OKTATÁSI HIVATAL

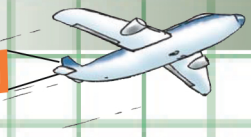
8

Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

Matematika

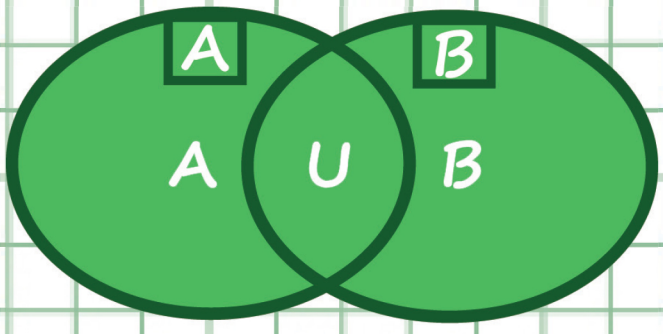
feladatgyűjtemény

Kalandozások a matematikában



$f: x \mapsto x^2$

$f: x \mapsto \frac{2}{3}x$



Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

Matematika munkafüzet 8. évfolyam



OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2016. április 11-től tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/2800–13/2016. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – 2.2.03 (Matematika),
2.3.1.2 (Emelt matematika – B variáció);
4. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára – 4.2.04 (Matematika);
5. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára – 5.2.04 (Matematika)
megnevezésű kerettantervek előírásainak.
A tankönyv összhangban áll a NAT 2012-vel.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
HERCZEGNÉ KASZÁS JUDIT, ZARUBAY ATTILA

Lektorok:
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ
középiskolai tanár
RAJK ÁGNES
középiskolai tanár

Grafikusok: JUHÁSZ LEHEL, TÉNYI KATI

Fotó: JUHÁSZ LEHEL

A fedelet CZAKÓ RITA rajzának felhasználásával KORDA ÁGNES tervezte.

Felelős szerkesztők: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA, DR. KORECZNÉ KAZINCZI ILONA

Anyanyelvi lektorok: DR. FALUSSY BÉLÁNÉ, BÁNKI LÁSZLÓNÉ

© Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin PhD, dr. Korándi József PhD, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta, Oktatási Hivatal (Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet), 2016

ISBN 978-963-19-7942-8

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök • Raktári szám: NT-11880/M
Tankönyvkiadási koordinációs osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó • Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 12,36 (A/5) ív • Tömeg: 250 gramm • 1. kiadás, 2020
Tördelés, grafika: Fried Katalin • A szedés EMTEX szedőrendszerben készült

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben, 2020-ban
A Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
Felelős vezető: Erdős Tamás vezérigazgató
Telefon: 66/887-400

Tartalom

		Végeredmények
Bevezetés	6	
1. Halmazok	7	93
Halmazok, halmazműveletek	7	93
Műveletek halmazokkal	8	94
2. A számok világa	10	95
A számok	10	95
A racionális számok	10	95
A négyzetgyök fogalma	12	97
A π és más nem racionális számok *(Emelt szintű tananyag)*	13	98
Kis számok	13	99
Egy szám többféle alakja – a normálalak	14	100
Műveletek normálalakban adott számokkal *(Emelt szintű, választható tananyag)*	15	100
Számelmélet	16	101
3. Algebra	17	101
Műveletek	17	101
Összeadás, szorzás	17	101
Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések	18	102
Műveletek algebrai kifejezésekkel	19	102
Egyenletek	20	103
Elemi úton megoldható szöveges feladatok	20	103
A mérlegelv alkalmazása	22	103
Egyenlőtlenségek	24	104
Számokkal kapcsolatos feladatok	25	104
Keverési feladatok	25	105
Mozgásos feladatok	26	106
Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok *(Emelt szintű, választható tananyag)*	27	106
Vegyes feladatok	27	106
Kombinatorikai feladatok	28	107

4. Transzformációk 29 107
Egybevágósági transzformációk 29 107
Vektorok 30 108
Vektorok bevezetése 30 108
Vektorok összeadása 31 108
Vektorok kivonása 32 109
Eltolás 33 109
Pont körüli elforgatás *(Választható tananyag)* 34 110
A hasonlóság 36 111
Középpontos hasonlóság 36 111
A középpontos hasonlóság tulajdonságai 37 111
Szerkesszünk középpontosan hasonló képet! 38 112
Hasonlóság 39 112

5. A Pitagorasz-tétel 41 113
Mérjük meg a hosszát! 41 113
A Pitagorasz-tétel 41 113
A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban 43 114
A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban *(Emelt szintű, választható tananyag)* 45 115
Pitagoraszi számhármasok *(Emelt szintű, választható tananyag)* 46 115

6. A számológép 47 116
Mit tud a számológép? 47 116
Négyzetgyök 47 116
Eljárások *(Olvasmány, választható tananyag)* 48 116

7. Függvények 49 117
Lineáris függvények 49 117
Nemlineáris függvények 56 126
Sorozatok 64 131
Mértani sorozat *(Emelt szintű, választható tananyag)* 65 131

8. Statisztika 67 132

9. A tér geometriája 76 137
A tanult testek áttekintése 76 137
Gúlák 77 137
Kúpok 78 138
A gúla és a kúp térfogata
(Emelt szintű, választható tananyag) 79 138
Gömb 80 139
10. Valószínűségszámítás 81 139
11. Középiskolába készülünk 85 142
Első feladatlap 85 142
Második feladatlap 87 142
Harmadik feladatlap 90 143
Végeredmények 93

Bevezetés

Ez a feladatgyűjtemény az NT-11880 raktári számú, 8. osztályos tankönyvhöz készült. Célja, hogy lehetővé tegye a feladat-, illetve problémamegoldási rutin kialakítását. A fejezetek igazodnak a tankönyv fejezeteihez.

Ahogyan azt a tankönyvben is megszokhattuk, az egyes anyagrészek mellett a „Választható tananyag" arra vonatkozik, hogy nem tartozik szorosan a tantervben meghatározott anyaghoz. Az idetartozó feladatok segítik a matematikai szemlélet, illetve gondolkodásmód kialakulását, elmélyülését.

Az „Emelt szintű, választható tananyag" arra utal, hogy az adott téma, problémakör vagy tananyagrész nem tantervi követelmény, ezeket a feladatokat differenciálás céljára ajánljuk.

Ezenkívül egyes feladatokat más módon is megjelöltünk.

Az ebben a könyvben használt jelölések:

☺ érdekes feladat

* gondolkodtató, nehezebb feladat

E emelt szintű (nem tantervi) feladat

Az utolsó fejezet feladatai a felvételire való felkészülést segítik.

A kötet végén megoldások, eredmények találhatók a feladatokhoz.

1. Halmazok

Halmazok, halmazműveletek

1 Add meg elemei felsorolásával a következő halmazokat!

A: az 1-nél nem kisebb, 10-nél kisebb egész számok.

B: a 0-nál nagyobb, 10-nél kisebb természetes számok.

C: az 1-nél nagyobb vagy egyenlő, 9-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész számok.

D: A tízes számrendszer pozitív számjegyei.

Melyek egyenlők az adott halmazok közül?

2 Melyek egyenlők az alábbi halmazok közül?

a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$; $B = \{2; 2; 3; 3; 5; 5; 7; 7\}$; $C = \{2; 5; 7; 7\}$;

b) $A = \{1; 1; 2; 3; 5\}$; $B = \{1; 2; 5; 3\}$; $C = \{1; 2; 3; 5; 1\}$;

c) $A = \{5; 15; 25; 15\}$; $B = \{15; 25; 25; 5\}$; $C = \{5; 5; 15; 15\}$.

3 Add meg legalább 3 elemét az alábbi halmazoknak!

A = {négyzetszámok};

B = {pozitív prímszámok};

C = {10-zel osztható természetes számok};

D = {2-vel nem osztható természetes számok};

E = {10-nél nagyobb, 20-nál kisebb racionális számok};

F = {síkidomok};

G = {négyszögek};

H = {síktranszformációk};

J = {a kockadobás elemi eseményei};

K = {statisztikai középértékek}.

Adj meg egy-egy olyan dolgot is, amely nem eleme az adott halmazoknak!

4 Add meg, melyek üresek az alábbi halmazok közül!

A = {egy pozitív szám nála nagyobb pozitív osztói};

B = {a pontosan két szimmetriatengellyel rendelkező háromszögek};

C = {a pontosan két szimmetriatengellyel rendelkező négyszögek};

D = {a pontosan két természetes szám osztóval rendelkező természetes számok};

E = {a pontosan egy természetes szám osztóval rendelkező természetes számok};

F = {a pontosan két természetes szám osztóval rendelkező összetett számok}.

5 Add meg a következő halmazok adott alaphalmazra vonatkozó komplementerét! Add meg, hogy mely halmazok üresek!

a) $H = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A = \{1; 3; 5\}$;

b) $H = \mathbf{N}$; $B = \{\text{páratlan számok}\}$;

c) $H = \{\text{háromszögek}\}$; $C = \{\text{derékszögű háromszögek}\}$;

d) $H = \{\text{háromszögek}\}$; $D = \{\text{egyenlő szárú háromszögek}\}$;

* *e)* $H = \{\text{háromszögek}\}$; $E = \{\text{négyszögek}\}$;

f) $H = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \ldots\}$; $F = \{\text{összetett számok}\}$.

6 Készíts halmazábrát, amely azt szemlélteti, hogy:

a) Minden négyzet téglalap.

b) Minden 100-zal osztható szám osztható 10-zel.

c) Minden veréb madár.

d) Van olyan jármű, amely nem autó.

e) Van olyan egész szám, amely nem természetes szám.

Műveletek halmazokkal

7 Add meg az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat!

a) $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$; $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$;

b) $A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$;

c) $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \ldots\}$.

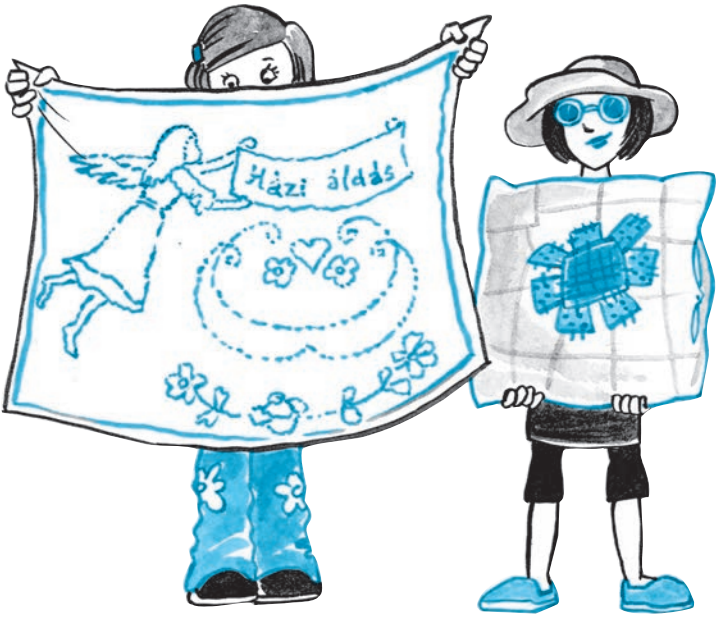
8 Legyen a H alaphalmaz az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$! Add meg A és B elemeit, ha tudjuk, hogy

a) $A \cap B = \{2; 6\}$; $\overline{A} \cap B = \{3; 5\}$; $\overline{B} \cap A = \{1; 7\}$;

b) $A \cap B = \{3; 6\}$; $A \cup B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; $\overline{B} \cap A = \{5\}$;

c) $A \cap B = \{3; 7; 9\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 7; 9\}$; $\overline{B} \cap A = \{1; 2; 4\}$.

9 Egy képzőművészeti pályázatra kézimunkákat is küldtek: hímzett terítőt, díszpárnát és falvédőt. Összesen 12 terítő, 10 párna és 5 falvédő érkezett be a pályázatra. 8-an küldtek terítőt és párnát, 4-en falvédőt és terítőt, 2-en falvédőt és párnát. Háromféle kézimunkát 1 tanuló küldött be. Hányan pályáztak kézimunkával?



10 Egy kézimunkaszakkörben a gyerekek szövést és textilfestést tanulnak, minden gyerek csak az egyik félét. A szakkörre 30-an járnak, ebből a 7.-esek száma 12, a többiek 8.-osok. A 19 textilfestő-tanuló közül 3 fő 7.-es. Ábra segítségével állapítsd meg, hány 8.-os tanul szőni a szakkörben!

11 Egy társaságban kiderült, hogy 3 olyan ember is van, aki szokott horgászni, kerékpározni és síelni is.

Azok száma, akik kerékpároznak és síelnek is, 5. 4-en vannak azok, akik horgásznak és kerékpároznak is. 7-en horgásznak és síelnek is.

A kerékpározók száma 16, a horgászoké 12, a síelőké 10.

Egyvalaki viszont nem síel, nem horgászik és nem kerékpározik. Hány fős a társaság? Készíts halmazábrát!

* **12** Egy 29 fős társaságban 18-an beszélnek angolul, 16-an beszélnek németül és 12-en beszélnek franciául. 3-an mind a három nyelven beszélnek, és ugyanannyian beszélnek angolul és németül is, mint ahányan németül és franciául is, illetve ahányan angolul és franciául is.

Hányan beszélnek csak angolul, csak németül, csak franciául, ha tudjuk, hogy egyikük egyik nyelven sem beszél?

2. A számok világa

A számok

A racionális számok

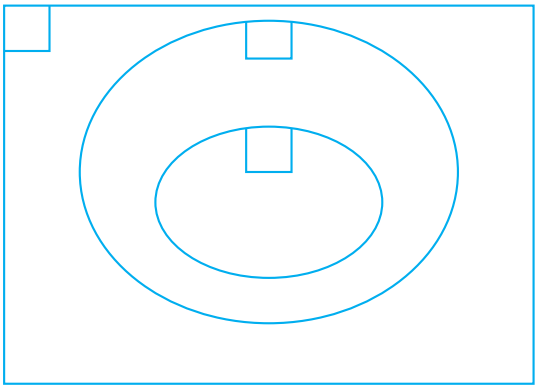
13 Ábrázold számegyenesen a következő számokat! Segíthet, ha a tört alakban adott számokat tizedestört-alakba írod. Amelyiket nem tudod pontosan ábrázolni, annak add meg a körülbelüli helyét!

$a = 2{,}4$; $b = \frac{5}{7}$; $c = -3{,}8$; $d = 0{,}7$;

$e = -\frac{6}{3}$; $f = 5{,}78$; $g = \frac{4}{3}$; $h = -5{,}2$.



14 A halmazábra egyes részei a természetes számok, az egész számok, illetve a racionális számok halmazát szemléltetik. Az üresen hagyott címkékbe írd be a megfelelő számhalmaz betűjelét (**N**, **Z**, **Q**)! Ezután írd be az adott számokat a halmazábrába!



$-2{,}7$; $5{,}34$;

$\frac{8}{3}$; 11;

$\frac{8}{2}$; $-5{,}4\dot{5}$;

-3; $-\frac{14}{7}$.

15 Írd fel tizedestört-alakban a megadott törteket!

$a = \frac{3}{4}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = \frac{5}{6}$; $d = \frac{19}{10}$; $e = \frac{17}{7}$; $f = \frac{4}{9}$.

Ennek alapján add meg, hogy melyik két

a) egész szám, *b)* tized, *c)* század, *d)* ezred

veszi közre az adott számokat! (Vagyis melyik az az egész, tized, század, ezred, amely még éppen kisebb, illetve nagyobb, mint az adott szám?)

Ábrázold a számokat számegyenesen! Ha nem tudod pontosan, akkor a körülbelüli helyüket jelöld!

☺ **16** Két racionális szám különbsége 7. Az egyik szám a (3; 4) intervallumba esik. Add meg, hogy a másik szám melyik intervallumba eshet! Keresd a lehető legszűkebb ilyen intervallumot!

☺ **17** Két racionális szám különbsége 0,7. Az egyik szám a (3; 4) intervallumba esik. Add meg, hogy a másik szám melyik intervallumba eshet! Keresd a lehető legszűkebb ilyen intervallumot!

☺ **18** Igaz-e, hogy ha egy racionális számhoz 1-et adunk, akkor racionális számot kapunk?

☺ **19** Hány olyan racionális szám van, amely 2 és 3 közé esik, és van olyan tört alakja, amelyben a számláló

a) 3; *b)* 4; *c)* 5?

Írd fel a számok tizedestört- és egyszerűsített-tört-alakját is!

20 Ha létezik, add meg, ha nem létezik, indokold, miért nincs ilyen szám!

a) Legkisebb természetes szám.
b) Legnagyobb természetes szám.
c) Legkisebb egész szám.
d) Legnagyobb egész szám.
e) Legkisebb pozitív egész szám.
f) Legnagyobb negatív egész szám.
✻ *g)* Legkisebb racionális szám.
✻ *h)* Legkisebb pozitív racionális szám.
✻ *i)* Legnagyobb racionális szám.
✻ *j)* Legnagyobb negatív racionális szám.

21 Írj fel legalább 3-3 olyan racionális számot, amelyek a megadott intervallumokba esnek!

a) (5; 6); *b)* (5,5; 5,6); *c)* (5,54; 5,55).

Ábrázold az intervallumokat, jelöld a számok helyét!

A négyzetgyök fogalma

22 Határozd meg a következő számokat század értékekig!

$a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{0{,}5}$; $d = \sqrt{0{,}8}$; $e = \sqrt{2}$; $f = \sqrt{0{,}1}$.

Ennek alapján add meg, hogy mely két

a) egész szám, *b)* tized veszi közre őket!

(Vagyis melyik az az egész, illetve tized, amely még éppen kisebb, illetve nagyobb, mint az adott szám?)

Ábrázold a számokat számegyenesen! Ha nem tudod pontosan, akkor a körülbelüli helyüket jelöld!

23 Egy téglalap két oldala 4 és 9 egység.

a) Mekkora a vele egyenlő területű négyzet oldalának hossza?

b) A két síkidom közül melyiknek nagyobb a kerülete?

24 Egy téglalap két oldala 10 és 12 egység.

a) Mekkora a vele egyenlő területű négyzet oldalának hossza?

b) A két síkidom közül melyiknek nagyobb a kerülete?

25 Egy négyzet területe 72 m^2. Mekkora a kétszer ekkora területű négyzet oldalhossza?

26 Egy téglalap területe 72 m^2. Mekkora a feleekkora területű négyzet oldalhossza?

27 Egy téglalap területe 20 m^2. Mekkora az ötször ekkora területű négyzet oldalhossza?

28 Egy négyzet területe 25 m^2. Egy vele nem egybevágó, de ugyanakkora területű téglalap minden oldalának mérőszáma méterben megadva egész szám.

a) Mekkora lehet a téglalap kerülete?

b) Melyik alakzat kerülete nagyobb?

29 Egy téglalap két oldala különböző hosszúságú. Adott egy négyzet, amelynek a területe ugyanakkora, mint a téglalapé. Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait!

A téglalap oldalai	A téglalap kerülete	A közös terület	A négyzet oldala	A négyzet kerülete
12 és 6				
10 és 5				
5 és 6				

A π és más nem racionális számok

(Emelt szintű tananyag)

30 Írd fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

$a = -5$; $b = 0$; $c = 6$; $d = 12{,}5$;

$e = 3{,}15$; $f = 5{,}\dot{5}$; $g = 4{,}1\dot{6}$; $h = 3{,}\dot{5}\dot{4}$;

$i = 4{,}15$; $j = 1{,}5\dot{1}$; $k = 0{,}0\dot{5}$; $l = 0{,}0\dot{9}\dot{4}$.

31 Készíts 0 és 1 közé eső végtelen szakaszos tizedes törtet az 1-es és a 2-es számjegyek felhasználásával!

32 Folytasd a következő számokat úgy, hogy

a) véges; *b)* végtelen szakaszos; *c)* végtelen nem szakaszos tizedes törtet kapj!

$a = 4{,}1$; $b = 0{,}55$; $c = 2{,}7$; $d = 3{,}3$.

33 Számítsd ki a megadott sugarú körök kerületét és területét a π három különböző közelítő értékét felhasználva! Kerekíts 2 tizedesjegyre!

	$r = 5$		$r = 10$		$r = 7$	
	K	T	K	T	K	T
$\frac{22}{7}$						
3,14						
$\frac{355}{113}$						

Kis számok

34 Add meg a hiányzó kitevőket, számokat!

a) $10^{\square} = 0{,}01$; *b)* $100 = 10^{\square}$; *c)* $10^{-2} = \square$;

d) $10^{-2} = \frac{1}{10^{\square}}$; *e)* $10^{\square} = \frac{1}{10^0}$; *f)* $10^1 = \square$;

g) $10^{-4} = \frac{1}{10^{\square}}$; *h)* $\frac{1}{10^4} = 10^{\square}$; *i)* $\frac{1}{10^{-1}} = 10^{\square}$.

35 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

a) 100; 10^2; $0{,}01$; 10^{-1}; 10^{-3}; 10^{-2};

b) 10^3; 10^{-2}; $0{,}001$; $10\,000$; 1; 100;

c) 10^{-1}; 10^2; 10^0; 1000; $0{,}001$; 10.

36 Hány számjegye van helyi értékes írásmódban a következő, hatvány alakban megadott számoknak?

a) 10^2; *b)* 10^3; *c)* 10^0; *d)* 10^{10};

e) 10^5; *f)* 10^{42}; *g)* 10^{100}; **h)* 10^{10^2}.

37 Hány tizedesjegye van helyi értékes írásmódban a következő, hatvány alakban írt számoknak?

a) 10^{-1}; *b)* 10^{-3}; *c)* 10^{-2}; *d)* 10^{-7};

e) 10^{-5}; *f)* 10^{-53}; *g)* 10^{-10}; *h)* 10^{-10^1}.

38 Írd be a hiányzó mérőszámokat!

a) $10^{\square}$ m $= 10$ dm $= 10^{\square}$ mm $= 10^{\square}$ km $= 10^{\square}$ cm;

b) $10^{\square}$ g $= 10^{\square}$ dkg $= 10^{\square}$ t $= 1$ mg $= 10^{\square}$ kg;

c) 10^4 l $= 10^{\square}$ hl $= 10^{\square}$ cl $= 10^{\square}$ ml $= 10^{\square}$ dl.

Egy szám többféle alakja – a normálalak

39 Add meg a következő számok normálalakját!

$a = 27{,}4$; $b = 1{,}43$; $c = 0{,}15$; $d = 0{,}01$;

$e = 34{,}05$; $f = 194{,}3$; $g = 0{,}0005$; $h = 1000{,}1$.

40 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő, normálalakban megadott számokat!

a) $1{,}15 \cdot 10^{-3}$; $7{,}5 \cdot 10^{-2}$; $3{,}6 \cdot 10^2$; $1{,}5 \cdot 10^{-2}$;

b) $3{,}14 \cdot 10^5$; $5{,}4 \cdot 10^4$; $8{,}132 \cdot 10^5$; $2{,}5 \cdot 10^5$;

c) $9{,}5 \cdot 10^{-2}$; $3{,}1 \cdot 10^{-1}$; $6{,}15 \cdot 10^{-2}$; $1{,}1 \cdot 10^0$.

41 Keresd meg az egyenlőket az alábbi számok között!

$a = 2{,}6 \cdot 10^3$; $b = 2600 \cdot 10^{-1}$; $c = 260 \cdot 10^1$;

$d = 0{,}26 \cdot 10^4$; $e = 0{,}26 \cdot 10^5$; $f = 26 \cdot 10^3$;

$g = 0{,}0026 \cdot 10^6$; $h = 0{,}26 \cdot 10^2$; $i = 0{,}026 \cdot 10^4$.

42 Keresd meg az egyenlőket az alábbi számok között!

$a = 3{,}5 \cdot 10^4$; $b = 0{,}035 \cdot 10^2$; $c = 3500 \cdot 10^{-2}$;

$d = 350 \cdot 10^3$; $e = 0{,}0035 \cdot 10^5$; $f = 35 \cdot 10^2$;

$g = 35 \cdot 10^3$; $h = 35 \cdot 10^1$; $i = 0{,}35 \cdot 10^4$.

Műveletek normálalakban adott számokkal

(Emelt szintű, választható tananyag)

43 Egy nemzetközi érdekeltségű cégnél $1{,}003 \cdot 10^5$ férfi és $1{,}9 \cdot 10^4$ nő dolgozik.

a) Hány dolgozója van a cégnek?

b) Mennyivel több a férfi dolgozó, mint a nő?

c) Mennyi a férfiak és a nők aránya a dolgozók között?

44 Legfeljebb hány darab 2,5 m hosszú, 1,4 m széles lepedőt lehet készíteni egy $5 \cdot 10^3$ m hosszú és $8 \cdot 10^{-1}$ m széles anyagból?

45 *a)* Hány négyzetméter az alapterülete annak a téglalap alakú asztalnak, amelynek oldalai $1{,}6 \cdot 10^3$ mm és $8 \cdot 10^2$ mm?

b) Hány négyzetméter a területe annak a téglalap alakú futónak (terítőnek), amelynek az egyik oldala $1{,}2 \cdot 10^3$ mm, a másik oldala $4{,}5 \cdot 10^2$ mm?

c) Hányadrészét fedi a terítő az asztal lapjának, ha sehol sem lóg le?

46 Add meg normálalakban 1 m szövet kg-ban kifejezett tömegét, ha tudjuk, hogy $3{,}6 \cdot 10^3$ m szövet tömege $5{,}04 \cdot 10^2$ kg!

47 Négy ládában egyenként $2{,}24 \cdot 10^{-1}$ t, $2{,}7 \cdot 10^{-1}$ t, $3{,}12 \cdot 10^{-1}$ t és $3{,}9 \cdot 10^{-1}$ t tömegű árucikk van. Hány tonnányi áru van a négy ládában összesen?

Számelmélet

48 A 45 72$\square$ szám egyes helyi értékére írj olyan számjegyet, hogy a kapott szám osztható legyen

a) 2-vel; *b)* 4-gyel; *c)* 5-tel; *d)* 9-cel;

e) 3-mal; *f)* 6-tal; *g)* 10-zel; *h)* 8-cal!

49 A 35 36$\square$ szám egyes helyi értékére írj olyan számjegyet, hogy a kapott szám osztható legyen

a) 2-vel is és 3-mal is; *b)* 4-gyel is és 5-tel is;

c) 5-tel is és 3-mal is; *d)* 9-cel is és 3-mal is;

e) 3-mal is és 4-gyel is; *f)* 8-cal is és 5-tel is!

50 Írj a $2^2 \cdot 3 \cdot \square$ prímtényezős felbontásban megadott szám hiányzó prímtényezője helyére olyan prímszámot, hogy a kapott szám osztható legyen

a) 5-tel; *b)* 6-tal; *c)* 7-tel; *d)* 8-cal;

e) 10-zel; *f)* 12-vel; *g)* 15-tel; *h)* 20-szal!

51 Add meg legalább 3 osztóját annak a számnak, amelynek prímtényezős felbontásában szerepel 2 darab 2-es és 1 darab 5-ös!

52 Add meg legalább 3 osztóját annak a számnak, amelynek prímtényezős felbontásában szerepel egy 2-es, egy 3-as és egy 7-es!

53 Add meg legalább 3 osztóját annak a számnak, amelynek prímtényezős felbontásában szerepel két 2-es!

54 Igazold, hogy egy szám 10-es számrendszerben felírt alakja pontosan akkor végződik 0-ra, ha a prímtényezői között szerepel az 2-es is és az 5-ös is!

55 Határozd meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

a) 16 és 24; *b)* 12 és 10; *c)* 20 és 16;

d) 28 és 42; *e)* 56 és 42; *f)* 25 és 55;

g) 30 és 40; *h)* 75 és 20; *i)* 60 és 72.

56 Két szám legnagyobb közös osztója 15, legkisebb közös többszöröse 60. Mi lehet a két szám?

3. Algebra

Műveletek

Összeadás, szorzás

57 A művelet elvégzése nélkül határozd meg, hogyan változik az eredmény! Számítással ellenőrizd a megállapításod helyességét!

A $44 + (26 - 13)$ műveletben egy-egy számot megnöveltünk 7-tel.

$(44 + 7) + (26 - 13)$;

$44 + ((26 + 7) - 13)$;

$44 + (26 - (13 + 7))$.

58 A művelet elvégzése nélkül határozd meg, hogyan változik az eredmény! Számítással ellenőrizd a megállapításod helyességét!

A $44 + (26 - 13)$ műveletben két-két számot megnöveltünk 7-tel.

$(44 + 7) + ((26 + 7) - 13)$;

$44 + ((26 + 7) - (13 + 7))$;

$44 + 7 + (26 - (13 + 7))$.

59 A művelet elvégzése nélkül határozd meg, hogyan változik az eredmény! Számítással ellenőrizd a megállapításod helyességét!

A $44+(26-13)$ műveletben egy-egy számot csökkentünk 5-tel.

$(44 - 5) + (26 - 13)$;

$44 + ((26 - 5) - 13)$;

$44 + (26 - (13 - 5))$.

60 A művelet elvégzése nélkül határozd meg, hogyan változik az eredmény! Számítással ellenőrizd a megállapításod helyességét!

A $44 + (26 - 13)$ műveletben két-két számot csökkentünk 5-tel.

$(44 - 5) + ((26 - 5) - 13)$;

$44 + ((26 - 5) - (13 - 5))$;

$44 - 5 + (26 - (13 - 5))$.

61 Számítsd ki az egyes árucikkek értékét!

Mennyisége	Egységára	Értéke
24 kg	$15\ \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$	
$0{,}8\ \text{m}^3$	$12\ \frac{\text{Ft}}{\text{l}}$	
0,3 t	$40\ \frac{\text{Ft}}{\text{t}}$	
245 kg	$36\ \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$	
13,5 t	$180\ \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$	
$1{,}845\ \text{m}^3$	$4\ \frac{\text{Ft}}{\text{l}}$	

62 Két fogaskerék között az áttétel aránya 2 : 5.

a) Hány foga van a kisebbik keréknek, ha a nagyobbiknak 80?

b) Hány foga van a nagyobbik keréknek, ha a kisebbiknek 80?

Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések

63 Számítsd ki a következő műveletsorok eredményét!

a) $218 - (47 + 15) + \big(64 - (-18) + (-15)\big) =$;

b) $\frac{5}{4} - \frac{3}{8} + \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\right) =$;

c) $7{,}35 + (4{,}15 - 3{,}56 + 1{,}2) - (2{,}7 + 5{,}1 - 1{,}8) =$

64 Számítsd ki a következő műveletsorok eredményét!

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{5}\right)$;

b) $\left(6{,}5 + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{3}$;

c) $(4{,}25 + 3{,}5) \cdot 0{,}8 - 2{,}3 \cdot (62{,}5 - 0{,}1)$;

d) $2 \cdot \big(3{,}7 - (-1{,}5)\big) - 3{,}6 \cdot (-1{,}5 + 5{,}4)$.

65 Ajándékcsomagokat állítunk össze a következő árucikkek felhasználásával: csokoládé, kerámiatál, bonbon, díszbögre, plüssfigura.

Az egyik fajta ajándékcsomagba 1 kerámiatál, 3 tábla csokoládé, 2 doboz bonbon és 1 plüssfigura kerül. Ebből a fajtából 6-ot állítunk össze.

A másik fajta ajándékcsomagba 4 tábla csokoládé, 1 doboz bonbon, 2 díszbögre és 2 plüssfigura kerül. Ebből a fajtából 4-et állítunk össze.

Az egyes termékek ára:

csokoládé:	200 Ft egy tábla;	kerámiatál:	3500 Ft egy darab;
bonbon:	1500 Ft egy doboz;	díszbögre:	1000 Ft egy darab;
plüssfigura:	1500 Ft egy darab.		

a) Írd fel, hogy összesen hány darabot használunk fel az egyes árucikkekből!

b) Írd fel, hogy mennyibe kerül az összes ajándék együtt!

c) Add meg, hogy mennyibe kerül az egyik, illetve a másik fajta ajándékcsomag!

d) Mennyibe kerül külön-külön a 6 ajándékcsomag az első, illetve a 4 a második fajtából?

e) Mennyibe kerül együtt a 6 ajándékcsomag az első, illetve a 4 a második fajtából?

66 A könyvesboltban a Holvan Kiadó *Konvex sokszögek* című könyvét 3700 Ft-ért adják, amiből 2500 Ft-ot kap a kiadó. A *Konkáv sokszögek* című könyv 4200 Ft-ba kerül, ebből 2700 Ft-ot fizetnek a kiadónak.

Egy iskolai jutalmazás során 12 könyvet osztottak ki a *Konvex sokszögek* címűből és 20-at a *Konkáv sokszögek* címűből.

a) Mennyi a haszna a boltnak a két könyvön külön-külön?

b) Mennyi haszna van a boltnak az egyik, illetve a másik fajta könyvön?

c) Mennyit fizetett az iskola a könyvekért?

d) Mennyi pénz marad ebből a boltnak?

e) Mennyi pénz jut a kiadónak?

Műveletek algebrai kifejezésekkel

67 Írd fel a téglalap kerületét és területét, ha az oldalai:

a) $a - 3$ és $a + 3$;

b) $a - b$ és $a + b$;

c) $(1 - u)$ és $\frac{1}{2}v$;

d) $2u + 1$, $v - 1$!

68 Először végezz összevonást, ha lehet, majd kiemelést a következő kifejezésekben! Végül számítsd ki a kifejezést a megadott értékekkel!

a) $4y^2z + 2y^2z^2 - 6y^2z$; $y = 2;\ z = 0$;

b) $-5e + 15e^2 - 10e^2n^2 + 5e$; $e = 1;\ n = 0{,}5$;

c) $-12d^2 - 3d + 3gd + 9gd + 4g^2d$; $d = -1;\ g = 0{,}5$;

d) $-9r^2m + 6rm^2 + 6m - 3m^2$; $r = \frac{1}{3};\ m = -0{,}2$.

69 Végezz összevonást, kiemelést, helyettesítést!

a) $6y^2 + 6y^2 - y - y^2 - 2y + 5y^2 - 9y^2$; $y = 6$;

b) $7r^2m^2 - 9r^2m - 6r^2m^2$; $r = -1;\ m = 0$;

c) $3sv^2 + 9vs - 3sv + sv^2 + 8v^2s - 8v^2s$; $s = 5;\ v = 0{,}5$.

70 Egyik nap nagyapa háromszor annyi kosarat font, mint az unokája.

a) Jelöld a-val azt, ahány kosarat nagyapa font! Ennek segítségével írd fel, hány kosarat font az unokája!

b) Jelöld b-vel azt, ahány kosarat az unoka font! Ennek segítségével írd fel, hány kosarat font nagyapa!

c) Ha nagyapa kosarai száma felét az unoka kosarai száma harmadához adjuk, akkor 11 kosarat kapunk. Hány kosarat fontak egy nap alatt külön-külön?

Egyenletek

Elemi úton megoldható szöveges feladatok

71 Egy 750 literes üres tartályba egy csapon át 50,6 liter víz ömlik be percenként, egy nyíláson azonban 8,5 liter víz folyik ki ugyanezen idő alatt. Hány perc szükséges így ahhoz, hogy megteljen a tartály?

72 Két konzerv együttes tömege 2,15 kg. Az egyik 1,75 kg-mal nehezebb, mint a másik. Mennyi az egyes konzervek tömege?

73 Öltönyök szállítására alkalmas, négyzet alapú hasáb alakú láda alapnégyzetének oldalhossza 60 cm, magassága 115 cm. Egy ilyen ládába 50 vászonöltöny vagy 40 szövetöltöny vagy 25 női kabát fér el.

Mekkora térfogatnyi helyet foglal el

a) egy vászonöltöny; *b)* egy szövetöltöny; *c)* egy női kabát?

Ha egy ilyen ládába mind a három fajta ruhadarabból ugyanannyit akarunk betenni, akkor hány darab kerül a ládába egy-egy fajta ruhából?

74 Egy fémtárgy megmunkálásakor a hulladék tömege 20-adrésze a kész fémtárgy tömegének. Mennyi a fémtárgy tömege, ha a nyersanyag tömege 42 kg?



☺ **75** *A* városból elindul Antal kerékpáron az *A*-tól 90 km-re levő *B* városba. Vele egy időben *B*-ből *A*-ba elindul Bálint kerékpárral ugyanazon az útvonalon. Antal sebessége 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Bálinté 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Induláskor egy légy rászállt Antal orrára, és azonnal elrepült Bálint orráig. Akkor visszafordult, és visszarepült Antalhoz. Majd megint Bálintig és vissza Antalhoz. Mindezt addig, amíg Antal és Bálint össze nem találkozott.

Mennyi utat tett meg az 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel repdeső légy?

76 Egy húsraktárban a sózott szalonnából 19,5 t mennyiséget tárolnak. A 3 m magas raktárban négyzetméterenként 156 kg tárolható.

a) Mekkora a helyiség alapterülete, ha a raktárban a megengedhető legnagyobb mennyiségű szalonnát tárolják?

b) Milyen széles a helyiség, ha a hosszúsága 12,5 m?

c) Mekkora a raktár térfogata?



A mérlegelv alkalmazása

77 Mi a kapcsolat a két egyenlet között? Oldd meg mindkettőt!

a) $\frac{1}{3}(x-5) = -(x+4)$; $\qquad \frac{x-5}{3} = -x-4$;

b) $\frac{7}{4}(7-4x) = \frac{5}{2}(2x-5)$; $\qquad \frac{7(7-4x)}{4} = \frac{5(2x-5)}{2}$.

* **78** Az egyik kávékeverékhez háromféle kávét használnak fel. Az egyes fajtákból felhasznált mennyiség a, b, c kg. Az egyes fajta kávék kilogrammonkénti ára x, y, z euró.

a) Írd fel képlettel, hogy összesen hány kg kávé keletkezik a keverés után!

b) Írd fel képlettel, hogy mennyibe kerül a teljes kávékeverék!

c) Írd fel képlettel, hogy mennyibe kerül a kávékeverékből 1 kilogramm!

d) Számítsd ki 1 kg keverék árát, ha $a = 12$ kg, $b = 18$ kg, $c = 10$ kg, valamint a kávék ára euróban $x = 4{,}5$, $y = 5{,}2$, $z = 7$!



79 Három népművész együtt 132 ostort készített el. A második feleannyit csinált, mint az első, viszont másfélszer annyit, mint a harmadik. Hány darab ostort készített külön-külön mindegyik népművész?

80 A, B és C órások egy hónap alatt összesen 490 órát javítottak meg. B kétszer annyit, mint A; C pedig kétszer annyit, mint B. Hány darab órát javítottak meg külön-külön?

81 Három árucikkből összesen 200 db van a raktáron. Az A-ból kétszer annyi, mint a B-ből, a C-ből pedig 50-nel kevesebb, mint az A-ból. Hány darab van az egyes cikkekből?

82 Egy konyha két nap alatt elhasználta a lisztkészletét. Az első nap a felét és még 2 kg-ot, a második nap a megmaradt készlet 25%-át és még 6 kg-ot. Hány kilogramm liszt volt készleten?



