. Az alacsony testsúly sem egészséges. Meg kell tanulnunk megtalálni az egyensúlyt. A helyes táplálkozás kulcsfontosságú.

Egy kilogrammnyi súlyfelesleg leadásához 7000 kcal-t kell felhasználni!

A következő táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes testmozgásokkal 10 perc alatt mennyi energiát (hány kcal-t) használ fel a szervezet.

Testmozgás	Energia (kcal)
Evezés	70
Futás	100
Gátfutás	100
Gimnasztika	40
Harcművészet	100
Hegymászás	75
Jégkorong	80
Jóga	40
Kajakozás	50
Kenuzás	70
Kerékpározás	60
Kirándulás	60
Korcsolyázás	70
Kosárlabdázás	60
Lécspőzés	90
Ökölvívás	120
Séta	30
Súlyemelés	60
Tánc	50

Amennyiben a szervezet több energiát használ fel, mint a bevitt energia, akkor azt a raktározott anyagokból – megfelelő testmozgás esetén elsősorban zsírból – fedezi.

I. Ha napi 500 kcal-val csökkentjük az energiabevitelt, akkor mennyi idő alatt csökkenhet a testsúlyunk 5 kg-mal?

A napi 3-400 kcal csökkentés még nem egészségtelen, de ennél nagyobb csökkentés esetén szükséges lehet orvos felügyelete. Nemcsak az energiabevitelt lehet csökkenteni, hanem az energiafelhasználást is lehet növelni.

Válassz ki egy testmozgást a táblázatból!

II. Változatlan étkezési szokások mellett mennyit kellene elvégezni a kiválasztott testmozgásból ahhoz, hogy 5 kg súlycsökkenést érjünk el?

III. Átlag napi mennyi testmozgásnak felel meg ez, ha a súlycsökkenést 3 hónap alatt akarjuk elérni?

IV. Ha mindehhez napi 200 kcal-val csökkentjük az energiabevitelt, akkor mennyivel kevesebb tesmozgást kell végeznünk?

Az erősítő, illetve állóképesség-fejlesztő gyakorlatokat változatosan kell alkalmazni.

V. Készítsetek tervet arra, hogy a táplálkozási szokások megváltoztatásával és a mozgásformák változatos alkalmazásával miként lehet 3 hónap alatt 7 kg testsúlycsökkenést elérni!

Számokkal kapcsolatos feladatok

A szöveges feladatok megoldására nem lehet általános megoldási módszert adni.

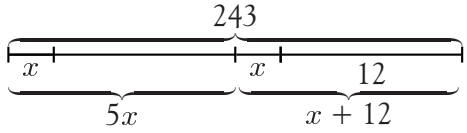
Tanácsok a szöveges feladatok megoldásához:
– Olvasd el először a feladat teljes szövegét, majd tagold részekre!
– Amikor új információhoz érsz az olvasásban, valamilyen módon jegyezd le!
– Készíts ábrát vagy táblázatot, ami segít az összefüggések felismerésében!

1. példa

Egy szám ötszörösének és a számnál 12-vel nagyobb számnak az összege 234. Melyik ez a szám?

Jelöljük a számot x-szel!
Az ötszöröse: $5x$.
A számnál 12-vel nagyobb szám: $x + 12$.
Összefüggés a megadottak között, azaz az egyenlet felírása:

$$5x + x + 12 = 234.$$



Mérlegelv segítségével megoldva az egyenletet: $x = 37$.
Az ellenőrzést mindig a szövegbe való behelyettesítéssel végezzük el.
A szám ötszöröse 185. Hozzáadva a számnál 12-vel nagyobb számot, azaz 49-et, az összeg 234.
A keresett szám a 37.

2. példa

Két pozitív szám aránya 2 : 5, ha a kisebb számhoz 60-at, a nagyobb számhoz 20-at hozzáadunk, a két szám aránya 1 : 2. Melyik két számra gondoltunk?

Ha két szám aránya 2 : 5, akkor a számokat $2x$ és $5x$ alakban írhatjuk fel. Mivel pozitív számok esetén $2x < 5x$, ezért $2x$ a kisebb, $5x$ a nagyobb.

A kisebb számhoz 60-at hozzáadva: $2x + 60$. A nagyobb számhoz 20-at hozzáadva: $5x + 20$.

Az, hogy a kapott két szám aránya 1 : 2, azt jelenti, hogy az egyik szám a másik kétszerese.

A feladat szövege a továbbiakban nem utalt arra, hogy melyik két szám aránya lesz 1 : 2, ezért két esetet kell megnéznünk.

I. eset: $2 \cdot (2x + 60) = 5x + 20$

Az egyenletet megoldva: $x = 100$.

A keresett két szám a 200 és az 500.

Ellenőrzés: 200-hoz 60-at hozzáadva 260, 500-hoz 20-at hozzáadva 520, valóban az egyik szám a másik kétszerese.

II. eset: $2 \cdot (5x + 20) = 2x + 60$

Az egyenletet megoldva: $x = 2{,}5$.

A keresett két szám az 5 és a 12,5.

Ellenőrzés: 5-höz 60-at hozzáadva 65-öt kapunk, 12,5-höz 20-at hozzáadva 32,5-et kapunk, így a kapott két szám aránya 1 : 2.

Tehát mind a két esetben kaptunk megoldást. A két szám lehet 200 és 500, illetve 5 és 12,5.

3. példa

a) Egy kétjegyű számban 4-es és 7-es számjegyek vannak. Melyik számokról lehet szó?

Ha 4 van a tízes helyi értéken, akkor 7-es van az egyes helyi értéken, a szám $47 = 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$.
Ha 7 van a tízes helyi értéken, akkor 4-es van az egyes helyi értéken, a szám $74 = 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1$.

b) Egy kétjegyű szám tízes helyi értékén 3 van. Írjuk fel a számot általános alakban!

Az egyes helyi értéken lévő szám nem ismert, jelöljük x-szel. Ekkor a szám $\overline{3x}$ alakban írható.

A felülvonás azt jelenti, hogy ez nem a $3 \cdot x$, hanem egy kétjegyű szám: $\overline{3x} = 3 \cdot 10 + x$, így olvassuk: *felülvonás* $3x$.

Ekkor az $x = 0; 1; 2; \ldots; 9$ lehet, azaz 10 db ilyen szám van: 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39.

c) Írjuk fel az összes olyan kétjegyű számot, amelyben a számjegyek összege 11!

A tízes helyi értéken 0; 1 nem állhat.

Tízes helyi érték	2	3	4	5	6	7	8	9
Egyes helyi érték	9	8	7	6	5	4	3	2
A kétjegyű szám	29	38	47	56	65	74	83	92

d) Írjuk fel általános alakban azokat a kétjegyű számokat, amelyek jegyeinek összege 11!

Jelöljük a tízes helyi értéken lévő számot x-szel! Ekkor az egyes helyi értéken $11 - x$ áll. A kétjegyű szám $\overline{x(11-x)}$ alakban írható fel. A felülvonás azt jelenti, hogy kétjegyű számról van szó, és nem az x és $10 - x$ összeszorzásáról.

Ez az átírás azért hasznos, mert a kifejezésekben lévő műveletek elvégezhetők.

A $\overline{x(11-x)}$-et átírhatjuk úgy az előzőek alapján hogy a kifejezés műveleti jeleket tartalmazzon: $\overline{x(11-x)} = x \cdot 10 + (11 - x) \cdot 1$.

4. példa

Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. Ha a kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, a kapott szám $\frac{4}{7}$-szerese az eredeti számnak. Melyik kétjegyű számról van szó?

Az előző feladat alapján kétféle megoldást mutatunk.

I. megoldás: próbálgatással.

Ez a módszer ebben az esetben azért használható, mert felsorolható az összes részfeltételnek megfelelő szám, és ebből kiválaszthatók azok a számok, amelyek minden feltételnek eleget tesznek.

Az összes lehetőség:

A kétjegyű szám	39	48	57	66	75	84	93
A számjegyek felcserélésével kapott szám	93	84	75	66	57	48	39

Mivel a feladat szerint a jegyek felcserélésével kapott szám kisebb lesz az eredeti számnál, az első négy eset nem lehetséges. Maradt három eset.

A kétjegyű szám	75	84	93
A számjegyek felcserélésével kapott szám	57	48	39

Ezt megvizsgálva adódik, hogy egyetlen ilyen szám van, a 84.

II. megoldás: egyenlettel.

Jelöljük a kétjegyű számban a tízesek helyén álló számot x-szel!

Írjuk fel általános alakban a feltételeknek megfelelő kétjegyű számot, majd ennek felhasználásával a jegyek felcserélésével kapott számot is! Ehhez készítsünk táblázatot:

	Tízes	Egyes	A szám
Az eredeti szám	x	$12 - x$	$x \cdot 10 + 12 - x = 9x + 12$
A felcserélt szám	$12 - x$	x	$(12 - x) \cdot 10 + x = 120 - 10x + x = 120 - 9x$

Tudjuk, hogy a jegyek felcserélésével kapott szám $\frac{4}{7}$-szerese az eredeti számnak.

Írjuk fel egyenlettel: $(9x + 12) \cdot \frac{4}{7} = 120 - 9x$.

Rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy $x = 8$. Így a kétjegyű szám a 84.

Ellenőrzés: $84 \cdot \frac{4}{7} = 48$.

Feladatok

K1 Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Mennyi lehet a szám és a felcserélésével kapott szám összege?

K2 Egy kétjegyű számban a tízes helyi értéken 2-vel nagyobb szám áll, mint az egyes helyi értéken. Ha a számjegyeket felcseréljük, az eredeti és felcserélt számok összege 154. Melyik ez a szám?

K3 Egy háromjegyű szám első számjegye 5. Ha a tízes és az egyes helyi értéken lévő számokat felcseréljük, akkor az eredeti szám és a kapott szám különbsége 45. Melyik ez a szám?

K4 Egy háromjegyű szám középső jegye 4, másik két jegyének összege 11. Ha a nagyobb számból kivonjuk a kisebb számot, 495-öt kapunk. Melyik háromjegyű számról van szó?

K5 Igaz-e, hogy egy kétjegyű szám és a felcserélésével kapott szám összege osztható 11-gyel?

Ha úgy gondolod, hogy nem igaz, keress ellenpéldát! Ha igaznak gondolod, akkor bizonyítsd be!

K6 Egy háromjegyű számban a százas és az egyes helyi értéken álló számjegyeket felcseréljük. A számot és a jegyek felcserélésével kapott számot kivonjuk egymásból (a nagyobb számból a kisebb számot). Vizsgáld meg oszthatóság szempontjából a kapott különbséget!

3.

Keverési feladatok

Az orvostudományban, a vegyiparban, a kozmetikai iparban, az építőiparban, a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, a vendéglátóiparban vagy akár az otthoni főzésnél gyakran találkozunk olyan feladattal, amelyben bizonyos alapanyagok keverésével más, a munka szempontjából fontos anyagokat állítunk elő. Ilyen problémákkal foglalkozunk most.

1. példa

Hány liter zsír van 25 liter 2,8%-os tejben?

A 2,8%-os zsírtartalom azt jelenti, hogy az 1 liter $\frac{2,8}{100}$ része zsír. Így a 25 liter tej zsírtartalma $25 \cdot \frac{2,8}{100} = 0,7$ liter.

2. példa

40 liter 1,5%-os tejhez mennyi 3,6%-os tejet kell önteni, hogy 2,8%-os tejet kapjunk?

Jelöljük a 3,6%-os tej mennyiségét x literrel! Készítsünk az adatainkról táblázatot!

	Mennyiség (liter)	Töménység (%)	Zsírtartalom
1,5%-os tej	40	1,5	$40 \cdot 0,015$
3,6%-os tej	x	3,6	$x \cdot 0,036$
Összeöntés után 2,8%-os tej	$40 + x$	2,8	$(40 + x) \cdot 0,028$

Narancssárgával jelöltük azokat a kifejezéseket, amelyeket az adatok alapján számítottunk ki.

Az egyenlet felírásánál azt használjuk fel, hogy az összeöntés után a tejzsír mennyisége összeadódik.

$$\begin{aligned} 40 \cdot 0,015 + x \cdot 0,036 &= (40 + x) \cdot 0,028 \quad / \cdot 1000 \\ 40 \cdot 15 + x \cdot 36 &= (40 + x) \cdot 28 \\ 600 + 36x &= 1120 + 28x \\ x &= 65 \end{aligned}$$

A 3,6%-os tejből 65 litert kell az 1,5%-os tejhez önteni.

3. példa

Egy gyümölcsfeldolgozó üzemben a gépsor kétfajta gyümölcslét állít elő: 100%-osat és 40%-osat.

60 liter 100%-os és 80 liter 40%-os gyümölcslevet összeöntve, hány százalékos gyümölcslevet kapunk?

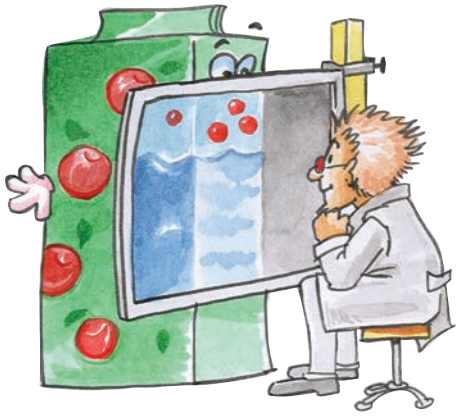
A 100%-os gyümölcslé azt jelenti, hogy gyümölcsből kinyert levet nem hígítják vízzel, nem ízesítik és nem színezik mesterségesen.

A 40%-os gyümölcslé 0,4 része gyümölcs, 60%-a egyéb anyag, legnagyobb részben víz. Ez azt jelenti, hogy 80 liter 40%-os gyümölcslében $80 \cdot 0{,}4 = 32$ liter a tiszta gyümölcstartalom, a többi víz.

Jelöljük a keverék töménységét x%-kal!

Foglaljuk adatainkat táblázatba!

	Mennyiség (liter)	Töménység (%)	Tiszta gyümölcstartalom (liter)
I. típus	60	100	$60 \cdot \frac{100}{100} = 60 \cdot 1 = 60$
II. típus	80	40	$80 \cdot \frac{40}{100} = 80 \cdot 0{,}4 = 32$
Összeöntés után	**140**	x	$140 \cdot \frac{x}{100}$



Ha összeöntjük a gyümölcsleveket, az egyenlet felírása során ismét azt használjuk fel, hogy a tömény anyagmennyiség (itt most a gyümölcs) megmarad.

$$60 + 32 = 140 \cdot \frac{x}{100}$$

$$92 = 140 \cdot \frac{x}{100} \qquad / \cdot 100$$

$$9200 = 140x \qquad / : 140$$

$$65{,}7 \approx x$$

Az összeöntés után kapott gyümölcslé 65,7%-os.

Feladatok

K1 Mennyi sót tartalmaz 1600 liter 0,4%-os tengervíz?

K2 Melyikben van több cukor: 7,5 kg 15%-os vagy 5,5 kg 22%-os cukoroldatban?

K3 24 liter 0,4%-os tengervízhez mennyi vizet kell hozzáönteni, hogy 0,15%-os sótartalmú vizet kapjunk?

K4 0,7 literes 100%-os gyümölcsszörphöz mennyi vizet kell önteni, hogy 40%-os üdítőt kapjunk?

K5 0,8 liter 20%-os ecethez mennyi vizet kell adnunk, hogy 15%-os töménységű ecetet kapjunk?

K6 Kémiai kísérletnél ugyanannak az anyagnak különböző töménységű oldatát öntjük össze.

A 40 kg 42%-os oldathoz hány kg 25%-os oldatot kell hozzáönteni, hogy 30%-os oldatot kapjunk?

K7 Összeöntöttünk 2 dl 52%-os és 3 dl 36%-os alkoholt. Milyen töménységű alkoholt kaptunk?



Mozgásos feladatok

A mozgásos feladatok megoldása során mindennapi tapasztalatunkat, fizika tantárgyi ismereteinket is fel kell használnunk. Ha egy mozgó test sebessége állandó, akkor a test által megtett út egyenesen arányos az eltelt idővel, azaz kétszer, háromszor, ..., n-szer annyi idő alatt kétszer, háromszor, ..., n-szer több utat tesz meg.

Ezt képlettel megadva: $s = v \cdot t$, ahol s a megtett utat, v a test állandó nagyságú sebességét, t az eltelt időt jelenti. A képletet más formában is kifejezhetjük: ha a sebességet fejezzük ki, akkor $v = \frac{s}{t}$, ha az időt, akkor $t = \frac{s}{v}$ alakját használjuk.

Nem három képletről, hanem egy összefüggés háromféle alakjáról van szó.

1. példa

Szombathely és Budapest távolsága 240 km. Menetrend szerinti buszjárat indul egyszerre Szombathelyről Budapestre, illetve Budapestről Szombathelyre. (Tételezzük fel, hogy egyenes pályán mennek a buszok). A Szombathelyről induló busz átlagsebessége 80 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a Budapestről indulóé 70 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$.

a) Hol találkoznak? *b)* Mikor találkoznak?

Mozgással kapcsolatos feladatok megoldása során is célszerű táblázatot készíteni az adatokról.

I. megoldás. Mivel azonos időpontban indultak, ezért a találkozásig eltelt idő mindkét autóbusz esetében ugyanannyi. Legyen ez most az ismeretlen. Jelöljük t-vel!

	Megtett út, s (km)	Eltelt idő, t (óra)	Sebesség, v $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$
Szombathelyről Budapest felé tartó	$80 \cdot t$	t	80
Budapest felől Szombathelyre tartó	$70 \cdot t$	t	70

Ezután a táblázat hiányzó celláit a mozgást leíró összefüggés, $s = v \cdot t$ felhasználásával kitöltjük.

A kapott kifejezések közötti összefüggést a szövegből olvassuk ki. Most azt használhatjuk fel, hogy a két busz a találkozásig megtette a 240 km-t.

$80t + 70t = 240$

$t = 1{,}6$ A találkozásig 1,6 óra telt el.

A Szombathelyről induló busz a találkozásig $s_1 = 80 \cdot 1{,}6$ km-t, azaz 128 km-t tesz meg.

A Budapestről induló busz a találkozásig $s_2 = 70 \cdot 1{,}6$ km-t, azaz 112 km-t tesz meg.

Ellenőrzés: A két busz által megtett út összege 240 km, tehát a kapott megoldás jó.

II. megoldás. Most jelöljük a Szombathelyről induló busz megtett útját s-sel. Ekkor a másik busz a találkozásig $(240 - s)$ km-t tett meg. Töltsük ki táblázatot!

	Megtett út, s (km)	Eltelt idő, t (óra)	Sebesség, v $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$
Szombathelyről Budapest felé tartó	s	$\frac{s}{80}$	80
Budapest felől Szombathelyre tartó	$240 - s$	$\frac{240 - s}{70}$	70

A táblázat kitöltéséhez a $t = \frac{s}{v}$ alakot választottuk. Az egyenlet felírásához azt használjuk fel, hogy a két autóbusz menetideje a találkozásig egyenlő.

A Szombathelyről induló busz 128 km-t, a Budapestről induló busz 112 km-t tesz meg.

$$\frac{s}{80} = \frac{240 - s}{70} \qquad / \cdot 560$$
$$7s = 8 \cdot (240 - s)$$
$$15s = 1920$$
$$s = 128$$

A menetidő: $\frac{s}{80} = \frac{128}{80} = 1{,}6$ óra, illetve $\frac{240 - s}{70} = \frac{112}{70} = 1{,}6$ óra, azaz a két menetidő egyenlő.

A két bemutatott megoldás során más-más mennyiséget jelöltünk ismeretlennel. Ebből következően a felírt egyenlet is más lett. A végeredmény azonban mindkét esetben ugyanannyi.

3.

2. példa

Egymástól 20 km-re lévő faluból elindul egymással szembe két kerékpáros. Peti 10 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel ment egy órát, majd defekt miatt fél óra megállásra kényszerült.

a) Mekkora sebességgel kellett mennie a hátralévő útszakaszon, ha az indulástól számítva 2,3 óra múlva érkezett meg?

b) Peti indulásakor Tamás a másik faluból indult el 8 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel. Mikor találkoztak? Oldjuk meg grafikus úton a feladatot!

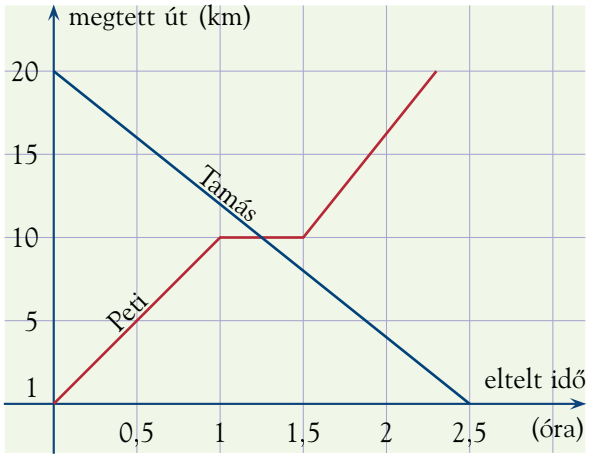
a) Petinek 0,8 óra alatt kellett megtennie 10 km-t.

Ezért az útjának második felében $v = \frac{10}{0{,}8} = 12{,}5$ $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel kellett kerékpároznia.

b) Készítsük el az adatok alapján a két fiú út-idő diagramját közös koordináta-rendszerben!

A grafikonok metszéspontjának első koordinátája adja a megoldást.

Ha arányosan ábrázoljuk az adatokat, akkor leolvashatjuk a megoldást. Az ábra alapján azt látjuk, hogy Peti kényszerpihenőjének felében haladt el mellette Tamás. Nézzük meg, jó-e a sejtésünk!



Az eltelt idő 1,25 óra. Ezalatt Peti 10 km-t tett meg. Tamás sebessége 8 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$. 1,25 óra alatt 10 km-t tett meg.

Mivel induláskor a távolságuk 20 km volt, ezért valóban 1,25 óra múlva találkoztak.

Feladatok

K1 Egy gyalogos sebessége 4 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$. Tőle 10 km-re, vele egy irányban elindul egy kerékpáros 8 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel. Mikor éri utol a kerékpáros a gyalogost?



K2 Egymástól 630 m távolságra két test mozog egymással szembe. Egyik sebessége 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másik test sebessége 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mikor és hol találkoznak?

K3 Két település között 57 km a távolság. Egy teherszállító autó 72 perc alatt teszi meg az utat, egy személyautó 48 perc alatt.

a) Mekkora a járművek sebessége?

b) Hol találkoznak, ha a személyautó 20 perccel később indul, mint a tőle 57 km-re lévő településről induló teherszállító autó?

K4 Egy futópálya hossza 450 m. Bori minden reggel fut néhány kört. Sebessége 3,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Egyik reggel együtt indulnak Ádámmal, aki 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel fut.

a) Mikor körözi le Ádám Borit?

b) Hányadik körben történik ez meg?

K5 Egy kirándulás során a hegyre felfelé vezető utat egy turistacsoport 30 perccel hosszabb idő alatt teszi meg, mint a lefelé vezető utat. Az odafelé vezető úton a csoport sebessége 3 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a visszafelé úton 5,5 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$.

a) Mennyi ideig tart az út felfelé, illetve lefelé?

b) Mekkora távolságot kell megtenni, míg felérnek a hegyre?

K6 Orsi elindult otthonról gyalog 5 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel. Meglátogatta a 3 km-re lévő nagyit, és egy órát beszélgettek. Orsi a nagyitól koncertre ment. Testvére, Emese később indult 40 perccel, sebessége 4 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$. Utolérte-e a testvérét a nagymamánál?

Oldd meg grafikusan is a feladatot!

K7 Két állomás között az utat egy tehervonat 4 óra alatt, az intercity 2 óra 45 perc alatt teszi meg. Az egyik sebessége 20 km-rel nagyobb, mint a másiké.

a) Mekkora a sebessége a két szállítóeszköznek?

b) Milyen távolságra van a két állomás?

Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok

(Emelt szintű, választható tananyag)

1. példa

A Balaton egy partszakaszát megtisztítják a nádtól. Két nádaratót gép áll rendelkezésre. Egyik gép egyedül 10 nap alatt, a másik gép egyedül 15 nap alatt vágná le a kijelölt területről a nádat.

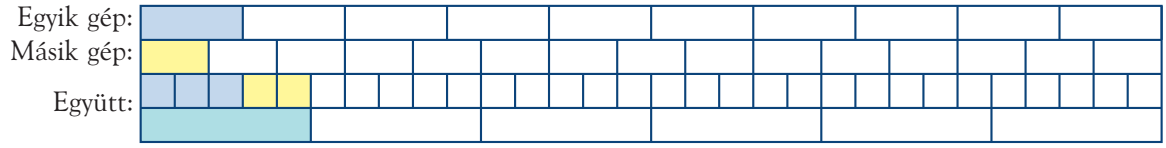
Mennyi idő alatt aratja le a nádat a két gép együtt?

Becsüljük meg a várható eredményt!

Mivel a két gép együtt dolgozik, ezért biztos, hogy 10 napnál hamarabb végeznek.

I. megoldás: következtetéssel.

A nagyobb teljesítményű gép 1 nap alatt a terület $\frac{1}{10}$ részét, a kisebb teljesítményű a terület $\frac{1}{15}$ részét aratja le. 1 nap alatt a két gép a terület $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ részét tisztítja meg.



A teljes terület megtisztításához hatszor ennyi időre, azaz 6 napra van szükség.

II. megoldás: egyenlet felírásával.

Jelöljük x-szel a nádaratáshoz szükséges napok számát, ha a két gép együtt dolgozik.

Az adatok rendszerezéséhez készítsünk táblázatot!

	A munkavégzéshez szükséges idő	Az 1 nap alatt elvégzett munka mennyisége	Az x nap alatt elvégzett munka mennyisége
I. gép	10 nap	$\frac{1}{10}$ rész	$x \cdot \frac{1}{10} = \frac{x}{10}$ rész
II. gép	15 nap	$\frac{1}{15}$ rész	$x \cdot \frac{1}{15} = \frac{x}{15}$ rész

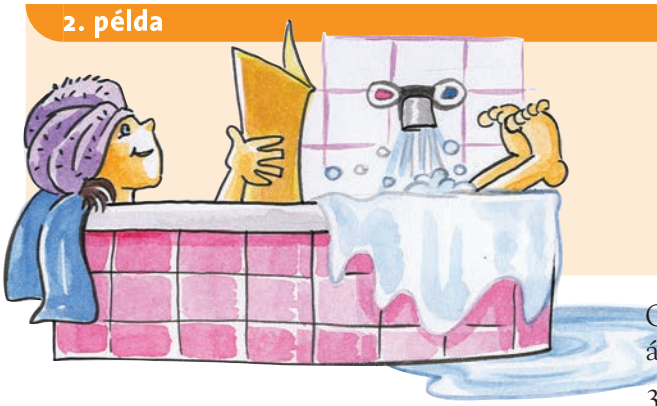
Ha az egyik gép $\frac{x}{10}$-ed részét, a másik gép az $\frac{x}{15}$ részét végzi el, akkor együtt elvégzik az egész munkát, amit tekintsünk egységnyinek.

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1 \qquad / \cdot 30$$
$$2x + 3x = 30$$
$$x = 6$$

Együtt 6 nap alatt végzik el az adott területen a nádvágást.

Ellenőrzés: Az I. gép 6 nap alatt a terület $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ részét, a II. gép 6 nap alatt a terület $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ részét tisztítja meg. $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, tehát együttesen az egész területet megtisztítják.

2. példa



Egy pezsgőfürdő medencéjét a hideg vizes csapból 3 óra 20 perc alatt lehet teletölteni. Ha csak a meleg vizes csap van nyitva, akkor a medence 5,4 óra alatt telik meg. Mennyi idő alatt telik meg a fürdőmedence, ha mindkét csap nyitva van?

Oldjuk meg a feladatot egyenletfelírással! Váltsuk át a megadott időket percre:

3 óra 20 perc = 200 perc; 5,4 óra = 324 perc.

Jelöljük x-szel azt az időt, ami a medence megtöltéséhez kell, ha mindkét csap nyitva van!

	Egyedül ennyi idő alatt tölti meg a medencét (perc)	1 perc alatt a medence ennyi része telik meg	x perc alatt megtöltött rész
Hideg vizes csap	200	$\frac{1}{200}$ rész	$\frac{x}{200}$ rész
Meleg vizes csap	324	$\frac{1}{324}$ rész	$\frac{x}{324}$ rész

A két csap teletölti a medencét, ezért:

$$\frac{x}{200} + \frac{x}{324} = 1 \quad / \cdot 16\,200$$

$$81x + 50x = 16\,200$$

$$x \approx 123{,}7.$$

A pezsgőfürdő medencéje körülbelül 124 perc alatt telik meg.

Feladatok

K1 Két diák szórólapok terjesztését vállalja egy diákmunkát adó cégnél. 5000 db reklámújságot kell kihordaniuk. Gábor óránként 150 db-ot, Roland óránként 220 db-ot tud kihordani.

Mennyi idő alatt végeznek a munkával, ha mindketten különböző területen osztják a reklámújságot?

K2 Szorgos néninek otthon végezhető munkát ajánlanak. Kézzel készíthető fülbevalót kell összerakni. Szorgos néni, miután beletanult, egy óra alatt 12 db-ot tud elkészíteni. Lánya is megtanulja, neki egy óra alatt 8 db-ot sikerül elkészíteni.

Ha napi öt órát dolgoznak együtt, végeznek-e egy hét alatt a határidőre vállalt 650 db fülbevaló elkészítésével?



K3 Házépítés után a család 10 m^3 földet rendelt a virágoskert kialakításához. Apa egyedül 18 óra alatt hordaná el a földet a kijelölt területre, a fia 24 óra alatt. Ha együtt dolgoznak, mennyi idő szükséges a föld elhordásához?

K4 Egy játszótér térkőburkolását az egyik munkacsoport egyedül 5 nap alatt végezné el. Egy másik cég 8 nap alatt végezné el egyedül. Mivel határidőre kell készen lenni, ezért a két csapat együtt dolgozik. Mennyi idő alatt végeznek a munkával?

K5 Egy fürdőmedencét három csapon keresztül lehet feltölteni. Ha csak egy csapot nyitunk meg, akkor az egyik 18 óra alatt, a másik 15 óra alatt, a harmadik 10 óra alatt tölti fel a medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mindhárom csap nyitva van?

Szöveges feladatok a geometria témaköréből

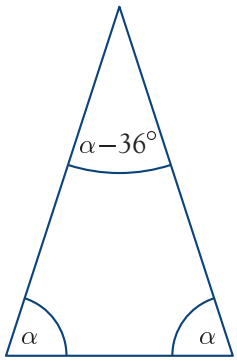
Olyan szöveges feladatokat vizsgálunk, amelyek kapcsolódnak geometriai ismereteinkhez. Célszerű általában ábrát készíteni a feladat szövegéhez, ez ötletet adhat a megoldáshoz. A feladat adatain kívül gondoljuk végig, milyen egyéb ismeretekkel rendelkezünk a feladat szövegével kapcsolatban! Ha egyenlettel oldjuk meg a feladatot, mindig írjuk fel, mit jelöltünk ismeretlennel, és ne feledkezzünk meg az ellenőrzésről!

1. példa

Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei, ha az egyik szöge 36°-kal nagyobb egy másik szögénél?

Az egyenlő szárú háromszögnek két különböző nagyságú szöge lehet. Tudjuk, hogy a belső szögek összege 180°. Két esetet különböztethetünk meg.

I. eset: ha az alapon levő szögek a nagyobbak. Ekkor ezeket jelölve α-val, a szárak által bezárt szög: $\alpha - 36°$.



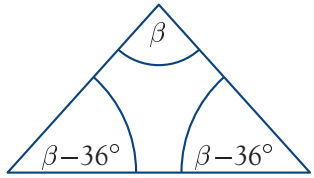
A belső szögek összegét így írhatjuk fel:

$$\alpha + \alpha + (\alpha - 36°) = 180°$$
$$3\alpha - 36° = 180°$$
$$3\alpha = 216°$$

$\alpha = 72°$ és $\alpha - 36° = 72° - 36° = 36°$. Tehát a háromszög belső szögei: 72°; 72°; 36°.

Ezekre a szögekre teljesül a feltétel, valamint az összegük is 180°.

II. eset: ha a szárak által bezárt szög a nagyobb. Ezt a szöget jelöljük β-val. Ekkor az alapon levő szögeket $\beta - 36°$-kal jelölhetjük.



A belső szögek összegét így írhatjuk fel:

$$\beta + 2(\beta - 36°) = 180°,$$
$$3\beta - 72° = 180°.$$

Az egyenletből: $\beta = 84°$ a szárak által bezárt szög. Az alapon levő szögek $\beta - 36° = 48°$-osak.

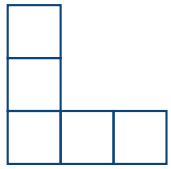
Tehát a háromszög belső szögei: 48°; 48°; 84°.

Ez a megoldás is kielégíti a feltételt.

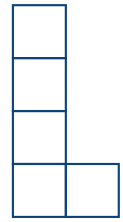
2. példa

Öt egybevágó négyzetből L alakú területet alakítottunk ki. A sokszög kerületének centiméterben kifejezett mérőszáma megegyezik területének négyzetcentiméterben kifejezett mérőszámával. Mekkora lehet egy négyzet oldala cm-ben mérve?

L alakot kaphatunk, ha mind függőlegesen, mind vízszintesen 3-3 négyzetből áll:



vagy vízszintesen 2, függőlegesen 4 négyzetből áll.



Az L alakú területet – mindkét esetben – összesen 12 négyzetoldal határolja, mivel 2-2 négyzet 3-3 oldallal, 3-3 négyzet 2-2 oldallal növeli a kerületet.

Ezért jelölhetjük a kerületét $12x$-szel, ahol x egy négyzet oldala cm-ben mérve.

Az alakzat területe 5 négyzet területével egyezik meg, $T = 5x^2$. A feltételek szerint:

$$12x = 5x^2$$
$$12 = 5x$$
$$\frac{12}{5} = 2{,}4 = x$$

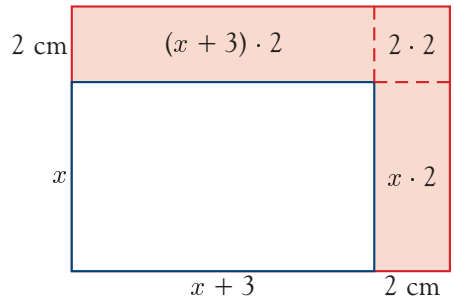
Tehát egy négyzetoldal 2,4 cm hosszúságú.

Ellenőrzés: Az L alak kerülete: $12 \cdot 2{,}4$ cm $= 28{,}8$ cm, a területe: $5 \cdot 2{,}4^2 = 28{,}8$ cm^2.

3. példa

Egy téglalap egyik oldala 3 cm-rel hosszabb, mint a másik oldal. Ha mind a két oldalt 2-2 cm-rel megnöveljük, akkor a téglalap területe 30 cm^2-rel nő. Mekkorák a téglalap oldalai?

Készítsünk ábrát! A téglalap oldalait cm-ben mérve x-szel és $(x + 3)$-mal jelölhetjük.



I. megoldás: Írjuk fel a növeléssel kapott területeket, ezt az ábrán is feltüntettük!

$$(x + 3) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + x \cdot 2 = 30$$
$$4x + 10 = 30$$
$$x = 5$$

Tehát a négyzet oldalainak hossza 5 cm és 8 cm.

Ellenőrzés: Az eredeti terület 5 cm $\cdot$ 8 cm $= 40$ cm^2.

Az új terület: $(5 + 2)$ cm $\cdot$ $(8 + 2)$ cm $= 70$ cm^2. A terület növekedése valóban 30 cm^2.

II. megoldás: Írjuk fel a megnövelt téglalap területét kétféleképpen!

$T = x(x + 3) + 30$, illetve $T = (x + 2)(x + 3 + 2)$. Ezek egyenlősége miatt:

$$x(x + 3) + 30 = (x + 2)(x + 5)$$
$$x^2 + 3x + 30 = x^2 + 5x + 2x + 10$$
$$3x + 30 = 7x + 10$$
$$20 = 4x$$
$$5 = x$$

A megoldás hasonlóan fejezhető be, mint az előző esetben.

Feladatok

K1 Egy 24 cm kerületű egyenlő szárú háromszögben az oldalak aránya 2 : 3. Mekkorák a háromszög oldalai?

K2 Egy négyszög egyik belső szöge derékszög. A további belső szögei közül a legkisebb szögének kétszerese a harmadikkal, az ismert szögének $\frac{4}{3}$-a a negyedikkel egyenlő. Mekkorák a négyszög szögei?

K3 Egy derékszögű háromszög befogóinak különbsége 2 cm. Ha a befogókat 4-4 cm-rel növeljük, akkor a háromszög területe 32 cm^2-rel nő. Mekkorák az eredeti háromszög befogói?

K4 Van-e olyan konvex sokszög, amelynek összesen 275 átlója van?

E5 Egy háromszög két szöge 68° és 32°. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcsból induló magasság és belső szögfelező?

K6 Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó magasság a másik szárral 15°-kal kisebb szöget zár be, mint az alapon levő szög. Mekkorák a háromszög szögei?

E7 Egy négyzet oldalának hossza cm-ben mérve egész szám. 1 egység oldalhosszúságú négyzetekre bontottuk az oldalakkal párhuzamosan berajzolt szakaszokkal. Ezen szakaszok hosszának összege 112 cm. Mekkora a négyzet oldala?

Kombinatorikai feladatok

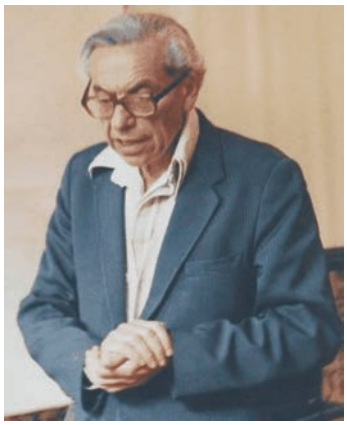
A kombinatorika a matematikának viszonylag fiatal ága. Számos jeles magyar matematikus képviselője volt és van szerte a világban. Az egyik legkiemelkedőbb, legismertebb közülük Erdős Pál (1913–1996).

Matematikai Nobel-díj nincs, a matematikai tudományban a legrangosabb díj a Wolf-díj. Keress az interneten kombinatorikával foglalkozó mai magyar matematikusokat! Találtál-e köztük Wolf-díjast?

A kombinatorika egyik elemi feladata a leszámlálás: elemek sorrendjének, elemek kiválasztási lehetőségei számának meghatározása. A kombinatorika eredményeit a valószínűségszámításban is felhasználjuk.

Nézz utána Erdős Pál munkásságának az interneten!

Elemek sorba rendezésével már a korábbi években is foglalkoztunk.



Erdős Pál (1913–1996)

(A fotót T. Sós Vera bocsátotta rendelkezésünkre)

1. példa

Állíts elő az 1 2 3 4 számkártyákból négyjegyű számokat úgy, hogy a számokban minden kártya pontosan egyszer szerepeljen! Hány számot találtál?

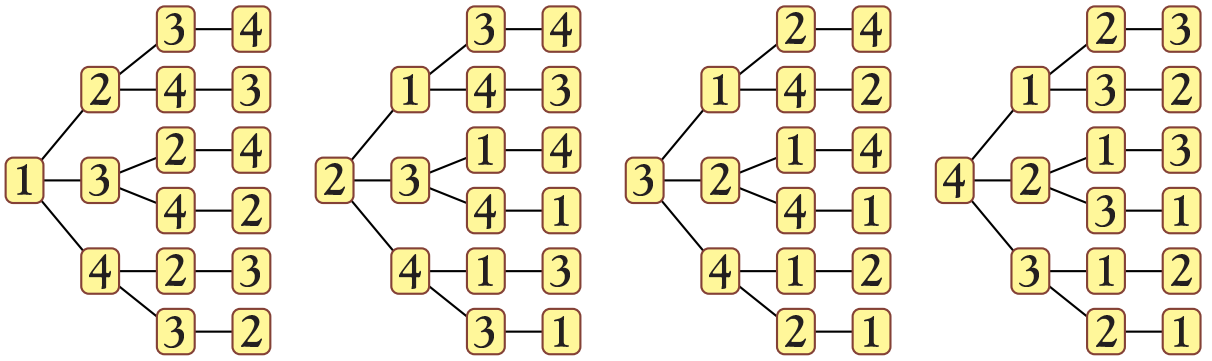
Az ezres helyi értékre 4-féle kártya kerülhet, az 1, a 2, a 3 és a 4.

Bármelyik is kerül oda, a százas helyi értékre már csak 3 kártya közül választhatunk. Mind a 4 lehetőségre adódik 3 lehetőség. Ez $4 \cdot 3 = 12$ eset.

Akármelyik két kártyát választottuk is az első két helyi értékre, a tízes helyi értékre már csak 2 kártya közül választhatunk. Mind a 12 lehetőséghez 2-2 kártya jöhet: $12 \cdot 2 = 24$ eset.

Az utolsó helyi értékre egyetlen kártya marad, nincs választásunk. Vagyis összesen 24 sorrendje lehet a 4 kártyának.

A megoldás menete szemléletesen:



Az ilyen ábrákat **fadiagramnak (fagráfnak)** nevezik, mert egy fa ágaira emlékeztetnek.

Az első helyre 4-, a második helyre 3-, a harmadik helyre 2-, a negyedik helyre 1-féle kártya közül választottunk. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sorrendet találtunk.

2. példa

A könyvesboltban az egyik polcon 5 regény van: a *Légy jó mindhalálig* három példányban, a *Rokonok* és *A Noszty fiú esete Tóth Marival* egy-egy példányban.

A vevők napközben összekeverik a köteteket. Hányféle sorrendje lehet az 5 könyvnek, ha a három egyforma kötetet nem tudjuk megkülönböztetni?

Az 5 könyvnek $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sorrendje lehetséges, de ezek közül azokat, amelyekben a 3 egyforma kötet cserélődik, nem tudjuk megkülönböztetni. A 3 egyforma kötetnek $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sorrendje van. Akárhogy helyezkednek is el az 5 könyv között, mindig lesz 6 sorrend, amelyeket nem tudunk megkülönböztetni. Vagyis csak minden 6-odik sorrend lesz látszatra is különböző: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$ $= 20$ sorrend.

Soroljuk föl a lehetséges sorrendeket! (Az egyes könyveket L, R, N fogja jelölni.)

L, L, L, R, N	L, L, L, N, R	L, L, R, L, N	L, L, N, L, R	L, R, L, L, N
L, N, L, L, R	R, L, L, L, N	N, L, L, L, R	L, L, R, N, L	L, L, N, R, L
L, R, L, N, L	L, N, L, R, L	R, L, L, N, L	N, L, L, R, L	L, R, N, L, L
L, N, R, L, L	R, L, N, L, L	N, L, R, L, L	R, N, L, L, L	N, R, L, L, L

A kombinatorika egy másik feladata annak a meghatározása, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani bizonyos elemek közül valahányat.

3. példa

Az osztály 32 tanulója futóversenyt szervez. Hányféleképpen alakulhat az első három helyezett?

Az első helyre 32 gyerek futhat be. Minden egyes lehetőséghez 31 gyerek érkezhet be másodiknak, ez $32 \cdot 31$ lehetőség. A harmadik helyen – minden eddigi helyezés esetén – 30 befutó lehet, azaz $32 \cdot 31 \cdot 30$ sorrend lehetséges.

4. példa

Azok, akik gimnáziumban tanulnak tovább, a későbbiek során kiválaszthatnak három tantárgyat, amelyet emelt szinten (magasabb óraszámban) tanulnak.

Hányféle fakultációt lehet összeállítani, ha 5 tantárgy közül lehet választani?

Egy tanuló elsőként 5-féle tárgyat választhat. Bármelyiket választja is, minden lehetőséghez további 4 tárgyat választhat másodikként. Összesen tehát $5 \cdot 4$-féleképpen választhatja ki az első két tárgyat. Minden lehetőséghez harmadikként 3-féle tárgy választható, vagyis összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$-féleképpen választhatja ki a három tárgyat.

Igen ám, de az teljesen mindegy, hogy melyik tárgyat hányadiknak veszik fel, vagyis a 3 tantárgy 6-féle sorrendje közül elegendő csak egyet (minden 6-odikat) tekinteni. Ez a 60 esetnek a 6-odrészét jelenti: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$.

Jelöljük a tárgyakat A, B, C, D, E betűkkel! Soroljuk fel az összes választási lehetőséget!
A, B, C; A, B, D; A, B, E; A, C, D; A, C, E; A, D, E; B, C, D; B, C, E; B, D, E; C, D, E.

3.

Feladatok

K1 Hány háromjegyű szám készíthető az alábbi számkártyákból?

a) 1; 2; 3; *b)* 0; 1; 2; *c)* 1; 1; 2.

E2 Hány háromjegyű szám készíthető, ha az alábbi számkártyák közül választhatsz? (Persze csak hármat.)

a) 1; 1; 2; 2; *b)* 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3.

A3 Hányféle kétgombócos fagyit lehet kérni, ha a cukrászdában vanília, csokoládé, szamóca, málna, őszibarack ízesítésű fagylaltot árusítanak? Mindegy, hogy a tölcsérben milyen sorrendben vannak.

K4 Hányféle kétgombócos fagyit lehet kérni a cukrászdában, ha meggy, dinnye és alma ízesítésű fagylalt közül választhatunk, és nem mindegy, hogy a tölcsérben melyik íz van felül, melyik alul?

K5 Hányféle sorrendben vehetem ki a könyvtárból az ott található 5 különböző Fekete István-regényt?

E6 *a)* Hányféleképpen vehetek ki a könyvtár 5 különböző Fekete István-regénye közül 3-at?

b) Hányféle különböző sorrendben vehetek ki a könyvtárból 3 könyvet az 5 különböző Fekete István-regény közül?

E7 3 fiú és 3 lány népi táncolni jár. Hányféle különböző párt tudnak alkotni?

K8 6 gyerek moziba megy. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé egy sorba?

K9 Az osztályban 10 gyerek egyletet alakít. Választanak egy elnököt, egy titkárt és egy jegyzőt. Hányféle választási végeredmény lehet?

K10 Készíts kiselőadást egy magyar matematikus életéről!

E11 A lépcsőket néha egyesével, néha kettesével szedem, amikor futok felfelé. Hányféle különböző módon szaladhatok fel a 10 fokú lépcső tetejére?

E12 A futóversenyen 8-an indultak. Hányféleképpen alakulhatott az első három helyezés, ha lehetett döntetlen is?

Egybevágósági transzformációk

Az eddig tanult transzformációk (tengelyes és középpontos tükrözés) áttekintése után megismerkedünk az eltolással és az elforgatással. Megvizsgáljuk ezek tulajdonságait. Azután a középpontos hasonlósággal (kicsinyítés, nagyítás) ismerkedünk meg. Látni fogjuk, hogy a minket körülvevő világban nemcsak egybevágóság van, hanem hasonlóság is.

Emlékszel?

Az előző években megtanultuk, hogy a transzformáció átalakítást, átváltoztatást jelent. Átalakításokat végezhetünk síkban, térben. A pontok helyének megváltoztatásával létrejövő átalakításokat **geometriai transzformációnak** neveztük. Ezek közül kiemelten foglalkoztunk az **egybevágósági (távolságtartó) transzformációkkal**.

Két síkbeli alakzat akkor **egybevágó**, ha fedésbe hozhatók egymással. Vagyis ha találunk olyan egybevágósági transzformációt (vagy transzformációkat), amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Ha egy transzformáció minden alakzatot vele egybevágó alakzatba transzformál, akkor egybevágósági transzformációnak nevezzük.

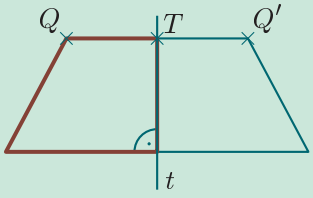
A **tengelyes tükrözés** és a **középpontos tükrözés** is egybevágósági transzformáció.

Röviden felelevenítjük ezt a két transzformációt.

Tengelyes tükrözésnél megadjuk a sík egy t egyenesét, a tükrözés tengelyét.

Ha a P pont illeszkedik a t egyenesre, akkor a képe önmaga.

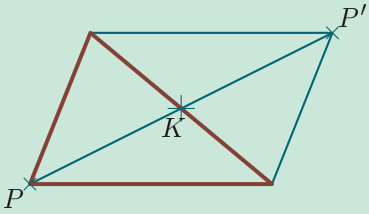
Ha egy Q pont nem illeszkedik a t tengelyre, akkor a Q pontból merőlegest állítunk a tengelyre. Ennek a talppontját elnevezzük T-nek. A QT egyenesre a T pontból, a Q-val ellentétes irányban, felmérjük a QT szakaszt. A kapott pont lesz a Q pont Q' képe.



Középpontos tükrözésnél megadjuk a sík egy K pontját, a tükrözés középpontját.

A K pont képe önmaga.

Ha egy P pont nem illeszkedik K-ra, akkor a P pont képe a KP egyenesen az a pont lesz, amelyet úgy kapunk, hogy erre az egyenesre a K pontból, a P-vel ellentétes irányban, felmérjük a KP szakaszt.



További egybevágósági transzformációkkal is megismerkedünk. Azt viszont már most is látjuk, hogy két egybevágó alakzathoz nem egyszerű megtalálni a megfelelő egybevágósági transzformációt. Jó lenne, ha enélkül is lehetne dönteni az egybevágóságról.

Bebizonyítható, hogy két háromszög egybevágó ($ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$), ha

***a)* oldalaik hossza páronként egyenlő;**

***b)* két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és az ezek által bezárt szögek egyenlők;**

***c)* egy-egy oldaluk hossza és a rajtuk fekvő két szögük páronként egyenlő;**

***d)* két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és a két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlők.**

Az állításokat a szokásos jelöléssel is leírjuk.

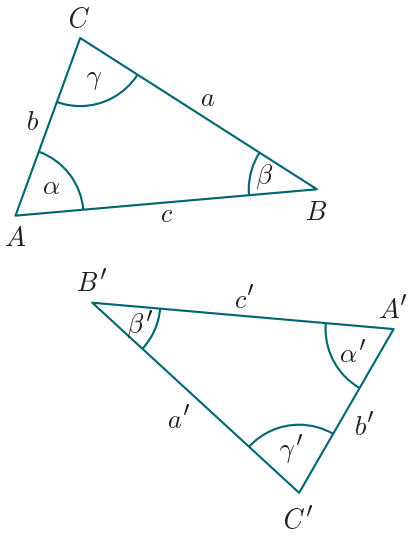
Ha $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Ha $a = a'$, $b = b'$ és $\gamma = \gamma'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Ha $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Ha $a=a'$, $b=b'$, $a>b$ és $\alpha=\alpha'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Ha ezek közül valamelyik teljesül, akkor a két háromszög minden megfelelő adata egyenlő, vagyis a többi feltétel is teljesül.



Két sokszög biztosan egybevágó, ha

a) megfelelő oldalaik hossza és megfelelő átlóik hossza egyenlő;

b) megfelelő oldalaik hossza és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

4.

Feladatok

K1 Rajzolj egy deltoidot! Tükrözd

a) az egyik oldalegyenesére;

b) tükrözd mindkét átlójára;

c) egy olyan egyenesre, amely a deltoidot kettévágja, de egyetlen csúcsa sem illeszkedik rá!

K2 Rajzolj egy tompaszögű háromszöget! Tükrözd

a) az egyik hegyesszögnél lévő csúcsára;

b) a tompaszögnél lévő csúcsára;

c) egy olyan pontra, amely a háromszög belsejében van;

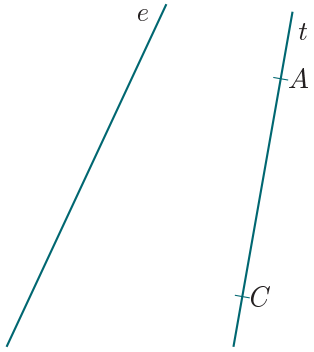
d) a leghosszabb oldal felezőpontjára!

K3 Rajzolj két egyenlő sugarú kört! Szerkessz olyan

a) egyenest; *b)* pontot,

amelyre tükrözve az egyik kört, megkapjuk a másikat!

K4 Szerkeszd meg az $ABCD$ rombuszt, ha a B csúcsa illeszkedik az e egyenesre! (ábra)



K5 Egy négyszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben: $A(2;5)$, $B(6;3)$, $C(4;-3)$, $D(-1;2)$. Add meg a képként kapott négyszög csúcsainak jelzőszámait, ha

a) az y tengelyre; *b)* az x tengelyre;

c) az első negyed szögfelezőjére; *d)* az origóra;

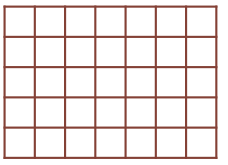
e) a $K(1;2)$ pontra tükrözünk!

K6 Szerkeszd meg a háromszöget, ha két oldalának hossza: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza pedig: $s_c = 3{,}2$ cm!

K7 Igazold, hogy ha két szabályos háromszögnek egyenlő a magassága, akkor a két háromszög egybevágó!

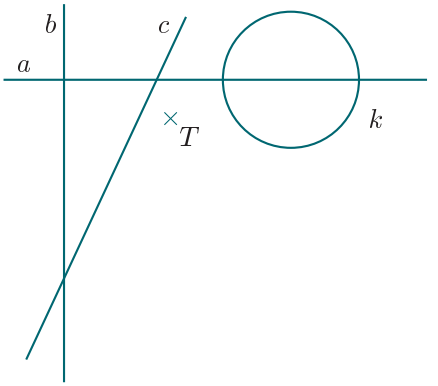
K8 Igazold, hogy ha két négyzetnek egyenlő hosszú az átlója, akkor a két négyzet egybevágó!

E9 *a)* Ágnes és Péter egy 5-ször 7-es négyzetrácson játszanak. Felváltva tesznek X-eket a négyzetekbe. Az veszít, aki már nem tud tenni. Ágnes kezdi a játékot. Hogyan kellene játszania, hogy ő nyerjen?



b) Ágnes és Péter egy téglalap alakú asztalon játszanak. Felváltva azonos méretű korongokat tesznek az asztalra. Az veszít, aki már nem tud tenni. Ágnes kezdi a játékot. Hogyan kellene játszania, hogy ő nyerjen?

E10 Az ábrán látható három egyenes és kör egy város úthálózatának részlete. A T pont egy torony helyét mutatja. András az a, Béla a b, Cili a c úton, Dani pedig a k körúton sétál. Lehet-e olyan pillanat, amikor négyen egy T középpontú paralelogramma csúcsaiban vannak? Ha lehet, akkor szerkeszd meg a helyüket!



K11 Egy háromszög három oldalának felezőpontját ismerjük. Szerkeszd meg a háromszöget!

E12 Egy ötszöget az egyik átlójával egy háromszögre és egy négyszögre vágjuk. Mutasd meg, hogy az átlón mindig lesz olyan pont, amelyik három oldal felezőpontjával paralelogrammát alkot!

4.

Vektorok

Vektorok bevezetése

A mindennapi életből vett példák segítségével látjuk be, hogy szükségünk van az irányított szakaszokra. Új műveletekkel ismerkedünk meg, amelyek segítségével majd új geometriai transzformációhoz is el fogunk jutni.

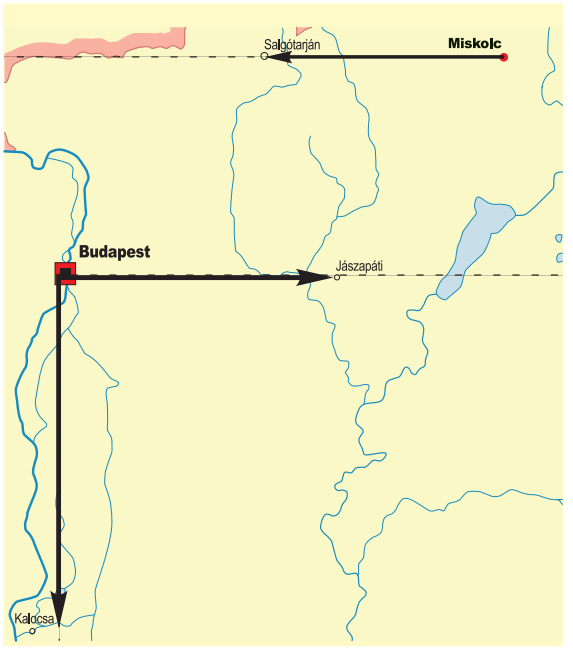
A következő mondatokhoz hasonlókat a mindennapi életben is hallhatunk.

Miskolctól nyugatra 70 km-t haladtunk.

Budapesttől délre 105 km-t utaztunk.

Budapesttől Debrecen irányában 80 km-t tettünk meg.

A térképen az adott várostól a megadott irányba jelölhetjük a távolságokat egy félegyenes segítségével. A félegyenesre rámérjük az adott távolságot, így megtaláljuk a keresett várost. A rajzunk szemléletesebb lesz, ha a végponthoz nyilat rajzolunk. Az említett példamondatokban leírtakat követve, eljutunk a következő városokhoz: Salgótarján, Kalocsa, Jászapáti. (Vigyázz, a megtett út és az elmozdulás nem azonos.)



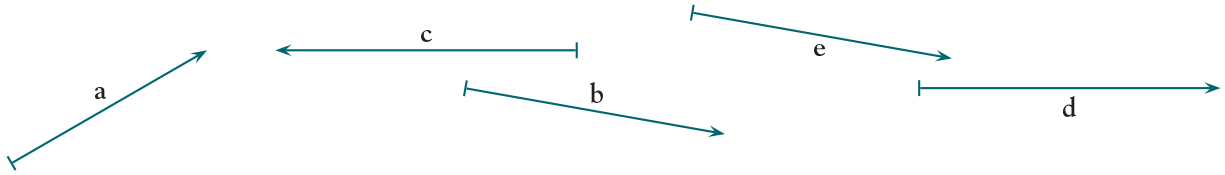
A térképen bejelölt szakaszoknak irányítást adtunk. Amikor egy szakasz két végét megkülönböztetjük, és az egyiket **kezdőpontnak**, a másikat **végpontnak** említjük, akkor **irányított szakaszról** beszélünk.

Fontos tudnivaló

Az AB irányított szakasszal vektort szemléltetünk, és így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$.



A kezdőpont és a végpont megnevezése nélkül is beszélhetünk vektorról. A következő ábrán látható nyilak is vektort szemléltetnek.



Egy melléírt vastag kisbetű mutatja, hogy vektorról van szó. Írásban ezt vagy föléírt kis nyíllal, vagy aláhúzással jelöljük: $\vec{a}$ vagy $\underline{a}$.

Két irányított szakasz akkor szemlélteti ugyanazt a vektort, ha **egyirányúak, párhuzamosak** és a **hosszuk is egyenlő.** Például $\mathbf{b} = \mathbf{e}$.

Az előző ábrán **c** vektor hossza megegyezett a **d** hosszával, párhuzamosak is, de az irányuk ellentétes volt. Az ilyen vektorokat **ellentett vektoroknak** nevezzük.

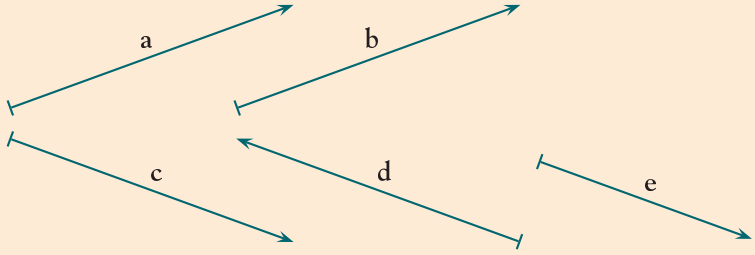
Az **a** ellentettjét $-\mathbf{a}$ jelöli. A kezdő- és végpontjával megadott $\overrightarrow{AB}$ vektor ellentettje a $\overrightarrow{BA}$ vektor.

Megjegyzés

Vektoroknak általában azokat a mennyiségeket nevezzük, amelyeknek irányuk és nagyságuk van. Geometriában a vektorok az irányított szakaszok.

1. példa

Keressük meg az egyenlő vektorokat az ábrán!



$\mathbf{a} = \mathbf{b}$, mert azonos az irányuk, párhuzamosak, és egyenlő a hosszúságuk.

A továbbiak nem lehetnek egyenlők az **a** vektorral, mert például az irányuk nem azonos.

A **b** vektorral nem egyenlő **c**, **d** és **e** egyike sem, mert ezek nem párhuzamosak **b**-vel.

A **c** vektor és a **d** vektor hossza megegyezik, párhuzamosak is, de az irányuk nem azonos, ezért nem egyenlők. A **c** vektor és az **e** vektorok párhuzamosak, az irányuk is megegyezik, de a hosszuk nem, ezért nem egyenlők.

A **d** és az **e** vektor nem egyenlő, hiszen sem a hosszuk, sem az irányuk nem azonos.

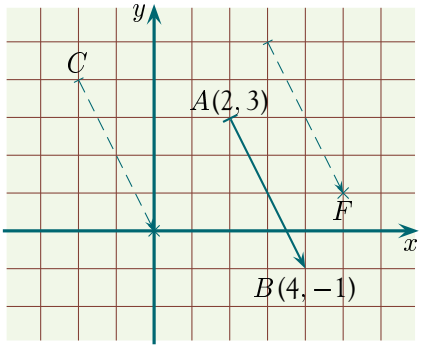
2. példa

Rajzoljuk meg a koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha $A(2;3)$, $B(4;-1)$! Hol van az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő vektor

a) D végpontja, ha a kezdőpontja $C(-2;4)$; *b)* E kezdőpontja, ha a végpontja $F(5;1)$?

A rajz mutatja az $\overrightarrow{AB}$ vektort.

Berajzoltuk a C és F pontokat is. Látjuk, hogy az A pontból indulva kettőt kell jobbra, majd négyet kell lefelé lépnünk. Ekkor érkezünk B pontba. Ez azt jelenti, hogy az A pont első koordinátáját növeljük kettővel, a második koordinátáját csökkentjük néggyel. Ezt figyelembe véve kapjuk a keresett pontok koordinátáit.



a) $D(-2+2; 4-4)$, vagyis $D(0; 0)$;

b) Most a végpont adott, ezért visszafelé kell lépnünk:

$E(5-2; 1+4)$, vagyis $E(3; 5)$.

4. Feladatok

K1 Rajzolj egy négyzetet! Szemléltesd a rajzodon a négy csúcs által meghatározott vektorokat! Hány vektort határoz meg a négy csúcs?

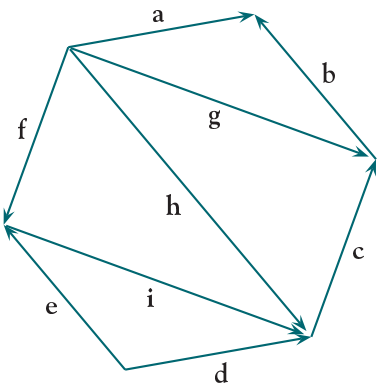
K2 Rajzolj egy $ABCD$ téglalapot! Az $ABCD$ téglalapra rajzold be a következő két vektort: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$! A téglalap csúcsainak felhasználásával add meg azokat a vektorokat, amelyek

a) egyenlők **b** vagy **c** valamelyikével;

b) ellentettek **b** vagy **c** valamelyikével;

c) **b** és **c** egyikével sem egyenlők, és egyikével sem ellentettek!

K3 Az ábrán egy szabályos hatszöget látsz. A jelölt vektorok közül válaszd ki az egyenlőket és az ellentetteket!



K4 Rajzold meg a koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha $A(-1; 3)$, $B(5; 1)$! Hol van az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő vektor

a) D végpontja, ha a kezdőpontja $C(1; 1)$;

b) E kezdőpontja, ha a végpontja $F(2; -3)$;

**c)* H végpontja, ha a kezdőpontja $G(145; -73)$?

K5 Rajzold meg a koordináta-rendszerben a $\overrightarrow{KL}$ vektort, ha $K(-3; -1)$, $L(3; 3)$! Hol van a $\overrightarrow{KL}$ vektorral ellentett vektor

a) P végpontja, ha a kezdőpontja $Q(6; 4)$;

b) M kezdőpontja, ha a végpontja $N(0; -2)$;

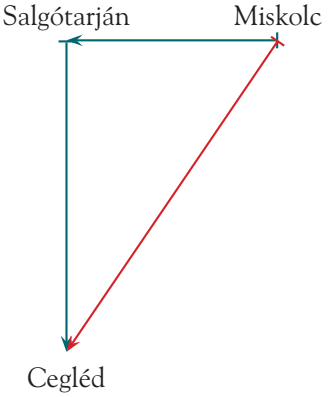
**c)* R végpontja, ha a kezdőpontja $S(-915{,}3; 167{,}2)$?

Vektorok összeadása

Térképen hosszabb utasítás követésével is megtalálunk egy keresett települést.

Menjünk Miskolctól nyugatra 70 km-t, majd innen délre 103 km-t!

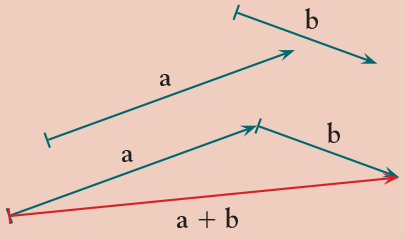
Ezt a mondatot is vektorokkal szemléltetjük. Az első vektor kezdőpontja a térképen Miskolc, végpontja Salgótarján. A második vektor kezdőpontja Salgótarján, végpontja Cegléd. A közbeeső város kihagyásával egy új vektort kapunk, amely Miskolctól Ceglédig mutat. Mivel csak a kezdőpont és a végpont volt fontos számunkra, ezért ennek az új vektornak kiemelt szerepe van. Azt mondjuk, hogy ez a vektor a másik kettő összege.



Általánosan is megfogalmazzuk, amit tapasztaltunk.

Fontos tudnivaló

Adott az **a** és a **b** vektor. Egy pontból felmérjük az **a** vektort, majd ennek végpontjából felmérjük a **b** vektort. Az **a** + **b** vektor az a vektor lesz, amelynek kezdőpontja az elsőnek felmért vektor kezdőpontja, a végpontja pedig a másodiknak felmért vektor végpontja.

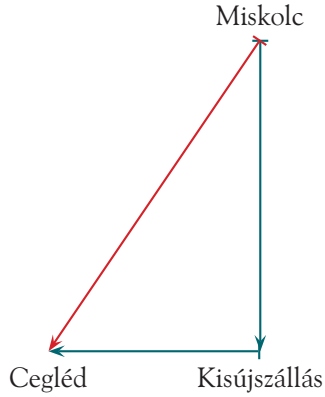


Nézzünk újra a térképre! Haladjunk a következő útvonalon!

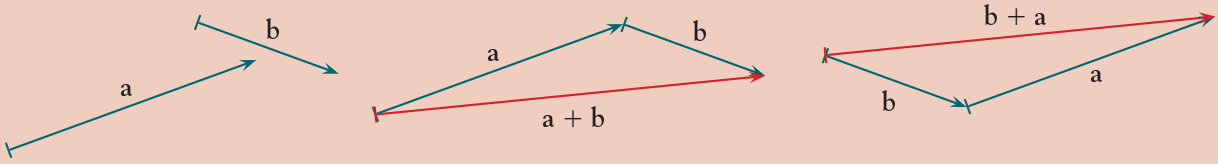
Menjünk Miskolctól délre 103 km-t, majd innen nyugatra 70 km-t!

Ezt a mondatot is tudjuk vektorokkal szemléltetni. Az első vektor kezdőpontja a térképen Miskolc, a végpontja Kisújszállás. A második vektor kezdőpontja Kisújszállás és a végpontja Cegléd. Ha a közbeeső várost kihagyjuk, akkor Miskolctól Ceglédig egy új vektort kapunk. Mivel megint csak a kezdőpont és a végpont volt fontos, ezért ezt az új vektort a másik kettő helyett használjuk. Mondhatjuk, hogy ez a vektor a másik kettő összege.

Látjuk, hogy most is Miskolctól Ceglédig mutat a kapott vektor. Nem fontos, hogy Salgótarjánt, vagy Kisújszállást hagyjuk ki közbeeső városként.



A két vektor összegét **a** + **b**, illetve **b** + **a** sorrendben is képezhetjük. A meghatározásunk szerint mind a két esetben ugyanazt a vektort kapjuk.



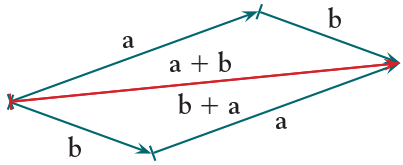
Általánosságban is igaz: **a** + **b** = **b** + **a**.

A szerkesztésünk is mutatja, hogy a két vektor összege nem függ attól, hogy melyiket mérjük elsőnek és melyiket másodiknak.

A két ábrát egybeszerkesztve paralelogrammát kapunk.

A paralelogramma átlóján látjuk az **a** + **b**, illetve a **b** + **a** vektort.

Két vektor összegvektorát két különböző módon is megkapjuk.



a) A vektorok egymás után fűzésével (az első vektor végpontjában vesszük fel a második vektor kezdőpontját):
az összegvektor az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutat.

b) Paralelogramma segítségével (ha a két vektor nem párhuzamos egymással):
egy közös kezdőpontból felmérjük mindkét vektort. Ezek segítségével paralelogrammát szerkesztünk. Ennek a közös pontból induló irányított átlója lesz a két vektor összege.

Több vektor összeadása esetén először két vektort adunk össze, majd az összeghez hozzáadunk egy újabb vektort stb.

Fontos tudnivaló

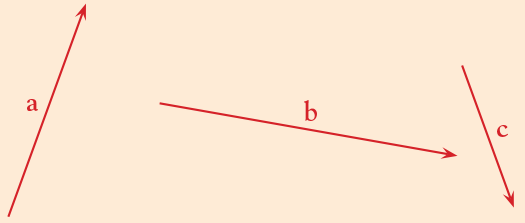
Tapasztalataink szerint érezzük, hogy több vektor összege független az összeadandók csoportosításától: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.

