Kalandozások a matematikában

BÉKÉSSY SZILVIA · DR. FRIED KATALIN · DR. KORÁNDI JÓZSEF
PARÓCZAY JÓZSEF · SZÁMADÓ LÁSZLÓ · TAMÁS BEÁTA

MATEMATIKA

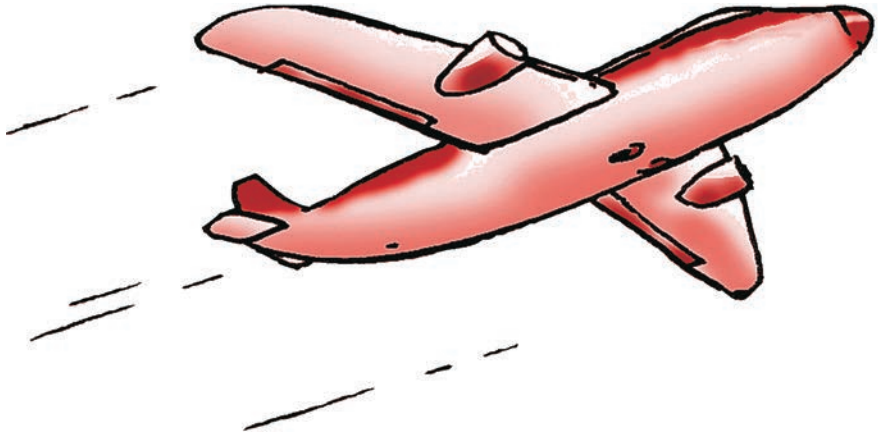


7

OKTATÁSI HIVATAL

Békéssy Szilvia – Dr. Fried Katalin – Dr. Korándi József
Paróczay József – Számadó László – Tamás Beáta

Matematika
7. évfolyam



OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2020. 05. 22-től tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/3044-7/2020. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. sz. melléklet Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára – 2.2.03 (Matematika),
2.3.1.2 (Emelt matematika – B variáció); 4. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok
7–12. évfolyama számára – 4.2.04 (Matematika); 5. melléklet Kerettanterv a gimnáziumok
5–12. évfolyama számára – 5.2.04 (Matematika) megnevezésű kerettantervek előírásainak.
A tankönyv összhangban áll a NAT 2012-vel.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
HERCZEGNÉ KASZÁS JUDIT, ÁBRAHÁM JULIANNA

Lektorok:
LAJOS JÓZSEFNÉ
matematika tantárgyi szakértő

PÁLFALVI JÓZSEFNÉ
főiskolai docens

RAJK ÁGNES
középiskolai tanár

Grafikusok: FRIED KATALIN, JUHÁSZ LEHEL, TÉNYI KATI

A borítót CZAKÓ RITA rajzának felhasználásával KORDA ÁGNES tervezte.

Szerkesztők: FÜLEKI LÁSZLÓNÉ, TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA,
DR. KORECZNÉ KAZINCZI ILONA

Anyanyelvi lektor: DR. FALUSSY BÉLÁNÉ

© Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, dr. Korándi József, Paróczay József, Számadó László,
Tamás Beáta, Oktatási Hivatal (Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet), 2015

ISBN 978-963-19-7667-0

Tartalom

Bevezetés. Jelmagyarázat 6

1. A racionális számok 7

A tanult számok halmaza 7
Tört alakba írható számok 10
Vizsgáljuk a tizedes törteket! 12
Műveletek 15
Az összeadás tulajdonságai 15
A kivonás tulajdonságai 18
A szorzás tulajdonságai 20
Az osztás tulajdonságai 22
Vegyes műveletek – gyakorlás 24

Játsszunk a matematikával! 27

Számok és táblázatok 27

2. Geometria 30

Mértékegységek, gyakorlati példák, alkalmazások 30
A legfontosabb geometriai fogalmak I. 35
A legfontosabb geometriai fogalmak II. 37
Geometriai transzformációk 41
A középpontos tükrözés I. 45
A középpontos tükrözés II. 47
Tengelyes és középpontos szimmetria 49

3. Nagy számok 56

Nagy számok 56
Mi a neve? (Olvasmány) 58
Hogyan olvassuk ki? (Olvasmány) 59
Egy szám többféle alakja – a normálalak 61
A hatványozás azonosságai 63
Oszthatóság és hatványozás 66
Többszörösök, osztók 66
Közös többszörös; legkisebb közös többszörös 68
Közös osztó, legnagyobb közös osztó 71
A számológép használata 73

4. Algebra 77
Jelek és jelölések 77
Algebrai fogalmak 80
Műveletek algebrai kifejezésekkel 82
Összeadás 82
Szorzás 84
5. Egyenletek, egyenlőtlenségek 88
Egyenletek, egyenlőtlenségek 88
„Fejszámolás” 88
A behelyettesítés (próbálgatás) módszere 88
A lebontogatás módszere 89
Egyenletek megoldása mindkét oldal azonos változtatásával 91
A mérlegelv 91
Készítsünk egyenleteket! 94
Egyenlőtlenségek 95
Szöveges feladatok I. 98
„Gondoltam egy számot…” 98
Szöveges feladatok II. 100
Játsszunk a matematikával! 103
Ki kicsoda? 103
6. Arányosság, százalékszámítás 105
Arányosság, százalékszámítás 105
Arányos osztás 107
Arányossági következtetések 109
Többszörös arányossági problémák 113
Százalékszámítás 114
Hány százalék? 117
Összetett feladatok 119
Vegyes feladatok a százalékszámítással kapcsolatosan 122
7. Hozzárendelések, függvények, sorozatok 124
Halmazok megadása 124
Hozzárendelések 126
Hozzárendelések más formában 130
Egyértelmű hozzárendelés, a függvény fogalma 133
Gyakoroljuk a függvények jelölését! 136
Olvassunk a grafikonról! 138
A lineáris függvény 141
A lineáris függvények vizsgálata 143
Nemlineáris függvények 146
A sorozatok 149
„A kis Gauss” (Olvasmány) 151
A számtani sorozat 152

Játsszunk a matematikával! 155

Igaz? Hamis? 155
Furi-Muri szigete 155
Paradoxon 156

8. Geometriai számítások, szerkesztések, bizonyítások 158

A paralelogramma és a háromszög területe 158
A trapéz területe 162
Szögpárok 165
A kör kerülete 167
A kör területe 170
Szerkesztések, bizonyítások 173
Háromszögekkel kapcsolatos fogalmak, tételek I. 175
Háromszögekkel kapcsolatos fogalmak, tételek II. 178
Háromszögekkel kapcsolatos fogalmak, tételek III. 180
Négyszögek 182
Sokszögek 184
Testek 188
Hasábok 188
Hengerek 191

9. Valószínűség-számítás 195

Bevezetés a valószínűség-számításba 195
Kísérlet, elemi esemény, gyakoriság 196
Relatív gyakoriság, a valószínűség fogalma 199
Nem azonos valószínűségű események 202

Játsszunk a matematikával! 205

Zokni, kesztyű, sál, sapka 205
Bújócska a szekrényben 205
Az osztályban 207
Nehéz gondolkodtató feladatok 209

10. Fogalomtár 210

Táblázatok 212

Bevezetés

Az NT-11780 raktári számú 7. évfolyamos tartós tankönyvet tartod a kezedben.

A 7. osztályban már a továbbtanulás foglalkoztat bennünket, és ez befolyásolja a matematikatanulást is. Nem mindenki érdeklődik egyformán a matematika iránt, ezért a tankönyvben a feladatokat szintenként megjelöltük (alap-, közepes, emelt).

Az alapszint és a közepes szint megfelel a NAT 2012 és a kerettanterv előírásainak. Az emelt szintet a matematika iránt érdeklődő tanulóknak ajánljuk. Ezek megoldása nem tartalmaz új ismereteket, de megoldásuk összetett gondolkodást igényel.

Ez egy tartós tankönyv, vigyázz rá! Ezért – bár ezt az egyes feladatoknál nem jeleztük külön – *a feladatok megoldásakor minden esetben a füzetedben dolgozz*!

Jelmagyarázat

A könyvben a feladatokat nehézségi szintjük szerint más-más módon jelöltük.

A1, **A2**, . . . **A5**, . . . alapszintű.

Az érvényes kerettantervi előírásoknak megfelelő feladatok. Az A betű után álló szám minden esetben a feladat sorszámát jelenti.

Olyan feladatokat jelöltünk így, amelyek egyszerűek, nem igényelnek magas szintű matematikai ismereteket, gondolkodást.

K1, **K2**, . . . **K5**, . . . közepes szintű.

Az érvényes kerettantervi előírásoknak megfelelő feladatok. A K betű után álló szám minden esetben a feladat sorszámát jelenti.

Olyan feladatokat jelöltünk így, amelyek megoldása mindenkitől elvárható, de kicsit összetettebbek, mint az alapszintű feladatok.

E1, **E2**, . . . **E5**, . . . emelt szintű.

Ezeket a feladatokat a matematika iránt érdeklődő tanulóknak ajánljuk, megoldásuk segítheti a sikeres továbbtanulást. Az E betű után álló szám minden esetben a feladat sorszámát jelenti.

Olyan feladatokat jelöltünk így, amelyek megoldása magasabb szintű gondolkodást igényel.

A figyelem felkeltésére a fontos tudnivalókat, jelöléseket, összefüggéseket, ismereteket és a példákat változatos, sokféle színnel emeltük ki.

A matematikai fogalmakat változatosan használtuk, hogy te is megtanuld minél többféleképpen kifejezni a gondolataidat. Törekedj a pontos, választékos beszédre a matematikában is!

A tanult számok halmaza

Amikor számhalmazokat ábrázolunk, az alaphalmaz sokszor a *tanult számok halmaza*, vagyis azok a számok, amelyekről már tanultunk.

Milyen számokat ismersz? Nevezd meg őket, és mondj példát mindegyik típusra!

Természetes számok, pl. 0; 1; 2; 3; ...

Egész számok, pl. ...; −2; −1; 0; 1; 2; ...

Törtek, pl. $\frac{1}{2}$; 0,5; 4,3; ...

Tizedes törtek, pl. −0,5; 2,5; 4,5; 3,02; ...

Pozitív számok, pl. $\frac{1}{2}$; 1; 2; 1078; $\frac{5}{2}$; ...

Negatív számok, pl. −6; −10; −4; $-\frac{1}{2}$; ...

Páros számok, pl. 2; 4; 0; 102; ...

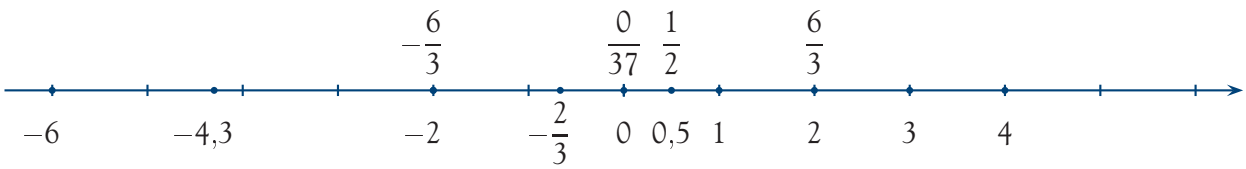
Páratlan számok, pl. 1; 3; 11; ...



1. példa

Ábrázold számegyenesen a következő számokat!

0; 1; −2; 2; 3; 4; −6; $\frac{1}{2}$; 0,5; $-\frac{6}{3}$; −4,3; $-\frac{2}{3}$; $\frac{0}{37}$; $\frac{6}{3}$.

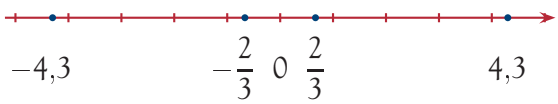


Melyek tartoznak a fenti számok közül a következő csoportokba: pozitív, negatív, 0?
Melyek tartoznak az egész számok, illetve a törtszámok csoportjába?

Pozitív: 1; 2; 3; 4; $\frac{1}{2}$; 0,5; $\frac{6}{3}$. Negatív: −2; −6; $-\frac{6}{3}$; −4,3; $-\frac{2}{3}$. Nulla: 0; $\frac{0}{37}$.

Egész számok: $0 = \frac{0}{37}$; 1; $2 = \frac{6}{3}$; 3; 4; −6; $-\frac{6}{3} = -2$. Törtszámok: $0{,}5 = \frac{1}{2}$; −4,3; $-\frac{2}{3}$.

Mit jelent a $-\frac{2}{3}$; −4,3?



A $-\frac{2}{3}$ a $\frac{2}{3}$ ellentettje, ugyanakkora távolságra van a 0-tól a számegyenesen, mint a $\frac{2}{3}$, de a 0 másik oldalán. A −4,3 a 4,3 ellentettje.

Fontos tudnivaló

Egy szám ellentettje az ugyanolyan abszolút értékű, de ellentétes előjelű szám.

1.

Mit jelent vajon a $\frac{4,5}{2,5}$?

(Úgy olvassuk, hogy 4,5 *per* 2,5.)

Ezt az alakot nem szoktuk használni. (Ha például a csiga 2,5 óra alatt 4,5 métert tesz meg, akkor egy óra alatt $\frac{4,5}{2,5}$ métert halad.) A törtvonal osztást jelöl ki, tehát ennek a jelentése: $\frac{4,5}{2,5} = 4,5 : 2,5 = 1,8$ vagy $\frac{4,5}{2,5} = \frac{9}{5}$.

Mivel egyenlő a $\frac{6}{3}$?

A $\frac{6}{3} = 2$, ez **tört alakban írt egész szám.**

Megállapodás

Eddig nem tisztáztuk, mit nevezünk törtnek. Megállapodunk egyes kifejezések használatában.

Törtkifejezés vagy **tört** például a $\frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}}$. Olyan kifejezés, amely számlálóból, nevezőből, törtvonalból áll. Ha a számlálóban és a nevezőben szám szerepel, akkor a törtkifejezést **tört alakú számnak** is nevezzük.

Tört alakban írt egész szám például a $\frac{4}{2} = 2$: olyan tört alakú szám, amely **egész számmal** egyenlő.

Törtszám például a $-\frac{2}{9}$: olyan törtszám, amely **nem egész** szám.

Fontos tudnivaló

Azokat a számokat, amelyeket eddig használtunk: az egész számokat és a törteket együtt **racionális számoknak** nevezzük.

A racionális számok halmazát **Q** jelöli. A természetes számok (0, 1, 2, 3, ...) halmazát **N**, az egész számok (..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...) halmazát pedig **Z**.

A *racionális* szó latin eredetű – a ráció szóból ered. Jelentése: arány, arányos. Átvitt értelemben a jelentése: ésszerű.

2. példa

Igaz-e, hogy minden egész szám felírható tört alakban?

Minden egész szám felírható tört alakban, hiszen a számláló lehet maga az egész szám, a nevező pedig az 1. Például: $2 = \frac{2}{1}$; $-53 = \frac{-53}{1}$. Másként is írhatjuk, például $2 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \ldots$; $-53 = \frac{212}{-4} = \ldots$

Gondolkozz!

Keress más, 2-vel egyenlő törtet! Lehet-e tetszőleges nevezőt választani a 2 tört alakba írásához?

A tizedes törtet felírhatjuk helyiérték-táblázatba. Egy egész szám és törtek összegeként fejezhető ki, például:

$$25,032 = 25 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} = 25 + \frac{32}{1000} = 25\frac{32}{1000} = \frac{25\,032}{1000}.$$

Úgy is képzelhetjük, hogy a tizedes törtet felírjuk egy 1 nevezőjű tört alakjában. A kapott törtet addig bővítjük 10-zel, amíg a számlálóban egész számot nem kapunk.

Például: $5{,}107 = \frac{5{,}107}{1} = \frac{51{,}07}{10} = \frac{510{,}7}{100} = \frac{5107}{1000} = 5\frac{107}{1000}$.

A negatív törtek is felírhatók két egész szám hányadosaként.

A törtet tekinthetjük úgy is, mint egy kijelölt osztás műveletet. Ezért például: $-\frac{2}{3} = -(2 : 3)$.

Az egész számok osztásakor tanultuk, hogy $-(2 : 3) = (-2) : 3$ vagy $-(2 : 3) = 2 : (-3)$. Így $-\frac{2}{3} = -(2 : 3) = (-2) : 3 = \frac{-2}{3}$ vagy $-\frac{2}{3} = -(2 : 3) = 2 : (-3) = \frac{2}{-3}$.

Más felírás is lehetséges; tudjuk, hogy minden tört bővíthető.

Az eddigi példáink is azt mutatják, hogy **a racionális számok felírhatók két egész szám hányadosaként.**

Az is igaz, hogy az a szám, amely felírható két egész szám hányadosaként, vagy egész szám, vagy törtszám.

Ezért szokás így fogalmazni:

Fontos tudnivaló

A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

3. példa

Helyezd el az alábbi számokat a táblázatban!

$0;\ 1;\ -2;\ 2;\ 3;\ 4;\ -6;\ \frac{1}{2};\ 0{,}5;\ -\frac{6}{3};\ -4{,}3;\ -\frac{2}{3};\ \frac{0}{37};\ \frac{6}{3}$.

Készítettünk egy táblázatot a számok osztályozására. Nevezd meg, hogy a táblázat egyes mezőibe milyen tulajdonságú számok kerülnek!

A racionális számok

	Negatív számok	0	Pozitív számok
Egész számok	*A*	*B*	*C*
Tört-számok	*D*	*E*	*F*

A: negatív egész számok; az *A*-ba tartozik: $-2;\ -6;\ -\frac{6}{3} = -2$ egész szám, csak tört alakban van.

B: a 0; a *B*-be tartozik: 0; $\frac{0}{37}$.

C: pozitív egész számok; a *C*-be tartozik: $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \frac{6}{3}$.

D: negatív törtszámok; a *D*-be tartozik: $-4{,}3;\ -\frac{2}{3}$.

E: üres (a 0 nem törtszám, mert egész szám);

F: pozitív törtszámok; az *F*-be tartozik: $\frac{1}{2};\ 0{,}5$.

Feladatok

A1 Írd fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

a) 1; *b)* -1; *c)* 0;

d) $\frac{1}{2}$; *e)* $-\frac{2}{3}$; *f)* 21,7;

g) $-5{,}7$; *h)* $\frac{8}{-3}$; *i)* $\frac{2{,}5}{5}$;

j) $\frac{3{,}2}{0{,}32}$; *k)* $-3{,}7$; *l)* $-\frac{7}{3}$.

A2 Melyik egész szám, melyik törtszám? Csoportosítsd a következő számokat!

a) $\frac{4}{3}$; *b)* $\frac{4}{2}$; *c)* $\frac{3}{4}$;

d) $\frac{5}{3}$; *e)* 28,14; *f)* 10,5.

K3 A tizedes törteknek is sokféle tizedes tört alakja létezik, például $1{,}2 = 1{,}20$. Írd fel többféle tizedes tört alakját a következő számoknak!

a) 5; *b)* 7,04; *c)* $\frac{2}{5}$;

d) 4,5; *e)* 0,01; *f)* $\frac{5}{2}$.

E4 Gondoltam egy tizedes törtre. Ha 2-vel megszorzom, egész számot kapok. Ha 10-zel elosztom, 1-nél kisebb számot kapok. Egyféle számjegyet használunk a felírásához, de abból többet is. Melyik ez a szám? Írd fel egy közönséges tört alakját!

Tört alakba írható számok

1. példa

A racionális számok tört alakba írhatók. A tört alaknak több fajtája létezik. Keress ilyeneket! Írj példákat, írd fel ezeket közönséges tört alakban!

Közönséges tört, például: $\frac{4}{7}$; *vegyes tört*, például: $6\frac{2}{3}\left(=\frac{20}{3}\right)$; *tizedes tört*, például: $12{,}3\left(=\frac{123}{10}\right)$.

A *százalék* is kifejezhető tört alakban: $17\% = \frac{17}{100}$.

Láttál már ilyen jelölést: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{7}}$? *Emeletes törtnek* nevezik. Több törtvonal szerepel benne. A leghosszabb törtvonal ezt az osztást jelöli ki: $\frac{2}{3} : \frac{6}{7}$. $\frac{2}{3} : \frac{6}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{9}$.

Néha a törteket ferde törtvonallal írják: 2/3. Ez az írásmód kényelmes, de vigyázz vele, mert félreérthető lehet! Ezért érdemes kijelölni a számláló és a nevező kezdetét és végét.

Például $5-2/3\cdot 2$ egyenlő $5-\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{15}{3}-\frac{4}{3} = \frac{11}{3}$-dal, de nem egyenlő sem $\frac{5-2}{3}\cdot 2 = \frac{3}{3}\cdot 2 = 2$-vel, sem $5-\frac{2}{3\cdot 2} = \frac{15}{3}-\frac{1}{3} = \frac{14}{3}$-dal, sem $\frac{5-2}{3\cdot 2} = \frac{1}{2}$-del.

2. példa

Írd tizedes tört alakba a következő számokat! $\frac{2}{5}$; $\frac{37}{10}$; 25%; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{15}$

$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$;

$\frac{37}{10} = 37 : 10 = 3{,}7$;

$25\% = \frac{25}{100} = 25 : 100 = 0{,}25$;

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$; az osztás nem ér véget;

$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$; az osztás nem ér véget;

$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$; az osztás nem ér véget;

$\frac{1}{11} = 0{,}0909\ldots$; az osztás nem ér véget;

$\frac{1}{7} = 0{,}1428571428\ldots$; az osztás nem ér véget;

$\frac{3}{5} = 0{,}6$;

$\frac{1}{16} = 0{,}0625$;

$\frac{1}{15} = 0{,}0666\ldots$ az osztás nem ér véget.

Azt vesszük észre, hogy egyes osztások véget érnek (véges tizedes törtet kaptunk), pl. $\frac{1}{4} = 0{,}25$, mások viszont nem (végtelen tizedes törtet kapunk), pl. $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$.

Gondolkodj!

Biztos, hogy nem ér véget az osztás? Keress rá magyarázatot!

Ha két egész számot osztunk el egymással, és a hányados végtelen tizedes tört, a *maradékok* között egyszer csak felbukkan egy olyan, amelyik már szerepelt. Ha a maradék ugyanaz, a hányados következő jegye is ugyanaz lesz. A hányados jegyei ezért ugyanabban a sorrendben ismétlődnek. Az ismétlődő részt **szakasznak** nevezzük, a hányadost pedig **végtelen szakaszos tizedes törtnek**.

A végtelen szakaszos tizedes tört *összes* számjegyét nem tudjuk leírni. Szokás csak egyetlen szakaszt leírni, és jelölni, hogy végtelen sokszor ismétlődik.

Ha a szakasz egyetlen számjegyből áll, akkor az ismétlődő számjegy fölé pontot írunk, például: $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\dot{3}$.

Ha a szakasz több számjegyből áll, akkor az első és az utolsó számjegy fölé írunk egy-egy pontot: $\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots = 0{,}\dot{0}\dot{9}$.

Jelölés

Az $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ jelölése: $0{,}\dot{3}$; az $\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$ jelölése: $0{,}\dot{0}\dot{9}$;

az $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$ jelölése: $0{,}\dot{1}42857\dot{}$.

A végtelen szakaszos tizedes törtet kiolvasni sem lehet pontosan, ezért egyszerűen csak felsoroljuk a tizedesvesszőt követő néhány számjegyet.

Feladatok

A1 Írd tört alakba a következő számokat!

a) 1; *b)* 1,1; *c)* 0,1;

d) 3,4; *e)* 34; *f)* $\frac{2,5}{3}$.

K2 Írd tizedes tört alakba a következő számokat!

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3}{2}$; *c)* $\frac{5}{2}$;

d) $\frac{1}{5}$; *e)* $\frac{2}{5}$; *f)* $\frac{3}{4}$;

g) $\frac{1}{8}$; *h)* $\frac{3}{8}$; *i)* $\frac{21}{10}$;

j) $\frac{15}{16}$; *k)* $\frac{3}{15}$; *l)* $\frac{7}{15}$.

A3 Válogasd össze az egyenlőket!

$a = 3,2$; $b = 4,8$; $c = 5,25$;

$d = 1,4$; $e = 0,7$; $f = 0,01$.

$A = 4\frac{4}{5}$; $B = \frac{21}{4}$; $C = 3\frac{1}{5}$;

$D = \frac{14}{20}$; $E = \frac{14}{10}$; $F = \frac{1}{100}$.

A4 Írd át százalék alakra a következő törteket!

$\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{10}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{20}$;

$\frac{1}{25}$; $\frac{1}{50}$; $\frac{1}{100}$.

A5 Írd fel tört alakban a következő százalékokat!

15%; 33%; 25%;

10%; 100%; 113%;

5%; 50%; 500%;

517%; 1000%; 2,5%.

E6 Egy szám tizedes tört felírásában a 2, 3, 5 számjegyek szerepelnek, mindegyikből egy-egy. Az egyik közönséges tört alakjában az 1, 3, 4 számjegyek, mindegyikből egy-egy. Melyik ez a szám?

E7 Egy tizedes tört egyik közönséges tört alakja ugyanazzal a két számjeggyel írható fel, mint maga a tizedes tört. Mi lehet ez a szám?

Vizsgáljuk a tizedes törteket!

1. példa

Írd tizedes tört alakba az alábbi számokat! Mit veszel észre?

$\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{8}{9}$.

$\frac{1}{9} = 0,\dot{1}$; $\frac{2}{9} = 0,\dot{2}$; $\frac{3}{9} = 0,\dot{3}$; $\frac{4}{9} = 0,\dot{4}$;

$\frac{5}{9} = 0,\dot{5}$; $\frac{6}{9} = 0,\dot{6}$; $\frac{7}{9} = 0,\dot{7}$; $\frac{8}{9} = 0,\dot{8}$.

Érdekes összefüggést veszünk észre: az ismétlődő szakasz egyenlő a számlálóval.

Vajon mi a helyzet a $0,\dot{9}$ számmal? Lehet-e, hogy $\frac{9}{9}$-del, azaz 1-gyel egyenlő?

Az biztos, hogy 1-nél **nem nagyobb**. De ha kisebb mint 1, akkor mennyivel? És találunk-e olyan számot, amely a $0,\dot{9}$ és 1 közé esik?

Mennyivel kevesebb a $0,\dot{9}$ az 1-nél?

Közelítsünk a $0,\dot{9}$-hez: $0,\dot{9} = 0,99999\ldots$

$$\begin{array}{lcl} 0,9 & \underset{0,1}{<} & 1; \\ 0,99 & \underset{0,01}{<} & 1; \\ 0,999 & \underset{0,001}{<} & 1; \\ 0,9999 & \underset{0,0001}{<} & 1; \\ 0,999\,99 & \underset{0,000\,01}{<} & 1; \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Egyre kisebb számot kell adnunk a 0,9; 0,99; 0,999; ... számokhoz, hogy 1-et kapjunk.

Találunk-e számot a $0,\dot{9}$ és az 1 között?

$$\begin{array}{lcll} 0,9 & < & 0,91 & < 1 \\ 0,99 & < & 0,995 & < 1 \\ 0,999 & < & 0,9993 & < 1 \\ 0,9999 & < & 0,999\,98 & < 1 \\ 0,99\,999 & < & 0,999\,999 & < 1 \\ 0,999\,999 & < & 0,999\,999\,6 & < 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

A 0,9; 0,99; 0,999; ... számok végére egy 1-est (vagy 2-est, ..., 9-est) írva olyan számot kapunk, amely nála nagyobb, de 1-nél kisebb. A $0,\dot{9} = 0,9999\ldots$ számban viszont a 9-esek soha nem érnek véget, ezért nem tudunk olyan számot mondani, amely a $0,\dot{9}$ és az 1 közé esik.

Tehát a $0,\dot{9}$ sem kisebb, sem nagyobb, mint 1. Ezért $0,\dot{9} = 1$.

Találunk más hasonló példákat is: $2 = 2,\dot{0}$; $2 = 1,\dot{9}$; $0,1\dot{9} = 0,2$; $0,5 = 0,5\dot{0}$; ...

Így tehát a $\frac{9}{9}$ is felírható olyan végtelen szakaszos tizedes tört alakban, amelyben az ismétlődő szakasz a számláló: $\frac{9}{9} = 0,\dot{9}$.

2. példa

Mivel egyenlőek a következő törtek?

$0,0\dot{9}$;	$0,9\dot{9}$;	$0,51\dot{9}$;	$3,1\dot{9}$;
$12,1\dot{0}$;	$3,15\dot{0}$;	$0,623\,000\dot{0}$;	$1,1\dot{0}$.

$0,0\dot{9} = 0,1$;	$0,9\dot{9} = 0,\dot{9} = 1$;	$0,51\dot{9} = 0,52$;	$3,1\dot{9} = 3,2$;
$12,1\dot{0} = 12,1$;	$3,15\dot{0} = 3,15$;	$0,623\,000\dot{0} = 0,623$;	$1,1\dot{0} = 1,1$.

3. példa

Írd tizedes tört alakba az alábbi számokat!

$\frac{1}{99}$; $\frac{2}{99}$; $\frac{3}{99}$; $\frac{4}{99}$; $\frac{5}{99}$; $\frac{25}{99}$.

Mit gondolsz, eszerint melyik szám tizedes tört alakja lehet a $0,\dot{5}\dot{2}$? Ellenőrizd a sejtésedet!

$\frac{1}{99} = 0,\dot{0}\dot{1}$; $\frac{2}{99} = 0,\dot{0}\dot{2}$; $\frac{3}{99} = 0,\dot{0}\dot{3}$; $\frac{4}{99} = 0,\dot{0}\dot{4}$; $\frac{25}{99} = 0,\dot{2}\dot{5}$.

Lehet, hogy az $\frac{52}{99}$ alakja a $0,\dot{5}\dot{2}$? A sejtést osztással ellenőrizhetjük. 520-ban a 99 megvan 5-ször, és marad 25; 250-ben a 99 megvan 2-szer, és marad 52. Az osztást folytatjuk, ismét 5-öt, majd 2-t kapunk, a maradék ismét 52. A továbbiakban az 5 és a 2 ismétlődik újra és újra.

$$\begin{array}{l} 52:99=0,5252\ldots \\ 520 \\ \quad 250 \\ \quad\quad 520 \\ \quad\quad\quad 25 \\ \quad\quad\quad\ \ddots \end{array}$$

4. példa

$\frac{1}{9}=0,\dot{1}$ és $\frac{1}{99}=0,\dot{0}\dot{1}$. Mi az $\frac{1}{999}$; $\frac{1}{9999}$; $\frac{1}{99\,999}$ tizedes tört alakja?

$\frac{1}{999}=0,\dot{0}0\dot{1}$; $\frac{1}{9999}=0,\dot{0}00\dot{1}$; $\frac{1}{99\,999}=0,\dot{0}00\,0\dot{1}$.

5. példa

Mely törtek tizedes tört alakját írtuk fel? A válaszodat az osztás elvégzésével ellenőrizheted.

$0,\dot{4}$; $0,\dot{4}\dot{0}$; $0,\dot{4}\dot{4}$; $0,\dot{0}\dot{4}$; $0,\dot{1}$; $0,\dot{1}\dot{1}$; $0,\dot{1}1\dot{1}$; $0,\dot{1}2\dot{1}$; $0,\dot{1}2\dot{3}$.

$0,\dot{4}=\frac{4}{9}$; $0,\dot{4}\dot{0}=\frac{40}{99}$; $0,\dot{4}\dot{4}=0,\dot{4}=\frac{4}{9}$; $0,\dot{0}\dot{4}=\frac{4}{99}$;

$0,\dot{1}=\frac{1}{9}$; $0,\dot{1}\dot{1}=0,\dot{1}1\dot{1}=0,\dot{1}=\frac{1}{9}$; $0,\dot{1}2\dot{1}=\frac{121}{999}$; $0,\dot{1}2\dot{3}=\frac{123}{999}$.

Feladatok

A1 Írd át tizedes tört alakba a következő számokat!

$a=\frac{1}{8}$; $b=\frac{6}{8}$; $c=\frac{2}{8}$;

$d=\frac{4}{8}$; $e=\frac{1}{8}$; $f=\frac{5}{8}$.

A2 Írd át tizedes tört alakba a következő számokat!

$a=\frac{1}{9}$; $b=\frac{6}{9}$; $c=\frac{2}{3}$;

$d=\frac{4}{9}$; $e=\frac{1}{3}$; $f=\frac{5}{9}$.

A3 Írd át tizedes tört alakba a következő számokat!

$a=\frac{22}{99}$; $b=\frac{2}{9}$; $c=\frac{24}{99}$;

$d=\frac{9}{99}$; $e=\frac{1}{11}$; $f=\frac{5}{33}$.

K4 Mely számok tizedes tört alakját adhattuk meg? Az eredményül kapott törtet egyszerűsített alakjában is írd fel!

$a=0,\dot{3}$; $b=0,\dot{1}$; $c=0,\dot{2}$;

$d=0,\dot{3}\dot{3}$; $e=0,\dot{9}$; $f=0,\dot{6}$.

K5 Mely számok tizedes tört alakját adhattuk meg? Az eredményül kapott törtet egyszerűsített alakjában is írd fel!

$a=0,\dot{3}\dot{0}$; $b=0,\dot{1}\dot{3}$; $c=0,\dot{2}\dot{2}$;

$d=0,\dot{3}\dot{9}$; $e=0,\dot{9}\dot{4}$; $f=0,\dot{6}\dot{0}$.

E6 Mit gondolsz, mely számok tizedes tört alakját adtuk meg? A válaszodat az osztás elvégzésével ellenőrizheted.

$a=0,\dot{1}234\dot{4}$; $b=3,\dot{3}$; $c=2,05\dot{3}$;

$d=2,\dot{5}\dot{2}$; $e=0,05\dot{0}$; $f=1,0\dot{1}\dot{0}$.

Műveletek

1. példa

Végezd el a következő műveleteket! $\frac{3}{7} + 4{,}8$; $\frac{43}{109} \cdot (-3{,}1)$; $0{,}75 - \frac{7}{5}$.

A műveleteket úgy tudjuk elvégezni, ha minden tört ugyanolyan alakban szerepel.

Először írjuk át közönséges tört alakba a szereplő tizedes törteket! $4{,}8 = \frac{24}{5}$; $3{,}1 = \frac{31}{10}$; $0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Ekkor $\frac{3}{7} + \frac{24}{5} = \frac{15}{35} + \frac{168}{35} = \frac{183}{35}$; $\frac{43}{109} \cdot \left(-\frac{31}{10}\right) = -\frac{1333}{1090}$; $\frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{43}{20}$.

Most írjuk tizedes tört alakba a közönséges törteket! Tudjuk, hogy ezt nem mindig lehet pontosan felírni: $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$; $\frac{4}{109} \approx 0{,}4$; $\frac{7}{5} = 1{,}4$.

Ezzel: $0{,}43 + 4{,}8 = 5{,}23$; $0{,}4 \cdot (-3{,}1) = -1{,}24$; $0{,}75 + 1{,}4 = 2{,}15$.

Figyeld meg!

Melyik műveletet volt egyszerűbb elvégezni? Melyik műveletnél kaptál pontos eredményt?

A tizedes törtekkel egyszerűbb volt számolni, de nem mindig kaptunk pontos eredményt. Ha tört alakban számolunk, mindig pontos eredményt kapunk.

Az összeadás tulajdonságai

Az összeadás tulajdonságairól már korábban tanultunk. Egész számokon és törteken egyaránt ellenőriztük már. Az egész számokat is tört alakban lehet írni, tehát ezeket most csak felidézzük, és egy-egy példán keresztül átismételjük.

1. Két egész szám összeadásakor a tagokat felcserélve az eredmény nem változik, vagyis az összeadandók felcserélhetők. Például: $6 + 3 = 3 + 6$. Ennek a tulajdonságnak a neve: felcserélhetőség vagy kommutativitás.

1. példa

Ellenőrizzük a felcserélhetőséget racionális számokon! Végezd el a következő összeadásokat!

$2{,}4 + 3{,}2$ és $3{,}2 + 2{,}4$; $\frac{4}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right)$ és $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5}$.

$2{,}4 + 3{,}2 = 5{,}6$; $3{,}2 + 2{,}4 = 5{,}6$.

$\frac{4}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}$; $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5} = \frac{-2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{-10 + 12}{15} = \frac{2}{15}$.

Számolás közben felhasználtuk, hogy **negatív számot úgy tudunk hozzáadni egy számhoz, hogy az ellentettjét kivonjuk**.

Az összeadás egy másik fontos tulajdonsága:

2. Egész számok összeadásakor az összeadandók tetszőlegesen átzárójelezhetők, azaz tetszőlegesen társíthatók, csoportosíthatók. Például $3 + (5 + 1) = (3 + 5) + 1$. Ennek a tulajdonságnak a neve: társíthatóság, csoportosíthatóság vagy asszociativitás.

1.

2. példa

Ellenőrizzük a társíthatóságot racionális számokon!

Számítsd ki a következő műveletek eredményét!

$\big[7{,}3 + (-4{,}5)\big] + 7$ és $7{,}3 + \big[(-4{,}5) + 7\big]$;

$\big(2{,}3 + (-3{,}9)\big) + (-5{,}8)$ és $2{,}3 + \big((-3{,}9) + (-5{,}8)\big)$.

$\big[7{,}3 + (-4{,}5)\big] + 7 = (7{,}3 - 4{,}5) + 7 = 2{,}8 + 7 = 9{,}8$;

$7{,}3 + \big[(-4{,}5) + 7\big] = 7{,}3 + \big[7 + (-4{,}5)\big] = 7{,}3 + (7 - 4{,}5) = 7{,}3 + 2{,}5 = 9{,}8$;

$\big(2{,}3 + (-3{,}9)\big) + (-5{,}8) = (-1{,}6) + (-5{,}8) = -7{,}4$;

$2{,}3 + \big((-3{,}9) + (-5{,}8)\big) = 2{,}3 + (-9{,}7) = -7{,}4$.

Feladatok

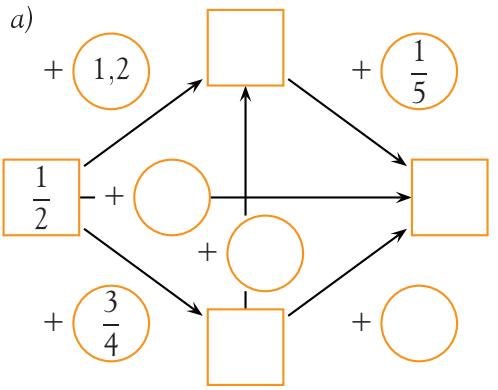
A1 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{2}{3} + 7{,}6$; *b)* $5\frac{2}{3} + (-2{,}8)$; *c)* $5{,}7 + \left(-\frac{1}{2}\right)$; *d)* $\frac{6}{5} + 1{,}5$;

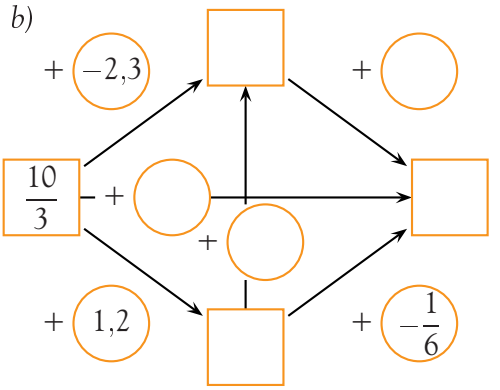
e) $(-27{,}5) + \frac{24}{13}$; *f)* $\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{7{,}5}{3{,}6}$.

A2 Pótold a hiányzó számokat! A nyílra írtuk, hogy milyen művelettel jutunk el az egyik számtól a másikig.

a)



b)



K3 *a)* A piacon a zöldség-gyümölcs pultnál $\frac{3}{4}$ kg almát, 2,3 kg burgonyát és $\frac{1}{2}$ kg szilvát vásárolunk. Mennyi ezeknek az együttes tömege?

b) A tejpultnál $\frac{1}{4}$ kg túrót, 0,45 kg sajtot vettünk, valamint egy 1,2 kg-os sajt $\frac{1}{3}$ részét. Ezeknek mennyi az együttes tömege?

c) Összesen hány kg árut vásároltunk a piacon?

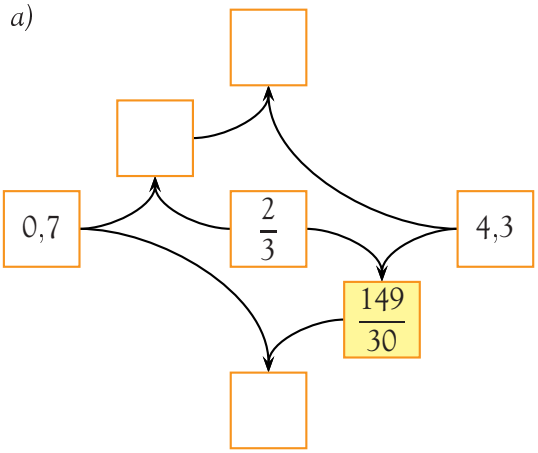


K4 Pótold a hiányzó számokat! Minden szám annak a két számnak az összege, amelyekből a nyilak hozzá vezetnek.

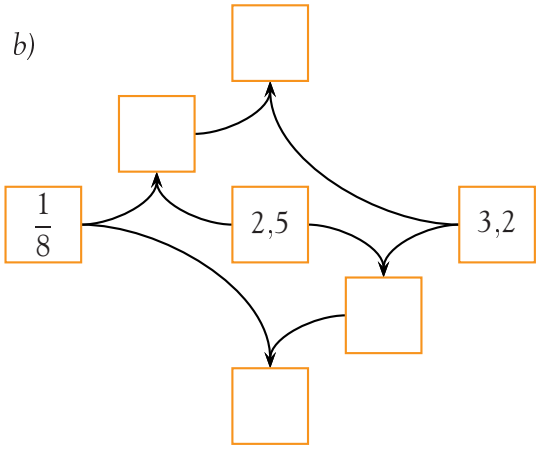
Az *a)* feladat ábráján például a kiszínezett keretbe $\frac{2}{3} + 4{,}3 = \frac{149}{30} = 4{,}9\dot{6}$ kerül.

Milyen érdekességet veszel észre? Gondolkozz el rajta, mi lehet az oka!

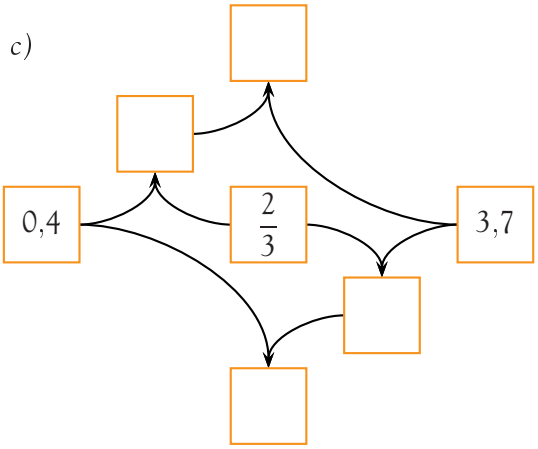
a)



b)



c)



A kivonás tulajdonságai

A kivonásról már az egész számok körében is tapasztaltuk, hogy:

1. A kivonásban szereplő számok felcserélésével a kapott eredmények általában nem egyenlők. Ezért a kivonásban szereplő számok nem cserélhetők fel.

1. példa

Ellenőrizzük a tulajdonságot racionális számokon!

Végezd el a kivonásokat!

$12{,}6 - 3{,}4$ és $3{,}4 - 12{,}6$; $\left(-\frac{25}{6}\right) - \frac{7}{4}$ és $\frac{7}{4} - \left(-\frac{25}{6}\right)$.

$12{,}6 - 3{,}4 = 9{,}2$; $\quad 3{,}4 - 12{,}6 = -9{,}2$.

$\left(-\frac{25}{6}\right) - \frac{7}{4} = -\frac{50}{12} - \frac{21}{12} = -\frac{71}{12}$; $\quad \frac{7}{4} - \left(-\frac{25}{6}\right) = \frac{7}{4} + \frac{25}{6} = \frac{21 + 50}{12} = \frac{71}{12}$.

Számolás közben felhasználtuk, hogy **negatív számot úgy tudunk kivonni egy számból, hogy az ellentettjét hozzáadjuk.**

Azt tapasztaljuk, hogy a kivonásban szereplő számok felcserélésével a kapott eredmények egymás ellentettjei.

2. A kivonásban szereplő számok nem társíthatók, azaz nem csoportosíthatók tetszőlegesen. A műveletek sorrendjét zárójellel jelöljük ki. Zárójel hiányában balról jobbra szokás elvégezni a kivonás műveleteket.

2. példa

Ellenőrizzük a tulajdonságot racionális számokon!

Végezd el a műveleteket!

$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}$ és $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$; $\quad \big(1{,}5 - (-1{,}8)\big) - 5{,}3$ és $1{,}5 - \big((-1{,}8) - 5{,}3\big)$.

$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{6}\right) - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$; $\quad \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$\big(1{,}5 - (-1{,}8)\big) - 5{,}3 = 3{,}3 - 5{,}3 = -2$; $\quad 1{,}5 - \big((-1{,}8) - 5{,}3\big) = 1{,}5 - (-7{,}1) = 8{,}6$.

Feladatok

A1 Végezd el a kivonásokat!

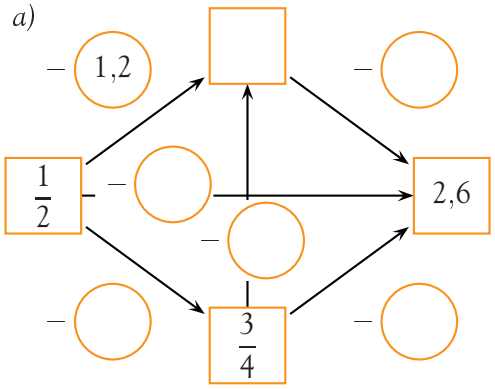
a) $0{,}45 - \frac{4}{70}$; *b)* $\frac{7}{30} - 1{,}01$; *c)* $\frac{8}{70} - 0{,}53$; *d)* $\frac{13}{35} - 10{,}04$;

e) $4{,}44 - \frac{5}{11}$; *f)* $\frac{6}{15} - 0{,}08$; *g)* $\frac{2}{154} - 0{,}07$; *h)* $0{,}27 - \left(-\frac{5}{12}\right)$;

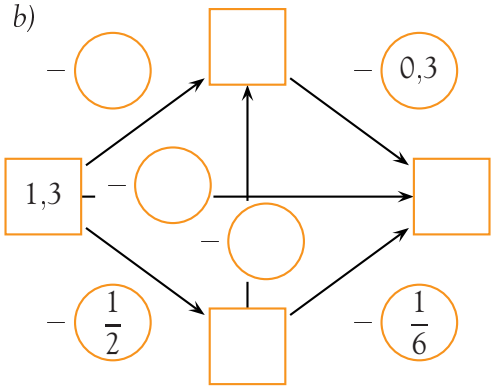
i) $\frac{14}{12} - 0{,}39$; *j)* $\frac{8}{35} - 0{,}01$; *k)* $\frac{1}{210} - (-0{,}28)$; *l)* $\frac{6}{84} - 0{,}01$.

A2 Pótold a hiányzó számokat! A nyílra írtuk, hogy milyen művelettel jutunk el az egyik számtól a másikig.

a)



b)



K3 Végezd el a műveleteket!

a) $-5{,}6 - \left(\frac{4}{3} + 3{,}2\right)$;

$-5{,}6 - \left(3{,}2 + \frac{4}{3}\right)$;

$\left(-5{,}6 - \frac{4}{3}\right) + 3{,}2$;

$\left(-\frac{4}{3} - 5{,}6\right) + 3{,}2$;

b) $(-5{,}2) + \left(\frac{3}{8} - 2{,}5\right)$;

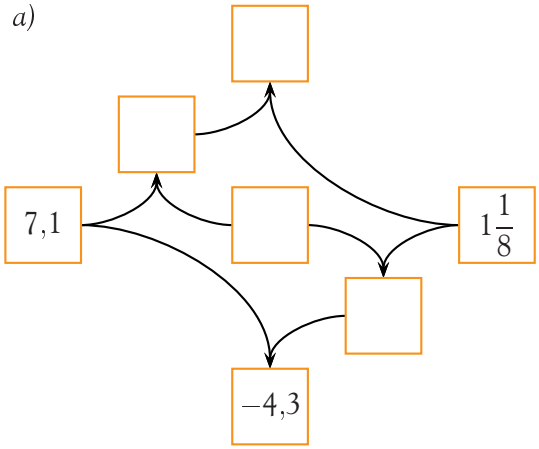
$(-5{,}2) + \left(2{,}5 - \frac{3}{8}\right)$;

$\left((-5{,}2) + \frac{3}{8}\right) - 2{,}5$;

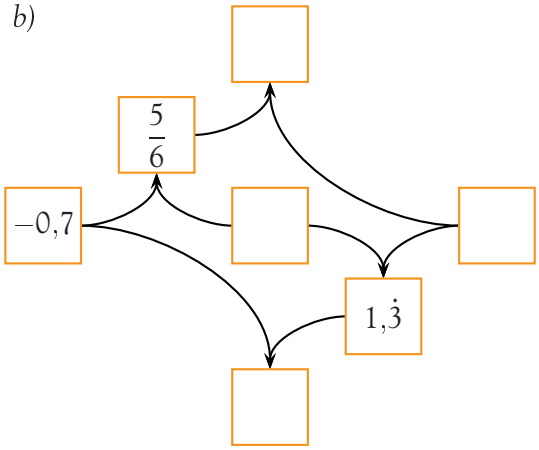
$\left(\frac{3}{8} + (-5{,}2)\right) - 2{,}5$.

K4 Pótold a hiányzó számokat! Minden szám annak a két számnak az összege, amelyekből a nyilak hozzá vezetnek.

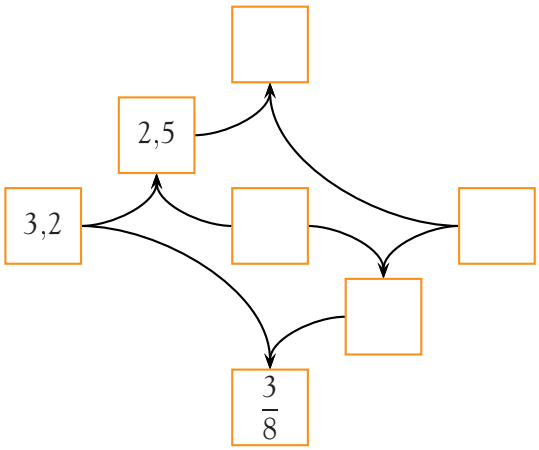
a)



b)



**c)* Emlékezz az előző leckében tett megfigyeléseidre!



K5 Angliában régebben a font váltópénzei nem a 10-es számrendszert követték. Például: 1 shilling 0,05 font volt, 1 penny pedig $\frac{1}{12}$ shilling.



a) Hány penny volt 1 font?

b) Hány font járt vissza 1 fontból annak, aki

(1) 1 shilling 2 pennyt;

(2) 3 shilling 5 pennyt;

(3) 8 shilling 10 pennyt fizetett?

c) Fejezd ki az eredményeket shillingben és pennyben!

A szorzás tulajdonságai

A szorzás tulajdonságairól tanultuk:

1. Számok szorzásakor a szorzásban szereplő tényezők felcserélésével a szorzat nem változik.

1. példa

Ellenőrizzük a tulajdonságot racionális számokon!

Végezd el a következő szorzásokat!

$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}$ és $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}$; $(-5{,}8)\cdot 3{,}14$ és $3{,}14\cdot(-5{,}8)$; $(-2{,}5)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2{,}5)$.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{35}$; $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$. $(-5{,}8)\cdot 3{,}14=-18{,}212$; $3{,}14\cdot(-5{,}8)=-18{,}212$.

$(-2{,}5)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1{,}25$; $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2{,}5)=1{,}25$.

Számolás közben felhasználtuk, hogy **két azonos előjelű szám szorzata pozitív; két ellentétes előjelű szám szorzata pedig negatív.**

2. A szorzásban szereplő tényezők tetszőlegesen zárójelezhetők, azaz tetszőlegesen társíthatók, csoportosíthatók.

2. példa

Ellenőrizzük a tulajdonságot racionális számokon!

Végezd el az alábbi műveleteket!

$\big((-1{,}6)\cdot 4{,}5\big)\cdot 2{,}5$ és $(-1{,}6)\cdot(4{,}5\cdot 2{,}5)$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]\cdot\frac{5}{6}$ és $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}\right]$.

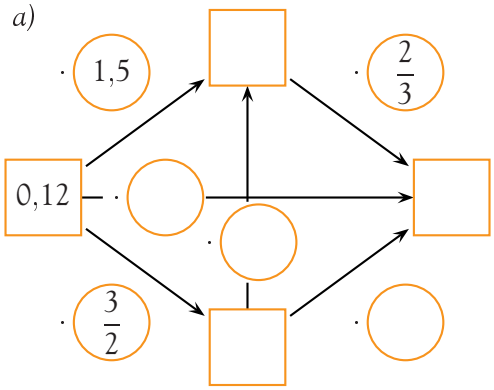
$\big((-1{,}6)\cdot 4{,}5\big)\cdot 2{,}5=(-7{,}2)\cdot 2{,}5=-18$; $(-1{,}6)\cdot(4{,}5\cdot 2{,}5)=-1{,}6\cdot 11{,}25=-18$;

$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{6}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$.

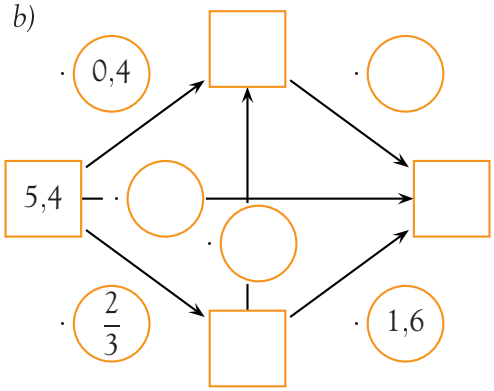
Feladatok

A1 Pótold a hiányzó számokat! A nyílra írtuk, hogy milyen művelettel jutunk el az egyik számtól a másikig.

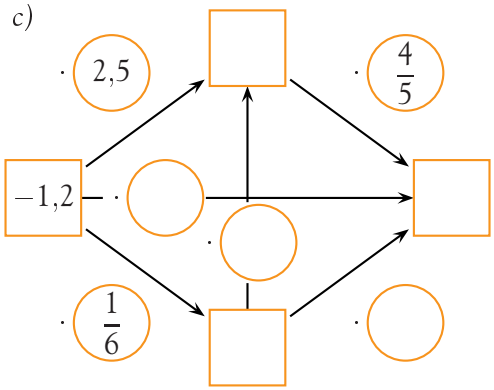
a)



b)



c)



A2 Végezd el a szorzásokat!

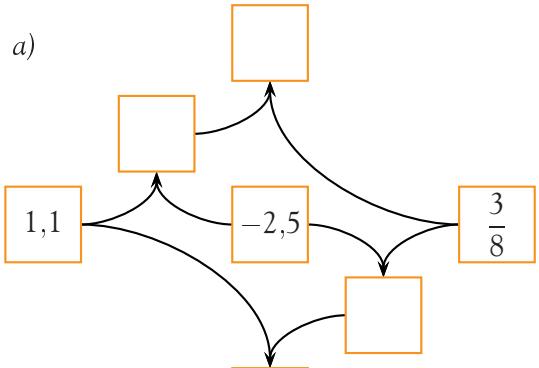
a) $\frac{1}{2} \cdot (3{,}2)$; *b)* $(-2) \cdot \frac{3}{4}$;

c) $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2}$; *d)* $\frac{5}{7} \cdot 1{,}2$;

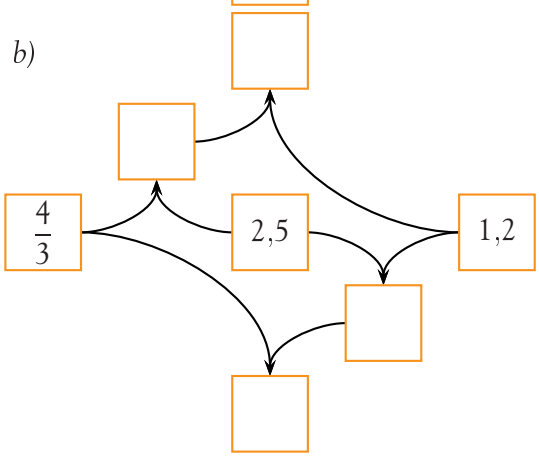
e) $5{,}7 \cdot \frac{1}{2}$; *f)* $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(1{,}5 \cdot \frac{3}{5}\right)$.

K3 Pótold a hiányzó számokat! Minden szám annak a két számnak a szorzata, amelyekből a nyilak hozzá vezetnek.

a)



b)



E4 4 számlálóból és 4 nevezőből minden lehetséges módon törteket készítettünk. A táblázatban egy sor és egy oszlop találkozásába a megfelelő számlálóval és nevezővel képzett törtet írtuk.

Írd be a hiányzó számokat!

nevezők \ számlálók			6	
1		3		
	$\frac{1}{2}$			2,5
		0,6		2
	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	

Az osztás tulajdonságai

Az osztás tulajdonságairól tanultuk:

1. Az osztásban szereplő számok felcserélésével kapott hányadosok általában nem egyenlők.

1.

1. példa

Ellenőrizzük a tulajdonságot racionális számokon!

Végezd el az osztásokat! $(-3{,}15) : (-3{,}5)$ és $(-3{,}5) : (-3{,}15)$; $\frac{4}{5} : \left(-\frac{2}{5}\right)$ és $\left(-\frac{2}{5}\right) : \frac{4}{5}$.

$(-3{,}15) : (-3{,}5) = 0{,}9$ és $(-3{,}5) : (-3{,}15) = 1{,}\dot{1}$; $\frac{4}{5} : \left(-\frac{2}{5}\right) = -2$ és $\left(-\frac{2}{5}\right) : \frac{4}{5} = -\frac{1}{2}$.

A kapott eredmények egymás reciprokai.

Számolás közben felhasználtuk, hogy **két azonos előjelű szám hányadosa pozitív; két ellentétes előjelű szám hányadosa pedig negatív**.

Azt is tanultuk, hogy számok osztása esetén fontos a zárójel.

Az osztásban szereplő számokat nem társíthatjuk, azaz nem csoportosíthatjuk tetszőlegesen. A műveletvégzés sorrendjét zárójellel jelöljük ki. Zárójel hiányában balról jobbra szokás elvégezni az osztási műveleteket.

2. példa

Ellenőrizzük a tulajdonságot racionális számokon!

Végezd el az osztást! $\left(\frac{2}{7} : \frac{3}{4}\right) : (-2)$ és $\frac{2}{7} : \left[\frac{3}{4} : (-2)\right]$.

$$\left(\frac{2}{7} : \frac{3}{4}\right) : (-2) = -\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{3}\right) : 2 = -\frac{4}{21};$$

$$\frac{2}{7} : \left[\frac{3}{4} : (-2)\right] = -\frac{2}{7} : \left(\frac{3}{4} : 2\right) = -\frac{2}{7} : \frac{3}{8} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{8}{3} = -\frac{16}{21}.$$

Mit gondolsz erről a számról: $\frac{\frac{2}{3}}{5}$? Mi lehet a számlálója, mi lehet a nevezője? Melyik osztást jelölik ki a törtvonalak? Hogyan lehet átírni osztássá?

A $\frac{\frac{2}{3}}{5}$ felírás **helytelen**. Nem lehet tudni, hogy mi a számláló, mi a nevező. Ez nem is tört.

Az emeletes törtek felírásakor fel kell tüntetni, hogy a törtvonallal kijelölt osztások között mi a kívánt sorrend. A végső törtet kijelölő törtvonal legyen a leghosszabb!

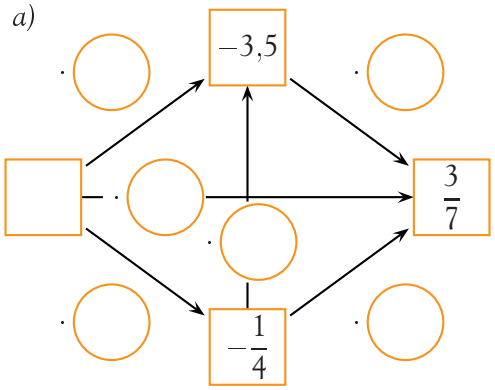
Így a $\frac{\frac{2}{3}}{5}$ tört a $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$ számot jelenti. A számlálója $\frac{2}{3}$, a nevezője 5.

A $\frac{2}{\frac{3}{5}}$ tört pedig a $2 : \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ számot jelenti. Ennek a számlálója 2, a nevezője $\frac{3}{5}$.

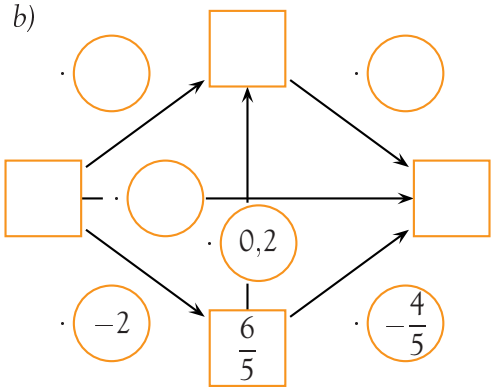
Feladatok

A1 Pótold a hiányzó számokat! A nyílra írtuk, hogy milyen művelettel jutunk el az egyik számtól a másikig.

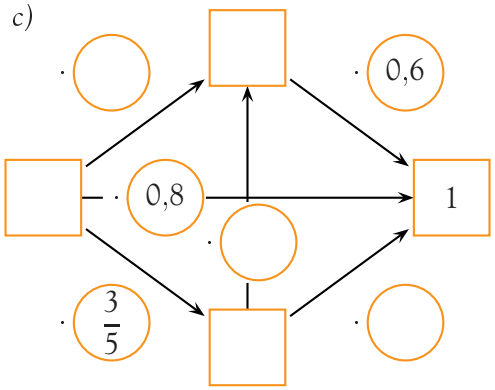
a)



b)



c)



A2 Végezd el az osztásokat!

a) $\frac{7}{12} : 0{,}3$; *b)* $0{,}3 : \frac{7}{12}$;

c) $(-3{,}2) : \frac{1}{4}$; *d)* $\frac{1}{4} : (-3{,}2)$;

e) $\left(-\frac{2}{3}\right) : (-0{,}2)$; *f)* $(-0{,}2) : \left(-\frac{2}{3}\right)$;

g) $\frac{1}{7} : 1{,}7$; *h)* $1{,}7 : \frac{1}{7}$.

K3 *a)* Egy $\frac{3}{4}$ kg-os csomagolású kenyér ára 0,8 euró. Egy ugyanolyan kenyérből az 1 kg-os 0,95 euróba kerül. Melyik kenyérből olcsóbb 1 kg-nyi?

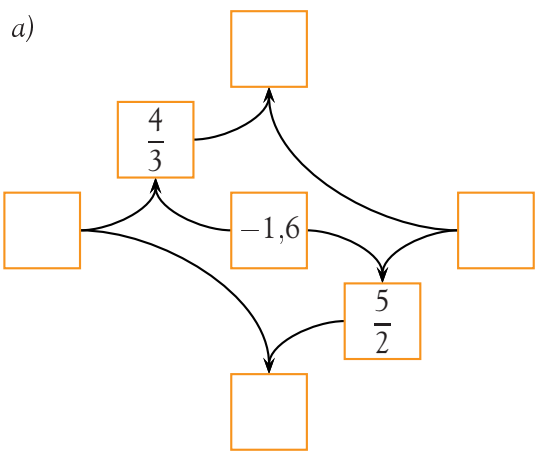
b) Egy üzletben a 0,04 kg tömegű zsömle darabja 12 Ft. Egy másik üzletben a 0,05 kg tömegű zsömle ára 15 Ft.

Melyik zsömléből olcsóbb 1 kg-nyi?

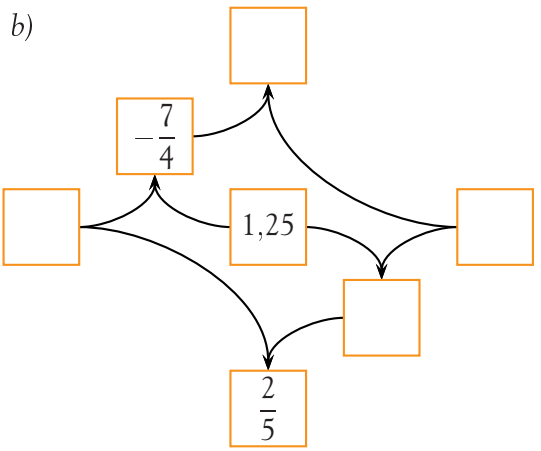


K4 Pótold a hiányzó számokat! Minden szám annak a két számnak a szorzata, amelyekből a nyilak hozzá vezetnek.

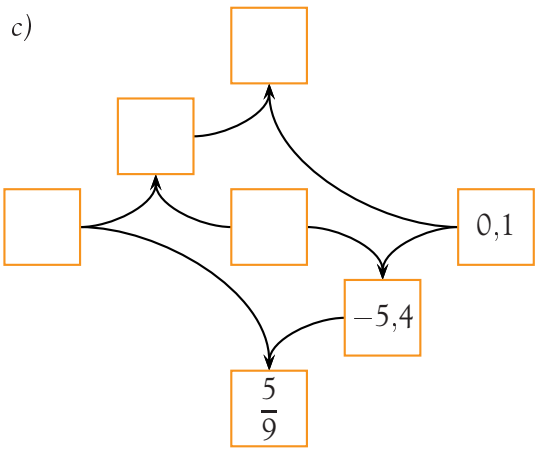
a)



b)



c)



Vegyes műveletek – gyakorlás

Előfordul, hogy egyes műveletsorokban vegyesen szerepelnek a műveletek.

Összeg és szorzat szorzása, osztása

Fontos tudnivalók

Két szám összegét (vagy különbségét) úgy is szorozhatjuk (vagy oszthatjuk) egy számmal, hogy a tagokat külön-külön szorozzuk (vagy osztjuk), és utána végezzük el az összeadást (kivonást).

Példák:

$(5 + 3) \cdot 11 = 88$ és $(5 \cdot 11) + (3 \cdot 11) = 55 + 33 = 88$.

$(5 - 3) \cdot 11 = 22$ és $(5 \cdot 11) - (3 \cdot 11) = 55 - 33 = 22$.

$(14 + 8) : 3 = \frac{22}{3}$ és $(14 : 3) + (8 : 3) = \frac{14}{3} + \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$.

$(14 - 8) : 3 = \frac{6}{3} = 2$ és $(14 : 3) - (8 : 3) = \frac{14}{3} - \frac{8}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Az összegben a tagok felcserélhetők.

A többtagú összeg tagjai tetszőlegesen társíthatók.

A szorzat tényezői felcserélhetők.

A többtényezős szorzat tényezői tetszőlegesen társíthatók.

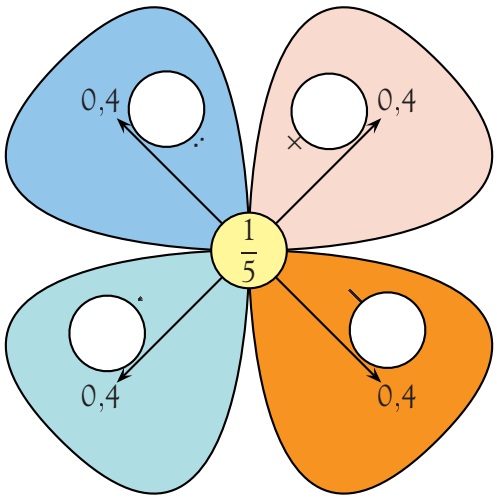
A kivonásban szereplő számok felcserélésével a különbség előjele megváltozik.

Az osztásban szereplő számok felcserélésével a hányados a reciprokára változik.

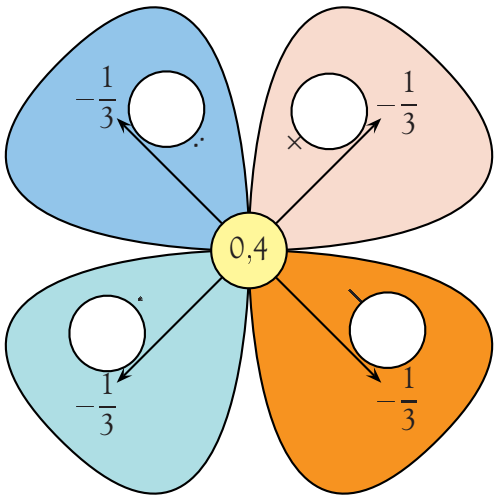
Feladatok

K1 A virág közepén álló számtól juss el a szirmokon található számig összeadással, kivonással, szorzással, osztással!

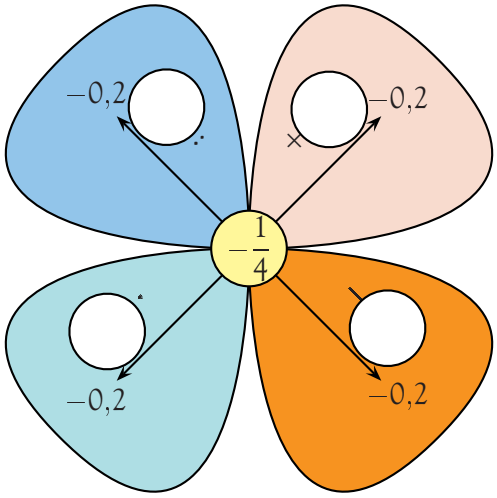
a)



b)



c)



K2 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot 0{,}75-\frac{2}{5}$;

$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\cdot 0{,}75-\frac{2}{5}$;

$\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}\cdot 0{,}75\right)-\frac{2}{5}$;

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\left(0{,}75-\frac{2}{5}\right)$;

b) $\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\cdot 2{,}5-\frac{3}{4}$;

$\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot 2{,}5-\frac{3}{4}$;

$\frac{4}{3}+\left(\frac{1}{5}\cdot 2{,}5\right)-\frac{3}{4}$;

$\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\cdot\left(2{,}5-\frac{3}{4}\right)$.

E3 Írj zárójeleket és műveleti jeleket a következő műveletsorokba úgy, hogy a megadott eredményeket kapd!

a) $\frac{22}{10}\quad\frac{9}{2}=\frac{67}{10}$;

b) $\frac{9}{14}\quad\frac{10}{6}=\frac{15}{14}$;

c) $\frac{11}{17}\quad\frac{23}{17}=\frac{11}{23}$;

d) $\frac{11}{11}\quad 9{,}13\quad\frac{15}{16}=9{,}1925$;

e) $\frac{12}{18}\quad 10{,}2\quad\frac{16}{12}=\frac{346}{45}$;

f) $\frac{12}{12}\quad\frac{10}{12}\quad(-19{,}8)=-3{,}3$;

g) $13{,}6\quad\frac{7}{14}\quad\frac{21}{15}=\frac{141}{14}$;

h) $\frac{3}{16}\quad(-16{,}8)\quad 5{,}16=-11{,}4525$;

i) $(-12{,}1)\quad 14{,}15\quad\frac{1}{10}=-262{,}5$.

K4 Egy papírra felírtam műveletsorokat, de néhány szám elmosódott.

Írd be a hiányzó számokat!

a) $\frac{4}{3} - \left(\square - 0{,}5\right) = \frac{7}{4}$;

b) $\frac{4}{3} \cdot \left(\square + 0{,}5\right) = \frac{7}{4}$;

c) $\frac{4}{3} \cdot \left(\square - 0{,}5\right) = \frac{7}{4}$;

d) $\frac{4}{3} : \left(\square - 0{,}5\right) = \frac{7}{4}$;

e) $\frac{4}{3} : \left(\square + 0{,}5\right) = \frac{7}{4}$.

K5 Egy papírra felírtam műveletsorokat, de néhány műveleti jel elmosódott.

Írd be a hiányzó jeleket!

a) $\frac{6}{5} \cdot \left(0{,}7 \square \frac{2}{3}\right) = 0{,}04$;

b) $\frac{6}{5} - \left(0{,}7 \square \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{6}$;

c) $\frac{6}{5} \cdot \left(0{,}7 \square \frac{2}{3}\right) = 1{,}64$;

d) $\frac{6}{5} : \left(0{,}7 \square \frac{2}{3}\right) = \frac{18}{7}$;

e) $\frac{6}{5} : \left(0{,}7 \square \frac{2}{3}\right) = \frac{36}{41}$.

A6 *a)* Mit kell hozzáadni $\frac{2}{3}$-hoz

b) Mit kell kivonni $\frac{2}{3}$-ból

c) Mivel kell megszorozni $\frac{2}{3}$-ot

d) Mivel kell elosztani $\frac{2}{3}$-ot

ahhoz, hogy 0,4-et kapjunk?

K7 Tetszőleges (nem 0) racionális számból előállítható tetszőleges (nem 0) racionális szám bármelyik művelettel.

A következő táblázatban egy sort kitöltöttünk. Töltsd ki a többit!

A kitöltés után fogalmazd meg, milyen összefüggést veszel észre!

ezzel a műveletttel

ezekből	+	−	·	:	ezeket
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{5}$					$\frac{10}{3}$
$\frac{5}{3}$					$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$					0

E8 Ismered a régi fejtörőt?

Gondolj egy számot! A király ad hozzá ugyanannyit. Én adok hozzá 10-et. Dobd a felét a Dunába! Add vissza a királynak, amit adott! Kitalálom, mit kaptál: 5-öt!

a) Magyarázd meg a fejtörőt!



Gondoltam egy számot. A király ad hozzá $\frac{3}{5}$-öt. A 0,2-szeresét bedobtam a Dunába.

Fogalmazd meg, hogy mennyi marad egy számból, ha a 0,2-szeresét „eldobjuk”!

b) Írd fel művelettel, és számítsd ki az eredményt, ha a gondolt szám

2; 0,3; 6,4; x!

c) Találd ki a gondolt számot, ha a kapott szám

4; $\frac{2}{3}$; 0,7; y!

Számok és táblázatok

A matematika régebben nemcsak komoly tudomány volt, hanem alkalmat adott arra, hogy az emberek fejtörők feladásával, megfejtésével töltsék el szabad idejüket. Az egyenletek feladásának is ismered egy játékos megfogalmazását: gondoltam egy számot. . .

Sokféle fejtörő létezett és létezik ma is. Az idő hasznos eltöltését, a játékot ma is szívesen művelik. Játék is sokféle van.

A középkori lovagi tornát, a bajvívást lovagi játéknak is nevezzük.

Az olimpiai sportrendezvény hivatalos neve is olimpiai játékok.

A zenei előadást is nevezzük játéknak, pedig sokszor hosszú gyakorlás után jutnak el a zenészek arra a szintre, hogy elő tudják adni a műsorszámaikat.

A matematikában is van játék. Sokszor ez sem könnyű, ahogyan a zenei előadás, a versenysport sem az.

A matematika egyik nagyon komoly ágának is az a neve: játékelmélet.

Mi most nagyon komolyan vesszük a matematika játszását!

Leonhard Euler 1707. április 15-én Bázelben, Svájcban született, és 1783. szeptember 18-án Szentpétervárott, Oroszországban halt meg. Amellett, hogy nagyon komolyan művelte, játszotta is a matematikát. Az egyik ismert fejtörőnek a **latin négyzet** nevet adta. A 3-szor 3-as latin négyzet olyan 3-szor 3-as négyzetrács, amelynek mezőibe az „a”, „b”, „c” *latin* betűket kell beírni úgy, hogy minden sorban és oszlopban mindegyik jel pontosan egyszer forduljon elő!

1. példa

Töltsd ki a táblázatot 1-es, 2-es és 3-as számokkal úgy, hogy minden szám minden sorban és oszlopban egyszer szerepeljen! Keress több megoldást!

Az első sorba be kell írnunk az 1, 2, 3 számokat valamilyen sorrendben. Írjuk be éppen ezt.

1	2	3

A második sor első helyére nem kerülhet 1-es, mert az már szerepel az első oszlopban. Ide tehát 2-es vagy 3-as jöhet.

Ha a 2-est írjuk be, akkor a sorban az utolsó helyre már csak az 1-es kerülhet, mert a 2-es ebben a sorban, a 3-as a 3. oszlopban már előfordul.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Akkor viszont a középső helyre csak a 3-as jöhet. Akkor pedig a 3. sorban szereplő sorrend 3, 1, 2.

Ha a 3-ast írjuk be, akkor a sorban a második helyre már csak az 1-es kerülhet, mert a 3-as ebben a sorban, a 2-es a 2. oszlopban már előfordul.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Akkor viszont a harmadik helyre csak a 2-es jöhet. Akkor pedig a 3. sorban szereplő sorrend 2, 3, 1.

Ez a két megoldás csupán annyiban különbözik egymástól, hogy a két utolsó sor fordítva szerepel.

Az első sort többféleképpen is kitölthettük volna, de mindegyik kitöltés után hasonlóan kétféle folytatást kaptunk volna.

Az 1, 2, 3 számoknak 6-féle sorrendje van, így 12-féle kitöltés lehetséges.

Feladatok

A1 Az alábbi táblázatba beírtunk néhány számot. Írj be további 1-es, 2-es és 3-as számokat úgy, hogy mindegyikből minden sorban és oszlopban mindegyik szám egyszer szerepeljen!

a)

	2	
1		

b)

	1	
1		

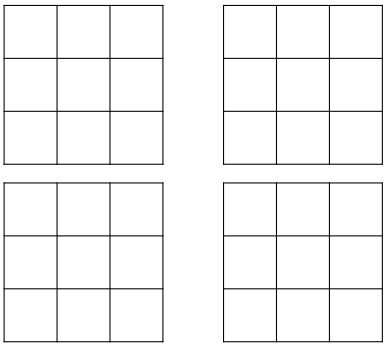
c)

		2
1		

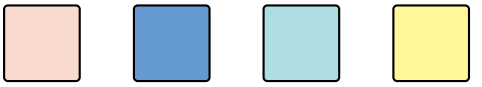
d)

		1
1		

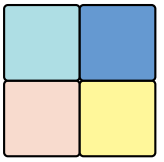
K2 Töltsd ki az alábbi táblázatokat 2-es, 4-es és 8-as számokkal úgy, hogy minden szám minden sorban és oszlopban egyszer szerepeljen! Keress több megoldást!



K3 Színes csempemintákat tervezünk. Négyféle színű csempe áll rendelkezésünkre:

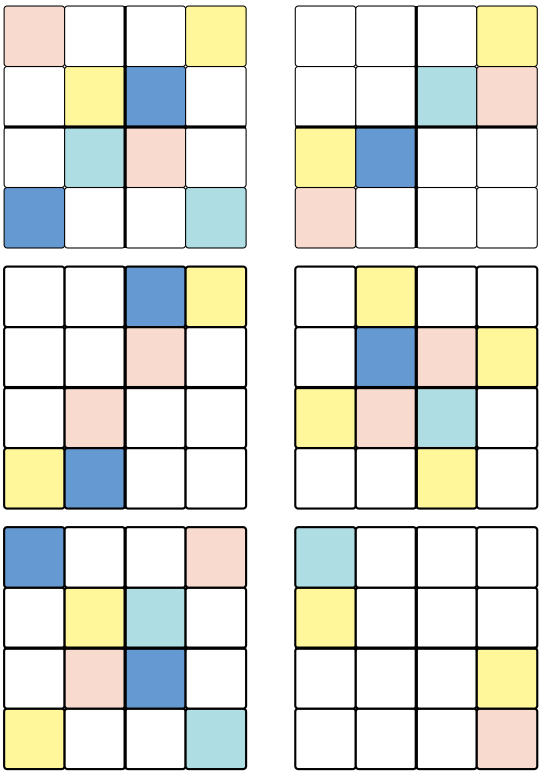


Mind a négy szín felhasználásával összeállítunk 2 × 2-es darabokat, például:

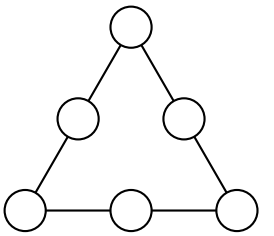


Majd ezekből is 2 × 2-t összerakunk úgy, hogy a kapott 4 × 4-es csemperészlet minden sorában és minden oszlopában mindegyik színből egy szerepeljen.

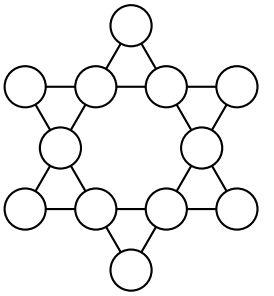
Fejezd be a minták színezését!



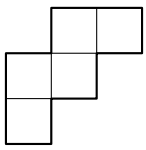
K4 Írd be az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat a karikákba úgy, hogy a háromszög egy-egy oldalán szereplő 3-3 szám összege ugyanannyi legyen!



E5 Írd be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számokat a karikákba úgy, hogy az egy-egy háromszögoldalon szereplő 4-4 szám összege mindig ugyanannyi legyen!

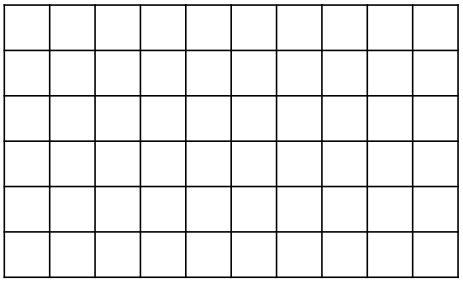


E6 Pentominónak nevezzük azokat a síkbeli alakzatokat, amelyek 5 db egységnyi területű négyzetből építhetők össze. A négyzetek éleik mentén illeszkednek. Például:



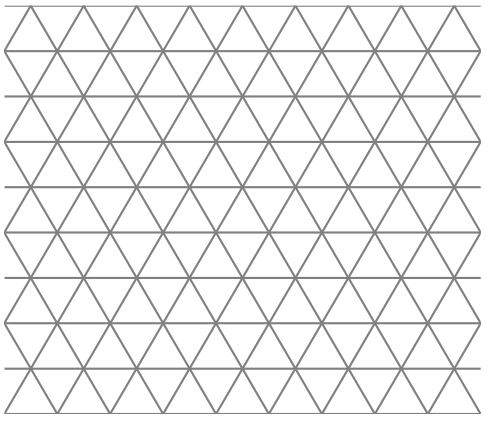
a) Készítsd el az összes különböző pentominót! Azokat, amelyek elforgatással, tükrözéssel fedésbe hozhatók, ne tekintsd különbözőknek! Megtaláltad mind a 12 darabot? (Biztosan nincs több?)

b) Fedd le a darabokkal a 6 × 10-es téglalapot! Lehet-e többféleképpen?