Egyenlőtlenségek

83 Egy racionális szám fele kisebb, mint a szám harmadrésze. Melyik lehet ez a szám?

84 Egy racionális szám felénél 3-mal nagyobb szám nagyobb, mint a harmadánál 3-mal kisebb szám. Melyik lehet ez a szám?

85 Egy racionális szám harmadánál 3-mal nagyobb szám nem nagyobb, mint a felénél 3-mal kisebb szám. Melyik lehet ez a szám?

86 Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $5x - 3 \leq 3 - x$;

b) $2 - x > 4(0{,}5 - x)$;

c) $\frac{1}{12} \cdot (4x - 3) > \frac{x + 2}{6}$;

d) $\frac{x + 5}{3} - 4 \geq 3x - \frac{5 + x}{2}$.

☺ **87** Négy pozitív számról a következőket tudjuk: $d < c$; $a + b = d + c$; $a + c < d + b$. Mi lehet a négy szám nagyság szerint növekvő sorrendje?

(Régi versenyfeladat alapján.)

Számokkal kapcsolatos feladatok

88 Melyik az a szám, amelynek tizedrészéhez hozzáadva az eredeti számot, 71,5-et kapunk?

89 Gondoltam egy számot. Ha a kétszereséhez 35-öt adunk, akkor az eredeti szám ötszörösénél 2-vel nagyobb számot kapunk. Melyik a gondolt szám?

90 Egy számban a tizedesvesszőt egy hellyel balra visszük, és az így kapott számhoz hozzáadjuk az eredeti számot. Ekkor 715-öt kapunk. Melyik számról van szó?

91 Egy számban először balra, majd az eredeti számhoz képest jobbra visszük a tizedesvesszőt. Az ily módon kapott két szám összege 4747. Melyik számról van szó?

92 Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 10. Ha a szám ötszöröséhez hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott szám tízszeresét, 1005-öt kaptunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

93 Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege 10. A százasok helyén egyes áll. Ha felcseréljük a tízesek és egyesek helyén álló számot, akkor a felcserélt szám 27-tel kisebb lesz. Mennyi az eredeti és a felcserélt szám összege?

94 Egy kétjegyű szám számjegyeinek különbsége 3, ha a jegyeket felcseréljük, a szám értéke 108%-kal nő. Melyik ez a szám?

95 Egy háromjegyű szám legnagyobb helyi értékű számjegye 5. Ha ezt a szám elejéről töröljük, és a szám végére írjuk, akkor 162-vel kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

E **96** Az $\overline{ab} - \overline{ba} = a$ egyenlőségben $\overline{ab}$ és $\overline{ba}$ egy-egy kétjegyű számot jelöl, amelyben az azonos betűk azonos számjegyeket jelölnek. Mekkora a b értéke?

E* **97** Hány olyan háromjegyű páros szám van, amelyben a százasok helyén álló számjegy megegyezik a tízesek és egyesek helyén álló két számjegy összegével?

(Abacus, 2003. december)

Keverési feladatok

98 Mennyi a tiszta kakaópor-tartalma 15 kg 17%-os kakaótartalmú cukrozott instant kakaónak?

99 Hány százalékos zsírtartalmú az a tejszín, amelynek 45 literében 13,5 liter tejzsír van?

100 Mennyi a cukortartalma 18 liter 21%-os cukortartalmú mustnak?

101 15 liter 45%-os alkoholhoz hány liter 20%-os alkoholt kell önteni, hogy 32%-os oldatot kapjunk?

102 62 kilogramm 4%-os sóoldatból mennyi vizet kell elpárologtatni, hogy 10%-os sóoldatot kapjunk?

103 Összeöntöttünk 42 kg 22%-os és 64 kg 18%-os cukortartalmú mustot. Hány százalék cukortartalmú lesz az összeöntés után kapott must?

104 100 kg tömegű 18%-os cukortartalmú musthoz 5 kg cukrot adtunk. Hány százalék cukortartalmú mustot kaptunk?

105 5 liter vízzel hígítottunk 32 liter 25%-os cukoroldatot. Hány százalékos lesz a hígított cukoroldat?

Mozgásos feladatok

106 Szarvasról elindul Zoli gyalog 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel Békésszentandrásra. Ugyanakkor Jani Békésszentandrásról 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel megy Szarvasra.

Mikor és hol találkoznak, ha a két helység távolsága 8 km, és a két fiú ugyanazon az úton megy?

107 Budapest határától, a 10-es kilométerkőtől indul egy teherautó az M7-es autópályán Siófok felé 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. 0,4 óra múlva a 10-es kilométerkőhöz ér egy személyautó, mely átlagosan 115 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad ugyancsak Siófok felé.

Mennyi idő múltán éri utol a személyautó a teherautót?

Hányas kilométerkő közelében történik az előzés?

Siófok előtt vagy után halad el a személyautó a teherautó mellett?

108 Két város között a távolságot a gyorsvonat 1,5 órával kevesebb idő alatt teszi meg, mint a tehervonat. A tehervonat sebessége 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a gyorsvonaté 95 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Hány óra alatt teszi meg a gyorsvonat a két város közötti távolságot?

Milyen messze van a két város egymástól?

* **109** Egy erdei futópálya hossza 6 km. A versenyzőket félpercenként indítják. Orsi negyediknek indult és 24 perc alatt futott be a célba. Márti Orsi után kettővel indult, és a célnál érte utol Orsit. Mekkora sebességgel futott Márti?



110 Egy 35 km-es túraútvonal egyik végéről 8^{30}-kor indult el egy turistacsoport $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, a másik végéről 10 órakor egy másik csoport $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Mikor találkoznak?

Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok *(Emelt szintű, választható tananyag)*

111 Juli és Kati feladata a konyha felmosása. Juli 10 perc alatt, Kati 12 perc alatt szokott végezni. Mennyi ideig tart a felmosás, ha együtt végzik?

112 Az építkezésen használt két aszfaltozógép egyike 125 perc alatt, másika 150 perc alatt tudná elvégezni egy út aszfaltozását.

Az úton egymással szemben egyszerre indítva őket, mennyi idő alatt végeznek az aszfaltozással?

Vegyes feladatok

113 Három szám úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 5 : 9. A középső szám 35. Melyik a másik két szám?

114 Egy háromszög egyik oldalának hossza 90%-a a középső nagyságú oldalnak, míg a harmadik oldal hossza 130%-a a középsőnek.

Mekkorák a háromszög oldalai, ha a kerülete 9,6 cm?

115 Egy deltoid oldalainak aránya 3 : 5, kerülete 72 cm. Mekkorák a deltoid oldalai?

116 Mekkora szöget zár be a derékszögű háromszög két hegyesszögének szögfelezője, ha a két hegyesszög

a) $\alpha = 22°;\ \beta = 68°;$ *b)* $\alpha = 40°;\ \beta = 50°;$ **c)* $\alpha;\ \beta$?

117 Megadtuk egy háromszög két szögének nagyságát. Számítsd ki a harmadik szögének a nagyságát és a megadott két szögének szögfelezői által bezárt szöget!

a) $\alpha = 28°;\ \beta = 96°;$ *b)* $\alpha = 42°;\ \beta = 82°;$ *c)* $\alpha = 53°;\ \beta = 71°.$

118 Egy téglalap egyik oldala négyszer olyan hosszú, mint a másik. Ha a rövidebb oldalt 20 m-rel megnövelnénk, a telek területe 400 m^2-rel lenne nagyobb. Mekkora az eredeti téglalap területe?

* **119** Egy téglalap területét 25%-kal megnöveljük. Ekkor egy olyan négyzetet kapunk, amelynek kerülete 60 cm. Mekkorák a téglalap oldalai, ha azok oldalai centiméterben mérve egész számok?

120 Egy egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt szög $10°$-kal kisebb, mint az alapon fekvő egyik szög háromszorosa. Mekkorák a háromszög szögei?

* **121** Az ABC háromszögben $AB = AC$, a szárak által bezárt szög $40°$. Hosszabbítsd meg az AB oldalt A-n túl az AB hosszával! Így keletkezik a D pont. Számítsd ki a BDC háromszög szögeit!

Kombinatorikai feladatok

122 Hányféle sorrendben lehet lerakni egy sorban az asztalra egy 10 Ft-os, egy 20 Ft-os és egy 50 Ft-os pénzérmét?

123 A szünidőben 4 egymást követő napon egy-egy (különböző) filmet szeretnék megnézni. Hányféle sorrendben nézhetem meg a négy filmet?

124 Hány különböző háromjegyű szám készíthető a

a) 4, 6, 8; *b)* 0, 2, 4; *c)* 2; 4; 4

számjegyek felhasználásával?

125 8 úszó áll a rajthoz egy bajnokságon. Hányféleképpen érhetnek célba?

126 Adottak a következő számkártyák: 7, 8, 3, 9, 0.

a) Melyik a legnagyobb 3-jegyű páratlan szám, amelyet a számjegyekből készíthetsz?

b) Melyik a legnagyobb 3-jegyű páros szám, amelyet a számjegyekből készíthetsz?

c) Melyik a legkisebb 3-jegyű páratlan szám, amelyet a számjegyekből készíthetsz?

d) Melyik a legkisebb 3-jegyű páros szám, amelyet a számjegyekből készíthetsz?

* *e)* Hány 3-jegyű szám készíthető a kártyák felhasználásával?

127 *a)* Hányféleképpen lehet 5 különböző könyvből kiválasztani 3-at egy ember részére?

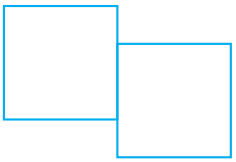
b) Hányféleképpen lehet 5 különböző könyvből kiválasztani 1-et egy verseny első, 1-et a második, 1-et a harmadik helyezettje számára?

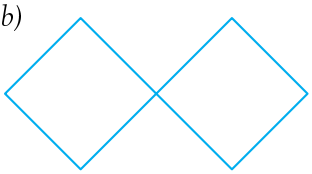
4. Transzformációk

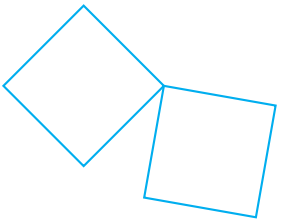
Egybevágósági transzformációk

128 Rajzolj egy derékszögű háromszöget! Tükrözd az oldalak egyeneseire és az oldalfelező pontjaira! Milyen síkidomokat kapsz az egyes esetekben az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével?

129 Az ábrán látható két négyzet milyen transzformációval vihető egymásba?

a) 

b) 

c) 

130 Mutasd meg, hogy az egyenlő szárú háromszöget ketté lehet vágni két egybevágó részre!

131 Melyik igaz, melyik hamis? Két háromszög egybevágó, ha egyenlő

(A) két oldaluk és az ezek által közbezárt szög;

(B) két oldaluk és az egyik oldalhoz tartozó súlyvonaluk;

(C) két oldaluk és a harmadik oldalhoz tartozó magasságuk.

132 Két egyenlő szárú, derékszögű háromszögnek egyenlő az átfogója. Egybevágó-e a két háromszög?

133 Két deltoid átlói páronként egyenlők. Egybevágó-e a két deltoid?

134 Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben: $A(-4;5)$, $B(3;2)$, $C(0;-3)$.

a) Tükrözd a háromszöget az x tengelyre! Add meg a tükörkép csúcsainak koordinátáit!

b) Tükrözd a háromszöget az y tengelyre! Add meg a tükörkép csúcsainak koordinátáit!

135 Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben: $A(-4;5)$, $B(3;2)$, $C(0;-3)$.

Tükrözd a háromszöget a $K(3;-2)$ pontra! Add meg a tükörkép csúcsainak koordinátáit!

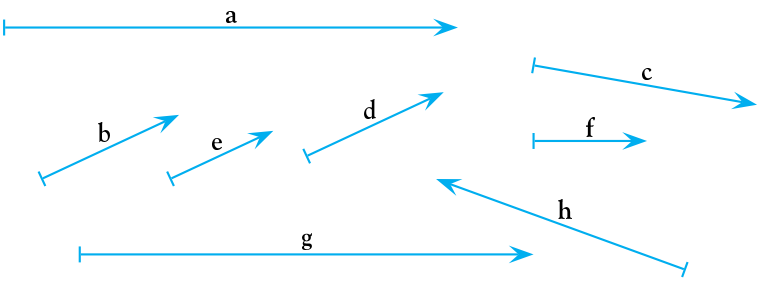
136 Két paralelogrammának egyenlők az átlói. Biztosan egybevágó a két paralelogramma?

137 Egy szabályos háromszög minden oldalán jelöld be a harmadolópontokat! Minden másodikat kösd össze egy-egy szakasszal! Milyen síkidomot kaptál?

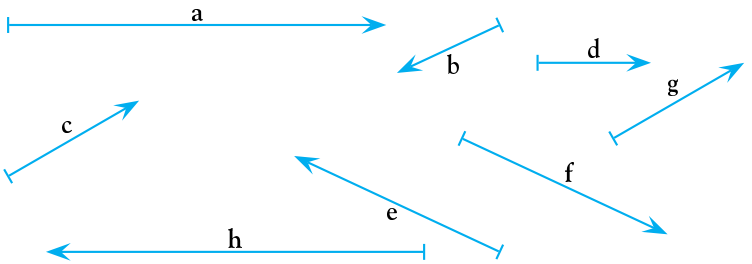
Vektorok

Vektorok bevezetése

138 Keresd meg az egyenlő vektorokat az ábrán!



139 Keresd meg az ellentett vektorokat az ábrán!



140 Sorold fel az $ABCD$ négyzet négy csúcsa által meghatározott vektorokat! A felsoroltak között melyek egyenlők és melyek ellentettek?

141 A kocka csúcsait a szokásos módon jelölve: A, B, C, D, E, F, G, H. Add meg a csúcsok segítségével az összes olyan vektort, amely egyenlő az

a) $\overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{BG}$; *c)* $\overrightarrow{GA}$ vektorral!

142 Adott négy különböző pont úgy, hogy nincsenek egy síkon. A négy pont által meghatározott hat vektor és ezek ellentettje között lehetséges-e, hogy vannak egyenlő vektorok is?

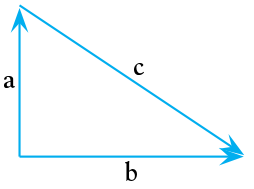
143 Rajzold meg a koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha $A(-2;1)$, $B(4;-1)$! Rajzold meg az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ vektort, ha $C(1;3)$, $E(-4;5)$, $G(5;28)$! Add meg a D, F és H pontok koordinátáit!

144 Rajzold meg a koordináta-rendszerben a $\overrightarrow{PQ}$ vektort, ha $P(2;3)$, $Q(5;1)$! Rajzold meg a $\overrightarrow{PQ}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{MN}$ vektort, ha $L(2;7)$, $S(-1;8)$, $N(23;-7)$! Add meg a K, R és M pontok koordinátáit!

145 Rajzold meg a koordináta-rendszerben a $\overrightarrow{KL}$ vektort, ha $K(-1;5)$, $L(3;-1)$! Add meg az origó kezdőpontú vele ellentett vektor végpontját!

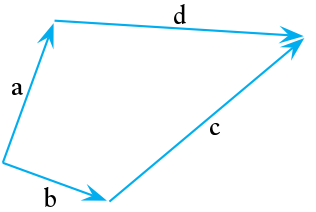
Vektorok összeadása

146 Másold le az ábrát, és rajzold meg a következő összegeket:



a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; *b)* $\mathbf{b}+\mathbf{c}$; *c)* $\mathbf{a}+\mathbf{c}$!

147 Az ábrán látható módon adott négy vektor: **a**, **b**, **c**, **d**. Másold le az ábrát!



a) Az összes lehetséges módon válassz ki közülük két vektort, majd szerkeszd meg minden esetben az összegüket! Hány szerkesztés ez összesen?

b) Szerkeszd meg az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$ vektort! Hogyan kapod meg a leggyorsabban ezt az összeget?

148 A kocka egyik csúcsából kiinduló három vektort add össze páronként! Szemléltesd rajzzal a kapott összegeket!

149 A téglatest egyik csúcsából kiinduló három vektort add össze! Szemléltesd rajzzal a kapott összeget!

150 Rajzolj egy vektort! Adj meg három olyan vektort, amelyek azonos hosszúságúak, az összegük pedig az adott vektorral egyenlő!

151 Legyen $ABCDEF$ egy tetszőleges, középpontosan szimmetrikus hatszög! A középpont legyen K pont! Igaz-e, hogy

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$;

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD}$;

(C) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}$;

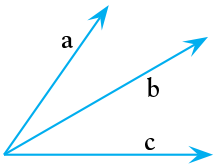
(D) $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KD}$?

152 Rajzolj négy olyan különböző hosszúságú vektort, amelyek közül háromnak az összege a negyedikkel egyenlő!

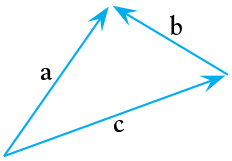
* **153** Az $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$ lapjának középpontja P, $ADHE$ lapjának középpontja Q, $ABFE$ lapjának középpontja R. Ha az $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$ vektornak az A pont a kezdőpontja, akkor hol van a végpontja?

Vektorok kivonása

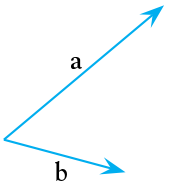
154 Szerkeszd meg az **a**−**b**, **b**−**c**, **c**−**a** vektorokat! Mennyi a három különbség összege?



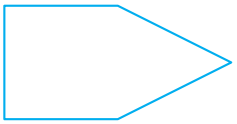
155 Add meg az **a** − **b**, **a** − **c**, **c** − **a**, **b** − **a** vektorokat!



156 Szerkeszd meg a 2**a** − **b**, **a** − 2**b** vektorokat! Azonos hosszúságú-e a kapott két vektor?



157 Az ábrán látható öt szakaszt oszd két csoportba, majd irányítsd úgy azokat, hogy az egyik csoportban lévők összege egyenlő legyen a másik csoportban lévők összegének ellentettjével!



158 Egy szabályos nyolcszög egyik csúcsából a többi hét csúcsba mutató vektorok legyenek sorban **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**. Összeadás, kivonás és ellentett segítségével írj összefüggéseket a hét vektor között!

159 Legyen $ABCDEF$ egy szabályos hatszög! A középpontja legyen K pont! Igazak-e az alábbi állítások?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AK} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$;

(B) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{FE} = 2 \cdot \overrightarrow{KB}$;

(C) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = 3 \cdot \overrightarrow{AK}$;

(D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$.

160 Ha két vektor nem egyenlő hosszú, akkor az összegük és a különbségük nem lehet merőleges egymásra. Miért igaz ez a kijelentés?

* **161** Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Igaz-e, hogy

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{0}$; *b)* $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{SC}$?

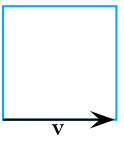
Eltolás

162 Az ábrán látható sokszögeket másold le a füzetedbe, majd told el a $\mathbf{v}$ vektorral!

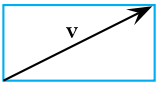
a)



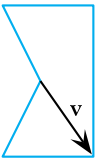
b)



c)



d)



163 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja K. A hét pont által meghatározott szakaszokat rendezd olyan halmazokba, hogy az egy halmazban lévő szakaszok eltolással egymásba vihetők legyenek!

164 Rajzolj egy ABC háromszöget, és adj meg két, nem párhuzamos $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektort! Az ABC háromszöget told el a $\mathbf{v}_1$ vektorral, az így kapott $A_1B_1C_1$ háromszöget pedig a $\mathbf{v}_2$ vektorral! Ekkor kapod az $A_2B_2C_2$ háromszöget. Az ABC háromszöget told el a $\mathbf{v}_2$ vektorral! Ekkor kapod az $A_3B_3C_3$ háromszöget. Milyen vektorral kell eltolnod az

a) ABC háromszöget, hogy az $A_2B_2C_2$ háromszögbe kerüljön;

b) $A_3B_3C_3$ háromszöget, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszögbe kerüljön?

165 Rajzolj egy négyzetet, majd told el az egyik csúcsából a középpontjába mutató vektorral! Az eredeti és az eltolt négyzetnek mi a közös része?

* **166** Az ABC szabályos háromszöget az A csúcsából induló vektorral eltoljuk. Az eltolt és az eredeti háromszög közös része egy olyan szabályos háromszög, amelynek az oldala fele az eredeti háromszögnek. Egy rajzon szemléltesd, hogy hol lehet az eltolás vektorának végpontja!

167 Rajzolj egy szöget, a két szára között pedig egy szakaszt, amely egyik szárral sem párhuzamos! Az adott szakasz egy paralelogramma oldala. Szerkeszd meg a paralelogrammát, ha a másik két csúcsa a szög egy-egy szárára illeszkedik!

168 Egy téglalap alapú szobában egy kör alakú asztalt szeretnénk betolni a sarokba. A felülnézeti ábrán szerkeszd meg az eltolás vektorát!



169 A koordináta-rendszerben adott egy háromszög három csúcsa: $A(-2;-1)$, $B(4;1)$, $C(2;6)$.

a) Told el az x tengellyel párhuzamosan jobbra 4 egységgel! Add meg az eltolt háromszög csúcsainak koordinátáit!

b) Told el az y tengellyel párhuzamosan lefelé 2 egységgel! Add meg az eltolt háromszög csúcsainak koordinátáit!

c) Told el az origóból a $P(3;-1)$ pontba mutató vektorral! Add meg az eltolt háromszög csúcsainak koordinátáit!

170 A koordináta-rendszerben rajzolj egy 2 egység sugarú kört, amelynek $(-3;-4)$ a középpontja! Mi lesz annak az origóból induló vektornak a végpontja, amellyel eltolva ezt a kört, mindkét tengelyt érintő kört kapunk? Hány ilyen vektor van?

Pont körüli elforgatás

(Választható tananyag)

171 Az $ABCD$ négyzetet forgasd el az A pont körül 45°-kal! Az eredeti és a képként kapott négyzetnek mi a közös része?

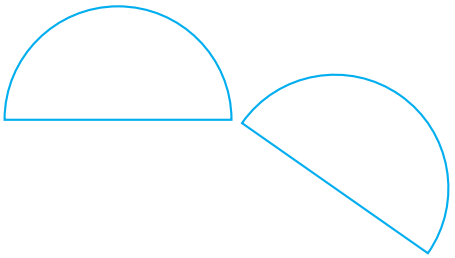
172 Hány fokot fordul az óra kismutatója, ha a nagymutatója

a) 90°-ot; *b)* 270°-ot fordul?

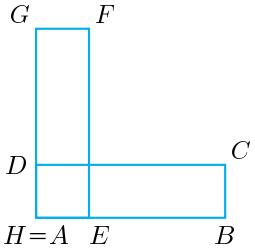
173 Hány fokot fordul az óra nagymutatója, ha a kismutatója

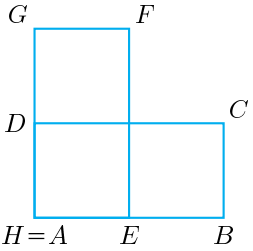
a) 15°-ot; *b)* 37,5°-ot; *c)* 3° 45′-et fordul?

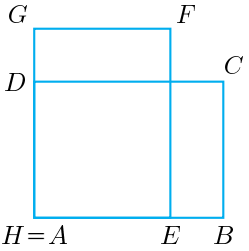
174 Másold le az ábrát a füzetedbe! Szerkeszd meg azt a pontot, amely körül egymásba forgatható a két félkör!



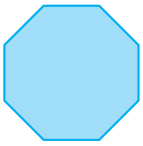
175 A következő rajzokon az $ABCD$ téglalapot szeretnénk elfordítani az $EFGH$ téglalapba. Hol van a forgatás középpontja? Mekkora a forgatás szöge?

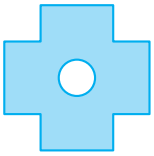






176 Hány fokos forgásszimmetriát figyelhetsz meg a következő ábrákon?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

177 Vegyél fel egy szöget és a szárai között egy A pontot! Az ABC egyenlő szárú háromszögnek az alappal szemközti csúcsa az A, ennél a csúcsnál 45°-os szöge van. Tudjuk még, hogy a háromszög másik két csúcsa az adott szög egy-egy szárára illeszkedik. Szerkeszd meg a háromszöget!

178 Két négyzetnek közös az egyik oldala. Milyen forgatás viszi az egyiket a másikba?

* **179** Két szabályos hatszögnek közös az egyik oldala. Mekkora szögű forgatás viheti az egyiket a másikba?

180 Adott a P és a Q pont. Szerkeszd meg a P pontot Q-ba vivő forgatás K középpontját, ha a forgatás szöge

a) 90°; *b)* −60°; *c)* 150°!

A hasonlóság

Középpontos hasonlóság

181 Vegyél fel egy ABC háromszöget! Szerkeszd meg a középpontosan hasonló képét, ha a hasonlóság

a) középpontja A, aránya 3; *b)* középpontja B, aránya $\frac{1}{2}$;

c) középpontja C, aránya -2; *d)* középpontja A, aránya $-0{,}25$!

A négy arány közül melyik határoz meg kicsinyítést?

182 Vegyél fel egy $ABCD$ négyszöget és rajta kívül egy K pontot! Szerkeszd meg a középpontosan hasonló képét, ha a hasonlóság középpontja a K és az aránya

a) 3; *b)* 2,5; *c)* $-0{,}125$; *d)* $-0{,}75$!

A négy arány közül melyik határoz meg nagyítást?

183 Kicsinyíts felére az átlói metszéspontjából egy

a) négyzetet; *b)* rombuszt; *c)* deltoidot!

Hogyan változik az egyes síkidomok kerülete, területe?

184 Nagyíts az átlói metszéspontjából háromszorosára egy

a) téglalapot; *b)* paralelogrammát!

Hogyan változik az egyes síkidomok kerülete, területe?

185 Kicsinyíts egy háromszöget minden csúcsából harmadára! Az eredeti háromszögből vágd le a képháromszögeket!

a) Milyen síkidomot kapsz ekkor?

b) Milyen szimmetriával rendelkezik ez a síkidom?

186 Vegyél fel egy háromszöget és az egyik oldalával párhuzamosan egy szakaszt! Szerkeszd meg azt a pontot, amelyből a háromszöget középpontos hasonlósággal transzformálva az egyik oldala az adott szakaszba megy át! Hány középpont szerkeszthető?

187 A koordináta-rendszerben adott az ABC háromszög: $A(-4;2)$, $B(2;-2)$, $C(2;4)$. Add meg az $A'B'C'$ háromszög koordinátáit, ha az ABC háromszögből origó középpontú

a) 0,5-szeres kicsinyítéssel kapjuk;

b) -2-szeres nagyítással kapjuk!

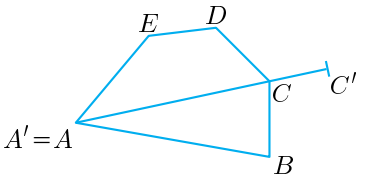
188 A koordináta-rendszerben adott az ABC háromszög: $A(-3;1)$, $B(5;-1)$, $C(1;5)$. Add meg az $A'B'C'$ háromszög koordinátáit, ha az ABC háromszögből $K(1;3)$ középpontú

a) 2-szeres nagyítással kapjuk; *b)* $-1{,}5$-szeres nagyítással kapjuk!

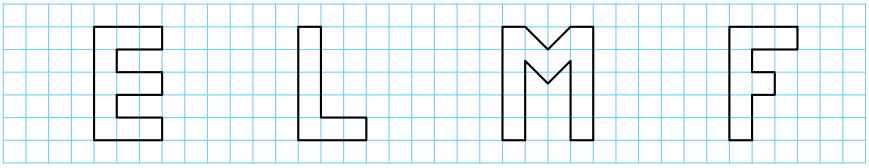
* **189** Vegyél fel egy 3 cm sugarú $60°$-os körcikket! Szerkessz a körcikkbe négyzetet úgy, hogy a négyzet csúcsai a körcikk határvonalára illeszkedjenek! Hány megoldást találtál?

A középpontos hasonlóság tulajdonságai

190 Az ábrán látható $ABCDE$ ötszögnek meghosszabbítottuk az AC átlóját. Szerkeszd meg a hozzá középpontosan hasonló ötszöget, ha az új ötszög átlója $A'C'$!



191 A négyzethálóra rajzolt betűket nagyítsd kétszeresére! Az így kapott sokszögek területe hányszorosa az eredeti sokszögeknek?



192 Egy kör és egy feleakkora sugarú kör kívülről érinti egymást. Hol lehet annak a középpontos hasonlóságnak a K középpontja, amely az egyik kört a másikba viszi?

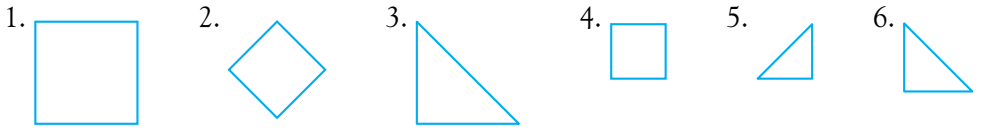
193 Az ABC derékszögű háromszögben C-nél van a derékszög. Az átfogóhoz tartozó magasság talppontját T-vel jelöljük. Az A pontból alkalmaztunk egy $\lambda = \frac{4}{3}$ arányú középpontos hasonlóságot. A képpontokat a szokásos módon, vesszővel jelöltük. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

(A) $BC \parallel B'C'$; (B) $CT \parallel C'T'$; (C) $TC \perp A'C'$;

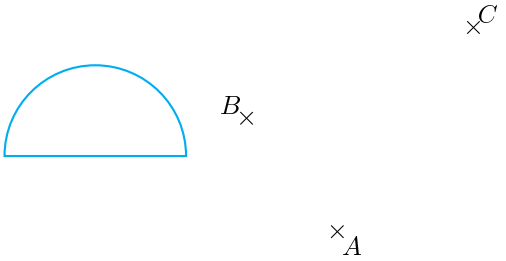
(D) $AB \perp C'T'$; (E) $\frac{B'C'}{BC} = \frac{4}{3}$; (F) $T'C' = \frac{4}{3} \cdot BC$;

(G) $ACT \sphericalangle = A'C'T' \sphericalangle$; (H) $ACT \sphericalangle = A'B'C' \sphericalangle$.

194 Keress középpontosan hasonló síkidomokat az ábrán!



* **195** Az ábrán egy nyaraló udvarának vázlata látható. A félkör egy gyermekmmedence, a három pont egy-egy fa helyét jelöli. A gyermekmedencével középpontosan hasonló medencét szeretnének építeni a felnőtteknek is. A három fa kivágása nélkül tervezd meg a medencét! A medence íves partján kettő, az egyenes mentén egy fa legyen!



196 Szerkessz a háromszögbe olyan négyzetet, amelynek csúcsai a háromszög oldalaira esnek! Hány megoldást találsz?

197 *a)* Két háromszög oldalai páronként párhuzamosak. Biztosan mondhatjuk, hogy a két háromszög középpontosan hasonló?

b) Két ötszög oldalai páronként párhuzamosak. Biztosan mondhatjuk, hogy a két ötszög középpontosan hasonló?

Szerkesszünk középpontosan hasonló képet!

198 Adott az $ABCD$ négyszög és rajta kívül a K középpont, továbbá az A csúcs A' képe. Szerkeszd meg az $ABCD$ négyszög középpontosan hasonló képét!

199 Az $ABCD$ négyszög A csúcsának A', B csúcsának B' pont a képe. Az AB szakasz párhuzamos az $A'B'$ szakasszal, de nem egyenlő hosszúak. Szerkeszd meg az $ABCD$ négyszög középpontosan hasonló képét!

200 Szerkeszd meg az A pont képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja és

a) $\lambda = \frac{11}{2}$; *b)* $\lambda = \frac{9}{4}$; *c)* $\lambda = -\frac{7}{8}$; *d)* $\lambda = -\frac{5}{4}$!

201 Szerkeszd meg a P pont képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja és

a) $\lambda = \frac{7}{3}$; *b)* $\lambda = \frac{2}{5}$; *c)* $\lambda = -\frac{1}{7}$; *d)* $\lambda = -\frac{5}{6}$!

202 Az adott KL szakaszt vágd két részre egy M ponttal úgy, hogy

a) $KM : ML = 1 : 7$; *b)* $KM : ML = 9 : 7$!

203 Az adott AB szakaszt vágd két részre egy C ponttal úgy, hogy

a) $AC : CB = 3 : 4$; *b)* $AC : CB = 3 : 8$!

204 Az adott PQ szakasz Q-n túli meghosszabbításán szerkeszd meg azt az R pontot, amelyre

a) $PR : RQ = 5 : 4$; *b)* $PR : RQ = 5 : 3$;

c) $PR : RQ = 8 : 3$; *d)* $PR : RQ = 8 : 1$!

205 Rajzolj egy téglalapot, jelöld ki az egyik csúcsát! Határozd meg a határvonalának azt a három pontját, amelyek esetén a négy pont a határvonalat négy egyenlő részre vágja!

206 Rajzolj egy négyzetet és egy téglalapot! A téglalapot nagyítsd vagy kicsinyítsd akkorára, hogy a kerülete egyezzék a négyzet kerületével!

207 Két négyzet középpontos hasonlóságának aránya $\frac{4}{5}$. Egy-egy oldaluk hosszának összege 8,1 cm. Mekkora a két négyzet területének összege?

Hasonlóság

208 Az ABC és az $A'B'C'$ háromszög hasonló.

a) $a = 16$ cm, $b = 13$ cm, $\gamma = 46°$, $b' = 39$ cm. Határozd meg a' és γ' értékét!

b) $a = 10$ m, $\beta' = 58°$, $\gamma' = 41°$, $a' = 3{,}42$ dm. Határozd meg β és γ értékét!

c) $a = 25$ cm, $c = 17{,}5$ cm, $c' = 12{,}5$ cm, $b' = 3$ cm. Határozd meg b és a' értékét!

209 Az ABC háromszög AB és AC oldalát metszi egy egyenes a C', illetve a B' pontban. A $B'C'$ egyenes nem párhuzamos a BC egyenessel. Tudjuk továbbá, hogy ABC háromszög hasonló $AB'C'$ háromszöghöz, és $AC' = 12$ cm, $AB = 34{,}8$ cm, $AB' = 16$ cm. Számítsd ki az AC oldal hosszát!



210 Egy vízszintes fennsíkon álló kilátó 25 méter hosszú árnyékot vetett. Ugyanekkor a vándor függőlegesen álló, 126 cm hosszú botjának az árnyéka 150 cm volt. Milyen magas a kilátó?

* **211** Az ABC háromszög AB és AC oldalát metszi egy egyenes a C', illetve a B' pontban. A $B'C'$ egyenes nem párhuzamos a BC egyenessel.
Tudjuk továbbá, hogy
$AB = 42$ cm,
$AC = 35$ cm,
$AB' = 34{,}32$ cm,
$AC' = 28{,}6$ cm.
Számítsd ki a $B'C'$ oldal hosszát, ha $BC = 21$ cm!



212 Egy háromszög oldalainak aránya 5 : 9 : 11. A hozzá hasonló háromszög kerülete 117,5 cm. Mekkorák ennek a háromszögnek az oldalai?

213 Egy téglalap két különböző hosszúságú oldalának aránya 3 : 10. A hozzá hasonló téglalap területe 8670 cm^2. Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai?

214 Egy háromszög oldalainak a hossza 2,3 m, 2,8 m, 3,1 m. Egy hozzá hasonló háromszögben a leghosszabb és a legrövidebb oldal összege 81 cm. Mekkorák az új háromszög oldalai?



215 Az 1 : 3 000 000 arányszámú térképen két város távolsága 5,5 cm. Milyen messze van a két város egymástól a valóságban?

216 Az 1 : 3 500 000 arányszámú térképen megrajzoltuk az útvonalunkat, amit autóval tettünk meg. Ez a vonal kb. 3,5 cm hosszú. Mennyit autóztunk a valóságban?

217 Két város távolsága 90 km légvonalban. A távolságuk egy térképen 3,75 cm. Milyen arányszám szerepel a térképen?

218 Egy trapéz oldalai $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm, $d = 5$ cm. Az a és a c oldalak párhuzamosak. Számítsd ki a kiegészítő háromszög ismeretlen oldalait!

5. A Pitagorasz-tétel

Mérjük meg a hosszát!

219 Szerkessz téglalapot, ha oldalainak hossza $a = 6$ cm és $b = 3$ cm! Mérd meg milliméter pontossággal az átló hosszát!

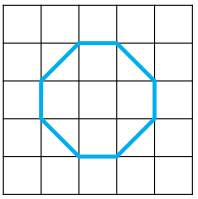
220 Szerkessz négyzetet, ha az oldala 2 cm hosszúságú! Mérd meg milliméter pontossággal az átló hosszát!

221 Szerkessz négyzetet, ha az átlója 3 cm hosszúságú! Mérd meg milliméter pontossággal az oldalának hosszát!

222 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha a befogói 2 cm és 3 cm hosszúságúak! Mérd meg milliméter pontossággal az átfogó hosszát!

223 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha egyik befogójának hossza 4 cm, az átfogójának hossza pedig $c = 5{,}5$ cm! Mérd meg milliméter pontossággal a hiányzó befogó hosszát!

224 A négyzetháló párhuzamos egyenesei 1 cm-re vannak egymástól. Az ábrán látható módon nyolcszöget rajzoltunk a négyzethálóra.



a) Mekkora a területe?

b) Milyen szimmetriákat figyelhetsz meg az ábrán?

c) Szerkessz, és milliméter pontossággal mérd meg a kerületét!

225 Mekkora a területe a 3 cm-es alapú és 5 cm-es szárú háromszögnek? A hiányzó adatot szerkesztéssel és méréssel határozd meg!

226 Mekkora a területe a 2 cm oldalú szabályos hatszögnek? A hiányzó adatot szerkesztéssel és méréssel határozd meg!

A Pitagorasz-tétel

227 Számítsd ki a derékszögű háromszög átfogójának hosszát, ha a befogók

a) $a = 13$ cm és $b = 84$ cm;

b) $a = 9$ cm és $b = 40$ cm;

c) $a = 24$ dm és $b = 27{,}5$ dm;

d) $a = \frac{1}{5}$ m és $b = 2{,}1$ dm!

228 Számítsd ki a derékszögű háromszög hiányzó befogójának hosszát, ha

a) $a = 56$ cm és $c = 106$ cm; *b)* $b = 14{,}7$ mm és $c = 24{,}5$ mm;

c) $a = 7{,}8$ dm és $c = 17{,}8$ dm; *d)* $b = 2{,}88$ m és $c = 4{,}8$ m!

229 Számítsd ki a téglalap átlójának hosszát, ha az oldalai

a) $a = 3$ cm és $b = 7$ cm; *b)* $a = 15$ mm és $b = 22$ mm;

c) $a = 2$ m és $b = 5{,}4$ m; *d)* $a = 17$ dm és $b = 23$ dm!

230 A téglalap középpontja az egyik oldalától 3,2 méterre található, a csúcsoktól mért távolsága pedig 5 méter. Mekkorák a téglalap oldalai?