(Az állítás igazolásától azonban most eltekintünk.)

Több vektor összeadása esetén az összegvektort a vektorok egymás utáni felmérésével gyorsan megkapjuk. A vektorokat egymáshoz fűzzük, és az összegvektor kezdőpontja egybeesik az első vektor kezdőpontjával, az összegvektor végpontja pedig egybeesik az utolsó vektor végpontjával.

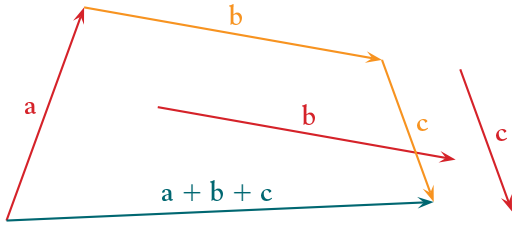
1. példa

Adott három vektor: **a**, **b**, **c**. Az egymás után fűzés módszerével adjuk meg az $a + b + c$ vektort!



A tanultak szerint járunk el. A három vektort egymás után fűzzük. Az így összefűzött vektorok közül az első kezdőpontját összekötjük a harmadik vektor végpontjával.

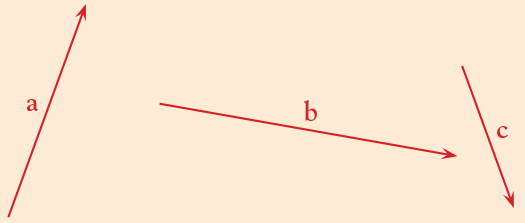
Az így kapott vektor lesz az $a + b + c$.



2. példa

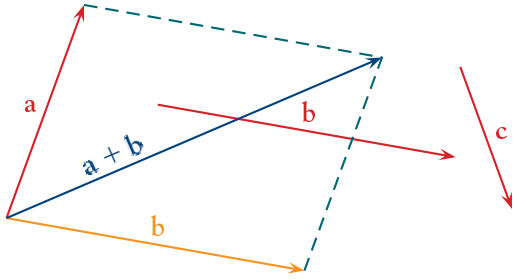
Adott három vektor: **a**, **b**, **c**.

A paralelogramma módszer segítségével adjuk meg az $a + b + c$ vektort!

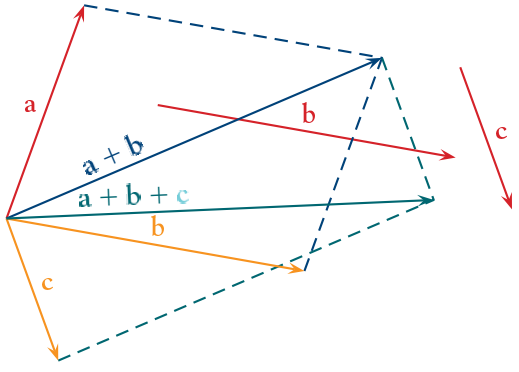


A tanultak szerint járunk el. Először az $a + b$ vektort szerkesztjük meg.

Az **a** kezdőpontjában megrajzoljuk a **b** vektort. A két vektor által meghatározott paralelogramma megrajzolása után bejelöljük az $a + b$ vektort.



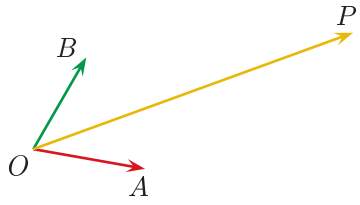
Most az $a + b$ és a **c** vektort kell összeadnunk. Az $a + b$ kezdőpontjából megrajzoljuk a **c** vektort. A két vektor által meghatározott paralelogramma megrajzolása után bejelöljük az $a + b + c$ vektort.



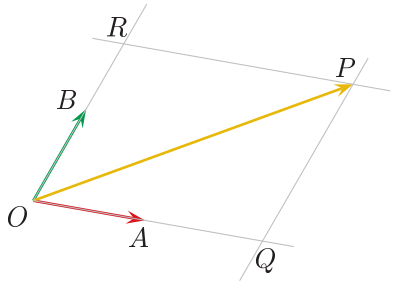
3. példa

Bontsuk fel az $\overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

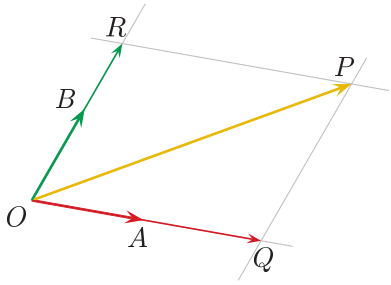
Olyan két vektort keresünk, amelyek párhuzamosak az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorokkal, és az összegük az $\overrightarrow{OP}$.



A vektorok összeadásánál tanultakra gondolva húzzunk párhuzamost P ponton át az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorokkal is.



Az ábrán látható Q és R metszéspontokkal már megadhatók a keresett vektorok: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.



Feladatok

A1 Vedd fel a tetszőleges **a**, **b** vektorokat! Szerkeszd meg az **a** + **b** vektort!

K2 Vedd fel a tetszőleges **a**, **b** és **c** vektorokat! Szerkeszd meg az **a** + **b**, **a** + **c**, **b** + **c**, **a** + **b** + **c** vektorokat!

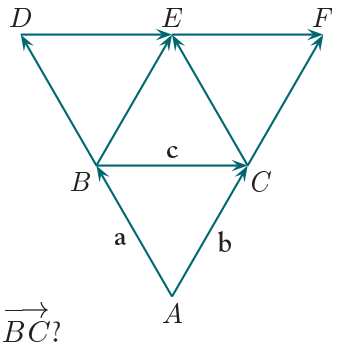
K3 Vegyél fel egy tetszőleges **a** vektort! Szerkeszd meg az **a** vektorral közös kezdőpontú vektort, ha

a) hossza fele az **a** hosszának és $-30°$-os szöget zár be vele;

b) hossza másfélszerese az **a** hosszának és $60°$-os szöget zár be vele;

c) hossza megegyezik az **a** hosszával és $90°$-os szöget zár be vele!

K4 Az ábrán azonos hosszúságú vektorokat látsz. Add meg nagybetűkkel a következő vektorokat!



a) **a** + **b**; *b)* **a** + **c**; *c)* **a** + **a** + **c**;

d) **b** + **b**; *e)* **c** + **c**; *f)* **b** + (−**c**);

g) **b** + **b** + (−**c**); *h)* **a** + **b** + **c**.

K5 Legyen $ABCD$ egy tetszőleges téglalap. Igaz-e, hogy

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$; *b)* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$;

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$; *d)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$?

E6 Rajzolj egy tetszőleges **v** vektort! Szerkessz

a) olyan vektorpárokat (legalább hármat), amelyek összege **v**;

b) olyan **a**, **b**, **c** vektorokat, amelyek összege **v**;

c) olyan **a**, **b**, **c** vektorokat, amelyek összege −**v**!

E7 Igazak-e a következő állítások? Vitassátok meg közösen is!

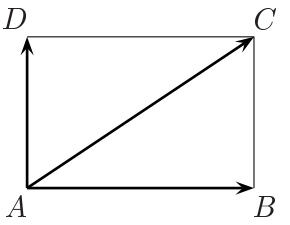
Ha két vektor azonos hosszúságú (de nem feltétlenül egyenlő), akkor az összegük

a) biztosan hosszabb náluk;

b) lehet, hogy egyenlő hosszúságú velük;

c) nem lehet rövidebb náluk.

E8 Bontsd fel az $\overrightarrow{AD}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!



Vektorok kivonása

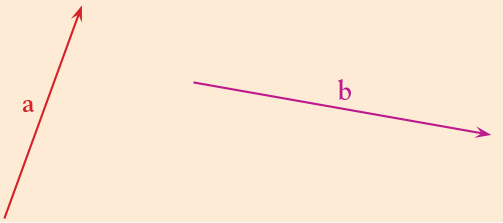
Két vektor összegének és egy vektor ellentettjének ismerete hozzásegít minket a vektorok kivonásának értelmezéséhez. Adott két vektor esetén az egyik vektorhoz a másik vektor ellentettjét hozzá tudjuk adni.

4.

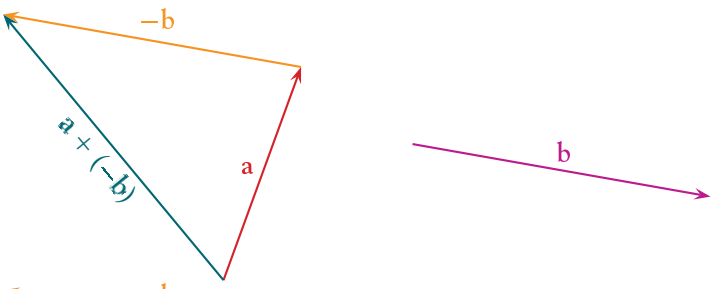
1. példa

Adott két vektor: **a**, **b**.

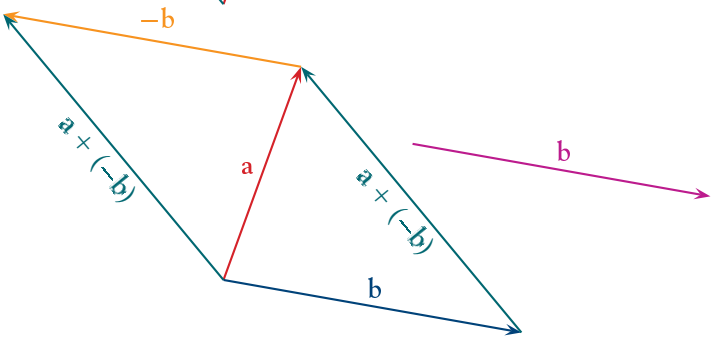
Adjuk meg az **a** és a $-\mathbf{b}$ vektorok összegét!



A $-\mathbf{b}$ vektort az **a** után fűzzük, így megkapjuk az $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ vektort.



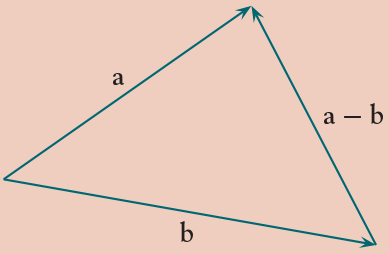
Ha az **a** és **b** vektorokat egy pontból indítjuk, akkor a két végpont között látható az $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ vektor.



Az ábrán látható, hogy az $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ és a **b** vektorok összege **a** vektor. Vektoroknál is nevezhetjük az $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ vektort $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektornak.

Fontos tudnivaló

Adott az **a** és a **b** vektor. Egy pontból felmérjük az **a** vektort és a **b** vektort. Az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor azzal a vektorral egyenlő, amelynek kezdőpontja a **b** végpontja, a végpontja pedig az **a** végpontja.

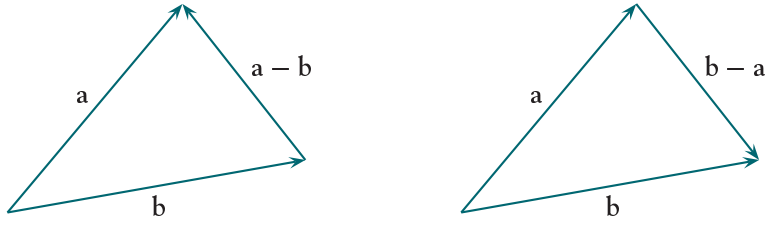


2. példa

Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ egymás ellentettje!

Vegyük fel az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokat közös pontból kiindulva! A rajzon látjuk $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ vektorokat:

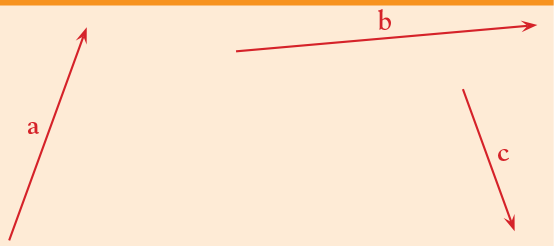
Valóban, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ egymás ellentettjei.



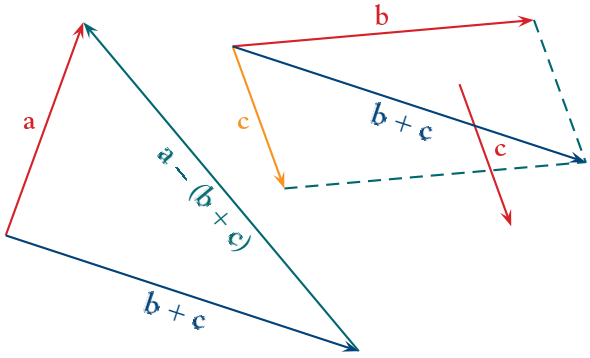
3. példa

Adottak az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok.

Szerkesszük meg az $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ és az $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorokat! Hasonlítsuk össze az így kapott két vektort!

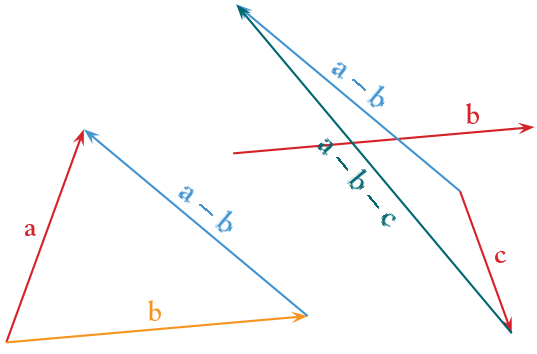


Az $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ megszerkesztéséhez először a $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektort szerkesztjük meg, majd a tanult módon az így kapott vektort kivonjuk az $\mathbf{a}$ vektorból. Ezt mutatja az ábra.



Az $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ megszerkesztéséhez először az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektorra van szükségünk, majd ebből a tanult módon kivonjuk a $\mathbf{c}$ vektort.

Ha a két ábrát megvizsgáljuk, akkor látjuk, hogy $\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$.



Fontos tudnivaló

Vektorok összevonásánál zárójelet úgy bontunk, mint a számokkal felírt kifejezéseknél.

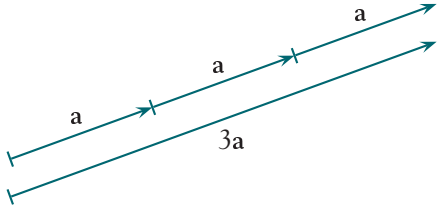
Az $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ különbség eredményét $\mathbf{0}$ vektornak (nullvektornak) nevezzük: $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A **nullvektor** hossza 0. A nullvektor minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges. A nullvektor egyenlő az ellentettjével.

Írásban kis nyíllal vagy aláhúzással jelöljük: $\underline{0}$ vagy $\vec{0}$.

Ha többször adjuk össze ugyanazt a vektort, akkor azt röviden szorzással is leírhatjuk.

Például: $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} = 3\mathbf{a}$.



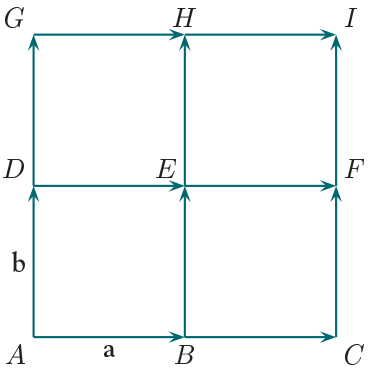
Feladatok

K1 Vedd fel a tetszőleges **a**, **b** és **c** vektorokat! Szerkeszd meg az **a** − **b**, **a** − **c**, **c** − **a**, (**a** + **b**) − **c**, (**a** − **b**) − **c** vektorokat!

K2 Adott az **a**, **b**, **c** és **d** vektor. Szerkeszd meg az

a) (**a** + **b**) − (**c** + **d**); *b)* (**a** − **c**) + (**b** − **d**) vektort!

K3 Az ábrán azonos hosszúságú vektorokat látsz. Add meg a kezdő- és végpontjaikkal a következő vektorokat, például így: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$!



a) **a** − **b**; *b)* 2**a** − **b**;

c) 2**b** − **a**; *d)* (**a** + **b**) + (**a** − **b**);

e) **b** − **b**; *f)* **b** + (**a** − **b**);

g) (**a** + **b**) − (**a** − **b**); *h)* (**a** − **b**) + (**b** − **a**).

K4 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög F csúcsából induló vektorok a következők: $\overrightarrow{FA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{FB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{FC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{FD} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{FE} = \mathbf{e}$. Szerkeszd meg a következő vektorokat!

a) **a** + **e**; *b)* **a** − **d**; *c)* (**a** + **b** + **d** + **e**) − **c**; *d)* (**c** − **b**) + (**d** − **e**).

K5 Adj meg olyan vektorpárt, amelyek összege és különbsége merőleges egymásra!

E6 Az $ABCD$ paralelogramma síkjában K egy tetszőleges pont.

Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD}$!

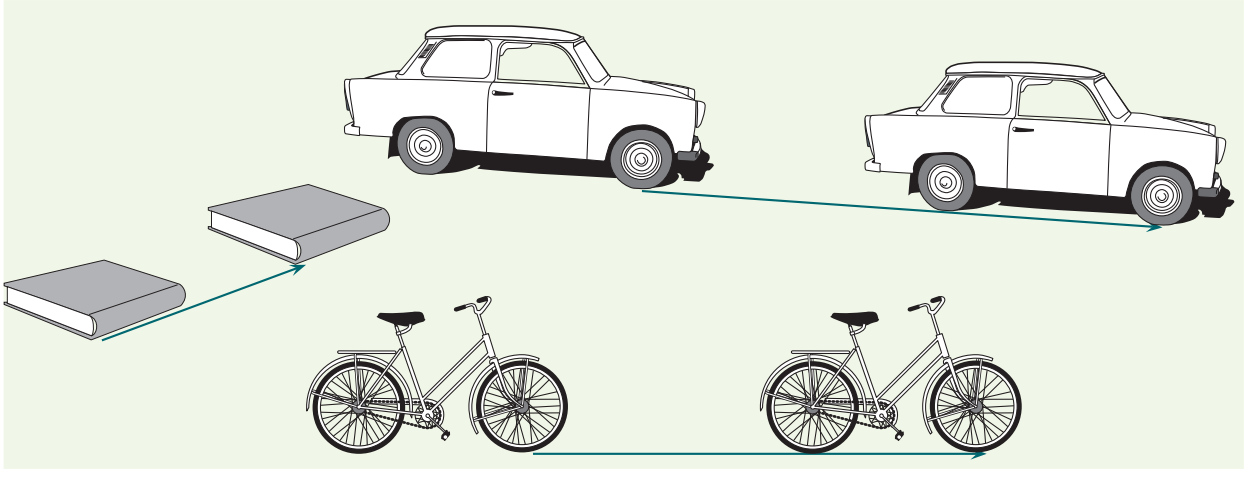
Eltolás

A címben szereplő fogalom nem ismeretlen a számunkra. Számtalanszor használtuk már a mondatainkban.

Told el innen a kerékpárodat!

Félretoltam a könyvemet, hogy elférjen a füzetem.

A meghibásodott autót odébb tolták, hogy ne akadályozza a forgalmat.



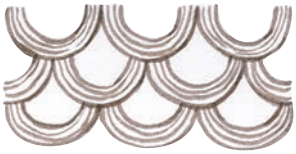
A mindennapi beszédünkben értjük ezeket a mondatokat. A matematikában azonban pontosan meg kell mondanunk, hogy milyen transzformációt nevezünk eltolásnak. Az előzőekben tárgyakat toltunk el térben. A továbbiakban síkon fogjuk értelmezni az eltolást.

Eltolásnál a P ponthoz a P ponttól megadott távolságban lévő P' pontot rendeljük hozzá. Az eltolást egy irányított szakasszal adjuk meg. Az irányított szakaszra vezettük be a vektor fogalmát.

Fontos tudnivaló

A $\mathbf{v}$ vektorral megadott eltolásnál bármely P ponthoz a P kezdőpontú $\mathbf{v} = \overrightarrow{PP'}$ vektor P' végpontját rendeljük.

Az eltolással szép minták készíthetők. Ezeket megfigyelhetjük az építészetben, a tárgyaink díszítésénél is. A következő képeken Kalotaszegről való mintákon figyelheted meg az eltolást.



Halpikkelyes minta, a bőség jelképe faragott szuszékon



Faragott leveles inda egy kapuról



Varrottas libalábminta

(A szuszék olyan láda, amelyben gabonát vagy lisztet tároltak.)





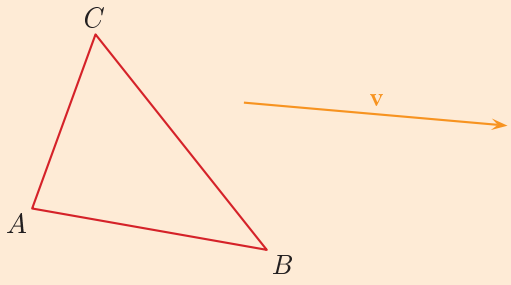


Keressétek meg a térképen Kalotaszeget!

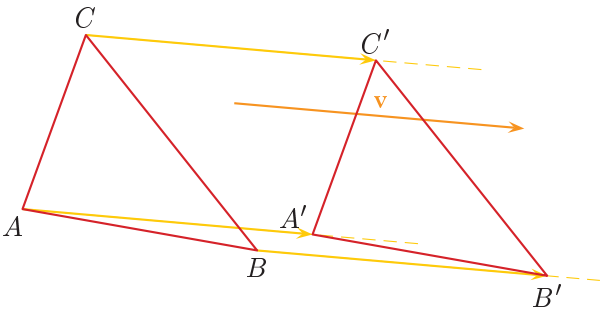
1. példa

Az ábrán látható ABC háromszöget toljuk el a $\mathbf{v}$ vektorral!

Az elkészített ábra alapján gyűjtsük össze az eltolás tulajdonságait!



Húzzunk az A, B és C pontokon át párhuzamost a $\mathbf{v}$ vektorral! Majd a $\mathbf{v}$ hosszát körzőnyílásba vesszük, és felmérjük az egyenesekre a háromszög csúcsaitól a megfelelő irányban.



Az eltolás a szakaszok hosszát nem változtatja meg. Például: $AB = A'B'$.

Az eltolás a szögek nagyságát nem változtatja meg. Például: $ABC \sphericalangle = A'B'C' \sphericalangle$.

Vagyis az eltolás is egybevágósági transzformáció.

Látható, hogy az A, B, C pontok és az A', B', C' pontok is az óramutató járásával ellentétes irányban követik egymást. Vagyis az eltolás a körüljárási irányt nem változtatja meg.

Az eltolás minden pontnak megváltoztatja a helyét, vagyis az eltolásnak nincs fixpontja.

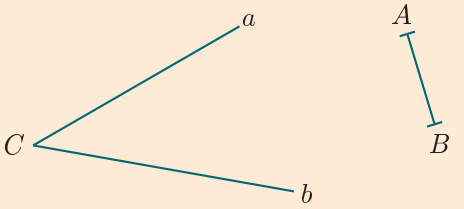
Az egyenes és képe párhuzamos egymással.

Ha az egyenes párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral, akkor egybeesik a képével.

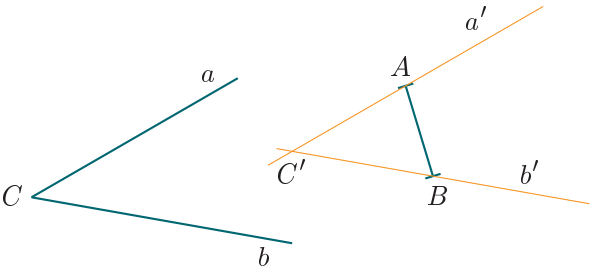
2. példa

Adott egy szög és egy AB szakasz.

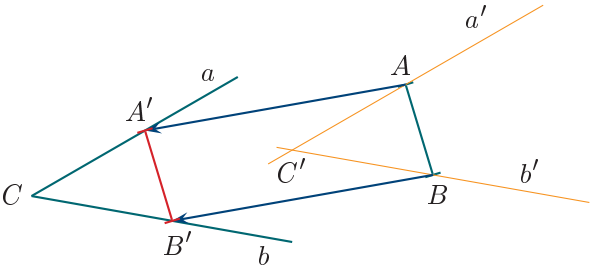
Adjuk meg azt a vektort, amellyel eltolva az AB szakaszt, egy-egy végpontja a szög egy-egy szárára esik!



A keresett A' pontnak az a félegyenesre, a B' pontnak pedig a b félegyenesre kell illeszkednie. Egy pontot két vonal metszéspontjaként kaphatunk meg. Esetünkben azonban nem tudunk több olyan vonalat megadni, amelyre A' vagy B' illeszkedne. Így az eltolás $\overrightarrow{AA'}$ (vagy $\overrightarrow{BB'}$) vektorát nem tudjuk megadni. Tudjuk, hogy az egyenes és képe egymással párhuzamos. Ezért az eltolás vektorának ellentettjével el tudjuk tolni a szög szárait. Az ekkor kapott a' átmegy A-n, a b' pedig B-n. Az a' és a b' metszéspontja adja a C'-t.



Most már látjuk az AC' és a BC' szakaszok hosszát. Mivel az eltolás távolságtartó, ezért ezek a szakaszok megegyeznek az $A'C$, illetve a $B'C$ szakaszok hosszával. Vagyis az AC'-t körzőnyílásba vesszük, és a C-ből felmérjük a-ra. Ugyanígy a BC'-t körzőnyílásba vesszük, és a C-ből felmérjük b-re.



Az így kapott A', illetve B' pontok megadják az eltolt szakaszt, és az eltolás $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ vektorát.

Feladatok

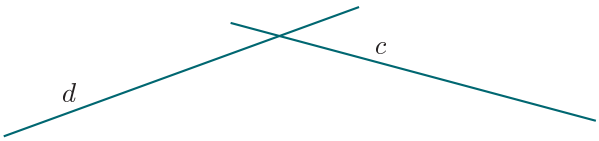
A1 Rajzolj eltolással kapott szép mintákat a füzetedbe!

K2 Rajzolj egy ABC háromszöget! Az AB oldalának felezőpontja legyen F. Told el a háromszöget *a)* a $\overrightarrow{CA}$; *b)* a $\overrightarrow{CF}$; *c)* az $\overrightarrow{AF}$; *d)* a $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ vektorral!

K3 Rajzolj egy szakaszt és egy pontot, amely nem illeszkedik a szakasz egyenesére! Told el a szakaszt úgy, hogy az egyik végpontja az adott pont legyen!

K4 Rajzolj egy tetszőleges háromszöget, és tűzz ki egy pontot! Told el a háromszöget úgy, hogy egyik csúcsa a kitűzött pont legyen!

K5 Rajzolj egy kört és egy téglalapot! Told el a téglalapot úgy, hogy a középpontja a kör középpontjában legyen!



K6 Adott az $ABCD$ paralelogramma AB oldala; a C csúcsa a c egyenesre, a D csúcsa a d egyenesre illeszkedik.

Szerkeszd meg a paralelogrammát!



K7 Adj meg egy kört és egy szakaszt! A szakasz legyen rövidebb, mint a kör átmérője! Told el a szakaszt úgy, hogy húrja legyen a körnek!

K8 Szerkeszd meg a trapézt, ha adott a négy oldalának hossza!

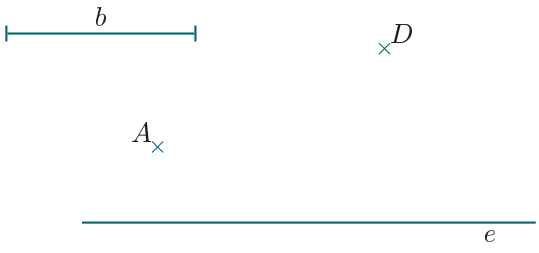
E9 Az úttesten csak az útirányra merőlegesen szabad átkelni. Az úttest két oldala egymással párhuzamos egyenes. Az út két oldalán, a járdákon tetszőleges irányban haladhatunk. Szerkeszd meg azt a legrövidebb utat, amelyen az egyik oldalon lévő járda egyik pontjából eljuthatunk a másik oldalon található járda egyik pontjába!



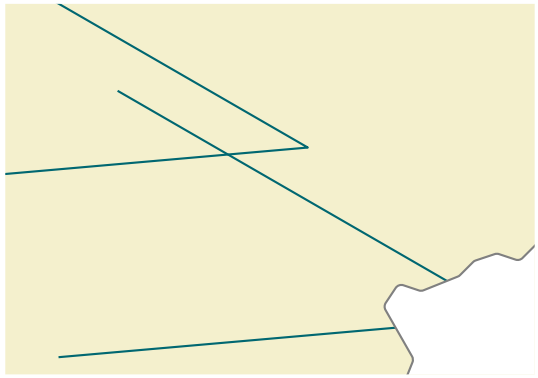
E10 Az $ABCD$ négyszög BC oldalának hossza az előre adott b hosszúságú szakasszal egyenlő. A B és a C pontok illeszkednek az e egyenesre.

Szerkeszd meg azt az $ABCD$ négyszöget, amelyben az $AB + CD$ a legrövidebb!

A füzetedben dolgozz!



E11 A papíron egy szög és az eltoltja látható, de a papírból egy darab leszakadt. Szerkeszd meg az eltolás vektorát!



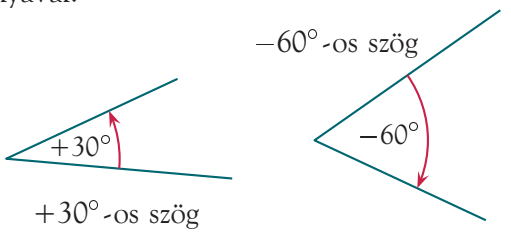
E12 Egy háromszögben rajzold meg mindhárom súlyvonalszakaszt! Igazold, hogy ezeket el lehet úgy tolni, hogy a három szakasz egy új háromszöget alkosson!

Pont körüli elforgatás *(Választható tananyag)*

Az óra mutatójának bármely pontja a számlap középpontja körül forog. Ez a megfigyelés is elvezethet minket a pont körüli elforgatás megfogalmazásához.

Megadjuk a sík egy O pontját, valamint egy szöget az irányával.

Nem elég a szög nagyságát tudnunk, az irányát is ismernünk kell. Az óramutató járásával ellentétes irányú szöget pozitívnak, az óramutató járásával megegyező irányút negatívnak mondjuk.

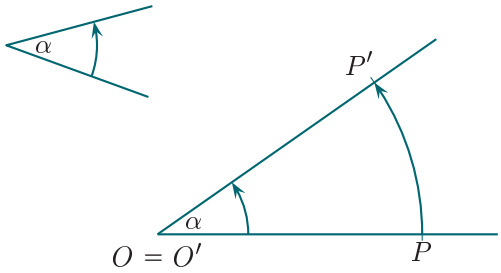


4.

Az ábrán látjuk az adott O pontot és az irányított szöget. Ez az α szög lesz az elforgatás szöge.

Az O pont képe önmaga lesz, azaz $O = O'$.

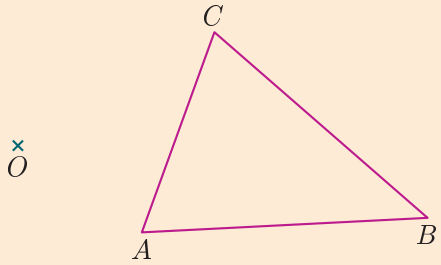
Ha egy P pont nem illeszkedik az O pontra, akkor a P pont képe az a P' pont lesz, amelyre $OP = OP'$, és a POP' szög nagysága és iránya is megegyezik az elforgatás megadott szögének irányával és nagyságával.



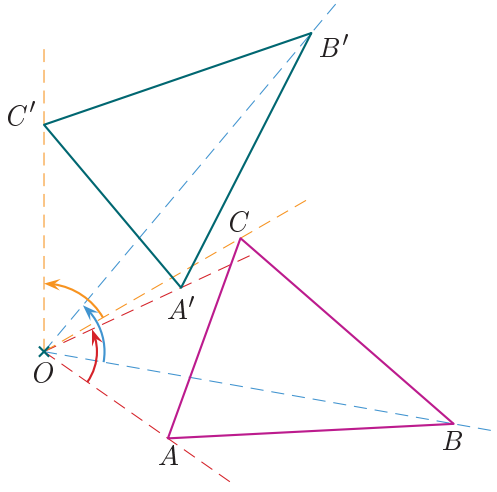
1. példa

Az ABC háromszöget forgassuk el az O pont körül 60°-kal!

A példa alapján fogalmazzuk meg a pont körüli forgatás tulajdonságait!



Az OA, OB, OC félegyenesekhez megszerkesztjük a 60°-os szög másik szárát. Ezekre a szárakra O-ból felmérjük az OA, OB, illetve OC szakaszokat. Ekkor megkapjuk az A', B', C' pontokat. Összekötjük és megkapjuk az ABC háromszög O körüli 60°-os elforgatottját, az $A'B'C'$ háromszöget. A leírt lépéseket az ábrán is mutatjuk.



A példa tapasztalatai alapján a pont körüli elforgatás a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

A forgatás a szakaszok hosszát nem változtatja meg. Például: $AB = A'B'$.

A forgatás a szögek nagyságát nem változtatja meg. Például: $ABC \sphericalangle = A'B'C' \sphericalangle$.

Vagyis a forgatás is egybevágósági transzformáció.

Látható, hogy az A, B, C pontok és az A', B', C' pontok is az óramutató járásával ellentétes irányban követik egymást. Vagyis a forgatás a körüljárási irányt nem változtatja meg.

A forgatás csak az O pont helyét nem változtatja meg, vagyis a forgatásnak egy fixpontja van.

Az egyenes és a képe egymással bezárt szöge a forgatás szögével egyenlő.

2. példa

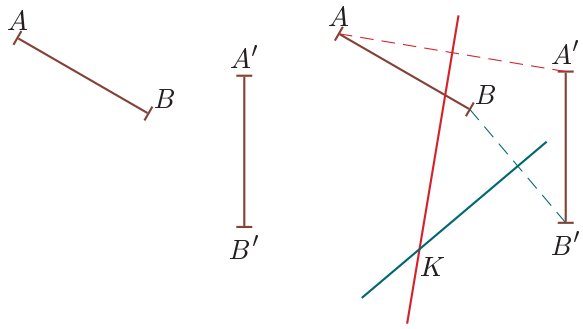
Rajzoljunk két egyenlő, de nem párhuzamos szakaszt! Szerkesszük meg azt a K pontot, amely körül a két szakasz egymásba forgatható!

Legyen a két szakasz: $AB = A'B'$!

Egy ismeretlen, K középpontú köríven kell az A pontnak az A' pontba fordulni. Vagyis az AA' egy ismeretlen körnek a húrja. Az AA' húr felezőmerőlegesére illeszkedik a kör K középpontja.

Egy másik köríven, aminek szintén K a középpontja, kell a B pontnak a B' pontba fordulni. Vagyis a BB' egy ismeretlen körnek a húrja. A BB' húr felezőmerőlegesére illeszkedik a kör K középpontja.

Vagyis az AA' és a BB' felezőmerőlegesének metszéspontja lesz a keresett K pont.



Fontos tudnivaló

Vannak alakzatok, amelyekhez található olyan forgatási középpont, hogy a forgatás után az alakzat önmagába fordul. Az ilyen alakzatokat **forgásszimmetrikusnak** mondjuk. A szabályos sokszögek forgásszimmetrikusak.

3. példa

Milyen forgatások azok, amelyek egy szabályos hatszöget önmagába visznek át?

Rajzoljunk egy $ABCDEF$ szabályos hatszöget, és rajzoljuk meg az O középpontú köré írt kört is!

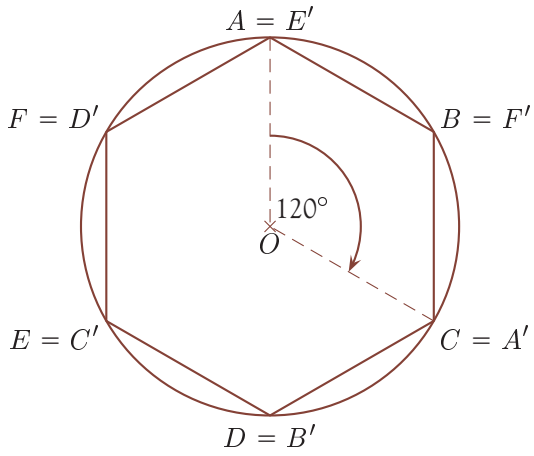
Tudjuk, hogy:

$OA = OB = OC = OD = OE = OF$ és

$AOB \sphericalangle = BOC \sphericalangle = COD \sphericalangle = DOE \sphericalangle = EOF \sphericalangle = FOA \sphericalangle = 60°$.

Ezért az O középpont körül bármelyik csúcsot bármelyik csúcsba át tudjuk fordítani. A forgatás szöge $60°$ többszöröse kell hogy legyen.

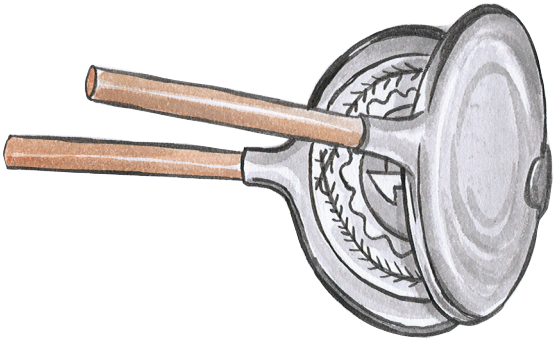
Például: a $-120°$-os forgatást mutatja az ábra: $A' = C$, $B' = D$, $C' = E$, $D' = F$, $E' = A$, $F' = B$.



A forgásszimmetriát megtaláljuk a természetben, a művészetekben.

Ekevasas ostyasütő Borsodnádasdról a XIX. századból:





4.

Négykarú örvényminta magyarországi csont lőportartón a XVIII. századból:





Magyar virágképek népi alkotásokon:



Boglárka zalakoppányi mángorlóról



Szellőrózsa sövédi zsírtartóról



Mályva tüskevári csuporról

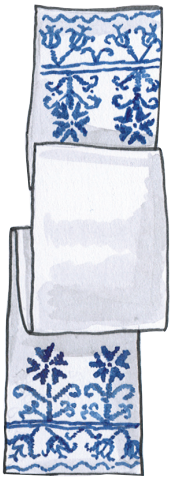


Ibolya nyárádi vőfélykendőről









Feladatok

A1 Rajzolj szép forgásszimmetrikus ábrákat a füzetedbe!

K2 Rajzolj egy háromszöget! Forgasd el

a) az egyik csúcsa körül 90°-kal; *b)* az egyik oldal felezőpontja körül −90°-kal!

K3 Rajzolj egy egyenest és egyik félsíkjában két pontot! Az egyik pont körül forgasd el a másik pontot úgy, hogy rákerüljön az egyenesre!

K4 Milyen forgatások azok, amelyek

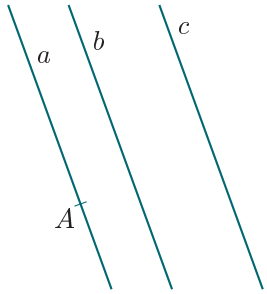
a) egy négyzetet; *b)* egy szabályos háromszöget önmagába visznek át?

K5 Forgass el egy kört *a)* az egyik pontja körül 60°-kal;

b) egy külső pont körül úgy, hogy a kép érintse az eredetit!

K6 Szerkeszd meg az ABC szabályos háromszöget, ha a B csúcs a b egyenesre, a C csúcs pedig a c egyenesre illeszkedik!

E7 Rajzolj az ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé $ACKL$ és $CBMN$ négyzeteket! Mutasd meg, hogy a KN szakasz hosszának fele egyenlő a háromszög C-hez tartozó súlyvonalának hosszával!



4.

Középpontos hasonlóság

A hasonló, hasonlít szavakat sokszor használjuk beszélgetés közben is. A matematikában azonban már megszokottnak vesszük, hogy először pontos meghatározásra van szükségünk, s csak utána használjuk az így bevezetett fogalmat. Most egy új transzformációt ismerünk meg, amely eltér az egybevágósági transzformációktól.

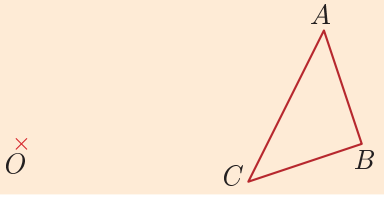
A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, az eltolás és a forgatás is rendelkezett azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két pont esetén a képtávolságuk egyenlő az eredeti két pont távolságával. Ezek a transzformációk összefoglaló néven a **távolságtartó transzformációk**. A távolságtartó transzformációkat **egybevágóságnak** vagy egybevágósági transzformációnak is nevezzük.

Azokat a transzformációkat, amelyekre igaz, hogy bármely két pont esetén a képtávolságuk és az eredeti két pont távolságának aránya mindig ugyanannyi, **aránytartó transzformációknak** nevezzük. Az aránytartó transzformációkat **hasonlósági transzformációnak** vagy röviden **hasonlóságnak** nevezzük.

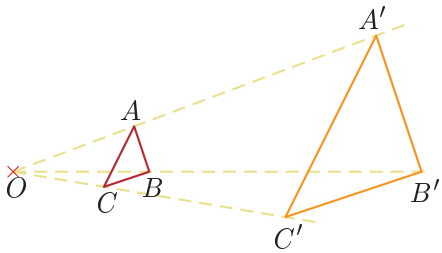
Először a hasonlóság egy különleges változatával ismerkedünk meg, a középpontos hasonlósággal.

1. példa

Adott egy O középpont. Egy tetszőleges P pont képe legyen az a P', amely az OP félegyenesre illeszkedik, és $\frac{OP'}{OP} = 3$. Szerkesszük meg az ABC háromszög $A'B'C'$ képét!



Megrajzoljuk az OA, OB, OC félegyeneseket, és felmérjük az O-ból induló félegyenesek A, B, C végpontjából még kétszer az OA, OB, OC szakaszok hosszát. Megkapjuk az A', B', C' pontokat. Összekötjük a pontokat, és látható az $A'B'C'$ háromszög. Ekkor az OA', OB', OC' szakaszok hossza az OA, OB, OC szakaszok hosszának a háromszorosa lesz.

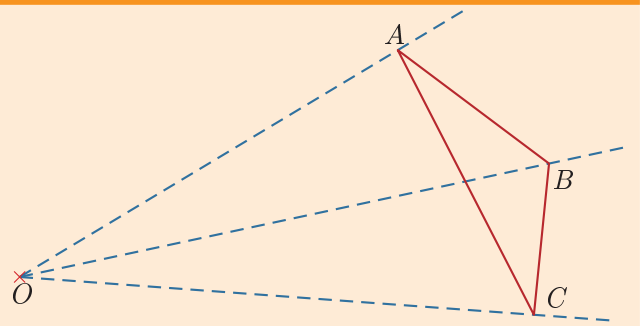


Ezt a transzformációt 3-szoros középpontos **nagyításnak** nevezzük. Az ABC háromszög 3-szoros középpontosan nagyított képe az $A'B'C'$ háromszög.

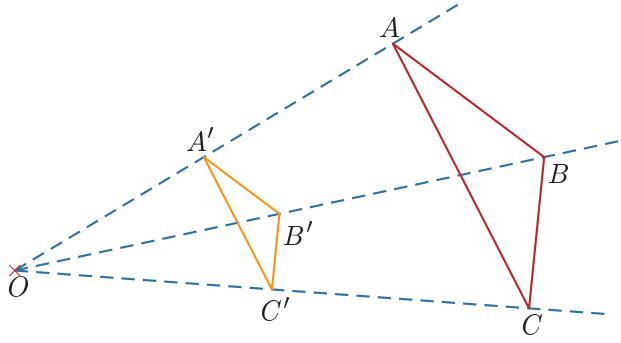
2. példa

Adott egy O középpont. Egy tetszőleges P pont képe legyen az a P', amely az OP félegyenesre illeszkedik, és $\frac{OP'}{OP} = \frac{1}{2}$.

Szerkesszük meg az ABC háromszög $A'B'C'$ képét!



Megrajzoljuk az OA, OB, OC félegyeneseket, és megszerkesztjük az OA, OB, OC szakaszok felezőpontját. Megkapjuk az A', B', C' pontokat. Összekötjük a pontokat, és látható az $A'B'C'$ háromszög. Ekkor az OA', OB', OC' szakaszok hossza az OA, OB, OC szakaszok hosszának a fele lesz.



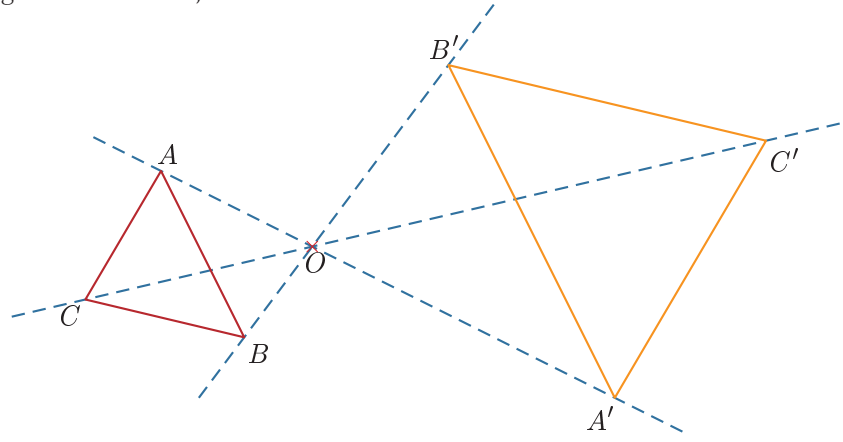
Ezt a transzformációt $\frac{1}{2}$-szeres középpontos **kicsinyítésnek** nevezzük. Az ABC háromszög $\frac{1}{2}$-szeres középpontosan kicsinyített képe az $A'B'C'$ háromszög.

Az előző példákban az ABC háromszöghöz megszerkesztettük a középpontosan hasonló $A'B'C'$ képét. Először középpontosan nagyítottunk, azután középpontosan kicsinyítettünk. A példákban az arányszám 3, illetve $\frac{1}{2}$ volt, de természetesen ezektől eltérő arányt is választhattunk volna. Negatív arány esetén a kép a félegyenes meghosszabbításán, az O másik oldalán található.

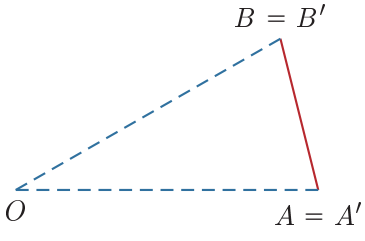
Az ábrán (-2)-szeres arányhoz látjuk az ABC háromszög $A'B'C'$ képét.

Ezt a transzformációt (-2)-szeres középpontos nagyításnak nevezzük.

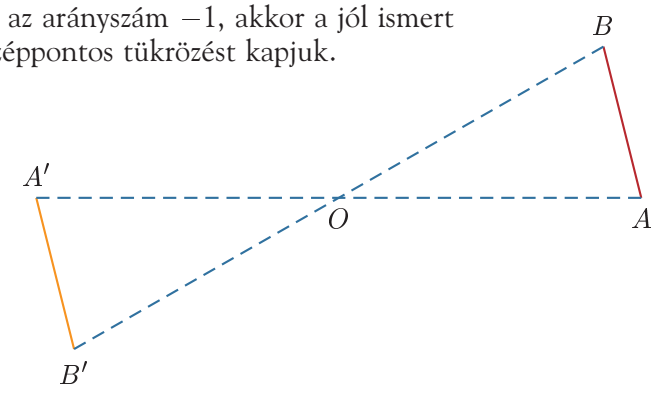
Vizsgáljuk meg, hogy melyek azok az arányszámok, amelyek esetén speciális középpontos hasonlóságot kapunk!



Ha az arányszám 1, akkor a transzformáció során minden pont helyben marad.



Ha az arányszám -1, akkor a jól ismert középpontos tükrözést kapjuk.



Ha az arányszám 0, akkor a sík minden pontjának a képe az O pont lenne. Ezt a transzformációt ne nevezzük hasonlóságnak!

Fontos tudnivaló

Általánosan megfogalmazzuk a középpontos nagyítást és kicsinyítést, azaz a **középpontos hasonlósági transzformációt.**

Adott egy O középpont és egy $\lambda \neq 0$ (lambda) arányszám.

Ha $\lambda > 0$, akkor bármely P pont képe egy olyan P' pont, amely az OP félegyenesre illeszkedik, és $\frac{OP'}{OP} = \lambda$.

Ha a $\lambda < 0$, akkor bármely P pont képe egy olyan P' pont, amely az OP egyenesre illeszkedik, $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$, és O pont P és P' között van.

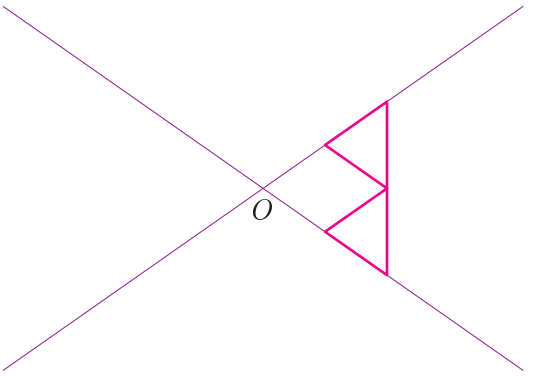
Eddig mindent a füzetünkben rajzoltunk, vagyis síkban értelmeztük a transzformációt. Látható, hogy a szabály térben is megadja a középpontos hasonlóságot. Beszélhetünk középpontos nagyításról és kicsinyítésről a térben is.

Híres épületek kicsinyített mását építették meg az ausztriai Klagenfurt melletti Minimundusban, vagyis minivilágban.



Feladatok

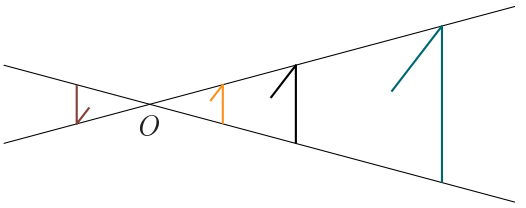
K1 Másold le az ábrát a füzetedbe! Készítsd el a 2-szeres, $\frac{1}{2}$-szeres, -2-szeres, $-\frac{1}{2}$-szeres középpontosan hasonló képét! (A középpont az O pont legyen!)



K2 Rajzolj a füzetedbe egy A és egy A' pontot! Szerkeszd meg az O pont helyét, ha

a) $\lambda = 2$; *b)* $\lambda = \frac{3}{2}$; *c)* $\lambda = -\frac{1}{3}$!

K3 A színes számok a fekete 1-es középpontosan hasonló képei. Mekkora arányokat használtunk a képek elkészítéséhez?



K4 Rajzolj egy háromszöget, és

a) nagyítsd az egyik csúcsából 2-szeresére;

b) nagyítsd az egyik oldalának felezőpontjából 1,5-szeresére;

c) nagyítsd egy belső pontjából -2-szeresére;

d) kicsinyítsd egy belső pontjából $\frac{1}{2}$-szeresére;

e) kicsinyítsd egy külső pontjából $\frac{1}{4}$-szeresére!

K5 A koordináta-rendszerben adott az $ABCD$ négyszög: $A(4;-1)$, $B(5;2)$, $C(3;6)$, $D(-2;4)$. Add meg az $A'B'C'D'$ négyszög koordinátáit, ha az $ABCD$ négyszögből

a) 2-szeres nagyítással kapjuk, és a nagyítás középpontja az origó;

b) -2-szeres nagyítással kapjuk, és a nagyítás középpontja a $K(2;4)$!

E6 Egy $ABCD$ téglalap belsejében vegyél fel egy K pontot! A K pontból nagyítsd a téglalapot a kétszeresére! Az eredeti és a képként kapott téglalap közti terület hányszorosa az $ABCD$ téglalap területének?

A középpontos hasonlóság tulajdonságai

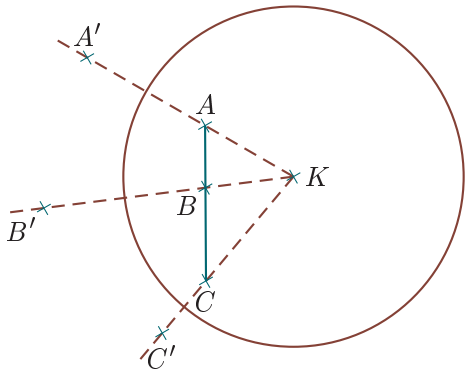
1. példa

Rajzoljunk egy K középpontú kört! A kör K középpontjától eltérő belső P ponthoz a következő módon szerkesztjük meg a képpontot. Megrajzoljuk a KP félegyenest. A félegyenes a kört a Q pontban metszi. A félegyenesen a körön kívül lesz a P' képpont úgy, hogy $QP' = QP$. A kör belsejében vegyünk fel egy egyenesen A, B, C pontokat, és szerkesszük meg a képüket! Figyeljük meg a képpontok elhelyezkedését!

A leírtaknak megfelelően járunk el, ezt mutatja a rajzunk.

Az A, B, C pontok illeszkednek egy egyenesre, de az A', B', C' pontok nem.

Az ilyen transzformációt **nem egyenestartó** transzformációnak nevezzük.



Egy egyenes transzformálásánál az egyenes két pontjának megszerkesztjük a képét, és ezeket a képpontokat összekötjük. Ezt az eljárást azonban csak egyenestartó transzformáció esetén tehetjük meg. Tengelyes tükrözésnél, középpontos tükrözésnél, eltolásnál, forgatásnál alkalmazhattuk ezt a módszert. A középpontos kicsinyítés és nagyítás esetén is így jártunk el, pedig még nem győződtünk meg az egyenestartásáról.

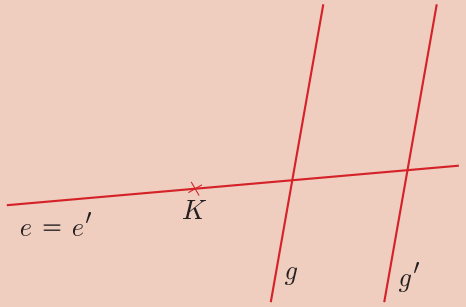
Bizonyítás nélkül, csak a tapasztalataink alapján mondjuk ki a következőket:

Fontos tudnivaló

A középpontos hasonlóság egyenestartó transzformáció.

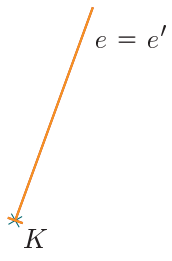
A középpontos hasonlóság középpontján áthaladó egyenes képe önmaga.

A középpontos hasonlóság középpontján át nem haladó egyenes képe az eredeti egyenessel párhuzamos egyenes.

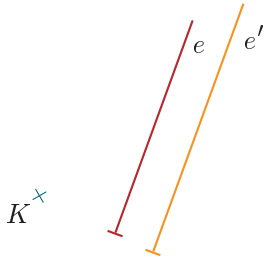


Félegyenesek képét látjuk a következő ábrákon.

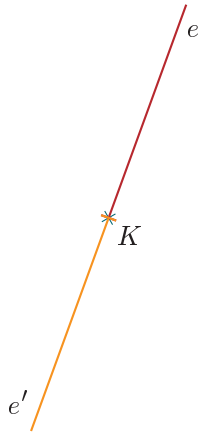
$\lambda > 0$



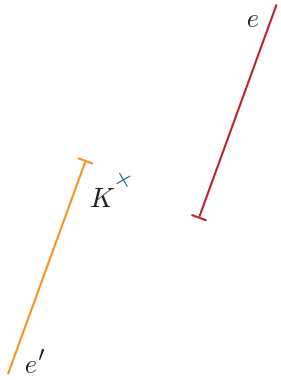
$\lambda > 0$



$0 > \lambda$



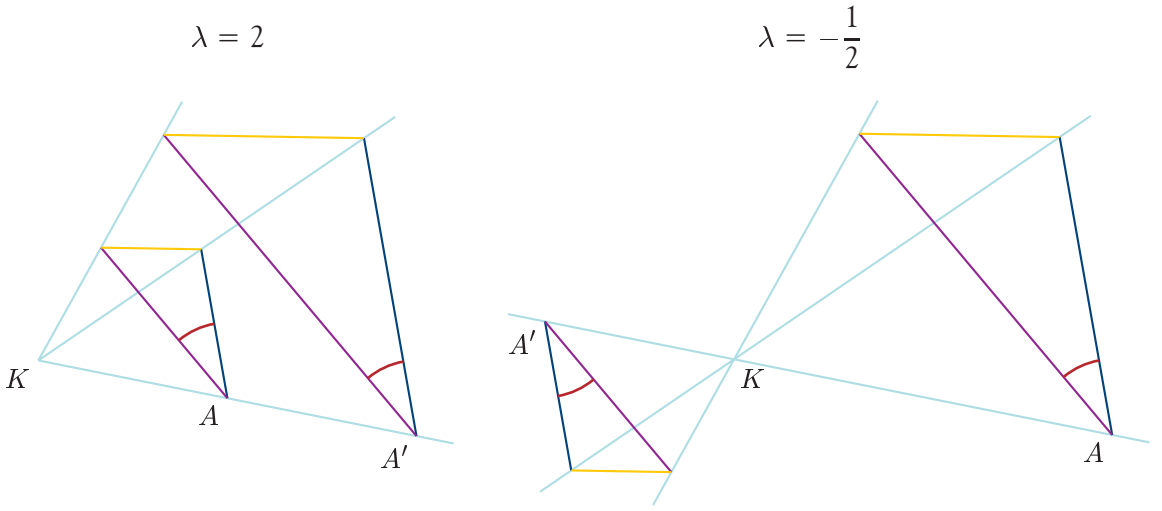
$0 > \lambda$



Ha az arányszám pozitív, akkor a félegyenes középpontosan hasonló képe az eredetivel **egyállású félegyenes**.

Ha az arányszám negatív, akkor a félegyenes középpontosan hasonló képe az eredetivel **fordított állású félegyenes**.

Vizsgáljuk meg, hogy a szög és képe milyen viszonyban van egymással!



A szög szárai félegyenesek, ezért ezek képei az arányszámtól függően vagy egyállású, vagy fordított állású félegyenesek lesznek.

Vagyis a szög képe vagy egyállású, vagy fordított állású lesz az eredeti szöggel. Ezért a szög és képe egyenlő egymással.

A középpontos hasonlóság szögtartó transzformáció.

2. példa

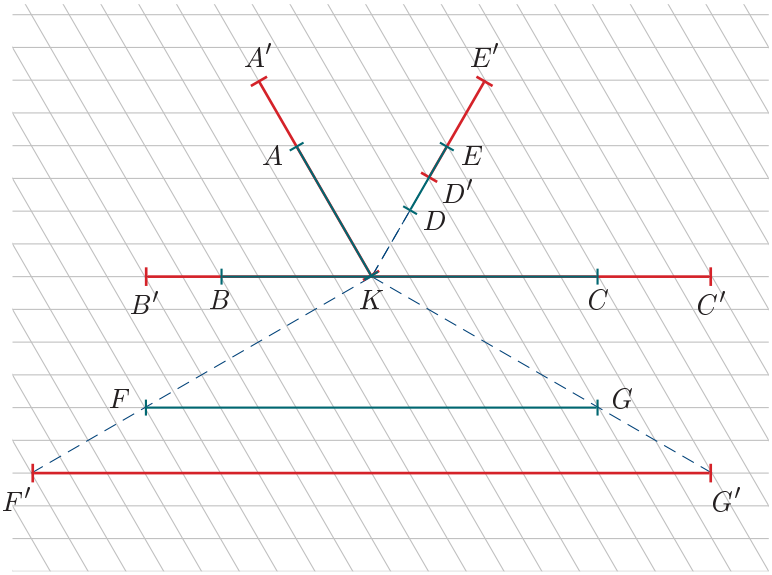
Legyen az arányszám 1,5! Rajzoljunk különböző helyzetű szakaszokat a paralelogrammarácsra, és rajzoljuk meg a szakaszok középpontosan hasonló képét! Figyeljük meg, hogyan változik a szakaszok hossza! A középpont legyen a K pont!

Egy szakasz a középponthoz képest többféleképpen elhelyezkedhet. Felvettük a középpontból induló KA szakaszt, a középpontra illeszkedő BC szakaszt, a középpontból induló félegyenesen lévő DE szakaszt és egy tetszőleges FG szakaszt.

Az ábrán megrajzoltuk a KA', $B'C'$, $D'E'$, $F'G'$ képeket.

A szakaszok hossza mindig 1,5-szeresére változott.

Bebizonyítható, hogy λ arányú középpontos hasonlóság esetén a szakasz képének hossza $|\lambda|$-szerese az eredeti szakasz hosszának.



Az alakzatok képét pontonként kell megszerkesztenünk. Az egyenestartás sokat segít a kép megszerkesztésében, mert így az egyenesek transzformálásakor elegendő két pontnak a képét megszerkeszteni. Hasonlóan hasznos tulajdonság, hogy a középpontos hasonlóság a kört körbe transzformálja.

A középpontos hasonlóság körtartó transzformáció.

Az előbbiekben megtanult tulajdonságok alapján gyorsan transzformálható a kör.

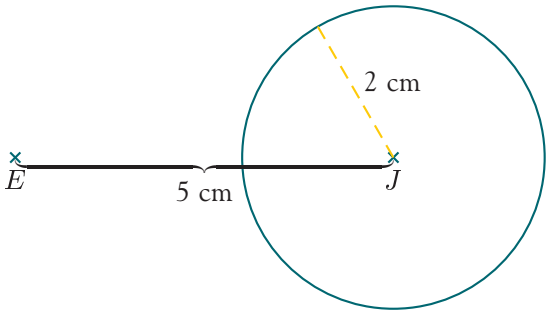
3. példa

Ágnes Jani bácsi körül 4 méteres vezetőszáron lovagolt körbe-körbe. Ágnes édesapja Jani bácsitól 10 méterre állt. Készítsünk egy felülnézeti vázlatrajzot! Ami a valóságban 1 méter, az a rajzon legyen 0,5 centiméter.



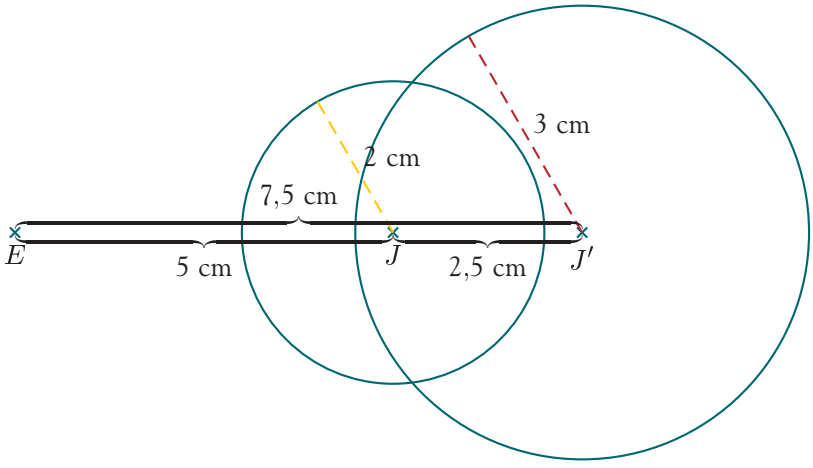
A következő alkalommal 6 méteres vezetőszárat tettek Ricsire, a lóra. Ágnes édesapja most is ugyanott állt, mint az előző alkalommal. Szerkesszük meg Ricsi útvonalát az előző vázlatrajzba, ha Jani bácsi arányosan távolabb ment az édesapától!

A történetben leírtak alapján felveszünk két pontot egymástól 5 cm-re. E jelöli Ágnes édesapjának a helyét, J pedig Jani bácsi helyét. A ló útját a J középpontú, 2 cm sugarú kör szemlélteti.





Második alkalommal Jani bácsi arányosan távolabb ment. Tudjuk, hogy a vezetőszár 4 méterről 6 méterre változott, ami 1,5-szeres növekedés. Ezért Jani bácsi és Ágnes édesapjának távolsága is 1,5-szeresére nőtt. Ágnes édesapjától első alkalommal 10 méterre (5 cm) volt Jani bácsi, a második alkalommal 15 méter (7,5 cm) lett ez a távolság. Ezt a helyet J' jelöli az ábránkon. Vagyis a J' középpontú, 3 cm-es kör mutatja Ricsi útvonalát a második alkalommal.



Lényegében az E középpontú, 1,5-es arányú középpontos hasonlóságot alkalmaztuk a kisebb körre. Kör transzformálásához a kör középpontját és a sugarát kell transzformálni.

Feladatok

K1 Keresd meg a következő ábrákon a középpontos hasonlóság középpontját, ha az arányszám

a) pozitív; *b)* negatív!



K2 Az ABC háromszög A-ból húzott magasságának talppontja T, magasságpontja M, az AB oldal felezőpontja F. A háromszögön kívül fekvő K pontból alkalmaztunk egy $\lambda = \frac{5}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot. A képpontokat a szokásos módon vesszővel jelöljük. Pótold a következő állítások hiányzó részét!

a) $AC \parallel$ ☐; *b)* $FM \parallel$ ☐; *c)* $\frac{M'F'}{MF} =$ ☐;

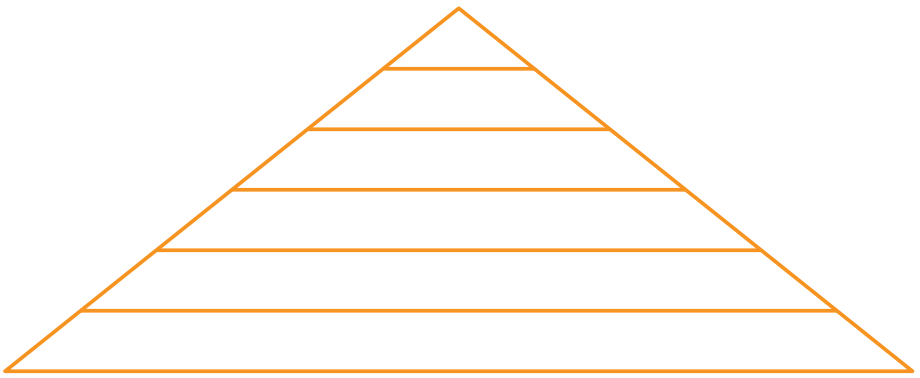
d) $\frac{5}{2} \cdot FT =$ ☐; *e)* $2 \cdot M'B' =$ ☐; *f)* $5 \cdot MC =$ ☐;

g) $\frac{2}{5}A'T' =$ ☐; *h)* $AB =$ ☐; *i)* $ABT \sphericalangle =$ ☐.

K3 Melyik igaz, melyik hamis a következő állítások közül?

(A) Két szög nagysága egyenlő, ha egymásnak középpontosan hasonló képei.
(B) Ha két szög egyenlő, akkor egymásnak középpontosan hasonló képei.
(C) A $\lambda = 2$ középpontos hasonlósági aránnyal a szög nagysága megkétszereződik.
(D) A csúcsszögek egymásnak középpontosan hasonló képei.

K4 Egy háztetőn a cserepezés előtt úgy helyezték el a léceket, hogy a köztük lévő távolságok egyenlőek:



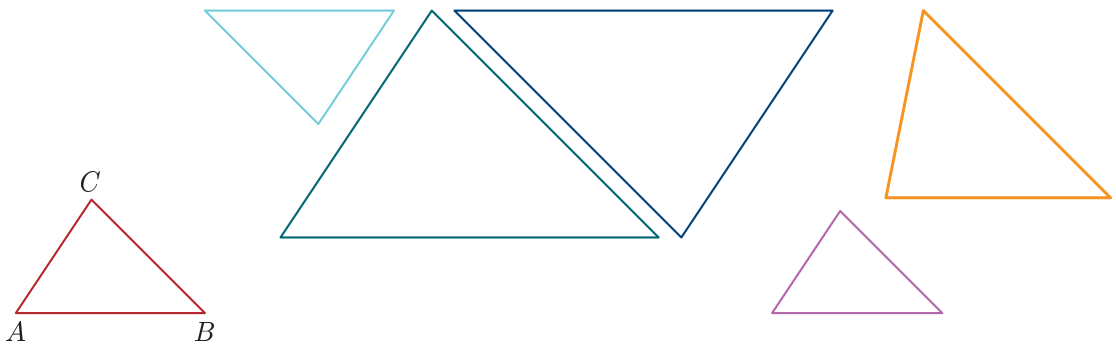
Az ábrán hat középpontosan hasonló háromszöget látsz.

a) Mekkora az arány a legkisebb és a legnagyobb háromszög között?

b) Melyik kettő között van 2,5 arány?

c) Melyik kettő között van $\frac{1}{3}$ arány?

K5 Az ábrán látható háromszögek közül válogasd ki azokat, amelyek az ABC háromszög középpontosan hasonló képei!



Szerkesszünk középpontosan hasonló képet!

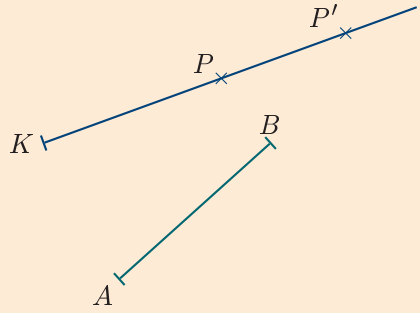
Ha a középpontos hasonlóság arányszámát nem ismerjük, akkor is megszerkeszthetjük az ismeretlen képpontokat, például a következő esetekben:

Adott a K középpont, továbbá egy tetszőleges P pont és a P' képe.

Adott két különböző pont, a P és a Q, továbbá a képük, a P' és a Q'.