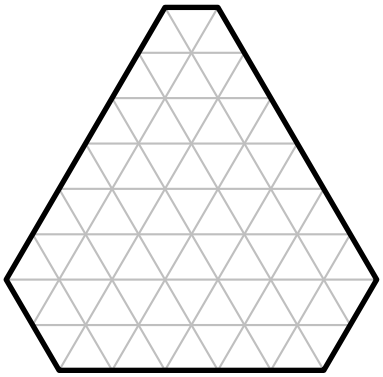


E7 Más alakzatokkal is lehet kitöltést készíteni.

a) Keress az alábbi szabályos háromszögrácson olyan alakzatokat, amelyek 6 egységnyi háromszögből állnak! A háromszögeket éleik mentén illesztjük össze. Az elforgatással, illetve tükrözéssel fedésbe hozható darabokat ne tekintsd különbözőnek! Megtaláltad mind a 12 darabot?

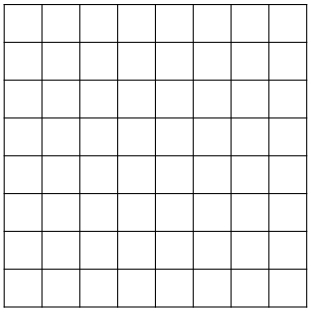


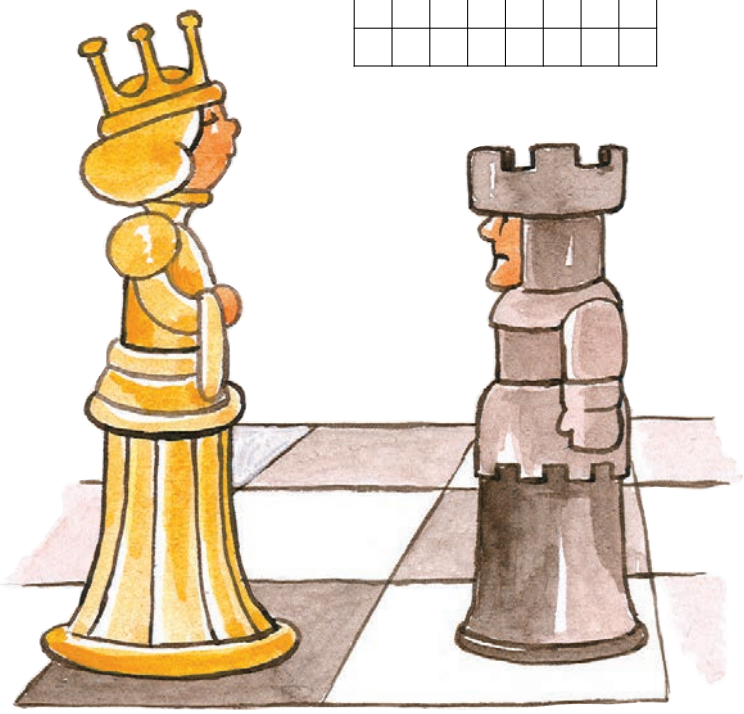
b) Fedd le az alábbi alakzatot a kapott darabokkal!



K8 A sakktábla olyan 8 × 8-as rács, amelyen sötét és világos mezők vannak. A sötét mezők élszomszédai világosak, a világos mezők élszomszédai sötétek. A bal alsó sarka sötét.

Színezd ki a sakktáblát! Hányféle színezés lehetséges?





Mértékegységek, gyakorlati példák, alkalmazások



A mérések fontos szerepet játszanak az életünkben. A mérés eredménye a **mennyiség**, ami **mérőszámból** és **mértékegységből** áll. A mindennapi beszédünkben szinte észre sem vesszük, hogy milyen gyakran használjuk a mennyiségeket.

Gyakran mondjuk a *nagy*, *kicsi*, *sok*, *kevés* szavakat, amikor nagyságot, sokaságot akarunk kifejezni. Ezekkel pontosan nem áruljuk el, hogy mekkorára vagy mennyire gondoltunk. Ezt csak akkor tudjuk közölni, ha **megmérjük** a nagyságát vagy sokaságát annak, amiről nyilatkozni szeretnénk. Láttuk az előző években is, hogy ez egy összehasonlítást jelent az általunk választott **mértékegységgel**.

A mennyiség pontos meghatározása mérés és mértékegység nélkül nem lehetséges! Az életben nagyon gyakran szükséges a mennyiségek meghatározása.

A leggyakrabban használt mértékegységekkel fontosságuk miatt a továbbiakban is találkozunk a feladatokban.

Önkényesen választott mértékegységekről szokás beszélni, de ez nem azt jelenti, hogy a mértékegységek összessége rendezetlen. A legkiválóbb gondolkodók foglalták rendszerbe a mértékegységeket. *Gauss*, a matematika fejedelme (priceps mathematicae), majd *Planck* Nobel-díjas fizikus is szerkesztett mértékrendszereket. Úgy foglalták egységbe koruk használatos mértékegységeit, hogy az tudományos céloknak is megfeleljen.



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)



Max Planck
(1858–1947)

Napjainkban a **Mértékegységek Nemzetközi Rendszerét**, röviden az SI-t (Système International d'Unités) használjuk, de tapasztaljuk, hogy a gyakorlatban előfordulhatnak az SI-hez nem tartozó mértékegységek is (mázsa, font, magyar hold, négyszögöl, . . .). Az SI-ben hét alapegység és két kiegészítő egység szerepel.

Mi eddig az alapegységek közül a következőkkel foglalkoztunk:

Név	Jel	SI-mértékegysége
Hosszúság	l	méter (m)
Tömeg	m	kilogramm (kg)
Idő	t	másodperc (s)

A további négy alapegység a következő:

az **áramerősség** egysége az **amper**,

a **hőmérséklet** egysége a **kelvin**,

az **anyagmennyiség** egysége a **mól**

és a **fényerősség** egysége a **kandela**.

A kiegészítő egységek:

a **síkszög** mérésére a **radiánt,**

a **térszög** mérésére a **szteradiánt** használják.

A fizikai, kémiai és matematikai tanulmányaink során majd ezekkel is megismerkedtünk. Mi a **szög mérésére a fokot** használjuk.

A mértékegységek többszöröseit és törtrészeit **előtaggal** (prefixummal) fejezhetjük ki:

kilo, hekto, deka, deci, centi, milli, . . .

A **területmérést** és a **térfogatmérést** a hosszúság meghatározására használt egységre (méter) vezetjük vissza, ebből származtatjuk. Ezek nem tartoznak az alapegységek közé, ezeket származtatott mennyiségeknek nevezzük:

m^2, dm^2, cm^2, . . . , m^3, dm^3, cm^3, . . .

A következőkben olyan sorokat emelünk ki könyvekből, napilapból, amelyekben a különböző mennyiségeknek fontos szerepe van.

A részletek elolvasása után kérdéseket fogalmazunk meg. Ezek megválaszolásához számításokat kell végeznünk a mennyiségekkel. Fontos, hogy a mértékegységek átváltása ne okozzon gondot, és az eddig tanult számokkal gyorsan, pontosan tudjuk a műveleteket végrehajtani.

I. Egy Magyarországról szóló útikönyv hazánk főbb földrajzi adataival kezdődik:

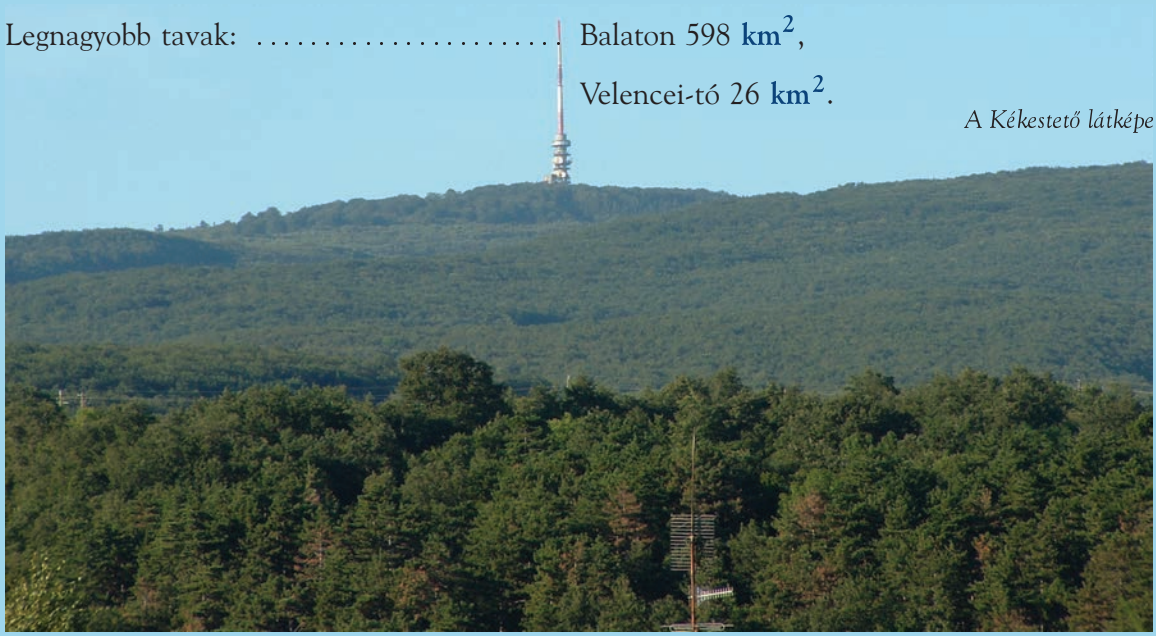
Területe: ..... 93 030 **km^2**.

Tengerszint feletti magassága: ..... 200 **méter** alatt található a 84%-a,
200–400 **méter** között van a 14%-a,
400 **méter** feletti a 2%-a.

Legmagasabb pontja: ..... Kékes 1014 **méter**.

Leghosszabb folyók: ..... Duna (hazai szakaszon) 417 **km**,
Tisza (hazai szakaszon): 584 **km**.

Legnagyobb tavak: ..... Balaton 598 **km^2**,
Velencei-tó 26 **km^2**.



A Kékestető látképe

1. példa

a) Hány hektár található a tengerszint felett 400 méternél magasabban hazánk területéből?

b) Hány Balaton méretű tó férne rá gondolatban hazánk területére?

a) Az idézetből tudjuk, hogy a tengerszint felett 400 méternél magasabban hazánk területének 2%-a található. Vagyis a 93 030 km^2-nek számoljuk ki a 2%-át:

2.

$93\,030 \cdot 0{,}02 = 1860{,}6$ (km^2).

Tudjuk, hogy 1 km^2 = 100 hektár, ezért 1860,6 km^2 = 186 060 hektár.

Vagyis 186 060 hektár található a tengerszint felett 400 méternél magasabban hazánk területéből.

b) Mivel hazánk területe 93 030 km^2, a Balaton pedig 598 km^2, ezért az arány kiszámításához a következő osztást kell elvégeznünk:

```
93030 : 598 = 155
3323
 3330
  340
```

A hányados 155, a maradék 340 lett.

Ez azt jelenti, hogy 155 Balaton méretű tó elképzelhető hazánk területén, de 156-ik már nem.

II. A *104 híres magyar recept* című szakácskönyv előszavából megtudjuk, hogy receptjei 10 személyre szólnak. A *Hét vezér tokány* elkészítéséhez a következő hozzávalókra lesz szükségünk:

500 **g** marhalábszár (színhús),
500 **g** borjúlapocka (színhús),
500 **g** sertéslapocka (színhús),
250 **g** füstölt szalonna,
150 **g** sertészsír,
400 **g** vöröshagyma,
3 **db** zöldpaprika,
2 **db** paradicsom,
7 **dl** tejföl,
1 **liter** csontlé,
fél **csomag** metélőhagyma,
10 **adag** galuska,
só, kalocsai rózsapaprika.



2. példa

Hat fő részére szeretnénk elkészíteni a *Hét vezér tokányt.* A piacról már hazavittük a vöröshagymát, zöldpaprikát, paradicsomot, metélőhagymát, rózsapaprikát. Tejföl, galuska, zsír és só van otthon. A további hozzávalókért a húsboltba kell mennünk. A lábszár, a lapocka csonttal együtt kapható, és általában a tömegüknek a 70%-a színhús.

Hány kilogramm hentesáru kerül a kosarunkba?

A húsboltban kell megvásárolnunk a háromféle húst és a füstölt szalonnát. Mivel csak hat főre szeretnénk elkészíteni, s a receptek 10 személyre szólnak, ezért minden mennyiségnek a $\frac{6}{10}$-ét, azaz a $\frac{3}{5}$ részét kell vennünk.

A következő számításokat kell elvégeznünk: $500 \cdot \frac{3}{5} = 300$; $250 \cdot \frac{3}{5} = 150$.

Vagyis marhalábszárból, borjúlapockából, sertéslapockából 300-300 grammra, füstölt szalonnából 150 grammra lesz szükségünk.

Tudnunk kell, hogy a szükséges húsok, például 300 gramm sertéslapocka megvásárlásakor csontot is kapunk, vagyis nem lesz 300 gramm színhúsunk. Ezért többet kell vennünk! Mivel tömegük 70%-a színhús, ezért annyit kell vásárolnunk, hogy a 70%-a legyen 300 gramm. Jelöljük a vásárolt hús grammban mért tömegét x-szel. Ennek 70%-a 300 gramm.

A következő egyenletet írhatjuk fel: $x \cdot 0{,}7 = 300$.

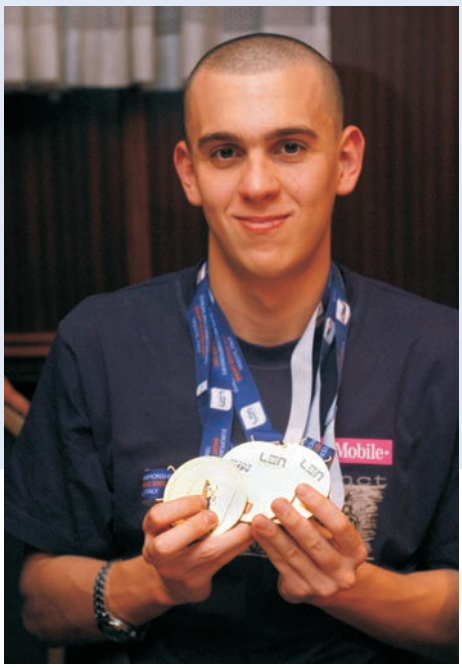
Ebből tízesre kerekítve kapjuk: $x \approx 430$ (gramm).

Ezek alapján az összes vásárlásunk tömege: $3 \cdot 430 + 150 = 1440$ (gramm).

Vagyis 1,44 kg hentesáru kerül a kosarunkba.

III. Az egyik napilapban (2005. július 30.) olvashattuk Cseh Lászlóról a következőket:

A 100 **méteres** háton nyert bronzérme után megígérte, hogy lesz még ennél két jobb eredménye is Montrealban. Fogadkozása felét 200 **m** vegyesen már be is váltotta. Iszonyatos iramban kezdett, pillangón és háton az érvényes világrekordnál jobb részidőt úszott. Végül 1:57.61-es idejével korszakos diadalt aratott, a vb-ezüst mellé megszerezte az Európa-csúcsot is. Holnap a 400 vegyes után a dobogó felső fokára szeretne állni, hogy mindannyiunk örömére szólhasson a magyar nemzet himnusza. (Az MTV-n holnap 22.35-kor kezdődik a közvetítés az Úszó- és vízilabda-vb-ről.)



3. példa

Értelmezzük az újság szövegében szereplő mennyiségeket! Adjuk meg a szövegben ki nem írt mértékegységeket!

Minden szakterületnek megvan a maga szókészlete, sajátos kifejezései.

A sportcikkeket írók és olvasók számára nyilvánvaló, hogy a 100 *méteres hát* nem egy 100 méter hosszúságú, óriási hátat jelent. Ez azt jelenti, hogy a versenyzőknek a 100 méteres távot hátúszásban kell megtenni. Hasonlóan értelmezzük a 200 *m vegyes* kifejezést is. A 400 *vegyes* esetében a mértékegység kiírása nélkül is tudjuk, hogy méterről van szó.

A szövegben szerepel még két mértékegység nélküli szám.

Az 1:57.61 mértékegysége a szöveg alapján megfejthető! A távot és az úszókat ismerve ennek a jelentése: 1 perc 57,61 másodperc alatt úszta le a sportoló a 200 méteres távot, ez lett ekkor az új Európa-csúcs. (Megfigyelhető, hogy az újságban tizedesvessző helyett tizedespontot használtak.)

A 22:35 is megszokott, gyakori jelölés. Jelentése: 22 óra múlt 35 perccel.

Fontos tudni, hogy az 1:57.61 **időtartamot**, a 22:35 **időpontot** jelent.

Feladatok

K1 Használd a leckében szereplő I. idézetet, és válaszolj a következő kérdésekre!

a) Hány négyzetkilométer található hazánk területéből a tengerszint felett 200–400 méter között?

b) Készíts oszlopdiagramot, amely hazánk tengerszint feletti magasságát mutatja a megadott tengerszintek között!

c) Hány Velencei-tó méretű tó férne rá gondolatban a Balaton területére?

d) Hány méter az eltérés a Duna és a Tisza hazai szakaszának hossza között?

e) Egy térképen hazánk területe 3,5 dm^2. Hány cm^2 ezen a térképen a Balaton területe?

f) Képzelj el egy olyan téglatest alakú medencét, amelyben a vízfelület területe azonos a Velencei-tó vízfelületének területével, és 1 m-es víz van benne! Hány tonna ez a vízmennyiség, ha 1 dm^3 vizet 1 kg-nak veszünk?

K2 Használd a leckében szereplő II. idézetet, és válaszolj a következő kérdésekre!

a) Ha négy főre szeretnénk elkészíteni a *Hét vezér tokányt*, akkor hány dekagrammal több vöröshagymát használunk, mint sertészsírt?

b) Hány adagosra készül a *Hét vezér tokány*, ha összesen 0,32 kg füstölt szalonna és sertészsír szükséges hozzá?

c) Egy 146 fős rendezvényre szeretnék elkészíteni a *Hét vezér tokányt*. Hány kilogramm színhúsra lesz szükség?

K3 Használd a leckében szereplő III. idézetet, és válaszolj a következő kérdésekre!

a) Hány perccel éjfél előtt kezdődött a közvetítés az Úszó- és vízilabda-vb-ről?

b) Hány másodperc alatt úszta le a világbajnoki döntőben a 200 méteres távot a második helyezett magyar sportoló?

c) A vegyes úszás során négy különböző úszásnemben azonos távot úsznak a versenyzők. A montreali világbajnokságon 200 méter vegyesen Európa-csúcsot megszerző ezüstérmes sportolónk átlagosan hány másodpercet úszott egy-egy úszásnemben?

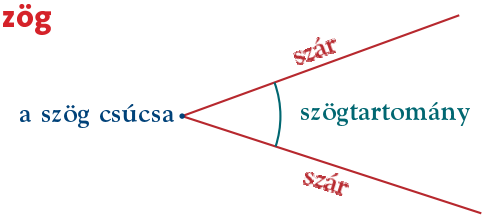


A legfontosabb geometriai fogalmak I.

Fontos tudnivaló

Alapfogalmak: **pont, egyenes, sík, tér.**
További fogalmak: **félegyenes, szakasz, félsík, féltér.**

Szög



A szögmérés egységei és összefüggéseik:

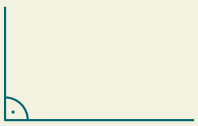
$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$

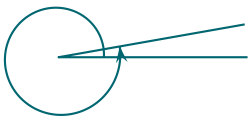
A szögmérés eredete a babilóniai időkig nyúlik vissza.



Eukleidész (Kr. e. kb. 300)

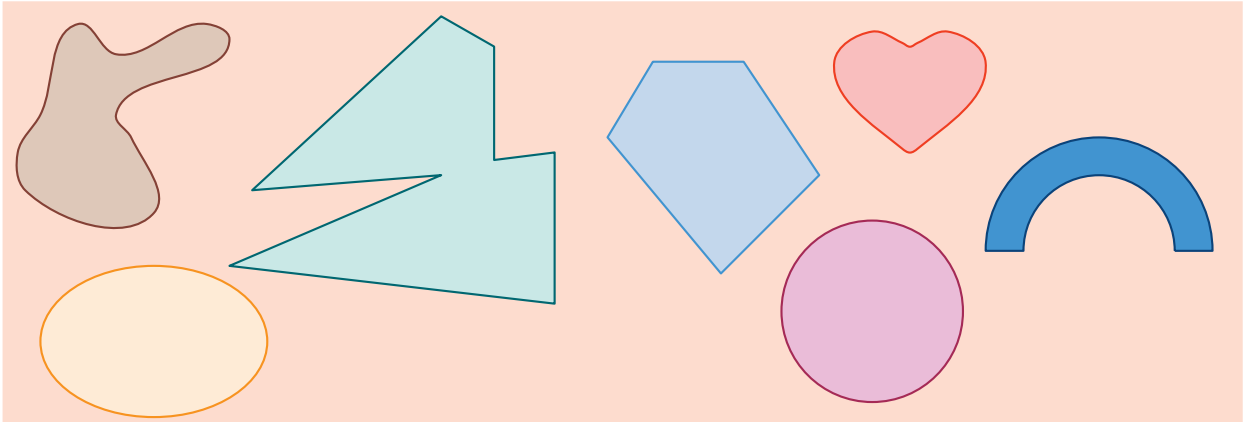
Szögfajták

$0^\circ <$ **hegyesszög** $< 90^\circ$,	**derékszög** $= 90^\circ$,	$90^\circ <$ **tompaszög** $< 180^\circ$,
		
egyenesszög $= 180^\circ$,	$180^\circ <$ **homorú szög** $< 360^\circ$,	**teljes szög** $= 360^\circ$.
		

0°-os szög: . Beszélhetünk 360°-nál nagyobb **forgásszögről** is. 

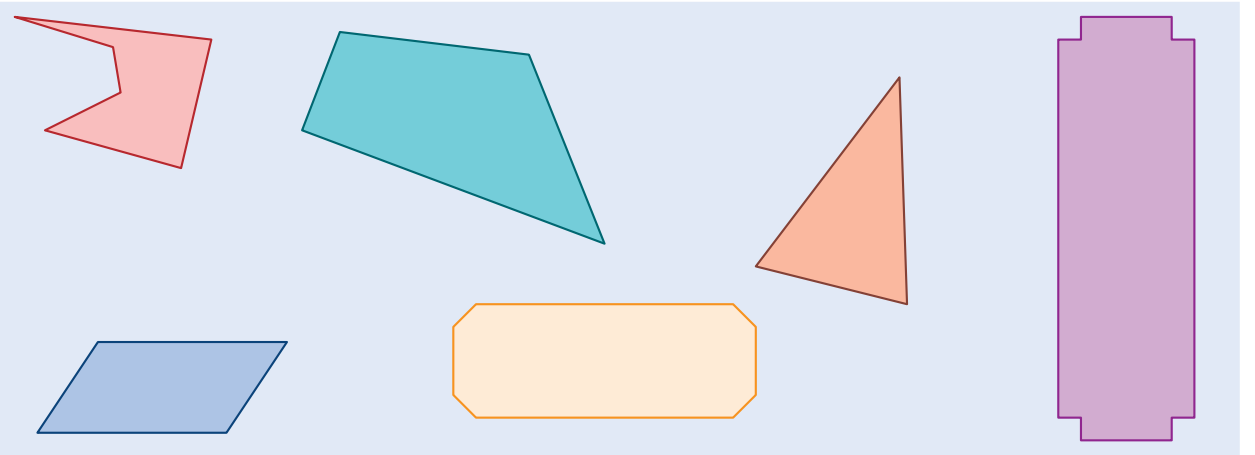
Síkidomok

A síkidomok olyan alakzatok, amelyeknek a pontjai egy síkban vannak. A sík darabolásakor síkidomok keletkeznek.

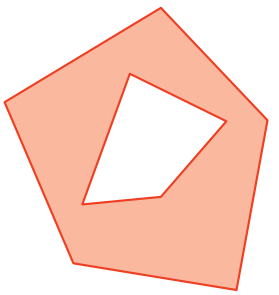


Sokszögek

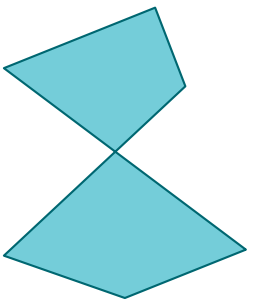
A sokszögek olyan síkidomok, amelyeket csak szakaszok határolnak.



Léteznek lyukas és hurkolt sokszögek is, de mi a továbbiakban, ha sokszögről beszélünk, akkor nem ilyenekre fogunk gondolni.

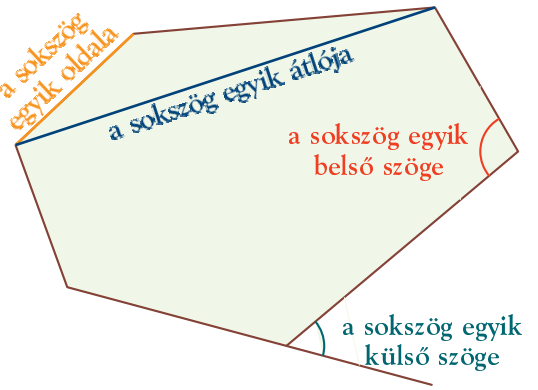


„lyukas” ötszög



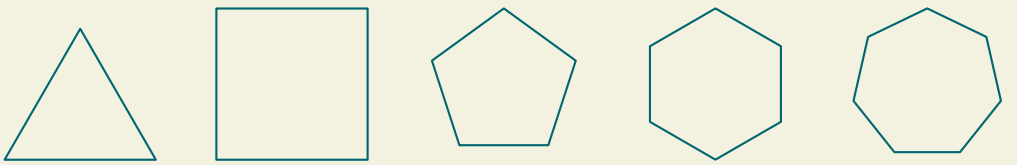
hurkolt hatszög

A sokszögekhez kapcsolódó fogalmak:



Szabályos sokszögek

Szabályos sokszög: olyan sokszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú.



Feladatok

A1 A szögeket nagyságuk alapján csoportosítottuk. Milyen szögek a következők?

$192° 41'$, $180'$, $178° 12'$, $3600''$,
$90°$, $1° 47'$, $360°$, $130'$.

K2 Legyen $\alpha = 37° 48'$, $\beta = 32° 42' 17''$ és $\gamma = 88°$. Rakd növekvő sorrendbe a következő szögeket!

α, β, γ, $\alpha + \beta$,
$\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma$

K3 Keresd meg az igaz állításokat!

A: Van olyan síkidom, amelyik sokszög.

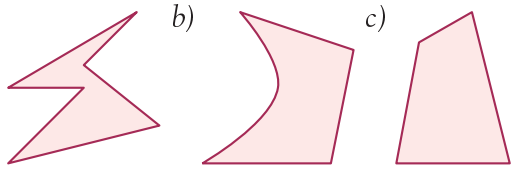
B: Minden sokszög síkidom.

C: Minden síkidom sokszög.

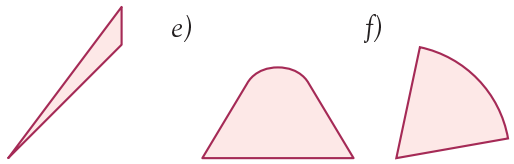
D: Nincs olyan sokszög, amelyik nem síkidom.

A4 A következő síkidomok közül melyek sokszögek?

a) *b)* *c)*



d) *e)* *f)*



K5 Rajzolj konvex hatszöget, amelynek

a) van olyan átlója, amelyik rövidebb, mint az egyik oldala;

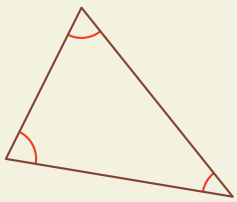
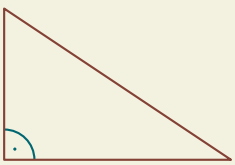
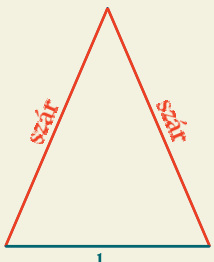
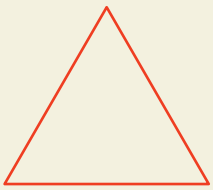
b) egyik külső szöge egyenlő egy nem hozzá tartozó belső szöggel;

c) egyik csúcsából induló összes átló és oldal egyenlő hosszúságú;

d) van két tompa külső szöge!

A legfontosabb geometriai fogalmak II.

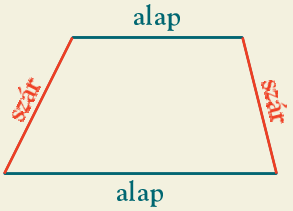
Háromszögek

hegyesszögűek minden szögük hegyes	derékszögűek van derékszögük	tompaszögűek van tompaszögük
		
egyenlő szárúak van két egyenlő hosszúságú oldaluk		**szabályosak** mind a három oldaluk egyenlő hosszúságú
		

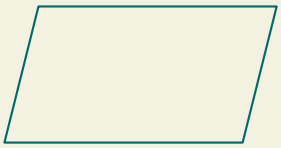
Korábbi tanulmányainkból tudjuk a következő **tételeket** (állításokat, amelyek bizonyíthatók):
Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők.
A szabályos háromszög mindhárom szöge egyenlő, $60°$.
A háromszögek belső szögeinek összege $180°$.

Négyszögek

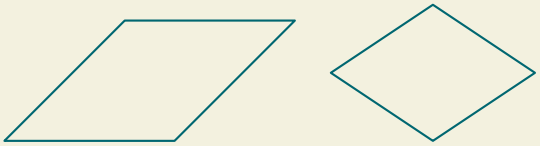
Trapéz: olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.



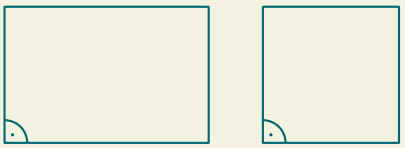
Paralelogramma: olyan trapéz, amelynek szárai is párhuzamosak egymással.



Rombusz: olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.



Téglalap: olyan paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala merőleges egymásra.



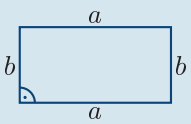
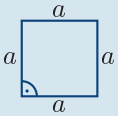
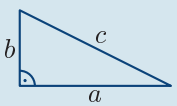
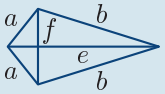
Négyzet: olyan téglalap, amelynek két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.



Deltoid: olyan négyszög, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.



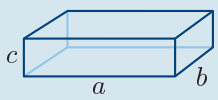
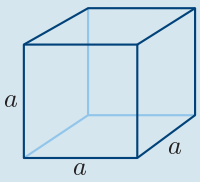
A következő táblázatban a már ismert, korábban tanult kerület- és területszámítási képleteket foglaljuk össze.

Alakzat neve	Ábra	Kerület	Terület
Téglalap		$k = 2 \cdot (a + b)$	$t = a \cdot b$
Négyzet		$k = 4 \cdot a$	$t = a^2$
Derékszögű háromszög		$k = a + b + c$	$t = \frac{a \cdot b}{2}$
Deltoid		$k = 2 \cdot (a + b)$	$t = \frac{e \cdot f}{2}$

Testek

A **testek** olyan alakzatok, amelyeknek a pontjai nincsenek egy síkban. A tér darabolásakor testek keletkeznek. A testeket síklapok vagy görbe felületek határolják. A testekkel kapcsolatos elnevezések: **csúcs, él, lap.** A testet határoló síklapokat a test lapjainak nevezzük. A síklapok metszésvonalának él, az élek metszéspontjainak csúcs a neve.

Az eddig tanult testek felszín- és térfogatképletét táblázatban tekintjük át.

Alakzat neve	Ábra	Felszín	Térfogat
Téglatest		$A = 2(ab + ac + bc)$	$V = a \cdot b \cdot c$
Kocka		$A = 6 \cdot a^2$	$V = a^3$

Feladatok

K1 Egy 236 cm kerületű téglalap egyik oldala 42 cm-rel hosszabb, mint a másik. Mekkorák az oldalai? Hány dm^2 a területe?

K2 Egy téglalap minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet a kerülete, ha a területe 360 cm^2?

K3 Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének különbsége $22° 38'$. Mekkorák a háromszög szögei?

K4 Egy derékszögű háromszög egyik szöge $17° 39'$-cel nagyobb, mint egy másik szöge. Mekkorák a háromszög szögei?

K5 A négyzetet az egyik átlójával párhuzamosan vágd két sokszögre! Számítsd ki a sokszögek belső szögeinek nagyságát!

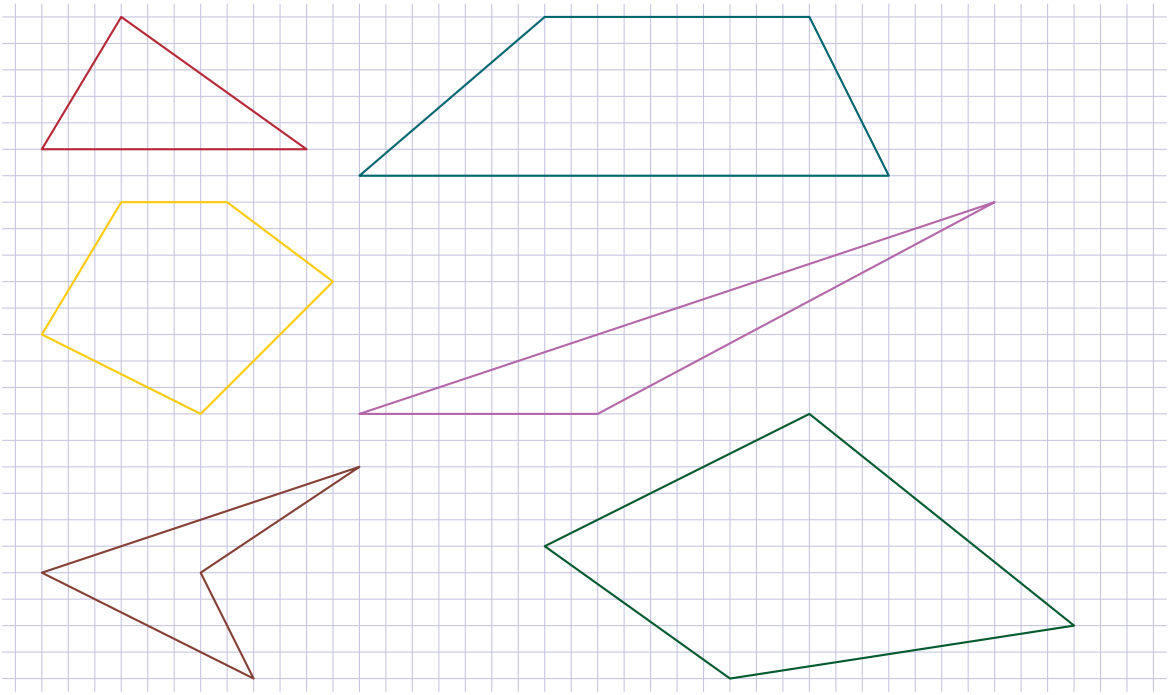
K6 Egy derékszögű háromszög egyik szöge háromszorosa egy másiknak. Hány fokosak a háromszög szögei?

K7 Egy derékszögű háromszögben a $30°$-os szöggel szemben 3,8 cm hosszúságú befogó található. Milyen hosszú az átfogója?

E8 Harminc darab egyforma kocka felhasználásával készíts tömör téglatestet! Hány különbözőt tudsz tervezni?

E9 Egy téglatestet a lapjaival párhuzamos vágásokkal darabolsz. A darabolás közben a részeket nem mozdítod el egymástól. Hány vágást kell végrehajtanod, ha azt szeretnéd, hogy a keletkezett kisebb testek felszínének összege biztosan az eredeti téglatest felszínének a háromszorosa legyen?

K10 Foglald téglalapba a következő rácssokszögeket! Határozd meg a területüket! A négyzethálós papír rácsnégyzete legyen a területegység.



K11 Az ábrán látható téglalapot másold át a füzetedbe! Színezd pirosra a téglalap azon pontjait, amelyek az A ponttól távolabb vannak, mint a D pont, de közelebb, mint a B pont!



K12 Melyik állítás igaz, melyik hamis?

a) Minden rombusz trapéz.

b) Ha egy négyszög téglalap, akkor az paralelogramma.

c) Ha egy négyszög rombusz, akkor az négyzet.

d) Van olyan paralelogramma, amely rombusz.

e) Ha a trapéz két szára egyenlő hosszúságú, akkor az paralelogramma.

f) Ha a trapéznak két szöge is derékszög, akkor az téglalap.

g) Ha a rombusznak van derékszöge, akkor az négyzet.

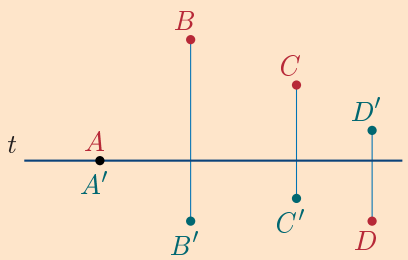
Geometriai transzformációk

Már tavaly megjelent a címben szereplő fogalom a matematikai tanulmányainkban. A **transzformáció** átalakítást, átváltoztatást jelent. A pontok helyét egy utasítás szerint megváltoztattuk, vagyis átalakítást hajtottunk végre. A továbbiakban is ezt fogjuk tenni. Ezeket az átalakításokat **geometriai transzformációknak** nevezzük.

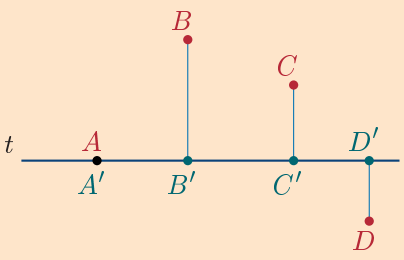
1. példa

Az ábrákon bejelöltünk néhány pontot és a transzformáció utáni helyüket is. Mi lehet az egyes esetekben a hozzárendelési szabály?

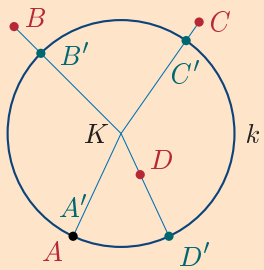
a)



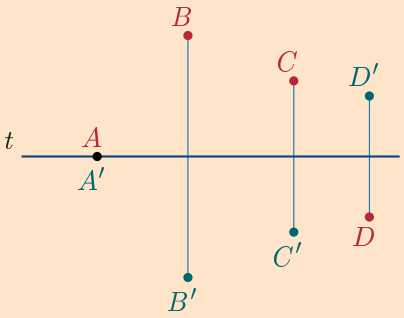
b)



c)



d)



a) A sík pontjaiból merőlegest állítunk a t tengelyre. A pont és a tengely távolságának a felét felmérjük a merőleges egyenesen a tengely másik oldalán. Az így kapott pont lesz a képpont.

b) A sík pontjaiból merőlegest állítunk a t tengelyre. Ahol ez a merőleges metszi a tengelyt, ott lesz a képpont.

c) A sík pontjait összekötjük a k kör K középpontjával. Ahol ez a félegyenes metszi a körvonalat, az lesz a képpont.

d) A tavaly tanult tengelyes tükrözést kell végrehajtanunk. A sík pontjaiból merőlegest állítunk a t tengelyre. A pont és a tengely távolságát felmérjük a merőleges egyenesen a tengely másik oldalára. Az így kapott pont lesz a képpont.

Fontos tudnivaló

Azokat az egyértelmű hozzárendeléseket, amelyek két ponthalmaz között értelmezettek és ponthoz pontot rendelnek, geometriai transzformációknak nevezzük.

Találkoztunk már olyan egyértelmű hozzárendelésekkel, amelyek nem ponthalmazokon voltak értelmezettek. Például az egyenes arányosság olyan egyértelmű hozzárendelés, amely számhoz számot rendel. A síkbeli koordináta-rendszerek egyértelmű hozzárendelést adnak a sík pontjai és a rendezett számpárok között.

2. példa

Egy transzformációt megfordíthatónak mondunk, ha minden képponthoz egyetlen eredeti pont tartozik. Úgy is mondhatjuk, hogy minden képpontnak egyetlen őse van.

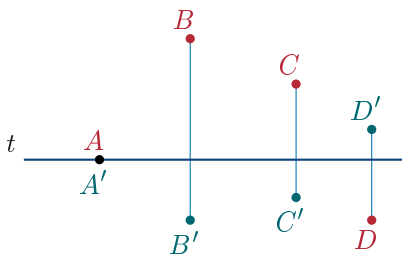
Az 1. példában szereplő négy transzformáció közül melyiket nevezhetjük megfordíthatónak?

2.

a) Ez megfordítható transzformáció.

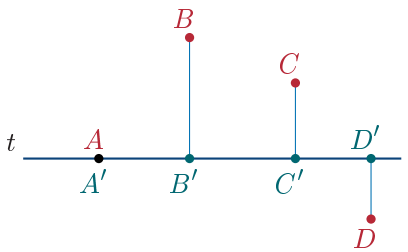
Vegyünk egy tetszőleges képpontot! Ebből a pontból merőlegest állítunk a t tengelyre. A pont és a tengely távolságának a kétszeresét felmérjük a merőleges egyenesen a tengely másik oldalán. Az így kapott pont lesz az eredeti pont.

Ellenőrizhetjük, hogy az így kapott őspontból kiindulva és az eredeti szabályt alkalmazva valóban a most tetszőlegesen választott képpontot kapjuk.



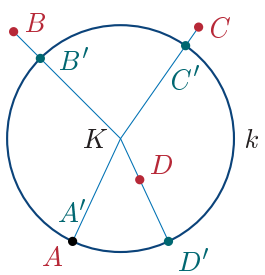
b) Ez nem megfordítható transzformáció.

Vegyünk egy tetszőleges képpontot a tengelyen! Ebből a pontból merőlegest állítunk a t tengelyre. Ennek a merőleges egyenesnek bármelyik pontját választhatnánk őspontnak, mert mindegyiknek a most tetszőlegesen választott pont lenne a képe.



c) Ez nem megfordítható transzformáció.

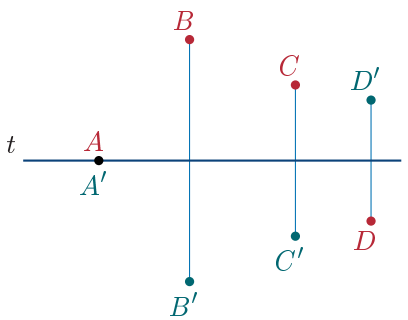
Vegyünk egy tetszőleges képpontot a körön! Ezt a pontot kössük össze a kör középpontjával! Ennek a félegyenesnek bármelyik pontját választhatnánk őspontnak, mert mindegyiknek a most tetszőlegesen választott pont lenne a képe.



d) **A tengelyes tükrözés megfordítható transzformáció.**

Vegyünk egy tetszőleges képpontot! Ebből a pontból merőlegest állítunk a t tengelyre. A pont és a tengely távolságát felmérjük a merőleges egyenesen a tengely másik oldalán. Az így kapott pont lesz az eredeti pont.

Ellenőrizhetjük, hogy az így kapott ősponthoz a most tetszőlegesen választott képpont lesz a tengelyes tükörkép.



A tengelyes tükrözésnél már tavaly megfigyeltük a **távolságtartó, szögtartó, egyenestartó** tulajdonságokat.

Minden transzformációval kapcsolatban megkérdezhető, hogy rendelkezik-e ezekkel a tulajdonságokkal.

Fontos tudnivaló

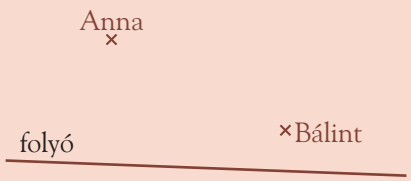
Távolságtartó transzformációnak mondjuk azokat a transzformációkat, amelyeknél bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával. (A példák közül a *d)* ilyen. Az *a)*, *b)*, *c)* nem ilyenek.)

Szögtartó transzformációnak mondjuk azokat a transzformációkat, amelyeknél bármely szög nagysága egyenlő a képének a nagyságával. (A példák közül a *d)* ilyen. Az *a)*, *b)*, *c)* nem ilyenek.)

Egyenestartó transzformációnak mondjuk azokat a transzformációkat, amelyeknél bármely egyenes képe is egyenes. (A példák közül az *a)*, *b)*, *d)* ilyenek. A *c)* nem ilyen.)

3. példa

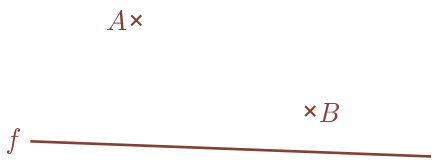
Egy egyenesnek tekinthető folyó ugyanazon partján áll két gyerek. Szeretnének a folyóparton találkozni.



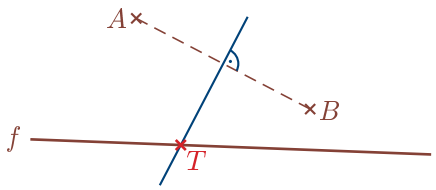
a) Hol legyen a találkozási hely, ha azt szeretnék, hogy mindketten azonos hosszúságú utat tegyenek meg, de minél kevesebb út megtétele után találkozzanak?

b) Hol legyen a találkozási hely, ha azt szeretnék, hogy a kettőjük által megtett út hossza a lehető legrövidebb legyen?

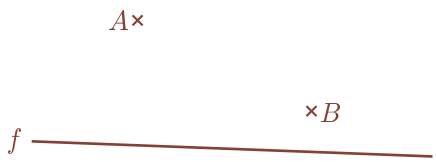
a) Az ábránkon a folyópart az f egyenes, a két gyerek pedig A és B.



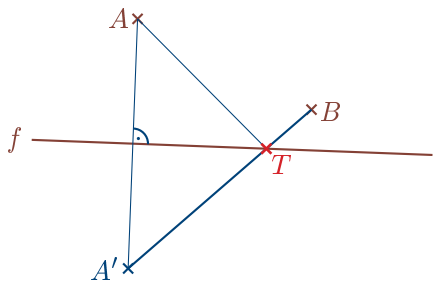
Tanultuk, hogy az A és a B pontoktól azonos távolságra lévő pontok a síkban az AB szakaszfelező merőleges pontjai lesznek. Vagyis a szakaszfelező merőleges bármely pontjáig ugyanakkora távolságot tesznek meg. Ez akkor a legrövidebb, ha a szakaszfelező merőleges és az f egyenes metszéspontja (ha létezik) a T találkozási pont.



b) Az ábránkon a folyópart az f egyenes, a két gyerek pedig A és B.



Az A tükörképe f-re A'. Az $A'B$ egyenes T pontban metszi az f egyenest. Ez a T pont lesz a keresett találkozási hely.



Természetesen meg kell mutatnunk, hogy az így kapott T pont valóban megfelel a két gyerek igényének, vagyis az $AT + BT$ összegnél nincs rövidebb, bármilyen más találkozási pontot választunk is az f-en.

Legyen egy tetszőlegesen választott találkozási pont a P pont (ami nem a T pont). Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért $AT = A'T$, $AP = A'P$.

Vagyis

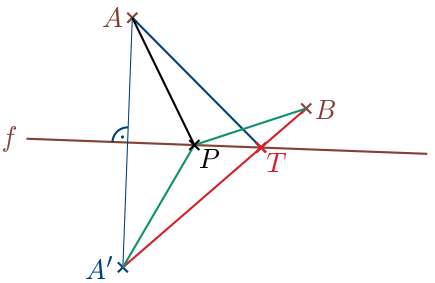
$AT + TB = A'T + TB = A'B$,

$AP + PB = A'P + PB$.

Nézzük az $A'PB$ háromszöget! Ebből kiderül, hogy

$A'B < A'P + PB$, azaz

$AT + TB < AP + PB$.

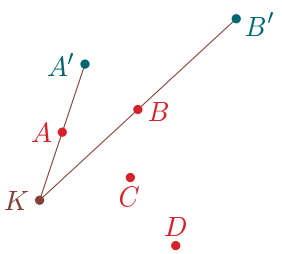


Beláttuk, hogy minden tetszőlegesen választott P pontnál jobb a leírtaknak megfelelően szerkeszthető T pont.

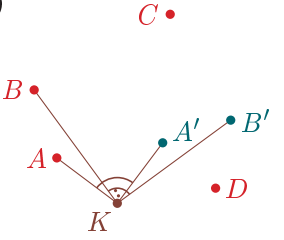
Feladatok

K1 Az ábrákon bejelöltünk néhány pontot és néhánynak a transzformáció utáni helyét is. Mi lehet az egyes esetekben a hozzárendelési szabály? Rajzold meg az ábrákat a füzetedben, és rajzold meg a hiányzó képpontokat is!

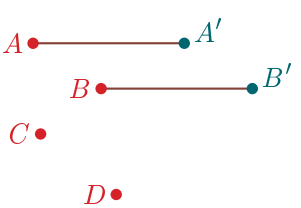
a)



b)



c)

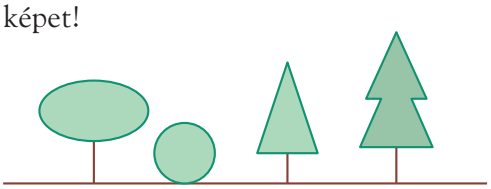


K2 Szerkeszd meg

a) egy tengelyre nem illeszkedő pont;
b) egy tengelyt metsző szakasz;
c) egy tengelyre nem illeszkedő középpontú kör;
d) egy tengellyel párhuzamos egyenes;
e) egy háromszög

tengelyre vonatkozó tükörképét!

K3 A tóparton álló fák, bokrok képe látható a vízben is. Rajzold meg a füzetedbe a teljes képet!



K4 Rajzolj olyan háromszöget, amelyet bármelyik oldalegyenesére tükrözve az eredeti és a képként kapott háromszög együtt konvex deltoidot határoz meg! Milyen háromszöget kell rajzolnod?

K5 Rajzolj olyan háromszöget, amelyet oldalegyeneseire tükrözve az eredeti és a képként kapott háromszög együtt vagy konkáv deltoidot, vagy rombuszt határoz meg! Milyen háromszöget kell rajzolnod?

K6 Mely állítások igazak?

a) A deltoidnak két-két szemközti oldala egyenlő hosszúságú.

b) A deltoid egyik átlója mindig szimmetriatengely.

c) Ha egy négyszög két átlója nem merőleges egymásra, akkor ez a négyszög lehet rombusz.

d) A deltoid átlói felezik egymást.

e) A deltoid szimmetriaátlója csak egy belső szöget felezhet.

f) Egy deltoidnak lehet, hogy pontosan három szöge azonos nagyságú.

K7 Mely állítások igazak?

a) A rombusz minden szöge egyenlő.

b) A rombusznak csak a hosszabb átlója szimmetriatengely.

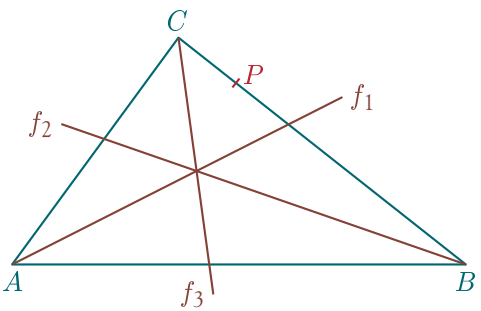
c) Egy rombusznak mindig van tompaszöge.

d) A rombusz két-két szemközti szöge egyenlő.

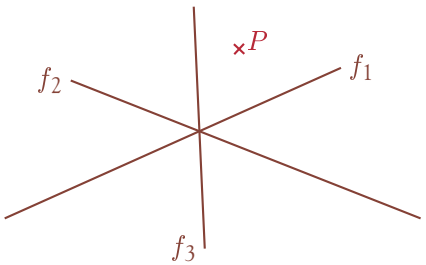
e) Egy rombusz két szomszédos szöge nem lehet egyenlő.

f) Ha a rombusz átlói egyenlő hosszúságúak, akkor négyzetről van szó.

K8 Használd az ábrán látható jelölést! Az f_1, f_2 és f_3 egyenesek a háromszög szögeinek szögfelezői, a P pont a BC oldal egy tetszőleges belső pontja. Tükrözd a P pontot az f_3 egyenesre, az így kapott képpontot az f_1 egyenesre, s végül azt a képpontot az f_2 egyenesre! Mutasd meg, hogy az így kapott pont a P ponttal egy oldalra illeszkedik!



E9 Az ábrán egy háromszög három szögfelező egyenese látható. Az A csúcs illeszkedik az f_1-re, a B csúcs az f_2-re és a C csúcs az f_3 szögfelezőre. Az adott P pont a BC oldal egy belső pontja. Szerkeszd meg a háromszöget!

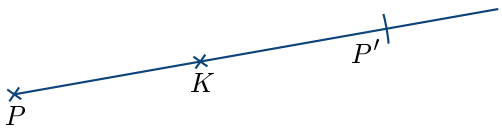


E10 Mutasd meg, hogy ha egy fénysugár egy A pontból kiindulva úgy jut egy B pontba, hogy közben egy tükörről verődött vissza, akkor a megtett út A és B pont között a lehető legrövidebb!

A középpontos tükrözés I.

A következő utasítással megadunk egy geometriai transzformációt:

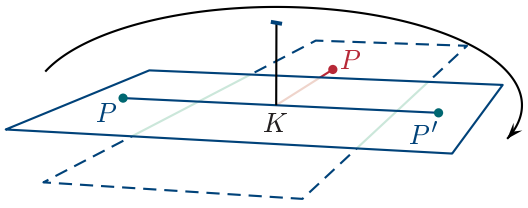
Legyen adott a síkon egy K pont. Egy tetszőleges síkbeli P pont P' képét megkapjuk, ha a P pontot összekötjük a K ponttal, és az így kapott egyenesre, a P pontot nem tartalmazó felére felmérjük a K ponttól a KP távolságot.



Figyeljük meg! A K pont körül a sík elforgatható úgy, hogy a P pont a P'-be kerül. Pontosan 180°-ot kell forgatnunk.

Az így meghatározott transzformációt **középpontos tükrözésnek** nevezzük.

Vizsgáljuk meg a tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés kapcsolatát! A két transzformáció megadása nagyon hasonlít egymáshoz.



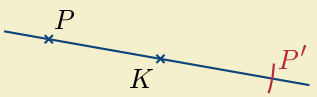
2.

Középpontos tükrözés:

Adott egy K pont.



Egy tetszőleges P pont képét megkapjuk, ha a P pontot összekötjük a K tükörközépponttal, majd a PK szakaszt az összekötő egyenes K-n túli meghosszabbítására felmérjük.



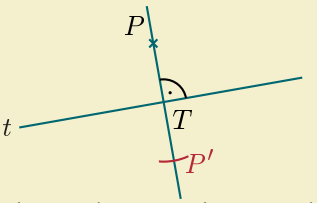
Középpontos tükrözésnél a K pont képe önmaga, és további olyan pontok nem léteznek, amelyek egybeesnének a képükkel.

Tengelyes tükrözés:

Adott egy t egyenes.



Egy tetszőleges P pont képét megkapjuk, ha a P pontból merőlegest állítunk a tükörtengelyre, majd a PT szakaszt a merőleges egyenesre a t túloldalán felmérjük.



Tengelyes tükrözésnél a tengely bármely pontjának képe önmaga, és további olyan pontok nem léteznek, amelyek egybeesnének a képükkel.

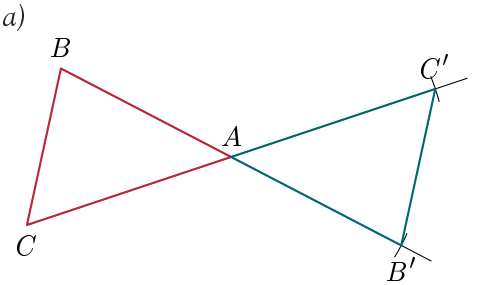
A középpontos tükrözésnél megfigyeltük, hogy egy pontot megfelelő forgatással is át tudunk mozdítani a képpontba. Mondhatjuk tehát, hogy minden alakzat egybevágó a középpontos tükörképével, mert minden távolság és minden szög nagysága változatlan marad a transzformáció elvégzése után.

1. példa

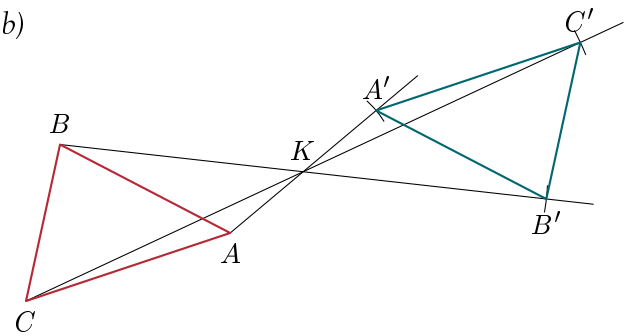
Tükrözzünk középpontosan egy ABC háromszöget

a) az A csúcsára; *b)* egy K középpontra, amely a háromszögön kívül helyezkedik el!

a)



b)



Feladatok

A1 Rajzolj egy derékszögű háromszöget! Tükrözd

a) az egyik hegyesszögnél lévő csúcsára;

b) a derékszögnél lévő csúcsára;

c) egy olyan pontra, amely a háromszög belsejében van;

d) az átfogó felezőpontjára!

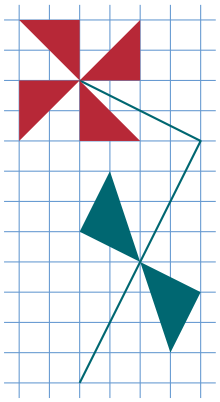
K2 Rajzolj két egyenlő hosszúságú, párhuzamos szakaszt! Szerkeszd meg azt a pontot, amelyre tükrözve az egyik szakaszt, pontosan a másik szakaszt kapjuk!

K3 Rajzolj egy háromszöget, és vegyél fel a háromszög síkjában két különböző pontot! Tükrözd a háromszöget az egyik pontra, majd a képet tükrözd a másik pontra! Figyeld meg az eredeti és a második képként kapott háromszög egymáshoz való viszonyát!

K4 Rajzolj egy trapézt! Tükrözd
a) az egyik csúcsára;
b) egy olyan pontra, amely a trapézon kívül van;
c) a trapéz egyik szárának felezőpontjára!

K5 Rajzolj egy négyszöget! Tükrözd
a) az egyik csúcsára;
b) egy olyan pontra, amely a négyszög belsejében van;
c) az egyik oldalának a felezőpontjára!

K6 Az előző években is rajzoltunk egyszerű vonalakból szép ábrákat. A képen látható virág is így készült.



Másold át a füzetedbe! Tükrözd egy rá nem illeszkedő pontra!

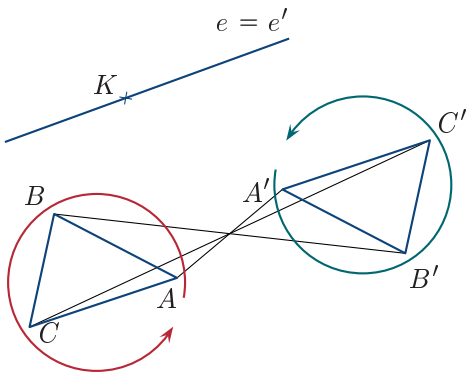
Próbáld a munkádat úgy megtervezni, hogy minél kevesebb segédvonalat használj a másolásnál és a tükrözésnél is!

A középpontos tükrözés II.

A tapasztalatainkat felhasználva megfogalmazzuk a középpontos tükrözés tulajdonságait.

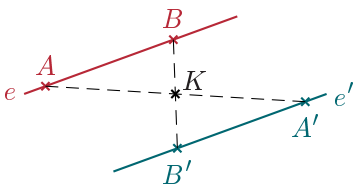
Távolságtartó, szögtartó, egyenestartó transzformáció.

A középpontra illeszkedő egyenes képe önmaga.

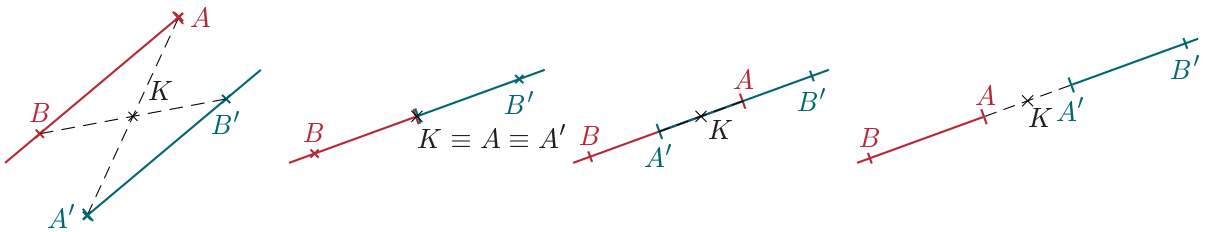


Nem változtatja meg a körüljárási irányt.

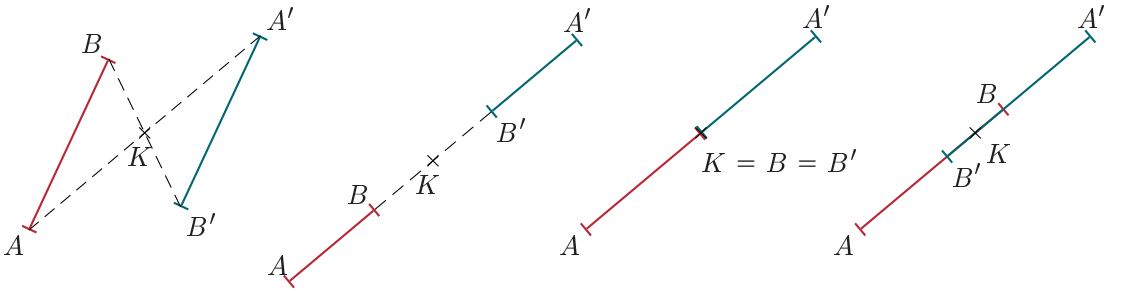
A középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.



A félegyenes és képe fordított állású.



Szakasz képe párhuzamos az eredeti szakasszal, de a végpontjaik sorrendje felcserélődik.



2.

Fontos tudnivaló

Ha egy középpontos tükrözés esetén az A pont képe az A', akkor az A' képe ugyanebben a középpontos tükrözésben A lesz. Vagyis a középpontos tükrözés megfordítható transzformáció.

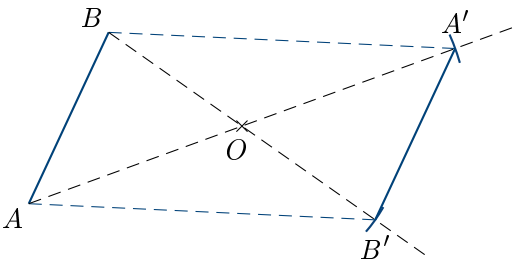
1. példa

Az AB szakaszt tükrözzük egy olyan O középpontra, amely nem illeszkedik az AB egyenesre! Milyen négyszöget határoz meg a két pont és a két képpont?

Elvégezzük a tükrözést.

Mivel az AB szakasz képe az $A'B'$ szakasz, ezért ezek hossza egyenlő.

Mivel az AB' szakasz képe az BA' szakasz, ezért ezek hossza egyenlő.



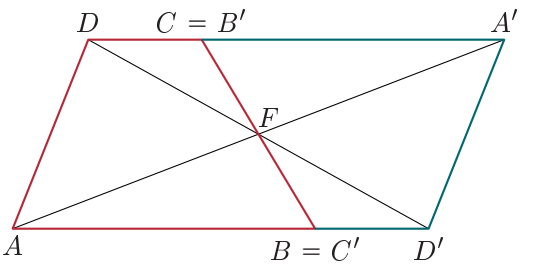
Ez azt jelenti, hogy az $AB'A'B$ négyszög két-két szemközti oldalának hossza egyenlő. Vagyis az így kapott négyszög paralelogramma.

2. példa

Mutassuk meg, hogy az $ABCD$ trapéz és a BC szár felezőpontjára tükrözött képe, az $A'B'C'D'$ trapéz együtt egy paralelogrammát alkot!

A BA félegyenes középpontos tükörképe $B'A'$, vagyis párhuzamosak egymással. A C és a B' pontok egybeesnek. Mivel $ABCD$ trapéz, ezért BA-val CD szakasz (azaz $B'D$) is párhuzamos. Vagyis $B'D$ és $B'A'$ úgy párhuzamos egymással, hogy B' közös pontjuk. Tehát A', B' és D pontok egy egyenesre illeszkednek.

Hasonlóan tudjuk megmutatni, hogy A, B és D' pontok is egy egyenesre illeszkednek.



A CD félegyenes középpontos tükörképe $C'D'$, vagyis párhuzamosak egymással. A B és a C' pontok egybeesnek. Mivel $ABCD$ trapéz, ezért CD-vel BA szakasz (azaz $C'A$) is párhuzamos. Vagyis $C'A$ és $C'D'$ úgy párhuzamos egymással, hogy C' közös pontjuk. Tehát A, B és D' pontok egy egyenesre illeszkednek.

Vagyis a két trapéz együtt az $AD'A'D$ négyszöget adja, amelynek AD' és $A'D$ oldalairól kiderült, hogy párhuzamosak. Az AD középpontos tükörképe $A'D'$, ezért ezek is párhuzamosak.

Mivel az $AD'A'D$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, így valóban paralelogrammát kaptunk.

Feladatok

K1 Tükrözz egy 3 cm oldalú szabályos háromszöget a középpontjára! Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képként kapott háromszög közös része?

K2 Tükrözz egy 2 cm alapú, 3 cm magasságú egyenlő szárú háromszöget az alap felezőpontjára! Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítése? Számítsd ki a kapott síkidom területét!

K3 Vegyél fel két egyenest és egy pontot! Szerkessz az egyenesekre illeszkedő egy-egy olyan pontot, amelyek tükrösek az adott pontra!

E4 Rajzolj k_1 és k_2 kört, amelyek metszik egymást! Tükrözd a k_1-et az egyik közös pontra! Rajzold meg az így kapott k_1' és k_2 körök közös szelőjét! Mutasd meg, hogy a szelőből k_1 és k_2 egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki!

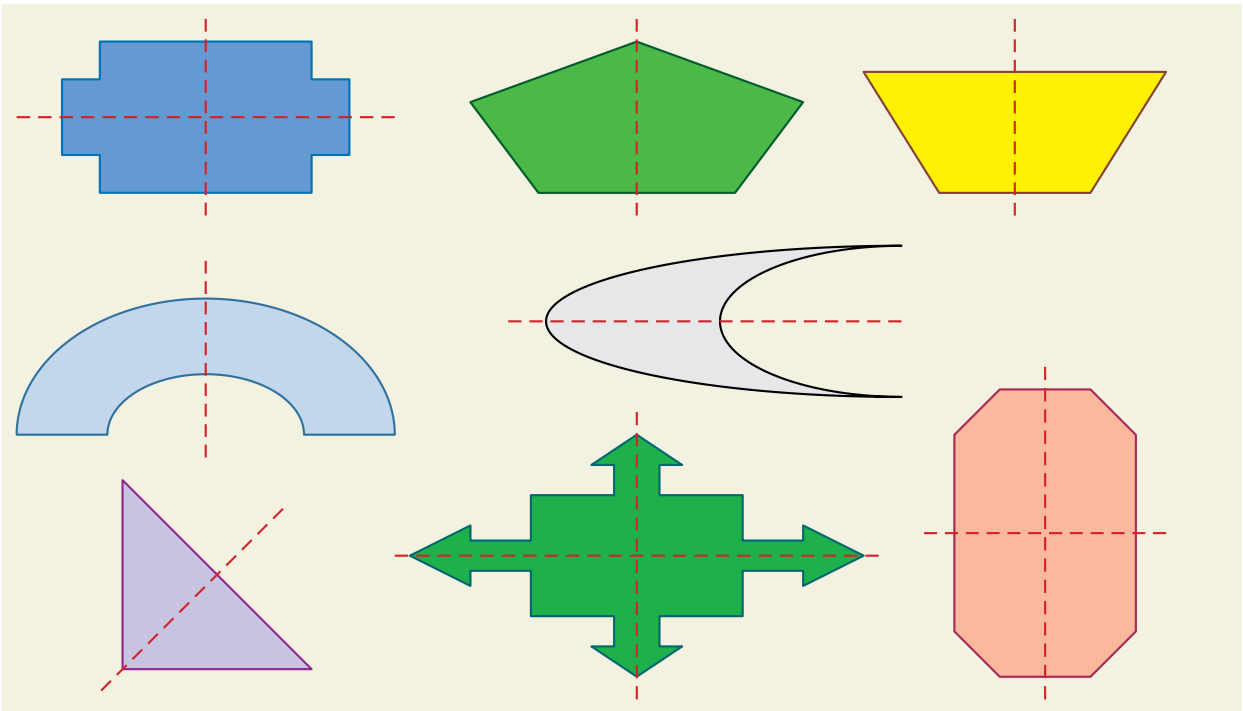
E5 Rajzolj két kört azonos középponttal! Az egyiknek 2 cm, a másiknak 3 cm legyen a sugara! Szerkessz a körökhöz olyan közös szelőt, amelynek a kisebbik körbe eső szakasza egyenlő a két kör közé eső szakaszával!

E6 Vegyél fel egy $ABCD$ konvex négyszöget, és a belsejében egy K pontot! Szerkessz egy olyan paralelogrammát, amelyben az átlók metszéspontja K, a csúcsai pedig az $ABCD$ négyszög egy-egy oldalegyenesére illeszkednek!

Tengelyes és középpontos szimmetria

A **tengelyes tükrözéssel** együtt megismerkedtünk a **tengelyes szimmetriával** is.

Tengelyesen szimmetrikusnak mondjuk azokat a síkbeli alakzatokat, amelyekhez van olyan tengelyes tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi. Néhány tengelyesen szimmetrikus síkidom látható a következő ábrákon.



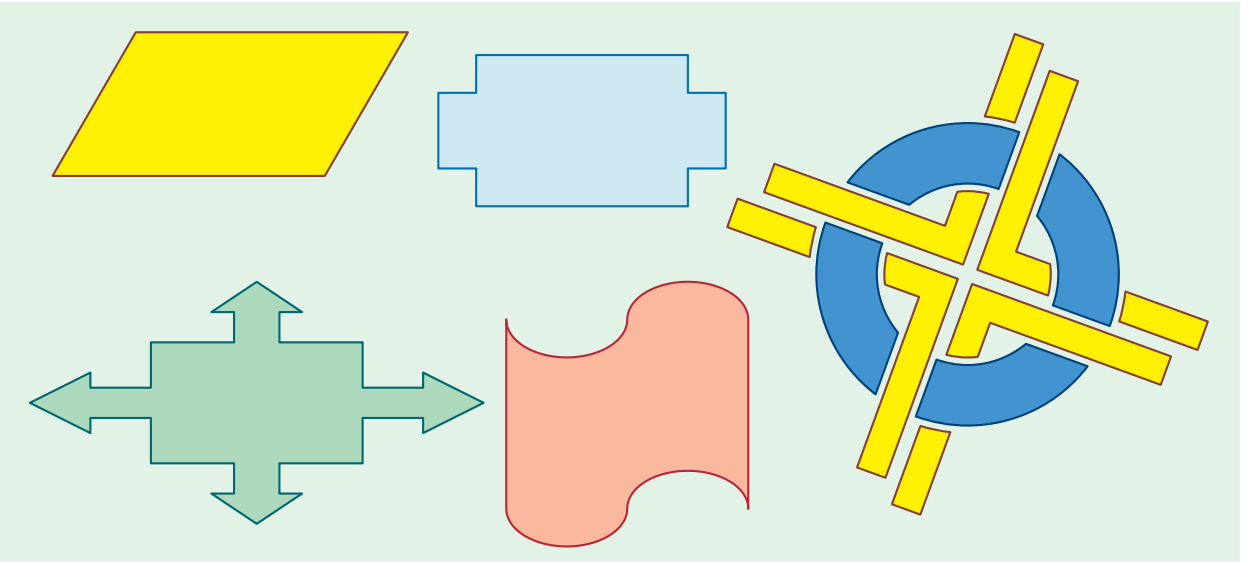
A **középpontos tükrözéssel** együtt ismerkedjünk meg a **középpontos szimmetriával**.

Fontos tudnivaló

Középpontosan szimmetrikusnak mondjuk azokat a síkbeli alakzatokat, amelyekhez van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.

Már tudjuk, hogy ha az AB szakaszt tükrözzük egy olyan O középpontra, amely nem illeszkedik az AB egyenesére, akkor az A, B, valamint a képeik, az A', B' pontok paralelogrammát határoznak meg. A paralelogramma átlói felezik egymást, így a metszéspontjuk mindig felfogható úgy, mint egy középpontos tükrözés középpontja. Az átlók végpontjai egymás képei lesznek. Vagyis a paralelogrammák középpontosan szimmetrikus négyszögek.

A következő ábrán további középpontosan szimmetrikus alakzatokat figyelhetünk meg.



1. példa

Az $ABCD$ négyszög három pontjának ismerjük a koordinátáit: $A(-1;-1)$, $B(5;-3)$, $C(1;3)$. Határozzuk meg a D pont koordinátáját úgy, hogy a négyszög középpontosan szimmetrikus legyen!

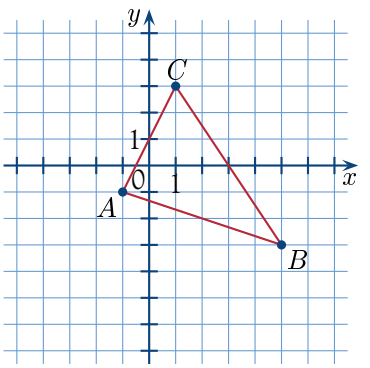
Három eset lehetséges.

– az A és a B egymás középpontos tükörképei;

– az B és a C egymás középpontos tükörképei;

– a C és az A egymás középpontos tükörképei.

Készítsünk ábrát!



A középpontos tükrözés meghatározásából következik, hogy ha egy P pontot és a P' képét ismerjük, akkor a középpont a PP' szakasz felezőpontja lesz.

Ebben a példában az oldalak felezőpontjait kell leolvasnunk, majd a harmadik pontot erre a középpontra kell tükröznünk, s így megkapjuk a D pontot.

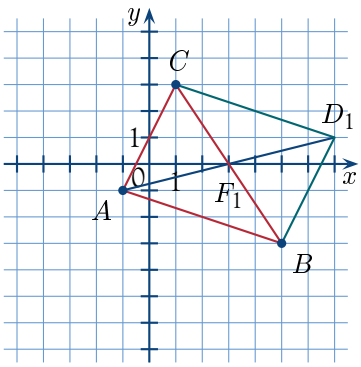
Ha a B és a C egymás középpontos tükörképei, akkor a BC szakasz felezőpontja, $F_1(3;0)$ lesz a középpont.

Ekkor az A pont képe:

$D_1(7;1)$.

A keresett négyszög az

ABD_1C.



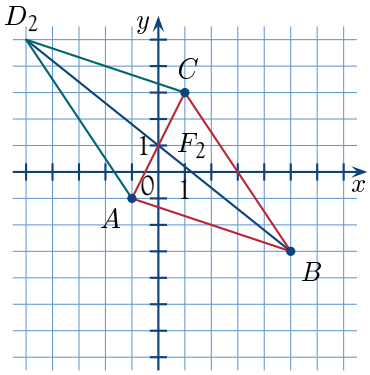
Ha a C és az A egymás középpontos tükörképei, akkor a CA szakasz felezőpontja $F_2(0;1)$ lesz a középpont.

Ekkor a B pont képe:

$D_2(-5;5)$.

A keresett négyszög az

$ABCD_2$.



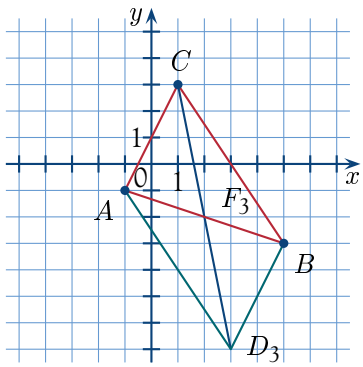
Ha az A és a B egymás középpontos tükörképei, akkor az AB szakasz felezőpontja $F_3(2;-2)$ lesz a középpont.

Ekkor a C pont képe:

$D_3(3;-7)$.

A keresett négyszög az

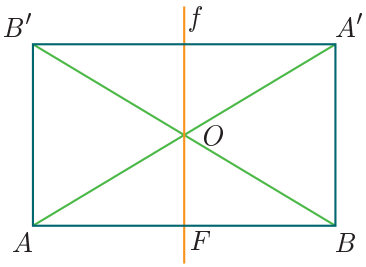
AD_3BC.



2. példa

Egy adott AB szakaszt egy O középpontra tükrözve az $A'B'$ szakaszt kaptuk. Az $ABA'B'$ négyszög téglalap lett. Hol lehet az O pont?

Készítsünk ábrát!



Tudjuk, hogy ha O nem illeszkedik az AB egyenesre, akkor $ABA'B'$ négyszög paralelogramma. Most azt is szeretnénk, hogy téglalap legyen ez a paralelogramma. Ez csak úgy lehetséges, ha a paralelogramma átlói egyenlő hosszúak. Ekkor az átlók fele is egyenlő, azaz $AO = BO$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Vagyis a keresett O pontok illeszkednek az AB szakasz f felezőmerőlegesére.

Belátható, hogy az AB szakasz F felezőpontja kivételével minden pontja az f felezőmerőlegesnek megfelelő lesz. Legyen egy tetszőleges pontja f-nek O (ami nem azonos F-fel). Ekkor $AO = BO$, vagyis $AA' = BB'$ a tükrözés miatt. Ez azt jelenti, hogy $ABA'B'$ olyan négyszög, amelyben az egyenlő hosszúságú átlók felezik egymást, azaz $ABA'B'$ téglalap.

Ezzel azt is beláttuk, hogy az f egyenes F-en kívüli pontjai mind megfelelők lesznek.

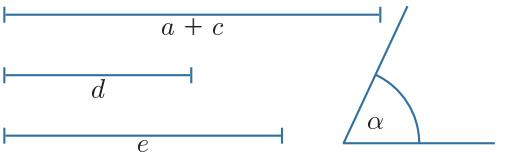
3. példa

Megadtuk a trapéz alapjainak összegét, az A csúcsból induló szár hosszát, az A csúcsból induló átló hosszát és az A csúcsból induló – hosszabbik – alap és az adott szár által bezárt szög nagyságát. Szerkesszük meg a trapézt!

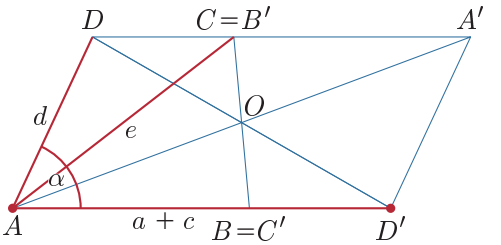
Készítsük el vázlatosan azt az ábrát, hogy a trapézt az egyik szár felezőpontjára **középpontosan tükrözzük**. Ekkor megjelenik a rajzunkon az $a + c$ hosszúságú szakasz.

2.

Adatok:



Vázlat:



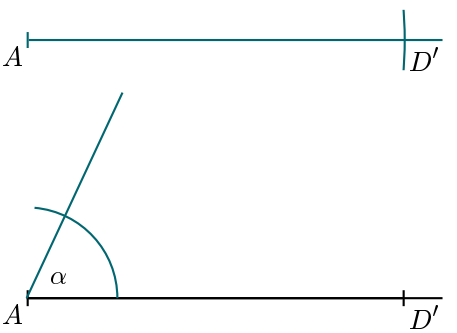
A szerkesztési vázlatrajzon célszerű csupán az adott szakaszok hosszát kifejező kisbetűket, valamint a szögek nagyságát jelentő görög betűket jelölni. Így a rajzunkon szépen láthatók az adatok. Tegyünk tömött karikát annak a szakasznak a két végére, amellyel a szerkesztést el szeretnénk kezdeni.

Tudjuk, hogy az $ABCD$ trapéz és a BC szár felezőpontjára tükrözött képe, az $A'B'C'D'$ trapéz együtt egy paralelogrammát alkot.

Szerkesztés menete:

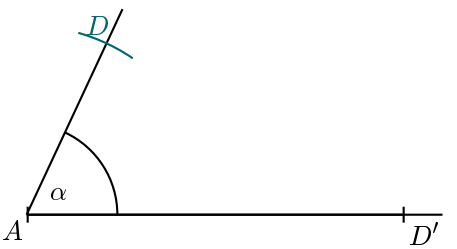
Az AD' szakasz két végére tettük a tömött karikát, így rajzolunk egy A kezdőpontú félegyenest, majd a körzőnyílásba vett $a + c$ hosszúságú szakaszt rámérjük.

Kivitelezés:



Az A pontba másoljuk az AD' szakaszra az α szöget.

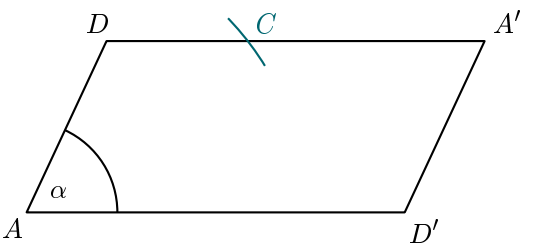
A szögszárra rámérjük az adott, d hosszúságú szakaszt. Így kapjuk a D csúcsot.



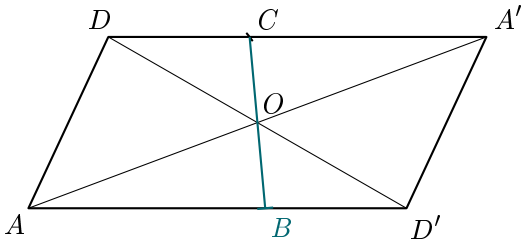
A D középpontú, $a + c$ sugarú és a D' középpontú, d sugarú körök metszéspontja lesz az A' pont.



Az A középpontú, e sugarú kör kimetszi az $A'D$ szakaszból a C pontot.



A C pontot a paralelogramma átlóinak O metszéspontjával összekötő szakasz az AD' oldalt a B csúcsban metszi, hiszen az O-ra történő középpontos tükrözéssel állítottuk elő a paralelogrammát.



Mi az előző példában megadtuk az adatokat. Ha ez nem történik meg, akkor az adatok felvétele önkényes lesz. Ilyen esetekben a feladat megoldásához hozzá tartozik a szerkeszthetőség feltételeinek vizsgálata is. A felvett adatok nem biztos, hogy meghatároznak egy trapézt. Például az e nagyon nagy, vagy túl pici nem lehet, az α csak hegyesszög lehet. Ezeket a megállapításokat most nem fogalmazzuk meg ennél pontosabban. A kivitelezésnél azonnal kiderül, ha az adatokból nem szerkeszthető meg a trapéz.