231 Melyik háromszög derékszögű?

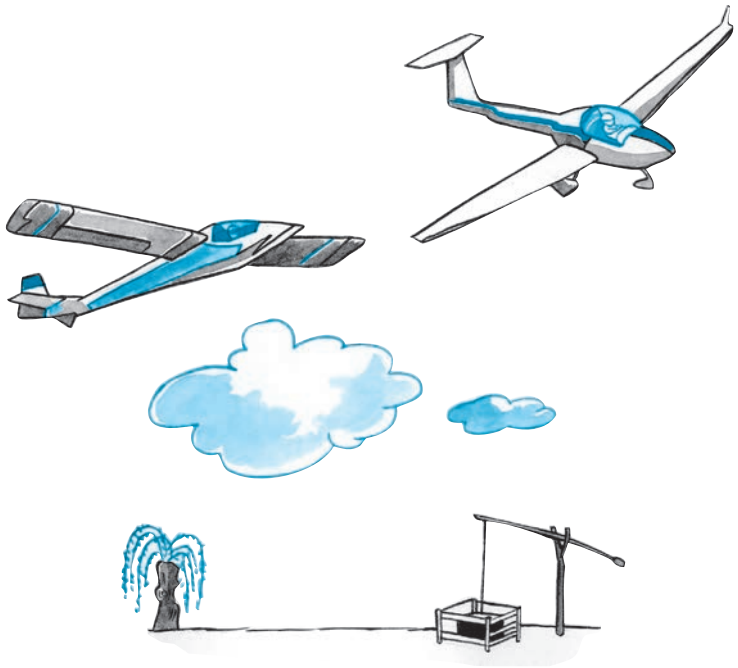
a) $a = 22$ cm, $b = 120$ cm és $c = 122$ cm.

b) $a = 4{,}8$ cm, $b = 5{,}5$ cm és $c = 7{,}2$ cm.

c) $a = 10$ cm, $b = \sqrt{44}$ cm és $c = 12$ cm.

d) $a = \sqrt{123}$ cm, $b = \sqrt{238}$ cm és $c = 19$ cm.

232 Két vitorlázórepülőt látunk a magasban. Amikor az egyik a magányosan álló fűzfa fölött a talajhoz képest 96 méter magasan repül, akkor a másik a gémeskút fölött van 168 méterre. A fűzfa és a gémeskút távolsága vízszintesen fél kilométer. Mekkora a távolság ebben a pillanatban a két repülő között?



233 András és Balázs szomszédok. Mindketten elindultak a kertkapujuknál lévő postaládához. A járda, amin haladnak, merőleges az utcára. A két postaláda távolsága 15 méter. Andrásnak még 5 métert, Balázsnak pedig 13 métert kell megtenni a postaládáig. Milyen messze vannak egymástól?

234 Egy húrtrapéz alapjainak hossza 30 cm és 16 cm. A párhuzamos oldalak távolsága 7 cm.

a) Mekkora a trapéz területe? *b)* Mekkora a trapéz kerülete?

c) Mekkora a köré írt kör sugara?

235 Egy húrtrapéz alapjainak hossza 30 cm és 16 cm. A párhuzamos oldalak távolsága 23 cm.

a) Mekkora a trapéz területe? *b)* Mekkora a trapéz kerülete?

c) Mekkora a köré írt kör sugara?

A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban

236 Add meg a d szakasz hosszának pontos értékét, ha d

a) a 12 cm oldalú négyzet átlója;

b) a 16 cm átlójú négyzet oldala;

c) a 32 cm oldalú szabályos háromszög magassága;

d) a 24 cm magasságú szabályos háromszög oldala!

237 Egy egyenlő szárú háromszögben az alap a, a szárak b, az alaphoz tartozó magasság m_a hosszúságú. Számítsd ki a hiányzó szakaszok hosszát!

a) $a = 18$ cm, $b = 35$ cm; *b)* $a = 14$ cm, $m_a = 34$ cm;

c) $b = 42$ cm, $m_a = 36$ cm.

* **238** Egy egyenlő szárú háromszögben az alap a, a szárak b, az alaphoz tartozó magasság m_a hosszúságú. Számítsd ki a szárhoz tartozó magasság hosszát!

a) $a = 56$ cm, $b = 53$ cm; *b)* $a = 26$ cm, $m_a = 84$ cm.

239 Az ABC derékszögű háromszögben C-nél van a derékszög. A CB szakaszon található P pontra teljesül, hogy ACP háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz. Az eredeti háromszög befogói 15 cm és 32 cm hosszúak. Mekkora az AP hossza?

240 Egy húrtrapéz alapjainak hossza 24 cm és 16 cm, a magasságának hossza pedig 12 cm. Számítsd ki a trapéz szárainak hosszát!

241 Egy húrtrapéz alapjainak hossza 42 cm és 28 cm, a szárainak hossza pedig 25 cm.

a) Számítsd ki a trapéz magasságát!

b) Számítsd ki a trapéz területét!

242 Mekkora az AB szakasz hossza, ha

a) $A(2;12)$, $B(17;4)$;

b) $A(-5;11)$, $B(51;-22)$;

c) $A(-2;-1)$, $B(7;2)$;

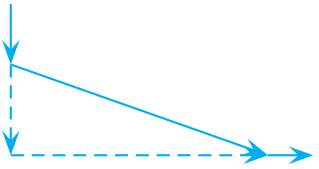
d) $A(-3;4)$, $B(0;-2)$?

243 Egy 2,5 méteres gerendát döntöttünk egy falhoz. A gerenda éppen a fal tetejéhez támaszkodik, az alja pedig 120 cm-re van a faltól. Milyen magas a fal?



* **244** Egy falióra ingája egy 38 cm széles szekrénykében mozog az egyik szélétől a másikig. Az inga alsó pontja a szélső helyzetben 3 cm-rel van magasabban, mint amikor függőlegesen, középen áll. Milyen hosszú az inga?

245 Egy parkban egymásra merőleges két sétányt alakítottak ki. A gyalogosok azonban nem mentek el a metszéspontig, hanem lerövidítették az utat. Az ábrán látható módon 9 méterrel korábban bekanyarodtak, és kitapostak egy ösvényt. A nem használt sétánydarabok közül a hosszabb pontosan 1 méterrel rövidebb, mint a kitaposott ösvény.



a) Hány métert rövidítenek így az emberek?

b) Milyen hosszú a kitaposott ösvény?

246 Az ABC háromszög derékszögű-e?

a) $A(1;5)$, $B(5;-2)$, $C(-1;2)$;

b) $A(-6;1)$, $B(2;6)$, $C(-2;-1)$.

247 Egy kör középpontjától 10 cm-re lévő pontból $4\cdot\sqrt{5}$ cm hosszú érintőszakasz húzható a körhöz. Mekkora a kör sugara?

248 Egy 10 cm sugarú körhöz egy pontból 10,5 cm hosszú érintőszakasz húzható. Milyen messze van a pont a körvonaltól?

249 Mekkora érintőszakasz húzható egy 14 cm sugarú körhöz a körvonaltól 12,5 cm-re található külső pontból?

A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban

(Emelt szintű, választható tananyag)

250 Add meg a d szakasz hosszának pontos értékét, ha d

a) a 12 cm élű kocka testátlója;

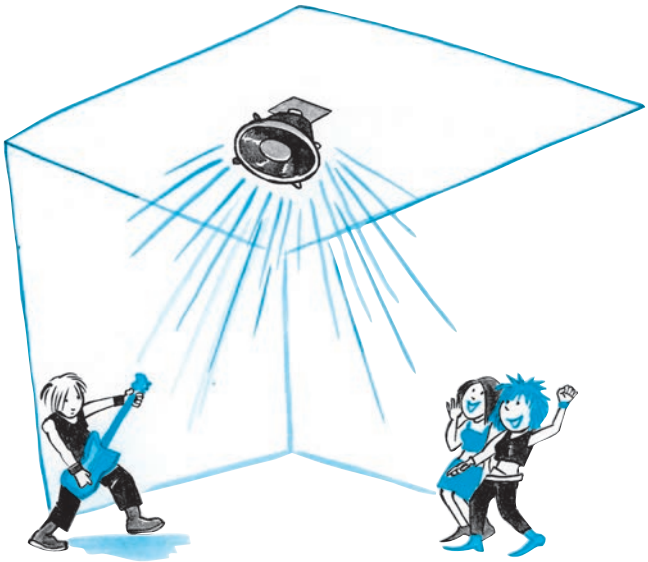
b) a 8 cm, 12 cm és 16 cm élű téglatest leghosszabb lapátlója;

c) a 11 cm, 14 cm és 20 cm élű téglatest testátlója!

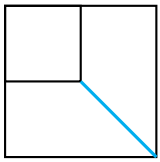
251 Az $ABCDEFGH$ kocka éle 16 cm. Számítsd ki BDE háromszög területét!

252 Egy függőlegesen álló oszlopot négy egyenlő hosszúságú kötéllel rögzítettek. Az oszlop tetejétől induló kötelek másik vége a vízszintes talajon egy 4 méter oldalú négyzetet alkotnak. Ezek a rögzítési pontok az oszlop tetejétől 6 méterre vannak. Milyen magas az oszlop?

253 A 8 méterszer 8 méteres terem mennyezetén, középen van egy hangszóró. A terem magassága 3 méter. A teremben a hang terjedési sebessége 331,8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Add meg normálalakban, hogy hány másodperc elteltével hallható a hang a terem alsó sarkaiban!



* **254** A rajz egy dobozt ábrázol felülnézetben. Az alsó lapja 12 cm, a felső lapja 6 cm élű négyzet. A két négyzetlap párhuzamos, a távolságuk 6 cm.



a) Tervezd meg a test hálózatát, és számítsd ki a test felszínét!

b) Milyen hosszú a színessel jelölt él?

255 Egy doboz alaplapja 12 cm átlójú, a fedőlapja pedig 8 cm átlójú négyzet. A négy oldallapja olyan húrtrapéz, melyeknek szárhossza 6 cm. Milyen magas a doboz?

256 A téglatest alakú doboz élei: 12 cm, 20 cm és 8 cm. Milyen messze van a csúcsoktól a téglatest középpontja?

* **257** A 3 méterszer 4 méteres szoba magassága 2,8 méter. A szoba testátlójának két végét vezetékkel kell összekötni, de a vezeték nem mehet a levegőben. Mekkora a legrövidebb vezeték, amivel megvalósítható az összekötés?

258 Egy téglatest testátlója 54,6 cm. Éleinek aránya: 3 : 4 : 12. Mekkorák az élei?

Pitagoraszi számhármasok

(Emelt szintű, választható tananyag)

259 Lehet-e egy pitagoraszi háromszög valamely oldalának hossza

a) 1; *b)* 2; *c)* 3?

* **260** Egy háromszög oldalait gyufaszálból raktuk ki. Az oldalak hossza 13, 20 és 21 gyufaszál hosszúságú. Van-e a háromszögnek olyan magassága, amely kirakható egész gyufaszálból?



261 Melyik derékszögű háromszög pitagoraszi? (Az a, b befogót, a c átfogót jelent.)

a) $a = 48$, $b = 55$;

b) $a = 12$, $c = 37$.

262 Egy rombusz oldala 51 cm, a rövidebb átlója 48 cm hosszú. Ezt az átlót 4 cm-rel meghosszabbítjuk, de közben csak egy csúcsnak változtatjuk a helyét. Mutasd meg, hogy az eredeti négyszög és az új négyszög minden oldala és minden átlója egész hosszúságú! Mekkorák ezek a hosszúságok?

* **263** Add meg az oldalait annak a pitagoraszi háromszögnek, amelynek a kerülete 40 egység, a területe 60 területegység!

6. A számológép

Mit tud a számológép?

264 Végezd el a következő műveleteket számológép segítségével!

a) $4{,}7 + 2{,}43$;
b) $2{,}75 - 3{,}16$;
c) $5{,}43 - (-2{,}8)$;
d) $-7{,}16 + 5{,}416$;
e) $-43{,}7 + (-25{,}4)$;
f) $-52{,}6 - (-16{,}305)$;
g) $5{,}7 \cdot 12{,}64$;
h) $\frac{5}{3} \cdot 5{,}7$;
i) $\frac{12}{7} \cdot (-4{,}85)$;
j) $-7{,}6 : \left(-\frac{2}{3}\right)$.

265 Végezd el a következő műveleteket számológép segítségével!

a) $12{,}7 \cdot \left(504{,}3 - \frac{2}{3}\right) + (-5{,}8)$;
b) $\frac{4}{3} : (6{,}5 - 2{,}8 \cdot 1{,}6) + \frac{2}{7}$;
c) $48{,}25 - (5{,}8 \cdot (-3{,}65) + 1{,}5)$.

Négyzetgyök

266 Számítsd ki a következő számok négyzetgyökét számológép segítségével! Az eredményt elég két tizedesjegy pontossággal megadni.

a)	3;	30;	300;	3000;
b)	4;	40;	400;	4000;
c)	0,1;	1;	10;	100;
d)	15;	150;	1500;	15 000.

267 Számítsd ki a megadott számok négyzetgyökét! Mit veszel észre?

a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{12 \cdot 3}$;

b) $\sqrt{5}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{5 \cdot 20}$;

c) $\sqrt{8}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{8 \cdot 18}$;

d) $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{4 \cdot 9}$;

e) $\sqrt{4}$ $\sqrt{36}$; $\sqrt{4 \cdot 36}$.

E* **268** Írj be egy 1-nél nagyobb számot a számológépedbe! Vedd a négyzetgyökét! Aztán az eredménynek ismét vedd a négyzetgyökét! Folytasd a lépéseket, amíg két egymás utáni lépésben ugyanazt a számot nem kapod! Melyik ez a szám?

Próbáld ki más kiinduló számmal is! Mit gondolsz, mi történik, ha 1-nél kisebb (de pozitív) számmal végzed el az eljárást? Azt is próbáld ki!

Eljárások

(Olvasmány, választható tananyag)

269 Hogyan változik a szorzat?

a) $39 \cdot 32 = \boxed{} \cdot 16 = \boxed{} \cdot 8 = \boxed{} \cdot 4 = \boxed{} \cdot 2 = \boxed{}$.

$: 2$

$\cdot 2$

b) $53 \cdot 32 = \boxed{} \cdot 16 = \boxed{} \cdot 8 = \boxed{} \cdot 4 = \boxed{} \cdot 2 = \boxed{}$.

c) $19 \cdot 32 = \boxed{} \cdot 16 = \boxed{} \cdot 8 = \boxed{} \cdot 4 = \boxed{} \cdot 2 = \boxed{}$.

d) $51 \cdot 32 = \boxed{} \cdot 16 = \boxed{} \cdot 8 = \boxed{} \cdot 4 = \boxed{} \cdot 2 = \boxed{}$.

270 A három tanult eljárás közül válaszd a legmegfelelőbbet, és azzal végezd el fejben a következő szorzásokat!

a) $15 \cdot 8$; *b)* $21 \cdot 16$; *c)* $35 \cdot 64$; *d)* $71 \cdot 128$.

271 A három tanult eljárás közül válaszd a legmegfelelőbbet, és azzal végezd el fejben a következő szorzásokat!

a) $11 \cdot 19$; *b)* $41 \cdot 49$; *c)* $91 \cdot 99$; *d)* $61 \cdot 69$;

e) $13 \cdot 17$; *f)* $43 \cdot 47$; *g)* $93 \cdot 97$; *h)* $63 \cdot 67$.

272 A három tanult eljárás közül válaszd a legmegfelelőbbet, és azzal végezd el fejben a következő szorzásokat!

a) $18 \cdot 22$; *b)* $22 \cdot 38$; *c)* $38 \cdot 42$; *d)* $42 \cdot 58$;

e) $57 \cdot 63$; *f)* $64 \cdot 76$; *g)* $75 \cdot 85$; *h)* $87 \cdot 93$.

* **273** Mivel egyenlő? Mit gondolsz, melyik tanult szorzási eljáráshoz kapcsolódnak a kifejezések?

a) $(10a + b)(10a + 10 - b)$; *b)* $(10a + 10 + b)(10a + 10 - b)$.

7. Függvények

Lineáris függvények

274 Add meg képlet formájában a szövegesen meghatározott hozzárendelési szabályokat! Ábrázold közülük a lineáris függvényeket!

A racionális számok halmazán értelmezzük a hozzárendeléseket.

a) Minden számhoz rendeljük hozzá a nála 5-tel kisebb számot!

b) Minden számhoz rendeljük hozzá a kétszeresénél 1-gyel nagyobb számot!

c) Minden számhoz rendeljük hozzá a nála 3-mal kisebb szám negyedét!

d) Minden számhoz rendeljük hozzá a $\frac{2}{3}$ részét!

e) Minden számhoz rendeljük hozzá a szám $\frac{7}{10}$ részénél 2-vel kisebb számot!

f) Minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét!

g) Minden számhoz rendeljük hozzá az ellentettjét!

h) Minden számhoz rendeljük hozzá a négyzetének a felét!

275 Rendeljük minden négyzet oldalának hosszához

a) a kerületét, *b)* az átlójának hosszát!

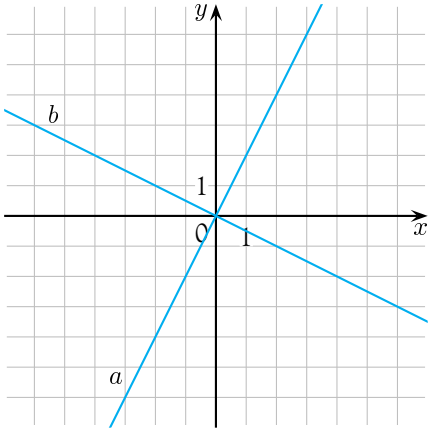
Egyenes arányosságok a kapott függvények?

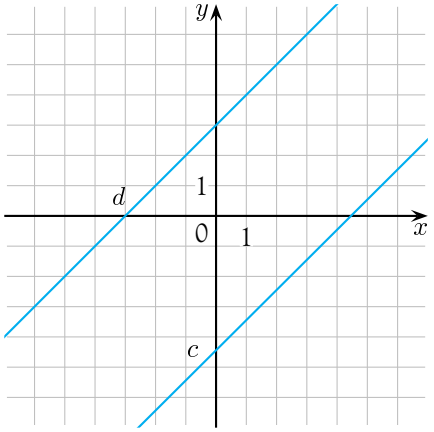
Ábrázold koordináta-rendszerben a függvényeket!

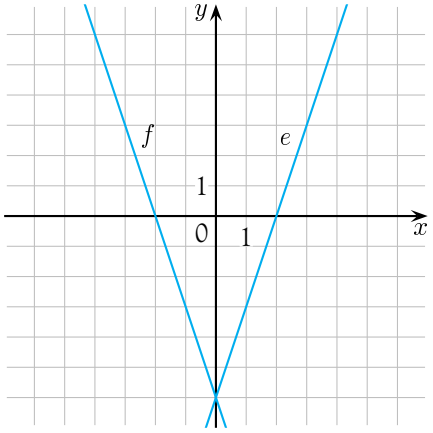
276 Írd fel a lineáris függvények hozzárendelési szabályát két meghatározó jellemzője segítségével! Állapítsd meg a hiányzó harmadik adatot!

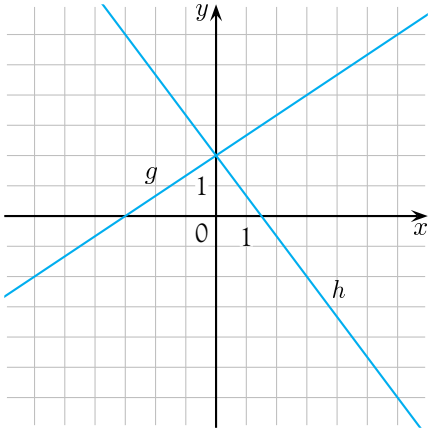
	Meredekség	Az y tengelyt metszi, ha	Az x tengelyt metszi, ha
a)	$m = -1$	$y = 3$	$x = ?$
b)	$m = \frac{2}{5}$	$y = 0$	$x = ?$
c)	$m = 6$	$y = ?$	$x = 0$
d)	$m = -\frac{1}{4}$	$y = -1$	$x = ?$
e)	$m = ?$	$y = 2$	$x = -2$
f)	$m = ?$	$y = 4$	$x = \frac{1}{2}$

277 Határozd meg a grafikonjaikkal adott függvények hozzárendelési szabályát! A függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük.









278 Az alábbi lineáris függvényeknek ismerjük egy-egy pontját, valamint a meredekségüket. Ábrázold a függvényeket! Add meg két újabb pontjukat!

a) $P(2;8)$; $m = -\frac{1}{2}$; *b)* $P(-6;8)$; $m = -\frac{2}{5}$;

c) $P(-1;2)$; $m = \frac{5}{7}$.

279 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket! Fogalmazz meg közös tulajdonságokat a grafikonok alapján! Mi lehet a közös tulajdonság oka?

a) $x \mapsto 2x$; $x \mapsto 5x$; $x \mapsto 1{,}5x$; $x \mapsto \frac{4}{3}x$;

b) $x \mapsto -2x$; $x \mapsto -5x$; $x \mapsto -1{,}5x$; $x \mapsto -\frac{4}{3}x$;

c) $x \mapsto x + 3$; $x \mapsto x - 4$; $x \mapsto x + 3{,}5$; $x \mapsto x - \frac{5}{2}$;

d) $x \mapsto -x - 2$; $x \mapsto 3x - 2$; $x \mapsto -2{,}5x - 2$; $x \mapsto \frac{4}{5}x - 2$.

280 Csoportosítsd a hozzárendelési szabályaikkal megadott függvényeket! A hozzárendeléseket a racionális számok halmazán értelmezzük.

a) Egy-egy csoportba azok a függvények kerüljenek, amelyek grafikonjai párhuzamosak egymással!

b) Egy-egy csoportba azok a függvények kerüljenek, amelyek az y tengelyt ugyanabban a pontban metszik!

c) Egy-egy csoportba azok a függvények kerüljenek, amelyek az x tengelyt ugyanabban a pontban metszik!

d) Egy-egy csoportba azok a függvények kerüljenek, amelyek növekvők!

e) Egy-egy csoportba azok a függvények kerüljenek, amelyek csökkenők!

$a: x \mapsto -2x$; $b: x \mapsto x + 3$; $c: x \mapsto 3 - x$; $d: x \mapsto \frac{-x + 2}{3}$;

$e: x \mapsto 3 - 2x$; $f: x \mapsto \frac{1}{3}x$; $g: x \mapsto \frac{2}{3} + x$; $h: x \mapsto \frac{x + 3}{2}$.

281 Írj a betűk helyére megfelelő számokat úgy, hogy a függvények grafikonjai az y tengelyt ugyanott messék, mint az $x \mapsto \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$ függvény grafikonja!

a) $a: x \mapsto b - 4x$; *b)* $f: x \mapsto b$; *c)* $g: x \mapsto \frac{b}{2} + x$.

E* **282** Döntsd el, hogy az állítások igazak-e vagy hamisak! A függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük.

(A) Az $x \mapsto mx + b$ alakú hozzárendelés grafikonja (ahol m és b ismert számok) mindig egy egyenes.

(B) A lineáris függvény meredeksége azt mutatja meg, hogy a grafikon hol metszi a x tengelyt.

(C) Ha egy lineáris függvény meredekségét megkétszerezzük, akkor a függvény grafikonja kétszer akkora szöget zár be az x tengellyel.

(D) Az $f: x \mapsto 2x - 1$ és a $g: x \mapsto -2x - 1$ függvények grafikonjai párhuzamosak egymással.

(E) Az $f: x \mapsto 2x$és a $g: x \mapsto -2x$ függvények grafikonjai tükörképei egymásnak, az x tengelyre mint tükörtengelyre nézve.

283 Hol veszik fel a függvények a legnagyobb, illetve a legkisebb értékeket, ha a $[-8; 3]$ intervallumon értelmezzük őket?

a) $f: x \mapsto -\frac{2}{3}x - 1$; *b)* $g: x \mapsto 5x + 2$;

c) $h: x \mapsto -x - 3{,}6$; *d)* $j: x \mapsto \frac{3}{8}x - 4$.

284 Színezd kékkel a koordináta-rendszer azon $P(x; y)$ pontjait, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek!

a) $y > 4$; *b)* $y \leq -2$; *c)* $x < 3$; *d)* $x \geq -5$.

* **285** Színezd zölddel a koordináta-rendszer azon $P(x; y)$ pontjait, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek!

a) $y > x$; *b)* $y \leq -2x$;

c) $y > 3 + x$; *d)* $y \geq \frac{3}{5}x - 5$.

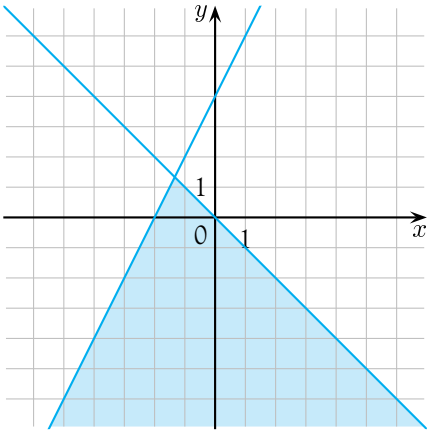


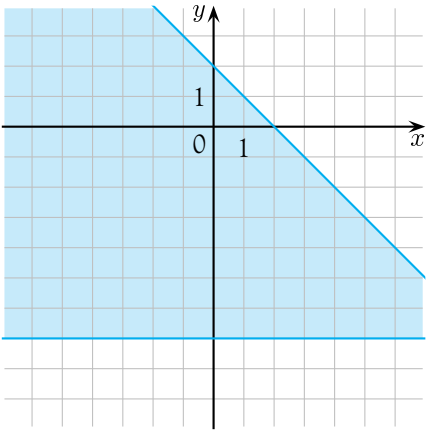
E **286** Színezd pirossal a koordináta-rendszer azon $P(x; y)$ pontjait, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételrendszerek!

a) $y > -x$ és $y \leq x + 4$; *b)* $y < 3$ és $y > 3x - 6$;

c) $x + y \leq 1$ és $y - \frac{2}{3}x \geq -5$.

E* **287** Milyen kapcsolat lehet a színezett pontok koordinátái között?





288 Mi lehet a hozzárendelés szabálya, ha a lineáris függvény grafikonja átmegy az adott pontokon?

a) $A(3;5)$; $B(-4;5)$;

b) $C(0;0)$; $D(-1;2)$;

* *c)* $E(1;2)$; $F(7;3)$.

E* **289** Számítsd ki a függvények és az x tengely által meghatározott háromszögek területét!

a) $f: x \mapsto x + 2$; $\quad g: x \mapsto -x + 6$;

b) $f: x \mapsto \frac{2}{3}x$; $\quad g: x \mapsto -\frac{1}{3}x + 3$.

290 Ábrázold az $f: x \mapsto \frac{3}{2}x + 1$ függvényt! Told el a grafikon minden pontját a $\mathbf{v}(4;1)$ vektorral! Mi lehet az eltolt kép hozzárendelési szabálya?

E* **291** Ábrázold a következő, intervallumonként megadott függvényt!

$$f: x \mapsto \begin{cases} x + 6, & \text{ha } x < -3; \\ -2x - 3, & \text{ha } -3 \le x \le -2; \\ 2x + 5, & \text{ha } -2 < x < 0; \\ -2x + 5, & \text{ha } 0 \le x \le 2; \\ 2x - 3, & \text{ha } 2 < x < 3; \\ -x + 6, & \text{ha } x \ge 3. \end{cases}$$

E* **292** Ábrázold a következő, intervallumonként megadott függvényt!

$$x \mapsto \begin{cases} 4, & \text{ha } x \leq -4; \\ -\frac{1}{2}x + 2, & \text{ha } -4 < x \leq 0; \\ \frac{1}{3}x + 2, & \text{ha } 0 < x \leq 6; \\ 2x - 8, & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$

293 Ábrázold a függvényeket közös koordináta-rendszerben!

$f: x \mapsto 2x - 4; \qquad g: x \mapsto \frac{1}{3}x + 1.$

Olvasd le a metszéspontjuk első és második koordinátáját!

Mi a megoldása a $2x - 4 = \frac{1}{3}x + 1$ egyenletnek?

Ellenőrizd a leolvasás helyességét az egyenlet algebrai megoldásával!

294 Oldd meg az egyenleteket a grafikus módszer segítségével!

Ellenőrizd a megoldásodat a mérlegelvvel!

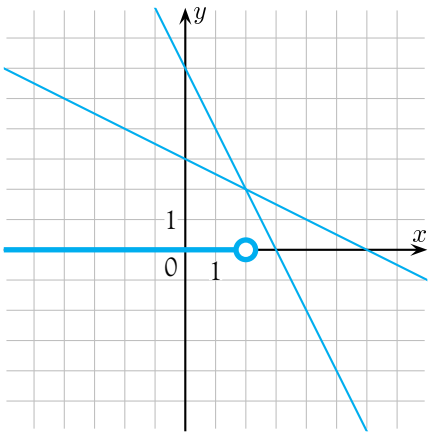
a) $\frac{1}{3}x + 2 = -x + 6;$ *b)* $-\frac{x}{2} + 4 = x - 2;$

c) $-2x - 3 = \frac{6 - x}{3};$ *d)* $\frac{4x}{7} = x - 3.$

295 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a függvényeket!

$f: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 2; \quad g: x \mapsto x - 1.$

Színezd pirossal az x tengely azon pontjait, amelyek esetén az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja alatt halad!



296 Írd fel azt az egyenlőtlenséget, amelynek grafikus megoldását láthatod az ábrán! Add meg a megoldáshalmazt!

297 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a grafikus módszer segítségével! Ellenőrizd a megoldásokat!

a) $-\frac{1}{2}x + 2 < x - 1$;

b) $-\frac{x}{2} + 4 > x - 2$;

c) $-2x - 3 \leq \frac{6 - x}{3}$;

d) $\frac{4x}{7} \geq x - 3$.

298 Az országút mentén fekvő két település, Adaliget és Benőtelep távolsága 200 km. Reggel 10 órakor elindul Adaligetről Benőtelep felé egy kerékpáros 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel, 11 órakor Benőtelepről Adaliget felé egy versenykerékpáros 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel.

a) Ábrázold a két kerékpáros mozgását az út-idő grafikonon!

b) Mikor találkoznak?

c) Mekkora utat tettek meg a kerékpárosok külön-külön a találkozásig?



299 Oldd meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy mindkét kerékpáros Adaligetről Benőtelep felé halad!

300 Egy nagykereskedő az almát kilogrammonként 180 Ft-ért árulja, amíg kevesebb mint 50 kg-ot vásárolnak. Ha viszont legalább 50 kg-ot, akkor az 50 kg fölötti mennyiségért kg-onként 120 Ft-ot kell fizetni. Ábrázold az alma árát az alma tömegének függvényében, ha egy vásárló maximum 300 kg almát vehet!

301 Anya és lánya tejet melegítenek a konyhában. Az anya 12 fokos tejet, míg lánya, aki már hamarabb kivette a tejet a hűtőszekrényből, 21 fokos tejet tett fel. Anya a fazekát nagyobb gázlángra állította, így az általa melegített tej percenként 15 fokkal, míg lányáé csak percenként 10 fokkal melegszik. Ábrázold a tejek hőmérséklet-változását az eltelt idő függvényében! Körülbelül hány perc múlva lesz a két edényben azonos hőmérsékletű a tej?



Nemlineáris függvények

302 Válaszd ki az alábbi hozzárendelések közül azokat, amelyek nem lineáris függvények!

A lineáris függvények esetén add meg a meredekséget, valamint a grafikonnak az x és y tengelyen lévő metszéspontját!

A hozzárendeléseket a racionális számok halmazán értelmezzük.

$a\colon x \mapsto \dfrac{x+2}{3}$;

$b\colon x \mapsto \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2-x}{3}$;

$c\colon x \mapsto x \cdot x$;

$d\colon x \mapsto (x-2) + 2(x-1{,}2)$;

$e\colon x \mapsto (x-2)2(x-1{,}2)$;

$f\colon x \mapsto \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$;

$g\colon x \mapsto 3\left(\dfrac{4}{5} - 4x\right)$;

$h\colon x \mapsto \dfrac{12}{x}$.

303 Keresd meg a pontok hiányzó koordinátáit, ha tudjuk, hogy a pont illeszkedik a függvény grafikonjára!

$f\colon x \mapsto |x-4|$; $A(-1;?)$; $B(8;?)$; $C(?;4)$; $D(?;0)$; $E(?;-4)$;

$g\colon x \mapsto (x+2)^2$; $A(-1;?)$; $B(8;?)$; $C(?;4)$; $D(?;0)$; $E(?;-4)$;

$h\colon x \mapsto |x+1|-3$; $A(-1;?)$; $B(8;?)$; $C(?;4)$; $D(?;0)$; $E(?;-4)$;

* $k: x \mapsto (x-4)^2-4$; $A(-1;?)$; $B(8;?)$; $C(?;4)$; $D(?;0)$; $E(?;-4)$;

$l: x \mapsto \frac{36}{x}$; $A(-1;?)$; $B(12;?)$; $C(?;4)$; $D(?;0)$; $E(?;-4)$.

304 Ábrázold koordináta-rendszerben az $f: x \mapsto |x|$ függvényt, amelyet a racionális számok halmazán értelmezünk!

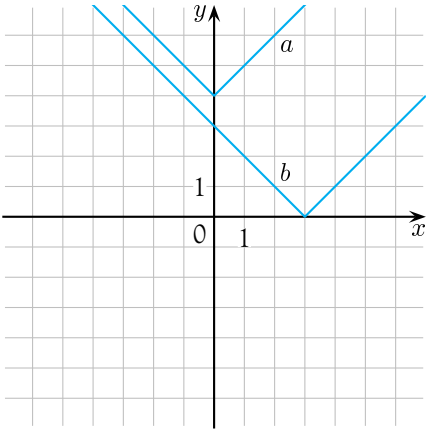
Told el az f függvény grafikonját az adott vektorral!

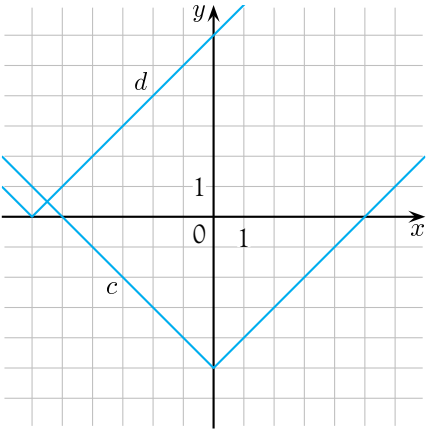
Írd fel az eltolt képhez tartozó hozzárendelési szabályt, ha az eltolás vektora

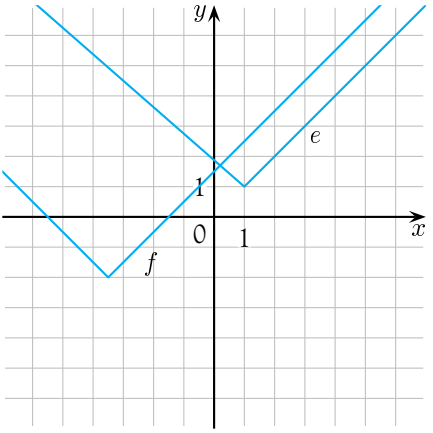
a) $\mathbf{v}(5;0)$; *b)* $\mathbf{v}(-3;0)$; *c)* $\mathbf{v}(0;-4)$;

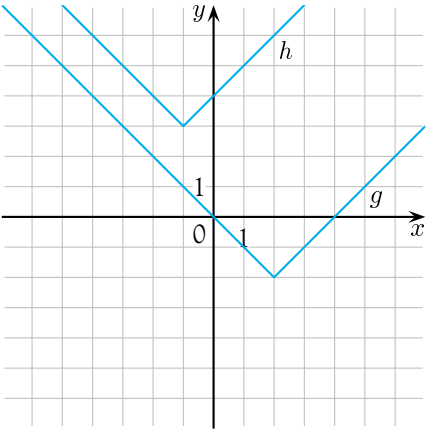
d) $\mathbf{v}(0;3)$; *e)* $\mathbf{v}(2;-1)$; *f)* $\mathbf{v}(-6;-2)$!

305 Állapítsd meg az ábrázolt függvények grafikonjai alapján a függvények hozzárendelési szabályát!

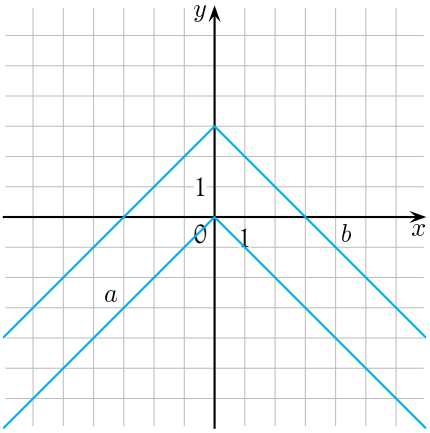


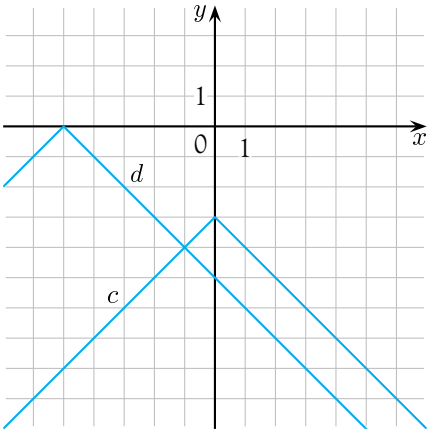


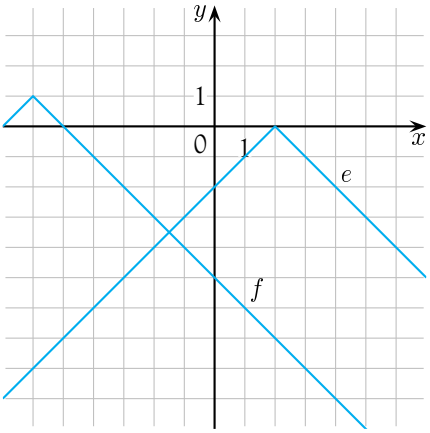




306 Állapítsd meg az ábrázolt függvények grafikonjai alapján a függvények hozzárendelési szabályát!







* **307** Párosítsd össze azokat a függvényeket, amelyeknek azonos a grafikonja! A függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük.