1. példa

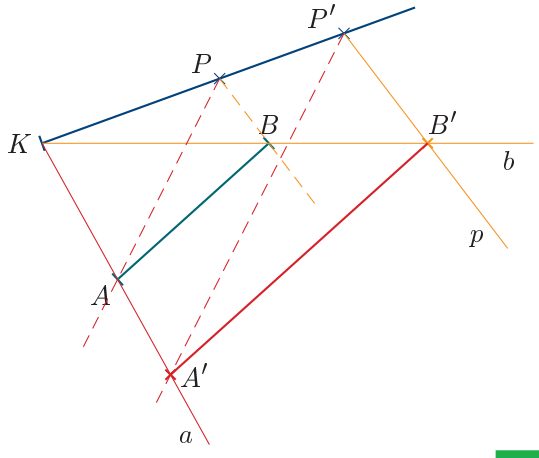
Adott a K középpont, továbbá egy tetszőleges P pont és a P' képe. Szerkesszük meg az AB szakasz középpontosan hasonló képét!



A középpontos hasonlóság tanult tulajdonságait alkalmazzuk. Tudjuk, hogy B' pontnak teljesíteni kell a következőket: $PB \parallel P'B'$, és B' illeszkedik a KB félegyenesre.

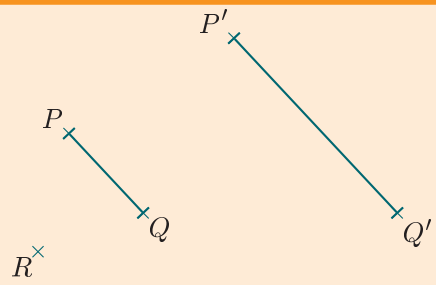
Ezek szerint két egyenes metszéspontjaként kapjuk B' pontot. Megszerkesztjük a P'-re illeszkedő PB-vel párhuzamos p egyenest, valamint a K és B pontokra illeszkedő b egyenest. A p és b metszéspontja a keresett B'.

Az A' megszerkesztésénél hasonlóan járunk el.

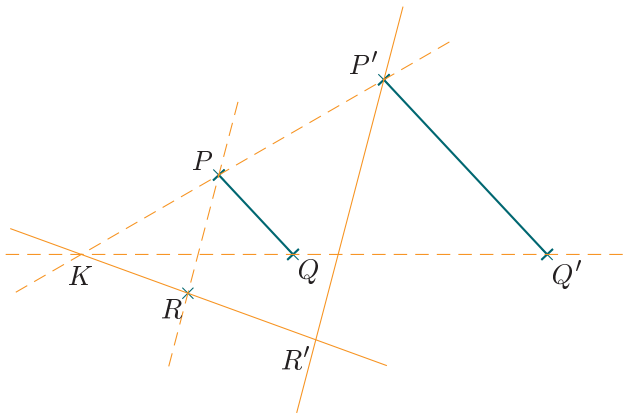


2. példa

Adott a PQ szakasz, továbbá a $P'Q'$ képe. (P képe P', Q képe Q'.) Szerkesszük meg az R pont képét!



Mivel P képe P', Q képe Q', és a középpontos hasonlóság K középpontja illeszkedik a PP' és a QQ' egyenesre, ezért a két egyenes metszéspontjaként áll elő a K pont. A K pont ismeretében az előző példában leírtak alapján megszerkesztjük az R pont képét. Az ábrán látjuk a kész szerkesztést.



Megjegyzés

A K megszerkesztése nélkül is megkapható az R' pont. Tudjuk, hogy a középpontos hasonlóság miatt $PR \parallel P'R'$ és $QR \parallel Q'R'$. Vagyis a PR egyenessel P'-n át szerkesztett párhuzamos és a QR egyenessel Q'-n át szerkesztett párhuzamos egyenesek metszéspontja lesz az R' pont. (Vagy: a PQR háromszöghöz hasonló $P'Q'R'$ háromszöget az ismert QPR és PQR szögek átmásolásával is megkaphatjuk.)

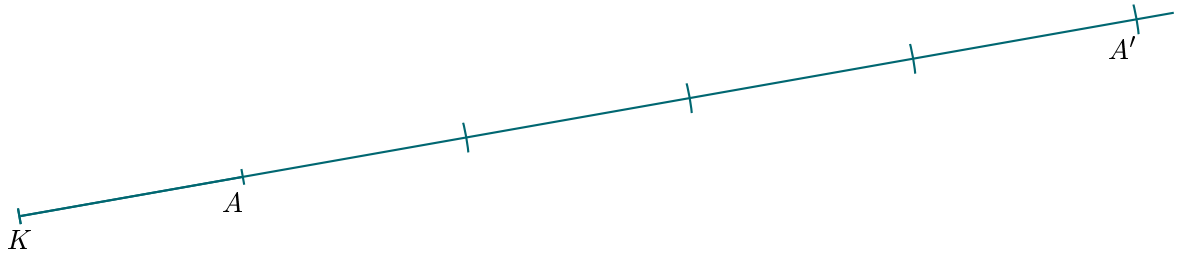
Ha a középpontos hasonlóság arányszáma adott, akkor sok esetben könnyen tudunk képpontokat szerkeszteni. Ilyen esetek, ha az arányszám egész szám, vagy ha az arányszám olyan tört, amelynek a nevezője 2, 4, 8, 16, ...

3. példa

Szerkesszük meg az A pont képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja, és

a) $\lambda = 5$; *b)* $\lambda = \frac{5}{4}$!

a) A KA szakasz hosszát körzőnyílásba vesszük, majd K-ból ötször felmérjük a KA félegyenesre.



b) A KA szakasz hosszát felezzük el, majd a felet ismét felezzük el. Az így kapott negyed hosszúságú szakaszt a KA félegyenesen az A után mérjük.

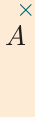


Felvetődik a kérdés, hogy ezektől eltérő arányszámok esetén hogyan járjunk el. Azt megtapasztaltuk az eddigiekben, hogy a $\lambda = 2$ középpontos hasonlóságnak a $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú pont az ellenkezője. Ami az egyikben tárgypont, az a másikban képpont, illetve fordítva. Ez minden λ és $\frac{1}{\lambda}$ esetén így van.

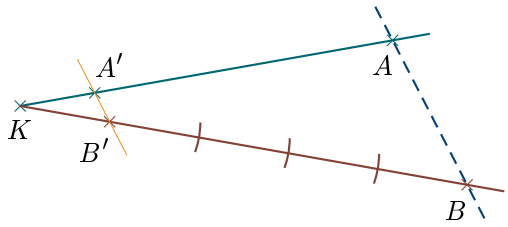
Ez adja az ötletet például a $\lambda = \frac{1}{5}$ arányú középpontos hasonlóság esetén a képpontok megszerkesztésére. A $\lambda = 5$ esetén könnyen el tudjuk végezni a szerkesztést. Cseréljük fel a két összetartozó pont szerepét, s ezután a tanult módon tetszőleges pont képét meg tudjuk szerkeszteni.

4. példa

Az adott K középpontú $\lambda = \frac{1}{5}$ arányú középpontos hasonlóság esetén szerkesszük meg egy tetszőleges A pont képét!



Ha lenne egy másik pont (B) és annak a képe, akkor az előzőek alapján már meg tudnánk szerkeszteni A-t, mert $AB \parallel A'B'$. Felveszünk egy tetszőleges B' pontot. A KB' félegyenesre K-ból kiindulva felmérjük ötször a KB' szakasz hosszát. Így kapjuk a B pontot. Ezután az A pont képét meg tudjuk szerkeszteni.

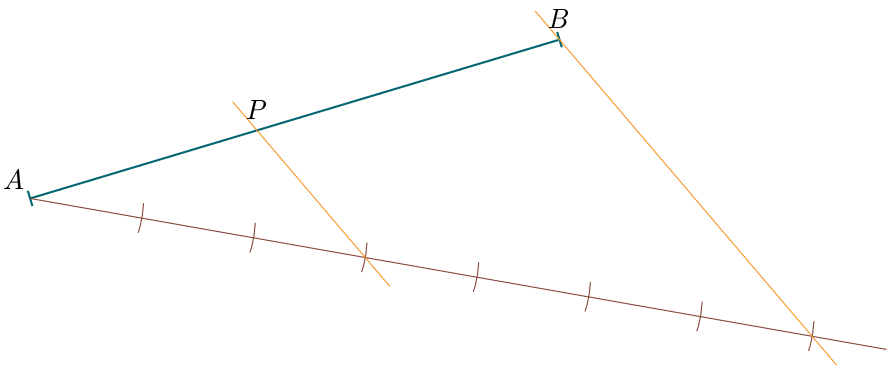


A most bemutatott módszer segítségével és szakaszmásolással például a $\lambda = \frac{2}{5}$, vagy $\lambda = \frac{7}{5}$ arányú középpontos hasonlóság esetén is megszerkeszthetők a képpontok. Továbbá ez a módszer adja az ötletet, hogy egy tetszőleges szakaszt hogyan vághatunk szét egy adott arányban.

5. példa

Az adott AB szakaszt vágjuk két részre egy P ponttal úgy, hogy $AP : PB = 3 : 4$!

Húzzunk egy félegyenest az A pontból indulva! A-ból mérjünk fel hét (3 + 4) egyenlő szakaszt a körzőnkkel!



A hetedik szakasz végpontját összekötjük a B ponttal, majd az így kapott egyenessel párhuzamost húzunk a harmadik szakasz végpontján át. Ez az egyenes metszi az AB szakaszt a P pontban.

Feladatok

A1 Keressetek középpontosan hasonló tárgyakat a környezetetekben!

A2 Keressetek olyan játékokat, modelleket, amelyek valóságos tárgyak kicsinyített másai! Gyűjtsetek minél többet! Beszéljétek meg, hogy ki mit talált!

A3 Keressetek a szertárakban olyan tárgyakat, amelyek valóságos dolgok nagyított modelljei!

K4 Adott egy tetszőleges P pont és a P' középpontosan hasonló képe. Adott továbbá a K középpont a PP' szakaszon. Szerkeszd meg egy tetszőleges AB szakasz középpontosan hasonló képét!

K5 Adott egy AB szakasz és egy vele párhuzamos CD szakasz. A két szakasz nem egyenlő hosszú, de az AB szakasz középpontosan hasonló képe a CD. Szerkeszd meg egy tetszőleges LM szakasz képét!

K6 Szerkeszd meg egy tetszőleges AB szakasz képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja, és

a) $\lambda = -4$; *b)* $\lambda = -\frac{3}{4}$; *c)* $\lambda = -8$; *d)* $\lambda = -\frac{7}{8}$!

K7 Szerkeszd meg egy tetszőleges ABC háromszög képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja, és

a) $\lambda = 4$; *b)* $\lambda = \frac{7}{4}$; *c)* $\lambda = 8$; *d)* $\lambda = \frac{3}{8}$!

K8 Szerkeszd meg egy tetszőleges $ABCD$ négyzet képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja, és

a) $\lambda = \frac{1}{3}$; *b)* $\lambda = \frac{1}{7}$; *c)* $\lambda = \frac{3}{5}$; *d)* $\lambda = \frac{5}{7}$!

K9 Az adott AB szakaszt vágd két részre egy P ponttal úgy, hogy

a) $AP : PB = 1 : 3$; *b)* $AP : PB = 3 : 5$;

c) $AP : PB = 1 : 4$; *d)* $AP : PB = 3 : 8$!

K10 Az adott KL szakasz L-en túli meghosszabbításán szerkeszd meg azt a Q pontot, amelyre

a) $KQ : QL = 3 : 1$; *b)* $KQ : QL = 5 : 1$;

c) $KQ : QL = 5 : 2$; *d)* $KQ : QL = 8 : 3$!

K11 Hárman elvállalták egy kert felásását. Az egyik munkás 40 percet, a másik fél órát, a harmadik pedig 1 órát dolgozott, és így elkészültek a munkával. Fizetségük 390 fabatka és egy hosszú kolbász volt. A pénz elosztásával gyorsan végeztek. Tervezd meg, hogyan osszák el igazságosan a kolbászt!

Készíts grafikus megoldást! Gondold végig, hogyan kapcsolódik a feladat a témához!

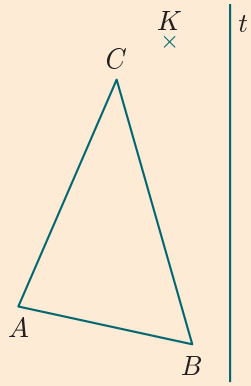
K12 Egy felülnézetben téglalap alakú mesterséges halastavat az egyik csúcsából indulva körbe szeretnénk sétálni. Közben kétszer megállunk pihenni. Rajzolj egy téglalapot, és szerkeszd meg a pihenőhelyeket, ha minden esetben ugyanannyit szeretnénk sétálni!

Hasonlóság

Keressetek hasonló tárgyakat a környezetetekben!

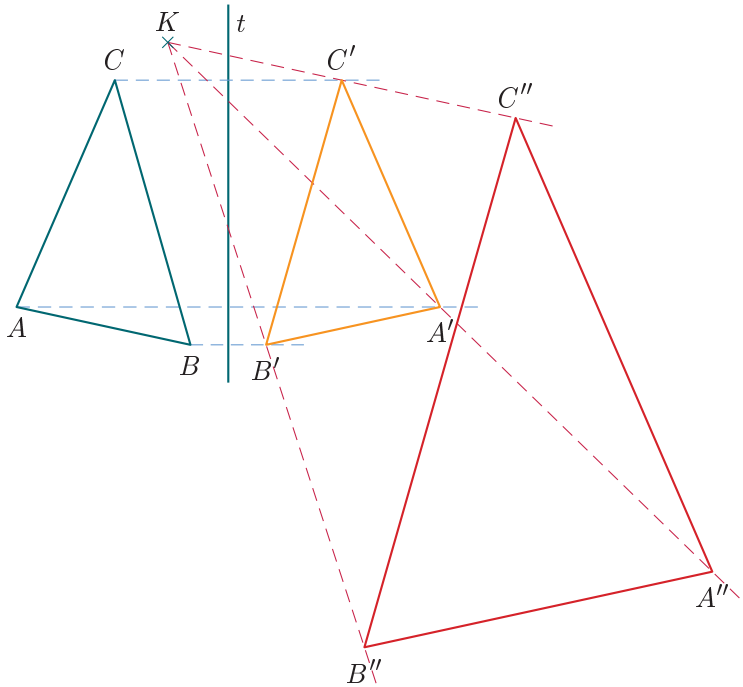
1. példa

Az ABC háromszöget tükrözzük a t tengelyre, majd az így kapott képet nagyítsuk középpontosan a K pontból kétszeresére! Figyeljük meg az eredeti és a második képként kapott háromszög alakját, az oldalak hosszának változását!



A következő ábrán nyomon követhető a két transzformáció.

Azt mondhatjuk, hogy ABC háromszöghöz **hasonló** az $A''B''C''$ háromszög. A két háromszöghöz nincs közös középpont, ezért nem mondhatjuk, hogy középpontosan hasonlók.



Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért

$A'B' = AB, \quad B'C' = BC,$

$A'C' = AC.$

A középpontos hasonlóság a szakaszok hosszát $|\lambda|$-szeresére változtatja, ezért ebben a példában

$A''B'' = 2 \cdot A'B',$

$B''C'' = 2 \cdot B'C',$

$A''C'' = 2 \cdot A'C'.$

Vagyis $A''B''C''$ háromszög oldalainak hossza az ABC háromszög oldalai hosszának kétszeresével egyenlő.

Az előző példa alapján megfogalmazzuk a következő definíciót.

Fontos tudnivaló *(Emelt szintű, választható tananyag)*

A középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtását hasonlósági transzformációnak nevezzük.

A középpontos hasonlóságban szereplő arányszám abszolút értékét a hasonlóság arányának mondjuk.

Az egybevágósági és a középpontos hasonlósági transzformáció meghatározásából és megismert tulajdonságaiból beláthatók a hasonlóságra a következő tulajdonságok.

Fontos tudnivaló *(Emelt szintű, választható tananyag)*

A hasonlósági transzformáció egyenestartó: egyenes képe egyenes.

A hasonlósági transzformáció szögtartó.

Ha a hasonlóság aránya λ, akkor a hasonlóság minden szakasz hosszát λ-szorosára változtatja. (A hasonlósági transzformáció aránytartó.)

Ha valamely transzformáció minden szakasznak a hosszát λ-szorosára változtatja ($\lambda > 0$), akkor az hasonlósági transzformáció.

Hasonlónak nevezünk két alakzatot, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másik alakzatba viszi.

A hasonlóság jele: $\sim$.

Ha az ABC háromszöget hasonlósági transzformáció visz az $A'B'C'$ háromszögbe, akkor $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$ (ABC háromszög hasonló $A'B'C'$ háromszöghöz).

Két alakzat hasonlóságának megmutatása gyakran hosszadalmas munkát jelent, hiszen meg kellene keresnünk a megfelelő hasonlósági transzformációt.

Vannak alakzatok, amelyek hasonlóságát a jellemző adatokból könnyen el lehet dönteni.

Bármely két kör hasonló.

Háromszögekre bebizonyíthatók a következő állítások.

a) **Ha két háromszögben a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.**

b) **Ha két háromszögben két-két megfelelő oldal hosszának aránya egyenlő, és az ezek által közrefogott szögek is egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.**

c) **Ha két háromszögben két-két szög egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.**

d) **Ha két háromszögben két-két megfelelő oldal hosszának aránya egyenlő, és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögek egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.**

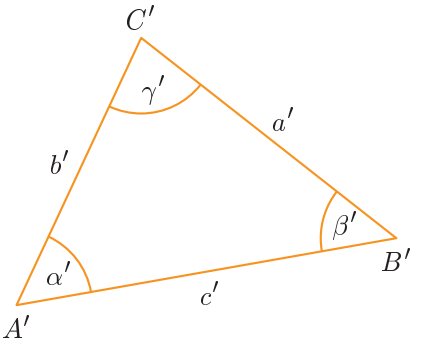
Az állításokat a szokásos jelöléssel is leírjuk.

Ha $a : a' = b : b' = c : c'$, akkor $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

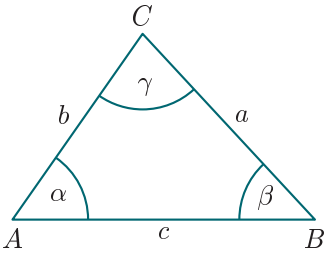
Ha $a : a' = b : b'$ és $\gamma = \gamma'$, akkor $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

Ha $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, akkor $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

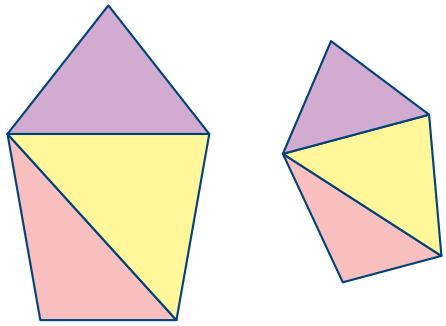
Ha $a : a' = b : b'$, $a > b$ és $\alpha = \alpha'$, akkor $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.



Ha ezek közül valamelyik feltétel teljesül, akkor mind teljesül, és a két háromszög minden megfelelő szakaszának az aránya egyenlő, és a megfelelő szögek is egyenlők.



A sokszögek hasonlóságát a háromszögek segítségével vizsgáljuk. Az átlókkal háromszögekre vágjuk a sokszögeket, és a megfelelő részek hasonlóságából következtetünk a sokszögek hasonlóságára.



Megkönnyíti döntésünket a következő két állítás.

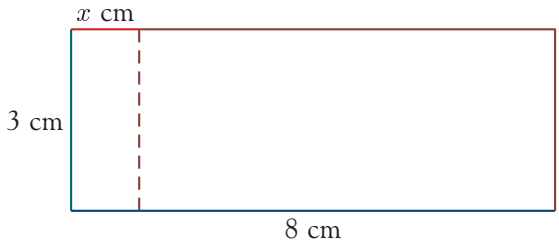
Két sokszög hasonló, ha a megfelelő oldalaik és megfelelő átlóik hosszának aránya egyenlő.

Két sokszög hasonló, ha a megfelelő oldalaik aránya egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

2. példa

Egy 3 cm-szer 8 cm-es téglalap alakú csokoládéból egyenes mentén letörtünk egy darabot. Ez a darab hasonló lett az eredetihez. (A csokoládé vastagságát most nem figyeltük.) Mekkora darabot törtünk le?

A téglalap megfelelő szögei egyenlők, hiszen minden szög 90°. Vagyis csak a megfelelő oldalak arányára kell figyelnünk. A rajzunkon x jelöli a letört darab ismeretlen oldalának hosszát.



A megfelelő oldalak arányának egyenlőnek kell lenni, azaz: $\frac{x}{3} = \frac{3}{8}$.

Vagyis $x = \frac{9}{8} = 1{,}125$ cm.

A letört darab 1,125 cm-szer 3 cm-es téglalap alakú csokoládé volt.

Feladatok

K1 Az ABC háromszöget tükrözd az AB oldalegyenesére, majd az így kapott képet nagyítsd középpontosan a C pontból 1,5-szeresére! Hogyan változott az oldalak hossza?

K2 Rajzolj egy derékszögű háromszöget! Rajzold meg az átfogóhoz tartozó magasságot! Mutasd meg, hogy

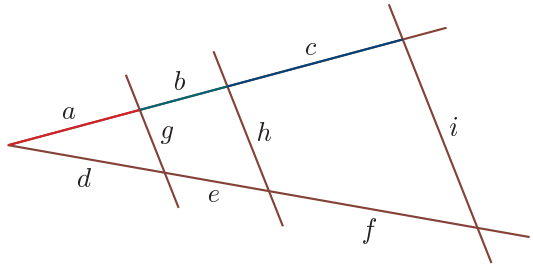
a) az így kapott két háromszög hasonló egymáshoz;

b) az így kapott két háromszög hasonló az eredetihez!

K3 Számítsd ki a hiányzó szakaszok hosszát!

a) $a = 2{,}5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 5$ cm, $d = 3$ cm, $g = 1{,}5$ cm;

b) $a = 2{,}2$ cm, $b = 1{,}8$ cm, $c = 6$ cm, $i = 4$ cm, $e = 2$ cm.



K4 Melyik igaz, melyik hamis?

(A) Két különböző szabályos háromszög mindig hasonló.

(B) Két különböző téglalap mindig hasonló.

(C) Két különböző rombusz mindig hasonló.

(D) Két különböző négyzet mindig hasonló.

(E) Két különböző körcikk mindig hasonló.

(F) Két különböző félkör mindig hasonló.

(G) Két különböző körszelet mindig hasonló.

K5 Egy háromszög oldalainak aránya 5 : 6 : 7. A hozzá hasonló háromszög kerülete 441 cm. Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai?

K6 Egy négyszög oldalainak a hossza 1,5 m, 2 m, 4 m, 4,5 m. Egy hozzá hasonló négyszögben a leghosszabb és a legrövidebb oldal eltérése 15 cm. Mekkorák az új négyszög oldalainak a hosszai?

K7 Két szabályos háromszög hasonlóságának aránya $\frac{2}{5}$. Egy-egy oldaluk hosszának összege 29,82 m. Hány centiméter a nagyobb háromszög kerülete?

K8 Egy 5 cm-szer 12 cm-es téglalapból levágtunk egy egyenes mentén egy kisebb téglalapot. A levágott darab hasonló az eredetihez.

a) Mekkorák a levágott téglalap oldalai?

b) Hányadrésze a levágott téglalap kerülete az eredeti téglalap kerületének?

K9 Egy térképen az 1 : 8 500 000 arányszámot látjuk. Ez a kicsinyítés arányszáma.

a) A térképen Budapest és Kolozsvár távolsága 4 cm. Milyen messze van a két város egymástól a valóságban?

b) Ha Sopron és Pécs távolsága légvonalban 212,5 km, akkor milyen messze vannak egymástól ezen a térképen?

K10 Budapest és Edelény távolsága légvonalban 156,8 km. Megmértük a távolságukat egy térképen, és 5,6 cm-t kaptunk. Add meg a térképen szereplő arányszámot!



Edelényben található hazánk hetedik legnagyobb kastélya

K11 Szeretnénk egy torony magasságát meghatározni. A torony lábától ugyanabban az irányban távolodva leszúrunk két botot. Az első bot a toronytól 38 méterre van, és a magassága 1,5 méter. A második bot a toronytól 40 méterre van, és a magassága 1 méter. A torony és a két bot teteje egy egyenesre illeszkedik. Milyen magas a torony?

K12 Egy 15 méter széles folyó túlsó partján közvetlenül a víz mellett áll két fűzfa. Tervezd meg, hogy miként határoznád meg a távolságukat!

Mérjük meg a hosszát!

Megmérjük az ismeretlen szakasz hosszát a megszerkesztett ábrán. Hogyan lehetne mérés helyett számolni? Megismerkedünk egy összefüggéssel a derékszögű háromszög oldalai között. Így tudunk majd síkban és térben számítással meghatározni szakaszhosszt.

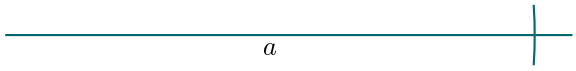
Az előző években előfordultak olyan feladatok, hogy egy szakasz hosszát szerettük volna tudni. A mérés előtt azonban meg kellett szerkesztenünk a szakasz végpontjait. Ezeket a feladatokat a következő példák segítségével felelevenítjük.

1. példa

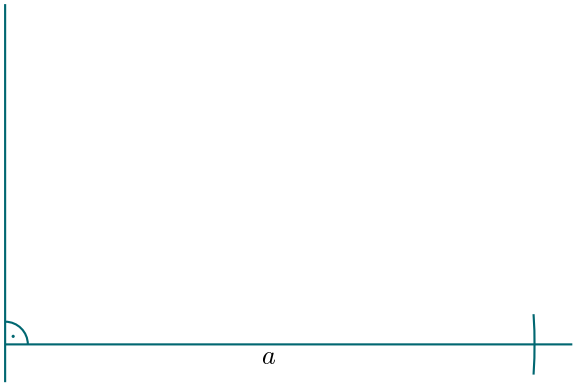
Mekkora az $a = 7$ cm és $b = 4$ cm befogójú derékszögű háromszög átfogójának a hossza?

A rendelkezésünkre álló adatokkal megszerkesztjük a háromszöget. Az ábrasorozat mutatja a szerkesztés lépéseit.

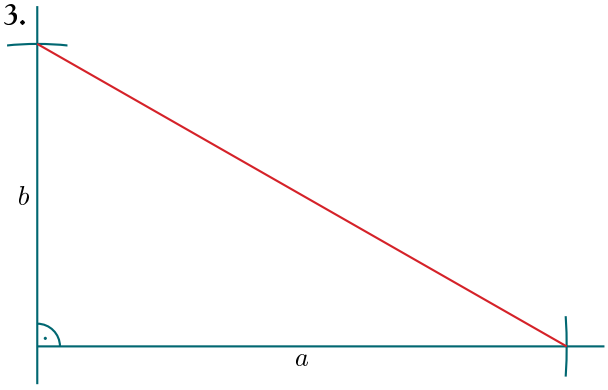
1.



2.



3.

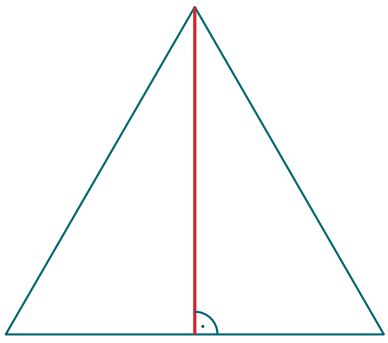


Az így kapott piros szakasz hosszát megmérjük, és válaszolunk a kérdésre.

A derékszögű háromszög átfogója kb. 8,1 cm hosszú.

2. példa

Mekkora az $a = 5$ cm oldalú szabályos háromszög magassága?



A rendelkezésünkre álló adatokkal most is megszerkesztjük a háromszöget.

Az így kapott piros szakasz hosszát megmérjük, és válaszolunk a kérdésre.

A szabályos háromszög magassága kb. 4,4 cm hosszú.

3. példa

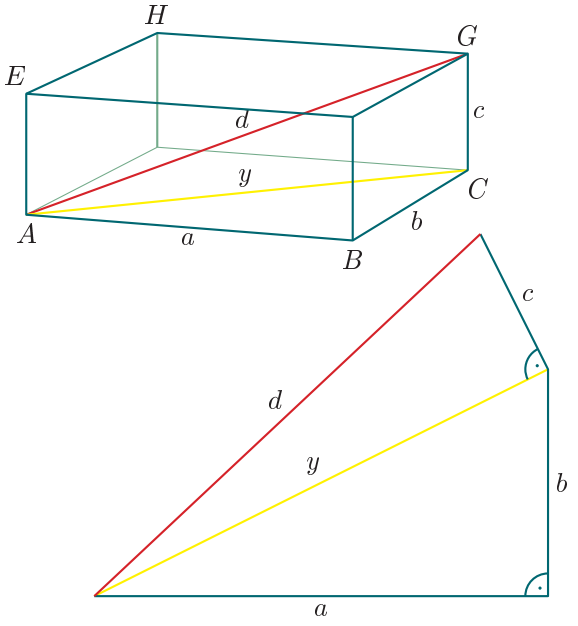
Egy téglatest élei: $a = 6$ cm, $b = 3$ cm és $c = 2$ cm. Milyen hosszú a testátlója?

Az ábra jelöléseit használjuk.

Az ABC derékszögű háromszög két befogójának hosszát ismerjük. Ha megszerkesztjük a háromszöget, akkor az AC átfogó y hossza a rendelkezésünkre áll. Megmérhető vagy másolható ez a szakasz. Az ACG derékszögű háromszög két befogója ismert, hiszen az előbb kapott y az egyik, c pedig a másik. Ezt a háromszöget is megszerkesztjük. Az átfogó d hossza azonos lesz a téglatest testátlójának hosszával.

A két megszerkesztett háromszöget látjuk az ábrán.

A mérés eredménye alapján a téglatest testátlójának hossza kb. 7 cm.



A 2. példában szereplő szabályos háromszöget két oldalának hossza és a közbezárt 60°-os szöge határozza meg, ezért tudtuk megszerkeszteni. Érdemes végiggondolni, hogy milyen szögeket tudunk megszerkeszteni, ha már tudunk szöget másolni és szöget felezni, valamint a 60°-os szög mellett a 90°-os megszerkesztése is ismert a számunkra.

4. példa

Tervezzük meg, hogy miképpen szerkeszthetők a következő nevezetes szögek:

30°, 15°, 45°, 75°, 105°, 135°!

A 60° felezésével kapjuk a 30°-ot. A 30° felezésével kapjuk a 15°-ot. A 90° felezésével kapjuk a 45°-ot. A 75° azért szerkeszthető, mert például $30° + 45°$. A 105° azért szerkeszthető, mert például $60° + 45°$. A 135° azért szerkeszthető, mert például $90° + 45°$.

Feladatok

K1 Egy négyzet oldala 7 cm. Add meg milliméter pontossággal a négyzet átlójának hosszát!

K2 Mekkora az $a = 4$ cm és $b = 2$ cm befogójú derékszögű háromszög átfogójának a hossza?

K3 Mekkora az $a = 4$ cm befogójú és a $c = 8$ cm átfogójú derékszögű háromszög b befogójának a hossza? Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

K4 Egy négyzetes oszlop élei: $a = b = 2$ cm és $c = 1$ cm. Milyen hosszú a testátlója?

K5 Egy téglatest élei: $a = 12$ cm, $b = 4$ cm és $c = 3$ cm. Milyen hosszú a testátlója?

E6 Ha az $ABCD$ téglalap területe nagyobb, mint a $KLMN$ téglalap területe, akkor AC biztosan nagyobb, mint KM?

K7 A 4. példában adtunk egy lehetséges módot a 75°, 105°, 135° megszerkesztésére. Hogyan lehetne másként megszerkeszteni ezeket a szögeket?

K8 Hogyan szerkesztenél 22,5°-os, 150°-os, 165°-os szöget?

A Pitagorasz-tétel

Ha egy derékszögű háromszögben ismerünk két oldalt, akkor a háromszöget meg tudjuk szerkeszteni. A megszerkesztett háromszög ismeretlen oldalának hosszát megmérhetjük. A mérés pontosságát a szerkesztés pontossága is befolyásolja. A hosszúságot leolvassuk a vonalzónk segítségével, de ekkor is lehetünk pontatlanok. Jó lenne ezektől függetlenül meghatározni az ismeretlen oldal hosszát. Ehhez összefüggést kell találnunk a derékszögű háromszög három oldala között. Az eddigi szerkesztéseink, méréseink alapján megfogalmazzuk a következő állítást.

Olyan összefüggést fogunk megismerni, amelynek a jelentőségét az mutatja, hogy már a Kr. előtti századokban is ismerték, és a mai napig széles körben használjuk.

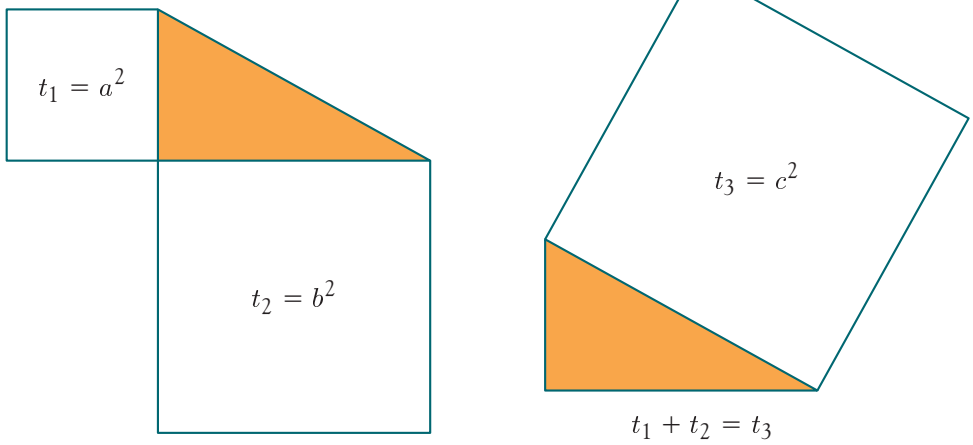
Ezt az összefüggést Pitagorasz-tétel néven ismerjük. A névadó Püthagorasz (ejtsd pütagorasz) történetéről a tétel megismerése után olvashatsz.

Fontos tudnivaló

Pitagorasz-tétel: derékszögű háromszögben a két befogó hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.

A tétel szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy a derékszögű háromszög két befogójára szerkesztett négyzetek együttes területe egyenlő az átfogóra szerkesztett négyzet területével.

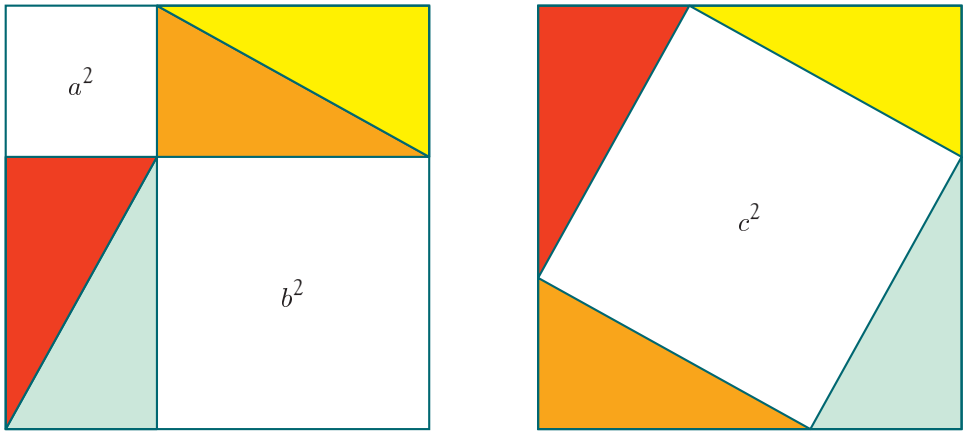
A derékszögű háromszög oldalai közötti, fent megfogalmazott összefüggést **Pitagorasz-tételnek** nevezzük.



$t_1 + t_2 = t_3$

A bizonyításhoz foglaljuk mindkét ábrát egy-egy négyzetbe! A négyzetek oldalhossza $a + b$, ezért a két nagy négyzet területe egyenlő.

Ezeket a nagy négyzeteket az ábrán látható módon részekre bontjuk.



A bal oldali négyzetet feldaraboltuk négy olyan derékszögű háromszögre, amelyek befogói a és b. Ezek azonos méretűek, egybevágók. Az átfogójuk is azonos hosszúságú, c-vel jelöltük. Ezeken a háromszögeken kívül két négyzetet is kaptunk, az egyik a^2, a másik b^2 területű.

A jobb oldali négyzetet öt részre daraboltuk. Ebből négy olyan derékszögű háromszög, amilyet a bal oldali ábra darabolásakor is kaptunk. Ezeken a háromszögeken kívül még egy négyszöget kaptunk, amelynek minden oldala azonos hosszúságú, a szögei 90°-osak. Ez a négyszög négyzet, a területe c^2.

Ha mindkét nagy négyzetből elvesszük a négy-négy derékszögű háromszöget, akkor a maradék területeknek egyenlőnek kell lenniük.

Ez pontosan azt jelenti, amit bizonyítani szerettünk volna, azaz: $a^2 + b^2 = c^2$.

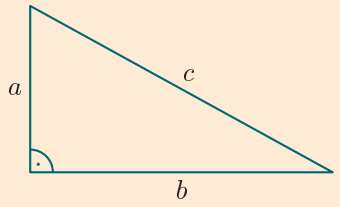
1. példa

A Pitagorasz-tétel felhasználásával számítsuk ki a derékszögű háromszög átfogójának hosszát, ha a befogók hossza

a) $a = 7$ cm és $b = 4$ cm;

b) $a = 4$ cm és $b = 2$ cm;

c) $a = 65$ cm és $b = 72$ cm!



a) Tudjuk, hogy $c^2 = a^2 + b^2$, vagyis $c^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$.

Ebből kapjuk az átfogó hosszát: $c = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ (cm).

b) Ebben az esetben $c^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$, vagyis $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ (cm).

c) Most $c^2 = 65^2 + 72^2 = 4225 + 5184 = 9409$, vagyis $c = \sqrt{9409} = 97$ (cm).

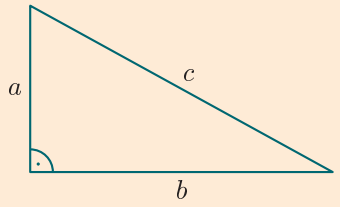
2. példa

A Pitagorasz-tétel felhasználásával számítsuk ki a derékszögű háromszög hiányzó befogójának hosszát, ha

a) $a = 5$ cm, $c = 13$ cm;

b) $b = 4$ cm, $c = 5$ cm;

c) $a = 55$ cm és $c = 73$ cm!



a) Tudjuk, hogy $b^2 = c^2 - a^2$, vagyis $b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.

Ebből kapjuk a befogó hosszát: $b = \sqrt{144} = 12$ (cm).

b) Tudjuk, hogy $a^2 = c^2 - b^2$, vagyis $a^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.

Ebből kapjuk a befogó hosszát: $a = \sqrt{9} = 3$ (cm).

c) Ebben az esetben $b^2 = 73^2 - 55^2 = 5329 - 3025 = 2304$, vagyis $b = \sqrt{2304} = 48$ (cm).

Püthagorasz görög filozófus Kr. e. a VI. században élt. (A magyar helyesírás szerint Püthagorasznak írjuk és ejtjük a nevét, a róla elnevezett tétel írása pedig helyesen Pitagorasz-tétel vagy Pitagorasz tétele.) A Miletoszhoz közeli Szamosz szigetén született. Sokat tanult, és Egyiptomba is elutazott, hogy megismerje a tudományok gyökereit. Szülőföldjére visszatérve tanítani kezdett. Állítólag első tanítványainak ő fizetett, hogy meghallgassák. További utazásai után egy vallásos jellegű, politikai célokért küzdő és a matematikai tudományokkal is foglalkozó, lényegében titkos társulatot alapított. Mivel összeütközésbe került Szamosz sziget uralkodójával, ezért Dél-Itáliába, Krotónba menekült. Előadásaival nagy sikert aratott, de ezekből és esetleges felfedezéseiből semmit nem írt le. Tanai összekeveredtek tanítványai eredményeivel. Ezért inkább Püthagorasz követőire, a püthagoreusokra kell gondolnunk, amikor Püthagoraszt említjük. (Azt tudjuk,

hogy a róla elnevezett tételt nem ő fedezte fel, de a sok-sok bizonyítás közül valamelyik biztosan tőle származik.) A szövetség tagjai csak azok lehettek, akik lelküket a szigorúan előírt életmóddal és zenével megtisztították. Egy istenben hittek, aki a világot a számok közötti kapcsolatoknak, törvényeknek megfelelően teremtette. A sokféle dolog között az isteni harmónia teremt rendet, és ez a harmónia fellelhető a számok tudományában és a zenében is. Szerintük az ember igazi hivatása ennek a boldogságot jelentő harmóniának a megtalálása, amelyhez legeredményesebben a matematika művelése segít hozzá. Kr. e. 2000 körül Mezopotámiában, a sumér korszakban már teljes általánosságban ismerték a Pitagorasz-tételt. A tétel innen kerülhetett Egyiptomba és Indiába. Az egyiptomi Rhind-papiruszon is megjelenik a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög, de ott nincs nyoma annak, hogy ez alapján kimondták volna a tételt a derékszögű háromszögekre. Indiában Kr. e. 500 táján találkozhatunk először a tétel különleges eseteivel, például a 3, 4, 5 vagy az 5, 12, 13 oldalú derékszögű háromszögekkel. Kínában Kr. e. 1200 és 1100 között olyan rajzot közölnek a *Számítási könyv a napóráról* című könyvben, amely egyértelművé teszi, hogy a Pitagorasz-tételnek legalább a 3, 4, 5 oldalú háromszög esetével tisztában voltak. A matematikai tételek közül ma is a Pitagorasz-tétel a legismertebb.

További érdekességeket találhatsz a szakirodalom és a világháló segítségével.

A Pitagorasz-tétel megfordítása is igaz.

Fontos tudnivaló

Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

A három oldal közül az a kettő lesz a befogó, amelyek négyzetösszegét vettük.

Az állítás igazolásával most nem foglalkozunk, de egy példán megnézzük az alkalmazását.

3. példa

Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak? Ha igen, akkor derékszögű-e a háromszög?

a) $a = 13{,}2$ cm, $b = 65$ mm és $c = 2$ dm;

b) $a = 1{,}35$ cm, $b = 3{,}24$ cm és $c = 3{,}51$ cm.

a) Az oldalak hossza cm-ben kifejezve: $a = 13{,}2$ cm, $b = 6{,}5$ cm és $c = 20$ cm.

Mivel $a + b = 13{,}2 + 6{,}5 = 19{,}7$ cm, és ez kisebb, mint $c = 20$ cm, ezért ilyen háromszög nem létezik.

b) Mivel $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$ mindegyike teljesül, ezért a háromszög létezik.

Ha derékszögű lenne, akkor csakis a két rövid oldal lehetne a befogója.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tétel megfordítását!

$a^2 + b^2 = 1{,}35^2 + 3{,}24^2 = 1{,}8225 + 10{,}4976 = 12{,}3201$, $c^2 = 3{,}51^2 = 12{,}3201$.

Mivel $a^2 + b^2 = c^2$, ezért a háromszög derékszögű. A derékszög a c oldallal szemben lévő γ szög lesz.

Megjegyzés

Ha $a^2 + b^2 < c^2$, akkor a háromszög tompaszögű, a γ szöge lesz tompaszög.

Ha $a^2 + b^2 > c^2$, akkor a háromszög γ szöge hegyesszög. (Természetesen ebből még nem következik, hogy a háromszög hegyesszögű, hiszen minden háromszögnek van legalább két hegyesszöge.)

Feladatok

A1 A Pitagorasz-tétel felhasználásával számítsd ki a derékszögű háromszög átfogójának hosszát, ha a befogók hossza

a) $a = 8$ cm és $b = 6$ cm; *b)* $a = 7$ cm és $b = 17$ cm; *c)* $a = 6{,}5$ cm és $b = 7{,}2$ cm!

K2 A Pitagorasz-tétel felhasználásával számítsd ki a derékszögű háromszög hiányzó befogójának hosszát, ha

a) $a = 15$ cm, $c = 39$ cm; *b)* $b = 11$ cm, $c = 19$ cm; *c)* $a = 20$ cm és $c = 29$ cm!

K3 Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak? Ha igen, akkor derékszögű-e a háromszög?

a) $a = 26{,}2$ cm, $b = 138$ mm és $c = 4$ dm; *b)* $a = 311$ mm, $b = 32$ cm és $c = 0{,}64$ m;

c) $a = 15$ cm, $b = 30$ cm és $c = 34$ cm; *d)* $a = 6$ mm, $b = 0{,}175$ dm és $c = 1{,}85$ cm.

K4 Egy négyzet oldala 9 dm. Add meg milliméter pontossággal a négyzet átlójának hosszát!

K5 Mekkora a 11 cm átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak hossza?

K6 Milyen hosszú a 14 cm oldalú szabályos háromszög magassága?

K7 Egy szabályos háromszög magassága 15 cm. Mekkorák az oldalak?

K8 Az ABC egyenlő szárú háromszögben az ábrán látható jelölést használjuk: az alap a, a szárak b, az alaphoz tartozó magasság m_a hosszúságú. Számítsd ki a hiányzó szakaszok hosszát!

a) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm;

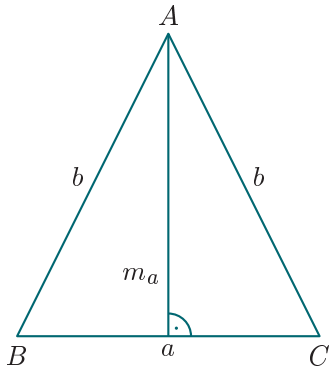
b) $a = 2{,}3$ dm, $b = 18$ cm;

c) $a = 20$ cm, $m_a = 26$ cm;

d) $a = 2{,}4$ dm, $b = 19$ cm;

e) $b = 58$ mm, $m_a = 42$ mm;

f) $b = 2{,}2$ dm, $m_a = 195$ mm.



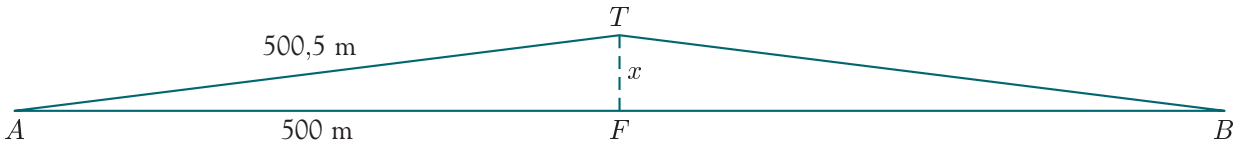
A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban

1. példa



Egy 1 km hosszúságú egyenes úton a két végénél rögzítettek egy 1001 m hosszúságú kötelet. Ha valaki középen megfogja a kötelet, akkor fel tudja-e emelni olyan magasra, hogy a kötél kifeszüljön? Számolás előtt tippeld meg, hogy milyen magasra kellene emelni a kötelet!

A feladat szövege alapján készítsünk vázlatrajzot!



Az AB útszakasz 1 km, ezért $AF = FB = 500$ m. A kötél mindkét fele egyenlő, vagyis $AT = TB = 500{,}5$ m. Az AFT derékszögű háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt:

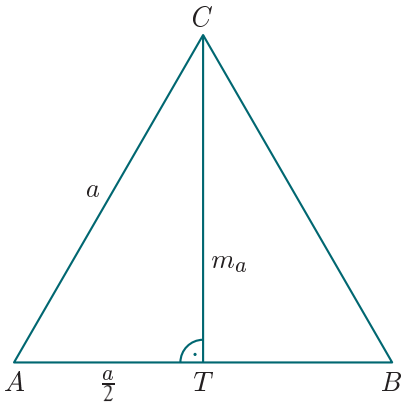
$500^2 + x^2 = 500{,}5^2$, $x^2 = 250\,500{,}25 - 250\,000 = 500{,}25$. Vagyis: $x \approx 22{,}4$.

Kb. 22,4 méter magasra kellene emelni a kötél közepét, hogy kifeszüljön. Ilyen magas ember nincs, ezt senki nem tudja megtenni.

A kapott eredményt hasonlítsd össze a tippeddel!

2. példa

Határozzuk meg az a oldalú szabályos háromszög magasságát, területét!



Az ábra jelöléseit használjuk.

ATC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint:

$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2$. Vagyis $m_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $m_a^2 = \frac{3}{4}a^2$.

Azaz $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ennek ismeretében képletet tudunk adni az a oldalú szabályos háromszög területére is:

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Fontos tudnivaló

Az a oldalú szabályos háromszög magasságának hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Az a oldalú szabályos háromszög területe: $t = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Ha egy szabályos háromszöget a magasságvonala mentén kettévágunk, akkor két egybevágó derékszögű háromszöget kapunk. Ilyen alakú az egyik derékszögű vonalzónk. A továbbiakban hasznos lesz, ha ennek a háromszögnek összegyűjtjük a tulajdonságait. Ezek lényegében az előző tudnivalókból következnek.

A rövidebb befogó hosszának kétszeresével egyenlő az átfogó hossza.

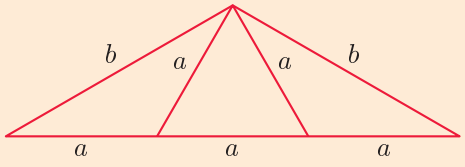
A két hegyesszöge 30°-os és 60°-os. Az átfogó $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szörösével egyenlő a hosszabb befogó.

A rövidebb befogó $\sqrt{3}$-szorosával egyenlő a hosszabb befogó.

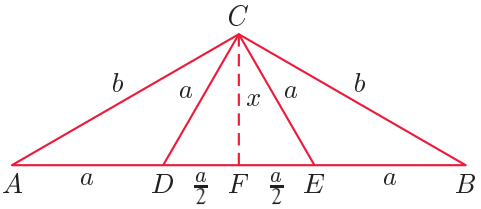
Ha a rövid befogója a, akkor a területe: $t = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

3. példa

Az ábrán látható tetőszerkezet a-val jelölt gerendái 4 m hosszúságúak. Milyen hosszúságúak a b-vel jelölt gerendák?

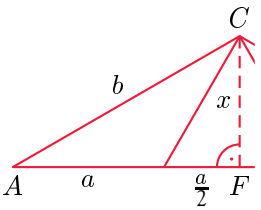


Az ábra fontos pontjainak nevet adunk, és berajzoljuk az ABC háromszög C-ből húzott magasságát.



Az AFC derékszögű háromszög átfogójának hosszát kell kiszámítanunk. Az $AF = \frac{3}{2}a$, de a másik befogó hosszát nem ismerjük. Azt tudjuk, hogy a CF befogó az EDC szabályos háromszög magasságával egyezik meg. Ezért első lépésként az a oldalú szabályos háromszög magasságának hosszát adjuk meg: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Most már a CFA derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:



$$b^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + x^2,\ b^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 = 3a^2.$$

Vagyis: $b = \sqrt{3} \cdot a$. Mivel $a = 4$ méter, ezért $b \approx 6{,}93$ méter hosszú.

Feladatok

K1 Egy 18 méter széles úton két szemközti ház közé, azonos magasságban kifeszítettek egy acélhuzalt. Erre a huzalra középen egy lámpát szereltek. A lámpa 50 cm-rel van mélyebben, mint ahol a huzalt rögzítették. Milyen hosszú a huzal?

K2 Egy kamra 0,9 m széles és 2 méter magas ajtaját egy átlóvassal meg kell erősíteni. Milyen hosszú lehet maximálisan ez a vas?

K3 Egy építkezésen lejtős csúszdát használnak a téglák továbbítására. A csúszda egyik végét 5 m, a másik végét 7,5 m magasságban rögzítették két egymással szemben lévő függőleges falhoz. Milyen hosszú a csúszda, ha a két fal távolsága 4 méter?

K4 Milyen átmérőjűnek kell lennie annak a henger alakú vasrúdnak, amelyből egy 28 mm alapélű négyzetes hasábot akarnak kiesztergálni?



K5 Egy rönkfa átmérője 22 cm. Lehet-e belőle 16 cm élű négyzet alapú gerendát készíteni?

K6 Határozd meg a derékszögű háromszög súlyvonalainak a hosszát, ha a befogói 12 cm és 25 cm hosszúságúak!

K7 Egy egyenlő szárú trapéz alapjainak hossza 26 cm és 15 cm, a szár hossza pedig 18 cm. Határozd meg a trapéz magasságának hosszát!

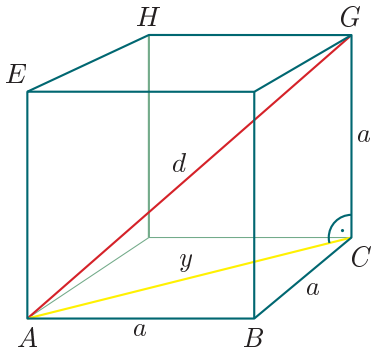
E8 Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és ferde szára is 12 cm hosszúságú, a hosszabb alap pedig 20 cm-es. Határozd meg az átlók hosszát!

A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban

(Emelt szintű, választható tananyag)

1. példa

Számítsuk ki egy $a = 8$ cm élű kocka lapátlóinak és testátlóinak hosszát!



Az ábra jelöléseit használjuk.

Az ABC derékszögű háromszög két befogójának hosszát ismerjük. Átfogójának hossza megegyezik a kocka lapátlójának hosszával. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $y^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, vagyis $y = a\sqrt{2}$.

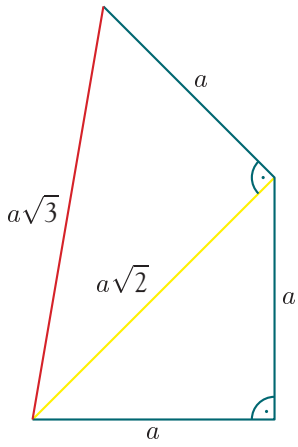
Mivel a kocka éle 8 cm, így a lapátló hossza: $y = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$ cm.

Az ACG derékszögű háromszög két befogójának hossza már ismert, hiszen az egyik az előbb kapott y, a másik pedig az a. Az ACG háromszög átfogójának d hossza azonos lesz a kocka testátlójának hosszával. Így erre a háromszögre is felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$d^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, vagyis $d = a\sqrt{3}$.

Mivel a kocka éle 8 cm, így a testátló hossza: $d = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ cm.

A két fontos háromszöget síkba kiterítve mutatja a következő ábra:



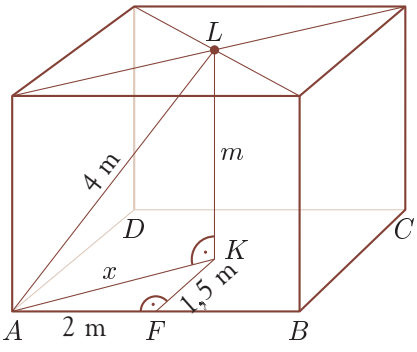
Fontos tudnivaló

Az a oldalú négyzet átlójának hossza $a\sqrt{2}$.
Az a oldalú kocka testátlójának hossza $a\sqrt{3}$.

2. példa

Egy 3 méterszer 4 méteres alapterületű szoba mennyezetén középen van egy lámpa. A négy legtávolabbi saroktól a lámpa távolsága 4 méter. Milyen magas a szoba?

A következő vázlatrajz jelöléseit használjuk.



A szoba alaplapja az $ABCD$ téglalap. Az AB él felezőpontja F, ezért $AF = 2$ méter. A fedőlap középpontjában, vagyis az átlók metszéspontjában van a lámpa, ez az L pont. Tudjuk, hogy $AL = 4$ méter. Az alaplap átlóinak metszéspontja K, így $KF = 1{,}5$ méter.

Felírjuk az AFK derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt: $x^2 = 2^2 + 1{,}5^2 = 6{,}25$. Vagyis $x = 2{,}5$ méter.

Most felírjuk az AKL derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt:

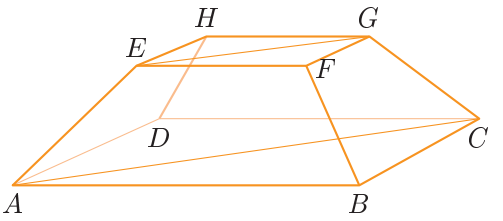
$4^2 = 2{,}5^2 + m^2$, azaz $m^2 = 4^2 - 2{,}5^2 = 16 - 6{,}25 = 9{,}75$.

Vagyis $m = \sqrt{9{,}75} \approx 3{,}12$. A szoba magassága kb. 3,12 méter.

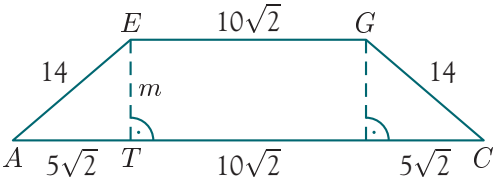
3. példa

Egy díszdoboz alaplapja 20 cm oldalú, a fedőlapja pedig 10 cm oldalú négyzet. A négy oldallapja olyan húrtrapéz, amelyeknek a szárhossza 14 cm. Milyen magas a doboz?

A dobozról vázlatrajzot készítünk.



A dobozt gondolatban elvágjuk az $ACGE$ csúcsaira illesztett síkkal. A vágásfelület az $ACGE$ húrtrapéz lesz, amit kiemeltünk az ábrából, és külön lerajzoltuk. Ebben a párhuzamos oldalak $20\sqrt{2}$ cm, illetve $10\sqrt{2}$ cm hosszúságúak (az alaplap és a fedőlap négyzetek átlói).



Az E csúcsból az AC-re állított merőleges szakasz hossza lesz a keresett magasság.

Felírjuk az ATE derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt:

$14^2 = (5\sqrt{2})^2 + m^2$, azaz

$m^2 = 14^2 - (5\sqrt{2})^2 = 196 - 50 = 146$. Vagyis $m = \sqrt{146} \approx 12{,}1$. A doboz magassága kb. 12,1 cm.

5.

Feladatok

K1 Számítsd ki az $a = 1{,}5$ dm élű kocka lapátlóinak és testátlóinak hosszát milliméter pontossággal!

K2 Mekkora a kocka éle, ha a

a) lapátlója 16 cm; *b)* testátlója 21 cm?

K3 Számold ki a kocka felszínét és térfogatát, ha a

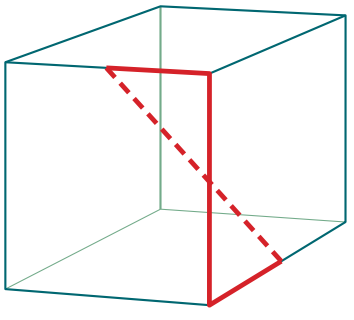
a) lapátlója 20 cm; *b)* testátlója 13 cm!

K4 Egy kocka lapátlójának hossza $\sqrt{12}$ cm. Mekkora a testátlója? Számolj kerekítés nélkül!

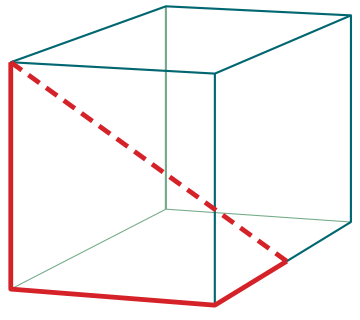
K5 Egy téglatest alakú doboz élei: 9,5 cm, 5 cm és 3,2 cm. Milyen hosszú lehet az a mindkét végén kifaragott ceruza, amelyik elfér benne?

E6 Számítsd ki a 12 cm élhosszúságú kocka élein bejelölt töröttvonalak kezdő- és végpontjának távolságát! (A kezdőpontok és a végpontok élnek a felezőpontjába vagy csúcspontba esnek.)

a)



b)

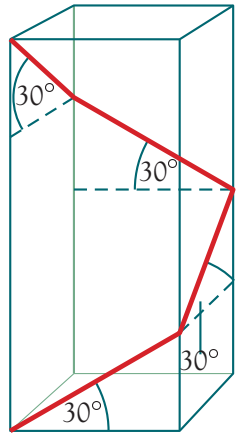


K7 A négyzetes oszlop oldalára festett vonal a vízszintessel 30°-os szöget zár be. A vonal hossza 32 cm.

a) Milyen magas az oszlop?

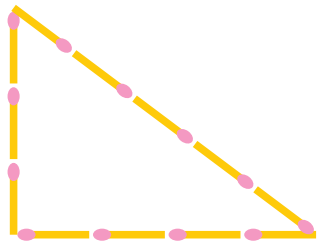
b) Számítsd ki az oszlop felszínét!

c) Számítsd ki az oszlop térfogatát!



Pitagoraszi számhármasok

(Emelt szintű, választható tananyag)



Tizenkét gyufaszálból kiraktunk egy háromszöget.

Tudjuk, hogy ha egy háromszög két rövidebb oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. Most $3^2 + 4^2 = 5^2$, ezért az előbb idézett Pitagorasz-tétel megfordítása miatt ez a háromszög derékszögű. Oldalainak hossza egész szám: 3, 4, 5. Az ilyen háromszöget pitagoraszinak nevezzük. A pitagoraszi háromszög három oldalának hosszát **pitagoraszi számhármasnak** nevezzük. Az eddigi feladatokban is találkoztunk már hasonló tulajdonságú számhármasokkal.

Az olyan a, b, c $(0 < a \leq b < c)$ pozitív egész számokat, amelyekre létezik olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai a, b, c, pitagoraszi számhármasoknak nevezzük.

Az így kapott háromszöget pitagoraszi háromszögnek nevezzük.

Ha egy számhármas minden tagját ugyanazzal az egész számmal szorozzuk, akkor is megfelelő számokat kapunk.

A következő táblázatba csak olyan pitagoraszi számhármasokat írtunk be, amelyek legnagyobb közös osztója 1. Ezeket nevezzük el **alap pitagoraszi számhármasoknak**, a belőlük kapható háromszöget pedig **alap pitagoraszi háromszögnek**.

a	3	5	7	8	9	11	12	13	16	20	28	33	36	39	48	65
b	4	12	24	15	40	60	35	84	63	21	45	56	77	80	55	72
c	5	13	25	17	41	61	37	85	65	29	53	65	85	89	73	97

A felsorolt példák mindegyikére igaz a következő néhány észrevétel:

– Vagy az a, vagy a b osztható 4-gyel.

– Valamelyik szám osztható 5-tel.

– A legnagyobb szám nem osztható 3-mal.

– Mindig van a számhármasban 3-mal osztható szám.

– A legnagyobb szám nem osztható 7-tel.

Vajon minden pitagoraszi számhármasra igazak ezek a megállapítások? Ennek megválaszolása messze túlmutat a tananyagunkon.

1. példa

A 3, 4, 5 egymást követő egész számok pitagoraszi számhármast alkotnak. Van-e még ilyen számhármas?

Legyen a három egész szám: $n - 1$, n, $n + 1$!

Ha pitagoraszi számhármast alkotnak, akkor: $(n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2$.

Végezzük el a négyzetre emelést: $n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1$.

Rendezzük az egyenletet: $n^2 - 4n = 0$.

Szorzattá alakítva: $n(n-4)=0$.

Ebből n-re csak a 0 és a 4 adódik. A háromszög oldala 0 nem lehet, ezért csak egy ilyen háromszöget találtunk, a példaként is említett 3, 4, 5 oldalút.

2. példa

Határozzuk meg azokat a pitagoraszi háromszögeket, amelyek területe 30!

Ha a területe 30, akkor a két befogó szorzata 60. Vagyis a 60 osztópárjait kell megvizsgálnunk. A lehetséges párok:

a	1	2	3	4	5	6
b	60	30	20	15	12	10

Az a és b szerepe felcserélhető, ezért a további hat esettel nem kell foglalkoznunk. Hat olyan derékszögű háromszög van, amelyeknek a befogói egész számok, és a területe 30. Ezek azonban még nem biztos, hogy pitagoraszi háromszögek.

Vizsgáljuk meg az átfogó hosszát: $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ha c egész, akkor pitagoraszi háromszöget találtunk.

Sorban a következő számokat kapjuk c-re: $\sqrt{3601}$, $\sqrt{904}$, $\sqrt{409}$, $\sqrt{241}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{136}$.

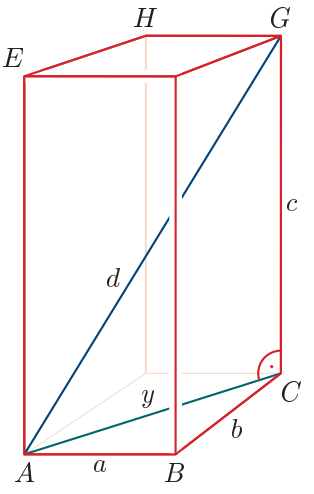
Ezek közül a $\sqrt{169}$ egész szám. Csak egy megfelelő háromszög létezik, oldalai: 5, 12, 13.

3. példa

Az $a=2$ cm, $b=3$ cm, $c=6$ cm élű téglatest testátlóját megszerkesztettük, majd megmértük. Azt tapasztaltuk, hogy a testátló kb. 7 cm hosszú. Mutassuk meg, hogy a következő téglatestek mindegyikében nemcsak az élek, hanem a testátló hossza is egész szám!

a	1	2	3	4	5	6
b	2	3	4	5	6	7
c	2	6	12	20	30	42

Az ABC derékszögű háromszög két befogójának hosszát ismerjük. Az átfogójának a hossza megegyezik a téglatest egyik lapátlójának hosszával, amit Pitagorasz-tétellel kiszámítunk: $y^2=a^2+b^2$.



Most már az ACG derékszögű háromszög két befogójának hossza ismert. Az ACG háromszög átfogójának d hossza azonos lesz a téglatest testátlójának hosszával, amit egy újabb Pitagorasz-tétellel számolunk ki:

$d^2=a^2+b^2+c^2$, vagyis $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ezzel a képlettel a hat téglatest testátlójának hosszát kiszámítjuk, sorban a következőket kapjuk:

d	3	7	13	21	31	43

Valóban mind a hat esetben egész számot kaptunk.

Feladatok

K1 Melyik derékszögű háromszög pitagoraszi? (Az a, b befogót, a c átfogót jelent.)

a) $a = 15$, $b = 11$; *b)* $a = 11$, $b = 60$; *c)* $a = 20$, $c = 29$; *d)* $a = 21$, $c = 33$.

K2 A koordináta-rendszerben rajzolj egy origó középpontú, 13 egység sugarú kört! Hány rácspont illeszkedik a körvonalra?

K3 Rajzolj a négyzetrácsra olyan kört, amelynek középpontja rácspont, a sugara egész, és pontosan 12 rácspont illeszkedik a körvonalra! Mekkora a legkisebb ilyen körnek a sugara?

K4 Keresd meg azokat a pitagoraszi háromszögeket, amelyeknek a kerülete kisebb mint 30!

E5 A koordináta-rendszerben a $K(1; 2)$ középpontú körre illeszkedik a $P(16; 22)$ pont. Hány rácspont illeszkedik még a körre?

E6 Egy alap pitagoraszi háromszögben az egyik súlyvonal 8,5 egység. Mekkorák az oldalai?

E7 Általánosítsd a 3. példa állítását! Igaz-e az így kapott állítás?

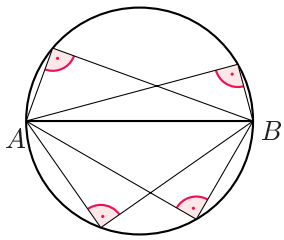
Thalész-tétel

1. példa

Az AB átmérőjű körvonal egy tetszőleges további pontja legyen C. Szögmérővel mérjük meg néhány ilyen pont esetén az ACB szög nagyságát! Milyen sejtést fogalmazhatunk meg ezek alapján?

Végrehajtunk néhány mérést. Ez látható az ábrán.

Sejtésünk szerint mindig 90°-os szöget kapunk.

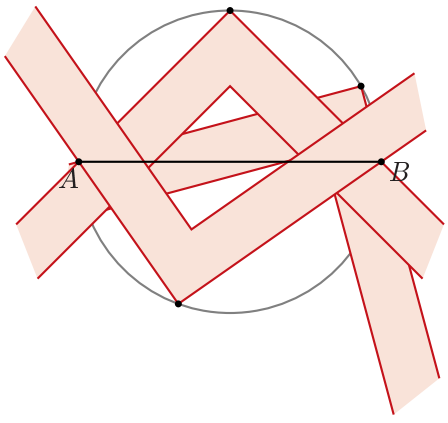


2. példa

Rajzoljunk egy AB szakaszt a füzetünkbe! Illesszük a derékszögű vonalzónkat a szakaszhoz úgy, hogy az egyik befogójára az A csúcs, a másik befogójára a B csúcs illeszkedjen! A derékszögű vonalzó derékszögű csúcsát jelöljük meg a papíron! Ezt ismételjük meg tízszer!

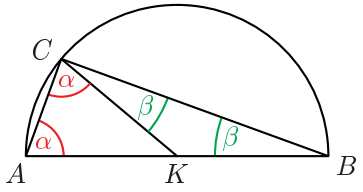
Mi a sejtésünk az így berajzolt pontokról?

Az ábra mutat három megfelelő pontot. A füzetben a kérésnek megfelelően megrajzolhatók a továbbiak is. A sejtésünk szerint ezek a pontok egy körívre illeszkednek.



Az eddig tanultak alkalmazásával az 1. példában tapasztalt sejtést igazolhatjuk is.

Legyen az AB átmérőjű körvonal egy tetszőleges további pontja C.



Az AKC egyenlő szárú háromszög, mert AK és CK szakasz is a kör sugarának hosszával egyenlő. Vagyis ebben a háromszögben az A csúcsnál és a C csúcsnál is α szög van.

A BKC is egyenlő szárú háromszög, és ebben a háromszögben a B csúcsnál és a C csúcsnál is β szög látható.