4. példa

Osztályozzuk az eddig tanult legfontosabb sokszögeket szimmetriájuk szerint!

Csak tengelyesen szimmetrikus, középpontosan nem: egyenlő szárú háromszög, deltoid, páratlan oldalú szabályos sokszög.

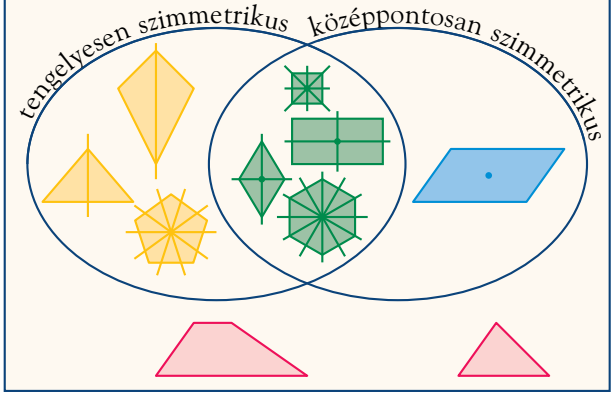
Csak középpontosan szimmetrikus, tengelyesen nem: paralelogramma.

Mindkét szimmetriával rendelkezik: téglalap, rombusz, négyzet, páros oldalú szabályos sokszög.

Egyik szimmetriával sem rendelkezik: trapéz (ha nem egyelők a szárai), háromszög (ha nem egyenlő szárú).

A környezetünkben is találunk középpontos szimmetriát. Az előző évben megfigyelhettük, hogy a tengelyes szimmetria arányosságot, kiegyensúlyozottságot sugároz. Ezt elmondhatjuk a középpontos szimmetriáról is. Bármely szimmetriával rendelkezik egy virág, élőlény, tárgy, azt képesek vagyunk megcsodálni, szépnek látni.

az eddig tanult legfontosabb sokszögek szimmetriái





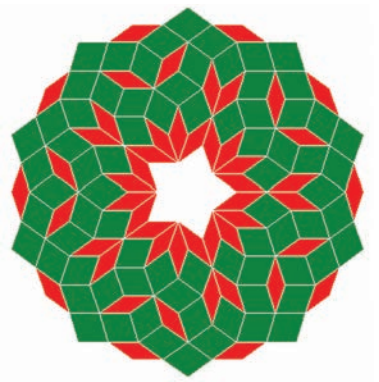




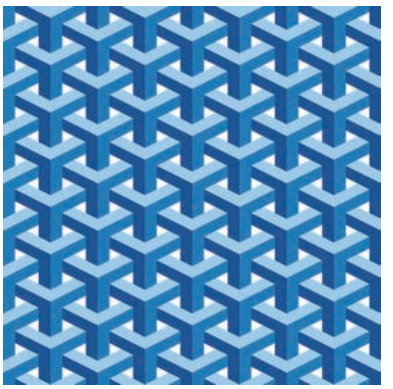




A szimmetriák jól megfigyelhetők Penrose, Escher és Vasarely alkotásain. A világhálón további képeket is találhatunk tőlük. Nézz utána, hogy kik ők!



Penrose-féle csempézés



Escher egyik képe



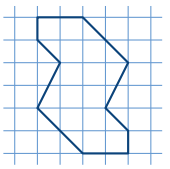
Kültéri Vasarely-alkotás Pécsett

Feladatok

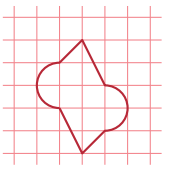
K1 Rajzolj egy hatszöget, amely középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem!

K2 Rajzold be a következő ábrák szimmetria-középpontját, ha van nekik!

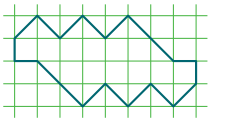
a)



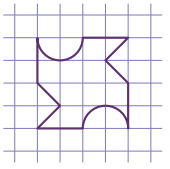
b)



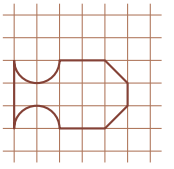
c)



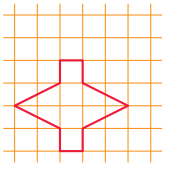
d)



e)



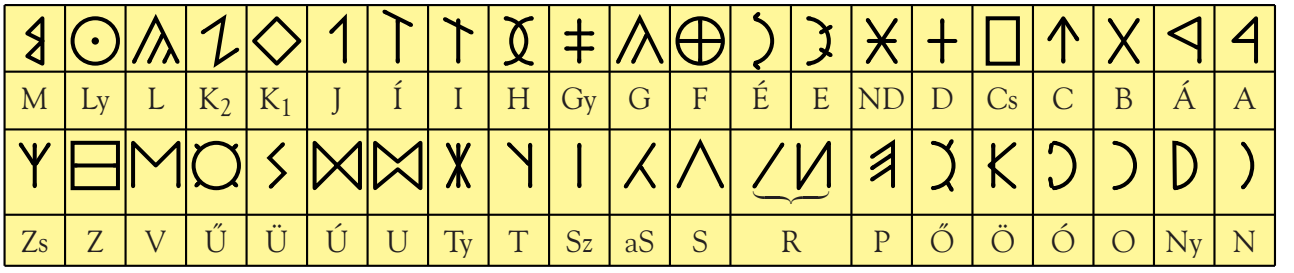
f)



K3 Keresd meg azokat a számjegyeket, amelyek lerajzolhatók középpontosan szimmetrikusan!

K4 A nyomtatott nagybetűk között keresd meg azokat, amelyek lerajzolhatók középpontosan szimmetrikusan!

K5 Az ősi magyar ábécé jelkészletét láthatjuk a következő ábrán. A rovásjelek ábécéjének persze számos – apró részletben eltérő – változata is ismert, de ezekre itt most nem térünk ki.



M	Ly	L	K_2	K_1	J	Í	I	H	Gy	G	F	É	E	ND	D	Cs	C	B	Á	A
Zs	Z	V	Ű	Ü	Ú	U	Ty	T	Sz	aS	S	R		P	Ő	Ö	Ó	O	Ny	N

a) Keresd meg azokat a jeleket, amelyek középpontosan szimmetrikusak!

b) Keresd meg azokat a jeleket, amelyek tengelyesen szimmetrikusak!

c) Keresd meg azokat a jeleket, amelyek középpontosan és tengelyesen is szimmetrikusak!

K6 Egy osztály tanulói azt a feladatot kapták, hogy körző és vonalzó segítségével készítsenek szép ábrát. Kata szeret rajzolni, így ő többet is készített, de csak olyanokat, amelyek tengelyesen és középpontosan is szimmetrikusak. A többiek nem ilyen tulajdonságú képeket készítettek. A bemutatott rajzok közül melyik Katáé?



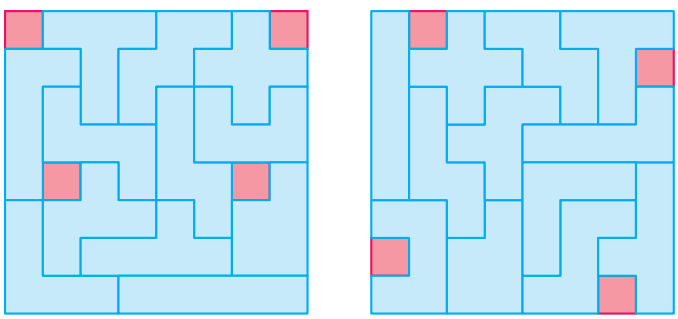
K7 Anna és Péter felváltva raknak egy-egy tízforintos érmét az asztalon fekvő írólapra. Az érmék nem lóghatnak le a papírról, és nem is fedhetik egymást. Az utolsó érmét lehelyező játékos a nyertes. Hogyan kellene Annának játszania ezt a játékot, hogy Péter ne tudjon nyerni?

E8 Már korábban megismerkedtünk a pentominó nevű játékkal. (Pentominónak nevezzük azokat a síkbeli alakzatokat, amelyek 5 db egységnyi területű négyzetből építhetők össze. A négyzetek éleik mentén illeszkednek.)

A játék 12 tagja összesen 60 kis négyzetből áll. Helyezd el ezeket a lapokat egy-egy 8×8 egységnyi négyzetből álló „sakktáblán” úgy, hogy a négy fedetlen mező

a) tengelyesen; *b)* középpontosan szimmetrikus helyzetben legyen!

Mutatunk egy-egy lehetséges megoldást. Sok megoldás van, keress továbbiakat!



Nagy számok

1. példa

A csillagászati távolságok km-ben megadva nagyon nagy – szinte kimondhatatlanul nagy – számok. Ezért erre csillagászati mértékegységet találtak ki: a fényévet. Ez az a távolság, amelyet a fény az űrben egy év alatt megtesz. Kilométerben kifejezve körülbelül: 9 460 500 000 000 km.

Próbáld meg kiolvasni!



Emlékszel még, hogy ilyen nagy számokat hogyan olvastuk ki? Az 1 000 000 000 szám az egymilliárd.

Az ezermilliárdot így mondjuk: billió. Ezért a fényév kilométerben kifejezett mértéke így is olvasható: 9 billió 460 milliárd 500 millió.

Ezt a számot nem csak kiolvasni nehéz, leírni sem könnyű. (Próbáld meg lediktálni a padtársadnak!) 9, 4, 6, 0, 5 és aztán 8 darab 0.

Azt is mondhatjuk, hogy a 94 605-öt 8-szor egymás után megszorozzuk 10-zel. Vagyis ez a szám a: $94\,605 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Jelölés

Azt, hogy egy számot önmagával szorzunk, rövidebben is jelölhetjük.

$10 \cdot 10 = 100$, ezt röviden így jelöljük: 10^2, így olvassuk ki: 10 a négyzeten vagy 10 a másodikon.

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$, rövid jelöléssel: 10^3, így olvassuk ki: 10 a köbön vagy 10 a harmadikon.

A 10-et szoroztuk önmagával: az első esetben 2 tényező, a második esetben 3 tényező szerepel.

Ha egy számot többször **önmagával** szorzunk, azt röviden úgy jelöljük, hogy a szám fölé jobbra kisebb számmal leírjuk a tényezők számát. Ezt a felírást **hatvány alaknak** nevezzük.

A számot, amelyet szorzunk, **alapnak**, a fölé írt kis számot **kitevőnek** vagy **hatványkitevőnek** nevezzük. A felírásnak **hatvány alak** vagy **hatvány** a neve.

kitevő

10^3

alap

hatvány alak

Például:

10^2: 10 a négyzeten, másodikon; 10 négyzete, második hatványa; $(10 \cdot 10)$

6^3: 6 a köbön, harmadikon; 6 köbe, harmadik hatványa; $(6 \cdot 6 \cdot 6)$

2^4: 2 a negyediken; 2 negyedik hatványa; $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$

1^{17}: 1 a tizenhetediken; 1 tizenhetedik hatványa;

$(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)$

A 9 460 500 000 000 számot így is írhatjuk: $94\,605 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 94\,605 \cdot 10^8$, amit így olvasunk ki: 94 605-ször 10 a 8-adikon.

Egy számot tekinthetünk úgy is, mintha önmaga egyszer vett szorzata lenne, ezért a 10, 2, 6 stb. helyett írhatjuk például azt, hogy 10^1; 2^1; 6^1. Így mondjuk: 6 az első hatványon vagy 6 az elsőn.

2. példa

Írjuk fel a 10-es számrendszer helyiértékeit 10 hatványaiként!
Írjuk fel a 2345-öt számjegyei valódi értékeinek az összegeként!

A 10-es számrendszer helyiértékei: 1; $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; $10\,000 = 10^4$ stb.

Az egyesek helyiértékének megfelelő 1-esre nem találtunk megfelelő 10 hatványt. Hacsak nem vesszük tekintetbe, hogy a nagyobb helyi értékektől a kisebbek felé haladva mindig 1-gyel csökkent 10 kitevője. Eszerint az 1 lehetne 10^0. Ennek eddig nem adtunk értelmet, de megállapodhatunk:

Megállapodás

Legyen $10^0 = 1$. Általában megállapodunk: egy pozitív egész szám nulladik hatványa 1.

Ekkor $2345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

Emlékszel?

Korábban, a természetes számok körében tanultunk a prímszámokról: a prímszámoknak pontosan két különböző természetes szám osztójuk van, az 1 és önmaguk.
Azt is tanultuk, hogy az 1-nél nagyobb egész számokat fel lehet bontani prímszámok szorzatára. (A felbontás a prímszámok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.)

3. példa

A 48 prímtényezős felbontása: $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Ebben 4 darab 2-es szorzótényező szerepel. Ezt is felírhatjuk rövidebben a hatvány alak segítségével: $2^4 \cdot 3$; kiolvasva: 2 a negyedikenszer 3.
Írd fel a 36 prímtényezős felbontását hatvány alak alkalmazásával!

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$.

A természetes számok prímtényezős felbontását általában hatvány alakban szoktuk megadni.

Feladatok

A1 Írd fel 10 hatványaiként a következő számokat!
a) 1000; *b)* 10 000; *c)* 100 000;
d) 100; *e)* 1 000 000; *f)* 10 000 000.

A2 Írd fel prímtényezők szorzataként hatvány alak alkalmazásával a következő számokat!
a) 4; *b)* 16; *c)* 64;
d) 9; *e)* 81; *f)* 27;
g) 243; *h)* 1024; *i)* 625.

K3 Írd fel a következő számok prímtényezős felbontását a hatvány alak segítségével!
a) 54; *b)* 160; *c)* 128;
d) 1260; *e)* 10 000; *f)* 64 000.

A4 Írd fel a következő számok prímtényezős felbontását a hatvány alak segítségével!
a) 2; *b)* 4; *c)* 8;
d) 16; *e)* 32; *f)* 64;
g) 128; *h)* 256; *i)* 512;
j) 1024; *k)* 2048; *l)* 4096.

A5 Írd fel a következő számok prímtényezős felbontását a hatvány alak segítségével!
a) 216; *b)* 49; *c)* 36;
d) 1000; *e)* 1296; *f)* 625.

K6 A lottóban 90 számból húznak ki 5-öt. Kiszámítható, hogy a biztos 5-találathoz pontosan 43 949 868 különbözőképpen kitöltött szelvény szükséges. Kerekítsd millióra ezt a számot, és aztán írd fel hatvány alak segítségével!

A7 Mely számok prímtényezős alakját írtuk fel?
a) 2^3; *b)* 3^3; *c)* $2^2 \cdot 3^3$;
d) 4^2; *e)* $2^3 \cdot 3^2$; *f)* 2^{11}.

A8 Mely számokat írtuk fel?
a) 1^5; *b)* 5^1; *c)* 0^2;
d) 3^6; *e)* 4^2; *f)* 2^4;
g) 7^2; *h)* 6^3; *i)* 3^4;
j) $2^2 \cdot 3^2$; *k)* $6^2 \cdot 1^{10}$; *l)* 1^{1000}.

Mi a neve? (Olvasmány)

1. példa

Egy régi történet szerint egy hindu uralkodónak annyira megtetszett a sakkjáték, hogy feltalálóját meg akarta jutalmazni. Megkérdezte hát, mit kér ajándékul. A feltaláló ezt kérte: a sakktábla első mezőjéért 1 búzaszemet, a másodikért 2-t, a harmadikért 4-et, a negyedikért 8-at, az ötödikért 16-ot, a hatodikért 32-t és így tovább; mindegyikért kétszer annyit, mint az előzőért.

Az uralkodó a kívánságot igen csekélynek gondolta. Azonban mégsem tudta teljesíteni. Vajon miért nem?



Kezdjük el szépen sorban kiszámítani, hogy az egyes mezőkért hány búzaszemet kellett volna kapnia! Előbb-utóbb olyan nagy számot kellene leírnunk, amely már nem fér bele a mezőbe. Írjuk ehelyett a 2-esek szorzatát a most tanult rövidebb jelöléssel, hatvány alakban.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	256	512	1024	2048	4096	8192
16 384	32 768						

1	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	...						

A 64-edik mezőre 2^{63} kerül. Hiába tudta esetleg az uralkodó, hogy a búzaszemek száma összesen $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$, arra nem gondolt, hogy ez milyen nagy szám: 18 446 744 073 709 551 615.

Ha minden búzaszem tömege csak $\frac{1}{4}$ g lenne, akkor ez a mennyiség körülbelül $45 \cdot 10^{11}$ tonna.

Nézz utána, hogy mennyi Magyarország éves búzatermése! Megközelítőleg hány évi termés lenne ez a búzamennyiség?

Fontos érdekesség



A számítógép 2-es számrendszerben dolgozik, mi viszont a 10-es számrendszerben gondolkodunk. Nehéz állandóan átváltogatni a számokat egyik számrendszerből a másikba, ezért ezt találták ki: $2^{10} = 1024 \approx 1000$, ezért amikor mértékegységként szerepel, a 2^{10}-t ezernek, azaz kilónak fogják nevezni. (Ahogyan a méter esetében is.)

Például az 1 kilobyte (1 kB) nem 1000 byte (bájt), hanem 1 kB = 1 kilobyte = 1024 byte.

Bár a mega jelentése a mértékegységekben millió, vagyis 10^6, az 1 MB nem 1 000 000 byte, hanem 1 MB = 1 megabyte = $1024 \cdot 1024$ byte = 1 048 576 byte.

A $2345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. A 2-es számrendszerben felírva:
$2345 = 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0$, azaz $2345 = 100100101001_2$.

A jobb alsó sarokban [úgynevezett *indexben*] szereplő 2-es a számrendszerre utal.

$2345 = 1 \cdot 3^7 + 0 \cdot 3^6 + 0 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 10012212_3$.

Hogyan olvassuk ki? (Olvasmány)

Nagyon nagy számokat már régóta ismernek, használnak. Ezek azonban csak ritkán fordulnak elő mindennapi életünkben. Sokszor csak rövidítve írjuk le, rövidítve olvassuk ki őket. Ezért a nagy számok neveit csak kevesen ismerik. Nem is teljesen egységes a használatuk. Mégis érdemes megismerkedni az elnevezések logikájával.

Leíráskor az egész számokat az egyestől számítva 3-as számjegycsoportokra szokás tagolni, hogy egyszerűbb legyen felismerni az egyes helyiértékeket.

Kiolvasáskor 6 helyiértékenként változik a számok előtagja.

Az első 6 helyiértéket követő csoport neve a milliós. Ezen belül az első 3 helyiértéke a milliós, a következő 3 helyiértéke a milliárdos.

tízkvintillió	kvintillió	százerkvadrillió	tízerkvadrillió	ezerkvadrillió	százkvadrillió	tízkvadrillió	kvadrillió	százertrillió	tízertrillió	ezertrillió	száztrillió	tíztrillió	trillió	százerbillió vagy százbilliárd	tízerbillió vagy tízbilliárd	ezerbillió vagy billiárd	százbillió	tízbillió	billió	százermillió vagy százmilliárd	tízermillió vagy tízmilliárd	ezermillió vagy milliárd	százmillió	tízmillió	millió	százezer	tízezer	ezer	száz	tíz	egy
																													5	3	6
																		9	0	4	6	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0
												1	8	4	4	6	7	4	4	0	7	3	7	0	9	5	5	1	6	1	5
		kvadrilliók						trilliók						billiók						milliók											

A köznyelvben csak ezeket a helyiértékeket használják.

Az első 6 helyiértéket követő 6-os csoport neve a milliós,

a második 6-ot követő csoport a billiós,

a harmadikat követő a trilliós,

a negyediket követő a kvadrilliós,

az ötödiket követő a kvintilliós,

a hatodikat követő a szeksztilliós,

a hetediket követő a szeptilliós,

a nyolcadikat követő az oktilliós,

a kilencediket követő a nonilliós,

a tizediket követő az decilliós.

⋮

Nem ismerős? A mi-, bi-, tri-, kvadr-, kvint-, szekszt-, szept-, okt-, non-, dec- előtagokat máshol, máskor is hallhattad. Görög eredetűek.

A bicikli, a tricikli szavakat már nyilván ismered. A kvartett, kvintett, szekszteett zenei előadók csoportjának létszámára utal.

A szept-, okt-, dec- a hónapok neveiből lehet ismerős. A jelentésük 7, 8, illetve 10, mégis a 9., 10. és 12. hónapok nevei.

Ennek az az oka, hogy a hónapok nevét a Julianus-naptárból vettük át, amelyben márciussal kezdődött az év, és februárral ért véget. Annak idején a szeptember a hetedik, október a nyolcadik, december a tizedik hónap volt. Régen a szökőnap az év utolsó napja volt!

A búzaszemek száma 18 446 744 073 709 551 615. Ki tudod olvasni?

18 446 744 073 709 551 615 kiolvasva:

18 trillió 446 billiárd 744 billió 073 milliárd 709 millió 551 ezer 615.

Mit gondolsz, miért Oktogon a fővárosban található, a képen is látható térnek a neve?



Feladatok

A1 Mi a neve ezeknek a hatvány alakban írt számoknak?

a) 10^9; *b)* 10^{10}; *c)* 10^{13};

d) 10^{16}; *e)* 10^{17}; *f)* 10^{18};

g) 10^{21}; *h)* 10^{26}; *i)* 10^{40}.

A2 Nevezd meg, hogy az előző feladatban szereplő kifejezésekben melyik az alap, melyik a kitevő!

K3 Olvasd ki ezeket a számokat! Azután írd helyiérték-táblázatba őket!

a) 2 343 209 734 685 467;

b) 9 012 180 454 031 589 050 000 000;

c) 604 553 360 129 040 000 000 000 000;

d) 3 645 301 003 573 275 900 000.

K4 Melyik a legnagyobb szám, amelynek ki tudod mondani a nevét?

K5 Hány számjegyből áll az a szám, amelynek a neve így kezdődik:

a) 10 trillió; *b)* 7 kvadrillió;

c) 1743 kvintillió; *d)* 1 decillió?

K6 Írd fel az alábbi számokat!

a) $523 \cdot 10^7$; *b)* $23 \cdot 10^{11}$;

c) $22\,151 \cdot 10^1$; *d)* $319 \cdot 10^{18}$.

E7 $2^3 \neq 3^2$, mert $8 \neq 9$. $5^3 \neq 3^5$, mert $125 \neq 243$. Az alap és a kitevő általában nem felcserélhető.

Keress olyan egymástól különböző pozitív egész számokat, amelyekre mindegy, hogy melyik az alap, melyik a kitevő, ugyanazt az értéket kapjuk!

Egy szám többféle alakja – a normálalak

1. példa

Írd be a hiányzó kitevőket!

$$3\,1\,4\,1\,5\,9\,0\,0 = 3\,1\,4\,1\,5\,9\,0 \cdot 10^{1} = 3\,1\,4\,1\,5\,9 \cdot 10^{\square} = 3\,1\,4\,1\,5,9 \cdot 10^{\square} = 3\,1\,4\,1,5\,9 \cdot 10^{\square} = 3\,1\,4,1\,5\,9 \cdot 10^{\square} = 3\,1,4\,1\,5\,9 \cdot 10^{\square} = 3,1\,4\,1\,5\,9 \cdot 10^{\square} = 0,3\,1\,4\,1\,5\,9 \cdot 10^{\square} = 0,0\,3\,1\,4\,1\,5\,9 \cdot 10^{\square} = 0,0\,0\,3\,1\,4\,1\,5\,9 \cdot 10^{\square}$$

A kiinduló 31 415 900 számnak minden újabb sorban a tizedrészét írjuk le először, ezért minden sorban 10-szer többel kell megszoroznunk ahhoz, hogy ugyanazt a szorzatot kapjuk. Azaz minden következő sorban a 10-nek 1-gyel nagyobb hatványát kell beírni.

Tehát a kitevők egyesével növekednek.

2. példa

Keresd meg, hogy az alábbi számok közül melyek egyenlőek az $1{,}254 \cdot 10^4$ számmal!

$a = 12{,}54 \cdot 10^3$; $b = 12{,}54 \cdot 10^5$; $c = 125{,}4 \cdot 10^3$; $d = 1254 \cdot 10^5$;

$e = 1254 \cdot 10^4$; $f = 1{,}254 \cdot 10^3$; $g = 0{,}1254 \cdot 10^5$; $h = 1{,}254 \cdot 10^5$.

Ha elvégezzük a szorzásokat, akkor azt kapjuk, hogy az eredeti szám 12 540,

$a = 12\,540$; $b = 1\,254\,000$; $c = 125\,400$; $d = 125\,400\,000$;

$e = 12\,540\,000$; $f = 1254$; $g = 12\,540$; $h = 125\,400$.

Eszerint a és g egyenlő 12 540-nel.

Másképp is gondolkodhatunk. Minden szám az 1, 2, 5, 4 számjegyekkel kezdődik, ezért mindegyik felírható úgy, hogy az 1,254 számot megszorozzuk 10 valamilyen hatványával.

$a = 1{,}254 \cdot 10^4$; $b = 1{,}254 \cdot 10^6$; $c = 1{,}254 \cdot 10^5$; $d = 1{,}254 \cdot 10^8$;

$e = 1{,}254 \cdot 10^7$; $f = 1{,}254 \cdot 10^3$; $g = 1{,}254 \cdot 10^4$; $h = 1{,}254 \cdot 10^5$.

Ebből a felírásból is látható, hogy a és g egyenlő $1{,}254 \cdot 10^4$-nel.

3. példa

Melyek egyenlők az alábbi számok közül?

$a = 60{,}22 \cdot 10^{26}$; $b = 60{,}22 \cdot 10^{28}$; $c = 0{,}6022 \cdot 10^{24}$; $d = 6{,}022 \cdot 10^{22}$; $e = 6{,}022 \cdot 10^{23}$;

$f = 6{,}022 \cdot 10^{20}$; $g = 60{,}22 \cdot 10^{23}$; $h = 602{,}2 \cdot 10^{25}$; $i = 602{,}2 \cdot 10^{23}$; $j = 0{,}6022 \cdot 10^{27}$.

Ezeket a számokat ebben a felírásban nehéz összehasonlítani. Ahhoz pedig túl nagyok, hogy beszorozzuk őket. Mindegyik a 6, 0, 2, 2 számjegyekkel kezdődik, ezért mindegyik $6{,}022 \cdot 10^{\square}$ alakra hozható.

$a = 6{,}022 \cdot 10^{27}$; $b = 6{,}022 \cdot 10^{29}$; $c = 6{,}022 \cdot 10^{23}$; $d = 6{,}022 \cdot 10^{22}$; $e = 6{,}022 \cdot 10^{23}$;

$f = 6{,}022 \cdot 10^{20}$; $g = 6{,}022 \cdot 10^{24}$; $h = 6{,}022 \cdot 10^{27}$; $i = 6{,}022 \cdot 10^{25}$; $j = 6{,}022 \cdot 10^{26}$.

Így már látszik, hogy $a = h$ és $c = e$.

A $6{,}022 \cdot 10^{23}$ a kémiában az Avogadro-állandó mérőszámának egy közelítése.

3.

Fontos tudnivaló

A számoknak azt a felírását, amelyben egy 1 és 10 közé eső számot a 10 egy hatványával szorzunk, **normálalaknak** nevezzük.

Például az Avogadro-állandót is normálalakban szokás megadni: $6{,}022 \cdot 10^{23}$.

Számoláshoz általában egy ennél is rövidebb közelítő értékét használjuk, a $6 \cdot 10^{23}$-t.

Fontos érdekesség

Láttuk, hogy amikor a normálalakban megadott számot visszaalakítottuk, akkor a tizedesvesszőt annyival *vittük jobbra*, amennyi a 10 hatványkitevője. Például $1{,}72 \cdot 10^3$ esetén a tizedesvesszőt 3-mal. Mivel azonban akkor már egész számot kapunk, a tizedesvesszőt nem írjuk ki, sőt egy helyiértékpótló 0 kerül a 172 után: 1720.

Hasonlóan gondolkodva visszafelé, a 0,0031 normálalakja $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ lehet. A -3 kitevővel azt fejezzük ki, hogy most a tizedesvesszőt *balra vittük* hárommal. Erről a következő években még részletesebben is fogunk tanulni!

4. példa

Adjuk meg normálalakban az 1276 és a 419 szorzatát! (A normálalakban az 1 és 10 közé eső szám legyen századokra kerekítve!) A szorzás elvégzése előtt becsüld meg a szorzat nagyságrendjét! Hány jegyű lesz ez a szorzat?

Az első szám körülbelül 1,2-nek az *ezerszerese*, a 419 pedig körülbelül a 4-nek a *százszorosa*, ezért a szorzat várhatóan hatjegyű lesz. Kiszámítva a szorzatot 534 644 adódik.

A kerekített normálalakok: $1{,}28 \cdot 10^3$ és $4{,}19 \cdot 10^2$. A szorzatuk: $5{,}3632 \cdot 10^5 \approx 5{,}36 \cdot 10^5$.

Feladatok

A1 Írd át normálalakba a következő számokat!

a) 119,453; *b)* 10,132; *c)* 118,093; *d)* 10,288; *e)* 10,395; *f)* 31,067;
g) 28,129; *h)* 81678,104; *i)* 10,687; *j)* 480,077; *k)* 749,136; *l)* 18,681.

A2 Írd fel a következő számok normálalakját!

a) $58 \cdot 10^4$; *b)* $44 \cdot 10^6$; *c)* $9 \cdot 10^1$; *d)* $473 \cdot 10^5$; *e)* $13 \cdot 10^5$; *f)* $321 \cdot 10^2$;
g) $7 \cdot 10^2$; *h)* $0{,}25 \cdot 10^5$; *i)* $48 \cdot 10^1$; *j)* $66 \cdot 10^6$; *k)* $46 \cdot 10^5$; *l)* $4 \cdot 10^6$.

K3 Írd fel, mely számok normálalakját adtuk meg az alábbiakban!

a) $5{,}2744 \cdot 10^5$; *b)* $9{,}8572 \cdot 10^3$; *c)* $7{,}9024 \cdot 10^4$; *d)* $6{,}5024 \cdot 10^6$;

e) $4{,}6477 \cdot 10^1$; *f)* $9{,}6566 \cdot 10^4$; *g)* $5{,}052 \cdot 10^5$; *h)* $1{,}4444 \cdot 10^2$;

i) $4{,}4869 \cdot 10^2$; *j)* $6{,}4612 \cdot 10^4$; *k)* $1{,}5605 \cdot 10^4$; *l)* $9{,}4292 \cdot 10^3$.

K4 Írd át normálalakba a következő számokat, és állítsd őket nagyság szerint növekvő sorrendbe!

$a = 779\,476{,}4 \cdot 10^{11}$; $b = 7794{,}764 \cdot 10^3$; $c = 779{,}4764 \cdot 10^3$; $d = 77{,}947\,64 \cdot 10^2$;

$e = 77{,}947\,64 \cdot 10^7$; $f = 779\,476{,}4 \cdot 10^3$; $g = 7{,}794\,764 \cdot 10^8$; $h = 0{,}779\,476 \cdot 10^8$;

$i = 7794{,}764 \cdot 10^5$; $j = 7{,}794\,764 \cdot 10^5$; $k = 77{,}94764 \cdot 10^9$; $l = 7{,}794\,764 \cdot 10^9$.

K5 Add meg normálalakban a következő számpárok szorzatát! A normálalakban az 1 és 10 közé eső szám legyen tizedekre kerekítve!

a) 12 000 és 31 200; *b)* 4550 és 788 900.

A hatványozás azonosságai

1. példa

$4 = 2^2$, $64 = 2^6$. Fejezd ki a $4 \cdot 64$-et 2 hatványaként!

$$4 = 2^2;\ 64 = 2^6;\ 4 \cdot 64 = 2^2 \cdot 2^6 = \overbrace{\underbrace{2 \cdot 2}_{2\text{ db}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6\text{ db}}}^{(2+6)\text{ db}} = 2^{2+6} = 2^8.$$

$2^2 \cdot 2^6 = 2^{2+6} = 2^8$.

$81 = 3^4$, $27 = 3^3$. Fejezd ki a $81 \cdot 27$-et 3 hatványaként!

$$81 = 3^4;\ 27 = 3^3;\ 81 \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\text{ db}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3\text{ db}}}^{(4+3)\text{ db}} = 2^{3+4} = 3^7.$$

$3^4 \cdot 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$.

$25 = 5^2$, $3125 = 5^4$. Fejezd ki a $25 \cdot 3125$-öt 5 hatványaként!

$$25 = 5^2;\ 3125 = 5^5;\ 25 \cdot 3125 = 5^2 \cdot 5^5 = \overbrace{\underbrace{5 \cdot 5}_{2\text{ db}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5\text{ db}}}^{(2+5)\text{ db}} = 5^{2+5} = 5^7.$$

$5^2 \cdot 5^5 = 5^{2+5} = 5^7$.

Mind a három esetben azt tapasztaltuk, hogy a két szám szorzatában annyi egyenlő tényező szerepel, amennyi a két számban együttesen.

2. példa

$8 = 2^3$. Írd fel 8^2-t 2 hatványaként!

$8 = 2^3$, ezért $8^2 = (2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = \overbrace{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ db}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ db}}}^{2\text{-szer}} = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$.

$16 = 2^4$. Írd fel 16^2-t 2 hatványaként!

$16^2 = (2^4)^2 = 2^4 \cdot 2^4 \overbrace{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ db}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ db}}}^{2\text{-szer}} = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$.

$27 = 3^3$. Írd fel 27^3-t 3 hatványaként!

$27^3 = (3^3)^3 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = \overbrace{\underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{3 \text{ db}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{3 \text{ db}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{3 \text{ db}}}^{3\text{-szor}} = 3^{3 \cdot 3} = 3^9$.

$25 = 5^2$. Írd fel 25^7-t 5 hatványaként!

$25^7 = (5^2)^7 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \overbrace{\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ db}}}^{7\text{-szer}} =$

$= 5^{7 \cdot 2} = 5^{14}$.

Azt tapasztaltuk, hogy ha egy hatvány hatványát vesszük, akkor ismét az alap egy hatványát kapjuk. A kapott hatvány kitevője a két kitevő szorzata.

Számítsd ki, mennyi $2^{(3^2)}$ és $(2^3)^2$!

$3^2 = 9$, tehát $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$. $2^3 = 8$, ezért $(2^3)^2 = 8^2 = 64$.

$512 \neq 64$, és általában sem mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a hatványozást. A sorrendet itt is zárójellel kell kiemelni. Ha mégis hiányzik a zárójel, akkor **megállapodás szerint a kitevőben szereplő hatványozást kell először elvégezni:** 2^{3^2} ezt jelenti: $2^{(3^2)}$.

3. példa

$10 = 2 \cdot 5$. Írd fel 10^2-t 2 és 5 hatványainak szorzataként!

$10^2 = (2 \cdot 5)^2 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$.

$10 = 2 \cdot 5$. Írd fel 10^3-t 2 és 5 hatványainak szorzataként!

$10^3 = (2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$.

$10 = 2 \cdot 5$. Írd fel 10^4-t 2 és 5 hatványainak szorzataként!

$10^4 = (2 \cdot 5)^4 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^4$.

$72 = 2^3 \cdot 3^2$. Írd fel 72^3-t 2^3 és 3^2 hatványainak szorzataként!

$72^3 = \left(2^3 \cdot 3^2\right)^3 = (2^3)^3 \cdot (3^2)^3$.

Azt tapasztaltuk, hogy két szám szorzatának valamely hatványát a tényezők ugyanolyan hatványának szorzataként is megkaphatjuk.

3.

4. példa

Ellenőrizzük, igaz-e a megfigyelésünk például 50^4-re!

Például $50 = 5 \cdot 10$. Írjuk fel 50^4-t 5 és 10 egy hatványának szorzataként!

$50^4 = (5 \cdot 10)^4 = 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 5^4 \cdot 10^4$.

Vagy: $50 = 2 \cdot 25$. $50^4 = (2 \cdot 25)^4 = (2 \cdot 25) \cdot (2 \cdot 25) \cdot (2 \cdot 25) \cdot (2 \cdot 25) = 2^4 \cdot 25^4$.

Feladatok

A1 Végezd el a szorzást!

a) $5^3 \cdot 5^1$; *b)* $10^6 \cdot 10^2$; *c)* $25^2 \cdot 25^7$; *d)* $4^4 \cdot 4^4$; *e)* $7^1 \cdot 7^1$; *f)* $97^4 \cdot 97^{11}$.

A2 Írd fel egyetlen szám hatvány alakjaként a szorzatokat!

a) $2^3 \cdot 2^3$; *b)* $4^2 \cdot 4^1$; *c)* $3^3 \cdot 3^{10}$; *d)* $4^2 \cdot 4^4$; *e)* $6^3 \cdot 6^6$; *f)* $10^5 \cdot 10^2$.

K3 Számítsd ki!

a) $5^2 \cdot 4^2$; *b)* $3^2 \cdot 10^2$; *c)* $6^3 \cdot 5^3$; *d)* $2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4$; *e)* $2^{10} \cdot 5^{10}$; *f)* $5^4 \cdot 20^4$.

K4 Számítsd ki!

a) $(2 \cdot 5)^2$; *b)* $2^2 \cdot 5^2$; *c)* $(2 \cdot 5)^4$; *d)* $4^2 \cdot 5^4$; *e)* $2^5 \cdot 5^2$; *f)* $2^5 \cdot 5^7$.

K5 Az alábbiakban szorzat alakban adunk meg számokat. Írd fel a prímtényezős felbontásukat hatvány alak alkalmazásával!

a) $4^2 \cdot 9^3$; *b)* $3^2 \cdot 6$; *c)* $3^2 \cdot 10^3$; *d)* $12^4 \cdot 10^2$; *e)* $5^2 \cdot 6^2$; *f)* $10^7 \cdot 7^{10}$.

E6 Írd be a hiányzó számokat a kitevőkbe!

a) $2^{\square} \cdot 5^2 = 100$; *b)* $3^{\square} \cdot 2^2 = 12$;

c) $6^{\square} \cdot 5^2 = 900$; *d)* $10^3 \cdot 5^{\square} = 5000$;

e) $7^2 \cdot 2^{\square} = 98$; *f)* $10^2 \cdot 2^{\square} = 2^5 \cdot 5^{\square}$.

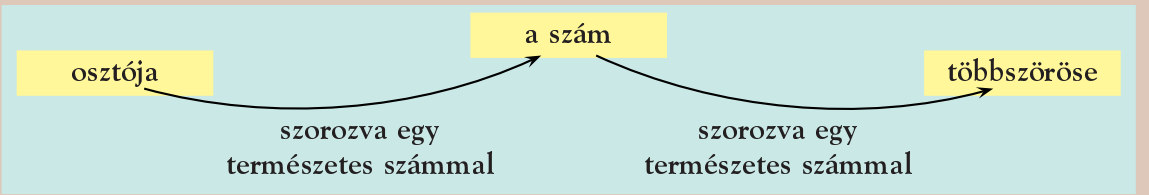
Oszthatóság és hatványozás

Emlékszel még?

A **természetes számok** körében beszéltünk az oszthatóságról.

Ha egy természetes számot megszorzunk egy természetes számmal, akkor a szám egy többszörösét kapjuk.

Minden természetes szám osztója a saját többszöröseinek.



Többszörösök, osztók

1. példa

Mely számok többszörösei a 6-nak az alábbiak közül?

$a = 2^3 \cdot 3$; $b = 2 \cdot 5^3$; $c = 3^2$; $d = 2^2 \cdot 3^3$; $e = 2^3 \cdot 3^2$; $f = 3^2 \cdot 7^3$; $5^2 \cdot 7^3$.

$6 = 2 \cdot 3$, ezért azt kell megvizsgálnunk, hogy a számok felírhatók-e $2 \cdot 3$ többszöröseként.

$a = 2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2 = (2 \cdot 3) \cdot 2^2$; a többszöröse a $2 \cdot 3 = 6$-nak. — (2) · 2 · 2 · (3)

$b = 2 \cdot 5^3$; nem szerepel benne a 3, ezért nem is többszöröse a 3-nak. Így 6-nak sem többszöröse. — (2) · 5 · 5 · 5 (3)

$c = 3^2$; nem szerepel benne a 2, ezért nem is többszöröse a 2-nek. Így 6-nak sem többszöröse. — (3) · 3 (2)

$d = 2^2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 3^2$; d többszöröse a $2 \cdot 3 = 6$-nak. — (2) · 2 · (3) · 3 · 3

$e = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot 2^2 \cdot 3$; e többszöröse a $2 \cdot 3 = 6$-nak. — (2) · 2 · 2 · (3) · 3

$f = 3^2 \cdot 7^3$; nem szerepel benne a 2-es prímtényező, nem lehet 6 többszöröse. — (3) · 3 · 7 · 7 · 7 (2)

$g = 5^2 \cdot 7^3$; nem szerepel benne sem a 2-es, sem a 3-as prímtényezőként, nem többszöröse sem a 2-nek, sem a 3-nak. Tehát a 6-nak sem többszöröse. — 5 · 5 · 7 · 7 · 7 (2) · (3)

2. példa

Milyen prímtényezőkkel szorozzuk az $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ számot ahhoz, hogy biztosan osztható legyen

a) 10-zel; *b)* 100-zal; *c)* 180-nal?

a) $10 = 2 \cdot 5$. $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Nem kell semmivel sem kiegészíteni n-et, mert n már így is többszöröse a 10-nek. Bármivel is szorozzuk meg, akkor is 10 többszörösét kapjuk.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

b) $100 = 2^2 \cdot 5^2$. $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Szerepel n-ben két 2-es tényező, de 5-ösből csak egy darab van. Ha megszorozzuk még 5-tel: $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 5^2) \cdot 2 \cdot 3$, akkor 100 többszörösét kapjuk.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

A $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ számot még más számmal is megszorozhatjuk, akkor is 100 többszöröse lesz.

c) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Eggyel kevesebb 3-as tényező szerepel n-ben, mint amennyi szükséges ahhoz, hogy kiemelhető legyen belőle a 180, ezért megszorozzuk 3-mal: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5) \cdot 2$.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$

A $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ számot még más számmal is megszorozhatjuk, akkor is 180 többszöröse lesz.

Fontos tudnivaló

Egy szám többszöröseinek a prímtényezős felbontásában minden olyan prímtényező megtalálható, amelyik a számban is szerepel.

A többszörösben minden prímtényezőből legalább annyi szerepel, mint az eredeti számban.

3. példa

Döntsd el, hogy az alábbi számok közül melyek osztói a $45 = 3^2 \cdot 5$-nek!

$2^2 \cdot 3$; 3^3; $3 \cdot 5^2$; $3^2 \cdot 5$; $3 \cdot 5$.

A 45 többszöröse az osztóinak, ezért az osztók prímtényezős felírásában *csak olyan és csak annyi* prímtényező szerepelhet, amely és ahány a 45 prímtényezős felírásában is előfordul.

$2^2 \cdot 3$-ban szerepel a 2, tehát ez a szám nem lehet osztója a 45-nek. $3 \cdot 3 \cdot 5$ $2 \cdot 2$

3^3-ban túl sok 3-as szerepel, ez sem osztója 45-nek. $3 \cdot 3 \cdot 5$ 3

$3 \cdot 5^2$-ben az 5-ösből van túl sok, ez sem osztója 45-nek. $3 \cdot 3 \cdot 5$ 5

$3^2 \cdot 5$ és $3 \cdot 5$ prímtényezői mind előfordulnak a 45 felírásában is, tehát ezek a számok 45 osztói. $3^2 \cdot 5 = 45$; $3 \cdot 5 = 15$. $3 \cdot 3 \cdot 5$ $3 \cdot 3 \cdot 5$

Fontos tudnivaló

Egy szám osztói prímtényezős felbontásában **csak olyan és azokból is legfeljebb annyi** prímtényező szerepelhet, amely és ahány a szám prímtényezős felírásában is előfordul.

4. példa

Döntsd el, hogy az 1; 2; 3; 8; 15; 16; 21 számok közül melyek **nem** osztói a $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$-nek!

1-gyel minden szám osztható.

A többi számnak írjuk fel a prímtényezős felbontását! Döntsük el, hogy melyek prímtényezői szerepelnek a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ szám prímtényezői között!

$2 = 2$; $3 = 3$; $8 = 2^3$;

$15 = 3 \cdot 5$; $16 = 2^4$; $21 = 3 \cdot 7$.

A prímtényezős felbontásokból leolvasható, hogy $16 = 2^4$ nem osztója $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$-nek, mert túl sok benne a 2-es prímtényező; $21 = 3 \cdot 7$, nem osztója $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$-nek, mert szerepel benne egy 7-es.

3.

Feladatok

K1 *a)* Többszöröse-e 20-nak a $2^3 \cdot 5$ szorzat?

b) Többszöröse-e 15-nek a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$?

c) Többszöröse-e 12-nek a $2^8 \cdot 5 \cdot 7$?

d) Többszöröse-e 24-nek a $2^2 \cdot 3^3$?

e) Többszöröse-e 180-nak a $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$?

K2 *a)* Osztható-e 16-tal a $2^3 \cdot 5$ szorzat?

b) Osztható-e 18-cal a $2^3 \cdot 3^2$?

c) Osztható-e 12-vel a $2^4 \cdot 5$?

d) Osztható-e 24-gyel a $2^2 \cdot 3^3$?

e) Osztható-e 150-nel a $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$?

K3 *a)* Milyen prímtényezőkkel szorozzuk meg a $3^4 \cdot 7^2 \cdot 5$ szorzatot, hogy biztosan osztható legyen 10-zel?

b) Milyen prímtényezőkkel szorozzuk meg a $2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 5$ szorzatot, hogy biztosan osztható legyen 60-nal?

c) Milyen prímtényezőkkel szorozzuk meg a $2^2 \cdot 7^2 \cdot 5$ szorzatot, hogy biztosan osztható legyen 100-zal?

d) Milyen prímtényezőkkel szorozzuk meg a $2 \cdot 5^2 \cdot 11$ szorzatot, hogy biztosan osztható legyen 20-szal?

e) Milyen prímtényezőkkel szorozzuk meg a $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ szorzatot, hogy biztosan osztható legyen 120-szal?

K4 Milyen prímtényezőkkel kell megszorozni a $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ prímtényezős szorzatot, hogy a kapott szám biztosan osztható legyen

a) 2^7-nel; *b)* 3^3-nal; *c)* 4^2-nal;

d) 10^2-nel; *e)* 7-tel; *f)* 3^5-nel;

g) 15^4-nel; *h)* 250-nel; *i)* 1250-nel?

K5 Bizonyítsd be, hogy minden páros szám négyzete osztható 4-gyel!

K6 *a)* Egy szám osztható 5-tel. Igaz-e, hogy a négyzete osztható 125-tel?

b) Egy szám osztható 5-tel. Igaz-e, hogy a négyzete osztható 25-tel?

c) Egy szám osztható 25-tel. Igaz-e, hogy a négyzete osztható 125-tel?

d) Egy szám osztható 625-tel. Igaz-e, hogy a négyzete osztható 25-tel?

Közös többszörös; legkisebb közös többszörös

Emlékszel még?

Két szám közös többszörösei azok a számok, amelyek mindkettőnek többszörösei.

Például $6 = 2 \cdot 3$ és $10 = 2 \cdot 5$ közös többszörösei: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; 90; 120; ...

1. példa

Keressük meg a $2^3 \cdot 7$ számnak néhány olyan többszörösét, amely osztható 3-mal!

A $2^3 \cdot 7$ többszöröseit úgy kapjuk meg, hogy egy természetes számmal megszorozzuk.
Ha azt akarjuk, hogy a többszörös 3-mal is osztható legyen, akkor a 3-nak is szerepelnie kell a többszörös prímtényezős felbontásban.

A $2^3 \cdot 7$-nek például a 3-szorosa biztosan többszöröse a 3-nak és a $2^3 \cdot 7$-nek is: $2^3 \cdot 7 \cdot 3$.

Tetszőleges számmal megszorozva ezt a számot, ismét 3-mal osztható többszörösét kapjuk a $2^3 \cdot 7$-nek, például: $2^3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 7 \cdot 3^2$; $2^5 \cdot 7 \cdot 3$; $2^3 \cdot 7^4 \cdot 3$ stb.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \ldots$

2. példa

Keressünk olyan számokat, amelyek többszörösei $a = 3^2 \cdot 5^4$-nek és $b = 2^2 \cdot 3^3$-nak is.

Melyik ezek közül a legkisebb, vagyis mi a két szám legkisebb közös többszöröse?

$a = 3^2 \cdot 5^4$ $\quad 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$b = 2^2 \cdot 3^3$ $\quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Egy szám többszöröseit úgy kaphatjuk meg, hogy megszorozzuk további prímtényezőkkel.

Ha egy szám többszöröse $(3^2 \cdot 5^4)$-nek és $(2^2 \cdot 3^3)$-nak is, akkor a prímtényezős felbontásában szerepelnie kell 2^2-nek, 3^2-nek, 5^4-nek és 3^3-nak, például: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 3^3$.

A 3-as prímtényezőből az a-ban 2 darab, a b-ben 3 darab van.

Hány darab 3-asnak kell lennie a közös többszörösökben? Biztosan kell 3 darab 3-as, mert b-ben annyi van. De vajon elég-e ennyi? Nézzük meg, hogy a $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ többszöröse-e a-nak és b-nek is!

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 = (3^2 \cdot 5^4) \cdot 2^2 \cdot 3 = a \cdot 2^2 \cdot 3$, tehát többszöröse a-nak.

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 = (2^2 \cdot 3^3) \cdot 5^4 = b \cdot 5^4$, tehát többszöröse b-nek is.

$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Elhagyni viszont már nem lehet a $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ tényezői közül, mert akkor valamelyik számnak nem lesz többszöröse a szorzat.

A $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ tehát a két szám legkisebb közös többszöröse. $\quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Fontos tudnivaló

Két szám legkisebb közös többszöröse az a pozitív szám, amely mindkettőnek többszöröse, és a közös többszöröseik közül a legkisebb.

Így jelöltük: $[3^2 \cdot 5^4; 2^2 \cdot 3^3] = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, vagyis $[5625; 108] = 67\,500$.

3. példa

Keresd meg a $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ és a $3^3 \cdot 5^2$ legkisebb közös többszörösét!

A két szám közös többszörösei minden prímtényezőt tartalmaznak, amely a két számban előfordul: 2^3; 3; 5, valamint 3^3; 5^2.

Mivel az egyik számban szerepel 2^3, a közös többszöröseikben is benne kell lennie.

Mivel az egyik számban egy, a másikban három 3-as prímtényező szerepel, a közös többszöröseikben 3 darabnak kell szerepelnie.

Az egyik számban egy, a másikban két 5-ös tényező fordul elő, a közös többszöröseikben két darabnak kell lennie.

Ezért minden közös többszörösben szerepel: 2^3; 3^3; 5^2.

A legkisebb közös többszörösben több tényező nem lehet, mert akkor nem a legkisebb többszöröst kapnánk. Ezért a legkisebb közös többszörös: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

3.

4. példa

A 30 és egy másik szám legkisebb közös többszöröse 630. Mi lehetett a másik szám?

A 630 prímtényezői: 2; 3; 3; 5; 7. A 30 prímtényezői: 2; 3; 5.

Gondoljuk végig, hogy a 630 egyes prímtényezői hatványait melyik számból kaphattuk!

A 2-es származhat a 30-ból, de lehet, hogy a másik számban is szerepel.

A $3 \cdot 3$ nem jöhet a 30-ból, mert abban csak egyetlen 3-as prímtényező szerepel. Ez tehát a másik számban szerepel.

Az 5-ös prímtényező ugyan szerepel a 30-ban, de lehet, hogy a másik számban is szerepel.

A 7-es prímtényezőt nem kaphattuk a 30-ból, ezért annak a másik számban kell szerepelnie.

A másik szám prímtényezői a $3 \cdot 3 \cdot 7$ és esetleg a 2, az 5 vagy akár mindkettő:

63; 126; 315; 630.

$[30; 63] = 630$; $[30; 126] = 630$; $[30; 315] = 630$; $[30; 630] = 630$.

Feladatok

K1 *a)* Add meg a 2^3 egy 3-mal osztható többszörösét!

b) Add meg a 3^3 egy 3-mal osztható többszörösét!

c) Add meg a $2^3 \cdot 3^2$ egy 5-tel osztható többszörösét!

d) Add meg a $2^3 \cdot 5$ egy 15-tel osztható többszörösét!

e) Add meg a $2 \cdot 3 \cdot 5$ egy 2^3-nal osztható többszörösét!

f) Add meg a $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ egy 3^2-nel osztható többszörösét!

K2 *a)* Add meg a $2 \cdot 3^5 \cdot 7$-nek néhány 15-tel osztható többszörösét!

b) Add meg a $2^5 \cdot 5^2$-nek néhány 30-cal osztható többszörösét!

c) Melyik a $3 \cdot 5^2$-nek a legkisebb 12-vel osztható többszöröse?

A3 Add meg a következő számok legkisebb közös többszörösét!

a) 24 és 42; *b)* 16 és 27;

c) 48 és 216; *d)* 500 és 32;

e) 108 és 12; *f)* 36 és 120.

K4 *a)* A 20-nak és egy másik számnak a legkisebb közös többszöröse a 60. Mi lehetett a másik szám?

b) A 15-nek és egy másik számnak a legkisebb közös többszöröse a 60. Mi lehetett a másik szám?

c) A 10-nek és egy másik számnak a legkisebb közös többszöröse a 60. Mi lehetett a másik szám?

K5 Add meg az alábbi legkisebb közös többszörösöket prímtényezős alakban!

a) $[150; 144] = ?$ *b)* $[1024; 1000] = ?$ *c)* $[500; 432] = ?$ *d)* $[343; 96] = ?$

Közös osztó, legnagyobb közös osztó

Fontos tudnivaló

Két szám közös osztói mind a két számnak osztói.

Például a $72 = 2^3 \cdot 3^2$ és a $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ közös osztói az 1; 2; 3; $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$; $12 = 2^2 \cdot 3$.

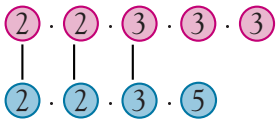
1. példa

Keressük meg a $2^2 \cdot 3^3$ és a $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ számok közös osztóit!

A közös osztók prímtényezői szerepelnek mind a két számban.

A $2^2 \cdot 3^3$ és a $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ számokban az egyes prímszámokból ezek szerepelnek:

Együtt szerepelnek: 2; 2; 3.



Közös osztók lehetnek például az 1 (ha egy prímtényezőt sem választunk ki a közösek közül), a 2, a $2^2 = 4$, a 3, a $2 \cdot 3 = 6$, a $2^2 \cdot 3 = 12$. Ezek közül a 12 a legnagyobb.

Fontos tudnivaló

Két szám legnagyobb közös osztója az a szám, amely mindkettőnek osztója, és a közös osztóik közül a legnagyobb.

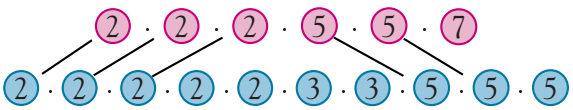
Így jelöltük: $(2^2 \cdot 3^3; 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3$, azaz $(108; 60) = 12$.

2. példa

Határozd meg az $a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ és a $b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ számok legnagyobb közös osztóját!

Mind a két számban szerepel a 2-es prímtényező. Az a-ban 3-szor, a b-ben 5-ször. A közös osztóik prímtényezős felbontásában legfeljebb 3 darab 2-es prímtényező szerepelhet.

A 3-as prímtényező csak a b-ben fordul elő, ez a prímtényező nem szerepelhet a közös osztók prímtényezős felbontásában.



Mind a két számban szerepel az 5 prímtényező. Az a-ban 2-szer, a b-ben 3-szor. A közös osztóik prímtényezős felbontásában legfeljebb 2 darab 5-ös prímtényező szerepelhet.

A 7 csak az a-ban szerepel, ez a prímtényező nem szerepelhet a közös osztók prímtényezős felbontásában.

a és b legnagyobb közös osztójának prímtényezős alakja: $2^3 \cdot 5^2$. 2 · 2 · 2 · 5 · 5

3. példa

Mennyi 10 és 27 legnagyobb közös osztója?

$10 = 2 \cdot 5$; $27 = 3^3$. Nincs közös prímtényezőjük. De mivel az 1 minden számnak osztója, ezért ez az egyetlen közös osztójuk, ennél nagyobb közös osztójuk pedig nincs: $(10; 27) = 1$.

Ha két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legnagyobb közös osztójuk az 1. Az ilyen számpárokat **relatív prímeknek** nevezzük.

Oszthatóságról és oszthatósági szabályokról

Korábban tanultunk már olyan oszthatósági szabályokat, amelyek a számok tízes számrendszerbeli alakjából következtetnek: 2-vel, 5-tel, 10-zel való oszthatóságról az utolsó számjegy árulkodik, 3-mal, 9-cel való oszthatóságról a számjegyek összege.

A számok egyértelmű prímtényezős előállítása segít abban, hogy összetett oszthatósági szabályokat is megfogalmazzunk: Egy egész szám pontosan akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel és 5-tel is. Egy egész szám pontosan akkor osztható 24-gyel, ha osztható 3-mal és 8-cal is.

Nem igaz azonban, hogy a 24-gyel való oszthatósághoz a 6-tal és a 4-gyel való oszthatóságból is következtethetünk, hiszen a 12 is osztható 6-tal is és 4-gyel is, de 24-gyel nem. A 4 és a 6 nem relatív prímek, ezért egy 4-gyel osztható szám 2-vel is osztható, tehát a 4-gyel és 3-mal osztható szám egyaránt osztható 4-gyel és 6-tal; 8-cal azonban nem feltétlenül.

Fontos érdekességek

A számelmélet az oszthatósággal foglalkozik. Ezzel kapcsolatos fogalmakat alakít ki, és ezekkel kapcsolatos problámákra keresi a választ.

Különlegessége, hogy a matematika egyik legősibb ága, mégis sok klasszikus megoldatlan kérdésre keresik a matematikusok a választ mind a mai napig.

Tudjuk, hogy végtelen sok prímszám van. Azokat a prímszámokat, amelyek különbsége 2, ikerprímeknek nevezzük. Mind a mai napig megoldatlan probléma, hogy van-e végtelen sok ikerprím.

Nézz utána a világhálón, hogy mik azok a barátságos számok, mik a tökéletes számok! Mit kell tudni Mersenne, Euler és Fermat számelmélettel kapcsolatos munkásságáról? Idézd fel, mi az eratosztenészi szita!

Feladatok

A1 Írd fel a következő számok osztóinak prímtényezős felbontását!

a) 10; *b)* 12; *c)* 16; *d)* 18; *e)* 19; *f)* 21; *g)* 24; *h)* 28; *i)* 51.

A2 Írd fel a következő számok közös osztóit!

a) 10 és 8; *b)* 20 és 12; *c)* 15 és 21; *d)* 16 és 21;

e) 28 és 98; *f)* 51 és 57; *g)* 26 és 117; *h)* 85 és 52.

A3 A számok prímtényezős felírása segítségével add meg az alábbi legnagyobb közös osztókat!

a) (6; 9); *b)* (4; 9); *c)* (12; 6); *d)* (12; 8); *e)* (16; 6); *f)* (16; 8).

K4 Tippelj! Mit gondolsz, a 60, a 72 és a 96 közül melyiknek van a legtöbb osztója? Melyiknek a legkevesebb? Ellenőrizd a tippedet!

K5 A számok prímtényezős felírása segítségével add meg az alábbi legnagyobb közös osztókat!

a) (10; 45); *b)* (15; 12); *c)* (120; 100); *d)* (96; 144); *e)* (24; 100); *f)* (160; 72).

K6 Készíts ábrát a feladatok megoldásához! Milyen számokat jelenthet a és b, ha

a) $[a;b] = 24$; $(a;b) = 2$; *b)* $[a;b] = 48$; $(a;b) = 8$; *c)* $[a;b] = 50$; $(a;b) = 10$;

d) $[a;b] = 25$; $(a;b) = 5$; *e)* $[a;b] = 15$; $(a;b) = 15$?

E7 *a)* Sorold fel a 6 osztóit! Add össze a 6-nál kisebbeket! Mit tapasztalsz?

b) Sorold fel a 28 osztóit! Add össze a 28-nál kisebbeket! Most mit tapasztalsz?

Azokat a számokat, amelyek ezzel az érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, tökéletes számoknak nevezik.

K8 Osztható-e a $412 \cdot 37$

a) 2-vel; *b)* 3-mal; *c)* 4-gyel; *d)* 5-tel?

A számológép használata

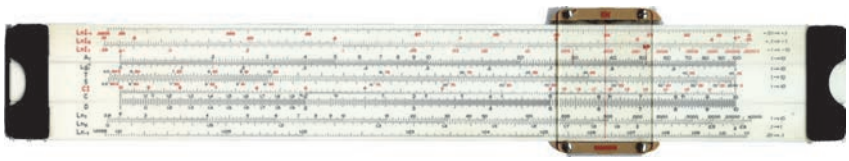
Megismertünk néhány, a racionális számok körében elvégezhető műveletet: az összeadást, a kivonást, a szorzást, illetve a nem nulla számmal való osztást. Találkoztunk a hatványozás fogalmával is. Azt is tapasztaltuk, hogy egyes számítások elvégzése milyen hosszadalmas lehet. (Gondoljunk a többjegyű osztóval történő osztásra vagy egy-egy hosszabb műveletsorra). Ilyenkor a hibázás lehetősége is nő.

Ősidők óta célja az embernek, hogy felgyorsítsa a számolást, illetve kiküszöbölje a számolási hibákat.

Régebben számolókövek (calculus), később az abakusz, alig néhány évtizede pedig még a logarléc szolgált erre a célra.



Rekonstruált római kori abakusz



Logarléc. Még az 1960-as években, az Apollo űrhajók pályájának kiszámításához is logarlécet használtak, pedig már voltak számítógépek

Egyes gyakrabban használt, nagy gonddal kiszámított eredményeket táblázatba gyűjtöttek. Mind a mai napig használatban van a Négyjegyű függvénytáblázatok, amely ma már nemcsak számítások eredményeit, hanem összefüggéseket is tartalmaz.



A számításaink megkönnyítésére ma **számológépet** használunk.

Ezek kialakulása is több századra nyúlik vissza. A legelső *kalkulátorok* természetesen mechanikusak voltak, hiszen akkoriban nem használtak elektromos áramot. Az 1600-as években tervezte, illetve készítette el számológépét Wilhelm Schickard, Blaise Pascal, Gottfried Wilhelm Leibniz is.

A mechanikus számológépeket még 40 éve (az 1970-es években) is széles körben használták, mert az elektronikus számológépek drágák voltak, és nagyon keveset tudtak.

Mára széles körben elterjedt. Szinte mindenkinek van, mert a legtöbb mobiltelefonba be van építve. Ettől függetlenül is nagyon sok fajtája létezik a számológépnek.

Mielőtt azonban teljesen rábíznánk magunkat, érdemes alaposabban megismerkednünk a használatával. *Minden számológéphez adnak leírást, ezt tanulmányozd át alaposan!*



Schickard számológépe, másolat



Pascal számológépe



Leibniz számológépe

Összefoglaljuk, hogy a legalapvetőbb, úgynevezett négy alapműveletes gépeknek milyen szolgáltatásai vannak.

A billentyűk

A billentyűzeten megtalálhatók:

– be- és kikapcsoló gomb [I/O]

– a számjegyek: [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]

– tizedesvessző: [.]

– műveleti jelek: [+] az összeadásé, [−] a kivonásé, [*] vagy [×] a szorzásé, [÷] vagy [/] az osztásé

– egyenlőségjel: [=]

– zárójelek: [(], [)]

– törlés gomb: [C] (clear: a kijelző törlése); továbbá lehet még [CE] (clear entry: az utoljára beírt sor visszatörlése); [AC] (all-clear: mindent – a számolás minden részletét – töröl)

Fontos tudnivaló!

A számológépen szereplő jelek nem minden eseben azonosak azzal, amelyet mi használunk. Írásban soha ne használd a számológép jeleit, mert az helytelen!

Számológép jele:	Írásban helyesen így használjuk:
[.] (tizedespont)	, (tizedesvessző)
[*] (csillag) vagy [×] (szorzókereszt)	· (szorzásjel)
[÷] (osztás)	: vagy / vagy tört alak

Ma már a legtöbb számológép ennél jóval többet tud. Minden bizonnyal a te gépeden is vannak további gombok. Ismerd meg a gépedet! Olvasd el a leírását!

A számológépek nem minden esetben ismerik a műveletek helyes matematikai sorrendjét. Van olyan, amelyik a beírás sorrendjében végzi el a műveletet. Próbáljuk ki, mit tud a géped!

1. példa

Számítsd ki, mennyi az eredménye a következő műveleteknek! Ezután írd be a műveletsort a számológépedbe, és döntsd el, hogy jól számol-e a géped! Ha nem, találd ki, mit csinál rosszul!

a) $2 - 7 \cdot 3 : 10$; *b)* $2 - 3/10 \cdot 7$.

a) $2 - 7 \cdot 3 : 10 = 2 - 7 \cdot \frac{3}{10} = 2 - \frac{21}{10} = -\frac{1}{10}$.

Ezt írjuk be: [2] [−] [7] [·] [3] [÷] [1] [0] [=]

A művelet eredménye **-0.1**, a legtöbb gép ezt is adja.

Egyes gépek már a beírás közben kiírják a részeredményt, így [2] [−] [7] [·] után **-5**, [3] [÷] után **-15**, végül [1] [0] [=] után **-1.5**.

Ez azt jelenti, hogy nincs is rá lehetőség, hogy felismerje a műveletvégzés sorrendjét, mert minden műveleti jelre azonnal elvégzi az addig beírtakat.

Ha nem is lépésenként végzi el a gép a műveletet, de ugyancsak −1.5-et ír ki, abból tudhatod, hogy nem ismeri fel a helyes matematikai műveleti sorrendet.

Ebben az esetben át kell gondolnod, hogyan írod be a műveletsort. Ha van zárójel a billentyűzeten, akkor azok segítségével ki kell jelölnöd a műveletvégzés sorrendjét, ha pedig még az sincs, akkor minden esetben végig kell gondolnod, hogyan tudod kiszámítani egy adott műveleti sor eredményét.

Ebben a konkrét esetben először kiszámítod a $7 \cdot 3/10$ műveletsor eredményét, majd kivonod 2-ből:

[2] [−] [2] [·] [1] **-0.1**

b) $2 - 3/10 \cdot 7 = 2 - \frac{3}{10} \cdot 7 = 2 - \frac{21}{10} = -\frac{1}{10}$.

A gépbe ezt írjuk: [2] [−] [3] [/] [1] [0] [·] [7]

Most már nem lepődünk meg, ha (hibásan) **-0.7** adódik, mert tudjuk, hogy egy így számoló gép nem ismeri a helyes matematikai műveleti sorrendet.

De a művelet eredménye helyesen $-\frac{1}{10}$.

Mi most csak olyan számológépekkel foglalkozunk, amelyekbe egyetlen sorba be lehet írni egy hosszabb számolássort, ismerik a zárójeleket, és alkalmazzák a helyes matematikai műveleti sorrendet.

2. példa

Számítsuk ki a következő műveletsorok eredményét, majd számológéppel ellenőrizzük!

a) $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{5}{44}$;

b) $\dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{5}}$.

a) $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{5}{44} = \frac{4}{44} + \frac{2}{44} + \frac{5}{44} = \frac{4+2+5}{44} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4}$.

Számológéppel beírjuk: [1] [/] [1] [1] [+] [1] [/] [2] [2] [+] [5] [/] [4] [4] [=], erre **0.25** eredményt kapunk, ami az $\frac{1}{4}$ tizedes tört alakja. A gép felismerte a műveleti sorrendet, és előbb elvégezte az osztásokat, és csak azután adta össze a törtek értékét.

b) $\dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{2}{8} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$

A számláló összeg, a nevező pedig szorzat, ezért ezeket ki kell jelölnünk (zárójelek közé kell tennünk):

[(] [1] [/] [4] [+] [1] [/] [8] [)] [/] [(] [3] [/] [5] [=], erre **0.625** eredményt ír ki a gép.

Végül nézzünk meg egy fontos tanulsággal szolgáló érdekes számítást!

3. példa

Mennyi $\dfrac{3 \cdot 17 \cdot 1993 \cdot 4\,230\,493}{100^2 \cdot 1000 \cdot 10\,000}$? Használhatsz számológépet, de pontos értéket kapj!

Ennek a törtnek a nevezőjében szerencsére csak 10-eseket szorzunk össze: $100^2 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$, ez további három; illetve $10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ újabb négy darab 10-es. Összesen 11 darab 10-es szorzatával osztunk, ezt az osztást pedig egyszerűen el tudjuk végezni.

A számláló túl nagy ahhoz, hogy fejben számoljunk. Azt ki tudjuk okoskodni, hogy az utolsó számjegye $3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3$ utolsó számjegyével egyenlő, vagyis 9.

3.

Számológépbe írva viszont nem kapunk pontos értéket: 4,3 és még valami ($\times$ 11), ami azt jelenti, hogy $4{,}3 \cdot 100\,000\,000\,000 = 430\,000\,000\,000$, ez viszont nem 9-esre végződik. Nem tudjuk meg, hogy milyen számjegyek követik a 3-ast, a számológép kerekítette az eredményt.

A tényezőket ügyesen csoportosítva legalább *pontos részeredményeket* kaphatunk: $1993 \cdot 4\,230\,493 = 8\,431\,372\,549$, már csak ezt kell $3 \cdot 17 = 51$-gyel megszoroznunk.

51-gyel úgy szorzunk ügyesen, hogy a szám 50-szereséhez, vagyis a 100-szorosának a feléhez hozzáadjuk még egyszer a számot.

A 100-szoros felét már nem tudjuk kiolvasni, mert az túl nagy szám, de fejben kiszámíthatjuk a felének a 100-szorosát. $4\,215\,686\,274{,}5 \cdot 100 + 8\,431\,372\,549$, ezt az összeadást kell csak elvégeznünk:

$$\begin{array}{r} 421\,568\,627\,450 \\ +\quad 8\,431\,372\,549 \\ \hline 429\,999\,999\,999 \end{array}$$

Ezt 11-szer osztjuk 10-zel: $\dfrac{429\,999\,999\,999}{100\,000\,000\,000} = 4{,}29\,999\,999\,999$.

Feladatok

A1 Számítsd ki géppel! Ellenőrizd papíron!

a) $5 - 2 \cdot \dfrac{4}{11}$; *b)* $(5 - 2) \cdot \dfrac{5}{13}$; *c)* $-5 + 4 \cdot \left(2 + \dfrac{7}{3}\right)$; *d)* $(-5 + 4) \cdot 2 + \dfrac{7}{3}$.

A2 Melyik nagyobb?

a) $\dfrac{(12 \cdot 543 - 47 \cdot 112) : 3}{100}$ vagy $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{25}{33} + \dfrac{103}{99}$; *b)* $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}}$ vagy $\dfrac{9 \cdot 397 \cdot 13\,434\,089}{3\,000\,000 \cdot 10\,000}$.

A3 Géppel vagy anélkül – add meg a műveletek eredményét!

a) $3327{,}94 - 18{,}1 \cdot 37{,}4$; *b)* $47\,456{,}25 + 100{,}9 \cdot 83$; *c)* $753 \cdot (35 \cdot 67 - 24 : 4)$;

d) $456 : (332{,}128 \cdot 228 - 331{,}128 \cdot 228)$;

e) $(1968 - 1967 + 1966 - 1965 + 1964 - 1963 + 1962 - 1961) \cdot 499$;

f) $\left(\dfrac{82 \cdot 114 \cdot 35 \cdot 2012 \cdot 12}{41 \cdot 57 \cdot 23 \cdot 1005 \cdot 6} + 68\right) \cdot 2{,}81$; *g)* $(1001 \cdot 999 - 101 \cdot 99) : (3 \cdot 30 + 39)$.

E4 Ladár szerint a $10^{30} - \left(10^{15} - \dfrac{2}{10^{15}}\right)^2$ kifejezés értéke 0, Éla viszont azt gondolja, hogy 2. Melyiküknek van igaza? Mit gondolsz, hogyan számoltak?

Jelek és jelölések

A matematikai problémákat, gondolatokat régen szavakkal írták le, valahogy így: a 3 és az 5 összerakva (azt jelentette: 3 + 5).

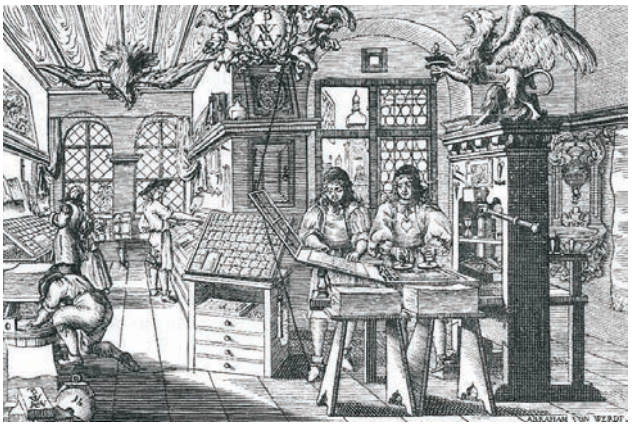
A számokkal és műveletekkel kifejezett összefüggések leírásához gyakran használták a geometriai szemléletet. Például: „az a szám, amelyik az 5 oldalhosszúságú **négyzet** területe” azt jelentette, hogy az **5 négyzete,** vagyis a 25. Innen erednek a „szám négyzete” és a „négyzetszám” kifejezések is. A köb kifejezést a kocka ókori görög nevére, a *kubos* vagy *kybos* szóra vezetik vissza. Innen került át a latinba, majd a magyarba.



Az egyenlőségjelet először Robert Recorde (ejtsd: robert rekord, kb. 1510–1558) használta 1557-ben. Ezt írta: *az egyenlőséget párhuzamos egyenesekkel jelölöm, mert nincs két dolog, amely egyenlőbb lenne két párhuzamos egyenesnél.*

Míg matematikai feljegyzéseket 3-4000 éveseket is ismerünk, addig a ma használt matematikai jelöléseknek jelentős része nem több mint 5-600 éves. Nemcsak azért, mert korábban nem nagyon találtak ki jeleket, hanem azért is, mert a kitalált jelöléseknek el is kellett terjedniük ahhoz, hogy mások is használják. Ehhez az kellett, hogy könyvekben megjelenjenek, márpedig mindössze öt-hatszáz éve kezdtek a könyvek széles körben elterjedni.

Nézz utána, mikor találták fel a könyvnyomtatást Európában! Mikor működött az első – Hess (ejtsd: hessz) András-féle – nyomda Budán?



A matematikának az az ága, amely az egyenletek megoldásának tanulmányozásával foglalkozik, az **algebra**. (Az „algebra” szó eredete az arab „al-jabr” szó, amely összeilleszkedést, újraegyesítést jelent. A IX. századi első ismert algebrakönyv arab szerzője adta ezt a címet könyvének.) A problémák nehézkes megfogalmazása miatt azonban az egyenletek témakörében csak a modern jelölések kialakulása után értek el komoly eredményeket.

Ez idő alatt alakult ki az a szokás, hogy a számok helyett az ábécé elejéről vett betűket használtak. Ezekkel úgy számoltak, mintha ismert számok lennének. Az egyenletben keresett (ismeretlen) számot x-szel jelölték. Az x ezt jelentette: valami.

1. példa

Írjuk át betűs kifejezéssé a következőket!

egy szám négyzeténél 1-gyel nagyobb szám;

két szám szorzata;

két szám szorzatánál 5-tel nagyobb szám;

két szám szorzatánál a másodikkal nagyobb szám;

egy téglalap területe;

egy szám 5-szöröse szorozva a számmal.

Például: $a^2 + 1$; $a \cdot b$; $a \cdot b + 5$; $a \cdot b + b$; $a \cdot b$; $5 \cdot a \cdot a$ vagy $5 \cdot a^2$.

Mi most az ábécé elejéről vett betűket használtunk, de vehettünk volna más betűket is, például: $n^2 + 1$; $k \cdot l$; $b \cdot s + 5$; $f \cdot r + r$; $u \cdot a$; $5 \cdot t \cdot t$ vagy $5 \cdot t^2$.

Jelölési szokások

1. Betűs kifejezésekben a szorzójelet – ha nem okoz félreértést – elhagyhatjuk: $a \cdot b$ ugyanazt jelöli, mint ab. Ha egy betűs kifejezést számmal szorzunk, a szorzójelet elhagyhatjuk: $5 \cdot a = 5a$. Így tehát $a \cdot b + 5 = ab + 5$; $a \cdot b + b = ab + b$; $5 \cdot a^2 = 5a^2$.

Ha kettősbetűvel jelölsz valamit, például *cs*-vel Csaba életkorát, akkor abban a feladatban a c és s jeleket lehetőleg ne használd, mert a $c \cdot s$ is jelölhető *cs*-vel.

2. Egy feladaton belül azonos betűk mindig azonos számot jelentenek, például: a a négyzet oldala, $a \cdot a = a^2$ a négyzet területe, $4a$ a kerülete.

3. Előfordulhat, hogy két számot más-más betűvel jelölünk, de a két szám egyenlő. Például:

Ádám és Éva együtt 12 évesek: $á + é = 12$. Ádám életkorának kétszerese ugyanannyi, mint ahány évesek együtt: $2á = á + é$. Ebből kiszámítható, hogy $á = é = 6$. Ádám is és Éva is 6 éves.

A betűs kifejezéseket **(algebrai) képleteknek, formuláknak** szoktuk nevezni.

2. példa

Keresd meg, hogy melyik geometriai leírás melyik algebrai kifejezésnek, kifejezéseknek felel meg!

Az a oldalú négyzet területe.

Az a és b oldalú téglalap területe.

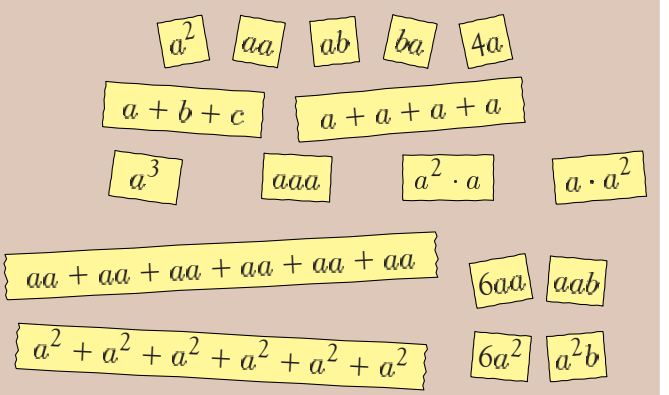
Az a, b, c oldalú háromszög kerülete.

Az a oldalú négyzet kerülete.

Az a oldalú kocka térfogata.

Az a oldalú kocka felszíne.

Az a oldalú négyzet alapú, b magasságú hasáb térfogata.



Az a oldalú négyzet területe: a^2 és aa.
Az a és b oldalú téglalap területe: ab és ba.
Az a, b, c oldalú háromszög kerülete: $a + b + c$.
Az a oldalú négyzet kerülete: $a + a + a + a$ és $4a$.
Az a oldalú kocka térfogata: a^3; aaa; $a^2 \cdot a$ és $a \cdot a^2$.
Az a oldalú kocka felszíne: $aa + aa + aa + aa + aa + aa$; $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$; $6aa$; $6a^2$.
Az a oldalú négyzet alapú, b magasságú hasáb térfogata: a^2b és aab.

Feladatok

A1 Írj képleteket a következő szövegekhez!

a) Egy szám kétszerese.
b) Két szám összege.
c) Egy szám önmagával vett szorzata.
d) Két szám szorzata.
e) Egy szám kétszeresének és egy másik számnak az összege.
f) Egy szám ötszörösének és egy másik számnak a szorzata.
g) Három szám összege.
h) Három szám szorzata.
i) Két szám szorzatának és egy harmadik számnak az összege.
j) Két szám összegének és egy harmadik számnak a szorzata.

A2 Párosítsd össze a képleteket a szövegekkel!

A: Az a oldalú kocka felszíne.
B: Az a oldalú négyzet oldala.
C: Az a és b oldalú téglalap kerülete.
D: Az a, b, c oldalú téglatest két oldallapjának területösszege.
E: Az a oldalú négyzet kerülete.
F: Az a, b oldalú téglalap területe.

(1): $ab + bc$; (2): a;
(3): $6a^2$; (4): ab;
(5): $4a$; (6): $2a + 2b$.

A3 Keress egyenlőket a kifejezések között!

a) $2v$; $v + v$; $2 + v$;
vv; v^2; uvz;
uzv; $uv + z$; $uz + v$;
$z + uv$; $z + u + v$; $v + zu$.

b) $r \cdot r + s$; $r + r + s$; $r^2 s$;
$r^2 + s$; $2r + s$; rsr;
sr^2; $s + r \cdot r$; $s^2 + r^2$;
$2s + r^2$. $r \cdot r + s^2$; $2s + r \cdot r$.

c) $k + t^3$; $t \cdot t + k$; $t^2 k + t$;
kt^3; $k + t^2$; $t + ttk$;
$ttt + k$; tk^2; $t^2 t + k$.

d) $a - b + 2$; $2a - b$;
$a - 2b$; $a + a - 2b$;
$2a - 2b$; $a + a - b + 2$;
$a - b + a$; $a + 2 - b$;
$2a - b + 2$; $a - b - b$.

K4 Írd fel más alakban is a következő kifejezéseket!

a) $n + m + m$; *b)* $2b + 3c$;
c) $t + t + d + d + d$; *d)* $a+a+a+a+a$;
e) $5b - a$; *f)* $b + b - a - a$.

K5 A golyógyárban piros, fehér, zöld, sárga és kék golyókat gyártanak. Ezekből naponta p, f, z, s, k darab készül.



Pirosból 2-szer annyi, mint kékből.

Kékből 500-zal több, mint zöldből.

Fehérből 1000-rel kevesebb, mint kékből.

Sárgából ugyanannyi, mint zöldből.

a) Írd fel képletekkel a megadott összefüggéseket!

b) Naponta mennyi készül a különböző színű golyókból, ha tudjuk, hogy sárgából 2800-at gyártanak?

c) Írd fel a képletét, hogy egy nap összesen hány golyót gyártanak!

K6 Keress olyan képleteket, amelyeket más tantárgyakban használsz! Magyarázd meg, hogy melyik betű mit jelöl, a képlet milyen összefüggést ír le!

