OKTATÁSI HIVATAL

8

Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

Matematika

munkafüzet

Kalandozások a matematikában



Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

Matematika munkafüzet
8. évfolyam



OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2016. április 11-től tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/2800–13/2016. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – 2.2.03 (Matematika), 2.3.1.2 (Emelt matematika – B variáció);
4. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára – 4.2.04 (Matematika);
5. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára – 5.2.04 (Matematika) megnevezésű kerettantervek előírásainak.
A tankönyv összhangban áll a NAT 2012-vel.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
HERCZEGNÉ KASZÁS JUDIT, ZARUBAY ATTILA

Lektorok:
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ
középiskolai tanár
RAJK ÁGNES
középiskolai tanár

Grafikusok: JUHÁSZ LEHEL, TÉNYI KATI

Fotó: JUHÁSZ LEHEL

A fedelet CZAKÓ RITA rajzának felhasználásával KORDA ÁGNES tervezte.

Felelős szerkesztők: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA, DR. KORECZNÉ KAZINCZI ILONA

Anyanyelvi lektorok: DR. FALUSSY BÉLÁNÉ, BÁNKI LÁSZLÓNÉ

© Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin PhD, dr. Korándi József PhD, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta, Oktatási Hivatal (Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet), 2016

ISBN 978-963-19-7942-8

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök • Raktári szám: NT-11880/M
Tankönyvkiadási koordinációs osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó • Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 12,36 (A/5) ív • Tömeg: 250 gramm • 1. kiadás, 2020
Tördelés, grafika: Fried Katalin • A szedés EMTEX szedőrendszerben készült

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben, 2020-ban
A Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
Felelős vezető: Erdős Tamás vezérigazgató
Telefon: 66/887-400

Tartalom

Bevezetés 5
1. Halmazok 6
Halmazok, halmazműveletek 6
Műveletek halmazokkal 8
Ponthalmazok 10
2. A számok világa 11
A racionális számok 11
A négyzetgyök fogalma 13
A π (pi) és más nem racionális számok *(Emelt szintű, választható tananyag)* 14
Kis számok, nagy számok 15
Egy szám többféle alakja – a normálalak 17
Műveletek normálalakban adott számokkal *(Emelt szintű, választható tananyag)* 18
Számelmélet 20
3. Algebra 21
Műveletek 21
Összeadás, szorzás 21
Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések 22
Műveletek algebrai kifejezésekkel 24
Egyenletek, egyenlőtlenségek 25
Elemi úton megoldható szöveges feladatok 25
A mérlegelv alkalmazása 27
Egyenlőtlenségek 28
Számokkal kapcsolatos feladatok 29
Keverési feladatok 31
Mozgásos feladatok 33
Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok *(Emelt szintű, választható tananyag)* 36
Szöveges feladatok a geometria témaköréből 38
Kombinatorikai feladatok 39
4. Transzformációk 40
Egybevágósági transzformációk 40
Vektorok 42
Vektorok összeadása 44
Vektorok kivonása 46
Eltolás 47
Pont körüli elforgatás *(Választható tananyag)* 50
Középpontos hasonlóság 51
Középpontos hasonlóság tulajdonságai 53

Szerkesszünk középpontosan hasonló képet! ... 54
Hasonlóság ... 56
5. A Pitagorasz-tétel ... 58
Mérjük meg a hosszát! ... 58
A Pitagorasz-tétel ... 59
A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban ... 60
A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban *(Emelt szintű, választható tananyag)* ... 61
Pitagoraszi számhármasok *(Emelt szintű, választható tananyag)* ... 62
Thalész-tétel ... 63
6. A számológép ... 64
Mit tud a számológép? ... 64
Négyzetgyök ... 64
7. Függvények ... 66
Lineáris függvények ... 66
Áttekintés ... 66
Lineáris függvények meredeksége I. ... 68
Lineáris függvények meredeksége II. ... 70
Elsőfokú egyenletek grafikus megoldása ... 72
Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása ... 73
Gyakorlati alkalmazások ... 74
Nemlineáris függvények ... 75
Az abszolútérték-függvény ... 75
A másodfokú függvény ... 77
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása *(Emelt szintű, választható tananyag)* ... 78
Sorozatok ... 79
Mértani sorozat *(Emelt szintű, választható tananyag)* ... 80
8. Statisztika ... 82
Adatok ábrázolása diagramon ... 82
Ábrázolás kördiagramon ... 84
Hogyan készítsünk kördiagramot? ... 84
Az adatsokaságot jellemző középértékek ... 86
Átlag, módusz, medián ... 86
9. A tér geometriája ... 88
A tanult testek áttekintése ... 88
Gúlák ... 89
Kúpok ... 90
A gúla és a kúp térfogata *(Emelt szintű, választható tananyag)* ... 90
Gömb ... 91
10. Valószínűségszámítás ... 92
A valószínűség klasszikus modellje ... 92
Geometriai valószínűség *(Emelt szintű, választható tananyag)* ... 95

Bevezetés

Ez a munkafüzet az NT-11880 raktári számú, 8. osztályos tankönyvhöz készült. Célja, hogy lehetővé tegye a folyamatos gyakorlást. A fejezetek követik a tankönyv fejezeteit. Szándékaink szerint az A) feladatsorok házi feladatként is használhatók.

Az itt található feladatsorok A) és B) változatban készültek. Az A) feladatsor feladatai kifejezetten a gyakorlást szolgálják, a B) feladatsor feladatai helyenként kimondottan komplex gondolkodást igényelnek, ALKALMASAK A SIKERES KÖZÉPISKOLAI FELVÉTELI ELŐKÉSZÍTÉSÉRE. Ezenkívül ∗gal jeleztük azt, ha egy feladat megoldását még a B)-ben szokásosnál is nehezebbnek ítéltük.

A megoldásokra általában hagytunk helyet. Ahol mégsem, ott a feladat mellett kis füzetszimbólum  jelzi, hogy a füzetben kell dolgozni.

Az egyes anyagrészek mellett a *„Választható tananyag”* arra vonatkozik, hogy nem tartozik szorosan a tantervben meghatározott anyaghoz, de ha van rá idő, akkor érdemes vele foglalkozni, mert segíti a matematikai szemlélet kialakulását, elmélyülését.

Az *„Emelt szintű, választható tananyag”* arra utal, hogy az adott téma, problémakör vagy tananyagrész nem tantervi követelmény, de gyorsabban haladó osztályokban feldolgozható, differenciálás céljára használható rész.

1. Halmazok

Halmazok, halmazműveletek

A)

1 Melyik halmaz, melyik nem az alábbiak közül? Szóban válaszolj, és indokold a válaszodat!

a) A 3-mal osztható természetes számok.

b) A létező cipőméretek.

c) A nagy hegyek.

d) A 4000 m-nél magasabb hegycsúcsok.

e) Az érdekes tantárgyak.

f) Az idén általad tanult tárgyak.

2 Alkoss egyelemű, kételemű, háromelemű halmazokat a természetes számokból!

3 Melyek egyenlők az alábbi halmazok közül?

$A = \{1; 2; 4; 1\}$; $B = \{1; 4; 4; 1\}$; $C = \{1; 2; 4; 2\}$; $D = \{4; 2; 4; 1\}$; $E = \{1; 1; 4; 1\}$.

4 Melyik határoz meg üres halmazt az alábbiak közül?

a) A negatív négyzetszámok. _____

b) A konvex háromszögek. _____

c) A konkáv körök. _____

d) A páros prímszámok. _____

e) A három párhuzamos oldallal rendelkező négyszögek. _____

5 A racionális (**Q**), egész (**Z**), illetve természetes számok (**N**) közül melyik lehet az alaphalmaz, ha

a) benne van a $\frac{2}{3}$; _____

b) nincsenek benne törtszámok; _____

c) nincsenek benne negatív számok; _____

d) benne van a -5? _____

Figyelj, lehet, hogy több megoldás is van!

6 *a)* Mi lehet a természetes számok komplementer halmaza, ha az alaphalmaz az egész számok? _____

b) Mi lehet az $A = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; \ldots\}$ halmaz komplementer halmaza, ha az alaphalmaz a természetes számok?

c) Mi lehet az $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots\}$ halmaz komplementer halmaza, ha az alaphalmaz a természetes számok?

d) Mi lehet az $A = \{\ldots -9; -7; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots\}$ halmaz komplementer halmaza, ha az alaphalmaz a természetes számok?

***7** Írd fel az $\{1; 3; 5\}$ halmaz minden részhalmazát! Az üres halmazról és a teljes halmazról se feledkezz el! Hány részhalmazt találtál?

B)

1 Melyik halmaz, melyik nem az alábbiak közül? Szóban válaszolj! Fogalmazd meg, min múlik, hogy halmazok-e vagy sem az alábbiak! Beszéljétek meg egymás között!

a) A páros prímszámok.

b) A legérdekesebb prímszám.

c) A legkisebb pozitív prímszám.

d) A konkáv négyszögek.

e) A nagyon konkáv négyszögek.

f) A négyszögek.

2 Írd fel az összes 3-elemű halmazt, amely az 1, 2, 3, 4 elemek közül háromból alkotható!

3 Hány eleme van az alábbi halmazoknak? Melyek egyenlők közülük?

$A = \{3; 10; 3; 12\}$; _____ $B = \{3; 10; 13; 12\}$; _____

$C = \{13; 3; 12; 10\}$; _____ $D = \{13; 3; 13; 3\}$; _____

$E = \{13; 10; 12; 10\}$; _____ $F = \{1; 1; 1; 0\}$. _____

4 Melyik halmazzal egyenlő az alábbiak közül az $A = \{10; 3; 2; 9; 5; 2; 10\}$ halmaz?

$B = \{2; 3; 3; 5; 9; 10\}$; $C = \{2; 9; 5; 3; 10\}$; $D = \{5; 5; 3; 9; 9; 5; 2; 10\}$.

5 Mi a megoldása a $2x - 5 < 3$ egyenlőtlenségnek

a) a természetes számok halmazán; _____

b) az egész számok halmazán; _____

c) a racionális számok halmazán; _____

d) a pozitív racionális számok halmazán? _____

***6** Az alaphalmaz tetszőleges halmaz lehet. Azt nevezzük alaphalmaznak, amelyen egy adott probléma megoldását keressük. Ebben a feladatban legyen a $[-10; 10]$ intervallumba eső racionális számok halmaza az alaphalmaz!

a) Mi a komplementere a $[0; 10]$ intervallumnak? _____

b) Mi a komplementere a $(0; 10]$ intervallumnak? _____

c) Mi a komplementere a $(-1; 1)$ intervallumnak? _____

7 Mely halmazok egyenlők az alábbiak közül?

$A = \{$a 10-nél nagyobb, 3-mal osztható prímszámok$\}$;

$B = \{$a 4 derékszöggel rendelkező ötszögek$\}$;

$C = \{$a 4 derékszöggel rendelkező négyszögek$\}$;

$D = \{$a téglalapok$\}$;

$E = \{$a 2 derékszöggel rendelkező háromszögek$\}$.

***8** Írd fel az $\{1; 2; 3; 4\}$ halmaz minden részhalmazát! Az üres halmazról és a teljes halmazról se feledkezz el! Hány részhalmazt találtál?

Műveletek halmazokkal

A következő feladatok megoldásában segít, ha halmazábrát (Venn-diagramot) készítesz a füzetedbe.

A)

1 Legyen $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$! A H alaphalmaz legyen az 1-nél nem kisebb, 10-nél nem nagyobb természetes számok halmaza!

a) Írd fel elemeivel a H halmazt! _____

b) Írd fel elemeivel az $A \cup B$ halmazt! _____

c) Írd fel elemeivel az $A \cap B$ halmazt! _____

d) Írd fel elemeivel az $\overline{A}$ halmazt! _____

e) Írd fel elemeivel a $\overline{B}$ halmazt! _____

2 Legyen a legfeljebb kétjegyű számok H halmaza az alaphalmaz! Legyen A a pontosan egyjegyű, B a pontosan kétjegyű számok halmaza!

a) Írd fel szavakkal az $A \cup B$ halmazt! _____

b) Írd fel szavakkal az $A \cap B$ halmazt! _____

c) Írd fel szavakkal az $\overline{A}$ halmazt! _____

d) Írd fel szavakkal a $\overline{B}$ halmazt! _____

3 A és B egyesítésének elemei száma 45. Mennyi a metszetük elemszáma, ha a két halmaz elemeinek a száma

a) 27 és 18; _____ *b)* 30 és 16; _____ *c)* 30 és 20? _____

4 Egy 10 marslakóból álló társaságban 4 marslakónak 3 füle van, 7-nek pedig 3 lába van. Van-e olyan marslakó, akinek 3 füle és 3 lába van?

_____



5 Egy boltban vásárló 10 vevőből 7-nek a kosarában van tej, 5-nek a kosarában van kenyér. Legalább hány vevő kosarában van tej is és kenyér is?

_____

6 Egy fitneszklub 30 tagja közül 14 gyűjt lepkét és 10 gyűjt bélyeget. 8-an sem lepkét, sem bélyeget nem gyűjtenek. Hányan gyűjtenek lepkét és bélyeget is?

7 Egy sportkör 40 tagja közül 28 szokott erősíteni a konditeremben, 24 rendszeresen úszik, 10 egyik sportot sem űzi. Hányan edzenek mindkét módon?

***8** Az osztály 32 tanulója közül 20 szereti a krémest, 16 a Rákóczi-túrót és 12 a képviselőfánkot. 4 gyerek mind a hármat szereti. A Rákóczi-túrót kedvelők közül 2-2 szereti a krémest vagy a képviselőfánkot is. Melyik süteményfélét hányan szeretik, ha mindenki szeret legalább egyfélét?

B)

1 Add meg a következő A és B halmazoknak a metszetét; egyesítését; komplementerét, ha az alaphalmaz a 0-nál nagyobb, 11-nél kisebb egész számok!

$A = \{1; 2; 4; 8\}$; $B = \{2; 4; 6; 8\}$; $A = \{1; 3; 5; 7\}$; $B = \{2; 4; 6; 8\}$; $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 5; 7\}$.

2 Hány eleme lehet az A halmaznak, ha $A \cup B$-nek 30 eleme van, B-nek pedig 10? _____

_____

Figyelj! Több megoldás is lehetséges! Hány megoldást találtál? _____

3 $A \cup B$-nek 40 eleme van. A két halmaznak külön-külön ugyanannyi eleme van. Lehet-e $A \cap B$ elemeinek száma $a = 1$; $b = 4$; $c = 9$; $d = 16$?

Indokold a válaszaidat! Beszéljétek meg egymás között a lehetséges válaszokat!

***4** Legyen az alaphalmaz a $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$! Mi lehet az A és a B halmaz, ha tudjuk, hogy $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $\overline{A} = \{5; 6; 7\}$ és $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 9; 10\}$? Ha szükséges, készíts ábrát!

$A = \{$_____$\}$; $B = \{$_____$\}$.

(Segítség: minden egyes alaphalmazbeli elemet vizsgálj meg, hogy benne lehet-e A-ban, illetve B-ben!)

5 Az osztályban a gyerekek megkérdezik egymást, hogy ki melyik filmet látta már a *Nem tudok aludni*, a *Kihűlt a vacsora* és a *Kevés a hajam* című filmek közül.

5-en mind a hármat látták.

7 olyan gyerek van, akik csak a *Nem tudok aludni* és a *Kihűlt a vacsora* című filmet látták.

11 olyan, akik csak a *Nem tudok aludni* és a *Kevés a hajam* című filmeket.

2 olyan, akik csak a *Kihűlt a vacsora* és a *Kevés a hajam* című filmeket.

Olyan gyerek, aki csak a *Nem tudok aludni* című filmet látta, 4 van.

Olyan, aki csak a *Kihűlt a vacsora* címűt, 2.

És olyan, aki csak a *Kevés a hajam* címűt, 3.

a) Hányan járnak az osztályba? _____ *b)* Melyik filmet hányan látták? _____

***6** Egy baráti társaságban 7-en járnak rendszeresen színházba, 8-an koncertre, 15-en moziba.

Moziba és színházba is 4-en járnak, moziba és koncertre is 5-en.

3-an színházba, moziba és koncertre is járnak.

a) Hány fős a társaság? _____

b) Hányan járnak színházba és koncertre is, de moziba nem? _____

c) Hányan járnak csak koncertre? _____

7 Egy zeneiskolai osztályban mindenki játszik valamilyen hangszeren. 14-en zongoráznak. 10-en játszanak hegedűn. 7-en játszanak fúvós hangszeren. 6-an gitároznak. Olyan gyerek nincs, aki négy hangszeren játszana. 4 olyan gyerek van, aki pontosan két hangszeren tanul. 2 olyan van, aki három hangszeren is tanul.



a) Hány gyerek jár az osztályba? _____

b) Hányan tanulnak 1 hangszeren játszani? _____

***8** Az osztályban arról szavaznak a gyerekek, hogy hova menjenek kirándulni. A Bükk, a Börzsöny és a Bakony merült fel lehetséges úti célként. A tanár azt kérte, hogy akinek mindegy, hova mennek, az inkább ne szavazzon. Egyébként minden gyerek szavazhat, akár több úti célra is. Úgy döntöttek, hogy a legtöbbek által elfogadott úti célt választják. A 28 gyerek közül 8-an semmire sem szavaztak.

A szavazatok összeszámlálása után kiderült, hogy 10-en szavaztak a Bükkre, 10-en a Börzsönyre és 10-en a Bakonyra.

Nem volt olyan, aki a Bükkre és a Börzsönyre is szavazott.

Hova mennek kirándulni a gyerekek, ha sikerült választani a szavazás alapján?

***9** A budapesti iskolások asztalitenisz-versenyén minden fordulóban a versenyben levő játékosok egy-egy ellenféllel játszanak. Aki veszít, az kiesik. Akinek nem jut pár, az játék nélkül továbbjut. Hány játékot kell játszani összesen, hogy kikerüljön a győztes, ha a versenyzők száma

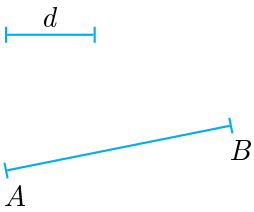
a) 256; *b)* 1000?

Ponthalmazok

A)

1 Színezd az ábrán azokat a pontokat, amelyek az AB szakasztól

a) d távolságra; *b)* nagyobb mint d távolságra; *c)* nem nagyobb mint d távolságra vannak!



2 Színezd ki a négyzet belsejében azokat a pontokat, amelyek a négyzet határvonalától távolabb vannak, mint a négyzet oldalának negyede!



3 Add meg azt a ponthalmazt a térben, amelynek pontjai egy háromszög mindhárom csúcsától azonos távolságra vannak!

4 Add meg azt a ponthalmazt a térben, amelynek pontjai

a) egy egyenestől; *b)* egy szakasztól

azonos távolságra vannak!

5 Add meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek

a) első koordinátája pozitív szám; *b)* második koordinátája negatív szám!

Mi a két ponthalmaz metszete?

6 Add meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek első és második koordinátájának abszolút értéke egyenlő!

B)

1 Add meg azon pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyek

a) első koordinátája kétszer annyi, mint a második;

b) első koordinátája 2-vel nagyobb, mint a második!

2 A koordináta-rendszer első negyedében két hangya bolyong. Az A hangya helyének második koordinátája nem lehet nagyobb mint 3. A B hangya helyének első koordinátája kétszerese sem lehet nagyobb a második koordinátája értékénél.

a) Ábrázold különböző színnel a hangyák által elérhető pontokat!

b) Mekkora a területe annak a ponthalmaznak, amelyen mindkét hangya tartózkodhat?

***3** Add meg azon $P(x; y)$ pontok halmazát a koordináta-rendszerben, amelyekre $|x| + |y| = 2$!

2. A számok világa

A racionális számok

A)

1 Válogasd szét az alábbi számokat aszerint, hogy természetes, egész vagy racionális számok-e! Egy számra többféle tulajdonság is teljesülhet.

-1; $\frac{2}{3}$; 0; $\frac{4}{2}$; $100{,}001$; $\frac{-4}{7}$; $4{,}0$; $-7{,}4$; $4{,}\dot{1}$; -6.

Természetes számok: _____

Egész számok: _____

Racionális számok: _____

Töltsd ki a hiányzó helyeket a *természetes, egész* vagy *racionális* szavakkal!

Minden természetes szám egyszersmind _____ szám és _____ szám is.

Minden egész szám _____ szám, és van olyan egész szám, amelyik _____ szám. Ezek a nemnegatív _____ számok.

Minden racionális szám felírható két _____ szám hányadosaként.

2 Keress öt-öt olyan racionális számot, amely a megadott két szám közé esik!

a) 3,5 és 4,1 _____

b) 0,15 és 0,16 _____

c) 2,99 és 3,00 _____

d) $-0{,}1$ és 0,1 _____

e) $-0{,}95$ és $-0{,}1$ _____

3 Válogasd szét a számokat aszerint, hogy a tizedestört-alakjuk véges vagy végtelen szakaszos-e!

$\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{7}{2}$; 3; $-\frac{2}{3}$.

Véges: _____

Végtelen szakaszos: _____

4 Írd fel két egész szám hányadosaként a következő számokat! Minden esetben egyszerűsítsd a kapott törtet, ha lehet! Ábrázold számegyenesen a számokat!

$a = 0{,}25 =$ _____; $b = 2{,}7 =$ _____;

$c = -0{,}\dot{3} =$ _____; $d = 2{,}\dot{4} =$ _____;

$e = 3{,}\dot{3} =$ _____; $f = 0{,}0\dot{3} =$ _____.



B)

1 *a)* Sorolj fel öt olyan egész számot, amely nem természetes szám! Mi jellemző ezekre a számokra?

_____

b) Van-e olyan természetes szám, amely nem egész szám? Miért?

_____

c) Sorolj fel öt olyan törtszámot, amely nem egész szám!

_____

d) Van-e olyan egész szám, amely nem racionális szám? Miért?

_____

2 Állapítsd meg a következő számok tizedestört-alakját! Mit kaptál, végtelen szakaszos vagy véges törtet? Ha végtelen szakaszos, akkor állapítsd meg a szakasz hosszát is!

$a = \frac{1}{2} =$ _____; $b = \frac{1}{3} =$ _____; $c = \frac{1}{5} =$ _____;

$d = \frac{1}{11} =$ _____; $e = \frac{1}{999} =$ _____;

$f = \frac{1}{999\,999} =$ _____.

3 Keress olyan racionális számokat, amelyek tizedestört-alakja végtelen szakaszos, és a szakasza

a) 1 hosszúságú _____; *b)* 4 hosszúságú _____;

c) 7 hosszúságú _____; *d)* 11 hosszúságú _____!

4 Írd fel két egész szám hányadosaként a következő számokat! Minden esetben egyszerűsítsd a kapott törtet, ha lehet!

$a = 0{,}\dot{1} =$ _____; $b = 1{,}\dot{1} =$ _____;

$c = 0{,}0\dot{1} =$ _____; $d = 0{,}\dot{1}\dot{5} =$ _____;

$e = 15{,}\dot{1}\dot{5} =$ _____; $f = 0{,}0\dot{1}\dot{5} =$ _____.

***5** *a)* Igaz-e, hogy két tetszőlegesen kiválasztott természetes szám számtani közepe természetes szám? ☐

b) Igaz-e, hogy két tetszőlegesen kiválasztott egész szám számtani közepe egész szám? ☐

c) Igaz-e, hogy két tetszőlegesen kiválasztott racionális szám számtani közepe racionális szám? ☐

d) Igaz-e, hogy két tetszőlegesen kiválasztott egész szám számtani közepe racionális szám? ☐

***6** *a)* Tudsz-e két egymást követő természetes számot mondani? _____

b) Tudsz-e két egymást követő egész számot mondani? _____

c) Tudsz-e két egymást követő racionális számot mondani? _____

A négyzetgyök fogalma

A)

1 Melyek négyzetszámok az alábbiak közül? Ezek mely számoknak a négyzetei? Hány megoldást találsz egy-egy számhoz? Írd le például így: $4 = 2^2 = (-2)^2$.

$a = 25$; $b = 64$; $c = 56$; $d = 101$; $e = 441$; $f = 48$;

$g = 256$; $h = 200$; $i = 100$; $j = 400$; $k = 625$; $l = 900$.

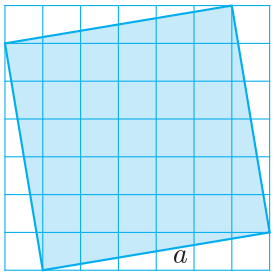
2 Mely pozitív számok négyzetei az alábbi számok?

$a = 4{,}84$; $b = 2{,}56$; $c = 0{,}49$; $d = 0{,}01$; $e = 102{,}01$; $f = 0{,}0001$.

3 Mely két *a)* egész szám; *b)* tized; *c)* század közé esnek az

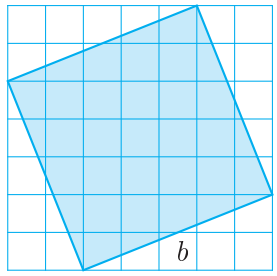
$a = 14$; $b = 7$; $c = 5$; $d = 20$; $e = 80$ számok négyzetgyökei?

4 Határozd meg az alábbi színezett négyzetek területét, majd oldalhosszát, ha a rácsnégyzet oldalhossza az egység!



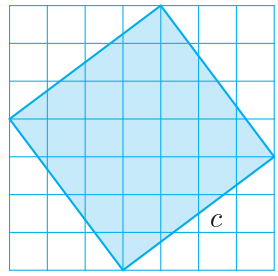
$T =$ _____

$a =$ _____



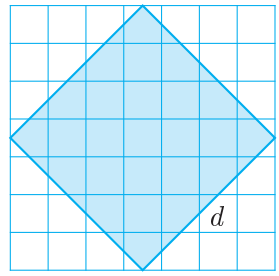
$T =$ _____

$b =$ _____



$T =$ _____

$c =$ _____



$T =$ _____

$d =$ _____

B)

1 Egy a **egész** számból négyzetgyököt vontunk. Mennyi lehetett a, ha

a) $4 < \sqrt{a} < 5$; $4{,}2 < \sqrt{a} < 4{,}3$; $4{,}24 < \sqrt{a} < 4{,}25$;

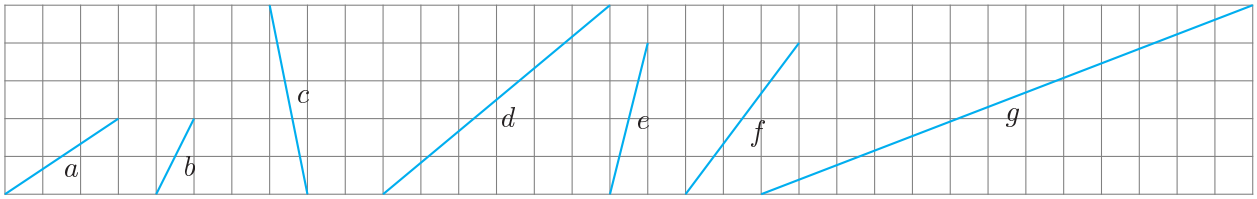
b) $10 < \sqrt{a} < 11$; $10{,}8 < \sqrt{a} < 10{,}9$; $10{,}90 < \sqrt{a} < 10{,}91$;

c) $100 < \sqrt{a} < 101$; $100{,}8 < \sqrt{a} < 100{,}9$; $100{,}95 < \sqrt{a} < 100{,}96$;

d) $3 < \sqrt{a} < 4$; $3{,}1 < \sqrt{a} < 3{,}2$; $3{,}11 < \sqrt{a} < 3{,}12$?

Melyik esetben hányféle megoldást kaptál?

2 Állapítsd meg az ábrán látható szakaszokról, hogy milyen hosszúak, ha a rácsnégyzet oldalhossza az egység! Ha szükséges, a füzetedben egészítsd ki a szakaszokat négyzetekké, majd foglald rácsnégyzetekbe őket!



$a =$ _____; $b =$ _____; $c =$ _____; $d =$ _____;

$e =$ _____; $f =$ _____; $g =$ _____.

***3** Írj a keretbe I betűt, ha igen, N betűt, ha nem:

a) Lehet-e nem egész racionális szám négyzete racionális szám? _____ ☐

b) Lehet-e nem egész racionális szám négyzete egész szám? _____ ☐

c) Lehet-e valamely racionális szám négyzete nem egész racionális szám? _____ ☐

d) Lehet-e valamely racionális szám négyzete természetes szám? _____ ☐

***4** Írj a keretbe I betűt, ha igen, N betűt, ha nem.

a) Lehet-e egy nem egész racionális szám négyzetgyöke racionális szám? _____ ☐

b) Lehet-e egy nem egész racionális szám négyzetgyöke egész szám? _____ ☐

c) Lehet-e valamely racionális szám négyzetgyöke nem egész racionális szám? _____ ☐

d) Lehet-e valamely racionális szám négyzetgyöke természetes szám? _____ ☐

A π (pi) és más nem racionális számok

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Igaz-e? Írj a keretbe I (igaz) vagy H (hamis) betűt!

a) Ha egy tizedes tört véges, akkor a szám racionális. _____ ☐

b) Ha egy tizedes tört végtelen, akkor a szám nem lehet racionális. _____ ☐

c) Ha egy tizedes tört végtelen szakaszos, akkor a szám racionális. _____ ☐

d) Egy racionális szám tizedestört-alakja nem lehet végtelen. _____ ☐

e) Egy nem racionális tizedes tört nem lehet véges. _____ ☐

f) A racionális számok tizedestört-alakja véges vagy végtelen szakaszos. _____ ☐

2 Melyek racionálisak, melyek nem az alábbi számok közül?

a) $0{,}2$; *b)* $0{,}\dot{2}$; *c)* $0{,}20220222022220\ldots$;

d) $-0{,}131133111333\ldots$; *e)* $0{,}1212121212\ldots$; *f)* $0{,}121122$.

Racionálisak: _____

Nem racionálisak: _____

3 Készíts két végtelen tizedes törtet úgy, hogy mindegyikben az 1, 2, 3 számjegyek szerepeljenek! Az egyik legyen szakaszos, a másik legyen nem szakaszos!

_____

_____

4 Készíts három különböző nem racionális számot úgy, hogy mindegyikben az 1, 2, 3 számjegyek szerepeljenek!

B)

1 Melyek racionálisak a következő számok közül? Miből tudod megállapítani?

a) 147,1; *b)* $1,\dot{4}7\dot{1}$; *c)* 1,471471147111471111;

d) 1,471471147111471111 . . .; *e)* $1,47\dot{1}$; *f)* 1,471447144471444471 . . ..

Racionálisak: _____

2 Melyik szám racionális az alábbiak közül?

$a = \sqrt{4}$; $b = \sqrt{5}$; $c = \sqrt{25}$; $d = \sqrt{\frac{4}{9}}$;

$e = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $f = \sqrt{\frac{1}{4}}$; $g = -\frac{4}{25}$; $h = \sqrt{\frac{1}{10}}$;

$i = \sqrt{\frac{1}{100}}$; $j = \sqrt{\frac{4}{10}}$; $k = \sqrt{\frac{4}{100}}$; $l = \sqrt{\frac{1}{25}}$.

Racionálisak: _____

***3** Olyan 0 és 1 közé eső nem racionális számot készítettünk, amelynek a tizedestört-alakjában csak 1-es és 2-es számjegyek szerepelnek.

a) Lehet-e, hogy csak egy 2-es szerepel a tizedes törtben?

b) Lehet-e, hogy csak három 2-es szerepel a tizedes törtben?

c) Lehet-e, hogy csak ezer 2-es szerepel a tizedes törtben?

***4** Tudjuk, hogy a π nem racionális szám.

a) Felírható-e két egész szám hányadosaként?

b) Ha kivonnánk belőle 3-at, akkor fel lehetne-e írni két egész szám hányadosaként?

c) A kétszerese felírható-e két egész szám hányadosaként?

Kis számok, nagy számok

A)

1 Írd fel a megadott számokat 10 hatványaiként!

$a = 10 =$ _____; $b = 0,1 =$ _____; $c = 0,01 =$ _____; $d = 1000 =$ _____;

$e = 10\,000 =$ _____; $f = 0,000\,1 =$ _____; $g = 0,001 =$ _____; $h = 1 =$ _____.

2 Hány számjegye van 10 következő hatványainak?

10^1: _____; 10^0: _____; 10^2: _____; 10^4: _____;

10^3: _____; 10^6: _____; 10^{100}: _____; 10^{2000}: _____.

3 Hány tizedesjegye van 10 következő hatványainak?

10^{-1}: _____; 10^0: _____; 10^{-2}: _____; 10^{-4}: _____;

10^{-3}: _____; 10^{-6}: _____; 10^{-100}: _____; 10^{-2000}: _____.

4 Írd fel 10 hatványaiként a következő szorzatokat!

$a = 10^2 \cdot 10^2 = 10^{\square}$; $b = 10^3 \cdot 10^1 = 10^{\square}$; $c = 10^3 \cdot 10^1 = 10^{\square}$;

$d = 10^5 \cdot 10^{-2} = 10^{\square}$; $e = 10^3 \cdot 10^{-4} = 10^{\square}$; $f = 10^{-2} \cdot 10^{-1} = 10^{\square}$;

$g = 10^{-5} \cdot 10^{-4} = 10^{\square}$; $h = 10^{-10} \cdot 10^4 = 10^{\square}$; $i = 10^{-2} \cdot 10^{-12} = 10^{\square}$.

5 10 melyik hatványával való szorzással helyettesíthető, ha osztunk

10^3-nal? _____ 10^6-nal? _____ 10^2-nel? _____

10^5-nel? _____ 10^0-nal? _____ 10^1-nel? _____

10^{-2}-nal? _____ 10^{-4}-nel? _____ 10^{-7}-nel? _____

6 10 melyik hatványával való osztással helyettesíthető, ha szorzunk

10^3-nal? _____ 10^6-nal? _____ 10^2-nel? _____

10^5-nel? _____ 10^0-nal? _____ 10^1-nel? _____

10^{-2}-nal? _____ 10^{-4}-nel? _____ 10^{-7}-nel? _____

B)

1 Írd fel 10 hatványaiként a következő szorzatokat!

$10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{\square}$; $10^1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 10^{\square}$; $10^{-1} \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 = 10^{\square}$;

$10^5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} = 10^{\square}$; $10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 10^{\square}$; $10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{\square}$;

$10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{\square}$; $10^0 \cdot 10^1 \cdot 10^{-3} = 10^{\square}$; $10^{-2} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 10^{\square}$.

2 Állítsd nagyság szerint csökkenő sorrendbe 10 alábbi hatványait!

10^5; 10^{-5}; 10^{-2}; 10^3; 10^0; 10^2; 10^{-1}.

_____

3 Írd fel 10^{-4}-t 10 két hatványának szorzataként! Keress többféle megoldást!

