OFI

Csahóczi Erzsébet – Csatár Katalin – Kovács Csongorné –
Morvai Éva – Széplaki Györgyné – Szeredi Éva

MATEMATIKA



7

AK

Csahóczi Erzsébet – Csatár Katalin – Kovács Csongorné –
érdemes tankönyvíró érdemes tankönyvíró
Morvai Éva – Széplaki Györgyné – Szeredi Éva

Matematika 7.

tankönyv a 7. évfolyam számára

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET
BUDAPEST

A kiadvány 2015.03.26-tól tankönyvi engedélyt kapott a TKV/181-14/2015. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII.21.) EMMI-rendelet 2. melléklet 2.2.03. Matematika kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára megnevezésű kerettanterv előírásainak.

Szerzők: Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin érdemes tankönyvíró,
Kovács Csongorné érdemes tankönyvíró, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva

Lektorok: Kovács Előd, Liszkainé Papp Etelka

Bíráló: Boros Zoltánné

Felelős szerkesztő: Tótfalusi Miklós

Szerkesztő: Ackermann Rita

Illusztráció: Fried Katalin, Katona Kata, Létai Márton, Szalóki Dezső

Fotók: 123RF Képügynökség, Cultiris Képügynökség, Fabó Katalin, Kovács Csongorné,
Profimedia - Red Dot Képügynökség, Széplaki Anikó, Váczi Kristóf
(FLASHBACK PHOTO Kft.), APÁCZAI ARCHÍVUM

Borítóterv: Sellyei Tamás Ottó

Tipográfia: Könyv Művek Bt.

© Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné,
Szeredi Éva, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2014

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban kirendelt szakértő:
Mester András, Király Ildikó

ISBN: 978-963-328-344-8

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6–8.
www.ofi.hu
A kiadásért felel: dr. Kaposi József főigazgató

AP-070807

Műszaki szerkesztő: Görög Gabriella
Grafikai szerkesztő: Feledi Eszter

Terjedelem: 33,99 A/5 ív
A könyv tömege: 627 g
2. kiadás, 2016

Nyomdai előkészítés:
Könyv Művek Bt.

Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz!
(Joubert, 19. századi filozófus)

Kedves Gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó feladatgyűjteményt Nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelmeit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük: TUDNI KELL!

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:


Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal.


Amit korábban tanultatok, és már tudnotok kellene.


Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el.


Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapfeladat, ezt meg kell tudnotok oldani a továbbhaladáshoz.


Az új ismeret alkalmazását, tudásotok rögzítését, elmélyítését segítő feladat.


Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.


4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.


Internettel támogatott feladatok

A tankönyvben található **Kiegészítő tananyagokat** a matematikát magasabb óraszámban tanuló csoportoknak írtuk. A hozzájuk kapcsolódó feladatokat is a fentebb leírt szintekbe soroltuk, de más színnel jelöltük, például: 

A fentieken kívül, ha egy-egy részfeladat nehezebb, gondolkodtatóbb a többinél, így jelöljük: **123.**

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold” típusú feladatoknál mindig a füzetetekbe dolgozzatok!

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

Ha szabadidőtökben is szívesen foglalkoztok matematikafeladatokkal, akkor figyelmetekbe ajánljuk:

Abacus Matematikai Lapok 10–14 éveseknek (a Bolyai János Matematikai Társulat és a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány folyóirata)

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny (Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány)

Róka Sándor: *Egypercesek – Feladatok matematikából* (Tóth Könyvkereskedés)

Imreczené–Reiman–Urbán: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.)

Eredményes tanulást kívánunk: *a Szerzők*.

Törd a fejed!

Skatulyaelv

Példa

A 7. *a* osztály haladó angolcsoportjába 20 tanuló került. Az osztályteremben, ahol az angolórák lesznek, mindössze 19 pad van.

Igaz-e, hogy akárhogyan ültetjük le a 20 tanulót, biztosan lesz legalább egy olyan pad, amelyikben legalább ketten ülnek? Lehetséges-e, hogy dolgozatírásnál minden tanuló külön padban ül?

Megoldás



A tanulók ülhetnek kettesével, hármasával, négyesével... (ahányat a padméret megenged). Ezek teljesítik a feladat „legalább ketten ülnek” követelményét.

Ha minden padban csak egy gyerek ül, akkor a 19 padba összesen 19 tanulót tudunk leültetni. Így a kimaradt egy tanuló csak olyan padba kerülhet, ahol már egyvalaki ül. Tehát lesz egy pad, amelyben ketten ülnek.

Ebben a feladatban a tanulók száma eggyel több, mint a padok száma, ezért legalább egy padban biztosan legalább ketten ülnek, így a dolgozatírásnál nem jut mindenkinek külön pad.

Megjegyzés: Ha egy feladatban $n+1$ elemet kell n „rekeszbe” vagy „skatulyába” elhelyezni, akkor legalább egy rekeszbe legalább két elem kerül. Ezt a matematikában skatulyaelvnek nevezzük.

Feladatok

1. Egy zöldségbolt ládájában 20 fürt fehér, 8 fürt vörös és 12 fürt kék szőlő van. Az eladó nem néz oda, miközben szedi a zacskóba a szőlőt. Hány fürt szőlőt kell kivennie a ládából, hogy a zacskóban biztosan legyen

a) 1 fürt fehér, *b)* 1 fürt vörös, *c)* 1 fürt kék szőlő?

2. Legalább hány embernek kell lennie abban a társaságban, amelyben biztosan találunk kettő olyat, akinek a születésnapja

a) ugyanabban a hónapban van, *b)* ugyanarra a betűre végződő hónapban van,

c) ugyanazzal a betűvel kezdődő hónapban van?

3. A kézművesszakkörön a gyöngyfűzéshez a tanárnő minden gyereknek elkészített egy zacskó gyöngyöt, amelybe 20 piros, 16 kék, 25 sárga, 15 lila és 24 zöld színű gyöngyöt tett. Ha a zacskóba nem lehet belelátni, legalább hány gyöngyöt kell kivenni ahhoz, hogy köztük legyen



a) piros vagy kék, *b)* piros és kék,
c) két különböző szín, *d)* valamelyik színből legalább három,
e) az összes sárga, *f)* valamelyik színből az összes?

Halmazok

Példa

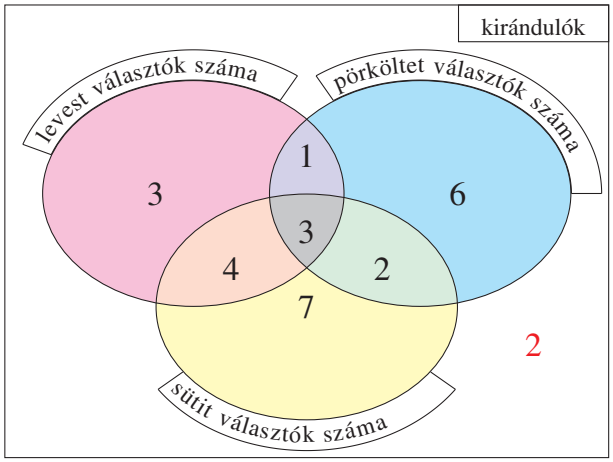
A 28 fős 7. *b* osztály őszi kirándulásán háromfogásos ebédet kaptak a gyerekek. Borsóleves, csirkepörkölt és almás pite volt a menü. Mivel ebéd előtt mindenféle finomságokkal kínálgatták egymást, sokan nem tudtak enni mind a háromféle ételből.

Borsólevest és csirkepörköltet négy tanuló, csirkepörköltet és almás pitét öt tanuló, borsólevest és almás pitét hét tanuló evett. Mindhárom ételből csak hárman ettek.

Csak egyféle ételt összesen 16-an fogyasztottak: hárman borsólevest, hatan csirkepörköltet, heten almás pitét. Hányan nem ettek egyáltalán ebédet?

Megoldás

A feladatot halmazábra (Venn-diagram) segítségével oldjuk meg. A halmazábra egyes részeibe az egy, kettő, illetve három fogást fogyasztó tanulók száma kerül. Azok, akik mindháromból ettek, nyilván ettek kétfélét is (levest és sütit vagy levest és pörköltet vagy pörköltet és sütit).



Az ábra kitöltését a három halmaz közös részével, középen kezdjük, ide beírjuk a 3-at. A **csak** kétfélét evők számát akkor kapjuk meg, ha a két fogást evők megadott számából levonjuk a három fogást evők számát. Például: levest és sütit 7-en ettek, de közülük 3-an háromfélét is, így $7 - 3 = 4$ olyan gyerek volt, aki **csak** levest és sütit evett. Hasonló gondolatmenettel töltjük ki a halmazábra többi részét. A „kirándulók” feliratú téglalapba rajzolt három halmazba az ebédelők száma, azon kívül a nem ebédelők száma kerül. A legalább egyféle ételt evők száma tehát: $3 + 1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 7 = 26$. Összesen 28-an voltak, ha ebből kivonjuk az ebédelők számát, akkor megkapjuk a nem ebédelők számát: $28 - 26 = 2$. A kiránduláson tehát két tanuló nem ebédelt.

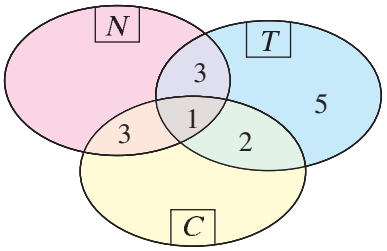
Feladatok

1. A 48-nál nem nagyobb pozitív egészek közül hány szám osztható

a) 3-mal; *b)* 4-gyel; *c)* 3-mal is és 4-gyel is;
d) 3-mal vagy 4-gyel; *e)* 4-gyel, de 3-mal nem? Készíts halmazábrát!

2. A nyári táborozás egyik napján 22-en fagylaltoztak. A gyerekek egy- vagy kétgombócos fagyit vettek, 18-an csokoládét, 16-an epret. Hányan vettek kétgombócos fagylaltot, ha tudjuk, hogy senki nem evett két egyforma gombócot, és mindenki csokoládé- és eperfagylalt közül választott.

3. A nyári szünetben a gyerekek a nagymamájuknál (N), vagy valamilyen közösségi táborban (T), vagy a családdal nyaraltak (C). A halmazábrába a számok az élménybeszámolók alapján kerültek.



Másold le a füzetedbe a halmazábrákat, és töltsd ki a hiányzó adatokat, ha azt is megtudtuk, hogy a nagymamánál 2-vel kevesebben, a családdal pedig 4-gyel kevesebben voltak nyaralni, mint ahányan táborban! Hány tanuló volt a nagyinál, és hány a családdal? Hányan nyaraltak összesen?

4. Egy 40 fős évfolyam 75%-a sportol, a futball- vagy a kosárlabdaedzések valamelyikére jár. A sportolók 70%-a futballozik, 60%-a pedig kosárlabdázik. Hányan látogatják mindkét edzést, és hányan járnak csak az egyik, illetve csak a másik sportfoglalkozásra?

Kombinatorika

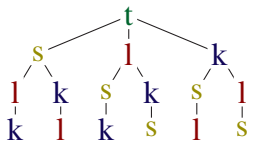
Példa

Ákos négyféle autós matricát kapott: terepjárót (t), sportkocsit (s), limuzint (l) és kombit (k), mindegyik fajtából egyet-egyet. Az új matricákat egy sorba beragasztja a többi mellé. Hányféle sorrendben kerülhetnek az új matricák a gyűjtőfüzetbe?

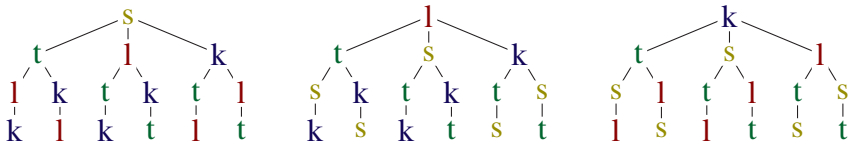
Megoldás

A sorba rendezés közben a négy matrica közül bármelyik kerülhet bármelyik helyre. Az eseteket fadiagrammal szemléltetjük.

Először tegyük a terepjárót az első helyre. Ebben az esetben 6 különböző sorrendet találtunk.



Ugyanezt kapjuk, ha a sportkocsit, vagy a limuzint, vagy a kombit tesszük az első helyre. Ez összesen $4 \cdot 6 = 24$ különböző sorrendet jelent.



A feladat megoldása a matricák véletlenszerű kihúzásával is elképzelhető úgy, hogy a kihúzott matricát nem tesszük vissza a dobozba. Így az első helyre 4-féle, a másodikra 3-féle, a harmadikra 2-féle, a negyedikre 1-féle matrica választható, ami $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ különböző kihúzási sorrendet eredményez.

Feladatok

1. 3 cm-es piros, kék, sárga és zöld szívószálaink vannak, mindegyikből egy. Ezeket cérnával egymáshoz fűzzük. Hányféle különböző színsort tudunk készíteni?

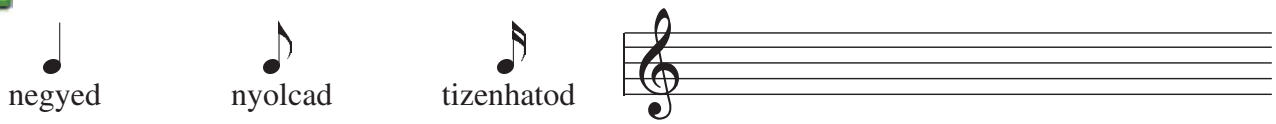
2. Hányféleképpen állítható egy körbe 6 gyerek, ha azonosnak tekintjük az olyan köröket, ahol az egyes gyerekek jobb oldali és bal oldali szomszédjai változatlanok?



3. A nyári táborban a gyerekek körjátékot játszanak. Egy nagy kört alkotnak úgy, hogy egymástól egyenlő távol állva, mindenkinek van átellenes párja. (Az átellenes párok a kör egy átmérőjének két végpontjában állnak.) Valamelyik gyerektől 1-es számmal kezdve sorban mindenki kap egy sorszámot. Hányan állnak a körben, ha a 7-es számú gyerekkel átellenben a 19-es sorszámú áll?

4. A pöttyös dominón 0-tól 9-ig lehetnek pontok. Hány darabból áll a teljes készlet?

5. Szerezzünk zenét! Készítsünk különböző ritmusokat!



a) Hányféle különböző ritmusképletet lehet készíteni az ábrán látható három ritmusérték segítségével, ha mindegyiket csak egyszer használhatjuk?

b) Hányféle három hangból álló dallammotívum készíthető, ha az ötvonalas kottapapíron a hangjegyeket csak vonalra, illetve azok közé helyezhetjük, és a dallamok készítésénél csak egyféle értékű kottafejet használunk?

Logika

Példa

a) Fogalmazzuk meg az állítások megfordítását!

1. Ha nyár van, akkor nincs tanítás.
2. Ha egy gyerek 13 éves, akkor iskolába jár.

b) Fogalmazzuk meg az állítások tagadását!

1. Ez az úszómedence mély.
2. Minden gyerek szereti a kalandparkot.
   Vagy, ami ezzel egyenértékű:
   Nincs olyan gyerek, aki nem szereti a kalandparkot.



Megoldás

a)	**Az állítás**	**Az állítás megfordítása**
1.	Ha nyár van, akkor nincs tanítás.	Ha nincs tanítás, akkor nyár van.
2.	Ha egy gyerek 13 éves, akkor iskolába jár.	Ha egy gyerek iskolába jár, akkor 13 éves.

b)	**Az állítás**	**Az állítás tagadása**
1.	Ez az úszómedence **mély**.	Ez az úszómedence **nem mély**.
2.	**Minden gyerek szereti** a kalandparkot. Vagy, ami ezzel egyenértékű: **Nincs olyan gyerek, aki nem szereti** a kalandparkot.	**Nem minden gyerek szereti** a kalandparkot. Vagy, ami ezzel egyenértékű: **Van olyan gyerek, aki nem szereti** a kalandparkot.

Feladatok

1. Fogalmazd meg az állítások megfordítását!

1. Ha esik az eső, akkor megázom.
2. Ha éhes vagyok, akkor eszem.
3. Ha megtanultam a leckét, akkor jól felelek.
4. Ha beteg vagyok, akkor lázam van.
5. Ha korán keltem, akkor álmos vagyok.



2. Fogalmazd meg az állítások tagadását!

1. A zenehallgatástól jó kedvem lesz.
2. A testnevelés órán mindenki elfárad.
3. Minden ember szereti a 3D-s filmeket.
4. Van olyan lány, aki okos is és szép is.
5. Nincs olyan gyerek, aki nem szereti a szünidőt.

3. Jellemezd az állítások tartalmát a három lehetőség valamelyikével!

A) Mindig igaz. *B)* Mindig hamis. *C)* Lehet, hogy igaz, lehet, hogy hamis.

1. A paralelogrammának van szimmetriatengelye.
2. A trapéznak két szimmetriatengelye van.
3. A deltoidnak pontosan három derékszöge van.
4. A rombusznak van három hegyesszöge.
5. Két tengelyesen tükrös háromszögből összeállított négyszög is tengelyesen tükrös.
6. A szabályos háromszögnek van két tükörtengelye.

4. Döntsd el, hogy igazak-e vagy hamisak az állítások! Válaszaidat indokold!

1. Négy egymást követő természetes szám összege osztható 4-gyel.
2. Ha egy szám osztható 3-mal és 6-tal, akkor osztható 18-cal.
3. Ha egy szám osztható 3-mal vagy 6-tal, akkor osztható 18-cal.
4. Ha két egyenes egy síkban van és nincs közös pontjuk, akkor a két egyenes párhuzamos.

5. Ha két egyenes egy síkban van vagy nincs közös pontjuk, akkor a két egyenes párhuzamos.
6. Minden derékszögű háromszög tengelyesen szimmetrikus.
7. Van olyan háromszög, amelyben az oldalak hossza 2 cm, 4 cm, 6 cm.
8. Ha egy téglalap területének mérőszáma négyzetszám, akkor a téglalap négyzet.
9. Van olyan deltoid, amelynek pontosan két tükörtengelye van.
10. Három síkbeli egyenes legfeljebb 7 részre osztja a síkot.

Vegyes feladatok

5. Egy csibekeltető üzemben 60 naposcsibét négyzetes rekeszekbe helyeznek el az ábrán látható módon.

6	9	6
9		9
6	9	6

Így a négyzet mindegyik oldala mentén szemmel tartható a 21 kis állat. Pár nap múlva 4 db, már életképes kiscsibét áthelyeznek más helyre, és az itt maradtakat úgy rendezik el, hogy ismét minden oldalon 21 db csibe legyen. Hányszor tudják ezt az elvételt és az átrendezést megismételni úgy, hogy a négyzetes rekesz egy-egy oldalán mindig 21 db csibe legyen?

6. Három szabályos dobókockát egymásra rakunk úgy, hogy mindegyiknek a három pöttyöt ábrázoló lapja van alul, és egy-egy lapukkal teljesen illeszkednek.

Mennyi lesz a kapott négyzetes oszlop négy oldallapján a pöttyök összege?

Mennyi ez az összeg, ha a kockának más lapját helyezzük alulra?

7. Egy szabályos dodekaéder minden lapját 1-től 12-ig terjedő számokkal megjelöljük. (A szabályos dodekaédert 12 db szabályos ötszög határolja.) Ha ezzel a „dobótesttel” egyszer dobunk, mekkora a valószínűsége annak, hogy



a) 3-mal osztható számot dobunk,

b) prímszámot dobunk,

c) olyan számot dobunk, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 3?

A kapott valószínűség-értékeket fejezd ki százalék alakban is!

8. Cicoma Cili reggelente egy színes lapú dobókocka feldobásával dönti el, hogy milyen színű blúzban megy aznap iskolába.

Mekkora a különböző színű blúzok választásának valószínűsége, ha a 6 lapú kocka 1 lapja piros, 2 lapja lila és 3 lapja zöld?

Változik-e a lila blúz felvételének esélye, ha a kockán van két szomszédos lila lap vagy két szemközti lila lap?



Számok és műveletek

Milyen számokat ismerünk?



A legrégebben ismert számok a pozitív egész számok.

A számokról szóló legrégebbi emlékeink szerint Mezopotámiában a nomád pásztorok agyagkorsóba dobált kavicsokkal tartották számon a juhokat. Az agyagkorsót pecséttel lezárták, és csak számadáskor törték fel. Ha minden kavicsnak pontosan egy juh párja volt, akkor a legeltetés során nem veszett el egy sem.

A pozitív egész számok jelenthetnek **darabszámot** és **sorszámot** is.

A 0-t is a természetes számok közé soroljuk, bár a 0 fogalma sokkal később alakult ki. A **természetes számok halmazát** tehát a pozitív egész számok és a 0 nulla alkotják.

A természetes számok körében kialakultak az alapműveletek: az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás. Az összeadást és a szorzást mindig el lehet végezni a természetes számok között, a kivonást és az osztást azonban nem. Úgy is mondjuk, hogy a kivonás és az osztás kivezet a természetes számok köréből.

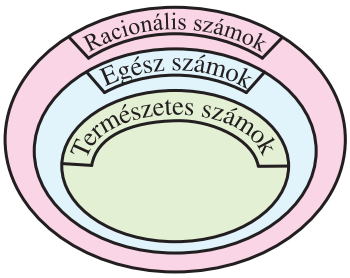
A pozitív természetes számok halmaza először a törtekkel bővült. Ezt az tette szükségessé, hogy a számokat nemcsak darabszámok, hanem másfajta mennyiségek (például: hosszúság, idő, térfogat) mérésére is elkezdték használni. A pozitív egész és törtszámok világában már az osztás is mindig elvégezhető.

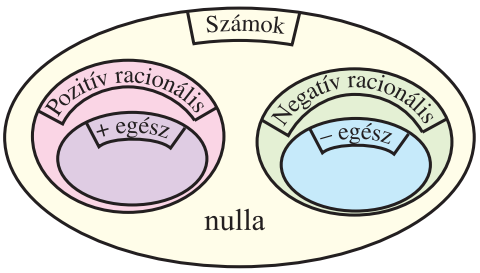
Történetileg sokkal később alakult ki a negatív számok fogalma.

Európában csak a 12. században kezdték el használni a negatív számokat, elsősorban arra, hogy a vagyoni helyzetet lejegyezzék. Később a negatív számok használata segített újfajta mennyiségek bevezetésében is: meg lehetett alkotni a negatív hőmérséklet, a negatív idő fogalmát.

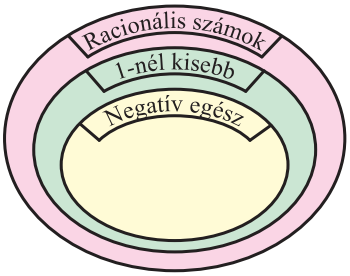
A törtekkel és a negatív számokkal kibővített számkörben már mind a négy alapművelet elvégezhető bármely két számmal, természetesen a 0-val való osztás kivételével.

Ennek a kibővített számkörnek a matematikusok nevet is adtak, az egészeket és a törtszámokat együttesen **racionális számoknak** nevezték el.





Feladatok

1. 

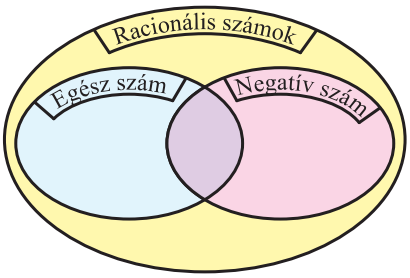
Helyezd el a számokat a halmazábrában!

$\frac{7}{8}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{9}{3}$; -5; $-\frac{8}{4}$; $\frac{13}{12}$; 1; $0{,}3$; -1; $1{,}1$; 0

2. *a)* Ezek a számkártyáink vannak, mindegyikből egy darab:

3 | 9 | 11 | −2 | −7

Készíts belőlük történeteket, és helyezd el azokat a halmazábrán a füzetedben!



b) A halmazábra részeit kiszíneztük. Fogalmazd meg, milyen tulajdonságú számok tartoznak az egyes részekbe!

c) Van-e olyan tartománya az ábrának, ahova a készített történek közül egy sem kerülhet?

3. Állításokat írtunk, és megadtuk a megfordításukat is. Döntsd el, melyik igaz, melyik nem!

a) Két természetes szám összege is természetes szám.

Ha két szám összege természetes szám, akkor mindkét szám természetes szám.

b) Két egész szám szorzata egész szám.

Ha két szám szorzata egész szám, akkor mindkét tényező egész szám.

c) Két 0-tól különböző egész szám hányadosa egész szám.

Ha két szám hányadosa egész szám, akkor az osztandó is és az osztó is egész szám.

4. Melyik állítás igaz, melyik nem? Fordítsd meg az állításokat, és a megfordításokról is döntsd el, hogy igazak-e vagy nem!

a) Ha egy szám negatív egész szám, akkor az abszolút értéke természetes szám.

b) Ha egy szám pozitív egész szám, akkor a reciproka törtszám.

c) Ha egy szám fele egész szám, akkor maga a szám is egész szám.

d) Ha egy szám kétszerese egész szám, akkor maga a szám is egész.

5. Milyen szám állhat az $\boxed{x}$ számkártya másik oldalán, ha tudjuk, hogy

a) $\boxed{x} < 0$, *b)* $-\boxed{x} > 0$, *c)* $\boxed{x} > 0$, *d)* $-\boxed{x} < 0$,

e) $|\boxed{x}| > 0$, *f)* $-|\boxed{x}| < 0$, *g)* $|\boxed{x}| \leqq 0$

6. Állításokat írtunk, megadtuk a megfordításukat is. Döntsd el, melyik igaz, melyik nem!

(1) Ha $a > b$, akkor $|a| > |b|$. A megfordítása: Ha $|a| > |b|$, akkor $a > b$.

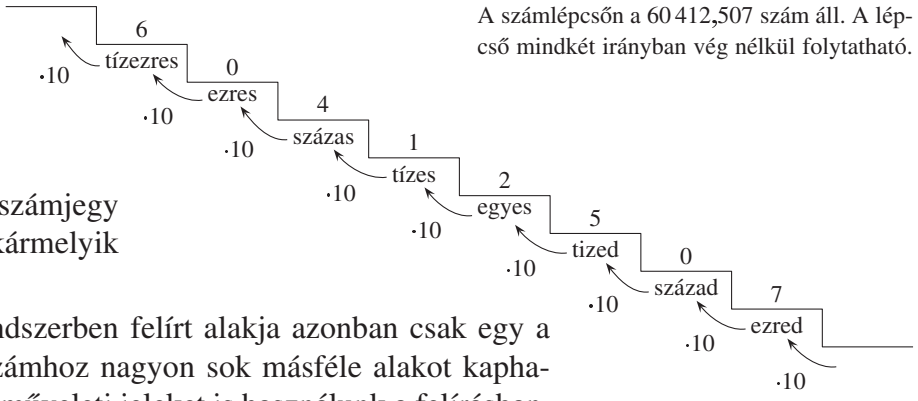
(2) Ha $a < b$, akkor $|a| < |b|$. A megfordítása: Ha $|a| < |b|$, akkor $a < b$.

(3) Ha $a = b$, akkor $|a| = |b|$. A megfordítása: Ha $|a| = |b|$, akkor $a = b$.

A számok különféle alakjai

A tízes számrendszer

A számok leírására sokféle módszer alakult ki, mostanra ezek közül az egész világon a tízes, helyi értékes számírás terjedt el.



A számlépcsőn a 60 412,507 szám áll. A lépcső mindkét irányban vég nélkül folytatható.

A tízes számrendszerben tíz számjegy segítségével fel lehet írni akármelyik egész számot.

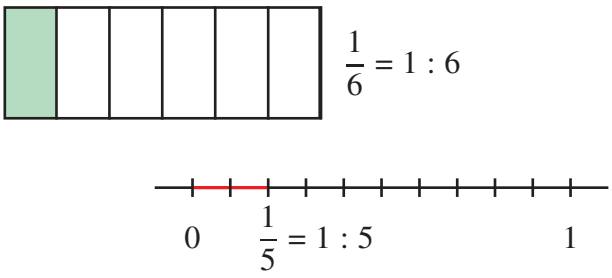
A számoknak a tízes számrendszerben felírt alakja azonban csak egy a lehetőségek közül. Minden számhoz nagyon sok másféle alakot kaphatunk, ha a számjegyek mellett műveleti jeleket is használunk a felírásban.

A törtek

A hányados alak

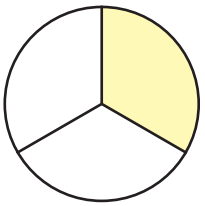
Ha két egész számot összeszorzunk, akkor a szorzat is egész szám lesz, míg ha elosztjuk őket egymással (az osztó nem 0), akkor a hányados nem feltétlenül egész szám.

Az 1 egészet egyenlő részekre osztva kapjuk az egységtörteket. A rajzok néhány egységtörtet szemléltetnek.

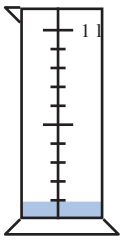


$\frac{1}{6} = 1 : 6$

$\frac{1}{5} = 1 : 5$



$\frac{1}{3} = 1 : 3$



1 liter : 10 = $\frac{1}{10}$ liter

Ha egész számot osztunk egész számmal, akkor a hányados mindig előállítható egyenlő egységtörtek összegeként, azaz egy egységtört és egy egész szám szorzataként.

Például, ha 7 csokit 3-felé osztunk, akkor mindenki 7-nek a harmadát kapja, ami nem más, mint 7 darab egyharmad.

$$7 : 3 = \frac{7}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 7$$

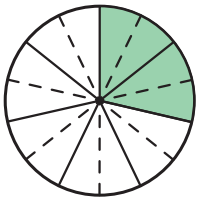


$$7 : 3 = \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \cdot 7$$

A törteknek nagyon sokféle alakját használjuk, hogy mikor melyiket, az az adott problémától függ.

Végtelen sokféle alakot kaphatunk **egyszerűsítéssel, bővítéssel.**

Az egyszerűsítés és a bővítés segít nekünk például a műveletek elvégzésében vagy a törtek összehasonlításában. Törteket akkor könnyű összehasonlítani, ha egyenlő a nevezőjük vagy ha egyenlő a számlálójuk. Ezt pedig bővítéssel könnyen elérhetjük.



$$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \dots$$

A vegyes tört alak

A vegyes tört alak megmutatja, hogy egy egynél nagyobb törtszám melyik két egész szám közé esik.

Például a $\frac{79}{30}$ tört nagyságáról többet árul el $2 + \frac{19}{30}$ összegalak, amelyet röviden a $2\frac{19}{30}$ vegyes tört alakban szoktunk írni.

A tizedes tört alak

A tizedes tört alakban a racionális számokat olyan összegként állítjuk elő, amelyben a törtek nevezője 10, 100, 1000, 10 000 stb.

Például $32{,}546 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000} = 32 + \frac{546}{1000}$

Az egy századrésznek külön nevet is adtak, százaléknak nevezzük és így jelöljük: $\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$

A százalék alak

Az egy százalék segítségével minden számot fel tudunk írni **százalék alakban.** A százalékalakot könnyen ki lehet olvasni a tizedes tört alakból.

Például: $\frac{18}{100} = 18\%$ $\quad 3{,}16 = 316 \cdot 0{,}01 = 316\%$ $\quad 0{,}012 = 1{,}2 \cdot 0{,}01 = 1{,}2\%$

Tört alakból tizedes tört alak

Példa

Írjuk át tizedes tört alakba a törteket!

$\frac{39}{50}$ $\quad \frac{5}{3}$ $\quad \frac{3}{7}$ $\quad \frac{13}{10}$ $\quad \frac{7}{125}$ $\quad \frac{1385}{100}$ $\quad \frac{111}{60}$ $\quad \frac{1}{9}$

Megoldás

I. Ha a nevező 10, 100, 1000, 10 000 stb., akkor könnyű a tizedes tört alakba való átírás, hiszen csak a számlálóban kell kijelölni annyi tizedesjegyet, ahány nulla van a nevezőben. A számláló adja meg a tizedes tört értékes jegyeit, a nevezőben lévő 10-hatvány kitevője pedig a tizedesjegyek számát mutatja meg.

Például: $\frac{13}{10} = 1 + \frac{3}{10} = 1{,}3$ vagy $\frac{13}{10} = 13 : 10 = 1{,}3$

$\frac{1385}{100} = 13 + \frac{80}{100} + \frac{5}{100} = 13 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} = 13{,}85$ vagy $1385 : 100 = 13{,}85$

II. Ha a nevező osztója 10-nek, 100-nal, 1000-nek stb., akkor bővítéssel elérhetjük, hogy a nevező 10, 100, 1000 stb. legyen.

$\frac{39}{50} = \frac{39 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{78}{100} = 0{,}78$ $\qquad$ $\frac{7}{125} = \frac{7 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{56}{1000} = 0{,}056$

Az is lehet, hogy a nevező nem osztója 10-nek, 100-nak, de a tört egyszerűsítése után azzá válik. Ilyen a $\frac{111}{60}$ tört is; $\frac{111}{60} = \frac{3 \cdot 37}{3 \cdot 20} = \frac{37}{20} = \frac{37 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{185}{100} = 1{,}85$.

III. A többi esetben csak osztással boldogulunk. Ilyenkor az osztás végtelen szakaszos tizedes törtre vezet.

$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1{,}666\ldots = 1{,}\dot{6}$

$\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots = 0{,}\dot{1}$

$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0{,}428571428\ldots = 0{,}\dot{4}28571\dot{4}$

30
20
60
40
50
10
30
20

Innen kezdve ismétlődnek a maradékok és a hányadosban szereplő számjegyek is.

Tizedes tört alakból tört alak

Írjuk át tört alakba a tizedes törteket!

2,3 $\qquad$ 0,048 $\qquad$ 6328,125 $\qquad$ 0,9091 $\qquad$ 0,333...

Véges tizedes törtet egyszerű átírni tört alakba, mivel a tört nevezője 10, 100, 1000 stb. aszerint, hogy hány tizedesjegy volt a tizedes törtben.

Például: $2{,}3 = \frac{23}{10}$ $\qquad$ $4{,}25 = \frac{425}{100}$ $\qquad$ $0{,}048 = \frac{48}{1000}$ $\qquad$ $0{,}9091 = \frac{9091}{10\,000}$

A végtelen szakaszos tizedes törtek is mindig felírhatók tört alakba, de ez nem olyan egyszerű, mint a véges tizedes törtek átírása.

Ilyenkor azonban mindig kerekíthetjük őket véges tizedes törtté.

$$0{,}33333\ldots \approx 0{,}333 = \frac{333}{1000}$$

A végtelen nem szakaszos tizedes törteket azonban sohasem kaphatjuk meg két egész szám hányadosaként.

Ezek nem racionális számok.

Végtelen nem szakaszos tizedes törteket nem nehéz gyártani. Például képzeld el a végtelenségig folytatva a következő számot: 0,1010010001..., amelyet úgy kapunk, hogy mindig eggyel több nulla áll két egyes között! Ebben a számban nem lesz ismétlődő szakasz.

Végtelen nem szakaszos tizedes törtet kapunk akkor is, ha a tizedesvessző után folytatólagosan leírjuk a természetes számokat: 0,12345678910111213....

Feladatok

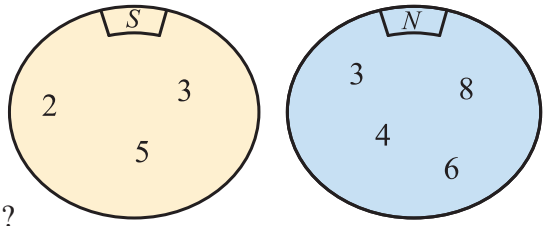
1. Készítsd el az összes olyan törtet, amelynek számlálóját az S, nevezőjét az N halmazból veszed!

a) Összesen hány tört készíthető?

b) A törtek közül hány lesz 1-nél nagyobb, illetve 1-nél kisebb?

c) Melyik az 1-nél kisebb törtszámok közül a legnagyobb?

d) Melyik az 1-nél nagyobb törtek közül a legkisebb?



2. Mi lehet x értéke, ha tudjuk, hogy

a) $\frac{x}{3} < 1$, *b)* $\frac{x}{5} < 0$, *c)* $\frac{x}{7} > 2$, *d)* $\frac{x}{8} = 4$, *e)* $\frac{x}{-3} > 0$, *f)* $\frac{|x|}{5} \leqq 0$?

3. Írj a $\frac{12}{7}$-del egyenlő törtet, amelynek

a) a nevezője 84,

b) a számlálója nagyobb 100-nál, és a nevezője kisebb 70-nél,

c) számlálójának és nevezőjének a különbsége 30,

d) számlálója osztható 5-tel, és a nevezője osztható 9-cel,

e) a számlálója 50-nél kisebb, a nevezője pedig 35-nek többszöröse!

4. Írd fel a megadott számokat tört alakban és százalék alakban is!

38,6 0,25 0,142 0,125 500,3 125,125 6004,75

5. Írd át a törteket tizedes tört alakba!

$\frac{3}{125}$ $\frac{5}{64}$ $\frac{12}{75}$ $\frac{33}{15}$ $\frac{35}{28}$ $\frac{6}{375}$

6. Rendezd növekvő sorrendbe a számokat!

a) $-\frac{3}{5}$ 0,76 $\frac{17}{24}$ $\frac{3}{4}$ −0,12 0,33 $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2{,}5}{1000}$ $\frac{2{,}25}{100}$ 0,225 $\frac{0{,}25}{100}$ 2500,025 $\frac{25}{100}$ $\frac{25\,000}{100\,000}$

c) −1,3 1,03 $\frac{1{,}3}{10}$ −0,13 $\frac{1}{3}$ $-|0{,}13|$ $\frac{113}{100}$ $|-0{,}13|$

7. Villámkérdések – Meg tudod válaszolni fejben?

a) Melyik az a szám, amelyik 28-cal nagyobb a $\frac{3}{5}$ részénél?

b) Melyik szám felének az ötöde 7?

c) Mennyivel nagyobb a 15 ötharmad része a 15 háromötöd részénél?

d) Hány alma 6 alma meg 6 fél alma meg 6 harmad alma meg 6 negyed alma?

e) Negyed óra ötödének a tizede hányad része 1 órának?

8. Mi lehet x értéke?

a) $\frac{|x|}{x} > 0$ *b)* $x \cdot |x| < 0$ *c)* $3 \cdot |x| = 0$ *d)* $\frac{|x|}{3} = 0$ *e)* $\frac{3}{|x|} = 0$

9. Egy tört értéke $\frac{2}{5}$.

a) Nevezőjének és számlálójának különbsége 18. Melyik ez a tört?

b) Melyik ez a tört, ha a nevezőjének és a számlálójának különbsége 300?

Műveletek a racionális számok körében I.

Összeadás és kivonás

Törteket összeadni vagy kivonni könnyű akkor, ha egyenlő a nevezőjük. Ezt bővítéssel mindig elérhetjük.

$$-\frac{7}{15} + \frac{13}{6} = -\frac{14}{30} + \frac{65}{30} = \frac{51}{30}$$

Az összeadást és a kivonást a tizedes törtek körében pontosan úgy végezzük, mint az egészeknél, csak arra kell ügyelnünk, hogy egyenlő helyi értékeket adjunk össze. Ezért írásbeli összeadáskor és kivonáskor nem az utolsó jegyeket illesztjük össze, hanem a tizedesvesszőket.

$$\begin{array}{r} 123{,}0043 \\ +\quad 0{,}12 \\ \hline 123{,}1243 \end{array}$$

Ha egy műveletsorban keverve vannak a tört és tizedes tört alakú számok, akkor először átírjuk őket egyféle alakba, és azután elvégezzük a műveleteket.

$$0{,}3 - \frac{17}{5} + 1{,}29 + \frac{3}{4} = 0{,}3 - \frac{34}{10} + 1{,}29 + \frac{75}{100} = 0{,}3 - 3{,}4 + 1{,}29 + 0{,}75 = -1{,}06$$

$$0{,}3 - \frac{17}{5} + 1{,}29 + \frac{3}{4} = \frac{3}{10} - \frac{17}{5} + \frac{129}{100} + \frac{3}{4} = \frac{30}{100} - \frac{340}{100} + \frac{129}{100} + \frac{75}{100} = -\frac{106}{100}$$

A fenti példában egyszerűbb volt tizedes tört alakban számolni.

Van, amikor pontosabb tört alakban számolni.

Például: $0{,}3 + \frac{5}{7} = \frac{3}{10} + \frac{5}{7} = \frac{21}{70} + \frac{50}{70} = \frac{71}{70}$.

Több tag összeadása, kivonása

Ha egy műveletsorban csupa összeadás és kivonás van, és **nincsenek benne zárójelek,** akkor a műveletvégzés sorrendjét felcserélhetjük, mindössze arra kell vigyáznunk, hogy a számok mindegyikét az előtte álló műveleti jellel együtt mozgassuk.

1. példa

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{5} - 2{,}85 + 17 + \frac{13}{7} - \frac{18}{5} + 112{,}85 = ?$$

Megoldás

Ha korongokra írjuk a számokat az előttük álló műveleti jelekkel együtt, akkor tetszőlegesen elmozgathatjuk a tagokat. Egy megfelelő sorrendben sokkal könnyebb kiszámítani az összeget.

$$0 \quad +\frac{1}{7} \quad +\frac{3}{5} \quad -2{,}85 \quad +17 \quad +\frac{13}{7} \quad -\frac{18}{5} \quad +112{,}85 \quad =$$

$$= 0 \quad +\frac{1}{7} \quad +\frac{13}{7} \quad +\frac{3}{5} \quad -\frac{18}{5} \quad +112{,}85 \quad -2{,}85 \quad +17 \quad =$$

$$= \frac{14}{7} - \frac{15}{5} + 127 = 2 - 3 + 127 = 126$$

2. példa

Helyezzünk el egy zárójelpárt az alábbi műveletsorban minden lehetséges módon. Válasszuk ki azokat az eseteket, amelyekben az eredmény nem változik, és azokat, amelyekben megváltozik a végeredmény!

$$8 - 15 + 72 - 5 + 100$$

Megoldás

Nem változik az eredmény

$(8 - 15) + 72 - 5 + 100 = 160$

$(8 - 15 + 72) - 5 + 100 = 160$

$(8 - 15 + 72 - 5) + 100 = 160$

$(8 - 15 + 72 - 5 + 100) = 160$

$8 - 15 + (72 - 5) + 100 = 160$

$8 - 15 + (72 - 5 + 100) = 160$

Megváltozik az eredmény

$8 - (15 + 72) - 5 + 100 = 16$

$8 - (15 + 72 - 5) + 100 = 26$

$8 - (15 + 72 - 5 + 100) = -174$

$8 - 15 + 72 - (5 + 100) = -40$

Ha csak összeadások és kivonások állnak a műveletsorban, akkor

a műveletsor elején vagy egy + jel mögött mindig nyithatunk zárójelet és tetszőleges helyen bezárhatjuk azt. Nem változik az eredmény akkor sem, ha egy + jel után álló zárójelet a párjával együtt elhagyunk.

a − jel után betett vagy elhagyott zárójel az eredményt megváltoztatja.

Csak összeadásokat és kivonásokat tartalmazó műveletsorok esetén, ha a zárójel előtt + jel áll, akkor a zárójel elhagyható. Ha a zárójel előtt − jel áll, akkor a zárójel elhagyása után a zárójelben levő művelet megváltozik, hozzáadásból kivonás lesz, kivonásból pedig hozzáadás.

Feladatok

1. Végezd el a műveleteket!

a) $3{,}3 - (-5{,}4)$ *b)* $46{,}8 - (-103{,}5)$ *c)* $5{,}7 - \left(-\frac{1}{2}\right)$ *d)* $\frac{4}{3} - 1\frac{5}{7}$

e) $523 - 4238$ *f)* $-505 + (-3{,}04)$ *g)* $5{,}2 + \left(-\frac{3}{4}\right)$ *h)* $4{,}6 + (-31{,}7)$

i) $-\frac{8}{3} + \frac{5}{24}$ *j)* $-10{,}08 + (-3{,}001)$ *k)* $56 - (-44)$ *l)* $3{,}2 + \frac{41}{20}$

2. Melyik különbség pozitív?

a) $12 - 7{,}5$ *b)* $\frac{3}{4} - 0{,}75$ *c)* $8{,}3 - 12$

d) $\frac{3}{3} - \frac{10}{4}$ *e)* $1{,}3 - \frac{25}{20}$ *f)* $0 - 1$

3. Két-két összeg, illetve különbség közé tedd ki a megfelelő (<, =, >) jelet!

a) $(-6) + (-4{,}9)$ $(-4) + (-6{,}9)$ *b)* $53 - 17{,}53$ $53 - 17$

c) $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$ *d)* $-41 - 2{,}05$ $-41 - \frac{205}{1000}$

4. Végezd el a kivonásokat, majd a két-két különbséget hasonlítsd össze! Hogyan változik meg a különbség, ha a kisebbítendőt és a kivonandót felcseréljük?

$5 - 3$ $3 - 5$ $2 - \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} - 2$ $\frac{4}{5} - 0{,}1$ $0{,}1 - \frac{4}{5}$ $18 - 19$ $19 - 18$

5. Végezd el a műveleteket minél „ésszerűbben”!

a) $-5{,}2 - (-0{,}3) - 1{,}37 + (-0{,}8) + 0{,}07$ *b)* $-\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{6}\right) - 0{,}5 + \frac{5}{6}$

c) $0{,}75 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{30}{8}\right)$ *d)* $6{,}4 - 0{,}8 + \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{2}{5} + 0{,}4$

e) $-3{,}3 + 4{,}9 + 5{,}1 + (-6{,}7)$ *f)* $4{,}75 - 3{,}8 + (-0{,}75) - (-0{,}2)$

6. Helyezd el a (és) zárójelkártyákat az alábbi műveletsorban minden lehetséges módon! Válaszd szét a kapott műveletsorokat aszerint, hogy az eredményük 103 maradt-e, vagy nem!

$9 \quad - \quad 11 \quad + \quad 27 \quad - \quad 5 \quad + \quad 83 \quad = \quad 103$

7. Válaszd ki az egyenlőket!

a) $5 - (11 + 22)$ *b)* $5 + 11 + 22$ *c)* $5 + 11 - 22$

d) $(5 + 11) - 22$ *e)* $5 - 11 - 22$ *f)* $5 - (22 - 11)$

g) $5 + (11 - 22)$ *h)* $5 - (11 - 22)$ *i)* $5 - 22 - 11$

8. Vásárolni indultam a Ft-tal. 815 Ft-ért zöldséget, 530 Ft-ért szörpöt vettem, az üres üvegekért pedig kaptam 60 Ft-ot. Mennyi pénzem maradt? Melyik megoldásterv illik a szöveghez?

$a - 815 - 530 + 60$ $a - (815 - 530 + 60)$ $a - (815 + 530 - 60)$

$a - (815 - 530 - 60)$ $a - (815 + 530 + 60)$ $a - 815 - (530 + 60)$

9. Melyik több, mennyivel?

a)	$525 - (38 - 3)$	vagy	$525 - 38$
b)	$1017 + (54 - 26)$	vagy	$1017 + 54 + 26$
c)	$381 - 39 + 7$	vagy	$381 - (39 - 7)$
d)	$(542 - 28) - (36 - 7)$	vagy	$542 - 28 - 36 - 7$
e)	$128 - (43 - 5 + 2)$	vagy	$128 - 43 - 5 - 2$
f)	$372 - (58 - 17 - 3)$	vagy	$372 + 58 + 17 + 3$

10. Kik mennek a szerpentinen? Honnan ismered őket? Számold végig a műveletsorokat! Minden eredménynek megfelel egy betű.



$E = -\frac{2}{3}$ $R = 12$ $H = 5{,}4$ $O = 1$ $A = 3$ $N = 2$ $M = 31$ $I = 27$ $Y = -2$

Műveletek a racionális számok körében II.

Szorzás

Ha pozitív egész számmal szorzunk, akkor a szorzás összeadást jelent.

Például: $(-125) \cdot 4 = (-125) + (-125) + (-125) + (-125) = -500$

$$\frac{15}{7} \cdot 4 = \frac{15}{7} + \frac{15}{7} + \frac{15}{7} + \frac{15}{7} = \frac{60}{7}$$

$$a \cdot 4 = a + a + a + a$$

A 0-val, a negatív számokkal és a törtekkel való szorzást nem tudjuk az összeadásra visszavezetni.

Itt most összegyűjtve megtalálhatod azokat a műveleti szabályokat, amelyeket a szorzásról és az osztásról tudnod kell.

A 0-val való szorzás eredménye mindig 0. Osztani azonban nem lehet 0-val.

Ha előjeles számokat szorzunk vagy osztunk, akkor az előjelszabályt használjuk:

Két azonos előjelű szám szorzata és hányadosa pozitív szám. Két különböző előjelű szám szorzata és hányadosa negatív szám.

A törttel való szorzás a megfelelő törtrész kiszámítását jelenti. Például $3 \cdot \frac{2}{5}$ a 3-nak a kétötöd részét jelenti.

A törtrész kiszámítása különböző módokon történhet. *Például:* az $\frac{5}{7}$-nek a $\frac{3}{4}$ részét kiszámíthatjuk

a) következtetéssel: $\frac{5}{7}$-nek az $\frac{1}{4}$-része $\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{28}$,

$\frac{5}{7}$-nek a $\frac{3}{4}$-része pedig ennek 3-szorosa, $\left(\frac{5}{7} : 4\right) \cdot 3 = \frac{5}{28} \cdot 3 = \frac{15}{28}$.

b) a törtek szorzási szabálya alapján: $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$.

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálóban levő számok szorzata adja az eredmény számlálóját, a nevezőben levő számok szorzata pedig az eredmény nevezőjét.

1. példa

Hogyan végezzük el a szorzást, ha a tényezők tizedes törtek? Mennyi $5{,}23 \cdot 0{,}327$?

Megoldás

A kijelölt szozás helyett az $523 \cdot 327$ szorzást végezzük el az egész számok körében jól ismert módon.

Ez az eredmény azonban a keresett szorzatnak 100 000-szerese, hiszen az első tényező helyett annak 100-szorosával, a második heyett pedig annak 1000-szeresével számoltunk.

Az $5{,}23 \cdot 0{,}327$ szorzat tehát a 171 021 százezredrésze: 1,71021.

	5	2	3	·	3	2	7
1	5	6	9				
	1	0	4	6			
		3	6	6	1		
1	7	1	0	2	1		

Tizedes törteket úgy szorozhatunk, mintha egész számokat szoroznánk. Így kapjuk a szorzat számjegyeit. A szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a tényezőkben összesen van.

A százalékszámítás is törtrészszámítást jelent, csupán annyi a különbség, hogy 100 nevezőjű törtekkel kell számolnunk.

Például: 520-nak a 63%-a = 520-nak a $\frac{63}{100}$ része = $520 \cdot \frac{63}{100} = 327{,}6$.

$$520 \cdot \frac{63}{100} = \frac{32\,760}{100} = 327{,}6$$

százalékszámítás = századrészszámítás
törtrészszámítás = törttel való szorzás

Osztás

Minden számhoz, a 0-t kivéve, van olyan szorzó, amivel megszorozva eredményül 1-et kapunk.

Például: $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ $\quad \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$ $\quad (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ $\quad \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = 1$

Azt a számot, amellyel egy A számot megszorozva 1-et kapunk, az A szám **reciprokának** nevezzük.

Egy szám értékén nem változtatunk, ha megszorozzuk egy számmal, majd a szorzatot

el is osztjuk ugyanazzal a számmal.

Például: $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} : \frac{5}{3} = \frac{7}{2} =$

megszorozzuk a szám reciprokával is.

$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}$

A két műveletsor egyformán kezdődik. Egyenlőségük azt jelenti, hogy

az $\frac{5}{3}$-dal való osztás nem más, mint a $\frac{3}{5}$-del való szorzás

$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} : \frac{5}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}$

Egy számmal osztani ugyanazt jelenti, mint a reciprokával szorozni.

2. példa

Mennyi 85,132 : 0,12?

Megoldás

Ha az osztandót és az osztót is ugyanazzal a nem nulla számmal szorozzuk, akkor a hányados értéke nem változik.

Két véges tizedes tört osztása bővítéssel mindig visszavezethető tizedes tört egész számmal való osztására. Tizedes törtek egész számmal való osztásakor pedig ugyanazt az eljárást követjük, mint a természetes számok osztásakor, csak

$85{,}132 : 0{,}12 = 8513{,}2 : 12 = 709{,}4\dot{3}$

11
113
5 2
40
4

arra kell ügyelnünk, hogy amikor az osztandóban elfogynak az egészek, akkor a hányadosban ki kell tennünk a tizedesvesszőt. Az osztásnál a 4-es maradék ismétlődik, ezért a hányadosnál a 3-as számjegy ismétlődni fog. Az eredményt így jelöljük: $709{,}4\dot{3}$.

Több tényező szorzása, osztása

Ha egy műveletsorban csupa szorzás és osztás van, és **nincsenek benne zárójelek,** akkor a műveletvégzés sorrendjét felcserélhetjük, mindössze arra kell vigyáznunk, hogy a számok mindegyikét az előtte álló műveleti jellel együtt mozgassuk.

3. példa

$$\frac{5}{23}\cdot\frac{19}{99}:\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}:19\cdot 23\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{7}$$

Megoldás

Ha korongokra írjuk a számokat az előttük álló műveleti jellel együtt, akkor tetszőlegesen elmozgathatjuk a tényezőket. Egy megfelelő sorrendben sokkal könnyebb kiszámítani a szorzatot.

$$1\ \cdot\frac{5}{23}\ \ \cdot\frac{19}{99}\ \ :\frac{3}{2}\ \ \cdot\frac{7}{6}\ \ :19\ \ \cdot 23\ \ \cdot\frac{3}{2}\ \ \cdot\frac{6}{7}\ =$$

$$1\ \cdot\frac{5}{23}\ \ \cdot 23\ \ \cdot\frac{3}{2}\ \ :\frac{3}{2}\ \ \cdot\frac{19}{99}\ \ :19\ \ \cdot\frac{7}{6}\ \ \cdot\frac{6}{7}\ = 5\cdot 1\cdot\frac{1}{99}\cdot 1=\frac{5}{99}$$

4. példa

Helyezzünk el egy zárójelpárt az alábbi műveletsorban minden lehetséges módon! Válasszuk ki azokat az eseteket, amelyekben az eredmény nem változik, és azokat, amelyekben megváltozik a végeredmény!

$$200:5\cdot 2:20\cdot 100=400$$

Megoldás

Nem változik az eredmény

$(200:5)\cdot 2:20\cdot 100=400$

$(200:5\cdot 2):20\cdot 100=400$

$(200:5\cdot 2:20)\cdot 100=400$

$(200:5\cdot 2:20\cdot 100)=400$

$200:5\cdot(2:20)\cdot 100=400$

$200:5\cdot(2:20\cdot 100)=400$

Megváltozik az eredmény

$200:(5\cdot 2):20\cdot 100=100$

$200:(5\cdot 2:20)\cdot 100=40\,000$

$200:(5\cdot 2:20\cdot 100)=4$

$200:5\cdot 2:(20\cdot 100)=\frac{80}{2000}=\frac{1}{25}$

Ha csak szorzások és osztások állnak a műveletsorban, akkor

a műveletsor elején vagy egy szorzásjel mögött mindig nyithatunk zárójelet és tetszőleges helyen bezárhatjuk azt. Nem változik az eredmény akkor sem, ha egy szorzásjel után álló zárójelet a párjával együtt elhagyunk.

az osztásjel után betett vagy elhagyott zárójel az eredményt megváltoztatja.

Csak osztásokat és szorzásokat tartalmazó műveletsorok esetén, ha a zárójel előtt szorzásjel áll, akkor a zárójel elhagyható. Ha a zárójel előtt osztásjel áll, akkor a zárójel elhagyása után a zárójelben levő művelet megváltozik, szorzásból osztás lesz, osztásból pedig szorzás.

Feladatok

1. Hasonlítsd össze! Tedd ki a megfelelő (<, =, >) jelet!

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$ ▭ $3 : 7$ *b)* $\frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{21}$ ▭ $\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{30} : \frac{21}{2}$

c) 7-nek a $\frac{3}{5}$-része ▭ 3-nak a $\frac{7}{5}$-része *d)* $\frac{21}{46}$ ▭ $\frac{3}{2} : \frac{7}{23}$

2. A szorzatok közül melyik kisebb 1-nél, melyik nagyobb 1-nél?

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$ *b)* $0{,}97 \cdot 0{,}97$ *c)* $0{,}75 \cdot 0{,}36$

d) $1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25$ *e)* $1{,}25 \cdot \frac{3}{5}$ *f)* $0{,}872 \cdot \frac{7}{9} \cdot 0{,}46$

3. Minden kérdésre egy-egy szorzás felírásával válaszolj!

a) Mennyi $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$? *b)* Mennyi $\frac{4}{9}$-nek az $\frac{1}{2}$ része?

c) Mennyi 85-nek a $\frac{12}{100}$ része? *d)* Mennyi 720-nak a 15%-a?

4. Párosítsd a feladatokat a megoldástervekkel!

a) Mennyi 60-nak az $\frac{1}{15}$ része? *A)* $\frac{1}{15} \cdot x = 60$

b) Melyik szám $\frac{1}{15}$ része a 60? *B)* $x \cdot 60 = \frac{1}{15}$

c) Mekkora része $\frac{1}{15}$-nek a 60? *C)* $60 \cdot \frac{1}{15} = x$

d) Melyik szám 60-szorosa az $\frac{1}{15}$? *D)* $60 \cdot x = \frac{1}{15}$

e) Mekkora része 60-nak az $\frac{1}{15}$? *E)* $\frac{1}{15} \cdot 60 = x$

f) Mennyi $\frac{1}{15}$-nek a 60-szorosa? *F)* $x \cdot \frac{1}{15} = 60$

5. Tedd ki a megfelelő (<, =, >) jelet!

a) 12 $\frac{5}{6}$ részének a $\frac{3}{4}$ része ▭ 12 $\frac{3}{4}$ részének az $\frac{5}{6}$ része

b) $\frac{3}{4}$ és $\frac{2}{3}$ összegének a $\frac{7}{8}$ része ▭ $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{4}$ összegének a $\frac{8}{7}$ része

c) 3,6 $\frac{5}{4}$ részének és 0,2-nek az összege ▭ $3{,}6 \cdot \left(\frac{5}{4} + 0{,}2\right)$

d) $\frac{5}{6}$-nak a 40%-a ▭ $\frac{3}{5}$-nek a $\frac{2}{3}$ része

e) $\frac{2}{3}$-nak a 60%-a ▭ $\frac{3}{5}$-nek a $\frac{2}{3}$ része

6. Válaszolj a kérdésekre!

a) Lehet-e egy szorzat kisebb, mint a szorzandó?

b) Lehet-e egy hányados nagyobb, mint az osztandó?

c) Mit értünk egy szám $\frac{5}{4}$-del való szorzásán?

d) Mit értünk egy szám $\frac{5}{4}$-del való osztásán?

e) Mikor nevezünk két számot egymás reciprokának?

7. Induljunk ki a 0,238 : 0,05 hányadosból! Írj vele egyenlő eredményű osztást úgy, hogy

a) az osztandó egész szám legyen, *b)* az osztó egész szám legyen,

c) az osztandó és az osztó is egész szám legyen!

8. Induljunk ki a 0,54 · 300,6 szorzatból! Írj vele egyenlő kéttényezős szorzatot úgy, hogy

a) a szorzandó egész szám legyen, *b)* a szorzó egész szám legyen,

c) mindkét tényező egész szám legyen!

9. Számolj minél ügyesebben!

a) $\frac{5}{3} : 28 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 28$ *b)* $4 \cdot 0{,}35 \cdot \frac{3}{7} \cdot 25 \cdot \frac{7}{2} : 35$

c) $0{,}2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2{,}3 \cdot 25 \cdot \frac{10}{23}$ *d)* $0{,}04 \cdot 800 \cdot 0{,}5 \cdot 125 : 100$

e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{24}{2} : 1{,}4$ *f)* $0{,}3 \cdot 0{,}08 \cdot 10^3 : 0{,}2 : 12$

10. Mi lesz az előjel?

a) $3{,}5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} \cdot (-2) \cdot (-2)$ *b)* $(-4{,}01) \cdot (-3) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}5$

c) $(-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot \frac{1}{10}$ *d)* $0{,}001 \cdot 0{,}01 \cdot (-1{,}01) \cdot 1{,}01$

e) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3 \cdot (3-9)}{8} \cdot \frac{3 \cdot 3 - 9}{8} \cdot 0{,}1$ *f)* $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-1) \cdot \frac{(-5)}{(-25)}$

11. Hány tizedesjegy lesz a szorzatban?

a) $0{,}04 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}001$ *b)* $(-0{,}02) \cdot 3{,}840 \cdot (-4{,}2) \cdot 0{,}3$ *c)* $18{,}3 \cdot 0{,}031 \cdot 30{,}01 \cdot (-0{,}002)$

12. Melyik szorzat értéke egész szám? Számolj fejben!

a) $1{,}2 \cdot 8 \cdot 3{,}415 \cdot 125 \cdot 10$ *b)* $4{,}07 \cdot 0{,}25 \cdot 400 \cdot 0{,}1$

c) $\frac{3}{10} \cdot 0{,}08 \cdot \frac{100}{8} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$ *d)* $500 \cdot \frac{3}{5} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2$

e) $0{,}125 \cdot 0{,}8 \cdot 10\,000$ *f)* $0{,}003 \cdot 0{,}0002 \cdot 600\,000 : \frac{1}{100}$

13. Helyezd el a (és) zárójelkártyákat az alábbi műveletsorban minden lehetséges módon! Válaszd ki azokat az eseteket, amelyekben az eredmény nem változik, és azokat, amelyekben megváltozik! $72 : 36 \cdot 9 : 3 \cdot 2$

14. Az *a)*-tól *d)*-ig jelölt szövegek mindegyikéhez illik néhány az *A)*–*O)*-val jelzett műveletsorok közül. Keress összeillőket! Döntsd el mindegyik műveletsorról, hogy melyik kérdésre ad választ!

a) Az 5000 Ft-os kirándulás árát az utazási iroda 12%-kal emelte.
b) Az 5000 Ft-os cipőt 12%-kal olcsóbban vettük meg.
c) A maratoni futás 5000 résztvevőjének csak 12%-a volt 18 évnél fiatalabb.
d) A maratoni futás 5000 résztvevőjének 12%-a volt 18 évnél fiatalabb, és ezek 42%-a volt lány versenyző.

A) $5000 \cdot 0{,}12$ *B)* $5000 \cdot \frac{12}{100}$ *C)* $5000 - 5000 \cdot \frac{12}{100}$ *D)* $5000 \cdot \frac{112}{100}$

E) $5000 \cdot \frac{88}{100}$ *F)* $5000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{58}{100}$ *G)* $5000 \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{42}{100}$ *H)* $5000 \cdot 0{,}88$

I) $5000 - \frac{12}{100}$ *J)* $5000 + \frac{12}{100}$ *K)* $5000 \cdot 1{,}12$ *L)* $5000 + \frac{5000}{100} \cdot 12$

M) $5000 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}12$ *N)* $\frac{5000}{100} \cdot 12$ *O)* $5000 - 5000 \cdot \frac{88}{100}$

15. Mennyi a szorzat értéke, ha az azonos betűk azonos számjegyeket, a különbözők pedig különböző számjegyeket jelentenek? $ö \cdot c \cdot s \cdot i \cdot h \cdot u \cdot g \cdot i \cdot t \cdot e \cdot s \cdot ó$

16. A betűk számjegyeket helyettesítenek. Azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek. Határozzuk meg a számjegyeket, ha $L = 6$!

(Forrás: Imrecze Zoltánné: Aki mer, az nyer!)

$$\begin{array}{r} \text{ANYA} \\ +\ \text{APA} \\ \hline \text{SZÜLŐ} \end{array}$$

Hatványozás

A sakkjáték feltalálójáról mesélik a következő történetet:
A legenda szerint az uralkodó felajánlotta neki, hogy bármit kérjen is, azt megkapja érdekes játéka jutalmául. A szerény ember annyi búzaszemet kért, amennyi a sakktábla utolsó mezőjére kerül, ha az első mezőre 1 szem búzát, a másodikra 2-t, a harmadikra 4-et, és így tovább, mindegyikre kétszer annyit teszünk, mint az előzőre. Figyelembe véve, hogy 16 szem búza tömege kb. 1 g, az uralkodó tudósai kiszámították a kért búza mennyiségét. Mit gondoltok, kb. mennyi búzát kért a feltaláló? Szerény volt a kérése?

A sakktábla

1.	mezőjére		1	szem
2.	mezőjére		2	szem
3.	mezőjére	$2 \cdot 2 =$	4	szem
4.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 =$	8	szem
5.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	16	szem
6.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	32	szem
7.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	64	szem
8.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	128	szem
9.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	256	szem
10.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$	512	szem
⋮				
64.	mezőjére	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \cdot 2$		szem

Ebben a szorzatban 63 db 2-es tényező áll.



A kért búza tömege $\approx 600\,000\,000\,000$ t.

Ez az egész Föld több évi búzatermésének felel meg. Így a „szerény” kívánságot az uralkodó nem tudta teljesíteni.

Ennyi kettest már leírni sincs türelmünk, pedig olyan szorzásokra, amelyekben ugyanaz a szorzótényező áll sokszor egymás után, gyakran szükség van.

Az **ismételt szorzás** rövidítésére vezették be a **hatványozás** műveletét.

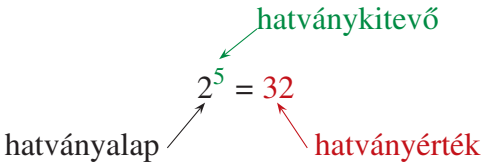
Például a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ismételt szorzást így írjuk le röviden: 2^5,

és így olvassuk: kettő az ötödiken.

A 2 a **hatvány alapja,** ez az **ismétlődő szorzótényező.**

Az 5 a **hatvány kitevője,** ez a **szorzótényezők darabszáma.**

A $2^5 = 32$ a **hatványérték.**



Bármely szám első hatványa megegyezik magával a számmal. Például $6^1 = 6$.

A hatványozás ismétlődő szorzásként való értelmezése nem használható, ha a kitevőben nem pozitív egész szám áll. Később látni fogjuk, hogyan lehet értelmet adni olyan hatványoknak is, amelyekben a kitevőben nem pozitív egész szám áll.

A sakkjátékról szóló feladatban a 2 hatványait soroltuk egy darabig. Ezt a sort akármeddig is folytathatjuk, csak annyit kell tennünk, hogy kettővel megszorozzuk az előző számot.

Például a $2^{10} = 2^9 \cdot 2 = 512 \cdot 2 = 1024$.

Ugyanilyen alapon könnyen elkészíthetjük a 3, a 4, az 5, a 10 vagy bármelyik más szám hatványainak táblázatát. Persze a 10 hatványainak a kiszámítása a legegyszerűbb. Íme:

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000, \qquad 10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000.$$

A tízzel való szorzás szabálya alapján 10-nek bármelyik hatványában annyi 0 áll az 1-es után, amennyi a kitevő (ha a kitevő pozitív egész szám).

A táblázatban néhány szám első tíz hatványát látod összegyűjtve.

Kitevő \ Alap	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**
1	2	3	4	6	10
2	4	9	16	36	100
3	8	27	64	216	1 000
4	16	81	256	1 296	10 000
5	32	243	1 024	7 776	100 000
6	64	729	4 096	46 656	1 000 000
7	128	2 187	16 384	279 936	10 000 000
8	256	6 561	65 536	1 679 616	100 000 000
9	512	19 683	262 144	10 077 696	1 000 000 000
10	1024	59 049	1 048 576	60 466 176	10 000 000 000

A táblázatból kikereshetjük például 4-nek az ötödik hatványát. A 4^5-t a táblázat **4**-es oszlopának az **5.** sorában találjuk.

$$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$$

Észrevehetjük, hogy ha 2-nek bármelyik két hatványát összeszorozzuk, a szorzatot is megtaláljuk a kettőhatványok között. *Például:*

$$32 \cdot 8 = 2^5 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{5 \text{ db 2-es}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2\cdot)}_{3 \text{ db 2-es}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8 \text{ db 2-es}} = 2^8 = 256$$

Ugyanígy háromhatványok szorzata háromhatvány, tízhatványok szorzata tízhatvány, és így tovább.

Például: $81 \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^7 = 2187$

$10\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^4 \cdot 10^6 = 10^{10}$

Ha negatív számot szorzunk többször egymás után önmagával, azt is felírhatjuk hatvány alakban. Ügyeljünk a hatványérték előjelére!

Például: $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = +1024$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Figyeljük meg, milyen fontos szerepe van a zárójelnek!

Például $(-5)^3$ ugyanannyi, mint -5^3, de $(-5)^4$ nem ugyanannyi, mint -5^4, hiszen $(-5)^4 = 1024$, de -5^4 az 5^4 ellentettje, azaz $-5^4 = -1024$.

Feladatok

1. Írd át hatvány alakba a következő szorzatokat! Számítsd ki az értéküket!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ *b)* $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$ *c)* $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ *e)* $3{,}1 \cdot 3{,}1 \cdot 3{,}1$ *f)* $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$

2. Írd a hatványokat szorzat alakba! Számítsd ki az értéküket!

3^2 $\left(\frac{1}{10}\right)^3$ 5^3 $(-1)^4$ 125^3

$\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 22^1 2^5 $0{,}1^3$

3. Számítsd ki!

$\frac{1}{2^5}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\frac{5}{2^3}$ 20^4 $0{,}2^3$

$\frac{5^3}{2}$ $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ $\frac{1^5}{2}$ $\left(\frac{1}{10}\right)^4$ $0{,}04^2$

4. Melyik nagyobb?

3^4 vagy 4^3 2^5 vagy 5^2 10^3 vagy 3^{10} 2^4 vagy 4^2

5. Melyik nagyobb? Segíthet, ha a hatványokat szorzat alakba írod fel.

$(2 \cdot 5)^4$ vagy $2^4 \cdot 5^4$ $(3 \cdot 8)^3$ vagy $3^4 \cdot 8^3$ $(4 \cdot 6)^2$ vagy $4^2 \cdot 6^2$ $(5 \cdot 5)^4$ vagy $5^5 \cdot 5^2$

$(7 \cdot 3)^5$ vagy $7^4 \cdot 3^6$ $(2 \cdot 9)^3$ vagy $2^3 \cdot 9^3$ $(6 \cdot 2)^4$ vagy $2^6 \cdot 6^2$ $(2 \cdot 5)^{10}$ vagy $2^{11} \cdot 5^9$

6. Pótold a hiányzó szorzótényezőt!

a) $2^3 \cdot \bigtriangledown = 2^4$ *b)* $3 \cdot \bigtriangledown = 3^3$ *c)* $2 \cdot \bigtriangledown = 2^5$ *d)* $\bigtriangledown \cdot 10^2 = 100\,000$

e) $10^2 \cdot \bigtriangledown = 10^4$ *f)* $\bigtriangledown \cdot 10 = 10^5$ *g)* $10^3 \cdot \bigtriangledown = 1\,000\,000$ *h)* $5 \cdot \bigtriangledown = 5^3$

7. Mi az utolsó jegyük a következő számoknak?

10^2 2^4 6^3 6^5 6^{50}

15^{10} 21^5 1250^{100} 11^{11} 4^8

8. **Totó**

		1	2	x
1.	Melyik a legnagyobb?	2 t	$2 \cdot 10^5$ dkg	$20 \cdot 10^3$ kg
2.	Hány jegyű a $10^5 \cdot 10^9$?	14	15	16
3.	Milyen számjegyre végződik a 4^{70}?	4	6	2
4.	Hány nullára végződik a $2^3 \cdot 5^3$?	3	5	6
5.	Hány jegyű a 2^{20}?	több mint 10	kevesebb 6-nál	7
6.	Melyik nagyobb? $2^4 \cdot 3^3$ vagy $2^3 \cdot 3^4$?	$2^4 \cdot 3^3$	$2^3 \cdot 3^4$	egyenlőek
7.	Hány nullára végződik a $2^7 \cdot 5^5$?	12	5	7
8.	Mekkora a $\frac{21^3}{3^3 \cdot 7^3}$?	1-nél több	1-nél kevesebb	1
9.	Melyik a legkisebb?	$3^3 \cdot 4^3 \cdot 15^2$	$12^2 \cdot 6^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 60^2$
10.	Mennyi $(0{,}1)^3$?	0,3	0,003	$\frac{1}{1000}$
11.	Melyik nagyobb 1-nél?	$(0{,}9)^{10}$	1^{10}	$1{,}1^{10}$
12.	Hányszorosa a 2^5 az $\frac{1}{2^5}$-nek?	2^5	2^{10}	2^{25}
13.	Melyik nagyobb -1-nél?	$(-1)^9$	$\left(-\frac{9}{10}\right)^9$	$\left(-\frac{10}{9}\right)^9$
13 + 1.	Melyik a legkisebb?	$\left(\frac{1}{5}\right)^5$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$

9.



Pisti szerelmet vallott Jucinak. Juci ezt mindössze két barátnőjének mesélte el, szigorú titoktartásra kérve őket. Ezért aztán mindkét lány csak másnap, és csak két-két újabb barátnőnek adta tovább a titkot. Ezek a lányok is csak másnap pletykáltak, és csak két újabb embernek, és ez így ment tovább....

Hány emberhez juthatott el a hír egy hét alatt?

10. Számítsd ki minél ügyesebben!

a) $2^7 \cdot 5^3$ *b)* $4^3 \cdot 25^2$ *c)* $25^3 \cdot 4^3 : 10^3$

d) $20^6 : 2^6$ *e)* $38^3 : 19^3$ *f)* $5^4 \cdot 20^3 \cdot 3$

11. Egy kopár sziklafalon megtapadt egy parányi zuzmó, és évenként megkétszerezte az általa beborított területet. 100 év alatt elfedte a teljes sziklafalat.

Hány év alatt fedte el a sziklafal felét?

12. Pista az év végi bizonyítványosztás előtt már tudta, hogy nem lesz közepesnél rosszabb osztályzata. Ebben a tanévben 12 tantárgyuk volt.

Vajon hányféleképpen tölthető ki Pista bizonyítványa?

Ha csak jó és jeles osztályzatot szerzett volna, akkor mennyivel kevesebb eset lenne?

A tízes számrendszer helyiérték-táblázatának kibővítése (Kiegészítő tananyag)

A tízes számrendszer helyi értékei éppen a 10 hatványai. A helyi értékek sorozata: 1, 10, 100, 1000, 10 000, …, éppen a tíz hatványainak sorozata, hiszen minden helyi érték a nála eggyel kisebb helyi értéknek a tízszerese. A hatványjelölés segítségével a helyiérték-táblázat fejlécét most már egészen sokféleképpen ki tudjuk tölteni.

tM	eM	Sz	T	E	sz	t	e	td	szd	Ed	Td	Szd
10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000 01
10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	$\frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$

Ez a táblázat azt is megmutatja, hogyan lehet olyan hatványoknak is értelmet adni, ahol a kitevőben 0 vagy negatív szám áll.

Figyeljük meg a kitevők sorozatát! Ez a sorozat balról jobbra haladva egyesével csökken. Ha tovább folytatjuk eszerint a szabály szerint a kitevők sorozatát, akkor a következő sorozatot nyerjük:

$$10^7 \quad 10^6 \quad 10^5 \quad 10^4 \quad 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad 10^{-4} \quad 10^{-5}$$

vagyis az 1 helyére a 10^0 (10 a nulladikon) kerül. $\frac{1}{10^1}$ helyett 10^{-1}-t, $\frac{1}{10^2}$ helyett 10^{-2}-t, $\frac{1}{10^3}$ helyett 10^{-3}-t írhatunk…

A normálalak

Már az 5. évfolyamon tanultuk, hogy amikor 10-zel, 100-zal, 1000-rel…, vagyis 10 hatványaival szorzunk vagy osztunk, akkor a számjegyeknek sem az alaki értéke sem a sorrendje nem változik, csak a jegyek magasabb vagy alacsonyabb helyi értékre kerülnek.

A helyiérték-táblázatba beírtuk a 7206,1 számot, majd a 10-nek különböző hatványaival szoroztuk, illetve osztottuk.

szM	*tM*	*eM*	*Sz*	*T*	*E*	*sz*	*t*	*e*	*td*	*szd*	*Ed*	*Td*	*Szd*	*eMd*
					7	2	0	6	1					
			7	2	0	6	1							
	7	2	0	6	1									
								7	2	0	6	1		
										7	2	0	6	1

Helyiérték-táblázat nélkül is leírtuk a műveleteket:

7206,1 · 100 = 720610

7206,1 · 10 000 = 72061000

7206,1 : 1000 = 7,2061

7206,1 : 100 000 = 0,072061

Mindegyik eredményben ott találjuk a 72 061 számtömböt, de a számjegyek helyiértéke megváltozott, amikor ez a tömb a táblázatban előrébb vagy hátrább csúszott. A szorzások és az osztások során a számtömb mögé vagy elé valahány nullát kellett írnunk. Ezek a nullák láthatatlanul ott voltak az eredeti számban is: 00 007 206,100 00, közülük akkor és annyit tettünk láthatóvá, amennyi a tizedesvessző kijelöléséhez kellett.

Például:

0 007 206,1 : 1 000 000 = 0,007 206 1,

7206,1000 · 10 000 = 72 061 000.

Azt a tömböt, amely a tíz hatványaival való szorzáskor vagy osztáskor változatlan marad, a **szám értékes jegyeinek** nevezzük. Ez a számtömb az első nem nulla számjeggyel kezdődik, és általában az utolsó nem nulla számjeggyel fejeződik be.

Ha nagyon nagy számot írunk le, akkor annak a végén általában sok nulla áll.

Például: 0,000 720 61 726 100 000

Mindig megtehetjük azt, hogy az értékes jegyekből 1 és 10 közé eső számot alkotunk úgy, hogy a tizedesvesszőt az első számjegy után tesszük ki. Ezután ezt a számot 10 megfelelő hatványával szorozva vagy osztva helyére toljuk a tizedesvesszőt.

Például: 0,000 720 61 = 7,2061 : 10 000 = 7,2061 : 10^4

720 610 000 = 7,2061 · 100 000 000 = 7,2061 · 10^8

Minden pozitív számot felírhatunk úgy, hogy egy 1 és 10 közé eső számot tíz valamilyen hatványával szorzunk vagy osztunk. Ezt az alakot a **szám normálalakjának** nevezzük. A normálalakban a 10 hatvány éppen az első értékes jegy helyi értéke.

Az 1 normálalakja: 1. A 10 normálalakja: 10 = 10^1

Például: 538 000 = 5,38 · 10^5 0,000 035 = 3,5 : 10^5 7789,205 = 7,789 205 · 10^3

Ennek az alaknak nagyon elterjedt a használata. A számítógépek például a számok szorzatát, hányadosát, hatványait ebből az alakból állítják elő, sőt a nagyon nagy és a nagyon kicsi számokat ebben az alakban írják ki a képernyőre is.

Feladatok

1. Írd fel a számok helyi érték szerint kibontott alakját 10 hatványainak a segítségével!

Például: $5641{,}28 = 10^3 \cdot 5 + 10^2 \cdot 6 + 10^1 \cdot 4 + 1 + \frac{1}{10^1} \cdot 2 + \frac{1}{10^2} \cdot 8$

800 070 0,25 302,015 5 000 000 0,003 00 0,0004

2. Írd egymás mellé ezeket a számokat a füzetedbe:

43 512 0,0028 22,115 52 000

Mindegyik alá írd le

a) az ezerszeresét, *b)* a tizedét, *c)* az ezredrészét,

d) a tízszeresét, *e)* a századát, *f)* a százszorosát!

3. Melyik több, hányszor?

0,381 05 vagy 38,105 0,007 65 vagy 7650

39 361,8 vagy 39,3618 5000,05 vagy 0,500 005

0,081 00 vagy 8100 0,222 11 vagy 222,11

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

$52{,}04 : \square = 0{,}052\,04$ $\square \cdot 10\,000 = 34{,}2$ $0{,}23 : \square = 0{,}0023$

$0{,}23 \cdot \square = 0{,}0023$ $0{,}29 \cdot \square = 29\,000$ $31\,300 \cdot \square = 3{,}13$

$625{,}55 : \square = 0{,}006\,255\,5$ $0{,}1 : \square = 1$ $1 : \square = 0{,}1$

$0{,}1 \cdot \square = 1$ $\square \cdot 100 = 0{,}05$ $\square : 100 = 0{,}05$

5. Pótold a hiányzó számokat!

$1282{,}5 = 128{,}25 \cdot \square = 12{,}825 \cdot \square = \square \cdot 10^3 = 128\,250 : \square$

$0{,}0529 = 0{,}529 : \square = 5{,}29 : \square = 0{,}000\,529 \cdot \square = \square \cdot 0{,}005\,29$

6. Írd fel tizedes tört alakban a normálalakban megadott számokat!

$4{,}9 \cdot 10^7$ $1{,}3 : 10^2$ $5{,}25 \cdot 10^4$ $3{,}13 : 10^3$

$5{,}223 \cdot 10^5$ $8{,}709 : 10^1$ $7{,}110\,67 \cdot 10^6$ $4{,}49 : 10^5$

7. Az egyenlőségek bal oldalán a számokat normálalakban írtuk, de a 10 hatványkitevőjét letakartuk. Mennyi a letakart kitevő?

a) $3{,}405 \cdot 10^{\square} = 3\,405\,000$ *b)* $1{,}0124 \cdot 10^{\square} = 1012{,}4$

c) $5{,}01 \cdot 10^{\square} = 501\,000$ *d)* $4{,}082 \cdot 10^{\square} = 4\,082\,000$

e) $5{,}2 : 10^{\square} = 0{,}0052$ *f)* $6 : 10^{\square} = 0{,}000\,000\,6$

g) $4{,}2 : 10^{\square} = 0{,}000\,042$ *h)* $8{,}314 : 10^{\square} = 0{,}8314$

i) $6 \cdot 10^{\square} = 6\,000\,000$ *j)* $5 : 10^{\square} = 0{,}0005$

k) $4{,}2 \cdot 10^{\square} = 420\,000\,00$ *l)* $1{,}8 : 10^{\square} = 0{,}000\,000\,18$

8. Írd a számokat normálalakba!

6672; 54 400; 780 000 000; 0,000 005; 0,000 000 1; 26 000 000

9. Játék – Először becsüld meg, majd számold is ki, hogy milyen vastag papíroszlopot kapnál, ha egy papírlapot kettéhajtanál, majd ismét kettéhajtanál, s az eljárásodat 50-szer megismétlnéd! Az egyszerűség kedvéért selyempapírt hajtogatunk, melyből 100 darab egymásra téve mindössze 1 mm vastag ($2^{10} = 1024 \approx 1000$-rel dolgozz).

10. Fele sem igaz! A három válasz közül csak egy a helyes.

a) Vajon melyik? Tippelj!

b) Írd a táblázatban olvasható számok mindegyikét normálalakba!

Egy fejen átlagosan ennyi hajszál van	10^5	20 000	$8 \cdot 10^5$
A Kheopsz-piramis ennyi kőtömbből épült	680 000	$2{,}3 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$
Az Országház ennyi téglából épült	40 millió	400 000	$1{,}5 \cdot 10^6$
Egy légy egy perc alatt ennyit csap a szárnyaival	$5{,}3 \cdot 10^2$	3600	19 800
Az Eiffel-torony építéséhez ennyi szegecset használtak fel	25 millió	$2{,}5 \cdot 10^6$	250 000
Egy ember szíve 60 éves koráig átlagosan ennyit ver	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^6$
1 millió nap ennyi év	2700	$3 \cdot 10^5$	1500
1 millió másodperc kb. ennyi nap	$1{,}2 \cdot 10^3$	$1{,}2 \cdot 10$	$1{,}2 \cdot 1000$

11. Írd normálalakba a felsorolt adatokat!

a) Földünk felülete 510 220 000 km^2, a szárazföldé 149 160 000 km^2,
a vízé 361 060 000 km^2, Egyenlítőjének hossza 40 075,704 km,
térfogata 1 083 320 000 000 km^3, tömege 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

b) Minden anyag atomokból épül fel, az atomokat protonok, neutronok és elektronok alkotják.
Erre vonatkozó adatok: a héliumatom átmérője: 0,000 000 06 mm,
a proton tömege: 0,000 000 000 000 000 000 000 001 67 g,
az elektron tömege: 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 91 g.

12. Hányszor annyi ember él a Föld legnépesebb országában, mint Magyarországon?
Gyűjts adatokat a számoláshoz!

13. A Föld tömege $6 \cdot 10^{27}$ g. A Nap tömege $2 \cdot 10^{33}$ g. Hányszorosa a Nap tömege a Föld tömegének?

A műveletek sorrendje

A műveletek sorrendjére a racionális számok körében ugyanazok a szabályok érvényesek, mint amelyeket már a természetes számok körében megismertünk.

Ezek a szabályok azonban nem szólnak arról, hogy mi a sorrend, ha a műveletek között hatványozás is szerepel.

Tekintsük át az eddig megismert műveletek sorrendjére vonatkozó szabályokat!

A műveletek elvégzésekor kövessük az alábbi sorrendet:

1. elvégezzük a zárójelben lévő műveleteket, utána
2. a hatványozást,
3. a szorzásokat és az osztásokat,
4. az összeadásokat és a kivonásokat.

Ha azt akarjuk, hogy egy másik művelet megelőzze a hatványozást, akkor zárójelet kell használnunk.

Figyeljük meg a következő két szorzatot!

$7 \cdot 2^3 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Ebben a szorzatban egy darab 7-es és három darab 2-es szorzó van, hiszen a 2-est a harmadik hatványra kellett emelni.

$(7 \cdot 2)^3 = (7 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 2)$

Ebben a szorzatban három darab 7-es és három darab 2-es szorzó van, hiszen a 7-est és a 2-est is a harmadik hatványra kellett emelni.

Egy összetett műveletsort összegnek, szorzatnak, esetleg hatványnak nevezünk aszerint, hogy a műveletek sorrendjében mi az utolsó, amit el kell végeznünk. Ha az utolsó elvégzendő művelet összeadás vagy kivonás, akkor összegnek, ha az utolsó elvégzendő művelet szorzás vagy osztás, akkor szorzatnak, ha pedig hatványozás, akkor hatványnak nevezzük a műveletsorunkat.

Példa

Állapítsd meg a következő műveletsorokról, melyik összeg, melyik szorzat és melyik hatvány!

a) $3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 19$ *b)* $(3 \cdot 4^2 + 5) \cdot 19$ *c)* $(3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 19)^3$

Megoldás

A műveleti jelek alá írt számok azt jelzik, hányadik lépésben kell ezt a műveletet elvégeznünk.

a) $3 \cdot 4^{\underset{2.}{2}} \underset{3.}{-} 5 \cdot 19$ *b)* $(3 \cdot 4^{\underset{2.}{2}} \underset{3.}{+} 5) \underset{4.}{\cdot} 19$ *c)* $(3 \cdot 4^{\underset{2.}{2}} \underset{3.}{+} 5 \cdot 19)^{\underset{4.}{3}}$

Látjuk, hogy az *a)* esetben az utolsó művelet kivonás. Ez tehát egy összeg. A *b)*-ben az utolsó művelet szorzás, ez tehát egy szorzat; a *c)*-ben az utolsó művelet hatványozás, ez tehát egy hatvány.

Zárójelfelbontás

A) Ha valamihez **összeget adunk hozzá,** akkor a zárójelet elhagyhatjuk.

Ha egy **összeget vonunk ki** valamiből, akkor a zárójel elhagyásakor a benne levő műveletek ellenkezőjükre változnak, a hozzáadásból kivonás, a kivonásból pedig hozzáadás lesz.

Például: $25 + \left(\frac{1}{5} + \frac{11}{10} - \frac{3}{10}\right) = 25 + \frac{1}{5} + \frac{11}{10} - \frac{3}{10} = 26$

$25 - \left(\frac{1}{5} + \frac{11}{10} - \frac{3}{10}\right) = 25 - \frac{1}{5} - \frac{11}{10} + \frac{3}{10} = 24$

B) Ha egy **szorzatot adunk hozzá** valamihez vagy egy **szorzatot vonunk ki** valamiből, akkor a zárójel elhagyható, hiszen a szorzás és az osztás megelőzi az összeadást vagy kivonást.

Például: $51 - (12 \cdot 3) = 51 - 12 \cdot 3 = 15$

$22 + (12 : 3) = 22 + 12 : 3 = 26$

C) Hasonlóan, ha egy hatványt adunk hozzá valamihez vagy egy hatványt vonunk ki valamiből, akkor a zárójel elhagyható, hiszen a hatványozás zárójel nélkül is megelőzi az összeadást és a kivonást.

Például: $29 + (4^2) = 29 + 4^2 = 45$

Vigyázat! $29 + 4^2$ nem ugyanaz, mint $(29 + 4)^2 = 1089$

D) Ha valamit egy **szorzattal szorzunk,** akkor a zárójelet elhagyhatjuk.

Ha egy **szorzattal osztunk** valamit, akkor a zárójel elhagyásakor a benne levő műveletek ellenkezőjükre változnak, a szorzásból osztás, az osztásból pedig szorzás lesz.

Például: $36 \cdot (0{,}1 \cdot 200 : 5) = 36 \cdot 0{,}1 \cdot 200 : 5 = 144$

$36 : (0{,}1 \cdot 200 : 5) = 36 : 0{,}1 : 200 \cdot 5 = 9$

E) Ha egy hatvánnyal osztunk vagy szorzunk, a zárójel akkor is elhagyható, hiszen a hatványozás a szorzást és az osztást is megelőzi.

Például: $100 : \left(5^2\right) = 100 : 5^2 = 100 : 25 = 4$

Vigyázat! $100 : 5^2$ nem ugyanannyi, mint $(100 : 5)^2 = 400$

F) Ha egy **összeget megszorzunk** egy számmal, akkor a zárójelet csak úgy hagyhatjuk el, ha az összeg minden tagját megszorozzuk a számmal, hiszen a szorzás az összeg minden tagjára vonatkozik. Ugyanez a helyzet összeg osztásakor is.

Például: $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot 18 = \frac{1}{3} \cdot 18 - \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$

$(49 + 21) : 7 = 49 : 7 + 21 : 7 = 10$

G) Ha egy szorzatot megszorzunk (vagy elosztunk) egy számmal, akkor a zárójel elhagyható, hiszen ez a szám (szorzó vagy osztó) egyenrangú a többi tényezővel.

Például: $(22 \cdot 4 : 8) \cdot 5 = 22 \cdot 4 : 8 \cdot 5 = 55$

$(35 : 4 \cdot 12) : 7 = 35 : 4 \cdot 12 : 7 = 15$

Láthatatlan zárójelek

Előfordul, hogy a zárójel láthatatlanul működik a műveletsorban.

Ez történik például akkor, ha egy osztást tört alakban írunk fel.

$(25 + 11) : 9 = \frac{25 + 11}{9}$, itt az összeget nem kell zárójelbe tenni, hiszen a törtvonal helyettesíti a zárójelet.

Vigyázat! Ha egy törtet osztásként írunk fel, a láthatatlan zárójeleket újra ki kell tenni.

Például: $\frac{38 - 6}{4} = (38 - 6) : 4$

Akkor is ki kell tennünk a zárójelet, ha negatív számot vagy törtet hatványozunk.

Például: $(-5)^4 = 625$, de $-5^4 = -625$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, de $\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

Akkor is vigyáznunk kell, ha a számlálóban vagy a nevezőben vagy mindkettőben tört áll. Ilyenkor nem magától értetődő, hogy mi az osztások sorrendje.

Például: Nem tudhatjuk, hogy ez az emeletes tört mit jelent:

$$18 : (6 : 3) = \frac{18}{\frac{6}{3}} = 9 \qquad \text{vagy} \qquad (18 : 6) : 3 = \frac{\frac{18}{6}}{3} = 1$$

$$\frac{\frac{18}{6}}{3}$$

Ilyenkor a törtvonalak hosszúsága veszi át a zárójelek szerepét. A leghosszabb törtvonal helyettesíti az utolsó osztást. Ezt főtörtvonalnak hívjuk, és az egyenlőségjellel egy sorba írjuk.

Láthatatlan a zárójel akkor is, ha egy összeg vagy egy szorzat a kitevőben szerepel.

Például: $2^{3+5} = 2^8 \qquad 5^{3\cdot 2} = 5^6$

Ki kell azonban tennünk a zárójelet akkor, ha hatványt hatványozunk.

Például: $\left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64$ de $2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

Feladatok

1. Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ *b)* $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$ *c)* $0{,}72 - 0{,}48 : (-12)$

d) $\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} : \left(-\frac{5}{3}\right)$ *e)* $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot 0$ *f)* $\frac{2}{3} : \frac{8}{9} + \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9}$

2. Számítsd ki! Ahol lehet, egyszerűsíts! Ha ügyesen egyszerűsítesz, ezeket a feladatokat fejben is könnyen kiszámíthatod!

$\frac{2}{3} \cdot 27 - 18$ $\frac{15}{7} \cdot 21 - \frac{15}{3}$ $\frac{4}{5} \cdot \frac{100}{80} - (-3)$ $\frac{10}{9} : 2 \cdot \frac{9}{5}$

$\left(\frac{5}{2} - 0{,}75 \cdot 2\right) \cdot \frac{4}{3}$ $0{,}3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3}$ $\frac{8}{3} : 2 + \frac{1}{3} \cdot 8$ $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot 3$

3. Számítsd ki az $a \cdot b + c$, $a : b - c$, $(a - b) \cdot c$, $\frac{(c-b)}{a}$, $\frac{b}{a} \cdot c$ kifejezések értékét, ha

a) $a = \frac{2}{3} \quad b = \frac{6}{7} \quad c = -\frac{3}{14}$; *b)* $a = 1{,}3 \quad b = 0{,}01 \quad c = -1{,}1$;

c) $a = 0{,}5 \quad b = -\frac{3}{4} \quad c = \frac{1}{3}$!

4. Végezd el a műveleteket! Ahol lehet, egyszerűsíts!

a) $\frac{4}{7} \cdot 21 - \frac{2}{9} \cdot 18 + \frac{5}{3} \cdot 6$ *b)* $63 \cdot \frac{7}{9} - \frac{5}{4} \cdot 12 - \frac{11}{8} \cdot 24$ *c)* $\frac{46}{7} \cdot 14 : 23 + (-4)$

d) $\frac{27}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot 15 + \frac{32}{16} \cdot 9 \cdot 2$ *e)* $\frac{5}{7} \cdot 49 - \frac{35}{6} \cdot 12 + 25 \cdot \frac{7}{5}$ *f)* $\frac{8}{3} \cdot 12 - \frac{7}{4} \cdot 16 - \frac{2}{9} \cdot 18$

5. *a)* $(-0{,}3 + 0{,}7) \cdot (-1{,}2 - 3{,}5)$ *b)* $(4{,}8 - 2{,}3) \cdot (-3{,}8 - 6{,}2)$

c) $\left(-\frac{4}{8} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8} + \frac{9}{10}\right)$ *d)* $\left(\frac{12}{13} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)$

6. *a)* $\left(-\frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{12}{5}$ *b)* $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{7}\right)$

c) $(0{,}9 - 1{,}6 - 0{,}3) \cdot \frac{17}{23}$ *d)* $\left(\frac{5}{8} - \frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)$

7. *Láncszámolás.* A legelső műveletsor eredményét a-val jelöltük. Ezzel az értékkel számolj tovább, vagyis az első eredményt helyettesítsd be a második feladatba az a betű helyére! A második feladat eredményét b-vel jelöltük, ezt a harmadik műveletsorba kell behelyettesíteni, és így tovább. Próbáld meg fejben végigszámolni a láncot, és meghatározni, hogy az utolsó betű milyen számot jelent!

a) $3-(-7)=a$ $\quad a\cdot\frac{3}{5}=b$ $\quad b^2-1=c$ $\quad c\cdot\frac{1}{7}=d$ $\quad d=?$

b) $(-5)\cdot\frac{3}{5}=a$, $\quad a:(-30)=b$, $\quad b+0{,}9=c$, $\quad c\cdot\frac{5}{3}=d$, $\quad d-\frac{2}{3}=e$ $\quad e=?$

c) $34\cdot\frac{5}{17}=a$, $\quad a^5=b$, $\quad b$-nek a 30%-a $=c$, $\quad c\cdot 0{,}001=d$, $\quad d:\frac{30}{71}=e$ $\quad e=?$

d) $\left(\frac{3}{4}+2\right)\cdot 2-0{,}5=a$, $\quad a\cdot(-8)=b$, $\quad |b|+b=c$, $\quad c\cdot 22+3=d$,

d-nek a $\frac{7}{3}$ része $=e$, $\quad e\cdot 9+e\cdot 2=f$, $\quad f-g=70$, $\quad g=?$

e) $3{,}2\cdot 100:8:10=a$, $\quad [a+(-4)]\cdot 5-(-2)=b$, $\quad b-c=20$, $\quad c:(-2)\cdot 9=d$,

d-nek az $\frac{5}{9}$ része $=e$, $\quad e=?$

8. Írd fel műveleti jelekkel, majd számítsd ki a következőket!

a) $\frac{2}{3}$ és $\frac{5}{8}$ összegének a $\frac{9}{10}$ része

b) 1,2 és 5,6 összegének a $\frac{3}{4}$ része

c) $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{2}$-szeresének és $\frac{9}{10}$ $\frac{5}{6}$ részének az összege

d) $\frac{4}{5}$ és $\frac{9}{10}$ összegének az $\frac{5}{6}$-szorosa

9. A $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ számkártyákból egy-egy darab van. Zárójelek és alapműveletek segítségével állíts elő minél többféle számot!

10. Színezd pirossal a számegyenesnek azokat a pontjait, amelyekre a megadott kifejezések értéke pozitív, kékkel azokat, amelyekre negatív, feketével azokat, amelyekre nulla, és üres karikát rajzolj arra a pontra, amely a kifejezést értelmetlenné teszi!

a) $2x-8$ $\quad$ *b)* $-3-x$ $\quad$ *c)* $\frac{5}{x}$ $\quad$ *d)* $x\cdot(x+5)$ $\quad$ *e)* $(x-1)\cdot(x+4)$ $\quad$ *f)* $\frac{x-4}{x+2}$

11. Mennyi $A\cdot B$? $\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}$ $\quad B=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}$

12. Melyik több? $\quad 5\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{8}\cdot\frac{9}{5}$ vagy $5\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{5}{9}$

13. Öt különböző temészetes szám összege 14. Mennyi az öt szám szorzata?

Tudáspróba

1. A hatványokat írd szorzat alakba, a szorzatokat írd hatvány alakba!

2^5 $\quad (-1)^4$ $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 a^6$

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ $\quad 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$ $\quad (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

2. Melyik nagyobb? Tedd ki a megfelelő (<, =, >) jelet!

$3 \cdot 5^4 \square (3 \cdot 5)^4$ $\quad (-2)^6 \square 2^8$ $\quad 0{,}1^3 \square 0{,}001^2$

$(-1)^{19} \cdot (-3)^{19} \square (-3)^{21}$ $\quad \frac{1}{10^4} \square 0{,}001$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 \square \left(\frac{1}{2}\right)^8$

3. Állítsd nagyság szerint csökkenő sorrendbe!

$\frac{9}{17}$ $\quad \frac{8}{15}$ $\quad \frac{1223}{2514}$ $\quad 0{,}0053 \cdot 10^2$ $\quad 5{,}2 : 10$ $\quad 52\,000 : 10^5$

4. Végezd el a műveleteket!

a) $0{,}023 + (-2{,}1375)$ $\quad$ *b)* $23{,}18 \cdot (-0{,}022)$ $\quad$ *c)* $0{,}152 : 2{,}25$

d) $\left(\frac{1}{2} + 0{,}7\right) : 12$ $\quad$ *e)* $-\frac{3}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{21}$ $\quad$ *f)* $\left(\frac{22}{25} - \frac{4}{15} \cdot 9\right) \cdot 5$

5. Írd fel zárójelek nélkül a műveletsorokat! Az eredmény nem változhat, csak a műveleti jeleken változtathatsz, a számok maradjanak változatlanul!

a) $43 + (5 - 12) - (3 - 21 + 12)$ $\quad$ *b)* $88 : (28 \cdot 11 : 7) \cdot (15 \cdot 16 : 24)$

c) $9 \cdot (111 - 20) - (23 + 2) \cdot 10$

6. Oldd meg az egyenleteket!

a) $5^{\square} = 625$ $\quad$ *b)* $\square^4 = 1296$ $\quad$ *c)* $\left(\square + \frac{1}{2}\right) : 3 = -\frac{5}{3}$ $\quad$ *d)* $\square \cdot 0{,}23 - 11{,}5 = 11{,}5$

7. Melyik nagyobb? Tedd ki a <, > vagy = jelet!

a) a $28\frac{2}{3}$ részének a $\frac{3}{7}$ része $\square$ a $28\frac{3}{7}$ részének a $\frac{2}{3}$ része

b) a $18\frac{5}{6}$ részének a $\frac{2}{3}$ része $\square$ a $18\frac{5}{3}$ részének az $\frac{1}{2}$ része

c) a $23\frac{4}{10}$részének a 2,5-szerese $\square$ a 23 0,7-szeresének a $\frac{10}{7}$ része

8. Párosítsd össze az egymásnak megfelelőket!

a) Mennyi 80-nak a $\frac{13}{5}$ része? $\quad$ *A)* $x \cdot \frac{13}{5} = 80$

b) Melyik szám $\frac{13}{5}$ része a 80? $\quad$ *B)* $80 \cdot 2{,}6 = x$

c) Mekkora része 80-nak a $\frac{13}{5}$? $\quad$ *C)* $80 \cdot x = \frac{13}{5}$

d) Mennyi 80-nak a 260 százaléka? $\quad$ *D)* $80 \cdot \frac{13}{5} = x$

Geometriai transzformációk

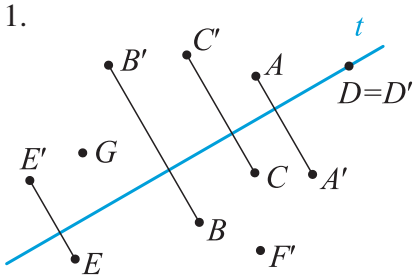
Keresd a párját!

Példa

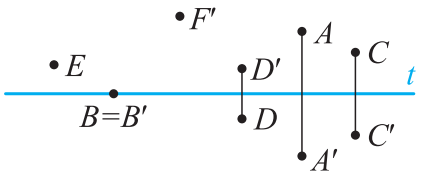
Játsszunk szabályjátékot pontokkal!

Az alaphalmaz elemei a lap síkjának pontjai legyenek. Megadtunk néhány pontot és némelyiknek a párját is. Mi lehet az egyes hozzárendelések szabálya? Amelyik pontnak nem adtuk meg a képét, annak keresd meg! Amelyiknek pedig csak a képét adtuk meg, annak keresd meg az eredetijét!

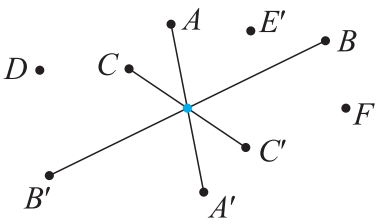
1.



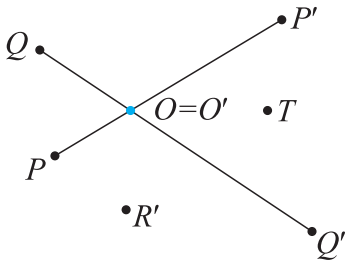
2.