K7 Melyik képletnek milyen geometriai tartalma lehet?

a) n; *b)* rs;

c) $a + b + a + b$; *d)* $2a + 2b + 2c$;

e) prs; *f)* $p^2 + r^2 + s^2$;

g) $w^2 + 4wz$; *h)* $ab + bc + ca$;

i) fgh; *j)* f^3;

k) f^2g; *l)* $g^2h + g^2f$.

E8 Fogalmazd meg algebrai képlettel a műveletekről tanult azonosságokat!

a) A kéttagú összegben a tagok felcserélésével az összeg nem változik.

b) A háromtagú összegben az összeadandók tetszőlegesen társíthatók.

c) A kétténYezős szorzatban a tényezők felcserélésével a szorzat nem változik.

d) A háromtényezős szorzatban a tényezők tetszőlegesen társíthatók.

4.

Algebrai fogalmak

Egy- és többtagú kifejezések

Fontos tudnivaló

Egy algebrai kifejezés a benne szereplő **összeadandók,** azaz **tagok száma** szerint lehet **egytagú** vagy **többtagú**.

Egytagúak például: ab; a; c^2; abc; 5 stb.

Többtagúak például: $a + b$; $2a + b$; $6 + 3$; $a + b + c$; $a + 5 + 17c^2 + 5b^2$ stb.

Az $1 + (-4)$; $5a^2 + (-3b) + c$; $2x^3yz + 3 + (-14k^{10})$ kifejezések is többtagúak, ezeket rövidebben így írjuk: $1 - 4$; $5a^2 - 3b + c$; $2x^3yz + 3 - 14k^{10}$.

1. példa

Válogasd szét az alábbi kifejezéseket aszerint, hogy egy- vagy többtagúak-e!

$2a^2$; $a^2 + a^2$; $x^2 - y^2$; uv^2; 7^4; $7 \cdot 4$; $7 + 4$; $pr + s + t$; $g - 6$.

Az összeadandók száma szerint egytagúak: $2a^2$; uv^2; 7^4; $7 \cdot 4$.

Az összeadandók száma szerint többtagúak: $a^2 + a^2$; $x^2 - y^2 = x^2 + (-y^2)$; $7 + 4$; $pr + s + t$; $g - 6 = g + (-6)$.

Együtthatók. Egynemű és különnemű kifejezések

A betűs kifejezésekben szereplő számszorzókat más néven **együtthatóknak** nevezzük.

2. példa

Keresd meg az $5a^2$; $6a^2$; a^2; $-a^2$ kifejezésekben az együtthatókat!

Keresd meg a $2a^2 + 2b$; $3a^2 + b$; $a^2 - b$ kifejezésekben az együtthatókat!

Az $5a^2$ együtthatója 5, a $6a^2$ együtthatója 6.

Az a^2-nek nincsen számszorzója, de mivel $1 \cdot a^2 = a^2$, azt mondhatjuk, hogy **1 az együtthatója.**

Az 1 együtthatót általában nem írjuk ki.

Az $-a^2$-nek sincsen számszorzója, de mivel $(-1) \cdot a^2 = -a^2$, azt mondhatjuk, hogy **-1 az együtthatója.** A (-1) együttható helyett sokszor csak a $-$ előjelet írjuk ki.

A $2a^2 + 2b$ kifejezésben az együtthatók 2 és 2. Mivel $3a^2 + b = 3a^2 + 1 \cdot b$, így ebben a kifejezésben az a^2 együtthatója 3, a b együtthatója 1.

Az $a^2 - b$ kifejezés **összeg alakban** úgy írható, hogy $a^2 + (-b)$, vagyis $1 \cdot a^2 + (-1) \cdot b$, ezért mondhatjuk, hogy az a^2 tag együtthatója 1, a b tag együtthatója -1.

Fontos tudnivaló

Az $5a^2$; $6a^2$; a^2; $-a^2$ kifejezések csak az együtthatóikban különböznek egymástól. Mindegyikben az a^2 tag szerepel egy számszorzóval.

Azokat a kifejezéseket, amelyek egymástól csak az együtthatóikban különböznek, **egyneműeknek** nevezzük. A nem egynemű kifejezéseket **különneműeknek** szokás nevezni.

4.

Feladatok

A1 Add meg, hogy hány tagúak a kifejezések!

a) $d+1$; $2ab$; $5x$; $x+y$; $4t$; uvz; $2uvz$; $u + vz$; $2 + uvz$; $u + v + z$;

b) a^2+b^2; a^2b^2; $2ab$; $2ab$; $2-ab$; $2a+$ $+ b$; $a^2 \cdot 2$; $a - b^2$;

c) $p+q+4$; p^2+q^2+4; p; $4q^2-p+4$; pq^4; $4p^2 - q^3$; $p^2 + q - 4$; $4pq$.

A2 Keresd meg az együtthatókat az egyes kifejezésekben!

a) $5pr + 4t$; $2p - r$; $5s$; $12t - 6s$; $q - r$;

b) $1{,}5x - 2y$; $(-2x) + y$; xyz; $6x + y + z$; $6x^2y^2z^2$;

c) $k - 10m$; $\frac{1}{10}k + (-m)$; $\left(-\frac{1}{2}mn\right)$; $10mn$; $5k - 10m$; n.

K3 Rendelkezésedre állnak az a; ab; ab^2 kártyák, mindegyikből több darab. Írj olyan *egytagú* kifejezéseket, amelyeket egy együttható és az ezeken a kártyákon álló kifejezések közül néhánynak az összeszorzásával kaphatsz meg!

Például: $(-3) \cdot a \cdot a \cdot ab^2$ a -3 együtthatóból és ezekből a kártyákból: a; a; ab^2.

K4 Az x; x^2y; xy kifejezésekből néhányat kártyára írtunk, majd néhány kártyát kiválasztottunk. Az ezeken álló kifejezések szorzatát még egy együtthatóval is megszoroztuk, és az alábbi kifejezéseket kaptuk. Találd ki, hogy mely tényezőket szorozhattuk össze!

$3x^3y^3$; $-8x^3y^3$; $4xy$; $12x^6y^2$; x^4y^2; $-2x^3y^2$; $6x^3$; $-4x^4y^2$.

K5 Keress egyneműeket az alábbi kifejezések között!

a) $3a^2$; $5b$; $3ab^2$; $2b$; $-a^2$; b; $12ab^2$;

b) $5rs^5y$; r^2sy; rs^2ys^3; r^4y; $rsry$; r^2yr^2;

c) e^3f^2; $2ef^2$; $4e^3f$; $8f^2e^3$; $10fef$; $-fe^3$.

Műveletek algebrai kifejezésekkel

Összeadás

1. példa

Egy cég költöztetésekor az iratokat egyenlő alapterületű, de különböző magasságú dobozokba csomagolják. A dobozok alapterülete A. Magasságaik: 2; 5; 10; 8; 3.

Mekkora az egyes dobozok térfogata? Mekkora az együttes térfogatuk?



A dobozok térfogata egyenként:

$2A$; $5A$; $10A$; $8A$; $3A$.

Együttes térfogatuk: $2A + 5A + 10A + 8A + 3A$.

A zárójelben szereplő A-k együttes száma éppen annyi, mint amennyi az együtthatók összege.

Vagyis: $2A + 5A + 10A + 8A + 3A = (2 + 5 + 10 + 8 + 3)A = 28A$.

Ezek alapján a ládák együttes térfogata $28A$ térfogategység.

Fontos tudnivaló

Az egynemű kifejezések ilyen módon történő összeadását **összevonásnak** nevezzük.

Szokás azt mondani, hogy az egynemű kifejezésekben előforduló közös tényezőt – jelen esetben az A-t – kiemeljük. Ezért ezt a műveletet **kiemelésnek** is nevezzük.

Mekkora a dobozok együttes térfogata, ha $A = 7$, vagyis mindegyik doboz alapterülete 7 (területegység)?

$28A$ térfogategység $= 28 \cdot 7$ térfogategység $= 196$ térfogategység.

2. példa

Egy raktárban négy olyan téglatest alakú láda is van, amelynek alapja egy a és b oldalú téglalap.

A ládák magassága 1; 2; 5 és 6.

Mekkora az egyes ládák térfogata? Mekkora az együttes térfogatuk?

Egy-egy láda térfogata: ab; $2ab$; $5ab$; $6ab$.

Az együttes térfogatuk: $ab + 2ab + 5ab + 6ab = (1 + 2 + 5 + 6)ab = 14ab$.

Mekkora a ládák együttes térfogata, ha $a = 5$, $b = 12$?

$14ab = 14 \cdot 5 \cdot 12 = 840$ (térfogategység).

Az algebrai kifejezések összeadásakor az egynemű tagokat általában összevonjuk, mert ezzel sok esetben rövidebb felírást kapunk.

3. példa

Végezd el a lehetséges összevonásokat a következő kifejezésben!

$3q^2 - qw + (-3)ww + qw - 5wq + w^2 + qq.$

Keressük meg, melyek az egynemű kifejezések:

$3q^2$ és qq, mert $qq = 1 \cdot q^2$.

$-qw$, qw és $-5wq$, mert $-qw = (-1)qw$, $qw = 1qw$ és $-5wq = (-5)qw$.

$(-3)ww$ és w^2, mert $(-3)ww = (-3)w^2$ és $w^2 = 1w^2$.

Most írjuk egymás mellé az egynemű tagokat, és vonjuk össze azokat:

$$3q^2 - qw + (-3)ww + qw - 5wq + w^2 + qq =$$
$$= 3q^2 + 1q^2 + (-1)qw + 1qw + (-5)qw + (-3)w^2 + 1w^2 =$$
$$= (3 + 1)q^2 + \Big((-1) + 1 + (-5)\Big)qw + \Big((-3) + 1\Big)w^2 = 4q^2 - 5qw - 2w^2.$$

Feladatok

A1 Egy kis üzletben az egyik fajta visszaváltható üveg forgalmát úgy jegyzik fel, hogy minden nap felírják, mennyi kiadásuk, illetve bevételük származott az üvegekből. *ü*-vel jelölik az üvegek számát. A negatív értékek az eladott üvegeket, a pozitívak a visszavettek számát jelölik. Egy hét öt munkanapján a következőket írták fel:



H.: $+12ü$; $-47ü$;

K.: $+3ü$; $-11ü$;

Sze.: $-18ü$;

Cs.: $+4ü$; $-6ü$;

P.: $+5ü$.

a) Több vagy kevesebb üveg volt az üzletben a hét végére, mint azelőtt? Mennyivel?

b) Mennyi bevétele vagy kiadása volt a héten a boltnak az üvegbetétekből, ha egy üvegre 16 Ft a betéti díj?

A2 Végezd el a lehetséges összevonásokat a következő algebrai kifejezésekben!

a) $2a + 3 + a$; *b)* $a - 2 - b + 3$; *c)* $x - y + 3x + 2y$;

d) $u + v + uv - v$; *e)* $m + 2 - 3m + 4$; *f)* $5x - 3 + 5 - x$;

g) $4t + 5 - s + 5s$; *h)* $p - r - p + r$; *i)* $2f + 5 - g + 4f - 2g$.

K3 Végezd el a lehetséges összevonásokat a következő algebrai kifejezésekben!

a) $2x + xy - x - 2xy$; *b)* $xy - xy - xy$; *c)* $5g + g - 4g + 4$;

d) $6t + 2ts - st + t$; *e)* $p - 2ps - s + 3ps$; *f)* $3z + 5z - z - 2z$;

g) $6x - 6x + 4x$; *h)* $-3x + 8x - 3xy$; *i)* $5rt + 3t - 8t$.

K4 Végezd el a lehetséges összevonásokat a következő algebrai kifejezésekben!

a) $2x^2 + xy - x^2 - 2xy$; *b)* $xy - x^2y - xy^2$; *c)* $5g + g^2 - 4g + 4$;

d) $6t^2 + 2ts - st + t^2$; *e)* $p^2 - 2ps - s^2 + 3ps$; *f)* $3z + 5z^2 - z - 2z^2$;

g) $6x - 6x^2 + 4x^2$; *h)* $-3x + 8x - 3xy$; *i)* $5rt + 3t - 8t$.

E5 Végezd el a lehetséges összevonásokat a következő algebrai kifejezésekben!

a) $-dp - 7d^2p^2 + 5dp^2 - 3d^2p + 4d^2p - 5dp$;

b) $7u^2n^2 - 8un + 7u^2n - 3un^2 - u^2n - 2un$;

c) $-10pv + pv + 4p^2v^2 - 6p^2v^2 + 9p^2v - 8pv$;

d) $-10v^2h^2 + 6vh^2 - 6vh^2 - 7vh^2 - 8v^2h + 9v^2h$;

e) $-7eg + 6e^2g + 9e^2g + 2e^2g + 7e^2g^2 + 3e^2g$;

f) $5t^2u - 8tu - 3tu + 2t^2u - 5t^2u^2 - 3tu$.

K6 Írd be a hiányzó együtthatókat!

a) $3y + x - \square\, y = x + 2y$; *b)* $12u - v - \square\, u + \square\, v = u + v$;

c) $5s - r + \square\, s - \square\, r = s$; *d)* $-z - \square\, w + \square\, z + w = 6z - 3w$;

e) $3p - 1{,}2q + \square\, q - \square\, p = 2q + 2p$; *f)* $-\square\, n - \square\, m + 2{,}3n - m = m - 1{,}7n$.

Szorzás

1. példa

Az osztály iskolai kirándulásra gyűjtött, amely fejenként 17 euróba kerül. A gyerekek közül először g fő, később még h fő jelentkezett és fizette be a kiránduláspénzt.

a) Hány gyerek fizette be végül a kiránduláspénzt?

b) Mennyi pénz gyűlt össze az első, mennyi a második befizetésből?

c) Mennyi a teljes befizetett összeg?



a) $g + h$ gyerek fizetett kiránduláspénzt.

b) Először $17g$ gyűlt össze, másodszor $17h$.

c) Az összes pénz: $17(g + h)$.

Ez viszont egyenlő a két befizetés összegével, vagyis: $17(g + h) = 17g + 17h$.

A számok körében tanultuk, hogy egy összeget úgy is megszorozhatunk egy számmal, hogy a tagokat külön-külön megszorozzuk vele, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

A különbséget is szorozhatjuk úgy egy számmal, hogy a kisebbítendőt és a kivonandót megszorozzuk, és ezek különbségét vesszük.

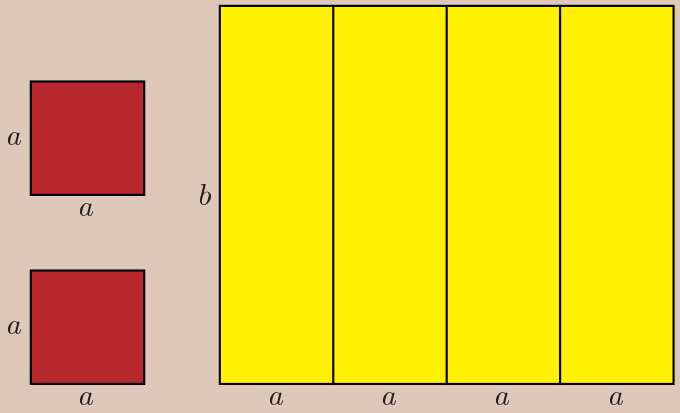
2. példa

d darab teljesen egyforma dobozt borítunk be díszpapírral. A dobozok alakja négyzet alapú hasáb. A hasáb alapéle a, az oldaléle b hosszúságú. Az alaplapokat piros, az oldallapokat sárga papírral vonjuk be.

a) Mennyi díszpapírral borítunk be egy-egy dobozt?

b) Mennyivel borítjuk a d darabot?

c) Mennyi piros és mennyi sárga díszpapírt ragasztunk fel a dobozokra összesen?



Egy doboz egy alaplapjának területe a^2, a két alaplapé $2a^2$. Egy-egy oldallap területe ab, a négy oldallapé összesen $4ab$.

a) Egy doboz beborításához annyi díszpapírt használunk, amennyi a doboz felszíne: $2a^2 + 4ab$.

b) A d darab dobozhoz ennek d-szeresét használjuk: $(2a^2 + 4ab) \cdot d$.

c) Egy doboz alaplapjainak területe összesen $2a^2$, d darabé $d \cdot 2a^2 = 2a^2d$. Tehát ennyi piros papírt használunk. Egy doboz négy oldallapjának területe összesen $4ab$, a d darabé $d \cdot 4ab = 4abd$. Vagyis ennyi sárga papírt használunk.

Az összesen felhasznált papír mennyiségét kétféleképpen is kiszámíthatjuk:

egyrészt az összesen felhasznált papírmennyiség: $(2a^2 + 4ab) \cdot d$,

másrészt a piros és sárga papírmennyiség összege: $2a^2d + 4abd$.

Azaz $(2a^2 + 4ab)d = 2a^2d + 4abd$.

Fontos tudnivaló

Algebrai kifejezésekben egy összeget úgy is megszorozhatunk egy kifejezéssel, hogy a tagokat különkülön megszorozzuk vele, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Jelölési szokás

A szorzat nem változik, ha a tényezők sorrendjét megváltoztatjuk.

A betűs (algebrai) kifejezésekben szokás az együtthatót írni előre, utána a kifejezésben szereplő betűket az ábécé szerint rendezni.

Például: $d \cdot 4ab = 4abd$, $d(2a^2) = 2a^2d$ stb.

3. példa

Végezd el a beszorzást! $5k^2(3k + d + 5)$

$5k^2(3k + d + 5) = 5k^2 \cdot 3k + 5k^2 \cdot d + 5k^2 \cdot 5 = 15k^2 \cdot k + 5dk^2 + 25k^2 = 15k^3 + 5dk^2 + 25k^2$.

4. példa

Összeszoroztunk egy egytagú és egy többtagú algebrai kifejezést. Mi lehetett a két kifejezés, ha a kapott szorzat

a) $2a^2 + 2x$; *b)* $3c^2 - 3bc$; *c)* $a - b^3$?

a) A $2a^2$ és a $2x$ kifejezésekben csak az együtthatók egyenlőek, ezért az eredeti szorzat $2(a^2 + x)$ lehetett.

b) A $3c^2$ és a $-3bc$ kifejezésekben közös szorzótényező a 3-as és a c, ezért az eredeti szorzat többféle lehetett, például: $3(c^2 - bc)$; $3c(c - b)$.

c) Az a és a $-b^3$ tagokban nincsenek egyenlő tényezők, ezért lehet, hogy $1 \cdot (a - b^3)$ volt az eredeti szorzat.

4.

Feladatok

A1 Végezd el a szorzásokat!

a) $a(2 + b)$; *b)* $5(a + b)$;

c) $2a(1 + 5)$; *d)* $x(2u + 1)$;

e) $x(1 + 5x)$; *f)* $5(x + y)$;

g) $(2x + 3) \cdot x$; *h)* $(1 + x) \cdot y$;

i) $(d + c) \cdot f$; *j)* $(5 + x) \cdot 10x$.

A2 Végezd el a szorzásokat!

a) $xy(1 + x)$; *b)* $ab(a + b)$;

c) $2x(x + 2)$; *d)* $(x + xy) \cdot x$;

e) $(2x + y) \cdot z$; *f)* $(1 + x + y) \cdot x$.

A3 Keress egyenlőket!

$(x + xy) \cdot y$; $x(1 + y) + y$;

$xy + xy^2$; $x + y + xy$;

$(y + y^2)x$; $x + (1 + x)y$.

K4 Végezd el a szorzásokat!

a) $gq(2gq^2 + 6g^2q)$; *b)* $hn(5hn^2 + 2hn^2)$;

c) $ot(ot^2 + ot)$; *d)* $ze^2(10ze^2 + z^2e^2)$;

e) $4e^2d^2(10ed^2 + 2ed)$; *f)* $bs(9bs^2 + 9b^2s^2)$.

K5 Először végezd el a zárójelen belül a lehetséges összevonásokat, utána végezd el a szorzásokat!

a) $3(2u + v - u + 6v)$; *b)* $x(x + y - 5y + 4x)$;

c) $2r(-r + 5s + 3 - 4r)$; *d)* $(-k) \cdot (n - k)$;

e) $(p + r - 3p + pr) \cdot pr$; *f)* $(v - z + vz + 3z - 5v) \cdot 2vz$.

K6 Összeszoroztunk egy egytagú és egy többtagú algebrai kifejezést. Mi lehetett a két kifejezés, ha a kapott szorzat

a) $4d^2x^2 + 2dx^2 - 10d^2x^2 - 6dx^2$;

b) $8jm^2 + j^2m^2 - 10jm^2 + 4j^2m^2$;

c) $7p^2e + 4p^2e^2 - 2p^2e^2 + 7p^2e$;

d) $es^2 - 4es - 10e^2s^2 + 7es$?

K7 A 7. osztály ajándékcsomagokat állít össze az elsősöknek karácsonyra. A csomagokba az alábbi ajándékok kerülnek:

3 szelet csokoládé, darabja s forint;

4 darab rágógumi, darabja r forint;

2 ceruza, darabja c forint;

12 színes kivágópapír, egyenként p forint.

a) Írd fel, mennyibe kerül az ajándék csomagonként!

Az 1. a osztályba járó gyerekek száma a, az 1. b-be járóké b.

b) Írd fel, hogy egy-egy osztálynak mennyibe kerül az ajándékcsomag!

c) Írd fel, hogy a két osztályra együtt mennyi pénzt költöttek!



Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Fogalmazd meg, hogy mit nevezünk egyenletnek!
2. Milyen módszereket ismersz egyenletek megoldására?

Áttekintés

Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásával már az 5. és a 6. osztályban is foglalkoztunk.

Elevenítsük fel a tanult megoldási módszereinket!

„Fejszámolás”

Ha csak egy művelet szerepel egy egyenletben, és az együtthatók is kis számok, akkor egyszerűsége miatt „fejben”, azaz írásbeliség nélkül is megoldhatjuk. Ilyenkor se feledkezzünk meg az ellenőrzésről!

Feladatok

K1 Oldd meg „fejben” az egyenleteket!

a) $2a = 172$;	*b)* $5b = -10$;	*c)* $-3c = 21$;	*d)* $88 = -11d$;
e) $e + 1{,}5 = 9$;	*f)* $34 + f = 10$;	*g)* $g + \frac{5}{4} = 1$;	*h)* $\frac{1}{2} + h = 3{,}5$;
i) $i - 6 = 13$;	*j)* $10 - j = 1$;	*k)* $k - 9{,}9 = 1$;	*l)* $\frac{10}{3} - l = \frac{13}{3}$;
m) $m : 7 = 8$;	*n)* $n : (-4) = 2{,}5$;	*o)* $120 : p = 6$;	*p)* $(-3) : q = \left(-\frac{1}{2}\right)$.

A behelyettesítés (próbálgatás) módszere

Ha az egyenlet, egyenlőtlenség alaphalmazának kevés eleme van, akkor ezt a módszert is kipróbálhatjuk. Hátránya, hogy **sok számolással** jár, hiszen az alaphalmaz minden elemét be kell helyettesíteni. Célszerű számításainkat táblázatba foglalni.

1. példa

Oldjuk meg az egyenleteket, egyenlőtlenséget!

a) Az alaphalmaz: $A = \{\text{a 10-nél kisebb pozitív egész számok}\}$.

$2x + 7 = x + 10$.

Helyettesítsük be az egyenlet bal, majd jobb oldalába rendre az alaphalmazban szereplő számokat! Számítsuk ki a behelyettesítés értékeit!

Az alaphalmaz elemei	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A bal oldali érték	9	11	13	15	17	19	21	23	25
A jobb oldali érték	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Teljesül az egyenlőség?	nem	nem	igen	nem	nem	nem	nem	nem	nem

A táblázatból látható, hogy az egyenlet megoldása az alaphalmazon: $x = 3$.

b) Az alaphalmaz: $A = \{\text{a 6-nál kisebb abszolút értékű egész számok}\}$.
$\frac{x}{4} - 2 \leq x - 5$.

Az alaphalmaz elemei	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
A bal oldal értéke	$-3{,}25$	-3	$-2{,}75$	$-2{,}5$	$-2{,}25$	-2	$-1{,}75$	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$
A jobb oldal értéke	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
Teljesül az egyenlőtlenség?	nem	nem	nem	nem	nem	nem	nem	nem	nem	igen	igen

A táblázatból látható, hogy az egyenlőtlenségnek a megadott alaphalmazon az $x = 4$ és az $x = 5$ a megoldása.

A lebontogatás módszere

5.

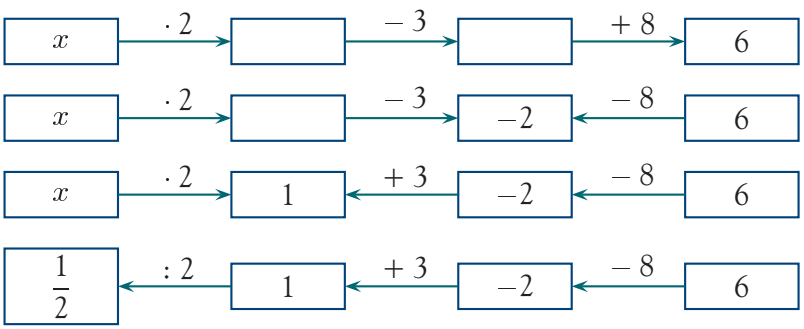
Ezt a módszert akkor tudjuk hatékonyan használni, ha az egyenlet egyik oldalán egy ismert szám áll. Ilyenkor az egyenlet ismeretlent is tartalmazó oldalán szereplő utolsó művelet ellentettjével változtatjuk az egyenlet mindkét oldalát.

1. példa

Oldjuk meg ezzel a módszerrel az alábbi egyenleteket! Az alaphalmazt az A betűvel jelöljük.

$A = \{\text{a racionális számok}\}$.
$(2 \cdot x - 3) + 8 = 6$.

Több lépésben:



$(2 \cdot x - 3) + 8 = 6$;

$(2 \cdot x - 3) = 6 - 8$;

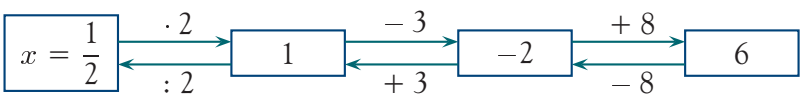
$2 \cdot x = 6 - 8 + 3$;

$x = (6 - 8 + 3) : 2 = \frac{1}{2}$.

Egy lépésben:

A bal oldalon szereplő műveletek a műveletvégzés sorrendjében:

Az ismeretlennek kettővel való szorzása, majd 3 kivonása, végül 8 hozzáadása. Ennek megfelelően a keresett számot így számíthatjuk ki:



$x = (6 - 8 + 3) : 2 = \frac{1}{2}$.

Ellenőrzés: $\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) + 8 = 6$, tehát az $x = \frac{1}{2}$ az egyenlet megoldása a megadott alaphalmazon.

Megjegyzés

Ha alaphalmaz az egész számok halmaza, akkor a fenti egyenletnek nincs megoldása.

Néhány szöveges feladat megoldásában is alkalmazhatjuk ezt a módszert.

2. példa

Gondoltam egy számra. Ha a gondolt számnál 5-tel nagyobb szám harmadából elveszek 10-et, akkor (−3)-at kapok. Melyik számra gondoltam?

Legyen a gondolt szám x! Egyenlettel felírva: $(x + 5) : 3 - 10 = -3$.

Lebontogatással: $x = (-3 + 10) \cdot 3 - 5 = 16$.

Ellenőrzés: a 16-ot 5-tel növelve 21-et kapunk, annak a harmadrésze 7, ezt 10-zel csökkentve az eredmény (−3).

1. Mikor célszerű használni a behelyettesítés (próbálgatás) módszerét?

2. Fogalmazd meg, hogy miként alkalmazod a lebontogatás módszerét az egyenletmegoldás során!

5. Feladatok

A feladatok megoldásához válaszd ki, hogy melyik módszer a leghatékonyabb!

A1 Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket a kétjegyű pozitív egész számok halmazán!

a) $2a + 13 = 31$;

b) $b : 3 + 1 < 34$;

c) $(c : 11 - 10) : 3 + 2 = 0$;

d) $(4x - 2) : 10 + 6 = 10$;

e) $(4x - 2) : 10 + 6 \geq 10$.

K2 Oldd meg az egyenleteket, ha az alaphalmaz: $A = \{$5-nél kisebb abszolút értékű számok$\}$!

a) $x + 8 = 8 - x$;

b) $\frac{x + 1}{3} = x + 3$;

c) $10x - 13 = -39 - 3 \cdot x$.

K3 Most az alaphalmaz a tanult számok halmaza. Keresd meg az egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmazának elemeit!
Van-e az egyenlőtlenségek megoldásai között legkisebb, legnagyobb szám?

a) $(x : 2 - 16) \cdot 2 = -2$;

b) $[5x + (-3)] - 2 < 55$;

c) $\frac{4}{7}x + 2 = \frac{5}{7}$;

d) $\frac{4}{7}x + 2 \geq \frac{5}{7}$.

K4 Panni felosztott egy négyzetlapot az oldalaival párhuzamos egyenesekkel négyzetekre. Beszínezte a kis négyzetek harmadát kékre, majd a maradék negyedét pirosra, végül 6-ot sárgára. Színezetlen maradt 3 négyzet. Hány részre osztotta fel Panni az eredeti négyzetlapot? Bonts fel te is ennyi részre egy négyzetet, majd végezd el Panni színezését!

K5 Oldd meg a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán!

a) $x + 3 = 2x - 2$;

b) $2x + 1 > -1$;

c) $x + 3 = 3 - x$;

d) $5x - 3 = 3 - 5x$;

e) $(x - 2) \cdot 4 > -2 + 4x$;

f) $0{,}5x + 1 = \frac{1}{2}x - 1$;

g) $\frac{2}{3}x \leq \frac{3}{2}$;

h) $\frac{x}{2} + 4 \geq 1$;

i) $(x + 2) : 4 = 6$;

j) $2(x - 1) + 3 \geq 12 - x$;

k) $\frac{x - 1}{3} = \frac{x}{3} - 1$;

l) $2x - 1 \leq 2x + 1$.

Egyenletek megoldása mindkét oldal azonos változtatásával

A mérlegelv

1. Tedd ki a relációs jelet a két műveletsor közé! $8 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \square (6 \cdot 2 + 7) \cdot 4$.

2. Végezd el a következőket a fenti összefüggéssel:

a) **Mindkét oldalt szorozd meg 6-tal!** *b)* **Mindkét oldalt szorozd meg (-3)-mal!**

c) **Mindkét oldalhoz adj 14-et!**

Változott-e valamelyik esetben a relációs jel?

Olyan egyenletmegoldási módszert tanulunk, amelynek neve egy tömegmérő eszközre utal. Régebben kétkarú mérleget használtak a tömeg méréséhez. Egyik serpenyőjébe tették a mérendő tömeget, a másikba azokat a súlyokat, amivel mérték. A mérleg akkor mutatta a mérendő tárgy tömegét, ha a mérleg nyelve egyenlő magasságban volt.



Ha az egyik oldalon a serpenyőre tettek még valamilyen tömeget, akkor azon az oldalon a serpenyő lesüllyedt, a másik oldalon a serpenyő felemelkedett.

Ha a két serpenyő egyenlő magasságban volt, tehát a két oldalon egyenlő tömegek voltak, **további egyensúlyt úgy lehetett elérni,** ha

mindkét oldalhoz ugyanannyit tettek hozzá,

vagy

ugyanannyit vettek el belőle,

vagy

mindkét oldalt megsokszorozták,

vagy

mindkét oldalon lévő tömeget ugyanannyiadára csökkentették.

Ma már újabb típusú mérlegeket használnak a tömeg mérésére, de a **mérlegelv** elnevezés az egyenletmegoldási módszerek között ezzel a szóhasználattal megmaradt.

1. példa

Melyik az a szám, amelynek ötszörösénél hárommal nagyobb szám egyenlő a nála 12-vel nagyobb szám kétszeresével?

Jelöljük a keresett számot x-szel.

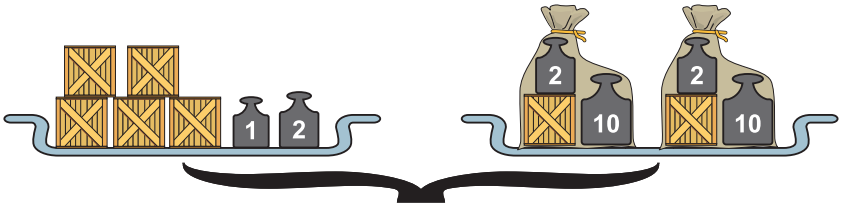
Az ötszörösénél hárommal nagyobb szám: $5x + 3$.

A nála 12-vel nagyobb szám kétszerese: $2(x + 12)$.

Keressük azt a számot, amelyre ez a két kifejezés egyenlő értéket ad. Tehát az egyenlet, amelyet meg kell oldanunk:

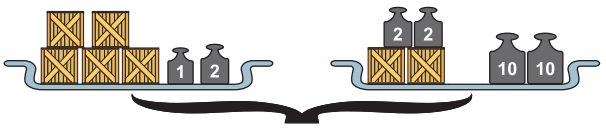
$$5x + 3 = 2(x + 12).$$

Ezt úgy is elképzelhetjük, mintha egy mérleg két serpenyőjében lennének az egyenlőség bal, illetve jobb oldalán levő ismeretlen és ismert mennyiségek.

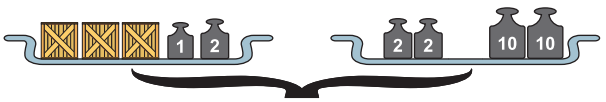


Alkalmazzuk a mérlegelvnél leírt lépéseket az egyenlet megoldásához.

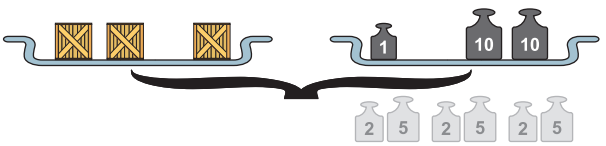
$5x + 3 = 2(x + 12)$ / bontsuk fel a jobb oldalon levő zárójelet; **rövidebben:** zárójelfelbontás



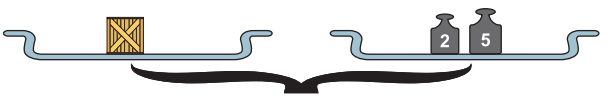
$5x + 3 = 2x + 24$ / vegyünk el mindkét oldalról $2x$-et; **rövidebben:** $-2x$



$3x + 3 = 24$ / vegyünk el mindkét oldalról 3-at; **rövidebben:** -3



$3x = 21$ / osszuk el mindkét oldalt 3-mal; **rövidebben:** $: 3$



$x = 7$.

Ellenőrzés:

A 7 ötszörösénél hárommal nagyobb szám: $5 \cdot 7 + 3 = 38$.

A 7-nél 12-vel nagyobb szám kétszerese: $2 \cdot (7 + 12) = 2 \cdot 19 = 38$.

Mivel $x = 7$ esetén az egyenlet bal és jobb oldalának egyaránt 38 az értéke, teljesül az egyenlőség, tehát a keresett szám a 7.

Fontos tudnivaló

Az egyenletmegoldás során azt használtuk fel, hogy az egymással egyenlő mennyiségeket azonos módon változtathatjuk, ekkor igaz marad az egyenlőség.

Ez a mérlegelv lényege.

Nagyon figyeljünk arra, hogy minden esetben a teljes bal, illetve jobb oldalt ugyanúgy változtatjuk! Különösen a mindkét oldalra vonatkozó szorzások és osztások elvégzésénél kell a fokozott figyelem.

Tanultuk

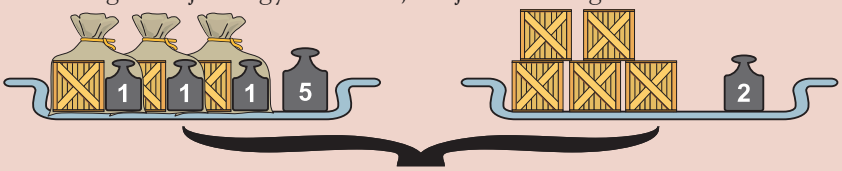
– a zárójelfelbontás szabályait,

– az egynemű kifejezések összevonását.

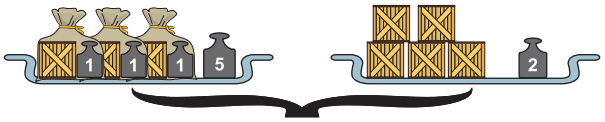
Ezek a lépések nem változtatják az algebrai kifejezések értékét, ezért gyakran használhatjuk az egyenletek megoldása során.

2. példa

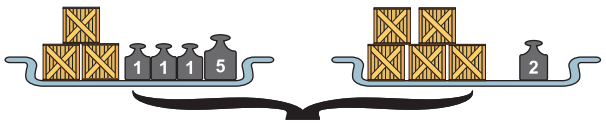
Az ábrán látható mérleghez írj fel egyenleteket, majd oldd meg azokat!



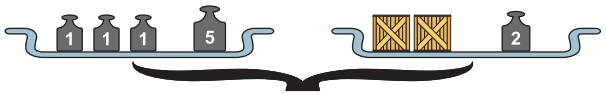
$3(x + 1) + 5 = 5x + 2$ /zárójelfelbontás



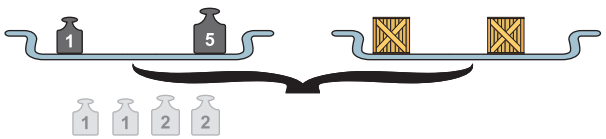
$3x + 3 + 5 = 5x + 2$ / $-3x$



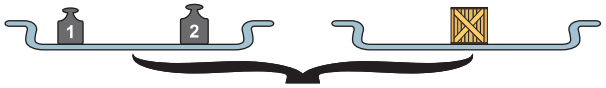
$8 = 2x + 2$ / -2



$6 = 2x$ / : 2



$3 = x$



Végezzünk ellenőrzést!

Ha $x = 3$, akkor a

– bal oldalon: $3(x + 1) + 5 = 3(3 + 1) + 5 = 17$;

– jobb oldalon: $5x + 2 = 5 \cdot 3 + 2 = 17$.

Valóban teljesül az egyenlőség, így a megoldás $x = 3$.

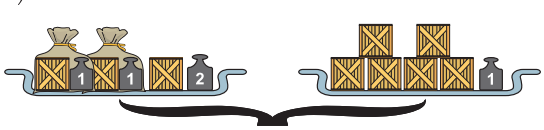
1. Mi a mérlegelv lényege?

2. Milyen műveletek elvégzésekor marad meg az egyenlőség a mérlegelv felhasználása során?

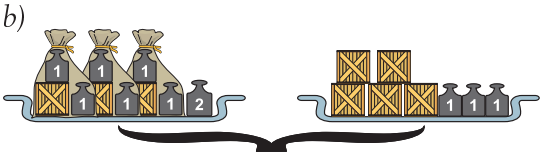
Feladatok

A1 Írj az ábráknak megfelelő egyenleteket! Mindkét oldal azonos változtatásával oldd meg az egyenleteket! Jelöld soronként ferde vonal mögött a változtatásokat! A megoldás után végezz ellenőrzést!

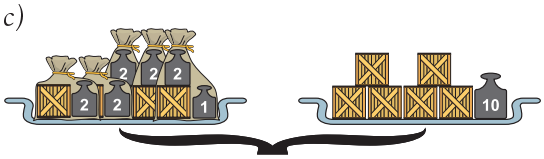
a)



b)



c)



A2 Hogyan változtattuk az egyenlet mindkét oldalát? A megfelelő változtatásokat írd röviden a ferde vonal után! (Dolgozz a füzetedben!)

Például: $x - 11 = 7 \quad / +11$

$x = 18$

a) $2(x - 3) = 5x + 9 \quad /$

$2x - 6 = 5x + 9 \quad /$

$-6 = 3x + 9 \quad /$

$-15 = 3x \quad /$

$-5 = x$

b) $10{,}5 - 6x = 4(x - 3) \quad /$

$10{,}5 - 6x = 4x - 12 \quad /$

$10{,}5 = 10x - 12 \quad /$

$22{,}5 = 10x \quad /$

$2{,}25 = x$

K3 Írd fel a megadott változtatással kapott egyenlőségeket! (Dolgozz a füzetedben!)

a) $5 - 2(x + 3) = 5(x - 3)$ /zárójelfelbontás

$= \quad$ /összevonás

$= \quad / +2x$

$= \quad / +15$

$= \quad / : 7$

$x =$

b) $5 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 3x - (x + 12)$ /zárójelfelbontás

$= \quad$ /összevonás

$= \quad / +2x$

$= \quad / +12$

$= \quad / : 4$

$x =$

Ellenőrizd megoldásaid helyességét!

K4 Oldd meg a mérlegelv segítségével az egyenleteket! Jelöld soronként ferde vonal mögött a változtatásokat! Minden esetben számítsd ki az egyenlet bal és jobb oldalának értékét a kapott megoldás szerint!

a) $2x - 5 = x + 2$;

b) $6 + 9x = 15 + (x - 1)$;

c) $4x + 3 - 2(x + 1) = x - 1$;

d) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 6 + 2 = 4x - 1$;

e) $6(2x + 1) = 2006 + 5(2x + 1)$;

f) $(x - 11) + 3(x + 11) = 5x + 11$.

Készítsünk egyenleteket!

Tudjuk, hogy A értéke 5, felírjuk: $A = 5$. Végezzük el egymás után a következő műveleteket az egyenlőség mindkét oldalával!

a) Adjunk hozzá 2-t! *b)* Szorozzuk meg 4-gyel! *c)* Vonjunk ki belőle 7-et!

Milyen egyenlethez jutottunk? Mi az egyenlet megoldása?

Mindenkiben felmerülhet a kérdés, hogyan lehet egyenleteket kitalálni. Te is tudsz biztosan, ezeket fel is adhatod osztálytársaidnak. Az így készített egyenletekből az osztályodnak feladatgyűjteményt is készíthettek. Lehet egyenletmegoldó bajnokságot is szervezni. *Ehhez hasonló versenyeket, párbajokat például Itáliában is szerveztek a XVI. században.* Nézz utána, ki volt Girolamo Cardano (ejtsd: zsirolámo kardáno)! (Másként Hieronimo Cardano, latinul Hieronymus Cardanus, 1501–1576.)

1. példa

Készítsünk egyenletet, amelynek a megoldása $x = 5$!

Kezdjük el „bonyolítani” a mérlegelv logikája szerint! Jelöljük magunknak a „bonyolítást”, azaz a két oldal változtatását, majd az így kapott egyenleteket írjuk fel:

$$x = 5 \qquad / + 3$$
$$x + 3 = 8 \qquad / \cdot 2$$
$$2(x + 3) = 16 \qquad / - 5x$$
$$2(x + 3) - 5x = 16 - 5x$$

Ezt már fel lehet adni padszomszédunknak. Természetesen a „bonyolítás” lépéseinek számát lehet növelni. Ha az utolsó sorban szereplő egyenletet szeretnénk megoldani, akkor haladhatunk az általunk végzett műveletek ellentett műveleteivel, visszafelé haladva. A megoldás lépései lehetnek:

$/ + 5x$, majd $/ : 2$, végül $/ - 3$. Érdekes lehet, hogy szomszédod is éppen ezeket a lépéseket választja-e, ha feladod neki megoldásra az egyenletet.

Feladatok

A1 Találj ki olyan egyenleteket, amelynek megoldásai

a) $x = 10$; *b)* $x = -6$; *c)* $x = \frac{4}{5}$; *d)* $x = -3\frac{1}{2}$; *e)* $x = 1{,}4$!

Legyenek az egyenleteid egyre nehezebben, azaz egyre több lépésben megoldhatók!

K2 Melyik egyenlethez jutnánk az alábbi „bonyolítási” lépésekkel?

Legyen $x = 0$ az egyenlet megoldása.

A lépések: $/ \cdot 2$; $/ + 3$; $/ \cdot 5$; $/ - 3x$; $/ : 3$.

Hogyan kell változtatni az oldalakat az egyenlet megoldásához? Keress több megoldást is!

K3 Legyen $x = -1$ az egyenlet megoldása. Valamilyen sorrendben a következő „bonyolítási” lépéseket hajtottuk végre: $/ \cdot 2$; $/ - 4x$; $/ \cdot 3$; $/ + 5$.

A kapott egyenlet: $2x + 10 = 4 - 4x$.
Milyen sorrendben következhettek a „bonyolítási” lépések? Lehet többféle sorrend is megfelelő?

Egyenlőtlenségek

$3 < 5$. Ez az állítás igaz. Igaz marad-e, ha

a) mindkét oldalhoz 10-et hozzáadunk? *b)* mindkét oldalt megszorozzuk 0-val?

c) mindkét oldalból kivonunk 4-et? *d)* mindkét oldalt megszorozzuk $\frac{3}{2}$-del?

e) mindkét oldalt megszorozzuk (-4)-gyel? *f)* mindkét oldalt elosztjuk (-2)-vel?

Próbáld ki! Vonj ki mindkét oldalból 3-at is és 5-öt is! Szorozd 4-gyel az egyenlőtlenséget! Mit kaptál? Hasonlítsd össze az *e)* pontban kapott egyenlőtlenséggel!

1. példa

Mely számra igaz, hogy a háromszorosánál 15-tel nagyobb szám kisebb, mint a számnál 7-tel nagyobb szám?

Jelöljük a keresett számot x-szel!

A keresett szám háromszorosánál 15-tel nagyobb szám: $3x + 15$.

A keresett számnál 7-tel nagyobb szám: $x + 7$.

Most nem tudunk egyenletet megfogalmazni, mert nem tudjuk, pontosan mennyivel kisebb a $3x + 15$ az $x + 7$-nél. Ezért most a $<$ relációs jelet írhatjuk a két kifejezés közé: $3x + 15 < x + 7$.

$3x + 15 < x + 7$ /Mindkét oldalból vegyünk el x-et.

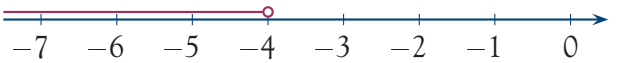
$2x + 15 < 7$ /Mindkét oldalból vonjunk ki 15-öt:

$2x < -8$ Ekkor

$x < -4$

Tehát a -4-nél kisebb számok mind megfelelnek a feladat szövegének.

Ábrázoljuk megoldásunkat számegyenesen!



Mivel végtelen sok szám igazzá teszi az egyenlőtlenséget, így az ellenőrzést másféleképpen kell végeznünk, hiszen nem lehet behelyettesíteni a megoldások mindegyikét.

Próbáljuk ki a -4-et, egy -4-nél kisebb és egy -4-nél nagyobb számot is!

Ha $x = -4{,}1$, akkor $3 \cdot (-4{,}1) + 15 = 2{,}7 < (-4{,}1) + 7 = 2{,}9$. Igaz az állítás.

Ha $x = -3{,}9$, akkor $3 \cdot (-3{,}9) + 15 = 3{,}3 > (-3{,}9) + 7 = 3{,}1$. Nem teljesül az állítás.

Ha $x = -4$, akkor $3 \cdot (-4) + 15 = 3$ és $(-4) + 7 = 3$. Egyenlőség teljesül, nem igaz az állítás.

Tehát a -4 egy „határszám”, a nála kisebb számokra igaz, míg a -4-re és nála nagyobb számokra nem igaz az állítás. A -4-re sem igaz, hiszen azt kaptuk, hogy $x < -4$.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanannyival növelve vagy csökkentve az egyenlőtlenség továbbra is igaz marad.

Szabad-e vajon mindkét oldalt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozni vagy osztani, mint azt az egyenleteknél megtehettük?

Figyeld meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

Szorozzunk pozitív számmal:

$5 < 8$ $/ \cdot 3$

$15 < 24$

Igaz maradt az egyenlőtlenség.

$7 > -4$ $/ \cdot 5$

$35 > -20$

Igaz maradt az egyenlőtlenség.

Osszunk pozitív számmal:

$24 > -8$ $/ : 4$

$6 > -2$

Igaz maradt az egyenlőtlenség.

$-51 < -12$ $/ : 6$

$-8{,}5 < -2$

Igaz maradt az egyenlőtlenség.

Szorozzunk negatív számmal:

$5 < 8 \quad / \cdot (-3)$

$-15 > -24$

Megfordult a relációs jel állása.

$7 > -4 \quad / \cdot (-5)$

$-35 < 20$

Megfordult a relációs jel állása.

Osszunk negatív számmal:

$24 > -8 \quad / : (-4)$

$-6 < 2$

Megfordult a relációs jel állása.

$-51 < -12 \quad / : (-6)$

$8{,}5 > 2$

Megfordult a relációs jel állása.

Összefoglalva

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor a relációs jel állása nem változik meg.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor a relációs jel állása ellenkezőjére változik.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanannyival növelve vagy csökkentve az egyenlőtlenség továbbra is igaz marad.

Jegyezd meg!

Az egyenlőtlenségek megoldása során:

nem változik az egyenlőtlenség iránya, ha

– ugyanannyival növeljük mindkét oldalt;

– ugyanannyival csökkentjük mindkét oldalt;

– ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk mindkét oldalt;

– ugyanazzal a pozitív számmal osztjuk mindkét oldalt.

megfordul az egyenlőtlenség iránya, ha

– ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk mindkét oldalt;

– ugyanazzal a negatív számmal osztjuk mindkét oldalt.

Azokat az egyenlőtlenségeket, amelyek az alaphalmaz minden elemére igazak, **azonos egyenlőtlenségeknek** is szokták nevezni. Például: $x + 5 > x + 2$.

1. Milyen műveletek elvégzésekor nem változik meg az egyenlőtlenség iránya az egyenlőtlenség megoldása során?
2. Miért nem szabad az egyenlőtlenséget 0-val szorozni?
3. Változik-e az egyenlőtlenség iránya, ha negatív számmal szorozzuk?

Feladatok

A1 Az alábbi számok közé tedd ki a megfelelő relációs jelet! Végezd el a ferde vonal mögötti utasítást! Színezd kékre azokat az utasításokat, amikor nem változott a relációs jel állása, pirosra azokat, amelyeknél megfordult!

a) $13 \square 100 \quad / -72$;

b) $\frac{5}{3} \square \frac{1}{4} \quad / \cdot 12$;

c) $(-5) \square (-11) \quad / \cdot (-1)$;

d) $24 \square (-12) \quad / : (-2)$;

e) $\left(-\frac{4}{9}\right) \square \left(-\frac{2}{3}\right) \quad / -\frac{1}{3}$;

f) $50 \square -49 \quad / + (-30)$;

g) $5{,}6 \square 6{,}5 \quad / \cdot (-1{,}1)$;

h) $\frac{1}{7} \square \left(-\frac{2}{7}\right) \quad / -1$;

i) $\frac{7}{8} \square \left(-\frac{3}{4}\right) \quad / : (-2)$.

K2 Oldd meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket a tanult számok halmazán! Az egyenlőtlenségek megoldáshalmazát ábrázold számegyenesen! Néhány számra végezz ellenőrzést!

a) $7x - 3{,}2 \leq 5x$;

b) $2{,}5x - 21 < 21 - 2{,}5x$;

c) $2{,}5x - 21 \geq 21 - 2{,}5x$;

d) $10 - (9 - x) + 9 - (10 - x) < (x - 9) + 10 - (10 - x)$.

K3 Oldd meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a tanult számok halmazán! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen! Keress olyan alaphalmazt, amelyben nincs megoldása az egyenlőtlenségnek!

a) $7x - 3{,}2 > 5x$;

b) $6 - \frac{1}{2}(4x - 8) \geq x + 22$;

c) $2(x + 1) > 3(x - 1)$.

E4 Mely számok teszik igazzá az egyenlőtlenséget, ha az alaphalmaz: $A = \{$A -25-nél nagyobb, de 30-nál kisebb egész számok$\}$?

a) $(2x - 5) : 3 > x - 9$;

b) $5x - \frac{4}{5} \geq 3x + \frac{10}{5}$;

c) $4{,}25 - 10x \leq 10x - 4{,}25$;

d) $3(x - 12) + 6 < 6 - 3(12 - x)$.

Szöveges feladatok I.

Írd fel betűk, számok, műveleti jelek segítségével a következőket!

a) **Egy szám 5-szörösénél 3-mal több.**

b) **Egy számnál 15-tel több 5-szöröse.**

c) **Egy szám harmadrészénél 12-vel kevesebb.**

d) **Egy számnál 12-vel kisebb szám harmadrésze.**

e) **Egy számnál 8-cal kisebb szám 11-szeresének ötödrésze.**

„Gondoltam egy számot…”

1. példa

Gondoltam egy számot. A hatszorosából levontam 7-et, az így kapott számot a gondolt szám ötszöröséből vontam le. Ezt a számot a gondolt szám négyszereséből vontam le. Amit eredményül kaptam, azt a gondolt szám háromszorosából levonva, tizenegyet kaptam. Melyik számra gondoltam?

Jelöljük a gondolt számot x-szel! Nézzük lépésenként a feladat szövegét, és jelöljünk annak megfelelően!

„A hatszorosából levontam hetet”: $6x - 7$;

„. . . az így kapott számot a gondolt szám ötszöröséből vontam le”: $5x - (6x - 7)$;

„. . . ezt a számot a gondolt szám négyszereséből vontam le”: $4x - [5x - (6x - 7)]$;

„. . . amit eredményül kaptam, azt a gondolt szám háromszorosából levonva tizenegyet kaptam”:

$$3x - \{4x - [5x - (6x - 7)]\} = 11.$$

Bontsuk fel a zárójeleket! Haladjunk „belülről” „kifelé”, azaz először a kerek, majd a szögletes, végül a kapcsos zárójeleket bontsuk fel!

$$3x - \{4x - [5x - 6x + 7]\} = 11;$$

$$3x - \{4x - 5x + 6x - 7\} = 11;$$

$$3x - 4x + 5x - 6x + 7 = 11 \quad /\text{összevonva}$$

$$-2x + 7 = 11 \quad /-7$$

$$-2x = 4 \quad /:(-2)$$

$x = -2$, tehát a gondolt szám a -2.

A szövegbe helyettesítve ellenőrizzük a megoldást:

„A gondolt szám hatszorosából levontam hetet”: $(-2) \cdot 6 - 7 = -19$.

„Az így kapott számot a gondolt szám ötszöröséből vontam le”: $(-2) \cdot 5 - (-19) = 9$.

„Ezt a számot a gondolt szám négyszereséből vontam le”: $(-2) \cdot 4 - 9 = -17$.

„Amit eredményül kaptam, azt a gondolt szám háromszorosából levonva tizenegyet kaptam”: $(-2) \cdot 3 - (-17) = 11$. Valóban igaz.

Feladatok

K1 Gondoltam egy számra. A négyszereséből elvettem 5-öt. A különbséget megszoroztam 3-mal. Így ugyanazt kaptam, mint amikor a gondolt számhoz 7-et adtam.

K2 Mely számra igaz, hogy 100-ból elvéve a gondolt szám ötszörösénél 4-gyel kisebb számot, a szám kétszeresénél 29-cel kisebbet kapunk eredményül?

K3 Panni azt mondta, hogy talált egy számot, amelynél 12-vel nagyobb szám ötszörösét 60-ból kivonva a szám ötszörösének ellentettjét kapjuk meg.

Péter szerint nincs ilyen szám. Petra azt mondta, hogy ez érdekes, szerinte bármelyik számra igaz az állítás. Kinek van igaza?

K4 Melyik szám négyszereséből vegyünk el 10-et, ha azt szeretnénk, hogy a különbség nagyobb legyen a keresett számnál 2-vel kisebb szám háromszorosánál? Hány megfelelő negatív számot találtál?



K5 Írj „gondoltam egy számot” típusú szöveges feladatot az alábbi egyenletekhez, egyenlőtlenségekhez! Oldd is meg azokat!

a) $100 - (x + 55) = 4x$;

b) $100 - (x + 55) > 4x$;

c) $(3x + 3) - 2x > x + 4$;

d) $1 + x + 2x + 3x + 4x - 5x = 5x + 1$.

Szöveges feladatok II.

Ha szöveges feladatokat oldunk meg, nem szükségszerű egyenletekkel dolgoznunk. Sok esetben könnyebb következtetésekkel megfejteni a választ. Általában elegánsabbak is az ilyen megoldások, bár leírásuk nem minden esetben egyszerű.

5.

1. példa

Két szám között érdekes kapcsolat van. Ha az egyik szám végéről elhagyunk egy nullát, akkor a másik számot kapjuk meg. Az összegük 22 066. Melyik lehet ez a két szám?

A megadott összeg miatt a nagyobbik szám ötjegyű.

Megoldás következtetéssel:

Jelöljük a keresett szám számjegyeit betűkkel:

$\overline{dcba0}$, illetve $\overline{dcba}$.

Írjuk fel az összeadást:

$$\begin{array}{r} dcba0 \\ +\ \ dcba \\ \hline 22066 \end{array}$$

Mivel $a + 0 = 6$ ezért $a = 6$, tehát

$$\begin{array}{r} dcb60 \\ +\ \ dcb6 \\ \hline 22066 \end{array}$$

Mivel $b + 6 = 6$ ezért $b = 0$,

$$\begin{array}{r} dc060 \\ +\ \ dc06 \\ \hline 22066 \end{array}$$

Mivel $c + 0 = 0$, ezért $c = 0$, végül $d = 2$:

$$\begin{array}{r} 20060 \\ +\ \ 2006 \\ \hline 22066 \end{array}$$

A keresett szám 2006.

Megoldás egyenletfelírással:

Ha egy 0-ra végződő szám végéről elhagyjuk a 0-t, akkor tizedrészére csökkentettük a számot. Jelöljük a 0 elhagyásával kapott számot x-szel. Ekkor a másik szám tízszer akkora, vagyis $10x$.

Egyenlettel felírva az összegüket:

$$\begin{aligned} x + 10x &= 22066 \quad /\text{összevonva} \\ 11x &= 22066 \quad /: 11 \\ x &= 2006, \end{aligned}$$

a másik szám: $10x = 20060$.

Ellenőrzés: az összegük $2006 + 20060 = 22066$.

Fontos tudnivaló

Ha szöveges feladatot egyenlettel szeretnél megoldani, akkor ne felejtsd el:

(1) Írd fel, mit fogsz ismeretlennel jelölni!
(2) Lehetőleg csak egy ismeretlent használj!
(3) Próbálj meg olyan ábrát készíteni, amelynek segítségével összefüggéseket állapíthatsz meg!
(4) A szövegben levő összefüggések alapján írd fel az egyenletet!
(5) Törekedj arra, hogy a megoldásaidat a szövegbe behelyettesítve ellenőrizd!

Szöveges feladatokban gyakran nemcsak egy ismeretlen számot, mennyiséget kell megfejtenünk, hanem az összefüggések alapján néha többet is. Könnyítheti a feladatmegoldást, ha a szövegben lévő vagy tanult összefüggések alapján olyan egyenletet fogalmazunk meg, amelyben egy ismeretlen van.

2. példa

Egy paralelogrammában két szomszédos szög különbsége 100°. Mekkorák a paralelogramma szögei?

A paralelogrammának két különböző nagyságú szöge is lehet.

Jelöljük a kisebbik szöget α-val, ekkor a nagyobbik szög 100°-kal nagyobb, azaz $\alpha + 100°$.

Tanultuk, hogy a szomszédos szögek összege 180°, ezért

$$\alpha + \alpha + 100° = 180° \quad /-100°$$
$$2\alpha = 80° \quad /:2$$
$$\alpha = 40°,$$

a másik szög pedig 140°.

Vajon létezik-e ilyen paralelogramma? Úgy tudjuk ellenőrizni, hogy kiszámítjuk a négy szög összegét: $2 \cdot 40° + 2 \cdot 140° = 360°$. Valóban 360°, ilyen paralelogramma létezhet. Például:



3. példa

Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Ha ebből a számból elvesszük a számjegyeinek felcserélésével kapott számot, a különbség 27. Melyik lehet ez a kétjegyű szám?

Megoldás következtetéssel:

Ha a számjegyek összege 9, akkor a lehetséges kétjegyű számok: 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18.

Nézzük meg a különbségeket úgy, hogy a nagyobb számból kivonjuk a megfelelő kisebbet.

81	72	63	54
−18	−27	−36	−45
63	45	27	9

A keresett szám a 63.

Megoldás egyenletfelírással:

Az egyesek helyén álló számjegy: x.

A tízesek helyén álló számjegy: $9 - x$.

A keresett szám helyiértékes alakja: $10 \cdot (9 - x) + x = 90 - 9x$.

A jegyek felcserélésével kapott szám helyiértékes alakja: $10x + (9 - x) = 9x + 9$.

A különbségük:

$$(90 - 9x) - (9x + 9) = 27 \quad /\text{zárójelfelbontás}$$
$$90 - 9x - 9x - 9 = 27 \quad /\text{összevonás}$$
$$81 - 18x = 27 \quad / + 18x$$
$$81 = 27 + 18x \quad / - 27$$
$$54 = 18x \quad / : 15$$
$$3 = x$$
$$9 - x = 6$$

A keresett szám a 63. Ellenőrzés: $63 - 36 = 27$.

Feladatok

K1 Három szám között érdekes kapcsolat van.

Ha az egyik számnak a végéről elhagyunk egy nullát, akkor a másik számot kapjuk meg.

Ha ennek a számnak a végéről elhagyunk el egy nullát, akkor a harmadik számot kapjuk meg.

A három szám összege 83 583. Melyik ez a három szám?

K2 Péter 3 cm-rel magasabb Pankánál, Flóra pedig 5 cm-rel alacsonyabb Pankánál. A három gyerek átlagmagassága 167 cm. Milyen magasak a gyerekek?



K3 Három polcon összesen 208 könyv van. A legalsó polcon hattal több könyv van, mint a középsőn, míg a középsőn 14-gyel több, mint a legfelsőn. Hány könyv van az egyes polcokon?

K4 Kati és Berci minden hónapban zsebpénzt kapnak szüleiktől, Berci 100 Ft-tal többet. Ha Berci kétszer annyi pénzt kapna szüleitől, Kati pedig 100 Ft-tal többet, akkor együtt pont meg tudnák venni kedvenc rajzfilmjüket DVD-n, amely 1800 Ft-ba kerül. Mennyi zsebpénzt kapnak a gyerekek külön-külön?

K5 Mekkorák lehetnek az egyenlő szárú háromszög szögei, ha az

a) egyik külső szöge 120°;

b) egyik külső szöge 50°;

c) egyik külső szöge 100°;

d) egyik belső szöge 90°;

e) egyik belső szöge 45°;

f) egyik belső szöge 120°?

Melyiket tudnád szögmérő használata nélkül is megszerkeszteni, ha ismernéd egyik oldalának hosszát?

K6 Két szám különbsége 8. Ha a számokat összeszorozzuk, 0-t kapunk eredményül. Melyik lehet ez a két szám?

E7 Aranka és anyukája életkorának összege 68 év. Ha Aranka kétszer annyi idős lenne, mint most, akkor két évvel lenne fiatalabb anyukája jelenlegi életkoránál. Hány éves Aranka, hány éves az anyukája?

Ki kicsoda?

1. példa

A Nagy, Kovács, Szabó vezetéknevekből és az András, Johanna, Dániel keresztnevekből három ember teljes nevét (vezetéknév és keresztnév) kell összeállítanunk. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

Jelölje a neveket a kezdőbetűjük! Az N vezetéknévhez 3-féle keresztnév kapcsolódhat: NA, NJ, ND. Ebből választunk egyet.

A K vezetéknévhez – minden választás esetén már csak két keresztnév marad: NA és KJ vagy NA és KD; NJ és KA vagy NJ és KD; ND és KA vagy ND és KJ.

Az Sz vezetéknévhez minden esetben már csak egy keresztnév marad:

NA, KJ, SzD; NA, KD, SzJ; NJ, KA, SzD; NJ, KD, SzA; ND, KA, SzJ; ND, KJ, SzA

Összesen 6-féleképpen tudjuk 3 ember nevét felírni.

2. példa

A Külügyminisztérium három dolgozójának repülőjegyet rendelnek telefonon keresztül.
– A vezetéknevek Asztalos, Agárdi, Bádogos, a keresztnevek András, Balázs, Béla, az úticélok Ausztria, Belgium, Brazília.
– Ebben a sorrendben?
– Azt sajnos nem tudom, csak azt, hogy Balázs főnöke, Agárdi utazik legtávolabbra, és két olyan kolléga is van, akinek a vezetékneve, a keresztneve és az úticélja is ugyanazzal a betűvel kezdődik.
Kinek mi a teljes neve és hova utazik?
(*Bizám György–Herczeg János:* Játék és logika 85 feladatban, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971*)

Többféleképpen gondolkodhatunk. A leghosszadalmasabb (egyben legalaposabb) megoldás az, ha minden lehetőséget felsorolunk, és ezek közül megvizsgáljuk, hogy melyikre vagy melyekre igaz a történet minden állítása. Ez a megoldás annyira hosszadalmas, hogy nem is foglalkozunk vele.

Egy másik – jóval egyszerűbb – megoldás, hogy elkezdjük feldolgozni a rendelkezésünkre álló információkat, és azonnal kiszűrjük azokat a lehetőségeket, amelyek nem megfelelőek.

Vegyük sorra az információkat: Agárdi utazik a legtávolabbra. Ez Brazília.
Ha két olyan ember is van, akiknek a neveik és az úticéljuk ugyanazzal a betűvel kezdődik, akkor ez bizonyosan nem **A**gárdi, aki **B**razíliába utazik (és egyébként nem Balázs a keresztneve, mert nem a saját főnöke.)

A többi névből már csak egy-egy A, illetve B kezdőbetűs hármast tudunk összeállítani. A betűs csak Asztalos–András–Ausztria lehet.

Mivel a Balázs keresztnevű ember főnöke Agárdi, így Agárdi nem lehet Balázs. Ezért **Bádogos Balázs Belgiumba, Agárdi Béla Brazíliába, Asztalos András Ausztriába** utazik.

Sokféle más helyes gondolatmenettel eljuthatunk ehhez a megoldáshoz.

Ne felejtsd el, hogy a logikai feladatoknál is fontos az ellenőrzés:
– Helyes-e a megoldás? (Nem mond ellent valamelyik adott információnak?)
– Minden megoldást megtaláltam? Nem lehet több megoldás?

Feladatok

A1 Az Abonyi, Budai, Ceglédi vezetéknevekből és az András, Bálint, Cecília keresztnevekből három ember teljes nevét (vezetéknév és keresztnév) kell összeállítanunk úgy, hogy semelyikük vezetékneve ne kezdődjön ugyanazzal a betűvel, mint a keresztneve.

a) Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

b) Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha azt is tudjuk, hogy Abonyi férfi?

K2 Egy négy házaspárból álló társaság egzotikus nyaralást tervez. A házaspárok együtt utaznak, de páronként más-más ország az úticéljuk.



(1) András Japánba utazik.

(2) Béla és Olga együtt utaznak.

(3) Cézár utazás előtt még meglátogatta Rozit.

(4) Panni Mongóliába megy.

(5) Rozi Laoszba utazik.

(6) Dezső és Sári is a társasághoz tartozik.

(7) Az egyik pár Koreába megy.

Ki kivel és hova készül?

(*Bizám György–Herczeg János:* Játék és logika 85 feladatban, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971*)

K3 Két testvérpár, Sára és Tamás, illetve Sándor és Tamara mesélik:

Mindkét fiú magasabb mindkét lánynál.

Mindkét S kezdőbetűs idősebb mindkét T kezdőbetűsnél.

Sára és Tamás is jobban tanul Sándornál és Tamaránál is.

Keress olyan gyerekeket, akikre illenek a tulajdonságok:

(1) _____ idősebb, mint _____.

(2) _____ alacsonyabb, mint _____.

(3) _____ magasabb és idősebb, mint _____.

(4) _____ magasabb és fiatalabb, mint _____.

(5) _____ alacsonyabb és rosszabbul tanul, mint _____.

(6) _____ idősebb és alacsonyabb, mint _____.

(7) _____ alacsonyabb és rosszabbul tanul, mint _____.

(8) _____ fiú alacsonyabb, mint _____ fiú.

Mely állítások fejezik ki ugyanazt?

K4 2-2 piros, kék, sárga és zöld golyónk van. Ezeket kettesével elrakjuk egy piros, egy kék, egy sárga és egy zöld dobozba úgy, hogy

– semelyik dobozba nem raktunk olyan színűt, mint a doboz színe;

– semelyik dobozba nem raktunk két azonos színű golyót;

– az egyik dobozban a sárga golyó mellett kék, egy másikban a sárga golyó mellett zöld golyó van;

– a kék dobozba nem tettünk piros golyót.

Melyik dobozba milyen színű golyókat tettünk?

Arányosság, százalékszámítás

Emlékeztető

Hatodik osztályban tanultuk az arány fogalmát, mennyiségeket, számokat osztottunk fel megadott arányban.

Adj meg három olyan számpárt, amelyek aránya: *a)* $1 : 2$; *b)* $3 : 5$!

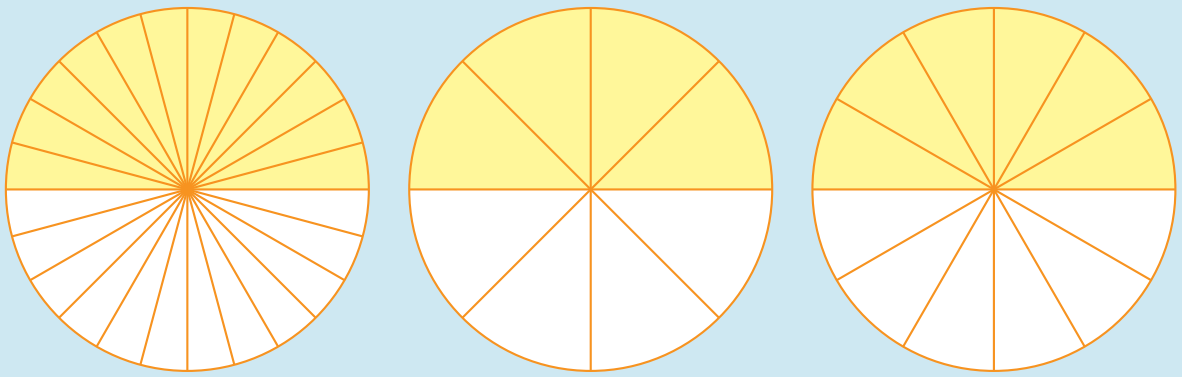
Ismételjük át a tanultakat!

Két szám arányát kettősponttal vagy törtvonallal jelöljük. Például: $4 : 7$, $\frac{4}{7}$, **és a következőképpen mondjuk: 4 aránylik a 7-hez.**

Mit jelent a $4 : 7$?

Azt a számot, amely megmutatja, hogy a 4 hányszorosa vagy hányadrésze a 7-nek. A 4 a 7-nek $\frac{4}{7}$-szerese, vagy másképp a 4 $\frac{4}{7}$ része a 7-nek.

1. példa



Mennyi a színezett és a színezetlen részek aránya? Írd fel tört alakban!

A színes és színezetlen részek aránya:

$12 : 24$; $4 : 8$; $6 : 12$.

Írjuk fel az arányokat tört alakban!

$12 : 24 = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$; $4 : 8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $6 : 12 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Mind a három esetben azt kaptuk, hogy a színes és a színezetlen területek aránya $1 : 2$.

A fent leolvasott arányok egyenlő értékűek.

Az egyenlő értékű arányokat aránypároknak nevezzük.

Célszerű az arányokkal való számolásnál a lehető legegyszerűbb alakkal számolni.

Például: $12 : 36 = 1 : 3$, vagy $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 2 : 3$.

2. példa

Egy lakóház színezéséhez kétfajta festéket használnak. Narancssárgából 18 kg-ot, vaníliaszínűből 72 kg-ot. Ezt a két színt keverik össze, és az így kapott színnel festik a házat. Próbaképpen egy kisebb mennyiséget kevernek ki. Milyen arányban kell a kétfajta színből kivenni a próbafestéshez?



A narancssárga és a vaníliaszín aránya

$$18 : 72 = \frac{18}{72} = \frac{1}{4} = 1 : 4.$$

Tehát ha 1 részt használnak fel a narancssárgából és 4 részt a vaníliaszínűből, akkor ugyanazt az arányt kapják, mintha 18 kg narancssárga és 72 kg vaníliaszínt kevernének össze.

Az arányban szereplő számok nem cserélhetők fel. Az $1 : 4$ arány **nem egyenlő** a $4 : 1$ aránnyal.

Feladatok

A1 Írj fel olyan számokat, amelyek aránya:

a) $1 : 2$; *b)* $3 : 5$; *c)* $12 : 25$!

A2 A megadott arányok segítségével írj fel a füzetedbe aránypárokat!

a) $4 : 10$; *b)* $21 : 35$;

c) $6 : 7$; *d)* $\frac{3}{10} : \frac{6}{10}$;

e) $\frac{11}{6} : \frac{5}{7}$.

A3 Írd fel egész számokkal a megadott arányokat!

a) $2{,}25 : 6{,}75$; *b)* $\frac{1}{2} : 3$;

c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{5}$; *d)* $\frac{1}{4} : \frac{3}{8}$;

e) $\frac{3}{7} : \frac{4}{9}$; *f)* $4\frac{1}{3} : 1\frac{3}{5}$;

g) $1\frac{2}{7} : 8{,}4$.

K4 A táblázatban található számpárok aránya $a : b = 4 : 6$. Add meg a hiányzó számokat!

a	2		$\frac{6}{5}$		
b		15		0,8	2,4

a	0,25	13		
b			28	$\frac{7}{5}$

K5 10 dkg fehér csokoládéban 55 gramm cukor és 25 gramm tejpor, 10 dkg tejcsokoládéban 5 dkg cukor és 20 gramm tejpor van.

A csokoládégyárban milyen arányban kell a cukrot és a tejport felhasználni a fehércsoki, illetve a tejcsoki készítésénél?

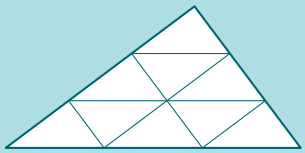
Arányos osztás

Egy 35 cm-es szalagot elvágtunk úgy, hogy a részek aránya 2 : 5 lett. Mekkora szalagdarabokat kaptunk?

1. példa

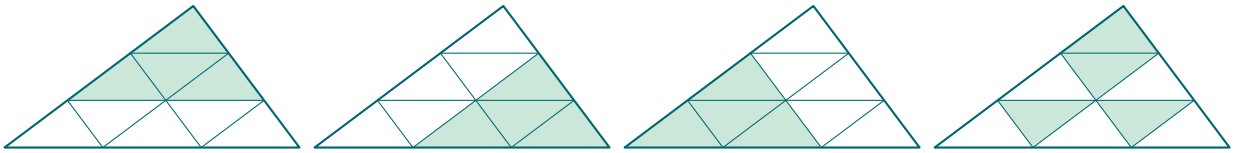
Színezzük ki a háromszöget úgy, hogy a színezett és nem színezett részek aránya 4 : 5 legyen!

A háromszög minden oldalát három egyenlő részre osztottuk, az osztópontokat az ábra szerint összekötöttük.



9 db kicsi háromszög keletkezett, amelyeknek egyenlő a területe.

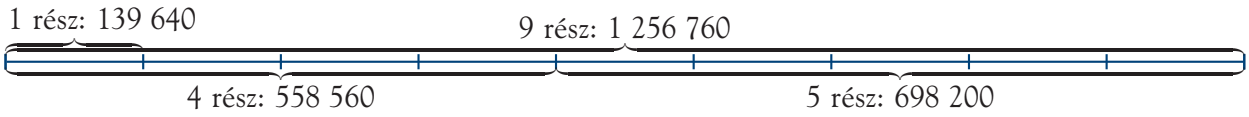
Mivel 9 db háromszögünk van, 4-et beszínezhetünk, 5 színezetlenül marad. Így a feladat feltételének megfelelően a színezett és nem színezett területek aránya 4 : 5.



2. példa

Két baráti család lottózott. A lottószelvényeket a közösen befizetett pénzből vásárolták. Az egyik család mindig négy szelvény árát, a másik család öt szelvény árát fizette be. Egyik szombaton négytalálatosuk lett. A nyereményük összesen 1 256 760 Ft volt. Hogyan osztozzon igazságosan a két család a nyereményen?

Akkor osztozkodnak igazságosan, ha a befizetett összegek arányában osztják el a nyereményt. Mivel a befizetett szelvények aránya 4 : 5, ezért a nyereményt is így kell elosztani. Az előbbi példa alapján ha 9 részre osztjuk a nyereményt, akkor a kapott értéket 4-gyel, illetve 5-tel megszorozva megkapjuk, hogy a két család mennyi pénzt vehet fel.



1 256 760 : 9 = 139 640,

139 640 · 4 = 558 560 Ft-ot kap az a család, aki 4 szelvény árát fizette a közösbe,

139 640 · 5 = 698 200 Ft-ot nyert az 5 szelvényt befizető család.

Ellenőrzés: 558 560 + 698 200 = 1 256 760 Ft, ami az összes nyereményük volt.

Kiszámíthattuk volna úgy is, hogy a kevesebb pénzt befizető család az összes nyereménynek a $\frac{4}{9}$ részét, azaz $\frac{4}{9} \cdot 1\ 256\ 760 = 558\ 560$ Ft-ot kap, a másik család pedig az $\frac{5}{9}$ részét, azaz $\frac{5}{9} \cdot 1\ 256\ 760 =$ $= 698\ 200$ Ft-ot. Ezt az eljárást minden számolásnál alkalmazhatjuk.

Fontos tudnivaló

Arányos osztáskor a felosztandó mennyiséget vagy számot elosztjuk az arányban szereplő számok összegével, majd a kapott értéket megszorozzuk az arányban szereplő számokkal.

3. példa



Anya gyümölcssalátát készít. Kapott egy jó receptet, amely szerint egy rész alma, egy rész banán, két rész kivi és négy rész narancs aránya esetén a legjobb a gyümölcssaláta zamata.

Mennyi gyümölcsöt tett az egyes fajtákból a gyümölcssalátába az édesanya, ha összesen 3 kg megtisztított gyümölcsöt használt el?

1 rész alma, 1 rész banán, 2 rész kivi, 4 rész narancs az arányok segítségével így írható fel:

A négy gyümölcs tömegének aránya a megadott sorrendben: 1 : 1 : 2 : 4.

Az ilyen jelölésmóddal megadott arányt nem írjuk fel tört formájában, de az előző példában megadott módon kiszámíthatjuk az egyes gyümölcsök tömegét.

Az arányban szereplő számokat összeadva: $1 + 1 + 2 + 4 = 8$. A 3 kg-ot 8 egyenlő részre osztva: $3 : 8 = 0{,}375$.

Így almából $1 \cdot 0{,}375$ kg $= 0{,}375$ kg, banánból is ennyi, kiviből $2 \cdot 0{,}375$ kg $= 0{,}75$ kg, narancsból $4 \cdot 0{,}375$ kg $= 1{,}5$ kg került a gyümölcssalátába.

Ellenőrzés után láthatjuk, hogy az összes gyümölcsmennyiség 3 kg, és a kiszámított gyümölcsök tömegének aránya 1 : 1 : 2 : 4.

Fogalmazd meg, hogy miként kell elvégezni egy adott szám vagy mennyiség arányos osztását!

Feladatok

A1 Egy osztályban 28 tanuló tanul. A fiúk és lányok aránya 3 : 4.

a) Hány fiú és hány lány jár az osztályba?

b) Milyen arányok lehetnének még egy 28 fős osztályban?

K2 Egy telek bekerítéséhez 150 m lécet használnak fel. A hulladék a megvásárolt mennyiség $\frac{1}{12}$ része.

a) Mennyi a beépített lécmennyiség? *b)* Mennyi a hulladék és a hasznos léc aránya?

K3 Oszd fel az alábbi számokat a megadott arányban!

a) a 45-öt 7 : 8; *b)* a 0,16-ot 2 : 3; *c)* a $\frac{7}{5}$-öt 1 : 6;

d) a 140-et $\frac{1}{4} : \frac{5}{8}$; *e)* az 560-at 1 : 3 : 4; *f)* a $\frac{14}{3}$-ot 1 : 2 : 3 arányban.

K4 Két testvér összes zsebpénze 5600 Ft. Az idősebb testvérnek háromszor annyi pénze van, mint a fiatalabbnak.

a) Írd fel a két testvér zsebpénzének arányát!

b) Számítsd ki, mennyi pénze van a fiatalabb testvérnek!

K5 Két szám aránya 2 : 5.

a) Melyik két számra gondoltunk, ha az összegük 413?

b) Mekkora a nagyobbik szám, ha a kisebb szám 113?

c) Melyik két számról van szó, ha különbségük 45?

d) Számítsd ki a két számot, ha különbségük −102!

K6 Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének az aránya 3 : 7. Hány fokosak a háromszög szögei?

K7 Egy betéti társaság három tagjának részesedési aránya éves szinten a bevételből 1 : 3 : 5. Mennyi pénzt osztottak szét, ha 2 000 000 Ft-ot kapott az a tag, akinek legnagyobb a részesedése?

Arányossági következtetések

1. **Mi jellemzi az egyenesen arányos mennyiségeket?**
2. **Koordináta-rendszerben ábrázoltuk egyenesen arányos mennyiségek összetartozó értékeit. Mi jellemzi ezeket a pontokat?**

Áttekintés

Hatodik osztályban a változó mennyiségeket vizsgálva kétféle arányossági változást figyeltünk meg, az **egyenes arányosságot** és a **fordított arányosságot.**

Két változó mennyiség között

– egyenes arányosság áll fenn, ha a megfelelő értékpárok hányadosa állandó.

– fordított arányosság áll fenn, ha a megfelelő értékpárok szorzata állandó.

1. példa

Egy kerék 120 másodperc alatt 100-at fordul. Változatlan, egyenletes sebesség mellett hányat fordul negyed óra alatt? Mennyi idő alatt fordul 350-et?

Ha 120 másodperc alatt 100-at fordul, akkor feleannyi idő alatt feleannyit fordul, azaz 60 másodperc alatt 50-et, tehát 1 másodperc alatt $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$-ot. Ezzel megkaptuk, hogy 1 időegység alatt mennyit fordul a kerék.

A negyed óra = 15 perc = 900 másodperc, ezalatt az idő alatt 900-szor annyi fordulatot tesz meg, mint 1 másodperc alatt, azaz 1 másodperc alatt $900 \cdot \frac{5}{6} = 750$-et.

Mivel $350 : \frac{5}{6} = 420$, ezért 350 fordulatot 420 másodperc alatt tesz meg.

Készítsünk táblázatot az eltelt idő, illetve a hozzá tartozó fordulatszám változásáról!