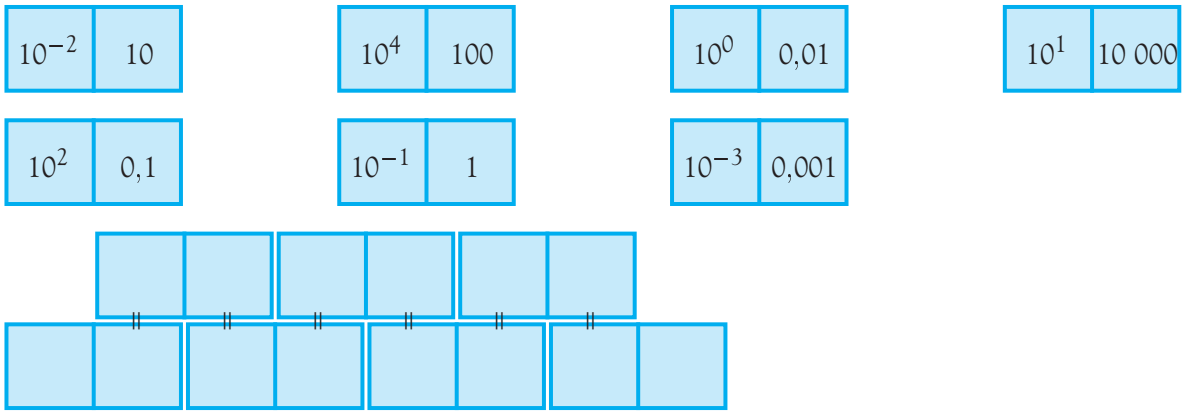
_____

***4** Igaz-e? Írj a keretbe I betűt, ha igaz, H betűt, ha hamis az állítás!

10 két hatványának szorzata felírható 10 hatványaként. _____ ☐

Két szám szorzatát csak akkor lehet 10 hatványaként felírni, ha mindkét szám 10 hatványa volt. _____ ☐

***5** Helyezd el az adott dominókat a dominósorban úgy, hogy az egymás mellett álló értékek egyenlőek legyenek! Marad-e ki dominó? Miért? Számít-e, melyik dominóval kezded?



Egy szám többféle alakja – a normálalak

A)

1 Pótold a hiányzó kitevőket!

a) $5350 \cdot 10^{-4} = 535 \cdot 10^{\square} = 53{,}5 \cdot 10^{\square} = 5{,}35 \cdot 10^{\square} = 0{,}535 \cdot 10^{\square} = 0{,}0535 \cdot 10^{\square}$;

b) $0{,}0014 \cdot 10^{4} = 0{,}014 \cdot 10^{\square} = 0{,}14 \cdot 10^{\square} = 1{,}4 \cdot 10^{\square} = 14 \cdot 10^{\square} = 0{,}0140 \cdot 10^{\square}$;

c) $2{,}7 \cdot 10^{3} = 0{,}27 \cdot 10^{\square} = 0{,}0027 \cdot 10^{\square} = 27 \cdot 10^{\square} = 2700 \cdot 10^{\square} = 270 \cdot 10^{\square}$;

d) $10^{-2} = 10 \cdot 10^{\square} = 100 \cdot 10^{\square} = 1000 \cdot 10^{\square} = 0{,}1 \cdot 10^{\square} = 0{,}01 \cdot 10^{\square} = 0{,}001 \cdot 10^{\square}$.

2 Mely számokat írtuk fel normálalakban?

$a = 1{,}5 \cdot 10^{2} =$ _____; $b = 0{,}15 \cdot 10^{-2} =$ _____; $c = 4{,}3 \cdot 10^{4} =$ _____;

$d = 917 \cdot 10^{-5} =$ _____; $e = 0{,}1 \cdot 10^{-2} =$ _____; $f = 10{,}1 \cdot 10^{-3} =$ _____;

$g = 4{,}5 \cdot 10^{5} =$ _____; $h = 3{,}14 \cdot 10^{2} =$ _____; $i = 0{,}0001 \cdot 10^{5} =$ _____.

3 Melyek egyenlőek a következő számok közül?

$a = 2{,}5 \cdot 10^{4}$; $b = 25 \cdot 10^{3}$; $c = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$; $d = 250 \cdot 10^{-1}$; $e = 25 \cdot 10^{2}$; $f = 25$;

$g = 25 \cdot 10^{-2}$; $h = 0{,}025 \cdot 10^{-1}$; $i = 0{,}25 \cdot 10$; $j = 25 \cdot 10^{1}$; $k = 2{,}5 \cdot 10^{2}$; $l = 250$.

---

4 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

$a = 1{,}7 \cdot 10^{1}$; $b = 0{,}5 \cdot 10^{2}$; $c = 2{,}4 \cdot 10^{-1}$; $d = 5{,}3 \cdot 10^{2}$;

$e = 0{,}43 \cdot 10^{2}$; $f = 256 \cdot 10^{-4}$; $g = 5{,}46 \cdot 10^{2}$; $h = 123 \cdot 10^{-4}$;

$i = 51 \cdot 10^{4}$; $j = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$; $k = 1{,}55 \cdot 10^{6}$; $l = 0{,}015 \cdot 10^{-3}$.

5 Váltsd át a mennyiségeket a megadott mértékegységekre! A mérőszámot normálalakban írd fel!

a) 3,5 cm = _____ km = _____ dm = _____ mm;

b) 2,7 dkg = _____ kg = _____ g = _____ t;

c) 5,4 cl = _____ hl = _____ ml = _____ l = _____ dl.

B)

1 Keresd meg az egyenlőket! Kösd össze ezeket!

$a = 5{,}08 \cdot 10^2$; $b = 508 \cdot 10^4$; $c = 0{,}0508 \cdot 10^6$; $d = 50{,}8 \cdot 10^3$;

$e = 0{,}0508 \cdot 10^3$; $f = 5{,}08 \cdot 10^0$; $g = 50{,}8 \cdot 10^{-1}$; $h = 5{,}08 \cdot 10^{-3}$.

2 Pótold a hiányzó számokat, kitevőket!

a) $177 = 17{,}7 \cdot 10^{\square} = ____ \cdot 10^4 = 0{,}177 \cdot 10^{\square} = ____ \cdot 10^{-3} = ____ \cdot 10^{-2}$;

b) $4{,}35 \cdot 10^{\square} = ____ \cdot 10^3 = 0{,}435 \cdot 10^{-2} = ____ \cdot 10^{-3} = 4350 \cdot 10^{\square}$;

c) $0{,}005 \cdot 10^{\square} = ____ \cdot 10^5 = 5000 \cdot 10^{\square} = 0{,}5 \cdot 10^{\square} = ____ \cdot 10^{-3} = 5$.

3 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő tömegeket!

$a = 2$ kg; $b = 4 \cdot 10^{-4}$ t; $c = 2 \cdot 10^6$ g; $d = 41 \cdot 10^2$ dkg;

$e = 450 \cdot 10^{-7}$ t; $f = 5 \cdot 10^{11}$ mg; $g = 0{,}001 \cdot 10^6$ kg; $h = 7{,}2 \cdot 10^4$ dkg.

4 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő területeket! (Ne felejtsd el: az 1 m oldalú négyzet területe 1 m^2; a 10 m oldalú négyzet területe 1 ár; a 100 m oldalú négyzet területe 1 ha; az 1000 m = 1 km oldalú négyzet területe 1 km^2!)

$a = 12 \cdot 10^{-4}$ km^2; $b = 5 \cdot 10^4$ a; $c = 24 \cdot 10^2$ ha; $d = 1500$ m^2.

***5** Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő hosszúságokat!

$a = 12 \cdot 10^3$ m; $b = 8 \cdot 10^{-2}$ km; $c = 3{,}5 \cdot 10^4$ cm;

$d = 31{,}5 \cdot 10^3$ dm; $e = 15{,}25 \cdot 10^{-2}$ m; $f = 5{,}4 \cdot 10^4$ mm.

Műveletek normálalakban adott számokkal

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Végezd el a műveleteket! Előtte végezz becslést fejben!

a) $5{,}5 \cdot 10^2 + 3{,}45 \cdot 10^3 =$ ____; *b)* $3{,}25 \cdot 10^{-2} - 3{,}25 \cdot 10^2 =$ ____;

c) $4{,}5 \cdot 10^3 + 2{,}8 \cdot 10^{-1} =$ ____; *d)* $7{,}8 \cdot 10^2 - 8{,}7 \cdot 10^3 =$ ____;

e) $2{,}4 \cdot 10^5 - 4{,}2 \cdot 10^5 =$ ____; *f)* $9{,}15 \cdot 10^4 - 1{,}5 \cdot 10^3 =$ ____.

2 Végezd el a műveleteket! Előtte végezz becslést fejben!

a) $9{,}5 \cdot 10^2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-2} =$ ____; *b)* $1{,}25 \cdot 10^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3} =$ ____;

c) $1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-1} =$ ____; *d)* $3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^2 =$ ____;

e) $8{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2} =$ ____; *f)* $3{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}5 \cdot 10^2 =$ ____.

3 Mekkora a területe annak a téglalap alakú teleknek, amelynek oldalai

a) $1{,}5 \cdot 10^2$ m és $3{,}2 \cdot 10^2$ m? $T =$ _____

b) $0{,}35 \cdot 10^3$ m és $216 \cdot 10^{-1}$ m? $T =$ _____

c) $2400 \cdot 10^{-2}$ m és $50 \cdot 10^2$ m? $T =$ _____

d) $50\,000 \cdot 10^{-3}$ m és $2 \cdot 10^3$ m? $T =$ _____

4 Ha egy mákszem tömege $3 \cdot 10^{-4}$ kg, egy alma tömege pedig $9 \cdot 10^{-2}$ kg, akkor

a) hány mákszem tömegével egyenlő az alma tömege?

_____

b) hányszorosa az alma tömegének a mák tömege?

_____

c) hányszorosa a mák tömegének az alma tömege?

_____



5 Ha egy autó tömege $9{,}5 \cdot 10^2$ kg, a vezető tömege $0{,}83 \cdot 10^2$ kg, akkor

a) hányszorosa az autó tömege a vezető tömegének?

_____

b) az autó és a vezető együttes tömegének hányadrészét teszi ki a vezető tömege?

_____

B)

1 Végezd el a műveleteket! Előtte végezz becslést fejben! Az eredményeket normálalakban is add meg!

a) $4{,}3 \cdot 107 + 3{,}4 \cdot 10^4 =$ _____; *b)* $3{,}9 \cdot 10^3 + 5{,}1 \cdot 10^6 =$ _____;

c) $8{,}4 \cdot 10^{-2} + 8{,}4 \cdot 10^2 =$ _____; *d)* $6{,}15 \cdot 10^5 + 7{,}2 \cdot 10^{-3} =$ _____;

e) $2{,}95 \cdot 10^{-4} - 6{,}35 \cdot 10^3 =$ _____; *f)* $5{,}15 \cdot 10^2 - 3{,}65 \cdot 10^{-2} =$ _____;

g) $4{,}44 \cdot 10^{-2} - 1{,}6 \cdot 10^{-3} =$ _____; *h)* $5 \cdot 10^{-7} - 5 \cdot 10^7 =$ _____.

2 Végezd el a műveleteket! Előtte végezz becslést fejben! Az eredményeket normálalakban is add meg!

a) $2{,}5 \cdot 10^4 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-2} =$ _____; *b)* $6 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}5 \cdot 10^2 =$ _____;

c) $5{,}2 \cdot 10^7 \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-3} =$ _____; *d)* $4{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} =$ _____;

e) $1{,}15 \cdot 10^3 \cdot 6{,}8 \cdot 10^2 =$ _____; *f)* $5{,}9 \cdot 10^4 \cdot 0{,}025 =$ _____.

3 Végezd el a műveleteket! Előtte végezz becslést fejben! Az eredményeket normálalakban is add meg!

a) $(8{,}1 \cdot 10^4) : (1{,}5 \cdot 10^5)$; *b)* $(5{,}4 \cdot 10^{-2}) : (8{,}1 \cdot 10^4)$; *c)* $(5{,}6 \cdot 10^4) : (3{,}6 \cdot 10^{-2})$;

d) $(4{,}2 \cdot 10^7) : (1{,}4 \cdot 10^7)$; *e)* $(1{,}08 \cdot 10^{-3}) : (2{,}7 \cdot 10^2)$; *f)* $(2{,}5 \cdot 10^5) : (6{,}125 \cdot 10^{-5})$.

4 Egy 1 láb $\approx 3{,}3 \cdot 10^{-1}$ méter, 1 mérföld $\approx 1{,}6 \cdot 10^3$ m, 1 yard $\approx 9 \cdot 10^{-1}$ m. Végezd el a következő mértékváltásokat!

1 mérföld = _____ yard = _____ láb.

Számelmélet

A)

1 Pótold a hiányzó prímtényezőket, kitevőket!

a) $(2 \cdot 3)^2 \cdot \square = 2^{\square} \cdot 3^3$;

b) $(2 \cdot 5)^{\square} \cdot 2 = 2^{\square} \cdot 5^4$;

c) $(6 \cdot 8)^3 \cdot \square = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5$;

d) $(4 \cdot 9)^{\square} = 2^{\square} \cdot \square^3$;

e) $(5 \cdot 4)^6 \cdot \square = 3^{\square} \cdot 5^{\square} \cdot 2^{\square}$;

f) $(10 \cdot 8)^{\square} = 2^{\square} \cdot \square^3$.

2 Add meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!

a) 2^2 és 6^2;
b) 3^2 és 6^2;
c) 4^3 és 6^2;
d) 4^2 és 6^3;
e) 3^3 és 10^2;
f) 3^2 és 10^3;
g) 5^2 és 10^3;
h) 5^4 és 10^2;
i) 6^3 és 10^2;
j) 6^2 és 10^3;
k) 12^4 és 20^3;
l) 12^3 és 20^4.

3 Add meg a következő számok legkisebb közös többszörösét!

a) 2^2 és 6^2;
b) 3^2 és 6^2;
c) 4^3 és 6^2;
d) 4^2 és 6^3;
e) 3^3 és 10^2;
f) 3^2 és 10^3;
g) 5^2 és 10^3;
h) 5^4 és 10^2;
i) 6^3 és 10^2;
j) 6^2 és 10^3;
k) 12^4 és 20^3;
l) 12^3 és 20^4.

B)

1 *a)* Lehet-e, hogy egy szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel? _____

b) Lehet-e, hogy egy négyzetszám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel? _____

c) Lehet-e, hogy egy szám osztható 9-cel, de nem osztható 3-mal? _____

d) Lehet-e, hogy egy négyzetszám osztható 9-cel, de nem osztható 3-mal? _____

e) Lehet-e, hogy egy szám osztható 27-tel, de nem osztható 81-gyel? _____

f) Lehet-e, hogy egy négyzetszám osztható 27-tel, de nem osztható 81-gyel? _____

g) Lehet-e, hogy egy négyzetszám osztható 16-tal, de nem osztható 64-gyel? _____

h) Lehet-e, hogy egy négyzetszám osztható 64-gyel, de nem osztható 16-tal? _____

2 Egy négyzetszámban szerepel 3-as és 5-ös prímtényező is. Legalább mekkora ez a szám?

_____

***3** Egy kétjegyű számot 2-vel megszoroztunk, és négyzetszámot kapunk. Amikor 3-mal szoroztuk meg, köbszámot. Melyik lehetett ez a szám?

_____

***4** *a)* Hány 2-es prímtényező szerepelhet abban a számban, amely 3-mal osztható négyzetszám, és kisebb 100-nál?

_____

b) Hány 2-es prímtényező szerepelhet abban a számban, amely 5-tel osztható négyzetszám, és kisebb 100-nál?

_____

3. Algebra

Műveletek

Összeadás, szorzás

A)

1 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két természetes szám összege természetes szám?
b) Igaz-e, hogy két természetes szám különbsége mindig természetes szám?
c) Lehet-e két természetes szám szorzata természetes szám?
d) Lehet-e két természetes szám hányadosa természetes szám?

2 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két pozitív egész szám összege negatív egész szám?
b) Igaz-e, hogy két pozitív egész szám különbsége mindig negatív egész szám?
c) Lehet-e két pozitív egész szám szorzata negatív egész szám?
d) Lehet-e két pozitív egész szám hányadosa negatív egész szám?

3 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két negatív egész szám összege pozitív egész szám?
b) Igaz-e, hogy két negatív egész szám különbsége mindig pozitív egész szám?
c) Lehet-e két negatív egész szám szorzata pozitív egész szám?
d) Lehet-e két negatív egész szám hányadosa pozitív egész szám?

4 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két racionális szám összege negatív egész szám?
b) Igaz-e, hogy két racionális szám különbsége mindig negatív egész szám?
c) Lehet-e két racionális szám szorzata negatív egész szám?
d) Lehet-e két racionális szám hányadosa negatív egész szám?

5 Végezd el a műveleteket!

a) $4{,}25 + 6{,}3$; $6{,}3 + 4{,}25$; *b)* $15{,}2 + (-5{,}8)$; $(-5{,}8) + 15{,}2$;
c) $4{,}5 + \frac{5}{5}$; $\frac{4}{5} + 4{,}5$; *d)* $\frac{7}{4} + (-3{,}7)$; $(-3{,}7) + \frac{7}{4}$.

6 Végezd el a műveleteket!

a) $1{,}5 - (-2{,}7)$; $1{,}5 + 2{,}7$; $2{,}7 - (-1{,}5)$; $2{,}7 + 1{,}5$;
b) $\frac{3}{8} - \frac{5}{4}$; $\frac{5}{4} - \frac{3}{8}$; $-\frac{5}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)$; $-\frac{3}{8} - \left(-\frac{5}{4}\right)$;
c) $-\frac{2}{5} - (-4{,}6)$; $-\frac{2}{5} + 4{,}6$; $4{,}6 - \frac{2}{5}$; $4{,}6 + \left(-\frac{2}{5}\right)$.

7 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{7}{5} \cdot 4{,}2$; $4{,}2 \cdot \frac{7}{5}$; *b)* $(-0{,}3) \cdot (-2{,}5)$; $2{,}5 \cdot 0{,}3$;
c) $\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}$; *d)* $\frac{6}{5} : \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} : \frac{6}{5}$.

B)

1 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két egész szám összege egész szám?

b) Igaz-e, hogy két egész szám különbsége mindig egész szám?

c) Lehet-e két egész szám szorzata egész szám?

d) Lehet-e két egész szám hányadosa egész szám?

2 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két negatív egész szám összege negatív egész szám?

b) Igaz-e, hogy két negatív egész szám különbsége mindig negatív egész szám?

c) Lehet-e két negatív egész szám szorzata negatív egész szám?

d) Lehet-e két negatív egész szám hányadosa negatív egész szám?

3 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két pozitív egész szám összege pozitív egész szám?

b) Igaz-e, hogy két pozitív egész szám különbsége mindig pozitív egész szám?

c) Lehet-e két pozitív egész szám szorzata pozitív egész szám?

d) Lehet-e két pozitív egész szám hányadosa pozitív egész szám?

4 Szóban válaszolj, és indokolj!

a) Lehet-e két racionális szám összege racionális szám?

b) Igaz-e, hogy két racionális szám különbsége mindig racionális szám?

c) Lehet-e két racionális szám szorzata racionális szám?

d) Igaz-e, hogy két racionális szám hányadosa (ha egyáltalán létezik) mindig racionális szám?

5 Két egész szám összege 0. Lehet-e a szorzatuk

a) -2 _____; *b)* -1 _____; *c)* -4 _____; *d)* 0 _____; *e)* 9 _____?

***6** Három egész szám összege 0, szorzata 30. Mi lehet a három szám?

***7** *a)* Két szám hányadosa 0. Mennyi a szorzatuk?

b) Két szám szorzata 0. Mely esetben létezik a hányadosuk? Ha létezik a hányadosuk, akkor mennyivel egyenlő?

Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések

A)

1 Helyettesítsd összeadásokkal a kivonásokat a következő műveletsorban! Végezd is el a műveleteket!

a) $4{,}2 - 3{,}5 + 7{,}3 - 4{,}2 =$ _____

b) $3{,}8 - 7{,}3 - 5{,}6 + 7{,}3 =$ _____

c) $(-4{,}5) + 2{,}25 - (-2{,}25) =$ _____

2 Helyettesítsd szorzásokkal az osztásokat a következő műveletsorban! Azután végezd is el a műveleteket!

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} : \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} : \frac{5}{2} =$ _____

b) $4{,}5 : \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{10} : \frac{4}{10} =$ _____

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} : \frac{2}{7} : \frac{5}{4} =$ _____

3 Végezz kiemeléseket!

a) $5{,}8 \cdot 7{,}2 - 7{,}2 \cdot 1{,}8 =$ _____

b) $2{,}4 \cdot 3{,}4 + 5{,}6 \cdot 3{,}4 =$ _____

c) $2{,}4 \cdot 3{,}5 \cdot 6{,}4 + 2{,}7 \cdot 6{,}4 \cdot 4{,}4 =$ _____

d) $3{,}2 \cdot 5 \cdot 7{,}2 + 6{,}8 \cdot 5 \cdot 7{,}2 =$ _____

4 Számítsd ki az alábbi műveletsorok eredményét!

a) $\left(\frac{2}{5} + (-5{,}2)\right) - 4{,}3 \cdot \left(5{,}\dot{6} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) =$ _____

b) $7{,}65 \cdot \left((-2{,}75) + 4{,}8\right) + (12{,}4 - 7{,}3) =$ _____

c) $4{,}16 \cdot 7{,}52 + 4{,}16 \cdot (13{,}5 - 11{,}02) =$ _____

B)

1 Igazak-e az egyenlőségek? Ha igen, milyen átalakítást végeztünk? Számítsd ki az egyes műveletsorok eredményét!

a) $(7{,}3 + 3{,}2) \cdot 6 = 7{,}3 \cdot 6 + 3{,}2 \cdot 6$; $\quad 6 : (7{,}3 + 3{,}2) = 6 : 7{,}3 + 6 : 3{,}2$;

$(7{,}3 + 3{,}2) : 6 = 7{,}3 : 6 + 3{,}2 : 6$; $\quad 6 \cdot (7{,}3 + 3{,}2) = 6 \cdot 7{,}3 + 6 \cdot 3{,}2$.

b) $(1{,}5 - 2{,}3) \cdot 4 = 1{,}5 \cdot 4 - 2{,}3 \cdot 4$; $\quad (1{,}5 - 2{,}3) : 4 = 1{,}5 : 4 - 2{,}3 : 4$;

$4 \cdot (1{,}5 - 2{,}3) = 4 \cdot 1{,}5 - 4 \cdot 2{,}3$; $\quad 4 : (1{,}5 - 2{,}3) = 4 : 1{,}5 - 4 : 2{,}3$.

2 Végezd el a kiemeléseket, majd számítsd ki a műveletsorok eredményét!

a) $5{,}6 \cdot 4{,}3 + 2{,}7 \cdot 5{,}6 =$ _____

b) $5{,}9 \cdot 8{,}1 - 3{,}1 \cdot 5{,}9 =$ _____

c) $1{,}5 \cdot 3{,}6 \cdot 9{,}3 + 4{,}5 \cdot 9{,}3 \cdot 1{,}8 =$ _____

d) $2{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 10{,}5 + 10{,}5 \cdot 2{,}8 \cdot 6{,}5 =$ _____

3 Végezd el a műveleteket kétféleképpen! Az egyik esetben először a zárójelben szereplő műveleteket végezd el! A másik esetben bontsd fel a zárójeleket! Ha jól számolsz, mindkét esetben ugyanazt a végeredményt kapod.

a) $6 \cdot (4 - 8)$; $\quad$ *b)* $3 \cdot (9 + 12)$; $\quad$ *c)* $(12 + 7{,}5) : 3$;

d) $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{10}\right)$; $\quad$ *e)* $(-3{,}5) \cdot (4{,}2 - 1{,}4)$; $\quad$ *f)* $0{,}4 \cdot (3{,}9 - 5{,}3)$.

4 A papír-nagykereskedő mindenféle papírt 250 darabos csomagolásban árusít. Egy iroda a 80 g-os papírból 1,5 Ft-os darabáron 50 csomagot, pauszból 5,7 Ft-os darabáron 40 csomagot, a 160 g-os kartonból 4,2 Ft-os darabáron 10 csomagot, fotópapírból 7,2 Ft-os darabáron 1 csomagot vásárolt.

Írd fel egyetlen műveletsorral, hogy mennyit fizettek! Határozd meg a műveletsor eredményét!

Műveletek algebrai kifejezésekkel

A)

1 Írd fel a téglalap kerületét és területét, ha az oldalai:

a) a és b; *b)* $2x$ és y; *c)* $(r + 1)$ és $3s$!

$K =$ _____; $K =$ _____; $K =$ _____.

$T =$ _____; $T =$ _____; $T =$ _____.

2 Végezz kiemelést a következő műveletsorokban!

a) $abk + dkb + akd =$ _____;

b) $xu + xv + uvx =$ _____;

c) $3ax + 6xy =$ _____;

d) $4axz + 12zx - 20a^2zx =$ _____.

3 Végezd el a beszorzást a következő műveletsorokban!

a) $4a(x + 3y) =$ _____;

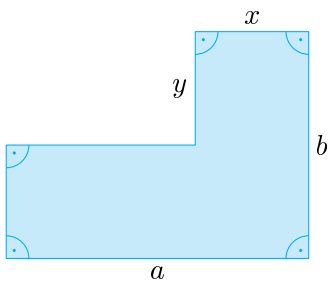
b) $2(x + y - 4) =$ _____;

c) $(u + v)4t + r(u + v) =$ _____;

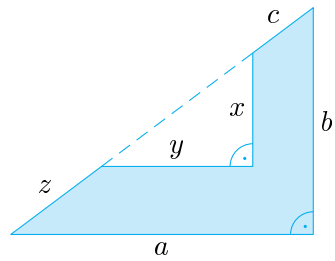
d) $(r + 2s)(t - z) =$ _____.

4 Írd fel a következő alakzatok kerületét és területét!

a)



b)



$K =$ _____; $K =$ _____.

$T =$ _____; $T =$ _____.

5 Mennyi a $3x^2y + 2z$ kifejezés értéke, ha

a) $x = 1;\ y = 0;\ z = -1;$ _____ *b)* $x = -1;\ y = 1;\ z = 2;$ _____

c) $x = 0;\ y = 0;\ z = 1;$ _____ *d)* $x = 1;\ y = 1;\ z = 1?$ _____

B)

1 Írd fel a téglatest felszínét (A) és térfogatát (V), ha az egy csúcsból kiinduló élei

a) a, b, c; *b)* $2x$, $3y$, $6z$; *c)* $-r$, $2s$, $t + 1$!

$A =$ _____; $A =$ _____; $A =$ _____.

$V =$ _____; $V =$ _____; $V =$ _____.

2 Végezd el a lehetséges kiemeléseket!

a) $5xy + 10xy^2 - 15x^2y =$ _____; *b)* $20uv^2z + 16uvz + 12u^2vz =$ _____;

c) $-3a^2bd + 3a^2b^2d + 12ab^2d^2 =$ _____; *d)* $81ef^2 - 9e^2 + 18e^2f =$ _____.

3 Először végezd el a lehetséges összevonásokat, utána végezd el a lehetséges kiemeléseket!

a) $-4h^2 + 6hv - 4h^2 + h^2 + 3 + 1 - 7h^2v - hv + 4h^2v + 9hv^2 - 4h^2v^2 + 6h^2$;

b) $7b + 4b^2 + 8 - 9b^2 + 2b - 5b^2h^2 - 8b^2h - 9 - 9bh^2 + 7bh^2 + 7b^2h^2 - 9$.

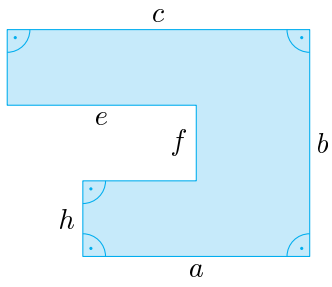
4 Végezd el a beszorzásokat, összevonásokat!

a) $(a-1)(b-1) - 1 =$ _____; *b)* $(x-y)(z-y) - y^2 =$ _____;

c) $(e-1)(f+1)g =$ _____; *d)* $(2r-s)(r+2s) =$ _____.

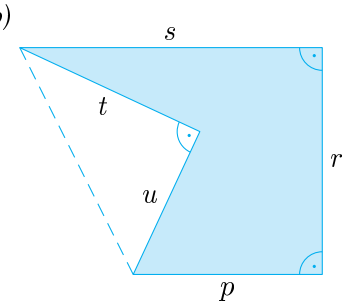
***5** Határozd meg a következő alakzatok kerületét és területét!

a)



$K =$ _____; $T =$ _____;

b)



$K =$ _____. $T =$ _____.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Elemi úton megoldható szöveges feladatok

A)

1 *a)* Sándor és Nándor ikrek. Életkoruk összege 42 év. Hány éves Sándor? Hány éves Nándor?

Melyikük idősebb? _____ Hány évesek? _____

b) Imi és Timi együtt 25 évesek. 15 év múlva Imi annyi idős lesz, mint Timi most. Hány évesek?

Melyikük idősebb? _____ Hány évvel? _____

Hány év köztük a korkülönbség? _____ Mennyi a koruk összege? _____

c) Ádám ma kétszer annyi idős, mint Éva. 10 éve háromszor annyi idős volt. Hány évesek? Segít az ábra.

10 éve: Éva:
Ádám:

Ma: Éva:
Ádám:



2 *a)* Két szám összege 16, különbsége 10. Melyik ez a két szám? _____

b) Két szám összege 5, különbsége 8. Melyik ez a két szám? _____

c) Két szám összege $\frac{2}{3}$, különbsége $\frac{3}{4}$. Melyik ez a két szám? _____

***d)* Három szám közül két-két szám összege 6, 8 és 10. Melyik ez a három szám? _____

3 *a)* Egy töltőtoll és hozzá a tolltok együtt 7 euró. A toll 5 euróval többe kerül, mint a tokja. Mennyibe kerül a toll, mennyibe a tok?

b) Egy töltőtoll és hozzá a tok együtt 8 euró. A toll négyszer annyiba kerül, mint a tokja. Mennyibe kerül a toll, mennyibe a tok?

c) A két zsebemben együtt 120 kavics van. A bal zsebemben 4-szer annyi, mint a jobb zsebemben. Hány kavics van a zsebeimben külön-külön?

d) Egy 65 férőhelyes szállodában két- és háromágyas szobák vannak, összesen 27 szoba. Hány kétágyas és hány háromágyas szoba van?



***4** Két zacskóban piros, háromban fehér golyók vannak. 18, 19, 22, 24 és 29 golyó van az egyes zacskókban. Az egyik zacskó golyót elvesztettük, így négyszer annyi fehér golyó marad, mint piros.

a) Hány golyó volt abban a zacskóban, amelyet elvesztettünk?

b) Milyen színű golyók voltak az elvesztett zacskóban?

c) Hány fehér, illetve piros golyó volt a zacskókban eredetileg?

(Régi versenyfeladat alapján.)

B)

1 *a)* Két testvér együttes életkorának és korkülönbségének összege 16. Az együttes életkoruk 10-zel több, mint a korkülönbségük. Mennyi idősek a testvérek?

b) Ha ma kétszer annyi idős vagyok, mint 10 évvel ezelőtt, akkor hányszor annyi éves leszek 10 év múlva, mint most vagyok?

c) Iza, Giza és Liza testvérek. Iza kétszer annyi idős, mint Giza, és háromszor annyi idős, mint Liza. Két év múlva Iza éppen annyi idős lesz, mint két testvére életkora együtt. Hány évesek a testvérek?

2 *a)* Két pozitív szám szorzata 27, a hányadosuk 3. Melyik lehet ez a két szám?

***b)* Két pozitív szám szorzata 3, a hányadosuk 27. Melyik lehet ez a két szám?

***c)* Két pozitív szám szorzata 9, a hányadosuk 3. Melyik lehet ez a két szám?

***d)* Két pozitív szám szorzata 3, a hányadosuk 9. Melyik lehet ez a két szám?

3 A bal zsebemben kétszer annyi aranytallér van, mint a jobb zsebemben. Ha a bal zsebemben levő tallérok számát megkétszerezem, a jobb zsebemben levőkét megháromszorozom, akkor majdnem 100 tallérom lesz. Hány tallér van a zsebeimben?

***4** Sára és Sándor együtt feleannyi idősek, mint amennyi idős Sára lesz akkor, amikor Sándor hatszor annyi idős lesz, mint Sára most. Viszont négyszer annyi idősek, mint Sándor volt akkor, amikor Sára született. Most hány éves Sára, hány éves Sándor?

A mérlegelv alkalmazása

A)

1 Írd fel egyenlettel az összefüggéseket, majd oldd meg a kapott egyenleteket! Mindig ellenőrizd a megoldásodat! Figyelj az alaphalmazra! Ellenőrizd, hogy a feladatnak is megoldása-e az egyenlet megoldása!

a) Egy szám 2-szerese 5-tel több, mint a háromszorosánál 2-vel kisebb szám. Melyik ez a szám?

Oldjuk meg együtt a feladatot! Jelöljük x-szel a gondolt számot! Írjuk fel a két egyenlő mennyiséget!

x 2-szeresénél 5-tel nagyobb szám: $2x + 5$.

x 3-szorosánál 2-vel kisebb szám: $3x - 2$.

$2x + 5 = 3x - 2 \quad / - 2x$

$5 = x - 2 \quad / + 2$

$7 = x$

Ellenőrzés: 7 2-szeresénél 5-tel nagyobb szám 19, a háromszorosánál 2-vel kisebb szám 19; valóban egyenlő a két szám.

b) Ha egy számot 4-gyel megszorzunk és hozzáadunk 12-t, akkor ugyanazt kapjuk, mintha a nála 2-vel kisebb számot megszoroznánk 8-cal, és kivonnánk velőle 10-et. Melyik ez a szám? Jelöld x-szel!

x-et megszorozzuk 4-gyel, és hozzáadunk 12-t: _____.

Az x-nél 2-vel kisebb számot megszorozzuk 8-cal, és kivonunk belőle 10-et: _____.

Írd fel az egyenletet, és oldd meg a füzetedben! Ne feledkezz meg az ellenőrzésről!

c) Ha egy számból kivonunk 5-öt és megszorozzuk 4-gyel, akkor 3-mal kevesebbet kapunk, mintha a nála 4-gyel nagyobb számot szoroznánk meg 5-tel. Melyik ez a szám? Jelöld x-szel az ismeretlent! Írd fel a két egymással egyenlő mennyiséget!

Az x-ből kivonunk 5-öt: _____, a kapott szám 4-szeresét vesszük: _____.

Az így kapott szám 3-mal kevesebb, mint a másik szám. Tehát 3-at hozzá kell adnunk, hogy a másik számot megkapjuk: _____.

Az x-nél 4-gyel nagyobb szám: _____, ennek az 5-szöröse: _____.

Írd fel az egyenletet, és oldd meg a füzetedben! Ne feledkezz meg az ellenőrzésről!

2 Mi a megoldásuk a következő egyenleteknek az egész számok halmazán?

a) $7x - 6(x + 2) = 3x + 24$;

b) $3(x - 2) = 4(x + 3)$;

c) $-1{,}2(x + 5) + 2{,}7x = 2{,}5 - 6x$;

d) $3(2 - x) + 10 = 2(3 - x) - 10$.

3 Oldd meg az egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $4(x - 3) + \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot (x + 12) + 3x$;

b) $3{,}2(x + 5) + 7{,}6 = -3{,}4 + 5{,}1(x - 4)$;

c) $5x - 4(3x + 2(-3x + 6)) = 12 - 4x + 3$;

d) $2x + 6(5x - 1) = 5(4 - (x - 6))$.

4 Hasonlítsd össze a páronként megadott egyenleteket! Oldd meg mindet a racionális számok halmazán!

a) $\frac{1}{4}(7x + 3) = \frac{1}{2}(4x + 6)$;

$\frac{7x + 3}{4} = \frac{4x + 6}{2}$;

b) $\frac{1}{5}(x - 2) + 3x - 4 = 5 - \frac{1}{4}(x + 2)$;

$\frac{x - 2}{5} + 3x - 4 = 5 - \frac{x + 2}{4}$;

c) $\frac{2}{5}(4x - 1{,}5) = \frac{3}{2}(5 - 4{,}2x)$;

$\frac{2(4x - 1{,}5)}{5} = \frac{3(5 - 4{,}2x)}{2}$.

Beszéljétek meg közösen a tapasztaltakat!