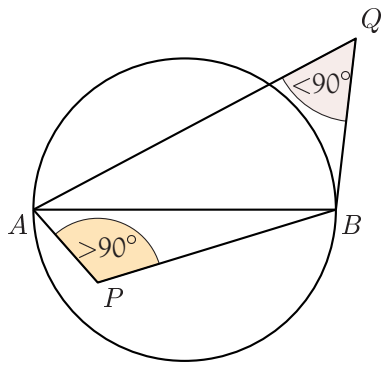
Mivel a háromszögek belső szögeinek összege 180°, ezért az ABC háromszögben: $2\alpha + 2\beta = 180°$, azaz $\alpha + \beta = 90°$. Ezek szerint a tetszőleges C csúcsnál valóban 90°-os szög van.

Az így bebizonyított állítás a **Thalész-tétel**:

Fontos tudnivaló

Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal bármelyik további pontjával, akkor olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelynek átfogója a kör átmérője lesz.

5.



Nagyon hasznos észrevétel, hogy a körlap belső P pontjai esetén az APB szög tompaszög, míg egy külső Q pont esetén (ami nem illeszkedik az AB egyenesre) az AQB szög hegyesszög lesz.

Ennek igazolásától most eltekintünk.

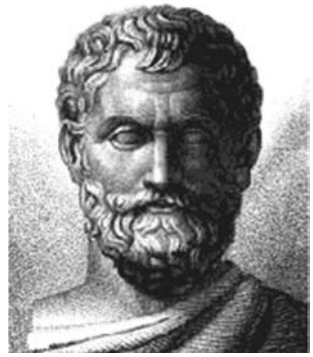
A 2. példában lényegében a Thalész-tétel megfordítását sejtettük meg:

Az AB átfogójú ABC derékszögű háromszögek C csúcsai az AB átmérőjű körvonalra illeszkednek.

Most a tétel megfordítását sem bizonyítjuk, csak a szemlélet alapján elfogadjuk.

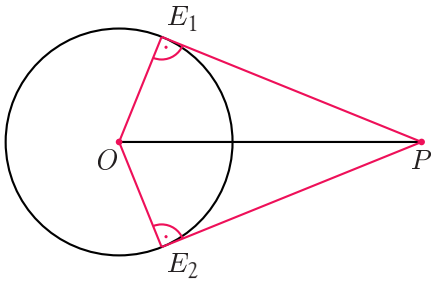
Az AB átmérőjű kört az *AB szakasz Thalész-körének* nevezzük. A Thalész-kör minden pontjából (kivéve A és B) az AB átmérő derékszögben látszik. Az AB ismeretében a szakasz O felezőpontja adja a Thalész-kör középpontját, az OA pedig a kör sugara.

Thalész görög filozófus és matematikus Kr. e. a VI. században élt. Nagyon sok elemi geometriai állítás megfogalmazása kapcsolódik a nevéhez. Csillagászati ismeretei alapján ki tudta számítani egy napfogyatkozás pontos idejét.



3. példa

Hogyan lehetne egy adott körhöz egy külső pontból megszerkeszteni az érintőket?



Készítsünk vázlatot!

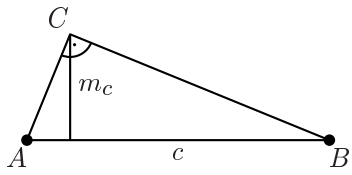
Az eddig tanultak alapján tudjuk, hogy olyan E_1 és E_2 pontokat szeretnénk az adott körön megszerkeszteni, amelyekből az adott OP szakasz derékszögben látszik. Vagyis OP szakasz Thalész-köre és az adott kör metszéspontjai adják ezeket az ismeretlen érintési pontokat.

4. példa

Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha a c szakasz az átfogójával, az m_c szakasz az átfogójához tartozó magasság hosszával azonos hosszúságú!

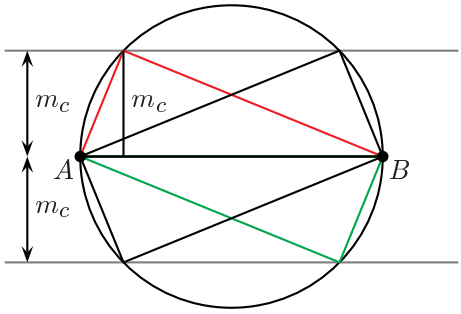
Adatok: c m_c

Vázlat:



A megszerkesztendő C pont illeszkedik az AB-vel párhuzamos, attól m_c távolságra lévő egyenesre. Két ilyen egyenes van. A C pont illeszkedik az AB Thalész-körére is. Négy megfelelő metszéspontot látunk. A négy megoldás háromszögei egybevágók egymással, így azt mondhatjuk, hogy egy megfelelő háromszöget tudtunk szerkeszteni.

Kivitelezés a leírás alapján:



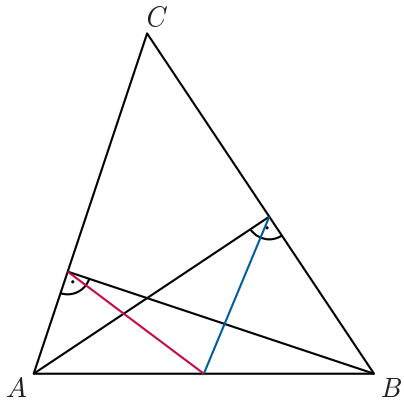
5.

Feladatok

K1 Rajzold meg az ABC hegyesszögű háromszögben az A csúcsra illeszkedő magasságvonalat! Ez a szemközti oldalt a T_1 pontban metszi. Rajzold meg a B csúcsra illeszkedő magasságvonalat is! Ez a szemközti oldalt a T_2 pontban metszi.

Igazold, hogy az A, B, T_1 és T_2 pontok egy körvonalra illeszkednek!

K2 Igazold, hogy az ábrán látható két színes szakasz egyenlő hosszúságú!



K3 Egy 13 cm sugarú kör AB átmérőjének A végpontjától a körvonal C pontja 10 cm-re van. Mekkora a távolság a C és a B pont között?

K4 Az ADE derékszögű háromszöget tükrözd az AD átfogó F felezőpontjára és az AD átfogóra is! Az első esetben az E tükörképe C, a második esetben pedig B.

a) Milyen négyszög az $ACDE$?

b) Milyen négyszög az $ABDE$?

c) Igazold, hogy az $ABCDE$ húrötszög, azaz van olyan kör, amelyre mind az öt csúcs illeszkedik!

K5 Szerkessz téglalapot, ha az átlója 5 cm, és a csúcsai 2,4 cm-re vannak a rájuk nem illeszkedő átlótól!

E6 Mekkora az előző feladatban szereplő téglalap kerülete?

6. A számológép

Mit tud a számológép?

Az emberiség hosszú történelme során nagyon sok olyan tevékenység alakult ki, amelynek elengedhetetlen feltétele volt a számolás, különféle számítások elvégzése. Egy-egy számítás hosszú időt vehet igénybe, és közben nagyon kell figyelni.

Sokan keresték, hogyan lehet a számításokat megkönnyíteni. Hatékony módszereket (algoritmusokat) találtak ki (például írásbeli összeadás, kivonás, szorzás, osztás), illetve olyan számolási eljárásokat dolgoztak ki, amelyek felgyorsították a műveletvégzést.

Ma már számunkra természetesek az írásbeli számolási eljárások, de abban az időben, amikor kitalálták őket, forradalmasították a számolást. Voltak a ma használtakon kívül más módszerek is, de ezek részben feledésbe merültek, részben csak érdekességként maradtak fent.

Sokféle eljárást, eszközt találtak ki a számítások megkönnyítésére. Ma a legszélesebb körben ismert eszköz a számológép, amellyel tavaly már megismerkedtünk. Ismételjük át a tanultakat, és ismerkedjünk meg néhány újabb funkcióval!

6.

A számológép

Nagyon sokféle számológép van. De mindegyiken vannak számbillentyűk, továbbá [.] (tizedespont!), [+], [−], [×] (szorzásjel), [÷] (osztásjel). A legtöbb számológépen van [=] (egyenlő) gomb is. Mi csak ilyenekről fogunk beszélni.

Figyeld meg, hogy egyik-másik jel eltér a nálunk szokásostól: tizedespont, szorzásjel, osztásjel! Írásban ne a számológép jeleit, hanem a magyar helyesírásnak megfelelő alakokat használd!

1. példa

Számítsuk ki számológép segítségével a következő műveletek eredményét!

a) $35{,}15 + 41{,}2$; *b)* $1{,}6 + \frac{2}{3}$; *c)* $-0{,}1 + 2{,}7$; *d)* $\frac{5}{6} \cdot (-7{,}3)$; *e)* $45\,028{,}45 : 275{,}6$.

a) $35{,}15 + 41{,}2$ [3] [5] [.] [1] [5] [+] [4] [1] [.] [2] [=] 76.35, ezt írja ki a gép, azaz 76,35 az eredmény.

b) A $\frac{2}{3}$-ot úgy írjuk be, hogy 2 : 3, vagyis [2] [÷] [3]. $1{,}6 + \frac{2}{3}$ [1] [.] [6] [+] [2] [÷] [3] [=]

2.266666667 – ezt írja ki a számológép.

Értelmezzük a művelet eredményét! Végtelen szakaszos tizedes törtet kapunk, amelynek 1 a szakasza. Ezért az eredmény $2{,}2\dot{6}$.

c) $-0{,}1 + 2{,}7 = 2{,}7 - 0{,}1$. Ezt felhasználva: $2{,}7 - 0{,}1$ [2] [.] [7] [−] [0] [.] [1] [=] 2.6, ez 2,6.

A 0,1 beírásakor elhagyhatjuk a 0-t, mert ha csak egy tizedesponttal kezdünk egy számot, a számológép úgy értelmezi, hogy az egészek helyén 0 áll.

Van olyan gép, amelyen van [+/−] billentyű, ez szolgál az előjelváltásra. Ezzel $-0{,}1$ így írható be: [+/−] [.] [1] vagy [.] [1] [+/−]. Ha nincs előjelváltó gomb, a $-0{,}1$-et így írhatjuk be: $0 - 0{,}1$.

d) Tudjuk, hogy az eredmény negatív lesz, elég csak a szorzat abszolút értékét kiszámítani. $\frac{5}{6} \cdot 7{,}3$

[5] [÷] [6] [×] [7] [.] [3] [=] 6.083333333. A végeredmény $-6{,}08\dot{3}$.

Egyszerűbb számológépek esetén sokszor előfordul, hogy nem tudjuk éppen azt a műveletet elvégeztetni a géppel, amelynek eredményére szükségünk lenne. Egyes részeredményeket feljegyzünk, majd amikor szükséges, ismét beírjuk, és tovább számolunk vele.

e) 45 028,45 : 275,6 [4] [5] [0] [2] [8] [.] [4] [5] [÷] [2] [7] [5] [.] [6] [=] 163.3833454, vagyis az eredmény körülbelül 163,38. (Ennél nagyobb pontosságra általában nincs szükség.)

Fontos tudnivaló

1. Becsléssel állapítsd meg, hogy körülbelül milyen eredmény várható!
2. A beíráshoz szükséges matematikai átalakításokat helyesen végezd el!
3. Figyelj, mert egyetlen gomb félrenyomásával hibás eredményt kaphatsz!
4. Ha szükséges, jegyezd fel a részeredményeket!
5. Értelmezd a kapott eredményt! Vesd össze a becsült eredménnyel!

2. példa

Állapítsd meg, hogy hány számjegyet képes kijelezni a számológéped!

Erre a legegyszerűbb módszer az, hogy elkezded beírni a számjegyeket 1-től kezdve, így: 123456789012 stb. Az így beírt számjegyek alapján könnyű választ adni a kérdésre. A legtöbb mai gép 10 számjegyet jelez ki. Ennél nagyobb pontosságra az iskolai munkában nincs is szükség. Az ilyen gépet egysorkijelzősnek nevezik. Mi szinte csak ilyenekről fogunk beszélni.

A legtöbb számológép több tizedesjegy pontossággal számol, mint ahányat kijelez.

3. példa

A számológép néha kerekít.

A többsorkijelzős számológépeken előfordul, hogy sokkal hosszabb számot is be tudunk írni, mint amennyit a gép megjegyezni, kijelezni képes. Egy ilyen számológépen beírva azt, hogy 0,999 999 999 999 9 a gép ezt írta ki: 1.

Feladatok

K1 Keresd meg, hogy mi lehet az alábbi törtek szakasza!

a) $\frac{1}{27}$; *b)* $\frac{1}{33}$; *c)* $\frac{1}{35}$; *d)* $\frac{1}{37}$; *e)* $\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{37}$; *f)* $\frac{1}{21}$;

g) $\frac{1}{41}$; *h)* $\frac{1}{45}$; *i)* $\frac{1}{63}$; *j)* $\frac{1}{65}$; *k)* $\frac{1}{75}$; *l)* $\frac{1}{77}$.

K2 Végezd el számológéppel a következő műveleteket! Ha szükséges, végezz előbb átalakítást!

a) 2,5 + (−5,2); (−5,2) + 2,5; *b)* 3,8 − (−1,7); (−1,7) + 3,8;

c) $\frac{12}{5} + \frac{-3}{8}$; $\frac{-3}{8} + \frac{12}{5}$; *d)* $\frac{12}{5} - \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} - \frac{12}{5}$;

e) $12{,}5 - 4{,}3$; $-4{,}3 + 12{,}5$; *f)* $-7{,}26 - (-4{,}2)$; $4{,}2 - 7{,}26$;

g) $-4{,}5 + \left(-\frac{4}{5}\right)$; $\frac{4}{5} + 4{,}5$; *h)* $0{,}3 - 0{,}7$; $-(0{,}7) + 0{,}3$.

K3 Számítsd ki számológéppel a műveletek eredményét! Ha szükséges, végezz előbb átalakítást!

a) $(41{,}5 - 2{,}7) - 3{,}2$; $41{,}5 - (2{,}7 + 3{,}2)$; $41{,}5 - (2{,}7 - 3{,}2)$;

b) $\frac{1}{2} - \left(2{,}7 - \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{1}{2} - 2{,}7\right) - \frac{1}{5}$; $\left(\frac{1}{2} - 2{,}7\right) + \frac{1}{5}$;

c) $-0{,}2 + \left(\frac{7}{2} - 3{,}3\right)$; $\left(-0{,}2 + \frac{7}{2}\right) - 3{,}3$; $\left(-0{,}2 + \frac{7}{2}\right) + 3{,}3$;

d) $6{,}5 - \frac{4}{5} + 1{,}2$; $6{,}5 + 1{,}2 - \frac{4}{5}$; $6{,}5 - 1{,}2 + \frac{4}{5}$.

K4 Számítsd ki számológéppel a műveletsorok eredményét! Ha szükséges, végezz előbb átalakítást!

a) $1{,}8 - (4{,}3 + 2{,}7) + (2{,}6 - 10{,}2) - 4{,}5$; *b)* $2{,}5 + 4{,}3 - \left(1{,}7 - \left(-\frac{3}{2} + 0{,}25\right)\right)$;

c) $-2{,}8 - \left(\left(\frac{1}{4} - 0{,}125\right) + 10{,}3\right)$; *d)* $4{,}5 + 2{,}5 - (-3{,}2) + \frac{5}{4} + \left(-\frac{4}{5}\right)$.

K5 Végezd el számológépen a műveleteket!

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$; $\frac{3}{4} : \frac{4}{3}$; *b)* $\frac{2}{5} \cdot 1{,}5$; $1{,}5 \cdot \frac{5}{2}$;

c) $4{,}5 \cdot \frac{9}{2}$; $\frac{9}{2} : 4{,}5$; *d)* $0{,}6 : 0{,}2$; $0{,}2 : 0{,}6$;

e) $4{,}25 \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \cdot 4{,}25$; *f)* $4{,}25 : \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} : 4{,}25$;

g) $1{,}45 \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} \cdot 1{,}45$; *h)* $1{,}45 : \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} : 1{,}45$.

K6 Végezd el a műveleteket számológéppel! Ha szükséges, végezz előbb átalakítást!

a) $5{,}4 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(0{,}5 : \frac{1}{2}\right)$; *b)* $(6{,}5 \cdot 1{,}4) : \left(\left(\frac{2}{5} \cdot 4{,}125\right) : \frac{3}{8}\right)$;

c) $\left(\frac{1}{2} : 0{,}5\right) \cdot \left(\frac{1}{8} : 0{,}125\right)$; *d)* $\left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}5\right) : \left(\frac{1}{8} \cdot 0{,}125\right)$.

K7 Számítsd ki az alábbi műveletsorok eredményét számológéppel! Ha szükséges, végezz előbb átalakítást!

a) $\frac{13}{54} - 46 \cdot 0{,}7 \cdot 10^3$; *b)* $-\frac{3}{8} \cdot (-6{,}3) - 10^{-3}$; *c)* $5{,}7 \cdot 10^4 : \frac{5}{7} \cdot 4{,}72^2$.

K8 Számítsd ki számológéppel a műveletek eredményét! Ha szükséges, végezz előbb átalakítást!

a) $\left(\frac{(3{,}5 + 1{,}5) \cdot 3}{5} \cdot \frac{4}{3}\right)$;

b) $\frac{7}{3} - \frac{3 - 5}{3} \cdot 4$;

c) $4{,}2 \cdot (3{,}3 + 7{,}7 - 2{,}4)$;

d) $\frac{5 - 2{,}5}{5} \cdot (4{,}7 + 2)$.

A tudományos számológép *(Olvasmány)*

A tudományos számológépeken az elmondottaknál jóval több billentyű van. Például az előjelválasztó: [+/−]; egy szám négyzete: [x^2]; a normálalakhoz szükséges kitevő jele: [E] vagy [Exp]; illetve a zárójelek: [(], [)].

Az előjelválasztó gombot már említettük. A negatív számok előjelét tudjuk ezzel beírni, illetve egy kapott eredmény előjelét tudjuk megváltoztatni.

A zárójeleket úgy használhatjuk, mint ahogyan azt az írásbeli műveleteknél megszoktuk.

Az [E] billentyűt akkor használhatjuk, ha normálalakban írunk be egy számot. Például: $2{,}57 \cdot 10^6$ beírása [2] [.] [5] [7] [Exp] [6]. A normálalakban beírt számmal ugyanúgy számolhatunk, mint akármelyik másik (nem normálalakban írt) számmal.

Egy egyszerű műveletsor, például a $\frac{34}{19} - (4{,}4 - 0{,}7) \cdot (-2{,}4 \cdot 10^7)$ eredményét így számíthatjuk ki:

[3] [4] [÷] [1] [9] [−] [(] [4] [.] [4] [−] [0] [.] [7] [)] [×] [+/−] [2] [.] [4] [Exp] [7] [=]

Láthatod, az előjel miatt kitett zárójelet elhagytuk. A 0,7 esetén a 0-t is elhagyhatjuk. (Az eredmény: 88800001,79 . . .)

Négyzetgyök

A számológépeken általában van négyzetgyökvonás [$\sqrt{\ }$].

1. példa

Mit ír ki a számológéped a következő számok négyzetgyökére?

4; 10; 15; 2,5; 22,5; 10 000.

A mi számológépünk sorban ezeket a számokat írta ki:

2; 3,162 277 66; 3,872 983 346; 1,581 138 83; 4,743 416 49; 100.

Fedezd fel a számológépedet! Ismerd meg, mit tud!

2. példa *(Választható tananyag)*

Ha nincs négyzetgyökvonás a gépeden, akkor is ki tudod számítani egy szám négyzetgyökét néhány tizedesjegy pontossággal.

Ha a-ból akarunk négyzetgyököt vonni, akkor először számítsuk ki az $\frac{1}{2}(1 + a)$ kifejezés értékét! Jelölje ezt x!

Ezután folytassuk a számolást: $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Majd ismét x-szel jelölve az előző művelet eredményét, újra és újra számítsuk ki a képlet értékét!

5-re először 3-at kapunk, majd a következő értékeket: 2,333333333; 2,238095238; 2,236068896; 2,236067977. Az utolsónak a négyzetét a gép már csaknem 5-nek számolja. Vagyis 5 lépésben nagyon pontos eredményt kaptunk.

Fontos tudnivaló

A számológép nem helyettesíti az emberi gondolkodást. Sokat tud, hasznos segédeszköz, de használata közben könnyen hibázhatunk. Mindig ellenőrizd (például becsléssel, behelyettesítéssel), hogy reális-e a kiszámított eredmény!

Feladatok

K1 Számítsd ki számológéppel a következő négyzetgyököket!

$a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt{10}$; $c = \sqrt{9}$; $d = \sqrt{12}$; $e = \sqrt{8}$; $f = \sqrt{0{,}9}$.

K2 Számítsd ki az alábbi műveleteket számológéppel! Hasonlítsd össze az egy-egy részfeladatban kapott eredményeket!

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ és $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$;

b) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$ és $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$;

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$ és $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$;

d) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$ és $\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}$.

K3 Egy derékszögű háromszögben az a és a b oldalak jelölik a befogókat, c jelöli az átfogót. Adott két oldalból számítsd ki, hogy mekkora a harmadik oldal!

a) $a = 4$; $b = 5$;

b) $a = 5$; $b = 3$;

c) $a = 3$; $b = 4$;

d) $c = 3$; $b = 4$;

e) $c = 5$; $b = 3$;

f) $c = 5$; $b = 4$.

Eljárások *(Olvasmány)*

Addig, amíg nem léteztek számolást könnyítő eszközök, ügyes módszereket, eljárásokat találtak ki a számítások megkönnyítésére.

Az időszámítás előtt 1650-ből Egyiptomból származó papirusztekercsen – amelyet megtalálójáról Rhind-papirusztekercsnek neveztek el – érdekes következő szorzási módszert találtak. A Rhind-papirusztekercsről már a 109. oldalon a Pitagorasz-tétellel kapcsolatban is olvashattál.

(A papirusztekercset a londoni British Múzeumban őrzik. Egy részletének fényképét megtalálhatod az interneten. A webböngészőbe írd be a „Rhind-papirusztekercs” kifejezést!

1. eljárás

Ha két számot össze akarunk szorozni, akkor az egyiket felezzük, a másikat kétszerezzük (így a szorzat nem változik). Igen ám, de ha az első szám páratlan, akkor annak a fele nem egész szám. Ezért a második számot 1-szer leírjuk, ezt majd utólag hozzáadjuk a szorzathoz. Aztán folytatjuk az eljárást, mígnem az első szám (a sok felezés után) 1 lesz.

Ebben a konkrét esetben már előbb is láttuk, hogy mennyi az eredmény, mert 10-zel könnyű szorozni:

$10 \cdot 68 + 34 + 17 = 680 + 34 + 17 = 731$.

Például:

$43 \cdot 17 =$
$= 21 \cdot 34 + 17 =$
$= 10 \cdot 68 + 34 + 17 =$
$= 5 \cdot 136 + 34 + 17 =$
$= 2 \cdot 272 + 136 + 34 + 17 =$
$= 544 + 136 + 34 + 17 =$
$= 731$.

A két következő módszer ugyan nem minden esetben alkalmazható, de segítségükkel olykor könnyen elvégezhető a szorzás.

2. eljárás

Ha a két kétjegyű szám tízesei egyenlőek és az egyeseik 10-re egészítik ki egymást, akkor így is elvégezhetjük a szorzást:

A tízesek helyén álló számot a nála 1-gyel nagyobb számmal szorozzuk, ezt leírjuk. Ezután egy kétjegyű számként mögé írjuk a két egyes helyi értéken álló számjegy szorzatát.

Például: $43 \cdot 47 = 2021$, mert $4 \cdot 5 = 20$ és $3 \cdot 7 = 21$; $22 \cdot 28 = 616$, mert $2 \cdot 3 = 6$ és $2 \cdot 8 = 16$; $91 \cdot 99 = 9009$, mert $9 \cdot 10 = 90$ és $1 \cdot 9 = 9$, amelyet 09-nek írunk le; $11 \cdot 19 = 209$.

3. eljárás

Ha a két kétjegyű szám tízesein álló számjegy két egymást követő szám és az egyeseik 10-re egészítik ki egymást, akkor így is elvégezhetjük a szorzást:

A nagyobbik szám tízes számjegyét négyzetre emeljük, a 100-szorosából kivonjuk az egyesek helyén álló számjegyének a négyzetét.

Például: $43 \cdot 37 = 1591$, mert $4 \cdot 4 = 16$, $3 \cdot 3 = 9$ és $1600 - 9 = 1591$; $12 \cdot 28 = 336$, mert $2 \cdot 2 = 4$, $8 \cdot 8 = 64$ és $400 - 64 = 336$; $91 \cdot 89 = 8099$, mert $9 \cdot 9 = 81$, $1 \cdot 1 = 1$ és $8100 - 1 = 8099$; $11 \cdot 29 = 319$.

Gondolkozz! Nehéz!

Mit gondolsz, miért jók ezek a számítási módszerek?

Nemcsak a szorzásra kerestek ügyes, egyszerű eljárást, hanem a négyzetgyökvonáshoz is. Erre mutatunk egy példát.

4. eljárás *(Emelt szintű, választható tananyag)*

A négyzetgyökvonás egy lehetséges algoritmusához felhasználjuk azt az algebrai azonosságot, hogy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ebből $(a + b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$.

Emiatt $\dfrac{(a + b)^2 - a^2}{2a} = b + \dfrac{b^2}{2a}$.

Ha ebben a kifejezésben a b „sokkal kisebb”, mint az a, akkor a jobb oldal körülbelül b-vel egyenlő. (Annál persze nyilván több.)

Ha tehát egy szám egy részéből már négyzetgyököt vontunk, akkor ennek felhasználásával tovább pontosíthatjuk az eredményt.

Például a 26,01 négyzetgyökének megállapításához először felbontjuk egy lehetséges négyzetszám (a^2) és egy másik szám ($2ab + b^2$) összegére. Megállapítjuk, hogy $26{,}01 = 25 + 1{,}01$, ebből $a = 5$ lehet, a b-hez pedig felírjuk, hogy $\dfrac{1{,}01}{2 \cdot 5} = 0{,}101$. Ez az érték közel lehet b-hez, tehát lehet, hogy $b = 0{,}1$. Ekkor a szám négyzetgyöke lehet $5{,}1$; és $5{,}1^2$ valóban 26,01.

Feladatok

E1 Végezd el a szorzásokat a Rhind-papirusztekercsen talált módszerrel!

$27 \cdot 24$;	$52 \cdot 34$;	$16 \cdot 51$;	$64 \cdot 53$;
$128 \cdot 31$;	$48 \cdot 55$;	$101 \cdot 32$;	$80 \cdot 15$.

E2 Végezd el a szorzásokat! Alkalmazd a 2. példában ismertetett módszert! Próbálj meg fejben számolni!

15 · 15; 53 · 57; 24 · 26; 71 · 79;

47 · 43; 29 · 21; 93 · 97; 37 · 33.

E3 Végezd el a szorzásokat! Alkalmazd a 3. példában ismertetett módszert!

41 · 39; 51 · 69; 43 · 57; 43 · 37;

15 · 25; 25 · 35; 76 · 64; 81 · 79.

E4 Végezd el a szorzásokat! Döntsd el, melyik módszert akarod használni! Ha tudsz, többféle módszert is alkalmazhatsz! Ha csak lehet, fejben számolj!

28 · 32; 32 · 38; 64 · 66; 56 · 64;

16 · 24; 16 · 14; 96 · 84; 96 · 94.

E5 A 4. példában ismertetett írásbeli négyzetgyökvonás eljárás segítségével keresd meg a következő számok négyzetgyökét!

22,09; 68,89; 42,25; 98,01.

6.

Eszközök *(Olvasmány)*

A számolási eljárások fejlődése mellett a számoláshoz használt eszközök is fejlődtek.

Táblázatok

Egyes gyakran végzett műveletek eredményeit táblázatba foglalták, így ezeket elég volt csak egyszer kiszámolni.

A legegyszerűbb táblázatok az összeadó- és a szorzótáblák voltak. Ilyeneket talán te is használtál az iskola első éveiben.

A négyzetgyök írásbeli kiszámítása nem egyszerű feladat. Ezért ennek az eredményeit is táblázatba gyűjtötték.

A négyzetgyökvonás függvénynek is tekinthető: egy nemnegatív számhoz hozzárendeli a négyzetgyökét. Ezért ennek a táblázatát megtalálhatod a *Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok* című könyvben is.

2. Adott szám négyzetgyökének meghatározása:

$x = 5{,}247$ $\sqrt{5{,}24} = 2{,}289$ a táblázat *első* részéből $(1{,}00 \le x \le 9{,}99)$

$7 \rightarrow +1$ a javítások táblázatának 7-es oszlopából $\sqrt{5{,}247} \approx 2{,}290$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	2,258	2,261	2,263	2,265	2,267	2,269	2,272	2,274	2,276	2,278	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,2	2,280	2,283	2,285	2,287	2,289	2,291	2,293	2,296	2,298	2,300	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,3	2,302	2,304	2,307	2,309	2,311	2,313	2,315	2,317	2,319	2,322	0	0	1	1	1	1	1	2	2

$x = 52{,}47$ $\sqrt{52{,}4} = 7{,}239$ a táblázat *második* részéből $(10{,}0 \le x \le 99{,}9)$

$7 \rightarrow +5$ a javítások táblázatának 7-es oszlopából $\sqrt{52{,}47} \approx 7{,}244$

$10N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51,	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52,	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273	1	1	2	3	3	4	5	5	6
53,	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342	1	1	2	3	3	4	5	5	6

Példa

Keressük meg a következő táblázatban a 7,2 négyzetgyökét!

7,0	2,646	2,648	2,650	2,651	2,653	2,655	2,657	2,659	2,661	2,663	0	0	1	1	1	1	1	2
7,1	2,665	2,666	2,668	2,670	2,672	2,674	2,676	2,678	2,680	2,681	0	0	1	1	1	1	1	2
7,2	2,683	2,685	2,687	2,689	2,691	2,693	2,694	2,696	2,698	2,700	0	0	1	1	1	1	1	2
7,3	2,702	2,704	2,706	2,707	2,709	2,711	2,713	2,715	2,717	2,718	0	0	1	1	1	1	1	2
7,4	2,720	2,722	2,724	2,726	2,728	2,729	2,731	2,733	2,735	2,737	0	0	0	1	1	1	1	2
7,5	2,739	2,740	2,742	2,744	2,746	2,748	2,750	2,751	2,753	2,755	0	0	0	1	1	1	1	2
7,6	2,757	2,759	2,760	2,762	2,764	2,766	2,768	2,769	2,771	2,773	0	0	0	1	1	1	1	2
7,7	2,775	2,777	2,778	2,780	2,782	2,784	2,786	2,787	2,789	2,791	0	0	0	1	1	1	1	2
7,8	2,793	2,795	2,796	2,798	2,800	2,802	2,804	2,805	2,807	2,809	0	0	0	1	1	1	1	2
7,9	2,811	2,812	2,814	2,816	2,818	2,820	2,821	2,823	2,825	2,827	0	0	0	1	1	1	1	2

A táblázatból leolvasható érték: 2,683. $2{,}683^2 = 7{,}198\,489$.

Számolólécek

Nemcsak táblázatok, hanem más eszközök is segítették, segítik a számításokat.

Ilyen eszközök például a számolólécek. A legegyszerűbb számolóléc az összeadó- vagy kivonóléc.

A XVII. században kitaláltak egy számolólécet, amelyet logarlécnek neveztek el. Ennek alapelvét csak felsőbb évfolyamokon fogjuk tanulni. Nézz utána a világhálón, könyvtárban, szertárban, hogy milyen is egy logarléc! A mérnökök által használt logarléccel igen nagy pontossággal lehetett számolni. A hétköznapi életben használt logarlécek azonban már messze nem voltak olyan pontosak.

A XX. század 80-as éveiben a logarlécet végleg felváltották a különböző kalkulátorok. Ezzel az emberiség kultúrájának egy kiemelkedő találmánya került múzeumba. A legutolsó speciális logarlécek az amerikai Apollo-program számára készültek, és az Apollo-programban részt vevő űrhajósok használták azokat (az 1960-as években).

Gépek *(Olvasmány, választható tananyag)*

A számológép története

A számolást könnyítő eszközökről készült érdekes fényképeket találhatsz az interneten is.

A számolás, a számítások elvégzésének egyik legősibb segédeszköze az abakusz.

Az abakusz görög szóból ered, latin nyelvi közvetítéssel került az európai kultúrába. Jelentése: (porba írt) számolótábla.

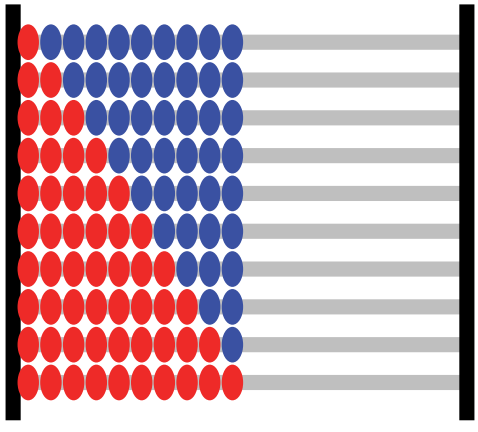
Az abakuszt megelőzően ugyanis a földre (a porba, később porral borított táblára) húztak néhány vonást számolás céljára. (Hérodotosz leírása szerint már az egyiptomiak is használtak ilyet.)

Az abakusz ókori (valószínűleg mezopotámiai) eredetű egyszerű számolási segédeszköz. Rudakon ide-oda mozgatható golyókat tartalmaz. Egy rúdon 10 golyó van. A golyók helyzete egy-egy számjegyet, a rudak egy-egy helyi értéket jelentenek.

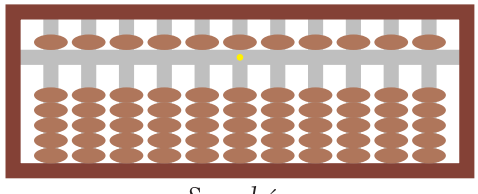
A 28-at például úgy jelölték, hogy az első (egyesek) rúdon 8, a második (tízes) rúdon 2 golyót áttoltak a másik oldalra.

A porba rajzolt abakuszon a számokat kavicsokból rakták ki, mindegyik helyi értékre a megfelelő számú kavicsot. A kavics latinul: calculus. (Ejtsd: kalkulusz.) Ebből ered a kalkulátor (számológép) szó.

Az abakuszhoz hasonló eszköz a szorobán, amelyet Ázsiában mind a mai napig használnak.



Abakusz



Szorobán

6. A számológép

Sok eszközt és eljárást találtak ki az emberek az évezredek során, de mindig jobbat kerestek. Olyan gépeket is feltaláltak, amelyek „maguktól” elvégzik a műveleteket: (mechanikus) *kalkulátorokat.*

– Blaise Pascal (ejtsd: Bléz Pászkál) (1623–1662) francia matematikus, fizikus, filozófus volt. Adószedő édesapja munkáját szerette volna segíteni egy mechanikus „kalkulátorral”. Nézz utána az interneten!

– Leonardo da Vinci (ejtsd: leonardo da vincsi) is alkotott mechanikus „kalkulátort”.

Ehhez hasonló kézi számológépeket ugyan még a közelmúltban is sok helyen használtak hazánkban is, a tudomány számára ezek tudása már évtizedekkel korábban sem volt elegendő.

Gyors, nagy teljesítményű gépre volt szükség.

Az 1940-es években kezdték tervezni az első elektronikus számítógépet, amely ma már hatalmas szörnyetegnek tűnne. Ennek fejlesztésében Neumann János (ejtsd: najman) (1903–1957) magyar származású matematikus tudós is részt vett.

A számítógépek mérete sokat csökkent az évek során, de így is egy termet igényelt a működtetésük. Ám az 1960-as évek végén egy cég „miniatürizálta” a számítógépet, és megalkotta az első asztali számítógépet.

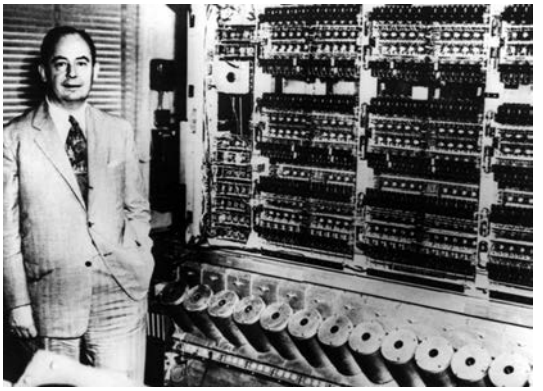
Úgy gondolták azonban, hogy egy ilyen készülék senkit nem érdekel, nem lenne kereslete, ezért félretették. Tudták viszont, hogy az elemi számítások elvégzéséhez szükség lehet egy egyszerű, olcsó gépre. Így kerültek piacra néhány évvel később (1970 körül) a magyarul zsebszámológépeknek nevezett „kalkulátorok”.

A zsebszámológépeknek is nagyon sok fajtáját fejlesztették ki. Szinte nem is lehet megmondani egy-egy készülékről, hogy az számológép vagy már számítógép.

A tudományos kalkulátorok mellett megjelentek a grafikus számológépek, ezek tudását is ötvözték a grafikus tudományos számológépekben. Már a múlt század hetvenes éveiben is készültek olyan számológépek, amelyeket programozni lehetett.

A számológépek fejlesztése mellett a számítógépek méretét is tovább kicsinyítették, ennek eredményeképpen 1981-ben elkészültek az első otthon használható számítógépek, amelyeknek már egészen más volt a szerepük, mint a számológépeknek.

A modern számítógépek kifejlesztésében fontos szerepe volt Neumann Jánosnak is, aki a számítógépes memória adat- és programtárolásának elvét dolgozta ki. Nézz utána az interneten, hogy ki volt Neumann János!



Az IAS néven ismert számítógépet 1951-ben kezdték használni. Tervezésében a képen is látható Neumann János is dolgozott.



A mai modern számítógép nem is emlékeztet az elődjére.

A matematika fontos ága a számítógép-tudomány vagy számítástudomány. Feladata matematikai problémák algoritmikus megfogalmazása, kidolgozása, megoldása. Neves, nemzetközileg elismert magyar kutatói is vannak ennek a tudományágnak. Néhány közülük Babai László, Lovász László, Frank András. Nézz utána, kik ők!

A természet törvényeinek leírása a matematika egyik fontos feladata. Ezt többféle módon megtehetjük. Képletet alkothatunk sok-sok megfigyelés eredményeképpen, az eredményeket táblázatba foglalhatjuk, vagy ábrázolhatjuk. A fizika tantárgyhoz kapcsolódóan a mozgás leírása, a hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező fizikai változások nagyon sok esetben grafikonon jelennek meg. A grafikonok között vannak olyan típusúak, amelyeket képlettel megadhatunk, és vannak olyanok, amelyre nem ismerünk képletet, de a vizsgált folyamatot a grafikon segítségével jól jellemezhetjük. A fejezetben elsősorban olyan függvények alaptípusaival ismerkedhetünk meg, amelyeket felhasználva elvégezhetjük további függvények ábrázolását. Az ábrázolás során megvizsgáljuk a függvények néhány tulajdonságát. A függvények ábrázolását felhasználva hétköznapi életben felmerülő feladatokat oldunk meg.

Korábban megtanultuk, hogy egy függvény megadásakor minden esetben meg kell adni az értelmezési tartományt és a hozzárendelési szabályt. Ezt a továbbiakban is szem előtt tartjuk.

Lineáris függvények

Áttekintés

Azokat a függvényeket, amelyeknek grafikonja egyenes, lineáris függvényeknek nevezzük. Hogyan lehet egyszerűen lineáris függvényt ábrázolni? Ehhez ismernünk kell a lineáris függvény képlettel megadott általános alakját.

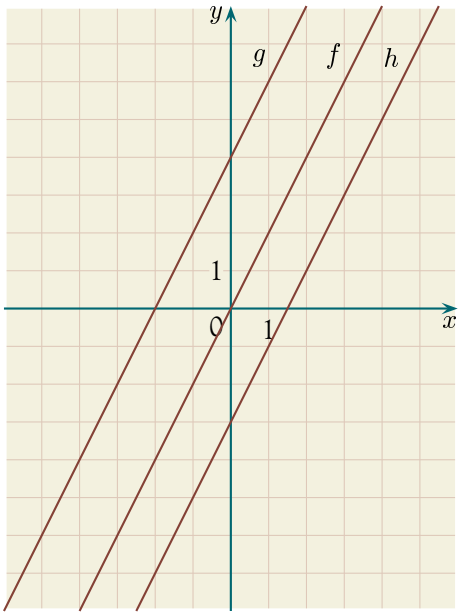
Ismételjük át a tanultakat!

1. példa

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto 2x + 4$; $h: x \mapsto 2x - 3$ függvényeket!

Az f függvény egyenes arányosság, ezért grafikonja egyenes.

A g függvény grafikonját megkapjuk, ha az f függvény minden értékéhez $+4$-et adunk. Ez azt jelenti, hogy az f függvény grafikonját az y tengely mentén pozitív irányba 4 egységgel toljuk el. A h függvény grafikonját az előbbi gondolatmenethez hasonlóan úgy kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy az y tengely mentén negatív irányba 3 egységgel eltoljuk.



Így az $f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto 2x + 4$; $h: x \mapsto 2x - 3$ függvények grafikonja egymással párhuzamos egyenes.

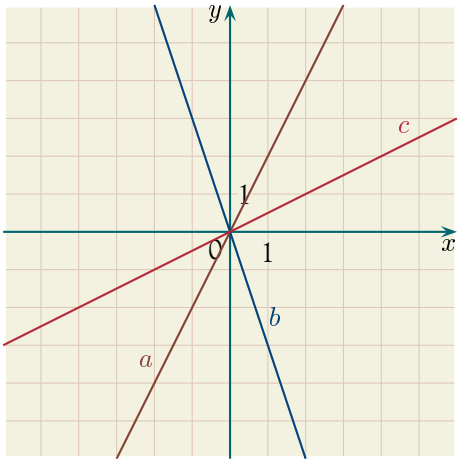
Fontos tudnivaló

A lineáris függvények általános alakja: $f: x \mapsto mx + b$, ahol az m és b tetszőleges számok.

Általánosan igaz, hogy $f: x \mapsto mx + b$ alakú függvény grafikonja egyenes.

Az $x \mapsto mx$, ha $m \neq 0$ hozzárendelési szabály egyenes arányosságot határoz meg. Ennek grafikonja egyenes. Például:

Ha az $f: x \mapsto mx$ függvényhez tetszőleges b értéket hozzáadunk, az y tengely mentén történő eltolással megkaphatjuk az $f: x \mapsto mx + b$ függvény grafikonját.



A lineáris függvények ábrázolásához elegendő a grafikon két pontját meghatározni, ugyanis két ponton át egyetlen egyenes húzható.

Hogyan válasszuk ki ezt a két pontot? Az x koordinátát mi adjuk meg tetszőlegesen, és ehhez kiszámítjuk a képlettel megadott függvény értékét.

Ha a célunk az, hogy egyszerűen számoljunk, akkor érdemes az egyik x értéket 0-nak választani. A második x értéknek választhatjuk az 1-et, vagy olyan számot, amely könnyebb számoláshoz és ábrázoláshoz vezet.

2. példa

Határozzuk meg az alábbi függvényeknek két pontját, és ennek segítségével ábrázoljuk a függvényeket! $f: x \mapsto 3x - 1$; $g: x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$; $h: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$

7.

Az f függvényhez készített táblázat:

x	0	1
$f: x \mapsto 3x - 1$	-1	2

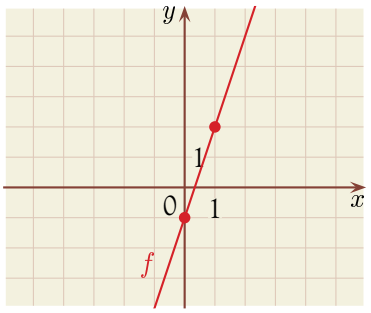
A g függvény ábrázolásához $x=0$ érték mellett célszerű az $x=3$ értéket választani, így egész koordinátájú pontokat kapunk.

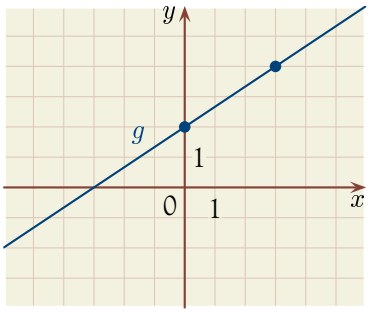
x	0	3
$g: x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$	2	4

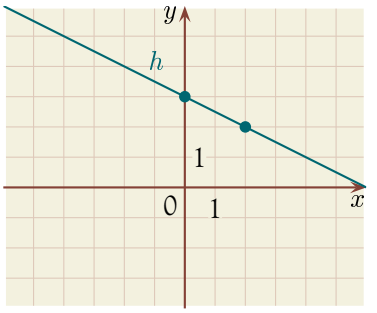
A h függvény két x értéke legyen $x = 0$ és $x = 2$.

x	0	2
$h: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$	3	2

Ennek segítségével már könnyen ábrázolhatjuk a függvényeket.







Általánosan igaz, hogy az $f: x \mapsto mx + b$ függvény az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi.

Az $f: x \mapsto mx + 4$ alakú függvények mindegyike a $(0; 4)$ pontban metszi az y tengelyt, hiszen ha $x = 0$, akkor a függvény értéke 4, bármekkorának választjuk az m értékét.

Feladatok

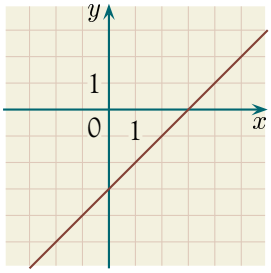
A1 Ábrázold táblázat segítségével a következő függvényeket!

a) $f: x \mapsto 3x - 1$; $g: x \mapsto x - 1$; $h: x \mapsto \frac{3}{4}x - 1$; $l: x \mapsto -\frac{2}{3}x - 1$;

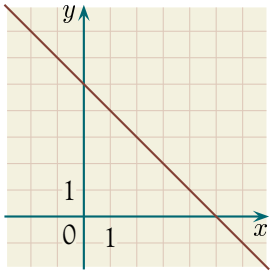
b) $f: x \mapsto 2x + 5$; $g: x \mapsto -2x + 5$; $h: x \mapsto \frac{2}{5}x + 5$; $l: x \mapsto -\frac{4}{7}x + 5$.

A2 Válaszd ki a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési szabályt!

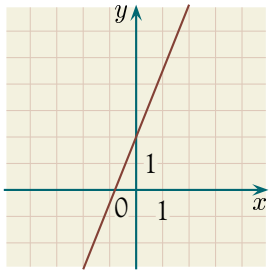
I.



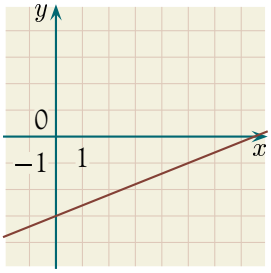
II.



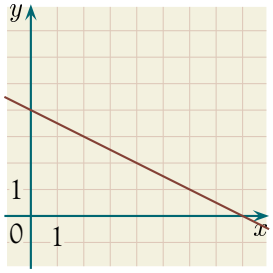
III.



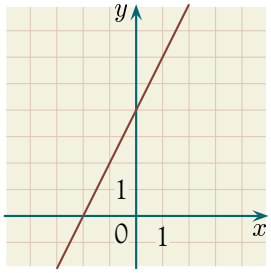
IV.



V.



VI.



(A) $h: x \mapsto \frac{5}{2}x + 2$; (B) $n: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 4$; (C) $l: x \mapsto \frac{2}{5}x - 3$;

(D) $g: x \mapsto 5 - x$; (E) $f: x \mapsto x - 3$; (F) $m: x \mapsto 2x + 4$.

K3 Add meg a pontok hiányzó koordinátáit úgy, hogy a pontok illeszkedjenek az alábbi képlettel megadott függvény grafikonjára!

a) $f: x \mapsto 2x - 4$ $A(4;\ \ )$, $B(-2;\ \ )$, $C(25;\ \ )$, $D(\ \ ;4)$, $E(\ \ ;28)$;

b) $g: x \mapsto -3x + 7$ $P(0;\ \ )$, $Q(3;\ \ )$, $R(-5;\ \ )$, $S(\ \ ;28)$, $T(\ \ ;-29)$.

K4 Keress hozzárendelési szabályt azokhoz a lineáris függvényekhez, amelyek átmennek az alábbi két ponton!

a) $A(0;3)$, $B(1;5)$; *b)* $C(0;-2)$, $D(2;4)$; *c)* $E(-1;5)$, $F(1;1)$; *d)* $N(-2;3)$, $M(0;0)$.

(A) $x \mapsto -2x - 3$; (B) $x \mapsto 3x - 2$; (C) $x \mapsto \frac{3}{2}x$; (D) $x \mapsto 2x + 3$;

(E) $x \mapsto -\frac{3}{2}x$; (F) $x \mapsto -3x$; (G) $x \mapsto -2x + 3$.

Lineáris függvények meredeksége I.

1. példa

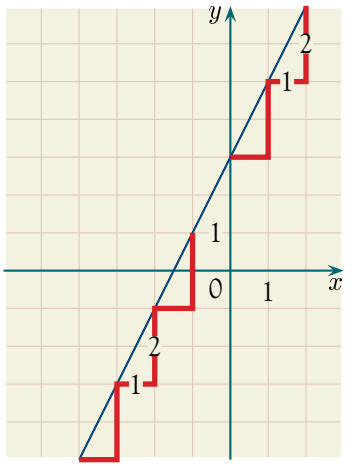
Ábrázoljuk az $f: x \mapsto 2x + 3$ függvényt!

A függvény ábrázolásakor felhasználhatjuk azt az ismeretet, hogy az ábrázolandó függvény grafikonja egyenes, ezért elegendő két pontját meghatározni.

x	0	1
$2x + 3$	3	5

A függvény 0-hoz 3-at rendel, azaz a függvény az y tengelyt a $(0;3)$ pontban metszi.

Az $f: x \mapsto 2x + 3$ függvény grafikonját két pontjának segítségével könnyen úgy ábrázolhatjuk, hogy a grafikon $+3$-nál metszi az y tengelyt, majd 1 egységet „jobbra lépve”, 2-t az y tengely mentén „felfelé lépünk”, így a grafikon újabb pontjához jutunk. (Ezt a lépést akárhányszor megismételhetjük, mindig a grafikon pontját kapjuk, ha a grafikon pontjáról indultunk.)



Megfigyelhetjük, hogy ha az x érték 1-gyel nő, akkor a hozzá tartozó érték 2-vel nő.

A 2-t az $f: x \mapsto 2x + 3$ függvény **meredekségének** nevezzük.

Ha a lineáris függvény meredeksége pozitív egész szám, akkor nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik. Ekkor a lineáris függvény grafikonja „emelkedő”, más szóval növekedő.

2. példa

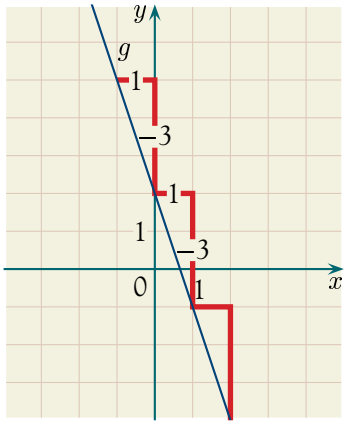
Ábrázoljuk a $g: x \mapsto -3x + 2$ függvényt!

A hozzárendelési szabályból látjuk, hogy lineáris függvényt kell ábrázolni, így határozzuk meg a grafikon két pontját.

x	0	1
$-3x + 2$	2	-1

A függvény a $(0; 2)$ pontban metszi az y tengelyt.

A g függvény grafikonját két pontjának segítségével könnyen úgy ábrázolhatjuk, hogy a grafikon $+2$-nél metszi az y tengelyt, majd 1 egységet „jobbra lépve”, 3-at az y tengely mentén „lefelé lépünk”, így a grafikon újabb pontjához jutunk.



A kiszámolt értékekből megállapíthatjuk, hogy ha az x érték $+1$-gyel nő, akkor a hozzá tartozó érték 3-mal csökken. A -3 számot a $g: x \mapsto -3x + 2$ függvény **meredekségének** nevezzük.

Ha a lineáris függvény meredeksége negatív egész szám, akkor nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik. Ekkor a lineáris függvény grafikonja „csökkenő”.

3. példa

Az eddigi ismereteink alapján határozzuk meg az

$a: x \mapsto 4x + 1$; $b: x \mapsto x - 3$; $c: x \mapsto -2x - 1$; $d: x \mapsto -5x + 7$

függvények meredekségét!

A megadott függvények mindegyike lineáris, így két pontjának megadásával tudjuk ábrázolni.

a)

x	0	1
$a: x \mapsto 4x + 1$	1	5

Ha x értéke 1-gyel nő, akkor a függvény értéke 4-gyel nő. Ezért a meredekség 4.

b)

x	0	1
$b: x \mapsto x - 3$	-3	-2

Ha x értéke 1-gyel nő, akkor a függvény értéke 1-gyel nő. Ezért a meredekség 1.

c)

x	0	1
$c: x \mapsto -2x - 1$	-1	-3

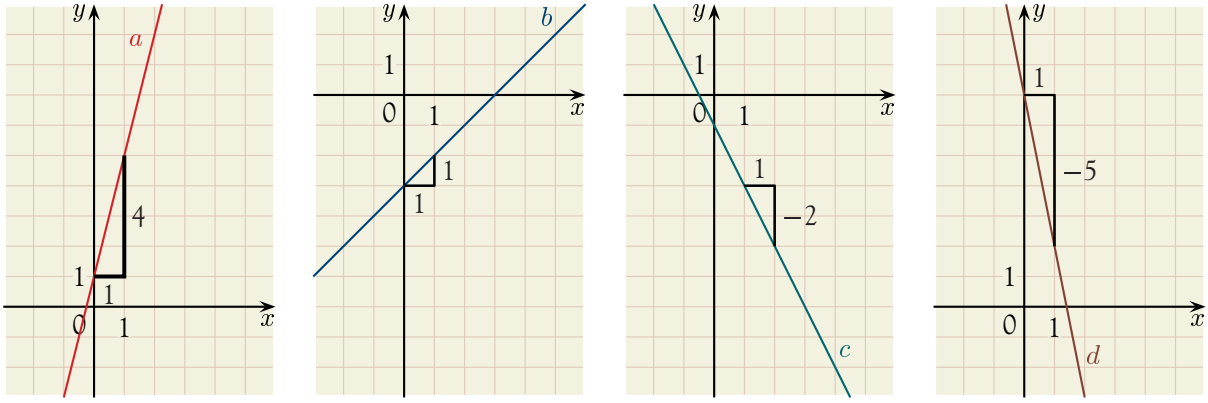
Ha x értéke 1-gyel nő, akkor a függvény értéke 2-vel csökken. Ezért a meredekség -2.

d)

x	0	1
$d\colon x \mapsto -5x + 7$	7	2

Ha x értéke 1-gyel nő, akkor a függvény értéke 5-tel csökken. Ezért a meredekség -5.

A függvények grafikonja:



Az a és b függvények növekedők, a c, d függvények csökkenők.

Vizsgáljuk meg az $f\colon x \mapsto mx + b$ lineáris függvények esetében az $m = 0$ esetet!

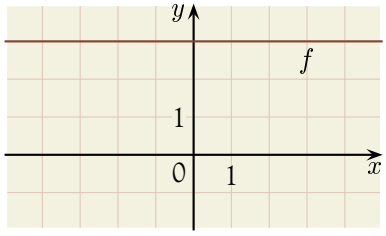
4. példa

Ábrázoljuk az $f\colon x \mapsto 3$ függvényt!

Készítsünk táblázatot!

x	-2	-1	0	1	10
$f\colon x \mapsto 3$	3	3	3	3	3

Az f függvény tetszőleges x érték esetén 3-at vesz fel. A függvény grafikonja az y tengelyt a $(0; 3)$ pontban metszi, és párhuzamos az x tengellyel.



Ha az $f\colon x \mapsto mx + b$ hozzárendelési szabályban az m együttható 0, akkor a hozzárendelési szabály $f\colon x \mapsto b$ alakú lesz. Az így megadott függvényt konstans függvénynek nevezzük. Ekkor a függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes.

Mit mondhatunk azoknak a függvényeknek az egymáshoz viszonyított helyzetéről, amelyeknek meredeksége ugyanakkora?

Az $f\colon x \mapsto 2x + 5$, a $g\colon x \mapsto 2x - 3$ és a $h\colon x \mapsto 2x + 20$ függvények mindegyikének 2 a meredeksége. Mind a három függvény az $x \mapsto 2x$ egyenes arányosság eltolásával is megkapható. Így ezek a függvények párhuzamosak egymással.

Fontos tudnivaló

Ha a lineáris függvények meredeksége egyenlő, akkor a függvények grafikonja párhuzamos egymással.

Feladatok

K1 Ábrázold két pont segítségével közös koordináta-rendszerben az $f\colon x \mapsto -x+2$; $g\colon x \mapsto -x-1$; $h\colon x \mapsto -x - 3$ függvényeket!

a) Hol metszik az y tengelyt a függvények grafikonjai?

b) Mennyi az egyes függvények meredeksége?

K2 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $a: x \mapsto 3x + 3$; $b: x \mapsto 3x - 1$; $c: x \mapsto 3x - 2{,}5$ függvényeket!

a) Határozd meg a függvények meredekségét!

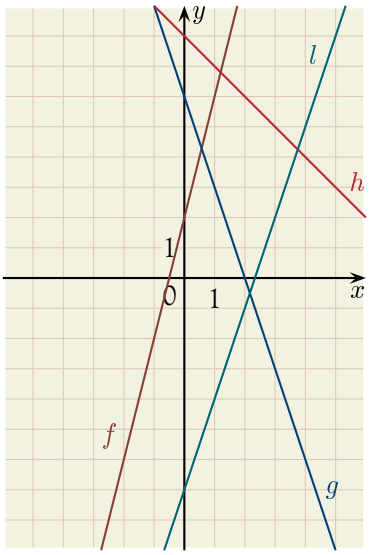
b) Milyen hasonlóságokat látsz a függvények grafikonján?

c) Hol metszik a függvények grafikonjai az y tengelyt?

K3 Határozd meg a grafikonon rajzolt függvények meredekségét!

a) Mely pontokban metszik a függvények az y tengelyt?

b) Írd fel a függvények hozzárendelési szabályát!



K4 Egy lineáris függvény átmegy az $A(0; 2)$ és $B(1; 4)$ pontokon.

a) Ábrázold a függvényt!

b) Határozd meg a függvény hozzárendelési szabályát!

K5 Egy lineáris függvény átmegy a $P(1; 4)$ és a $B(3; -2)$ pontokon.

a) Ábrázold a függvényt!

b) Határozd meg a függvény hozzárendelési szabályát!

7. Lineáris függvények meredeksége II.

Eddig olyan függvényeket vizsgáltunk, amelyekben az m értéke egész szám volt.

Milyen következtetéseket vonhatunk le, ha az m értéke tört?

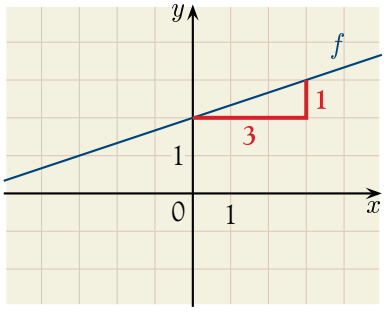
1. példa

Ábrázoljuk az $f: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$ függvényt!

Az $f: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$ függvény ábrázolásakor felhasználhatjuk azt az ismeretet, hogy az ábrázolandó függvény grafikonja egyenes, ezért elegendő két pontját meghatározni. Célszerű olyan x értékeket választani, hogy lehetőség szerint egész koordinátájú pontokat ábrázolhassunk.

Az f függvény a 0-hoz 2-t rendel, azaz a függvény az y tengelyt a $(0; 2)$ pontban metszi.

x	0	3
$\frac{1}{3}x + 2$	2	3



Az $f: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$ függvény grafikonját két pontjának segítségével könnyen úgy ábrázolhatjuk, hogy a grafikon $+2$-nél metszi az y tengelyt, majd 3 egységet „jobbra lépve”, 1-et az y tengely mentén „felfelé lépünk”, így a grafikon újabb pontjához jutunk.

Megfigyelhetjük, hogy ha az x érték 3-mal nő, akkor a hozzá tartozó érték 1-gyel nő. Ez jelenti azt is, hogy ha az x értéke eggyel nő, akkor a hozzá tartozó függvényérték $\frac{1}{3}$-dal nő. Ezt az $\frac{1}{3}$ tört értéke mutatja. Az $\frac{1}{3}$ számot a megadott függvény meredekségének nevezzük.

Az eddigiekkel megegyezően azt tapasztaltuk, hogy ha a lineáris függvény meredeksége pozitív szám, akkor nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik. Ekkor a lineáris függvény grafikonja „emelkedő”, vagy másként fogalmazva növekedő.

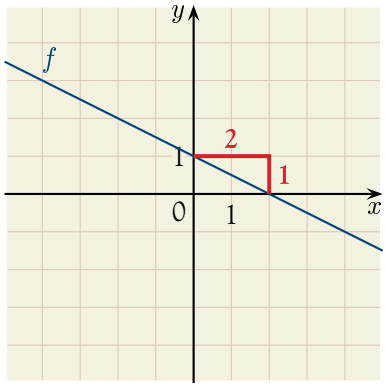
2. példa

Ábrázoljuk az $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$ függvényt, és határozzuk meg a függvény meredekségét!

Az ábrázolásához határozzuk meg a grafikon két pontját!

Mivel az x együtthatója negatív tört, célszerű olyan számot választani x-nek, hogy egész számot kapjunk függvényértékként.

x	0	2
$-\frac{1}{2}x + 1$	1	0



A függvény a (0; 1) pontban metszi az y tengelyt.

Az $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$ függvény grafikonját két pontjának segítségével könnyen úgy ábrázolhatjuk, hogy a grafikon +1-nél metszi az y tengelyt, majd 2 egységet „jobbra lépve”, 1-et az y tengely mentén „lefelé lépünk”, így a grafikon újabb pontjához jutunk.

A kiszámolt értékekből megállapíthatjuk, hogy ha az x érték +2-vel nő, akkor a hozzá tartozó érték 1-gyel csökken. Ezt fogalmazhatjuk úgy is, ha az x érték 1-gyel nő, a hozzá tartozó érték $\frac{1}{2}$-del csökken. A $-\frac{1}{2}$ számot az $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ függvény meredekségének nevezzük.

Ha a lineáris függvény meredeksége negatív szám, akkor nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik. Ekkor a lineáris függvény grafikonja „csökkenő”.

Fontos tudnivaló

Foglaljuk össze az eddig tanultakat! A lineáris függvény hozzárendelési szabályában az m értékét **meredekségnek** nevezzük. A függvény meredeksége megmutatja, hogy ha az x érték 1-gyel nő, mennyivel változik a hozzá rendelt függvényérték.

Ha az m értéke 0, akkor a függvényértékek egyenlőek, a függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes.

Ha az $m > 0$, akkor nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik. Ekkor a függvény növekedő.

Ha az $m < 0$, akkor nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik. Ekkor a függvény csökkenő.

3. példa

Adjuk meg az $f: x \mapsto \frac{4}{5}x + 3$ és a $g: x \mapsto -\frac{2}{5}x + 3$ függvény 4-4 olyan pontját, amelyben mindkét jelzőszám egész!

Készítsünk ehhez táblázatot! Mivel az x-es tag együtthatója a hozzárendelési szabályban az f függvénynél $\frac{4}{5}$, a g esetében $-\frac{2}{5}$, x értéknek olyan számot célszerű választani, amely osztható 5-tel.

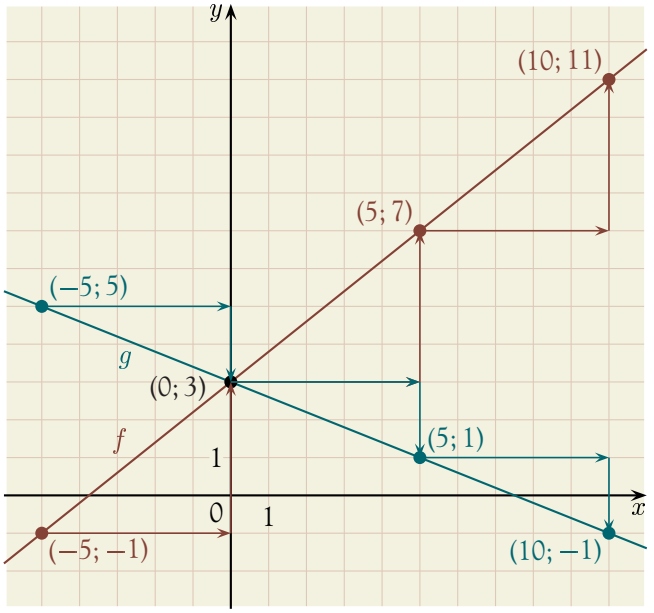
x	−5	0	5	10
$f: x \mapsto \frac{4}{5}x + 3$	−1	3	7	11

x	−5	0	5	10
$g: x \mapsto -\frac{2}{5}x + 3$	5	3	1	−1

A két függvényt ábrázolva:

Az $f: x \mapsto \frac{4}{5}x + 3$ függvény meredeksége $\frac{4}{5}$. Ez azt jelenti, hogy ha az x értéke 1-gyel nő, a hozzá tartozó érték $\frac{4}{5}$-del nő. Ha pedig 5-tel nő az x, akkor $5 \cdot \frac{4}{5} = 4$-gyel nő az y. Így könnyebb ábrázolni a függvényt. A könnyebb ábrázolhatóság miatt úgy is fogalmazhatunk, hogy ha az x érték 5-tel nő, a hozzá tartozó függvényérték 4-gyel növekszik.

A $g: x \mapsto -\frac{2}{5}x + 3$ függvény meredeksége $-\frac{2}{5}$. Ez azt jelenti, hogy ha az x értéke 1-gyel nő, a hozzá tartozó érték $\frac{2}{5}$-del csökken. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ha az x érték 5-tel nő, a hozzá tartozó függvényérték 2-vel csökken.



Fontos tudnivaló

A lineáris függvény általánosan megadott $f: x \mapsto mx + b$ képletéből leolvasható az y tengellyel való metszéspont. Ezt a b értéke mutatja. A képletben az m értéke a függvény meredekségét adja.

7.

Például:

Az $f: x \mapsto \frac{2}{5}x + 1$ függvény az y tengelyt a $(0; 1)$ pontban metszi, és meredeksége $\frac{2}{5}$.

A $g: x \mapsto -\frac{3}{4}x + 4$ függvény az y tengelyt a $(0; 4)$ pontban metszi, és meredeksége $-\frac{3}{4}$.

Feladatok

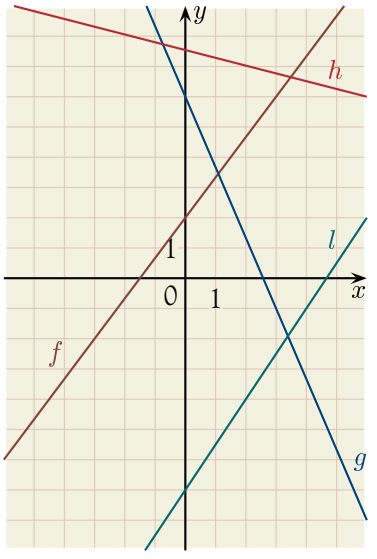
K1 Ábrázold két pont segítségével az alábbi függvényeket!

a) $a: x \mapsto \frac{1}{2}x + 4$; b) $b: x \mapsto \frac{2}{7}x - 2$;

c) $c: x \mapsto \frac{7}{3}x - 5$; d) $d: x \mapsto -\frac{2}{3}x - 4$;

e) $e: x \mapsto -\frac{4}{9}x + 5$; f) $f: x \mapsto -\frac{8}{3}x + 7$.

Válaszd ki, melyik függvények növekedőek!



K2 Add meg az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályát!

K3 Add meg a hiányzó koordinátákat úgy, hogy a pontok illeszkedjenek az $f: x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$ függvény grafikonjára!

$A(0;\ \ )$, $B(-6;\ \ )$, $C(3;\ \ )$, $D(2;\ \ )$, $E(\ \ ;6)$, $F(\ \ ;-3)$, $G(\ \ ;-7)$, $H(26;\ \ )$.

K4 Hol metszik a megadott függvények a koordinátatengelyeket?

$f: x \mapsto 2x + 4$; $g: x \mapsto \frac{3}{5}x + 6$; $h: x \mapsto -\frac{2}{3}x + 4$; $l: x \mapsto -3{,}5x + 7$.

Csoportosítsd a függvényeket aszerint, hogy melyik növekedő, illetve melyik csökkenő!

K5 Írd fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyről tudjuk, hogy

a) grafikonja átmegy a $(0; 4)$ ponton és meredeksége $m = \frac{1}{2}$!

b) grafikonja átmegy a $(-1; 4)$ ponton és meredeksége $m = \frac{1}{3}$!

c) grafikonja átmegy a $(-2; 6)$ ponton és meredeksége $m = -\frac{2}{5}$!

Ábrázolás nélkül döntsd el, mely függvények csökkenőek!

K6 Írd fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyről tudjuk, hogy átmegy a megadott két ponton!

a) $A(0; -4)$, $B(2; -1)$; *b)* $E(0; 9)$, $F(6; 7)$;

c) $K(-2; 2)$, $L(2; 4)$; *d)* $M(-3; 9)$, $N(6; 4)$.

Elsőfokú egyenletek grafikus megoldása

7.

Matematikatanulmányaink során az egyenletek megoldására többféle módszert ismertünk meg. Az egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az ismeretlennek azt az értékét, amelyet az egyenletben az ismeretlen helyére behelyettesítve igaz állítást kapunk.

Azt az alaphalmazba tartozó számot, amelyre igaz az egyenlőség, az egyenlet megoldásának nevezzük.

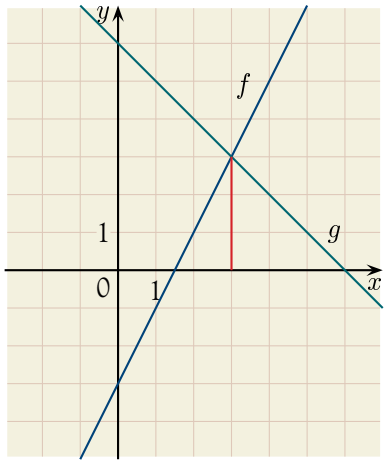
Ismerjük a *próbálgatás módszerét*, a *következtetés módszerét*, a *lebontogatás elvét*, a *mérlegelvet*.