Eltelt idő (másodperc)	60	120	180	210	300	600	1200	2400	6000
Megtett fordulatok száma	50	100	150	175	250	500	1000	2000	5000

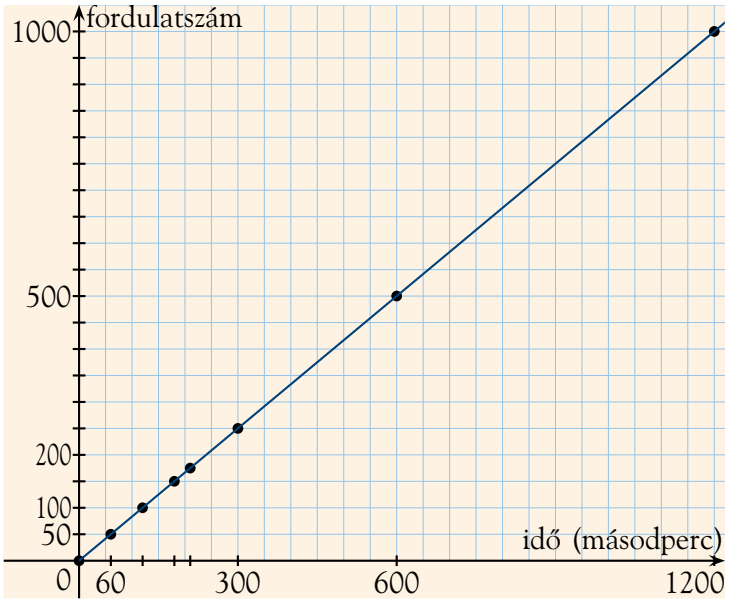
Mint látható, az összetartozó értékek hányadosa állandó:

$$\frac{50}{60} = \frac{100}{120} = \frac{150}{180} = \frac{175}{210} = \ldots = \frac{5}{6}.$$

Ilyen összefüggés jellemzi az **egyenes arányosságot**.

Ha koordináta-rendszerben ábrázoljuk az összetartozó értékeket mint pontok első és második koordinátáit, akkor ezek egy origón átmenő egyenesen helyezkednek el. (Az origó persze nem tartozik bele, mert 0-val nem lehet osztani. Ezt a pontot megállapodás szerint utólag hozzávesszük az egyeneshez.)

Az egyenes arányosságok grafikonját az origón átmenő, megfelelő egyenesre illeszkedő pontok halmaza alkotja.



6.

2. példa

Iskolánkban a „Számlálható szerencse és a szerencsejátékok kapcsolata” címmel előadást szerveztek érdeklődő tanulóinknak. Ehhez az előadótermet székekkel rendezték be. A terv szerint 10 sort szerettek volna kialakítani, soronként 15-15 székkel. Kiderült azonban, hogy egymás mellé csak 8 szék fér el. Hány sort kellett kialakítani, a tervezett nézőszámnak megfelelően?

Összesen $10 \cdot 15 = 150$ érdeklődőre számítottak a szervezők. Ha minden sorban 8 szék van, akkor $150 : 8 = 18{,}75$ sorra lenne szükség. Ez azt jelenti, hogy a szervezőknek 19 sort kellett kialakítani.

Vizsgáljuk meg, hogy miként alakul a sorok száma az egy sorban levő székek változásával!

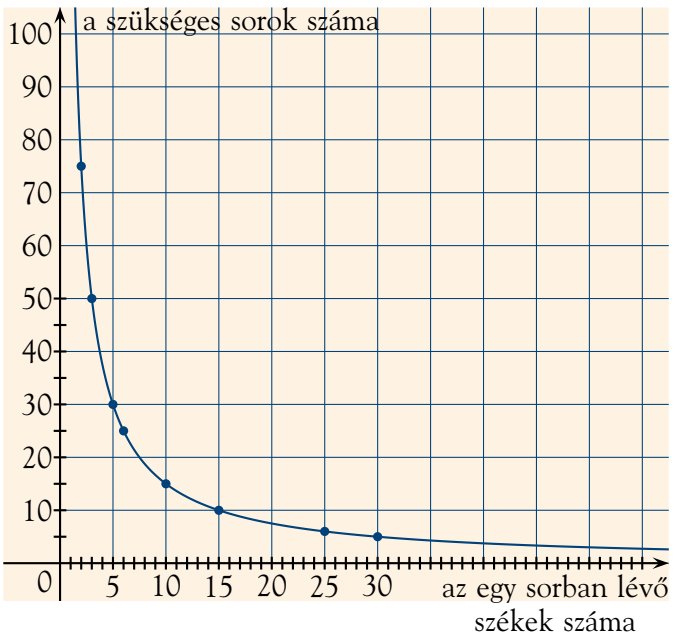
Egy sorban levő székek száma	1	2	3	5	6	10	15	25	30
A szükséges sorok száma	150	75	50	30	25	15	10	6	5

Megfigyelhetjük, hogy az összetartozó értékek szorzata állandó:

$1 \cdot 150 = 2 \cdot 75 = 3 \cdot 50 = 6 \cdot 25 = \ldots = 150$.

Ilyen összefüggés jellemzi a **fordított arányosságot**.

Ha koordináta-rendszerben ábrázoljuk az összetartozó értékeket mint pontok első és második koordinátáit, akkor ezek egy speciális görbe mentén helyezkednek el. Ennek a görbének a neve: hiperbola.



3. példa

a) Sára, szüleik nagy örömére egészségesen született 55 cm-rel. 1 éves korára már 110 cm-re növekedett. Hány cm lesz Sára 2, 3, 5, 10, 50 éves korára?

b) Nyáron nagyon sok volt a szúnyog. Az első csapásra 5-öt sikerült agyoncsapni. Összesen hány szúnyoggal lett kevesebb 2, 3, 10 csapás után?

c) Észrevettem, hogy a bevásárlóközpontban a szomszédos 3-as pénztárnál gyorsabban csökkent a sor. 8 perc alatt 3 ember fizette ki a megvásárolt termékek árát. Hány ember tud fizetni ennél a pénztárnál 16, 24, 50 perc alatt?



Az előző példák mindegyikében 2-2 változó mennyiséget figyelhetünk meg. Ezek azonban egyik esetben sem változnak **sem egyenes arányosan, sem fordított arányosan**. Mivel nem tudunk előre szabályszerűséget mondani a változásra, így a kérdésre sem tudunk biztos választ adni, legfeljebb feltevésekkel élhetünk.

1. Fogalmazd meg az egyenesen és a fordítottan arányos mennyiségek jellemző tulajdonságait!

2. Hogyan nevezzük azt a grafikont, amelyre az egyenesen arányos, illetve a fordítottan arányos mennyiségeket jellemző pontok illeszkednek?

Feladatok

K1 Egy kerékpáros 12 km-t tesz meg 1 óra alatt, egy kismotorral közlekedő 30 km-t tesz meg 1 óra alatt.



a) Készíts táblázatot, mennyi utat tesznek meg 2, 3, 4, 5 óra alatt!

b) Ábrázold az összetartozó értékeket grafikonon!

K2 Négyes csomagolású őszibaracklé 624 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetni egy karton őszibarackléért, ha egy kartonban 15 doboz van?

K3 Májusban 18 m^3 elhasznált víz után összesen 5112 Ft vízdíjat fizettünk. Júniusban 21 m^3 vizet használtunk el. Mennyi lesz a vízdíj júniusban?

K4 Egy háromszög egyik oldala 3 cm, másik oldala 4 cm, és a két oldal által bezárt szög 30°.

a) Szerkeszd meg a háromszöget!

b) Változtasd kétszeresére a megadott szöget, a megadott oldalak ugyanakkorák. Igaz-e, hogy kétszeresére változott a harmadik oldal hossza? A válaszodat méréssel igazold!

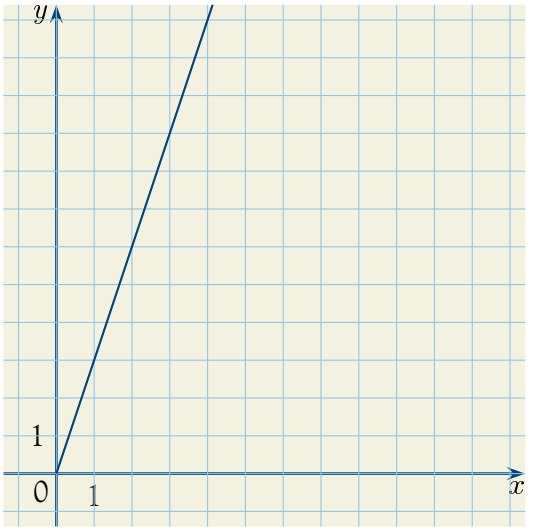
K5 4500 kg cukorból segélycsomagokat készítenek. Hány csomag készíthető, ha

a) 15 kg-os; *b)* 25 kg-os; *c)* 50 kg-os csomagokat készítenek?

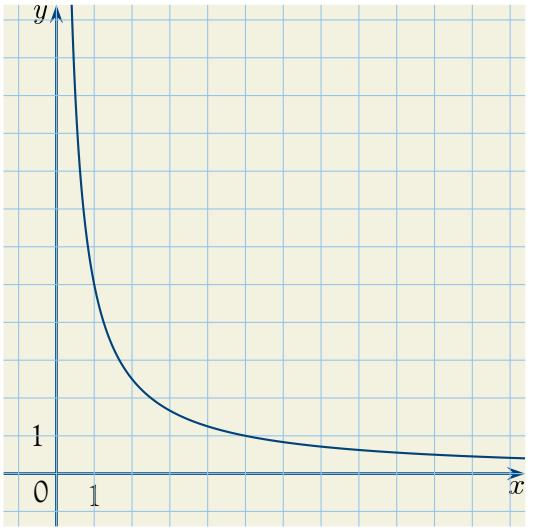
K6 Egy osztály tanulói karácsony előtt kerámiatárgyakat készítettek a szakkörön. Az elkészített tárgyakat az iskolában szervezett vásárnapon árusították. 27 db-ot adtak el 160 Ft-os egységáron. Hány darab 540 Ft-os színházjegyet vásárolhattak ebből a bevételből?

K7 Határozd meg, hogy az alábbi négy grafikon közül melyik ábrázol egyenes, illetve fordított arányosságot! Írj fel összefüggést a grafikonon található pontok koordinátái között!

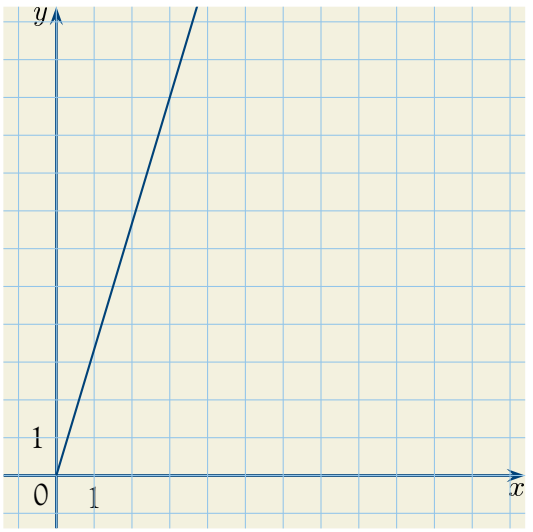
a)



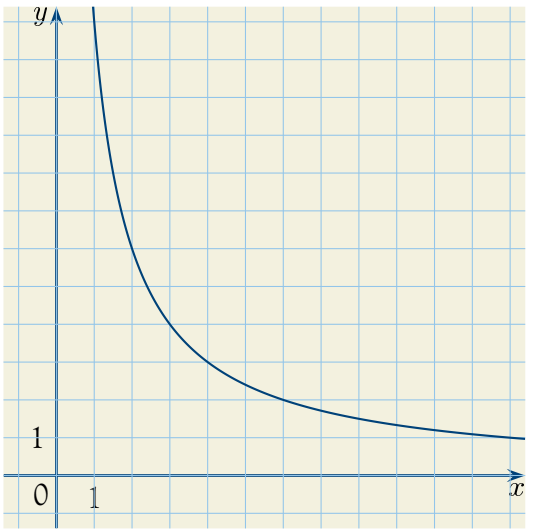
b)



c)



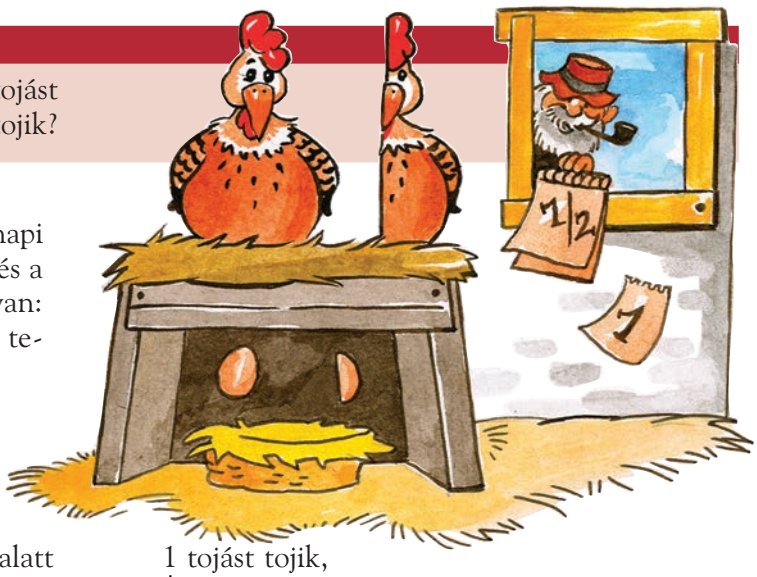
d)



Többszörös arányossági problémák

1. példa

Igaz-e, hogy ha 1 tyúk 1 nap alatt 1 tojást tojik, akkor 2 tyúk 2 nap alatt 2 tojást tojik?



Tegyük fel, hogy a tyúkok száma és a napi tojásszám között, illetve a tyúkok száma és a napok száma között egyenes arányosság van: minél több a tyúk, illetve minél több nap telik el, annál több a tojás.

A megoldásban két-két mennyiséget változtatunk rendre, ezeket dőlt betűvel írjuk.

Ha 1 tyúk 1 nap alatt 1 tojást tojik,

kétszer annyi tyúk ↓ *kétszer annyi tojás* ↓

akkor *2 tyúk* 1 nap alatt *2 tojást* tojik,

kétszer annyi nap ↓

2 tyúk *2 nap alatt* *4 tojást* tojik, vagyis nem igaz az állítás.

Régi tréfás feladat

Ha 1,5 tyúk 1,5 nap alatt 1,5 tojást tojik, akkor 1 tyúk 1 nap alatt hány tojást tojik?

Megoldás: 1 tyúk 1 nap alatt $\frac{2}{3}$ tojást tojik.

2. példa

Ha 4 munkás 8 óra alatt 48 alkatrészt készít el, akkor 10 munkás mennyi idő alatt készít el 45 alkatrészt? Tételezzük fel, hogy a mennyiségek arányosan változnak!

4 munkás	8 óra alatt	48 alkatrészt készít el;
1 munkás	8 óra alatt	**48 : 4 = 12 alkatrészt készít el;**
1 munkás	**1 óra alatt**	$\frac{12}{8} = 1{,}5$ **alkatrészt készít el;**
10 munkás	1 óra alatt	$10 \cdot 1{,}5 = 15$ **alkatrészt készít el;**
10 munkás	$\frac{45}{15} = 3$ **óra alatt**	**45 alkatrészt készít el.**

Feladatok

K1 5 tábla 259 Ft-os csoki ugyanannyiba kerül, mint 7 zacskó cukor. Mennyibe kerül 1 zacskó cukor?

K2 Egy 24 × 28 m^2-es telken van egy 8 m és 9 m oldalhosszúságú ház. A telek füvesítve van. Ági lenyírta a terület negyedrészét, apukája a többit.

Számítsd ki az Ági és édesapja által lenyírt területek arányát!

E3 Egy nyomdában 3 gép 5 óra alatt 21 600 újságot nyomtat.

a) 5 gép 7 óra alatt hány újságot nyomtat ki?

b) 28 800 újságot 4 óra alatt hány gép nyomtat ki?

c) Hány óra alatt nyomtat ki 9 gép 25 920 db újságot?

E4 18 lónak 30 napra 270 zsák zab szükséges.



a) Hány lovat lehet etetni 12 napig ebből a mennyiségből?

b) 20 lónak hány napra elegendő ez a mennyiség?

c) 27 ló 540 zsák zabot hány nap alatt eszik meg?

Százalékszámítás

1. Hogyan számítod ki 500 Ft $\frac{3}{100}$ részét?

2. Mit jelent valaminek az 1%-a?

Áttekintés

Tavaly megtanultuk a százalékszámítás alapfogalmait. A további feladatok megoldása előtt ismételjük át az ehhez a témakörhöz tartozó alapfogalmakat, összefüggéseket!

1. példa

a) 3500 Ft zsebpénzem 40%-át költöttem a testvérem születésnapi ajándékára. Mennyibe került az ajándék?

a) 3500 Ft 10%-a 350 Ft, $\quad 3500\ \text{Ft} \cdot \frac{10}{100} = 350\ \text{Ft}$, $\quad 40\%\text{-a } 4 \cdot 350\ \text{Ft} = 1400\ \text{Ft}$.

Másképp is gondolkodhatunk.

A 3500 Ft-nak a 40%-a úgy is fogalmazható, hogy 3500 Ft-nak a $\frac{40}{100}$ része, ami egyenlő 3500 Ft-nak a $\frac{40}{100}$-szorosával, ezért a kiszámítása a

$3500 \cdot \frac{40}{100} = 1400$ vagy a $3500 \cdot 0{,}4 = 1400$ vagy a $\frac{3500}{100} \cdot 40 = 1400$

műveletsorok bármelyikével történhet.

A tanult elnevezések (erre a példára):

A 3500 számot vagy mennyiséget nevezzük az alapnak. A 40 a százalékláb. Az 1400 a százalékérték.

$$\underset{\text{alap}}{3500} \cdot \frac{\overset{\text{százalékláb}}{40}}{100} = \underset{\text{százalékérték}}{1400}$$

A testvérem születésnapi ajándéka 1400 Ft-ba került.

b) Általánosítsuk a feladatot! Fejezzük ki A-nak a 17%-át!

b) Az előzőekhez hasonlóan itt is többféle módon történhet a kiszámítás.

A-nak a 17%-a, azaz $\frac{17}{100}$-szorosa egyenlő:

$A \cdot \frac{17}{100}$ vagy $\frac{A}{100} \cdot 17$ vagy $A \cdot 0{,}17$ vagy $(A : 100) \cdot 17$

kifejezéssel.

c) Határozzuk meg x-nek a p százalékát!

Bár most konkrét számok nincsenek, de az előzőek alapján betűkkel felírhatjuk a keresett kifejezést. A $p\% = \frac{p}{100}$ segítségével a keresett kifejezés:

$x \cdot \frac{p}{100}$ vagy $\frac{x}{100} \cdot p$ vagy $(x : 100) \cdot p$.

2. példa

a) Egy család havonta fizet gázdíjat. Októbertől márciusig, illetve áprilistól szeptemberig ugyanazt az összeget fizetik havonta. A tavaszi és nyári időszakban a gázdíj 60%-át fizetik az őszi és téli hónapokhoz képest. Júniusban 10 800 Ft-ot fizettek. Mennyit kell fizetni novemberben?

A kiszámítandó mennyiségnek a 60%-át ismerjük. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ismerjük a százaléklábat és a százalékértéket, és keressük az alapot.

Egy lehetséges gondolat:

Visszakövetkeztethetünk az 1%-ra, majd ebből a 100%-ra.

Ha a	60%	10 800 Ft,
akkor az	1%	10 800 : 60 = 180 Ft;
a	100%	168 · 100 = 18 000 Ft.

Másként: Közvetlenül, egy lépésben.

Ismerjük egy mennyiségnek a 60%-át, azaz $\frac{60}{100}$-át, tehát a 0,6 részét, és keressük az egészet.

Ezt megkaphatjuk a 10 800 : 0,6 = 18 000 osztással is.

Írjuk fel ezt is többféle módon műveletsorral!

10 800 : 60 · 100 vagy $\frac{10\,800}{60} \cdot 100$ vagy 10 800 : 0,6.

A fenti műveletsorok eredményei egyenlők: 18 000 Ft.

November hónapban 18 000 Ft-ot kell fizetnünk a gázért.

b) Egy szalag p százalékát, 5,4 m-t használtunk fel egy csomag feldíszítéséhez. Adjuk meg betűkifejezéssel, hány m-es volt a szalag!

A keresett mennyiség itt nem egy konkrét szám lesz, hanem p értékétől függ.

Egy lehetséges módon:

Ha a p% 5,4 m,

akkor az 1% $\frac{5{,}4}{p}$ m,

a 100% $\frac{5{,}4}{p} \cdot 100$ m.

Másképpen:

Ismerjük egy számnak a p%-át, azaz $\frac{p}{100}$ részét, akkor a szám $5{,}4 : \frac{p}{100} = 5{,}4 \cdot \frac{100}{p}$.

A p értékétől függően megadtuk az eredeti szalag hosszát.

Nézzük meg néhány konkrét p értékre, milyen hosszú volt a szalag a levágás előtt:

p%	25	50	45	90	15
A szalag eredeti hossza: $5{,}4 \cdot \frac{100}{p}$ (m)	21,6	10,8	12	6	36

6.

Idézd fel a százalékszámítással kapcsolatos elnevezéseket!

Feladatok

A1 Számítsd ki 275-nek a

a) 20%-át; *b)* 45%-át;
c) 37,5%-át; *d)* 165%-át;
e) 11,65%-át; *f)* 320%-át!

K2 Írd fel kétféle műveletsorral, és ahol tudod, számítsd ki!

a) 1500 m 35%-a; *b)* 2,3 kg 57%-a;
c) 5400 cm^2 65,5%-a; *d)* n liter 42%-a;
e) m kg 125%-a; *f)* 50 perc k%-a;
g) 1,5 hl t%-a; *h)* s méter p%-a.

E3 Peti, Gábor és Sanyi házi matematikaversenyen vesz részt. A harmadik forduló után a megszerezhető összpontszám 150 pont. Peti 80%-ra teljesített, Gábor a szerezhető pontok $\frac{4}{5}$ részét szerezte meg, Sanyi 3 ponttal többet kapott, mint Peti. Melyik fiú hány pontot szerzett a versenyen?

K4 Egy téglalap alakú kert egyik oldala 17 m, másik oldala ennek 65%-a.

a) Milyen hosszú a kert másik oldalának méterre kerekített értéke?
b) Mekkora a kert területe?
c) Hány zacskó fűmagot vásároljunk, ha egy zacskó fűmag kb. 30 m^2 területre elegendő?

K5 Egy újságban a következő hírt olvashattuk:

Egy kérdőívet 150-en töltöttek ki, 40% dicsérte a kozmetikai terméket, a megkérdezettek 35%-a egyáltalán nem ismerte ezt a terméket. Pontosak vagy kerekítettek lehettek a megadott százalékláb értékei?

K6 Melyik az a szám, amelynek

a) 20%-a 50; *b)* 75%-a 4500;
c) 12,5%-a 1,5; *d)* 24%-a 432;
e) 120%-a 180; *f)* $33,\dot{3}$%-a 45;
g) p%-a 48?

K7 Egy sportegyesület tagjainak 35%-a vízilabdázó. Ők 105-en vannak. Hány tagja van a sportegyesületnek?

K8 Egy faluban 182 tanuló lakik. Ez a lakosság 26%-a. Hányan laknak a faluban?



Hány százalék?

1. példa

Egy lakás rezsiköltsége 65 000 Ft. Ebből 13 000 Ft-ot fűtésre fizetnek ki. A rezsiköltség hány százaléka a fűtésdíj?

Számítsuk ki először, hányadrésze a gázdíj az összes rezsiköltségnek!

A 13 000 Ft a 65 000 Ft-nak a $\frac{13\,000}{65\,000} = \frac{1}{5}$ része.

Az $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, tehát másként úgy mondhatjuk, hogy a 13 000 Ft a 65 000 Ft-nak a $\frac{20}{100}$ része, azaz a 20%-a.

Gondolkodhattunk volna másképpen is.

A 100% 65 000 Ft,

az 1% 650 Ft.

Most azt kell megnézni, hogy a 13 000 Ft-ban hányszor van meg a 650 Ft (vagyis az 1%).

13 000 : 650 = 20, azaz a 20% 13 000 Ft.

Fogalmazzuk meg általánosan a kiszámítás módját!

A példákban ismertük a százalékalapot: A és a százalékértéket: B.

alap százalékláb százalékérték

$$A \text{ szám } X\%\text{-a } B: \quad A \cdot \frac{X}{100} = B$$

Azt keressük, hogy a százalékérték hány százaléka az alapnak, vagyis azt, hogy B hányadrésze A-nak századokban kifejezve.

A B az A-nak $\frac{B}{A}$ része. Ezt a számot kell századrészekben, azaz százalékban megadni.

Ezt az adott értéktől függően általában többféleképpen is megtehetjük.

Lehet, hogy a törtet tudjuk bővíteni vagy egyszerűsíteni úgy, hogy a nevező 100 legyen. Ilyen volt az **1. példa**. Ebben az esetben a századrészek számát, tehát a százalékot megadja a számláló, vagyis a tört 100-szorosa.

$$\frac{B}{A} = \frac{\square}{100}$$

Más esetben a $\frac{B}{A}$ törtet felírjuk tizedes tört alakban, azaz a $B : A$ osztás eredményét megadjuk tizedes tört alakban. Ekkor a századrészek számát vagyis a százalékot megkapjuk, ha a tizedes törtet megszorozzuk 100-zal.

$$B : A = \square; \qquad \square = \frac{X}{100}$$

$$X = \square \cdot 100$$

Röviden: $\frac{B}{A} \cdot 100 = \frac{\text{százalékérték}}{\text{alap}} \cdot 100.$

$$X = \frac{B}{A} \cdot 100$$

Ugyanerre jutunk, ha úgy gondolkodunk, hogy keressük az alap 1%-át: $\frac{A}{100}$, és megnézzük, hogy ez hányszor van meg a százalékértékben: $B : \frac{A}{100} = \frac{B}{A} \cdot 100.$

$$X = \frac{\frac{B}{A}}{\frac{100}{100}} = B : \frac{A}{100} = \frac{B}{A} \cdot 100$$

6.

Számítsd ki fejben!

a) 500-nak mennyi a 20%-a?

b) 40-nek hány százaléka a 10?

c) 200-nak hány százaléka a 700?

d) Melyik szám 30%-a 90?

Feladatok

A1 Hány százaléka

a) 75-nek a 15; *b)* 220-nak a 132;

c) 1400-nak 560; *d)* 2,7-nek a 8,1;

e) $\frac{4}{5}$-nek a $\frac{3}{10}$; *f)* A 168 a 2800-nak;

g) 21 a 840-nek; *h)* 35 a 105-nek;

i) 480 a 320-nak?

K2 Egy téglalap egyik oldala 1,2-szerese a másik oldalnak.

a) Hány százaléka a hosszabb oldal a rövidebbnek?

b) Hány százaléka a rövidebb oldal a hosszabbnak?

K3 Egy háromszög belső szögeinek aránya 1 : 2 : 3.

a) Mekkorák a háromszög belső szögei?

b) Hány százaléka a legkisebb szög a legnagyobbnak?

K4 Egy vándortáborban a tervezett 52 km-es távolságból az első napon 14 km-t tettünk meg. A tervezett túra hány százaléka van még hátra?

A5 Egy iskolába 560 tanuló jár, ebből 345 lány. A tanulók hány százaléka fiú?

K6 A hetedik évfolyamon lévő *a* és *b* osztály létszámának aránya 6 : 7. Az *a* osztály tanulóinak 40%-a lány. A 7. *a* osztályba 18 fiú jár. Hányan járnak a hetedik évfolyamra?

E7 Egy reformpékségben a vásárolható péktermékek 18%-a hagyományos típusú, a többi áruféleség az egészségesebb táplálkozást szolgáló magokat tartalmazó, teljes kiőrlésű lisztből készült. A csak fehérlisztből készült áruféle 27 kg.

a) Hány kg ennek a pékségnek az árukészlete?

b) 4,5 kg magokat tartalmazó péksütemény van a pékségben. Hány százaléka ez a mennyiség az összes árukészletnek?



Összetett feladatok

Keress a mindennapi életnek olyan területeit, ahol előkerül

***a)* a százalék;** ***b)* a kamat;** ***c)* a kamatos kamat fogalma!**

1. példa

a) 450 Ft-ba került egy buszjegy.

Mennyit kell fizetnünk a buszjegyért, ha az áremelkedés mértéke 6%-os?

A buszjegy új ára a régi árnak és a régi ár 6%-ának az összege.

$$450 + 450 \cdot \frac{6}{100} = 450 + 27 = 477 \text{ Ft (5 Ft-ra kerekítve 475 Ft).}$$

Írjuk fel a fenti műveletsort – az algebrában tanult kiemelést felhasználva – másképpen:

$$450 + 450 \cdot \frac{6}{100} = 450 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 450 \cdot 1{,}06 = 477 \text{ Ft (5 Ft-ra kerekítve 475 Ft).}$$

Gondolkodjunk másféleképpen:

Ha a régi ár a 100%, akkor az új ár ennek 6%-ával több, vagyis a régi ár 106%-a, azaz keressük a 450 Ft-nak a 106%-át.

$$450 \cdot \frac{106}{100} = 450 \cdot 1{,}06 = 477 \text{ Ft (5 Ft-ra kerekítve 475 Ft).}$$

b) Mennyi lesz 4500-nak a p%-kal megnövelt értéke?

Több módon is felírhatjuk a keresett kifejezést.

$$4500 + 4500 \cdot \frac{p}{100} \quad \text{vagy} \quad 4500 \cdot \frac{100 + p}{100} \quad \text{vagy} \quad 4500 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

A mai világban nélkülözhetetlen a bankoknál használatos kifejezések ismerete. Szinte minden családnak kapcsolata van egy-két bankkal, ahol pénzt helyezhet el vagy hitelt vehet fel. Ismerni kell az ottani szóhasználatot, hogy eligazodhassunk a bankok kínálatában. Kezdjük a legalapvetőbb fogalmak megismerésével!

Az **éves kamat** azt jelenti, hogy az egy évig a bankban elhelyezett pénzhez hozzáadják (jóváírják) a bankban lévő pénz megadott százalékát. Ha több éven keresztül a bankban tartjuk a pénzt, akkor minden év végén jóváírják a kamatot, és a következő évben már a megemelt összegnek számolják a kamatát. Ezt nevezik **kamatos kamatnak**. Meghatározhatjuk a lekötés időtartamát is. Ha egy pénzösszeget egy évre kötünk le, akkor évközben nem érdemes a pénzösszegből kivenni, mert akkor a bank nem fizet kamatot. Leköthető a pénzünk havi lekötésre is, ez azt jelenti, hogy a havi kamatot minden hónap végén hozzáírják a bent lévő pénzhez.



6.

2. példa

A bankban elhelyezett pénzünk 2004-ben 5%-ot kamatozott. 2005-ben 3,5%-os volt az éves kamat. Mennyi pénzünk van a bankban 2006. január elsején, ha 2004. január elején 250 000 Ft-ot tettünk be a bankba?

2004-ben 5%-os volt a kamat, ezért egy év múlva az 5%-kal megnövelt összeg lesz a számlánkon.

$250\,000 + 250\,000 \cdot \frac{5}{100} = 250\,000 \cdot 1{,}05 = 262\,500$ Ft lesz a számlán.

2005-ben a 262 500 Ft 3,5%-kal növelt értékét kell kiszámolni.

$262\,500 + 262\,500 \cdot \frac{3{,}5}{100} = 262\,500 \cdot 1{,}035 = 271\,687{,}5$ Ft. Ha nem egész Ft érték adódik, a tizedesvessző utáni részt elhagyják, és egész Ft értéket adnak eredményül, így 271 687 Ft lesz a bankban.

Írjuk fel egy műveletsorral a fentieket: $\underbrace{\underbrace{250\,000 \cdot 1{,}05}_{\text{1. évben kamatozott pénz}} \cdot 1{,}035}_{\text{2. évben kamatozott pénz}} = 271\,687{,}5$ Ft

3. példa

a) Egy szépséghibás mosógép árát leszállították 5%-kal. Mennyibe kerül most, ha eredetileg 170 000 Ft volt?

b) Egy kiárusítás alkalmával egy táskán ez állt: −20%, csak 7000 Ft. Mennyibe került a táska eredetileg?

c) Hány százalékkal csökkent a rezsink, ha a korábbi 64 000 Ft helyett csak 54 400 Ft-ot kell fizetnünk?

a) Ha 5%-kal csökkent az ár, akkor az új ár az eredeti 95%-a. $170\,000$ Ft $\cdot 0{,}95 = 161\,500$ Ft.

b) Ha 20%-kal csökkent az ár, akkor az új ár az eredeti 80%-a. A teljes ár $\frac{7000 \text{ Ft}}{0{,}80} = 8750$ Ft volt.

c) Az új ár az eredeti ár $\frac{54\,400}{64\,000}$-szerese, ez 0,85, vagyis a 85%-a. Az árcsökkenés tehát 15%-os.

Feladatok

A1 Melyik műveletsor írja le helyesen 42 000-nek a 12%-kal megnövelt értékét? Karikázd be a megfelelőt!

$42\,000 \cdot \frac{12}{100}$ $\qquad$ $42\,000 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)$

$42\,000\left(1 - \frac{12}{100}\right)$ $\qquad$ $42\,000 \cdot 0{,}12$

$42\,000 \cdot \frac{112}{100}$

$42\,000 \cdot 1{,}12$ $\qquad$ $42\,000 : 100 \cdot 12$

$42\,000 + 42\,000 \cdot 0{,}12$

$(42\,000 \cdot 112) : 100$

a) Nézd meg, melyeket nem karikáztad be, és fogalmazd meg szöveggel, mit jelentenek ezek a műveletsorok!

b) A bekarikázottak közül válassz ki kettőt, amellyel legszívesebben számítod ki a keresett értéket, és végezd el a számítást! Gondold végig, miért ezeket választottad! Melyikkel lehet a leggyorsabban kiszámítani a keresett értéket?

K2 Egy ajándékboltban az 1 500 000 Ft-os decemberi bevétel januárban 1 140 000 Ft-ra csökkent.

a) Hány százalékos volt a csökkenés mértéke?

b) Írd be a keretekbe a megfelelő százaléklábat úgy, hogy a művelet elvégzése után a januári bevételt kapjuk eredményül!

$1\,500\,000 \cdot \frac{\square}{100}$;

$1\,500\,000 - 1\,500\,000 \cdot \square$;

$(1500\,000 : 100) \cdot \square$.

K3 Két évre abba a bankba tesszük a pénzünket, amelyik évente 7% kamatot fizet.

a) Mennyi pénzt vehetünk fel két év múlva, ha 500 eurót kötöttünk le?

b) Számítsd át Ft-ba a megadott és kiszámított értékeket! Az euró-forint átváltást megnézheted az interneten, újságban, bankban, tévételetexten.

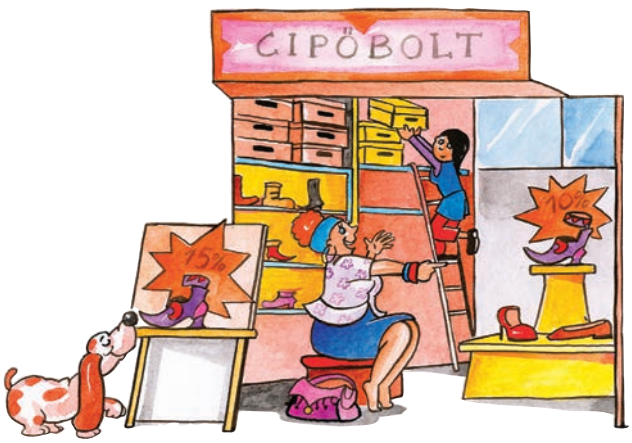
K4 Egy alkalmazott bruttó fizetése 158 000 Ft volt 2005 decemberében. 2006 januárjában 4,5%-os béremelést, 2007 januárjában 5%-os béremelést kapott.

a) Mennyi volt a bruttó fizetése 2006-ban?

b) Mennyi volt az alkalmazott bére 2007. januárban?

c) Hány százalékos egyszeri béremelést kellett volna adni, hogy ugyanennyi legyen az alkalmazott bére?

K5 Egy leárazás során a 24 000 Ft-os cipő árát először 15%-kal, majd ezt követően 10%-kal csökkentették.



a) Mennyibe került a cipő a kétszeri leárazás után?

b) Mekkora lenne a leárazás mértéke, ha egyszeri alkalommal csökkentenék a cipő árát?

E6 Egy DVD-t árusító üzletben 1200 db DVD volt. Egy kiárusítás alkalmával a készlet 20%-kal csökkent. Az üzletkötőnek a megmaradt állomány hány százalékával kell növelni a DVD-k számát, hogy ugyanannyi áru legyen, mint a kiárusítás előtt?

E7 A megtakarított pénzem 40%-át elköltöttem utazásra. A megmaradt pénzem hány százalékát kell újra hozzátennem úgy, hogy ugyanannyi pénzem legyen, mint utazás előtt?

Vegyes feladatok a százalékszámítással kapcsolatosan

A1 Számítsd ki

a) 15-nek a $\frac{3}{4}$ részét;

b) 540-nek a 15%-át;

c) 360 kg 20%-ával megnövelt értékét;

d) 800 liter 32%-kal csökkentett értékét;

e) 1400 $\frac{3}{7}$ részének a 85%-át;

f) 250 35%-ának a 150%-át;

g) 6400 20%-kal csökkentett értékének a 125%-át!

A2 Egy természetvédelmi terület nagysága 650 km^2, ennek $\frac{7}{20}$ része erdő.

a) Hány km^2 az erdőterület?

b) Hány százaléka az erdőterület a természetvédelmi területnek?

K3 Az interneten található kefires lángos receptje szerint az elkészítéshez kell 2 pohár kefir, két tojás, 5 dkg élesztő, 1 evőkanál só és 60 dkg liszt. Ezeket kell összekeverni, majd egy órát hagyni kell, hogy keljen, és lehet kisütni.

Az összekevert tészta hány százaléka liszt?

(Mérd le otthon azokat a hozzávalókat, amelyeknek nem tudod a tömegét!)

K4 Egy családi könyvtár 16%-a szakkönyv, $\frac{1}{4}$-e gyerekkönyv. A könyvtárban továbbá 28 szótár és lexikon, valamint 385 szépirodalmi könyv van.

a) Hány kötetes a családi könyvtár?

b) A könyvek hány százaléka szépirodalmi?

K5 Az ELEKTROLÉD szupermarket szeretné a háztartási cikkeket kiárusítani, ezért nagymértékű leárazást hirdet. A szórólapjuk elázott, ezért csak az alábbi olvasható:



20%-os árcsökkenés!!!

Mosógép: 87 500 Ft helyett . . .

Kenyérpirító: 12 800 Ft helyett . . .

Konyhai mérleg: 4450 Ft helyett . . .

. . . . . -os árcsökkenés!!!

Hűtőszekrény: 95 600 Ft helyett 81 260 Ft

Villanysütő 72 500 Ft helyett 61 625 Ft

Számítsd ki az akcióban meghirdetett termékek új árát, illetve a csökkentés mértékét!

E6 Egy téglalap egyik oldalát 20%-kal csökkentettük, így egy négyzetet kaptunk. A négyzet területe 36 cm^2.

a) Mekkora a négyzet oldala?

b) Mekkorák az eredeti téglalap oldalai?

K7 Hány százalékos töménységű cukoroldatot kapunk, ha 3 dl (30 dkg) vízbe 2 kávéskanál cukrot teszünk? (1 kávéskanál cukor tömege kb. 6 gramm.)

K8 Hány gramm só van 220 gramm 15%-os sóoldatban?



E9 Töltsd ki a következő táblázatot!

Eredeti érték	20%-kal növelt érték	A kapott érték 30%-kal növelt értéke	Egy műveletsorral felírva
140			
	2600		
		2028	
			4000 · 1,56

K10 Egy 12 évfolyamos iskola tanulóinak 60%-a általános iskolás, az általános iskolások 40%-a alsó tagozatos. Ők 192-en vannak.

a) Hányan járnak az iskolába?

b) Az iskolába járó tanulók hány százaléka jár felső tagozatra?

E11 Egy 20 cm oldalú négyzet egyik oldalát 60%-ával (60%-kal) csökkentjük, a másik oldalát annyival növeljük, hogy a kapott téglalap területe egyenlő legyen a négyzet területével.

Mekkorák a kapott téglalap oldalai, kerülete?

E12 Egy kocka élét csökkentettük úgy, hogy a felszíne 51%-kal csökkent. Mennyivel csökkentettük a kocka élét?

7. Hozzárendelések, függvények, sorozatok

Halmazok megadása

1. példa

Csoportosítsuk az itt látható dolgokat három csoportba!



Többféle csoportosítást is találhatunk.

Ilyenek például:

A csoport: ruhaneműk: nadrág, pulóver, zokni

B csoport: gyümölcsök: alma, körte, banán, eper, cseresznye

C csoport: kémiai elemek: oxigén, hidrogén, klór

Vagy egy másfajta csoportosítás:

E = {magas hangrendű szavak} = {körte, eper, cseresznye}

F = {mély hangrendű szavak} = {nadrág, alma, banán, klór}

G = {vegyes hangrendű szavak} = {oxigén, pulóver, zokni, hidrogén}

Természetesen lehetne folytatni a csoportba sorolást.

Az előbbi csoportosításoknál olyan **tulajdonságokat** adtunk meg, amelyek alapján **minden egyes dologról eldönthető volt, hogy beletartozik-e egy adott csoportba vagy sem.** Ilyen módon **halmazokat** adtunk meg az elemeik felsorolásával.

A halmazok megalkotásánál ügyelnünk kell arra, hogy jól meghatározott tulajdonsággal adjuk meg a halmazt.

Ilyen tulajdonságok például: az osztályotok mai tanítási órái; Arany János balladái.

Itt minden felsorolt tárgyról, dologról el lehet dönteni, hogy beletartozik-e a halmazba vagy sem.

Ha olyan tulajdonságot fogalmazunk meg, amelyek alapján nem lehet egyértelműen eldönteni, hogy mely dolgok, tárgyak stb. tartoznak bele, akkor nem képezhetünk halmazt.

Ilyen például az öt legkedvesebb rajzfilm; az osztálykirándulás legjobb percei.

Ekkor mindenkinek más-más csoportosítást adhat meg, így nem beszélünk halmazról.

A halmazokat **nagybetűkkel** jelöljük: A, B, ...

A halmazba tartozó elemeket vagy megadott tulajdonságot **kapcsos zárójelek közé** írjuk.

A = {A Betlehembe látogató három királyok nevei} =
= {Gáspár; Menyhért; Boldizsár}

A halmazokat általában Venn-diagrammal ábrázoljuk.

Például: legyen az A halmaz Magyarország öt legnagyobb lélekszámú városa.



Fontos tudnivaló

Foglaljuk össze ismereteinket!

Halmazokat megadhatunk:

a) Felsorolással.

b) Tulajdonsággal (a tulajdonság megadása után egyértelműen el tudjuk dönteni mindenről, hogy beletartozik-e a halmazba vagy sem).

c) Venn-diagrammal.

1. Sorold fel, hogy milyen módon lehet megadni halmazokat!

2. Mi a Venn-diagram? Mire használjuk a Venn-diagramot?

7.

Feladatok

A1 Döntsd el, hogy halmazt alkotnak-e az alábbi tulajdonsággal megadott dolgok!

a) A 10-nél kisebb pozitív egész számok.

b) A 10 legszebb magyar szó.

c) Az osztályod szemüveges tanulói.

d) A pozitív páros számok.

e) Az év öt legmelegebb napja.

A2 Képezz négy halmazt az alábbi felsorolásból! A halmazokat ábrázold Venn-diagramon!

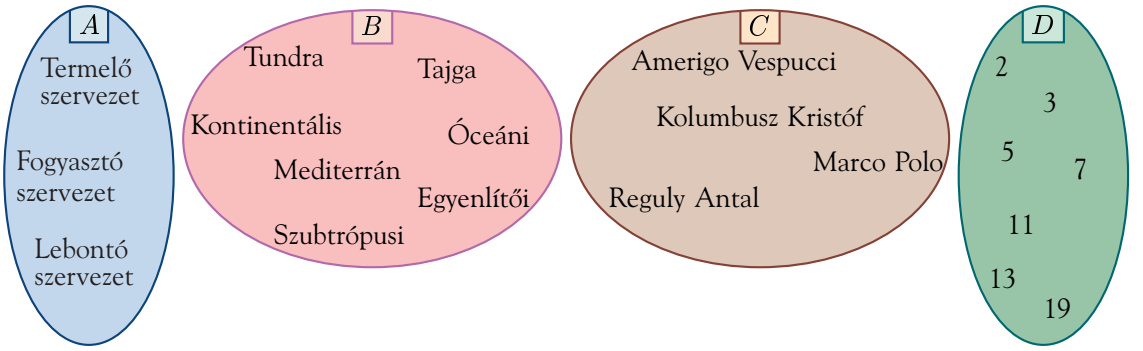
Dobó István, Hermione, Mary Poppins, Tom Sawyer, Hagrid, Bornemissza Gergő, A madaras asszony, Polly néni, Jumurdzsák.



A3 Sorold fel a következő halmazok elemeit!

a) Az osztályodban októberben született tanulók.
b) A 3-mal osztható 20-nál kisebb pozitív egész számok.
c) Magyarország három legmagasabb hegycsúcsa.
d) Az utolsó öt olimpia színhelye.
e) A periódusos rendszer VII. főcsoportjába tartozó elemek.

A4 A Venn-diagramokban felsorolt elemek ismeretében fogalmazd meg a halmazba tartozó elemek közös tulajdonságát!



7.

Hozzárendelések

1. példa

Keressük meg az A halmaz elemeihez a B halmazból a hozzá tartozókat!

a) A hegyhez a magasságát rendeljük.

A = {Mont Blanc, Csomolungma, Aconcagua, Kilimandzsáró, Puncak Jaya}

B = {4808 m, 6959 m, 5895 m, 5030 m, 8848 m}

b) A gyümölcshöz a termés típusa tartozik.

A = {szilva; ribizli; szőlő; alma; dió; őszibarack}

B = {bogyó; alma; csonthéjas}

c) Az íróhoz a műve tartozik.

A = {Jókai Mór, J. K. Rowling, Tamási Áron, Mikszáth Kálmán}

B = {A kőszívű ember fiai, Ábel a rengetegben, Jégtörő Mátyás, Sárga rózsa, Harry Potter és a bölcsek köve, A beszélő köntös}

A példa megoldásához szükség van általános műveltségünkre is.

A megoldás leírása többféle módon történhet. Felsoroljuk például, hogy mi mihez tartozik.

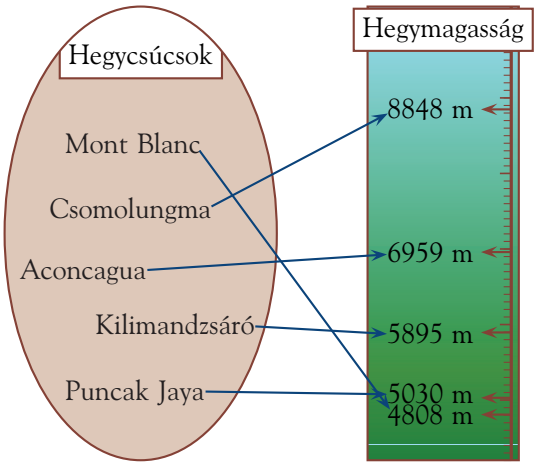
a) Mont Blanc 4808 m;
Csomolungma 8848 m;
Aconcagua 6959 m;
Kilimandzsáró 5895 m;
Puncak Jaya 5030 m

c) Jókai Mór: A kőszívű ember fiai, Sárga rózsa;
J. K. Rowling: Harry Potter és a bölcsek köve;
Tamási Áron: Ábel a rengetegben, Jégtörő Mátyás;
Mikszáth Kálmán: A beszélő köntös

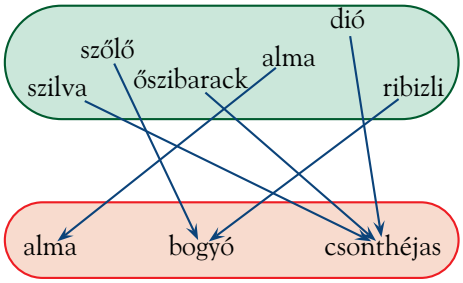
b) **Szilva, dió, őszibarack: csonthéjas; Ribizli, szőlő: bogyó; Alma: alma.**

Sokkal szemléletesebb azonban, ha Venn-diagramon adjuk meg az elemeket, majd egy nyíllal jelöljük, hogy az A halmazbeli elemhez mely B-beli tartozik. Az itt lévő ábrákon ezt látjuk:

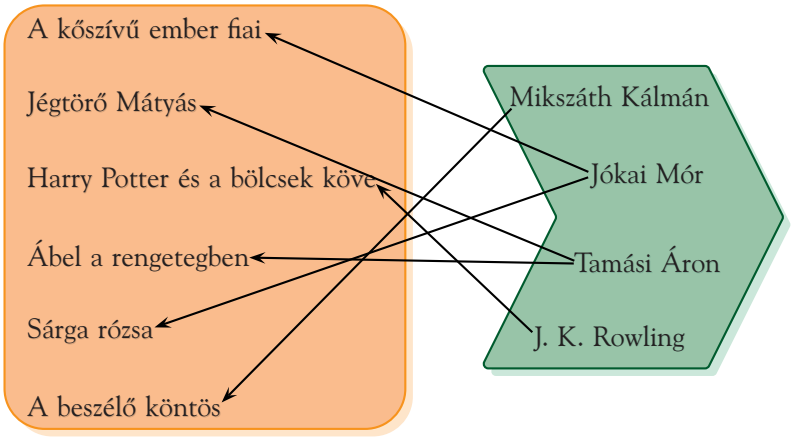
a)



b)



c)



Hasonlítsuk össze, milyen azonosságok és milyen különbségek vannak az előző három példában!

Közös bennük az, hogy mind a három esetben **az A halmaz minden eleméhez** találtunk B-beli elemeket.

Ekkor azt mondjuk, hogy az A halmazhoz **hozzárendeltük** a B halmazt. Az A halmazt **alaphalmaznak,** a B halmazt **képhalmaznak** nevezzük. A B **képhalmaz** minden eleme az A **alaphalmaz** valamely elemének a képe.

Figyeljük meg, hogy a három esetben mi a különbség a hozzárendelések között!

Az *a)* esetben **minden A-beli elemhez egy B-beli** elemet rendeltünk, és **minden** A halmazbeli elemhez **különböző B-belit.**

A *b)* esetben **minden A-beli elemhez egy B-belit** rendeltünk, de **több A halmazbeli elemnek ugyanazt a B-beli halmazelemet** feleltettük meg.

A *c)* esetben az A halmazbeli elemek között **volt olyan,** pl. Jókai Mór, **akihez több** B-beli elemet rendeltünk hozzá.

Az *a)* és *b)* esetben **minden A-beli elemhez csak egy B-beli elemet** rendeltünk, ezt **egyértelmű** hozzárendelésnek nevezzük.

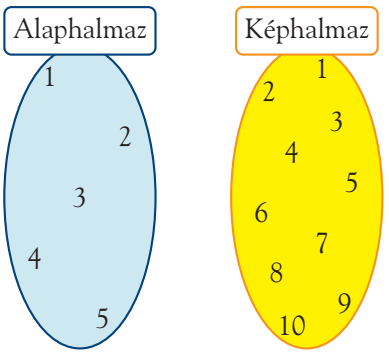
A *c)* esetben az A halmazban van olyan elem, amelyhez több B-beli elemet is rendeltünk, ezt nem egyértelmű hozzárendelésnek nevezzük.

2. példa

Az itt látható két halmaz között adj meg

a) egyértelmű;

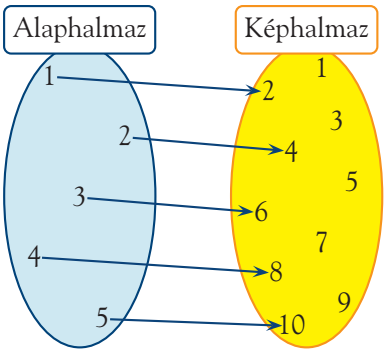
b) nem egyértelmű hozzárendelést!



Többféle megoldást adhatunk.

a) Legyen a hozzárendelés szabálya: minden alaphalmazbeli elemhez rendeljük a kétszeresét.

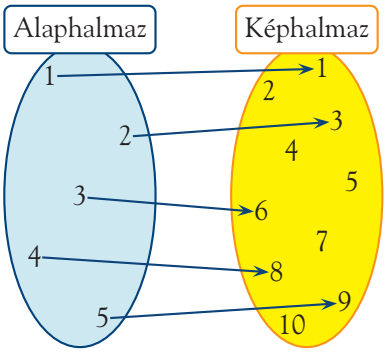
Venn-diagramon ábrázolva:

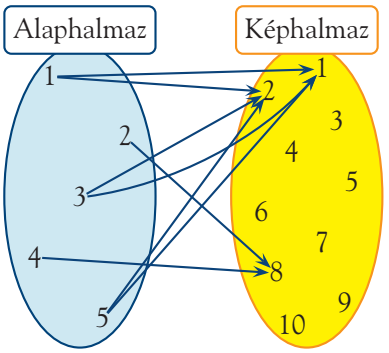


b) Nem egyértelmű hozzárendelés megadása is többféle módon lehetséges:

Például: a páratlan számokhoz rendeljük a 3-nál kisebb számokat, a párosakhoz a 8-at.

Megadható oly módon is hozzárendelés, hogy azt mondjuk meg, hogy melyik számhoz mit rendelünk, azaz nem fogalmazunk meg hozzárendelési szabályt.





Fontos tudnivaló

Összefoglalva:

Két halmaz között hozzárendelést létesíthetünk.

Azt a halmazt, amely elemeihez rendelünk hozzá, **alaphalmaznak** nevezzük. Azt a halmazt, amelynek elemeit rendeljük hozzá, **képhalmaznak** nevezzük.

Egyértelmű hozzárendelést létesítünk, ha **minden** alaphalmazbeli elemhez **csak egy** elemet rendelünk a képhalmazból.

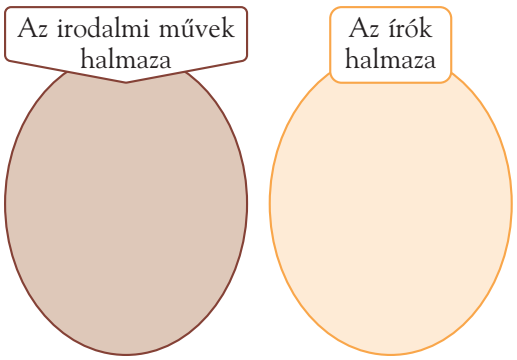
Nem egyértelmű hozzárendelésről beszélünk, ha az alaphalmaz **egy** eleméhez **több** képhalmazbeli elemet rendeltünk hozzá.

1. Magyarázd el, hogy mit jelent a halmazok közötti hozzárendelés!
2. Milyen típusú hozzárendeléseket ismersz a halmazok között?

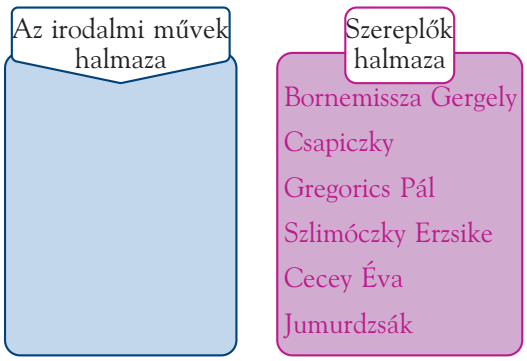
Feladatok

A1 Írj legalább 4 elemet mindkét halmazba!

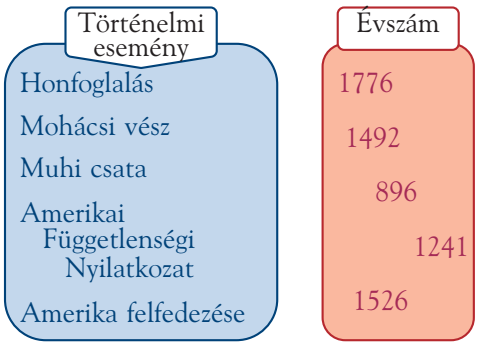
Adj meg hozzárendelést a két halmaz között!



K2 Az ábrán látható halmazok egyikéből eltűntek az irodalmi művek. Írd be a szereplők alapján, melyik irodalmi művek voltak a bal oldali halmazban! Jelöld nyíllal, mely művekben melyik szereplők szerepelnek! (Az irodalmi művektől mutassanak a nyilak a szereplők felé!)

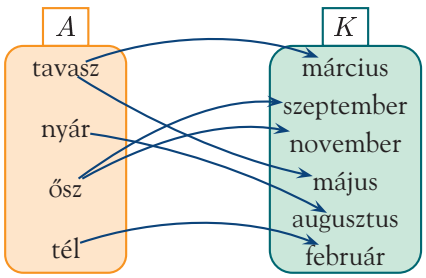


K3 Adj meg hozzárendelést a két halmaz között!

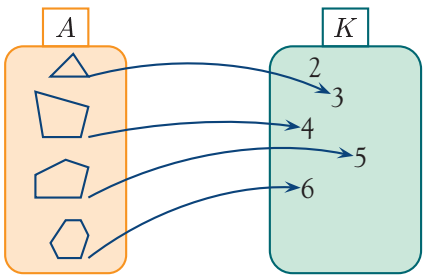


K4 Döntsd el, melyek az egyértelmű, illetve nem egyértelmű hozzárendelések!

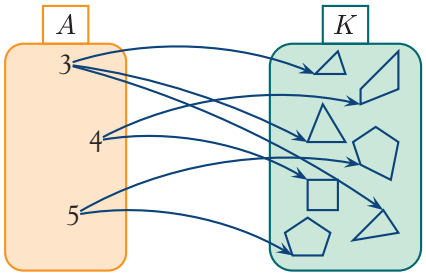
a)



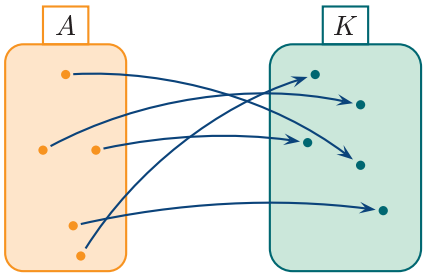
b)



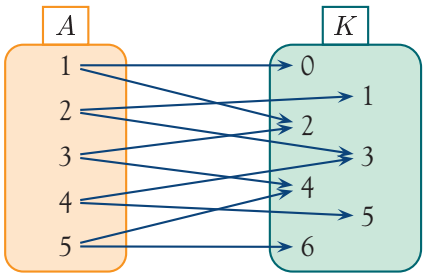
c)



d)



e)



K5 A = {12-nél kisebb pozitív egész számok}

B = {azok a pozitív számok, amelyek 1-nél nem nagyobbak}

Minden A halmazbeli számhoz rendeljük hozzá a reciprokát. Sorold fel, mely elemeknek kell feltétlenül benne lenniük a B halmazban!

K6 Adj meg tetszőleges hozzárendelést a következő 6 elem segítségével!

a) Vasúti menetrend.

b) Az újonnan nyílt élelmiszer-áruház szórólapja.

c) Naptár.

d) Kosárlabda-bajnokság.

e) Az iskolai napló.

f) Órarend.

Hozzárendelések más formában

A hozzárendelések sok formában megjeleníthetők. Ezek közül mutatunk be néhány példát.

1. példa

Mi lehet a megfeleltetés szabálya az itt megadott hozzárendelésben? Az alaphalmaz és a képhalmaz a tanult számok halmaza.

a	5	−1	3	0	−5	6		4	
b	8			3		9	−5	7	10

A hozzárendelés szabálya lehet például: minden számhoz a hárommal nagyobb számot rendeljük.

a	5	−1	3	0	−5	6	−8	4	7
b	8	2	6	3	−2	9	−5	7	10

2. példa

Milyen hozzárendelést adhatunk meg a képek alapján?



Az alaphalmaz az egyes tejfölfajták halmaza, képhalmaz a pozitív egész számok halmaza. A hozzárendelés: minden áruhoz rendeljük hozzá az árát!

3. példa

Az alábbi táblázat alapján is megadhatunk hozzárendelést.

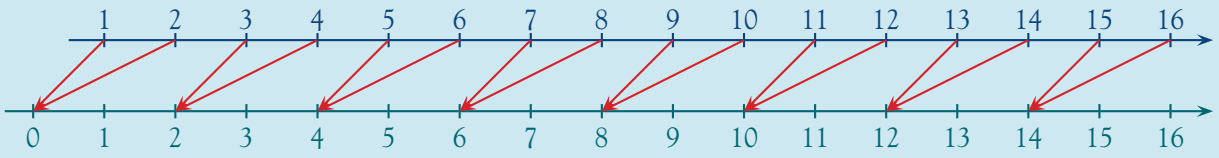
Egy derékszögű háromszöget egyik oldalára tükrözve, mit mondhatunk az eredeti és a tükörkép által együttesen alkotott alakzatról?

	Biztosan igaz	Lehetséges, de nem biztos, hogy igaz	Lehetetlen
Egyenlő szárú háromszöget határoz meg.		×	
Tengelyesen szimmetrikus alakzatot alkot.	×		
Az alakzat belső szögeinek összege változott.		×	
Kör keletkezik.			×

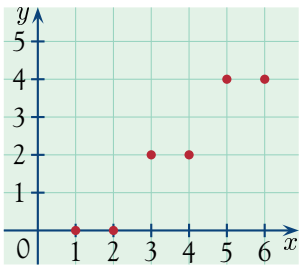
A táblázat alapján megadhatunk olyan hozzárendelést, amelyben az alaphalmaz állítások halmaza (tetszőleges állítással bővíthető), a képhalmaza háromelemű $K = \{\text{igaz; lehetséges, de nem biztos, hogy igaz; lehetetlen}\}$. A hozzárendelés szabályát képlettel nem tudjuk megadni, mindig az adott állítás igazságtartalma dönti el.

4. példa

Készítsünk az alábbi hozzárendelésről táblázatot, majd grafikont!

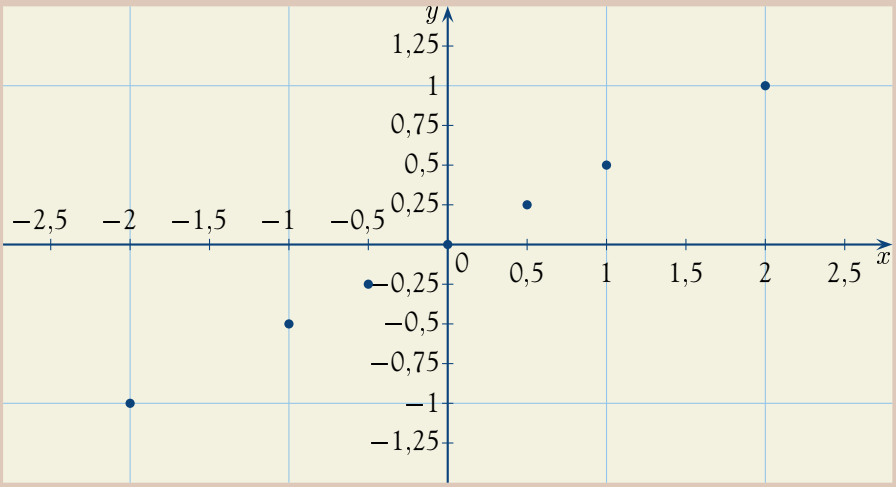


A hozzárendelési szabály: minden pozitív egész számhoz rendeljük a kisebbik páros szomszédját.



5. példa

Készítsünk a grafikonról leolvasott értékek alapján táblázatot, és keressünk hozzárendelési szabályt!



Első jelzőszám	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2
Második jelzőszám	−1	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5	1

A hozzárendelés szabálya: minden számhoz hozzárendeljük a felét. Az alaphalmaz és a képhalmaz a tanult számok halmaza.

Az eddigi példákból láthattuk, hogy hozzárendeléseket sokféle módon megadhatunk. A hétköznapi életben nem szükséges megmondani a hozzárendelési szabályt, esetleg nem is tudjuk megfogalmazni. A matematikai feladatoknál a hozzárendelés megadásakor meg kell adni az alaphalmazt, a képhalmazt és a hozzárendelési utasítást (szabályt) is.

Sorold fel, hogy milyen módon lehet hozzárendeléseket szemléltetni, megadni!

Feladatok

A1 Adott két pozitív egész szám. A két számot összeadjuk, illetve összeszorozzuk. A kapott eredményeket vizsgálva töltsd ki a táblázatot!

	Biztosan igaz	Lehet hogy igaz, de nem biztos	Lehetetlen
Ha a szorzat páratlan, akkor az összeg is páratlan.			
Ha a szorzat páros, akkor az összeg páratlan.			
Ha az összeg páratlan, akkor a szorzat páros.			
Ha az összeg páros, akkor a szorzat is páros.			

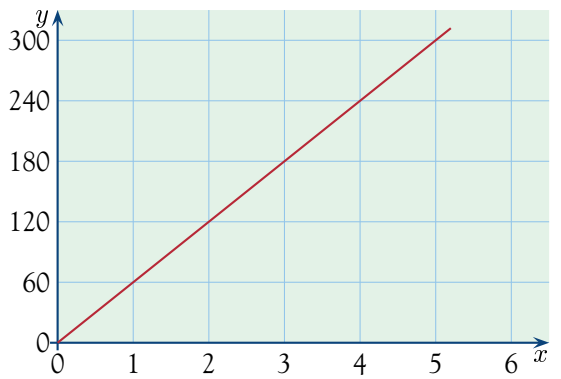
K2 *a)* Készíts az itt látható grafikonokról táblázatot!

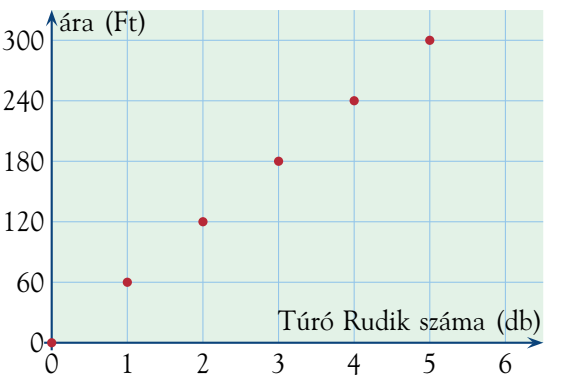
b) Fogalmazd meg, miben egyezik és miben különbözik a két hozzárendelés!

c) Egyértelmű-e a kétfajta hozzárendelés?

d) Készíts a mindennapokból szöveges hozzárendelési szabályt!

e) Korábbi tanulmányaidban hol találkoztál ilyen grafikonnal?





K3 Egy *számátalakító gép* a bedobott számot egy művelet alkalmazásával átalakítja. Keress hozzárendelési szabályt a bedobott szám és a kapott érték között!

A szabály alapján töltsd ki a táblázatot, majd ábrázold koordináta-rendszerben a kapott értékpárokat!

A bedobott szám (x)	0	1	−4	−1			$\frac{1}{2}$		
A kapott érték (y)	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$		3	−3		4	−5

Egyértelmű hozzárendelés, a függvény fogalma

1. **Mit nevezünk egyértelmű hozzárendelésnek?**
2. **Magyarázd el, hogy miként lehet szemléltetni (ábrázolni) derékszögű koordináta-rendszerben egy egyértelmű hozzárendelést!**

A hozzárendelések vizsgálata során láttuk, hogy a hozzárendelések lehetnek egyértelműek és nem egyértelműek. A matematikában kitüntetett szerepet játszik az egyértelmű hozzárendelés, ezért a következőkben ezzel foglalkozunk részletesen.

Az egyértelmű hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Az előző leckékben már láthattuk, hogy hozzárendeléseket többféle módon adhatunk meg. **A függvényeket is többféle módon adhatjuk meg,** mert a függvény speciális esete a hozzárendeléseknek.

Egy függvény megadásakor minden esetben meg kell adni az alaphalmazt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt. (Függvények esetén az alaphalmazt értelmezési tartománynak, a képhalmazt értékkészletnek is szokás nevezni.)

Megállapodás

Ha olyan feladattal találkozol, ahol számhalmazok közötti hozzárendelést vizsgálunk, és nincs megadva az alaphalmaz és a képhalmaz, akkor ott a tanult számok halmaza az alaphalmaz is és a képhalmaz is.

A következő példával bemutatjuk, hogy miként adható meg többféle módon egy függvény.

1. példa

Adjuk meg többféle módon az alábbi függvényt!

Rendeljük hozzá minden egyjegyű pozitív egész számhoz a kétszeresénél 1-gyel kisebb számot!

a) A szöveges megfogalmazásban benne található az alaphalmaz.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

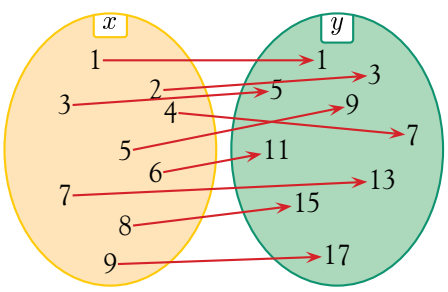
A képhalmazt nem adta meg a feladat szövege, tehát a tanult számok halmaza.

A hozzárendelési szabályt ebben a példában *szövegesen* adtuk meg.

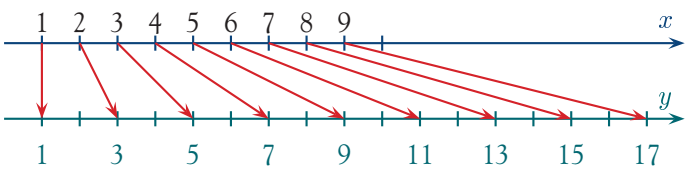
b) Készítsünk *táblázatot* a szöveg alapján!

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17

c) Ábrázoljuk *Venn-diagramon!*



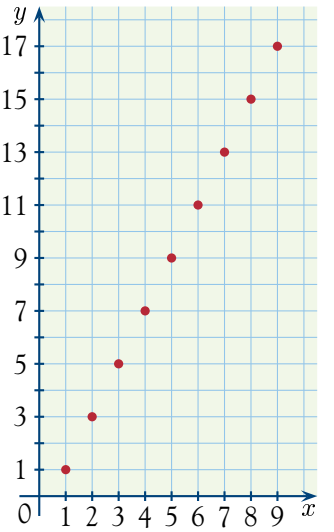
d) Adjuk meg a függvényt *nyíldiagrammal!*



e) Ábrázoljuk a függvényt derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az ábrázolandó pont első jelzőszáma az alaphalmaz eleme, a pont második jelzőszáma a képhalmaz megfelelő eleme legyen.

Az ilyen módon ábrázolt pontok összességét a *függvény grafikonjának* nevezzük. Az alaphalmaz elemeit az x tengelyen lévő számokból választjuk, a képhalmaz elemeit az y tengelyen lévő értékekből.

Vigyázz! A függvény nem azonos a grafikonjával! A függvény grafikonja csak egy szemléltetése a függvénynek. Lehetne szemléltetni a függvényt nyíldiagrammal, Venn-diagrammal, és még más módon is.



f) Fogalmazzuk meg a hozzárendelési szabályt *képlettel*!

Először néhány jelölésben kell megállapodnunk. A függvényt jelöljük kis betűvel, például f, g!

Az alaphalmaz $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, a képhalmaz $K = \{\text{a racionális számok halmaza}\}$.

Az alaphalmaz elemeit jelöljük x-szel, ekkor a hozzárendelési szabály: $f: A \to K,\ \ x \mapsto 2x - 1$.

7.

Ez a hozzárendelési szabály képlettel történő megadása.

Megadtuk a függvény jelét: f, a halmazok közötti hozzárendelést: A-ból K-ba, és az elemek közötti hozzárendelési utasítást: $x \mapsto 2x - 1$, ahol $x \in A$, és $2x - 1 \in K$.

Kétfajta nyilat használunk: A „sima” nyíl ($\to$) a halmazok közötti hozzárendelést jelenti, a talpas nyilat ($\mapsto$) az elemek közötti hozzárendelés esetén használjuk.

Más módon is történhet a hozzárendelés megadása.

Az alaphalmaz elemeit jelöljük x-szel, a tőle függő képhalmazbeli elemeket $f(x)$-szel. Ekkor az x értéktől függő $f(x)$ értékre: $f(x) = 2x - 1$ teljesül a fent megadott alaphalmazon. Ez is képlettel történő megadás.

Találkozhatunk $y = 2x - 1$ képlettel is. Ebben az esetben az y a képhalmazbeli elem, a jelölés arra utal, hogy a koordináta-rendszerben a második jelzőszámot az y tengelyen lévő számokból választjuk.

Fontos tudnivaló

Foglaljuk össze új ismereteinket!

Függvénynek nevezzük az egyértelmű hozzárendelést.

A függvény megadásakor meg kell adni az alaphalmazt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt.

A függvényeket a leggyakrabban az alábbi módon szoktuk megadni:

I. szövegesen;
II. táblázattal;
III. ábrázolással, ezen belül:
   a) Venn-diagrammal,
   b) nyíldiagrammal,
   c) koordináta-rendszerben; ilyenkor az ábrázoláskor kapott pontok halmazát a függvény grafikonjának nevezzük;
IV. képlettel.

1. Mikor tekintünk megadottnak egy függvényt?
2. Mit nevezünk a függvény grafikonjának?

Feladatok

A1 Az előző leckékben kidolgozott példák közül válassz ki négy olyan hozzárendelést, amely függvény!

A2 Fogalmazd meg, hogy az egyes függvénymegadási módoknak mi az előnye, mi a hátránya!

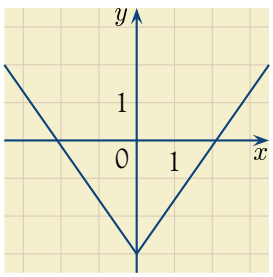
A3 Megadtuk egy-egy függvény alaphalmazát, képhalmazát és hozzárendelési szabályát. Szemléltesd rajzzal a függvényeket!

a) $A = \{6\text{-nál kisebb nem negatív egész számok}\}$; $B = \{\text{egész számok}\}$.
A hozzárendelési szabály: minden alaphalmazbeli elemhez rendeljük hozzá a kétszeresénél 4-gyel nagyobb számot.

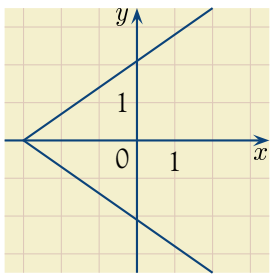
b) $A = \{-8\text{-nál nagyobb vagy egyenlő és 6-nál nem nagyobb egész számok}\}$;
$B = \{\text{racionális számok}\}$.
A hozzárendelési szabály: rendeljük hozzá minden A-beli számhoz a felének az abszolút értékét.

K4 Az alábbi koordináta-rendszerbeli ábrák közül válaszd ki azokat, amelyek függvénygrafikonok!

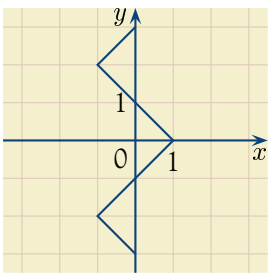
a)



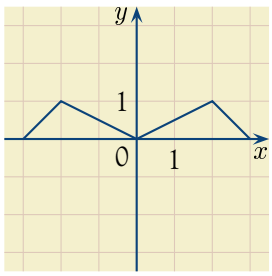
b)



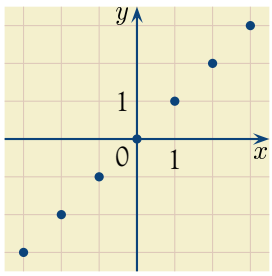
c)



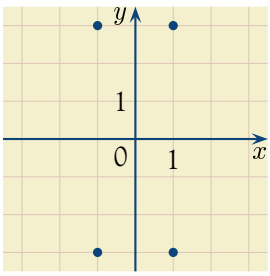
d)



e)



f)



E5 Kezdő programozóknak az volt a feladatuk, hogy olyan programot írjanak, amely a megadott számokat egy művelet segítségével egy másik számmá alakítja, majd készítsenek táblázatot ehhez.

Az alábbi táblázatok jelentek meg a monitoron.

I.

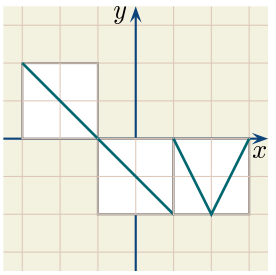
A megadott szám	-2	3	$-0{,}5$	5			-4	$-\frac{5}{4}$	-3
A kapott érték	2	3	0,5		6	1			

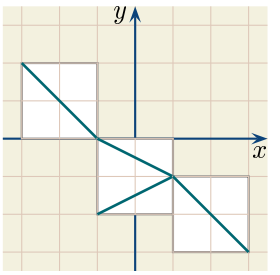
II.

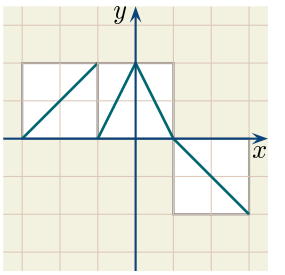
A megadott szám	0	1	-4	-1			$\frac{1}{2}$		
A kapott érték	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$		3	-3		4	-5

a) Egészítsd ki a táblázatot!
b) Készíts nyíldiagramot a táblázatok segítségével!
c) Készítsd el a függvény grafikonját!
d) Add meg képlettel, milyen műveletet végez a gép!

E6 Egy matematikavetélkedőn egy függvény szétdarabolt grafikonját kellett visszaállítani az eredeti állapotába. Három diák az alábbi ábrát készítette a feladathoz.

a) 

b) 

c) 

Melyik diák kaphatott pontot a megoldására, és melyik nem? Miért?

Gyakoroljuk a függvények jelölését!

1. példa

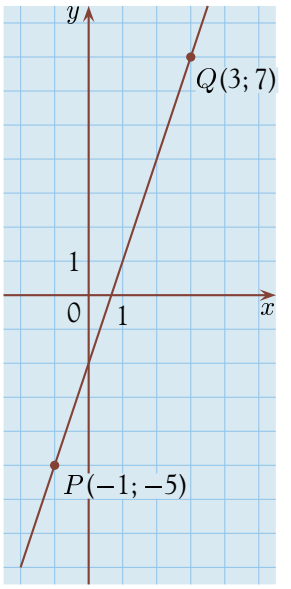
Minden egész számhoz rendeljük a háromszorosánál 2-vel kisebb számot!

Készítsünk táblázatot néhány értékkel, majd ennek segítségével ábrázoljuk koordináta-rendszerben a függvényt!

Adjuk meg a hozzárendelést képlettel!

Az alaphalmazról tudjuk, hogy az egész számok halmaza, így a táblázatba ezen értékek közül választunk.

Alaphalmazbeli elem	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Hozzárendelt érték	−11	−8	−5	−2	1	4	7	10



Az ábrázolást úgy végezhetjük el, hogy a táblázat első sorában lévő szám lesz az ábrázolandó pont első koordinátája, a hozzárendelt érték a pont második koordinátája.

Ezek a pontok alkotják a függvény grafikonját.

A hozzárendelési szabály képlettel történő leírása: $f(x) = 3x - 2$.

Vizsgáljuk meg a bejelölt két pontot!

$P(-1; -5)$: A vizsgált függvény a hozzárendelési szabály alapján a -1-hez a -5-öt rendeli.

$Q(3; 7)$: Ugyanilyen megfogalmazással: A függvény a 3-hoz a 7-et rendeli. Ezt többféle módon jelölhetik a matematikában.

1. lehetőség:

A függvény hozzárendelési szabálya

$x \mapsto 3x - 2.$

Konkrét értékre: $-1 \to -5$.

A függvény (-1)-hez (-5)-öt rendel.

2. lehetőség:

A függvény hozzárendelési szabálya

$f(x) = 3x - 2.$

Konkrét értékkel: ha $x = -1$, akkor ezt így jelöljük: $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$, röviden: $f(-1) = -5$.

Ezeket a következőképpen olvassuk:

- az f függvény a (-1)-hez a (-5)-öt rendeli, **vagy**
- az f függvény a (-1) helyen (-5)-öt vesz fel, **vagy**
- a -1 helyen a függvény helyettesítési értéke -5.

A fentiek közül mindegyik fajta szóhasználattal találkozhatsz, ezért érdemes megjegyezni mind a hármat.

Ugyanígy jelölhetjük a másik kiválasztott értékpárt is: $3 \to 7$ vagy $f(3) = 7$.

Találkozhatunk olyan jelöléssel is, ahol a függvény értékét $f(x) = 3x - 2$ helyett az $y = 3x - 2$ jelölést használva adják meg, így a példa adataival: $x = -1,\ y = -5$; $x = 3,\ y = 7$.

Mutasd be a függvények jelölési módjait!

Feladatok

K1 Különböző függvények összetartozó értékeit adtuk meg különböző módon. Olvasd ki a jelöléseket!

a) $1 \to 4$; *b)* $f(3) = 12$; *c)* $g(-4{,}5) = -2$.

K2 Az alábbi hozzárendeléseket írd le a füzetedbe a tanult jelöléssel:

a) az f függvény 4-hez (-2)-t rendel; *b)* a g függvény értéke a $\frac{2}{3}$ helyen $\frac{4}{5}$;

c) a h függvény helyettesítési értéke a -8 helyen 14.

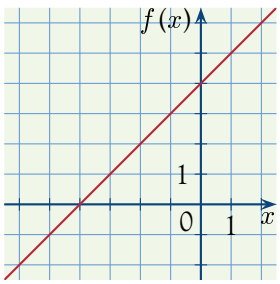
Találj ki olyan f, g, h függvényt, amely az előző feladatban megadottaknak megfelel!

K3 Készíts táblázatot a képlettel megadott függvényekhez, majd ábrázold néhány pontjukat koordináta-rendszerben!

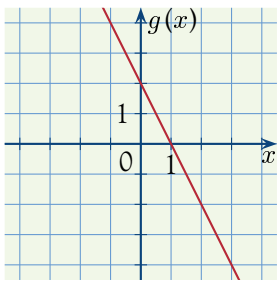
a) $f(x) = -x + 3$; *b)* $g(x) = x^2$; *c)* $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$.

K4 A koordináta-rendszerben függvények grafikonját látod. Készíts a grafikonokról leolvasott értékekről táblázatot, és adj meg minden függvénynél értékpárokat a tanult jelölésmóddal!