B)

1 Írd fel egyenlettel az összefüggéseket, majd oldd meg a kapott egyenleteket! Mindig ellenőrizd a megoldásod! Ellenőrizd, hogy megoldása-e a feladatnak az egyenlet megoldása! Melyik az a szám,

a) amelynél 5-tel nagyobb szám ugyanannyi, mint a számnál 2-vel kisebb szám háromszorosa?

b) amelynél 1-gyel kisebb számnak a fele ugyanannyi, mint a szám 7-szeresénél 2-vel nagyobb szám?

c) amelynél 4-gyel kisebb szám 3-szorosa ugyanannyi, mint a nála 2-vel nagyobb szám 5-szöröse?

d) amely kétszeresének és másfélszeresének összege 7-tel nagyobb, mint a felénél 10-zel nagyobb szám?

e) amely kétszereséből elvettünk 100-at, és a szám másfélszeresénél 50-nel többet kaptunk?

2 Oldd meg az egyenleteket a racionális számok körében! Döntsd el, hogy a megoldás benne van-e az egész számok halmazában! Döntsd el, hogy a megoldás benne van-e a természetes számok halmazában!

a) $5x - 4 = 3x + 16$;

b) $4{,}2x + 4{,}2 = 3{,}2x + 3{,}2$;

c) $3x - 2 + 5(x - 2) = 4(2x - 3)$;

d) $\frac{1}{2}x - \frac{7}{5} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$;

e) $6(x - 5 + 2(x + 1)) = 4x + 5(2x + 4)$;

f) $\frac{1}{2}(4x + 5) = 2x + 5$.

Egyenlőtlenségek

A)

1 Mely racionális számokra teljesülnek az összefüggések? Írd fel egyenlőtlenséggel, és oldd meg az egyenlőtlenséget! Ábrázold számegyenesen a megoldásokat!

a) Egy számnál 3-mal nagyobb szám nagyobb, mint a szám 2-szerese.

Oldjuk meg együtt a feladatot! Jelöljük x-szel a kérdéses számot!

Az x-nél 3-mal nagyobb számot $x + 3$. Az x 2-szerese $2x$.

A két kifejezés között fennálló kapcsolat: $x + 3 > 2x$.

Ha mind a két oldalból kivonjuk x-et, akkor azt kapjuk, hogy $3 > x$. Ez az egyenlőtlenség megoldása.

Az ellenőrzést nem tudjuk egyszerű visszahelyettesítéssel elvégezni, mert nagyon sok számot kaptunk megoldásként. Egy-egy számra kipróbálhatjuk, hogy teljesül-e a feladat feltétele.

Például $x = 0$-ra: a 0-nál 3-mal nagyobb szám a 3, a 0 kétszerese 0; $3 > 0$ valóban teljesül.

Például $x = 2{,}5$-re: a 2,5-nél 3-mal nagyobb szám az 5,5, a 2,5 kétszerese 5; $5{,}5 > 5$ valóban teljesül.

b) Egy számnál 3-mal nagyobb szám kétszerese nagyobb vagy egyenlő, mint a számnál 3-mal kisebb szám. Jelöld x-szel a kérdéses számot! Írd fel a megadott mennyiségeket! Írd fel, milyen kapcsolat áll fenn a két kifejezés között!

c) Egy szám 3-szorosa legalább akkora, mint a 4-szeresénél 3-mal kisebb szám.

2 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Ábrázold számegyenesen a megoldásokat! Mi az egyenlőtlenségek megoldása a természetes számok halmazán?

a) $2x - 1 > x - 2$;

b) $2(3x - 6) \leq 5x - 2$;

c) $4x - 3(x + 1) < 2x + 7$;

d) $-3x + 5(x - 1) \geq 7x - 5$;

e) $12(x - 4) - 6(x + 2) \leq \frac{1}{2}(x + 2)$;

f) $\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} < \frac{8}{5}(x + 1)$.

***3** Oldd meg az egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Ábrázold számegyenesen a megoldásokat!

a) $\frac{3x+6}{5} + 4(x-2) < \frac{16x-5}{10}$;

b) $\frac{1}{3}(2x-5) + 4x - 11 > \frac{3x-2}{2} + 3(x+2)$;

c) $\frac{14x+4}{3} - \frac{3x}{5} \geq 0{,}4x - 7$;

d) $3{,}6(x-4) + 2{,}4x \leq 6x - 14$.

B)

1 Mely számokra teljesülnek az összefüggések? Írd fel egyenlőtlenséggel, és oldd meg az egyenlőtlenséget! Ábrázold számegyenesen a megoldásokat!

a) Egy szám másfélszerese nem nagyobb, mint a kétszeresénél 5-tel nagyobb szám.

b) Egy számnál 4-gyel nagyobb szám 6-szorosa kisebb, mint a nála 6-tal nagyobb szám 4-szerese.

c) Egy szám harmadánál 10-zel nagyobb szám nem kisebb, mint a 4-szeresénél 6-tal nagyobb szám.

d) Egy szám fele kisebb, mint a szám harmadrésze.

***2** Oldd meg az egyenlőtlenségeket az egész számok halmazán!

a) $1{,}7(x-4) - \frac{4x+2}{5} < \frac{3x-1}{4} - (6x+2)$;

b) $\frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(x+1) \geq 4x + 5$;

c) $\left[\left(\frac{-4}{5}x + 3{,}6\right) + \frac{5}{2}\right] > \left[-\frac{2}{6} + \left(6{,}6x + \frac{1}{2}\right)\right]$

d) $\left(\frac{-5}{2} + 0{,}6x\right) - \frac{5}{2} \leq -\frac{4}{15}x + \left(2{,}1 - \frac{5}{2}\right)$;

e) $4{,}5x + 3{,}6 \cdot (1{,}2x - 4) < \left(1{,}6 \cdot \frac{5}{4}x\right)$;

f) $\left(\frac{3}{10} + 3{,}7\right) \cdot \frac{1}{4x} > 0$.

***3** Keress olyan számokat, amelyekre mind a két egyenlőtlenség teljesül! Ábrázold számegyenesen a megoldásokat!

a) $1 < x$ és $2x < 4$;

b) $3x - 1 \geq 0$ és $1 - x > 0$;

c) $5x - 15 < 0$ és $4x \geq 2$;

d) $2 - x < 0$ és $4 - x > 0$;

e) $4x - 2 \leq 6$ és $-2(x+2) \leq -8$;

f) $5x + 3 < 13$ és $11(x-2) + 3 > 3$.

Számokkal kapcsolatos feladatok

1 Melyik az a szám, amelynek a hétszerese huszonöttel nagyobb az ötszörösénél?

Segítség a megoldás lépéseihez: A keresett szám x

Melyik két számot hasonlítjuk össze? $7x \quad 5x$

Írjunk fel összefüggést a relációjel felhasználásával! $7x \underset{25\text{-tel}}{>} 5x$

Ennek segítségével egyenletet írhatunk fel. $7x = 5x + 25$

Az egyenletet a mérlegelv segítségével oldhatjuk meg. $7x = 5x + 25 \;/ - 5x$

$____ = ____ \;/ : 2$

$____ = ____$

A keresett szám: ____.

Ellenőrzés szövegbe történő behelyettesítéssel: ____ 7-szerese _____, az 5-szöröse _____.

A _____ valóban 25-tel nagyobb, mint a _____.

2 Egy szám kétszeresénél nyolccal kisebb szám 2-vel nagyobb, mint az eredeti számnál 6-tal nagyobb szám.

A feladat megoldása során először írd fel, mit jelölsz ismeretlennel: _____

A szöveg megértését segíti, ha széttagolod a mondatot, és egy-egy részét írod algebrai kifejezésként.

Melyik két kifejezés nagyságát hasonlítjuk össze? _____

Írj fel összefüggést a relációjel felhasználásával! _____

Írj fel kapcsolatot egyenlőség formájában! _____

Egyenletmegoldás:

Válasz: _____

Ellenőrzés: _____

3 Két pozitív szám aránya 5 : 7. Ha a kisebb számhoz 15-öt adunk, kétszer akkora számot kapunk, mint a nagyobb számnál 33-mal kisebb szám. Melyik ez a két szám?

Jelöld a két számot! _____

Jelöld a szövegben megadott két szám változását! _____

A kapott számok közül melyik a nagyobb? Írj fel relációt a két kifejezés között! _____

Írj fel egyenletet az eddigiek felhasználásával! _____

Egyenletmegoldás:

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

4 Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a számjegyek felcserélésével kapott számot hozzáadjuk a kétjegyű szám háromszorosához, 197-et kapunk.

Melyik ez a kétjegyű szám?

Készíts az adatok rendszerezéséhez táblázatot! Gondold át, milyen helyi értékű számok vannak egy kétjegyű számban, és a megadott feltétellel hogyan jelöljük ezeket!

	Tízes	Egyes	A szám
Eredeti szám	x		
Felcserélt szám			

A szövegben megadott összefüggés segítségével írj fel egyenletet: _____

Megoldás: _____

Ellenőrzés: _____

Válasz: _____

5 Egy háromjegyű szám középső számjegye 2, a számjegyek összege 10. Ha az egyesek és százasok helyén álló számjegyeket felcseréljük, és az így kapott szám tízszereséhez hozzáadjuk az eredeti számot, 5555-öt kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám?

A táblázat kitöltése előtt gondold végig:

– mit jelöljünk ismeretlennel?

– mit tudhatunk a háromjegyű szám számjegyeiről?

	Százas	Tízes	Egyes	A szám
Eredeti szám		2		
Felcserélt szám				

Töltsd ki a táblázatot!

Összefüggés felírása egyenlet formájában: _____

Megoldás: _____

Ellenőrzés: _____

Válasz: _____

Keverési feladatok

A)

1 Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) Mennyi 15 kg 20%-a? _____

b) Mennyi 140 liter 37%-a? _____

c) Mit jelent az étkezési ecetes üvegen az, hogy 15%-os? _____

d) Mennyi x kg 42%-a? _____

e) Hány százalék a gyümölcstartalma annak az 1,5 literes üdítőnek, amelyben 3 dl gyümölcssűrítmény van?

2 Számítsd ki a kérdezett mennyiségeket!

a) Mennyi tömény ecetsav van 25 liter 30%-os oldatban? _____

b) Mennyi cukor van 4 liter 3%-os teában? _____

c) Mennyi a sótartalma 12 liter tiszta víznek? _____

3 Írd fel algebrai kifejezésként!

a) Mennyi tömény alkohol van x liter 45%-os oldatban? _____

b) Mennyi a tiszta sótartalma 28 liter x%-os töménységű sóoldatnak? _____

4 15 liter 40%-os kénsavhoz hány liter 10%-os kénsavat kell önteni, hogy a keverék 20%-os legyen?

Melyik mennyiséget jelöljük ismeretlennel? _____

Az adatokat táblázatba foglaltuk. Töltsd ki a hiányzó részeket!

	Mennyiség (liter)	Töménység (%)	Tömény kénsav mennyisége (liter)
40%-os kénsav	15	40	
10%-os kénsav		10	
Keverék		20	



Az egyenlet felírása során használd fel, hogy a tömény kénsav mennyisége az összeöntés után megmarad!

A felírt egyenlet: _____

Az egyenlet megoldása: _____

Ellenőrzés: _____

Válasz: _____

5 A gyógyszertárban két különböző töménységű oldat felhasználásával készítenek folyékony gyógyszeradalékokat. Az egyik oldat 60%-os, ebből 2 dl-t használnak fel, a másik oldat 25%-os, ebből 3 dl-t használnak az új oldathoz. Hány százalékos lesz a kapott oldat? A megoldáshoz töltsd ki a táblázatot! Keress összefüggést az adatok között! Írj fel egyenletet!

	Mennyiség (deciliter)	Töménység (%)	Töményanyag-mennyiség (deciliter)
60%-os oldat	2	60	
25%-os oldat	3	25	
Keverék	5	x	$5 \cdot \frac{x}{100}$

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

B)

1 30 liter 3%-os tengervízből 5 liter vizet elpárologtattunk. Hány %-os lett a kapott oldat töménysége?

Töltsd ki a táblázatot!

Az egyenlet felírása előtt gondold végig, mit jelent az, hogy elpárologtattunk 5 litert a megadott mennyiségből!

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

2 Összekevernek 120 kg zselés és 250 kg kakaós szaloncukrot, és a keveréket csomagolják eladásra. A zselés szaloncukor ára 520 Ft kg-onként, a kakaós ára 600 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$. Mennyiért árusítsák a keverék szaloncukor kg-ját, hogy ne legyen veszteséges?



Töltsd ki a táblázatot!

	Mennyiség (kg)	Egységár $\left(\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}\right)$	Az adott mennyiség értéke (Ft)
Zselés			
Kakaós			
Keverék			

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

Mozgásos feladatok

A)

1 Egészítsd ki a mondatokat!

a) A mozgás során a megtett út jele _____, a test sebességének jele _____, az eltelt idő jele _____.

b) A sebesség mértékegységei: _____.

c) A megtett út mértékegységei: _____.

d) Az idő mértékegységei: _____.

e) Milyen összefüggést ismersz az egyenletes sebességgel mozgó test sebessége, a test által megtett út és a mozgás közben eltelt idő között? Írd le többféle alakban!

2 Összefüggések a mozgást végző testek adatai között:

a) Két kerékpáros különböző sebességgel, azonos időpontban indult el egymással szembe két, egymástól 45 km-re lévő településről. Útközben valahol találkoztak.

Milyen összefüggést használhatunk fel a két kerékpáros mozgásának ideje között? _____

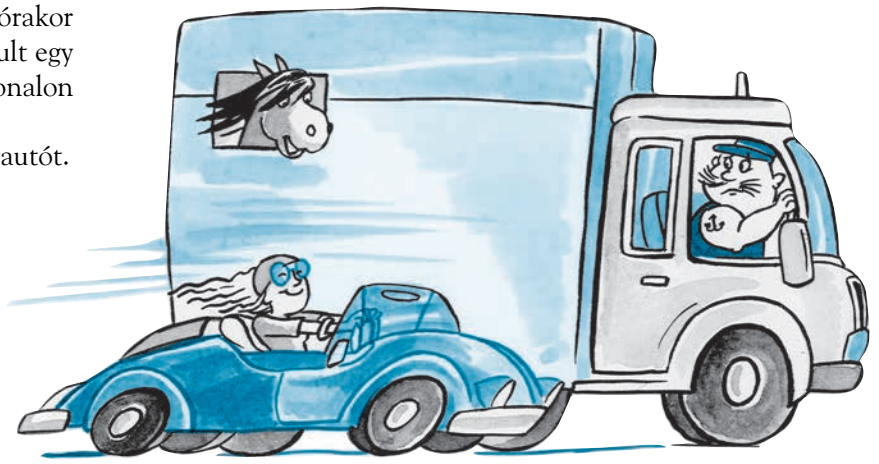
Milyen összefüggést használhatunk fel a két kerékpáros által megtett út között? _____

b) Két kerékpáros különböző sebességgel indult el egymással szembe két, egymástól 45 km-re lévő településről. Az egyik kerékpáros fél órával később indult. Útközben valahol találkoztak.

Milyen összefüggést írhatunk fel a két kerékpáros mozgásának ideje között? _____

Milyen összefüggést használhatunk fel a két kerékpáros által megtett út között? _____

c) Egy teherautó Veszprémből 9 órakor indult. Egy órával később elindult egy személyautó ugyanezen az útvonalon nagyobb sebességgel.
A személyautó utolérte a teherautót.



Mit mondhatunk a teherautó és a személyautó által megtett útról a találkozásig? _____

Mit mondhatunk a teherautó és a személyautó mozgásának idejéről a találkozás időpontjáig? _____

3 Válaszolj a kérdésekre!

a) Mennyi utat tesz meg egy autó, ha t óráig megy 48 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel? _____

b) Mennyi ideig mozgott az a madár, amelyik s km utat tett meg 72 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel? _____

c) Mekkora a sebessége annak a motorosnak, amelyik s utat tett meg 2,5 óra alatt? _____

4 Egy falu és a legközelebbi város között 25 km-es kerékpárút van. A faluból 10 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel elindul egy kerékpáros. Ugyanabban az időben a városból elindul a falu felé egy gyalogos 4 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel. Mikor és hol találkoznak? A megoldáshoz jelöljük ismeretlennek az eltelt időt (t)!

A kerékpáros által megtett út: _____.

A gyalogos által megtett út: _____

Töltsd ki a táblázatot!

	$v\ \left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	t (óra)	s (km)
Kerékpáros			
Gyalogos			

Írj fel egyenletet a megtett utak felhasználásával, és oldd meg a kapott egyenletet!

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

5 Kismaros és Királyrét távolsága 12 km. Mindkét helységből ugyanabban az időben elindul egy-egy kirándulócsoport a másik helység felé. A Királyrétről indulók 3,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, a Kismarosról indulók 2,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel gyalogolnak.

a) Mikor találkoznak?

b) Hol találkoznak?

c) Mikor lesz a távolság közöttük 1,5 km?

Készíts táblázatot az adatok felhasználásával!

	$v\ \left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	t (óra)	s (km)
Királyrétről indulók			
Kismarosról indulók			

Az *a)* és *b)* rész válaszához ugyanazon egyenlet felírásával juthatsz el.

A felírt egyenlet:

Az egyenlet megoldása:

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

d) Hány esetben lehet a távolságuk 1,5 km? Készíts ábrát!

B)

1 Panka elindult gyalog az iskolába, ami a lakásuktól 800 m-re van. Anyukája 3 perc elteltével észrevette, hogy Panka otthon felejtette a beadandó dolgozatát, ezért kerékpárra ült, hogy utolérje. Panka kényelmesen ment, 150 m-t tett meg 2 perc alatt. Édesanyja sebessége a kerékpáron 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Utoléri-e útközben Pankát, vagy az iskolában tudja csak odaadni a beadandó házi feladatot?

Útmutató lépések a megoldáshoz:

Mekkora Panka sebessége? Figyelj a mértékegységek átváltására!

Mennyi utat tett meg Panka addig, amíg édesanyja elindult utána?

Panka elindulásától számítva melyikük mozgásának ideje volt több, és mennyivel?

Töltsd ki a táblázatot! Keress összefüggést az adatok között! Írd fel egyenlőség formájában!

	$v\ \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	t (s)	s (m)
Panka			
Édesanyja			

Ne feledkezz el a megoldás ellenőrzéséről és a szöveges válaszról!

A feladatot más módon is megoldhatod. A megoldást írd a füzetedbe!

2 Kata és Ákos vonattal utaznak a nagymamájukhoz. A vonat által megtett utat a grafikon ábrázolja.

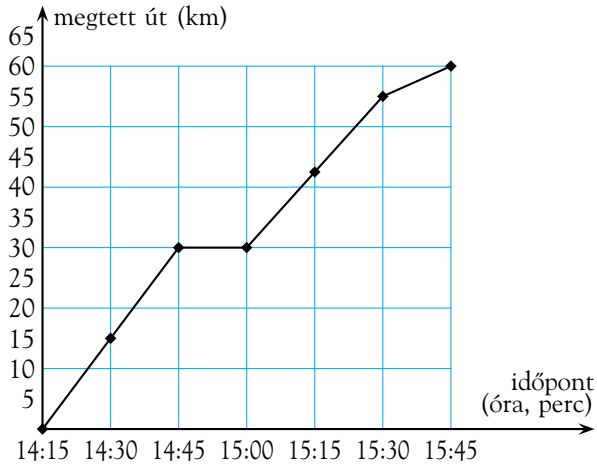
a) Mennyi ideig tartott a vonatút? _____

b) Milyen sebességgel ment a vonat az út egyes szakaszain? _____

c) Hány km-t utaztak vonattal? _____

d) Mennyibe került a vonatjegy, ha a teljes árú menetjegy 10 km-re 210 Ft, és a gyerekek a diákigazolványra 33,3% kedvezményt kapnak? _____

_____



3 Egy díszgyertyát több alkalommal meggyújtanak. Magasságának változását az itt látható grafikon mutatja.

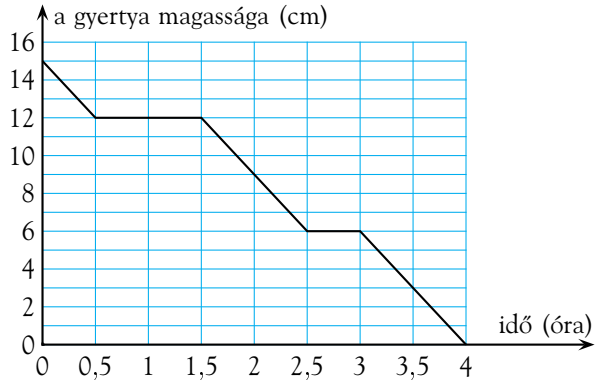
a) Milyen magas a gyertya? _____

b) Hány alkalommal gyújtották meg? _____

c) Mikor volt 9 cm, illetve 1,5 cm magas? _____

d) Mennyi idő alatt égne el a gyertya, ha folyamatosan égetnénk? _____

e) Mekkora a gyertya égési sebessége? _____



Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok

(Emelt szintű, választható tananyag)

1 Egy kávét forgalmazó cégnél a kávéőrlő automaták óránként 42 kg kávét tudnak megőrölni. Hétfőn reggel érkezett egy 15 tonnás szállítmány. Hány gépet kell napi 8 órában működtetni, hogy pénteken délután a megdarált kávét tovább lehessen szállítani a csomagolóba?

_____

_____

2 10 000 darab játékot csomagolnak papírdobozokba. A munkát két gép végzi. Az egyik gép egy játékot csomagol be percenként, a másik kétszer olyan gyors. Hány óra alatt csomagolja be a két gép a megadott mennyiséget?

_____

_____

3 Egy családi vállalkozásban kézzel festett bögréket készítenek a család tagjai a karácsonyi vásárra. Apa szervezéssel foglalkozik, anya napi 8 órában festi a bögréket, óránként 5 darabot tud elkészíteni, Panni naponta 3 órát dolgozik, és óránként 2 db-ot fest meg. Peti csak 2 órát dolgozik naponta, és ezalatt 3 bögrét fest meg. Mennyi idő alatt készülnek el a megrendelt 800 darabbal?

_____

_____

_____

4 Egy úszómedence megépítéséhez először a földet kell kiszedetni. Egy gép napi 8 órai folyamatos működéssel 10 nap alatt végez a medence kiásásával.



A munka hányadrészét végzi el a gép

1 nap _____,

4 nap _____,

7 nap _____

alatt?

Hány nap alatt végezne két ugyanakkora teljesítményű gép?

A minél intenzívebb munka érdekében két gépet állítanak be, az egyik egyedül 10 nap alatt, a másik gép egyedül 5 nap alatt végezné el a medence kiásását.

Mennyi idő alatt végzi el a két gép együttesen a munkát? _____

A megoldásnál segíthet, ha kitöltöd a táblázatot:

	Mennyi idő alatt végzi el a munkát (nap)	1 nap alatt elvégzett munka mennyisége	x nap alatt elvégzett munka mennyisége
I. gép			
II. gép			

5 Egy benzintartályt egy tartálykocsi egyedül 40 perc alatt töltene fel, egy másik egyedül 30 perc alatt. Mennyi idő alatt tölti meg a tartályt a két tartályautó együttesen? Készíts táblázatot az adatokról!

6 Egy úszómedence tisztításakor három lefolyón keresztül lehet leengedni a medence vizét.

Ha csak az egyik lefolyó van nyitva, akkor 24 óra alatt folyik le a víz, ha csak a második lefolyón folyhat a víz, akkor 30 óra alatt ürülne ki a medence, és ha csak a harmadik lefolyót működtetjük, akkor 36 óra kell a víz leengedéséhez. Leghamarabb mennyi idő alatt lehet kiüríteni a feltöltött medencét? Készíts táblázatot! Írj fel egyenletet!

Szöveges feladatok a geometria témaköréből

A)

1 Egy 30 cm kerületű egyenlő szárú háromszögben az egyik oldal 2 cm-rel nagyobb a másiknál. Mekkorák a háromszög oldalai? Készíts ábrát a füzetedbe! Vizsgáld meg, hány eset lehetséges!

2 Egy háromszög nagyság szerint középső szöge 35°-kal nagyobb a legkisebb szögénél, és a legnagyobb szög $\frac{10}{3}$-szorosa a legkisebb szögnek. Mekkorák a háromszög szögei?

Gondold át, mit jelölsz ismeretlennel! Fejezd ki ennek segítségével a többi szöget! Keress összefüggést, ami alapján egyenletet tudsz felírni! Ne felejtsd el az ellenőrzést!

3 Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 17 cm. Ha az egyik befogót 3 cm-rel, a másik befogót 4 cm-rel növelem, akkor a háromszög területe 34 cm^2-tel nagyobb lesz, mint az eredeti háromszög területe volt.

Mekkorák az eredeti háromszög oldalai? Készíts ábrát! Mit jelölsz ismeretlennel? Írd fel, hogyan számíthatjuk ki a derékszögű háromszög területét! Fejezd ki az eredeti, illetve a megnövelt oldalú háromszögek területét az ismeretlennel! Írj fel összefüggést a két terület között!

4 Hány átlója van annak a konvex sokszögnek, amelynek

a) 5; *b)* 6; *c)* 12; *d)* 23 oldala van?

5 Van-e olyan konvex sokszög, amelynek összesen 400 átlója van? Indolkold a válaszodat!

6 Hány oldalú az a sokszög, amelyben a belső szögek összege 6840°? Beszéljétek meg közösen!

7 A háromszög egyik csúcsából kiinduló magassága 34° és 41°-os részekre bontja a csúcsnál lévő szöget. Mekkorák a háromszög szögei? Készíts ábrát a megoldáshoz!

B)

1 Egy háromszög szögeinek aránya 1 : 4 : 5. Mekkora szöget zár be a két nagyobb szög belső szögfelezője egymással?

Az első lépésben határozd meg a háromszög szögeit! Készíts ábrát, és jelöld be, mit kell meghatározni! Írj fel összefüggést a megfelelően kiválasztott háromszög szögei között!

***2** Mekkorák annak a háromszögnek a belső szögei, amelyben $\alpha : \beta = 2 : 3$ és $\gamma = \beta - \alpha$? Készíts ábrát!

***3** Ha egy konvex sokszög oldalainak számát 3-mal növeljük, akkor az átlóinak száma 18-cal nő. Hány oldala lehet a sokszögnek?

Kombinatorikai feladatok

A következő feladatok megoldásához segít, ha ügyes csoportosításban felsorolod a lehetséges eseteket. Dolgozz a füzetedben!

A)

1 Hányféleképpen állhat le az út szélén három autó? Sorold fel a lehetőségeket, ha az autókat A, B és C betűkkel jelöljük!

2 A fagylaltosnál egy gombóc málna-, egy gombóc vanília- és egy gombóc citromfagyit kértem. Hányféle sorrendben kaphatom a gombócokat? Sorold fel!

3 A 24 fős 8. osztály betér a cukrászdába egy-egy kétgombócos fagylaltra, ahol hatféle ízű fagylaltból lehet válogatni.

a) Jut-e minden 8. osztályosnak különbözőféle ízösszeállítású fagylalt, ha számít a gombócok sorrendje?

b) Jut-e minden 8. osztályosnak különbözőféle ízösszeállítású fagylalt, ha nem számít a gombócok sorrendje?

4 Az úszóversenyen 8-an állnak rajthoz. Nevezzük őket A, B, C, D, E, F, G, H-nak!

a) Hányféle sorrend alakulhat ki a verseny végén?

b) Hányféleképpen alakulhat az első három helyezés?

5 A városból B városba 3 út vezet. B városból C-be 2. Készíts ábrát a füzetedbe!

a) Hányféleképpen juthatsz el A-ból B-be? _____

b) Hányféleképpen folytathatsz minden egyes B-be futó utat? _____

c) Hányféle útvonalon juthatunk el A városból C-be? _____

6 Az étteremben 4-féle levest és 7-féle második fogást kínálnak. Állítsunk össze ezekből kétfogásos ebédet!

a) Hányféle első fogást választhatunk? _____

b) Hányféle második fogás választható minden egyes első fogáshoz? _____

c) Hányféle kétfogásos ebédet állíthatunk össze? _____

B)

1 Hányféleképpen lehet sorba rakni 4 modellautót egy polcon? _____

Sorold fel a lehetőségeket a füzetedben! (Adj neveket az autóknak, egy-egy betűt vagy számot!)

2 Hány darab különböző négyjegyű szám készíthető az adott számjegyek felhasználásával?

a) 1; 2; 3; 4; *b)* 1; 1; 2; 3; *c)* 1; 1; 1; 2.

3 Hány darab különböző négyjegyű szám készíthető az adott számjegyek felhasználásával?

a) 0; 1; 2; 3; *b)* 0; 0; 1; 2; *c)* 0; 0; 0; 1.

4 A konyhában egy sorban állnak a poharak. 3-féle poharunk van. Az egyik fajtából 4 darab, a másikból 2 darab, a harmadikból 1. Hányféle (megkülönböztethető) sorrendje van a poharaknak?

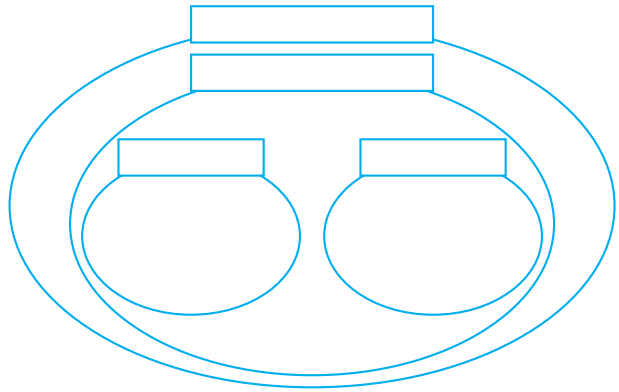
5 Az 5, 6, 7 számjegyek felhasználásával 3-jegyű számokat készítünk úgy, hogy ugyanolyan számjegyek is előfordulhatnak. Hányféle ilyen háromjegyű szám készíthető?

4. Transzformációk

Egybevágósági transzformációk

A)

1 Csoportosítottuk az egyes transzformációkat, összegyűjtöttük a tulajdonságaikat. Ennek alapján oldd meg a feladatot! A halmazábra címkéibe írd be a következő fogalmakat: tengelyes tükrözés (TT), középpontos tükrözés (KT), egybevágósági transzformációk (ET), geometriai transzformációk (GT)!



2 Két háromszög egybevágó, ha

a) _____;

b) _____;

c) _____;

d) _____.

3 Rajzolj egy paralelogrammát! Tükrözd

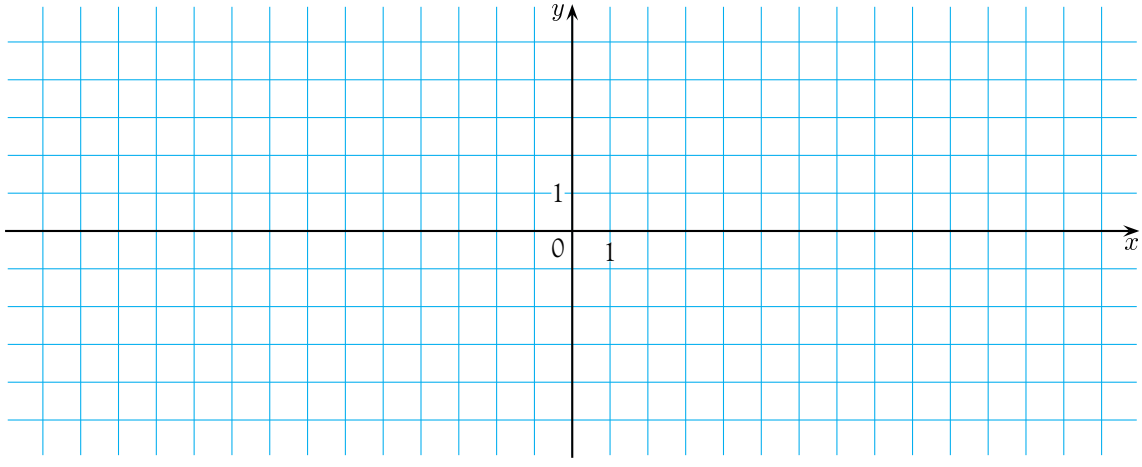
a) az egyik oldalegyenesére; *b)* mindkét átlójára!

4 Rajzolj egy négyzetet! Tükrözd

a) az egyik oldalának negyedelőpontjára;

b) két szomszédos oldalának felezőpontját összekötő szakasz felezőpontjára!

5 Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben: $A(2;-1)$, $B(1;4)$, $C(-2;1)$.



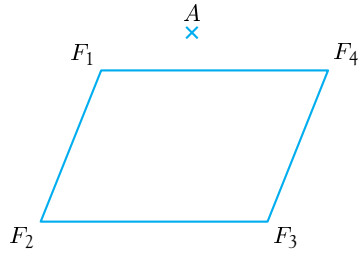
a) Tengelyes tükrözés után az A pont képe $A'(4;-1)$. Rajzold meg a háromszög képét, és add meg a B' és a C' koordinátáit!

b) Középpontos tükrözés után az A pont képe $A''(8;1)$. Rajzold meg a háromszög képét, és add meg a B'' és a C'' koordinátáit!

***6** Igazold, hogy ha két egyenlő szárú háromszögnek egyenlő az alapja és egyenlő az alaphoz tartozó magassága, akkor a két háromszög egybevágó! Beszéljétek meg egymás között az érveiteket, gondolataitokat!

***7** Mutasd meg, hogy ha két téglalapnak egyenlő az átlója, akkor a két téglalap nem feltétlenül egybevágó! Beszéljétek meg, ki hogyan gondolkodott!

8 Egy négyszög négy oldalának felezőpontját és az A csúcsát látod az ábrán. Az AB, BC, CD, DA oldalaknak sorban F_1, F_2, F_3, F_4 a felezőpontja. Szerkeszd meg a négyszöget!

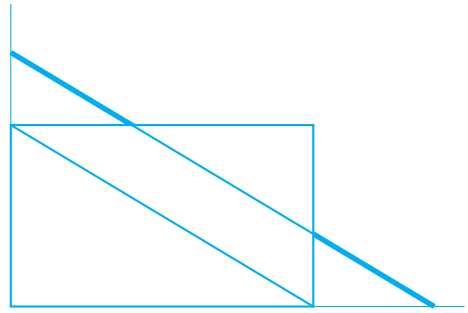


B)

1 Az $ABCD$ paralelogramma A és C csúcsát rögzítjük, a B csúcsa végigfut egy e egyenesen.

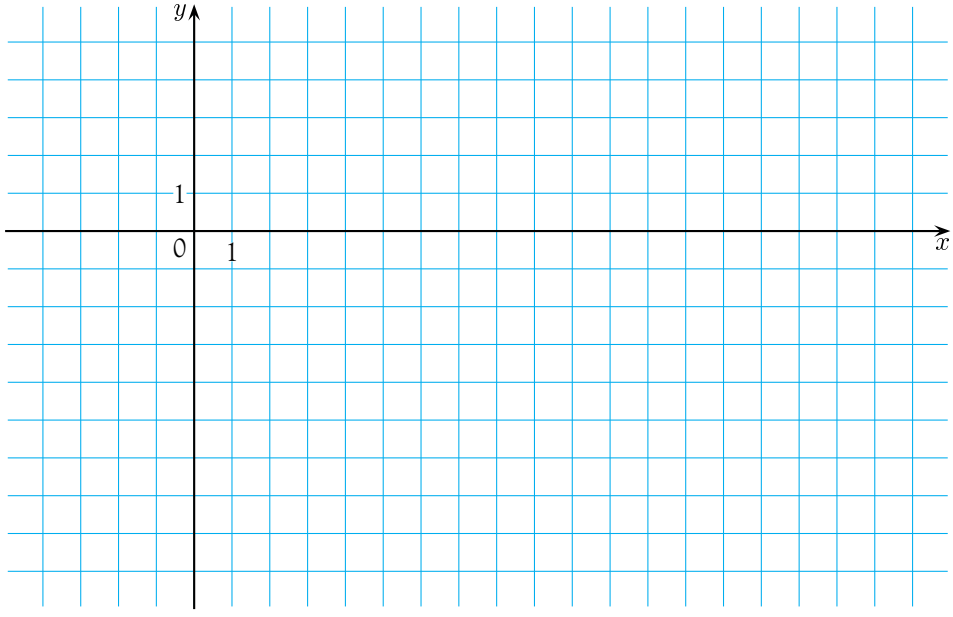
a) Rajzold meg, hogy közben hol mozog a paralelogramma D csúcsa!

b) Van-e az e egyenesnek olyan B pontja, amelyik esetén nem keletkezik $ABCD$ paralelogramma?