Ennek ellenére nem tudunk minden egyenletet megoldani. Matematikusok be is bizonyították, hogy vannak olyan típusú egyenletek, amelyek megoldására nem létezik általános módszer.

Most egy **új módszert** mutatunk az egyenletek megoldására. Ez az **egyenletek grafikus úton** történő megoldása. Sok olyan egyenlet van, amelyet többféleképpen megoldhatunk, és célszerű a leggyorsabb, leghatékonyabb módszert választani.

1. példa

Oldjuk meg grafikusan a $2x - 3 = 6 - x$ egyenletet!



Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az egyenlet bal és jobb oldalát mint egy-egy függvényt.

$f: x \mapsto 2x - 3$; $g: x \mapsto 6 - x$.

Mindkét oldal egy lineáris függvény hozzárendelési szabálya, így a grafikonjuk egyenes.

Keressük azt az x helyet, ahol a két függvény értéke egyenlő. Ezt a függvények metszéspontjának első jelzőszáma adja.

A grafikonon leolvasható, hogy $x = 3$ helyen metszi a két függvény egymást. Több megoldás nem lehet, mert két egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást.

A leolvasott érték jó, mert ha behelyettesítjük az egyenlet bal és jobb oldalába, egyenlőséget kapunk.

Bal oldal: $2 \cdot 3 - 3 = 3$. Jobb oldal: $6 - 3 = 3$. Az egyenlet megoldása $x = 3$.

Tekintsük át, hogyan oldhatunk meg egyenleteket grafikus úton!

Fontos tudnivaló

Az egyenlet bal, illetve jobb oldalát mint egy-egy függvényt ábrázoljuk. A vizsgált egyenlet grafikus megoldása során meghatározzuk a két grafikon metszéspontjának első koordinátáját (feltéve, hogy van metszéspont).

Ha nincs metszéspontja a két függvény grafikonjának, akkor nincs megoldása az egyenletnek. Ha a két grafikon egybeesik, akkor minden alaphalmazbeli szám megoldás.

A leolvasott megoldást mindig ellenőrizni kell!

Feladatok

K1 Ábrázold az alábbi függvényeket! Adj meg négy olyan pontot, amely a függvény grafikonjára illeszkedik!

a) $f: x \mapsto -x + 7$; *b)* $g: x \mapsto \frac{2}{5}x - 1$; *c)* $h: x \mapsto -\frac{3}{7}x + 2$.

K2 Ábrázold az $f: x \mapsto 2x - 5$ függvényt!

a) Mennyi a függvény értéke az $x = -2;\ -0{,}5;\ 0;\ 2;\ 3;\ \frac{7}{2};\ 100;\ 256$ helyen?

b) Hol veszi fel a függvény a $-5;\ -11;\ 3;\ 11;\ 20;\ 200$ értéket?

K3 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi két függvényt!

$a: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$, $b: x \mapsto -\frac{3}{2}x + 5$.

a) Határozd meg az a és a b függvény értékeit az $x = -4;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 4$ helyeken!

b) Milyen x érték esetén egyenlő az a és a b függvények értéke?

c) Az előzőek alapján határozd meg az $\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{3}{2}x + 5$ egyenlet megoldását!

K4 Oldd meg grafikus módon az alábbi egyenleteket!

a) $2x + 3 = 5$; *b)* $-2x + 1 = x + 4$; *c)* $\frac{1}{3}x - 2 = 3 - \frac{4}{3}x$;

d) $-\frac{3}{2}x + 5 = 2x - 2$; *e)* $3x - 2 = \frac{4 + 6x}{2}$.

Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása

A grafikus módszer felhasználásával egyenlőtlenségeket is megoldhatunk.

1. példa

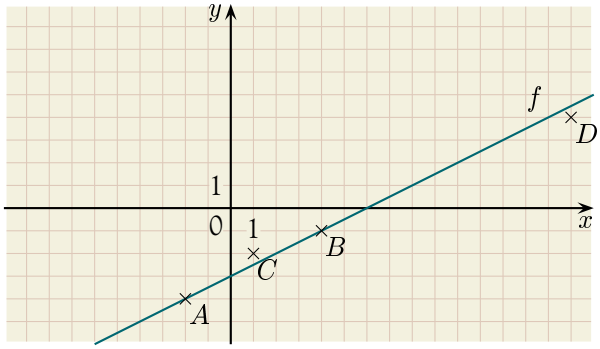
Döntsük el, hogy a következő pontok rajta vannak-e az $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$ függvény grafikonján!

$A(-2; -4)$; $B(4; -1)$; $C(1; -2)$; $D(15; 4)$.

A számpárok első tagját behelyettesítve a hozzárendelési szabályban az x helyére, megkapjuk azt az y értéket, amely a grafikonra illeszkedő pontokat adja.

Ezért ha $x = -2$, akkor $y = \frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 3 = -4$. Így az A pont illeszkedik a függvény grafikonjára.

Hasonló módon megvizsgálható a többi pontra is. A B pont illeszkedik, a C és a D pont nem illeszkedik a függvény grafikonjára. A C pont a függvény grafikonja „felett" van, ugyanis ha az $x = 1$-et a hozzárendelési szabályba behelyettesítjük, akkor a függvény értéke $-2{,}5$ lesz. Mivel a C pont második koordinátája nagyobb, mint a függvényérték, ezért a C a grafikon felett helyezkedik el. Ugyanilyen módon belátható, hogy a D pont a grafikon alatt van.



2. példa

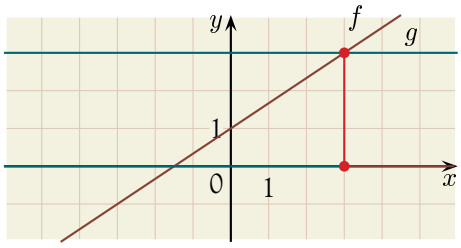
Ábrázoljuk az $f: x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$ és a $g: x \mapsto 3$ függvényeket közös koordináta-rendszerben!

a) Állapítsuk meg, hogy mely x értékekre egyenlő a két függvényérték!

b) Melyek azok az x értékek, amelyek esetén az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja felett halad?

c) Mely x értékek esetén halad az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja alatt?

A két függvény grafikonja közös koordináta-rendszerben:



a) A két függvény értéke $x = 3$ esetén egyenlő.

b) Az f függvény grafikonja akkor halad a g függvény grafikonja felett, ha $x > 3$.

c) Az f függvény grafikonja akkor halad a g függvény grafikonja alatt, ha $x < 3$.

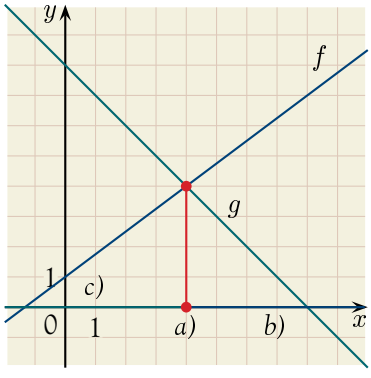
3. példa

Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenletet, egyenlőtlenségeket!

Jelöljük a megoldáshalmazt az x tengelyen, majd írjuk fel az egyenlőtlenségek megoldását relációjelekkel!

a) $\frac{3}{4}x + 1 = -x + 8$; *b)* $\frac{3}{4}x + 1 < -x + 8$; *c)* $\frac{3}{4}x + 1 > -x + 8$.

Ábrázoljuk az $f: x \mapsto \frac{3}{4}x + 1$ és a $g: x \mapsto -x + 8$ függvényeket közös koordináta-rendszerben! A grafikonról leolvasható az egyenlet, illetve az egyenlőtlenségek megoldása.



a) Az egyenlet megoldása $x = 4$ esetén teljesül.

b) $\frac{3}{4}x + 1 < -x + 8$ teljesül, ha $x < 4$.

c) $\frac{3}{4}x + 1 > -x + 8$ teljesül, ha $x > 4$.

Feladatok

K1 Döntsd el, hogy az $a: x \mapsto 3 - 2x$ függvény grafikonjához viszonyítva hol helyezkednek el a megadott pontok!

$A(-1; 5)$; $B(3; -2)$; $C(5; -7)$; $D(-2; 5)$; $E(10; -17)$.

K2 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f: x \mapsto 5 - x$ és a $g: x \mapsto x + 3$ függvényeket!

a) Állapítsd meg, melyik x helyeken egyenlő a két függvényérték!

b) Melyek azok az x helyek, amelyek esetén az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja felett halad?

K3 Ábrázold az $f: x \mapsto -2x + 3$; $g: x \mapsto x$ függvényeket közös koordináta-rendszerben!

Jelöld az x tengelyen, milyen x esetén teljesül, hogy $f \leq g$!

K4 Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $3x - 4 = 2x + 6$; $\quad 3x - 4 \leq 2x + 6$;

b) $-\frac{1}{3}x + 4 = 2x - 10$; $\quad -\frac{1}{3}x + 4 \leq 2x - 10$;

c) $3x + 7 = -\frac{2}{3}x - 4$; $\quad 3x + 7 \leq -\frac{2}{3}x - 4$.

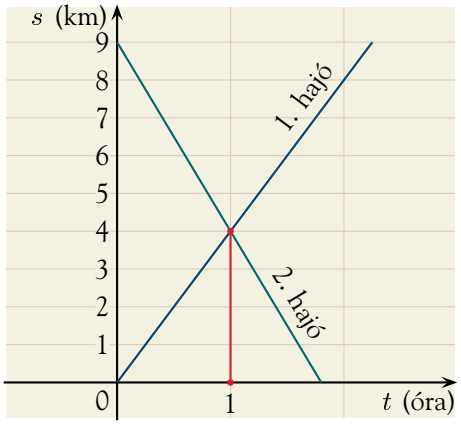
7.

Gyakorlati alkalmazások

1. példa

A tengeren két sziget egymástól 9 km távolságra van. Az egyik szigetről egy sétahajó 4 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel indul a másik sziget felé. A másik szigetről ugyanakkor egy másik hajó indul el, és óránként 5 km-t tesz meg.

Mikor haladnak el egymás mellett? Oldjuk meg grafikusan a feladatot!



Használjuk fel fizikatanulmányainkat! Az egyenletesen mozgó testek út-idő összefüggése $s = v \cdot t$, ahol s a megtett út, v a test sebessége és t az eltelt idő. Ezek alapján:

Határozzuk meg, hogy t idő elteltével milyen távolságra lesz a két hajó az első szigettől! Az egyik hajó által megtett utat $s = 4t$ alakban írhatjuk fel. A tőle 9 km-re lévő szigetről induló hajó által megtett utat az $s = 9 - 5t$ képlet írja le. Ábrázoljuk a két hajó megtett útját az idő függvényében!

A két grafikon a $t = 1$-nél metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy az indulás után 1 órával haladtak el egymás mellett.

2. példa

Teavizet melegítettünk. A víz hőmérsékletét percenként megmértük. A grafikon alapján válaszoljunk a kérdésekre!

a) Hány percig mértük a víz hőmérsékletét?

b) Hány fokos lesz a víz 2 perc, 5 perc múlva?

c) Mikor lesz a víz hőmérséklete 40 °C?

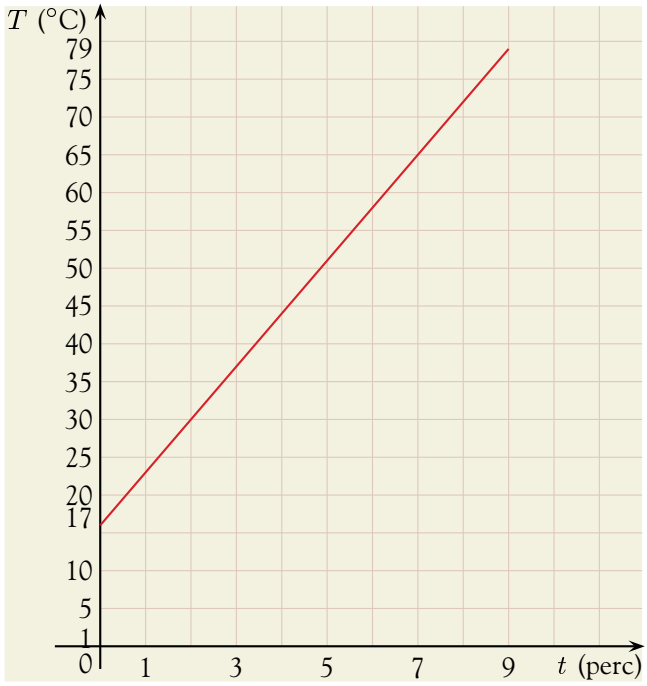
d) Keress összefüggést a víz hőmérséklete és a melegítés ideje között!

a) A vízszintes tengelyen látható, hogy 9 percig mértük a víz hőmérsékletét.

b) 2 perc alatt 14 °C-ot emelkedett a víz hőmérséklete. Ezért 2 perc múlva 30 °C, 5 perc múlva 51 °C-os lesz.

c) Kb. 3,5 perc múlva lesz a teavíz hőmérséklete 40 °C.

d) A víz hőmérsékletét jelöljük T-vel, az időt t-vel. Ekkor $T = 17 + 7 \cdot t$ összefüggés írható fel.

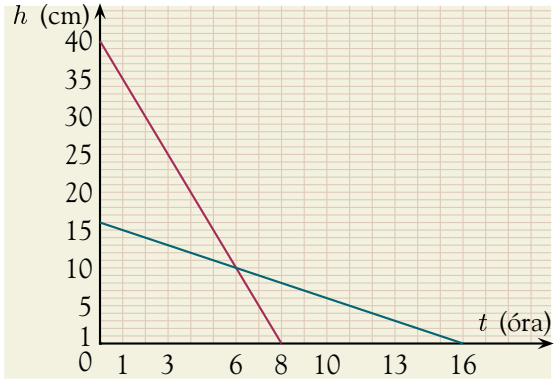


3. példa



Egyszerre meggyújtunk egy zöld és egy bordó színű gyertyát. A bordó 40 cm magas, és 8 óra alatt ég el. A zöld 16 cm magas, és 16 óra alatt ég el. Hány óra elteltével lesz magasabb a zöld színű gyertya?

Ábrázoljuk a két gyertya magasságának változását az idő függvényében!



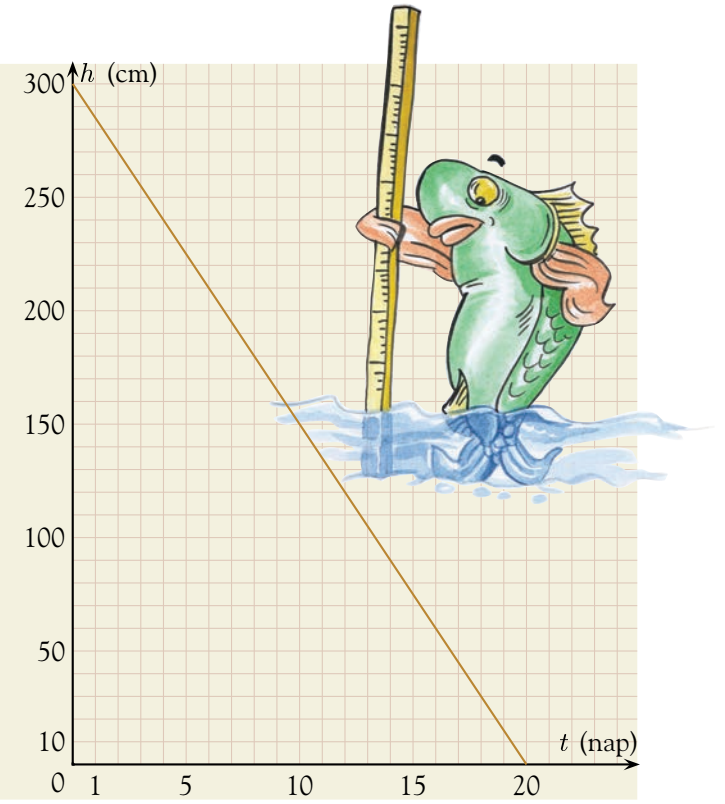
A grafikonról leolvashatjuk a kérdésekre a választ.

A gyertyák egyenlő magasak a 6. órában. Ha 6 óránál több idő telt el a meggyújtás óta, akkor a zöld gyertya magasabb. Ez csak addig igaz, amíg teljesen el nem ég, azaz a 16. óráig.

Tehát a megoldás (t az eltelt idő): 6 óra $< t <$ 16 óra.

Feladatok

K1 A tavaszi áradást követően egyenletes apadásnak indult a folyó vízszintje. A grafikont elemezve válaszolj a kérdésekre!



a) Mennyit apadt a folyó naponta?

b) A negyedik napon mekkora volt a víz magassága?

c) Melyik napon érte el a 200 cm-t a folyó vízmagassága?

d) Az árvízvédelmi készültséget 180 cm-es magasságnál oldják fel. Hányadik napon szűnik meg az árvízi készültség?

K2 Egy folyón egymástól 120 km-re van két kikötő. Az A kikötőből 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel B felé indul egy hajó. Ugyanebben az időben B-ből is elindul egy hajó A felé 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

a) Ábrázold a két hajó megtett útját az idő függvényében!

b) Mikor találkozik a két hajó egymással?

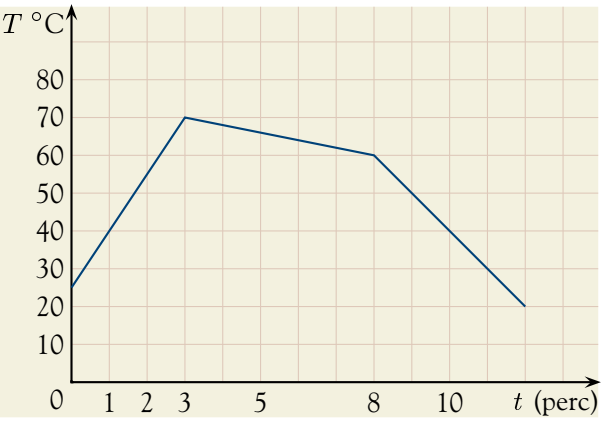
c) Milyen távolságra lesznek a találkozás pillanatában a két kikötőtől?

d) Milyen távolságra van a két hajó egymástól az indulás után 1,5 órával?

e) Mikor lesz a két hajó távolsága egymástól 40 km-re?

f) Mikor lesz a két hajó egymástól 80 km-nél nagyobb távolságra?

K3 Egy fizikai kísérlet során egy pohár vizet gázon melegítettek, majd levéve a gázról hűlni kezdett. Egy idő elteltével beledobtak egy darab jégkockát, és tovább mérték a hőmérséklet változását.



A grafikonon látod a mérés eredményét. A grafikon adatai alapján válaszolj a kérdésekre!

a) Hány percig végeztünk mérést?

b) Hány °C-os vízzel kezdtük a kísérletet?

c) Hány °C-ra melegítettük a vizet?

d) Hány °C-kal csökkent a víz hőmérséklete a jégkocka beledobását követően?

e) Mikor volt 50 °C-os a víz?

K4 Alacsár és Bekecsvár távolsága 12 km. Bekecsvárból 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel indul Feri Alacsár felé. Egy óra eltelte után egy és fél órát vár Jenőre, aki egy órával később indult Alacsárból, mint ő Bekecsvárból. Találkozásukkor közösen mennek Alacsárba, akkora sebességgel, mint kettejük eddigi sebességének átlaga.

a) Készítsd el a mozgásgrafikonokat!

b) Mekkora sebességgel ment Jenő Bekecsvár irányába?

c) Mekkora sebességgel haladtak, amikor együtt mentek?

d) Mikor értek Alacsárba?

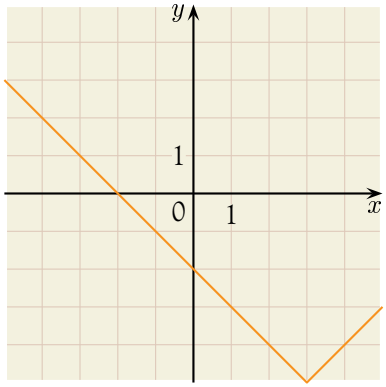
K5 Két DVD-kölcsönző ajánlatát tanulmányozzuk. Az egyikben a beiratkozás díja 1000 Ft, filmenként 800 Ft-ot kell fizetnünk. A másikban a beiratkozás 2000 Ft, de itt filmenként 600 Ft-ot fizetnénk.

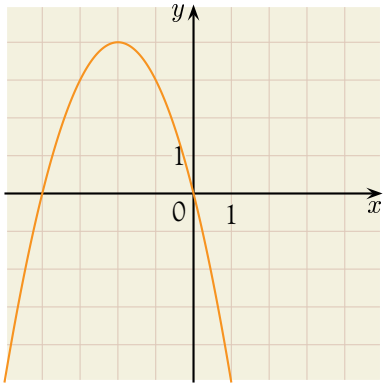
a) Melyik kölcsönzőnek lennél tagja, ha a kölcsönzők körülbelül azonos árakért kölcsönöznek?

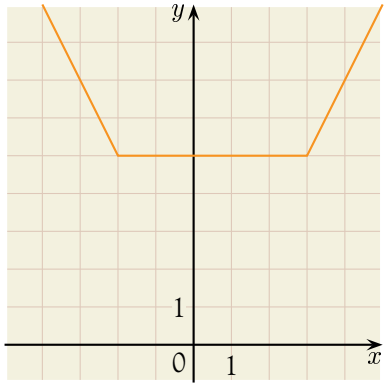
b) Melyik függvényekkel jellemezhetők a DVD-kölcsönzések díjszabásai? Ábrázold ezeket közös koordináta-rendszerben!

c) Hány film kölcsönzése után célszerűbb a másodikba beiratkozni?

Nemlineáris függvények







A fenti grafikonok speciális, nemlineáris függvények grafikonjai. Természetes a kérdés: meg tudunk-e adni hozzárendelési szabályokat úgy, hogy a függvények grafikonjai ezekhez a grafikonokhoz hasonlóak legyenek?

Ebben a fejezetben tehát a függvények hozzárendelési szabálya és grafikonja közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Kiindulunk egy jól ismert függvényből. Kicsit változtatunk a hozzárendelési szabályon, és megvizsgáljuk a grafikont; vagy a függvény grafikonján változtatunk, és a hozzárendelési szabályra következtetünk.

A hozzárendelésekben minden esetben – ha mást nem kötünk ki – a tanult számok halmazának elemeihez a tanult számok halmazának elemeit rendeljük hozzá.

Az abszolútérték-függvény

Emlékszel?

Pozitív szám abszolút értéke megegyezik magával a számmal.

Negatív szám abszolút értéke pedig a szám ellentettjével egyezik meg.

A 0 abszolút értéke 0.

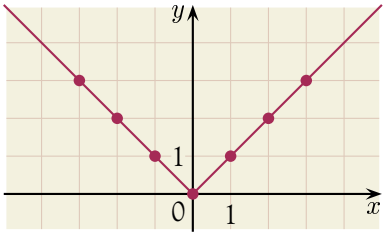
Ezt a következőképpen is írhatjuk: $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

1. példa

Ábrázoljuk a következő hozzárendeléssel megadott függvényt! $f: x \mapsto |x|$

1. lehetőség. Készítsünk értéktáblázatot a függvény ábrázolásához!

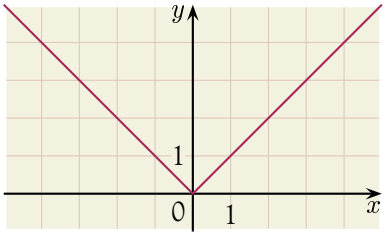
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3



A kapott számpárok segítségével ábrázoljuk a függvény grafikonját!

A grafikonnak csak néhány pontját ismerjük. Szeretnénk tudni, hogy a pontok összeköthetők-e egyenessel. Ehhez vagy nagyon sok pontot kellene még meghatározni, vagy a már tanult lineáris függvényekre vezetjük vissza az ábrázolást.

2. lehetőség. A függvény hozzárendelési szabálya alapján a vizsgált függvény grafikonja két félegyenesből és egy pontból állítható össze:



$x \mapsto x$, ha az x pozitív szám;

$0 \mapsto 0$;

$x \mapsto -x$, ha az x negatív szám.

Vizsgáljuk meg a függvény néhány jellegzetes tulajdonságát!

Fontos tudnivaló

Az $f: x \mapsto |x|$ **nemlineáris függvény,** grafikonja nem egy egyenes.

A függvény minden tanult számra értelmezhető, hiszen minden számnak létezik abszolút értéke. **Értelmezési tartománya** ezért a tanult számok halmaza.

A függvény nem vesz fel negatív értéket, az **értékkészlete** a nemnegatív számok halmaza.

A függvény csökkenő, ha $x < 0$, növekedő, ha $x > 0$.

A függvény által felvett legkisebb érték a 0. Ezért a 0-t a **függvény minimumának** fogjuk nevezni. Ezt az értéket az $x = 0$ helyen veszi fel.

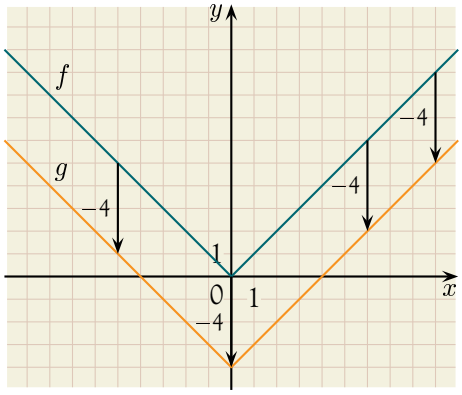
2. példa

Készítsünk táblázatot az

$f: x \mapsto |x|$ és a $g: x \mapsto |x| - 4$ függvények hozzárendelési szabálya alapján!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert - 4$	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1

Ábrázoljuk a függvényeket!

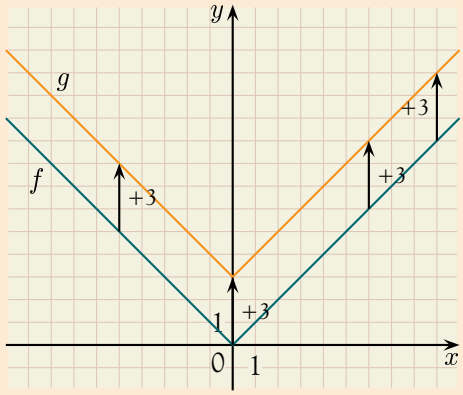


Azt láthatjuk, hogy az $f: x \mapsto |x|$ függvény grafikonjához hasonló grafikont kaptunk. A g függvény grafikonját úgy is megkaphatjuk, hogy az $f: x \mapsto |x|$ függvény grafikonját az y tengely mentén 4 egységgel negatív irányba csúsztatjuk.

3. példa

Toljuk el az $f: x \mapsto |x|$ és a függvény grafikonját az y tengellyel párhuzamosan pozitív irányba 3 egységgel!

Olvassunk le a grafikonról értékeket, és készítsünk értéktáblázatot!



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3
g	6	5	4	3	4	5	6

Mi lehet a grafikonjaikkal meghatározott függvények hozzárendelési szabálya?

A táblázat értékei alapján megállapíthatjuk, hogy a g függvény értékeit úgy kaphatjuk meg, hogy egy tetszőleges x szám abszolút értékéhez hozzáadunk 3-at.

Így a hozzárendelési szabályt képlettel is felírhatjuk: $g: x \mapsto |x| + 3$.

Az $|x|$ függvény grafikonjának y tengely mentén történő eltolásával új függvényekhez jutottunk.

Feladatok

K1 Ábrázold a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto |x|$ függvényt! A grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mekkora a függvény értéke a következő helyeken?

$x = -3$; $x = 5$; $x = 0$; $x = \frac{1}{3}$; $x = -\frac{5}{3}$; $x = 2{,}5$.

b) Hol veszi fel (melyik x érték esetén) a függvény a következő értékeket?

5; -1; 0; $\frac{3}{2}$; $-0{,}4$; 2,8.

K2 Ábrázold a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto |x|$ függvényt! Színezd pirossal a függvény grafikonjának azon pontjait, ahol a függvény értéke nagyobb mint 3, és kékkel azokat a pontokat ahol kisebb mint 3!

K3 Ábrázold a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto |x|$ függvényt!

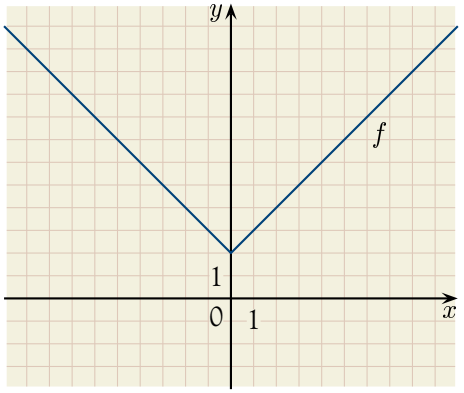
a) Milyen x értékek esetén nagyobb a függvény értéke, mint $\frac{5}{4}$?

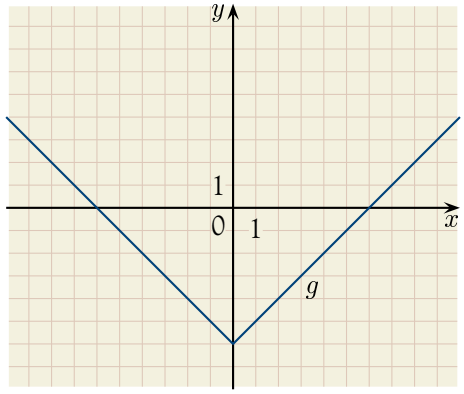
b) Milyen x értékek esetén kisebb a függvény értéke, mint 3,5?

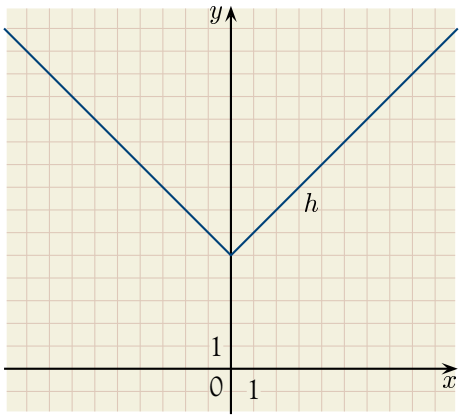
K4 Ábrázold az $f: x \mapsto |x|$ függvénnyel közös koordináta-rendszerben a megadott függvényeket!
$g: x \mapsto |x| - 7$; $h: x \mapsto |x| + 5$.
Milyen geometriai transzformáció viszi át

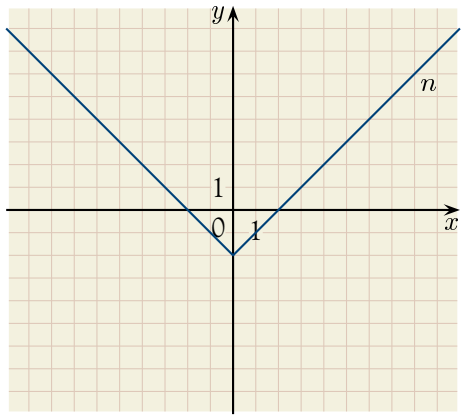
a) az f függvény grafikonját a g függvény grafikonjába?
b) az f függvény grafikonját a h függvény grafikonjába?
c) az g függvény grafikonját a h függvény grafikonjába?
Jellemezd a függvényeket növekedés szempontjából!

K5 Add meg képlettel az alábbi függvények hozzárendelési szabályát! Ha szükséges, készíts táblázatot az egyes függvények értékeiről!









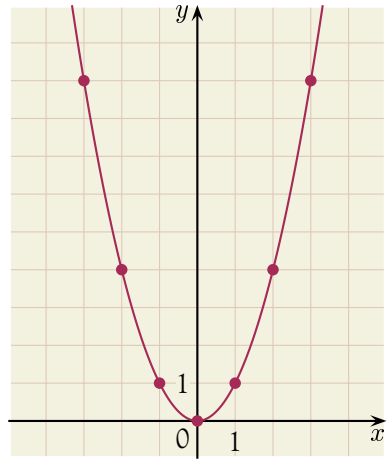
A másodfokú függvény

Tavaly már találkoztunk azzal a hozzárendeléssel, amely minden számhoz hozzárendeli a négyzetét. A hozzárendelési szabály képlettel történő megadása $f: x \mapsto x^2$. Ezt másodfokú függvénynek nevezzük. A függvény grafikonja egy speciális görbe.

Készítsünk értéktáblázatot!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

A függvény vizsgálatánál tapasztalhatjuk, hogy sok tulajdonságában megegyezik az $f: x \mapsto |x|$ függvény tulajdonságaival:



Fontos tudnivaló

Az $f: x \mapsto x^2$ **nemlineáris függvény**, grafikonja nem egy egyenes. Grafikonjának neve: **parabola**.

A függvény minden tanult számra értelmezhető, hiszen minden számnak létezik négyzete. **Értelmezési tartománya** ezért a tanult számok halmaza.

A függvény nem vesz fel negatív értéket, az **értékkészlete** a nemnegatív számok halmaza.

A függvény csökkenő, ha $x < 0$, növekedő, ha $x > 0$.

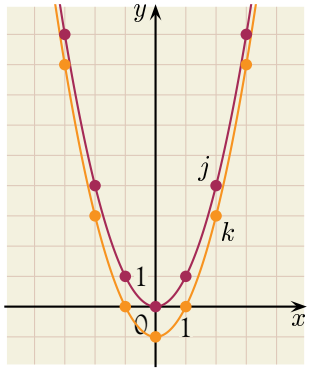
A függvény által felvett legkisebb érték a 0. Ezért a 0 a **függvény minimuma.** Ezt az értéket az $x = 0$ helyen veszi fel.

1. példa

Ábrázoljuk értéktáblázat segítségével a $j: x \mapsto x^2$ és a $k: x \mapsto x^2 - 1$ függvényt!

Az értéktáblázat néhány értékkel:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 - 1$	8	3	0	-1	0	3	8

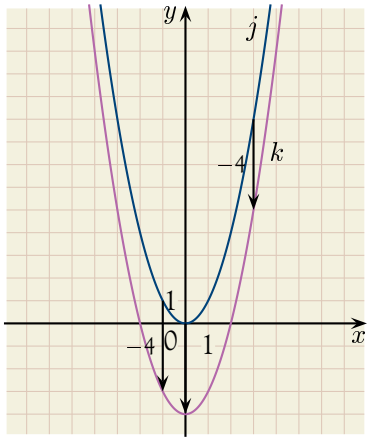


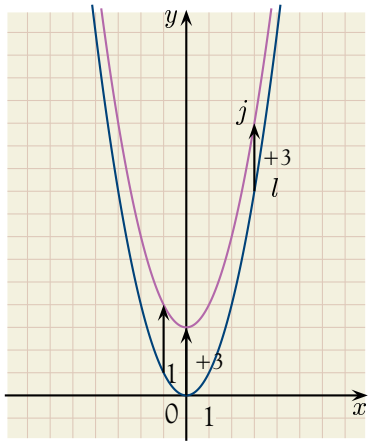
Azt láthatjuk, hogy a $j: x \mapsto x^2$ függvény grafikonját 1 egységgel az y tengely mentén negatív irányba eltolva megkapjuk a $k: x \mapsto x^2 - 1$ függvény grafikonját.

2. példa

Toljuk el a $j: x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az y tengely mentén egyik esetben 4 egységgel negatív irányba, másik esetben 3 egységgel pozitív irányba!

Készítsünk értéktáblázatot, és írjuk fel képlettel a függvények hozzárendelési szabályát!





x	-3	-2	-1	0	1	2	3
k	5	0	-3	-4	-3	0	5
l	12	7	4	3	4	7	12

A kapott függvények hozzárendelési szabálya képlettel úgy kapható meg, hogy egy adott szám négyzetéből elveszünk négyet, illetve hozzáadunk 3-at.

$k: x \mapsto x^2 - 4$; $\quad l: x \mapsto x^2 + 3$.

Fontos tudnivaló

Tapasztalatainkat így fogalmazhatjuk meg: ha egy függvény minden egyes hozzárendelt értékét c számmal növeljük, akkor az új függvény grafikonját az eredeti függvény grafikonjából az y tengellyel párhuzamosan pozitív irányba c egységgel történő eltolással kaphatjuk meg.

Ha egy függvény minden egyes hozzárendelt értékét c számmal csökkentjük, akkor az új függvény grafikonját az eredeti függvény grafikonjából az y tengellyel párhuzamosan negatív irányba c egységgel történő eltolással kaphatjuk meg.

Feladatok

K1 Ábrázold a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto x^2$ függvényt! A grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Mekkora a függvény értéke a következő helyeken?

$x = -3$; $x = 3$; $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{5}{2}$; $x = 2{,}5$.

b) Hol veszi fel (melyik x érték esetén) a függvény a következő értékeket?

0; 4; -9; $\frac{16}{4}$; $-\frac{4}{9}$; 3.

K2 Ábrázold a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto x^2$ függvényt! Színezd pirossal a függvény grafikonjának azon pontjait, ahol a függvény értéke nagyobb mint 4, és kékkel azokat a pontokat, ahol kisebb mint 4!

K3 Ábrázold a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto x^2$ függvényt!

a) Milyen x értékek esetén nagyobb a függvény értéke, mint 4?

b) Milyen x értékek esetén kisebb a függvény értéke, mint 9?

K4 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a tanult számok halmazán az $f: x \mapsto |x|$ és a $g: x \mapsto x^2$ függvényeket! A grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

a) Melyik x érték esetén lesz a két függvény értéke egyenlő?

b) Melyik függvény értéke nagyobb az alábbi x helyeken?

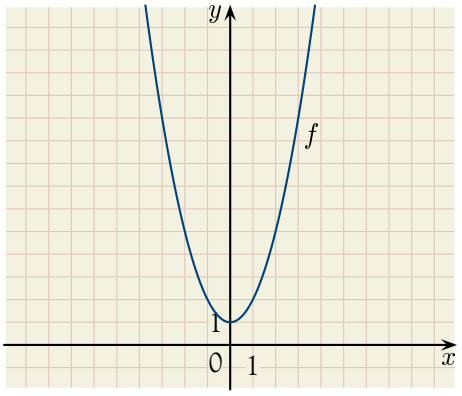
$x = 2$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -0{,}5$; $x = -1$; $x = 0$.

c) Mely x értékek esetén lesz az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja alatt?

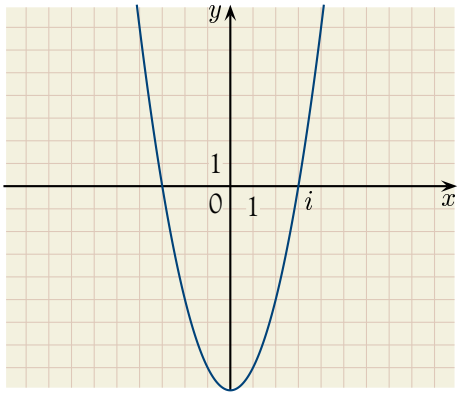
d) Mely x értékek esetén lesz az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja felett?

K5 Állapítsd meg a grafikonok alapján, mely függvényeket ábrázoltuk! Milyen x értékek esetén növekedőek, illetve csökkenőek az ábrán látható függvények?

a)



b)



K6 Ábrázold az $f: x \mapsto x^2$ függvénnyel közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$g: x \mapsto x^2 - 3$; $h: x \mapsto x^2 - 7$.

Milyen geometriai transzformáció viszi át

a) az f függvény grafikonját a g függvény grafikonjába?

b) az f függvény grafikonját a h függvény grafikonjába?

c) a g függvény grafikonját a h függvény grafikonjába?

K7 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket! $f: x \mapsto |x| + 4$; $g: x \mapsto x^2 + 2$.

Mely x értékek esetén egyezik meg a két függvény értéke? Biztosak lehetünk abban, hogy minden ilyen x értéket megtaláltunk?

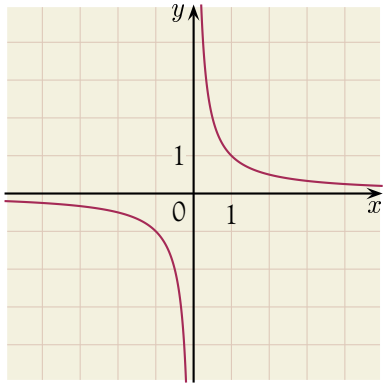
A fordított arányosság függvénye

Emlékszel?

Egy szám reciproka az a szám, amellyel összeszorozva a szorzat értéke 1.
A definícióból következik, hogy a racionális számok közül csak a 0-nak nem értelmezhető a reciproka.

1. példa

Rendeljük hozzá minden nem nulla számhoz a reciprokát! Ezt a hozzárendelést így is írhatjuk: $f: x \mapsto \frac{1}{x}$. A hozzárendeléssel már találkoztunk a fordított arányosságnál. Ábrázoljuk az $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt!



Vizsgáljuk meg a függvény néhány jellegzetes tulajdonságát!

Az $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ **nemlineáris függvény,** grafikonja nem egy egyenes.

A függvény grafikonja nem rajzolható meg egyetlen folyamatos vonallal, mert az $x = 0$ helyen nem értelmezhető a hozzárendelés.

A függvény nem minden tanult számra értelmezhető, hiszen a 0-nak nincs reciproka. Ezért az **értelmezési tartománya** a tanult számok halmaza, kivéve a 0-t.

A függvény csökkenő, ha $x < 0$, illetve ha $x > 0$.

A függvény nem veszi fel a 0 értéket, ezenkívül azonban minden értéket felvesz. Ezért az **értékkészlete** a 0-tól különböző számok halmaza.

7.

Feladatok

K1 Ábrázold az $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényből kiindulva a $g: x \mapsto \frac{2}{x}$, $h: x \mapsto \frac{5}{x}$ függvényt! Hogyan változott a g, illetve a h függvény grafikonja az f grafikonjához képest?

K2 Az f és a g egy-egy fordított arányosság. f grafikonja átmegy az $A(2; 1{,}5)$ és a $B(5; 0{,}6)$, illetve g grafikonja átmegy az $A(2; 0{,}4)$ és a $B(0{,}5; 0{,}8)$ ponton.

a) Ábrázold a függvényeket! *b)* Határozd meg a hozzárendelési szabályt!

Függvények grafikonjának mozgatása az x tengellyel párhuzamosan

1. példa

Induljunk ki a megismert $f: x \mapsto |x|$ alapfüggvényből!

Változtassuk meg úgy a függvény hozzárendelési szabályát, hogy az x számból először vegyünk el 3-at, majd ezek után vegyük a különbség abszolút értékét.

A függvény hozzárendelési szabálya: $g: x \mapsto |x - 3|$.

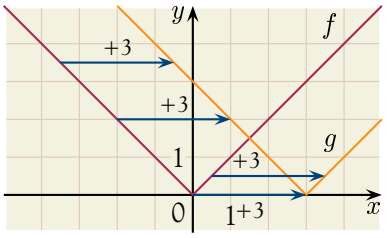
Készítsünk táblázatot, figyeljük meg a függvényértékek változását!

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f: x \mapsto \lvert x \rvert$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g: x \mapsto \lvert x - 3 \rvert$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4

Látható, hogy a g függvény pontosan azokat az értékeket veszi fel, mint az f függvény, csak 3 egységgel később.

Ez azt jelenti, hogy a g függvény grafikonja az f függvény grafikonjából eltolással származik. Az eltolás párhuzamos az x tengellyel, pozitív irányú és 3 egység nagyságú.

(Egyszerűbben úgy is fogalmazhatunk: az f függvény grafikonját jobbra eltolva 3 egységgel, kapjuk a g függvény grafikonját.)



2. példa

Ábrázoljuk a $h: x \mapsto |x + 2|$ függvényt!

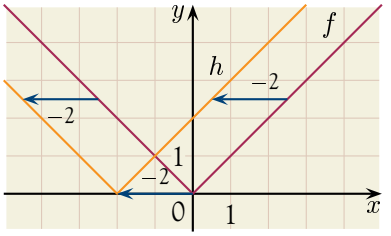
Az előzőek alapján azt várjuk, hogy a h függvény grafikonja szintén eltolással megkapható az f függvény grafikonjából.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f: x \mapsto \|x\|$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h: x \mapsto \|x + 2\|$	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Valóban, a h függvény pontosan azokat az értékeket veszi fel, mint az f függvény, csak 2 egységgel előbb.

Ebből következően a h függvény grafikonja az f függvény grafikonjából eltolással származtatható. Az eltolás párhuzamos az x tengellyel, negatív irányú és 2 egység hosszú.

(Egyszerűbben úgy is fogalmazhatunk: az f függvény grafikonját balra eltolva 2 egységgel, kapjuk a h függvény grafikonját.)



3. példa

Figyeljük meg, hogy az előző példához hasonló változtatást tapasztalunk-e a $j: x \mapsto x^2$, valamint a $k: x \mapsto (x + 5)^2$ és az $l: x \mapsto (x - 4)^2$ függvények esetén!

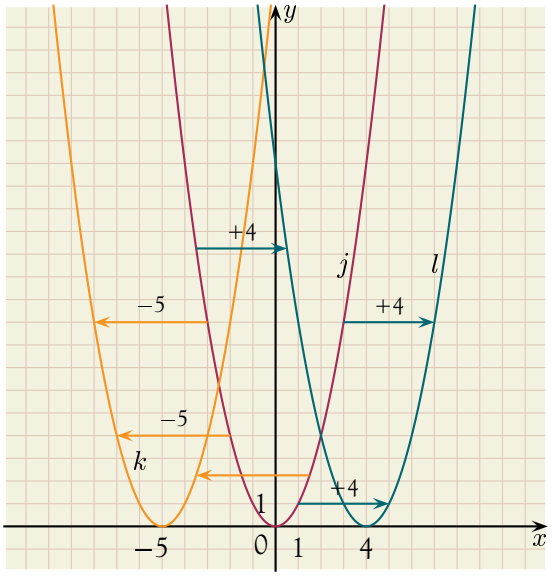
Készítsünk értéktáblázatot a függvényekhez!

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

x	-7	-6	-5	-4	-3
$(x + 5)^2$	4	1	0	1	4

x	2	3	4	5	6
$(x - 4)^2$	4	1	0	1	4

Láthatjuk, hogy a $k: x \mapsto (x + 5)^2$, illetve az $l: x \mapsto (x - 4)^2$ ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint a j függvény, csak k esetén 5 egységgel előbb, l esetén 4 egységgel később.



Valóban, az ábrázolás alapján, ha a $j: x \mapsto x^2$ függvény grafikonját balra eltoljuk 5 egységgel, akkor a $k: x \mapsto (x + 5)^2$ grafikonját kapjuk.

Ha a $j: x \mapsto x^2$ függvény grafikonját jobbra toljuk el 4 egységgel, akkor az $l: x \mapsto (x - 4)^2$ grafikonját kapjuk.

Feladatok

K1 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket! Ha szükséges, akkor készíts értéktáblázatot!

$f: x \mapsto |x - 7|$; $g: x \mapsto |x + 5|$.

Milyen geometriai transzformáció viszi át

a) az $|x|$ függvény grafikonját az f függvény grafikonjába?

b) az $|x|$ függvény grafikonját a g függvény grafikonjába?

c) az f függvény grafikonját a g függvény grafikonjába?

K2 Értéktáblázat segítségével ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket! Jellemezd a függvényeket növekedés szempontjából!

$f: x \mapsto (x - 1)^2$; $g: x \mapsto (x - 6)^2$.

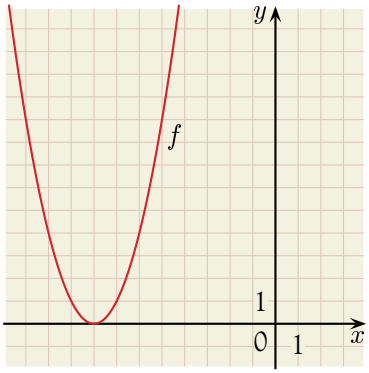
Milyen geometriai transzformáció viszi át az f függvény grafikonját a g függvény grafikonjába?

K3 Milyen mozgatás viszi az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az $f: x \mapsto (x + 10)^2$ függvény grafikonjába?

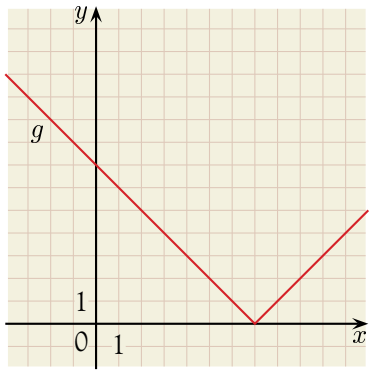
Az $f: x \mapsto (x + 10)^2$ függvény grafikonját eltoltuk az x tengely mentén 13 egységgel pozitív irányba. Add meg az eltolással kapott függvény hozzárendelési szabályát! Ábrázold ezt a függvényt!

K4 Állapítsd meg a grafikonok alapján, mely függvényeket ábrázoltuk!
Vizsgáld meg, hogy az ábrán látható függvények hol növekedőek, illetve hol csökkenőek!

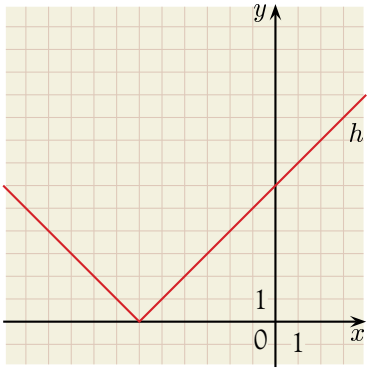
a)



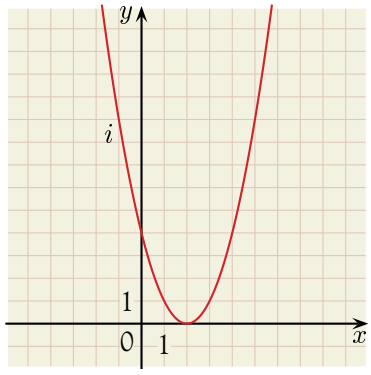
b)



c)



d)



K5 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$f: x \mapsto |x - 2|$; $g: x \mapsto (x + 4)^2$.

Mely x értékek esetén egyezik meg a két függvény értéke? Biztosak lehetünk abban, hogy minden ilyen x értéket megtaláltunk?

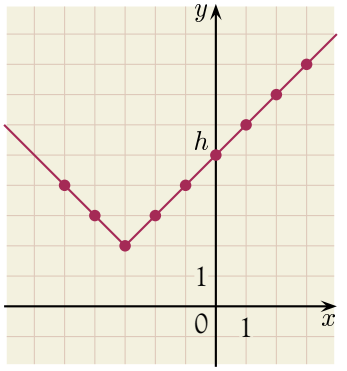
A két függvényeltolás összekapcsolása

1. példa

Ábrázoljuk a $h: x \mapsto |x + 3| + 2$ függvényt koordináta-rendszerben!

I. lehetőség. Készítsünk értéktáblázatot!

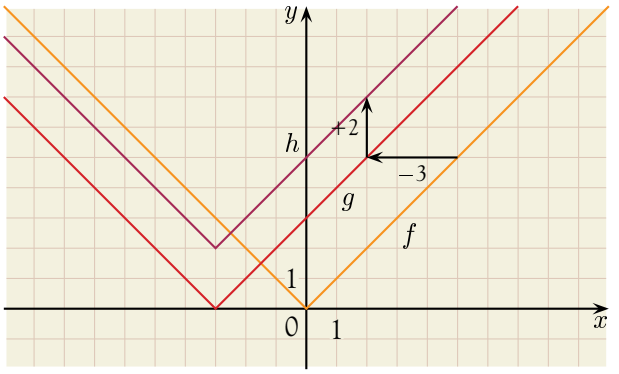
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h: x \mapsto \|x + 3\| + 2$	4	3	2	3	4	5	6	7	8



II. lehetőség. Ábrázoljuk a megadott függvényt az eddig tanult mozgatásokkal!

Induljunk ki ismét az $f: x \mapsto |x|$ függvényből! A $g: x \mapsto |x + 3|$ függvény grafikonját f grafikonjából úgy kaptuk meg, hogy **az x tengellyel párhuzamosan 3 egységgel negatív irányba eltoltuk.**

A $h: x \mapsto |x + 3| + 2$ függvény grafikonját a g függvény grafikonjából szintén eltolással kapjuk. Ekkor a $g: x \mapsto |x + 3|$ függvény grafikonját **az y tengellyel párhuzamosan pozitív irányba 2 egységgel toltuk el.**



Láthatjuk, hogy a kétféle módon elkészített grafikon ugyanazt adja.

2. példa

Ábrázoljuk a megismert transzformációk segítségével az $l: x \mapsto (x - 1)^2 - 4$ függvényt!

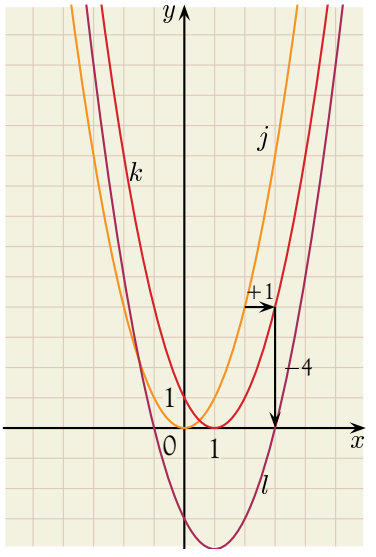
Most az értéktáblázat elkészítése nélkül ábrázoljuk a függvényt.

Melyik függvényből indulhatunk ki?

Nyilván a $j: x \mapsto x^2$ függvényből, mert ebben szerepel a változó négyzete.

A $j: x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából x **tengellyel párhuzamos, +1 egységgel történő eltolással** kaphatjuk meg a $k: x \mapsto (x - 1)^2$ függvény grafikonját.

A $k: x \mapsto (x - 1)^2$ függvény grafikonjából az $l: x \mapsto (x - 1)^2 - 4$ függvény grafikonját pedig úgy kaphatjuk meg, hogy az y **tengellyel párhuzamosan 4 egységgel negatív irányba eltoljuk** a $k: x \mapsto (x - 1)^2$ függvényt.



Feladatok

K1 Told el az $f: x \mapsto |x|$ függvény grafikonját az x tengely mentén negatív irányba 4 egységgel, majd a kapott függvényt az y tengely mentén negatív irányba 5 egységgel! Ábrázold az f függvényt, valamint a két eltolással kapott függvény képét közös koordináta-rendszerben!
Mi lehet az eltolással kapott függvény hozzárendelési szabálya?
Táblázattal ellenőrizd megoldásodat!

K2 Told el a $j: x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az y tengely mentén 2 egységgel negatív irányba, majd a kapott grafikont az x tengely mentén 6 egységgel pozitív irányba! Ábrázold a j függvényt, valamint a két eltolás után kapott függvény képét közös koordináta-rendszerben!
Mi lehet az eltolással kapott függvény hozzárendelési szabálya?
Táblázattal ellenőrizd megoldásodat!

K3 Táblázattal adtuk meg egy-egy abszolútérték-függvény vagy másodfokú függvény néhány pontját.

x	0	2	3	4	6
$f: x \mapsto ?$	1	−1	−2	−1	1

x	−7	−5	−3	−2	−1
$g: x \mapsto ?$	4	2	4	5	6

x	−4	−3	−1	0	1
$h: x \mapsto ?$	7	4	4	7	12

a) Ábrázold a megadott pontokat! Rajzold meg a függvények képét, amelyeket az adott pontok meghatároztak!

b) Add meg a függvények egy hozzárendelési szabályát! Ellenőrizd a szabály helyességét a táblázatok kiegészítésével!

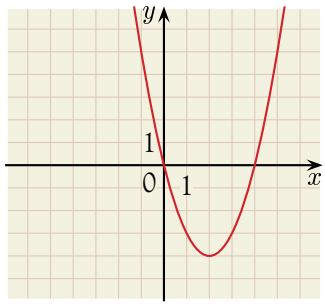
c) Jellemezd a függvényeket növekedés, illetve csökkenés szerint!

K4 Megadtuk néhány függvény grafikonját és hozzárendelési szabályát. Válaszd ki, melyik hozzárendelési szabály melyik grafikonhoz tartozik!

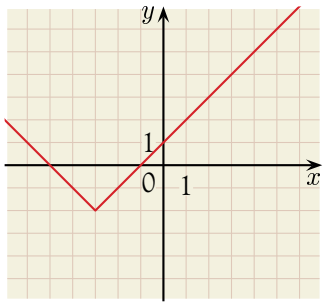
$a: x \mapsto |x - 3| + 2$; $b: x \mapsto (x + 2)^2 - 4$; $c: x \mapsto |x + 1| - 3$;

$d: x \mapsto (x - 4)^2 - 1$; $e: x \mapsto (x - 2)^2 - 4$; $f: x \mapsto |x + 3| - 2$.

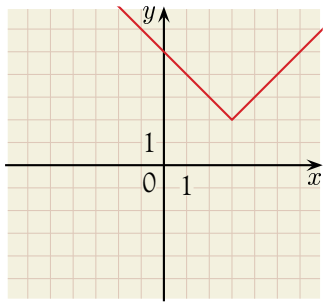
a)



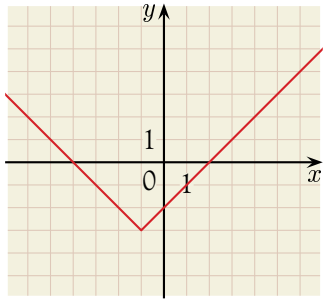
b)



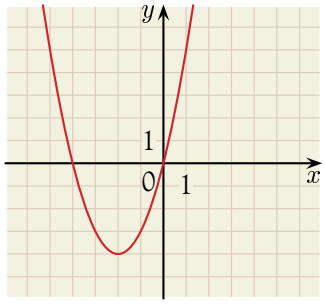
c)



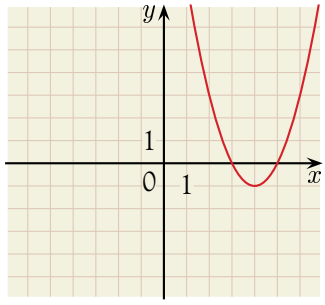
d)



e)



f)



Add meg, milyen x értékek esetén növekedőek a fent ábrázolt függvények!

K5 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f: x \mapsto |x-1|+2$; $g: x \mapsto (x-4)^2+3$ függvényeket!
Mely x értékek esetén egyeznek meg a hozzárendelt értékek?
Számolással ellenőrizd a leolvasás eredményét!

Tükrözés az x tengelyre

1. példa

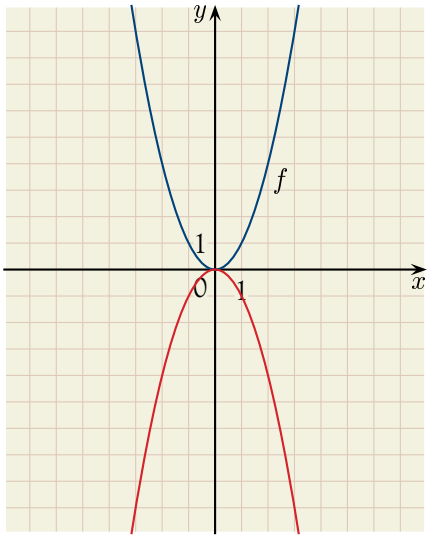
Tükrözzük az $f: x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az x tengelyre! Mi lehet a tükörképként kapott függvény hozzárendelési szabálya?

Készítsünk értéktáblázatot, és figyeljük meg, hogyan változtak a hozzárendelt értékek! Ezt a táblázatunkban is láthatjuk:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
Tükörkép	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Látható, hogy a hozzárendelt értékek mindegyike -1-szeresére változott.

Ezt a hozzárendelési szabályban is jelölhetjük, tehát a tükörképpel kapott függvény: $g: x \mapsto -x^2$.



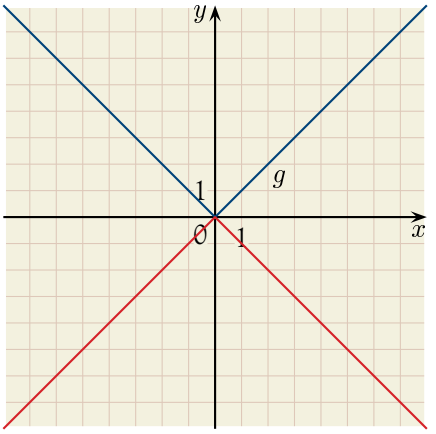
2. példa

Ábrázoljuk a $g: x \mapsto -|x|$ függvényt!

Mielőtt ábrázolnánk, figyeljük meg, melyik függvényből származtatható a $g: x \mapsto -|x|$ függvény!

Láthatjuk, hogy a $j: x \mapsto |x|$ függvény szabályához hasonló a hozzárendelési szabály. Annyi a változás, hogy az x szám abszolút értékének minden esetben venni kell az ellentettjét. Az előző példában tapasztaltuk, hogy ilyen esetben a függvény grafikonját az x tengelyre vonatkozó tükrözéssel kaphatjuk meg.

A keresett függvény grafikonja látható az ábrán.



Feladatok

K1 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$k: x \mapsto -|x|$; $l: x \mapsto |-x|$; $j: x \mapsto |x|$.

Mit tapasztaltál? Mivel magyarázhatod megfigyelésed?

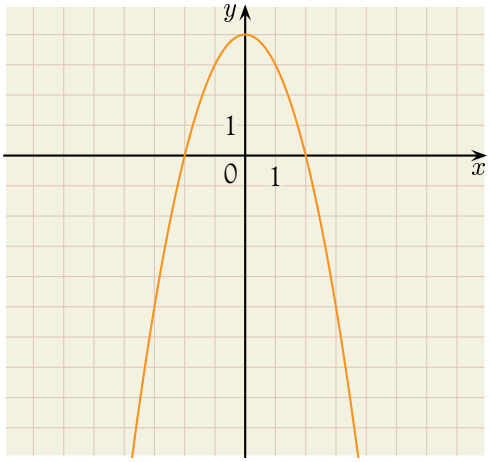
K2 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$g: x \mapsto -x^2$; $h: x \mapsto (-x)^2$; $f: x \mapsto x^2$.

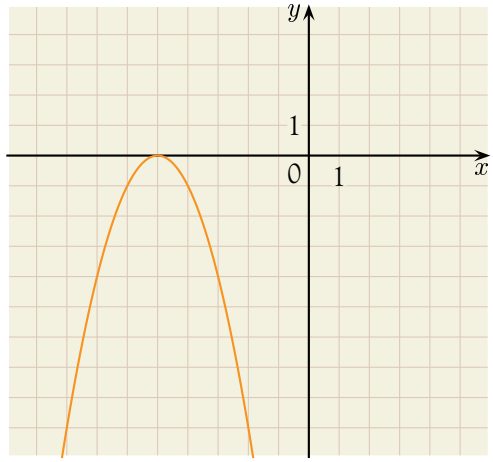
Mit tapasztaltál? Mivel magyarázhatod megfigyelésed?

K3 Mi lehet a grafikonjával megadott függvény hozzárendelési szabálya?

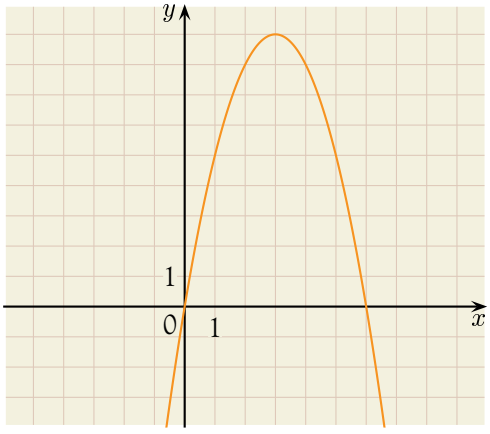
a)



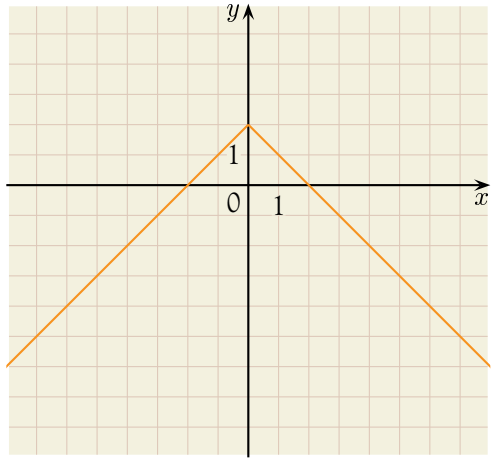
b)



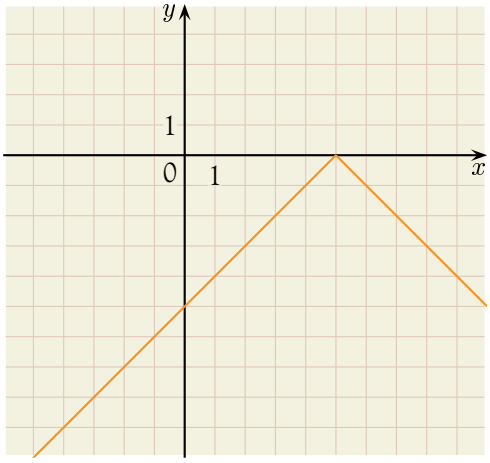
c)



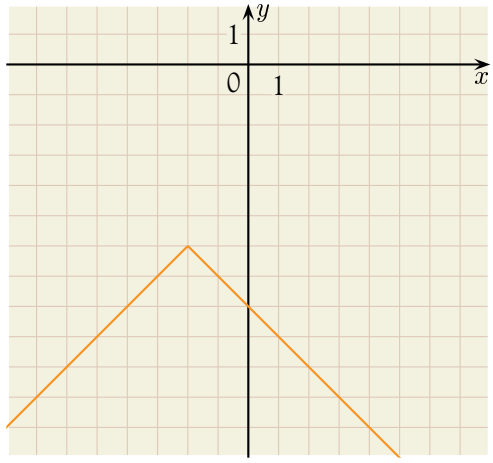
d)



e)



f)



Jellemezd a függvényeket növekedés szempontjából!

K4 Készíts értéktáblázatot az alábbi függvények ábrázolása előtt, majd pontjai segítségével ábrázold a függvényeket!

a) $a\colon x \mapsto -|x| - 4$;

b) $b\colon x \mapsto -(x-5)^2$;

c) $c\colon x \mapsto -x^2 + 9$;

d) $d\colon x \mapsto -(x+3)^2 - 1$.

Fogalmazd meg, hogyan juthatsz el az abszolútérték- és a másodfokú függvény mozgatásával a megadott függvényekhez!

K5 Ábrázold értékpárok megkeresése nélkül, függvénytranszformációk segítségével a megadott függvényeket! Ellenőrizd az ábrázolást legalább 4-5 összetartozó értékpár kiszámításával!

a) $f: x \mapsto -|x-4|$;

b) $g: x \mapsto -|x+3|-1$;

c) $h: x \mapsto -|x-1|+2$;

d) $j: x \mapsto -(x-6)^2+2$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

A megtanult függvényábrázolási módszerek felhasználásával egyenleteket, egyenlőtlenségeket oldhatunk meg.

A megszerzett ismereteinkkel olyan egyenleteket tudunk megoldani, amely egyenleteknél az eddigiekben tanult módszerek egyike sem vezet eredményre.

Most a *grafikus módszert* és annak használatát fogjuk alkalmazni.

Legyen alaphalmazunk a tanult számok halmaza!

7.

1. példa

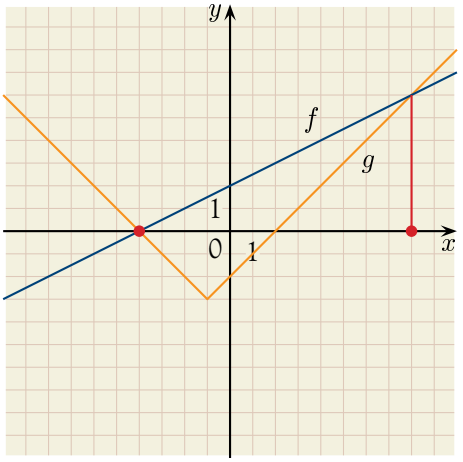
Oldjuk meg az $|x+1|-3=\frac{1}{2}x+2$ egyenletet!

Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalán álló algebrai kifejezést mint függvényt!

A hozzárendelési szabály: $f: x \mapsto |x+1|-3$.

A másik oldalból kapott függvény: $g: x \mapsto \frac{1}{2}x+2$.

Ábrázoljuk a függvényeket koordináta-rendszerben!



A két függvény két pontban metszi egymást.

Leolvasható: **ha** az x **értéke** 8**,** akkor a két függvény értéke egyenlő egymással, azaz $|x+1|-3=\frac{1}{2}x+2$.

Azt is látjuk, hogy **ha** x **értéke** -4**,** akkor is egyenlők a függvényértékek.

Tehát az egyenletnek már két megoldását megtaláltuk: $|x+1|-3=\frac{1}{2}x+2$, ha $x_1=-4$ vagy $x_2=8$.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük megoldásainkat:

Ha $x_1=-4$, akkor $|x+1|-3=0$ és $\frac{1}{2}x+2=0$. Ha $x_2=8$, akkor $|x+1|-3=6$ és $\frac{1}{2}x+2=6$.

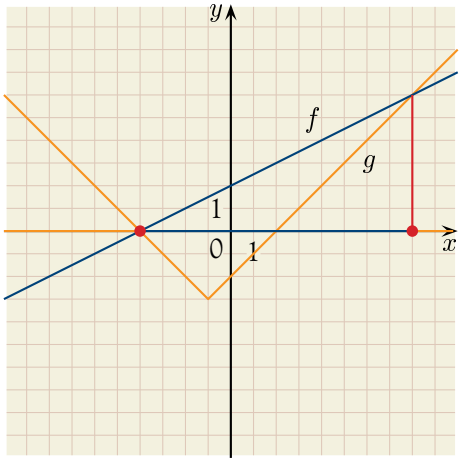
Még egy fontos kérdésre keressük a választ: megtaláltunk-e minden megoldást?