$a\colon x \mapsto |x| - 2;$

$b\colon x \mapsto |x - 2|;$

$c\colon x \mapsto |x + 2|;$

$d\colon x \mapsto |x + 2| - 2;$

$e\colon x \mapsto |x - 2| + 2;$

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} -x - 2, & \text{ha } x \le -2; \\ x + 2, & \text{ha } x \ge -2; \end{cases}$$

$$g\colon x \mapsto \begin{cases} -x + 4, & \text{ha } x \le 2; \\ x, & \text{ha } x \ge 2; \end{cases}$$

$$h\colon x \mapsto \begin{cases} -x - 2, & \text{ha } x \le 0; \\ x - 2, & \text{ha } x \ge 0; \end{cases}$$

$$i\colon x \mapsto \begin{cases} -x + 2, & \text{ha } x \le 2; \\ x - 2, & \text{ha } x \ge 2; \end{cases}$$

$$k\colon x \mapsto \begin{cases} x, & \text{ha } x \ge -2; \\ -x - 4, & \text{ha } x \le -2. \end{cases}$$

E* **308** A megadott függvény hozzárendelési szabálya felírható abszolútértékes alakban is. Keresd meg ezt az alakot! A függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük.

a) $f: x \mapsto \begin{cases} x + 4, & \text{ha } x \leq 0; \\ -x + 4, & \text{ha } x \geq 0; \end{cases}$

b) $g: x \mapsto \begin{cases} -x + 3, & \text{ha } x \leq 2; \\ x - 1, & \text{ha } x \geq 2; \end{cases}$

c) $h: x \mapsto \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq 0; \\ -x, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$

309 Tükrözd a függvény grafikonját az x tengelyre! Add meg a tükörkép hozzárendelési szabályát! A függvényeket a racionális számok halmazán értelmezzük.

a) $f: x \mapsto |x|$;

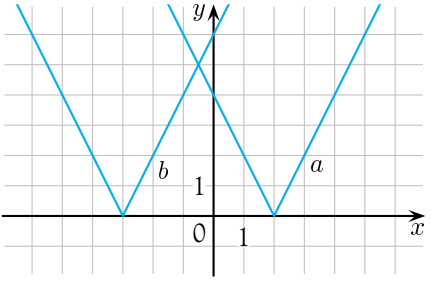
b) $g: x \mapsto |x| - 7$;

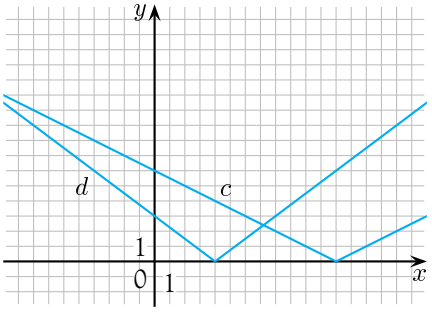
c) $h: x \mapsto |x| + 2$;

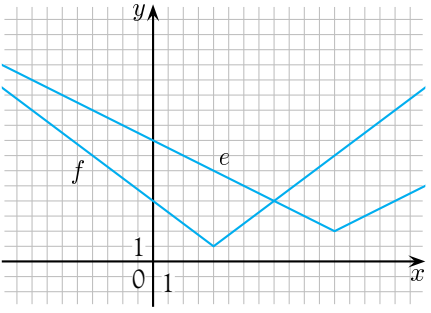
d) $i: x \mapsto |x + 5|$;

e) $j: x \mapsto |x - 3| - 2$.

E* **310** Állapítsd meg az ábrázolt függvények grafikonjai alapján a függvények hozzárendelési szabályát!







311 Ábrázold a megadott függvényt, majd told el a kapott grafikont az adott vektorral! Határozd meg az eltolt kép hozzárendelési szabályát!

Például a $\mathbf{v}(3;-2)$ eltolás az x tengely mentén pozitív irányba 3 egységgel, majd az y tengely mentén negatív irányba 2 egységgel történő eltolást határoz meg.

a) $a: x \mapsto |x-3|+4$. Az eltolás vektora: $\mathbf{v}(-2;-3)$.

b) $b: x \mapsto |x+4{,}5|-2$. Az eltolás vektora: $\mathbf{v}(2;-3)$.

c) $c: x \mapsto |x+2|+1$. Az eltolás vektora: $\mathbf{v}(5;-2)$.

d) $d: x \mapsto |x-4|-4$. Az eltolás vektora: $\mathbf{v}(-4;4)$.

312 Oldd meg grafikus módszerrel az egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $-|x|+5=2$;

b) $|x-4|+1=3$;

c) $|x-4|+1>3$;

d) $|x-1|-3=\frac{1}{3}x-2$;

* *e)* $|x-1|-3\leq\frac{1}{3}x-2$;

f) $|x+2|-2=-|x+1|+3$;

* *g)* $|x+2|-2>-|x+1|+3$;

* *h)* $|x+2|-2\leq-|x+1|+3$.

313 Ábrázold az adott függvényt! Csoportosítsd az

$A(-3;6)$; $B(0;0)$; $C(2;-4)$; $D(3;9)$; $E(16;4)$

pontokat aszerint, hogy a függvény grafikonján, alatta vagy felette találhatók! Adj meg a felsoroltaktól különböző pontokat, mind a három lehetőségnek megfelelően!

$f: x \mapsto x^2$;

$f: x \mapsto x^2+2$;

$f: x \mapsto (x+2)^2$;

$f: x \mapsto (x+1)^2-3$.

314 Ábrázold koordináta-rendszerben az $f: x \mapsto x^2$ függvényt, amelyet a racionális számok halmazán értelmezünk!

Told el az f függvény grafikonját az adott vektorral!

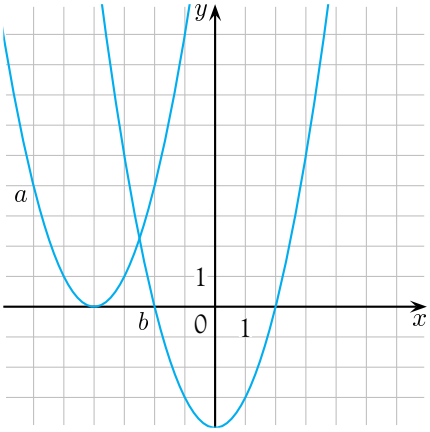
Például a $\mathbf{v}(3;-2)$ eltolás az x tengely mentén pozitív irányba 3 egységgel, majd az y tengely mentén negatív irányba 2 egységgel történő eltolást határoz meg.

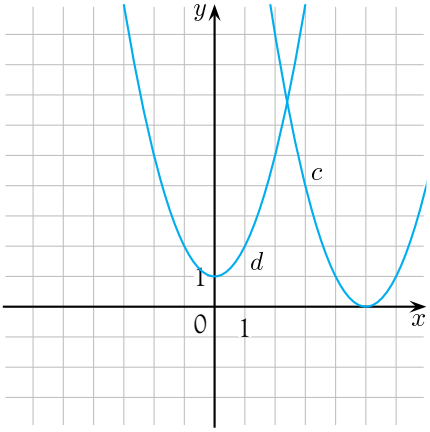
Írd fel az eltolt képhez tartozó hozzárendelési szabályt, ha az eltolás vektora

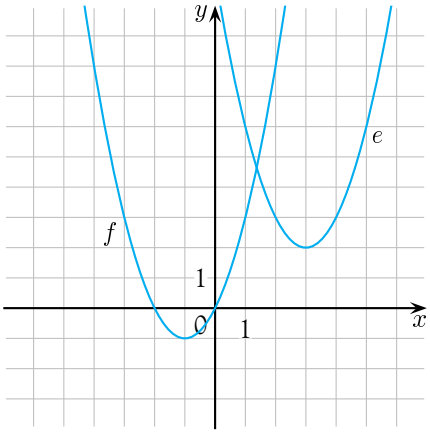
a) $\mathbf{v}(5;0)$; *b)* $\mathbf{v}(-3;0)$; *c)* $\mathbf{v}(0;4)$;

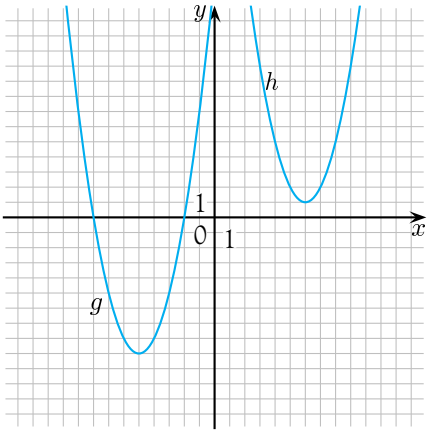
d) $\mathbf{v}(0;-7)$; *e)* $\mathbf{v}(-7;3)$!

315 Állapítsd meg az ábrázolt függvények grafikonjai alapján a függvények hozzárendelési szabályát!









E* **316** Az f függvény grafikonját eltolva kaptuk a g függvény grafikonját. Add meg az eltolás vektorát!

a) $f: x \mapsto (x+1)^2 - 3$; $g: x \mapsto (x+5)^2 - 3$;

b) $f: x \mapsto (x-2)^2 + 4$; $g: x \mapsto (x+3)^2$;

c) $f: x \mapsto (x-4)^2 - 1$; $g: x \mapsto (x+2)^2 + 3$.

E **317** Oldd meg a grafikus módszer segítségével az egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 = 9$; $x^2 \geq 9$; $x^2 < 9$;

b) $x^2 - 4 = 5$; $x^2 - 4 > 5$; $x^2 - 4 \leq 5$;

c) $(x+3)^2 - 4 = 0$; $(x+3)^2 - 4 \leq 0$; $(x+3)^2 - 4 > 0$;

d) $(x-6)^2 + 2 = x - 2$; $(x-6)^2 + 2 < x - 2$; $(x-6)^2 + 2 \geq x - 2$;

e) $-x^2 + 5 = 2x + 2$; $-x^2 + 5 \geq 2x + 2$; $-x^2 + 5 < 2x + 2$;

f) $(x-3)^2 - 1 = |x-1| - 3$; $(x-3)^2 - 1 \leq |x-1| - 3$.

E* **318** Ábrázold a megadott függvényeket közös koordináta-rendszerben! Mely számokra nem értelmezhetők a függvények? Mely értéket nem veszik fel a függvények?

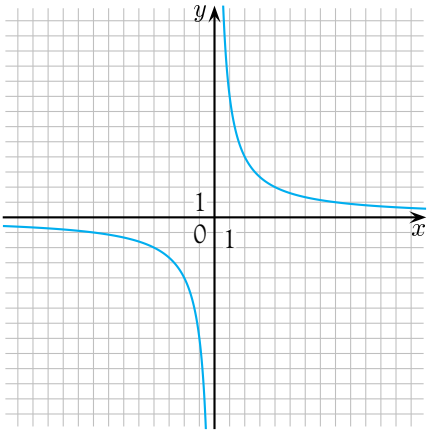
a) $a\colon x \mapsto \frac{4}{x}$; $b\colon x \mapsto \frac{4}{x} + 2$; $c\colon x \mapsto \frac{4}{x} - 3$;

b) $a\colon x \mapsto \frac{4}{x+2}$; $b\colon x \mapsto \frac{4}{x-3}$; $c\colon x \mapsto \frac{4}{x+5}$;

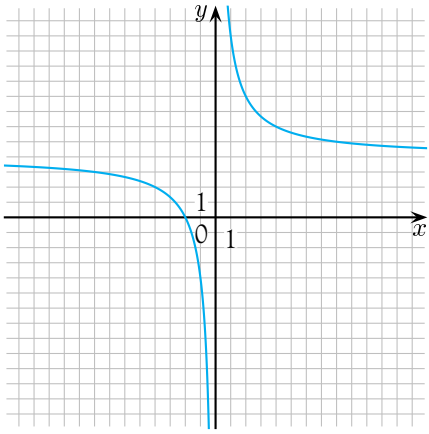
c) $a\colon x \mapsto \frac{4}{x+4} + 2$; $b\colon x \mapsto \frac{4}{x-6} + 2$; $c\colon x \mapsto \frac{4}{x-1} + 5$.

E* **319** Állapítsd meg az ábrázolt függvények grafikonjai alapján a függvények hozzárendelési szabályát! Mely számokra nem értelmezhetők a függvények?

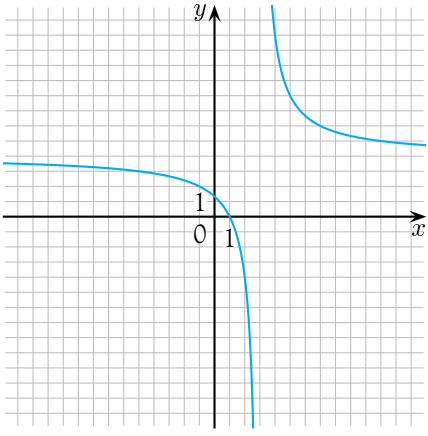
a)



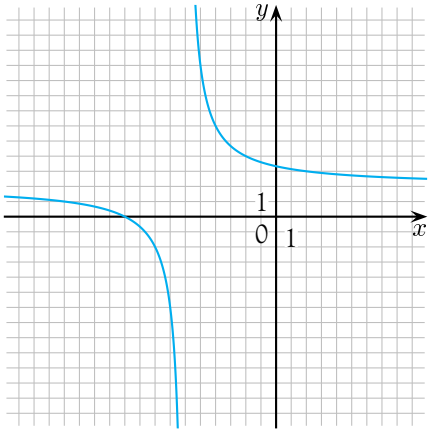
b)



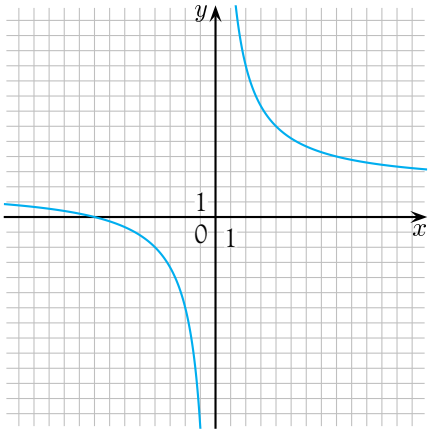
c)



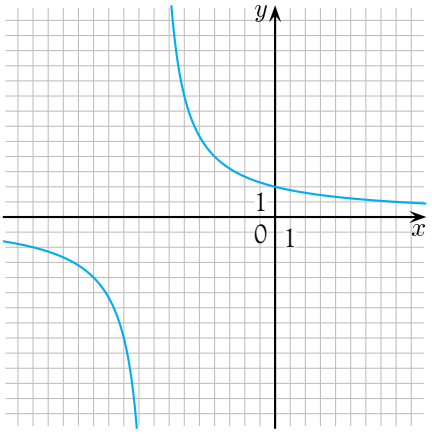
d)



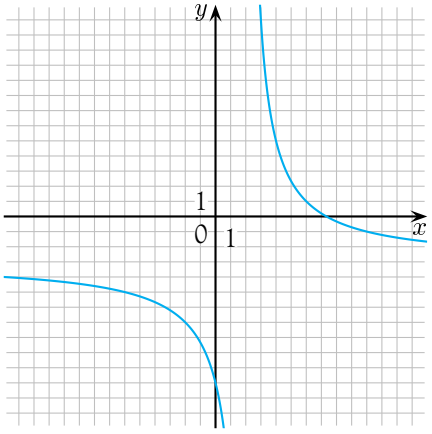
e)



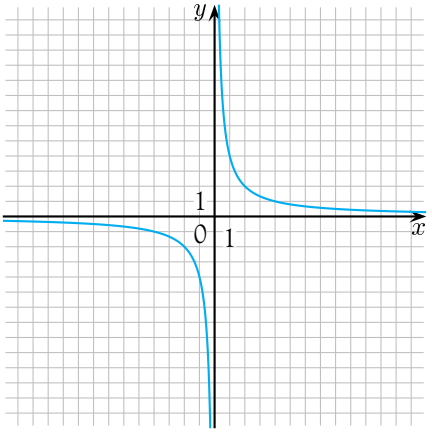
f)



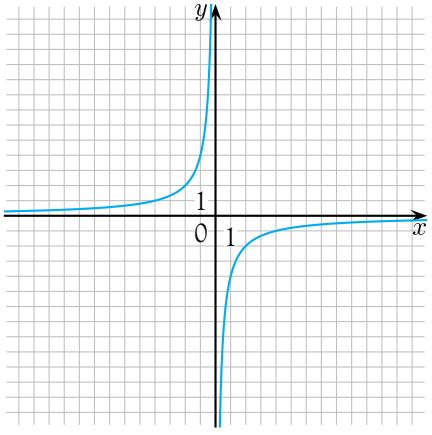
g)



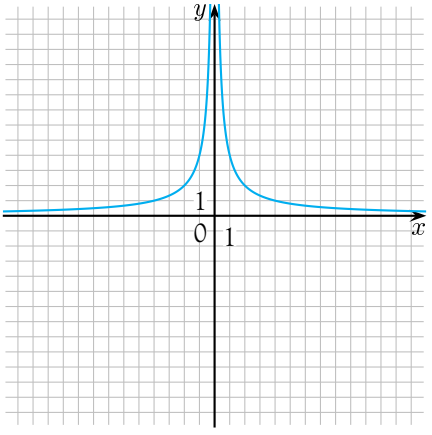
h)



i)



j)



Sorozatok

320 Írd fel a sorozat első négy tagját!

a) Az első tag 4. A másodiktól kezdve minden következő tag a közvetlen előtte levőnél 7-tel nagyobb.

b) Az első tag 24. A másodiktól kezdve minden következő tag a közvetlen előtte levőnél 6-tal kisebb.

c) Az első tag 600. A másodiktól kezdve minden következő tag a közvetlen előtte levőnek az $\frac{1}{2}$része.

d) Az első tag -2. A másodiktól kezdve minden következő tag a közvetlen előtte levőnek a (-1)-szerese.

e) Az első tag 80. A másodiktól kezdve minden következő tag a közvetlen előtte levőnek a felével nagyobb.

321 Egy sorozat első tagja 10. Minden tag annyival nagyobb az előző tagnál, mint amennyi a közvetlen előtte levő tag sorszámának négyzete.

a) Írd fel a sorozat első tíz tagját!

b) Keress képletet a sorozathoz!

322 Számítsd ki a sorozatok keresett tagjait!

a)	$a_n = 2n + 10;$	$a_1;$	$a_5;$	$a_{100};$	$a_{2008};$
b)	$a_n = 100 - 5n;$	$a_1;$	$a_5;$	$a_8;$	$a_{200};$
c)	$a_n = 2(2n - 3);$	$a_1;$	$a_2;$	$a_5;$	$a_{20};$
d)	$a_n = \frac{2n}{3};$	$a_1;$	$a_2;$	$a_5;$	$a_{100};$
e)	$a_1 = 6;$ $a_n = a_{n-1} + 5;$		$a_2;$	$a_3;$	$a_5;$
f)	$a_1 = -2;$ $a_n = a_{n-1} - 3;$		$a_2;$	$a_3;$	$a_5;$
g)	$a_1 = \frac{1}{2};$ $a_n = 2a_{n-1} + \frac{1}{2};$		$a_2;$	$a_3;$	$a_5.$

323 Egy sorozat első négy eleme: $a_1 = 3;\ a_2 = \frac{5}{2};\ a_3 = \frac{7}{3};\ a_4 = \frac{9}{4}.$

a) Adj meg olyan képletet, amely a sorozat hozzárendelési szabályát írja le!

b) Add meg a sorozatnak a tizenötödik és a századik elemét!

324 Egy számsorozat hozzárendelési szabálya $a_n = 2n + 5$. Hányadik eleme a sorozatnak a

a) 33; *b)* 203; *c)* 4021; *d)* 778?

Mértani sorozat

(Emelt szintű, választható tananyag)

325 Megadtuk néhány sorozat egymást követő tagjait. Melyik számtani sorozat, melyik mértani sorozat?

a) $1;\quad -1;\quad 1;\quad -1;\quad 1;\quad -1;\quad \ldots$

b) $2;\quad 12;\quad 112;\quad 1112;\quad 11112;\quad \ldots$

c) $\frac{1}{2};\quad \frac{1}{8};\quad \frac{1}{32};\quad \frac{1}{128};\quad \frac{1}{512};\quad \ldots$

d) $\frac{1}{9};\quad -\frac{1}{3};\quad 1;\quad -3;\quad 9;\quad -27;\quad \ldots$

e) $0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad 0{,}0001;\quad 0{,}000\,01;\quad \ldots$

f) $100;\quad 80;\quad 60;\quad 40;\quad 20;\quad \ldots$

326 Mely állítások igazak, melyek hamisak?

(A) Ha a számtani sorozat állandó különbsége pozitív szám, akkor a sorozat növekvő.

(B) Van olyan számtani sorozat, amely mértani sorozat is.

(C) Ha egy mértani sorozat állandó hányadosa pozitív szám, akkor a sorozat minden tagja pozitív.

(D) Ha egy mértani sorozat állandó hányadosa negatív szám, akkor minden tag kisebb a közvetlen előzőnél.

(E) Ha egy számtani sorozat állandó különbsége negatív szám, akkor minden tag kisebb a közvetlen előzőnél.

(F) Ha egy mértani sorozat állandó hányadosa törtszám, akkor a sorozat minden tagja törtszám.

327 Számítsd ki a mértani sorozat keresett tagjait!

a) $a_1 = 5;\quad q = 2;\quad a_2;\quad a_3;\quad a_4;\quad a_{11};$

b) $a_1 = \frac{1}{4};\quad q = \frac{1}{2};\quad a_2;\quad a_3;\quad a_4;\quad a_6;$

c) $a_1 = -1;\quad q = -1;\quad a_2;\quad a_3;\quad a_4;\quad a_{11};$

d) $a_1 = -3000;\quad q = 0{,}1;\quad a_2;\quad a_3;\quad a_4;\quad a_8.$

328 Tudjuk egy mértani sorozat két szomszédos elemét. Határozd meg a sorozat hányadosát és első elemét!

a) $a_6 = -64;\quad a_5 = 128;$ *b)* $a_4 = \frac{4}{3};\quad a_5 = \frac{6}{3}.$

329 Egy mértani sorozat második tagja 3, hányadosa $\frac{1}{2}$. Hányadik tagja a sorozatnak a 0,1875?

* **330** Mennyire csökken Magyarország népessége 20 év alatt, ha évente 3 ezrelék a lakosság lélekszámának csökkenése, és 2007-ben Magyarország lakossága 10 064 000 fő volt?

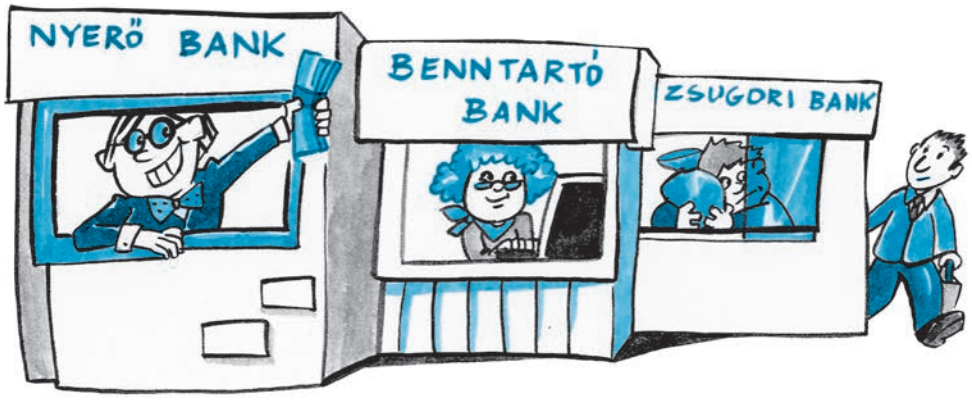
* **331** Négy évre szeretnénk lekötni a pénzünket. Három bank ajánlata a következő.

Nyerő bank: 2 évig évi 8%-os kamatot fizet, majd az utolsó két évben 10%-ot ad a bent lévő pénz után évente.

Benntartó bank: Első évben 7% az éves kamat, majd minden évben a kamat 1%-kal magasabb, mint az előző évben.

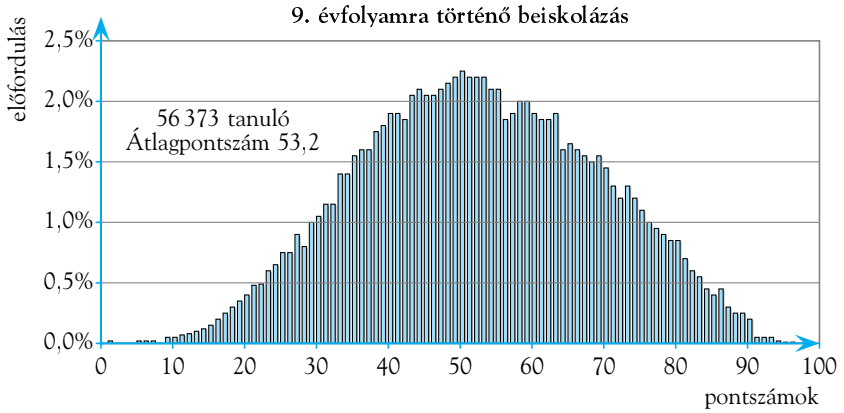
Zsugori bank: Minden évben egységesen 9% kamatot ad.

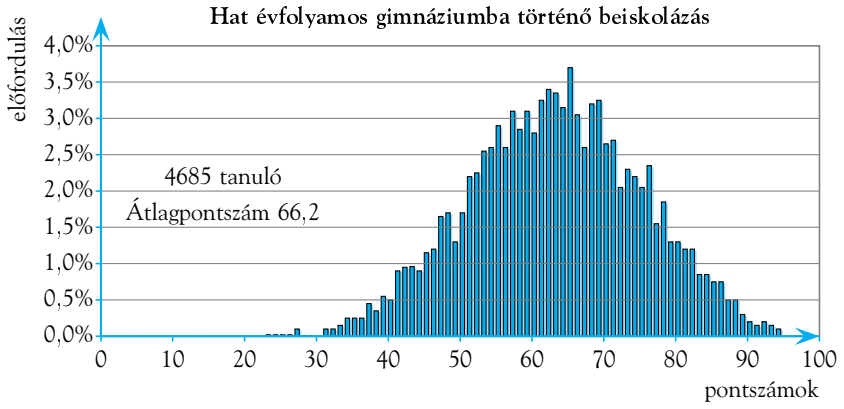
Melyik bankot válasszuk, ha a négy év alatt nem veszünk ki a bent lévő pénzből, és a bankban lekötött összeg másfél millió Ft?



8. Statisztika

332 Az általános iskolából a középiskolába történő jelentkezés során központi felvételi dolgozatot kell írni magyarból és matematikából. Az egyik tanév eredményeit látod az alábbi grafikonokon.





a) Melyik évfolyamok eredményét mutatja a két diagram?

b) Melyik évfolyamon hány tanuló írt központi felvételi dolgozatot?

c) Melyik évfolyamon értek el a tanulók jobb eredményt?

d) A 8. évfolyamon a legtöbb tanuló 51 pontot ért el. Ez a tanulók hány százaléka? Körülbelüli értéket adj meg!

e) Melyek azok a pontszámok, amelyeket a hat évfolyamos gimnáziumba jelentkezőknek legalább 3%-a elért?

333 Egy városban kérdőívet töltettek ki minden iskoláskorú tanulóval a szabadidős tevékenységéről. A táblázat a résztvevőkről készült.

	Fiú	Fiúk %-a az adott iskolatípuson belül	Lány	Lányok %-a az adott iskolatípuson belül	Összesen
Általános iskola	228		171		
Gimnázium	64		111		
Szakközépiskola	235		123		
Szakiskola	104		45		
Összesen					

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait!

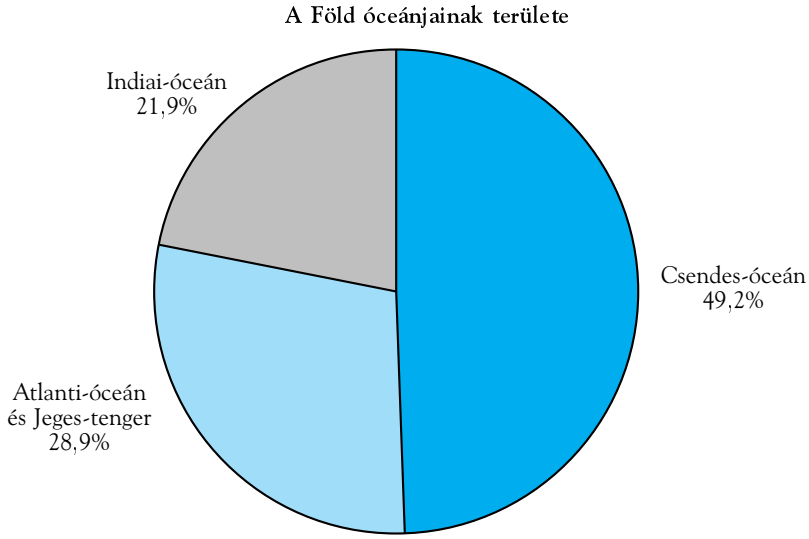
b) Hány tanuló vett részt a felmérésben?

c) Hány általános iskolást kérdeztek meg?

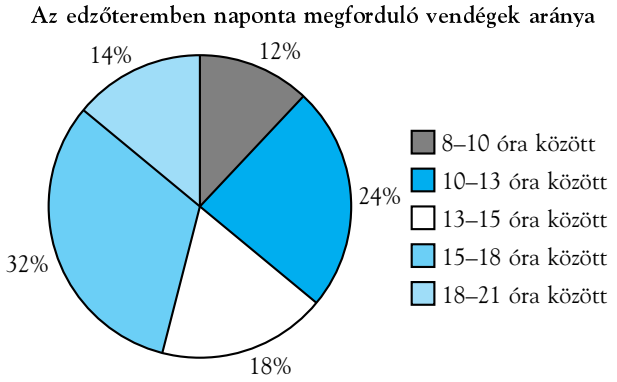
d) Melyik iskolatípusban a legnagyobb a fiúk aránya?

e) Készíts kördiagramot a lányok adatairól!

334 Számítsd ki a Föld óceánjainak területét, ha tudjuk, hogy összterületük 335 369 km^2!



335 Egy fitneszcenterben felmérést készítenek arról, hogy milyen a terem kihasználtsága. Az alábbi kördiagram több mérés alapján készült.



a) Melyik időszakban vannak a legtöbben?

b) Hány vendég fordul meg naponta a fitneszteremben, ha az esti időszakban (18–21 óra között) 21 ember volt edzésen?

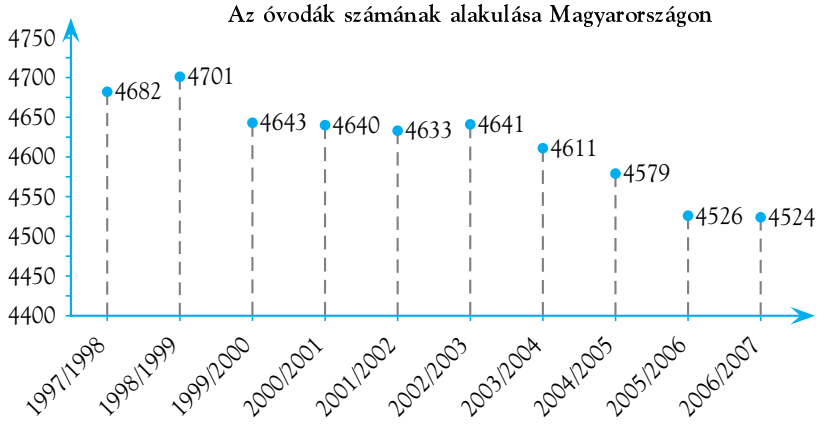
c) Mennyi átlagosan a napi bevétel, ha az árak az alábbiak szerint alakulnak, és minden vendég 1 órát edzett?

8–10 óra között és 13–15 óra között 500 Ft/óra;

10–13 óra között és 15–18 óra között 700 Ft/óra;

18–21 óra között 800 Ft/óra.

336 Az óvodaépületek számának változását láthatjuk a grafikonon. Válaszolj a következő oldalon található kérdésekre!



a) Milyen változást lehet leolvasni a grafikonról?

b) Melyik évben növekedett az óvodák száma?

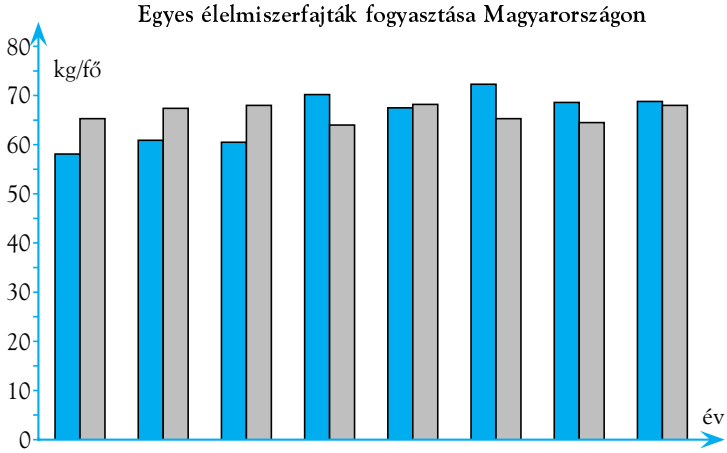
c) Melyik évben volt a legnagyobb mértékű a csökkenés?

d) Mennyivel változott 10 év alatt a működő óvodák száma?



337 Nézd meg alaposan az alábbi oszlopdiagramot, és azután válaszolj a feltett kérdésekre!

Egyes élelmiszerfajták fogyasztása Magyarországon



	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
húsfélék	58,1	60,9	60,5	70,2	67,5	72,3	68,6	68,8
burgonya	65,3	67,4	68	64	68,2	65,3	64,5	68

a) Milyen adatokat ábrázol a grafikon?

b) Mennyi volt a húsfogyasztás 2001-ben?

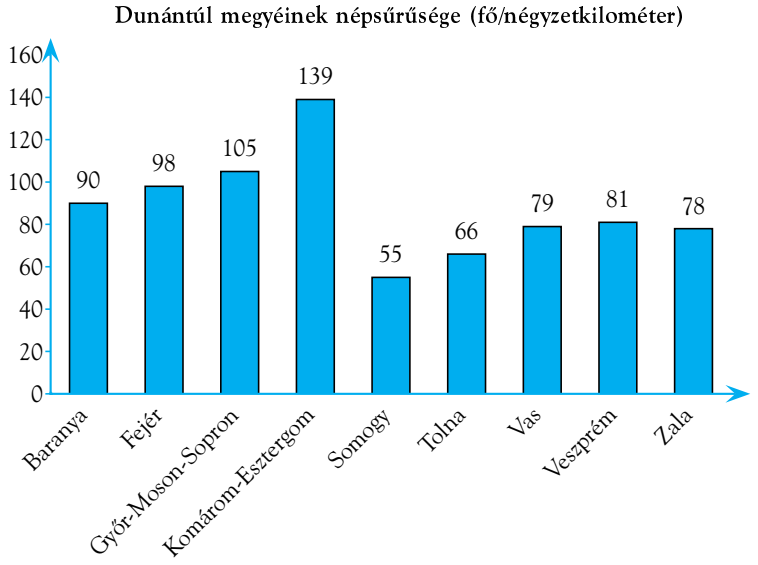
c) Húsból vagy burgonyából fogyasztottunk többet 1999-ben?

d) Hogyan alakult a két termék fogyasztása az adott időszakban?

e) Mely időszakban növekedett a húsfogyasztás?

f) Számítsd ki, hogy a megadott időszakban éves átlagban húsfélét vagy burgonyát fogyasztottunk-e többet!

338 Az alábbi diagramon a Dunántúl megyéinek népsűrűségét, az alatta lévő táblázatban a megyék területét adtuk meg. Az ábrák áttekintése után válaszolj a kérdésekre!



Dunántúl megyéi	területe (km^2)
Baranya	4487,4
Fejér	4373,3
Győr-Moson-Sopron	4012,5
Komárom-Esztergom	2250,6
Somogy	6035,9
Tolna	3703,4
Vas	3336,5
Veszprém	4688,8
Zala	3784,3

a) Melyik a legnagyobb népsűrűségű megye?

b) Melyik a legnagyobb területű megye?

c) Melyik megyében laknak a legtöbben?

d) Mennyi a Dunántúl összterülete?

e) Mennyi a Dunántúl lakossága?

f) Mekkora a Dunántúl népsűrűsége? (Átlagosan hány fő jut egy km^2-re?)

339 Egy 8. osztályos csoport matematika- és magyardolgozatainak eredményét a következő táblázat mutatja.

Név	Magyar	Matematika	Név	Magyar	Matematika	Név	Magyar	Matematika
A. C.	2	3	É. A.	2	5	P. L.	5	3
V. D.	4	4	B. M.	3	5	B. B.	3	3
K. L.	4	4	B. P.	3	4	P. B.	2	2
T. T.	3	4	K. Z.	3	4	T. I.	1	2
H. A.	5	5	F. Á.	4	5	T. G.	4	3

a) Készíts diagramot a füzetedbe a matematika-, illetve magyareredmények gyakoriságáról!

b) Határozd meg a magyareredmények mediánját!

c) Mennyi a matematikaeredmények módusza?

340 Egy osztályban a 18 lány átlagmagassága 167 cm, a 12 fiú magasságának átlaga 177 cm. Mekkora az osztály tanulóinak átlagmagassága?

341 Egy tudásszintet vizsgáló teszt eredménye osztályzatra váltva a következő:

Osztályzat	5	4	3	2	1
Gyakoriság	6	8	13	4	2

a) Készíts a relatív gyakoriságokról táblázatot!

b) Ábrázold kördiagramon az adatokat!

c) Számítsd ki az osztályzatok átlagát!

d) Határozd meg a móduszt!

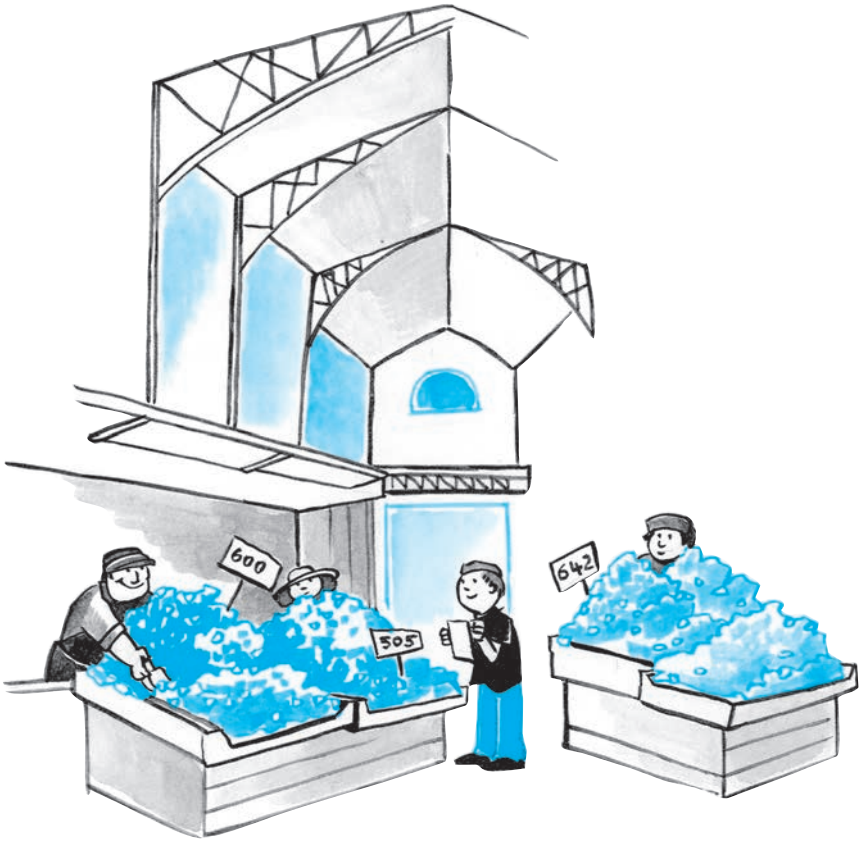
342 Egy Balaton-parti palacsintázóban egy nyári napon feljegyezték, hogy melyik típusú palacsintából hány db fogyott.