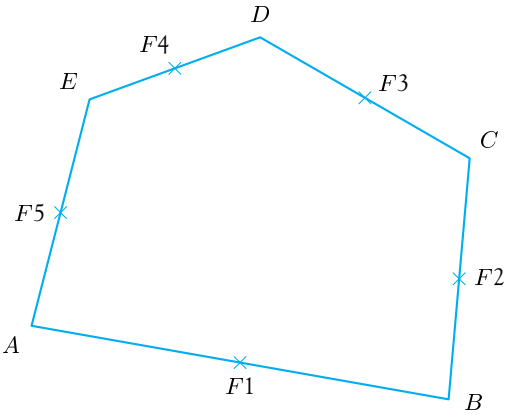


2 Az ábrán párhuzamost húztunk egy téglalap egyik átlójával. Igazold, hogy a vastagon jelölt két szakasz hossza egyenlő!

3 Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben: $A(5;1)$, $B(3;3)$, $C(1;0)$. Tengelyes tükrözés után az A pont képe: $A'(9;-3)$. Add meg a B' és a C' koordinátáit!



4 Az ábrán látható $ABCDE$ konvex ötszög síkjában add meg azt a P pontot, amelyre $PF_1F_2F_3$ és PF_4EF_5 paralelogramma!



5 Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja F, az AB oldalegyenesének egy pontja P, az AC oldalegyenesének egy pontja pedig Q. Szerkeszd meg az ABC háromszöget, ha adott az A, F, P és Q négy különböző pont!

Vektorok

A)

1 Keresd meg hazánk térképén a következő településeket!

a) Salgótarjántól keletre 70 km: _____

b) Kalocsától északra 105 km: _____

c) Debrecentől Budapest irányában 110 km: _____

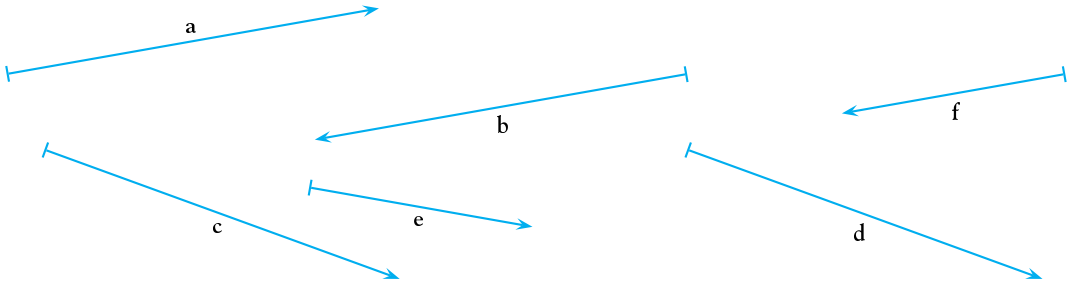
2 Pótold a hiányzó szavakat!

Az irányított szakasz két végét megkülönböztetjük, az egyiket _____, a másikat _____ nevezzük.

Az AB irányított szakaszt _____ nevezzük, és így jelöljük: _____.

Két vektor akkor egyenlő, ha _____.

3 Keress *a)* egyenlő; *b)* ellentett vektorokat az ábrán!



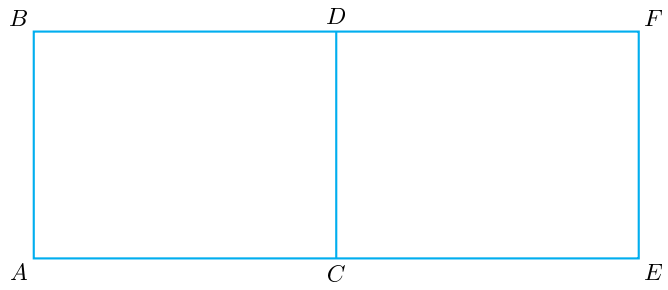
Az egyenlők betűjelét karikázd be zölddel, az ellentetteket pedig kékkel!

4 Sorold fel az ABC háromszög három csúcsa által meghatározott vektorokat!

_____

5 Rajzold be az ábrába a következő két vektort: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, és az $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$.

A megadott hat pont segítségével add meg azokat a vektorokat, amelyek



a) egyenlők **b**-vel: _____

b) ellentettek **b**-vel: _____

c) egyenlők **c**-vel: _____

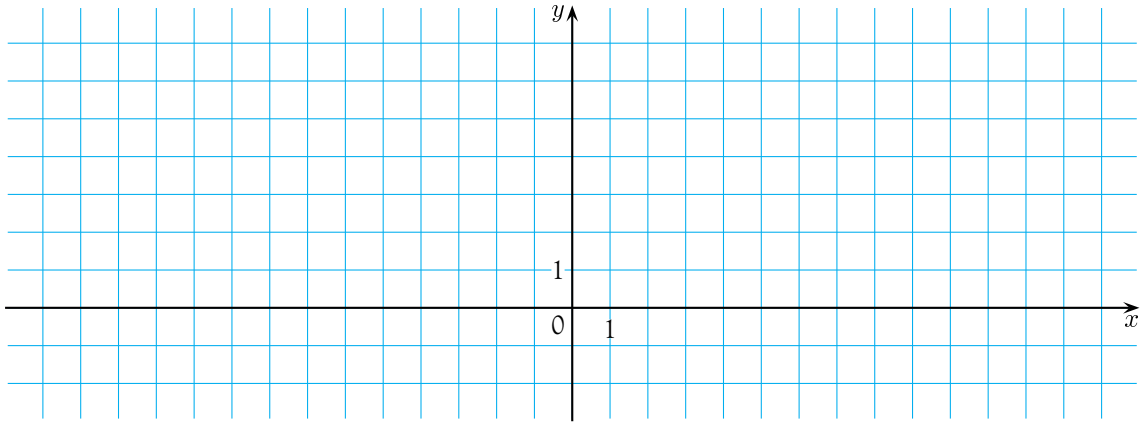
d) ellentettek **c**-vel: _____

e) **b** és **c** egyikével sem egyenlők és egyikével sem ellentettek: _____

6 Rajzold meg a koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha $A(4;1)$, $B(-2;3)$! Rajzold meg az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő vektort,

a) ha kezdőpontja $C(1;-2)$;

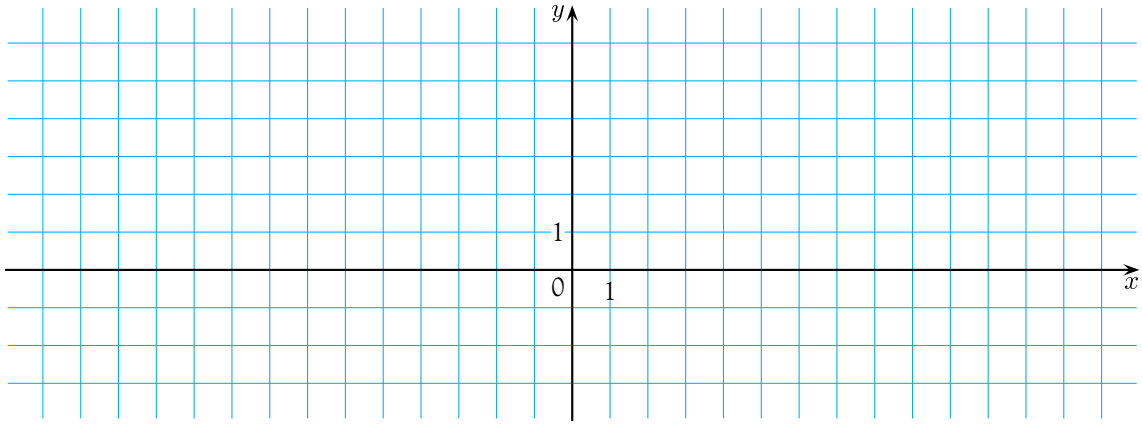
b) ha végpontja $D(-4;5)$!



7 Rajzold meg a koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{KL}$ vektort, ha $K(-4;3)$, $L(2;-1)$! Rajzold meg a $\overrightarrow{KL}$ vektorral ellentett vektort,

a) ha kezdőpontja $Q(-1;2)$;

b) ha végpontja $P(4;1)$!



B)

1 A koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ vektor kezdőpontja az $A(5;2)$, a végpontja a $B(1;-1)$. Add meg az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő vektor végpontját, ha a kezdőpontja:

a) $P(1;2)$ _____; *b)* $Q(-3;7)$ _____; *c)* $R(2000;-3000)$ _____!

2 Vegyél fel egy tetszőleges vektort! Szerkeszd meg a vele azonos kezdőpontú, rá merőleges és azonos hosszúságú vektort! Hány megoldást találtál? Beszéljétek meg közösen!

3 Az ábrán látható vektorhoz szerkeszd meg a vele azonos kezdőpontú, $-60°$-os hajlásszögű, kétszer olyan hosszú vektort!



4 Egy körvonalon felvettünk 10 darab piros és 1 fekete pontot. A 11 pont által meghatározott összes vektor között hogyan aránylanak egymáshoz

a) a piros és a fekete kezdőpontúak;

b) azok, amelyeknek azonos színű a kezdő- és végpontja azokhoz, amelyeknek nem azonos színű a kezdő- és a végpontja?

5 Az ábrán látható tábla kilenc számozott mezőjét egymásután fűzve egy kilencjegyű számot kapunk. Csak szomszédos számjegyek fűzhetők egymás után. Vagyis például a 145 236 987 kiolvasható, de például a 154 789 632 nem.

Szemléltesd vektorokkal, hogy milyen útvonalon haladsz, ha az 1-től kezdve a

a) legnagyobb; *b)* legkisebb kilencjegyű számot olvasod ki a táblázatból!

a)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

b)

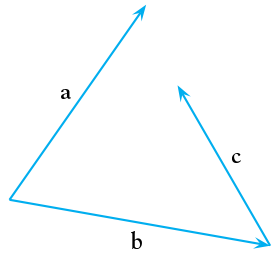
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Vektorok összeadása

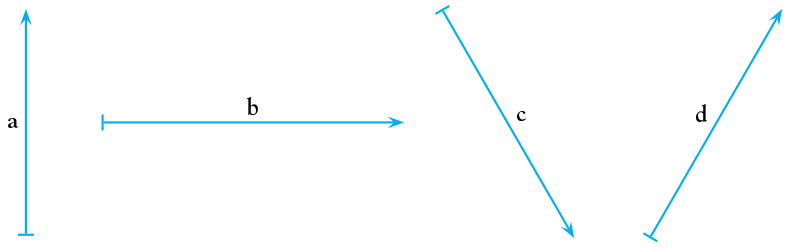
A)

1 Szerkeszd meg a következő összegeket!

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; *b)* $\mathbf{a} + \mathbf{c}$; *c)* $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.



2 Adott négy vektor: **a**, **b**, **c**, **d**. Másold át a füzetedbe!



a) Az összes lehetséges módon válassz ki közülük hármat, majd szerkeszd meg minden esetben az összegüket!

b) Szerkeszd meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ vektort!

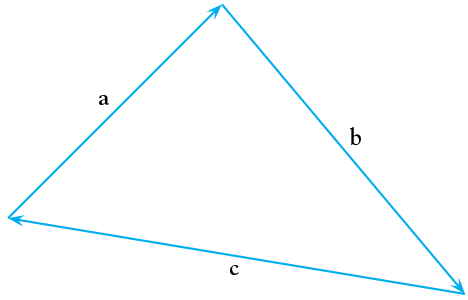
3 Az ábrán látható három vektor felhasználásával add meg az összegeket!

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$ _____

b) $\mathbf{b} + \mathbf{c} =$ _____

c) $\mathbf{c} + \mathbf{a} =$ _____

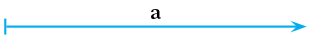
d) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} =$ _____

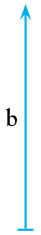


4 Szerkeszd meg a megadott vektorral közös kezdőpontú vektort, ha

a) hossza fele az **a** hosszának, és 90°-os szöget zár be vele;

b) hossza másfélszerese a **b** hosszának, és −90°-os szöget zár be vele!



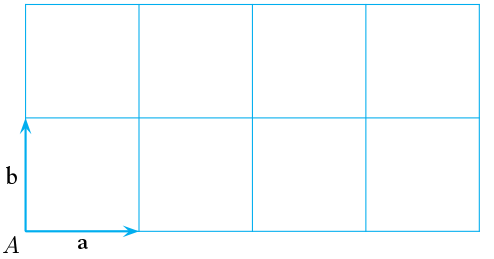


5 Az A kezdőponttal add meg a következő összegeket! A négyzetrács szükséges rácspontjainak adj nevet!

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; *b)* $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b}$;

c) $\mathbf{b} + \mathbf{b}$; *d)* $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}$;

e) $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{b}$; *f)* $\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{a}$.



6 Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Igaz-e?

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$;

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

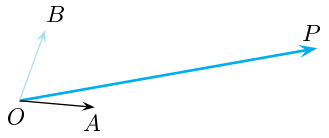
7 Rajzolj egy tetszőleges **v** vektort! Szerkessz

a) két olyan vektort, amelyek összege **v**;

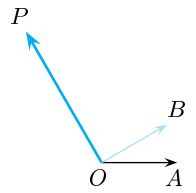
b)* három olyan vektort, amelyek összege −v**!

8 Bontsd fel az ábrán látható $\overrightarrow{OP}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

a)



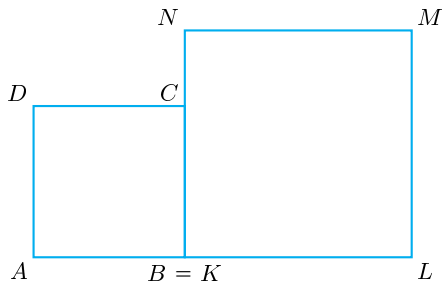
b)



B)

1 Az $ABCD$ és a $KLMN$ négyzeteket az ábrán látható módon úgy helyeztük egymás mellé, hogy a B és a K csúcsuk egybeesik.

Mutasd meg, hogy az AB felezőpontjából a DN felezőpontjába mutató vektor egyenlő a KL felezőpontjából a CM felezőpontjába mutató vektorral!



2 Rajzolj két olyan különböző hosszúságú vektort, amelyek összegének hossza az egyik eredeti vektor hosszával egyenlő!

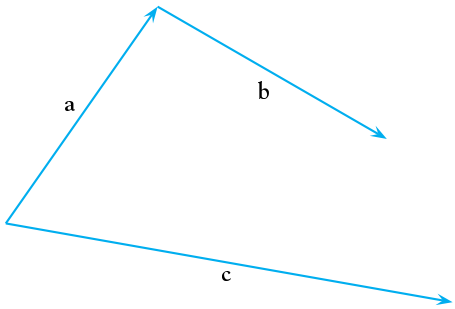
3 Legyen az ABC háromszög súlypontja S. Szerkeszd meg az $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$ vektort! Mit tapasztalsz?

4 Az $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$ lapjának középpontja P, $ADHE$ lapjának középpontja Q. Ha az $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ vektornak az A pont a kezdőpontja, akkor hol van a végpontja?

5 Milyen határok között változhat két vektor összegének hossza?

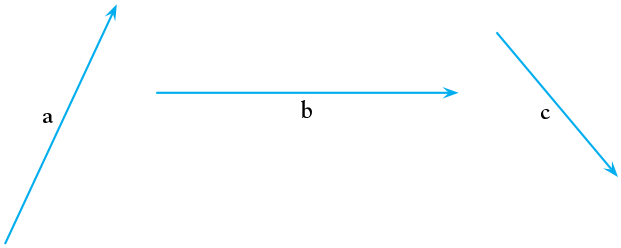
Vektorok kivonása

A)

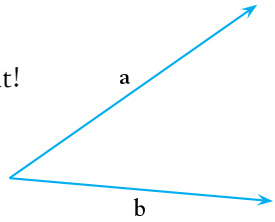


1 Szerkeszd meg az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ vektorokat!

2 Szerkeszd meg az $\mathbf{a}-(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ és az $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektorokat! Hasonlítsuk össze az így kapott két vektort!



3 Szerkeszd meg a $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $1{,}5\mathbf{b}-1{,}5\mathbf{a}$ vektorokat!



4 A számegyenesen a 6-tal jelölt pontból a 10-zel jelölt pontba mutató vektort jelöljük $\overrightarrow{6;10}$-zel. Ezzel a jelöléssel megadunk néhány vektort. Válaszd ki közülük *a)* az egyenlőket; *b)* az ellentetteket!

$\overrightarrow{1;9}$, $\overrightarrow{0;6}$, $\overrightarrow{5;-1}$, $\overrightarrow{-6;-10}$, $\overrightarrow{997;1003}$, $\overrightarrow{14;10}$, $\overrightarrow{-4;4}$!

a) egyenlők: _____

b) ellentettek: _____

5 Az ábrán látható négyzetnek rajzold be a két átlóját! Az oldalakat és az átlókat irányítsd úgy, hogy a hat vektor összege nullvektor legyen!

6 Egy szabályos hatszög egyik csúcsából a többi öt csúcsba mutató vektorok legyenek sorban $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$!

a) Szerkeszd meg a következő vektorokat: $\mathbf{a}-\mathbf{e}$, $\mathbf{b}-\mathbf{d}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $2\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{d}$!

b) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{a}-\mathbf{e}$, $\mathbf{b}-\mathbf{d}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $2\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ vektorok között melyek az egyenlők, melyek az ellentettek?

7 Egy kocka egyik csúcsából induló élvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Állítsd elő ezek segítségével (összegként, illetve különbségként) az összes

a) lapátlóvektort; *b)* testátlóvektort!

B)

1 Egy kocka A csúcsából kiinduló és az A-t tartalmazó lapok középpontjaiba mutató vektorok $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$. Állítsd elő ezek segítségével az A csúcsból kiinduló

a) lapátlóvektorokat; *b)* élvektorokat; *c)* testátlóvektort!

2 Egy kocka A csúcsából kiinduló és az A-t tartalmazó lapok középpontjaiba mutató vektorok $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$.

a) Igazold, hogy közülük bármelyik kettő $60°$-os szöget zár be egymással!

b) Mekkora az $\mathbf{l} - \mathbf{k}$ és az $\mathbf{l} - \mathbf{m}$ vektorok hajlásszöge?

3 Rajzolj két olyan különböző hosszúságú vektort, amelyek különbségének hossza az egyik eredeti vektor hosszával egyenlő!

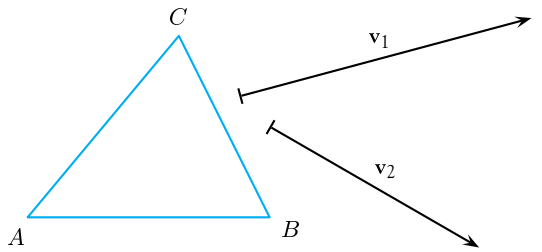
4 Ha két vektor egyenlő hosszú, akkor az összegük és a különbségük merőleges egymásra? Válaszodat indokold!

5 Az $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$ lapjának középpontja P, $ADHE$ lapjának középpontja Q. Az $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}$ vektor hosszát hasonlítsd össze az $\overrightarrow{AP}$ vektor hosszával!

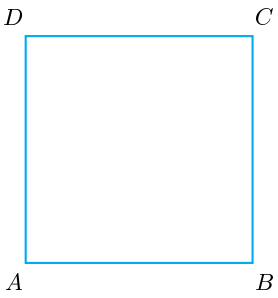
Eltolás

A)

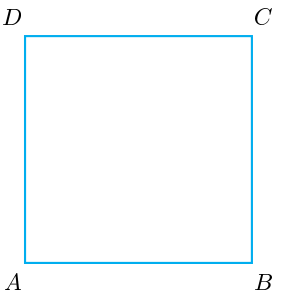
1 Az ábrán látható ABC háromszöget told el a $\mathbf{v}_1$ és a $\mathbf{v}_2$ vektorral! Az így megszerkesztett $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögekhez add meg azt a $\mathbf{v}$ vektort, amellyel az $A'B'C'$ háromszög az $A''B''C''$ háromszögbe tolható!



2 *a)* Az $ABCD$ négyzetet told el az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorokkal!



b) Az $ABCD$ négyzetet tükrözd a BC, a DC oldalegyeneseire, majd a C csúcsára!



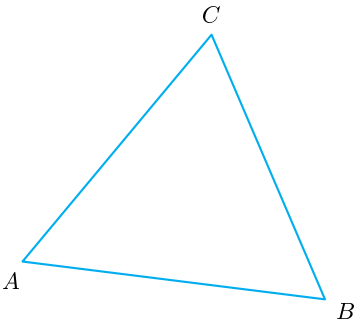
3 Rajzolj egy négyszöget, és rajta kívül tűzz ki egy pontot! Told el a négyszöget úgy, hogy az egyik csúcsa a kitűzött pont legyen!

4 Az ábrán látható háromszög BC oldalának felezőpontja legyen F. Told el a háromszöget

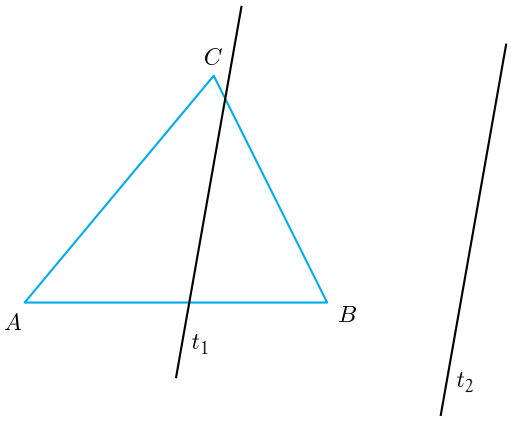
a) a $\overrightarrow{CF}$ vektorral;

b) az $\overrightarrow{AF}$ vektorral;

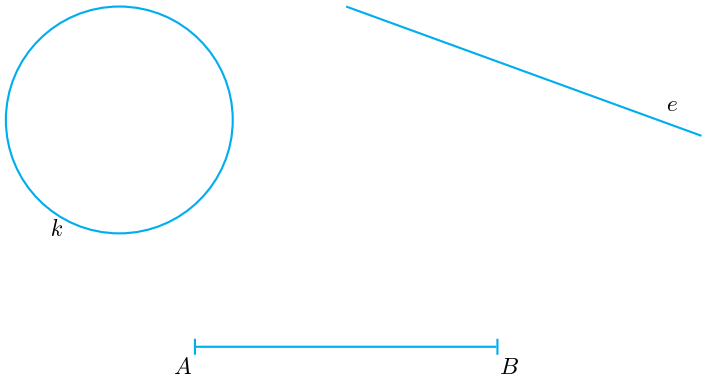
c) az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektorral!



***5** Az ABC háromszöget tükrözd a t_1 tengelyre! Az így kapott $A'B'C'$ háromszöget tükrözd a t_1-gyel párhuzamos t_2 tengelyre! A második tükrözés után kapott $A''B''C''$ háromszöget hogyan kaphatnád meg közvetlenül az eredeti ABC háromszögből?



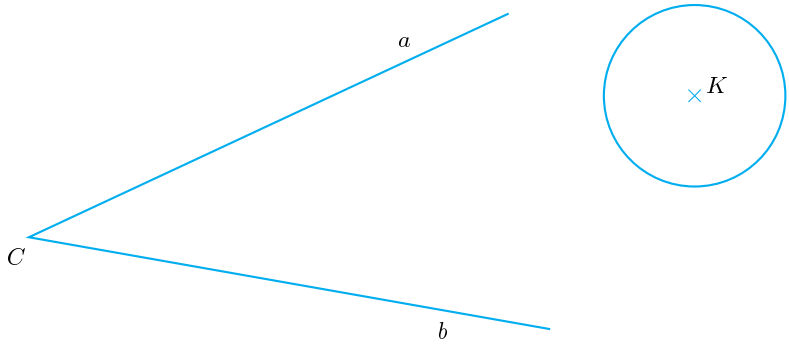
***6** Szerkeszd meg az $ABCD$ paralelogramma C és D csúcsát, ha C illeszkedik az e egyenesre, D pedig illeszkedik a k körre!



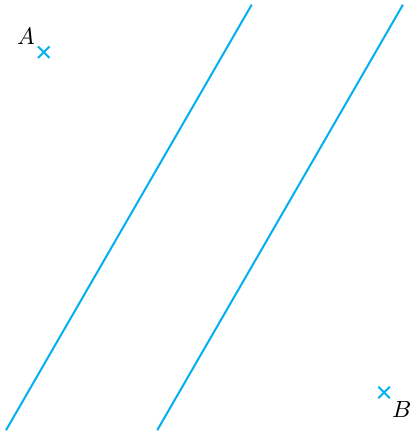
B)

1 Szerkessz húrtrapézt, ha adott a négy oldalának a hossza!

2 Adott egy szög és egy kör. Add meg az eltolás vektorát, amely a szöget úgy tolja el, hogy a körnek a szög két szára a két érintője lesz!



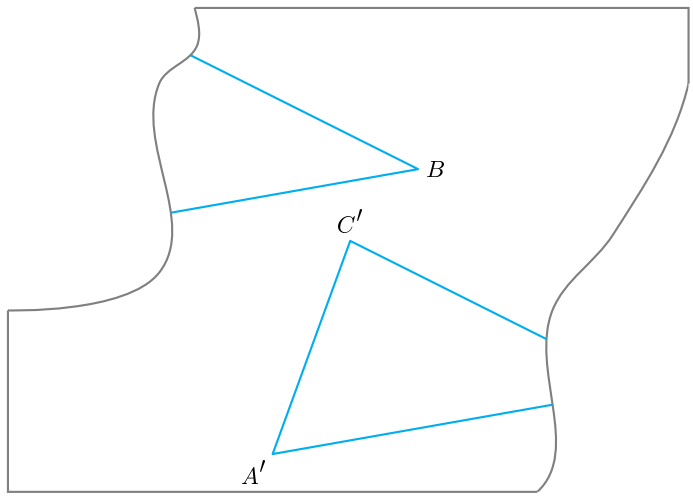
3 A térképvázlaton megjelölt A és B pontot egy vezetékkel kell összekötni. A vezetéket el kell ásni. Az út burkolatát nem szeretnék felszedni, ezért az út alatt fúrni fognak. Tervezd meg a legrövidebb útvonalat úgy, hogy a fúrás is a lehető legrövidebb legyen!



4 Egy madár az A pontban ült egy fa ágán. Innen átrepült egy másik fa B-vel jelölt pontjába. Közben a földön is haladt, ezt a távolságot d-vel jelöltük. Szerkeszd meg a madár legrövidebb útját!



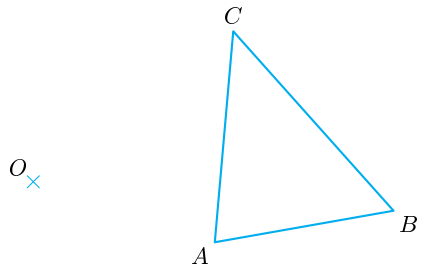
5 A papíron az ABC háromszög és az $A'B'C'$ eltoltja volt látható. Sajnos a papírlap két sarka leszakadt. Szerkeszd meg az eltolás vektorát úgy, hogy csak a szakadt papírt használod!



Pont körüli elforgatás *(Választható tananyag)*

A)

1 Az ABC háromszöget forgasd el az O pont körül 90°-kal!



2 A pont körüli elforgatás tulajdonságait adtuk meg a következő mondatokban. Pótold a hiányzó szavakat!

A forgatás a szakaszok hosszát _____ változtatja.

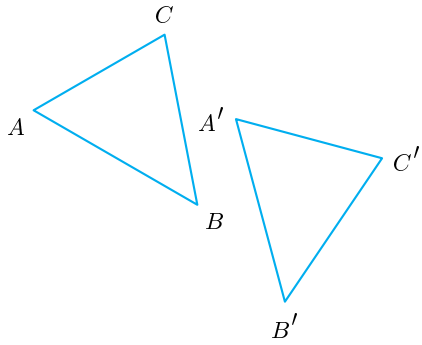
A forgatás a szögek nagyságát _____ változtatja.

Vagyis a forgatás _____ transzformáció.

A forgatás a körüljárási irányt _____ változtatja.

A forgatásnak egy _____ van.

Az egyenes és a képe egymással bezárt szöge a _____ _____ egyenlő.

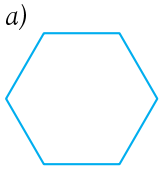


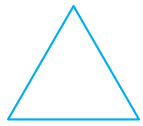
3 Szerkeszd meg azt a K pontot, ami körül az ABC háromszög az $A'B'C'$ háromszögbe fordítható!

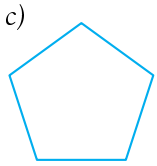
4 Hány fokot fordul az óra kismutatója, amíg a nagymutatója

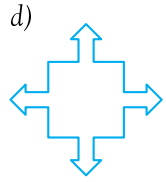
a) 360°-ot; *b)* 180°-ot fordul?

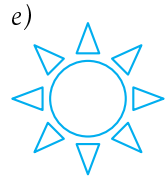
5 Hány fokos forgásszimmetriát figyelhetsz meg a következő ábrákon?

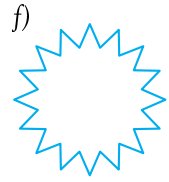
a)  _____;

b)  _____;

c)  _____;

d)  _____;

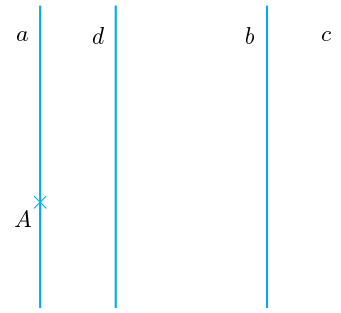
e)  _____;

f)  _____.

B)

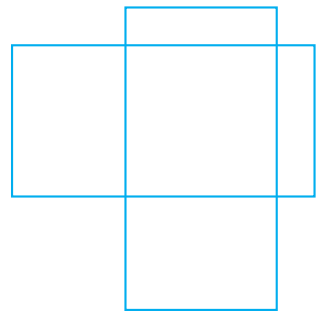
***1** Szerkeszd meg az $ABCD$ négyzetet, ha a B csúcs a b egyenesre, a C csúcs a c egyenesre, a D csúcs pedig a d egyenesre illeszkedik!

Hány megoldást találtál? _____



***2** Egy 2 cm sugarú kört egy külső pont körül elforgattunk 60°-kal. Az így kapott két kör érinti egymást. Milyen messze van a forgatás középpontja a kör középpontjától?

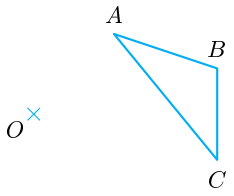
3 Az ábrán egy téglalap alakú asztalt látunk felülnézetben. Az asztalt elforgatták 90°-kal. Ez is látható az ábrán. Mely pont körül forgatták el az asztallapot?



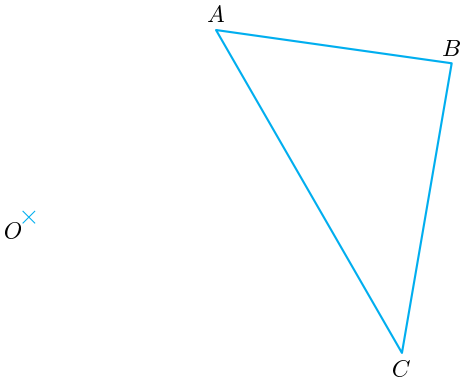
Középpontos hasonlóság

A)

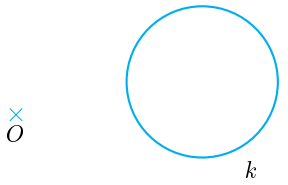
1 Adott az O középpont. Szerkeszd meg az ABC háromszög $\lambda = 4$ arányú $A'B'C'$ középpontosan hasonló képét!



2 Adott az O középpont. Szerkeszd meg az ABC háromszög $\lambda = \frac{1}{4}$ arányú $A'B'C'$ középpontosan hasonló képét!



3 Adott az O középpont. Szerkeszd meg a k kör $\lambda = -2$ arányú középpontosan hasonló képét!

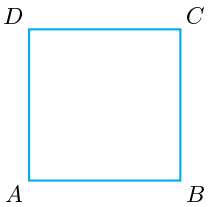


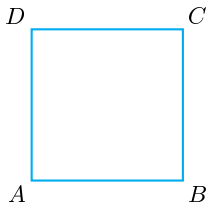
4 Az ábrán látható négyzetet

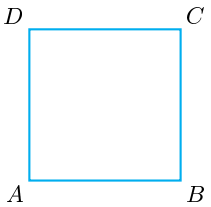
a) nagyítsd az A csúcsából 2-szeresére!

b) nagyítsd az AB oldalának felezőpontjából $\frac{3}{2}$-szeresére!

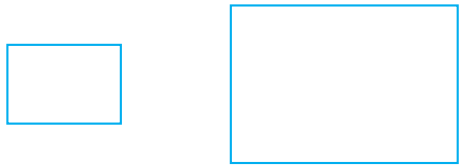
c) kicsinyítsd a középpontjából $\frac{1}{2}$-szeresére!







5 Az ábrán látható két középpontosan hasonló téglalaphoz szerkeszd meg a középpontot! Hány megoldást találtál?



6 A koordináta-rendszerben adott az $ABCD$ négyszög: $A(2;0)$, $B(4;0)$, $C(6;6)$, $D(0;4)$. Add meg az $A'B'C'D'$ négyszög koordinátáit, ha az $ABCD$ négyszögből az $A'B'C'D'$ négyszöget origó középpontú

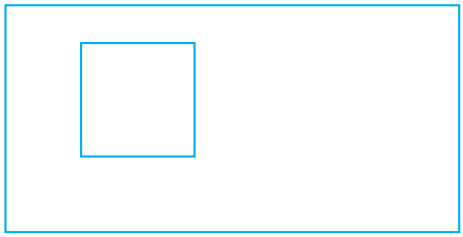
a) 1,5-szeres nagyítással kapjuk;

b) $-\frac{1}{2}$-szeres kicsinyítéssel kapjuk!