Igen, mert a függvények grafikonjának tulajdonságai alapján kijelenthetjük, hogy több metszéspontja a grafikonoknak nincs.

2. példa

Vizsgáljuk meg még egyszer az előző grafikonokat!

Figyeljük az $f: x \mapsto |x+1|-3$ és a $g: x \mapsto \frac{1}{2}x+2$ függvények grafikonjainak egymáshoz viszonyított helyzetét!



1. eset. Ha az x értéke kisebb mint -4, akkor f grafikonja g grafikonja felett halad. Ekkor tehát $|x+1|-3 > \frac{1}{2}x+2$.

2. eset. Ha $x = -4$, akkor a két grafikon közös ponton megy át, így ekkor $|x+1|-3 = \frac{1}{2}x+2$.

3. eset. Ha a $-4 < x < 8$, akkor f grafikonja g grafikonja alatt halad. Ekkor tehát $|x+1|-3 < \frac{1}{2}x+2$.

4. eset. Ha $x = 8$, akkor a két grafikon közös ponton megy át, így ekkor $|x+1|-3 = \frac{1}{2}x+2$.

5. eset. Ha az $x > 8$, akkor f grafikonja g grafikonja felett halad. Ekkor tehát $|x+1|-3 > \frac{1}{2}x+2$.

Mivel a grafikonoknak nincs több közös pontja, így minden esetet megvizsgáltunk.

3. példa

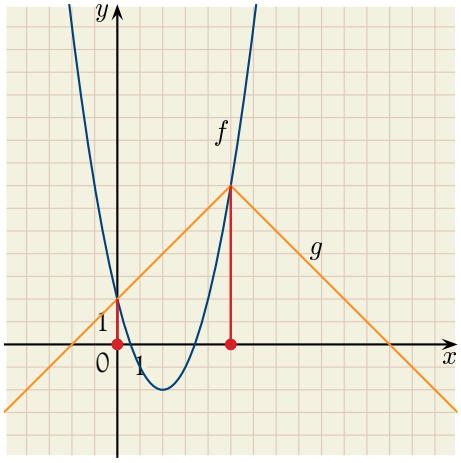
Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: $(x-2)^2 - 2 > -|x-5| + 7$!

Igen nehéz feladat, hívjuk segítségül a megoldáshoz a függvényeknél tanultakat.

A bal oldali kifejezés függvénye: $f: x \mapsto (x-2)^2 - 2$.

A jobb oldali kifejezés függvénye: $g: x \mapsto -|x-5| + 7$.

Ábrázoljuk a két függvényt közös koordináta-rendszerben!



Mivel az egyenlőtlenségünk $(x-2)^2 - 2 > -|x-5| + 7$, ezért olyan x értékeket keresünk, melyeknél az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja felett halad. (Ezeken az x helyeken lesznek nagyobbak az f függvény értékei.)

Látható, hogy ez akkor teljesül, ha $x < 0$ vagy $x > 5$. Tehát az egyenlőtlenségünk megoldásai ezek az x számok, mivel a két grafikonnak nincs több közös pontja.

Megjegyzések: Észrevehetjük, hogy ha $x_1 = 0$ vagy $x_2 = 5$, akkor $(x-2)^2 - 2 = -|x-5| + 7$, vagyis ez a két szám az egyenlet megoldása.

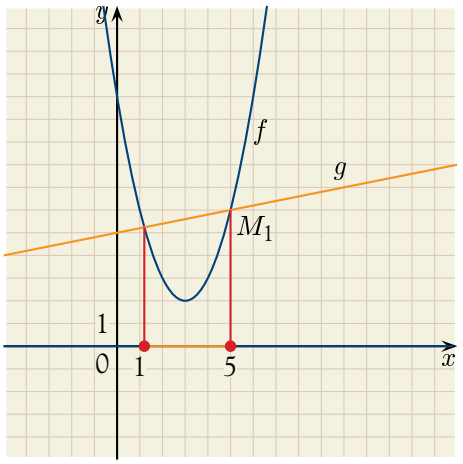
Azt is le tudjuk olvasni, hogy $(x-2)^2 - 2 < -|x-5| + 7$ akkor teljesül, ha $0 < x < 5$.

4. példa

Oldjuk meg az $(x-3)^2 + 2 = \frac{1}{5}x + 5$ egyenletet!

Az egyenlet nemlineáris, ezért ismét ábrázoljuk a megfelelő függvényeket.

$f: x \mapsto (x-3)^2 + 2; \qquad g: x \mapsto \frac{1}{5}x + 5.$



A grafikonok két pontban metszik egymást. Az egyik metszéspont $M_1(5;6)$, tehát az egyenlet egyik megoldása: $x = 5$.

Ellenőrizzük a megoldást!

A bal oldali kifejezés értéke: $(5-3)^2 + 2 = 6$.

A jobb oldali kifejezés értéke: $\frac{1}{5} \cdot 5 + 5 = 6$.

A másik metszéspont koordinátáit nem tudjuk pontosan leolvasni.

Az első koordináta biztosan nagyobb mint 1, de kisebb mint 1,5. A második koordináta nagyobb mint 5, de kisebb mint 5,5.

Későbbi tanulmányainkban tanulunk olyan módszereket, amellyekkel a pontos értékek is meghatározhatók $\left(M_2(1{,}2;5{,}24)\right)$.

Fontos tudnivaló

Ahhoz, hogy jól alkalmazd a grafikus módszert, nagyon precízen, pontosan kell ábrázolnod a megfelelő függvényeket.

Célszerű mindig ellenőrzést végezni, hogy valóban sikerült-e a helyes megoldásokat megtalálnod.

Mindig gondold végig, lehet-e még újabb metszéspontja a grafikonoknak!

Ennek a módszernek számos előnyén kívül sajnos hátránya, nem lehet minden esetben pontosan leolvasni a megfelelő értékeket.

Feladatok

E1 Fogalmazd meg, hogyan oldhatunk meg egyenleteket a *grafikus módszerrel*!

E2 Tegyük fel, hogy grafikusan akarunk megoldani egy egyenletet. Ábrázoltuk a megfelelő függvényeket. Egy M metszéspontot találtunk: $M(2\,;5)$.

Mit mutat meg a 2 értéke? Mit mutat meg az 5 értéke?

E3 Honnan látszik a grafikus módszerből, hogy az egyenletnek nincs megoldása? Adj meg ilyen egyenletet!

E4 Oldd meg grafikus módon az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 3$; *b)* $|x+3| + 2 = 2$; *c)* $|x+3| + 2 = -1$;

d) $|x-5| + 4 = \frac{x-3}{2}$; *e)* $|x-5| + 4 = -x$; *f)* $-(x+2)^2 + 3 = -x - 1$.

E5 Oldd meg grafikus módon az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $|x-3| - 5 < -1$; $|x-3| - 5 \geq -1$;

b) $-|x+4| + 7 = 3$; $-|x+4| + 7 > 3$; $-|x+4| + 7 < 3$;

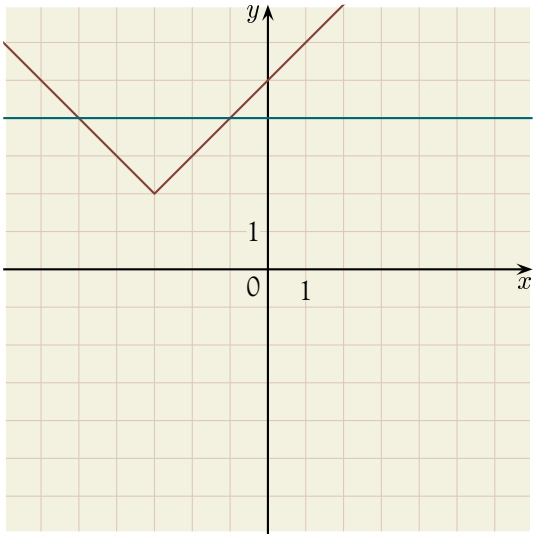
c) $x^2 > -x$; $x^2 < -x$;

d) $|x| = x^2$; $|x| < x^2$;

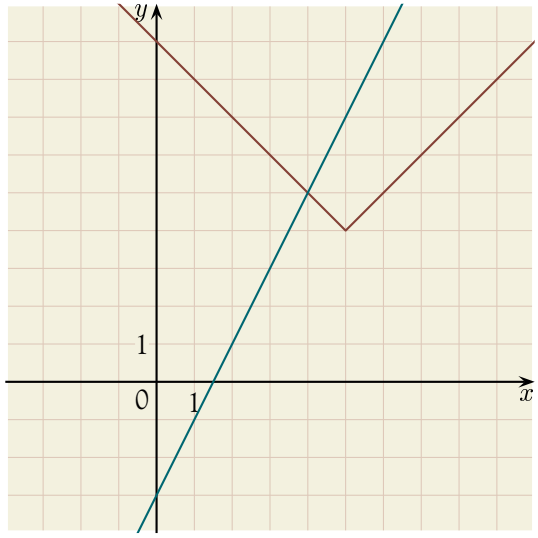
e) $x - 3 = (x-4)^2 - 1$; $x - 3 < (x-4)^2 - 1$; $x - 3 > (x-4)^2 - 1$.

E6 Az itt látható koordináta-rendszerben egy-egy függvényt ábrázoltunk. Írj fel az ábrák alapján olyan egyenleteket, egyenlőtlenségeket, amelyeket a grafikon segítségével oldhatunk meg!

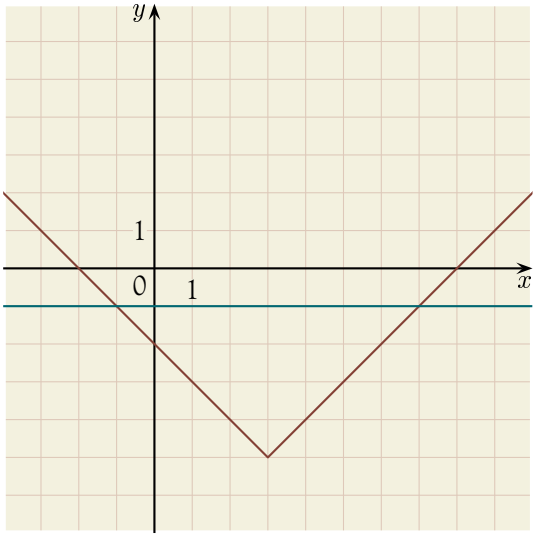
a)



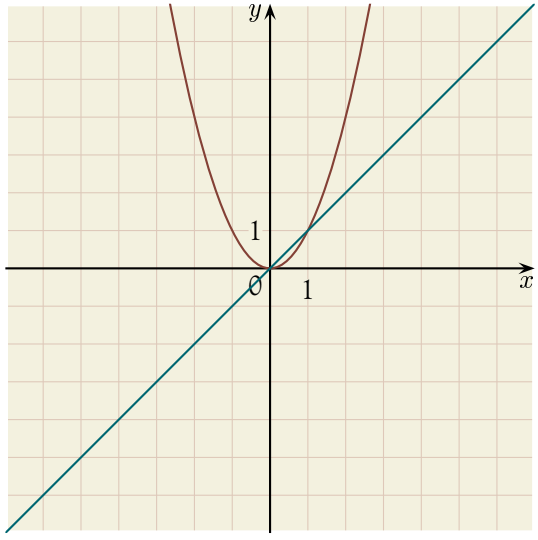
b)



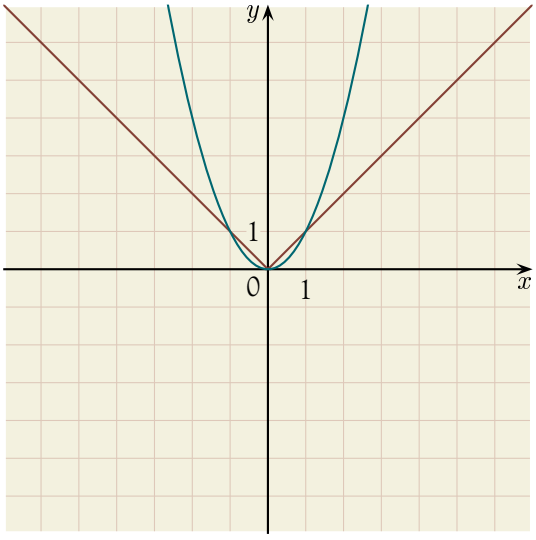
c)



d)



e)



Sorozatok

Logikai feladatokban, rejtvényekben, vetélkedőkön gyakran teszik fel a kérdést: Mi lehet a következő tag? Általában egy konkrét választ várnak el a megkérdezettektől, bár az esetek többségében a sorozat többféleképpen is folytatható. Tavaly egy speciális sorozattal, a számtani sorozattal ismerkedtünk meg. Az ilyen típusú sorozatok esetén általában az előző kérdésre már egyértelmű választ tudunk adni. Idén egy másik nevezetes sorozatot vizsgálunk, a mértani sorozatot. Témakörünk a matematikai ismereteken túl elvezet a banki kamatszámítás sokak számára idegen világába, a hitelkonstrukciók elemzésébe is.

Emlékszel?

Sorozatokról akkor beszélünk, ha elemeket **sorba rendezéssel** adunk meg. Sorozatba rendezhetjük Magyarország városait népességük szerint, aszerint, hogy hány diák tanul a városban, hány vállalkozó van a városban, mennyi az egy főre befizetett adó mennyisége stb.

A **számsorozatok** megadása során számokat adunk meg valamilyen felsorolás vagy szabály alapján.

A **sorozatok elemeit** a_1; a_2; …; a_n jelöléssel adhatjuk meg.

Az a_3 a sorozat harmadik elemét jelenti.

$a_3 = 10$ azt jelenti, hogy a sorozat harmadik elemének, vagy más szóval harmadik tagjának értéke 10.

A sorozat a természetes számokon értelmezett egyértelmű hozzárendelés.

Sorozatok megadásakor többféle módon járhatunk el.

A sorozat első néhány elemét adjuk meg. Ekkor azonban többféle módon folytathatjuk a sorozatot.

Például: 1; 3; 6; …

Gondold végig, hogyan tudnád folytatni!

Ha az szeretnénk, hogy mindenki ugyanarra az egy folytatásra gondoljon, akkor nem elég az elemek felsorolása, hanem a képzési szabályt is meg kell adni. Ez többféle módon tehetjük meg:

– szöveges megfogalmazással;

– képlettel.

Feladatokon keresztül ismételjük át a sorozatokról tanultakat!

Feladatok

K1 Vizsgáljuk a sokszögek belső szögeinek összegét! A sorozat első eleme a háromszög belső szögeinek összege.

a) Írd fel a sorozat első hat elemét!

b) Hány oldalú sokszög a sorozat 8. eleme?

Döntsd el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

(A) A sorozat 10. eleme az $1620°$.

(B) A sorozat számtani sorozat, amelynek differenciája $360°$.

(C) A sorozat n-edik elemét $n \cdot 180°$ alakban írhatjuk fel.

(D) A $2700°$ a tizenötszög belső szögeinek összege.

K2 Nézzük a négyzetszámok sorozatát!

a) Írd fel a sorozat első hét elemét!

b) Hány eleme van a sorozatnak 200 és 500 között?

c) Van-e a sorozatnak olyan eleme, amely kettővel osztható, de néggyel nem?

K3 Képezd a négyzetszámok sorozatának különbségsorozatát, azaz a második elemtől kezdve minden elemből vond ki az előtte lévő elemet!

a) Mi jellemző a kapott sorozatra?

b) Keress képletet a különbségsorozat felírására!

K4 Egy sorozat első eleme $a_1 = 5$, a sorozat képzési szabálya: $a_n = 3a_{n-1} + 4$. Állapítsd meg az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

(A) A sorozat ötödik eleme: 465.

(B) A sorozat minden tagja páratlan szám.

(C) A sorozat harmadik elemét megadhatjuk $a_3 = 2a_2 + 23$ alakban is.

(D) A sorozat számtani sorozat, amelynek differenciája 4.

K5 Írd fel a sorozatok első; második; tizedik; százötvenedik elemét!

a) $a_n = 4n - 3$; *b)* $a_n = \frac{1}{2}n + 6$; *c)* $a_n = \frac{1}{n}$;

d) $a_n = n^2 - 7$; *e)* $a_n = \sqrt{n+2}$; *f)* $a_n = \sqrt{n} + 2$.

K6 Legyenek a sorozat elemei a háromszög, négyszög, ötszög, …, n-szög átlóinak számai!

a) Írd fel a sorozat első öt elemét! *b)* Írd fel képlettel a sorozat elemeit!

Mértani sorozat

(Emelt szintű, választható tananyag)

1. példa

Panka, Petra és Piroska írtak egy jókívánságot tartalmazó levelet. Megegyeztek, hogy mindegyikük e-mailt küld öt-öt barátjának, amelyben ez a jókívánság olvasható. Mind az öt barátjukat arra kérték, hogy egy napon belül mindegyikük további öt barátjának küldje el a levelet. Mindenki, aki ezt a levelet kapta, egy napon belül további öt embernek küldte el a levelet.



Írjuk fel, hogy a napok múlásával hány személy kapott ilyen jókívánságot tartalmazó e-mailt, ha feltételezzük, hogy ugyanannak a személynek kétszer nem küldhették el ugyanazt a levelet!

Napok száma:	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Személyek száma:	3	$3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$	$75 \cdot 5 = 375$	$375 \cdot 5 = 1875$	$1875 \cdot 5 = 9375$

Írjuk fel sorozatba rendezve:

1. nap: $a_1 = 3$; 2. nap: $a_2 = a_1 \cdot 5 = 15$; 3. nap: $a_3 = a_2 \cdot 5 = 75$;
4. nap: $a_4 = a_3 \cdot 5 = 375$; 5. nap: $a_5 = a_4 \cdot 5 = 1875$; 6. nap: $a_6 = a_5 \cdot 5 = 9375$; ...

A levelek száma minden nap ötszörösére nő. A sorozat bármely elemét úgy kaphatjuk meg, hogy az előtte álló elemet megszorozzuk 5-tel. Másképp is megfogalmazhatjuk:

A sorozat második tagjától kezdve bármely tagját elosztva az előtte álló taggal egy állandót, azaz 5-öt kapunk.

$\frac{a_2}{a_1} = 5$; $\frac{a_3}{a_2} = 5$; $\frac{a_4}{a_3} = 5$; ...

Az ilyen típusú sorozatot mértani sorozatnak nevezzük.

Fontos tudnivaló

Ha egy sorozat bármely elemét megkaphatjuk úgy, hogy a sorozat előző elemét egy (nem nulla) állandóval megszorozzuk, akkor a sorozatot mértani sorozatnak nevezzük.

Ennek alapján $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

Levezethető a mértani sorozat n-edik elemére: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

A mértani sorozatra jellemző a q állandó. A q az a hányados, amelyet a mértani sorozat meghatározása során a megfelelő elemek hányadosaként kapunk. A példánkban $q = 5$.

2. példa

Egy mértani sorozat első eleme 5, hányadosa 2. Írjuk fel a sorozat második, harmadik, hatodik elemét!

$a_1 = 5$; $q = 2$; $a_2 = a_1 \cdot q = 5 \cdot 2 = 10$; $a_3 = a_2 \cdot q = 10 \cdot 2 = 20$,

másként kiszámítva $a_3 = a_1 \cdot q^2 = 5 \cdot 2^2 = 20$.

A hatodik elemet célszerű az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ képlettel számolni, mert más módon ki kellene számítani az előző öt elemet, ezért ez a számolás hosszadalmasabb lenne.

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 5 \cdot 2^5 = 160$.

Feladatok

K1 Írd fel a mértani sorozatok első öt elemét!

a) Az első eleme 8, minden rákövetkező tag fele az előzőnek.

b) Bármely két szomszédos tag hányadosa -1, és a negyedik tag a 7.

K2 Az alábbiakban adott egy mértani sorozat első eleme és hányadosa. Add meg a sorozat harmadik, hetedik és tizedik elemét!

a) $a_1 = 3$; $q = 2$; *b)* $a_1 = \frac{1}{2}$; $q = 3$;

c) $a_1 = 256$; $q = -\frac{1}{2}$; *d)* $a_1 = -\frac{1}{625}$; $q = 5$.

K3 Adott egy sorozat első és harmadik eleme, határozd meg a mértani sorozat hányadosát és az ötödik elemet!

a) $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{2}$; *b)* $a_1 = 1$; $a_3 = 4$;

c) $a_1 = \frac{2}{3}$; $a_3 = \frac{8}{27}$; *d)* $a_1 = -729$; $a_3 = -81$.

K4 Egy mértani sorozat második eleme 15, negyedik eleme 135. Mennyi a sorozat harmadik eleme?

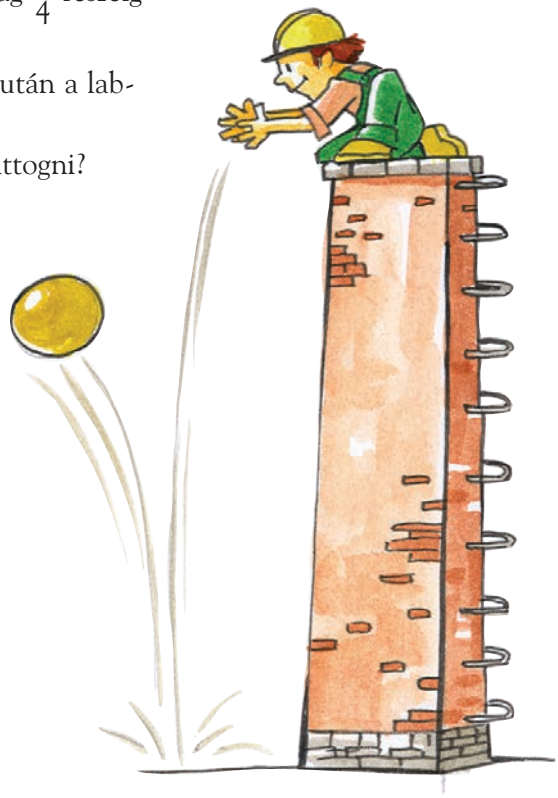
K5 Egy 100 000 Ft-os banki betét minden évben az előző évi értékének 1,1-szeresét éri. Tehát a második évben a betét értéke: $100\,000 \cdot 1{,}1 = 110\,000$ Ft.

Mennyit ér a betét öt év múlva, ha öt évig nem veszünk ki a betett és kamatozott pénzből?

K6 Ha egy gumilabdát leejtünk, akkor az eredeti magasság $\frac{3}{4}$ részéig pattan vissza.

a) Milyen magasra pattan a harmadik visszapattanás után a labda, ha 12 m magasról engedtük el?

b) Hányadik visszapattanás után fog 3 méter alatt pattogni?



K7 Állapítsd meg a következő sorozatokról, hogy melyek lehetnek számtani, melyek mértani sorozatok!

A számtani sorozatoknak add meg a különbségét!

A mértani sorozatoknak add meg a hányadosát!

A mértani és számtani sorozatokat folytasd még 3 taggal!

a) 2; 4; 6; 8; 10; 12; ...

b) 1; 3; 9; 27; 81; 243; ...

c) −1; 0; −1; 0; −1; 0; ...

d) 1; 1; 1; 1; 1; 1; ...

e) 1; 1; 2; 3; 5; 8; ...

f) 5; 10; 20; 40; 80; ...

g) 0; −1; −2; −3; −4; −5; ...

h) −5; −10; −20; −40; −80; ...

i) −1; 2; −4; 8; −16; 32; ...

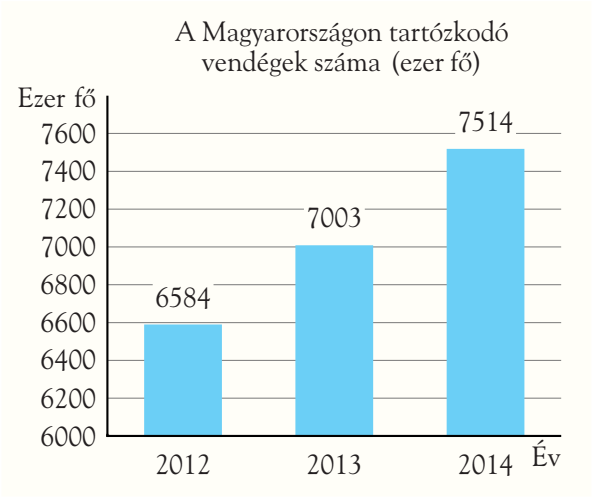
j) −1; −2; −4; −8; −16; −32; ...

k) 1; 2; 4; 8; 16; 32; ...

8. Statisztika

Mi a véleményetek a következő diagramról? Beszéljétek meg!

Az ábrán szemléltetett adatokat a Központi Statisztikai Hivatal tette közzé.



A grafikonról úgy tűnik, mintha 2013-ban körülbelül kétszer annyi látogató járt volna Magyarországon, mint 2012-ben, és 2014-ben két és félszer annyi.

Azonban ha utánaszámolunk, akkor ez a változás (bár növekvő) azért mégsem olyan nagy.

Milyen adatokat olvashatunk le a diagramokról?

Milyen következtetéseket vonhatunk le az összegyűjtött adatsokaságról?

Milyen módon és hogyan tájékoztatnak és tévesztenek meg bennünket az újságokban, televízióban, interneten megjelenő grafikonok, diagramok?

Többek között ezekre a kérdésekre kaphatunk választ, ha a sorra kerülő fejezetben lévő ismereteket elsajátítjuk.

8.

Nap mint nap találkozhatunk különböző módon összegyűjtött adatokkal. Az adatokat valamilyen módon rendszerezni kell, ezeket az adatokat meg kell jeleníteni, és jellemezni azt a sokaságot, ahonnan az adatokat vettük. Ez a leíró statisztika feladata. A statisztika matematikai tudományág szorosan együtt fejlődött a valószínűségszámítással, mert ott is nagyszámú adatot kell feldolgozni.

A statisztikai adatok rendszeres gyűjtése és elemzése a XVII. század közepén a népességtudomány területén kezdődött, de igazán rendszeres és megbízható adatgyűjtésről a XVIII. század közepe előtt nem beszélhetünk. A korai statisztikai kutatások a népesség-nyilvántartás mellett elsősorban a pénzügy és a hadügy területét érintették.

William Playfair (ejtsd: viliem pléjfer) (1759–1823) angol újságíró, statisztikus és közgazdász a statisztikai adatokat grafikus módszerrel, az általa „lineal arithmetic”-nek (linear aritmetic = lineáris számtan) nevezett eljárással hasonlította össze. Playfair számos diagramforma feltalálójának számít, aki különféle grafikonokat, oszlop- és kördiagramokat használt.

Milyen ismereteink vannak statisztikából?

Emlékszel?

Az előző évfolyamokon több statisztikai fogalommal, ábrázolási móddal ismerkedtünk meg.

Ismételjük át ezeket!

A leíró statisztika adatok gyűjtésével, rendszerezésével és az adatok elemzésével foglalkozik.

Ilyen a népszámlálás, közvélemény-kutatás, iskolai statisztikák stb.

A vizsgált sokaság minden tulajdonságát képtelenség lenne összegyűjteni, nincs is rá szükség. Megadott szempontok alapján gyűjtünk adatokat, és nem foglalkozunk az egyes elemek más, esetleg fontos tulajdonságával. Például ha egy iskola tanulóinak szabadidős tevékenységéről gyűjtünk adatokat, akkor nem vizsgáljuk a tanulók tanulmányi eredményét.

Mint minden matematikai részterületnek, a statisztikának is sajátos szóhasználata van. A fogalmak egy részét már ismered, nézzük meg, melyek ezek!

Az elemeknek azt a csoportját, amelyről információt gyűjtünk, **sokaságnak** nevezzük. A sokaság egy-egy tulajdonságát adattal jellemezzük.

1. példa

I. Egy csoport jellemzésekor a férfiakat 1-essel, a nőket 2-essel jellemezzük.

II. A tanulók tanulmányi eredményét öt számjegy segítségével határozzuk meg, ezek a jegyek kerülnek a naplóba, bizonyítványba.

III. Magyarországon az átlaghőmérsékletet egy $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$ és $+20\,^{\circ}\mathrm{C}$ közötti számmal jellemezhetjük.

A sokaságról adatokat gyűjtünk, ezt **adatsokaságnak** vagy **adathalmaznak** nevezzük. Nem minden vizsgált tulajdonsághoz tudunk számot rendelni. Ha egy közvélemény-kutatásban azt vizsgálják, hogy egy nemzet mennyire jókedvű, azt nem lehet számmal jellemezni. A statisztikusok azonban azokat a tulajdonságokat dolgozzák fel, amelyek számmal jellemezhetők.



Az összegyűjtött adatokat rendszerezni kell. Ezt legkönnyebben táblázat készítésével tehetjük meg.

2. példa

Egy közép-amerikai városban az esős évszakban szeptember 1-je és 12-e között a napi csapadékmennyiség a következőképpen alakult:

Nap	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Csapadék (mm)	39	3	6	28	4	0	10	4	30	0	92	98

A táblázatból meghatározhatjuk, mennyi csapadék hullott ezen időszakban, hány olyan nap volt, amikor nem esett az eső stb. . .

Nagyon gyakran láthatjuk a táblázatok másik fajtáját: **a gyakorisági táblázatot**.

3. példa

A 8. *a* osztály matematikadolgozatának eredményét táblázatba foglalva a következőt láthatjuk:

Érdemjegy	5	4	3	2	1
Tanulók száma	4	5	10	4	2

A 8. *b* osztályban is megírták ugyanezt a dolgozatot. Az eredmények így alakultak:

Érdemjegy	5	4	3	2	1
Tanulók száma	4	3	7	5	1

A megfelelő táblázatból leolvashatjuk, hogy például az *a* osztályban 4 tanuló, a *b* osztályban is 4 tanuló írt jeles dolgozatot. Az adatok előfordulásának számát **gyakoriságnak** nevezzük.

Ha össze akarjuk hasonlítani a két osztály eredményeit, akkor az egyes gyakoriságok értékét összevethetjük, de ez nem mindig mérvadó. Ha különbözők az osztálylétszámok, akkor az ilyenfajta összehasonlításnak nincs értelme. Sokkal célravezetőbb, ha egy vizsgált gyakorisági értéknek az egész sokaság elemszámához viszonyított arányát hasonlítjuk össze.

Melyik osztályban írtak többen négyes dolgozatot?

A 8. *a* osztályban a 25 tanuló közül 5 írt négyes dolgozatot. Ez a tanulók $\frac{5}{25} = 0{,}2$ része.

A 8. *b* osztályban a 20 tanuló közül 3 írt négyes dolgozatot. Ez a tanulók $\frac{3}{20} = 0{,}15$ része.

Az *a* osztályban a tanulók nagyobb része írt négyes dolgozatot.

Ha egy sokaságban n elem van, és ezek közül k db rendelkezik egy megadott tulajdonsággal, akkor a $\frac{k}{n}$ hányadost az adott tulajdonság **relatív gyakoriságának** nevezzük.

A k értéke nem negatív, és nem nagyobb, mint a sokaság elemszáma, azaz n. Így a relatív gyakoriság értéke nulla és egy közé esik: $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$.

Feladatok

K1 Az évfolyamodon a diákönkormányzat a tanulmányi helyzetről készít felmérést.
Állíts össze olyan kérdőívet, amelyből megtudható,
– melyik tantárgyat tanulják az évfolyam tanulói a legszívesebben;
– melyik a legkevésbé szeretett tantárgy;
– melyik tantárgyat tanulják a legtöbbet otthon;
– mennyi időt töltenek a diákok tanulással!

K2 Földrajzi atlaszod segítségével készíts Magyarország 10 dunántúli városáról olyan táblázatot, amely bemutatja, hogy mennyi az évi csapadékmennyiség az adott helységben!

K3 Egy televíziós vetélkedőn a 40 résztvevő a mellékelt táblázatban szereplő pontszámokat érte el.

Készítsd el a pontszámokról az alábbi gyakorisági táblázatot!

35	42	28	28	45	22	31	32	32	44
32	53	42	54	36	35	28	27	45	47
31	38	23	29	33	34	41	48	56	35
29	27	42	27	28	34	36	32	38	34

Ponthatárok	21 pont alatt	21–30 pont között	31–40 pont között	41–50 pont között	50 pont felett
A versenyzők száma					

K4 Nyári tábort szervez egy iskola az 5–8. osztályosok számára. A táborvezetés elkészítette a jelentkezők statisztikáját. A következő táblázat ezt tartalmazza:

	5. *a*	5. *b*	6. *a*	6. *b*	7. *a*	7. *b*	8. *a*	8. *b*
Lányok	5	7	8	3	9	6	5	4
Fiúk	4	5	6	5	4	7	2	3

a) Hány tanuló jelentkezett nyári táborozásra?

b) Melyik osztályból jelentkeztek a legtöbben?

c) Melyik évfolyamról jelentkeztek a legkevesebben?

d) Kik lesznek többen: a fiúk vagy a lányok?



*e) A táborban négy- és hatágyas szobák vannak. A táborvezetés úgy szeretné a szállást elrendezni, hogy a lányok csak négy, a fiúk csak hatágyas szobákban legyenek, vagy fordítva. Hány szobát foglaljanak le a lányoknak és mennyit a fiúknak, ha a lehető legkevesebb szobát szeretnék felhasználni?

K5 Készíts gyakorisági táblázatot annak a felmérésnek az eredményéről, amely azt vizsgálja, hogy egy nagyváros főutcáján a közlekedő autókban hány személy utazik!

1	2	1	2	1	4	1	1	2	1
1	1	3	1	1	1	1	1	1	2
1	2	1	2	2	1	3	1	1	1

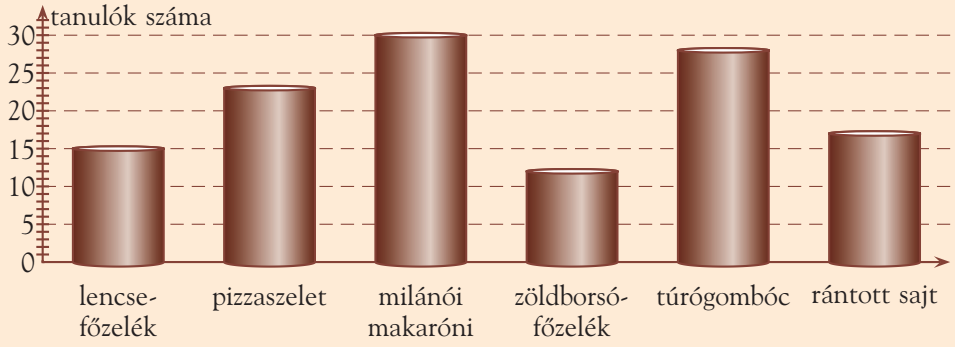
8.

Adatok ábrázolása diagramon

Az adatok képi megjelenítésére szolgálnak a diagramok. A televízió, a napilapok nap mint nap diagramokkal adnak információt a világról. Az ábrázolt adatok szemléletesen mutatják az adatok változását, egymáshoz való viszonyát.

1. példa

Egy gyermekétkeztető cég felmérést készített arról, hogy a tanulók mely ételeket fogyasztják a legszívesebben. Minden tanuló az általuk felsorolt ételekből egyet választhatott. Az alábbi oszlopdiagram a mérés eredményét mutatja:



Az oszlopdiagramra rátekintve megállapítható, hogy melyek a tanulók kedvenc ételei. Alaposabb vizsgálat segítségével készíthetünk táblázatot is.

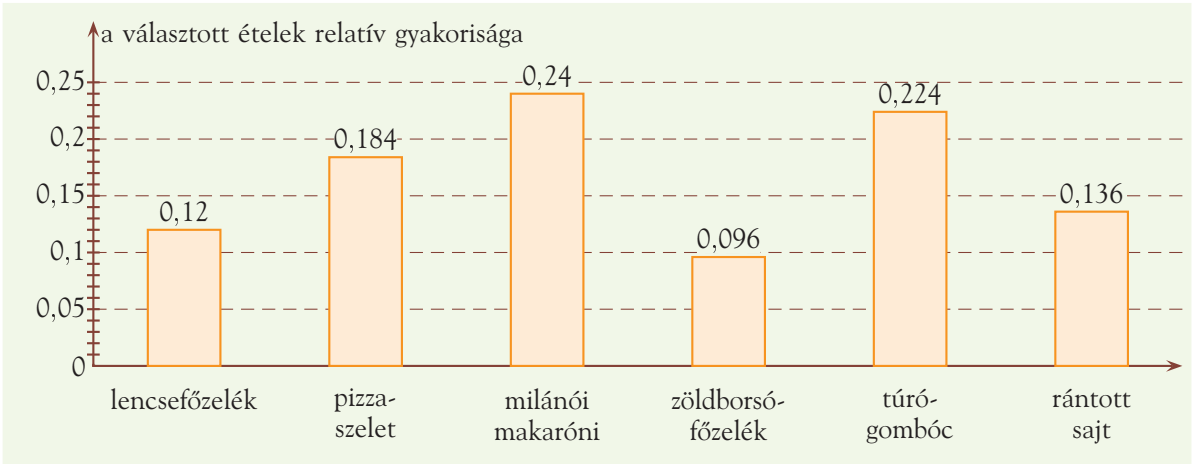
Lencsefőzelék	Pizzaszelet	Milánói makaróni	Zöldborsó-főzelék	Túrógombóc	Rántott sajt
15	23	30	12	28	17

Mivel az ábrához tartozó szövegből megtudhatjuk, hogy minden megkérdezett tanuló csak egyféle ételt választhatott, ezért az ábra segítségével kiszámítható, hogy hány tanulót kérdeztek meg.

$15 + 23 + 30 + 12 + 28 + 17 = 125$ tanuló véleménye alapján készült a diagram.



Az előző oszlopdiagram a választott ételek gyakoriságát ábrázolja, ezért ezt **gyakorisági diagramnak** is nevezik. Természetesen lehet a relatív gyakoriságokról is oszlopdiagramot készíteni.



A két diagramon az egyes oszlopok nagyságának aránya nyilvánvalóan ugyanakkora. A relatív gyakorisági diagramon azonban csak az összes mennyiséghez viszonyított arány olvasható le. Mikor célszerű relatív gyakorisági diagramot használni? Akkor, ha több adatsokaság elemeit szeretnénk összehasonlítani, és ezeknek az adatsokaságoknak különböző az elemszáma.

Oszlopdiagramot úgy készítünk, hogy a vízszintes tengelyre merőleges téglalapokat rajzolunk. Oszlopdiagram készítésénél vigyázni kell arra, hogy a téglalapok magassága arányos legyen az ábrázolandó mennyiséggel.

2. példa

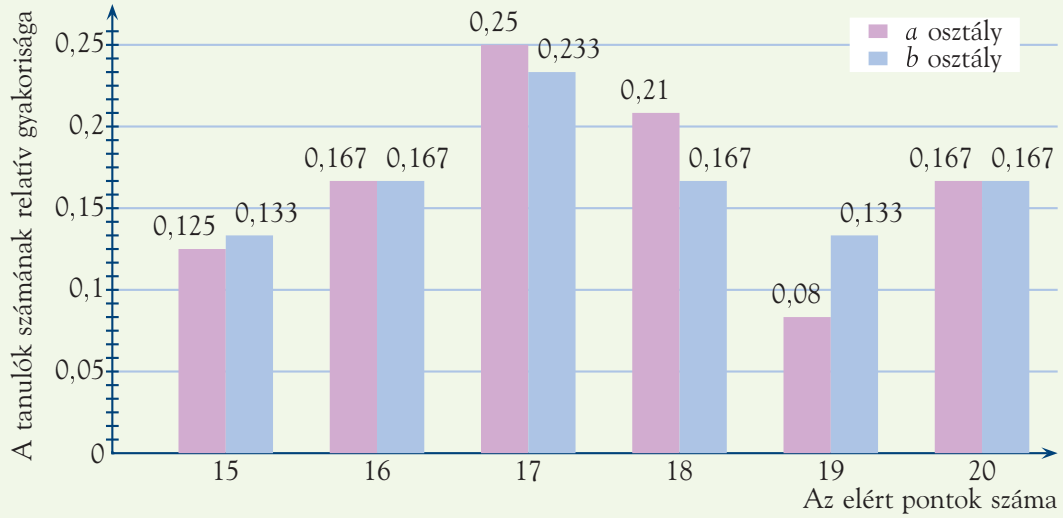
Egy általános iskola két nyolcadik osztálya ugyanazon a helyen táborozik. Egyik délután sportvetélkedőt rendeznek. Minden tanuló pontokat gyűjthet különböző sporttevékenységért. Legalább 15 és legfeljebb 20 pontot kell összegyűjteni. A megszerzett pontokat előre kiadott papírlapon kell igazoltatni.

Táblázatba foglaltuk, hogy a két osztályból hány tanuló érte el az adott pontszámot:

Pontok száma:	15	16	17	18	19	20
a osztály tanulói	3	4	6	5	2	4
b osztály tanulói	4	5	7	5	4	5

Mivel a két osztály különböző létszámú, nincs értelme összehasonlítani azoknak a tanulóknak a számát, akik ugyanannyi pontot szereztek.

Ábrázoljuk a szerzett eredmények relatív gyakoriságát!



Az eredmények ily módon már összehasonlíthatók.

Nézzük a 17 pontot elért tanulókat! Az *a* osztályban 6, a *b* osztályban 7 tanuló ért el ilyen eredményt. Az osztálylétszámhoz viszonyítva azonban a *b* osztálybeliek kisebb arányban szereztek 17 pontot, mint az *a* osztályba járók.

Az oszlopdiagramot akkor célszerű használni, ha adatokat szeretnénk ábrázolni vagy összehasonlítani.

Feladatok

K1 Egy szabályos 8 lapú dobótestet feldobunk 50-szer. A dobótest lapjait 1-től 8-ig számoztuk. A dobások eredménye:

8; 1; 3; 4; 4; 7; 3; 2; 3; 5; 2; 4; 2; 6; 7, 3; 3; 5; 2; 1; 6; 6; 7; 3; 1; 2; 2; 3; 2; 8; 3; 1; 5; 2; 6; 3; 1; 4; 4; 3; 5; 7; 5; 4; 8; 1; 4; 2; 3; 7.

Készíts gyakorisági táblázatot a dobásokról!



K2 Egy lottójátékokat szervező cég egyik játékában heti két alkalommal 7 számot húznak ki az 1, 2, . . . , 35 számok közül. Kimutatást készítettek az év első 10 hetében kihúzott nyerőszámokról.

Húzás	I	II	III	IV	V	VI	VII	Húzás	I	II	III	IV	V	VI	VII
1/1	2	6	9	16	21	26	30	1/2	5	6	8	20	27	33	35
2/1	6	7	10	12	14	15	27	2/2	5	6	7	10	11	15	25
3/1	6	10	11	16	18	19	25	3/2	1	17	25	27	30	31	34
4/1	3	7	16	19	23	28	33	4/2	13	18	19	22	24	31	34
5/1	3	7	16	19	23	28	33	5/2	13	18	19	22	24	31	34
6/1	12	17	19	21	24	28	33	6/2	3	11	14	16	22	30	35
7/1	2	17	19	22	23	31	33	7/2	7	9	18	22	24	29	34
8/1	1	2	15	16	20	28	30	8/2	1	8	11	14	17	25	28
9/1	5	10	12	14	19	21	28	9/2	6	9	12	16	17	28	32
10/1	3	6	21	23	24	33	34	10/2	1	2	7	15	16	19	20

a) Készíts gyakorisági táblázatot!

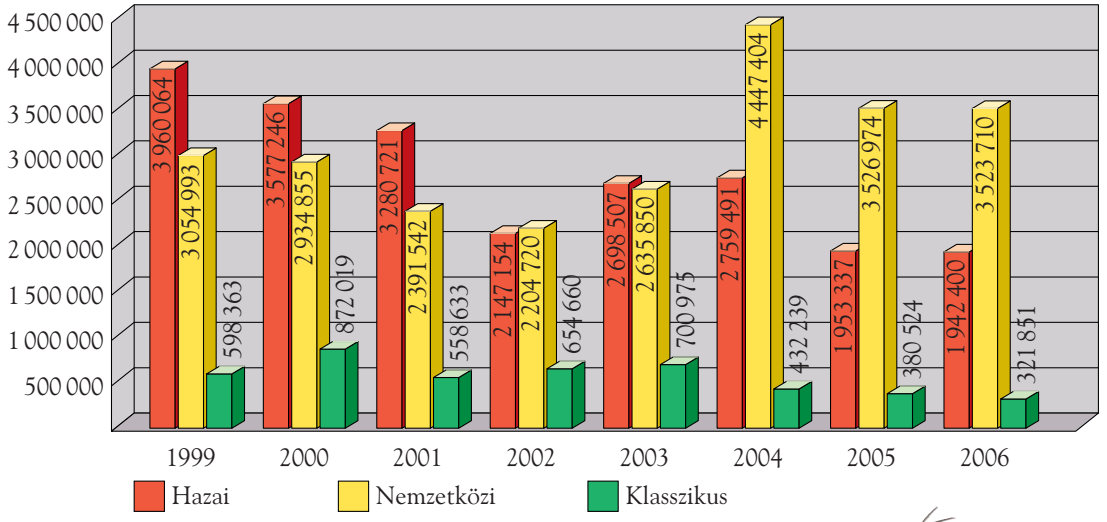
b) Készíts oszlopdiagramot 7/35 lottó-nyereményjáték adott időszakáról!

c) Véleményed szerint a kapott táblázat ismeretében nagyobb az esélyed a következő héten a nyerő számok eltalálására?

8.

K3 A hanghordozópiac nagyon gyors változását mutatja az alábbi grafikon.

Hanghordozók értékesítése besorolás szerint (1999–2006) (db)



a) Mi tartozik bele a hanghordozó eszközökbe?

b) Nézz utána, milyen hanghordozók voltak túlnyomó többségben az ezredfordulón, és melyek napjainkban!

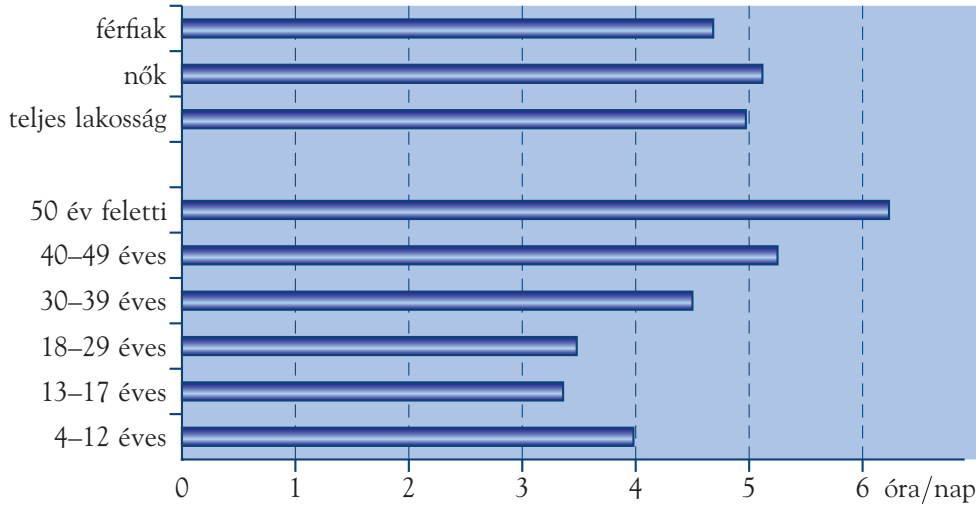
c) Mit ábrázol a grafikon?

d) Hogyan változott a hazai hanghordozók értékesítése a vizsgált időszakban?

e) Melyik időszakban növekedett a legnagyobb mértékben a nemzetközi hanghordozók értékesítése?



K4 2004 márciusában felmérést készítettek arról, hogy a magyar lakosság mennyi időt fordít a szabad idejéből tévénézéssel. Az alábbi oszlopdiagram ezt a felmérést mutatja.



a) A magyar lakosság átlagosan naponta mennyit televíziózott ebben a hónapban?
b) Melyik korosztály nézi legkevesebbet a televíziót?
c) Állapítsd meg, hogy melyik korosztály televíziózik a legtöbbet!
d) A te korosztályod hányadik a sorban?
e) Hasonlítsd össze a tévénézési szokásaidat az átlaggal! Többet vagy kevesebbet ülsz a televízió előtt?

Ábrázolás kördiagramon

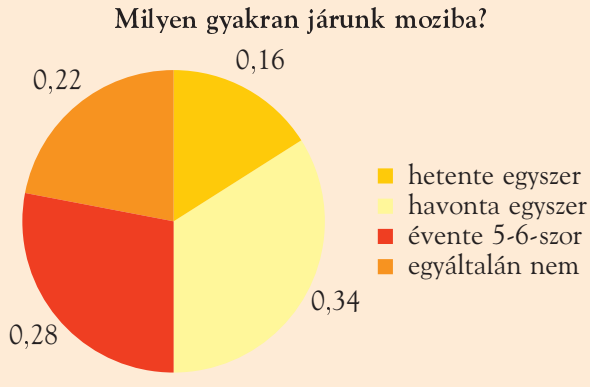
Gyakran találkozunk kördiagramos ábrázolási móddal.
Kördiagram: az egyes adatoknak olyan körcikkeket feleltetünk meg, amelyeknek középponti szöge (tehát területe is) arányos az adatfajta gyakoriságával.
Kördiagramon az egyes adatoknak az egészhez viszonyított arányát ábrázoljuk. Ezért nagyon gyakran a relatív gyakoriság értékeit tüntetik fel a kördiagramon. Nincs szükség feltétlenül az egyes adatfajták számszerű értékére, csak az összlétszámhoz viszonyított arányára.

1. példa

Egy televíziós műsorban arról kérdezik az állampolgárokat, évente hány alkalommal mennek moziba. A válaszadási lehetőségek:

hetente,
havonta egyszer,
évente 5-6-szor,
egyáltalán nem.

Az összegyűjtött adatokról készített kördiagram:



Ez a fajta diagram arról nem tájékoztat bennünket, hogy hány embert kérdeztek meg. Ezt annak kell megadni, aki az adatokat feldolgozta. Az azonban mindenféle adat ismerete nélkül is látszik, hogy a válaszadók nagyobb része havonta, illetve kéthavonta jár moziba.

Hogyan készítsünk kördiagramot?

2. példa

Egy iskolába 620 tanuló jár. A tanulók eredményéről készített statisztika az alábbiak szerint alakult:

Kitűnő: 31 tanuló. Jeles: 93 tanuló. Jó: 248 tanuló. Közepes: 155 tanuló.

Elégséges: 62 tanuló. Elégtelen: 31 tanuló.

Készítsünk a tanulmányi eredményről kördiagramot!

A kördiagram elkészítésénél felhasználjuk azon geometriai ismeretünket, hogy a körcikk középponti szöge és a körcikk területe egymással egyenesen arányos.

A 620 tanuló az iskola teljes létszáma. A körben ehhez tartozó középponti szög a teljes kör, azaz $360°$.

31 kitűnő tanuló van, ami az iskola létszámának $\frac{31}{620} = \frac{1}{18} = 0{,}05$ része.

A teljes kör 0,05 részéhez a $360°$-nak a 0,05 része, azaz $360° \cdot 0{,}05 = 18°$-os középponti szög tartozik.

Ily módon a többi középponti szög is meghatározható.

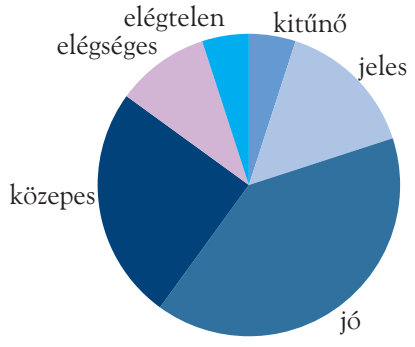
	Tanuló	Relatív gyakoriság	A körcikk területének aránya a kör területéhez viszonyítva	A körcikk középponti szöge
Kitűnő	31	$\frac{31}{620} = \frac{1}{20} = 0{,}05$	0,05	$360° \cdot 0{,}05 = 18°$
Jeles	93	$\frac{93}{620} = \frac{3}{20} = 0{,}15$	0,15	$360° \cdot 0{,}15 = 54°$
Jó	248	$\frac{248}{620} = \frac{2}{5} = 0{,}4$	0,4	$360° \cdot 0{,}4 = 144°$
Közepes	155	$\frac{155}{620} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	0,25	$360° \cdot 0{,}25 = 90°$
Elégséges	62	$\frac{62}{620} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	0,1	$360° \cdot 0{,}1 = 36°$
Elégtelen	31	$\frac{31}{620} = \frac{1}{20} = 0{,}05$	0,05	$360° \cdot 0{,}05 = 18°$

Ezek segítségével már megszerkeszthető a kördiagram.

A kördiagramos ábrázolásnál gyakran a relatív gyakoriság törtértéke helyett százalékos értéket láthatunk. Ebben az esetben átalakítjuk a százalékértéket törtté, és az előzőekben leírtak szerint járunk el.

Az adatok egymáshoz viszonyított értékének ábrázolásához használható ún. sávdiagram. Meghatározzuk az egyes adatok relatív gyakoriságát, majd egy tetszőleges hosszúságú téglalap területét ennek arányában osztjuk fel.

Az iskola tanulóinak tanulmányi eredménye



Nézzük meg az előző feladat sávdiagramját!



Feladatok

K1 Egy felmérés során megkérdeztek 500 városi diákot, mennyi idő alatt ér az otthonától az iskolába. A válaszok a következők voltak.

10 percnél kevesebb: 185 tanuló; 10 és 20 perc között: 210 tanuló; 20 percnél több: 105 tanuló.

a) Készíts táblázatot a relatív gyakoriságokról!

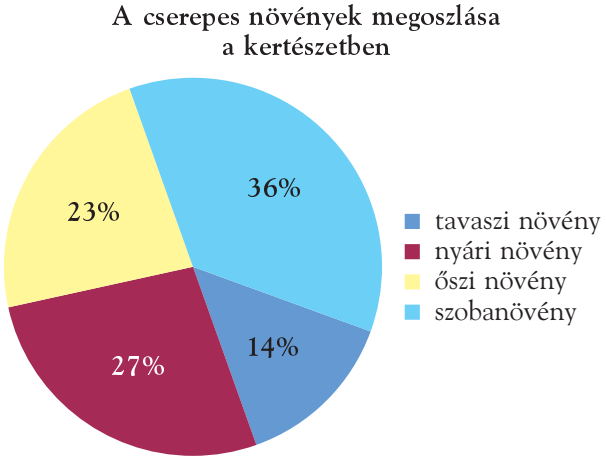
b) A kapott eredmények alapján készíts kördiagramot!

K2 Magyarország egyik legnagyobb és legsokszínűbb megyéjében, Belső-Somogyban található Kaszópuszta. A települést övező mintegy 25 000 hektáros erdőt vadregényes utakon közelíthetjük meg. A település környékén jelenleg 1500 db gímszarvas, 500 db dám, 1000 db vaddisznó és 500 db őz alkotja a törzsállományt (százasokra kerekítve).

a) Készíts relatív gyakorisági táblázatot a vadállományról!

b) A relatív gyakoriság felhasználásával rajzolj kördiagramot!

K3 Egy kertészetben cserepes növényeket nevelnek. Külön ápolást igényelnek a tavaszi, nyári, őszi cserepes virágok, és más módon kell a szobanövényeket gondozni. Nézd meg az alábbi kördiagramot, és válaszolj az alábbi kérdésekre!



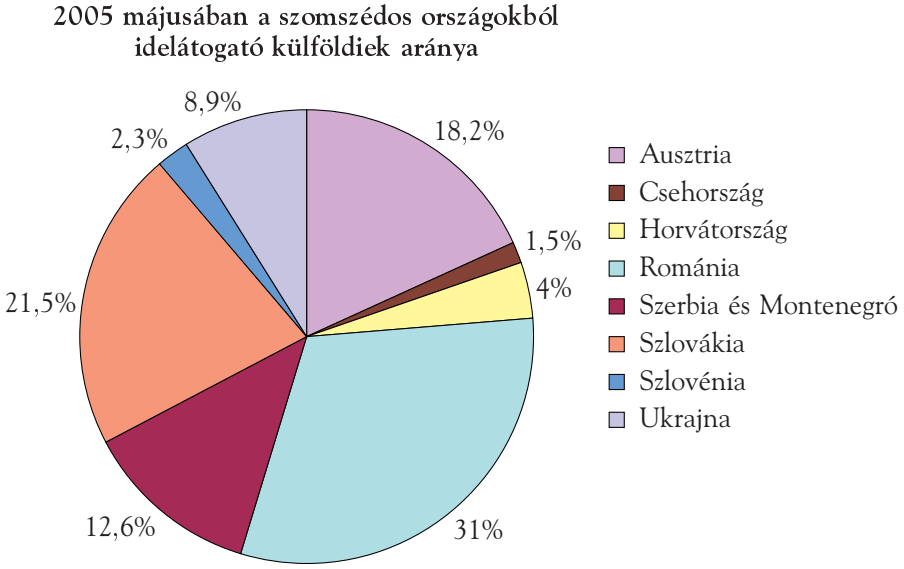


Tavaszi cserepes növényből 1092 db volt.

a) Hány növény van a kertészetben?

b) Hány db szobanövényt gondoznak?

K4 2005 májusában a szomszédos országokból hozzánk látogató külföldiekről készült ez a kördiagram.



Romániából 355 000 ember érkezett hozzánk ebben a hónapban.

Számítsd ki, hányan érkeztek a megadott országokból Magyarországra! A kapott eredményt ezerre kerekítve add meg!

A felsorolt országok közül melyikből érkeztek hozzánk a legkevesebben? Mennyi vendég érkezett ebből az országból?

8.

Az adatsokaságot jellemző középértékek

Az átlag

Az adatok összegyűjtésekor általában az a célunk, hogy jellemezzük azt a sokaságot, amelyből az adatokat kaptuk. Ilyen jellemző adat lehet például a gyakoriság, illetve a gyakorisági diagram, kördiagram.

Szeretnénk egyetlen adattal jellemezni azt a sokaságot, amelynek elemeiről egyesével adatokat gyűjtöttünk.

Ilyen számjellemzők lehetnek az adatsokaság *középértékei.*

Az átlag fogalmával alsóbb évfolyamokon és mindennapjainkban is találkozunk. Ahhoz, hogy a bizonyítványunk eredményét megtippelhessük, gyakran számítjuk ki egy-egy tantárgyból az átlagot.

Az **átlag** fogalma:

Ha az adatsokaság számadatait összeadjuk, majd az összeget elosztjuk az adatsokaság elemeinek számával, akkor az adatsokaság átlagát kapjuk.

Legyenek az adatok értékei: x_1, x_2, ..., x_n, a sokaság elemszáma n, ekkor az átlag:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

1. példa

Gyuri matematikajegyei: 2, 3, 4, 4, 5, 2. Mennyi a jegyei átlaga?

Ezek alapján a matematikajegyek átlaga: $\frac{2+3+4+4+5+2}{6} = \frac{20}{6} = 3{,}\dot{3} \approx 3{,}33.$

2. példa

Hasonlítsuk össze két osztály magyardolgozatainak eredményét! Számítsuk ki az osztályátlagokat!

Az *a* osztály eredménye:

2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5

Az átlag: $\frac{2+2+2+2+3+3+3+3+3+4+4+4+5+5+5+5+5}{17} = \frac{60}{17} \approx 3{,}53.$

A *b* osztály eredménye:

2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Az átlag: $\frac{2+2+2+2+2+3+3+4+4+4+4+4+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5}{24} = \frac{96}{24} = 4{,}00.$

Sok adat esetén ez a számítási mód nagyon időigényes lehet. Ezért mutatunk egy másik, gyorsabb átlagszámítási módot.

Készítsünk gyakorisági táblázatot az adatokból!

a osztály:

Érdemjegy	1	2	3	4	5	Összesen
Tanulók száma	0	4	5	3	5	17

Az osztályátlagot ennek segítségével úgy számíthatjuk ki, hogy a gyakoriság értékeit összeszorozzuk az érdemjegyek értékével, ezeket összeadjuk, és elosztjuk az érdemjegyek számával:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{17} = \frac{60}{17} \approx 3{,}53.$$

b osztály:

Érdemjegy	1	2	3	4	5	Összesen
Tanulók száma	0	5	2	5	12	24

Az osztályátlag: $\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 12 \cdot 5}{24} = \frac{96}{24} = 4{,}00.$

Gyakorisági táblázat segítségével gyorsabban számítható ki az adatsokaság átlaga.

Az átlag egy olyan érték, amellyel jellemezni lehet az adatsokaságot, de ha csak az átlagot ismerjük, akkor sok mindent nem tudunk az egyes elemek értékeiről, az adatsokaságon belüli elhelyezkedéséről. Ha egy osztály tantárgyi átlaga 3,53, ebből még nem tudjuk, hogy milyenek az egyes dolgozatjegyek.

Az átlag nem mindig jellemzi jól az adatsokaságot. Célszerű gyakran más jellemzőt is keresni.

Feladatok

K1 Egy család gyümölcsöskertjében négy almafa van. Az őszi szüretelésnél az egyes fákon a lemért termés: 23 kg, 35 kg, 28 kg, 22 kg.

a) Hány kg alma termett átlagosan egy fán?

b) Hány kg alma jut átlagosan egy hónapra a családnak október elejétől március végéig?

K2 Egy lakás köbméterben kifejezett vízfogyasztását mutatja az alábbi táblázat.

Hónapok	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Vízfogyasztás (m^3)	23	21	24	20	22	25	27	14	22	23	22	24

a) Mennyi vizet fogyasztottak egy évben?

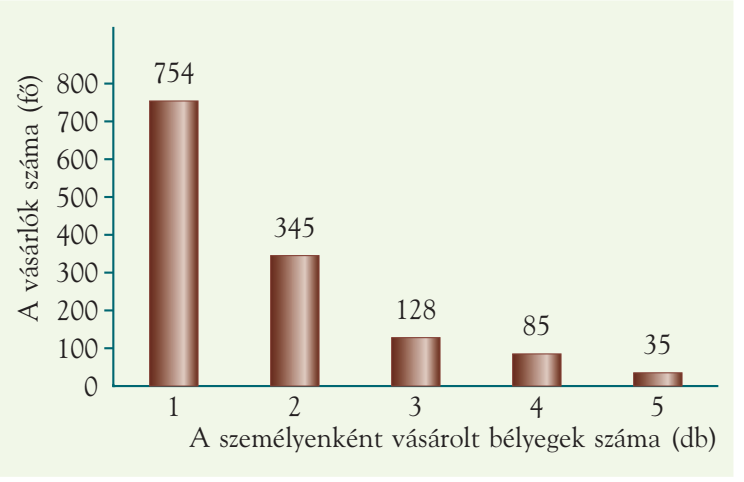
b) Mennyi az átlagos havi vízfogyasztás?

c) Hány hónapban fogyasztottak az átlagfogyasztásnál kevesebbet?

d) Mit gondolsz, mi lehet az oka annak, hogy egy hónapban sokkal kevesebbet fogyasztottak, mint az átlag?

e) A vízdíjat átalányként fizetik, ami azt jelenti, hogy az éves fogyasztásból számítanak egy hónapra jutó átlagfogyasztást. Mennyi átalánydíjat kell fizetni, ha egy köbméter víz ára 512 Ft?

K3 Egy természeti katasztrófa után a Nemzetközi Segélyszervezet a lakosok segítségét kéri. Ehhez az akcióhoz 500 Ft-os bélyeget árusítanak. Egy kisvárosban az összesítés után a bélyegvásárlásról ezt a diagramot készítették:



a) A diagram áttekintése után készíts táblázatot!

b) Hány ember vásárolt bélyeget?

c) Összesen hány bélyeget vásároltak a segítségnyújtáshoz?

d) Mennyi pénzt gyűjtöttek össze ebben a városban?

e) Ha a városban csak a vásárlók számát tekintjük, egy fő átlagosan hány Ft-tal járult hozzá a segítségnyújtáshoz?

K4 Egy 33 fős osztályban mindenki angolt tanul. Az egyik csoportnak, amelyben 16-an vannak, hetente két órával több angolórája van. Év végén a tanulók országos felmérőt írnak angol nyelvből. Az a csoport, amelyik magasabb óraszámban tanulja a nyelvet, 64 pontos átlaggal írja meg a dolgozatot. A másik csoport átlagpontszáma 48.

Mennyi az osztály átlagteljesítménye?

K5 Két szám átlaga 566. Az egyik szám 328. Mekkora a másik szám?

K6 Február két hetében a napi átlaghőmérséklet a következőképpen alakult:

	febr. 10.	febr. 11.	febr. 12.	febr. 13.	febr. 14.	febr. 15.	febr. 16.
Hőmérséklet (°C)	0,5	−2	−1,5	0	1	3	2

	febr. 17.	febr. 18.	febr. 19.	febr. 20.	febr. 21.	febr. 22.	febr. 23.
Hőmérséklet (°C)	−3	−1	+2	−2	0	2	3

a) Határozd meg a két hét átlaghőmérsékletét!

b) Mely napokon volt a napi hőmérséklet átlagértéke az adott időszakra kiszámolt átlaghőmérsékleti érték alatt?

c) Mely napon vagy napokon volt a legnagyobb az eltérés a kiszámított átlagértéktől?

d) Mely napokon volt az átlagértéktől való eltérés értéke pozitív?

E7 Gergőnek hármas, négyes és ötös jegyei vannak matematikából, összesen öt darab. A jegyeinek átlaga 3,8. Milyen jegyei vannak matematikából Gergőnek?

E8 A 2, 4, 6, 8, 10 számokból egyet elhagyva a megmaradt számok átlaga 6. Melyik számot hagytuk ki?

Módusz, medián

Az előző példákban láthattuk, hogy az átlag nem minden esetben ad elegendő információt a sokaság vizsgált tulajdonságairól. Van másfajta középérték, amely más szempontból jellemzi a sokaságot.

Az egyik ilyen középérték **a módusz**.

1. példa

Vizsgáljuk meg az előző leckében megismert *b* osztály magyardolgozatainak az eredményét!

Érdemjegy	1	2	3	4	**5**
Tanulók száma	0	5	2	5	**12**

Azt meghatároztuk, hogy az osztály átlaga 4,00. A jegyek eloszlását figyelve azt láthatjuk, hogy sok ötös dolgozat született. A leggyakrabban előforduló érdemjegy ebben az osztályban az ötös. Ezt úgy mondjuk, hogy az osztályzatok módusza 5.

A módusz az adatsokaságban leggyakrabban előforduló elem. Van olyan adathalmaz, ahol két ilyen érték is van, ebben az esetben két módusza van az adathalmaznak, és ilyenkor kétmódusznak nevezzük az adatsokaságot.

Erre példa az *a* osztály magyardolgozatainak eredménye:

Érdemjegy	1	2	**3**	4	**5**	Összesen
Tanulók száma	0	4	**5**	3	**5**	17

Az *a* osztályban a 3-as és az 5-ös érdemjegy fordul elő leggyakrabban, és ezért a jegyek eloszlását kétmódusznak nevezzük. A két módusz 3 és 5.

Jól jellemezhető az adatsokaság egy olyan középértékkel, amely nagyság szerinti sorba rendezés után két egyenlő részre osztja az adatsokaságot. Ez a középérték a **medián**.

A medián meghatározásakor az adatsokaság elemeit növekvő sorrendbe kell rendezni, és a sorba rendezett adatsokaságnak a középső eleme lesz a medián. Ez a módszer akkor használható, ha páratlan elemszámú az adatsokaság. Ha páros darabszámú elem van, akkor nincs középső elem, ezért a középső két elem számtani közepe lesz az adatsokaság mediánja.

2. példa

Az orvosi vizsgálaton megmérték a fiúk magasságát. A következő adatokat kapták:

172 cm, 178 cm, 192 cm, 166 cm, 171 cm, 165 cm, 165 cm, 179 cm, 174 cm.

Mennyi a fiúk magasságának átlaga és mediánja?

A fiúk magasságának átlaga 173,56 cm.

Állítsuk növekvő sorrendbe a mért értékeket!

165 cm, 165 cm, 166 cm, 171 cm, **172 cm**, 174 cm, 178 cm, 179 cm, 192 cm.

A fiúk magasságának mediánja 172 cm. Ez az adatok vizsgálatánál azt jelenti, hogy 172 cm-nél alacsonyabb fiú ugyanannyi van, mint ennél magasabb fiú.

Pontosítsuk a megfigyeléseinket! Ha egy osztálydolgozat eredményeinek mediánját akarjuk meghatározni, biztosan lesznek azonos jegyek is. Így a medián értelmezésénél óvatosabban kell eljárni.

3. példa

Nézzük annak a magyardolgozatnak az eredményeit, amelynek átlagát meghatároztuk! Mennyi az eredmények mediánja?

Érdemjegy	1	2	3	4	5	Összesen
Tanulók száma	0	4	5	3	5	17

A medián meghatározásához rendezzük növekvő sorrendbe az osztályzatokat!

2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; **3**; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5.

A középső elem 3, tehát az érdemjegyek mediánja 3. Mivel hármas érdemjegyből több van, ezért a pontos megfogalmazás: **a mediánnál ugyanannyi elem nem nagyobb, mint amennyi nem kisebb.**

Feladatok

K1 Számítsd ki az átlagot és a mediánt az alábbi számhalmaz esetén!

11; 12; 13, 16; 16; 17; 20.

K2 Fanni egy nyári vasárnap beült a Csodaíz fagyizóba, kért egy nagy adag fagylaltot, és egy órán keresztül feljegyezte, hogy ki hány gombócos fagyit rendelt.



Táblázatba foglalta eredményeit:

1 gombóc	2 gombóc	3 gombóc	4 gombóc	5 gombóc
4	15	10	6	6

a) Hányan vásároltak fagyit ez idő alatt?

b) Számítsd ki, mennyi volt az átlagos vásárolt gombócszám!

c) Rendezd növekvő sorrendbe az adatokat!

d) Mennyi volt az adathalmaz mediánja?

e) Mennyi az adatok módusza?