Túrós	Lekváros	Nutellás	Csokoládés	Áfonyás	Fahéjas
65	42	28	35	36	40

a) Készíts a relatív gyakoriságokról táblázatot!

b) Készíts kördiagramot!

343 Budapest öt nagy vásárcsarnokában hétfőtől péntekig felírtuk, mennyibe került az eper kg-onként.



	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Lehel piac	390 Ft	420 Ft	380 Ft	390 Ft	410 Ft
Nagycsarnok	420 Ft	410 Ft	390 Ft	390 Ft	410 Ft
Fény utcai csarnok	440 Ft	420 Ft	400 Ft	400 Ft	420 Ft
Újpesti piac	380 Ft	390 Ft	380 Ft	380 Ft	400 Ft
Garai téri vásárcsarnok	420 Ft	400 Ft	400 Ft	390 Ft	420 Ft

a) Mennyi volt ezen a héten az eper kg-onként átlagára ezekre a piacokra vonatkozóan?

b) Határozd meg az adatok móduszát, mediánját!

344 Egy cég dolgozóinak fizetése:

75 000 Ft; 148 000 Ft; 164 000 Ft; 185 000 Ft; 210 000 Ft.

a) Számítsd ki a cég dolgozóinak átlagfizetését!

b) Minden dolgozó 5000 Ft egyszeri bérkiegészítést kap júniusban. Mekkora most a cég dolgozóinak átlagfizetése?

c) Hasonlítsd össze az *a* és *b* pontban kapott értékeket! Mit tapasztalsz?

345 Véletlenszerűen megkérdeztek néhány diákot, hetente hány órát tölt az iskolában. A válaszok a következők voltak:

28; 32; 34; 36; 29; 31; 32; 34; 35; 30; 32; 33; 29; 32; 34; 36; 32; 33; 30; 29.

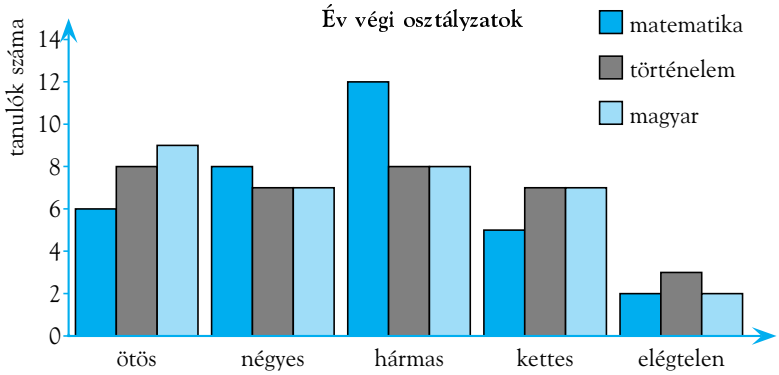
a) Számítsd ki az adatok átlagát!

b) Határozd meg az adatok mediánját!

c) Mennyi a felsorolt adatok módusza?

346 Egy cég dolgozójának napi munkaideje 8 óra. Egy hét négy napján rendre 8; 9; 9; 8,5 órát dolgozott. Hány órát kell pénteken dolgoznia, hogy ledolgozza a munkaidejét?

347 Egy nyolcadik osztály év végi eredményét látod három tantárgyból.



a) Számítsd ki az egyes tantárgyak átlagát!

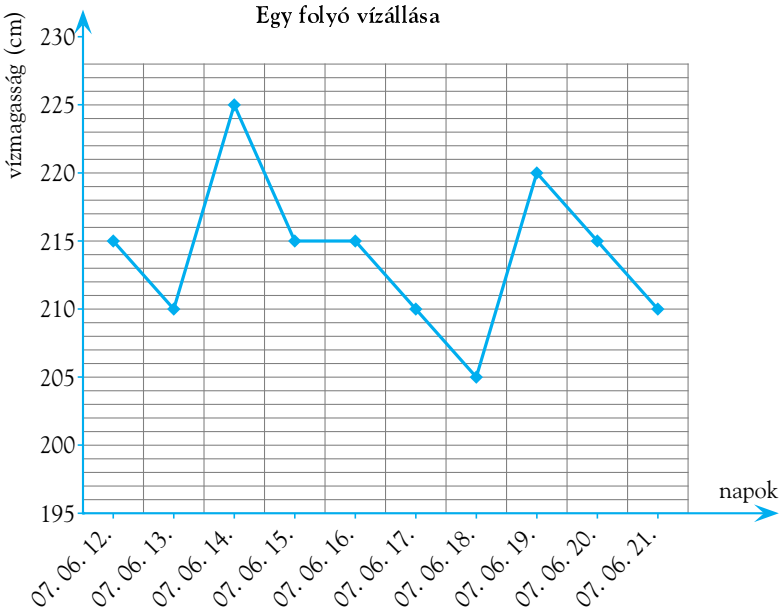
b) Mennyi a magyarjegyek módusza?

c) Mennyi a történelemjegyek mediánja?

d) Melyik középértékkel jellemeznéd a matematika tantárgy eredményét?

348 Egy csirkefarmon 10 nap alatt átlagosan 520 db tojást értékesítettek naponta. Kilenc nap eladási adata a rendelkezésünkre áll. 532; 518; 526; 512; 534; 524; 510; 514; 518. Mennyit értékesítettek a tizedik napon?

349 Egy folyó vízállása látható az alábbi grafikonon.



a) Számítsd ki a megadott időszakra a folyó vízmagasságának átlagát!

b) Mennyi az adatok mediánja?

c) Határozd meg az adatok móduszát!

350 Egy osztályban két csoportban tanulják a francia nyelvet. Az egyik csoportban 14 tanuló van, dolgozateredményük átlaga 38 pont, a másik csoport 18 tanulójának dolgozatátlaga 41 pont. Mennyi az osztály franciadolgozatának átlagpontszáma?

351 Néhány diák magasságának átlaga 168 cm. Ha még egy tanuló magasságát is hozzászámoljuk, akkor a magasságok átlaga 169 cm. Hány tanuló magasságának átlagát adtuk meg?

352 Egy kommunikációs cég 6 dolgozójának átlagfizetése 145 000 Ft. A cég vezetőjének fizetése 250 000 Ft, helyettesének bére 220 000 Ft. Mennyi a beosztottak átlagfizetése?



9. A tér geometriája

A tanult testek áttekintése

353 Egy kocka élvázát hurkapálcákból ragasztották össze. Összesen 192 cm-t használtak fel.

a) Mekkora a kocka éle?

b) Számítsd ki a lapátló hosszát!

c) Számítsd ki a testátló hosszát!

d) Mekkora a felszíne?

e) Mekkora a térfogata?

354 Egy négyzetes oszlop oldallapja kétszer akkora területű, mint az alaplapja. A test felszíne 360 cm^2.

a) Milyen magas az oszlop?

b) Mekkora a térfogata?

c) Számítsd ki a testátló hosszát!

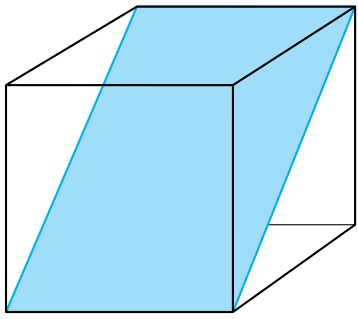
355 Egy téglatest éleinek aránya 3 : 8 : 15, a felszíne 241,92 cm^2. Mekkora a térfogata?

356 Egy hasáb alaplapjának területe 26 cm^2, alaplapjának kerülete 21 cm, a hasáb magassága 12 cm. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát!

357 Mekkora a térfogata annak a kockának, amelynek átlós síkmetszete 203,65 cm^2?

358 Egy hasábnak 20-szal több éle van, mint lapja. Hány oldalú sokszög az alaplapja?

359 Egy hasáb minden lapján berajzoltuk az összes átlót. Az átlók száma az élek számának a kétszerese. Hány oldalú sokszög a hasáb alaplapja?



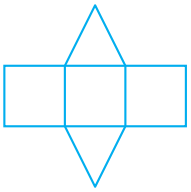
360 A négyzet alapú hasáb alaplapjának átlója 16 cm, a test magassága 18 cm. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát!

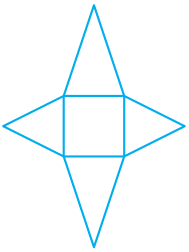
361 Egy hengert a tengelye mentén kettévágtunk. A vágásfelület egy 60,84 cm^2 területű négyzet lett. Számítsd ki a henger felszínét és térfogatát!

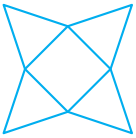
* **362** Egy tömör hengert az alaplapjára merőlegesen, a tengelye mentén átfúrtunk. Milyen sugarú a furat, ha a megmaradt test térfogata egyenlő a furat térfogatával?

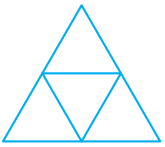
Gúlák

363 *a)* Melyik lehet négyzet alapú gúla hálózata?

1. 

2. 

3. 

4. 

b) Melyik lehet gúla hálózata?

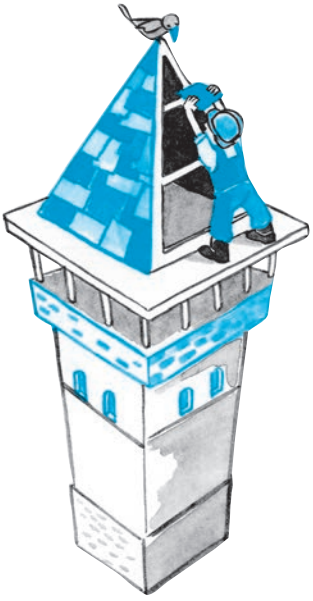
364 Számítsd ki a gúla felszínét, ha az alaplapja négyzet, az oldallapok pedig egybevágó háromszögek! Az alapél a, az oldalél b, a testmagasság m, az oldallap magassága m_o.

a) $a = 22$ cm, $m_o = 27$ cm;

b) $a = 5$ dm, $b = 7$ dm;

c) $m = 36$ mm, $m_o = 42$ mm.

365 Egy torony teteje négyzet alapú gúla. Szeretnék a tetején lévő régi palát lecserélni jobb minőségűre. A gúla alapéle 2,2 m, az oldalélek pedig 2,6 m hosszúak. Hány m^2-re kell palát vásárolni?



366 Egy torony teteje négyzet alapú egyenes gúla. A gúla palástja pontosan az alaplap területének kétszeresével egyenlő. Mekkora szöget zár be az oldallap az alaplappal?

367 Igaz vagy hamis?

(A) Van olyan gúla, amelyben az alaplap területe egyenlő egy oldallap területével.

(B) Van olyan gúla, amelyben az oldalélek és az alapélek azonos hosszúságúak.

(C) Minden gúlának van testátlója.

(D) Minden gúlának van lapátlója.

368 Számítsd ki a szabályos tetraéder élének hosszát, ha a felszíne $\frac{169 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm^2!

* **369** Egy gúla minden éle 10 cm. Mekkora a palástjának a felszíne?

370 Igaz vagy hamis?

(A) A gúla éleinek száma 5-nél nagyobb egész szám.

(B) A gúla éleinek száma lehet 101.

(C) A gúla éleinek száma lehet 110.

(D) A gúla lapjainak száma 3-nál nagyobb egész szám.

(E) A gúla lapjainak száma nem lehet páratlan.

(F) A gúla lapjainak száma lehet 60.

371 Egy négyzet alapú gúla minden oldallapja 45°-os szöget zár be az alaplappal. A négyzet oldala 6 m.

a) Milyen magas a gúla?

b) Milyen hosszú az oldaléle?

372 Szabályos hatoldalú gúla magassága 35 cm, oldaléle 37 cm. Mekkora az alapéle?

Kúpok

373 Számítsd ki a kúp hiányzó adatát, ha alaplapjának sugara r, alkotója a, magassága m!

a) $r = 14$ cm, $a = 50$ cm; *b)* $r = 24$ mm, $m = 27{,}5$ mm;

c) $a = 17$ dm, $m = 16{,}8$ dm.

374 Számítsd ki a kúp magasságát és felszínét, ha alaplapjának átmérője d, alkotója a!

a) $d = 22$ cm, $a = 61$ cm; *b)* $d = 24$ cm, $a = 37$ cm.

375 Az 5 cm és 12 cm befogójú derékszögű háromszöget először a rövidebb, aztán a hosszabb befogója körül megforgatjuk. Az így kapott kúpok közül melyiknek nagyobb a felszíne és mennyivel?

376 A 36 cm és 77 cm befogójú derékszögű háromszöget először a rövidebb, aztán a hosszabb befogója körül megforgatjuk. Hogyan aránylik egymáshoz az így kapott kúpok felszíne?

377 A 21 cm sugarú körlapot két egymással 120°-os szöget bezáró sugárral két körcikkre vágjuk. Mindkét körcikkből elkészítünk egy kúppalástot.

a) Hogyan aránylik egymáshoz a két palást területe?

b) Hogyan aránylik egymáshoz a kúpok alaplapjainak sugara?

c) Hogyan aránylik egymáshoz a kúpok alaplapjainak területe?

d) Hogyan aránylik egymáshoz a két kúp felszíne?

e) Milyen magasak a kúpok?

378 Egy 8 cm sugarú kúpot a tengelyét tartalmazó síkkal kettévágtunk. A vágásfelület egy 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszög lett.

a) Milyen magas a kúp?

b) Számítsd ki a kúp felszínét!

379 Egy háromszög két oldala 25 cm és 26 cm hosszú. A közös csúcsukból induló magasság hossza 24 cm. A háromszöget megforgatjuk a legrövidebb oldala körül. Mekkora az így kapott test felszíne?

380 A 8 cm sugarú és 15 cm magasságú kúpot a tengelyére merőlegesen, a csúcsától 5 cm-re elvágunk. Mekkora a vágásfelület területe?

A gúla és a kúp térfogata

(Emelt szintű, választható tananyag)

381 Számítsd ki a négyzet alapú gúla térfogatát, ha az alapéle 13 cm, a testmagassága 21 cm, és az oldallapjai egybevágó háromszögek!

382 Számítsd ki a szabályos háromszög alapú gúla térfogatát, ha az alapéle 16 cm, a testmagassága 18 cm, és mindhárom oldallapja egybevágó egymással!

383 Számítsd ki a négyzet alapú gúla térfogatát, ha az alapéle 20 cm, az oldalélei pedig 28 cm hosszúak!

384 Számítsd ki a négyzet alapú gúla térfogatát, ha az alapéle 12 cm, az oldallapok magassága pedig 20 cm!

385 Számítsd ki a kúp térfogatát, ha az alapkör sugara 5 cm, a magassága 10 cm!

386 Számítsd ki a kúp térfogatát, ha alaplapjának átmérője d, alkotója a!

a) $d = 22$ cm, $a = 61$ cm; *b)* $d = 24$ cm, $a = 37$ cm.

387 Egy négyzet alapú gúla térfogata 816 cm^3, alapéle 12 cm. Az oldallapjai egybevágó háromszögek.

a) Milyen magas a gúla? *b)* Mekkora a gúla felszíne?

c) A gúlából kiesztergályozzuk a legnagyobb térfogatú kúpot. A gúla hány százaléka lesz hulladék?

388 Hogyan aránylik a kúp palástjának és alapkörének területe egymáshoz, ha a kúp kiterített palástja háromnegyed kör?

Gömb

389 Számítsd ki a gömb felszínét és térfogatát, ha

a) $r = 10$ cm; *b)* $r = 13{,}5$ cm; *c)* $r = \frac{7}{4}$ cm; *d)* $r = 4{,}8$ cm!

390 A fagyit adagoló kanál félgömb alakú, sugara 2 cm. Mekkora a kanál térfogata?

391 Hány hektoliter víz fér el egy 5 méter átmérőjű, gömb alakú víztartályban?

392 A belül üres csokigolyó falvastagsága 2 mm. A golyó átmérője 6 cm. Hány cm^3 csokit használnak fel egy ilyen golyó elkészítéséhez?

393 Egy gyurmatéglatest éleinek hossza: 8 cm, 5 cm, 3 cm. A téglatestből gömb alakot formázunk. Mekkora az így kapott gömb sugara, felszíne és térfogata?

394 Vegyük a Földet 6370 km sugarú gömbnek. A Föld felszínének $\frac{2}{3}$ részét víz borítja. Mekkora területet tesz ki a Földön a szárazföld?

395 Egy ejtőernyőt vehetünk 6,8 m sugarú félgömbnek. Hány m^2 selyem kell az elkészítéséhez?

396 Mekkora a 25 000 m^3-es, gömb alakú gáztartály átmérője?



10. Valószínűségszámítás

397 Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha két fiú és egy lány valamilyen sorrendben leül egymás mellé, akkor azonos neműek nem ülnek egymás mellett?

398 Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha három fiú és két lány ül le egymás mellé, akkor azonos neműek nem ülnek egymás mellett?

399 Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha négy fiú és három lány ül le egymás mellé, akkor azonos neműek nem ülnek egymás mellett?

400 Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha két fiú és két lány ül le egymás mellé, akkor azonos neműek nem ülnek egymás mellett?

401 A házunk előtti parkolóban 10 gépkocsinak van hely. Ha 5 Renault, és 5 Opel áll be, akkor mi a valószínűsége annak, hogy nem áll egymás mellett két Opel?

402 Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha három fiú és három lány ül le egymás mellé, akkor azonos neműek nem ülnek egymás mellett?

403 Egy érmét egyszer feldobunk. Fogadni lehet a fejek számára. Te mire fogadnál? Miért?

404 Két érmét egyszerre feldobunk. Fogadni lehet a fejek számára. Te mire fogadnál? Miért?

405 Három érmét egyszerre feldobunk. Fogadni lehet a fejek számára. Te mire fogadnál? Miért?

406 Négy érmét egyszerre feldobunk. Fogadni lehet a fejek számára. Te mire fogadnál? Miért?

407 Az D, E, Ő, R betűket véletlenszerűen egymás mellé írtuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy értelmes szót írtunk le?

408 Az 1, 4, 6, 7 számjegyek egyszeri felhasználásával négyjegyű számokat írtunk le. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szám hattal osztható?

409 A 0, 1, 3, 4 számjegyek egyszeri felhasználásával négyjegyű számokat írtunk le. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szám

a) 10-zel osztható;

b) nem kisebb mint 3000;

c) páros, és 3000-nél kisebb?

410 Egy dobókockát kétszer feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok

a) összege páros szám;

b) összege egyjegyű szám,

c) szorzata páros szám;

d) relatív prímek;

e) közül legalább egy 6-os;

f) egyenlők;

g) mindkét kockán hármasnál kisebbek;

h) közül az elsőre nagyobbat dobtunk?

411 Egy érmét ötször feldobtunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az írások száma

a) 0; *b)* 1; *c)* 2; *d)* 3; *e)* 4; *f)* 5?

Készíts oszlopdiagramot az események valószínűségének értékéről!

412 Egy urnába pontosan 8 golyót tehetünk. Tetszőlegesen sok kék és piros golyóból válogathatunk.

Melyik színből hányat választanál ahhoz, hogy egy golyót véletlenszerűen kiválasztva a kék golyó húzásának valószínűsége

a) 0 legyen;

b) 1 legyen;

c) pontosan $\frac{3}{8}$ legyen;

d) pontosan $\frac{1}{4}$ legyen;

e) nagyobb legyen, mint a piros golyó húzásának valószínűsége;

f) kevesebb mint fele legyen a piros golyó húzása valószínűségének?

413 Öt jó barát elhatározta, hogy részt vesz az iskolai kenutúrán, de sajnos későn jelentkeztek, így már csak hármuknak maradt férőhely. Elhatározták, hogy sorsolással választják ki, hogy melyikük mehet.

Milyen sorsolási módot javasolnál?

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyikük, Benő mehet a kenutúrára?



414 Két tálkában színes cukorkák vannak. Az egyikben 6 piros és 1 zöld, a másikban 1 barna és 6 sárga. Véletlenszerűen választunk mindkét tálkából 1-1 cukrot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy éppen zöldet és barnát választottunk?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pirosat és barnát választottunk?

415 Karesz pénztárcájában 5 db 20 Ft-os van. Édesanyja betett a húszasok mellé néhány 10 Ft-ost is. Hány db tízest kapott Karesz, ha ezek után a pénztárcájából találomra kiválasztott érme 0,8 valószínűséggel 10 Ft-os?

416 Egy téglalap alakú tepsiben nagymama süteményt sütött, és amikor tálcára tette, a tetejét és az oldalát bekente csokikrémmel. Tálaláskor 6 vágással, 16 egyforma méretű szeletre darabolta. Kiválasztunk belőle találomra egy szeletet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy

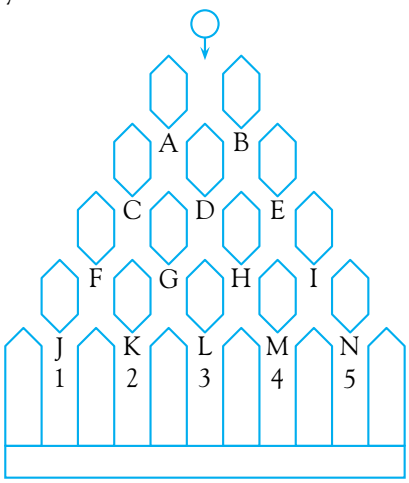
a) csak egy oldala lesz csokis;

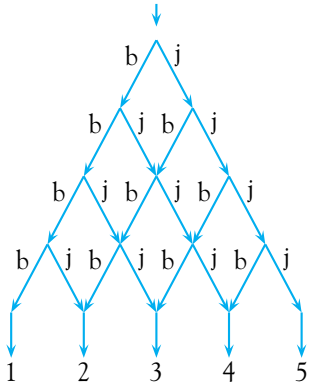
b) ugyanannyi oldala lesz csokis, mint amennyi nem;

c) feleannyi csokis oldala lesz, mint amennyi nem;

d) több csokis oldala lesz, mint nem?

E* **417** Az ábrán látható a Galton-deszka rajza és az abba bedobott golyó lehetséges útvonalai. A golyót bármelyik nyíláson is dobjuk be, azt a fából készült ékek az elágazásoknál egyenlő valószínűséggel terelik két irányba. Indítsuk a golyókat a felső nyíláson át!





a) Számítsuk ki, hogy az egyes elágazási pontokhoz mekkora valószínűséggel juthat el a golyó!

b) Határozzuk meg az 1, a 2, a 3, a 4 és az 5 folyosókba való megérkezés valószínűségét!

c) Nézz utána, ki volt F. Galton!

E* **418** Egy franciakártya-csomagból vedd ki a káró ászt. Ha véletlenszerűen ráejtünk erre a lapra egy pontszerű pöttyöt (például egy morzsát), mi annak a valószínűsége, hogy a pötty a színes részre esik? A szükséges adatokat méréssel állapítsd meg.



E* **419** Hogyan változik az előző feladat megoldása, ha a káró 8-ast választjuk ki?

E* **420** Egy 1 dm sugarú körben véletlenszerűen kijelöltünk egy pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pont közelebb van a középponthoz, mint a kör kerületéhez?

E* **421** Rajzolj egy 10 cm oldalú négyzetet! Színezd ki négy színnel úgy, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egy belső pontot, akkor a különböző színek választásának valószínűsége 0,2; 0,3; 0,1; 0,4 legyen!

E* **422** Szerkessz 5 cm oldalú szabályos háromszöget! Szerkeszd meg a háromszög köré írt körét! Ezt a „céltáblát" eltalálva mi annak a valószínűsége, hogy a keletkezett különböző síkrészek valamelyikébe dobtunk?

E* **423** Szerkessz 3 cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszöget! Szerkeszd meg a háromszög köré írt körét. Ezt a „céltáblát" eltalálva mi annak a valószínűsége, hogy a keletkezett különböző síkrészek valamelyikébe dobtunk?

E* **424** Rajzolj a füzetedbe párhuzamos egyeneseket, egymástól 3 cm és 5 cm távolságra, váltakozva! Ha erre az ábrára véletlenszerűen ráejtünk egy 1 cm átmérőjű körlapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy nem takar le az egyenesekből?

11. Középiskolába készülünk

Első feladatlap

425 Határozd meg a, b és c értékét,

a) ha a a legnagyobb olyan kétjegyű szám, amelyben a számjegyek összege páratlan;

b) ha b a három legnagyobb negatív egész szám összege;

c) ha c a legnagyobb és a legkisebb háromjegyű pozitív egész szám különbsége!

426 Rajzolj két, különböző sugarú félkörlemezt! A két határolóvonalnak hány közös pontja lehet? Minden lehetséges esetet szemléltess egy példával!

427 Egy 1 : 250 000 méretarányú térképen két város távolsága 8 cm.

a) Hány kilométerre van egymástól a valóságban a két város?

b) Hány centiméternek mérnénk ezen a térképen az 50 km-es távolságot?

428 Hatvan diák körében felmérést végeztek, hogy szeretik-e a következő fagylaltokat: csokoládé, vanília, eper, karamell, citrom, barack. Az alábbi táblázat mutatja, hogy az egyes fagylaltot hányan szeretik.

csokoládé	vanília	eper	karamell	citrom	barack
52	36	48	28	44	42



a) Kétgombócos fagylaltot veszünk. A legnépszerűbb fagylaltokat szeretnénk megkóstolni. Melyik kettőt vegyük?

b) Mennyivel szeretik többen az eperfagylaltot, mint a citromot?

c) Mely fagylaltokról mondható, hogy a megkérdezettek több mint 70%-a szereti?

d) Hány olyan gyerek lehet, aki a vanília- és a citromfagylaltot is szereti?

429 Dóri gondolt egy számot, és a következőket mondta Virágnak:
Ha a gondolt számhoz hozzáadod a gondolt szám tízszeresét és a százszorosát, akkor 15 651 lesz az eredmény. Melyik számra gondoltam?
Segíts Virágnak megmondani, hogy melyik a gondolt szám!

430 Az $ABCD$ derékszögű trapézban a hosszabb AB alap egyenlő az AC átlóval. Tudjuk, hogy $AB = 12$ cm, $CAD \sphericalangle = 60°$.

a) Mekkora a derékszögű szár? *b)* Mekkora az $ABC \sphericalangle$?

c) Mekkora a $BCD \sphericalangle$?

431 Leírtuk egymás mellé az egész számokat 1-től 111-ig: 1234 . . . 110111.

a) Hány jegyű az így kapott szám?

b) Melyik számjegy áll balról a 30. helyen?

c) Hány darab 1-es számjegyet írtunk le összesen?

432 Igaz vagy hamis?

(A) Minden rombusz deltoid.

(B) A nyolc legkisebb pozitív prímszám összege páros.

(C) A tompaszögű háromszögnek is van hegyesszöge.

(D) Ha két természetes szám szorzata páros, akkor az összegük is páros.

(E) A háromszög köré írható kör középpontja mindig a háromszög belsejében van.

433 Egy 3 cm élhosszúságú tömör kockának minden élén bejelöltük a harmadolópontokat. A kocka minden csúcsát levágjuk a levágandó csúcshoz legközelebbi harmadolópontokra illesztett síkkal.

a) Milyen lapjai vannak az így keletkezett testnek?

b) Hány éle van az így keletkezett testnek?

c) Hány csúcsa van az így keletkezett testnek?

434 Laci kapott egy bizonyos pénzösszeget. Ezután tovább takarékoskodott, így megkétszerezte ezt az összeget. Ekkor elköltött 40 ezer forintot. A megmaradt pénzt megint megkétszerezte, s ekkor 100 ezer forintot költött el belőle. Ismét megkétszerezte a maradékot, és ekkor 480 ezer forintot költött el. Ekkor annyi pénze maradt, mint amennyit először kapott.

a) Mekkora volt ez az összeg?

b) A 40 ezer forint elköltésekor csak 2000 Ft-nál nagyobb címletet használt. Hányféleképpen tehette ezt meg?

c) A 40 ezer forint kifizetéséhez mindegyik címletű papírpénzt használta legalább egyszer. Hányféleképpen tehette ezt meg?

Második feladatlap

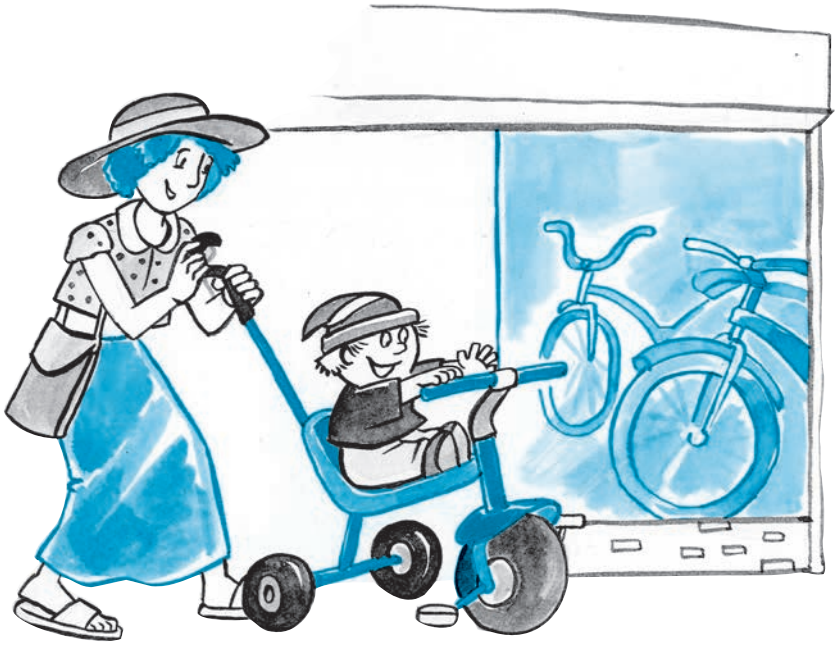
435 Határozd meg az x, y és z értékét!

$x = \frac{13}{9} : \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{27}\right)$;

$y = -7 - (8 - 13) + (-2 - 1) + 8$;

z a legnagyobb kétjegyű szám, amely nem osztható sem 3-mal, sem 2-vel, és nem prímszám.

436 Egy szaküzletben néhány tricikli és néhány bicikli látható, összesen 38 db. (A triciklinek három, a biciklinek két kereke van.)



a) Lehet-e a 38 járműnek 96 kereke?

b) Lehet-e az összes biciklinek ugyanannyi kereke, mint a tricikliknek?

c) Hány bicikli van az üzletben, ha összesen 85 kereket számoltunk össze?

437 Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit, ha tudjuk az $y + 2 = 3 \cdot x$ összefüggést!

y	7		-8	
x		33		$-4{,}2$

438 A 24 fős 8. osztályban három témazáró dolgozatot írtak a tanulók. Az eredmények a táblázatból kiolvashatók.

	Elégtelen	Elégséges	Közepes	Jó	Jeles
I.	1	5	7	6	5
II.	2	5	9	4	4
III.	0	4	9	8	3

a) Melyik dolgozatnál volt a legtöbb jeles?

b) Hány közepes dolgozat született egész évben?

c) Hány százaléka írt az osztálynak legalább közepest az első dolgozatban?

d) Számítsd ki tized pontossággal a harmadik dolgozat átlagát!

439 Igaz vagy hamis?

(A) Van olyan négyszög, amelynek hegyesszöge, derékszöge és tompaszöge is van.

(B) Van olyan háromszög, amelyik középpontosan szimmetrikus.

(C) Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor az téglalap.

(D) A négyzetnek két szimmetriatengelye van.

(E) Van olyan deltoid, amelyiknek pontosan egy derékszöge van.

440 *a)* Egy négyszög belső szögeinek aránya: $\alpha:\beta:\gamma:\delta = 4:5:7:8$. Mekkora a legnagyobb szöge?

b) Mekkora annak a deltoidnak a területe, amelynek az átlói 25 cm és 12 cm hosszúak?

c) Mekkora annak a rombusznak a kerülete, amelynek az átlói 10 cm és 24 cm hosszúak?

441 Egy könyv számozása a 9. oldalon 9-essel kezdődik. Ezen az oldalon találjuk a bevezetőt. A befejező oldalán a 458-as látható.

a) Mennyi a számozott oldalak száma?

b) Van, aki ebből a könyvből egy oldalt átlagosan 90 másodperc alatt olvas el. Hány óra alatt tudja az illető elolvasni a könyvet?

c) Egyik nap 34 oldalt haladt az olvasással. Hány percet olvasott ezen a napon?

442 Egy kör alakú asztalnál öten ülnek. Mindenki megsúgja mindkét szomszédjának a saját életkorát. (Ezt mindenki egész számra kerekítve mondja meg.) A hallott számokat mindenki összeadja, majd sorban, hangosan megmondják ezeket az összegeket. Ezek a számok a következők: 40, 27, 34, 41, 32.

Hány évesek az asztal körül ülők?

443 Ugyanakkora fa kiskockákból építettünk egy tömör téglatestet, élei 3, 4 és 5 egység. Az így kapott téglatest felszínét befestettük.

a) Hány darab olyan kiskockát kaptunk, amelynek nincs festett lapja?

b) Hány darab olyan kiskockát kaptunk, amelynek pontosan három lapja festett?

c) Melyikből van több, a pontosan két festett lapú, vagy a pontosan egy festett lapú kiskockából?

444 Egy tányéron lévő aprósüteményt elosztják a gyerekek egymás között. Az egész harmadánál eggyel kevesebb lesz Anitáé. Az egész negyedénél eggyel több lesz Danié. Ferié lesz az egész felénél öttel kevesebb. Ekkor még marad 3 darab aprósütemény a tányéron.



a) Hány darab jutott Anitának?

b) Hány darab jutott Daninak?

c) Hány darab jutott Ferinek?

d) Mennyi sütemény volt összesen a tányéron?

Harmadik feladatlap

445 Egy kör határvonalára leírtunk öt racionális számot. Tudjuk, hogy az öt közül bármelyik egyenlő a két szomszédjának a szorzatánál eggyel kisebb számmal.

a) Melyik a hiányzó három szám, ha az 5 és a 2 szomszédok?

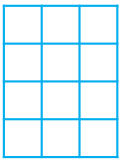
b) Melyik a hiányzó három szám, ha az 5 és a 2 nem szomszédok?

446 Egy könyvesboltban 76 darab könyv van egy háromkötetes sorozatból. Ennek 25%-a az első kötet, továbbá tudjuk, hogy a harmadik kötetből 9-cel kevesebb van, mint a második kötetből.

a) Hány darab van az első kötetből? *b)* Hány darab van a második kötetből?

c) Hány darab van a harmadik kötetből?

447 Az ábrán látható négyzetek közül háromba egy-egy azonos sugarú kört rajzolunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindig tengelyesen szimmetrikus ábrát kapunk?



448 Igaz vagy hamis?

(A) Ha két természetes szám egyike sem osztható néggyel, akkor az összegük sem osztható néggyel.

(B) A tizenöt legkisebb pozitív páratlan egész szám összege prímszám.

(C) Egy paralelogramma négy belső és négy külső szögéből mindig kiválaszthatunk négy egyenlő szöget.

(D) Egy négyszög két szemközti oldala lehet párhuzamos.

(E) Egy négyszög két szemközti oldala nem lehet merőleges egymásra.

(F) Minden deltoid szétvágható két egybevágó háromszögre.

449 Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 számokat rakd két halmazba úgy, hogy

a) a két halmazban lévő számok összege egyenlő legyen;

b) az egyik halmazban lévő számok összege fele legyen a másik halmazban lévő számok összegének;

c) az egyik halmazban lévő számok összege harmada legyen a másik halmazban lévő számok összegének;

d) a két halmazban lévő számok szorzata egyenlő legyen!

450 Egy négyszög külső szögeinek aránya 1 : 2 : 3 : 4. Ezt a négy külső szöget átalakítjuk úgy, hogy egy háromszög három külső szöge legyen. A négy közül nem lesz szükség a 72°-os szögre. Ezt három egyenlő részre osztva, hozzáadjuk a másik három szöghöz. Ekkor kapjuk a háromszög három külső szögét.

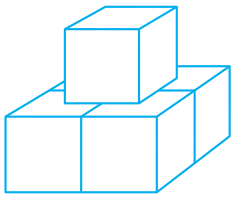
a) A négyszög külső szögei közül mekkora a legkisebb szög?

b) A négyszög külső szögei közül mekkora a legnagyobb szög?

c) Mekkorák lettek a háromszög külső szögei?

d) Add meg a legegyszerűbb alakban a háromszög három külső szögének arányát!

451 Öt egybevágó, 1,5 cm élhosszúságú kockából az ábrán látható alakzatot építettük.



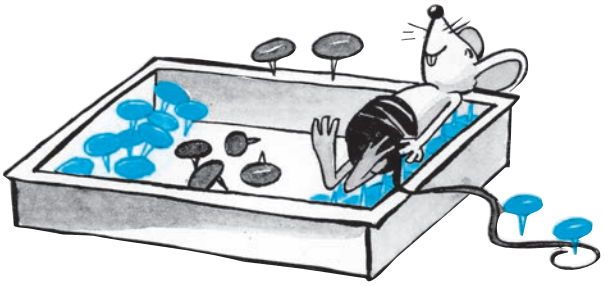
a) Rajzold le, hogy hogyan néz ki oldalról nézve!

b) Rajzold le felülről!

c) Mekkora a test térfogata?

d) Mekkora a test felszíne?

452 Egy dobozban színes fejű rajzszegek vannak: 11 sárga, 12 zöld és 40 lila.



a) Mindegyiket ugyanannyival növeljük. Lehetséges-e, hogy ekkor a sárgák és a zöldek száma összesen egyenlő lesz a lilák számával?

b) Mindegyikből ugyanannyit elveszünk. Lehetséges-e, hogy ekkor a sárgák és a zöldek összege fele lesz a lilák számának?

c) A dobozból véletlenszerűen kiveszünk néhány darab rajzszeget. Minimum hány darab esetén mondhatjuk, hogy a kivettek között már biztosan van három azonos színű?

453 Legyen F az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja! A C csúcsból húzott magasság talppontja az AF-re illeszkedik, ezt jelölje T! Az FTC háromszögben a C-nél $30°$-os szög van, és a $CF = 6$ cm.

a) Mekkora a $CFT \sphericalangle$?

b) Mekkora a $CAB \sphericalangle$ és az $ABC \sphericalangle$?

c) Mekkora az AB szakasz?

d) Hány darab háromszöget határoznak meg az A, B, C, F, T pontok?

454 Keress olyan x, y pozitív egész számpárt, amelyre

a) $x \cdot y \cdot (x + y) = 30$;

b) $x \cdot y \cdot (x + y) = 1820$;

c) $x \cdot y \cdot (x + y) = 2007$!

Végeredmények

1. Halmazok

Halmazok, halmazműveletek

1 Mind egyenlő: $A = B = C = D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

2 *a)* $A = B$, a C-ből hiányzik a 3-as;

b) $A = B = C$;

c) $A = B$; a C-ből hiányzik a 25.

3 1; 4; 9; ... eleme A-nak, de például 2; π nem eleme;

2; 3; 5; eleme B-nek, de például 4; 10; nem eleme;

0; 10; 20; ... eleme C-nek, de például 4; 7; nem eleme;

1; 3; 5; ... eleme D-nek, de például 1,5; 6; nem eleme;

10,2; $\frac{23}{2}$; 19,7 ... eleme E-nek, de például 9,7; 20; nem eleme;

háromszögek, körök, négyszögek stb. elemei F-nek, de például a kocka, egy természetes szám nem eleme;

négyzetek, húrtrapézok, deltoidok stb. elemei G-nek, de például a kör vagy egy szám nem eleme;

az eltolások, a forgatások a tükrözések stb. elemei H-nak, de például a háromszögek, négyszögek vagy számok nem elemei;

az 1-et dobunk, a 2-t dobunk, a 3-at dobunk stb. J-ben vannak, de például a kocka, a dobás vagy egy szám nem elemei;

az átlag, a módusz, a medián K-ban vannak, de az adatok vagy számok nincsenek benne.

4 Üres: A; B (amelyik háromszögnek van két szimmetriatengelye, annak három is van); F.

C-hez tartoznak a téglalapok, rombuszok (amelyek nem négyzetek).

D-ben vannak a prímszámok. $E = \{1\}$.

5 *a)* $\overline{A} = \{2; 4\}$;

b) $\overline{B}$ = {páros természetes számok};

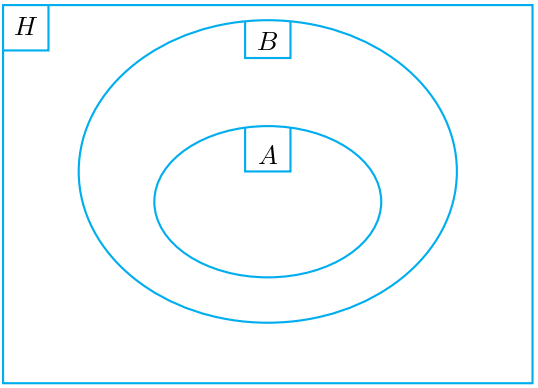
c) $\overline{C}$ = {hegyesszögű, tompaszögű háromszögek};

d) $\overline{D}$ = {szimmetriával nem rendelkező háromszögek};

e) E a H-ban üreshalmaz, a H-ra vonatkozó komplementere maga a H.

f) $\overline{F}$ a természetes számok közül a prímszámok.

6 Például:



a) H: síkidomok; A: négyzetek; B: téglalapok.

b) H: természetes számok; A: 100-zal osztható számok; B-10-zel osztható számok.

c) H: állatok; A: verebek; B: madarak.

d) H: tárgyak; A: autók; B: járművek. (Például a kerékpár olyan tárgy, amely jármű, de nem autó.)

e) H: a racionális számok; A: a természetes számok, B: az egész számok.

Műveletek halmazokkal

7 Add meg az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat!

a) $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\}$; $A \cap B = \{6; 12; 18\}$;

b) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 25; 30\}$; $A \cap B = \{5\}$;

c) $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \ldots\}$; $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$.

8 *a)* $A = \{1; 2; 6; 7\}$; $B = \{2; 3; 5; 6\}$;

b) $A = \{3; 5; 6\}$; $B = \{3; 4; 6; 7; 8\}$;

c) $A = \{1; 2; 3; 4; 7; 9\}$; $B = \{3; 7; 9\}$.

9 14-en.

10 Ha a 19 textilfestést tanuló gyerek között 3 a 7.-es, akkor 16 a 8.-os. Ha 19-en tanulnak textilfestést a 30-ból, akkor 11-en tanulnak szövést. Ha 12 7.-es közül 3 tanul textilfestést, akkor 9 tanul szövést. Kétféleképpen is megkapjuk, hogy szövést 2 8.-os tanul.

	szövés	textilfestés	
7. oszt.	9	3	együtt 12
8. oszt.	x	16	együtt 18
	együtt 11	együtt 19	

11 Csak horgászik: 4 ember; csak síel: 1; csak kerékpározik: 10; horgászik és síel: 4; horgászik és kerékpározik: 1; kerékpározik és síel: 2; horgászik, síel és kerékpározik: 3. Egyik sportot sem műveli: 1. A társaság 26 fős.

12 Csak angolul: 7, csak németül: 5, csak franciául: 1 ember beszél. (Két nyelvet 4-4 ember beszél.)

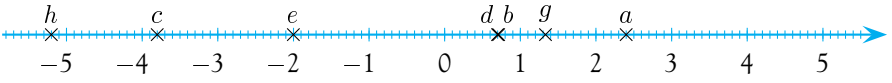
2. A számok világa

A számok

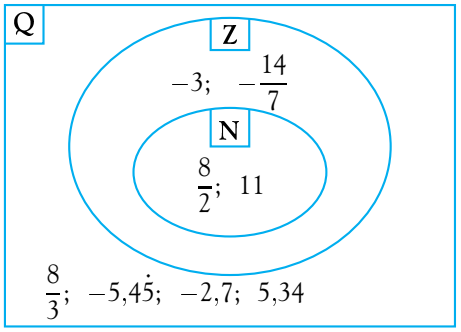
A racionális számok

13 A tört alakban megadott számok tizedestört-alakja: $b = 0,\dot{7}14285\dot{}$; $e = -2$; $g = 1,\dot{3}$.

Az f az adott számegyenesdarabon nincs rajta, körülbelül éppen a nyíl végére esik. A b és a d számok között olyan kicsi a különbség, hogy az a számegyenesen nem igazán érzékeltethető.



14



15 $a = 0{,}75$; $b = 0{,}4$; $c = 0{,}8\dot{3}$; $d = 1{,}9$; $e = 2{,}\dot{4}2857\dot{1}$; $f = 0{,}\dot{4}$.



a)	*b)*	*c)*	*d)*
$0 < a < 1$	$0{,}7 < a < 0{,}8$	$0{,}74 < a < 0{,}76$	$0{,}749 < a < 0{,}751$
$0 < b < 1$	$0{,}3 < b < 0{,}5$	$0{,}39 < b < 0{,}41$	$0{,}399 < b < 0{,}401$
$0 < c < 1$	$0{,}8 < c < 0{,}9$	$0{,}83 < c < 0{,}84$	$0{,}833 < c < 0{,}834$
$1 < d < 2$	$1{,}8 < d < 2{,}0$	$0{,}89 < d < 1{,}91$	$0{,}899 < d < 1{,}901$
$2 < e < 3$	$2{,}4 < e < 2{,}5$	$2{,}42 < e < 2{,}43$	$2{,}428 < e < 2{,}429$
$0 < f < 1$	$0{,}4 < f < 0{,}5$	$0{,}44 < f < 0{,}45$	$0{,}444 < f < 0{,}445$

16 Jelölje a két számot x és y. $3 < x < 4$. Ha a másik szám nagyobb, akkor a $(10; 11)$ intervallumba, ha kisebb, akkor a $(-4; -3)$ intervallumba esik.

17 $3 < x < 4$. Ha y nagyobb, akkor a $(3{,}7; 4{,}7)$ intervallumba, ha kisebb, akkor a $(2{,}3; 3{,}3)$ intervallumba esik.

18 A racionális szám két egész szám hányadosaként írható fel. Az $1 = \frac{1}{1}$-et és a törtet közös nevezőre hozzuk. Az összeg ismét két egész szám hányadosa lesz, azaz racionális. Az állítás tehát igaz.

19 *a)* Mivel $2 = \frac{3}{\frac{3}{2}}$ és $3 = \frac{3}{1}$, így olyan nevezőt keresünk a 3 számlálóhoz, amely egész szám, és 1 és $\frac{3}{2}$ közé esik. Ilyen csak az 1 lehet. $2 \leq \frac{3}{1} \leq 3$.

b) Mivel $2 = \frac{4}{2}$ és $3 = \frac{4}{\frac{4}{3}}$, így olyan nevezőt keresünk a 4 számlálóhoz, amely egész szám, és $\frac{4}{3}$ és 2 közé esik. Csak a 2 jön szóba.

c) Mivel $2 = \frac{5}{\frac{5}{2}}$ és $3 = \frac{5}{\frac{5}{3}}$, így olyan nevezőt keresünk a 5 számlálóhoz, amely egész szám és $\frac{5}{3}$ és $\frac{5}{2}$ közé esik. Ilyen a 2. Valóban, $2 \leq \frac{5}{2} \leq 3$, $2 \leq 2{,}5 \leq 3$.

20 *a)* 0.

b) Nincs ilyen, mert minden természetes számnál van nagyobb, például a nála 1-gyel nagyobb szám.

c) Nincs ilyen, mert minden egész számnál van kisebb, például a nála 1-gyel kisebb szám.

d) Nincs ilyen, mert minden egész számnál van nagyobb, például a nála 1-gyel nagyobb szám.

e) 1. *f)* -1.

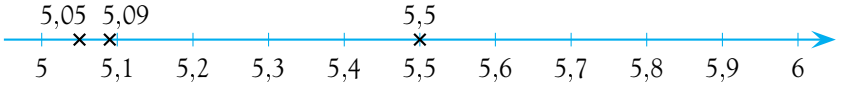
g) Nincs ilyen, mert mindegyik racionális számnál van kisebb. Például a nála 1-gyel vagy 0,1-del kisebb szám.

h) Nincs ilyen, mert minden pozitív racionális számnál kisebb a szám fele, és az is pozitív racionális szám.

i) Nincs ilyen, mert minden racionális számnál van nagyobb racionális szám, például a nála 1-gyel vagy például 0,5-del nagyobb szám.

j) Nincs ilyen, mert minden negatív racionális számnál van nagyobb negatív racionális szám, például a fele. Az is racionális szám, és az is negatív.

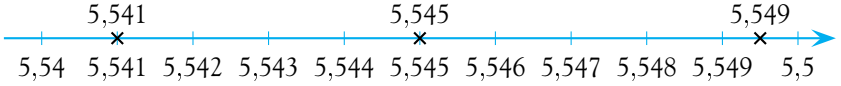
21 *a)* Bármely szám megfelel, amely 5-nél nagyobb, 6-nál kisebb. Például: 5,5; 5,05; 5,09.



b) Bármely szám megfelel, amely 5,5-nél nagyobb, 5,6-nél kisebb. Például: 5,55; 5,505; 5,59.



c) Bármely szám megfelel, amely 5,54-nél nagyobb, 5,55-nél kisebb. Például: 5,541; 5,545; 5,5495. Számegyenesen ábrázolva:



A négyzetgyök fogalma

22 $a = 2{,}23\ldots$, mert $2{,}23^2 = 4{,}9729 < a^2 < 2{,}24^2 = 5{,}0176$.

$b = 1{,}73\ldots$, mert $1{,}73^2 = 2{,}9929 < b^2 < 1{,}74^2 = 3{,}0276$.

$c = 0{,}70\ldots$, mert $0{,}70 = 0{,}49 < c^2 < 0{,}71^2 = 5041$.

$d = 0{,}89\ldots$, mert $0{,}89^2 = 0{,}7921 < d^2 < 0{,}90^2 = 0{,}81$.

$e = 1{,}41\ldots$, mert $1{,}41^2 = 1{,}9881 < e^2 < 1{,}42^2 = 2{,}0164$.

$f = 0{,}31\ldots$, mert $0{,}31^2 = 0{,}0961 < f^2 < 0{,}32^2 = 0{,}1024$.

a) $2 < a < 3$; $1 < b < 2$; $0 < c < 1$; $0 < d < 1$; $1 < e < 2$; $0 < f < 1$.

b) $2{,}2 < a < 2{,}3$; $1{,}7 < b < 1{,}8$; $0{,}7 < c < 0{,}8$; $0{,}8 < d < 0{,}9$; $1{,}4 < e < 1{,}5$; $0{,}3 < f < 0{,}4$.



23 *a)* $T = 36$ területegység. A négyzet oldalának hossza 6 egység.

b) A téglalap kerülete $4 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 26$ egység, a négyzet kerülete $6 \cdot 4 = 24$ egység. A téglalapnak nagyobb a kerülete.

24 A közös terület 120 területegység.

a) A négyzet oldalának hossza $\sqrt{120}$. Tizedre kerekítve 11,0 (de annál kisebb). Századra kerekítve 10,95.

b) A téglalap kerülete 44, a négyzet kerülete a tizedre kerekített értékkel 44 (de kisebb annál), a századra kerekített értékkel körülbelül 43,8 egység. Mindkét esetben a négyzetnek kisebb a kerülete.

25 12 m. **26** 6 m. **27** 10 m.

28 A téglalap területe 25 m^2. Az oldalai (mivel egész számok) 1 és 25. (Az 5 és 5 oldalú téglalap egybevágó a négyzettel.)

a) A téglalap kerülete 52 m.

b) Mivel a négyzet kerülete 20 m, a téglalap kerülete a nagyobb.

29

A téglalap oldalai	A téglalap kerülete	A közös terület	A négyzet oldala	A négyzet kerülete
12 és 6	36	72	$\approx 8{,}5$	≈ 34
10 és 5	30	50	≈ 7	≈ 28
5 és 6	22	30	$\approx 5{,}5$	≈ 22

A pi és más nem racionális számok

(Emelt szintű tananyag)

30 Sok helyes megoldás lehet, egy-egy példa:

$a = -\frac{5}{1}$; $b = \frac{0}{1}$; $c = \frac{6}{1}$; $d = \frac{125}{10}$;

$e = \frac{315}{100}$; $f = 5\frac{5}{9} = \frac{50}{9}$; $g = 4\frac{1}{6} = \frac{25}{6}$; $h = 3\frac{54}{99} = \frac{351}{99}$;

$i = 4\frac{15}{99} = \frac{411}{99}$; $\quad j = 1{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}\dot{1} = 1{,}5 + 0{,}1 \cdot \frac{1}{9} = 1{,}5 + \frac{1}{90} = \frac{68}{45}$;

$k = 0{,}1 \cdot 0{,}\dot{5} = 0{,}1 \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{90}$; $\qquad l = 0{,}1 \cdot 0{,}\dot{9}\dot{4} = \frac{94}{990}$.

31 Például: $0{,}\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99}$; $0{,}\dot{2}\dot{1} = \frac{21}{99}$; $0{,}\dot{1}1\dot{2} = \frac{112}{999}$; ...

32 Mindegyik feladatra nagyon sok megoldás adható. Például:

a) $a = 4{,}1$; *b)* $a = 4{,}\dot{1}$; *c)* $a = 4{,}10100100010000\ldots$;

a) $b = 0{,}55$; *b)* $b = 0{,}\dot{5}$; *c)* $b = 0{,}550550055000550000\ldots$;

a) $c = 2{,}7$; *b)* $c = 2{,}\dot{7}\dot{1}$; *c)* $c = 0{,}71771777177771\ldots$;

a) $d = 3{,}3$; *b)* $d = 3{,}\dot{3}\dot{0}$; *c)* $d = 3{,}313311333111\ldots$.

33 Számítsd ki a megadott sugarú körök kerületét és területét a π három közelítésével! Kerekíts 2 tizedesjegyre!

	$r = 5$		$r = 10$		$r = 7$	
	K	T	K	T	K	T
$\frac{22}{7}$	31,43	78,57	62,86	314,29	44	154
3,14	31,4	78,5	62,8	314	43,96	153,86
$\frac{355}{113}$	31,42	78,54	62,83	314,16	43,98	153,94

Kis számok

34 A hiányzó értékek rendre:

a) -2; *b)* 2; *c)* 0,01; *d)* 2; *e)* 0; *f)* 10; *g)* 4; *h)* -4; *i)* 1.

35 *a)* $10^{-3} < 10^{-2} = 0{,}01 < 10^{-1} < 100 = 10^2$;

b) $0{,}001 < 10^{-2} < 1 < 100 < 10^3 < 10\,000$;

c) $0{,}001 < 10^{-1} < 10^0 < 10 < 10^2 < 1000$.

36 *a)* 3; *b)* 4; *c)* 1; *d)* 11; *e)* 6; *f)* 43; *g)* 101; *h)* 101.

37 *a)* 1; *b)* 3; *c)* 2; *d)* 7; *e)* 5; *f)* 53; *g)* 10; *h)* 10.

38 A hiányzó értékek: *a)* 0; 3; -3; 2; *b)* -3; -4; -9; -6; *c)* 2; 6; 7; 5.

Egy szám többféle alakja – a normálalak

39 $a = 2{,}74 \cdot 10^1$; $b = 1{,}43 \cdot 10^0$; $c = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$; $d = 1 \cdot 10^{-2}$; $e = 3{,}405 \cdot 10^1$; $f = 1{,}943 \cdot 10^2$; $g = 5 \cdot 10^{-4}$; $h = 1{,}0001 \cdot 10^3$.

40 *a)* $1{,}15 \cdot 10^{-3} < 1{,}5 \cdot 10^{-2} < 7{,}5 \cdot 10^{-2} < 3{,}6 \cdot 10^2$;

b) $5{,}4 \cdot 10^4 < 2{,}5 \cdot 10^5 < 3{,}14 \cdot 10^5 < 8{,}132 \cdot 10^5$;

c) $6{,}15 \cdot 10^{-2} < 9{,}5 \cdot 10^{-2} < 3{,}1 \cdot 10^{-1} < 1{,}1 \cdot 10^0$.

41 $a = 2600$; $b = 260$; $c = 2600$; $d = 2600$; $e = 26\,000$; $f = 26\,000$; $g = 2600$; $h = 26$; $i = 260$.

Ennek alapján $a = c = d = g$; $b = i$; $e = f$.

42 $a = 35\,000$; $b = 3{,}5$; $c = 35$; $d = 350\,000$; $e = 350$; $f = 3500$; $g = 35\,000$; $h = 350$; $i = 3500$.

Eszerint $a = g$; $e = h$; $f = i$.

Műveletek normálalakban adott számokkal

(Emelt szintű, választható tananyag)

43 *a)* $1{,}003 \cdot 10^5 + 1{,}9 \cdot 10^4 = 10{,}03 \cdot 10^4 + 1{,}9 \cdot 10^4 = 11{,}93 \cdot 10^4$ dolgozója van a cégnek.

b) $1{,}003 \cdot 10^5 - 1{,}9 \cdot 10^4 = 10{,}03 \cdot 10^4 - 1{,}9 \cdot 10^4 = 8{,}13 \cdot 10^4 = 81\,300$-zal több a férfi.

c) $(1{,}003 \cdot 10^5) : (1{,}9 \cdot 10^4) = (1{,}003 : 1{,}9) \cdot (10^5 : 10^4) = 10{,}03 : 1{,}9 \approx 5{,}28$.

44 A teljes anyag területe $4 \cdot 10^3$ m^2; a darabok területe egyenként 3,5 m^2. $4 \cdot 10^3 : 3{,}5 \approx 1142{,}8$, így 1142 darab készíthető belőle. (És marad egy kis darab.)

45 *a)* 1,28 m^2. *b)* 0,54 m^2. *c)* $0{,}54 : 1{,}28 = 54 : 128 \approx 0{,}42$.
A terítő az asztalnak körülbelül 42 százalékát fedi.

46 1 m szövet tömege $\dfrac{5{,}04 \cdot 10^2}{3{,}6 \cdot 10^3}$ kg. Ez kb. 0,14 kg, azaz $1{,}4 \cdot 10^{-1}$ kg.

47 1,196 t, azaz 1196 kg.

Számelmélet

48 *a)* A lehetőségek: 0; 2; 4; 6; 8.
b) A lehetséges megoldások: 0; 4; 8. *c)* 0 vagy 5.
d) 0 vagy 9. *e)* 0; 3; 6; 9. *f)* 0; 6. *g)* 0. *h)* 0; 8.

49 *a)* 4; *b)* 0; *c)* –; *d)* 1; *e)* 4; *f)* 0.

50 A hiányzó prímtényező az egyes esetekben: *a)* 5; *b)* bármi; *c)* 7; *d)* 2; *e)* 5; *f)* bármi; *g)* 5; *h)* 5.

51 Például: 1; 2; 4; 10; 20 biztosan osztói a számnak.

52 Például: 1; 2; 3; 7; 6; 14; 21; 42.

53 1; 2; 4. Nem biztos, hogy van több osztója, 4-nek például nincs.

54 Mind a kettő azt fejezi ki, hogy a szám osztható 10-zel.

55 *a)* $(16; 24) = 8$; $[16; 24] = 48$;
b) $(12; 10) = 2$; $[12; 10] = 60$; *c)* $(20; 16) = 4$; $[20; 16] = 80$;
d) $(28; 42) = 14$; $[28; 42] = 84$; *e)* $(56; 42) = 14$; $[56; 42] = 168$;
f) $(25; 55) = 5$; $[25; 55] = 275$; *g)* $(30; 40) = 10$; $[30; 40] = 120$;
h) $(75; 20) = 5$; $[75; 20] = 300$; *i)* $(60; 72) = 12$; $[60; 72] = 360$.

56 15 és 60.

3. Algebra

Műveletek

Összeadás, szorzás

57 A változás: +7; +7; −7. Az eredmények: 64; 64; 50.
58 A változás: +14; –; –. Az eredmények: 71; 57; 57.
59 A változás: −5; −5; +5. Az eredmények: 52; 52; 62.
60 A változás: −10; –; –. Az eredmények: 47; 57; 57.
61 360 Ft; 9600 Ft; 12 Ft; 8820 Ft; 2 430 000 Ft; 7380 Ft.
62 *a)* 32; *b)* 200.

Összetett műveletek, átalakítások, zárójelezések

63 *a)* 223; *b)* $-\frac{83}{120}$; *c)* 3,14.

64 *a)* $-\frac{13}{30} = -0,4\dot{3}$; *b)* $\frac{73}{30} = 2,4\dot{3}$; *c)* $-137,32$; *d)* $-3,64$.

65 *a)* Kerámiatál: 6 darab; csokoládé: 34 tábla; bonbon: 16 doboz; díszbögre: 8 darab; plüssfigura: 14 darab.

b) Az összes ajándék 80 800 Ft-ba kerül.

c) Az egyik fajta ára: $3500 + 3 \cdot 200 + 2 \cdot 1500 + 1500 = 8600$ Ft.
A másik fajta ára: $4 \cdot 200 + 1500 + 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 1500 = 7300$ Ft.

d) $6 \cdot 8600 = 51\,600$; $4 \cdot 7300 = 29\,200$ Ft.

e) $6 \cdot 8600 + 4 \cdot 7300 = 80\,800$ Ft.

66 *a)* A *Konvex sokszögek* című könyvön 1200 Ft, a *Konkáv sokszögek* címűn 1500 Ft a hasznuk.

b) 14 400 Ft; 30 000 Ft. *c)* 128 400 Ft-ot. *d)* 44 400 Ft.

e) $128\,400 - 44\,400 = 84\,000$ Ft. Vagy: $12 \cdot 2500 + 20 \cdot 2700 = 84\,000$ Ft.

Műveletek algebrai kifejezésekkel

67 *a)* $K = 4a$; $T = a^2 - 9$; *b)* $K = 4a$; $T = a^2 - b^2$;

c) $K = 2 - 2u + v$; $T = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}uv$;

d) $K = 4u + 2v$; $T = 2uv + v - 2u - 1$.

68 Többféle helyes összevonást lehet végezni.

a) $2y^2(2z + z^2 - 3z) = 2y^2(z^2 - z) = 2y^2z(z - 1)$; 0;

b) $15e^2 - 10e^2n^2 = 5e^2(3 - 2n^2)$; $5 \cdot (3 - 0,5) = 5 \cdot 2,5 = 12,5$;

c) $d(-12d - 3 + 12g + 4g^2)$; $-1 \cdot (12 - 3 + 6 + 1) = -16$;

d) $m(-9r^2 + 6rm + 6 - 3m)$; $-0,2 \cdot (-1 - 0,4 + 6 + 0,6) = -1,04$.

69 *a)* $7y^2 - 3y$; 234; *b)* $r^2m^2 - 9r^2m = r^2(m^2 - 9m)$; 0;

c) $4sv^2 + 6sv = 2sv(2v + 3)$; $5 \cdot 4 = 20$.

70 *a)* $a \cdot \frac{1}{3}$; *b)* $3b$.

c) $a \cdot \frac{1}{2} + a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 11$ vagy $3b \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{3} = 11$.

Az egyik felírásból: $a \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\right) = 11$; $a \cdot \frac{11}{18} = 11$, vagyis $a = 18$, tehát a nagypapa 18, az unoka 6 kosarat font.

A másik felírásból: $b\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = 11$; $b \cdot \frac{11}{6} = 11$, vagyis $b = 6$, tehát az unoka 6, a nagypapa 18 kosarat font.

Egyenletek

Elemi úton megoldható szöveges feladatok

71 Percenként: 50,6 – 8,5 = 42,1 liter vízzel lesz több a tartályban.
750 : 42,1 ≈ 17,8, tehát 18 perc szükséges.

72 1,95 kg és 0,2 kg.

73 *a)* 8,28 dm^3; *b)* 10,35 dm^3; *c)* 16,56 dm^3. 11 darabot.

74 A tárgy és a hulladék együtt 21 résznyi, így lesz 20-szor annyi a tárgy tömege. 42 kg : 21 = 2 kg, ennyi a hulladék tömege. A tárgy tömege pedig 20-szorosa ennek: 40 kg.

75 Antal és Bálint együtt 1 óra alatt 45 km-t tesznek meg. A 90 km-t két óra alatt teszik meg. A légy pontosan annyi ideig repdes, mint Antal és Bálint: 2 óra hosszát. Ezalatt 100 km-nyi utat tesz meg.

76 *a)* 125 m^2; *b)* 10 m; *c)* 375 m^3.

A mérlegelv alkalmazása

77 Az egyenleteket algebrai átalakítással kapjuk egymásból, azonosak.

a) $x = -1{,}75$; *b)* $x = \frac{33}{16}$.

78 *a)* $a+b+c$; *b)* $ax+by+cz$; *c)* $\dfrac{ax+by+cz}{a+b+c}$;

d) $\dfrac{54+93{,}6+70}{40}=5{,}44$ (euró).

79 Jelölje x azt, hogy a harmadik hány ostort készített. Ekkor a második: $1{,}5x$, az első $3x$ darabot csinált. $x+1{,}5x+3x=132$, $x=24$. Az első 24, a második 36, a harmadik 72 ostort csinált. Ez együtt valóban $24+36+72=132$.

80 A 70-et, B 140-et, C 280-at.

81 A-ból 100, B-ből 50, C-ből 50.

82 $x=\dfrac{x}{2}+2+\left(\dfrac{x}{2}-2\right)\cdot\dfrac{1}{4}+6$; $x=20$ kg.

Egyenlőtlenségek

83 $\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{3}x$; kivonjuk $\dfrac{1}{3}x$-et mindkét oldalból. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}x<0$, összevonva: $\dfrac{1}{6}x<0$. Ebből $x<0$.

84 $\dfrac{1}{2}x+3>\dfrac{1}{3}x-3$; $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}x>-6$; $\dfrac{1}{6}x>-6$; $x>-36$.

85 $\dfrac{1}{3}x+3\le\dfrac{1}{2}x-3$; $6\le\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}x$; $6\le\dfrac{1}{6}x$; $36\le x$.

86 *a)* $x\le 1$; *b)* $x>0$; *c)* $x>3{,}5$; *d)* $x\le\dfrac{1}{13}$.

87 Mivel $a+b=d+c$, az $a+c<d+b$ egyenlőtlenséghez hozzáadhatjuk az egyenlőséget, a kapcsolat megmarad. $a+c<d+b$, hozzáadva $(a+b=d+c)$-t: $2a+b+c<2d+b+c$, azaz $a<d$. Ki is vonhatjuk, akkor is megmarad a kapcsolat: $a+c<d+b$, kivonva $(a+b=d+c)$-t: $c-b<b-c$, ebből $c<b$. Most használjuk fel, hogy $d<c$. d-nél kisebb az a, c-nél nagyobb b. Tehát $a<d<c<b$ a sorrend.

Számokkal kapcsolatos feladatok

88 Legyen a gondolt szám: x. Ekkor $\frac{x}{10} + x = 71{,}5$; $x = 65$.

89 A szöveg alapján felírt egyenlet: $2x + 35 = 5x + 2$. Ekkor a gondolt szám a 11.

90 A szöveg alapján felírt egyenlet: $x + \frac{x}{10} = 715$. Ekkor a keresett szám 650.

91 A szöveg alapján felírt egyenlet: $\frac{x}{10} + x \cdot 10 = 4747$. Ekkor a keresett szám a 470.

92 Legyen a tízes helyi értéken álló szám x, ekkor az egyes helyi értéken $10 - x$ áll.

A felírható egyenlet: $5 \cdot [10x + 10 - x] + 10 \cdot [10(10 - x) + x] = 1005$. Az egyenlet megoldása $x = 1$. A keresett kétjegyű szám a 19.

93 Jelöljük a tízesek helyén álló számot b-vel!

Az eredeti szám: $100 + 10b + 9 - b$. A felcserélt szám: $100 + 10(9 - b) + b$.

A szöveg alapján felírt egyenlet:

$10 + 10b + 9 - b = 100 + 10(9 - b) + b + 27$.

A keresett szám 163, így a kérdezett két szám összege $163 + 136 = 299$.

94 Az eredeti szám: $x \cdot 10 + x + 3$, a felcserélt szám $10(x + 3) + x$.

Ha a szám értéke 108%-kal nő, akkor az eredeti 208%-a lesz, azaz:

$(x \cdot 10 + x + 3) \cdot 2{,}08 = 10(x + 3) + x$.

Ekkor a keresett szám a 25.

95 Jelöljük a tízesek és egyesek helyén álló kétjegyű számot x-szel. A szöveg alapján $500 + x - (x \cdot 10 + 5) = 162$. Az egyenlet megoldása 37, így a háromjegyű szám az 537.

96 A b értéke csak 8 lehet. **97** 29 db.

Keverési feladatok

98 2,55 kg. **99** 30%. **100** 3,78 liter.

101 A szöveg alapján felírt egyenlet: $15 \cdot 0{,}45 + x \cdot 0{,}2 = (15 + x) \cdot 0{,}32$. Ezt megoldva kapjuk, hogy 16,25 liter 20%-os alkoholt kell hozzáönteni a megadott mennyiséghez.

102 A szöveg alapján felírt egyenlet: $62 \cdot 0{,}04 = (62 - x) \cdot 0{,}1$, ahol x az elpárolgott víz mennyisége. $x = 37{,}2$ kg.

103 A felírható egyenlet: $42 \cdot 0{,}22 + 64 \cdot 0{,}18 = 106 \cdot \frac{x}{100}$.

A keverék töménysége $\approx 19{,}6\%$.

104 A felírt egyenlet: $100 \cdot 0{,}18 + 5 = 105 \cdot \frac{x}{100}$. A must cukortartalma $\approx 21{,}9\%$.

105 A szöveg alapján felírt egyenlet: $32 \cdot 0{,}25 = 37 \cdot \frac{x}{100}$.

A cukoroldat $\approx 21{,}6\%$-os lesz.

Mozgásos feladatok

106 Legyen a mozgás ideje x. Ekkor $4x + 6x = 8$. Így a találkozás: $\frac{4}{5}$ óra múlva történik, a két helységtől mért távolság: 3,2 km, illetve 4,8 km.

107 A megtett utak egyenlők, ezért $75t = 115(t - 0{,}4)$, ahol t a teherautó mozgásának ideje.

A személyautó 1,15 óra múlva, 86,25 km megtétele után éri utol a teherautót. Ez a 96–97 km között, Siófok előtt történik.

108 A gyorsvonat menetideje: 5,625 óra. A két város távolsága: 534,375 km.

109 Márti sebessége: 15,65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

110 A találkozás 4,72 óra múlva lesz.

Együttes munkavégzésre vonatkozó feladatok *(Emelt szintű, választható tananyag)*

111 Körülbelül 5 és fél perc.

112 Körülbelül 68 perc.

Vegyes feladatok

113 A másik két szám 14 és 63.

114 A szöveg alapján felírt egyenlet: $\frac{90}{100} \cdot x + x + \frac{130}{100} \cdot x = 9{,}6$, ahol a háromszög középső oldalának hossza x. A háromszög oldalai 2,7 cm, 3 cm, 3,9 cm.

115 A deltoid oldalai 13,5 cm, 22,5 cm.

116 Mindhárom esetben a két hegyesszög szögfelezője 45°-os szöget zár be egymással.

117 Mindhárom esetben a harmadik szög 56°. A másik két adott szög szögfelezői 62°-os szöget zárnak be.

118 Az eredeti téglalap területe 100 m^2.

119 A téglalap területe: 180 cm^2. Az oldalak 18 osztópárjai lehetnek:

1 és 180; 2 és 90; 3 és 60; 4 és 45; 5 és 36; 6 és 30; 9 és 20; 10 és 18; 12 és 15 cm-ben mérve.

120 Legyen az alapon fekvő szög α. Ekkor a háromszög belső szögeire a következő egyenlet írható fel: $\alpha+\alpha+\alpha\cdot 3-10^\circ=180^\circ$. A háromszög szögei 38°, 38°, 104°.

121 A háromszög szögei: 20°, 70°, 90°.

Kombinatorikai feladatok

122 $3\cdot 2\cdot 1=6$.

123 $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$.

124 *a)* 6; *b)* 4 (6 – 2 vagy $2\cdot 2\cdot 1$); *c)* 3.

125 $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40\,320$.

126 *a)* 987; *b)* 978; *c)* 307; *d)* 308; *e)* $4\cdot 4\cdot 3=48$.

127 *a)* $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}=10$; *b)* $5\cdot 4\cdot 3$.

4. Transzformációk

Egybevágósági transzformációk

128 A befogókra tükrözve egyenlő szárú háromszöget, az átfogóra tükrözve deltoidot. A befogók felezőpontjára tükrözve paralelogrammát, az átfogó felezőpontjára tükrözve téglalapot.

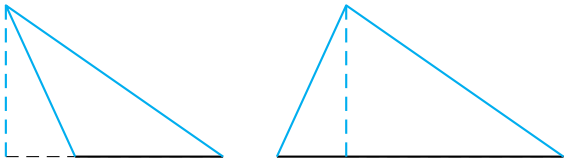
129 *a)* középpontos tükrözés,

b) középpontos vagy tengelyes tükrözés,

c) tengelyes tükrözés.

130 Az alap felezőmerőlegesével.

131 (A) Igaz, (B) Igaz, (C) Hamis. Ellenpéldát mutat az ábra:



132 Igen.

133 Nem biztos.

134 *a)* $A'(-4;-5)$, $B'(3;-2)$, $C'(0;3)$. *b)* $A''(4;5)$, $B''(-3;2)$, $C''(0;-3)$.

135 $K'(8;-6)$, $L'(2;-5)$, $M'(5;0)$.

136 Nem.

137 Szabályos háromszöget.

Vektorok

Vektorok bevezetése

138 a = g, b = d.

139 a és h, e és f.

140 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

Egyenlők: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Ellentettek: $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{DB}$.

141 *a)* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. *b)* $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. *c)* Nincs.

142 Nem.

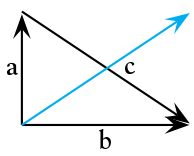
143 $D(7;1)$, $F(2;3)$, $H(11;26)$.

144 $K(-1;9)$, $R(-4;10)$, $M(20;-5)$.

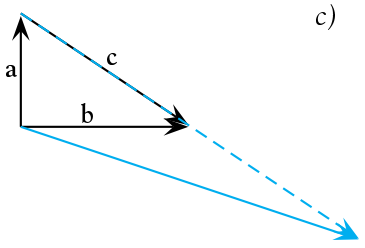
145 $(-4;6)$.

Vektorok összeadása

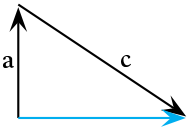
146 *a)*



b)

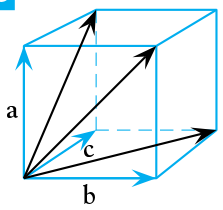


c)

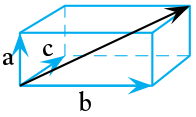


147 *a)* Hat. *b)* Például $2(\mathbf{a} + \mathbf{d})$ vagy $2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

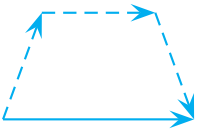
148



149

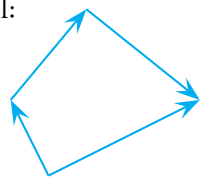


150



151 (A) Igaz, (B) Igaz, (C) Hamis, (D) Igaz.

152 Például:

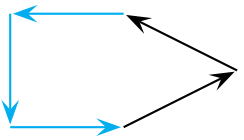


153 *G*.

Vektorok kivonása

154 Nullvektor. **155** $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$. **156** Nem.

157 Több megoldás lehetséges. Például:



158 Például: $\mathbf{d} - \mathbf{e} = \mathbf{a}$, $\mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{g}$, $\mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, ...

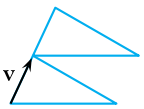
159 (A) Igaz, (B) Igaz, (C) Igaz, (D) Hamis.

160 A paralelogramma átlói csak akkor merőlegesek egymásra, ha a négyszög rombusz.

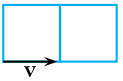
161 (A) Igaz, (B) Igaz.

Eltolás

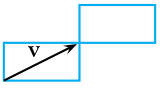
162 *a)*



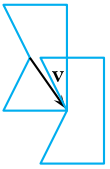
b)



c)



d)



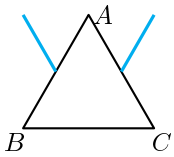
163 1. AB, FK, KC, ED; 2. BC, AK, KD, FE;
3. CD, BK, KE, AF; 4. AC, FD;

5. BD, AE; 6. CE, BF.

164 *a)* $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$; *b)* $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

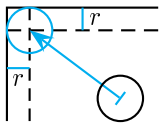
165 Négyzet, amelynek az oldala fele az eredeti négyzetnek.

166 A mellékelt ábrán színessel jelölt szakaszok pontjai a lehetséges eltolásvektorok végpontjai.



167 A szakasz végpontjain át a megfelelő szárral párhuzamost kell szerkeszteni. Az így kapott szög csúcsa és az eredeti szög csúcsa adja az eltolás vektorát.

168



169 *a)* $A_1(2;-1)$, $B_1(8;1)$, $C_1(6;6)$.

b) $A_2(-2;-3)$, $B_2(4;-1)$, $C_2(2;4)$.

c) $A_3(1;-2)$, $B_3(7;0)$, $C_3(5;5)$.

170 Négy ilyen vektor van. A végpontjai: $P_1(1;2)$, $P_2(5;2)$, $P_3(5;6)$, $P_4(1;6)$.

Pont körüli elforgatás

(Választható tananyag)

171 Deltoid vagy csak az A pont.

172 *a)* 7,5°; *b)* 22,5°.

173 *a)* 180°; *b)* 450°; *c)* 45°.

174 Az átmérők két-két megfelelő végpontját összekötő szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja a keresett középpont.

175 Mindhárom esetben BG szakasz felezőpontja körül $(-90°)$-kal.

176 *a)* 45°; *b)* 90°; *c)* 90°; *d)* 72°; *e)* 90°; *f)* 45°.

177 Használd az A körüli 45°-os forgatást.

178 Az egyik közös csúcs körül 90°; a közös oldal felezőpontja körül 180°.

179 180°, 120°, 60°.

180 Mindhárom esetben a megfelelő PQK egyenlő szárú háromszöget kell megszerkeszteni.

A hasonlóság

Középpontos hasonlóság

181 *b)* és *d)*.

182 *a)* és *b)*.

183 A kerület feleződik, a terület negyedelődik.

184 A kerület háromszorozódik, a terület kilencszereződik.

185 *a)* Hatszöget. *b)* Középpontos.

186 Kettő.

187 *a)* $A'(-2;1)$, $B'(1;-1)$, $C(1;2)$.

b) $A'(8;-4)$, $B'(-4;4)$, $C'(-4;-8)$.

188 *a)* $A'(-7;-1)$, $B'(9;-5)$, $C'(1;7)$.

b) $A'(7;6)$, $B'(-5;9)$, $C'(1;0)$.

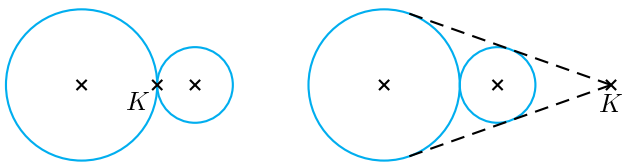
189 Három.

A középpontos hasonlóság tulajdonságai

190 A szerkesztés során használd, hogy szakasz és képe párhuzamos.

191 Négyszerese.

192



193 (A) Igaz; (B) Igaz; (C) Hamis; (D) Igaz; (E) Igaz; (F) Hamis; (G) Igaz; (H) Igaz.

194 Az első és a negyedik, a harmadik és a hatodik.

195 Két megoldás van: ha az A, vagy ha a C illeszkedik az átmérőre. A szerkesztésnél felhasználjuk, hogy az átmérők párhuzamosak, és a húr felezőmerőlegesére illeszkedik a kör középpontja.

196 Három.

197 *a)* Igen; *b)* Nem.

Szerkesszünk középpontosan hasonló képet!

198 Szakasz és képe párhuzamos.

199 AA' és BB' egyenesek metszéspontja lesz a középpont.

200 Első lépésként szerkeszd meg a KA szakasz

a) felét; *b)* negyedét; *c)* nyolcadát; *d)* negyedét!

201 Első lépésként vágd a KP szakaszt

a) három; *b)* öt; *c)* hét; *d)* hat

egyenlő részre!

202 Vágd a KL szakaszt *a)* nyolc; *b)* tizenhat egyenlő részre!

203 Vágd az AB szakaszt *a)* hét; *b)* tizenegy egyenlő részre!

204 Vágd a PQ szakaszt

a) egy; *b)* kettő; *c)* öt; *d)* hét

egyenlő részre!

205 A téglalap oldalait mérd fel egy fél egyenesre, majd vágd négy egyenlő részre!

206 Mindkét síkidom oldalait mérd fel egy-egy félegyenesre!

207 Az oldalak: 3,6 cm, 4,5 cm. A területek összege: 33,21 cm^2.

Hasonlóság

208 *a)* $a = 48$ cm, $\gamma' = 46°$;

b) $\beta = 58°$, $\gamma = 41°$;

c) $b = \frac{21}{5}$ cm, $a' = \frac{125}{7}$ cm.

209 $AC = 26{,}1$ cm.

210 21 m.

211 $B'C' = 17{,}16$ cm.

212 23,5 cm, 42,3 cm, 51,7 cm.

213 51 cm, 170 cm.

214 34,5 cm, 42 cm, 46,5 cm.

215 165 km.

216 Kb. 122,5 km.

217 1 : 2 400 000.

218 $\frac{25}{3}$ cm, 10 cm.

5. A Pitagorasz-tétel

Mérjük meg a hosszát!

219 6,7 cm.

220 2,8 cm.

221 2,1 cm.

222 3,6 cm.

223 3,8 cm.

224 *a)* 7 cm^2; *b)* tengelyes, középpontos, forgás; *c)* 9,6 cm.

225 Kb. 7,2 cm^2.

226 Kb. 10,2 cm^2.

A Pitagorasz-tétel

227 *a)* $c = 85$ cm; *b)* $c = 41$ cm;

c) $c = 36{,}5$ dm; *d)* $c = 29$ cm.

228 *a)* 90 cm; *b)* 19,6 mm; *c)* 16 dm; *d)* 3,84 m.

229 *a)* $c = \sqrt{58} \approx 7{,}6$ cm; *b)* $c = \sqrt{709} \approx 26{,}6$ mm;

c) $c \approx 5{,}8$ m; *d)* $c = \sqrt{818} \approx 28{,}6$ dm.

230 6,4 m és kb. 7,7 m.

231 *a)* Igen; *b)* Nem; *c)* Igen; *d)* Igen.

232 Kb. 505 méter.

233 17 méter.

234 *a)* 161 cm^2; *b)* $46 + 14 \cdot \sqrt{2} \approx 65{,}8$ cm; *c)* 17 cm.

235 *a)* 529 cm^2; *b)* $46 + 34 \cdot \sqrt{2} \approx 94{,}1$ cm; *c)* 17 cm.

A Pitagorasz-tétel alkalmazása síkbeli feladatokban

236 *a)* $12 \cdot \sqrt{2}$ cm; *b)* $\frac{16}{\sqrt{2}} = 8 \cdot \sqrt{2}$ cm; *c)* $16 \cdot \sqrt{3}$ cm;

d) $\frac{48}{\sqrt{3}} = 16 \cdot \sqrt{3}$ cm.

237 *a)* $m_a \approx 33{,}8$ cm; *b)* $b \approx 34{,}7$ cm; *c)* $a \approx 43{,}3$ cm.

238 Használd a $2 \cdot t = a \cdot m_a = b \cdot m_b$ összefüggést!

a) $m_b = \frac{56 \cdot 45}{53} \approx 47{,}5$ cm; *b)* $m_b \approx 25{,}7$ cm.

239 $AP \approx 16{,}6$ cm.

240 $4 \cdot \sqrt{10} \approx 12{,}6$ cm.

241 *a)* $m = 24$ cm; *b)* 840 cm^2.

242 *a)* 17; *b)* 65; *c)* $3 \cdot \sqrt{10}$; *d)* $3 \cdot \sqrt{5}$.

243 Kb. 219 cm.

244 Kb. 61,7 cm.

245 *a)* 8 m; *b)* 41 m.

246 *a)* Igen; *b)* Nem.

247 $r = 2 \cdot \sqrt{5}$ cm.

248 4,5 cm.

249 22,5 cm.

A Pitagorasz-tétel alkalmazása térbeli feladatokban

(Emelt szintű, választható tananyag)

250 *a)* $12 \cdot \sqrt{3}$ cm; *b)* 20 cm; *c)* $\sqrt{717}$ cm.

251 $128 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.

252 $m = 2 \cdot \sqrt{7} \approx 5{,}3$ (m).

253 $1{,}93 \cdot 10^{-2}$ s.

254 *a)* $A = 288 + 108 \cdot \sqrt{2} \approx 440{,}7$ (cm^2); *b)* $6 \cdot \sqrt{3}$ cm.

255 $m = 4 \cdot \sqrt{2}$ cm.

256 Kb. 12,3 cm.

257 $\sqrt{49{,}64} \approx 7{,}05$ (m).

258 12,6 cm, 16,8 cm, 50,4 cm.

Pitagoraszi számhármasok

(Emelt szintű, választható tananyag)

259 *a)* Nem; *b)* Nem; *c)* Igen: 3, 4, 5

260 A 21 hosszú oldalhoz tartozó magasság 12.

261 *a)* Igen; *b)* Igen.

262 A rombusz oldala: 51 cm, átlói: 48 cm és 90 cm. Az új négyszög (deltoid) oldalai: 51 cm és 53 cm, átlói 52 cm és 90 cm.

263 Mivel $2t = ab = 120$, ezért csak a következő nyolc esetet kell megvizsgálni: (1; 120), (2; 60), (3; 40), (4; 30), (5; 24), (6, 20), (8; 15), (10; 12). Csak a 8, 15, 17 számhármas a megoldás.

6. A számológép

Mit tud a számológép?

264 *a)* 7,13; *b)* −0,41; *c)* 8,23; *d)* −1,744; *e)* −69,1; *f)* −36,295; *g)* 72,048; *h)* 9,5; *i)* $-8{,}3\dot{1}428574\dot{1}$; *j)* 11,4.

265 *a)* $6390{,}34\dot{3}$; *b)* 0,94578...; *c)* 67,92.

Négyzetgyök

266 *a)* 1,732...; 5,4772...; 17,32...; 54,7722...;

b) 2; 6,325...; 20; 63,2455...;

c) 0,3162...; 1; 3,1622...; 10;

d) 3,8729...; 12,2474...; 38,7298...; 122,4744....

267 A két szám négyzetgyökének szorzata a szorzatuk négyzetgyöke. A számológép elég pontosan számol.

a) 3,4641...; 1,732...; 6;

b) 2,236...; 4,4721...; 10;

c) 2,8284...; 4,2426...; 12;

d) 2; 3; 6; *e)* 2; 6; 12.

268 Mindig az 1-hez jutunk.

Eljárások

(Olvasmány, választható tananyag)

269 *a)* $39 \cdot 32 = \boxed{78} \cdot 16 = \boxed{156} \cdot 8 = \boxed{312} \cdot 4 = \boxed{624} \cdot 2 = \boxed{1248}$.

b) $53 \cdot 32 = \boxed{106} \cdot 16 = \boxed{212} \cdot 8 = \boxed{424} \cdot 4 = \boxed{848} \cdot 2 = \boxed{1696}$.

c) $19 \cdot 32 = \boxed{38} \cdot 16 = \boxed{76} \cdot 8 = \boxed{152} \cdot 4 = \boxed{304} \cdot 2 = \boxed{608}$.

d) $51 \cdot 32 = \boxed{102} \cdot 16 = \boxed{204} \cdot 8 = \boxed{408} \cdot 4 = \boxed{816} \cdot 2 = \boxed{1632}$.

270 *a)* 120; *b)* 336; *c)* 2240; *d)* 9088.

271 *a)* 209; *b)* 2009; *c)* 9009; *d)* 4209; *e)* 221; *f)* 2021; *g)* 9021; *h)* 4221.

272 *a)* 396; *b)* 836; *c)* 1596; *d)* 2436; *e)* 3591; *f)* 4864; *g)* 6375; *h)* 8091.

273 *a)* $(10a+b)(10a+10-b) = 100a(a+1)+b(10-b)$. A tízes helyi értéken a áll, $b + 10 - b = 10$ – a második tanult eljáráshoz kapcsolódik.

b) $(10a + 10 - b)(10a + 10 + b) = (10a + 10)^2 - b^2$. A tízes helyi értéken a, illetve $a + 1$ áll, $10 - b + b = 10$ – a harmadik tanult eljáráshoz kapcsolódik.

7. Függvények

Lineáris függvények

274 *a)* $a: x \mapsto x - 5$;

b) $b: x \mapsto 2x + 1$;

c) $c: x \mapsto \frac{x-3}{4}$;

d) $d: x \mapsto \frac{2}{3}x$;

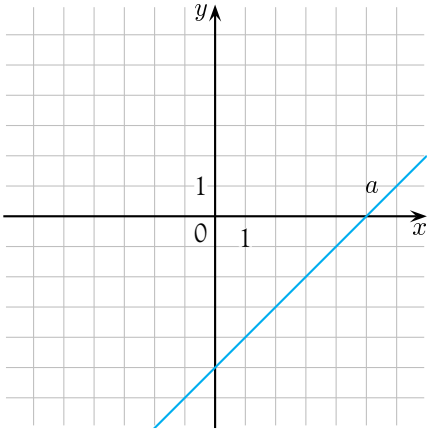
e) $e: x \mapsto \frac{7}{10}x - 2$;

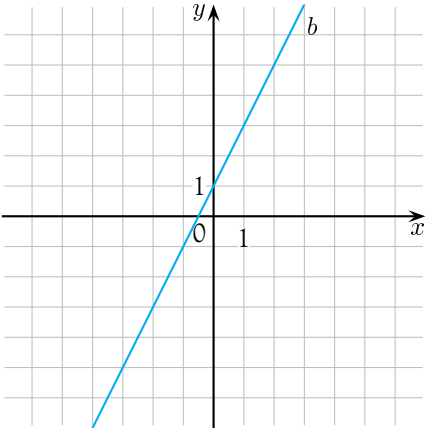
f) $f: x \mapsto |x|$;

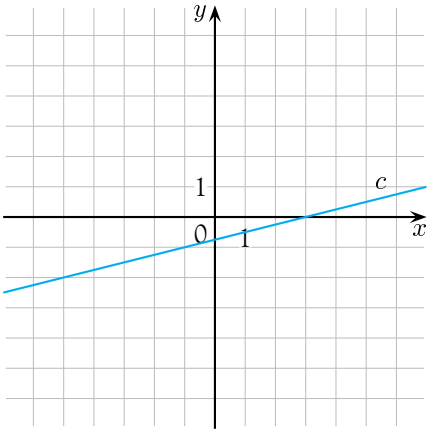
g) $g: x \mapsto -x$;

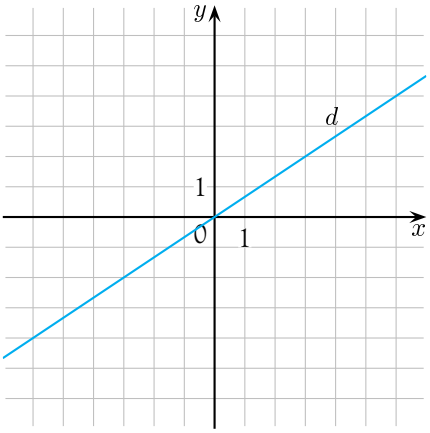
h) $h: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.

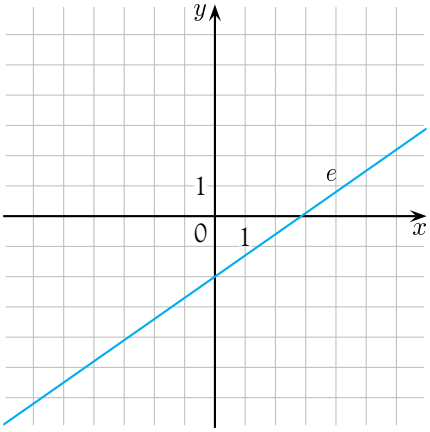
Lineáris függvények: a; b; c; d; e; g.

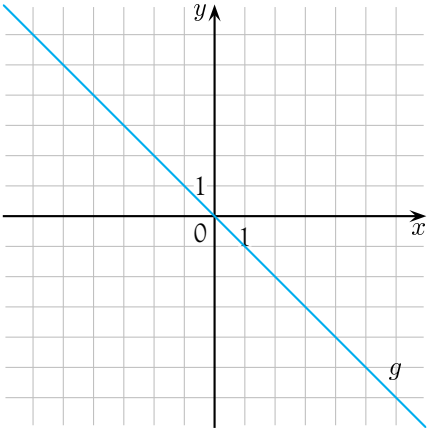








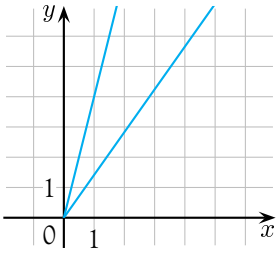




275 Legyen a a négyzet oldala, $a > 0$!

$f: a \mapsto 4a$; $g: a \mapsto \sqrt{2}a$.

Mind a két függvény egyenes arányosság.



276

	Meredekség	Az y tengelyt metszi, ha	Az x tengelyt metszi, ha
a)	$m = -1$	$y = 3$	$x = 3$
b)	$m = \frac{2}{5}$	$y = 0$	$x = 0$
c)	$m = 6$	$y = 0$	$x = 0$
d)	$m = -\frac{1}{4}$	$y = -1$	$x = -4$
e)	$m = 1$	$y = 2$	$x = -2$
f)	$m = -8$	$y = 4$	$x = \frac{1}{2}$

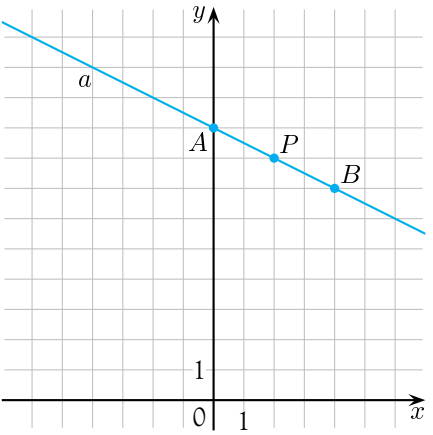
277 $a: x \mapsto 2x$; $b: x \mapsto -\frac{1}{2}x$; $c: x \mapsto x - 4{,}5$; $d: x \mapsto x + 3$;

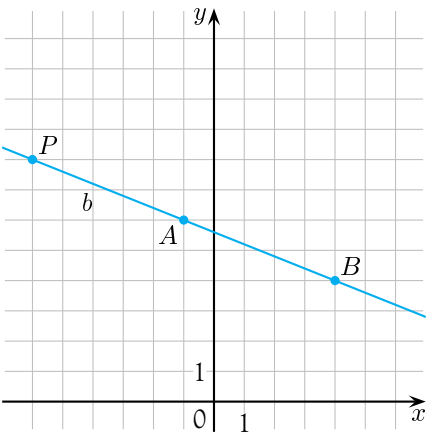
$e: x \mapsto 3x - 6$; $f: x \mapsto -3x - 6$; $g: x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$; $h: x \mapsto -\frac{4}{3}x + 2$.

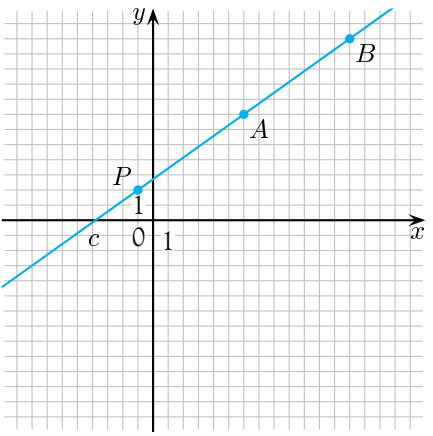
278 *a)* $A(0; 9)$; $B(4; 7)$.

b) $A(-1; 6)$; $B(4; 4)$.

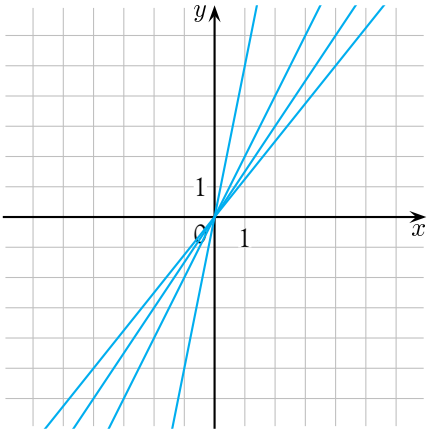
c) $A(6; 7)$; $B(13; 12)$.



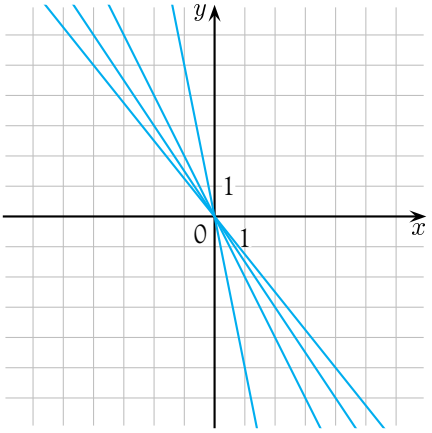




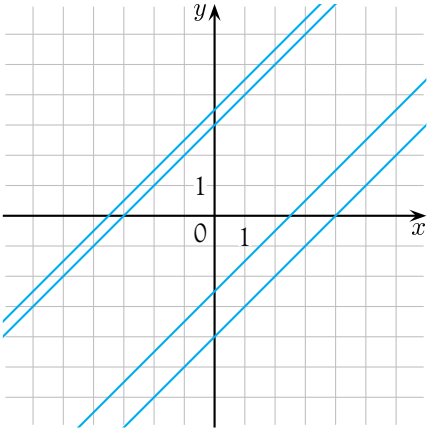
279 *a)* Grafikonjaik egyenesek. Közös ponton, az $O(0;0)$-n haladnak át, mert egyenes arányosságok, vagyis az $f: x \mapsto mx + b$ alakú hozzárendelésben $b = 0$.
Mindegyik függvény növekvő, mert $m > 0$.



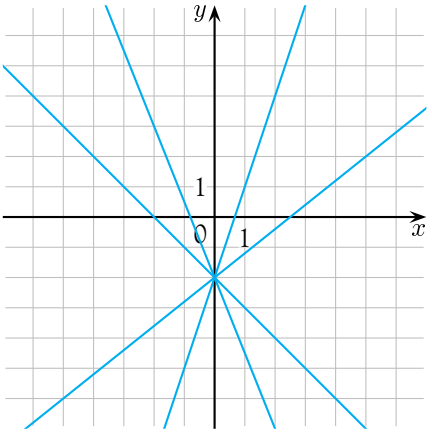
b) Grafikonjaik egyenesek. Közös ponton, az $O(0;0)$-n haladnak át, mert egyenes arányosságok, vagyis az $f: x \mapsto mx + b$ alakú hozzárendelésben $b = 0$.
Mindegyik függvény csökkenő, mert $m < 0$.



c) Mivel $m = 1$ mindegyik függvény esetén, ezért a grafikonok párhuzamos egyenesek.



d) Grafikonjaik egyenesek. Közös ponton, a $(0; -2)$-n haladnak át, mert $f: x \mapsto mx + b$ alakú hozzárendelésben $b = -(-2)$.



280 *a)* Párhuzamosak a grafikonok: a és e, valamint b és g.

b) Az y tengelyt 3-nál metszik: b, c, e, míg 0-nál: a, f.

c) Az x tengelyt 0-nál metszik: a, f, míg (-3)-nál: b, h.

d) Növekvők: b, f, g, h.

e) Csökkenők: a, c, d, e.

281 *a)* $b = -\frac{5}{2}$; *b)* $b = -\frac{5}{2}$; *c)* $b = -5$.

282 (A) Igaz. (B) Hamis. (C) Hamis. (D) Hamis. (E) Igaz.

283 *a)* A maximumot $x = -8$-nál, a minimumot $x = 3$-nál veszi fel.

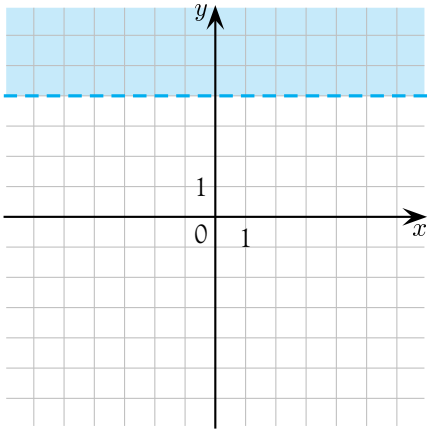
b) A maximumot $x = 3$-nál, a minimumot $x = -8$-nál veszi fel.

c) A maximumot $x = -8$-nál, a minimumot $x = 3$-nál veszi fel.

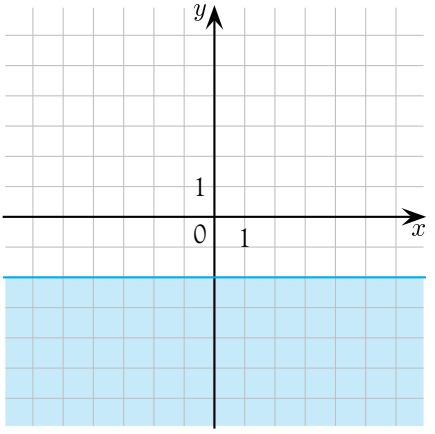
d) A maximumot $x = 3$-nál, a minimumot $x = -8$-nál veszi fel.

284 *a)* $y > 4$; *b)* $y \leq -2$; *c)* $x < 3$; *d)* $x \geq -5$.

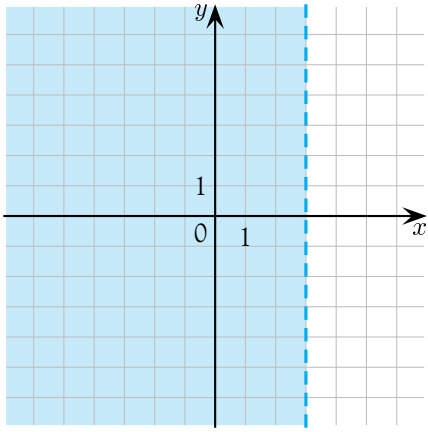
a)



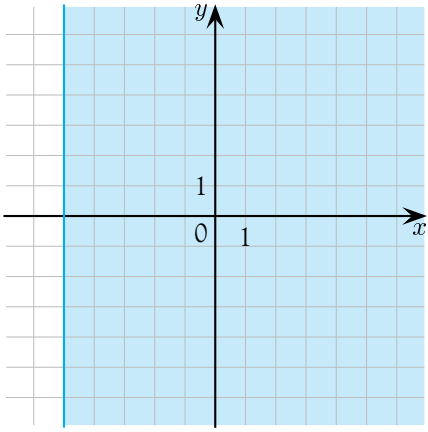
b)



c)

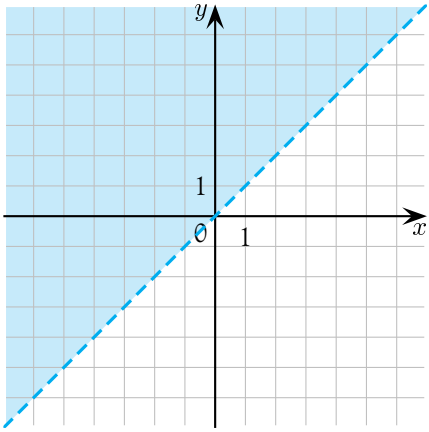


d)

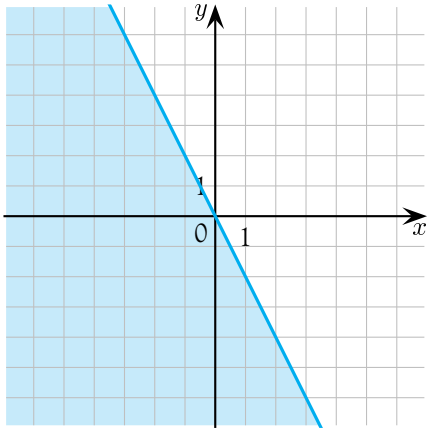


285 *a)* $y > x$; *b)* $y \leq -2x$; *c)* $y > 3 + x$; *d)* $y \geq \frac{3}{5}x - 5$.

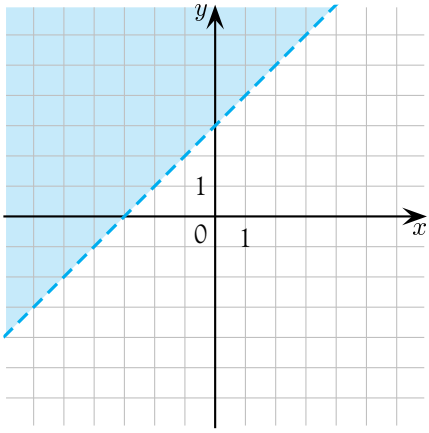
a)



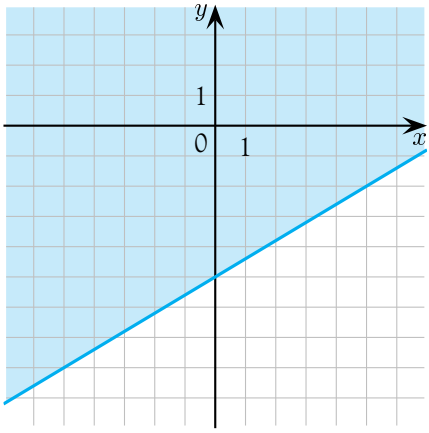
b)



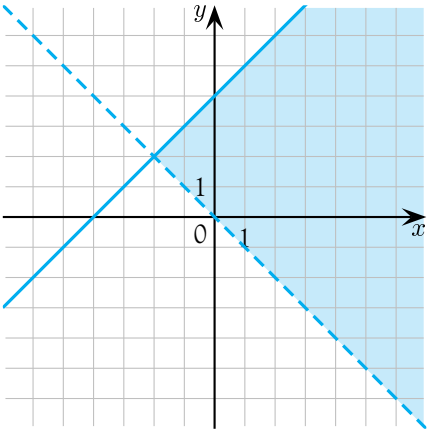
c)



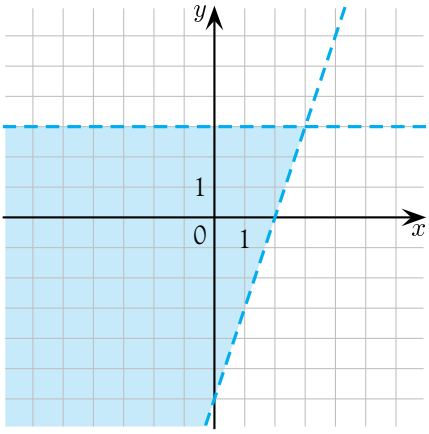
d)



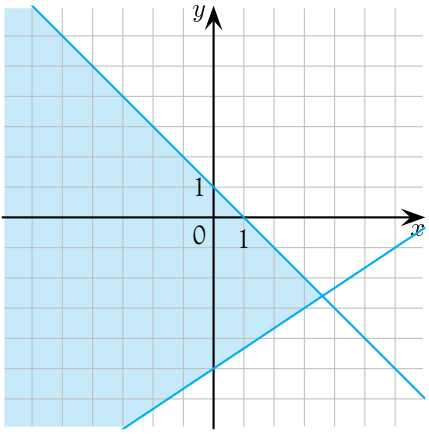
286 *a)* $y > -x$ és $y \leq x + 4$;



b) $y < 3$ és $y > 3x - 6$;



c) $x + y \leq 1$ és $y - \frac{2}{3}x \geq -5$.



287 *a)* $y \leq -x$ és $y \leq 2x + 4$;

b) $y \geq -7$ és $y \leq -x + 2$.

288 *a)* $a: x \mapsto 5$;

b) $b: x \mapsto -2x$;

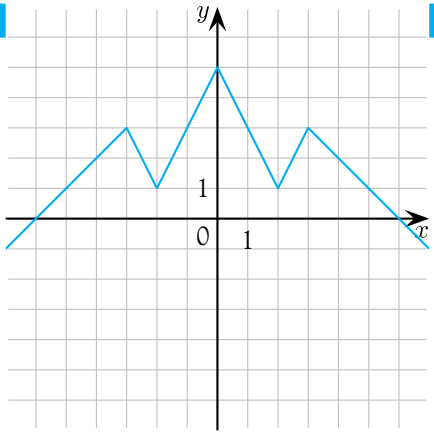
c) $c: x \mapsto \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$.

289 *a)* A háromszög területe 16 egységnégyzet.

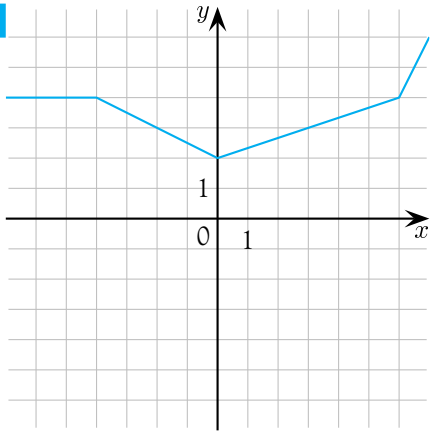
b) A háromszög területe 9 egységnégyzet.

290 Az eltolás után kapott függvény szabálya: $f: x \mapsto \frac{3}{2}x - 4$.

291



292



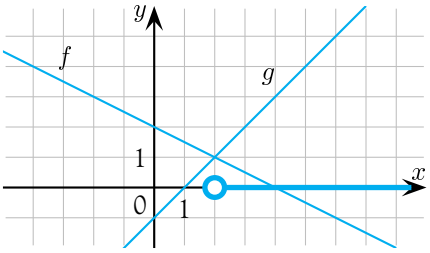
293 A metszéspont: $M(3; 2)$.

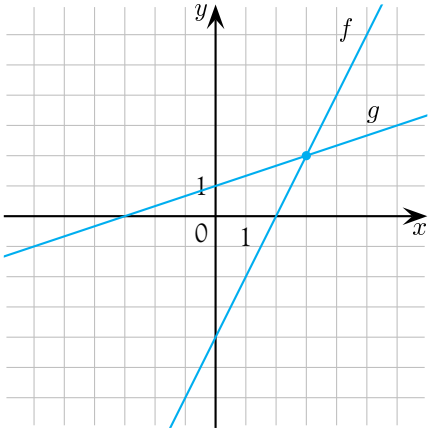
Az egyenlet megoldása: $x = 3$.

294 *a)* $x = 3$; *b)* $x = 4$;

c) $x = -3$; *d)* $x = 7$.

295

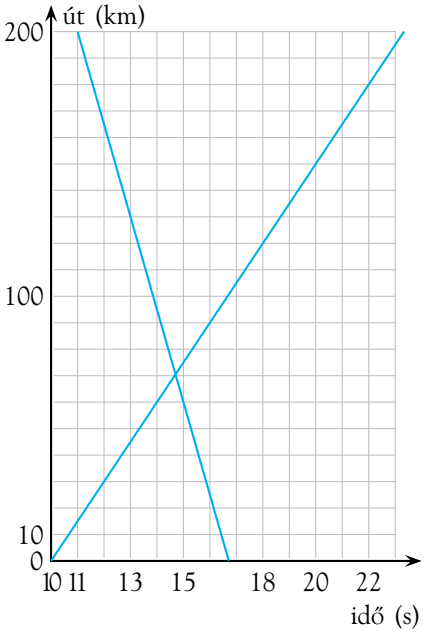




296 $-\frac{1}{2}x + 3 < -2x + 6$.

297 *a)* $x > 2$; *b)* $x < 4$; *c)* $x \geq -3$; *d)* $x \leq 7$.

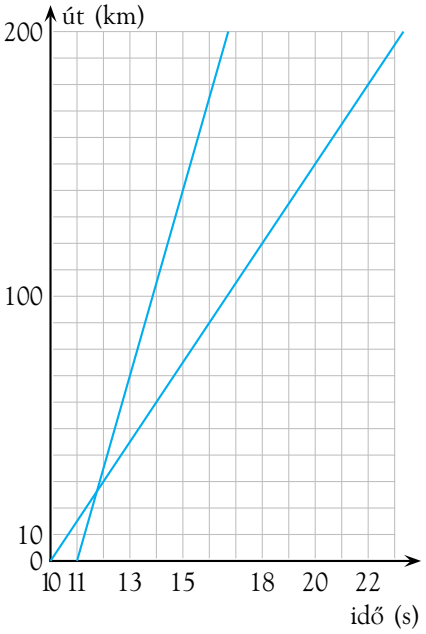
298 *a)*



b) 14 óra 42 perckor találkoznak.

c) 70,5 km, illetve 129,5 km utat tettek meg a kerékpárosok.

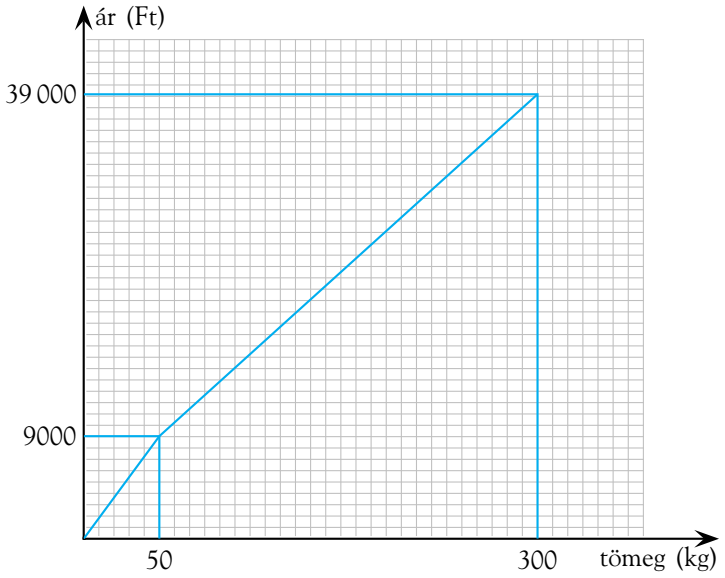
299 *a)*



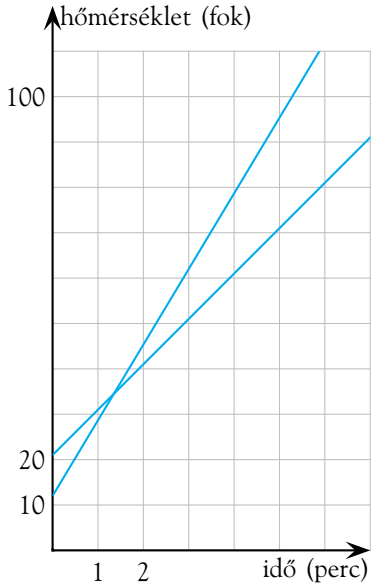
b) 11 óra 45 perckor találkoznak.

c) Mindketten 26,25 km utat tettek meg.

300



301 A két edényben körülbelül 2 perc (pontosan 1,8 perc) múlva lesz azonos a tej hőmérséklete.



Nemlineáris függvények

302 Nemlineáris függvények:

$c: x \mapsto x \cdot x$;

$e: x \mapsto (x-2)2(x-1{,}2)$;

$f: x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$;

$h: x \mapsto \frac{12}{x}$.

Lineáris függvények:

$a: x \mapsto \frac{x+2}{3}$, meredekség: $m = \frac{1}{3}$, metszéspontok: $x = -2$, $y = \frac{2}{3}$.

$b: x \mapsto \frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{3}$, meredekség: $m = \frac{2}{3}$, metszéspontok: $x = 0$, $y = 0$.

$d: x \mapsto (x-2) + 2(x-1{,}2)$, meredekség: $m = 3$, metszéspontok: $x = -4{,}4$, $y = \frac{44}{30}$.

$g: x \mapsto 3\left(\frac{4}{5} - 4x\right)$, meredekség: $m = -12$, metszéspontok: $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{1}{5}$.

303 f: $A(-1;5)$; $B(8;4)$; $C(0;4)$ vagy $C(8;4)$; $D(4;0)$; E(ilyen szám nincs; -4);

g: $A(-1;1)$; $B(8;100)$; $C(0;4)$ vagy $C(-4;4)$; $D(-2;0)$; E(nincs ilyen érték; -4).

h: $A(-1;-3)$; $B(8;6)$; $C(6;4)$ vagy $C(-8;4)$; $D(2;0)$ vagy $D(-4;0)$; E(nincs ilyen érték; -4);

k: $A(-1;21)$; $B(8;12)$; $C(4-\sqrt{8};4)$ vagy $C(4+\sqrt{8};4)$; $D(6;0)$ vagy $D(2;0)$; $E(4;-4)$;

l: $A(-1;-36)$; $B(12;3)$; $C(9;4)$; D(nincs ilyen érték; 0); $E(-9;-4)$.

304 *a)* $a: x \mapsto |x-5|$; *b)* $b: x \mapsto |x+3|$;

c) $c: x \mapsto |x|-4$; *d)* $d: x \mapsto |x|+3$;

e) $e: x \mapsto |x-2|-1$; *f)* $f: x \mapsto |x+6|-2$.

305 $a: x \mapsto |x|+4$; $b: x \mapsto |x-3|$;

$c: x \mapsto |x|-5$; $d: x \mapsto |x+6|$;

$e: x \mapsto |x-1|+1$; $f: x \mapsto |x+3{,}5|-2$;

$g: x \mapsto |x-2|-2$; $h: x \mapsto |x+1|+3$.

306 $a: x \mapsto -|x|$; $b: x \mapsto -|x|+3$;

$c: x \mapsto -|x|-3$; $d: x \mapsto -|x+5|$;

$e: x \mapsto -|x-2|$; $f: x \mapsto -|x+6|+1$.

307 A megfelelő párosítások: a–h; b–i; c–f; d–k; f–g.

308 *a)* $f: x \mapsto |x|+4$; *b)* $g: x \mapsto |x-2|+1$; *c)* $h: x \mapsto -|x|$.

309 *a)* $f: x \mapsto -|x|$; *b)* $g: x \mapsto -|x|+7$; *c)* $h: x \mapsto -|x|-2$;

d) $i: x \mapsto -|x+5|$; *e)* $j: x \mapsto -|x-3|+2$.

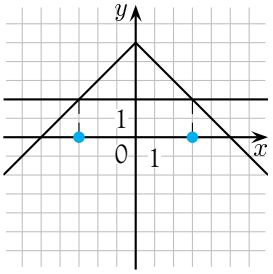
310 $a: x \mapsto |2x-4|$; $b: x \mapsto |-2x-6|$; $c: x \mapsto \left|\frac{1}{2}x-6\right|$;

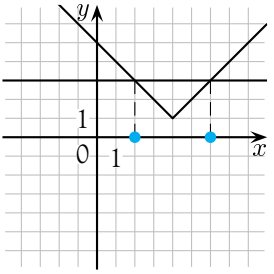
$d: x \mapsto \left|\frac{3}{4}x-3\right|$; $e: x \mapsto \left|\frac{1}{2}x-6\right|+2$; $f: x \mapsto \left|\frac{3}{4}x-3\right|+1$.

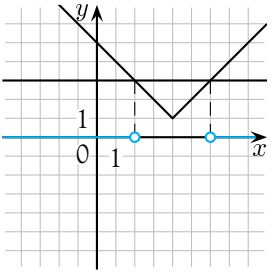
311 *a)* $a: x \mapsto |x-1|+1$; *b)* $b: x \mapsto |x+2{,}5|-5$;

c) $c: x \mapsto |x-3|-1$; *d)* $d: x \mapsto |x|$.

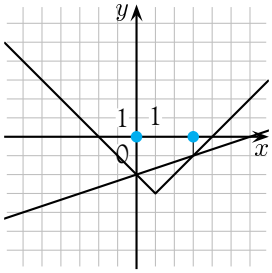
312 *a)* $x=3$ és $x=-3$; *b)* $x=6$ és $x=2$; *c)* $x<2$ vagy $x>6$;



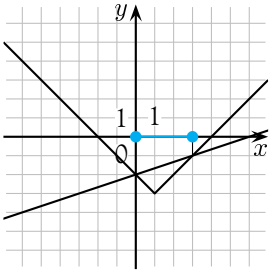




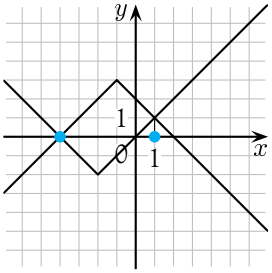
d) $x = 0$ és $x = 3$;



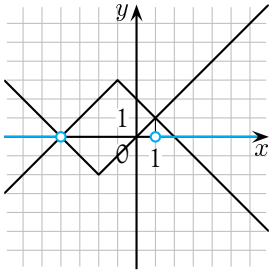
e) $0 \leq x \leq 3$;



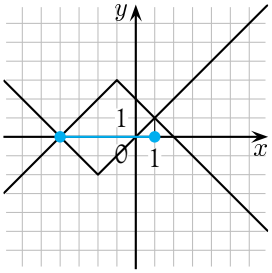
f) $x = -4$ és $x = 1$;



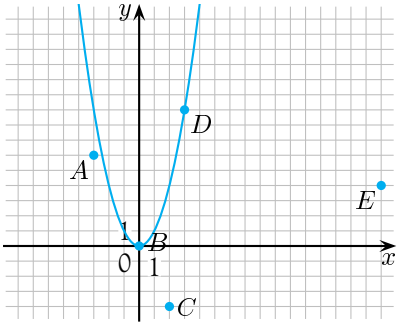
g) $x < -4$ vagy $x > 1$;



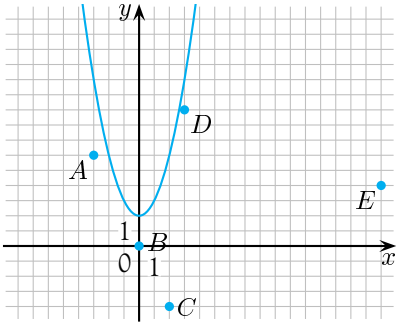
h) $-4 \leq x \leq 1$.



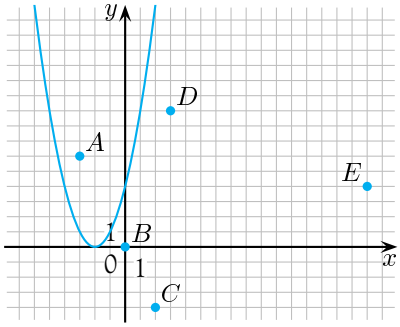
313



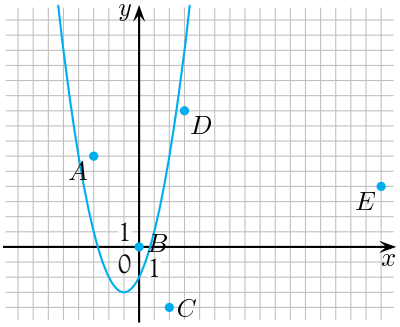
$f: x \mapsto x^2$. Alatta: A, C, E. Rajta: B, D. Felette: –.



$f: x \mapsto x^2 + 2$. Alatta: A, B, C, D, E. Rajta: –. Felette: –.



$f: x \mapsto (x + 2)^2$. Alatta: B, C, D, E. Rajta: –. Felette: A.



$f: x \mapsto (x + 1)^2 - 3$. Alatta: C, D, E. Rajta: –. Felette: A, B.

314 *a)* $a: x \mapsto (x-5)^2$; *b)* $b: x \mapsto (x+3)^2$;

c) $c: x \mapsto x^2+4$; *d)* $d: x \mapsto x^2-7$; *e)* $e: x \mapsto (x+7)^2+3$.

315 $a: x \mapsto (x+4)^2$; $b: x \mapsto x^2-4$;

$c: x \mapsto (x-5)^2$; $d: x \mapsto x^2+1$;

$e: x \mapsto (x-3)^2+2$; $f: x \mapsto (x+1)^2-1$;

$g: x \mapsto (x+5)^2-9$; $h: x \mapsto (x-6)^2+1$.

316 *a)* Az x tengely mentén negatív irányba 4 egységgel toltuk el: $\mathbf{v}(-4;0)$.

b) Az x tengely mentén negatív irányba 5 egységgel, az y tengely mentén negatív irányba 4 egységgel toltuk el: $\mathbf{v}(-5;4)$.

c) Az x tengely mentén negatív irányba 6 egységgel, az y tengely mentén pozitív irányba 4 egységgel toltuk el: $\mathbf{v}(-6;4)$.

317 *a)* $x=3$ és $x=-3$; $x \le -3$ vagy $x \ge 3$; $-3 < x < 3$;

b) $x=3$ és $x=-3$; $x < -3$ vagy $x > 3$; $-3 \le x \le 3$;

c) $x=-1$ és $x=-5$; $-5 \le x \le -1$; $x < -5$ vagy $x > -1$;

d) $x=5$ és $x=8$; $5 < x < 8$; $x \le 5$ vagy $x \ge 8$;

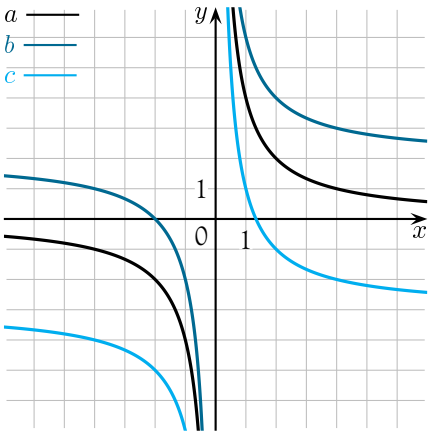
e) $x=-3$ és $x=1$; $-3 \le x \le 1$; $x < -3$ vagy $x > 1$;

f) $x=3$ és $x=4$; $3 \le x \le 4$.

318 *a)* $a: x \mapsto \frac{4}{x}$. Nem értelmezett: $x = 0$, nem veszi fel az $y=0$ értéket.

$b: x \mapsto \frac{4}{x}+2$. Nem értelmezett: $x=0$, nem veszi fel az $y=2$ értéket.

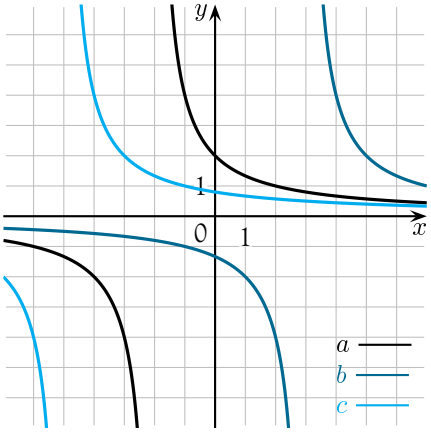
$c: x \mapsto \frac{4}{x}-3$. Nem értelmezett: $x=0$, nem veszi fel az $y=-3$ értéket.



b) $a: x \mapsto \dfrac{4}{x+2}$. Nem értelmezett: $x = -2$, nem veszi fel az $y = 0$ értéket.

$b: x \mapsto \dfrac{4}{x-3}$. Nem értelmezett: $x = 3$, nem veszi fel az $y = 0$ értéket.

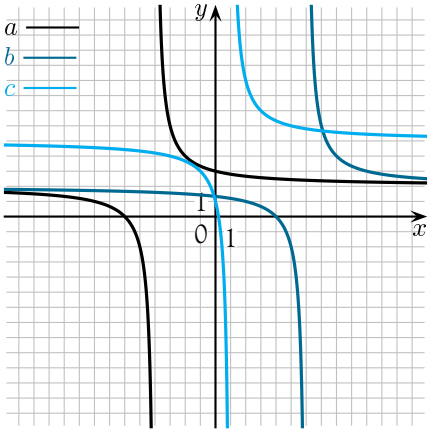
$c: x \mapsto \dfrac{4}{x+5}$. Nem értelmezett: $x = -5$, nem veszi fel az $y = 0$ értéket.



c) $a: x \mapsto \dfrac{4}{x+4} + 2$. Nem értelmezett: $x = -4$, nem veszi fel az $y = 2$ értéket.

$b: x \mapsto \dfrac{4}{x-6} + 2$. Nem értelmezett: $x = 6$, nem veszi fel az $y = 2$ értéket.

$c: x \mapsto \dfrac{4}{x-1} + 5$. Nem értelmezett: $x = 1$, nem veszi fel az $y = 5$ értéket.



319 *a)* $a: x \mapsto \dfrac{8}{x}$. Nem értelmezett: $x = 0$, azaz x nem lehet 0, $x \neq 0$.

b) $b: x \mapsto \dfrac{8}{x} + 4$. $x \neq 0$.

c) $c: x \mapsto \dfrac{8}{x-3}$. $x \neq 3$.

d) $d: x \mapsto \dfrac{8}{x+6} + 2$. $x \neq -6$.

e) $e: x \mapsto \dfrac{16}{x} + 2$. $x \neq 0$.

f) $f: x \mapsto \dfrac{16}{x+8}$. $x \neq -8$.

g) $g: x \mapsto \dfrac{16}{x-2} - 3$. $x \neq 2$.

h) $h: x \mapsto \dfrac{4}{x}$. $x \neq 0$.

i) $i: x \mapsto \dfrac{-4}{x}$. $x \neq 0$.

j) $j: x \mapsto \left|\dfrac{-4}{x}\right|$. $x \neq 0$.

Sorozatok

320 *a)* $a_1 = 4$; $a_2 = 11$; $a_3 = 18$; $a_4 = 25$;
b) $a_1 = 24$; $a_2 = 18$; $a_3 = 12$; $a_4 = 6$;
c) $a_1 = 600$; $a_2 = 300$; $a_3 = 150$; $a_4 = 75$;
d) $a_1 = -2$; $a_2 = 2$; $a_3 = -2$; $a_4 = 2$;
e) $a_1 = 80$; $a_2 = 120$; $a_3 = 180$; $a_4 = 270$.

321 *a)* A sorozat tagjai: $a_2 = 10 + 1^2 = 11$; $a_3 = 11 + 2^2 = 15$; a negyedik tagtól felsorolva: 24; 40; 65; 101; 150; 214; 295.

b) Az előzőek alapján: $a_2 = a_1 + 1^2$; $a_3 = a_2 + 2^2$; ...; $a_{n+1} = a_n + n^2$.

322 *a)* $a_1 = 12$; $a_5 = 20$; $a_{100} = 210$; $a_{2008} = 4026$;
b) $a_1 = 95$; $a_5 = 75$; $a_8 = 60$; $a_{200} = -900$;
c) $a_1 = -2$; $a_2 = 2$; $a_5 = 14$; $a_{20} = 74$;
d) $a_1 = \frac{2}{3}$; $a_2 = \frac{4}{3}$; $a_5 = \frac{10}{3}$; $a_{100} = \frac{200}{3}$;
e) $a_2 = 11$; $a_3 = 16$; $a_5 = 26$;
f) $a_2 = -5$; $a_3 = -8$; $a_5 = -14$;
g) $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_3 = \frac{7}{2}$; $a_5 = \frac{31}{2}$.

323 *a)* Lehet például: $a_n = \frac{2n+1}{n}$;

b) A sorozat kérdezett elemei: $a_{15} = \frac{31}{15}$; $a_{100} = \frac{201}{100}$.

324 *a)* A sorozat 14. eleme 33. *b)* A sorozat 99. eleme 203.
c) A sorozat 2008. eleme 4021. *d)* A sorozatnak nem eleme a 778.

Mértani sorozat

(Emelt szintű, választható tananyag)

325 *a)* Számtani sorozat: *f)*; *b)* Mértani sorozat: *a)*; *c)*; *d)*; *e)*.

326 (A) Igaz; (B) Igaz; (C) Hamis; (D) Hamis; (E) Igaz; (F) Hamis.

327 *a)* $a_2 = 10$; $a_3 = 20$; $a_4 = 40$; $a_{11} = 5120$;

b) $a_2 = \frac{1}{8}$; $a_3 = \frac{1}{16}$; $a_4 = \frac{1}{32}$; $a_6 = \frac{1}{128}$;

c) $a_2 = 1$; $a_3 = -1$; $a_4 = 1$; $a_{11} = -1$;

d) $a_2 = -300$; $a_3 = -30$; $a_4 = -3$; $a_8 = -0{,}0003$.

328 *a)* $q = -\frac{1}{2}$; $a_1 = 2048$; *b)* $q = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $a_1 = \frac{32}{81}$.

329 A sorozat első tagja: 6, a 0,1875 a sorozat hatodik tagja.

330 Olyan mértani sorozatnak a huszadik tagját keressük, amelynek első tagja $a_1 = 10\,064\,000$, és a hányadosa $q = 0{,}997$.

Ekkor $a_{20} = 9\,505\,580$ egészre kerekítve. (A lakosság kb. félmillióval csökken 20 év alatt.)

331 Készítsünk táblázatot!

	1. év végén	2. év végén	3. év végén	4. év végén
Nyerő bank	1 620 000 Ft	1 749 600 Ft	1 924 560 Ft	2 117 016 Ft
Benntartó bank	1 605 000 Ft	1 733 400 Ft	1 889 406 Ft	2 078 347 Ft
Zsugori bank	1 635 000 Ft	1 782 150 Ft	1 942 543 Ft	2 117 372 Ft

Nem sok a különbség, de a Zsugori bank fizet a legtöbbet, ezért ezt érdemes választani.

8. Statisztika

332 *a)* A nyolcadik, illetve a hatodik osztályosok eredményét.

b) 8. évfolyamon 56 373, 6. évolyamon 4685 tanuló.

c) A hatodik évfolyam eredménye jobb, átlagpontszámuk 66,2, a nyolcadikosoké 53,2.

d) A nyolcadikos tanulók kb. 2,2%-a ért el 51 pontos eredményt.

e) Az 57; 59; 61; 62; 63; 64; 65; 66; 68; 69; pontszámokat a tanulók legalább 3%-a érte el.

333 *a)* A táblázat:

	Fiú	Fiúk %-a az adott iskolatípuson belül	Lány	Lányok %-a az adott iskolatípuson belül	Össze-sen
Általános iskola	228	57,1%	171	42,9%	399
Gimnázium	64	36,6%	111	63,4%	175
Szakközép-iskola	235	65,6%	123	34,4%	358
Szakiskola	104	69,8%	45	30,2%	149
Összesen	631	58,4%	450	41,6%	1081

A kitöltött táblázat alapján:

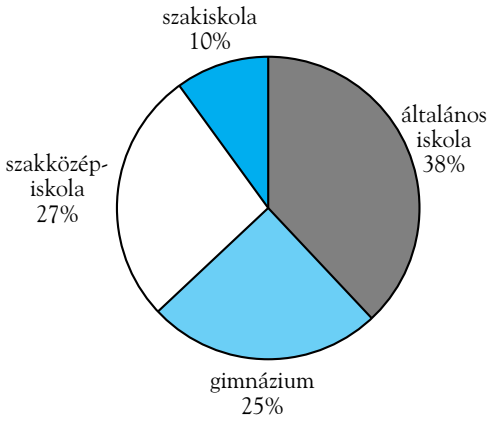
b) 1081 tanuló vett részt a felmérésben.

c) 399 általános iskolai tanulót kérdeztek meg.

d) A szakiskolásoknál: 69,8%.

e) Az összes lány: 450 tanuló, ebből 171 általános iskolás, 111 gimnáziumi tanuló, 123 szakközépiskolás, 45 szakiskolai tanuló. Ezek alapján a kördiagram:

A lányok aránya a felmérésben



334 A kérdezett területek nagysága egészre kerekítve:

Indiai-óceán: 73 446 km^2. Csendes-óceán: 165 001 km^2. Atlanti-óceán és Jeges-tenger: 96 922 km^2.

335 *a)* Legtöbben 15 és 18 óra között vannak, a látogatók 32%-a.

b) 150 vendég volt egész nap a fitneszteremben.

c) Táblázatba foglaljuk az eredményeket:

8–10 óra között	18	500 Ft/óra	9000 Ft
10–13 óra között	36	700 Ft/óra	25 200 Ft
13–15 óra között	27	500 Ft/óra	13 500 Ft
15–18 óra között	48	700 Ft/óra	33 600 Ft
18–21 óra között	21	800 Ft/óra	16 800 Ft
Összesen			98 100 Ft

336 *a)* Az óvodák száma a vizsgált időszakban csökkent.

b) Két tanévben, 1998/1999-ben és 2002/2003-ban növekedett az óvodák száma.

c) 1999/2000-es tanévben csökkent legnagyobb mértékben, azaz 58 óvodával lett kevesebb.

d) 4682-ről 4524-re, azaz 158-cal csökkent az óvodák száma.

337 *a)* Magyarország évi 1 főre eső hús- és burgonyafogyasztását mutatja.

b) 67,5 kg-ot.

c) Burgonyából.

d) A burgonyafogyasztás csak nagyon kismértékű növekedést mutat, a húsfogyasztás növekedésének mértéke nagyobb.

e) 1997-től 2000-ig növekedett, majd 2002-ben ismét növekedés figyelhető meg.

f) Húsféléből az adott időszak éves átlaga 65,86 kg/fő, burgonyából 66,33 kg/fő.

338 *a)* Komárom-Esztergom megyének a legnagyobb a népsűrűsége.

b) Somogy megye.

c) Fejér megyében élnek a legtöbben.

d) A Dunántúl területe 36 672,7 km^2.

e) A Dunántúlon 3 081 542 fő él.

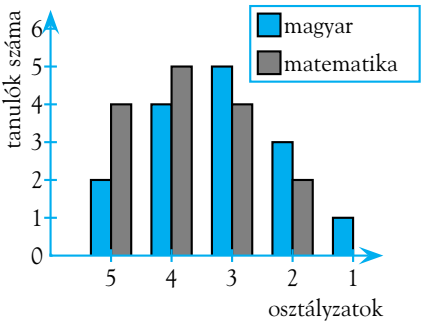
f) A Dunántúl népsűrűsége 84 fő/km^2.

Dunántúl megyéi	Fő
Baranya	403 866
Fejér	428 583
Győr-Moson-Sopron	421 312
Komárom-Esztergom	312 833
Somogy	331 974
Tolna	244 424
Vas	263 583
Veszprém	379 792
Zala	295 175

339 Készítsünk gyakorisági táblázatot!

a)

Jegy	Magyar	Matematika
5	2	4
4	4	5
3	5	4
2	3	2
1	1	0



b) A magyarjegyek mediánja 3.

c) A matematikajegyek módusza 4.

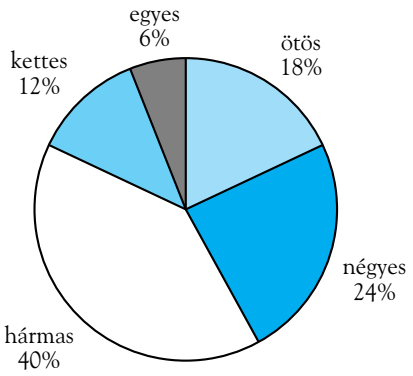
d) A tantárgyi átlagok: magyar 3,2; matematika 3,73.

340 Átlagmagasság: $\dfrac{18 \cdot 167 + 12 \cdot 177}{30} = 171$ cm.

341 *a)* A relatív gyakoriság táblázata:

Osztályzat	5	4	3	2	1
Relatív gyakoriság	0,18	0,24	0,4	0,12	0,06

b)

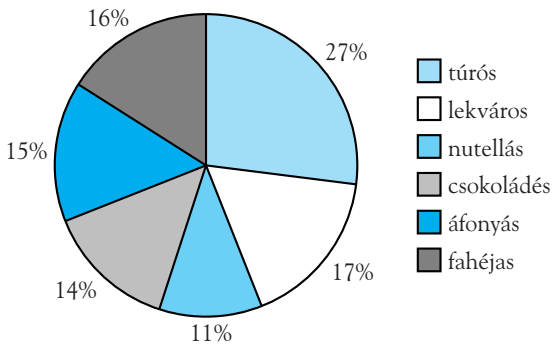


c) Az osztályzatok átlaga: 3,36. *d)* Az osztályzatok módusza 3.

342 *a)*

	Gyakoriság	Relatív gyakoriság
Túrós	65	0,264
Lekváros	42	0,171
Nutellás	28	0,114
Csokoládés	35	0,142
Áfonyás	36	0,146
Fahéjas	40	0,163
Összesen:	246	

b)



343 *a)*

Ár	390 Ft	380 Ft	400 Ft	410 Ft	420 Ft	440 Ft
Gyakoriság	6	4	5	3	6	1

Az átlagár:

$$\frac{380 \cdot 4+390 \cdot 6+400 \cdot 5+410 \cdot 3+420 \cdot 6+440 \cdot 1}{25} = 402 \text{ Ft/kg}.$$

b) Két módusza van: 390 Ft és 420 Ft. A mediánja: 400 Ft.

344 *a)* 156 400 Ft az átlagfizetés.

b) A béremelés után az átlagfizetés 161 400 Ft lett.

c) Az átlagfizetés értéke 5000 Ft-tal, azaz a bérkiegészítés mértékével növekedett.

345 *a)* 32,05 óra.

b) Az adatok nagyság szerinti sorba rendezése:
28; 29; 29; 29; 30; 30; 31; 32; 32; 32; 32; 32; 33; 33; 34; 34; 34; 35; 36; 36.
A medián: 32 (a középső két elem átlaga).

c) A módusz: 32.

346 Pénteken 5,5 órát kell dolgoznia.

347 *a)* Matematika tantárgy átlaga: 3,33, történelem tantárgyi átlag 3,3, magyar tantárgyi átlag 3,42.

b) A magyarjegyek módusza 5. *c)* A történelemjegyek mediánja 3.

d) A módusszal, mert az osztály több mint harmadrésze hármast kapott matematikából.

348 521 db-ot.

349 *a)* 214 cm a folyó vízmagasságának átlaga a 10 nap alatt.

b) 215 cm a medián értéke. *c)* 215 cm a módusz értéke.

350 39,68 pont a franciadolgozat átlaga.

351 Több megoldás lehet:

Tanulók száma	2	3	4	...	10
A hozzávett adat	171	172	173	...	179

Általánosan:
ha a plusz tanuló magassága n cm, akkor a tanulók száma: $x = n - 169$ cm.

352 A beosztottak átlagfizetése 100 000 Ft.

9. A tér geometriája

A tanult testek áttekintése

353 *a)* 16 cm; *b)* $16 \cdot \sqrt{2}$ cm; *c)* $16 \cdot \sqrt{3}$ cm; *d)* 1536 cm^2; *e)* 4096 cm^3.

354 *a)* 12 cm; *b)* 432 cm^3; *c)* $6 \cdot \sqrt{6}$ cm.

355 184,32 cm^3.

356 304 cm^2, 312 cm^3.

357 Kb. 1728 cm^3.

358 11 oldalú.

359 7 oldalú.

360 $256 + 576 \cdot \sqrt{2} \approx 1070{,}6$ (cm^2), 2304 cm^3.

361 Kb. 286,7 cm^2, Kb. 372,7 cm^3.

362 A furat sugara a henger sugarának $\sqrt{2}$-ed részével egyenlő.

Gúlák

363 *a)* A harmadik. *b)* A harmadik és a negyedik.

364 *a)* 1672 cm^2; *b)* 90,4 dm^2; *c)* 5506,4 mm^2.

365 Kb. 10,6 m^2.

366 60°-ot.

367 (A) Igaz; (B) Igaz; (C) Hamis; (D) Hamis.

368 6,5 cm.

369 Három gúla van.
Szabályos háromszög alapú (tetraéder): $75 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.
Négyzet alapú: $100 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.
Szabályos ötszög alapú: $125 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.

370 (A) Igaz; (B) Hamis; (C) Igaz; (D) Igaz; (E) Hamis; (E) Igaz.

371 *a)* 3 m; *b)* $3 \cdot \sqrt{3}$ m. **372** 12 cm.

Kúpok

373 *a)* $m = 48$ cm; *b)* $a = 36{,}5$ mm; *c)* $r = 2{,}6$ dm.

374 *a)* 60 cm, kb. 2488,1 cm^2; *b)* 35 cm, kb. 1847,3 cm^2.

375 Az első a nagyobb felszínű, $210 \cdot \pi \approx 659{,}7$ cm^2-rel.

376 63 : 22.

377 *a)* 1 : 2; *b)* 1 : 2; *c)* 1 : 4; *d)* 2 : 5;
e) $m_1 = 14 \cdot \sqrt{2} \approx 19{,}8$ cm, $m_2 = 7 \cdot \sqrt{5} \approx 15{,}7$ cm.

378 *a)* 15 cm; *b)* $200 \cdot \pi \approx 628{,}3$ cm^2.

379 $1224 \cdot \pi \approx 3845{,}3$ cm^2.

380 Kb. 22,3 cm^2.

A gúla és a kúp térfogata

(Emelt szintű, választható tananyag)

381 1183 cm^3.

382 $384 \cdot \sqrt{3} \approx 665{,}1$ cm^3.

383 $m = \sqrt{584}$ cm, $V \approx 3226{,}7$ cm^3.

384 $m = \sqrt{364}$ cm, $V \approx 915{,}8$ cm^3.

385 Kb. 261,8 cm^3.

386 *a)* $m = 60$ cm, $V \approx 7602{,}7$ cm^3;

b) $m = 35$ cm, $V \approx 5277{,}9$ cm^3.

387 *a)* $m = 17$ cm;

b) $m_o = 5 \cdot \sqrt{13}$, $A = 144 + 120 \cdot \sqrt{13} \approx 576{,}7$ cm^2,

c) $V_{gúla} = 816$ cm^3, $V_{kúp} = 204 \cdot \pi \approx 640{,}9$ cm^3, hulladék: kb. 21,5%.

388 4 : 3.

Gömb

389 *a)* $A \approx 1256{,}6$ cm^2, $V \approx 4188{,}8$ cm^3;

b) $A \approx 2290{,}2$ cm^2, $V \approx 10\,306$ cm^3;

c) $A \approx 38{,}5$ cm^2, $V \approx 22{,}4$ cm^3;

d) $A \approx 289{,}5$ cm^2, $V \approx 463{,}2$ cm^3.

390 Kb. 16,8 cm^3. **391** Kb. 654,5 hl. **392** Kb. 21,1 cm^3.

393 *a)* $r \approx 3{,}06$ cm; $A \approx 117{,}7$ cm^2; $V = 120$ cm^3.

394 Kb. 169 968 121 km^2.

395 Kb. 290,5 m^2. **396** Kb. 36,28 m.

10. Valószínűségszámítás

397 $\frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$. **398** $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{10}$.

399 $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{35}$. **400** $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$.

401 $\frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{126}$.

402 $\frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{10}$.

403 Egyenlő az esélye a 0 és az 1 fejnek.

404 Lehetőségek: 0, 1, 2 fej. Az 1 fej valószínűsége a legnagyobb.

405 Lehetőségek: 0, 1, 2, 3 fej. Az 1, illetve a 2 fej a legvalószínűbb.

406 A 2 fej dobása a legvalószínűbb.

407 $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ (ERDŐ, DŐRE, REDŐ, ERŐD).

408 $\frac{1}{2}$, mert 3-mal mindig osztható, és azonos a páros, páratlan számok száma. (Nincs 0 számjegy.)

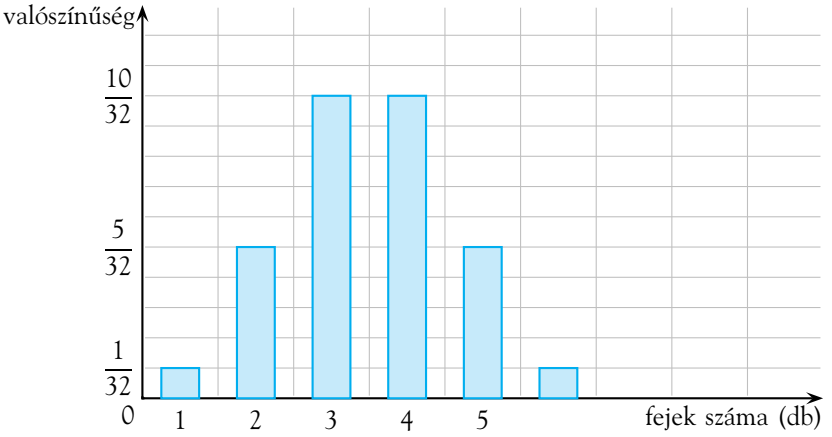
409 *a)* $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$; *b)* $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$; *c)* $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

410 *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$; *c)* $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$; *d)* $\frac{23}{36}$;

e) $\frac{11}{36}$; *f)* $\frac{1}{6}$; *g)* $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; *h)* $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

411 *a)* $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$; *b)* $\frac{5}{32}$; *c)* $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$;

d) $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$; *e)* $\frac{5}{32}$; *f)* $\frac{1}{32}$.



412 *a)* 0 darab kék, 8 darab piros. *b)* 8 darab kék, 0 darab piros.

c) 3 darab kék, 5 darab piros. *d)* 2 darab kék, 6 darab piros.

e) Legalább 5 kék golyó. *f)* Legalább 6 kék golyó.

413 Például cédulára írjuk a neveket, majd húzunk véletlenszerűen. Benő $\frac{3}{5}$ valószínűséggel mehet.

414 *a)* $\frac{1}{49}$; *b)* $\frac{6}{49}$.

415 4 darab 10 Ft-ost kapott Karesz.

416 *a)* $\frac{1}{4}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* 0.

417 A betűkkel jelölt folyosókon való áthaladás valószínűsége:

A: $\frac{1}{2}$; B: $\frac{1}{2}$; C: $\frac{1}{4}$; D: $\frac{1}{2}$; E: $\frac{1}{4}$;

F: $\frac{1}{8}$; G: $\frac{3}{8}$; H: $\frac{3}{8}$; I: $\frac{1}{8}$; J: $\frac{1}{16}$;

K: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; L: $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$; M: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; N: $\frac{1}{16}$.

Sir Francis Galton, 1822–1911. Brit természettudós, orvos. Földrajzi, meteorológiai kutatásokat folytatott, majd antropológiával, örökléstannal foglalkozott.

418 A kártya területe: ≈ 5246 mm^2, a rombuszok összterülete $\approx 145{,}5$ mm^2. A keresett valószínűség: $\frac{145{,}5}{5246} \approx 0{,}027 \approx 3\%$.

419 A kártya területe adja a teljes eseménynek megfelelő ponthalmazt. $T = ab = 61 \times 86 = 5246$ (mm^2). A rombusz területe $\frac{ef}{2}$, ahol e és f a két átlót jelöli. A nyolc nagy rombusz területe $4 \times 13 \times 17 = 884$ (mm^2). A két kis rombusz területe $5 \times 7 = 35$ (mm^2). A rombuszok összes területe 919 (mm^2). Annak a valószínűsége, hogy egy pont éppen egy rombuszra kerüljön:
$P = \frac{919}{5246} = 0{,}175 = 17{,}5\%$.

420 $\frac{1}{4}$.

421 Például: 2 piros, 3 kék, 1 zöld, 4 fekete.

422 $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. A valószínűségek: $\approx 41{,}3\%$, $\approx 19{,}5\%$ $\approx 19{,}5\%$.

423 50%, $\approx 32\%$, $\approx 8{,}68\%$, $\approx 8{,}68\%$ a keresett valószínűségek.

424 $\frac{1}{2}$.

11. Középiskolába készülünk

Első feladatlap

425 *a)* $a = 98$; *b)* $b = -6$; *c)* $c = 899$.

426 A lehetséges közös pontok száma: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 és végtelen sok.

427 *a)* 20 km; *b)* 20 cm.

428 *a)* Csokoládé, eper; *b)* 4;

c) csokoládé, eper, citrom; *d)* legkevesebb 20, legtöbb 36.

429 A gondolt szám: 141.

430 *a)* 6 cm; *b)* 75°; *c)* 105°.

431 *a)* $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 225$; *b)* 2; *c)* 36.

432 (A) Igaz; (B) Hamis; (C) Igaz; (D) Hamis; (E) Hamis.

433 *a)* 6 db nyolcszög, 8 db szabályos háromszög; *b)* 36; *c)* 24.

434 *a)* 120 ezer Ft; *b)* 9; *c)* 1.

Második feladatlap

435 $x = 3$, $y = 3$, $z = 95$.

436 *a)* 18 bicikli, 20 tricikli; *b)* Nem; *c)* 29 db.

437 $x = 3$, $y = 97$, $x = -2$, $y = -14{,}6$.

438 *a)* Az első; *b)* 25; *c)* 75%-a; *d)* 3,4.

439 (A) Igaz; (B) Hamis; (C) Hamis; (D) Hamis; (E) Igaz.

440 *a)* 120°; *b)* 150 cm^2; *c)* 52 cm.

441 *a)* 450; *b)* 11,25 óra; *c)* 51 perc.

442 12, 14, 15, 20, 26.

443 *a)* 6; *b)* 8; *c)* két festett lapú 24 db, egy festett lapú 22 db.

444 *a)* 7 db; *b)* 7 db; *c)* 7 db; *d)* 24 db.

Harmadik feladatlap

445 *a)* $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 3; *b)* $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 9.

446 *a)* 19 db; *b)* 33 db; *c)* 24 db.

447 20 lehetőség.

448 (A) Hamis; (B) Hamis; (C) Igaz; (D) Igaz; (E) Hamis; (F) Igaz.

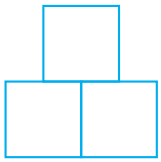
449 *a)* Például: 3, 9, 10, 11 és 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8;

b) 1, 10, 11 és 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

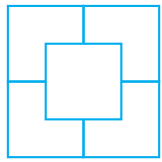
c) Nem lehet; *d)* Nem lehet.

450 *a)* 36°; *b)* 144°; *c)* 60°, 132°, 168°; *d)* 5 : 11 : 14.

451 *a)*



b)



c) 16,875 cm^3; *d)* 45 cm^2.

452 *a)* Igen, mindegyiket 17-tel növeljük;

b) Igen, mindegyikből elveszünk 2-t; *c)* 7 db.

453 *a)* 60°; *b)* 60°, 30°; *c)* 12 cm; *d)* 6 db.

454 *a)* Például $x = 1$, $y = 5$; *b)* Például $x = 7$, $y = 13$;

c) Nincs, mert a bal oldal mindig páros.

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök
Raktári szám: NT-11880/Fgy
Tankönyvkiadási koordinációs osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 12,87 (A/5) ív
Tömeg: 220 gramm
1. kiadás, 2020
Tördelés, grafika: Fried Katalin
A szedés EMTEX szedőrendszerben készült

Készült a Gyomai Kner Nyomda Zrt.-ben, 2020-ban
A Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
Felelős vezető: Erdős Tamás vezérigazgató
Telefon: 66/887-400