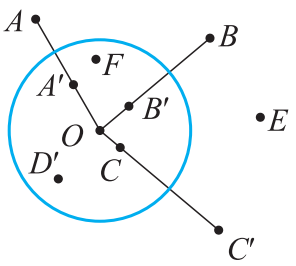
3.



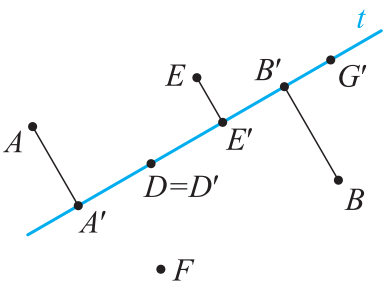
4.



5.



6.

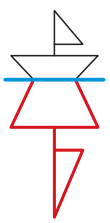


Megoldás

Az egyes hozzárendelésekhez többféle szabályt is mondhatunk, hiszen néhány pontnak és képének az ismerete nem ad biztos információt más pontok képéről.

A szabályok lehetnek például a következők:

1. Sík pontjai, figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a kék egyeneshez (vagyis az egyenesre merőleges irányban), majd irányváltoztatás nélkül fusson tovább kétszer annyit! (Így az egyenesen levő pontok helyben maradnak.)



2. Sík pontjai, figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a kék egyeneshez, majd irányváltoztatás nélkül fusson tovább ugyanannyit! (Így az egyenesen levő pontok helyben maradnak.) Szabályunk éppen a **tengelyes tükrözés.** A tengelyes tükrözést egy egyenessel adjuk meg.

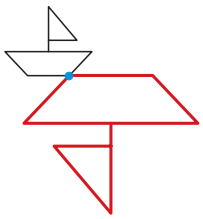


3. Sík pontjai, figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a kék ponthoz, majd irányváltoztatás nélkül fusson tovább ugyanannyit! Ez a szabály a **középpontos tükrözés.** A középpontos tükrözést egy ponttal adjuk meg.

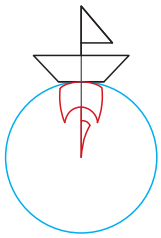


4. Sík pontjai, figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a kék ponthoz, majd irányváltoztatás nélkül fusson tovább kétszer annyit!

   Ez egy **középpontos nagyítás,** egy ponttal és a nagyítás arányával adjuk meg.

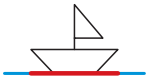


5. Minden pont szaladjon a körhöz a legrövidebb úton (vagyis a kör középpontja felé mutató irányban), majd irányváltoztatás nélkül fusson tovább ugyanannyit!



6. Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a kék egyeneshez, és maradjon ott!

   Ez a szabály a **merőleges vetítés.**



A szabályok mellett látható kis képek azt mutatják meg, hogyan változtatja meg egy vitorlás hajócska helyét és formáját az általunk megadott szabály. Később, amikor visszatérünk valamelyik szabályhoz, emlékeztetőül gyakran ott lesz a hozzá tartozó kis kép.

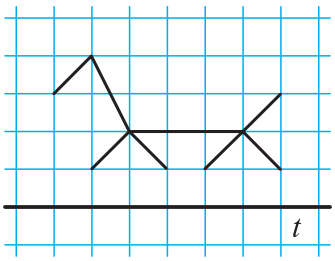
Az 1–6. szabályok mindegyikében pontnak pont a párja. Minden ponthoz egyetlen képpont tartozik. Ezek a hozzárendelések megváltoztatják a sík alakzatainak a helyét és olykor az alakzatok formáját is. Az átváltozás neve **transzformáció.**

Feladatok

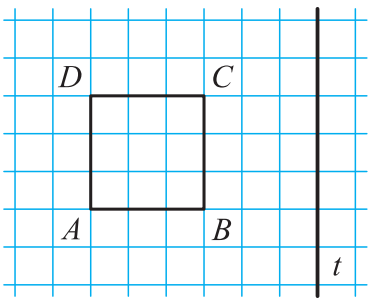
1. Készítsd el külön-külön ábrán a kutya képét az 1., a 2. és a 6. szabály szerint!

Hasonlítsd össze a kapott képeket! Miben különböznek?

A füzetedben dolgozz!

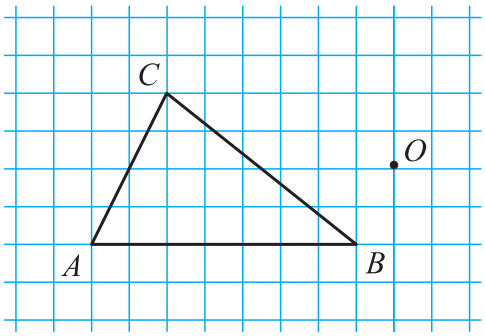


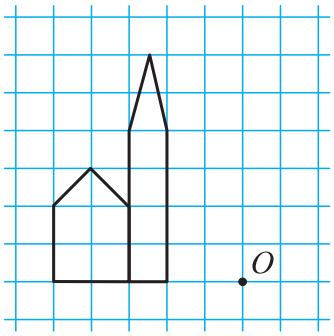
2.



Készítsd el külön-külön ábrán a négyzet képét az 1. és a 2. szabály szerint!

3. Készítsd el a háromszög képét a 3. és a 4. szabály szerint!

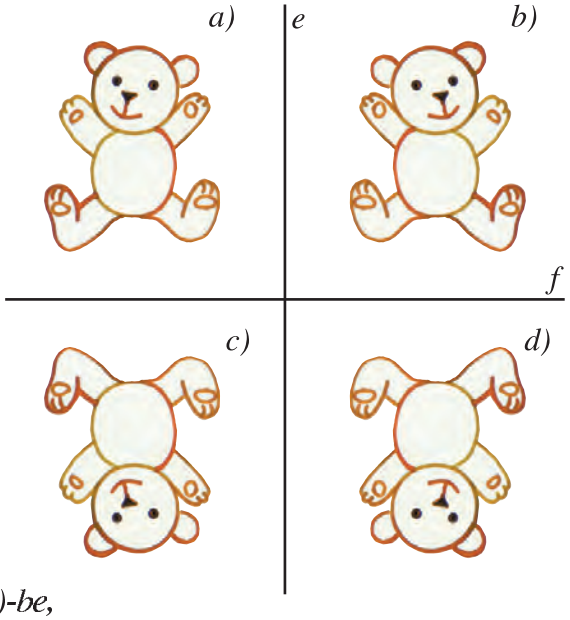


4. 

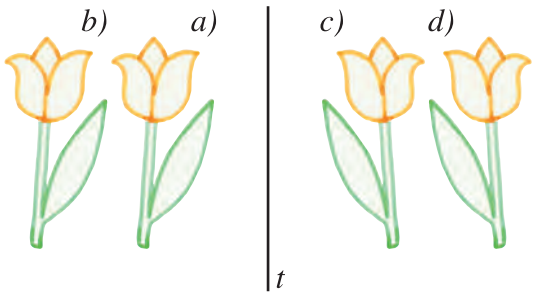
Készítsd el a templom képét a 3. és a 4. szabály szerint! Hasonlítsd össze a kapott képeket!

5. Milyen szabály viszi át a mackós rajzoknál az

a)-t b)-be, a)-t c)-be, a)-t d)-be,
b)-t c)-be, b)-t d)-be, c)-t d)-be?



6. Milyen szabály viszi át az



a)-t d)-be,
b)-t d)-be,
c)-t a)-ba,
c)-t b)-be?

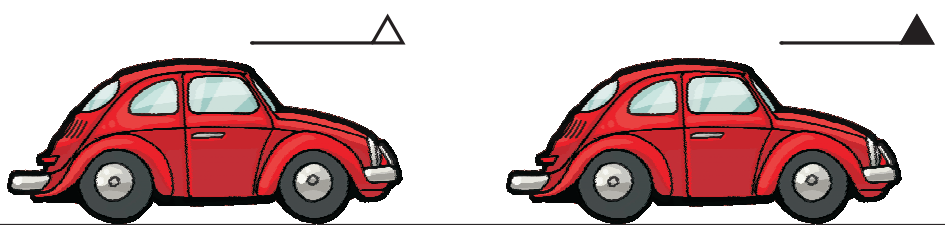
Mozgatások

Geometriai transzformációkat az 1–6. szabályoktól eltérő módon is megadhatunk. A sík egyes pontjainak képét a következő példákban egy átlátszó papír segítségével lehet megkeresni.



Másold át a megadott ábrát a fehér zászlójú mutatóval együtt az átlátszó papírra! Ezután emeld fel a másolatot, majd tedd le úgy, hogy a fehér zászlójú mutató pontosan fedje a fekete zászlójút! Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásolod az eredeti ábrát is, akkor azon együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.

Ha helyesen dolgoztál, ezt látod a másolópapírodon:



A „Keresd a párját” című fejezetben szereplő hat hozzárendelést egy-egy szabállyal adtuk meg, melyek alapján minden pontnak egyenként meg tudtuk keresni a képét. Ebben a fejezetben a mozgásokat két zászlós mutató segítségével adjuk meg. A mozgatásoknál a pontok képét nem egyenként keressük meg, hanem egyszerre az egész „síkot” (az azt jelképező átlátszó papírt) mozgatjuk el.

A mozgások is transzformációk, minden pontnak az a képe, ahová a mozgatás elviszi.

Ugyanazt a mozgást többször egymás után elvégezve szép mintákat rajzolhatsz.



Először lemásolod a rajzot a fehér zászlóval együtt.



A fehér zászlót a feketére mozgatod, majd újra lemásolod a rajzot a fehér zászlóval együtt.



Most az új fehér zászlót teszed rá a fekete zászlóra, és újra lemásolod az eredeti rajzot a fehér zászlóval együtt. És így tovább, ameddig akarod.



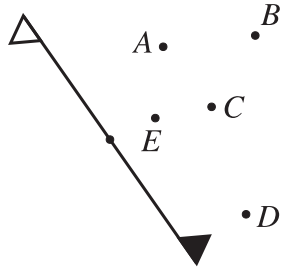




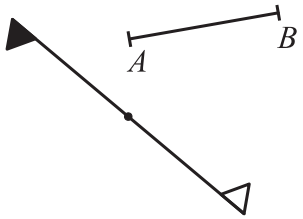
Feladatok

1. Dolgozz másolópapírral! Mozgasd el a következő ábrákat a zászlós mutatók segítségével!

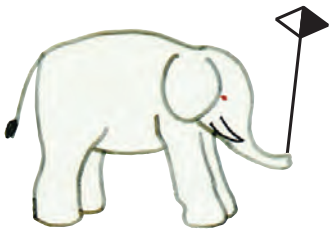
a)



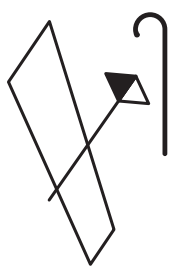
b)



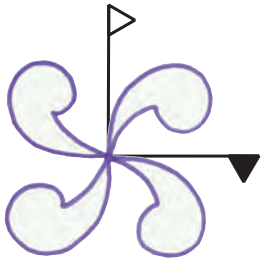
c)



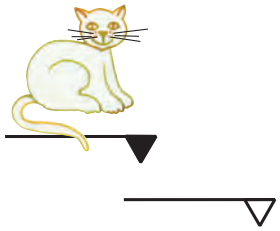
d)



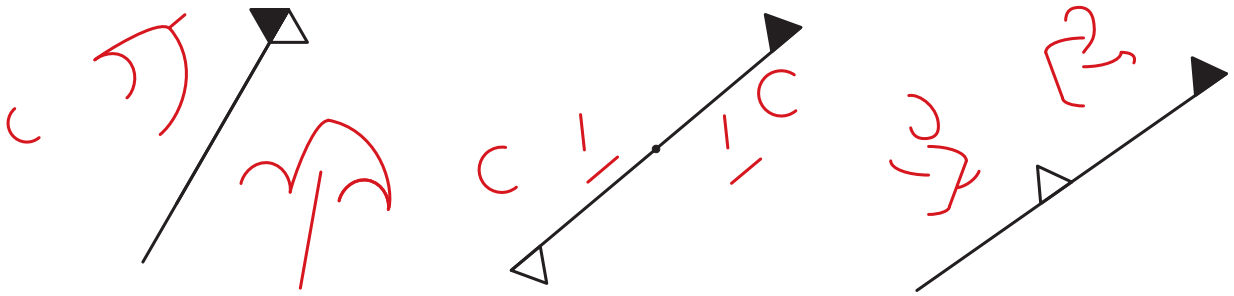
e)



f)



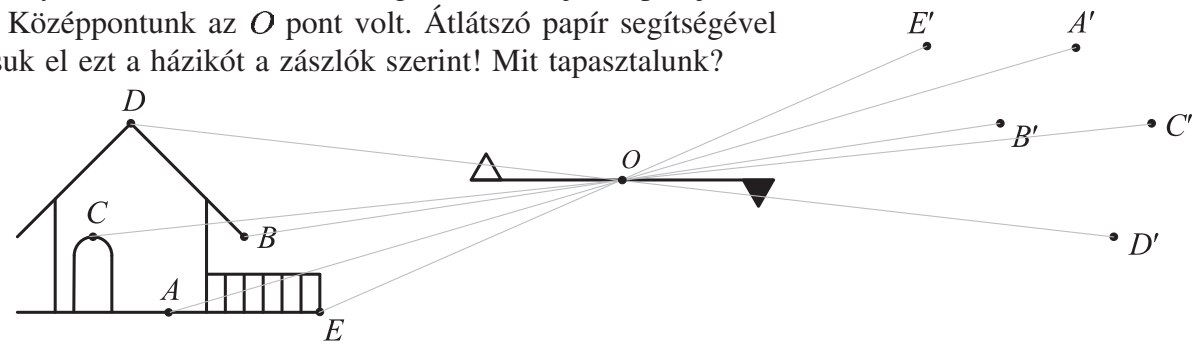
2. Mi van a képen? Ha a széttördelt rajz egyik felét elmozgatod a zászlók szerint, megkapod az eredeti képet.



A transzformációk egyenlősége

Példa

A 3. szabály szerint szerkesztettük meg a házikó kijelölt pontjainak a képét. Középpontunk az O pont volt. Átlátszó papír segítségével mozgassuk el ezt a házikót a zászlók szerint! Mit tapasztalunk?

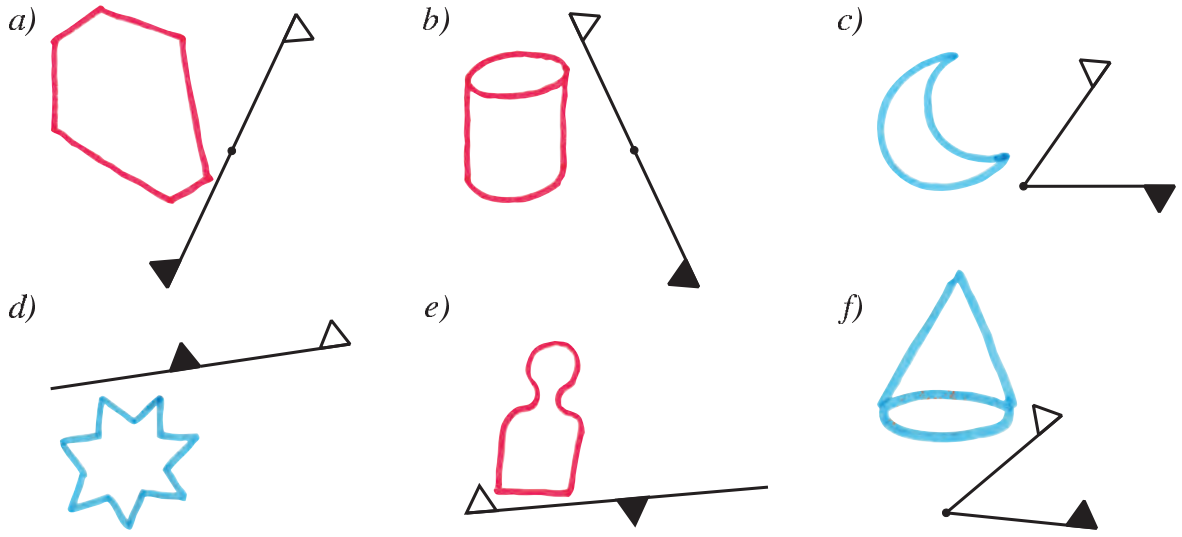


Megoldás

Azt tapasztaljuk, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott ponthoz mindkét eljárás ugyanazt a képpontot rendeli. A 3. szabály és a zászlókkal megadott mozgatás ugyanaz a transzformáció.
Látjuk, hogy ugyanazt a hozzárendelést több különböző módon is megadhatjuk.

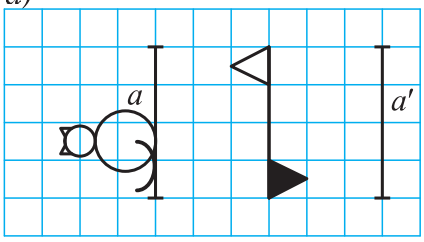
Feladatok

1. Melyik mozgatás melyik szabálynak felel meg az 1–6. szabály közül? Melyik mozgatáshoz nem találsz megfelelőt az 1–6. szabályok közül?

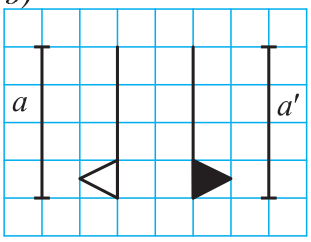


2. Melyik ugyanaz, melyik más? A zászlópárokkal mozgatásokat adtunk meg, melyek mindegyike az a szakaszt az a'-be mozgatja. A megadott mozgatások közül melyek azonosak, melyek különböznek?

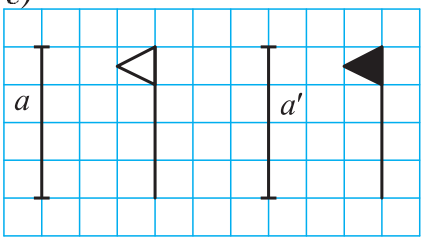
a)



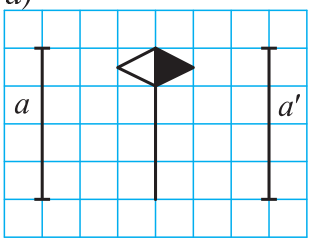
b)



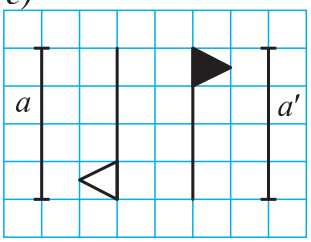
c)



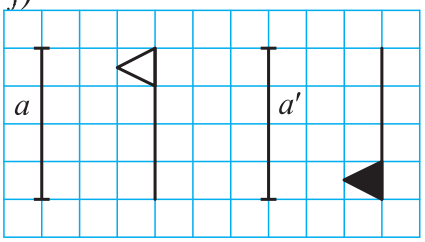
d)



e)



f)



Ellenőrizheted magad azzal, ha ráülteted a cicát a szakaszra, és megfigyeled, hova kerül. A megegyező mozgatások ugyanoda viszik a cicát, a különbözőek nem.

A transzformációk tulajdonságai

Távolságtartás és szögtartás

Hajócska képét készítettük el különböző transzformációk szerint. Mindegyik esetben hasonlítsuk össze a színessel megjelölt szakaszokat és szögeket a képükkel!

1. szabály

Némelyik szakasz hossza megváltozott, némelyiké nem.



Némelyik szög nagysága megváltozott, némelyiké nem.

3. szabály

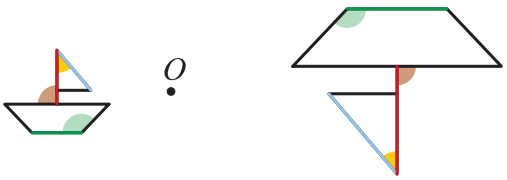
Minden szakasz ugyanakkora, mint a képe.



Minden szög ugyanakkora, mint a képe.

4. szabály

Minden szakasz hossza kétszeresére nőtt.



Minden szög ugyanakkora, mint a képe.

Azokat a transzformációkat, amelyekre igaz, hogy bármely két pont távolsága egyenlő a képeik távolságával, **távolságtartó transzformációknak nevezzük.**

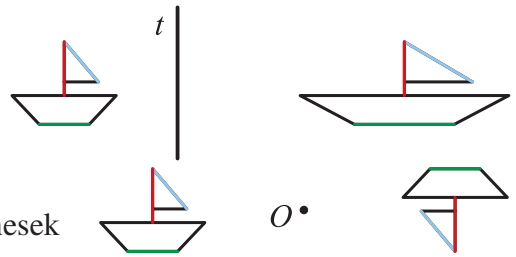
Azokat a transzformációkat, amelyekre igaz, hogy bármely szög nagysága egyenlő a képének nagyságával, **szögtartó transzformációknak** nevezzük.

Egyenestartás

Hajócska képét készítettük el különböző transzformációk szerint. Mindegyik esetben hasonlítsuk össze a színessel megjelölt szakaszokat a képükkel!

1. szabály

Némelyik szakasz hossza megváltozott, némelyiké nem, de az egyenes szakaszok képe egyenes szakasz maradt.

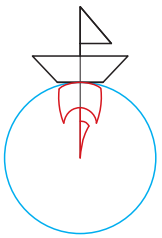


3. szabály

Minden szakasz hossza ugyanakkora mint a képe, az egyenesek képe is egyenes.

5. szabály

A szakaszoknak nemcsak a nagysága változott meg, majdnem minden szakasz képe görbe vonal lett.

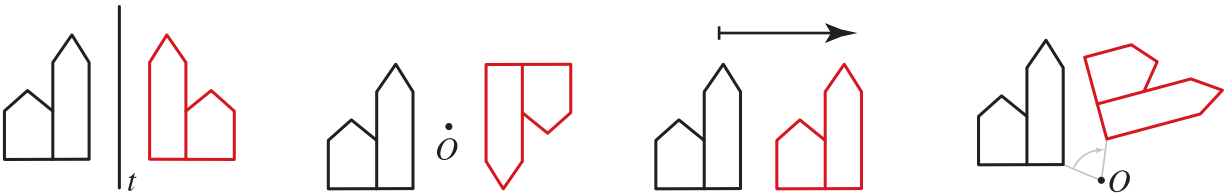


Azokat a transzformációkat, amelyekre igaz, hogy bármely egyenes képe is egyenes, **egyenestartó transzformációknak** nevezzük.

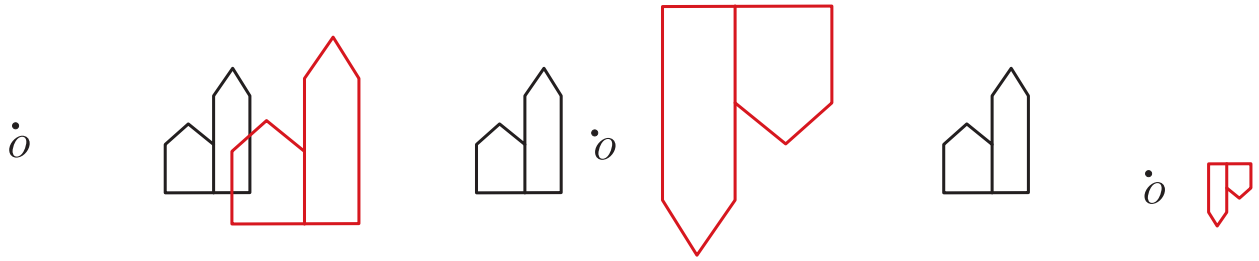
A transzformációk fajtái

Tulajdonságaik alapján a transzformációkat három nagy csoportba sorolhatjuk:

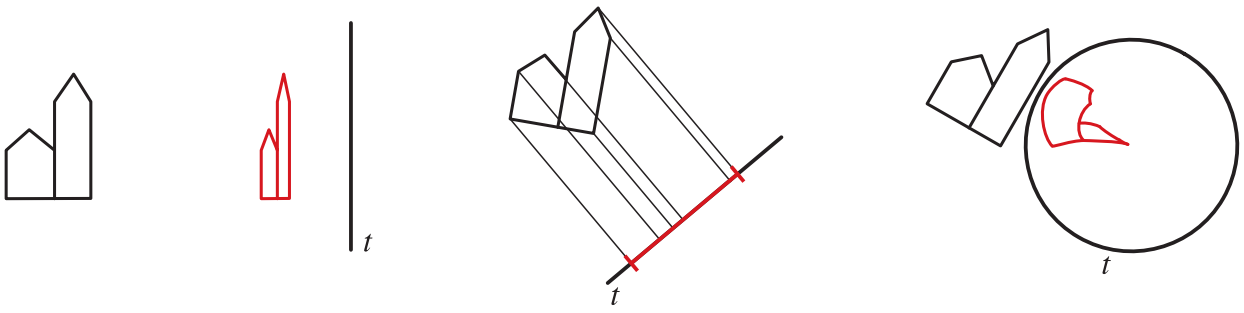
A transzformációk között vannak olyanok, amelyek a távolságokat és a szögeket változatlanul hagyják. Egyenest egyenesbe visznek. Ilyenek például a tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, és ilyen minden mozgás is. Ezeket **egybevágósági transzformációknak** nevezzük.



A transzformációk között vannak olyanok, amelyek a szögeket nem változtatják meg. A távolságok megváltoznak ugyan, de az arányaik megmaradnak, azaz minden távolság ugyanannyiszorosára változik. Egyenest egyenesbe visznek. A kép hasonlít az eredetire, annak nagyított vagy kicsinyített mása. Ezeket **hasonlósági transzformációknak** nevezzük.

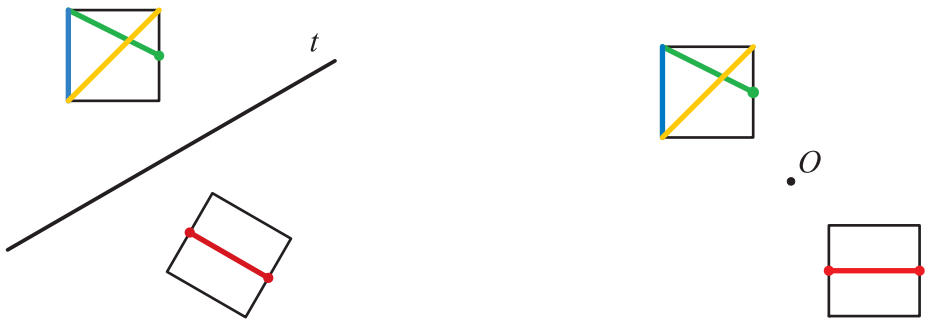


A transzformációk között vannak olyanok, amelyekben a távolságok, a távolságok arányai és a szögek is megváltoznak. Lehet, hogy az egyenesek képe sem egyenes. A kép az eredetinek eltorzított változata. Ezeket **torzító transzformációknak** nevezzük.



Feladatok

1. Megrajzoltuk egy négyszög képét a 2. és a 3. szabály szerint. Néhány szakaszt színessel bejelöltünk. Keresd meg a párjukat!



2. Másold le a füzetedbe, és töltsd ki a táblázatot! Minden állításról döntsd el, melyik szabályra igaz, melyikre nem! Az első sorban megadtuk a válaszokat. Folytasd a táblázat kitöltését!

	1. szabály	2. szabály	3. szabály	4. szabály	5. szabály	6. szabály
Egyenes képe egyenes	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis
Szakasz képe ugyanolyan hosszú szakasz						
Egyenes és képe párhuzamosak						
Párhuzamos egyenesek képei párhuzamos egyenesek						
Egy alakzat képe mozgatással is előállítható						

3. Kiválasztottunk egyet az 1–6. szabályban megadott transzformációk közül. Eláruljuk, hogy ennél a transzformációnál, ha $A \mapsto A'$, akkor $A' \mapsto A$. Melyik lehet ez a transzformáció?

4. Figyeld meg az 1–6. szabályban megadott transzformációkat és a mellettük levő képeket a 38., 39. oldalon! Mindegyik szabályról döntsd el, hogy távolságtartó-, szögtartó-, egyenestartó-e!

5. Keress példát vagy ellenpéldát a következő állításokra! Van olyan transzformáció, amely

a) távolságtartó, de nem szögtartó,

b) szögtartó, de nem távolságtartó,

c) távolságtartó, de nem egyenestartó,

d) egyenestartó, de nem távolságtartó.

6. Döntsd el, hogy az állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

a) Az 1–6. transzformációk között van olyan, amely nem távolságtartó.
b) A 6. transzformáció egyenestartó.
c) Van olyan mozgatás, amely nem egyenestartó.
d) Az 1. transzformáció egyenestartó.
e) Minden szögtartó transzformáció távolságtartó is.
f) Az 1. transzformáció szögtartó.
g) Ha egy transzformáció szögtartó, akkor megtartja a megfelelő távolságok arányait.

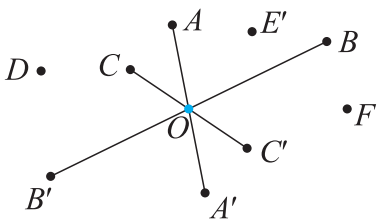
Középpontos tükrözés

A középpontos tükrözésre kétféle meghatározást is adhatunk:

1. Pontról pontra

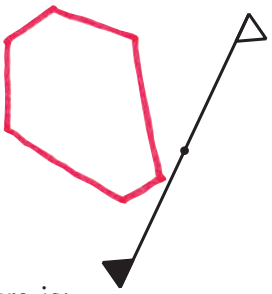
Adott egy O középpont.

Bármely P pont képét úgy kaphatjuk meg, hogy a P pontot összekötjük az O ponttal, majd ennek a félegyenesnek a meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, amely az O ponttól ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont. Ez a P' pont a P pont O középpontra vonatkozó tükörképe.



2. Mozgatás

Ha a síkot úgy mozgatjuk el, hogy az O pont helyben marad, az O ponton áthaladó egyenes önmagára kerül, az általa határolt félsíkok pedig helyet cserélnek, akkor minden pont a középpontos tükörképébe kerül. Ilyenkor a síkot az O pont körül 180 fokkal elforgatjuk. Ez egy síkban történő mozgás.

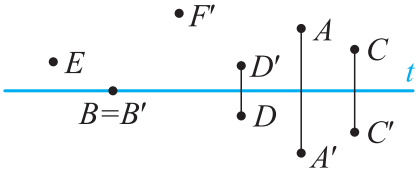


Ehhez hasonlóan adtunk kétféle meghatározást a tengelyes tükrözésre is:

1. Pontról pontra

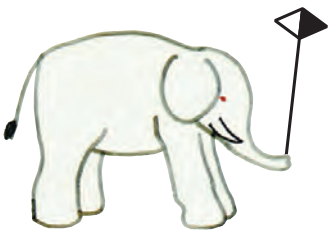
Adott egy t tengely.

Bármely P pont képét úgy kaphatjuk, hogy a P pontból merőlegest bocsátunk a t tengelyre, majd ennek meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, amely a tengelytől ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont. Ez a P' pont a P pont t tengelyre vonatkozó tükörképe.



2. Mozgatás

Ha a síkot úgy mozgatjuk el, hogy a tengely pontjai önmagukra kerülnek, a tengely által határolt félsíkok pedig helyet cserélnek, akkor minden pont a tengelyes tükörképébe kerül. Ilyenkor a síkot a tengely körül 180°-kal elforgatjuk. Ez egy térbeli mozgás.

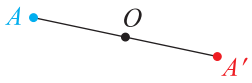


Középpontos tükörkép szerkesztése

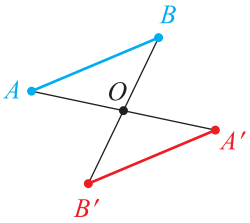
1. példa

A legegyszerűbb alakzatok középpontos tükrözése:

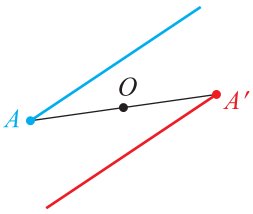
Pont tükrözése



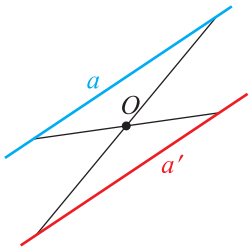
Szakasz tükrözése



Félegyenes tükrözése



Egyenes tükrözése

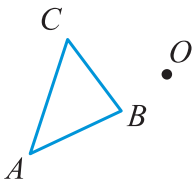


2. példa

Szerkesszük meg egy háromszög középpontos tükörképét egy adott centrumra!

Megoldás

Adatok:



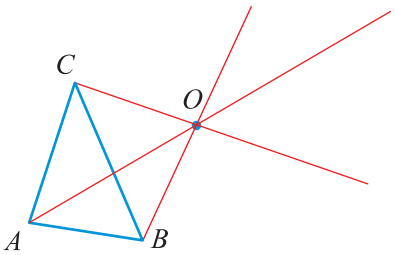


Összefüggések:

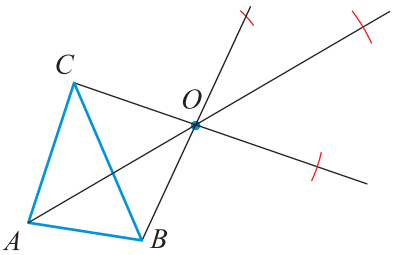
Tudjuk, hogy a középpontos tükrözés mozgatás, tehát egy szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz, ezért elég egy szakasznak a két végpontját tükrözni, majd ezeket összekötni.

A szerkesztés lépései:

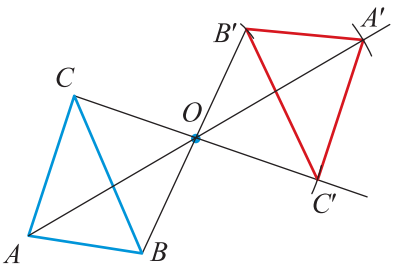
1. A csúcsokat összekötjük az O ponttal, és meghosszabbítjuk az O ponton túl.



2. A megfelelő félegyenesekre felmérjük az OA, OB, OC távolságokat, és így megkapjuk az A', B', C' pontokat.

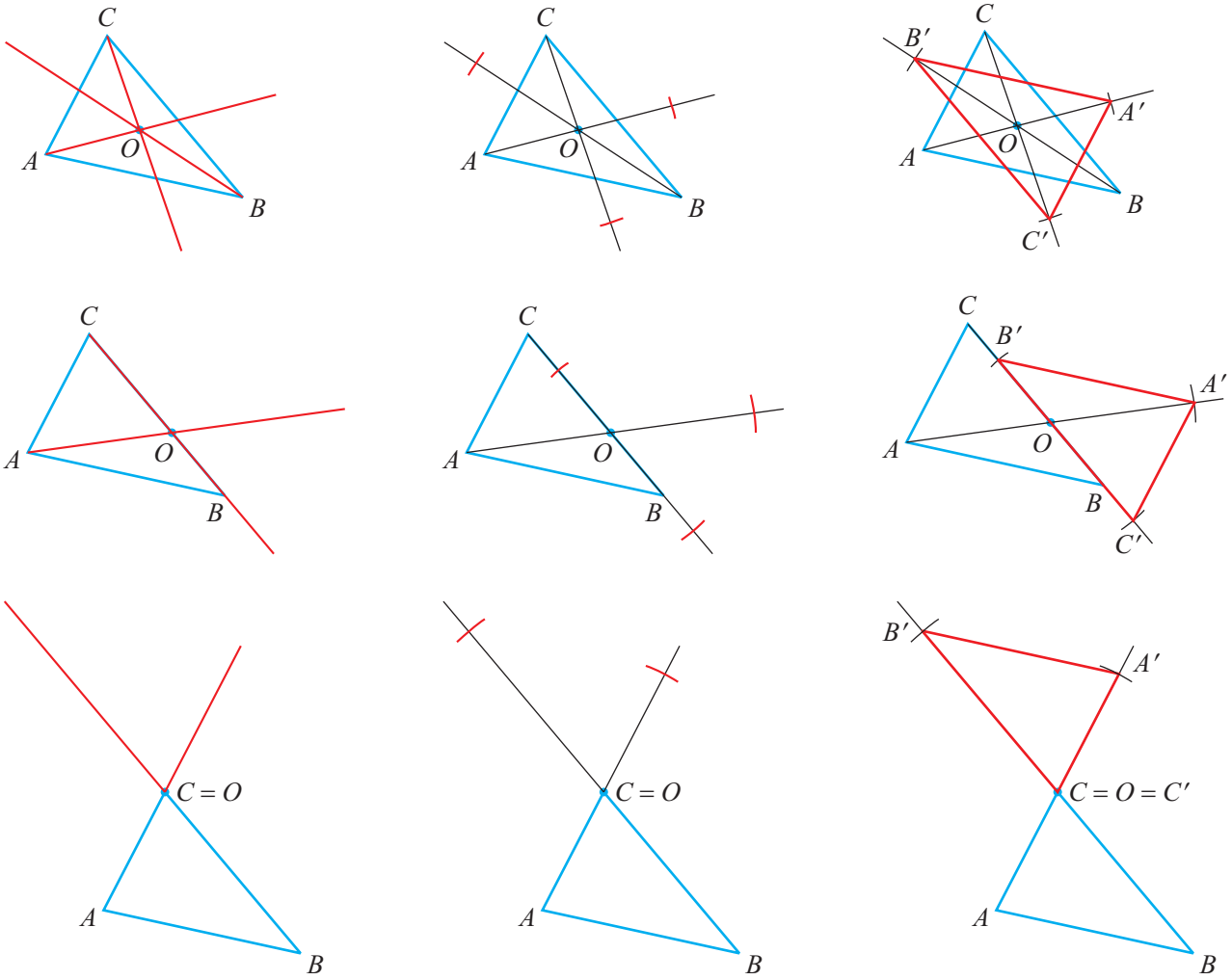


3. Összekötjük az A', B' és C' pontokat.



Akkor is ugyanezeket a lépéseket kell elvégeznünk, ha a tükörközéppont a háromszögön belül vagy a háromszög kerületén vagy csúcspontjában van.

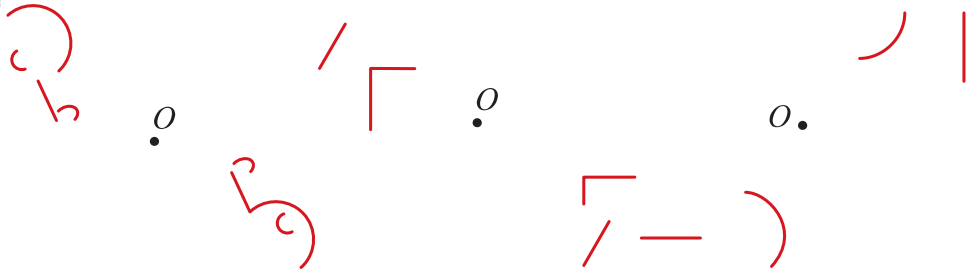
Kövessük az ábrákon a szerkesztés menetét a középpont különböző elhelyezkedése esetén!



Átlátszó papírral ellenőrizheted a szerkesztésedet.

Feladatok

1. Másolópapír segítségével tükrözd középpontosan a széttördelt ábrákat!



2. Vegyél fel egy háromszöget! Tükrözd középpontosan

a) egy rajta kívül levő pontra,

b) egy, a háromszög belsejében felvett pontra,

c) egy, a háromszögvonalon levő pontra!

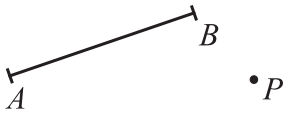
3. Szerkessz egy kört! Tükrözd

a) egy rajta kívül levő pontra,

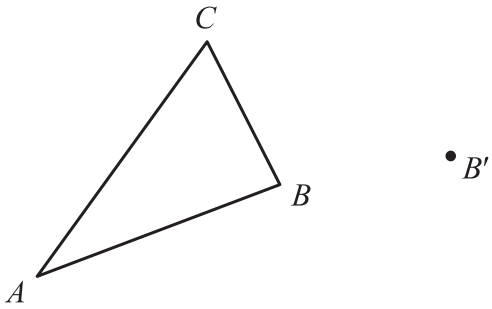
b) egy, a belsejében levő pontra,

c) egy, a körvonalon levő pontra!

4. Vegyél fel a füzetedben az ábrához hasonlóan egy szakaszt és egy pontot! Tükrözd a szakaszt középpontosan úgy, hogy az egyik végpont képe az adott pont legyen! Jelöld meg a tükörközéppontot pirossal! Hányféle megoldást kaphattál?



5.



Rajzolj egy tetszőleges háromszöget, és vegyél fel rajta kívül egy B' pontot, ez legyen B csúcs tükörképe!

a) Tükrözd tengelyesen a háromszöget úgy, hogy B csúcs képe az adott pontba essen! Pirossal rajzold meg a tengelyt!

b) Tükrözd középpontosan a háromszöget úgy, hogy B csúcs képe az adott pontba essen! Pirossal rajzold meg a középpontot!

6. Keress az Escher-képen (ejtsd: esör) középpontosan szimmetrikus párokat! Használj átlátszó papírt!



Lehet-e piros hal középpontos tükörképe fehér hal? Másolj át egy piros halat, keress tükörképpontot, és végezd el a forgatást!

Lehet-e piros hal középpontos tükörképe piros hal?

Igaz-e, hogy bármelyik fehér hal középpontos tükörképe bármelyik piros halnak?

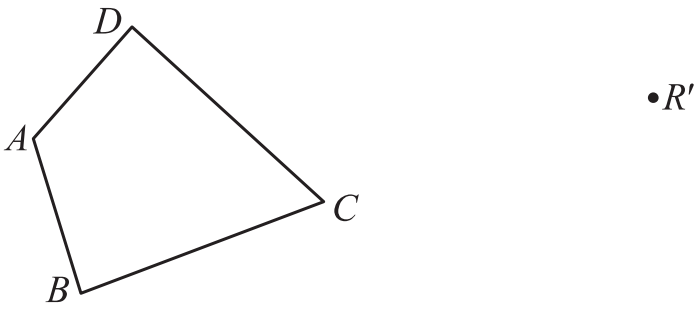
Lehet-e piros hal középpontos tükörképe zöld hal?

Lehet-e piros hal középpontos tükörképe kék hal?

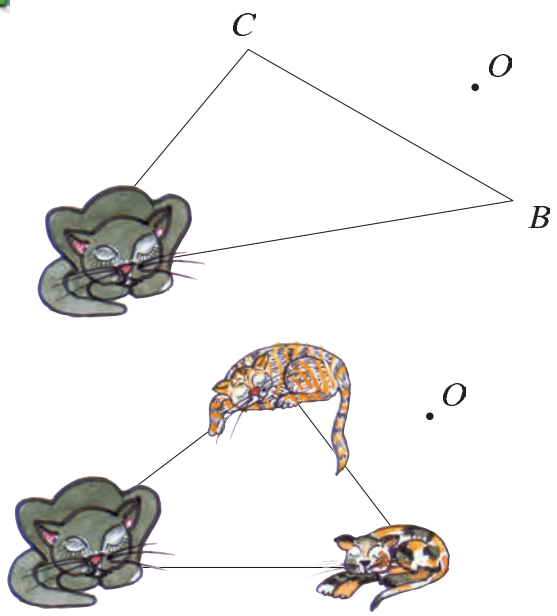
Lehet-e kék hal tükörképe zöld hal?

Igaz-e, hogy bármelyik kék halnak bármelyik zöld hal középpontos tükörképe?

7. Rajzold meg a füzetedben a négyszöget és az R' pontot! Az $ABCD$ négyszöget középpontosan tükröztük. Tudjuk, hogy az R' pont a négyszögátlók metszéspontjának a tükörképe. Keresd meg a tükörközéppontot!

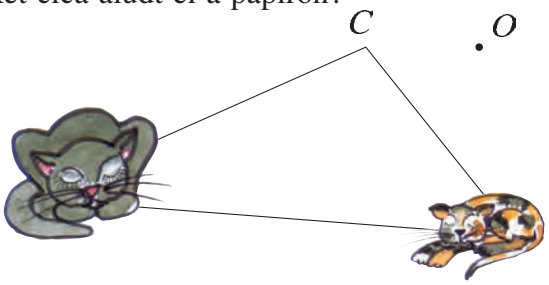


8. Tükrözd az ABC háromszöget az O pontra, de ne ébreszd fel a cicát!



a) A papíromat az asztalon hagytam és a cica elaludt rajta. El tudod-e végezni a feladatot úgy, hogy a cicát nem ébreszted fel?

b) El tudod-e végezni a szerkesztést akkor is, ha két cica aludt el a papíron?



c) Most már három cica álmára kell vigyáznod. Oldd meg ezt a feladatot is!

9. Egy piros egyenest az O pontra tükrözve zöld egyenest kaptunk. Az ábra nagy része azonban eltűnt. Mindkét egyenesnek csupán egyetlen pontja (A és B') látható. Ismerjük szerencsére a tükörközéppontot (O) is. Szerkeszd meg az egyeneseket!



10. Az ábrán eredetileg egy piros szakasz és a középpontos tükörképe, egy zöld szakasz volt látható. Az ábra nagy része azonban elveszett, mindössze a szakasz egyik végpontja és a felezőpont képe, valamint az O centrum maradt meg. Szerkeszd meg a szakaszt és a képét! Vedd fel az A, O, F' pontokat a füzetedben az adott ábrához hasonlóan!



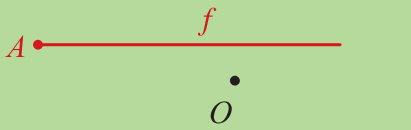
11. Az ábrán eredetileg egy piros háromszög és középpontos tükörképe, egy zöld háromszög volt látható. Az ábra nagyrésze azonban elveszett. A piros háromszögből is és a zöld háromszögből is csupán egy-egy csúcs és oldaluknak egy-egy darabja maradt meg. Szerencsére megmaradt azonban a tükörközéppont. Szerkeszd meg a hiányzó részleteket!



12. Vegyél fel egy ABC háromszöget és a háromszögön kívül egy P pontot!
Tudjuk, hogy a P pont az AB oldal felezőpontjának a középpontos tükörképe.
Szerkeszd meg az ABC háromszög középpontos tükörképét!

13. Vegyél fel egy ABC háromszöget és rajta kívül egy P pontot!
Tudjuk, hogy a P pont a háromszög valamelyik csúcspontjának a tükörképe.
Szerkeszd meg a lehetséges tükörközéppontokat és tükrözd mindegyikre a háromszöget!

14. Egy piros szöget O pontra tükrözve zöld szöget kaptunk. Az ábra nagy része azonban eltűnt a papírról. Szerencsére a tükörközéppont látható. A piros szögből megmaradt a szögfelező félegyenese (f), de a zöld szögvonalnak csupán egyetlen pontját ismerjük (B'). Szerkeszd meg a szögeket!



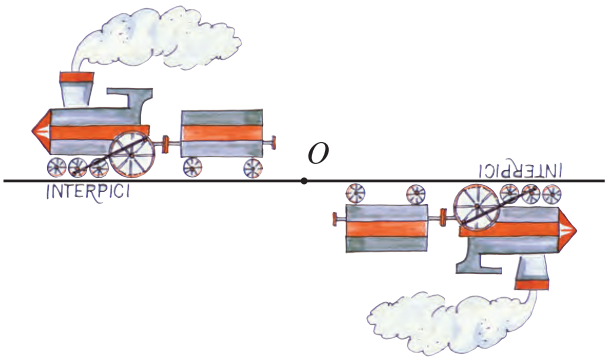


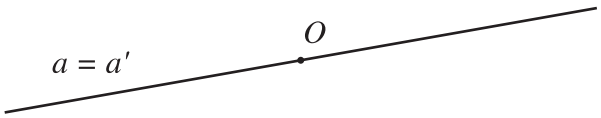
15. Egy piros kör középpontos tükörképét zölddel rajzoltuk meg. Az ábra nagy része a tükörcentrummal együtt azonban eltűnt a lapról. A piros körből csak a középpontja maradt, a zöldnek pedig csak egy íve. Szerkeszd meg a tükörközéppontot és a köröket!

A középpontos tükrözés tulajdonságai

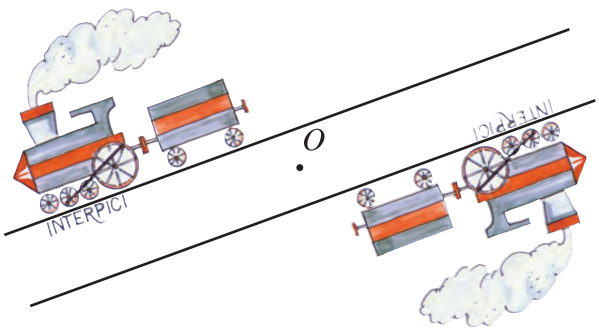
A középpontos tükrözés a síkban mozgatással is előállítható, ezért minden távolság és minden szög nagysága megegyezik a képének nagyságával. A középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció.

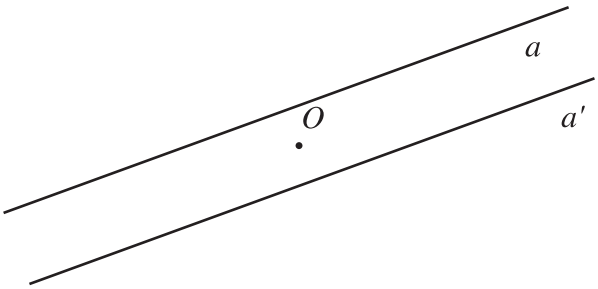
Egyenes és képe





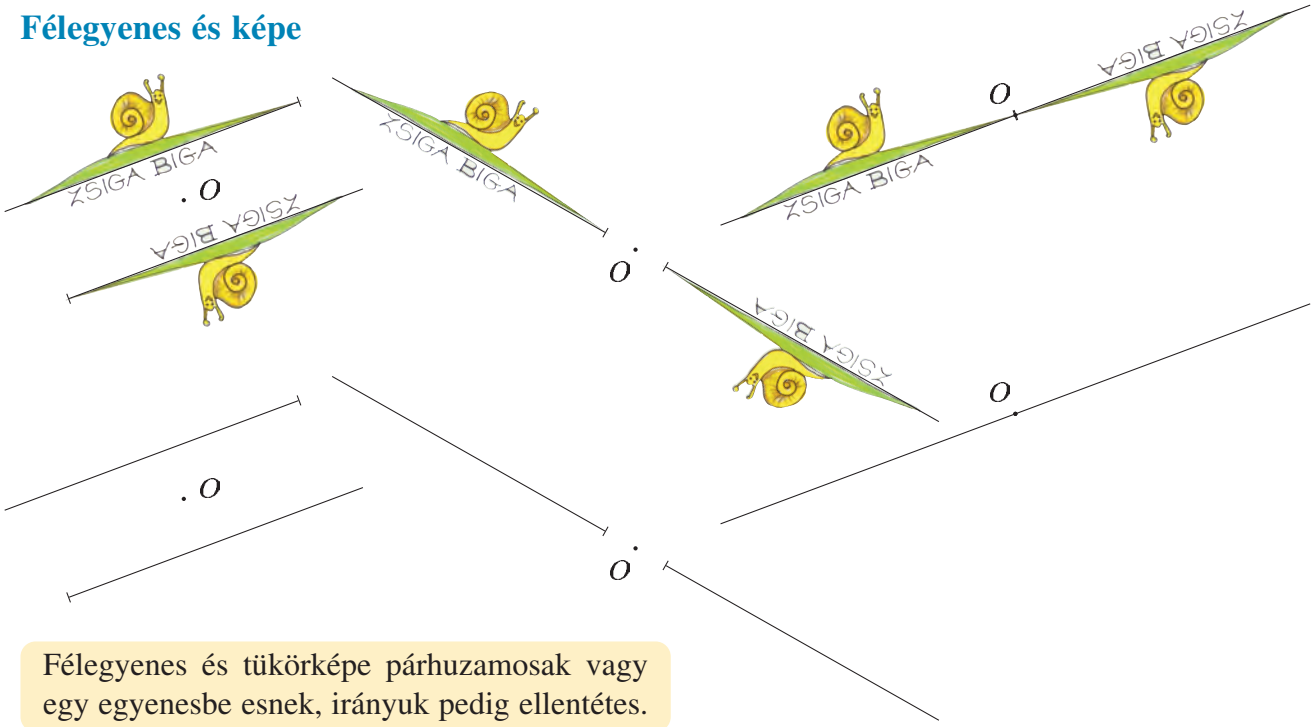
A középponton átmenő egyenes képe önmaga.





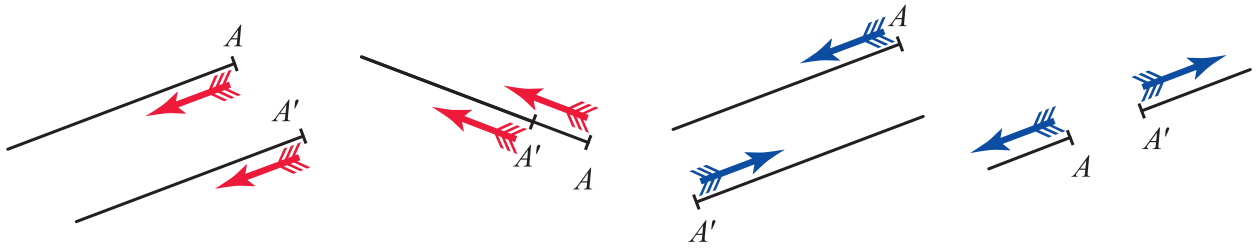
A középponton át nem haladó egyenes párhuzamos a képével.

Félegyenes és képe



Félegyenes és tükörképe párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek, irányuk pedig ellentétes.

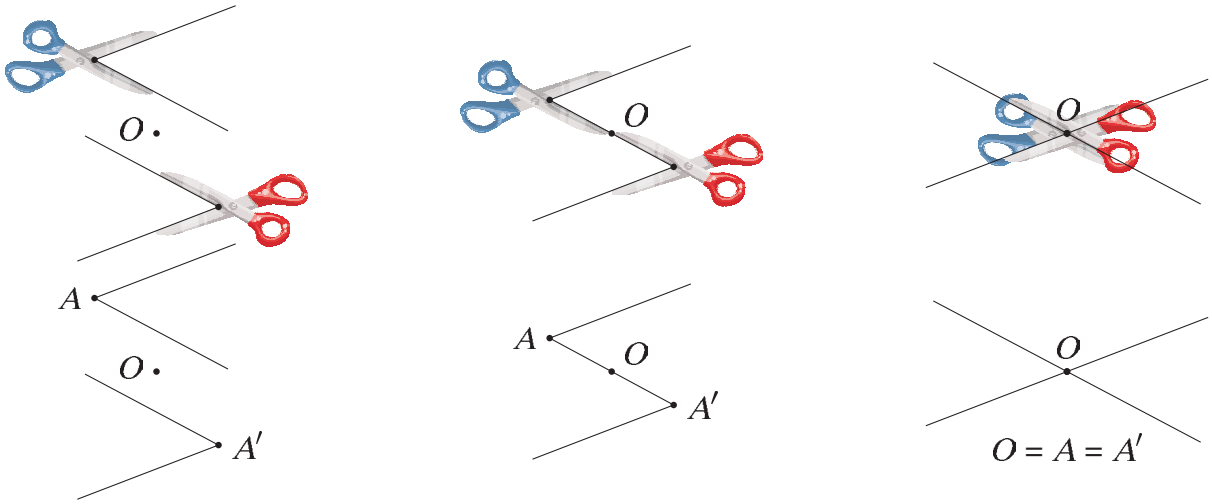
Ha két félegyenes párhuzamos vagy egy egyenesbe esik, akkor lehetnek
egyező irányításúak, ellentétes irányításúak.



Ezek egyállású félegyenesek. Ezek fordított állású félegyenesek.

Az olyan félegyeneseket, amelyek párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek: **egyállású** vagy **fordított állású félegyeneseknek** nevezzük aszerint, hogy irányításuk megegyezik vagy ellentétes egymással.

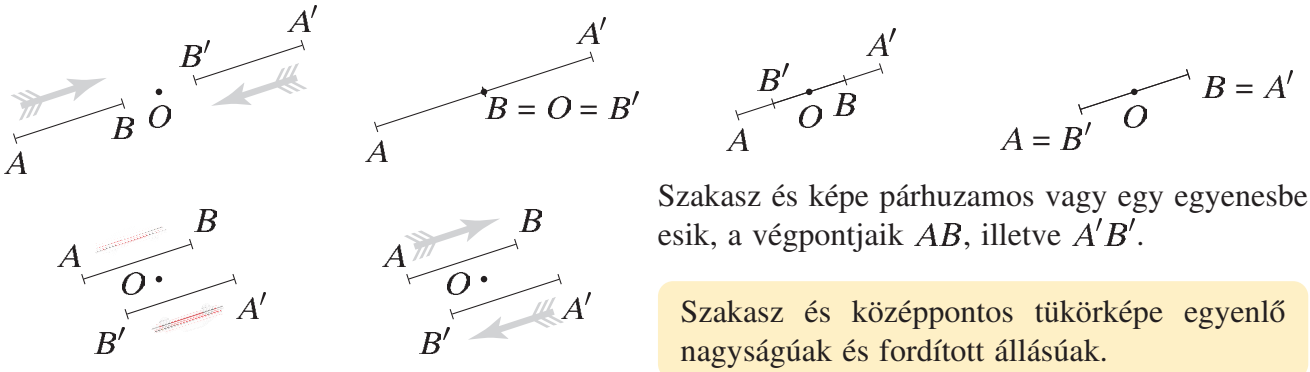
Szög és képe



Már láttuk, hogy egy félegyenes és középpontos tükörképe fordított állásúak. Egy szög szárai félegyenesek. Ezért teljesül a következő állítás.

Szög és középpontos tükörképe egyenlő nagyságúak, megfelelő száraik fordított állású félegyenesek.

Szakasz és képe

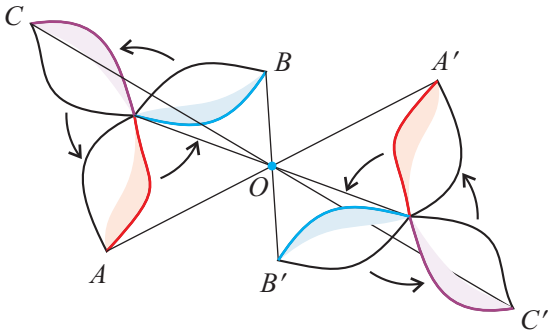


Szakasz és képe párhuzamos vagy egy egyenesbe esik, a végpontjaik AB, illetve $A'B'$.

Szakasz és középpontos tükörképe egyenlő nagyságúak és fordított állásúak.

Szakasz és középpontos tükörképe egyenlő nagyságúak és fordított állásúak.

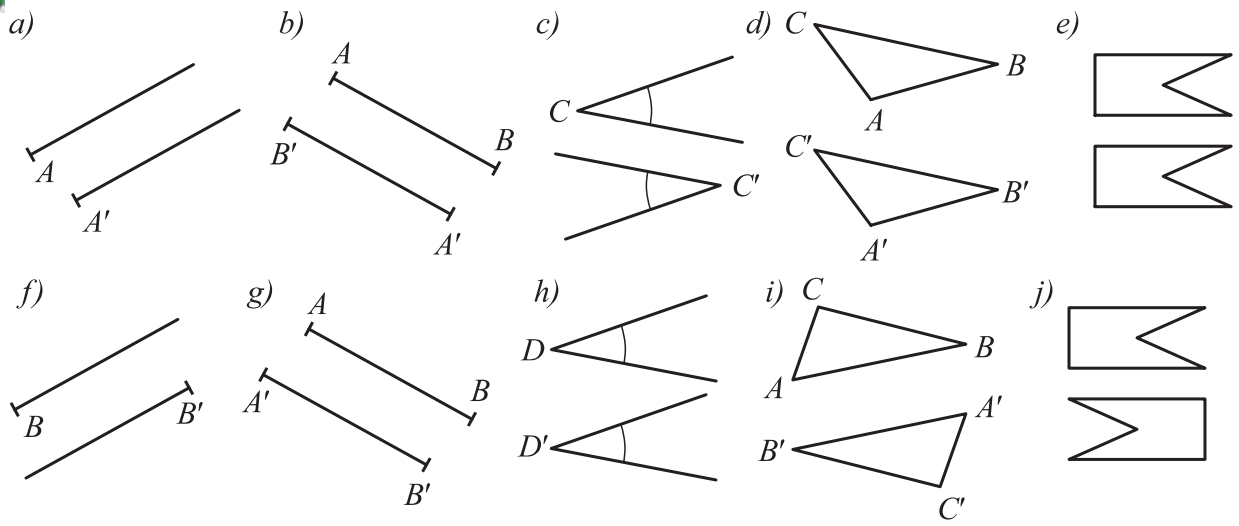
Tetszőleges alakzat és képe



Alakzat és képe egybevágó és a körüljárásuk megegyezik.

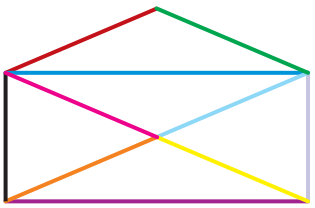
Feladatok

1. A következő ábrákon látható alakzatpárok lehetnek-e egymás középpontos tükörképei?



2. Tükörközéppontot keresünk. Adj meg a színűkkel olyan szakaszokat, amelyek egymásnak a középpontos tükörképei lehetnek!

Minden esetben jelöld meg a tükörközéppontot is!



3. Tükörközéppontot keresünk. Minden kérdésnél azt kell eldöntened, lehet-e a megadott két alakzat egymásnak tükörképe valamilyen tükörközéppontra nézve.

Ha igen, add meg a tükörközéppontot!

a) LK szakasz és QP szakasz

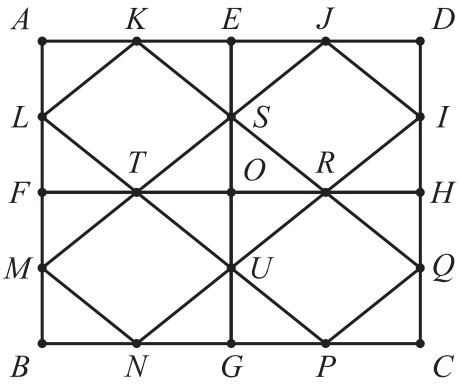
b) LK szakasz és IR szakasz

c) LK szakasz és JS szakasz

d) LFT háromszög és FTM háromszög

e) $MNUT$ négyszög és $RSJI$ négyszög

f) $MNUT$ négyszög és $TSKL$ négyszög

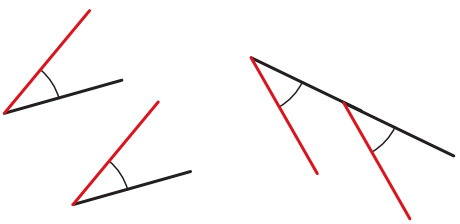


Párhuzamos szárú szögek

Az olyan konvex szögeket, melyek szárai páronként párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek, **párhuzamos szárú szögeknek** nevezzük.

Lehet, hogy a megfelelő szárak egyállású félegyenesek.

Az olyan szögeket, melyek szárai egyállású félegyenesek, **egyállású szögeknek** nevezzük. Az egyállású konvex szögek egyenlőek.



Lehet, hogy a megfelelő szárak fordított állású félegyenesek.

Ha egy ilyen szögpár egyik szára egybeesik, akkor **váltószögeknek** nevezzük őket.

Ha mindkét száruk egybeesik, tehát közös a csúcspontjuk, **csúcsszögeknek** nevezzük őket.

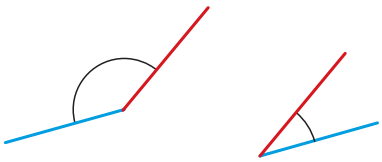
Az olyan szögeket, melyek szárai fordított állású félegyenesek, **fordított állású szögeknek** nevezzük. A fordított állású konvex szögek egyenlőek.



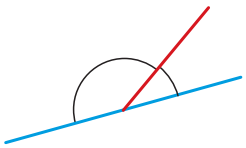
váltószögek

csúcsszögek, váltószögek

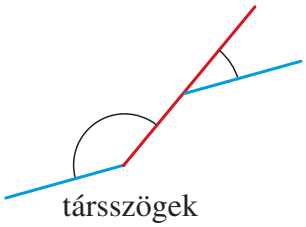
Lehet két szög párhuzamos szárú úgy is, hogy egyik száruk egyállású, a másik pedig fordított állású félegyenespár.



társszögek



mellékszögek



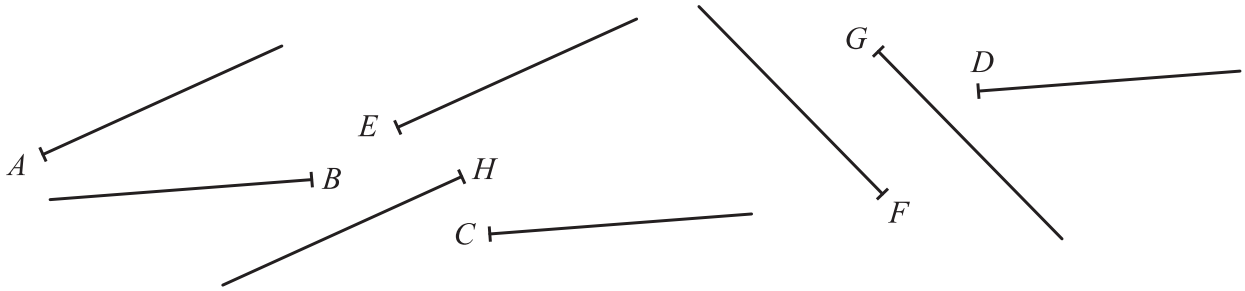
társszögek

A képeken látható párhuzamos szárú szögpárokban a piros szárak egyállásúak, a kék szárak fordított állásúak.

Az ilyen szögek egymást 180 fokra egészítik ki.

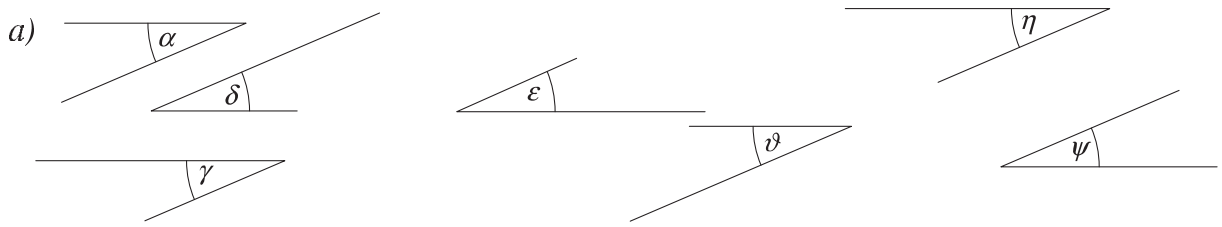
Feladatok

1. Döntsd el, hogy a következő félegyenesek közül melyek egyállásúak, melyek fordított állásúak!

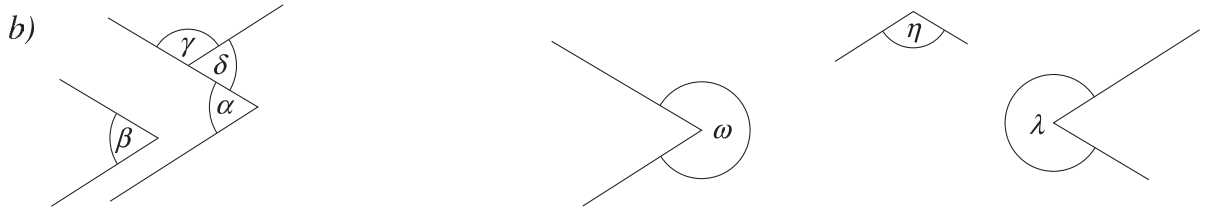


2. Az ábrán látható szögek közül bármely kettőnek a szárai páronként párhuzamosak. Válaszd ki az egyállásúakat, illetve a fordított állású szögpárokat!

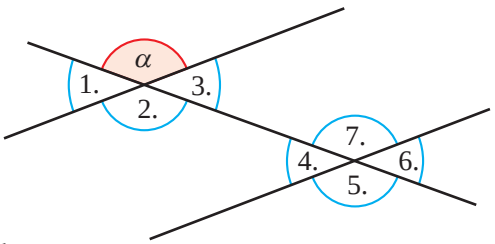
a)



b)



3. Döntsd el, hogy az ábrán látható párhuzamos szárú szögek közül melyek egyállásúak, melyek fordított állásúak az α szöghöz képest!



4. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

a) Vannak különböző nagyságú párhuzamos szárú szögek.

b) A fordított állású szögek mindig egyenlőek.

c) Nincs olyan egyállású szögpár, ahol a két szög nem egyenlő.

d) Ha két szög egyenlő, akkor a száraik páronként párhuzamosak.

e) Ha két szög szárai páronként párhuzamosak, akkor a két szög egyenlő.

5. Keress a képen egyállású és fordított állású szögeket!



6. Fejezd be a mondatokat a cédulákon levő szövegekkel! Mindegyik feladathoz készíts rajzot!

egyállású szögek	fordított állású szögek
csúcsszögek	mellékszögek
váltószögek	

a) α és β szárai páronként ellentétes irányúak, tehát α és β _____.

b) α és β közös csúcsú szögek, tehát α és β _____.

c) α és β szárai páronként ellentétes irányúak, és egyik száruk egy egyenesbe is esik, tehát α és β _____.

d) α és β egymás középpontos tükörképei, tehát α és β _____.

e) Az α szöget a csúcsára tükrözve kapjuk a β szöget, azaz α és β _____.

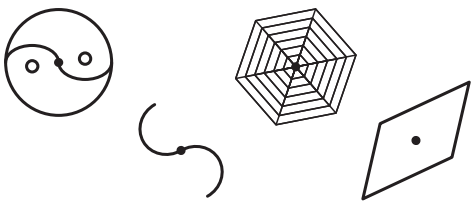
Középpontosan szimmetrikus alakzatok



Ezek tengelyesen szimmetrikus alakzatok.

Ha egy alakzathoz van olyan tengelyes tükrözés, amely önmagába viszi, akkor az alakzatot **tengelyesen tükrösnek** vagy tengelyesen szimmetrikusnak nevezzük.





Ezek középpontosan szimmetrikus alakzatok.

Ha egy alakzathoz van olyan középpontos tükrözés, amely önmagába viszi, akkor az alakzatot **középpontosan tükrösnek** vagy középpontosan szimmetrikusnak nevezzük.

A minket körülvevő világban középpontos szimmetriára is sok példát találhatunk.

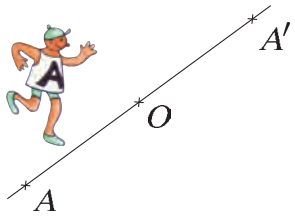
A középpontos szimmetria gyakran tengelyes szimmetriával jár együtt az építészetben és a díszítések során. Nézz körül! Keress te is ilyeneket!

Egyszerű szimmetrikus alakzatok

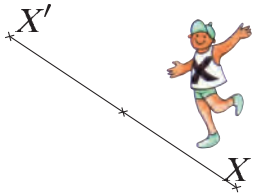
Egy pont mindig középpontosan szimmetrikus saját magára.



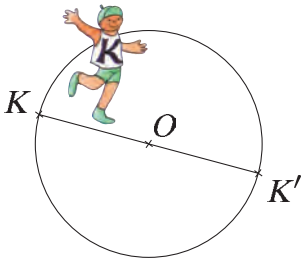
Egy egyenes középpontosan szimmetrikus minden pontra, amely rajta van.



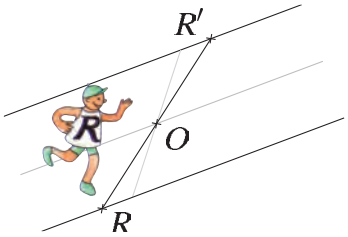
Egy szakasz középpontosan szimmetrikus a felezőpontjára.



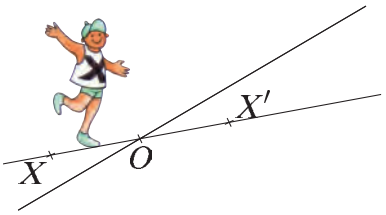
Egy körvonal mindig középpontosan szimmetrikus a középpontjára.



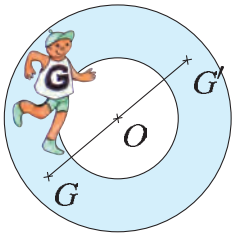
Egy párhuzamos egyenespár középpontosan szimmetrikus a középpárhuzamos egyenes bármelyik pontjára.



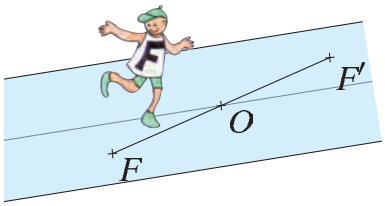
Egy metsző egyenespár középpontosan szimmetrikus az egyenesek metszéspontjára.



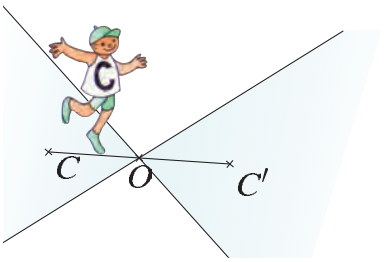
Egy körlemez vagy egy körgyűrű mindig középpontosan szimmetrikus a középpontjára.



Egy párhuzamos sáv középpontosan szimmetrikus a középpárhuzamos egyenes bármelyik pontjára.



Két csúcsszögtartomány középpontosan szimmetrikus a közös csúcsra.



Feladatok

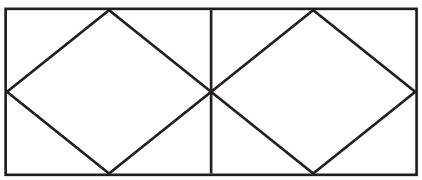
1. Másold át az ábrát a füzetedbe! Ez az ábra tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, de színezhetjük úgy, hogy a színezés ne legyen szimmetrikus. Színezd úgy, hogy

a) tengelyesen szimmetrikus legyen, de középpontosan ne,

b) középpontosan szimmetrikus legyen, de tengelyesen ne,

c) középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus legyen,

d) ne legyen szimmetrikus!



2. Vágj ki papírból két egybevágó háromszöget! Illeszd őket össze úgy, hogy 1–1 oldaluk közös legyen!

a) Hányféle négyszöget kaphatsz? Milyen fajta szimmetriákat figyelhetsz meg a kapott négyszögekben?

b) Csak négyszögeket kaphatsz?

3. Csoportosítsuk a jeleket szimmetriáik szerint!



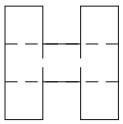
4. Keress ebben a bűvös négyzetben olyan számpárokat, amelyek egymáshoz képest középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el a négyzet tükörközéppontjára nézve! Milyen összefüggést veszel észre ezek között a számok között?

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

@ Ez a bűvös négyzet szerepel Albrecht Dürer Melankólia című rézmetszetén. Nézd meg az interneten a képet!

5. A 10 × 10-es számtáblázatra rátettünk egy átlátszó H betűt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99



Hét számot fedett le, a közepe éppen a 23-as mezőt fedi.

a) Add össze a H betűben levő számokat, és az összeget oszd el a középső számmal!

b) Tégy ugyanilyen H betűt a táblázatban máshova, és a benne levő számokkal végezd el ugyanezt a műveletsort! Mit tapasztalsz?

Próbálkozz más helyzetű H betűkkel is!

Próbálkozz más formájú alakzatokkal is!

6. Kijelöltünk a táblázatban egy pontot, a 23-ast tartalmazó négyzet középpontját. Ez a pont a tükörcentrum.

a) Keress két olyan számot a táblázatban, amelyek a 23-asra tükrösen helyezkednek el! Add össze őket, és az összeget oszd el 2-vel!

b) Keress négy olyan számot a táblázatban, amelyek a 23-asra páronként tükrösen helyezkednek el! Add össze őket, és az összeget oszd el 4-gyel!

c) Keress hat olyan számot a táblázatban, amelyek a 23-asra páronként tükrösen helyezkednek el! Add össze őket, és az összeget oszd el 6-tal!

Milyen szabályosságot veszel észre? Próbáld meg megmagyarázni!

7. *a)* Legfeljebb hány olyan számpárt lehet találni a táblázatban, amelynek a 23-as mezőben van a szimmetriacentruma?

b) Legfeljebb hány tükrös számpárt találhatunk, ha a középpont a 88-as mezőben van?

c) Hol van az a középpont, amelyhez a legtöbb tükrös párt lehet találni?

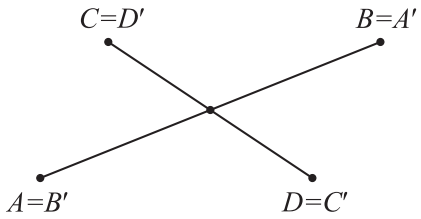
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

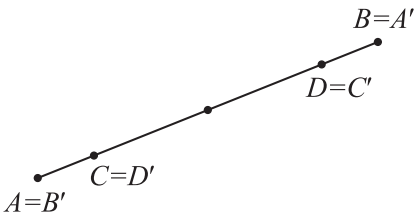
3, 4, … különböző pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzatok

Készítsünk 3 különböző pontból középpontosan szimmetrikus alakzatot!

Ha három pont középpontosan szimmetrikus, akkor egy egyenesre esnek, egyik felezi a másik kettőt összekötő szakaszt. Ez a felezőpont a szimmetria középpontja. Ez azt is jelenti, hogy nincs középpontosan szimmetrikus háromszög.

Ha négy pont középpontosan szimmetrikus, akkor közülük kettő-kettő egymás tükörképe. A szimmetriacentrum az őket összekötő szakaszok közös felezőpontja.

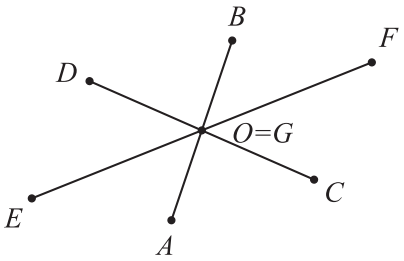




Ez azt is jelenti, hogy vannak középpontosan szimmetrikus négyszögek. Szimmetriacentrumuk az átlók közös felezőpontja.

Általában ha páratlan sok pontunk van, akkor csak úgy készíthetünk belőlük szimmetrikus alakzatot, hogy egyiket a centrumba helyezzük – ez önmagának a tükörképe –, a többit pedig párokba állítjuk úgy, hogy egyik a másiknak a középpontos tükörképe legyen.

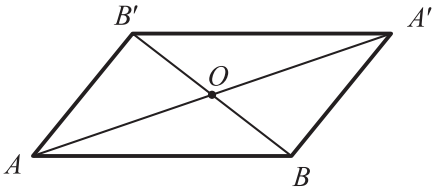
Ez azt is jelenti, hogy nincs olyan középpontosan szimmetrikus sokszög, amelyiknek páratlan számú csúcsa lenne.



Paralelogramma

Az olyan négyszögeket, amelyeknek szemközti oldalai párhuzamosak, **paralelogrammáknak** nevezzük.

Láttuk, hogy ha egy négyszög középpontosan tükrös, akkor a csúcsai párokba állíthatók úgy, hogy azok egymás tükörképei. A középpont a párokat összekötő szakaszok közös felezőpontja.



Ebben a négyszögben AB szakasz képe $A'B'$,
AB' szakasz képe $A'B$.

Mivel szakasz és tükörképe mindig párhuzamosak, ezért szimmetrikus négyszögben a szemközti oldalak párhuzamosak egymással.

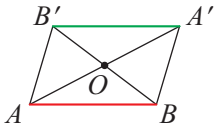
A középpontosan szimmetrikus négyszögek paralelogrammák.

1. példa

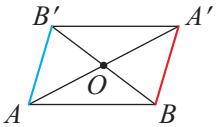
Keressünk az $AB A' B'$ paralelogrammában olyan részleteket, amelyek egymás tükörképei!

Megoldás

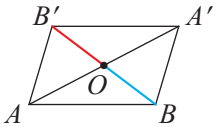
A színezett alakzatok egymás tükörképei.



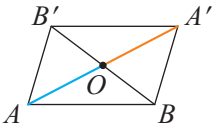
$AB = A'B'$



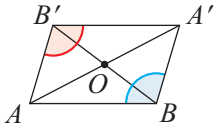
$A'B = AB'$



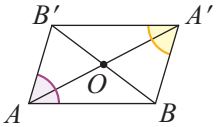
$OB = OB'$



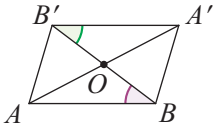
$OA = OA'$



$ABA' \sphericalangle = A'B'A \sphericalangle$



$BA'B' \sphericalangle = B'AB \sphericalangle$



$ABO \sphericalangle = A'B'O \sphericalangle$

2. példa

Írjuk cédulákra mindazokat a tulajdonságokat, amelyek teljesülnek a középpontosan tükrös négyszögekre! Készítsünk belőlük állításokat úgy, hogy a kipontozott helyekre egy-egy cédulát teszünk!

Ha ....., akkor .....

a négyszög paralelogramma	a négyszög átlói felezik egymást	a négyszög szemközti oldalai egyenlőek
a négyszög szemközti szögei egyenlőek	a négyszög szemközti oldalai párhuzamosak	a négyszög szomszédos szögei 180 fokra egészítik ki egymást
a négyszögnek van két olyan oldala, amely párhuzamos és egyenlő	a négyszög középpontosan szimmetrikus	

Megoldás

A felsorolt tulajdonságok mind egyenértékűek, bármelyikből bármelyik következik. Tehát minden lehetséges állítás, amelyet kaphatunk, igaz. A legfontosabbakat itt megadjuk.

- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor szemközti oldalai párhuzamosak.
- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.
- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor szemközti oldalai egyenlők.
- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor szemközti szögei egyenlők.

- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor szomszédos szögei 180°-ra egészítik ki egymást.
- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor van két olyan oldala, amely párhuzamos és egyenlő.
- Ha egy négyszög paralelogramma, akkor van szimmetria-középpontja.

Be lehet bizonyítani, hogy az előbbi állításoknak a megfordítása is igaz.

- Ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszög szemközti oldalai egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszög szemközti szögei egyenlőek, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszög szomszédos szögei 180°-ra egészítik ki egymást, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszögben van két párhuzamos és egyenlő oldal, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszögnek van szimmetria-középpontja, akkor a négyszög paralelogramma.

Van-e olyan paralelogramma, amely tengelyesen is szimmetrikus?

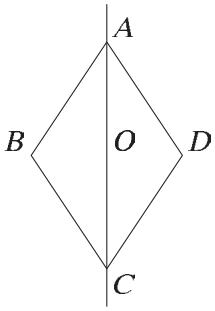
Az olyan négyszögeket, amelyeknek az egyik átlójuk szimmetriatengelyük, **deltoidoknak** nevezzük.

Legyen a paralelogrammának olyan szimmetriatengelye, amely átló. Ekkor a négyszög paralelogramma és deltoid is egyben.

$CD = AB$, mert paralelogramma

$AB = AD$, mert deltoid

$AD = BC$, mert paralelogramma



Vagyis e paralelogramma minden oldala egyenlő, tehát ez a négyszög éppen **rombusz,** a rombuszban pedig a másik átló is szimmetriatengely.

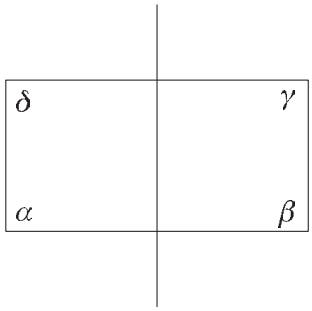
Az olyan négyszögeket, amelyeknek van csúcson át nem haladó szimmetriatengelyük, **húrtrapézoknak** nevezzük.

Legyen a paralelogrammának olyan szimmetriatengelye, amely nem átló. Ekkor a négyszög paralelogramma és húrtrapéz is egyben.

$\delta = \beta$, mert paralelogramma

$\alpha = \beta$, mert húrtrapéz

$\alpha = \gamma$, mert paralelogramma



Vagyis e négyszög minden szöge egyenlő, tehát ez a négyszög éppen **téglalap,** a téglalapban pedig a másik oldalpár felező merőlegese is szimmetriatengely.

Lehet, hogy a paralelogrammának van olyan szimmetriatengelye, amely átló; és van olyan szimmetriatengelye is, amely nem átló. Ekkor a paralelogramma egyszerre rombusz és téglalap is, tehát az ilyen négyszög **négyzet.**

A négyzet olyan paralelogramma, amelyben minden oldal és minden szög megegyezik. A négyzet egyszerre rombusz és téglalap is. Négy szimmetriatengelye és egy szimmetria-középpontja van. A szimmetriacentrum a szimmetriatengelyek közös pontja.

3. példa

Határozd meg a paralelogramma hiányzó szögeit!



Megoldás

Tudjuk, hogy a paralelogramma szemközti szögei fordított állású szögek, tehát egyenlők, a szomszédos szögei pedig egymást 180°-ra egészítik ki. Így a paralelogramma két különböző szöge 62° és 118°.

Feladatok

1. Vegyél fel egy szabályos háromszöget! Tükrözd középpontosan egyik oldalának a felezőpontjára! Milyen négyszöget kaptál? Hány fokosak a szögei?

2. Szerkessz egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek oldalai 4 cm és 6 cm hosszúak! Tükrözd középpontosan egyik oldalának felezőpontjára úgy, hogy a kép és a tükörkép együtt rombuszt alkossanak! Hányféle rombuszt kaphattál?

3. Összehajtott papírból vágj ki két egybevágó háromszöget! Az egyik egyenlő hosszúságú oldaluknál illeszd össze őket! Hányféle négyszöget kaphatsz, ha az eredeti háromszög

a) minden oldala különböző hosszúságú; *b)* egyenlő szárú; *c)* egyenlő oldalú;

d) derékszögű; *e)* tompaszögű; *f)* egyenlő szárú derékszögű?

Nevezd meg mindegyik esetben a kapott négyszögeket!

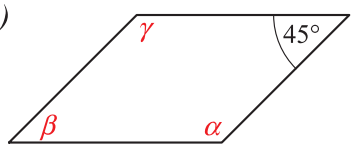
4. Marci rajzolt a füzetébe egy paralelogrammát. Válaszd ki, melyik megállapítás igaz a paralelogrammáról írt, számozott állításokra!

A) biztosan igaz *B)* lehet, hogy igaz, de nem biztos *C)* biztosan hamis

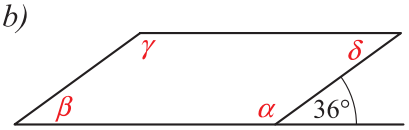
1. átlói egyenlők
2. van két párhuzamos oldalpárja
3. szögei egyenlők
4. nincsenek párhuzamos oldalai
5. pontosan 2 derékszöge van
6. van szimmetriaközéppontja
7. van tükörtengelye
8. az egyoldalon fekvő szögei egyenlők

5. A megadott szögekből határozd meg a paralelogramma szögeit!

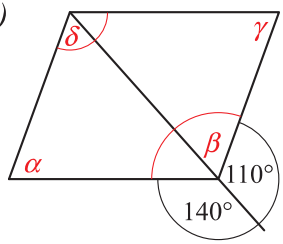
a)



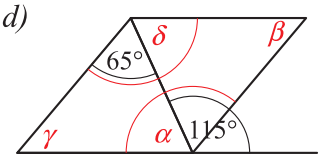
b)



c)



d)



6. Milyen fajta négyszög lehet az, amelyre teljesül az adott tulajdonság? Mindegyik esetben egy vagy több négyszögfajta nevével válaszolj!

a) Van két olyan szemközti oldala, amely párhuzamos, de nem egyenlő hosszú.

b) Olyan paralelogramma, amelynek mind a négy csúcsa egyenlő távol van a szimmetria-középpontjától.

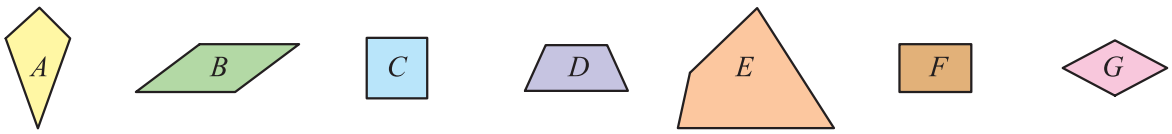
c) Olyan paralelogramma, amely húrnégyszög.

d) Oldalai egyenlő hosszúak, de átlói nem egyenlőek.

e) Szögei egyenlőek, de átlói nem merőlegesek egymásra.

f) Olyan paralelogramma, amelynek az átlói merőlegesek egymásra.

7. Döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik nem! Mindegyik esetben válassz egy példát vagy egy ellenpéldát az alábbi négyszögek közül!



a) Minden paralelogramma szimmetrikus.

b) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus.

c) Minden paralelogramma középpontosan szimmetrikus.

d) Van olyan deltoid, amely középpontosan szimmetrikus.

e) Minden deltoid tengelyesen szimmetrikus, de középpontosan nem.

f) Minden deltoid szimmetrikus.

g) Van olyan trapéz, amely középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem.

h) Van olyan trapéz, amely tengelyesen szimmetrikus, de középpontosan nem.

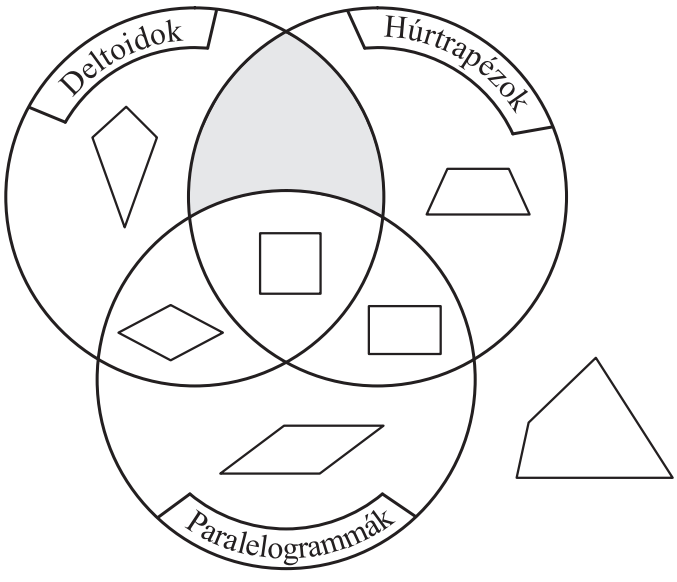
i) Van olyan paralelogramma, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van.

j) Van olyan paralelogramma, amelynek nincs szimmetriatengelye.

k) Minden paralelogrammának legalább két szimmetriatengelye van.

l) Van olyan paralelogramma, amelynek több mint két szimmetriatengelye van.

8. Rajzold le a füzetedbe a halmazábrát! Számozd meg az egyes tartományokat! Fogalmazd meg, milyen tulajdonságú négyszögek vannak az egyes részekben!



9. Mindegyik állításnak fogalmazd meg a tagadását!

a) Minden paralelogramma téglalap.

b) Van olyan rombusz, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra.

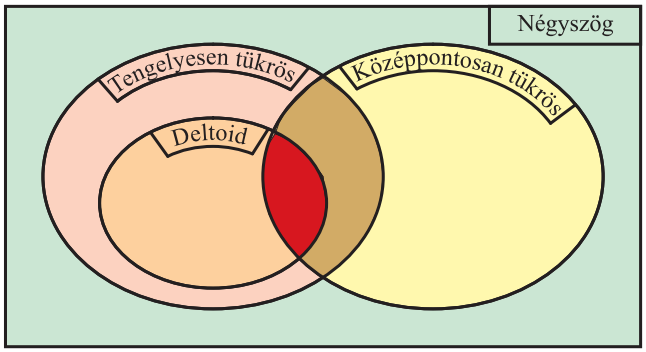
c) Van olyan téglalap, amelynek csak egyetlen szimmetriatengelye van.

d) Nincs olyan paralelogramma, amely ne lenne középpontosan szimmetrikus.

e) Minden négyzet rombusz.

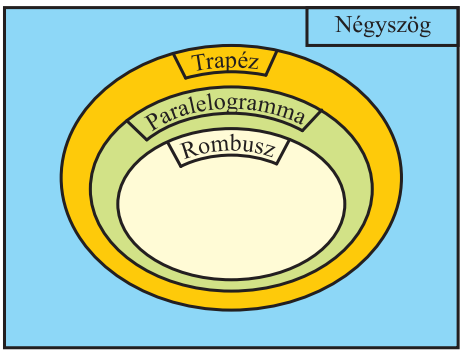
10. A halmazábra tartományait különböző színekkel színeztük. Milyen színű tartományban lehet az a négyszög, amelyről tudjuk, hogy

a) pontosan egy szimmetriatengelye van,
b) átlói merőlegesen felezik egymást,
c) átlói felezik egymást,
d) csak az egyik átlója felezi a másikat,
e) egyik átló sem felezi a másikat,
f) átlói merőlegesek egymásra,
g) konkáv négyszög?



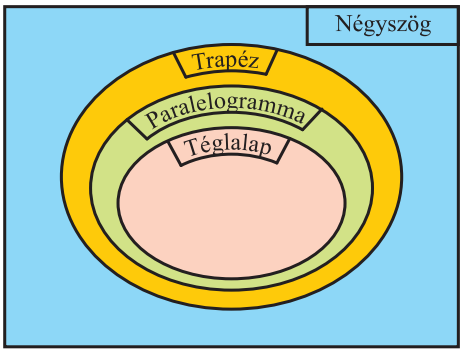
11. Milyen színű tartományban lehet az a négyszög, amelyről tudjuk, hogy

a) nincsenek egyenlő oldalai,
b) pontosan három egyenlő oldala van,
c) minden oldala egyenlő,
d) pontosan két egyenlő oldala van,
e) szemközti oldalai egyenlőek?



12. Milyen színű tartományban lehet az a négyszög, amelyről tudjuk, hogy

a) nincsenek egyenlő szögei,
b) pontosan három egyenlő szöge van,
c) minden szöge egyenlő,
d) pontosan két egyenlő szöge van,
e) szemközti szögei egyenlőek?



13. Egy négyzet szimmetriaközéppontja az $O(5;4)$ pont.

a) Az egyik csúcsa az $A(2;1)$ pont. Határozd meg a többi csúcsát!
b) Az egyik oldalának a felezőpontja az $F(2;1)$ pont. Határozd meg a csúcsait!

14. Egy rombusz átlóinak metszéspontja a $(0;4)$ pont. Egyik csúcsa az $A(4;4)$ pont. Mi lehet a többi csúcsa? Hányféle rombuszt találtál?

15. Egy paralelogramma három csúcsát ismerjük: $A(2;2)$, $B(8;2)$, $C(10;6)$. Mi lehet a negyedik csúcs? Hányféle paralelogrammát találtál?

Paralelogrammákkal kapcsolatos szerkesztések

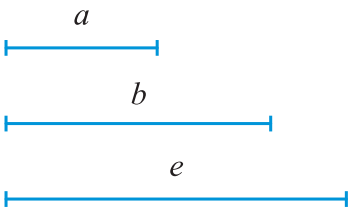
Paralelogramma szerkesztése

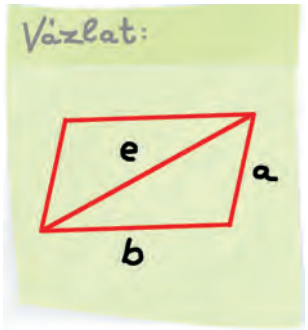
1. példa

Adott egy paralelogramma két oldala és egy átlója. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

Első megoldás

Adatok:



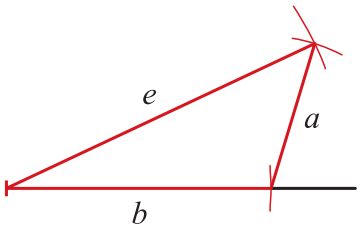


Összefüggések:

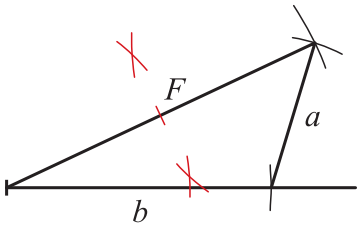
A két oldalból és a paralelogramma átlójából háromszöget szerkesztünk, és az átló felezőpontjára tükrözve a háromszöget megkapjuk a paralelogrammát.

A szerkesztés lépései:

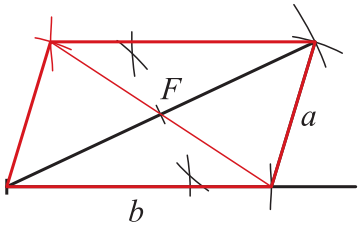
1. Az a, b, e szakaszokkal háromszöget szerkesztünk.



2. Megszerkesztjük az e átló felezőpontját, F-et.

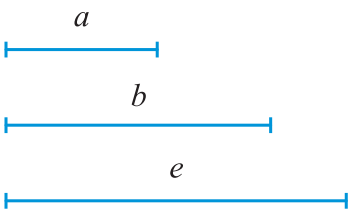


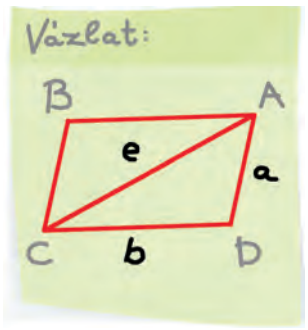
3. Tükrözzük a háromszöget az F pontra, és így megkapjuk a paralelogrammát.



Második megoldás

Adatok:



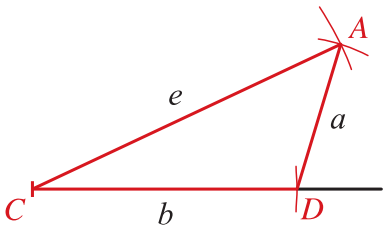


Összefüggések:

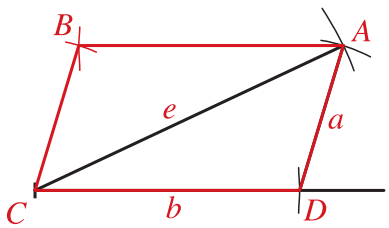
Az átlója a paralelogrammát két a, b, e oldalú háromszögre bontja. Ezeket pedig az adatokból meg tudjuk szerkeszteni.

A szerkesztés lépései:

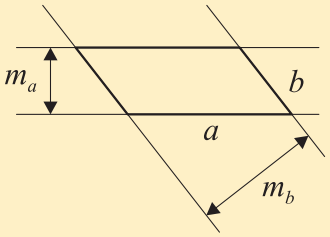
1. Az a, b, e oldalú háromszög szerkesztése.



2. Az e átló fölé az A ponttól b távolságra, a C ponttól a távolságra levő pont szerkesztése.



A paralelogrammát két-két párhuzamos egyenes határolja. A párhuzamos egyenesek közé állított merőleges szakasz, illetve ennek a szakasznak a hossza a **paralelogramma magassága.** A paralelogrammának két magassága van. A magasságok merőlegesek a megfelelő oldalakra.

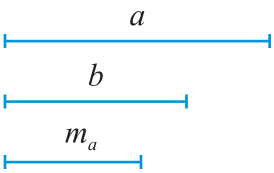


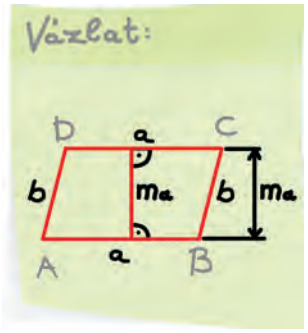
2. példa

Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két oldala, és az egyik oldalához tartozó magassága!

Megoldás

Adatok:



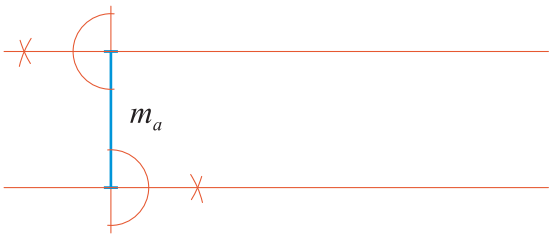


Összefüggések:

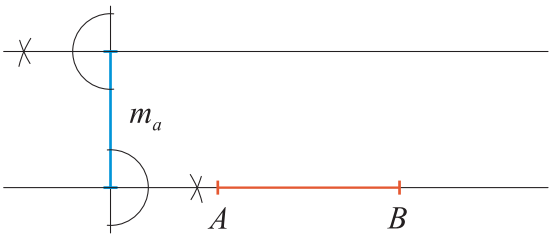
Ha egy m_a szakasz mindkét végpontjában merőlegeseket állítunk, akkor ezek a paralelogramma szemközti oldalegyeneseit alkotják.

A szerkesztés lépései:

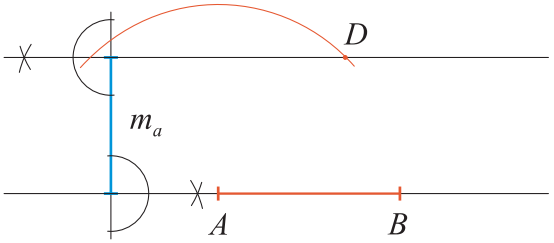
1. Az m_a szakasz végpontjaiban merőlegeseket szerkesztünk.



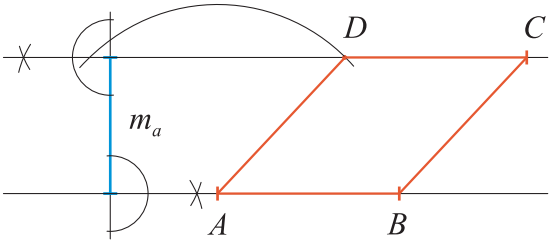
2. Az egyik egyenesen kijelöljük az a oldalt.



3. Az A csúcsból b sugarú körrel elmetsszük az a-val párhuzamos egyenest, és kiválasztjuk az egyik metszéspontot, ez lesz a D csúcs.



4. A D csúcsból AB-vel egy irányba felmérjük a szakaszt, így kapjuk a C csúcsot. Ha a 3. lépésben a másik metszéspontot választjuk, az előbbi megoldással egybevágó paralelogrammához jutunk.



A paralelogramma szerkesztése abban is segíthet, hogy könnyen, gyorsan és pontosan tudjunk párhuzamost szerkeszteni körző és vonalzó segítségével.

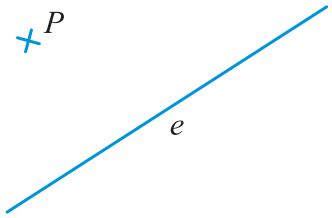
Párhuzamos egyenes szerkesztése

3. példa

Adott egy e egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont. Szerkesszünk a P ponton át az e egyenessel párhuzamos egyenest!

Megoldás

Adatok:



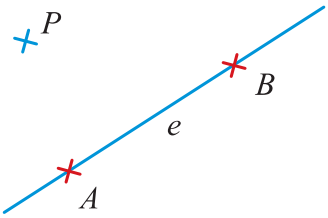


Összefüggések:

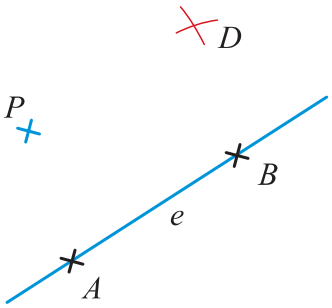
A párhuzamos egyeneseket egy paralelogramma szemközti oldalaiként fogjuk megszerkeszteni. Láttuk, hogy ha egy paralelogrammának ismerjük három csúcsát, akkor a negyedik könnyen megszerkeszthető. Vegyünk fel tehát két csúcsot tetszőlegesen az e egyenesen, a harmadik csúcs legyen maga a P pont, és szerkesszük meg a paralelogrammát!