K3 Egy meteorológiai állomáson február egyik hetében a következő nappali legmagasabb hőmérsékleti értékeket mérték:

Napok	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
Hőmérséklet(°C)	4	1	3	−1	−2	−1	0

a) Rendezd nem csökkenő sorrendbe az adatokat!

b) Határozd meg a hőmérsékleti értékek átlagát, móduszát!

c) Mennyi a hőmérsékleti értékek mediánja? Mit jelent ez?

K4 Egy csoport első félévi matematikadolgozatainak eredményei a következők:

Osztályzat	5	4	3	2	1
1. dolgozat	3	6	7	2	2
2. dolgozat	4	7	6	2	1
3. dolgozat	4	6	7	2	1

a) Hány tanuló van a csoportban?

b) Számítsd ki a 2. dolgozat átlagát!

c) Határozd meg a móduszt és a mediánt mindhárom dolgozatnál!

K5 Egy iskolában felmérést készítettek arról, hogy a tanulók naponta átlagosan mennyit internetezenek. Egy osztályból megkérdeztek 13 tanulót. A válaszok a következők voltak:

60 perc, 70 perc, 20 perc, 10 perc, 90 perc, 0 perc, 10 perc, 70 perc, 0 perc, 30 perc, 70 perc, 90 perc, 20 perc.

Látva az eredményeket, a következő vélemények hangzottak el:

(A) Az osztály egyik tanulója szerint ez az érték alacsony, mert az internetezésre fordított 30 percnyi idő kevés. A megkérdezettek fele ennél kevesebbet internetezik. Melyik középértékkel érvelt a tanuló?

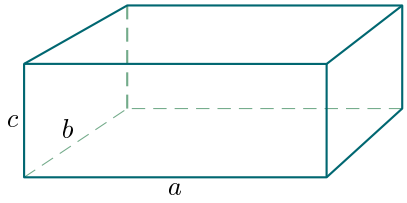
(B) Az egyik szülő szerint az internetezésre szánt 70 perc sok, és a csoportból 70 percet internetezteek a legtöbben. Melyik középértékre gondolt a szülő?

(C) Mennyi a csoport internetezésre fordított idejének átlaga?

A tanult testek áttekintése

Az eddig tanult testek legfontosabb tulajdonságainak felidézése után újabb testekkel ismerkedünk meg. Gyarapítjuk ismeretünket a felszín és a térfogat kiszámításában is. Gyakorlati példákban alkalmazzuk az új képleteket.

A **téglatest** tanulmányozásával kezdtük a testekkel való ismerkedést. A téglatest mind a hat lapja téglalap. Két-két szemközti lapja egybevágó. A téglatestnek 8 csúcsa és 12 éle van. A 12 él közül négy-négy párhuzamos és egyenlő hosszúságú.

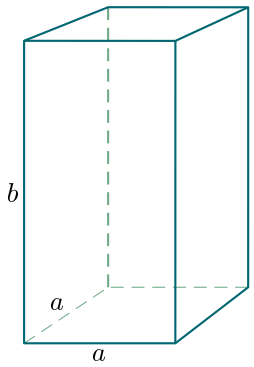


A három különböző él szokásos jelölése: a, b, c.

Ezek a betűk jelölik a szakaszt, de a szakasz hosszát is jelenthetik.

A téglatest felszíne: $A = 2(ab + bc + ac)$.
A téglatest térfogata: $V = abc$.

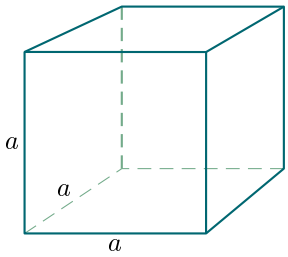
Négyzetes oszlopnak nevezzük azt a téglatestet, amelynek van két négyzetlapja.



A négyzetes oszlop felszínét és térfogatát a téglatest megfelelő képletével kiszámíthatjuk, de közvetlenül is adhatunk képletet rá.

A négyzetes oszlop felszíne: $A = 2a^2 + 4ab$.
A négyzetes oszlop térfogata: $V = a^2b$.

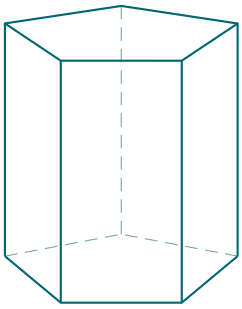
Kockának nevezzük azt a téglatestet, amelynek minden lapja négyzet.



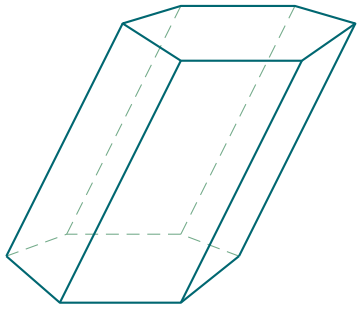
A kocka felszíne: $A = 6a^2$.
A kocka térfogata: $V = a^3$.

Egyenes hasáboknak nevezzük azokat a testeket, amelyeket két párhuzamos, egybevágó sokszög és annyi téglalap határol, ahány oldalú a sokszög.

Beszélhetünk ferde hasábról is. Ezeknek a testeknek két lapja párhuzamos és egybevágó sokszög, a többi lapja pedig paralelogramma.



ötszögalapú egyenes hasáb



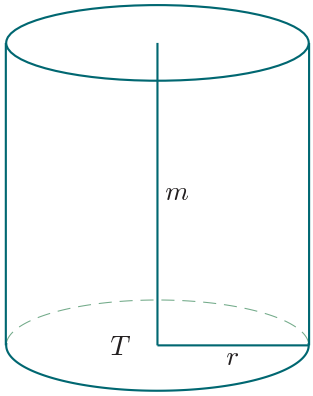
hatszögalapú ferde hasáb

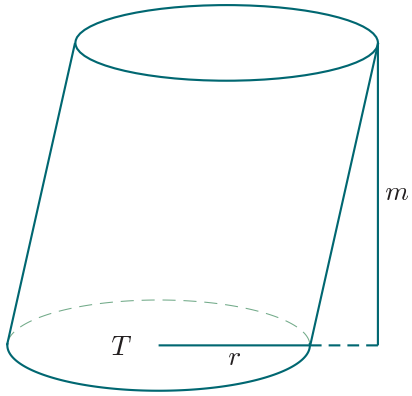
A következő fogalmakat vezettük be: **alaplap, oldallap, alapél, oldalél, magasság, lapátló, testátló, palást.**

A hasáb felszíne egyenlő a határoló lapok területének összegével, azaz **az alaplap T területének kétszereséhez hozzáadjuk a palást P területét. A hasáb felszíne képlettel:** $A = 2T + P$.

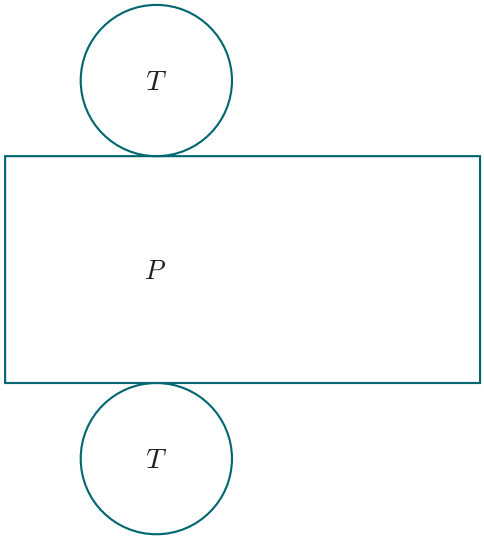
A hasáb térfogatát úgy számítjuk ki, hogy az alaplapjának T területét megszorozzuk az m magassággal. A hasáb térfogata képlettel: $V = Tm$.

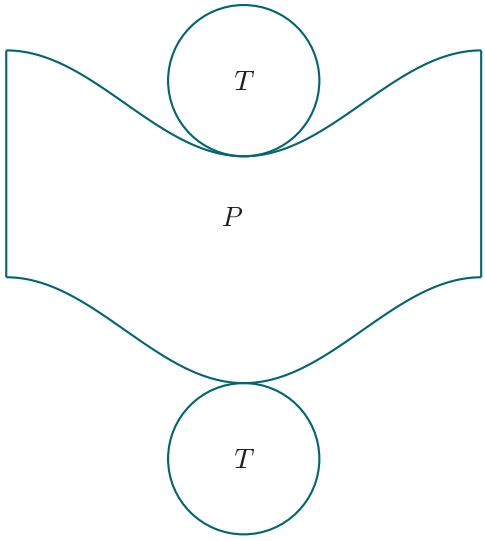
A **hengert** két egybevágó körlap és egy görbe lap határolja.





A körlapok az **alaplapok**. A görbe lap a **palást**. Az egymással párhuzamos alaplapok távolsága a henger **magassága**. Az alaplapok sugara **a henger sugara**.





Az egyenes henger síkba kiterített palástja olyan téglalap, amelynek egyik oldala az alaplap kerületével, a másik oldala a henger magasságával azonos hosszúságú. A ferde körhenger palástja egy számunkra ismeretlen síkidom.

A ferde hengerek felszínének kiszámítása meghaladja a tananyagunkat. Mi most csak egyenes hengerrel foglalkozunk.

A henger felszíne: $A = 2r\pi(r + m)$.

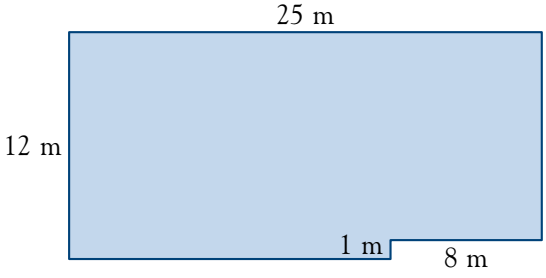
A henger térfogata: $V = r^2\pi \cdot m$.

Feladatok

K1 Az ábra egy medence alaprajzát mutatja. A medence mindenütt 1,8 méter mély.

a) Hány m^2-re elegendő anyagot kell vásárolni a belsejének a burkolásához?

b) Hány hl víz fér a medencébe?



K2 Számítsd ki a 1,4 dm magas négyszög alapú hasáb palástjának felszínét, ha alaplapjának oldalai: $a=13$ cm, $b=210$ mm, $c=1{,}1$ dm, $d=12$ cm!

K3 A következő kérdések egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasábra vonatkoznak.

a) Hány csúcsa, éle, lapja van?
b) Milyen alakú lapok határolják?
c) Mely határoló lapok egybevágók?
d) Hány oldallapja van?

K4 Egy hasáb alaplapjának területe 26 cm^2, kerülete 24 cm, a hasáb magassága 9 cm. Mekkora a felszíne, mekkora a térfogata?

K5 Számítsd ki a henger felszínét és térfogatát, ha

a) $r = 3{,}4$ cm, $m = 8$ cm;
b) $r = 25$ mm, $m = 12$ cm!

K6 Egy henger alakú konzervdoboz magassága 7,6 cm, az átmérője pedig 8,6 cm.

a) Mekkora területű papírra tervezhetik meg a konzervdoboz címkéjét?
b) Mekkora a doboz térfogata?

K7 A kályhacső átmérője 12 cm. Hány m^2 lemez kell 25 db, 0,8 méter hosszú cső elkészítéséhez?

K8 Hány liter víz lehet a 30 méter hosszú, 2 cm belső átmérőjű gumicsőben?

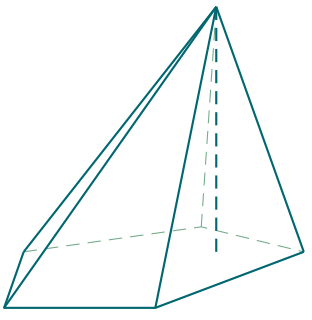
Gúlák

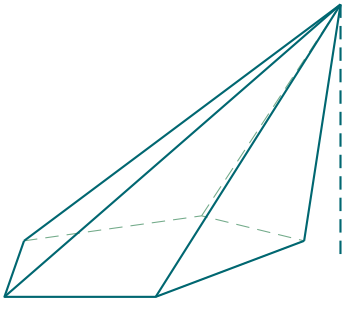
Az előzőekben átismételt testek a gyakorlatban ilyen tisztán, szabályosan alig-alig fordulnak elő. Ugyanaz az 1 cm élű kocka egészen eltérő hatású lesz, ha gyurmából készítettük, vagy egy kockacukorra gondolunk. A geometriában eddig is és ezután is eltekintünk a színektől, a tárgyak anyagától, és csak a formát vizsgáljuk. A természet és az épített világunk nagyon változatos formákat mutat. Ha a háztetők, tornyok tetőszerkezetét megnézzük, akkor az eddigi testektől eltérő formákat is látunk. Ezek egy csoportját alkotják a **gúlák**.



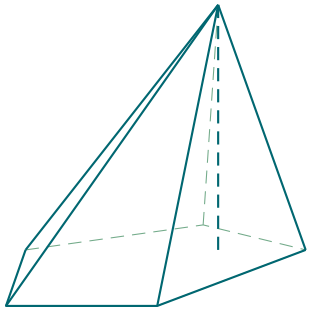
A képen a párizsi Louvre (ejtsd: lúvr), a világ egyik legismertebb múzeuma látható.

Vegyünk fel egy sokszöget és egy pontot, amely nem illeszkedik a sokszög síkjára. Ha ezt a pontot összekötjük a sokszög minden csúcsával, akkor egy gúlát kapunk.



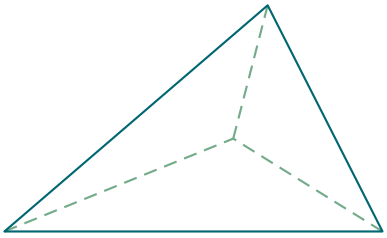


A sokszög a gúla **alaplapja**, a háromszögek az **oldallapok**. Az alaplap oldalai az **alapélek**, két szomszédos oldallap az **oldalélben** metszi egymást. Az oldallapok közös csúcsának a távolsága az alaplaptól a **gúla magassága**.

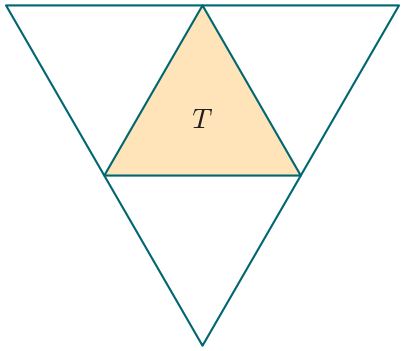


Figyeljük meg, hogy a gúláknak nincs testátlója! Lapátló is csak az alaplapon lehetséges, hiszen az oldallapok háromszögek.

Ha a gúla alaplapja háromszög, akkor sem testátlója, sem lapátlója nincs. A háromszög alapú gúlát **tetraédernek** nevezzük. Vagyis a tetraédert négy háromszög határolja. Ha mind a négy szabályos, akkor **szabályos tetraéderről** beszélünk.



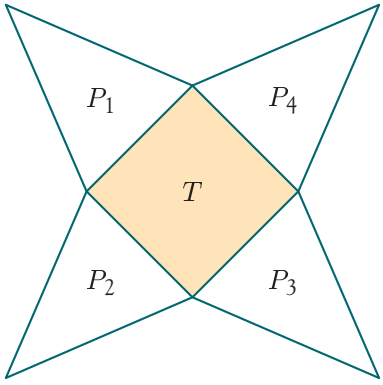
tetraéder

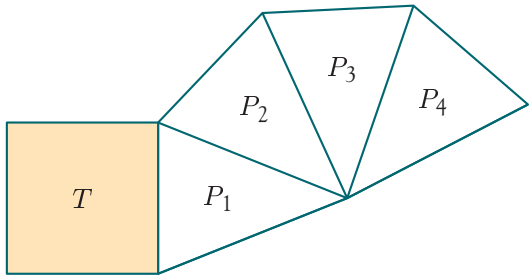


szabályos tetraéder hálózata

Az oldallapok együtt a **gúla palástját** adják. A palást területét P-vel, az alaplap területét T-vel jelöljük. A **gúla felszíne** az alaplap és a palást területének összegével egyenlő: $A = T + P$.

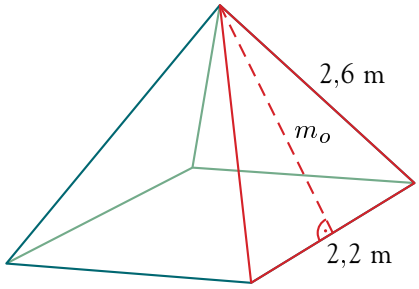
A következő ábrán egy négyzet alapú gúla különböző hálózatait látjuk.





1. példa

Egy épület tetőszerkezetén van egy torony. A torony teteje négyzet alapú gúla. A gúla alapéle 2,2 m, az oldalélek pedig 2,6 m hosszúak. Hány darab cserepet kellett vásárolni a befedéséhez, ha 1 m^2-re 18 db cseréppel kell számolnunk?



A gúla négy oldallapjának területét kell kiszámítanunk. Az oldallap minden oldalának hosszát ismerjük.

A terület kiszámításához tudnunk kellene az oldallap m_o magasságát. Ezt az ATC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítjuk ki.

$m_o = \sqrt{2{,}6^2 - 1{,}1^2} = \sqrt{5{,}55} \approx 2{,}36$ (m).

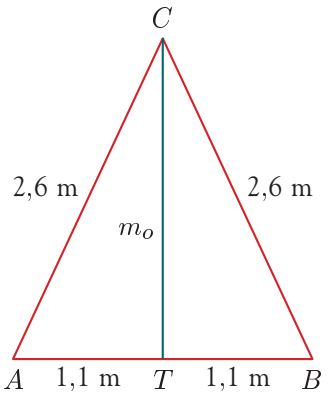
Az ABC háromszög területe: $t = \frac{2{,}2 \cdot 2{,}36}{2} \approx 2{,}6$ (m^2).

Ennek a négyszeresét kell cseréppel lefedni, vagyis 10,4 m^2-t.

Mivel 1 m^2-hez 18 db cserépre van szükség, ezért elvégezzük a következő szorzást: $10{,}4 \cdot 18 = 187{,}2$.

A cserepek száma egész szám. A kerekített érték 187 db, de itt nem célszerű így kerekíteni.

A tető cserepezéséhez kb. 190 db cserepet kellett vásárolni.



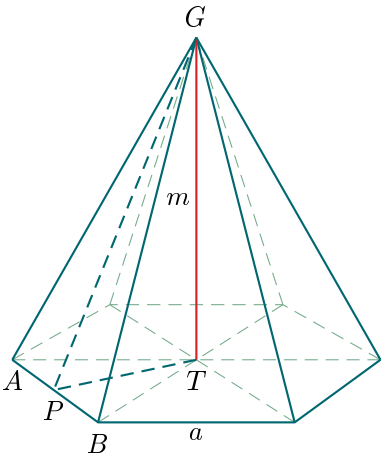
Az előző példában csak az oldallapok területének összegét kellett kiszámítani. Ha ehhez hozzáadjuk a gúla alaplapjának területét, akkor kapjuk a **gúla felszínét**.

Az oldallapok együtt a **gúla palástját** adják.

A palást területét P-vel, az alaplap területét T-vel jelöljük. A gúla felszíne: $A = T + P$.

2. példa

Egy szabályos hatszög alapú gúla alapélei 4 cm hosszúak, a gúla magassága 10 cm. Mekkora a gúla felszíne, ha az oldallapok egybevágók?



Használjuk az ábra jelöléseit!
Tudjuk, hogy $a = 4$ cm, $m = 10$ cm.

Az AB alapél felezőpontja P. Mivel az alaplap szabályos hatszög, ezért az ABT szabályos háromszög.

Az ABT szabályos háromszög magassága:

$$PT = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Most már a GPT derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az ABG oldallap GP magasságát:

$$GP = \sqrt{m^2 + PT^2} = \sqrt{10^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 + 12} = \sqrt{112} \text{ (cm)}.$$

Minden adat a rendelkezésünkre áll, hogy meghatározzuk a gúla felszínét.

Az alaplap területe az ABT szabályos háromszög területének hatszorosával egyenlő:

$$T = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A palást területe az ABG egyenlő szárú háromszög területének hatszorosával egyenlő:

$$P = 6 \cdot \frac{a \cdot GP}{2} = 6 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{112}}{2} = 12\sqrt{112} = 12\sqrt{4^2 \cdot 7} = 48\sqrt{7} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

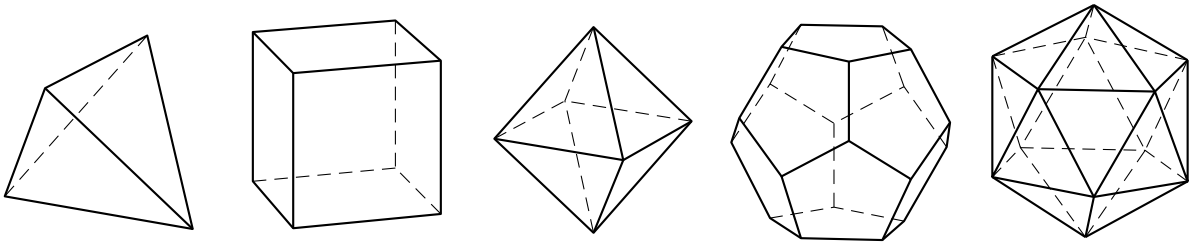
A gúla felszíne: $A = T + P = 24\sqrt{3} + 48\sqrt{7} \approx 168{,}57$ (cm^2).

Kb. 168,57 cm^2 a gúla felszíne.

Érdekesség

Ha összeragasztunk két olyan egybevágó, négyzet alapú gúlát, amelynek a palástját szabályos háromszögek alkotják, akkor egy nyolclapú testet kapunk. Ennek minden lapja egybevágó szabályos háromszög. Ráadásul ez a test olyan szép, hogy a csúcsai egy gömbre illeszkednek. Ezt a testet oktaédernek nevezik. Vannak-e további ilyen testek?

Olyan testeket keresünk, amelyeknek lapjai egybevágó szabályos sokszögek és gömb írható köréjük. A kocka is megfelel a feltételeknek, amit hexaédernek is neveznek.
Igazolható, hogy öt ilyen van, és ezeket **szabályos testeknek** nevezzük.



tetraéder kocka (hexaéder) oktaéder dodekaéder ikozaéder

Feladatok

K1 Rajzold le annak a négyzet alapú gúlának a hálózatát, amelyben az alapélek hossza 2 cm, az oldaléleké pedig 3 cm!

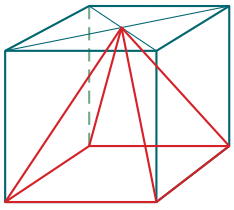
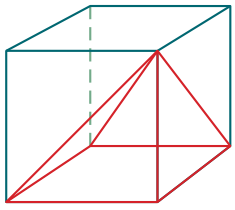
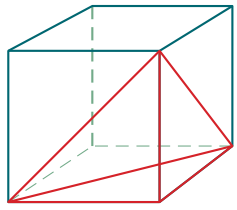
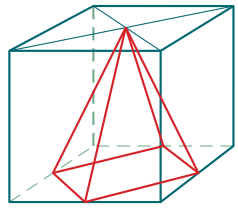
K2 Számítsd ki a gúla felszínét, ha az alaplapja négyzet, az oldallapok pedig egybevágó háromszögek! Az alapél a, az oldalél b, a testmagasság m, az oldallap magassága m_o.

a) $a = 12$ cm, $m_o = 21$ cm;
b) $a = 12$ cm, $m_o = 6$ cm;
c) $a = 1$ dm, $b = 13$ cm;
d) $a = 17$ cm, $b = 25$ cm;
e) $m = 2{,}4$ dm, $m_o = 2{,}6$ dm;
f) $m = 2$ cm, $m_o = 21$ mm.

K3 Egy 1,2 m oldalú szabályos hatszög fölé 1,5 m magas gúlát építünk. A gúla minden oldallapja egybevágó háromszög. Az alaplap területének hány százaléka lesz a palást területe?

K4 Egy háromszög alapú gúla minden éle 14 cm. Számítsd ki a felszínét!

K5 Egy 15 cm élű kockából vágjuk ki a következő gúlákat! Számítsd ki a testek felszínét!

a) 
b) 
c) 
d) 

K6 A gyerekek az osztályterem díszítésére a következő formát készítették: egy 10 cm élű kocka minden lapjára mint alaplapra egy gúlát ragasztottak. A gúlák minden oldaléle 13 cm hosszúságú volt. Mekkora az így kapott dísz felszíne?



E7 Egy szabályos nyolcszög alakú építményt gúla alakú tetővel fognak lefedni. Hány négyzetméter tetőanyagot kell vásárolni, ha a nyolcszög területe 12 m^2, a tetőszerkezet oldalélei pedig 3 méteresek?

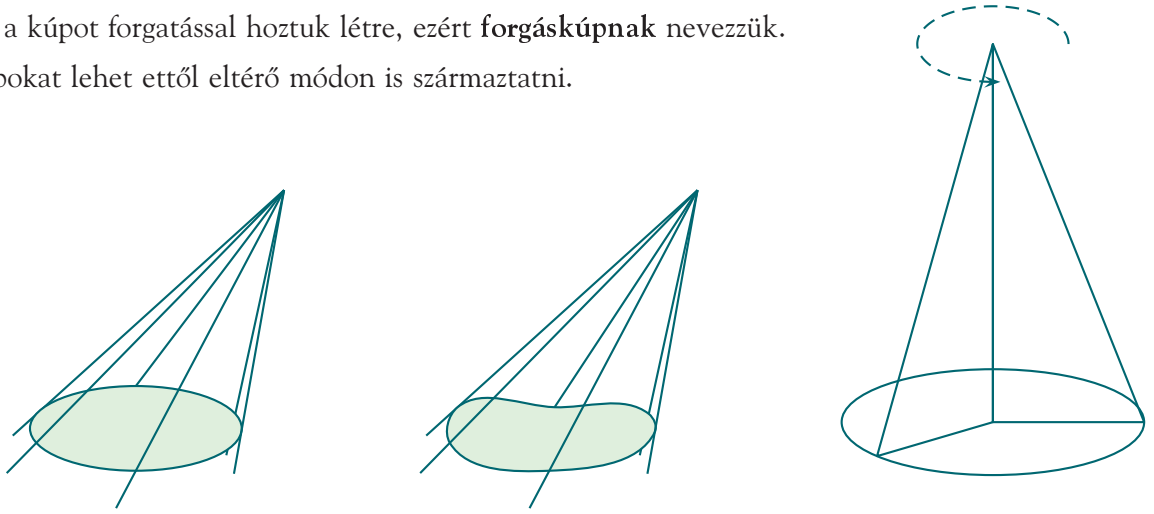
E8 Számold össze, hogy hány lapja van a dodekaédernek és az ikozaédernek!

Kúpok

Egy derékszögű háromszöget forgassunk meg az egyik befogója körül! Az átfogó és a másik befogó **kúpot** ír le.

Ezt a kúpot forgatással hoztuk létre, ezért **forgáskúpnak** nevezzük.

Kúpokat lehet ettől eltérő módon is származtatni.

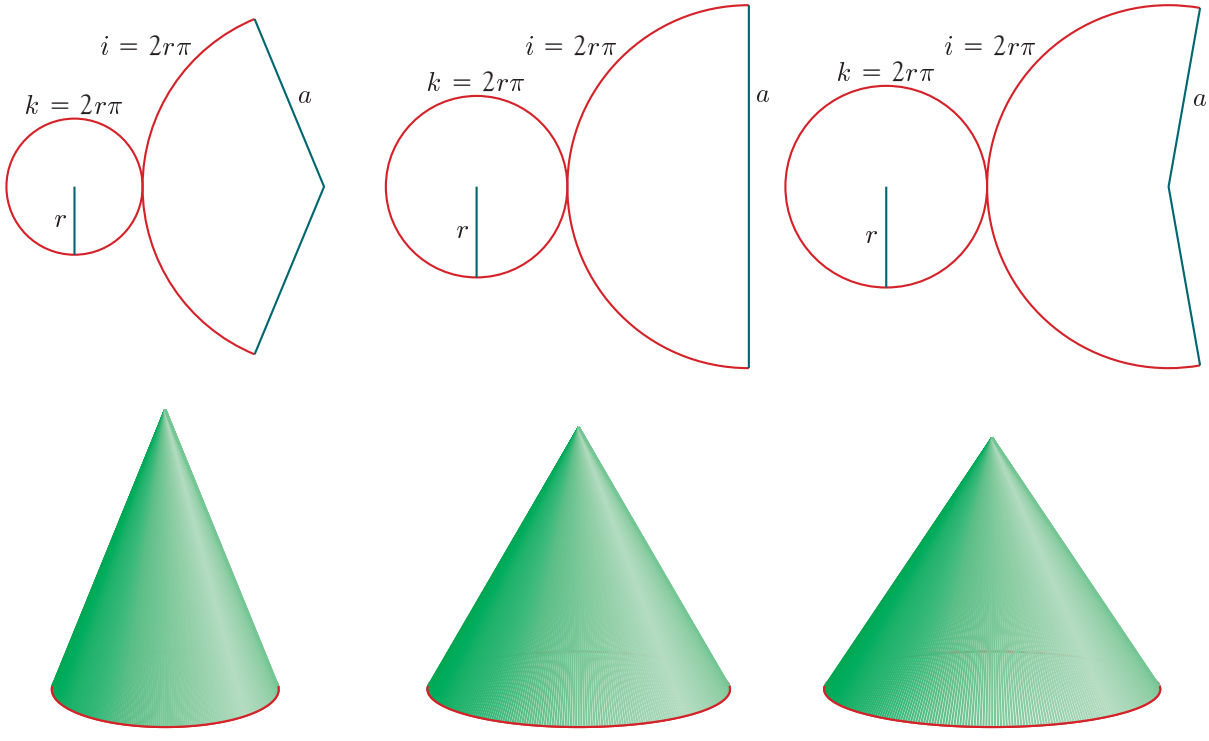


Az első ábrán egy ferde körkúp származtatását látjuk. Körkúpnak neveztük, mert a kiindulólap kör volt. A második ábrán ez a lap nem kör. Az így keletkező testeket kúpszerű testeknek nevezzük.

A továbbiakban mi csak a forgáskúppal foglalkozunk, ezért nekünk a kúp forgáskúpot fog jelenteni.

A kúpot egy körlap és egy görbe felület határolja. A körlap a kúp **alaplapja**, a görbe felület a **palástja**. A kúpnak nincs éle. Az alaplaptól legtávolabbi pontját **csúcsnak** nevezzük. A csúcs és az alaplap távolságát nevezzük a kúp **magasságának**.

A kúp hálózata egy körből és a kiterített palástból áll. A palást egy körcikk. Az alapkör k kerülete egyenlő a körcikk i ívének hosszával. A körcikk sugarát a-val szoktuk jelölni, és ez a **kúp alkotója**.



1. példa

Egy $a = 5$ cm sugarú körből két, egymással $120°$-os szöget bezáró sugár mentén kivágunk egy körcikket. Ez a körcikk lesz a palástja egy kúpnak. Mekkora sugarú kör lesz az alaplapja? Mekkora a kúp felszíne?

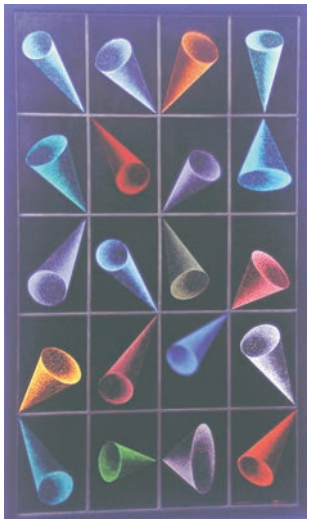
Tudjuk, hogy a körcikk ívének hossza egyenlő az alaplap kerületével. A körcikk most egy kör harmadrésze, ezért $i = \frac{2a\pi}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ (cm).

A szokásos jelöléssel az alapkör sugara legyen r, ekkor $2r\pi = \frac{10\pi}{3}$. Vagyis $r = \frac{5}{3}$ (cm).

Az alapkör sugara $\frac{5}{3}$ cm. Az alaplap területe: $T = r^2\pi = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \pi = \frac{25\pi}{9} \approx 8{,}7$ (cm^2).

A palást területe: $P = \frac{a^2\pi}{3} = \frac{25\pi}{3} \approx 26{,}2$ (cm^2).

A kúp felszíne: $A = T + P = 8{,}7 + 26{,}2 = 34{,}9$ (cm^2). Vagyis a kúp felszíne kb. 34,9 cm^2.



Hefter László üvegművész festett üvegképe

Általánosságban is mondhatjuk, hogy a kúp felszíne az alaplap és a palást területének összegével egyenlő. A palást egy körcikk, ezért meg kell vizsgálnunk a körcikk területének kiszámítási módját.

Ha a palást egy olyan körcikk, amelyről gyorsan látjuk, hogy a körnek hányadrésze, akkor a számolás könnyen elvégezhető. A körcikk íve és területe is ennyiedrésze lesz az eredeti körnek. Ezt láttuk az előző példában.

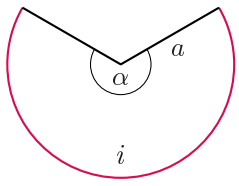
Gondoljunk az általános esetre! A körcikket határoló két sugár közötti szög legyen α, a körcikk sugara (a kúp alkotója) pedig a. Az $\frac{\alpha}{360°}$ aránnyal lesz egyenlő a körcikk ívhosszának és a kör kerületének aránya. A körcikk területének és a kör területének az aránya is ennyi.

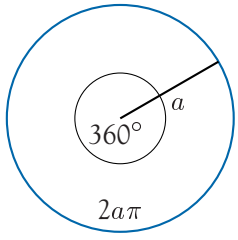
Vagyis $\frac{i}{2a\pi} = \frac{P}{a^2\pi}$, amiből $P = \frac{i \cdot a}{2}$.

Ezt felhasználjuk a kúp felszínének kiszámításánál, hiszen $i = 2r\pi$.

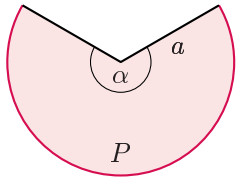
$$A = T + P = r^2\pi + \frac{i \cdot a}{2} =$$
$$= r^2\pi + \frac{2r\pi \cdot a}{2} =$$
$$= r^2\pi + ar\pi = r\pi(r + a).$$

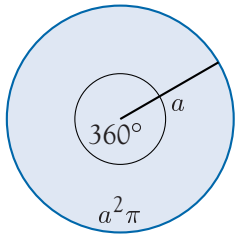
Vagyis a kúp felszíne: $A = r\pi(r + a)$.



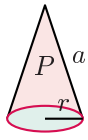


$$\frac{i}{2a\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$





$$\frac{P}{a^2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$



$2r\pi = i$

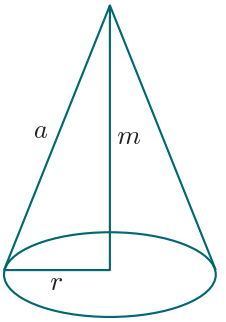
$T = r^2\pi$

2. példa

Számítsuk ki a kúp felszínét, ha alapkörének sugara $r = 5$ cm, a magassága pedig $m = 12$ cm!

A felszín kiszámításához az alkotót kell ismernünk.

Az a alkotó, az m magasság, és az r sugár egy derékszögű háromszög három oldala, ezért a Pitagorasz-tétel kapcsolatot teremt közöttük. Bármely kettő ismeretében a harmadik kiszámítható a következő összefüggéssel: $m^2 + r^2 = a^2$.



A mostani példában: $a = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (cm).

Vagyis: $A = r\pi(r + a) = 5 \cdot \pi \cdot (5 + 13) = 90\pi \approx 282{,}7$ (cm^2).

Ezek szerint a kúp felszíne kb. 282,7 cm^2.

Feladatok

K1 Készíts kúpot papírból!

E2 Számítsd ki a kúp felszínét, ha az alaplapjának sugara r, az alkotója a, magassága m!

a) $r = 7$ cm, $a = 12$ cm;

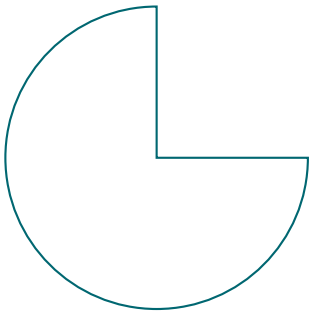
b) $r = 1{,}2$ dm, $a = 15$ cm;

c) $r = 7$ cm, $m = 10$ cm;

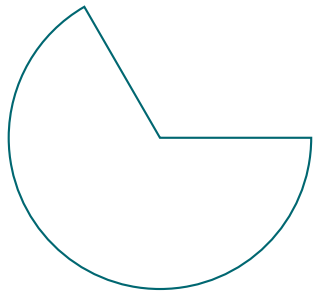
d) $r = 135$ mm, $m = 2$ dm.

E3 A következő palástokból kúpokat készítünk. Az ábrán látható körök sugara 3 cm, vagyis ennyi lesz a kúpok alkotója. A körcikkek középponti szöge sorban: 270°, 240°, 180°. Mekkora sugarú alaplapja lesz az egyes kúpoknak? Mekkora a kúpok felszíne?

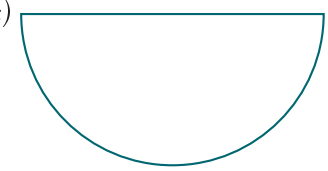
a)



b)



c)



E4 A színjátszó szakkör előadásához a varázslónak süveget szeretnénk készíteni színes kartonpapírból. Megmértük a fejét annak, akinek készítjük. A homloka közepén 51 cm-nek mértük a feje kerületét. A süveg alkotóját 30 cm-re tervezzük.

a) Mekkora lesz a süveg felszíne?

b) Rajzold le a süveg szabásmintáját kicsiben! A rajzodon 1 mm legyen az, ami 1 cm a valóságban!



E5 Két kúp alkotói egyenlő hosszúak. A két kúp biztosan egybevágó?

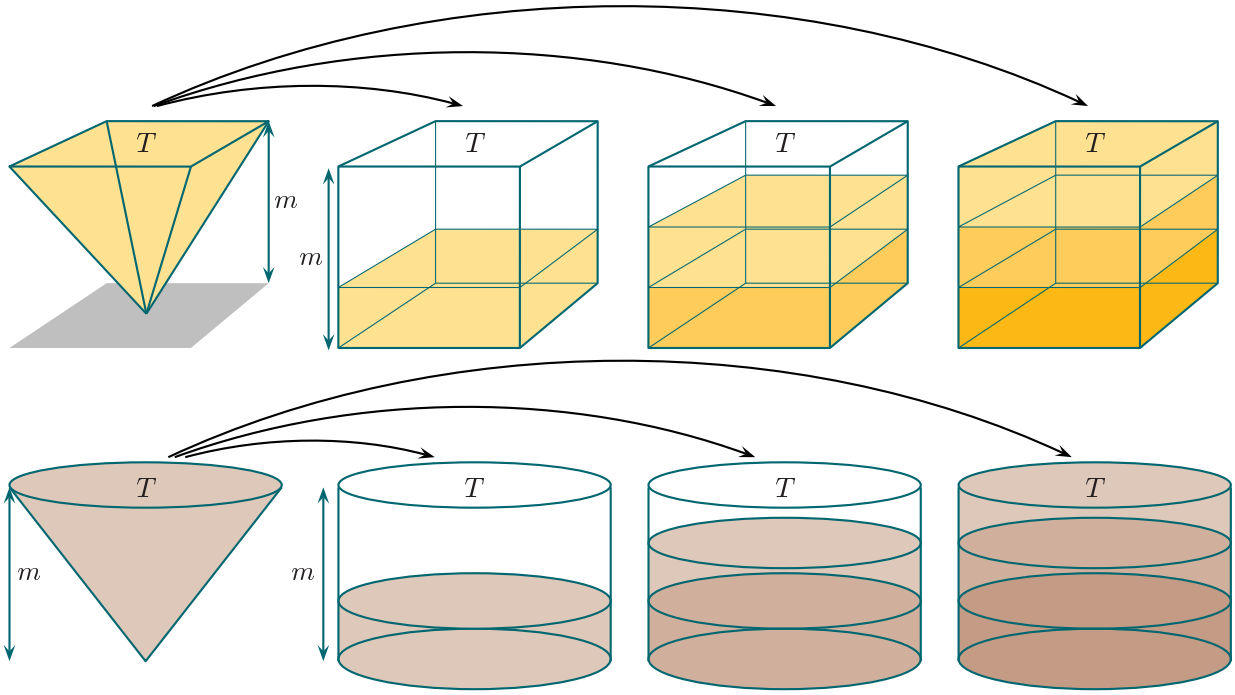
E6 Egy 3 dm magas kúpot a tengelyét tartalmazó síkkal kettévágtuk. A vágásfelület egy 7,2 dm^2 területű egyenlő szárú háromszög lesz. Számítsd ki a kúp felszínét!

E7 Egy templomtorony kúp alakú tetőszerkezetét a felújítás során rézlemezzel szeretnék lefedni. A kúp átmérője 9,2 méter, a magassága pedig 14 méter. Hány négyzetméter lemezre lesz szükség, ha a szakemberek szerint 4% hulladékkal is kell számolni?

A gúla és a kúp térfogata

(Emelt szintű, választható tananyag)

Figyeljük meg a képen látható kísérletet!



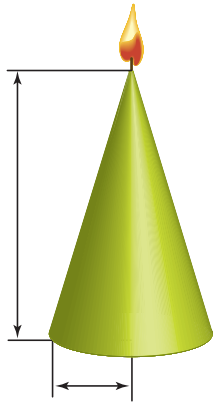
A gúlát háromszor kell megtöltenünk folyadékkal és beleönteni a hasábba, hogy az megteljen. A gyakorlat azt mutatja, hogy a hasáb térfogata háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú gúlának. Ugyanez igaz a henger és a kúp esetén is. A henger térfogata háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú kúpnak.

Ezért a gúlák, kúpok térfogatát a következő képlettel számítjuk ki: $V = \frac{Tm}{3}$, ahol T az alaplap területét, m a test magasságát jelenti.

A képlet bizonyítható, mi csak bizonyítás nélkül, a gyakorlat alapján elfogadjuk.

1. példa

Az „A gyertyás” üzletben változatos alakú és színű gyertyákat lehet vásárolni. A gyertyásmester megrendelésre bármilyen alakú gyertyát elkészít. 12 dm^3 faggyúból hány darab kúp alakú gyertyát tud készíteni, ha a kúp alaplapjának sugara 3,5 cm, alkotója pedig 12,5 cm?



Számítsuk ki egy gyertya térfogatát!

A Pitagorasz-tételt alkalmazva: $m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{12{,}5^2 - 3{,}5^2} = 12$.

A térfogat: $V = \frac{Tm}{3} = \frac{3{,}5^2 \cdot \pi \cdot 12}{3} = 49\pi \approx 154$ (cm^3).

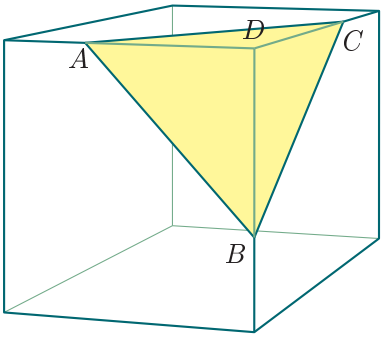
Vagyis egy gyertya térfogata kb. 154 cm^3, a faggyú mennyisége pedig 12 000 cm^3.

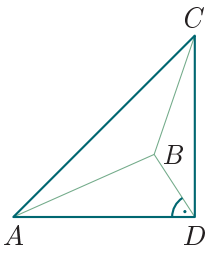
Az osztás eredménye: 12 000 : 154 ≈ 77,92.

Vagyis majdnem 78 darab gyertya elkészülhet, de biztosan 77 darabbal számolhatunk.

2. példa

A 12 cm élű kocka alakú margarin egyik sarkától mind a három élén 8 cm-re egy sík mentén levágunk egy darabot. A vágás síkjától milyen messze van a kocka levágott csúcsa?





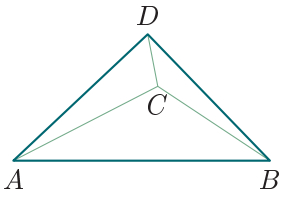
Készítünk egy vázlatrajzot!

A levágott $ABCD$ tetraédert nézhetjük úgy, mint egy ABD alaplapú, DC magasságú háromszög alapú gúlát.

Az ABD derékszögű háromszög területe: $T = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32\ (\text{cm}^2)$.

A magasság: $m = DC = 8\ (\text{cm})$.

Vagyis a gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{32 \cdot 8}{3} = \frac{256}{3}\ (\text{cm}^3)$.



A levágott $ABCD$ tetraédert nézhetjük úgy is, hogy az egy ABC alaplapú, x magasságú háromszög alapú gúla, ahol x az ABC háromszög síkjának és a D csúcsnak a távolságát jelöli.

Az ABC egy szabályos háromszög. Oldalának hosszát az ABD egyenlő szárú derékszögű háromszögből kapjuk, amelynek befogója 8 cm. Ezért $AB = BC = AC = 8\sqrt{2}\ (\text{cm})$.

Ezzel az oldalhosszal a szabályos háromszög területe: $t = \frac{(8\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{128\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$.

A gúla térfogatát már kiszámítottuk, ezért a következő összefüggést írhatjuk fel: $\frac{256}{3} = \frac{32\sqrt{3} \cdot x}{3}$.

Vagyis $x = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}62\ (\text{cm})$. A kocka csúcsa kb. 4,62 cm-re van a vágás síkjától.

Feladatok

K1 Számítsd ki a gúla térfogatát, ha az alaplapja négyzet, az oldallapok pedig egybevágó háromszögek! Az alapél a, az oldalél b, a testmagasság m, az oldallap magassága m_o.

a) $a = 15$ cm, $m_o = 18$ cm;

b) $a = 12$ cm, $m_o = 9$ cm;

c) $a = 1{,}2$ dm, $b = 19$ cm;

d) $a = 10$ cm, $b = 18$ cm;

e) $m = 2{,}4$ dm, $m_o = 2{,}6$ dm;

f) $m = 5$ cm, $m_o = 6$ cm.

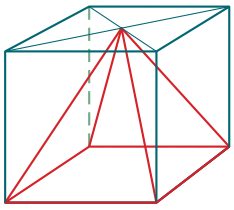
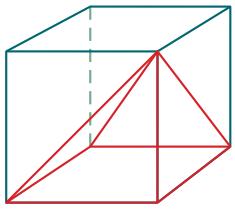
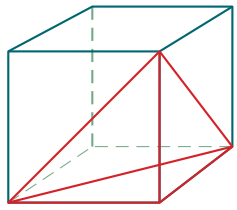
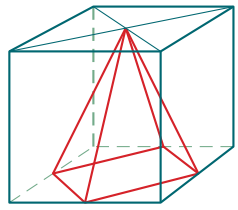
K2 Egy 0,8 m oldalú szabályos hatszög fölé 12 dm magas gúlát építünk. A gúla minden oldallapja egybevágó háromszög. Mekkora a gúla térfogata?

K3 Egy négyzet alapú gúla térfogata 120 cm^3, alapéle 5 cm. Az oldallapjai egybevágó háromszögek. Milyen magas a gúla?

K4 Egy négyzet alapú gúla térfogata 300 cm^3, a magassága 9 cm. Az oldallapjai egybevágó háromszögek. Számítsd ki az alapél és az oldalél hosszát!

K5 Az uszály homokszállítmányából kúp alakú homokhegyet raktak le a folyóparton. A kúp alaplapjának kerülete 65 méter, a magassága 15 méter. A szállítást végző teherautókra 4 m^3-nél több homokot nem lehet felpakolni. Hány teherautó tudja elszállítani ezt a mennyiséget?

K6 Egy 9 cm élű kockából vágjuk ki a következő gúlákat! Számítsd ki a kivágott testek térfogatát!

a)  *b)*  *c)*  *d)* 

K7 Az adatok kúpra vonatkoznak, és centiméterben adtuk meg azokat. Add meg a hiányzó számokat!

r	11	12		7	8	9
a	61		84			
m		35	85			
A				224π		216π
V					320π	

K8 Egy 15 cm átmérőjű, 30 cm magasságú hengerből a legnagyobb térfogatú kúpot esztergályozták ki. Hány cm^3 lett a hulladék?

K9 Az 5 cm és 12 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatjuk

a) a rövid befogója; *b)* a hosszú befogója; *c)* az átfogója körül.

Mekkora az így kapott test térfogata?

E10 Ádám egy toronyszobában lakik. A szoba alapja egy 3,7 m oldalhosszúságú négyzet. 1,1 m magasságig függőleges a szoba oldalfala. Erre épült a gúla alakú tető, amelynek fölső csúcsa a padlótól 3,9 m magasan helyezkedik el. Hány köbméter Ádám szobájának térfogata?



9.

Gömb

Már ötödik osztályban megállapítottuk, hogy a labdák, golyók azonos geometriai tulajdonsággal rendelkeznek. Ezek a testek a **gömbök**. A síkban a kör esetén megkülönböztettük egymástól a körvonalat és a körlapot. Ezt követjük a térben is, és beszélünk **gömbfelületről** és **gömbtestről**.

Gömbfelületet alkotnak a tér azon pontjai, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak.

Az adott pont a **gömb középpontja**, az adott távolság a **gömb sugara**.

Gömbtestet alkotnak azok a térbeli pontok, amelyek egy adott ponttól adott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.

A gömbfelület két tetszőleges pontját összekötő szakaszt **húrnak** nevezzük.

Ha egy gömböt egy síkkal elvágunk, akkor a metszet kör lesz. Ezen körök közül a legnagyobb a **főkör**. A főkörök középpontja azonos a gömb középpontjával, a sugara egyben a gömb sugara is.

Ha egy kört átmérője körül forgatunk, akkor a körvonal pontjai gömbfelületet írnak le. Ezért **a gömb is forgástest**.

A gömbnek nem lehet síkban megrajzolni a hálózatát, ezért a felszín kiszámításánál nem követhetjük az eddig bevált módszerünket. Nem tudjuk a síkban kiterített hálózat területét meghatározni.

A gömbfelszín és -térfogat kiszámítására ismert képleteket a matematika magasabb eszközeinek segítségével már bebizonyították a matematikusok.

Fontos tudnivaló *(Emelt szintű, választható tananyag)*

A gömb felszíne: $A = 4r^2\pi$. A gömb felszíne a főkör területének a négyszeresével egyenlő.

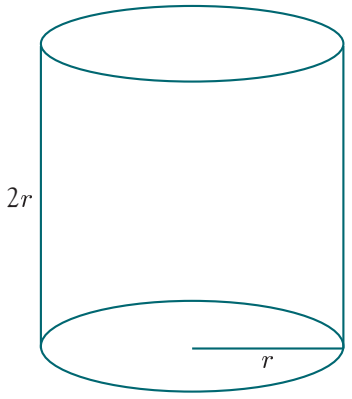
A gömb térfogata: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$.

A gömb köré írt henger alapkörének sugara r, magassága $2r$, ezért a henger térfogata:

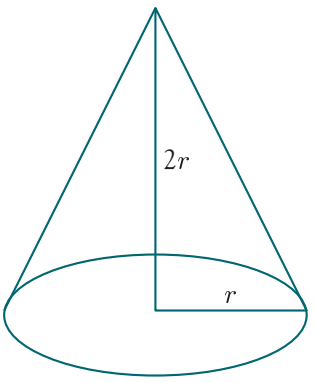
$V_h = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$.

Vegyük a henger térfogatának a $\frac{2}{3}$-részét, ekkor kapjuk a gömb térfogatát.

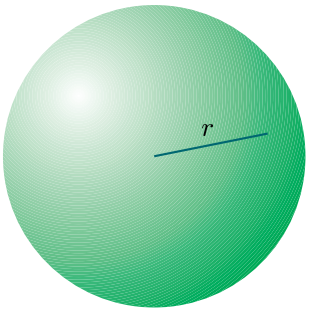
Tudjuk, hogy a henger térfogatának $\frac{1}{3}$-része egy kúp térfogatával egyenlő, ezért a megfelelően választott adatokkal nagyon érdekes összefüggés adódik a gömb, a kúp és a henger térfogata között.



$V_{\text{henger}} = 2r^3\pi$



$V_{\text{kúp}} = \frac{2r^3\pi}{3}$



$V_{\text{gömb}} = \frac{4r^3\pi}{3}$

Vagyis $V_{\text{henger}} = V_{\text{kúp}} + V_{\text{gömb}}$.

A térfogatszámítási kérdésekkel már az ókorban is foglalkoztak. Kr. e. 2000 körül már olyan papiruszokat készítettek, amelyen megtaláljuk a kocka, a téglatest, a forgáshenger kiszámítását. Később Arkhimédész (ejtsd: arkhimédész, Kr. e. 287–212) a gömb felszínének és térfogatának keresésében nagyon fontos eredményhez jutott. Arkhimédészt ma is az ókor legnagyobb matematikusaként tisztelik.

Plutarkhosz (ejtsd: plutarkosz, Kr. u. 100 körül) írta róla: *A geometriában nem akadt egyetlen nehezebb és fogasabb kérdés sem, amelyet ne a legegyszerűbben és a legvilágosabban fejtett volna ki. … És ez az ember, aki oly sok nagyszerű találmányt mondhatott magáénak, állítólag azt kérte barátaitól és családja tagjaitól, hogy halála után állítsanak egy gömböt tartalmazó hengert a sírjára, s írják fel rá azt a viszonyt, amely a körülvevő nagyobb test és a benne foglalt test között fennáll.*

Arkhimédész a legnagyobb felfedezésének tartotta azt, hogy a gömb felszíne egyenlő a köré írt hengerpalást területével, és a gömb térfogata a köré írt henger térfogatának $\frac{2}{3}$ része. Ezért kérésének megfelelően sírját egy hengerbe írt gömbbel jelölték meg. Ciceró 200 évvel később ez alapján találta meg az elhagyatott sírt Szirakúzában.



Eukleidész

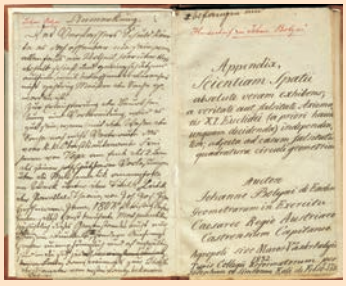
A tér geometriája című fejezetben főleg a testek felszínének és térfogatának meghatározásával foglalkoztunk. Az eddigi években már megfigyelhettük, hogy a geometriai kérdések jelentős részét síkban vizsgáltuk. A szerkesztések, számítások is sok esetben síkbeli problémák voltak. Mivel bolygónk felülete inkább gömbfelület, mint sík, ezért amikor két várost gondolatban összekötünk, akkor az inkább egy körívnek tekintendő és nem szakasznak.



Lénárt-gömb

Nagyon érdekes területe a geometriának az úgynevezett **gömbi geometria**, amely a gömbfelületen vizsgálódik. A matematikai és azon belül a geometriai ismeretek összefoglalásában kiemelt fontosságú *Eukleidész* munkája, aki Kr. e. kb. 300-ban megírta az *Elemek* című könyvét. Az általunk tanultakat ezek alapján **euklideszi geometriának** nevezzük. A gömbi geometriát ennek megkülönböztetéseként a **nemeuklideszi geometriák** közé soroljuk. A gömb felületén új definíciókat, tételeket kell megfogalmazni. Például az általunk megszokott egyenesek szerepét a gömbi geometriában a gömb felületére rajzolható legnagyobb átmérőjű kör játssza. Innen kiindulva kell megfogalmazni olyan fogalmakat, mint például merőleges egyenesek, háromszögek, szögösszeg a háromszögekben stb.

Ezeknek a szemléltetésére kiválóan alkalmas az úgynevezett rajzgömbkészlet, amelyet *Lénárt István* fejlesztett ki, és a világ „Lénárt sphere" néven ismer.



Appendix

A nemeuklideszi geometriák terén fontos megemlítenünk Bolyai Jánost, aki 1820 és 1823 között kidolgozta korszakalkotó felfedezését, amelyet hiperbolikus geometriának nevezünk. Apjának, Bolyai Farkasnak ezt írta felfedezéséről egyik levelében: „semmiből egy új, más világot teremtettem". Tudományos felfedezése apja *Tentámen* című munkájának függelékeként jelent meg *Appendix* címen.

A szakirodalomban, a világhálón nagyon sok érdekesség található ebben a témában.

1. példa

Egy belül üres vasgolyót tervezünk. A golyó 6 cm sugarú, a falvastagsága mindenütt 1 cm.

a) A külső felületét szeretnénk lefesteni. Hány cm^2-t kell lefesteni?

b) Mekkora lesz a tömege ennek a vasgömbnek, ha 1 cm^3 vas 7,86 g tömegű?

a) A 6 cm sugarú gömb felszínét kell kiszámítani.

$A = 4 \cdot 6^2 \cdot \pi \approx 452{,}4$ (cm^2).

Vagyis kb. 452,4 cm^2 nagyságú felületet kell majd lefesteni.

b) A 6 cm sugarú gömb belseje üres. Mivel a falvastagság 1 cm, ezért a belső üreg egy 5 cm sugarú gömb. Vagyis a vas térfogata a két gömb térfogatának a különbsége.

$$V_{vas} = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot 5^3 \cdot \pi}{3} \approx 381{,}18 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vagyis kb. 381,18 cm^3 vasat kell felhasználni a golyó elkészítéséhez. Mivel 1 cm^3 vas tömege 7,86 g, ezért a tömege $381{,}18 \cdot 7{,}86 \approx 2996{,}1$ g.

A belül üres vasgömb tömege kb. 3 kg lesz.

Feladatok

K1 Számítsd ki a gömb felszínét és térfogatát, ha

a) $r = 18$ cm; *b)* $r = 4{,}5$ cm; *c)* $r = \frac{7}{2}$ cm; *d)* $r = 1{,}2$ cm!

K2 a) Két 3 cm sugarú félgömb felszíne mennyivel több, mint egy 3 cm sugarú gömb felszíne?

b) Két 3 cm sugarú gömb felszíne mennyivel kevesebb, mint egy 6 cm sugarú gömb felszíne?

c) Két 3 cm sugarú gömb térfogata mennyivel kevesebb, mint egy 6 cm sugarú gömb térfogata?

K3 Egy 7 cm élű kockából a legnagyobb gömböt esztergályozták ki. Mekkora az így kapott gömb felszíne és térfogata?

K4 Egy gömb alakú víztartály átmérője 3 méter. A teli tartályból áteresztik a vizet egy 10 m^2 alapterületű téglatest alakú medencébe. Milyen magasan lesz a víz a medencében?

K5 Az 5 cm sugarú hengerben víz van.

a) Mekkorát emelkedik a vízszint, ha a hengerbe beledobunk egy 4 cm sugarú üveggömböt, és a gömböt teljesen ellepi a víz?

b) A hengerbe beledobunk egy 4 cm sugarú üveggömböt, és ekkor a víz szintje 8 cm magasan lesz. Milyen magasan volt a víz szintje eredetileg?

K6 A receptnek megfelelően összeállítottuk a kókuszgolyó tésztáját. Kaptunk egy 15 cm átmérőjű gömböt. Ebből 3 cm átmérőjű kis gömböket formálunk. Hány darab kókuszgolyó készül így?

K7 Az 5 cm sugarú gömb sugarát megnöveltük 1 cm-rel. Hányszorosára növekedett a gömb felszíne és hányszorosára a térfogata?

E8 Két 4 cm sugarú gömb alakú gyurmából egy nagy gömböt gyúrunk. Mekkora lesz az új gömb sugara? A számítások megkezdése előtt tippelj!

10. Valószínűségszámítás

Ebben a fejezetben a gondolkodás valószínűségi szemléletmódjával ismerkedünk meg, technikái alkalmazásának segítségével juthatunk közelebb a bennünket körülvevő világ alapvető jelenségeinek, lezajló folyamatainak megértéséhez, feltárásához.

„A gondolkodás az embert a teljesítmény elégedett érzésével tölti el, különösen akkor, ha egy rejtélyes problémát sikerült megoldania, és amellett jó mulatság is lehet. Gyakran éppen játékokban és rejtvényekben tapasztaljuk először, hogy a gondolkodás szórakoztató, különösen akkor, ha érdekes és váratlan eredményre vezet, olyanra, amelyet nem is sejtettünk, míg a gondolatmenetet végig nem vittük."

Warren Weaver: Szerencse kisasszony

Warren Weaver [ejtsd: varen víver] (USA, 1894–1978) nemzetközi hírű matematikus, szakíró és tudományszervező. A valószínűségszámítás mellett fő szakterülete az információelmélet volt.

Mennyit készüljünk egy vizsgára, ha csak kétféle értékelés van: megfelelt, nem felelt meg?

Mennyi pénzt érdemes befektetni egy új, fontos kutatásba?

Melyik csapatra mekkora összeggel bölcs fogadni (érdemes-e egyáltalán) a BL-döntőn?

A sok egyéb csomagunk mellett vigyünk-e magunkkal esernyőt is, ha a meteorológusok szerint helyenként eső várható?

Kössünk-e biztosítást egy kétnapos kirándulás esetére? Ha igen, mekkora összegre?



Rengeteg hasonló kérdés vetődik fel mindennapjainkban. Nagyon nehéz „jó" választ adni a kérdésekre, de ha kialakult bennünk a valószínűségi szemléletű gondolkodásmód, akkor közelebb kerülhetünk egy „megközelítőleg jó" válasz megadásához. A különböző játékok, a körülöttünk lévő világ általában jóval összetettebb, bonyolultabb, mint amit a matematikában eddig megszokhattunk. Ezek vizsgálatához, elemzéséhez van szükség a valószínűségi gondolkodásmódra.

Végezetül néhány sor szintén Weavertől:

„A második világháború alatt dr. Vannevar Bush rám bízta az általa vezetett Tudományos Kutatási és Fejlesztési Hivatal Alkalmazott Matematikai Részlegének vezetését. Ennek a csoportnak az volt a feladata, hogy eredményesen alkalmazzon matematikát számos védelmi és támadási probléma megoldásában. Kiderült, hogy a problémák nagy részéhez valószínűségszámítási és statisztikai módszerekre volt szükség. Így kerültem napi 18 órás kapcsolatba számos matematikus honfitársammal, akik a szabadság ügyének szentelték képességeiket. A tapasztalat megerősítette azt a kezdetektől fogva vallott meggyőződésemet, hogy a problémának az a megközelítési módja, amellyel a valószínűségszámításban találkoztunk, nemcsak érdekes, nemcsak szórakoztató, hanem elsőrendű fontosságú. A modern világ számos kérdésénél ugyanis csak ez a fajta gondolkodásmód vezet eredményre."

Áttekintés

7. osztályban megismertük a valószínűségszámítás alapfogalmait, jelöléseit.

Kísérletet akkor végzünk, ha egy véletlen jelenséget megfigyelünk. (Például a kocka feldobása.)



A kísérlet kimenetelét **elemi eseménynek** nevezzük. Például elemi események a kockadobásnál: 1-et dobunk, 2-t dobunk, 3-at dobunk, 4-et dobunk, 5-öt dobunk, 6-ot dobunk. Az elemi események egymást kizáró események. Ez azt jelenti, hogy két elemi esemény egyidejűleg nem következhet be, azaz ha az egyik bekövetkezett, akkor a másik biztosan nem.

Az elemi eseményeket az ábécé nagybetűivel jelöljük:

A: 1-et dobtunk; B: 2-t dobtunk;

C: 3-at dobtunk; D: 4-et dobtunk;

E: 5-öt dobtunk; F: 6-ot dobtunk.

Több elemi eseményt összevonhatunk egy **eseménnyé**.

Például hogy a kockával páros számot dobtunk. Ez akkor következett be, ha B vagy D vagy F elemi események bármelyike bekövetkezett.

Az eseményeket is az ábécé nagybetűivel jelöljük.

Egy esemény **gyakorisága** az a szám, amely megmutatja, hogy az adott esemény a kísérlet során hányszor fordult elő.

Például egy kísérlet során 58 darab 6-os dobásunk volt. Az 58 a „6-os dobás” esemény gyakorisága.

Egy esemény **relatív gyakorisága** az az érték, amely meghatározza, hogy a vizsgált esemény milyen arányban fordult elő a kísérlet során. Például ha 25 sorsolásból 7-szer nyertünk, akkor a nyerés gyakorisága 7, relatív gyakorisága $\frac{7}{25}$.

Gyakoriságok, relatív gyakoriságok ábrázolásához a statisztikában tanult diagramokat használhatjuk.

Megfigyelhetjük, hogy egy-egy esemény relatív gyakorisága nagyon sok kísérlet esetén mindig körülbelül ugyanannyinak adódik. Ezt az értéket nevezzük az esemény **valószínűségének**.

$P(A)$ az A esemény valószínűsége, ahol $0 \leq P(A) \leq 1$.

A **lehetetlen esemény** olyan esemény, amely sohasem következik be. Ennek valószínűsége 0.

A **biztos esemény** olyan esemény, amely biztosan bekövetkezik.

A biztos esemény valószínűsége 1.

Feladatok

K1 Négy betűt: A, A, M, M véletlenszerűen egymás mellé írunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy éppen a MAMA szót írtuk le?

K2 Három betűt: K, P, É véletlenszerűen egymás mellé írtunk. Mennyi a valószínűsége, hogy értelmes magyar szót írtunk le?

K3 Egy 500 Ft-ost fémpénzekre váltottunk. 1 darab 200-ast, 1 darab 100-ast, 2 darab 50-est, 3 darab 20-ast és 4 darab 10-est kaptunk.

a) Véletlenszerűen kiveszünk egy érmét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 200-ast; 100-ast; 50-est; 20-ast; 10-est vettünk ki?

b) Véletlenszerűen két érmét választunk ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két érme összértéke legalább 150 Ft?

K4 Az ötös lottón az első 90 pozitív egész számból húznak ki ötöt.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elsőnek kihúzott szám

– páros, – hárommal osztható, – kisebb mint 40?

b) Tudjuk, hogy az elsőnek kihúzott nyerőszám a 36 volt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után a másodiknak kihúzott nyerőszám

– páros, – hárommal osztható, – kisebb mint 40?

K5 Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötös lottón az első két kihúzott nyerőszám mindegyike páros?



K6 Karácsonyra háromféle szaloncukrot vásároltunk: marcipánost, zseléset, csokisat. A dobozokban rendre 50 darab, 74 darab, 60 darab szaloncukor volt. Összekevertük a háromféle szaloncukrot, és véletlenszerűen kiválasztottunk egyet.

a) Melyik ízesítésű szaloncukor választása mekkora valószínűséggel történhet, ha mindig a teljes készletből választunk?

b) Kivettünk egy-egy különböző ízesítésű szaloncukrot. Ezután ismét véletlenszerűen választottunk egyet. Változott-e a választás valószínűsége az előző esethez képest?

K7 Egy csoportban lányok és fiúk vegyesen vannak, összesen 20-an. Ha találomra választunk egy gyereket közülük, akkor annak a valószínűsége, hogy lányt választottunk, 20%.

a) Hány fiú lehet a csoportban?

b) Véletlenszerűen választunk két gyereket a csoportból. Az alábbi három esemény közül melyik a legvalószínűbb? Adjuk meg az események valószínűségét!

A: Két lányt választottunk.

B: Két fiút választottunk.

C: Egy lányt és egy fiút választottunk.

E8 Családi lottó. A Harangozó családban a gyerekek a következőképpen kapnak zsebpénzt havonta. A gyerekek minden szombaton – egymástól függetlenül – választanak kettőt-kettőt az első kilenc pozitív egész szám közül. Másnap este Apa is kiválaszt véletlenszerűen kettőt a kilencből. Minden gyerek annyiszor 1000 Ft-ot kap a következő hétre, ahány találata van.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen sorsoláson Petra, a legidősebb gyerek 2000 Ft zsebpénzt kap?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Petra kap zsebpénzt a következő hétre?

A válaszokat százalék alakban add meg!

E9 Tegyük a ceruzánk hegyét a koordináta-rendszerben az origóra. Lépjünk egymás után háromszor 1 egység hosszúságú lépést fel, le, balra vagy jobbra, véletlenszerűen. (Például egy pénzérmével kétszer egymás után dobjuk ki. FF esetén jobbra, II esetén balra, FI esetén felfelé, IF esetén lefelé lépünk.)

a) Hova kerülhet a ceruzánk hegye a harmadik lépés után? Adjuk meg a pontok koordinátáit!

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan pontra érkezünk 3 lépés után, amelynek mind a két koordinátája

– páratlan, – páros?

E10 A 0, 2, 4, 6 számokat egy-egy cédulára felírtuk, majd egy dobozba helyezve véletlenszerűen kihúztunk hármat, amelyeket a húzás sorrendjében egymás mellé tettünk.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) háromjegyű számot kaptunk,
b) 6-tal osztható számot kaptunk,
c) 400-nál nagyobb számot kaptunk?

(ha a szám 0-val kezdődik, akkor tekintsük kétjegyűnek)

E11 Írjunk le véletlenszerűen egy négyjegyű számot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első és a harmadik számjegye 5?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második és a negyedik számjegy 5?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy van két 5-ös számjegy a leírt számban?

E12 Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg nem dobunk hatost.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy elsőre hatost dobunk?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodikra dobjuk az első hatost?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy harmadikra dobjuk az első hatost?

d) Az előzőek alapján mit gondolsz, hányadik dobásra dobjuk legnagyobb valószínűséggel az első hatost?

A valószínűség klasszikus modellje

10.

Megfigyeltük, hogy a kockadobásnál az elemi események relatív gyakoriságai ugyanazon szám körül ingadoznak. Ez azt jelenti, hogy az elemi események egyforma eséllyel következnek be. Mivel ekkor 6 egyenlő valószínűségű elemi esemény lesz, ez az érték az $\frac{1}{6}$.

Szabályos érme esetén ez az érték $\frac{1}{2}$.

A valószínűségszámításban azt a modellt, amelyben az elemi események száma véges, és minden elemi esemény egyenlő valószínűséggel következik be, **klasszikus valószínűségi modellnek** nevezzük.