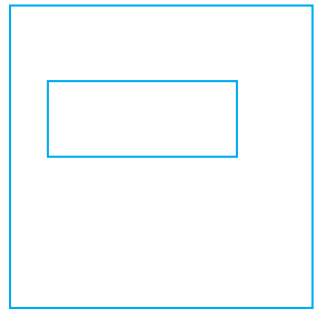
B)

***1** *a)* Egy téglalap belsejébe rajzoltunk egy négyzetet. Az ábrán látható módon a négyzet oldalai sorra párhuzamosak a téglalap oldalaival. Szerkessz olyan pontot, amelyből a négyzetet úgy lehet nagyítani, hogy a nagyítás után a négyzet három oldala a téglalap három oldalára esik!

a)

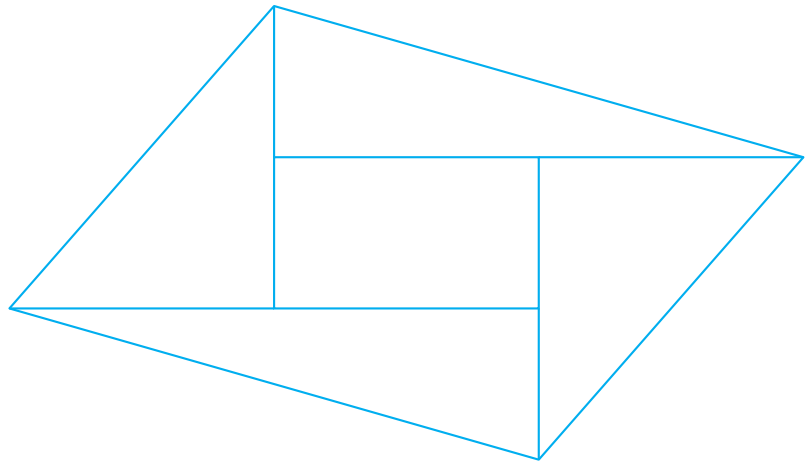


b)



b) Egy négyzet belsejébe rajzoltunk egy téglalapot. Az ábrán látható módon a téglalap oldalai sorra párhuzamosak a négyzet oldalaival. Szerkessz olyan pontot, amelyből a négyzetet úgy lehet kicsinyíteni, hogy a kicsinyítés után a négyzet három oldala a téglalap három oldalára esik!

***2** Egy téglalap oldalait az ábrán látható módon meghosszabbítottuk a kétszeresére. Az így kapott pontokat összekötöttük. Ennek a négyszögnek a területe hányszorosa az eredeti téglalapnak?



***3** A koordináta-rendszerben adott az $ABCD$ négyszög: $A(4;1)$, $B(6;1)$, $C(8;7)$, $D(2;5)$. Add meg az $A'B'C'D'$ négyszög koordinátáit, ha az $ABCD$ négyszögből a $K(2;1)$ középpontú

a) $\frac{3}{2}$-szeres nagyítással kapjuk;

b) $-0{,}5$-szeres kicsinyítéssel kapjuk!

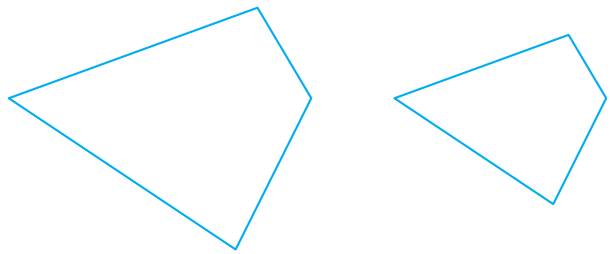
A koordináta-rendszerben adott az $A'B'C'D'$ négyszög: $A'(-2;5)$, $B'(4;3)$, $C'(6;5)$, $D'(2;9)$. Add meg az $ABCD$ négyszög koordinátáit, ha az $ABCD$ négyszögből az $A'B'C'D'$ négyszöget a $K(2;1)$ középpontú

c) 2-szeres nagyítással kapjuk;

d) -2-szeres nagyítással kapjuk!

***4** Két hasonló négyszöget látsz az ábrán. A kisebbet nagyítsd akkorára, hogy a másikkal egybevágó legyen!

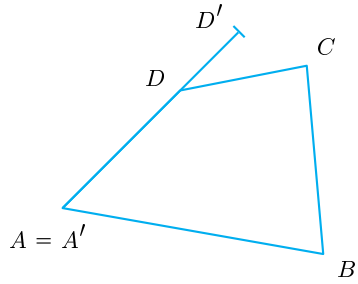
A két egybevágó négyszöget vágd szét két-két síkidomra úgy, hogy a darabokból paralelogrammát tudj összerakni!



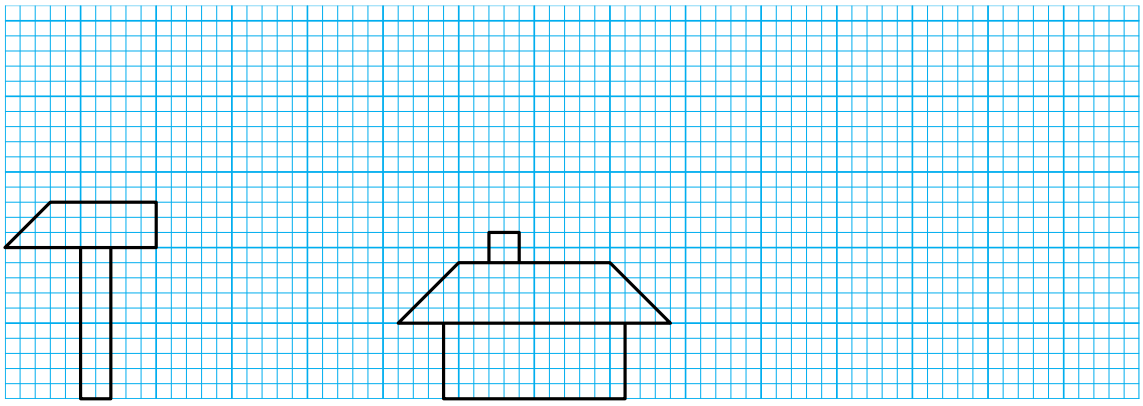
A középpontos hasonlóság tulajdonságai

A)

1 Rajzoltunk egy négyszöget, majd meghosszabbítottuk az egyik oldalát. Másold le az ábrát a füzetedbe! Szerkeszd meg az eredetihez középpontosan hasonló négyszöget, amelynek ez a meghosszabított szakasz lesz a megfelelő oldala!



2 A négyzethálóra rajzolt ábrákat nagyítsd kétszeresére!



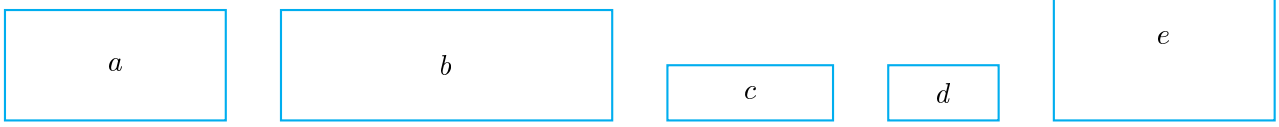
3 Az ABC háromszög A-ból húzott magasságtalppontja T, B-ből húzott magasságtalppontja Q, magasságpontja M, a CM szakasz felezőpontja F. A háromszögön kívül fekvő K pontból alkalmaztunk egy $\lambda = \frac{3}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot. A képpontokat a szokásos módon, vesszővel jelöljük. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

a) $AB \| A'B'$; *b)* $FM \| C'F'$; *c)* $FC \perp A'B'$; *d)* $MF \perp B'Q'$;

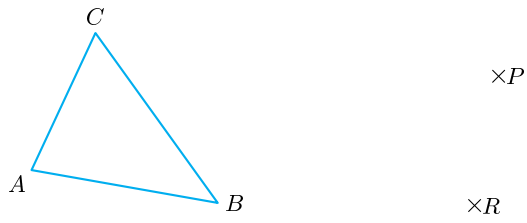
e) $\frac{A'T'}{AT} = \frac{3}{2}$; *f)* $Q'C' = \frac{2}{3} \cdot QC$; *g)* $3 \cdot B'T' = 2 \cdot BT$; *h)* $3 \cdot MC = 4 \cdot M'F'$;

i) $BAT \sphericalangle = B'A'T' \sphericalangle$; *j)* $BCM \sphericalangle = B'A'M' \sphericalangle$.

4 Keresd a párját! Az ábrán látható téglalapok közül melyik melyikkel középpontosan hasonló?



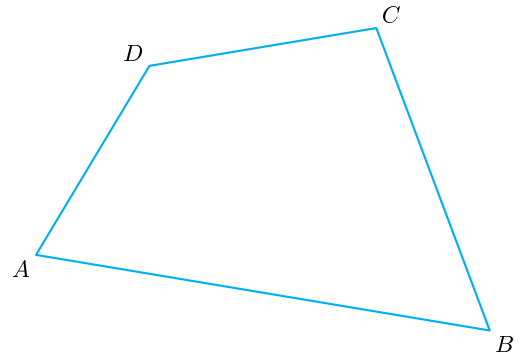
5 Adott az ABC háromszög, amelynek középpontosan hasonló képét nem ismerjük, de tudjuk, hogy a P pont a BC egyenes képére, a Q pont az AC egyenes képére, az R pont pedig az AB egyenes képére illeszkedik. Szerkeszd meg az ABC háromszög képét!



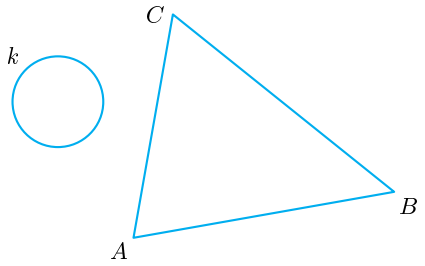
B)

1 Mutasd meg, hogy van két olyan középpontosan hasonló (de nem egybevágó) háromszög, amelyeknek egyenlő egy-egy oldala!

2 Szerkessz a négyszögbe olyan rombuszt, amelynek csúcsai a négyszög oldalaira esnek, oldalai pedig az átlókkal párhuzamosak!



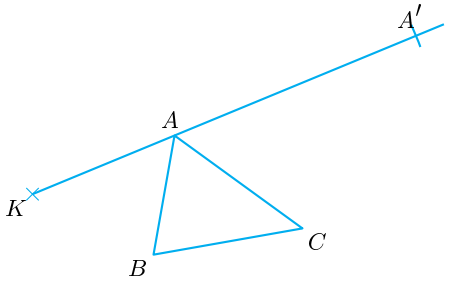
3 A k körhöz és az ABC háromszög köréírt köréhez szerkeszd meg a középpontos hasonlóság középpontját!



Szerkesszünk középpontosan hasonló képet!

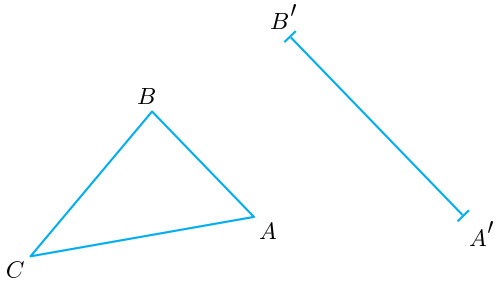
A)

1 Adott a K középpont, továbbá az ABC háromszög A csúcsának A' képe. Szerkeszd meg az ABC háromszög középpontosan hasonló képét!



2 Az ABC háromszög A csúcsának A', B csúcsának B' pont a képe.

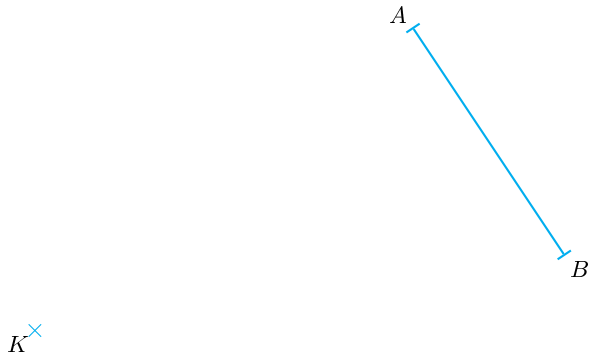
Szerkeszd meg az ABC háromszög középpontosan hasonló képét!



3 Szerkeszd meg az A pont képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja és

a) $\lambda = \frac{9}{2}$; *b)* $\lambda = \frac{7}{4}$; *c)* $\lambda = -\frac{5}{8}$!

4 Szerkeszd meg az AB szakasz középpontosan hasonló képét, ha K a középpont és $\lambda = \frac{1}{7}$!



5 Szerkeszd meg az AB szakasz középpontosan hasonló képét, ha K a középpont és $\lambda = \frac{8}{5}$!



***6** Az adott PQ szakaszt vágd két részre egy R ponttal úgy, hogy

a) $PR : RQ = 3 : 5$; *b)* $PR : RQ = 11 : 5$!

B)

1 Az adott PQ szakaszt vágd két részre egy R ponttal úgy, hogy

a) $PR : RQ = 2 : 7$; *b)* $PR : RQ = 3 : 7$!

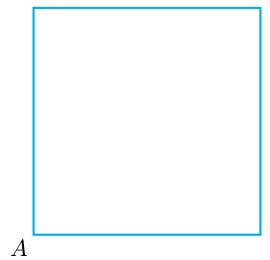
2 Az adott AB szakasz B-n túli meghosszabbításán szerkeszd meg azt a P pontot, amelyre

a) $AP : PB = 4 : 3$; *b)* $AP : PB = 7 : 3$; *c)* $AP : PB = 5 : 2$; *d)* $AP : PB = 7 : 1$!

3 Az adott AB szakasz egyenesén szerkeszd meg azokat a P pontokat, amelyekre

a) $AP : PB = 2 : 1$; *b)* $AP : PB = 1 : 2$; *c)* $AP : PB = 3 : 2$; *d)* $AP : PB = 2 : 3$!

4 Egy négyzet határvonalát az egyik csúcsból indulva öt színnel fogjuk színezni. A színes vonalak hosszát egyforma hosszúra tervezzük. Szerkeszd meg a színezéshez fontos pontokat a négyzet határvonalán!

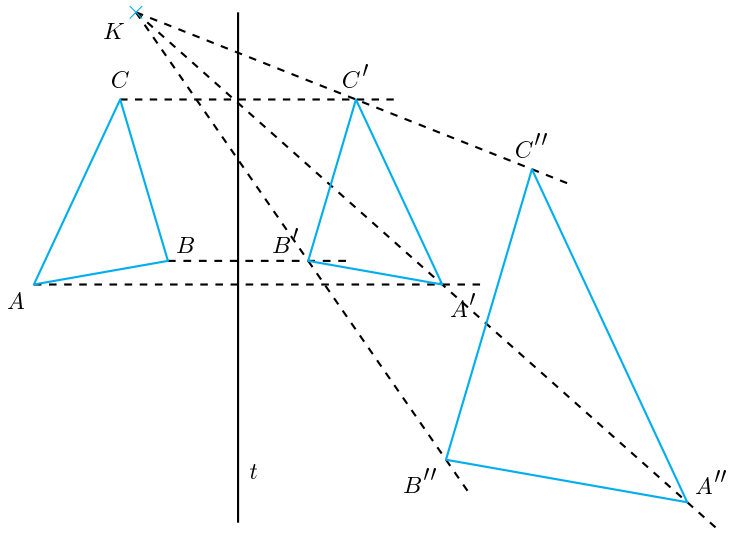


5 Két kör hasonlóságának aránya $\frac{4}{7}$. Sugaruk hosszának összege 39,6 cm. Mekkora két kör területének összege?
Beszéljétek meg egymás között a megoldásaitokat!

Hasonlóság

A)

1 A mellékelt ábra alapján pótold a hiányzó szavakat!



Az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszög _____

Az $A'B'C'$ háromszög és az $A''B''C''$ háromszög _____

Az ABC háromszög és az $A''B''C''$ háromszög _____

A középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtását _____ transzformációnak nevezzük.

2 Írd le a hasonlóság néhány tulajdonságát!

_____

_____

3 Fejezd be a megkezdett mondatokat!

Két háromszög hasonló, ha _____

Két háromszög hasonló, ha _____

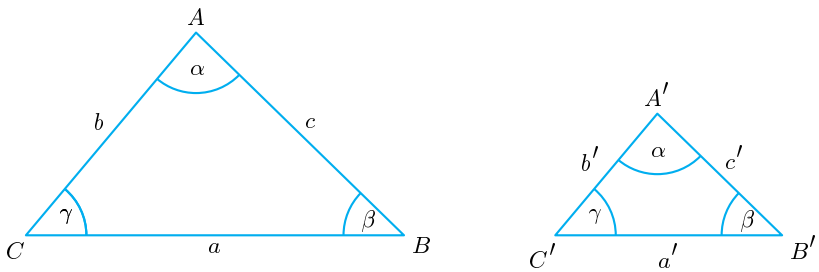
Két háromszög hasonló, ha _____

Két háromszög hasonló, ha _____

Két sokszög hasonló, ha _____

Két sokszög hasonló, ha _____

4 Az ábrán látható két háromszög hasonló.

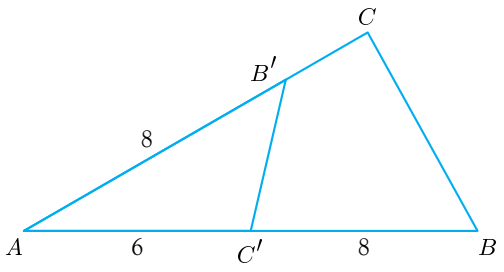


a) $a = 5$ cm, $b = 3{,}5$, $\gamma = 50°$, $a' = 3$ cm. Határozd meg b' és γ' értékét! _____

b) $a = 8$ cm, $\beta' = 60°$, $\gamma' = 40°$, $a' = 2{,}4$ cm. Határozd meg β és γ értékét! _____

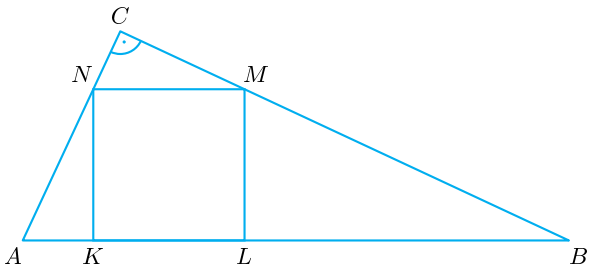
c) $a = 12$ cm, $b = 10{,}5$, $b' = 7$ cm, $c' = 3$ cm. Határozd meg c és a' értékét! _____

***5** Az ábrán látható ABC és $AB'C'$ háromszög hasonló. $AC' = 6$ cm, $AB' = C'B = 8$ cm. A $B'C'$ egyenes nem párhuzamos a BC egyenessel. Milyen hosszú az $B'C$ szakasz?



***6** Az ábrán látható ABC derékszögű háromszögbe a $KLMN$ négyzetet rajzoltuk.

Mutasd meg, hogy az ABC, ANK, NMC, MBL háromszögek hasonlók! Beszéljétek meg a bizonyítást közösen!

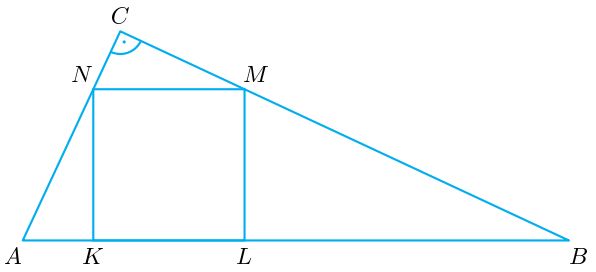


7 Egy háromszög oldalainak aránya 4 : 5 : 6. A hozzá hasonló háromszög kerülete 48 cm. Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai?

B)

1 Az ábrán látható ABC derékszögű háromszögbe a $KLMN$ négyzetet rajzoltuk.

Tudjuk, hogy $AK = 2{,}4$ cm, $BL = 4$ cm. Mekkora a négyzet területe?



2 Egy négyszög oldalainak a hossza 1,5 m, 2 m, 4 m, 4,5 m. Egy hozzá hasonló négyszögben a leghosszabb és a legrövidebb oldal összege 15 cm. Mekkora az új négyszög kerülete?

3 Egy paralelogrammát a rövidebb oldalával párhuzamos vágásokkal három egybevágó kis paralelogrammára vágunk. Ezek a paralelogrammák hasonlók az eredetihez. Mekkora a paralelogramma hosszú oldala, ha a rövidebb oldala 12 cm?

4 *a)* Az 1 : 2 800 000 arányszámú térképen Miskolc és Debrecen távolsága 3,1 cm. Milyen messze van a két város egymástól a valóságban?

b) Az 1 : 3 800 000 arányszámú térképen rajzoltunk egy 1 cm sugarú kört. A valóságban hány km^2 területű ez a kör?

5 Két város távolsága légvonalban 180 km. A távolságuk egy térképen 3,6 cm. Milyen arányszám szerepel a térképen?

6 Az adott téglalaphoz illesz hozzá szerkesztéssel egy téglalapot úgy, hogy a kettő együtt az eredetihez hasonló legyen!

***7** Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza $a = 12$ cm és $c = 8$ cm. Egy ezekkel párhuzamos szakasz a szárakat 1 : 2 arányban osztja (az 1 rész van az a oldalhoz közelebb).

a) Milyen hosszú részekre osztja a trapéz egyik átlója ezt a szakaszt?

b) Milyen hosszú maga a szakasz?

5. A Pitagorasz-tétel

Mérjük meg a hosszát!

A)

1 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha befogóinak hossza $a = 5$ cm és $b = 2$ cm! Mérd meg milliméter pontossággal az átfogó hosszát!

2 Szerkessz négyzetet, ha az átlója 4 cm hosszúságú! Mérd meg milliméter pontossággal az oldalának hosszát!

3 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha egyik befogójának hossza $a = 1{,}6$ cm, az átfogójának hossza pedig $c = 6{,}5$ cm! Mérd meg milliméter pontossággal a hiányzó befogó hosszát!

4 Szerkesztéssel és méréssel határozd meg a 3 cm élű kocka lapátlójának és testátlójának hosszát!

5 Mekkora a területe a 3,5 cm oldalú szabályos háromszögnek? A hiányzó adatot szerkesztéssel és méréssel határozd meg!

6 Szerkeszd meg a füzetedben a következő nevezetes szögeket: 30°; 15°; 45°; 75°; 105°; 135°!

B)

1 Olvassátok el figyelmesen a következő szöveget, majd válaszoljatok a kérdésekre!

Ahogy a faluban sétálgattak, azt mondja nagyapó a gyerekeknek:
– Melyiktek tudná megmérni ezt a templomtornyot?
– Én meg tudnám mérni – felelte Pista.
– Hogyan mérnéd meg?
– Csináltatnék egy akkora létrát, mint ez a torony, meg egy akkora madzagot, hogy a torony tetejéről a földig érjen. Akkor aztán megint lejönnék és megmérném a madzagot, hogy hány méter.
– No, ez ugyan költséges lenne – nevetett nagyapó. – Nekem, látod, se létra, se madzag nem kell hozzá, sőt még csak fel sem kell másznom, mégis megmérem.
– Hát mérje meg, nagyapó!
– Az én botom éppen egy méter hosszú. Leállítom a földre és nézem, hogy milyen hosszú az árnyéka. Most nem olyan hosszú, mint maga a bot, de ha kicsit várunk, olyan hosszú lesz.
A gyerekek vártak. A bot árnyéka egyre hosszabbodott. Mikor a botnak az árnyéka is egy méter volt, nagyapó fölvette:
– Lássátok, most a toronynak az árnyéka is éppen olyan hosszú, mint a torony maga! Mérjétek meg hamar a torony árnyékát!
A gyerekek fogták a nagyapó botját és megmérték az árnyékot. Hát éppen huszonöt méter magas volt a torony.

(Gárdonyi Géza: Milyen magas a torony?)

a) Ha az árnyék huszonöt méter, akkor milyen magas a torony? _____

b) Az ismertetett módszer a nap folyamán mikor használható? _____

c) Ha a bot árnyéka 80 cm lett volna, a torony árnyéka pedig 20 méter, akkor milyen magas lenne a torony?

_____

2 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott a két befogójának hossza: $AC = 8$ cm, $BC = 15$ cm! Az átfogóján jelöld be a P pontot úgy, hogy $AC = AP$, valamint a Q pontot úgy, hogy $BC = BQ$ legyen!

a) Mérd meg, hogy mekkora a PQ szakasz hossza! *b)* Számítsd ki a PCQ szög nagyságát!

3 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. Az AC száron lévő D pontra és a BC szár B-n túli meghosszabbításán lévő E pontra $AD = BE$. Készíts ábrát, majd méréssekkel dönts!

a) Az AB szakasz és a DE szakasz felezi egymást.

b) Az AB szakaszt a DE szakasz felezi, de a DE szakaszt az AB szakasz nem felezi.

c) A DE szakaszt az AB szakasz felezi, de az AB szakaszt a DE szakasz nem felezi.

Igazold a méréssel kialakított sejtésedet!

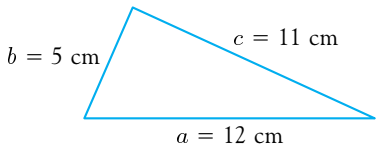
4 Szerkeszd meg a füzetedben a következő nevezetes szögeket: 22,5°; 150°; 165°; 195°; 202,5°; 225°!

A Pitagorasz-tétel

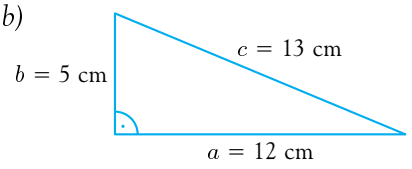
A)

1 Mindhárom ábra esetén számítsd ki az $a^2 + b^2$ és a c^2 értéket! A számítás után hasonlítsd össze a kapott két mennyiséget!

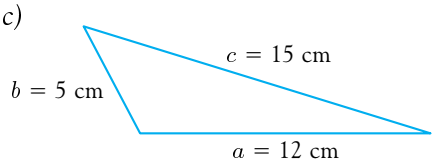
a)



b)



c)



$a^2 + b^2 =$ ____ $c^2 =$ ____; $a^2 + b^2 =$ ____ $c^2 =$ ____; $a^2 + b^2 =$ ____ $c^2 =$ ____.

A látottak alapján fogalmazzuk meg a következő három bizonyítható állítást! Pótold a hiányzó szavakat!

A hegyesszögű háromszög bármely két oldalának négyzetösszege _____, mint a harmadik oldal négyzete.

A derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege _____ az átfogó négyzetével.

A tompaszögű háromszög két rövid oldalának négyzetösszege _____, mint a harmadik oldal négyzete.

2 A Pitagorasz-tétel felhasználásával számítsd ki a derékszögű háromszög átfogójának hosszát, ha a befogók

a) $a = 8$ cm, $b = 17$ cm; *b)* $a = 5$ cm, $b = 1$ cm; *c)* $a = 6{,}5$ dm, $b = 7{,}2$ dm!

3 A Pitagorasz-tétel felhasználásával számítsd ki a derékszögű háromszög hiányzó befogójának hosszát, ha

a) $a = 4$ cm, $c = 21$ cm; *b)* $b = 10$ cm, $c = 17$ cm; *c)* $a = 101$ cm és $c = 155$ cm!

4 Számítsd ki a téglalap átlójának hosszát, ha az oldalai

a) $a = 1$ cm és $b = 10$ cm; *b)* $a = 6$ cm és $b = 15$ cm; *c)* $a = 4$ m és $b = 8{,}3$ dm!

5 Számítsd ki a téglalap hiányzó oldalának hosszát, ha az egyik oldalának és az átlójának ismerjük a hosszát!

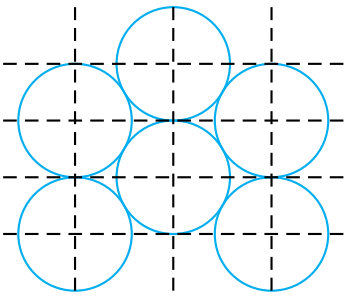
a) $a = 16$ cm, $d = 63$ cm; *b)* $b = 45$ cm, $d = 53$ cm; *c)* $a = 48$ cm és $d = 73$ cm.

6 Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak? Ha igen, akkor derékszögű-e a háromszög?

a) $a = 11$ cm, $b = 55$ mm és $c = 45$ mm. *b)* $a = 8{,}4$ cm, $b = 13{,}5$ cm és $c = 15{,}9$ cm.

B)

1 Az egyenletesen elnyújtott tésztából 5 cm átmérőjű pogácsákat szaggatunk az ábrán látható módon. Számítsd ki az ábrán látható szaggatott vonalak távolságát!



2 Két turistaút merőlegesen metszi egymást. Egy 12 méter magas fa tövében pihen egy vándor, a fa tetején ül egy rigó. A vándor az egyik úttól 3 méterre, a másiktól 4 méterre található.

a) Milyen messze van a vándor az útkereszteződéstől?

b) Milyen messze van a rigó az útkereszteződéstől?



***3** Bizonyítsd be, hogy derékszögű trapézban az átlók négyzeteinek különbsége egyenlő az alapok négyzeteinek különbségével!

***4** Egy derékszögű háromszög átfogóját a derékszög szögfelezője 15 cm és 20 cm hosszú részekre osztja. Számítsd ki a befogók hosszát!

A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban

A)

1 Írd be a hiányzó képleteket!

Az a oldalú szabályos háromszög magasságának hossza: _____

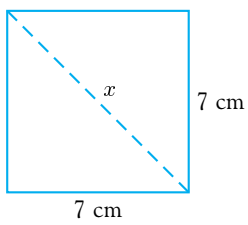
Az a oldalú szabályos háromszög területe: _____

Az a oldalú négyzet átlójának hossza: _____

Az a átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójának hossza: _____

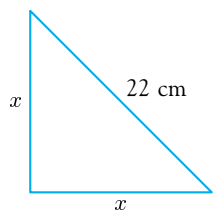
2 Az ábrákon szereplő adatok ismeretében számítsd ki az x-szel jelölt hosszúságokat!

a)



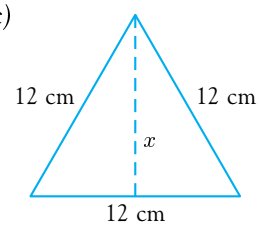
$x =$ _____;

b)



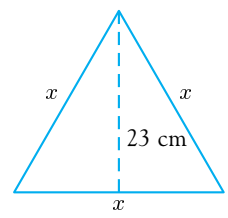
$x =$ _____;

c)



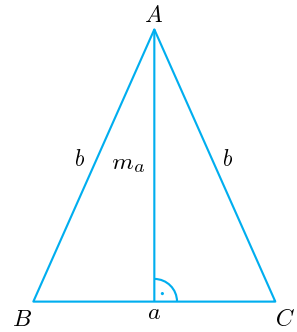
$x =$ _____;

d)



$x =$ _____.

3 Az ABC egyenlő szárú háromszögben az ábrán látható jelölést használjuk: az alap a, a szárak b, az alaphoz tartozó magasság m_a hosszúságú. Számítsd ki a hiányzó szakasz hosszát!



a) $a = 22$ cm, $b = 61$ cm; _____

b) $a = 32$ cm, $m_a = 63$ cm; _____

c) $b = 33$ cm, $m_a = 65$ cm. _____

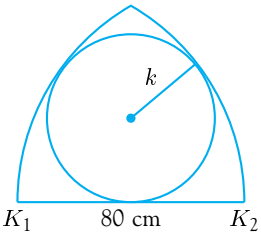
4 Határozd meg a derékszögű háromszög súlyvonalainak a hosszát, ha egyik befogója 120 cm és az átfogója 122 cm hosszúságú!

5 Egy egyenlő szárú trapéz alapjainak hossza 30 cm és 18 cm, a magasság hossza pedig 16 cm. Határozd meg a trapéz szárainak hosszát!

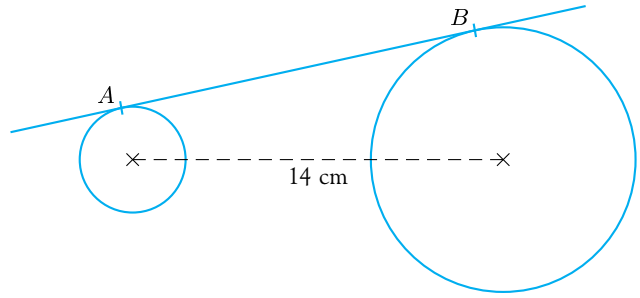
6 Egy rombusz átlóinak hossza 6,6 dm és 11,2 dm. Mekkora a rombusz kerülete?

B)

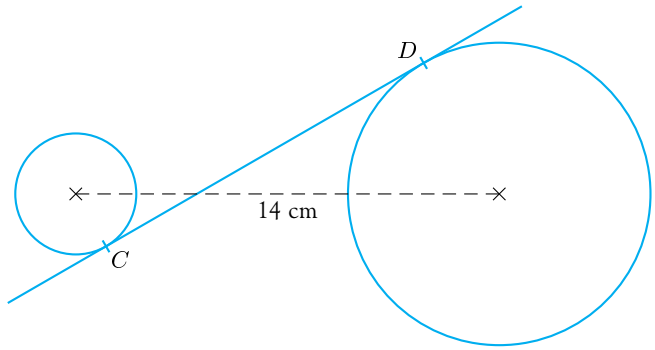
***1** Egy ablak felső része két körívből áll. Ezen körívek középpontja (K_1, K_2) az ablak 80 cm széles, vízszintes alsó részének végpontjában van. Mekkora annak a körnek a sugara (k =?), amely a két körívhez és a vízszintes alsó részhez is hozzáér?



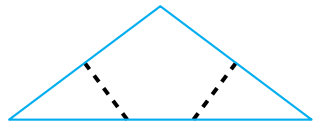
2 Két kör sugara 2 cm, illetve 5 cm. A középpontjaik távolsága 14 cm. Egy egyenes A pontban érinti az egyik és B pontban a másik kört. Írd be az adatokat az ábrába! Mekkora az AB szakasz hossza?



3 Két kör sugara 2 cm, illetve 5 cm. A középpontjaik távolsága 14 cm. Egy egyenes C pontban érinti az egyik és D pontban a másik kört. Írd be az adatokat az ábrába! Mekkora az CD szakasz hossza?



4 Egy régi tetőszerkezet 8 méter széles és 3 méter magas. A keresztmetszetén látható módon minden tetőgerendát középen egy rá merőleges gerendával biztonsági okokból alá kell támasztani. A rajzon ezeket a támasztógerendákat szaggatott vonal jelzi. Milyen hosszúak ezek a támasztógerendák?



A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Számítds ki, majd írd be a hiányzó képleteket!

Az a oldalú négyzet átlójának hossza: _____ Az a élű kocka testátlójának hossza: _____

2 Egy függőlegesen álló oszlopot négy egyenlő hosszúságú kötéllel rögzítettek. Az oszlop tetejétől induló kötelek másik végei a vízszintes talajon egy 3,5 méterszer 6 méteres téglalapot alkotnak. Ezek a rögzítési pontok az oszlop tetejétől 5 méterre vannak. Milyen magas az oszlop?

3 Számítsd ki az $a = 11{,}5$ cm élű kocka lapátlóinak és testátlóinak hosszát!

4 Egy doboz alaplapja 15 cm átlójú, a fedőlapja pedig 9 cm átlójú négyzet. A négy oldallapja olyan húrtrapéz, amelyeknek szárhossza 10 cm. Milyen magas a doboz?

5 Egy téglatest alakú doboz élei: 10 cm, 6 cm és 4 cm. Számítsd ki lapátlóinak és testátlójának hosszát!

B)

1 Egy téglalap alakú szoba egyik alsó sarkából az él mentén, vízszintesen elindult egy légy. Haladt 120 cm-t, aztán irányt váltott. Függőlegesen mászott tovább a falon 90 cm-t. Ebből a pontból, erre a falra merőlegesen átrepült a szemközti falra. Ekkor a kiindulási helytől 335 cm-re volt. Add meg a két párhuzamos fal távolságát centiméter pontossággal!

2 *a)* Számítsd ki, hogy a kocka átlósíkja milyen területű síkidomban metszi a kockát!

b) Hány átlósíkja van egy kockának?

(Átlósíknak nevezzük azokat a síkokat, amelyekre illeszkedik a kocka négy csúcsa, de lapja nem.)