A szerkesztés lépései:

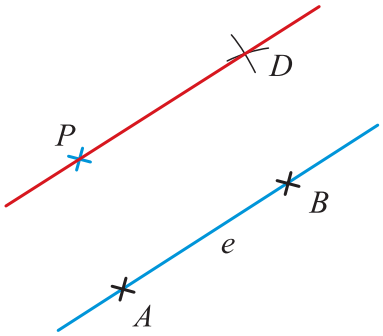
1. Tetszőlegesen felveszünk két pontot az e egyenesen, A-t és B-t.



2. A P pontból AB sugarú körívet húzva és a B pontból AP sugarú körívet húzva azok metszéspontjaként kapjuk meg a paralelogramma negyedik csúcsát, D-t.



3. A PD szakaszt meghosszabbítva kapjuk a keresett párhuzamos egyenest.



Feladatok

1. Vegyél fel egy háromszöget! Szerkessz mindhárom csúcsán át a szemközti oldallal párhuzamos egyenest!

a) Hány háromszöget látsz az ábrán? Hasonlítsd össze őket!

b) Hány négyszöget látsz az ábrán? Milyen négyszögek ezek?

2. *a)* Vegyél fel egy egyenest! Szerkessz tőle 3 cm távolságra lévő egyeneseket! Hányat találtál?

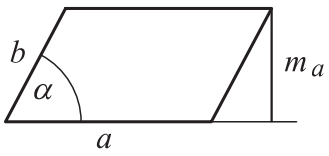
b) Vegyél fel egy pontot! Szerkessz tőle 3 cm távolságra levő egyeneseket! Hányat találtál?

3. *a)* Vegyél fel egy e egyenest! Szerkeszd meg a síkon azt a tartományt, amelynek a pontjaira teljesül, hogy e-től való távolságuk legalább 3 cm, de legfeljebb 5 cm!

b) Vegyél fel egy A pontot! Szerkeszd meg a síkon azt a tartományt, amelynek a pontjaira teljesül, hogy A-tól való távolságuk nem kisebb, mint 3 cm és nem nagyobb, mint 5 cm!

4. Vegyél fel két metsző egyenest, a-t és b-t! Szerkeszd meg azokat a pontokat, amelyeknek a-tól való távolságuk legfeljebb 3 cm, és b-től való távolságuk legfeljebb 5 cm!

5. Szerkessz paralelogrammát a következő adatokból!



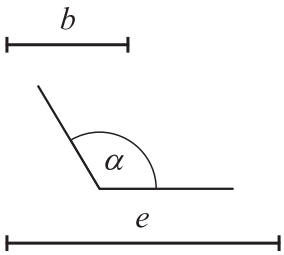
a) $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $\alpha = 45°$

b) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $m_a = 3$ cm

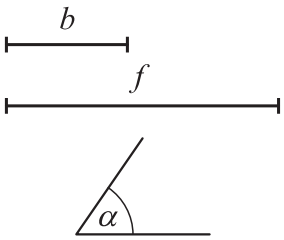
c) $a = 4$ cm, $m_a = 3$ cm, $\alpha = 60°$

6. Szerkessz paralelogrammát a következő adatokból!

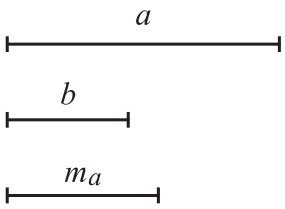
a)



b)



c)

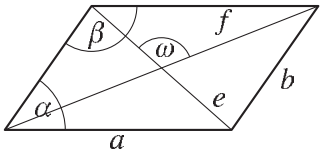


7. Szerkessz paralelogrammát a következő adatokból!

a) $e = 6$ cm, $b = 4$ cm, $m_a = 2{,}5$ cm

b) $e = 4$ cm, $f = 7$ cm, $\omega = 120°$

c) $a = 5$ cm, $m_a = 3$ cm, $\beta = 135°$



8. Szerkessz rombuszt, melynek átlói 4 cm és 6 cm hosszúak!

9. Adott két egymást metsző egyenes és egy pont. Szerkessz a ponton át párhuzamost az adott egyenesek mindegyikével! Milyen síkidomot zár közre az így kapott két egyenes az eredeti egyenesekkel együtt?

10. Adott egy szög és egy E pont.

a) Szerkessz az adott szöggel egyállású szöget úgy, hogy a csúcsa az E pont legyen!

b) Szerkessz az adott szöggel fordított állású szöget úgy, hogy a csúcsa az E pont legyen!

11. Vegyél fel egy A pontot és egy O pontot!

Szerkessz rombuszt, ha az A pont az egyik csúcsa, az O pont a szimmetriacentruma, és azt is tudjuk, hogy az egyik átlója 6 cm hosszú!

12. Egy piros négyzet O pontra való tükrözésével kaptunk egy zöld négyzetet. Az ábráról azonban lekoptak a vonalak. A piros négyzetből mindössze egy csúcs maradt, a zöld négyzetnek is csak egy csúcsa látható. Szerencsére a tükörközéppont megmaradt. Vedd föl a megmaradt piros és zöld csúcsokat, és az O pontot! Szerkeszd meg a piros és a zöld négyzeteket! Hány megoldás van?

Szabályos sokszögek

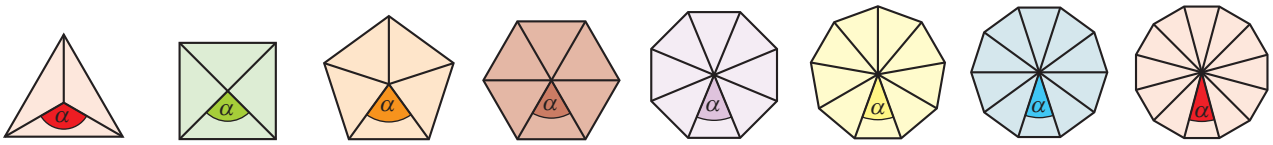
Azokat a sokszögeket, amelyeknek minden oldaluk és szögük egyenlő, szabályos sokszögeknek nevezzük.

1. példa

Egyenlő szárú háromszögek α szárszöge fokokban mérve egész szám. Az ilyen háromszögek közül melyekkel lehet szabályos sokszöget építeni?

Megoldás

Minden olyan 180°-nál kisebb α szög jó, amely osztója a 360°-nak. A sokszög annyi oldalú, ahányszor α megvan a 360°-ban. Az α szög lehet: 120°, 90°, 72°, 60°, 45°, 40°, 36°, 30°, 24°, 20°, 18°, 15°, 12°, 10°, 8°, 6°, 5°, 4°, 3°. Néhányat itt láthatsz:

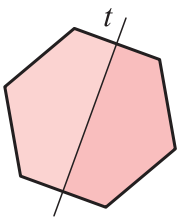


$\alpha = 120^\circ$ $\alpha = 90^\circ$ $\alpha = 72^\circ$ $\alpha = 60^\circ$ $\alpha = 45^\circ$ $\alpha = 40^\circ$ $\alpha = 36^\circ$ $\alpha = 30^\circ$

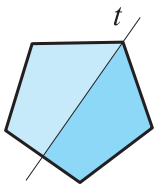
Például a szabályos 7 oldalú sokszöget felépítő egyenlő szárú háromszög csúcsszöge $\frac{360^\circ}{7}$, amely nem egész szám. Hasonlóan nem egész szám a 11 oldalú szabályos sokszöget felépítő háromszög csúcsszöge sem, mivel $\frac{360^\circ}{11}$ nem egész szám.

Nem minden egyenlő szárú háromszögből lehet szabályos sokszöget építeni, de be lehet bizonyítani, hogy minden szabályos sokszög felbontható közös csúcsú egyenlő szárú háromszögekre.

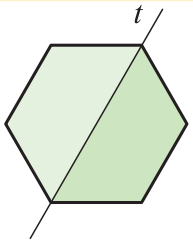
Minden szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus az oldalfelező merőlegesekre és a szögfelezőkre.



Lehet, hogy a tengely két oldalfelező pontban metszi a sokszöget.



Lehet, hogy a tengely egy csúcson és egy oldalfelező ponton halad át.



Lehet, hogy a tengely két csúcson halad át.

2. példa

Milyen fajta szabályos sokszögekben

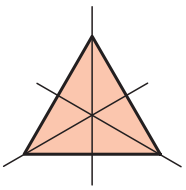
a) találunk csúcsot nem tartalmazó tengelyt; *b)* van pontosan egy csúcsot tartalmazó tengely;

c) találunk két csúcsot tartalmazó tengelyt; *d)* lehet szimmetria-középpont?

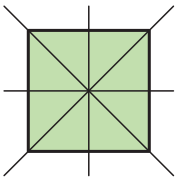
Megoldás

A páros oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak. Tengelyei vagy nem haladnak át egy csúcson sem, vagy 2 csúcson haladnak át.

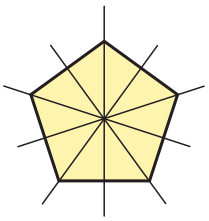
A páratlan oldalszámú sokszögek nem középpontosan szimmetrikusak, szimmetriatengelyeik pontosan 1 csúcson haladnak át.



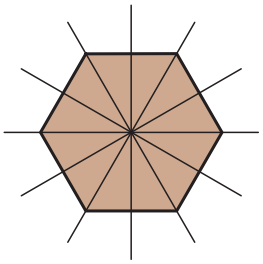
A szabályos háromszögnek három tükörtengelye van, tükörközéppontja nincs.



A szabályos négyszögnek, vagyis a négyzetnek négy tükörtengelye van, és egy tükörközéppontja.

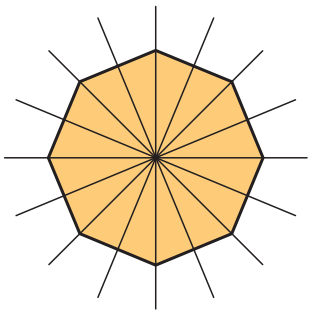


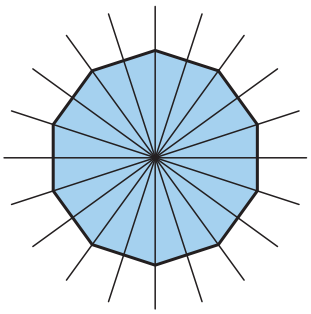
A szabályos ötszögnek öt tükörtengelye van, tükörközéppontja nincs.

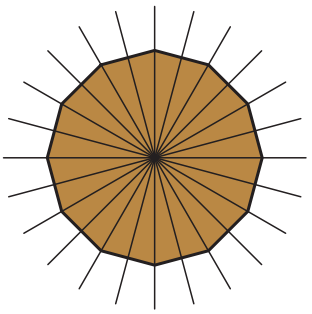


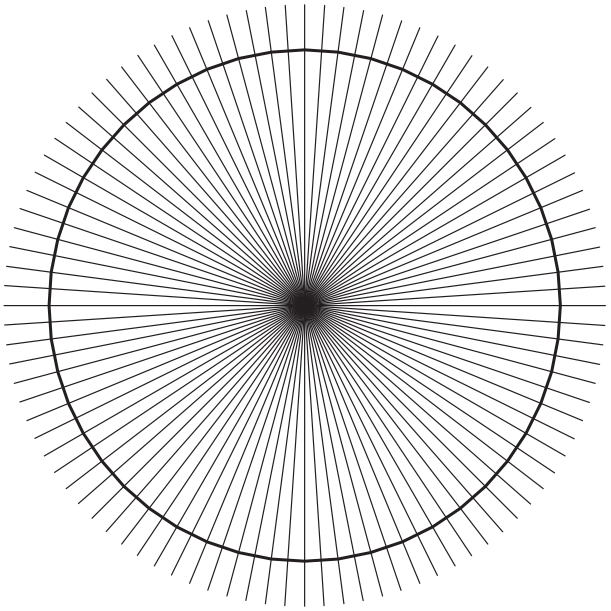
A szabályos hatszögnek van egy tükörközéppontja és hat tükörtengelye.

A szabályos 8, 10, 12 oldalú sokszögnek 8, 10, 12 tükörtengelye van, és mindegyiknek van tükörközéppontja is.









Minél több oldalú a szabályos sokszög, annál több tükörtengelye van, és annál jobban emlékeztet a körre (amelynek végtelen sok tükörtengelye van). Például itt látható egy szabályos 48-szög, amelyet a legtöbb ember körnek látna. Berajzoltuk az összes tükörtengelyét is.

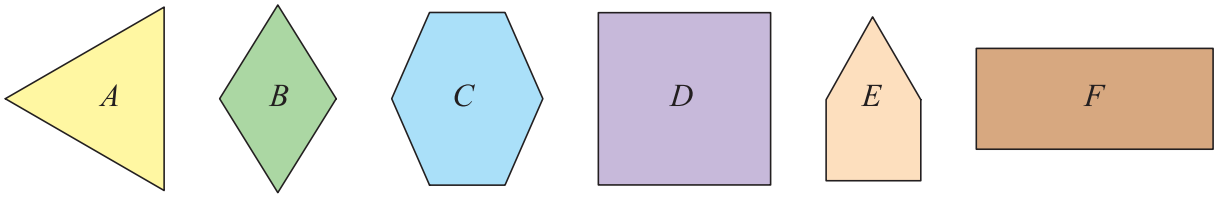
Minden szabályos sokszögnek annyi tükörtengelye van, ahány oldala. A tengelyek egy pontban metszik egymást. A páratlan oldalszámú szabályos sokszögeknek nincsen szimmetriacentrumuk, a páros oldalszámúaknak van.

A páros oldalszámú szabályos sokszögek szimmetria-középpontja a szimmetriatengelyek metszéspontja.

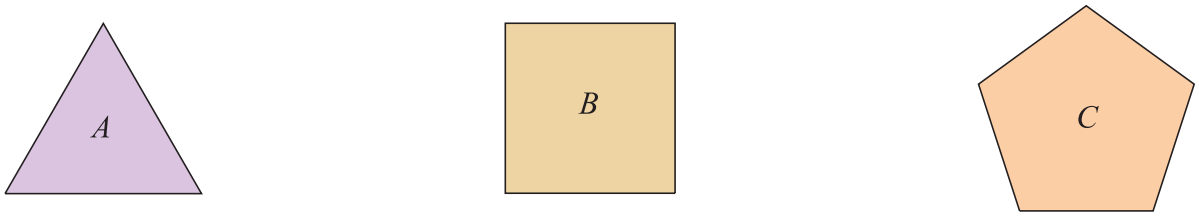
A szabályos sokszögek köré kör írható.

Feladatok

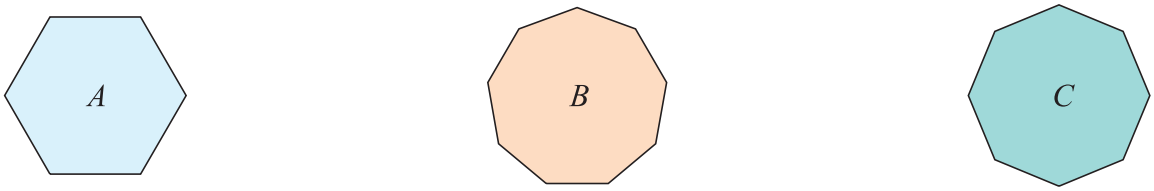
1. Melyek szabályosak az alábbi sokszögek közül?



2. Hány szimmetriatengelye van az alábbi szabályos sokszögeknek?



Van-e szimmetria-középpontjuk az alábbi szabályos sokszögeknek?



3. Nyolc egybevágó tükrös háromszögből szabályos sokszöget építettünk. Mekkorák a sokszög szögei?

4. Egyenlő szárú háromszögekből szabályos sokszögeket építettünk. Hány oldalú a szabályos sokszög, ha az egyenlő szárú háromszög szárszöge

a) 40°, *b)* 90°, *c)* 120°, *d)* 60°,
e) 20°, *f)* 45°, *g)* 12°, *h)* 36°?

5. Egyenlő szárú háromszögekből szabályos sokszögeket építettünk. Mekkorák a háromszög szögei, ha a szabályos sokszög oldalainak száma

a) 5, *b)* 9, *c)* 24, *d)* 20, *e)* 10?

6. A szabályos sokszög belső szögei 150°-osak. Állapítsd meg, hogy milyen egyenlő szárú háromszögekből építettük fel, és hogy hány oldala van!

7. A szabályos sokszög mindegyik szöge α. Milyen egyenlő szárú háromszögből építhető fel, mekkorák ennek a szögei, és hány oldalú a sokszög, ha

a) $\alpha = 108°$, *b)* $\alpha = 120°$, *c)* $\alpha = 135°$, *d)* $\alpha = 140°$, *e)* $\alpha = 144°$?

8. Egybevágó tükrös háromszögekből szabályos sokszögeket építettünk. Hány oldala van a sokszögünknek, ha annyit tudunk, hogy a tükrös háromszög egyik szöge

a) 30°, *b)* 45°, *c)* 72°, *d)* 120°, *e)* 60°?

9. Egy szabályos sokszög szögeinek összege 540°. Hány egybevágó tükrös háromszögből építhetjük fel ezt a sokszöget?
Mekkorák a szögeik ezeknek a háromszögeknek?

10. Egy szabályos sokszög külső szögei 24°-osak. Hány átlója van?

11. Egy konvex sokszögben a szögek összege 1440°. Hány átló húzható egy-egy csúcsából?

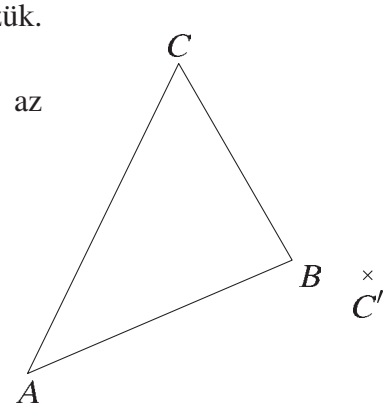
12. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög középponti szöge egyenlő a sokszög külső szögével!

13. Egyenlő szárú háromszögekből szabályos sokszögeket építettünk. Csak annyit tudunk, hogy a háromszög minden szöge fokokban mérve egész szám. Hányféle ilyen háromszög lehet, és hány fokosak lehetnek a szögei?

Tudáspróba

1. *a)* Vegyél fel egy szakaszt, és rajta kívül egy O pontot! Tükrözd a szakaszt az O pontra!
b) Vegyél fel egy kört, és rajta kívül egy O pontot! Tükrözd a kört az O pontra!

2. Az ábrán látható ABC háromszöget középpontosan tükrözzük. A tükrözés után a C pont képe a C' pont.
Határozd meg a tükrözés középpontját, és szerkeszd meg az ABC háromszög tükörképét!



3. $A(-1;-3)$, $B(3;-1)$, $C(4;2)$, $D(0;0)$. Ez a négy pont egy négyszög négy csúcsa.
a) Van-e a négyszögnek szimmetria-középpontja?
b) Mi a neve ennek a négyszögnek?

4. Sorold fel a paralelogrammáknak legalább négy tulajdonságát!

5. Válaszd ki a négyszögfajták közül azokat, amelyekre teljesül az állítás!
trapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, húrtrapéz, téglalap, négyzet
a) átlói felezik egymást
b) oldalai egyenlő hosszúak
c) 2-2 oldala egyenlő hosszú
d) középpontosan szimmetrikus

6. Szerkessz paralelogrammát, amelynek egyik oldala 5 cm, a hozzá tartozó magasság 3 cm, és egyik szöge 60°!

Arány, százalék

Az arány fogalma



A mindennapi életben gyakran találkozunk az „aránylag nagy”, az „aránylag kicsi” az „arányaiban megfelelő méretű” szóhasználattal. Ez azt jelenti, hogy például egy tárgy valamihez viszonyítva nagy vagy kicsi, illetve a valóságos tárgy nagyított vagy kicsinyített mása. Ilyenek például a matchboxok, a repülő- vagy hajómodellek, illetve a játék villanyvonat is! A valóság „méretarányos” kicsinyítését láthatjuk például az épületek makettjén is.

Az arány kifejezést használjuk akkor is, amikor például a 7. *a* és a 7. *b* osztályok focimeccsén a 7. *a* osztály 5 : 3 arányban győzött. Az itt használt arány azonban matematikában nem minden esetben helyes. Például a 7. *b* osztály 2 : 0 arányban győzött, a hétköznapi nyelvben érthető, matematikailag viszont értelmetlen.

1. példa

Ismerjük meg az úgynevezett „poharas süti” receptjét!
Hozzávalók: 2 pohár joghurt (a joghurt poharát használjuk mérőeszköznek),
4 pohár liszt,
2 pohár cukor,
1 pohár olaj.

Ezenkívül 4 tojás, 1 csomag vaníliás cukor és 1 csomag sütőpor. A felsorolt alapanyagokat összekeverjük, tepsibe öntjük, vágott gyümölcsöt szórunk bele, és előmelegített sütőben sütjük.



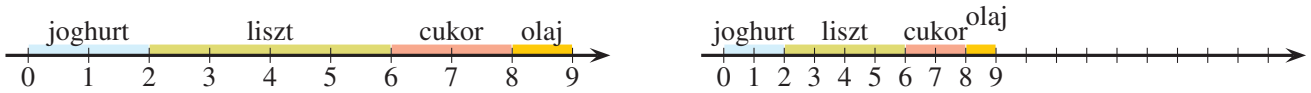
A pohárral mért alapanyagok mennyiségét könnyen össze tudjuk hasonlítani, mert van közös egységünk: az 1 pohár. A felsorolt alapanyagok összeöntésével 9 pohárnyi massza keletkezett, amelyben

2 rész joghurt, 4 rész liszt, 2 rész cukor és 1 rész olaj van, vagyis összesen 9 rész, ezért a teljes mennyiség $\frac{2}{9}$ része joghurt, $\frac{4}{9}$ része liszt, $\frac{2}{9}$ része cukor, $\frac{1}{9}$ része pedig olaj.

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a felsorolt négy alapanyag mennyisége úgy aránylik egymáshoz, mint a 2 aránylik a 4-hez, aránylik a 2-höz, aránylik az 1-hez,

jelekkel: j : l : c : o = 2 : 4 : 2 : 1.

Ez az arány nem változik akkor sem, ha az alapanyagokat nem a joghurtos, hanem más méretű pohárral mérjük, azaz ha más az egységünk.



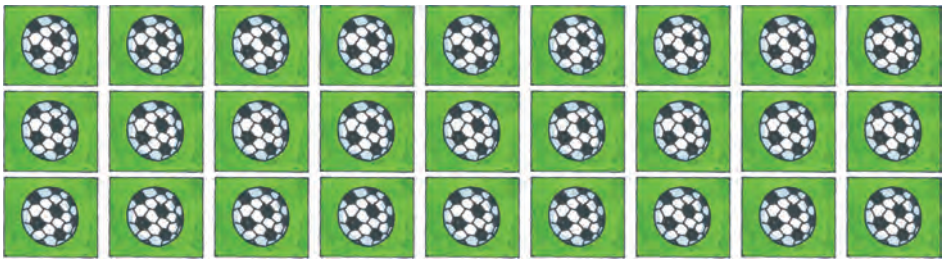
Azt is megtehetjük, hogy a poharas süti receptjében szereplő alkotórészek mindegyikét ugyanannyiad részére csökkentjük vagy ugyanannyiszorosára növeljük, attól függően, hogy hányan jönnek hozzánk vendégségbe. Az ilyen változtatásoknál a sütemény alkotórészeinek aránya ugyanaz marad. Ebből a négytényezős arányból bármely két, illetve bármely három alkotórész arányát is kiolvashatjuk. *Például* j : l = 2 : 4, ami azt mutatja, hogy a süteményben kétszer annyi liszt van, mint joghurt, vagy az l : c : o = 4 : 2 : 1 hármas arány azt jelenti, hogy a süteményben 4-szer annyi liszt és kétszer annyi cukor van, mint olaj.

2. példa

A hetedikesek őszi közösségi programjain Andris és Jocó segített a legtöbbet, ezért osztályfőnökük 27 focis matricát adott Andrisnak azzal a kéréssel, hogy kétszer annyit tartson meg belőle magának, mint amennyit Jocónak ad. Ezek után Andris megtartotta a matricák $\frac{2}{3}$ részét.

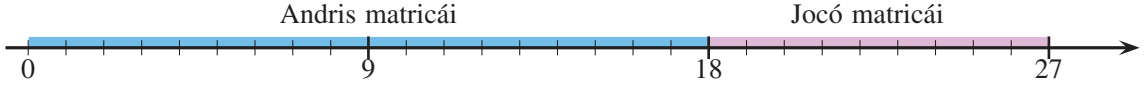
Helyesen tette? Írjuk fel a megtartott és az átadott matricák számának arányát!

Megoldás



A 27 db matrica $\frac{2}{3}$ része $27 \cdot \frac{2}{3} = 18$, azaz Andrisnak 18 db matricája maradt, Jocónak 27 db – 18 db = 9 db-ot adott. Mivel 18 a 9-nek kétszerese, ezért Andris helyesen döntött.

A matricák elosztását arányokkal is megfogalmazzuk: Andris matricáinak száma úgy aránylik Jocó matricáinak számához, mint 18 : 9. Andrisnál maradt a matricák $\frac{18}{27}$ része = $\frac{2}{3}$ része, társának adta a matricák $\frac{9}{27}$ részét = $\frac{1}{3}$ részét.



A 18 : 9 arány egyszerűbb alakban 2 : 1 aránnyal írható fel, vagyis az arány ugyanúgy egyszerűsíthető, ahogyan a tört. $18 : 9 = \frac{18}{9} = \frac{2}{1} = 2 : 1$. Tehát Andris a matricákat 2 : 1 arányban osztotta szét.

Két szám vagy mennyiség arányát kettősponttal és törtvonallal is jelölhetjük.

Például: 18 : 9, illetve $\frac{18}{9}$ ugyanazt az arányt jelentik. Tehát a törtek kifejezhetik két szám arányát is, a számláló és a nevező arányát. Az arány értékét célszerű a legegyszerűbb alakban megadni. A tört értelmezése miatt nyilvánvaló, hogy az arányban szereplő számok, mennyiségek sorrendjét nem lehet felcserélni.

A 18 : 9 és a 2 : 1 egyenlő értékű arányok. Az egyenlő értékű arányok aránypárt alkotnak. Az aránypár bármelyik tényezője meghatározható a többi három segítségével.

Például: $x : 0{,}6 = 2 : 3$ esetén $x = \frac{2 \cdot 0{,}6}{3}$, azaz $x = 0{,}4$

$3{,}8 : x = \frac{2}{5} : 6$ esetén $x = 3{,}8 \cdot 6 : \frac{2}{5}$, azaz $x = 57$

Az ókori görög templomok tökéletes harmóniát sugároznak. A ma emberét is csodálatba ejtő építmények fő részei az aranymetszési arány szerint készültek. Ezek az arányok megtalálhatók a későbbi korok művészetében is, elsősorban a reneszánsz nagy mestereinek építészeti, képzőművészeti alkotásaiban. Érdekes, hogy felfedezhetők ezek az arányok a természetben is, az egyes csigafajták görbületeiben, a napraforgó magjainak elhelyezkedésében, a fák, növények leveleinek növekedésében stb.



Csigáspolip (nautilusz) kettévágott háza

Ez az arány számos művészeti alkotásban: épületeken, zenében, irodalomban is megjelenik.

Mi az aranymetszés?

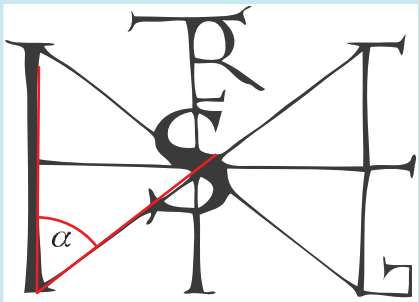
Ha egy szakaszt úgy osztunk két részre, hogy a kisebbik szakasz és a nagyobbik szakasz hosszának aránya egyenlő a nagyobbik szakasz és az egész szakasz hosszának arányával, akkor ezt a szakaszt aranymetszéssel vágtuk ketté.



A K osztópont olyan két részre osztja a szakaszt, amelyekre fennáll az $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ arány. Értéke – bármilyen $a + b$ hosszúság esetén – körülbelül 0,618.

Az arány értékéből kiszámítható az aranyszög is (az ábrán α-val jelölt szög), amely kb. $51^\circ\ 49'\ 34''$.

Az aranyszög sok jelképben megtalálható, például Szent István királyunk REX ST *(Rex Stephanus)* betűjeleket tartalmazó kézjegyében is.



Az interneten gazdag alkalmazását találod az aranymetszésnek. Nézz utána!

Feladatok

1. Egy 10 literes vödröt vízzel akarunk megtöltetni, de csak egy 2,5 dl-es bögre áll rendelkezésünkre. Hány tele bögre vizet kell a vödörbe önteni? Mekkora a vödör és a bögre térfogatának aránya?

2. Adj meg négy olyan arányt, amelynek $\frac{3}{5}$ az értéke!

3. Az $A = \{0; 1; 2; 4\}$ halmaz elemiből minden lehetséges módon képezz arányokat!

4. Egy traktor első kereke ugyanazon az úton 3-szor annyit fordul, mint a hátsó. Határozd meg a különböző kerekek fordulatszámának arányát!



5. Az arányok közül válaszd ki az egyenlő értékűeket!

a) $\frac{7}{6}$ *b)* 0,25 : 1 *c)* $\frac{3}{4}$ *d)* $\frac{3}{5}$ *e)* 10 : 4 *f)* 0,6 : 1

g) $\frac{1}{4}$ *h)* 2,5 : 1 *i)* $\frac{25}{100}$ *j)* 6 : 8 *k)* 21 : 18 *l)* $\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$

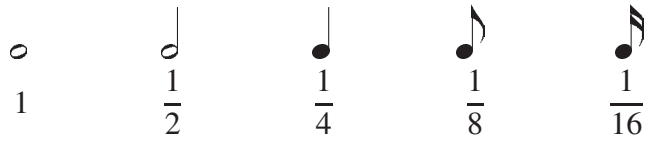
6. Mennyi

a) 4 cm és 1 dm, *b)* 0,5 l és 2 l, *c)* 6 perc és $\frac{1}{2}$ óra, *d)* 45,5 dkg és 182 kg aránya?

7. Egy téglalap egyik oldala $\frac{2}{3}$-a a másiknak. Add meg az oldalak arányát!

8. A felsorolt kottafejekből készíts olyan párokat, hogy a megfelelő ritmusértékek aránya

a) 1 : 2 *b)* 3 : 4 *c)* 3 : 2 legyen!



Például: 2  : 2  $= \frac{2}{8} : \frac{2}{4} = 1 : 2$

9. Az ókori szobrászművészek szerint egy emberi test akkor tökéletes, ha a csípő vonala az „isteni arány”, az aranymetszés aránya szerint osztja a testet (t) alsó- (a) és felsőtestre (f). Ez az arány, amely megjelenik a képen látható Apollón-szobron is, közelítőleg:

$$f : a = a : t \approx 60 : 100$$

Ennek ismeretében készítsd el a táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki!

Testhossz [cm]	160		
A felsőtest hossza [cm]			69
Az alsótest hossza [cm]		125	

Megjegyzés: A táblázatban közelítő értékek szerepelnek.



Egyenes arányosság

Ha két összetartozó mennyiség kapcsolata olyan, hogy ahányszorosára változik az egyik, ugyanannyiszorosára változik a másik is, akkor a két mennyiség **egyenesen arányos.**

1. példa

1 gombóc fagylalt 180 Ft-ba kerül.

Hány forintot fizetünk egy 2, 3, 4, 5 gombócos fagyiért?



Megoldás

A megoldást táblázatba foglaljuk:

Gombócok száma	1	2	3	4	5
Ár (Ft)	180	360	540	720	900

Az összetartozó értékek hányadosa állandó.

$\frac{180}{1} = \frac{360}{2} = \frac{540}{3} = \frac{720}{4} = \frac{900}{5} = 180$, amely éppen egy gombóc fagylalt ára.

2. példa

Ábrázoljuk azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek $(x; y)$ koordinátái igazzá teszik az alábbi egyenleteket! Vizsgáljuk meg a keletkezett grafikonokat!

a) $y = 2 \cdot x$ *b)* $y = \frac{x}{3}$

Megoldás

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$1{,}6$	3	5
y	-4	-1	0	2	$\frac{6}{5}$	$3{,}2$	6	10

$\cdot 3$ (felül és alul)

x	-3	$-1{,}5$	-1	0	$0{,}4$	$\frac{3}{2}$	2	6
y	-1	$-0{,}5$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	2

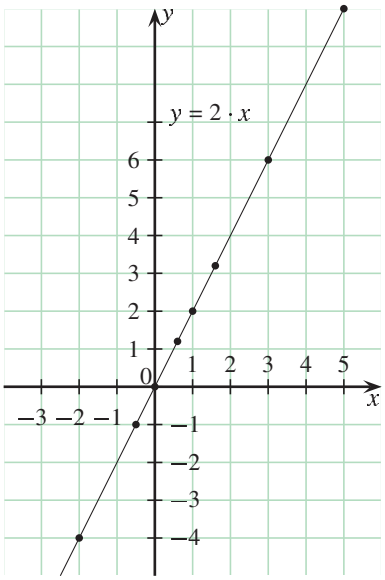
$: 2$ (felül és alul)

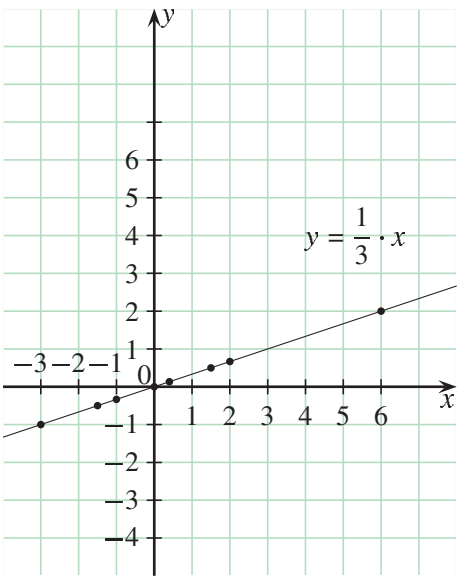
Mindkét esetben igaz, hogy ahányszorosára változik az egyik mennyiség (x), ugyanannyiszorosára változik a másik mennyiség (y) is. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az x és y értékei egyenesen arányosak egymással.

Az *a)* táblázat második sorában minden érték kétszerese az első sorban neki megfelelő értéknek. A $(0; 0)$ számpártól eltekintve minden értékpár esetében igaz, hogy $\frac{y}{x} = 2$.

A *b)* táblázat második sorában minden érték $\frac{1}{3}$-szorosa az első sorban neki megfelelő értéknek. A $(0; 0)$ számpártól eltekintve minden értékpár esetében igaz, hogy $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$.

Az összetartozó értékek aránya állandó.





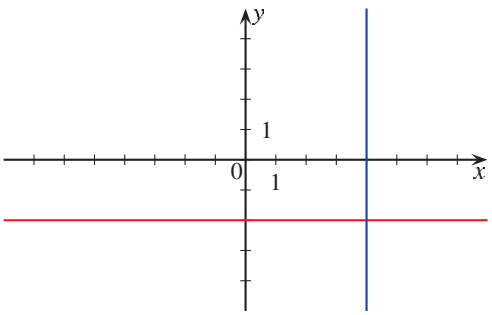
Két változó mennyiség **egyenesen arányos,** ha a megfelelő értékek aránya állandó. A szereplő mennyiségek értékei tetszőleges, 0-tól különböző számok lehetnek. Megállapodunk abban, hogy az egyik mennyiség 0 értékéhez a másik mennyiség 0 értéke tartozik. Így, az egyenes arányosság grafikonja egy **origón áthaladó egyenes.**

3. példa

Nézzük meg, hogy minden egyeneshez rendelhető-e egyenes arányosság!

Megoldás

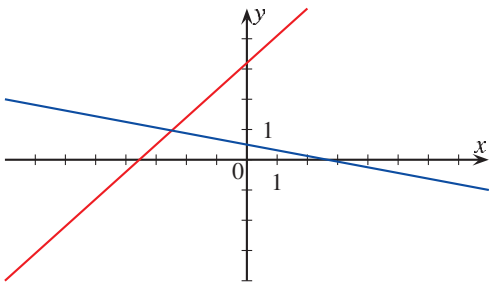
a)



– Ha az egyenes párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel, akkor a megfelelő értékek hányadosa nem állandó.

– Ha az egyenes egybeesik az y tengellyel, akkor a megfelelő értékek aránya nem értelmezhető. Az ilyen egyenesek nem írnak le egyenes arányosságot.

b)



Ha az egyenes nem halad át az origón, akkor pontjainak koordinátáihoz nem rendelhető egyenes arányosság, mivel a megfelelő értékek hányadosa itt sem állandó.

Az egyenes arányosság grafikonja tehát minden esetben egyenes, ugyanakkor nem minden egyeneshez tartozik egyenes arányosság.

Feladatok

1. 2 darab pingponglabda 220 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetni 1, 3, 4, 5, 6 darab ugyanilyen labdáért?

Írd fel a változó mennyiségek közötti összefüggést képlettel!

Készíts értéktáblázatot, és ábrázold a grafikont!

2. Piri negyed órát beszélt barátnőjével mobiltelefonon. A beszélgetés percdíja, minden megkezdett perc után 35 Ft. A kapcsolási díj pedig minden hívásnál 5 Ft.

Mennyibe került ez a beszélgetés Piri szüleinek?



3. Ábrázold a koordináta-rendszerben a képletekkel megadott egyenes arányosságokat!

a) $y = -x$ *b)* $y = \frac{1}{2} \cdot x$

4. Mennyi idő alatt ér a Földre a Nap felszínéről induló fény, ha a Föld–Nap közepes távolság 150 millió km, és a fénysebesség 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$?



5. Egy vidéki élelmiszerbolt alkalmazottai vállalják a telefonon megrendelt áruk házhoz szállítását. Mariska néni 1200 méterre, Juliska néni 1800 méterre lakik az üzlettől.

Hányszor annyi ideig tart az áruszállítás Juliska nénihez, mint Mariska nénihez, ha feltételezzük, hogy a futár állandó sebességgel halad végig az utakon?

6. Péter az 1 hetes tavaszi szünetben naponta 2 órát olvas, így kedvenc regényéből 126 oldalt tud elolvasni. A nyári szünet egyik 31 napos hónapját napi ugyanennyi olvasással kívánja eltölteni. Végére ér-e a 620 oldalas regénynek?

7. A Kovács család a melegvízfogyasztásért átalánydíjat fizetett, azaz minden hónapban ugyanannyit fizettek a tényleges vízfogyasztástól függetlenül.

Minden hónapban 5 m^3 víz árát fizették ki, de úgy gondolták, valójában nem használnak el ennyi vizet. Ezért úgy döntöttek, hogy 3000 petákért vízórát szereltetnek fel. A vízóra az első három hónap fogyasztását összesen 12 m^3-nek mutatta.

a) Hány petákot fizettek évente a melegvízfogyasztásért, ha 1 m^2 melegvíz ára 200 peták?

b) A vízóra felszerelése után mennyi lett az éves melegvíz-díj, ha minden hónapban ugyanannyi fogyasztást mért a vízóra?

c) Hány hónap alatt térül meg a vízóra ára?

(Országos kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2008/2009 alapján)

8. Megadható-e egyértelműen az az egyenes arányosság, melynek grafikonján van az $A(1; -3)$ pont? Ha igen, add meg a képletét, és ábrázold a grafikont!

Fordított arányosság

1. példa

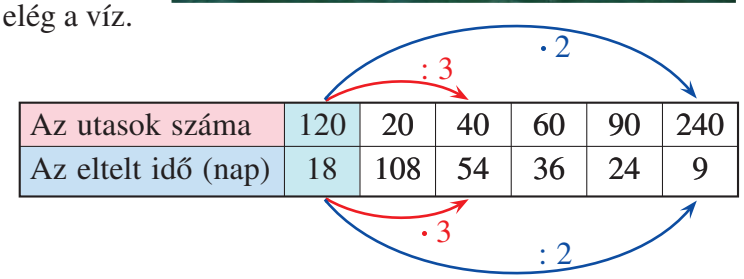
Egy tengeralattjáró ivóvízkészlete egyenletes fogyasztás mellett 120 személynek 18 napig elegendő. Hány napig tart ez a készlet, ha 20, 40, 60, 90, illetve 240 ember utazik a hajón, és az utasok minden nap elfogyasztják a lehetséges adagot?



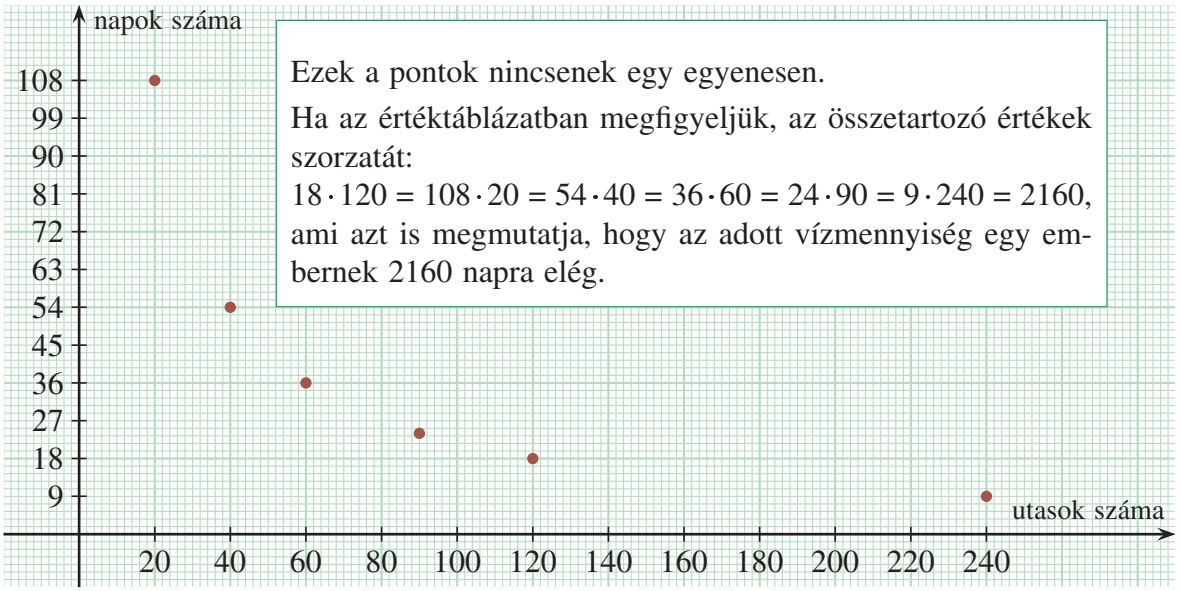
Megoldás

Ha 120 személynek 18 napra elég a víz, akkor 60 személynek 36 napra, azaz feleannyi személynek kétszer annyi ideig elég a víz. 240 személynek 9 napra, vagyis kétszer annyi személynek feleannyi ideig elég a víz.

Ahányszorosára nő az utasok száma, ugyanannyiad részére csökken az idő, illetve ahányad részére csökken az utasok száma, ugyanannyiszorosára nő az idő. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a két mennyiség **fordítottan arányos** egymással.



Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a táblázatba foglalt számpárokat!



Ezek a pontok nincsenek egy egyenesen.

Ha az értéktáblázatban megfigyeljük, az összetartozó értékek szorzatát:

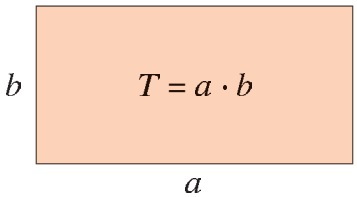
$18 \cdot 120 = 108 \cdot 20 = 54 \cdot 40 = 36 \cdot 60 = 24 \cdot 90 = 9 \cdot 240 = 2160$,

ami azt is megmutatja, hogy az adott vízmennyiség egy embernek 2160 napra elég.

2. példa

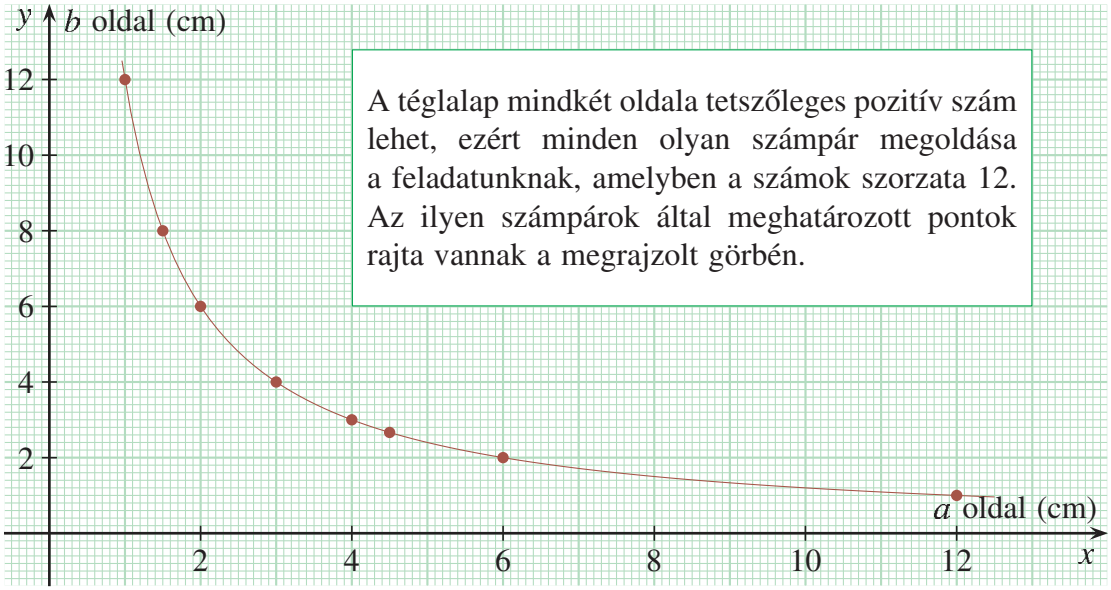
Mekkorák lehetnek az olyan téglalapoknak az oldalai, amelyek területe 12 cm^2?

Megoldás



a (cm)	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	4,5	6	12
b (cm)	12	8	6	4	3	$\frac{8}{3}$	2	1

Az oldalak hossza úgy változik, hogy ahányszorosára növeljük a hosszúságot, ugyanannyiad részére csökken a szélesség.
Itt a téglalap hosszúsága és szélessége között **fordított arányosság** van.
Ábrázoljuk a pontokat a koordináta-rendszerben!



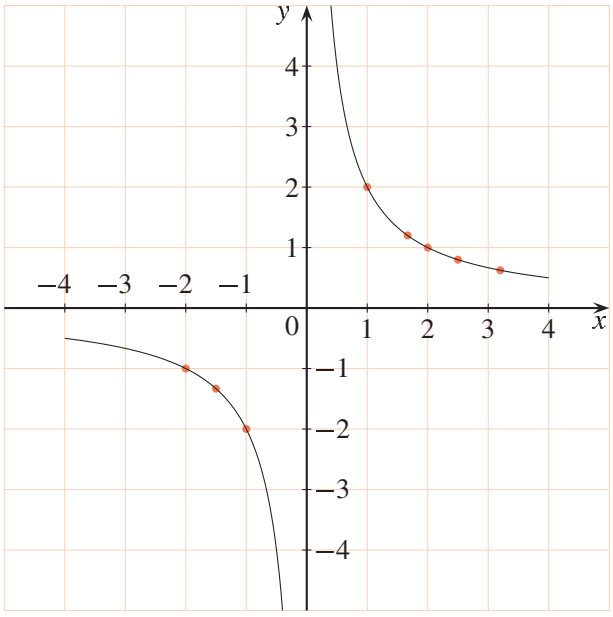
3. példa
Ábrázoljuk azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek $(x; y)$ koordinátái igazzá teszik az alábbi egyenletet! Vizsgáljuk meg a keletkezett grafikont!

$$x \cdot y = 2$$

Megoldás
A képlet szerint a változók összetartozó értékeinek szorzata mindig 2, közöttük tehát fordított arányosság van. Az x értéke bármilyen 0-tól különböző szám lehet, y értéke pedig a képlet alapján számolható.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{5}{2}$	$3{,}2$
y	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	2	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$

A grafikon két részből áll. A koordináta-rendszer első és harmadik negyedében kaptunk egy-egy, az origóra szimmetrikus görbét. Ezek sohasem metszik a koordináta-tengelyeket, mert x és y szorzata a megadott képlet szerint nem 0, így sem x, sem y nem lehet 0. Ezt a görbét **hiperbolának** nevezzük.



Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha a megfelelő értékek szorzata állandó. A fordított arányosság a 0-hoz nem rendel értéket, grafikonja az origóra szimmetrikus **hiperbola.**

4. példa



A karácsonyi ünnepély után a tornaterem takarítását a 7. *b* osztály vállalta. A munkára előzetesen csak 9-en jelentkeztek. Ám a takarításra 12 tanuló érkezett, így 2 óra alatt végeztek. Mennyi ideig tartott volna a munka, ha csak 9-en vannak?

Megoldás

A munkavégzők száma és a munkavégzés ideje között fordított arányosság áll fenn, hiszen ahányszor többen dolgoznak, annyiszor kevesebb idő alatt végeznek. (Természetesen itt feltételezzük, hogy mindenki azonos teljesítménnyel dolgozik.)

12 tanuló 2 óra alatt, 9 tanuló t óra alatt végzi el a takarítást, és igaz, hogy az összetartozó értékek szorzata állandó:

$$9 \cdot t = 12 \cdot 2, \qquad \text{innen} \qquad t = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3},$$

vagyis 2 óra 40 perc alatt végeztek volna a tanulók a takarítással, ha csak 9-en jönnek el.

Feladatok

1. Egy kertészetben összesen 400 tő petúniát ültettek, minden sorba ugyanannyit.
Hány sorba ültették a virágokat? Hány tő jutott egy sorba?

2. 120 db Mikulás-csomagot 5 Mikulás 1,2 óra alatt készít el. Mennyi ideig tart a 120 csomag elkészítése, ha 6-an, 10-en, 12-en vannak?

3. Az iskola körüli park rendbe hozását 12 gyerek vállalta, és 2,5 óra alatt készültek el a munkával.
Hány óráig tart ez a munka, ha 6-an, 10-en, illetve 15-en dolgoznak?



4. Hány fokos szögeket kapunk, ha a teljes szöget 2, 3, 4, 5, 6 egyenlő részre osztjuk fel?
Milyen kapcsolat van a részek száma és a szög nagysága között?

5. Ábrázold a koordináta-rendszerben a képletekkel megadott fordított arányosságokat!

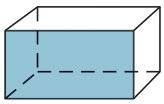
a) $x \cdot y = 1$ *b)* $y = -\frac{1}{x}$

6. A dioptria a geometriai optikai lencsékre jellemző mennyisége, főként szemüveglencsék jellemzésére használják.
A dioptria értéke a következő képlettel számítható ki: $D = \frac{1}{f}$, ahol D a dioptria, f a fókuszpont lencsétől számított távolsága méterben.
a) Hogyan változik a dioptria, ha a fókusztávolságot 2-szeresére, háromszorosára növeljük?
b) Hogyan változik a dioptria, ha a fókusztávolságot harmadára, ötödére csökkentjük?
c) Milyen kapcsolat áll fenn a fókusztávolság és a dioptria között?

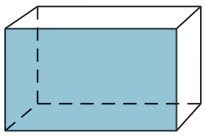
7. A 64 m^2 alapterületű négyzet alakú teraszt 10 cm oldalú négyzet alakú mozaiklapokkal borítanak be. Hány darab lapra lesz szükség? Hány lapot kell venni, ha a négyzet alakú mozaiklapok oldalai 5 cm, 20 cm, 40 cm-esek?

8. A kőművesek egy 3 m magas, 16 m hosszú téglalap alakú fal felhúzásához olyan téglákat szállítottak, amelyeknek legnagyobb lapja 24 cm és 10 cm oldalú téglalap. A tulajdonos ugyanezt a falat olyan téglákkal szeretné megcsináltatni, amelyeknek a legnagyobb lapja 32 cm és 15 cm oldalú téglalap. (A téglák vastagsága mintkét esetben ugyanolyan.) Hány darab téglát használnak a kőművesek, ha az odaszállított téglákat használják és hányat, ha teljesítik a tulajdonos kérését?

A kisebb tégla ára: 120 000 Ft/1000 db. A nagyobb tégla ára: 69 000 Ft/300 db.



kisebb tégla



nagyobb tégla

Melyik esetben kerül kevesebbe a falhoz szükséges téglamennyiség?

9. A fordított arányosság grafikonján rajta van a $\left(4; \frac{3}{4}\right)$ pont. Ábrázold ezt a grafikont!

Vegyes feladatok

1. Az almalé töltését 4 olyan gép végzi, amely 1000 db 1 literes dobozt 24 perc alatt tölt meg. Mennyi ideig tart ez a munka, ha 1, 2, 6, 10, 12 ugyanilyen gép végzi?

2. Dolgos apuka egy éves munkaszerződést kötött az Interaktív nevű külföldi céggel. Ezért olyan 110 m^2 alapterületű bérlakást keres, amelyben ezalatt az idő alatt lakhat a családjával.

Egy internetes honlapon a következő lakáshirdetéseket találta:

Belváros	75–90 négyzetméter alapterületű lakások 500 peták havi bérleti díjjal, 100–130 négyzetméter alapterületűek 800 peták bérleti díjjal kiadók.

Kertváros	35–120 négyzetméter alapterületű kiadó lakások egy évre szóló négyzetméterenkénti bérleti díja 90 peták.

Melyik 110 m^2-es bérlakást válassza erre az 1 évre, ha kevesebbet szeretne fizetni?

Milyen arányosság van a tartózkodási idő és a fizetendő összeg között?

(Országos kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2008/2009 alapján)

3. Ábrázold a koordináta-rendszerben a képlettel megadott összefüggéseket! Készíts értéktáblázatot! Milyen arányosság van x és y összetartozó értékei között?

a) $y = 3 \cdot x$ *b)* $y = -\frac{1}{2} \cdot x$ *c)* $\frac{y}{x} = 2$ *d)* $\frac{y}{x} = -3$

4. Keress olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek koordinátáinak

a) hányadosa -2; *b)* szorzata $\frac{1}{3}$

Milyen arányosság van az egyes pontok x és y koordinátája között az *a)*, illetve a *b)* esetben?

5. Az országút város felőli oldalán zajtompító és levegőszűrő fasort ültetnek. Ha három sorba ültetik a fákat, akkor 90 db fa kerül az út szélére.
Hány fa áll egy sorban, ha két sorba ültetnek ugyanannyi fát? Milyen hosszú lesz mindkét esetben a fasor, ha a fák egy sorban egymástól 8 m-re állnak?



6. A következő példák közül válaszd ki a fordított arányosságokat!

a) ugyanannak az árunak a mennyisége és az ára

b) ugyanazon az úton gördülő kerék kerülete és fordulatszáma

c) egy teli vödörből kiöntött víz és a benne maradó víz mennyisége

d) egy téglatest alakú akváriumban lévő víz térfogata és a vízoszlop magassága

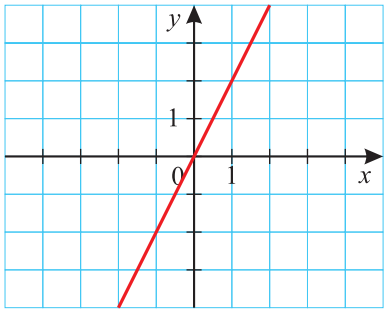
e) a növésben lévő gyermek éveinek száma, valamint fej- és testméretének aránya

f) havi fizetésünkből az elköltött és a megmaradt pénzösszeg

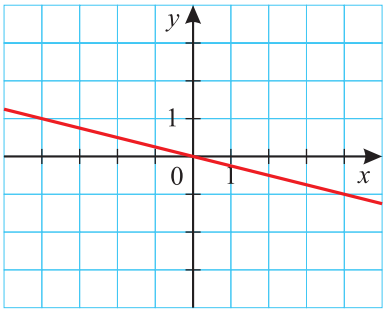
7. Válassz képletet a grafikonhoz!

a) $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ *b)* $x \cdot y = \frac{1}{2}$ *c)* $y + \frac{x}{4} = 0$ *d)* $x = -\frac{1}{y}$ *e)* $\frac{x}{2} = y$ *f)* $y = 2x$

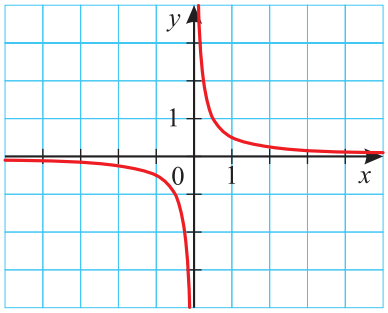
A)



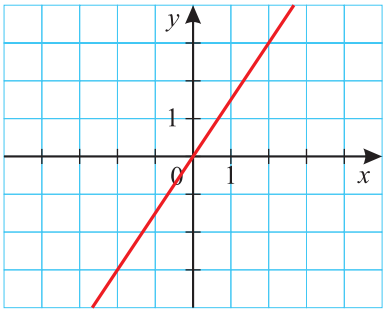
B)



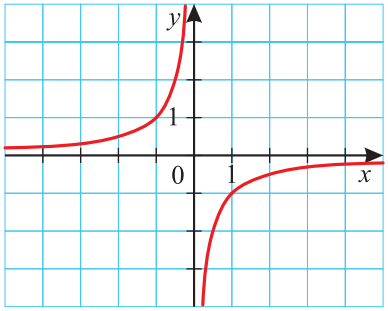
C)



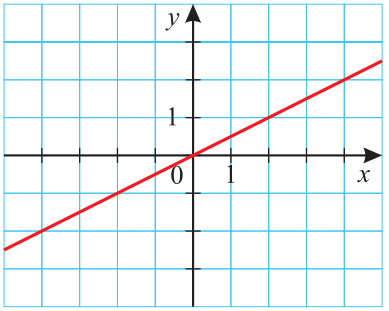
D)



E)



F)



8. Egy téglatest alakú felfújható fürdőmedence méretei: 3,5 m, 3 m, 0,5 m. Ezt a medencét megtöltjük vízzel. Hányszor kell fordulni a csaptól a medencéig, ha egy 15 literes, vagy ha egy 25 literes vödrünk van?



Arányos osztás

Példa

Egy zenetagozatos osztályban a különböző hangszereken tanuló gyermekek számának aránya:

fuvola : hegedű : gitár : zongora = 2 : 3 : 4 : 6.

Adjuk meg a különböző hangszereken tanuló diákok számának arányát százalék alakban!

Készítsük el azt a kördiagramot, amely szemlélteti ezeket az arányokat!

Megoldás

A megadott részek összege $2 + 3 + 4 + 6 = 15$.

A fuvolán játszók száma (f) $\frac{2}{15}$ része, a hegedűn játszók száma (h) $\frac{3}{15}$ része,

a gitáron játszók száma (g) $\frac{4}{15}$ része, a zongorán játszók száma (z) $\frac{6}{15}$ része a teljes létszámnak.

$\frac{2}{15} = \frac{f}{100}$, ebből $f = 13\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{3}{15} = \frac{h}{100}$, ebből $h = 20$

$\frac{4}{15} = \frac{g}{100}$, ebből $g = 26\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{6}{15} = \frac{z}{100}$, ebből $z = 40$

Fuvolán játszik a tanulók $\left(13\frac{1}{3}\right)$%-a, hegedűn a 20%-a, gitáron a $\left(26\frac{2}{3}\right)$%-a és zongorán a 40%-a.

A kördiagram elkészítéséhez kiszámítjuk a középponti szögeket, ezért a 360°-ot 2 : 3 : 4 : 6 arányban osztjuk fel.

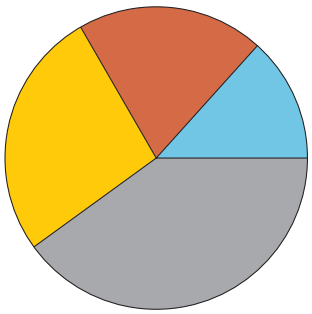
$\frac{15}{15}$ rész $\quad 360°$ $\qquad$ $\frac{1}{15}$ rész $\quad \frac{360°}{15} = 24°$

$\frac{2}{15}$ rész fuvola $\quad 24° \cdot 2 = 48°$

$\frac{3}{15}$ rész hegedű $\quad 24° \cdot 3 = 72°$

$\frac{4}{15}$ rész gitár $\quad 24° \cdot 4 = 96°$

$\frac{6}{15}$ rész zongora $\quad 24° \cdot 6 = 144°$



Megállapítjuk, hogy a kapott százaléklábaknak, a középponti szögeknek és az egyes hangszereken tanuló diákok számának aránya egyenlő, mivel minden esetben közös egység segítségével, egyenes arányos következtetéssel számoltunk:

$$\left(13\frac{1}{3}\right)\% : 20\% : \left(26\frac{2}{3}\right)\% : 40\% = 48° : 72° : 96° : 144° = 2 : 3 : 4 : 6$$

Feladatok



1. A 3 éves Juli és a 4 éves Rozi testvérek. Ossz szét közöttük életkoruk arányában 21 db kék törpikét!

2. Jutka 13. születésnapjára 30 db lufival díszítik fel a buli helyszínét. A piros és kék lufik aránya 3 : 2 volt. Hány db lufi van az egyes színekből?

3. Torkos Tóni 12 gombóc fagyit vett magának úgy, hogy az eper-, a pisztácia- és a csokifagyi aránya 1 : 2 : 3 volt. Melyik fajtából vette a legtöbbet, és az hány gombóc volt?

4. Az őszi vásárban egy tréningruhát, egy pár cipőt és egy kabátot vásároltunk, összesen 31 800 Ft-ot költöttünk. A cipő háromszor, a kabát nyolcszor annyiba került, mint a tréningruha. Mennyit fizettünk a tréningruháért, a cipőért és a kabátért?

5. Egy jó pogácsához a felhasznált 0,8 kg lisztben a finomliszt és a rétesliszt aránya 2 : 3. Hány dkg liszt kell az egyes fajtákból?

6. Egy háromszög szögeinek aránya 3 : 5 : 7. Hány fokosak a szögek?

7. *a)* Egy derékszögű háromszög egyik csúcsánál lévő belső és külső szögeinek aránya (ebben a sorrendben) 2 : 7. Mekkorák a háromszög szögei?

b) Egy derékszögű háromszög egyik csúcsánál lévő külső és belső szögeinek aránya (ebben a sorrendben) 2 : 7. Mekkorák a háromszög szögei?

8. Egy kétjegyű számban a számjegyek aránya 1 : 3. Melyek lehetnek ezek a számok?

9. Egy téglalap oldalainak aránya 2 : 5. A nagyobb oldala 27 cm-rel hosszabb a kisebbnél. Mekkora a téglalap területe és kerülete?

10. Luca 2 fiútestvérével és szüleivel együtt festette be a telküket bekerítő 540 db lécből álló fakerítést. A munkát az alábbi arányban osztották fel: Lucáé $\frac{1}{9}$ rész, a két fiúé $\frac{1}{6}$-$\frac{1}{6}$ rész, anyáé $\frac{2}{9}$ rész, apáé $\frac{1}{3}$ rész. Ki végezte a legtöbb, ki a legkevesebb munkát?

Határozd meg, ki-ki hány lécet festett be, és írd fel azok számának arányát is! Készíts olyan kördiagramot, amely az elvégzett munkák arányát szemlélteti!

11. *a)* Egy szárítókötelet 4 : 7 : 10 arányban vágtunk szét három részre. Közülük a legnagyobb hossza 360 cm. Hány méteres a többi rész? Hány méteres volt az egész kötél?

b) Egy csomag mogyorót 1 : 5 : 6 : 11 arányban osztottunk négy részre. A legkisebb kupacba 6 szem jutott. Hány szem van a többiben? Hány szem volt összesen a csomagban?

12. Három szám aránya 2 : 4 : 7. Melyek ezek, ha a legnagyobb és a legkisebb különbsége 60?

Százalékszámítás

Mennyiségek, számok törtrészeinek kiszámításánál már találkoztunk a százalék fogalmával, jelölésével. Ha egy mennyiségnek vagy egy számnak $\frac{x}{100}$ részét határozzuk meg, akkor annak éppen az x százalékát számítjuk ki.

Például 120 kg-nak a 40%-a 48 kg.
A 120 kg, az egész mennyiség: a 100%, az alap.
A törtrész: a 40%, a százalékláb.
A törtrésznek megfelelő mennyiség: a 48 kg a százalékérték.
A százalékszámításban szereplő mennyiségeknek külön neveket adtunk.
Az egész, a 100% a százalékszámítás **alapja.**
Az egész valahányad része, a p%-a a **százalékérték.**
A p% a **százalékláb.**

Árukatalógusokban, reklámújságokban nap mint nap kapunk hasonló híreket.



Mit jelentenek ezek a negatív előjelű százalékok?

A −30% felirat azt jelenti, hogy annak az árunak az árát 30%-kal csökkentették. Vagyis, hogy az új ár az eredeti árnál 30%-kal, azaz $\frac{30}{100}$ résszel kevesebb. Így marad annak a $\frac{70}{100}$ része, azaz a 70%-a.

1. példa

Húsvét előtt a 240 Ft-os csokitojás árát 20 százalékkal csökkentették. Mennyibe kerül így egy ilyen csokitojás?

Megoldás

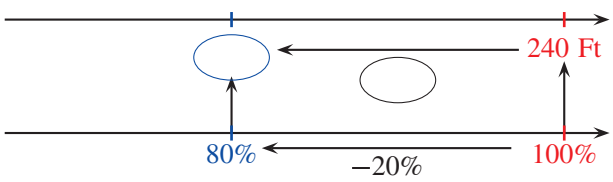
Ha 240 Ft-ból elvesszük annak a 20%-át, akkor megmarad az ár 80%-a.

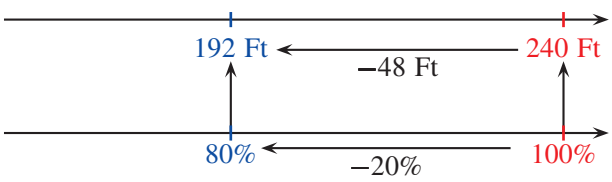
A húsvéti ajándék csökkentett árát kétféleképpen is kiszámíthatjuk:

240 Ft 20%-át kivonjuk 240 Ft-ból
240 Ft · 0,20 = 48 Ft
és 240 Ft − 48 Ft = 192 Ft

240 Ft 80%-át számoljuk ki
240 Ft · 0,80 = 192 Ft
A csökkentett ár tehát 192 Ft.

A feladat megoldását az alábbi számegyeneseken szemléltetjük.





2. példa

Az emberek kerékpárhasználati szokásait vizsgálta egy hazai statisztikai felmérés. Az ország különböző területeiről 22 000 embert kérdeztek meg erről. 2010-ben közülük 9180-an használták naponta a kerékpárjukat. Ugyanebből a 22 000 emberből a naponta kerékpárt használók száma 2012-re 35%-kal emelkedett.

Hányan ültek naponta kerékpárra 2012-ben?

Megoldás

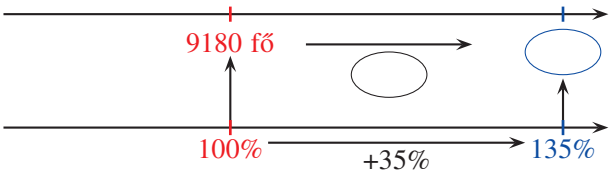
A 35%-os növekedés azt jelenti, hogy az adott mennyiséghez, amely a 100%-ot jelenti, még hozzá kell adni annak 35%-át.

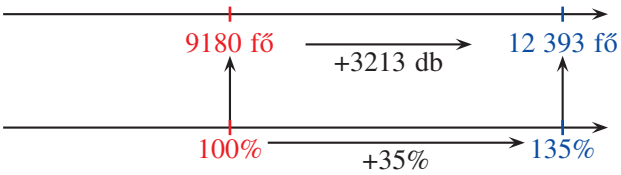
A megnövekedett létszámot kétféleképpen számoljuk ki:

9180 fő 35 %-át kiszámoljuk
9180 fő · 0,35 = 3213 fő,
és ezt hozzáadjuk a 9180 főhöz
9180 fő + 3213 fő = 12 393 fő

9180 fő 135 %-át számoljuk
9180 fő · 1,35 = 12 393 fő
A megkérdezettek közül 2012-ben 12 393-an használták naponta a kerékpárjukat.

A feladat megoldását az alábbi számegyeneseken szemléltetjük.





Nézz utána az interneten, hogy az elmúlt 10 évben hány új kerékpárút épült, és hogyan változott a városi kerékpárosok száma!



3. példa

A Százszorszép virágbolt kereskedője anyák napja előtt 25%-kal megemelte a 240 Ft-os rózsaszál árát. Az ünnep után hány százalékkal kell csökkentenie ezt az emelt árat, hogy újra 240 Ft-ba kerüljön egy szál rózsa?

Megoldás

A 25%-kal megemelt ár: 240 Ft · 1,25 = 300 Ft.

A csökkentés mértékét a 300 Ft-hoz képest kell megadni.

Ezt kétféleképpen számoljuk ki:

100%	300 Ft
x%	240 Ft

Aránypárral felírva: $\frac{x}{100} = \frac{240}{300}$, innen $x = 80$, ez éppen 20%-kal kevesebb a 100%-nál.

A 300 Ft-ot	100%	300 Ft
60 Ft-tal kell csökkenteni	x%	60 Ft

Aránypárral felírva: $\frac{x}{100} = \frac{60}{300}$, innen $x = 20$.

A rózsaszál emelt árát tehát 20%-kal kell csökkenteni az ünnep után.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy bár az emelés is és a csökkentés is 60 Ft szálanként, de ezek arányszáma (a százalékláb) nem azonos! Ez azért van, mert az emelésnél 240 Ft, a csökkentésnél pedig 300 Ft a százalékszámítás alapja.

Feladatok

1. Mennyi

a) 150 Ft 20%-a; *b)* 240 kg 60%-a; *c)* 12 óra 45%-a; *d)* 7 liter 130%-a?

2. Mekkora az a mennyiség, amelynek

a) 40 %-a 15 dkg; *b)* 50 %-a 75 liter; *c)* 120%-a 18 óra; *d)* 75%-a 180 Ft?

3. Hány százaléka

a) 40 méternek a 12 méter; *b)* 960 liternek a 48 liter; *c)* 24 órának a 30 óra?

4. Egy környezetvédelmi csoport 400 db facsemete ültetését tervezte el. A kertészetből ennél 16%-kal több darabot küldtek. Hány fát kellett így elültetniük?



5. Az ÉNSULIM általános iskola három 7.-es osztályában ugyanazt a matematikai felmérő dolgozatot írták meg a gyerekek. Az *a* osztály 32 tanulójának 25%-a írt jeles dolgozatot. A *b*-ben az *a* osztály jeleseseinél 25%-kal több, a *c*-ben pedig 75%-kal kevesebb ötös dolgozat született.

Hány jeles volt az egyes osztályokban?

6. 2010-ben egy élelmiszerüzletben az alábbi árak voltak. Mennyit fizettek értük a vásárlók 15%-os árleszállítás után?



liszt: 160 Ft tej: 190 Ft

sajt: 1260 Ft olaj: 420 Ft

cukor: 210 Ft rizs: 250 Ft

@ Nézz utána, ma mennyibe kerülnek ezek az árucikkek!

Tájékozódj lakóhelyed környékén vagy az interneten, hogy milyen árakon kínálják a fenti élelmiszereket a különböző üzletek!

7. Számítsd ki a katalógusban szereplő (a rajzon látható) áruk új árát!



8. Juliskát leküldi édesanyja a sarki kisboltba 3 liter tejért, 1 kg kenyérért és 15 dkg sajtért.

1000 Ft-ot ad neki. Az üzletben a 230 Ft-os literes tej 20%-kal olcsóbb volt, sajtot csak egyféle talált, amelynek kilója 1250 Ft, viszont kétféle 1 kg-os kenyérből választhatott: az egyik 240 Ft-ba került, a másik 265 Ft-ba. Melyiket válassza, hogy a háromféle élelmiszerre elég legyen az 1000 Ft-ja?

9. Dénes testvérével és szüleivel Messzeországba utazik, és egy hotelben szállnak meg. A szállás egy főnek egy éjszakára 11 450 peták. A 14 év alatti gyermekek számára 20%-os kedvezményt nyújt a szálloda. Dénes 13, testvére 9 éves. Mennyi a szállodai költség összesen a négytagú család számára, ha 3 éjszakát töltenek a szállodában?

(Országos kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2011/2012 alapján)

10. *a)* Az x mennyiséget másfélszeresére növeltük.
Az alábbiak közül melyik állítás írja le ezt a változást?
A helyes választ írd le matematikai művelettel is!

(1) Az x mennyiséget 1,5%-kal növeltük,
(2) Az x mennyiséget növeltük 50%-kal,
(3) Az x mennyiségnek vettük a 150%-át,
(4) Az x mennyiséget megszoroztuk $\frac{3}{2}$-del.

b) Az y mennyiséget $\frac{2}{3}$-ára csökkentettük.
Az alábbiak közül melyik állítás írja le ezt a változást?
A helyes választ írd le matematikai művelettel is!

(1) Az y mennyiséget elosztottuk $\frac{2}{3}$-dal,
(2) Az y mennyiségnek vettük a 60%-át,
(3) Az y mennyiséget csökkentettük 40%-kal,
(4) Az y mennyiségből kivontunk $\frac{2}{3}$-ot.

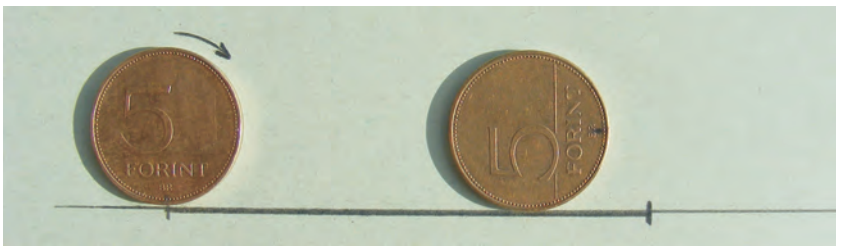
11. Egy négyzet 5 cm-es oldalát megnöveltük 10%-kal, majd a kapott oldalt csökkentettük 10%-kal. Visszakaphatjuk így az eredeti 5 cm-es oldalhosszt? Válaszodat indokold!

12. Év elején egy iskola tanulóinak 40%-a fiú. Év közben a fiúk száma 10 százalékkal növekedett, a lányok száma pedig 10%-kal csökkent. Hány százalékkal változott az iskola tanulóinak száma év végéig?

Az arányosság és a százalékszámítás alkalmazásai

1. példa

Gördítsük egyszer körbe az 5, 10, 20 és 100 forintos érmét egy egyenes mentén! Mérjük meg az érmék átmérőjét és a „legördített” kerületet! Adjuk meg a kerületek és az átmérők arányát!



Megoldás

Pénzérme	Kerület (K)	Átmérő (d)	$\frac{K}{d}$ arány
5 Ft-os	$K \approx 6{,}5$ cm	$d \approx 2{,}1$ cm	$K : d \approx 3{,}1$
10 Ft-os	$K \approx 7{,}8$ cm	$d \approx 2{,}5$ cm	$K : d \approx 3{,}1$
20 Ft-os	$K \approx 8{,}1$ cm	$d \approx 2{,}6$ cm	$K : d \approx 3{,}1$
100 Ft-os	$K \approx 7{,}5$ cm	$d \approx 2{,}4$ cm	$K : d \approx 3{,}1$

Megállapíthatjuk, hogy az érmék kerületének és átmérőjének aránya közel egyenlő, azaz a $\frac{K}{d}$ arány állandó. A kör **kerülete és átmérője egyenesen arányos.**

2. példa

Anya és fia kerékpárral mennek a fél kilométerre levő kisközértbe. Az anya biciklikerekének kerülete $K = 204$ cm, fiáé pedig $k = 125$ cm. Hányszor többet fordul a kisebbik kerék ezen az úton?

Megoldás

A kerékpárok kerekei 500 m = 50 000 cm utat tesznek meg. A megtett utat a kerület és a fordulatszám szorzata adja: s = kerület · fordulatszám.



A nagy kerék fordulatszámát N-nel, a kisebbiket n-nel jelölve: $s = K \cdot N = k \cdot n = 50\,000$ összefüggést kapjuk.

Igaz, hogy ezeknek a mennyiségeknek a szorzata ugyanannyi. Ebből megállapíthatjuk, hogy a **kerekek kerülete és a fordulatszáma között fordított arányosság van.**

Annyiszor többet fordul a kisebbik kerék ezen az úton, ahányszor több a nagy kerék kerülete a kisebbik kerületénél. 204 cm : 125 cm = 1,632

Tehát a kisebbik kerék $\approx$ 1,6-szer fordul többet ezen az úton.

3. példa

Méréseket végeztünk. Megmértük 1 dl, 2 dl és 5 dl tej tömegét. A mérési adatok alapján határozzuk meg a tej sűrűségét!

Megoldás

Fizikai tanulmányainkból ismert, hogy egy anyag sűrűségét a tömegének és a térfogatának aránya adja. Képlettel: $\varrho = \frac{m}{V}$, mondhatjuk úgy is, hogy a sűrűség mérőszáma egyenlő az egységnyi térfogatú anyag tömegének mérőszámával.

A sűrűséget általában $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}$ mértékegységgel mérjük.

A térfogat mértékegységeit a sűrűség mértékegységének megfelelően át kell váltani.

A mért adatokat táblázatba foglaljuk:

Térfogat (V)	1 dl = 0,1 dm^3	2 dl = 0,2 dm^3	5 dl = 0,5 dm^3
Tömeg (m)	103 g	206 g	515 g

A mért adatok alapján a tej sűrűsége: $\varrho = \frac{103}{0{,}1} = \frac{206}{0{,}2} = \frac{515}{0{,}5} = 1030\ \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}$.

Láthatjuk, hogy a tej tömegének és térfogatának aránya állandó, tehát e két mennyiség egyenesen arányos. A tej sűrűsége tehát 1030 $\frac{\text{g}}{\text{dm}^3}$. Ebből megtudjuk azt is, hogy 1 dm^3 = 1 l tej tömege körülbelül 1,03 kg.

4. példa

Az aranyékszerek készítésekor az aranyat más fémekkel ötvözik. Az ötvözet aranytartalmát **karát**ban mérik. Például a 15 karátos aranynak a $\frac{15}{24}$ része arany, $\frac{9}{24}$ része egyéb fém. Hány százalékkal tartalmaz több aranyat egy 20 karátos aranyékszer, mint egy 15 karátos?

Megoldás

A 20 karátos aranyban $\frac{20}{24} \cdot 100 \approx 83{,}3$, azaz 83,3%,

a 15 karátos aranyban $\frac{15}{24} \cdot 100 \approx 62{,}5$ azaz 62,5% a „tiszta arany” aránya.

A 20 karátos aranyékszerben 20,8%-kal több „tiszta arany” van, mint a 15 karátosban.

@ Nézz utána annak, hogy honnan származik a karát elnevezés!

Feladatok

1. Egy 30 fős 7.-es osztály félévi matematika osztályzatainak százalékos megoszlását tartalmazza a táblázat. Mennyi volt félévkor a matematika jegyek átlaga ebben az osztályban?

Osztályzat	Százalékos arány
5	20%
4	20%
3	50%
2	10%

2.

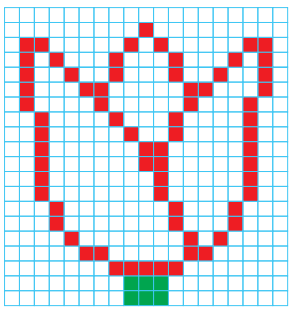


Két artista egykerekűzik a cirkusz porondján körbe-körbe. Egyikük kerekének kerülete 150 cm, a másiké 225 cm. Hányszor fordul meg a két különböző kerék külön-külön a 67,5 méteres kör megtétele alatt? Melyik fordul többet és hányszor annyit, mint a másik?

3. Egy pixelgrafikus kép élességét a pixelek száma határozza meg. Pixelnek (picture element) nevezik a képen megjelenő képpontokat. Ezek összessége a kép felbontásának mértéke.

Például egy 560×480-as felbontás azt jelenti, hogy soronként 560, oszloponként 480, összesen $560 \cdot 480 = 268\,800$ képpont van a képen.

Egy 1100×850 pixeles képen hány százalékkal több a pixelek száma, mint a fenti példában szereplő képen?



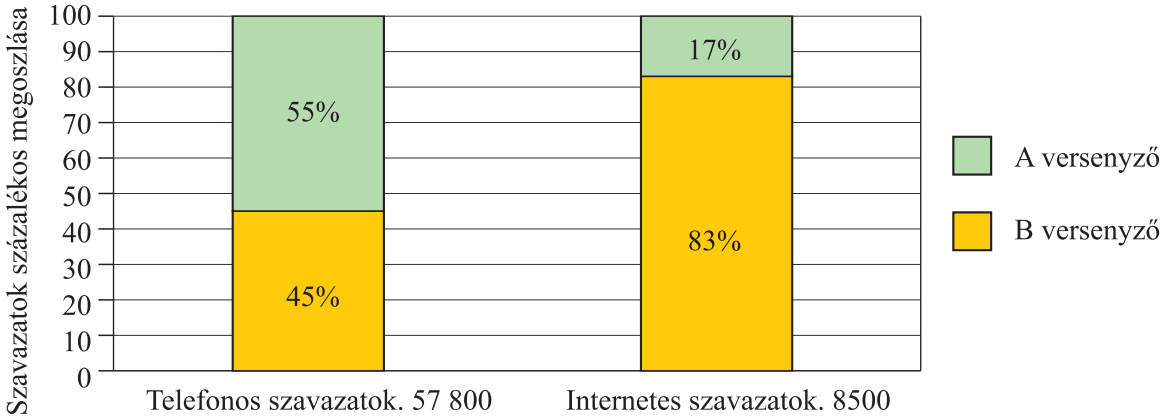


@ Nézz utána, hogy a számítógépes grafikával milyen képeket lehet készíteni!

Kutasd fel, hogy mi a különbség a pixelgrafikus és a vektorgrafikus ábrázolásmód között!

4. Egy tehetségkutató verseny döntőjében a nézők telefonon és az interneten is szavazhattak a szerintük legjobb műsorszámra. Az a versenyző nyeri a döntőt, aki a legtöbb szavazatot kapja. A következő ábrán a telefonos és az internetes szavazatok száma és a százalékos megoszlás látható.

Számítsd ki, ki kapta a több szavazatot!



(Országos kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2012/2013 alapján)

5. Egy laboratóriumi gyakorlaton az alábbi két kísérletet kell elvégezni:

a) 560 g vízben 12 g konyhasót, *b)* 3 kg vízben 34 g cukrot kell feloldani.

Hány százalékos oldatot kapunk?

6. Panni 4 dl 1,5%-os ecetes salátaöntetet szeretne készíteni a fejes salátához. Az üzletben csak 20%-os ecetet kapott. Hány decilitert kell önteni a vízhez ebből az „erős” ecetből?



7. Egy 3D-s film belépőjegyeinek árát egyik alkalommal 20%-kal csökkentették, így az eladott jegyek száma 15%-kal emelkedett. Nő vagy csökken az eladott jegyek árából származó bevétel? Add meg a változást százalékos arányban is!

8. Bálint egy 1260 Ft-os pizzát rendel telefonon a pizzafutártól.

Ez az ár az alapanyagok árán kívül az alábbi költségeket tartalmazza:

- a konyha rezsiköltsége (fűtés, vízhasználat, gázfogyasztás, világítás, takarítás): 16%,
- az anyagbeszerzés költsége (az alapanyagok felvásárlási ára, beszállítási fuvardíja): 15%,
- az elkészítés munkadíja 18%,
- a házhozszállítás költsége: 12%,
- adó: 20%,
- haszon: 5%



Hány Ft a pizza alapanyagainak ára, és mennyi a tulajdonos haszna?

9. Andor, informatika szakos egyetemi hallgató, évek óta szeretne egy többfunkciós tabletet vásárolni. Saját munkával keresett pénzét – születésnapi ajándékként – 45 000 Ft-ra egészítették ki családtagjai. Az interneten tájékozódva talált egy megfelelő tabletet, de ennek ára 120 000 Ft.

A hiányzó összeget havi egyenlő értékű részletben fogja kifizetni egy év alatt. A kereskedő cég ezért 12%-os kamatot számol föl. (Ez azt jelenti, hogy az eredeti árnál 12%-kal többet kell fizetnie a tabletért.)

Mennyibe kerül Andornak így a tablet, és hány Ft a havi részlet?

A hosszúság, a terület és a térfogat mértékegységei

Hosszúság- és terület-mértékegységek

1. példa

Figyeljük meg az alábbi táblázatban, milyen kapcsolat van a négyzet oldala és kerülete, illetve a négyzet oldala és területe között!

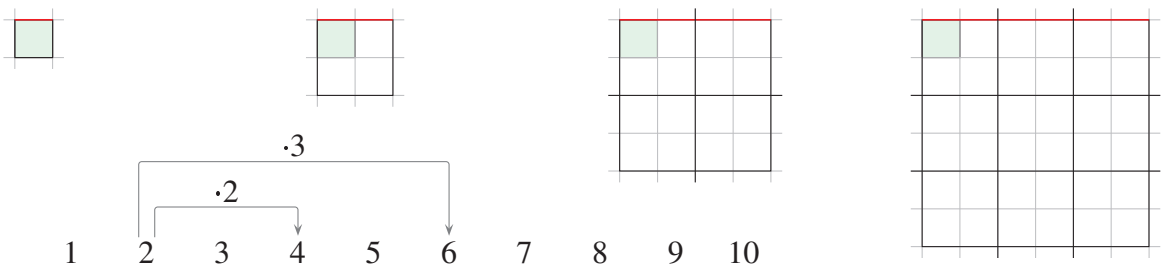
Oldal (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kerület (cm)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Terület (cm^2)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

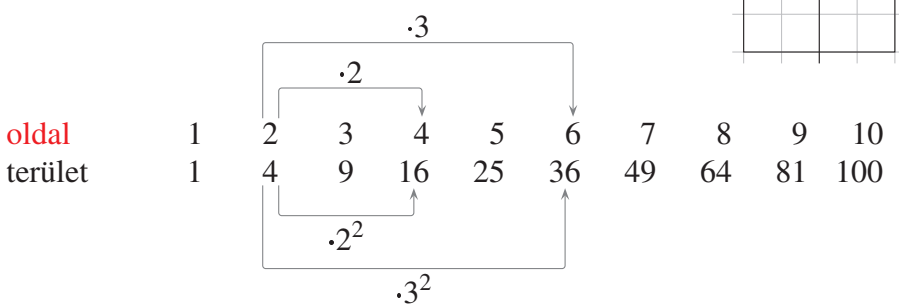
a) Hányszorosára változik a kerület, ha az oldal 2-, 3-, 5-, 10-szeresére nő?
b) Hogyan változik a terület, ha az oldal kétszeresére, háromszorosára, … nő?

Megoldás

a) Kétszer akkora oldalú négyzet kerülete kétszer akkora.
Háromszor akkora oldalú négyzet kerülete háromszor akkora.
Ötször akkora oldalú négyzet kerülete ötször akkora…
Ahányszorosára nő a négyzet oldala, ugyanannyiszorosára nő a négyzet kerülete.
Megállapítható, hogy az **összetartozó értékek hányadosa állandó,** ezért a négyzet oldalának hossza és kerületének mérőszáma között **egyenes arányosság** van.

b) oldal 1 cm, terület 1 cm^2; oldal 2 cm, terület 4 cm^2; oldal 4 cm, terület 16 cm^2; oldal 6 cm, terület 36 cm^2





Az oldal és a hozzá tartozó terület értékeinek hányadosa nem állandó, ezért **az oldal hossza és a terület nagysága nem egyenesen arányos.**

Ha az oldal 2-szeresére nő, a terület $2^2 = 4$-szeresére nő.
Ha az oldal 3-szorosára nő, a terület $3^2 = 9$-szeresére nő.
⋮
Ha az oldal 10-szeresére nő, a terület $10^2 = 100$-szorosára nő.

A négyzet területe és oldala **négyzetesen arányosak.**

Amikor a hosszúság-mértékegységek között 10, 100, … a váltószám, akkor a megfelelő terület-mértékegységek között 10^2, 100^2 … a váltószám.

$1\ \text{m} = 10\ \text{dm}$
$1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$
$1\ \text{m} = 1000\ \text{mm}$
⋮

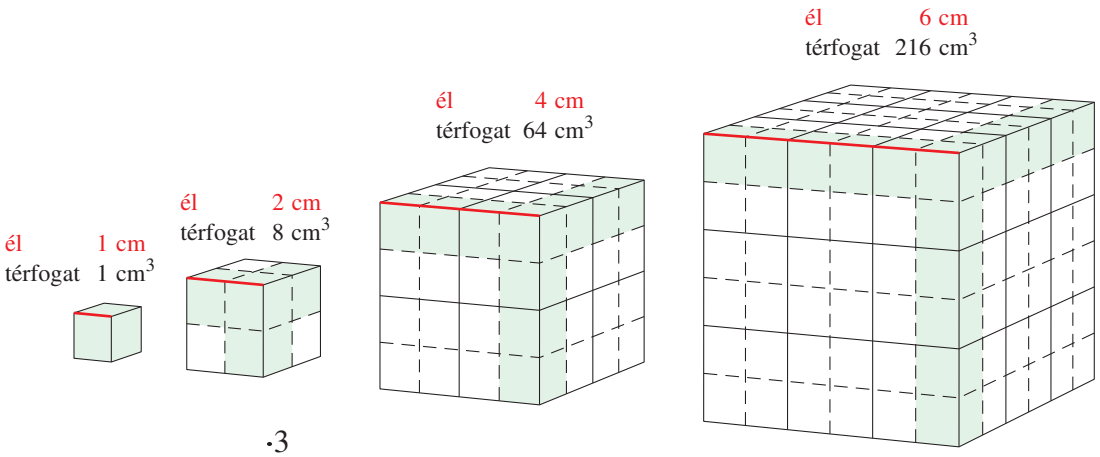
$1\ \text{m}^2 = 10^2\ \text{dm}^2 = 100\ \text{dm}^2$
$1\ \text{m}^2 = 100^2\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$
$1\ \text{m}^2 = 1000^2\ \text{mm}^2 = 1\,000\,000\ \text{mm}^2$

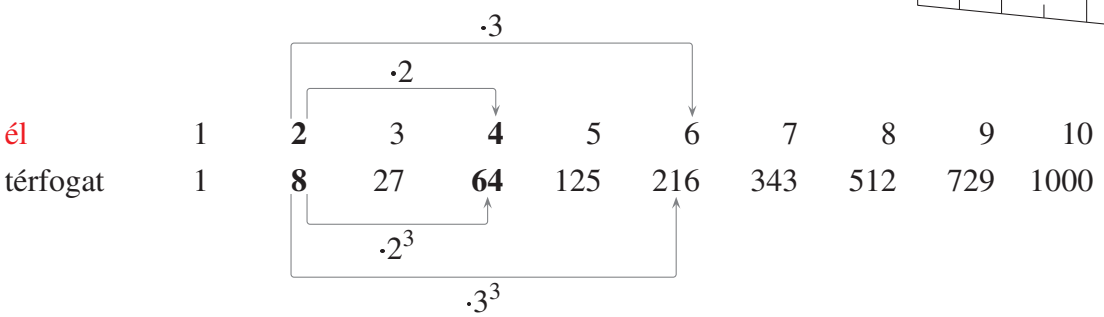
Hosszúság- és térfogat-mértékegységek

2. példa

Figyeljük meg, milyen összefüggés van a kocka éle és térfogata között!
Hányszorosára változik a térfogat, ha az éle kétszeresére, háromszorosára vagy egyéb többszörösére változik?

Megoldás





Az oldal és a hozzá tartozó térfogat értékeinek hányadosa nem állandó, ezért **az oldal hossza és a térfogat nagysága nem egyenesen arányos.**

Ha az él 2-szeresére nő, a térfogat $2^3 = 8$-szorosára nő.
Ha az él 3-szorosára nő, a térfogat $3^3 = 81$-szeresére nő.
⋮
Ha az él 10-szeresére nő, a térfogat $10^3 = 1000$-szeresére nő.

A kocka térfogata és élhossza **köbösen arányosak.**

Amikor a hosszúság-mértékegységek között 10, 100, … a váltószám, akkor a megfelelő térfogat-mértékegységek között 10^3, 100^3 … a váltószám.

$1\ \text{m} = 10\ \text{dm}$
$1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$
$1\ \text{m} = 1000\ \text{mm}$
⋮

$1\ \text{m}^3 = 10^3\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{l}$
$1\ \text{m}^3 = 100^3\ \text{cm}^3 = 1\,000\,000\ \text{cm}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$
$1\ \text{m}^3 = 1000^3\ \text{mm}^3 = 1\,000\,000\,000\ \text{mm}^3 = 10^9\ \text{mm}^3$

$$\mathbf{1\ dm^3 = 1\ l = 10^3\ ml = 10^3\ cm^3}$$

Feladatok

1. Különböző téglalapjaink vannak. Megadtuk két oldaluk hosszúságát. Számítsd ki a területüket! Add meg többféle mértékegységben is! Keresd meg azokat az adatokat, amelyek egybevágó téglalapokhoz tartoznak!

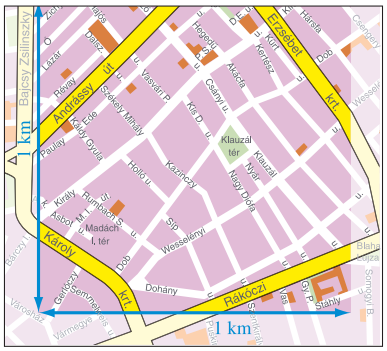
a) 15 cm, 8 cm *b)* 1,5 m, 0,8 m *c)* 150 cm, 8 dm *d)* 0,15 m, 8 dm
e) 150 cm, 80 cm *f)* 150 mm, 80 mm *g)* 150 cm, 8 m *h)* 1,5 cm, 0,8 m

2. A képeken látható területek közül melyiket mérik négyzetkilométerrel, melyiket hektárral, melyiket négyzetméterrel, melyiket négyzetdeciméterrel, illetve négyzetcentiméterrel?

a)



b)



c)



d)



3. Pótold a hiányzó mértékegységeket vagy mérőszámokat!

13 m = ☐ dm
61 dm = ☐ m
38 100 mm = 381 ☐
981 cm = ☐ m
2,25 km = ☐ m
1,21 km = 12 100 ☐
0,52 km = 520 ☐

13 m^2 = ☐ dm^2
25 dm^2 = ☐ m^2
51 200 mm^2 = 5,12 ☐
981 cm^2 = 9,81 ☐
2,25 km^2 = ☐ m^2
1,21 ha = 12 100 ☐
5,2 km^2 = 520 ☐

4. Egy téglalap területe 60 dm^2. Hány cm^2 ez?

Megadtuk az egyik oldalának a mérőszámát. Mi lehet a mértékegység, ha tudjuk, hogy a másik oldal mérőszáma is egész szám? Mekkora lehet a másik oldala? Keress több megoldást!

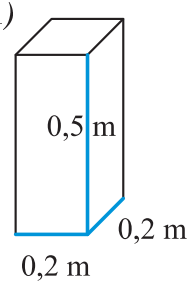
Az egyik oldal mérőszáma:

a) 6 *b)* 30 *c)* 60 *d)* 120 *e)* 8 *f)* 10 000

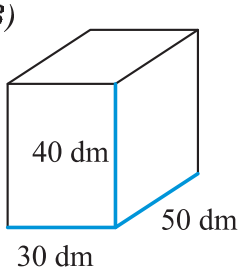
5. *a)* Számítsd ki a téglatestek térfogatát! Add meg mindegyik térfogatot literben is!

b) Párosítsd a számolási terveket a testekkel, állapítsd meg, melyik tervhez milyen mértékegység tartozik!

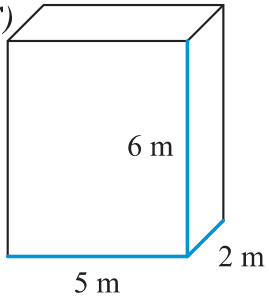
A)



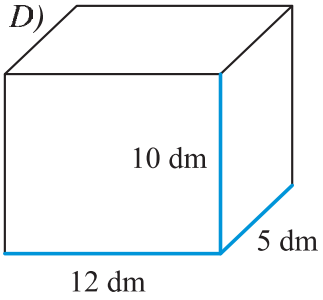
B)



C)



D)



I. $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5$
$10 \cdot 2$
$30 \cdot 40 \cdot 50$
$120 \cdot 5$

II. $10 \cdot 6$
$50 \cdot 20 \cdot 60$
$300 \cdot 500 \cdot 400$
$60 \cdot 10$

III. $50 \cdot 12$
$1500 \cdot 40$
$2 \cdot 6 \cdot 5$
$120 \cdot 50 \cdot 100$

6. A táblázatban egy-egy téglatest adatait adtuk meg. Számítsd ki mindegyiknek a térfogatát, és írd le azokat nagyság szerint csökkenő sorrendben! Mindegyik térfogathoz tartozik egy betű.



Ha jól számoltál, megtudod, mit kiáltott Arkhimédész, amikor a fürdőkádban rájött a híres tételére.

	x	y	z	V
É	0,3 m	4 dm	5 dm	
A	0,02 m	0,4 dm	6 cm	
U	5 dm	9,8 dm	10,1 dm	
E	1000 cm	301 cm	2100 mm	
R	300 mm	0,2 m	1,2 m	
K				52 l
H	11 m	3,07 m	2,173 m	

7. A fény 1 másodperc alatt 300 000 km utat tesz meg.

a) Hány másodperc alatt teszi meg az utat a Naptól a Földig? (A Nap–Föld-távolság $1{,}5 \cdot 10^8$ km.)

b) A legközelebbi csillag az α Centauri (Rigel Centaurus) 4 fényév távolságra van tőlünk. Ez azt jelenti, hogy ennek a csillagnak a fénye 4 év alatt ér el a Földre. Milyen messze van kilométerekben mérve ez a csillag a Földtől?



8. A Föld átmérője közelítően 12 800 km. Egy ilyen élű kockába beleférne a földgolyó.

Hány m^3 egy ilyen kocka térfogata?

Számításod eredményét hasonlítsd össze a Föld térfogatával (10^{21} m^3)!

Tudáspróba

1. *a)* Írd fel a törteket arány, majd százalék alakban!

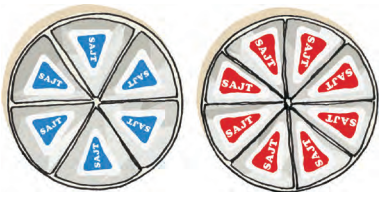
$\frac{16}{64}$ $\frac{18}{15}$ $\frac{17}{51}$

b) Keress egyenlő értékű arányokat!

$\frac{6}{5}$ 4 : 3 120% : 1% 9 : 16 $1 : \frac{4}{3}$

$\frac{3}{4}$ 2,1 : 2,8 1,2 : 1 $\frac{75}{100}$ 12 : 100

2. A kör alakú dobozos sajt tömege 150 g. Az egyik fajtába 6 darab, a másikba 8 darab egyenlő tömegű sajtot csomagoltak. Hány gramm egy darab az egyik fajta, és hány a másik fajta sajtból?



3. Az alábbi összefüggések közül melyek egyenes és melyek fordított arányosságok? Van-e közöttük olyan, amelyik egyik sem?

a) a négyzet oldala és kerülete

b) a négyzet oldala és területe

c) egy vízzel teli kancsóból kiöntött és a benne maradó víz mennyisége

d) a kisgyermek tömegének növekedése és a közben eltelt idő

e) egy adott munka elvégzésekor a munkások száma és a munka elvégzésére fordított idő

4. A Nagy családban 4 gyermek van, a legfiatalabb 6 éves, őt követi a 9 éves, majd a 12 éves testvér. A legidősebb 18 éves. Anyuka 60 palacsintát sütött nekik, amelyeket ők a koruknak megfelelő arányban osztottak el. Hány palacsintát ettek külön-külön a gyerekek?

5. Egy téglalap két oldalának aránya 5 : 2. Mekkora a területe, ha a kerülete 1400 mm?

6. Egy 86 000 Ft-os mosógépet 0 Ft-ért, 12 havi törlesztéssel is meg lehet vásárolni. Így összesen 106 640 Ft-ot kell fizetni érte. Hány százalékos felárral számolt a kereskedő?

7. Pótold a hiányzó mérőszámokat vagy mértékegységeket!

$3\ m^2 =$ ☐ cm^2 $51\ dm^2 = 5100$ ☐

$83\ m =$ ☐ dm $1\ ha =$ ☐ m^2

43 ☐ $= 430$ ☐ $5000\ dm^2 =$ ☐ m^2

$83\ kg =$ ☐ g $53\ dm + 4\ m = 930$ ☐

$30\ m^3 =$ ☐ dm^3 $0{,}6\ dm^3 =$ ☐ cm^3

$2440\ mm^3 =$ ☐ dm^3 $350\ cm^3 =$ ☐ dm^3

Hozzárendelések, összefüggések

Hozzárendelések

A mindennapi életben nagyon gyakran találkozunk azzal, hogy bizonyos dolgokat, fogalmakat összekapcsolunk egymással vagy az egyikhez hozzárendeljük a másikat.

1. példa

A nemzetközi repülőtereken az utasok jelentős része nem ismeri az adott ország nyelvét, és az angoltudásuk is többeknek hiányos. Ezért nemzetközileg egységesen használt ábrák (piktogramok) segítik a biztos eligazodást. Itt tehát a repülőtéren való eligazodáshoz szükséges fogalmakhoz rendeltek hozzá egyszerű, egyértelmű ábrákat.

 Indulási terminál

 Érkezési terminál

 Vámvizsgálat

 Taxiállomás

 Étterem

 Pelenkázóhelyiség

2. példa

Vizsgáljuk meg egy vasúti menetrend egyik oldalát!