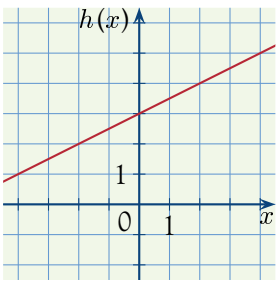
a)



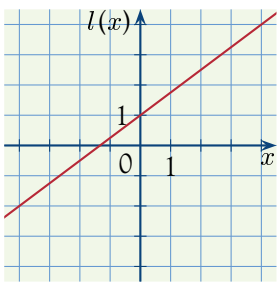
b)



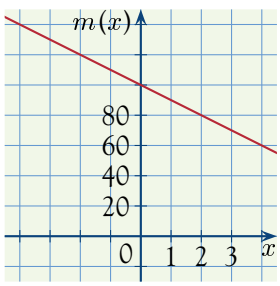
c)



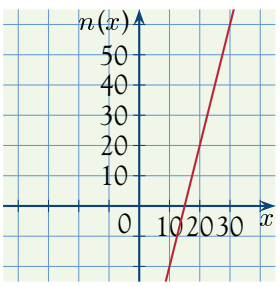
d)



e)



f)

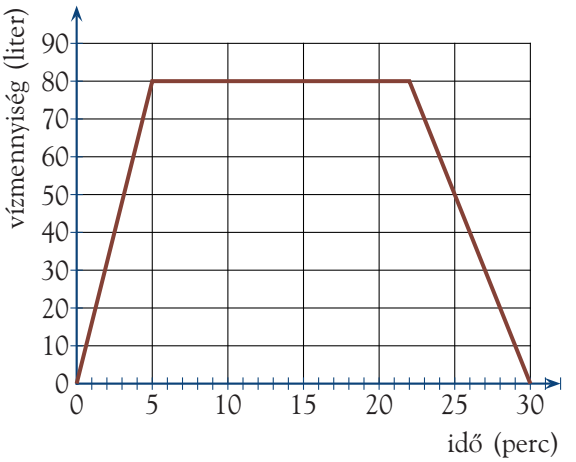


Olvassunk a grafikonról!

A derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt pontoknak két koordinátája (jelzőszáma) van. Mit mutatnak ezek a számok?

1. példa

A fürdőkádba vizet engedtünk fürdéshez, majd a fürdés végeztével kiengedtük a benne lévő vizet. A kádban lévő víz mennyiségének változását az itt látható grafikon mutatja. Mit tudhatunk meg a grafikonról?



A vízszintes tengelyen az időt, a függőleges tengelyen a fürdőkádban lévő víz mennyiségét ábrázoltuk. Tehát az idő **függvényében** változott a vízmennyiség. Minden időponthoz egyetlen vízmennyiségérték tartozik, ezért a grafikon függvényt ábrázol.

A grafikonról leolvasható, hogy 5 percig folyt a víz a kádba, mert az idő függvényében növekedett a kádban lévő víz mennyisége. A grafikonon látható vízszintes vonal azt mutatja, hogy itt már nem folyt a víz a kádba, ezért a fürdés ideje az 5. perctől a 22. percig tarthatott, azaz legfeljebb 17 percig. A víz a lefolyón 8 perc alatt folyt le.

Azt is kiszámíthatjuk, hogy mekkora a befolyás sebessége, azaz 1 perc alatt mennyi víz folyt a kádba. A grafikon első szakaszán egypercenként ugyanannyival, 16 literrel növekedett a víz mennyisége. A harmadik szakaszon minden percben ugyanannyival csökkent, percenként 10 literrel.

Gyakran segítségünkre van, ha táblázatot készítünk a grafikon alapján.

Eltelt idő (perc)	0	1	3	4	5	7	10	12	15	20	22	24	28	30
A kádban lévő víz mennyisége (liter)	0	16	48	64	80	80	80	80	80	80	80	60	20	0

2. példa

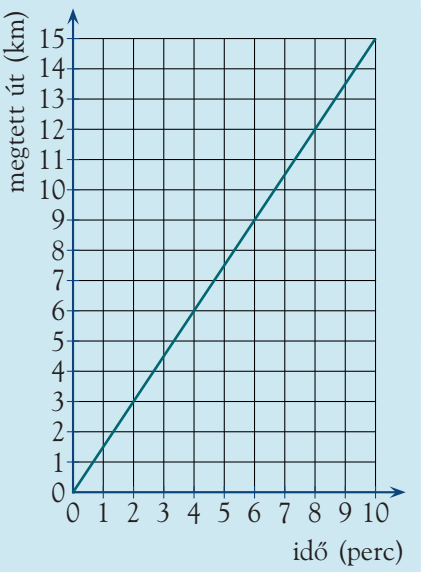
Egy biodízel meghajtású autó műszaki tesztjét végzik egy hosszú, egyenes szakaszon. Az autó mozgásának grafikonja rendelkezésünkre áll.

a) Mennyi ideig mozgott ez a tesztautó?

b) Mennyi utat tett meg ez alatt az idő alatt?

c) Mennyi utat tett meg percenként?

d) Mennyi utat tenne meg 1 óra alatt, azaz mekkora volt a sebessége?



a) 10 percig mozgott az autó.

b) A függőleges tengelyen olvashatjuk le, hogy 10 perc alatt 15 km-t tett meg.

c) Mivel a grafikon az origón áthaladó egyenes, ezért egyenesen arányos a két mennyiség, így egy perc alatt 1,5 km utat tett meg.

d) Az 1 óra alatt megtett útja $1{,}5\text{ km} \cdot 60 = 90\text{ km}$, azaz a sebessége $90\ \frac{\text{km}}{\text{óra}}$.

3. példa

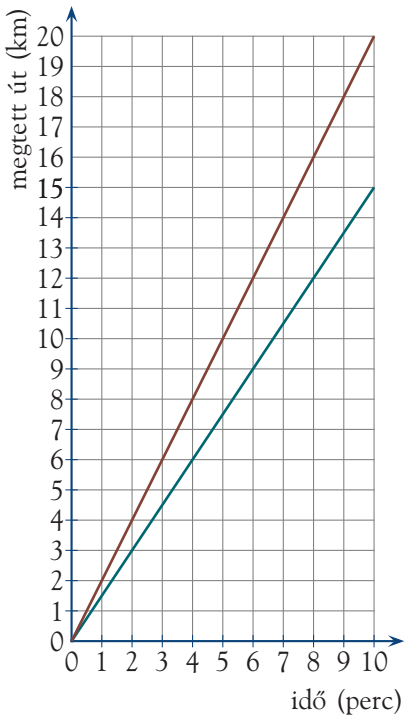
Az előzőekben leírt biodízel meghajtású járművel egy időben elindítottak ugyanezen a pályán egy benzinüzemű autót. Ez az autó 1 óra alatt ugyanezen a pályaszakaszon 120 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel mozgott.

a) Rajzoljuk be az autó mozgásgrafikonját!

b) Mi mutatja a grafikonon, hogy a második autó gyorsabban mozgott?

c) Mekkora volt a megtett útbeli különbség a 4., 6., 10. percben?

a)



b) A benzinüzemű autó mozgásgrafikonja a bioüzemű autó mozgásgrafikonja „felett” halad.

c) A megtett utak különbségét táblázat segítségével is meghatározhatjuk. Leolvassuk a megadott percekben a két autó által megtett utat, és a különbség kiszámítható.

Idő (perc)	4. perc	6. perc	10. perc
Biodízelüzemű autó megtett útja	6 km	9 km	15 km
Benzinüzemű autó megtett útja	8 km	10 km	20 km
Megtett utak különbsége	2 km	3 km	5 km

Biodízel (Olvasmány)

A fenti sebességkülönbség nem a biodízel, hanem a dízel üzemmódból fakad. (Ismerkedj meg a benzinüzemű, úgynevezett Otto-motorral [robbanómotor] és a Rudolf Diesel [ejtsd: rudolf dízel] nevét viselő, dízelolaj alapú dízelmotor működési elvével!)

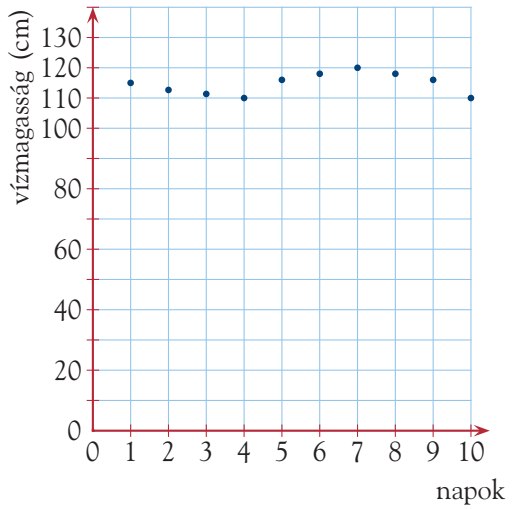
A repülőgépek és a mai gépjárművek jelentős részének hajtóanyaga kőolaj alapú: benzin, dízelolaj. A Föld kőolajkészlete azonban kimerülőben van. Ez a tény alkalmas arra, hogy a még kőolajkészlettel rendelkező országok gazdasági és politikai nyomást gyakoroljanak a „fejlett” – kőolajfogyasztó – országokra. (Hallgasd a napi híreket!) Ezért komoly fejlesztések folynak annak érdekében, hogy a kőolajat alternatív üzemanyaggal váltsák fel. Az alternatív motorhajtó anyag mellett alternatív motorműködési elveket is keresnek. Az elektromosság is egy ilyen alternatíva.

A biodízel olyan hajtóanyag, amelynek alapja – az egyelőre még megújuló – növényi termékekben rejlik. (A Föld globális felmelegedése során bekövetkező elsivatagosodás és a vészes túlnépesedés az egy főre jutó táplálékmennyiség csökkenéséhez is vezet, így az élelmiszerként fogyasztható növények ipari hasznosítására előreláthatólag nem lesz lehetőség. A globális felmelegedés azonban nem azt jelenti, hogy mindig meleg lesz; továbbra is kell majd fűteni. Ehhez pedig szükség lesz éghető anyagokra; ezeket – ásványi fűtőanyag híján – a fogyasztásra alkalmatlan növényi alapanyagokból tudják majd pótolni az emberek.)

A környezetvédelem szempontjából azonban talán nem is az a legfontosabb előnye a biodízelnek, hogy ez a forrás megújul, hanem az, ami magának a dízelnek is: sokkal alacsonyabb az üvegházhatású gáz kibocsájtása, ezért kisebb mértékben járul hozzá a globális felmelegedéshez.

Feladatok

A1 Egy tó vízszintjének változását mutatja az itt látható grafikon.



a) Hány nap adatait tartalmazza a grafikon?

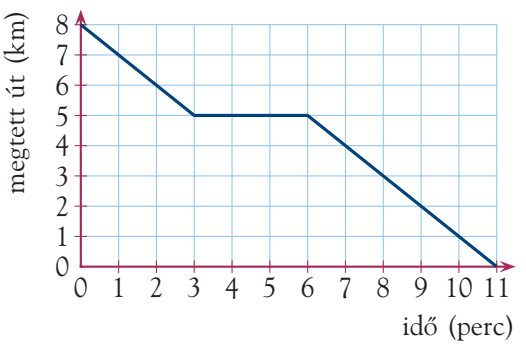
b) Állapítsd meg, melyik napon volt a legmagasabb a vízszint!

c) Melyik napon volt a víz szintje 120 cm?

d) A 4. napon mekkora volt a vízmagasság?

e) Mikor volt a vízszint 115 cm-nél magasabb?

A2 Egy autóbusz két helység között egyenes utat tett meg. A tőlünk 8 km-re lévő faluból érkezett hozzánk. A grafikon alapján válaszolj a következő kérdésekre!

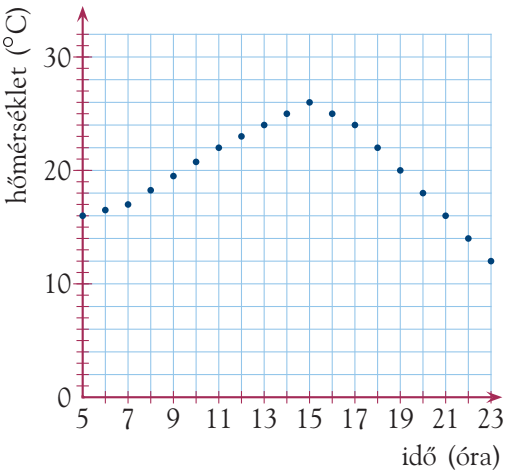


a) Jellemezd a mozgást a grafikon alapján!

b) Mikor és mennyi ideig állt az autóbusz?

c) Mely időpontban volt tőlünk 6 km-re?

K3 Egy júliusi nap hőmérsékletének változását láthatod az alábbi grafikonon. Töltsd ki a táblázatot, és válaszolj a kérdésekre!



Idő	5^h	11^h	15^h	19^h	22^h
Hőmérséklet (°C)	16		26		

a) A táblázat adatainak felhasználásával becsüld meg a napi átlaghőmérsékletet!

b) Mekkora volt a hőmérséklet maximuma?

c) Körülbelül mikor volt a hőmérséklet értéke 22 °C?

d) Körülbelül mikor volt a hőmérséklet 18 °C és 26 °C között?

A lineáris függvény

Emlékszel?

Tavaly tanultunk az egyenes arányosságról. Ismételjük át, mi jellemzi az egyenesen arányos mennyiségeket!

- Összetartozó (nem nulla) értékeik hányadosa állandó.
- Az összetartozó értékek mint pontpárok egy, az origón áthaladó egyenesre illeszkednek.

1. példa

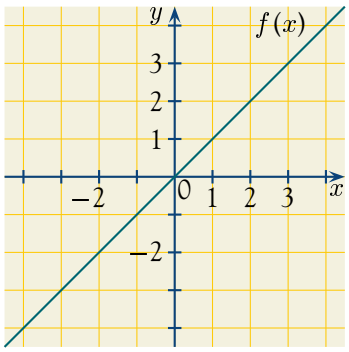
Határozzuk meg, hogy milyen hozzárendelési szabály adható meg az egyenes arányosság értékpárjai között, ha az arányossági állandó 1; $\frac{1}{2}$; illetve $-\frac{1}{3}$!

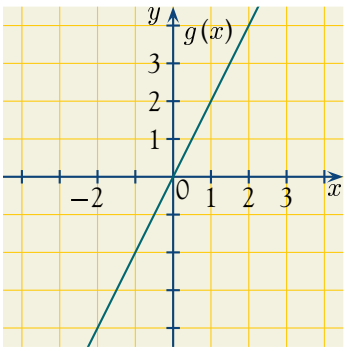
Ábrázoljuk ezeket a hozzárendeléseket! Az alaphalmaz és a képhalmaz a racionális számok halmaza.

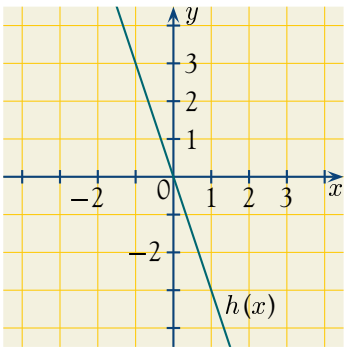
Ha az arányossági állandó 1, akkor a párok között fennálló összefüggés: $x : y = 1$, vagyis a megfelelő hozzárendelés szabálya $y = x$, tehát $f: x \mapsto x$.

Ha az arányossági állandó $\frac{1}{2}$, akkor a párok között fennálló összefüggés: $x : y = \frac{1}{2}$, vagyis a hozzárendelés szabálya $y = 2 \cdot x$, azaz $g: x \mapsto 2 \cdot x$.

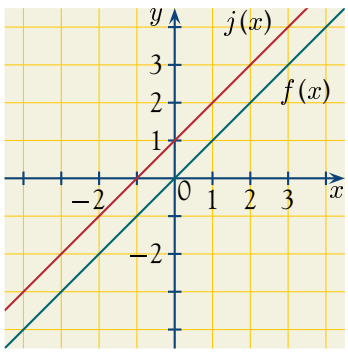
Ha az arányossági állandó $-\frac{1}{3}$, akkor a párok között fennálló összefüggés: $x : y = -\frac{1}{3}$, vagyis a hozzárendelés szabálya $y = (-3) \cdot x$, azaz $h: x \mapsto (-3) \cdot x$.

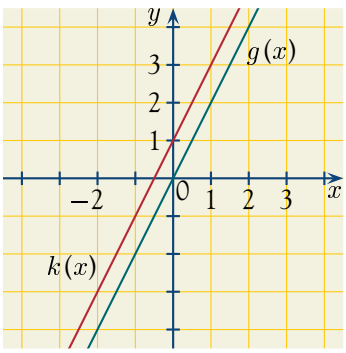


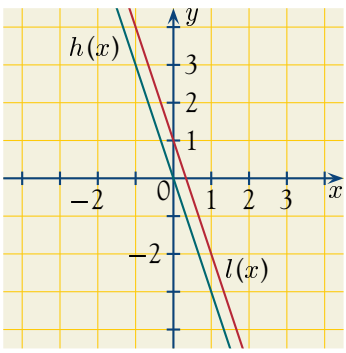




Növeljünk 1-gyel minden függvényértéket mindhárom függény esetében!
Mit vehetünk észre az eredeti és az eltolással kapott grafikonok között?







Az új függvények grafikonjai egy egységgel „feljebb” tolódnak a függőleges tengely mentén. Az eltolással kapott grafikonok mindegyike a $(+1)$-nél metszi az y tengelyt.

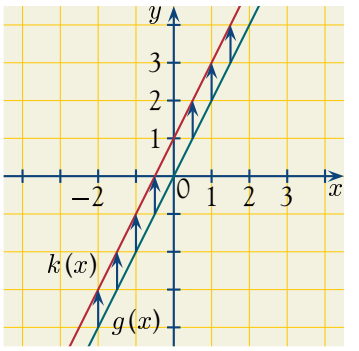
Adjuk meg a most kapott függvénygrafikonokhoz tartozó hozzárendelési szabályt képlettel!

Az $f(x) = x$ függvény értékeit $(+1)$-gyel növeltük meg, ezért az így kapott függvény hozzárendelési szabálya $j(x) = x + 1$. Ugyanígy végiggondolva $k: x \mapsto 2 \cdot x + 1$; $l: x \mapsto (-3) \cdot x + 1$.

Mivel az egyenes arányosságnak megfelelő hozzárendelés grafikonja egyenes volt, az új függvények grafikonjai „feljebb csúsztak”, ezért ezen függvények grafikonjai is egyenesek lesznek.

Általánosan igaz, hogy az $x \mapsto m \cdot x + b$ alakú függvény grafikonja egyenes.

x jelöli az alaphalmaz elemeit (azt a számot, amihez hozzárendelünk);
m egy tetszőleges, nullától különböző racionális szám (a példában az m értéke 1; 2; -3);
b tetszőleges racionális szám (a példákban $+1$).



Fontos tudnivaló

Az $x \mapsto m \cdot x + b$ alakban megadott függvényeket lineáris függvényeknek nevezzük.

Az elnevezés a *linea,* egyenes szóból származik.

Magyarázd el, hogy az egyenes arányosság grafikonjából kiindulva hogyan ábrázolhatjuk egy lineáris függvény grafikonját!

Feladatok

7.

A1 Keress 3 példát a hétköznapi életből egyenes arányosságra! Rajzold be néhány értékkel a grafikonját! (Gondolj arra is, hogy a hétköznapi feladatoknál nem biztos, hogy az alaphalmaz a racionális számok halmaza!)

A2 A kidolgozott példában szereplő egyenes arányosságokat másold le a füzetedbe, majd mindhármat told el az y tengely irányában -2 egységgel! Add meg az így keletkezett függvények hozzárendelési szabályát!

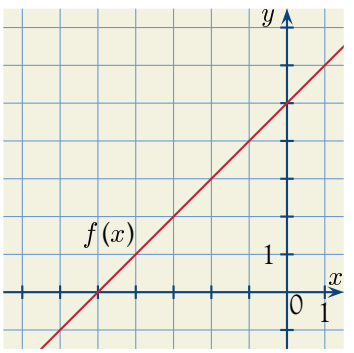
A3 Készíts táblázatot a képlettel megadott függvényekhez, majd ábrázold koordináta-rendszerben a grafikonjaikat!

a) $f: x \mapsto 2x + 1$. *b)* $g: x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$. *c)* $h: x \mapsto -x + 2$. *d)* $l: x \mapsto 4 - x$.

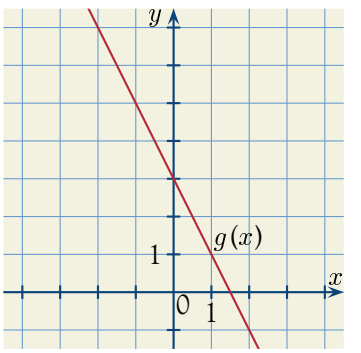
Írd le a füzetedbe, melyik egyenes arányosságokból származtathatók ezek a grafikonok!

K4 Készíts táblázatot a grafikonok alapján, és add meg képlettel a hozzárendelési szabályt!

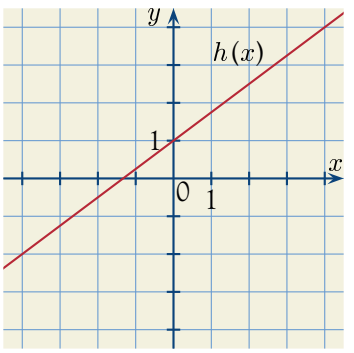
a)



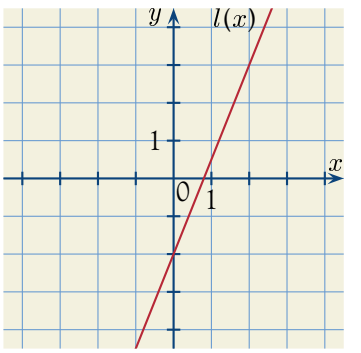
b)



c)



d)



A lineáris függvények vizsgálata

1. Mikor beszélünk egyenes arányosságról?
2. Mit nevezünk lineáris függvénynek?
3. Hány pont határoz meg egy egyenest?

A lineáris függvények grafikonját eddig értéktáblázat segítségével vagy a megfelelő egyenes arányosság grafikonjának eltolásával készítettük el. Keressünk ennél gyorsabb módszert!

Az előzőekben szó volt arról, hogy a lineáris függvények grafikonja egyenes. Az egyenest két pontja egyértelműen meghatározza, egy vonalzó mentén összeköthetők. Ezt végiggondolva adódik, hogy elég a lineáris függvény ábrázolásához két pontjának jelzőszámait megadni, és berajzolható a függvény grafikonja.

Hogyan válasszuk ki ezt a két pontot? Az x koordinátát mi adjuk meg tetszőlegesen, és ehhez kiszámítjuk a képlettel megadott függvény értékét.

Ha a célunk az, hogy egyszerűen számoljunk, akkor érdemes az egyik x értéket 0-nak választani. A második x értéket választhatjuk 1-nek vagy olyan számnak, amely könnyebb számoláshoz és ábrázoláshoz vezet. Nézzük meg a következő két példát!

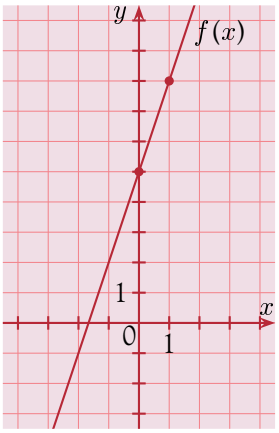
1. példa

Készítsünk értéktáblázatot az alábbi függvényekhez, majd ábrázoljuk a függvényeket!

a) $f: x \mapsto 3x + 5$.

x	0	1
$3x + 5$	5	8

Az $f: x \mapsto 3x + 5$ függvény ábrázolásához a $(0; 5)$ és a $(1; 8)$ pontokat ábrázoljuk, majd összekötjük a két pontot. Ennél a függvénynél az $x = 1$ érték választása szerencsés, mert a hozzá tartozó érték könnyen ábrázolható.

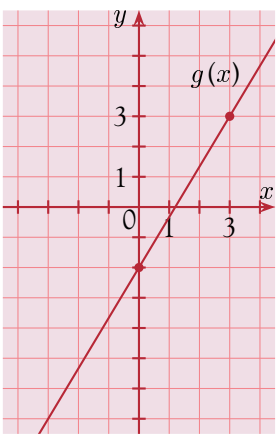


b) $g: x \mapsto \frac{5}{3}x - 2$.

A most készítendő értéktáblázatba is választhatjuk az $x = 0$, $x = 1$ értékeket, de az $x = 1$ érték behelyettesítése után azt kapjuk, hogy $1 \to -\frac{1}{3}$, azaz a $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$ pontot kellene ábrázolni. Ez eléggé kényelmetlen. Válasszunk olyan x értéket, amelyre egész függvényérték adódik! Minden olyan szám jó lesz, ami osztható hárommal.

x	0	3
$\frac{5}{3}x - 2$	-2	3

Ekkor a két ábrázolandó pont: $(0; -2)$, $(3; 3)$.



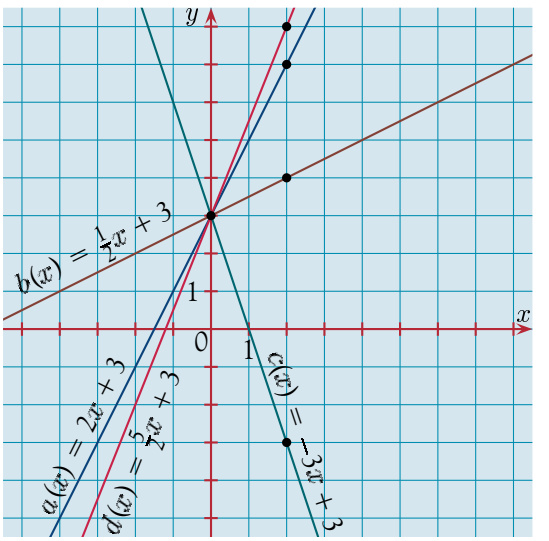
2. példa

Készítsünk értéktáblázatot az alábbi függvényekhez, majd ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben! Milyen közös tulajdonságokat veszünk észre a függvény grafikonjain?

$a\colon x \mapsto 2x + 3$; $\quad b\colon x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$; $\quad c\colon x \mapsto -3x + 3$; $\quad d\colon x \mapsto \frac{5}{2}x + 3$.

A függvényekhez készített értéktáblázatban már csak két x értéket adunk meg:

x	0	2
$2x + 3$	3	7
$\frac{1}{2}x + 3$	3	4
$-3x + 3$	3	−3
$\frac{5}{2}x + 3$	3	8



A grafikonok közös pontban, a $(0; 3)$ pontban metszik az y tengelyt. Milyen kapcsolatban van ez a függvények képleteivel? Ha a lineáris függvények általános $f(x) = mx + b$ képletével összehasonlítjuk, akkor ez b értékének felel meg. Ez azt jelenti, hogy ha az m helyére tetszőleges nullától különböző számot írunk, de a b értékét 3-nak választjuk, akkor ezeknek a lineáris függvényeknek mindegyike a $(0; 3)$ pontban metszi az y tengelyt, mert az $x = 0$ helyen a függvények értéke 3.

Fontos tudnivaló

- A lineáris függvények ábrázolásához elegendő 2 pont koordinátáit kiszámítani, majd ennek segítségével megrajzolni az egyenest.
- Az a szám, amelyet az x-es taghoz adunk, megmutatja, hogy a lineáris függvény grafikonja hol metszi az y tengelyt.

Feladatok

A1 Készíts értéktáblázatot az alábbi függvényekhez, és ábrázold koordináta-rendszerben!

$a\colon x \mapsto 3x + 1$; $\quad b\colon x \mapsto \frac{3}{2}x - 2$;

$c\colon x \mapsto -2x + 5$; $\quad d\colon x \mapsto \frac{2}{5}x + 4$.

K2 Megadtuk egy-egy lineáris függvény két pontját különböző formában. Ábrázold a lineáris függvényeket! Írd le a hozzárendelési szabályát képlettel!

a) Az f függvény grafikonja átmegy a $P(0; 4)$ és $Q(1, 1)$ pontokon.

b) A g függvény grafikonja az y tengelyt (-3)-ban metszi, és átmegy a $T(2; 0)$ ponton.

c) A h függvényről tudjuk, hogy $h\colon 0 \to 1$, $h\colon 4 \to 7$.

d) Az l függvény 2-höz 4-et, 3-hoz 5-öt rendel.

K3 A táblázatokban megadott értékeket ábrázold koordináta-rendszerben, és állapítsd meg, melyik lineáris függvény grafikonja illeszkedik a pontokra!

a)

x	0	3
y	−1	5

b)

x	0	10
y	10	0

c)

x	2	7
y	8	3

d)

x	−2	1
y	−5	−1

e)

x	4	5
y	6	5

K4 Ábrázold a következő függvényeket közös koordináta-rendszerben!

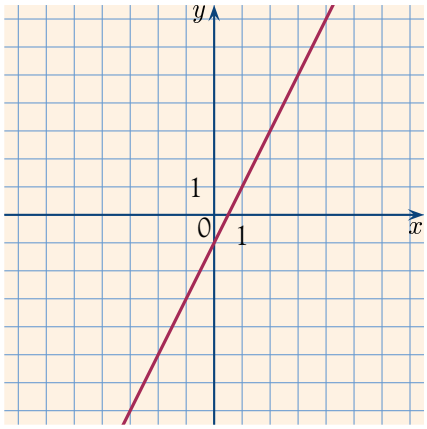
$a\colon x \mapsto -2x - 5$; $\quad b\colon x \mapsto \frac{1}{2}x - 5$;

$c\colon x \mapsto 4x - 5$; $\quad d\colon x \mapsto -\frac{3}{5}x - 5$.

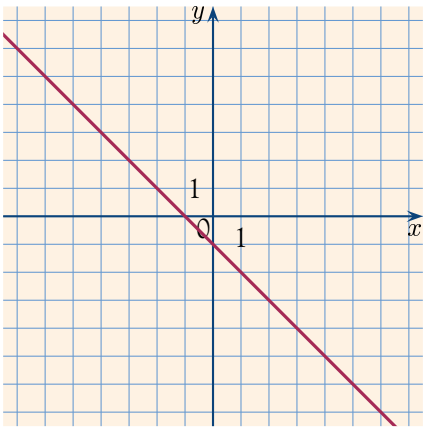
Fogalmazd meg, milyen közös tulajdonsággal rendelkeznek a grafikonok!

K5 Írd fel az itt látható függvények hozzárendelési szabályát!

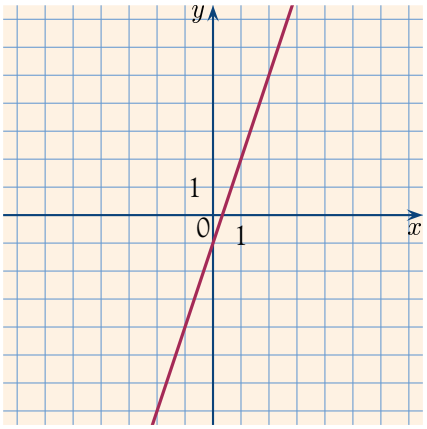
a)



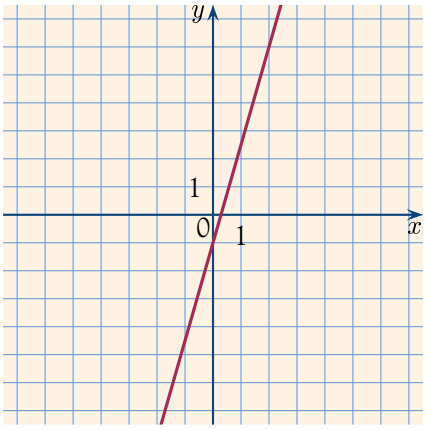
b)



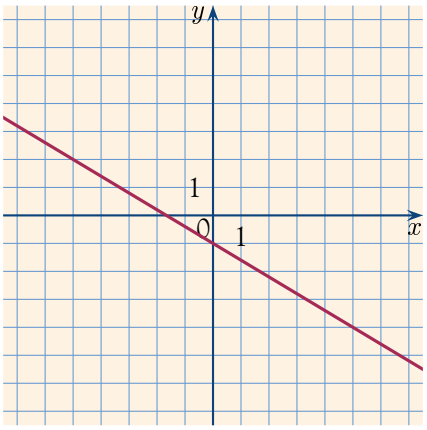
c)



d)



e)



Nemlineáris függvények

1. Sorold fel a fordított arányosság jellemzőit!
2. Mit nevezünk hiperbolának?

A hétköznapjainkban sokszor találkozunk nemlineáris függvényekkel. Ezekre mutatunk néhány példát.

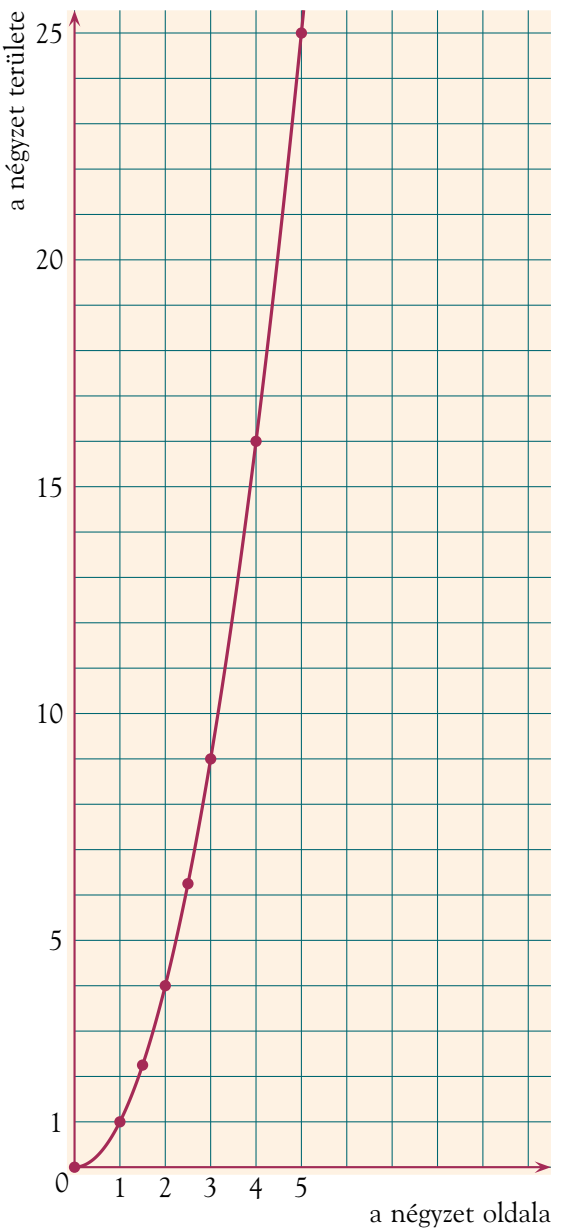
1. példa

Hogyan változik a négyzet területe, ha az oldalának hosszát változtatjuk?

Készítsünk értéktáblázatot az oldalhossz függvényében a területéről:

A négyzet oldala (cm)	1	1,5	2	2,5	3	4	5
A négyzet területe (cm^2)	1	2,25	4	6,25	9	16	25

Ábrázoljuk az oldalhossz függvényében a területet!



Ezek a pontok nem illeszthetők egy egyenesre, így a kapott függvény nem lineáris. Természetesen a négyzet oldalát választhatjuk bármilyen pozitív racionális számnak, ezért a berajzolt pontok sűríthetők, és ez egy jellegzetes görbének a részét adja, amelynek a neve **parabola.** Itt most a parabolának csak egy részét rajzoltuk meg, mert az alaphalmaz a pozitív számok halmaza.

Milyen képlettel tudjuk leírni ezt a függvényt?

Minden számhoz a négyzetét rendeli, ezért:

$f: x \mapsto x^2$.

2. példa

Készítsünk táblázatot arról, hány mérkőzést játszanak egy bajnokságban, ha minden csapat minden csapattal játszik!

Ábrázoljuk a csapatok számának függvényében a mérkőzések számát!



Csapatok száma	2	3	4	5	6	7	8
Mérkőzések száma	1	3	6	10	15	21	28

Az alaphalmaz most a pozitív egész számok halmaza.

Ebben az esetben nem köthetők össze a pontok, mert nincs értelme például 1,5 csapatról beszélni. Úgy tűnik, ezek a pontok is parabolára illeszkednek, ezt későbbi tanulmányaitok alapján igazolhatjátok.

Itt is tudunk képletet találni a hozzárendeléshez:

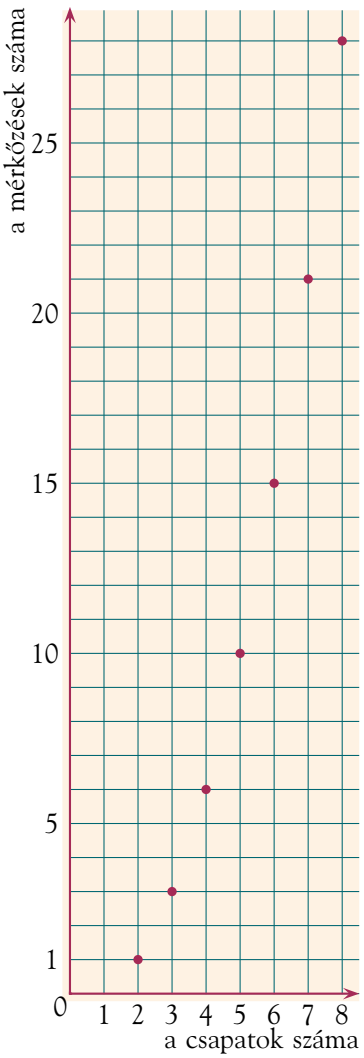
Ha x csapat van, és mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor egy csapat $x - 1$ csapattal mérkőzik, bármilyen természetes szám legyen is az x. Ez összesen $x \cdot (x - 1)$ mérkőzés, de így minden mérkőzést kétszer számoltunk, egyszer az egyik csapatnál, egyszer a másik csapatnál.

Ezért el kell osztani kettővel, hogy a tényleges mérkőzések számát megkapjuk.

A hozzárendelési szabály tehát:

$$f: x \mapsto \frac{x \cdot (x-1)}{2},$$

az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza.

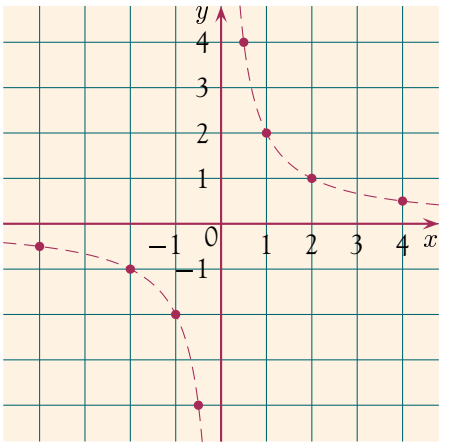


3. példa

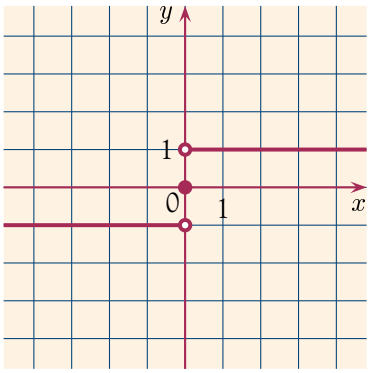
Készítsünk táblázatot a képlettel megadott függvény ábrázolásához, majd ábrázoljuk koordinátarendszerben a függvény grafikonját! $f: x \mapsto \frac{2}{x}$.

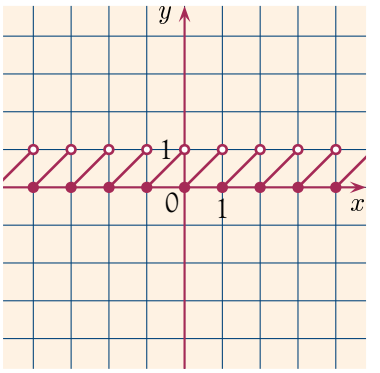
x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	2	4
$\frac{2}{x}$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0{,}5$

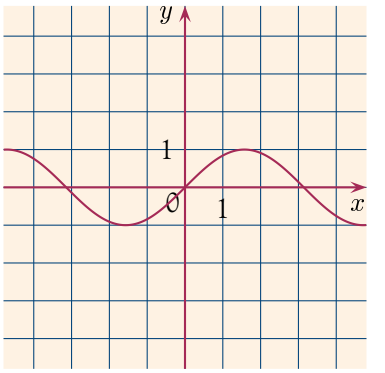
A pontok egy jellegzetes görbére illeszkednek, amelyről már hatodik osztályban tanultunk. A görbe neve **hiperbola**.



Sok másfajta függvénygrafikon van, néhányat felrajzoltunk ide.







7.

Feladatok

A1 Ábrázold a racionális számok halmazán a következő függvényeket! (Az ábrázolás előtt készíts táblázatot a megadott függvényekhez!)

a) Minden racionális számhoz hozzárendeljük a négyzetét.

b) Minden racionális számhoz hozzárendeljük a nullától való távolságát.

c) Minden racionális számhoz hozzárendeljük a számnál 3-mal kisebb szám felét.

K2 Az itt látható képletek közül válaszd ki az előző feladatban megadott hozzárendeléseket!

A) $f: x \mapsto x^2$; B) $g: x \mapsto 2 \cdot x$;

C) $h: x \mapsto \frac{x}{2} - 3$; D) $l: x \mapsto \frac{x-3}{2}$;

E) $n: x \mapsto |x|$.

A megadott függvények közül melyik lineáris? Rajzold meg a függvény grafikonját!

K3 Rendeljük hozzá az 1; 2; 3; 4 élű kockák élhosszához a térfogataik mérőszámát! Készíts a hozzárendeléshez táblázatot, majd a kapott értékek alapján ábrázold a függvényt!

K4 Egy teherautóval 1000 kg Fornettit visznek ki a sütödékbe. A sütödékbe egyenlően osztják el a nyersanyagot. Hány kg-ot kap egy-egy árusítóhely, ha 2, 4, 5, 10, 20, 40 sütödébe szállítják a megadott mennyiséget? Készíts táblázatot, majd ennek segítségével ábrázold a függvényt!

a) Mi a függvény alaphalmaza?

b) Mi lehet a képhalmaz?

c) Milyen tanult jellegzetes görbére illeszkednek a berajzolt pontok?

A sorozatok

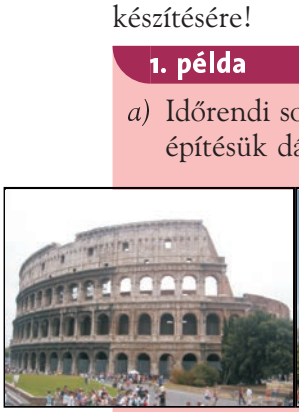
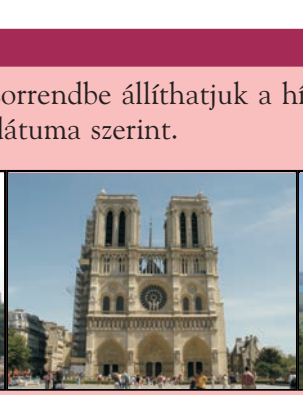
1. Sorold fel, milyen nevezetes sorozatokkal találkoztál!

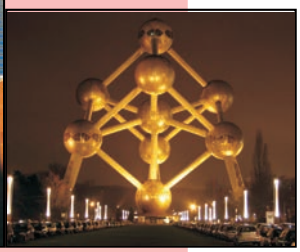
2. Készíts pontokból sorozatot!

A sorozatokkal korábbi tanulmányaid során már találkoztál. Mit jelent egy sorozat alkotása? Valamilyen szempont szerint sorrendbe tesszük a vizsgált dolgokat. Nézzünk néhány példát a sorozatok készítésére!

1. példa

a) Időrendi sorrendbe állíthatjuk a híres épületeket építésük dátuma szerint.

b) A lexikonokban a szavak ábécésorrendben vannak felsorolva.

c) Felsorolhatjuk a Föld országait is valamilyen szempont szerinti sorrendben. Például területük nagysága szerint; ipari fejlettségük szerint; lakosságszámuk szerint; egy-egy termék előállításának aránya szerint.

7.

Sorba rendezéseknél a vizsgált halmaz elemeihez megadjuk, hogy melyik legyen az első, második, harmadik, … A sorszám egyértelműen meghatározza, hogy melyik tagról van szó. Például az osztálynévsorban egyértelmű, hogy ki az **ötödik** tanuló, meg tudjuk mondani, melyik a Föld harmadik legnépesebb országa stb.

2. példa

Rendezzük sebességük csökkenő sorrendje szerint az alábbi állatokat:

{antilop, egér, kenguru, strucc, nyúl, elefánt, farkas, gepárd}

	Az állat	sebessége kb. $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$
1.	a gepárd	30
2.	az antilop	27
3.	a strucc	18
4.	a nyúl	16
5.	a kenguru	13
6.	az elefánt	11
7.	a farkas	6
8.	az egér	4



Ha számokat rendezünk sorrendbe valamilyen szabály vagy felsorolás alapján, számsorozatról beszélünk.

3. példa

Hogyan folytathatjuk a megkezdett 2; 4; 6; ... sorozatot? Keressünk többféle megoldást! Fogalmazzuk meg a felismert szabályt!

Többféle megoldás lehetséges:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... kettesével növekvő számsorozat.

b) 2, 4, 6, 2, 4, 6, 2, 4, 6, ... periodikusan ismétlődve.

c) 2, 4, 6, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 2, 2, 2, ... a megadott három elemet mindig eggyel többször írjuk le.

d) 2, 4, 6, 10, 16, 26, ... a következő tag az előző kettő összege.

e) 2, 4, 6, 22, 130, 2858, ... a következő tag az előző két tag szorzatánál kettővel kisebb.

f) 2, 4, 6, 2, 6, 34, 9, 124, −17, ... ezek a számok jutottak eszembe egymás után.

Még biztosan lehetne folytatni a szabály keresését.

A példa alapján megjegyzendő: Ha egy sorozatot néhány elemének a felsorolásával adunk meg, akkor többféle módon folytathatjuk, tehát nem lehet egyértelműen megmondani, milyen sorozatról van szó.

Ahhoz, hogy egyértelműen kiderüljön, melyik sorozatról beszélünk, meg kell adni a sorozat képzési szabályát. Ezt megadhatjuk szövegesen és képlettel is.

A képlettel történő megadáshoz azonban meg kell tanulni, hogyan jelöljük a sorozat elemeit.

A sorozat elemeit kis a, b, c ... betűkkel jelöljük, és a jobb alsó sarokba egy számot írunk, ami azt mutatja, hogy a sorozat hányadik eleméről van szó.

a_1 a sorozat első elemét, a_2 a második elemét, a_{10} a sorozat tizedik elemét, a_n a sorozat n-edik elemét jelöli. Ez azt jelenti, hogy az n akármelyik sorszám lehet. Minden pozitív egész számhoz hozzárendelünk egy sorozatelemet.

4. példa

A sorozatot az $a_n = n - 3$ képlettel adtuk meg. Írjuk fel a sorozat első 5 tagját!

Mivel a sorozat képzése egy halmaz elemeinek sorba rendezését jelenti, ezért csak első, második, harmadik elemről beszélhetünk, és nincs értelme 1,4. elemről, vagy (−7). elemről beszélni. Ezért az n értéke csak természetes szám lehet.

A kérdezett első öt elem tehát: $a_1 = 1-3 = -2$; $a_2 = 2-3 = -1$; $a_3 = 3-3 = 0$; $a_4 = 4-3 = 1$; $a_5 = 5 - 3 = 2$.

Fontos tudnivaló

Foglaljuk össze a tanultakat:

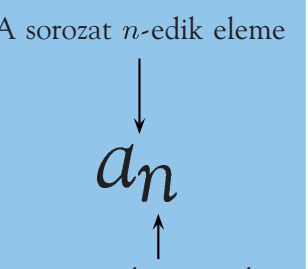
A sorozat képzése egy halmaz elemeinek sorba rendezését jelenti.

A sorozat pozitív egész számokon értelmezett hozzárendelés, függvény.

A sorozat n-edik elemét a_n-nel jelöljük, ahol n természetes szám.

Ha a sorozat első néhány elemét felsoroljuk, akkor különböző szabály szerint folytatva, többféle sorozatot kaphatunk.

Egyértelműen akkor adott a sorozat, ha megadjuk a képzési szabályát képlettel vagy szöveges módon.



1. Mit nevezünk sorozatnak?
2. Hogyan jelöljük a sorozat egy-egy elemét?
3. Milyen módon adhatunk meg egy sorozatot?

Feladatok

A1 Egy sorozat első tagja -2, második tagja 1. Minden további tag a közvetlenül előtte levő két tag összegével egyezik meg.

a) Sorold fel a sorozat első hat elemét!

b) Hányadik az a tag, amelynek értéke már nagyobb mint 50?

c) Számítsd ki az első tíz tag összegét!

K2 Válaszolj a kérdésekre! A válaszokat írd le a füzetedbe!

a) Minek a jelölése az a_9?

b) Mit jelent az $a_6 = 28$ jelölés?

c) Mit jelent az a_n szimbólum?

d) Mit jelent az $a_n = n + 1$?

e) Fogalmazd meg szöveggel ezt a képzési szabályt: $a_n = 5n + 1$!

A3 Számítsd ki a sorozatok első hat tagját!

a) $a_1 = 3$. Minden további tagot úgy kaphatunk, ha 6-ból elvesszük az előző tagot.

b) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$. Minden további tagot úgy kaphatunk, ha a közvetlen előtte lévő két tagot összeszorozzuk.

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 1$. Minden további tagot úgy kaphatunk, hogy az előtte lévő tagot elosztjuk a kettővel előtte lévő taggal.

d) $a_1 = a_2 = a_3 = 4$. Minden további tagot úgy kaphatunk, hogy az előtte lévő két tag összegéből kivonjuk a hárommal előtte lévő tagot.

K4 Számítsd ki a sorozatok első négy tagját!

a) $a_n = 2 \cdot (n + 3)$; *b)* $a_n = n^2 + n$.

„A kis Gauss” (Olvasmány)

Gaussról (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) terjedt el az az *anekdota,* amely szerint kisiskolás korában egy alkalommal a tanító le akarta foglalni a gyerekeket egy hosszú számolásos feladattal, ezért azt mondta nekik:

– Számítsátok ki 1-től 100-ig az egész számok összegét!

Gauss másodperceken belül jelentkezett, hogy elkészült.

A tanító legnagyobb csodálkozására valóban kiszámolta az összeget, és az eredmény helyes volt.

A történet csattanójával, a módszerrel, amelyet Gauss is alkalmazott, most mi is megismerkedünk.

Hogyan számítanád ki ügyesen az $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ összeget? Hogyan érdemes csoportosítani a számokat?

Többféle csoportosítás lehetséges. Például:

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) = 5\cdot 11 = 55.$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+10+5 = 5\cdot 10+5 = 55.$

A számtani sorozat

1. példa

Az édességbolt kirakatában kakaósdobozokból piramis alakú díszt készítenek. A legfelső sorban 1, alatta 3, majd minden eggyel lejjebb lévő sorban kettővel több dobozos kakaó van, mint a felette lévőben.

a) Hány doboz van a legalsó sorban, ha 10 szintes a kakaópiramis?

b) Hány doboz kakaót használtak fel a díszítéshez?



a) A soronkénti kakaósdobozok száma egy sorozatot alkot, amelynek elemei: $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$, és ha tovább számoljuk, akkor eljutunk az $a_{10} = 19$-hez.

Tagonként felírva: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19.

Tíz elemet nem tart túl sokáig egyesével kiszámítani, de mindenképpen hasznosabb, ha a képzési szabályt megfogalmazzuk képlettel is.

$a_2 = a_1 + 2$; $a_3 = a_2 + 2$; $a_4 = a_3 + 2$; ...; $a_{10} = a_9 + 2$.

A képzési szabály szerint a következő tagot úgy kapjuk meg, hogy az előző taghoz kettőt adunk.

Általánosan: $a_n = a_{n-1} + 2$.

Ez azt is jelenti, hogy a második tagtól kezdve bármely tagból kivonva az előtte álló tagot, kettőt kapunk.

$a_2 - a_1 = 2$; $a_3 - a_2 = 2$; $a_4 - a_3 = 2$; ...; $a_{10} - a_9 = 2$.

Általánosan: $a_n - a_{n-1} = 2$.

Mit figyelhettünk meg ebben a sorozatban?

A sorozat következő eleme az előzőhöz képest mindig ugyanannyival nő.

Bármely elemből kivonva az előtte álló elemet, a különbség állandó.

Az ilyen típusú sorozatokat **számtani sorozatnak** nevezzük.

Az állandót idegen szóval differenciának nevezzük, és d-vel jelöljük.

Adjuk meg az első elem és a differencia segítségével a sorozat n-edik elemét!

$$1;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 3;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 5;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 7;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 9;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 11;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 13;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 15;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 17;\ \overset{+2}{\rightarrow}\ 19.$$

Nézzük ismét a második, harmadik stb. elemet.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d &&= a_1 + d; \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d &&= a_1 + 2d; \quad \overset{+d}{\rightarrow} \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d &&= a_1 + 3d; \quad \overset{+d}{\rightarrow} \\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d &&= a_1 + 4d \quad \overset{+d}{\rightarrow}
\end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy az első taghoz mindig eggyel kevesebbszer adjuk hozzá a differenciát, mint ahányadik tagot szeretnénk felírni. $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$.

b) A díszítéshez felhasznált összes kakaósdobozt kiszámíthatjuk úgy is, hogy összeadjuk a sorokban lévő dobozok számát. Keressünk itt is olyan megoldást, amely gyorsabbá teszi a számolást, és sok elemszám esetén is használható!

Ehhez használjuk fel a számtani sorozat előbb felsorolt tulajdonságát, hogy minden elem ugyanannyival változott az előzőhöz képest.

A példa adataival mutatunk két lehetőséget a gyors kiszámoláshoz.

1. lehetőség:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 5 \cdot 20 = 100$$

20, 20, 20, 20, 20

2. lehetőség:

Írjuk fel a kérdezett elemek összegét: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$

Most fordított sorrendben írjuk fel az elemek összegét: $19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20$$

Adjuk össze ezt a két összeget úgy, hogy az egymás alatt lévő elemeket írjuk egymás mellé. Majd gondolnunk kell arra, hogy a keresett összeg kétszeresét kapjuk.

$(1+19) + (3+17) + (5+13) + \ldots + (17+3) + (19+1) = 20+20+20+\ldots+20 = 10 \cdot 20 = 200.$

Így a keresett összeg $\frac{200}{2} = 100$.

A kirakatdíszítéshez 100 doboz kakaót használtak fel.

Általánosan is igaz: egy számtani sorozat egymást követő elemeinek az összegét úgy is ki tudjuk számítani, hogy az első elemhez hozzáadjuk az utolsó elemet, az összeget szorozzuk az elemek számával, majd a kapott eredményt osztjuk kettővel.

Képlettel felírva:

A számtani sorozat egymást követő n elemének az összege $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Összefoglalva

A számtani sorozatban bármely elemből kivonva az előtte álló elemet, a különbség állandó.

Az n-edik tagot úgy kapjuk meg, hogy az első taghoz mindig eggyel kevesebbszer adjuk hozzá a differenciát, mint ahányadik tagot szeretnénk felírni. $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$.

A számtani sorozat egymást követő n elemének az összege $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

1. Mi a jellemzője a számtani sorozatnak?
2. Hogyan lehet kiszámítani a számtani sorozat n-edik tagját az első elem és a különbség ismeretében?
3. A számtani sorozat első n tagjának összege: $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Hogyan határoztuk meg ezt a képletet?

Feladatok

A1 Válaszd ki, melyik lehet számtani sorozat! Indokolj! Add meg a számtani sorozat differenciáját!

a) 38; 45; 38; 45; 38; 45; 38; 45; ...

b) 65; 75; 85; 95; 105; 115; ...

c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; ...

d) 28; 18; 8; −2; −12; ...

e) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{3}$; 2; ...

A2 A következő számtani sorozatokban határozd meg az első négy tag és a differencia közül azokat, amelyek nincsenek megadva!

a) $a_1 = 5; \quad d = 3;$

b) $a_1 = 18; \quad d = -7;$

c) $a_1 = -12; \quad a_2 = -8; \quad a_3 = -4;$

d) $a_3 = 1{,}2; \quad d = -0{,}2;$

e) $a_1 = 32; \quad a_4 = 65;$

f) $a_2 = 37; \quad a_4 = 43.$

K3 Válaszd ki az állítások közül az igaz állításokat, majd írd le a füzetbe azokat! Az igaz állításokat indokold meg!

a) A számtani sorozatoknál bármely tag – a másodiktól kezdve – nagyobb az őt megelőző tagoknál.

b) Három egymást követő tag közül a középső mindig egyenlő a két szomszédjának átlagával.

c) A sorozat páratlan indexű tagjai pozitívak.

d) A számtani sorozat első n tagjának az összege pozitív.

K4 Határozd meg az adatok alapján a keresett tagot!

a) $a_1 = 5; \quad d = 3; \quad a_{71} =$

b) $a_{10} = 10; \quad d = -3; \quad a_{20} =$

c) $a_8 = 60; \quad a_{21} = 92{,}5; \quad a_{100} =$

K5 Egy félkör alakú nézőtéren az első sorban 120-an férnek el. Minden sorban 30-cal több szék van, mint az előtte lévő sorban. Hányan férnek el a 12 soros nézőtéren?



Igaz? Hamis?

Furi-Muri szigete

Furi-Muri szigeten kétféle ember él: igazmondó és huncut. Az igazmondó emberek állításai mindig igazak, a huncut emberek állításai mindig hamisak. Érdekes módon a sziget lakói okosak, soha semmiben nem tévednek, mindent pontosan tudnak.

Egyszer a szigetre vetődtünk, és kérdezősködni kezdtünk.



1. példa

Találkozunk egy szigetlakóval.

– Mennyi 1 + 1? – kérdezzük tőle.

Miféle lehetett, ha a válasza 1; illetve 2?

Mi mást válaszolhatott volna még?

1 + 1 = 2. Ezt a szigetlakó is tudja, hiszen okos. Ezért csak akkor mondhat 1-et, ha huncut.

2-t az igazmondók mondhatnak.

Aki huncut, az bármit válaszolhat, csak éppen 2-t nem.

2. példa

Ezúttal azt kérdezzük egy szigetlakótól, hogy mi a neve. Azt feleli: Dásony. Mi a neve?

Ha igazmondó, akkor valóban Dásony. Ha huncut, akkor **minden más lehet,** csak épp Dásony nem.

Feladatok

A1 Találkoztunk egy szigetlakóval, aki azt mondta magáról, hogy igazmondó. Mi lehetett az illető?

A2 Valakitől ezt kérdeztük: „Te miféle vagy?” Mit válaszolhatott? Miféle lehetett?

K3 Egy alkalommal két barát jött szembe.

„A barátod miféle?” – kérdeztük.

„Huncut” – válaszolta. Mifélék lehettek?

K4 Ismét két baráttal találkozunk. „Mi vagy?”, kérdeztük az egyiket. De a választ nem hallottuk. Megkérdeztük a másikat: „Mit mondott?”. „Azt, hogy huncut.” Mifélék lehettek ők?

E5 Ha találkozol egy emberrel, hogyan tudhatnád meg, hogy miféle? Próbáld meg minél kevesebb kérdéssel kideríteni!

E6 Ha találkozol egy emberrel, hogyan tudhatnád meg, hogy hányadika van? Próbáld meg minél kevesebb kérdéssel kideríteni!

E7 Valaki ezt állította magáról: én huncut vagyok. Mit lehet tudni róla?

K8 Furi-Muri szigetén az iskolában valaki elkövetett egy csibészséget. Az idő tájt három gyerek, Aba, Baba és Csaba volt az iskola épületében. Ki akarják deríteni, hogy melyikük volt az.

Aba: Baba volt az.
Baba: Nem én voltam, Aba volt!
Csaba: Dehogy is volt Aba!

a) Ki lehet huncut, ha tudjuk, hogy pontosan ketten azok?
b) Ki követhette el a csibészséget?
c) Huncut-e, aki a csibészséget elkövette?

K9 Három ládika egyikébe kincset rejtettek. Ezt írták a ládikára:

Ez a ládika üres.

Ebben a ládikában van a kincs.

A kincs az első ládikában van.

a) Hol lehet a kincs, ha az egyik felirat hamis, a másik kettő igaz?

b) Hol lehet a kincs, ha pontosan két felirat hamis?

Paradoxon

Azt a gondolatmenetet, amelyben ellentmondás van, paradoxonnak nevezzük.

3. példa



Ez egy ókori történet. *Egy krokodil elragadta anyjától a csecsemőjét. Az anya könyörgött, hogy adja vissza a gyermeket. De a krokodil ezt válaszolta: Csak akkor adom vissza, ha kitalálod, hogy mit fogok vele csinálni.*

Az anya így gondolkodott: azt kell mondanom, hogy meg akarja tartani. Ha az volt a szándéka, hogy visszaadja, akkor visszakapom. Ha pedig nem, akkor kitaláltam a szándékát, tehát vissza fogja adni.

A krokodil így gondolkodott: megtartom a fiút. Ha azt mondja, hogy vissza akarom adni, akkor megtartom, mert téved, ha pedig azt mondja, hogy meg akartam tartani, akkor eltalálta, valóban megtartom.

A paradoxonnak nincs megoldása – ezért paradoxon.

Megkérdezhetjük, hogy „hol a hiba”? Erre az a válasz, hogy nincs benne hiba. Ez egy paradoxon.

Megkérdezhetjük, hogy mi okozza ezt az ellentmondást. Erre már tudunk válaszolni. Egy olyan, még meg nem történt eseményről teszünk kijelentést, amelynek az igazságtartalma attól függ, hogy mi a kijelentés. Ez képtelenség.

Felmerül, hogy fel lehet-e oldani a paradoxont, vagyis meg lehet-e változtatni a történetet úgy, hogy legyen megoldása. Természetesen meg lehet változtatni – csak akkor nem lesz paradoxon, nem lesz érdekessége a történetnek.

Feladatok

E1 Ez is egy régi történet a falu borbélyáról. *Megkérdezik a borbélyt, hogy minden férfit ő borotvál-e a faluban. A borbély ezt feleli: „Nem, csak azokat – de azokat mind –, akik nem maguk borotválkoznak.” A borbély – aki maga is férfi – vajon maga borotválkozik-e?*

Paradoxon ez?

Meg tudod mondani, hogy mi okozza a paradoxont?

Fel tudod oldani?

E2 *Ez az állítás hamis.* Lehet-e igaz ez? Lehet-e hamis?

E3 A legenda szerint az i. e. 600 körül élt krétai filozófus, a knosszoszi Epimenidész ezt állította: „A krétaiak mindig hazugok.” Vagyis azt állította, hogy minden krétainak minden állítása hazugság.

a) Lehet-e, hogy Epimenidész állítása igaz?

b) Lehet-e, hogy Epimenidész állítása hamis?

c) Paradoxon-e ez a történet?

E4 *Ez az állítás igaz.* Lehet-e ez az állítás hamis? Lehet-e igaz?

Tanmese a testnevelés-dolgozatról

A testnevelő tanár így szól az osztályhoz: „A jövő héten valamelyik reggel váratlanul dolgozatot írunk bukfencezésből!”

A gyerekek elgondolkodnak: Ha a dolgozat váratlan lesz és csütörtökig nem írjuk meg, akkor biztosan pénteken írjuk. De arról már csütörtökön délben tudnánk, tehát nem lenne váratlan.

Ezek szerint biztosan nem pénteken lesz a dolgozat. De csütörtökön sem lehet, mert akkor arról már szerda délben tudnánk, tehát az sem lenne váratlan.

Tehát már szerdáig megírjuk a dolgozatot. De nem szerdán, mert akkor arról már kedden délben tudnánk, hiszen csütörtökön és pénteken nem írhatjuk. Vagyis a szerdai időpont sem lenne váratlan.

Ha viszont kedden írnánk a dolgozatot, akkor arról hétfőn délben tudnánk, az sem lenne váratlan.

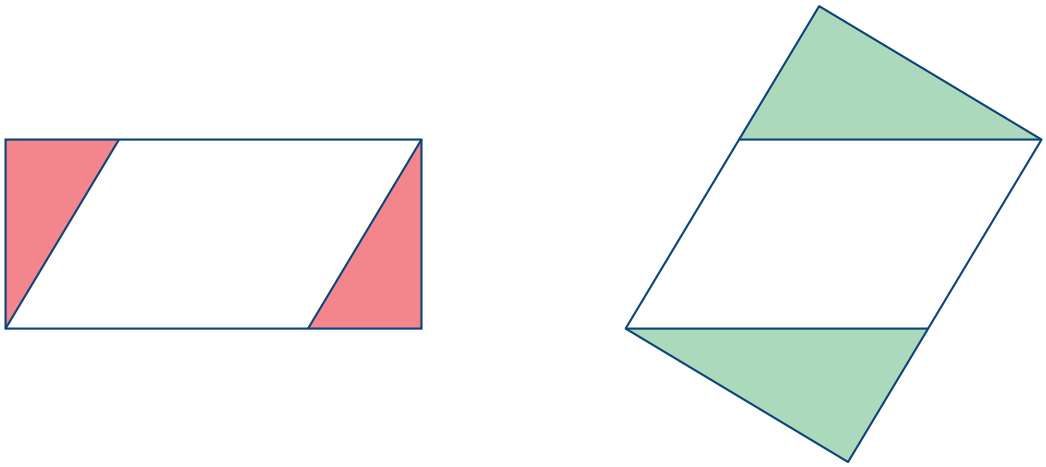
Tehát a dolgozat időpontja csak hétfő lehet. De az sem váratlan!

Hurrá, nem írunk dolgozatot!

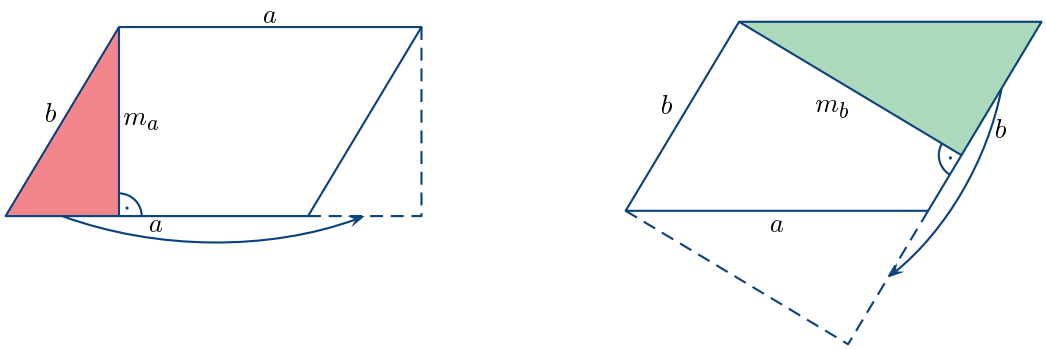
A gyerekekkel szerdán reggel – váratlanul – mégis megíratták testnevelésből a dolgozatot.

A paralelogramma és a háromszög területe

A paralelogramma területét eddig úgy határoztuk meg, hogy téglalapba foglaltuk. Ezt kétféleképpen is megtehettük. A téglalap területéből ezután levontuk a két piros, illetve a két zöld derékszögű háromszög területét.



A paralelogramma területét átdarabolással is meghatározhatjuk. A paralelogrammából levágjuk a színezett derékszögű háromszöget. Megfelelő áthelyezéssel kialakítunk egy téglalapot, amelynek területét már ki tudjuk számítani.



Ugyanazt a paralelogrammát egy másik módon is átdaraboltuk. A kapott téglalapok nem egybevágók, de a területük egyenlő.

A téglalapok területének kiszámításához a párhuzamos oldalak távolságát kell ismernünk.

Fontos tudnivaló

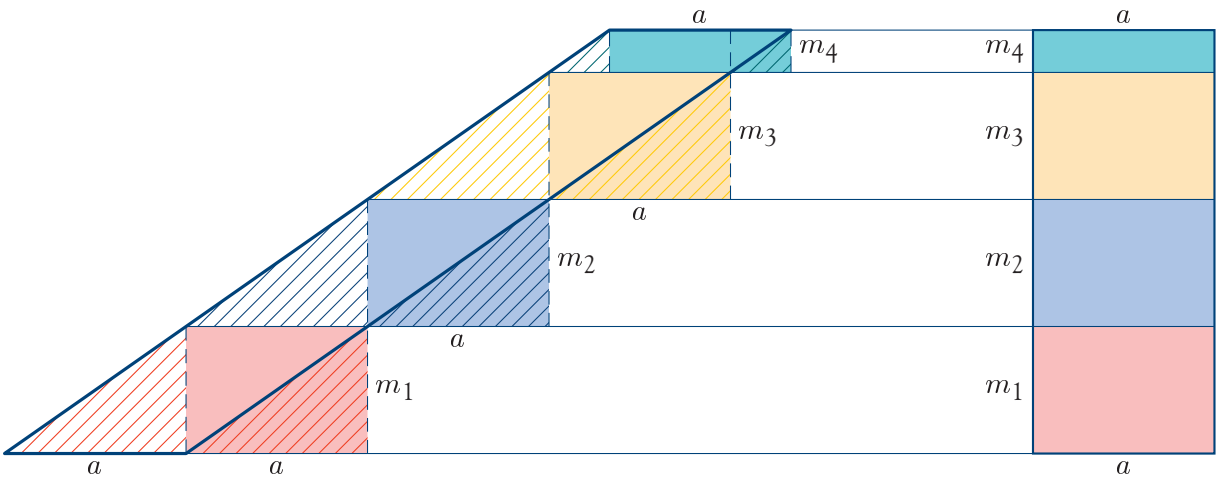
A paralelogramma párhuzamos oldalegyeneseinek távolságát a paralelogramma magasságának nevezzük.

Minden paralelogrammának két párhuzamos oldalpárja, s így kétféle magassága van. Ha vesszük a paralelogramma egyik csúcsának a csúcsot nem tartalmazó oldalegyenesektől a távolságát, akkor két magasságot kapunk. Az a oldalhoz az m_a, a b oldalhoz az m_b magasság tartozik.

Először a piros derékszögű háromszög áthelyezésével egy a és m_a oldalú téglalapot alakítottunk ki. Ezért a téglalap, illetve a vele egyenlő területű paralelogramma területe: $t = a \cdot m_a$.

Másodszor a zöld derékszögű háromszög áthelyezésével egy b és m_b oldalú téglalapot alakítottunk ki. Ezért a téglalap, illetve a vele egyenlő területű paralelogramma területe: $t = b \cdot m_b$.

Mindig megvalósítható-e ez a kétféle átdarabolás? Az előző ábrán látható paralelogrammát egy-egy vágással kétféle téglalappá alakítottuk. Van, amikor az egyik ilyen átdarabolás nem megy. Ilyenkor a paralelogrammát több darabra vágjuk.



A kis paralelogrammákat már át tudjuk darabolni téglalappá.

A téglalapokat „összetoljuk”, és egy nagyobb téglalapot kapunk.

Minden téglalap egyik oldala a paralelogramma a oldalával egyenlő.

Az egyes téglalapok magassága a paralelogrammák magasságával egyenlő.

Esetünkben $m_1 = m_2 = m_3$, de ez nem játszik szerepet.

A kapott téglalapok területe összesen:

$a \cdot m_1 + a \cdot m_2 + a \cdot m_3 + a \cdot m_4 = a \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = a \cdot m_a$.

Ennek a téglalapnak a területe $a \cdot m_a$. Ilyen eljárással megmutatható, hogy a paralelogramma mindig átdarabolható egy a és m_a, illetve egy b és m_b oldalú téglalappá is.

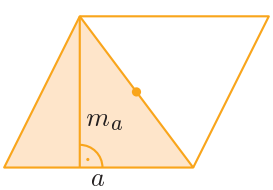
Fontos tudnivaló

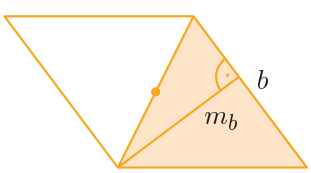
A paralelogramma területét megkapjuk, ha az egyik oldalának a hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával.

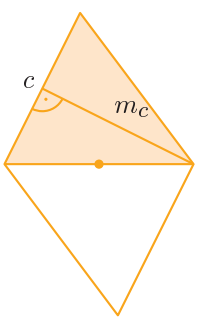
Ezek alapján a paralelogramma területképlete: $t = a \cdot m_a = b \cdot m_b$.

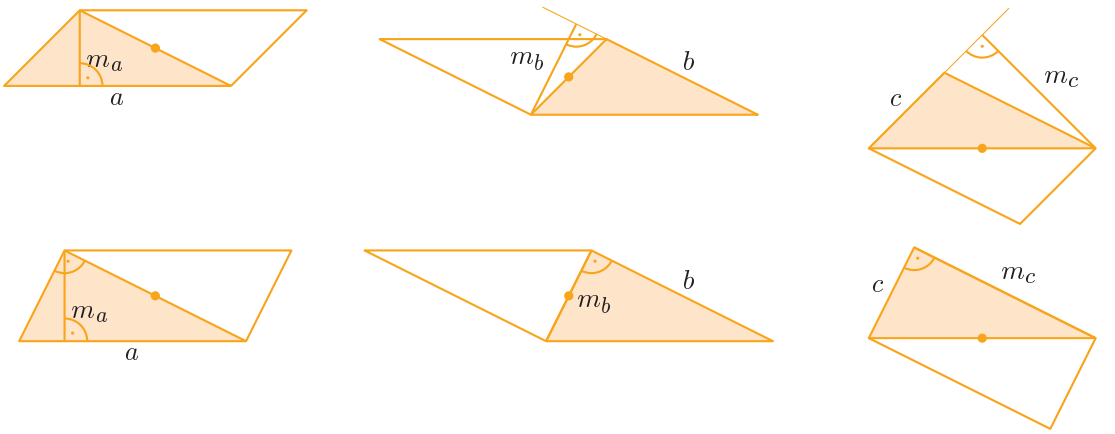
Minden paralelogrammát az átlója két háromszögre vág. A két háromszög egybevágó, hiszen oldalaik páronként egyenlők. Ezért területük is egyenlő. Vagyis egy ilyen háromszög területe a paralelogramma területének felével egyenlő.

Ha egy háromszöget valamelyik oldalának a felezőpontjára tükrözünk, akkor paralelogrammát kapunk.









Az m_a, m_b, m_c az így kapott paralelogrammák magasságát jelöli. Ezek a háromszög magasságai is. Azt mondjuk, hogy az ABC háromszögnek az a oldalhoz tartozó magassága m_a, a b oldalhoz tartozó magassága m_b, a c oldalhoz tartozó magassága m_c.

Fontos tudnivaló

A háromszög magasságának nevezzük a háromszög egyik csúcsának a csúcsot nem tartalmazó oldalegyenestől való távolságát.

A háromszög magasságát megrajzolhatjuk, ha tetszőleges csúcsából merőlegest állítunk a szemközti oldalegyenesre. Az így kapott egyenest a háromszög **magasságegyenesének** nevezzük. A magasságegyenesnek a csúcs és az oldalegyenes közé eső szakasza a **magasságszakasz**. Ennek a szakasznak a hosszát röviden magasságnak mondjuk.

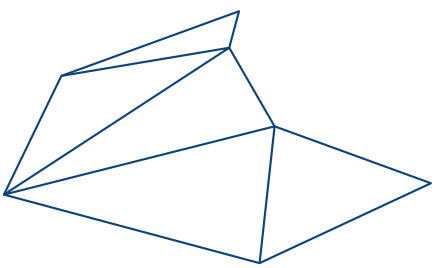
Sokszor a magasságegyenes, a magasságszakasz helyett is magasságot mondunk. A szövegkörnyezet segít eldönteni, hogy egyenesről, szakaszról vagy a szakasz hosszáról beszélünk-e.

Fontos tudnivaló

A háromszög területét megkapjuk, ha az egyik oldalának a hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával, és a szorzat felét vesszük.

Ezek alapján a háromszög területképlete: $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.

Minden sokszög feldarabolható háromszögekre. Ezáltal minden sokszög területe meghatározható, hiszen a területe a háromszögek területének összegeként számítható ki.

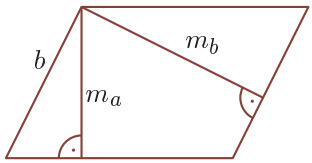


1. példa

a) A paralelogramma egyik oldalának hossza 12 cm, a hozzá tartozó magasságé 4 cm. Mekkora a másik oldal hossza, ha az ahhoz tartozó magasság 6 cm-es?

b) A paralelogramma egyik oldalának hossza 8 cm, a hozzá tartozó magasságé 6 cm. Mekkora a másik oldal hossza, ha az ahhoz tartozó magasság 12 cm-es?

a) Mivel ismerjük a paralelogramma oldalának és a hozzá tartozó magasságának a hosszát, ezért kiszámíthatjuk a paralelogramma területét: $t = a \cdot m_a = 12 \cdot 4 = 48$ (cm^2).

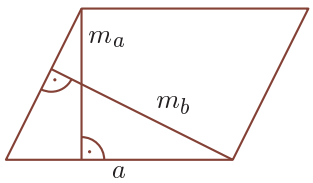


A terület és a másik magasság ($m_b = 6$ cm) ismeretében kiszámítjuk a hiányzó oldal hosszát: $48 = 6 \cdot b$. Vagyis $b = 8$ cm.

b) Az előző gondolatmenetet követve:

$t = a \cdot m_a = 12 \cdot 4 = 48$ (cm^2).

A hiányzó oldalra felírjuk a következő összefüggést: $48 = 12 \cdot b$. Vagyis $b = 4$ cm.



Vizsgáljuk meg, hogy a kapott paralelogrammák léteznek-e!

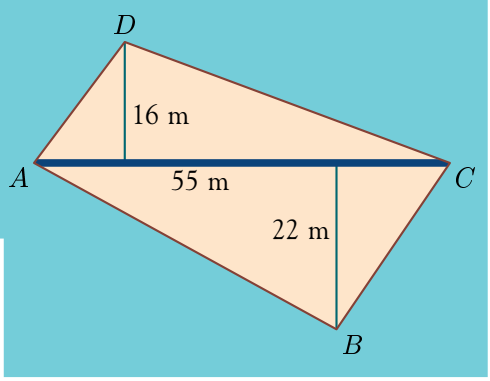
A paralelogramma magassága nem lehet hosszabb, mint a nem hozzá tartozó oldal, vagyis $b \geq m_a$ és $a \geq m_b$. (Egyenlőség téglalap esetén lesz.)

Ezek alapján az *a)* részben minden rendben van. A paralelogramma létezik, a hiányzó oldalának hossza 8 cm.

A *b)* részben kapott $b = 4$ cm-nél nem lehet hosszabb a másik oldalhoz tartozó magasság. Az azonban 6 cm. Vagyis ez a paralelogramma nem létezik! Így a hiányzó oldalát nem adhatjuk meg!

2. példa

A képen látható négyszög alakú kertet egyik átlója mentén egy 55 méter hosszú gyalogút szeli ketté. A gyalogútra nem illeszkedő egyik csúcs 16 méterre, a másik 22 méterre van ettől a gyalogúttól. Mekkora területű a kert?



A szöveg alapján tudjuk, hogy az ABC háromszögben az AC oldal hossza 55 méter, a hozzá tartozó magasság hossza 22 méter. Kiszámítjuk a háromszög területét:

$$t_1 = \frac{55 \cdot 22}{2} = 605 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Az ACD háromszögben az AC oldal hossza 55 méter, a hozzá tartozó magasság hossza 16 méter. Ennek a háromszögnek is kiszámítjuk a területét: $t_2 = \frac{55 \cdot 16}{2} = 440$ (m^2).

A kert területe a két háromszög területének összegével egyenlő:

$t = t_1 + t_2 = 605 + 440 = 1045$ (m^2).

Vagyis a kert 1045 m^2 területű.

Feladatok

A1 Számítsd ki a paralelogramma területét, ha az adatok a következők:

a) $a = 84$ cm, $m_a = 0{,}44$ m;

b) $b = 2{,}3$ dm, $m_b = 12$ cm!

K2 Egy négyzet alakú szántóföldön 1055 q búza termett. A szántóföld kerülete 2,4 km.

a) Mekkora a szántóföld területe?

b) Hány mázsa búza termett átlagosan egy hektáron?

K3 Hogyan változik a paralelogramma területe, ha

a) az alapja kétszeresére nő, a hozzá tartozó magasság pedig felére csökken;

b) az alapja és a hozzá tartozó magasság is a kétszeresére nő;

c) az alapja háromszorosára nő, a hozzá tartozó magasság pedig felére csökken?

K4 Melyek az igaz állítások?

a) A paralelogramma párhuzamos oldalegyeneseinek távolságát a paralelogramma magasságának nevezzük.

b) A paralelogramma területét megkapjuk, ha az egyik oldalának a hosszát megszorozzuk az egyik magasság hosszával.

c) A háromszög magasságának nevezzük a háromszög egyik csúcsának a csúcsot nem tartalmazó oldalegyenestől való távolságát.

d) A háromszög területét megkapjuk, ha az egyik oldalának a hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával, és a szorzat felét vesszük.

e) Ha egy négyszöget az egyik átlója két derékszögű háromszögre vág, akkor az a négyszög csakis téglalap lehet.

f) Csak a négyzet olyan négyszög, amelyet az egyik átlója két egyenlő szárú derékszögű háromszögre vág.

g) Van olyan háromszög, amelyben két oldal ismerete elegendő a terület kiszámításához.

h) Legalább két hegyesszögnek minden háromszögben kell lenni.

K5 Egy háromszög egyik oldala 27 cm, a hozzá tartozó magasság 6 cm. Mekkora a vele egyenlő területű négyzet egyik oldalának hossza?

K6 Egy háromszög és egy paralelogramma alakú föld egyenlő területű. A háromszög oldala 72 m, a hozzá tartozó magasság 56 m. A paralelogramma egyik oldala 48 m. Mekkora az ehhez az oldalhoz tartozó magassága?



K7 Egy paralelogrammának és egy háromszögnek egyenlő a magassága. A paralelogramma területe a háromszög területének 2,5-szerese. Hányszorosa a paralelogramma alapja a háromszögének?

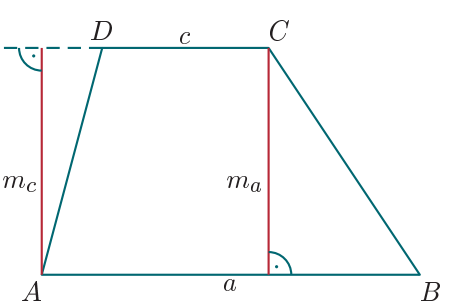
K8 Egy deltoid két átlója 12 cm, illetve 18 cm hosszúságú. A rövidebb átlóra a deltoid területével egyező területű háromszöget rajzoltunk. Mekkora a háromszög magassága?