3 Egy téglatest testátlója 32 cm. Éleinek aránya: 3 : 4 : 7. Mekkorák az élei?

Pitagoraszi számhármasok

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Gyufaszálakból téglalapokat raktunk ki. Melyiknek tudjuk az átlóját is kirakni egész szálakból?

a) 4-szer 12-es; *b)* 5-ször 12-es; *c)* 4-szer 11-es?

2 Egy derékszögű háromszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám. A rövidebb befogó kétszeresénél 1-gyel kisebb a másik befogó, 1-gyel nagyobb az átfogó.

a) Mekkorák a háromszög oldalai? *b)* Mekkora a háromszög kerülete? *c)* Mekkora a háromszög területe?

3 Melyik derékszögű háromszög pitagoraszi? (Az a, b befogót, a c átfogót jelent.)

a) $a = 65$, $b = 72$; *b)* $a = 39$, $c = 89$.

4 A koordináta-rendszerben rajzolj egy origó középpontú, 5 egység sugarú kört! Hány rácspont illeszkedik a körvonalra?

B)

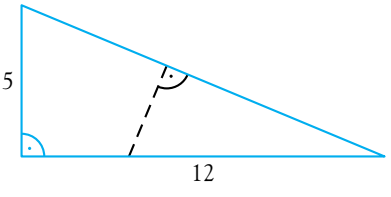
1 Rakj ki 12 gyufaszálból olyan

a) háromszöget, amelynek 6 a területe; *b)* ötszöget, amelynek 5 a területe;

c) ötszöget, amelynek 4 a területe; *d)* hétszöget, amelynek 3 a területe!

2 Egy háromszög oldalai 13 cm, 14 cm és 15 cm hosszúak. Hány olyan magassága van a háromszögnek, amelynek a hossza centiméterben mérve szintén egész szám?

3 Mutasd meg, hogy az ábrán láthatón derékszögű háromszögből az átfogójára merőleges vágással nem tudunk levágni pitagoraszi háromszöget!

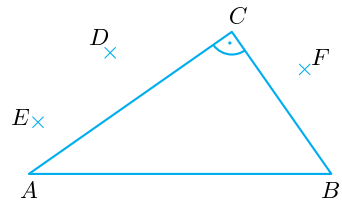


Thalész-tétel

A)

1 Rajzolj egy AB szakaszt! Szerkeszd meg az AB szakasz Thalész-körét!

2 Szögmérő nélkül, csak szerkesztéssel mondd meg, hogy az ábrán látható ADB, AEB és AFB szögek közül melyik nagyobb, melyik kisebb, mint derékszög!



3 Add meg egy 2 cm sugarú körhöz az összes olyan pontot, amelyből a körhöz húzott két érintő egymásra merőleges!

4 Az $ABCD$ deltoid minden csúcsa illeszkedik egy körre, és az AC szimmetriatengelye átmegy a kör O középpontján. Igazold, hogy

a) a deltoidnak biztosan van két derékszöge;

b) a deltoid BD átlója nem lehet hosszabb az AC átlónál!

5 Sík terepen egy magányosan álló bokor és egy gémeskút távolsága 250 méter. Az őket összekötő egyenessel párhuzamosan, attól 67,2 méterre halad egy út. Egy kicsinyített ábrán jelöld annak a turistának a helyét, aki a bokor és a gémeskút közötti szakaszt derékszögben látja!

B)

1 Igazold, hogy az $A(-2;-1)$, $B(6;5)$ és $C(2;7)$ pontok egy derékszögű háromszög csúcsait adják!

2 Add meg egy 2 cm sugarú körhöz az összes olyan pontot, amelyből a körhöz húzott két érintő egymással $60°$-os szögben látszik!

3 Tudjuk egy háromszögről, hogy az 5 cm hosszúságú oldala a tőle 2 cm-re lévő súlypontjából derékszögben látszik. Szerkeszd meg a háromszöget!

4 Sík terepen egy magányosan álló bokor és egy gémeskút távolsága 250 méter. Az őket összekötő egyenessel párhuzamosan, attól 67,2 méterre halad egy út. Milyen messze lehet a gémeskúttól az a turista, aki a bokor és a gémeskút közötti szakaszt derékszögben látja?

6. A számológép

Mit tud a számológép?

A)

1 Végezd el a következő műveleteket! Használhatsz számológépet! Húzd alá, amelyeket géppel számoltál ki!

a) $5 + 6$ ____; $2 \cdot 5$ ____; $1 + 1$ ____; *b)* $6 + 4$ ____; $12 \cdot 2$ ____; $5 \cdot 5$ ____;

c) $7 \cdot 8$ ____; $11 \cdot 6$ ____; $45 \cdot 2$ ____; *d)* $11 \cdot 11$ ____; $3 \cdot 17$ ____; $12 \cdot 13$ ____;

e) $45 - 25$ ____; $41 - 28$ ____; $40 - 28$ ____; *f)* $36 : 6$ ____; $150 : 30$ ____; $40 : 6$ ____;

g) $51 : 17$ ____; $126 : 6$ ____; $250 : 25$ ____.

2 Végezd el a következő műveletsorokat számológép segítségével!

a) $4{,}7 + (-2{,}3) =$ ____; *b)* $17{,}4 - (-7{,}5) =$ ____; *c)* $6{,}4 - 9{,}15 =$ ____;

d) $2{,}9 \cdot 4{,}35 =$ ____; *e)* $(-4{,}7) \cdot 5{,}6 =$ ____; *f)* $(-10{,}2) \cdot (-0{,}5) =$ ____;

g) $45{,}5 : 5{,}16 =$ ____; *h)* $5{,}7 : (-4{,}3) =$ ____; *i)* $(-8{,}5) : (-3{,}6) =$ ____;

j) $5{,}4 \cdot (-2{,}9) =$ ____; *k)* $(-5{,}9) : 0{,}9 =$ ____; *l)* $11{,}1 - 1{,}11 =$ ____.

B)

1 Végezd el a műveleteket! Használj számológépet!

a) $(5 + 7) : 3$; $5 : 3 + 7 : 3$; *b)* $(45 + 11) : 7$; $45 : 7 + 11 : 7$;

c) $(105 + 34) : 13$; $105 : 13 + 34 : 14$; *d)* $(55 + 114) : 14$; $55 : 14 + 114 : 14$.

2 Végezd el a következő műveletsorokat számológép segítségével! Ha szükséges, előbb végezz el néhány algebrai átalakítást!

a) $4{,}5 - (2{,}3 : 0{,}6 - 7{,}2)$;

b) $9{,}2 \cdot (5{,}3 - 6{,}2 : 13{,}1)$;

c) $51{,}2 \cdot (45 - 1{,}1 \cdot 1{,}28 : 5)$;

d) $4{,}16 \cdot 7{,}52 + 4{,}16 \cdot (13{,}5 - 11{,}02)$;

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} : \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} : \frac{5}{2}$;

f) $\left(\frac{2}{5} + (-5{,}2)\right) - 4{,}3 \cdot \left(5{,}\dot{6} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right)$.

Négyzetgyök

A)

1 Határozd meg a következő négyzetgyököket 4 tizedesjegy pontossággal!

a) $\sqrt{11}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; *b)* $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$;

c) $\sqrt{6}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{16}$; *d)* $\sqrt{3{,}5}$; $\sqrt{5{,}2}$; $\sqrt{6{,}1}$;

e) $\sqrt{4{,}2}$; $\sqrt{6{,}5}$; $\sqrt{1{,}3}$; *f)* $\sqrt{9{,}5}$; $\sqrt{5{,}5}$; $\sqrt{8{,}8}$.

2 Írd fel a számokat egy 1 és 100 közé eső szám, valamint 10 egy **páros hatványa** szorzataként, például így: $458 = 4{,}58 \cdot 10^2$! Ezután ennek segítségével határozd meg a számok négyzetgyökét!

$a = 120 =$ _____; $\sqrt{a} =$ _____; $b = 0{,}5 =$ _____; $\sqrt{b} =$ _____;

$c = 400 =$ _____; $\sqrt{c} =$ _____; $d = 110 =$ _____; $\sqrt{d} =$ _____;

$e = 1000 =$ _____; $\sqrt{e} =$ _____; $f = 0{,}1 =$ _____; $\sqrt{f} =$ _____;

$g = 0{,}01 =$ _____; $\sqrt{g} =$ _____; $h = 150 =$ _____; $\sqrt{h} =$ _____;

$i = 1500 =$ _____; $\sqrt{i} =$ _____; $j = 15\,000 =$ _____; $\sqrt{j} =$ _____.

3 Határozd meg a négyzetgyököket! Használj számológépet! Füzetbe dolgozz!

a) $\sqrt{11{,}4}$; $\sqrt{5{,}15}$; $\sqrt{10{,}01}$; *b)* $\sqrt{3{,}05}$; $\sqrt{20{,}52}$; $\sqrt{17{,}55}$;

c) $\sqrt{60{,}6}$; $\sqrt{13{,}25}$; $\sqrt{16{,}5}$; *d)* $\sqrt{23{,}5}$; $\sqrt{51{,}2}$; $\sqrt{6{,}15}$;

e) $\sqrt{4{,}25}$; $\sqrt{6{,}25}$; $\sqrt{11{,}3}$; *f)* $\sqrt{19{,}5}$; $\sqrt{29{,}5}$; $\sqrt{18{,}8}$.

B)

1 Számítsd ki számológép segítségével a következő négyzetgyököket! Számolás előtt végezz becslést! Ha a te géped nem tud négyzetgyököt vonni, akkor keresd a számok négyzetgyökét szorzással! A füzetedben dolgozz!

a) $\sqrt{10}$; *b)* $\sqrt{20}$; *c)* $\sqrt{8}$; *d)* $\sqrt{9}$; *e)* $\sqrt{0{,}4}$; *f)* $\sqrt{0{,}05}$;

g) $\sqrt{35}$; *h)* $\sqrt{85}$; *i)* $\sqrt{110}$.

2 Számítsd ki számológép segítségével a következő négyzetgyököket! Mindig ellenőrizd a kapott eredményt! A füzetedben dolgozz!

a) $\sqrt{2+2}$; $\sqrt{(2+2)}$; $\sqrt{2}+\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{3+6}$; $\sqrt{(3+6)}$; $\sqrt{3}+\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{5+11}$; $\sqrt{(5+11)}$; $\sqrt{5}+\sqrt{11}$; *d)* $\sqrt{9+16}$; $\sqrt{(9+16)}$; $\sqrt{9}+\sqrt{16}$;

e) $\sqrt{36+64}$; $\sqrt{(36+64)}$; $\sqrt{36}+\sqrt{64}$; *f)* $\sqrt{25+25}$; $\sqrt{(25+25)}$; $\sqrt{25}+\sqrt{25}$.

3 Számítsd ki számológép segítségével a következő négyzetgyököket! Mindig ellenőrizd a kapott eredményt! A füzetedben dolgozz!

a) $\sqrt{1 \cdot 1}$; $\sqrt{(1 \cdot 1)}$; $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}$; *b)* $\sqrt{6 \cdot 6}$; $\sqrt{(6 \cdot 6)}$; $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$;

c) $\sqrt{4 \cdot 9}$; $\sqrt{(4 \cdot 9)}$; $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$; *d)* $\sqrt{12 \cdot 3}$; $\sqrt{(12 \cdot 3)}$; $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$;

e) $\sqrt{20 \cdot 5}$; $\sqrt{(20 \cdot 5)}$; $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; *f)* $\sqrt{45 \cdot 20}$; $\sqrt{(45 \cdot 20)}$; $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$.

4 A derékszögű háromszög két befogóját jelölje p és r! Az átfogót jelölje t. Számítsd ki (számológép segítségével) a táblázat hiányzó adatait!

p	1	3	5	10	16	20		15
r	1		12		15		40	20
t		5		15		40	50	

Milyen összefüggést (tételt) alkalmaztál a megoldáshoz? _____

7. Függvények

Lineáris függvények

Áttekintés

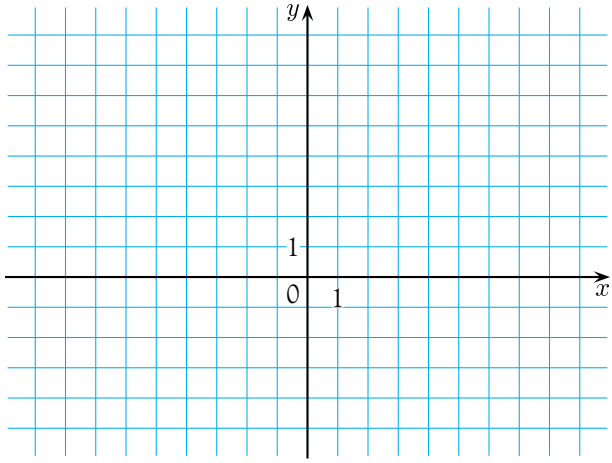
A vizsgált függvényeket minden esetben a tanult számok halmazán, azaz a racionális számhalmazon értelmezzük.

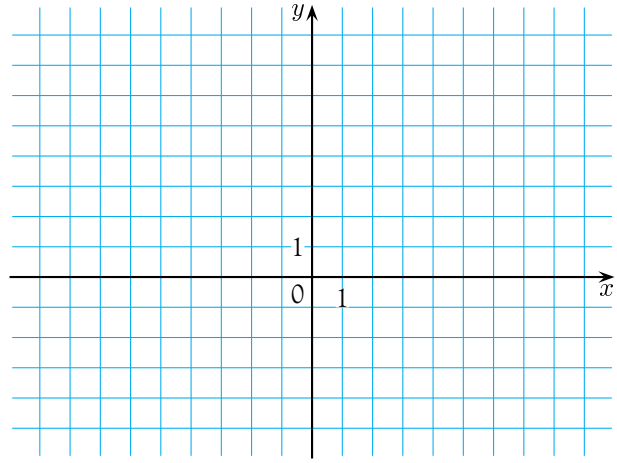
A)

1 Készíts táblázatot, majd ennek segítségével ábrázold a következő függvényeket! Rajzold át pirossal a lineárisakat!

x									
$a\colon x \mapsto \frac{3}{x}$									

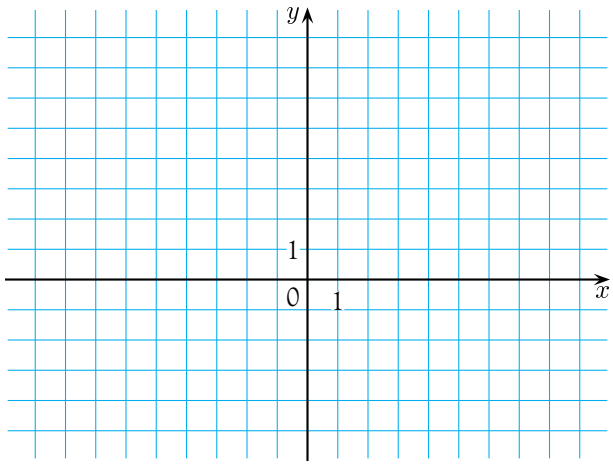
x			
$b\colon x \mapsto 3$			

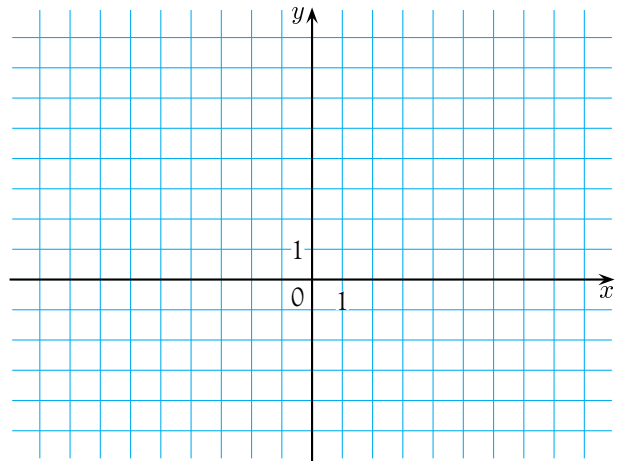




x						
$c\colon x \mapsto 3 + x$						

x						
$d\colon x \mapsto \lvert x + 3 \rvert$						

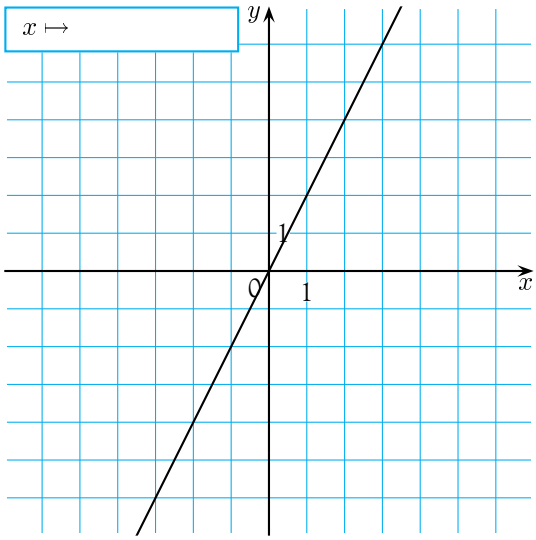




2 Állapítsd meg az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályát! Ha szükséges, készíts a grafikon alapján táblázatot!

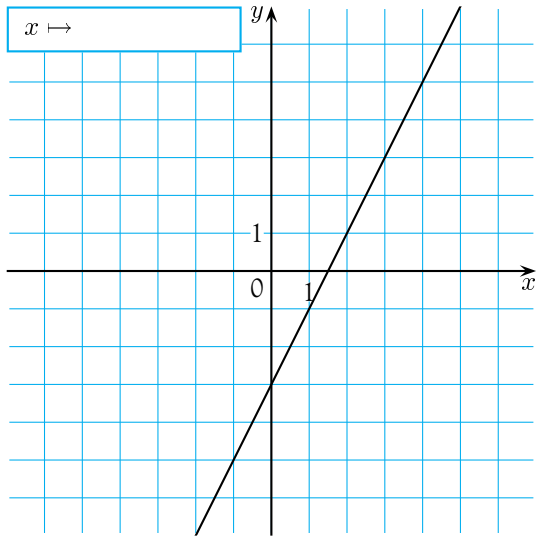
a)

x								
y								



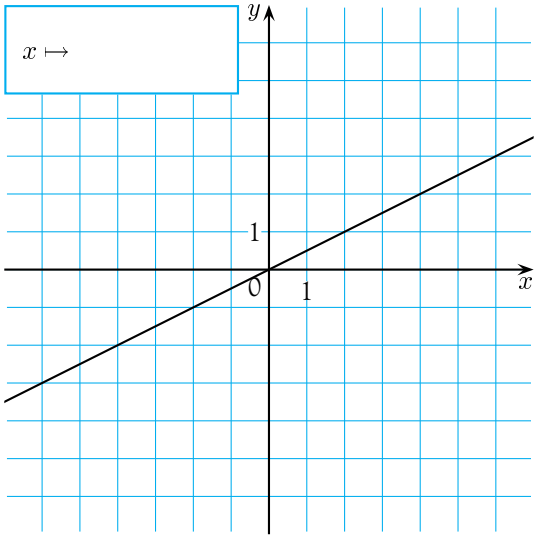
b)

x								
y								



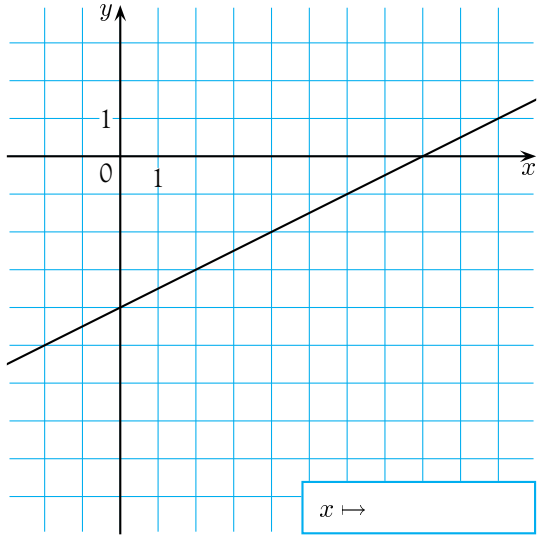
c)

x								
y								



d)

x								
y								



3 Keresd meg a pontok hiányzó koordinátáit, ha tudjuk, hogy a pont illeszkedik a függvény grafikonjára!

a) $x \mapsto 4 - x$: $A(-1;____)$; $B(5;____)$; $C(____;7)$; $D(____;0)$;

b) $x \mapsto x + 0{,}5$: $A(-1;____)$; $B(2{,}5;____)$; $C\left(____;\frac{1}{2}\right)$; $D(____;0)$;

c) $x \mapsto \frac{x}{4} + 1$: $A(-12;____)$; $B(0;____)$; $C(____;4)$; $D(____;0)$.

4 Adj meg három-három olyan pontot, amelyek biztosan nincsenek a függvény grafikonján!

a) $x \mapsto 3{,}5x$: $A(____;____)$; $B(____;____)$; $C(____;____)$;

b) $x \mapsto 5$: $A(____;____)$; $B(____;____)$; $C(____;____)$;

c) $x \mapsto -x - 6$: $A(____;____)$; $B(____;____)$; $C(____;____)$.

B)

1 Állapítsd meg, hol metszi a függvény grafikonja a tengelyeket!

a) $x \mapsto x - 6$ az x tengelyt: _____, az y tengelyt: _____ pontban metszi.

b) $x \mapsto 4x - 6$ az x tengelyt: _____, az y tengelyt: _____ pontban metszi.

c) $x \mapsto 3 - x$ az x tengelyt: _____, az y tengelyt: _____ pontban metszi.

d) $x \mapsto 8 - 2x$ az x tengelyt: _____, az y tengelyt: _____ pontban metszi.

2 Írj a b, c, d betűk helyére megfelelő számokat úgy, hogy a függvények az y tengelyt ugyanott messék!

$x \mapsto x + 8$; $x \mapsto 3x + b$; $x \mapsto c - x$; $x \mapsto \frac{2}{7}x + d$.

$b = \square$; $c = \square$; $d = \square$.

Lineáris függvények meredeksége I.

A)

1 Mit mutat meg a lineáris függvény meredeksége? Egészítsd ki az állításokat!

Például: Az $x \mapsto 7x + 2$ függvény meredeksége $\boxed{7}$, ezért az x érték 1 egységgel való növekedésekor a függvény értéke $\boxed{7}$ egységgel $\boxed{\text{nő}}$.

a) Az $x \mapsto x - 5$ függvény meredeksége $\square$, ezért az x érték 1 egységgel való növekedésekor a függvény értéke $\square$ egységgel $\square$.

b) Az $x \mapsto 2 - 3x$ függvény meredeksége $\square$, ezért az x érték 1 egységgel való növekedésekor a függvény értéke $\square$ egységgel $\square$.

2 Állapítsd meg a függvények meredekségét!

a) $x \mapsto x$; $m = \square$;

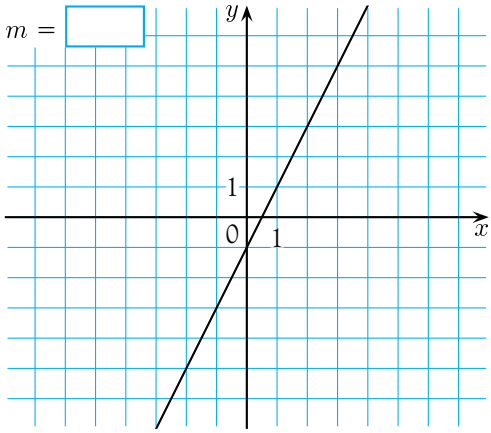
b) $x \mapsto 5x$; $m = \square$;

c) $x \mapsto 3x - 4$; $m = \square$;

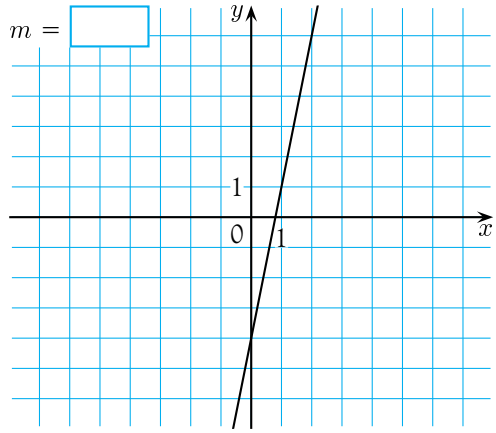
d) $x \mapsto -4x + 3$; $m = \square$.

3 Az alábbi grafikonokon lineáris függvényeket ábrázoltunk. Állapítsd meg a függvények meredekségét!

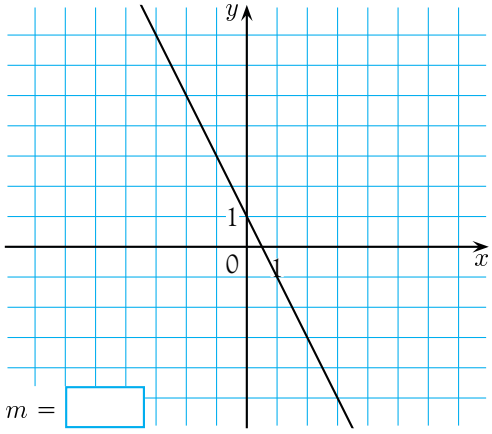
a) $m =$ ☐



b) $m =$ ☐

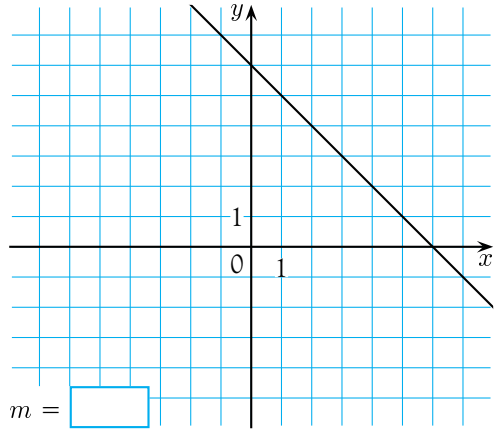


c)



$m =$ ☐

d)



$m =$ ☐

B)

1 Algebrai átalakítások után állapítsd meg a függvények meredekségét! Hol metszik a grafikonok az y tengelyt? Ábrázold ezek segítségével a függvényeket!

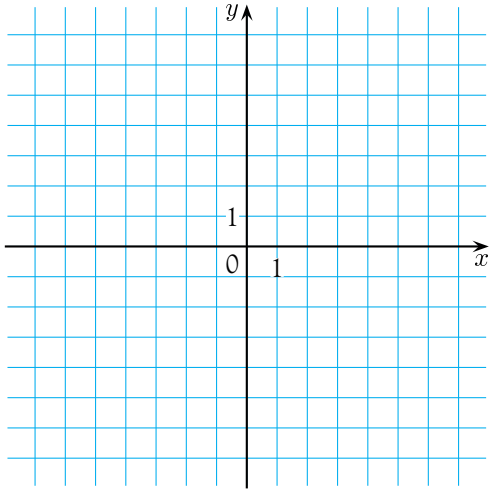
a) $x \mapsto 2(x - 1) - 3(x + 2) =$ _____.

Meredeksége: _____, y tengellyel való metszéspontja: _____.

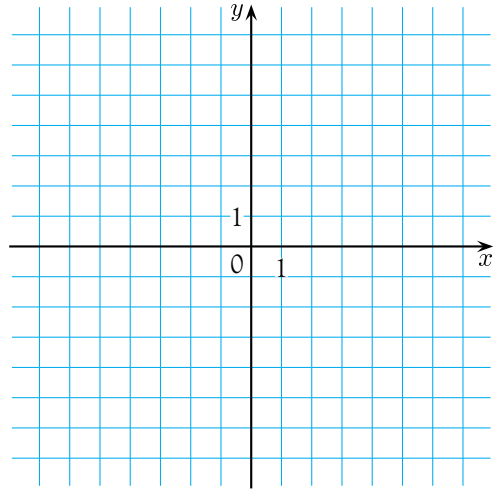
b) $x \mapsto 5 - (x + 8) + 3(x + 2) =$ _____.

Meredeksége: _____, y tengellyel való metszéspontja: _____.

a)



b)



2 Két-két pontjával adtuk meg a lineáris függvényeket. Ábrázold a függvényeket, és állapítsd meg a függvények meredekségét!

a) $A(3;3)$; $B(4;5)$; $m =$ ☐;

b) $A(1;2)$; $B(3;8)$; $m =$ ☐;

c) $A(-5;2)$; $B(-1;-2)$; $m =$ ☐.

Lineáris függvények meredeksége II.

A)

1 Mit mutat meg a lineáris függvény meredeksége? Egészítsd ki az állításokat!

a) Az $x \mapsto \frac{1}{3}x - 3$ függvény meredeksége ☐, ezért az x érték 1 egységgel való növekedésekor a függvény értéke ☐ egységgel ☐. Másként fogalmazva:

Az x érték 3 egységgel való növekedésekor a függvény értéke ☐ egységgel ☐.

b) Az $x \mapsto \frac{4}{3}x - 3$ függvény meredeksége ☐, ezért az x érték 1 egységgel való növekedésekor a függvény értéke ☐ egységgel ☐. Másként fogalmazva:

Az x érték 3 egységgel való növekedésekor a függvény értéke ☐ egységgel ☐.

c) Az $x \mapsto -\frac{5}{2}x - 3$ függvény meredeksége ☐, ezért az x érték 1 egységgel való növekedésekor a függvény értéke ☐ egységgel ☐. Másként fogalmazva:

Az x érték ☐ egységgel való növekedésekor a függvény értéke ☐ egységgel ☐.

2 Állapítsd meg a függvények meredekségét!

a) $x \mapsto \frac{5}{7}x + 1$; $m =$ ☐;

b) $x \mapsto 6 + 8x$; $m =$ ☐;

c) $x \mapsto 4 - x$; $m =$ ☐;

d) $x \mapsto \frac{2 - x}{3}$; $m =$ ☐.

3 Két-két pontjával adtuk meg a lineáris függvényeket. Állapítsd meg a függvények meredekségét!

a) $A(-3;4)$; $B(0;0)$; $m =$ ☐;

b) $A(0;2)$; $B(2;5)$; $m =$ ☐.

4 Az alábbi lineáris függvényeknek ismerjük egy-egy pontját, valamint a meredekségüket. Ábrázold a függvényeket a füzetedben! Adj meg két újabb pontot!

a) $A(2;3)$: $m = \frac{1}{3}$; $B_1($_____;_____$)$; $B_2($_____;_____$)$;

b) $A(-2;3)$: $m = \frac{1}{4}$; $B_1($_____;_____$)$; $B_2($_____;_____$)$.

B)

1 Algebrai átalakítások után állapítsd meg a függvények meredekségét! Hol metszik a grafikonok az y tengelyt? Ábrázold ezek segítségével a függvényeket!

a) $x \mapsto \frac{x+1}{2} + \frac{2x-4}{4} =$ _____.

Meredeksége: _____, y tengellyel való metszéspontja: _____

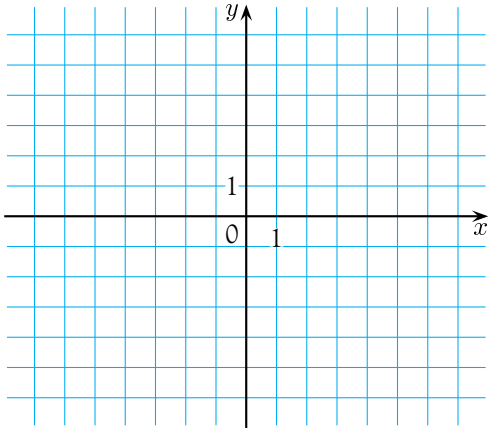
b) $x \mapsto \frac{x-6}{3} + \frac{4-x}{2} =$ _____.

Meredeksége: _____, y tengellyel való metszéspontja: _____.

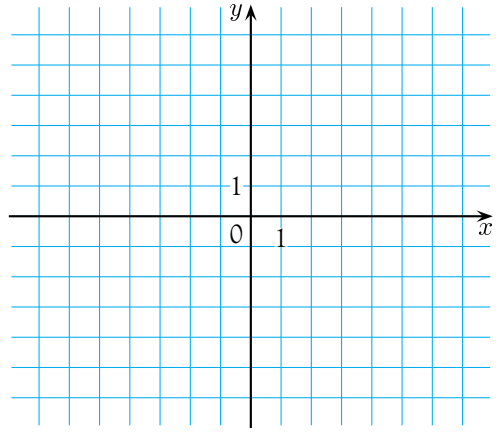
c) $x \mapsto (x+1)^2 - (x+2)^2 =$ _____.

Meredeksége: _____, y tengellyel való metszéspontja: _____.

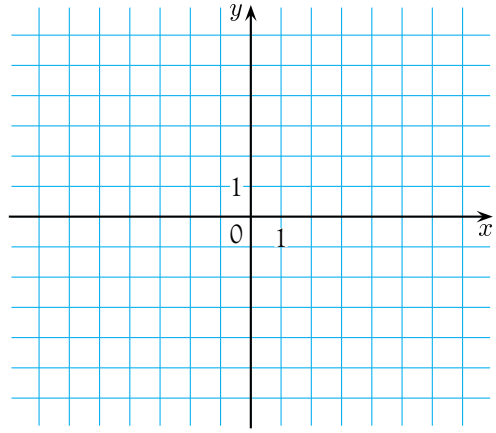
a)



b)



c)

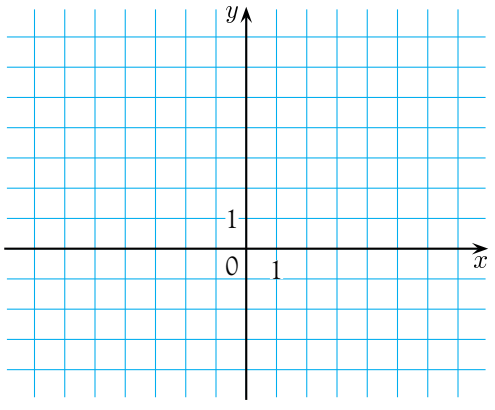


***2** Ábrázold a következő, intervallumonként megadott függvényeket!

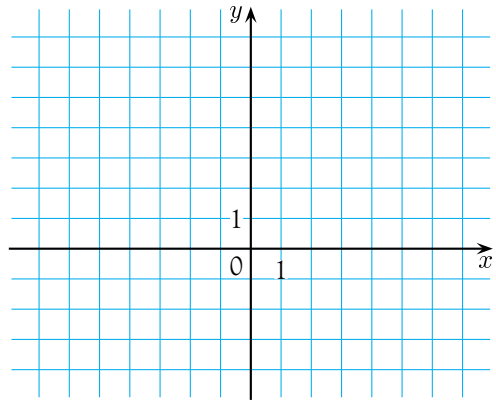
a) $x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 2, & \text{ha } x \le 4, \\ 2x - 7, & \text{ha } x \ge 4. \end{cases}$

b) $x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{3}x + 2, & \text{ha } x \le -3, \\ 3, & \text{ha } -3 \le x \le 3, \\ \frac{1}{3}x + 2, & \text{ha } x \ge 3. \end{cases}$

a)



b)



Elsőfokú egyenletek grafikus megoldása

A)

1 Oldd meg grafikusan a $-2x + 3 = x$ egyenletet! Ábrázold a függvényeket közös koordináta-rendszerben!

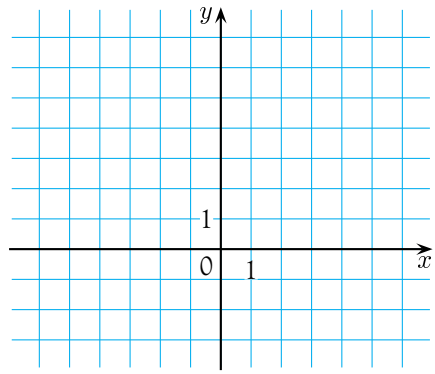
$x \mapsto -2x + 3$; $\quad x \mapsto x$.