30a Budapest — Székesfehérvár

Km	MÁV-START Zrt.	*O* S 18502 2.◆ 91	❄*O* 8722 2.◆	❄*E* 4622 2.◆	*O* S 19722 ◆ 92	*O* 902 ◆	❄*E* 4532 2.◆	❄*E* 4632 2.◆	*O* 852 ◆	❄*E* 4542 2.◆	❄*E* 4642 2.◆	❄*O* 904 ◆	*O* S 15209 S 5209 ◆ 93	❄*E* 4514 2.◆	❄*E* 4614 2.◆	❄*O* 854 ◆	❄*E* 4524 2.◆
	Kiindulási állomás												Sátoraljaújhely				
0	**Budapest-Déli** 40a	7 45	7 55	8 05	8 10	8 25	8 55	9 05	9 25	9 55	10 05	10 25	...	10 55	11 05	11 25	11 55
4	**Kelenföld** 1 o	7 51	8 01	8 11	8 16	8 31	9 01	9 11	9 31	10 01	10 11	10 31	...	11 01	11 11	11 31	12 01
0	**Budapest-Keleti** 1												10 20				
4	**Kelenföld** o												10 33				
4	**Kelenföld** 40a	7 52	8 02		8 18	8 32	9 02		9 32	10 02		10 32	10 36	11 02		11 32	12 02
12	Budatétény		8 11				9 11			10 11				11 11			12 11
20	Érd felső		8 20				9 20			10 20				11 20			12 20
24	Tárnok o		8 24				9 24			10 24				11 24			12 24
	Kelenföld			8 12				9 12			10 12				11 12		
8	Albertfalva			8 16				9 16			10 16				11 16		
9	Budafok			8 19				9 19			10 19				11 19		
16	Nagytétény			8 32				9 30			10 30				11 30		
18	Tétényliget			8 34				9 32			10 32				11 32		
20	Érd alsó			8 37				9 35			10 35				11 35		
24	Tárnok		8 25	8 42			9 25	9 40		10 25	10 40			11 25	11 40		12 25
33	Martonvásár		8 31	8 49			9 31	9 47		10 31	10 47			11 31	11 47		12 31
36	Baracska		8 34	o			9 34	o		10 34	o			11 34	o		12 34
41	Pettend		8 37	...			9 37	...		10 37	...			11 37	...		12 37
44	Kápolnásnyék		8 40	...			9 40	...		10 40	...			11 40	...		12 40
47	Velence		8 43	...			9 43	...		10 43	...			11 43	...		12 43
48	Velencefürdő		8 45	...			9 45	...		10 45	...			11 45	...		12 45
50	Gárdony		8 48	...			9 48	...		10 48	...			11 48	...		12 48
52	Agárd		8 50	...			9 50	...		10 50	...			11 50	...		12 50
56	Dinnyés		8 53	...			9 53	...		10 53	...			11 53	...		12 53
67	**Székesfehérvár** *5, 20, 29, 30, 44, 45* o	8 41	9 04	...	9 11	9 16	10 04	...	10 16	11 04	...	11 16	11 21	12 04	...	12 16	13 04
	Végállomás	Nagykanizsa	Siófok		Tapolca	Szombathely			Nagykanizsa			Szombathely	Keszthely			Nagykanizsa	

363

91 Közlekedik: 2013.III.15 - IV.28-ig Ⓒ, V.6 - VI.14-ig és VIII.26 - IX.1-ig naponta, IX.7 - XI.3-ig Ⓒ, de nem közlekedik X.23-án.
92 Közlekedik: 2013.V.4 - VI.14-ig és VIII.26 - XI.3-ig naponta.
93 Közlekedik: Sátoraljaújhely - Budapest naponta, Budapest - Keszthely 2013.IV.27-ig 6, V.4 - VI.14-ig és VIII.26 - IX.22-ig naponta, IX.28-tól 6.
Sátoraljaújhely - Budapest-Keleti ❄.

30a ➔

(Forrás: MÁV-menetrend, 2012–2013.)

Egy menetrendből nagyon sokféle dolgot kiolvashatunk, például azt, hogy
- honnan indul a vonat, és mi a végállomása,
- melyik vonattal szállíthatunk kerékpárt,
- melyik vonattal jutunk el a leggyorsabban Budapestről Székesfehérvárra,
- melyik vonattal utazzunk, ha 9 és 10 óra között szeretnénk Székesfehérvárra érni,
- melyik vonattal utazhatunk, ha Velencefürdőre akarunk menni.

Az adatok **táblázatba** rendezése sokat segít az eligazodásban.

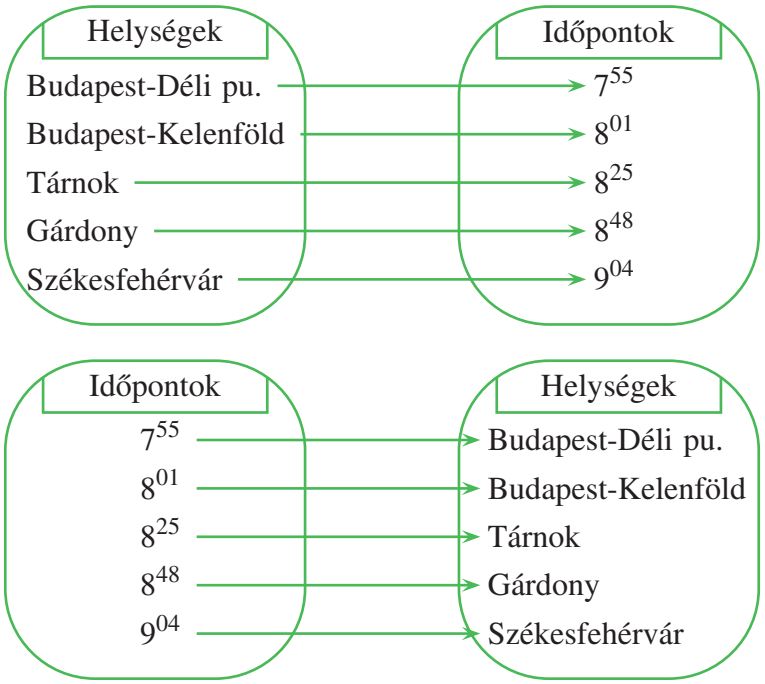
Az egymáshoz tartozó értékeket meg lehet adni a következőképpen is:

Ez a 8722-es számú vonatra készült megfeleltetés.

Minden helységnévhez, ahol megáll a vonat, egyértelműen tartozik egy időpont, amikor a vonat odaérkezik.

A vonat vezetője pontosan tudja, hogy melyik időpontban hová fog megérkezni, azaz minden időpontnak egyértelműen megfeleltet egy helységnevet. Ez az előző megfeleltetés megfordítása.

A menetrend esetén: a helységneveknek egyértelműen megfeleltetünk egy időpontot, illetve: az időpontoknak egyértelműen megfeleltetünk egy helységet.

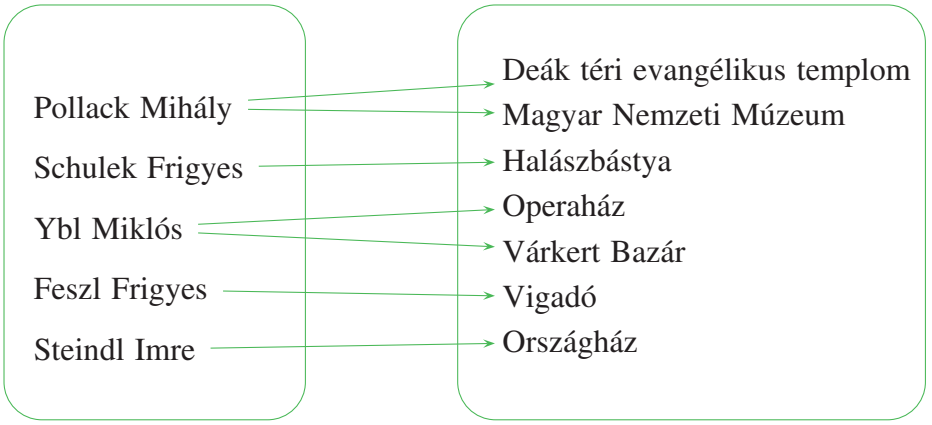


A fenti példákból leszűrhetjük, hogy:

A megfeleltetéseket két nem üres halmaz elemeinek egymáshoz rendelésével hozzuk létre. Azt a halmazt, aminek az elemeihez hozzárendeljük a másik halmaz elemeit **alaphalmaznak,** a hozzárendelésben szereplő másik halmazt pedig **képhalmaznak** nevezzük.

Ha az alaphalmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendelünk hozzá, akkor a megfeleltetést **egyértelmű megfeleltetésnek** nevezzük.

3. példa



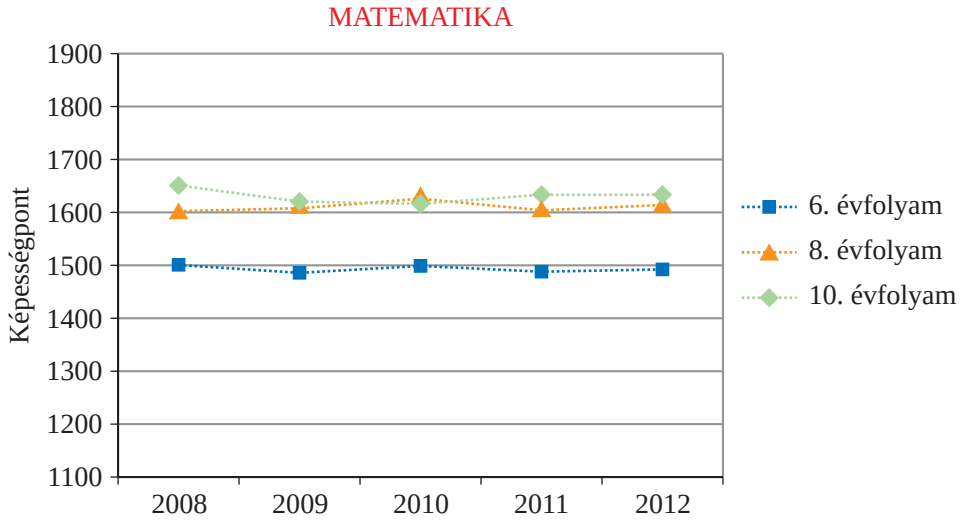


Híres magyar építészekhez rendeltük hozzá néhány általuk tervezett, Budapesten található szép épületet. Most a kiindulási halmaz, az ún. alaphalmaz elemei között vannak olyanok, amelyeknek több elemet is megfeleltettünk, azaz a hozzárendelésünk nem egyértelmű.

4. példa

A grafikonokról is sokféle hozzárendelést olvashatunk le.

a) A 2012-es és a korábbi kompetenciamérések átlageredményei:

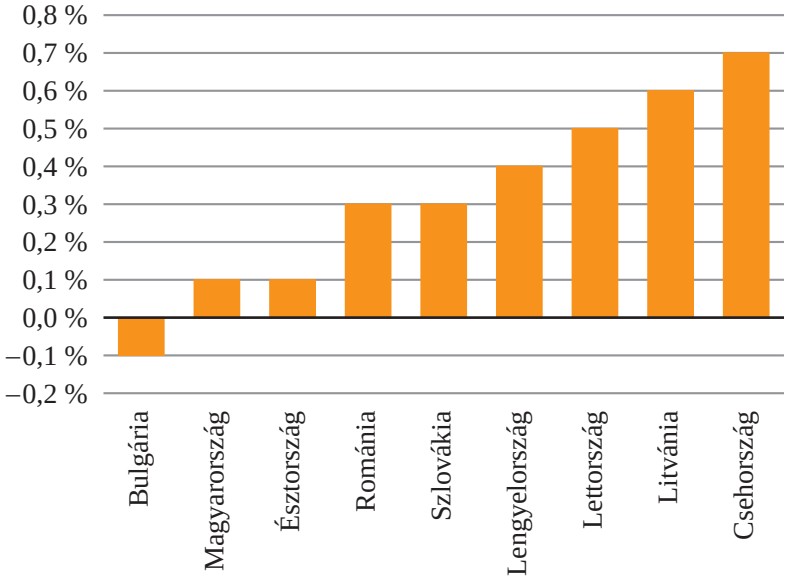


(Forrás: Országos kompetenciamérés, 2012, Országos jelentés)

Erről a grafikonról **(vonaldiagramról)** leolvashatjuk a tanulók által elért pontszámokat a különböző években és évfolyamokon. Láthatjuk, hogy az egyes évfolyamok teljesítményében számottevő eltérés nem tapasztalható az évek során, és a különböző korosztályok közötti teljesítmények is láthatók. A nyolcadikosok például – 2010-et leszámítva, amikor egy kicsit több pontot értek el – szinte minden évben azonos teljesítményt nyújtottak.

b) Az alábbi grafikon **(oszlopdiagram)** egy hozzárendelést szemléltet az egyes országok és azok 2013. II. negyedéves GDP-jének százalékos változása között az előző negyedévhez viszonyítva. Megmutatja például, hogy a vizsgált időszakban csak Bulgáriában csökkent a GDP. A legnagyobb növekedést Csehország érte el, a legkisebbet Magyarország és Észtország. Leolvashatjuk róla azt is, hogy a növekedő országok között 0,6% a maximális eltérés.

GDP-növekedés a régiós országokban 2013. II. Negyedévében
(2013. I. Negyedév = 100 %)

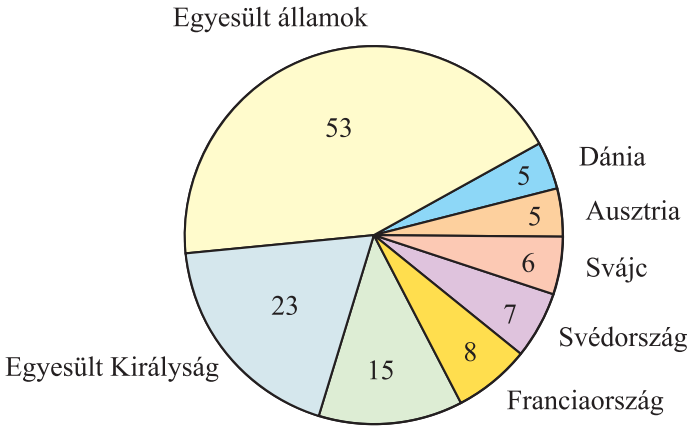


Nézz utána, minek a rövidítése a GDP!

A Nobel-díjat egy svéd kémikus, a dinamit feltalálója alapította 1895-ben. Végrendeletében Alfred Nobel úgy rendelkezett, hogy vagyonának éves kamatait öt egyenlő részre osztva kapják meg a díjazottak. Minden évben egy-egy, a fizika, a kémia, az orvostudomány és az irodalom, illetve a békéért való küzdelem területén a legtöbbet tevő ember részesül a díjban. 1968-ban a svéd központi bank egy Nobel-emlékdíjat is létrehozott a közgazdaságtan területén kimagasló eredményeket elértek jutalmazására.

c) A mellékelt **kördiagram** azokról az orvosi Nobel-díjasokról készült, akik 1901–2011 között nyerték el ezt a megtisztelő kitüntetést. Csak a legalább 5 Nobel-díjassal büszkélkedő országok nevét soroltuk fel.

A kördiagram az egyes országokhoz egy számot: az adott ország orvosi Nobel-díjasainak számát rendeli hozzá. Ez is egyértelmű hozzárendelés. A diagramon szereplő számokról viszont nem mindig tudjuk megmondani, hogy melyik országhoz tartoztak. Például a 15 egyértelműen Németországhoz tartozik, de az 5 kiosztott Nobel-díjat említve Ausztriára és Dániára is gondolhatunk. Ebben az esetben a számokhoz az országneveket nem egyértelműen rendelhetjük hozzá.



Orvosi Nobel-díjasok 1901–2011

(Forrás: A világ számokban 2013, Typotex)

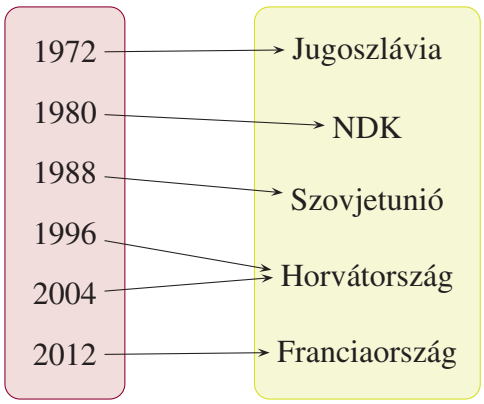
@ Bizonyára tudod, hogy elég gyakran egy-egy terület Nobel-díját több tudós megosztva kapja. Nézz utána, hogy a megosztott Nobel-díjakat melyik országnak számítják be, és a nyertes születési országa vagy a díj átvételének időszakában a lakhelyéül szolgáló országot nevezik-e meg!

Feladatok

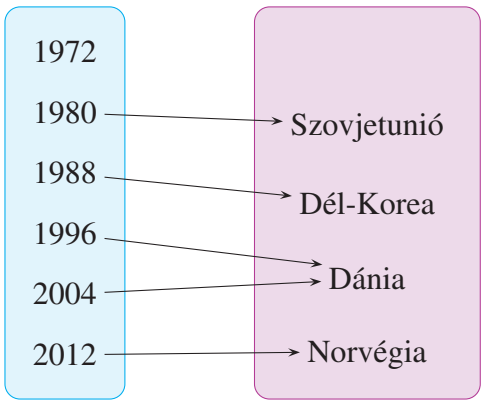
1. A két megfeleltetésnél az évszámokhoz rendeljük hozzá annak az országnak a nevét, amelyik a férfi, illetve a női nyári olimpiai játékokat megnyerte kézilabdában!

Sorold fel a hozzárendelések A alaphalmazának és K képhalmazának elemeit! Egyértelműek-e a hozzárendelések?

a) Férfi kézilabda



b) Női kézilabda



@ Nézz utána, hogy az 1972-es évszámhoz miért nem rendeltünk hozzá országnevet! Minek a rövidítése az NDK?

2. Tanulmányozd a tankönyv 99. oldalán lévő menetrendet!

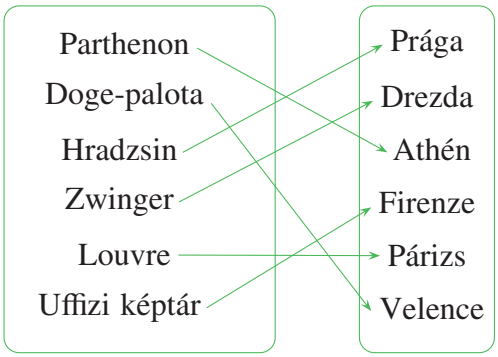
a) Hányas sorszámú vonatokkal lehet eljutni Érd alsóra?

b) Készíts hozzárendelést a vonat sorszáma és az Érd alsóra történő megérkezése között! Megfordítható-e a megfeleltetés, és mit jelent az?

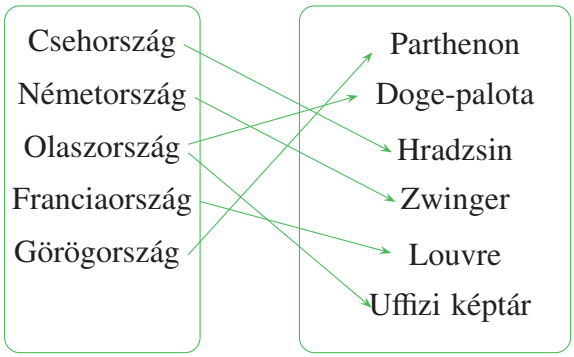
c) Milyen időpontokat rendel hozzá a menetrend az 19722-es vonat esetében a helységnevekhez?

3. Melyik kapcsolat határoz meg egyértelmű hozzárendelést? Add meg a hozzárendelések A alaphalmazát és K képhalmazát is!

a)



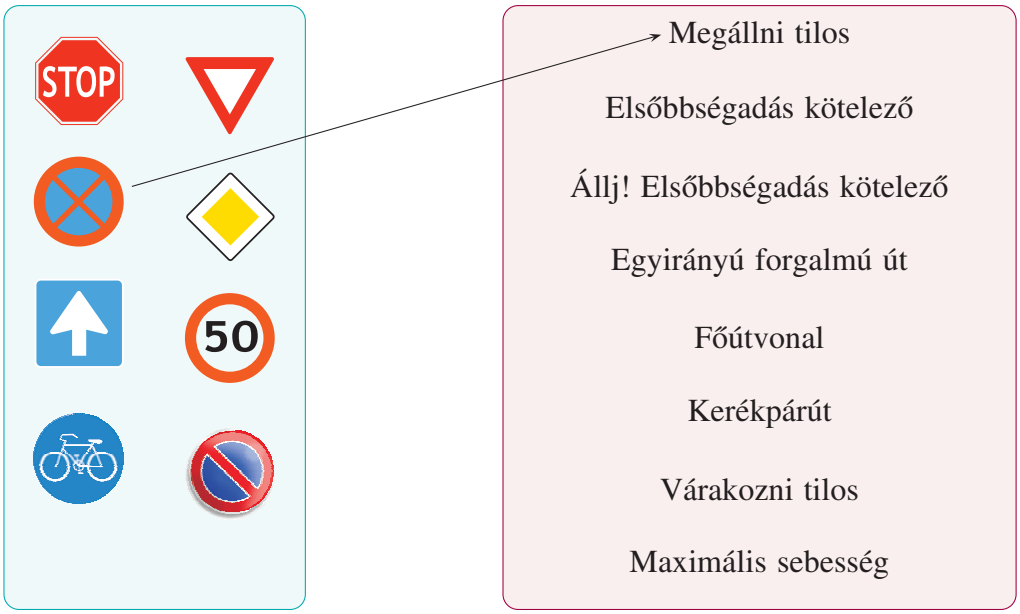
b)



4. Padtársaddal fejtsétek meg, hogy melyik KRESZ-táblához melyik utasítás tartozik!

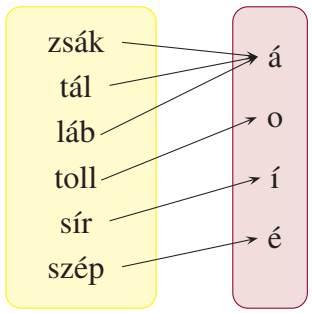
a) Egyértelmű lenne-e a megfeleltetés, ha a szöveghez rendelnénk hozzá a KRESZ-táblát?

b) Rajzoljatok további KRESZ-táblákat, és társatok fejtse meg azok jelentését!

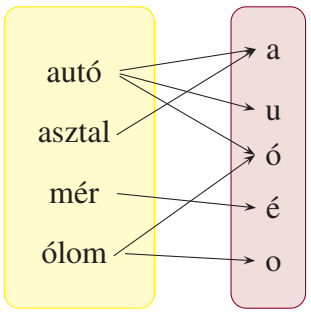


5. Különböző ábrákon hozzárendeléseket készítettünk. Fogalmazd meg a hozzárendelési szabályt, és döntsd el, hogy melyik megfeleltetés egyértelmű!

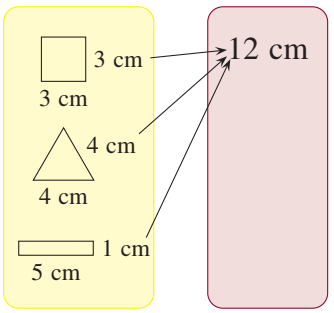
a)



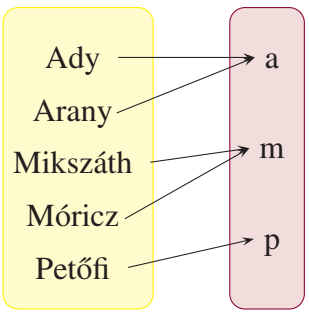
b)



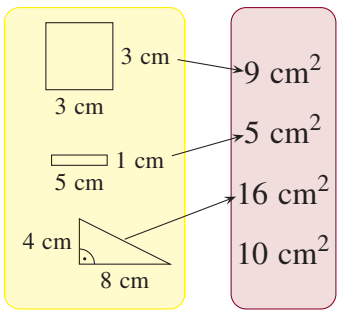
c)



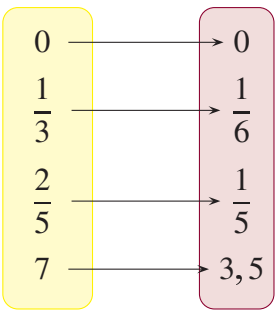
d)



e)



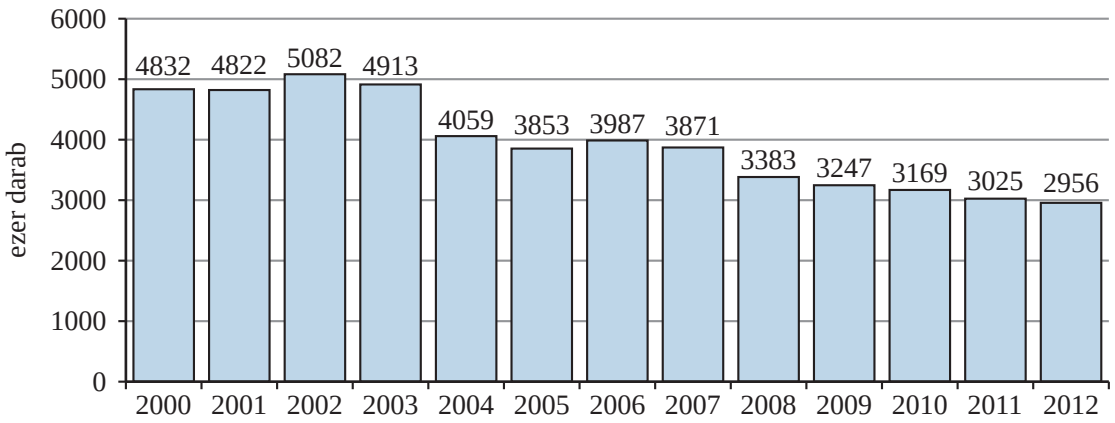
f)



6. Készíts hozzárendelést az oszlopdiagram segítségével!

Mit választasz A alaphalmaznak és mit K képhalmaznak? Egyértelmű-e a grafikon alapján képezhető hozzárendelés?

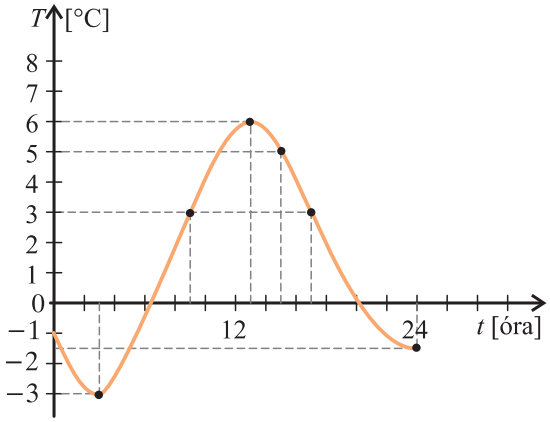
Sertésállomány Magyarországon, 2000-2012 (december 1-jei adatok)



(Forrás: KSH, http://www.ksh.hu/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/i_oma005.html)



7.



Egy szerkezet folyamatosan mérte és lerajzolta egy nap során a hőmérsékletet.

a) Hány fok volt a hőmérséklet 15 órakor?

b) Mikor volt a hőmérséklet 3 °C?

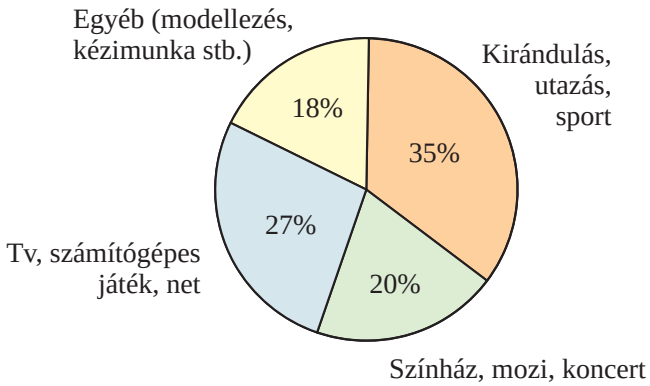
c) Mikor volt a leghidegebb?

d) Mikor volt a legmelegebb?

e) Melyik időszakban növekedett a hőmérséklet?

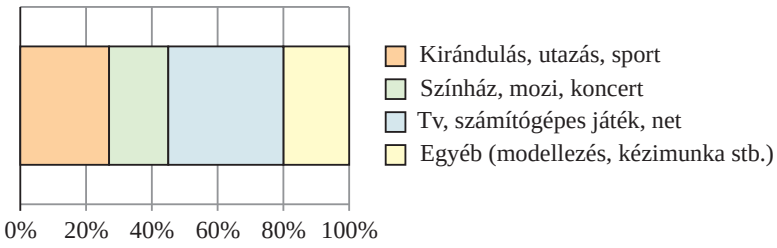
f) Melyik időszakban csökkent a hőmérséklet?

8. Egy folyóirat kérdőíve a hobbijukról, valamint arról kérdezte az olvasókat, hogyan szeretnek pihenni, kikapcsolódni. A beérkezett válaszok alapján elkészítették a következő kördiagramot, amely a válaszok százalékos megoszlását mutatja.

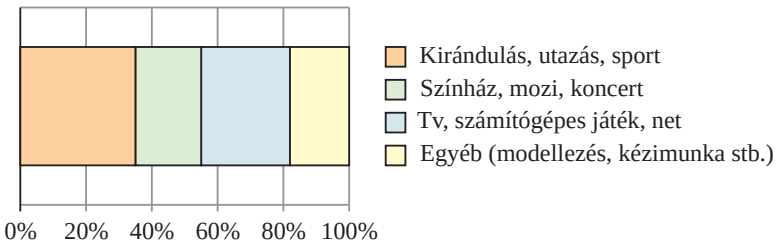


Melyik diagram alapján készítették a fenti kördiagramot?

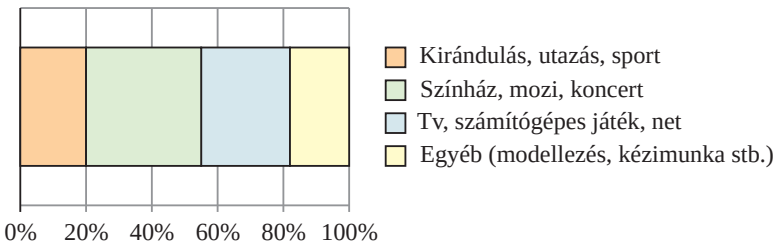
Ⓐ



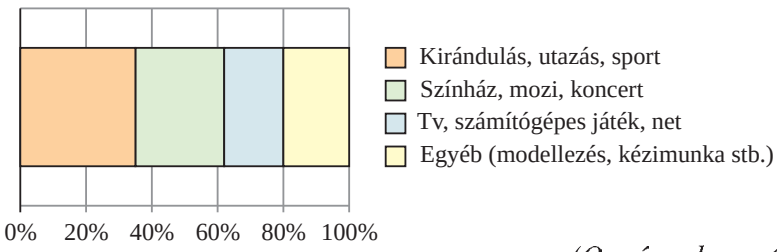
Ⓑ



Ⓒ



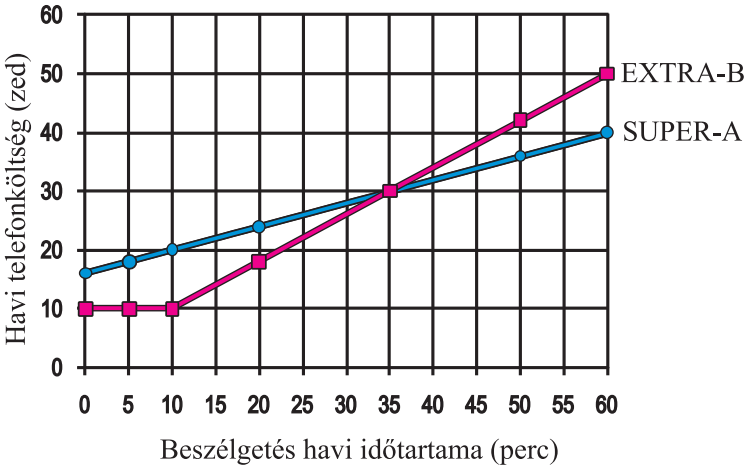
Ⓓ



(Országos kompetenciamérés, 6. évfolyam, 2008/2009)

9. Egy mobiltelefonokat forgalmazó zedországi cég reklámújságjában SUPER-A és EXTRA-B néven hirdette meg akciós díjcsomagjait. A havi telefonköltség alakulását a következő ábrán látható módon grafikusan is szemléltette.

Az alábbiak közül melyik ismertetés írja le helyesen az EXTRA-B díjcsomag ajánlatát? Válaszd ki a helyes válasz betűjelét!



Ⓐ A csomag percdíja az első 10 perc beszélgetésért 10 zed, majd a 10 percnél több beszélgetésért percenként 0,4 zeddel emelkedik.

Ⓑ A csomag percdíja az első 10 perc beszélgetésért 10 zed, majd a 10 percnél több beszélgetésért percenként 0,8 zeddel emelkedik.

Ⓒ A csomag percdíja az első 10 perc beszélgetésért 10 zed, majd a 10 percnél több beszélgetésért percenként 1,25 zeddel emelkedik.

Ⓓ A csomag percdíja az első 10 perc beszélgetésért 10 zed, majd a 10 percnél több beszélgetésért percenként 2,5 zeddel emelkedik.

(Országos kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2010/2011)

10. A tömegközlekedés megtervezése nagyon fontos feladat, ezért rendszeresen felméréseket végeznek, hogy az egyes megállóhelyeken hány utas száll fel, illetve hányan szállnak le a járművekről. A következő táblázat 2013-ban készült a 4-es villamosról, melynek pályáján egy átlagos napon 197 szerelvény közlekedik.



Padtársaddal elemezzétek a táblázatot!

Adjatok meg minél többféle hozzárendelést a táblázat alapján!

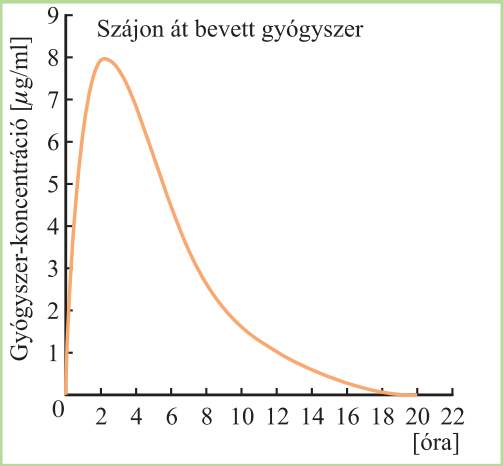
Mi lenne az egyes hozzárendelések A alaphalmaza és K képhalmaza?

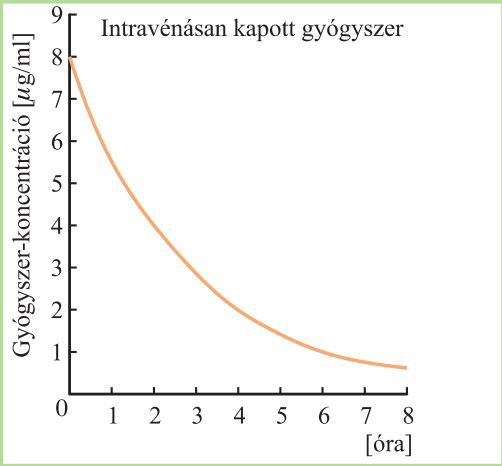
Megálló neve	Felszállók	Leszállók
Széll Kálmán tér	17 746	0
Széna tér	2 460	440
Mechwart liget	834	5683
Margit híd	14 236	4543
Jászai Mari tér	2 911	4897
Nyugati pályaudvar	12 704	8193
Oktogon	4 214	6798
Király utca	382	5102
Wesselényi utca	6 242	2806

Megálló neve	Felszállók	Leszállók
Blaha Lujza tér	9 529	9308
Rákóczi tér	5 503	3670
Harminckettesek tere	1 814	4139
Corvin-negyed	5 022	5624
Mester utca	469	4492
Boráros tér	1 773	8486
Petőfi híd, Budai hídfő	200	1107
Budafoki út	493	6393
Újbuda-központ	0	4849

(Forrás: Trenecon Cowi Kft., 2013)

11. A két grafikon a szervezetbe bejuttatott gyógyszer mennyiségét (koncentrációját) mutatja a vérben az idő függvényében.





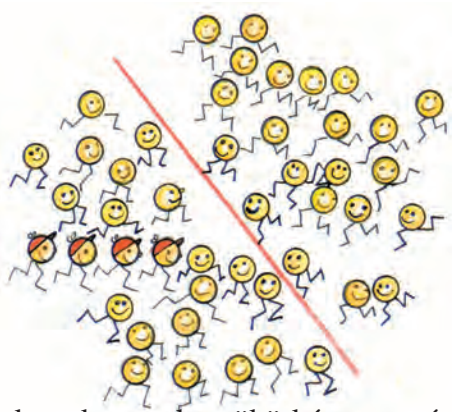
a) Milyen lényeges különbséget látsz, ha a gyógyszert szájon át vesszük be vagy intravénásan kapjuk? Mit gondolsz, nagyon magas láz esetén a lázcsillapítót hogyan adja az orvos?

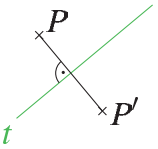
b) Mikor fejti ki legerősebben a hatását a gyógyszer?

c) Hány óra múlva ürül ki a gyógyszer a szervezetből?

Hozzárendelések a geometriában

Sík pontjai, figyelem! Mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és onnan szaladjon tovább még ugyanannyit!



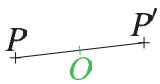


Ha adott egy t tengely, akkor a sík tetszőleges P pontjához *hozzárendeljük* azt a P' pontot, amelyet úgy kapunk, hogy P-ből merőlegest állítunk a t tengelyre, és ennek a meghosszabbításán megkeressük azt a P' pontot, amely a tengelytől ugyanolyan távol van, mint az eredeti pont.

A P' pont a P pont t tengelyre vonatkozó tükörképe.

A hozzárendelés jele a matematikában $\rightarrow$.

A $P \rightarrow P'$ **megfeleltetés visszafelé is egyértelmű.** Minden pontnak csak egyetlen tükörképe van, és minden pont csak egy pontnak a tükörképe.



Ha adott egy O középpont, akkor a sík tetszőleges P pontjához *hozzárendeljük* azt a P' pontot, amelyet úgy kapunk, hogy P-t összekötjük O-val, és a PO félegyenes meghosszabbítására felmérjük a PO távolságot.

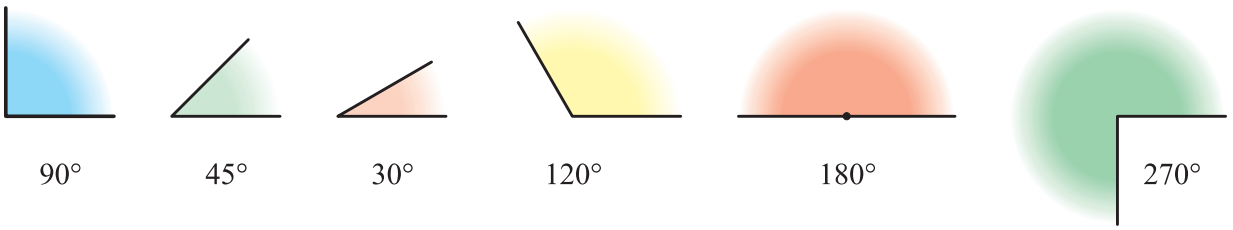
Az így kapott P' pontot a P pont O középpontra való tükörképének neveztük.

A $P \rightarrow P'$ megfeleltetés visszafelé is egyértelmű.

Az általad már jól ismert **tengelyes, illetve középpontos tükrözés is egy-egy hozzárendelés,** amelynek alaphalmaza a sík pontjainak halmaza.

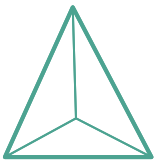
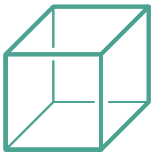
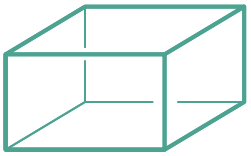
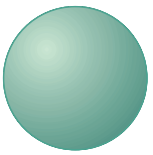
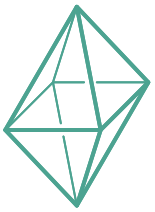
Példa

a)



A szög mérésekor egy-egy szöghöz rendeltünk hozzá egy számot, amelyet a szög mérőszámának nevezünk.

b)

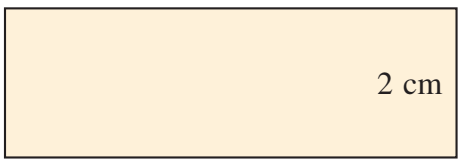
					
csúcsok:	4	8	8	0	6
lapok:	4	6	6	0	8

Egy-egy testhez hozzárendeltünk két-két számot.

Az első esetben: test → csúcsainak száma

A második esetben: test → lapjainak száma

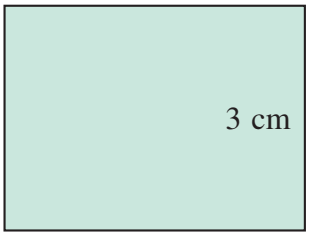
c)



6 cm

$K = 2 \cdot (6 + 2) = 16$ (cm)

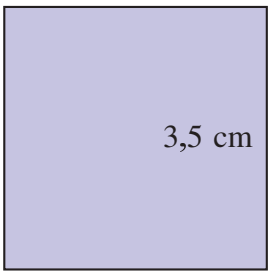
$T = 6 \cdot 2 = 12$ (cm^2)



4 cm

$K = 2 \cdot (4 + 3) = 14$ (cm)

$T = 4 \cdot 3 = 12$ (cm^2)



3,5 cm

$K = 4 \cdot 3{,}5 = 14$ (cm)

$T = 3{,}5^2 = 12{,}25$ (cm^2)

A téglalapokhoz hozzárendeltünk két-két mennyiséget, a kerületük centiméterben, illetve a területük négyzetcentiméterben mért mérőszámát.

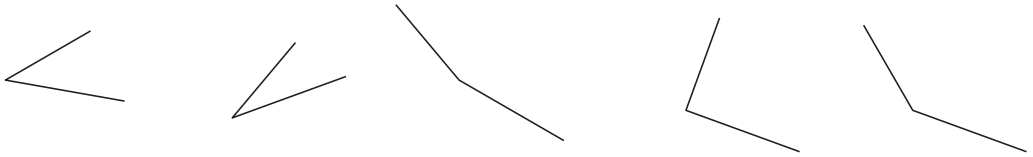
Az első esetben: téglalap → a kerületének centiméterben mért mérőszáma.

A második esetben: téglalap → a területének négyzetcentiméterben mért mérőszáma.

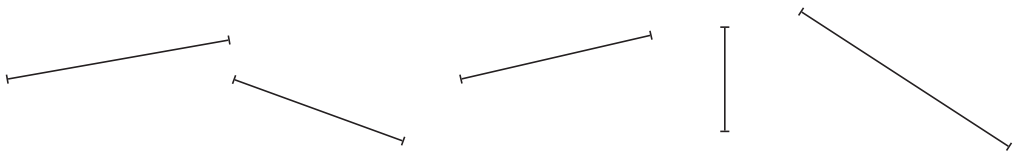
Feladatok

1. Milyen számokat tudsz hozzárendelni a következő ábrákhoz?

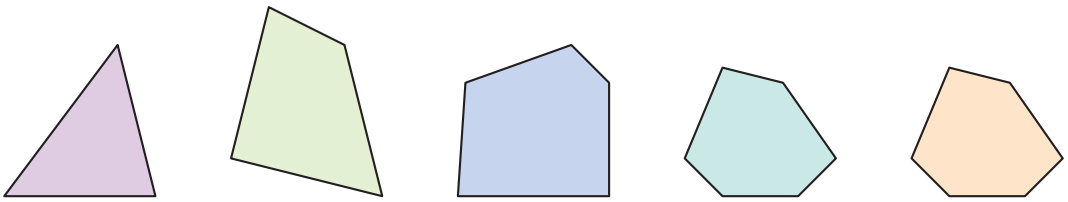
a)



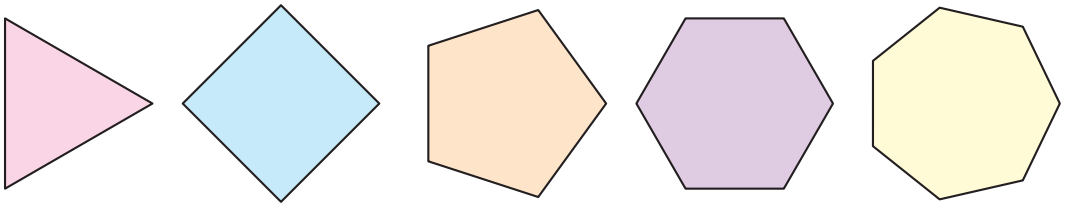
b)



2. Írj legalább három hozzárendelési utasítást a sokszögekre vonatkozóan!



3. Írj legalább három hozzárendelési utasítást a szabályos sokszögekre vonatkozóan!



4. Készíts hozzárendelést különböző oldalú téglalapokhoz!

a) 2,3 cm és 4 cm *b)* $\frac{3}{5}$ dm és $\frac{1}{2}$ dm hosszúak *c)* a és b hosszúságegység

5. Készíts minél többféle hozzárendelést a sokszögekről (például: sokszög → átlóinak száma)!

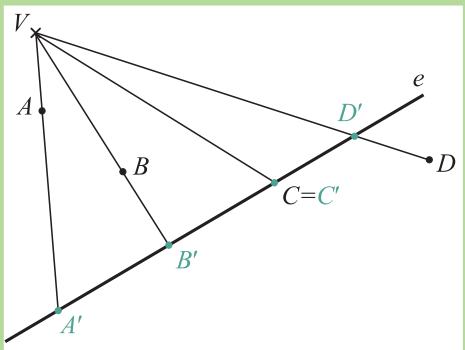
6. Adott egy e egyenes és egy V vetítési középpont. A sík pontjaihoz hozzárendeljük az e egyenesnek azt a pontját, amelyben az adott pontot a V-vel összekötő „vetítősugár” metszi az e egyenest.

a) Mi ennek a hozzárendelésnek az A alaphalmaza és a K képhalmaza?

b) Megfordítva is egyértelmű hozzárendelés-e a vetítés?

c) Szerkeszd meg azoknak a szakaszoknak a vetítési képét, amelyek 30°-os, illetve 90°-os szöget zár be e-vel!

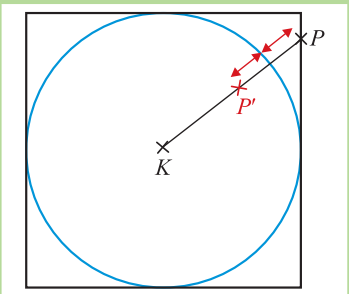
d) Szerkeszd meg egy kör vetítési képét!



7. Rajzold meg a négyzet képét, ha annak pontjait a körre tükrözöd az ábrának megfelelően!

Mi lesz a képalakzat?

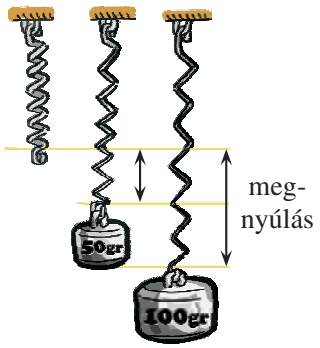
Milyen szimmetriatulajdonságai lesznek?

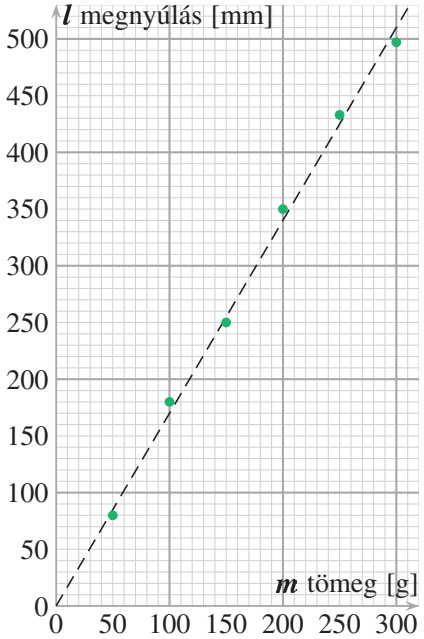


Összefüggések, képletek

1. példa

Egy rugóra különböző tömegeket akasztottunk, és megmértük a rugó megnyúlását. Mérési eredményeinket az értéktáblázat tartalmazza. A tömeget ***m***-mel, a megnyúlást ***l***-lel jelöljük.





tömeg [g]	***m***	50	100	150	200	250	300
megnyúlás [mm]	***l***	80	180	250	350	435	500

A kapott pontok nagyon közel vannak a szaggatott vonallal rajzolt félegyeneshez. A táblázatban szereplő összetartozó értékpárok hányadosa

$$\frac{l}{m} = \frac{80}{50} = 1{,}6 \qquad \frac{l}{m} = \frac{180}{100} = 1{,}8 \qquad \frac{l}{m} = \frac{250}{150} = 1{,}6\dot{7}$$

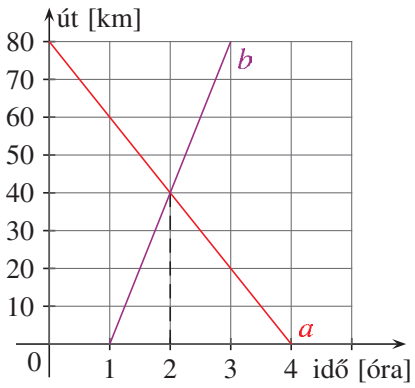
$$\frac{l}{m} = \frac{350}{200} = 1{,}75 \qquad \frac{l}{m} = \frac{435}{250} = 1{,}74 \qquad \frac{l}{m} = \frac{500}{300} = 1{,}\dot{6},$$

amelyből a hányados $\approx 1{,}7$ m.

A tudósok – és ti is a fizikai és kémiai tanulókísérleti órákon – gyakran használják ezt a módszert, hogy a mérési eredményeket grafikonon ábrázolják, mert a jól ismert grafikon tulajdonságaiból vissza lehet következtetni a természeti jelenségek viselkedésére.

Ennél a kísérletnél azt tapasztalhattuk, hogy a rugó megnyúlása egyenes arányban van a ráhelyezett test tömegével, és az arányossági tényező $\approx 1{,}7$.

2. példa



Próbáljunk meg minél több összefüggést leolvasni a két jármű út-idő grafikonjáról!

Megoldás

– A két jármű ellentétes irányban mozog.

– Az (a) jármű a 80-as kilométerkőtől indul, míg a (b) jármű a 0-ás kilométerkőtől, de egy órával később.

– Az (a) jármű óránként 20 km-t tesz meg (biciklista), míg a (b) jármű óránként 40 km-t halad (robogó).

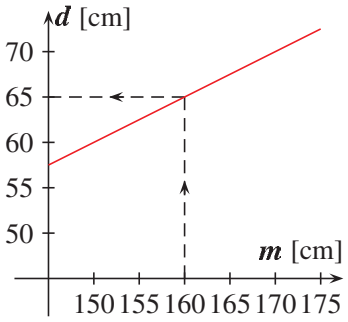
– 2 órakor találkoznak, éppen félúton, a 40-es km-kőnél.

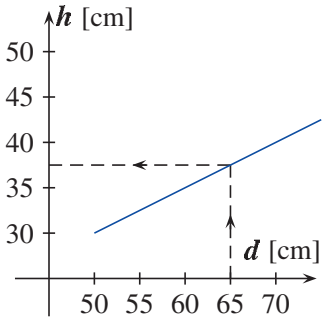
3. példa

Amikor női szabók ruhát készítenek, akkor (átlagos testalkatú nők esetén) a következő képletekkel dolgoznak: $d = \frac{m}{2} - 15$ és $h = \frac{d}{2} + 5$, ahol m a magasságot, d a derékbőséget, h a hátszélességet jelöli cm-ben mérve.



Grafikonon ábrázolva az egyes összefüggéseket azonnal leolvashatjuk a testmagasság ismerete után a varráshoz szükséges adatokat. A koordináta-rendszer tengelyeinek beosztása alkalmazkodik a feladat szövegéhez.



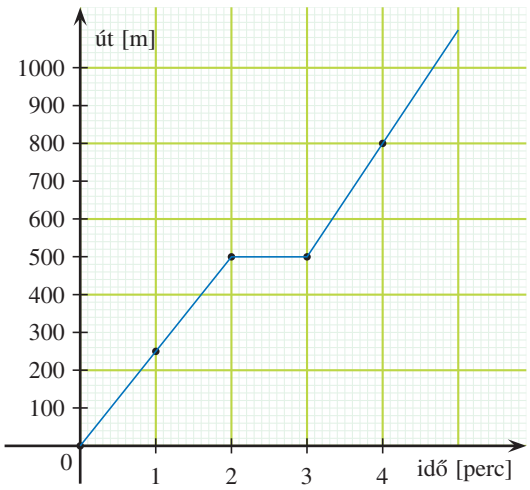


Például egy 160 cm magas átlagos testalkatú nő derékbősége 65 cm, amelyhez 37,5 cm-es hátszélesség tartozik.

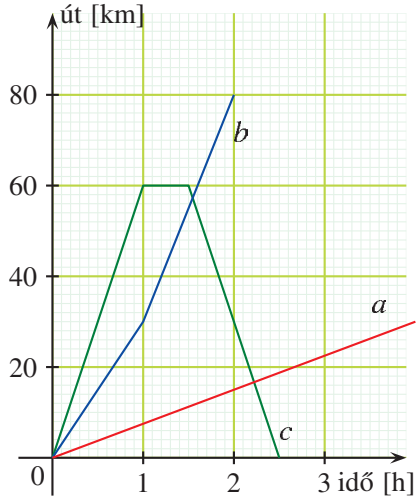
Feladatok

1. Döntsd el, hogy az egyes hely-idő grafikonok milyen járművekhez tartoznak! Mit tudsz mondani a járművek mozgásáról az egyes grafikonok alapján?

a)



b)



2. Padtársaddal találjatok ki történeteket a grafikonokról! Segítségül adtunk néhány szempontot.

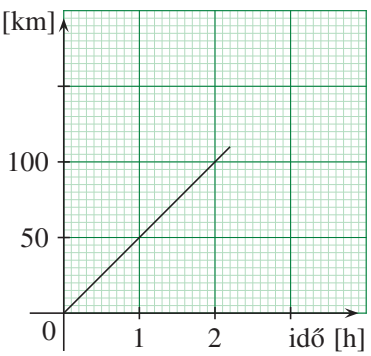
a) Honnan és mikor indultak?

b) Mennyi ideig tartott a mozgás?

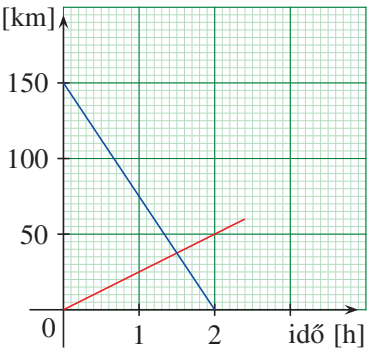
c) Mekkora az egyes mozgások sebessége, mi lehet a mozgó test?

d) Ahol két mozgást ábrázoltunk, add meg, hogy mikor és hol találkoznak!

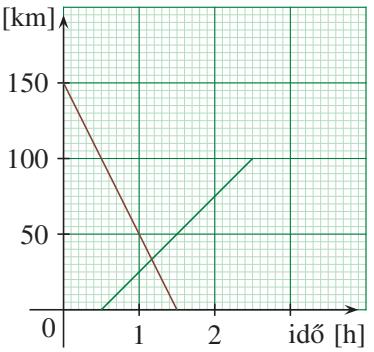
A)



B) út [km]



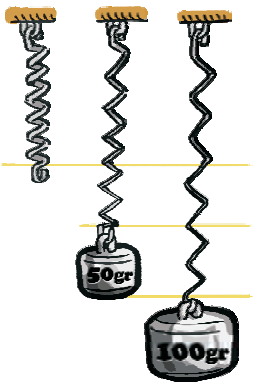
C) út [km]



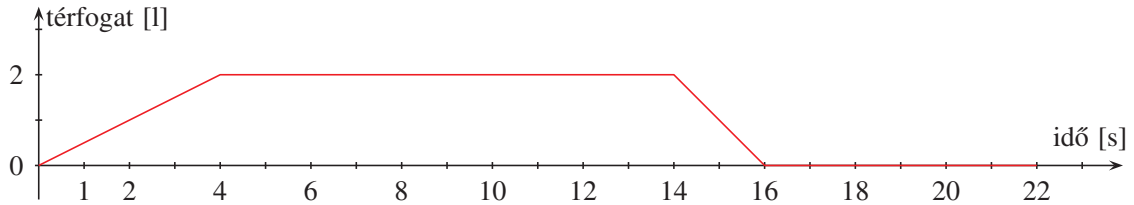
3. Egy rugóra különböző tömegeket akasztottunk és megmértük a rugó megnyúlását. Mérési eredményeinket az értéktáblázat tartalmazza.

tömeg [g]	m	50	100	150	200	250	300
megnyúlás [mm]	l	60	140	190	270	320	400

Ábrázold a kapott mérési eredményeket a koordináta-rendszerben!

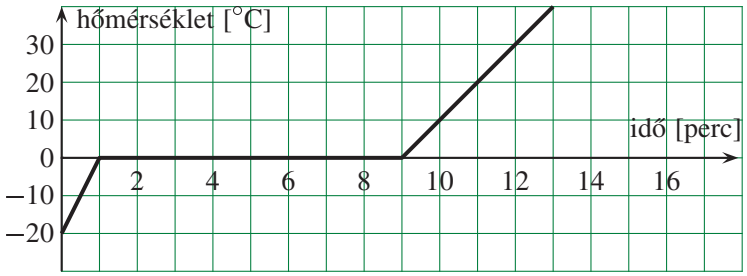


4. Egy 6 literes mosdókagylóban levő víz mennyiségét ábrázolja a grafikon.



Írd le, hogy mikor van nyitva a csap, hány liter vizet ad másodpercenként, és mikor nyitották ki a lefolyót!

5. Laboratóriumi tartályban a mélyhűtőből kivett −20 °C-os jeget állandó teljesítményű fűtőtesten 30 °C-os vízzé melegítjük. Magyarázd el a grafikon alapján a melegítésnél történteket!



a) Mennyi idő alatt éri el a jég a 0 °C-ot, ahol már elkezd olvadni?

b) Hányszor annyi ideig tart a jég olvadása, mint a víz felmelegedése?

c) Hány perc alatt lesz 30 °C-os vizünk?

d) Mit gondolsz, miért különbözik a két nem vízszintes szakasz meredeksége?

6. A következő táblázatban egy tintasugaras nyomtató percenkénti nyomtatási sebessége látható a nyomtatni kívánt dokumentum típusától és a nyomtatás minőségétől függően.

Dokumentum típusa	Piszkozatminőség	Normál minőség	Kiváló minőség
Fekete szöveg és grafika	30 oldal/perc	12 oldal/perc	6 oldal/perc
Színes szöveg és grafika	25 oldal/perc	10 oldal/perc	5 oldal/perc
Színes fotó	4 oldal/perc	1,6 oldal/perc	0,8 oldal/perc

a) A táblázat adatai alapján maximum hány oldal normál minőségű színes szöveget tud kinyomtatni másfél óra alatt a nyomtató?

A) 450 *B)* 600 *C)* 900 *D)* 1080

b) A táblázat adatai alapján mennyi időt vesz igénybe egy kiváló minőségű fekete-fehér oldal kinyomtatása?

A) 16,6 másodperc *B)* 10 másodperc *C)* 6 másodperc *D)* 5 másodperc

c) Mennyi időt spórolhatunk meg, ha egy 125 oldalas színes szöveget kiváló minőség helyett piszkozatminőségben nyomtatunk ki?

A) 5 percet *B)* 15 percet *C)* 20 percet *D)* 25 percet

(Országos kompetenciamérés, 6. évfolyam, 2008/2009)

7. *a)* Egy kutyákkal foglalkozó könyv szerint a kutyaéveket a következő táblázat segítségével lehet átszámítani emberi évekre. A táblázatban látható szabályszerűségek alapján melyik képlettel számítható át helyesen egy n éves ($n \geqq 2$) kutya életkora emberi évekre?

Kutya	Ember
6 hónap	10 év
8 hónap	13 év
1 év	15 év
2 év	24 év
4 év	32 év
6 év	40 év
8 év	48 év

A) $n \cdot 8 - 24$ *B)* $\frac{n}{2} \cdot 8$

C) $\frac{n+24}{2} \cdot 8$ *D)* $\frac{n-2}{2} \cdot 8 + 24$

b) A megtalált képlet segítségével határozd meg, hogy egy 12 éves kutya életkora hány éves emberi életkornak felel meg!

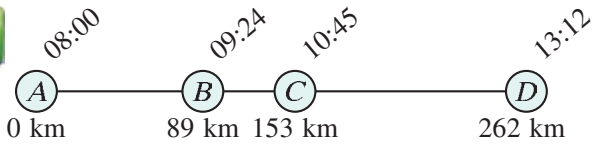
c) Az emberek maximális élettartamát 110 évnek véve, mennyi lenne a kutyák élettartama?

(Országos kompetenciamérés, 8. évfolyam, 2010/2011 alapján)

8. A tankönyv 111. oldalán a 4. példából megtudhattad, hogy a női szabók a $d = \frac{m}{2} - 15$, illetve a $h = \frac{d}{2} + 5$ képlettel dolgoznak. Készíts értéktáblázatot a füzetedbe a minta alapján az átlagos testalkatú nőkről (minden adat cm-ben van)!

									saját mért adatod	számolt adatod
Testmagasság	m	154	156	158	160	162	164	168		
Derékbőség	d									
Hátszélesség	h									

9.



Egy vonat 8 órakor indul A-ból, és 9 óra 24 perckor érkezik a 89 km-re levő B-be. A „térkép” alapján számold ki a vonat átlagsebességét

a) A és B, *b)* B és C, *c)* C és D, *d)* A és D között!

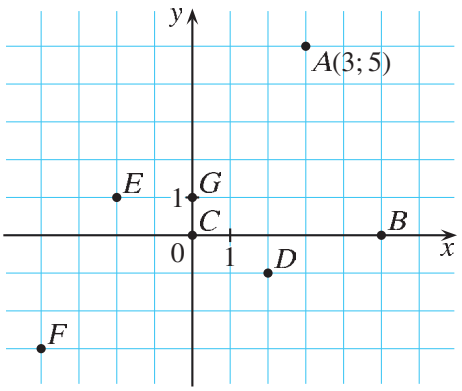
Készítsd el a vonat mozgásának az út–idő grafikonját, ha feltételezzük, hogy a vonat egyenes útszakaszon állandó sebességgel halad!

Mit tapasztalsz az átlagsebességről? Az A és D közötti átlagsebességet hasonlítsd össze az egyes szakaszok sebességének átlagával!

Összefüggések a pontok koordinátái között

A sík pontjait ábrázolhatjuk derékszögű koordináta-rendszerben, így minden ponthoz egy rendezett számpárt rendelünk hozzá (rendezett számpár esetén a jelzőszámok sorrendje nem cserélhető fel). Például az A pont esetében: $A \rightarrow (3; 5)$, amelyet egyszerűen így írunk: $A(3; 5)$.

Ez a hozzárendelés visszafelé is egyértelmű, mert egy számpárhoz pontosan egy síkbeli pontot tudunk megrajzolni.



Egy P pont két koordinátáját x-szel és y-nal szokás jelölni: $P(x; y)$.
Az x-et az első jelzőszámnak, míg az y-t a második jelzőszámnak nevezzük.

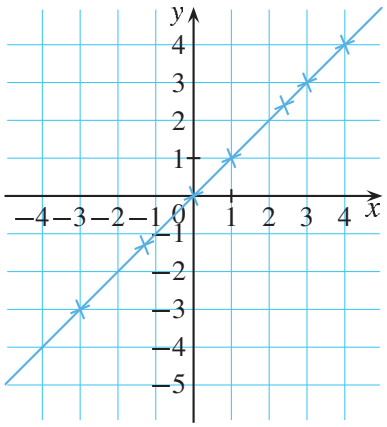
1. példa

Keressük meg azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a helyét a koordináta-rendszerben, amelyeknél
a) a két jelzőszám egyenlő egymással; *b)* az első jelzőszám nagyobb, mint a második jelzőszám!

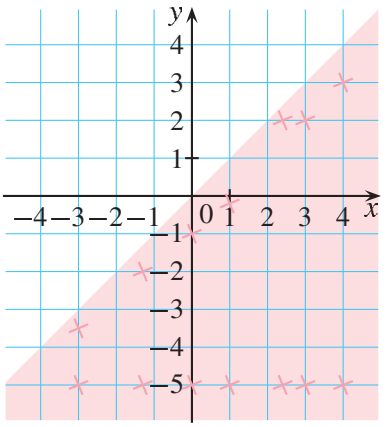
Megoldás

Vegyünk fel egy értéktáblázatot, amelyben az első jelzőszám értéke tetszőleges, és keressük meg a hozzá tartozó második jelzőszámot! Azután ábrázoljuk a kapott pontokat a koordináta-rendszerben!

	x	-3	$-1{,}3$	0	1	$2{,}4$	3	4
a)	y	-3	$-1{,}3$	0	1	$2{,}4$	3	4
b)	y	$-3{,}5$; -5	-2; -5	-1; -5	$-0{,}2$; -5	2; -5	2; -5	3; -5



a) Észrevehetjük, hogy a keresett pontok egy egyenesen helyezkednek el.



b) A keresett pontok az *a)* feladatrészben megrajzolt egyenes alatt helyezkednek el, és egy határvonal nélküli, úgynevezett **nyílt félsíkot** alkotnak.

2. példa

A $P(x; y)$ pontok jelzőszámai között fennáll az

a) $y = 2x$;

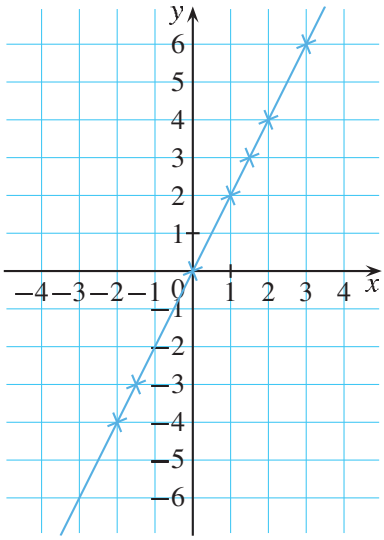
b) $y \geqq 2x$ kapcsolat.

Keressünk ilyen pontokat a koordináta-rendszerben, és fogalmazzuk meg a tapasztalatunkat!

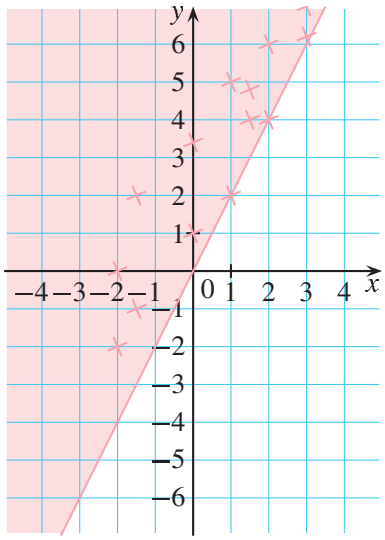
Megoldás

Vegyünk fel ismét egy értéktáblázatot, amelyben az első jelzőszám értéke tetszőleges, és keressük meg a hozzá tartozó második jelzőszámot! Azután ábrázoljuk a kapott pontokat a koordináta-rendszerben!

	x	−2	−1,5	0	1	1,5	2	3
a)	y	−4	−3	0	2	3	4	6
b)	y	−2; 0	−1; 2	1; 3,4	2; 5	4; 4,8	4; 6	6,2; 7



a) Észrevehetjük, hogy a keresett pontok egy egyenesen helyezkednek el.



b) A keresett pontok az *a)* feladatrészben megrajzolt egyenes felett helyezkednek el, és egy határvonallal rendelkező, úgynevezett **zárt félsíkot** alkotnak.

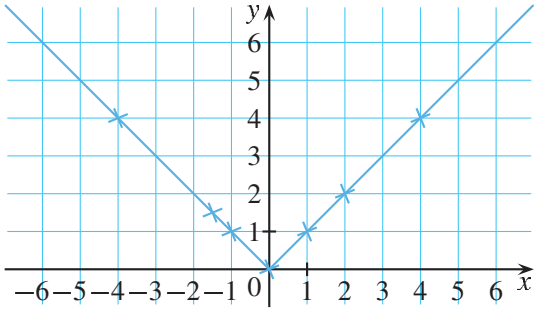
3. példa

Hol vannak azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyek második jelzőszáma az első jelzőszám abszolút értéke?

Megoldás

Vegyünk fel ismét egy értéktáblázatot, amelyben az első jelzőszám értéke tetszőleges, és keressük meg a hozzá tartozó második jelzőszámot! Azután ábrázoljuk a kapott pontokat a koordináta-rendszerben!

x	−4	−1,5	−1	0	1	2	4
y	4	1,5	1	0	1	2	4



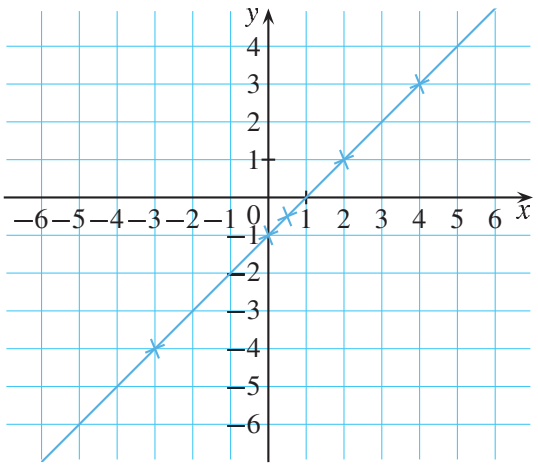
Ha a keresett pontok első jelzőszámát x-szel jelöljük, akkor a második jelzőszám $y = |x|$, azaz a $P(x; |x|)$ pontokat kerestük meg a koordináta-rendszerben.

Észrevehetjük, hogy a keresett pontok az origóban egymáshoz csatlakozó két félegyenesen helyezkednek el. A kapott grafikon hasonlít a V betűre.

4. példa

Keressük meg a síkbeli pontok két jelzőszáma közötti kapcsolatot, ha azokat az alábbi értéktáblázatban adtuk meg!

x	−3	0	0,5	2	4
y	−4	−1	−0,5	1	3



Megoldás

A pontok ábrázolása után észrevehetjük, hogy azok egy egyenesen helyezkednek el.

Az egyenesen levő $P(x; y)$ pontok jelzőszámai közötti kapcsolat már a táblázat adataiból is kiolvasható: $y = x - 1$.

Feladatok

1. Keresd meg azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a helyét a koordináta-rendszerben, amelyeknél

a) a két jelzőszám egymás ellentettje;

b) az első jelzőszám kisebb, mint a második jelzőszám!

2. A $P(x; y)$ pontok jelzőszámai között fennáll az

a) $y = 3x$ *b)* $y \geqq 3x$ kapcsolat.

Keress ilyen pontokat a koordináta-rendszerben, és fogalmazd meg, hogy milyen alakzatot kaptál!

3. Keress olyan $P(x; y)$ pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek jelzőszámai között az fennáll az alábbi összefüggés!

a) $y = x + 2$ *b)* $y = x + 4$ *c)* $y = x - 1$ *d)* $y = 1 - x$

4. Hol vannak azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyek második jelzőszáma az első jelzőszámnál

a) 3-mal kisebb (kékkel rajzolj); *b)* 3-mal nagyobb (pirossal rajzolj)?

Mit vettél észre a kapott két ponthalmazról?

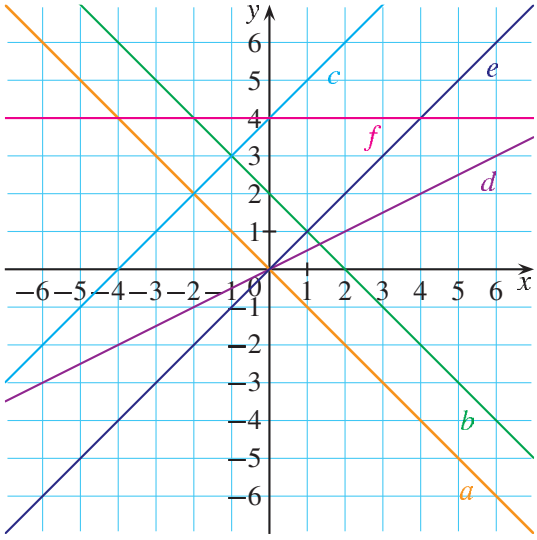
5. Keresd meg a síkbeli pontok két jelzőszáma közötti kapcsolatot, ha azokat az alábbi értéktáblázatban adtuk meg! Készíts koordináta-rendszert, mert sokat segít a megoldás megtalálásában!

x	−1	0	1	2,5	3
y	2	3	4	5,5	6

6. *a)* Add meg az egyenesek két koordinátája közötti kapcsolatot!

b) Van-e olyan egyenes, mely áthalad a $P(4;2)$ ponton? Ha igen, akkor add meg a betűjelét!

c) Van-e olyan egyenes, mely áthalad a $Q(20;-20)$ ponton? Ha igen, akkor add meg a betűjelét!



7. Játék – Padtársaddal mindketten készítsetek egy-egy koordináta-rendszert, amelynek a tengelyein (-6)-tól 6-ig egyesével tüntessétek fel a számokat! Mindketten rajzoljatok az egyik koordináta-rendszerbe egy egyenest vagy egy zárt félsíkot!



A játék során az egyikőtök által rajzolt alakzat koordinátái közötti összefüggést kell a másiknak kitalálnia. Mondjatok felváltva különböző pontokat a koordinátáikkal! Ha a mondott pont hozzá tartozik a kitalálandó alakzathoz, akkor pirossal jelöljétek be az üres koordináta-rendszeretekbe, ha nem, akkor kékkel! Az nyer, aki hamarabb kitalálja a társa által rajzolt alakzat koordinátái közötti kapcsolatot. (Közös megállapodással nehezíthettek az alakzatok formáján.)

8. *a)* Keresd meg az alábbi értéktáblázatban megadott síkbeli pontok két jelzőszáma között a kapcsolatot! Készíts koordináta-rendszert, mert sokat segít a megoldás megtalálásában!

x	-1	0	1	2	3
y	-2	1	4	7	10

b) Válaszd meg úgy a pontok hiányzó jelzőszámait, hogy azok a kapott alakzathoz tartozzanak! $A(5;\ldots)$, $B(-3;\ldots)$, $C(\ldots;13)$, $D(\ldots;-5)$

9. Keress olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyeknél a két jelzőszám összege 4!

10. Keress olyan pontokat a koordináta-rendszerben, amelyeknél a két jelzőszám különbsége 4!

11. Milyen alakzatokat határoznak meg a $P(x;y)$ pontok két jelzőszáma közötti alábbi kapcsolatok? Ha felrajzolod őket, találsz-e egyenes vagy fordított arányossági grafikont közöttük?

a) $y = x + 3$ *b)* $y = 3x$ *c)* $x = 3y$ *d)* $x \cdot y = 3$

12. Rajzold le azokat a $P(x;y)$ pontokat a koordinátasíkban, melyekre $|x| \leqq 2$ és $|y| \leqq 3$!

a) Milyen alakzatot határoznak meg az így kapott pontok?

b) Mekkora ennek az alakzatnak a kerülete és a területe rácsegységben mérve?

13. Rajzold le azokat a $P(x;y)$ pontokat a koordinátasíkban, melyek jelzőszámai között ez az összefüggés teljesül: $x + 2y = 6$!

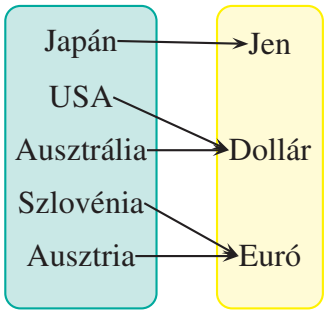
a) Add meg annak a háromszögnek a csúcspontjait, melyet a koordináta-rendszer két tengelye és az általad megrajzolt egyenes határoz meg!

b) Mekkora ennek a háromszögnek a kerülete és a területe rácsegységben mérve?

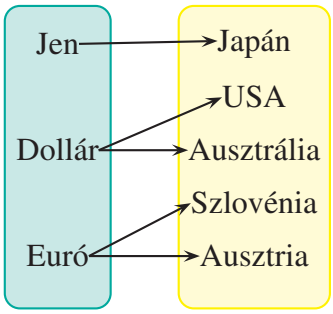
Tudáspróba

1. Döntsd el, hogy mi lehetett a szabálya az egyes hozzárendeléseknek! Add meg az A alaphalmazt és a K képhalmazt is az egyes esetekben! Melyik megfeleltetés egyértelmű és melyik nem?

a)



b)



c) $\{(1;1), (2;4), (3;9), (4;16)\}$

d)

x	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{7}$	0	2
y	$\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{7}$	0	4

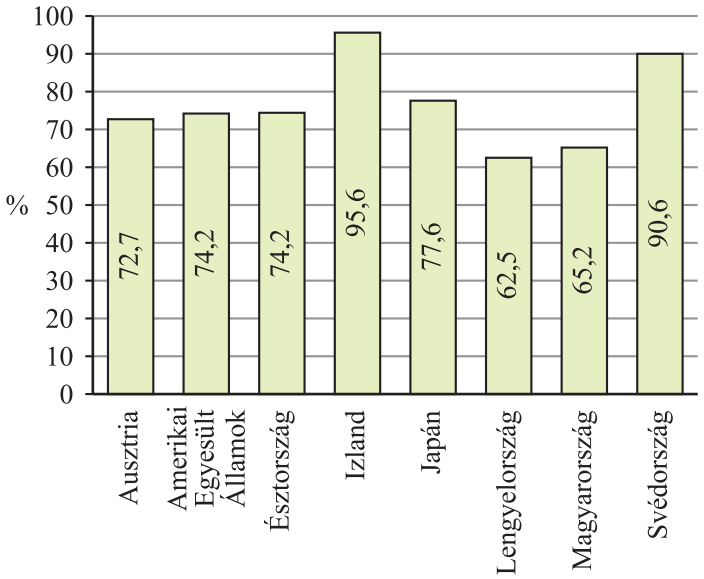
2. 2010-ben felmérték néhány ország száz főre jutó internet-felhasználóinak számát. Az erről készült oszlopdiagramot kell tanulmányoznotok.

a) Milyen megfeleltetést lehet leolvasni az alábbi oszlopdiagramról?

b) Mi a hozzárendelés A alaphalmaza és K képhalmaza?

c) Mekkora az eltérés az internetet leginkább és legkevésbé használó országok között?

d) Írj legalább két megállapítást, melyet az oszlopdiagram tanulmányozásakor fedeztél fel!



3. Esővizet gyűjtünk egy tartályba. 2 perc alatt 3 mm-t emelkedik a víz szintje a tartályban. Ábrázold koordináta-rendszerben a víz szintjét az idő függvényében, ha

a) üres, *b)* már 1 cm-ig feltöltött tartályba gyűjtjük az esővizet!

Írd le a hozzárendelési utasítást is!

4. Keresd meg azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a helyét a koordináta-rendszerben, amelyeknél az első jelzőszám

a) 2-vel kisebb a második jelzőszámnál; *b)* 2-vel nagyobb a második jelzőszámnál!

Mit állapíthatsz meg a kapott két ponthalmaz kapcsolatáról?

5. *a)* Keresd meg az alábbi értéktáblázatban megadott síkbeli pontok két jelzőszáma között a kapcsolatot! Készíts koordináta-rendszert, mert sokat segít a megoldás megtalálásában!

x	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5

b) Válaszd meg úgy a pontok hiányzó jelzőszámait, hogy azok a kapott alakzathoz tartozzanak!

$A(4;\ldots)$, $B(-3;\ldots)$, $C(\ldots;9)$, $D(\ldots;-7)$

Számelmélet

Oszthatóság

Ebben a fejezetben a **pozitív egész számok** oszthatósági tulajdonságaival foglalkozunk. Az előző évben tanult ismereteinket felelevenítjük és kibővítjük.

1. példa

A padláson egy rozoga kis szekrény fiókját kihúzták a gyerekek, és ott édesapjuk gyerekkori „kincseire” bukkantak. Találtak 24 parafa dugót, 17 üveggolyót, 31, gombfocizásra alkalmas gombot és 12 régi pénzérmét.



El tudja-e osztani egymás között egyenlően a három testvér a talált „kincseket”?

Megoldás

A 24 parafa dugót és a 12 pénzérmét el lehet osztani a három gyerek között, hiszen mindkét számban megvan a 3 maradék nélkül, azaz $24 = 3 \cdot 8$, illetve $12 = 3 \cdot 4$.

A 17 üveggolyót és a 31 gombot nem lehet egyenlően elosztani a három gyerek között, mert az osztáskor **maradékot** kapunk, azaz nincs olyan pozitív egész szám, amellyel a 3-at megszorozva 17-et, illetve 31-et kapnánk. $17 = 3 \cdot 5 + 2$, illetve $31 = 3 \cdot 10 + 1$

Úgy nem lehet elosztani, hogy minden fajtából egyenlően kapjanak.

Ha az összes „kincsből” becsukott szemmel húznának egyet-egyet a gyerekek, amíg azok el nem fogynak, akkor az osztás igazságos lenne, mert

$24 + 12 + 17 + 31 = 84 = 3 \cdot 28$, azaz minden gyerek 28 „kincset” kapna.

Ezt a kérdést másképpen is eldönthettük volna:

Darabszám	24	12	17	31	Összesen: 84
3-mal való osztás eredménye	8	4	5	10	8 + 4 + 5 + 10 = 27
Maradék	0	0	2	1	2 + 1 = 3

Tehát a maradékok összege is eloszthatóa 3 gyerek között, és mindenki 27 + 1 = 28 tárgyat kap.

Pozitív egész számok esetén egy szám **osztható** egy másik pozitív egész számmal (ezt **osztónak** nevezzük), ha található egy olyan pozitív egész szám, amellyel megszorozva az osztót az eredeti egész számot kapjuk.

Például: 24 osztható 3-mal, mert $24 = 3 \cdot 8$, 5 osztható 5-tel, mert $5 = 5 \cdot 1$,

17 nem osztható 3-mal, mert nincs olyan pozitív egész szám, amellyel a 3-at megszorozva 17-et kapunk.

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

2. példa

Írjuk fel 1-től 25-ig a számokat, és vizsgáljuk meg azokat a 3-mal való oszthatóság szempontjából!

Megoldás

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

Észrevehetjük, hogy a **pirossal írt** számok oszthatók hárommal, vagy másként fogalmazva a 3 többszörösei. Mindegyiket fel tudjuk írni $3 \cdot (k)$ alakban, ahol a k pozitív egész szám. *Például:* $12 = 3 \cdot (4)$.

A **zöld színű számok** 3-mal osztva 1-et adnak maradékul, ezért $3 \cdot m + 1$ alakban írhatók fel, ahol az m nulla vagy pozitív egész szám. Például $25 = 3 \cdot 8 + 1$.

A **kék színű számok** mindegyike 3-mal osztva 2-t ad maradékul, ezért $3 \cdot n + 2$ alakban írhatók fel, ahol n nulla vagy pozitív egész szám. *Például:* $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

A 3-mal való oszthatóság szempontjával a számok hármas **periódussal** követik egymást.

Megjegyzés: Természetesen bármilyen számmal való osztásról hasonló mondható el.

Például a 4-gyel osztható számok általános alakja $4 \cdot b$ alakban, ahol b pozitív egész szám. Például $28 = 4 \cdot 7$. A 4-gyel osztva 2 maradékot adó számok általános alakja $4 \cdot b + 2$ (b nulla vagy pozitív egész szám). *Például:* $30 = 4 \cdot 7 + 2$.

Egy összeg (illetve különbség) osztási maradéka megállapítható a tagok osztási maradékainak összegéből (illetve különbségéből).

Az oszthatóság fogalmát kiterjeszthetjük a természetes számok halmazára is. Észrevehetjük, hogy a 0-nak minden természetes szám osztója, ugyanis bármely természetes szám nullaszorosa 0-t ad eredményül:

$$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = 0 \cdot 3 = \ldots$$

A 0 viszont egyetlen pozitív egész számnak sem lehet osztója, mert nem található olyan pozitív egész szám, amelyet 0-val szorozva pozitív egész számot kapnánk eredményül. Például a 3 esetén: $3 \neq 0 \cdot$ pozitív egész szám.

Az egész számok körében is értelmezhető az oszthatóság, és a meghatározás azonos a pozitív egészekről tanultakkal, csak itt egészekkel érvényes a definíció.

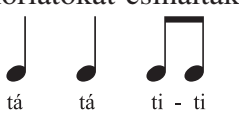
Például: A (-12)-nek osztója a 3 és a (-3) is, mert $-12 = 3 \cdot (-4)$, illetve $-12 = (-3) \cdot 4$.

A törtekre nem érdemes kiterjeszteni az oszthatóság fogalmát, ugyanis bármely törtszám osztható bármely (nem nulla) törtszámmal. Pl.: a $\frac{3}{4}$ osztható $\frac{2}{5}$-del, mert a $\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot x$ egyenletnek van megoldása a törtszámok körében:

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{8}.$$

Feladatok

1. A gyerekek énekórán ritmusgyakorlatokat csináltak, és ki kellett tapsolniuk a



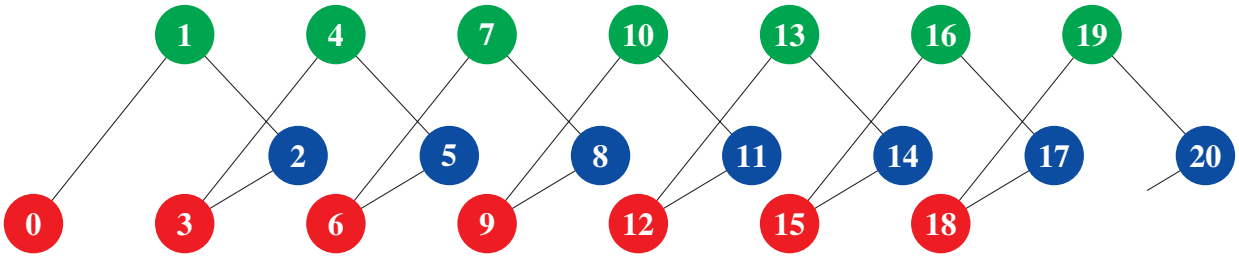
ritmust.

a) Melyik volt a 20.-nak kitapsolt hangjegy?

b) Melyek voltak a következő sorszámúként kitapsolt hangjegyek?
32; 54; 73; 100; 122; 1948

c) Sorold fel 30-ig, hogy mikor tapsolunk ti-t!

2. Feltekertük a számegyenest.



a) Milyen színűek lennének a felsorolt számok? 32; 43; 56; 69; 78; 888; 987; 2015

b) Milyen színűek lennének az alábbi műveletek által meghatározott számok? Válaszodat a műveletek elvégzése nélkül próbáld megadni!

$A = 33 + 51$ $B = 33 + 53$ $C = 49 + 38 + 72$

$D = 437 - 240$ $E = 123 \cdot 407 + 53$ $F = 999 - 888 + 777$

3. Játék – Bumm 7-es

A játékot vagy a teljes osztályban, vagy ha van rá mód, akkor 6-8 fős csoportokban játsszátok! Kezdjétek el egymást követően egyesével mondani a számokat! Aki 7-tel osztható számhoz ér, annak „bumm”-ot kell mondania.

Ha a kimondandó számban szerepel a 7-es számjegy (például 17), akkor is „bumm”-ot kell mondani. Sőt, ha több 7-es számjegy van a számban, akkor a „bumm”-ok száma megegyezik a 7-esek számával, kivéve, ha a szám 7-tel osztható, mert ilyenkor a „bumm”-ok számát eggyel meg kell növelni. Aki ront, az kiesik a játékból.

4. Mennyi maradékot ad a 2137 öttel osztva? Mi lesz az 5-ös maradéka a 2137

a) kétszeresének, *b)* háromszorosának, *c)* négyszeresének, *d)* ötszörösének?

5. Egy szám 5-tel osztva 2-t ad maradékul. Mennyit ad maradékul 5-tel osztva a szám

a) kétszerese, *b)* háromszorosa, *c)* négyszerese, *d)* ötszöröse?

6. Egy szám 5-ös maradéka 2.

Mennyi a szám 10-es maradéka? Mennyi a szám kétszeresének a 10-es maradéka?

7. Egy számot 10-zel osztva 2-t kapunk maradékul. Mennyi a szám 5-ös maradéka? Mennyi a szám kétszeresének az 5-ös maradéka?



8. Julcsi néni a hétvégi házukban befőtteket készített a kertben termett gyümölcsökből. Ősszel behozta azokat, és most el szeretné helyezni a 25 meggy-, a 43 körte-, az 5 zölddió- és a 4 birskompótot a három polcon a kamrában úgy, hogy mindegyik polcot azonosan terhelje. Hány üveget kell tennie az egyes polcokra?

9. Az osztály klubdélutánján a gyerekek zsetonokkal fizettek. Az árakat a képek alatt láthatod. Mit vásárolhatott



a) Zsuzsi, ha két dolgot vett, és a fizetett összeg osztható volt 3-mal,

b) Péter, ha három dolgot vett, és a fizetett összeg osztható volt 3-mal,

c) Luca, ha két dolgot vett, és a fizetett összeg osztható volt 6-tal?

10. Egy papírt 4 részre tépünk, majd az egyik részt ismét 4 részre tépjük.



a) Írd le hány papírdarabka lesz az asztalon, ha 1-szer, 2-szer,... 5-ször tépünk!

b) Ezt folytatva hány papírdarabka lesz az asztalon a 10. lépés után?

c) Az asztalon 58; 124; 231; 322; 456 papírdarabka van. A felsorolt darabszámok közül hányat lehet létrehozni a fenti eljárással? Válaszd ki a helyes választ!

A) 0 *B)* 1 *C)* 2 *D)* 3 *E)* 4 *F)* 5

11. Három szám közül egyik sem osztható 4-gyel. Melyik igaz, és melyik nem igaz az alábbi állítások közül?

a) Lehet, hogy a három szám összege osztható 4-gyel.

b) Lehet, hogy a három szám szorzata osztható 4-gyel.

c) Biztos, hogy a három szám összege nem osztható 4-gyel.

d) Biztos, hogy a három szám szorzata nem osztható 4-gyel.

12. Három szám összege osztható 4-gyel. Döntsd el, hogy melyik állítás biztosan igaz, melyik biztosan hamis, és melyik lehetséges, de nem biztos!

a) Mind a három szám osztható 4-gyel.

b) Pontosan két szám osztható 4-gyel.

c) Az egyik szám 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

d) Az egyik szám 4-gyel osztva 1 maradékot ad, a másik 2-t, a harmadik pedig 3-at.

e) Az egyik osztható 4-gyel, a másik 1 maradékot, a harmadik pedig 3 maradékot ad.

13. Két természetes szám közül az egyik 6-tal osztva 4-et, a másik 3-at ad maradékul. Mi a 6-os maradéka a két szám

a) összegének, *b)* különbségének, *c)* szorzatának?

14. Jelöljünk n-nel egy olyan természetes számot, amelynek 7-es maradéka 2, és m-mel egy olyat, amelynek 7-es maradéka 1. Mekkora a 7-es maradéka

a) $(n+m)$-nek, *b)* $(n-m)$-nek, *c)* $n \cdot m$-nek,

d) $(m-n)$-nek, *e)* $(2n+m)$-nek, *e)* $2n+3m$-nek?

15. $462 = ?$ Minden számnak sok neve van. Párosítsd össze a szám neveit annak tulajdonságaival!

a) $400 + 60 + 2$ *b)* $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ *c)* $460 + 2$ *d)* $21 \cdot 22$ *e)* $9 \cdot 51 + 3$

A) Osztható 7-tel *B)* Két szomszédos szám szorzata

C) 10-zel osztva 2-t ad maradékul *D)* A 9-es maradéka 3 *E)* A 3-as maradéka 0

16. A $7 \cdot 17 \cdot 37$ számban hányszor van meg a

a) 7, *b)* 17, *c)* $7 \cdot 17$, *d)* 37, *e)* $7 \cdot 17 \cdot 37$?

17. Az $5 \cdot 7 \cdot 13$ számnak keress minél több osztóját! Igaz-e, hogy ez a szám

a) nem osztható 2-vel, *b)* osztható 7-tel, *c)* osztható 35-tel, *d)* 3-as maradéka 2?

18. A $307 \cdot 509$ számban megvan-e maradék nélkül, és ha igen, akkor hányszor a(z)

a) 307, *b)* 509, *c)* 1, *d)* 15, *e)* 4, *f)* 12?

19. Írj egy-egy számot a hiányzó helyekre, hogy a kapott szám

a) a 6 többszöröse legyen, *b)* a 12 többszöröse legyen!

$3 \cdot 5 \cdot \bigcirc \cdot 7$ $3 \cdot \bigcirc \cdot \triangle \cdot 7$ $4 \cdot \bigcirc \cdot 5 \cdot \triangle$ $4 \cdot \bigcirc \cdot 5 \cdot 9$

20. Írd le képlettel a következő számok általános alakját!

a) 4-gyel oszthatók *b)* 4-gyel osztva 2-t adnak maradékul *c)* 4-es maradéka 2

d) 11-gyel osztva 5-öt kapunk maradékul *e)* 11-es maradéka 5

21. Melyik az a szám?

a) Egy szám 7-szeresének és 5-szörösének összege 1092.

b) Egy szám 7-szeresének és 5-szörösének különbsége 1406.

c) Egy szám 7-szeresének és 5-szörösének szorzata 140.

22. Keresd a párját! (k, l, m, n, p és q pozitív egészek)

a) $7 \cdot k$ *b)* $3l + 2$ *c)* $5n + 4$ *d)* $5m$ *e)* $3k + 6l$

f) $(5p + 1) + (5q + 4)$ *g)* $5n + 2n$ *h)* $(3m + 1) + (3k + 2)$

A) Osztható 7-tel *B)* Osztható 3-mal *C)* A 3-as maradéka 2

D) 5-tel osztható *E)* 5-tel osztva 4 maradékot ad

23. Egy 10-zel osztható szám utolsó számjegyét elhagyva egy újabb számot kapunk, melyet az eredeti számhoz hozzáadva az összeg 5016 lesz. Mi az eredeti szám?

24. Egy számhoz hozzáadjuk annak 3-szorosát és a 9-szeresét is. Mutasd meg, hogy így biztosan 13-mal osztható számot kapunk! Mi lehetett a kiindulási szám, ha az összeg 1131?

25. Írj le egymás után kétszer egy háromjegyű számot! Az így nyert hatjegyű számot osszad el 7-tel, majd a hányadost 11-gyel, és az így kapott hányadost 13-mal. Mi lett a harmadik hányados? Próbáld ki több számon is ezt a trükköt, és indokold a sejtésedet!

A sokatmondó utolsó számjegyek

1. példa

Döntsük el, hogy osztható-e

a) 1257 419-cel, *b)* 5742 2-vel, *c)* 3852 4-gyel, *d)* 7375 125-tel!

Megoldás

Egy pozitív egész szám akkor osztható egy másik pozitív egész számmal, ha találunk egy olyan egész számot, amellyel azt megszorozva visszakapjuk az eredeti számot. Ez azt jelenti, hogy elvégezve az osztást nem kapunk maradékot.

a) $1257 : 419 = 3$, azaz $1257 = 419 \cdot 3$, vagyis 1257 osztható 419-cel.

Osztással mindig eldönthető a kérdés, de sok esetben ez hosszadalmas. Ezért már eddig is kerestünk különböző „könnyítő” oszthatósági szabályokat.

b) 5742 osztható 2-vel, mert $5742 = 5740 + 2$, és az összeg mindkét tagja osztható 2-vel.

c) 3852 osztható 4-gyel, mert $3852 = 3800 + 52$, és az összeg mindkét tagja osztható 4-gyel.

d) 7375 osztható 125-tel, mert $7375 = 7000 + 375$, és az összeg mindkét tagjáról eldönthető, hogy osztható 125-tel.

Mi olvasható ki egy szám **utolsó számjegyéből**?

$328 = 32 \cdot 10 + 8$ $5420 = 542 \cdot 10 + 0$ $93\,856 = 9385 \cdot 10 + 6$

A szám utolsó számjegyét letakarjuk egy ▽ jellel, az összes többi számjegyet pedig egy ◆ jellel.

Ezt szokás így is jelölni: $\overline{◆▽}$, hogy a szorzással ne tévesszük össze.

Szemléltetve: $\overline{◆▽} = ◆ \cdot 10 + ▽$

Minden pozitív egész szám felírható egy kéttagú összegként, amelynek első tagja 10 többszöröse, így az osztható 10-zel, 5-tel és 2-vel. A szám 10-zel, 5-tel, illetve 2-vel való oszthatósága tehát csak a szám utolsó számjegyétől függ.

Azok a számok oszthatók 2-vel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 2-vel. Ezek az utolsó számjegyek: 0, 2, 4, 6, 8.

Azok a számok oszthatók 5-tel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 5-tel. Ezek az utolsó számjegyek: 0, 5.

Azok a számok oszthatók 10-zel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 10-zel. Az utolsó számjegy: 0.

Egy szám 2-es, 5-ös és 10-es maradéka megegyezik utolsó számjegyének 2-es, 5-ös, illetve 10-es maradékával.

Mi olvasható ki egy szám **utolsó két számjegyéből**?

$328 = 3 \cdot 100 + 28$ $9875 = 98 \cdot 100 + 75$ $188\,300 = 1883 \cdot 100$

Az egyesek helyén álló számjegyet ▲ jellel, a tízesek helyén levőt egy ▽ jellel és az összes többi számjegyet egy ◆ jellel letakarjuk.

Szemléltetve: $\overline{◆▽▲} = ◆ \cdot 100 + \overline{▽▲}$

Minden pozitív egész szám felírható egy kéttagú összegként, amelynek első tagja 100 többszöröse, így az osztható 100-zal, 50-nel, 25-tel, 20-szal és 4-gyel. A szám 100-zal, 50-nel, 25-tel, 20-szal,

illetve 4-gyel való oszthatósága csak az összeg második tagjától függ, azaz az utolsó két számjegyből álló számtól.

Azok a számok oszthatók 100-zal, 50-nel, 25-tel, 20-szal és 4-gyel, amelyekben az utolsó két számjegyből álló szám osztható a kérdéses számmal.

Egy szám 4-es, 20-as, 25-ös, 50-es, illetve 100-as maradéka megegyezik az utolsó két számjegyből álló kétjegyű szám 4-es, 20-as, 25-ös, 50-es, illetve 100-as maradékával.

Kiegészítő tananyag

Mi olvasható ki egy szám **utolsó három számjegyéből**?

$73\,375 = 73 \cdot 1000 + 375 \qquad 84\,000 = 84 \cdot 1000 \qquad 91\,245 = 91 \cdot 1000 + 245$

Szemléltetve:  $= \diamond \cdot 1000 +$

Minden pozitív egész szám felírható egy kéttagú összegként, amelynek első tagja 1000 többszöröse, így az osztható 1000-rel, 500-zal, 250-nel, 125-tel és 8-cal. A szám 1000-rel, 500-zal, 250-nel, 125-tel és 8-cal való oszthatósága csak az összeg második tagjától függ, azaz az utolsó három számjegyből álló háromjegyű számtól.

Azok a számok oszthatók 1000-rel, 500-zal, 250-nel, 125-tel és 8-cal, amelyekben az utolsó három számjegyből álló háromjegyű szám osztható a kérdéses számmal.

Egy szám 1000-es, 500-as, 250-es, 125-ös, illetve 8-as maradéka megegyezik az utolsó három számjegyből álló háromjegyű szám megfelelő maradékával.

Következtetés a szám jegyeinek összegéből

2. példa

Próbáljuk minél egyszerűbben eldönteni, hogy a 61 848 osztható-e 9-cel, illetve 3-mal!

Megoldás

Természetesen elvégezhetnénk az osztást, és megkapnánk a helyes választ.

Az osztás elvégzése helyett keresünk egy másik eljárást.

Felírjuk a szám helyi értékes alakját. $61\,848 = 6 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$

Célszerű először leválasztani a 9-cel biztosan osztható tagokat, ezek biztosan oszthatók 3-mal is.

$$61\,848 = 6 \cdot (9999 + 1) + 1 \cdot (999 + 1) + 8 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 8 =$$
$$= \underbrace{6 \cdot 9999 + 1 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 4 \cdot 9}_{\text{Osztható 9-cel és 3-mal is.}} + 6 + 1 + 8 + 4 + 8$$

A $6 + 1 + 8 + 4 + 8 = 27$ összeg, amely éppen a számjegyek összege, osztható 9-cel, ezért a 61 848 is osztható 9-cel. Mivel a 9 többszöröse a 3-nak, ezért a 61 848 osztható 3-mal.

Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, akkor a szám is osztható 9-cel. Egy szám 9-cel osztva ugyanannyit ad maradékul, mint amennyit számjegyeinek összege.

Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal. Egy szám 3-mal osztva ugyanannyit ad maradékul, mint amennyit számjegyeinek összege.

Összetett oszthatósági szabályok

3. példa

Ábrázoljuk közös halmazábrán a következő halmazokat, és figyeljük meg, hogy milyen tulajdonságú számok kerülnek a halmazok közös részébe! Az alaphalmaz a P = {pozitív egész számok}.

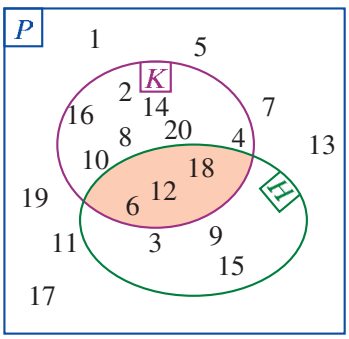
a) K = {2-vel osztható számok} és H = {3-mal osztható számok}

b) H = {3-mal osztható számok} és N = {4-gyel osztható számok}

c) N = {4-gyel osztható számok} és M = {6-tal osztható számok}

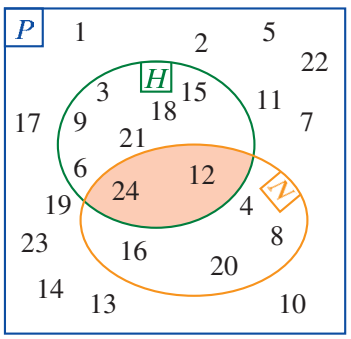
Megoldás

a)



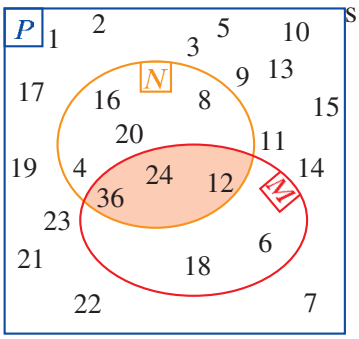
Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal is, akkor osztható $2 \cdot 3 = 6$-tal is.

b)



Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel is, akkor osztható $3 \cdot 4 = 12$-vel is.

c)



Ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor biztosan többszöröse 12-nek, a $4 \cdot 6 = 24$-nek viszont nem feltétlenül.

Feladatok

1. A 456; 3226; 1244; 22222; 88888; 3520; 6575; 98700 számok közül válaszd ki

a) a 4-gyel oszthatókat; *b)* az 5-tel oszthatókat; *c)* a 25-tel oszthatókat!

A felsorolt számok közül hányat választottál ki az egyes esetekben? Írd le a füzetedbe a helyes válaszok betűjelét!

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 5 *F)* 6 *G)* egyik sem

2. Egészítsétek ki a következő számokat a keretekbe írt egy-egy számjeggyel, hogy a kapott számok oszthatók legyenek

a) 2-vel, *b)* 4-gyel, *c)* 5-tel, *d)* 10-zel, *e)* 25-tel, *f)* 8-cal!

427□, 3□12, 54□△, □39△

3. Mennyi a felsorolt számok 5-ös, 10-es, 25-ös maradéka?

125, 312, 473, 1948, 6355, 13 475

4. Padtársaddal csoportosítsátok a számokat 1-től 50-ig a 4-gyel való osztási maradékuk szerint!

a) Hány csoportot kaptatok?

b) Vizsgáljátok meg a 4-gyel való oszthatóság szempontjából az azonos csoportba tartozó számok különbségét (mindig a nagyobb számból vonjátok ki a kisebbet)! Mit vettetek észre? Észrevételeteket próbáljátok megindokolni!

5. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis! Válaszodat indokold!

a) Egy szám osztható 2-vel, ha számjegyei oszthatók 2-vel.

b) Egy szám osztható 4-gyel, ha számjegyei oszthatók 4-gyel.

c) Nincs olyan 4-gyel osztható szám, amelynek csak egy számjegye páros.

d) Ha egy szám utolsó 4 helyén álló négyjegyű szám osztható 8-cal, akkor a szám is.

6. Hány háromjegyű számot lehet kirakni a 3, 2, 5 számkártyákból?

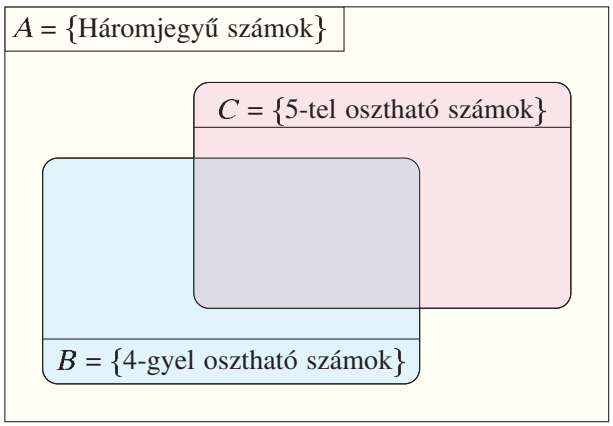
Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám

a) páros, *b)* 5-tel osztható, *c)* 4-gyel osztható, *d)* 8-cal osztható lesz?

7. Ezek a számkártyáink vannak, mindegyikből egy: 0, 3, 4, 7

Készítsd el belőlük az összes lehetséges háromjegyű számot!

Rajzolj a füzetedbe egy hasonló halmazábrát, majd helyezd el abba a kapott számokat!



a) Hány 4-gyel osztható számot kaptál?

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám 4-gyel osztható lesz?

b) Hány 5-tel osztható számot kaptál?

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám 5-tel osztható lesz?

c) Milyen tulajdonságú számokat írtál a két halmaz metszetébe?

d) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám 20-szal osztható lesz?

8. Hány négyjegyű számot lehet kirakni a 0, 3, 4, 7 számkártyákból?

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám osztható lesz 8-cal?

9. Hány olyan csupa 2-es számjegyből álló szám van, amely osztható 8-cal?

10. Mennyi a felsorolt számok 9-es, illetve 3-as maradéka?

246, 9351, 412, 5379, 4020, 13 579

11. Add meg a hiányzó számjegyeket úgy, hogy a

32□, 7□2, 5□24, 3△4□

számok oszthatók legyenek

a) 3-mal *b)* 9-cel!

12. A műveletek eredményének csak a 9-cel való osztási maradékát határozd meg! Arra a kártyára lépj, amelynek az elején a kapott maradékot látod! Ha jól oldottad meg a feladatot, egy világhírű magyar matematikus nevét kapod meg.



						START	$612 + 708$	**B**
3	$845 - 31$	**A**	0	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$	**LY**	6	$912 \cdot 36$	**O**
1	$(43 + 813) \cdot 5$	**J**	5	$4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 10$	**Á**	4	10^5	**I**
8	$3415 + 101$	**N**	6	$(3453 - 92) \cdot 14$	**O**	2	$7 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^2$	**S**

@ Nézz utána, hogy mikor és hol élt a megfejtésben kapott híres magyar matematikus, és a matematika mely ágával foglalkozott a legeredményesebben!

13. Hány háromjegyű számot lehet kirakni a 3, 4, 5 számkártyákból?

A számok közül hány lesz osztható *a)* 3-mal, *b)* 9-cel, *c)* 4-gyel?

14. Hány háromjegyű számot lehet kirakni a 4, 0, 6, 8 számkártyákból?

A számok közül hány lesz osztható *a)* 3-mal, *b)* 9-cel, *c)* 4-gyel?

Mennyi a valószínűsége annak, hogy véletlenszerűen kirakva

d) 3-mal, *e)* 9-cel, *f)* 4-gyel osztható számot kapunk?

15. A 7053 szám végére írj még egy számjegyet úgy, hogy ne változzon a szám

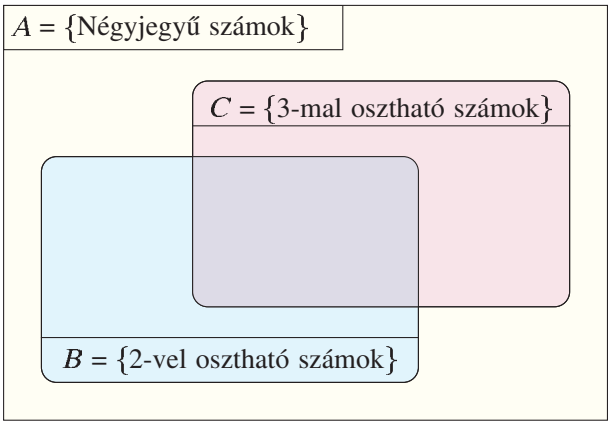
a) 3-as, *b)* 4-es, *c)* 5-ös, *d)* 9-es maradéka!

16. Pótold a hiányzó számjegyeket úgy, hogy a 34□, 92□5, 4□△2 számok oszthatók legyenek

a) 6-tal, *b)* 12-vel, *c)* 15-tel, *d)* 18-cal!

17. Ezek a számkártyáink vannak, mindegyikből egy: 0, 1, 3, 5.

Készítsd el belőlük az összes lehetséges négyjegyű számot! Rajzolj a füzetedbe egy hasonló halmazábrát, és helyezd el benne a kapott számokat!



a) Hány 2-vel osztható számot kaptál? Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám 2-vel osztható lesz?

b) Hány 3-mal osztható számot kaptál? Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám 3-mal osztható lesz?

c) Milyen tulajdonságú számokat írtál a két halmaz metszetébe?

d) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kirakott szám 6-tal osztható lesz?

18. Ha az üres cédulákat kicserélitek egy-egy megírt cédulával, akkor a számok oszthatóságával kapcsolatos, igaz állításokat kaphattok.

Versenyezzetek a padtársaddal, hogy 5 perc alatt melyikőtök ír fel több igaz állítást!

Ha _____, akkor _____

A cédulák:

a szám a 6-nak a többszöröse | a szám a 3-nak a többszöröse | a szám 9-es maradéka 6

a szám osztható 6-tal | a szám 3-mal osztható és páros | a szám végén legalább két nulla áll

a szám osztható 4-gyel | a szám 4-gyel és 25-tel osztható | a szám osztható 100-zal

19. Egyszerűsítsd a következő törteket!

$\frac{124}{348}$, $\frac{333}{999}$, $\frac{725}{850}$, $\frac{3648}{2496}$, $\frac{1485}{2790}$, $\frac{14260}{10860}$.

20. Játék – Padtársaddal játsszatok, vegyétek elő az egyjegyű számkártyáitokat!

a) Rakj ki egy kétjegyű számot, majd padtársad rakja ki a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű számot! A nagyobb számból vonjátok ki a kisebbet, és írjátok le a kapott különbség 9-es maradékát! Folytassátok újabb számmal a játékot! Mit vettetek észre? Próbáljátok észrevételeteket indokolni is!

b) Rakj ki egy négyjegyű számot, majd írd le a szám 9-es maradékát! Add át a négy számkártyát a padtársadnak, ő is rakjon ki egy négyjegyű számot belőlük, és ő is írja le annak a 9-es maradékát! Az lesz kettőtök közül a győztes, akinek nagyobb lesz a 9-es maradéka a játék során. Mit vettetek észre, és vajon miért?

21. Melyik az a csupa 0-ból és 1-ből álló legkisebb szám, amely osztható 36-tal? Melyik a legnagyobb ilyen szám?

(Varga Tamás-verseny, 1997)

22. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható mindegyik egyjegyű számmal?

23. Egy virágos bokrot akartam lefotózni, de közeledtemre szétszaladtak alóla a pókok, és felröppentek a rajta levő lepkék. A fotón nagyítóval 110 lábat lehetett megszámlálni. Hány pókot, illetve lepkét lehet látni a fotón, ha egy póknak 8, egy lepkének pedig 6 lába van?



24. Szét lehet-e osztani a száznál kisebb pozitív egész számokat két csoportba úgy, hogy a csoportokban ugyanannyi legyen a számok szorzata?

25. Mutasd meg, hogy az $1 + 11 + 11^2 + 11^3 + 11^4 + 11^5 + 11^6 + 11^7 + 11^8 + 11^9$ összeg osztható 10-zel!

26. Hét rabló a zsákmányolt aranyat úgy osztja el, hogy névsor szerint vesznek belőle annyit, amennyi az ott levő aranyak számának számjegyösszege (pl. ha 154 db arany van, akkor a soron következő $1 + 5 + 4 = 10$ aranyat vesz el). Miután mind a heten pontosan kétszer vettek az aranyból, az el is fogyott. Hatuknak egyformán jutott az aranyból, míg a rablók vezére többet kapott. Hányadik volt a vezér a névsorban, és hány aranyat kapott?



Prímszámok (törzsszámok), összetett számok

1. példa

Vizsgáljunk meg néhány számot az osztóinak száma szerint!

1: csak önmagával osztható

2, 3, 17: ezek a számok természetesen oszthatók 1-gyel és önmagukkal, de más osztójuk nincs.

4, 6, 12, 36, 54: ezek a számok természetesen oszthatók 1-gyel és önmagukkal, de ezen a két osztón kívül még egyéb osztójuk is van. Közülük három számnak felírjuk az osztóit növekvő sorrendben:

A 6 osztóit növekvő sorrendben felírva: 1; 2; 3; 6;

A 12 osztóit növekvő sorrendben felírva: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

A 36 osztóit növekvő sorrendben felírva: 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36

Észrevehetjük, hogy

- az osztók osztópárokat alkotnak, azaz $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$; $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ vagy $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$,
- a barna színnel jelölt osztók 1-nél nagyobbak, de az eredeti számnál kisebbek, ezek a **valódi osztók,**
- a 36-nál a 6-nak az osztópárja önmaga volt, az ilyen számokat **négyzetszámoknak** nevezzük: $36 = 6^2$,
- ha összeadjuk a 6-nak az önmagánál kisebb osztóit, akkor észrevehetjük, hogy visszakapjuk a 6-ot, hiszen $1 + 2 + 3 = 6$. Az ilyen számokat **tökéletes számoknak** nevezzük.

@ Keress még tökéletes számokat az internet segítségével, és nézz utána annak is, hogy mióta ismerik a tökéletes számokat a matematikusok! Mely számpárokat nevezzük barátságos számoknak?

Minden pozitív egész szám osztható 1-gyel és önmagával. Ezeket a számok nem valódi osztóinak nevezzük.

Vannak olyan pozitív egészek, amelyeknek pontosan két osztójuk van: 1 és önmaguk. Ezeket **törzsszámoknak vagy prímszámoknak** nevezzük. (Az 1 nem törzsszám, mert csak egy osztója van.) **A prímszámoknak nincs valódi osztójuk.**

Prímek például: 2, 3, 5, 7, 11, ...

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek kettőnél több osztójuk van, összetett számoknak nevezzük.

Összetett számok például: 4, 6, 8, 9, 10, ...

Eratoszthenész szitája



Írjuk le a természetes számokat egymás után (a könyvben ezt 48-ig tettük meg)! Hagyjuk ki az 1-et, mivel az nem prímszám!

Az első prímszám a 2, fennmarad a szitán. Eresszük át a szitán az összes további 2-vel osztható számot (mi pirossal áthúztuk)!

A második fennmaradó prímszám a 3. Eresszük át a szitán az összes további 3-mal osztható számot (mi kékkel áthúztuk)!

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48

A harmadik fennmaradó prímszám az 5. Eresszük át a szitán az összes további 5-tel osztható számot (mi zölddel áthúztuk)!

Minél tovább folytatjuk a „szitálást”, annál több prímszám marad fenn. A szürke mezőkben a prímszámokat láthatod 48-ig.

A matematikusoknak mind a mai napig komoly kihívást jelent a prímszámok tulajdonságainak megismerése. Többek között nagy kérdés számukra a prímszámok megtalálása, hiszen Eratoszthenész szitáját mindig 1-től kell indítani, és már az 1000-ig található prímszámok megkeresése is nagyon időigényes, hát még a nagyobbaké. Ezért próbáltak mindig is képleteket találni a prímszámok előállításához.

Pierre de Fermat (pjer dö ferma) jogász, aki amatőr, de zseniális matematikus volt, talált is egy összefüggést. Szerinte azok a számok, amelyek $2^n + 1$ alakúak, azaz a 2 hatványainál eggyel nagyobbak, és kitevőjük maga is a 2-nek egy hatványa, azok prímszámok. Sajnos állítása nem volt igaz, **Leonhard Euler** (ejtsd: leonhárd ajler; 1707–1783) svájci matematikusnak sikerült ellenpéldát találnia.



Pierre de Fermat (1601–1665)

Számold ki az első 3 számot Fermat képletével, majd nézz utána, melyik számmal döntötte meg Euler az úgynevezett Fermat-prímek képletét!

Az első 199 prímet a következő táblázatba rendeztük el.

Például: 19 a nyolcadik prímszám (a 0-val kezdődő sorban a nyolcadik oszlopban van);

557 a 102-dik prímszám (a 10-zel kezdődő sorban a második oszlopban van);

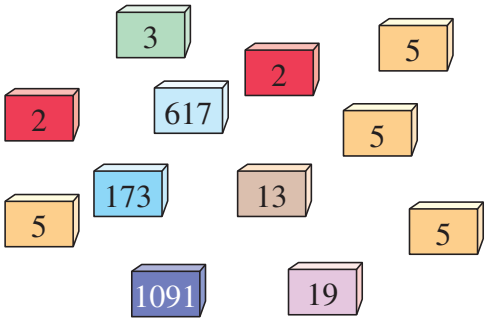
a 178-adik prímszám 1061 (a 17-edik sorban a 8-adik oszlopban található).

PRÍMSZÁMOK										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	3	5	7	11	13	17	19	23
1	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
2	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
3	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
4	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
5	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
6	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
7	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
8	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
9	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
10	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
11	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
12	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
13	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
14	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
15	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
16	941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009
17	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063
18	1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129
19	1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217

A táblázatból is látszik, hogy nagyon sok prímszám van. Középiskolában igazolni fogjuk, hogy a prímszámok száma végtelen. Nagyon nehéz feladat egy-egy számról eldönteni, hogy prímszám-e, nagy számok esetén még a számítógépeknek is sok idejébe telik. Nézz utána, hogy jelenleg melyik a legnagyobb ismert prímszám!

2. példa

A számokat „prímtéglákból” építhetjük fel, ahol az összetapasztó malter a szorzás művelete.



Építsünk ezekből a prímekből szorzással olyan számokat, amelyek

a) 3-mal oszthatók, *b)* 10-zel oszthatók,

c) 17-tel oszthatók, *d)* 24-gyel oszthatók,

e) négyzetszámok!

Megoldás

a) Egy szám akkor osztható 3-mal, ha prímtényezői között szerepel a 3. Így nagyon sok 3-mal osztható szám képezhető, ha a 3-as prímtéglát beválasztjuk.

Például: 3, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 617$, $3 \cdot 5 \cdot 19$ …

b) A szám akkor osztható 10-zel, ha prímtényezői között a 2 és az 5 is megtalálható. Most is nagyon sok 10-zel osztható számot készíthetünk, de a 2-es és az 5-ös prímtéglához ragaszkodnunk kell.

Például: $2 \cdot 5$, $2 \cdot 5 \cdot 2$, $2 \cdot 5 \cdot 3$,

$2 \cdot 5 \cdot 173 \cdot 13$ …

c) Nincs ilyen szám, mert nincs 17-es prímtéglánk.

d) Mivel a 24 prímtényezőihez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ prímtéglákra van szükség, nekünk viszont csak 2 darab 2-es téglánk van, így szorzással 24-gyel osztható számot nem tudunk képezni.

e) Négyzetszámot úgy kapunk, hogy egy pozitív egész számot önmagával szorozzuk meg. Így minden prímtéglából páros számúnak kell lenni. A képezhető négyzetszámok:

$2 \cdot 2 = 4$, $5 \cdot 5 = 25$, $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$,

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

3. példa

Keressük meg a $3 \cdot 5 \cdot 13$ szám összes osztóját!

Megoldás

	A szám osztói
Minden számnak osztója az 1.	1
Egy prímtéglából álló osztók	3, 5, 13,
Két prímtéglából álló osztók	$3 \cdot 5$, $3 \cdot 13$, $5 \cdot 13$
Három prímtéglából álló osztók	$3 \cdot 5 \cdot 13$

Így a szám osztói: 1, 3, 5, 13, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 13$, $5 \cdot 13$, $3 \cdot 5 \cdot 13$.

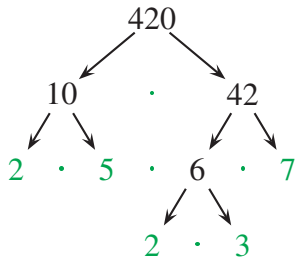
A felsorolt 8 osztó közül 6-ot a szám valódi osztójának nevezünk, míg az 1-et és a $3 \cdot 5 \cdot 13$-at nem valódi osztóknak hívjuk.

4. példa

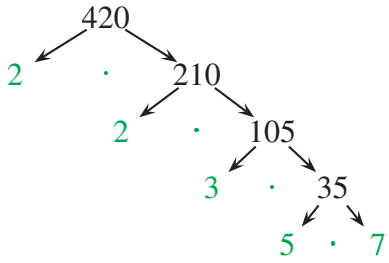
Írjuk fel a 420-at prímtényezők szorzataként!

Megoldás

A sorrendtől eltekintve minden összetett számot egyértelműen fel tudunk írni prímtényezők szorzataként. A felbontást többféle formában is elvégezhetjük.



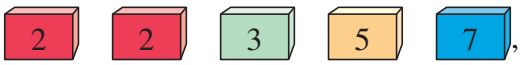
$420 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$



$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Tehát a 420-at felépítő prímtéglák: 

, azaz $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

A **prímtényezők szorzataként felírt alakból** a 420 számos tulajdonsága kiolvasható, ezek közül most csak néhányat sorolunk fel:

– osztható 7-tel,
– a 7 éppen $2^2 \cdot 3 \cdot 5$-ször van meg benne,
– osztható $5 \cdot 7 = 35$-tel, és a hányados $2^2 \cdot 3 = 12$,
– nem osztható 19-cel, mert a 19 nincs a prímtéglák között,
– nem négyzetszám, mert a prímtéglái nem párosan szerepelnek benne,
– két négyzetszám osztója van, a $2^2 = 4$, és természetesen az 1 is (de az minden számnak osztója).

5. példa

Írjuk fel a 784-et prímtényezők szorzataként!

Megoldás

Elvégezzük a prímtényezős felbontást:

784	2
392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	



Észrevehetjük, hogy a prímtényezős felbontásban a prímszámok a saját „ikertestvérükkel” együtt szerepelnek, akárcsak egy ikerház ablakaiba kiültetett virágok.

A $784 = 2^4 \cdot 7^2 = (2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 7) = 28 \cdot 28$, azaz a 784 két egyenlő szám szorzataként is felírható. Az ilyen számokat **négyzetszámoknak** nevezzük.

Látható, hogy a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímszám kitevője páros szám.

6. példa

Határozzuk meg a 180 osztóinak számát!

Megoldás

Az osztók meghatározására két eljárást mutatunk.

a) Osztópárokat készítünk:

Osztó	1	2	3	4	5	6	9	10	12
Párja	180	90	60	45	36	30	20	18	15

Tehát 18 osztót találtunk, melyekből 16 valódi osztója a 180-nak.

b) Prímtényezős felbontást készítünk:

180	2	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
90	2	Osztókat akkor kapunk, ha a prímtéglákból választunk. Lehetőségeink:
45	3	A 2-es prímtéglából nem választunk, 1-et vagy 2-t választunk.
15	3	A 3-as prímtéglából nem választunk, 1-et vagy 2-t választunk.
5	5	Az 5-ös prímtéglából nem választunk, vagy 1-et választunk.
1		Mivel bármelyik prímtéglát bármelyikkel „összemalterozhatjuk”, azaz összeszorozhatjuk, így a szám egy-egy osztóját kapjuk. Így összesen $3 \cdot 3 \cdot 2$ lehetőségünk van, ezért az osztók száma: 18.

Az osztók: $1,\ 2,\ 2^2,\ 3,\ 3^2,\ 5,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2;\ 2^2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 5,\ 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 3^2 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$

Képzeljünk el egy országot, ahol a gyerekek csak a pozitív páros számokat tanulják: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,... Nevezzük el ezt „páros országnak”. Itt a 2, 6, 10, 14,... számok a törzsszámok, hiszen nem bonthatók fel két páros szám szorzatára, azaz nagyon szabályosan követik egymást, nem úgy, mint a mi prímjeink.

A 4-gyel osztható páros számok természetesen felbonthatók páros számok szorzatára, azaz összetett számok: $4 = 2 \cdot 2,$ $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2,$ $12 = 2 \cdot 6 \ldots$

Páros országban az összetett számok felbontása törzsszámok szorzatára nem egyértelmű, mert van olyan szám, amelyet többféleképpen fel tudjuk írni prímszámok szorzataként.

Például: $36 = 2 \cdot 18$ vagy $36 = 6 \cdot 6.$

Itt még a maradékos osztás is „nagyon vicces”, mert mi megszoktuk, hogy a maradékos osztásnál a maradék kisebb az osztónál, de itt bármi történhet:

Például: $10 : 4 = 2,$ a maradék kisebb az osztónál. (2)

$18 : 6 = 2,$ a maradék és az osztó egyenlő. (6)

$22 : 4 = 4,$ a maradék nagyobb az osztónál. (6)

Feladatok

1. Keresd ki a prímtáblázatból

a) a 23-adik, *b)* a 40-edik, *c)* a 162-edik, *d)* a 195-ödik prímszámot!

2. Hányadik prímszám?

a) 53 *b)* 293 *c)* 757 *d)* 1051

3. Melyek prímek a következő számhalmaz tagjai közül? {1; 11; 111; 1111}

4. Hány olyan prímszám van, amely
a) kisebb 200-nál, *b)* kisebb 500-nál, *c)* 300 és 600 közé esik?

5. A szomszédos páratlan prímszámokat, mint például a 11-et és a 13-at; vagy a 29-et és a 31-et **ikerprímeknek** nevezzük.
a) Hány ikerprímszám van 1000 és 1100 között?
b) Mutasd meg, hogy az 1217-nek nincs ikerprím párja!
c) Keress hármas ikerpímeket, és próbáld megindokolni, hogy miért találtál nagyon keveset!

6. Építsd fel szorzással az adott prímtéglákból a lehető legnagyobb számot! Keresd meg a szám valódi osztóit!
a) 2 3 5 *b)* 2 3 3 *c)* 2 2 5 5

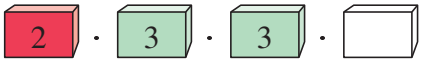
7. Építsd fel szorzással az adott prímtéglákból a lehető legnagyobb számot! Ezután ugyanezekből a prímtéglákból építs csak 2 téglát tartalmazó számokat! Az így kapott számok osztói-e az eredetinek? Ha igen, akkor hányszor vannak meg benne?
a) 5 7 19 *b)* 71 73 79 *c)* 41 41 43

8. Egy szám prímtényezős felbontása $2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$. A szorzás elvégzése nélkül döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások! A szám
a) páros, *b)* osztható 9-cel, *c)* a 18-nak $(17 \cdot 19)$-szerese, *d)* négyzetszám.

9. Egy szám prímtényezős felbontása $2^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 23$. A szorzás elvégzése nélkül döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások!
a) A szám páratlan. *b)* A szám nullára végződik.
c) A szám osztható 26-tal. *d)* A számot 23-mal osztva a hányados páratlan szám.
Hány igaz állítást találtál? Az igaz állítások száma:
A) 1; *B)* 2; *C)* 3; *D)* 4.

10. Egy számból egy másik számot úgy kapunk, hogy megszorozzuk $2 \cdot 3 \cdot 3$-mal.
a) Írj két ilyen számot!
b) Írj két ilyen 5-tel osztható számot!
c) Lehetséges-e, hogy csak a kisebb szám osztható 7-tel?
d) Lehetséges-e, hogy a nagyobb szám többszöröse a 12-nek?
e) Melyik az a legkisebb szám, amelyre a nagyobb szám négyzetszám lesz?

11. Csak 2 3 5 11 prímtégláink vannak, viszont mindegyikből több is. Egy leesett a 11 · 5 · 5 · □ szorzat végéről. Tedd vissza a helyére úgy, hogy a szám
a) páros; *b)* 15-tel osztható; *c)* 11-nek többszöröse;
d) 6-tal osztható; *e)* 5-tel osztható legyen; *f)* négyzetszám legyen!

12. Pótold a hiányzó prímtéglát úgy, hogy a 

szám

a) páros legyen, *b)* négyzetszám legyen,
c) a 11 éppen 18-szor legyen meg benne, *d)* 12-vel osztható legyen,
e) többszöröse legyen a 10-nek, *f)* osztható legyen 283-mal!

13. Bontsd prímszámok szorzatára a számokat!

a) 56 *b)* 64 *c)* 84 *d)* 269 *e)* 1125 *f)* 17 595

14. Hány osztójuk van a számoknak?

a) 18 *b)* 30 *c)* 151 *d)* $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ *e)* 2^3 *f)* 10^3

15. Hány valódi osztójuk van a következő számoknak?

a) 72 *b)* 225 *c)* 1452 *d)* 1031 *e)* 3^4 *f)* 10^3

16. Melyik az a szám, amelynek csak ezek a számok a valódi osztói?

a) 3, 7 *b)* 2, 3, 6 *c)* 2, 4, 8, 16 *d)* 2, 17, 34 *e)* 2, 3, 6, 7, 14, 21

17. Ebben a feladatban csak négyzetszámok szerepelnek. Add meg, hogy hány osztójuk van! Milyen érdekességet figyelhetsz meg az osztók számában?

a) 4 *b)* 25 *c)* 100 *d)* $2^2 \cdot 3^2$ *e)* $3^4 \cdot 5^2$ *f)* 10^4

18. Hány 100-nál kisebb pozitív egész számnak van páratlan számú osztója?

19. Melyik állítás igaz, és melyik hamis?

a) A $3^3 \cdot 5$ szám osztható 27-tel.
b) Ha egy szám osztható 3-mal és 12-vel, akkor osztható 36-tal is.
c) Ha egy szám osztható 5-tel, 6-tal és 7-tel, akkor osztható $5 \cdot 6 \cdot 7$-tel is.
d) Ha egy szám osztható 5-tel, 10-zel és 7-tel, akkor osztható $5 \cdot 10 \cdot 7$-tel is.
e) A $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ szám négyzetszám.
f) A $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ szám nem négyzetszám és nem köbszám.
g) A $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ számot egy prímszámmal megszorozva kaphatunk négyzetszámot.

20. Legyen n természetes szám! Töltsd ki a füzetedben a táblázatot! Milyen érdekes tulajdonsága van az első 10 számnak?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n \cdot (n-1) + 11$	11	13										

21. Válassz egy tetszőleges prímszámot, és vedd ezt a prímszámot a kisebb és a nagyobb szomszédjával együtt! Mivel osztható biztosan ennek a három szomszédos számnak

a) az összege, *b)* a szorzata?

22. Vizsgáld meg, hogy milyen számmal osztható

a) két, *b)* három, *c)* négy,
d) öt egymást követő természetes szám szorzata!

A legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös

1. példa

A Szabó család elhatározta, hogy nyáron felújítja a fürdőszobát. Olyan méretű négyzet alakú burkolólapokat akarnak vásárolni, amellyel a lapok vágása nélkül pontosan le tudják fedni a padlót. A fürdőszoba 5,2 m hosszú és 4,68 m széles.

Milyet választhatnak az óriási kínálatból, ha a burkolólapok hossza cm-ben mérve egész szám?



Megoldás

Az 5,2 m = 520 cm hosszúságú és 4,68 m = 468 cm széles fürdőszoba lefedéséhez olyan burkolólapok alkalmasak, melyek mérőszáma egész számszor megvan az előző két számban, azaz mindkettőnek osztója.

520 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 13, 20, 26, 40, 52, 65, 104, 130, 260, 520

468 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 13, 18, 26, 36, 39, 52, 78, 117, 156, 234, 468

A két szám közös osztói: 1, 2, 4, 13, 26, 52. Ekkora lehet a megvásárolandó négyzet alakú burkolólapok oldalhossza centiméterben. Közülük a legnagyobb az 52. Szabóék hatféle burkolólap közül választhatnak.

A számok prímtényezős felbontása segít a közös osztók felírásában is.

$520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$ $\quad 468 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$

A közös osztók csak közös prímtényezőket tartalmazhatnak.

A két szám közös prímtényezői 2, 2, 3, ezért a két szám legnagyobb közös osztója $2 \cdot 2 \cdot 13 = 52$.

Jelöléssel: $(468; 520) = 52$

Természetesen a $2^2 \cdot 13 = 52$ összes osztója mindkét számnak közös osztója.

Több szám közös osztói az adott számok mindegyikének osztói. A legnagyobb közös osztót a számok közös prímtényezőinek szorzataként kapjuk meg. A **legnagyobb közös osztó** többszöröse a közös osztók mindegyikének.

A számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával egy lépésben egyszerűsíthetjük a törteket:

$$\frac{468}{520} = \frac{468 : 52}{520 : 52} = \frac{9}{10}$$

A tört legegyszerűbb (tovább már nem egyszerűsíthető) alakját úgy kapjuk meg, ha a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával egyszerűsítünk. Ebben az esetben ez a szám az 52.

A kapott tört számlálójának és nevezőjének a legnagyobb közös osztója 1. Most $(9; 10) = 1$.

Ha a számok prímtényezős szorzat alakjában nincs közös prímtényező, akkor azokat **relatív** (viszonylagos) **prímeknek** nevezzük. Ezek legnagyobb közös osztója 1.

2. példa



Trevor Hutton, a világ talán leghíresebb könnyűbúvára felszerelés nélkül, egyetlen lélegzetvétellel 6 és fél percig képes a víz alatt tartózkodni.

Egy átlagos tüdejű nő 40 másodpercig, egy férfi 1 perc 10 másodpercig képes ugyanerre. Ha egy ilyen teljesítményű házaspár egyszerre merül le a vízbe, és levegővétel után ezt többször megismétlik, akkor hány másodperc múlva vesznek egyszerre levegőt mindketten?

Megoldás

Olyan számokat kell keresnünk, amelyek mindkét számnak többszörösei, azaz a 40-nek és az 1 perc 10 másodpercnek, vagyis a 70-nek.

40 többszörösei: 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, 440, 480, 520, 560, …

70 többszörösei: 70, 140, 210, 280, 350, 420, 490, 560, 630, 700, 770, 840, 910, …

Először 280 másodperc ($4\frac{2}{3}$ perc) múlva vesznek mindketten egyszerre levegőt, majd 560 másodperc ($9\frac{1}{3}$ perc) múlva…

A két szám közös többszörösei adják a feladat megoldását, amelyek közül az emberi kifáradást is figyelembe véve a legkisebb érték a reális.

A számok prímtényezős felbontása segít a közös többszörösök felírásában.

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$ $\qquad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

A közös többszörösnek mindkét szám osztója, ezért a közös többszörösnek tartalmaznia kell mindkét szám összes prímtényezőjét: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

A 280 összes többszöröse osztható az eredeti két számmal, ez a két szám legkisebb közös többszöröse.

Jelöléssel: $[40; 70] = 280$ Hatvány alakban leírva: $\left[2^3 \cdot 5; 2 \cdot 5 \cdot 7\right] = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

Két (vagy több) számnak végtelen sok közös többszöröse van. A közös többszörösök közül a legkisebbet a számok **legkisebb közös többszörösének** nevezzük, ez a számok összes többi közös többszörösének osztója.

A legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontásában az egyes számokban előforduló összes prímtényező szerepel.

A nevezők legkisebb közös többszörösének meghatározásával célszerű a törtek közös nevezőjét meghatározni, majd összeadni és kivonni az így kapott törteket.

$$\frac{9}{40} + \frac{3}{70} = \frac{9 \cdot 7}{40 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{70 \cdot 4} = \frac{63 + 12}{280} = \frac{75}{280} = \frac{15}{56}$$

3. példa

Határozzuk meg az a, b, c, d számokat!

a) $\left(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = a$

b) $\left[2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7\right] = b$

c) $\left(2 \cdot 3 \cdot 5^2;\ c\right) = 2 \cdot 3$

d) $\left[2 \cdot 3 \cdot 5^2;\ d\right] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Megoldás

a) A két szám legnagyobb közös osztója mindkét számnak osztója, és a közös osztók közül a legnagyobb. Így a közös prímtényezőket kell keresnünk a legkisebb kitevővel, és azok szorzatát vesszük:

$$\left(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = \left(2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7\right) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 = a$$

b) A két szám legkisebb közös többszöröse mindkét számnak többszöröse. Így azokat a prímszámokat kell összeszoroznunk, amelyek legalább az egyik számban előfordulnak, a közös tényezők közül a nagyobb kitevővel.

$$\left[2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7\right] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12\,600$$

$$\left(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\left[2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7\right] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

A két szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse együtt a két szám összes prímtényezőjét tartalmazza, ezért azok szorzata éppen a két szám szorzata.

$$(a;b) \cdot [a;b] = a \cdot b$$

c) Mivel a legnagyobb közös osztó mindkét számnak osztója, ezért a benne szereplő prímtényezők mindkét számban megtalálhatók.

c prímtényezői: 2 és 3, és nem tartalmazhat 5-ös prímtényezőt, mert akkor az 5 szerepelne a legnagyobb közös osztóban is. Bármilyen más prímszám szerepelhet c prímtényezős felbontásában, mert az első szám miatt úgysem kerülhet be a legnagyobb közös osztóba. Így a feladatnak végtelen sok megoldása van.

$c \in \left\{2 \cdot 3;\ 2 \cdot 3 \cdot 7;\ 2^2 \cdot 3;\ 2^2 \cdot 3^5;\ 2 \cdot 3 \cdot 17;\ 2 \cdot 3 \cdot n,\ \text{ahol } n \text{ nem többszöröse az 5-nek}\right\}$

d) A legkisebb közös többszörös prímtényezőit a számok prímtényezői adják a lehető legnagyobb kitevővel.

Így d-nek tartalmaznia kell a 2^2-t és a 3^2-t, mert ezeket az első szám nem tartalmazza. Ha a $2^2 \cdot 3^2$-hez hozzávesszük még az 5-öt vagy az 5^2-t, az nem befolyásolja a két szám legkisebb közös többszörösét, de bármilyen újabb prím bevétele már megjelenne a legkisebb közös többszörösben is:

$d \in \{2^2 \cdot 3^2;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2\}$

Feladatok

1. Keresd meg a következő számpárok közös osztóit! Van-e relatív prím számpár a felsoroltak között?

a) 18 és 48 *b)* 120 és 77 *c)* 35 és 49 *d)* 315 és 150

2. Keresd meg a következő számpárok legnagyobb közös osztóját!

a) (12; 24) *b)* (60; 45) *c)* (25; 200) *d)* (64; 27) *e)* (784; 504)

3. Határozd meg a következő számhármasok legnagyobb közös osztóját!

a) (12; 24; 36) *b)* (60; 72; 81) *c)* (60; 100; 540) *d)* (21; 45; 105)

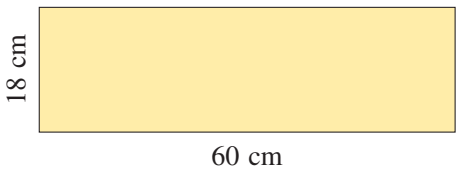
4. Egyszerűsítsd a törteket vagy a számláló és a nevező prímtényezős felbontásával, vagy a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójának megkeresésével!

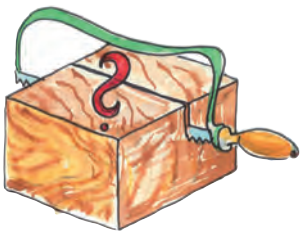
a) $\frac{45}{90}$ *b)* $\frac{323}{391}$ *c)* $\frac{252}{63}$ *d)* $\frac{340}{720}$ *e)* $\frac{504}{784}$ *f)* $\frac{339}{669}$

5. Keresd meg a legnagyobb közös osztójukat a prímtényezős felbontásban megadott számoknak!

a) $\left(2^3; 3^2\right)$ *b)* $\left(2 \cdot 3^2 \cdot 7; 3 \cdot 7^2\right)$ *c)* $\left(17 \cdot 23; 23^2\right)$ *d)* $\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3; 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\right)$

6. Egy téglalap oldalai 60 cm, illetve 18 cm hosszúak.
Milyen egész oldalhosszúságú négyzetlapokkal lehet pontosan lefedni a téglalapot? Melyik négyzetlapból hány kell?



7. 

Egy fából készült téglatest élei 72 cm, 64 cm és 48 cm hosszúak. Mekkora egész cm oldalhosszúságú kis fakockákra lehet szétfűrészelni? Hány kis kocka keletkezik?



8. Hány alsó tagozatos gyereknek készítettek Mikulás-ajándékcsomagokat a hetedikesek, ha minden csomag teljesen egyforma volt, és összesen 135 szaloncukrot, 81 csokiszeletet és 216 tejkaramellát osztottak szét?

9. Számítsd ki a következő számpárok legkisebb közös többszörösét!

a) 13 és 26 *b)* 24 és 60 *c)* 128 és 96 *d)* 135 és 225 *e)* 175 és 1250

10. Határozd meg a következő számhármasok legkisebb közös többszörösét!

a) [2; 7; 8] *b)* [6; 7; 8] *c)* [8; 45; 90] *d)* [15; 16; 17]

11. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{9}{34} + \frac{43}{102}$ *b)* $\frac{29}{186} - \frac{16}{93}$ *c)* $\frac{131}{462} + \frac{57}{66}$ *d)* $\frac{17}{424} - \frac{23}{312}$

12. Keresd meg a legkisebb közös többszörösüket a prímtényezős felbontásban megadott számoknak!

a) $\left[2^2 \cdot 3; 2 \cdot 3^2\right]$ *b)* $\left[3^3 \cdot 5 \cdot 7; 5^2 \cdot 13\right]$

c) $\left[2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2; 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2\right]$ *d)* $\left[13 \cdot 17^2; 17 \cdot 19^2\right]$

13. Két űrhajó kering a Föld körül azonos irányban. Az egyik 90, a másik 120 perc alatt tesz meg egy teljes kört. Ha most mindketten a rajzon látható helyzetben vannak, akkor mennyi idő múlva lesznek ugyanebben a helyzetben ismét?



14. Keresd meg a két szám legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét! Hasonlítsd össze a szorzatukat a két eredeti szám szorzatával!

a) 12 és 36 *b)* 72 és 300 *c)* $2^3 \cdot 3$ és $2^2 \cdot 3^2$ *d)* $2 \cdot 5 \cdot 7^2$ és $2^2 \cdot 3 \cdot 7$

15. Milyen oldalhosszúságú négyzeteket lehet parkettázni 9 cm, illetve 12 cm oldalhosszúságú négyzetekkel is? Melyik a legrövidebb oldalhosszúságú ilyen négyzet? Van-e a négyzetek között olyan, amelynek oldalhossza 100 és 200 cm közé esik?

16. Kosárlabda erőnléti edzésen a gyerekeknek egy lépcsőn kell felfutniuk. A lányoknak kettesével, a fiúknak hármasával kell eljutni a Zerge lépcső tetejére, amely 52 lépcsőfokból áll.

Írd le, hogy melyek azok a lépcsőfokok, amelyekre a lányok és a fiúk is rálépnek!



@ Nézz utána, hogy Magyarországon kiknek rendeznek rendszeresen lépcsőfutóversenyt, és hogy körülbelül hány lépcsőn kell felfutniuk, és milyen körülmények között!

17. Két relatív prím legkisebb közös többszöröse 24. Melyik lehet ez a két szám?

18. Két páros szám legkisebb közös többszöröse $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. Mi lehet ez a két szám?

19. Keresd meg a számok legnagyobb közös osztóját!

a) $\left(3^3 \cdot 17;\ 3^2 \cdot 17 \cdot 19;\ 3 \cdot 19\right)$ *b)* $\left(37 \cdot 41^2;\ 41 \cdot 43^2;\ 41^2 \cdot 47\right)$

20. Ezek a számkártyáid vannak: 2, 3 és 7

Írd fel a belőlük készíthető összes háromjegyű számot (egy számhoz mind a három kártyát fel kell használnod)! Mennyi az így kapott számok legnagyobb közös osztója?

★ **21.** Aladár és Benedek már évtizedek óta nem látták egymást. Mindketten nagyon okosak, és ezt tudják is egymásról. Most, hogy újra összefutottak, Aladár megkérdezte, hány gyereke van Benedeknek, és hány évesek. Benedek csak annyit árult el, hogy három gyereke van, mindegyikük életkora egész szám, és éveik számának szorzata 36. Aladár rövid gondolkodás után azt mondta, hogy ebből még nem tudja megállapítani, hány évesek a gyerekek.



Ekkor Benedek még azt is elárulta, hogy a gyerekek évei számának összege annyi, mint a szemközti házon az ablakok száma. Aladár összeszámolta az ablakokat, gondolkodott még egy kicsit, majd azt felelte, hogy még mindig nem tudhatja, hány évesek a gyerekek. Ekkor Benedek hozzátette, hogy gyermekei közül a legidősebb vörös hajú, és szemüveget visel.

– Most már tudom! – kiáltott fel Aladár, és megmondta a három gyerek életkorát.

Hány évesek a gyerekek, és hány ablak van a szemközti házon?

22. Melyik az a két szám, amelyek legkisebb közös többszöröse 120, a számok szorzatának ötszöröse pedig négyzetszám?

23. Egy hegyesszögű háromszög három szöge közül az egyik 8-cal, a másik 9-cel, a harmadik 12-vel osztható. Hány fokosak a háromszög szögei?

(Forrás: Bergengóc példatár 1., Typotex, Budapest, 2006.)

Tudáspróba

1. Írd le a 180 összes osztóját!

a) Pirossal karikázd be a valódi osztóit! *b)* Kékkel karikázd be a prímosztóit!

2. Pótold a hiányzó számkártyákat úgy, hogy a kapott számok oszthatók legyenek a táblázatban szereplő értékekkel!

	4-gyel	5-tel	10-zel	6-tal	8-cal
715□					
63□5					

3. Másold át a füzetedbe a táblázatot és töltsd ki!

$(84; 96) =$	$(116; 261) =$
$[84; 96] =$	$[116; 261] =$
$\frac{84}{96} =$	$\frac{261}{116} =$
$\frac{13}{84} + \frac{23}{96} =$	$\frac{61}{116} - \frac{29}{261} =$

4. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, és melyik hamis!

a) Ha egy szám nem osztható 6-tal, akkor 3-mal sem osztható.

b) Ha egy szám nem osztható 3-mal, akkor 6-tal sem osztható.

c) A 7-tel nem osztható számok 7-tel osztva hatféle maradékot adhatnak.

d) Két relatív prím legkisebb közös többszöröse a számok szorzata.

e) A négyzetszámok prímtényezős felbontásában a 2 hatványkitevője páros szám.

f) A 3^{10} szám páros.

5. Mennyi a valószínűsége, hogy a 2, 3, 4 számkártyákból véletlenszerűen kirakott háromjegyű szám osztható

a) 2-vel, *b)* 4-gyel, *c)* 3-mal, *d)* 5-tel, *e)* 6-tal?

A sokszögek és a kör

A háromszögszerkesztések egyértelműsége

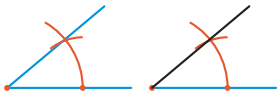
Alapszerkesztések

Síkbeli alakzatokat többféleképpen állíthatunk elő, többféle eszközzel rajzolhatunk meg. Euklideszi szerkesztéssel oldottuk meg a következő feladatokat.

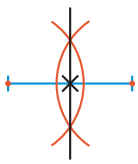
1. Szakaszmásolás:



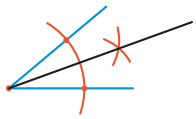
2. Szögmásolás:



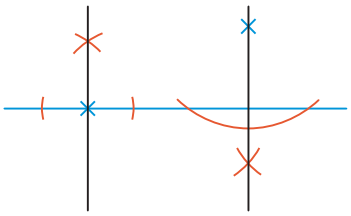
3. Szakasz felezőpontjának és felező merőlegesének szerkesztése:



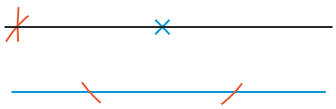
4. Szögfelező szerkesztése:



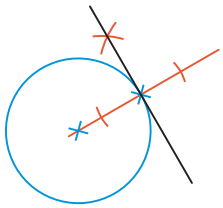
5–6. Adott pontból adott egyenesre állított merőleges egyenes szerkesztése:



7. Adott ponton áthaladó, adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése:



8. Kör érintőjének szerkesztése adott érintési pont esetén:



Ezeket az alapszerkesztéseket a későbbiekben nem részletezzük.

Keress adatokat Eukleidész alexandriai matematikus életéről, munkásságáról az internet segítségével! Ismételd át, hogy melyek az euklideszi szerkesztés szabályai, melyik két szerkesztőeszköz használata és melyik hat alaplépés a megengedett!

Háromszög szerkesztése három adatból

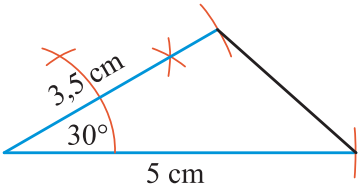
1. példa

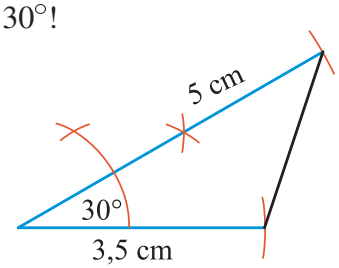
Szerkesszünk olyan háromszöget, amelynek két oldala 3,5 cm, illetve 5 cm hosszú, egyik szöge pedig 30°!

Megoldás

A szerkesztésekben az egybevágó megoldásokat nem tekintjük különbözőnek. A feladatnak különböző háromszögek a megoldásai aszerint, hogy melyik oldallal szemközti szögnek tekintjük a megadott 30°-os szöget.

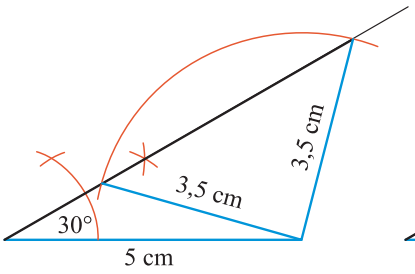
Legyen a két oldal közbezárt szöge a 30°!

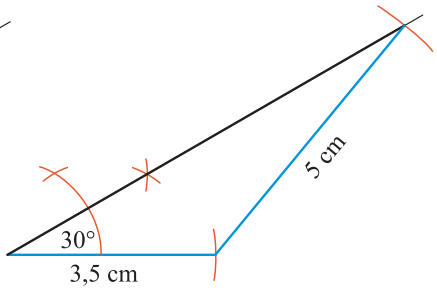




Ebben a két esetben ugyanolyan lett a megszerkesztett háromszög, bár a két oldalát eltérő sorrendben szerkesztettük meg.

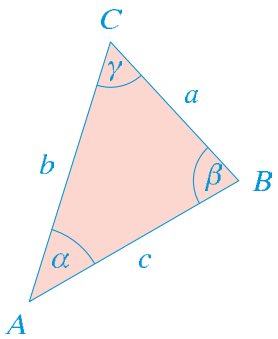
Legyen a 3,5 cm-es, illetve az 5 cm-es oldallal szemközti szög a 30°!



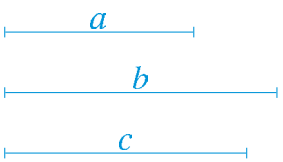


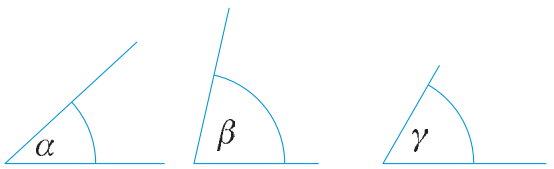
Ebben a két esetben újabb három háromszöget szerkesztettünk az adatoknak megfelelően. A feladatnak tehát négy különböző háromszög a megoldása.

2. példa



Ismerjük az ABC háromszög szögeit és oldalait.



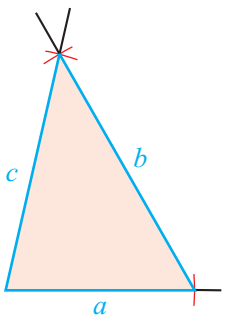


Szerkeszthetünk-e ugyanilyen háromszöget, ha tetszőlegesen választunk ki az adatokból hármat? Egyértelmű-e a szerkesztés?

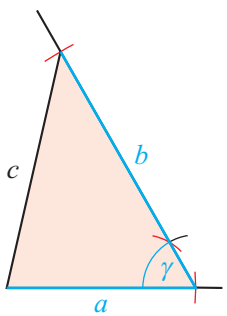
Megoldás

A háromszögszerkesztést egyértelműnek nevezik, ha a megadott adatokból szerkesztett összes háromszög egybevágó lesz.

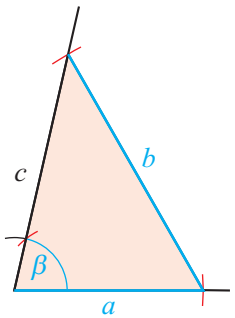
I. Az adatok: a, b, c II. Az adatok: a, b, γ III. Az adatok: a, b, β IV. Az adatok: a, β, γ



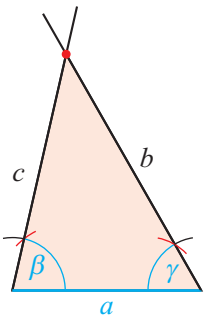
Egyértelmű a szerkesztés, ha adott a háromszög három oldala.



Egyértelmű a szerkesztés akkor is, ha a két oldal és a közrezárt szög adott.



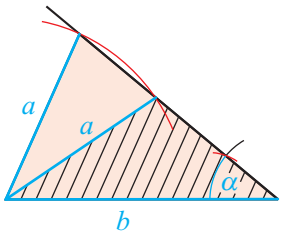
Egyértelmű a szerkesztés, ha a két oldal és a nagyobbal szemközti szög adott.



Egyértelműen megszerkeszthető a háromszög, ha adott valamelyik oldala és az azon lévő két szöge.

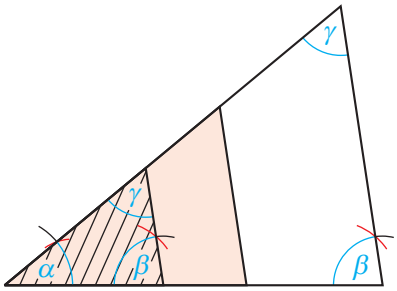
A fenti négy esetben, a megadott adatokkal szerkesztett háromszögek mind egybevágók.

V. Az adatok: a, b, α



Ezekkel az adatokkal 2 megoldás van. Megadható két szakasz és egy konvex szög úgy is, hogy egyféle háromszög a megoldás, illetve úgy is, hogy nem szerkeszthető belőlük háromszög. Nem egyértelmű a háromszögszerkesztés, ha két oldal és a rövidebbel szemközti szög adott.

VI. Az adatok: α, β, γ



Több megoldás van. Nem egyértelmű a háromszögszerkesztés, ha a háromszög három szöge adott.

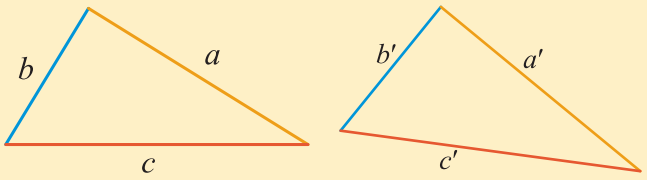
Ebben a két esetben nem csak egybevágó háromszögek adódhatnak.

Két háromszög egybevágósága megállapítható a háromszöget egyértelműen meghatározó adatok egyenlőségét vizsgálva.

A háromszögek egybevágóságának négy alapesete

I. Két háromszög egybevágó, ha oldalaik páronként egyenlők.

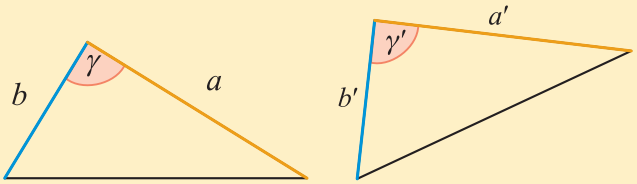
$a = a'$
$b = b'$
$c = c'$



$a + b > c$

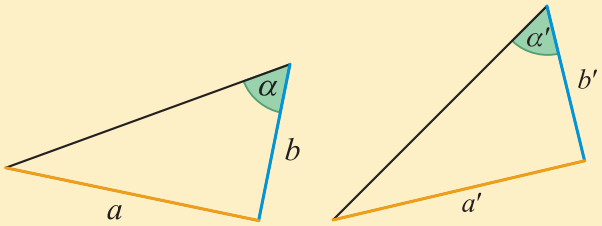
II. Két háromszög egybevágó, ha két oldaluk és az általuk közrezárt szög páronként egyenlő.

$a = a'$
$b = b'$
$\gamma = \gamma'$



III. Két háromszög egybevágó, ha két oldaluk és a hosszabbikkal szemközti szögük páronként egyenlő.

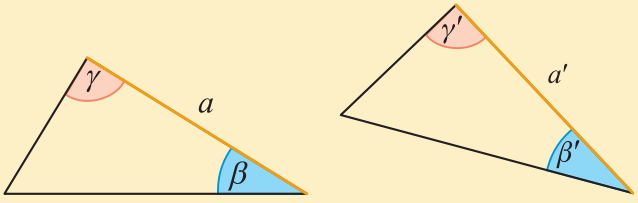
$a = a'$
$b = b'$
$\alpha = \alpha'$



$a > b$

IV. Két háromszög egybevágó, ha egy oldaluk és az azon levő két szögük páronként egyenlő.

$a = a'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$

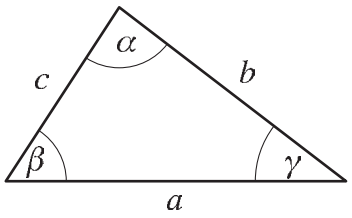


$\beta + \gamma < 180°$

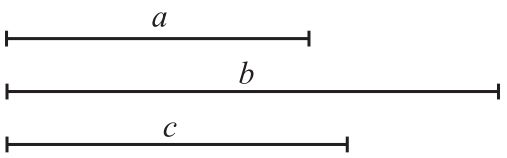
Feladatok

A következő négy feladatban szerkessz háromszöget a megadott oldalak és szögek ismeretében! Hányféle háromszög szerkeszthető?

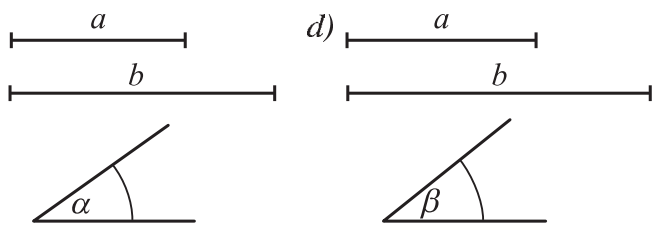
A szerkesztéseket a vázlaton használt jelöléseknek megfelelő adatokkal végezd!



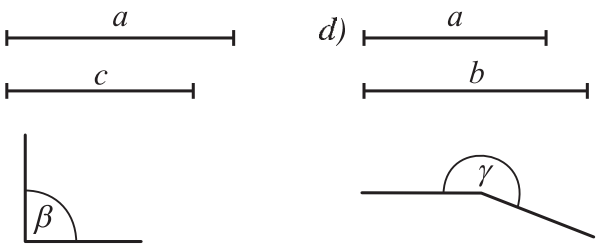
1. *a)* $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm *b)* $a = 6$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm *c)*



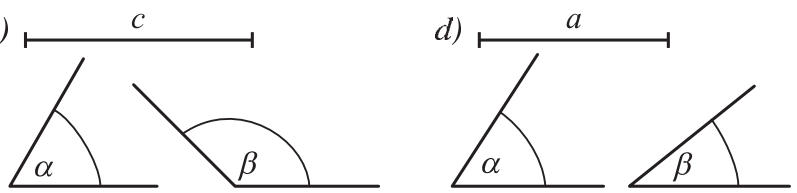
2. *a)* $a = 3{,}5$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 105°$ *b)* $a = 4$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 120°$ *c)* *d)*



3. *a)* $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 60°$ *b)* $b = 2$ cm, $c = 3$ cm, $\alpha = 135°$ *c)* *d)*



4. *a)* $a = 4$ cm, $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ *b)* $b = 3{,}5$ cm, $\alpha = 67{,}5°$, $\gamma = 45°$ *c)* *d)*



5. Egybevágó-e az a két háromszög, amelyeknek két oldala 5 cm és 7 cm, és az 5 cm-es oldallal szemben 30°-os szögük van? Válaszodat ellenőrizd szerkesztéssel!

6. Egybevágó-e két derékszögű háromszög, ha páronként egyenlő

a) a két befogójuk, *b)* az egyik hegyesszögük,

c) az átfogójuk és az egyik hegyesszögük, *d)* az átfogójuk és az egyik befogójuk?

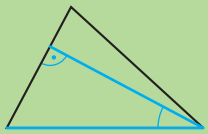
7. Egybevágó-e két tükrös háromszög, ha páronként egyenlő

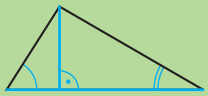
a) az alapjuk és a száruk, *b)* a száruk és az alapon fekvő szögük,

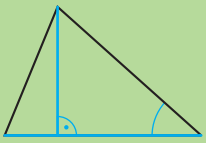
c) a száruk és az egyik szögük, *d)* az alapjuk és a szárszögük?

8. Hány adat szükséges az egyenlő szárú derékszögű háromszög szerkesztéséhez?

9. Két háromszögben a megjelölt szögek és vonalak egyenlők. Egybevágó-e a két háromszög?

a) 

b) 

c) 

10. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai egy adott kocka csúcsai? Hányféle nem egybevágó háromszög van közöttük?

a) Hányféle háromszögnek lesz az egyik oldala a kocka egyik éle?

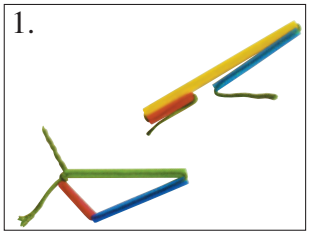
b) Hányféle háromszögnek lesz az egyik oldala a kocka egyik lapátlója?

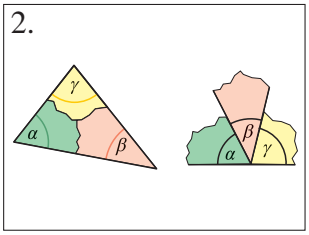
c) Hányféle háromszögnek lesz az egyik oldala a kocka egyik testátlója?

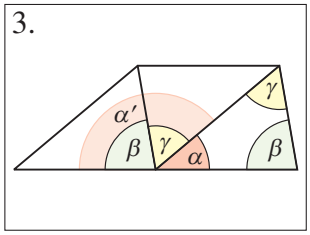
11. Hányféle háromszöget határoz meg egy négyzetes oszlop valamelyik három csúcsa?

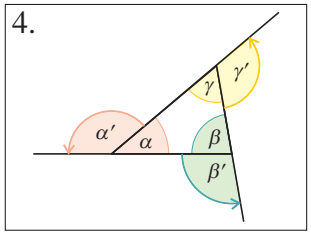
A háromszögek szögei és oldalai

Hajtogatás, parkettázás, szerkesztés és szögmásolás közben tapasztalhattuk, hogy összefüggés van a háromszög oldalai között (1. ábra), illetve a háromszög szögei között (2., 3., 4. ábra).

1. 

2. 

3. 

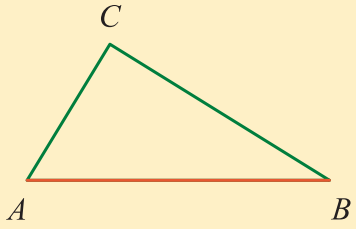
4. 

Ebben a részben megmutatjuk a tapasztalatok alapján megfogalmazott összefüggésekről, hogy minden háromszög esetén helytállóak, vagyis bizonyítjuk az állítások egy részét.

Kapcsolat a háromszög oldalai között

A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

$$AC + CB > AB$$



Az $AC + CB$ töröttvonal hossza nagyobb, mint az AB szakasz hossza, azaz igaz, hogy $AC + CB > AB$.

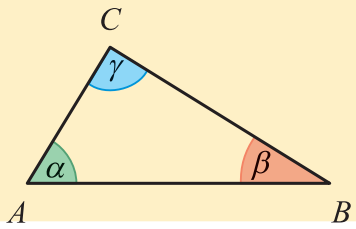
Hasonlóan igaz, hogy $AC + AB > BC$ és $AB + BC > AC$.

Tehát két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

Kapcsolat a háromszög belső szögei között

A háromszög belső szögeinek összege 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Bizonyítás: A párhuzamos szárú szögek tulajdonságait felhasználva bizonyíthatjuk az állítást.

A háromszög belső szögeit α, β, γ jelöli.
Húzzunk az AB oldal egyenesével párhuzamos egyenest a C csúcson át!

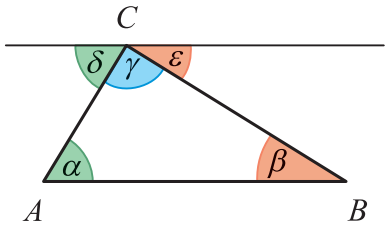
Az α és a δ fordított állású szögpárt alkot, ezért $\alpha = \delta$.

A β és az ε is fordított állású szögpár, ezért $\beta = \varepsilon$.

A C csúcsnál lévő három szög egyenesszöget alkot, ezért

$\delta + \gamma + \varepsilon = \alpha + \gamma + \beta = 180°$

Tehát igaz az állítás, a belső szögek összege 180°.

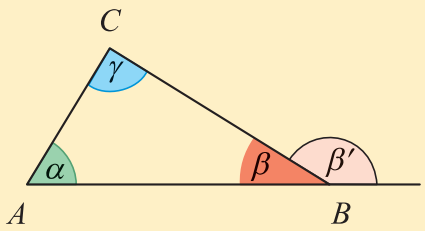


Ebből következik, hogy a háromszög bármely két belső szögének összege kisebb 180°-nál.

Kapcsolat a háromszög belső és külső szögei között

A háromszög bármely külső szöge egyenlő a szöggel nem szomszédos két belső szög összegével.

$\alpha + \gamma = \beta'$



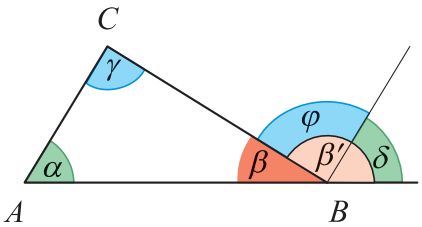
Bizonyítás:

A párhuzamos szárú szögek tulajdonságait felhasználva bizonyíthatjuk az állítást.
A háromszög belső szögeit α, β, γ, megfelelő külső szögeit α', β', γ' jelöli.
Húzzunk az AC oldal egyenesével párhuzamos félegyenest a B csúcsból az ábra szerint!

A γ és a φ fordított állású szögek, ezért $\gamma = \varphi$.

Az α és a δ egyállású szögek, ezért $\alpha = \delta$.

Az ábráról leolvasható, hogy $\beta' = \varphi + \delta = \gamma + \alpha$

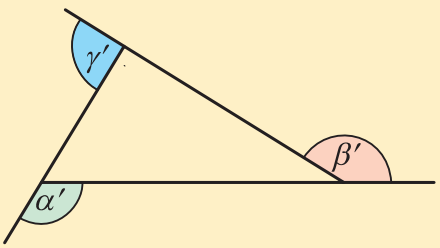


Ezzel bebizonyítottuk, hogy a β' külső szög egyenlő a vele nem szomszédos α és γ belső szög összegével.
Hasonlóan belátható, hogy $\alpha' = \beta + \gamma$, illetve $\gamma' = \alpha + \beta$.
Ebből következik, hogy a háromszög bármely külső szöge nagyobb a vele nem szomszédos külső szögeknél.

Kapcsolat a háromszög külső szögei között

A háromszög három külső szögének összege 360°.

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$



Bizonyítás: Az előző két állítást alkalmazzuk a bizonyításban.
A külső és a belső szögek közötti összefüggés miatt: $\beta' = \alpha + \gamma \quad \alpha' = \beta + \gamma \quad \gamma' = \alpha + \beta$
A belső szögek összegére vonatkozó összefüggés: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\alpha' + \beta' + \gamma' = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) = 180° + 180° = 360°$
Beláttuk, hogy a három külső szög összege 360°.

Kapcsolat a háromszög szögei és oldalai között

Ugyanazon háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, és a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van, mint a rövidebb oldallal szemben.

Feladatok

1. Egy háromszög két oldalának hossza 6 cm és 8 cm. Lehet-e a harmadik oldal

a) 1 cm, *b)* 2 cm, *c)* 4 cm, *d)* 16 cm?

2. Egy háromszög két oldalának hossza 4 cm és 6 cm.
Mekkora lehet a harmadik oldal? Ábrázold számegyenesen a lehetséges oldalhosszakat!

3. Mekkorák az oldalai egy 18 cm kerületű háromszögnek, ha az oldalak aránya

a) 2 : 3 : 4, *b)* 2 : 2 : 5, *c)* 4 : 7 : 7, *d)* 1 : 1 : 2?

4. Mekkorák a háromszög szögei, ha belső szögeinek aránya

a) 1 : 1 : 2, *b)* 2 : 3 : 4, *c)* 2 : 3 : 5, *d)* 4 : 7 : 7?

5. Egy sorozat első két tagja 1. A további tagokat úgy számíthatod ki, hogy az előző két tag összegét veszed: 1, 1, 2, 3, 5...

a) Írd fel a sorozat első 15 tagját!

b) Van-e a sorozat tagjai között három olyan szám, amely egy háromszög három oldalának mérőszáma lehet, ha azonos egységekben mérjük az oldalakat?

6. Rajzolj egy 2 cm-es szakaszt, végpontjait jelöld B-vel, C-vel! Szerkessz négy különböző háromszöget, amelyeknek egyik oldala legyen a BC szakasz, az AB oldaluk pedig 3,5 cm hosszú!

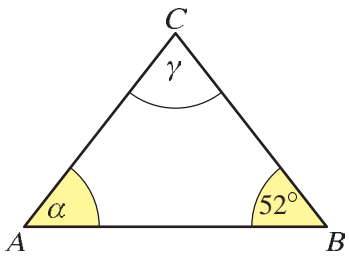
a) Hol helyezkedhet el a háromszög A csúcsa?

b) Jelöld meg azokat az A pontokat, amelyek esetén az AC oldal 3 cm!

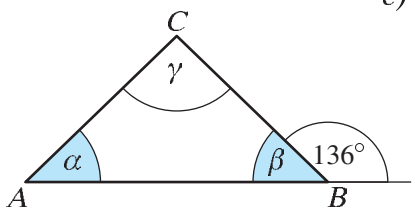
c) Jelöld meg azokat az A pontokat, amelyek esetén az AC oldal 5 cm!

7. Számítsd ki a tükrös háromszög belső szögeinek nagyságát! A háromszögek alapja az AB szakasz.

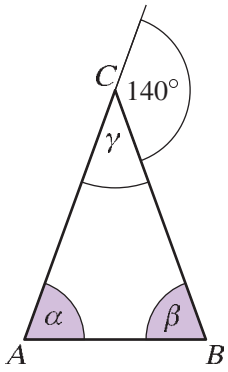
a)



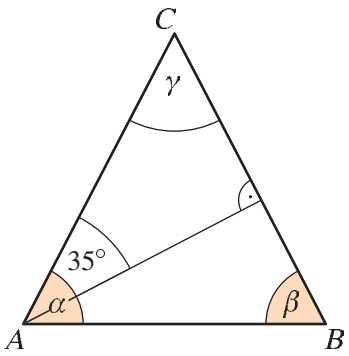
b)



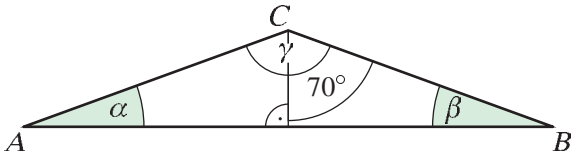
c)



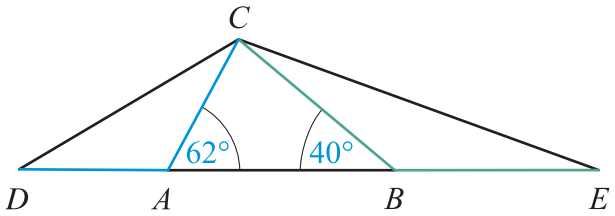
d)



e)

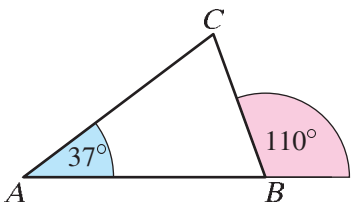


8. Az ABC háromszög AB oldalának meghosszabbítására mérd fel A-ból az AC szakaszt, illetve B-ből a BC szakaszt!
Mekkorák a CDE háromszög belső szögei?

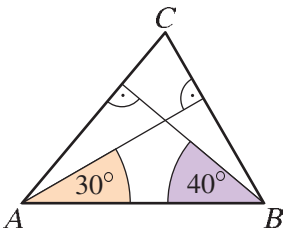


9. Számítsd ki a háromszög belső szögeinek nagyságát!

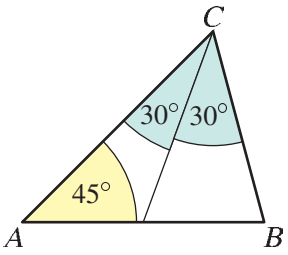
a)



b)



c)



10. Lehet-e egy háromszög

a) egyik külső szöge 60°, és egyik belső szöge 80°,

b) két oldalának hossza 11 cm és 13 cm, a harmadik oldal ezek számtani közepe,

c) két oldalának különbsége 4 cm-nél kisebb, ha a harmadik oldala 4 cm?

11. Bizonyítsd be, hogy derékszögű háromszögben az átfogó a leghosszabb oldal!

12. Rajzolj egy 4 cm-es szakaszt, végpontjait jelöld A-val és B-vel! Szerkessz négy különböző derékszögű háromszöget, amelyeknek az átfogója az AB szakasz!

a) Hol helyezkedhet el a háromszögek C csúcsa?

b) Jelöld meg azokat a C pontokat, amelyek esetén az AC oldal hossza 3 cm!

c) Jelöld meg azokat a C pontokat, amelyek esetén az $ABC\sphericalangle = 60°$!

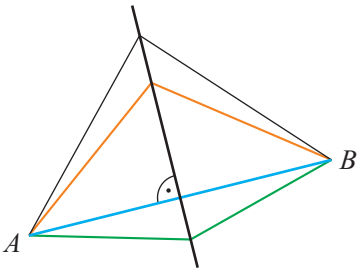
13. Egy háromszög legnagyobb oldalának hossza kétszerese a legkisebb oldal hosszának. A legnagyobb oldallal szemközti szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközti szögnek. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?

(Zrínyi Ilona matematikaverseny, 7. évfolyam, 1994)

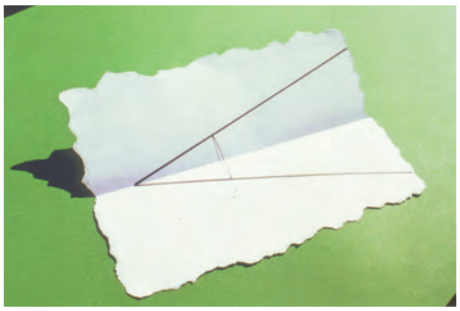
A háromszögek nevezetes vonalai

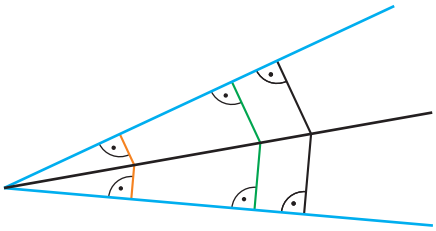
A **szakaszfelező merőleges** a szakasz szimmetriatengelye. A szakaszfelező merőleges minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától. Teljesül az is, hogy ha egy pont egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától, akkor rajta van a szakaszfelező merőlegesen.





Szögfelezőnek nevezzük azt a félegyenest, amely a szögtartományt két egyenlő szögtartományra vágja szét. A szögfelező a szög szimmetriatengelye. A szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától.

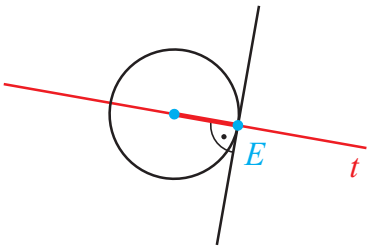




Konvex szögtartomány pontjaira teljesül az is, hogy ha egy pont egyenlő távolságra van a konvex szög két szárától, akkor rajta van a szögfelezőn.

Pont és **egyenes távolsága** egyenlő a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszával.

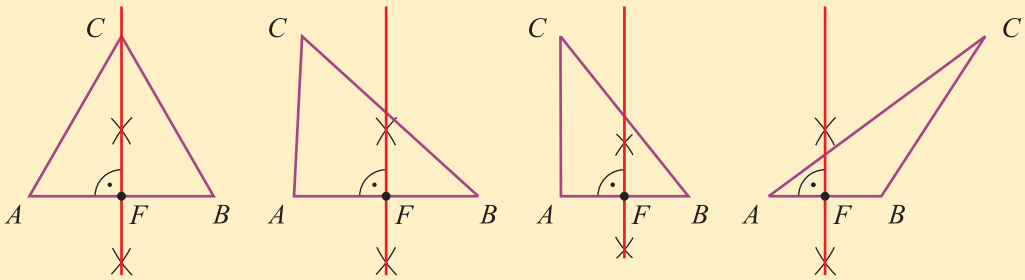
Ha ezzel a távolsággal kört rajzolunk, akkor az adott egyenes és a kör érinti egymást.



A háromszög oldalfelező merőlegesei

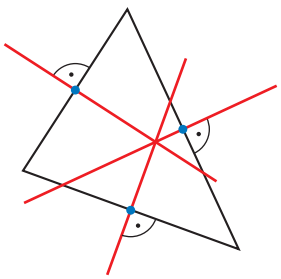
A **háromszög oldalfelező merőlegese** a háromszög két csúcsát összekötő szakasz felező merőleges egyenese.

Az oldalfelező merőleges és az oldalegyenes metszéspontja az oldalfelező pont.

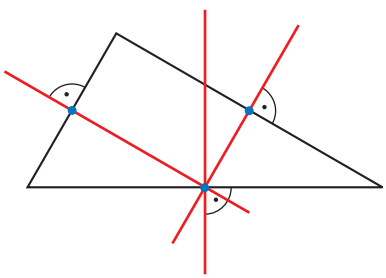


A következő ábrákon *a)* egy hegyesszögű, *b)* egy derékszögű, *c)* egy tompaszögű háromszög oldalfelező merőlegeseit ábrázoltuk. Megjelöltük a háromszög oldalfelező pontjait is.

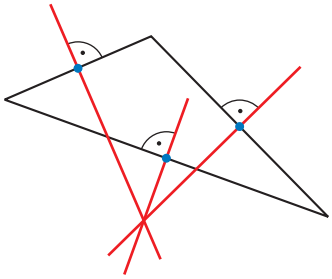
a)



b)



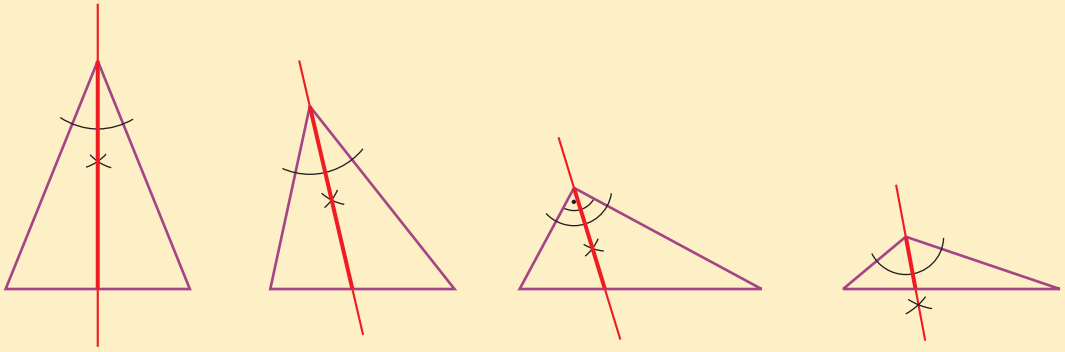
c)



Megjegyzés: A szerkesztéseket elvégezve azt tapasztaltuk, hogy a három oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást. Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a hegyesszögű háromszögnek belső pontja, a derékszögű háromszög átfogójának felezőpontja, a tompaszögű háromszögnek külső pontja.

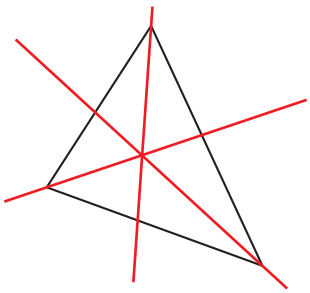
A háromszög belső szögfelezői

A **háromszög belső szögfelezője** a belső szög szögtartományának szimmetria tengelye. A szögfelezőnek a háromszöglappal közös szakaszát vagy e szakasz hosszát is szokás belső szögfelezőnek nevezni.

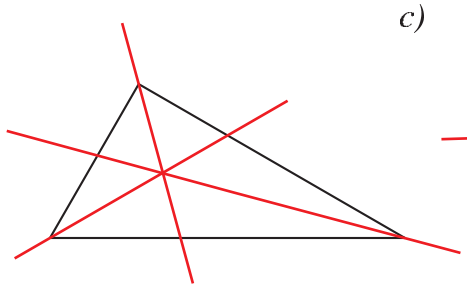


A következő ábrákon *a)* egy hegyesszögű, *b)* egy derékszögű, *c)* egy tompaszögű háromszög belső szögfelezőit szerkesztettük meg.

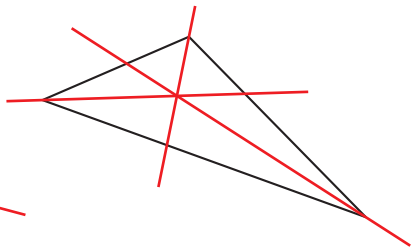
a)



b)



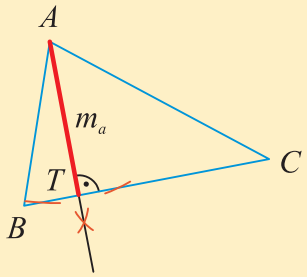
c)

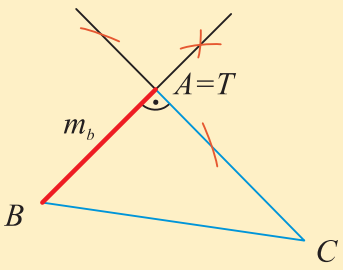


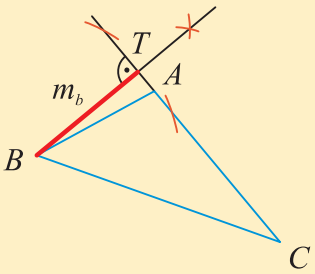
Megjegyzés: A szerkesztéseket elvégezve azt tapasztaltuk, hogy a három belső szögfelező egyenes egy pontban metszi egymást. A szögfelezők metszéspontja a háromszögnek belső pontja.

A háromszög magasságai

A **háromszög magassága** a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz, illetve ennek a szakasznak a hossza. Szokás e szakaszt a háromszög magasságvonalának is nevezni. Az A csúcsból induló magasság szokásos jelölése m_a. A magasság egyenese és az arra merőleges oldalegyenes metszéspontja a **magasság talpontja.**

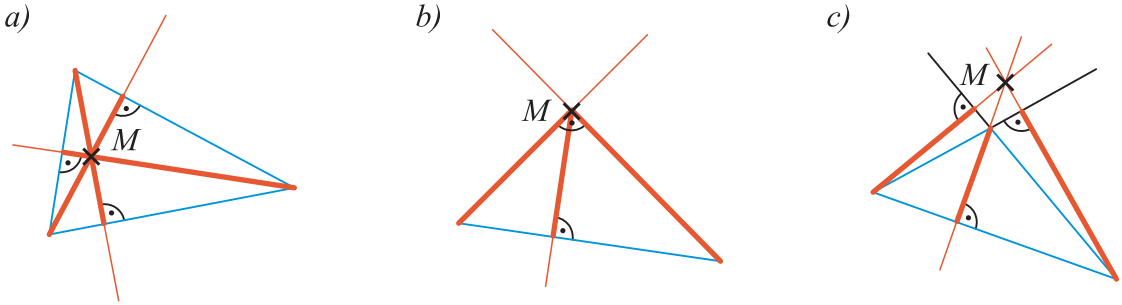






A következő ábrákon megadtuk *a)* egy hegyesszögű, *b)* egy derékszögű és *c)* egy tompaszögű háromszög magasságvonalait, vastag piros szakasszal jelöltük a magasságokat.

a) *b)* *c)*



A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. A magasságegyenesek metszéspontja a **háromszög magasságpontja** (M). A magasságpont a hegyesszögű háromszögnek belső pontja, a derékszögű háromszögnek a derékszögű csúcsa, a tompaszögű háromszögnek külső pontja.

Feladatok

A háromszög oldalfelező merőlegesei

1. Két pont távolsága 4 cm.
a) Szerkessz olyan kört, amely mindkét ponton átmegy!
b) Szerkessz a két ponton átmenő 3 cm sugarú kört! Hány megoldás van?
c) Hol lehetnek a két ponton átmenő körök középpontjai? Mekkora a legkisebb megfelelő kör sugara?

2. Szerkeszd meg a háromszög oldalfelező merőlegeseit, ha oldalainak hossza
a) 4 cm, 6 cm, 7 cm *b)* 2,5 cm, 6 cm, 6,5 cm *c)* 4 cm, 6 cm, 9 cm!

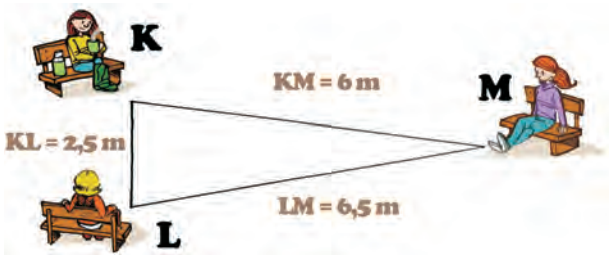
3. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget!
a) Tükrözd mindhárom háromszöget a leghosszabb oldal felező merőlegesére! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörképháromszög csúcsai?
b) Milyen sokszöget alkotnak az eredeti és a tükörképháromszög csúcsai, ha a legrövidebb oldal felező merőlegesére tükrözöd a háromszöget?

4. Tükrözz egy háromszöget mindhárom oldalfelező pontjára! Mit alkot az eredeti és a három tükörképháromszög együtt?

5. Adott a PQR háromszög, amelynek oldalai 3 cm, 4 cm és 4 cm hosszúak. Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelynek oldalfelező pontjai a P, a Q és az R!

6. Három testvér közösen gondoz egy háromszög alakú virágoskertet, melynek egy-egy szegletében mindhármuknak van saját padja. Úgy ültetik be kedvenc virágaikkal a kertet, hogy mindenkinek a saját padjához közelebb legyen a neki kedves virág, mint bármelyik testvére padjához.

A vázlatrajzon éppen azt látjuk, amint a padjukon ülnek és gyönyörködnek kedvenc virágaikban. Kata a kék fürtös gyöngyikét kedveli, Lina a lila hagymavirágot, Maja pedig a sárga mályvarózsát.



Készíts 1 : 50 léptékű ábrát, ahol 1 m-nek 2 cm felel meg, és színezd ki három színnel a szövegnek megfelelően!

A háromszög belső szögfelezői

7. Szerkeszd meg a háromszög belső szögfelezőit, ha oldalainak hossza

a) 5 cm, 6 cm, 7 cm, *b)* 6 cm, 8 cm, 10 cm, *c)* 5 cm, 7 cm, 10 cm!

8. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget!

a) Tükrözd mindhárom háromszöget a legnagyobb szög belső szögfelezőjére! Milyen sokszöget alkotnak az eredeti és a tükörképháromszög csúcsai?

b) Tükrözz egy háromszöget a legkisebb szög belső szögfelezőjére! Milyen sokszöget fed le az eredeti és a tükörképháromszög egyesítése?

A háromszög magasságai

9. Szerkeszd meg a háromszöget, ha oldalainak hossza

a) 4,5 cm, 6 cm, 7 cm *b)* 4,5 cm, 6 cm, 7,5 cm *c)* 3 cm, 5 cm, 7 cm!

Szerkeszd meg a háromszög magasságait!

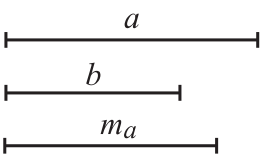
Mérd meg a csúcsok és a szemközti oldalegyenesek távolságát!

10. Szerkeszd meg a háromszöget és a magasságpontját! Hány megoldás van?

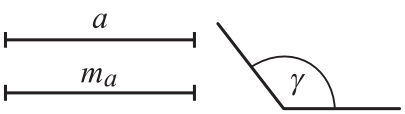
a) $a = 4{,}5$ cm, $\beta = 60°$, $m_a = 3$ cm

b) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $m_a = 4$ cm

c)

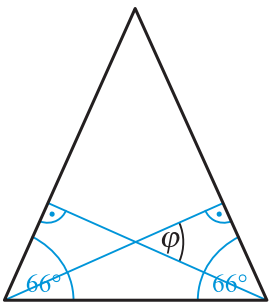


d)

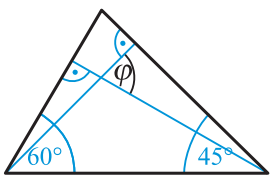


11. Mekkora szöget zár be a két magasságvonal?

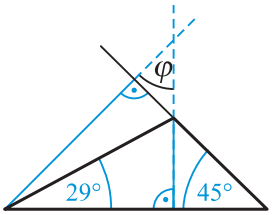
a)



b)



c)



12. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget!

a) Tükrözd mindhárom háromszöget a leghosszabb oldalhoz tartozó magasságára! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörképháromszög csúcsai?

b) Tükrözd mindhárom háromszöget a legrövidebb oldalához tartozó magasságára! Igaz-e, hogy mindig háromszöget alkot az eredeti és a tükörképháromszög egyesítése?

13. Szerkeszd meg a háromszög magasságait, ha adott az egyik oldala, az oldalon levő szöge és a szög szögfelezőjének hossza!

a) $a = 7$ cm, $\beta = 60°$, $f_\beta = 5$ cm *b)* $b = 6$ cm, $\gamma = 90°$, $f_\gamma = 3$ cm

14. Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek két magassága 5 cm és 6 cm! Hány megoldás van?

15. Az ABC egyenlő szárú hegyesszögű háromszög szárai AB és BC, a háromszög magasságpontja M. Mekkorák a háromszög szögei, ha $MB = AC$?

16. Tükrözz egy háromszöget a magasságpontjára!

A háromszögek nevezetes körei (Kiegészítő tananyag)

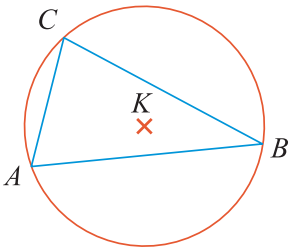
A háromszög oldalfelező merőlegesei és a háromszög köré írt köre

1. példa

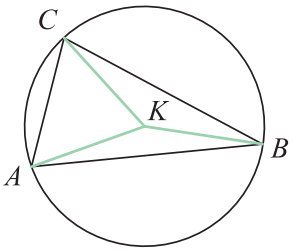
Szerkesszünk a háromszög csúcsain átmenő kört!

Megoldás

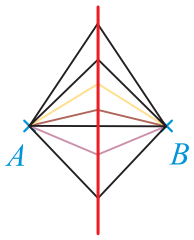
Vázlat:



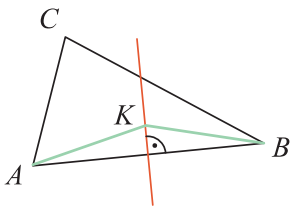
Összefüggések:

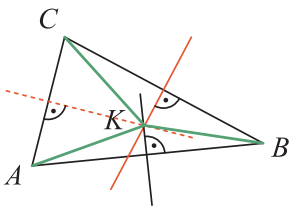


A szerkesztendő kör középpontja egyenlő távolságra van a három csúcstól. Kétkét ponttól egyenlő távolságra a szakaszfelező merőleges pontjai vannak.



A szerkesztés menete:



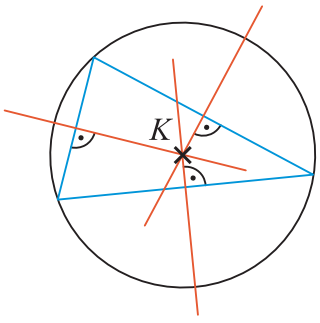


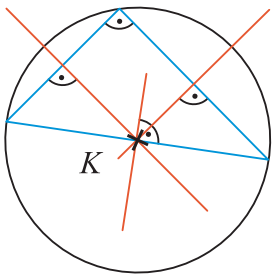
Két oldalfelező merőleges metszi egymást, mert nem párhuzamosak a felezett oldalak sem. Ha K pont az AB és BC oldal felezőmerőlegesének metszéspontja, akkor $KA = KB$ és $KB = KC$.

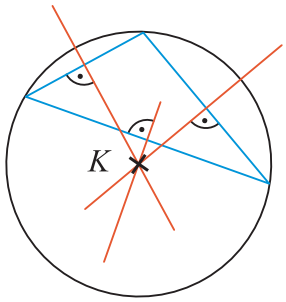
Így $KA = KC$ is igaz, vagyis a K pont az AC oldal felezőmerőlegesének is pontja.

Tehát három oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást. A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja a csúcsokon átmenő kör középpontja.

Szerkesztés:







Megjegyzés: elegendő két oldalfelező merőlegest megszerkeszteni.

A három csúcson átmenő kört a **háromszög köré írt körének**, a derékszögű háromszög köré írt körét a háromszög **Thálész körének** nevezik.

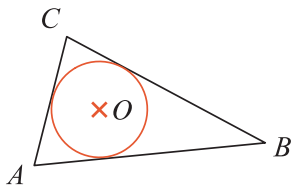
A háromszög belső szögfelezői és a háromszög beírt köre

2. példa

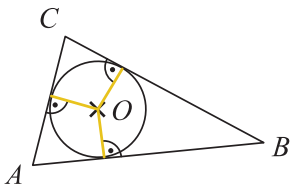
Szerkesszünk a háromszög oldalait érintő kört!

Megoldás

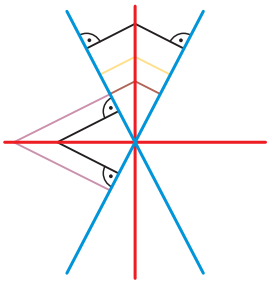
Vázlat:



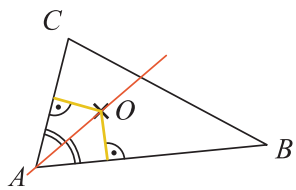
Összefüggések:

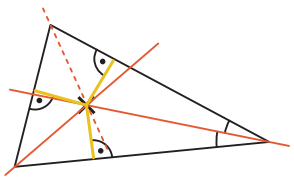


A szerkesztendő kör középpontja egyenlő távolságra van a három oldaltól. Két-két metsző egyenestől egyenlő távolságra a szögfelezők pontjai vannak.



A szerkesztés menete:

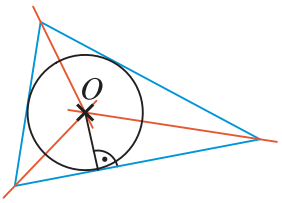


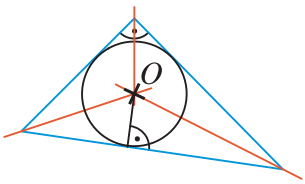


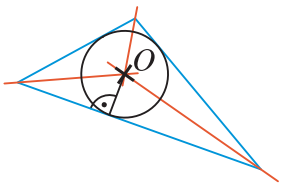
Két szögfelező metszi egymást. Ha O pont a CAB és a CBA szög szögfelezőjének metszéspontja, akkor egyenlő távolságra van CA és AB oldaltól, illetve AB és BC oldaltól. Így O egyenlő távolságra van CA és BC oldaltól, vagyis rajta van az ACB szög szögfelezőjén is.

A három szögfelező tehát egy pontban metszi egymást. A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a kör középpontja.

Szerkesztés:







A háromszög oldalait érintő kör középpontja a háromszögnek belső pontja. A három oldalt érintő kört a **háromszög beírt körének** nevezik.

Megjegyzés: elegendő két szögfelezőt megszerkeszteni.

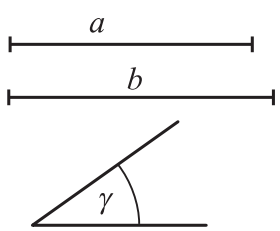
A három oldalt érintő kört a **háromszög beírt körének** nevezik.

Feladatok

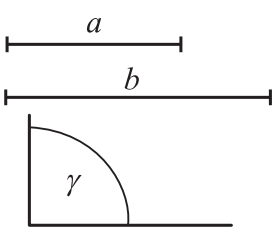
A háromszög oldalfelező merőlegesei és a háromszög köré írt köre

1. Szerkeszd meg a háromszög csúcsain átmenő kört, ha a háromszög két oldala és az azok által közrezárt szög adott!

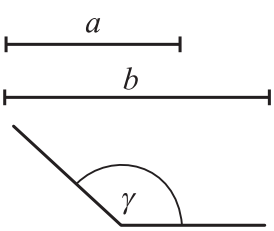
a)



b)



c)

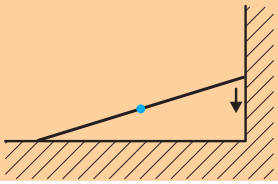


2. Tükrözz egy derékszögű háromszöget az átfogó felezőpontjára! Szerkeszd meg az eredeti és a tükörképháromszög köré írt kört!

3. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög köré írt körének az átfogó az átmérője!

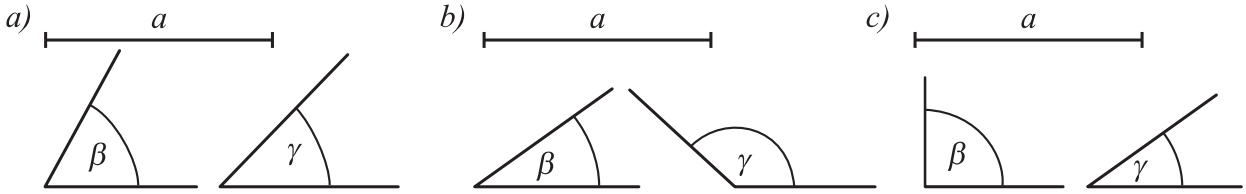
4. Szerkeszd meg egy háromszög köré írt körének középpontját, majd tükrözd erre a pontra a háromszöget! Szerkeszd meg a tükörképháromszög köré írt körét!

5. A ház falának támasztott függőleges rúd közepén megtelepedett egy csiga. Milyen pályán mozog a csiga a rúddal együtt, ha a rúd lecsúszik a vízszintes helyzetig?



A háromszög belső szögfelezői és a háromszög beírt köre

6. Szerkeszd meg a háromszög oldalait érintő kört, ha a háromszög egy oldala és az azon lévő két szög adott!



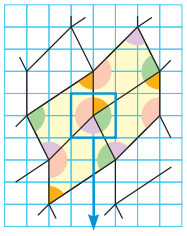
7. Szerkeszd meg egy háromszög beírt körének középpontját, majd tükrözd erre a pontra a háromszöget! Szerkeszd meg a tükörképháromszög beírt körét!

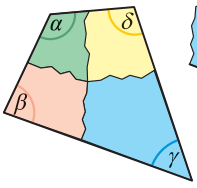
A sokszögek szögei

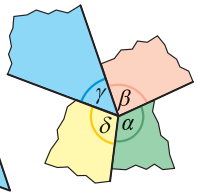
A négyszögek szögei

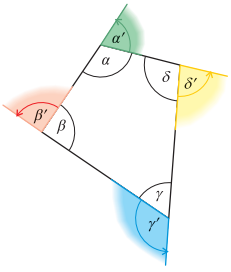
Szögmásolás, parkettázás, szerkesztés közben olyan összefüggéseket kerestünk, amelyek minden négyszögre egyformán igazak. Tapasztaltuk, hogy egybevágó négyszögekkel egyrétegűen, hézagmentesen lefedhető a sík. Ezt szemlélteti a második ábra.











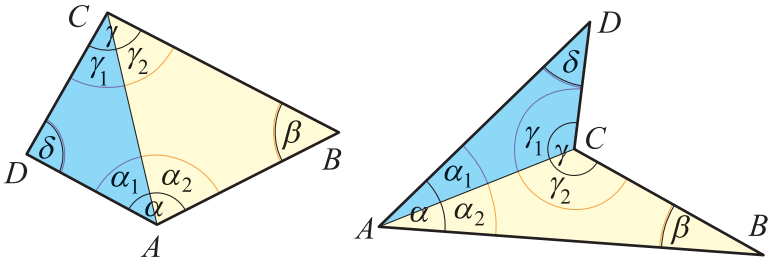
Ebben a részben bebizonyítjuk a négyszögekre vonatkozó állításokat, majd azokból következtetünk a sokszögek néhány tulajdonságára.

Kapcsolat a négyszög belső szögei között

A négyszög belső szögeinek összege 360°.

Bizonyítás:

Kétféle esetet kell megvizsgálnunk, konvex és konkáv négyszög esetén külön-külön végezzük a bizonyítást.



$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha_2+\beta+\gamma_2 + \gamma_1+\delta+\alpha_1 = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Kapcsolat a négyszög külső szögei között

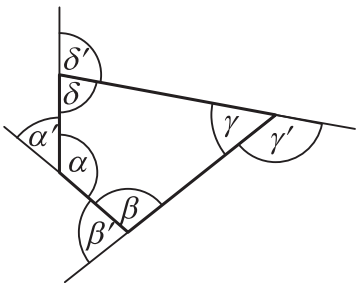
A konvex négyszög külső szögeinek összege 360°.

Bizonyítás:

$\alpha' = 180^\circ - \alpha \qquad \gamma' = 180^\circ - \gamma$

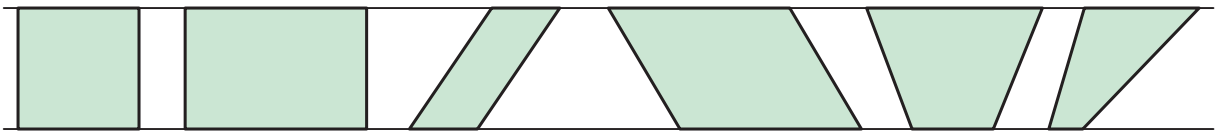
$\beta' = 180^\circ - \beta \qquad \delta' = 180^\circ - \delta$

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta' = 4\cdot 180^\circ - (\alpha+\beta+\gamma+\delta) =$$
$$= 4\cdot 180^\circ - 360^\circ = 360^\circ$$



A trapéz olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.

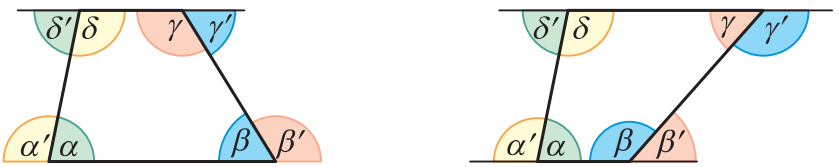
A párhuzamos oldalak a trapéz alapjai, a másik két oldal a trapéz szára.



Kapcsolat a trapéz belső szögei között

A trapéz azonos száron lévő két belső szöge 180°-ra egészíti ki egymást.

Bizonyítás:



Az azonos száron lévő belső szögek párhuzamos szárú szögek, egyik száruk egyállású, a másik fordított állású, tehát 180°-ra kiegészítik egymást. $\alpha+\delta = 180^\circ$ és $\beta+\gamma = 180^\circ$.

Megjegyzés: Az ábrán azonos színnel jelölt párhuzamos szárú szögek fordított állású szögek, tehát egyenlők. $\alpha' = \delta$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \beta$, $\delta' = \alpha$

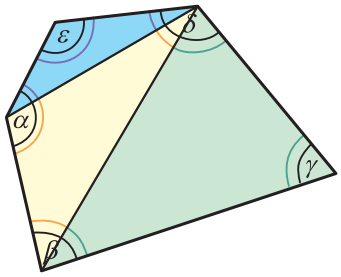
A sokszögek szögei

1. példa

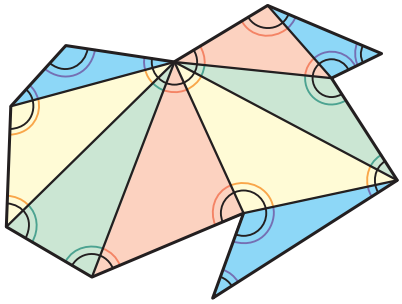
Számítsuk ki egy ötszög és egy tizenegyszög belső szögeinek összegét!

Megoldás

Az ötszöget három háromszögre bontjuk,



a tizenegyszöget kilenc háromszögre bontjuk.



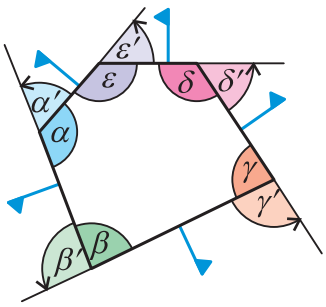
A sokszög belső szögeinek összege egyenlő a háromszögek belső szögeinek összegével. Ötszög esetén $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, tizenegyszög esetén $9 \cdot 180^\circ = 1620^\circ$ a belső szögek összege.

Kapcsolat a sokszög belső szögei között

Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

2. példa

Számítsuk ki egy konvex ötszög külső szögeinek összegét!



Megoldás

Gondolatban körbejárjuk a sokszög határvonalát. Ha egyformán irányítjuk a külső szögeket az öt elfordulás együtt egy teljes fordulat, azaz 360°.

Kapcsolat a sokszög külső szögei között

Az n oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

Megjegyzés: Konkáv sokszög külső szögét nem értelmeztük.

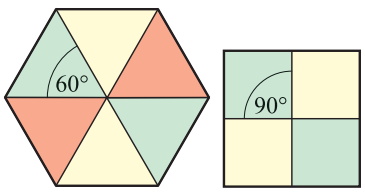
Szabályos sokszögek szögeinek nagysága

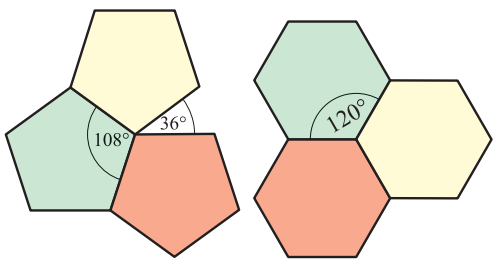
A szabályos sokszög konvex alakzat, és minden belső szöge egyenlő, illetve a külső szögei is egyenlők.

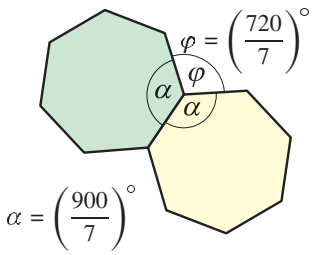
Ezért az n oldalú szabályos sokszög belső szögeinek nagysága $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Az n oldalú szabályos sokszög külső szögeinek nagysága $\dfrac{360^\circ}{n}$.

Egybevágó szabályos sokszögekkel háromféleképpen parkettázhatunk, ha csak egyféle sokszöget használunk, és a sokszögek csúcsai csak csúcspontokkal lehetnek közösek. A csúcsok találkozásánál levő egyenlő belső szögek teljes szöget alkotnak szabályos háromszögek, négyzetek és szabályos hatszögek esetén.



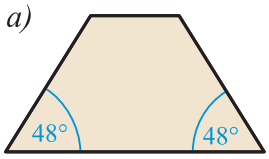




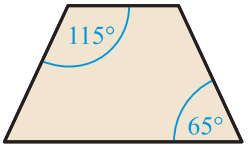
Feladatok

1. Számítsd ki a trapéz belső szögeit!

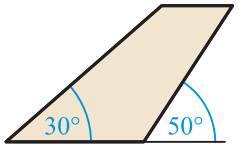
a)



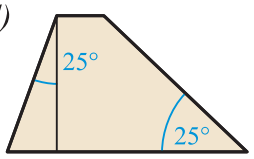
b)



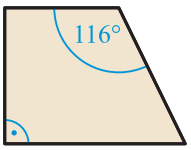
c)



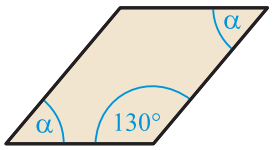
d)



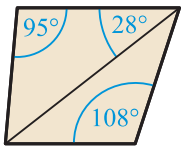
e)



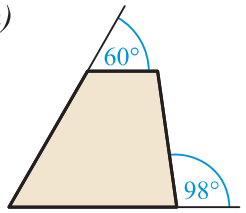
f)



g)

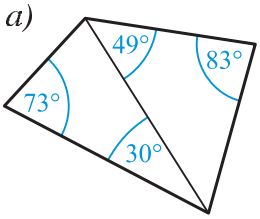


h)

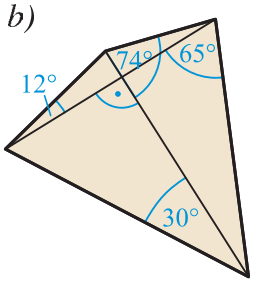


2. Határozd meg a négyszögek belső szögeit!

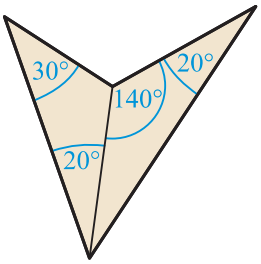
a)



b)



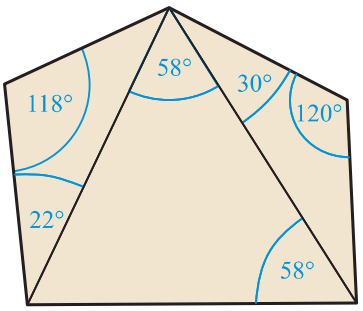
c)



3. Egy négyszög belső szögeinek aránya 2 : 7 : 2 : 7.
Számítsd ki a szögeit! Milyen fajta négyszög lehet?

4. Egy négyszög belső szögeinek aránya 4 : 5 : 6 : 3.
Számítsd ki a szögeit! Ellenőrizd, hogy trapéz-e a négyszög!

5. *a)* Számítsd ki a rajzon látható ötszög belső szögeinek nagyságát és azok összegét!
b) Számítsd ki a külső szögek nagyságát és azok összegét!



6. Hány fok a belső szögek összege
a) hatszög, *b)* hétszög, *c)* nyolcszög esetén?

7. Hány oldalú az a sokszög, amelyben a belső szögek összege
a) 540°, *b)* 900°, *c)* 1980°, *d)* 3780°?

8. Hány oldalú az a sokszög, amelyben a belső szögek összege az oldalak számának
a) 60-szorosa, *b)* 144-szerese, *c)* 162-szerese?

9. A szabályos ötszöget az egy csúcsból induló két átlója három háromszögre bontja. Számítsd ki a háromszögek szögeit!

10. A szabályos hatszöget az egyik csúcsból induló három átlója 4 háromszögre bontja. Számítsd ki a háromszögek szögeit!

11. Igazold, hogy a szabályos sokszög középponti szöge egyenlő a külső szögével!

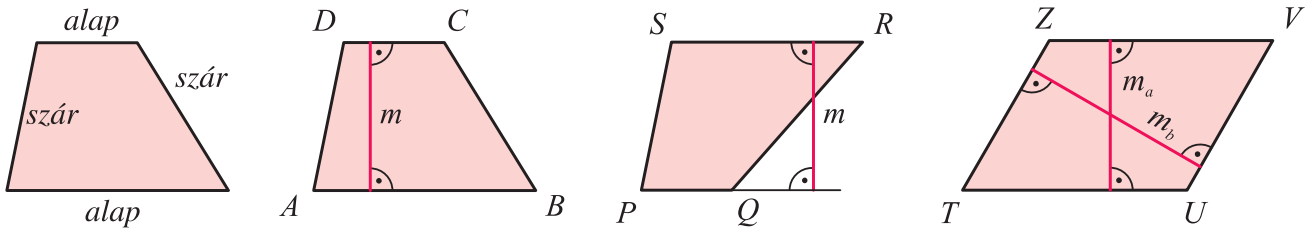
12. Vágj szét egy szabályos hatszöget hat deltoidra úgy, hogy azokból két szabályos háromszöget lehessen kirakni!

Rajzold le a hatszöget és az egyik összerakott háromszöget!

A sokszögek nevezetes vonalai, nevezetes körei

A trapéz magassága

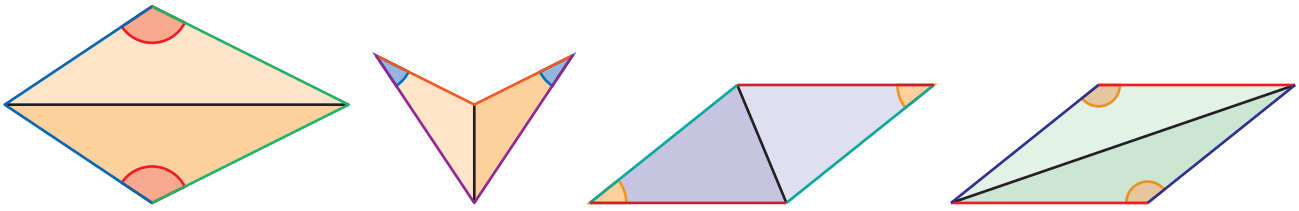
A trapéz alapjait vagy az alapok egyenesét merőlegesen összekötő szakasz a **trapéz magassága.** E szakasz hosszát is szokás a trapéz magasságának nevezni. Az ábrákon m, m_a, m_b jelöli. Ezeknek a szakaszoknak a hossza a trapéz alapjainak távolsága.



A T, U, V, Z csúcsú trapéznak két-két párhuzamos oldala van, ezért paralelogramma.

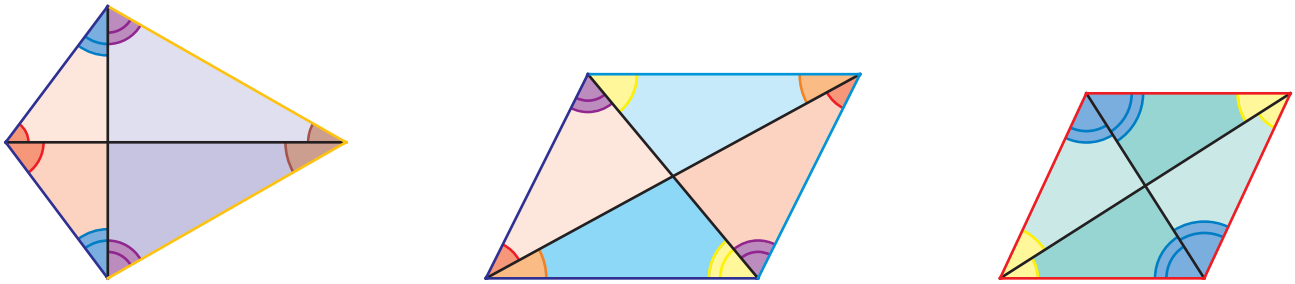
A négyszögek átlói

A deltoidot a szimmetriaátlója, a paralelogrammát pedig bármelyik átlója két egybevágó háromszögre bontja, mivel a két háromszög két oldala és azok közrezárt szöge egyenlő. Az ábrákon a megfelelő oldalakat és a közrezárt szögeket azonos színnel jelöltük.



A konvex deltoidot és a paralelogrammát két átlója négy háromszögre bontja.

Közülük 2-2 mindig egybevágó, rombusz esetén pedig mind a négy egybevágó.



A konvex sokszög átlói

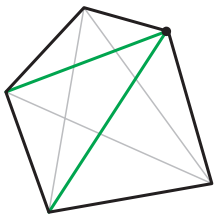
Példa

Hány átlója van

a) egy konvex ötszögnek,

b) egy konvex tizenegyszögnek?

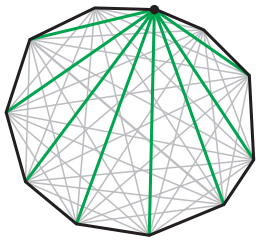
Megoldás



Egy csúcsból két átló húzható.

Ha mind az öt csúcsnál összeadjuk az abból húzott átlókat, akkor $5 \cdot 2 = 10$-et kapunk. Így minden átlót két-két csúcsnál veszünk figyelembe.

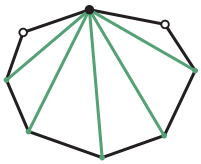
Az átlók száma $(5 \cdot 2) : 2 = 5$.



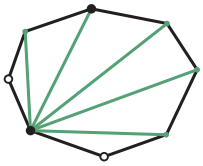
Egy csúcsból 8 átló húzható.

Ha mind a tizenegy csúcsnál összeadjuk az abból húzott átlókat, akkor $11 \cdot 8 = 88$-at kapunk. Minden átlót két-két csúcsnál veszünk figyelembe.

Az átlók száma $(11 \cdot 8) : 2 = 44$.



Tetszőleges konvex sokszög esetén egy csúcsból $n - 3$ átló húzható, mert önmagába nem húzható átló, a két szomszédos csúccsal pedig nem átló, hanem oldal köti össze.

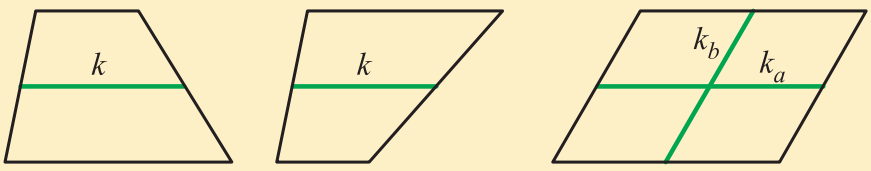


Minden csúcsnál $n - 3$ átlót látunk, ezeket összeadva $n \cdot (n - 3)$-at kapunk. Így minden átlót kétszer vettünk figyelembe az összeszámláláskor, tehát $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ az átlók száma.

Az n oldalú konvex sokszögnek $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ átlója van.

A trapéz középvonala (Kiegészítő tananyag)

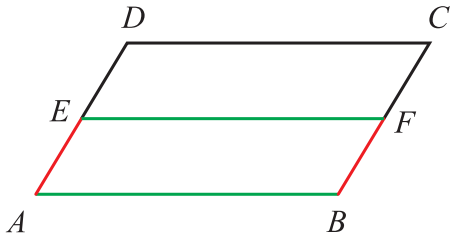
A **trapéz középvonala** a trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakasz, illetve ennek a szakasznak a hossza. Szokás e szakasz egyenesét is középvonalnak nevezni.



A paralelogramma középvonalai a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok.

Az $ABCD$ paralelogramma tulajdonságai miatt $AE \parallel BF$ és $AE = BF$. Ezért az $ABFE$ négyszög is paralelogramma, amelynek szemközti oldalai AB és EF.

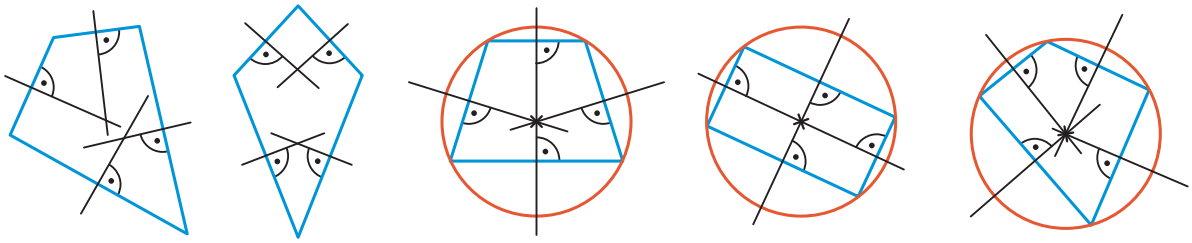
Tehát $AB \parallel EF$ és $AB = EF$.



A **paralelogramma középvonala** párhuzamos és egyenlő a nem felezett oldallal.

A négyszögek nevezetes körei (Kiegészítő tananyag)

A négyszög oldalfelező merőlegesei és a négyszög köré írt köre

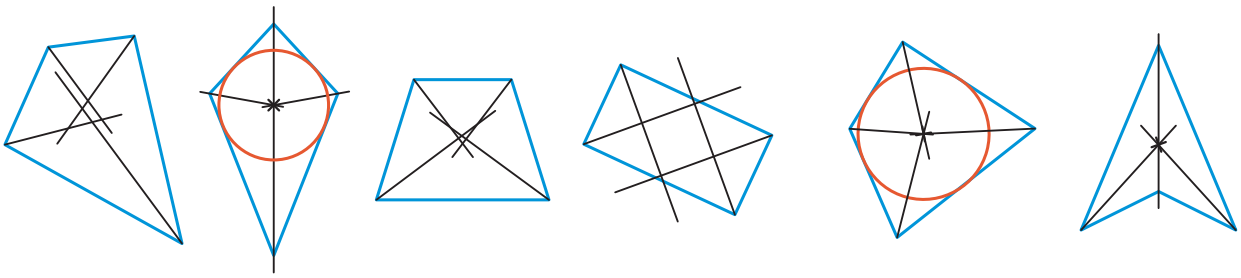


A négyszög oldalfelező merőlegesei nem mindig metszik egymást egy pontban. Ha az oldalfelező merőlegesek egy ponton mennek át, akkor ez a pont a négyszög köré írt körének középpontja.

Azok a négyszögek, amelyeknek van köré írt körük, a húrnégyszögek.

A téglalap köré és a tengelyesen szimmetrikus trapéz, azaz a húrtrapéz köré is írható kör.

A konvex négyszög belső szögfelezői és a négyszög beírt köre



A négyszög oldalfelező merőlegesei nem mindig metszik egymást egy pontban. Ha a konvex négyszög belső szögfelezői egy ponton mennek át, akkor ez a pont a négyszög beírt körének középpontja.

Azok a négyszögek, amelyeknek van beírt körük, az érintőnégyszögek.

A rombusz érintőnégyszög, van beírt köre.

Feladatok

A trapéz magassága

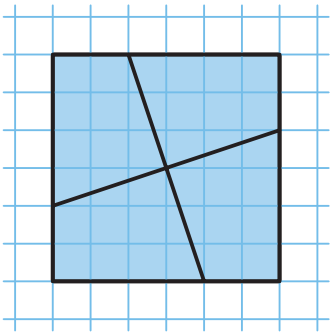
1. Rajzolj olyan trapézt, amelynek egyik szára a trapéz magassága is egyben!

2. Rajzolj olyan trapézt, amelynek egyik átlója a trapéz magassága is egyben!

3. Rajzolj olyan trapézt, amelynek magassága egyenlő egyik alapjának hosszával!

A négyszögek átlói

4. Vágd szét a négyzetet négy egybevágó részre az ábra szerint!



a) Rakj ki a négy részből húrtrapézt, rajzold le négyzethálós lapra a megoldást!

b) Rakj ki a négy részből paralelogrammát, rajzold le négyzethálós lapra a megoldást!

5. Rajzolj olyan trapézt, amelynek egyik átlója tompaszöget zár be az alapokkal!

6. Rajzolj olyan trapézt, amelynek átlói merőlegesek egymásra!

7. Rajzolj olyan trapézt, amelynek átlói felezik egymást!

A konvex sokszög átlói

8. Hány átlója van egy konvex

a) hatszögnek, *b)* hétszögnek, *c)* nyolcszögnek,

d) kilencszögnek, *e)* tízszögnek, *f)* tizenkétszögnek?

9. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben az átlók és az oldalak számának aránya 2 : 1?

10. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek ötször annyi átlója van, mint ahány oldala?

11. Hány oldalú sokszögnek van százszor annyi átlója, mint ahány oldala?

A trapéz középvonala (Kiegészítő tananyag)

12. Ábrázold koordináta-rendszerben a következő négy pontot, és rajzold meg a trapézt!
Rajzold meg a szárak felezőpontját és a trapéz középvonalát!
Hogyan függ az alapok hosszától a középvonal hossza?

a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
$A(1;3)$	$A(4;3)$	$A(1;1)$	$A(3;-2)$	$A(-5;-4)$
$B(13;3)$	$B(-6;3)$	$B(-3;1)$	$B(3;4)$	$B(-6;-7)$
$C(13;7)$	$C(-2;-3)$	$C(-5;-3)$	$C(-1;6)$	$C(1;-7)$
$D(5;7)$	$D(0;-3)$	$D(-1;-3)$	$D(-1;-2)$	$D(3;-4)$

A négyszögek nevezetes körei (Kiegészítő tananyag)

13. Milyen négyszögekre igaz, hogy érintőnégyszögek és paralelogrammák is?

14. *a)* Húrsokszög-e a szabályos sokszög? Válaszodat indokold!

b) Érintősokszög-e a szabályos sokszög? Válaszodat indokold!

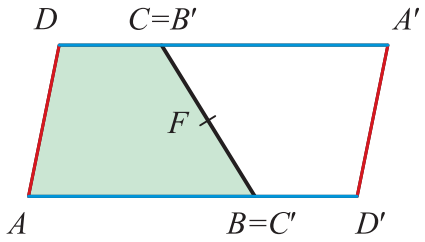
Trapéz szerkesztése háromszögszerkesztés alkalmazásával

1. példa

Lássuk be, hogy ha egy trapézt tükrözünk az egyik szárának felezőpontjára, akkor az eredeti és a tükörképalakzat csúcsai paralelogrammát határoznak meg!

Megoldás

A BC szár önmaga tükörképe, mert a szakasz szimmetrikus a felezőpontjára: $B = C'$ és $C = B'$.

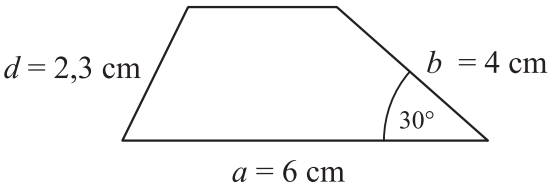


A tükrözés középpontján át nem menő szakasz és képe párhuzamos: $AB \parallel A'B'$ és $CD \parallel C'D'$. A trapéz alapjai párhuzamosak: $AB \parallel CD$. Az alapok tükörképeire fennáll, hogy $A'B' \parallel C'D'$. Így $CD \parallel C'D' \parallel A'B'$. A CD és $A'B'$ szakasz C, illetve B' végpontja egybeesik, vagyis a két szakasz egy egyenesre illeszkedik. Ezért $AD' \parallel A'D$ és $AD \parallel A'D'$.

Tehát az $AD'A'D$ négyszög paralelogramma, mivel két párhuzamos oldalpárja van.

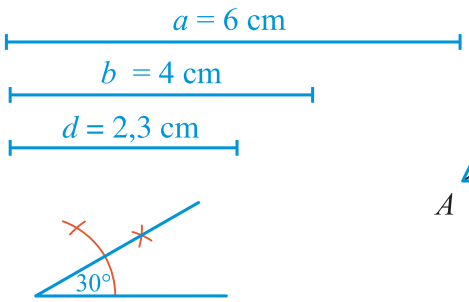
2. példa

Szerkesszük meg a trapézt!

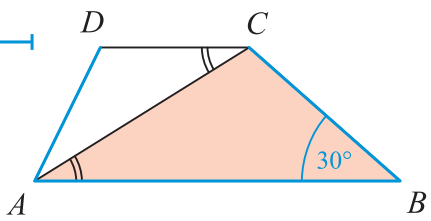


Megoldás

Adatok:



Vázlat:

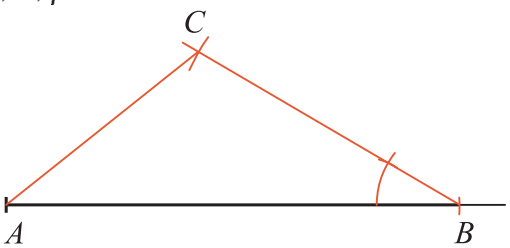


Összefüggések:

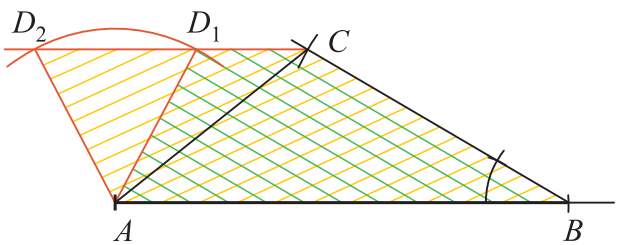
Az ABC háromszög egyértelműen megszerkeszthető, mert két oldala és azok közrezárt szöge adott. $CAB\sphericalangle = ACD\sphericalangle$, fordított állású szögek. Az ACD háromszög is megszerkeszthető két oldal és egy szög ismeretében. Több megoldás is lehet, ha $AC > 2{,}3$ cm.

A szerkesztés lépései:

1. Az ABC háromszög megszerkesztése a, b, β adatokból.



2. Az ACD háromszög megszerkesztése $AC, d, BAC\sphericalangle$ adatokból.



Két megoldás van.

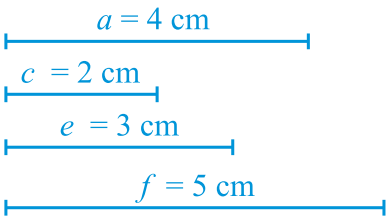
3. példa

Egy trapéz alapjai 4 cm és 2 cm, átlói 3 cm és 5 cm hosszúak.

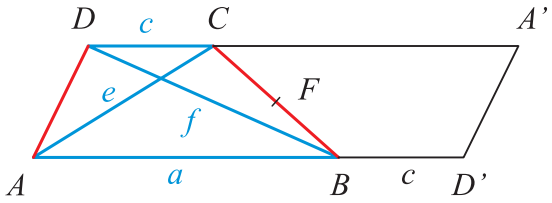
Szerkesszük meg a trapézt!

Megoldás

Adatok:



Vázlat:

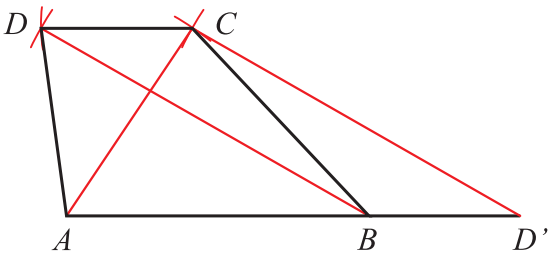


Összefüggések:

Ha az $ABCD$ trapézt tükrözzük a BC szár F felezőpontjára, akkor a $BD'A'C$ tükörkép $D'C$ átlója éppen $f = 5$ cm hosszú. Az $AD'C$ háromszög három oldala ismert, így a háromszög megszerkeszthető.

A szerkesztés lépései:

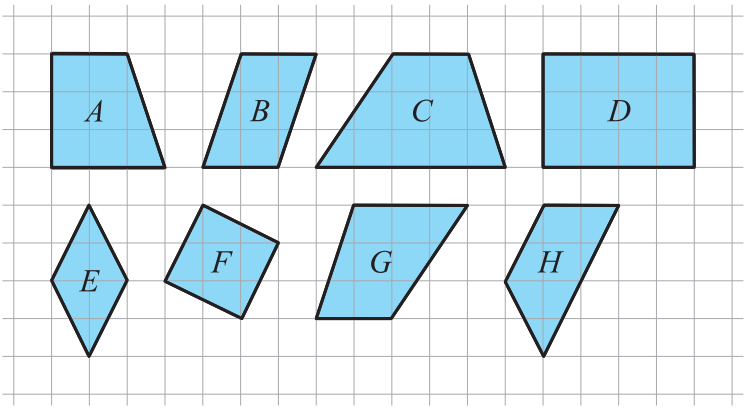
1. Az $AD'C$ háromszög megszerkesztése $a + c, e, f$ adatokból.
2. B pont kijelölése AD' szakaszon, $BD' = c = 2$ cm.
3. A BCD háromszög megszerkesztése BC, c, f adatokból.



Egy megoldás van.

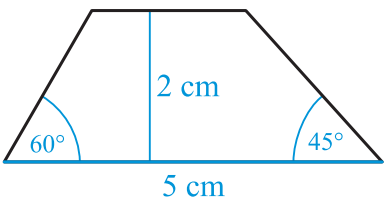
Feladatok

1. A nyolc trapéz közül melyikre érvényesek a következő tulajdonságok?

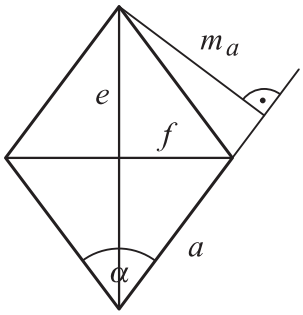


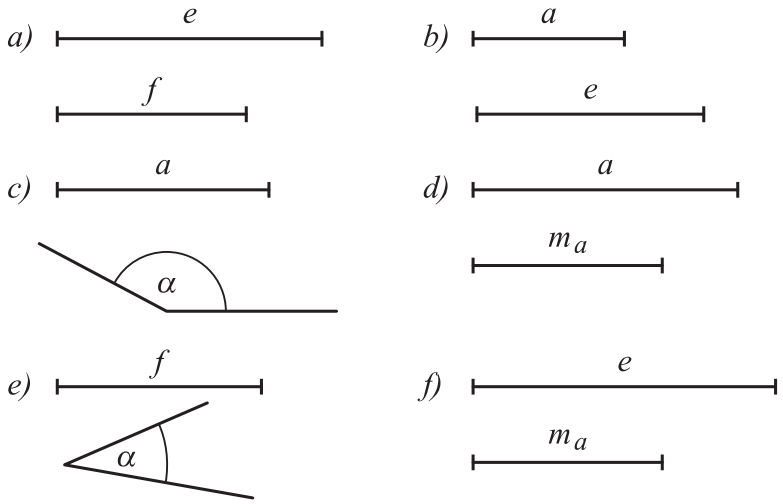
a) Minden oldala egyenlő.
b) Van párhuzamos oldalpárja.
c) Van két csúcsán átmenő tükörtengelye.
d) Pontosan két tükörtengelye van.
e) Középpontosan szimmetrikus.
f) Tengelyesen szimmetrikus.
g) Szemközti szögei egyenlők.
h) Van két egyenlő szöge.
i) Van két egyenlő oldala.
j) Átlói egyenlők.

2. *a)* Szerkeszd meg a trapézt!
b) Tükrözd a hosszabb alap felezőpontjára!
c) Milyen sokszöget alkotnak az eredeti és a tükörképcsúcsok?
d) Tükrözd a trapézt a rövidebb szár felezőpontjára!
e) Milyen sokszöget alkotnak az eredeti és a tükörképcsúcsok?



3. Szerkessz rombuszt a következő adatokból!





4. Szerkessz olyan húrtrapézt, amelynek az egyik alapja 6 cm, magassága 2 cm, egyik szöge 45°! Hány megoldás van? Számítsd ki a másik alap hosszát!

5. Szerkessz olyan húrtrapézt, amelynek alapjai 7 cm és 4 cm, egyik szöge pedig 120°!

6. Szerkessz trapézt a következő adatokból!

a) Az alapja 5 cm, az ezen levő két szöge 45° és 75°, a magassága 1,5 cm.

b) Az alapjai 6 cm és 4 cm, a rövidebb alapon levő egyik szöge 60°, a magassága 2 cm.

c) Az alapjai 52 mm és 70 mm, az alapon levő két szöge 67,5° és 105°.

d) Az alapja 8 cm, az átlói 6 cm és 8 cm, a magassága 3,5 cm.

e) Az alapja 4 cm, az átlói 3,5 cm és 6 cm, a magassága 3,5 cm.

7. Szerkessz trapézt, ha

a) az alapjai 7 cm és 5 cm, az átlói 6 cm és 8 cm hosszúak,

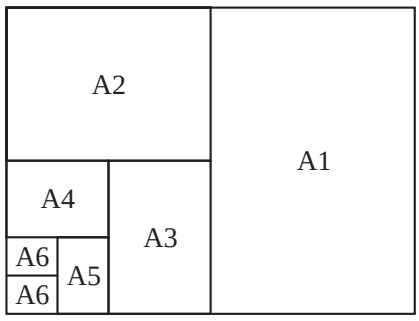
b) az alapjai 6 cm és 2 cm, az egyik átlója 5 cm hosszú, az átlók szöge 60°!

8. Szerkessz olyan paralelogrammát, amelyiknek az egyik oldala és az egyik átlója 4 cm hosszú, az egyik belső szöge pedig 75°!

a) Hány fokos szögekre bontja a 4 cm-es átló a belső szöget?

b) Mekkora a paralelogramma 4 cm-es oldalhoz tartozó magassága?

9. A papírlapok méreteit szabvány rögzíti. Az „A” szabványban a legnagyobb lap az A0-s, amely 2 darab A1-es lapnak felel meg. Az A1-es lap két darab A2-es lapnagyságnak felel meg, és így tovább. A szabvány legkisebb lapja az A10-es. A rajzon a szabványhoz tartozó lapok láthatók.



Az A6-os méretű lap területe hányszorosa az A10-es lap területének?

A) négyszerese *B)* nyolcszorosa

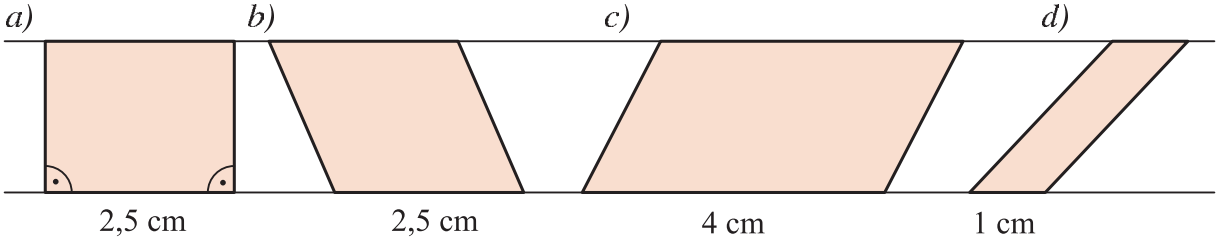
C) tizenhatszorosa *D)* harminckétszerese

(Országos kompetenciamérés, 2012)

A paralelogramma területe

Példa

Számítsuk ki az alábbi 2 cm magas paralelogrammák területét!

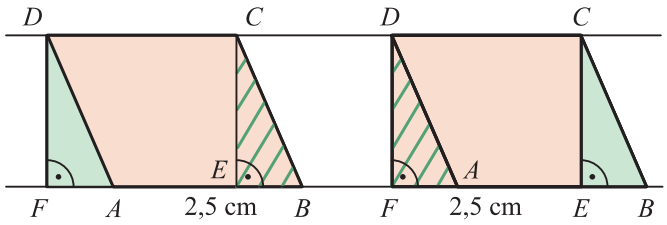


Megoldás

a) Téglalap területét kell kiszámítani. $T = (2{,}5 \cdot 2)\ \text{cm}^2 = 5\ \text{cm}^2$

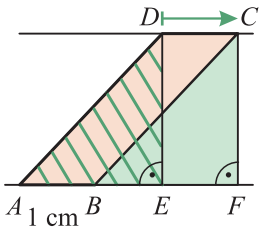
b) Átdarabolhatjuk téglalappá a paralelogrammát. Az így kapott téglalap területe egyenlő a paralelogramma területével.

$T = 2{,}5 \cdot 2 = 5\ \text{cm}^2$

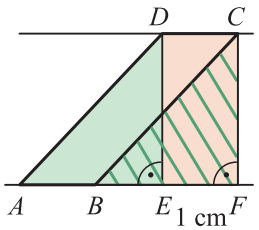


c) Az előző esethez hasonlóan számolhatunk: $T = 4 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^2$.

d) Egy lépésben nem lehet téglalappá átdarabolni a paralelogrammát, ezért most egyenlő területű háromszögeket rajzolunk. Az így kapott $AFCD$ trapéz területét kétféleképpen írjuk fel:



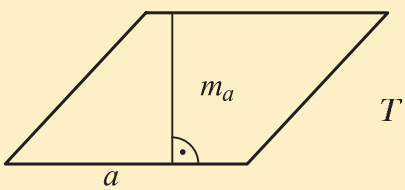
$T_{\text{trapéz}} = T_{\text{paralelogramma}} + T_{\text{háromszög}}$



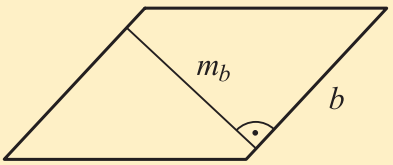
$T_{\text{trapéz}} = T_{\text{háromszög}} + T_{\text{téglalap}}$

$$T_{\text{paralelogramma}} = T_{\text{téglalap}} = (1 \cdot 2)\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}^2$$

A **paralelogramma területét** kiszámíthatjuk úgy, hogy az egyik oldalának hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával.



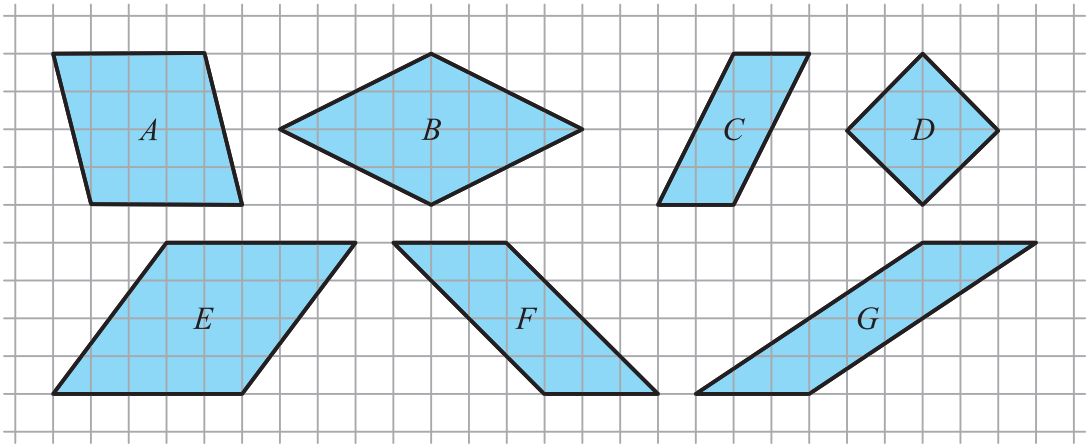
$T = a \cdot m_a$



$T = b \cdot m_b$

Feladatok

1. *a)* Darabold át téglalappá a paralelogrammát! Rajzolj négyzethálós lapra a megadott paralelogrammával egyenlő területű téglalapot!



b) Számítsd ki a paralelogramma területét, 1 rácsnégyzet területe legyen a területegység!

2. Rajzolj négyzethálós lapra olyan paralelogrammákat, amelyeknek területe 18 egység! Rajzolj ugyanekkora területű téglalapot, rombuszt, négyzetet is!

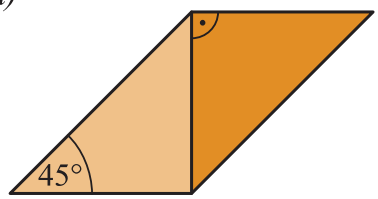
3. Számítsd ki a paralelogrammák területét!

Az oldalakat a, b jelöli, a megfelelő magasságokat m_a, m_b.

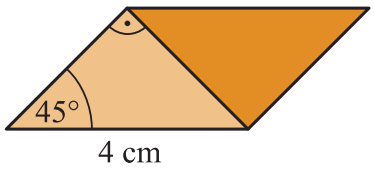
a) $a = 8$ cm, $m_a = 2$ cm *b)* $a = 2{,}5$ cm, $m_a = 32$ mm *c)* $a = \frac{2}{3}$ m, $m_a = 6$ m *d)* $b = 29$ cm, $m_b = 0{,}7$ cm *e)* $b = 2$ dm 3 mm, $m_b = \frac{5}{2}$ cm

4. Számítsd ki a paralelogrammák területét!

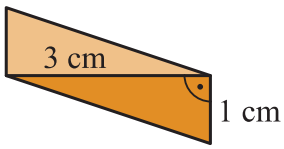
a)



b)



c)



5. Számítsd ki a paralelogramma 6 cm-es szemközti oldalainak távolságát, ha a paralelogramma területe

a) 24 cm^2, *b)* 12 cm^2, *c)* 3 cm^2, *d)* 4 cm^2, *e)* 30,6 cm^2!

6. Egy paralelogramma magasságai 7 mm és 14 mm, területe 35 mm^2. Mekkorák az oldalai?

7. Melyik négyszög rajzolható le egy elég hosszú 3 cm széles papírcsíkra?

a) 10 cm kerületű négyzet
b) 9 cm^2 területű négyzet
c) 10 cm^2 területű négyzet
d) 20 cm kerületű rombusz
e) 12 cm^2 területű rombusz
f) 60 cm kerületű paralelogramma
g) 60 cm^2 területű paralelogramma
h) 16 cm kerületű és 16 cm^2 területű rombusz
i) 3 cm^2 területű és 30 cm kerületű paralelogramma

Készíts vázlatrajzokat!

8. Egy paralelogramma szomszédos oldalai 4 cm és 6 cm, területe 20 cm^2. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

9. Egy paralelogramma szomszédos oldalainak aránya 3 : 2, kerülete 20 cm, területe 18 cm^2. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

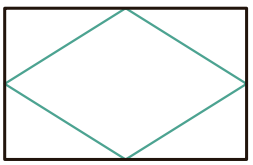
10. Mely paralelogrammák területét számíthatjuk ki így?

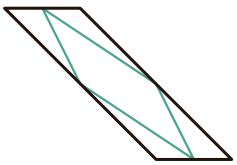
a) A terület a két szomszédos oldal szorzata.

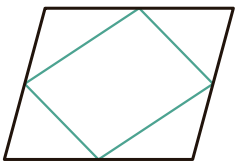
b) A terület a két átló szorzatának a fele.

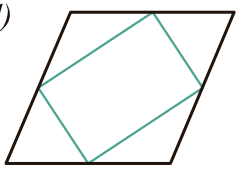
c) A terület az egyik oldal és a hozzá tartozó magasság szorzata.

11. Milyen négyszöget határoznak meg a paralelogramma oldalfelező pontjai? Megállapításodat indokold!

a) 

b) 

c) 

d) 

12. Paralelogrammák területe 24 cm^2. Számítsd ki a paralelogrammák

a) magasságának hosszát centiméterben, ha egy-egy oldaluk rendre 12 cm, 8 cm, 3 cm, 2 cm, 1 cm;

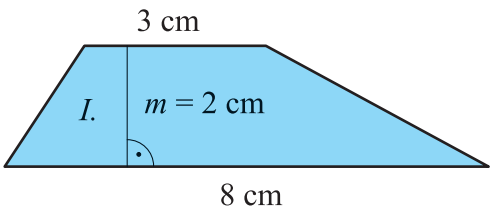
b) egyik oldalhosszát centiméterben, ha egy-egy magasságuk rendre 24 cm, 6 cm, 3 cm, 2,4 cm!

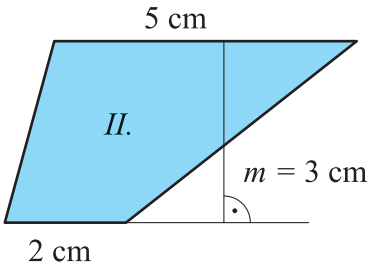
c) Készíts grafikont az összetartozó értékekről!

A trapéz területe

Példa

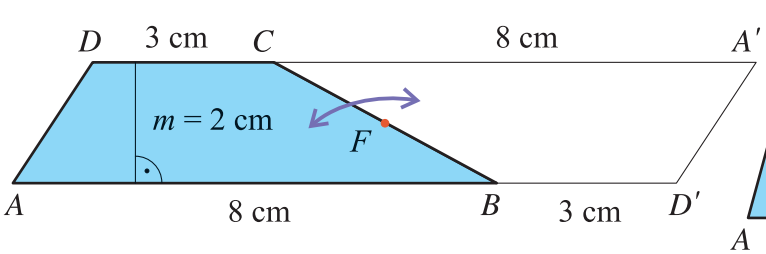
Számítsuk ki a trapézok területét!

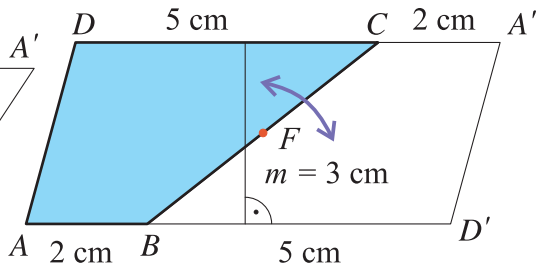




Megoldás

Kétszeres területű paralelogrammává egészítjük ki a trapézt úgy, hogy tükrözzük az egyik szárának felezőpontjára.





I. $T_{\text{paralelogramma}} = (8 + 3) \cdot 2 = 22\ cm^2$

$T_{\text{trapéz}} = 11\ cm^2$

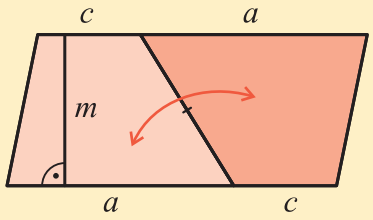
II. $T_{\text{paralelogramma}} = (2 + 5) \cdot 3 = 21\ cm^2$

$T_{\text{trapéz}} = 10{,}5\ cm^2$

A keletkezett $AD'A'D$ négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő, $AD \parallel A'D'$ és $AD = A'D'$. Az eredeti és a tükörképtrapéz együtt olyan paralelogrammát alkot, amelynek egyik oldala a trapéz alapjainak összege, magassága a trapéz magassága. Két egybevágó trapéz alkotja ezt a paralelogrammát, ezért egy trapéz területe fele a paralelogramma területének.

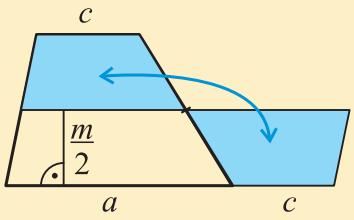
A **trapéz területét** kiszámíthatjuk úgy, hogy

– az alapok összegét megszorozzuk a magassággal, és a szorzatot elosztjuk kettővel,



$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$$

– az alapok összegét megszorozzuk a magasság felével.



$$T_{\text{trapéz}} = (a+c)\cdot \frac{m}{2}$$

Feladatok

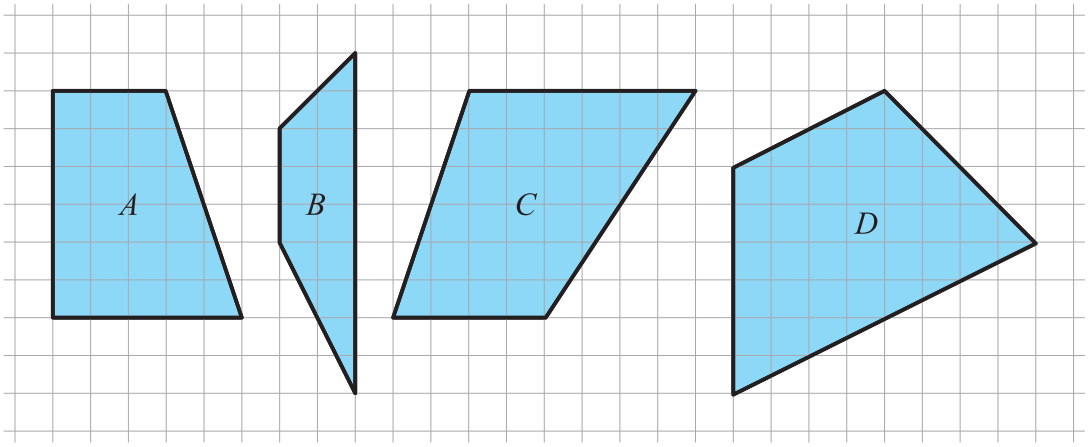
1. *a)* Rajzolj négyzethálós lapra a megadott trapézzal egyenlő területű paralelogrammát!

b) Darabold át paralelogrammává a trapézt!

c) Rajzolj a megadott trapézzal egyenlő területű téglalapot!

d) Számítsd ki a trapéz területét! (A területegység egy rácsnégyzet területe.)

e) Hány egység a trapéz középvonala?



2. Rajzolj négyzethálós lapra 12 egység területű, 4 egység magasságú trapézokat! Lehet-e köztük

a) téglalap;

b) derékszögű trapéz;

c) paralelogramma;

d) olyan húrtrapéz, amely nem téglalap?

3. Számítsd ki a trapéz területét, ha az alapjait a, c, a magasságát m jelöli!

a) $a = 1$ cm, $c = 7$ cm, $m = 3$ cm

b) $a = 4$ dm, $c = 3$ dm, $m = 2$ dm

c) $a = 3$ dm, $c = 17$ cm, $m = 2{,}5$ dm

d) $a = 2{,}5$ m, $c = 0{,}8$ m, $m = \frac{3}{2}$ m

e) $a = 2$ dm 7 cm, $c = 8$ cm, $m = \frac{12}{5}$ dm

4. Egy trapéz alapjai 3,5 cm és 5,5 cm. Számítsd ki az alapok távolságát, ha a trapéz területe

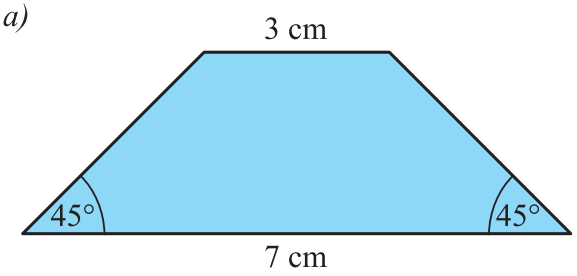
a) 18 cm^2, *b)* 54 cm^2, *c)* 13,5 cm^2, *d)* 6 cm^2, *e)* 10,8 cm^2!

5. Mekkora a 20 cm^2 területű trapéz magassága, ha az alapjainak hossza

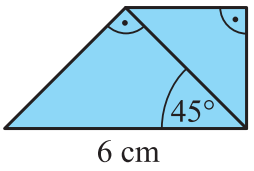
a) 3 cm és 7 cm, *b)* 1,2 dm és 8 cm, *c)* 2 cm és 3 cm?

6. Számítsd ki a trapézok területét!

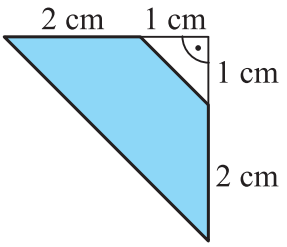
a)



b)



c)



7. Szerkeszd meg azt a trapézt, amelynek az alapjai 5 cm és 3 cm, az egyik szára 5 cm hosszú, a területe 16 cm^2! Hány megoldás van?

8. Szerkeszd meg azt a trapézt, amelynek az egyik alapja 8 cm, az egyik szára 7 cm, a magassága 6 cm és a területe 36 cm^2!

9. Egy erdőterületet két párhuzamos út határol 180 m, illetve 540 m hosszan. Az utak távolsága 600 m. Hány hektár az erdő területe, ha a párhuzamos útszakaszok között is egyenes a határvonal?

10. Melyik trapéz területét számíthatjuk ki így?

a) A terület két szomszédos oldal szorzata.

b) A terület az alap és a hozzá tartozó magasság szorzata.

c) A terület az alapok átlagának és a magasságnak a szorzata.

d) A terület az alapok összegének és a szár felének a szorzata.

11. Melyik trapézra teljesül az állítás?

a) Az átlói egyenlő területű háromszögekre bontják.

b) Az átlói egybevágó háromszögekre bontják.

c) Két szomszédos oldalból egyértelműen megszerkeszthető.

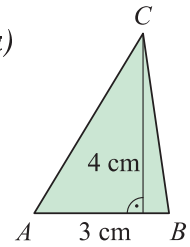
d) Az egyik szárának felezőpontjára tükrözve az eredeti és a tükörképtrapéz téglalapot alkot.

12. Melyik trapézt lehet egy vágással átdarabolni *a)* téglalappá, *b)* háromszöggé?

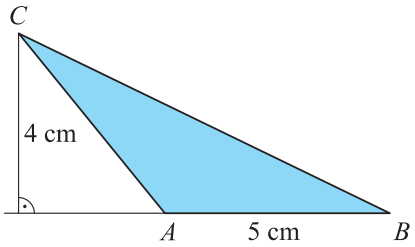
A háromszög területe

1. példa

Számítsuk ki a háromszögek területét! *a)*

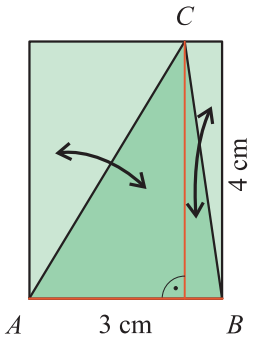


b)



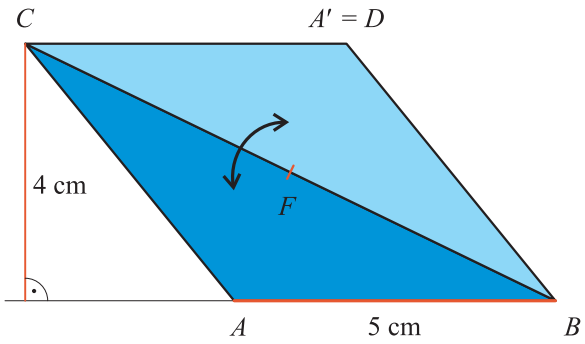
Megoldás

a) Téglalapba foglalhatjuk a háromszöget. Az így kapott téglalap területe kétszerese a háromszög területének.



$T_{\text{téglalap}} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$ $\quad T_{\text{háromszög}} = 6 \text{ cm}^2$

b) A téglalapba foglalás helyett tükrözzük a háromszöget az egyik oldalának felezőpontjára.



Ekkor az eredeti és a tükörképháromszög együtt középpontosan szimmetrikus négyszöget, paralelogrammát alkot. A háromszög területe fele a paralelogramma területének.

$T_{\text{paralelogramma}} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$

$T_{\text{háromszög}} = 10 \text{ cm}^2$

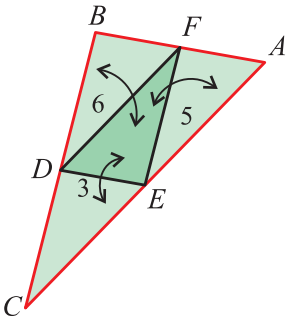
Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha egy másik oldal felezőpontjára tükrözzük a háromszöget.

Jelölésekkel háromféleképp felírhatjuk: $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ $\quad T = \frac{b \cdot m_b}{2}$ $\quad T = \frac{c \cdot m_c}{2}$

A háromszög területét kiszámíthatjuk úgy, hogy az egyik oldal hosszát megszorozzuk a hozzá tartozó magasság hosszával, és a szorzatot elosztjuk 2-vel.

2. példa

Egy háromszög három oldalfelező pontja olyan háromszöget alkot, amelynek 3 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak az oldalai. Hányféle lehet az eredeti háromszög? Hányszorosa az eredeti háromszög területe a felezőpontok által meghatározott háromszög területének?



Megoldás

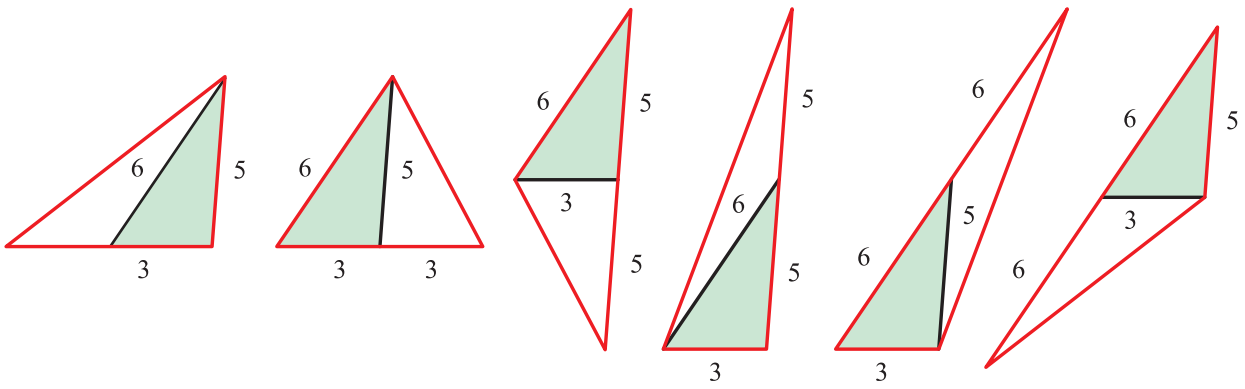
Egy háromszög két oldalfelező pontja által meghatározott szakasz (középvonal) feleakkora, mint a háromszög nem felezett oldala. Ezért az eredeti háromszög oldalai 6 cm, 10 cm és 12 cm hosszúak.

Egy megoldás lehetséges, hiszen a háromszöget egyértelműen meghatározza három oldalfelező pontja. Területe négyszerese a felezőpontok által meghatározott háromszög területének.

3. példa

Egy háromszög két csúcsa és egy oldalfelező pontja olyan háromszöget alkot, amelynek 3 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak az oldalai. Hányféle lehet az eredeti háromszög? Hányszorosa az eredeti háromszög területe a megadott háromszög területének?

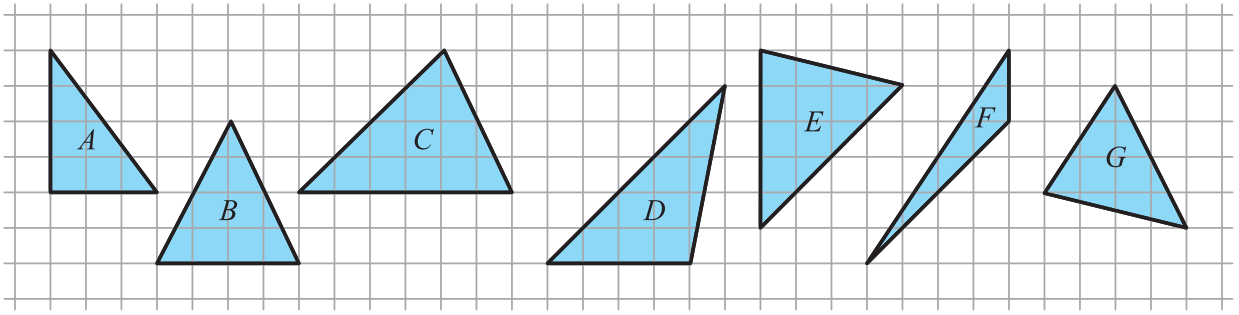
Megoldás



Az ábrákon zöld színnel jelöltük a megadott háromszöget. Bármely oldala lehet az eredeti háromszög oldala, féloldala vagy a csúcsot a felezőponttal összekötő szakasza (súlyvonala). Hatféle lehet tehát az eredeti háromszög. Mind a hat esetben az eredeti háromszög területe kétszerese a megadott háromszög területének, mivel kétszer akkora oldalhoz ugyanakkora magasság tartozik.

Feladatok

1. Számítsd ki a háromszögek területét! Egy rácsnégyzet területe legyen a területegység!



2. Rajzolj négyzethálós lapra 12 egység területű háromszögeket!

a) Lehet-e a háromszögek között derékszögű háromszög?

b) Lehet-e a háromszögek között egyenlő szárú háromszög?

3. Rajzold meg derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszöget, ha $A(-2;-3)$, $B(7;-3)$, $C(0;4)$ a háromszög csúcsai! Változtasd meg a C csúcs helyét úgy, hogy ABC háromszöggel egyenlő területű

a) derékszögű háromszöget,

b) tükrös háromszöget,

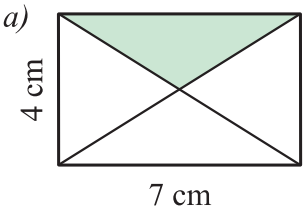
c) egyenlő szárú tompaszögű háromszöget rajzolj!

4. Számítsd ki a háromszög területét!

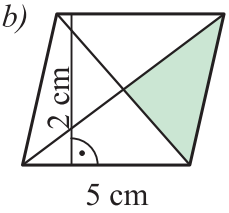
a) $a = 7$ cm $\quad$ $m_a = 2$ cm $\quad$ *b)* $b = 8$ dm $\quad$ $m_b = 6$ cm $\quad$ *c)* $c = \frac{2}{3}$ dm $\quad$ $m_c = \frac{3}{4}$ dm $\quad$ *d)* $a = 5{,}3$ cm $\quad$ $m_a = 0{,}7$ cm $\quad$ *e)* $b = 1{,}06$ m $\quad$ $m_b = 3{,}9$ m

5. Mekkora a beszínezett alakzatok területe?

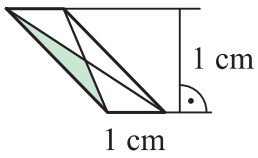
a)



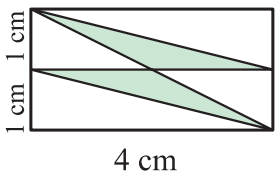
b)



c)



d)



6. Számítsd ki a háromszög 8 cm-es oldalához tartozó magasságát, ha területe

a) 24 cm^2, $\quad$ *b)* 12 cm^2, $\quad$ *c)* 8 cm^2, $\quad$ *d)* 1 cm^2, $\quad$ *e)* 9,2 cm^2!

7. Rajzolj négyzethálós lapra olyan háromszögeket, amelyeknek 6 egység hosszúságú oldaluk rácsvonalra illeszkedik, területük 12 területegység!

a) Lehet-e a háromszögek között 16 egység kerületű?

b) Lehet-e a háromszögek között 20 egység kerületű?

c) Lehet-e a háromszögek között legkisebb kerületű?

8. 33 dm^2 területű ABC háromszögek BC oldala

a) 3 dm, $\quad$ *b)* 6 dm, $\quad$ *c)* 11 dm, $\quad$ *d)* 4 dm, $\quad$ *e)* q dm.

Mekkora az A csúcs távolsága a BC egyenestől? Milyen arányosság van az oldalhosszak és a távolságok között?

9. Melyik háromszögre igaz?

a) Magasságvonala két egyenlő területű háromszögre bontja.

b) Szögfelezője két egyenlő magasságú háromszögre bontja.

c) Súlyvonala két egyenlő magasságú háromszögre bontja.

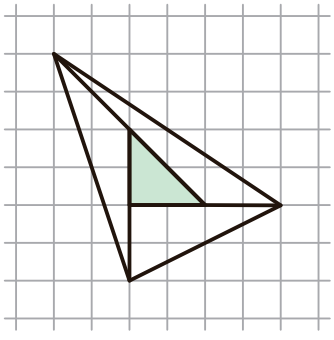
d) Szögfelezője két egyenlő területű háromszögre bontja.

e) Súlyvonala két egybevágó háromszögre bontja.

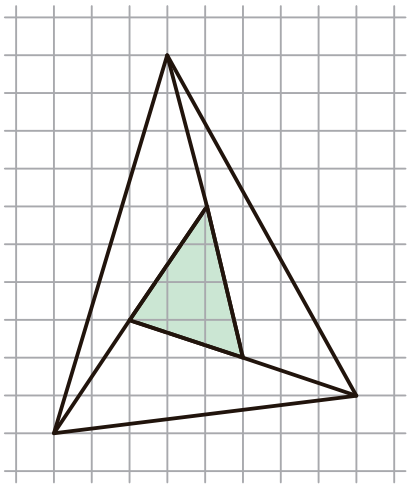
f) Oldalfelező merőlegese két egybevágó sokszögre bontja.

10. A háromszög oldalegyeneseire a csúcstól kezdve azonos irányban rámértük a megfelelő oldal hosszát. Hányszorosa az így kapott háromszög területe az eredeti háromszög területének?

a)



b)



A területszámítás alkalmazásai

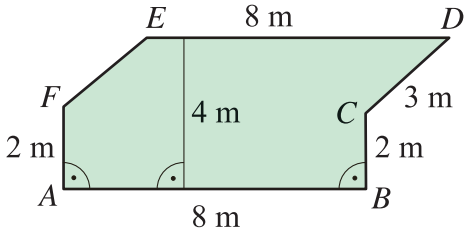
A sokszögeket ismert területű részekre, például háromszögekre, négyszögekre bonthatjuk.

A terület kiszámításakor ezeknek a háromszögeknek és négyszögeknek a területét adjuk össze. Egy sokszög különböző felbontásai ugyanazt a területet adják.

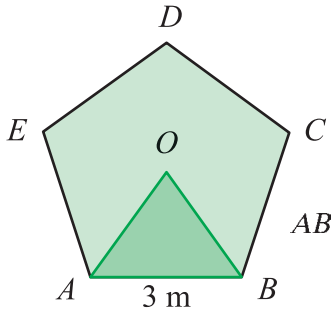
Példa

Számítsuk ki a sokszögek területét! A szükséges adatokat mérjük meg!

a)



b)



ABCDE szabályos ötszög

Megoldás

a) A hatszöget az *FC* átlója az *ABCF* téglalapra és az *FCDE* paralelogrammára bontja. A paralelogramma magassága 2 m.

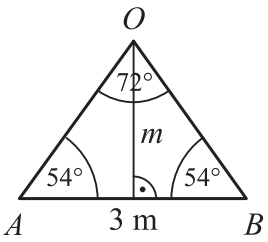
$T_{ABCD} = 8 \cdot 2 = 16\ \text{m}^2$ $\quad T_{FCDE} = 8 \cdot 2 = 16\ \text{m}^2$ $\quad T_{\text{hatszög}} = 32\ \text{m}^2$

b) A szabályos ötszöget öt egybevágó tükrös háromszögre bonthatjuk.

A háromszögek szárszöge $360 : 5 = 72°$.

Megrajzoltuk egy háromszög kicsinyített képét, $AB = 3$ cm.

Az *AB* oldalhoz tartozó magasságot $\approx$ 2,1 cm-nek mértük, tehát a valódi méret $\approx$ 2,1 m.

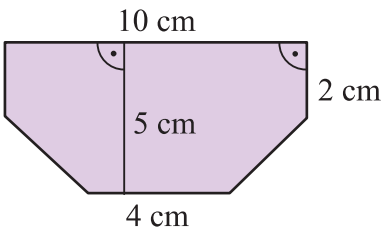


$T_{\text{háromszög}} \approx \dfrac{3 \cdot 2{,}1}{2} = 3{,}15\ \text{m}^2$ $\quad T_{\text{ötszög}} \approx 5 \cdot 3{,}15 = 15{,}75\ \text{m}^2$

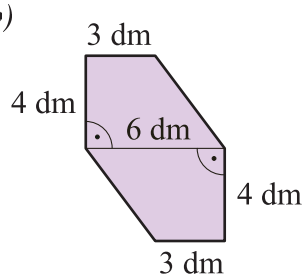
Feladatok

1. Számítsd ki a sokszögek területét!

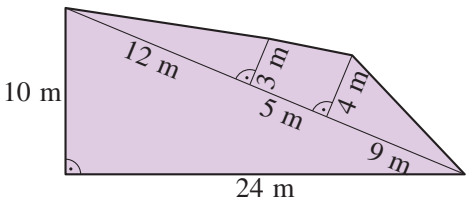
a)



b)

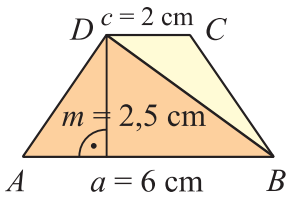


c)

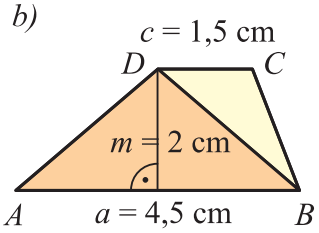


2. Számítsd ki az ABD és a BCD háromszög területét! Írd fel a két terület arányát!

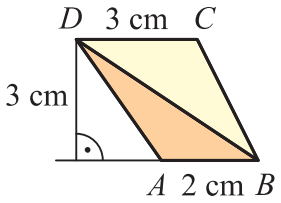
a)



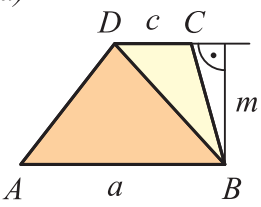
b)



c)



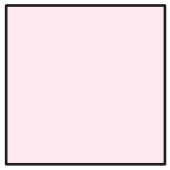
d)



3. Számítsd ki a 2. feladatban megadott $ABCD$ trapézok területét!

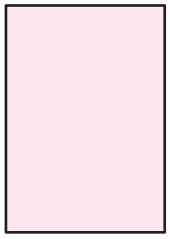
4. Valamelyik csúcson átmenő egyenessel oszd két egyenlő területű részre a sokszöget!

a)



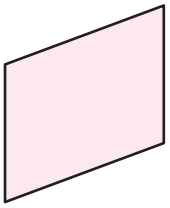
négyzet

b)



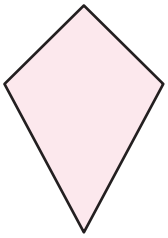
téglalap

c)



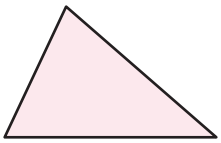
paralelogramma

d)



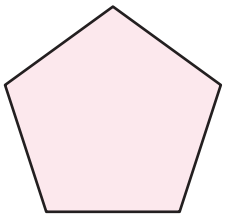
deltoid

e)



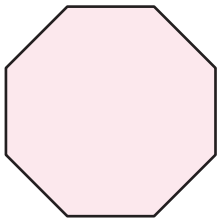
háromszög

f)



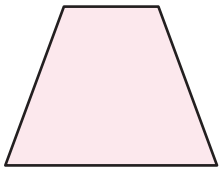
szabályos ötszög

g)



szabályos nyolcszög

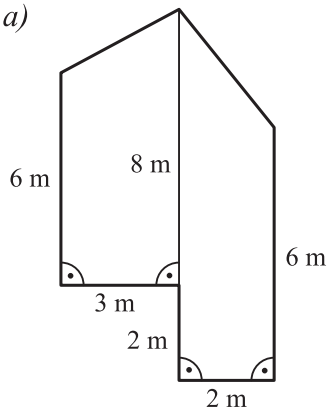
h)



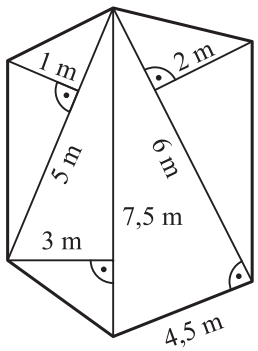
húrtrapéz

5. Számítsd ki a sokszög területét!

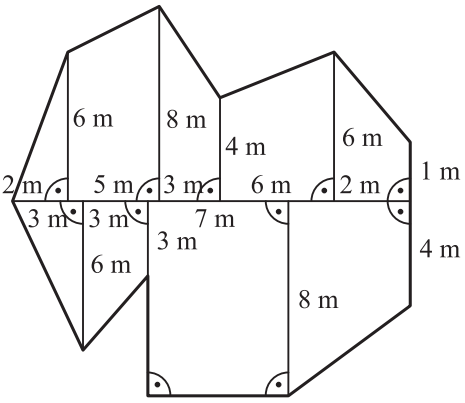
a)



b)



c)

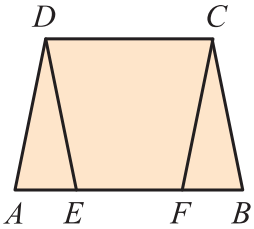


6. Szerkessz 5 cm sugarú körbe szabályos hatszöget! Csúcsai sorban A, B, C, D, E és F. Mekkora része az $ACDE$ négyszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének?

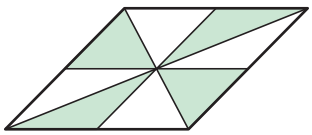
7. Szerkessz 4 cm sugarú körbe szabályos nyolcszöget, csúcsai sorban A, B, C, D, E, F, G, H! Számítsd ki az $ACFG$ négyszög területét! A szükséges adatokat mérd meg!

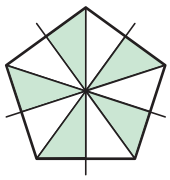
8. Készíts méretarányos rajzot az $ABCD$ húrtrapézról!
$CF \parallel AD$ és $DE \parallel BC$, $EF = AD = 3$ cm, $DC = 6$ cm

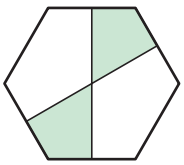
a) Milyen négyszög az $AFCD$, a $BEDC$ és az $EFCD$ négyszög?
b) Mekkorák az $EFCD$ négyszög szögei?
c) Mekkora az $ABCD$ és az $EFCD$ négyszög területének, illetve kerületének aránya?

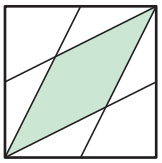


9. Hányadrésze a színessel jelölt részek együttes területe a sokszög területének? A megadott pontok oldalfelező pontok.

a)

paralelogramma

b)

szabályos ötszög

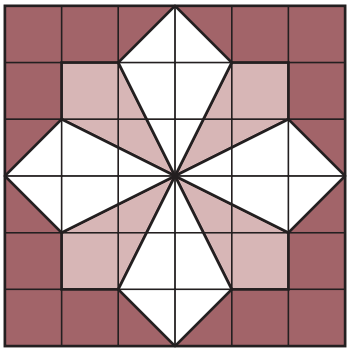
c)

szabályos hatszög

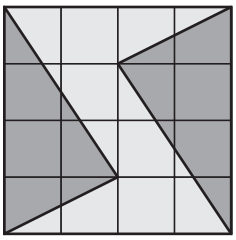
d)

négyzet

10. Az ábrán látható díszkő mintázatának hányadrésze FEHÉR színű?

A) $\frac{1}{6}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{3}$ *D)* $\frac{2}{5}$

(Országos kompetenciamérés, 2012)



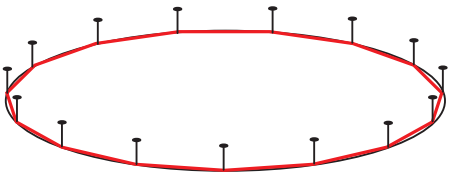
11.

= területegység

Az ábrán világosszürke és sötétszürke színű alakzatokból kirakott díszburkolat egy része látható. Határozd meg, hány területegység a négyzet alakú területet lefedő díszburkolat világosszürke része! Satírozd be a helyes válasz betűjelét!

A) 6 *B)* 8 *C)* 10 *D)* 12

(Országos kompetenciamérés, 2012)

A kör kerülete



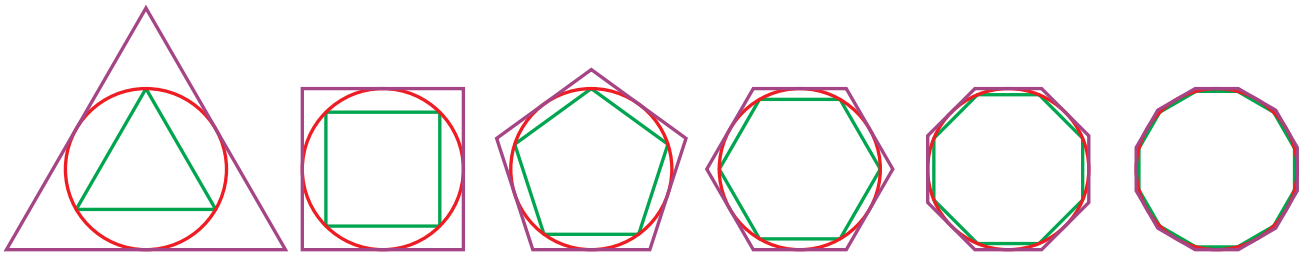
A kör kerületét néhány alkalommal úgy mértük meg, hogy a körvonal mentén fonalat feszítettünk ki. Minél több szöget raktunk a körvonalra, annál hosszabb fonallal lehetett körbekeríteni.

A fonal hossza minden esetben kevesebb a kör kerületénél.

A kör kerületének meghatározására bemutatunk egy közelítő módszert, amelyben szabályos sokszögek kerületét határozzuk meg.

A körvonal mentén egyenlő közönként kifeszített fonal hosszát a körbe írt szabályos sokszög kerületének tekintjük, amely kisebb a kör kerületénél.

A kör köré írt szabályos sokszögek kerülete biztosan nagyobb a kör kerületénél.

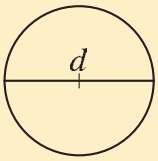


Minél több oldalú sokszöget vizsgálunk, annál pontosabban adhatjuk meg a kör kerületét.

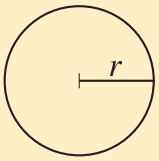
A kör kerülete körülbelül 3,14-szorosa az átmérőjének, $k_{\text{kör}} \approx 3{,}14 \cdot d$.

Van olyan szám, amely pontosan megadja, hogy a kör kerülete hányszorosa a kör átmérőjének. Ezt a számot π-vel jelölik, értéke $\approx 3{,}1415927\ldots$ A π tizedesjegyeiben nincs ismétlődés, ez a szám végtelen, nem szakaszos tizedes tört. Nem írható fel két egész szám hányadosaként.

A kör kerülete az átmérőjének π-szerese, a sugarának 2π-szerese.



$k_{\text{kör}} = \pi d,$



$k_{\text{kör}} = 2\pi \cdot r,$ $\qquad \pi \approx 3{,}14$

A fennmaradt matematikatörténeti emlékek szerint legalább 4000 éve keresik a tudósok a kör kerületét és területét meghatározó képleteket. Változatos módszereik között volt a szabályos sokszögekkel való közelítés is. Kínában a III. században így jutottak el a 3,14159-hez, Iránban a XV. században pedig további 11 tizedesjegyet találtak meg.

Ludolph van Ceulen (1540–1610) holland matematikus a keresett arány 35 tizedesjegyét számította ki, ezért nevezik azt Ludolph-féle számnak is. 1739 óta *Euler* javaslatára a kör kerületének és átmérőjének arányát π betűvel jelölik, amely a periféria szó kezdőbetűje. (periféria = kerület, *görög eredetű szó*)

Feladatok

1. Közelítőleg hányszor akkora egy henger alakú tárgy alapkörének kerülete, mint az átmérőjének hossza?

Fonalat rájuk illesztve mérd meg egy pohár és egy fazék átmérőjének nagyságát, valamint az alapkörének kerületét!

2. Szögmérővel, körzővel, vonalzóval szerkeszd meg az alábbi szabályos sokszöget! Mérés után számítsd ki a kerületét, területét!

a) A szabályos hatszöget felépítő tükrös háromszögek szára 3 cm.

b) A szabályos hatszöget felépítő tükrös háromszögek szára 4 cm.

c) A szabályos ötszöget felépítő tükrös háromszögek szára 3 cm.

d) A szabályos tízszöget felépítő tükrös háromszögek szára 3 cm.

3. Nézz utána matematikatörténeti könyvekben vagy az interneten, hogy a különböző korokban mely törtekkel közelítették a π értékét!

4. Számítsd ki a kör kerületét, ha sugara

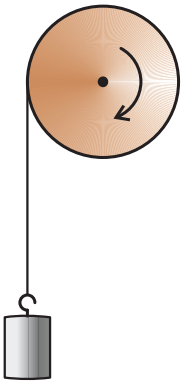
a) 4 cm, *b)* 6 mm, *c)* 2,8 cm, *d)* $\frac{2}{3}$ dm, *e)* 0,17 m!

5. Számítsd ki a kör sugarát, ha kerülete

a) 25,12 cm, *b)* 30 cm, *c)* 100 mm, *d)* 8π cm, *e)* $\frac{1}{3}\pi$ dm!

6. 20 m átmérőjű kör alakú medence fala mentén hány métert úszhat az aranyhal, ha egy kört tesz meg?

7. Egy gépkocsi kerekének sugara 28,25 cm. Hány km utat tesz meg a jármű 500 fordulat alatt?



8. Egy kerékpár kerekének átmérője 68,6 cm (27″-os).
Mekkora utat tesz meg 1 fordulattal?

9. Egy csörlő átmérője 50 cm. Hússzor körbetekerve milyen magasra emelhető fel vele a teher?

10. *a)* Számítsd ki egy 3 cm sugarú félkör kerületét!
b) Számítsd ki egy 3 cm sugarú negyedkör kerületét!

11. A Föld átmérője körülbelül 12 756 km. Hány km az Egyenlítő hossza?

12. Két kör kerülete között 1 dm a különbség. Mekkora a sugaraik különbsége, ha

a) a kisebb kör sugara 2 dm, *b)* a kisebb kör sugara 1 m,
c) a nagyobb kör sugara 2 dm, *d)* a nagyobb kör sugara 1 m?

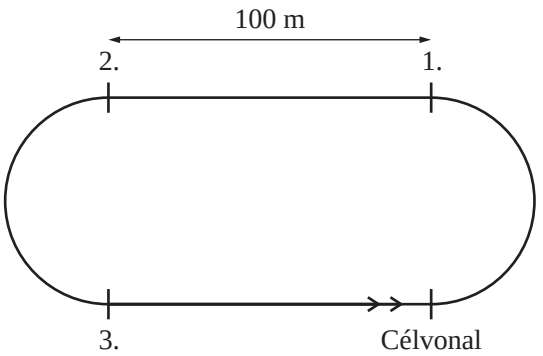
13. A szabadtéri atlétikai versenyeken a futópálya hossza általában 400 méter.

A következő ábrán egy ilyen futópálya látható. A különböző távú futóversenyek esetében más-más helyről indítják a futamot, míg a futószám minden esetben a célvonalon fejeződik be.

Melyik helyről kell indítani az 5000 méteres hosszútávfutásnál a versenyzőket ahhoz, hogy a célvonal jelentse a táv végét? Satírozd be a helyes válasz betűjelét!

A) Az 1. helyről. *B)* A 2. helyről. *C)* A 3. helyről. *D)* A célvonalról.

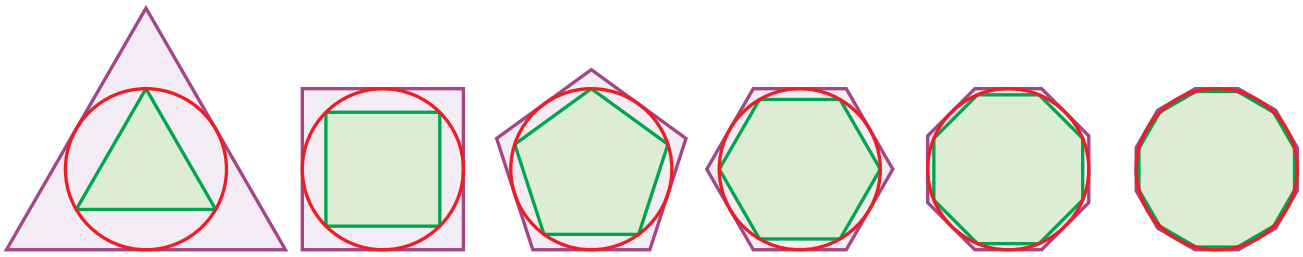




(Országos kompetenciamérés, 2013)

A kör területe

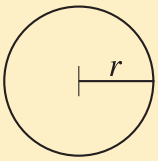
A kör területét is meghatározhatjuk a beírt és a köré írt szabályos sokszögek területével közelítve.



A kör területe nagyobb mindegyik beírt sokszög területénél, és kisebb minden köré írt sokszög területénél.

A kör területe körülbelül 3,14-szorosa a sugár négyzetének, $t_{kör} \approx 3{,}14 \cdot r^2$

A kör területe π-szerese a sugár négyzetének.



$t_{kör} = \pi \cdot r^2$, $\pi \approx 3{,}14$

Feladatok

1. Rajzolj 1 cm, 2 cm, 3 cm sugarú kört milliméterpapírra! Körülbelül hány cm^2, illetve hány mm^2 a körök területe?

2. Számítsd ki a kör területét, ha sugara

a) 4 cm, *b)* 6 mm, *c)* 2,8 cm, *d)* $\frac{2}{3}$ dm, *e)* 0,17 m!

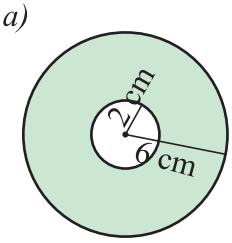
3. Számítsd ki a kör sugarát, ha területe

a) 3,14 cm^2, *b)* 78,5 dm^2, *c)* 0,785 m^2, *d)* 16π cm^2, *e)* $0{,}01\pi$ dm^2!

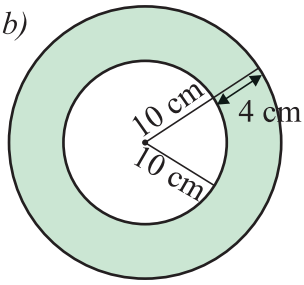
4. Mekkora egy 3 cm sugarú félkör, negyedkör, hatodkör területe?

5. Számítsd ki a körgyűrűt határoló körök kerületét és a körgyűrű területét!

a)

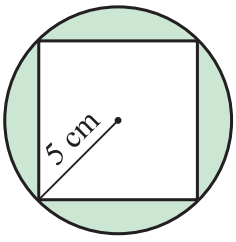


b)

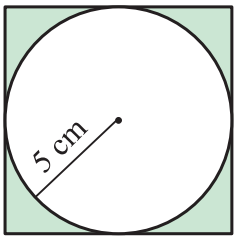


6. Számítsd ki a színessel jelölt részek területét!

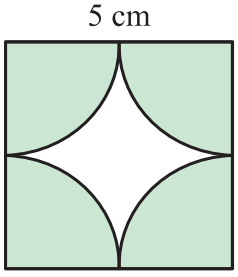
a)



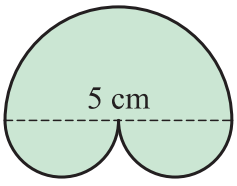
b)



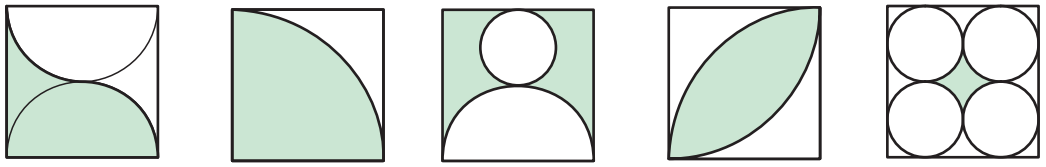
c)



d)



7. Számítsd ki a 4 cm oldalú négyzetbe rajzolt, színessel jelölt alakzatok területét!



Tudáspróba

1. Számítsd ki a következő sokszögek belső szögeinek nagyságát!

a) A tükrös háromszög egyik magassága 34°-os szöget zár be az alappal.

b) A háromszög egyik belső szöge 28°, a másik belső szöge fele akkora, mint a mellette levő külső szög.

c) A paralelogramma egyik belső szöge 130°.

d) A trapéz két belső szöge 63° és 100°.

2. *a)* Szerkessz olyan trapézt, amelynek az egyik alapja 9 cm, a másik alapja 4 cm, az egyik átlója 8 cm, a magassága 5 cm hosszú!

b) Számítsd ki az előbbi adatokból a trapéz területét!

3. Egy szabályos sokszög egyik csúcsából 12 átló húzható.

a) Mekkora a sokszög egy-egy belső szöge?

b) Hány fok a belső szögeinek összege?

c) Hány átlója van összesen a sokszögnek?

4. Számold ki, melyik nagyobb!

a) Egy 5 cm sugarú háromnegyed kör területe vagy egy 6 cm sugarú félkör területe?

b) Egy 5 cm sugarú háromnegyed kör kerülete vagy egy 6 cm sugarú félkör kerülete?

5. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszodat indokold!

A: Van olyan téglalap, amely húrtrapéz.

B: Ha egy paralelogramma átlói egyenlők, akkor az négyzet.

C: Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a négyszög rombusz.

D: Ha egy négyszög csúcspontjainak koordinátái a derékszögű koordináta-rendszerben rendre (1; 2), (3; 0), (5; 2) és (3; 3), akkor területe egyenlő 12 rácsnégyzet területével.

6. *a)* Számítsd ki az alábbi sokszögek területét!

E: Trapéz, amelynek alapjai 4 cm, illetve 3 dm hosszúak, magassága pedig 10 mm.

É: Négyzet, amelynek átlói 0,4 dm hosszúak.

L: Egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 7,5 cm, az alaphoz tartozó magassága 4,8 cm.

T: Derékszögű háromszög, amelynek befogói 6 cm és 50 mm hosszúak.

b) Rendezd a sokszögeket területük szerint növekvő sorrendbe, majd írd le a betűjelüket! A négy betűt összeolvasva értelmes szó adódik.

Algebra

A valóság megragadása a matematika nyelvén, képletekkel

Az **algebra a matematika egyik ága,** melyet a matematikai műveletek általános tudományaként határozhatunk meg.

A mindennapi élet számos területén találkozunk szabállyal leírható jelenségekkel. Ezeket a szabályokat szavakkal megfogalmazzuk, és úgy rövidítjük a leírásukat, hogy a szavakat betűkkel helyettesítjük. Az így kapott műveletsorokat **algebrai kifejezéseknek** nevezzük.

Az algebrai kifejezésekben számok, betűk, műveleti jelek és zárójelek szerepelhetnek. A kifejezésekben szereplő betűket **változó**knak nevezzük. Ha a kifejezésben előforduló változók helyére számokat írunk, és ezekkel elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor megkapjuk az algebrai kifejezés **helyettesítési értékét.**

A tanulmányaink során már sok összefüggést megadtunk algebrai kifejezéssel, **képlettel.** Például a téglalap és a deltoid kerületének kiszámítási módját röviden a $K = (a + b) \cdot 2$ képlettel írtuk le.

1. példa

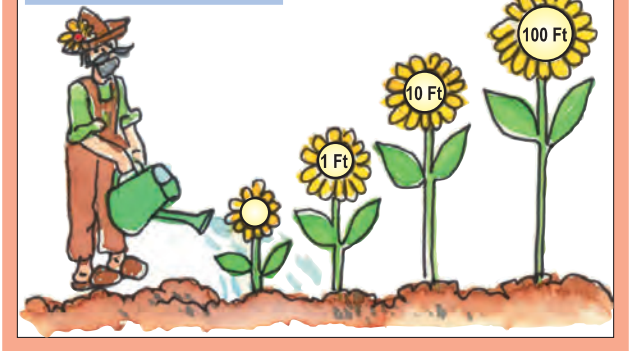
Gyakori, hogy a különböző foglalkozású emberek (banki alkalmazottak, baleseti helyszínelők stb.) olyan képleteket használnak, amelyeket nem ők találtak ki. Erre mutatunk egy-egy példát. A számításokban a kék mezőben lévő képleteket használjuk.

a) Számítsuk ki, mennyit kamatozik az év végi kirándulásra beszedett 38 000 Ft, ha 8% a kamatláb, és 270 nap a lekötés ideje!

b) Számítsuk ki egy 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve egy 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó autó fékútját!

Egyszerű kamatszámítás (a kamat nem kamatozik, egy évnél rövidebb időszakról van szó)

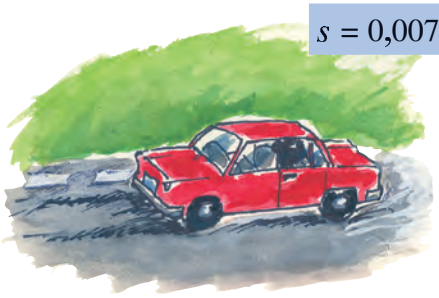
$$K = t_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{n}{360}$$



K = az n napi lekötés kamata
t_0 = alaptőke
$p\%$ = az 1 évi lekötés kamatlába
n = a lekötés napjainak száma

Fékút

$$s = 0{,}0077 \cdot v^2$$



s = a fékút [m]
v = az autó sebessége $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$

A fékút az a távolság, amelyet a lendületben lévő autó megtesz attól a pillanattól, amikor a fékek működésbe lépnek egészen a megállásig. A 0,0077-es szorzót átlagos körülményekre számították ki. A fékút hosszabb lehet például télen, csúszós úton, kopott gumik esetében.

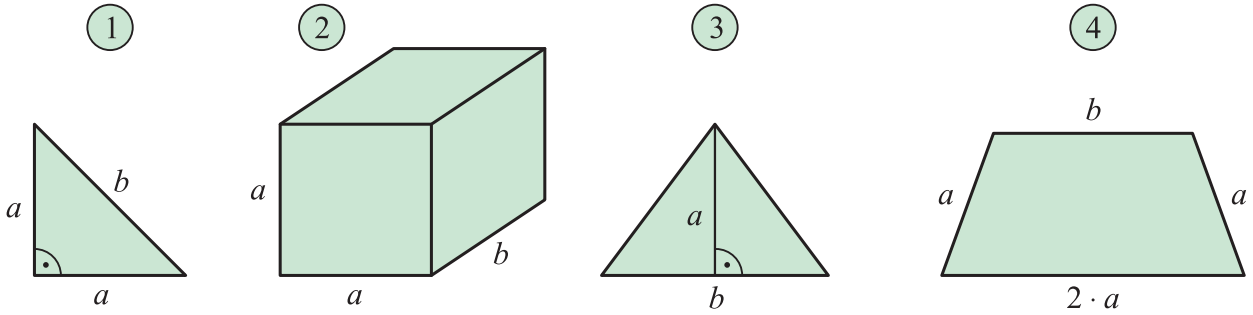
Megoldás

a) $K = 38\,000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{270}{360} = 2280$ Ft; 2280 Ft-ot kamatozik az osztálypénz.

b) Ha az autó sebessége 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, akkor a fékút méterben megadva: $s = 0{,}0077 \cdot 50^2 = 19{,}25$. Ha a sebesség 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, akkor a fékút méterben megadva: $s = 0{,}0077 \cdot 120^2 = 110{,}88$.

2. példa

Keresd a párját! Melyik rajzhoz melyik képlet tartozik?



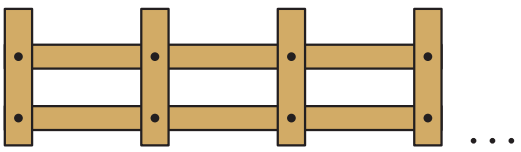
A) $V = a^2 \cdot b$ *B)* $T = \frac{a^2}{2}$ *C)* $K = 4 \cdot a + b$ *D)* $T = \frac{a \cdot b}{2}$

Megoldás

A) – (2), *B)* – (1), *C)* – (4), *D)* – (3)

3. példa

A hétköznapi életünket gyakran megkönnyíti, ha meg tudjuk fogalmazni a feladatban rejlő szabályt. Ilyen kerítésekhez kell oszlopokat és léceket rendelnünk az asztalostól.



...

Hogyan függ a lécek száma az oszlopok számától?

Megoldás

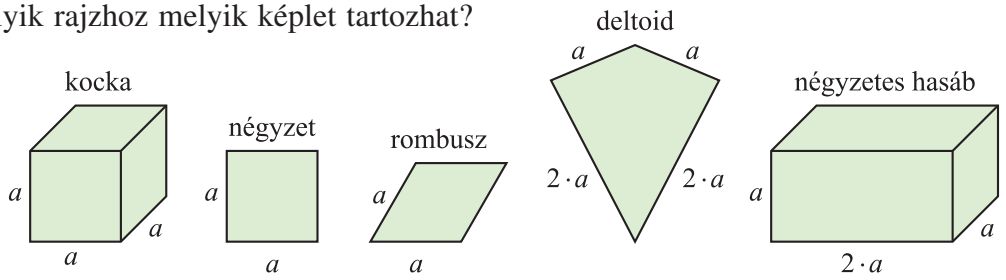
Az oszlopok száma (n)	2	3	4	...	10	n
A közök száma (k)	1	2	3	...	9	$n - 1$
A lécek száma (l)	$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 = 6$	...	$9 \cdot 2 = 18$	$(n - 1) \cdot 2$

A táblázatból is kiolvasható, hogy a közök száma az oszlopok számánál 1-gyel kevesebb: $n - 1$. A lécek száma a közök számának a kétszerese: $k \cdot 2$.

A szabály képlettel: $l = k \cdot 2 = (n - 1) \cdot 2$.

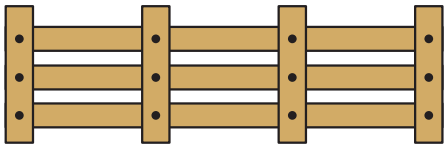
Feladatok

1. Melyik rajzhoz melyik képlet tartozhat?



$K = 4 \cdot a$ $T = a^2$ $A = 6 \cdot a^2$ $K = 6 \cdot a$ $V = 2 \cdot a^3$ $A = 10 \cdot a^2$

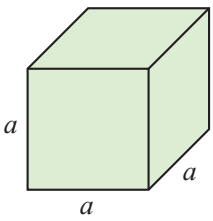
2. *a)* Hány léc kell egy kerítéshez, ha 2, 3, 4, 5,... 15 oszlopa van?



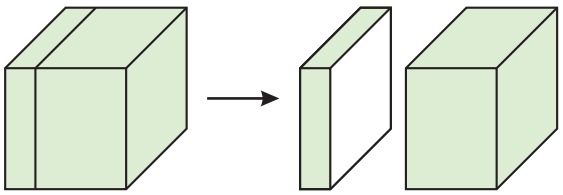
b) Írd fel képlettel az oszlopok és a lécek száma közötti összefüggést!

c) Hány oszlop van, ha 60 lécet használunk fel egy kerítés elkészítéséhez?

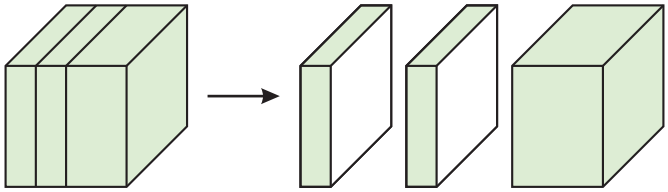
3. Egy kockát az egyik lapjával párhuzamos vágásokkal négyzetes hasábokra fűrészelünk szét. Hogyan függ a vágások számától a kapott testek együttes felszíne?



vágás nélkül



1 vágás után ⟶ ezt a két testet kapjuk



2 vágás után ⟶ ezt a három testet kapjuk

a) Készíts el a füzetedbe a táblázatot, és folytasd a kitöltését!

A vágások száma	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	v
A kapott testek együttes felszíne	$6 \cdot a^2$	$8 \cdot a^2$											

b) Írd fel az összefüggést képlettel! (A vágások számát v betűvel jelöld!)

4. A Föld középpontja felé haladva egyre magasabb lesz a hőmérséklet. A $T = 15 + \frac{d}{100}$ képlettel azt tudjuk közelítőleg kiszámítani, hogy egy adott mélységben mekkora a hőmérséklet. A képletben T jelöli a hőmérsékletet °C-ban mérve; d jelöli a felszíntől mért távolságot m-ben mérve.

a) A Vértes hegység nyugati előterében létesült Márkushegyi Bányaüzemben napjainkig több mint 130 millió tonna szenet termeltek ki. A mintegy 400-500 m mélységű, föld alatti

létesítmény barnaszén kitermelését végzi. A bánya méretére jellemző, hogy a föld alatti összes vágatok együttes hossza több mint 40 km.

Számítsd ki a képlet segítségével, hogy milyen magas lehet a hőmérséklet a szénbányában 450 méter mélységben!

b) Kimberley Mine (ejtsd: kimbörli májn), vagy közkeletű nevén a Nagy Lyuk, egy gyémántbánya a Dél-afrikai Kimberley városában. A Nagy Lyuk területe 17 hektár. A külszíni bányászat 44 évig tartott. Közel 50 ezer bányász mélyítette a lyukat csákánnyal és ásóval. Összesen 22 millió tonna földet mozgattak meg, amelyben közel 3 tonna gyémántot találtak.



A fotó az évek alatt kialakult bányatóról készült. Később a bányát tovább művelték a felszín alatt.

Számítsd ki, milyen mély a bánya, ha abban a mélységben közel 26 °C a hőmérséklet a Föld belsejében!

@ Miért lesz egyre magasabb a hőmérséklet a Föld középpontja felé haladva?

5. A matematikusok évszázadok óta próbálnak kitalálni egy olyan általános képletet, amely csak prímszámokat ad meg. Erőfeszítéseiket ezideig nem koronázta siker. Legendre (ejtsd: lözsandr) például a következő képletet ajánlotta: $2x^2 + 29$.

Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyet x helyére behelyettesítve nem kapunk prímszámot?

6. Ilyen csempékből építettük ezt a csempesorrészletet.



Melyik képlet írja le a bordó terület nagyságát egy csempén, ha a-val a csempe oldalhosszát jelöltük?

A) $\frac{a^2}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ *B)* $\frac{a^2}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ *C)* $\frac{a^2 \cdot \pi}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ *D)* $a^2 - \frac{a^2 \cdot \pi}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

A műveletek kapcsolatai, azonosságok

Bizonyos összefüggéseket, szabályokat megértünk átlalunk ismeretlen nyelven írt könyvekből is. Ennek oka, hogy sok jelölést használnak egységesen a különböző országokban. Néhány, általatok is használt jel és szimbólum eredetét láthatjátok az alábbi táblázatban.

Megnevezése	Jele	Eredete
egyenlőség	=	1557, Robert Recorde (ejtsd: robert rikord; 1510–1558)
kisebb, nagyobb	<, >	Gottfried Leibniz (ejtsd: gotfríd lejbnic; 1646–1716)
zárójel	( )	hinduk, 10. század

Nézz utána, ki és mikor vezette be a matematikában a betűk használatát az ismeretlenek, változók jelölésére!

Elevenítsünk fel néhányat a műveletek tulajdonságairól és a zárójel használatáról tanult ismereteinkből algebrai kifejezések és egyenlőségek segítségével!

Azoknak a számoknak a halmazát, amelyeket az egyenlőségben szereplő, betűkkel jelölt változók helyére beírhatunk, **alaphalmaznak** nevezzük. Az egyenlőség **igazsághalmazát** az alaphalmaz összes olyan eleme alkotja, amely igazzá teszi az egyenlőséget. Az **azonosság** olyan egyenlőség, amely a benne szereplő betűk minden lehetséges helyettesítési értékére igaz; ilyenkor az alaphalmaz megegyezik az igazsághalmazzal.

1. példa

Melyik cédula melyik sorba illik?

	A konkrét példa	A kapcsolat szavakkal leírva	Algebrai kifejezésekkel leírva
1.	$\frac{7}{2} - 2 = \frac{7}{2} + (-2)$	Egy szám kivonása mindig helyettesíthető az ellentettjének hozzáadásával	?
2.	$3{,}4 \cdot 1{,}7 = 1{,}7 \cdot 3{,}4$	A szorzat tényezői felcserélhetők	?
3.	$-5 : 8 = -5 \cdot \frac{1}{8}$	Egy számmal való osztás mindig helyettesíthető a reciprokával való szorzással	?

A $a \cdot b = b \cdot a$ $\quad$ B $a : b = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$ $\quad$ C $a - b = a + (-b)$

Megoldás

$1 - C, \quad 2 - A, \quad 3 - B$

Ha nincs semmilyen kikötés a betűk helyére írható számokra, akkor az alaphalmazon az összes eddig tanult számot kell érteni! Ebben a feladatban az **alaphalmaz** az általatok már ismert **racionális számok halmaza.**

A racionális számok körében a 0-val való osztást nem értelmezzük. Ezért írtuk rá erre a kártyára, hogy a b betűvel jelölt osztó (nevező) nem lehet nulla.

B $a : b = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$

Minden esetben jelölnünk kell, hogy az alaphalmaz elemei közül melyek azok, amelyekre az egyenlőség **nem értelmezhető!**

2. példa

Fogalmazzuk meg szavakkal, mit fejeznek ki ezek az azonosságok! Egy-egy konkrét példát is írjunk mindegyikhez!

$a + b = b + a$ $\quad$ $a + (b + c) = a + b + c$ $\quad$ $a - (b + c) = a - b - c$ $\quad$ $a - (b - c) = a - b + c$

Megoldás

$a + b = b + a$

Az összeg tagjai felcserélhetők. Pl.: $3{,}5 + 4 = 4 + 3{,}5 = 7{,}5$.

$a + (b + c) = a + b + c$

Ha a zárójel előtt + jel áll, akkor a zárójelet elhagyhatjuk.
Pl.: $8{,}4 + (0{,}3 + 7) = 8{,}4 + 0{,}3 + 7 = 15{,}7$.

$a - (b + c) = a - b - c$

Ha a zárójel előtt − jel áll, akkor a zárójel elhagyásával együtt meg kell változtatni a zárójelben lévő összeadás és kivonás jeleket.

Pl.: $\frac{7}{3} - \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 0$;

$\frac{7}{3} - \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

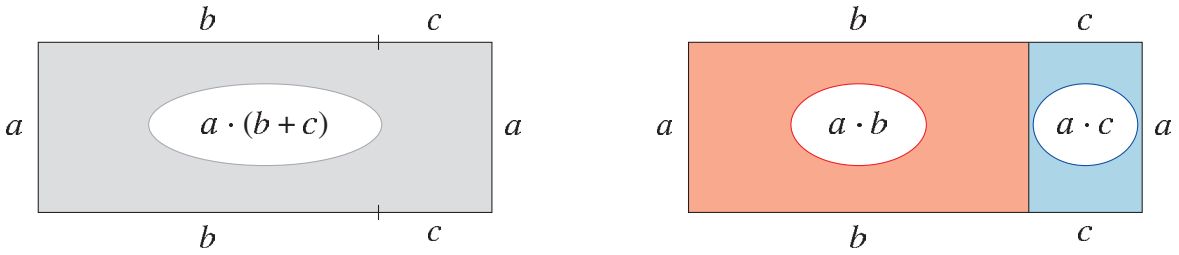
$a - (b - c) = a - b + c$

Az összeadás és a kivonás egyenrangú műveletek, mert minden kivonás helyett végezhetünk összeadást, és ez fordítva is igaz. Ezért ezt a két műveletet együtt röviden **összevonásnak** szoktuk nevezni. A számokkal való szorzás és osztás is egyenrangú műveletek, mert minden osztás helyett végezhetünk szorzást, és ez fordítva is igaz.

A műveletek sorrendje: először a szorzásokat, osztásokat, majd az összevonásokat végezzük el. Ezt úgy mondjuk, hogy a szorzás és az osztás magasabb rendű művelet, mint az összevonás. Ettől eltérni csak zárójelek alkalmazásával lehetséges.

3. példa

Az $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ azonosságot így fogalmazhatjuk meg szavakkal: **összeget tagonként is lehet szorozni.** Ugyanezt az azonosságot így szemléltethetjük rajzzal:



A két téglalap területe egyenlő, ezért $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Ez a szemléltetés csak pozitív a, b, c értékekre alkalmazható. Az azonosság azonban nem csak pozitív számokra érvényes.

Próbáljuk ki, hogy igaz marad-e az egyenlőség a következő a, b, c értékekre is!

a	-3	-2	0
b	6	$-\frac{1}{2}$	$-0{,}67$
c	-15	$-\frac{3}{4}$	$-13{,}07$

Megoldás

$a \cdot (b + c)$		$a \cdot b + a \cdot c$
$(-3) \cdot (6 - 15) = (-3) \cdot (-9) = \mathbf{+27}$	=	$(-3) \cdot 6 + (-3) \cdot (-15) = (-18) + 45 = \mathbf{+27}$
$(-2) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = (-2) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \mathbf{\frac{5}{2}}$	=	$(-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{3}{2} = \mathbf{\frac{5}{2}}$
$0 \cdot (-0{,}67 - 13{,}07) = \mathbf{0}$	=	$0 \cdot (-0{,}67) + 0 \cdot (-13{,}07) = \mathbf{0}$

Mind a három esetben igaz maradt az egyenlőség.

4. példa

Válasszuk ki azt az algebrai kifejezést, amelyet az egyenlőség jobb oldalára írva azonosságot kapunk!

a) $x + 2 \cdot (x + 5) =$

A) $x + (2 \cdot x + 2 \cdot 5)$ *B)* $x + 2 \cdot x + 10$ *C)* $x + 2 \cdot x + 5$ *D)* $3 \cdot x + 10$

b) $y - 2 \cdot (y - 5) =$

A) $y - (2 \cdot y - 2 \cdot 5)$ *B)* $y - 2 \cdot y - 2 \cdot 5$ *C)* $y - 2 \cdot y + 2 \cdot 5$ *D)* $-1 \cdot y + 10$

Megoldás

a) A bal oldali algebrai kifejezés azonos átalakításai:

$x + 2 \cdot (x + 5) = x + (2 \cdot x + 2 \cdot 5)$ tagonként beszorzunk,

$x + (2 \cdot x + 2 \cdot 5) = x + 2 \cdot x + 2 \cdot 5$ felbontjuk a zárójelet,

$1 \cdot x + 2 \cdot x + 2 \cdot 5 = 3 \cdot x + 10$ összevonunk, és elvégezzük a kijelölt szorzást.

Csak a *C)* nem azonos átalakítása az adott kifejezésnek.

b) A bal oldali algebrai kifejezés azonos átalakításai:

$y - 2 \cdot (y - 5) = y - (2 \cdot y - 2 \cdot 5)$ tagonként beszorzunk,

$y - (2 \cdot y - 2 \cdot 5) = y - 2 \cdot y + 2 \cdot 5$ a zárójel előtt kivonásjel áll, ezért a zárójelben lévő kivonásjelet összeadásjelre változtatjuk.

$1 \cdot y - 2 \cdot y + 2 \cdot 5 = -1 \cdot y + 10$ összevonunk.

Csak a *B)* nem azonos átalakítása az adott kifejezésnek.

5. példa

Az alábbi egyenletek között van olyan, amelyik igaz, bármilyen számot is írunk a betűk helyére, van, amelyik nem. Csoportosítsuk az egyenleteket e szempont szerint!

a) $2 \cdot (x + 5) = 2 \cdot x + 10$ *b)* $2 \cdot (x \cdot 5) = 2 \cdot x \cdot 10$ *c)* $\frac{x}{x} = 1;\ x \neq 0$ *d)* $|x| + 1 = x + 1$

Megoldás

Az *a)* egyenlet azonosság, hiszen összeget tagonként is szorozhatunk.

A *b)* egyenlet csak $x = 0$-ra igaz.

A már tanult ismeretek felhasználásával indokoljuk a válaszunkat:

Ha csupa szorzás szerepel egy műveletsorban, a zárójel elhagyásával a műveletsor eredménye nem változik meg.

Ezért $2 \cdot (x \cdot 5) = 2 \cdot x \cdot 5$.

A szorzat tényezői felcserélhetők.

Ezért a $2 \cdot (5 \cdot x) = 2 \cdot x \cdot 10$ egyenlőséget így is felírhatjuk: $2 \cdot 5 \cdot x = 2 \cdot 10 \cdot x$

A szorzásokat elvégezve ezt kapjuk: $10 \cdot x = 20 \cdot x$

Csak a nullára igaz, hogy a 10-szerese egyenlő a 20-szorosával.

A *c)* egyenlet azonosság, mert kikötöttük, hogy x értéke nem lehet 0, mert a 0-val való osztást nem értelmezzük.

A *d)* egyenlet csak a nemnegatív számokra igaz. Csak a nemnegatív számok abszolút értéke egyenlő önmagával.

Jegyezd meg!

- **A szorzás jelét, ha ez nem okoz félreértést, elhagyhatjuk.** *Például:*

  Itt elhagyhatjuk: $3 \cdot x \cdot y = 3xy$; $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{2}x$; $\frac{5 \cdot x}{3} = \frac{5x}{3} = \frac{5}{3} \cdot x = \frac{5}{3}x$.

  Itt nem: $6 \cdot 5 \neq 65$; $x \cdot 2 \neq x2$; $3 \cdot \frac{1}{2} \neq 3\frac{1}{2}$.

- **A „láthatatlan” zárójeleket ki kell tennünk, ha más alakban írjuk fel a kifejezést.** *Például:*

  $\frac{15}{1+2} = 15 : (1+2)$; $\frac{2+x}{3} = (2+x) : 3$; $5 \cdot \frac{2+x}{2} = \frac{5 \cdot (2+x)}{2}$.

- **Egy összetett műveletsort összegnek, szorzatnak, esetleg hatványnak nevezünk aszerint, hogy a műveletek sorrendjében mi az utolsó művelet, amelyet el kell végeznünk.** *Például:*

  összegek: $2 \cdot 3 + 4$; $a \cdot 3 + 4$; $2 \cdot b + 4$; $a^2 + a$; $5 - 3 \cdot x = 5 + (-3 \cdot x)$

  Az összegben az utolsó elvégzendő művelet az összeadás vagy a kivonás.

  szorzatok: $8 \cdot 5$; $(5+4) \cdot 7$; $(a+4) \cdot 7$; $(5+a) \cdot b$; $x : 5 = x \cdot \frac{1}{5}$; $\frac{2+x}{3} = (2+x) \cdot \frac{1}{3}$

  A szorzatban az utolsó elvégzendő művelet a szorzás vagy osztás.

  hatványok: 3^4; $(5-3)^2$; $(3+4)^3$; $(5 \cdot x)^3$; $\left(\frac{x}{4}\right)^2$

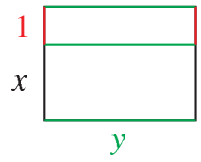
  A hatványban az utolsó elvégzendő művelet a hatványozás.

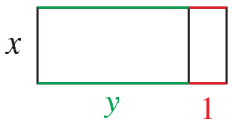
Feladatok

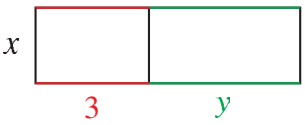
1. Idézzük fel a műveletek tulajdonságairól és a zárójel használatáról tanultakat többféleképpen: konkrét példákkal, szavakkal megfogalmazva és algebrai kifejezések segítségével! A táblázatban ezek közül kettő-kettő szerepel minden sorban. Padtársaddal beszéljétek meg, mit írnátok a színes kártyákra!

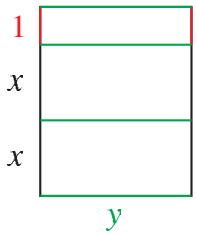
A konkrét példa	Szavakkal megfogalmazva	Algebrai kifejezésekkel leírva
$1 \cdot 5 = 5$	Az 1-gyel való szorzás nem változtatja meg az eredményt	*A* ?
$4 \cdot \left(\frac{9}{4} + 3\right) = 4 \cdot \frac{9}{4} + 4 \cdot 3$	*B* ?	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
C ?	Történt úgy is oszthatunk, hogy a nevezőt megszorozzuk az osztóval	$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ $\quad b, c \neq 0$
$5 \cdot 4 : 2 \cdot 3 = 5 \cdot (4 : 2 \cdot 3) = 5 \cdot (4 : 2) \cdot 3$	Ha egy csupa szorzást és osztást tartalmazó műveletsorba zárójelet teszünk a „-” jel mögé, akkor bárhol bezárva a zárójelet, a kifejezés értéke nem változik	*D* ?

2. A téglalapok területét megadtuk algebrai kifejezésekkel. Melyik a „kakukktojás”?

a) 

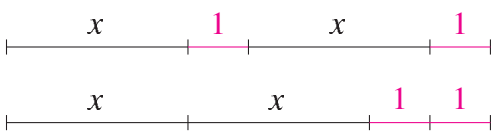
b) 

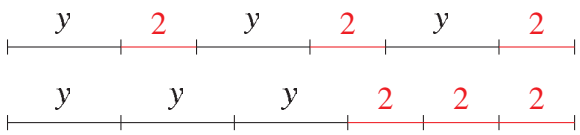
c) 

d) 

A) $3 \cdot x + x \cdot y$ *B)* $2 \cdot x \cdot y + y$ *C)* $x \cdot y + y$ *D)* $x + 3 \cdot y$ *E)* $x \cdot y + x$

3. Add meg a szakaszok hosszát összeg és szorzat alakban is!

a) 

b) 

4. Végezd el a kijelölt szorzásokat!

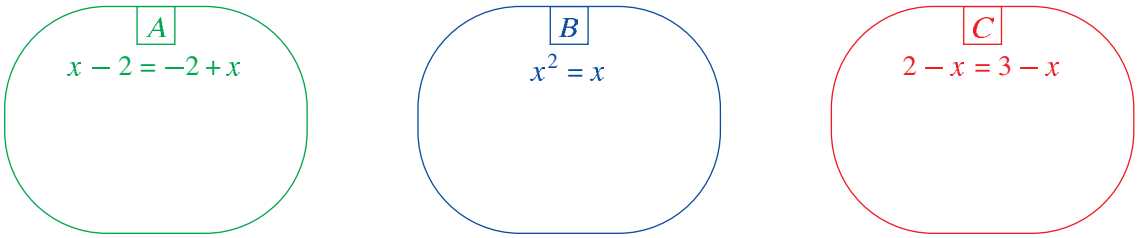
a) $3(x + 4)$ *b)* $2(x - 4)$ *c)* $5(4 - x)$ *d)* $(-4 + x) \cdot 2$

e) $3(2x + 1)$ *f)* $2(2x - 1)$ *g)* $3(1 - 2x)$ *h)* $(-3 + 4x) \cdot 3$

5. Melyik egyenlet melyik halmazba tartozik?

a) $8x - 3x = -3x + 8x$ *b)* $4(5 + x) = 20 + 4x$ *c)* $(5 - x) \cdot 4 = 20 - 4x$

d) $8 + (3x - 2) = 8 + 3x - 2$ *e)* $8 - (x - 2) = 8 - x - 2$ *f)* $2x \cdot 3x = 5x^2$



A = {Minden szám igazzá teszi az egyenlőséget.}

B = {Van olyan szám, amely igazzá teszi az egyenlőséget, de van olyan is, amelyik nem teszi igazzá.}

C = {Nincs olyan szám, amely igazzá teszi az egyenlőséget.}

6. Válaszd ki az azonosságokat!

a) $\frac{a}{5} = \frac{1}{5}a$ *b)* $\frac{3}{4}x = \frac{3x}{4}$ *c)* $b + b + b = b \cdot 3$ *d)* $y \cdot y \cdot y = 3 \cdot y$ *e)* $c \cdot c = c^2$

7. Pótold az egyenletek hiányzó jobb oldalát úgy, hogy azonosságot kapj! Zárójelet ne használj!

a) $a + (b + c) =$ *b)* $a + (b - c) =$ *c)* $a - (b + c) =$ *d)* $a - (b - c) =$

e) $a \cdot (b + c) =$ *f)* $a \cdot (b - c) =$ *g)* $(a + b) : c =$ *h)* $(a - b) : c =$

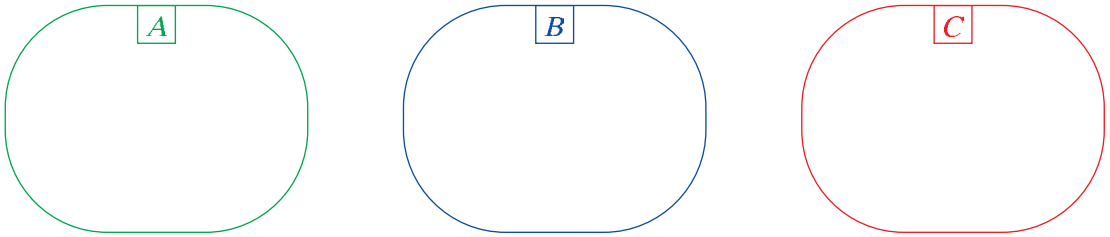
i) $a \cdot (b \cdot c \cdot d) =$ *j)* $a \cdot (b : c : d) =$ *k)* $a : (b \cdot c \cdot d) =$ *k)* $a : (b \cdot c : d) =$

8. *a)* Döntsd el, hogy az alábbi műveletsorokban melyik műveletet kell utoljára elvégezni!

A) $5 \cdot 4 + 3 \cdot 2$ *B)* $(5 - 4) \cdot (3 + 1)$ *C)* $(2 \cdot 8 - 16)^2$ *D)* $2 + 3 \cdot (6 - 2)$

E) $18 - 2 \cdot 3$ *F)* $(5 + 2) \cdot 3 \cdot 8$ *G)* $7 : 2 - 5 \cdot 4$ *H)* $5^2 \cdot 4^2$

b) Melyik műveletsor (számkifejezés) melyik halmazba tartozik?



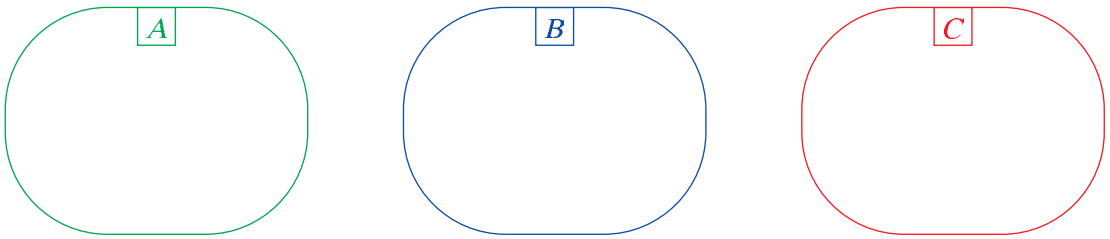
A = {összeg} B = {szorzat} C = {hatvány}

9. *a)* Döntsd el, hogy az alábbi műveletsorokban melyik műveletet kell utoljára elvégezni!

A) $a - b \cdot 2$ *B)* $a \cdot 4 - c \cdot 8$ *C)* $a - 4 \cdot (a + 1)$ *D)* $(6 - a) \cdot 3 : 2$

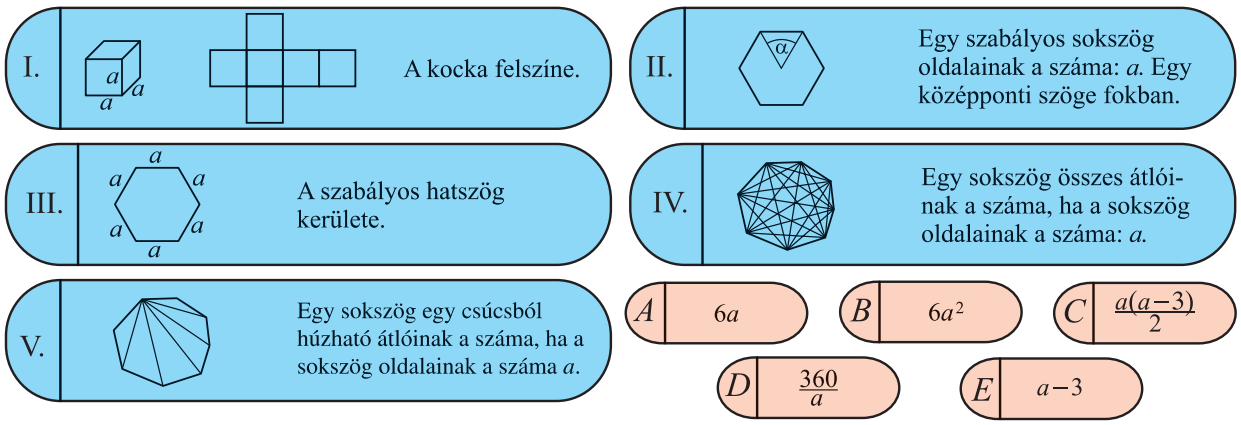
E) $18 - 2 \cdot a^2$ *F)* $(2 \cdot a - 16)^2$ *G)* $(a : 2 - a) \cdot 4$ *H)* $a^2 \cdot 4^2$

b) Melyik műveletsor (algebrai kifejezés) melyik halmazba tartozik?



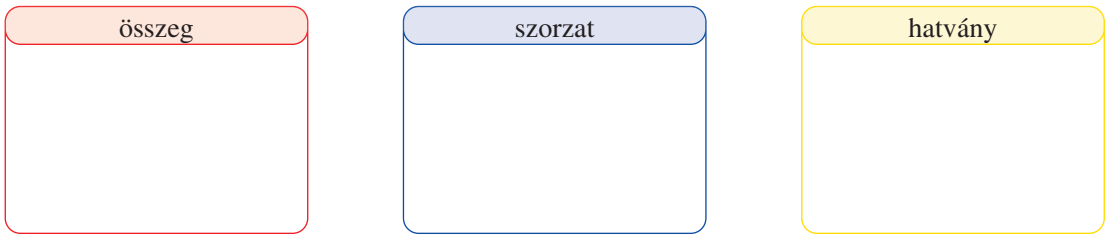
A = {összeg} B = {szorzat} C = {hatvány}

10. *a)* Keresd a párját! Melyik képlettel mit lehet kiszámítani?



b) Milyen műveleteket kell utoljára elvégezni a képletekben?

c) Döntsétek el a pároddal, hogy melyik algebrai kifejezés kerül az egyes halmazokba!



d) Helyettesítsd be a képletekbe az $a = 10$ értéket!

11. Válaszolj algebrai kifejezésekkel a kérdésekre!

a) Másfél órát utaztunk kisvasúttal, a órát utaztunk hajóval. Hány órát voltunk úton?

b) Egy apa 28 évvel idősebb a fiánál. Az apa b éves. Hány évesek együtt?

c) Melyik az a szám, amelyik 500-zal nagyobb, mint c szám 3-szorosa?

d) Két szám különbsége 7,2. A kisebbik szám d. Melyik a másik szám?

e) Két testvér együtt 83 kg. Az egyik tömege e kg-mal több a másikénál. Hány kg a másik testvér?

f) A természetes számok körében három egymást követő szám közül a legkisebb f. Mennyi a három szám összege?

g) A természetes számok körében három egymást követő szám közül a legnagyobb g. Mennyi a három szám összege? Milyen értékeket vehet fel g?

h) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 17. A tízesek helyén h áll. Mi áll az egyesek helyén? Milyen értékeket vehet fel h?

12. Írd le algebrai kifejezéssel a mondatokat!

a) Egy tojás t gramm. Mekkora a tömege d doboz tojásnak, ha egy dobozban 10 tojás van, és egy doboz tömege s gramm?

b) Egy moziban 45 db x Ft-os és 114 db y Ft-os jegy kelt el. Hány Ft volt a mozi bevétele?

c) Egy téglalap alakú szoba alapterülete 58 m^2. Az egyik oldala c méter. Hány méter a másik?

d) Egy téglalap alapú úszómedence egyik oldala d méter. A másik ennek a 4-szeresénél 8 m-rel hosszabb. Mekkora a másik oldala? Mekkora a medence kerülete és a területe?

Algebrai kifejezések sokféle alakban, egynemű algebrai kifejezések, helyettesítési értékek kiszámítása

Az algebrai kifejezéseket, miként a számokat, sokféle alakban fel tudjuk írni. Erre azért van szükség, hogy a velük való műveleteket minél egyszerűbben el tudjuk végezni.

1. példa

Melyik a kakukktojás?

Algebrai kifejezésekkel írtuk le a mondatokat különböző alakokban. Melyik **nem** helyes?

		A	*B*	*C*	*D*	*E*
a)	Az a szám $\frac{3}{4}$-e	$\frac{a \cdot 3}{4}$	$\frac{6}{8} \cdot a$	$a \cdot \frac{3}{4}$	$a : \frac{3}{4}$	$a \cdot 0{,}75$
b)	A b szám 4-szerese	$b+b+b+b$	$2 \cdot b + 2 \cdot b$	$b + 3 \cdot b$	$\frac{8}{2} \cdot b$	$b + 2 \cdot b$
c)	A c szám 2,5-szeresével növelve	$3{,}5 \cdot c$	$c + 2{,}5 \cdot c$	$c+c+c+\frac{1}{2} \cdot c$	$c + 2{,}5$	$4 \cdot c - 0{,}5 \cdot c$
c)	A d szám 2,5-del növelve	$d \cdot 2{,}5$	$d + 2{,}5$	$\frac{5}{2} + d$	$1{,}5 + d + 1$	$\frac{2 \cdot d + 5}{2}$

Megoldás

a) D, mert $a : \frac{3}{4} = a \cdot \frac{4}{3}$, és ez a-nak a $\frac{4}{3}$-a. *b)* E, mert $2 \cdot b + b = 3 \cdot b$, és ez a b-nek 3-szorosa.

c) D, mert $c + 2{,}5$ = a c szám 2,5-del növelve. *d)* A, mert $d \cdot 2{,}5$ = a d szám 2,5-szerese.

2. példa

a) Az első példában szereplő algebrai kifejezések közül rózsaszínnel színeztük ki az összegeket és kékkel a szorzatokat.

b) Melyiket tudjuk felírni az alábbi három kifejezés közül **kéttényezős** szorzat alakban?

$$\frac{a \cdot 3}{4} \qquad a : \frac{3}{4} \qquad \frac{2 \cdot d + 5}{2}$$

Megoldás

a)

$\frac{a \cdot 3}{4}$	$\frac{6}{8} \cdot a$	$a \cdot \frac{3}{4}$	$a : \frac{3}{4}$	$a \cdot 0{,}75$
$b + b + b + b$	$2 \cdot b + 2 \cdot b$	$b + 3 \cdot b$	$\frac{8}{2} \cdot b$	$b + 2 \cdot b$
$3{,}5 \cdot c$	$c + 2{,}5 \cdot c$	$c + c + c + \frac{1}{2} \cdot c$	$c + 2{,}5$	$4 \cdot c - 0{,}5 \cdot c$
$d \cdot 2{,}5$	$d + 2{,}5$	$\frac{5}{2} + d$	$1{,}5 + d + 1$	$\frac{2 \cdot d + 5}{2}$

b) Mind a hármat fel tudjuk írni a feltételeknek megfelelően.

$\frac{a \cdot 3}{4} = a \cdot \frac{3}{4}$, $\quad a : \frac{3}{4} = a \cdot \frac{4}{3}$, $\quad \frac{2 \cdot d + 5}{2} = (2 \cdot d + 5) \cdot \frac{1}{2}$

Egytagúnak nevezzük a kifejezést, ha az utolsó művelete szorzás, osztás vagy hatványozás.

Például: a; $\quad -b$; $\quad 3 \cdot c$; $\quad \frac{3}{4} \cdot d$; $\quad a \cdot 1{,}5$; $\quad \frac{b}{3}$; $\quad d : \frac{3}{4}$; $\quad a^2$; $\quad 3 \cdot b^2$; $\quad a \cdot b$; $\quad a \cdot b \cdot c$

Többtagúnak nevezzük a kifejezést, ha az utolsó művelete összevonás (összeadás vagy kivonás).

Például: $a + 2$; $\quad 5 \cdot b - 3$; $\quad \frac{5}{2} + c$; $\quad 2 \cdot (c - d) + 5$; $\quad x + y$

Az egytagú kifejezések számszorzóit **együtthatónak** nevezzük.

Például:

- $5 \cdot c$ együtthatója az **5**,
- a együtthatója az **1**, mert $\mathbf{1} \cdot a = a$,
- $-b$ együtthatója a **−1**, mert $\mathbf{-1} \cdot b = -b$,
- $d : \frac{3}{4}$ kifejezés együtthatója a $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$, mert $d \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = d : \frac{3}{4}$,
- a^2 együtthatója az **1**, mert $\mathbf{1} \cdot a^2 = a^2$,
- $-\frac{2 \cdot x^2}{4}$ együtthatója $-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}$, mert $-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} \cdot x^2 = -\frac{2 \cdot x^2}{4}$.

3. példa

Egytagú algebrai kifejezések szerepelnek ezeken a kártyákon:

x, $3 \cdot a$, $\frac{5}{2} \cdot x$, $0{,}5 \cdot x^2$, $a \cdot 2$, $3 \cdot b^2$, $-2 \cdot x$, $\frac{x}{4}$, $-\frac{5 \cdot x^2}{4}$

a) Színezzük pirossal az együtthatókat! Ha szükséges, írjuk át a kifejezéseket a megfelelő szorzat alakba!

b) Válasszunk ki közülük kettőt úgy, hogy azok összege egytagú algebrai kifejezés legyen!

c) Válasszunk ki közülük kettőt úgy, hogy azok összege ne legyen egytagú algebrai kifejezés!

Megoldás

a) Pirossal színeztük az együtthatókat:

$\boxed{1 \cdot x}$, $\boxed{3 \cdot a}$, $\boxed{\frac{5}{2} \cdot x}$, $\boxed{0{,}5 \cdot x^2}$, $\boxed{a \cdot 2}$, $\boxed{3 \cdot b^2}$, $\boxed{-2 \cdot x}$, $\boxed{\frac{1}{4} \cdot x}$, $\boxed{-\frac{5}{4} \cdot x^2}$

b) Két példát emelünk ki a lehetőségek közül:

Az a szám 3-szorosához a szám 2-szeresét adva, az a szám 5-szörösét kapjuk.

$\boxed{3 \cdot a} + \boxed{a \cdot 2} = (a + a + a) + (a + a) = (3 + 2) \cdot a = 5 \cdot a$

Bármely szám 0,5-szereséből (feléből) az $\frac{5}{4}$-szeresét ($\frac{5}{4}$ részét) kivonva, a szám $-\frac{3}{4}$-szeresét ($-\frac{3}{4}$ részét) kapjuk. Ez igaz az x^2-re is. $\boxed{0{,}5 \cdot x^2} + \boxed{-\frac{5}{4} \cdot x^2} = \left(0{,}5 - \frac{5}{4}\right) \cdot x^2 = -\frac{3}{4} \cdot x^2$

c) Két példát emelünk ki a lehetőségek közül:

$\boxed{3 \cdot a}$, $\boxed{1 \cdot x}$ — Ez a két kifejezés nem vonható össze, mert ha a változókat különböző betűkkel jelöljük, akkor **lehet, hogy $a = x$, de nem biztos.**

$\boxed{\frac{5}{2} \cdot x}$, $\boxed{0{,}5 \cdot x^2}$ — Ez a kettő azért nem vonható össze, mert az x^2 és az x más-más számot is jelölhet. (Az $x^2 = x$ csak két esetben teljesül: ha $x = 0$ vagy $x = 1$. Minden más esetben az x^2 és az x különböző számot jelöl.)

Azok az algebrai kifejezések vonhatók össze, amelyek csak az együtthatójukban különböznek. Az ilyen kifejezéseket **egyneműeknek** nevezzük.

Az egynemű kifejezéseket összeadhatjuk, kivonhatjuk, azaz **összevonhatjuk.**

4. példa

Vonjuk össze a többtagú algebrai kifejezéseket!

a) $3x + 5 - 6x + 8 + 7x - 2$ *b)* $x + 0{,}5x^2 + 3x^2 - 2x$

Megoldás

a) Az egynemű tagokat ugyanolyan színnel színeztük:

$\boxed{3x} + 5 \boxed{-6x} + 8 \boxed{+7x} - 2$

Az egynemű tagokat csoportosítottuk:

$\boxed{3x} + 5 \boxed{-6x} + 8 \boxed{+7x} - 2 = \boxed{3x} \boxed{-6x} \boxed{+7x} + 5 + 8 - 2$

Az egynemű tagokat összevontuk:

$\boxed{3x} + 5 \boxed{-6x} + 8 \boxed{+7x} - 2 = \boxed{3x} \boxed{-6x} \boxed{+7x} + 5 + 8 - 2 = 4x + 11$

Az összevonás után ezt kaptuk: $3x + 5 - 6x + 8 + 7x - 2 = 4x + 11$**.**

Az **eredeti algebrai kifejezésbe szúrópróba-szerűen behelyettesítünk** egy racionális számot, például az 1-et.

Például: $3x + 5 - 6x + 8 + 7x - 2 = 3 \cdot 1 + 5 - 6 \cdot 1 + 8 + 7 \cdot 1 - 2 = 3 + 5 - 6 + 8 + 7 - 2 =$ **15**.

Az **összevonással kapott kifejezésbe** is helyettesítsük be az 1-et!

$4x + 11 = 4 \cdot 1 + 11 = 4 + 11 =$ **15**

Elvégezve a kijelölt műveleteket megállapítható, hogy az eredeti és az összevonással kapott algebrai kifejezés **helyettesítési értéke** is 15.

Ez azonban még nem jelenti azt, hogy biztosan helyesen végeztük el az összevonást.

Ha az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyére számokat írunk, akkor **behelyettesítést** végzünk. Ha a műveleteket az így kapott számkifejezésekkel elvégezzük, akkor az algebrai kifejezés **helyettesítési értékét** kapjuk meg.

b) Az előzőekhez hasonló lépésekben végeztük el az összevonást:

$\boxed{x} + 0{,}5x^2 + 3x^2 \boxed{-2x} = \boxed{x} \boxed{-2x} + 0{,}5x^2 + 3x^2 = -x + 3{,}5x^2$

Az összevonás után ezt kaptuk: $x + 0{,}5x^2 + 3x^2 - 2x = -x + 3{,}5x^2$**.**

Az **eredeti algebrai kifejezésbe szúrópróba-szerűen behelyettesítünk** egy racionális számot, például a 2-t.

$x + 0{,}5x^2 + 3x^2 - 2x = 2 + 0{,}5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 12 - 4 = \mathbf{12}$

Az **összevonással kapott kifejezésbe** is helyettesítsük be a 2-t!

$-x + 3{,}5x^2 = -2 + 3{,}5 \cdot 2^2 = -2 + 3{,}5 \cdot 4 = -2 + 14 = \mathbf{12}$

Elvégezve a kijelölt műveleteket megállapítható, hogy az eredeti és az összevonással kapott algebrai kifejezés **helyettesítési** értéke is 12. Ez azonban még nem jelenti azt, hogy biztosan helyesen végeztük el az összevonást.

Feladatok

1. Tegyél ki műveleti jeleket és zárójeleket úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség!

a) $0 = 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$ $\qquad$ $1 = 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$ $\qquad$ $2 = 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$

$3 = 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$ $\qquad$ $10 = 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$ $\qquad$ $5 = 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$

b) $4 \cdot a = a\ \ a\ \ a\ \ a$ $\qquad$ $0 = a\ \ a\ \ a\ \ a$ $\qquad$ $a^4 = a\ \ a\ \ a\ \ a$

$a^2 + 2 \cdot a = a\ \ a\ \ a\ \ a$ $\qquad$ $a^2 = a\ \ a\ \ a\ \ a$ $\qquad$ $1 = a\ \ a\ \ a\ \ a$

2.



Kürschák József
(1864–1933)

A gyerekek Kürschák József híres magyar matematikus születési évszámának jegyeivel játszottak. Melyik felírás hibás?

a) $-15 = 1 - 8 \cdot (6 - 4)$ $\qquad$ *b)* $0{,}5 = 1 - (8 - 6) : 4$

c) $3 = 1 \cdot 8 : 6 \cdot 4$ $\qquad$ *d)* $\frac{16}{3} = 1 \cdot 8 : 6 \cdot 4$

e) $\frac{1}{3} = 1 : 8 \cdot 6 \cdot 4$ $\qquad$ *f)* $3 = 1 : (8 \cdot 6 \cdot 4)$

@ A matematika melyik ágának volt kiemelkedő alakja Kürschák József?
A) geometria $\qquad$ *B)* algebra $\qquad$ *C)* valószínűségszámítás

3. Melyik algebrai kifejezés nem adja meg helyesen a karkötő hosszát, ha k-val jelöljük a kisebb gyöngyök átmérőjének hosszát, és n-nel a nagyobb gyöngyökét?



a) $n+k+n+k+n+k+n+k+n+k+n+k+n+k+n+k+n+k+n+k+n+k$

b) $11 \cdot n + 11 \cdot k$

c) $11 \cdot n + k$

d) $(n + k) \cdot 11$

4. *a)* A bal oldali táblázatban szereplő kifejezéseket a jobb oldali táblázatban megadtuk olyan alakban, amelyben nem szerepelnek számok. Keresd meg, mely kifejezések illenek össze! Ha jól dolgoztál, a sárga mezőbe írt betűkből egy 3. századi görög matematikus nevét kapod. Mi a neve az „algebra atyjának” tartott matematikusnak?

$6 \cdot x$	
x^4	
$x^2 \cdot y$	
$5 \cdot x^2$	
$(x \cdot y)^2$	
$3 \cdot x \cdot y$	
$(x - y)^2$	
$-4 \cdot x$	
$(2 \cdot x)^3$	
$3 \cdot (x + y)$	
$-3 \cdot x \cdot y^2$	

P	$x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x$
N	$(x - y) \cdot (x - y)$
O	$x \cdot x \cdot y$
H	$x \cdot y \cdot x \cdot y$
S	$x + y + x + y + x + y$
I	$x \cdot x \cdot x \cdot x$
A	$x \cdot y + x \cdot y + x \cdot y$
T	$(-x) + (-x) + (-x) + (-x)$
Z	$-x \cdot y \cdot y - x \cdot y \cdot y - x \cdot y \cdot y$
O	$(x + x) \cdot (x + x) \cdot (x + x)$
D	$x + x + x + x + x + x$

b) Melyik hatvány a bal oldali táblázat kifejezései közül?

c) Add meg a együtthatóit a bal oldali táblázat lévő szorzatoknak!

@ Kit szokás a „matematika atyjának” nevezni?

5. Keresd meg mindegyik kifejezésben az ismeretlenek együtthatóját!

$3a^2$, $\frac{1}{2}ab$, $\frac{5a}{3}$, $\frac{-2a}{7}$, a^3, $-a^2$

6. Gyűjts a megadott algebrai kifejezésekkel egynemű algebrai kifejezéseket!

$5y$, $\frac{1}{2}b$, xy, x^2, ab^2, x^3

7. Válaszd ki az egyneműeket!

a) $2x$, $5x$, xy, $3xy$, $\frac{3}{4}$, $8x^2y$, -4, x^2y, $8xy$, 2

b) $5a$, $2ab$, b, $-8ab$, ab^2, a^2b, $4ab^2$, $7b$, $\frac{a}{5}$, $\frac{ab}{5}$

c) 41, $-7x$, $2x^2y$, x, xy^2, $3xyz$, $-x^2y$, $5x^2y$, $6xy^2$, 8

d) $\frac{x}{5}$, $8x$, $-6x^2$, $0{,}4x^2$, $-3x$, $\frac{x^2}{2}$, x, $2x^3$

8. Az egynemű tagok összevonásával írd fel egyszerűbb alakban a kifejezéseket!

a) $8a + 4a - 7a + 5a$

b) $9b - 4b - 3b + 6b - 8b$

c) $9c + 3c - 4c - 6c - 8c$

d) $-5d + d - 3d + 9d - d$

9. Az egynemű tagok összevonásával írd fel egyszerűbb alakban az algebrai kifejezéseket!

a) $2x + 5x - 8 + 9 - 3x + 8 - 7x$

b) $8 - 2y - 3y - 5 + 8y$

c) $16z + 8 - 2z - 4 + 4z - 2 + 6z$

d) $-3 - 5k + 6 - k + 3$

10. Mind a három algebrai kifejezésbe behelyettesítettük a számegyeneseken látható számokat. A helyettesítési értéküktől függően megszíneztük azokat a jelölésnek megfelelő módon:
Melyik számegyenes melyik kifejezéshez tartozik?
Add meg az összetartozók betűjelét!



a) $5x - (3 + 2x)$ *b)* $5x - (2x - 3)$ *c)* $5x - 2(x + 3)$

A)


B)


C)


11. Végezd el az összevonásokat! Az összevonás helyességét vizsgáld meg egy konkrét esetben az eredeti és az új kifejezés helyettesítési értékének kiszámításával!

a) $8x - (3 + 2x + 12) - 4x + 6 =$ $x = 0$

b) $(5x - 2) + (7 + 11x) - (3x + 2) =$ $x = -1$

c) $(4x - 12) + (6x + 3y) - (9 + 10y) =$ $x = 2,\ y = -2$

d) $(2x + 5y) - (3xy + 2y) + (2xy - 5x) =$ $x = 0{,}1,\ y = -\frac{2}{10}$

12. *a)* Melyik nem a $8 - 3 \cdot (x - 2)$ kifejezés azonos átalakítása?

A) $8 - (3 \cdot x - 3 \cdot 2)$ *B)* $8 - 3 \cdot x - 2$ *C)* $8 - 3 \cdot x + 2$

D) $8 - 3 \cdot x + 6$ *E)* $14 - 3 \cdot x$

b) Melyik a $2 \cdot (x - 5) - 3 \cdot (x - 5)$ kifejezés azonos átalakítása?

A) $(2 \cdot x - 2 \cdot 5) - (3 \cdot x - 15)$ *B)* $2 \cdot x - 10 - 3 \cdot x - 15$

C) $2 \cdot x - 10 - 3 \cdot x + 15$ *D)* $5 - x$

13. Végezd el a kijelölt műveleteket! Írd az így kapott kifejezéseket egyszerűbb alakba!

a) $3(a - 2) + 2$ *b)* $8 + 2(b + 5)$ *c)* $5(3 - c) + 6$ *d)* $4(d - 3) - 2$

e) $2(e - 1) - (1 - e)$ *f)* $5(f - 2) + 3(f - 2)$ *g)* $4(g + 3) - 2(g - 1)$

14. Válaszd ki az azonosságokat!

a) $7a + 5a - 10a = 9a$ *b)* $17x - 10x - 8x = -x$

c) $17x - 10x - 8x = x$ *d)* $10a + 11a - 8a - 5a = 9a$

15. Párosítsd a mondatokat a megfelelő algebrai kifejezésekkel!

A) Két szám különbségének a fele.

B) Két szám négyzetének a különbsége.

C) Két szám különbségének a négyzete.

D) Két szám különbségének és összegének a szorzata.

E) Két szám felének a különbsége.

a) $x^2 - y^2$

b) $(x - y)^2$

c) $(x - y)(x + y)$

d) $\frac{x - y}{2}$

16. A bűvös csillagok minden egyenese mentén egyenlő a számok, illetve az algebrai kifejezések összege.

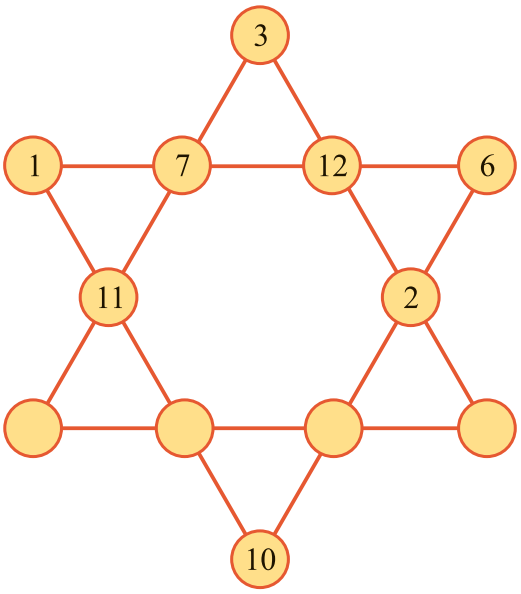
a) Mi a bűvös szám az *A)* csillagban?

b) Milyen számok kerülnek az üres helyekre?

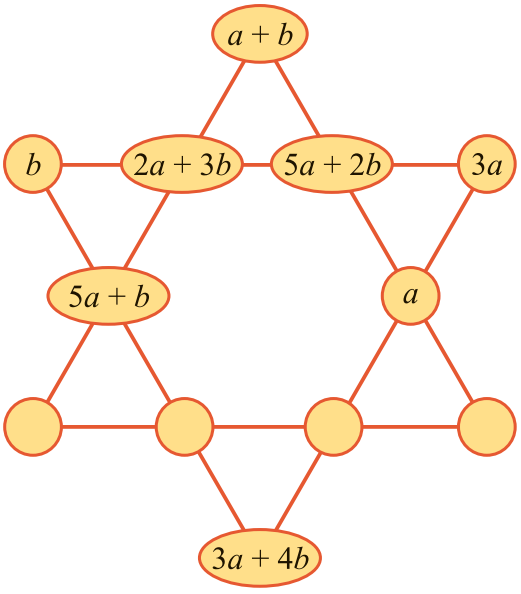
c) Mi a bűvös algebrai kifejezés a *B)* csillagban?

d) Mennyi a bűvös szám, ha $a = -2$, és $b = 7$?

A)

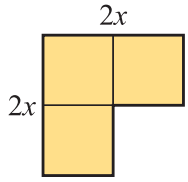


B)



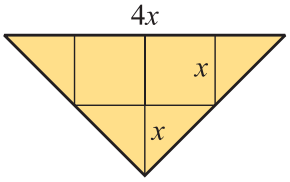
17. Írd fel a síkidomok területét többféleképpen algebrai kifejezésekkel! Számítsd ki a területüket a megadott méretekkel!

a)



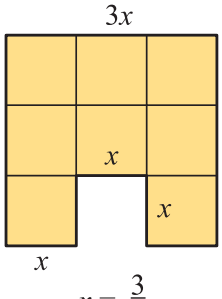
$x = 5$

b)



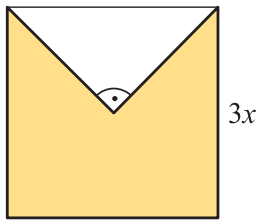
$x = \frac{1}{2}$

c)



$x = \frac{3}{4}$

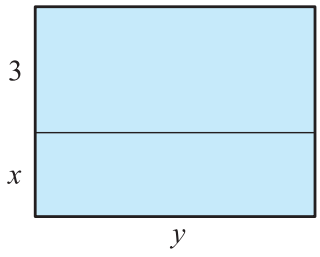
d)



$x = 2{,}8$

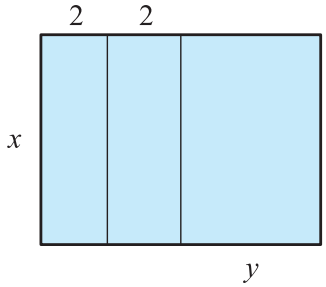
18. Írd fel a síkidom területét többféleképpen! Számítsd ki a területüket a megadott méretekkel!

a)



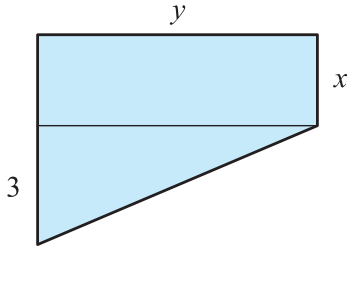
$x = 2, \quad y = 7$

b)



$x = \frac{9}{2}, \quad y = 5$

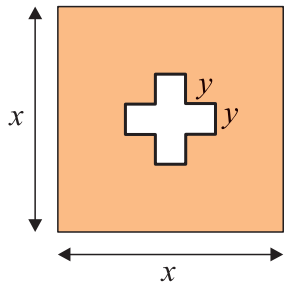
c)



$x = 2{,}8, \quad y = 10$

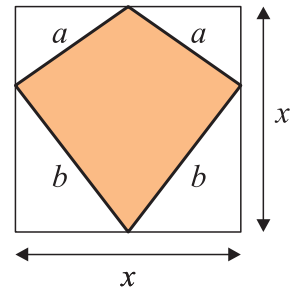
19. Írd fel a színezett síkidomok területét algebrai kifejezésekkel! Számítsd ki a színezett területeket a megadott méretekkel!

a)



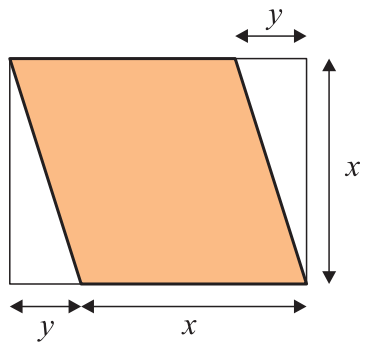
$x = 100, \quad y = 10$

b)



$x = 9{,}5$

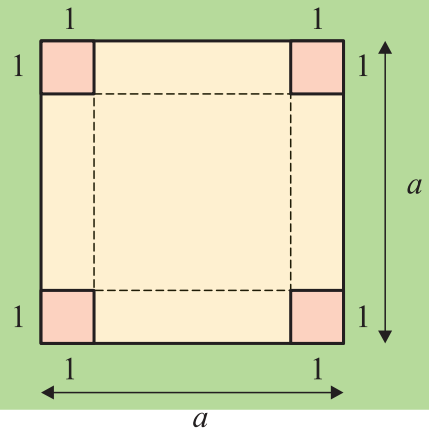
c)

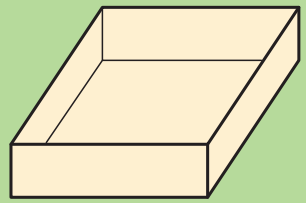


$x = 7{,}2, \quad y = 1{,}8$

20. Az a oldalú négyzet csúcsainál levágtunk 4 db 1×1-es négyzetet. A lapból a szaggatott vonalak mentén felhajtva, felül nyitott dobozt készítettünk. Fejezd ki a doboz űrtartalmát az a segítségével!

Mekkora a doboz űrtartalma, ha $a = 8$ cm, és ha $a = 16$ cm?





Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása lebontogatással, szöveges feladatok

Egyenlet: ha két algebrai kifejezést az egyenlőség jelével kapcsolunk össze, akkor egyenletet kapunk.

Egyenlőtlenség: ha két algebrai kifejezést a $<$, $>$, $\leqq$ vagy $\geqq$ jelek valamelyikével kapcsolunk össze, akkor egyenlőtlenséget kapunk.

A két kifejezést az egyenlet, illetve egyenlőtlenség bal és jobb oldalának nevezzük.

Az egyenletben, illetve egyenlőtlenségben szereplő ismeretlen mennyiségeket **ismeretlennek** vagy **változónak** nevezzük.

Az egyenlet/egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy a szóba jöhető számok (az alaphalmaz elemei) közül kiválaszthatjuk azokat, amelyek az egyenlőséget/egyenlőtlenséget igazzá teszik.

Ha nincs megadva az alaphalmaz, akkor ugyanazok a szabályok érvényesek, amelyek az algebrai kifejezésekre is: az alaphalmaz a legbővebb olyan számhalmaz, amire az azokban előforduló műveletek értelmezhetők.

Elevenítsük fel az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásáról tanultakat!

1. példa

a) Oldjuk meg az $\frac{5x+4}{3}+10=3$ egyenletet!

b) Oldjuk meg az $\frac{5x+4}{3}+10 \geqq 3$ egyenlőtlenséget!

c) Vizsgáljuk meg, hogy a *b)* feladatban az alaphalmaztól függően hogyan változhat az igazsághalmaz!

Megoldás

a) Oldjuk meg az egyenletet lebontogatással!

Melyik az a szám, amelyhez 10-et adva 3-at kapunk?

$\frac{5x+4}{3}+10=3 \quad \Rightarrow \quad \square = 3-10=-7$

Melyik az a szám, amelyet 3-mal osztva -7-et kapunk?

$\frac{5x+4}{3}=-7 \quad \Rightarrow \quad \square = -7\cdot 3=-21$

Melyik az a szám, amelyhez 4-et adva -21-et kapunk?

$5x+4=-21 \quad \Rightarrow \quad \square = -21-4=-25$

Melyik az a szám, amelynek az 5-szöröse -25?

$5x=-25 \quad \Rightarrow \quad \square = -25:5=-5$

$x=-5$

Ellenőrzés:

Helyettesítsük be a (-5)-öt az egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe, és számítsuk ki a helyettesítési értékét!

$$\frac{5\cdot(-5)+4}{3}+10=\frac{-25+4}{3}+10=-7+10=3$$

Mivel az eredeti egyenlet jobb oldalán állóval megegyező számot kaptunk, az egyenlet megoldása jó.

b)

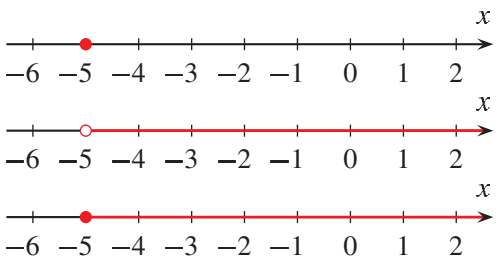
$\frac{5x+4}{3}+10 \geqq 3$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldását kiokoskodhatjuk az előző egyenlet megoldásából:

a két oldal egyenlő, ha $x=-5$;

a bal oldal nagyobb, ha $x>-5$;

A két feltétel egyszerre teljesül, ha $x \geqq -5$;



c) A *b)* feladatban az **alaphalmaztól** függően például az alábbiak szerint változik az igazsághalmaz:

Ha a **racionális számok** körében keressük az egyenlőtlenség megoldását, akkor minden -5-nél nem kisebb racionális szám igazzá teszi az egyenlőtlenséget.

Ha az **egész számok** körében keressük az egyenlőtlenség megoldását, akkor minden -5-nél nem kisebb egész szám (-5, -4, -3, ...) igazzá teszi az egyenlőtlenséget.

Ha a **természetes számok** körében keressük az egyenlőtlenség megoldását, akkor minden -5-nél nem kisebb természetes szám (0, 1, 2, 3, ...) igazzá teszi az egyenlőtlenséget.

Ha az **alaphalmaz** ez a négy szám: $\{-8; -4; 0; 4\}$, akkor az igazsághalmaz eleme ez a három szám lesz: -4; 0; 4.

Az egyenlőtlenségek megoldásaként többnyire nem csupán egyetlen számot kapunk. Ha sok vagy végtelen sok szám teszi igazzá az egyenlőtlenséget, akkor valójában nem tudunk ellenőrizni, csak szúrópróba-szerűen behelyettesíthetünk egy-egy számot.

2. példa

Oldjuk meg az egyenlet-egyenlőtlenség párokat!

a) $5x + 3x - 7 = 21$	$5x + 3x - 7 < 21$
b) $x + 3 - (4x - 2) = -4$	$x + 3 - (4x - 2) > -4$
c) $x + 3 - 2(x - 1) = -4$	$x + 3 - 2(x - 1) \leqq -4$

Megoldás

a) Ha az egyenlet vagy egyenlőtlenség ugyanazon oldalán **egynemű kifejezések** szerepelnek, akkor az első lépésben célszerű ezek **összevonása.**

Egyenlet		**Egyenlőtlenség**
$5 \cdot x + 3 \cdot x - 7 = 21$		$5 \cdot x + 3 \cdot x - 7 < 21$
$(5 + 3) \cdot x - 7 = 21$	összevonjuk az egynemű tagokat	$(5 + 3) \cdot x - 7 < 21$
$8 \cdot x - 7 = 21$ $8 \cdot x = 28$ $x = 3{,}5$	lebontogatással folytatjuk az eljárást	$8 \cdot x - 7 < 21$ $8 \cdot x < 28$ $x < 3{,}5$
Ellenőrzés: Az eredeti egyenlet bal oldalába behelyettesítünk: $5 \cdot \mathbf{3{,}5} + 3 \cdot \mathbf{3{,}5} - 7 =$ $= 17{,}5 + 10{,}5 - 7 = 21$ Mivel az egyenlet jobb oldalán is 21 szerepel, a megoldás helyes.		**Próba:** Ha $x = \mathbf{0}$, akkor $5 \cdot \mathbf{0} + 3 \cdot \mathbf{0} - 7 \overset{?}{<} 21$ $-7 \overset{?}{<} 21$ $x = 0$-ra igaz az egyenlőtlenség.

b) Ha az egyenlet vagy egyenlőtlenség ugyanazon oldalán **zárójeles kifejezések** szerepelnek, akkor az első lépésben **célszerű felbontani a zárójelet.**

Egyenlet		**Egyenlőtlenség**
$x + 3 - (4x - 2) = -4$		$x + 3 - (4x - 2) > -4$
$x + 3 - 4x + 2 = -4$	felbontjuk a zárójelet	$x + 3 - 4x + 2 > -4$
$x - 4x + 3 + 2 = -4$	csoportosítjuk az egynemű tagokat	$x - 4x + 3 + 2 > -4$
$-3x + 5 = -4$	összevonjuk az egynemű tagokat	$-3x + 5 > -4$
$-3x = -9$ $x = 3$	lebontogatással folytatjuk az eljárást	$-3x > -9$ $x < 3$
Ellenőrzés: Az eredeti egyenlet bal oldalába behelyettesítünk: $\mathbf{3} + 3 - (4 \cdot \mathbf{3} - 2) = 6 - (12 - 2) =$ $= -4$ Mivel az egyenlet jobb oldalán is -4 szerepel, a megoldás helyes.		**Próba:** Ha $x = \mathbf{1}$, akkor $\mathbf{1} + 3 - (4 \cdot \mathbf{1} - 2) \overset{?}{>} -4$ $0 \overset{?}{>} -4$ $x = \mathbf{1}$-re igaz az egyenlőtlenség.

c) Ha az egyenletben egy **zárójeles kifejezés szorzata** áll, akkor első lépésben **célszerű a beszorzást elvégezni.**

Egyenlet		**Egyenlőtlenség**
$x + 3 - 2 \cdot (x - 1) = -4$		$x + 3 - 2 \cdot (x - 1) \leqq -4$
$x + 3 - (2 \cdot x - 2) = -4$	elvégezzük a beszorzást	$x + 3 - (2 \cdot x - 2) \leqq -4$
$x + 3 - 2 \cdot x + 2 = -4$	felbontjuk a zárójelet	$x + 3 - 2 \cdot x + 2 \leqq -4$
$x - 2 \cdot x + 3 + 2 = -4$	csoportosítjuk az egynemű tagokat	$x - 2 \cdot x + 3 + 2 \leqq -4$
$-x + 5 = -4$	összevonjuk az egynemű tagokat	$-x + 5 \leqq -4$
$-x = -9$ Ha x ellentettje -9, akkor $x = 9$.	lebontogatással folytatjuk az eljárást	$-x \leqq -9$ Ha x ellentettje -9-nél nem nagyobb, akkor x 9-nél nem kisebb. $x \geqq 9$
Ellenőrzés: $\mathbf{9} + 3 - 2 \cdot (\mathbf{9} - 1) = 12 - 16 = -4$ Az eredeti egyenlet bal oldalának helyettesítési értéke -4 lesz. Az egyenlet jobb oldalán is -4 szerepel. A megoldás helyes.		**Próba:** Ha $x = \mathbf{10}$, akkor $\mathbf{10} + 3 - 2 \cdot (\mathbf{10} - 1) \overset{?}{\leqq} -4$ $-5 \overset{?}{\leqq} -4$ $x = \mathbf{10}$-re igaz az egyenlőtlenség.

d) Ha az egyenlet vagy egyenlőtlenség ugyanazon oldalán olyan kifejezések szerepelnek, amelyek **együtthatója tört,** akkor az első lépésben célszerű ezek **együtthatóit közös nevezőjű tört alakban megadni.**

Egyenlet		**Egyenlőtlenség**
$\frac{5}{4}\cdot x+3-\frac{2}{3}\cdot x=17$		$\frac{5}{4}\cdot x+3-\frac{2}{3}\cdot x\leqq 17$
$\frac{5}{4}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot x+3=17$	csoportosítjuk az egynemű tagokat	$\frac{5}{4}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot x+3\leqq 17$
$\frac{15}{12}\cdot x-\frac{8}{12}\cdot x+3=17$	bővítjük az együtthatókat	$\frac{15}{12}\cdot x-\frac{8}{12}\cdot x+3\leqq 17$
$\left(\frac{15}{12}-\frac{8}{12}\right)\cdot x+3=17$ $\frac{7}{12}\cdot x+3=17$	összevonjuk az egynemű tagokat	$\left(\frac{15}{12}-\frac{8}{12}\right)\cdot x+3\leqq 17$ $\frac{7}{12}\cdot x+3\leqq 17$
$\frac{7}{12}\cdot x=14$ $x=14:\frac{7}{12}$ $x=14\cdot\frac{12}{7}$ $x=24$	lebontogatással folytatjuk az eljárást	$\frac{7}{12}\cdot x\leqq 14$ $x\leqq 14:\frac{7}{12}$ $x\leqq 14\cdot\frac{12}{7}$ $x\leqq 24$
Ellenőrzés: Az eredeti egyenlet bal oldalába behelyettesítünk: $\frac{5}{4}\cdot\mathbf{24}+3-\frac{2}{3}\cdot\mathbf{24}=$ $=30+3-16=17.$ Mivel az egyenlet jobb oldalán is 17 szerepel, a megoldás helyes.		**Próba:** Ha $x=\mathbf{12}$, akkor $\frac{5}{4}\cdot\mathbf{12}+3-\frac{2}{3}\cdot\mathbf{12}\overset{?}{\leqq}17$ $15+3-8\overset{?}{\leqq}17$ $10\overset{?}{\leqq}17$ $x=12$-re igaz az egyenlőtlenség.

Feladatok

1. Írd fel egyenlettel, oldd meg, majd ellenőrizd!

a) Mihez kell 5-öt adni, hogy -12-t kapjunk?

b) Két szám összege 1, az egyik szám 6. Mi a másik szám?

c) Mennyit kell hozzaadni (-6)-hoz, hogy 11 legyen az összeg?

d) Mennyit kell hozzáadni (-3)-hoz, hogy (-9) legyen az összeg?

e) Melyik szám 9,5-szerese a (-19)?

f) Melyik szám 3-szorosa a $\frac{2}{5}$?

g) Melyik szám harmada a $\frac{2}{5}$?

h) Melyik szám $\frac{2}{5}$-e a 3?

2. Lehetőleg fejben oldd meg az egyenleteket és egyenlőtlenségeket! Zsebszámológéppel ellenőrizz!

a) $a + 7 = 45$ *b)* $6{,}2 + b \leqq 3{,}1$ *c)* $c - 12{,}2 = 20$ *d)* $15 - d \geqq -5$

e) $e - 1{,}1 > 0$ *f)* $\frac{2}{3} + f = 0$ *g)* $-4 - g = 1$ *h)* $-5 - h < -2$

i) $\frac{5}{3} + i = \frac{11}{6}$ *j)* $\frac{3}{4} - j \geqq \frac{1}{2}$ *k)* $k - 0{,}8 \leqq \frac{3}{2}$ *l)* $2{,}6 - l = -\frac{5}{2}$

3. Lehetőleg fejben oldd meg az egyenleteket és egyenlőtlenségeket! Zsebszámológéppel ellenőrizz!

a) $a \cdot 9 = 4{,}5$ *b)* $c \cdot (-40) = 20$ *c)* $3{,}1 \cdot c \leqq 6{,}2$ *d)* $-0{,}1 \cdot d \geqq 0{,}05$

e) $e \cdot 1{,}1 > 0$ *f)* $\frac{2}{3} \cdot f = -1$ *g)* $-4 \cdot g = \frac{3}{2}$ *h)* $-5 \cdot h \leqq -15$

i) $\frac{5}{3} : i = \frac{5}{6}$ *j)* $\frac{3}{4} : j \geqq \frac{1}{2}$ *k)* $k : 0{,}8 \leqq \frac{3}{2}$ *l)* $7{,}5 : l = -\frac{5}{2}$

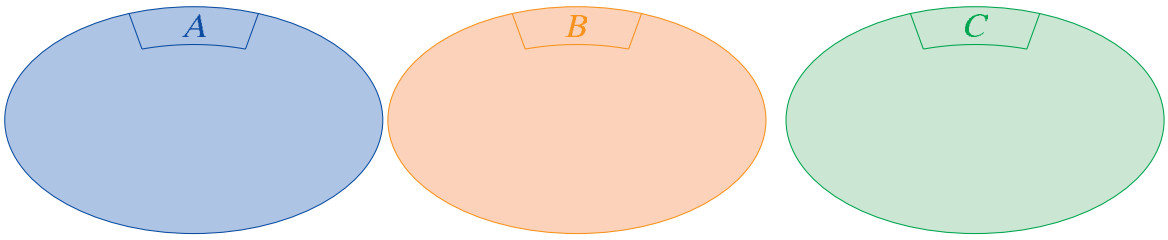
4. I. A páros egyjegyű természetes számok közül melyek teszik igazzá az egyenlőtlenségeket?

a) $3x < 9$ *b)* $4x < 6$ *c)* $5x > 3{,}5$ *d)* $\frac{x}{3} \geqq 5$

e) $\frac{x}{5} \leqq 20$ *f)* $-x < 0$ *g)* $-2x \geqq 0$ *h)* $\frac{x}{2} < 4$

i) $-\frac{x}{5} \geqq 0$ *j)* $-3x > -6$ *k)* $-\frac{1}{4}x < -4$ *l)* $\frac{x}{-2} \leqq 1$

II. Írd az egyenlőtlenségek betűjelét a megfelelő halmazba!



A = {Az alaphalmaz minden eleme igazzá teszi.}

B = {Van olyan eleme az alaphalmaznak, amely igazzá teszi, és van olyan is, amely nem.}

C = {Nincs olyan eleme az alaphalmaznak, amely igazzá teszi.}

5. *a)* Mely számok teszik igazzá az egyenletet és az egyenlőtlenségeket az egyes alaphalmazokon? Másold le a füzetedbe a táblázatot, és írd bele a válaszaidat!

Egyenlet, egyenlőtlenség \ Alaphalmaz	$\{5; 10; 15; 20\}$	Természetes számok halmaza	Negatív egészek halmaza	Racionális számok halmaza
$x \cdot 4 + 20 = 80$				
$x \cdot 3 - 8{,}3 < 10$				
$x - 0{,}5 \geqq 1\frac{1}{2}$				

b) Van-e olyan alaphalmaz, amelynek minden eleme igazzá teszi az $x \cdot 4 + 20 = 80$ egyenletet? Ha igen, melyik az?

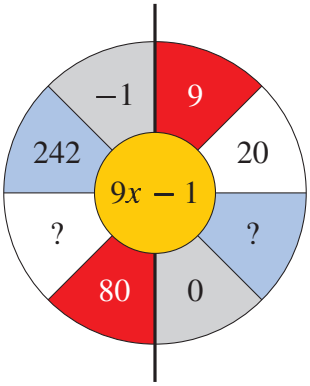
c) Van-e olyan alaphalmaz, amelynek minden eleme igazzá teszi az $x \cdot 3 - 8{,}3 < 10$ egyenlőtlenséget? Ha igen, melyik az?

d) Van-e olyan alaphalmaz, amelynek minden eleme igazzá teszi az $x - 0{,}5 \geqq 1\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget? Ha igen, melyik az?

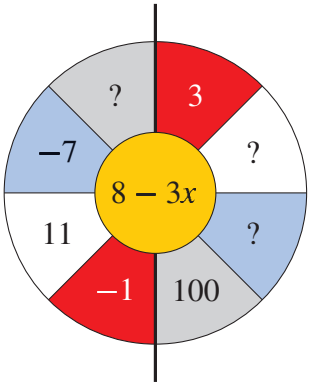
6. Az ugyanolyan színű mezőkön lévő számok közül a kör jobb felén lévőt behelyettesítve a sárga körben lévő algebrai kifejezésbe, a kör bal felén lévő számot kapjuk meg.

Milyen számok kerülnek a kérdőjelekkel jelölt helyekre?

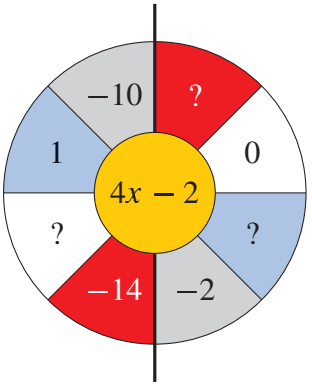
a)



b)

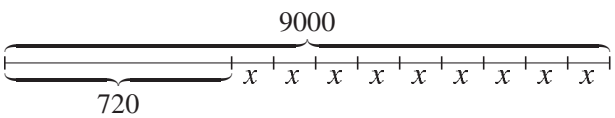


c)

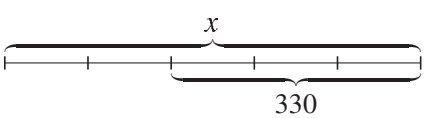


7. *a)* Írj a rajzokról egy-egy egyenletet! Oldd is meg azokat!

A)



B)



b) Társaddal találjatok ki olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldásához ezek a rajzok készülhettek!

8. Oldd meg az egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

a) $2x + 4 = 10$ *b)* $\frac{2x + 4}{5} = 10$ *c)* $\frac{2x + 4}{5} - 2 = 10$

d) $3x - 1{,}5 \leqq 2{,}4$ *e)* $\frac{3x - 1{,}5}{2} > 2{,}4$ *f)* $\frac{3x - 1{,}5}{2} + 5{,}4 = -4{,}5$

9. Oldd meg az egyenleteket a természetes számok halmazán! Ellenőrizz!

a) $5x + 3x - 10 = 14$ *b)* $7x - 2x + 15 = 40$ *c)* $5x + 7 - 8x + 6x = 13$

d) $6x + (4x + 8) = 6$ *e)* $6x - (4x + 8) = 6$ *f)* $6x - (4x - 8) = 6$

10. Oldd meg az egyenleteket az egész számok halmazán! Ellenőrizz!

a) $4x + 4(x + 1) = 40$ *b)* $5x + 6(x - 5) = 14$ *c)* $4x - 4(x + 1) = 40$

d) $5x - 6(x - 5) = 14$ *e)* $3x - 5(x - 1) = -5$ *f)* $7x - 2(2x - 1) = 7$

11. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok halmazán! Ellenőrizz!

a) $\frac{5}{6}x + x = 22$ *b)* $\frac{x}{2} + \frac{5}{6}x = 48$ *c)* $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1 = 14$

d) $\frac{4x}{5} - \frac{x}{10} + 7 = 28$ *e)* $0{,}4x - 2 + 1{,}3x = 18{,}4$ *f)* $\frac{1}{5}x + 1{,}2 - 0{,}4x = 1$

12. Egy matematikaversenyen a tanulóknak 15 feladatot kell megoldaniuk.

A versenyzők pontszámát az $Ö = 5 \cdot H - R + 15$ egyenlet segítségével számolják ki, ahol $Ö$ az összpontszámot, H a helyes, R a rossz válaszok számát jelöli.

Ha egy feladatra nincs válasz, azt nem tekintik sem helyes, sem rossz válasznak, nem számít bele az összpontszámba. Fruzsina 67 pontot szerzett úgy, hogy 3 feladatra rossz választ adott.

Hány feladatot nem oldott meg Fruzsina?

Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel

1. példa

a) A mérlegen levő mérőtömegekre csak a mérőszámukat írtuk rá, mindegyik mértékegysége kg. A mérlegeken lévő pöttyös bögrék tömege egyenlő. Határozzuk meg egy-egy bögre tömegét!

Ez a mérleg egyensúlyban van:



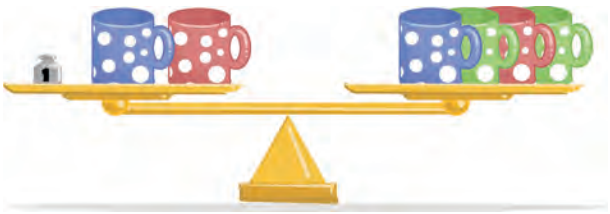
Ez a mérleg nincs egyensúlyban:



Megoldás

A bögrék tömegét úgy állapítjuk meg, hogy minden lépésben a mérlegek mindkét oldaláról ugyanannyi mérőtömeget vagy bögrét veszünk le. Ha ezt nem tudjuk megvalósítani, akkor mindkét oldalnak vesszük a felét.

Mindkét oldalról leveszünk 2-2 kg-ot:



Mindkét oldalról leveszünk 2-2 bögrét:



Mindkét oldalról levesszük a felét:



A mérlegről leolvasható:

1 bögre tömege $= \frac{1}{2}$ kg.

Ellenőrzés:

$3\text{ kg} + 2 \cdot \frac{1}{2}\text{ kg} \overset{?}{=} 2\text{ kg} + 4 \cdot \frac{1}{2}\text{ kg}$



$4\text{ kg} = 4\text{ kg}$

Mindkét oldalról leveszünk 3-3 kg-ot:



Mindkét oldalról leveszünk 2-2 bögrét:



Mindkét oldalról levesszük a felét:



A mérlegről leolvasható, hogy

1 bögre tömege < 1 kg.

Próba: egy bögre tömege legyen $\frac{1}{2}$ kg!

$5\text{ kg} + 2 \cdot \frac{1}{2}\text{ kg} \overset{?}{>} 3\text{ kg} + 4 \cdot \frac{1}{2}\text{ kg}$



$6\text{ kg} > 5\text{ kg}$

Helyes a megoldásunk.

A megoldás során csak úgy változtattunk, hogy ne változzon meg a mérlegek állása.

b) Írjunk az *a)* feladatban szereplő egyensúlyban lévő mérlegről egyenletet! Jelöljük egy-egy bögre tömegét *b*-vel! Az egyenlet megoldása során használjuk az egyenlet mindkét oldalának azonos változtatására utaló rövid jelölést!

Megoldás

$3 + 2 \cdot b = 2 + 4 \cdot b$ / -2 (mindkét oldalból elveszünk 2-t)

$3 + 2 \cdot b - 2 = 2 + 4 \cdot b - 2$ összevonunk mindkét oldalon

$1 + 2 \cdot b = 4 \cdot b$ / $-2 \cdot b$ (mindkét oldalból elveszünk $2 \cdot b$-t)

$1 + 2 \cdot b - 2 \cdot b = 4 \cdot b - 2 \cdot b$ összevonunk mindkét oldalon

$1 = 2 \cdot b$ / $: 2$ (mindkét oldalt osztjuk 2-vel)

$1 : 2 = 2 \cdot b : 2$

$0{,}5 = b$

Ugyanarra az eredményre jutottunk: egy bögre tömege 0,5 kg.

Ellenőrzés:

Az egyenlet **bal oldalán** álló kifejezésbe helyettesítsük be a b-re kapott számot!

$3 + 2 \cdot \boldsymbol{b} = 3 + 2 \cdot \mathbf{0{,}5} = 3 + 1 = 4$

Az egyenlet **jobb oldalán** álló kifejezésbe is helyettesítsük be a b-re kapott számot!

$2 + 4 \cdot \boldsymbol{b} = 2 + 4 \cdot \mathbf{0{,}5} = 2 + 2 = 4$

A két helyettesítési érték egyenlő. Helyesen oldottuk meg az egyenletet.

Tapasztalataink szerint, ha az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést
- ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük,
- ugyanazzal a nullától különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk,

az egyenlőség nem borul fel.
Ha az egyenletek megoldásában ezt a törvényszerűséget használjuk fel, akkor **mérlegelvvel** oldjuk meg.

2. példa

Oldjuk meg ugyanazt az egyenletet többféleképpen is!

Lebontogatással

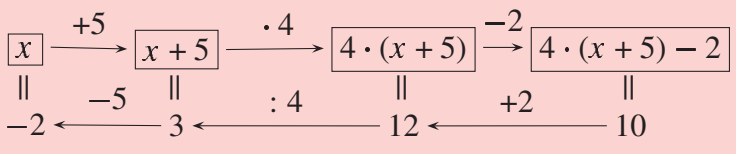
$4 \cdot (x + 5) - 2 = 10$

$4 \cdot (x + 5) = 12$

$x + 5 = 3$

$x = -2$

Folyamatábrával:



Mérlegelvvel

$4 \cdot (x + 5) - 2 = 10$ / $+2$

$4 \cdot (x + 5) - 2 + 2 = 10 + 2$

$4 \cdot (x + 5) = 12$ / $: 4$

$4 \cdot (x + 5) : 4 = 12 : 4$

$x + 5 = 3$ / -5

$x + 5 - 5 = 3 - 5$

$x = -2$

Ellenőrzés:

$4 \cdot (-2 + 5) - 2 = 4 \cdot 3 - 2 = 10$

Amelyik feladat lebontogatással megoldható, az mérlegelvvel is megoldható, de fordítva már nem igaz. **Ha az egyenlet minkét oldalán szerepel ismeretlen, akkor mérlegelvvel célszerű megoldani.**

Egyenlőtlenségek megoldása

3. példa

Számpéldákon figyeljük meg, hogy a mérlegelv egyes lépéseit elvégezve igazak maradnak-e az egyenlőtlenségek.

Minden lépésben ezekből indulunk ki	$5 < 8$	$-5 > -8$	$\frac{1}{2} > 0$	$-0{,}5 < 0$	Igaz marad-e az állítás?
Mindkét oldalhoz +1-et adunk	$6 < 9$	$-4 > -7$	$1\frac{1}{2} > 1$	$0{,}5 < 1$	igen
Mindkét oldalból kivonunk 3-at	$2 < 5$	$-8 > -11$	$-2\frac{1}{2} > -3$	$-3{,}5 < -3$	igen
Mindkét oldalt szorozzuk 4-gyel	$20 < 32$	$-20 > -32$	$2 > 0$	$-2 < 0$	igen
Mindkét oldalt elosztjuk $+\frac{1}{2}$-del	$10 < 16$	$-10 > -16$	$1 > 0$	$-1 < 0$	igen
Mindkét oldalt szorozzuk -2-vel	$-10 \not< -16$	$10 \not> 16$	$-1 \not> 0$	$1 \not< 0$	nem
Mindkét oldalt elosztjuk -1-gyel	$-5 \not< -8$	$5 \not> 8$	$-\frac{1}{2} \not> 0$	$0{,}5 \not< 0$	nem
Mindkét oldalt szorozzuk 0-val	$0 \not< 0$	$0 \not> 0$	$0 \not> 0$	$0 \not< 0$	nem

A számpéldákon ezeket figyelhetjük meg:

- A kapott egyenlőtlenség iránya megmarad, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadjuk ugyanazt a számot, illetve mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot; ha mindkét oldalt megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a pozitív számmal.
- Fordított irányú egyenlőtlenség lesz igaz, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk.
- Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 0-val szorozva egyenlőséget kapunk, hiszen mindkét oldal értéke 0 lesz.

4. példa

Oldjuk meg az *a)* $5 \cdot x + 3 > 4 \cdot x - 8$ *b)* $5 - 8 \cdot x < 2 \cdot x + 25$ egyenlőtlenséget!

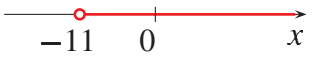
Megoldás

a) $5 \cdot x + 3 > 4 \cdot x - 8 \quad / -4 \cdot x$

$x + 3 > -8 \quad / -3$

$x > -11$

Számegyenesen ábrázolva az igazsághalmazt, ezt kapjuk:



Az egyenlőtlenséget a mérlegelv segítségével oldottuk meg.

Ellenőrzés:

Az egyenlőtlenség megoldásának helyességét nem tudjuk könnyen ellenőrizni, hiszen végtelen sok számot kellene az egyenlőtlenségbe behelyettesíteni. Azt azonban be lehet látni, hogy $x = -11$-et mindkét oldalba behelyettesítve egyenlő számot, -52-t kapunk. A bal oldalon x-nek az 5-szöröse, a jobb oldalon a 4-szerese áll, ezért a bal oldal biztosan nagyobb, mint a jobb, ha $x > -11$.

b) $5 - 8 \cdot x < 2 \cdot x + 25 \quad / -2x$

$5 - 10 \cdot x < 25 \quad / -5$

$-10 \cdot x < 20 \quad / : (-10)$ Negatív számmal osztottunk, ezért az egyenlőtlenségjelet meg kell fordítani!

$x > -2$

Az igazsághalmaz számegyenesen ábrázolva:



Ellenőrzés:
$x = -2$-re mindkét oldal 21. Ha $x > -2$, akkor a bal oldal értéke csökken, a jobbé pedig nő.

Játék

Számfogócska

Két kártyára írjon fel a játékvezető egy-egy algebrai kifejezést úgy, hogy ne lássák a játékosok, mi van a kártyákra írva! (A kifejezések olyanok legyenek, hogy ha közéjük egyenlőségjelet teszünk, akkor a kapott egyenletet a tanult módszerekkel meg tudjuk oldani.) Például írjuk ezt az egyikre: $5 \cdot x + 7$, és ezt a másikra $8 \cdot x + 1$. A játékosok számokat mondanak. A játékvezető megmondja, hogy a mondott számra milyen értéket adnak az egyes kifejezések.
Ha a mondott szám $x = 4$, akkor $5 \cdot x + 7 = 5 \cdot 4 + 7 = 27$; $8 \cdot x + 1 = 8 \cdot 4 + 1 = 33$.
Ilyen táblázatot készíthetünk:

x értéke	0	4	5	6	3	2
▭ értéke	7	27	32	37	22	17
▭ értéke	1	33	41	49	25	17
ez nagyobb, ennyivel	▭ 6-tal	▭ 6-tal	▭ 9-cel	▭ 12-vel	▭ 3-mal	▭ = ▭

A játék célja

a) Minél kevesebb kérdéssel megtalálni azt a számot, amelyre a két kifejezés értéke egyenlő, azaz az egyenlet gyökét.

b) Kitalálni, hogy milyen algebrai kifejezések állnak a kártyákon.

A leírt játékban valójában az $5x + 7 = 8x + 1$ egyenletet oldottuk meg.

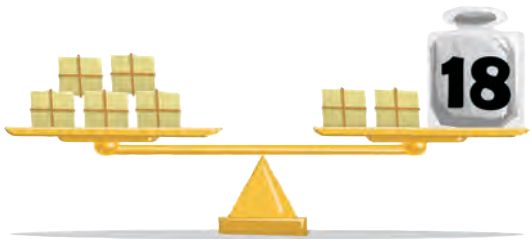
Feladatok

1. A mérlegekre mérőtömegeket és csomagokat helyeztünk. A mérlegek egyensúlyban vannak. A mérőtömegek mértékegysége kg. Az egy-egy mérlegen lévő csomagok tömege megegyező. Írj a mérlegekről egyenleteket, és oldd is meg azokat!

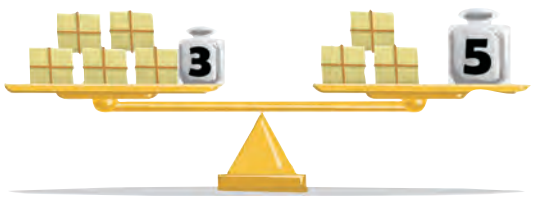
a)



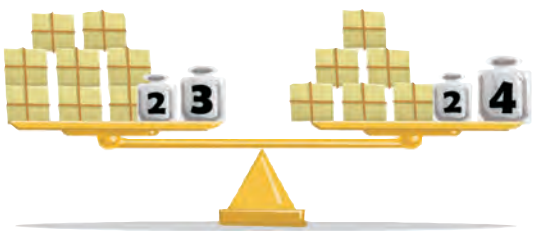
b)



c)



d)



2. Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $x + 16 = 9 \cdot x$ *b)* $2 \cdot x + 6 = x$ *c)* $10 + x = 3 \cdot x$

d) $2 \cdot x - 5 = 4 \cdot x$ *e)* $-x - 8 = 3 \cdot x$ *f)* $-3 \cdot x - 11 = -x$

3. Oldd meg a természetes számok halmazán az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $4 \cdot x + 12 = x + 15$ *b)* $6 \cdot x - 4 = 4 \cdot x + 14$ *c)* $5 \cdot x + 8 = 8 \cdot x + 5$

d) $-14 + 14 \cdot x = 16 - 16 \cdot x$ *e)* $2 - 10 \cdot x = 14 - 7 \cdot x$ *f)* $7 \cdot x - 9 = 3 - 4 \cdot x$

4. A mérlegekre mérőtömegeket és csomagokat helyeztünk. A mérlegek nincsenek egyensúlyban. A mérőtömegek mértékegysége kg. Az egy-egy mérlegen lévő csomagok tömege megegyező. Írj a mérlegekről egyenlőtlenségeket, és oldd is meg azokat!

a)



b)



c)



d)



5. Az alábbi egyenlőtlenségek mindkét oldalához adjuk hozzá a zárójelben megadott számot! Igaz marad-e az egyenlőtlenség?

a) $7{,}3 > 2{,}5$ $(1{,}7)$ *b)* $2{,}8 > -0{,}3$ $(-0{,}6)$

c) $\frac{5}{4} > \frac{7}{8}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ *d)* $-\frac{14}{15} < -\frac{11}{15}$ $\left(\frac{7}{5}\right)$

6. Szorozzuk meg az alábbi egyenlőtlenségek mindkét oldalát a zárójelben megadott pozitív számmal! Igaz marad-e az egyenlőtlenség?

a) $-2 > -8$ (3) *b)* $-4 > -12$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{11}{9} > \frac{2}{3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$ *d)* $-\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ $\left(\frac{7}{6}\right)$

7. Az alábbi egyenlőtlenségek mindkét oldalát szorozzuk meg a zárójelben lévő negatív számmal! Igaz marad-e az egyenlőtlenség?

a) $5 < 9$ (-1) *b)* $\frac{3}{7} < \frac{7}{3}$ (-2)

c) $-1{,}8 > -3{,}5$ $(-0{,}1)$ *d)* $-0{,}08 < -0{,}0008$ (-1000)

8. Az alábbi egyenlőtlenségek mindkét oldalát osszuk el a zárójelben megadott számmal! Mely esetben kell megfordítani az egyenlőtlenség jelét?

a) $6 \leqq 8$ (2) *b)* $\frac{15}{4} < \frac{20}{3}$ (−5) *c)* $3{,}6 > -1{,}2$ (−1,2)

d) $-\frac{7}{2} < \frac{4}{3}$ (2) *e)* $-10 > -1000$ (1000) *f)* $-\frac{3}{2} > -\frac{15}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

9. Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Ábrázold számegyenesen a megoldást!

a) $6 \cdot x + 4 \leqq 1$ *b)* $5 \cdot x - 2 \geqq 3$ *c)* $3 \cdot x - 12 > 0$

d) $2 - 5 \cdot x \geqq 0$ *e)* $21 - 3 \cdot x < -3$ *f)* $-x + 40 \leqq 90$

10. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $-2 \cdot x + 1 \leqq x - 2$ *b)* $-2 \cdot x + 1 > x - 2$ *c)* $3 \cdot x + 6 \leqq -6 \cdot x$

11. Egy szám 2-szereséhez 4-et adva kisebb számot kapunk a szám 3-szorosánál. Nagyobb-e a szám 3-nál? Lehet-e negatív ez a szám? Ábrázold számegyenesen a megoldást!

12. Egy szám 8-szorosából a szám 3-szorosánál 1-gyel kevesebbet elvéve, kisebb számot kapunk, mint a szám 4-szerese. Lehet pozitív ez a szám? Ábrázold számegyenesen a megoldást!

13. Írd be a hiányzó (<, =, >) jelet!

a) Ha $x > 8$, akkor $(x + 3)$ ☐ 10, *b)* Ha $x > y$, akkor $(y + 2)$ ☐ $(x + 5)$,

c) Ha $60 \cdot x = 50 \cdot y$, akkor x ☐ y, *d)* Ha $x > y$, akkor $60 - x$ ☐ $70 - y$,

e) Ha $5 \cdot x > 10$, és $y > x$, akkor y ☐ 2, *f)* Ha $y < 5$, akkor $3 \cdot y$ ☐ 17.

Összetettebb egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel

1. példa

Oldjuk meg az $5x + 3x - 7 = 20 + 2x - 9$ egyenletet!

Megoldás

Mérlegelvvel célszerű az egyenletet megoldani.

Összevonjuk az egynemű kifejezéseket.	$8x - 7 = 2x + 11$
Mindkét oldalból levonunk $2x$-et.	$6x - 7 = +11$
Mindkét oldalt növeljük 7-tel.	$6x = 18$
Mindkét oldal hatodát vesszük.	$x = 3$

Ellenőrzés:

Bal oldal: $5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 7 = 24 - 7 = 17$

Jobb oldal: $20 + 2 \cdot 3 - 9 = 20 + 6 - 9 = 17$

2. példa

Oldjuk meg a $2 \cdot (x + 3) - 3 \cdot (x - 2) = 6x - 2$ egyenletet!

Megoldás

A bal oldalon elvégezzük a szorzásokat.	$(2x + 6) - (3x - 6) = 6x - 2$
A bal oldalon felbontjuk a zárójeleket.	$2x + 6 - 3x + 6 = 6x - 2$
Összevonjuk az egynemű kifejezéseket.	$-x + 12 = 6x - 2$
Mindkét oldalhoz hozzáadunk x-et.	$12 = 7x - 2$
Mindkét oldalt növeljük 2-vel.	$14 = 7x$
Mindkét oldalt osztjuk 7-tel.	$2 = x$

Az $x = 2$ az eredeti egyenletünknek (és a kapott összes többinek) is megoldása, mert behelyettesítve az egyenlet jobb és bal oldalába mindig ugyanazt a számot kapjuk, az eredeti egyenletben ez a szám a 10.

Helyettesítsük be az $x = 2$-t mind az öt egyenletbe!

$14 = 14$

$+14 = 7x$

$+14 = \underbrace{7 \cdot 2}_{14}$

$12 = 12$

$+12 = 7x - 2$

$+12 = \underbrace{\underbrace{7 \cdot 2}_{14} - 2}_{12}$

$10 = 10$

$-x + 12 = 6x - 2$

$\underbrace{-2 + 12}_{10} = \underbrace{6 \cdot 2}_{12} - 2$

10

$2x + 6 - 3x + 6 = 6x - 2$

$\underbrace{\underbrace{2 \cdot 2}_{4} + 6 - \underbrace{3 \cdot 2}_{6} + 6}_{10} = \underbrace{6 \cdot 2}_{12} - 2$

10

$10 = 10$

$(2x + 6) - (3x - 6) = 6x - 2$

$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{2 \cdot 2}_{4} + 6)}_{10} - \underbrace{(\underbrace{3 \cdot 2}_{6} - 6)}_{0}}_{10} = \underbrace{6 \cdot 2}_{12} - 2$

10

Láthatjuk, hogy az eljárás során kapott minden egyenletnek megoldása a 2.

3. példa

Oldjuk meg az $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} - 8 = \frac{2x}{3} - \frac{2x}{5}$ egyenletet!

Első megoldás

Közös nevezőre hozzuk az együtthatókat.	$\frac{3}{15}x + \frac{5}{15}x - 8 = \frac{10}{15}x - \frac{6}{15}x$
Összevonunk.	$\frac{8}{15}x - 8 = \frac{4}{15}x$
Mindkét oldalból elveszünk $\frac{4}{15}x$-et.	$\frac{4}{15}x - 8 = 0$

Mindkét oldalt növeljük 8-cal.	$\frac{4}{15}x = 8$
Mindkét oldalt osztjuk $\frac{4}{15}$-del.	$x = 8 \cdot \frac{15}{4}$
	$x = 30$

Az $x = 30$ az eredeti egyenletünknek is megoldása, mert behelyettesítve az egyenletbe, mindkét oldalon 8-at kapunk.

Második megoldás

Minden tagot megszorozzuk az együtthatók nevezőjének legkisebb közös többszörösével, 15-tel.	$15 \cdot \frac{x}{5} + 15 \cdot \frac{x}{3} - 15 \cdot 8 = 15 \cdot \frac{2x}{3} - 15 \cdot \frac{2x}{5}$ $\frac{15}{5} \cdot x + \frac{15}{3} \cdot x - 120 = \frac{15}{3} \cdot 2x - \frac{15}{5} \cdot 2x$ $3x + 5x - 120 = 5 \cdot 2x - 3 \cdot 2x$ $3x + 5x - 120 = 10x - 6x$
Mindkét oldalon összevonunk.	$8x - 120 = 4x$

Innen a tanult módon oldjuk meg az egyenletet.

4. példa

Oldjuk meg a $\frac{3x-5}{2} - 1 = \frac{x-11}{5}$ egyenletet!

Első megoldás

Tagonként osztunk.	$\frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - 1 = \frac{x}{5} - \frac{11}{5}$
Összevonjuk az egynemű kifejezéseket.	$\frac{3x}{2} - 3{,}5 = \frac{x}{5} - 2{,}2$
Mindkét oldalhoz hozzáadunk 3,5-et.	$\frac{3}{2}x = \frac{1}{5}x + 1{,}3$
Mindkét oldalból elveszünk $\frac{1}{5}x$-et.	$\frac{3}{2}x - \frac{1}{5}x = 1{,}3$
Bővítjük az együtthatókat.	$\frac{15}{10}x - \frac{2}{10}x = 1{,}3$
Összevonunk.	$\frac{13}{10}x = 1{,}3$
Mindkét oldalt osztjuk $\frac{13}{10}$-del.	$x = 1$

Az $x = 1$ az eredeti egyenletünknek is megoldása, mert behelyettesítve az egyenletbe, mindkét oldalon -2-t kapunk.

Második megoldás

Minden tagot megszorozzuk az együtthatók nevezőjének legkisebb közös többszörösével, 10-zel.

$$10 \cdot \frac{3x-5}{2} - 10 \cdot 1 = 10 \cdot \frac{x-11}{5}$$
$$5 \cdot (3x-5) - 10 = 2 \cdot (x-11)$$
$$15x - 25 - 10 = 2x - 22$$

Összevonunk.

$$15x - 35 = 2x - 22$$

Innen a tanult módon oldjuk meg az egyenletet.

Az egyenletek megoldásakor arra törekedtünk, hogy az egyik oldalon csak az ismeretlen, a másik oldalon pedig csak egy szám maradjon. Ennek érdekében az egyenlet

- mindkét oldalához hozzáadhatjuk ugyanazt a számot vagy kifejezést, illetve mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a számot, illetve kifejezést;
- mindkét oldalt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozhatjuk, illetve oszthatjuk.

A felsorolt lépések segítségével a megoldandó egyenlet egyre egyszerűbb lesz, végül eljutunk egy olyan egyszerű egyenlethez, amelyről közvetlenül leolvashatjuk a megoldást. Az egyenlet megoldását az egyenlet **gyökének** is szoktunk nevezni. Megfigyelhetjük, hogy az egyenlet gyöke a megoldás során kapott valamennyi új egyenletnek is gyöke.

Feladatok

1. Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $-x + 4 - 2x = 2 - 4x$

b) $2x - 4 + 1 = 2x - 2 + x$

c) $6 + 4x - 9 = -7 + 5x + 12$

d) $4x + 36 - 10x = 3 - 2x$

2. Oldd meg az egyenleteket az egész számok halmazán! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $4 \cdot (x-1) = 2x + 16$

b) $16x - 16 = 3 \cdot (2 + x)$

c) $5 \cdot (3 - x) = -2 \cdot (x - 3)$

d) $3x + (x + 1) = 4 \cdot (x + 1)$

e) $4 \cdot (3 + x) - 3 = 2 \cdot (2 - x)$

f) $5 - (x - 4) = 3 \cdot (x + 2)$

g) $4 - 3x = 5x - 2 \cdot (3 - x)$

h) $8 \cdot (2x - 1) - 3 \cdot (2x - 1) = x + 4$

3. Oldd meg az egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $2 \cdot (x-2) \leqq -10x + 8$

b) $3x - 5 > 3 \cdot (x - 5)$

c) $(-2) \cdot (x-4) > x - 4$

d) $8 - (x + 3) \geqq 2 \cdot (x + 1)$

e) $8 \cdot (x-4) - 3 \cdot (x-4) \leqq 5 \cdot (x-4)$

4. Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $5{,}6x - 48{,}2 = 2{,}4x - 16{,}2$

b) $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{2}x - 5$

c) $\frac{1}{5}x + \frac{3}{10} - 8 = \frac{1}{4} \cdot x + 4$

d) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$

5. Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldásodat!

a) $\frac{x-2}{3}+\frac{5+4x}{5}=6$ *b)* $\frac{5x+3}{2}-4=\frac{8-3x}{4}$

c) $y+1=\frac{5-y}{2}$ *d)* $2+y=\frac{1-3y}{4}$

6. Egy szám 12-vel nagyobb a másiknál. Az egyiket elosztjuk 3-mal, a másikat pedig 6-tal; az így kapott első hányados a másodiknál 2-vel nagyobb. Melyek ezek a számok?

7. Két szám összege 112. Ha a kisebbiket elosztjuk 4-gyel, a nagyobbikat pedig 12-vel, a hányadosok összege 16 lesz. Melyik ez a két szám?

8. Milyen számokat írjunk a betűk helyére, hogy igazak legyenek az egyenlőségek?

a)

b	+	a	+	a	= 13
+		+		+	
d	+	a	+	b	= 15
+		+		+	
c	+	d	+	d	= 24
= 20		= 17		= 15	

b)

a	·	b	·	c	= 30
·		·		·	
d	·	a	·	c	=100
·		·		·	
a	·	d	·	d	=200
= 40		= 60		= 250	

9. Mennyi az $x-1$; $x-2$; $x-3$; …; $x-99$; $x-100$ algebrai kifejezések

a) szorzata, *b)* összege, ha $x=50$?

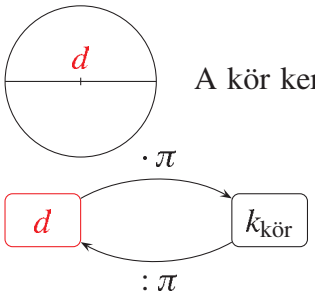
Ismeretlenek kifejezése képletekből

Példa

A matematikában és a természettudományokban (fizika, kémia, biológia) gyakran, de olykor mindennapi életünkben is szükségünk van arra, hogy egy képletből ki tudjunk fejezni egy változót. Erre mutatunk néhány példát a már ismert képletek felhasználásával.

A példák mindegyikében az egyenletek megoldásáról tanultakat használjuk fel.

a) **A kör átmérőjének** kifejezése a kör kerületének képletéből:



A kör kerülete (k) az átmérőjének (d) π-szerese

Képlettel:

$k_{\text{kör}} = d \cdot \pi, \quad \pi \approx 3{,}14$

$d = k_{\text{kör}} : \pi$

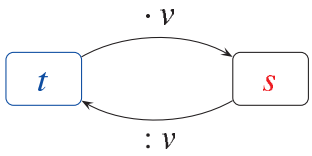
b) A **menetidő** kifejezése képletből:



Az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző autó sebessége (v) a megtett út (s) és az út megtételéhez szükséges idő (t) hányadosa.

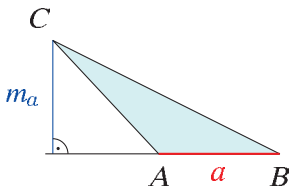
Képlettel:

$$v = \frac{s}{t}, \quad t \neq 0$$



$$t = \frac{s}{v}, \quad v \neq 0$$

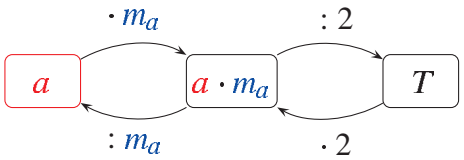
c) A háromszög **egyik oldalának** kifejezése a terület képletéből:



A háromszög területét (T) kiszámíthatjuk úgy, hogy az egyik oldal hosszát (a) megszorozzuk a hozzá tartozó magasság (m_a) hosszával, és a szorzatot elosztjuk 2-vel.

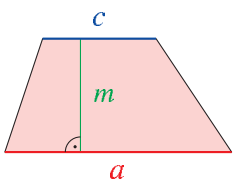
Képlettel:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$



$$a = T \cdot 2 : m_a$$

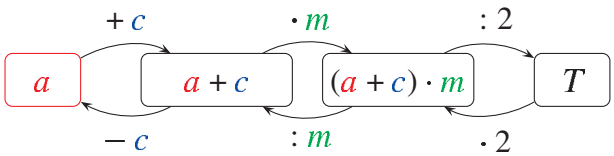
d) A trapéz **egyik alapjának** kifejezése a terület képletéből:



A trapéz területét (T) kiszámíthatjuk úgy, hogy az alapok (a, c) összegét megszorozzuk a magassággal (m), és a szorzatot elosztjuk kettővel.

Képlettel:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$$



$$a = T \cdot 2 : m - c$$

Feladatok

1. A Hold egyenlítőjének hossza 10 920 km. Mekkora a Hold átmérője?

2. 2013-ban Kína megnyitotta az új nagysebességű, úgynevezett „bullet train” vasútvonalat Peking és Kuangcsou között. A vonat 8 óra alatt teszi meg a teljes távot átlagosan 287,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladva. A vasút a fél országot átszelve 35 várost érint.

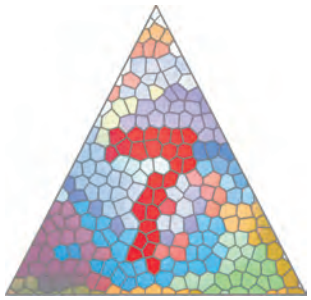
a) Hány km-es utat fut be a vonat?

b) A régebbi vonatok ugyanezt az utat 20 óra alatt tették meg. Mekkora átlagsebességgel haladtak?



c) A legolcsóbb ülések ára az új vonatokon 500 jüan volt 2013-ban. Hány forintba került a legolcsóbb jegy, amikor 1 jüan 36,04 Ft-ba került?

@ Mit jelent a szövegben szereplő „bullet train” kifejezés?



3. A rajzon egy egyenlő szárú háromszög alakú ólomüveg ablak tervét látod. A valóságban a területe 1,12 m^2, az alapja 1,4 m.

Milyen magas az ablak?

4.



A téli sportversenyek egyike a síugrás. Ennek során a síelők egy sáncon siklanak le, melynek a végén, a „sáncasztalon” elrugaszkodva minél messzebbre próbálnak repülni. Minden sánc alján van egy K-pont (kalkulációs pont). Ennek a pontnak a magasságában húznak a pályán egy piros vonalat, amelyet K-vonalnak neveznek. A $K120$-as nagysáncon rendezett versenyeken a K-vonal 120 méternél van. A versenyzők hatvan pontot kapnak, ha erre a vonalra érkeznek. Ha 120 méternél kevesebbet ugrik egy versenyző, méterenként 1,8 pont levonás jár, ha 120 méternél többet, méterenként 1,8 pontot kap.

Az ugrásért kapott **távolsági pontot** (t) a következő módon számítják ki: $t = 60 + (s - K) \cdot 1{,}8$, ahol s: az ugrás hossza méterben, $K = 120$.

a) Hány távolsági pontot kap egy versenyző a $K120$-as versenyen a 125 m-es ugrásáért?

b) Hány méter volt Tom Hilde híres norvég versenyző nagysáncon való ugrásának hossza, ha a $K120$-as versenyen ugrásáért 94,2 távolsági pontot kapott?

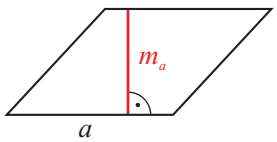
c) Mit gondolsz, közel mekkora sebességgel érkezik a $K120$-as versenyen a síugró a sánc végéhez?

A) 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *B)* 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *C)* 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *D)* 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

@ Az interneten nézz utána, hogy helyes volt-e a választásod!

5. Fejezd ki a képletekből a pirossal jelölt változókat!

a)



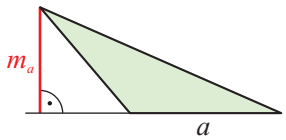
$T = a \cdot m_a$

b)



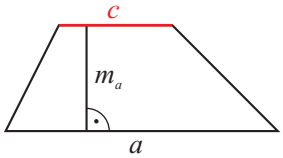
$v = \frac{s}{t}$, $t \neq 0$

c)



$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$

d)



$T = \frac{a + c}{2} \cdot m$

Szöveges feladatok megoldása

A szöveges feladatokat sokféle módon meg lehet oldani: logikai úton, egy jó rajzzal, egyenlettel.

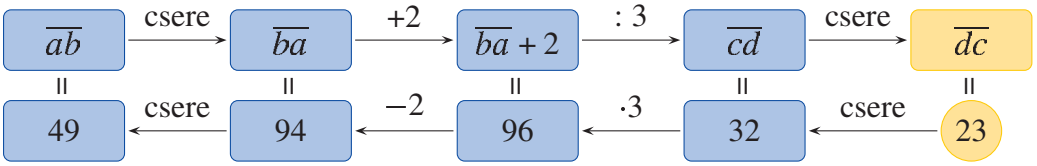
Az utóbbi esetben a szöveget lefordítjuk a matematika nyelvére. A feladat megoldása előtt célszerű megbecsülni a várható eredményt. Szerencsés esetben már így is megtaláljuk a helyes választ. Akárhogyan oldjuk is meg a feladatot, mindig meg kell vizsgálnunk, hogy a kapott eredmény megfelel-e a szövegben leírt feltételnek.

1. példa

Gondoltam egy kétjegyű számra. Felcseréltem a számjegyeit, a kapott számhoz 2-t adtam, majd ennek a harmadát vettem, és felcseréltem a számjegyeket. Így 23-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

A logikai utat célszerű választani. Visszafelé göngyölgetve könnyű eljutni a megoldáshoz. Legyen a gondolt szám $\overline{ab}$!



A gondolt szám 49. A szövegbe behelyettesítve meggyőződhetünk az eredmény helyességéről.

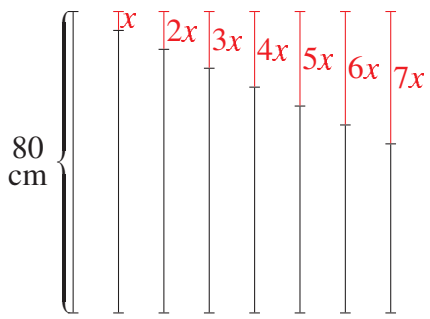
2. példa

Egy magasleshez nyolcfokú létrát készítettek. Egy 5 m-es deszkából vágták le az egymást követő lépcsőfokokat úgy, hogy a deszka éppen elfogyott. Az első lépcsőfok 80 cm hosszú. A többi hét egyre rövidebb. A lépcsőfokok hossza mindig ugyanannyival kevesebb. Mekkorák lettek a létra fokai?



Megoldás

A rajzon a lépcsőfokok deszkáit csökkenő sorrendben egymás mellé helyeztük. Jelöljük a lépcsőfokok közötti különbséget x-szel!



A rajzról leolvasható a megoldás:

$$\underbrace{8 \cdot 80}_{640} - \underbrace{(x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x)}_{28x} = 500$$

$$\underbrace{640 - 500}_{140} = 28x$$

$$x = 140 : 28 = 5 \text{ (cm)}$$

A lépcsőfokok hossza: 80 cm, 75 cm, 70 cm, 65 cm, 60 cm, 55 cm, 50 cm, 45 cm.

A megoldás a feladat szövegének megfelel.

3. példa

A „poharas süti” receptjével az *Arány, százalék* című témakörben ismerkedhettetek meg. A sütményt úgy készíthetjük el, hogy egy tejfölöspohárral mérjük ki a hozzávalók közül a joghurtot, a lisztet, a cukrot és az olajat. Ezek arányát mutatja az alábbi rajz.



2 : 4 : 2 : 1

Egy nagy adag sütihez összesen 45 tejfölöspohárnyi hozzávalót használtunk fel a fenti arányban. Hány pohár lisztet tettünk a tésztába?

Megoldás

Jelöljük x-szel azt, hogy hányszorosát vettük a hozzávalóknak!



$2 \cdot x$: $4 \cdot x$: $2 \cdot x$: $1 \cdot x$

Írjunk fel egyenletet a hozzávalók mennyiségére, és oldjuk is meg azt!

$$2 \cdot x + 4 \cdot x + 2 \cdot x + 1 \cdot x = 45$$
$$9 \cdot x = 45$$
$$x = 5$$

Az eredményünk azt mutatja, hogy a hozzávalók 5-szörösét vettük, tehát $4 \cdot 5$ pohár = 20 pohár lisztet használtunk fel a nagyobb adag sütemény elkészítéséhez.

Ellenőrizzük az eredményünket!

10 pohár joghurt, 20 pohár liszt, 10 pohár cukor és 5 pohár olaj összege valóban 45 pohár.

4. példa

Egy állatkerti simogatóban csak kiskecskék és gyerekek voltak. Laci, a magáéval együtt, 20 fejet és 64 lábat számolt össze.

Hány gyerek és hány kiskecske volt éppen akkor a simogatóban?



Első megoldás

Megoldás egyenlettel:

Ha a kiskecskék száma	x,
akkor a gyerekek száma	$20 - x$.
A kiskecskék lábainak száma	$4x$,
a gyerekek lábainak száma	$2 \cdot (20 - x)$.

Ez az egyenlet írható fel:

$$\begin{aligned} 4x + 40 - 2x &= 64 \\ 2x + 40 &= 64 \qquad / - 40 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Vagyis 12 kiskecske és 8 gyerek volt a simogatóban.

Ellenőrzés:

12 kecskének 48, 8 gyereknek 16 lába van. Ez összesen valóban 64 láb.

Második megoldás

Megoldás következtetéssel:

Ha 20 gyerek lenne bent, akkor 40 lábat számolhatnánk össze. Ha egy-egy gyereket kicserélünk kecskére, akkor a lábak száma 2-vel nő, a fejek száma nem változik. Ha 12 gyerek helyére bemegy 12 kecske, akkor a lábak száma 24-gyel nő, azaz éppen 64 lesz.

Feladatok

1. Gondoltam egy kétjegyű számra. A tízszeresét vettem, a kapott számhoz 8-at adtam. A kapott szám első és utolsó jegyét felcseréltem, majd ennek vettem a felét. Így 421-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

2. Gondoltam egy kétjegyű számra. Felcseréltem a számjegyeit, a kapott számhoz 4-et adtam, majd ennek tizedét vettem. A kapott számhoz 4,3-et adtam, így 10-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

3. Egy kosárból kivettünk három darab almát, azután a maradék harmadrészét, majd újból három almát, és ekkor az almáknak már csak a fele maradt a kosárban. Hány alma volt eredetileg a kosárban?

4. Egy 16. századi hadihajónak összesen 80 ágyúja volt. Az alsó fedélzeten 4-gyel több ágyú volt, mint a középsőn. A legfelső szinten pedig 8-cal kevesebb volt, mint a középsőn. Hány ágyú volt a három fedélzeten külön-külön?



A 16. századi Golden Hind angol hajó modellje

5. Ady Endre 17 évvel volt idősebb Boncza Bertánál (Csinszkánál). Házasságkötésük évében életkoruk összege 59 év volt. Hány évesen kötöttek házasságot egymással?

6. Egy étterem átépítése során az egyik téglalap alakú helyiség rövidebbik oldalát 3 m-rel meghosszabbították. Így abból egy négyzet alakú termet kaptak, amelynek a területe 24 m^2-rel lett nagyobb, mint az eredeti teremé volt. Mekkorák voltak az eredeti méretek?

7. Egy 12 évfolyamos általános iskolában összesen 1398 tanuló van. Minden évfolyamon 5-tel kevesebben vannak, mint az eggyel alacsonyabb évfolyamon, így a 8. évfolyam a legkisebb létszámú. Hány tanuló van az iskola egyes évfolyamain?

8. Egy húrtrapéz egyik szöge a másik 4-szeresénél 5 fokkal nagyobb. Hány fokosak a húrtrapéz szögei?

9. Egy lovardában téglalap alakú karámokban szakképzett oktatók segítségével ismerkedhetnek meg a jelentkezők a lovaglás rejtelmeivel. A karám szélességének 5-szöröse éppen akkora, mint a hosszúságának a kétszerese. A bekerítéséhez 112 m kerítés kellene.
Mekkora területű a karám?



10. *a)* James Cook (ejtsd: dzséjmz kuk; 1728–1779) kapitány négy híres hajója közül az Adventure (advencsör) és a Discovery (diszkavöri) teherbírása összesen 630 t volt. Az Adventure teherbírása 1,1-szerese volt a Discoveryének.

Mennyi volt külön-külön a két hajó teherbírása?

b) 1902-ben építették a németek a Preussen (ejtsd: preuszen) nevű hajót, amely a 20. század legnagyobb vitorlás hajója volt. 8000 t teherbírású, 120 méter hosszú, kötélzetének összhosszúsága 42 km és összesen 47 vitorla repítette.

Hányszorosa volt a Preussen teherbírása a Discoveryének?



A Preussen modellje



A Royal Clipper

c) 2013-ban a világ a legnagyobb vitorlás hajója a Royal Clipper (rojöl klipör) volt. A Preussen és a Royal Clipper hosszúságának aránya 60 : 67. Melyik állítás igaz?

A) A Royal Clipper a hosszabb hajó.

B) A két hajó hosszának a különbsége 14 méter.

C) A Royal Clipper hosszának közel 90%-a a Preussen hossza.

@ Nézz utána, mit jelent a négy hajó neve magyarul!

11. Egy vonószenekarban az elsőhegedűsök, a másodhegedűsök, a mélyhegedűsök, a csellisták és a bőgősök számának aránya 10 : 6 : 5 : 4 : 3, a megadott sorrendben. Összesen 56 vonós játszik. Hányan játszanak az egyes hangszereken?

12. Kétfajta díszhalból összesen 20-at vásároltunk. Hányat vettünk az egyes fajtákból, ha az algaevők darabja 350 Ft, a neonhalaké 240 Ft, és 6230 Ft-ot fizettünk értük?

13. Egy járműbontó műhelyben autókat és motorkerékpárokat szerelnek szét. A műhelyben 8-cal több motorkormányt számoltunk meg, mint autókormányt. Összesen 64 kerekük volt a szétszerelt járműveknek. Hány autó és hány motor volt a műhelyben?

14. Louis Blériot (lui blerjo) 1909-ben átrepülte a La Manche (la mans) csatornát, 28 perc alatt, 85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A felső fotón az ő gépének másolata látható.

2013-ban sikeresen leszállt New Yorkban a Solar Impulse (ejtsd: szolar impalsz) nevű, a világon elsőként kizárólag napenergiát használó gép, miután átrepülte az Egyesült Államokat a nyugati parttól a keletiig. A teljes út 105 órát és 41 percet vett igénybe, a gép átlagos sebessége 53 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.





A Solar Impulse

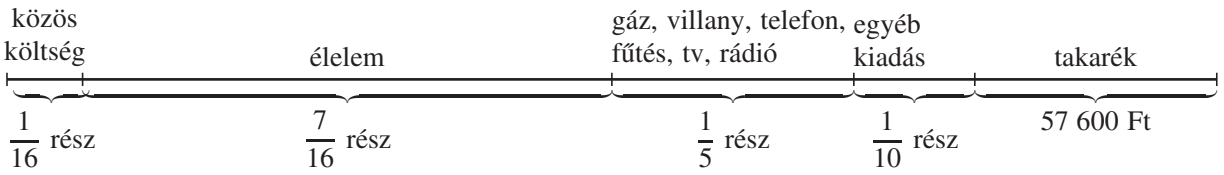
a) Mennyi idő alatt repülné át a La Manche csatornát a Solar Impulse?

b) 2010-ben röppent fel a hír, hogy a világ leggyorsabb utasszállító repülőjének építését kezdte el a NASA (ejtsd: náza). A gép utazósebessége a tervek szerint a hangsebesség ötszöröse lesz, és a jelenleg 21 órás New York-Sydney utat két és fél óra alatt teszi majd meg. Mennyi idő alatt tudná átrepülni a La Manche csatornát ez a gép? New York és Sydney távolsága légvonalban 15 988 km. Először becsüld meg, azután zsebszámológéppel számítsd is ki!

A) közel 1 perc *B)* közel fél perc *C)* közel 20 másodperc

@ Milyen szervezet nevének rövidítése a NASA?

15. Kovácsék egyhavi költségvetését így ábrázolhatjuk:



a) Mennyi a Kovács család havi jövedelme?

b) Jövedelmük mekkora részét tették takarékba?

c) Hány forintot fizettek be a társasház közös költségébe?

d) Mennyit költöttek élelemre?

16. Egy hátizsák, egy pár edzőcipő és egy mobiltelefon összesen 43 000 Ft-ba került. Az edzőcipő 2000 Ft híján 2-szer annyiba került, mint a hátizsák. A telefon a cipő árának 2,5-szerese. Mennyibe került külön-külön a cipő, a hátizsák és a telefon?

17. A mesebeli róka a következő egyezséget kötötte egy legénnyel: ahányszor átmegy a hídon, a róka mindannyiszor megkétszerezi a pénzét, és ebből a megkétszerezett pénzből kell a legénynek 24 krajcár vámot fizetnie. Amikor harmadszor ment át a hídon a legény, miután kifizette a vámot, a legnagyobb meglepetésére egy krajcárja sem maradt. Mennyi lehetett a legény pénze, amikor megkötötte az egyezséget a rókával?

18. A nagypapa kétszer olyan idős, mint Béla nevű fia. Béla 2 évvel idősebb, mint Cirill nevű testvére. Cirill 4 évvel idősebb Dánielnél, az öccsénél. Béla ötször olyan idős, mint Elek nevű fia. Cirill éveinek száma kétszer annyi, mint Flóriáné. Dániel 12-szer annyi idős, mint Gergely. A hét ember életkora összesen 164 év. Mennyi idősek külön-külön?



19. Egy 130 m hosszú tehervonat óránként átlagosan 42 km-t tesz meg. Hány perc telik el, amíg egy 220 m hosszú alagúton áthalad a teljes vonat?

Tudáspróba

1. Milyen hosszú a gyertya, ha az égési idő

a) 15 perc, *b)* $\frac{3}{4}$ óra, *c)* 40 perc, *d)* 1,4 óra?

Ezzel a képlettel számolj! $h = 30 - 4t$, ahol h a gyertya magassága cm-ben mérve, t az égés ideje órában mérve.

2. Melyik összeg? Melyik szorzat? Melyik hatvány?

a) $x - 3y$ *b)* $(3 - x) \cdot 5$ *c)* $4x - (x - 5)$ *d)* $a \cdot b \cdot c + 4$

e) $(x + 1)^2$ *f)* $-\frac{1}{2} \cdot x \cdot y^2$ *g)* $\frac{-3 \cdot a^2}{5}$

3. Írd fel algebrai kifejezésekkel a mondatokat!

a) Egy négyzet kerülete x cm. Mekkora egy oldala?

b) Zolinak b Ft-ja van a bankkártyáján, ennek 3-szorosát készpénzben tartja az otthoni íróasztal fiókjában. Hány forintja van Zolinak?

c) Egy téglalap kerülete 78 cm. Az egyik oldala a cm. Mekkora a másik?

d) Egy háromszög egyik szöge 72°, a másik α fok. Hány fokos a harmadik szög?

4. Egy vegyész 5 gramm vegyszert helyez egy lombikba, majd olyan kémiai reakciót indít el, amelynek során percenként 0,01 grammal csökken a lombikba helyezett vegyszer mennyisége. Melyik egyenlet írja le helyesen az eltelt idő (t) és a lombikban lévő vegyszer mennyisége (m) közötti összefüggést, ahol az idő percben, a vegyszer mennyisége pedig grammban van megadva?

A) $m = 5{,}01 \cdot t$ *B)* $m = 4{,}99 \cdot t$ *C)* $m = 5 - 0{,}01 \cdot t$ *D)* $m = 0{,}01 \cdot t - 5$

5. Az egynemű tagok összevonásával írd egyszerűbb alakba az algebrai kifejezéseket! Az ismeretlenek megadott értékére számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $a + 2 \cdot a + b - 2 \cdot b$ $\qquad a = \frac{2}{3},\ b = -1$

b) $2 \cdot x + \frac{3}{4} \cdot y + 1{,}3 \cdot x - 0{,}25 \cdot y$ $\qquad x = -1,\ y = 10$

6. Melyik **nem** adja ugyanakkora részét az x-nek, mint a?

a	x-nek a $\frac{3}{4}$-szerese	*b*	x-nek a 75%-a	*c*	$\frac{x}{4} \cdot 3$			
d	$x - 0{,}25x$	*e*	$x : \frac{3}{4}$	*f*	$\frac{3x}{4}$	*g*	$\frac{1{,}5}{2}x$	
h	$\frac{x}{75}$	*i*	$x - 0{,}25$	*j*	$0{,}75x$			

7. Oldd meg az egyenleteket és az egyenlőtlenségeket! Ellenőrizz!

a) $2x - 30 = 4x - 90$ $\qquad$ *b)* $10 - (10x - 14) = 2 \cdot (10 - x)$

c) $\frac{x}{4} + 4 = \frac{2}{3}x - 1$ $\qquad$ *d)* $-3x + 2 \geqq -4$

8. Oldd meg a szöveges feladatokat! Ellenőrizz! Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetők legyenek!

a) Gondoltam egy kétjegyű számra. Az 5-szörösét vettem, a kapott számból elvettem 4-et. Az így kapott szám első és utolsó számjegyét felcseréltem, majd a kapott számnak vettem a felét. Így a szám a 326 lett. Melyik számra gondoltam?

b) Az iskolai kosárlabdacsapat 56 pontot dobott az egyik mérkőzésén. Ezt az eredményt két- és hárompontos dobásokból érte el. A csapat összesen 25-ször dobott kosarat. Hány hárompontos találatot ért el a csapat?

c) Zoli és Feri részt vettek a „Fuss a nyárba!” szünidőköszöntő futóversenyen. 10 óráig Feri a táv $\frac{3}{4}$ részét, Zoli a $\frac{2}{3}$-át tette meg. A köztük lévő távolság ekkor 2 km volt.

A) Ki volt kettőjük közül közelebb a célhoz 10 órakor?

B) Hány km-t kell még Zolinak futnia, hogy beérjen a célba?

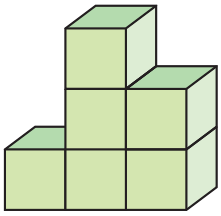
C) Hány km a teljes táv, amelyet le kell futniuk a versenyzőknek?

Hasábok, hengerek

Térbeli alakzatok megfigyelése

Egységkockákból különböző építményeket készítünk úgy, hogy a kockákat egy-egy lapjuknál összeragasztjuk. Az oszlopok folytonosan ki vannak töltve kockákkal. Az építmény alaprajzába írt számok az egymás fölött elhelyezett kockák számát jelentik.

Például ez az építmény 6 kockából készült:

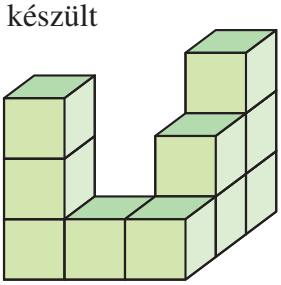




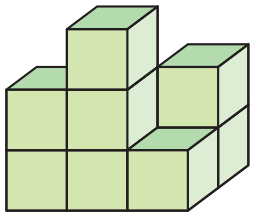
1. példa

Egységkockákból készített építményeket rajzoltunk. Készítsük el az alaprajzaikat!

a) 10 kockából készült

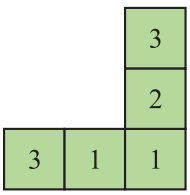


b) 8 kockából készült

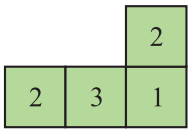


Megoldás

a)

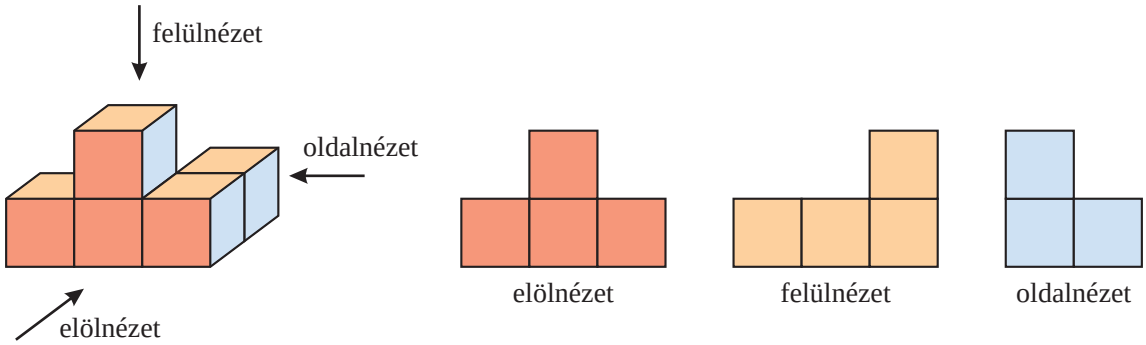


b)



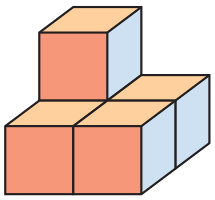
2. példa

Az egységkockákból készült építményeinket merőlegesen rávetítjük a piros, a sárga és a kék oldallapjaikkal párhuzamos síkokra. Az így kapott síkidomok a test merőleges vetületei: a piros az elölnézet, a sárga a felülnézet a kék pedig az oldalnézet. Az oldalnézet – megállapodás szerint – a jobb oldali nézetet jelenti. (A vetületeket úgy is elképzelhetjük, hogy ezeket a síkidomokat látjuk, ha a testre a megadott irányokból merőlegesen ránézünk.)

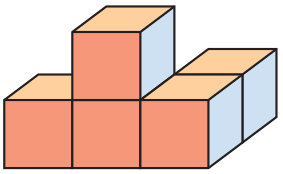


Rajzoljuk le az ábrán látható 5 egységkockából álló építmény elöl-, felül- és oldalnézetét!

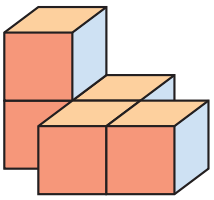
a)



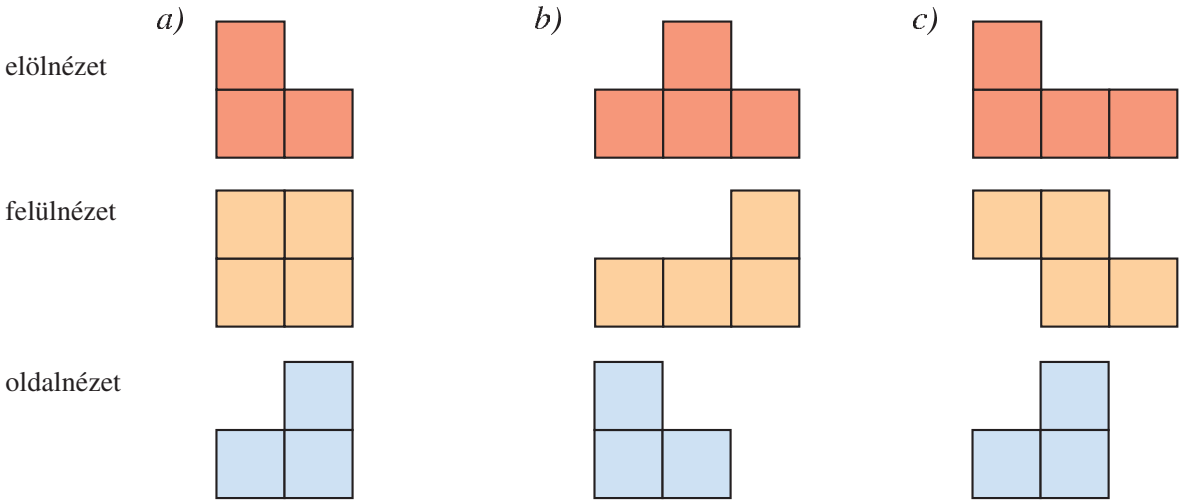
b)



c)



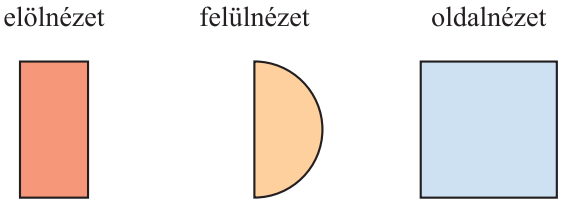
Megoldás



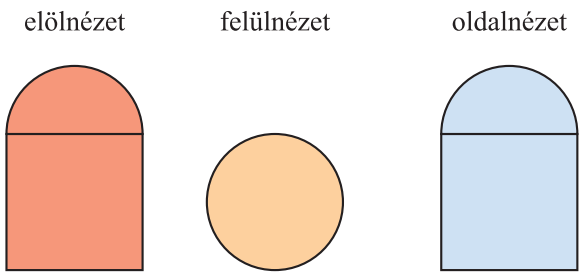
3. példa

Adjuk meg azokat a testeket, amelyeknek a három különböző nézete látható az ábrákon!

a)

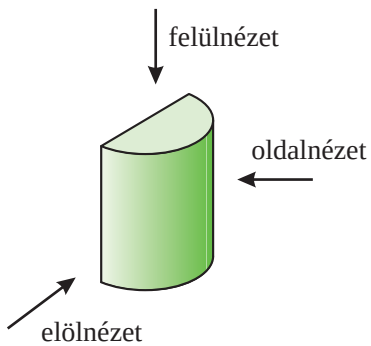


b)

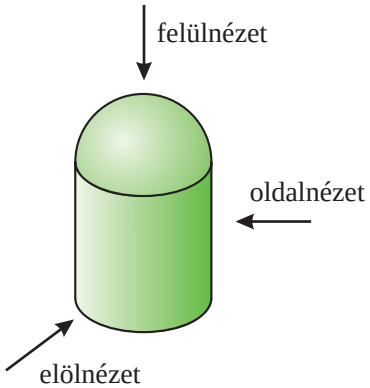


Megoldás

a) Egy félhenger.

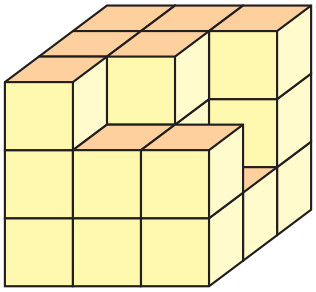


b) Egy henger, tetején egy félgömb.



4. példa

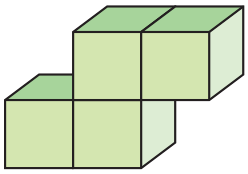
Az ábrán látható „hiányos kocka” 23 db egységkockából épült. Válasszuk ki, melyik 4 db kockából álló alakzattal kell kiegészíteni, hogy egy $3 \times 3 \times 3$-as kockát kapjunk?



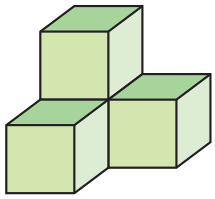
Páros munka

1. Készítsétek el az ábrán látható hiányos kockát és a négy egységkockás formákat!
2. Válasszátok ki a hiánypótló alakzatot!
3. Az alakzat helyére illesztésével ellenőrzzétek a választást!

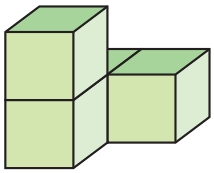
a)



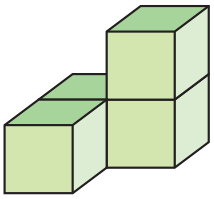
b)



c)

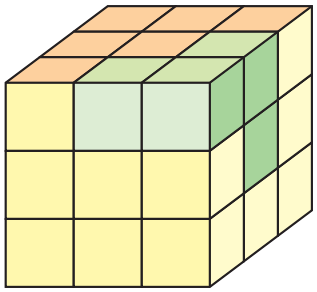


d)



Megoldás

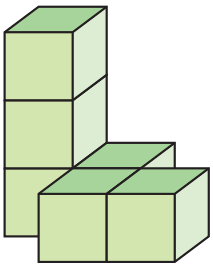
A *d)* alakzat a helyes.



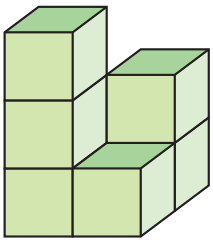
Feladatok

1. Add meg és számozd meg az alábbi építmények alaprajzait! Az A és a B 6 db, a C és a D 7 db egységkockából készült.

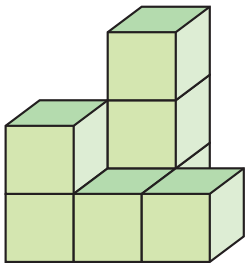
a)



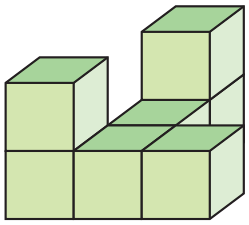
b)



c)



d)



2. Párban vagy csoportban dolgozzatok! Készítsétek el egységkockákból azokat az építményeket, amelyeknek alaprajzai szerepelnek az ábrákon!

a)

1	2	1
3	1	
2		

b)

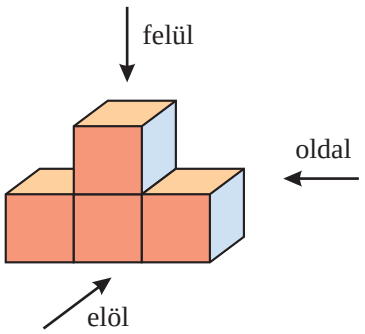
4	3	1	2
2	2	1	
1	3	3	

c)

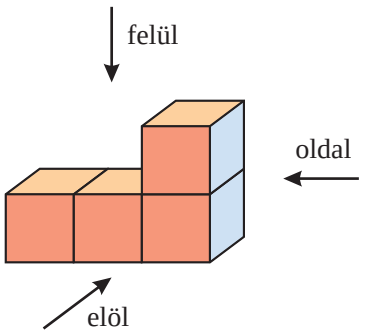
2	3	1
2	1	2
1	2	
1	2	

3. Rajzold le a következő ábrán látható építmények elölnézetét, felülnézetét és oldalnézetét! Az *a)* és a *b)* 4 db, a *c)* 8 db, a *d)* pedig 10 db kockából készült.

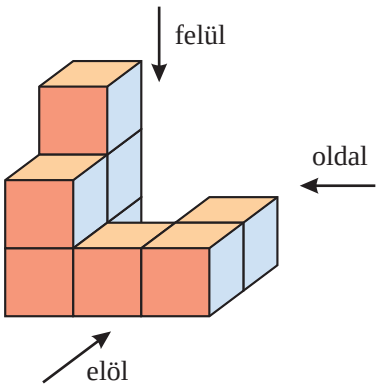
a)



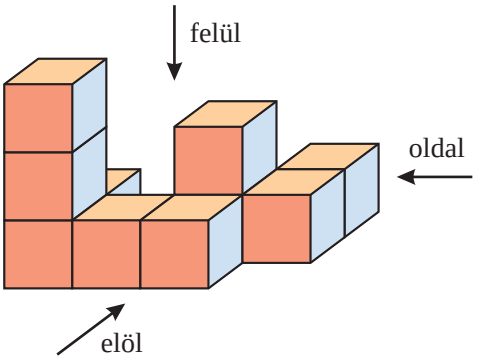
b)



c)

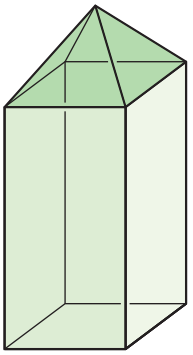


d)

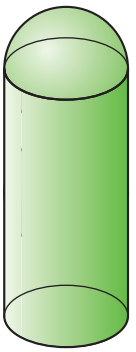


4. Rajzold le az alábbi testek három különböző nézetét!

a)

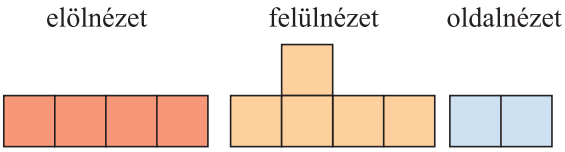


b)

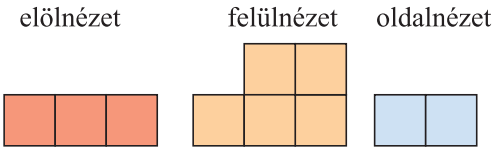


5. Rajzold le azokat az öt egységkockából épült alakzatokat, amelyeknek a három nézetét itt látod!

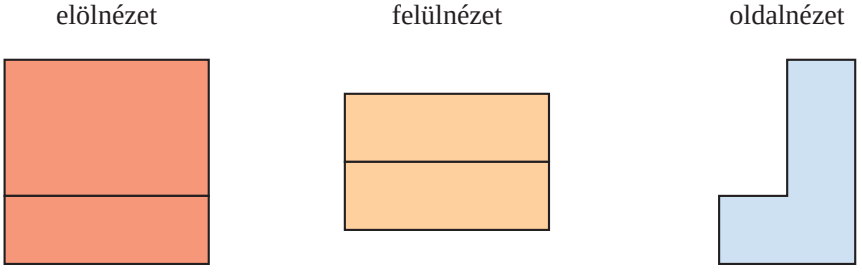
a)



b)

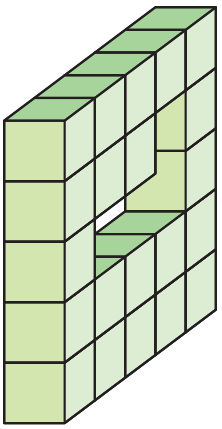


6. Rajzold le azt a testet, amelynek elölnézete, felülnézete és oldalnézete az ábrán látható!

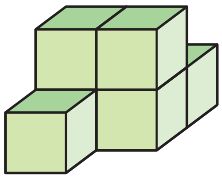


7. Párban vagy csoportban dolgozzatok! Egységkockákból egyrétegű „lyukas falat” építünk, majd szintén egységkockákból elkészítjuk az itt látható többi építményt is.

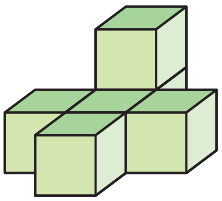
Válasszátok ki, hogy melyik építmények férnek át a „lyukon”! Az építmények tetszés szerint forgathatók.



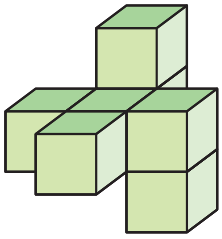
a)



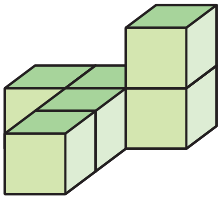
b)



c)

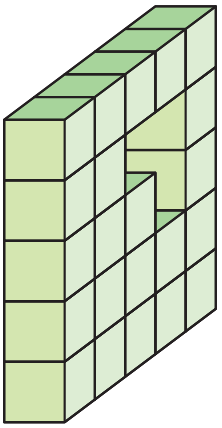


d)

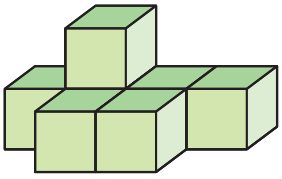


8. Párban vagy csoportban dolgozzatok! Egységkockákból egyrétegű „lyukas falat” építünk, majd szintén egységkockákból elkészítjuk az itt látható többi építményt is.

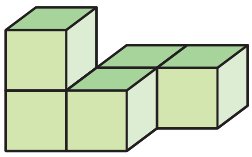
Válasszátok ki, hogy melyik építmények férnek át a „lyukon”! Az építmények tetszés szerint forgathatók.



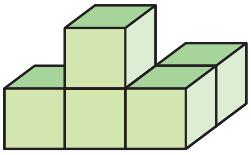
a)



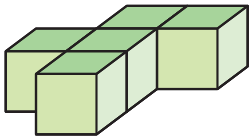
b)



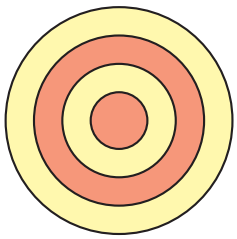
c)



d)

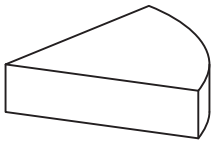


9.



Anna egy kerek tepsiben kétféle (sötét és világos) színű zseléből tortát készített. Az ábrán a torta felülnézeti rajza látható.

Anna felszeletelte a tortát. Rajzold le a füzetedbe, milyen mintájú lesz a tortaszelet oldala, ha Anna felvágja!



(Országos kompetenciamérés, 6. évfolyam 2008/2009 alapján)

10. Hány olyan derékszögű háromszög létezik, amelynek csúcsait egy adott kocka csúcsai közül választjuk? A kocka csúcsait jelöljék az A, B, C, D, E, F, G és H betűk!

Hasábok és hengerek

Az építészet, a technika, a mindennapi élet elképzelhetetlen hasáb és henger alakú testek, illetve tárgyak nélkül.



Perszepolisz város romjai (i. e. 500)



Siklós vára (13. század)



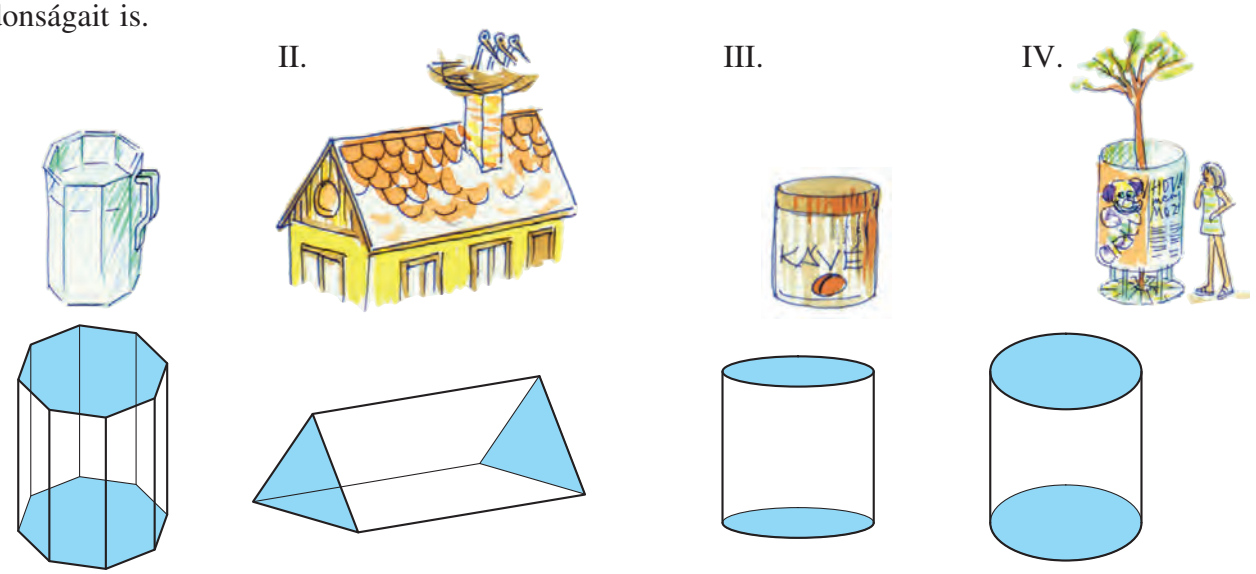
Neuschwansteini kastély (ejtsd: nojsvanstein, 19. század)



Kennedy Űrközpont (20. század)

Hétköznapi életünk, környezetünk tárgyainak tervezésénél, készítésénél ismerni kell azok geometriai tulajdonságait is.

I. II. III. IV.



Az első test alaplapja és fedőlapja egy-egy szabályos nyolcszög, a másodiké egy-egy háromszög. Az oldallapok mindkét esetben téglalapok. Ezek **hasábok.**

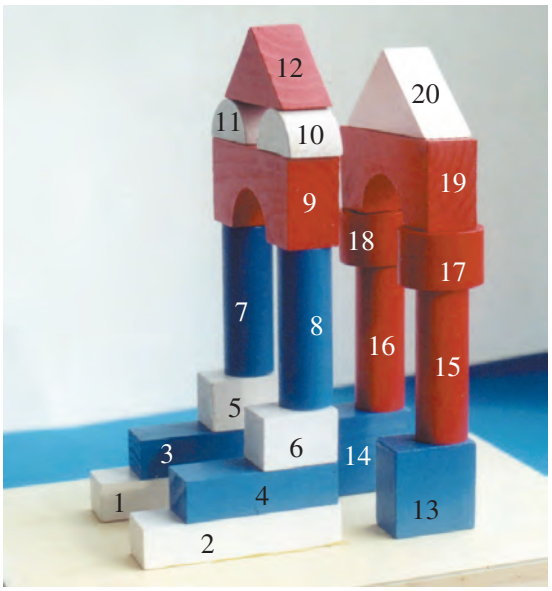
A harmadik test alap- és fedőlapja egy-egy ellipszis, a negyediké kör. Az oldallapok helyett a testet egy görbe felület határolja.

Ezek **hengerek.**

A hasábok jellemzése

1. példa

Játékkockákból építettük az ábrán látható várat. Válasszuk ki az elemek közül a hasábokat!

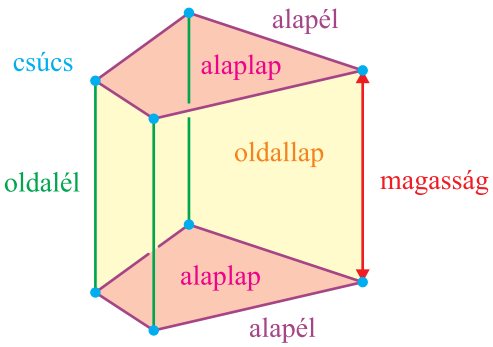


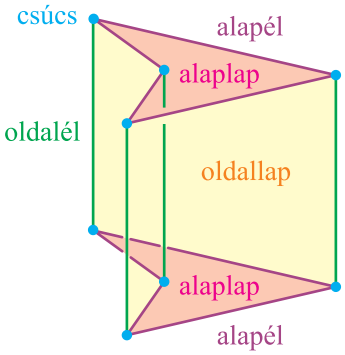
Megoldás

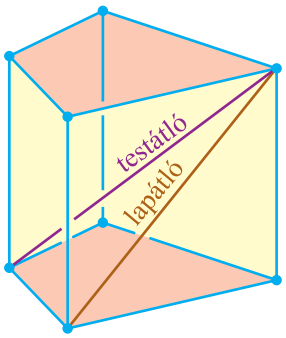
Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 20 sorszámú építőkockák hasábok, a többi egyéb mértani test.

Ötödik évfolyamon tanultuk, hogy a testet határoló síklapok a test **lapjai,** a síklapok találkozását **élnek,** az élek metszéspontját **csúcsnak** nevezzük.

Az ábrán négyszög alapú egyenes hasábokat látunk:







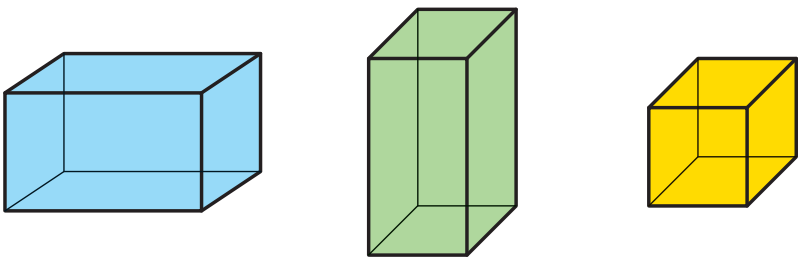
A hasáb alap- és fedőlapjai olyan **egybevágó sokszögek,** amelyek síkjai egymással párhuzamosak. Ezeket a sokszögeket, amelyek lehetnek háromszögek, négyszögek, ötszögek stb. egyszerűbben a hasáb **alaplapjai**nak hívjuk. Az alaplapok síkjának távolsága a test **magassága,** amely a mindkét síkra merőleges szakasz hosszával egyenlő. Ha a hasáb alaplapja konkáv sokszög, akkor a hasáb is konkáv.

A hasáb **oldallapjai** általában paralelogrammák, itt téglalapok, egy oldallap és egy alaplap az alapélben metszi egymást, míg az oldallapok metszésénél keletkeznek az **oldalélek.** Az élek találkozásánál kapjuk a hasáb **csúcsait.** Ha az oldalél merőleges az alaplap síkjára, akkor a test egyenes hasáb.

A nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszok a hasáb átlói. Az egy lap síkjában haladó átlók a hasáb **lapátlói,** a többi átló **testátló.**

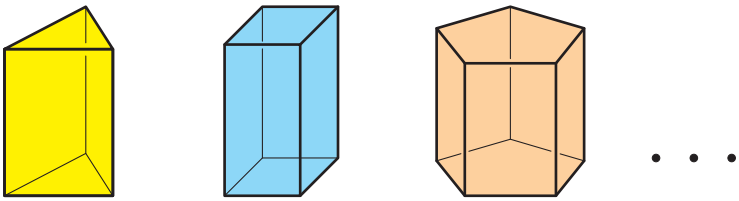
A téglalap alapú egyenes hasáb téglatest, speciális esetben négyzetes oszlop, illetve kocka.

A négyzetes oszlop és a kocka négyzet alapú egyenes hasábok.



2. példa

Számoljuk össze a hasábok csúcsait, éleit, lapjait!



Megoldás

A hasáb alaplapja	A csúcsok száma	Az élek száma	A lapok száma
Háromszög	$6 = 2 \cdot \mathbf{3}$	$9 = 3 \cdot \mathbf{3}$	$5 = \mathbf{3} + 2$
Négyszög	$8 = 2 \cdot \mathbf{4}$	$12 = 3 \cdot \mathbf{4}$	$6 = \mathbf{4} + 2$
Ötszög	$10 = 2 \cdot \mathbf{5}$	$15 = 3 \cdot \mathbf{5}$	$7 = \mathbf{5} + 2$
Hatszög	$12 = 2 \cdot \mathbf{6}$	$18 = 3 \cdot \mathbf{6}$	$8 = \mathbf{6} + 2$
Hétszög	$14 = 2 \cdot \mathbf{7}$	$21 = 3 \cdot \mathbf{7}$	$9 = \mathbf{7} + 2$

A táblázat kitöltését elvileg a végtelenségig folytathatnánk. Észrevehetjük, hogy ha az alapsokszög n oldalú ($n \geqq 3$), akkor

a csúcsok száma $2 \cdot n$, vagyis az alapsokszög oldalszámának kétszerese,

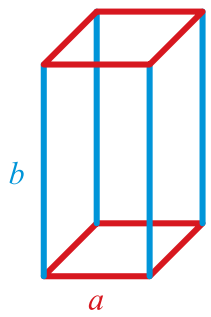
az élek száma $3 \cdot n$, vagyis az alapsokszög oldalszámának háromszorosa,

a lapok száma $n + 2$, vagyis az alapsokszög oldalszámánál 2-vel több.

Gyakran előfordul, hogy egy mértani test modelljét vékony drótból, vagy fonallal összefűzött szívószálakból készítjük el. Ilyenkor a test **élvázát** kapjuk meg.

3. példa

Különböző színű szívószálakból készítettük el a négyzetes oszlop élvázát. A kék színű élek összesen hányszor hosszabbak, mint a pirosak, ha tudjuk, hogy a test magassága az alapél háromszorosa?



Megoldás

Összesen 8 db, egyenként a hosszúságú piros él van, ezek hossza összesen $8 \cdot a$.

Az oldalél háromszorosa az alapélnek, ezért egy oldalélnek a hossza $3 \cdot a$.

A 4 db kék színű oldalél összhossza: $4 \cdot 3 \cdot a = 12 \cdot a$.

$$\frac{12 \cdot a}{8 \cdot a} = \frac{3}{2}$$

Tehát a kék színű élek összesen másfélszer hosszabbak, mint a pirosak.

Feladatok

1. Keress környezetedben olyan tárgyakat, amelyek

a) hasábok, *b)* nem hasábok!

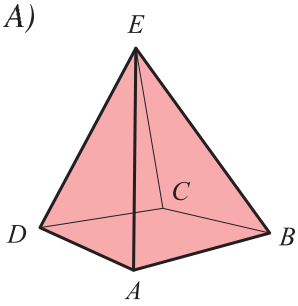
2. Az ábrán látható minden testen

a) add meg a csúcsok, lapok és élek számát;

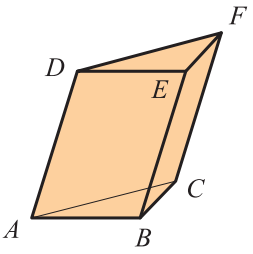
b) a csúcsok felsorolásával adj meg egy-egy alaplapot, illetve oldallapot;

c) a végpontok felsorolásával adj meg egy-egy lapátlót, illetve testátlót!

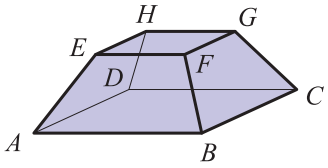
A)



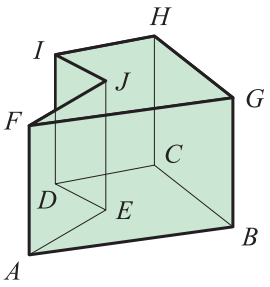
B)



C)



D)



3. Műanyag elemekből építettük az ábrán látható hasábokat. Hány elemet használtunk fel? Hány háromszöget és hány négyzetet használtunk fel?

Hány élük, lapjuk, csúcsuk van a testeknek?

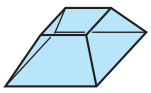




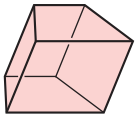


4. Válaszd ki az alábbi testek közül a hasábokat!

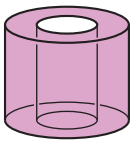
a)



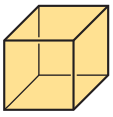
b)



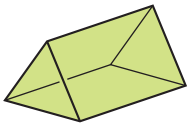
c)



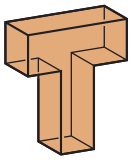
d)



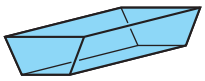
e)



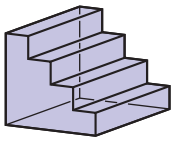
f)



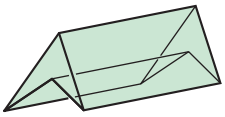
g)



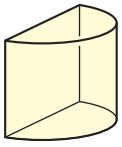
h)



i)



j)



5. Hány lapja, éle és csúcsa van egy konvex

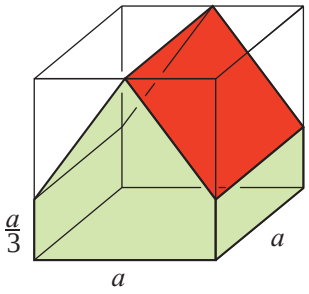
a) ötszög alapú, *b)* nyolcszög alapú, *c)* tízszög alapú hasábnak?

Hogyan változik az *a)*, *b)*, *c)* válasz, ha mindhárom hasáb konkáv?

6. Olyan szabályos sokszög alapú egyenes hasábok élvázas modelljeit készítjük el, amelyeknek a magasságuk is és alapélük is 4 cm. Hány cm drót szükséges a hasábhoz, ha alaplapja

a) háromszög, *b)* ötszög, *c)* hatszög?

7. Egy 6 cm élhosszú tömör kockából az ábrán látható módon levágunk két háromszög alapú hasábot. Milyen határoló lapjai lesznek az új testnek? Rajzold le a határoló lapokat!



8. Egy kocka élvázának hossza 12 cm. Hányszorosára változik a kocka éle, ha kétszer ilyen hosszú drótból készítjük el az élvázát? Igaz-e, hogy az élváz hossza és a kocka éle között egyenes arányosság van?

9. Milyen az a hasáb, amelynek

a) kétszer annyi éle van, mint lapja, *b)* 3-mal kevesebb lapja van, mint csúcsa,

c) 1,5-szer annyi éle van, mint csúcsa, *d)* háromszor annyi éle van, mint lapja?

10. Építs hasábokat egybevágó kis kockákból úgy, hogy a kockákat egy-egy teljes lapjukkal illeszd egymáshoz! Hányféle különböző hasábot kapsz

a) 2 db, *b)* 3 db, *c)* 4 db kis kockából?

Területmérés, a hasáb felszíne



Ha lakásunk falát ki akarjuk festeni, az egyes helyiségek méretei alapján ki kell számolnunk a befestendő falak összterületét.



Ha ruhát varratunk, az anyag megvásárlásához meg kell becsülnünk testünk azon részének területét, amelyre a ruha készül.

Ötödik évfolyamon különféle testek hálóját készítettük el, és megállapítottuk, hogy egy síkba kiteríthető testnek sokféle hálója létezik.

Akkor megtanultuk, hogy a téglatest felszíne egyenlő a határoló lapok területének összegével, és hogy a felszín mértékegységei megegyeznek a terület mértékegységeivel:

$$1\ \text{mm}^2 \underset{100}{<} 1\ \text{cm}^2 \underset{100}{<} 1\ \text{dm}^2 \underset{100}{<} 1\ \text{m}^2 \underset{100}{<} 1\ \text{ár(1 a)} \underset{100}{<} 1\ \text{hektár(1 ha)} \underset{100}{<} 1\ \text{km}^2$$

Ezek közül az ár és a hektár régi mértékegységek, a gyakorlatban földterületek mérésére használják azokat.

1. példa

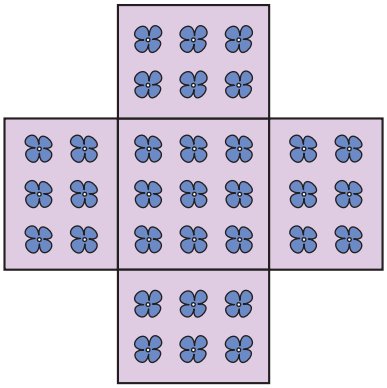
Julcsi egy felül nyitott, négyzet alapú egyenes hasáb alakú ékszeres dobozt készít nővérének. Mekkora méretű mintás kartonpapírra van szüksége legalább, ha a hasáb alapéle 4 cm, az oldaléle pedig 3 cm hosszú?



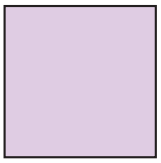
Megoldás

A felül nyitott doboz alaplapját és oldallapjait rajzoltuk le. A szükséges papírmennyiség meghatározásához ennek a hálónak a területét kell kiszámítani.

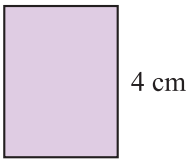
a doboz hálója



a doboz alaplapja



a doboz egy oldallapja



Az alaplap területe: $T_{\text{alaplap}} = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$

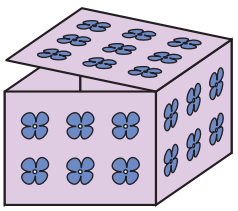
Az oldallapok területe: $4 \cdot T_{\text{oldallap}} = 4 \cdot (3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}) = 48\text{ cm}^2$

A háló területe összesen: $T_{\text{alaplap}} + 4 \cdot T_{\text{oldallap}} = 16\text{ cm}^2 + 48\text{ cm}^2 = 64\text{ cm}^2$

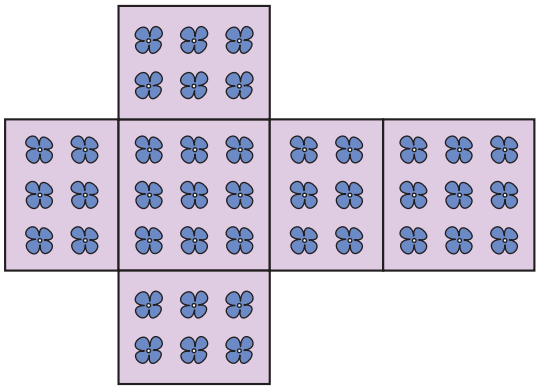
Az ékszeres dobozhoz legalább 64 cm^2 területű kartonpapírra van szüksége Julcsinak. A „ legalább” szó itt arra utal, hogy a ragasztáshoz szükséges fülek és a szabásnál adódó hulladék miatt ennél több papírt kell vásárolnia.

2. példa

Készítsünk most egy olyan négyszögletű dobozt az 1. példában megadott méretekkel, amelynek fedele is van. Mekkora területű papír kell ehhez?



Megoldás



A test hálóján láthatjuk, hogy a négy oldallap együtt egy olyan nagyobb téglalapot határoz meg, amelynek egyik oldala éppen a hasáb alaplapjának kerülete (K_{alaplap}), a másik oldala pedig a hasáb testmagassága (m_{test}).

Ezért az oldallapok területe:

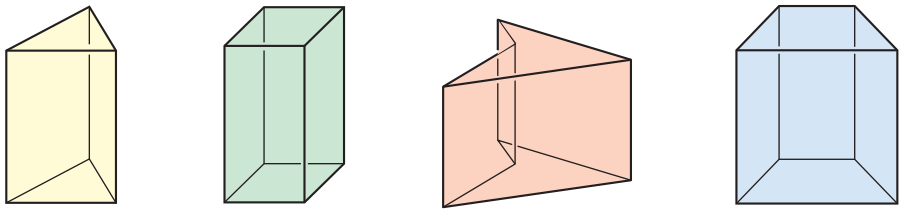
$T_{\text{oldallapok}} = K_{\text{alaplap}} \cdot m_{\text{test}} = 4 \cdot 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 48\text{ cm}^2$

Az alaplapok területe:

$T_{\text{alaplapok}} = 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 32\text{ cm}^2$

A dobozhoz tehát legalább $48\text{ cm}^2 + 32\text{ cm}^2 = 80\text{ cm}^2$ területű kartonpapír kell.

Általános esetben a sokszög alapú egyenes hasáb hálóját két egybevágó, n oldalú sokszög (alaplapok), és n darab téglalap (oldallapok) alkotja.



Egy sokszöglapokkal határolt test felszínét a határoló lapok területének összege adja. A felszín jele A, a latin area (terület) szó kezdőbetűje.

A hasáb felszíne: $A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + T_{\text{oldallapok}}$.

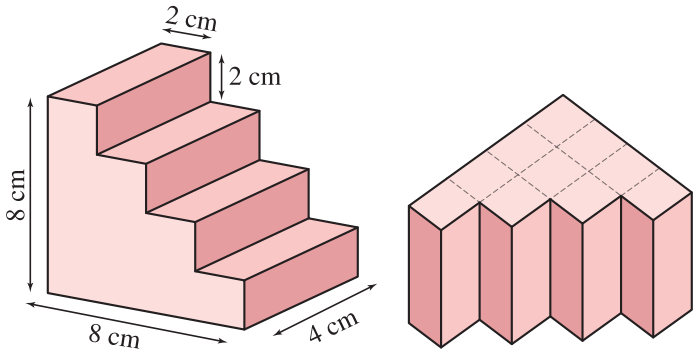
Az egyenes hasáb felszínét kiszámolhatjuk így is:

$$A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + K_{\text{alap}} \cdot m_{\text{test}},$$

ahol K_{alap} az alaplap kerülete, m_{test} a test magassága.

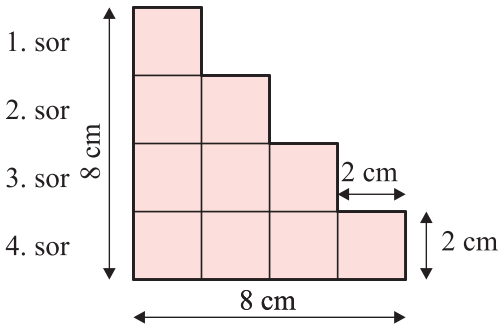
3. példa

Az ábrán egy vár makettjének a lépcsőjét rajzoltuk le. A makett minden határoló lapját ezüst színű papírral szeretnénk bevonni. Elég lesz-e ehhez egy 8 cm széles és 35 cm hosszú téglalap alakú papírlap?



Megoldás

A szükséges papír nagyságát a test felszínének meghatározásával kapjuk meg.



A lépcsőt az egyik oldalára állítva egyenes hasábot kapunk. A hasáb alaplapja 10 db egybevágó kis négyzetből áll, oldallapjai pedig téglalapok.

Az alaplap területét (T_a) a 2 cm oldalú kis négyzetek területének segítségével határozzuk meg.

Az első sorban 1 db ilyen négyzet van, ennek területe 4 cm^2, a további sorokban mindig eggyel több, így a területek összege:

$T_a = (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 4 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$.

A két alaplap területe együtt $2T_a = 80 \text{ cm}^2$

Az oldallapok együttes területét a $K_a \cdot m$ segítségével számolhatjuk, mivel lépcsőnk egyenes hasáb. Az alaplap kerülete: $K_a = 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \cdot 2 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$, a test magassága 4 cm.

Az oldallapok együttes területe: $K_a = 32 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 128 \text{ cm}^2$.

A hasáb felszíne $A = 80 \text{ cm}^2 + 128 \text{ cm}^2 = 208 \text{ cm}^2$.

A rendelkezésre álló papír területe: $t = 8 \text{ cm} \cdot 35 \text{ cm} = 280 \text{ cm}^2$.

Tehát elég lesz a lépcső bevonásához.

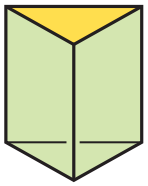
4. példa

Készítsük el annak a háromszög alapú egyenes hasábnak a hálóját, amelynek minden éle egyenlő. Vizsgáljuk meg, hogy a határoló lapok teljes oldalukkal való egymáshoz illesztésével kapott sokszögekből mely esetekben lehet hasábot hajtogatni!

Rakjunk ki a határoló lapokból olyan sokszögeket is, amelyek nem hálói a megadott hasábnak!

Páros munka

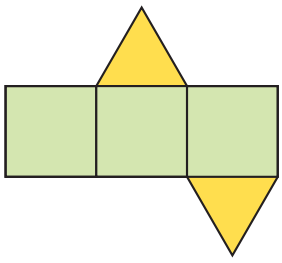
1. A kivágott lapokból készítsetek különféle sokszögeket!
2. Hajtogassatok hasábot az összeállított sokszögekből!
3. Állapítsátok meg, melyikből lehet, melyikből nem lehet hasábot készíteni!



Megoldás

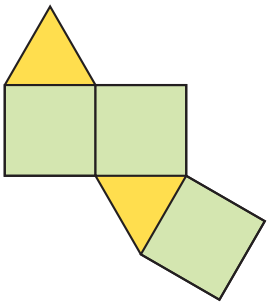
A hasábnak három négyzet és két szabályos háromszög alakú határoló lapja van. A hálók különböző típusai:

a)



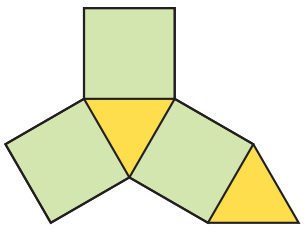
vagy

b)



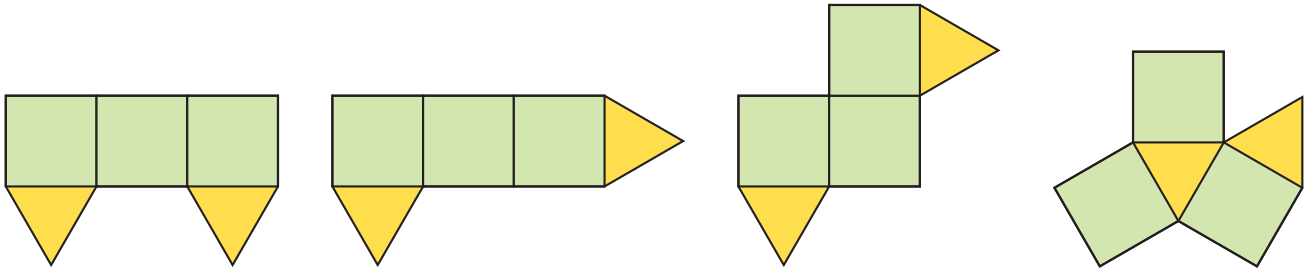
vagy

c)



A háromszögek elhelyezésétől függően mindegyik típusnál többféle háló készíthető.

Nem lehet hasábot hajtogatni például az alábbi sokszögekből.



Feladatok

1. Számítsd ki a kocka felszínét, ha éle

a) 6 cm, *b)* 3,2 dm, *c)* 0,7 m!

2. Számítsd ki a négyzet alapú egyenes hasáb felszínét, ha

a) alapéle: 8 cm, magassága 12,5 cm; *b)* alapéle 5,1 cm, magassága 0,6 dm!

3. Számítsd ki a téglatest felszínét, ha

a) alapélei: 32 cm; 14,6 cm, magassága 25 cm

b) alapélei: 20,2 cm; 4,1 dm, magassága 105 mm!

4. Egy kocka felszíne 486 cm^2. Hány mm a kocka éle?

5. Hány m^2?

a) 1,08 cm^2 *b)* 0,6 km^2 *c)* $\frac{13}{4}$ ha *d)* $\frac{5}{2}$ dm^2

e) 1014 mm^2 *f)* $8\frac{1}{5}$ dm^2 *g)* 0,01 ha *h)* 0,01 km^2



André Kertész-emlékház (Szigetbecse)

6. Az alábbi mennyiségek közül melyik egyenlő 245,6 dm^2-rel?

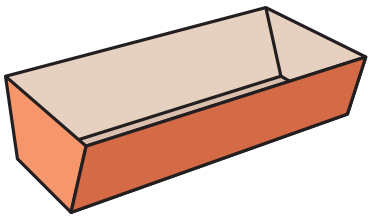
a) 24 560 cm^2 *b)* 24,56 m^2 *c)* 2,456 m^2

d) 0,2456 ha *e)* 245 600 mm^2 *f)* 2456 cm^2

g) 0,000 2456 ha *h)* 2 456 000 mm^2 *i)* 0,024 56 ha

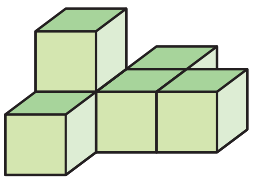
7. A tetőt tartó, 3 db fehér négyzetes oszlop alakú gerenda magassága 2,5 m, alapéle ennek 4%-a. Hány m^2 felületet kell a három oszlopon a festés előtt simára gyalulni?

8. Az ábrán látható süteménysütő forma egy húrtrapéz alapú egyenes hasáb. A trapéz alapélei 8 cm és 1,2 dm, szárai 5 cm hosszúak. A trapéz magasságát 4,6 cm-nek mértük. A hasáb testmagassága (esetünkben ez a sütőforma hossza) 3,5 dm. Mekkora területű lemezt használtak el a készítésekor?

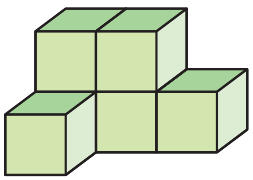


9. Számítsd ki a 6 kockából épült alakzatok felszínét, ha egy kis kocka éle 2 cm! Melyiknek a legnagyobb a felszíne?

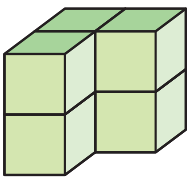
a)



b)



c)

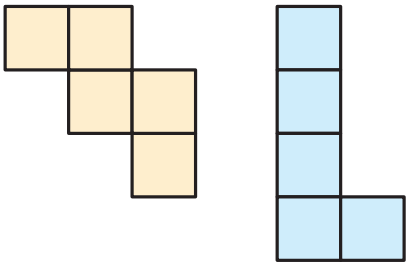


10. Egészítsd ki a hatodik négyzettel a hálózatokat úgy, hogy

a) azokból kockát lehessen építeni;

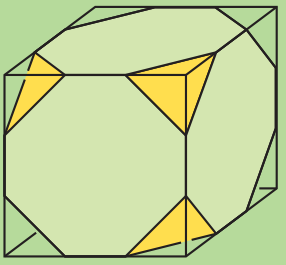
b) azokból ne lehessen kockát építeni!

Keress többféle megoldást!



11. Egy 9 cm élű tömör kocka éleinek harmadolópontjait megjelöljük. A kocka sarkait levágjuk a csúcsába összefutó éleinek a csúcshoz közelebbi harmadolópontjaira fektetett síkkal.

Milyen határolólapjai lesznek a megmaradt testnek? Rajzold le a hálóját! Igaz-e, hogy az új testet is szabályos sokszögek határolják?



12. Egy egység élű kockát minden lapjára tükrözünk. Az így kapott „térbeli kereszt” felszíne hányszorosa az eredeti kocka felszínének?

Térfogatmérés, a hasáb térfogata

Mindennapi életünkben gyakran szükségünk van a térfogat fogalmára. Például a közüzemi számlákon a család víz- és gázfogyasztását m^3-ben, azaz térfogategységben adják meg.

FŐGÁZ

Földgáz elszámoló számla
1. sz. eredeti példány

Szolgáltató neve: FŐGÁZ Zrt.
Címe: 1081 Budapest, II. János Pál pápa tér 20.
Adószáma: 10897830-2-44

Vevő (fizető) azonosító: 1234567890
Vevő (fizető) neve: Gáz Géza
Vevő (fizető) címe: 1111 Budapest, Szikra u. 13/A

SZÁMLARÉSZLETEZŐ

Mérő gyártási száma	Elszámolási időszak	Induló mérőállás	Záró mérőállás	Fogyasztás (m^3)	Korrekciós tényező	Korrigált mennyiség (m^3)	Fűtőérték (MJ/m^3)	Hőmennyiség (MJ
917542235	2013. 03. 12–2013. 04. 11	2314	2360	46	0,9907	45,6	37,74	1721
Fogyasztás összesen:				**46**		**45,6**		**1721**

Tétel megnevezése	Elszámolt időszak	Mennyiség	Mérték-egység	Nettó egységár és mértékegysége	Nettó érték (Ft)	ÁFA (%)	Bruttó érték (Ft)
Földgázfogyasztás árkategóriák szerint: I. árkategória	2013. 03. 12–2013. 04. 11	1721	MJ	2,2560 Ft/MJ	3883	27	**4931**
Háztartási alapdíj	2013. 04. 01–2013. 04. 30	1	hó	766 Ft/hó	766	27	**973**
Fizetendő összeg összesen							**5904**

Ha a házunk előtt a munkások árkot ásnak, a kiásott föld mennyiségét is m^3-ben határozzák meg.



Ha nagymamával gyümölcsszörpöt teszünk el télire, meg kell becsülnünk, hogy hány 1 literes üvegbe fér bele a nagy fazékban felforralt gyümölcslé.

A személyautó jellemző adatai között szerepel, hogy a motor hány cm^3-es (ez a motor „lökettérfogatát” jelenti).

A gépkocsi fogyasztását pedig a 100 km út megtételéhez szükséges benzin térfogatával mérik.

Nézz utána, hogy az általad ismert márkájú személyautó mennyi benzint fogyaszt 100 km-es úton, ha azt optimális sebességgel üzemeltetik.

Ötödik évfolyamon megtanultuk a legegyszerűbb hasábok térfogatát, az űrmértékek és a hosszúságegységekből származó térfogategységek közötti kapcsolatot. A térfogat mérésénél az egység oldalú kocka térfogatát választottuk alapegységnek.

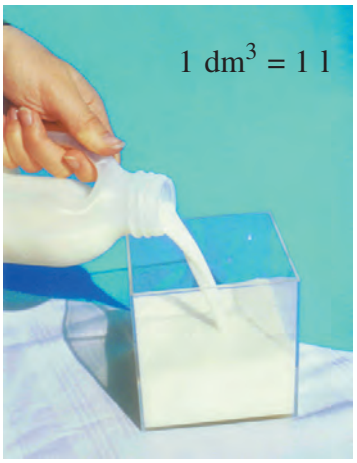
A térfogat mértékegységei: $1\ mm^3 \underset{1000}{<} 1\ cm^3 \underset{1000}{<} 1\ dm^3 \underset{1000}{<} 1\ m^3 \underset{1\,000\,000\,000}{<} 1\ km^3$

A térfogatot gyakran űrmértékkel mérjük, hiszen az is a test által elfoglalt térrész nagyságát méri.

$$1\ ml \underset{10}{<} 1\ cl \underset{10}{<} 1\ dl \underset{10}{<} 1\ l \underset{100}{<} 1\ hl$$

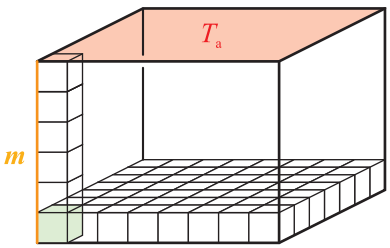
A hasáb térfogata

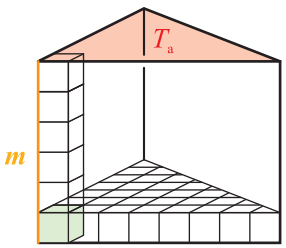


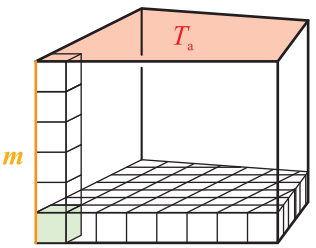




Az eddigiekből láthatjuk, hogy 1 cm^3 = 1 ml, és kiszámíthatjuk, hogy 1 m^3 = 10 hl.
Most meghatározzuk az egyenes hasáb térfogatát. Mértékegységnek az 1 cm^3-es egységkockát választjuk.







A hasábok alaplapjait 1 cm^3-es egységkockákkal rakjuk ki. Egy rétegben éppen annyi egységkocka fér el, mint amennyi az alaplap területének a mérőszáma (T_a db). Ez azt jelenti, hogy az egyrétegű hasáb térfogata T_a [cm^3]. Ha erre a magasság mérőszámának megfelelően m db ugyanilyen réteget rakunk, akkor a kis kockák kitöltik a hasáb teljes térfogatát. Tehát a hasáb térfogata: $T_a \cdot m$ [cm^3].

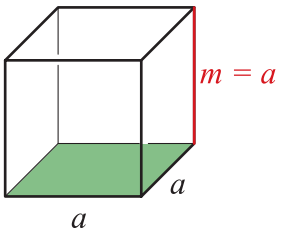
Megjegyzés: Előfordul, hogy a hézagmentes kirakás érdekében néhány egységkockát el kell vágni és a levágott részeket máshová kell helyezni. Így is érvényes az, hogy egy rétegben T_a db kis kocka van, és erre m db réteg kerül.

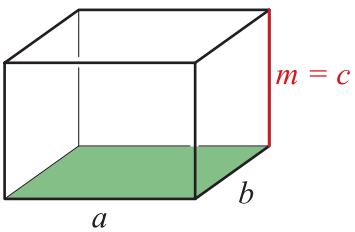
Az egyenes hasáb térfogata: $V = T_a \cdot m$, vagyis a hasáb térfogatát úgy kaphatjuk meg, hogy az alapsokszög területét szorozzuk a test magasságával.

Mivel a kocka és a téglatest is hasáb, ezért azok térfogatát is így számoljuk. A korábban tanult képlet is ugyanezt fejezi ki.

A kocka estében: $V = a \cdot a \cdot a$, és tudjuk, hogy bármelyik négyzet lapja lehet alaplap. Ennek területe $T_a = a \cdot a$, magassága (m) pedig ugyancsak a.

Tehát a fenti képletet így is írhatjuk: $V = T_a \cdot m$.

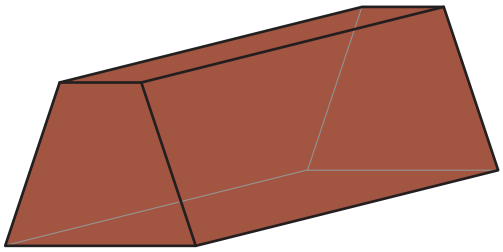




A téglatest estében: $V = a \cdot b \cdot c$, és tudjuk, hogy bármelyik téglalap lapja lehet alaplap. Ennek területe például $T_a = a \cdot b$, magassága (m) pedig c.

Tehát a fenti képletet így is írhatjuk: $V = T_a \cdot m$.

1. példa

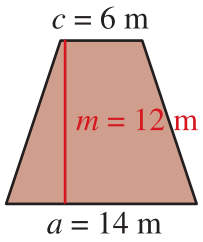


A 2000-ben dúló tiszai árvíz idején sok új, az eddigieknél magasabb gátat építettek. Egy ilyen gát keresztmetszete olyan húrtrapéz, amelynek magassága 12 m, fenti szélessége a (trapéz egyik alapja) 6 m, lenti szélessége (a trapéz másik alapja) 14 m. A gát hossza 6200 m.

Hány m^3 földre volt szükség a gát megépítéséhez?

Megoldás

A gát egy húrtrapéz alapú egyenes hasáb, amelynek testmagassága $m_t = 6200$ m.
A feladat szerint ennek a térfogatát kell meghatározni.



A trapéz területe: $T = (a + c) \cdot m : 2 = (14\text{ m} + 6\text{ m}) \cdot 12\text{ m} : 2 = 120\text{ m}^2$.

A hasáb térfogata: $V = T \cdot m_t = 120\text{ m}^2 \cdot 6200\text{ m} = 744\,000\text{ m}^3$.

A gát megépítéséhez 744 000 m^3 földre volt szükség.

2. példa

Gergőnek olyan téglatest alakú akváriuma van, amelynek:

hosszúsága 5 dm, szélessége 3 dm, magassága 4 dm.

Hány cm magasan áll benne 30 liter víz? Mennyit emelkedik a víz szintje, ha Gergő egy 7500 cm^3 térfogatú követ helyez az akváriumba, amelyet a víz teljesen ellep?



Megoldás

Az akvárium térfogata: $5\text{ dm} \cdot 3\text{ dm} \cdot 4\text{ dm} = 60\text{ dm}^3$,

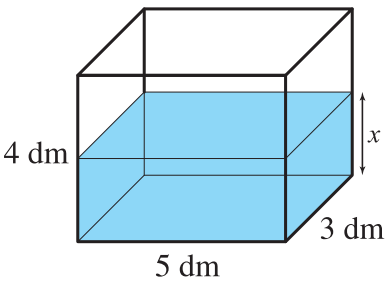
alapterülete: $5\text{ dm} \cdot 3\text{ dm} = 15\text{ dm}^2$.

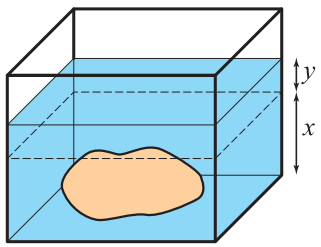
A víz térfogata egyenlő az akvárium alapterületének és a vízoszlop x magasságának szorzatával

$$30\text{ l} = 30\text{ dm}^3 = 15\text{ dm}^2 \cdot x,$$

innen $x = 2\text{ dm} = 20\text{ cm}$.

Tehát a víz 20 cm magasan áll az akváriumban.





A 7500 $cm^3 = 7{,}5\text{ dm}^3$ térfogatú kő az akváriumban ennyivel növeli meg a térfogatot, tehát az új térfogat 37,5 dm^3 lesz.

A víz magassága az előzőhöz hasonlóan $37{,}5\text{ dm}^3 = 15\text{ dm}^2 \cdot y$ egyenletből számolható ki. Innen $y = 2{,}5$ dm.

A víz magassága 25 cm lesz, tehát 5 cm-rel emelkedett.

Feladatok

1. Egy 7 cm alapélű, 38 cm magasságú négyzet alapú egyenes hasáb alakú vázába hány liter vizet tudunk önteni?

2. Számítsd ki a téglalap alapú egyenes hasábok térfogatát! Állapítsd meg, hogy melyik lehet közülük egy úszómedence és melyik egy osztályterem!

Határozd meg, hogy az úszómedencébe hány liter víz fér!

Hány liter oxigént tartalmazhat az osztályteremben lévő levegő?

a) $a = 50$ m $b = 18$ m $c = 4$ m *b)* $a = 9{,}5$ m $b = 52$ dm $c = 270$ cm

3. Az otthoni fürdőkád térfogatát egy hozzá méretekben közel álló téglatest térfogatával közelítjük. Mérd meg a fürdőkádad hosszát, szélességét és mélységét! Így, egy képzeletbeli téglatesttel közelítve határozd meg a fürdőkád térfogatát!

Ezután mérd meg egy esti fürdővized körülbelüli magasságát, és számítsd ki, hány hektoliter vizet használsz el egy esti fürdéskor!

4. Keress otthon olyan edényeket vagy egyéb használati tárgyakat, amelyek

a) 1 ml, *b)* 1 dl, *c)* 1 l, *d)* 10 hl űrmértékűek!

Minden esetben add meg a térfogatokat dm^3-ben is!

5. Hány dm^3?

a) 3,1 cm^3 *b)* 0,01 m^3 *c)* 12 l *d)* 5,3 dl

e) 13,7 mm^3 *f)* 14 cl *g)* 9,63 hl *h)* 3150 ml

6. Négy ugyanolyan egységkockából készítettük el az ábrán látható testeket.

a) Közülük melyek hasábok?

b) Melyek közülük konvex és melyek konkáv testek?

c) Mennyi a testek felszíne és térfogata?



7. Hány egységkockából építhetünk nagyobb méretű kockákat? Keresd meg az összes lehetőséget, ha legfeljebb 100 db kis kockánk van!

8. Hány dm^3 a kocka térfogata, ha egy lapjának területe

a) 25 m^2, *b)* 64 cm^2, *c)* $\frac{81}{25}$ dm^2?

9. Egy rendszeresen sportoló fiatalember tüdejének vitálkapacitása 7,2 l. Ez $\frac{3}{2}$ része egy átlagos férfi vitálkapacitásának. Hány m^3, illetve hány cm^3 egy sportoló és egy átlagember tüdejének vitálkapacitása?

Vitálkapacitás: egy erőltetett belégzés után erőltetett kilégzéssel kifújt levegő térfogata.

@ Nézz utána, hogy mennyi a nem sportoló felnőtt nők, illetve férfiak vitálkapacitása, és mennyi egy 13 éves gyermek vitálkapacitása!

10. Egy 40 cm, 25 cm és 15 cm élű téglatest alakú dobozt hézagmentesen meg kell tölteni 5 cm élű kockákkal. Hány ilyen kis kockára van szükségünk? Meg lehet-e tölteni ezt a dobozt ugyanígy 10 cm élű kis kockákkal? Válaszodat indokold!

11. Igazak-e az alábbi állítások? Válaszaidat indokold!

a) Egy hasáb minden határoló lapja paralelogramma.

b) Egy hasábnak mindig több csúcsa van mint lapja.

c) Nincs olyan kocka, amely térfogatának és felszínének mérőszáma egyenlő.

d) Ha egy testnek minden határoló lapja négyzet, akkor az kocka.

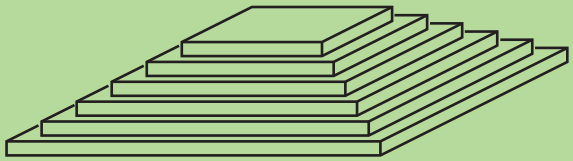
12.



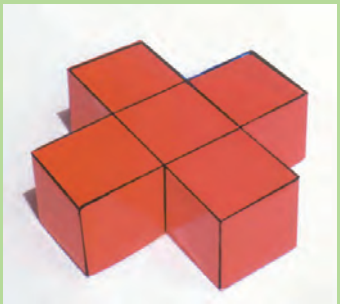
Dzsószer-piramis (Egyiptomi Óbirodalom)

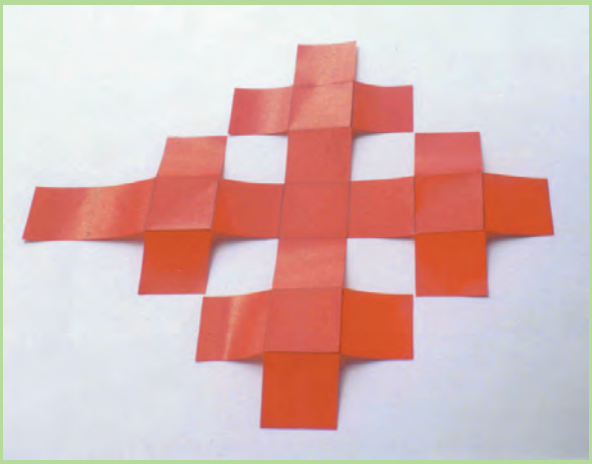
@ Gyűjts adatokat a Dzsószer-piramisról!

Egyenlő magasságú, négyzet alapú hasábokból készült az ábrán látható „lépcsős piramis” modellje. Egy „lépcső” magassága 0,3 m. A négy oldalon minden szint fél-fél méterrel beljebb épült, mint az alatta lévő. Mekkora az építmény térfogata, ha a legalsó alaplap oldala 8 m hosszú?



13. Az ábrán látható vörös keresztet a mellette látható hálózatból készítettük. Az így kapott konkáv tizenkétszög alapú egyenes hasáb minden éle 4 cm.





Számítsd ki a felszínét és a térfogatát!

A henger felszíne és térfogata

A henger felszíne



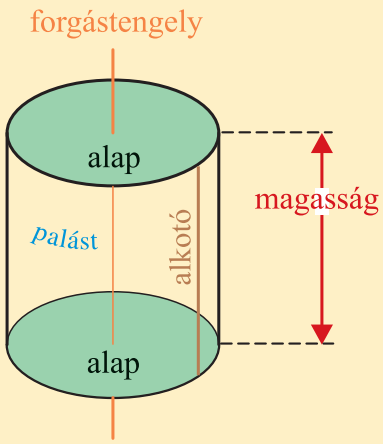




Kecskeház Dél-Afrikában

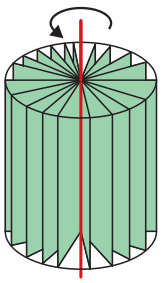
A képeken látható, hogy henger alakú tárgyak a körülöttünk lévő világban sok helyen előfordulnak.

Most megvizsgáljuk a hengerek geometriai tulajdonságait.



A hengernek nincsenek oldallapjai, ezért sem **éle** sem **csúcsa nincs.** Az „oldalát” borító felületet a henger **palástjának** nevezzük. A henger alaplapja és fedőlapja két egymással egybevágó síkidom, ezért azokat egyszerűbben a henger **alapjainak** nevezzük. Ha ez a síkidom kör, akkor **körhengert** kapunk. Az egyenes körhenger alapjainak középpontján áthaladó egyenes a körhenger **forgástengelye.**

A henger palástján megjelölt szakasz a henger **alkotója.** Az egyenes henger alkotója merőleges az alapok síkjára, ezért itt az alkotó hossza egyenlő a henger **magasságával.**

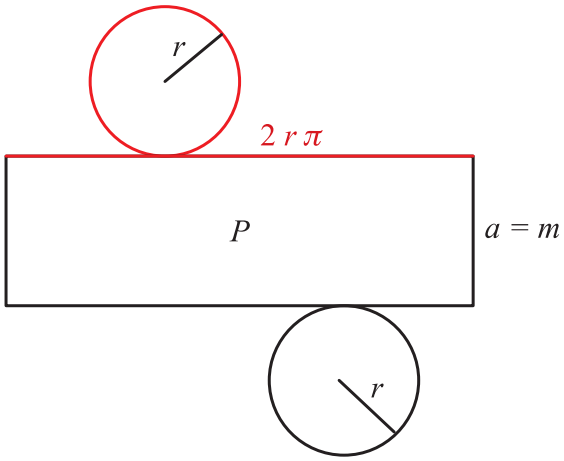


Egyenes körhengert úgy is elképzelhetünk, hogy egy téglalapot egyik oldalának egyenese körül megforgatunk. Ezért az egyenes körhengert másképpen **forgáshengernek** is nevezik.

A továbbiakban mi csak az egyenes körhengerrel foglalkozunk, ezért a „henger” szót ebben az értelemben fogjuk használjuk.

A **henger felszínének** meghatározásához állítsuk elő a henger hálóját! Ezért egy papírból készült hengert vágjunk el egyik alkotója és a körvonalak mentén!





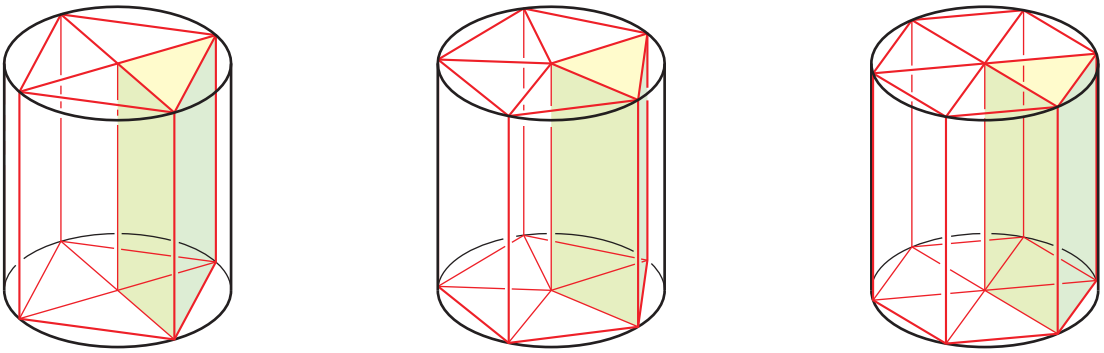
A háló két körből és a henger kiterített palástjából áll; ez utóbbi területét T_p-vel jelöljük. A kiterített palást egy olyan téglalap, amelynek egyik oldala éppen az alapkör kerülete, a másik oldala pedig a henger magassága. Korábban meghatároztuk az r sugarú kör kerületét: $K_{\text{kör}} = 2 \cdot r \cdot \pi$.

Így a kiterített palást területe: $T_p = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot m$. Az r sugarú kör területét ismerjük: $T_{\text{kör}} = r^2\pi$.

A háló területe adja a henger felszínét: $A = 2 \cdot T_{\text{kör}} + T_p = 2 \cdot r^2\pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot m = 2r\pi \cdot (r + m)$.

A henger térfogata

A henger térfogatának meghatározásához a hengerbe olyan szabályos sokszög alapú hasábot rajzolunk, amelynek alaplapja a henger alapkörének beírt sokszöge, magassága pedig egyenlő a henger magasságával. (A körbe írt sokszög minden csúcsa a körvonalon van.) A sokszög alapú hasábot azonos magasságú háromszög alapú hasábokkal rakjuk ki, például így:

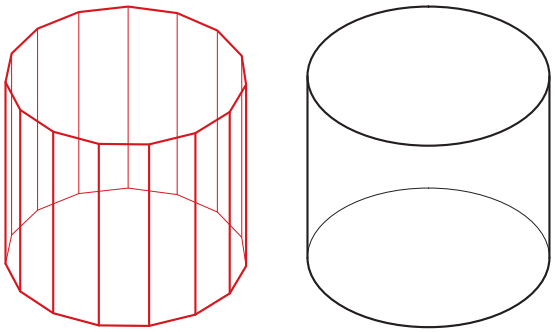


Növeljük a hasáb sokszög alapjának oldalszámát!

Ezen az ábrán egy 15 oldalú szabályos sokszög alapú egyenes hasábot és mellette egy körhengert látunk.

A hasáb és a henger ábrája alig különbözik egymástól, ezért, ha gondolatban tovább növeljük az alapsokszög oldalszámát, akkor a sokszög egyre jobban megközelíti a kört, ezzel együtt a hasáb a hengert.

Ennek alapján bizonyítható, hogy a T_a alapterületű és m magasságú henger térfogatát ugyanúgy a $V = T_a \cdot m$ képlet segítségével számolhatjuk ki, mint a hasábét.



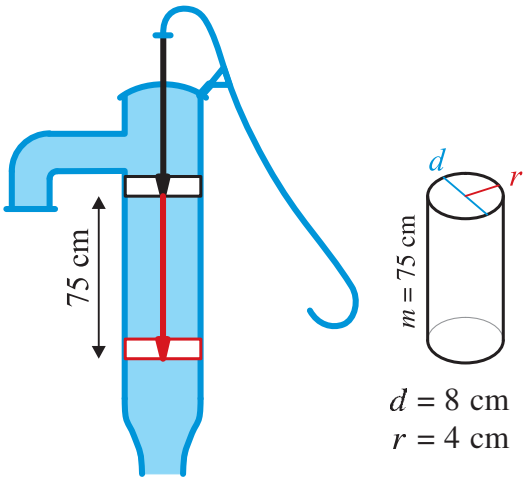
A **henger térfogata:** $V = r^2\pi \cdot m$.

1. példa

Az ábrán lerajzoltuk egy nyomókút keresztmetszetét. A dugattyú két szélső állása között a kút olyan henger alakú cső, amelynek magassága 75 cm, alapkörének átmérője pedig 8 cm.

Mekkora térfogatú vizet tudunk felszivattyúzni egy nyomással?

Hány nyomással telne meg egy 10 literes vödör?



$d = 8$ cm
$r = 4$ cm

Megoldás

A kút kiemelt részletének térfogata:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 4^2 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 75 \text{ cm} = 3769{,}9 \text{ cm}^3$.

Ez a vízmennyiség dm^3-re átváltva $3{,}77 \text{ dm}^3 = 3{,}77$ l.

Azaz 1 nyomással kb. 3,77 l vizet emelünk ki a kútból.

10 liter vizet $10 \text{ l} : 3{,}77 \text{ l} \approx 2{,}65$ nyomással nyerhetünk, azaz a kút karját háromszor kell lenyomni.

2. példa

Egy 8 mm átmérőjű és 16 cm hosszúságú henger alakú fából ugyanolyan hosszú hatszögletű ceruzát készítenek.

Hány százalék lesz a forgács?



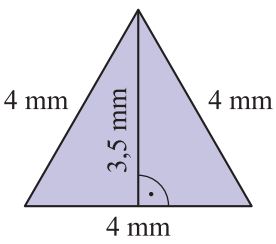
Megoldás

Kiszámítjuk a henger és a hasáb térfogatát. A kettő különbsége adja a hulladékot (a forgácsot).

A henger alaplapja egy 4 mm sugarú kör, magassága pedig 160 mm.

$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot m = 4^2 \text{ mm}^2 \cdot \pi \cdot 160 \text{ mm} \approx 8042{,}47 \text{ mm}^3$$

A hasáb térfogatát háromszög alapú hasábok térfogatának összegeként kapjuk meg. Az alaplap 6 db szabályos háromszögből áll. Így a hatszög alapú hasáb 6 db háromszög alapú hasábbal rakható ki.



A háromszög alapú hasáb alaplapja szabályos háromszög, amelynek területét az ábrán lévő adatokkal számítjuk ki:

$$T_{\text{háromszög}} = (4 \text{ mm} \cdot 3{,}5 \text{ mm}) : 2 = 7 \text{ mm}^2$$

Méréssel kapjuk meg a háromszög bejelölt magasságát; ez körülbelül 3,5 mm.

Egy háromszög alapú hasáb térfogata: $V_1 = 7 \text{ mm}^2 \cdot 160 \text{ mm} = 1120 \text{ mm}^3$

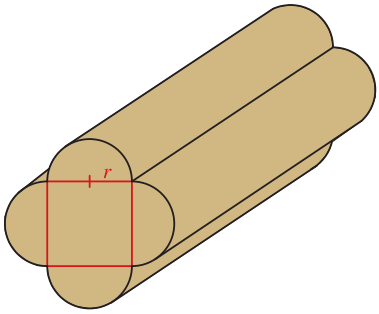
Hat háromszög alapú hasáb térfogata: $V_6 = 6 \cdot 1120 \text{ mm}^3 = 6720 \text{ mm}^3$

A hulladék: $8042{,}47 \text{ mm}^3 - 6720 \text{ mm}^3 \approx 1322{,}5 \text{ mm}^3$.

$1322{,}5 : 8042{,}47 = 0{,}1644$, tehát a hulladék 16,4%.

3. példa

A régészek az ásatási munkálatok során egy olyan oszlopdarabot találtak, amelynek geometriai modellje az ábrán látható.





Mekkora e tárgy térfogata, ha hossza 2,8 m, és a keresztmetszeten berajzolt négyzet egy oldala 42 cm?

Mekkora felületet kell lecsiszolni az oszlop restaurálásakor? (A *restaurálás* jelentése helyreállítás.)

Megoldás

Az oszlop egy négyzet alapú hasábból és négy „félhengerből” áll. A henger és a hasáb magassága 2,8 m = 280 cm, a kör sugara a négyzet oldalának a fele: 21 cm.

A hasáb térfogata:

$$V_1 = T_{\text{négyzet}} \cdot m = 42^2 \text{ cm}^2 \cdot 280 \text{ cm} = 493\,920 \text{ cm}^3 = 493{,}92 \text{ dm}^3.$$

A négy félhengerből pontosan két henger rakható össze, ezek térfogata:

$$2 \cdot V_2 = 2 \cdot T_{\text{kör}} \cdot m = 2 \cdot 21^2 \text{ cm}^2 \cdot \pi \cdot 280 \text{ cm} = 775\,847{,}72 \text{ cm}^3 \approx 775{,}85 \text{ dm}^3.$$

A teljes térfogat: $V = 493{,}92 \text{ dm}^3 + 775{,}85 \text{ dm}^3 = 1269{,}77 \text{ dm}^3 \approx 1{,}3\ m^3$.

A test felülete 2 db 42 cm oldalú négyzetből, 4 db 21 cm sugarú körből és a két henger palástjából áll.

A két négyzet területe: $2 \cdot T_{\text{négyzet}} = 2 \cdot 42^2 \text{ cm}^2 = 3528 \text{ cm}^2$

A négy kör területe: $4 \cdot T_{\text{kör}} = 4 \cdot 21^2 \text{ cm}^2 \cdot \pi \approx 5541{,}8 \text{ cm}^2$

A két hengerpalást: $2 \cdot P = 2 \cdot (2 \cdot 21 \text{ cm} \cdot \pi \cdot 280 \text{ cm}) = 73\,890{,}2 \text{ cm}^2$

A teljes felszín: $A = 3528 \text{ cm}^2 + 5541{,}8 \text{ cm}^2 + 73\,890{,}2 \text{ cm}^2 = 82\,960 \text{ cm}^2 \approx 8{,}3 \text{ m}^2$

Feladatok

1. Keress a környezetedben henger alakú tárgyakat! Válassz ki közülük egyet, mérd meg a szükséges adatokat, és számítsd ki a felszínét! (Az ábra segít a választásban.)

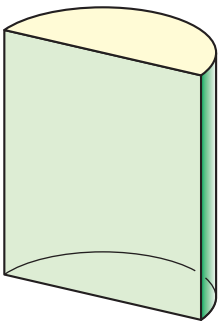
@ Keress az interneten érdekes, henger alakú épületeket!



2. Számítsd ki a körhenger felszínét és térfogatát! (r az alapkör sugara, d az alapkör átmérője, m a testmagasság, a az alkotó, k az alapkör kerülete.)

a) $r = 3$ cm; $m = 14$ cm
b) $d = 4{,}2$ cm; $m = 10$ mm
c) $r = 6{,}3$ dm, $m = 120$ cm
d) $d = 6{,}8$ m, $a = 14{,}5$ dm
e) $r = 34$ mm, $a = 5$ dm
f) $k = 18{,}8$ dm, $m = 45$ cm

3. Szerkeszd meg az ábrán látható félkör alapú henger hálóját! A félkör sugara 3 cm, magassága 8 cm.



4. Kata huzatot varr testvére körhenger alakú dobjára. A dob alapkörének kerülete 94,24 cm, a magassága 3,5 dm. Minimálisan hány m^2 anyagra van szüksége?

5. Pisti felül nyitott henger alakú papírdobozt készít a ceruzáinak. Az alapkör sugara 4,6 cm, magassága 11 cm.

Legalább hány dm^2 papírra lesz szüksége?

6. Mérd meg a henger alakú bögréd alapkörének átmérőjét és magasságát, és számítsd ki a térfogatát! Hány dl kakaó fér bele?

7. Nyári napon álló gumicsőben gyorsan felmelegszik a víz.

Hány liter forró víz van egy 2,5 cm átmérőjű, 15 m hosszú csőben?



8. 

Huba 18 literes, henger alakú zárt edényben tartja ugróegereit. Hány cm^3 oxigént tartalmaz az edény? Mekkora alapterületen szaladgálhatnak az egerek, ha a terrárium 30 cm magas?

9. A „félhenger” alakú süteménysütő forma teteje egy 33 cm hosszú és 10 cm széles téglalap.

Mekkora térfogatú sütemény fér bele?



10. 

A vitamintabletták henger alakú dobozának térfogata 98,96 cm^3, alapkörének átmérője 3 cm.

Hány db 0,6 cm magasságú tabletta fér bele, ha a henger magasságából a dugó 2 cm-t elfoglal?

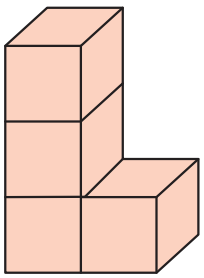
11. Egy 1,8 m magas, 32 cm alapkör átmérőjű, egyenes henger alakú farönkből 1,8 m magas maximális méretű egyenes hasáb alakú oszlopot készítünk.

Hányszor több hulladék keletkezik egy szabályos háromszög alapú oszlop esetén, mint egy szabályos hatszög alapúnál?

12. Egy henger alakú ételtermosz külső méretei: alapkörének átmérője 1,5 dm, magassága 21 cm. Mekkora a használható térfogata, ha belső falát alaplapjain is és a palástján is egyenletesen 1,5 cm-es hőszigetelő réteg burkolja? Körülbelül hány literes ez a termosz?

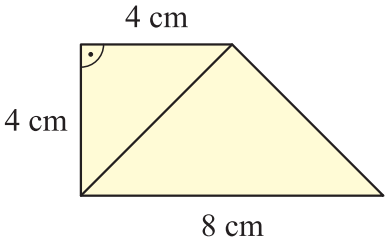
Tudáspróba

1. Hány átlója van összesen egy négyszög alapú konvex hasábnak? Hány ezek közül testátló és hány lapátló? Készíts rajzot!



2. Négy egységkockából építettük az ábrán látható testet. Milyen hasábot kaptunk? Hány csúcsa, éle és lapja van? Nevezd meg az alaplapjait, az oldallapjait, és rajzold le ezeket!

3.



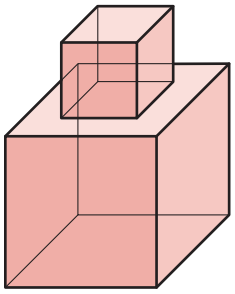
Az ábrán egy 10 cm magas egyenes hasáb alaplapját rajzoltuk fel. A berajzolt átlón áthaladva, az alaplapra merőleges síkkal két részre vágjuk a hasábot. Rajzold le, milyen lapok határolják a vágás után keletkezett két testet!

Számítsd ki az eredeti, és a két új hasáb térfogatát!

4. Milyen magas az a henger alakú lábas, amelynek födője 18 cm átmérőjű, és amelybe 4,5 l víz fér?

5. Egy 9 cm alapátmérőjű és 15 cm magas, henger alakú papírpoharat készítünk, majd kékre festjük. Rajzold le a pohár készítéséhez szükséges testhálót, és számítsd ki hány dm^2 a befestendő felület!

6. Egy 10 cm élű kocka tetejére az ábra szerint ráragasztunk egy 5 cm élű kockát. Számítsd ki összeragasztás előtt külön-külön a két kocka felszínét és térfogatát, majd a belőlük összeragasztott test felszínét és térfogatát! Mit tapasztalsz, hogyan változik a felszín és a térfogat?



Tartalom

ELŐSZÓ 3

TÖRD A FEJED! 4
Skatulyaelv 4
Halmazok 5
Kombinatorika 6
Logika 7
Vegyes feladatok 9

SZÁMOK ÉS MŰVELETEK 10
Milyen számokat ismerünk? 10
A számok különféle alakjai 12
Műveletek a racionális számok körében I. 16
Műveletek a racionális számok körében II. 20
Hatványozás 25
A tízes számrendszer helyiérték-táblázatának kibővítése (Kiegészítő tananyag) 29
A műveletek sorrendje 32
Tudáspróba 37

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK 38
Keresd a párját! 38
Mozgatások 40
A transzformációk egyenlősége 42
A transzformációk tulajdonságai 43
Középpontos tükrözés 46
A középpontos tükrözés tulajdonságai 51
Párhuzamos szárú szögek 54
Középpontosan szimmetrikus alakzatok 56
3, 4, ... különböző pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzatok 59
Paralelogrammákkal kapcsolatos szerkesztések 65
Szabályos sokszögek 69
Tudáspróba 72

ARÁNY, SZÁZALÉK 73
Az arány fogalma 73
Egyenes arányosság 77
Fordított arányosság 80
Vegyes feladatok 83
Arányos osztás 85

Százalékszámítás 87
Az arányosság és a százalékszámítás alkalmazásai 90
A hosszúság, a terület és a térfogat mértékegységei 94
Tudáspróba 98

HOZZÁRENDELÉSEK, ÖSSZEFÜGGÉSEK 99
Hozzárendelések 99
Hozzárendelések a geometriában 107
Összefüggések, képletek 110
Összefüggések a pontok koordinátái között 114
Tudáspróba 118

SZÁMELMÉLET 119
Oszthatóság 119
A sokatmondó utolsó számjegyek 124
Prímszámok (törzsszámok), összetett számok 130
A legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös 137
Tudáspróba 142

A SOKSZÖGEK ÉS A KÖR 143
A háromszögszerkesztések egyértelműsége 143
A háromszögek szögei és oldalai 147
A háromszögek nevezetes vonalai 150
A háromszögek nevezetes körei (Kiegészítő tananyag) 155
A sokszögek szögei 157
A sokszögek nevezetes vonalai, nevezetes körei 161
Trapéz szerkesztése háromszögszerkesztés alkalmazásával 165
A paralelogramma területe 168
A trapéz területe 170
A háromszög területe 173
A területszámítás alkalmazásai 176
A kör kerülete 178
A kör területe 181
Tudáspróba 182

ALGEBRA 183
A valóság megragadása a matematika nyelvén, képletekkel 183
A műveletek kapcsolatai, azonosságok 186
Algebrai kifejezések sokféle alakban, egynemű algebrai kifejezések, helyettesítési értékek kiszámítása 193
Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása lebontogatással, szöveges feladatok 200
Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel 207

Összetettebb egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel 213
Ismeretlenek kifejezése képletekből 217
Szöveges feladatok megoldása 220
Tudáspróba 225

HASÁBOK, HENGEREK 227
Térbeli alakzatok megfigyelése 227
Hasábok és hengerek 232
Területmérés, a hasáb felszíne 236
Térfogatmérés, a hasáb térfogata 241
A henger felszíne és térfogata 246
Tudáspróba 251