1. példa



Egy szabályos oktaéder lapjait számozzuk meg 1-től 8-ig! Dobjuk fel az oktaédert! Mi a valószínűsége annak, hogy prímszámot dobtunk?

Jelöljük B-vel a vizsgált eseményt! B: A dobott szám prímszám.

Elemi események: A_1: 1-et dobtunk; A_2: 2-t dobtunk; …; A_8: 8-at dobtunk.

Szabályos oktaéderrel azonos valószínűséggel dobhatjuk bármelyik számot, így az elemi események valószínűsége egyaránt $\frac{1}{8}$.

A B esemény akkor következik be, amikor az A_2, A_3, A_5, A_7 elemi esemény valamelyike bekövetkezik. Így a B esemény valószínűsége:

$$P(B) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

A B esemény négy ugyanakkora valószínűségű esemény együtt, ezért négyszer akkora a valószínűsége, mint egy elemi esemény valószínűsége.

A példa alapján is megállapítható: **egy esemény valószínűsége egyenesen arányos az eseményt alkotó elemi események számával.** Fontos feltétel, hogy az állítás csak akkor igaz, ha az elemi események egyenlő eséllyel következnek be, és az összes elemi esemény száma véges.

2. példa

Dobjunk fel egy kék és egy zöld dobókockát egyszerre! Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét dobókockán páros számot dobtunk?

Olyan sokszor elvégezni a kísérletet, hogy megfigyeljük azt, hogy a relatív gyakorisági értékek milyen szám körül ingadoznak, elég reménytelen. Keressünk más utat!

Számoljuk össze, hány lehetőség adódik a két kockán, majd nézzük meg, melyek felelnek meg a feltételnek!

Készítsünk egy olyan táblázatot, amely megmutatja, hogy melyik dobókockán milyen számot dobhatunk!

A csillaggal jelölt cella azt mutatja, hogy a zöld dobókockával 4-est, a kék dobókockával 2-est dobtunk.

$6 \cdot 6 = 36$ cella van, azaz 36-félét dobhatunk a két kockával. Minden dobás valószínűsége $\frac{1}{36}$.

Jelöljük sárgával azokat a cellákat, amelyekben mindkét dobás páros!

Zöld \ Kék	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4		*				
5						
6						

9 ilyen eset van, minden eset $\frac{1}{36}$ valószínűségű, ezért annak a valószínűsége, hogy mindkét szám páros: $9 \cdot \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

3. példa

Dobjunk fel egy szabályos dobókockát háromszor egymás után! Minden dobás után írjuk egymás mellé, mit dobtunk! Mi a valószínűsége annak, hogy háromjegyű páratlan számot dobtunk?

A háromjegyű szám számjegyei egymástól függetlenül, azonos eséllyel választódnak ki a dobás során.

A százasok helyi értékére a 6 szám bármelyike kerülhet. Ez igaz a további helyi értékekre is. Tehát összesen $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ különböző számot dobhatunk. Egy ilyen háromjegyű szám dobásának valószínűsége $\frac{1}{216}$.

A vizsgált esemény pontosan akkor következik be, ha harmadikra 1-et, 3-at vagy 5-öt dobtunk. Ezért a páratlan számok száma: $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$.

Mivel az elemi események egyenlő valószínűségűek, és az elemi események aránya $108 : 216$, ezért $P(\text{a szám páratlan}) = 108 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$.

Eredményeinket a következő általános alakban is megfogalmazhatjuk:

Fontos tudnivaló

$$\text{A vizsgált esemény valószínűsége} = \frac{\text{A kedvező elemi események száma}}{\text{Az összes elemi esemény száma}}.$$

(A valószínűség meghatározásának ezt a módját Pierre-Simon Laplace (ejtsd: pier-szimon láplász, 1749–1827) vezette be. Laplace francia nemzetiségű matematikus, fizikus, csillagász volt.)

4. példa *(Választható tananyag)*

A „háromkocka-probléma” néven merült fel a következő klasszikus kérdés:
Három teljesen egyforma szabályos dobókockával dobva minek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy a három dobott szám összege 9, vagy annak, hogy 10?

Ha három kockával dobunk, akkor az összegeket így kaphatjuk:

A dobott számok összege 9		A dobott számok összege 10	
a: 1 + 2 + 6	d: 1 + 3 + 5	p: 1 + 3 + 6	s: 1 + 4 + 5
b: 1 + 4 + 4	e: 2+2+5	q: 2 + 2 + 6	t: 2 + 4 + 4
c: 2 + 3 + 4	f: 3 + 3 + 3	r: 2 + 3 + 5	v: 3 + 3 + 4

Mindkét összeg hatféleképpen állhat elő, így arra gondolhatunk, hogy az események valószínűsége egyenlő. **Jó volt-e a következtetésünk?**

Tekintsük a következő kísérletet!

Minden kockán bármely dobás azonos valószínűséggel fordul elő, függetlenül attól, hogy mi a másik két dobás kimenetele. Ezért az összes dobáshármasok száma $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Ennyi az összes elemi esemény száma.

Vegyünk három teljesen egyforma dobókockát, és fessük be őket különböző színűekre: pirosra, kékre, zöldre! A színek szerint így meg tudjuk különböztetni a kockákat egymástól.

Milyen elemi eseményekre bonthatók a vizsgált esetek? Ha három különböző számot dobtunk, akkor ez a színezés miatt hatféleképpen fordulhat elő.

Például: 1; 2; 6; 1; 2; 6; 1; 2; 6; 1; 2; 6; 1; 2; 6; 1; 2; 6.

Ha pontosan két különböző számot dobtunk, akkor ez a színezés miatt háromféleképpen fordulhat elő. Például: 1; 4; 4; 1; 4; 4; 1; 4; 4.

Ha azonos számokat dobtunk, akkor ez a színezés miatt csak egyféleképpen fordulhat elő. Például: 1; 3; 3.

A dobott számok összege 9		A dobott számok összege 10	
a: 1 + 2 + 6 hatféleképpen	d: 1 + 3 + 5 hatféleképpen	p: 1 + 3 + 6 hatféleképpen	s: 1 + 4 + 5 hatféleképpen
b: 1 + 4 + 4 háromféleképpen	e: 2+2+5 háromféleképpen	q: 2 + 2 + 6 háromféleképpen	t: 2 + 4 + 4 háromféleképpen
c: 2 + 3 + 4 hatféleképpen	f: 3 + 3 + 3 egyféleképpen	r: 2 + 3 + 5 hatféleképpen	v: 3 + 3 + 4 háromféleképpen

Tehát a 9 mint összeg összesen 25-ször, a 10 mint összeg 27-szer állhat elő különböző módon.

Ha egy olyan ember dobna a színezett kockákkal, aki nem tudja a színeket megkülönböztetni, attól még nem változna a lehetőségek száma. Tehát az összegek ugyanakkora valószínűséggel fordulnának most is elő.

Ha most letörölnénk a színezéseket a kockákról, és ezzel dobálna a színeket megkülönböztetni nem tudó ember, attól sem változna a lehetőségek száma.

A színezetlen kockákkal egy színeket látó ember dobásainál sem változhatnak a lehetőségek számai, hiszen a kockák „nem tudják”, hogy színesek-e, vagy sem.

Összefoglalva: Az elemi események meghatározása nem minden esetben könnyű, de a példa felhívta a figyelmünket arra, hogy körültekintően kell eljárnunk.

Kockadobásoknál a kockák mindig úgy „viselkednek”, mintha különböző színűek lennének.

Ennek megfelelően: $P(\text{9 az összeg}) = \frac{25}{216}$; $P(\text{10 az összeg}) = \frac{27}{216}$.

Feladatok

K1 Dobj fel három egyforma érmét 100-szor!

a) Jegyezd táblázatba a kimenetelek számát aszerint, hogy hány írás volt egy dobásban!

b) Minden esemény azonos gyakorisággal fordult elő?

c) Mivel magyarázható az előbbi válaszod?

K2 Dobj fel három különböző érmét 100-szor!

a) Jegyezd táblázatba a kimenetelek számát aszerint, hogy hány írás volt egy dobásban!

b) Minden esemény azonos gyakorisággal fordult elő?

c) Mivel magyarázható az előbbi válaszod?

K3 Szerinted melyik feladatban lehet nagyobb esély a két fej és egy írás dobásra, az elsőben, vagy a másodikban?

K4 Két pénzérmét dobunk fel egyszerre.

a) Sorold fel, milyen kimenetelei lehetnek a kísérletnek!

b) Határozd meg az egyes kimenetelek valószínűségét!

K5 Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockával dobva a dobott számok összege 7?

K6 Két kockával dobva melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége?

A = a dobott számok összege 5;

B = a dobott számok összege 9.

K7 Mennyi a valószínűsége annak, hogy három kockával dobva a dobott számok összege 16?

E8 Egy tizenkétlapú testtel (dodekaéderrel) dobunk. Mit gondolsz, minek nagyobb az esélye: annak, hogy egy dodekaéderrel 8-at dobunk, vagy annak, hogy két kockával dobva a számok összege 6?





Összetett események valószínűsége

(Emelt szintű, választható tananyag)

1. példa

Dobjunk fel egy szabályos dobókockát háromszor egymás után! Minden dobás után írjuk egymás mellé, mit dobtunk! Mi a valószínűsége annak, hogy a háromjegyű szám minden számjegye páros?

I. megoldás. Számoljuk össze a lehetőséget az előző példa mintájára! A feltételnek

– a százasok helyi értékére a 2, 4, 6 számok felelnek meg;

– a tízesek helyi értékére szintén a 2, 4, 6 számok felelnek meg;

– az egyesek helyi értékére is a 2, 4, 6 számok felelnek meg.

Bármelyik jó százas kezdéshez bármelyik megfelelő tízes folytatás, végül bármelyik helyes egyes befejezés jó. Így a feltételnek megfelelő számok száma $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Az összes lehetséges háromjegyű számok száma $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

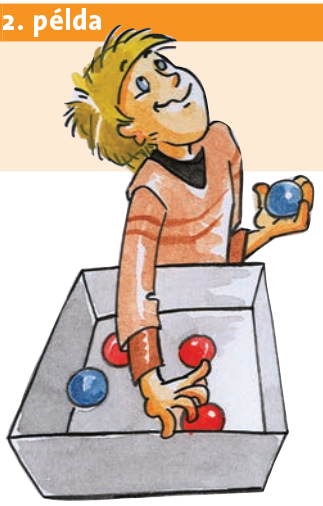
Tehát a vizsgált esemény valószínűsége $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

II. megoldás. A különböző helyi értékeken levő számjegyek egymástól függetlenül alakulnak. Annak a valószínűsége, hogy páros számjegyet dobunk, minden dobás esetén $\frac{1}{2}$, mivel azonos a páros és páratlan számjegyek száma. Ez háromszor ismétlődik meg, ezért a keresett valószínűséget így is számolhatjuk: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Megjegyzés. Ezt a számolási technikát szokták *szorzásszabálynak* is nevezni. Ez csak akkor alkalmazható, ha az egyes események egymástól függetlenül következnek be.

10.

2. példa



Egy dobozba 3 piros és 2 kék golyót tettünk. Visszatevés nélkül húzzunk ki kettőt! Mennyi a valószínűsége annak, hogy a golyók különböző színűek?

I. megoldás. Számozzuk meg gondolatban a golyókat! Például jelölje P_2 a kettes számú piros golyót, K_1 az 1-es számú kéket!

Vizsgáljuk meg, milyen húzások lehetnek:

P_1–P_2;	P_1–P_3;	P_1–K_1;	P_1–K_2;	P_2–P_1;
P_2–P_3;	P_2–K_1;	P_2–K_2;	P_3–P_1;	P_3–P_2;
P_3–K_1;	P_3–K_2;	K_1–P_1;	K_1–P_2;	K_1–P_3;
K_1–K_2;	K_2–P_1;	K_2–P_2;	K_2–P_3;	K_2–K_1.

Az összes elemi esemény száma 20. A kedvező elemi események száma 12.

A keresett valószínűség: $P(\text{piros és kék golyót húzunk}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

II. megoldás. A szorzásszabállyal is megoldhatjuk a feladatot.

Kétféleképpen húzhatunk:

– Először pirosat, majd kéket húzunk (3 piros az 5 golyóból, majd a megmaradt 4 golyóból 2 kék választása). Ennek a valószínűsége $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

– Először kéket, majd pirosat húzunk (2 kék az 5 golyóból, majd a megmaradt 4 golyóból 3 piros választása). Ennek a valószínűsége $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

A két esemény együttesen $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$ valószínűséggel fordul elő.

3. példa



Szerencsejátékosok körében népszerű az úgynevezett „félkarú rabló” játék. Rengeteg hasznot hozott már üzemeltetőinek. Egy-egy játékos kivételes szerencsé-jének köszönhető nagyobb nyeremény mindig jó reklámnak bizonyul.

Vizsgáljuk ennek a játéknak egy módosított változatát!

Látunk négy mezőt. Az első három mezőn egyenlő valószínűséggel jelenik meg egy-egy banán, körte, eper. A negyedik mezőn szintén egyenlő valószínűséggel jelenik meg egy eper, egy bomba, egy joker.

Ha négy eper jelenik meg, a pénzünk négyszeresét nyerjük.

Ha valamilyen sorrendben minden különböző gyümölcs és a joker is megjelent, akkor játszhatunk egy jutalomjátékot.

Ha bomba jelenik meg, vesztettünk.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy játékban megnégyszerezzük pénzünket?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy játékban jutalomjátékot nyerünk?

c) Mi a valószínűsége annak, hogy egy játékban azonnal vesztünk?

eper	eper	eper	eper	4-szeres nyeremény
egyik gyümölcs	másik gyümölcs	harmadik gyümölcs	joker	jutalomjáték
			bomba	vesztettünk

I. megoldás. Bármely jel azonos valószínűséggel jelenik meg egymástól függetlenül. Ezért az összes jelsorozat száma $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

a) Egyetlen jelsorozat van, amikor megnégyszerezhetjük pénzünket: eper–eper–eper–eper, így ennek a valószínűsége $\frac{1}{81}$.

b) Jutalomjátékot akkor nyerünk, ha az első három mezőn különböző gyümölcsök, a negyediken joker van. A lehetséges elemi események:

banán–körte–eper–joker; banán–eper–körte–joker; körte–banán–eper–joker;

körte–eper–banán–joker; eper–körte–banán–joker; eper–banán–körte–joker.

Tehát P(jutalomjátékot nyerünk) $= \frac{6}{81} = \frac{2}{27}$.

c) Az azonnali vesztés esetében mindegy, hogy mi az első három jel, csak a negyedik legyen bomba. Ezen esetek száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$. Tehát $P(\text{vesztünk egy játékban}) = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$.

II. megoldás. *a)* Az eper minden mezőn $\frac{1}{3}$ valószínűséggel jelenik meg, így annak esélye, hogy megnégyszerezzük pénzünket, a szorzásszabállyal: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

b) Az első gyümölcs tetszőleges. A második a maradék kettőből bármelyik lehet. A harmadik már csak egyféle lehet. A negyedik szintén háromból egyféle lehet, a joker.

Ezért a szorzásszabállyal: $P(\text{jutalomjátékot nyerünk}) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

c) A vesztéshez az első három bármilyen gyümölcs lehet, a negyedik három lehetőségből egy, a bomba.

Ezért a szorzásszabállyal: $P(\text{vesztünk egy játékban}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Feladatok

K1 Dobjunk fel egy dobókockát kétszer egymás után! A dobott számokból a dobás sorrendjének megfelelően kétjegyű számokat kaphatunk. Mi a legvalószínűbb? Miért?

A esemény: 30-nál kisebb páros számot írtunk le.

B esemény: 5-tel osztható számot írtunk le.

C esemény: 30-nál nagyobb páratlan számot írtunk le.

K2 Egy dobozban golyók vannak. Kihúzunk két golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy két azonos színűt húztunk, ha a dobozban

a) 3 piros és 3 kék golyó van; *b)* 1 piros és 2 kék golyó van;

c) mindhárom golyó zöld; *d)* 2 piros, 1 kék, 3 zöld golyó van?

Hogyan tudnád szimulálni a kísérletet, ha otthon nincsenek golyók, csak fémpénzek?

K3 Mit gondolsz, minek nagyobb a valószínűsége: dobókockával elsőre hatost dobunk, vagy az első hatos dobásunk a második dobáskor lesz?

K4 A 3. példában ismertetett „félkarú rabló” játékot alakítsd át hárommezősre úgy, hogy egyenlő legyen a három esemény valószínűsége! A jelek számán, alakján is változtathatsz.

K5 Hány piros és hány kék golyót tegyünk egy dobozba ahhoz, hogy egy húzás esetén a „kéket húztam” esemény valószínűsége

a) $\frac{1}{2}$ legyen; *b)* 0 legyen; *c)* $\frac{2}{5}$ legyen; *d)* 0,6 legyen; *e)* 1 legyen?

Melyikhez találhatunk több megoldást is? Ha tudsz, adj meg több megoldást is egy-egy feladathoz!

K6 A szerencsejáték az egyik legnagyobb hasznot hozó üzletág – az üzemeltetőnek. Mit gondoltok, miért? Beszéljétek meg közösen!

Geometriai valószínűség

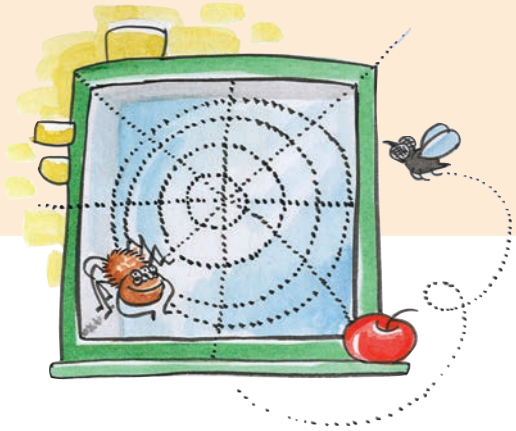
(Emelt szintű, választható tananyag)

Az eddigi feladatokkal úgynevezett diszkrét problémákat vizsgáltunk, azaz olyan feladatokat, amelyeknél véges sok kimenetel fordulhatott elő. Mit tehetünk, ha a lehetséges kimenetelek száma végtelen?

Az ilyen típusú valószínűségszámítási feladatok egy részében az elemi eseményeket egy geometriai alakzat pontjaihoz rendeljük hozzá. Feltételezzük, hogy a pontok az alakzatot folytonosan és egyenletesen kitöltik. Ekkor egy **eseményhez tartozó ponthalmaz mértéke (hossza, területe, térfogata) arányos az esemény valószínűségével.**

1. példa

Egy geompók úgy szőtte be a 40 cm oldalhosszú, négyzet alakú pinceablakot, hogy hálója a négyzet négy tükörtengelyéből állt, valamint négy koncentrikus körből 5; 10; 15; 20 cm-es sugarakkal. Mekkora annak a valószínűsége, hogy áldozatát a háló valamelyik egyenes szakaszán várja?



Mivel végtelen sok pont van a hálón, így alkalmazzuk a geometriai valószínűségszámítás modelljét, amely szerint a keresett valószínűség a háló egyenes szakaszai együttes hosszúságának és a teljes háló hosszának arányával egyenlő.

Számítsuk ki a pókháló egyenes vonalainak összhosszát! A két felezőmerőleges együttesen 80 cm, a két átló összesen $80\sqrt{2}$ cm.

Ezek összege $80 + 80\sqrt{2} = 80\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 193{,}14$ (cm).

A körvonalak kerületeinek összege:

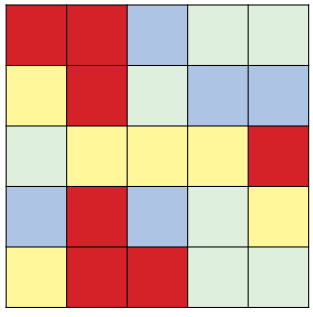
$2 \cdot 5 \cdot \pi + 2 \cdot 10 \cdot \pi + 2 \cdot 15 \cdot \pi + 2 \cdot 20 \cdot \pi = 2\pi(5 + 10 + 15 + 20) = 100\pi \approx 314{,}16$ (cm).

A háló teljes hossza $80(1 + \sqrt{2}) + 100\pi \approx 507{,}30$ (cm).

A pók körülbelül $\frac{193{,}14}{507{,}3} \approx 0{,}38$ valószínűséggel várakozik hálójának egyenes szakaszán.

2. példa

Ezen a négyzet alakú céltáblán mekkora valószínűséggel találunk az egyes színekkel meghatározott részbe? Feltételezzük, hogy azonos valószínűséggel találjuk el a tábla bármely pontját, és mindig el is találjuk a táblát.



Mivel végtelen sok pont van a táblán, így alkalmazzuk a geometriai valószínűségszámítás modelljét, miszerint a keresett valószínűség egyenesen arányos az azonosan színezett négyzetek területének összegével.

$P(\text{piros mezőt talált}) = \frac{7}{25}$ valószínűséggel; $P(\text{kék mezőt talált}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ valószínűséggel;

$P(\text{zöld mezőt talált}) = \frac{7}{25}$ valószínűséggel; $P(\text{sárga mezőt talált}) = \frac{6}{25}$ valószínűséggel.

Feladatok

E1 Házunkban a gázvezeték van, ahol a falon kívül halad, van, ahol a falon belül. A vezetékrendszer teljes hossza 116 m. Falon kívül 27 m van. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy esetleges gázszivárgás miatt falat is kell bontani?

E2 Félszemet a kalózkapitány felküldte az árbocksárba kémlelni a tengert. A kosár 12 m magasan van. Félszem, hogy kevesebbet kelljen másznia, jó nagy ugrással indul felfelé. Így a mászás megkezdésekor 240 cm magasan van a keze a hajó fedélzetéhez képest. A mászás során szálka ment a kezébe. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez az utolsó méteren történt?



E3 Egy új technikával készült kísérleti autó a 10 km-es próbapályán még egyszer sem tudott végigmenni. Egyenlő eséllyel állt meg a pálya bármely pontján. Mekkora annak a valószínűsége, hogy közelebb hibásodott meg az út felezőpontjához, mint valamelyik végpontjához?

E4 Rajzolj azonos középpontú (koncentrikus) köröket, amelyek sugarai 1; 2; 3; 4; 5 cm-esek! Legyen ez a céltábla! Azonos valószínűséggel találjuk el a céltábla bármely pontját. Mekkora valószínűséggel esik egy találat az egyes körgyűrűkbe?

E5 Játék közben egy labda beesett a szomszéd 10 m hosszú, 20 m széles téglalap alakú kertjébe. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a labda középpontja közelebb áll meg a telek valamelyik sarkához, mint a középpontjához?

E6 Tervezz olyan ötszínű céltáblát, amelyen az egyes színek találati valószínűségei mind különbözőek, és $\frac{1}{2}$-nél kisebbek!

E7 Tekintsünk egy 10 cm hosszú szakaszt! Véletlenszerűen helyezzünk el rajta egy pontot! Mekkora annak a valószínűsége, hogy a pontot a szakasz középpontjába tettük?

11. Fogalomtár

Abszolút érték: egy adott szám abszolút értéke a 0-tól ugyanakkora távolságra lévő nemnegatív szám.

Abszolútérték-függvény: egy adott számhoz az abszolút értékét rendelő függvény.

Adat: a sokaság egy-egy tulajdonságát adattal jellemezzük.

Adatok ábrázolása: az ábrázoláshoz használható az oszlopdiagram, a kördiagram, a grafikon stb.

Alaki érték: egy számjegy alaki értéke a számjegy maga.

Alap: a hatvány alakban az a szám, amelyet önmagával szorzunk.

Alaphalmaz, univerzum: az a halmaz, amelynek elemeit egy problémával kapcsolatban tekintetbe vesszük.

Algebra: a matematika egyik igen fontos ága. Egyebek között műveletekkel, ezek tulajdonságaival, egyenletekkel foglalkozik.

Algebrai kifejezés: olyan matematikai kifejezés, amelyben egyes számokat betűk helyettesítenek.

Aránytartó transzformáció: azt a transzformációt, amelyre igaz, hogy bármely két pont esetén a képtávolságuk és az eredeti két pont távolságának aránya ugyanannyi, aránytartó transzformációnak nevezzük. Az aránytartó transzformációt hasonlósági transzformációnak vagy röviden hasonlóságnak nevezzük.

Asszociativitás (társíthatóság, csoportosíthatóság): egy három számon elvégzett művelet asszociatív, ha tetszőleges zárójelezésre ugyanaz az eredmény.

Átlag: ha az adatsokaság számadatait összeadjuk, majd az összeget elosztjuk az adatsokaság elemeinek számával, akkor az adatsokaság átlagát kapjuk. Legyenek az adatok értékei: $x_1; x_2; \ldots; x_n$, a sokaság elemszáma n, ekkor az átlag: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}$.

Beszorzás, l. disztributivitás.

Biztos esemény: olyan esemény, amely biztosan bekövetkezik.

Bővítés: egy tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nem 0 számmal szorozzuk. Ezzel ugyanazt a törtet kapjuk.

Csoportosíthatóság, l. asszociativitás.

Diagram: adathalmazok ábrázolására szolgáló ábra, grafikon.

Disztributivitás (beszorzás, kiemelés): összeget úgy is szorozhatunk, hogy a tagokat külön-külön szorozzuk, és a szorzatokat adjuk össze.

Egész szám: $\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots$

Egész rész: egy egész szám egész része önmaga, egy nem egész szám egész része a kisebbik egész számszomszédja.

Egyenlet: két olyan algebrai kifejezés között fennálló egyenlőség, amelyben szerepel ismeretlen is; az ismeretlen azon értékeit keressük, amelyre fennáll az egyenlőség.

Egyenlőtlenség: két olyan algebrai kifejezés között fennálló egyenlőtlenség, amelyben szerepel ismeretlen is; az ismeretlen azon értékeit keressük, amelyre fennáll az egyenlőtlenség.

Egyesítés, unió: két halmaz egyesítése az a halmaz, amelynek elemei az egyik vagy a másik halmazban benne vannak.

Egynemű, különnemű: egyneműnek nevezünk két algebrai kifejezést, ha csak együtthatóikban különböznek. Egyébként különneműek.

Egyszerűsítés: egy tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nem 0 számmal osztjuk. Ezzel ugyanazt a törtet kapjuk.

Egytagú, többtagú: az algebrai kifejezésben szereplő összeadandók (tagok) száma szerint egytagú vagy többtagú lehet egy kifejezés.

Együttható: az algebrai kifejezésekben szereplő számszorzókat együtthatóknak nevezzük.

Elem: a halmaz eleme. A „halmaz elemének lenni” nem definiált fogalom. Más hasonló kifejezés például: benne van, hozzá tartozik.

Elemi esemény: egy kísérlet lehetséges kimenetele.

Ellentett: egy számmal egyező abszolút értékű, de ellentétes előjelű szám.

Elforgatás: a síkban egy adott O pont körüli, adott α irányított szöggel történő elforgatásról beszélhetünk. Az O pont képe önmaga lesz, azaz $O = O'$. Ha egy P pont nem illeszkedik az O pontra, akkor a P pont képe az a P' pont, amelyre $OP = OP'$ és POP' szög nagysága és iránya is megegyezik az elforgatás megadott szögének irányával és nagyságával.

Előjel: az előjel megmutatja, hogy egy szám negatív (0-nál kisebb) vagy pozitív (0-nál nagyobb).

Eltolás: a $\mathbf{v}$ vektorral megadott eltolásnál bármely P ponthoz a P kezdőpontú $\mathbf{v} = \overrightarrow{PP'}$ vektor P' végpontját rendeljük.

Emeletes tört: olyan tört, amelynek számlálója és/vagy nevezője maga is tört.

Esemény valószínűsége: 0 és 1 közötti szám, olyan érték, amelytől nagyon sok kísérletsorozat esetén az esemény relatív gyakorisága csekély mértékben tér el.

Felcserélhetőség, l. kommutativitás.

Forgásszimmetria: vannak alakzatok, amelyekhez található olyan forgatási középpont és szög, hogy a forgatás után az alakzat önmagába fordul. Az ilyen alakzatokat forgásszimmetrikusnak mondjuk. Például a szabályos sokszögek forgásszimmetrikusak.

Függvény: függvénynek nevezzük az egyértelmű hozzárendelést két nem üres halmaz között. Azt a halmazt, amely elemeihez rendelünk hozzá, **alaphalmaznak** nevezzük. Azt a halmazt, amelynek elemeit rendeljük hozzá, **képhalmaznak** nevezzük.

Függvény értelmezési tartománya: az alaphalmaz azon részhalmaza, amelynek elemeihez értékeket rendelünk.

Függvény értékkészlete: a képhalmaz azon elemeinek az összessége, amelyeket az értelmezési tartomány elemeihez rendeltünk.

Függvény maximuma (maximumértéke): a vizsgált alaphalmazon a legnagyobb felvett érték.

Függvény maximumhelye: az értelmezési tartománynak az az eleme, ahol a függvény a maximumértékét felveszi.

Függvény minimuma (minimumértéke): a vizsgált alaphalmazon a legkisebb felvett érték.

Függvény minimumhelye: az értelmezési tartománynak az az eleme, ahol a függvény a minimumértékét felveszi.

Függvény zérushelye: az értelmezési tartománynak az az eleme, ahol a függvény értéke nulla. Szemléletesen: ahol a függvény grafikonja az x tengelyt metszi.

Gömb: a térben egy adott ponttól ugyanakkora távolságra lévő pontok gömbfelületet alkotnak.

Gúla: vegyünk fel egy sokszöget és egy pontot, amely nem illeszkedik a sokszög síkjára! Ha ezt a pontot összekötjük a sokszög minden csúcsával, akkor egy gúlát kapunk.

Gyakoriság: az adatok előfordulásának számát gyakoriságnak nevezzük.

Halmaz: nem definiált fogalom. Más hasonló kifejezés például: sokaság.

Hányados: az osztás eredménye.

Hasáb: egyenes hasáboknak nevezzük azokat a testeket, amelyeket két párhuzamos, egybevágó sokszög és annyi téglalap határol, ahány oldalú a sokszög.

Hasonlóság: l. középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció.

Hasonlósági transzformáció: a középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtása által kapott transzformációt nevezzük így. L. még: *aránytartó transzformáció*.

Hatvány alak: azt, hogy egy a számot önmagával n-szer szorzunk, a^n alakban – hatvány alakban – írhatjuk.

Hatványkitevő, l. kitevő.

Hatványozás: művelet.

Helyi érték: a tízes számrendszer egész helyi értékei az egyes, a tízes, a százas, az ezres stb. A tört helyi értékek a tized, század, ezred, tízezred stb.

Helyiérték-táblázat: egy szám felírásához használt rendszer.

Henger: a henger olyan test, amelyet két egybevágó körlap és egy görbe lap határol.

Irracionális szám: nem racionális, végtelen nem szakaszos tizedestört-alakú számok.

Kerekítés: egy szám (például százas) kerekítése az adott helyi értékű közelebbi szomszédja. Ha a két szomszéd egyenlő távolságra van, akkor felfelé kerekítünk.

Kiegészítő halmaz: egy halmaz kiegészítő halmaza az alaphalmaznak azok az elemei, amelyek nem tartoznak a halmazhoz.

Kiemelés, l. disztributivitás.

Kisebbítendő, kivonandó: a kivonásban a kisebbítendőből vonjuk ki a kivonandót.

Kísérlet: az olyan jelenség megfigyelése, amelynek lefolyása a véletlentől függ.

Kitevő: a hatvány alakban az a szám, ahányszor a számot önmagával szorozzuk.

Kivonás: az összeadás műveletének *megfordítása*. Két szám összegéből kivonva az egyik számot, megkapjuk a másik számot.

Kommutativitás, felcserélhetőség: egy két szám között elvégzett művelet kommutatív, ha felcserélve a két számot, az eredmény mindig ugyanaz.

Komplementer: az A halmaz komplementere az alaphalmaznak az A-hoz nem tartozó elemei, jele: $\overline{A}$.

Kördiagram: az egyes adatoknak olyan körcikkeket feleltetünk meg, amelyeknek középponti szöge (tehát területe is) arányos az adatfajta gyakoriságával.
Kördiagramon az egyes adatoknak az egészhez viszonyított arányát ábrázoljuk.

Középérték: adatok középértéke olyan szám, amely az adathalmaz legkisebb és legnagyobb értéke közé esik, és amely valamilyen módon jellemzi az adathalmazt.

Középpontos hasonlósági transzformáció: Adott egy O középpont és egy $\lambda \neq 0$ (lambda) arányszám.
Ha $\lambda > 0$, de $\lambda \neq 1$, akkor bármely P pont képe egy olyan P' pont, amely az OP félegyenesre illeszkedik, és $\frac{OP'}{OP} = \lambda$.
Ha a $\lambda < 0$, de $\lambda \neq -1$, akkor bármely P pont képe egy olyan P' pont, amely az OP egyenesre illeszkedik, $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$, és O pont P és P' között van.

Közös nevező: két tört közös nevezője az a nevező, amely mindkét tört nevezőjének többszöröse.

Közös osztók: két szám közös osztói azok a számok, amelyek mind a két számnak osztói.

Közös többszörösök: két szám közös többszörösei azok a számok, amelyek mind a két számnak többszörösei.

Kúp: egy derékszögű háromszöget forgassunk meg az egyik befogója körül! Az átfogó és a másik befogó kúpot ír le. Ezt a kúpot forgatással hoztuk létre, ezért forgáskúpnak nevezzük. Kúpokat lehet ettől eltérő módon is származtatni. Beszélhetünk ferde körkúpról vagy kúpszerű testekről is. A forgáskúpokat röviden kúpnak nevezzük.

Különbség: a kivonás eredménye.

Legkisebb közös többszörös: két szám közös pozitív többszörösei közül a legkisebbik.

Legnagyobb közös osztó: két szám legnagyobb közös osztója a közös pozitív osztók közül a legnagyobbik.

Lehetetlen esemény: olyan esemény, amely sohasem következik be.

Lineáris függvény: azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes, lineáris függvénynek nevezzük.
A lineáris függvények képlettel történő megadása: $f: x \mapsto mx + b$, ahol m a függvény meredekségét jelenti, b értéke megmutatja, hogy a függvény mely pontban metszi az y tengelyt.

Ha $m = 0$, akkor a függvény grafikonja párhuzamos az x tengellyel.
Ha $b = 0$, akkor egyenes arányosságról beszélünk, a függvény grafikonja átmegy az origón.
Ha $m \neq 0$, akkor elsőfokú függvénynek nevezzük.

Lineáris törtfüggvény: olyan függvény, amelynek felírásában két lineáris függvény hányadosa szerepel.

Maradékos osztás: egy természetes számot egy másikkal úgy is oszthatunk, hogy a hányadosnak csak az egész részét számítjuk ki, az osztandóból megmaradó rész a maradék.

Másodfokú függvény: olyan függvény, amelyben szerepel a változó második hatványa, de nagyobb kitevőn nem szerepel a változó.

Medián: meghatározásakor az adatsokaság elemeit növekvő sorrendbe kell rendezni, és a sorba rendezett adatsokaságnak a középső eleme lesz a medián. Ez a módszer akkor használható, ha páratlan elemszámú az adatsokaság. Ha páros darabszámú elem van, akkor nincs középső elem, ezért a középső két elem számtani közepe lesz az adatsokaság mediánja.

Mérlegelv: egy egyenletmegoldási módszer.

Metszet: két halmaz metszete az a halmaz, amelynek elemei mind a két halmazban benne vannak.

Mínuszjel: a negatív számok előjele.

Módusz: az adatsokaságban leggyakrabban előforduló elem.

Negatív szám: 0-nál kisebb szám.

Négyzetgyök: egy nemnegatív a szám négyzetgyöke az a $\sqrt{a}$ nemnegatív szám, amelyre igaz, hogy $(\sqrt{a})^2 = a$.

Négyzetszám: olyan szám, amely egy egész szám négyzete, vagyis önmagával vett szorzata.

Nevező: a törtben a törtvonal alá írt szám, kifejezés.

Normálalak: a számoknak az az alakja, amelyben egy 1 és 10 közé eső számot 10-nek egy hatványával szorzunk meg.

Oszlopdiagram: olyan grafikon, amellyel a koordináta-rendszerben téglalapokkal szemléltetjük az adatokat. A téglalapok vízszintes tengelyre illeszkedő oldalai egyenlő hosszúak, a függőleges tengellyel párhuzamos oldalaik az adatok nagyságával arányosak.

Osztandó, osztó (osztásban): az osztásban az osztandót osztjuk az osztóval, az eredmény a hányados.

Osztás: a szorzás műveletének *megfordítása*. Két szám szorzatát osztva az egyik (nem 0) számmal, megkapjuk a másik számot.

Oszthatóság: egy a szám osztható a d számmal, ha d osztója az a-nak, másként: ha a többszöröse d-nek.

Osztó (oszthatóságban): egy d egész számot akkor nevezzük a egész szám osztójának, ha a többszöröse a d-nek.

Összeadandók: az összeadásban szereplő számok, tagok.

Összeadás: művelet.

Összeg: az összeadás eredménye.

Összetett esemény: legalább két független elemi esemény összege (uniója).

Összetett szám: ha egy egész szám nem 0, nem 1, nem -1 és nem prímszám, azt összetett számnak nevezzük.

Összevonás: egy algebrai kifejezésben az egynemű tagok összeadása.

Paradoxon: olyan logikai kifejezés, amelynek nem lehet eldönteni az igazságtartalmát.

Pitagoraszi számhármas: A $0 < a \leq b < c$ egész számokat pitagoraszi számhármasnak nevezzük, ha létezik olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai a, b, c. Az így kapott háromszöget pitagoraszi háromszögnek nevezzük.

Pitagorasz-tétel: derékszögű háromszögben a két befogó hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.

Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két rövidebb oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. A három oldal közül a két rövidebb lesz a befogó.

Pluszjel: a pozitív számok előjele; elhagyható.

Pont körüli elforgatás: a síkot egy adott O pont körül α irányított szöggel elforgatva az O pont képe önmaga, minden más P pont képe az a P' pont, amelyre a $POP' \sphericalangle = \alpha$ és $OP = OP'$.

Pozitív szám: 0-nál nagyobb szám.

Prímszám: olyan természetes szám, amelynek pontosan 2 osztója van (1 és önmaga). Egész számok között olyan szám, amelynek pontosan 4 osztója van (1, -1, önmaga és önmaga ellentettje).

Prímtényezős felbontás: egy 0-tól, 1-től (és (-1)-től) különböző számot prímszámok szorzataként írhatunk fel. Speciálisan a prímszámok egytényezős szorzatok.

Racionális szám: két egész szám hányadosaként felírható szám.

Reciprok: két tört egymás reciproka, ha szorzatuk 1.

Relatív gyakoriság: Ha egy sokaságban n elem van, és ezek közül k db rendelkezik egy megadott tulajdonsággal, akkor a $\frac{k}{n}$ hányadost relatív gyakoriságnak nevezzük.
A k értéke nemnegatív, és nem nagyobb, mint a sokaság elemszáma, azaz n. Így a relatív gyakoriság értéke 0 és 1 közé esik: $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$.

Relatív prímek: két szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk az 1.

Sokaság: az elemeknek azt a csoportját, amelyről információt gyűjtünk, sokaságnak nevezzük.

Statisztika: a matematika egyik fiatal ága, amelynek feladatai közé tartozik adatok gyűjtése, feldolgozása, értelmezése.

Szabályos tetraéder: azokat a tetraédereket nevezzük így, amelyeknek minden lapja szabályos háromszög. Lásd még: tetraéder.

Szakasz (tizedes törté): egyes végtelen szakaszos tizedes törtekben egy helyi értéktől kezdve bizonyos számjegyek ismétlődve szerepelnek, ez a szakasz.

Számegyenes: a számok egy szemléltetése.

Számelmélet: a matematika egyik klasszikus, régi ága, amely egyebek közt oszthatósággal is foglalkozik.

Számjegy: a számokat számjegyek segítségével írhatjuk fel. A 10-es számrendszerben a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket használjuk.

Számláló: a törtben a törtvonalra írt szám, kifejezés.

Számrendszer: a természetes számok (illetve kibővített formában a törtek) felírására alkalmas rendszer, amelyben helyi értékekre írjuk az egyes számjegyeket. Mi a 10-es számrendszert használjuk, a számítógépek általában 2-es számrendszerben dolgoznak.

Számtani sorozat: ha egy számsorozatban a második elemtől kezdve bármely elemből kivonva az előtte álló elemet, a különbség állandó, akkor számtani sorozatról beszélünk.
Ennek alapján $a_n = a_{n-1} + d$.
Levezethető a számtani sorozat n-edik elemére: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Szorzás: művelet.

Szorzat: a szorzás eredménye.

Tagok: összeadandók.

Társíthatóság, l. asszociativitás.

Tényező: a szorzásban szereplő számok.

Természetes szám: 0; 1; 2; 3; ...

Tetraéder: a háromszög alapú gúlát tetraédernek nevezzük. Vagyis a tetraédert négy háromszög határolja.

Tizedes tört (véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos): az 10 negatív kitevőjű (1-nél kisebb) hatványaival kibővített tízes számrendszerbeli helyi értékekkel felírt szám.

Tízes számrendszer: az a helyi értékes számrendszer, amelyben a számokat 10 hatványai segítségével írjuk fel. A természetes számok esetén használt helyi értékek: 1; 10; 100; 1000; . . . , tizedes törtekhez használjuk még a 0,1; 0,01; 0,001; . . . helyi értékeket.

Többszörös: Egy a egész számnak többszörösei az $d \cdot a$ alakban írható számok (d is egész szám).

Törtszám: két szám hányadosa.

Tört alak: olyan szám, amelynek felírásában egy törtvonallal elválasztott számláló és nevező szerepel.

Törtkifejezés: olyan kifejezés, amelyben egy törtvonallal elválasztott számláló és nevező szerepel.

Unió: halmazok egyesítése, l. egyesítés.

Univerzum: alaphalmaz, l. ott.

Üres halmaz: az a halmaz, amelynek egy eleme sincs.

Valószínűségszámítás: matematikai eszköz egyes események előfordulási esélyének elméleti úton történő megállapítására, kiszámítására.

Valószínűségszámítás klasszikus modellje: ha egy kísérletben előforduló elemi események száma véges és a valószínűségük egyenlő (kocka, kártya, pénz stb.), akkor klasszikus valószínűségről beszélünk.

Vegyes tört: egy egész szám és egy tört szám összege, az összadásjelet nem jelöljük.

Vektor: vektoroknak általában azokat a mennyiségeket nevezzük, amelyeknek irányuk és nagyságuk van. Geometriában a vektorok az irányított szakaszok. Az AB irányított szakaszt vektornak nevezzük, és így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$, **a** vagy $\overrightarrow{a}$. Az A pontot a vektor kezdőpontjának, a B pontot a végpontjának nevezzük.

Vektor ellentettje: ha két vektor hossza megegyezik, párhuzamosak, de az irányuk ellentétes, akkor ellentett vektorokról beszélünk. Az **a** ellentettjét $-\mathbf{a}$ jelöli. Az $\overrightarrow{AB}$ ellentettje $\overrightarrow{BA}$.

Vektorok különbsége: adott az **a** és a **b** vektor. Egy pontból felmérjük az **a**-t és a **b**-t. Az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor azzal a vektorral egyenlő, amelynek kezdőpontja a **b** végpontja, a végpontja pedig az **a** végpontja.

Vektorok összege: adott az **a** és a **b** vektor. Egy pontból felmérjük az **a**-t, majd ennek végpontjából felmérjük a **b**-t. Az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor az a vektor, amelynek kezdőpontja az elsőnek felmért vektor kezdőpontja, a végpontja pedig a másodiknak felmért vektor végpontja.

Számok négyzetgyöke

$x = N \cdot 10^{2k}$ $\qquad \sqrt{x} = \sqrt{N} \cdot 10^{k}$ $\qquad 1{,}00 - 5{,}49$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1, 000	1, 005	1, 010	1, 015	1, 020	1, 025	1, 030	1, 034	1, 039	1, 044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,1	1, 049	1, 054	1, 058	1, 063	1, 068	1, 072	1, 077	1, 082	1, 086	1, 091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,2	1, 095	1, 100	1, 105	1, 109	1, 114	1, 118	1, 122	1, 127	1, 131	1, 136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,3	1, 140	1, 145	1, 149	1, 153	1, 158	1, 162	1, 166	1, 170	1, 175	1, 179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,4	1, 183	1, 187	1, 192	1, 196	1, 200	1, 204	1, 208	1, 212	1, 217	1, 221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,5	1, 225	1, 229	1, 233	1, 237	1, 241	1, 245	1, 249	1, 253	1, 257	1, 261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,6	1, 265	1, 269	1, 273	1, 277	1, 281	1, 285	1, 288	1, 292	1, 296	1, 300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,7	1, 304	1, 308	1, 311	1, 315	1, 319	1, 323	1, 327	1, 330	1, 334	1, 338	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,8	1, 342	1, 345	1, 349	1, 353	1, 356	1, 360	1, 364	1, 367	1, 371	1, 375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,9	1, 378	1, 382	1, 386	1, 389	1, 393	1, 396	1, 400	1, 404	1, 407	1, 411	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,0	1, 414	1, 418	1, 421	1, 425	1, 428	1, 432	1, 435	1, 439	1, 442	1, 446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,1	1, 449	1, 453	1, 456	1, 459	1, 463	1, 466	1, 470	1, 473	1, 476	1, 480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,2	1, 483	1, 487	1, 490	1, 493	1, 497	1, 500	1, 503	1, 507	1, 510	1, 513	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,3	1, 517	1, 520	1, 523	1, 526	1, 530	1, 533	1, 536	1, 539	1, 543	1, 546	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,4	1, 549	1, 552	1, 556	1, 559	1, 562	1, 565	1, 568	1, 572	1, 575	1, 578	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,5	1, 581	1, 584	1, 587	1, 591	1, 594	1, 597	1, 600	1, 603	1, 606	1, 609	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2,6	1, 612	1, 616	1, 619	1, 622	1, 625	1, 628	1, 631	1, 634	1, 637	1, 640	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,7	1, 643	1, 646	1, 649	1, 652	1, 655	1, 658	1, 661	1, 664	1, 667	1, 670	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,8	1, 673	1, 676	1, 679	1, 682	1, 685	1, 688	1, 691	1, 694	1, 697	1, 700	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,9	1, 703	1, 706	1, 709	1, 712	1, 715	1, 718	1, 720	1, 723	1, 726	1, 729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,0	1, 732	1, 735	1, 738	1, 741	1, 744	1, 746	1, 749	1, 752	1, 755	1, 758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,1	1, 761	1, 764	1, 766	1, 769	1, 772	1, 775	1, 778	1, 780	1, 783	1, 786	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,2	1, 789	1, 792	1, 794	1, 797	1, 800	1, 803	1, 806	1, 808	1, 811	1, 814	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,3	1, 817	1, 819	1, 822	1, 825	1, 828	1, 830	1, 833	1, 836	1, 838	1, 841	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,4	1, 844	1, 847	1, 849	1, 852	1, 855	1, 857	1, 860	1, 863	1, 865	1, 868	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,5	1, 871	1, 873	1, 876	1, 879	1, 881	1, 884	1, 887	1, 889	1, 892	1, 895	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,6	1, 897	1, 900	1, 903	1, 905	1, 908	1, 910	1, 913	1, 916	1, 918	1, 921	0	0	1	1	1	2	2	2	2
3,7	1, 924	1, 926	1, 929	1, 931	1, 934	1, 936	1, 939	1, 942	1, 944	1, 947	0	0	1	1	1	1	2	2	2
3,8	1, 949	1, 952	1, 954	1, 957	1, 960	1, 962	1, 965	1, 967	1, 970	1, 972	0	0	1	1	1	1	2	2	2
3,9	1, 975	1, 977	1, 980	1, 982	1, 985	1, 987	1, 990	1, 992	1, 995	1, 997	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,0	2, 000	2, 002	2, 005	2, 007	2, 010	2, 012	2, 015	2, 017	2, 020	2, 022	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,1	2, 025	2, 027	2, 030	2, 032	2, 035	2, 037	2, 040	2, 042	2, 045	2, 047	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,2	2, 049	2, 052	2, 054	2, 057	2, 059	2, 062	2, 064	2, 066	2, 069	2, 071	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,3	2, 074	2, 076	2, 078	2, 081	2, 083	2, 086	2, 088	2, 090	2, 093	2, 095	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,4	2, 098	2, 100	2, 102	2, 105	2, 107	2, 110	2, 112	2, 114	2, 117	2, 119	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,5	2, 121	2, 124	2, 126	2, 128	2, 131	2, 133	2, 135	2, 138	2, 140	2, 142	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,6	2, 145	2, 147	2, 149	2, 152	2, 154	2, 156	2, 159	2, 161	2, 163	2, 166	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,7	2, 168	2, 170	2, 173	2, 175	2, 177	2, 179	2, 182	2, 184	2, 186	2, 189	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,8	2, 191	2, 193	2, 195	2, 198	2, 200	2, 202	2, 205	2, 207	2, 209	2, 211	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,9	2, 214	2, 216	2, 218	2, 220	2, 223	2, 225	2, 227	2, 229	2, 232	2, 234	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,0	2, 236	2, 238	2, 241	2, 243	2, 245	2, 247	2, 249	2, 252	2, 254	2, 256	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,1	2, 258	2, 261	2, 263	2, 265	2, 267	2, 269	2, 272	2, 274	2, 276	2, 278	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,2	2, 280	2, 283	2, 285	2, 287	2, 289	2, 291	2, 293	2, 296	2, 298	2, 300	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,3	2, 302	2, 304	2, 307	2, 309	2, 311	2, 313	2, 315	2, 317	2, 319	2, 322	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,4	2, 324	2, 326	2, 328	2, 330	2, 332	2, 335	2, 337	2, 339	2, 341	2, 343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$x = N \cdot 10^{2k}$ $\sqrt{x} = \sqrt{N} \cdot 10^{k}$ 5,50 – 9,99

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	2, 345	2, 347	2, 349	2, 352	2, 354	2, 356	2, 358	2, 360	2, 362	2, 364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,6	2, 366	2, 369	2, 371	2, 373	2, 375	2, 377	2, 379	2, 381	2, 383	2, 385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,7	2, 387	2, 390	2, 392	2, 394	2, 396	2, 398	2, 400	2, 402	2, 404	2, 406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,8	2, 408	2, 410	2, 412	2, 415	2, 417	2, 419	2, 421	2, 423	2, 425	2, 427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,9	2, 429	2, 431	2, 433	2, 435	2, 437	2, 439	2, 441	2, 443	2, 445	2, 447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,0	2, 449	2, 452	2, 454	2, 456	2, 458	2, 460	2, 462	2, 464	2, 466	2, 468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,1	2, 470	2, 472	2, 474	2, 476	2, 478	2, 480	2, 482	2, 484	2, 486	2, 488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,2	2, 490	2, 492	2, 494	2, 496	2, 498	2, 500	2, 502	2, 504	2, 506	2, 508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,3	2, 510	2, 512	2, 514	2, 516	2, 518	2, 520	2, 522	2, 524	2, 526	2, 528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,4	2, 530	2, 532	2, 534	2, 536	2, 538	2, 540	2, 542	2, 544	2, 546	2, 548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,5	2, 550	2, 551	2, 553	2, 555	2, 557	2, 559	2, 561	2, 563	2, 565	2, 567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,6	2, 569	2, 571	2, 573	2, 575	2, 577	2, 579	2, 581	2, 583	2, 585	2, 587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,7	2, 588	2, 590	2, 592	2, 594	2, 596	2, 598	2, 600	2, 602	2, 604	2, 606	0	0	1	1	1	1	1	1	2
6,8	2, 608	2, 610	2, 612	2, 613	2, 615	2, 617	2, 619	2, 621	2, 623	2, 625	0	0	1	1	1	1	1	1	2
6,9	2, 627	2, 629	2, 631	2, 632	2, 634	2, 636	2, 638	2, 640	2, 642	2, 644	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,0	2, 646	2, 648	2, 650	2, 651	2, 653	2, 655	2, 657	2, 659	2, 661	2, 663	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,1	2, 665	2, 666	2, 668	2, 670	2, 672	2, 674	2, 676	2, 678	2, 680	2, 681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,2	2, 683	2, 685	2, 687	2, 689	2, 691	2, 693	2, 694	2, 696	2, 698	2, 700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,3	2, 702	2, 704	2, 706	2, 707	2, 709	2, 711	2, 713	2, 715	2, 717	2, 718	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,4	2, 720	2, 722	2, 724	2, 726	2, 728	2, 729	2, 731	2, 733	2, 735	2, 737	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,5	2, 739	2, 740	2, 742	2, 744	2, 746	2, 748	2, 750	2, 751	2, 753	2, 755	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,6	2, 757	2, 759	2, 760	2, 762	2, 764	2, 766	2, 768	2, 769	2, 771	2, 773	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,7	2, 775	2, 777	2, 778	2, 780	2, 782	2, 784	2, 786	2, 787	2, 789	2, 791	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,8	2, 793	2, 795	2, 796	2, 798	2, 800	2, 802	2, 804	2, 805	2, 807	2, 809	0	0	0	1	1	1	1	1	2
7,9	2, 811	2, 812	2, 814	2, 816	2, 818	2, 820	2, 821	2, 823	2, 825	2, 827	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,0	2, 828	2, 830	2, 832	2, 834	2, 835	2, 837	2, 839	2, 841	2, 843	2, 844	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,1	2, 846	2, 848	2, 850	2, 851	2, 853	2, 855	2, 857	2, 858	2, 860	2, 862	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,2	2, 864	2, 865	2, 867	2, 869	2, 871	2, 872	2, 874	2, 876	2, 877	2, 879	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,3	2, 881	2, 883	2, 884	2, 886	2, 888	2, 890	2, 891	2, 893	2, 895	2, 897	0	0	0	1	1	1	1	1	2
8,4	2, 898	2, 900	2, 902	2, 903	2, 905	2, 907	2, 909	2, 910	2, 912	2, 914	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,5	2, 915	2, 917	2, 919	2, 921	2, 922	2, 924	2, 926	2, 927	2, 929	2, 931	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,6	2, 933	2, 934	2, 936	2, 938	2, 939	2, 941	2, 943	2, 944	2, 946	2, 948	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,7	2, 950	2, 951	2, 953	2, 955	2, 956	2, 958	2, 960	2, 961	2, 963	2, 965	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,8	2, 966	2, 968	2, 970	2, 972	2, 973	2, 975	2, 977	2, 978	2, 980	2, 982	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,9	2, 983	2, 985	2, 987	2, 988	2, 990	2, 992	2, 993	2, 995	2, 997	2, 998	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,0	3, 000	3, 002	3, 003	3, 005	3, 007	3, 008	3, 010	3, 012	3, 013	3, 015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,1	3, 017	3, 018	3, 020	3, 022	3, 023	3, 025	3, 027	3, 028	3, 030	3, 032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,2	3, 033	3, 035	3, 036	3, 038	3, 040	3, 041	3, 043	3, 045	3, 046	3, 048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,3	3, 050	3, 051	3, 053	3, 055	3, 056	3, 058	3, 059	3, 061	3, 063	3, 064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,4	3, 066	3, 068	3, 069	3, 071	3, 072	3, 074	3, 076	3, 077	3, 079	3, 081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,5	3, 082	3, 084	3, 085	3, 087	3, 089	3, 090	3, 092	3, 094	3, 095	3, 097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,6	3, 098	3, 100	3, 102	3, 103	3, 105	3, 106	3, 108	3, 110	3, 111	3, 113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,7	3, 114	3, 116	3, 118	3, 119	3, 121	3, 122	3, 124	3, 126	3, 127	3, 129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,8	3, 130	3, 132	3, 134	3, 135	3, 137	3, 138	3, 140	3, 142	3, 143	3, 145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,9	3, 146	3, 148	3, 150	3, 151	3, 153	3, 154	3, 156	3, 158	3, 159	3, 161	0	0	0	1	1	1	1	1	1
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$x = N \cdot 10^{2k+1}$ $\qquad$ $\sqrt{x} = \sqrt{10N} \cdot 10^{k}$ $\qquad$ 10,0 – 54,9

$10N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10,	3, 162	3, 178	3, 194	3, 209	3, 225	3, 240	3, 256	3, 271	3, 286	3, 302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11,	3, 317	3, 332	3, 347	3, 362	3, 376	3, 391	3, 406	3, 421	3, 435	3, 450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12,	3, 464	3, 479	3, 493	3, 507	3, 521	3, 536	3, 550	3, 564	3, 578	3, 592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13,	3, 606	3, 619	3, 633	3, 647	3, 661	3, 674	3, 688	3, 701	3, 715	3, 728	1	3	4	5	7	8	9	11	12
14,	3, 742	3, 755	3, 768	3, 782	3, 795	3, 808	3, 821	3, 834	3, 847	3, 860	1	3	4	5	7	8	9	10	12
15,	3, 873	3, 886	3, 899	3, 912	3, 924	3, 937	3, 950	3, 962	3, 975	3, 987	1	2	4	5	6	8	9	10	11
16,	4, 000	4, 012	4, 025	4, 037	4, 050	4, 062	4, 074	4, 087	4, 099	4, 111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17,	4, 123	4, 135	4, 147	4, 159	4, 171	4, 183	4, 195	4, 207	4, 219	4, 231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18,	4, 243	4, 254	4, 266	4, 278	4, 290	4, 301	4, 313	4, 324	4, 336	4, 347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19,	4, 359	4, 370	4, 382	4, 393	4, 405	4, 416	4, 427	4, 438	4, 450	4, 461	1	2	3	4	6	7	8	9	10
20,	4, 472	4, 483	4, 494	4, 506	4, 517	4, 528	4, 539	4, 550	4, 561	4, 572	1	2	3	4	5	7	8	9	10
21,	4, 583	4, 593	4, 604	4, 615	4, 626	4, 637	4, 648	4, 658	4, 669	4, 680	1	2	3	4	5	6	7	9	10
22,	4, 690	4, 701	4, 712	4, 722	4, 733	4, 743	4, 754	4, 764	4, 775	4, 785	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23,	4, 796	4, 806	4, 817	4, 827	4, 837	4, 848	4, 858	4, 868	4, 879	4, 889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24,	4, 899	4, 909	4, 919	4, 930	4, 940	4, 950	4, 960	4, 970	4, 980	4, 990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25,	5, 000	5, 010	5, 020	5, 030	5, 040	5, 050	5, 060	5, 070	5, 079	5, 089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26,	5, 099	5, 109	5, 119	5, 128	5, 138	5, 148	5, 158	5, 167	5, 177	5, 187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27,	5, 196	5, 206	5, 215	5, 225	5, 235	5, 244	5, 254	5, 263	5, 273	5, 282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28,	5, 292	5, 301	5, 310	5, 320	5, 329	5, 339	5, 348	5, 357	5, 367	5, 376	1	2	3	4	5	6	7	7	8
29,	5, 385	5, 394	5, 404	5, 413	5, 422	5, 431	5, 441	5, 450	5, 459	5, 468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30,	5, 477	5, 486	5, 495	5, 505	5, 514	5, 523	5, 532	5, 541	5, 550	5, 559	1	2	3	4	4	5	6	7	8
31,	5, 568	5, 577	5, 586	5, 595	5, 604	5, 612	5, 621	5, 630	5, 639	5, 648	1	2	3	4	4	5	6	7	8
32,	5, 657	5, 666	5, 675	5, 683	5, 692	5, 701	5, 710	5, 718	5, 727	5, 736	1	2	3	3	4	5	6	7	8
33,	5, 745	5, 753	5, 762	5, 771	5, 779	5, 788	5, 797	5, 805	5, 814	5, 822	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34,	5, 831	5, 840	5, 848	5, 857	5, 865	5, 874	5, 882	5, 891	5, 899	5, 908	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35,	5, 916	5, 925	5, 933	5, 941	5, 950	5, 958	5, 967	5, 975	5, 983	5, 992	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36,	6, 000	6, 008	6, 017	6, 025	6, 033	6, 042	6, 050	6, 058	6, 066	6, 075	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37,	6, 083	6, 091	6, 099	6, 107	6, 116	6, 124	6, 132	6, 140	6, 148	6, 156	1	2	2	3	4	5	6	6	7
38,	6, 164	6, 173	6, 181	6, 189	6, 197	6, 205	6, 213	6, 221	6, 229	6, 237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39,	6, 245	6, 253	6, 261	6, 269	6, 277	6, 285	6, 293	6, 301	6, 309	6, 317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40,	6, 325	6, 332	6, 340	6, 348	6, 356	6, 364	6, 372	6, 380	6, 387	6, 395	1	2	2	3	4	5	5	6	7
41,	6, 403	6, 411	6, 419	6, 427	6, 434	6, 442	6, 450	6, 458	6, 465	6, 473	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42,	6, 481	6, 488	6, 496	6, 504	6, 512	6, 519	6, 527	6, 535	6, 542	6, 550	1	1	2	3	4	5	5	6	7
43,	6, 557	6, 565	6, 573	6, 580	6, 588	6, 595	6, 603	6, 611	6, 618	6, 626	1	1	2	3	4	4	5	6	7
44,	6, 633	6, 641	6, 648	6, 656	6, 663	6, 671	6, 678	6, 686	6, 693	6, 701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
45,	6, 708	6, 716	6, 723	6, 731	6, 738	6, 745	6, 753	6, 760	6, 768	6, 775	1	1	2	3	4	4	5	6	7
46,	6, 782	6, 790	6, 797	6, 804	6, 812	6, 819	6, 826	6, 834	6, 841	6, 848	1	1	2	3	4	4	5	6	7
47,	6, 856	6, 863	6, 870	6, 877	6, 885	6, 892	6, 899	6, 907	6, 914	6, 921	1	1	2	3	4	4	5	6	6
48,	6, 928	6, 935	6, 943	6, 950	6, 957	6, 964	6, 971	6, 979	6, 986	6, 993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49,	7, 000	7, 007	7, 014	7, 021	7, 029	7, 036	7, 043	7, 050	7, 057	7, 064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50,	7, 071	7, 078	7, 085	7, 092	7, 099	7, 106	7, 113	7, 120	7, 127	7, 134	1	1	2	3	3	4	5	6	6
51,	7, 141	7, 148	7, 155	7, 162	7, 169	7, 176	7, 183	7, 190	7, 197	7, 204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52,	7, 211	7, 218	7, 225	7, 232	7, 239	7, 246	7, 253	7, 259	7, 266	7, 273	1	1	2	3	3	4	5	5	6
53,	7, 280	7, 287	7, 294	7, 301	7, 308	7, 314	7, 321	7, 328	7, 335	7, 342	1	1	2	3	3	4	5	5	6
54,	7, 348	7, 355	7, 362	7, 369	7, 376	7, 382	7, 389	7, 396	7, 403	7, 409	1	1	2	3	3	4	5	5	6
$10N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$x = N \cdot 10^{2k+1}$ $\sqrt{x} = \sqrt{10N} \cdot 10^{k}$ 55,0 – 99,9

$10N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55,	7, 416	7, 423	7, 430	7, 436	7, 443	7, 450	7, 457	7, 463	7, 470	7, 477	1	1	2	3	3	4	5	5	6
56,	7, 483	7, 490	7, 497	7, 503	7, 510	7, 517	7, 523	7, 530	7, 537	7, 543	1	1	2	3	3	4	5	5	6
57,	7, 550	7, 556	7, 563	7, 570	7, 576	7, 583	7, 589	7, 596	7, 603	7, 609	1	1	2	3	3	4	5	5	6
58,	7, 616	7, 622	7, 629	7, 635	7, 642	7, 649	7, 655	7, 662	7, 668	7, 675	1	1	2	3	3	4	5	5	6
59,	7, 681	7, 688	7, 694	7, 701	7, 707	7, 714	7, 720	7, 727	7, 733	7, 740	1	1	2	3	3	4	4	5	6
60,	7, 746	7, 752	7, 759	7, 765	7, 772	7, 778	7, 785	7, 791	7, 797	7, 804	1	1	2	3	3	4	4	5	6
61,	7, 810	7, 817	7, 823	7, 829	7, 836	7, 842	7, 849	7, 855	7, 861	7, 868	1	1	2	3	3	4	4	5	6
62,	7, 874	7, 880	7, 887	7, 893	7, 899	7, 906	7, 912	7, 918	7, 925	7, 931	1	1	2	2	3	4	4	5	6
63,	7, 937	7, 944	7, 950	7, 956	7, 962	7, 969	7, 975	7, 981	7, 987	7, 994	1	1	2	2	3	4	4	5	6
64,	8, 000	8, 006	8, 012	8, 019	8, 025	8, 031	8, 037	8, 044	8, 050	8, 056	1	1	2	2	3	4	4	5	6
65,	8, 062	8, 068	8, 075	8, 081	8, 087	8, 093	8, 099	8, 106	8, 112	8, 118	1	1	2	2	3	4	4	5	6
66,	8, 124	8, 130	8, 136	8, 142	8, 149	8, 155	8, 161	8, 167	8, 173	8, 179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67,	8, 185	8, 191	8, 198	8, 204	8, 210	8, 216	8, 222	8, 228	8, 234	8, 240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68,	8, 246	8, 252	8, 258	8, 264	8, 270	8, 276	8, 283	8, 289	8, 295	8, 301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69,	8, 307	8, 313	8, 319	8, 325	8, 331	8, 337	8, 343	8, 349	8, 355	8, 361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70,	8, 367	8, 373	8, 379	8, 385	8, 390	8, 396	8, 402	8, 408	8, 414	8, 420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71,	8, 426	8, 432	8, 438	8, 444	8, 450	8, 456	8, 462	8, 468	8, 473	8, 479	1	1	2	2	3	3	4	5	5
72,	8, 485	8, 491	8, 497	8, 503	8, 509	8, 515	8, 521	8, 526	8, 532	8, 538	1	1	2	2	3	3	4	5	5
73,	8, 544	8, 550	8, 556	8, 562	8, 567	8, 573	8, 579	8, 585	8, 591	8, 597	1	1	2	2	3	3	4	5	5
74,	8, 602	8, 608	8, 614	8, 620	8, 626	8, 631	8, 637	8, 643	8, 649	8, 654	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75,	8, 660	8, 666	8, 672	8, 678	8, 683	8, 689	8, 695	8, 701	8, 706	8, 712	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76,	8, 718	8, 724	8, 729	8, 735	8, 741	8, 746	8, 752	8, 758	8, 764	8, 769	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77,	8, 775	8, 781	8, 786	8, 792	8, 798	8, 803	8, 809	8, 815	8, 820	8, 826	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78,	8, 832	8, 837	8, 843	8, 849	8, 854	8, 860	8, 866	8, 871	8, 877	8, 883	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79,	8, 888	8, 894	8, 899	8, 905	8, 911	8, 916	8, 922	8, 927	8, 933	8, 939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80,	8, 944	8, 950	8, 955	8, 961	8, 967	8, 972	8, 978	8, 983	8, 989	8, 994	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81,	9, 000	9, 006	9, 011	9, 017	9, 022	9, 028	9, 033	9, 039	9, 044	9, 050	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82,	9, 055	9, 061	9, 066	9, 072	9, 077	9, 083	9, 088	9, 094	9, 099	9, 105	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83,	9, 110	9, 116	9, 121	9, 127	9, 132	9, 138	9, 143	9, 149	9, 154	9, 160	0	1	2	2	3	3	4	4	5
84,	9, 165	9, 171	9, 176	9, 182	9, 187	9, 192	9, 198	9, 203	9, 209	9, 214	0	1	2	2	3	3	4	4	5
85,	9, 220	9, 225	9, 230	9, 236	9, 241	9, 247	9, 252	9, 257	9, 263	9, 268	0	1	2	2	3	3	4	4	5
86,	9, 274	9, 279	9, 284	9, 290	9, 295	9, 301	9, 306	9, 311	9, 317	9, 322	0	1	2	2	3	3	4	4	5
87,	9, 327	9, 333	9, 338	9, 343	9, 349	9, 354	9, 359	9, 365	9, 370	9, 375	0	1	2	2	3	3	4	4	5
88,	9, 381	9, 386	9, 391	9, 397	9, 402	9, 407	9, 413	9, 418	9, 423	9, 429	0	1	2	2	3	3	4	4	5
89,	9, 434	9, 439	9, 445	9, 450	9, 455	9, 460	9, 466	9, 471	9, 476	9, 482	0	1	2	2	3	3	4	4	5
90,	9, 487	9, 492	9, 497	9, 503	9, 508	9, 513	9, 518	9, 524	9, 529	9, 534	0	1	2	2	3	3	4	4	5
91,	9, 539	9, 545	9, 550	9, 555	9, 560	9, 566	9, 571	9, 576	9, 581	9, 586	0	1	2	2	3	3	4	4	5
92,	9, 592	9, 597	9, 602	9, 607	9, 612	9, 618	9, 623	9, 628	9, 633	9, 638	0	1	2	2	3	3	4	4	5
93,	9, 644	9, 649	9, 654	9, 659	9, 664	9, 670	9, 675	9, 680	9, 685	9, 690	0	1	2	2	3	3	4	4	5
94,	9, 695	9, 701	9, 706	9, 711	9, 716	9, 721	9, 726	9, 731	9, 737	9, 742	0	1	1	2	3	3	4	4	5
95,	9, 747	9, 752	9, 757	9, 762	9, 767	9, 772	9, 778	9, 783	9, 788	9, 793	0	1	1	2	3	3	4	4	5
96,	9, 798	9, 803	9, 808	9, 813	9, 818	9, 823	9, 829	9, 834	9, 839	9, 844	0	1	1	2	2	3	4	4	5
97,	9, 849	9, 854	9, 859	9, 864	9, 869	9, 874	9, 879	9, 884	9, 889	9, 894	0	1	1	2	2	3	3	4	5
98,	9, 899	9, 905	9, 910	9, 915	9, 920	9, 925	9, 930	9, 935	9, 940	9, 945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99,	9, 950	9, 955	9, 960	9, 965	9, 970	9, 975	9, 980	9, 985	9, 990	9, 995	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$10N$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9