Olvasd le a metszéspont első koordinátáját, $x =$ _____,

majd a metszéspont második koordinátáját! $y =$ _____.

Tehát a $-2x + 3 = x$ egyenlet megoldása: $x =$ _____.

Ekkor az egyenlet mindkét oldalának helyettesítési értéke: _____.



2 Oldd meg grafikusan a $\left(-\frac{4}{3}\right)x + 2 = 6$ egyenletet! Ábrázold a függvényeket közös koordináta-rendszerben!

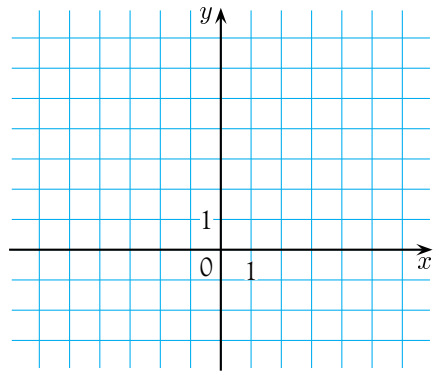
$x \mapsto -\frac{4}{3}x + 2$; $\quad x \mapsto 6$.

A grafikonról leolvasva a metszéspont első koordinátája: $x =$ _____,

a metszéspont második koordinátája: $y =$ _____.

Tehát a $-\frac{4}{3}x + 2 = 6$ egyenlet megoldása: $x =$ _____.

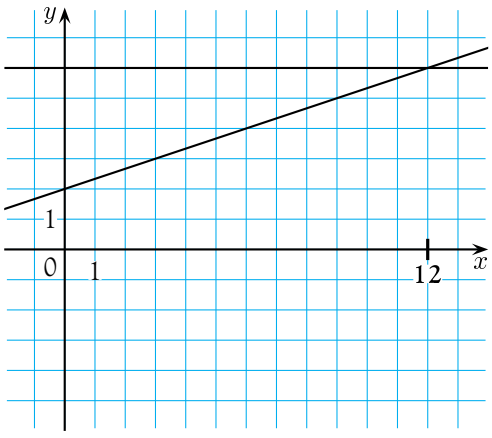
Ekkor az egyenlet mindkét oldalának helyettesítési értéke: _____.



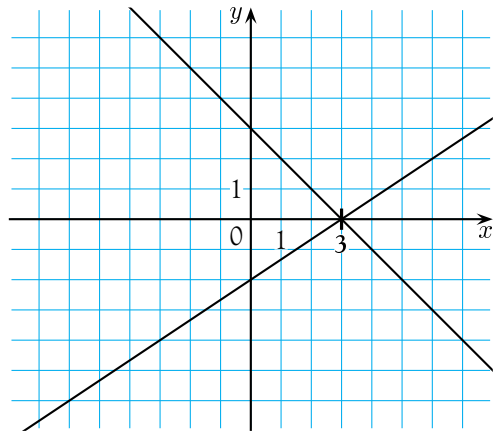
B)

1 Írd fel azt az egyenletet, amelynek grafikus megoldását láthatod az ábrán!

a)



b)



2 Oldd meg az egyenleteket a grafikus módszer segítségével! Dolgozz a füzetedben! Ellenőrizd a megoldásodat a mérlegelv segítségével!

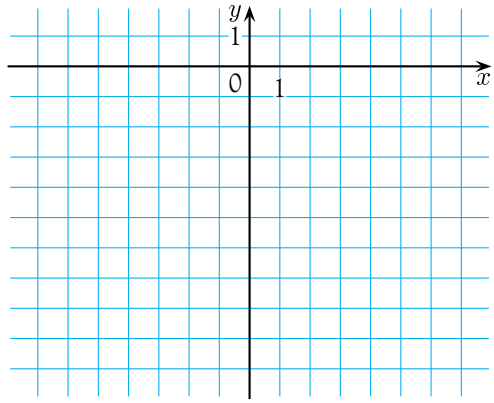
a) $-3x + 3 = 2x - 2$;

b) $\frac{3}{4}x + 2 = 3x - 7$.

Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása

A)

1 Ábrázold az $x \mapsto \frac{1}{2}x - 4$ függvényt!



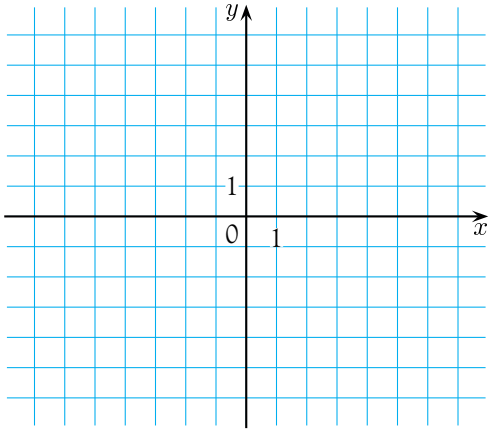
Színezd kékkel a megadott pontok közül azokat, amelyek a függvény grafikonja alatt, pirossal azokat, amelyek a grafikon felett, zölddel azokat, amelyek a grafikonon vannak!

$A(0; 1)$; $B(0; -4)$; $C(0; -6)$;

$D(4; 0)$; $E(-2; -6)$; $F(-2; -10)$.

2 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

a) $f: x \mapsto -x - 2$, $g: x \mapsto -3$.

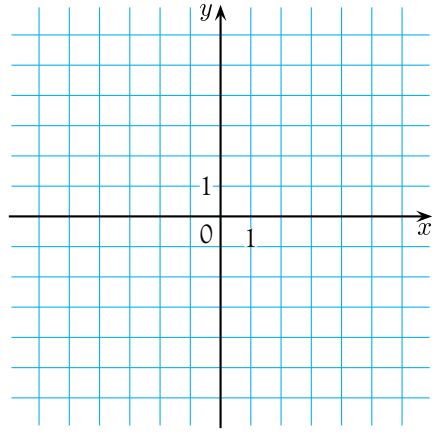


Színezd pirossal az x tengely azon pontjait, amelyek esetén az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja alatt halad!

Az $-x - 2 < -3$ egyenlőtlenség megoldása:

_____.

b) $f: x \mapsto x + 1$, $g: x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$.



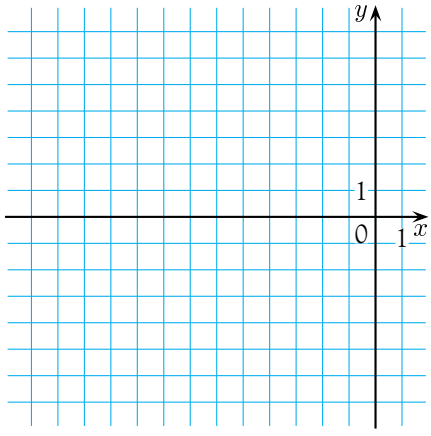
Színezd pirossal az x tengely azon pontjait, amelyek esetén az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja felett halad!

Az $x+1 > \frac{2}{3}x+2$ egyenlőtlenség megoldása:

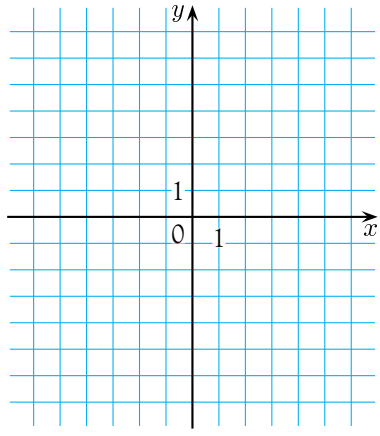
_____.

3 Oldd meg az egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel!

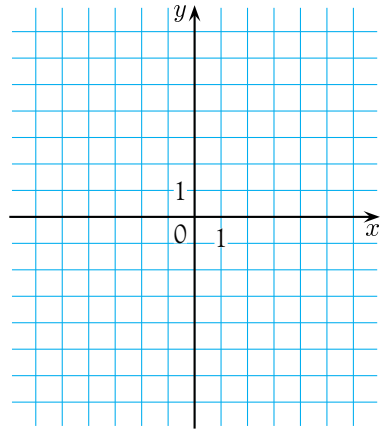
a) $\frac{x + 4}{2} \leq -4$;



b) $5 \geq -3x + 2$;



c) $\frac{2}{3}x + 2 \leq 3x - 5$.



B)

1 Milyen számot írhatunk a C helyére, hogy a $-\frac{2}{5}x + 2 < C$ egyenlőtlenség pontosan a -5-nél nagyobb számokra legyen igaz?

Segít, ha ábrázolod az $x \mapsto -\frac{2}{5}x + 2$ függvényt a füzetedben.

Gyakorlati alkalmazások

A)

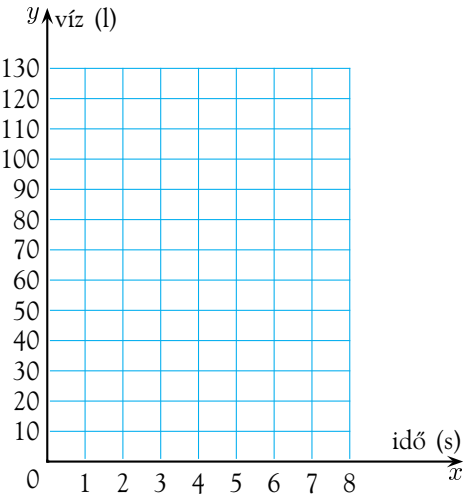
1 Egy tartályban 10 liter víz van. Egy csapból másodpercenként 15 liter vizet engednek bele. Készíts értéktáblázatot!

Az eltelt idő másodpercben (x)	1	2	3	4	5
A víz térfogata a tartályban literben (y)					

Ábrázold koordináta-rendszerben a tartályban levő víz térfogatát az eltelt idő függvényében!

Add meg a függvény hozzárendelési szabályát! $x \mapsto$ _____

Olvasd le a grafikonról, mennyi idő múlva telik meg a tartály, ha a térfogata 130 liter! _____



2 Egy téglalap egyik oldala 5 cm. Írd fel a téglalap kerületének változását a másik oldal változásának függvényében!

Készíts értéktáblázatot!

A változó oldal hossza cm-ben	1	2	3	4	5
A kerület hossza cm-ben					

Ábrázold a hozzárendelést koordináta-rendszerben!

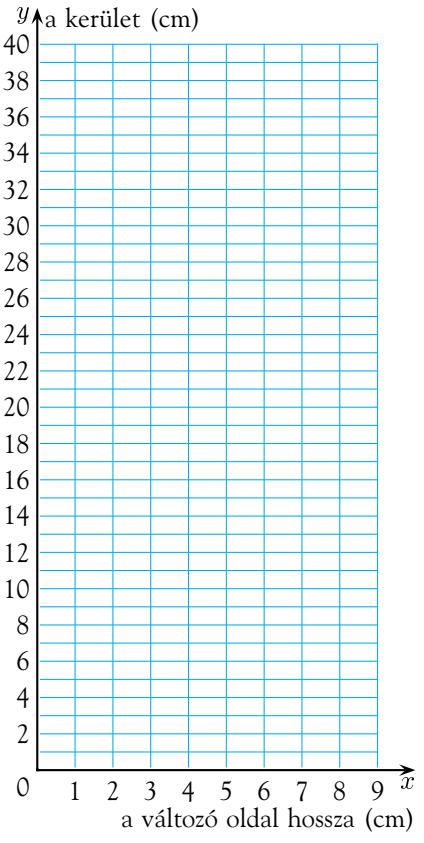
Add meg a függvény hozzárendelési szabályát! $x \mapsto$ _____

Mikor lesz a téglalap kerülete 40 cm? _____

_____

_____

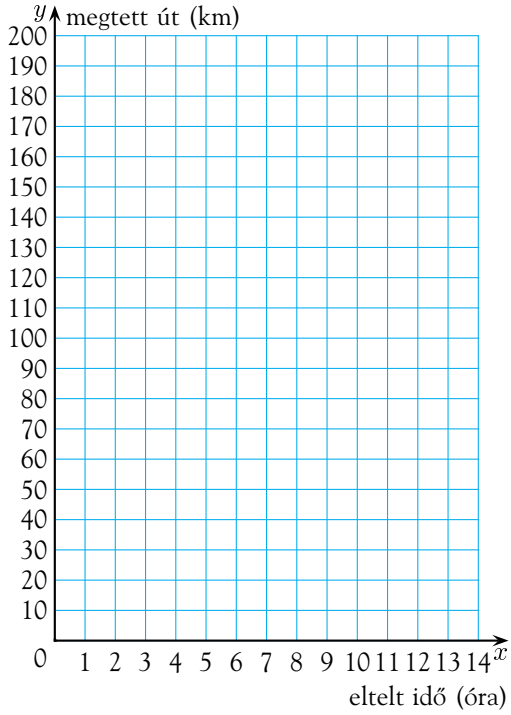
_____



B)

1 Az országút mentén levő A és B városok távolsága 200 km. 8 órakor elindul A-ból B felé egy kerékpáros 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. 9 órakor B-ből A felé egy versenykerékpáros 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel.

Ábrázold a két kerékpáros mozgását az út-idő grafikonon!



a) Írd fel az A-ból induló kerékpáros által megtett utat az eltelt idő függvényében! Jelöld x-szel az eltelt időt!

$x \mapsto$ _____.

b) Írd fel a B-ből induló kerékpáros által megtett utat az eltelt idő függvényében! Jelöld x-szel az eltelt időt!

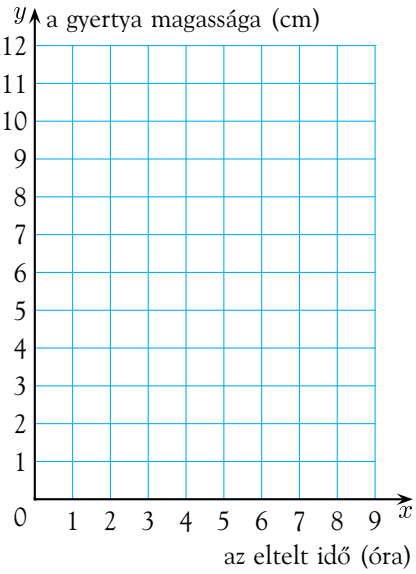
$x \mapsto$ _____.

c) Milyen távol lesz a B-ből induló kerékpáros az A várostól 1 óra múlva; 2 óra múlva; x óra múlva?

_____.

d) Mikor találkoznak a kerékpárosok? _____

2 Egy 12 cm magas gyertya 9 óra alatt ég el. Ábrázold a gyertya magasságát az eltelt idő függvényében!



a) Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

$x \mapsto$ _____.

b) Mennyi idő elteltével lesz a gyertya 3 cm magas?

_____.

Nemlineáris függvények

Az abszolútérték-függvény

A)

1 Készíts értéktáblázatot a függvényekhez, majd ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket! Az f függvényt milyen mozgatás során lehet a g; h függvénybe átvinni?

a)

x					
$f: x \mapsto \lvert x \rvert$					

b)

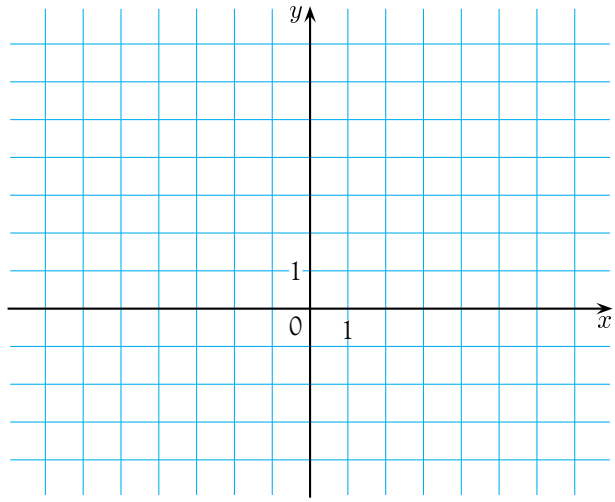
x					
$g: x \mapsto \lvert x\rvert + 2$					

A mozgatás: ☐ tengellyel párhuzamosan, ☐ egységgel ☐ irányba történt.

c)

x					
$h: x \mapsto \lvert x\rvert - 4$					

A mozgatás: ☐ tengellyel párhuzamosan, ☐ egységgel ☐ irányba történt.



2 Készíts értéktáblázatot a függvényekhez, majd ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

Az $f: x \mapsto |x|$ függvényt milyen mozgatás során lehet az n; m függvénybe átvinni?

a)

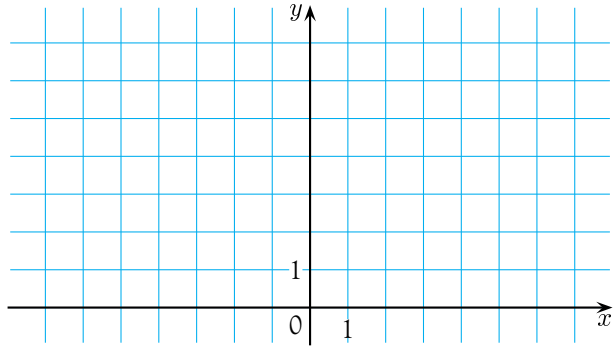
x					
$n: x \mapsto \lvert x + 7\rvert$					

A mozgatás: ☐ tengellyel párhuzamosan, ☐ egységgel ☐ irányba történt.

b)

x					
$m: x \mapsto \lvert x - 3\rvert$					

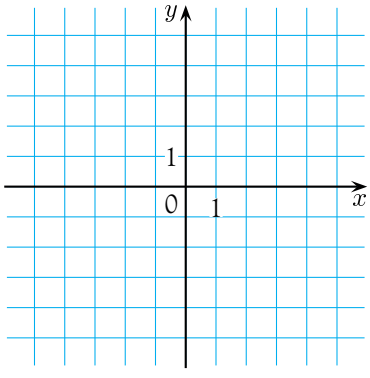
A mozgatás: ☐ tengellyel párhuzamosan, ☐ egységgel ☐ irányba történt.



B)

1 Ábrázold koordináta-rendszerben a megadott függvényeket! Az ábrázolás előtt, ha szükséges, készíts értéktáblázatot a füzetedben! Milyen x, illetve y irányú mozgatással kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonjait az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjából?

a) $f: x \mapsto |x + 3| - 2$;

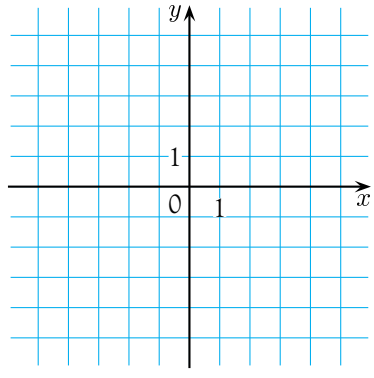


A mozgatás:

_____

_____.

b) $g: x \mapsto |x - 4| - 5$;

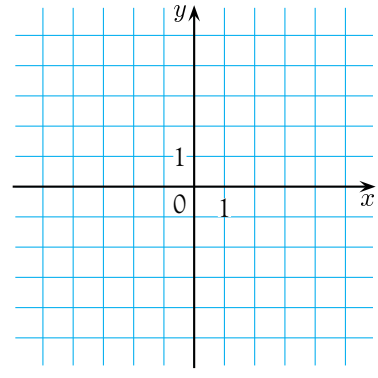


A mozgatás:

_____

_____.

c) $h: x \mapsto -|x|$.



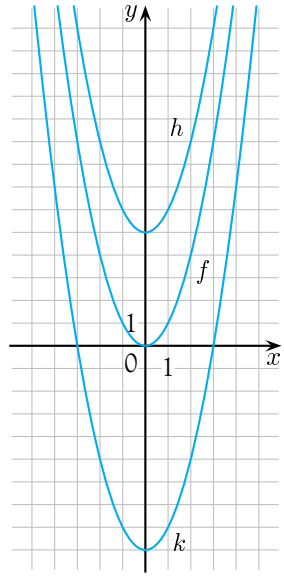
A mozgatás:

_____

_____.

A másodfokú függvény

A)



1 Készíts értéktáblázatot a grafikon segítségével, és add meg a grafikonok hozzárendelési szabályát!

a)

x									
$f: x \mapsto$ _____									

b)

x									
$h: x \mapsto$ _____									

c)

x									
$k: x \mapsto$ _____									

2 Készíts értéktáblázatot a függvényekhez, majd ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

Milyen mozgatással lehet az f függvényt a h; e függvények grafikonjába átvinni?

a)

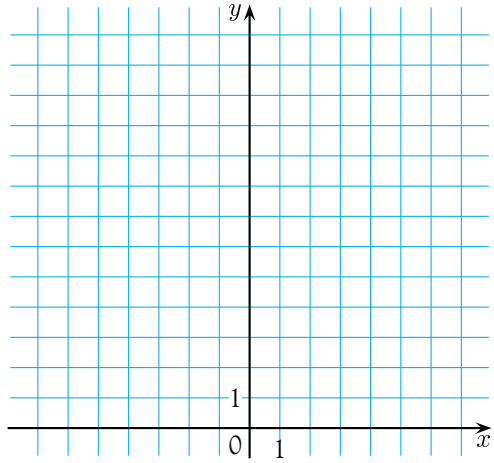
x					
$f: x \mapsto x^2$					

b)

x					
$h: x \mapsto (x+5)^2$					

c)

x					
$e: x \mapsto (x-4)^2$					



b) A mozgatás: _____;

c) A mozgatás: _____.

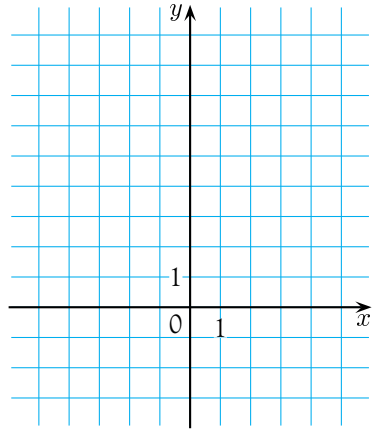
B)

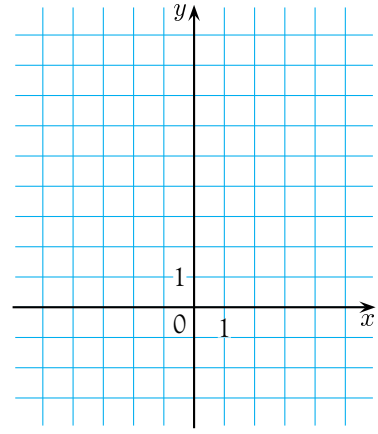
1 Ábrázold koordináta-rendszerben a megadott függvényeket! Az ábrázolás előtt, ha szükséges, készíts értéktáblázatot a füzetedben!

Milyen x tengely, illetve y tengely irányú mozgatással kaphatjuk meg az alábbi függvények grafikonjait az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából?

a) $f: x \mapsto (x-3)^2 + 4$;

b) $g: x \mapsto (x+5)^2 - 4$.





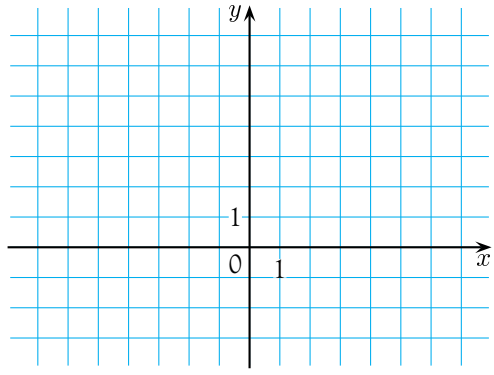
a) A mozgatás: _____; *b)* A mozgatás: _____.

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f: x \mapsto |x|$ és a $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$ függvényeket!



a) Jelöld pirossal a két függvény grafikonjának közös pontjait!

Mely számok teszik igazzá $|x| = -\frac{1}{2}x + 3$ egyenlőséget?

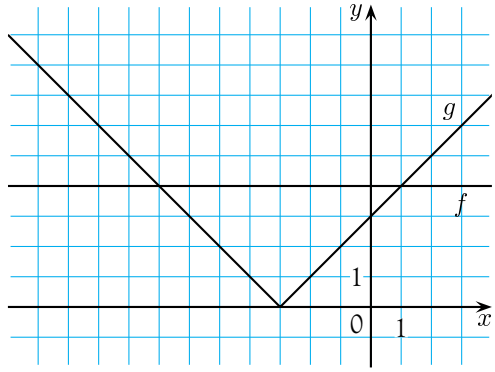
_____

b) Húzd ki kékkel a g függvény azon pontjait, amelyek az f függvény grafikonja felett vannak! Milyen x értékekhez tartoznak a színezett pontok?

_____

2 *a)* Add meg az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályát:

$f: x \mapsto$ _____; $g: x \mapsto$ _____!



b) Melyik egyenlőség megoldását olvashatjuk le a grafikonokról?

_____

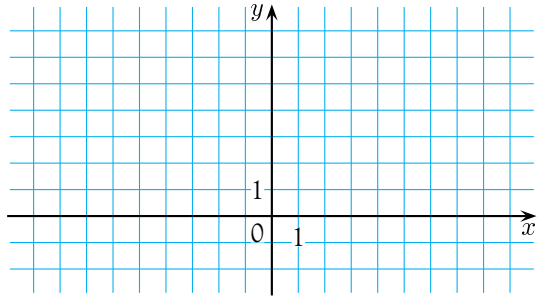
Add meg az egyenletet megoldását! _____

c) Olvass le egyenlőtlenséget és annak megoldását is a grafikonokról!

Az egyenlőtlenség: _____

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: _____.

3 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket: $f: x \mapsto -|x| + 7$; $g: x \mapsto -2$!



A $-|x| + 7 = -2$ egyenlet megoldása: _____.

Mely x értékekre teljesül a $-|x| + 7 \geq -2$ egyenlőtlenség?

Az egyenlőtlenség igaz, ha _____.

4 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket: $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto 4$!

Add meg az $x^2 = 4$ egyenlet megoldásait! _____

Mely x értékekre teljesül az $x^2 < 4$ egyenlőtlenség? Az egyenlőtlenség igaz, ha _____.

B)

1 Oldd meg grafikusan a füzetedben az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $(x - 5)^2 - 3 = 6$;

b) $(x - 5)^2 - 3 \geq 6$;

c) $-|x| + 6 = x^2 - 6$;

d) $-|x| + 6 > x^2 - 6$.

Sorozatok

A)

1 Ismételjük át a sorozatok jelöléséről tanultakat!

a) A sorozat harmadik elemét _____ jelöljük.

b) Mit jelent az a_{12}? _____

c) Az a_n jelölésben n értéke _____ szám lehet.

d) A sorozat hányadik elemét jelöltük a_{n+1}-gyel? _____

2 Döntsd el, hogy igaz vagy hamis! Írj a keretbe I betűt, ha igaz, H betűt, ha hamis!

a) A sorozat elemei lehetnek törtszámok. _____ ☐

b) A sorozat a_n jelölésében az n helyére tetszőleges számot írhatunk. _____ ☐

c) A sorozat tagjai között mindig ugyanakkora a különbség. _____ ☐

d) Nincs olyan sorozat, amelynek minden tagja negatív szám. _____ ☐

e) Az a_n értéke tetszőleges szám lehet. _____ ☐

f) A sorozat a_n jelölésében az n csak pozitív egész szám lehet. _____ ☐

g) A sorozat bármely két tagjának összehasonlításakor a nagyobb indexű tagjának értéke nagyobb. _____ ☐

3 Fogalmazd meg szöveggel a sorozat hozzárendelési szabályát, és add meg a sorozat első öt elemét!

a) $a_n = \frac{1}{2}n + 4$ _____

_____

b) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ _____

_____

4 Rendeljük hozzá a pozitív egész számokhoz a négyzetüknél eggyel kisebb számot! Add meg a sorozat első öt elemét, majd képlettel a hozzárendelési szabályt!

_____

5 Egy sorozat egymást követő eső néhány eleme: 1; 3; 5; 7; .... Adj meg képletet a sorozat egy lehetséges hozzárendelési szabályának leírásához!

_____

6 Egy számsorozat hozzárendelési szabálya $a_n = n^2 - 4$. Mennyi a sorozat kilencedik eleme? _____

B)

1 Legyenek a sorozat tagjai sorban azok a pozitív egész számok, amelyek 8-cal osztva 3 maradékot adnak!

a) Hány 100-nál kisebb tagja van a sorozatnak? _____

b) Igaz-e hogy a sorozat tagjai prímszámok? _____

c) Van-e a sorozatnak páros tagja? Válaszodat indokold! _____

d) Milyen számra végződik a sorozat hatodik, nyolcadik, századik tagja? _____

e) Add meg képlettel a képzési szabályt! _____

2 Egy sorozat első eleme 4, hozzárendelési szabálya $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 1$.

a) Sorold fel a sorozat első négy elemét! _____

b) Mely elemek lesznek a sorozatban páratlan számok? _____

3 Egy sorozatban $a_1 = -4$; $a_2 = 2$, a sorozat bármely további tagja az előző két tag átlaga (összegük fele).

a) Írd fel a sorozat első öt elemét! _____

b) Van-e a sorozatnak pozitív tagja? Válaszodat indokold! _____

_____

c) Számítsd ki a sorozat első hét elemének az összegét! _____

Mértani sorozat

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Egy sorozat tagjainak egyike sem nulla. Válaszd ki az alábbi állítások közül, hogy melyik jellemző a mértani sorozatra! Ha jellemző, akkor írj I betűt a keretbe, ha nem jellemző, akkor N betűt.

a) A sorozat bármely tagjához egy állandót hozzáadunk, akkor a következő tagot kapjuk. _____ ☐

b) A sorozat bármely elemét ugyanazzal a számmal megszorozva a sorozat következő elemét kapjuk. _____ ☐

c) A szomszédos elemek között nincs kapcsolat. _____ ☐

d) A sorozat bármely két szomszédos tagjának a különbsége állandó. _____ ☐

e) Bármely két szomszédos elemnél a nagyobb indexű tagot elosztva a kisebb indexű taggal, egy, a sorozatra jellemző állandót kapunk. _____ ☐

f) Egy mértani sorozat egyik eleme sem lehet negatív szám. _____ ☐

g) Minden eleme egész szám. _____ ☐

2 Sorold fel az alábbi mértani sorozatok első négy elemét!

a) $a_1 = 5$, és minden tag az előtte lévő tag kétszerese. _____

b) $a_1 = \frac{1}{9}$, és minden tag a megelőző tag háromszorosa. _____

c) $a_1 = 256$, és minden tag az előtte lévő tag $-\frac{1}{2}$-szerese. _____

d) $a_1 = -125$, és minden tag a megelőző tag ötödrésze. _____

3 Tudjuk egy mértani sorozat két szomszédos elemét. Határozd meg a sorozat hányadosát!

a) $a_2 = 6$; $a_1 = 3$; _____ *b)* $a_4 = 75$; $a_3 = 15$; _____

c) $a_6 = -64$; $a_5 = 128$; _____ *d)* $a_4 = \frac{4}{3}$; $a_5 = \frac{6}{3}$; _____

4 Adott egy mértani sorozat első és harmadik eleme, határozd meg a hányadost és a negyedik elemet!

a) $a_1 = 2$; $a_3 = 2$; _____ *b)* $a_1 = 1$; $a_3 = 9$; _____

c) $a_1 = -625$; $a_3 = -25$. _____

B)

1 Van-e olyan sorozat, amely számtani és mértani sorozat is egyszerre, és a sorozatnak vannak negatív értékű tagjai? Ha van ilyen, mutass rá példát! Ha nincs, indokold meg, miért nincs!

2 Egy mértani sorozat harmadik tagja $\frac{5}{7}$, hányadosa $q = 4$. Tagja-e a sorozatnak a 255?

3 Egy négyzetekből álló sorozatot vizsgálunk. A legkisebb négyzet oldala 1 cm, és minden következő négyzet oldala kétszerese az előző négyzet oldalának.

Válaszd ki, mely sorozatok alkotnak számtani, illetve mértani sorozatot!

Az egymást követő négyzetek oldalai. _____

Az egymást követő négyzetek kerületei. _____

Az egymást követő négyzetek területei. _____

4 Bankba tettünk 180 000 Ft-ot évi 9%-os kamatra. Hány forintunk lesz



a) egy év elteltével; _____

b) két év elteltével; _____

c) öt év eltelte után? _____

Írd fel azt a mértani sorozatot, amelynek az első eleme a betett pénz összege, a második eleme az első év végén a bankban lévő pénzösszeg, a harmadik eleme a következő év eltelte után a bankban lévő összeg stb.! Mekkora ennek a sorozatnak a hányadosa?

_____

_____

***5** Egy erdészet minden évben 2%-kal növeli a meglévő élőfa-állományát.

Mekkora lesz 6 év elteltével a 12 000 m^3-nyi kezdőállomány?

Segítő ötlet: Számítsd ki a faállományt az első év végén, majd a második év végén stb.! _____

_____

Hogyan írható fel az éves faállomány mértani sorozattal?

$a_1 =$ _____; $q =$ _____; $a_2 =$ _____; $a_3 =$ _____.

Hányadik eleme a sorozatnak a hatodik év végén meglévő faállomány? Írd fel képlettel! _____

8. Statisztika

Adatok ábrázolása diagramon

A)

1 A csavarokat, szegeket árusító szaküzletekben általában nem darabszámra adják a szegeket, hanem súlyra. Húsz alkalommal megszámolták, hogy 10 dkg szeg hány db-ból áll.

A kapott eredményeket táblázatba foglaltuk.

42	44	44	43	42	45	42	44	43	43	41	43	45	42	41	41	42	44	43	45

a) Készíts gyakorisági táblázatot az adatokról!

b) A táblázat alapján készíts oszlopdiagramot! A vízszintes tengelyen az adott mennyiségben lévő szegek száma, a függőleges tengelyen az adott darabszámhoz tartozó gyakorisági érték szerepeljen!

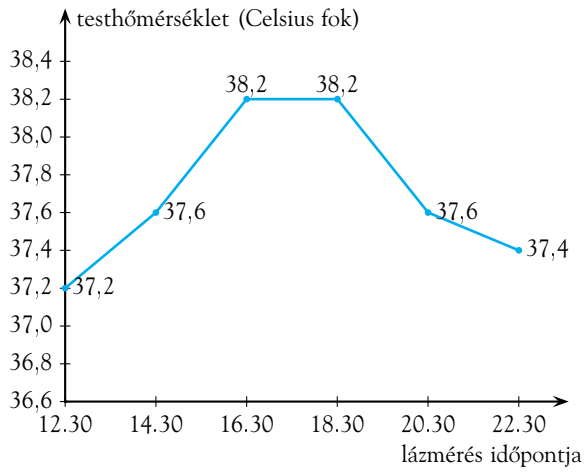
2 Egy osztály tanulói közt a testvérek száma az alábbiak szerint alakult:

Testvérek száma	0	1	2	3 vagy több
Gyakoriság	14	12	4	3

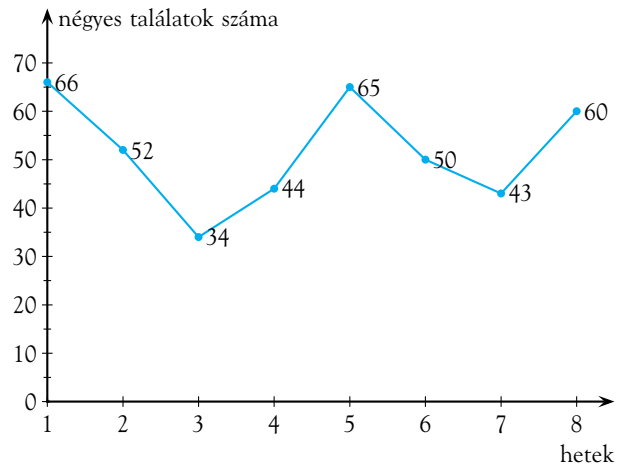
a) Készíts oszlopdiagramot az adatokról!

b) Átlagosan hány gyerek van egy családban?