8.

A trapéz területe

A trapézt az egyik átlója két háromszögre vágja. Az ábrán az ABC háromszög a oldalához tartozó m_a, és az ADC háromszög c oldalához tartozó m_c magasságot is berajzoltuk.

Mindkét magasság a trapéz párhuzamos oldalainak a távolságát adja, így $m_a = m_c$, röviden jelöljük m-mel.



Fontos tudnivaló

A trapéz párhuzamos oldalegyeneseinek a távolságát nevezzük a trapéz magasságának.

A két háromszög területének összege adja a trapéz területét. Közös törtvonallal írjuk és kiemeljük az m-et, így kapjuk a trapéz területképletét:

$$t = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2} = \frac{(a + c) \cdot m}{2}.$$

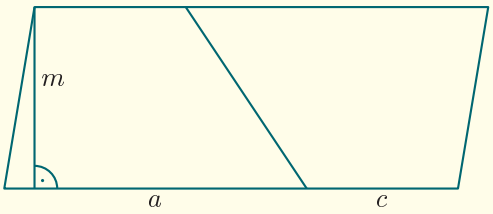
A trapéz területét úgy számítjuk ki, hogy a két párhuzamos oldalának az összegét megszorozzuk a trapéz magasságával, majd osztjuk kettővel.

Megjegyzés

Gondolkodhatunk ettől eltérő módon is! A trapéz egyik szárának felezőpontjára tükrözve a trapézt, egy $a + c$ oldalú m magasságú paralelogrammát kapunk.

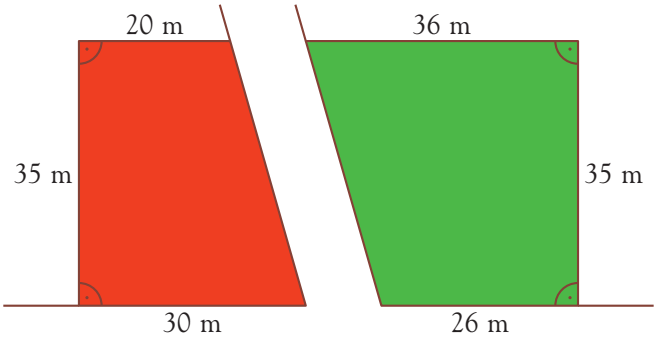
A középpontos tükrözés egybevágóság, ezért az eredeti és a képként kapott trapéz egyenlő területű. Vagyis a paralelogramma területének a felét kell vennünk, ha a trapéz területét szeretnénk meghatározni. Vagyis a trapéz területe:

$$t = \frac{(a + c) \cdot m}{2}.$$



1. példa

A mellékelt térképvázlaton két építési telek adatai láthatók. Melyik a nagyobb és mennyivel?



Mindkét telek trapéz alakú. Mindkettőnél a rövidebb szár egyben magasság is.

Az adatok ismeretében kiszámítjuk a területüket.

A piros trapéz területe: $t_1 = \frac{(30 + 20) \cdot 35}{2} = 875\ (\text{m}^2)$.

A zöld trapéz területe: $t_2 = \frac{(26 + 36) \cdot 35}{2} = 1085\ (\text{m}^2)$.

A nagyobb mennyiségből vonjuk ki a kisebbet: $1085 - 875 = 210\ (\text{m}^2)$.

Vagyis a térképvázlaton zölddel színezett telek 210 m^2-rel nagyobb, mint a pirossal színezett telek.

2. példa

Az $ABCDEF$ hatszög csúcsai koordináta-rendszerben adottak: $A(1;0)$, $B(10;0)$, $C(10;4)$, $D(6;6)$, $E(4;5)$, $F(1;7)$. Számítsuk ki a hatszög területét! (A rácsnégyzetek oldalhosszát válasszuk hosszúságegységnek.)

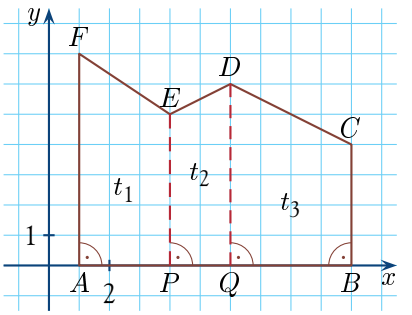
Az adatok alapján elkészítjük az ábrát.

Az E és a D pontokból merőlegest állítunk az x tengelyre. Ezek az egyenesek három derékszögű trapézra vágják az eredeti hatszöget.

A trapézok párhuzamos oldalainak hosszát és a párhuzamos oldalaik távolságát (vagyis a magasságaik hosszát) az ábráról leolvassuk.

A párhuzamos oldalak hossza: $AF = 7$, $PE = 5$, $QD = 6$, $BC = 4$.

A magasságok hossza: $AP = 3$, $PQ = 2$, $QB = 4$.



Így a területeket a tanult területképlettel kiszámoljuk:

$$t_1 = \frac{(7+5)\cdot 3}{2} = 18,$$

$$t_2 = \frac{(5+6)\cdot 2}{2} = 11,$$

$$t_3 = \frac{(6+4)\cdot 4}{2} = 20.$$

Vagyis az $ABCDEF$ hatszög területe: $t = t_1 + t_2 + t_3 = 18 + 11 + 20 = 49$.

Feladatok

A1 Melyek igazak a következő állítások közül?

a) A trapézt az egyik átlója két háromszögre vágja.

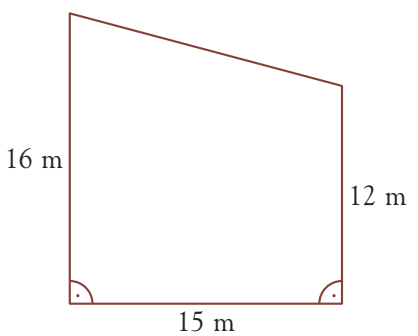
b) A trapéz szemközti oldalegyeneseinek távolságát nevezzük a trapéz magasságának.

c) A trapéz területét úgy számíthatjuk ki, hogy a két párhuzamos oldalának az összegét megszorozzuk a trapéz magasságával.

d) Van olyan trapéz, amelynek a területét két oldal ismeretében is ki lehet számítani.

K2 Két párhuzamos egyenes közé eső sávba rajzolj egyenlő területű trapézokat!

K3 A ház egyik fala trapéz alakú. Mennyi habarcsra lesz szükség a vakolásához, ha m^2-enként 36 kg anyagot használnak? Az adatok az ábráról leolvashatók!



K4 Egy trapéz alakú szántó párhuzamos oldalai 450 m és 425 m, a párhuzamos oldalak távolsága 82 m. Mekkora a területe?

K5 A következő trapézok csúcsait koordináta-rendszerben adtuk meg. Számítsd ki a trapézok területét! (A rácsnégyzetek oldalhosszát válaszd hosszúságegységnek.)

a) $A(1;0)$, $B(9;0)$, $C(9;6)$, $D(1;9)$;

b) $A(1;2)$, $B(5;-2)$, $C(5;2)$, $D(1;4)$;

c) $A(-1;-1)$, $B(6;-1)$, $C(-2;4)$, $D(-4;4)$;

d) $A(-4;-1)$, $B(2;5)$, $C(-2;5)$, $D(-4;3)$;

e) $A(-1;-1)$, $B(3;1)$, $C(4;4)$, $D(2;3)$;

f) $A(-2;2)$, $B(5;1)$, $C(11;3)$, $D(1;3)$.

E6 A következő sokszögek csúcsait koordináta-rendszerben adtuk meg. Számítsd ki a sokszögek területét! (A rácsnégyzetek oldalhosszát válaszd hosszúságegységnek.)

a) $A(1;0)$, $B(4;-1)$, $C(9;0)$, $D(9;6)$, $E(1;9)$;

b) $A(1;0)$, $B(6;1)$, $C(9;0)$, $D(9;6)$, $E(1;9)$;

c) $A(-1;-1)$, $B(1;-2)$, $C(3;-2)$, $D(6;-1)$, $E(-2;4)$, $F(-4;4)$.

K7 Egy trapéz egyik párhuzamos oldala 15 cm, magassága 8 cm, területe 96 cm^2. Mekkora a másik párhuzamos oldal?

Szögpárok

1. példa

Szerkesszük meg egy α szög középpontosan szimmetrikus képét, ha az O középpont

a) illeszkedik a szög K csúcsára;

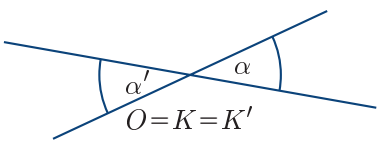
b) illeszkedik a szög egyik szárára;

c) nem illeszkedik a szög egyik szárára sem!

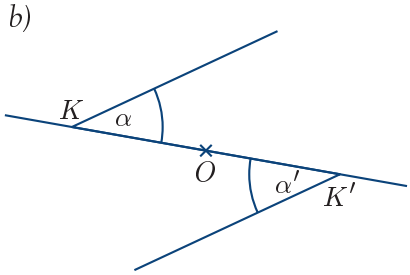
Szög középpontosan szimmetrikus képét úgy kapjuk, hogy megszerkesztjük a szög csúcsának a középpontra vonatkozó képét, majd ebből a középpontból kiindulva ellenkező irányú párhuzamosokat húzunk az eredeti szög száraival.

Ezt figyelembe véve a következő ábrákat kapjuk:

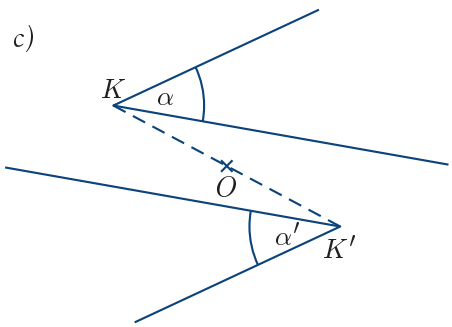
a)



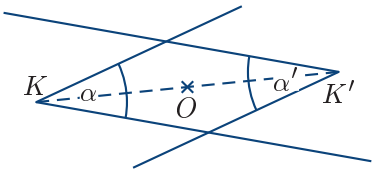
b)



c)



vagy



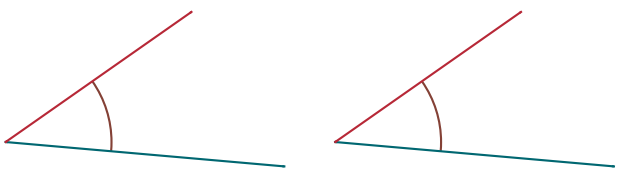
A középpontosan szimmetrikus szögek szárai párhuzamosak, páronként ellenkező irányúak. Az előző években az ilyen szögpárokat már elneveztük, ezek a **váltószögek**. A váltószögek egyenlők egymással. A váltószögek között középpontosan szimmetrikus kapcsolat van.

Ha két váltószögnek egybeesik a csúcsa, akkor **csúcsszög** a nevük.

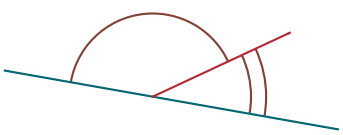
A váltószögeket **fordított állású szögeknek** is nevezhetjük.

Fontos tudnivaló

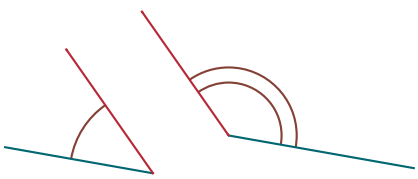
Egy szögpárt egyállásúnak nevezünk, ha a szögszárak páronként párhuzamosak és a szárak iránya páronként megegyezik. Az egyállású szögek is egyenlők.



Rajzolhatunk két szöget úgy, hogy száraik páronként párhuzamosak, és az egyik pár iránya megegyezik, a másik pár iránya ellentétes. Ezek a szögpárok a **kiegészítő szögek. Mellékszögek** azok a kiegészítő szögek, amelyeknek egy-egy szára közös, a másik száraik pedig egy egyenesbe esnek. **Társszögek** azok a kiegészítő szögek, amelyek nem mellékszögek.



mellékszögek



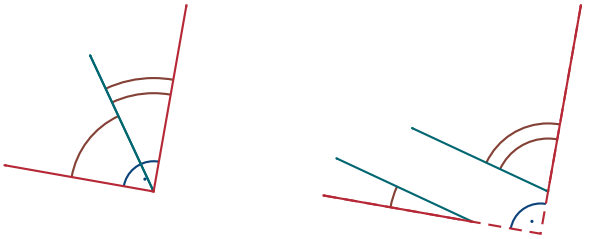
társszögek

kiegészítő szögek

Fontos tudnivaló

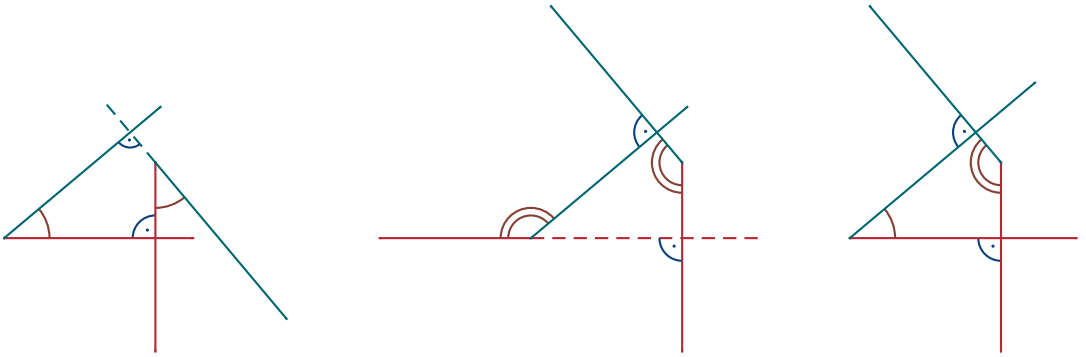
A kiegészítő szögpárok összege 180°.

Azokat a szögpárokat, amelyeknél a száraik közül az egyik pár merőleges, a másik pár párhuzamos (vagy egybeesik), **pótszögeknek** nevezzük.



A pótszögek összege 90°.

Merőleges szárú szögek azok a szögpárok, amelyeknél páronként merőlegesek a szárak.



Bebizonyítható, hogy a merőleges szárú szögek vagy egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást.

Megjegyzés

Tágabb értelemben kiegészítő szögpárnak nevezzük azt a két szöget, amelyek összege 180°, illetve pótszögnek nevezzük azt a két szöget, amelyek összege 90°. Ilyen értelemben például két merőleges szárú szög lehet kiegészítő szögpár is.

Feladatok

A1 Rajzolj egy váltószögpárt! Szerkeszd meg annak a középpontos tükrözésnek a középpontját, amely az egyik szöget a másikba viszi!

A2 Keresd az igaz állításokat!

a) Ha két váltószögnek egybeesik a csúcsa, akkor csúcsszög a nevük.

b) A kiegészítő szögpárok összege 180°.

c) A pótszögek összege 100°.

d) A merőleges szárú szögek egyenlők egymással.

K3 Rajzolj két egymást metsző egyenest, és jelölj egy rajtuk kívül fekvő P pontot! Szerkessz a P ponton át a két egyenessel párhuzamos egyenest! Keress az ábrán csúcsszögeket, váltószöget, egyállású szöget!

K4 Egy szög 4-szerese egyenlő a kiegészítő szögével. Hány fokos ez a szög?

K5 Egy szög 5-szöröse egyenlő a pótszögével. Hány fokos ez a szög?

K6 A következő szögek közül válassz

a) pótszögeket; *b)* kiegészítő szögeket!

45° 28′; 45° 32′; 134° 32′; 54° 32′; 35° 28′; 144° 32′.

A kör kerülete

Fontos tudnivaló

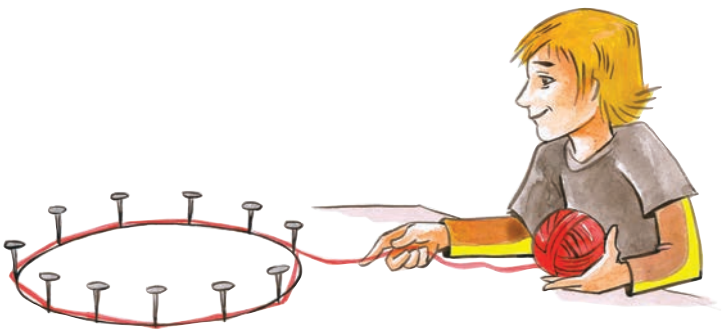
Kör: adott ponttól adott távolságra lévő pontok összessége a síkban.

A sokszögek kerületét könnyen kiszámíthatjuk. Az oldalak hosszát megmérjük, majd ezeket összeadjuk. A kör kerületének meghatározásánál így nem járhatunk el.

A körvonalra fektethetünk cérnát. A cérna hossza a kör kerületét adja, Ez egy gyakorlati módszer a kör kerületének megmérésére. Szeretnénk egy olyan matematikai módszert, egy képletet találni, amellyel a kör kerületét kiszámíthatjuk.

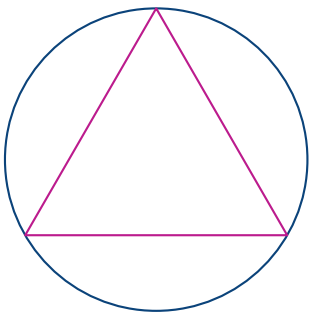
Ha a körvonalra szögeket szúrunk, és a körvonal mentén így feszítjük ki a cérnát, akkor a mérés könnyebben megvalósítható. Azt azonban látnunk kell, hogy így a kör kerületénél a cérna hossza valamennyivel mindig kisebb lesz.



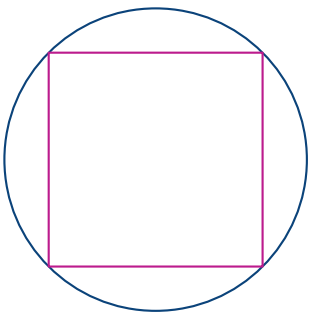


1. példa

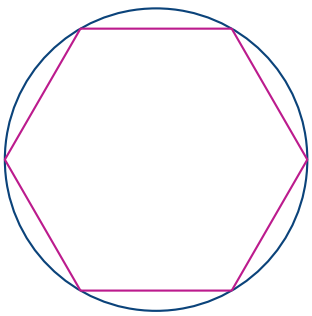
2 cm sugarú körbe szabályos sokszögeket rajzoltunk. Határozzuk meg méréssel a sokszögek kerületét!



$k_3 \approx 10{,}5$ cm;



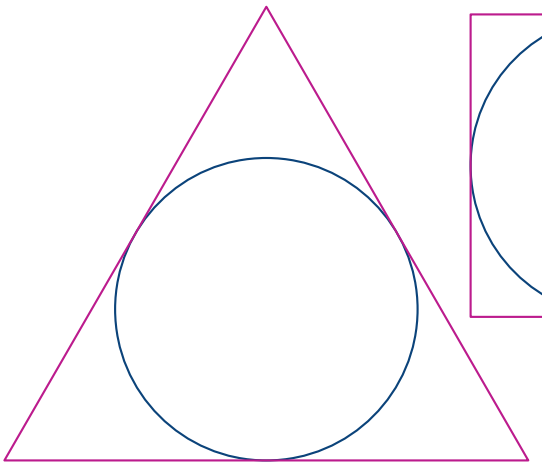
$k_4 \approx 11{,}2$ cm;



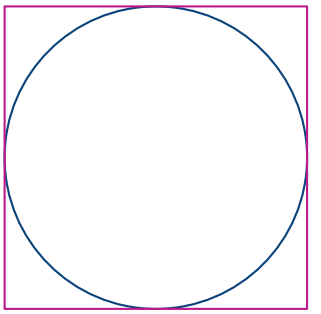
$k_6 = 12$ cm.

2. példa

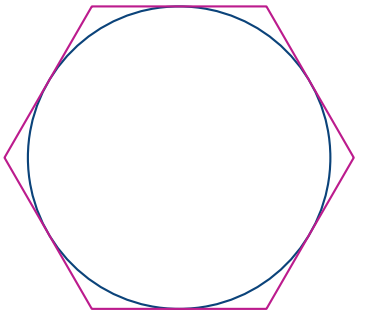
2 cm sugarú kör köré szabályos sokszögeket rajzoltunk. Határozzuk meg méréssel a sokszögek kerületét!



$K_3 \approx 20{,}7$ cm;



$K_4 = 16$ cm;

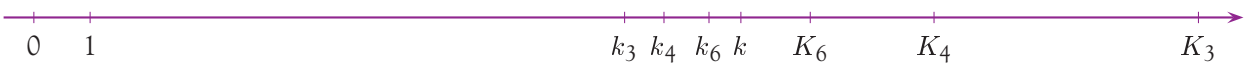


$K_6 \approx 13{,}8$ cm.

3. példa

Az előző példák mérései alapján adjunk becslést a kör kerületére!

Jelölje a kör kerületét k! Vagyis: $k_3 < k < K_3$, $k_4 < k < K_4$, $k_6 < k < K_6$, ...



Látható, hogy minél több oldala van a vizsgált sokszögnek, annál pontosabban közelíti a kerülete a kör kerületét. A kör kerülete nagyobb a beírt sokszögek bármelyikének a kerületénél, és kisebb mindegyik köré írt sokszög kerületénél.

A kör kerülete körülbelül az átmérő 3-szorosa.

Azt a számot, ami pontosan megadja, hogy a kör kerülete a kör átmérőjének hányszorosa, π-vel jelöljük.

A π tizedesjegyei nem ismétlődnek, néhány jegye a következő: $\pi \approx 3{,}14159265...$. Számítógéppel már nagyon nagy pontossággal meghatározható a π értéke.

Fontos tudnivaló

A kör kerülete: $k = d\pi = 2r\pi$, ahol d a kör átmérőjének a hosszát, r a kör sugarának a hosszát jelöli.

4. példa

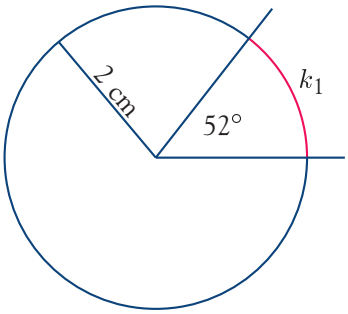
Rajzoltunk egy 6 cm sugarú kört a füzetünkbe. Mekkora a rajzolt vonal hosszúsága?

A kör kerületét kell kiszámítanunk. $k = 2r\pi = 2 \cdot 6 \cdot \pi = 12\pi \approx 37{,}7$ cm. Vagyis körülbelül 37,7 cm-es a rajzolt vonal hosszúsága.

5. példa

Rajzoljunk egy 2 cm sugarú kört! A kör középpontja legyen egy 52°-os szög csúcsa! A körvonal milyen hosszúságú köríve esik a szögtartományba?

Megfigyelhető, hogy a körív hossza a szög nagyságával egyenesen arányos. Ezért a körív hosszát a kör kerületének ismeretében már meg tudjuk határozni.



A kör kerülete: $k = 2r\pi = 2 \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi$.

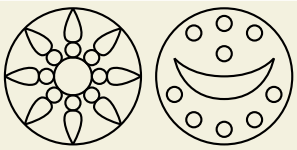
A körív hosszát k_1-gyel jelöltük. Ekkor $\frac{k_1}{4\pi} = \frac{52°}{360°}$.

Vagyis: $k_1 = 4\pi \cdot \frac{52°}{360°} \approx 1{,}82$.

Tehát körülbelül 1,82 cm hosszú körív esik a szögtartományba.

A π a kör kerülete és átmérője közötti arányt jelenti. Jelölésére – *Euler* 1739-ben tett javaslata alapján – a periféria (kerület) görög szó kezdőbetűjét, a görög π betűt használjuk.

Az egyiptomi *Rhind-papirusz* (Kr. e. 2000–1700) utasításaiból kiderül, hogy a π-t $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}$-nek vették, azaz közelítőleg 3,16-nak. Láthatóan a 8 és a 9 fontos szerepet játszott a π közelítésében. Érdekességként megemlítjük, hogy a Szent Korona díszítésénél is fontos szerepet kap ez a két szám. Most csak egy példát említünk: a Nap ábrázolásánál 8, a Hold ábrázolásánál 9 azonos méretű kis kört látunk.



Nap és Hold ábrázolása a Szent Korona Pantokrátor képén

Mezopotámiában a π közelítésére a 3, illetve a $\frac{25}{8}$ volt ismert.

A Bibliában is a 3 közelítő értékre tett utalást találunk (Királyok első könyve 7.23.).

Indiában kb. Kr. e. 500-ban ezt a kifejezést adták π közelítésére: $4\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2$.

Találtak olyan indiai műveket is, amelyek π^2-et 10-nek vették.

A kínaiak is nagyon sokféle közelítést használtak. Kr. e. III–I. századokból például a következőket ismerjük: 3, $\frac{92}{29}$, $\frac{142}{45}$, ...

A III. században *Cu Csung-cse* 12 288 és 24 576 oldalú szabályos sokszögeket használt számításaihoz. Így kapta a $3{,}141\,592\,6 < \pi < 3{,}141\,592\,7$ becslést.

Ludolph van Ceulen (1540–1610) holland matematikus 35 tizedesjegyig számította ki π értékét. Ezért nevezik sokan még ma is Ludolph-féle számnak a π-t.

John Wallis (1616–1703) skót matematikus szerint: $\pi = 2 \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots\right)$.

Napjainkban számítógépekkel a π sok-sok ezer jegyét kiszámították.

Még részletesebben olvashatunk a π-ről Sain Márton *Matematikatörténeti ABC* című könyvében. Kereshetünk további érdekességeket a világhálón is.

Játékos kedvű emberek a π számjegyeinek megjegyzésére olyan mondatokat találtak ki, amelyekben a szavak betűinek száma éppen a π számjegyeit adja. Például:

EZT	A	SORT	A	PÍRŐL	JEGYEZTÜK	LE
3	1	4	1	5	9	2

Feladatok

A1 Számítsd ki a kör kerületét, ha a sugara:

a) 2 cm; *b)* 12 mm; *c)* $\frac{1}{2}$ dm; *d)* $\frac{3}{4}$ m!

A2 Számítsd ki a kör sugarát századcm pontossággal, ha a kerülete:

a) 15,7 cm; *b)* 44 cm; *c)* 3,14 dm; *d)* 0,88 m!

A3 Egy 12 méter sugarú kör alakú medence szélén egyszer körbesétálunk. Hány méteres utat teszünk meg ekkor?

A4 A hegyről sebesen lefutó Séd patak hajtja Örvényesen a Nemzeti Kulturális Örökség részeként nyilvántartott vízimalom kerekét. A malomkerék küllőjének hossza 2 méter. Mekkora a vízimalom kerekének kerülete?

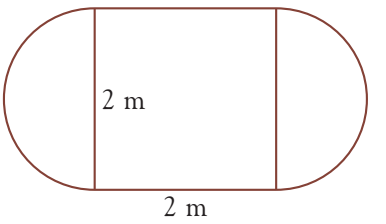


K5 Hányat fordul a személygépkocsi 28 cm sugarú kereke egy 1 km-es úton?

K6 Az Egyenlítő körülbelül 40 000 km hosszú. Mekkora a Föld sugarának hossza?

K7 Ágnes egy 8 cm sugarú, Kamilla pedig két darab 4 cm sugarú kört vág ki kartonpapírból ollóval. Ha egyszerre kezdték és egyforma sebességgel vágnak, akkor ki lesz kész gyorsabban a munkával?

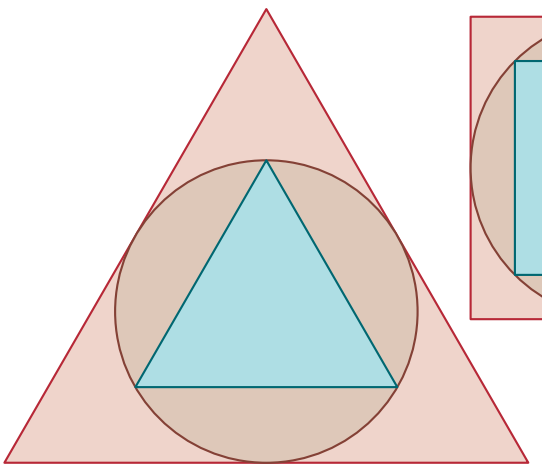
K8 Az ábrán látható járdasziget elkészítéséhez hány méter szegélyt kell kialakítani? (A sziget egy négyzetből és két félkörből áll.)

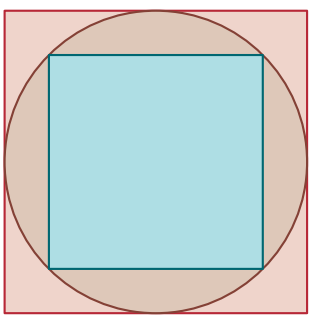


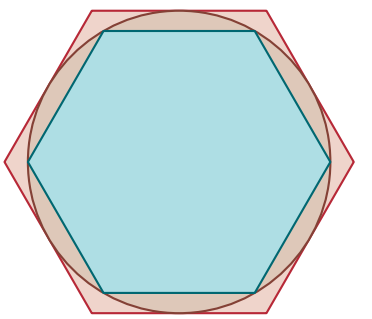
8. A kör területe

A sokszögek területét meghatározhatjuk, ha azokat háromszögekre vágjuk. A számunkra fontos szakaszok hosszát megmérjük, kiszámítjuk a háromszögek területét, majd az így kapott mérőszámokat összeadjuk. A kör területe így nem határozható meg, mert a kört nem tudjuk szétvágni háromszögekre.

A kör területét is a beírt és a köré írt szabályos sokszögek területével fogjuk közelíteni.







Az ábrán jól látható, hogy a 2 cm sugarú kör területe nagyobb mindegyik beírt sokszög területénél, és kisebb minden köré írt sokszög területénél.

A kör területe a sugár négyzetének körülbelül 3-szorosa.

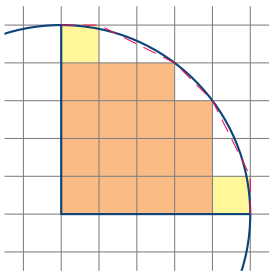
A következő táblázatban megadjuk a 2 cm sugarú kör beírt és köré írt szabályos sokszögeinek területét.

	beírt	köré írt
háromszög	$t_3 \approx 5{,}2\ \text{cm}^2$	$T_3 \approx 20{,}8\ \text{cm}^2$
négyszög	$t_4 = 8\ \text{cm}^2$	$T_4 = 16\ \text{cm}^2$
hatszög	$t_6 \approx 10{,}4\ \text{cm}^2$	$T_6 \approx 13{,}9\ \text{cm}^2$

1. példa

Rajzoljunk a négyzethálóra egy kört! A kör középpontja két rácsvonal metszéspontjában legyen (vagyis rácspontban), a sugara pedig legyen 5 egység! Tekintsük egységnek két szomszédos rácsvonal távolságát! Számoljuk meg, hogy hány darab kis négyzet fér el a körlapon! Becsüljük meg szemmértékkel azt is, hogy a töredékekből hány darab kis négyzet rakható össze!

Mennyinek becsüljük így a kör területét? Ez a szám milyen viszonyban van a sugár négyzetével?



A kör negyedében elég elvégeznünk az összeszámlálást, aztán a kapott értéket megszorozzuk 4-gyel.

Kiszíneztük (narancssárgával) a körlapon egészben szereplő négyzeteket. Ilyenből 15 darab van.

Van még kettő, amelyik majdnem egész (sárga), és ezekhez adjuk hozzá a többi darabot is. Ez körülbelül 4,5-nek látszik.

Így a negyedkör területe 19,5, vagyis az egész köré 78 kis négyzetnyi. A sugár négyzete 25. Vagyis a kör területe a sugár négyzetének körülbelül a 3,1-szerese lett.

Fontos tudnivaló

A kör területe π-szerese a sugár négyzetének, azaz: $t = r^2\pi$.

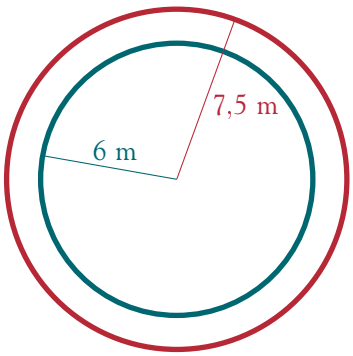
2. példa

Egy tér 5 m sugarú kör alakú középső részét virággal szeretnénk beültetni, de előtte fel kell ásni a földet. Mekkora a felásandó terület?

Az 5 m sugarú kör területét kell kiszámítani. $t = r^2\pi = 25 \cdot \pi \approx 78{,}5\ \text{m}^2$. Vagyis körülbelül 78,5 m^2 a felásandó terület.

3. példa

Egy szökőkút medencéje kör alakú. A medence átmérője 12 méter. A szökőkút körül 1,5 méter széles díszburkolatot szeretnének készíttetni. Hány m^2 lesz ez a burkolat?



Készítsünk ábrát! A medence sugara 6 méter, a burkolat külső szegélye pedig 7,5 méter sugarú körvonal lesz.

A nagy kör belsejének azt a részét kell lebetonozni, ami a kis körön kívül van. Vagyis a nagy kör területéből vonjuk le a kis kör területét.

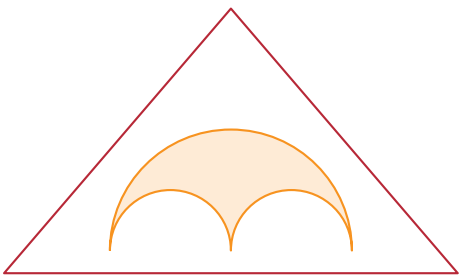
$$T = t_{\text{nagy}} - t_{\text{kis}} = 7{,}5^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \pi = 56{,}25 \cdot \pi - 36 \cdot \pi = 20{,}25 \cdot \pi \approx 63{,}62\ (\text{m}^2).$$

Természetesen ilyen építési munkáknál az anyagot nem fogják századpontossággal szállítani. Valószínűleg 65 m^2-re kerekítve számítják ki és fuvarozzák a helyszínre a szükséges burkolóanyagot.

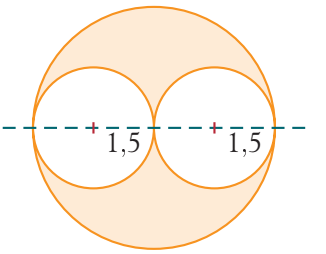
4. példa

Egy ház homlokzatára az ábrán látható mintát tervezték. A nagy félkör sugara és a kis félkörök átmérője 3 méter. Hány négyzetméteren lesz majd látható a színes vakolat?

Rajzoljuk meg a mintában szereplő félkörök másik felét is!



Az így kapott színezett rész területét ki tudjuk számítani: a 3 méteres sugarú kör területéből elvesszük a két 3 méteres átmérőjű kör területét. Mivel ennek az ábrának van egy vízszintes szimmetriatengelye, ezért az eredeti minta területe ennek a színezett területnek a fele lesz.

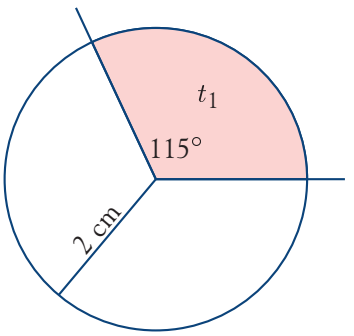


$$T = \frac{3^2 \cdot \pi - 2 \cdot 1{,}5^2 \cdot \pi}{2} = \frac{9 \cdot \pi - 4{,}5 \cdot \pi}{2} = 2{,}25 \cdot \pi \approx 7{,}1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vagyis 7,1 m^2-re kerekíthettük a ház homlokzatára tervezett minta területét.

5. példa

Rajzoljunk egy 3 cm sugarú kört! A kör középpontja legyen egy 115°-os szög csúcsa. A körlap mekkora területű körcikke esik a szögtartományba?



Megfigyelhető, hogy a körcikk területe – a körív hosszához hasonlóan – egyenesen arányos a szög nagyságával. Ezért a körcikk területét a kör területének ismeretében meg tudjuk határozni.

A kör területe: $t = r^2\pi = 3^2 \cdot \pi = 9\pi$.

A körcikk területét t_1-gyel jelöltük. Ekkor $\frac{t_1}{9\pi} = \frac{115°}{360°}$.

Vagyis $t_1 = 9\pi \cdot \frac{115°}{360°} \approx 9{,}03$.

Tehát körülbelül 9,03 cm^2 területű a körcikk szögtartományba eső része.

8.

Feladatok

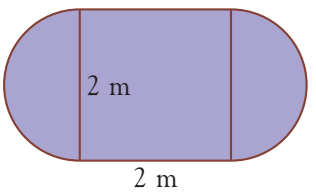
K1 Számítsd ki a kör területét, ha a sugara

a) 3 cm; *b)* 21 mm; *c)* $\frac{1}{4}$ m; *d)* $\frac{3}{2}$ dm!

K2 Egy kör alakú parkot körbesétálva 250 métert kellett megtennünk. Mekkora területű a park?

K3 Ágnes egy 8 cm sugarú, Kamilla pedig két darab 4 cm sugarú kört színez ki. Ha egyszerre kezdték, és egyforma sebességgel színeznek, akkor ki lesz kész gyorsabban a munkával?

K4 Az ábrán látható járdasziget elkészítéséhez hány négyzetméter burkolatra van szükség? (A sziget egy négyzetből és két félkörből áll.)



K5 Egy 32 cm átmérőjű tortaformában sütöttünk egy tortalapot. A piskóta 8 cm magas lett. Az oldalát kakaós, vagyis barna, a tetejét citromos, vagyis fehér színű krémmel szeretnénk bevonni.

a) Hány cm^2-es részt vonunk be fehérre?

b) Milyen alakú papírral tudnád befedni a torta oldalát?

c) Mekkora területű rész lesz barna a tortán?



K6 A park közepén egy 12 méter átmérőjű kör alakú részt felástak, és füvesíteni szeretnék. A fűmagot tartalmazó dobozokon olvasható tájékoztató szerint 25 m^2-re elegendő a benne lévő fűmag. Hány doboz fűmagra lesz szükség a tájékoztató szerinti felhasználás esetén?

Szerkesztések, bizonyítások

A geometriai ábrák elkészítéséhez vonalzót és körzőt használunk, így rajzaink szebbek lehetnek, mintha szabadkézzel készülnének. A síkbeli alakzatok tengelyes és középpontos tükrözését is el tudtuk végezni vonalzó és körző segítségével. Nagyon sok esetben rajzolunk, az eszközöket pedig segítségként használjuk. Az előző években megtanultuk, hogy szerkesztésről csak akkor beszélünk, ha a vonalzónk egy élét használjuk, továbbá betartjuk a következőket:

Fontos tudnivaló (Az euklideszi szerkesztés lépései)

1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.
2. Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.
4. Két egyenes metszéspontját meghatározhatjuk.
5. Egyenes és kör metszéspontjait meghatározhatjuk.
6. Két kör metszéspontjait meghatározhatjuk.

Az összetett, többlépéses szerkesztések során olyan egyszerű lépéseket használunk, mint a szakasz másolása, szakasz felezése, szög másolása, szög felezése, merőleges szerkesztése adott pontból adott egyenesre.

1. példa

Tervezzük meg, hogy miképpen szerkesztenénk 11°-os szög ismeretében 1°-os szöget!

Az 1°-os szög olyan kicsi, hogy az eszközeinkkel nagyon nehéz lerajzolni. A feladat szövege nem is kéri a kivitelezést, csak a terv elkészítését.

Mivel szöget tudunk másolni, ezért a 11°-os szög többszöröseit meg tudjuk szerkeszteni: 11°, 22°, 33°, 44°, 55°, 66°, ...

Mivel 90°-os szöget tudunk szerkeszteni, ezért szögfelezéssel a 45°-os szöget is létre tudjuk hozni.

Ha a 45°-os szögre rámásoljuk a 44°-os szöget, akkor különbségként adódik az 1°-os szög.

Megjegyzés

Természetesen ettől eltérő módon is gondolkodhatunk. Tervezhetjük megoldásunkat például a következő módon: a 60°-os szöget meg tudjuk szerkeszteni, szögmásolással megkapjuk a 120°-os szöget. Ha a 11°-os szöget 11-szer egymás mellé másoljuk, akkor 121°-os szöget kapunk. Ha erre a 121°-os szögre rámásoljuk a 120°-os szöget, akkor különbségként adódik az 1°-os szög.

2. példa

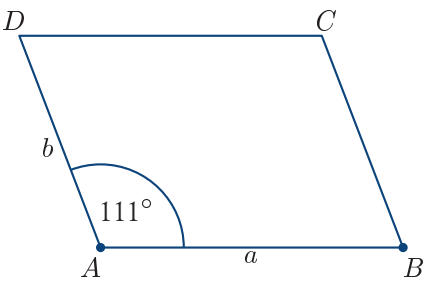
Adott egy a és egy b hosszúságú szakasz, továbbá egy 48°-os szög. Szerkesszünk az a és b oldalakkal olyan paralelogrammát, amelynek van 111°-os szöge!

Hogyan tudnánk a 48° és a nevezetes szögek segítségével előállítani a 111°-os szöget?

A 135° szerkeszthető, hiszen 90° + 45° = 135°. Ha ebből elvesszük a 48° felét, a 24°-ot, akkor megkapjuk a kívánt 111°-ot. (Ezeket a szerkesztési lépéseket most nem részletezzük.)

Másként: $111° = 2 \cdot 48° + 15° = 2 \cdot 48° + \frac{60°}{4}$. Vagyis a rendelkezésünkre álló adatok: a, b, $111°$.

Vázlat:



A szerkesztés menete:

A vázlatrajzon tömött karikákkal jelöltük az A és a B pontokat. Ez azt jelenti, hogy a szerkesztést az AB szakasszal kezdjük. Felvesszük az A kezdőpontú félegyenest. Az a hosszúságú szakaszt körzőnyílásba vesszük, majd rámásolva a félegyenesre megkapjuk a B pontot.

Az AB egyenesre az A pontba másoljuk a $111°$-os szöget, amelynek a szárára illeszkedik a D pont.

Megszerkesztjük az A középpontú b sugarú kört, erre is illeszkedik a D pont.

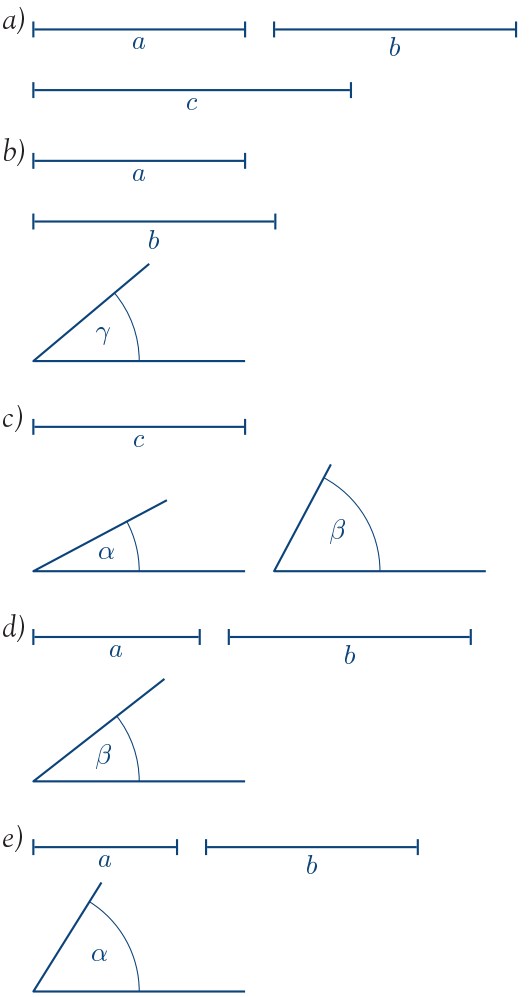
Vagyis a D pont megszerkesztett, mert két vonal metszéspontjaként áll elő.

A B középpontú b sugarú, és a D középpontú a sugarú körök metszéspontja a C.

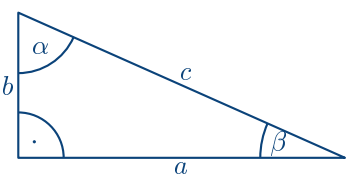
A leírtak alapján a szerkesztés kivitelezhető.

Feladatok

A1 Szerkessz háromszöget a következő adatokból! (A szokásos jelöléseket használtuk.)



A2 Szerkessz derékszögű háromszöget a következő adatokból! A mellékelt ábra jelöléseit használtuk az adatok megadásakor.



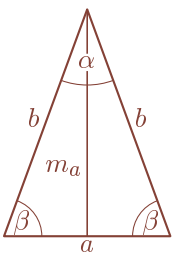
a) $a = 5$ cm, $b = 2$ cm;

b) $a = 4$ cm, $c = 4{,}5$ cm;

c) $a = 5$ cm, $\beta = 30°$;

d) $b = 4$ cm, $\beta = 60°$.

A3 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget a következő adatokból! A mellékelt ábra jelöléseit használtuk az adatok megadásakor.



a) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm;

b) $a = 4$ cm, $m_a = 6$ cm;

c) $a = 5$ cm, $\beta = 75°$;

d) $b = 3$ cm, $\beta = 15°$.

K4 Szerkessz háromszöget, amelynek egyik oldala 5 cm, a hozzá tartozó magassága 6 cm, az oldalon fekvő egyik szög 60°!

K5 Szerkessz háromszöget, amelynek két oldala 6 cm és 5 cm, a 6 cm-es oldalhoz tartozó magassága 4 cm!

K6 Szerkessz paralelogrammát, amelynek oldalai 5 cm és 3,5 cm hosszúak, a rövidebb oldalhoz tartozó magassága 4 cm!

K7 Szerkessz paralelogrammát, amelynek az egyik oldala 5 cm, a hosszabbik átlója 7 cm, az átló és az oldal által bezárt szög 30°!

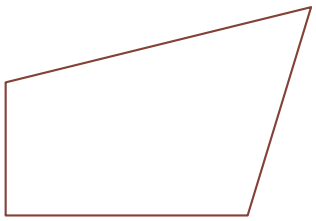
K8 *a)* Szerkessz rombuszt 3 cm-es oldalakkal, 135°-os szöggel!

b) A rövidebb átló két háromszögre vágja a megszerkesztett rombuszt. Mekkorák az így kapott háromszög szögei?

c) A hosszabb átló két háromszögre vágja a megszerkesztett rombuszt. Mekkorák az így kapott háromszög szögei?

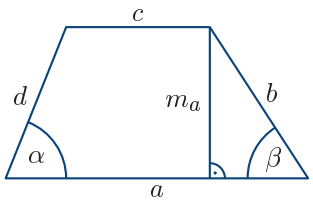
K9 Szerkessz paralelogrammát, amelynek az egyik oldala 5 cm hosszú, a szimmetria-középpontja az adott oldal két végpontjától 3 cm és 3,5 cm távolságra található!

K10 Másold át a füzetedbe a következő négyszöget! Csak a szerkesztés megengedett lépéseit használd!



K11 Szerkessz háromszöget, ha két oldala 3,5 cm és 5 cm, továbbá az adott hosszúságú oldalakkal szemközti szögek összege 150°!

K12 Szerkessz trapézt! A mellékelt ábra jelöléseit használtuk az adatok megadásakor.



a) $a = 7$ cm, $m_a = 4$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$;

b) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 3$ cm, $\beta = 45°$.

8.

Háromszögekkel kapcsolatos fogalmak, tételek I.

A háromszögeket osztályozhatjuk szögeik és oldalaik szerint.

Szögeik szerint osztályozva lehetnek **hegyesszögű**, **tompaszögű** és **derékszögű** háromszögek.

Oldalaik szerint osztályozva lehetnek különböző oldalhosszúságú háromszögek, **egyenlő szárú** háromszögek és **egyenlő oldalú** háromszögek.

Fontos tudnivaló

A háromszög két oldalának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal.

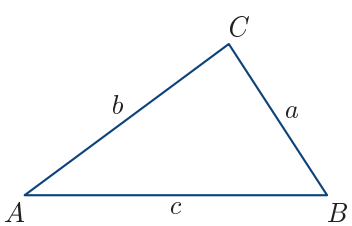
Két pontot ugyanis összeköthetünk egyenes vonallal és nem egyenes (görbe, törött) vonallal is. Az összekötő vonalak közül az egyenes vonal a legrövidebb.

A rajz jelöléseit használva:

$BC + AC > AB$, azaz $a + b > c$,

$BC + AB > AC$, azaz $a + c > b$,

$AC + AB > BC$, azaz $b + c > a$.



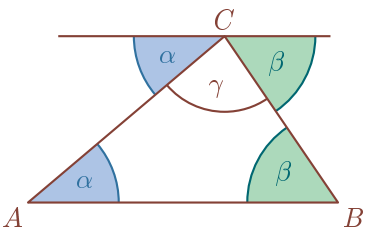
Fontos tudnivaló

A háromszög belső szögeinek összege $180°$.

Az állítás igazolásához húzzunk a háromszög egyik csúcsán át a szemben fekvő oldallal párhuzamos egyenest.

Az α és a β váltószögei a C csúcsnál levő szöggel együtt $180°$-os szöget alkotnak.

A rajz jelöléseit használva: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



A jobb oldali ábra mutatja a háromszög külső szögeit:

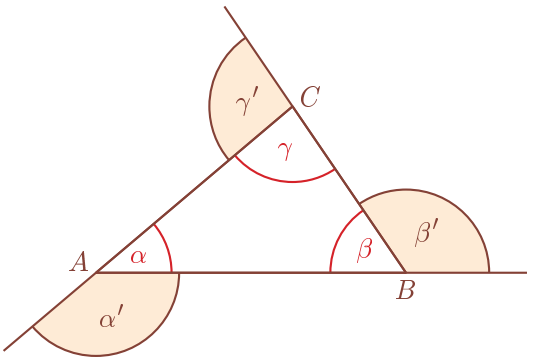
A háromszög bármely belső szögének és a mellette fekvő külső szögének az összege $180°$.

A rajz jelöléseit használva:

$\alpha + \alpha' = 180°$,

$\beta + \beta' = 180°$,

$\gamma + \gamma' = 180°$.



8.

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ és $\alpha + \alpha' = 180°$, ezért $\alpha' = \beta + \gamma$.
Hasonlóan kapjuk a másik két külső szögre, hogy $\beta' = \alpha + \gamma$,
$\gamma' = \alpha + \beta$.

Ezzel a következő állítást bizonyítottuk:

Fontos tudnivaló

A háromszög egy-egy külső szöge akkora, mint a vele nem szomszédos két belső szög összege.

Adjuk össze a három külső szöget:

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma = 3 \cdot 180° - \alpha - \beta - \gamma = 3 \cdot 180° - 180° = 360°$.

Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást is:

Fontos tudnivaló

A háromszög külső szögeinek összege $360°$.

1. példa

Egy háromszög két belső szöge: $\alpha = 26° \ 32'$ és $\beta = 49° \ 55'$. Határozzuk meg a hiányzó belső és külső szögek nagyságát!

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért $\gamma = 180° - 26° \ 32' - 49° \ 55' = 103° \ 33'$.

Mivel $\alpha + \alpha' = 180°$, ezért $\alpha' = 180° - 26° \ 32' = 153° \ 28'$.

Mivel $\beta + \beta' = 180°$, ezért $\beta' = 180° - 49° \ 55' = 130° \ 5'$.

Mivel $\gamma + \gamma' = 180°$, ezért $\gamma' = 180° - 103° \ 33' = 76° \ 27'$.

Feladatok

A1 Másold át a következő táblázatot a füzetedbe, majd pótold a hiányzó adatokat! (α, β, γ a belső, α', β', γ' a megfelelő külső szögeket jelenti egy háromszögben.)

α	β	γ	α'	β'	γ'
13°		90°			
44°	46°				
			105°	111°	
34° 45′				112°	
				100° 39′	88° 21′

K2 *a)* Melyik háromszögben nagyobb két tetszőleges szög összege a harmadiknál?
b) Melyik háromszögben lehet két szög összege kisebb a harmadiknál?
c) Melyik háromszögben lehet két szög összege egyenlő a harmadikkal?

K3 Egy háromszögben az egymás után következő szögek különbsége 20°. Mekkorák a háromszög külső szögei?

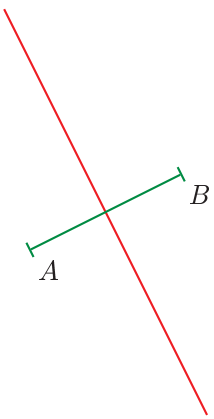
K4 A háromszög legnagyobb szögének a harmada a legkisebb szög. A középső szög nagysága egyenlő a legkisebb szög kétszeresével. Mekkorák a háromszög szögei?

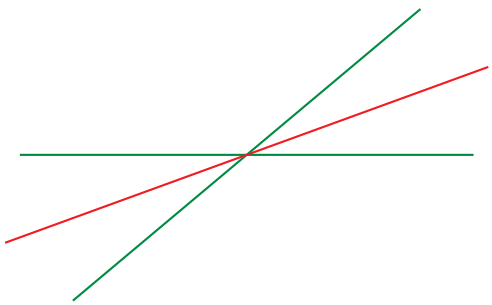
K5 Egy derékszögű háromszög egyik szöge 25° 20′-cel nagyobb egy másik szögénél. Mekkorák a háromszög szögei?

8.

Háromszögekkel kapcsolatos fogalmak, tételek II.

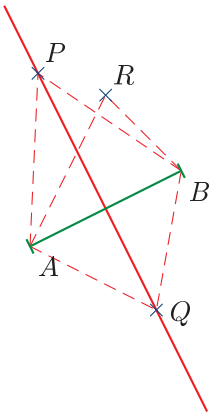
Már eddig is használtuk a **szakaszfelező merőleges** és a **szögfelező** egyenes fogalmát.



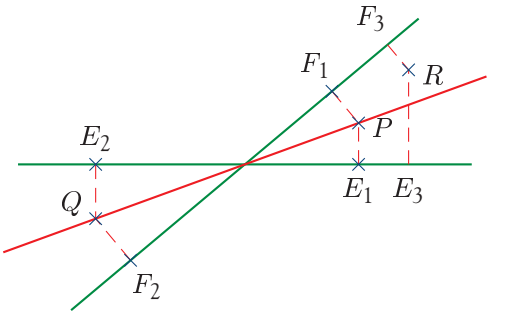


A szakaszfelező merőleges egyenes minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától. Az is belátható, hogy csakis az erre az egyenesre illeszkedő pontokra igaz ez a tulajdonság.

A szögfelező egyenes minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától. Az is belátható, hogy csakis az erre az egyenesre illeszkedő pontokra teljesül ez a tulajdonság.



$PA = PB;\ QA = QB;\ RA \neq RB.$



$PE_1 = PF_1;\ QE_2 = QF_2;\ RE_3 \neq RF_3.$

A háromszöggel kapcsolatban már ismerünk néhány nevezetes vonalat. A továbbiakban összegyűjtjük ezeket, és megvizsgáljuk tulajdonságaikat.

1. példa

Szerkesszük meg a háromszög három oldalának felezőmerőlegesét! Az így kapott egyenesekről mi a sejtésünk?

8.

Az ábrán követhetjük a szerkesztés lépéseit.

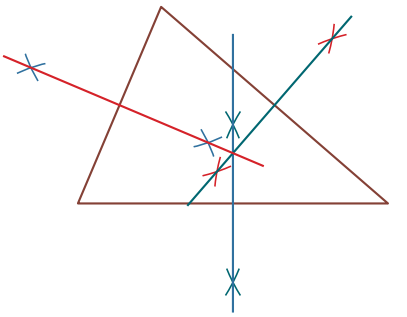
A megszerkesztett ábrák alapján az a sejtésünk, hogy a három oldal felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást.

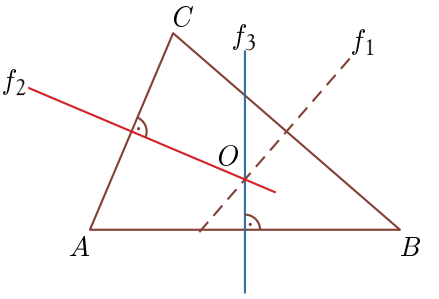
Bizonyítsuk be a sejtésünket!

Rajzoljuk meg két oldal felezőmerőlegesét, a metszéspontjukat nevezzük O-nak.

Tudjuk, hogy csak a szakaszfelező merőleges egyenes pontjai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egyenlő távolságra vannak a szakasz két végpontjától.

Mivel O illeszkedik az f_2-re, ezért $AO = CO$.
Mivel O illeszkedik az f_3-ra, ezért $AO = BO$.
Ebből következik, hogy $BO = CO$.
Vagyis O illeszkedik az f_1-re is, azaz a három egyenes valóban egy pontra illeszkedik.

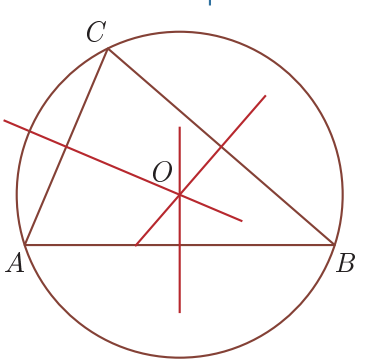




Fontos tudnivaló

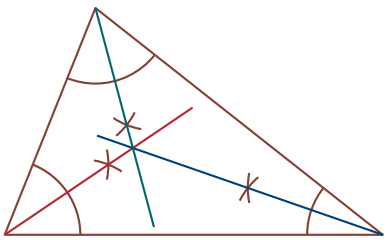
Bebizonyítottuk, hogy **a háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást.**

A bizonyítás során kiderült, hogy $AO = BO = CO$, vagyis van olyan O középpontú kör, amelyre mindhárom csúcs illeszkedik. Ez a kör **a háromszög köré írt köre**. Ez az O pont a háromszög köré írható kör középpontja.



2. példa

Szerkesszük meg a háromszög három belső szögének szögfelezőjét! Az így kapott egyenesekről mi a sejtésünk?



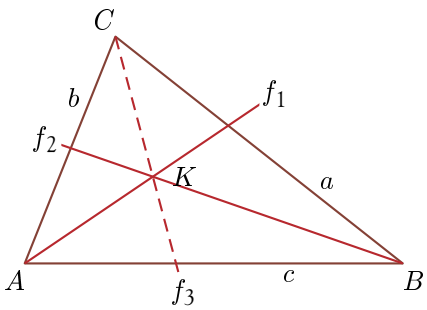
Az ábrán követhetjük a szerkesztés lépéseit!

A megszerkesztett ábrák alapján az a sejtésünk, hogy a három belső szög szögfelező egyenese egy pontban metszi egymást.

Bizonyítsuk be a sejtésünket!

Rajzoljuk meg két belső szög szögfelezőjét, a metszéspontjukat nevezzük K-nak!

Tudjuk, hogy csak a szögfelező egyenes pontjai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egyenlő távolságra vannak a szög két szárától.



Mivel K illeszkedik az f_1-re, ezért K a b és a c egyenestől egyenlő távolságra van.

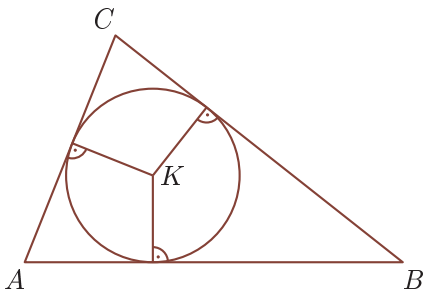
Mivel K illeszkedik az f_2-re, ezért K az a és a c egyenestől egyenlő távolságra van.

Mindezekből következik, hogy a K az a és a b egyenestől is egyenlő távolságra van.

Vagyis K illeszkedik az f_3-ra is, azaz a három egyenes valóban egy pontra illeszkedik.

Fontos tudnivaló

Bebizonyítottuk, hogy **a háromszög három belső szögének szögfelezője egy pontban metszi egymást.**



A bizonyítás során kiderült, hogy a K metszéspont mindhárom oldaltól azonos távolságra található, vagyis van olyan K középpontú kör, amelynek mindhárom oldal az érintője. Ez a kör **a háromszög beírt köre**. Ez a K pont a háromszög beírt körének középpontja.

Feladatok

K1 Szerkessz egyenlő oldalú háromszöget! Szerkeszd meg a köré írt körének középpontját! Mérd meg, hogy milyen messze van a köré írt körének középpontja az oldalaktól és a csúcsoktól! Hasonlítsd össze a mért adatokat! Mit tapasztalsz?

K2 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget! Szerkeszd meg a köré írt és a beírt körének a középpontját!

K3 *a)* Mekkora szöget zár be egymással a háromszög $76°$-os és $42°$-os szögének a szögfelezője?

b) Mekkora szöget zár be egymással a háromszög két szögfelezője, ha tudjuk, hogy a harmadik szög $88°$-os?

E4 Szabályos háromszögben a köré írt kör területe hányszorosa a beírt kör területének?

Háromszögekkel kapcsolatos fogalmak, tételek III.

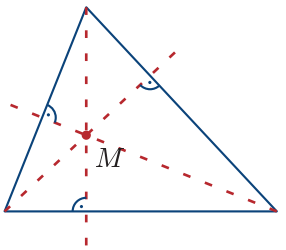
Fontos tudnivaló

A **háromszög magasságvonalát** megkapjuk, ha a csúcsból a szemben fekvő oldalra merőlegest állítunk. A háromszögnek három magasságvonala van.

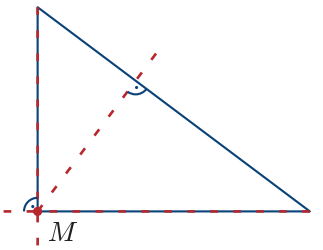
Bebizonyítható, hogy a három magasságvonal egy pontban, a magasságpontban metszi egymást.

Van, amikor a csúcs és a merőleges talppontja által meghatározott egyenest, szakaszt vagy a szakasz hosszát röviden magasságnak mondjuk. Ilyen esetben a szövegkörnyezetből fog kiderülni, hogy mire kell gondolnunk.

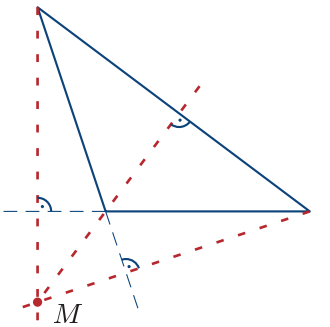
Hegyesszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszög belsejében van.



A derékszögű háromszögnél a három magasság közül kettő egybeesik a befogókkal. A magasságok a derékszög csúcsában metszik egymást.



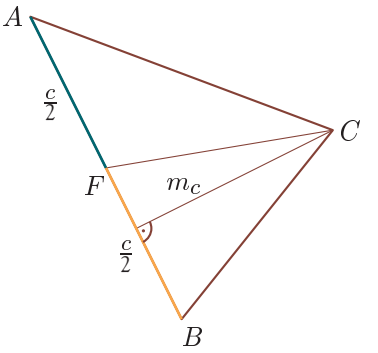
A tompaszögű háromszög esetén a három magasság a háromszögön kívül metszi egymást.



Fontos tudnivaló

A **háromszög súlyvonala** a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes.
Van, amikor csak a két pont által meghatározott szakaszt vagy annak a hosszát nevezzük súlyvonalnak.

A kés élét a súlyvonalra kellene illeszteni, ha egyensúlyozni szeretnénk egy kartonból kivágott háromszöget. A magyarázat: a csúcsra illeszkedő egyenesek közül a súlyvonal felezi a háromszög területét.

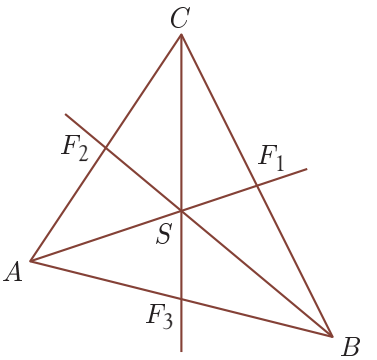


Mivel $t_{AFC} = \frac{\frac{c}{2} \cdot m_c}{2}$, $t_{BFC} = \frac{\frac{c}{2} \cdot m_c}{2}$, ezért a súlyvonal valóban felezi a háromszög területét.

Fontos tudnivaló

Bebizonyítható, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban, a súlypontban metszik egymást.

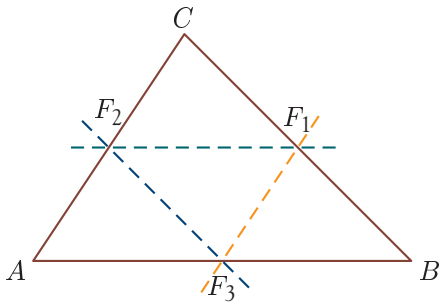
A súlypont a háromszögnek mindig belső pontja.



A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő egyenes a **háromszög középvonala**. Olykor csak a két felezőpont által meghatározott szakaszra vagy annak a hosszára gondolunk, amikor a középvonal elnevezést használjuk.

Fontos tudnivaló

Bebizonyítható, hogy a háromszög középvonala párhuzamos a vele szemközti oldallal, és ennek az oldalnak a fele.



Feladatok

A1 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget! Szerkeszd meg

K2 Egy háromszög középvonalai 4 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. Számítsd ki a háromszög kerületét!

K3 Az ABC háromszög magasságpontja M. Hol van az ABM háromszög magasságpontja?

K4 Mekkora szöget zár be egymással a háromszög $70°$-os és a $40°$-os szögének csúcsából induló két magasság?

K5 Az alábbi állítások közül jelöld (1)-gyel az igazakat, (2)-vel a hamisakat és (x)-szel azokat, amelyek csak különleges háromszög esetén lehetnek igazak!

1. A háromszög magasságvonalai egyenlők.
2. A háromszög magasságvonalai merőlegesek egy oldalegyenesre.
3. A háromszög magasságvonalai felezik a csúcsnál lévő szöget.
4. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.
5. Egyenlő szárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság rövidebb, mint a szár.
6. A magasságpont a háromszög beírható körének a középpontja.
7. A háromszögnek egy magassága van.
8. A háromszögek esetében a magasságpont egybeesik a súlyponttal.
9. A háromszögek magasságvonala egybeesik a szimmetriatengellyel.
10. A háromszögek magasságpontja a csúcsoktól egyenlő távolságra van.
11. A háromszögek magasságainak talppontja az oldalakon van.
12. A háromszög magasságvonalai a háromszögön belül metszik egymást.
13. A háromszög magassága felhasználható a háromszög területének kiszámításához.
14. A háromszög magassága felhasználható a háromszög megszerkesztéséhez.
15. A magasságvonal felezi a háromszög területét.

K6 Egy háromszögbe berajzoltunk egy középvonalat és egy olyan súlyvonalat, amely metszi ezt a középvonalat. A két szakasz négy végpontja milyen négyszöget határoz meg?

Négyszögek

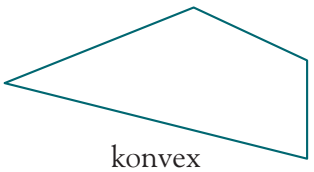
A négyszög olyan sokszög, amelyet négy szakasz határol.

Belső szögeik nagysága alapján a négyszögeket két csoportba sorolhatjuk.

Ha van 180°-nál nagyobb szöge, akkor **konkáv,** egyébként **konvex** négyszögről beszélünk.

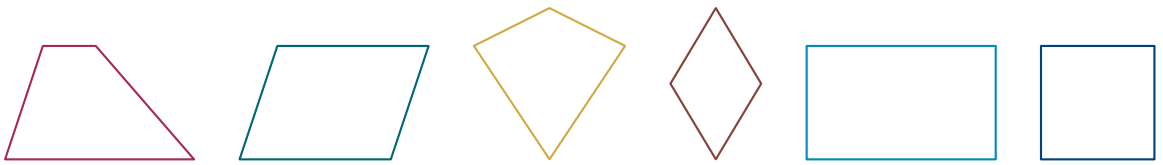


konkáv

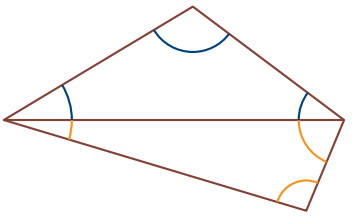


konvex

A négyszögek tulajdonságaik alapján különböző elnevezést kapnak. Már megismerkedtünk azokkal a jellemzőkkel, amelyek alapján egy négyszög a **trapéz**, **paralelogramma**, **deltoid**, **rombusz**, **téglalap**, **négyzet** nevet viselheti.

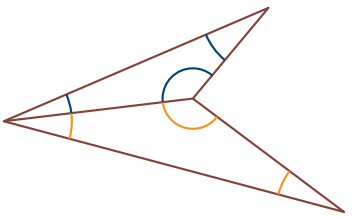


A négyszög nem szomszédos csúcsait átlók kötik össze. Egy átló a konvex négyszöget két háromszögre vágja. A két háromszög belső szögei fedik a négyszög belső szögeit. A négyszög belső szögei is lefedik a háromszög belső szögeit.



Tudjuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°. Ezekből következik, hogy a konvex négyszög belső szögeinek összege 360°.

Konkáv négyszög esetén a megfelelő átló megrajzolása után követhetjük az előző gondolatsort.

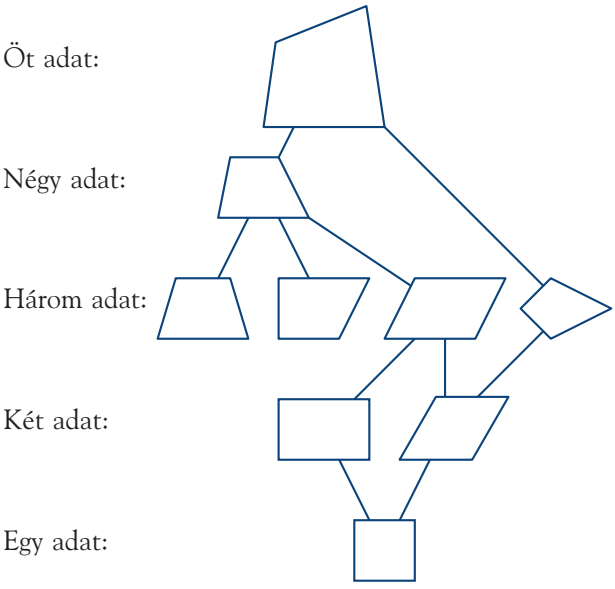


Fontos tudnivaló

A négyszög belső szögeinek összege 360°.

A négyszögek szerkesztésében is segít az, hogy a négyszöget az egyik átlója két háromszögre vágja. **A négyszög szerkesztéséhez általában öt adatot kell ismernünk.**

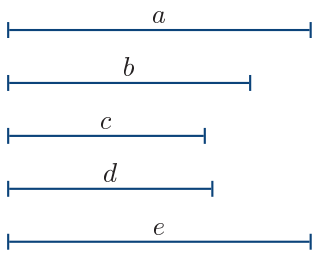
Ha a négyszög rendelkezik valamilyen különleges tulajdonsággal, akkor ötnél kevesebb adat ismerete is elegendő a szerkesztéshez. Az ábrán összefoglaltuk, hogy melyik négyszöghöz hány adat szükséges.



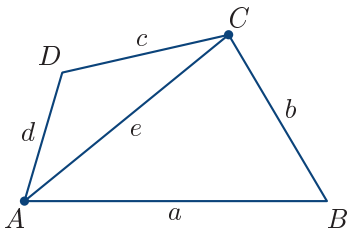
1. példa

Szerkesszünk konvex négyszöget, ha ismerjük négy oldalának és az egyik átlójának a hosszát!

Adatok:



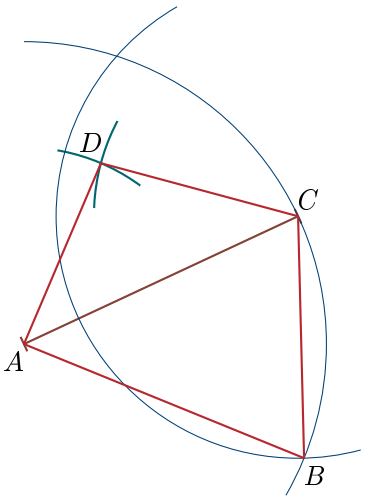
Vázlat:



A vázlatrajz A és C pontját tömör karikával jelöltük, így fejezzük ki, hogy az AC szakasz felvételével kezdjük a szerkesztést.

Az A középpontú a sugarú körre és a C középpontú b sugarú körre is illeszkedik a B pont. A két kört megszerkesztjük, a metszéspontjuk lesz a B pont. (Két metszéspontot kapunk az AC-re szimmetrikusan, mi most az AC „alatti” metszéspontot jelöltük be. Választhattuk volna a másikat is, akkor az általunk megszerkesztett négyszögnek a tükörképét kaptuk volna.)

Az A középpontú d sugarú körre és a C középpontú c sugarú körre is illeszkedik a D pont. A két kört megszerkesztjük, a megfelelő metszéspontjuk lesz a D pont.



A négyszög esetén is beszélhetünk külső szögről.

Fontos tudnivaló

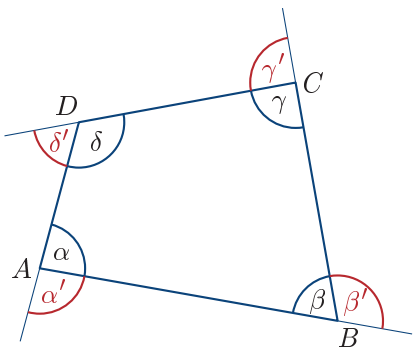
A konvex négyszög egyik belső szöge a mellette fekvő külső szöggel $180°$-os szöget zár be.

A rajz jelöléseit használva:

$\alpha + \alpha' = 180°, \qquad \beta + \beta' = 180°,$

$\gamma + \gamma' = 180°, \qquad \delta + \delta' = 180°.$

Határozzuk meg a konvex négyszög külső szögeinek összegét!



$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' =$

$= 180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma + 180° - \delta =$

$= 4 \cdot 180° - \alpha - \beta - \gamma - \delta =$

$= 4 \cdot 180° - 360° = 360°.$

Fontos tudnivaló

A konvex négyszög külső szögeinek összege $360°$.

Feladatok

A1 Számítsd ki a négyszög hiányzó szögeit! (α, β, γ, δ a belső, α', β', γ', δ' a megfelelő külső szögeket jelenti egy konvex négyszögben.)

	α	β	γ	δ	α'	β'	γ'	δ'
a)	54°		90°	108°				
b)	44°	46°					47°	
c)					95°	100°	115°	
d)	44° 55′					103°	83° 12′	

K2 Egy négyszög egyik szöge 74°, a másik kétszer akkora, a harmadik és a negyedik szöge egyenlő. Mekkorák a négyszög szögei?

K3 Igazak-e a következő állítások?

a) Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldala, akkor az trapéz.

b) Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor az húrtrapéz.

c) Ha egy négyszögnek van két merőleges oldala, akkor az téglalap.

d) Ha egy négyszögnek van két egyenlő szöge, akkor az deltoid.

K4 Szerkessz négyszöget, ha adott a négy oldalának a hossza és az egyik szöge!

K5 Szerkessz trapézt, ha

a) adott az egyik alapja, az alapon fekvő két szöge és a magassága;

b) adott a hosszabb alapja, a két szára és a magassága!

K6 Szerkessz húrtrapézt, ha adott a hosszabb alapjának és a szárának a hossza, továbbá a közbezárt szögük!

K7 Szerkessz paralelogrammát, ha adott a két oldalának a hossza és az egyik szöge!

K8 Szerkessz deltoidot, ha adott a két oldalának a hossza és a közbezárt szögük!

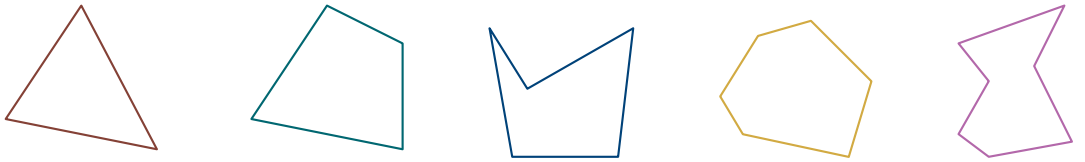
K9 Szerkessz rombuszt, ha adott az oldalának és az egyik átlójának a hossza!

E10 Szerkessz trapézt, ha adott a négy oldalának a hossza!

8.

Sokszögek

Az ábrán különböző sokszögeket látunk: **háromszöget, négyszöget, ötszöget,** hatszöget, **hétszöget,** . . . . . .



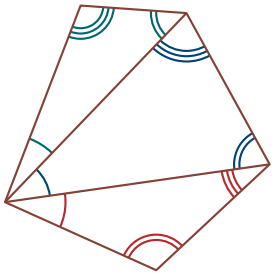
Szögeik nagysága alapján két csoportba sorolhatjuk a sokszögeket. Ha egy sokszögnek van 180°-nál nagyobb szöge, akkor **konkáv sokszögnek** nevezzük, ha minden szöge 180°-nál kisebb, akkor konvex sokszögnek hívjuk.

A sokszögeket határoló szakaszoknak **oldal** a neve. Az oldalak **csúcsokban** találkoznak és **szögeket** zárnak be.

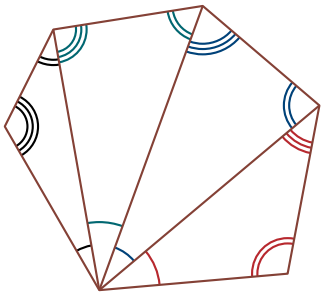
Minden sokszögnek ugyanannyi szöge és csúcsa van, mint ahány oldala. Egy csúcsból kiindulva minden sokszögben hárommal kevesebb átlót húzhatunk, mint amennyi a csúcsok száma, hiszen önmagába és a két szomszédos csúcsba nem húzható átló.

Az egy csúcsból induló átlók háromszögekre vágják a konvex sokszögeket. A háromszögek száma kettővel kevesebb, mint a sokszög oldalainak a száma, mert a két szélső háromszöghöz a sokszög két-két oldala kell, míg a belső háromszögekhez csak egy-egy.

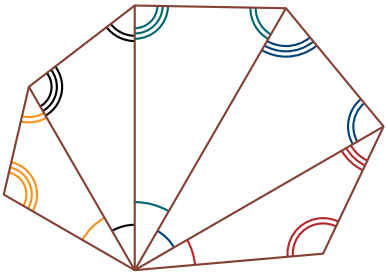
Vágjuk a konvex sokszögeket háromszögekre az egy csúcsból kiinduló átlókkal! Ezeknek a háromszögeknek a belső szögei pontosan lefedik a sokszög belső szögeit. Így a belső szögek összegét meghatározhatjuk.



Ötszög: $3 \cdot 180° = 540°$.



Hatszög: $4 \cdot 180° = 720°$.



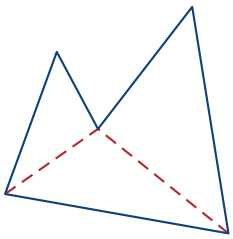
Hétszög: $5 \cdot 180° = 900°$.

Fontos tudnivaló

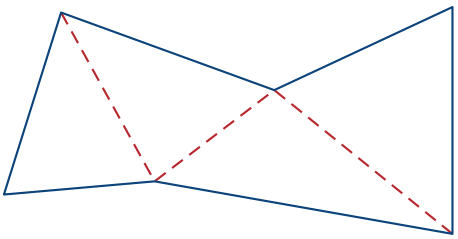
A konvex sokszög belső szögeinek összegét úgy számítjuk ki, hogy a $180°$-ot annyival szorozzuk, ahány háromszögre vágja a sokszöget az egy csúcsból húzott összes átlója. Ha a sokszög csúcsainak a száma n, akkor $(n - 2) \cdot 180°$ a belső szögek összege.

8.

Az n oldalú konkáv sokszögeket is felvághatjuk az átlóikkal $n - 2$ db háromszögre. Az ábra ötszögre és hatszögre mutat egy-egy lehetőséget.



Ötszög: $3 \cdot 180° = 540°$.



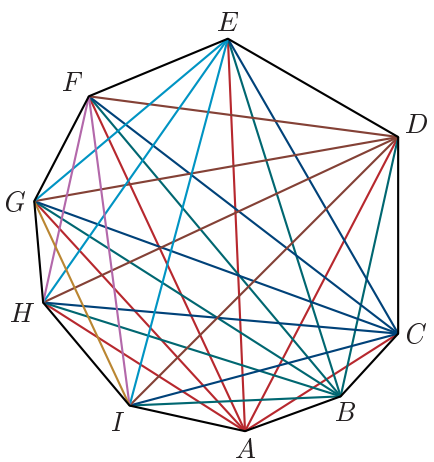
Hatszög: $4 \cdot 180° = 720°$.

1. példa

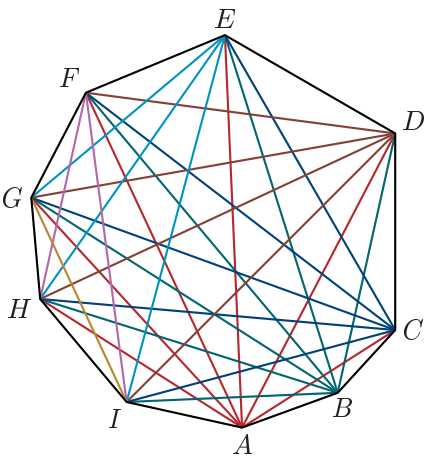
Számoljuk össze, hogy hány átlója van a konvex kilencszögnek!

Ha megrajzoljuk az átlókat, akkor egy szép ábrát kapunk. Az átlókat nehéz egyesével megszámolni. Az ábrán látható kilencszög A csúcsából 6 átlót húzhatunk, a B-ből is, a C csúcsból ekkor már csak 5, a D-ből 4, az E-ből 3, F-ből 2, G-ből 1 átlót kell megrajzolnunk. Ekkor a H és az I csúcsból már az összes átlót megrajzoltuk.

Vagyis: $6 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 27$ db.



Nézzük még egyszer az ábrát, és gondolkodjunk másként! Egy csúcsból összesen hat átló húzható. Ha minden csúcsnál összeadjuk az átlók számát, akkor $9 \cdot 6 = 54$ darabot kapunk. Azonban minden átlót mindkét végénél megszámoltunk, ezért a kapott számot feleznünk kell.



Vagyis a konvex kilencszögnek $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ átlója van.