3 Vizsgáld meg a két diagramot! Melyik hibás és miért?



2007. évben 8 héten keresztül az ötös lottón négyes találatot elért nyertesek száma



4 A Borsodi Liga labdarúgó-bajnokság egyik évadjának őszi idényéből az első 4 forduló eredményeit látod az alábbi táblázatban. A táblázat tanulmányozása után válaszolj a kérdésekre!

Forduló	Meccs időpontja	1. csapat	2. csapat	Eredmény	Hány gól született?
1	2005. 07. 30	PMFC	Kaposvári Rákóczi FC	4 – 1	
1	2005. 07. 30.	Vasas	Győri ETO	1 – 4	
1	2005. 07. 30.	DVTK	Újpest FC Kft.	3 – 3	
1	2005. 07. 30.	DVSC-AVE Ásványvíz	ZTE FC	1 – 2	
1	2005. 07. 30.	Ferencvárosi TC	Fehérvár FC	3 – 2	
1	2005. 07. 30.	FC Sopron	Budapest Honvéd	7 – 1	
1	2005. 07. 30.	REAC	MTK Budapest	1 – 0	
1	2005. 07. 30	Auto Trader FC Tatabánya	Lombard Pápa Termál FC	1 – 1	
2	2005. 08. 06.	Újpest FC Kft.	Vasas	5 – 1	
2	2005. 08. 06.	MTK Budapest	PMFC	1 – 1	
2	2005. 08. 06.	Lombard Pápa Termál FC	FC Sopron	1 – 6	
2	2005. 08. 06.	ZTE FC	Auto Trader FC Tatabánya	0 – 1	
2	2005. 08. 06.	Győri ETO	REAC	3 – 1	
2	2005. 08. 06.	Budapest Honvéd	Ferencvárosi TC	2 – 5	
2	2005. 08. 06.	DVTK	Fehérvár FC	1 – 1	
2	2005. 10. 20.	Kaposvári Rákóczi FC	DVSC-AVE Ásványvíz	5 – 2	
3	2005. 08. 20.	REAC	Újpest FC Kft.	1 – 1	
3	2005. 08. 20.	PMFC	Győri ETO	2 – 2	
3	2005. 08. 20.	Auto Trader FC Tatabánya	Kaposvári Rákóczi FC	1 – 2	
3	2005. 08. 20.	Ferencvárosi TC	Lombard Pápa Termál FC	7 – 0	
3	2005. 08. 20.	Fehérvár FC	Budapest Honvéd	1 – 1	
3	2005. 08. 20.	FC Sopron	ZTE FC	0 – 0	
3	2005. 08. 20.	DVSC-AVE Ásványvíz	MTK Budapest	1 – 3	
3	2005. 09. 01.	Vasas	DVTK	5 – 2	
4	2005. 08. 27.	Újpest FC Kft.	PMFC	1 – 1	
4	2005. 08. 27.	MTK Budapest	Auto Trader FC Tatabánya	4 – 0	
4	2005. 08. 27.	Lombard Pápa Termál FC	Budapest Honvéd	2 – 1	
4	2005. 08. 27.	REAC	DVTK	2 – 1	
4	2005. 08. 27.	Vasas	Fehérvár FC	3 – 1	
4	2005. 08. 27.	Győri ETO	DVSC-AVE Ásványvíz	3 – 0	
4	2005. 08. 27.	Kaposvári Rákóczi FC	FC Sopron	6 – 1	
4	2005. 08. 27.	ZTE FC	Ferencvárosi TC	1 – 1	

a) Hány csapat vett részt a Borsodi Liga küzdelmeiben? _____

b) Mikor kezdődött az őszi idény? _____

c) A táblázat üres oszlopába írd be, hogy az adott meccsen hány gól született!

d) Állítsd a csapatokat a rúgott gólok szerinti csökkenő sorrendbe!

B)

1 Oldd meg a feladatokat az *A)* 4. feladat (előző oldal) táblázata alapján!

a) Készíts az adatokból olyan gyakorisági táblázatot, amely megmutatja, hogy például 5 gólt hány csapat rúgott!

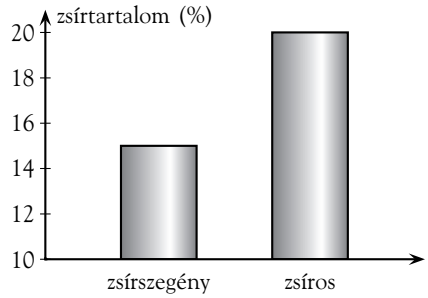
b) Készíts a relatív gyakorisági értékekről táblázatot!

c) Készíts az adatokról oszlopdiagramot!

2 Az *A)* 4. feladat (előző oldal) táblázatából keresd ki, mely csapatok voltak az őszi négy fordulóban a legeredményesebbek!

Készíts a legeredményesebb csapatok első négy meccsének szerzett góljairól oszlopdiagramot!

3 Egy cég kétfajta felvágott zsírtartalmát hasonlította össze. A cég a kapott eredményt oszlopdiagramon hozta nyilvánosságra. Miért rossz a készített grafikon?



Ábrázolás kördiagramon

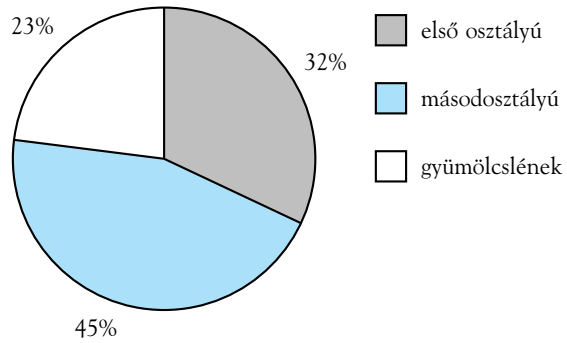
Hogyan készítsünk kördiagramot?

A)

1 Egy gyümölcsösben három csoportba osztályozzák a leszedett őszibarackot. A piacra kerül az első és másodosztályú, gyümölcslének szedik a többit.

Az itt látható kördiagram mutatja a szedett gyümölcsök megoszlását.



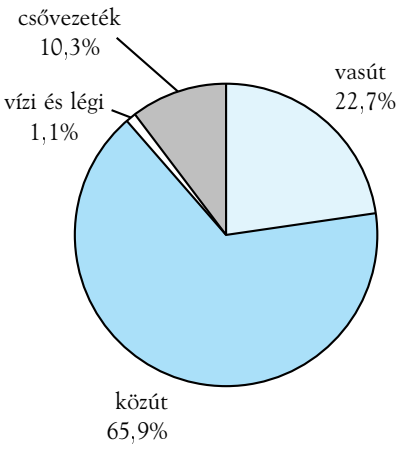


Összesen 8500 kg őszibarackot szedtek le a gyümölcsösben.

a) Hány kg-ot vittek el gyümölcslé feldolgozásához?

b) Hány láda szükséges az első osztályú őszibarack csomagolásához, ha egy ládába 5 kg barackot lehet tenni?

2 Magyarországon az egyik évben az áruszállítás megoszlása az alábbiak szerint alakult.



a) Az összes áru hány százalékát szállították közúton? _____

b) Vasúton az adott évben 49 075 tonna árut szállítottak. Összesen hány tonna árut szállítottak ebben az évben? A kapott értéket tízesre kerekítsd! _____

c) Mennyi árut szállítottak légi és vízi úton? _____

B)

1 Válaszolj a kérdésekre!

a) Mennyi 360-nak az 1%-a? _____ *b)* Mennyi 3600-nak a 72%-a? _____

c) Hány fokos középponti szög tartozik a kör

$\frac{1}{2}$ részéhez _____; $\frac{1}{4}$ részéhez _____; $\frac{1}{6}$ részéhez _____; 0,3 részéhez _____;

0,45 részéhez _____; 12%-hoz _____; 42%-hoz _____; 21,6%-hoz _____.

2 Egy kockadobás eredményeit látod:

1	3	2	4	2	2	5	5	1	6	6	3	4	3	5
2	3	1	4	3	3	5	2	6	5	3	4	2	6	3

a) Készíts a dobásokról gyakorisági és relatív gyakorisági táblázatot!

Dobások értéke	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság						
Relatív gyakoriság						

b) Készíts kördiagramot a kockadobás eredményéről!

I. lehetőség: Összesen _____ dobás volt. Ehhez tartozik a kör _____ középponti szöge. Ekkor 1 dobáshoz tartozik a kör _____ középponti szöge. Ezek alapján:

1-es dobások száma _____, ehhez tartozó középponti szög _____.

2-es dobások száma _____, ehhez tartozó középponti szög _____.

3-es dobások száma _____, ehhez tartozó középponti szög _____.

4-es dobások száma _____, ehhez tartozó középponti szög _____.

5-es dobások száma _____, ehhez tartozó középponti szög _____.

6-es dobások száma _____, ehhez tartozó középponti szög _____.

II. lehetőség: Az összes dobás _____%. Ehhez tartozik a kör _____ középponti szöge. Ekkor 1%-hoz tartozik a kör _____ középponti szöge. Ezek segítségével:

1-es dobások aránya _____%, ehhez tartozó középponti szög _____.

2-es dobások aránya_____%, ehhez tartozó középponti szög _____.

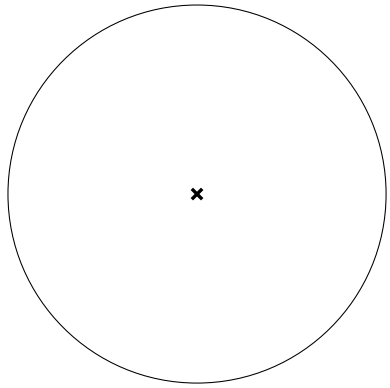
3-es dobások aránya _____%, ehhez tartozó középponti szög _____.

4-es dobások aránya _____%, ehhez tartozó középponti szög _____.

5-es dobások aránya _____%, ehhez tartozó középponti szög _____.

6-es dobások aránya _____%, ehhez tartozó középponti szög _____.

Rajzold meg a kördiagramot!



Az adatsokaságot jellemző középértékek

Átlag, módusz, medián

A)

1 Fogalmazd meg, hogyan számítjuk ki k db adat átlagát!

_____

2 Az adataink gyakorisági táblázatban vannak megadva:

Érdemjegyek	1	2	3	4	5
Osztályzatok száma	4	6	11	14	8

a) Számítsd ki az osztályzatok átlagát! _____

Rúgott gólok száma	0	1	2	3	4
Mérkőzések száma	3	5	7	6	2

b) Számítsd ki, hogy egy mérkőzésen átlagosan hány gól esett! _____

3 Az előző feladat alapján fogalmazd meg, hogyan számítjuk ki az átlagot abban az esetben, ha az adatok gyakorisági táblázatban vannak megadva!

_____

_____

4 Mit értünk egy adatsokaság móduszán?

5 Határozd meg az adathalmaz mediánját

a) páratlan számú adat esetén!

b) páros számú adat esetén!

B)

1 Öt iskolából egy vetélkedőn átlagosan 7-7 tanuló vett részt. Négy iskola 6; 8; 4; 9 tanulót küldött. Hányan érkeztek az ötödik iskolából?

2 Egy általános iskolában a kompetenciamérés eredménye matematikából a 8. *a* osztályban 67,5 pont, a 8. *b* osztályban 58,7 pont, a 8. *c* osztályban 61,4 pont. (Több osztály nincs az évfolyamon.) Az osztálylétszámok rendre: 32, 30, illetve 25 tanuló. Mekkora az iskola 8. évfolyamának kompetencia-átlageredménye matematikából?

3 Egy osztály tanulóinak cipőmérete:

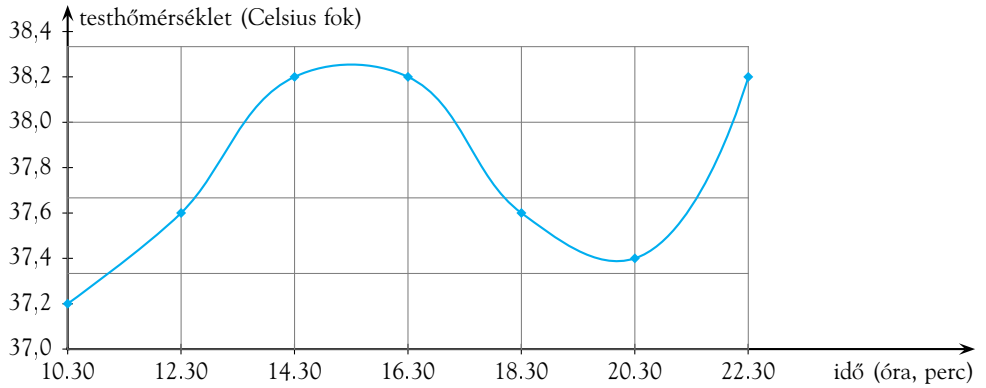
37; 35; 42; 41; 38; 39; 42; 45; 43; 37; 39; 41; 43; 38; 39; 37; 45; 43; 38; 39; 40.

Készíts gyakorisági táblázatot az adatokról!

Mennyi az adatok módusza, mediánja?

4 Egy 5 fős cég 4 alkalmazottjának átlagfizetése 102 500 Ft. Mennyi a tulajdonos havi fizetése a cégnél, ha az öt fő átlagfizetése 130 000 Ft?

5 Egy beteg testhőmérsékletét 7 alkalommal mérték meg 2007. január 17-én.



Határozd meg a mért értékek móduszát és mediánját!

6 8 alma tömegének átlaga 12,5 dkg. Közülük 7 alma tömegének átlaga 13,2 dkg. Mennyi a nyolcadik alma tömege?

9. A tér geometriája

A tanult testek áttekintése

A)

1 Pótold a hiányzó szavakat, képleteket!

A téglatestnek mind a ____ lapja téglalap. Két-két szemközti lapja _____. A téglatestnek ____ csúcsa és ____ éle van. A 12 él közül négy-négy párhuzamos és _____ hosszúságú.

A három különböző él szokásos jelölése: a, b, c.

A téglatest felszíne (A): _____. A téglatest térfogata (V): _____.

2 Pótold a hiányzó szavakat, képleteket!

Négyzetes oszlopnak nevezzük azt a téglatestet, amelynek van két _____.

A négyzetes oszlop felszíne: _____. A négyzetes oszlop térfogata: _____.

Kockának nevezzük azt a téglatestet, amelynek minden lapja _____.

A kocka felszíne: _____. A kocka térfogata: _____.

3 Készíts vázlatrajzot egy egyenes hasábról, amin elhelyezheted a következő szavakat: alaplap, oldallap, alapél, oldalél, magasság, lapátló, testátló, palást!

4 Írd be a hiányzó szavakat!

a) Egy ötszög alapú egyenes hasábot _____ lap határol.

b) Az ötszög alapú egyenes hasábnak _____ lapátlója van.

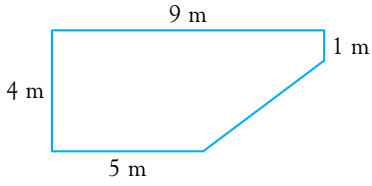
c) Az ötszög alapú egyenes hasábnak az alaplapjain _____ átlója van, mint az oldallapjain.

d) Az ötszög alapú egyenes hasábnak _____ éle van.

5 Számítsd ki a 16 cm magas, 5 cm alapélű, négyzet alapú hasáb felszínét és térfogatát!

6 Számítsd ki a henger felszínét és térfogatát, ha $r = 5{,}6$ cm, $m = 6$ cm!

7 Az ábra egy szoba alaprajzát mutatja. A szoba mindenütt 2,4 méter magas.



a) Hány m^2-re elegendő anyagot kell vásárolni a függőleges falak tapétázásához? (A tapétát úgy kell vásárolni, mintha az ajtókat, ablakokat is burkolnánk.)

b) Hány m^2-re elegendő parkettát kell vásárolni a szoba parkettázásához?

c) Mekkora a szoba légtere?

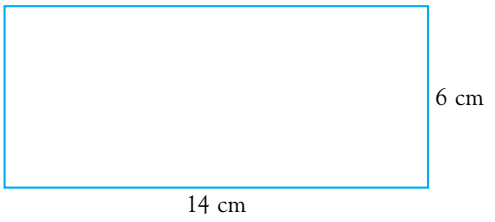
B)

1 Mutasd meg, hogy a háromoldalú hasáb legnagyobb oldallapjának a területe csak kisebb lehet, mint a másik két oldallap területének összege!

2 Vágd szét a 12 cm élű kockát az egyik átlósíkkal! Mekkora az így kapott egyik rész felszíne és térfogata?

3 Egy függőleges tengelyű négyzetes hasáb és egy henger legnagyobb területű függőleges metszetét mutatja az ábra.

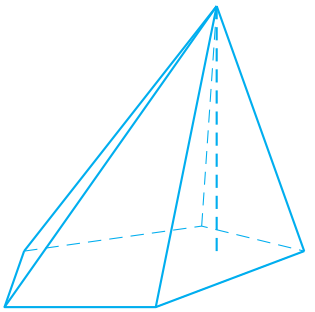
Melyiknek nagyobb a térfogata és mennyivel?



4 Egy henger tengelyt tartalmazó metszete egy 6 cm-szer 10 cm-es téglalap. Hasonlítsd össze a szóba jöhető két henger felszínét és térfogatát!

Gúlák

A)



1 Az ábrán helyezd el a következő szavakat: alaplap, oldallap, alapél, oldalél, magasság!

2 Rajzold le annak a négyzet alapú gúlának a hálózatát, amelyben az alapélek hossza 3 cm, az oldaléleké pedig 2 cm!

3 Számítsd ki a gúla felszínét, ha az alaplapja négyzet, az oldallapok pedig egybevágó háromszögek! Az alapél a, az oldalél b, a testmagasság m, az oldallap magassága m_o.

a) $a = 15$ cm, $m_o = 25$ cm; _____

b) $a = 3$dm, $b = 24$ cm; _____

c) $m = 26$ cm, $m_o = 30$ cm. _____

4 Egy torony teteje négyzet alapú gúla. A gúla alapéle 1,8 m, a magassága 2,4 m, az oldalélek pedig egyenlők. Hány m^2-re kell cserepet vásárolni?

5 Igaz vagy hamis? Írj a keretbe I betűt, ha igaz, H betűt, ha hamis!

a) Van olyan gúla, amelyben az alaplap területe nagyobb, mint a palást területe. _____ ☐

b) Nincs olyan gúla, amelyben a magasság és az alapél azonos hosszúságú. _____ ☐

c) Van olyan gúla, amelyben nincs testátló. _____ ☐

d) Van olyan gúla, amelyben nincs lapátló. _____ ☐

6 Számítsd ki a tetraéder felszínét, ha minden éle 20 cm hosszúságú!

B)

1 Hány oldala lehet annak a gúlának, amelynek az alaplapja szabályos sokszög, és minden éle egyenlő hosszú?

_____

2 Egy tetraéder szemközti élei azonos hosszúságúak: 1,6 cm, 2 cm és 2,5 cm. Rajzold meg a tetraéder hálózatát!

3 Melyek azok a természetes számok, amelyek nem jelenthetik egy gúla határoló lapjainak számát?

_____

4 Egy 5 cm élű kocka egyik csúcsa és az élben hozzá kapcsolódó három csúcs meghatároz egy testet. Mekkora az így kapott test felszíne?

5 Készíts egy táblázatot, amelyben az öt szabályos test csúcsainak, éleinek és lapjainak száma szerepel! Használd a tankönyvi ábrákat!

Kúpok

A)

1 Számítsd ki a kúp felszínét, ha az alaplapjának sugara r, az alkotója a, a magassága m!

a) $r = 9$ cm, $a = 41$ cm; *b)* $r = 20$ cm, $m = 21$ cm.

2 Melyik kúpnak nagyobb a felszíne? Az egyik kúp alapkörének sugara 12 cm, magassága 35 cm; a másik kúp alapkörének sugara 35 cm, magassága 12 cm. (A két alaplap fedi egymást.)

3 Egy 15 cm sugarú félkör és negyedkör egy-egy kúp palástja. Melyik kúp a magasabb és mennyivel?

4 Egy 2 dm sugarú kúpot a tengelyét tartalmazó síkkal kettévágtunk. A vágásfelület egy 8 dm^2 területű egyenlő szárú háromszög lesz.

a) Milyen magas a kúp? *b)* Számítsd ki a kúp felszínét!

5 Két azonos alapkörű kúpot az alaplapjuk mentén összeragasztottunk. Az alapkör sugara 8 cm, az alkotók 17 cm és 10 cm hosszúak.

a) Mekkora az így kapott test magassága? *b)* Mekkora az így kapott test felszíne?

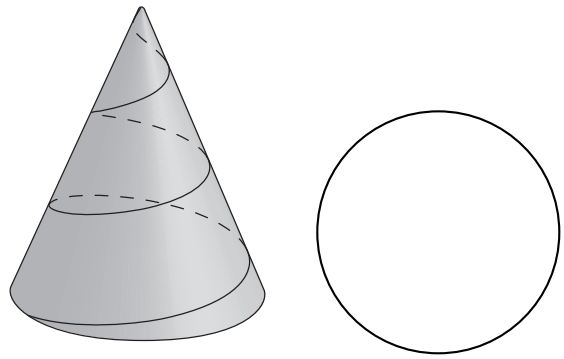
B)

1 A kúp palástjára rajzoltunk egy egyenletesen emelkedő vonalat. Vázlatosan rajzold le, hogy miként néz ki a kúp felülnézetben!

2 Két egyenes körkúp alkotói egyenlő hosszúak. Biztos-e, hogy a két körkúp egybevágó?

3 Készítsd el annak az egyenes körkúpnak a hálózatát, amelynek alkotója 3,5 cm, az alaplapjának sugara 2 cm!

4 Készítsd el annak az egyenes körkúpnak a hálózatát, amelynek magassága 4 cm, az alaplapjának sugara 3 cm!



A gúla és a kúp térfogata

(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

1 Számítsd ki a gúla térfogatát, ha az alaplapja négyzet, az oldallapok pedig egybevágó háromszögek! Az alapél a, az oldalél b, a testmagasság m, az oldallap magassága m_o.

a) $a = 22$ cm, $m_o = 61$ cm; *b)* $a = 2{,}3$ cm, $b = 4$ cm; *c)* $m = 9{,}3$ dm, $m_o = 10$ dm.

2 Egy 3 m oldalú négyzet fölé 16 dm magas gúlát építünk. A gúla minden oldallapja egybevágó háromszög. Mekkora a gúla térfogata?

3 Négyzet alapú gúla térfogata 240 cm^3, alapéle 7 cm. Az oldallapjai egybevágó háromszögek.
a) Milyen magas a gúla? *b)* Mekkora az oldallap magassága?

4 Egy négyzet alapú gúla térfogata 410 cm^3, a magassága 12 cm. Az oldallapjai egybevágó háromszögek.
a) Számítsd ki az alapél hosszát! *b)* Számítsd ki az oldalél hosszát!

5 Add meg a táblázatban a hiányzó számokat! Az adatok kúpra vonatkoznak, és centiméterben adtuk meg.

r	20	11	
a	27		76
m		42	90
A			
V			

B)

1 Egy test úgy keletkezett, hogy egy 5 cm sugarú és 12 cm magasságú hengerből kiesztergályoztak egy 5 cm sugarú és 10 cm magasságú kúpot. Mekkora a maradék test térfogata?

2 Hogyan aránylik a kúp alapkörének területe a felszínéhez, ha a kúp kiterített palástja félkör?

3 Hogyan aránylik a kúp alapkörének területe a felszínéhez, ha a kúp kiterített palástja háromnegyed része egy körnek?

4 Egy 9,3 cm és 12,3 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatunk az átfogója körül. Számítsd ki a keletkezett forgástest felszínét és térfogatát!

Gömb

A)

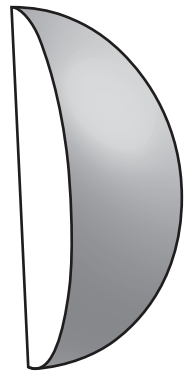
1 Számítsd ki a gömb felszínét és térfogatát, ha

a) $r = 9$ cm; *b)* $r = 2{,}5$ cm; *c)* $r = \frac{11}{4}$ cm; *d)* $r = 3{,}6$ cm!

2 Egy gömb alakú víztartály átmérője 4 méter. Hány hektoliter víz fér el benne?

3 Egy belül üres gumilabda falvastagsága 4 mm. A labda átmérője 28 cm. Hány cm^3 anyagot használnak fel egy ilyen labda elkészítéséhez?

4 Az ábrán egy úgynevezett gömbi kétszög látható. A gömbre rajzolt két kör a gömbbel azonosan 15 cm sugarú, és a síkjaik 45°-os szöget zárnak be egymással. Mekkora a felszíne ennek a kétszögnek?



5 Egy téglatest éleinek hossza: 8 cm, 12 cm, 6 cm. A téglatestből a legnagyobb gömböt esztergályozták ki. Mekkora az így kapott gömb felszíne és térfogata?

6 A 12 cm sugarú henger alakú edényben 15 cm magasan áll a víz. Mekkorát emelkedik a vízszint, ha bedobáljuk a 6 db 5 cm átmérőjű gömb alakú gombócot, és a gombócokat ellepi a víz?

B)

1 Tudjuk, hogy egy gömb és egy azt metsző sík közös része kör. Ennek a körnek a sugara fele a gömb sugarának. A gömb középpontjától milyen messze van a metszősík?

2 Az üres rézgömb külső átmérője 14 cm. A falvastagság mindenütt 3 mm. Mennyi a tömege, ha a réz sűrűsége 8,7 $\frac{g}{cm^3}$?

3 Egy félgömbnek a sugara, egy kúp és egy henger alaplapjának sugara egyenlő. A henger és a kúp magassága éppen a gömb sugarával egyenlő. Mekkora a három test térfogatának az aránya?

10. Valószínűségszámítás

A valószínűség klasszikus modellje

A)

Ne felejtsd el! Kockadobásoknál a kockák, pénzfeldobásnál az érmék mindig úgy „viselkednek”, mintha különböző színűek lennének, függetlenül attól, hogy megegyezők vagy sem.

1 Két dobókocka közül az egyik manipulált, azaz a tömegeloszlása nem egyenletes. Mindkét kockával 100 dobást végeztünk, s az alábbi eredményeket kaptuk:

A dobás pontjainak száma	1	2	3	4	5	6
Az egyik kockadobás gyakorisága	28	17	13	15	22	5
A másik kockadobás gyakorisága	18	14	20	16	19	13

Melyik kocka lehet inkább a manipulált? Miért?

_____

2 Két dobókockát feldobtunk.

a) Válaszd ki az elemi eseményeket!

A esemény: Mindkét kockával 2-est dobtunk.

B esemény: A dobott számok összege 2.

C esemény: A dobott számok szorzata legalább 30.

D esemény: A dobott számok szorzata 36.

Elemi események: _____.

**b)* Bontsd elemi eseményekre az előbb nem választott eseményt!

_____

3 Egy 10 Ft-os, egy 20 Ft-os és egy 50 Ft-os értékű érmét dobtunk fel.

a) Sorold fel a kísérlethez tartozó elemi eseményeket!

_____

_____

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy két fejet és egy írást dobtunk?

_____

_____

4 Hárman egy-egy különböző méretű almát véletlenszerűen egymás mellé tettek.

a) Milyen elemi események állhatnak elő a kísérlet során?

_____

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a sorrendjük: kicsi-nagy-közepes?

Az esemény valószínűsége: _____.

5 Három különböző értékű érmét dobtunk fel.

Adj meg olyan eseményt, amelynek valószínűsége $\frac{1}{2}$!

_____

***6** Három pénzérmét egyszerre feldobtunk. Fogalmazz meg három olyan eseményt, amelyek valószínűsége nem egyenlő! Határozd meg a választott események valószínűségét!

A esemény: _____.

B esemény: _____.

C esemény: _____.

$P(A) =$ _____

$P(B) =$ _____

$P(C) =$ _____

7 Két szabályos dobókockát dobtunk fel.

a) Melyik eseményre a legérdemesebb fogadni?

A esemény: Mindkét kockával páros számot dobtunk.

B esemény: Az összeg 7.

C esemény: egy páros és egy páratlan számot dobtunk.

_____

_____

b) Számítsd ki az egyes események valószínűségét!

$P(A) =$ _____

$P(B) =$ _____

$P(C) =$ _____

***8** Három különböző értékű érmét dobtunk fel.

a) Melyik eseményre a legérdemesebb fogadni?

A esemény: Mindhárom érme azonos oldalára esett.

B esemény: Van fej a dobások között.

C esemény: Több az írás a dobások között.

_____

_____

b) Számítsd ki az egyes események valószínűségét!

$P(A) =$ _____

$P(B) =$ _____

$P(C) =$ _____

B)

1 Egy urnában három piros és két kék golyó van. Egy golyót húzunk.

a) Számítsd ki a keresett valószínűségeket!

P (piros golyót húztunk) = _____.

P (kék golyót húztunk) = _____.

**b)* Minimum hány golyót tegyünk az urnába ahhoz, hogy a „piros golyót húztunk” esemény valószínűsége háromszor akkora legyen, mint a „kék golyót húztunk” esemény valószínűsége?

2 Egy urnában öt golyó van. Három piros golyón 1; 3; 5 számok, és két kék golyón 2; 4 számok vannak. Két golyót húzunk.

Számítsd ki a keresett valószínűségeket!

P (különböző színű golyókat húztunk) = _____.

P (azonos színű golyókat húztunk) = _____.

***3** Öt cédulára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat (mindegyikre egyet), majd egy dobozba helyeztük azokat.

Két számot egymás után húzunk, és a kihúzás sorrendjében egymás mellé írjuk. Így egy kétjegyű számot kapunk.

A esemény: a szám páros. B esemény: a szám prímszám.

C esemény: a számban nagyobb számjegy áll az egyesek helyén.

Határozd meg az események valószínűségét!

$P(A)$ = _____

_____

$P(B)$ = _____

_____

$P(C)$ = _____

_____

***4** Változtassuk meg az előző feladatot úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott számot!

Határozd meg az előző feladatban meghatározott események valószínűségét!

$P(A)$ = _____

$P(B)$ = _____

$P(C)$ = _____

***5** Kata egy csomagban 18 darab porcelántányért szállít. Ezek közül 6-nak 100 Ft, 6-nak 200 Ft, 6-nak 300 Ft az ára. A jeges úton megcsúszva leejti a csomagját, és megállapítja, hogy 4 tányérja eltörött. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kára 1000 Ft?

***6** Egy dobozban öt piros golyó van.

a) Hány fehér golyót kell a dobozba tennünk, ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva (a golyók kihúzásának a valószínűsége megegyezik), a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel piros legyen?

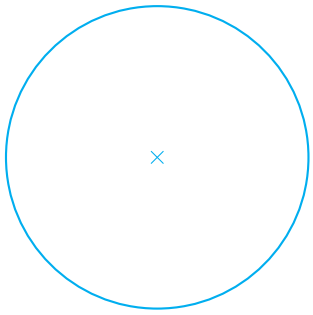
b) Legalább hány fehér és legalább hány fekete golyót kell a dobozba tennünk (mindegyikből legalább egyet), ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva, a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel ne fekete legyen?

Geometriai valószínűség

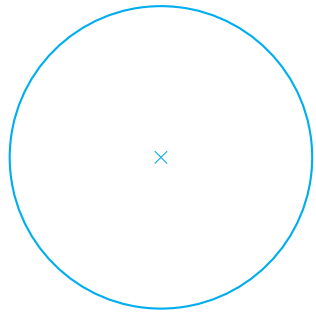
(Emelt szintű, választható tananyag)

A)

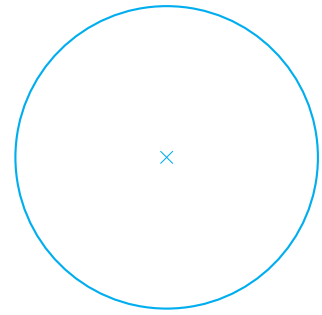
1 Tekintsük a körlapokat céltáblaknak! Tegyük fel, hogy dobásunk minden esetben eltalálja a céltáblát! Színezd a körlapokat kékkel, pirossal, sárgával úgy, hogy az **egyes színű mezőkbe találtunk** események valószínűségének aránya:



a) 1 : 1 : 1 legyen;

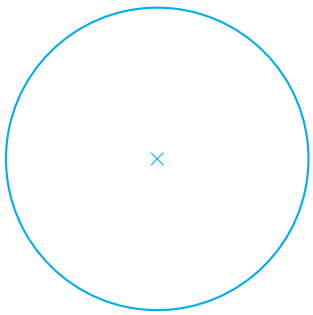


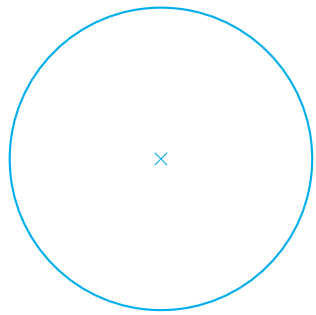
b) 1 : 2 : 1 legyen;

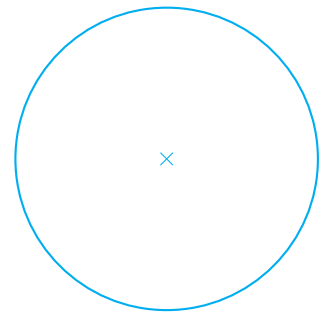


c) 2 : 3 : 5 legyen!

2 Tekintsük a körlapot céltáblaknak! Tegyük fel, hogy dobásunk minden esetben eltalálja a céltáblát! Rajzolj koncentrikus köröket úgy, hogy az **egyes körgyűrűbe találtunk** események valószínűsége, két kör esetén:







a) a „belső körbe találtunk” valószínűsége nagyobb legyen!

b) a „körgyűrűbe találtunk” valószínűsége nagyobb legyen!

c) Tekintsük 1 egységnek a kör sugarát! Mekkorának válasszuk a kisebb kör sugarát ahhoz, hogy mindkét rész eltalálásának valószínűsége egyenlő legyen?

B)

***1** Egy kör alakú céltáblán négy azonos középpontú kör látható. A körök sugarai rendre: 4 cm, 6 cm, 7 cm, 9 cm. Ha véletlenszerűen találjuk el a céltáblát, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy

a) a külső körgyűrűbe találtunk? _____

b) a középső körgyűrűbe találtunk? _____

c) a belső körgyűrűbe találtunk? _____

d) a belső kis körbe találtunk? _____

***2** Rajzold be a téglalap két átlóját! Számozd meg a keletkezett háromszögeket! Egy hangya szaladgál a téglalap által határolt területen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy megadott számozású háromszög valamelyikében áll meg a hangya?



***3** A 100 m-es síkfutás döntőjében az egyik versenyzőről leesett a rajtszáma. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a starttól 35 m-nél távolabb esett le, ha ennek valószínűsége a versenytáv bármely részén azonos?

Készíts vázlatos rajzot a feladathoz, jelöld, hol eshetett le a rajtszám!

***4** Az ábrán látható egyenesek távolsága váltakozva 2 cm és 6 cm. Dobjunk véletlenszerűen egy 2,5 cm sugarú körlapot az ábrára! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a körlap nem takar el egyenest?