A példa alapján a következő sejtés fogalmazható meg:

Fontos tudnivaló

Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Igazoljuk sejtésünket az előző példában szerzett tapasztalatainkat felhasználva!

Egy csúcsból $n - 3$ átló húzható. Nem húzható átló önmagába és a két szomszédos csúcsba.

Ha minden csúcsnál összeadjuk az átlókat, akkor $n \cdot (n - 3)$ darabot kapunk.

Minden átlót mindkét végénél megszámoltunk, ezért a kapott értéket feleznünk kell, azaz a konvex n-szögnek valóban $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ átlója van.

2. példa

Egy ötszög belső szögeinek nagysága: $100°$, $98°$, $107° 23'$, $112° 48'$. Számítsuk ki a külső szögek összegét!

Az ötszög belső szögeinek az összege $540°$, így a hiányzó ötödik szög nagyságát meghatározhatjuk: $540° - 100° - 98° - 107° 23' - 112° 48' = 121° 49'$.

Most már az összes külső szög nagysága kiszámítható: $180° - 100° = 80°$, $180° - 98° = 82°$, $180° - 107° 23' = 72° 37'$, $180° - 112° 48' = 67° 12'$, $180° - 121° 49' = 58° 11'$.

Adjuk össze az öt külső szöget: $80° + 82° + 72° 37' + 67° 12' + 58° 11' = 360°$.

Emlékezzünk vissza, hogy a háromszög és a konvex négyszög külső szögeinek összege is $360°$ volt! Természetesnek tűnik a következő sejtés megfogalmazása:

Fontos tudnivaló

A konvex sokszögek külső szögeinek összege $360°$.

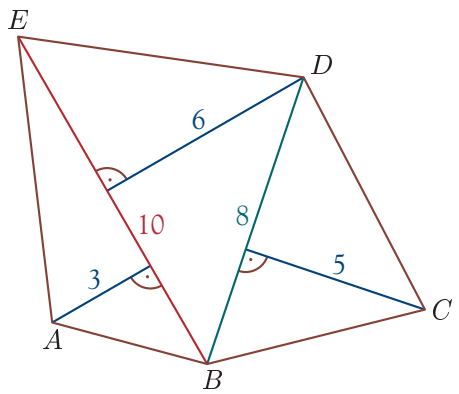
A sejtés igazolása a háromszögeknél és négyszögeknél látott módon történhet.

Megfogalmazható a kérdés, hogy konkáv sokszögeknél mennyi a külső szögek összege. Erre a kérdésre most nem tudunk válaszolni, mert eddig nem értelmeztük a konkáv sokszögek külső szögét.

3. példa

Az $ABCDE$ konvex ötszög BE átlója 10 cm, BD átlója 8 cm hosszú. A BE átlótól az A csúcs 3 cm-re, a D csúcs 6 cm-re, a BD átlótól a C csúcs 5 cm távolságra található. Mekkora az ötszög területe?

A szöveg alapján a következő vázlat készíthető:



A sokszög területét megkapjuk, ha a háromszögek területét kiszámítjuk és összeadjuk. A BE és a BD átló három háromszöget hoz létre. Ezek az átlók ismert hosszúságúak, és oldalai lesznek a kapott háromszögeknek. Ismerjük továbbá az adott hosszúságú oldalakhoz tartozó magasságok hosszát is, így a háromszögek területét ki tudjuk számítani.

$$t_{ABE} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$t_{EBD} = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$t_{DBC} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vagyis az ötszög területe: $T = 15 + 30 + 20 = 65 \text{ (cm}^2\text{)}$.

8.

Feladatok

A1 A következő kérdések konvex tízszögre vonatkoznak.

a) Hány átló húzható egy csúcsból?
b) Az egy csúcsból húzható átlói hány háromszögre vágják?
c) Hány átlója van összesen?
d) Hány fok a belső szögeinek összege?
e) Hány fok a külső szögeinek összege?

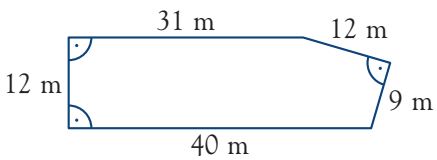
K2 Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelyben

a) egy csúcsból 11 átló húzható;
b) összesen 35 átló található;
c) a belső szögek összege 2340°;
d) a belső szögek összege 1230°;
e) a külső szögek összege 360°?

K3 Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben a belső szögek összege négyszer akkora, mint a külső szögek összege?

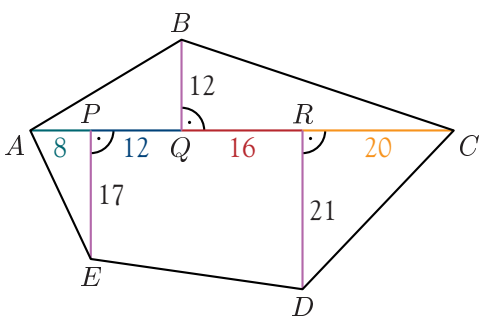
K4 Igazold, hogy a konvex ötszög külső szögeinek összege 360°!

K5 *a)* Hány m^2-es az ábrán látható építési telek?



b) A telekre egy 8 méter széles és 12,5 méter hosszú házat terveznek, továbbá egy 4 méter sugarú kör alakú medencét. Az építési telek hány százaléka marad udvarnak?

K6 Az ábra egy tér alaprajzát mutatja. Az ábrán látható adatok métereket jelentenek. Számítsd ki a tér területét!



Testek

Hasábok

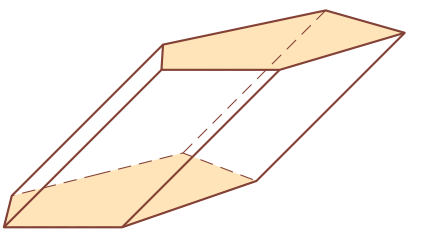
A mindennapi életben sokszor találkozhatunk az ábrán látható, illetve ezekhez hasonló tárgyakkal. Ezeket két egybevágó, párhuzamos sokszög és téglalapok határolják.



Fontos tudnivaló

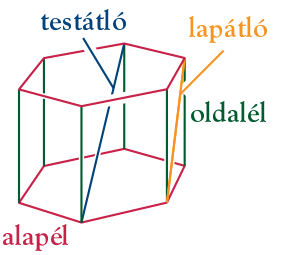
Egyenes hasáboknak nevezzük azokat a testeket, amelyeket két párhuzamos, egybevágó sokszög és annyi téglalap határol, ahány oldalú a sokszög.

Beszélhetünk ferde hasábról is. Az ábra egy ilyen testet mutat.



Két lapja párhuzamos és egybevágó sokszög, a többi lapja pedig paralelogramma.

A párhuzamos és egybevágó sokszögek a hasáb **alaplapjai**. A többi lap neve **oldallap**. Az alaplapok és az oldallapok metszésvonalának neve **alapél**. Az egy oldallapra illeszkedő alapélek párhuzamosak és egyenlők egymással. Két szomszédos oldallap metszésvonala az **oldalél**. Valamennyi oldalél párhuzamos egymással.



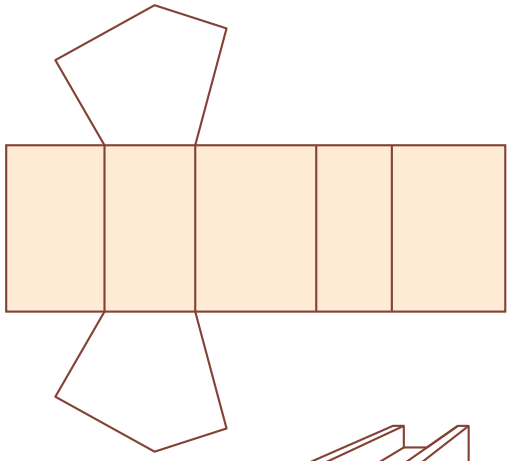
Az alaplapok egymástól való távolsága a hasáb **magassága**.

Egy lapra illeszkedő, két nem szomszédos csúcs **lapátlót** határoz meg. Ha két csúcs nem élt és nem lapátlót határoz meg, akkor az **testátló**.

Egyenes hasáb esetén az egy csúcsba összefutó alapél és oldalél merőleges egymásra, az oldallapok merőlegesek az alaplapra. Egyenes hasáboknál az oldalél hossza a magasság.

A hasábokat az alapsokszög oldalainak a száma szerint nevezzük el. Beszélhetünk háromszög alapú, négyszög alapú, ötszög alapú, ... hasábokról.

Ha egy papírból készült egyenes hasábot alapélei és egy oldaléle mentén felvágunk és kiterítünk a síkba, akkor az ábrán látható hálózatot kapjuk.



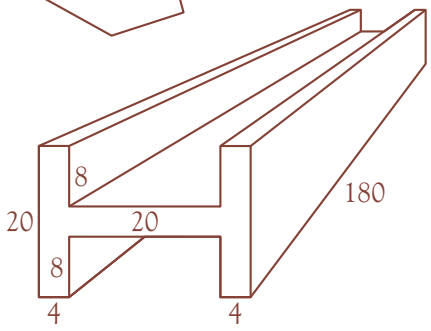
A kiterített oldallapok együtt egy téglalapot alkotnak. Ez a hasáb **palástja**. A kiterített palást egyik oldala egyenlő a hasáb alaplapjának kerületével, a másik oldala pedig a hasáb oldalélével (magasságával).

Fontos tudnivaló

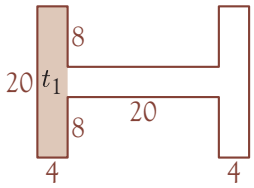
A hasáb felszíne egyenlő a határoló lapok területének összegével, azaz **az alaplap területének kétszereséhez hozzáadjuk a palást területét.**

1. példa

Az ábra H keresztmetszetű vasrudat ábrázol. A rudat be szeretnék festeni. Mennyi festék szükséges az 1,8 méter hosszú vasrúd befestéséhez, ha a festék használati utasítása szerint 1 m^2-re 25 dkg festék felhasználása javasolt?



Határozzuk meg a test felszínét! A keresztmetszetet három egybevágó téglalapra bonthatjuk.



Egy téglalap területe: $t_1 = 20 \cdot 4 = 80$ (cm^2).

3 téglalap területe: $3t_1 = 3 \cdot 80 = 240$ (cm^2).

Az alaplap területe: $T = 240$ cm^2.

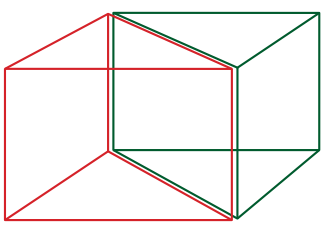
Két alap területe: $2T = 480$ cm^2.

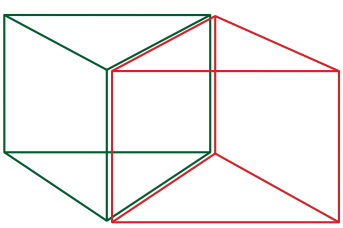
A palást területe: $P = 180 \cdot (20 + 4 + 8 + 20 + 8 + 4 + 20 + 4 + 8 + 20 + 8 + 4) =$
$= 180 \cdot 128 = 23\,040$ (cm^2).

A vasrúd felszíne: $A = 2T + P = 480 + 23\,040 = 23\,520$ (cm^2), és 23 520 cm^2 = 2,352 m^2.
A festék mennyisége: $2{,}352 \cdot 25 = 58{,}8$ (dkg) $\approx 0{,}6$ (kg).

Figyeld meg!

Az ábrán látható téglatestet tekinthetjük egy négyszög alapú hasábnak. Szétvágtuk az alaplap és a fedőlap átlója mentén, majd különböző módon illesztettük össze. Az összeillesztés után is hasábot kaptunk.





Ezeknek a hasáboknak azonos a térfogata.

A származtatásuk szerint az alaplapjaik területe és a magasságuk is egyenlő. Ez adja a sejtésünket, hogy a hasábok térfogatának meghatározásához az alaplap területére és a magasságra van szükségünk.

A téglatest térfogatképlete: $V = abc$, ahol ab az alaplap területe, c pedig a magassága. Azaz a téglalap alapú egyenes hasáb térfogata az alaplap területének és a magasságnak a szorzatával egyenlő.

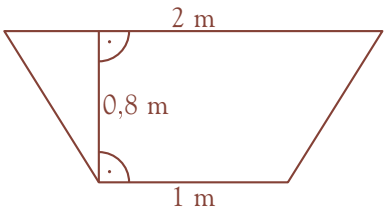
Amikor meg akartuk tudni, hogy mekkora a téglatest (téglalap alapú egyenes hasáb) térfogata, akkor megszámoltuk, hogy hány 1 cm^3-es kocka fér bele. Az alaplapjára annyi 1 cm^3-es kockát rakhattunk, ahány cm^2 az alaplap területe. Ebből annyi réteg rakható egymásra, ahány cm a magassága. Vagyis valóban az alaplap területének és a magasságnak a szorzatát kell vennünk. A további sokszög alapú hasábok térfogatának kiszámításánál ugyanígy gondolkodunk. Ha az alaplap területe T területegység, akkor az alaplapra T térfogategység fér. Ha a magasság m, akkor m réteg fér egymásra, azaz a hasábba Tm térfogategység fér. Ez akkor is igaz, ha a T és m nem fejezhető ki egész számú mértékegységgel.

Fontos tudnivaló

A hasáb térfogatát úgy számítjuk ki, hogy a hasáb alaplapjának területét megszorozzuk a hasáb magasságával. Képlettel: $V = Tm$.

2. példa

Hány hektoliter víz fér egy 3,2 km hosszú esőlevezető árokba, amelynek keresztmetszetét az ábra mutatja?



Az árok egy trapéz alapú hasáb. Ennek térfogatát kell kiszámítanunk.

A trapéz, azaz a hasáb alaplapjának területe: $T = \frac{(2 + 1) \cdot 0{,}8}{2} = 1{,}2$ (m^2).

A hasáb magassága: $m = 3{,}2$ km $= 3200$ m.

A hasáb térfogata: $V = Tm = 1{,}2 \cdot 3200 = 3840$ (m^3).

Mivel 1 $m^3 = 10$ hl, ezért 38 400 hl víz fér az esőlevezető árokba.

Feladatok

A1 A következő kérdések ötszög alapú egyenes hasábra vonatkoznak.

a) Hány lap határolja?

b) Milyen alakú lapok határolják?

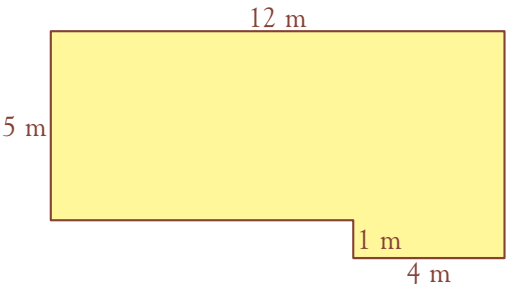
c) Mely határoló lapok egybevágók?

d) Hány oldallapja van?

e) Milyen esetben lesznek az oldallapok egybevágók?

K2 Az ábra egy tanterem alaprajzát mutatja.

a) 160 cm magasságú „olajlábazatot” szeretnénk készíttetni. (A falat 160 cm magasságig olajfestékkel bevonatni.) Hány m^2-ért kell fizetni? (A szakemberek a számításnál az ajtók és az ablakok helyét is úgy tekintik, mintha fal lenne.)



b) Hány m^3 levegő fér a tanterembe, ha a magassága 2,5 méter?

K3 Számítsd ki a 2,6 dm magas háromszög alapú hasáb palástjának felszínét! Alaplapjának oldalai: $a = 23$ cm, $b = 320$ mm, $c = 1{,}7$ dm.

K4 Egy hasáb alaplapjának területe 28 cm^2, kerülete 26 cm, a hasáb magassága 11 cm. Mekkora a felszíne, mekkora a térfogata?

K5 Trapéz keresztmetszetű, 220 méter hosszú árkot ásnak. Az árok felül 1,4 méter, alul 0,8 méter széles, a mélysége 1,2 méter. Hány m^3 földet kell kiemelni?

K6 Egy 25 hektáros földet 30 cm mélyen felszántanak. Hány m^3 földet mozgatnak meg eközben?

K7 Egy téglatest minden élét kétszeresére nyújtják. Hogyan változik a felszíne?

K8 Egy egyenes hasáb oldaléleit másfélszeresére nyújtják, az alapterületét nem változtatják. Hogyan változik a térfogata?

K9 Egy egyenes hasáb oldaléleit háromszorosára nyújtják. Mit tegyenek az alaplap területével, ha azt szeretnék, hogy a térfogata ne változzon?

E10 Egy téglatest négy párhuzamos élét négyszeresére nyújtják. A további nyolc él mindegyikét ugyanolyan módon szeretnék változtatni, de úgy, hogy a térfogat az eredetivel azonos legyen. Hogyan változtassák a nyolc él hosszát?

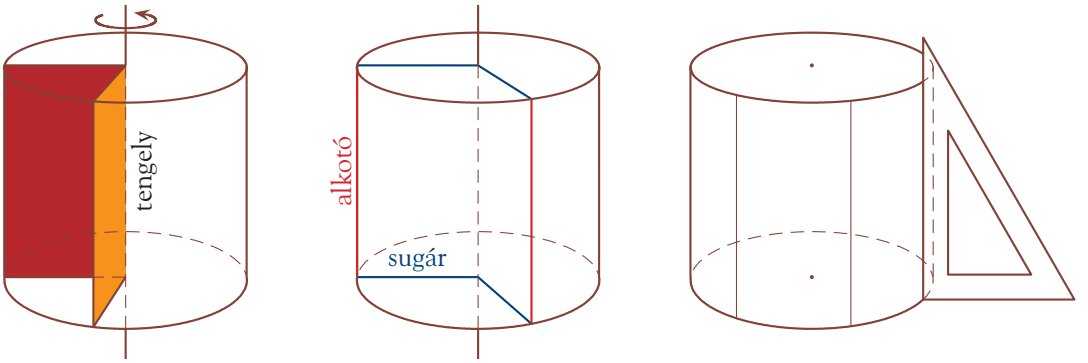
Hengerek

A képen látható testek henger alakúak.



A hengert két egybevágó körlap és egy görbe lap határolja. A körlapok az **alaplapok**. A görbe lap a **palást**. Az egymással párhuzamos alaplapok távolsága a henger **magassága**. Az alaplapok sugara **a henger sugara**.

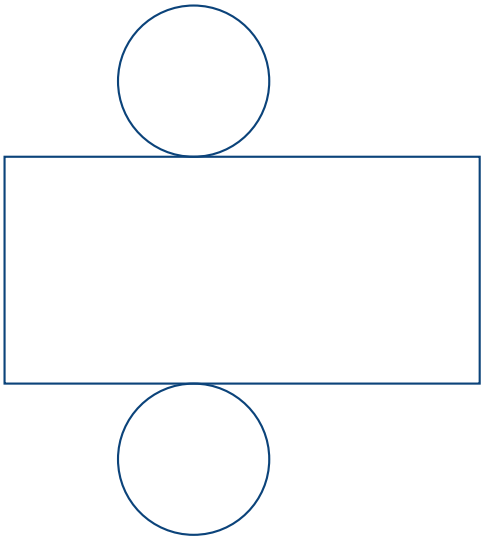
Ha egy téglalapot megforgatunk az egyik szimmetriatengelye körül, akkor a téglalap hengert ír le. A tengellyel párhuzamos oldal alkotja forgás közben a palástot. Ez az oldal **a henger alkotója**.



A másik két oldal a két alaplapon forog. Az alkotó merőleges az alaplapokra.

A képen egy úthengert látunk. Ha a készülő úton egy körülfordulást halad előre, akkor téglalap alakú nyomot hagy maga után. A henger palástja kiteríthető síkba, a kiterített síkidom téglalap lesz.





Fontos tudnivaló

A henger hálózata két egybevágó körlapból és egy téglalapból áll.

1. példa

Számítsuk ki egy 8 cm sugarú, 6 cm magasságú henger alakú vékony fémlemezből készült doboz anyagszükségletét!

A doboz felszínét kell kiszámítanunk. Az alaplapok és a palást területét összeadjuk. A henger hálózatának megtervezésekor láthattuk, hogy a palást olyan téglalap, amelynek egyik oldala az alapkör kerülete, másik oldala pedig a henger alkotója.

Az alaplapok területe: $2 \cdot T = 2 \cdot 8^2 \cdot \pi \approx 402{,}1$ (cm^2).

A palást területe: $P = 2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 6 = 96 \cdot \pi \approx 301{,}6$ (cm^2).

A henger felszíne: $A = 402{,}1 + 301{,}6 = 703{,}7$ (cm^2).

A doboz 703,7 cm^2 vékony fémlemez felhasználásával készült. (Az illesztések, forrasztások miatt ennél valószínűleg valamennyivel több anyagra volt szükség. Azt biztosan mondhatjuk, hogy ennél kevesebb anyagból nem lehet elkészíteni a dobozt.)

A látottak alapján tetszőleges henger felszínét kiszámíthatjuk, ha ismerjük a henger r sugarát és m magasságát, illetve a alkotóját.

Az alaplapok területe: $2 \cdot T = 2 \cdot r^2\pi$.

A palást területe: $P = 2r\pi \cdot a$.

A henger felszíne: $A = 2 \cdot T + P = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot a$.

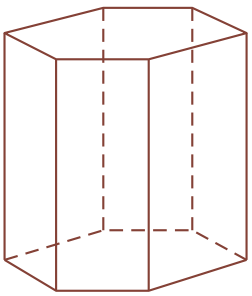
A kapott képletben kiemelhetjük a $2r\pi$-t, ekkor a következőt kapjuk:

Fontos tudnivaló

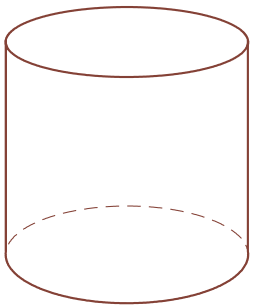
A henger felszíne: $A = 2r\pi\,(r + a)$.

Nézzük meg a hasábot és a hengert!

A hasábot két párhuzamos és egybevágó sokszög, valamint téglalapokból álló palást határolja.



A hengert két párhuzamos és egybevágó kör, valamint téglalappá kiteríthető palást határolja.



Képzeljünk el egy olyan hasábot, amelynek alaplapja szabályos sokszög, és képzeljük el, hogy az alapsokszög oldalszámát növeljük! Így a hasáb egyre jobban megközelíti a hengert. A henger térfogatát a hasáb térfogatszámításával egyező módon számítjuk ki:

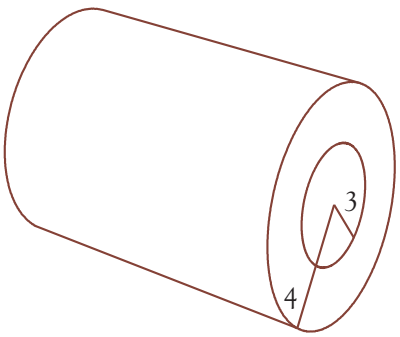
Fontos tudnivaló

A henger térfogata: $V = T \cdot m = r^2\pi \cdot m$.

2. példa

Egy 18 cm hosszú csövet, amelynek belső átmérője 6 cm, a külső átmérője 8 cm, beletettük a 60 × 40 cm-es alapterületű akváriumba. A víz teljesen ellepte a csövet. Mennyit emelkedett a vízszint?

A csövet úgy kell elképzelnünk, hogy egy 4 cm sugarú hengerből kifúrtak egy 3 cm sugarú hengert. A cső térfogatát megkapjuk, ha a nagyobb henger térfogatából kivonjuk a kisebb henger térfogatát.



A nagyobb henger térfogata:

$V_1 = 4^2 \cdot \pi \cdot 18 = 288\pi$ (cm^3).

A kisebb henger térfogata:

$V_2 = 3^2 \cdot \pi \cdot 18 = 162\pi$ (cm^3).

A cső térfogata: $V = V_1 - V_2 = 288\pi - 162\pi = 126\pi \approx 396$ (cm^3).

Az akvárium alapterülete: $T = 40 \cdot 60 = 2400$ (cm^2).

A vízszint emelkedése: $m = \frac{396}{2400} = 0{,}165$ (cm).

Vagyis a vízszint emelkedése nem éri el a 2 mm-t.

Feladatok

A1 Számítsd ki a henger felszínét és térfogatát, ha

a) $r = 1{,}2$ cm, $m = 2{,}8$ cm;

b) $r = 23$ mm, $m = 0{,}8$ dm!

K2 A fűmag elszórása után hengerelni kell a vetést. A henger átmérője 4 dm, alkotója 60 cm. Mekkora területet hengerelhetsz vele egy fordulattal?

K3 Egy henger alakú hirdetőoszlop 3,8 méter magas és 1,4 méter átmérőjű. Hány m^2-es plakáttal lehet a hirdetőoszlop teljes palástfelületét befedni?



K4 A vízlevezető csövek átmérője 10,2 cm. Hány m^2 lemez kell 42 méter hosszú cső elkészítéséhez?

K5 Egy 1,4 méter átmérőjű henger alakú kútban 5,6 méter víz található. A víz felszíne 5,2 méter mélyen van.

a) Mennyi víz van a kútban?

b) Hány m^3 földet ástak ki a kút készítésekor, ha a kútgyűrűk falvastagsága 12 cm?

c) Hány m^3 betonból készültek a kútgyűrűk, ha a falvastagságuk 12 cm, továbbá tudjuk, hogy 6 darab van a felszín alatt és egy a felszín felett?

K6 Egy 150 literes benzintartályt 4 cm-es átmérőjű csövön át töltenek meg. A csövön másodpercenként 20 cm-es benzinoszlop halad át. Mennyi idő alatt telik meg a tartály?

K7 Legfeljebb hány m^3 olaj lehet egy 115 km hosszú, 26 cm belső átmérőjű távvezetékben?

K8 Egy 7-szer 7 cm-es alapú négyzetes oszlop alakú dobozban már csak 7 dl tej maradt.

a) Ha ezt átöntöd egy 8 cm-es belső átmérőjű henger alakú kancsóba, akkor milyen magasan lesz a kancsóban a tej?

b) Milyen magasan volt a tej a dobozban?

Bevezetés a valószínűség-számításba

(Olvasmány)

„A kocka a szláv *csont, csontocska* szóból ered (kosztka) – utalva a játéktárgy anyagára. Ősi értelemben játéknak azt a tevékenységet tekintették, amely mentes volt az ügyesség, értelmi képesség bármilyen befolyásától. Az első ilyen játék a kockázás, majd a huszonegyezés és lottó vagy a fej vagy írás, páros-páratlan játékok.

Amíg a világnyelvek játékkultúrák többségében a dobókocka megnevezése például »dice« a sorsvetés, dobás, kockáztatás széleskörűen általános értelmére épül, addig a mai Magyarországon a nyelv a hatoldalú hexaéderre szűkítette le a játékeszköz megnevezését. A dobókockás játékok jelentős részében azonban nem hatoldalú a dobótest. A késő középkori 4, 6, 8, 12, 20 oldalú szabályos testekkel folyó játékok ezen eszközeinek közös megnevezésére a gyönyörű »Sorsvető« név szolgált Magyarországon. Ez a név azonban magában foglalta az öt szabályos dobótestet (tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder), és azon szabálytalan felsorszámozott oldalú testeket is, amik egyenlő eséllyel eshettek egy-egy oldalukra, de nem voltak szabályos testek, sőt némelyik oldalai sem voltak egybevágóak. A sorsvetők XVIII. századi sorába tartoztak a 26-oldalú, fél pakli kártyát pótló jóskockák és a pörgettyűk, sorsológömbök, mókuskerékszerű rézhengerek, bennük számozott papírhengerekkel.

Mindezek közös jellemzője az volt, hogy a sokféle lehetséges kimenetel mindegyike egyenlő eséllyel következhetett be."



Még sok érdekességről olvashatsz – például: játékszenvedély az ókorban és a középkorban, dobókockamutánsok, csalás a kockával – a Dobókocka-történelem elnevezésű weboldalon. Megtalálhatod a www.jatekhaz.skicc.hu oldalon.

A valószínűség-számítás célja, hogy a körülöttünk lévő világ különféle jelenségeire, eseményeire modellt készítsen, ezeken keresztül vizsgálja a felmerülő kérdéseket.

A szerencsejátékokkal kapcsolatos kérdések – amelyekben a véletlennek nagy szerepe van – matematikai vizsgálata a XVI–XVII. században, **Girolamo Cardano** (Hieronymus Cardanus), **Galileo Galilei**, **Blaise Pascal** munkásságával kezdődött.



Girolamo Cardano
(1501–1576)



Galileo Galilei
(1564–1642)



Blaise Pascal
(1623–1662)

Egy szenvedélyes szerencsejátékos, Chevalier De Méré lovag fordult Pascalhoz a következő kérdéssel:

„Mi az oka annak, hogy egy kockával dobva előnyös arra fogadni, hogy az első négy dobás között megjelenik a 6-os, de hátrányos arra fogadni, hogy két kockával dobva az első 24 dobás között megjelenik két 6-os?”

A kérdésre a helyes választ Pascal és **Fermat** adta meg 1654-ben. A feladat megoldására később visszatérünk.

Még két matematikus nevét illik ismernünk: **Laplace** foglalta össze a klasszikus valószínűség-számítás elméletét, amely az egyenlően valószínű eseményeket vizsgálta, míg A. **N. Kolmogorov** 1933-ban megalkotta a valószínűség-számítás axiomatikus elméletét.

Nézz utána, milyen vizsgálódási terület kapcsolható a következő matematikusok nevéhez:

J. Bernoulli, G. L. L. Buffon, P. L. Csebisev, S. D. Poisson!

Kísérlet, elemi esemény, gyakoriság

1. Az élet mely területein találkozhatunk valószínűség-számítási feladatokkal?

2. Mit gondolsz, egyenlő-e az esélye az 5-ös lottón és a 6-os lottón a telitalálatos szelvénynek?

Mint láttuk, a szerencsejátékoknak, például a különböző kockajátékoknak meghatározó szerepe volt egy új tudományág születésében. Ahhoz, hogy megfigyeléseink, sejtéseink minél helytállóbbak legyenek, célszerű nagyszámú kísérletet végrehajtani.

1. példa

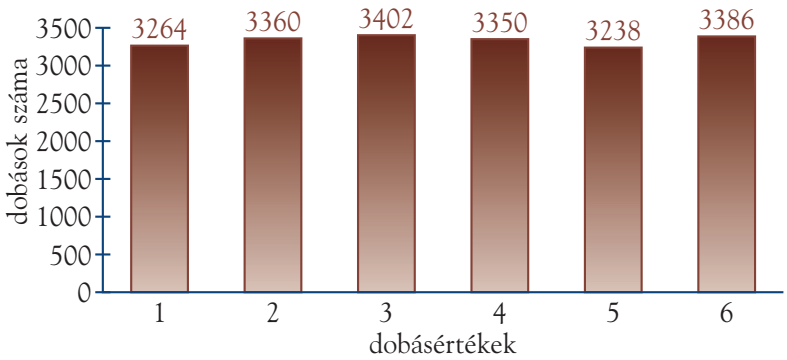
Számítógéppel szimulálva egy kockát 20 000-szer „feldobtunk”. Ez azt jelenti, hogy olyan programot használtunk, amely véletlenszerűen választott ki egy egész számot 1 és 6 között, és ezt a kiválasztást 20 000-szer ismételte meg.

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk, hogy 20 000 kockadobás során az 1-et dobtunk, 2-t dobtunk, . . . , 6-ot dobtunk események hányszor következtek be. A **kísérlet** most a kockadobás, illetve annak szimulálása, a kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük. A különböző elemi események jelölésére nagybetűket használunk. Példánkban hat elemi eseményt különböztethetünk meg:

– az A esemény: 1-et dobtunk;
– a B esemény: 2-t dobtunk;
– a C esemény: 3-at dobtunk;
– a D esemény: 4-et dobtunk;
– a E esemény: 5-öt dobtunk;
– a F esemény: 6-ot dobtunk.

Események	A: 1-et dobtunk	B: 2-t dobtunk	C: 3-at dobtunk	D: 4-et dobtunk	E: 5-öt dobtunk	F: 6-ot dobtunk
Előfordulások száma (gyakoriság)	3264	3360	3402	3350	3238	3386

Azt a számot, amely megmutatja, hogy egy esemény a kísérlet során hányszor fordult elő, az esemény **gyakoriságának** nevezzük. A gyakoriság értékeit szemléltethetjük diagramokkal is.



2. példa

Egy dobozban tíz, tapintásra egyforma üveggolyó van. 5 szivárványszínű, 3 zöld és 2 piros. Végezzük azt a kísérletet, hogy csukott szemmel kiveszünk hármat!

Milyen kimenetelei lehetnek a kísérletnek, azaz milyen elemi események léphetnek fel a kihúzás során?



Az összeszámlálásnál keressünk szisztémát, csoportosítsuk a lehetőségeket valamilyen logika szerint!

Ha azonos színűek a kihúzott golyók, akkor a lehetséges események

A: 3 szivárvány, B: 3 zöld.

Ha van két azonos színű, de a harmadik különböző, akkor

C: 2 szivárvány; 1 piros, D: 2 szivárvány; 1 zöld,
E: 2 zöld; 1 szivárvány, F: 2 zöld; 1 piros,
G: 2 piros; 1 zöld, H: 2 piros; 1 szivárvány.

Ha mind a három golyó különböző színű, akkor I: piros; zöld; szivárvány.

Tehát ennek a kísérletnek 9 különböző kimenetele lehetséges, a fent felsorolt elemi események.

1. Milyen fogalmakkal ismerkedtél meg a valószínűség-számítás tanulása során?

2. Magyarázd meg a megismert fogalmak jelentését!

Feladatok

A1 Egyszerre feldobunk egy 20 Ft-ost és egy 10 Ft-ost. Ennek a kísérletnek milyen kimenetelei lehetnek?

a) Sorold fel az elemi eseményeket!

b) Készíts táblázatot arról, hányszor következnek be az egyes elemei események, ha 200 dobást végzel!

A2 Egyszerre feldobunk egy 200 Ft-ost és egy szabályos dobókockát.

a) Melyek lesznek a kísérlet elemi eseményei?

b) Végezd el a kísérletet 50-szer! Számold az elemi események gyakoriságát!

Készíts oszlopdiagramot az elemi események gyakoriságáról!

A3 Két szabályos dobókockát dobunk fel egyszerre. Vizsgáljuk a dobott számok összegét.

a) Hány különböző elemi eseményt határoz meg a kísérlet? Melyek ezek?

b) Mit gondolsz, van-e olyan összeg, amely gyakrabban fordul elő, mint mások?

K4 Három különböző – szénsavmentes, enyhe, erős – ásványvizesüvegről levettük a kupakokat.

a) Egy üveget visszazárunk. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

b) Két üveget zárunk vissza. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

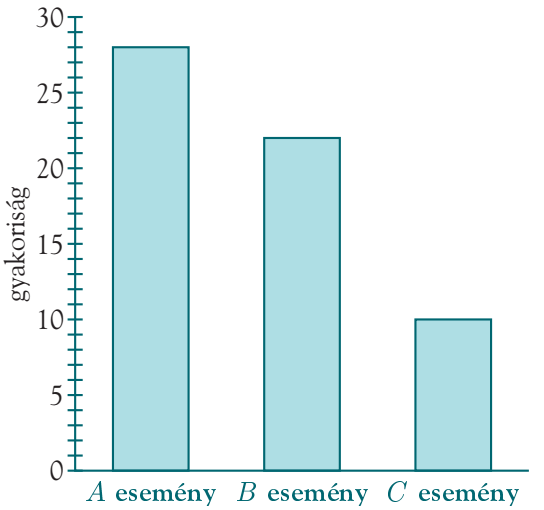
c) Három üveget zárunk vissza. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

K5 Egy henger alakú üdítőskupakot dobtunk fel.

a) Sorold fel a kísérlet során az elemi eseményeket!

A dobás eredményeit a diagramon láthatod.

b) Az általad felsorolt elemi események közül melyik lehetett a grafikonon szereplő A, B, C esemény?



c) Dobd fel te is 60-szor egy üdítő kupakját, és ábrázold az eredményeidet diagramon! Összegezd az észrevételeidet!

E6 Egy szabályos dobókockát kétszer feldobtunk egymás után, a dobások eredményét egymás mellé írtuk. Így egy kétjegyű számot kaptunk.

Az A *esemény*: a kétjegyű szám számjegyeinek összege kisebb mint 6,
a B *esemény*: a kétjegyű szám nagyobb mint 30.

a) Keress olyan elemi eseményeket, amelyek az A és a B eseménybe egyaránt beletartoznak!

b) Fogalmazz meg a kísérlettel kapcsolatos olyan eseményt, amely nem tartalmaz közös elemi eseményt

– az A eseménnyel;

– a B eseménnyel;

– sem az A, sem a B eseménnyel!

E7 Hat különböző cédulára felírtuk a következő neveket: Anna, Bea, Csaba, Döme, Emese, Félix. Írj két különböző kísérletet, amelyet a cédulákkal végezhetünk! Határozd meg a kísérletekhez tartozó elemi eseményeket!

Relatív gyakoriság, a valószínűség fogalma

1. Sorold fel, hogy milyen módon lehet ábrázolni adatsokaságot!

2. Magyarázd meg a következő fogalmakat: gyakoriság, relatív gyakoriság!

Az előző lecke táblázatát figyelve tehetjük a következő kijelentést: 3386-szor dobtunk 6-ost. Ez önmagában kevesebb információt hordoz, mintha azt is hozzátennénk, hogy hány dobásból sikerült ennyi hatost dobni. Ha például azt mondjuk, hogy 3400 dobásból értük el, akkor arra gondolhatnánk, micsoda ritka nagy szerencsénk volt, vagy ami valószínűbb, nem szabályos dobókockával dobtunk.

Számítsuk ki, hogy az egyes események milyen arányban fordultak elő a kísérlet során! Például 6-ot 3386-szor dobtunk a 20 000 dobás során, tehát a hatos dobás előfordulásának aránya: $\frac{3386}{20\,000} \approx$ $\approx 0{,}1693$. Ezt a számot az esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük. (A relatív szó latin eredetű, viszonylagosságot, máshoz viszonyítottat jelent.)

Az előző táblázat adatait kiegészítettük a megfelelő relatív gyakorisági értékekkel.

Események	A	B	C	D	E	F
Előfordulások száma **(gyakoriság)**	3264	3360	3402	3350	3238	3386
Az előfordulások aránya az összes dobáshoz viszonyítva **(relatív gyakoriság)**	0,1632	0,168	0,1701	0,1675	0,1619	0,1693

Megfigyelhetjük, hogy mind a gyakorisági, mind a relatív gyakorisági értékek csak kissé térnek el egymástól. Ez természetes, hiszen a szabályos dobókocka minden oldalára egyenlő eséllyel eshet.

Mivel 20 000 dobást vizsgáltunk, és 6 (egyformán) lehetséges értéket dobhattunk, ezért $20\,000 : 6 = 3333{,}\dot{3}$ körül ingadoznak a vizsgált események gyakorisági értékei. A gyakoriság értékei persze a dobásszám változtatásával mindig „nagyjából” arányosan változnak. Ötször annyi dobás elvégzésekor nem biztos, hogy pontosan ötször annyi lesz, mondjuk a hármas dobások száma, de körülbelül ötszöröse lesz várhatóan, esetleg kis eltéréssel.

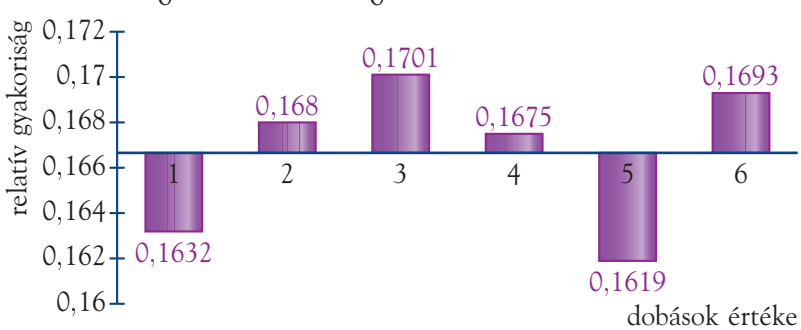
A relatív gyakorisági értékek viszont kockadobásaink esetében nem változnak lényegesen a dobásszám változtatásával. Ezek egy állandó érték körül ingadoznak, esetünkben ez az állandó: $3333{,}\dot{3} : 20\,000 = 0{,}1\dot{6} = \frac{1}{6}$. Ezt az állandó értéket a vizsgált esemény **valószínűségének** nevezzük.

Tehát minden megfigyelt eseményünknek egyenlő a valószínűsége: $\frac{1}{6}$. Az A esemény bekövetkezésének valószínűségét így jelöljük: $P(A)$, ahol a P betű a latin probabilis (valószínű) kezdőbetűjére utal.

Az „1-et dobtam” esemény valószínűsége tehát: $\frac{1}{6}$, azaz $P(A) = \frac{1}{6}$.

A „2-t dobtam” esemény valószínűsége szintén: $\frac{1}{6}$, azaz $P(B) = \frac{1}{6}$ és így tovább.

Az oszlopdiagramon azt láthatjuk, hogy mennyivel térnek el a valószínűségtől a relatív gyakoriság értékei:



A vizsgált tetszőleges események valószínűségének értéke tehát az a szám, amely körül az esemény relatív gyakorisági értékek ingadoznak, ha elegendően sok kísérletet végzünk.

Felmerülhet az a kérdés, mit értünk elegendően sok kísérleten. A szerencsejátékok közül az egyikben, a rulett nevű játékban arra is lehet fogadni, hogy a megpörgetett golyó piros vagy fekete színű számon áll-e meg. Mivel azonos a piros és fekete számok száma, sok pörgetést megfigyelve körülbelül ugyanannyiszor áll meg a golyó piros számon, mint feketén. (A 0 számmal most nem foglalkozunk, annak speciális szerepe van a játékban.) Ennek ellenére Monte Carlóban előfordult, hogy egy játékos azért nyert hatalmas összeget, mert egymás után 28-szor tett a piros színre, és a golyó minden esetben a piros színen állt meg. Ha például csak ezt a 28 kísérletet figyeltük volna, akkor torz eredményt kaptunk volna a relatív gyakorisági érték alapján. (Számolással meghatározható, hogy közel 500 évenként fordul elő ilyen sorozat.)

A vizsgálatainkból következik, hogy bármely esemény bekövetkezésének valószínűsége 0 és 1 közötti szám. (Egy kísérletsorozat során az előfordulás aránya.) Vannak olyan események, amelyek sohasem következhetnek be, például, hogy a feldobott kocka a levegőben marad. Ezeket **lehetetlen eseményeknek** nevezzük. **A lehetetlen esemény valószínűsége 0.**

Azokat az eseményeket, amelyek tetszőleges kimenetel során bekövetkeznek (például, hogy a szabályos kockával legfeljebb 6-ost dobunk), **biztos eseményeknek** nevezünk. **A biztos esemény valószínűsége 1.**

Kockadobásnál például lehetetlen esemény az, hogy 6-nál nagyobbat dobunk, vagy például, hogy 10-zel osztható számot dobunk, egy biztos esemény például az, hogy 7-nél kisebbet dobunk.

Trükkös kérdés!

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos dobókockával dobva mindig 1-es jön ki?

Lehetetlen-e az, hogy egy szabályos dobókockával dobva mindig 1-es jön ki?

A szabályos kockával dobva előbb-utóbb másnak is ki kell jönnie, mint az 1-esnek. Ennek tehát 0 a valószínűsége. De mégsem lehetetlen. Csak „nem valószínű”. Ne téveszd tehát össze: attól, hogy valaminek 0 a valószínűsége, még nem feltétlenül lehetetlen!

Feladatok

A1 Dobj fel egy olyan korongot, amelynek egyik fele piros, a másik kék

(1) 4-szer; (2) 50-szer; (3) 100-szor!

Az A elemi esemény, hogy a kék fele van felül, a B elemi esemény, hogy a piros.

a) Mindhárom esetben jegyezd fel az események gyakoriságát, relatív gyakoriságát!

b) Melyik elemi esemény bekövetkezésének a valószínűsége a nagyobb? Indokolj! Határozd meg az elemi események valószínűségét!

K2 Egy szabályos dobókockával dobj 150-szer!

Az A *esemény*: párosat dobtál, B *esemény*: páratlant dobtál, a C *esemény*: prímszámot dobtál.

a) Milyen elemi eseményekre lehet bontani a vizsgált eseményeket?

b) Ábrázold oszlopgrafikonon az események gyakoriságát!

c) Számítsd ki az események relatív gyakoriságát, majd hasonlítsd össze nagyságviszonyukat! Mit tapasztaltál? Miért lehet ez? Mekkora lehet az egyes események valószínűsége? Indokold válaszod!

K3 Három pénzérmét (1 db 20 Ft-ost, 1 db 10 Ft-ost, 1 db 5 Ft-ost) dobunk fel 120-szor.

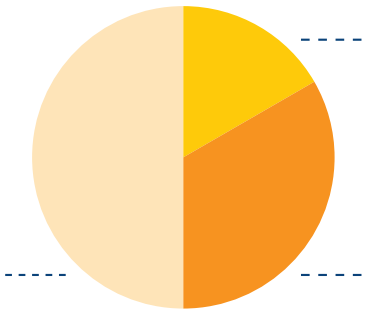
a) Sorold fel a lehetséges kimeneteleket!

b) Legyen az *A esemény*: 3 fej van a 3 feldobott pénzérme között;

B esemény: pontosan 2 fej van a 3 feldobott pénzérme között;

C esemény: legfeljebb 1 fej van a 3 feldobott pénzérme között.

A dobások után kiszámolt relatív gyakoriságok értékét kördiagramon ábrázoltuk. A kördiagramon nincsenek értékek feltüntetve.



Melyik körcikk melyik eseményhez tartozhat? Indokold meg a válaszodat!

c) Hány százalék körüli érték lehet az egyes események relatív gyakorisága? Miért?

d) 500 kísérletből várhatóan hány esetben kapunk pontosan 2 fejet?

K4 Egy szabályos dobókockával 1000-szer dobtunk. A következő eseményeket vizsgáltuk:

– *A* esemény: a dobott szám páros;

– *B* esemény: a dobott szám prímszám;

– *C* esemény: a dobott szám az 1, vagy a 3, vagy a 6.

A következő gyakorisági értékhármasok közül szerinted melyik lehet a legreálisabb, melyik a legkevésbé elképzelhető?

	I.	II.	III.	IV.
A esemény:	350	333	312	0
B esemény:	550	333	340	1000
C esemény:	100	333	328	0

E5 Egy szabályos dobókockával dobunk. Írj olyan eseményeket, amelyekre teljesülnek az állítások!

a) Az *A* esemény valószínűsége: $\frac{1}{6}$.

b) A *B* esemény valószínűsége: nem $\frac{1}{6}$.

c) A *C* esemény valószínűsége: 0.

d) A *D* esemény valószínűsége: 1.

e) Az *E* esemény valószínűsége nagyobb, mint $\frac{1}{2}$, de kisebb mint 1.



E6 Feldobtunk egyszerre egy 10 Ft-ost és egy 20 Ft-ost! Fogalmazz meg a kísérlettel kapcsolatosan olyan eseményt, amelynek a valószínűsége:

a) 0, *b)* 1!

E7 Egy bevásárlókocsiba két különböző értékű csokiból 3-3 darabot tettünk be. A játékos kedvű pénztáros azt mondja:

a) vagy fizessük ki a hat csoki árát;

b) vagy véletlenszerűen kivesz kettőt, összeadja a két termék árát, majd a kapott összegnek veszi a háromszorosát, és ennyit fizessünk.

Melyik esetet választanád? Miért?

Nem azonos valószínűségű események

1. példa



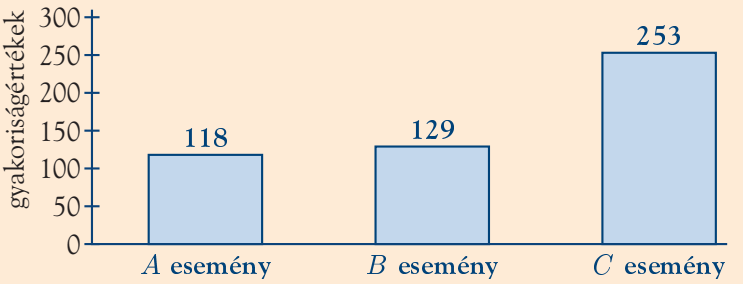
Feldobtunk 500-szor egy 10 Ft-ost és egy 20 Ft-ost egyszerre. Három eseményt vizsgáltunk:

A esemény: két fejet dobtunk;

B esemény: két írást dobtunk;

C esemény: különbözőket dobtunk.

Az oszlopdiagram az események gyakoriságát mutatja.



Számítsuk ki az események relatív gyakoriságát!

9.

Az A esemény relatív gyakorisága: $\frac{118}{500} = 0{,}236 = 23{,}6\%$.

A B esemény relatív gyakorisága: $\frac{129}{500} = 0{,}258 = 25{,}8\%$.

A C esemény relatív gyakorisága: $\frac{253}{500} = 0{,}506 = 50{,}6\%$.

Miért nem azonos szám körüli értékeket kaptunk? Nézzük, milyen esetek fordulhatnak elő a kísérletben!

A: 

B: 

Mint láthatjuk, a C esemény kétféleképpen következhet be:

C: 

vagy 

1. eset: 10 Ft-ossal dobtunk fejet és a 20 Ft-ossal írást;

2. eset: 20 Ft-ossal dobtunk fejet és a 10 Ft-ossal írást.

Ezért volt a C esemény relatív gyakorisága körülbelül kétszerese akár az A, akár a B eseménynek.

Ha a C eseményt a két lehetséges kimenetele szerint felbontanánk két elemi eseményre, akkor mind a négy elemi esemény egyenlő eséllyel következne be, és valamelyik biztosan bekövetkezne. Ezért a valószínűségeik értékei is egyenlők lennének, egyaránt $\frac{1}{4}$.

Tehát az eredeti eseményeket figyelembe véve $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2. példa

A Gereben családban öt gyerek van: Lajos, Lotte, Lázár, Kázmér és Kinga. Gereben papa két gyerekét kérte, hogy segítsen neki.

Mi a valószínűbb:

– két fiú ment segíteni;

– két lány segített a papának.

Tételezzük fel, hogy a gyerekek segítőkészsége azonos!

Mivel a családban 2 lány és 3 fiú van, így természetesen az a valószínűbb, hogy két fiú segített Gereben papának. Meg tudnánk-e határozni a kérdéses valószínűségeket? Ebben az esetben nincs arra lehetőségünk, hogy nagyon sokszor végezzük el a kiválasztást mint kísérletet.

Nézzük, milyen segítőpárokat lehet kialakítani:

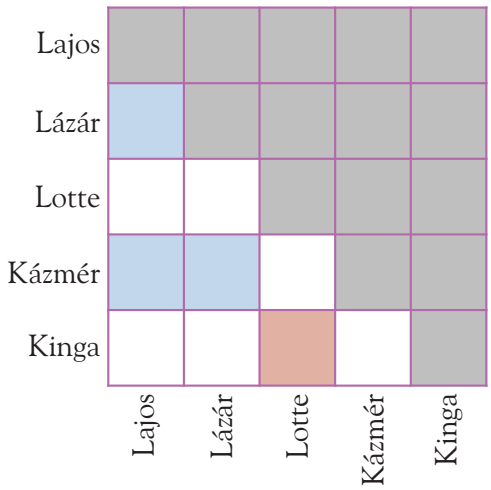
Lajos–Lotte,	Lotte–Lázár,	**Lázár–Kázmér,**	Kázmér–Kinga.
Lajos–Lázár,	Lotte–Kázmér,	Lázár–Kinga,	
Lajos–Kázmér,	**Lotte–Kinga,**		
Lajos–Kinga,			

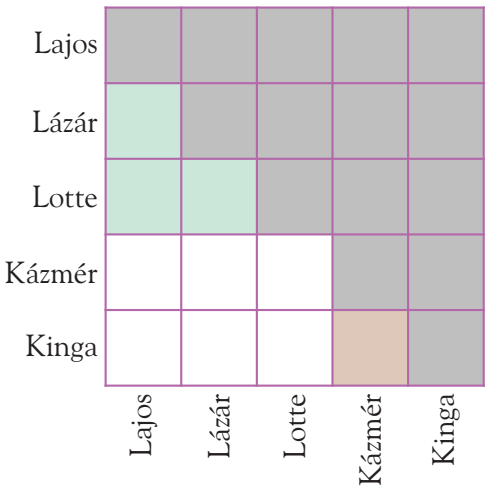
Piros betűvel a lánypárt, kék betűvel a fiúpárokat jelöltük.

(Érdemes a párosítás logikáját megfigyelni, így biztosan nem marad ki egyetlen lehetséges pár sem, illetve nem szerepel egyik pár sem többször.)

A gyerekek összesen 10 különböző módon tudnak párban segíteni a papának. A 10 pár közül pontosan egy olyan van, amelynek mindkét tagja lány, és három olyan, amelynek tagjai fiúk. Tehát a lánypár választásának valószínűsége: $\frac{1}{10}$, míg a fiúpáré: $\frac{3}{10}$. Az is látható, hogy annak lenne a legnagyobb valószínűsége, hogy különböző nemű gyerekek segítenek a papának. Ennek valószínűsége $\frac{6}{10}$, mert az összes lehetséges párok $\frac{6}{10}$ részében, azaz 6-ban van egy fiú és egy lány.

Ugyanezeket a valószínűségi értékeket kaptuk volna akkor is, ha a papa olyan testvérpárokat kért volna, hogy segítsenek neki, akiknek neve azonos betűvel kezdődik. Meg tudnád magyarázni, hogy miért?





Feladatok

K1 Az A, O, H, L, M betűkből véletlenszerűen betűsorokat készítünk úgy, hogy egymás mellé írunk hármat. Egy betűsorban egy betűt csak egyszer használunk fel. Melyik eseménynek lehet a legnagyobb, illetve a legkisebb a valószínűsége:

– a betűsor M-mel kezdődik;

– a betűsorban nincs M betű;

– a betűsor értelmes magyar szó?

Válaszodat indokold!

K2 Végezd el a következő kísérletet 50-szer! Egy edénybe tegyél 4 db 10 Ft-ost, 3 db 20 Ft-ost és 3 db 50 Ft-ost!

Húzz ki egymás után három érmét, és minden húzás után írd fel, mit húztál, majd tedd vissza a kihúzott pénzt!

Számítsd ki a felsorolt események relatív gyakoriságát! Ábrázold a relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon!

A esemény: 20 Ft–10 Ft–50 Ft a sorrend;

B esemény: 50 Ft–20 Ft–20 Ft a sorrend;

C esemény: 20 Ft–10 Ft–10 Ft a sorrend;

D esemény: 10 Ft–10 Ft–10 Ft a sorrend.

Megegyezett a gyakoriságok összege a kísérletek számával?

K3 Végezd el az előző feladatban szereplő kísérletet azzal a változtatással, hogy nem teszed vissza a kihúzott érméket a kísérlet közben! Hajtsd végre az utasításokat, majd válaszold meg most is az előző feladat kérdéseit!

K4 Anna és Tomi a következő játékot játsszák. Egy urnába 100 darab cédulát tesznek, amelyekre előzőleg felírták az egész számokat 1-től 100-ig. Visszatevés nélkül kihúznak két cédulát, és ha a kihúzott számok összege páratlan, akkor Anna nyer, ha páros, akkor pedig Tomi.

a) Igazságos-e a játék?

b) Mi a válasz, ha három kihúzott szám összege szerint játszanak?

E5 Egybevágó szabályos háromszöglapokból készíts oktaédert! (8 db-ot kell összeragasztanod a test elkészítéséhez.)

Színezd a lapokat három színnel (minden lapot egy színnel) úgy, hogy a színek dobásának valószínűsége a következő legyen:

egyik szín esetén $\frac{3}{8}$, a másik szín esetén: $\frac{1}{4}$ valószínűség legyen!

Hány lapot színeztél ki a harmadik színnel?

E6 Tíz korong közül háromnak két oldala piros, kettőnek két oldala kék, a további ötnek egyik oldala piros, a másik kék. A tíz korongot beletesszük egy urnába, egyet kihúzunk véletlenszerűen, és megnézzük az egyik oldalát. Hogyan érdemes tippelnünk a kihúzott korong másik oldalára?

E7 Egy sípályán a hegy lábától három sífelvonóval lehet feljutni a hegy tetejére. A hegy tetejétől minden felvonó aljához három különböző nehézségű pályán tudunk lesiklani, egy fekete, egy piros és egy kék pályán. A pályákat véletlenszerűen választottuk. Hány különböző lesiklást lehet tervezni a hegy tetejétől az aljáig? Mekkora annak a valószínűsége, hogy

a) három kék pályán;

b) mindhárom különböző színű pályán;

c) egy piros és két fekete pályán;

d) több piros, mint kék pályán siklottunk le?



Zokni, kesztyű, sál, sapka

Bújócska a szekrényben

Egy szekrény polcain zoknik, kesztyűk, sálak vannak. A szekrény egy teljesen sötét szobában áll. Jól tudjuk, hogy melyik polcon mi van. A szobában nem lehet felkapcsolni a lámpát, teljes sötétségben kell keresgélnünk az egyes polcokon.

1. példa

Egy szekrényben párosítatlanul hevernek a zoknik. Összesen 10 darab, amelyek tapintásra teljesen egyformák. Színük szerint 6 kék és 4 piros.



a) Hány zoknit vegyünk ki, hogy biztosan legyen köztük egy pár?

b) Hány zoknit vegyünk ki, hogy biztosan legyen köztük egy kék pár?

c) Hány zoknit vegyünk ki, hogy biztosan legyen köztük egy piros pár?

Jelöljük K-val a kék, P-vel a piros zoknikat!

a) 1 zokniból nem lesz pár, tehát biztos, hogy legalább 2 zoknit kell kivenni. De ha nem vagyunk elég szerencsések, akkor lehet, hogy egy piros, egy kék zoknit veszünk ki – ez azonban nem egy pár.

Ha még egyet veszünk, akkor az előforduló színösszeállítások lehetnek: **KKK**, **KK**P, K**PP**, P**PP**. Ezek között már egész **biztosan mindig** lesz egy pár.

b) Ha azt akarjuk, hogy legyen egy kék pár a zoknik között, akkor nem elég 3 zoknit kivenni, hiszen láttuk, hogy abban az esetben lehet, hogy nincs is kék a kivettek között. (A rossz esetek KPP, PPP.)

Ha 4 zoknit veszünk ki, akkor is lehet, hogy nincs kék köztük, mert lehet, hogy mind a 4 piros. (A rossz esetek KPPP, PPPP.) (Gondolj arra, hogy egy manó mindig azt a zoknit teszi a kezed ügyébe, amelynek a legkevésbé örülsz!)

Ha 5 zoknit veszünk ki, akkor a legrosszabb eset az, ha köztük 4 piros van és 1 kék. (KPPPP.)

Ha 6 zoknit veszünk ki, akkor a legrosszabb esetben is legalább 2 kék lesz köztük, hiszen mindössze 4 piros zokni van a szekrényben.

Az összes lehetséges eset: PPPPKK, PPPKKK, PPKKKK, PKKKKK, KKKKKK. Látható, hogy még a legrosszabb esetben is (amikor a legkevesebb kék zokni van) lesz egy pár kék zokni.

c) A legrosszabb eset az, amikor az összes kék zoknit kivesszük és még két pirosat. Ez $6+2=8$ darab.

Az összes lehetséges eset: KKKKKKPP, KKKKKPPP, KKKKPPPP. (Több lehetőség nincs, mert kék zokniból 6, pirosból csak 4 darab van.)

Látható, hogy még a legrosszabb esetben is (amikor a legkevesebb a piros) lesz egy pár piros zokni.

2. példa

Legfeljebb hány zoknit vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük egy kék pár?

Ha csak egy zoknit veszünk ki, biztosan nincs köztük pár. Ha már kettőt, akkor lehet, hogy két kéket veszünk ki. Vagyis két zoknit már nem vehetünk ki, ha biztosan nem akarjuk, hogy a kivettek között legyen kék pár zokni.

Feladatok

Az első polc



Ezen a polcon sálak vannak: 4 piros és 3 fekete. Semmi másban nem különböznek, csak a színükben.

A1 Legalább hány sálat kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy piros?

A2 Legalább hány sálat kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy fekete?

K3 Legalább hány sálat kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük piros is és fekete is?

K4 Legfeljebb hány sálat vehetünk ki ahhoz, hogy biztosan ne legyen köztük két ugyanolyan színű?

K5 Legalább hány sálat kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két ugyanolyan színű?

K6 Hány sálat vegyünk ki ahhoz, hogy biztosan több legyen a piros, mint a fekete?

A második polc

Ezen a polcon is sálak vannak: 5 piros, 2 fekete és 3 fehér. Semmi másban nem különböznek, csak a színükben.

K1 Hány sálat vegyünk ki ahhoz, hogy minden színűből biztosan legyen legalább egy darab?

K2 Legfeljebb hány sálat vehetünk ki, ha azt akarjuk, hogy semmiképpen ne legyen köztük három különböző színű?

K3 Hány sálat vegyünk ki, ha azt akarjuk, hogy legyen olyan színű, amelyből mindet kihúztuk?

K4 Hány sálat vegyünk ki ahhoz, hogy biztosan több legyen a fehér és a piros együtt, mint a fekete?

K5 Hány sálat vegyünk ki ahhoz, hogy biztosan több legyen a fekete és a piros együtt, mint a fehér?

E6 Hány sálat vegyünk ki ahhoz, hogy biztosan több legyen a fehér és a fekete együtt, mint a piros?

Harmadik polc

Ezen a polcon vannak a zoknik: 6 pár zöld és 4 pár piros. A zoknik semmi másban nem különböznek, csak a színükben.

K1 Legalább hány darab zoknit kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két egyszínű pár?

K2 Legalább hány darab zoknit kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két ugyanolyan színű, egyszínű pár?

K3 Legalább hány darab zoknit kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két különböző színű pár?

K4 Legfeljebb hány zoknit vehetünk ki ahhoz, hogy semmiképpen se legyen köztük fekete pár?

K5 Legalább hány zoknit kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy felemás pár a bohócbálhoz?

K6 Legalább hány zoknit kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy zöld és egy piros zokni?



A negyedik polc

Ezen a polcon ötujjas kesztyűk vannak: 6 pár fehér és 4 pár piros. A kesztyűket tapintásra nem tudjuk megkülönböztetni. Csak amikor már a világosban vagyunk, tudjuk megállapítani a színüket, illetve azt, hogy jobb- vagy balkezesek.

A1 Legalább hány darab kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egyszínű pár?

K2 Legalább hány darab kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két egyszínű pár?

K3 Legalább hány darab kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két ugyanolyan színű, egyszínű pár?

K4 Legalább hány darab kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy piros színű pár?

K5 Legalább hány darab kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy fehér színű pár?

K6 Legalább hány darab kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük két különböző színű pár?

K7 Legfeljebb hány kesztyűt vehetünk ki ahhoz, hogy semmiképpen se legyen köztük egyszínű pár?

K8 Legfeljebb hány kesztyűt vehetünk ki ahhoz, hogy semmiképpen se legyen köztük egy fehér pár?

K9 Legalább hány kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy felemás pár a farsangi bálhoz?

K10 Legalább hány kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy fehér és egy piros kesztyű?

Az osztályban

3. példa

Egy osztályban minden hónap utolsó szombatján felköszöntik azokat a gyerekeket, akiknek abban a hónapban van a születésük napja.

a) Legalább hány gyerek jár abba az osztályba, amelyben minden hónapban ünnepelnek?

b) Legalább hány gyereket vegyenek fel egy osztályba ahhoz, hogy biztosan ünnepelhessenek minden hónapban?

c) Legfeljebb hány gyerek járhat egy osztályba, ha azt akarjuk, hogy ne legyen minden hónapban ünneplés?

a) Ha minden hónapban ünnepelnek, akkor minden hónapra van legalább 1 gyerek, akinek abban a hónapban van a születése napja. Mivel 12 hónap van, ehhez legalább 12 gyerekre van szükség. Az osztályba legalább 12 gyerek jár.

b) Lehet, hogy minden gyerek januárban született. Lehet, hogy újabb gyerekek érkeznek az osztályba – de azok is januári születésűek. Erre a kérdésre tehát az a válasz, hogy nem tudjuk biztosítani azt, hogy minden hónapra essen születésnap!

c) 12 gyerek esetén elképzelhető, hogy az osztályban minden gyerek más és más hónapban született. Ha nem akarjuk, hogy minden hónapra essen születésnap, akkor legfeljebb 11 gyerek lehet az osztályban.

Feladatok

Ebbe az osztályba 32 tanuló jár.

Felírták egy-egy papírra, hogy abban a naptári évben a születésnapjuk a hét mely napjára esik (hétfő, kedd, szerda stb.).

A1 Biztos-e, hogy van olyan nap, amelyik legalább két cédulán szerepel?

A2 Biztos-e, hogy minden nap szerepel valamelyik cédulán?

K3 Igaz-e, hogy ha egy nap szerepel, akkor az több cédulán is szerepel?

K4 Igaz-e, hogy van olyan nap, amelyik 3 cédulán is szerepel?

K5 Legfeljebb hány cédulán szerepelhet a hétfő?

K6 Lehet-e, hogy egyik nap sem szerepel 4-nél többször?

E7 Legkevesebb hány cédulán szerepel a legtöbbször előforduló nap?

Felírták egy-egy papírra, hogy abban a naptári évben a születésnapjuk a hónap melyik napjára esik (elseje, másodika, harmadika stb.).

K8 Biztos-e, hogy minden nap szerepel valamelyik cédulán?

K9 Biztos-e, hogy van olyan nap, amelyik legalább két cédulán szerepel?

K10 Igaz-e, hogy ha egy nap szerepel, akkor az csak egy cédulán szerepelhet?

K11 Igaz-e, hogy van olyan nap, amelyik 3 cédulán is szerepel?

K12 Legfeljebb hány cédulán szerepelhet egy-egy nap?

K13 Legkevesebb hány cédulán szerepel a legtöbbször előforduló nap?

E14 Lehet-e, hogy mindegyik nap legfeljebb egy cédulán szerepel?

K15 A ti osztályotokban van-e két olyan tanuló, aki ugyanannyiadikán született?

Nehéz gondolkodtató feladatok

Kétszer három ember



E1 Régen, amikor még gőzmozdonyok voltak, előfordult, hogy a füst becsapott a nyitott ablakon, és az utasok kormosak lettek.

Egy gőzmozdonnyal közlekedő vonaton a kalauz egy fülkébe érve így szólt az ott ülő három utashoz: „Kedves utasaim, valaki önök közül kormos lett. Bármelyik állomáson lesz elég idő és lesz vízcsap, meg lehet mosakodni.” A fülkében nincs tükör, az utasok nem beszélgetnek senkivel, nem törölgetik az arcukat.

A második megállónál a kormos arcúak leszálltak arcot mosni.

Hány utas volt kormos?



E2 Három ember – Ödön, Richárd és Jenő – fogságba esik. A fogvatartóik 3 kék és 2 piros sapka közül egyet-egyet a fejükre húznak úgy, hogy semelyikük se lássa a saját sapkáját. A fogdában nincs tükör, egymással és egyáltalán senkivel nem beszélhetnek. Nem vehetik le a sapkájukat sem. Csak akkor szabadulhatnak ki, ha kitalálják, hogy milyen színű sapka van a fejükön. Ha tévednek, örök fogságban ragadnak.

Félóránként benyit egy őr, és megkérdezi, tudja-e valaki, milyen színű sapka van a fején. Aki kitalálja, az távozhat.

A három ember okos, nem kockáztat, biztosra kell menniük.

a) Ki tudnak-e szabadulni, ha 2 piros és 1 kék sapkát húztak a fejükre?

b) Ki tudnak-e szabadulni, ha 1 piros és 2 kék sapkát húztak a fejükre?

c) Ki tudnak-e szabadulni, ha 3 kék sapkát húztak a fejükre?

d) Mennyi idő múltán szabadulhatnak ki az egyes esetekben?

10. Fogalomtár

Alap (hatványé): l. hatvány alak!

Alaphalmaz: az a halmaz, amelynek az elemeihez hozzárendelünk egy-egy elemet a képhalmazból.

Algebrai kifejezés: ha a négy alapműveletet számokra és betűkre véges sokszor alkalmazzuk, akkor algebrai kifejezést kapunk.

Csúcsszögek: két egyenes metszésénél keletkező négy szög közül az egymással szemben fekvőket nevezzük így.

Egyállású szögek: egy szögpárt egyállásúnak nevezünk, ha a szögszárak páronként párhuzamosak, és a szárak iránya páronként megegyezik. Az egyállású szögek egyenlők.

Egyenes hasábok: azok a testek, amelyeket két párhuzamos, egybevágó sokszög és annyi téglalap határol, ahány oldalú a sokszög.

Egyenestartó transzformáció: transzformációk, amelyeknél bármely egyenes képe is egyenes.

Egyértelmű hozzárendelés: minden alaphalmazbeli elemhez csak egy elemet rendelünk a képhalmazból.

Egyenlet: az egyenlőségjellel összekapcsolt két kifejezést hívjuk egyenletnek a matematikában. A két kifejezést az egyenlet jobb és bal oldalának nevezzük.

Együttható: a betűs kifejezésekben szereplő számszorzók neve.

Függvény: az adott alaphalmaz és a képhalmaz közötti egyértelmű hozzárendelés.

Geometriai transzformáció: azokat az egyértelmű hozzárendeléseket, amelyek két ponthalmaz között értelmezettek és ponthoz pontot rendelnek, geometriai transzformációnak nevezzük.

Gyakoriság: egy rögzített érték vagy egy esemény előfordulásainak száma a megfigyelés során.

Hatvány alak: ha egy számot többször önmagával szorzunk, azt röviden úgy jelöljük, hogy a szám fölé jobbra kisebb számmal leírjuk a tényezők számát. Ezt az alakot nevezzük így. A számot, amelyet szorzunk **alap**nak, a fölé írt kis számot **kitevő**nek mondjuk.

Háromszög középvonala: a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő egyenes a háromszög középvonala. Olykor csak a két felezőpont által meghatározott szakaszra vagy annak a hosszára gondolunk, amikor a középvonal elnevezést használjuk.

Háromszög magassága: a háromszög egyik csúcsának a csúcsot nem tartalmazó oldalegyenestől való távolsága.

Háromszög súlypontja: a háromszög három súlyvonala egy pontban, a súlypontban metszi egymást.

Háromszög súlyvonala: a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes. Van, amikor csak a két pont által meghatározott szakaszt vagy annak a hosszát nevezzük súlyvonalnak.

Képhalmaz: az a halmaz, amelynek az elemeit rendeljük az alaphalmaz elemeihez.

Kitevő: l. hatvány alak!

Kiegészítő szögek: ha két szög szárai párhuzamosak és az egyik szögszáruk egyező, a másik pedig ellentétes irányú, akkor azok kiegészítő szögek. A kiegészítő szögek összege $180°$, azaz egymást $180°$-ra egészítik ki.

Középpontosan szimmetrikus alakzatok: azok a síkbeli alakzatok, amelyekhez van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.

Középpontos tükrözés: legyen adott a síkon egy K pont. Egy tetszőleges síkbeli P pont P' képét megkapjuk, ha a P pontot összekötjük a K ponttal, és az így kapott egyenesre, a P pontot nem tartalmazó felére felmérjük a K ponttól a KP távolságot. Az így meghatározott transzformációt középpontos tükrözésnek nevezzük.

Legkisebb közös többszörös: két szám legkisebb közös többszöröse az a szám, amely mindkettőnek többszöröse, és a közös többszörösök közül a legkisebb.

Legnagyobb közös osztó: két szám legnagyobb közös osztója az a szám, amely mindkettőnek osztója, és a közös osztók közül a legnagyobb.

Lineáris függvények: az $x \mapsto mx + b$ hozzárendeléssel megadott függvények neve lineáris függvény.

Mellékszögek (társszögek): azok a szögek, amelyeknek egyik száruk közös, a másik szögszáruk egy egyenesre illeszkedik és ellentétes irányú. A mellékszögek is kiegészítő szögek, összegük 180°.

Mennyiség: a mérések eredménye, ami mérőszámból és mértékegységből áll.

Merőleges szárú szögek: azok a szögpárok, amelyeknél páronként merőlegesek a szárak.

Mérlegelv: az egyenletmegoldás során azt használjuk fel, hogy az egymással egyenlő mennyiségeket azonos módon változtatatjuk, mert akkor is igaz marad az egyenlőség. Ez a mérlegelv lényege.

Négyzet: olyan téglalap, amelynek két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.

Normálalak: a számoknak az a felírása, amikor egy 1 és 10 közé eső számot a 10 egy hatványával szorzunk.

Paralelogramma: olyan trapéz, amelynek szárai is párhuzamosak egymással.

Paralelogramma magassága: a párhuzamos oldalegyenesek távolsága.

Pí: azt a számot, amelyik pontosan megadja, hogy a kör kerülete a kör átmérőjének hányszorosa, π-vel jelöljük.

Pótszögek: azok a szögek, amelyek összege 90°.

Racionális számok: az egész számokat és a törteket együtt racionális számoknak nevezzük. A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

Relatív gyakoriság: az a szám, amelyik megmutatja, hogy az egyes események milyen arányban fordultak elő a kísérlet során.

Rombusz: olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.

Síkidom: olyan alakzat, amelynek a pontjai egy síkban vannak. A sík darabolásával keletkezik.

Sokszög: a sokszög olyan síkidom, amelyet csak szakaszok határolnak.

Szabályos sokszög: olyan sokszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú.

Számtani sorozat: ha egy sorozatban (a második elemtől kezdve) bármely elemből kivonva az előtte álló elemet a különbség állandó.

Szögtartó transzformáció: azok a transzformációk, amelyeknél bármely szög nagysága egyenlő a képének a nagyságával.

Távolságtartó transzformáció: azok a transzformációk, amelyeknél bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával.

Téglalap: olyan paralelogramma, amelynek két szomszédos oldala merőleges egymásra.

Trapéz: olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.

Trapéz magassága: a párhuzamos oldalegyenesek távolsága.

Valószínűség: a relatív gyakoriságértékek a kísérlet számának változásával nem változnak nagymértékben. Azt tapasztaljuk, hogy egy állandó érték körül ingadoznak. Ezt az állandó értéket nevezzük valószínűségnek.

Váltószögek: a középpontosan szimmetrikus szögek neve.

Fontosabb matematikai jelölések

Szimbólum	Jelentése, neve	Olvasása	Példa
$\mathbf{N}$	Természetes számok halmaza		
$\mathbf{Z}$	Egész számok halmaza		
$\mathbf{Q}$	Racionális számok halmaza		
$\mathbf{R}$	Valós számok halmaza		
$+$	Pozitív szám előjele	plusz	$+5$
$-$	Negatív szám előjele, szám ellentettjének a jele	mínusz	-5
$\lvert\ \rvert$	Abszolútérték-jel	abszolút érték	$\lvert-2\rvert$, $\lvert1{,}2\rvert$, $\lvert x\rvert$
,	Tizedesvessző		3,75
...	Felsorolás folytatása	és így tovább	1, 2, 3, ...
%	Százalék	százalék	15%
∞	Végtelen	végtelen	
$+$	Összeadás	plusz, meg	$5 + 6$
$-$	Kivonás	mínusz, -ból, -ből	$13 - 7$
$\cdot$	Szorzás	-szor, -szer, -ször	$3 \cdot 5$
:, /	Osztás	-ban, -ben, per	$15 : 3$, a/b
$\mid$	Az oszthatóság jele	... osztója ...-nak, -nek	$3 \mid 18$
$=$	Egyenlőség	egyenlő	$a = b$
$\neq$	Egyenlőség tagadása	nem egyenlő	$a \neq b$
$<$	Kisebb	kisebb mint	$1 < 3$
$\leq$	Kisebb vagy egyenlő	legfeljebb, kisebb vagy egyenlő mint	$x \leq 10$
$>$	Nagyobb	nagyobb mint	$12 > 3$
$\geq$	Nagyobb vagy egyenlő	legalább, nagyobb vagy egyenlő mint	$x \geq 3$
$\approx$	Közelítőleg egyenlő	körülbelül	$\pi \approx 3{,}14$
$\cong$	Egybevágóság	egybevágó	$ABC_{\triangle} \cong PQR_{\triangle}$
$\sim$	Hasonlóság	hasonló	$ABC_{\triangle} \sim PQR_{\triangle}$

Prímszámok 4000-ig

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257
263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049
1051	1061	1063	1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117
1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213
1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289
1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453
1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511	1523	1531
1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607
1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693
1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777
1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871
1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951
1973	1979	1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029
2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113
2129	2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287	2293
2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357	2371	2377
2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423	2437	2441	2447
2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539	2543	2549	2551
2557	2579	2591	2593	2609	2617	2621	2633	2647	2657	2659
2663	2671	2677	2683	2687	2689	2693	2699	2707	2711	2713
2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797
2801	2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887
2897	2903	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971
2999	3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181	3187
3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257	3259	3271
3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331	3343	3347	3359
3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413	3433	3449	3457	3461
3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517	3527	3529	3533	3539
3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617
3623	3631	3637	3643	3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701
3709	3719	3727	3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797
3803	3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889
3907	3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989

A 2-, 3-, 5-tel nem osztható számok prímtényezős felbontása

7	$203 = 7 \cdot 29$	401	601	$803 = 11 \cdot 73$
11	$209 = 11 \cdot 19$	$403 = 13 \cdot 31$	607	809
13	211	$407 = 11 \cdot 37$	$611 = 13 \cdot 47$	811
17	$217 = 7 \cdot 13$	409	613	$817 = 19 \cdot 43$
19	$221 = 13 \cdot 17$	$413 = 7 \cdot 59$	617	821
23	223	419	619	823
29	227	421	$623 = 7 \cdot 89$	827
31	229	$427 = 7 \cdot 61$	$629 = 17 \cdot 37$	829
37	233	431	631	$833 = 7 \cdot 7 \cdot 17$
41	239	433	$637 = 7 \cdot 7 \cdot 13$	839
43	241	$437 = 19 \cdot 23$	641	$841 = 29 \cdot 29$
47	$247 = 13 \cdot 19$	439	643	$847 = 7 \cdot 11$
$49 = 7 \cdot 7$	251	443	647	$851 = 23 \cdot 37$
53	$253 = 11 \cdot 23$	449	$649 = 11 \cdot 59$	853
59	257	$451 = 11 \cdot 41$	653	857
61	$259 = 7 \cdot 37$	457	659	859
67	263	461	661	863
71	269	463	$667 = 23 \cdot 29$	$869 = 11 \cdot 79$
73	271	467	$671 = 11 \cdot 61$	$871 = 13 \cdot 67$
$77 = 7 \cdot 11$	277	$469 = 7 \cdot 67$	673	877
79	281	$473 = 11 \cdot 43$	677	881
83	283	479	$679 = 7 \cdot 97$	883
89	$287 = 7 \cdot 41$	$481 = 13 \cdot 37$	683	887
$91 = 7 \cdot 13$	$289 = 17 \cdot 17$	487	$689 = 13 \cdot 53$	$889 = 7 \cdot 127$
97	293	491	691	$893 = 19 \cdot 47$
	$299 = 13 \cdot 23$	$493 = 17 \cdot 29$	$697 = 17 \cdot 41$	$899 = 29 \cdot 31$
		$497 = 7 \cdot 71$		
101	$301 = 7 \cdot 43$	499	701	$901 = 17 \cdot 53$
103	307		$703 = 19 \cdot 37$	907
107	311	503	$707 = 7 \cdot 101$	911
109	313	509	709	$913 = 11 \cdot 83$
113	317	$511 = 7 \cdot 73$	$713 = 23 \cdot 31$	$917 = 7 \cdot 131$
$119 = 7 \cdot 17$	$319 = 11 \cdot 29$	$517 = 11 \cdot 47$	719	919
$121 = 11 \cdot 11$	$323 = 17 \cdot 19$	521	$721 = 7 \cdot 103$	$923 = 13 \cdot 71$
127	$329 = 7 \cdot 47$	523	727	929
131	331	$527 = 17 \cdot 31$	$731 = 17 \cdot 43$	$931 = 7 \cdot 7 \cdot 19$
$133 = 7 \cdot 19$	337	$529 = 23 \cdot 23$	733	937
137	$341 = 17 \cdot 31$	$533 = 13 \cdot 41$	$737 = 11 \cdot 67$	941
139	$343 = 7 \cdot 7 \cdot 7$	$539 = 7 \cdot 7 \cdot 11$	739	$943 = 23 \cdot 41$
$143 = 11 \cdot 13$	347	541	743	947
149	349	547	$749 = 7 \cdot 107$	$949 = 13 \cdot 73$
151	353	$551 = 19 \cdot 29$	751	953
157	359	$553 = 7 \cdot 79$	757	$959 = 7 \cdot 137$
$161 = 7 \cdot 23$	$361 = 19 \cdot 19$	557	761	$961 = 31 \cdot 31$
163	367	$559 = 13 \cdot 43$	$763 = 7 \cdot 109$	967
167	$371 = 7 \cdot 53$	563	$767 = 13 \cdot 59$	971
$169 = 13 \cdot 13$	373	569	769	$973 = 7 \cdot 139$
173	$377 = 13 \cdot 29$	571	773	977
179	379	577	$779 = 19 \cdot 41$	$979 = 11 \cdot 89$
181	383	$581 = 7 \cdot 83$	$781 = 11 \cdot 71$	983
$187 = 11 \cdot 17$	389	$583 = 11 \cdot 53$	787	$989 = 23 \cdot 43$
191	$391 = 17 \cdot 23$	587	$791 = 7 \cdot 113$	991
193	397	$589 = 19 \cdot 31$	$793 = 13 \cdot 61$	997
197		593	797	$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
199		599	$799 = 17 \cdot 47$	

A Pascal-háromszög

n \ $k = 0$											
0						1	1				
1					1	1	2				
2				1	2	1	3				
3				1	3	3	1	4			
4			1	4	6	4	1	5			
5			1	5	10	10	5	1	6		
6		1	6	15	20	15	6	1	7		
7		1	7	21	35	35	21	7	1	8	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	9	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Oktatási Hivatal
1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100
E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: NT-11780
Felelős szerkesztő: Dr. Koreczné Kazinczi Ilona
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Marcsek Ildikó
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 27,81 (A/5) ív • Tömeg: 490 gramm
1. kiadás, 2021
Tördelés, grafika: Könyv Művek Bt.
A szedés EMTEX szedőrendszerben készült

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte a Szekszárdi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Vadász Katalin

magyar
nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG