EGYSÉGES ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK I.



Konsept-H Könyvkiadó

Hortobágyi István – Marosvári Péter – Nagyné Pálmay Piroska –
Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András –
Vancsó Ödön – Windisch Klára

EGYSÉGES ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY

MATEMATIKA

MEGOLDÁSOK

I.

Konsept-H Könyvkiadó

A tankönyv engedélyszáma: TTI-39839-13/3-KT/20

Bírálók: dr. Korányi Erzsébet
dr. Megyesi László

Alkotószerkesztő: Környei László

© Hortobágyi István, Marosvári Péter, Nagyné Pálmay Piroska, Pálmay Lóránt, Pósfai Péter, Siposs András, Vancsó Ödön, Windisch Klára, Konsept-H Könyvkiadó

Minden jog fenntartva. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható és terjeszthető.

Konsept-H Kiadó
2081 Piliscsaba, Fő út 197.
Tel./fax: 06 26 373-367
E-mail: konsept@konsept.hu
Internet cím: www.konsept.hu

Felelős kiadó: Simon István
Tipográfiai terv: Biró Mária
Műszaki szerkesztő: Borbély Tamás
Számítógépes grafika: Borbély Tamás
Nyomás és kötés: Széchenyi Nyomda Kft., Győr
Felelős vezető: Nemere Zsolt ügyvezető igazgató
Terjedelem: 46,9 A/5 ív

BEVEZETÉS

Az új, kétszintű érettségi előkészítése keretében, a középszintű matematikavizsgára való felkészülést szolgáló feladatgyűjtemény megoldáskötetét tartja kezében az olvasó. Igyekeztünk olyan művet készíteni, melyet egyaránt haszonnal forgathat tanár és diák. Tekintettel arra a tartalmi megújulásra, melyet a Nemzeti alaptanterv, a kerettanterv, az érettségi vizsgakövetelmények előírnak, és amely tükröződik a feladatgyűjtemény összeállításán, valamennyi feladat megoldását elkészítettük. Ennek eredményeként három kötetet töltenek meg a megoldások.

A megoldások leírását változatos formában közöltük. Az egyszerűbb esetekben csak az alkalmazott képletre hivatkoztunk, máshol a részletszámításokat is leírtuk. Az újszerű feladatoknál igyekeztünk a felhasznált ismereteket bővebben közölni. Ahogy a feladatok között számottevően több szöveges, életközeli példát találhatunk, úgy a megoldások is gyakorlatiasabbak, több magyarázó szöveget tartalmaznak. Igyekeztünk a helyes egyensúlyt megtalálni az egzakt, formájában is precíz megoldásleírás, és a feladat tartalmából következő, a feltett kérdésre életszerűségében kielégítő választ adó megfogalmazás között. Minden esetben utaltunk az alkalmazható gondolatmenetre, hivatkoztunk a használható összefüggésekre, tételekre. Felhívjuk ugyanakkor a figyelmet arra, hogy a megoldások nincsenek valamennyi esetben olyan részletességgel kidolgozva, mint amilyet az érettségi vizsgán, illetve évközi dolgozatokban adott esetben megkövetelhetnek. (Például a mellékszámításoktól általában eltekintettünk.) A feladatgyűjteményben megjelenő számos újszerű feladatnál azok újszerű szellemiségéhez illesztettük a megoldás gondolatmenetét, erősítve az érettségi által is támogatott tartalmi modernizációt.

Az egyes feladatokra legtöbbször csak egy megoldást közölhettünk. Ezek nem tartanak igényt a „mintamegoldás" státuszra, még kevésbé a kizárólagosságra; a kötetet használók bizonyára számos más, esetenként egyszerűbb megoldást is készítenek majd a feladatokra. A megoldásokhoz helyenként kiegészítéseket is fűztünk. Ezek jelenthetnek más gondolatmenetű *Másik megoldást* vagy olyan *Megjegyzést*, amely a feladat lehetséges általánosítására utal, vagy valamilyen kiegészítő ismeretre hívja fel a figyelmet. Egyes feladatok esetén hivatkoztunk a feladatgyűjteményben máshol esetleg megtalálható, hasonló feladatok sorszámára.

A feladatgyűjteményhez hasonlóan megoldáskötetünk is a gyakorlatban elterjedt többféle jelölésrendszert alkalmaz. Nem is törekedtünk ezek közül egyfélének a kizárólagos használatára, még kevésbé a köztük való igazságtevésre. Ugyanakkor igyekeztünk következetesek lenni abban, hogy pl. minden esetben megkülönböztessük egymástól a függvényt, annak hozzárendelési szabályát, illetve grafikonját. Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásakor, ahol az alaphalmazt a feladat külön nem adja meg, mindig a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát tekintjük alaphalmaznak, amelyen a szereplő kifejezések értelmezve vannak. Ugyanezt a gyakorlatot érvényesítettük a függvények esetében is.

Az egyes feladatok konkrét számokkal történő végigszámolása során általában több értékes jeggyel dolgoztunk, mint amit a végeredményben feltüntettünk. A számítások végeredményeiben ennek következtében lehetnek kisebb eltérések, hasonlóan ahhoz, hogy a közölt részeredményekkel, vagy ezek korábban használt pontosságú alakjával számolunk-e tovább.

A geometria feladatok megoldásában gyakran hivatkozunk olyan összefüggésekre, amelyek indoklásának állandó ismételgetésétől eltekintettünk. Ilyen összefüggések például: az a oldalú négyzet át-

lójának hossza: $d = a\sqrt{2}$; az a befogójú egyenlő szárú háromszög átfogójának hossza: $c = a\sqrt{2}$; az a oldalú szabályos háromszög magasságának hossza: $m = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

A megoldáskötet általában egyszínnyomással készült. A *Függvénytan* és a *Geometria* fejezetben azonban megjelenik második színként a piros. Fontosnak tartottuk ezt, mert így a grafikonok és az ábrák sokkal áttekinthetőbbek. Általában azt a gyakorlatot követtük, hogy a kiinduló görbék, alakzatok feketék, a segédvonalak szürkék és rózsaszínűek, míg a végső grafikon vagy alakzat, a végeredmény piros.

A feladatgyűjteménybe bizony becsúsztak olyan feladatok is, amelyek megfogalmazása hibás volt, túl nehézre sikerültek, és a nyomda ördöge is otthagyta kézjegyét a kiadványon. Az ezek közül eddig felfedezetteket kijavítottuk, és az új kiadásban már a javított feladatok szerepelnek. Ennek megfelelően természetesen ebben a megoldáskötetben már a javított feladat megoldása található meg. Az ilyen feladatokat – a korábbi kiadású feladatgyűjtemények tulajdonosai segítése céljából – kötetünkben * jellel jelöltük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az időközben megváltozott középszintű érettségi vizsgakövetelmények miatt néhány feladat háromszintű besorolása is módosult a feladatgyűjteményben.

Az új, középszintű érettségi írásbeli vizsgája három részből áll. Az első részben egyszerű, a definíciók, összefüggések ismeretét vizsgáló feladatok szerepelnek. Ilyeneket találhatnak a feladatgyűjteményünk 6. fejezetében. A vizsga második részében a „hagyományos" érettségi feladatokhoz leginkább hasonló, azoktól legfeljebb szellemiségében eltérő példákkal találkoznak a vizsgázók. Ilyen feladatok vannak a feladatgyűjtemény első öt fejezetében, amelyek a matematika egy-egy témakörét dolgozzák fel. Az érettségi vizsga harmadik részébe összetett, a matematika több területét érintő feladatok kerülnek. Ezekre a feladatgyűjtemény 7. fejezetében gyűjtöttünk össze példákat. A 8. fejezet az előzőekben leírtaknak megfelelő felépítésű, hármas tagolású, teljes feladatsorokat tartalmaz.

A diákok figyelmét elsősorban arra hívjuk fel, hogy a feladatok megoldásához önállóan célszerű hozzáfogni. Csak többszöri, sikertelen nekikezdés után érdemes a megoldáskötethez fordulni, először inkább csak ötletszerzés céljából. Ha még így sem sikerül önállóan megoldani a feladatot, akkor javasolt a megoldás részletes áttanulmányozása. Természetesen sikeres megoldás esetén is ajánlott az eredmény ellenőrzése, esetleg egy más megoldás megismerése ezekből a kötetekből.

A feladatgyűjtemény és a megoldáskötet is segíteni próbál napjaink matematikaoktatásának abban a célkitűzésében, amelyet egy nemzetközi kutatócsoport így fogalmazott meg: „Fejleszteni az egyénnek azt a készségét, hogy képes felismerni, megérteni, milyen szerepet játszik a matematika a bennünket körülvevő világban, és hogy ennek tükrében képes megalapozott döntéseket hozni és cselekedni, hogy jelenlegi és későbbi élete során alkotó és felelős ember legyen."

Itt szeretnénk köszönetet mondani a lektorok segítő munkájáért, akik nagyon sokat tettek annak érdekében, hogy a megoldások egységessége és színessége közötti egyensúly kialakuljon. Köszönjük a kiadónak és a nyomdának a szerkesztés során tanúsított rugalmas együttműködést és a szép kivitelezést. Ismét elmondjuk, hogy valamennyiünk legjobb igyekezete ellenére a hatalmas anyagban az olvasó tanár és diák hiányosságokra, hibákra bukkanhat. Kérjük, jelezzék ezeket a kiadónak, hogy azokat kijavítva a feladatgyűjtemény és ez a megoldáskötet is még inkább meg tudja valósítani a matematikaoktatás megújításában kitűzött célokat.

A szerzők

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

$\in$	eleme (a halmaznak)
$\notin$	nem eleme (a halmaznak)
$\subset$	valódi részhalmaza
$\subseteq$	részhalmaza
$\cup$	egyesítés, unió
$\cap$	közös rész, metszet
$\setminus$	különbség (halmazoké)
$\overline{}$	halmaz komplementere; esemény ellentéte
$\varnothing$	üres halmaz
$\{\,;\,;\,\}$	halmaz elemeinek felsorolása
$\lvert\ \rvert$	halmaz számossága; szám abszolútértéke; vektor hossza
$\forall$	univerzális kvantor („minden")
$\exists$	egzisztenciális kvantor („van olyan")
$\wedge$	konjunkció („és")
$\vee$	diszjunkció („vagy")
$\neg$	negáció (tagadás)
$\Rightarrow$	implikáció (következés)
$\Leftrightarrow$	ekvivalencia
$!$	faktoriális
$\binom{n}{k}$	binomiális együttható
$\mathbf{N}$	természetes számok halmaza
$\mathbf{N}^+$	pozitív egész számok halmaza
$\mathbf{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbf{Q}$	racionális számok halmaza
$\mathbf{Q}^*$	irracionális számok halmaza
$\mathbf{R}$	valós számok halmaza
$=$	egyenlő
$\neq$	nem egyenlő
$:=$	definiáló egyenlőség
$\approx$	kerekítve, közelítőleg egyenlő
$<$	kisebb
$>$	nagyobb
$\leq$	kisebb vagy egyenlő
$\geq$	nagyobb vagy egyenlő

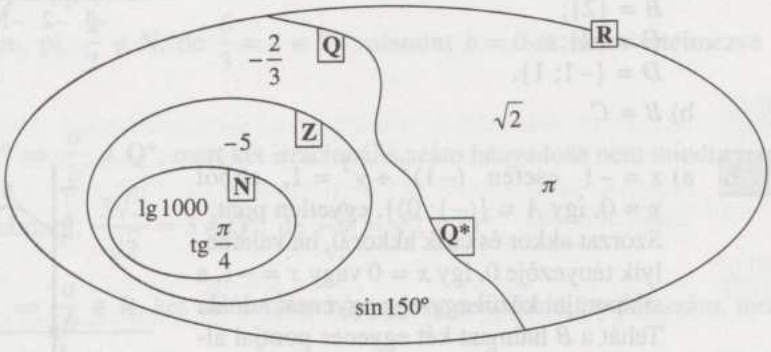
$+$	összeadás; pozitív előjel; legalább az egyik esemény bekövetkezik
$-$	kivonás; negatív előjel
$\pm$	plusz vagy mínusz, mindkét előjel (mindkét művelet) lehetséges
$\cdot$	szorzás; két esemény egyszerre következik be
$:$	osztás
—	törtvonal
a^k	hatvány (alap és kitevő)
$\sqrt{\ }$	(négyzet)gyök
$(\,;\,)$	két szám legnagyobb közös osztója; pont vagy vektor koordinátái (egyes könyvekben – nálunk nem! – nyílt intervallum)
$[\,;\,]$	két szám legkisebb közös többszöröse; zárt intervallum
$]\,;\,[$	nyílt intervallum
$[\,;\,[$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum
$]\,;\,]$	balról nyílt, jobbról zárt intervallum
∞	végtelen
$[\,]$	egészrész
$\{\,\}$	törtrész
sgn	előjel
$\mid$	osztója; feltételes valószínűség
$\nmid$	nem osztója
%	százalék
‰	ezrelék
$\overline{abcd}$	(négyjegyű) szám, amelynek számjegyei a, b, c és d egész számok
$f\colon A \to B$	az f nevű függvény értelmezési tartománya A, egy képhalmaza B
$\mapsto$	hozzárendelés

D_f	az f függvény értelmezési tartománya
$f(x)$	az f függvény helyettesítési értéke az $x \in D_f$ helyen
$-\!\circ\!-$	illeszkedik
$\parallel$	párhuzamos
$\perp$	merőleges
$\sphericalangle$	derékszög
$\equiv$	egybevágó
$\sim$	hasonló
$^\circ$	fok
$'$	(szög)perc
$''$	(szög)másodperc
$\sphericalangle$	szög
Δ	háromszög
PQ	PQ szakasz (és a hossza is)
$\overline{PQ}$	a PQ szakasz hossza
$d(P; Q)$	a P és Q pontok távolsága
T_{ABC}	terület (az ABC háromszögé)
P'	a P pont képe valamely transzformáció során
$[A, B, C]$	az A, B, C pontok által meghatározott sík
$[a, b]$	az a, b egyenesek által meghatározott sík
V	térfogat
A	felszín
$\overrightarrow{AB}$	A-ból B-be mutató vektor
$\mathbf{v}$	vektor
$\mathbf{0}$	nullvektor
$\mathbf{ab}$	**a** és **b** vektorok skaláris szorzata
$\bar{x}$	átlag
σ	szórás
p	valószínűség
$P(A)$	az A esemény valószínűsége

1. GONDOLKODÁSI MŰVELETEK

1.1. Halmazok

1. Mivel $\sin 150° = \frac{1}{2}$; $\lg 1000 = 3$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$:



2. a) hamis b) igaz c) hamis d) igaz e) hamis

3. A három leggyakrabban kihúzott szám a 69 (négyszer), a 13 (háromszor) és a 27 (kétszer).

4.

	A	AB	B	0
Rh^+				
Rh^-				

5. a) $\frac{x^2-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 0$ egyenlet nincs értelmezve, ha $x = 1$, ezért az egyenlet ekvivalens $x + 1 = 0$ egyenlettel, melynek megoldása $x = -1$, amely egész szám, így $A = \{-1\}$.
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ennek legkisebb egész megoldása $x = 2$, így $B = \{2\}$.
Mivel egy prímszám pozitív osztóinak száma 2 (az 1 és önmaga), így $C = \{2\}$.
Mivel $(-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1^n = 1$; ha $n \in \mathbf{Z}$, így $D = \{1\}$.

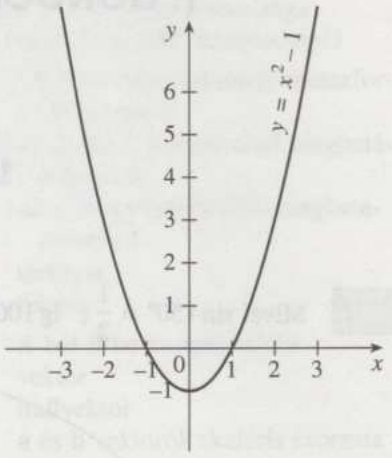
b) $B = C$

6. a) Mivel $(x-1)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$, az egyenlőtlenség megoldása az ábráról leolvasható: $x < -1 \vee x > 1$.
$2x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ legnagyobb egész szám megoldása: $x = 2$.
Egyetlenegy páros prím van, ez a 2.

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ ha } n \text{ páros;} \\ -1, \text{ ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

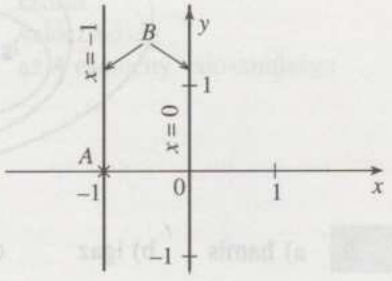
Tehát a halmazok:
$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -1 \vee x > 1\}$;
$B = \{2\}$;
$C = \{2\}$;
$D = \{-1; 1\}$.

b) $B = C$



7. a) $x = -1$ esetén $(-1)^2 + y^2 = 1$, ebből $y = 0$, így $A = \{(-1; 0)\}$, egyetlen pont.
Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így $x = 0$ vagy $x = -1$, a sík pontjai közül egy-egy egyenest adnak. Tehát a B halmazt két egyenes pontjai alkotják.

b) A két halmaz nem egyenlő.



8. $a \in A$ és $b \in A$ esetén:

a) Ha $A = \mathbf{N} \Rightarrow a + b \in \mathbf{N}$, mert két természetes szám összege is természetes szám.
Ha $A = \mathbf{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbf{Q}$, mert két racionális szám összege is racionális szám.
Ha $A = \mathbf{Q}^* \Rightarrow a + b \notin \mathbf{Q}^*$, mert két irracionális szám összege lehet racionális vagy irracionális szám, pl. $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \notin \mathbf{Q}^*$, de $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{Q}^*$.

b) Ha $A = \mathbf{N} \Rightarrow a - b \notin \mathbf{N}$, mert pl. $5 - 7 = -2 \notin \mathbf{N}$.
Ha $A = \mathbf{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbf{Q}$, mert két racionális szám különbsége is racionális szám.
Ha $A = \mathbf{Q}^* \Rightarrow a - b \notin \mathbf{Q}^*$, mert két irracionális szám különbsége lehet racionális vagy irracionális szám, pl. $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \notin \mathbf{Q}^*$, de $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbf{Q}^*$.

c) Ha $A = \mathbf{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbf{N}$, mert két természetes szám szorzata is természetes szám.
Ha $A = \mathbf{Q} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbf{Q}$, mert két racionális szám szorzata is racionális szám.
Ha $A = \mathbf{Q}^* \Rightarrow a \cdot b \notin \mathbf{Q}^*$, mert két irracionális szám szorzata lehet racionális vagy irracionális szám, pl. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbf{Q}^*$, de $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbf{Q}^*$.

9. a) $a \in A$ esetén:

Ha $A = \mathbf{N} \Rightarrow a \cdot a = a^2 \in \mathbf{N}$, mert egy természetes szám négyzete is természetes szám.

Ha $A = \mathbf{Q}^* \Rightarrow a \cdot a = a^2 \notin \mathbf{Q}^*$, mert egy irracionális szám négyzete nem mindig irracionális szám, pl. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbf{Q}^*$, de $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 3+\sqrt{2} \in \mathbf{Q}^*$.

(Két irracionális szám szorzata lehet racionális vagy irracionális szám.)

Ha $A = \mathbf{R} \Rightarrow a \cdot a = a^2 \in \mathbf{R}$, mert két valós szám szorzata is valós szám.

b) $a \in A$ és $b \in A$ esetén:

Ha $A = \mathbf{N} \Rightarrow \frac{a}{b} \notin \mathbf{N}$, mert két természetes szám hányadosa nem mindig természetes szám, pl. $\frac{2}{3} \notin \mathbf{N}$, de $\frac{6}{3} = 2 \in \mathbf{N}$; valamint $b = 0$-ra nincs értelmezve a művelet.

Ha $A = \mathbf{Q}^* \Rightarrow \frac{a}{b} \notin \mathbf{Q}^*$, mert két irracionális szám hányadosa nem mindig irracionális szám, pl. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \notin \mathbf{Q}^*$, de $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \in \mathbf{Q}^*$.

Ha $A = \mathbf{R} \Rightarrow \frac{a}{b} \notin \mathbf{R}$, két valós szám hányadosa nem mindig valós szám, mert $b = 0$-ra nincs értelmezve a tört, de ha $b \neq 0$, akkor $\frac{a}{b} \in \mathbf{R}$.

c) $a \in A$ esetén:

Ha $A = \mathbf{N} \Rightarrow \frac{a}{a} \notin \mathbf{N}$, mert $a = 0$-ra nincs értelmezve a művelet.

Ha $A = \mathbf{Q}^* \Rightarrow \frac{a}{a} \notin \mathbf{Q}^*$, mert $0 \notin \mathbf{Q}^*$, és $\frac{a}{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbf{Q}^*$ esetén, de $1 \notin \mathbf{Q}^*$.

Ha $A = \mathbf{R} \Rightarrow \frac{a}{a} \notin \mathbf{R}$, mert $a = 0$-ra nincs értelmezve a művelet.

10. a) Az adott K halmazból kiválaszthatók olyan elemek, melyre $a + b \notin K$, például $1 + 2 = 3 \notin K$, tehát nem igaz az állítás.

b) Az adott K halmazból kiválaszthatók olyan elemek, melyre $a - b \notin K$, például $1 - 2 = -1 \notin K$, tehát nem igaz az állítás.

c) Az adott K halmazból kiválaszthatók olyan elemek, melyre $a \cdot b \notin K$, például $2 \cdot 2 = 4 \notin K$, tehát nem igaz az állítás.

Megjegyzés:
Ha $a \neq b$, akkor minden K-beli elemre teljesül, hogy $a \cdot b \in K$.

11. Legyen $K = \{1; 2\}$, ekkor

a) $a^2 = a \cdot a$, $1 \cdot 1 = 1 \in K$, de $2 \cdot 2 = 4 \notin K$, tehát nem teljesül.

b) $\frac{a}{b}$ $(a \neq b)$ esetén $\frac{1}{2} \notin K$, de $\frac{2}{1} = 2 \in K$, tehát nem teljesül.

c) $\frac{a}{a} = 1 \in K$, tehát teljesül.

Legyen $K = \{0; 1\}$, ekkor

a) $0 \cdot 0 = 0 \in K$, $1 \cdot 1 = 1 \in K$, tehát teljesül.

b) $\frac{0}{1} = 0 \in K$, $b = 0$ esetén a tört nincs értelmezve, tehát nem teljesül.

c) $\frac{1}{1} = 1 \in K$, $a = 0$ esetén a tört nincs értelmezve, tehát nem teljesül.

12. Aranka és Béla február minden páros sorszámú napján találkoznak egymással és minden öttel osztható sorszámú napján együtt mennek moziba. Februárban kétszer (10-én és 20-án) voltak együtt moziban és háromszor (5-én, 15-én és 25-én) voltak külön moziban.

13. A négy üzlet egyszerre van nyitva 9^{30}—12^{00}-ig és 13^{00}—14^{30}-ig. Tehát összesen négy óra hosszú az az időszak, amikor mind a négy üzlet egyszerre nyitva van.

14. Nem igaz. Legyenek például a kihúzott számok: 1; 2; 3; 4; 5, a három testvér megjátszott számai pedig:

1; 2; 3; 10; 20

1; 2; 4; 30; 40

3; 4; 5; 50; 60.

15. Az egyjegyű prímszámok: 2, 3, 5, 7.
Ezek halmaza: $\{2; 3; 5; 7\}$.

E halmaznak $2^4 = 16$ részhalmaza van, melyek a következők:
$\{\ \}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{5\}$; $\{7\}$; $\{2; 3\}$; $\{2; 5\}$; $\{2; 7\}$; $\{3; 5\}$; $\{3; 7\}$; $\{5; 7\}$; $\{2; 3; 5\}$; $\{2; 3; 7\}$; $\{2; 5; 7\}$; $\{3; 5; 7\}$; $\{2; 3; 5; 7\}$.

16. 7 elemű halmaz páratlan számú elemből álló részhalmazainak száma:

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{5} + \binom{7}{7}.$$

A páros számú elemből álló részhalmazainak száma:

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6}.$$

E két összeg egyenlő, azaz

$\binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}=\binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}$, mert

átrendezve:

$\binom{7}{0}-\binom{7}{1}+\binom{7}{2}-\binom{7}{3}+\binom{7}{4}-\binom{7}{5}+\binom{7}{6}-\binom{7}{7}=0$

A binomiális tétel értelmében a bal oldalon álló kifejezés $(1-1)^7=0$.

Tehát egy 7 elemű halmaz részhalmazai között ugyanannyi páros számú elemből álló részhalmaz van, mint páratlan számú elemből álló részhalmaz (lásd 272. feladat).

Másik megoldás:

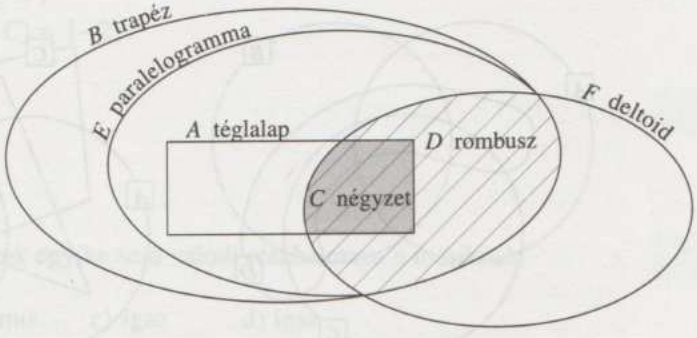
$\binom{7}{0}=\binom{7}{7}$, $\binom{7}{1}=\binom{7}{6}$, $\binom{7}{2}=\binom{7}{5}$, $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}$, mert

$\binom{7}{k}=\frac{7!}{k!\cdot(7-k)!}=\binom{7}{7-k}$, ahol $k\in\{0, 1, 2,\ldots,7\}$.

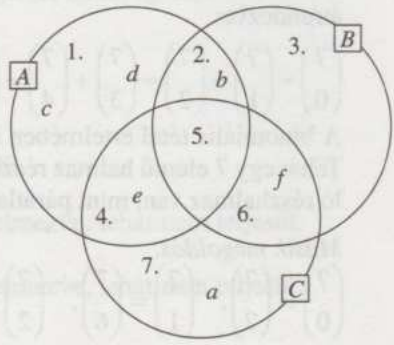
(Ez utóbbi belátható így is: A 7 elemű halmazból annyiféleképpen választható ki például 2 elem, ahányféleképpen a többi 5 elemet nem választjuk ki.)

17. $A = \{6; 12; 18; 24; \ldots\}$
$B = \{6; 16; 26, 36; \ldots\}$
$C = \{2; 5; 8; 11; 14; 17; \ldots\}$
$D = \{12; 24; 36; 48; \ldots\}$
$E = \{3; 7; 11; 15; 19; \ldots\}$
$F = \{1; 2; 3; 6\}$
$G = \{6; 12; 18; 24; \ldots\}$
$H = \{6; 12; 18; 24; \ldots\}$
$A = G = H$

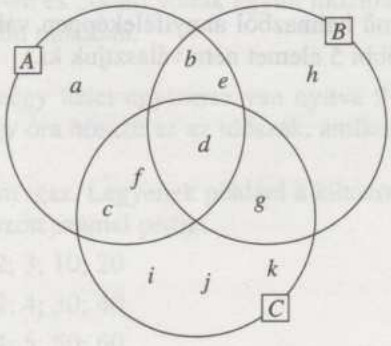
18. $B \cap F = D$
$E \cap F = D$
$A \cap F = C$
$A \cap D = C$



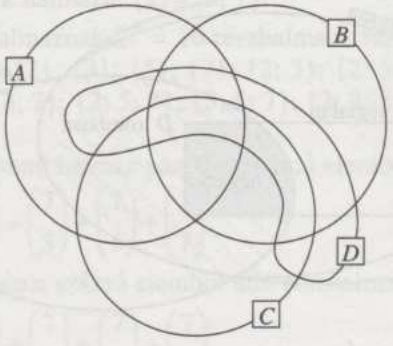
19. Számozzuk meg az A, B, C halmazok által létrehozott tartományokat 1–7-ig. Az első feltétel szerint összesen hat elemet (a, b, c, d, e, f) kell elhelyeznünk ezek valamelyikében. A második feltétel miatt a b elem a 2. vagy 5. tartományban lehet, és ezekben nem is lehet rajta kívül más. A harmadik feltétel szerint a 4., 5., 6. tartományokban összesen az e és f van – emiatt b nincs az 5.-ben, tehát a 2.-ban van, és az 5. üres. A negyedik feltétel szerint 1. és 2. tartományokban a b, c, d van – közülük már láttuk, hogy a b (és csak ő) a 2.-ban van, tehát c és d az 1.-ben. Az ötödik feltétel szerint a 4. és 7. tartományokban van a és e – ezt összevetve a harmadikkal adódik, hogy a 4.-ben van e, és a 7.-ben a. Így f csak a 6.-ban lehet. Tehát a halmazok: $A := \{b; c; d; e\}$, $B := \{b; f\}$, $C := \{a; e; f\}$.

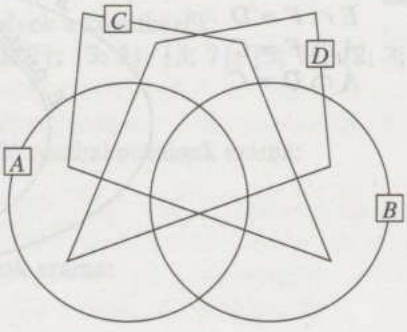


20.

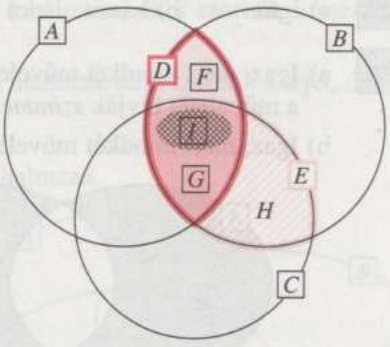


21. Többféle megoldás is elképzelhető, például:



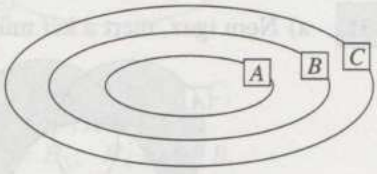


22. $A \cap B = D$, azaz a 6-tal osztható pozitív egész számok halmaza.
$(A \cap B) \setminus C = F$, olyan 6-tal osztható pozitív egész számok, melyek nem 0-ra vagy 5-re végződnek, ezek nem oszthatók 5-tel.
$F := \{6; 12; 18; 24; 36; 42; 48; 54; 66; 72; \ldots\}$.
Az ábrázolt halmazok egyike sem üres halmaz.



23. $C \cup D = \{a; b; c; e; i\}$, $C \cap D = \{a\}$, $C \setminus D = \{e; i\}$, $D \setminus C = \{b; c\}$.

24. Ha $A \subset B \subset C$, akkor Venn-diagrammal ábrázolva:
A diagramból „látszik", hogy
$A \cup B \cup C = C$ és $A \cap B \cap C = A$.



25. $A := \{-2; 2\}$
$B := \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
$C := \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

a) $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$
b) $(A \cup B) \setminus C = \{-2; -1\}$
c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset$
d) $(A \cup B) \setminus (B \cup C) = \emptyset$
e) $(A \cap B) \setminus C = \{-2\}$
f) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = \{-2\}$

26. $A := \{0; 1; 2\}$;
$B := \{-2; 2\}$;
$C := \{2; 3; 5\}$;
$A \cap B \cap C = \{2\}$.
Az A, B, C halmazok egyike sem valódi részhalmaza a másiknak.

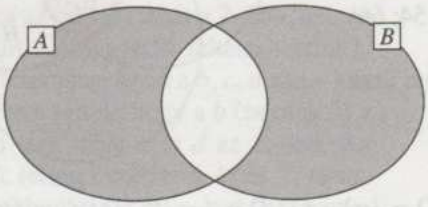
27. a) hamis b) hamis c) igaz d) igaz

28. a) igaz b) hamis c) igaz d) hamis

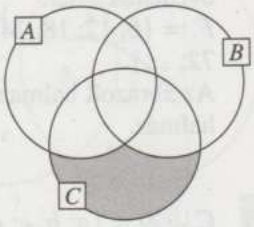
29. a) igaz b) hamis c) igaz d) igaz e) hamis f) igaz

30. a) Igaz, mert mindkét művelet ugyanazokat a tartományokat adja eredményül. (Ezt a műveletet hívják *szimmetrikus differenciá*nak is, jele: $A \Delta B$.)

b) Igaz, mert mindkét művelet ugyanazt a tartományt adja eredményül.

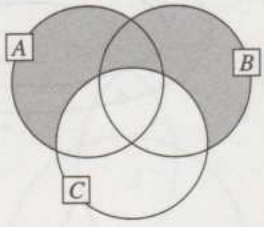


a)

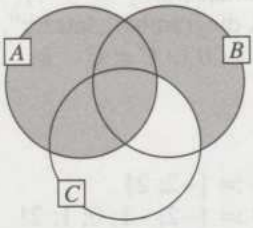


b)

31. a) Nem igaz, mert a két művelet különböző tartományokat ad eredményül.

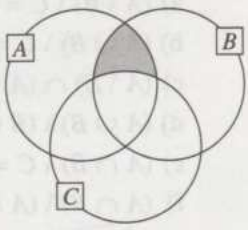


bal oldal



jobb oldal

b) Igaz, mert mindkét művelet ugyanazt a tartományt adja eredményül.



32. a) $A \setminus (B \cup C)$ vagy $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

b) $D \setminus E$

c) $G \cup (H \cap I)$ vagy $(G \cup H) \cap (G \cup I)$

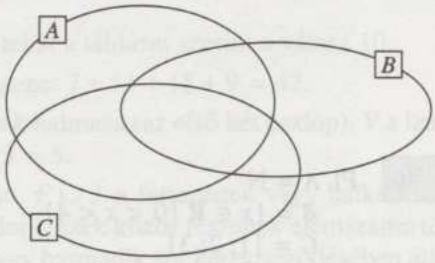
33. $A \cap B$: Azoknak a magyar állampolgároknak a halmaza, akik szeretik a mézet és (szeretik) a tejet is.

$A \cup B$: Azoknak a magyar állampolgároknak a halmaza, akik a méz és a tej közül legalább az egyiket szeretik.

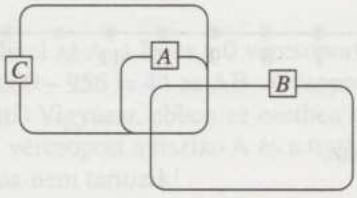
$A \setminus B$: Azoknak a magyar állampolgároknak a halmaza, akik szeretik a mézet, de nem szeretik a tejet.

$B \setminus A$: Azoknak a magyar állampolgároknak a halmaza, akik szeretik a tejet, de nem szeretik a mézet.

34. $B \cap C$: A kilenccel osztható pozitív egészek halmaza.
$B \cup C$: A 9-cel osztható negatív egész számok és a hárommal osztható pozitív egész számok halmaza.
$A \cap C$: A 18-cal osztható egész számok halmaza.
$A \cap B$: A 6-tal osztható pozitív egész számok halmaza.
$A \cap B \cap C$: A 18-cal osztható pozitív egész számok halmaza.



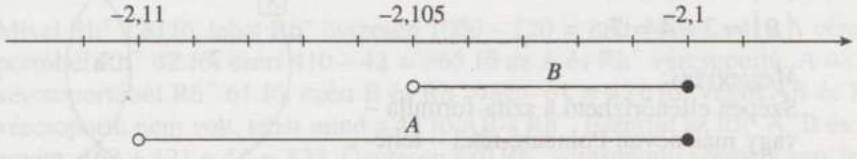
35. a)



b) $H_1 = A \cap B = B \cap C$;
$H_2 = B \setminus A = B \setminus C$;
$H_3 = H_1$; $H_4 = A \setminus B$.

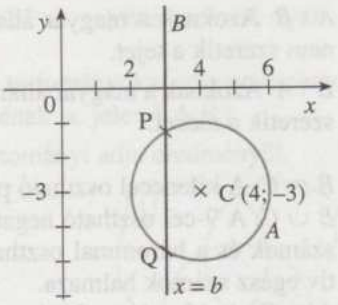
36. a) Mindkét intervallumnak végtelen sok eleme van!
pl. $\{-2{,}109; -2{,}108888; -2{,}107; -2{,}1051; -2{,}1\} \subset A$
pl. $\{-2{,}104; -2{,}103; -2{,}1028; -2{,}1021215; -2{,}1\} \subset B$

b) B valódi részhalmaza A-nak!
$A \cap B = B$; $A \cup B = A$; $A \setminus B =]-2{,}11; -2{,}105]$; $B \setminus A = \{\ \}$

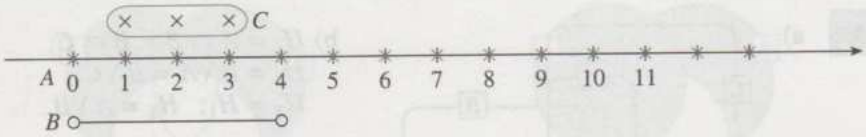


37. 1-es tartomány: $H_1 \setminus H_2$;
2-es tartomány: $(H_1 \cap H_2) \setminus H_3$;
3-as tartomány: $H_1 \cap H_3$;
4-es tartomány: $(H_3 \cap H_2) \setminus H_1$;
5-ös tartomány: $H_3 \setminus H_2$.

38. $A \cap B \neq \emptyset$, ha $2 \leq b \leq 6$
Ha $b = 2$ vagy $b = 6$, akkor $A \cap B$ 1 elemű halmaz.
Ha $2 < b < 6$, akkor $D = A \cap B$ 2 elemű halmaz $\{P; Q\}$.

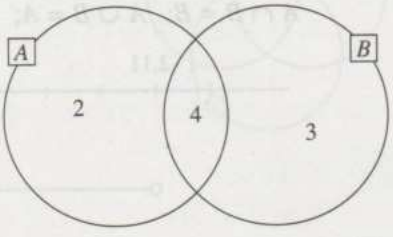


39. Pl. $A = \mathbf{N}$
$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 4\}$
$C = \{1; 2; 3\}$



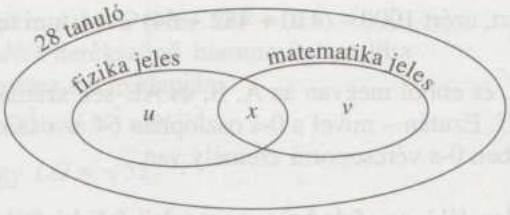
A és B végtelen halmaz, C véges halmaz.

40. Két halmaz uniójának annyi eleme van, mint amennyi elem összesen csak az egyik halmazban, meg csak a másik halmazban, meg a metszetükben található, azaz $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$.
Átrendezve: $|B \setminus A| = |A \cup B| - |A \setminus B| - |A \cap B| = 9 - 4 - 2 = 3$, ennyi elem van csak a B halmazban, ezért
$|A| = 2 + 4 = 6$,
$|B| = 3 + 4 = 7$.



Megjegyzés:
Szépen ellenőrizhető a szita-formula – vagy más néven Poincaré-tétel – teljesülése:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, azaz most $9 = 6 + 7 - 4$.

41. A 28 tanulóból a megadott adatok szerint $28 - 23 = 5$ tanulónak van jelese fizikából, és $28 - 21 = 7$ tanulónak matematikából. Mivel matematikából vagy fizikából 10-en kaptak jelest, és $5 + 7 = 12$ jeles osztályzat van összesen, ezért $12 - 10 = 2$ tanulónak van mindkét tárgyból jelese. (Lásd még a Venn-diagramot.)



$$+\ u+x=5$$
$$+\ v+x=7$$
$$-\ u+v+x=10$$
$$u+x+v+x-(u+v+x)=5+7-10$$
$$x=2$$

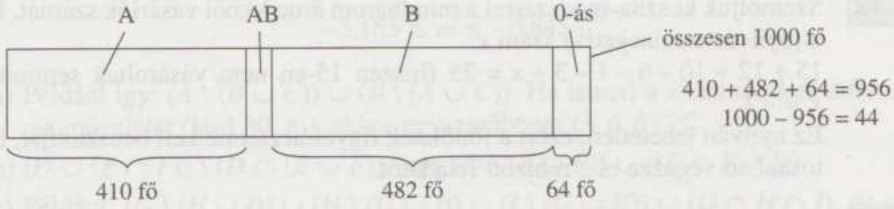
42. a) $F \cap J$ a harmadik oszlop, S az első sor, tehát a táblázat szerint a válasz 10.

b) B a teljes második sor, itt az elemek összege: $7 + 11 + 15 + 9 = 42$.

c) $\overline{J}$ a „nem jobbkezesek", tehát a balkezesek halmaza (az első két oszlop), V a harmadik sor, tehát $V \cap \overline{J}$ elemszáma: $2 + 3 = 5$.

d) $B \cup V$ a második és harmadik sor együtt, $F \cup \overline{J}$ a férjezettek vagy balkezesek halmaza (első, második és harmadik oszlop), ezek közös részének elemszáma tehát az első három oszlop és a második vagy harmadik sor kereszteződésében álló elemek összege: $7 + 2 + 11 + 3 + 15 + 8 = 46$.

43. a) Mivel az A, a B, és a 0 vércsoportúak száma együtt $410 + 482 + 64 = 956$, ezért $1000 - 956 = 44$ az AB vércsoportúak száma. (Lásd még a Venn-diagramos ábrát!) Vigyázat, ebben az esetben a halmazoknál megszokottól eltérően az A és a B vércsoport a tisztán A és a tisztán B-t jelenti, az AB se az A se a B vércsoporthoz nem tartozik!



b) Mivel Rh^+ 120 fő, tehát Rh^- összesen $1000 - 120 = 880$. Mivel a 410 A vércsoportúból Rh^+ 42 fő, ezért $410 - 42 = 368$ fő az A és Rh^- vércsoportú. A 482 B vércsoportúból Rh^+ 61 fő, ezért B és Rh^- $482 - 61 = 421$ fő. Végül AB és Rh^+ vércsoportú nem volt, tehát mind a 44 fő AB-s Rh^-. Eszerint az Rh^- A, B és AB együtt: $368 + 421 + 44 = 833$. Összesen 880 Rh^- vércsoportú személy van, tehát $880 - 833 = 47$ fő az, aki a 0-s és Rh^- vércsoportba tartozik.

Másik megoldás: (táblázatos formában, az egyes lépéseket dőlt betűvel jelölve)

	A	AB	B	0	összes
Rh^+	42	0	61	*17*	120
Rh^-				*47*	
összes	410	*44*	482	64	1000

a) Mivel 1000-en vettek részt, ezért $1000 - (410 + 482 + 64) = 44$, ami tehát az AB vércsoportúak száma.

b) Mivel Rh^+ összesen 120, és ebből megvan az A, B, és AB-sek száma, ezért kiszámítható a 0-soké is: 17. Ezután – mivel a 0-s oszlopban 64 az összeg – innen $64 - 17 = 47$ Rh^- és egyben 0-s vércsoportú személy van.

44. Mivel mindenki megoldott legalább egy feladatot, ezért a két feladatot megoldó tanulók száma az indulók létszámának 30%-a (60% + 70% = 130%, ami a kétszer figyelembe vett 9 tanuló miatt több 30%-kal az indulók számánál).
A versenyen tehát 30 tanuló indult, mert ennek a 30%-a éppen 9.
Ez lehetséges is, hiszen ezzel számolva: 21 tanuló oldotta meg az első, 18 tanuló a második feladatot, s így valóban 9-en voltak a mindkét feladatot megoldók.

45. a) Igen, hiszen például teszőleges számú olyan tanuló lehet, aki egyik adott halmazba sem tartozik.

b) Legalább 152.

c) A legtöbb ilyen tanuló akkor van, amikor a komolyzenét kedvelő tanulók és a sportoló tanulók halmazának metszete a legkisebb elemszámú.
Mivel $77 + 90 = 167$, ezért a két halmaz metszete legalább 2 elemű halmaz. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb 75 komolyzenét kedvelő, de nem sportoló tanuló lehet ebben az iskolában.

46. Számoljuk ki szita-módszerrel a mindhárom árucikkből vásárlók számát. Legyen ez a (nyilván nemnegatív) szám x.
$15 + 12 + 10 - 6 - 1 - 3 + x = 25$ (hiszen 15-en nem vásároltak semmit), amiből $x = -2$.
Ez nyilván lehetetlen, ezért a főnöknek figyelmeztetnie kell beosztottját, hogy pontosabban végezze el a rábízott feladatot.

47. Konkrét példánkban leszámoljuk a különböző betűket: v, á, r, o, s, é, t, e, i, í, a, ú – 12 különböző betű szerepel. (Általánosan a szita-formulával lehet számolni: jelölje a négy szót A, B, C és D. Ha $|H|$ jelöli a H halmaz számosságát, akkor esetünkben:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| +$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| =$$
$$= 5 + 5 + 5 + 5 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 + 1 + 1 + 1 + 1 - 0 = 20 - 12 + 4 - 0 = 12.$$

Azaz 12 különböző betű lesz a szavakban.)

48. $LN = 4$; $NO = 6$; $OP = 2$.

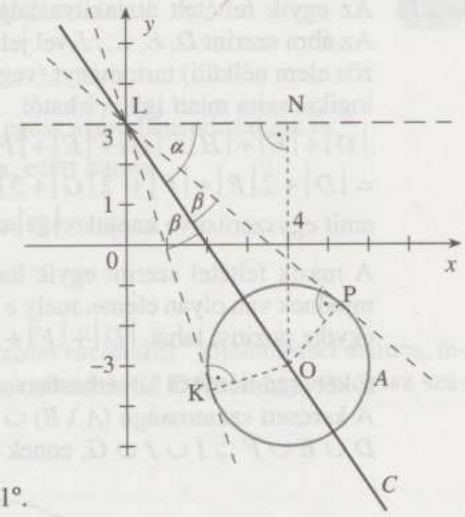
LNO derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$LO^2 = LN^2 + NO^2$,

így $LO = \sqrt{52}$.

LNO derékszögű háromszögben:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{4} = 1{,}5$, ebből $\alpha = 56{,}31°$.



LP és *LK* a körhöz *L* pontból húzott érintők. Egy körben az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így *LPO* és *LKO* háromszögek derékszögűek.

Ebben $\sin\beta = \frac{OP}{OL} = 0{,}2774$, így $\beta = 16{,}1°$.

$A \cap C$ halmaz akkor nem üres, ha az $y = mx + 3$ egyenes *LP* és *LK* szélsőértékek között halad.

Mivel az egyenes *m* meredeksége jellemezhető irányszögének tangensével, *LP* egyenes m_1 meredeksége $m_1 = -\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\operatorname{tg}40{,}21° = -0{,}8453$.

LK egyenes meredeksége: $m_2 = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg}72{,}41° = -3{,}155$.

Tehát $A \cap C$ nem üres halmaz, ha

$$-3{,}155 \leq m \leq -0{,}8453.$$

49. a) Például így: $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C))$. Ha ismeri a szimmetrikus differencia műveletét (lásd 30. a)), akkor egyszerűbben: $(A \Delta B) \setminus C$.

b) $(D \cup (E \cap F)) \setminus (D \cap (E \cup F))$ vagy $(D \setminus (E \cup F)) \cup ((E \cap F) \setminus D)$

c) Például: $(G \setminus (H \cup I)) \cup (H \setminus (G \cup I)) \cup (I \setminus (G \cup H)) \cup (G \cap H \cap I)$, de sok más lehetőség is van. Azonban mindegyikben a három halmaz szerepe azonos, egymással „felcserélhető". (Az eredmény szimmetriája ezt szépen mutatja. A szimmetrikus differencia műveletével – lásd 30. a) – az eredmény egyszerűbb: $(G \Delta H) \Delta I$; illetve éppen a halmazok egyforma szerepe miatt bármely más zárójelezéssel is ugyanezt kapjuk, vagyis a művelet kommutatív és asszociatív, tehát írhatjuk így: $G \Delta H \Delta I$.)

50. Három olyan halmaz, melyek végtelenek és bármelyik két halmaz közös része is végtelen: *A*; *C*; *D* vagy *C*; *E*; *F*.

51. Az egyik feltételt átalakítva kapjuk, hogy $|A|+|B|+|C| = 3|A \cap B \cap C|+3$. Az ábra szerint $D, E, \ldots, J$-vel jelölve az A, B, C halmazok által létrehozott hét (közös elem nélküli) tartományt (vegyük észre, hogy $H = A \cap B \cap C$), a fenti állítás a logikai szita miatt így is írható:

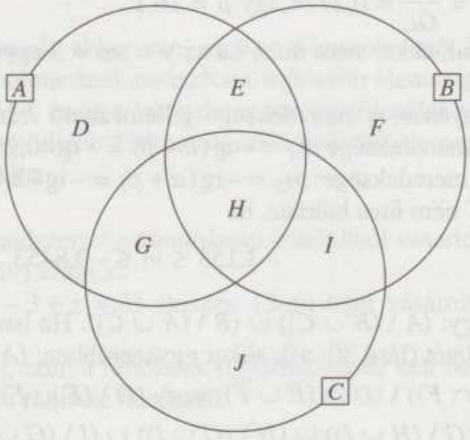
$|D|+|E|+|H|+|G|+|E|+|F|+|I|+|H|+|G|+|H|+|I|+|J| =$

$= |D|+2|E|+|F|+2|G|+3|H|+2|I|+|J| = 3|H|+3;$

amit egyszerűsítve kapjuk: $|D|+2|E|+|F|+2|G|+2|I|+|J| = 3$.

A másik feltétel szerint egyik halmaz sem részhalmaza semelyik másiknak, tehát mindnek van olyan eleme, mely a metszetben nincsen, vagyis $|D|$, $|F|$, $|J|$ mindegyike pozitív, tehát $|D|+|F|+|J| \geq 3$.

E két eredményből következően az E, G, I halmazok üresek, és $|D|=|F|=|J|=1$. A keresett számosságú $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$ halmaz új jelöléseinkkel: $D \cup E \cup F \cup I \cup J \cup G$, ennek elemszáma pedig a fentiek szerint 3.



1.2. Logika

52. a) Igaz. Minden egész szám felírható két egész szám hányadosaként is.

b) Ez a kijelentés az a)-belinek a tagadása, ezért hamis.

c) Hamis. Pl. a $\frac{4}{7}$ racionális szám, de nem egész szám.

d) Igaz, például $\frac{2}{3}$.

e) Ez a kijelentés a *„Minden természetes szám racionális"* kijelentéssel azonos, tehát az a) szerint igaz kijelentés, hiszen a természetes számok egyben egész számok is.

53. Mindhárom állítás igaz.

54. a) „Két páros szám összege mindig páros" – megfordítása: „Páros szám mindig két páros összege".

b) Nem igaz, mert páros szám lehet két páratlan összege is.

55. Ekkor a lányok száma 1 és 8 közé eső egész szám, és nyilván „a legalább két feladatot hibátlanul megoldó lányok" száma is egész. Az 1 és 8 közötti egészek közül egyedül az 5 olyan, amelynek négytized része is egész, vagyis öt lány és négy fiú szerepelt a döntőben.

56. Ha a kiránduló csoport lány tagjainak a száma x, akkor a fiú tagok száma $20x$. A csoport létszáma így $21x$, melyről tudjuk, hogy 50-nél nem nagyobb, pozitív, kétjegyű páros szám. Ezért csak $x = 2$ lehet, tehát a csoport létszáma 42 fő.

57. Ha az osztály létszámából levonjuk azoknak a tanulóknak a számát, akiknek történelemből kell javítóvizsgázniuk és levonjuk azoknak a tanulóknak a számát is, akiknek biológiából kell javítóvizsgázniuk, akkor azoknak a tanulóknak a számát, akiknek mindkét tárgyból pótvizsgázniuk kell, kétszer vontuk le. Tehát azoknak a tanulóknak a száma, akiknek egyik tárgyból sem kell javítóvizsgázniuk: $33 - 6 - 5 + 3 = 25$.

58. Ha páros számú egész szám összege páratlan, akkor szükségképpen kell közöttük páros számnak is lenni, így ekkor a szorzat páros. Ha páratlan számú egész szám összege páratlan, akkor lehetséges, hogy mindegyik szám páratlan, ilyenkor szorzatuk is páratlan szám lesz.
Tehát az állítás öt egész számra nem igaz, hat egész számra pedig igaz.

59. a) Öt lehetőség van (természetesen nem mindegyik ésszerű megoldása a problémának):
– a C_3 főcsapot elzárjuk (a másik kettő nyitva és zárva is lehet); ez 4 lehetőség;
– C_1-et és C_2-t elzárjuk, de C_3-at nem; ez is egy lehetőség.

b)

	C_1	C_2	C_3	B helyen átfolyik a víz
1.	Z	Z	Z	hamis
2.	Z	Z	N	hamis
3.	Z	N	Z	hamis
4.	N	Z	Z	hamis
5.	Z	N	N	igaz
6.	N	Z	N	igaz
7.	N	N	Z	hamis
8.	N	N	N	igaz

60. a) Három lehetőség van (természetesen nem mindegyik ésszerű megoldása a problémának): a C_3 főcsapot és a másik kettő közül még legalább egy főcsapot elzárunk.

b)

	C_1	C_2	C_3	B helyen átfolyik a víz
1.	N	N	N	igaz
2.	N	N	Z	igaz
3.	N	Z	N	igaz
4.	Z	N	N	igaz
5.	N	Z	Z	hamis
6.	Z	N	Z	hamis
7.	Z	Z	N	igaz
8.	Z	Z	Z	hamis

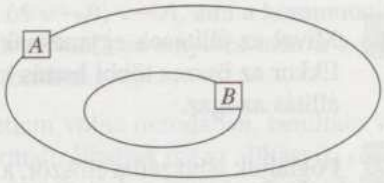
61. a) Az $A \setminus B = B \setminus A$ állítás nem igaz minden A és B halmazra, mert például, ha $A \neq B$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor
$A \setminus B = A$ és $B \setminus A = B$, tehát
$A \setminus B \neq B \setminus A$.

b) Van olyan A és B halmaz, melyre $A \setminus B = B \setminus A$.
Ha például $A = B$, akkor $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$.

c) $A \setminus B = B \setminus A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A = B$.

62. a) Az $(A \setminus B) \cup B = A$ állítás nem igaz minden A és B halmazra, mert például, ha az A és B nem üres halmazoknak nincs közös eleme, akkor $(A \setminus B) \cup B = A \cup B \neq A$.

b) Ha $B \subset A$, akkor az állítás igaz, ezt illusztrálja az alábbi Venn-diagram:



c) $(A \setminus B) \cup B = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $B \subseteq A$.

63. Használjuk ki, hogy egy adott kijelentés csak kétféle logikai értékű lehet: igaz vagy hamis.
Ha X igazat mond, akkor az „Y hazudik" egy igaz kijelentés, így Y állítása hamis, tehát Z nem hazudik: az „X hazudik és Y is hazudik" kijelentés igaz.
Ez azonban ellentmond annak a feltevésünknek, hogy X igazat mond.
Mivel ez nem lehetséges, ezért X kijelentése csak hamis lehet, vagyis Y igazat mond. Ebből az következik, hogy Z kijelentése hamis. Ez valóban így van, hiszen az „és"-sel összekapcsolt két kijelentés közül az egyik hamis.
Összefoglalva: X és Z hazudik, Y igazat mond.

64. „A testvéred mit mondana, melyik út vezet a városba?" Bármelyik testvér a rossz utat mutatja meg válaszul, tehát a másikon kell mennie az utazónak.

65. a) Egyik megoldás, a feliratok igazsága szerinti vizsgálattal: az első láda felirata nem lehet igaz, mert akkor igaz lenne a másodiké is, és csak egy igaz felirat van. Ha a második láda felirata igaz volna, akkor a kulcs lehetne az 1. ládában (de nem lehet, mert akkor ez a felirat is igaz volna), vagy a harmadikban (de ez sem lehet, mert ekkor a 3. felirat is igaz volna). Vagyis csak a 3. felirat lehet igaz: ekkor az 1. felirat hamis, tehát a kulcs nem ott van; és a 2. felirat is hamis, tehát a kulcs ott van a második ládában, ezt válassza a legény.
Másik megoldás, a kulcs helye szerinti vizsgálattal: ha az első ládában volna, az 1. és 2. felirat is igaz lenne, ami nem lehet. Ha a másodikban van, akkor az 1. és 2. felirat hamis, a 3. igaz, ez egy lehetséges eset. Ha a harmadikban lenne, akkor az 1. felirat hamis volna, vagyis igaz lenne a 2. és 3. is, ami megint nem lehet. Tehát egy lehetséges eset van: a kulcs a második ládában lapul, ezt válassza a legény.

b) A fenti második megoldás szerint két olyan eset is van, amelyben a három felirat közül pontosan egy hamis (mert a másik kettő igaz): ha az 1. vagy ha a 3. ládában van a kulcs. Ez esetben tehát a legény nem választhat egyértelműen jól, 50% eséllyel van vagy nincs szerencséje.

Megjegyzés: mivel három állítás igaz vagy hamis voltának megoszlása 3-0, 2-1, 1-2 vagy 0-3 lehet, az ilyen típusú feladatokban vagy csak a „csak egy igaz", vagy

csak a „csak egy hamis" kérdésre van egyértelmű válasz – esetleg egyikre sem; de mindkettőre bizonyosan nem lehet.

66. Mivel az állítások egymásnak ellentmondanak (kizárók), csak egyikük lehet igaz. Ekkor az összes többi hamis kell legyen, ez 100-ból 99; vagyis az utolsó előtti, 99. állítás az igaz.

67. Foglaljuk táblázatba először, a hét melyik napján melyikük mond igazat, illetve melyikük hazudik (1. táblázat). Ennek alapján vizsgáljuk meg, mit mond az Oroszlán és az Egér a hét egyes napjain előző napi szokásáról (2. táblázat). Látható, hogy csütörtök az egyetlen nap, amikor a feladatban idézett kijelentések elhangozhattak, tehát Alíz csütörtökön járt a Feledékenység erdejében.

	O	E
H	h	i
K	h	i
Sze	h	i
Cs	i	h
P	i	h
Szo	i	h
V	i	i

1. táblázat

	O	E
H	h	i
K	i	i
Sze	i	i
Cs	h	h
P	i	i
Szo	i	i
V	i	h

2. táblázat

68. a) A következtetés helyes, hiszen ha moziban lettem volna, nem tudtam volna tanulni – márpedig tanultam.
(Formalizálva: A := „moziba megyek", B := „tanulok".
Most az $((A \Rightarrow \neg B) \wedge B) \Rightarrow \neg A$ formula igazsága a kérdés. Vizsgáljuk meg előbb igazságtáblázattal:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow \neg B$	$(A \Rightarrow \neg B) \wedge B$	$\neg A$	$((A \Rightarrow \neg B) \wedge B) \Rightarrow \neg A$
i	i	h	h	h	h	i
i	h	i	i	h	h	i
h	i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	h	i	i

Látjuk, az eredmény minden esetben igaz, vagyis formulánk valóban egy tautológia.
Eljuthatunk a célig az ismert műveleti szabályok alkalmazásával is. Mivel általában a következtetés átírható így: $C \Rightarrow D = \neg C \vee D$, ezért formulánk új alakja: $\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge B) \vee \neg A$. Előbb a De Morgan-féle azonosságot

(lásd 102. feladat), majd egy disztributivitást alkalmazva ez tovább egyenlő: $((A \wedge B) \vee \neg B) \vee \neg A = ((A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)) \vee \neg A$. A harmadik kizárásának elve és az elnyelési szabály miatt kapjuk: $(A \vee \neg B) \vee \neg A$, ami a kommutativitás és asszociativitás, egy újabb „harmadik kizárása", és elnyelés után a konstans igaz állítással egyenlő – és épp ezt kellett belátni.)

b) A következtetés helyes, hiszen ha nem lettem volna uszodában, tanultam volna – de nem tanultam. (Az előzőek szerint formalizálhatjuk ezt az állítást is; sőt egyszerűen az előző levezetést magát is alkalmazhatjuk a következő megfeleltetésekkel: A := „nem megyek uszodába", B := „ nem tanulok".)

69. a) Ha egy trapéz deltoid, akkor van két szemközti szöge, amelyek egyenlők egymással. Az ezekkel közös száron nyugvó másik két szög az előbbieket 180°-ra egészíti ki, tehát a másik két szög is egyenlő egymással. Ez azt jelenti, hogy a trapéz paralelogramma, s mivel deltoid is, ezért átlói merőlegesek egymásra. Az ilyen paralelogrammák rombuszok.
Az átlók megadott hosszából Pitagorasz-tétellel kiszámítható a rombusz oldalhossza: $\sqrt{10^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5$ cm. A rombusz kerülete tehát 50 cm.

b) Néhány példa:
– Minden rombusz trapéz.
– Van olyan deltoid, amelyik nem trapéz.
– Nem minden trapéz rombusz.
– Nincs olyan rombusz, amelyik nem deltoid.

70. „Ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor nullára végződik."
Ez hamis kijelentés.

71. „Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor (a háromszög) egyenlő szárú."
Ez igaz kijelentés.

72. „Ha a $\sqrt{2}$ felírható két pozitív egész szám hányadosaként, akkor a $\sqrt{2}$ racionális (szám)."

73. a) igaz b) igaz c) hamis d) hamis e) igaz f) hamis

74. a) Nem igaz, hogy a 12 osztható 3-mal és (a 12) osztható 4-gyel.
A 12 nem osztható 3-mal vagy (a 12) nem osztható 4-gyel.

b) A 12 osztható 3-mal és (a 12) osztható 4-gyel.

c) Nem minden páros szám végződik nullára.
Van olyan páros szám, amelyik nem nullára végződik.

d) Minden öttel osztható egész szám nullára végződik.

75. A d) kijelentés tagadása nem szerepel a felsorolt állítások között.
A c) kijelentésnek az a) és a b) kijelentés is tagadása, így tehát a) és b) tagadása is szerepel a felsorolt kijelentések között, hiszen a c) kijelentés mindkettőnek tagadása.

76. Az a) kijelentés tagadása nem szerepel a felsoroltak között.
A b) és a d) kijelentés egyaránt tagadása a c) kijelentésnek, így tehát b) és d) tagadása is szerepel a felsorolt kijelentések között, hiszen a c) kijelentés mindkettőnek tagadása.
Megjegyzés: a *„két különböző hosszúságú befogója van"* fordulat derékszögű háromszög esetén ugyanazt jelenti, mint a *„nem egyenlő szárú"*.

77. Nem helyes.
A szóban forgó *ABCD* négyszögről csak annyi bizonyos, hogy paralelogramma.

78. Nem helyes.
A vizsgált *ABCD* négyszög legyen például egy olyan paralelogramma, amelyiknek az egyik szöge 70°-os. Ekkor nyilván nem téglalap ez a négyszög, átlói mégis felezik egymást.

79. Helyes a következtetése.
Ha ugyanis az *ABCD* négyszög (mégis) téglalap lenne, akkor az igaz (tanult) kiinduló feltétel szerint az átlóinak felezniök kellene egymást (ám ez most éppen nem teljesül, mint tudjuk).

80. X úr helytelenül következtetett.
Legyen bár Y úr teljesen felkészületlen (a logikai következtetések szabályait illetően), akkor sem lehetünk eleve biztosak abban, hogy igaz kiindulási feltételek mellett végül biztosan hibás következtetésre jut.
(X úr helytelen következtetési sémája: *Feltétel:* Ha *A*, akkor *B*.
Következtetés: Mivel *nem A*, ezért *nem B*.)

81. Az 1. kijelentés igaz volta miatt érdemes részvényt vennie, csak az a kérdés, melyiket?
A 2. kijelentés igaz, ezért a *„vagy"*-gyal összekapcsolt két kijelentés közül legalább az egyik igaz. Az *„R_1-en nyerni lehet"* kijelentés nem lehet hamis, mert akkor az *„R_2-n veszíteni lehet"* kijelentésnek igaznak kell lennie, vagyis egyik részvény sem hozna nyereséget. Ez pedig ellentmondana az 1. kijelentés igaz voltának.
Az *„R_1-en nyerni lehet"* kijelentés tehát igaz, ezért Okos Katának érdemes R_1 részvényt vásárolnia. (Az R_2-ről nincs biztos információja, ezért, ha óvatos, akkor nem vásárol ebből.)

82. …a $\sqrt{5}$ nem lehet racionális szám.

83. A versenyen 12-en vesznek részt. Rendeljünk hozzá a versenyzőkhöz a lejátszott mérkőzéseinek számát! A feladat feltétele miatt bármelyik versenyző legfeljebb 11 mérkőzést játszott. Így a versenyzőkhöz rendelt lejátszott mérkőzések száma a 0, 1, ..., 11 természetes számok közül kerülhetnek ki. Nem fordulhat elő, hogy két olyan játékos legyen, akik közül egyik 0-t, a másik 11-et játszott; mert az utóbbinak játszania kellett azzal is, aki egy játszmát sem játszott. Ezért 12 helyett legfeljebb 11 különböző szám fejezheti ki azt, hogy ki hány mérkőzést játszott. Így a 12 játékos között lesz legalább kettő olyan, aki addig azonos számú mérkőzést fejezett be.

84. Tudjuk, hogy a sakktáblán lóugrásban haladva egy lépéssel a kiindulási mezőtől különböző színűre jutunk. A következő lépés során a kiindulási mezővel azonos színűre érkezünk. Folytatva a gondolatmenetet megállapíthatjuk, hogy páratlan számú lépés a kezdetitől eltérő, míg a páros számú vele megegyező helyzetet eredményez. Mivel a sakktáblán 49 mező van, ezért a feltétel szerinti teljes bejáráshoz 48 lépés szükséges. Tehát a bejárás végén ugyanolyan színű mezőre érkeztünk, mint amilyenről elindultunk. A kiindulási mezőtől lóugrásnyira azonban csak eltérő színű mezők érhetők el, emiatt nem járható be a sakktábla a feladatban leírtak szerint.

85. Tegyük fel, hogy Magyarországnak 10 millió lakosa van. Ha mindenkinek különböző számú hajszála lenne, akkor lenne 10 millió különböző pozitív egész szám, amelyek mindegyike kisebb, mint 10 millió. Ez lehetetlen. Tehát lennie kell legalább két olyan embernek, akinek pontosan ugyanannyi hajszála van.

86. a) A helyes válasz: három.
Ha három zoknit kiveszünk a fiókból, akkor vagy mindhárom egyszínű (és ebben az esetben biztosan van legalább két egyszínű) vagy kettő egyszínű és a harmadik más színű, így megint van két egyszínű zokni.

b) A helyes válasz: négy.
A feladat első részének okoskodását használva tudjuk, hogy legalább három zoknit kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen egy pár egyszínű zokni. Ahhoz, hogy biztosan legyen két különböző színű zokni, szintén legalább három zoknit kell kivenni. Mivel ugyanannyi fekete és fehér zokni van a fiókban, ebben az esetben azt jelenti, hogy 2 fehér és 2 fekete zokninak kell a fiókban lennie.

87. A vendégek valóban $3 \cdot 9 = 27$ \$-t fizettek, mely a szoba árát – 25 \$ – és a pincér zsebpénzét – 2 \$ – jelentette. Ez a visszakapott 3 \$-ral adja a 30 \$-t. A feladat gondolatmenetében a hiba a $27 + 2 = 29$ összeadásnál van, hiszen itt a szoba árához a pincér kétszer adja hozzá a zsebpénzét, a visszaadott 3 \$-t pedig egyszer sem.

88. a) Igaz, mert $2 \cdot 3 = 6$, így amelyik szám 6-tal osztható, az osztható 3-mal is (másképp: ha $6 \mid a$, akkor van olyan b természetes szám, melyre $6b = a$. Ezt felbontva

tehát $2 \cdot 3b = a$, ebből következik, hogy $3 \mid a$, mert van olyan természetes szám (ez $2b$), melyre teljesül $3 \cdot 2b = a$).

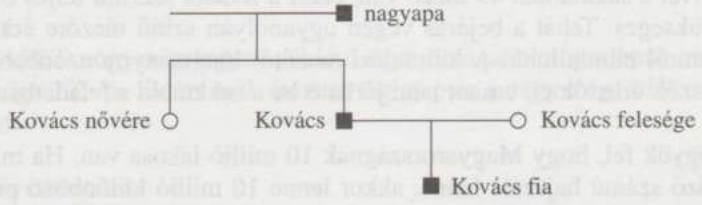
b) Hamis, mert amelyik háromszögnek két szimmetriatengelye van (ez a szabályos háromszög), annak van harmadik szimmetriatengelye is.

c) Az állítás hamis. Ha lenne ilyen x szám, erre teljesülnie kellene: $\frac{1}{x} = -x$, ebből $x^2 = -1$, amelynek a valós számok halmazán nincs megoldása.

d) Igaz az állítás, mert minden paralelogramma középpontosan szimmetrikus.

e) Igaz, mert van olyan egybevágósági transzformáció, amely nem tengelyes tükrözés, pl. az eltolás, elforgatás.

89. Először rajzoljuk fel a családfát, legalábbis az öt személyt:



Ebből leolvasható, hogy:

(1) Mivel Kovácsék mind vérrokonok, csak a feleség nem vérrokona a fiú kivételével a többinek, ezért a feleség ügyvéd vagy tanító.

(2) Sógornője csak Kovács feleségének, illetve nővérének van (kölcsönösen egyik a másiknak). Eszerint kereskedő csak Kovács nővére lehet, mert a felesége, akinek van sógornője, nem lehet kereskedő az (1) miatt. Vagyis Kovács nővére a kereskedő.

(3) Mivel a kereskedő idősebb a sógornőjénél és a tanítónál, tehát a sógornő nem tanító, azaz marad az ügyvéd. Tehát Kovács felesége ügyvéd.

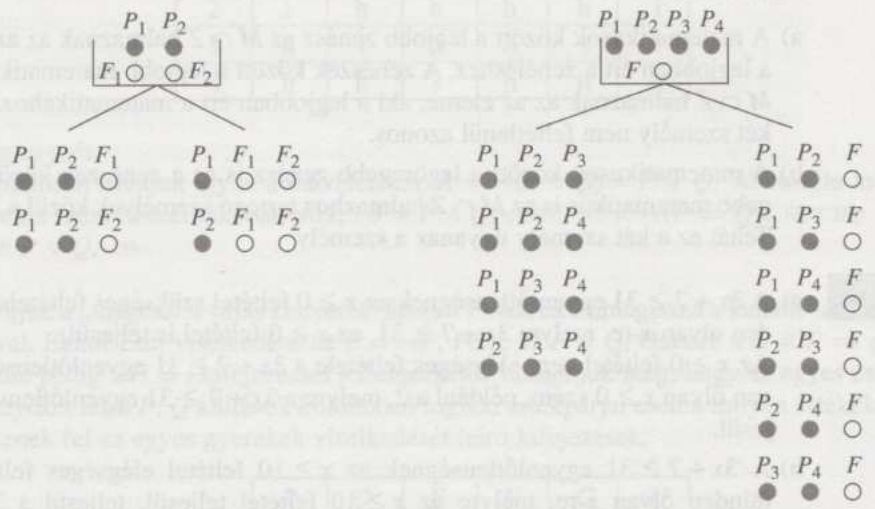
(4) Kovács nővére az apjánál nem lehet idősebb, tehát a tanító Kovács vagy a fia. Az ügyvéd és a tanító nem vérrokon, tehát Kovács fia, aki vérrokona az anyjának, nem lehet tanító. Azaz a tanító Kovács.

(5) Hátra van még a nagyapa és az unoka foglalkozása. Mivel a nagyapa biztos idősebb, ezért ő a mérnök, az unoka pedig a postás.

90. Az első lépésben András partnernőjét találjuk meg, aki nem lehet Olga, mert ő Bélával volt, s mivel András hangversenyen volt, ezért sem Panni (mozi), sem Rozi (színház) nem lehetett vele. Marad a negyedik lány, Sári. Azaz András—Sári-hangverseny az első pár és programja. Kiállításon nem lehetett sem Rozi, sem Panni, marad Olga, és a második információ szerint partnere Béla. Azaz Béla—Olga-kiállítás a második pár és programja. Csaba nem látta Rozit, tehát neki már csak Panni

marad, azaz Csaba—Panni-mozi a harmadik, és kizárásos alapon Dezső—Rozi-színház a negyedik pár és programja.

91. a)



b) Összeadva a lehetséges eseteket: 14 lehetőség van.

c) 4 eset (lásd az ábrát).

d) $2 + 6 = 8$ eset (lásd az ábrát).

e) Ilyen eset nincs, mert egyik kalap sem tartalmaz három fehér golyót.

f) Kimaradt az egy piros és két fehér, ebből éppen két lehetőség van (lásd az ábrát).

92. Jelölje a kékszemű szőkék, a kékszemű nem szőkék, a nem kékszemű szőkék és a nem kékszemű nem szőkék számát rendre a, b, c és d.
Az a tapasztalat, hogy a kékszeműek között több a szőke, mint általában, azt jelenti, hogy

$$\frac{a}{a+b} > \frac{a+c}{a+b+c+d}. \qquad (1)$$

Az a tény, hogy a szőkék között több a kékszemű mint általában, azt jelenti, hogy

$$\frac{a}{a+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d}. \qquad (2)$$

Ha (1) igaz, akkor (2) is igaz (ezt beláthatjuk, ha az (1) egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk a pozitív $\frac{a+b}{a+c}$ törttel), tehát abból, hogy a kékszeműek között több a szőke mint általában, következik, hogy a szőkék között több a kékszemű, mint általában.

93. Ha a matematikusok halmazát M-mel, a zenészek halmazát pedig Z-vel jelöljük, akkor azok a személyek, akik a matematikához is és a zenéléshez is értenek, az $M \cap Z$ halmaz elemei.

a) A matematikusok között a legjobb zenész az $M \cap Z$ halmaznak az az eleme, aki a legjobban ért a zenéléshez. A zenészek között a legjobb matematikus pedig az $M \cap Z$ halmaznak az az eleme, aki a legjobban ért a matematikához. Tehát ez a két személy nem feltétlenül azonos.

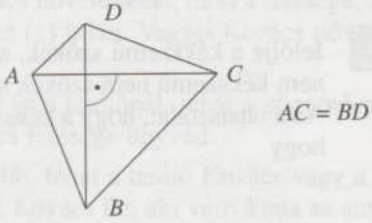
b) A matematikusok között a legöregebb zenész is és a zenészek között a legöregebb matematikus is az $M \cap Z$ halmazhoz tartozó személyek közül a legöregebb. Tehát ez a két személy ugyanaz a személy.

94. a) A $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenségnek az $x \geq 0$ feltétel szükséges feltétele, mert minden olyan x-re, melyre $3x + 7 \geq 31$, az $x \geq 0$ feltétel is teljesül.
Az $x \geq 0$ feltétel nem elégséges feltétele a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenségnek, mert van olyan $x \geq 0$ szám, például a 2, melyre a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenség nem teljesül.

b) A $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenségnek az $x \geq 10$ feltétel elégséges feltétele, mert minden olyan x-re, melyre az $x \geq 10$ feltétel teljesül, teljesül a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenség is. Az $x \geq 10$ feltétel nem szükséges feltétele a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenségnek, mert van olyan $x < 10$ szám, például a 9, melyre a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenség teljesül.

c) A $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenségnek az $x \geq 8$ feltétel szükséges és elégséges feltétele, mivel a $3x + 7 \geq 31$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $x \geq 8$.

95. a) Az állítás hamis, ugyanis van olyan négyszög, melynek átlói egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek, és mégsem négyzet. Ez akkor lehetséges, ha az átlók nem felezve metszik egymást.



b) Az állítás hamis, ugyanis megadható úgy páros számú pozitív egész szám, hogy összegük nem páros. Például: 3; 5; 7; 8.

c) Az állítás igaz, ugyanis ha a két négyzetszám n^2 és m^2, akkor ezek szorzata n^2m^2. Mivel $n^2m^2 = (nm)^2$, ezért n^2m^2 az nm szám négyzete, tehát négyzetszám.

96. Jelöljük a „megeszi a vajas kenyeret" állítást P-vel, és a „megissza a kakaót" állítást Q-val. Ekkor Anti viselkedése az $A = \neg P \wedge \neg Q$, Beáé a $B = P \wedge Q$, Cilié a $C = \neg P \wedge Q$, Danié pedig a $D = P \vee Q$ kifejezéssel jellemezhető. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes eseményeket leíró P; Q állítások különböző logikai értékpárjai esetén milyen értékeket vesznek fel az egyes gyerekek viselkedését leíró kifejezések.

	P	Q	A	B	C	D
1	i	i	h	i	h	i
2	i	h	h	h	h	i
3	h	i	h	h	i	i
4	h	h	i	h	h	h

Megjegyzés:
Formálisan írhatjuk így is a műveleteket: $A = \neg(P \vee Q) = P \nabla Q$, Webb-féle művelet, a számítástechnikában NOR; $B = P \wedge Q$, AND; $C = \neg(P \Leftarrow Q)$, NOT IF; $D = P \vee Q$, OR.

97. Jelöljük a „megeszi a vajas kenyeret" állítást P-vel, és a „megissza a kakaót" állítást Q-val. Ekkor Edit viselkedése az $E = \neg P$, Ferié az $F = Q$, Gáboré a $G = P \Rightarrow Q$, Hédié pedig a $H = i$ kifejezéssel jellemezhető. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes eseményeket leíró P; Q állítások különböző logikai értékpárjai esetén milyen értékeket vesznek fel az egyes gyerekek viselkedését leíró kifejezések.

	P	Q	E	F	G	H
1	i	i	h	i	i	i
2	i	h	h	h	h	i
3	h	i	i	i	i	i
4	h	h	i	h	i	i

Megjegyzés:
Formálisan írhatjuk így is a műveleteket: $E = \neg P$, a számítástechnikában NOT; $F = Q$; $G = P \Rightarrow Q$, IF; $H = i$, konstans „igaz", tautológia, TRUE.

98. a) $p \Rightarrow q$ b) $q \Rightarrow p$ c) $q \Rightarrow \neg p$

99. A bal oldalon álló kijelentés pontosan akkor hamis, ha a C kijelentés hamis, továbbá az A és B közül még legalább az egyik kijelentés szintén hamis.
A jobb oldalon álló kijelentés pontosan akkor hamis, ha az $A \vee C$ és a $B \vee C$ kijelentések közül legalább az egyik hamis. Ehhez a C kijelentésnek mindenképpen hamisnak kell lennie, továbbá az A és B közül még legalább az egyiknek szintén hamis logikai értékűnek kell lennie.
Ezzel beláttuk, hogy a bal oldalon álló kijelentés pontosan akkor hamis, amikor a jobb oldalon álló kijelentés (amiből következik, hogy pontosan ugyanazokban az esetekben igaz a bal oldalon álló kijelentés, mint amelyekben a jobb oldalon álló). (Természetesen „értéktáblázattal" is bizonyíthatunk, a nyolc lehetséges eset hiánytalan felsorolásával.)

100. A bal oldalon álló kijelentés pontosan akkor igaz, ha a C kijelentés igaz, továbbá az A és B közül még legalább az egyik kijelentés szintén igaz.
A jobb oldalon álló kijelentés pontosan akkor igaz, ha az $A \wedge C$ és a $B \wedge C$ kijelentések közül legalább az egyik igaz. Ehhez a C kijelentésnek mindenképpen igaznak kell lennie, továbbá az A és B közül még legalább az egyiknek szintén igaz logikai értékűnek kell lennie.
Ezzel beláttuk, hogy a bal oldalon álló kijelentés pontosan akkor igaz, amikor a jobb oldalon álló kijelentés (amiből következik, hogy pontosan ugyanazokban az esetekben hamis a bal oldalon álló kijelentés, mint amelyekben a jobb oldalon álló).
(Természetesen „értéktáblázattal" is bizonyíthatunk, a nyolc lehetséges eset hiánytalan felsorolásával.)

101. Az $(A \vee B) \wedge C$ kijelentés csak úgy lehet igaz, ha a C kijelentés igaz (az „*és*" miatt). Ekkor azonban az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés is igaz (a „*vagy*" miatt).
A feladat kérdésére tehát a válasz: Nem lehetséges.

102. a) b) Mindkét egyenlőség igaz; erről igazságtáblázattal könnyen meggyőződhetünk. (Mindkét esetben a 4. és 7. oszlop azonosságát kell észrevenni. Ezeket az összefüggéseket nevezik egyébként De Morgan-féle azonosságoknak.)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
i	i	i	h	h	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	h	i	i	h	i
h	h	h	i	i	i	i

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
i	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	h	i	h
h	i	i	h	i	h	h
h	h	h	i	i	i	i

103. a)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	i	h
h	h	h	h

b)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
i	i	i	i
i	h	h	i
h	i	h	h
h	h	h	h

Jól láthatóan mindkét eredmény magával A-val egyenlő.

104. Legyenek az *A*, *B*, *C* kijelentések rendre a következők:
„X bűnös."; „Y bűnös."; „Z bűnös."
Ekkor a feladat szövegében szereplő kijelentések:

1. *A* vagy *nem C*.

2. Ha *nem A* vagy *B*, akkor *C*.

Következtetés: *A*.

Ha az *A* kijelentés hamis lenne (vagyis az „X nem bűnös" kijelentés igaz), akkor az 1. kijelentés csak úgy lehetne igaz, ha a „*nem C*" kijelentés igaz, vagyis a *C* kijelentés („Z bűnös") hamis lenne. Ekkor azonban a 2. kijelentés (ami egy implikáció) csak úgy lehetne igaz, ha a „*nem A vagy B*" kijelentés is hamis. Ez azonban nem lehet, hiszen a „*nem A*" kijelentés kiinduló feltevésünk szerint igaz.
Nem lehetséges tehát az az eset, hogy az *A* kijelentés hamis, ezért az *A* kijelentés igaz, vagyis X valóban csak bűnös lehet.
A bíróság helyesen döntött (és döntése nincs ellentmondásban azzal, hogy az 1. és 2. kijelentésnek igaznak kell lennie).

105. a) Legyen a két ember A és B. Tegyük fel, hogy A hazudik. Ekkor a „legalább egyikünk hazudik" állítás hamis (hiszen A hazudik), tehát mindketten igazmondók. Ha tehát A hazudna, akkor igazat kéne mondania, ami lehetetlen. Tehát A nem hazudhat, csak igazat mondhat. Emiatt állítása igaz, így legalább egyikük tényleg hazudik. Mivel A igazat mond, csak B hazudhat. Tehát A (aki megszólalt) igazat mond, B pedig hazudik.

b) Tegyük fel, hogy A hazudós. Ekkor a fenti állítás hamis. Ezek szerint az sem igaz, hogy A hazudós, és az sem, hogy B igazmondó. Vagyis, ha A hazudós lenne, abból az következne, hogy nem hazudós, ami ellentmondás. Tehát A csak igazmondó lehet. Ekkor állítása igaz, azaz a következő két lehetőség közül legalább az egyik teljesül:

1. A hazudós;

2. B igazmondó.

Mivel az 1. lehetőség hamis (hiszen A igazmondó), a 2. lehetőség teljesül, azaz B igazmondó. Tehát A és B mindketten igazmondók.

c) A nem lehet igazmondó, mert ekkor állítása igaz lenne, ami miatt hazudósnak kellene lennie. Tehát A hazudós. Ekkor állítása hamis. (Tehát mivel ő hazudós – így az állítás első része igaz lenne –, B nem lehet igazmondó). Ha B igazmondó lenne, akkor A állítása igaz lenne. Így B is hazudós. Tehát A és B mindketten hazudósak.

106. Jelöljük András számát a-val, Béla számát b-vel ($a \in \mathbf{N}^+$ és $b \in \mathbf{N}^+$). A feltételekből $|a - b| = 2001$. Ha András egy 2002-nél kisebb számra gondolt volna, akkor Béla száma ennél csak 2001-gyel nagyobb lehetne, azaz András rögtön tudná, mire

gondolt Béla. Mivel András nem tudja Béla számát, ebből Béla tudja: $a \geq 2002$. Ha ezek után Béla már tudja András számát, akkor
$b - 2001 < 2002$,
$b < 4003$.
Ha $b = 4003$ lenne, akkor Béla sem tudná András számát, hiszen $b - 2001$ és $b + 2001$ egyaránt számításba jöhetne.
Tehát $b = 4002$ és $a = 6003$.

107. a) Legyen A = „jó a vége", B = „jó (maga a dolog)". Az állítás ekkor (némileg egyszerűsített formalizmussal leírva): $A \Rightarrow \forall B$; a tagadása pedig az egyszerűsítési szabályok szerint: $\neg(A \Rightarrow \forall B) = \neg(\neg A \vee \forall B) = A \wedge \neg \forall B = A \wedge \exists \neg B$, azaz van (olyan dolog), ami nem jó, és (mégis) jó a vége.

b) Most legyen A = „a szél fújja", B = „a haraszt zörög". Az állítás ekkor $\neg A \Rightarrow \neg B$; tagadása pedig $\neg(\neg A \Rightarrow \neg B) = \neg(\neg(\neg A) \vee \neg B) = \neg(A \vee \neg B) =$
$= \neg A \wedge B$; vagyis szóban: nem fújja a szél, és (mégis) zörög a haraszt.

108. Jelöljük a „megeszi a vajas kenyeret" állítást P-vel, és a „megissza a kakaót" állítást Q-val. Ekkor Ildi viselkedése az $I = \neg(P \Rightarrow Q)$, Jancsié a $J = P \oplus Q$, Katié a $K = \neg(P \wedge Q)$, Lalié pedig az $L = P$ kifejezéssel jellemezhető. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes eseményeket leíró P; Q állítások különböző logikai értékpárjai esetén milyen értékeket vesznek fel az egyes gyerekek viselkedését leíró kifejezések.

	P	Q	I	J	K	L
1	i	i	h	h	h	i
2	i	h	i	i	i	i
3	h	i	h	i	i	h
4	h	h	h	h	i	h

Megjegyzés:
Formálisan írhatjuk így is a műveleteket: $I = \neg(P \Rightarrow Q)$; $J = P \oplus Q$, az antivalencia művelete, más néven „kizáró vagy", a számítástechnikában XOR; $K = \neg(P \wedge Q) = P \mid Q$, Scheffer-féle művelet, a számítástechnikában NAND; $L = P$.

109. Jelöljük a „megeszi a vajas kenyeret" állítást P-vel, és a „megissza a kakaót" állítást Q-val. Ekkor Miki viselkedése az $M = P \Leftarrow Q$, Nóráé az $N = P \Leftrightarrow Q$, Olgáé az $O = \neg Q$, Feróé pedig az $F = h$ kifejezéssel jellemezhető. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes eseményeket leíró P; Q állítások különböző logikai értékpárjai esetén milyen értékeket vesznek fel az egyes gyerekek viselkedését leíró kifejezések.

	P	Q	M	N	O	F
1	i	i	i	i	h	h
2	i	h	i	h	i	h
3	h	i	h	h	h	h
4	h	h	i	i	i	h

Megjegyzés:
Formálisan írhatjuk így is a műveleteket: $M = P \Leftarrow Q$; $N = P \Leftrightarrow Q$, az ekvivalencia művelete, a számítástechnikában XNOR; $O = \neg Q$; $F = h$, konstans „hamis", FALSE. Az utolsó állítás megfogalmazása lehet, hogy nem a legszerencsésebb, de a konstans „hamis"-ra nem könnyű jobbat találni. Némi kultúrtörténeti áthallással – az idézet egy korszakos, *mindent tagadó* zenei stílus fő slágeréből való, és a név is utal erre – mégis megfejthető.)

(A 96., 97., 108. és 109. példák eredményei különben felölelik a két állítás között értelmezhető összes logikai műveletet, az összes lehetséges eredményoszlopot, a teljes 16-os műveleti táblát.)

1.3. Kombinatorika

110. A szám állhat 6 db hatosból – egyféleképp; 5 db ötösből és 1 db egyesből, $\binom{6}{1}$, azaz hatféleképp; 4 db négyesből és 2 db kettesből, $\binom{6}{2}$, azaz tizenötféleképp; s végül 3 db hármasból, 2 db kettesből, 1 db egyesből, $\frac{6!}{2!\cdot 3!}$, azaz hatvanféleképp. Összesen $1 + 6 + 15 + 60 = 82$ db ilyen szám van.

111. Mivel a kilyukasztott számok sorrendje érdektelen, itt kombinációról van szó. Két, három, illetve négy számot a kilenc közül rendre $\binom{9}{2}$, $\binom{9}{3}$, $\binom{9}{4}$-féleképpen lehet kiválasztani. E binomiális együtthatók értéke sorban 36, 84, 126; összegük pedig 246. Ennyiféle lyukasztás lehetséges (az adott feltételek mellett).

112. Mivel az azonos helyezések között nincs különbség, a 12 induló közül $\binom{12}{1} = 12$-féleképpen választható ki az 1 győztes, a többiek közül $\binom{11}{2} = 55$-féleképpen választható ki a 2 második, a többiek közül pedig $\binom{9}{3} = 84$-féleképpen a 3 harmadik. Mivel mindegyik lehetőség mindegyikkel együtt előfordulhat, ezért e számok szorzata, 55 440 a lehetséges díjazások száma. Ha a győztes külföldi, akkor az első helyezett csak $\binom{4}{1} = 4$-féle lehet, a többi helyezések lehetséges száma nem változik, így most a megoldás: $4 \cdot 55 \cdot 84 = 18\,480$.

113. a) 8 elem összes lehetséges sorrendje $P_8 = 8! = 40\,320$.

b) 8 elemből az első hármat kell sorrendben kiválasztani, $V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

114. a) Mivel a könyvek különbözőek, és egy diák csak egyet kaphat, egyszerű variációról van szó: $V_{28}^3 = \frac{28!}{(28-3)!} = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

b) Mivel a könyvek különbözőek, de egy diák többet is kaphat, ismétléses variációról van szó: $V_{28,\text{ism}}^3 = 28^3 = 21\,952$.

c) Mivel az utalványok egyformák, és egy diák csak egyet kaphat, egyszerű kombinációról van szó: $C_{28}^{3} = \binom{28}{3} = \frac{28!}{(28-3)!\cdot 3!} = 3276.$

d) Mivel az utalványok egyformák, és egy diák többet is kaphat, ismétléses kombinációról van szó: $C_{28,\text{ism}}^{3} = \binom{28+3-1}{3} = \frac{30!}{(30-3)!\cdot 3!} = 4060.$

115. *Első megoldás* (az ún. felépítő módszerrel): a zászló ekkor állhat három különböző, vagy két egyforma és egy tőlük különböző színű sávból. Öt közül három különböző színt sorrendben $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$-féleképp választhatnak. (A színek sorrendje nyilván számít, hiszen pl. a magyar és a bolgár lobogó sem egyforma, noha ugyanazokból a színekből áll.) A két egyforma sáv színét 5-féleképpen, a tőlük különböző harmadikét a maradékból 4-féleképpen választhatják ki, tehát $5 \cdot 4 = 20$-féle színválasztéka van a második esetnek –, de hányféleképp lehet egyforma két sáv? Háromféleképp, ugyanis vagy az első kettő egyforma (kb. ilyen a belorusz zászló), vagy a két szélső (pl. osztrák), vagy a két alsó (ilyen a létező nemzeti lobogók között nincs). Ebben az esetben tehát még $20 \cdot 3 = 60$ lehetőségük van. Összesen $60 + 60 = 120$-féle lobogó készülhet a feltételek alapján.

Másik megoldás (az ún. lebontó módszerrel): tekintsük az öt színből készíthető összes háromsávos lobogót, minden feltétel nélkül. Ekkor minden sávra minden szín választható, $5^3 = 125$-féleképpen (ismétléses variáció). A feltétel miatt ezek közül azonban el kell hagyni a csupa egyszínű zászlókat. Ilyen nyilván éppen 5 db van, vagyis a lehetőségek száma: $125 - 5 = 120$.

116. Az oroszlánok külön $P_5 = 5! = 120$-féleképpen állhatnak sorban, a tigrisek pedig $P_4 = 4! = 24$-féleképpen. Még „össze kell fésülni" a két külön sort: ha a tigrisek nem jöhetnek egymás után, akkor el kell őket helyezni az oroszlánok közé – vagy elé és mögé! Így összesen 6 hely kínálkozik (legelöl egy, az oroszlánok között négy, leghátul egy), ezekre kell elhelyezni a 4 tigrist. A 6 közül az a 4 hely, ahová tigrist állíthat a szelídítő, $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választható ki. Mivel minden oroszlán-sorrendhez minden tigris-sorrend és minden elhelyezkedés társulhat, ezért az összes lehetőségek száma $120 \cdot 24 \cdot 15 = 43\,200$.

117. Először is tisztázzuk, hogy a 32 lap között van egy piros ász, három nem-piros ász, hét nem-ász piros lap, és 21 olyan, ami se nem piros, se nem ász. Ketté kell választani az eseteket aszerint, hogy a piros ászt kihúzzuk-e vagy sem, mert ez a lap mindkét feltételnek megfelel. Ha kihúzzuk, akkor már csak 1 további ászt (a 3 lehetséges közül) és 1 további pirosat (a 7 lehetséges közül) kell húznunk, így három kihúzott

lapnál tartunk. A 6 laphoz a többi hármat a 21 „semleges" közül kell húzzuk, ezért erre $\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{21}{3} = 3\cdot 7\cdot 1330 = 27\,930$ lehetőségünk van. Ha viszont a piros ász nem szerepel a kihúzott lapok között, akkor mindkét ászt a többi 3, és mindkét pirosat a többi 7 közül kell húzzuk – négy lapunk van, a többi kettőt kell a 21 „semleges" közül húznunk. Erre $\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{21}{2} = 3\cdot 21\cdot 210 = 13\,230$ lehetőségünk van.

A két különböző eset lehetőségeinek száma összeadódik, így a végeredmény $27\,930 + 13\,230 = 41\,160$.

118. A biztos nyeréshez annyi szelvény kell, amennyi az összes lehetőségek száma. Ötös lottónál: ahányféleképpen 90-ből 5 számot ki lehet húzni: $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

Ugyanez a hatos lottónál: $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$. Azaz a hatos lottón kevesebb mint ötöd-része a biztos nyereményhez szükséges szelvények száma. (Másképpen fogalmazva itt egy szelvénnyel játszva nagyobb a nyerés esélye.)

119. a) Az ötös lottón az összes lehetséges szelvények száma (lásd előző feladat) $\binom{90}{5}$, azaz 43 949 268. Ezt 5 mp/szelvény sebességgel $43\,949\,268\cdot 5 = 219\,746\,340$ mp alatt lehetne kitölteni, ez több mint 2543 nap, közel 7 év.

b) A hatos lottón az összes lehetséges szelvények száma (lásd előző feladat) $\binom{45}{6}$, azaz 8 145 060. Ezt 6 mp/szelvény sebességgel $8\,145\,060\cdot 6 = 48\,870\,360$ mp alatt lehetne kitölteni, ez nem egész 566 nap, több mint másfél év.

c) A totó 14 mérkőzésének mindegyikére 3-féle tippet lehet adni, ezt $3^{14} =$ $= 4\,782\,969$-féleképpen lehet megtenni (ismétléses variáció), vagyis ennyi az összes lehetséges szelvények száma. Ezt 14 mp/szelvény sebességgel $4\,782\,969\cdot 14 = 66\,961\,566$ mp alatt lehetne kitölteni, ez 775 nap, kb. két év és másfél hónap.

120. Az esélyek a lehetőségek számának reciprokával arányosak:

Belgium $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$,

Jugoszlávia $\binom{36}{5} = 376\,992$,

Hollandia $\binom{41}{6} = 4\,496\,388$,

Svájc $\binom{36}{6} = 1\,947\,792$,

Magyarország $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

Azaz az esélyek a legvalószínűbbtől kezdve: Jugoszlávia, Svájc, Hollandia, Belgium, Magyarország.

121. Az ötös lottón az összes lehetséges szelvények száma (lásd 118. feladat): $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$. Négytalálatosak azok a szelvények, amelyeken az 5 jó számból eltaláltunk 4-et, és a 85 rosszból 1-et, ezt $\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 5 \cdot 85 = 425$-féleképpen lehet. Hasonló gondolattal a hármas, illetve kettes találatok száma: $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 10 \cdot 3570 = 35\,700$, illetve $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} = 10 \cdot 98\,770 = 987\,700$.

122. A hatos lottón az összes lehetséges szelvények száma (lásd 118. feladat): $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$. Öttalálatosak azok a szelvények, amelyeken a 6 jó számból eltaláltunk 5-öt, és a 39 rosszból 1-et, ezt $\binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1} = 6 \cdot 39 = 234$-féleképpen lehet. Hasonló gondolattal a négyes, illetve hármas találatok száma: $\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2} = 15 \cdot 741 = 11\,115$, illetve $\binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3} = 20 \cdot 9139 = 182\,780$.

123. A totón az összes lehetséges szelvények száma $3^{14} = 4\,782\,969$ (lásd 119. feladat). 13-as találat azokon a szelvényeken van, amelyeken jó az első 13 tipp, de a +1 mérkőzésre rossz tippet adtunk, ezt 2-féleképpen lehet (a harmadikféle tipp a jó, de az a szelvény telitalálatos). 12-találatosak azok a szelvények, amelyeken az első 13 tipp közül 12 jó, 1 rossz. Melyik lehet a rossz? $\binom{13}{1} = 13$-féle meccs tippje lehet rossz, mindegyik 2-féleképpen – és ez esetben a +1 mérkőzésre írt mindhárom tipp rossznak számít. Vagyis $13 \cdot 2 \cdot 3 = 78$ db 12-találatos szelvény van. Hasonlóan a 11-, illetve 10-találatosok száma: $\binom{13}{2} \cdot 2^2 \cdot 3 = 78 \cdot 4 \cdot 3 = 936$, illetve $\binom{13}{3} \cdot 2^3 \cdot 3 = 286 \cdot 8 \cdot 3 = 6864$.

124. Ezt az elrendezést nevezik körpermutációnak. Az „igazi" permutációhoz képest itt egyrészt annyival kevesebb eset van, hogy a kör mentén egy hellyel odébb forgatva egy elrendezést nem kapunk új elhelyezést (hiszen mindenkinek mindkét szomszédja ugyanaz maradt), míg egy „hosszanti" elrendezést egy hellyel arrébb csúsztatva (és a volt utolsó elemet előre téve) nyilván más permutációt kapunk. 37 elem esetén éppen 37 különböző elforgatás lehetséges, ami mind ugyanazt az egyetlen elhelyezést jelenti. Másrészt bármely elrendezést tükrözhetjük valamely átmérőre, ez sem ad új elhelyezést, hiszen a szomszédok ugyanazok maradtak. (Egy lineáris sorrendet megfordítva megint nyilván más permutációt kapunk.) Ezért a sorbarendezés 37! lehetőségét osztanunk kell 37-tel a forgatás és 2-vel a tükrözés miatt, így az eredmény: $\frac{37!}{37 \cdot 2} = \frac{36!}{2} \approx \frac{3{,}72 \cdot 10^{41}}{2} \approx 1{,}86 \cdot 10^{41}$. (Általában is igaz a példa feltételeivel, hogy n különböző elem egy kör mentén $\frac{(n-1)!}{2}$-féle sorrendben helyezhető el.)

125. A hátsó 6 hely közül 3-on van kettes, ez $\binom{6}{3} = 20$ esetet jelent. A többi három helyen az 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek bármelyike állhat, és – telefonszámról lévén szó – a sorrendjük is számít, ez $8^3 = 512$ lehetőség. Bármelyik eset bármelyik lehetőséggel állhat párban, így $20 \cdot 512 = 10\,240$ ilyen telefonszám van.

126. a) $6! = 720$ különböző válasz lehetséges.

b) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ különböző válasz adható.

c) Az aláhúzás nem jelöl ki sorrendet a megjelölt pártok között, ezért $\binom{6}{3} = 20$ különböző válasz lehetséges.

d) Az aláhúzott pártok száma 0-tól 6-ig bármennyi lehet, az aláhúzás nem jelöl ki sorrendet a megjelölt pártok között. A különböző lehetőségek száma tehát:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64.$$

127. a) $3^3 = 27$

b) 3 nyerő helyzet van (3 narancs vagy 3 alma vagy 3 körte). Ez az összes esetnek az egy kilenced része (11,1%-a).

c) Ha minden eset egyforma eséllyel következik be, akkor átlagosan az esetek kilenced részében nyerünk; esetenként 7 pénzérmét kapunk a géptől.
Például 900 egymás utáni menet során 900 pénzérmét biztosan „elnyel" a gép és kb. 700 pénzérmét fizet ki, vagyis 200 pénzérme körüli veszteségre számíthatunk.

Nem célszerű tehát ezzel a géppel hosszú ideig játszani. (Ez nem jelenti azt, hogy nem lehet „szerencsénk", amikor olyan sorozatot sikerül produkálnunk, amelyben egyenlegünk pozitív, vagy nem lehetünk „szerencsétlenek", amikor is egyenlegünk még a fentiekben kiszámított várhatónál is rosszabb.)

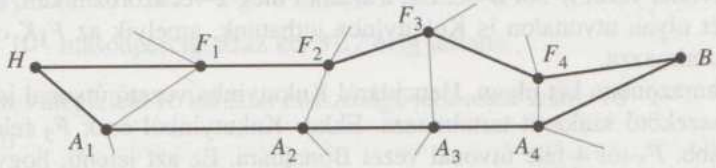
128. Ha Jancsi almát választott, akkor Juliskának $11 \cdot 10 = 110$ választási lehetősége van. Ha Jancsi barackot vesz ki, akkor Juliska $12 \cdot 9 = 108$-féleképpen választhat egy almát és egy barackot, tehát az első esetben van több lehetősége.

129. Egy adott foghelyen két eset van: van fog vagy nincs fog. 32 foghely esetén $2^{32} = 4\,294\,967\,296 \approx 4{,}3$ milliárd lehetőség van. Ha ennél több lakosa van egy országnak, akkor biztosan van legalább két olyan lakosa, akinek ugyanazokon a helyeken hiányoznak a fogai.
A Föld népessége a fenti számnál nagyobb, tehát a második kérdésre a válasz: nem fordulhat elő.

130. Az összes lehetőségek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$. Ezek között azoknak a száma, amelyekben „a" lila szoknya és „a" zöld blúz együtt szerepel: $4 \cdot 3 = 12$.
X úr tehát $180 - 12 = 168$ nap „türelmi időt" kapott.

131.* Mindegyik fiú 5 munkahely bármelyikét választhatja, a lányok 4 munkahely közül választhatnak. Összesen tehát $5^3 \cdot 4^2 = 2000$-féleképpen helyezkedhetnek el.

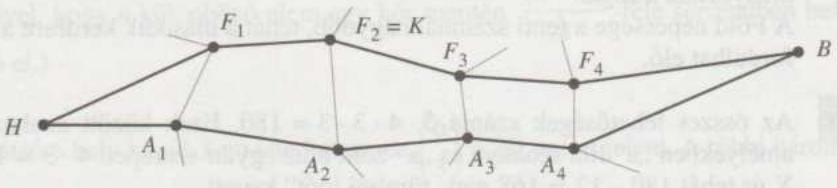
132. Hencidáról elindulva összesen 5 alkalommal dönthetünk arról, hogy a lehetséges két-két út közül melyiket válasszuk (miközben akár olyan útvonalat is választhatunk, amelyik az összes útkereszteződésen áthalad). Így tehát $2^5 = 32$ különböző módon juthatunk el Hencidáról Boncidára.
Indoklás: A könnyebb átláthatóság kedvéért jelöljük az ábra szerint az útkereszteződéseket.



Az első döntést Hencidán (H) kell meghoznunk, majd az első kereszteződésnél ismét két lehetőség közül választhatunk. Legyen az első útkereszteződés pl. az F_1.
Ha F_1-nél nem térünk le az országútról, akkor a következő kereszteződésnél (F_2-nél) ismét két lehetőségünk van. Ha azonban F_1-nél az összekötő utat választjuk, akkor az A_1 kereszteződést elérve nincs választási lehetőségünk, csak az A_2 felé haladhatunk. A_2-be érve ismét két lehetőség közül választhatunk: vagy A_3 felé folytat-

juk utunkat (és ekkor A_3-ban ismét két út közül választhatunk), vagy F_2 felé haladunk, ahová elérve nincs más választásunk, mint F_3 felé továbbhaladni.
A gondolatmenetet tovább folytatva világos, hogy ha egy útkereszteződést átléptünk, akkor a következő kereszteződésben csak akkor lesz választási lehetőségünk, ha magasabb indexű kereszteződés felé haladunk (azaz országúton haladva érkezünk a következő kereszteződéshez). Ha olyan kereszteződés felé haladunk, amelynek indexe az éppen elhagyottéval megegyezik (azaz éppen valamelyik összekötő úton haladunk), akkor a kereszteződést elérve nincs választási lehetőségünk, utunkat csak egyféleképpen folytathatjuk (országúton kell továbbmennünk). Mivel „visszafelé" nem haladhatunk, ez éppen azt igazolja, hogy a Hencidáról Boncidára vezető útvonal kijelölésekor 5 alkalommal van döntési lehetőségünk, s ezek mindegyikénél két-két út közül választhatunk.

133.



Ha az F_1K országúti szakaszon érkezünk Kukutyinba, akkor a Kukutyinból Boncidára vezető útvonalak számát a következő okoskodással is megkaphatjuk:
A KF_3 és A_2A_3 országúti szakaszok közül pontosan az egyiken végig kell haladnunk. Ezután az F_3F_4 és az A_3A_4 országúti szakaszok közül pontosan az egyiken fogunk végighaladni, végül pedig az F_4B és az A_4B országúti szakaszok közül pontosan az egyiken fogunk B-be érkezni.
(Látható, hogy a Kukutyinból Boncidára vezető bármelyik útvonal mindegyik fenti párból pontosan egy országúti szakaszt tartalmaz és fordítva, ha mindhárom párból kiválasztunk egy-egy országúti szakaszt, akkor ehhez a három szakaszhoz egyértelműen tartozik egy Kukutyinból Boncidára vezető útvonal).
Mindhárom pár esetén két-két választási lehetőségünk van, ezért $2^3 = 8$ különböző útvonal vezet K-ból B-be. Ezt a számot még 2-vel szorozni kell, hiszen Hencidáról két olyan útvonalon is Kukutyinba juthatunk, amelyik az F_1K országúti szakaszt tartalmazza.
Van azonban két olyan, Hencidáról Kukutyinba vezető útvonal is, amelyik az A_2K összekötő szakaszt tartalmazza. Ekkor Kukutyinból csak F_3 felé indulhatunk tovább. F_3-tól 4-féle útvonal vezet Boncidára. Ez azt jelenti, hogy 8 olyan útvonal van, amelyik Hencidáról indulva az A_2 kereszteződésen áthaladva jut Kukutyinba, majd onnan Boncidára vezet.
Az összes különböző, Hencidáról Boncidára vezető, Kukutyint is érintő útvonalak száma tehát $16 + 8 = 24$.

134. A menetiránnyal szemben $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$-féleképpen foglalhat helyet az a négy utas, akinek ez a kívánsága. A szemközti ülésen, a menetiránynak háttal $5 \cdot 4 \cdot 3 =$

= 60-féleképpen foglalhat helyet az ezt igénylő három utas. A megmaradt három helyre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen ülhet le a három, menetirányra „érzéketlen" utas.
Az összes lehetőségek száma: $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43\,200$.

135. a) $\binom{30}{4} = 27\,405$-féleképpen.

b) $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$-féleképpen.

136. A diákok elé egy-egy csészét ($4 \cdot 3 \cdot 2$-féle eset), csészealjat ($5 \cdot 4 \cdot 3$-féle eset) és kiskanalat ($6 \cdot 5 \cdot 4$-féle eset) teszünk. Az összes esetek száma:
$(4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 172\,800$.

Másik megoldás:
Csészéből, csészealjból és kiskanálból is hármat-hármat kell kiválasztanunk. Ezt $\binom{4}{3}\binom{5}{3}\binom{6}{3} = 800$-féleképpen tehetjük meg. Ezután mind a három csészealjra egy-egy csészét és egy-egy kiskanalat kell helyezni: ez $(3!)^2 = 36$ lehetőség.
Még az is fontos, hogy melyik diák melyik terítéket (melyik csésze – csészealj – kiskanál „hármast") kapja, ezért az összes különböző terítési lehetőségek száma:
$800 \cdot 36 \cdot 3! = 172\,800$.

137. A párnákat helyezzük el egy sorban. Ezt $4! = 24$-féleképpen tehetjük meg. A sorban első és második párnát a kanapé bal oldalára tesszük, sorrendjüket megtartva. A takarást kétféleképpen valósíthatjuk meg. Ugyanígy járjunk el a jobb oldalra kerülő másik két diszpárnával is.
Az összes különböző elrendezések száma tehát $24 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.
Zsóka asszony 96 nap után ismétlésre kényszerül.

138. a) A 10 számjegyből 10^{16} különböző, 16 karakter hosszúságú jelsorozat készíthető. A számítógépnek (vagy több számítógépnek együtt) az összes eset megvizsgálása $\frac{10^{16}}{10^7} = 10^9$ másodpercig, azaz kb. 31,7 évig tartana.

b) Az összes megfelelő 16 karakter hosszúságú jelsorozat száma $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10^{12} = 9 \cdot 10^{13}$.
A számítógépes program $9 \cdot 10^6$ másodperc, azaz kb. 104 nap alatt képes ennyi esetet megvizsgálni.

139. Az összes különböző esetek száma $10 \cdot \binom{24}{5} \cdot 9^{19} \approx 5{,}74 \cdot 10^{23}$. Ennyi eset megvizsgálása kb. $1{,}82 \cdot 10^{16}$ évig tartana (vagyis „reménytelen" vállalkozás).

140. A rendszámtábla készítésekor az első, második és harmadik helyre a 26-féle betű bármelyike kerülhet; a negyedik, ötödik és hatodik helyre pedig a 10 számjegyből választhatunk egymástól függetlenül. Mivel a „000"-ra végződő rendszámtáblák nem megengedettek, ezért összesen $26^3 \cdot (10^3 - 1) = 999 \cdot 26^3 = 17\,558\,424$-féle rendszámtábla készíthető Magyarországon.

141. Mivel a rendszámtábla 3 betűjének kiválasztásakor a sorrend számít és ugyanazt a betűt többször is kiválaszthatjuk, ezért a betűk kiválasztására annyi különböző lehetőségünk van, amennyi 24 elem 3-ad osztályú ismétléses variációinak a száma, azaz $24^3 = 13\,824$.
A 10 számjegyből kiválasztható, nem 0-val kezdődő 3 jegyű számok száma:
$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.
Tehát az adott módon készíthető különböző rendszámtáblák száma:
$900 \cdot 13\,824 = 12\,441\,600$.

142. a) 26^2 és 10^4 szorzata: 6 760 000.

b) Az elvileg kioszthatók rendszámok száma most 26^3 és 10^3 szorzata: 17 576 000, ez az előzőnek 2,6-szorosa, azaz 160%-kal több annál. (A gépjárműpark növekedése tette szükségessé az új rendszer bevezetését.)

143. A kettes számrendszerben két számjegy van: 0; 1. Mivel egy valódi tízjegyű szám nem kezdődhet 0-val, ezért a szám felírásakor az első helyre egyféleképpen választhatunk, a további helyekre pedig egymástól függetlenül kétféleképpen írhatunk számjegyet. Így a megoldás 2^9.

144. Mivel egy valódi ötjegyű szám nem kezdődhet 0-val, ezért a szám felírásakor az első helyre 9-féleképpen választhatunk számjegyet; a második, harmadik, negyedik helyen egymástól függetlenül a tíz számjegy bármelyikét választhatjuk. A felírt szám akkor lesz páratlan, ha az utolsó számjegye páratlan, így a szám utolsó számjegyét ötféleképp írhatjuk fel. Így a megoldás: $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45\,000$ darab páratlan, pontosan ötjegyű szám van a tízes számrendszerben.

Másik megoldás:
A tízes számrendszerben ugyanannyi ötjegyű páros szám van, mint ahány ötjegyű páratlan szám. Mivel összesen 90 000 db ötjegyű szám van, ezek fele, 45 000 páratlan.

145. Az első helyre a 237 lány bármelyike kerülhet, a második helyre a 236 lány közül kell választani, és így tovább. Tehát $237 \cdot 236 \cdot 235 \cdot 234 \cdot 233 \cdot 232 \cdot 231 \cdot 230$-féle sorrend lehetséges, ennyiféle műsor készülhet róluk.
Ha már eldőlt a helyezések sorrendje, utána a beszélgetés sorrendje már egyértelműen adott, először a 8. helyezett, legvégén az 1. helyezett.

146. a) $231 \cdot 230 \cdot 229 = 12\,166\,770$-féleképpen állhat fel a vezetőség. Elnököt 231-féleképpen választhatunk, ettől függetlenül titkárt a maradék 230 tag közül, ettől függetlenül pénztárost 229 fő közül.

b) Először a budapesti szövetség elnökének választunk tisztséget a 3 poszt közül, majd ettől függetlenül a maradék két tisztségre választunk egy-egy embert. Ez $3 \cdot 230 \cdot 229$-féleképp történhet.

Másképp: *jó esetek száma = összes eset száma – rossz esetek száma* módszerrel:
Összes eset száma: $231 \cdot 230 \cdot 229$.
Rossz esetek száma: azok az esetek, amelyekben a budapesti szövetség elnökének nem jut semmilyen tisztség. Rossz esetek száma: $230 \cdot 229 \cdot 228$.
Így a megoldás: $231 \cdot 230 \cdot 229 - 230 \cdot 229 \cdot 228 = 3 \cdot 230 \cdot 229$.

147. A MICIMACKÓ szó kiolvasásához az első betűtől az utolsóig 5 lépést kell jobbra és 3 lépést kell lefelé megtenni. Ez $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$-féleképpen tehető meg.

148. Ha egy 8 x 8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába úgy jutunk el, hogy minden alkalommal egyet lépünk vagy jobbra vagy felfelé, akkor összesen 14-et kell lépni, mégpedig 7 alkalommal jobbra, 7 alkalommal pedig felfelé. A jobbra lépést jelöljük *J*-vel, a felfelé lépést pedig *F*-fel. Így minden útnak egyértelműen megfelelhetünk egy 7 darab *J* betűből és 7 darab *F* betűből álló jelsorozatot. A megfordítás is igaz, minden 7 darab *J* betűből és 7 darab *F* betűből álló jelsorozathoz egyértelműen megfeleltethető egy a feltételeknek megfelelő út. Így a keresett utak száma megegyezik 14 elem olyan ismétléses permutációinak a számával, melyben csak két különböző elem van, de mindegyik 7-szer ismétlődik.

Ez a szám: $\frac{14!}{7!\,7!} = 3432$.

149. $\binom{20}{2} \cdot \binom{30}{3} = 771\,400$-féleképpen választhatnak küldöttséget a tanulók (20 lány közül kettőt, és ettől függetlenül a 30 fiú közül hármat kell kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít).

150. Megoldás: *jó esetek száma = összes eset száma – rossz esetek száma* módszerrel:
Ha az összes „négyjegyűből" (nem igazi négyjegyű szám, hiszen az első helyen a 0 is szerepelhet) kivonjuk azokat a „négyjegyűeket", amelyben nincs 5-ös, akkor megkapjuk azokat a „négyjegyűeket", amelyben legalább egy 5-ös szerepel.

Az összes „négyjegyű" 10^4 db (minden helyre egymástól függetlenül 10-féle lehetőség). Olyan „négyjegyű", amelyben nincs 5-ös, 9^4 db (minden helyre egymástól függetlenül 9-féle lehetőség: 0; 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9).

A keresett „négyjegyű" számok száma $10^4 - 9^4 = 3439$.
Ha percenként 15 különböző esetet tud kipróbálni, akkor a legrosszabb esetben $3439 : 15 \approx 229{,}27$ perc $\approx 3{,}8$ óra szükséges a zár kinyitásához.

151. Az első sorba 18 lány közül, melléje ettől függetlenül 18 fiú közül választhatunk.
A második sorba 17 lány közül, melléje ettől függetlenül 17 fiú közül választhatunk.
A harmadik sorba 16 lány közül, melléje ettől függetlenül 16 fiú közül választhatunk.
A utolsó sorba már csak 1 lány marad, melléje ettől függetlenül már csak a „maradék" 1 fiú kerülhet. Mivel minden sorban álló fiú és lány helyet cserélhet, ez a többiekhez és az osztályfőnökhöz képest is más elendezést jelent, a sorrendek száma minden cserénél kétszeres lesz. Így az összes esetek száma:
$18 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^{18} = 18! \cdot 18! \cdot 2^{18}$.

152. a) $\binom{18}{3}\binom{15}{4}\binom{11}{5}\binom{6}{6} = 514\,594\,080$

b) Ha a csónakokon belüli helyeket is megkülönböztetjük, olyan, mintha minden helyet megszámoztunk volna 1-től 18-ig, ide 18!-féleképpen lehet leültetni a tanulókat.

153. 6 forduló után akkor lehet 4 pontja a versenyzőnek, ha

a) 4 győzelme, 0 döntetlenje, 2 veresége vagy

b) 3 győzelme, 2 döntetlenje, 1 veresége vagy

c) 2 győzelme, 4 döntetlenje, 0 veresége van.

Ezek száma a) esetben $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$, b) esetben $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$, c) esetben $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$.
Így az összesen $15 + 60 + 15 = 90$-féleképpen lehet a 6. forduló után 4 pontja.

154. Hat forduló után egy játékosnak csak úgy lehet 3 pontja, ha a nyert mérkőzések száma, a döntetlen mérkőzések száma és a vesztett mérkőzések száma rendre:

3	0	3	vagy
2	2	2	vagy
1	4	1	vagy
0	6	0.	

Mivel nem számít, hogy a játékos milyen sorrendben érte el az eredményt, így hat forduló után 3 pontot 4-féleképpen érhetett el a versenyző.

155. 21 vörös bor közül kell kiválasztanunk 2-t, hogy a sorrend nem számít és 36 fehér bor közül 1-et. Majd az így kiválasztott 3 bort összes lehetséges helyezési sorrendbe állítjuk.

$\binom{21}{2}\binom{36}{1} \cdot 3! = 45\,360$-féle „dobogós" sorrend lehetséges.

156. a) 4!-féleképpen, ami 24 eset.

b) Kezeljük egy egységként az egymás mellett ülőket: ekkor 3 elem lehetséges sorrendje 3! = 6. Azonban az egyben kezelt páros is kétféleképpen ülhet egymás mellett, így a végeredmény $6 \cdot 2 = 12$.

157. a) Az első gombóc 5-, a második 4-féle lehet, tehát $5 \cdot 4 = 20$-féle eset van összesen.

b) Ekkor az első és a második gombóc is 5-féle lehet, tehát $5^2 = 25$-féle eset van.

c) Ekkor a két gombóc sorrendje nem számít, le kell osztani az a)-beli eredményt kettővel, azaz 10 eset van.

Másik gondolat: az 5-ből 2-t kell kiválasztani, ez $\binom{5}{2} = 10$.

d) Ekkor van 5-féle, két azonos gombócból álló fagyi, valamint a c)-beli 10 különböző, az 15-féle fagylalt összesen.

Ha ismerjük az ismétléses kombinációt, akkor: $\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

158. Három szekcióban van 6 egymás utáni előadás. Feltéve, hogy a párhuzamos előadások időtartama azonos, akkor minden előadás után 3 folytatás között választhatnak a hallgatók. Mivel mindig három választás van, ezért $3^6 = 729$-féle programot állíthatnak össze a résztvevők.

159. a) Az első bélyeg 8-, a második 7- (különböző színűek a bélyegek), a harmadik 6-, a negyedik 5-féle színű lehet, azaz $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ színben készülhet a bélyegsorozat.

b) Ha semmilyen megkötés sincs a színre, akkor bármelyik 8-féle színű lehet, tehát $8^4 = 4096$-féle sorozat létezik.

c) Ha legfeljebb három egyszínű lehet a sorozatban, akkor az előbbi 4096-ból le kell számítani a csupa egyszínű eseteket, amiből éppen 8 van, tehát ekkor 4088-féle színvariáció van.

160. a) Az első három helyezett sorrendje $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$-féleképpen alakulhat ki.

b) Ha bármelyik fenti eset egyforma esélyű, akkor $\frac{1}{336} \approx 0,003$ (azaz kb. 0,3%) eséllyel nyerünk.

c) Minden egyes helyet a 336 lehetőség közül pontosan 42-szer találunk el, hiszen a másik két helyre $7 \cdot 6$ tipp írható. Összesen tehát van $3 \cdot 42 = 126$ találat. Vannak azonban két- és háromtalálatos eredmények is, tehát összesen kevesebb, mint 126 nem 0 találatos tippszelvény lesz.

Vegyük számba a többtalálatos szelvények számát: a 336 lehetőség közül 1-ben eltaláljuk mind a három helyet. Pontosan két helyet 15 esetben találunk el: ugyanis 3-ból 1-et nem találtunk el, hogy melyiket, azt $\binom{3}{1} = 3$-féleképpen választhatjuk, és mindegyikben az el nem talált helyre 5 rossz tippet írhatunk (a 8 közül az 1 jót nem, meg azt a kettőt sem, ami a másik két helyen jó helyen van), és $3 \cdot 5 = 15$. Ez így összesen $1 \cdot 3 + 2 \cdot 15 = 33$ találat. A többi mind egyes találat, tehát abból $126 - 33 = 93$ darab van. Azaz a keresett esély, mivel

1 (3 találatos) $+ 15$ (2 találatos) $+ 93$ (1 találatos) $= 109$; $\frac{109}{336} \approx 0,32$.

Másik megoldás:

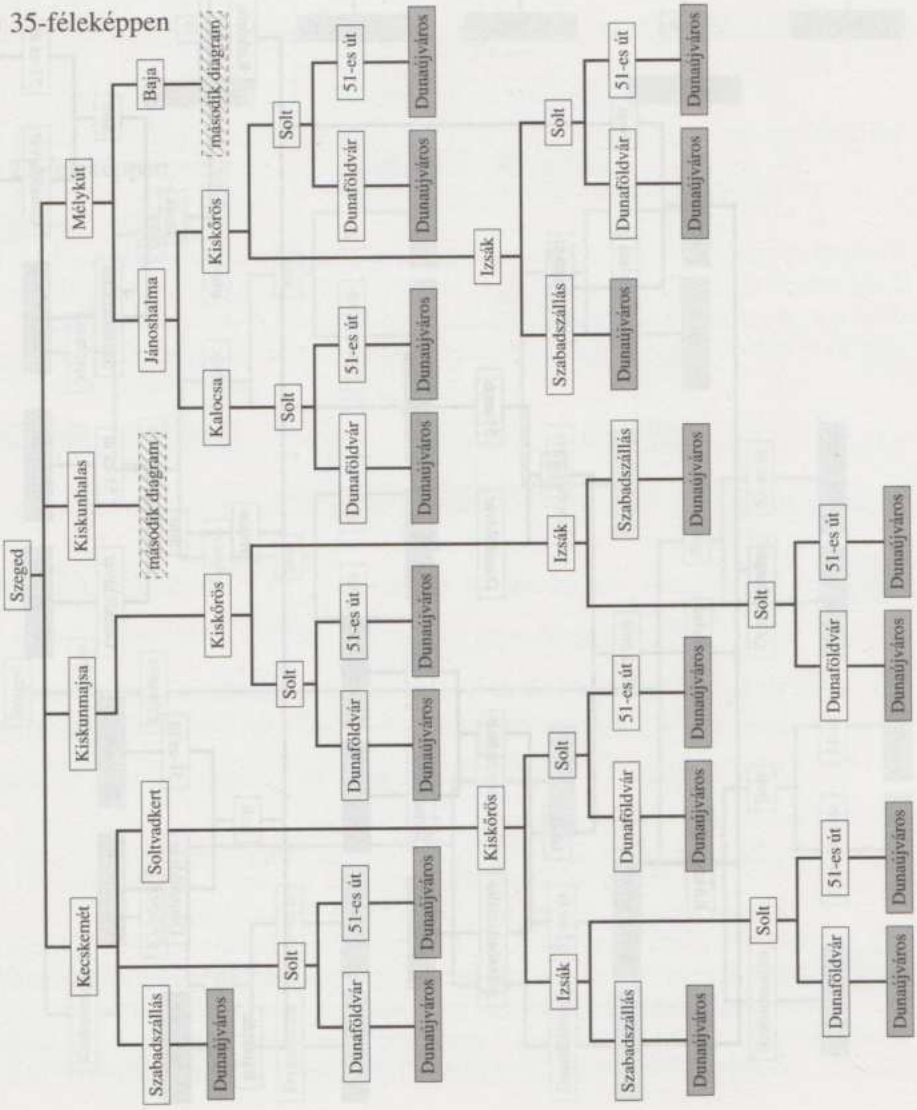
Pontosan 93 egytalálatos szelvény van, amihez hozzávéve a 15 db 2 találatost és az 1 db 3 találatost ugyanaz az eredmény adódik. Ekkor 2-t nem találunk el, de melyiket, ez $\binom{3}{2} = 3$-féle lehetőség. Mindegyikben az el nem talált helyekre a következő tippek írhatóak: ha az egyik el nem talált helyre azt írjuk, ami igazából a másik el nem talált helyre fut be, akkor erre a másik el nem talált helyre 6 rossz tipp lehet (a 8 közül egy jó helyen van, egy másik az első el nem talált helyen, a többi lehet rossz). Ha viszont az első el nem talált helyen nem a másik el nem talált helyre igazából befutót írtuk, akkor 5-félét írhattunk ide (a 8 közül azt nem, amit eltaláltunk, és azt sem, ami ide lett volna jó, meg azt sem, ami a másik helyre lett volna jó), és mindegyikhez 5-félét társíthatunk a másik el nem talált helyen (azt a kettőt nem, ami a másik két helyen van, meg azt sem, ami jó lett volna). Így végül $3 \cdot (6 + 5 \cdot 5) = 93$ egytalálatosunk van. Tehát ebben az esetben is a *legalább* egytalálatosok száma 109, vagyis az esély $\frac{109}{336} \approx 0,32$.

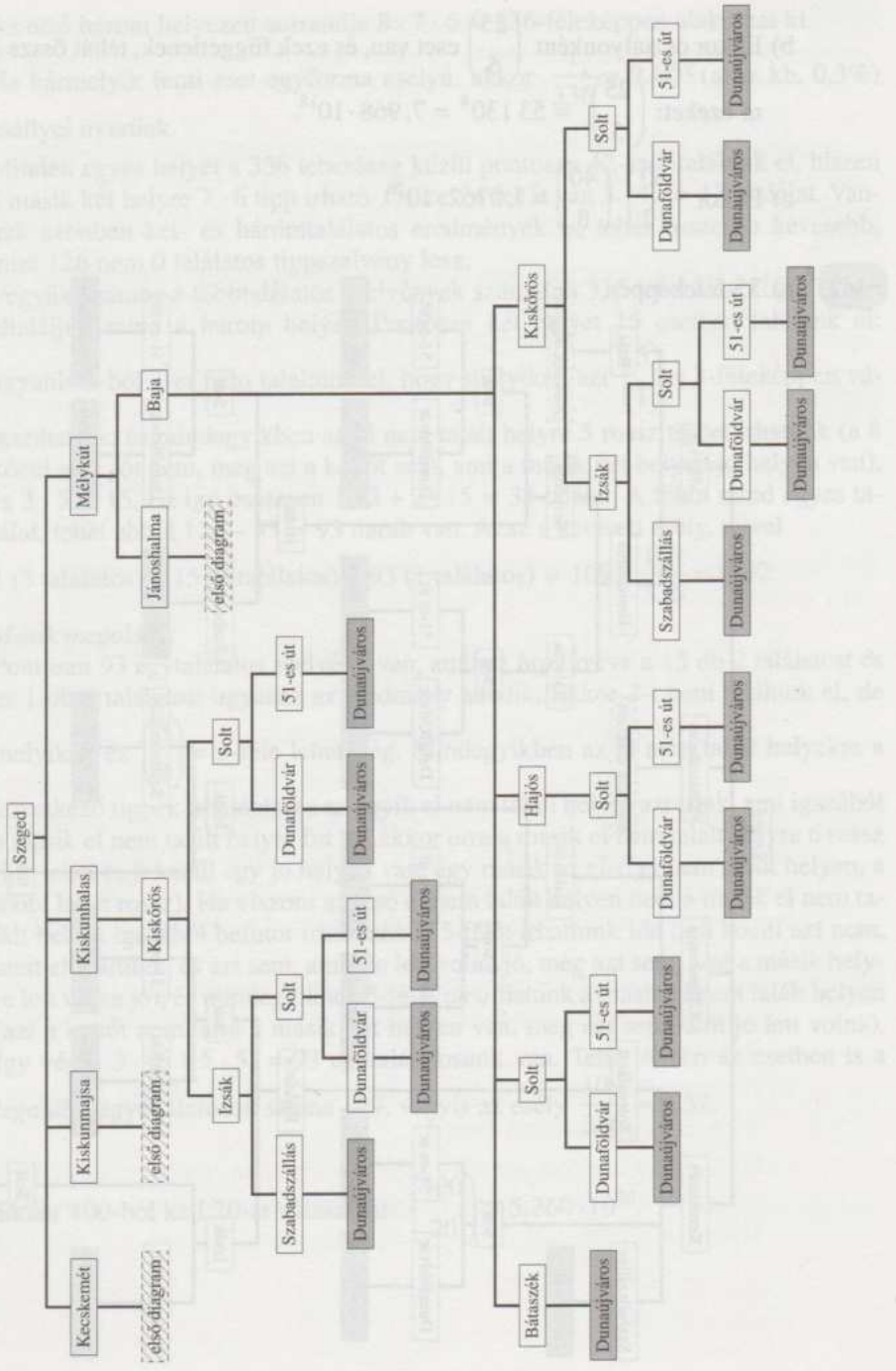
161. a) Ekkor 100-ból kell 20-at választani: $\binom{100}{20} = 5,360 \cdot 10^{20}$.

b) Ekkor osztályonként $\binom{25}{5}$ eset van, és ezek függetlenek, tehát össze kell szorozni ezeket: $\binom{25}{5}^4 = 53\,130^4 = 7{,}968 \cdot 10^{18}$.

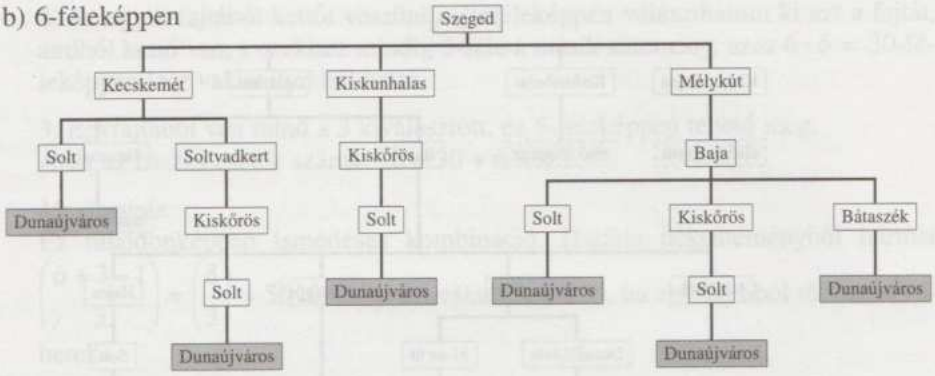
c) Ekkor $\binom{60}{12} \cdot \binom{40}{8} = 1{,}0762 \cdot 10^{20}$.

162.* a) 35-féleképpen

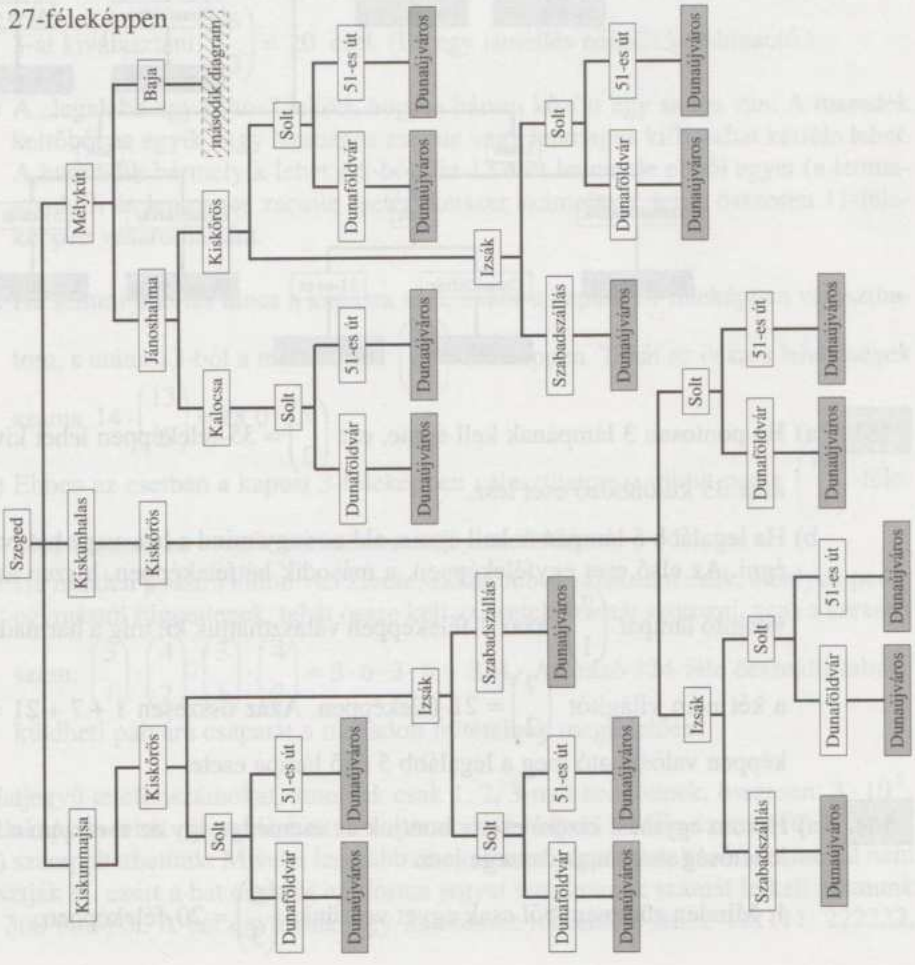


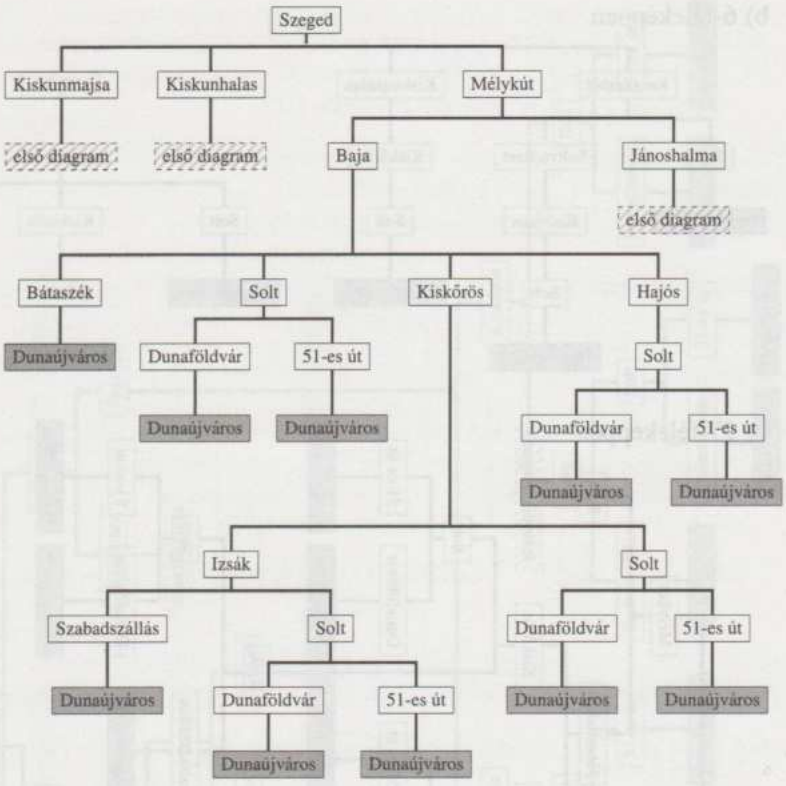

Szeged
Kecskemét
Kiskunmajsa
Kiskunhalas
Mélykút
Baja
Jánoshalma
Kiskőrös
első diagram
első diagram
első diagram
Izsák
Solt
Dunaföldvár
51-es út
Dunaújváros
Szabadszállás
Solt
Dunaföldvár
51-es út
Dunaújváros
Dunaújváros
Dunaújváros
Dunaújváros
Kiskőrös
Bátaszék
Hájós
Izsák
Solt
Dunaföldvár
51-es út
Dunaújváros
Solt
Dunaföldvár
51-es út
Dunaújváros
Dunaújváros
Dunaújváros
Szabadszállás
Solt
Dunaföldvár
51-es út
Dunaújváros
Dunaújváros
Dunaújváros
Dunaújváros

b) 6-féleképpen



c) 27-féleképpen





163. a) Ha pontosan 3 lámpának kell égnie, ezt $\binom{7}{3} = 35$-féleképpen lehet kiválasztani, azaz 35 különböző eset lesz.

b) Ha legalább 5 lámpának kell égnie, akkor vagy mind a hét, vagy hat, vagy öt fog égni. Az első eset egyféleképpen, a második hétféleképpen, hiszen az egy nem világító lámpát $\binom{7}{1}$, azaz 7-féleképpen választhatjuk ki, míg a harmadik esetben a két nem világítót $\binom{7}{2} = 21$-féleképpen. Azaz összesen $1 + 7 + 21 = 29$-féleképpen valósítható meg a legalább 5 égő lámpa esete.

164. a) Három egymást kizáró esetre bontjuk az eseményt, így az esetszám e háromféle lehetőség számának összege lesz.

1. Minden süteményből csak egyet veszünk: $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen.

2. Az egyik fajtából kettőt veszünk. Hatféleképpen választhatom ki azt a fajtát, amiből kettő van, s ezekhez mindig 5-féle a másik sütemény, azaz $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen lesz valamelyikből kettő.

3. Egyfajtából van mind a 3 kiválasztott, ez 6-féleképpen tehető meg.
Azaz az összes esetek száma: $20 + 30 + 6 = 56$.

Megjegyzés:
Ez tulajdonképpen ismétléses kombináció. Hatféle péksüteményből hármat $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$-féleképpen választhatok ki, ha egy fajtából többet is vehetek.

b) Ha semelyikből nem akarok egynél többet, akkor tehát a 6 péksüteményből kell 3-at kiválasztani: $\binom{6}{3} = 20$ eset. (Ez egy ismétlés nélküli kombináció.)

c) A „legalább egy sajtos" leköti, hogy a három között egy sajtos van. A maradék kettőből az egyik vagy lenmagos zsemle vagy lenmagos kifli, tehát kétféle lehet. A harmadik bármelyik lehet a 6-ból. Ez 12 eset lenne, de ebből egyet (a lenmagos kifli és lenmagos zsemle esetét) kétszer számoltam, tehát összesen 11-féleképpen vásárolhattam.

165. a) Ha semmi kikötés nincs a kapusra sem, akkor a kapust 14-féleképpen választhatom, s utána 13-ból a másik 5 főt $\binom{13}{5}$-féleképpen. Tehát az összes lehetőségek száma $14 \cdot \binom{13}{5} = 18\,018$.

b) Ebben az esetben a kapust 3-féleképpen választhatom a többit pedig $\binom{11}{5}$-féleképpen, azaz az esetek száma most már csak 1386.

c) Ha minden posztra külön van kerete, akkor abból választhat csak, amelyek pedig egymástól függetlenek, tehát össze kell az esetek számát szorozni, azaz a keresett szám: $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} = 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = 324$. Az edző 324-féle összeállításban küldheti pályára csapatát a megadott feltételnek megfelelően.

166. Hatjegyű telefonszámokat, amelyek csak 1, 2, 3-mal kezdődnek, összesen: $3 \cdot 10^5$-féleképpen lehet megadni, hiszen a maradék öt helyen 10-féle számot (0, 1, 2, …, 9) szerepeltethetünk. Mivel a legalább öt egyforma jegyet tartalmazó számokat nem osztják ki, ezért a hat és az öt egyforma jegyet tartalmazók számát le kell vonnunk a 300 000-ből. A hat egyforma jegy mindössze háromféle lehet: 111111, 222222,

333333. Öt egyforma jegy kétféleképpen valósulhat meg, az első jegy is benne van, vagy a második öt az egyforma. Az első esetben az egyetlen nem 1, 2 vagy 3 jegyet 5-féleképpen lehet elhelyezni, és az 9-féle lehet (pl. 111110, 111101, ..., 111119, ..., 191111), ez 45 eset, ha 1-gyel kezdődik a szám. Mivel lehet 2 vagy 3 is az elején: $3 \cdot 45 = 135$ eset. Ha az öt egyforma az utolsó öt jegy, akkor ez minden kezdetre 9-féle lehet, tehát $9 \cdot 3 = 27$ eset. Tehát legalább öt azonos jegyű szám $3 + 135 + 27 = 165$ esetben van. Kioszthatnak ezek szerint $300\,000 - 165 = 299\,835$ telefonszámot.

167. a) Négy gyermek között kell négy munkát elosztani. Ha feltételezzük, hogy mindenki egy munkát végez, akkor $4! = 24$-féle beosztás van.

b) Ha mindenki minden nap mást csinál, akkor legfeljebb 4 napig lehet ezt jól beosztani, hiszen a skatulyaelv szerint az ötödik napon mindenki valamit ismétel. A négy napot is át kell gondolni, van-e a négy munkának 4 olyan felsorolása (permutációja), hogy minden helyen minden munka éppen egyszer szerepeljen. A ciklikus permutáció erre éppen jó, tehát bmts (bevásárlás, mosogatás, terítés, szemétlevitel), mtsb, tsbm, sbmt egy jó beosztás.

168. a) Mivel a talonban lévő lapok sorrendje közömbös, ezek $\binom{32}{2} = 496$-félék lehetnek.

b) Mivel itt is közömbös a lapok sorrendje, az eredmény $\binom{32}{10} = 64\,512\,240$.

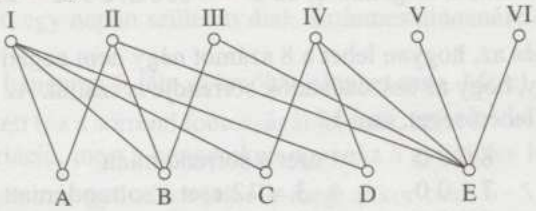
169. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből 4 darab számjegyet $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választhatunk ki ismétlődés nélkül. Valamely 4 darab számjegy kiválasztása esetén az ezekből a számjegyekből a feltételeknek megfelelő módon $4! = 24$ darab négyjegyű szám készíthető. Tehát összesen $15 \cdot 24 = 360$ darab négyjegyű szám összegének a meghatározása a feladat. Nézzük először az egyesek helyén álló számjegyek összegét. Mivel az adott hat számjegy a feladat szempontjából azonos szerepet tölt be, ebben az összegben mindegyik számjegy $\frac{360}{6} = 60$ esetben fordul elő. Ebből adódóan az egyesek helyén álló számjegyek összege:

$$60(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1260.$$

A tízesek, a százasok, az ezresek helyén álló számjegyek összege is, hasonlóan az egyesek helyén álló számjegyek összegéhez, 1260.
Ezek alapján a keresett négyjegyű számok összege:

$$1260 \cdot 10^3 + 1260 \cdot 10^2 + 1260 \cdot 10 + 1260 = 1260 \cdot 1111 = 1\,399\,860.$$

170. a) A pihenő személyt nevezhetjük hatodik, F „munkának". Ekkor ahány sorrendje van a 6 betűnek, annyi beosztás létezik: $6! = 720$.



b) Az ábráról leolvasható szűk keresztmetszetek az A, C, D munkák, mert azokat csak 2-2 fő végezheti, ráadásul I mindháromban szerepel, IV pedig C és D-ben. Ezért, mivel C és D munkát ugyanaz a két ember végezheti el, csak két eset lehet, vagy I végzi C-t és IV a B-t, vagy fordítva. Ekkor azonban, mivel I kötve van, az A munkát csak II végezheti. Azaz A, C és D munkákat kétféleképpen lehet beosztani: II, I, IV; vagy II, IV, I. A B munkát, mivel I és II már foglalt, csak III végezheti. Ekkor E-re (mivel I, II, III, IV foglalt) már csak V vagy VI jön szóba, de ők ketten az ábra szerint el is tudják végezni. Azaz nincs választás A és B munka esetén: ezeket II, illetve III végzi. C-re és D-re van alternatíva, de csak az I-IV pár. Hasonlóan E-re is. Ez $2 \cdot 2 = 4$ eset, amit az alábbi táblázat mutat:

A	B	C	D	E	tartalék
II	III	I	IV	V	VI
II	III	I	IV	VI	V
II	III	IV	I	V	VI
II	III	IV	I	VI	V

Azaz a cégnél mindössze *négy eset közül* választhatnak a munkaterv meghatározásakor.

171. a) A legfeljebb 9-jegyű tizes számrendszerbeli szám lehet 1-, 2-, …, 9-jegyű. Egyjegyű van 10 darab (0, 1, 2, …, 9). Kétjegyű 90 (mert elöl nem lehet 0). Háromjegyű 900 (elöl nincs 0) stb. Tehát összesen: 10^9, azaz 1 000 000 000 ilyen szám van. (Egyszerűbb megfontolás: 10^9-ig éppen ennyi szám van, beszámítva a 0-t, de persze nem számítva magát a 10^9-t.) Kettes számrendszerben egyjegyű szám 2 van, kétjegyű szintén 2, háromjegyű 4, …, kilencjegyű 2^8.

Ez összesen $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 = 2^9 = 512$ eset.

A kérdésre a válasz: $1\,000\,000\,000 - 512 = 999\,999\,488$-cal több legfeljebb 9-jegyű szám van a tizes számrendszerben, mint a kettesben.

b) A feltétel szerint keresendő az a legkisebb n érték, amelyre 2^n már nagyobb, mint 10^9. Mivel 2^{10} nagyobb, mint 10^3 $(1024 > 1000)$, tehát $(2^{10})^3 = 2^{30}$ nagyobb,

mint $(10^3)^3 = 10^9$, tehát $n = 30$ biztosan megfelel. Azt kell csupán megnézni, hogy a 29 nem elegendő-e, de $2^{29} = 536\,870\,912 \approx 5{,}4 \cdot 10^8$, ez még kevés!

172. a) A kérdés az, hogyan lehet a 8 számot négy nem negatív egész összegére felbontani úgy, hogy az összeadandók sorrendje is számít. Az alábbi táblázat mutatja az összes lehetőséget, ami 15.

8 0 0 0	4 eset a sorrend miatt
7 1 0 0	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
6 2 0 0	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
6 1 1 0	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
5 3 0 0	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
5 2 1 0	$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ eset a sorrend miatt
5 1 1 1	4 eset a sorrend miatt
4 4 0 0	6 eset a sorrend miatt (4 alatt a 2)
4 3 1 0	$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ eset a sorrend miatt
4 2 2 0	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
4 2 1 1	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
3 3 2 0	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
3 3 1 1	6 eset a sorrend miatt (4 alatt a 2)
3 2 2 1	$4 \cdot 3 = 12$ eset a sorrend miatt
2 2 2 2	1 eset

Megjegyzés: az esetek száma, ha a sorrendet is figyelembe vennénk (ami nem volt kérdés) az utolsó oszlopban álló 15 szám összege volna, tehát:
$8 \cdot 12 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 1 = 96 + 48 + 8 + 12 + 1 = 165$.

b) Ha csak a pozitívak számítanak, akkor a 15-ből kiesnek mindazon esetek, ahol szerepel a 0. Ezek száma: 10, tehát mindössze 5 eset marad. (*Megjegyzés:* ha itt is számítana a sorrend, akkor $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ eset volna.)

173. a) Mivel a sorrend nem számít, a legnagyobb összeadandó szerint sorba rendezve ugyanazok az esetek lehetnek, mint a 172. feladat a) részében megadott táblázat bal oldalán, azaz 15 eset lehet.

b) Hasonlóan ismét a 172. b) megoldáshoz, a táblázat baloldalán a 0-át nem tartalmazó sorok száma mindössze 5.

174. a) Ekkor az első felírt szám 366-féle, a második már csak 365-féle lehet stb.
Tehát $366 \cdot 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 334 \approx 8{,}89 \cdot 10^{83}$.

b) Az összes lehetséges születés nap eloszlása, mivel mindenki 366 napon születhetett elvileg, így $366^{33} \approx 3{,}934 \cdot 10^{84}$-féleképpen fordulhat elő.
Megjegyezzük, hogy a két szám hányadosa éppen annak az esélye, hogy a 33 ember mindegyike más napon született, azaz nincs két azonos születésnap, aminek esélye – azzal a feltételezéssel, hogy egyenletes eloszlás szerint születünk

bármelyik napon (ez nem igaz, de mégis elég jó becslés!) – kb. 0,23, tehát kevesebb, mint 25%. Azaz több, mint 75% annak az esélye, hogy pl. egy 33 fős osztályban van két, egy napon született diák. Érdemes utánanézni a naplóban.

175. a) Mind a három hengeren 6-féle gyümölcs jelenhet meg. Mivel a hengerek térbeli helyzete rögzített (ez a sorrend fontosságát jelenti), ezért $6^3 = 216$ lehetőség lesz (ismétléses variáció, mert a hengereken ugyanaz a gyümölcs is megjelenhet).

b) Ha mindegyiken más gyümölcs jelenik meg, akkor csak $6 \cdot 5 \cdot 4$ lehetőség van, mert a második hengeren nem jelenhet meg az elsőn levő gyümölcs, a harmadikon pedig az első két henger gyümölcse, azaz ott már csak 4 lehetőség marad. Ez összesen: 120 lehetőség.
Megjegyzés: ebből és az a)-beli eredményből az is látszik, hogy 96 olyan eset van, ahol valamelyik gyümölcs legalább két hengeren jelenik meg.

c) A pontosan két azonos gyümölcs esetszáma megkapható úgy, hogy az összes esetből levonom a három különbözőt, és a mindhárom egyformát, ami 6 eset. Eszerint: $216 - 120 - 6 = 90$.
Másként is lehet számolni, közvetlenül az esetek összeszámlálásával. Az a gyümölcs, amelyik kétszer fordul elő, 6-féleképpen választható ki. A maradék gyümölcs 5-féle lehet. Ez eddig $6 \cdot 5 = 30$ eset, azonban az egy különbözőt három hengerre tehetem, tehát összesen a sorrenddel 90 esetet kapunk, ahogyan azt a másik módon is kiszámítottuk.

d) Legalább két azonos gyümölcs a b)-beli megjegyzés szerint éppen 96 esetet jelent, mert az összes esetből elhagyom azokat, amelyekben mind a három gyümölcs különböző $(216 - 90)$.

176. a) Két hételemű halmaz között egy-egyértelmű függvényt $7! = 5040$-féleképpen készíthetünk. Ennek oka, hogy az első elemhez 7 különböző értéket rendelhetünk, a másodikhoz már csak 6-ot, és így tovább. Tulajdonképpen egy 7 elemű halmaz permutációinak számát számoljuk így le.

b) Mivel nincs kikötve, hogy különböző elemekhez különbözőt rendeljek, ezért bármelyik elemhez 7-félét rendelhetek, azaz $7^7 = 823\,543$ különböző függvény adható meg. Ha a két halmazt felcserélhetőnek tekintjük, akkor $2 \cdot 7^7 = 1\,647\,092$ függvény adható meg.
Megjegyzés: ez a feladat lehetőséget ad a permutáció, illetve az ismétléses variációk függvényekkel történő megadására. Érdekes meggondolni, hogy a többi kombinatorikai alapfogalmat milyen függvények számával lehet megadni.

177. a) 4 levesből egyet négyféleképpen lehet választani, főételt négy-, köretet három-, majd desszertet is háromféleképpen. Ha nincs semmi megkötés arra, hogy mit mivel eszem vagy nem eszem, azaz a választások függetlenek, akkor az esetek száma, amit egy fával is ábrázolhatunk: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$.

b) Ebből a 144-ből most csak 5 kapható, amiből csak 1 vegetáriánus. A négy főből akkor a két vegetáriánus rendelése egyértelmű. A másik kettő választhat mind az ötből (akár vegetáriánust is), tehát mindkettő mind az öt menüt választhatja. Ekkor vagy azonosat rendelnek: ez 5 eset, mert bármelyik menü lehet, vagy különbözőt, amelyek száma: $\binom{5}{2} = 10$. Tehát 15-féleképpen rendelhetnek.

Másik gondolatmenet: a két vegetáriánus menü mellé kell még két menüt választani, amit – ha a sorrendet is figyelembe vennénk – 25-féleképpen lehet megtenni ($5 \cdot 5$). Ebből 5 eset olyan, hogy azonosak a menük, ezeknél nincs „különböző" sorrend. A maradék 20 esetet felezni kell, mert a konyha számára nem számít, hogy ki eszi az egyik és ki a másik menüt. Így is megkapjuk tehát a 15 esetet.

Harmadik megoldás: két rendelés adott, a másik két személy 5 menü közül rendelhet szabadon (ehetnek vegetáriánus menüt is!). Ez ismétléses kombináció, mivel a személyek sorrendje nem számít, 5 étel két személy: $\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$ választásuk lehet (mindegyikhez hozzájön két vegetáriánus menü). Tehát 15-féle rendelés lehet.

Megjegyzés: az is elfogadható, ha valaki szisztematikusan felsorolja a 15 esetet, megmutatva, hogy semmit sem hagyott ki.

178. a) Jóskát hatból hárman, Pistát a maradék háromból ketten, míg Karcsit a hatodik lakásból hívták, az már egyértelmű az előzőekből. Az összes esetek száma tehát $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 20 \cdot 3 \cdot 1 = 60$.

b) Ha csak az eloszlást tudjuk, akkor a „három, kettő, egy" hívást 3! = 6-féleképpen oszthatjuk ki Jóska, Pista és Karcsi között, tehát az a)-beli válasz hatszorosa, 360 eset lehetséges.

c) Ha a hívások száma egyenletes, akkor mindhármukat ketten hívták, így az a)-beli módon számolva: $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen hívhatták ki Jóskát, $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen Pistát, és $\binom{2}{2} = 1$-féleképpen Karcsit, tehát $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$ eset lehetséges.

179. Jelöljük a műsorokat H, Z, R kezdőbetűikkel. Mivel 5 perc egész számú többszöröse lehet csak egy fajta műsor ideje, ezért 6 darab 5 perces blokkot kell tervezni, tehát hatbetűs „szavakat" kell keresni.

a) Eszerint minden betűnek legalább egyszer elő kell fordulnia. Ha nincs ez a meg-

kötés, akkor az összes eset 3^6, mivel 3 közül választhatunk 6-szor. Ezek közül rossz mindaz, amelyben csak 2 betű van, amit 3-féleképpen választhatunk ki: HZ, HR, RZ. Mindegyik esetben 2^6 sorrend lehetséges. Ezek rosszak, tehát a kérdésre a válasz: $3^6 - 3 \cdot 2^6 = 537$ eset.

b) Ez azt jelenti, hogy nem lehet egymás mellett egyforma betű. A következőképpen lehet okoskodni: 3-féleképpen kezdődhet a műsor, utána kétféleképpen folytatódhat, mert váltás van, aztán ismét kétféle stb., tehát: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ műsorterv lehetséges. Mivel mindhárom műfajnak szerepelnie kell, ki kell vonni a csak kétfélét tartalmazó műsorokat, amiből ismét három eset van: RZ, HZ, RH. Vegyük az elsőt, ebből két változat lehetséges csak: vagy RZRZRZ, vagy ZRZRZR a műsor. Ugyanígy a másik két esetben, tehát mindössze $3 \cdot 2$, azaz 6 eset van, amikor valamelyik műfaj kimarad. Ezt levonva az összes lehetséges hármas, váltogatós műsortervek száma 90.

180. Rögzítsük például a fiúknak egy sorrendjét. A táncoló pároknak annyiféle összetétele lehetséges, ahányféle különböző sorrendben tudjuk hozzárendelni a lányokat a fiúkhoz. Ez a szám $12! = 479\,001\,600$.

181. Ha két szabályos dobókockával egyszerre dobunk és a kapott számokat összeadjuk, akkor ez az összeg legalább 2, de legfeljebb 12 lehet.
A lehetséges összegeket, előfordulási számukat és a bekövetkezési lehetőségeket az alábbi táblázat tartalmazza:

Összeg	Előfordulási szám	Bekövetkezési lehetőség
2	1	1 + 1
3	2	1 + 2; 2 + 1
4	3	1 + 3; 3 + 1; 2 + 2
5	4	1 + 4; 4 + 1; 2 + 3; 3 + 2
6	5	1 + 5; 5 + 1; 2 + 4; 4 + 2; 3 + 3
7	6	1 + 6; 6 + 1; 2 + 5; 5 + 2; 3 + 4; 4 + 3
8	5	2 + 6; 6 + 2; 3 + 5; 5 + 3; 4 + 4
9	4	3 + 6; 6 + 3; 4 + 5; 5 + 4
10	3	4 + 6; 6 + 4; 5 + 5
11	2	5 + 6; 6 + 5
12	1	6 + 6

a) A táblázatból látható, hogy elvileg leggyakrabban a 7-es összeg fordulhat elő.

b) A táblázatból látható, hogy a páros számösszeg és a páratlan számösszeg ugyanannyiszor, 18-18-szor fordul elő. Tehát sokszor dobva – elvileg – ugyanannyiszor fordul elő páros összeg, mint páratlan.

182. A félévi és az év végi bizonyítványban matematikából rendre az alábbi osztályzatok szerepelhetnek:

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5

A táblázatból látható, hogy az elvileg lehetséges esetek száma 25. Ebből 15-ször teljesül, hogy legalább olyan jó az év végi jegy, mint a félévi. Ez az összes eset $\frac{3}{5}$-e, azaz 60%-a.

183. Pista az öt film közül bármelyik kettőt kiválaszthatja. Ezt $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féleképpen teheti meg. Azt a kiválasztott két filmet, amelyiket ugyanabban az időpontban játszanak, egyszerre nem nézheti meg. Ezért a választási lehetőségek száma: 9.

184. Az első két évben a diákok a felsorolt 5 nyelv bármelyikét tanulhatják. A következő két évben mindenki az 5 különböző nyelv bármelyikével folytathatja tanulmányait. Mivel a sorrend is számít, a lehetséges nyelvpárok választási lehetőségeinek a száma: $5 \cdot 5 = 25$.

185. Ha nyolc labdarúgó csapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással, akkor a lejátszott mérkőzések száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. Mivel a mérkőzéseken összesen 120 gólt rúgtak, így egy mérkőzésre átlagosan 4,29 gól esett, azaz mérkőzésenként 4-5 gólt rúgtak.

186. Egy dobókockával tízszer dobva 6^{10} különböző dobássorozatot kaphatunk. Azoknak a dobássorozatoknak a száma, amiben nincs hatos, 5^{10}.
Így azoknak a különböző dobássorozatoknak a száma, amiben van legalább egy darab hatos: $6^{10} - 5^{10} = 50\,700\,551$.

187. Tekintsük a házaspárokat olyan összekapcsolt elemeknek, melyek a sorban 2 egymás mellett levő helyet foglalnak el. Helyezzük el először a házaspárokat az összes lehetséges sorrendben. Ezt megtehetjük 10!-féleképpen.
Mivel mindegyik házaspár egymástól függetlenül két különböző sorrendben foglalhatja el a nekik jutó két egymás melletti helyet, a 10! lehetőség mindegyikéből 2^{10} különböző olyan ülésrend készíthető, amikor a férjek a feleségek mellé kerülnek.
Így a feladatot kielégítő különböző ülésrendek száma: $2^{10} \cdot 10! = 3\,715\,891\,200$.

188. Ha egy szám osztható 5-tel, akkor utolsó számjegye vagy 0 vagy 5.
Az adott számjegyekből az adott módon készíthető, 0-ra végződő hatjegyű számok száma $5! = 120$.
Az adott számjegyekből az adott módon készíthető, 5-re végződő hatjegyű számok száma $4 \cdot 4! = 96$, mert az első helyen nem állhat 0.
Tehát az 5-tel osztható keresett hatjegyű számok száma $120 + 96 = 216$.

189. Azoknak az ötjegyű számoknak a számát, amelyek legalább egy darab 1-est tartalmaznak, úgy számíthatjuk ki, hogy az összes ötjegyű szám számából levonjuk azoknak az ötjegyű számoknak a számát, amelyek nem tartalmazzák az 1-es számjegyet.
Az ötjegyű számok 0-val nem kezdődhetnek, ezért az első helyen kilenc számjegy bármelyike állhat. A további helyeken pedig tíz számjegy bármelyike állhat. Ebből következően az ötjegyű számok száma: $9 \cdot 10^4 = 90\,000$.
Az 1-est nem tartalmazó ötjegyű számoknál az első helyen nyolc különböző számjegy, a további helyeken pedig kilenc különböző számjegy állhat. Ebből következik, hogy az 1-est nem tartalmazó ötjegyű számok száma: $8 \cdot 9^4 = 52\,488$.
Tehát a feladatot kielégítő ötjegyű számok száma: $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$.

190. Ha a 100 darab készüléknek a 12%-a hibás, akkor a hibás készülékek száma 12, a hibátlan készülékek száma 88.

a) Ha úgy választunk ki 10 készüléket, hogy nincs közöttük hibás, akkor mind a 10-et a 88 hibátlan készülék közül választjuk.
Ebben az esetben a lehetséges különböző kiválasztások száma:
$\binom{88}{10} = 4\,513\,667\,845\,896 \approx 4{,}514 \cdot 10^{12}$.

b) Ha úgy választunk ki 10 készüléket, hogy mindegyik hibás, akkor mind a 10-et a 12 hibás készülék közül választjuk.
Ebben az esetben a lehetséges különböző kiválasztások száma: $\binom{12}{10} = 66$.

c) Ebben az esetben 5 darabot a hibátlanok közül, 5 darabot pedig a hibásak közül kell kiválasztanunk. A különböző lehetőségek száma:
$\binom{88}{5}\binom{12}{5} = 31\,027\,195\,584$.

d) Az összes különböző kiválasztási lehetőség száma: $\binom{100}{10}$.
Ezek közül csak azok az esetek kedvezőtlenek számunkra, amikor nincs hibás a kiválasztottak között. Ezek száma: $\binom{88}{10}$.

Azoknak a kiválasztásoknak a száma, amikor legalább 1 hibás van a kiválasztottak között: $\binom{100}{10} - \binom{88}{10} = 12\,796\,641\,610\,544 \approx 1{,}28 \cdot 10^{13}$.

191. Mivel az adott 10 pont közül semelyik négy nem illeszkedik egy síkra, ezért bármelyik 4 különböző pont kiválasztása – a kiválasztás sorrendjétől függetlenül – egyértelműen meghatároz egy tetraédert.
Ezért a pontok által meghatározott különböző tetraéderek száma:
$\binom{10}{4} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4!} = 210.$

192. Mindkét esetben két bizonyítást adunk: egy formálist és egy kombinatorikus jelentésen alapulót.

a) 1. A kiszámítási utasítás szerint $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ és
$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, ami a nevezőbeli szorzás kommutativitása miatt azonos.

2. Hányféleképpen lehet n különböző elem közül k-t kiválasztani, a sorrendre való tekintet nélkül? Épp ez az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható (egyik) jelentése. De ha k elemet kiválasztunk (pl. megjelöljük, felemeljük az asztalról), akkor a többit, $n-k$-t nem választjuk ki (nem jelöljük meg, otthagyjuk az asztalon stb.). Úgy is feltehető az előző kérdés, hányféleképp lehet n különböző elem közül $n-k$-t nem megjelölni, otthagyni – egyszóval: kiválasztani. Erre pedig épp $\binom{n}{n-k}$ lehetőségünk van. A két eset ugyanaz, tehát a két kifejezés egyenlő.

b) 1. Egyrészt $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$; másrészt pedig $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))! \cdot (k+1)!} =$

$= \frac{n! \cdot (k+1)}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k+1)} + \frac{(n-k) \cdot n!}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot (k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} =$

$= \frac{n! \cdot (n+1)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}$, vagyis az egyenlőség valóban fennáll.

2. Az $\binom{n+1}{k+1}$ (egyik) jelentése, hogy hányféleképpen lehet $n + 1$ különböző elem közül $k + 1$-et kiválasztani, a sorrendre való tekintet nélkül. Különítsük el az első n elemet és $+1$-ként az utolsót, és vizsgáljuk a $k + 1$ elem lehetséges kiválasztásait aszerint, hogy ezt az utolsót kiválasztjuk-e vagy sem. Ha kiválasztjuk, akkor többi n közül kell a többi k-t kiválasztani, ezt éppen $\binom{n}{k}$-féleképp lehet; ha nem választjuk ki az utolsót, akkor a többi n közül kell mind a $k + 1$-et választani, ezt pedig $\binom{n}{k+1}$-féleképp lehet. A kétféle lehetőség számának összege éppen a keresett érték.

193. Először azt számítjuk ki, hány darab megfelelő szám van, majd helyiértékek szerinti ügyes csoportosítással meghatározzuk összegüket. Ötféle páratlan számjegy van (1, 3, 5, 7, 9).

a) Ekkor mind a négy helyen mind az ötféle számjegy állhat, $5^4 = 625$ darab ilyen szám van. Mindegyik szám mindegyik helyiértékén az ötféle számjegy szerepe szimmetrikus, mindegyik mindenütt ugyanannyiszor fordul elő, tehát $\frac{625}{5} = 125$-ször, így e számok összege:

$125 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1111 = 125 \cdot 25 \cdot 1111 = 3\,471\,875.$

b) Az első helyen 5-, a másodikon 4-, aztán 3- és 2-féle számjegy állhat, tehát $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ darab ilyen szám van. Mindegyik szám mindegyik helyiértékén az ötféle számjegy szerepe szimmetrikus, mindegyik mindenütt ugyanannyiszor fordul elő, tehát e számok összege:

$\frac{120}{5} \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1111 = 24 \cdot 25 \cdot 1111 = 666\,600.$

194. Először azt számítjuk ki, hány darab megfelelő szám van, majd helyiértékek szerinti ügyes csoportosítással meghatározzuk összegüket. Ötféle páros számjegy van (0, 2, 4, 6, 8); de figyelni kell arra, hogy elöl nem állhat nulla!

a) Ekkor az első helyen négyféle számjegy állhat (0 nem), mindegyik többin öt, így $4 \cdot 5^3 = 500$ db ilyen szám van. Az első (ezres) helyiértéken a négy lehetséges számjegy (2, 4, 6, 8) szerepe szimmetrikus, mindegyik ugyanannyiszor fordul elő, így az ezres helyiértéken álló számok valódi értékének összege:

$\frac{500}{4} \cdot (2+4+6+8) \cdot 1000 = 125 \cdot 20 \cdot 1000 = 2\,500\,000.$

A többi (százas, tízes, egyes) helyiértéken az öt lehetséges számjegy mindegyike ugyanannyiszor fordul elő, így a többi helyiértéken álló számok összege:

$\frac{500}{5} \cdot (0+2+4+6+8) \cdot 111 = 100 \cdot 20 \cdot 111 = 222\,000.$

A teljes összeg tehát 2 500 000 + 222 000 = 2 722 000.

b) Ekkor elöl négyféle számjegy állhat (0 nem), a második helyen megint négyféle (a 0 igen, de amit már felhasználtunk, az nem), aztán a további két helyen három- és kétféle lehetőség van, tehát összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ darab ilyen szám van. Az első (ezres) helyiértéken a négy lehetséges számjegy (2, 4, 6, 8) szerepe szimmetrikus, mindegyik ugyanannyiszor fordul elő, így az ezres helyiértéken álló számok valódi értékének összege: $\frac{96}{4} \cdot (2+4+6+8) \cdot 1000 = 24 \cdot 20 \cdot 1000 =$ $= 480\,000$. A többi (százas, tízes, egyes) helyiértéken a négy lehetséges számjegy mindegyike ugyanannyiszor fordul elő. Ha pl. 2-es áll elöl ($\frac{96}{4} = 24$ ilyen eset van), akkor $\frac{24}{4} = 6$-szor áll mindegyik helyen 0, 4, 6, 8. Ugyanígy „megszámolva" a 4-gyel, 6-tal, 8-cal kezdődő eseteket, összesítve azt kapjuk, hogy a 96 esetből 24-szer áll bármelyik hátsó helyiértéken a 0, és 18-18-szor a többi négy szám. Ezért az e helyiértékeken álló számok valódi értékének összege:
$(24 \cdot 0 + 18 \cdot (2+4+6+8)) \cdot 111 = 18 \cdot 20 \cdot 111 = 39\,960.$
A teljes összeg tehát 480 000 + 39 960 = 519 960.

195. A tréningek száma $\binom{10}{5} = 252$, mert ennyiféleképpen lehet 10 ember közül a minden lehetséges ötfős csoportot összeállítani. Nem lehetett mind a 10 dolgozó ugyanannyi tréningnek a vezetője, hiszen 252 nem osztható 10-zel – így vannak köztük olyanok, akik különböző számú tréningnek voltak a vezetői.

196. Először is tisztázzuk, hogy az 52 lap között van egy pikk dáma, három nem-pikk dáma, 12 nem-dáma pikk lap, és 36 olyan, ami se nem pikk, se nem dáma. Ketté kell választani az eseteket aszerint, hogy a pikk dámát kihúzzuk-e vagy sem, mert ez a lap mindkét feltételnek megfelel. A „legfeljebb két" pikk pedig azt jelenti, hogy vagy pontosan 0 vagy 1 vagy 2. Ha kihúzzuk a pikk dámát, akkor már 0 pikk nem lehet. Ha ez az egy van, akkor kell még húznunk 1 további dámát (a 3 lehetséges közül) és sehány további pikket (a 12 lehetséges közül), így két kihúzott lapnál tartunk. A 8 laphoz a többi hatot a 36 „semleges" közül kell húzzuk, ezért erre $\binom{3}{1} \cdot \binom{12}{0} \cdot \binom{36}{6} = 3 \cdot 1 \cdot 1\,947\,792 = 5\,843\,376$ lehetőségünk van. Hogy két pikkünk

legyen (a dámával együtt), akkor kell még húznunk 1 további dámát (a 3 lehetséges közül), 1 további pikket (a 12 lehetséges közül, így három kihúzott lapnál tartunk), és ötöt a 36 „semleges" közül.

Erre $\binom{3}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{5} = 3\cdot 12\cdot 376\,992 = 13\,571\,712$ lehetőségünk van.

Ha viszont a pikk dáma nem szerepel a kihúzott lapok között, akkor mindkét dámát a többi 3, a 0-1-2 pikket a többi 12 közül kell húzzuk – és rendre 6-5-4 lapot kell a 36 „semleges" közül húznunk.

Ezekre

$\binom{3}{2}\cdot\binom{12}{0}\cdot\binom{36}{6} = 3\cdot 1\cdot 1\,947\,792 = 5\,843\,376,$

$\binom{3}{2}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{5} = 3\cdot 12\cdot 376\,992 = 13\,571\,712,$ illetve

$\binom{3}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{36}{4} = 3\cdot 66\cdot 58\,905 = 11\,663\,190$ lehetőségünk van.

Az öt eset lehetőségeinek száma összeadódik, így a végeredmény:

$$(5\,843\,376 + 13\,571\,712)\cdot 2 + 11\,663\,190 = 50\,493\,366.$$

197. A 90 számból $\binom{90}{2} = 4005$-féle pár képezhető, egy szelvényen pedig $\binom{5}{2} = 10$ pár van megjelölve. Mivel 10 nem osztója 4005-nek, a feladat nem megoldható.

198. a) $4^3 = 64$

b) $64^2 = 4096$

199. Jelöljük az árusító automatában levő oszlopokat A, B, C, D és E-vel. Csak azt kell meghatározni, hogy melyik lépésben melyik oszlopból vegyük ki a tárgyat. Minden kiürítési módhoz hozzárendelhetjük a 6-6 A, B, C, D és E, azaz e 30 betű egy permutációját. Pl. DCAABEBDDEABEDCCEBAECBBCDEDAAC.

Egy-egyértelmű megfeleltetést létesítünk e betűk permutációi és a kiürítési módok között, tehát ezek száma egyenlő.

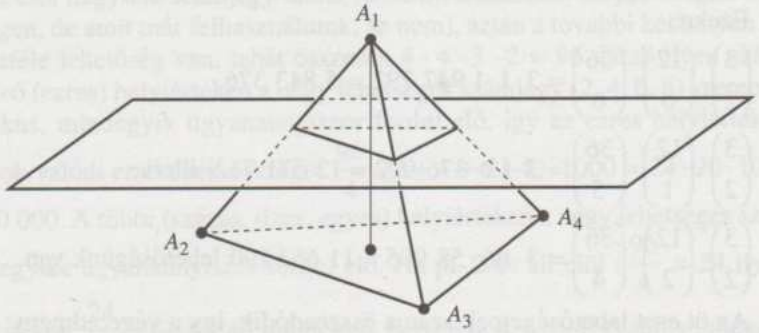
Így a megoldás: $\dfrac{30!}{(6!)^5} \approx 1{,}37\cdot 10^{18}$.

200. Jelöljük a tér adott 4 pontját A_1, A_2, A_3, A_4-gyel. Mivel a feltételek szerint ezek a pontok nem fekszenek egy síkban, az a sík, amelytől mindegyik pont ugyanakkora távolságra helyezkedik el, nem lehet olyan helyzetű, hogy mindegyik pont a síknak ugyanazon az oldalán van. Két eset lehetséges:

a) A megoldásként adódó sík egyik oldalán 1 pont, a másik oldalán pedig 3 pont helyezkedik el.

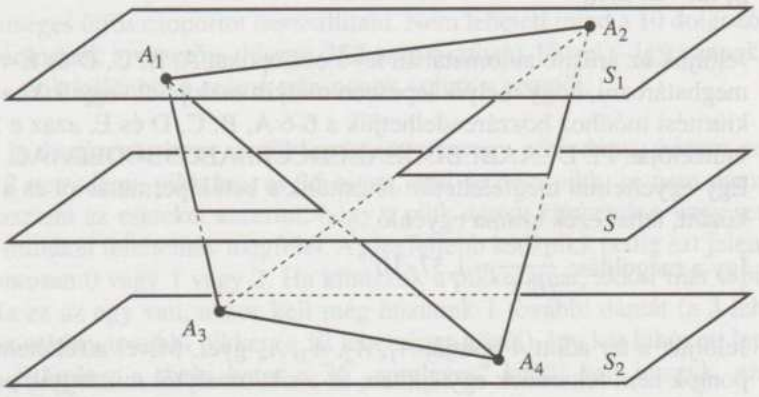
b) A megoldásként adódó sík mindkét oldalán 2-2 pont helyezkedik el.

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért képzeljük el, hogy az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok egy tetraéder csúcspontjai.
Az a) esetben nézzük meg, hogy van-e olyan megoldás, amikor például az A_1 pont van a sík egyik oldalán és az A_2, A_3, A_4 pontok pedig a sík másik oldalán.



Ebben az esetben egyértelműen létezik egy olyan sík, az A_1, A_2, A_3, A_4 tetraéder A_1-hez tartozó magasságszakaszának a felezőmerőleges síkja, melytől mind a négy pont ugyanakkora távbolságra helyezkedik el. Hasonló a helyzet, ha az A_1 szerepét az A_2, A_3 vagy az A_4 pont veszi át. Tehát az a) esetben a feladatnak 4 különböző megoldása van.

A b) esetben nézzük meg, hogy van-e olyan megoldás, amikor például az A_1 és az A_2 pontok vannak a sík egyik oldalán, az A_3 és az A_4 pontok pedig a sík másik oldalán.



Ebben az esetben is van megoldás, ugyanis az A_1A_2 egyenesre illeszkedő A_3A_4 egyenessel párhuzamos S_1 sík és az A_3A_4 egyenesre illeszkedő A_1A_2 egyenessel pár-

huzamos S_2 sík S középpárhuzamos síkjától mind a négy pont egyenlő távolságra helyezkedik el. Hasonló a helyzet, ha az A_1A_2 pontok szerepét az A_1, A_3 vagy az A_1, A_4 pontok veszik át. Tehát a b) esetben 3 különböző megoldás van.

Összevetve az a) és b) esetekben kapott megoldásokat, összesen 7 olyan sík van, amely a tér 4 nem egy síkra illeszkedő pontjától egyenlő távolságra halad.

201. „Néhány" tyúkot a három közül $2^3 = 8$-féleképpen választhatunk (ennyi a 3 elemű halmaz összes különböző részhalmazainak a száma). Ezen választások között azonban szerepel az az eset is, amikor egyetlen tyúkot sem jelöltünk ki. Ez most nem lehetséges, tehát csak 7-féleképpen lehet a feladatnak megfelelően „néhány" (1, 2 vagy 3) tyúkot választani.

A kiválasztott tyúkokhoz $2^4 - 1 = 15$-féleképpen választhatunk „néhány" (1, 2, 3 vagy 4) kacsát, és 3-féleképpen „néhány" (1 vagy 2) libát.

Az összes megfelelő, különböző választások száma tehát $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$.

202. Három adott színnel összesen 3^{12}-féleképpen, két adott színnel összesen 2^{12}-féleképpen, egy adott színnel egyféleképpen köthető be a 12 különböző könyv.

Mindhárom szín a szita-módszer szerint $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519\,156$ esetben fordulhat elő.

203. a) A keresett 8-as sorozatokban először pirosat dobhatunk, ötödszörre 2-félét (fehéret vagy kéket) az összes többi dobásnál ettől függetlenül 8-féle lehetőség van (fehér, piros, zöld, kék, 1, 2, 3 vagy 4). Így az összes keresett dobássorozatot $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 2 \cdot 8^6 = 524\,288$-féleképpen dobhatjuk.

b) A keresett 8-as sorozatokban először pirosat dobhatunk, a második dobásnál ettől függetlenül 6-féle lehetőség közül választhatunk (pirosat és az ötödik helyen éppen aktuálisan szereplő színt nem), a harmadik dobásnál ettől függetlenül 5-féle lehetőség közül választhatunk (pirosat, a második helyen már szereplőt és az ötödik helyen éppen aktuálisan szereplő színt nem), így a negyedik dobásnál ettől függetlenül 4-féle lehetőség közül választhatunk (pirosat és az ötödik helyen éppen aktuálisan szereplő színt és a másik két esetet nem), ötödszörre 2-félét (fehéret vagy kéket) az összes többi dobásnál ettől függetlenül 3-féle, majd 2-féle és a végén 8. dobásra már csak 1 lehetőség van. Így az összes keresett dobássorozatot $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 6! = 1440$-féleképpen dobhatjuk.

204.* Ha mindenki mindenből egyet kap, ez éppen 1 eset. Mind a négy ember (1; 1; 1) számhármassal reprezentálható. Három darab (1; 1; 1) nem lehet, mert akkor a negyedik is az, és ez éppen az előző eset. Lehet tehát két (1; 1; 1), és a maradék valamelyik szimmetrikus pár: (1; 2; 0) és (1; 0; 2) vagy (2; 0; 1) és (0; 2; 1) vagy (0; 1; 2) és (2; 1; 0).

Akik mindháromból kapnak, 6-féleképpen választhatók ki, a maradék a három pár-

ból 3-féleképpen osztható be, s a sorrendjük miatt még 2-vel szorzandó, azaz 36-féleképpen lehet.
Ha csak egy (1; 1; 1) van, ez négyféleképpen választható a vendégek közül, s a másik csak a két hármas valamelyike lehet, mivel egy szimmetrikus pár mellé mindenképpen két (1; 1; 1) kell, amelyik esetet már tárgyaltuk. Ekkor 4-féleképpen választható aki mindháromból egyet kap, a három pedig a másik 3 ember között 6-féleképpen osztható el, és két hármas van, ami egy újabb 2-es szorzó, tehát összesen 48 eset lesz.
Ha nincs (1; 1; 1), akkor két pár lehet, vagy ugyanaz kétszer vagy két különböző.
Háromféleképpen választható ki az egy pár, és $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$-féleképpen lehet ezt a 4 ember között elosztani, ami 18 eset. Ha két különböző pár van, az is 3-féleképpen választható ki háromból, és azt a négy ember között $4! = 24$-féleképpen lehet kiosztani, mert négy különböző elem. Azaz összesen $3 \cdot 24 = 72$ eset lesz. Így összesen: $1 + 36 + 48 + 72 = 157$-féleképpen ehették meg igazságosan a tortát a feltételek szerint.

205. Induljunk ki abból, hogy a D fázisról semmilyen elvárásunk nincs, így ha a másik öt fázis lehetséges sorrendjeit elkészítjük, annak 6-szorosát kell venni, hiszen az öt hely hat tartományt határoz meg, ahová a D fázis beiktatható. Ezzel egyszerűbb a kérdés, csak az A, B, C, E, F fázisok azon lehetséges sorrendjeit kell meghatározni, amelyek a megadott feltételeket teljesítik. Mivel az E fázist meg kell előzze B és C, B-t pedig A, azaz E a negyedik lehet leghamarabb, vagy az ötödik.
Ha E a negyedik, akkor előtte csak A, B, C lehet, s így F az ötödik kell legyen.
A lehetséges sorrendek ekkor $ABCEF$ vagy $ACBEF$.
Ha E az ötödik, akkor mivel F-et meg kell előzze A és C ezért legkorábban harmadik lehet:
$ACFBE$, vagy pedig a negyedik, ekkor $ACBFE$ a sorrend, vagy $ABCFE$. Ez összesen 5 eset. Mindegyiknél a D fázis bárhol lehet, tehát az 5 eset meghatszorozódik, azaz 30 eset lesz.

206. A bizonyítás n-re vonatkozó teljes indukcióval történik.

$n = 1$-re igaz az állítás, mert $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1$.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz az állítás, azaz $\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k$.

Bebizonyítjuk, hogy ekkor $n = k + 1$-re is igaz az állítás, azaz

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Induljunk ki a bizonyítandó állítás bal oldalából és használjuk fel a 192. b) feladat eredményét, mely szerint $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.

Ekkor $\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\ldots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=$

$$=\binom{k+1}{0}+\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k+1}.$$

Felhasználva, hogy $\binom{k+1}{0}=\binom{k}{0}$ és $\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}$ írhatjuk, hogy

$$\binom{k+1}{0}+\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k+1}=$$

$$=2\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\ldots+\binom{k}{k}\right].$$

Felhasználva az indukciós feltételt: $2\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\ldots+\binom{k}{k}\right]=2\cdot 2^k=2^{k+1}$, tehát a bizonyítandó állítás jobb oldalát kaptuk.

Másik megoldás:

A bizonyításhoz megoldjuk azt a feladatot, hogy n különböző elem közül hányféleképpen választhatunk ki néhányat (lehet 0-t, 1-et, …, n-et) a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy minden elemet legfeljebb egyszer választunk ki.

Ha aszerint számoljuk össze az eseteket, hogy hány elemet választottunk ki, a különböző esetek száma: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$.

Ha pedig aszerint számoljuk össze az eseteket, hogy egy elemet kiválasztottunk-e vagy sem, akkor ez minden elem esetében két lehetőség. Ezek mindegyike társulhat mindegyikkel, ezért a különböző esetek száma 2^n.

A kétféle összeszámolásból $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

207. A bizonyításnál hivatkoztunk a 192. b) feladat eredményére, mely szerint $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$.

Ezt felhasználva: $\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}+\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=$

$$= \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+2},$$ ami a bizonyítandó állítás volt.

208. A bizonyítandó állítás bal oldala $k\binom{n}{k}$ alakú tagok összege, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$.

Felhasználva $\binom{n}{k}$ kiszámítási módját:

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Ennek alapján:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + n\binom{n-1}{2} + \ldots + n\binom{n-1}{n-1} =$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right].$$

Felhasználva a 206. feladat eredményét, miszerint

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1},$$

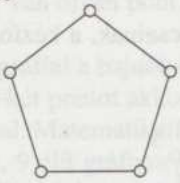
írhatjuk, hogy

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1},$$

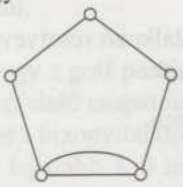
ami a bizonyítandó állítás volt.

1.4. Gráfok

209. a) Például így:



b) Például így:

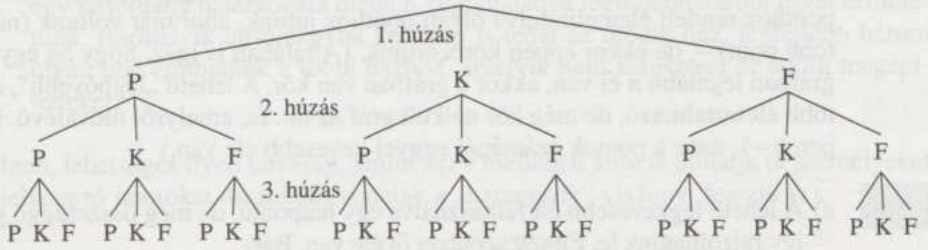


c) Ilyen gráf nincs, hiszen ha összeadjuk az egyes pontokból induló élek számát (az ún. fokszámokat), akkor tulajdonképpen mindkét végükön megszámoltuk az éleket, így az élek számának kétszeresét, vagyis mindenképpen egy páros számot kapunk összegül. Ez most nem teljesül. (Tehát bármely gráfban csak páros számú olyan csúcs lehet, amelyből páratlan számú él indul.)

210. Mindkét esetben azonos gráfot kapunk, mert ha nem teszem vissza, akkor is lehet minden lépésben minden színt húzni, mivel három golyó minden színből van. Azaz nincs eltérés az a) és a b) eset között, feltételezve, hogy az azonos színű golyókat nem lehet megkülönböztetni. A 3-szor 3 elágazás miatt tehát $3^3 = 27$ eset van, mint az ábrán látható.

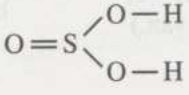
Megjegyzés:

Ha megkülönböztethetők az egyszínű golyók is, akkor az a) esetben $12^3 = 1728$ eset lenne (ezt nem lehet lerajzolni már emberi idő alatt), a b) esetben $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ eset.

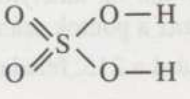


211. 00:00; 01:01; ...; 23:23 az utolsó, így összesen 24-szer lesz egy teljes nap alatt azonos az órák és a percek száma.

212. Kénessav H_2SO_3



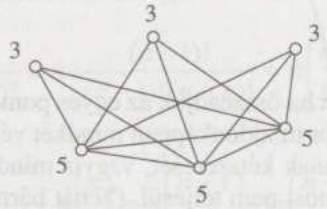
Kénsav H_2SO_4



213. A találkozón $6 + 2 + 4 = 12$ ember vett részt, és mindenkiről megállapítottuk, hányszor fogott kezet. Mivel így minden kézfogást kétszer számoltunk, az összes kézfogások száma $\frac{6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{2} = 26$.

214. A találkozó résztvevőit tekintsük egy gráf csúcsainak, a kézfogásokat pedig a gráf éleinek.

a) Igen.



b) Nem, mert bármely gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese, így csak páros szám lehet. Esetünkben a fokszámok összege 19, páratlan szám.
Másképp: mivel minden kézfogást kétszer számoltunk, ezek összege páros kell, hogy legyen – ez itt nem teljesül, tehát a feladatnak nincs megoldása.

215. Ha mind az 5 pontból legalább két él indul, akkor az összes induló élek, az „élvégek" száma (azaz a fokszámok összege) legalább 10. Mivel minden élnek pontosan két vége van, ezért tehát az élek száma is legalább 5. Rendeljük hozzá mindegyik ponthoz az egyik belőle kiinduló élt, de semelyik élt ne rendeljük több ponthoz. (Ezt lehet, hiszen legalább annyi él van, mint pont.) Induljunk el valamelyik pontból a hozzárendelt élen, eljutunk egy másik ponthoz. Innen továbbmenve eljutunk egy újabb ponthoz, és így tovább. Ha korábban nem is, de legkésőbb az utolsó, ötödik ponthoz rendelt élen elindulva olyan ponthoz jutunk, ahol már voltunk (nem lévén több pont) –, de ekkor éppen körbeértünk. (Általában is igaz, hogy ha egy n-pontú gráfban legalább n él van, akkor a gráfban van kör. A lehető „legbővebb", azaz legtöbb élt tartalmazó, de még kör nélküli gráf az ún. fa, amelyről tudvalévő, hogy éppen $n-1$, azaz a pontok számánál eggyel kevesebb éle van.)

216. a) A lehető legkevesebb élt felhasználva egy hatpontú, de még összefüggő gráfot pl. így rajzolhatunk le. Ennek azonban öt éle van. Bármelyiket hagyjuk is el, a gráf összefüggő mivolta megszűnik. (Általában is igaz, hogy ha egy n-pontú gráfban legfeljebb $n-2$ él van, akkor a gráf nem összefüggő. A lehető „legszűkebb", azaz legkevesebb élt tartalmazó, de még összefüggő gráf az ún. fa, amelyről tudvalévő, hogy éppen $n-1$, azaz a pontok számánál eggyel kevesebb éle van.)

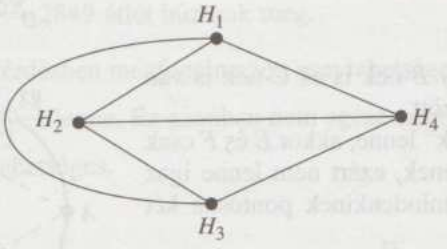


b) Lásd a 215. feladat megoldását.

217. Tegyük fel (indirekt módon), hogy minden pontból legalább két él indul. Ekkor az összes „élvégek" száma (a fokszámok összege) legalább 20. Mivel minden élnek pontosan két vége van, ezért az élek száma ez esetben legalább 10. Ez ellentmond annak, hogy a gráfban csak 9 él van, tehát nem indulhat minden pontból legalább kettő. Ekkor van olyan pont, amelyből 1 vagy 0 él indul.

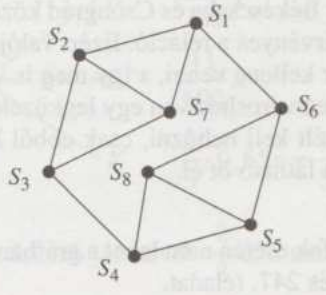
218. Ábrázoljuk gráffal a bajnokság jelenlegi állását úgy, hogy a gráf pontjai legyenek a csapatok, és két pontot akkor kössön össze él, ha a megfelelő csapatok már játszottak egymással. Matematikailag megfogalmazva az tehát a bizonyítandó állítás, hogy egy 8 pontú, 9 élű gráfban van olyan pont, amelyből legalább 3 él indul. Indirekt módon tegyük fel, hogy nincs ilyen pont, vagyis minden pontból legfeljebb 2 él indul. Ekkor az összes „élvégek" száma (a fokszámok összege) legfeljebb 16. Mivel minden élnek pontosan két vége van, ezért az élek száma ez esetben legfeljebb 8. Ez ellentmond annak, hogy a gráfban 9 él van, tehát nem indulhat minden pontból legfeljebb csak kettő. Ekkor van olyan pont, amelyből legalább 3 él indul.

219. a)

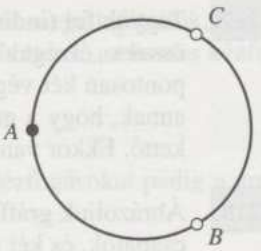


b) Az eredeti négy házat összekötő utak a síkon négy tartományt hoznak létre. Egy-egy tartomány határvonala mentén végighaladva legfeljebb három házat érinthetünk. Bármelyik tartományba kerüljön is tehát az ötödik ház, legfeljebb három olyan utat építhetünk a többi házhoz, amelyik nem keresztezi az eddig megépítetteket.

220. Igen, lehetséges ilyen társaság, amint azt a mellékelt ábra is mutatja (a személyeket jelképező pontokat összekötő vonalak a „haragosok" viszonyt fejezik ki).



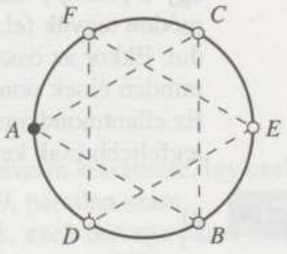
221. Legyenek a vendégek A, B, C, D, E és F.
Először kijelöljük A helyét, majd megnézzük, melyik két ember a haragosa. Legyenek ezek B és C.
Ültessük e három embert az ábra szerint.



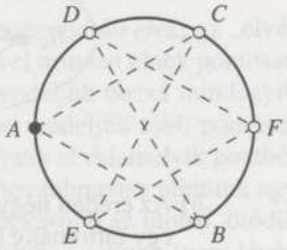
Két lényegesen különböző eset van:

1. B és C egymásnak is haragosai;
2. B és C egymásnak nem haragosai.

Az 1. esetben az ábra szerinti ültetés megfelelő.
(A szaggatott vonalak a haragosokat kötik össze.)



A 2. esetben tudjuk, hogy B-nek is és C-nek is van még haragosa D, E, F között.
Ha pl. D „közös haragosuk" lenne, akkor E és F csak egymás haragosai lehetnének, ezért nem lenne igaz az az információ, hogy mindenkinek pontosan két haragosa van.
Tehát B-nek és C-nek nem ugyanaz a személy a második haragosa. Legyen B haragosa D, és legyen C haragosa E. Ekkor F közös haragosa D-nek és E-nek, ezért az ábrán látható ültetés megfelelő lesz.



222. A gráf a mellékelt ábra szerint két darabból áll, az iránnyal azt jeleztük, hogy pl. Budapesthez legközelebb Dunaújváros van, de mivel Dunaújvároshoz is Budapest van a legközelebb, ezért ez kétirányú él. Még egy ilyen van: Békéscsaba és Csongrád között is mindkét irányban érvényes a reláció. Ezért valójában ezt a két élt kétszer kellene venni, s így meg is van a hét él, hiszen minden városhoz van egy legközelebbi, tehát összesen hét élt kell behúzni, csak ebből kettő dupla, így adódik a látható öt él.



Megjegyzés:
– Így megadott gráfok esetén nem lehet a gráfban kör, erről szól a 223. és 247. feladat.

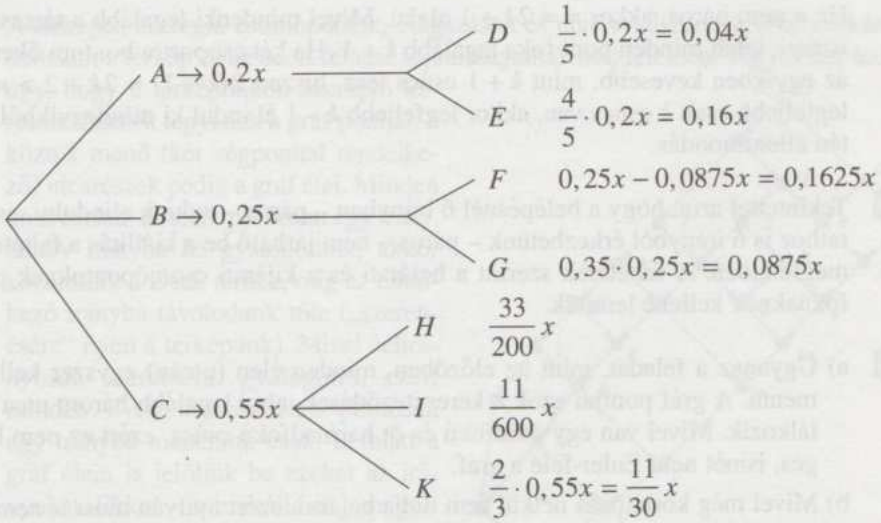
– Mindig lesz legalább egy duplán számolt él. Ez az előzőből és abból már következik, hogy fában legfeljebb eggyel kevesebb él van, mint csúcs, tehát mivel nálunk ugyanannyi él kellene, lesz, amelyiket duplán kell számoljuk! Azaz mindig van két település, amelyre szimmetrikus a „hozzá legközelebbi" reláció. Lásd még a 246. feladatot!

223. Legyen az A városhoz a B város a legközelebb, B-hez pedig a C város. Háromszög akkor jöhetne létre, ha a C-hez az A város lenne a legközelebb.
Ha ez igaz volna, akkor igaznak kellene lennie a következő egyenlőtlenségeknek is: $AB > BC$ (mert B-hez C van a legközelebb), $BC > CA$ (mert C-hez A van a legközelebb).
E két egyenlőtlenségből azonban az következne, hogy $AB > AC$, vagyis A-hoz nem lehet B a legközelebb. Ez ellentmond a kiindulási feltételünknek, ezért nem lehet igaz az a feltevésünk, hogy az A, B, C városok egy olyan háromszög csúcsai, amelyiknek mindhárom oldalát megrajzoltuk a térképen.

224. a) $\frac{77 \cdot 74}{2} = 2849$ átlót húztunk meg.

b) Ha a kérdésben megfogalmazott eset lehetséges volna, akkor a „piros átlók" száma $\frac{77 \cdot 13}{2}$ lenne. Ez azonban nem egész szám, így a feladat kérdésére a válasz: Nem lehetséges.

225.



K-ba megy a csomópontba érkező járművek $\frac{2}{3}$-a, a maradék H és I felé.

Ez $0{,}55x - \frac{11}{30}x = \frac{11}{60}x$.

Ennek 10%-a, $\frac{11}{600}x$ megy I felé. Így a H felé menő gépkocsik száma:

$$0{,}55x - \left(\frac{11}{600}x + \frac{11}{30}x\right) = \frac{33}{200}x \quad \text{(ez a } \frac{11}{60}x \text{ 90\%-a).}$$

Az E-be érkező járművek számának a H-ba érkező járművek száma:

$$100 \cdot \frac{\frac{33}{200}x}{0{,}16x} = 103{,}125\%\text{-a.}$$

226. F-ből 4 vonal indul ki, mert bármely gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese, így csak páros szám lehet. Esetünkben a fokszámok összege $7 + 2 + 5 + 4 + 2 + x$. Ez akkor páros, ha x páros, azaz 4.

227. A válasz nemleges. Gráf-nyelven, ha egy n-pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráf összefüggő (nem lehet két diszjunkt részre osztani). Bizonyítsuk ezt indirekt módon: tegyük fel, hogy felbontható lenne, akkor az egyik csoport csúcsainak száma legfeljebb $\frac{n}{2}$. Itt – mivel „kifelé" nem mehet él – legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ lesz a csúcsok fokszáma, ami ellentmondás.

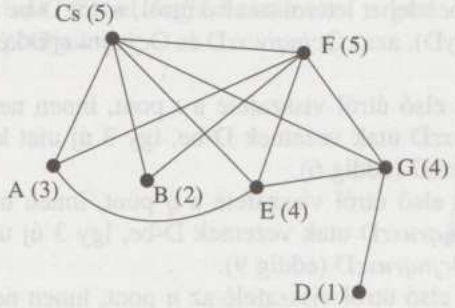
Ha n nem páros, akkor $n = 2k + 1$ alakú. Mivel mindenki legalább a társaság felét ismeri, tehát minden pont foka legalább $k + 1$. Ha két csoportra bontom őket, akkor az egyikben kevesebb, mint $k + 1$ csúcs lesz, hiszen $2(k + 1) = 2k + 2 > n$, de ha legfeljebb csak k csúcs van, akkor legfeljebb $k - 1$ él indul ki mindegyikből – szintén ellentmondás.

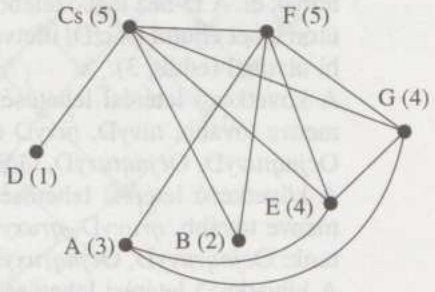
228. Tekintettel arra, hogy a belépésnél 6 irányban – páros – tudunk elindulni, és a kijárathoz is 6 irányból érkezhetünk – páros – nem járható be a kiállítás a feltételeknek megfelelően. A feltételek szerint a bejárati és a kijárati csomópontoknak páratlan fokúaknak kellene lenniük.

229. a) Ugyanaz a feladat, mint az előzőben, minden élen (utcán) egyszer kell végigmenni. A gráf pontjai azok a kereszteződések, ahol legalább három utca (él) találkozik. Mivel van egy ötödfokú és öt harmadfokú csúcs, ezért ez nem lehetséges, ismét nem Euler-féle a gráf.

b) Mivel még korlátozás nélkül sem tudja bejárni, ezért nyilván most is nemleges a válasz. (Hét harmad- és egy ötödfokú csúcs van.)

230. a) Olyan gráfot kell rajzolni, ahol az A, B, C, D, E, F, G csúcsok fokai rendre 3; 2; 5; 1; 4; 5; 4. Mivel Csaba és Feri is majdnem mindenkinek barátja, ha ők nem lennének barátok, akkor Daninak mindketten barátai lennének. Tehát Csaba és Feri biztosan barátok. Mind Csaba, mind Feri mindössze egy-egy embernek nem barátja. Ennek megvalósítására több lehetőség is van, kettőt mi is mutatunk az ábrákon. Megpróbálhat az olvasó további lehetőségeket felrajzolni.

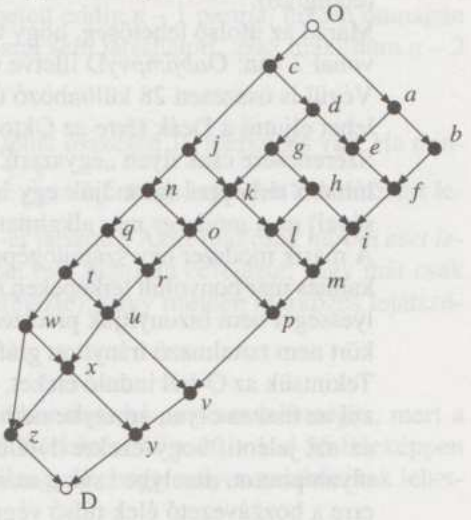




b) A fokszámok összege az élek számának kétszerese: $3 + 2 + 5 + 1 + 4 + 5 + 4 = 24$, tehát összesen 12 barátság van. Egy teljes gráfban, ha 7 csúcsa van, akkor $\binom{7}{2} = 21$ él (azaz barátság) lehetne, aminek a 12 kb. 57%-a.

Tehát a lehetséges barátságok 57%-a valósul meg.

231. A térképen szereplő csomópontok, elágazások és utak rendszerét gráffal szokás modellezni, a térkép és az adott feladat sajátosságainak megfelelően. Tegyük ezt most is, úgy, hogy a térképünkön szereplő kereszteződések legyenek a gráf pontjai, a köztük menő (két végponttal rendelkező) utcarészek pedig a gráf élei. Minden utcarészhez tartozik pontosan egy irány, amely irányba ha gyalogolunk, akkor közelítünk a Deák térhez, míg az ellenkező irányba távolodunk tőle („szerencsére" ilyen a térképünk). Mivel célirányosan szeretnénk gyalogolni, ezért minden ilyen utcarészleten pontosan egy irányba mehetünk csak. E miatt a gráf élein is jelöljük be ezeket az irányokat. Ekkor – minimális és a megoldást nem módosító egyszerűsítésekkel – kapjuk a mellékelt irányított gráfot.



Jelöljük O-val az Oktogonnak és D-vel a Deák térnek megfelelő pontot, a gráf többi pontját rendre *a*, *b*, *c*, *d* …, *w*, *x*, *y*, *z*-vel. Két módszerrel fogjuk megszámolni az O-ból D-be vezető irányított utakat. Először az utakat felsoroljuk, természetesen megfelelő sorrendben, hogy egy lehetséges útvonal se maradjon ki és egy utat se számoljunk többször. Tekintsük először az O*cjnqtwz*D utat, ez legyen az első útvonal (eddig 1). Most nézzük sorba az utakat, aszerint, hogy az első útvonaltól mennyire térnek el. A D-hez legközelebb *w*-ben lehet letérni az első útról, *w*-től D-be még két úton lehet eljutni (*wxz*D, illetve *wxy*D), azaz O*cjnqtwxz*D és O*cjnqtwxy*D két további útvonal (eddig 3).

A következő letérési lehetőség az első útról visszafelé a *t* pont, innen nem *w*-be menve tovább, *tuvy*D, *tuxy*D és *tuxz*D utak vezetnek D-be, így 3 új utat kaptunk: O*cjnqtuvy*D, O*cjnqtuxy*D, O*cjnqtuxz*D (eddig 6).

A következő letérési lehetőség az első útról visszafelé a *q* pont, innen nem *t*-be menve tovább, *qruvy*D, *qruxy*D és *qruxz*D utak vezetnek D-be, így 3 új utat kaptunk: O*cjnqruvy*D, O*cjnqruxy*D, O*cjnqruxz*D (eddig 9).

A következő letérési lehetőség az első útról visszafelé az *n* pont, innen nem *q*-ba menve tovább, *nopvy*D, *noruvy*D, *noruxy*D és *noruxz*D utak vezetnek D-be, így 4 új utat kaptunk: O*cjnopvy*D, O*cjnoruvy*D, O*cjnoruxy*D, O*cjnoruxz*D (eddig 13).

A következő letérési lehetőség az első útról visszafelé a *j* pont, innen nem *n*-be menve tovább, *jkopvy*D, *jkoruvy*D, *jkoruxy*D, *jkoruxz*D, *jklmpvy*D utak vezetnek D-be, így 5 új utat kaptunk: O*cjkopvy*D, O*cjkoruvy*D, O*cjkoruxy*D, O*cjkoruxzD* és O*cjklmpvy*D (eddig 18).

A következő letérési lehetőség az első útról visszafelé a *c* pont, innen nem *j*-be menve tovább, *cdgkopvy*D, *cdgkoruvy*D, *cdgkoruxy*D, *cdgkoruxz*D, *cdgklmpvy*D, *cdghlmpvy*D, *cdghimpvy*D és *cdefimpvy*D utak vezetnek D-be, így 8 új utat kapunk (eddig 26).

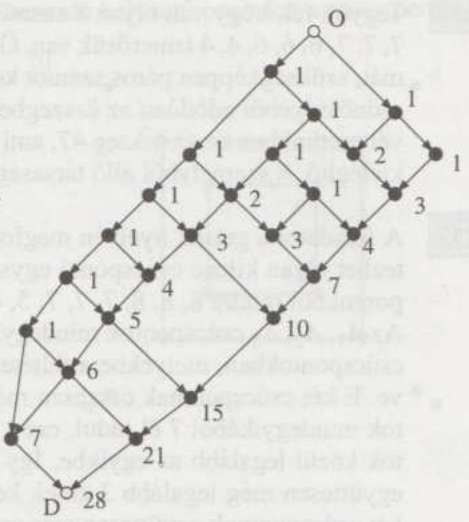
Marad az utolsó lehetőség, hogy O-ból nem *c* felé indulunk, hanem *a* felé, ilyen útvonal 2 van: O*abfimpvy*D illetve O*aefimpvy*D.

Végül is összesen 28 különböző útvonalat sikerült összeírni, tehát ennyiféleképpen lehet eljutni a Deák térre az Oktogontól.

Szerencsére csak ilyen „egyszerű" térképrészlettel volt dolgunk, egy kissé is bonyolultabb térképpel (mondjuk egy budapesti kerületével vagy egy megyei jogú városával) ez a módszer már alkalmatlan lenne.

A másik módszer egy számítógépekkel is használatos algoritmuson alapul, amely alkalmas már bonyolult térképeken is az útvonalak megszámlálására. Az algoritmus helyességét nem bizonyítjuk precízen, de leírásából ráérezhetünk. A módszer irányított kört nem tartalmazó irányított gráfokra (ilyen a mi térképrészletünk is) alkalmazható. Tekintsük az O-ból induló éleket, és nézzük a végpontjaikat. Válasszunk ki ezek közül az összes olyat, amelybe nem vezet más út. Ezekre a pontokra írjunk egy 1-est, ez azt jelenti, hogy ezekre 1-féleképpen lehet eljutni O-ból. Ezek után keressünk olyan pontot, amelybe csak a már eddig megjelölt pontok halmazából lehet eljutni, erre a hozzávezető élek túlsó végpontjain álló számok összegét írjuk. Így az eljárás során minden pontot kiválasztunk és beszámozunk (feltesszük, hogy a cél és az in-

duló ponton kívül nincs más csak bemenő vagy csak kimutató éleket tartalmazó pont), végül a célpontra is rákerül egy szám, ami ugyancsak a hozzá vezető útvonalak számát fogja fedni. Ez a módszer a mi esetünkben az alábbiak szerint fogja beszámozni a gráf pontjait.



232. Modellezzük a problémát egy gráffal. A befejezett játszmákat egy él behúzásával jelezzük, amelyet a két játékost reprezentáló két pont közé húzunk be. Ekkor az állítás egyenrangú azzal, hogy a gráfnak mindig van két azonos fokszámú pontja. A feltétel szerint, mivel mindenki legfeljebb egyszer játszik a többivel, ezért ha n játékos van, akkor egy játékosnak maximum $n-1$ ellenfele lehetett, tehát minden pont foka kisebb vagy egyenlő, mint $n-1$. Mivel n csúcs van, ha nem lenne igaz az állítás, akkor ez csak úgy lehetne, hogy a 0, 1, 2, ..., $n-1$ fokszámok mindegyike fellép (skatulyaelv). Ez azonban nem lehet, mert ha van valaki, aki még nem játszott (0-adfokú csúcs), akkor senkinek nem lehetett eddig $n-1$ partija, hiszen önmagán kívül még a 0-adfokú ponttal jelölt játékossal sem játszhatott, azaz maximum $n-2$ ellenfele lehetett, de ez ellentmondás.

233. Egy 5 pontú teljes gráf éleinek száma 10, tehát összesen 10 mérkőzés van. Ha mindenki már legalább 3-mat játszott, akkor $\frac{5\cdot 3}{2} = 7{,}5$ tehát legalább 8 mérkőzést lejátszottak (azaz legalább egy csapat már 4-et játszott). Azaz már csak *három eset lehet*: két mérkőzés van még, azaz egy csapat már biztosan befejezte; vagy már csak egy mérkőzés van hátra (három csapat befejezte); vagy minden mérkőzés lejátszódott, a feltételnek ez is megfelel.

Megjegyzés:
Ha a mérkőzéseket megkülönböztetjük, akkor nem három eset lehetséges, mert a 10-ből 2 mérkőzést, 1 mérkőzést, illetve 0 mérkőzést 45 + 10 + 1 = 56-féleképpen lehet kiválasztani, tehát ha arra is kíváncsi vagyok, hogy milyen mérkőzések lehetnek hátra, akkor 56 lehetőség van.

234. Tegyük fel, hogy van olyan 8 személyből álló társaság, ahol az embereknek rendre 7, 7, 7, 6, 6, 6, 4, 4 ismerősük van. Összeadva az egyes emberek ismerőseinek a számát, szükségképpen páros számot kell, hogy kapjunk, ugyanis az ismeretségek kölcsönösségéből adódóan az összegben minden ismeretséget kétszer számolunk. Mivel esetünkben ez az összeg 47, ami nem páros szám, nem létezhet az adott feltételt kielégítő, 8 személyből álló társaság.

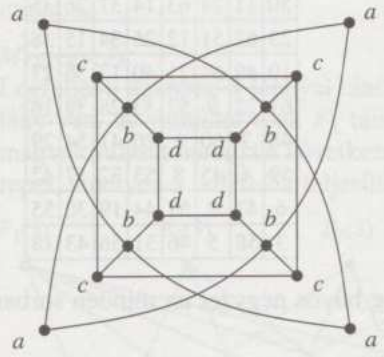
235. A feladatot a gráfok nyelvén megfogalmazva, azt kell bebizonyítani, hogy nem létezhet olyan kilenc csúcspontú egyszerű gráf, melyben az $A_1, A_2, \ldots, A_8, A_9$ csúcspontokból rendre 8, 8, 8, 7, 7, 7, 5, 4, 4 él indul ki.
Az A_1, A_2, A_3 csúcspontok mindegyikéből minden csúcspontba fut él, így az A_8, A_9 csúcspontokban, melyekbe a feltételek szerint 4-4 él fut be, már 3-3 él le van kötve. E két csúcspontnak összesen még 2 „szabad" éle van. Az A_4, A_5, A_6 csúcspontok mindegyikéből 7 él indul, ezért ezek mindegyikéből fut él az A_8, A_9 csúcspontok közül legalább az egyikbe. Így a gráf realizálásához az A_8, A_9 csúcspontokba együttesen még legalább 3 élnek kellene befutni, de ez ellentmond annak, hogy e két csúcspontnak együttesen már csak 2 szabad éle van.
Mivel a feltételeknek megfelelő gráf nem realizálható, ezért nem létezhet olyan 9 személyből álló társaság sem, ahol az embereknek rendre 8, 8, 8, 7, 7, 7, 5, 4, 4 ismerősük volna.

236. A feladatot szemléltethetjük egy olyan 8 csúcspontú egyszerű gráffal, melyben a csúcspontok a sakkozókat, az élek pedig a sakkozók között lejátszott mérkőzéseket jelölik.
A feltételek szerint a gráfnak négy olyan csúcspontja van, melyekből 4-4 él indul ki; és négy olyan csúcspontja van, melyekből 3-3 él indul ki.
A csúcsokból kiinduló élek összege:
$4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 28$.
Ebben az összegben minden élt kétszer számoltunk, így az élek száma 14, mely egyben a lejátszott mérkőzések száma is.

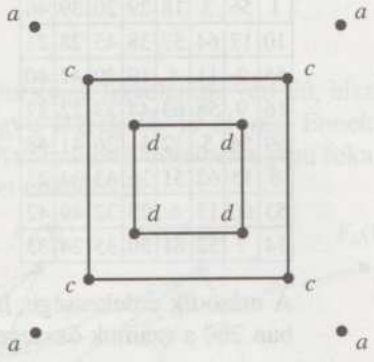
237. A feladatot szemléltethetjük egy olyan egyszerű gráffal, melyben a csúcspontok a társaság tagjait, az élek pedig a társaság tagjai közötti ismeretségi kapcsolatokat jelölik.
Induljunk ki a gráf egyik csúcspontjából élen haladva. Mindaddig amíg olyan csúcspontba jutunk, amelyben még nem jártunk, tovább tudunk haladni, mivel a feltételek szerint bármely csúcspont fokszáma legalább 2. Mivel a csúcspontok száma véges, be kell következnie annak, hogy olyan pontba jutunk, amelyben már korábban is jártunk. E pont kétszeri érintése között egy „kört" jártunk be. A kör mentén érintett csúcspontoknak megfelelő személyeket az adott sorrendben egy kerek asztal köré ültetve, olyan, legalább 3 tagból álló társaságot kapunk, amelyre teljesül, hogy mindenki ismeri a mellette ülőket.

238. A négyzetrács pontjait megbetűzzük, a hasonló helyzetű pontokat azonos betűvel.

a)



b)



a	*c*	*d*	*a*
d	*b*	*b*	*c*
c	*b*	*b*	*d*
a	*d*	*c*	*a*

b) Nem lehetséges a bejárás, hiszen ha a négy *b* jelű csúcsot elhagyjuk, akkor, mint azt a *b)* ábrán láthatjuk, 6 komponensre esik szét a gráf. Ha azonban bejárható lenne, akkor egy bejárási útvonalból 4 pontot kivéve legfeljebb 5 részre eshetne szét.

Megjegyzés:
Ez általánosan is igaz: ha k pont elvételével több, mint $k + 1$ komponensre esik szét a gráf, akkor nem lehet bejárni úgy, hogy minden csúcsát egyszer érintjük. (Szokás az ilyet Hamilton-útnak is nevezni.) Ez azonban csak szükséges feltétele annak, hogy a kívánt módon bejárható legyen a gráf.

c) Mindkét esetben lehetséges a bejárás: a négyzetháló pontjaiba beírtunk egy 25, illetve egy 64 lépéses bejárást. Az első elég kézenfekvő, a második sok munkát igényel, nem nyilvánvaló, könnyen el lehet akadni, rengeteget kell kísérletezni. Mindenestre sok megoldás van, kettőt mutatunk, amelyek ráadásul körök, tehát az utolsó helyről vissza lehet lépni az elsőre, és kezdődhet elölről. Mint egy végtelen körvonal.

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

Egy lehetséges bejárás:

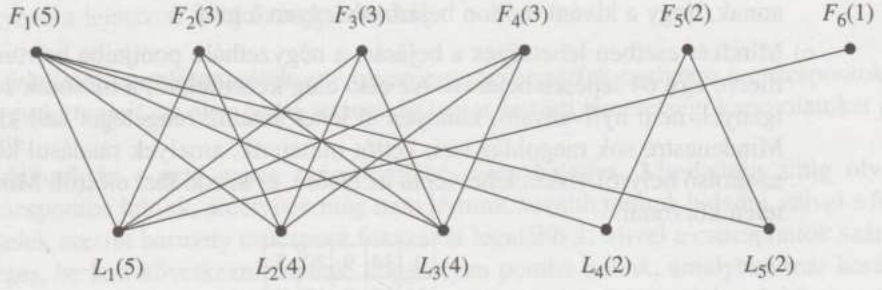
1	56	3	18	29	20	39	46
10	17	64	57	38	45	28	21
55	2	11	4	19	30	47	40
16	9	58	63	44	37	22	27
59	54	5	12	31	26	41	48
8	15	62	51	36	43	34	23
53	60	13	6	25	32	49	42
14	7	52	61	50	35	24	33

Vagy egy másik:

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

A második érdekessége, hogy még bűvös négyzet is: minden sorban és oszlopban 260 a számok összege.

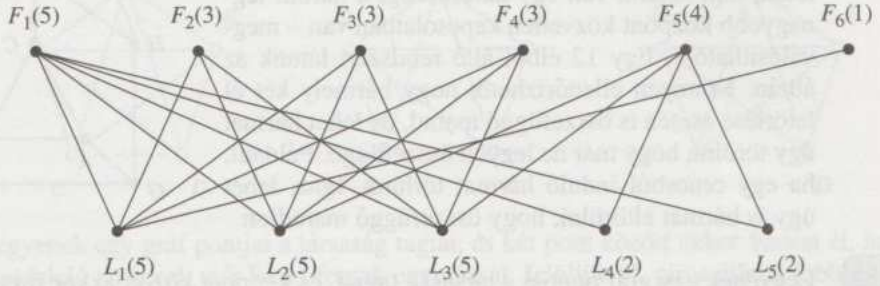
239. a) Próbáljuk meg az információkat összeszedni. Egy 11 pontú páros gráfról van szó, legyenek $F_1, F_2, \ldots, F_6$ a fiúk, és $L_1, L_2, \ldots, L_5$ a lányok. Egy olyan gráfot kell rajzolni, amely megfelel a felsorolt követelményeknek. Legyen F_1, aki minden lánnyal táncolt, azaz F_1-ből öt él indul. Tehát, ha $\text{gr}(A)$ általánosan az A csúcs fokát jelenti, akkor $\text{gr}(F_1) = 5$. Minden lányt jelző csúcsból legalább két él indul, de egyikből sem indul hat, mert minden fiúval senki sem táncolt. Azaz minden i-re: $5 \geq \text{gr}(L_i) \geq 2$. Legyen F_6 a bátortalan fiú, aki csak mondjuk L_1-gyel táncolt, aki majdnem mindenki mással, azaz mondjuk rajta kívül még négy másikkal. (Ez a feltétel nem teljesen egyértelmű!) Emellett az is igaz, hogy a többi fiú legalább 2 lánnyal táncolt, különben nem F_6 lenne a legbátortalanabb. Azaz $\text{gr}(F_6) = 1$. Hárman pontosan ugyanazzal a három lánnyal táncoltak. Azaz van három csúcs, legyenek F_2, F_3, F_4, amelyekből pontosan három él indul, és ugyanahhoz a három lányhoz: $\text{gr}(F_2) = \text{gr}(F_3) = \text{gr}(F_4) = 3$ és $\text{gr}(F_5) \geq 2$.
Egy lehetséges megvalósítást láthatunk a következő ábrán.



b) Az éleket számoljuk le a fiúk felől. Van egy, aki mind az öt lánnyal táncolt, ez öt él. Van három, akik pontosan ugyanazzal a három lánnyal, tehát mindegyik pontból három él indul. Van egy fiú, ahonnan csak 1 él, ő a legbátortalanabb. A maradék fiú legalább két lánnyal táncolt (lehet, hogy többel is, ezért tudunk csak ar-

ra a kérdésre válaszolni, hogy legalább hány él van!). Azaz az élek száma legalább: $5 + 3 \cdot 3 + 1 + 2 = 17$. Az, hogy ez tényleg megvalósítható, az előző ábra mutatja.

Megjegyzés:
Legfeljebb azonban 4 lánnyal táncolt az utolsónak figyelembe vett fiú, hiszen 5 lány van, de minddel csak F_1 táncolt, vagyis legfeljebb 19 él van. Ennek egy megvalósulását mutatja a következő ábra. Az ábrákon zárójelben a pont foka szerepel, amelyen a feltételek teljesülését lehet ellenőrizni.



240. Nyolc sakkozót két csoportra osztva a csoportok létszámára az alábbi lehetőségek adódnak:

a) 1 7,
b) 2 6,
c) 3 5,
d) 4 4.

Felhasználva, hogy egy n személyből álló csoportban a körmérkőzéses verseny során lejátszott mérkőzések száma $\frac{n(n-1)}{2}$, a felsorolt csoportbontások esetén a csoportokban lejátszott mérkőzések együttes száma az alábbi:

a) $0 + \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$,

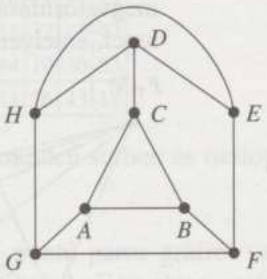
b) $1 + \frac{6 \cdot 5}{2} = 16$,

c) $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 13$,

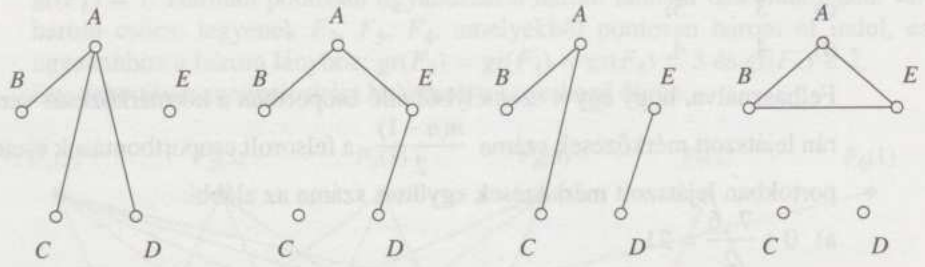
d) $\frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$.

Tehát a nyolc sakkozót két négyes csoportba osztva lesz a lejátszott mérkőzések száma a legkevesebb.

241.* Az első feltétel szerint összefüggő a gráf, tehát mivel 8 központ van, minimum hét kapcsolat lesz (ekkor éppen fa a gráf!). A második feltétel szerint bármely két él kitörlésével még összefüggő marad, de egy harmadikat már nem lehet elvenni. Ebből következik, hogy nem lehet benne másod vagy elsőfokú pont, hiszen akkor az onnan induló egy vagy két élt kivéve már nem marad összefüggő a gráf. Minden csúcs tehát legalább harmadfokú. Ebből következik, hogy $8 \cdot 3 = 24$ legalább az élek számának kétszerese, azaz minimum 12 éle van a gráfnak. A kérdés, hogy ez – figyelembe véve a 3. feltételt, ami szerint van egy háromszög, a három legnagyobb központ közvetlen kapcsolatban van – megvalósítható-e. Egy 12 élből álló rendszert látunk az ábrán. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely két él letörlése esetén is összefüggő marad, de lehet hármat úgy törölni, hogy már ne legyen összefüggő. Például, ha egy csúcsból induló hármat törlünk. Igaz, lehet úgy is hármat eltörölni, hogy összefüggő maradjon.



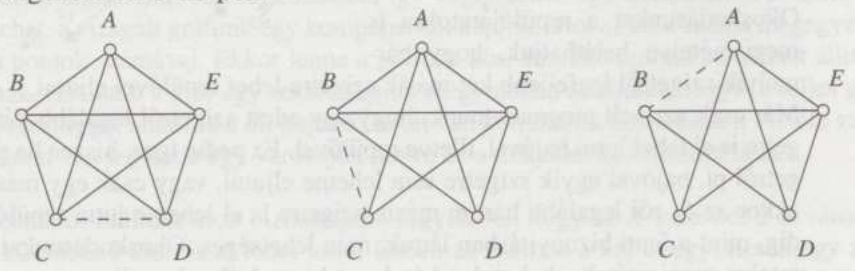
242. Legyenek egy gráf pontjai a társaság tagjai, és két pont között akkor fusson él, ha a megfelelő emberek már kezet fogtak egymással. Matematikai megfogalmazásban azt kell tehát bizonyítani, hogy ha egy ötpontú gráfban bármely három pont közül kettőt él köt össze, akkor az összes élek száma legalább négy. Tegyük fel indirekte, hogy (legfeljebb) csak három él van egy ilyen gráfban. Ötpontú, három élű (egyszerű, azaz „kettős éleket" és önmagukba visszatérő „hurok-éleket" nem tartalmazó) gráfot az alábbi módokon lehet rajzolni:



Azonban mindegyik esetben van három olyan pont (pl. B, C, D), hogy közülük semelyik kettőt nem köti össze él. Ez ellentmond a feladat kiindulásának, tehát nem lehet (legfeljebb) csak három él a gráfban, vagyis legalább négy van.

243. Legyenek egy gráf pontjai a társaság tagjai, és két pont között akkor fusson él, ha a megfelelő emberek már kezet fogtak egymással. Matematikai megfogalmazásban azt kell tehát bizonyítani, hogy ha egy ötpontú gráfban van nyolc él, akkor van legalább két olyan pont, amelyből pontosan három él indul. Induljunk ki az ötpontú ún. teljes gráfból, vagyis amelyben minden pontot minden másikkal pontosan egy él köt össze. Ekkor minden pontból 4 él indul, az összes „élvégek" száma (a fokszámok

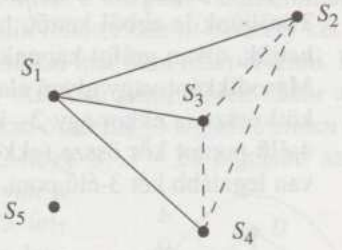
összege) 20, és mivel minden élnek pontosan két vége van, ezért az élek száma 10. Töröljünk le ebből kettőt, hogy nyolc élünk legyen. Elsőként bármelyiket letörölhetjük, olyan gráfot kapunk, amelyben két pontból 3, a többi háromból 4 él indul. Másodikként vagy olyan élet törlünk le, amely az egyik 3- és az egyik 4-élű pontot köti össze (s ekkor egy 2-, két 3- és két 4-élű pont marad); vagy olyant, amely két 4-élű pontot köt össze (ekkor négy 3- és egy 4-élű pont marad). Mindkét esetben van legalább két 3-élű pont.



244. Legyenek egy gráf pontjai a társaság tagjai, és két pont között akkor fusson él, ha a megfelelő emberek már kezet fogtak egymással. Jelöljük pl. piros éllel a jobbkezes, kékkel a balkezes kézfogásokat. Matematikai megfogalmazásban azt kell tehát bizonyítani, hogy ha ebben az ötpontú gráfban nincsen három egyszínű él alkotta „háromszög", akkor minden pontból két piros és két kék él indul ki. Mivel mindenki mindenkivel kezet fogott, az ötpontú teljes gráfról van szó, vagyis minden pontból 4 él indul ki. Tegyük fel indirekt módon, hogy van olyan pont, amire nem igaz az állítás – ez kétféleképpen lehet: vagy 4 piros és 0 kék, vagy 3 piros és 1 kék él indul ki belőle. (A színek szerepe persze felcserélhető.) Az első esetben, ha bármely 2 további pont között van piros szakasz, az egyszínű „háromszöget" alkot a pontunkból oda vezető 2 éllel, nem jó. Ha minden további pont között csak kék élek vannak, akkor azok alkotnak egyszínű „háromszöget", ez se jó. A második esetben a 3 piros él másik végpontjaira alkalmazva az előbbi gondolatokat, ugyancsak valahogyan egyszínű „háromszög" adódik. Tehát ellentmondásra jutottunk, vagyis az eredeti állítás igaz.
Az állítás megfordítása az, hogy ha az öt pont mindegyikéből két-két piros és kék él indul, akkor nincs a gráfban egyszínű „háromszög". Ez az állítás is igaz, amit megint indirekt módon látunk be. Tegyük fel, hogy valamely három pont között (pl.) csupa piros él fut. Ekkor e pontok mindegyikéből már kiindul a 2 piros él, a másik két kiinduló él már csak kék lehet. Viszont ha mindhárom pontból a másik kettőbe csupa kék él fut, akkor azokba már 3-3 kék él érkezik, ami ellentmond a kiindulási feltételnek.

245. Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy az egyik szigetet, mondjuk S_1-et legalább három másik szigettel (pl. S_2-vel, S_3-mal és S_4-gyel) is hajójárat köt össze. Ekkor S_2-t és S_3-at csak repülőjárat kötheti össze, különben lehetséges volna egy csak hajóval megtehető S_1—S_2—S_3—S_1 körút.
Ugyanígy belátható, hogy S_3-at és S_4-et, illetve S_4-et és S_2-t is csak repülőjárat köt-

hetné össze. Így azonban csak repülővel megtehetnénk az S_2—S_3—S_4—S_2 körutat, ami a feladat feltételei szerint megint csak nem lehetséges.

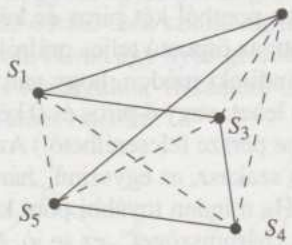


Beláttuk ezzel, hogy bármelyik szigetről legfeljebb két másik szigetre lehet hajóval eljutni.

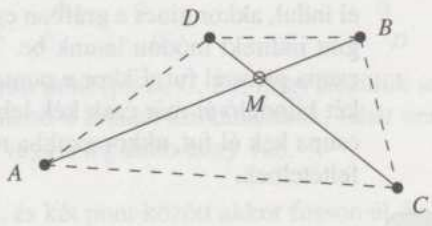
Okoskodásunkat a repülőjáratokra is megismételve beláthatjuk, hogy bármelyik szigetről legfeljebb két másik szigetre lehet repülővel eljutni.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy egy adott szigetről legalább két másik szigetre is el lehet jutni hajóval, illetve repülővel. Ez pedig igaz, hiszen ha pl. az S_5 szigetről pl. hajóval egyik szigetre sem lehetne eljutni, vagy csak egy másik szigetre, akkor az S_5-ről legalább három másik szigetre is el lehetne jutni repülővel. Ez pedig, mint a fenti bizonyításban láttuk, nem lehetséges. Okoskodásunkat a repülőjáratokra megismételve beláttuk tehát, hogy bármelyik szigetről pontosan kettő hajó-, illetve repülőjárat indul.

Megjegyzés:
Ilyen közlekedési hálózat megvalósítható, erre mutat példát az alábbi ábra.



246. a) Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Legyen az A városhoz legközelebb a B város, a C városhoz legközelebb a D város, és metssze egymást az AB és CD szakasz az M pontban. Ekkor $CM + MD = CD < CB < CM + MB$. Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert C-hez D van a legközelebb, a második pedig a háromszög egyenlőtlenség miatt. Igaz tehát, hogy $MD < MB$.

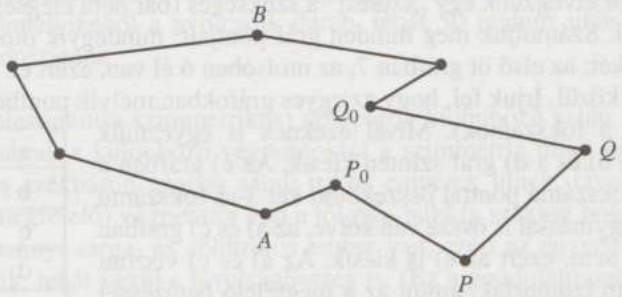


Az AMD háromszögre a háromszög egyenlőtlenség szerint igaz, hogy $AD < AM + MD$, ami az előző egyenlőtlenség szerint így folytatható: $AD < AM + MD < AM + MB = AB$. Ez azt jelenti, hogy a D város közelebb van

az A városhoz, mint a B város. Ez lehetetlen, hiszen feltevésünk szerint az A városhoz a B város van a legközelebb. Ezért nem lehetséges az sem, hogy az AB és CD szakaszok metsszék egymást.

b) A következő, 247. feladat megoldásában bizonyítjuk, hogy egy ilyen gráfban nem lehet kör. Ha nem lenne két olyan város, amelyre a „hozzá legközelebb lévő" tulajdonság szimmetrikus, akkor minden városhoz lenne egy hozzá legközelebbi, s mivel ahhoz más van legközelebb, így végigmenve egy adott városból ameddig lehet, a vizsgált gráfunk egy komponensét kapjuk, ahol az élek száma megegyezik a pontok számával. Ekkor lenne a gráfban kör, ami ellentmond az idézett állításnak. (Ha nem a gráf egy részét kapjuk meg, hanem a teljeset, vagyis a teljes gráf összefüggő, akkor is n élt kapunk, tehát van kör, mert a fának csak $n - 1$ éle van.) Tehát van legalább egy város-pár, amire ez a tulajdonság szimmetrikus.

247. A feladatot indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az A városból a B városba két különböző úton is el lehet jutni. Ebben az esetben a két út együttesen egy zárt törött vonalat alkot (a 246. a) feladat szerint a törött vonalat alkotó szakaszok között nem lehetnek egymást metszők).



Válasszuk ki e törött vonal szakaszai közül a leghosszabbat. Ilyen van, mert a feltételek szerint az útszakaszok hossza mind különböző. Azt állítjuk, hogy ezt a leghosszabb útszakaszt biztosan nem építettük meg.

Jelöljük a leghosszabb útszakasz végpontjait P-vel és Q-val, a P-vel szomszédos, Q-tól különböző csúcspontot P_0-val, a Q-val szomszédos, P-től különböző másik csúcspontot pedig Q_0-val. (Lásd az ábrát, a P_0, P, Q, Q_0 pontok nem feltétlenül különböznek az A és a B ponttól.)

A PQ leghosszabb útszakaszt akkor építettük volna meg, ha vagy a P-hez legközelebbi pont a Q lenne vagy a Q-hoz legközelebbi pont a P lenne. Ezek egyike sem teljesülhet, mert $PQ > PP_0$ és $QP > QQ_0$. Tehát a PQ útszakaszt nem építhettük meg, ezért a feltételezett zárt törött vonal nem létezhet. Ez az ellentmondás igazolja a feladat állítását.

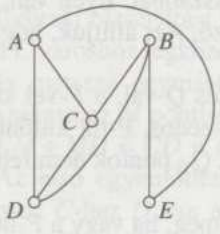
248. A csoport 6 tagját tekintsük mint egy 6 pontú teljes gráf csúcsait! Az éleket színezzük két színnel: pirosra, ha a megfelelő két játékos már játszott egymás ellen, kékre pedig akkor, ha még nem. A bizonyítandó állítás erre a nyelvre lefordítva a következőképpen hangzik: akárhogy is színeztük az éleket, biztosan találunk egyszínű háromszöget (azaz 3 játékost, akik páronként már játszottak egymással vagy hármat, akik páronként még nem).

A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy kiszíneztük úgy a gráfot, hogy nincs benne egyszínű háromszög. A csúcsokat A-tól F-ig számozva tekintsük az A csúcsot, ebből 5 él indul ki, ezek közül biztosan van legalább 3 egyszínű (hiszen csak két színünk van), legyen ez a szín például a kék, és kösse ez a 3 él az A csúcsot össze a B, C és D csúcsokkal (mindez nem megy az általánosság rovására). Milyen színű él lehet B és C között? Csakis piros, mert különben ABC egy kék háromszög lenne. Ugyanígy C és D között, valamint B és D között is csak piros él mehet, különben az ACD, illetve az ABD háromszöggel lenne baj. Viszont, ha ez így van, akkor a BCD háromszög egyszínű piros.

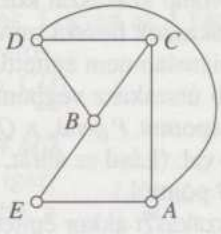
Az indirekt feltétel ellentmondásra vezetett, tehát az eredeti állítás igaz.

249. Először elvégzünk egy „szűrést" a szükséges (bár nem elégséges) feltételek vizsgálatával. Számoljuk meg minden gráf pontjait: mindegyik ötpontú. Számoljuk meg az éleket: az első öt gráfban 7, az utolsóban 6 él van, ezért ez máris kiesik a lehetőségek közül. Írjuk fel, hogy az egyes gráfokban melyik pontból hány él indul (mekkorák a fokszámok). Mivel ezeknek is egyezniük kell, a b) és a d) gráf szintén kiesik. Az e) gráfban a 2-es fokszámú ponttal összekötött két 3-as fokszámú pont egymással is össze van kötve, az a) és c) gráfban pedig nem, ezért az e) is kiesik. Az a) és c) viszont valóban izomorfak, amint az a megfelelő betűzéssel megmutatható.

a	3, 3, 3, 3, 2
b	4, 3, 3, 3, 1
c	3, 3, 3, 3, 2
d	4, 4, 2, 2, 2
e	3, 3, 3, 3, 2



a)



c)

1.5. Módszerek

250. A „legrosszabb" eset, hogy minden lehetséges születésnap pontosan kétszer fordul elő. A szökőévet is figyelembe véve ez $2 \cdot 366 = 732$ diák esetén történhet meg. Ha van még egy diák, az ő születésnapja már két másikéval megegyezik. Tehát 733 tanuló kell ehhez. (A skatulyaelvet alkalmaztuk: a lehetséges napok „skatulyáiba" osztottuk szét a diákok születésnapját.)

251. Alkalmazzuk az indirekt bizonyítás módszerét!
Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis minden dátum legfeljebb két diákhoz tartozik! Ekkor azonban maximum 732 diák lehet az iskolában, hiszen 366-féle születési dátum létezik. Mivel 736 diákja van az iskolának, így 3 olyan tanuló, akinek az év ugyanazon a napján van a születésnapja.

252. A „legrosszabb" eset (a legtöbb állatképpel rendelkezünk, de még mindig nincs beküldhető sorozatunk), hogy hét különböző kép mindegyikéből van 7 darabunk, azaz összesen 49 képünk. Egy 50. kép már vagy a nyolcadikféle ábra lesz, vagy a hét már meglévő valamelyikéből a nyolcadik darab, tehát 50 joghurt után mindenképpen lesz egy jó sorozatunk.

253. Ha egy (a felezőpontra szimmetrikus) székpáron különböző színű trikós emberek ülnek, távolságuk a különböző végpontoktól a szimmetria miatt egyenlő. Ha egy szimmetrikus székpáron azonos színű trikós emberek ülnek, távolságösszegük a (színüknek megfelelő) végponttól épp a tölgyfa-bükkfa szakasz hosszával egyenlő. Mivel ugyanannyi sárga- és zöldtrikós ember van, ezért az egyszínű párok száma is megegyezik, tehát végül a távolságösszeg is. (Ez a gondolatmenet nemcsak 3-3, hanem tetszőleges n-n ember esetén is igaz. A konkrét 3-3-as eset a viszonylag kis létszám miatt tételesen is végignézhető, ismétléses permutációról lévén szó $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ lehetőség van, ami a szinek felcserélhetősége miatt tulajdonképpen csak 10.)

254. Legyen a nagyinak n gyermeke, ekkor mindegyiküknek $n-1$ gyermeke van. Az unokák száma ekkor $n(n-1) = n^2 - n$, hozzáadva a gyermekek számát, a nagyi életkora éppen n^2. Mivel emberek számát jelöli, n persze pozitív egész, így a nagyi életkora négyzetszám. 50 és 80 között egy ilyen van, a 64, tehát a nagyi 64 éves és $64 - 8 = 56$ unokája van.

255. Mivel 12 hónap van, ezért ha mindegyik csak 2-szer fordulna elő, akkor legfeljebb 24 fő járhatna az osztályba. Mivel 25-en vannak, ezért legalább 3-szor fordul elő a leggyakoribb hónap. (Többször is előfordulhat, hiszen lehet, hogy valamelyik hó-

nap(ok)ban csak egy vagy egyetlen tanuló sem született. De ez nem feltétlenül következik be.)
Ha minden hónap legfeljebb 3-szor fordulna csak elő, akkor az osztálylétszám 36 lenne, tehát, ha 37 fős az osztály, akkor legalább négyszer fordul elő a leggyakrabban felírt hónap.

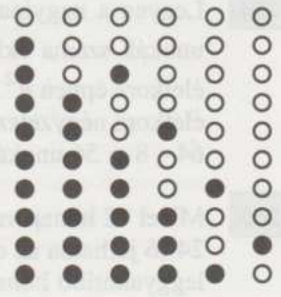
256. a) Természetesen 6 pár lesz, hiszen négyből kettőt hatféleképpen lehet kiválasztani.

b) Mivel $12 = 3 \cdot 4$, ezért azt kell belátni, hogy ennek a hat számnak a szorzata mindig osztható 3-mal, illetve 4-gyel. Mivel négy számból indultunk ki, s ezeket hárommal való oszthatóság szempontjából 3 maradékosztályba sorolhatjuk (osztható hárommal, egy vagy kettő maradékot ad), ezért lesz két szám, amelyik ugyanoda kerül, tehát azonos maradékot ad 3-mal osztva. Ezek különbsége osztható 3-mal. Ha a hat különbség között van két páros, akkor a szorzat már osztható 4-gyel. Az eredeti négy számot párosság szempontjából két osztályba sorolhatjuk, amelyekben vagy 4-0 vagy 3-1 vagy 2-2 elem van. Az egy osztályban levők különbsége mindig páros (páros-páros vagy páratlan-páratlan, mindkét esetben páros az eredmény!), így mindhárom esetben van két páros különbség. (Az első kettőben még több is, ekkor nemcsak 4-gyel, hanem a 2-nek magasabb hatványaival is osztható a párok szorzata.)

257. Milyen összegek keletkezhetnek? Ha 5 db + 1 van, akkor az összeg 5; ha 4 db + 1 és 1 db – 1, akkor az összeg 3; ha 3 db + 1 és 2 db – 1, akkor az összeg 1; ha 2 db + 1 és 3 db – 1, akkor az összeg –1; ha 1 db + 1 és 4 db – 1, akkor az összeg –3; végül ha 0 db + 1 és 5 db – 1, akkor az összeg –5. Ez összesen 6 eset. Mivel 10 számunk van (5 sor és 5 oszlop összege), és mind csak a fenti 6 valamelyike lehet, ezért biztosan lesznek köztük egyenlők.

258. Kezdetben mindhárom pohár „felfelé" állt, a „lefelé" álló poharak száma 0 volt. Amikor két poharat megfordítunk, akkor a „lefelé" álló poharak száma kettővel nő, vagy kettővel csökken, vagy nem változik, tehát mindenképpen páros számmal változik.
Mivel kezdetben 0 darab „lefelé" álló pohár volt, ezért akárhány „fordítás" után sem lehet a „lefelé" álló poharak száma 3 (azaz páratlan).

259. Az a) és a b) kérdésre a válasz igen. Az alábbi ábrasorozat egy lehetséges módszert szemléltet. (A „pillanatfelvételek" azt az állapotot szemléltetik, amikor egy ember leülése után az egyik szomszédja – ha volt – már kiment a szobából.)



c) Nem, mivel minden lépés utolsó mozzanataként valaki feláll egy székről és kimegy.

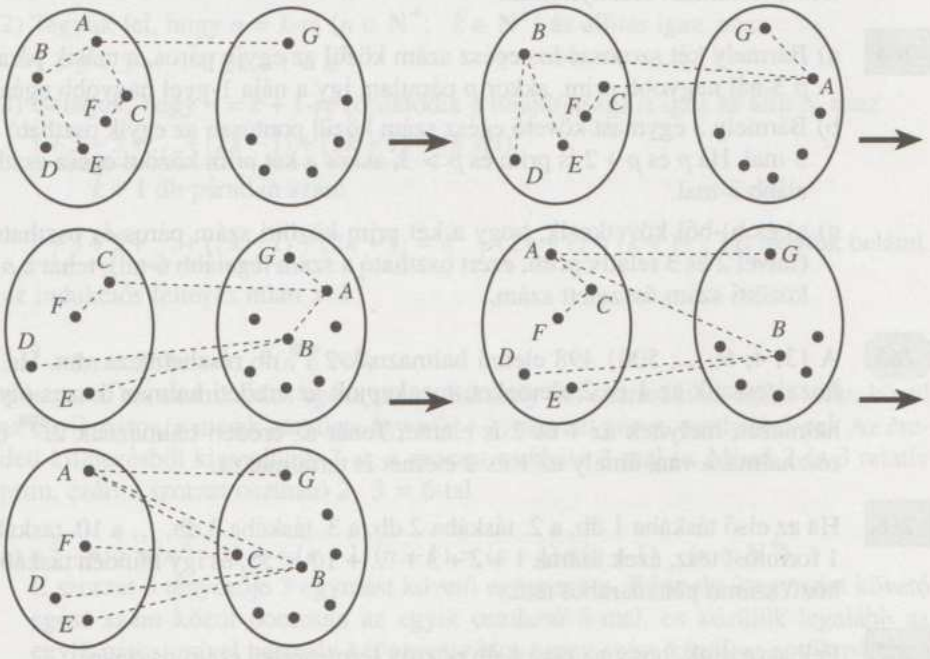
260. Osszuk tetszőlegesen két hatfős csoportra a képviselőket, majd alkalmazzuk a következő eljárást.

I. Ha mindenkinek legfeljebb egy ellensége van a saját csoportjában, akkor nincs további teendőnk.

II. Válasszunk ki egy olyan képviselőt, akinek a saját csoportjában legalább két ellensége van, és tegyük át a másik csoportba. Így az eredeti csoportban az ellenséges viszonyok száma legalább kettővel csökkent, a másik csoportban legfeljebb 1-gyel nőtt. Az áthelyezett képviselőnek legfeljebb egy ellensége lesz az új csoportjában.

III. Ha elértük a kívánt csoportosítást, akkor az I. pontot, ha nem, akkor a II. pontot alkalmazzuk.

Világos, hogy ilyen módon mindkét csoportban mindaddig tudjuk csökkenteni az ellenséges viszonyok számát, ameddig lesz olyan képviselő, akinek a saját csoportjában legalább két ellensége van. Mivel az ellenséges viszonyok száma véges, ezért az eljárásunk biztosan véget ér, célhoz vezet. Egy adott képviselő az alkalmazott eljárás során természetesen többször is átkerülhet egyik csoportból a másikba és vissza, amint azt az alábbi ábrákon nyomon követhetjük. Az *A* képviselő áthelyezésével indítunk. Az ellenséges kapcsolatokat csak a megnevezett pontok között figyeljük.



Természetesen most csak az egyik csoportra figyelve látható az eljárás, s az is megfigyelhető, hogy rövidebb lett volna a *B* áthelyezésével kezdeni, mert akkor rögtön a sorban 4. ábrán látható helyzethez juthattunk volna.)

261. Két időegység elteltével a -2 és a 2 pontban lesz részecske, 4 időegység után a -4 és a 4 pontban, 8 időegység után pedig csak a -8 és a 8 pontban lesz részecske. 10 időegység után a számegyenes -10, -6, 6 és 10 pontjaiban lesz részecske.

262. a) Amikor egy fiúnál eggyel nő a táncpartnerek száma, ugyanakkor egy lánynál (a fiú táncpartnerénél) is eggyel nő a táncpartnerek száma. A két összeg tehát egyenlő, hiszen kezdetben mind a fiúknál, mind a lányoknál nulla volt.

b) Amennyiben csak különnemű párok táncoltak, akkor a két összeg egyenlő.

263. Legyenek a pozitív egész számok $a_1; a_2; \ldots; a_{10}$. Képezzük a következő 10 számot: $s_1 = a_1$; $s_2 = a_1 + a_2$; $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $\ldots$; $s_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$. Ha az $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ számok között van olyan, amelyik 0-ra végződik, akkor beláttuk az állítást. Ha nincs közöttük 0-ra végződő, akkor az $s_1, s_2, \ldots, s_{10}$ számoknak kilencféle végződésen kell „osztoznia". A skatulyaelv miatt ezért biztosan van közöttük két olyan, amelyik ugyanarra a számjegyre végződik (pl. s_3 és s_9). Ekkor e két szám különbsége (a példánkban $s_9 - s_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$) az eredetileg megadott számok közül néhánynak az összege, és ez az összeg biztosan nullára végződik, hiszen két azonos végződésű pozitív egész különbségével egyenlő. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

264. a) Bármely két szomszédos egész szám közül az egyik páros, a másik páratlan. Ha p 3-nál nagyobb prím, akkor p páratlan, így a nála 1-gyel nagyobb egész páros.

b) Bármely 3 egymást követő egész szám közül pontosan az egyik osztható legalább 3-mal. Ha p és $p + 2$ is prím és $p > 3$, akkor a két prím közötti egész osztható legalább 3-mal.

c) a) és b)-ből következik, hogy a két prím közötti szám páros és osztható 3-mal, (mivel 2 és 3 relatív prím, ezért osztható a szám legalább 6-tal), tehát a p és $p + 2$ közötti szám összetett szám.

265. A $\{3; 4; 5; \ldots; 500\}$ 498 elemű halmaznak 2^{498} db részhalmaza van. Ha ezekhez hozzátesszük az 1 és 2 elemeket, megkapjuk az eredeti halmaz összes olyan részhalmazát, melynek az 1 és 2 is eleme. Tehát az eredeti halmaznak 2^{498} db olyan részhalmaza van, amely az 1 és 2 elemet is tartalmazza.

266. Ha az első táskába 1 db, a 2. táskába 2 db, a 3. táskába 3 db, ... a 10. táskába 10 db 1 forintost tesz, ezek száma $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$, és így minden táskába különböző számú pénzdarabot tett.

267. Felhasználjuk, hogy az első k db pozitív természetes szám összege

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \qquad (k \in \mathbf{N}^+)$$

Így az első $(2n)$ db pozitív természetes szám összege

$$1+2+3+\ldots+(2n-1)+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}. \qquad (n\in\mathbf{N}^+)$$

A bal oldalon álló számokat 2 csoportra bonthatjuk (páros; páratlan):

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{\text{első } n \text{ db páratlan}}+\underbrace{2+4+6+\ldots+2n}_{\text{első } n \text{ db páros}}=n(2n+1).$$

Rendezzük át, és a páros számokból emeljünk ki 2-t!

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n(2n+1)-2\underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}_{\text{első } n \text{ db pozitív természetes szám}}$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n(2n+1)-2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=2n^2+n-n^2-n$$

Így a bizonyítandó állításhoz jutunk:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Másik megoldás (teljes indukcióval):

1) $n=1$-re: $1=1^2$ az állítás igaz.

2) Tegyük fel, hogy $n=k$-ra $(n\in\mathbf{N}^+;\ k\in\mathbf{N}^+)$ az állítás igaz, azaz

$$1+3+5+\ldots+2k-1=k^2.$$

3) Belátjuk, hogy $n=k+1$-re (öröklődik a tulajdonság) is igaz az állítás, azaz

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)}_{k+1 \text{ db páratlan szám}}=(k+1)^2$$

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{\text{az indukciós feltevés miatt}=k^2}+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2,$$ ezt akartuk belátni.

268. $3n^2+3n=3n(n+1) \quad (n\in\mathbf{N}^+)$

n és $n+1$ két szomszédos egész szám. Bármely két szomszédos egész szám közül az egyik páros, a másik páratlan. Így $n(n+1)$ szorzat páros, osztható 2-vel. Az eredeti kifejezésből kiemeltünk 3-at, a szorzat osztható 3-mal is. Mivel 2 és 3 relatív prím, ezért a szorzat osztható $2\cdot 3=6$-tal.

269. a) $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1) \quad (n\in\mathbf{N}^+)$

E szorzat 3 tényezője 3 egymást követő egész szám. Bármely 3 egymást követő egész szám közül pontosan az egyik osztható 3-mal, és közülük legalább az egyik páros, mivel bármely két szomszédos egész szám közül az egyik páros, a másik páratlan.

Tehát a szorzat osztható 2-vel és 3-mal is. Mivel 2 és 3 relatív prím, ezért a szorzat osztható $2\cdot 3=6$-tal.

b) Az $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ azonosság felhasználásával megmutatjuk, hogy a kifejezés osztható 3-mal, és ha n páratlan, akkor 8-cal is.
Mivel három egymást követő természetes szám közül az egyik biztosan osztható 3-mal, ezért a szorzatra is igaz ugyanez. Ha n páratlan, akkor $n-1$ és $n+1$ két szomszédos páros szám, így egyikük néggyel is osztható, tehát a szorzata osztható 8-cal.

Tehát, ha n páratlan természetes szám, akkor $n^3 - n$ osztható $3 \cdot 8 = 24$-gyel, mivel $(3; 8) = 1$.

270. Alakítsuk át a kifejezést! $n \in \mathbf{N}^+$

$2^{4n+1} + 3 = 2^{4n+1} + 3 + 2 - 2 = 2^{4n+1} - 2 + 5 =$

$= 2 \cdot 2^{4n} - 2 + 5 = 2(2^{4n} - 1) + 5 = 2(16^n - 1) + 5$

$(16^n - 1)$ 5-re végződik, mert 16^n vége mindig 6, és ebből 1-et kivonva adódik 5. Két 5-tel osztató szám összege is osztható 5-tel, és így az eredeti kifejezés is osztható 5-tel.

271. $n^3 + 5n = n(n^2 + 5) \quad n \in \mathbf{N}^+$

Belátjuk, hogy a szorzat osztható 2-vel és 3-mal. Mivel 2 és 3 relatív prím, ezért a szorzat osztható $2 \cdot 3 = 6$-tal.

Ha n páros, akkor $2 \mid n$.

Ha n páratlan, akkor n^2 páratlan, így $n^2 + 5$ páros (mert két páratlan szám összege páros), tehát $2 \mid n^2 + 5$.

Bármely pozitív egész szám 3-mal osztva 0; 1 vagy 2 maradékot ad.

Ha n 3-mal osztható $\Rightarrow 3 \mid n(n^2 + 5)$.

Ha n 3-mal osztva 1 maradékot ad, azaz $n := 3k + 1 \quad k \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow n^2 + 5 = (3k+1)^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 1 + 5 = 9k^2 + 6k + 6 = 3(3k^2 + 2k + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \mid n^2 + 5$.

Ha n 3-mal osztva 2 maradékot ad, azaz $n := 3k + 2 \quad k \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow n^2 + 5 = (3k+2)^2 + 5 = 9k^2 + 12k + 4 + 5 = 9k^2 + 12k + 9 =$

$= 3(3k^2 + 4k + 3) \Rightarrow 3 \mid n^2 + 5$.

Ezzel beláttuk, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén a szorzat osztható 3-mal és 2-vel, $(2; 3) = 1$, tehát a szorzat – és így az eredeti kifejezés – osztható 6-tal.

Másik megoldás:

Alakítsuk át a kifejezést!

$n^3 + 5n = n^3 + 5n + n - n = n^3 - n + 6n$

A 269. a) feladatban beláttuk, hogy $n^3 - n$ osztható 6-tal, és $6n$ is osztható 6-tal. Ha egy összeg minden tagja (itt $n^3 - n$ és $6n$) osztható 6-tal, akkor az eredeti kifejezés is osztható 6-tal.

272. Felhasználjuk, hogy

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

Ha $a = 1$; $b = 1$, akkor

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

n különböző elem közül $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet k elemet kiválasztani, úgy hogy a sorrend nem számít.

Tehát n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$.

Ha n páros:
A páros elemű részhalmazok számának összege:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

A páratlan elemű részhalmazok számának összege:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + \binom{n}{n-1}.$$

Ezek száma egyenlő, mert

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + \binom{n}{n-1}.$$

Átrendezve

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Ha n páratlan:
A páratlan elemű részhalmazok számának összege:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n}.$$

A páros elemszámú részhalmazok számának összege:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n-1}.$$

Ezek száma egyenlő, mert

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ így } \binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \ \ldots, \ \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}.$$

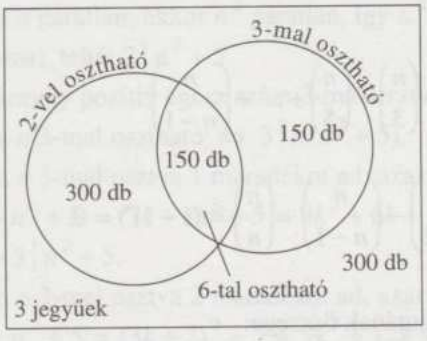
Tehát

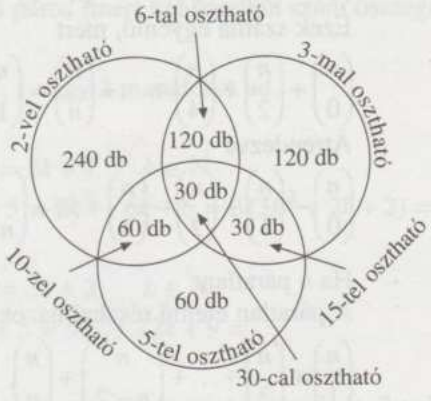
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n}.$$

Beláttuk, hogy minden nem üres, véges halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú részhalmaza.

273. A 900 db háromjegyű természetes szám közül
minden második osztható 2-vel,
minden harmadik osztható 3-mal,
minden ötödik osztható 5-tel.
Így 900 : 2 = 450 db 2-vel osztható háromjegyű páros szám van.
900 : 3 = 300 db 3-mal osztható háromjegyű szám van.
900 : 5 = 180 db 5-tel osztható háromjegyű szám van.

A 900 db háromjegyű természetes szám közül minden hatodik osztható $2 \cdot 3 = 6$-tal, 2 és 3 relatív prímek; minden tizedik osztható $2 \cdot 5 = 10$-zel, 2 és 5 relatív prímek; minden tizenötödik osztható $3 \cdot 5 = 15$-tel, 3 és 5 relatív primek; minden harmincadik osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$-cal, 2 és 3 és 5 páronként relatív primek.
Így 900 : 6 = 150 db 6-tal, 900 : 10 = 90 db 10-zel, 900 : 15 = 60 db 15-tel, 900 : 30 = 30 db 30-cal osztható háromjegyű szám van.
Ezek viszonya az ábrákról leolvasható.

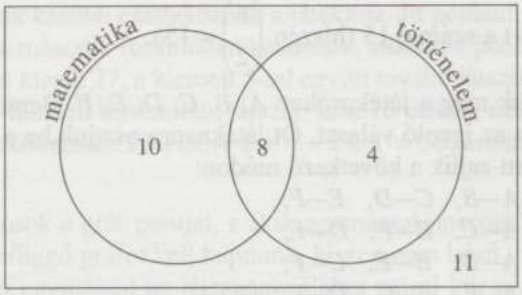




a) 900 – (300 + 150 + 150) = 300 db sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható háromjegyű szám van.

b) 900 – (240 + 120 + 120 + 60 + 30 + 30 + 60) = 240 db sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható háromjegyű szám van.
Ez úgy is megkapható, ha a 2-vel és 3-mal nem osztható háromjegyű számok számából kivonjuk a 2-vel és 3-mal nem osztható, de 5-tel osztható háromjegyű számok számát.

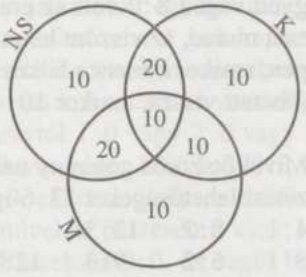
274. Ha 8-an járnak mindkét szakkörre, akkor $18 - 8 = 10$ tanuló csak matematika, $12 - 8 = 4$ tanuló csak történelem szakkörre jár.



Így $33 - (10 + 8 + 4) = 11$ tanuló nem vesz részt egyik szakkör munkájában sem.

275. 90 db pozitív kétjegyű szám van. Ha mind a 10 tanuló 10 különböző számot ír fel, ez 100 db pozitív kétjegyű szám, így biztosan van legalább 2 olyan tanuló, akinek a füzetében legalább egy-egy azonos pozitív kétjegyű szám van.

276. Mivel úgyis százalékos arányokat kell felírni, az egyszerűség kedvéért legyen éppen 100 tanuló. Látni fogjuk, hogy a választott szám nem befolyásolja az eredményt. Ekkor visszafelé indulva, mivel 10 olvassa mindhármat, tovább NS és M közös olvasóinak száma 30, akkor NS és M olvasói közül éppen 20 tanuló nem olvassa K-t. Mivel NS olvasói 60-an vannak, ezért csak NS-t éppen 10-en olvasnak. Csak M-et 10 olvas, csak K-t pedig $30 - 20$, ami szintén 10.



a) 50% olvas pontosan két újságot.

b) 10% nem olvassa egyiket sem.

277. Induljunk ki a legnagyobb értékű érméből, a 20 Ft-osból. Ebből három nem lehet, tehát maximum 2 db 20 Ft-os van. A maradék 10 Ft-ot vagy egy 10 Ft-os érmével vagy két 5 Ft-ossal oldhatjuk meg, tehát összesen *2* ilyen („2-szer 20 Ft-os") *esetünk van*: 20, 20, 10; 20, 20, 5, 5. Ha csak 1 db 20 Ft-ost kaptunk, akkor a maradék 30 Ft-ot kell 10 és 5 Ft-os érmékkel megkapni. Itt ismét az előző logikát folytassuk a 10 Ft-osok száma szerint: lehet 3, 2, 1 vagy 0 db 10 Ft-os. Ezek már a maradék 5 Ft-osok számát meghatározzák: 20, 10, 10, 10; 20, 10, 10, 5, 5; 20, 10, 5, 5, 5, 5; 20, 5, 5, 5, 5, 5, 5; azaz *4 újabb eset*. Ha nincs 20 Ft-osunk, akkor 50 Ft-ot kell 10 és 5 Ft-os érmékkel kirakni, a logikánk szerint ismét a 10 Ft-osok számát vegyük számba: lehet 5, 4, 3, 2, 1, 0 db, ami *6 eset*. 10, 10, 10, 10, 10; 10, 10, 10, 10, 5, 5; 10, 10, 10, 5, 5, 5, 5; 10, 10, 5, 5, 5, 5, 5, 5; 10, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5. Azaz összegezve: $2 + 4 + 6 =$ *12-féle felbontás lehetséges*.

278. a) Mivel mindenki mindenkivel egyszer játszik, a lezajlott verseny szemléltethető egy teljes gráffal, a játszmák száma a teljes gráf éleinek (egy hatszög éleinek és átlóinak) a száma: 15 (hiszen $\binom{6}{2} = 15$).

b) Betűzzük meg a játékosokat: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Bemutatunk egy beosztást, ami igazolja az igenlő választ. Öt játéknapra osztjuk be a 15 mérkőzést, mindig három parti zajlik a következő módon:

1. nap: *A—B*, *C—D*, *E—F;*
2. nap: *A—C*, *B—F*, *D—E;*
3. nap: *A—D*, *B—E*, *C—F;*
4. nap: *A—E*, *B—C*, *D—F;*
5. nap: *A—F*, *B—D*, *C—E.*

c) Mivel 5 forduló van, köztük 4 egynapos szünet, az *9 nap a kezdettől a végéig* (és nem $5 \cdot 2 = 10$, mert az utolsó játéknap után már nincs szünet).

279. Amikor a szurkoló kiment, a feltétel szerint 4:1; 8:2; 12:3 lehetett az eredmény (16:4 már nem lehet, mert csak 13 gólt szereztünk összesen). A három esetben a folytatás (nekünk két gól, és már csak kétszer annyink van): 4:1-ből lehetett 6:3; 8:2-ből lehetett 10:5; 12:3-ból lehetne 14:7, de ez utóbbi kiesik, mert nem értünk el, csak 13 gólt. Az első eset sem lehet, mert a megadott adat szerint a második negyed végén 8:2 volt az eredmény, ami kizárja a 6:3-as állást. Egyedül a második eset marad, az viszont lehet is, mert a harmadik negyed elején 8:2-vel kezdtünk éppen, amikor kiment a lelkes szurkoló, a negyed vége 10:4, és a negyedik negyedben jöhetett vissza, amikor 10:4-ről szépítettek az oroszok 10:5-re.

280.* Mivel ötszörös gólarány nem volt, soroljuk fel a négy, három, illetve kétszeres vezetési lehetőségeket 13:6-ig:

4:1 8:2 12:3
3:1 6:2 9:3 12:4
2:1 4:2 6:3 8:4 10:5 12:6

Mivel háromszor álltunk négyszeres vezetésre, eszerint mind a három eset fellépett, tehát volt 4:1, 8:2 és 12:3 is a mérkőzés állása.

Mivel háromszoros is pontosan 4 volt, így azok is mind fennálltak: 3:1, 6:2, 9:3, 12:4 is volt a mérkőzés állása.

A hat kétszeresből nem lehetett a 10:5 mivel a 12:4-nek ellent mond; hasonlóan a 9:3 ellentmond a 8:4-nek, hiszen 8:4 után legfeljebb 9:4 lehetne.

Hasonló okból a 6:3 sem lehetett mert ennek ellentmond a 8:2-es állás. Eszerint legfeljebb háromszor állhattunk kétszeres vezetésre, vagy a másik két adat valamelyike rossz.

A válasz tehát, hogy nem jól emlékezett a barát, így a meccs lefolyását az ő információi alapján nem tudjuk megmondani.

281. Mivel 58 játékosnak kell kiesnie, ezért ehhez legalább 58 meccs kell. Ha vigasság vagy egyéb újrázási lehetőség van, akkor még több mérkőzés lesz. Szoktak kiemelni játékosokat, akik később csatlakoznak a játékhoz. Itt például, ha kiemelnek 5 játékost, akik csak a második fordulóban kezdenek, akkor 54 játékos 27 párban kezd, ennyi mérkőzéssel kiesik 27, a kiemelt 5-tel együtt tovább játszik 32 játékos. Innentől már mindenki minden fordulóban játszik: lesz 16 meccs, aztán 8, aztán 4, aztán 2 és a döntő 1, ez összesen: $27 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 58$, amint azt állítottuk.

Másik megoldás:
Legyenek a játékosok a gráf pontjai, s akik egymással játszottak, azokat összekötjük. Így egy összefüggő gráfot kell kapnunk, hiszen nem lehet, hogy bizonyos mérkőzések győztesei egymással ne játszanak. Ekkor mivel kör nincs a gráfban, mert kieséses és nem körmérkőzéses a szisztéma, ezért az élek száma a csúcsok száma -1, tehát $59 - 1 = 58$.

Másik megoldás:
Minden meccsnek egy vesztese van, és minden játékos csak egy meccset tud elveszteni: korábban végig győzött, tovább meg nem játszik. Egyetlen játékos marad ki a hozzárendelésből: a végső győztes, mert ő nem vesztett egyszer sem, mindenki más pedig pontosan egyszer. Tehát éppen eggyel több játékos van, mint meccs – vagy fordítva: eggyel kevesebb meccs (azaz 58), mint játékos.

282. A döntetlent csak a Manchester és a Barcelona játszhatott egymás ellen, az eredmény lehetett 0:0 vagy 1:1, hiszen a Barcelona mindössze 1 gólt kapott. Mivel a Galatasaraynak van egy győzelme, ezt csak a Schalke 04 ellen szerezhette, mert az első két csapat veretlen. Mivel a Schalke 04 a másik meccsén is vesztett, s ott minimum egy gólt kellett kapnia, így a Galatasaraytól 1:0 vagy 2:0 vagy 2:1 vagy 3:1 arányban kapott ki. Eszerint rendre a másik veresége: 1:3, 1:2, 0:2 vagy 0:1. Vegyük az első változatot: Galata–Schalke 1:0, ekkor a Galata a másik meccsén 2:5-öt ért el. Ez a Barcelona ellen lehetetlen, mivel az összesen is csak 3 gólt lőtt, így ekkor MU–Galata 5:2, továbbá így MU–Barcelona 0:0, és végül Barcelona–Schalke 3:1. A második lehetőség: Galata–Schalke 2:1; MU–Galata 4:1; ekkor MU–Barcelona 1:1 és Barcelona–Schalke 2:0. A további két eset: ha a Galata–Schalke 2:0, akkor MU–Galata 5:1, de ekkor a MU a másik meccsén a gólkülönbsége szerint 0:1 eredményt ért el, de ez nem lehet, mert döntetlent játszott a Barcelonával; ha Galata–Schalke 3:1, akkor MU–Galata 4:0, ekkor MU–Barcelona 1:2 ismét ellentmondás, mert döntetlent játszott. Egyszerűbben: a MU csak három góllal győzhette le a Galataseray-t, így az gólkülönbsége alapján csak egy góllal győzhetett a Schalke ellen. Ezért esik ki az utolsó két eset.

283. Legyen ez a szám: k. Eszerint minden kerületből legfeljebb k ember jött, tehát az összlétszám ekkor legfeljebb $23k$. Mivel $70 = 3 \cdot 23 + 1$, ezért a skatulyaelv szerint kell legyen legalább egy kerület, ahonnan legalább 4 fő jött, azaz k minimálisan 4.

284. A feladat feltételei szerint $4 \cdot 2 \cdot 10 = 80$ darab kesztyű van a zsákban. 40 kesztyűt húzhatok úgy, hogy ha pechem van, az pl. mind bal kezes. Ekkor a 41. kesztyűvel egy párom biztos lesz. Ennél szerencsétlenebb nem lehetek, tehát maximum 41-et kell húznom. (Természetesen kevesebb is elég lehet. A minimum a 2 húzás.)

285. Először kiszámoljuk, hogy egy kezén lévő öt ujját hányféleképpen festheti be a feltétel szerint, s mivel a két kéz független, ezért az esetek száma ennek a négyzete lesz, mivel a másik kezére ugyanannyi lehetősége lesz, és bármelyik pár egy színezési lehetőség. Először is 3-féleképpen lehet kiválasztani a kimaradó színt. A másik kettővel 5 körmöt – feltéve hogy számít a sorrend, tehát hogy melyik ujjon lévő köröm milyen színű – 2^5-féleképpen festhet be (ismétléses variáció). Így az összes eset $3 \cdot 2^5 = 96$ eset lenne. Van azonban többször számolt eset. Ha pl. a három szín bordó (B), zöld (Z) és kék (K), akkor – ha B-t és Z-t választotta – BBBBB és ZZZZZ is lehetséges eset. Ezeket azonban leszámoltuk a BK, illetve a ZK esetben is, tehát a 96 eset között kétszer számoltuk mindhárom egyszínű esetet, ezt le kell vonni, marad 93 eset. Mivel két kézről van szó, $93^2 = 8649$-féle különböző körömfestés van a feltételeknek megfelelően.

Másik megoldás:
Ha mindkét kiválasztott színt használja, akkor az egyikből 1, 2, 3 vagy 4 ujját festheti be, amit $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4} = 5+10+10+5 = 30$-féleképpen tehet. A két színt háromféleképpen választhatja, azaz összesen 90-féle kétszínű festés van egy kézre. Ehhez jön a három, teljesen egyszínű öt ujj, azaz 93 eset van egy kézre. Innen már ugyanúgy megy tovább, hogy két kézre ezek szorzata, 8649 változat adódik.

286. Mivel összesen csak 40 diák indult a versenyen, ezért az 1. feladatot megoldó 25 és a 2. feladatot megoldó 30 diák közt kell, hogy legyen legalább 15 tanuló, aki mindkét feladatot megoldotta. A 3. feladatot 35 fő oldotta meg, így az előző 15 diák közt legalább 10 megoldotta a 3. feladatot is. E 10 ember közül pedig legalább hárman tagjai a 4. feladatot megoldó 33 fős csapatnak is, tehát ők mind a négy feladatot megoldották.

287. Ha az 50 fő tévét nézőhöz hozzáadjuk a 40 fő rádiót hallgatót, akkor azt a 30 embert, akik mindkettőt csinálják, kétszer számoltuk, így összesen $50 + 40 - 30 = 60$ ember van, aki vagy tévét néz, vagy rádiót hallgat. Ehhez adjuk még azt a 10 főt, aki egyik táborba sem tartozik, így összesen 70 fős a társaság.

288. Ha el akarjuk adni az összes autót, akkor mind a 25 vevő igényeit ki kell elégíteni. Ehhez a 7 fehér autóból négyet azoknak kell adni, akik a fehérhez ragaszkodnak. Ám így annak a 10 embernek, aki pirosat vagy fehéret szeretne csak 6 piros és 3 fehér autó marad, vagyis nem tudunk minden autót eladni.

289. Mivel a négyzetszámok utolsó számjegye csak hatféle lehet: 0, 1, 4, 5, 6, 9, ezért hét négyzetszám közt biztosan van két olyan, amelyek végződése ugyanaz. E két szám különbsége 0-ra végződik, tehát 10-zel osztható.

290. A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük: $n = 1$-re $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ az állítás, ez nyilvánvalóan teljesül.

Tegyük fel, hogy az állítás valamely $n = k$-ra igaz, azaz

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Írjuk fel a bal oldali kifejezést $n = k + 1$-re:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, ami az indukciós feltevés miatt

$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$-vel egyenlő; ezt közös nevezőre hozás, majd egyszerűsítés után $\frac{k+1}{k+2}$ alakra hozhatjuk. Tehát ha $n = k$-ra teljesül az állítás, akkor $n = k + 1$-re is, és mivel $n = 1$-re teljesül, ezért minden $n \in \mathbf{N}^+$-ra igaz.

Másik megoldás:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$+\quad\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

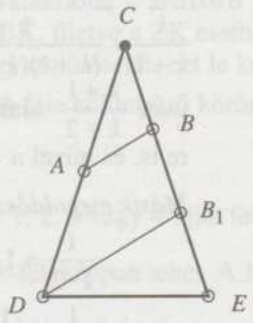
291. A két metszésvonal egy síkban van, ezért ha nem lennének párhuzamosak, akkor metszenék egymást. A metszéspontjuk az eredeti két sík közös pontja volna; ám azoknak nincs közös pontjuk, hiszen párhuzamosak. Vagyis a két metszésvonal nem metszi egymást, párhuzamosak.

292. Az állítás megfordítása a következő:
Ha $a \cdot b$ négyzetszám, akkor a és b is azok.
Ez az állítás könnyen cáfolható egy olyan a, b számpárral, amelyre $a \cdot b$ négyzetszám, de a és b nem azok.
Ilyen számpár például az $a = 2$, $b = 32$.

293. Az állítás megfordítása a következő:
Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.
Ami természetesen igaz, hiszen minden téglalap paralelogramma, a paralelogramma átlói pedig felezik egymást.

294. Legyenek a megjelölt pontok A és B, a körlap középpontja pedig C.

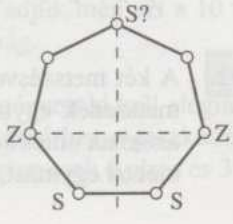
a) Könnyen látható, hogy igaz az állítás, ha a két pont egyike a körcikk csúcsa (a körlap középpontja), vagy ha a két pont egyenese átmegy a körcikk csúcsán.



A többi esetben bizonyíthatunk így is:
1. Rajzoljuk meg a CA és CB félegyeneseket. Ezek a körcikk ívét rendre a D, illetve az E pontban metszik.
2. A CDE háromszög egyenlő szárú, szárainak hossza 1, szárszöge legfeljebb 60°.
3. A 2. pont miatt igaz, hogy a DE alapon fekvő szögek legalább 60°-osak, ezért $DE \leq 1$.
4. Ha DE és AB párhuzamos, akkor a bizonyítás véget is ért, hiszen ekkor nyilvánvaló, hogy $AB \leq DE \leq 1$.
5. Ha DE és AB nem párhuzamos, akkor nagyítsuk C-ből az AB szakaszt addig, amíg egyik végpontja a DE alap egyik végpontjába kerül (pl. az ábra szerinti DB_1 helyzetbe). Az ábra jelöléseit használva tehát $AB \leq DB_1$.
6. $DB_1C\sphericalangle > DEC\sphericalangle \geq 60° \geq DCB_1\sphericalangle$, ezért a háromszög oldalai és szögei közötti összefüggés alapján $AB \leq DB_1 < CD = 1$ igaz, tehát igaz, hogy $AB < 1$.

b) Osszuk fel a körlapot hat egybevágó körcikkre. Ekkor a skatulyaelv miatt biztosan lesz egy olyan körcikk, amelyiken a megadott 7 pont közül legalább kettő van. Az a) részben bizonyítottak szerint e két pont távolsága nem nagyobb 1-nél.

295. Ha van 3 egyszínű szomszédos csúcs, készen vagyunk. Ha nincs, 2 egyszínű szomszéd mindig van, hiszen páratlan csúcsú a sokszög. E pár külső szomszédai egymással szintén egyszínűek, a másik színből (ha nem így lenne, lenne 3 egyszínű szomszéd). E pontpárok közös szakaszfelező merőlegesén is van csúcs (páratlan csúcsú szabályos sokszögről lévén



szó), ez bármelyik pontpárral egyenlő szárú háromszöget alkot, és valamelyikkel a színe is megegyezik.

Megjegyzés:
Teljesen hasonlóan történhet a feladatban szereplő állítás bizonyítása, ha a szabályos sokszög csúcsainak száma 5 vagy 7-nél nagyobb páratlan szám.

296. a) Az aranyalmák száma vagy 2-vel csökken (ha két aranyalmát szakítunk le), vagy nem változik (ha egy aranyalmát és egy csengő barackot vagy két csengő barackot szakítottunk). Kezdetben 21 aranyalma volt a fán, s ezek száma csak páros számmal változhatott, ezért az utolsónak megmaradt egy gyümölcs csak aranyalma lehet.

b) Minden egyes szakítás során összességében eggyel csökken a fa gyümölcseinek száma, ezért 44-szer kellett szakítanunk.
Összesen tehát 88 gyümölcsöt szedtünk le a fáról.

297. Osszuk fel a termet 150 darab egybevágó négyzetre. Alkalmazzuk a skatulyaelvet, majd mutassuk meg, hogy az egységnégyzet bármely két kiválasztott pontjának távolsága kisebb 1,5-nél.

298. Osszuk fel a 200 m^2-es kertet 50 db 2 m x 2 m-es parcellára! Ekkor biztosan van olyan parcella, amelyikben két gyümölcsfa van, és mivel egy 2 m x 2 m-es négyzetben $2\sqrt{2} < 3$ m a legnagyobb távolság, ez a két fa 3 m-nél közelebb van egymáshoz.

299. Alakítsuk szorzattá a kifejezést! $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n =$
$= n^2(n^2 - 1) + 2n(n^2 - 1) = n(n^2 - 1)(n + 2) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) \quad n \in \mathbf{N}^+$.
E szorzat 4 tényezője 4 egymást követő egész szám. Bármely 4 egymást követő egész szám közül kettő páros, kettő páratlan szám. A két páros szám szomszédos páros, azaz közülük az egyik 4-gyel is osztható, így szorzatuk $2 \cdot 4 = 8$-cal osztható. A 4 egymást követő egész szám közül legalább az egyik osztható legalább 3-mal. Mivel 3 és 8 relatív prímek, ezért a szorzat osztható $3 \cdot 8 = 24$-gyel.
(Lásd még 269. b) feladatát!)

300. Belátjuk, hogy $\sqrt{5}$ nem racionális, azaz nem írható fel két egész szám hányadosaként. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy $\sqrt{5}$ racionális, azaz felírható két egész szám hányadosaként, $\frac{p}{q}$ alakban, ahol $p \in \mathbf{N}^+$; $q \in \mathbf{N}^+$.

$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát! Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens művelet. Így $5 = \frac{p^2}{q^2}$, ebből $5q^2 = p^2$.

Bármely egész szám négyzetének prímtényezős felbontásában a prímtényezők páros kitevővel szerepelnek. Így az egyenlet bal oldalán az 5-ös páratlan kitevővel szerepel, a jobb oldalon vagy nem szerepel 5-ös vagy ha szerepel, kitevője páros. Így nincs olyan egész p és q, amelyre $5q^2 = p^2$ egyenlet teljesülne. Ellentmondásra jutottunk, így nem igaz az indirekt feltétel, tehát $\sqrt{5}$ nem racionális szám.

301. Ha minden gyerek születésnapja legalább két hét vagy nagyobb távolságra lenne egymástól, akkor az 52 hetet felosztva 26 két hetes intervallumra ($52 \cdot 7 = 364$) és a még maradó 1 vagy 2 napra (szökőévben 366 nap van!) adódik összesen 27 skatulya. Tehát, ha 28 gyerek jár az osztályba, akkor már biztos legalább egy „skatulyába" kettő esik, és azok távolsága kisebb, mint két hét. Tehát 28 diák esetén biztosan van két, két hétnél közelebbi születésnap.
Lehet azonban finomítani a gondolatmenetet, mert a 27. skatulya nem két hét hosszú. Azt állítjuk, hogy már 27 tanuló esetén is lesz kettő, akiknek születésnapja közelebb van egymáshoz, mint két hét. Január 1-jétől állítsuk sorba a születésnapokat. Két születésnap közti távolság legyen x_1 (az első két dátum közötti napok száma), x_2 (a második és a harmadik közötti napok száma), ... x_{26} (a 26. és a 27. diák születésnapja közötti eltelt napok száma), végül x_{27} (a 27. és az első között eltelt napok száma). Az évet egy körre felrajzolt 366 szöggel szimbolizálhatjuk, ahol mindegyik csúcspont egy napnak felel meg. Ezen a 366-szögön kell 27 csúcsot megjelölni. Ha igaz, hogy mindegyik távolság nagyobb vagy egyenlő 14 nap, akkor
$x_1 + x_2 + \ldots + x_{27} \geq 27 \cdot 14 = 378$. Másfelől viszont $x_1 + x_2 + \ldots + x_{27} = 366$, hiszen visszatérünk az utolsó lépésben a kezdőpontba, s a körön éppen 366 lépést tehetünk meg.
26 diák viszont nem elég, mert $26 \cdot 14 = 364$. Tehát előfordulhat, hogy mindenki 14 napra a másiktól született, és még egy helyen 15 nap is lesz. Azaz tovább már nem javítható az állítás: legalább 27 diák kell, hogy biztosan teljesüljön a kívánt feltétel.

302. A megadott egyenletnek csak úgy lehet racionális gyöke, ha a diszkriminánsa négyzetszám. Ekkor van olyan k egész szám, hogy $b^2 - 4ac = k^2$, itt k is páratlan, hisz b is az. Ez átalakítva $(b + k)(b - k) = 4ac$ egyenlőséget kapjuk, ám ha b és k páratlanok, akkor $b + k$ és $b - k$ páros, sőt egyikük néggyel is osztható, hiszen két olyan páros számról van szó, melyek különbsége: $2k$ nem osztható néggyel. Ekkor azonban a $(b + k) \cdot (b - k)$ szorzat 8-cal osztható, míg a jobb oldalon álló $4ac$, a és c páratlansága miatt, nem. Nem létezik tehát olyan k egész szám, amelyre $b^2 - 4ac = k^2$, azaz az egyenletnek nincs racionális gyöke.

Másik megoldás:

Tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q}$ tört megoldása a megadott egyenletnek, s hogy ez a tört tovább nem egyszerűsíthető (p és q relatív prímek).

Az egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $a \cdot \frac{p^2}{q^2} + b \cdot \frac{p}{q} + c = 0$ igaz.

Mindkét oldalt q^2-tel szorozva: $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.

Ha p és q is páratlan, akkor ap^2, bpq és cq^2 is páratlan, ezért összegük is páratlan, vagyis nem lehet 0. Ilyen p és q tehát nem lehetséges. Ha p és q egyike páros, a másik pedig páratlan lenne, akkor az ap^2, bpq, cq^2 egész számok között 2 páros és 1 páratlan, ezért összegük is páratlan, vagyis nem lehet 0. Ilyen p és q sem lehetséges.

Végül nem lehetséges az sem, hogy p is és q is páros, mert akkor a $\frac{p}{q}$ törtet lehetne egyszerűsíteni 2-vel. Tehát a feladat állítása igaz.

303. Az n helyébe 1-et írva a $9 \mid 7 + 3 - 1$ kijelentést kapjuk, ami igaz.

Ha már valamely konkrét $k \in \mathbf{N}^+$ esetén beláttuk, hogy a $9 \mid 7^k + 3k - 1$ kijelentés igaz, akkor ennek segítségével beláthatjuk, hogy igaz az állítás $k + 1 \in \mathbf{N}^+$ esetén is, azaz teljesül, hogy $9 \mid 7^{k+1} + 3(k+1) - 1$. Ennek belátásához végezzük el a következő átalakításokat:

$7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3k + 3 - 1 = (7^k + 3k - 1) + 6 \cdot 7^k + 3 =$

$= (7^k + 3k - 1) + 3(2 \cdot 7^k + 1)$.

Az első tagról már tudjuk, hogy osztható kilenccel, a második tagról pedig nyilvánvaló, hogy osztható 3-mal. Mivel a 3-mal való osztásnál a 7 minden pozitív egész kitevőjű hatványa 1-et ad maradékul, ezért igaz az is, hogy $3 \mid 2 \cdot 7^k + 1$. Ezzel beláttuk, hogy $9 \mid (7^k + 3k - 1) + 3(2 \cdot 7^k + 1)$, vagyis igaz, hogy $9 \mid 7^{k+1} + 3(k+1) - 1$.

A bizonyítás befejezéséhez így okoskodhatunk. Láttuk, hogy az állítás igaz 1-re. A fenti bizonyítás második részében beláttuk, hogy ha az állítás igaz 1-re, akkor 2-re is igaz. De akkor ugyancsak a bizonyítás második részében leírtak szerint, ha igaz 2-re, akkor igaz 3-ra is és így tovább.

Az állítás tehát minden pozitív egész számra igaz.

Megjegyzés:

Teljes indukcióval is bizonyítható, hogy a $3 \mid 2 \cdot 7^k + 1$ kijelentés minden pozitív egész k esetén igaz.

2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

2.1. Számok, műveletek

304. a) $\frac{5}{6}-\frac{6}{7}=-\frac{1}{42}$ b) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$ c) $4\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$ d) $\frac{121}{42}:\frac{11}{14}=\frac{11}{3}$

305. $a * b = ab + 1$

306. a) $A := (4{,}5 \cdot 10^{15})^3 \cdot (325 \cdot 1{,}07^8)^4 = 8{,}860\,37 \cdot 10^{57}$
$B := (6 \cdot 10^{23})^2 \cdot (2 \cdot 10^3 + 3{,}3 \cdot 10^{-8})^3 = 2{,}88 \cdot 10^{57}$
így $A > B$

b) $C := (4{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} + 61 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-11}) \cdot 10^{-8} = 2{,}5056 \cdot 10^{-25}$
$D := (9 \cdot 10^{-31} + 72 \cdot 10^{-24})^2 = 5{,}184 \cdot 10^{-45}$
így $C > D$

307. Mivel $\lg 5{,}473 = 0{,}7382 \Rightarrow 5{,}473 = 10^{0{,}7382}$
$\lg 0{,}0723 = -1{,}1408 \Rightarrow 0{,}0723 = 10^{-1{,}1408}$
$\lg 1{,}782 = 0{,}2509 \Rightarrow 1{,}782 = 10^{0{,}2509}$
$\lg 143{,}728 = 2{,}1575 \Rightarrow 143{,}728 = 10^{2{,}1575}$
$\lg 149\,537{,}482 = 5{,}174\,75 \Rightarrow 149\,537{,}482 = 10^{5{,}174\,75}$

308. a) $14 - (3 \cdot 4 + 8 : 2) = -2$
b) $(14 - 3 \cdot 4 + 8) : 2 = 5$
c) $(14 - (3 \cdot 4 + 8)) : 2 = -3$
d) $14 - 3 \cdot (4 + 8 : 2) = -10$
e) $14 - (3 \cdot 4 + 8) : 2 = 4$

309. a) $1 + 3 \cdot 5 - 7 - 9 = 0$
$1 + 3 - 5 - 7 + 9 = 1$
$1 + (3 - 5) : (7 - 9) = 2$
$[(1 + 3) \cdot 5 + 7] : 9 = 3$
$(1 + 3) \cdot 5 - 7 - 9 = 4$

b) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 = 5$
$1 \cdot (3 + 5 + 7 - 9) = 6$
$1 + 3 + 5 + 7 - 9 = 7$
$-1 \cdot 3 - 5 + 7 + 9 = 8$
$1 \cdot 3 \cdot (5 + 7 - 9) = 9$
$(1 - 3) : (5 - 7) + 9 = 10$

310. a) Ha 5 tortát osztunk el 17 ember között, akkor igazságos osztás esetén egyre egy torta $\frac{5}{17}$-ed része jut. A másik helyen 11 főre 3 torta, azaz $\frac{3}{11}$-ed torta egy főre. Közös nevezőre hozva a törteket: $\frac{55}{187}$, illetve $\frac{51}{187}$ részről van szó, amiből persze az előbbi a nagyobb. András tehát több tortát evett, mint Balázs.

b) A különbség nem jelentős: négy tizedes pontossággal az első tört értéke 0,2941, míg a második 0,2727. Azaz kicsit több, mint 0,02 a különbség, ami elég kicsi, mondhatjuk, hogy kb. ugyanannyit ettek.

Másik megoldás:
Ha 1 torta lenne, akkor 17 embernek kellene osztozni rajta, vagyis 17 darabra osztanák. Ha 2 torta van, akkor már csak 8,5 darabra és így tovább; ha 5 torta van, akkor egyet 3,4 darabra kell osztani. A 3 egész részt három embernek adva az öt tortából éppen 15 ember kaphat 1 egész részt, a maradék 5 darab 0,4 részből kitelik még 2 másik adag a maradék 2 embernek. Ugyanez a másik esetben: 1 tortát 11 ember 11 részre osztana, ha 3 van, akkor $\frac{11}{3} = 3,\dot{6}$ darabra osztódik mindegyik, s így egy rész kisebb, mint a másik esetben, vagyis András több tortát evett, mint Balázs, de az eltérés kicsi.

311. a) $42x \cdot \frac{3}{7} = 18x$ b) $42y : \frac{3}{7} = 98y$ c) $\frac{36y}{42x} = \frac{6}{7} \cdot \frac{y}{x}$, ha $x \neq 0$

312. a) A szokásos jelölésekkel $s = vt$, vagyis az út és a sebesség, illetve az út és a menetidő egymással egyenesen; a sebesség és a menetidő egymással fordítottan arányos (ha a kimaradó harmadik mennyiség állandó).

b) Mivel „összeg" = „létszám" · „jegyár", az összeg és a létszám, illetve az összeg és a jegyár egymással egyenesen; a létszám és a jegyár egymással fordítottan arányos (ha a kimaradó harmadik mennyiség állandó).

c) A szokásos jelölésekkel $m = \varrho V$, vagyis a tömeg és a sűrűség, illetve a tömeg és a térfogat egymással egyenesen; a sűrűség és a térfogat egymással fordítottan arányos (ha a kimaradó harmadik mennyiség állandó).

313. a) 2 cm · 20 000 = 40 000 cm = 400 m
b) 5 cm · 20 000 = 100 000 cm = 1 km
c) 7 mm · 20 000 = 140 000 mm = 140 m
d) 11 cm · 20 000 = 220 000 cm = 2,2 km
e) 200 m : 20 000 = 0,01 m = 1 cm
f) 3 km : 20 000 = 0,000 15 km = 15 cm
g) 14 km : 20 000 = 0,0007 km = 70 cm

314.

3 marha	5 nap alatt	450 kg-ot
1 marha	5 nap alatt	150 kg-ot
1 marha	1 nap alatt	30 kg-ot
4 marha	1 nap alatt	120 kg-ot
4 marha	7 nap alatt	840 kg-ot

315. a) Ebben az esetben a térfogat az alapterület és a magasság (azaz a vízmélység) szorzata. A terület $595\ \text{km}^2 = 5{,}95 \cdot 10^8\ \text{m}^2$, így a térfogat $5{,}95 \cdot 10^8\ \text{m}^2 \cdot 2{,}8\ \text{m} = 1{,}666 \cdot 10^9\ \text{m}^3$.

b) $35\ \text{cm} = 0{,}35\ \text{m}$, tehát az új magasság $2{,}8\ \text{m} - 0{,}35\ \text{m} = 2{,}45\ \text{m}$. Ha az alapterület nem változott, akkor a térfogat csak a magasságváltozás arányában változott, tehát $\left(\frac{0{,}35}{2{,}8}\right) \cdot 100\% = 12{,}5\%$ a változás. (Lehet az új térfogat és a régi tényleges kiszámolásával is célhoz érni, akkor is ez adódik. Ez a 12,5% meglehetősen nagy változás.)

316.

	lányok (fő)	fiúk (fő)
pop	96	72
jazz	72	80
népzene	72	8

317. A TB-járulék ekkor $84\,000\ \text{Ft} \cdot 0{,}1 = 8400\ \text{Ft}$, az adó pedig $84\,000\ \text{Ft} \cdot 0{,}3 = 25\,200\ \text{Ft}$. A nettó fizetés így $84\,000\ \text{Ft} - 8400\ \text{Ft} - 25\,200\ \text{Ft} = 50\,400\ \text{Ft}$. (Ami persze egyenlő a bruttó fizetés 60%-ával, $84\,000\ \text{Ft} \cdot 0{,}6$-del.) A nettó összegnek a járulék $\frac{8400\ \text{Ft}}{50\,400\ \text{Ft}} = 0{,}1\dot{6}$, azaz kb. 17%-a, az adó pedig $\frac{25\,200\ \text{Ft}}{50\,400\ \text{Ft}} = 0{,}5$, azaz 50%-a.

318. a) $\frac{380\ \text{g}}{500\ \text{g}} = 0{,}76$, azaz 76%

b) $\frac{500\ \text{g}}{380\ \text{g}} \approx 1{,}32$, azaz 132%

c) A tára a bruttó és a nettó tömeg különbsége, vagyis most 120 g. Ez a nettó tömegnek $\frac{120\ \text{g}}{380\ \text{g}} \approx 0{,}32$, azaz 32%-a, a bruttónak $\frac{120\ \text{g}}{500\ \text{g}} = 0{,}24$, azaz 24%-a (vagyis pontosan annyi, amennyivel több, illetve kevesebb az első két eredmény 100%-nál).

319. a) A 15%-os árleszállítás azt jelenti, hogy az eredeti ár 85%-áért kínálták a kerékpárt, vagyis 16 000 Ft · 0,85 = 13 600 Ft-ért.

b) Hasonlóan: ekkor az (új) ár 92%-áért árulták, azaz 13 600 Ft · 0,92 = 12 512 Ft-ért.

c) $\frac{12\,512\text{ Ft}}{16\,000\text{ Ft}} = 0{,}782$; ez 78,2%.
(Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy 0,85 · 0,92 = 0,782.)

d) Az összes engedmény 100% – 78,2% = 21,8%. (Ami jól láthatóan nem azonos a két engedmény összegével, 15% + 8% = 23%!)

320. Hat hét alatt hatszor történt 5%-os, azaz 1,05-szoros növekedés, és háromszor 8, illetve 12%-os csökkenés, azaz 0,92-, illetve 0,88-szoros változás. Ezért hat hét múlva a kezdő készlethez képest

a) $1{,}05^6 \cdot 0{,}92^3 \approx 1{,}044$-szoros, tehát kb. 104,4%-nyi;

b) $1{,}05^6 \cdot 0{,}88^3 \approx 0{,}913$-szoros, tehát kb. 91,3%-nyi

áru van a raktárban.

321. A sótartalom a három oldatban rendre 200 g · 0,5 = 100 g, 400 g · 0,25 = 100 g, 150 g · 0,2 = 30 g. A keverékben így összesen (100 + 100 + 30 =) 230 g só van, míg a keverék össztömege (200 + 400 + 150 =) 750 g, töménysége pedig $\frac{230\text{ g}}{750\text{ g}} =$ $= 0{,}30\dot{6}$, azaz kb. 31%-os. Ha elhasználunk az oldatból 150 g-ot, akkor össztömege 600 g-ra, sótartalma pedig 150 g · $0{,}30\dot{6}$ = 46 g-mal, azaz 184 g-ra csökken. Ha ezután tiszta vízzel pótoljuk a kivett oldatot, az össztömeg ismét 750 g lesz, de a sótartalom marad 184 g. A töménység így $\frac{184\text{ g}}{750\text{ g}} = 0{,}245\dot{3}$; tehát kb. 24,5%-os.

322.* 2,8%-os 1 l tej tömege 1030 g
x l tej tömege 100 g

$x = \frac{100}{1030} \approx 0{,}097\text{ l} = 0{,}97\text{ dl}$ 100 g tej térfogata

0,97 dl tejben van 115 mg Ca, és 3 g fehérje.
Napi szükséglet 1 g = 1000 mg Ca.

115 mg Ca 0,97 dl
1000 mg y dl

$y = \frac{1000}{115} \cdot 0{,}97 \approx 8{,}43\text{ dl tej}$

3 g fehérje 0,97 dl
100 g fehérje t dl

$t = \frac{100}{3} \cdot 0{,}97 \approx 32{,}3\text{ dl } (\approx 3{,}23\text{ l})$

1000 mg Ca 8,43 dl tejben, 100 g fehérje 32,3 dl tejben található.

323.

Méret	Eredeti ár (Ft)	Engedmény %	Új ár (Ft)
18	5 120	60	2 048
21	5 860	50	2 930
28	6 910	30	4 837 (2 pár)
32 és fél	9 140	10	8 226
38	9 990	10	8 991
43	12 390	10	11 151

Az eredetileg fizetett összeg: 56 320 Ft.
Árengedmény után fizetett ár: 43 020 Ft.
Megtakarítás: 13 300 Ft.
$\frac{43\,020}{56\,320} = 0{,}76$, tehát 24% kedvezményt kaptak.

324. Az $\frac{5}{14}$ tizedestört alakja végtelen szakaszos, mégpedig $0{,}\overline{3571428}$. (A nevező prímtényezős felbontása $2 \cdot 7$, az első hatványon lévő 2 miatt van egy nem ismétlődő számjegy a tizedesvessző után, a 7 miatt pedig az ismétlődő szakasz hatjegyű.) A másodiktól a keresett 2001. jegyig hatosával ismétlődnek a számjegyek, azaz a szóban forgó 2000 jegyben van 333 teljes szakasz ($6 \cdot 333 = 1998$), és még 2 jegy, azaz a szakasz 2. jegye, egy 7-es áll a kérdéses helyen.

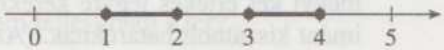
325. Mérjük fel a 0 és az 1 távolságát háromszor a számegyenes „negatív oldalára", a 0 pontból kiindulva. A kapott pont a -3. Vegyünk fel egy, a 0 pontból induló félegyenest, amelyik nem esik egybe a számegyenesünkkel, majd mérjük rá ötször a 0 és az 1 távolságát! A félegyenesen így kapott öt pont közül a harmadikat kössük össze az 1 ponttal, majd az ötödikből húzzunk párhuzamost a kapott egyenessel! A párhuzamos szelők tétele miatt ez épp az $\frac{5}{3}$ pontban metszi a számegyenest. Szerkesszünk a [0; 1] intervallum fölé négyzetet, majd ennek átlóját mérjük fel a számegyenes „pozitív oldalára" a 0 pontból kiindulva! A kapott pont a $\sqrt{2}$.
Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget a [0; 1] intervallum fölé, szerkesszük meg egy magasságát, majd ennek a kétszeresét mérjük fel a számegyenes „negatív oldalára", a 0 pontból kiindulva! A $-\sqrt{3}$-at kaptuk.

326. A 2^{100} jegyeinek száma $\left[\lg 2^{100}\right] + 1$, azaz $[100 \cdot \lg 2] + 1 = 30 + 1 = 31$.

327. $|5-x|<1$ miatt: $4<x<6$ és $|10-y|<2$ miatt: $8<y<12$.
Így $|x-y| = y-x$, hiszen mindig $y>x$ teljesül.
$y-x<12-4=8$ és $y-x>8-6=2$, tehát:
$2<|x-y|<8$.

328. Más alakban írva pl. $]0{,}25;\ 0{,}\dot{3}[$, tehát minden olyan racionális szám (véges vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört) jó, amely e két érték közé esik. Pl. 0,251; 0,26; …; 0,3; 0,31. Az intervallum írható:
$\left]\frac{6}{24};\frac{8}{24}\right[$ alakban, így például a $\frac{7}{24}$ racionális szám az intervallumban van;
vagy $\left]\frac{9}{36};\frac{12}{36}\right[$ alakban, így például a $\frac{10}{36}=\frac{5}{18};\ \frac{11}{36}$ racionális számok is a keresett intervallumban vannak;
vagy $\left]\frac{15}{60};\frac{20}{60}\right[$ alakban, így például $\frac{16}{60}=\frac{4}{15};\ \frac{17}{60};\ \frac{18}{60}=\frac{3}{10}=0{,}3$ (ez már szerepelt!); $\frac{19}{60}$ az intervallumba eső racionális számok.

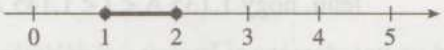
329. a) Mivel két elkülönülő szakaszról van szó, a művelet eredményét a kijelölésnél egyszerűbben nem lehet felírni: $[1;2]\cup[3;4]$.



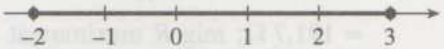
b) Mivel két elkülönülő szakaszról van szó, a művelet eredménye az üres halmaz, $\varnothing$; nincs mit megjelölni a számegyenesen.



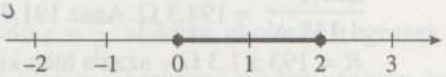
c) Mivel két elkülönülő szakaszról van szó, a művelet eredménye egyszerűen a „kisebbítendő", $[1;2]$.



d) Mivel az egyik szakasz tartalmazza a másikat, uniójuk a tartalmazó, $[-2;3]$.



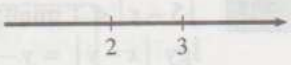
e) Mivel az egyik szakasz tartalmazza a másikat, metszetük a tartalmazott, $[0;2]$.



f) Az eredmény két elkülönülő szakasz, ezért csak így írható fel: $[-2;0[\ \cup\ ]2;3]$.



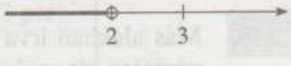
330. a) Az eredmény az összes valós szám halmaza, **R**; a teljes számegyenes.



b) Az eredmény: [2; 3[.



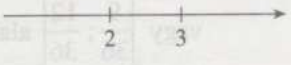
c) Az eredmény:]–∞; 2[.



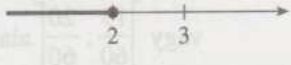
d) Mivel két elkülönülő szakaszról van szó, a művelet eredményét a kijelölésnél egyszerűbben nem lehet felírni:]–∞; 2] ∪]3; ∞[.



e) Mivel két elkülönülő szakaszról van szó, a művelet eredménye az üres halmaz, ∅; nincs mit megjelölni a számegyenesen.



f) Mivel két elkülönülő szakaszról van szó, a művelet eredménye egyszerűen a „kisebbítendő",]–∞; 2].



331. A milliméter-pontossággal mért 2,3 cm azt jelenti, hogy a valódi érték 2,25 és 2,35 cm közé esik. (Szokás ezt úgy is jelezni, hogy 2,3 ±0,05 cm.) Ekkor a négyzet területe $2{,}25^2 = 5{,}0625$ és $2{,}35^2 = 5{,}5225$ cm² között van. A $2{,}3^2 = 5{,}29$ eredményt két értékes jegyre kerekítve 5,3 cm²-t mondhatunk, ez kb. középértéke az imént kiszámolt határoknak. (Azonban jól látjuk, hogy ez mint származtatott eredmény, nem azt jelenti, hogy a pontos érték az 5,3 ±0,05 cm² tartományban van, hiszen az imént kiszámolt intervallumot csak a kb. 5,3 ±0,24 cm² eredmény fedi le! A relatív hiba nőtt: $\frac{0{,}05}{2{,}3} \approx 0{,}022 < \frac{0{,}24}{5{,}3} \approx 0{,}045$.)

332. Ha $U = 220$ V, az azt jelenti, hogy 219,5 V < U < 220,5 V. Ha $I = 1{,}14$ A, az azt jelenti, hogy 1,135 A < I < 1,145 A. Mivel $R = \frac{U}{I}$, ezért R lehetséges értékeinek minimumát akkor kapjuk, ha U minimumát I maximumával osztjuk – ez $\frac{219{,}5\text{ V}}{1{,}145\text{ A}} \approx$ $\approx 191{,}7\ \Omega$; míg R maximumát akkor, ha U maximumát I minimumával osztjuk: $\frac{220{,}5\text{ V}}{1{,}135\text{ A}} \approx 194{,}3\ \Omega$. Azaz $191{,}7\ \Omega < R < 194{,}3\ \Omega$. Azaz a középérték 193 Ω, tehát $R = 193 \pm 1{,}3\ \Omega$ – azaz a hiba kisebb, mint 0,7%, ha 193 Ω-nak vesszük az ellenállás értékét. A válasz tehát: kb. 0,7%-os pontossággal adhatjuk meg R értékét.

333. A kétjegyű számok számjegyeinek összege a 10 esetén a legkisebb (1) és a 99 esetén a legnagyobb (18). Tehát eleve csak a 10 és 18 közötti számok jöhetnek szóba. Ezeknek viszont a számjegy-összegük egyesével növekszik 1-től 9-ig, tehát sosem lesz kétjegyű, vagyis ilyen szám nincs.

334. 5 perc = 300 másodperc.
27 éjszaka és 27 nappal eltelte után az óra 270 másodpercet siet, ezért a 28. éjszaka elteltével eléri a 300 másodpercet.
Május 29-én reggel kell tehát állítanunk az óránkon.

335. 800 termék 9%-a $800 \cdot 0{,}09 = 72$ db selejt.
Összesen x db termék 2,5%-a $x \cdot 0{,}025 = 72$ lehet selejt.
Ebből $x = 2880$, tehát még 2080 db-ot kell hibátlanul legyártani, hogy teljesítsék az előírt minőségi követelményt.

336. 3 liter húsleveshez x liter sótlan alaplét öntünk hozzá, így a 3 liter húsleves sótartalma ugyanannyi, mint a $(3 + x)$ liter levesnek.
$3 \cdot 0{,}0018 = (3 + x) \cdot 0{,}0012$
Ebből $x = 1{,}5$, azaz 1,5 liter sótlan alaplét kell a leveshez hozzátölteni, hogy ehető (0,12%-os) sótartalmú legyen.

337. A heti termelés 20%-os növelésével $1520 \cdot 1{,}2 = 1824$ db-ot kell gyártani. A termék régi előállítási ideje összesen $1520 \cdot 22$ perc = 33 440 perc, ebből a 14 munkásra fejenként 2388,6 perc $\approx$ 39,81 óra munka jut hetente.
Ha egy termék előállítási idejét csökkentik, összesen $1824 \cdot 17$ perc = 31 008 perc szükséges, ebből 12 munkásra fejenként 2584 perc $\approx$ 43 óra jut. Tehát változatlan munkaidő és azonos teljesítmény mellett nem teljesíthető a terv.

338. Ha a és b racionálisak, akkor léteznek olyan a_1; a_2; b_1; b_2 egészek, hogy $a = \frac{a_1}{a_2}$ és $b = \frac{b_1}{b_2}$.

Ekkor $a + b = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2 b_2}$, ahol a számláló és a nevező is egészek, tehát $a + b$ racionális.

Hasonlóan $a \cdot b = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$, ahol a számláló és a nevező is egészek, így $a \cdot b$ is racionális.

339. Ha r egy ilyen racionális szám, akkor felírható $r = \frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b egészek.

Ekkor r az $a : b$ osztás eredménye, ahol az osztást a szokásos módon végezve az utolsó számjegyét követően 0-t írunk a maradék után és a kapott számot osztjuk b-vel maradékosan. Ha egyszer 0 maradék adódik, az osztás véget ért, ekkor r véges tizedestört-alakját kaptuk eredményül. Ha nem kapunk 0 maradékot, akkor valamelyik maradék megismétlődik és ezzel egy végtelen szakaszos tizedes törthöz jutunk.

2.2. Hatvány

340. a) $\left(3^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^5 : \left(\left(3^4\right)^2 \cdot 3^{10}\right) = 3^6 \cdot 3^{15} : \left(3^8 \cdot 3^{10}\right) = 3^{21} : 3^{18} = 3^3 = 27$

b) $\left(2^3\right)^5 \cdot \left(2^2\right)^3 : \left(2^{10} \cdot \left(2^6\right)^2\right) = 2^{15} \cdot 2^6 : \left(2^{10} \cdot 2^{12}\right) = 2^{21} : 2^{22} = 2^{-1} = 0{,}5$

341. a) $\dfrac{(3 \cdot 5)^3}{(2 \cdot 3)^4} = \dfrac{3^3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 3^4} = \dfrac{5^3}{2^4 \cdot 3}$ b) $\dfrac{7^2 \cdot (2 \cdot 3)^3}{\left(2^2 \cdot 7\right)^4} = \dfrac{7^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2^8 \cdot 7^4} = \dfrac{3^3}{2^5 \cdot 7^2}$

c) $\dfrac{\left(2^3\right)^2}{5^{-3} \cdot (2 \cdot 5)^6} = \dfrac{2^6 \cdot 5^3}{2^6 \cdot 5^6} = \dfrac{1}{5^3} \left(= 5^{-3}\right)$ d) $\dfrac{2^{-6} \cdot (2 \cdot 7)^5}{(5 \cdot 7)^4} = \dfrac{2^5 \cdot 7^5}{2^6 \cdot 5^4 \cdot 7^4} = \dfrac{7}{2 \cdot 5^4}$

342. a)

$$\left(\frac{\left(2^2 \cdot 3\right)^4 \cdot 5^5}{3^4} : \frac{2^7 \cdot (5 \cdot 11)^6}{11^6}\right)^{-2} = \left(\frac{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^5}{3^4} \cdot \frac{11^6}{2^7 \cdot 5^6 \cdot 11^6}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

b)

$$\left(\frac{\left(2^2 \cdot 5\right)^4 \cdot 3^5}{5^4} : \frac{2^7 \cdot (3 \cdot 7)^6}{7^6}\right)^{-2} = \left(\frac{2^8 \cdot 5^4 \cdot 3^5}{5^4} \cdot \frac{7^6}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 7^6}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

343. a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{7}{6}}$

b) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{6}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{4}{6}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

344. a) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\dfrac{36}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{125}{36}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{5^3}{6^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-2} = \dfrac{36}{25}$

b) $\left[\left(\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\left(2^{-10}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-10\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^3 = 8$

c) $\left[\left(\frac{1,25}{7,32}\right)^0\right]^{-\frac{7}{11}} = 1^{-\frac{7}{11}} = 1$

345. a) $2^{18}\cdot 3^{13}\cdot 7^4$

b) $2\cdot 3\cdot 5^2 = 150$

346. a) $\frac{2\cdot 3^{-6}}{2^{-2}\cdot 3^{-6}} = 2^3 = 8$

b) $\frac{2^9\cdot(2+4-8)}{2^9\cdot(1+2)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

c) $\frac{2^{-18}\cdot 3^{-6}\cdot 5^{-8}}{2^{-16}\cdot 3^{-8}\cdot 5^{-8}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

347. a) $(4\cdot 2)^6\cdot 2^{-16} = (2^3)^6\cdot 2^{-16} = 2^{18}\cdot 2^{-16} = 2^2 = 4$

b) $(125\cdot 5^{-2})^7\cdot 25^3 = (5^3\cdot 5^{-2})^7\cdot (5^2)^3 = 5^7\cdot 5^6 = 5^{13}$

c) $6^{-3}\cdot(-2)^5\cdot 12^{-1}\cdot(-3)^4 = 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot(-2)^5\cdot 3^{-1}\cdot 2^{-2}\cdot(-3)^4 = -1\cdot 2^0\cdot 3^0 =$
$= -1$

348. a) $\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot 9^2\cdot 27\cdot 3^{-1} = 2^{-6}\cdot 3^{-6}\cdot 3^4\cdot 3^3\cdot 3^{-1} = 2^{-6}$

b) $\frac{1,6\cdot 10^{-3}\cdot 2,5\cdot 10^5}{2\cdot 10^{-2}} = \frac{1,6\cdot 2,5\cdot 10^2}{2\cdot 10^{-2}} = \frac{1,6\cdot 2,5}{2}\cdot 10^4 = 2\cdot 10^4$

c) $\frac{360\,000\cdot 0,000\,0025}{0,009} = \frac{3,6\cdot 10^5\cdot 2,5\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^{-3}} = \frac{3,6\cdot 2,5}{9}\cdot 10^2 = 10^2$

349. a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$; $-\left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\frac{16}{81}$, tehát

$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 > -\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

A $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ $\frac{32}{81}$-del nagyobb, mert $\frac{16}{81}-\left(-\frac{16}{81}\right)=\frac{32}{81}$.

b) $-\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{9}{25}$; $-\frac{3^2}{5}=-\frac{9}{5}$, így

$-\frac{9}{25}>-\frac{9}{5}$

A $-\left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\frac{36}{25}$-del nagyobb a $-\frac{3^2}{5}$-nél, mert $-\frac{9}{25}+\frac{9}{5}=\frac{36}{25}=\frac{36}{25}$.

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{3}$; $0{,}1^{-1}=10$

$0{,}1^{-1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

A $0{,}1^{-1}$ $\frac{25}{3}$-dal nagyobb a $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$-nél, mert $10-\frac{5}{3}=\frac{25}{3}$.

350. $5a^{-2}b^{-3}a^5b^7\cdot 4a^{-4}b^{-\frac{9}{2}}=20a^{-1}b^{-\frac{1}{2}}$

$a:=2025^{\frac{1}{2}}=45$

$b:=9^{-1}=\frac{1}{9}$

$20\cdot 45^{-1}\cdot(9^{-1})^{-\frac{1}{2}}=20\cdot\frac{1}{45}\cdot 9^{\frac{1}{2}}=20\cdot\frac{1}{45}\cdot 3=\frac{4}{3}$

351. $16^{\frac{3}{2}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{2}}=2^6=64$

$\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{2^3}{5^3}\right)^{\frac{4}{3}}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$

$32^{1,2}=(2^5)^{1,2}=2^6=64$

352. $\frac{10^{2000}+1}{10^{2001}+1}-\frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}=\frac{(10^{2000}+1)(10^{2002}+1)-(10^{2001}+1)^2}{(10^{2001}+1)(10^{2002}+1)}=$

$$= \frac{10^{4002} + 10^{2002} + 10^{2000} + 1 - (10^{4002} + 2 \cdot 10^{2001} + 1)}{(10^{2001} + 1)(10^{2002} + 1)} =$$

$$= \frac{10^{4002} + 10^{2002} + 10^{2000} + 1 - 10^{4002} - 2 \cdot 10^{2001} - 1}{(10^{2001} + 1)(10^{2002} + 1)} =$$

$$= \frac{10^{2000}(10^2 + 1 - 2 \cdot 10)}{(10^{2001} + 1)(10^{2002} + 1)} = \frac{10^{2000} \cdot 81}{(10^{2001} + 1)(10^{2002} + 1)} > 0$$

Tehát igaz, hogy $\frac{10^{2000} + 1}{10^{2001} + 1} > \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$.

353. a) $7{,}83 \cdot 10^3$ b) $4{,}72 \cdot 10$ c) $6{,}875 \cdot 10^{-2}$ d) $5{,}3 \cdot 10^{-4}$ e) $1 \cdot 10^6$ f) $4 \cdot 10^6$

354. a) 45 000 b) 732 000 c) 0,004 187 d) 0,3 e) 36,2 f) 0,089

355. a) $2 \cdot 10^3$ b) $2{,}5 \cdot 10^5$ c) $2 \cdot 10^{-7}$ d) $1{,}25 \cdot 10^{-4}$

356. a) $\frac{2 \cdot 10^{33} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-7}}{3{,}21 \cdot 10^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^9} = \frac{2 \cdot 6{,}42 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{33} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7}}{3{,}21 \cdot 1{,}8 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9} =$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3{,}21} \cdot 2 \cdot \cancel{1{,}8} \cdot 10^{33} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7}}{\cancel{3{,}21} \cdot \cancel{1{,}8} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9} = 2 \cdot \frac{10^{24}}{10^7} = 2 \cdot 10^{17}$$

b) $\frac{3 \cdot 10^{13} \cdot 2{,}46 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-5}}{1{,}23 \cdot 10^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^7} = \frac{3 \cdot 2{,}46 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5}}{1{,}23 \cdot 2{,}1 \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^7} =$

$$= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1{,}23} \cdot 2 \cdot \cancel{2{,}1} \cdot 10^{13} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5}}{\cancel{1{,}23} \cdot \cancel{2{,}1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^7} = \frac{2 \cdot 10^6}{10^6} = 2$$

357. Átrendezve a képletet: $p = \frac{NkT}{V}$, behelyettesítve az adatokat (felhasználva, hogy $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ és $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$): $p = \frac{8{,}9 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 293\ \mathrm{K}}{0{,}03\ \mathrm{m}^3} = 11\,995{,}42\ \mathrm{Pa} \approx$

$\approx 12\,000$ Pa. (A kiindulási adatok pontossága miatt ennél több értékes jegy úgyis értelmetlen.)

358. Behelyettesítve az adatokat

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^2} = 3{,}5573 \cdot 10^{22}\ \mathrm{N} \approx 3{,}6 \cdot 10^{22}\ \mathrm{N}.$$

(A kiindulási adatok pontossága miatt ennél több értékes jegy úgyis értelmetlen.)

359. $|r| = \sqrt{\frac{\gamma m_1 m_2}{F}}$

A konkrét adatokkal $|r| = 6{,}371 \cdot 10^6$.

360. A Föld felszíne $4R^2\pi \approx 5{,}1 \cdot 10^8$ km².

Körülbelül $5{,}1 \cdot 10^8 \cdot 3{,}8 \approx 1{,}94 \cdot 10^9$ km³,

azaz $1{,}94 \cdot 10^9 \cdot 10^9$ m³ $= 1{,}94 \cdot 10^{18}$ m³ életterük van a tengeri élőlényeknek.

361. a) $9{,}1 \cdot 10^{55}$ kg

b) kb. 10^5-szerese (azaz kb. százezerszerese!)

362. A gömb térfogata jó közelítéssel a $4{,}19R^3$ képlettel számítható (0,03%-os hibával).

A Metagalaxis térfogata $4{,}19 \cdot (12 \cdot 10^9 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15})^3 = 4{,}19 \cdot (1{,}135 \cdot 10^{26})^3 =$

$= 4{,}19 \cdot 1{,}46 \cdot 10^{78} = 6{,}12 \cdot 10^{78}$ m³, tömege kb. $6{,}12 \cdot 10^{78} \cdot 10^{-28} =$

$= 6{,}12 \cdot 10^{50}$ kg.

363. a) $c^{k \cdot t} = \frac{B}{A}$, ezért a logaritmus definíciója miatt $k \cdot t = \log_c \frac{B}{A}$, amiből

$$k = \frac{1}{t} \cdot \log_c \frac{B}{A}.$$

b) Térjünk át 10-es alapú logaritmusra: $k = \frac{\lg \frac{B}{A}}{t \cdot \lg c}$.

Ebből $k = 1{,}928 \cdot 10^{-4}$.

364. Az összes sáska térfogata ekkor $V = 5 \cdot 10^{27}$ cm³ lenne. Ha ezzel beboritjuk egész Brazília területét (amely átváltva $8{,}512 \cdot 10^{16}$ cm²), akkor a $V = T \cdot m$ képlet alapján a „sáska réteg" magassága

$$m = \frac{V}{T} = \frac{5 \cdot 10^{27}\ \text{cm}^3}{8{,}152 \cdot 10^{16}\ \text{cm}^2} \approx 5{,}9 \cdot 10^{10}\ \text{cm} = 590\ 000\ \text{km}$$ lenne.

Ez nem lehetséges, mert ekkor még az űrben (messze a Hold pályáján túlnyúlva) is sáskák lennének Brazília területe fölött.

Megjegyzés:

Mivel a sáskákkal nem lehet hézagmentesen kitölteni a teret, még ennél is magasabb lenne a sáskahegy. Valamit tehát nagyon elírt az újságíró. Valószínűleg a 10^{27} db jóval kevesebb. Ha pl. 10^{17} darab sáskát írunk, akkor 5,9 cm magasan boritanák be Brazíliát – lehet, hogy még ez is sok.

365. A modell szerint, ha tömegarányos lenne a kicsinyítés, akkor: $\frac{m_{\text{Nap}}}{m_{\text{Föld}}} = \frac{m_{\text{proton}}}{m_{\text{elektron}}}$, azaz $\frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} = \frac{x}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}$. Innen $x = 3{,}03 \cdot 10^{-25}$ kg. Ennél kisebb a proton tényleges tömege ($1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg), az arány kb. 180-szoros, tehát ha a tömegarány stimmelne, akkor a protonnak 180-szor akkora tömegűnek kellene lennie. (Még a Hold is túl nagy – a szükségesnél több, mint kétszer nagyobb – lenne a Naphoz képest a H-atom modelljeként.)

366. A fény 4,2 év alatt megtett útja (kb.)

$s = c \cdot t = 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 4{,}2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s} = 3{,}973\,536 \cdot 10^{13}$ km.

A Proxima Centaurinak a Földtől való távolsága kb. $4 \cdot 10^{16}$ m.

367. a) $6 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} = 1{,}092 \cdot 10^{-6}$ kg az 1 molban levő elektrontömeg.

b) $2\ \text{g} = 2 \cdot 10^{-3}$ kg, tehát $\frac{1{,}092 \cdot 10^{-6}\ \text{kg}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = 5{,}46 \cdot 10^{-4}$-ed rész, ami 0,0546%, tehát alig több, mint 0,5 ezrelék az elektrontömeg a moltömeghez képest. Ez persze abból adódik, hogy a protontömeg majdnem 2000-szerese az elektronénak.

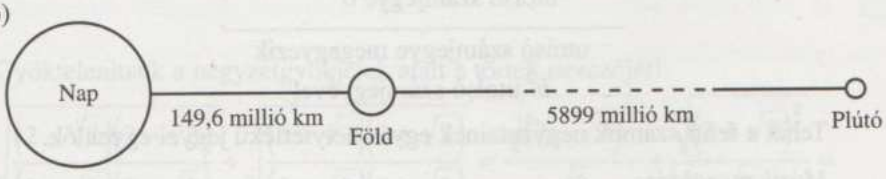
368. Egy x élhosszúságú kocka térfogata: $V = x^3$.

$V = (2{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{cm})^3 = 1{,}5625 \cdot 10^{-23}\ \text{cm}^3$

369. Mivel $t = \frac{s}{c}$ (ahol $c = 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ a fény sebessége)

a) $t = \frac{149{,}6 \cdot 10^6\ \text{km}}{300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 498{,}67\ \text{s} \approx 8{,}3$ perc alatt jut el a fény a Napról a Földre.

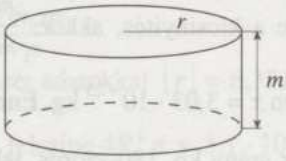
b)



Az ábrán látható elrendezését feltételezve

$t = \frac{(149{,}6 \cdot 10^6 + 5899 \cdot 10^6)\ \text{km}}{300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 20\,162\ \text{s} \approx 336{,}03$ perc $\approx 5{,}6$ óra alatt jut a fény a Napról a Plútóra.

370. a)



$$r = \frac{7{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}}{2} = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$$

A vörösvértest térfogata közelítőleg

$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = (3{,}7 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}^3 = 8{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{mm}^3$.

b) 1 mm³-ben levő vörösvértestek együttes térfogata:

$5\,000\,000 \cdot 8{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{mm}^3 = 0{,}43\ \text{mm}^3$, így 1 liter vérben levő vörösvértestek együttes térfogata 0,43 liter.

371.* Bármely természetes szám felírható $10a + b$ alakban, ahol $a \in \mathbf{N}$; $b \in \mathbf{N}$; $0 \le b \le 9$, pl. $5124 = 10 \cdot 512 + 4$.

Ha két egész szám egyes helyiértékű jegyeinek összege 10, akkor az egyik egyes helyiértékű jegye b, a másik egyes helyiértékű jegye $(10 - b)$.

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = \underbrace{10(10a^2 + 2ab)}_{\text{utolsó számjegye 0}} + b^2$$

utolsó számjegye megegyezik

b^2 utolsó számjegyével

A másik szám:

$(c \in \mathbf{N})$

$$(10c + 10 - b)^2 = 100c^2 + 100 + b^2 + 200c - 20b - 20bc =$$

$$= \underbrace{\underbrace{10\left[10c^2 + 10 + 20c - 2b - 2bc\right]}_{\text{utolsó számjegye 0}} + b^2}_{\text{utolsó számjegye megegyezik}}$$

b^2 utolsó számjegyével

Tehát a fenti számok négyzeteinek egyes helyiértékű jegyei egyenlők.

Másik megoldás:

Ha az utolsó jegyek 1 és 9, akkor a négyzeté 1
ha 2 és 8, akkor 4;
ha 3 és 7, akkor 9;
ha 4 és 6, akkor 6;
és ha mindkettő 5, akkor 5.
Más eset pedig nincs.

2.3. Gyök

372. a) I. A négyzetgyök miatt $\frac{x^2-1}{1+x} \geq 0$.

II. A tört miatt $1+x \neq 0$, így $x \neq -1$. Alakítsuk át a tört számlálóját!

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

A kifejezés $x \geq 1$ valós számokra értelmezhető.

b) A tört miatt $x-4 \neq 0$.

A négyzetgyök értelmezése szerint: $\frac{1}{x-4} \geq 0$.

Mivel a számláló pozitív $\Rightarrow x-4>0$, így $x>4$ valós számokra értelmezhető a kifejezés.

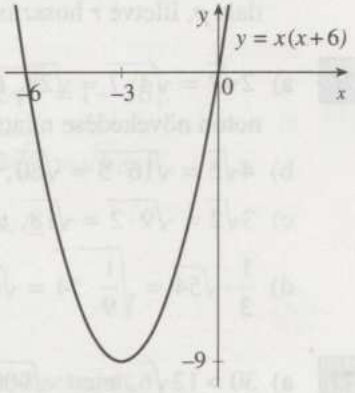
c) $\sqrt{x^2+6x} = \sqrt{x(x+6)}$

A négyzetgyök miatt $x(x+6) \geq 0$.

Az ábráról leolvasható:

az $x \leq -6$ és az $x \geq 0$

valós számokra értelmezhető a kifejezés.



373. Gyöktelenítsük a négyzetgyökjelek alatt a törtek nevezőjét!

$$\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} + \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{|2-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} + \frac{|2+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

mivel $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$ és $|2+\sqrt{2}| = 2+\sqrt{2}$.

374. a) $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{(a^2-b^2)^6}{(a-b)^{10}}}=$ $\qquad 0<b<a$

$$=\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\frac{[(a-b)(a+b)]^6}{(a-b)^{10}}}=\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\frac{(a-b)^6(a+b)^6}{(a-b)^{10}}}=$$

$$=\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)^6}{(a-b)^4}}=\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\frac{|a+b|^3}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b},$$

mivel $a>b>0 \Rightarrow a+b>0$ és $a-b>0$

$\Rightarrow |a+b|^3=(a+b)^3$ és $|a-b|^2=(a-b)^2$

b) Ha $a=23$, $b=21$, akkor a kifejezés értéke $\dfrac{23+21}{23-21}=22$.

375. a) 85,19

b) Egy olyan háromszög harmadik oldalának hosszát kapjuk meg, amelynek két oldala p, illetve r hosszúságú és az ezek által közbezárt szög ε nagyságú.

376. a) $2\sqrt{7}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{28}$, tehát $2\sqrt{7}<\sqrt{63}$ (az $x\mapsto\sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt).

b) $4\sqrt{5}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{80}$, tehát $\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

c) $3\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}$, tehát $3\sqrt{2}<\sqrt{20}$.

d) $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{54}=\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot 54}=\sqrt{6}$, $\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{125}=\sqrt{\dfrac{1}{25}\cdot 125}=\sqrt{5}$, tehát $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{54}>\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{125}$.

377. a) $30>12\sqrt{6}$, mert $\sqrt{900}>\sqrt{12^2\cdot 6}$ (az $x\mapsto\sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt), így $\sqrt{30-12\sqrt{6}}>0$.

$2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$, mert $\sqrt{2^2\cdot 3}<\sqrt{3^2\cdot 2}$, így $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}<0$,

tehát $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}<\sqrt{30-12\sqrt{6}}$.

Megjegyzés: ha összehasonlítanánk a két szám négyzetét:

$\left(\sqrt{30-12\sqrt{6}}\right)^2=30-12\sqrt{6}$

$\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-12\sqrt{6}+\left(3\sqrt{2}\right)^2=30-12\sqrt{6}$,

ezek egyenlők, de az eredeti két szám nem egyenlő, hiszen az egyik pozitív, a másik negatív.

b) $\sqrt{9+4\sqrt{2}} > 0$ és $1+2\sqrt{2} > 0$

Vizsgáljuk meg a második szám négyzetét!

$\left(1+2\sqrt{2}\right)^2 = 1+4\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9+4\sqrt{2}$,

így $\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2} = \left|1+2\sqrt{2}\right| = 1+2\sqrt{2}$, a két szám egyenlő.

Megjegyzés:

Ha két szám négyzete egyenlő és a két szám azonos előjelű, akkor a két szám egyenlő.

378. Először célszerű a nevezőket gyöktelenníteni:

$\frac{1}{5\sqrt{2}+7} = \frac{5\sqrt{2}-7}{50-49} = 5\sqrt{2}-7$; $\qquad \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$.

A bizonyítandó egyenlőség bal oldala tehát így is írható: $\left(5\sqrt{2}-7\right)^2 = 99-70\sqrt{2}$.

A jobb oldali szám: $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right) = 99-70\sqrt{2}$.

Az állítás tehát igaz.

379. $7+2\sqrt{6} = \left(1+\sqrt{6}\right)^2$ és $1+\sqrt{6} > 0$, ezért $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = 1+\sqrt{6}$,

$7-2\sqrt{6} = \left(1-\sqrt{6}\right)^2$ és $1-\sqrt{6} < 0$, ezért $\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{6}-1$.

Így $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = 1+\sqrt{6}-\left(\sqrt{6}-1\right) = 2$.

380. (Lásd a 377. feladat megjegyzését!)

$2\sqrt{3}-\sqrt{5} = \sqrt{12}-\sqrt{5} > 0$

az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt,

$17-4\sqrt{15} = \sqrt{289}-\sqrt{240} > 0$, így a két szám azonos előjelű, ha a négyzetük is egyenlő, akkor a két szám egyenlő.

$\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{15}+5 = 17-4\sqrt{15}$

$\left(\sqrt{17-4\sqrt{15}}\right)^2 = 17-4\sqrt{15}$, tehát a két szám egyenlő.

Másik megoldás:

$\sqrt{17-4\sqrt{15}} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2} = \left|2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| = 2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (mivel $2\sqrt{3}-\sqrt{5} > 0$).

381. (Lásd a 377. feladatot)

$9 > 4\sqrt{5}$, mert $\sqrt{81} > \sqrt{16 \cdot 5}$ (az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt),

így $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} > 0$.

$2 < \sqrt{5}$, mert $\sqrt{4} < \sqrt{5}$, így $2 - \sqrt{5} < 0$, így a vizsgált két szám nem egyenlő.

382. Elvégezve a négyzetre emelést

$16 + 2\sqrt{55} - 2\sqrt{\left(16 + 2\sqrt{55}\right)\left(16 - \sqrt{220}\right)} + 16 - \sqrt{220}$.

Mivel $\sqrt{220} = \sqrt{4 \cdot 55} = 2\sqrt{55}$, ez egyszerűbben:

$32 - 2\sqrt{16^2 - 220} = 32 - 2\sqrt{36} = 20$.

Másik megoldás:

Vegyük észre, hogy $16 + 2\sqrt{55} = 11 + 2\sqrt{11}\sqrt{5} + 5 = \left(\sqrt{11} + \sqrt{5}\right)^2$,

és hasonlóan $16 - \sqrt{220} = 11 - \sqrt{4 \cdot 11 \cdot 5} + 5 = 11 - 2\sqrt{11}\sqrt{5} + 5 = \left(\sqrt{11} - \sqrt{5}\right)^2$.

Mivel mindkét zárójelben pozitív szám áll, mindkettő négyzetének négyzetgyöke önmaga, vagyis a kiszámítandó: $\left(\sqrt{11} + \sqrt{5} - \left(\sqrt{11} - \sqrt{5}\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$.

383. a) $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$, ezért $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$.

Az $|a-2| = a - 2$ egyenlőség $a \geq 2$ esetén teljesül.

b) $4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, ezért $\sqrt{4a^2 + 4a + 1} = \sqrt{(2a+1)^2} = |2a+1|$.

Az $|2a+1| = 2a + 1$ egyenlőség $a \geq -\frac{1}{2}$ esetén teljesül.

c) $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$ és $a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$, ezért

$\sqrt{a^2 - 2a + 1} + \sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a+1)^2} = |a-1| + |a+1|$

az $|a-1| + |a+1| = 2a$ egyenlőség $a \geq 1$ esetén teljesül.

384. Mivel $x > 1$, ezért

$x \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{x}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 1}}$ igaz.

Másrészt

$\sqrt{x + \frac{x}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^3 - x + x}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 1}}$ is igaz,

ezért a feladat állítása is igaz.

385. a) A négyzetgyök és a hatodik gyök miatt az $x \geq 0$ valós számokra van értelmezve és ezekre az egyenlet azonosság, azaz: $M = [0; +\infty[$.

b) Az egyenlet alaphalmaza **R**, de a negyedik gyök értéke csak nemnegatív valós szám lehet $\Rightarrow x \geq 0$ valós számokra az egyenlet azonosság, azaz: $M = [0; +\infty[$.

c) A négyzetgyök miatt az alaphalmaz a nemnegatív valós számok halmaza. Rendezve:

$\sqrt{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt{x}$, azaz $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^3}$.

Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens művelet $x^4 = x^3$, innen $x^3(x-1) = 0$, így $x_1 = 0$; $x_2 = 1$, melyek megoldásai az eredeti egyenletnek.

386. a) $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = 5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

c) $\dfrac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2} = 5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

387. a) $\dfrac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = 2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

b) $\dfrac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{6\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2} = 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

c) Mivel $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ és $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$:

$$\frac{8\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{8\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = 8\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

388. a) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{5-3} = \dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{2} = \dfrac{8-2\sqrt{15}}{2} =$

$= 4-\sqrt{15}$

* b) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}=$

$=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{(a-b)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}=$

$=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

389. a) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=2\left(\sqrt{5}-1\right)$

* b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\qquad(a\geq 0;\ b\geq 0;\ a\neq b)$

* c) $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\cdot\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{15\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)}{\left(5\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2}=\frac{15\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)}{75-45}=\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}$

390. a) $g=\frac{4\pi^2 h}{T^2}$

b) 9,81

391. a) A jobb oldali kifejezésben c és m_0 adott pozitív számok, csak a nevezőben előforduló v változhat. Ha v értéke növekszik, akkor a tört nevezője csökken (de sosem lesz negatív), így a tört értéke növekszik. A részecske sebességének növekedésekor tehát a részecske tömege (m) is növekszik.

b) A tört nevezője tetszőlegesen kis pozitív szám is lehet, de 0 nem. Ezért $v^2 < c^2$, azaz $v < c$ teljesül minden esetben (a részecske sebessége mindig kisebb a fénysebességnél). (Felhasználtuk, hogy $v \geq 0$.)

c) $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $v = 1{,}2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ helyettesítése után $m = 9{,}93 \cdot 10^{-31}$ kg adódik (ami kb. 9%-kal nagyobb, mint az elektron nyugalmi tömege).

d) kb. $1{,}25 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebessége (ami a fénysebességnek kb. 42%-a).

392. a) $r = \sqrt{\left(\frac{Mk}{p}\right)^3}$

b) $2{,}41 \cdot 10^{-9}$

393. a) $\sqrt{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \left(a^3 \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}$, $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{6}}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$.

Ha $0 < a < 1$, akkor a csökkenő kitevők jelentenek növekvő hatványértékeket: $a^{\frac{13}{6}} < a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{1}{12}}$; ha $1 < a$, akkor a relációk fordítottak; ha pedig $a = 1$, akkor mindhárom szám egyenlő.

b) $\sqrt{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}} = \left(a^5 \cdot a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{27}{10}}$, $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{29}{10}}$, $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{12}}$.

Ha $0 < a < 1$, akkor a csökkenő kitevők jelentenek növekvő hatványértékeket: $a^{\frac{29}{10}} < a^{\frac{27}{10}} < a^{-\frac{1}{12}}$; ha $1 < a$, akkor a relációk fordítottak; ha pedig $a = 1$, akkor mindhárom szám egyenlő.

394. Gyöktelenítsük a nevezőket!

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} + \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = 2+\sqrt{3}+\sqrt{5}-2 = \sqrt{3}+\sqrt{5}$$

395. a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\cdot 2\sqrt{3}+3} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2+\sqrt{3}$

b) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{9-2\cdot 3\sqrt{2}+2} = \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = 3-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\cdot 2\sqrt{5}+4} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \sqrt{5}-2$

(Mindhárom esetben pozitív szám négyzetéből vontunk gyököt, ezért kaptuk visszasza a számot magát.)

396. (Lásd a 377. feladatot)

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-\sqrt{3}\right| - \left|1+\sqrt{3}\right| =$$

$$= -\left(1-\sqrt{3}\right) - \left(1+\sqrt{3}\right) = -1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3} = -2$$

$\left(\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1$, mert $1-\sqrt{3} < 0\right)$.

Másik megoldás:

Mivel $0 < 4 - 2\sqrt{3} < 4 + 2\sqrt{3}$, ezért az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt $\sqrt{4-2\sqrt{3}} < \sqrt{4+2\sqrt{3}}$, ezért a keresett szám értéke negatív.

Legyen $a = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$$a^2 = \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 - 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 =$$

$$= 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} + 4 + 2\sqrt{3} =$$

$$= 8 - 2\sqrt{16-12} = 8 - 2 \cdot 2 = 4.$$

Mivel $a^2 = 4$ és $a < 0$, így $a = -2$.

397. Indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ alakú, vagyis racionális, de nem egész. (Azaz p és q pozitív egészek, de $q \neq 1$.) Tegyük fel továbbá, hogy ez a tört tovább már nem egyszerűsíthető, vagyis p és q relatív prímek, $(p; q) = 1$. Ekkor maga az n szám $\frac{p^2}{q^2}$ alakú, ahol a tört szintén már nem egyszerűsíthető tovább, $(p^2; q^2) = 1$. (Ha két szám relatív prím, a négyzeteik is azok.) Mivel n természetes szám, a tovább már nem egyszerűsíthető tört alakjának nevezője 1. Ellentmondásra jutottunk a $q \neq 1$ kikötéssel, tehát nem lehet igaz a feltevés, hogy $\sqrt{n}$ lehet racionális, de nem egész. Egész lehet, ezt konkrét példákból tudjuk ($\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$ stb.).

2.4. Logaritmus

398. a) $\lg\sqrt[3]{100} = \lg 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

399. Használjuk az $a^{\log_a x} = x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$ azonosságot!

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = \left(\sqrt{3}^{-4}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = \left(\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 5}\right)^{-4} = 5^{-4} = \frac{1}{625}$

b) $0{,}25^{\log_2 3} = \left(2^{-2}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) $3^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2}\right]^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

400. a) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{10}} 100 = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = -2$

401. a) $3^{\frac{1}{4}\log_3 2} = 3^{\log_3 2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

b) $81^{\log_3 2} = (3^4)^{\log_3 2} = 3^{4\log_3 2} = 3^{\log_3 2^4} = 2^4 = 16$

c) $25^{\log_5 10 - 1} = 25^{\log_5 10} \cdot 25^{-1} = (5^2)^{\log_5 10} \cdot \frac{1}{25} = 5^{2\log_5 10} \cdot \frac{1}{25} =$

$= 5^{\log_5 10^2} \cdot \frac{1}{25} = 100 \cdot \frac{1}{25} = 4$

402. a) $3^{2-\log_3 10} = 3^2 \cdot 3^{-\log_3 10} = \dfrac{3^2}{3^{\log_3 10}} = \dfrac{9}{10}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^{3-\log_2 5} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{3-\log_2 5} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log_2 5} = 2^{\frac{3}{2}-\log_2 \sqrt{5}} = \dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\log_2 \sqrt{5}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

c) $8^{\log_2 6-2} = (2^3)^{\log_2 6-2} = 2^{3\log_2 6-6} = 2^{\log_2 6^3-6} = \dfrac{2^{\log_2 6^3}}{2^6} = \dfrac{6^3}{2^6} = \dfrac{(2\cdot 3)^3}{2^6} =$

$= \dfrac{2^3 \cdot 3^3}{2^6} = \dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$

403. $13^{\log_{\sqrt{13}} 3+\log_{13} 2} = \left(\sqrt{13}^2\right)^{\log_{\sqrt{13}} 3} \cdot 13^{\log_{13} 2} = \sqrt{13}^{2\log_{\sqrt{13}} 3} \cdot 2 =$

$= \sqrt{13}^{\log_{\sqrt{13}} 9} \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$

404. a) $\lg(\lg(\lg 10^{10})) = \lg(\lg 10) = \lg 1 = 0$

b) $\log_2(\log_3(\log_4 64)) = \log_2(\log_3 3) = \log_2 1 = 0$

405. a) A négyzetgyök és a tört miatt $a > 0$, a logaritmus értelmezése miatt $a > 0$, és $a \neq 1$, így a kifejezés $a > 0$, $a \neq 1$ valós számokra értelmezhető.

$\log_a \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \log_a a^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

b) A négyzetgyök miatt $a \geq 0$; a logaritmus miatt $a > 0$, $a \neq 1$.
Így a kifejezés az $a > 0$, $a \neq 1$ valós számokra értelmezhető.

$\log_{\sqrt{a}} a = \log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2$

406. a) $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2} = 10 \cdot (10^2)^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2} = 10 \cdot 10^{2\left(\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2\right)} =$

$= 10 \cdot 10^{\lg 9-2\lg 2} = 10 \cdot 10^{\lg 9-\lg 4} = 10 \cdot \dfrac{10^{\lg 9}}{10^{\lg 4}} = 10 \cdot \dfrac{9}{4} = 22{,}5$

b) $0{,}1 \cdot 0{,}1^{\lg 0{,}1-2} = 0{,}1 \cdot (10^{-1})^{-1-2} = 0{,}1 \cdot (10^{-1})^{-3} = 0{,}1 \cdot 10^3 = 100$

c) $26^{1-\log_3 3} + 4^{-\log_4 5} = 26^{1-1} + \dfrac{1}{4^{\log_4 5}} = 26^0 + \dfrac{1}{5} = 1 + \dfrac{1}{5} = 1{,}2$

407. $4^{\log_2 5} = (2^2)^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 25$

$5^{\log_2 4} = 5^2 = 25$

A két szám egyenlő.

408. a) $\left(10^{2-\lg 2}\right)^{10} = \left(\frac{10^2}{10^{\lg 2}}\right)^{10} = \left(\frac{100}{2}\right)^{10} = 50^{10}$

Mivel $7^{20} = 49^{10}$, és $49^{10} < 50^{10}$, ezért $7^{20} < \left(10^{2-\lg 2}\right)^{10}$.

b) $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_5 4} = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{5}^{\log_5 4} = 5 \cdot \left(5^{\log_5 4}\right)^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 2 = 10$, és $3^2 = 9$, ezért $3^2 < \sqrt{5}^{2+\log_5 4}$.

409. a) $\sqrt{k^{6+\log_k 64}} = \sqrt{k^6 \cdot k^{\log_k 64}} = \sqrt{k^6 \cdot 64} = 8 \cdot k^3$

b) $\sqrt[3]{k^{6-\log_k 64}} = \sqrt[3]{\frac{k^6}{k^{\log_k 64}}} = \sqrt[3]{\frac{k^6}{64}} = \frac{k^2}{4}$

c) $k^{\frac{\lg(\lg k)}{\lg k}} = \left(10^{\lg k}\right)^{\frac{\lg(\lg k)}{\lg k}} = 10^{\lg k \cdot \frac{\lg(\lg k)}{\lg k}} = 10^{\lg(\lg k)} = \lg k$

410. a) $\lg A = \frac{t \cdot \lg 2}{5570} + \lg B$, tehát a logaritmus definíciója szerint $A = 10^{\frac{t \cdot \lg 2}{5570} + \lg B}$.

b) $\lg A - \lg B = \lg \frac{A}{B} = \lg 10^{5,2} = 5,2$ miatt $t = \frac{5,2 \cdot 5570}{\lg 2} = 9,62 \cdot 10^4$.

c) $B \approx 0,001$

411. Az egyes hatványokat célszerű logaritmus segítségével normálalakba átírni. Például:

$\lg 632^{54} = 54 \cdot \lg 632 = 151,2387 \Rightarrow 632^{54} = 10^{0,2387} \cdot 10^{151} = 1,7326 \cdot 10^{151}$.

Ugyanígy kapjuk:

$0,295^{211} = 1,3566 \cdot 10^{-112}$; $5^{220} = 5,9347 \cdot 10^{153}$; $14^{-100} = 2,4389 \cdot 10^{-115}$.

Ezzel $A = 1,6239$.

412. Az egyes hatványokat célszerű logaritmus segítségével normálalakba átírni. Például:

$\lg 65^{117} = 117 \cdot \lg 65 = 212,1109 \Rightarrow 65^{117} = 10^{0,1109} \cdot 10^{212} = 1,2909 \cdot 10^{212}$.

Hasonlóan kapjuk:

$203^{107} = 7,9813 \cdot 10^{46}$; $18^{328} = 5,3627 \cdot 10^{411}$. Ezzel $A = 1,9212 \cdot 10^{-202}$.

413. Először a tört értékét számoljuk ki: a számláló normálalakban (lásd előző két feladat megoldása) $5,8308 \cdot 10^{556}$, a nevező nornálalakja $6,7590 \cdot 10^{554}$. A tört értéke $\frac{5,8308 \cdot 10^{556}}{6,7590 \cdot 10^{554}} = 86,2674$. Tehát $A = 2002,000$.

414. a) A számlálót és a nevezőt célszerű normálalakba átírni.

$$\lg \sqrt[13]{23,8^{1100}} = \frac{1100 \cdot \lg 23,8}{13} = 116,4796 \Rightarrow \sqrt[13]{23,8^{1100}} = 10^{0,4796} \cdot 10^{116} =$$

$$= 3,0172 \cdot 10^{116};$$

$$\lg 53,47^{68} = 68 \cdot \lg 53,47 = 117,5115 \Rightarrow 53,47^{68} = 10^{0,5115} \cdot 10^{117} =$$

$$= 3,2471 \cdot 10^{117}.$$

A tört értéke $9,292 \cdot 10^{-2}$.

b) Írjuk fel normálalakban a kisebbítendőt és a kivonandót is.

$$\lg 21,11^{100} = 100 \cdot \lg 21,11 = 132,4488 \Rightarrow 21,11^{100} = 10^{0,4488} \cdot 10^{132} =$$

$$= 2,8106 \cdot 10^{132};$$

$$\lg 21,1^{100} = 100 \cdot \lg 21,1 = 132,4282 \Rightarrow 21,1^{100} = 10^{0,4282} \cdot 10^{132} =$$

$$= 2,6804 \cdot 10^{132}.$$

Tehát $21,11^{100} - 21,1^{100} = 2,8106 \cdot 10^{132} - 2,6804 \cdot 10^{132} = 0,1302 \cdot 10^{132} =$

$$= 1,302 \cdot 10^{131}.$$

(Ez a hatalmas különbség először igen meglepőnek tűnhet!)

415. Mivel $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, ezért $5 = \frac{450}{3^2 \cdot 10}$.

Ekkor $\lg 5 = \lg 450 - 2 \cdot \lg 3 - \lg 10 = a - 2b - 1$.

416. $48 = 2^4 \cdot 3$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 3$. A 10-es szorzót a logaritmus alapszámával tudjuk biztosítani, a 3-t kell a másik két számból előállítanunk. Valamely hatványuk hányadosából kiejthetjük a 2-t, például: $\frac{72^4}{48^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^3} = 3^5$. Tehát

$30 = 10 \cdot \sqrt[5]{\frac{72^4}{48^3}}$, vagyis $\lg 30 = \lg\left(10 \cdot \sqrt[5]{\frac{72^4}{48^3}}\right) = \lg 10 + \lg \sqrt[5]{\frac{72^4}{48^3}} =$

$$= 1 + \frac{\lg 72^4 - \lg 43^3}{5} = 1 + \frac{4 \cdot \lg 72 - 3 \cdot \lg 43}{5} = 1 + \frac{4d - 3c}{5}.$$

417. a) $\log_a(ab) = \log_a a + \log_a b = 1 + c \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

b) $\log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - c \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

c) $\log_a b^3 = 3 \cdot \log_a b = 3c \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

d) $\frac{\lg a}{\lg b} = \log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{c} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$

418. A 10-es alapú logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt az egyenlőség ekvivalens a $\lg a^{\lg b} = \lg b^{\lg a}$ egyenlőséggel, ami $\lg b \cdot \lg a = \lg a \cdot \lg b$ alakba írható a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alkalmazásával. Az állítás tehát igaz.

419. $\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k} \Leftrightarrow (a^k)^{\frac{n}{k}} = a^n$. Mivel $(a^k)^{\frac{n}{k}} = a^{\frac{kn}{k}} = a^n$, ezért az állítás igaz.

420. a) A logaritmus azonosságait felhasználva:
$\lg x = \lg \frac{1,2 \cdot 1,5}{0,9} = \lg 2$, tehát $x = 2$ a 10-es alapú logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt.

b) A logaritmus azonosságait felhasználva: $\lg x = \lg 0,25$, amiből $x = 0,25$ a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt.

c) $\log_2 8 = 3$ és $\log_2 16 = 4$ miatt $\log_2 x = 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 9 - 2 = 7$, tehát $x = 2^7 = 128$.

421. a) 3

b) Igaza van, hiszen $-\lg c = \lg \frac{1}{c}$, ha $c > 0$.

c) $13 = -\lg c$, amiből $c = 10^{-13} \ \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$.

422. a) 1,6049 millió forint

b) $2 \cdot 10^6 = 1,5 \cdot 10^5 \cdot 1,2^x$-ből $1,2^x = \frac{40}{3}$, amiből $x = \frac{\lg \frac{40}{3}}{\lg 1,2} \approx 14,2$.
Tehát 15 év elteltével már meghaladja a 2 millió forintot a betét névértéke.

423. $12 = 2^2 \cdot 3$, $441 = 3^2 \cdot 7^2$, $175 = 5^2 \cdot 7$ és a logaritmus alapszáma $10 = 2 \cdot 5$.
Ezek segítségével $175 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{441}}{12}$, amiből $\lg 175 = \lg \frac{10^2 \cdot \sqrt{441}}{12} =$
$= \lg 10^2 + \lg \sqrt{441} - \lg 12 = 2 \cdot \lg 10 + \frac{1}{2} \cdot \lg 441 - \lg 12 = 2 + \frac{1}{2} f - e$.

424. $18 = 2 \cdot 3^2$, $21 = 3 \cdot 7$, $245 = 5 \cdot 7^2$ és a logaritmus alapszáma $10 = 2 \cdot 5$.
Ezek segítségével $245 = \frac{21^2 \cdot 10}{18}$, amiből
$\lg 245 = \lg \frac{21^2 \cdot 10}{18} = \lg 21^2 + \lg 10 - \lg 18 = 2 \cdot \lg 21 + \lg 10 - \lg 18 = 2h + 1 - g$.

425. $\log_a c = (\log_{ab} c) \cdot (1 + \log_a b) = (\log_{ab} c) \cdot (\log_a a + \log_a b) = (\log_{ab} c) \cdot (\log_a ab)$, amiből egy osztás után: $\dfrac{\log_a c}{\log_a ab} = \log_{ab} c$. Ez pedig a más alapú logaritmusra áttérés képlete, azonosság. Vagyis minden olyan a, b, c számra igaz, amelyre értelme van. Tegyük meg a kikötéseket: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $ab \neq 1$, $c > 0$.

426. Legyen $\log_a \dfrac{1}{b} = x$ (1) és $\log_{\frac{1}{a}} b = y$ (2) $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

Be kell látni, hogy $x = y$.

Írjuk fel (1) és (2)-t hatványalakban!

$a^x = \dfrac{1}{b}$ (3), illetve $\left(\dfrac{1}{a}\right)^y = b$. (4)

Vegyük (3) reciprokát! (A $k \mapsto \dfrac{1}{k}$ függvény kölcsönösen egyértelmű), így

$\dfrac{1}{a^x} = b \quad \Rightarrow \quad a^{-x} = b$. (5)

(4) és (5) összehasonlításával

$a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^y$, azaz $a^{-x} = (a^{-1})^y$.

A hatványozás azonosságai miatt

$a^{-x} = a^{-y}$.

Mivel $t \mapsto a^t$ exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $-x = -y$, tehát $x = y$, tehát $\log_a \dfrac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b$.

2.5. Számelmélet, oszthatóság

427. a) Ha n páros, azaz $n \in \mathbf{N}$, $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, akkor n és a következő páros szám $n + 2$ szorzata $n(n + 2) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$, ahol k és $k + 1$ két szomszédos egész szám. Bármely két szomszédos egész szám közül az egyik páros, a másik páratlan, így szorzatuk páros, azaz osztható 2-vel. Tehát a $4k(k + 1)$ szorzat osztható $4 \cdot 2 = 8$-cal.

Másik megoldás: ha két páros szám szomszédos páros, akkor közülük az egyik 2-vel, a másik 4-gyel, így szorzatuk $2 \cdot 4 = 8$-cal osztható.

b) A páratlan számok általános alakja: $2m + 1$, ahol $m \in \mathbf{N}$, ezek négyzete

$(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m + 1) + 1$,

ahol m és $m + 1$ két szomszédos egész szám. Bármely két szomszédos egész szám közül az egyik páros, a másik páratlan, így a szorzatuk páros, azaz osztható 2-vel (lásd a)). Tehát a $8 \mid 4m(m + 1)$, így a $4m(m + 1) + 1$ kifejezés, azaz minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1 maradékot ad.

428. a) Ilyen pozitív egész szám nincs, hiszen minden egész szám osztható 1-gyel és önmagával.

b) Ez az 1.

c) Ezek a prímszámok, melyeknek két pozitív osztójuk van.

d) A prímszámok és az 1.

e) Ilyen pozitív egész szám nincs, hiszen minden egész szám osztható 1-gyel és önmagával, és ezek a szám nem valódi osztói.

429. a) Egy egész számot összetettnek nevezünk, ha 4-nél több osztója van (2-nél több pozitív osztója van).

b) $10^{15} - 5^8$ egy 5-nél nagyobb, 5-tel osztható egész szám, ezért összetett.

100 000 000 047-ben a számjegyek összege 12, tehát 3-mal osztható, 3-nál nagyobb egész. Ezért összetett.

$10^{20} - 7$ tízes számrendszerben felírt alakjában 19 db 9-es és a szám végén egy 3-as számjegy szerepel, ezért 3-mal osztható, 3-nál nagyobb egész, tehát összetett szám.

430. a) Egy egész számot prímszámnak nevezünk, ha pontosan 2 pozitív osztója van.

b) $14^{15} - 7^8$ osztható 7-tel és 7-nél nagyobb, ezért nem lehet prím.

7 000 000 000 011-ben a számjegyek összege 9, ezért osztható 9-cel, tehát nem prím.

$5^{20} + 7$ egy 2-nél nagyobb páros szám, tehát nem prím.

431. Bármely pozitív egész szám 3-mal osztva 0; 1 vagy 2 maradékot ad.
Egyetlen olyan prím van, amely 3-mal osztható, ez a 3.

a) $p = 3$ esetén $p^2 + 149 = 3^2 + 149 = 158$ páros, tehát összetett szám.

b) Ha $p = 3k + 1$ $(k \in \mathbf{N}^+) \Rightarrow$
$p^2 + 149 = (3k + 1)^2 + 149 = 9k^2 + 6k + 150 = 3(3k^2 + 2k + 50) > 3$
osztható 3-mal, tehát összetett szám.

c) Ha $p = 3k + 2$ $(k \in \mathbf{N})$
$p^2 + 149 = (3k + 2)^2 + 149 = 9k^2 + 12k + 153 = 3(3k^2 + 4k + 51) > 3$
osztható 3-mal, tehát összetett szám.

432. A prímszámok: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ...
Az első hat prímszám összege $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41$ prímszám.

Megjegyzés:
Egyetlen páros prímszám van (2). Ha úgy választjuk ki a 6 egymást követő pozitív prímszámot, hogy a 2 nincs benne, akkor 6 db páratlan számot adunk össze. Ezek összege páros, 2-nél nagyobb, így nem prím. Tehát csak az első 6 egymást követő prímszám összege prím.

433. Ha a 6 egész szám mindegyike páratlan lenne, akkor összegük páros lenne. Mivel a feladat feltétele szerint e 6 szám összege páratlan, tehát van közöttük legalább egy páros szám, így szorzatuk páros.

434. A keresett háromjegyű számok: 400; 310; 301; 220; 202; 211; 130; 103; 121; 112, tehát 10 db. A legnagyobb 400, a legkisebb 103. Ezek számtani közepe (átlaga) nem egész szám, tehát nem szerepelhet a fenti számok között.

435. Legyen p a keresett prímszám, az ezt követő négy szomszédos összetett szám a; b; c; d, az ötödik szám e. Erről az e-ről kellene belátni, hogy bizonyos p esetén nem összetett. (Ugyanis csak ekkor állhatna p után pontosan négy összetett szám.)
Ha $p = 2$, akkor $a = 3$, tehát nem összetett.
Ha $p \neq 2$, akkor páratlan, tehát az a; c; e páros, azaz összetett. Ezért nincs olyan p prímszám, amely után a természetes számsorban pontosan négy összetett szám állna.

436. Vagyis az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 legkisebb közös többszörösét keressük. Felírva mindegyikük prímtényezős felbontását, az összes szereplő prímtényezőt az előforduló legmagasabb hatványon összeszorozva kapjuk: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Tehát ez a keresett szám.

437. A keresett háromjegyű szám x. Felírható, hogy $2a + 1 = x$,
$3b + 2 = x$,
$4c + 3 = x$,
$5d + 4 = x$,
$6e + 5 = x$.

Az a; b; …; e; x pozitív egész számok.
Ebből látható, hogy $x + 1$ osztható 2-vel, 3-mal, …, 6-tal. Mivel 2; 3; 4; 5 és 6 legkisebb közös többszöröse 60, vagyis $x + 1 = 60y$, ahol y pozitív egész szám.
A legkisebb háromjegyű szám adódik, ha $y = 2$, ekkor $x = 119$; hiszen, ha $y = 1$, akkor 59 kétjegyű.
A legnagyobb háromjegyű szám adódik, ha $y = 16$, ekkor $x = 959$.

438. $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500 \cdot 1001 = 500 \cdot 91 \cdot 11$,
tehát a kereset összeg osztható 11-gyel.

439. $2^5 \cdot 3^4 \cdot (2^2)^2 \cdot (2 \cdot 3)^3 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 5^2 =$
$= 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 5^4$ négyzetszám, mert a szám prímtényezős felbontásában a prímtényezők kitevője pozitív páros szám.
Így az eredeti szám a $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 259\,200$ négyzete, vagy a $-259\,200$ négyzete.

440. 150 m^2 területű téglalapokról van szó, amelyek oldalainak a és b hossza méterben mérve pozitív egész szám; ezek a következők:

$a = 1$,	$a = 2$,	$a = 3$,	$a = 5$,	$a = 6$,	$a = 10$,
$b = 150$;	$b = 75$;	$b = 50$;	$b = 30$;	$b = 25$;	$b = 15$.

441. A közös oldal méterben mért hossza osztója 450-nek és 126-nak egyaránt, tehát az $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 6$, $a = 9$, $a = 18$ méter hosszú közös oldalak jöhetnek szóba. A kapott, összeillesztett téglalapok oldalainak mérőszámai tehát:

$a = 1$,	$a = 2$,	$a = 3$,	$a = 6$,	$a = 9$,	$a = 18$,
$b = 576$;	$b = 288$;	$b = 192$;	$b = 96$;	$b = 64$;	$b = 32$,

ahol az utolsó a leghosszabb közös oldallal rendelkező.

442. A két szám legnagyobb közös osztóját kell megkeresni, annál nagyobb oldalú négyzetlappal nem lehet lefedni a helyiséget. $425 = 5^2 \cdot 17$, míg $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$, tehát a legnagyobb közös osztó: 17. Azaz a legnagyobb négyzet alakú járólap 17 cm oldalú. (Persze a gyakorlati életben a járólapok között hézagokat kell hagyni a fuga számára, de mivel ezek méretéről nem esett szó, így mást nem mondhatunk.)

443. a) 11^{11} tízes számrendszerben felírt alakja 1-re végződik. Ha ehhez 4-et hozzáadunk, akkor egy 5-re végződő egész számot kapunk, amelyik biztosan osztható 5-tel.

b) A szám 10-es számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 3. Ezért a szám valóban osztható 3-mal.

c) A szám páros és 3-mal is osztható, mert a 10-es számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 6. A 3-mal osztható páros számok oszthatók 6-tal.

d) A $(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$ átalakításból látható, hogy a szám 4-gyel osztható. Mivel $k(k+1)$ két szomszédos egész szám szorzata, ezért ez a szorzat páros, jelöljük $2m$-mel. Így $4k(k+1) = 4 \cdot 2m = 8m$ $(m \in \mathbf{Z})$. Ezzel beláttuk, hogy a megadott szám minden $k \in \mathbf{Z}$ esetén osztható 8-cal.

444. a) A szám 10-es számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 9, ezért valóban osztható 9-cel.

b) A szám 10-es számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 9, ezért 9-cel osztható, másrészt a szám 008-ra végződik, ezért 8-cal is osztható. Mivel a 8 és a 9 relatív prímek, ezért a szorzatukkal, azaz 72-vel is osztható a szám.

c) $17^8 - 11^8 = (17-11)(17^7 + 17^6 \cdot 11 + 17^5 \cdot 11^2 + \ldots + 11^7) = 6k$, ahol k egy egész szám. Ez éppen azt jelenti, hogy a szám osztható 6-tal.

445. a) 36-tal pontosan azok a számok oszthatók, amelyek oszthatók 4-gyel és 9-cel (a prímtényezők elkülönítése alapján). A 4-gyel való oszthatóság miatt a keresett szám 52-re vagy 56-ra végződhet, tehát $y = 2$ vagy $y = 6$. A 9-cel való oszthatóság miatt a számjegyek összege az első esetben $3 + 2 + x + 4 + 5 + 2 = 16 + x$, a másodikban $3 + 2 + x + 4 + 5 + 6 = 20 + x$. Az első esetben az $x = 2$, a másodikban az $x = 7$ helyettesítéssel kapunk 9-cel osztható összeget. Két megfelelő számot találtunk tehát, ezek: 322 452, 327 456.

b) 12-vel pontosan azok a számok oszthatók, amelyek oszthatók 3-mal és 4-gyel. A 4-gyel való oszthatóság miatt a keresett szám 32-re vagy 36-ra végződhet, tehát $y = 2$ vagy $y = 6$. A 3-mal való oszthatóság miatt a számjegyek összege az első esetben $6 + x + 4 + 2 + 3 + 2 = 17 + x$, a másodikban $6 + x + 4 + 2 + 3 + 6 = 21 + x$. Az első esetben x lehet 1 vagy 4 vagy 7, a másodikban x lehet 0 vagy 3 vagy 6 vagy 9 – így kapunk 3-mal osztható összeget. Hét megfelelő számot találtunk tehát, ezek: 614 232, 644 232, 674 232; 604 236, 634 236, 664 236, 694 236.

446. a) Igaz, a 3 és 4 relatív prímek, ilyenkor a szorzatukkal is osztható az a szám, amely mindkettőjüknek többszöröse.

b) Nem igaz, pl. 18, 30. (A 2 és a 6 nem relatív prímek, ilyenkor nem teljesül ez a tulajdonság.)

447. Általános szabály, hogy a prímtényezős felbontásban szereplő számokat relatív prímekre kell elkülöníteni.

a) $18 = 2 \cdot 3^2$, azaz a 2-vel és 9-cel osztható számok oszthatók 18-cal is.

b) $24 = 2^3 \cdot 3$, azaz a 8-cal és 3-mal osztható számok oszthatók 24-gyel is.

c) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, itt többféle lehetőség is van: a 2-vel, 3-mal és 5-tel vagy a 6-tal és 5-tel vagy a 10-zel és 3-mal vagy a 2-vel és 15-tel osztható számok oszthatók 30-cal is.

448. a) Hamis. Pl. $2 + 3 + 4 = 9$, ami nem osztható 6-tal.

b) Igaz. Négy szomszédos egész szám között biztosan van egy 3-mal osztható, továbbá két páros szám is, amelyek egyike 4-gyel is osztható. A négy szomszédos egész szám szorzata ezért biztosan osztható $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$-gyel.

c) Igaz. Ha egy összetett szám prímtényezős felbontásában két különböző pozitív prím (pl. p és q) is előfordul, akkor legalább 4 pozitív osztója van a számnak: 1, p; q; pq.
Ha tehát 3 pozitív osztója van egy pozitív egésznek, akkor egy pozitív prímszám (pl. p) hatványával egyenlő, és a hatványkitevő is csak 2 lehet.
Ekkor valóban 3 pozitív osztója van a számnak: 1; p és p^2.

449. Az eredeti négyjegyű szám számjegyei sorban: a; b; c; d.
A megváltoztatotté: d; a; b; c.
A két szám különbsége:

$$1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100a + 10b + c) = 900a + 90b + 9c - 999d = 9(100a + 10b + c - 111d),$$

ami azt jelenti, hogy a különbség osztható 9-cel.

Más gondolatmenet is célra vezet: Az a szám osztható 9-cel, amely jegyeinek összege osztható 9-cel. Itt a két négyjegyű szám számjegyei azonosak, ezért a jegyek összegének különbsége 0, ami osztható 9-cel.

450. a) Igen. $2001 = 666 + 667 + 668$

b) Nem. Három szomszédos egész szám szorzata mindig osztható 3-mal, a 2002 azonban nem.

451. Az egyik összeadandónak párosnak kell lennie, ezért az egyik prím a 2.
$2003 = 2 + 2001$, de a 2001 nem prím.
Így a 2003 valóban nem írható fel két prímszám összegeként.

452. a) $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

b) $(3150; 5400) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$

c) $[3150; 5400] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 37\,800$

d) $(3150; 5400) \cdot [3150; 5400] = 450 \cdot 37\,800 = 17\,010\,000 = 3150 \cdot 5400$

Megjegyzés:

Általánosan is igaz, hogy $a \in \mathbf{N}^+$; $b \in \mathbf{N}^+$ esetén $(a; b)[a; b] = a \cdot b$, azaz két pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének szorzata megegyezik a két szám szorzatával.

453. Két egész szám esetén igaz, hogy $ab = (a; b)[a; b]$, vagyis most $24b = 6 \cdot 120 = 720$, amiből $b = 30$.

454. Két szám esetén igaz, hogy $ab = (a; b)[a; b]$, vagyis most $ab = 6 \cdot 60 = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Mivel a legnagyobb közös osztó 6, a $2 \cdot 3$ szorzat mindkét szám prímtényezős felbontásában szerepel, a szorzatukból eszerint már csak egy 2-es és egy 5-ös prímtényezőt lehet kettejük között „szétosztani". Ezt kétféleképpen tehetjük: vagy ugyanahhoz a számhoz használjuk fel őket, vagy a két különbözőhöz. Eszerint a két keresett szám a 6 és a 60, vagy a 12 és a 30.

455. a) Ha $a \mid b$, akkor $(a; b) = a$ és $[a; b] = b$.

b) Ha a és b relatív prímek, akkor $(a; b) = 1$ és $[a; b] = ab$.

456. Legyen a két pozitív szám $a < b$. A legkisebb közös többszörösük 637, azaz $[a; b] = 637$. Prímtényezős felbontása: $7^2 \cdot 13$. Az a és a b csak ezen prímtényezőket tartalmazhatja, legfeljebb ezekkel a kitevőkkel. A 7 kitevője legalább az egyik számban 2 kell, hogy legyen, a 13-nak is szerepelnie kell legalább az egyik számban. Figyelembe véve, hogy az a és a b nem relatív prím, azaz legnagyobb közös osztójuk 1-nél nagyobb ($(a; b) > 1$), a következő számpárok jöhetnek számításba:

a	7	13	$7 \cdot 13$	7^2	7^2
b	$7^2 \cdot 13$	$7^2 \cdot 13$	$7^2 \cdot 13$	$7 \cdot 13$	$7^2 \cdot 13$

457. $1840 = 2^4 \cdot 5 \cdot 23$; $3400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$,

tehát $[1840; 3400] = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23$ és $(1840; 3400) = 2^3 \cdot 5$.

a) A törtet a legnagyobb közös osztóval célszerű egyszerűsíteni: $\frac{2 \cdot 23}{5 \cdot 17} = \frac{46}{85}$.

b) A két nevező legkisebb közös többszörösét célszerű közös nevezőnek választani:

$$\frac{2 \cdot 23}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23} - \frac{5 \cdot 17}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23} = \frac{46 - 85}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23} =$$

$$= -\frac{39}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23} = -\frac{39}{156\,400}.$$

458. $7395 = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29$; $9860 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29$,
tehát $[7395; 9860] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29$ és $(7395; 9860) = 5 \cdot 17 \cdot 29$.

a) A törtet a legnagyobb közös osztóval célszerű egyszerűsíteni: $\frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$.

b) A két nevező legkisebb közös többszörösét célszerű közös nevezőnek választani:
$$\frac{3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29} - \frac{2^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29} = \frac{-1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29} = -\frac{1}{29\,580}.$$

459. 150 és 180 bármely közös többszörösének szállítása megoldható így. A minimális nézőszám a legkisebb közös többszörös, vagyis 900.

460. a) Itt a 2 gyakrabban induló vonat követési időközeinek legkisebb közös többszörösét kell nézni: $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$; $[4; 6] = 2^2 \cdot 3 = 12$. Tehát 12 perc múlva indul legközelebb 2 vonat egyszerre, azaz 12:12-kor.

b) Mindhárom követési időköz legkisebb közös többszöröse kell: $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$; 7 pedig prím, vagyis $[4; 6; 7] = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$. Mindhárom vonat egyszerre legközelebb 84 perc múlva fog indulni, azaz 13:24-kor.

461. 8 pozitív osztója van. Ezek: $1; 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6$ és 2^7.

462. a) A 2 (osztói: 1; 2).

b) A 4 (osztói: 1; 2; 4).

c) A 12 (osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 12).

Megjegyzés: ha egy szám prímtényezős alakja $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, akkor n pozitív osztóinak száma $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1)$. Eszerint 2 osztója egy p^1 alakú számnak van – vagyis a prímeknek –, ezek közül legkisebb a 2. Három osztója egy p^2 alakú számnak van, ezek közül legkisebb a 4. Hat osztója pedig egy $p_1^2 \cdot p_2^1$ alakú vagy p^5 alakú számnak van, a legkisebbet közülük nyilván a két legkisebb prím segítségével állíthatjuk elő: $2^2 \cdot 3 = 12$, és ez kisebb, mint $2^5 = 32$.

463. A négyzetszámoknak.
Első bizonyítás: írjuk fel az osztókat növekvő sorrendben. Ekkor az első az 1, az utolsó a szám maga, szorzatuk maga a szám. A sorban második és utolsó előtti osztó szorzata szintén maga a szám. Ily módon összepárosíthatjuk az osztókat. Ha páratlan sok osztó van, akkor a középsőnek nincs párja, az önmagával szorozva adja eredményül magát a számot, ami így négyzetszám.

(Konkrét példával: $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$.)

Második bizonyítás: ha egy szám prímtényezős alakja $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, akkor n pozitív osztóinak száma $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1)$. Ez utóbbi szorzat csak úgy lehet páratlan, ha minden tényezője is páratlan. Ekkor a prímtényezős felbontásban minden kitevő páros, vagyis n négyzetszám.

464. Ilyen például a 2^{2001}. Ennek osztói: $1; 2; 2^2; 2^3; \ldots; 2^{2001}$. Ugyanígy bármely prímszám 2001. hatványának 2002 osztója van.

Megjegyzés: Ha az a pozitív egész szám törzstényezős felbontása a következő: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, ahol p_k prímszám, α_k pozitív egész kitevő, akkor az osztók száma: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$.
E tétel ismeretében más típusú, 2002 osztóval rendelkező számok is találhatók. Minthogy $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, így 2002 osztójuk van pl. a következő számoknak is:

$$2 \cdot 3^6 \cdot 5^{10} \cdot 7^{12}; \qquad 2 \cdot 3^6 \cdot 5^{142}; \qquad 2 \cdot 3^{1000}; \qquad \text{stb.}$$

465. A 80 valódi osztói kellenek, mert egy sorban nem állhatnak fel. $80 = 2^4 \cdot 5$, vagyis az összes osztó száma $(4 + 1)(1 + 1) = 10$, de ebből az 1 és a 80 most nem jó, marad 8 eset. Felsorolva: 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40. Mivel a sorok és oszlopok nem felcserélhetők, ezért valóban 8 eset van.

466. Ha minden papírlapot k-felé tépünk, azzal a lapok száma k-szorosára változik, így összesen: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 700$ papírdarabot kapunk.

467. Legyen a két szám $a := 3m + 1$ és $b := 3n + 1$ $(m, n \in \mathbf{N})$. Ekkor

a) az összegük $a + b = 3(m + n) + 2$, ez 3-mal osztva nem 1, hanem 2 maradékot ad;

b) a szorzatuk $ab = 9mn + 3m + 3n + 1 = 3(3mn + m + n) + 1$, ez 3-mal osztva 1 maradékot ad.

468. a) Három egész szám között mindig van két páros vagy két páratlan szám. E két szám összege biztosan páros.

b) Ha az öt szám között van három olyan, amelyik 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adja, akkor e három szám összege osztható 3-mal.
Ha nincs három olyan szám, amelyik ugyanazt a maradékot adja a 3-mal való osztáskor, akkor mindegyik típusból (3-mal osztva 1, 2, illetve 0 maradékot adó) legfeljebb kettő lehet az öt szám között, azaz mindhárom típusból van legalább egy-egy szám. E három szám összege ismét csak osztható 3-mal.

469. Bármely két páros szám összege és különbsége is páros, így az összegük és a különbségük is 2-vel osztható, szorzatuk tehát 4-gyel.
Bármely természetes szám 3-mal osztva 0; 1 vagy 2 maradékot ad. Bármely 4 szá-

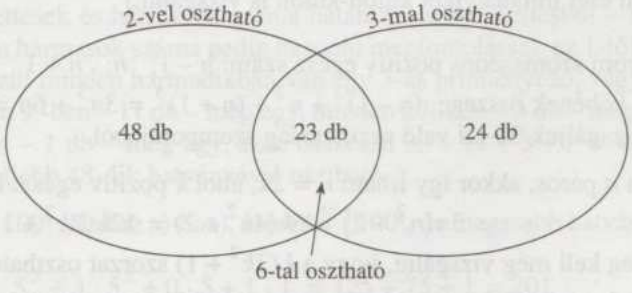
mot kiválasztva, ezek közül van legalább két olyan, amely 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Így ezek különbsége 3-mal osztható.
Mivel 3 és 4 relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1, így ha egy szorzat osztható 3-mal és 4-gyel, akkor a szorzat osztható $3 \cdot 4 = 12$-vel.

470. Egy páratlan szám négyzete $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ alakú. Ezt írhatjuk így is: $4k(k+1) + 1$. Azonban $k(k+1)$ mindig páros, hiszen két egymást követő egész közül az egyik biztosan az, így szorzatuk is. Ekkor $4k(k+1)$ osztható 8-cal, vagyis egy páratlan szám négyzete 8-cal osztva mindig 1 maradékot ad.

471. Ha két szám valamely számmal osztva azonos maradékot ad, akkor különbségük osztható az illető számmal. $59 - 35 = 24$, így ennek osztói adják a megoldást: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24. (A két szám maradékai ezen osztókkal való osztás után rendre 0; 1; 2; 3; 5; 3; 11; 11 – valóban egyezőek.)

472. A 2 nem ilyen, így csak páratlan prímek között keresgélhetünk. Ezek mind egy páros számnál kisebbek 1-gyel, így csak párosak négyzete jöhet szóba. Ekkor prímünk $(2k)^2 - 1$ alakú, vagyis $(2k-1)(2k+1)$. Lévén prím, valamelyik osztója (nyilván a kisebbik) 1, a másik önmaga. $2k - 1 = 1$, ebből $k = 1$, a prím pedig $2k + 1 = 3$.

473. Mivel $144 = 2^4 \cdot 3^2$, ezért azok a 144 nevezőjű törtek a megoldások, melyek számlálója 0 és 144 közötti egészek, és számlálójuk nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal. 1-től 143-ig 71 db páros szám ($[143 : 2] = 71$), 47 db 3-mal osztható szám ($[143 : 3] = 47$), és 23 db 6-tal osztható szám ($[143 : 6] = 23$) van. Ezek viszonya az ábráról leolvasható: (ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor a szám osztható $2 \cdot 3 = 6$-tal, mert 2 és 3 relatív prím).



Tehát, ha a keresett törtek számlálói nem oszthatók 2-vel vagy 3-mal, akkor a tört nem egyszerűsíthető.
Összesen $143 - (48 + 23 + 24) = 48$ db ilyen tört van.

474. Egy szám akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 0 vagy 5.
Ha az utolsó számjegy 5, és a többi számjegy ettől és egymástól különböző, akkor

az első helyre 8-féle számjegy kerülhet (mert a 0 és 5 nem), a második helyre ettől függetlenül újra 8-féle számjegy kerülhet (mert 5 és az előbb felhasznált számjegy nem), a harmadik helyre ettől függetlenül 7-féle számjegy kerülhet. Így itt az esetek száma $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

Ha az utolsó számjegy 0, és a többi számjegy ettől és egymástól különböző, akkor az első helyre 9-féle számjegy kerülhet (mert a 0 már a végén áll), a második helyre ettől függetlenül 8-féle számjegy kerülhet (mert 0 és az előbb felhasznált számjegy nem), a harmadik helyre ettől függetlenül 7-féle számjegy kerülhet. Így itt az esetek száma $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Összesen $448 + 504 = 952$ olyan különböző számjegyből álló négyjegyű szám van, amely osztható 5-tel.

475. A számok szorzata $12n^3$, összege pedig $8n$. Ha $8n \mid 12n^3$, akkor ($4n$-nel egyszerűsítve) $2 \mid 3n^2$. Ez csak úgy lehet, ha $2 \mid n^2$, de ekkor $2 \mid n$. Ekkor persze $16 = 8 \cdot 2 \mid 8n$ és $96 = 12 \cdot 2^3 \mid 12n^3$.

476. Három egymást követő szám közül az egyik bizonyosan osztható 3-mal, egy másik 1, a harmadik pedig -1 maradékot ad, így általánosan írhatjuk ($a, b, c \in \mathbf{Z}$): $(3a)^3 + (3b+1)^3 + (3c-1)^3 = 27a^3 + 27b^3 + 27b^2 + 9b + 1 + 27c^3 - 27c^2 + 9c - 1$. A $+1$ és -1 kiejti egymást, a többi tag mind osztható 9-cel, így az összegük is. (Persze a, b, c között lehetnek, sőt biztosan vannak egyenlők – akár mind a három is –, de mivel nem tudhatjuk, hogy a három szomszédos szám legkisebbike 3-mal osztva milyen maradékot ad, így nem állíthatjuk, hogy e három szám pl. $3a-1$, $3a$, $3a+1$. Lehetnek ugyanis $3a$, $3a+1$, $3a+2$ vagy $3a+1$, $3a+2$, $3a+3$ alakúak is. E többféle esetet egyesítettük az a, b, c jelöléssel. Lehet persze e felsorolt három eset mindegyikét külön-külön is vizsgálni.)

477. A három szomszédos pozitív egész szám: $n-1$; n; $n+1$.

Ezek köbének összege: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$.

Ezt vizsgáljuk 36-tal való oszthatóság szempontjából.

a) Ha n páros, akkor így írható $n = 2k$, ahol k pozitív egész. Ekkor

$$3n(n^2+2) = 6k(4k^2+2) = 12k(2k^2+1).$$

Meg kell még vizsgálni, hogy a $k(2k^2+1)$ szorzat osztható-e 3-mal.

Ha k osztható 3-mal, akkor az eredeti kifejezés osztható 36-tal.

Ha k nem osztható 3-mal, akkor 3-mal osztva 1-et vagy 2-t (illetve -1-et) ad maradékul, ami így írható $k = 3m+1$, illetve $k = 3m-1$ vagy együtt: $k = 3m \pm 1$.

Ekkor $2k^2 + 1 = 2(3m \pm 1)^2 + 1 = 18m^2 \pm 12m + 3$.

Ennek az összegnek minden tagja osztható 3-mal, tehát $12k(2k^2+1)$ osztható 36-tal.

b) Ha n páratlan, akkor $n-1$ és $n+1$ páros. Így $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ páratlan, ezért 36-tal nem osztható.

Összefoglalva: három szomszédos pozitív egész szám köbének összege akkor és csak akkor osztható 36-tal, ha a középső szám páros.

478. 15-tel pontosan azok a számok oszthatók, amelyek oszthatók 3-mal és 5-tel. Az 5-tel való oszthatóság miatt $a = 0$ vagy 5, de mivel ugyanez a szám első jegye is, 0 nem lehet. Ha $a = 5$, akkor a második feltételből $c = 6$. A 3-mal való oszthatósághoz kiszámoljuk a számjegyek összegét, ez $5 + b + 6 + 5 = 16 + b$; ekkor b lehet 2; 5; 8. Mivel a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek, az 5 kiesik, tehát végül két megfelelő számot találtunk, ezek: 5265 és 5865.

479. a) Ahány 0-ra végződik egy szám, 10-nek annyiadik hatványával osztható. Ez utóbbit pedig a szám prímtényezős felbontásában szereplő kettesek és ötösök száma határozza meg. Írjuk fel a 100! minden tényezőjét (képzeletben) prímtényezős felbontásban. Nyilván jóval több 2, mint 5 szerepel, így ez utóbbiak száma dönti el, hány 10-es tényező hozható létre. Az 1-től 100-ig felírt számok közül minden ötödikben van egy 5-ös prímtényező, vagyis 20 darabban. A 25-tel osztható számokban (összesen 4 darabban) van még egy 5-ös, így a 100! felbontásában összesen 24 darab 5-ös tényező található, így a szám 10^{24}-nel osztható, vagyis 24 db 0-ra végződik. (A kettesek száma valóban meghaladja ezt, hiszen minden másodikban – 50 db – van egy 2, a néggyel oszthatókban – minden negyedikben, 25 db – van még egy, a nyolccal oszthatókban – minden nyolcadikban, 12 db – még egy, minden tizenhatodikban – 6 db – még egy, minden 32.-ben – 3 db – még egy, minden 64.-ben – 1 db – még egy, összesen $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$.)

b) Az a)-ban látott gondolatmenet szerint ezt a 100! prímtényezős felbontásában szereplő kettesek és hármasok száma határozza meg. Kettesből – mint láttuk – 97 db van, a hármasok száma pedig hasonló megfontolással: az 1-től 100-ig felírt számok közül minden harmadikban van egy 3-as prímtényező, vagyis 33 darabban, minden 9.-ben – 11 db – még egy, minden 27.-ben – 3 db – még egy, és minden 81.-ben – 1 db – még egy, azaz összesen $33 + 11 + 3 + 1 = 48$. Így a 100! 6-nak legfeljebb 48-dik hatványával osztható.

c) Mivel $2^{97} \mid 100!$ (lásd az a)-ban), ezért $4^{48} \mid 100!$, de magasabb hatványa már nem.

480. a) $1301_5 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 125 + 75 + 1 = 201$

b) $1301_8 = 1 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 1 = 512 + 192 + 1 = 705$

c) $1301_{12} = 1 \cdot 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 1 = 1728 + 432 + 1 = 2161$

481. Meghatározzuk a számrendszer alapszámának legmagasabb hatványát, ami még kisebb az átváltandó számnál, majd elosztjuk vele; a maradékot az eggyel kisebb hatvánnyal, és így tovább.

a)
$1301 : 1024 = 1$
$277 : 512 = 0$
$277 : 256 = 1$
$21 : 128 = 0$
$21 : 64 = 0$
$21 : 32 = 0$
$21 : 16 = 1$
$5 : 8 = 0$
$5 : 4 = 1$
$1 : 2 = 0$
$1 : 1 = 1$

b)
$1301 : 512 = 2$
$277 : 64 = 4$
$21 : 8 = 2$
$5 : 1 = 5$

c)
$1301 : 256 = 5$
$21 : 16 = 1$
$5 : 1 = 5$

Vagyis $1301 = 10100010101_2 = 2425_8 = 515_{16}$.

(A 2-esből 8-as, illetve 16-os számrendszerbe közvetlenül is lehet átváltani, mivel $8 = 2^3$, illetve $16 = 2^4$. A 2-es számrendszerbeli alakban hátulról hármasával, illetve négyesével csoportosítva a számjegyeket közvetlenül megkapjuk a másik két eredmény számjegyeit, szintén hátulról induló sorrendben.)

482. a) 2-vel osztható, ha nulla van a végén;

b) 4-gyel, ha 2 nulla van a végén;

c) 8-cal, ha 3 nulla van a végén.

d) A 10-es számrendszerben ugyanez a szabály a 10 hatványaival való oszthatóságra, a végén levő 0-k száma mutatja, hogy 10-zel, 100-zal vagy 1000-rel osztható-e egy szám. Ha pedig a felsorolt számokkal való oszthatósági szabályokat idézzük fel a 10-es számrendszerben: a szám osztható 2-vel, ha páros szám, tehát a vége 0, 2, 4, 6, 8; 4-gyel, ha az utolsó 2 számjegyből álló szám osztható 4-gyel; 8-cal, ha az utolsó 3 számjegyből álló szám osztható 8-cal.

483. a) 6 vagy -6.

b) Nincs ilyen egész szám.

c) $n^2 = 21 \cdot 3 + 1$, vagyis $n^2 = 64$, amiből a gondolt egész szám 8 vagy -8.

d) Ha egy 3-mal osztható számot emelünk négyzetre, akkor a négyzetszám 3-mal való osztásakor 0 maradékot kapunk.
Ha olyan számot emelünk négyzetre, amelyiknek a 3-mal való osztásakor 1 maradékot kapunk, akkor a $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$ átalakításból látható, hogy a szám négyzete 3-mal való osztáskor 1 maradékot ad.
Végül, ha olyan számot emelünk négyzetre, amelyik 3-mal való osztásnál 2 mara-

dékot ad, akkor $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1$ átalakításból látható, hogy a szám négyzetének 3-mal való osztásakor ismét 1 maradékot kapunk. Ezzel beláttuk, hogy nem kaphatunk 2 maradékot egy négyzetszám 3-mal való osztásakor.

484. Az 1., 2., 3. stb. séta alkalmával tulajdonképpen golyóval megjelöljük az 1-gyel, 2-vel, 3-mal stb. osztható sorszámú dobozt. Matematikailag az tehát a kérdés, hogy az 1 és 50 közötti számok melyikének van a legkevesebb, illetve legtöbb (pozitív) osztója, és van-e olyan, amelyiknek épp 5 van? Egy szám pozitív osztóinak számát a prímtényezős alakjának kitevőiből meghatározhatjuk (lásd pl. a 462. feladat). Legkevesebb osztója persze az 1-nek van (1 db). Pontosan 5 osztója olyan számnak lehet, amely egy prím 4. hatványa – 1 és 50 között egy ilyen van, $2^4 = 16$. A legtöbb osztójú szám megtalálásához szisztematikusan fel kell írni a prím-felbontásokat, és a „kitevők + 1" alakú szorzatokat előállítani. Mindenesetre a 48 ($= 2^4 \cdot 3$) 10 osztóval rendelkezik, ez a legtöbb. (9 osztójú a 36 ($= 2^2 \cdot 3^2$), 8 pedig a 24 ($= 2^3 \cdot 3$), a 30 ($= 2 \cdot 3 \cdot 5$), a 40 ($= 2^3 \cdot 5$), a 42 ($= 2 \cdot 3 \cdot 7$). A legkisebb, már 11 osztós szám az 1024 – mint a legkisebb prím, a 2 tizedik hatványa.)

485. Fejezzük ki b-t az egyenletből!

$$b(a+1) = 114 - a$$

$$b = \frac{114-a}{a+1} = \frac{-(a+1)+115}{a+1} = -1 + \frac{115}{a+1}$$

b egész, ha $a+1 \mid 115$, így ezek lehetséges értékeit foglaljuk táblázatba!

$a+1$	a	b	
1	0		nem megoldás, mert $a > 0$
5	4	22	megoldás
23	22	4	nem megoldás, mert $a < b$ nem teljesül
115	114	0	nem megoldás, mert $a < b$ nem teljesül

Tehát a feladat megoldása: $a = 4$; $b = 22$.

486. Ilyen szám nincs. A négyzetszámok prímtényezőinek ugyanis páros hatványon kell szerepelniük. Itt a képzés alapján a számjegyek összege osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. Ezért a szám osztható 3-mal, de nem osztható $3^2 = 9$-cel.

487. Legyen a keresett négyjegyű szám x.

I. $x - 83 = 101k$ $\quad k \in \mathbf{N}$

II. $x - 64 = 102n$ $\quad n \in \mathbf{N}$

II. – I. $19 = 101(n-k) + n$ $\quad *$

Mivel x négyjegyű, $1000 \le x \le 9999$, azaz

$936 \le x - 64 \le 9935$, és

$917 \le x - 83 \le 9916$.

Ezekből következik: $9 \le n \le 97$

Ha $n > k$, akkor $101(n-k) + n > 19$ nincs megoldás.

Ha $n < k$, például $n - k = -1$, akkor $19 = 101(-1) + n$, ebből $n = 120$. A feltétel miatt nem megoldás.

Ha $n - k < -1$, akkor $n > 120$.

A $*$-gal jelölt egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha $n - k = 0$, ami azt jelenti, hogy $n = 19$; $k = 19$,

tehát $x = 101 \cdot 19 + 83 = 2002$.

A szövegbe való behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy ez mindkét követelményt kielégíti. Más megoldás nem lehetséges.

488. Ha n osztható 3-mal, akkor $3k$ alakban írható fel, $k \in \mathbf{N}^+$.

Ezért $n + 1 = 3k + 1$ és $\frac{n}{3} = \frac{3k}{3} = k$.

Minthogy k bármely osztójával $(3k+1)$-t osztva 1-t kapunk maradékul, ezért k egyetlen valódi osztója sem osztója a $(3k+1)$-nek, ezért $3k+1$ és k relatív prím, az ismert jelöléssel: $\left(n+1, \frac{n}{3}\right) = 1$, ha $n = 3k$, ahol k egész szám.

489. $A := \frac{2n+7}{n-3} = \frac{2(n-3)+13}{n-3} = 2 + \frac{13}{n-3}$ kifejezés egész, ha 13 osztható $(n-3)$-mal, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

$n - 3 = 13$, ebből $n = 16$, (ekkor $A = 3$).

$n - 3 = 1$, ebből $n = 4$, (ekkor $A = 15$).

$n - 3 = -13$, ebből $n = -10$, (ekkor $A = 1$).

$n - 3 = -1$, ebből $n = 2$, (ekkor $A = -11$).

490. $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$, ami akkor lehetne négyzetszám, ha $n^2 + 2$ is osztható lenne 5-tel. (Egy négyzetszám prímfelbontásában minden előforduló prím kitevője páros.) Ekkor n^2-nek 8-ra vagy 3-ra kellene végződnie, ami azonban sosem fordul elő. (A négyzetszámok csak 0, 1, 4, 5, 6, 9 számjegyre végződhetnek.)

491. a) Tegyük fel, hogy van ilyen szám. Legyenek a tízes számrendszerben felírt szám jegyei a, b, c; azaz $100a + 10b + c$ a szám értéke. Kilences számrendszerben ugyanezt a számot egy olyan alak adja meg, ahol a jegyek 2-vel nagyobbak, azaz: $81(a+2) + 9(b+2) + (c+2) = 100a + 10b + c$; ebből $182 = 19a + b$ adódik. Emellett 9-es számrendszerben a legnagyobb jegy a 8, tehát a, b és c kisebb vagy egyenlő, mint 6. Az egyenlet szerint viszont a legalább 9 kell legyen (sőt, még az $a = 9$ is kevés, mert még akkor is $b > 10$), hiszen különben b nagyobb lesz, mint 10. Ez az ellentmondás mutatja, hogy a feltételnek megfelelő háromjegyű szám nem létezik.

b) Ebben az esetben a következő egyenletből kell kiindulnunk:
$49(a+2) + 7(b+2) + (c+2) = 100a + 10b + c$, ahonnan: $114 = 51a + 3b$. Itt az a feltétel, hogy $a+2$, $b+2$ és $c+2$ legfeljebb 6 legyen, tehát mindhárom jegy legfeljebb 4. Mivel $a = 1$ mellett b túl nagy lenne, míg ha $a = 3$ vagy 4, akkor b negatív lenne, ezért csak az $a = 2$ esetet kell vizsgálni. Ekkor $b = 4$ lesz, hiszen $102 + 12 = 114$. A c-re nincs feltétel, bármi lehet 0-tól 6-ig, azaz a szóba jövő 10-es számrendszerbeli számok: 240, 241, 242, 243, 244. Ezek a számok a 7-es számrendszerben rendre: 462, 463, 464, 465, 466. Tehát pontosan 5 darab ilyen szám van.

492. Tegyük fel, hogy kezdetben a kert oldalai m, illetve n méter volt, ahol m és n pozitív egészek. A feltétel szerint, ha levágunk egy 7, illetve 6 méteres csíkot, akkor az új téglalap területe az eredeti kétharmada lett. Ez egyenlet formájában a következőképpen néz ki: $\frac{2}{3}mn = (m-7)(n-6), \quad (m > 7,\ n > 6)$

ahonnan $2mn = 3(m-7)(n-6)$,
beszorozva: $2mn = 3mn - 21n - 18m + 126$,
ebből $0 = mn - 21n - 18m + 126$.
$0 = (m-21)(n-18) - 378 + 126$,
$252 = (m-21)(n-18)$.

A $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, azaz osztóinak száma: $(2+1)(2+1)(1+1) = 18$.
Eszerint elvileg 18 különböző megoldás is lehet (lásd táblázat).

$m-21$	1	2	3	4	6	7	9	12	14	18	21	28	36	42	63	84	126	252
$n-18$	252	126	84	63	42	36	28	21	18	14	12	9	7	6	4	3	2	1
m	22	23	24	25	27	28	30	33	35	39	42	49	57	63	84	105	147	273
n	270	144	102	81	60	54	46	39	36	32	30	27	25	24	22	21	20	19

A feltételek szerint legalább 6, illetve 7 méternek kell lennie mindkét oldalnak, ez minden esetben teljesül. A „közel négyzet alakú" feltétel nem egészen pontos, de leginkább a 35×36 méteres méret (megoldás) felel meg. Megítélés kérdése, hogy ennek a két szomszédos oszlopát (33×39, illetve 39×32) elfogadjuk-e még. A többi valóban már kevéssé jöhet szóba.

493. Lilinek van igaza. Ha a szám jegyeiből hátulról hármas csoportokban képzett számok váltakozó előjelű összegét leválasztjuk a számról, akkor (a konkrét példák esetében) a következőket kapjuk:

$2\,446\,884 = 2 - 466 + 884 + 2 \cdot (10^6 - 1) + 466 \cdot (10^3 + 1)$, illetve
$45\,376 = -45 + 376 + 45 \cdot (10^3 + 1)$.

Mivel a $10^3 + 1 = 1001$ és a $10^6 - 1 = 999\,999$ egyaránt osztható 7-tel, a teljes összeg (vagyis az eredeti szám) 7-tel való oszthatósága éppen azon múlik, hogy a leválasztott váltakozó előjelű rész osztható-e vagy sem 7-tel. Általánosan is igaz, hogy $10^{3(2k+1)} + 1$ és $10^{3(2k)} - 1$ minden $k \in \mathbf{N}$ esetén osztható 7-tel, hiszen ezek szorzattá alakíthatóak úgy, hogy egyik tényezőjük a konkrétan már látott $10^3 + 1$ vagy $10^6 - 1$ legyen:
$10^{3(2k+1)} + 1 = 10^{6k+3} + 1 = (10^3 + 1)(10^{6k} - 10^{6k-3} + 10^{6k-6} - \ldots + 1)$, illetve
$10^{3(2k)} - 1 = 10^{6k} - 1 = (10^6 - 1)(10^{6k-6} + 10^{6k-12} + \ldots + 1)$.

494. a) Mivel két számolás az alapja a nap megnevezésének, ez akkor ismétlődik újra, ha mindegyik végigmegy a teljes ciklusán. A két ciklushossz 260 és 365 (nap), ezek legkisebb közös többszöröse lesz az a hossz, amikor ismétlődik a megnevezés.
$260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$, $365 = 5 \cdot 73$, azaz $[260; 365] = 4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 73 = 18\,980$ (nap).

b) Ez éppen 52 (365 napos) év. (Ezt hívták „maja évszázadnak" vagy naptárkörnek. Az a hiedelem tartozott hozzá, hogy ennyi idő elteltével eljön a világvége. A szökőévek miatt csillagászatilag 52 év azonban nem pontosan ilyen hosszú, és mivel a világvége persze egyik naptárkör végén sem jött el, ennek megörülve 13 napot átmulattak – mintegy „naptáron kívül", de e napok éppen hogy be voltak kalkulálva a rendszerbe –, és így a csillagászati idővel pontosan egybeesően kezdődött el az új naptárkör. Ez a rendszer egy árnyalatnyival pontosabb, mint az általunk használt Gergely-naptár, és külön tiszteletet érdemel az a tény, hogy a maja időszámítás kezdete kb. 5000 évvel ezelőttre nyúlik vissza.)

495. Az $a \cdot b = 2a + 2b$ egyenlet pozitív egész megoldásai a lehetséges téglalapok oldalai. Könnyen ellenőrizhető, hogy 1, illetve 2 egyik oldal sem lehet, tehát $a; b \geq 3$.

Az egyenletből a-t kifejezve: $a = \frac{2b}{b-2}$ adódik, átalakítás után: $a = 2 + \frac{4}{b-2}$. Mivel a egész, ezért $b - 2$ osztója 4-nek, tehát $b = 3$, $b = 4$ vagy $b = 6$ jön szóba, így az $a = 6$ és $b = 3$ vagy $a = b = 4$ vagy $a = 3$ és $b = 6$ téglalapokat kapjuk, vagyis két ilyen téglalap létezik, melyek közül az egyik négyzet.

496. Jelölje $\overline{abc}$ a keresett számot, ekkor teljesül az $\overline{abc} = 18(a + b + c)$ egyenlőség, ezért $\overline{abc}$ osztható 9-cel, hiszen a jobb oldali kifejezés is osztható. De ha az $\overline{abc}$ szám 9-cel osztható, akkor $a + b + c$ is osztható 9-cel, így a fenti egyenlőség miatt $\overline{abc}$ 81-gyel is osztható, sőt 162-vel is, hiszen szintén az egyenlőség miatt páros

szám. Elegendő tehát 162 háromjegyű többszöröseit megvizsgálni, ezek: 162, 324, 486, 648, 810, 972.

Másik megoldás:

$\overline{abc} = 18(a+b+c) \Leftrightarrow 82a = 8b + 17c.$

Mivel $b \leq 9$ és $c \leq 9$, ezért $82a = 8b + 17c \leq 225$, tehát $a \leq 2$. Így csak a 162 felelhet meg.

Tovább szűkíthetjük a kört, ha figyelembe vesszük, hogy $a, b, c \leq 9$, azaz $18(a+b+c) \leq 18 \cdot 27 = 486$, így már csak a 162, 324, 486 jöhet szóba. Ezek közül a fenti egyenlőséget a 162 elégíti ki, a keresett szám tehát a 162.

2.6. Polinomok, algebrai törtek

497. a) $321{,}7^2 - 221{,}7^2 = (321{,}7 + 221{,}7)(321{,}7 - 221{,}7) = 543{,}4 \cdot 100 = 54\,340$

b) $\dfrac{2010^2 - 9^2}{2001} = \dfrac{(2010+9)(2010-9)}{2001} = \dfrac{2019 \cdot 2001}{2001} = 2019$

c) $1590^2 + 410 \cdot 1590 = 1590 \cdot (1590 + 410) = 1590 \cdot 2000 = 3\,180\,000$

498. a) $8 + 2\sqrt{7} + 8 - 2\sqrt{7} = 16$

b) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 5^2 = 12 - 25 = -13$

c) Először gyöktelenítsük a tört nevezőjét:

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1} + 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3$$

499. $3a^2b + 3ab^2 - 2a^3 + 2a^2b = -2a^3 + 5a^2b + 3ab^2$

a) Minden tag és így az egész polinom harmadfokú.

b) A főegyüttható -2, a többi: 5 és 3.

c) -196

500. Az $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ azonosságot szemlélteti. A bal oldal az ábrán sárgával és zölddel jelölt terület összege, míg a jobb oldal a sárga és kék terület összege. A kék és a zöld azonban azonos terület, mivel a két téglalap egybevágó. Ez a bizonyítás lényege.

501. Jelöljük x-szel a téglalap rövidebbik oldalát; ekkor a téglalap oldalai: x és $x+6$, a négyzet oldala: $x+3$. A területeket felírva adódik, hogy a négyzet területe 9 egységgel nagyobb a téglalapénál:

$x(x+6) = x^2 + 6x$,

$(x+3)(x+3) = x^2 + 6x + 9$.

502. A négyzet területe a^2, a téglalapé $(a+6)(a-6) = a^2 - 36$, tehát a négyzet területe 36 egységgel nagyobb a téglalapénál.

503. a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$ b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

504. a) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$ b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

505. a) $64 - 48b + 12b^2 - b^3$ b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

506. a) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ b) $(1-2x)^3 = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1$

c) $(1-2x)^3 - (2x-1)^2$= (az előbbi b) eredményből kivonjuk az a) eredményét) = $-8x^3 + 8x^2 - 2x$

507. a) $(z-5)^2 = (5-z)^2$ b) $(s+13)^2 = (-s-13)^2$

c) $(t-4u)^2 = (4u-t)^2$ d) $(9v+8w)^2 = (-9v-8w)^2$

508. a) $(x^2+1)^2 = (-x^2-1)^2$ b) $(z^3-3)^2 = (3-z^3)^2$

c) $(p^2+q^2)^2 = (-p^2-q^2)^2$ d) $(u^4-2v^3)^2 = (2v^3-u^4)^2$

509. a) $(3u+2v)^2$ b) $(5p+6)(p-q)$ c) $(x+3y)(x-y)$

510. a) $(a+b)(a-b)$ b) $(2x+y)(2x-y)$ c) $(3u+4v)(3u-4v)$

d) $(5i+6)(5i-6)$ e) $(3+7j)(3-7j)$ f) $\left(\sqrt{2}+k\right)\left(\sqrt{2}-k\right)$

g) $\left(2+\sqrt{3}w\right)\left(2-\sqrt{3}w\right)$ h) $\left(4+\sqrt{m}\right)\left(4-\sqrt{m}\right)$

511. a) $(h+9)(h-9)$ b) $(p+2q)(p-2q)$

c) $(m^2+n^2)(m^2-n^2)$ d) $(12s^3+3t^2)(12s^3-3t^2)$

e) $mn(mn-1)$ f) $uvw(u+v+w)$

512. a) $(8i+3)(i-j)$ b) $(5b^2-2)(b-1)$

c) $(3c^2-2d^2)(c+1)$

513. a) $(z+1)(z-2)$ b) $(2x+3)(x-1)$

514. a) $(a-b)(a+b)-4(a-b) = (a-b)(a+b-4)$

b) Végezzük el a négyzetre emelést, majd a zárójelfelbontást és a lehetséges összevonásokat!

$a^4 - b^4 + a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) + 4ab =$

$= a^4 - b^4 + a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 + 4ab = a^4 - b^4 =$

$= (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

c) $a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a-2)^2 - b^2 = (a-2+b)(a-2-b)$

515. a) $4(x+y)^2-(x+y)=(x+y)[4(x+y)-1]=(x+y)(4x+4y-1)$

b) $a(a^3-1)=a(a-1)(a^2+a+1)$

c) $(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)=(x-y)(x^2+xy+y^2-1)$

516. a) $81-(a^2+6a)^2=9^2-(a^2+6a)^2=(9+a^2+6a)[9-(a^2+6a)]=$
$=(a+3)^2[9-a^2-6a]$

b) $1-x^2-2xy-y^2=1-(x^2+2xy+y^2)=1-(x+y)^2=$
$=(1+x+y)[1-(x+y)]=(1+x+y)(1-x-y)$

c) $(a+b)^4-(a-b)^4=[(a+b)^2]^2-[(a-b)^2]^2=$
$[(a+b)^2+(a-b)^2][(a+b)^2-(a-b)^2]=$
$=(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2)[a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)]=$
$=(2a^2+2b^2)(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)=2(a^2+b^2)\cdot 4ab=$
$=8ab(a^2+b^2)$

d) $x^3+6x^2+11x+6=x^3+6x^2+9x+2x+6=x(x^2+6x+9)+2(x+3)=$
$=x(x+3)^2+2(x+3)=(x+3)[x(x+3)+2]=(x+3)(x^2+3x+2)=$
$=(x+3)(x+1)(x+2)$

Az utolsó lépés a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának felhasználásával is adódhat.

517. Összegük: $x^2+2xy+y^2+x+y$, különbségük: $x^2+2xy+y^2-x-y$, szorzatuk: $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (ha felismerjük, hogy az első polinom a második négyzete, így szorzatuk a második köbe, egyszerűen felírhatjuk ezt), hányadosuk pedig $x+y$ (lásd az előző zárójeles megjegyzés elejét), ha $x\neq -y$ (ha $x=-y$, akkor a hányados nem értelmezhető).

518. Összegük: $2a^3+8a^2+6a$, különbségük: $2a^3+6a^2$. Szorzatuk, de különösen hányadosuk meghatározásához érdemes szorzattá alakítani őket: $a(a+3)(2a+1)$, illetve $a(a+3)$. Ekkor szorzatuk $a^2(a+3)^2(2a+1)=2a^5+13a^4+24a^3+9a^2$, hányadosuk pedig $2a+1$ (ha $a\neq 0$ és $a\neq -3$, különben a hányados nem értelmezhető).

519. Közös nevezőre hozva: $\dfrac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc}$.

520. a) $\dfrac{b-a}{b^2+ba}+\dfrac{ab-a^2}{b+a}=\dfrac{b-a}{b(b+a)}+\dfrac{a(b-a)}{b+a}=\dfrac{b-a+ab(b-a)}{b(b+a)}=\dfrac{(b-a)(1+ab)}{b(b+a)}$;
$b\neq 0,\quad b\neq -a$

b) $\dfrac{b-a}{b^2+ba}:\dfrac{ab-a^2}{b+a}=\dfrac{b-a}{b(b+a)}:\dfrac{a(b-a)}{b+a}=\dfrac{b-a}{b(b+a)}\cdot\dfrac{b+a}{a(b-a)}=\dfrac{1}{ab}$;

$D=\{(a,\,b)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\,|\,a\neq 0,\ b\neq 0,\ |a|\neq|b|\}$

521. a) $\dfrac{6x^2-12xy+6y^2}{3x^2-3y^2}=\dfrac{6(x^2-2xy+y^2)}{3(x^2-y^2)}=\dfrac{6(x-y)^2}{3(x+y)(x-y)}=\dfrac{2(x-y)}{x+y}$

b) $\dfrac{2c^2-4cd+2d^2}{6c^2-6d^2}=\dfrac{2(c^2-2cd+d^2)}{6(c^2-d^2)}=\dfrac{2(c-d)^2}{6(c+d)(c-d)}=\dfrac{c-d}{3(c+d)}$

522. a) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x-2}{x+2}$

b) $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-a-b-b^2}=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a-b-1)}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b-1}$

c) $\dfrac{a^3+1}{6a^2+12a+6}=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{6(a+1)^2}=\dfrac{a^2-a+1}{6(a+1)}$

523. a) $\dfrac{64a^2}{9}$

b) $\dfrac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}=\dfrac{(x-5)(x+3)}{x^2}=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2}$

524. a) $\dfrac{x(s+r+t)}{s+r+t}=x$

b) $\dfrac{1}{3(a-b)}$

c) $\dfrac{a^2x^2(1-x)}{a^2x^2}=1-x$

d) $\dfrac{(p+4)^2}{(p+4)(p-4)}=\dfrac{p+4}{p-4}$

525. $\dfrac{1-\dfrac{x^2}{x^2-1}}{2+\dfrac{3x-1}{1-x}}=\dfrac{\dfrac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\dfrac{2(1-x)+3x-1}{1-x}}=\dfrac{\dfrac{1}{1-x^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{(1-x)(1+x)}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$(x\neq\pm 1)$

526. a) $\dfrac{a-a^2}{a^2-1}=\dfrac{a(1-a)}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{-a(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{-a}{a+1}$

Az eredeti kifejezésnél $a \neq \pm 1$.

A végső kifejezésnél $a \neq -1$, tehát a kifejezés értelmezési tartománya változott.

b) $\dfrac{a^2-7a+12}{a^2-6a+9}=\dfrac{(a-3)(a-4)}{(a-3)^2}=\dfrac{a-4}{a-3}$

Az eredeti és az egyszerűsített kifejezésnél $a \neq 3$, tehát a kifejezés értelmezési tartománya nem változott.

527. a) $\dfrac{a+2b}{a-b}-\dfrac{a-2b}{a+b}=\dfrac{6ab}{(a+b)(a-b)}$

b) $\dfrac{a}{ab-b^2}+\dfrac{b}{a^2-ab}=\dfrac{a}{b(a-b)}+\dfrac{b}{a(a-b)}=\dfrac{a^2+b^2}{ab(a-b)}$

c) $\dfrac{7}{4x^3-36x}\cdot\dfrac{x^2-9}{14}=\dfrac{7}{4x(x^2-9)}\cdot\dfrac{x^2-9}{14}=\dfrac{1}{8x}$

528. a) $x^5y^4z^2$

b) $\dfrac{4y^2}{25x}$

c) $\left(\dfrac{10a}{3}\right)^2=\dfrac{100a^2}{9}$

d) $\left(\dfrac{y^2}{2x}\right)^4=\dfrac{y^8}{16x^4}$

529. $\dfrac{(3a-2b)(7a-5b-a+9b)+(3a+2b)(5a-8b-8a+10b)}{(3a+2b)(3a-3b)}=$

$=\dfrac{(3a-2b)(6a+4b)+(3a+2b)(2b-3a)}{9a^2-4b^2}=$

$=\dfrac{2(9a^2-4b^2)+4b^2-9a^2}{9a^2-4b^2}=\dfrac{9a^2-4b^2}{9a^2-4b^2}=1$

530. a) $\dfrac{a+6}{a-6}-\dfrac{a-6}{a+6}=\dfrac{(a+6)^2-(a-6)^2}{a^2-6^2}=\dfrac{24a}{a^2-36}$, $|a| \neq 6$

b) $a = 0$ esetén lesz a kifejezés értéke 0, mert ekkor a számláló értéke 0, de a nevező értéke nem nulla.

c) Nincs értelme a kifejezésnek az $a = 6$, illetve az $a = -6$ esetén, mert ekkor a nevező értéke nulla.

531. Közös nevezőre hozás és összevonás után kapjuk:

a) $\frac{4x}{4x^2-1}$; b) $\frac{2}{4x^2-1}$; c) $\frac{2(x+1)}{1-4x^2}$ $|x| \neq 0{,}5$.

532. $(1-a)(1+a^2)+(1+a)(1+a^2)-2(1+a)(a-1) =$

$= 1+a^2-a-a^3+1+a^2+a+a^3-2(a^2-1) = 2+2a^2-2a^2+2 = 4$

533. a) $1-a+a^2-\frac{a^3}{1+a} = \frac{(1+a)(1-a+a^2)-a^3}{1+a} = \frac{1+a^3-a^3}{1+a} = \frac{1}{1+a}$ $(a \neq -1)$

b) $1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}} = 1-\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}} = 1-\frac{1}{1+\frac{a}{a-1}} = 1-\frac{1}{\frac{a-1+a}{a-1}} = 1-\frac{1}{\frac{2a-1}{a-1}} =$

$= 1-\frac{a-1}{2a-1} = \frac{2a-1-(a-1)}{2a-1} = \frac{a}{2a-1}$ $\left(a \neq 0;\ a \neq \frac{1}{2};\ a \neq 1\right)$

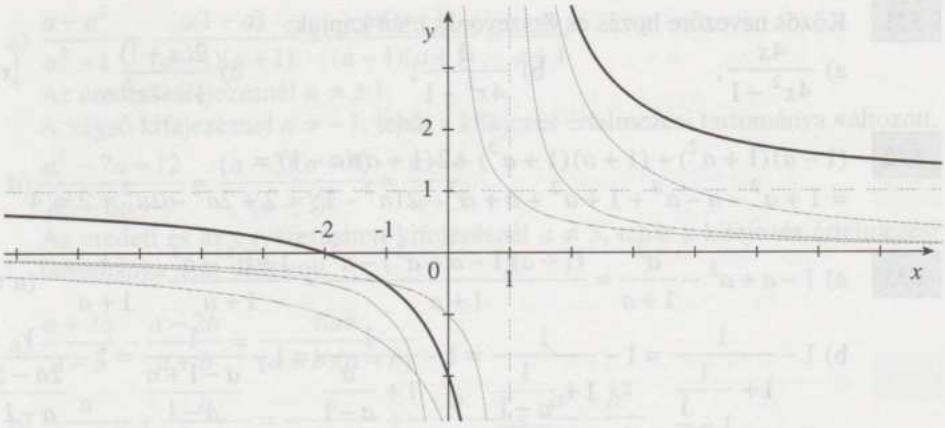
534. a) $\frac{(x+8)(x-4)}{(x-7)(x-4)} = \frac{x+8}{x-7}$; $x \neq 7;\ x \neq 4$

b) $\frac{-(p+2{,}5)(p-4{,}5)}{-(p-2{,}5)(p-4{,}5)} = \frac{p+2{,}5}{p-2{,}5}$; $p \neq 2{,}5;\ p \neq 4{,}5$

535. a) $\frac{6\left(q+\frac{3}{2}\right)\left(q-\frac{5}{3}\right)}{4\left(q+\frac{3}{2}\right)\left(q-\frac{5}{2}\right)} = \frac{3q-5}{2q-5}$; $q \neq -\frac{3}{2};\ q \neq \frac{5}{2}$

b) $\frac{-2(s+0{,}5)(s-3)}{-2(s+0{,}5)(s-1)} = \frac{s-3}{s-1}$; $s \neq -0{,}5;\ s \neq 1$

536. Az $\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}$ törtben mind a számlálót, mind a nevezőt szorzattá lehet alakítani: a számláló $(x+2)(x+3)$, a nevező pedig $(x-1)(x+3)$. Látható, hogy az értelmezési tartományon belül, ahol x nem lehet 1 és -3, lehet egyszerűsíteni, tehát a tört értéke valójában $\frac{x+2}{x-1} = 1+\frac{3}{x-1}$. A jobb oldalt már ábrázolni is lehet függvénytranszformációkkal az $\frac{1}{x}$-ből kiindulva. Ekkor a túloldali ábráról leolvasható, hogy hol pozitív a függvény értéke.



Másik megoldás:

Egy tört akkor pozitív, ha a számláló és a nevező előjele azonos, tehát mindkettő pozitív, avagy mindkettő negatív. Az $\frac{x+2}{x-1}$ tört számlálója pozitív, ha $x > -2$, a nevezője pozitív, ha $x > 1$; azaz mindkettő pozitív, ha $x > 1$. Másrészt negatív a számláló, ha $x < -2$, negatív a nevező, ha $x < 1$, vagyis mindkettő negatív, ha $x < -2$. Ezzel tehát a megoldás: $]-\infty; -3[\cup]-3; -2[\cup]1; \infty[$.

537. $\left(\frac{2c}{c+2} - \frac{2c}{3(c-2)} + \frac{8c}{(c+2)(c-2)}\right) \cdot \frac{c-2}{c(c-4)} = \frac{6(c-2)-2(c+2)+24}{3(c+2)(c-2)} \cdot \frac{c-2}{c-4} =$

$= \frac{4c+8}{3(c+2)(c-4)} = \frac{4(c+2)}{3(c+2)(c-4)} = \frac{4}{3(c-4)}$; $\quad c \notin \{-2;\ 0;\ 2\}$

$-\frac{11}{3} \notin \{-2;\ 0;\ 2\}$, tehát a helyettesítési érték $-\frac{4}{23}$.

538. $\left[\frac{2}{x(x-1)} - \frac{2x}{(1-x)(1+x)}\right] \cdot \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{4}{x-1} =$

$= \frac{2(x+1)+2x^2}{x(x-1)(x+1)} \cdot \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{4}{x-1} =$

$= \frac{2(x^2+x+1)}{x-1} \cdot \frac{2}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{4}{x-1} =$

$= \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} = \frac{4+4(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{4x}{(x-1)^2}$ $\quad x \neq 0;\ x \neq 1;\ x \neq -1$

539. a) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3) = 5-2a$, ami $a = 1\frac{3}{4}$ esetén: $\frac{3}{2}$.

b) $abc - \{3a^2b - [4abc + (3a^2b - 5ab^2)]\} = abc - 3a^2b + 4abc + 3a^2b - 5ab^2 =$
$= 5abc - 5ab^2 = 5ab(c - b)$, ami $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -4$ esetén:

$$5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-4 + \frac{2}{3}\right) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{50}{9}.$$

540. $\frac{x^3y(x+y)}{x^3(x+y)^2} = \frac{y}{x+y}$; $\quad x \neq 0;\ x+y \neq 0$

Most $x + y = -\frac{11}{7} + \frac{4}{7} = -1$, tehát a helyettesítési érték $-\frac{4}{7}$.

541.* $\frac{3a^2b + 2ab^2}{3a + 2b} = \frac{ab(3a+2b)}{3a+2b} = ab$ $\quad a := -\frac{4}{5}$ $\quad b := \frac{1}{3}$ esetén a tört értéke: $-\frac{4}{15}$.

542. a) $\frac{x^2(a+b)}{a+b} = x^2$, tehát a helyettesítési érték $\frac{4}{9}$.

b) $\frac{x^4(a-b)}{a-b} = x^4$, tehát a helyettesítési érték $\frac{16}{81}$.

c) $\frac{3^{-9} \cdot (1+3)}{3^{-11} \cdot (3+1)} = 3^2 = 9.$

543. a) Bővítsük először a zárójelben álló törtet xy-nal!

$$\left(1 - \frac{y-x}{x+y}\right)^{-2} = \left(\frac{x+y-y+x}{y+x}\right)^{-2} = \left(\frac{2x}{x+y}\right)^{-2} = \frac{(x+y)^2}{4x^2}.$$

Behelyettesítés után $\frac{25}{64}$-et kapunk.

b) $(x+y)^{-1} \cdot (x-y)^{-1} \cdot (x^{-2} - y^{-2}) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{(x+y)(x-y)} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 - y^2) \cdot x^2 \cdot y^2} = -\frac{1}{x^2y^2}.$

A helyettesítési érték -1.

544. a) 12,0

b) Az R és r sugarú, V térfogatú csonkakúp magassága.

545. $\frac{(x-4)^2 - (x+4)^2 + 16x}{x^2 - 16} = 0$

A tört számlálója nulla, ezért az alaphalmaz minden eleme megoldása az egyenletnek, azaz azonosság.

546. Nyilván $x \neq \pm 1$. A nevezővel e kikötés mellett átszorozunk, és kihasználjuk, hogy szorzattá bontható mind a számláló, mind a nevező a következő két ismert azonosság segítségével: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, illetve $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Eszerint az egyenlet:
$(x-1)(x^2+x+1) = 3(x-1)(x+1)$, ahonnan $(x-1)(x^2+x+1-3(x+1)) = 0$. Mivel ez egy szorzat, csak ott lehet 0, ahol valamelyik tényezője az. A feltétel szerint az első nem lehet, tehát marad: $x^2+x+1-3(x+1) = 0$, amelyik egyenletrendezés után az alábbi másodfokú alakot ölti: $x^2 - 2x - 2 = 0$. Ennek gyökei a megoldóképlet segítségével: $x_1 = 1+\sqrt{3}$, illetve $x_2 = 1-\sqrt{3}$. Ellenőrizhetjük, hogy tényleg gyökei-e az eredeti egyenletnek: $x_1^2 = 4+2\sqrt{3}$ és $x_1^3 = 10+6\sqrt{3}$, azaz a számláló $9+6\sqrt{3}$, míg a nevező $3+2\sqrt{3}$, az arányuk valóban éppen 3. Hasonlóan adódik: $x_2^2 = 4-2\sqrt{3}$ és $x_2^3 = 10-6\sqrt{3}$ ahonnan a számláló $9-6\sqrt{3}$, a nevező pedig $3-2\sqrt{3}$, és az arányuk ismét 3. Azaz a keresett megoldás: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ (nem ütközik a kikötéssel).

547. a) $\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}=\frac{1}{f}-\frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}=\frac{t-f}{ft}$

Vegyük mindkét oldal reciprokát!

$k = \frac{ft}{t-f} \qquad t \neq f$

b) $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad s - \frac{1}{2}at^2 = v_1 t \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{s}{t} - \frac{1}{2}at$

c) $N = -\left(1+\frac{d}{f}\right) \quad \Rightarrow \quad -N = 1+\frac{d}{f} \quad \Rightarrow \quad -N-1 = \frac{d}{f}$

$f = -\frac{d}{N+1} \qquad N \neq -1$

548. A bal oldal: $(1-4x^2)^3$. Elvégezve a köbre emelést, kapjuk a jobb oldalt.

549. Alakítsuk át a bal oldalt úgy, hogy az azonosság jobb oldalát kapjuk!

$$\frac{a}{(a-b)^2} - \frac{a}{(a-b)(a+b)} + \frac{1}{a+b} = \frac{a(a+b)-a(a-b)+(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)} =$$

$$= \frac{a^2+ab-a^2+ab+a^2-2ab+b^2}{(a-b)^2(a+b)} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2} \qquad |a| \neq |b|$$

550. a) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}; \qquad x \neq 0$

b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$, tehát $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 81$, amiből

$x+\frac{1}{x}=9$ vagy $x+\frac{1}{x}=-9$.

551. a) $x^2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ b) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

552. Jelölje x a középső számot, ekkor $x-1$, x, $x+1$ a három szám, és így $2\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$ egyenlőségnek kellene teljesülnie, ami $2x^2-2=2x^2$ alakra hozható. Jól látható, hogy nincs olyan szám, amely ezt kielégítené.

553. a) A befogók hossza 3 és $6\sqrt{2}$, az átfogó hossza 9.

b) $c^2=11+110=121$ és $c>0$, így $c=11$.

c) $c^2=2n+1+2n(2n+1)=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$, amiből $c=2n+1$, mert $c>0$. Ez pedig az állítást bizonyítja, hiszen n egy pozitív egész számot jelöl.

554. $(5k+4)^2-(5k+1)^2=25k^2+40k+16-(25k^2+10k+1)=30k+15=$
$=15(2k+1)$. Mivel $2k+1$ egy egész szám, ezért az állítás igaz.

555. a) Jelölje a gondolt számot x; $x>1$.

$$\frac{(3x+2)^2-8-12x}{3x-2}-2=18$$
$$\frac{9x^2+12x+4-8-12x}{3x-2}=20$$
$$\frac{9x^2-4}{3x-2}=20$$
$$3x+2=20$$
$$x=6$$

A gondolt szám a 6.
A szöveg alapján meggyőződhetünk arról, hogy a 6 valóban megoldása a feladatnak.

b)

$$\frac{(3x+2)^2-8-12x}{3x-2}-2=p$$
$$\frac{9x^2+12x+4-8-12x}{3x-2}=p+2$$
$$\frac{9x^2-4}{3x-2}=p+2$$
$$3x+2=p+2$$
$$x=\frac{p}{3}$$

Ekkor $\frac{p}{3}$-ra gondoltam.

556. Az ábrázolandó függvény így is megadható: $x\mapsto x+2$; $x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$. Ezért b) a helyes válasz.

557. Az ábrázolandó függvény így is megadható: $x \mapsto x^2 + 1$; $x \in \mathbf{R}$. Ezért c) a helyes válasz.

558. Az „L-alakú rész" területe a két négyzet területének különbsége: $a^2 - b^2$.
$KL = a + b$ és $PQ = a - b$, így $KL \cdot PQ = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, és ezt kellett bizonyítani.

559. $P_6(4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}3241$

560. a) Az 1,5 millió forint a legmagasabban adózó sávba is belenyúlik, így adója:
$400\,000 \cdot 0{,}2 + 600\,000 \cdot 0{,}3 + 500\,000 \cdot 0{,}4 = 460\,000$ Ft.
A 950 ezer forint nem ér bele a legmagasabb sávba, így adója:
$400\,000 \cdot 0{,}2 + 550\,000 \cdot 0{,}3 = 245\,000$ Ft.

b) Az 1. sávban $\frac{xp}{100}$, a második sávig elérő jövedelmek adója $\frac{up + (x-u)q}{100}$, míg a harmadik sávig is felnyúló jövedelmek adója $\frac{up + (v-u)q + (x-v)r}{100}$.

c) Az 1. sávban lévő jövedelmekből $\frac{x(100-p)}{100}$ Ft marad adólevonás után az adózónál, azaz a jövedelmének $(100-p)\%$-a.
A 2. sávba is felnyúló jövedelem esetén $x - \frac{up + (x-u)q}{100}$ forint marad adólevonás után az adófizetőnél; ez a teljes jövedelmének $\left(100 - \frac{up + (x-u)q}{x}\right)\%$-a.
A 3. sávba is felnyúló jövedelem esetén $x - \frac{up + (v-u)q + (x-v)r}{100}$ forint marad adólevonás után az adófizetőnél; ez a teljes jövedelmének $\left(100 - \frac{up + (v-u)q + (x-v)r}{x}\right)\%$-a.

561. a) 0
b) Az $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ hosszának négyzetét kell meghatározni. Ezt most Pitagorasz-tétellel számolhatjuk: $5^2 + 7^2 = 74$.
Másik lehetőség: $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab} = 5^2 + 7^2 - 0 = 74$.
c) Igen, mert mindkettő $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$-tel egyenlő. (A téglalap átlói egyenlő hosszúak.)

562. a) $\mathbf{ab} = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 20$
b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab} = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 20 = 129$

c) Nem igaz.
A b)-ben láttuk, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = 129$.
$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab} = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 20 = 49 \neq 129$

563. a) Legyen a keresett 0-tól különböző valós szám: x.
A feltétel szerint $\frac{7+x}{13} = \frac{7}{13+x}$ $(x \neq -13)$.
$13(13+x)$-szel szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát.
$x^2 + 20x = 0$,
$x(x+20) = 0$.
Mivel $x \neq 0$ a feltétel szerint, így a keresett szám $x = -20$.
A szövegbe helyettesítve $\left(\frac{7-20}{13} = \frac{7}{13-20}\right)$ teljesül a kívánt feltétel.

b) $\frac{a+x}{b} = \frac{a}{b+x}$ $(b \neq 0;\ b \neq -x)$

$ab + ax + bx + x^2 = ab$

$x(x+a+b) = 0$
A feltétel miatt $x \neq 0$, így a keresett szám $x = -a - b$.
A szövegbe helyettesítve teljesül a kívánt feltétel.

564. a) Az első 120 km-en legyen a sebessége $x\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, így a következő 180 km-en $(x-15)\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ lesz. Az átlagsebesség az összes megtett út osztva a teljes idővel.
Az összes út $120 + 180 = 300$ km, az első szakasz megtételéhez szükséges idő $\frac{120}{x}$ óra (h), a másodikéhoz pedig: $\frac{180}{x-15}$ óra (h), ezért az átlagsebesség:
$\frac{300}{\frac{120}{x} + \frac{180}{x-15}}\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

b) Ha a vonat átlagsebessége $110\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, akkor a következő egyenletet kell megoldanunk: $\frac{300}{\frac{120}{x} + \frac{180}{x-15}} = 110$, ahonnan közös nevezőre hozás után a

$\frac{300}{\frac{120(x-15)+180x}{x(x-15)}} = 110$ egyenletet kapjuk.

Rendezve $300x(x-15) = 110(300x - 1800)$ adódik, ami beszorzások, és 300-zal

történő osztás után a következő alakot ölti: $x^2 - 15x = 110x - 660$. Ez 0-ra rendezve, és még 3-mal osztva: $x^2 - 125x + 660 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei két tizedesre kerekítve: 119,48, illetve 5,52.

Tehát az első 120 km-en a vonat sebessége lehet kb. 119,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A második gyök értelmetlen, hiszen ha 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val csökkentette volna a sebességét, akkor már visszafelé ment volna. Ez nem felel meg a feltételeknek.

Az első gyök viszont jó, hiszen ekkor az első szakasz ideje kb. 1,004 óra, a másodiké kb. 1,723 óra, együtt kb. 2,727 óra, ami 300 km-en épp 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-s átlagsebességet ad (a kerekítés pontosságán belül).

565. a) Az összeöntött keverékben az alkohol mennyisége $0{,}15x + 0{,}4y$ liter.

A teljes térfogat $x + y$, tehát a koncentráció $\frac{0{,}15x + 0{,}4y}{x + y}$, vagy százalékban kifejezve $\frac{15x + 40y}{x + y}$ %.

b) Ha a keverék 25%-os, akkor $\frac{15x + 40y}{x + y} = 25$, ahonnan $15x + 40y = 25x + 25y$, azaz $15y = 10x$, vagyis $3y = 2x$. Tehát a 15%-os alkohol mennyiségének kétharmadát kell venni a 40%-osból ahhoz, hogy a keverék 25%-os legyen.

c) A feltétel szerint egyrészt: $\frac{15x + 40y}{x + y} = 20$, másrészt $x + y = 10$. Az első egyenletből: $15x + 40y = 20x + 20y$, azaz $20y = 5x$, tehát $x = 4y$. Ezt behelyettesítve a másodikba: $4y + y = 10$, tehát $y = 2$, és így $x = 8$. Tehát ha veszünk 8 liter 15%-os és 2 liter 40%-os alkoholt, akkor a 10 liter keverék 20%-os lesz.

Ellenőrzés: az elsőben $8 \cdot 0{,}15 = 1{,}2$ liter, a másodikban $2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$ liter tiszta alkohol van. Ekkor a 10 literben összesen 2 liter lesz, tehát tényleg 20%-os alkoholt kaptunk.

566. $(7x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3)^{2002}$ polinom együtthatóinak összegét megkapjuk, ha x helyébe 1-et helyettesítünk, így

$(7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 3)^{2002} = 0^{2002} = 0$.

567. $2x^2 + x + m$ polinomból akkor emelhető ki $x + 3$, ha $2x^2 + x + m = 0$ egyenletnek az $x = -3$ megoldása.

$$2 \cdot (-3)^2 - 3 + m = 0$$
$$18 - 3 + m = 0$$
$$m = -15$$

A kapott $2x^2 + x - 15 = 0$ egyenlet gyökei: -3 és $\frac{5}{2}$.

Így a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja:

$$2x^2 + x - 15 = 2(x+3)\left(x - \frac{5}{2}\right) = (x+3)(2x-5).$$

Vagyis $m = -15$ esetén a $2x^2 + x - 15$ polinomból $x + 3$ kiemelhető.

568. Felhasználva, hogy a kocka térfogata az élhosszának harmadik hatványa, míg a felszíne az élhossz négyzetének a hatszorosa, a feltétel a következő egyenletet jelenti: $10(x^3 - y^3) = (6x^2 + 6y^2)(x - y)$, ahol x és y jelenti a két kocka élhosszát. A kérdés: mennyi $\frac{x}{y}$? Az egyenlet mindkét oldalát el lehet osztani $(x - y)$-nal egy nevezetes azonosságot felhasználva, ami után azt kapjuk, hogy $10(x^2 + xy + y^2) = 6x^2 + 6y^2$, azaz $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 0$. Mivel $\frac{x}{y}$ a kérdés, osszunk (a nem 0) y^2 kifejezéssel, és jelöljük az $\frac{x}{y}$ arányt z-vel. Ekkor egyenletünk új alakja: $4z^2 + 10z + 4 = 0$. Ebből $z = -2$ vagy $-0{,}5$, ami a két kocka éleinek arányát jelentené. Mivel ez nem lehet negatív tehát a feltételeknek megfelelő kocka nincs.

569. Kétféle felbontás lehetséges: két másodfokú vagy egy első- és egy harmadfokú polinom szorzatára.

Első eset: $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, ahol $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ – vagy kezdődhet mindkettő $-x^2$-tel, de ez nem lényegileg más eset, csak a fentiek ellentettje. Így tehát $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (a+c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Hasonlítsuk össze a két oldalon az azonos hatványok együtthatóit. A konstans $bd = 1$, ezért vagy $b = d = 1$ vagy $b = d = -1$. Nincs x^3, ezért $a + c = 0$, vagy másképp $c = -a$. (Nincs x, ezért $ad + bc = 0$, de ez következik az előzőekből.) A másodfokú tagból $ac + b + d = 1$, a korábbiak miatt tehát $a^2 = 1$ vagy -3; ez utóbbi lehetetlen, tehát b és d csak 1 lehet, -1 nem.

Ezért $a = 1$ és $c = -1$, vagyis a szorzat: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Ez a következő módon is kiszámítható:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x).$$

Második eset: $(x^3 + ax^2 + bx + c)(x + d)$. Ekkor az összehasonlítás: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (a+d)x^3 + (ad + b)x^2 + (bd + c)x + cd$.

A konstansból: $cd = 1$, azaz $c = d = 1$ vagy $c = d = -1$.

Nincs x^3: $a + d = 0$, ezért $a = -1$ vagy 1.

Az x^2-ből: $ad + b = 1$, ezért mindenképp $b = 2$.

Nincs x: $bd + c = 0$, de az eddigiekből $bd + c = 3$ vagy -3 – ilyen felbontás tehát nincs.

570. $x^3 + x^2z - xyz + y^2z + y^3 = x^2(x+z) - xyz + y^2(z+y)$

Az $x + y + z = 0$ feltétel szerint $x + z = -y$

$z + y = -x$

$x + y = -z$

$x^2(-y) - xyz + y^2(-x) = -x^2y - xy^2 - xyz = -xy(x+y) - xyz =$

$= -xy \cdot (-z) - xyz = xyz - xyz = 0$

571. $\dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1} = \dfrac{a^2(a-1) - (a-1)}{(a^2-1)^2} = \dfrac{(a-1)(a^2-1)}{(a^2-1)^2} = \dfrac{a-1}{a^2-1} =$

$= \dfrac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{1}{a+1} \qquad (a \neq \pm 1)$

572. A polinom nem nulladfokú, mert $a \neq p$.
Ekkor az első és magasabb fokú tagokból kiemelhetjük a-t: $B \cdot a + p = a \quad (B \neq 0)$.
Átrendezve: $p = a(1 - B)$.
Mivel egy prímet bontottunk szorzattá, az egyik tényező 1.
A második tényező nem lehet 1, mert akkor $p = a$ adódna, ami ellentmond a feladat szövegének, ezért: $a = 1$. Ildi húga tehát 1 éves.

2.7. Közepek

573. a) Két pozitív szám, a és b számtani közepe a két szám összegének a fele: $\frac{a+b}{2}$.
Két pozitív szám, a és b mértani közepe a két szám szorzatának négyzetgyöke: $\sqrt{ab}$.

b) Legyen $a > 0$; $b > 0$, $a < b$, ekkor az állítás:
$a < \sqrt{ab} < b$.
Mivel az egyenlőtlenségben szereplő kifejezések pozitívak, a négyzetre emelés ekvivalens művelet, az egyenlőtlenség-jelek iránya nem fordul meg.
$a^2 < ab < b^2$
Lássuk be külön-külön az egyenlőtlenségeket!
$a^2 < ab$
$a^2 - ab < 0$
$a(a-b) < 0$
igaz állítás, mivel $a > 0$ és $a < b$.
$ab < b^2$
$ab - b^2 < 0$
$b(a-b) < 0$
igaz állítás, mivel $b > 0$, $a < b$.
Mivel ekvivalens lépések útján igaz állításhoz jutottunk, így az eredeti
$a < \sqrt{ab} < b$
állítás is igaz.

574. Legyen $0 < a < b < c$ a három szám! Ekkor
$a + b + c < 3c$, így $\frac{a+b+c}{3} < c$, és hasonlóan
$3a < a + b + c$, így $a < \frac{a+b+c}{3}$, tehát $a < \frac{a+b+c}{3} < c$.

575. a) 2 és 8 különbsége 6, ezt a különbséget kell egyenletesen kettéosztania a keresett számnak, tehát a beiktatott szám az 5 (= 2 + 3 = 8 – 3). Ez egyben a két szélső szám számtani közepe is. A mértani sorozat esetén a beiktatott szám a két szélső szám mértani közepe: 4.

b) A számtani és mértani közép közötti nevezetes egyenlőtlenség miatt mindig a számtani sorozatnak megfelelően beiktatott elem lesz a nagyobb, ha a két eredeti szám különböző. Ha egyenlők, akkor a beiktatottak is azok.

576. Bizonyítandó tehát, hogy $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$.

A két oldalt a pozitív $\sqrt{ab}$-vel osztva $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \le 1$ adódik.

Rendezve: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. Ez pedig valóban mindig teljesül, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Megjegyzés: a $\frac{2ab}{a+b}$ törtet, pontosabban a vele egyenlő $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ kifejezést az a és b számok harmonikus közepének hívják.

577. Bizonyítandó tehát, hogy $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Mivel mindkét oldal pozitív, ekvivalens átalakítás, ha négyzetre emelünk: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$. A bal oldalon felbontva a zárójelet: $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$.

Szorzunk 4-gyel: $a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2$, rendezve: $0 \le a^2-2ab+b^2$, felismerve a nevezetes azonosságot: $0 \le (a-b)^2$. Ez pedig valóban mindig teljesül, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Megjegyzés: a $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ kifejezést az a és b számok négyzetes közepének hívják.

578. Mikor teljesül, hogy: $(a+b)^2 < 4ab$?

Osszunk 4-gyel, kapjuk: $\frac{(a+b)^2}{4} < ab$. Mivel mindkét oldal pozitív, gyököt vonhatunk: $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Ez azonban sosem teljesül, hiszen két szám számtani közepe sosem kisebb a mértaninál.

Másik megoldás:

Felbontva a zárójelet: $a^2+2ab+b^2 < 4ab$, rendezve $a^2-2ab+b^2 < 0$, felismerve a nevezetes azonosságot: $(a-b)^2 < 0$, ami sosem teljesül.

579. Ha $x, y > 0$, akkor a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint: $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$. A 10-es alapú logaritmus függvény szigorú monoton növekedése miatt ez ekvivalens a $\lg\sqrt{xy} \le \lg\frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenséggel. Ebből a logaritmus

azonosságait felhasználva épp a bizonyítandó $\frac{\lg x + \lg y}{2} \le \lg \frac{x+y}{2}$ állítást kapjuk.

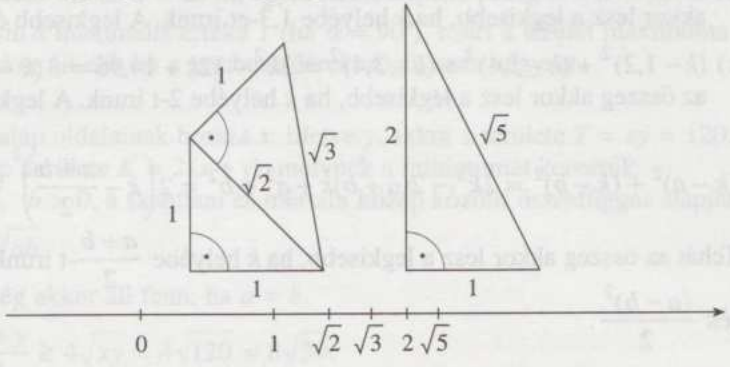
580. Az adott egység ismeretében derékszögű háromszögeket szerkesztünk, melynek befogói:

$1; 1 \Rightarrow$ átfogó $\sqrt{2}$; (Pitagorasz tétele értelmében)

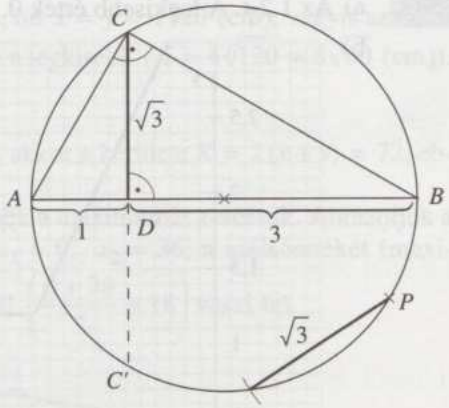
$\sqrt{2}; 1 \Rightarrow$ átfogó $\sqrt{3}$;

$1; 2 \Rightarrow$ átfogó $\sqrt{5}$.

A kapott hosszúságú szakaszokat a számegyenesre az origótól kezdve felmérjük. (A számegyenes egysége az adott egység.)



581. Az AB átmérő 4 egység hosszúságú,
$AD = 1$ egység $\Rightarrow DB$ 3 egység.
Az AB átmérőre D-ben állított merőleges a kört C (illetve C') pontban metszi.
Thalész tétele miatt az ACB (illetve $AC'B$) háromszög derékszögű, és DC (illetve DC') e háromszögben az AB átfogóhoz tartozó magasság.
A derékszögű háromszögekre vonatkozó magasságtétel miatt az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe az átfogó e két szeletének



$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} \Rightarrow CD = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3}.$$

Megjegyzés: ugyanígy belátható, hogy $C'D = \sqrt{3}$.
Az adott $\sqrt{3}$ hosszúsággal a 2 egység sugarú körvonal tetszőleges (P) pontjából szerkeszthető $\sqrt{3}$ hosszúságú húr.

582. Az $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ és $\frac{y^2+1}{y} = y + \frac{1}{y}$ azonosságok és az ismert $x + \frac{1}{x} \ge 2$, ha

$x > 0$, $y + \frac{1}{y} \geq 2$, ha $y > 0$ egyenlőtlenségekből következik a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés:

$x > 0$ esetén $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ekvivalens az $x^2 + 1 \geq 2x$, vagyis az $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenséggel, ami $(x-1)^2 \geq 0$ miatt igaz minden $x > 0$ esetén.

583. a) Az 1,2-et. A legkisebb érték 0.

b) $(k-1{,}2)^2 + (k-1{,}4)^2 = 2k^2 - 5{,}2k + 3{,}4 = 2(k-1{,}3)^2 + 0{,}02$. Tehát az összeg akkor lesz a legkisebb, ha k helyébe 1,3-et írunk. A legkisebb érték 0,02.

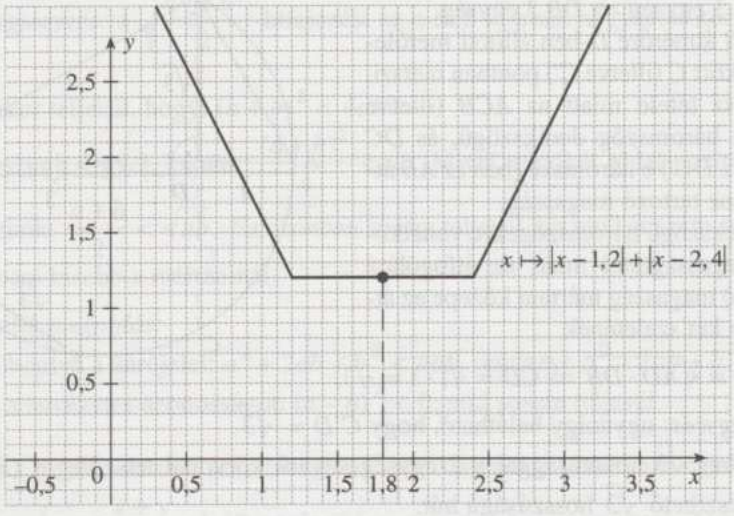
c) $(k-1{,}2)^2 + (k-1{,}4)^2 + (k-3{,}4)^2 = 3k^2 - 12k + 14{,}96 = 3(k-2)^2 + 2{,}96$. Tehát az összeg akkor lesz a legkisebb, ha k helyébe 2-t írunk. A legkisebb érték 2,96.

584. $(k-a)^2 + (k-b)^2 = 2k^2 - 2(a+b)k + a^2 + b^2 = 2\left(k - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a-b)^2}{2}$

Tehát az összeg akkor lesz a legkisebb, ha k helyébe $\frac{a+b}{2}$-t írunk. A legkisebb érték $\frac{(a-b)^2}{2}$.

585. a) Az 1,2-t. A legkisebb érték 0.

b)



c) A b)-ben ábrázolt grafikon mutatja, hogy igaz az állítás. Az 1,2 és a 2,4 számtani közepe 1,8. A k helyébe 1,8-et helyettesítve 1,2-et kapunk eredményül, és amint a grafikon is mutatja, ennél kisebb helyettesítési értéke nincs a függvénynek.

586. Legyenek a téglalap oldalai a és b.

a) Tehát ha $2(a+b) = 100$, mikor maximális ab? Két szám mértani közepe sosem nagyobb a számtaninál, azaz $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. A jobb oldal most 25, ezért egy négyzetre emeléssel: $ab \le 625$. (Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, ezért ez most ekvivalens lépés.) Mivel a mértani és számtani közép csak $a = b$ esetén egyezik meg, a maximális 625 m² terület akkor áll elő, ha $a = b = 25$ m, vagyis ha a téglalap négyzet.

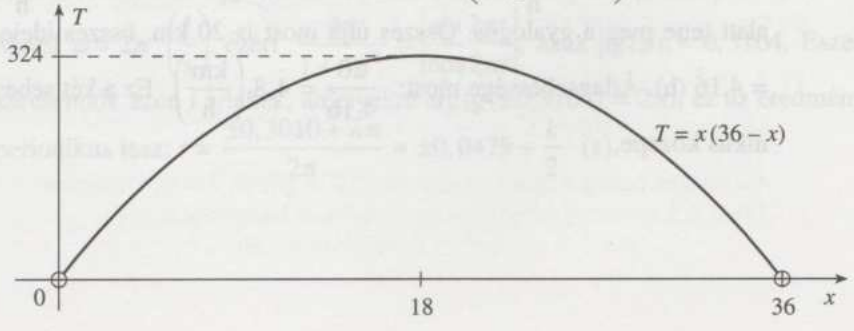
b) A rombusz oldala $a = 25$ m, egyik területképlete pedig $T = a^2 \cdot \sin\alpha$. Természetesen $\sin\alpha$ maximális értéke 1 (ha $\alpha = 90°$), ezért a terület maximuma 625 m², ami akkor áll elő, ha a rombusz derékszögű, azaz négyzet.

587. Ha a téglalap oldalainak hossza x, illetve y, akkor a területe $T = xy = 120$.
A téglalap kerülete $K = 2(x+y)$, melynek a minimumát keressük.
Ha $a > 0$, $b > 0$, a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.
Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b$.

$$K = 4\frac{x+y}{2} \ge 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{120} = 8\sqrt{30}.$$

Tehát a téglalap kerülete akkor a legkisebb, ha $x = y = \sqrt{120}$ (cm), vagyis az adott területű téglalapok közül a négyzet kerülete a legkisebb ($K = 4\sqrt{120} = 8\sqrt{30}$ (cm)). (Lásd a 610. feladatot!)

588. Ha a téglalap oldalainak hossza x, illetve y, akkor a kerülete $K = 2(x+y) = 72$, ebből $x + y = 36$.
A téglalap területe $T = xy = x(36-x)$, ennek a maximumát keressük. Ábrázoljuk a területet x függvényében! A zérushelyek $x_1 = 0$, $x_2 = 36$; a szélsőértékét (maximumát) a két zérushely számtani közepénél $\left(\frac{0+36}{2} = 18\right)$ veszi fel.



Tehát a 72 cm kerületű téglalapok közül az $x = y = 18$ cm oldalhosszúságú négyzet területe a legnagyobb ($T = 324$ cm^2).

Másik megoldás:
$T = x(36 - x)$ maximumát kereshetjük teljes négyzetté alakítással is.
$-x^2 + 36x = -(x^2 - 36x) = -(x - 18)^2 + 324$
Tehát a maximumát $x = 18$-nál veszi fel, ekkor $y = 18$, a terület $T = 324$ cm^2.

589. A fizikából jól ismert összefüggés szerint $s = vt$. Ekkor

a) a megtett út $s = s_1 + s_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}$, így az átlagsebesség

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{120 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{2} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(a két részsebesség számtani közepe).

b) a menetidő $t = t_1 + t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} + \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}$, így az átlagsebesség

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{120 \frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{1}{80 \frac{\text{km}}{\text{h}}}} = 96 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(a két részsebesség harmonikus közepe, lásd 576. feladat).

590. a) Két órán át $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladva éppen 8 km-t tett meg a gyalogos. Utána 2 órán át $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val haladva 12 km-t. Tehát 4 óra alatt $8 + 12 = 20$ (km) a megtett útja. Átlagsebessége így: $\frac{20}{4} = 5 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Ez a két sebesség számtani közepe.

b) Az első 10 km-t $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val 2,5 óra alatt, a következő 10 km-t $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val $1,\dot{6}$ óra alatt tette meg a gyalogos. Összes útja most is 20 km, összes ideje $2,5 + 1,\dot{6} = 4,1\dot{6}$ (h). Átlagsebessége most: $\frac{20}{4,1\dot{6}} = 4,8 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Ez a két sebesség harmonikus közepe.

591. a) $2+\frac{120}{80}=3{,}5$ órát.

b) $\frac{240}{3{,}5}=68{,}57\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ez nem egyenlő a $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ és a $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ számtani közepével, ami $70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) Ha a visszafelé vezető úton mindvégig $v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt, akkor X úr odafelé 2 órát, visszafelé $\frac{120}{v}$ órát autózott. A megadott átlagsebességből kiszámítható, hogy összesen $\frac{240}{75}=3{,}2$ órát volt úton. Tehát $\frac{120}{v}=1{,}2$ óráig tartott a visszafelé vezető út, amiből $v=100$.

X úr szabálytalanul vezetett volna a visszafelé vezető úton.

592. a) A kitérés és a gyorsulás abszolútértékének mértani közepe:

$\sqrt{|A\sin\omega t|\cdot|A\omega^2\sin\omega t|}=A\omega|\sin\omega t|$

míg a pillanatnyi sebesség abszolútértéke: $A\omega\,|\cos\omega t\,|$.

A kérdés, mikor egyenlő egy szám szinuszának és koszinuszának abszolútértéke.

Akkor, ha a szám $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $(k\in\mathbf{Z})$.

Tehát $\omega t=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, és $\omega=2\pi\ \left(\frac{1}{\text{s}}\right)$, tehát $2\pi t=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, ahonnan $t=\frac{1}{8}+\frac{k}{4}=\frac{2k+1}{8}$ (s). Azaz először a 0,125 s időpontban egyenlők a kérdéses mennyiségek, aztán 0,25 másodpercenként újra.

b) Az $A\omega|\cos\omega t|=\frac{A|\sin\omega t|+A\omega^2|\sin\omega t|}{2}$ egyenlet megoldását keressük, ahol t a változó. Látható, hogy A kiesik, tehát: $2\omega|\cos\omega t|=|\sin\omega t|(1+\omega^2)$.

Mivel $\omega=2\pi\ \left(\frac{1}{\text{s}}\right)$, ezért $\frac{4\pi}{1+4\pi^2}=\left|\frac{\sin 2\pi t}{\cos 2\pi t}\right|$, azaz $|\text{tg}\,2\pi t|\approx 0{,}3104$. Eszerint keresendők azon t értékek, amelyekre $\text{arc tg}\,(\pm 0{,}3104)=2\pi t$, ez az eredmény is periodikus lesz: $t=\frac{\pm 0{,}3010+k\pi}{2\pi}\approx\pm 0{,}0479+\frac{k}{2}$ (s).

593. Ha beteszünk T összeget, akkor három év múlva a feltételek szerint: $T \cdot 1{,}16 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}09$ pénzünk lesz, ami $1{,}4161T$, tehát 41,61%-kal nőtt meg az összeg. Ha állandó kamat lett volna, akkor $Tx^3 = 1{,}4161T$, ahonnan $x = 1{,}1230$, tehát átlagosan évi 12,30%-os kamatot jelent ez a három megadott kamat az egymás utáni három évben.
(Megjegyezzük, hogy bár nincs nagy eltérés, de a számtani közép nem vezet a helyes eredményre, mert ez 12,33%-ot adna, egy kicsit többet, mint a valódi eredmény.)

594. Legyenek a háromszög szögei α, β és γ, és tegyük fel, hogy $\alpha \le \beta \le \gamma$.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} = \beta$$

$$\beta + \gamma = 3\alpha.$$

A három egyenlet egyszerre csak az $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 75°$ esetén teljesül. Tehát a keresett háromszög szögei $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 75°$.

595. a) $\frac{p+q}{2}$; $\sqrt{pq}$

b) A téglalap területe pq és ugyanennyi a négyzet területe is, hiszen $\left(\sqrt{pq}\right)^2 = pq$.

c) A téglalap kerülete $2(p + q)$ és

ugyanennyi a négyzeté is, hiszen $4 \cdot \frac{p+q}{2} = 2(p+q)$.

d) Kérdés, lehet-e $2p + 2q = 4\sqrt{pq}$.

Mindkét oldalt 4-gyel osztva $\frac{p+q}{2} = \sqrt{pq}$ adódik, ami nem lehet mert $p \neq q$.

e) Ha a két négyzet területe egyenlő, akkor az oldalaik is egyenlők. De az oldalak $\frac{p+q}{2}$ és $\sqrt{pq}$ nem egyenlők, hiszen $p \neq q$.

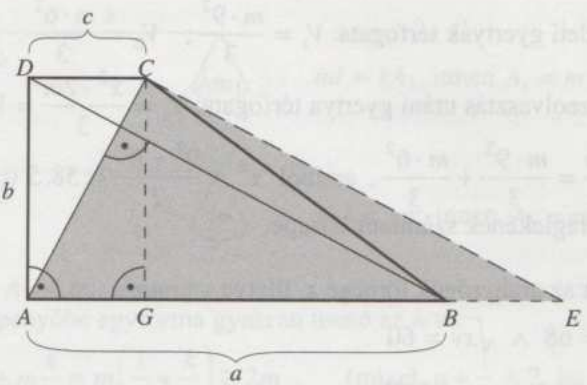
596. a) Az ABC háromszög C-nél derékszögű. A magasságtételből: $PC = \sqrt{5 \cdot 3{,}2} = 4$.
A zászlórúd 8 m hosszú.

b) $4 = \frac{9}{19} \cdot PQ$, amiből $PQ = \frac{76}{9} \approx 8{,}44$ (méter).

c) A Thalész-tétel miatt az AB átfogó F felezőpontja a háromszög köréírt körének középpontja, tehát $FC = \frac{AB}{2} = 4{,}1$ méter.

AC hossza befogótétellel számítva: $AC = \sqrt{5 \cdot 8{,}2} \approx 6{,}4$ (méter).
Tehát 2,3 méterrel rövidebb rögzítőkötelet használhatnánk.

597.



Állítás: $b = \sqrt{ac}$

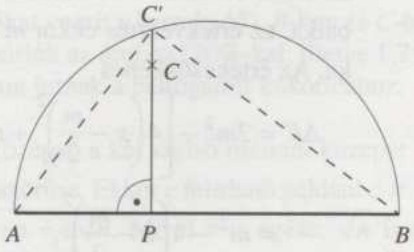
Toljuk el a DB átlót a $\overrightarrow{DC}$-ral, legyen B képe E, ekkor $AC \perp CE$, $BE = DC = c$. Így ACE háromszög derékszögű, CG az AE átfogóhoz tartozó magassága, $AG = CD = BE = c$, $AD = GC = b$, $AE = AB + BE = a + c$, így $GE = AE - AG = a + c - c = a$.

ACE derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságtételt $CG = \sqrt{AG \cdot GE}$, azaz $b = \sqrt{ac}$, amit bizonyítani akartunk, azaz a merőleges szár az alapok mértani közepe.

598. A feltétel miatt $PC = \sqrt{PA \cdot PB}$.

Tegyük fel, hogy C nem illeszkedik az AB szakasz mint átmérő fölé rajzolt körre. Hosszabbítsuk meg PC-t a körig és legyen ennek a szakasznak a körrel való metszéspontja (abban a félsíkban, ahol a C van) C'. Mivel C' a körön van, Thalész tétele értelmében $AC'B$ háromszög derékszögű. Így a magasságtétel miatt $PC' = \sqrt{PA \cdot PB}$.

Ezt összehasonlítva az eredeti feltétellel: $PC = PC'$, ebből (a származtatás miatt) $C = C'$, tehát C illeszkedik AB szakasz mint átmérő fölé rajzolt körre, és ez ellentmond az indirekt feltételnek.



599. Az eredeti gyertyák térfogata: $V_1 = \frac{A \cdot 9}{3}$; $V_2 = \frac{A \cdot 6}{3}$.

Az összeolvasztás utáni gyertya térfogata: $V_3 = \frac{2A \cdot m}{3} = V_1 + V_2$.

$\frac{2A \cdot m}{3} = \frac{A \cdot 9}{3} + \frac{A \cdot 6}{3}$, amiből valóban $m = \frac{9+6}{2} = 7{,}5$ cm.

600. Az eredeti gyertyák térfogata: $V_1 = \frac{m \cdot 9^2}{3}$; $V_2 = \frac{m \cdot 6^2}{3}$.

Az összeolvasztás utáni gyertya térfogata: $V_3 = \frac{x^2 \cdot 2m}{3} = V_1 + V_2$.

$\frac{x^2 \cdot 2m}{3} = \frac{m \cdot 9^2}{3} + \frac{m \cdot 6^2}{3}$, amiből $x^2 = \frac{9^2 + 6^2}{2} = 58{,}5$ (cm²), tehát az új alapterület a régiekének számtani közepe.

601. Legyen az aranyrögök tömege x, illetve y gramm.

$\frac{x+y}{2} = 68 \wedge \sqrt{xy} = 60$

$x + y = 136 \wedge xy = 3600$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy az aranyrögök tömege 36 gramm és 100 gramm.

602. Az eredeti briliáns értéke $2m^2$ fabatka. Ha 2 részre vágjuk, melyek tömege x, illetve y, akkor $x + y = m$, és az új érték $2x^2 + 2y^2$.

Új érték $2x^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2(m-x)^2 = 4x^2 - 4mx + 2m^2 = 4\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + m^2$.

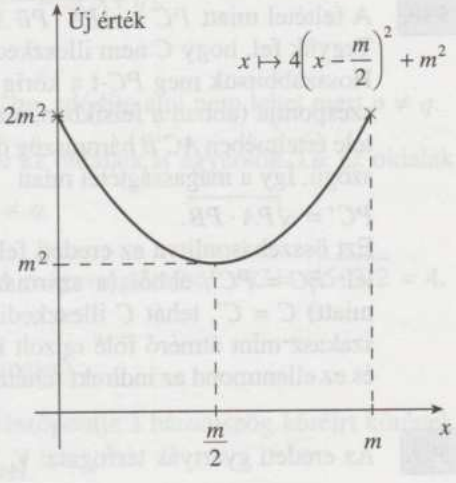
Ábrázoljuk a briliánsok értékét x függvényében ($0 \le x \le m$).

Az ábráról leolvasható, hogy ha a briliánst kétfelé vágjuk, veszít az értékéből. Legtöbbet akkor veszít az értékéből, ha két egyenlő darabra vágjuk. Ekkor a briliánsok összértéke m^2 fabatka, az értékvesztés ekkor m^2 fabatka. Az értékcsökkenés

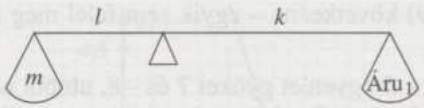
$$\Delta E = 2m^2 - \left[4\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + m^2\right] =$$

$$= m^2 - 4\left(x - \frac{m}{2}\right)^2,$$

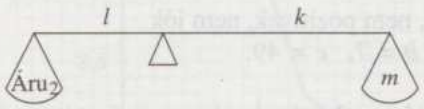
ahol x az egyik levágott darab tömege.



603.



$ml = kA_1$, innen $A_1 = m \cdot \frac{l}{k}$



$A_2 l = mk$, innen $A_2 = m \cdot \frac{k}{l}$

Ha $l < k$, akkor $A_1 < m$, $A_2 > m$.
Ha mindkét serpenyőbe egyforma gyakran tenné az árut:

$$A_1 + A_2 = m\frac{l}{k} + m\frac{k}{l} = m\left(\frac{l}{k} + \frac{k}{l}\right) \geq 2m \qquad \text{(mivel } a + \frac{1}{a} \geq 2, \text{ ha } a > 0\text{)},$$

akkor a vásárlóknak $2m$ tömegű árunak megfelelő pénzért legalább $2m$ tömegnyi árut adott, így nem jutott tisztességtelen haszonhoz.

604. a) Rendre 1300, 1872, 1586, illetve 1560 petákot.

b) A pattogatott kukorica valódi tömege legyen x gramm, a mérlegkarok hossza k_b és k_j. Feltehetjük, hogy mindegyik mérlegnél a bal oldali mérlegkar a hosszabb: $k_b > k_j$.
A két mérés eredménye szerint $x \cdot k_b = 144 \cdot k_j$ és $x \cdot k_j = 100 \cdot k_b$.
A két egyenlőség bal oldalainak szorzata megegyezik a jobb oldalaik szorzatával: $x^2 \cdot k_b \cdot k_j = 14\,400 \cdot k_b \cdot k_j$, tehát $x^2 = 14\,400$. Ebből látható, hogy egy zacskó pattogatott kukorica valódi tömege 120 gramm. Ennyit mutatnak a beszerzési helyen a pontos mérlegek, ezért egy zacskó pattogatott kukorica beszerzési ára 1560 peták.
Az *A* boltban jól járnak a vásárlók (ám sokat veszít a kereskedő), *B*-ben és *C*-ben a beszerzési árnál drágábban jutnak a vásárlók az áruhoz (20%-kal, illetve 1,7%-kal fizetnek többet). *D*-ben beszerzési áron jutnak a pattogatott kukoricához.

605. Legyen a három szám $a < b < c$. Ekkor a középső a két szélső mértani közepe: $b = \sqrt{ac}$, és a legnagyobb a másik kettő többszöröse. Ekkor c felírható például $c = na$ alakban (ahol $n \in \mathbf{N}^+$). De ekkor $b = \sqrt{a \cdot na} = a\sqrt{n}$. Mivel b is egész, $\sqrt{n}$ is az, vagyis n négyzetszám, $n = m^2$ alakú (ahol $m \in \mathbf{N}^+$). Ekkor $b = ma$, $c = m^2 a$, a három összege pedig $a(1 + m + m^2) = 57$, ahol a bal oldal mindkét tényezője egész. Mivel prímtényezős alakban $57 = 3 \cdot 19$, és persze $57 = 1 \cdot 57$, négy eset lehetséges: $a = 3$ és $1 + m + m^2 = 19$, vagy fordítva, illetve $a = 1$ és $1 + m + m^2 = 57$, vagy fordítva.
Az első esetben az $m^2 + m - 18 = 0$ egyenlet gyökei nem egészek.
A második esetben az $m^2 + m - 2 = 0$ egyenlet gyökei 1 és -2, utóbbi nem pozitív,

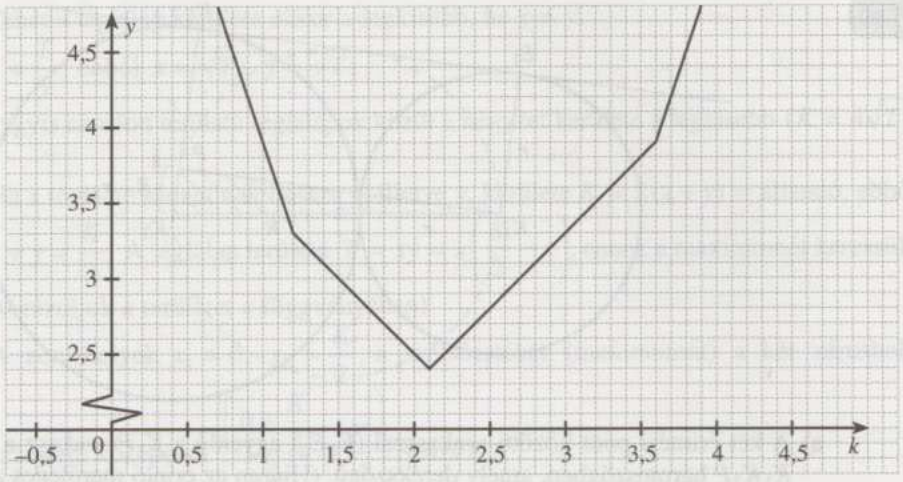
az előbbiből viszont $a = b = c$ (= 19) következne – egyik sem felel meg a feltételeknek.

A harmadik esetben az $m^2 + m - 56 = 0$ egyenlet gyökei 7 és -8, utóbbi nem pozitív, nem jó, az előbbiből a három számra 1, 7, 49 következik. A negyedik esetben $m^2 + m = 0$ egyenlet gyökei 0 és -1, nem pozitívak, nem jók.
Tehát egy megoldásunk van: $a = 1$, $b = 7$, $c = 49$.

606. Legyen a három szám $a < b < c$. Ekkor a középső a két szélső számtani közepe: $b = \frac{a+c}{2}$. A feltétel szerint $a \cdot \frac{a+c}{2} \cdot c = 24$, vagyis $a(a+c)c = 48$. Írjuk ezt $ac \cdot (a+c) = 48$ alakban. Ha $a + c = -p$ és $ac = q$, akkor a Viète-formulák szerint a és c az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökei. A 48 szorzatalakjai: $1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$, ezek tehát $-p$ és q lehetséges értékpárjai. Nem kell azonban mind a 10 esetet végigvizsgálni. Mivel a, b, c közül a legkisebb is legalább 1, a másik kettő legalább 2, illetve 3, így ac legalább 3, $a + c$ legalább 4. Így máris ötre csökken a lehetséges értékpárok száma. Táblázatba foglalva a lehetséges $-p$, q párok esetén adódó gyököket, látjuk, hogy egyetlen olyan eset van, amelyben egész eredmény adódik. Ez egyúttal jó megoldás is, hiszen $a = 2$ és $c = 4$ esetén a számtani közepük $b = 3$, és valóban $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

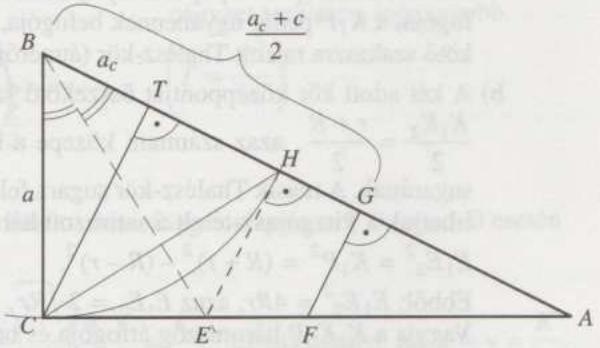
$a + c = -p$	16	12	4	8	6
$ac = q$	3	4	12	6	8
a	0,19	0,34	–	0,84	2
c	15,81	11,66	–	7,16	4

607. Ha $k < 1{,}2$, akkor $|k - 1{,}2| + |k - 2{,}1| + |k - 3{,}6| =$
$= -(k - 1{,}2) - (k - 2{,}1) - (k - 3{,}6) = 6{,}9 - 3k$;
ha $1{,}2 \le k < 2{,}1$, akkor $|k - 1{,}2| + |k - 2{,}1| + |k - 3{,}6| =$
$= k - 1{,}2 - (k - 2{,}1) - (k - 3{,}6) = 4{,}5 - k$;
ha $2{,}1 \le k < 3{,}6$, akkor $|k - 1{,}2| + |k - 2{,}1| + |k - 3{,}6| =$
$= k - 1{,}2 + k - 2{,}1 - (k - 3{,}6) = k + 0{,}3$;
ha $k \ge 3{,}6$, akkor $|k - 1{,}2| + |k - 2{,}1| + |k - 3{,}6| =$
$= k - 1{,}2 + k - 2{,}1 + k - 3{,}6 = 3k - 6{,}9$.
A $k \mapsto |k - 1{,}2| + |k - 2{,}1| + |k - 3{,}6|$; $k \in \mathbf{R}$ függvény grafikonja a fentiek alapján:

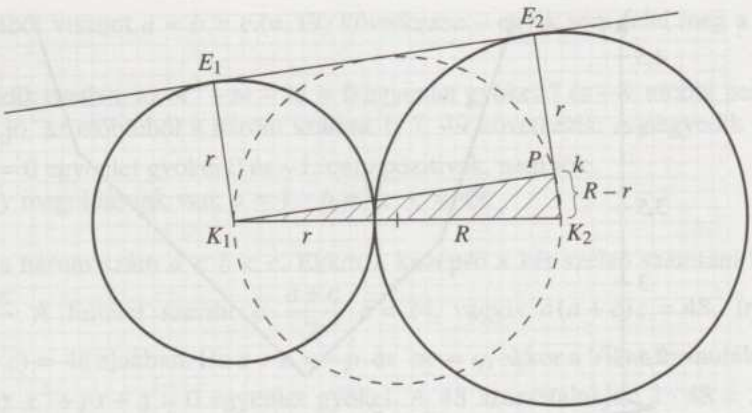


A függvénynek 2,1-nél (az 1,2, a 2,1 és a 3,6 mediánjánál) van minimuma. A minimum értéke 2,4.

608. Használjuk a mellékelt ábra jelöléseit: a befogótétel szerint: $a = BC$ mértani közepe az BT és az AB szakaszoknak. A B középpontú, a sugarú kör metszi ki AB-ből a H pontot, tehát BH a mértani közepe BT és AB-nek. Ugyanezen szakaszok számtani közepe BG, ahol G-t úgy kaphatjuk, hogy AC F felezőpontjából a CT magassággal párhuzamost húzunk. Ekkor ugyanis $AG = \frac{AT}{2}$, de $AT = c - a_c$, azaz $BG = AB - AG = c - \frac{c - a_c}{2} = \frac{c + a_c}{2}$, vagyis BG a számtani közepe annak a két szakasznak, amelynek $BC = a$ a mértani közepe. Azt kell tehát belátni, hogy H mindig közelebb van B-hez, mint G. Ez igazolja ebben a speciális esetben a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenséget. Ez viszont igaz, mert a B-ből induló szögfelező a CA oldalt C-hez közelebb metszi, mivel az átfogó hosszabb, mint a befogó, s így a szögfelező tétel szerint AE is hosszabb, mint CE. Ha E-ből merőlegest állítunk AB-re, akkor éppen a H pontot, C elforgatottját kapjuk. Ha F-ből állítunk merőlegest, akkor kapjuk G-t. Mivel F messzebb van C-től, mint E, ezért G is messzebb lesz B-től, mint H; s ezzel beláttuk, amit akartunk.



609.



a) A két érintési pont közötti szakasszal (E_1E_2) egyenlő a K_1P szakasz a satírozott K_1K_2P háromszögben, amely derékszögű. (Hiszen az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és a párhuzamos eltolás a merőlegességet és a szakaszhosszt megőrzi – vagy másképpen: a $K_1P_2E_1$ minden szöge derékszög, vagyis ez egy téglalap, aminek szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.) A két kérdéses Thalész-kör átmérője az E_1E_2 és a K_1K_2 szakasz. Mivel utóbbi a K_1K_2P háromszög átfogója, a K_1P pedig ugyanennek befogója, természetesen a középpontokat összekötő szakaszra rajzolt Thalész-kör (átmérője) a nagyobb.

b) A két adott kör középpontját összekötő szakasz fölé rajzolt Thalész-kör sugara $\frac{K_1K_2}{2} = \frac{r+R}{2}$, azaz számtani közepe a két adott, egymást kívülről érintő kör sugarának. A másik Thalész-kör sugara fele az E_1E_2 szakasz hosszának. Erre felírhatjuk a Pitagorasz-tételt a satírozott háromszögben:

$E_1E_2^{\,2} = K_1P^{\,2} = (R+r)^2 - (R-r)^2$.

Ebből: $E_1E_2^{\,2} = 4Rr$, azaz $E_1E_2 = 2\sqrt{Rr}$, és így ennek a körnek a sugara $\sqrt{Rr}$. Vagyis a K_1K_2P háromszög átfogója és befogója közti egyenlőtlenség éppen az r és R számtani és mértani közepe (illetve a kétszeresük) közti egyenlőtlenséget szemlélteti. Ha $R = r$, a K_1K_2P háromszög nem létezik (P egybeesik K_2-vel), de ekkor $K_1K_2E_2E_1$ minden szöge derékszög, vagyis ez egy téglalap, aminek két szemközti oldala – vagyis a kétféle közép – egyenlő.

610. Ha a téglalap oldalainak hossza x, illetve y, területe $T = xy$ = állandó, kerülete $K = 2(x+y)$, ennek a minimumát keressük.

Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor a számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = y$.

A téglalap kerülete: $K = 2(x+y) = 4\frac{x+y}{2} \geq 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{T}$ = állandó.

Tehát a téglalap kerülete akkor a legkisebb, ha $x = y$.

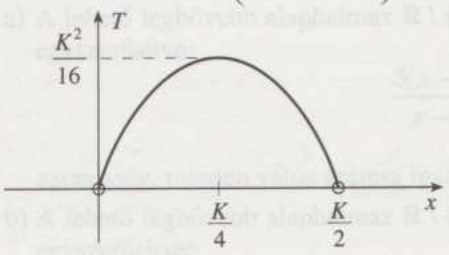
$x = \frac{T}{x}$, ebből $x = \sqrt{T}$; $y = \sqrt{T}$,

vagyis az adott területű téglalapok közül a négyzet kerülete a legkisebb ($K = 4\sqrt{T}$).

611. Ha a téglalap oldalainak hossza x, illetve y, kerülete $K = 2(x + y) =$ állandó, ebből $x + y = \frac{K}{2}$. A téglalap területe $T = xy = x\left(\frac{K}{2} - x\right)$, ennek a maximumát keressük.

Ábrázoljuk a területet x függvényében!

A zérushelyek $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{K}{2}$, a szélsőértékét (maximumát) a két zérushely számtani közepénél $\left(\frac{0 + \frac{K}{2}}{2} = \frac{K}{4}\right)$ veszi fel.



Tehát az adott K kerületű téglalapok közül az $x = y = \frac{K}{4}$ oldalhosszúságú négyzet területe a legnagyobb. $\left(T = \frac{K^2}{16}\right)$

Másik megoldás:

A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján $x > 0$ és $y > 0$ esetén $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Így a terület $T = xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \left(\frac{K}{4}\right)^2 = \frac{K^2}{16}$, ez maximális, ha $x = y = \frac{K}{4}$.

612. Jelölje d a két város távolságát kilométerben! Ekkor az odaút időtartama $\frac{d}{60}$ h, a visszaúté $\frac{d}{90}$ h. Az átlagsebesség az összesen megtett út és az összesen eltelt idő hányadosa, azaz: $\frac{2d}{\frac{d}{60} + \frac{d}{90}}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ezt d-vel egyszerűsítve éppen a két sebesség harmonikus közepe adódik: $\frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{90}}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ami kiszámítva 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

613. Mindkét oldal pozitív, vegyük az n-edik gyöküket, ez most ekvivalens átalakítás. A kérdés most már: $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{n+1}{2}$. A jobb oldali törtet bővítve n-nel: $\frac{(n+1)n}{2n}$, átalakítva: $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$, felismerhetjük, hogy a számláló: $1 + 2 + \ldots + n$.

A kérdés így $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+\ldots+n}{n}$ alakú. Ez viszont igaz, hiszen ez az 1-től n-ig terjedő számok mértani és számtani közepe közti egyenlőtlenség.
Tehát Zsoltinak igaza van.

2.8. Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

614.

$$\frac{x+12}{8} = \frac{9x+312-(5x+40)}{60}$$

$$\frac{x+12}{8} = \frac{4x+272}{60}$$

$$\frac{x+12}{2} = \frac{4x+272}{15}$$

$$15x+180 = 8x+544$$

$$7x = 364$$

$$x = 52$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy az 52 valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

615. a) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{3(x-3)}{x-3} = 3$$

$$3 = 3$$

azonosság, minden valós számra igaz. Tehát a megoldáshalmaz: $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.

b) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{3(x-3)}{x-3} = x$$

$$3 = x,$$

de éppen ez nem eleme az alaphalmaznak, tehát nincs megoldása az egyenletnek, $M = \emptyset$.

c) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{x(x-3)}{x-3} = 3$$

$$x = 3,$$

de éppen ez nem eleme az alaphalmaznak, tehát nincs megoldása az egyenletnek, $M = \emptyset$.

d) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{x(x-3)}{x-3} = x$$

$$x = x$$

azonosság, minden valós számra igaz. Tehát a megoldáshalmaz: $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.

616. A törtek nevezői szorzat alakban:

$x^2-4=(x-2)(x+2)$; $x^2-2x=x(x-2)$; $x^2+2x=x(x+2)$.

Közös nevezőnek célszerű az $x(x+2)(x-2)$ szorzatot választani. Ekkor az első törtet bővíteni kell x-szel, a másodikat $(x+2)$-vel, a harmadikat pedig $(x-2)$-vel:

$$\frac{x^2}{x(x+2)(x-2)}-\frac{x(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{4(x-2)}{x(x+2)(x-2)}.$$

A megadott alaphalmazon a közös nevező sohasem nulla, ezért mindkét oldalt szorozhatjuk vele (így a megoldáshalmaz nem változik):

$$x^2-x(x+2)=4(x-2)$$

$$6x=8$$

$$x=\frac{4}{3}.$$

A $\frac{4}{3}$ az alaphalmaznak eleme és az alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk. $M=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

617. $\frac{7-x}{x-5}=\frac{2}{x-5}+3 \qquad x\neq 5$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $(x-5)$-tel! $7-x=2+3(x-5)$

Innen: $x=5$. Mivel a tört miatt $x\neq 5$, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

618. $\frac{x^2+6x+9}{x+3}=x+2$ A tört miatt $x\neq -3$

$$\frac{(x+3)^2}{x+3}=x+2$$

$$x+3=x+2$$

az alaphalmaz minden elemére hamis kijelentés, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

619. A törtek miatt $x\neq\pm 2$.

Vegyük figyelembe, hogy $-\frac{2x-2}{x^2-4}=\frac{2x-2}{4-x^2}$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+2}{2(2-x)(2+x)}+\frac{2x-2}{(2-x)(2+x)}+\frac{6}{x+2}+\frac{1}{2(2-x)}=0.$$

Közös nevezőre hozva,

$$\frac{x+2+2(2x-2)+12(2-x)+x+2}{2(2-x)(2+x)}=0.$$

Egy tört akkor 0, ha számlálója 0, és a nevezője ugyanakkor nem 0.

Így $24-6x=0$, melyből $x=4$. A kapott érték kielégíti az eredeti egyenletet.

620. Legyen a két szám x és $x + 50$, ekkor a feltétel: $3(x + x + 50) = 210$, amiből $x = 10$. Tehát a két szám 10 és 60. (A feladat megoldható kétismeretlenes egyenletrendszerrel is, lásd 911. feladat)

621. Legyen ez az ötjegyű szám x. Mögéje írva az 1-est a $10x + 1$ számot állítjuk elő, eléje (a százezres helyiértékre) írva pedig a $100000 + x$-et.
A feltétel ekkor $10x + 1 = 3(100000 + x)$, amiből $x = 42857$.
Tehát a keresett ötjegyű szám a 42 857.

622. Jelölje az eredeti szám első három számjegyéből álló háromjegyű számot x. Ekkor az eredeti szám a $10x + 8$, a számjegycserével kapott pedig a $8000 + x$. A feltétel ekkor $10x + 8 + 3204 = 8000 + x$, amiből $x = 532$, vagyis az eredeti szám az 5328.

623. Legyen a két szám x és $2x + 3$. A különbségük kétféleképpen is képezhető.
Ha $2x + 3 - x = 9$, akkor $x = 6$ (és a másik szám 15); ha viszont $x - (2x + 3) = 9$, akkor $x = -12$ (és a másik szám -21).

624. Ha a kétjegyű szám első számjegye x, akkor a második számjegye $9 - x$.
Így az eredeti szám: $10x + 9 - x = 9x + 9$.
Ha az eredeti szám számjegyeit felcseréljük, akkor a felcserélt szám első számjegye $9 - x$, második számjegye x.
Így a felcserélt szám: $10(9 - x) + x = 90 - 9x$.
A feltétel szerint
$90 - 9x + 45 = 9x + 9$, ebből $x = 7$.
Tehát az eredeti szám 72, a felcserélt szám 27 $(72 - 27 = 45)$.

Másik megoldás:
Felírjuk azokat a kétjegyű számokat, melyek számjegyeinek összege 9.
Ezek 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81.
A felcserélt számokat tekintetbe véve csak a 72-re igaz az állítás.

Eredeti szám (E)	Felcserélt szám (F)	$E - F$
18	81	−63
27	72	−45
36	63	−27
45	54	−9
54	45	9
63	36	27
72	27	45
81	18	63

625. A munkával ketten együtt x óra alatt készülnek el. Egy óra alatt Antal egyedül a munka $\frac{1}{4}$-ét, Béla $\frac{1}{6}$-át, ketten együtt pedig az $\frac{1}{x}$-ed részét végzik el.

Tehát $\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, amiből $x = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Együtt tehát 2,4 óra alatt végzik el a munkát.

Ugyanis: 2,4 óra alatt Antal a munka $\frac{2{,}4}{4} = 0{,}6$ részét végzi el;

Béla a munka $\frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$ részét végzi el.

Ezek összege 1, tehát valóban elvégzik a teljes munkát.

Egyenlet nélkül is megoldható a feladat.

Antal és Béla együtt a munka $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ részét végzi el egy óra alatt. A teljes munka elvégzéséhez $\frac{12}{5}$ órára, azaz 2,4 órára van szükségük.

626. 1 perc alatt Xénia a medence $\frac{1}{80}$, Yvonne $\frac{1}{70}$, Zalán pedig $\frac{1}{60}$ részét tölti meg egyedül, vagyis együtt az $\frac{1}{80} + \frac{1}{70} + \frac{1}{60} = \frac{21+24+28}{1680} = \frac{73}{1680}$ részét töltik meg.

Ekkor a telitöltés $\frac{1680}{73} \approx 23$ percig tart.

627. Legyen Gyöngyi g éves, a szomszédasszony ekkor $g + 17$ éves.
A feltétel: $2g = g + 17 + 1$, amiből $g = 18$, vagyis Gyöngyi 18 éves, a szomszédasszony pedig $(18 + 17 =)$ 35 éves.

628. A testvérek most x, 11, $5x$ évesek. Ha a legidősebb kétszer ennyi idős lesz, akkor $10x$ éves lesz. Vagyis a feltétel: $x + 11 + 5x = 10x - 1$, amiből $x = 3$, tehát a testvérek most 3, 11, 15 évesek.

629. a) A találkozásig az első motoros t órát, a második $t-1$ órát volt úton, együttes megtett útjuk (mint fizikából jól ismert: $s = vt$) kiadja a két település távolságát: $50t + 60(t - 1) = 83$. Ebből $t = 1{,}3$ óra, vagyis az első motoros indulása után 1,3 órával (= 1 óra 18 perccel) találkoznak, Zamárditól $(50t =)$ 65 km távolságban. (A másik motoros 0,3 órát volt úton, ezalatt megtett $60(t - 1) = 18$ km-t, és valóban $65 + 18 = 83$.)

b) Legfeljebb Fonyódon, ha összefutnak, mert az első motoros már rég odaér, mire a második elindul…
(Ha az a) pont szerinti egyenletet felírjuk: $50t + 60(t - 1) = 33$, amiből most $t = 0{,}8\overline{45}$ óra adódik, de ekkor a második motoros negatív ideig lenne úton!)

630. Ha eredetileg x darab ékszer volt az üzletben, akkor igaz, hogy

$$x-\left(\frac{x}{2}+4+\frac{\frac{x}{2}-4}{2}+2+5\right)=0.$$

Ennek megoldása $x = 36$, azaz 36 db ékszer volt hétfőn reggel.

Ellenőrzés:
Hétfőn $18 + 4 = 22$ db-ot adott el, maradt 14 db. Kedden eladott $7 + 2 = 9$ db-ot, tehát 5 db maradt. Ezt szerdán eladva valóban elfogyott az összes ékszere.

631. A maradék 200 Ft-ja a 3. napi pénzének a fele (hiszen aznap elköltötte a pénzét). Tehát a 3. napi pénze 400 Ft volt, ez maradt a 2. nap végén.
A 2. nap $400 + 200 = 600$ Ft az 1. napi maradék pénzének a fele, azaz 1. nap 1200 Ft-ja maradt.
Az első nap az összes pénzének a felénél 200 Ft-tal kevesebbje maradt, így az összes pénzének a fele 1400 Ft, tehát eredetileg 2800 Ft-ja volt.

Másik megoldás:
Ha a turistának eredetileg x Ft-ja volt:

1. nap elköltött $\left(\frac{x}{2}+200\right)$ Ft-ot, maradt $\left(\frac{x}{2}-200\right)$ Ft-ja.

2. nap elköltött $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-200\right)+200=\left(\frac{x}{4}+100\right)$ Ft-ot,

maradt $\frac{x}{2}-200-\left(\frac{x}{4}+100\right)=\left(\frac{x}{4}-300\right)$ Ft-ja.

3. nap elköltött $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-300\right)+200=\left(\frac{x}{8}+50\right)$ Ft-ot.

Így nem maradt pénze. (A 2. nap megmaradt pénzét elköltötte 3. nap)

$\frac{x}{4}-300=\frac{x}{8}+50,$

ebből $x = 2800$.
Tehát a turistának eredetileg 2800 Ft-ja volt.

Ellenőrzés:

Első nap elköltött $\frac{2800}{2}+200=1600$ Ft-ot, maradt 1200 Ft-ja.

Második nap elköltött $\frac{1200}{2}+200=800$ Ft-ot, maradt 400 Ft-ja.

Harmadik nap elköltött $\frac{1}{2}\cdot 400+200=400$ Ft-ot, így nem maradt pénze.

632. Jelöljük x-szel a kétágyas, y-nal a háromágyas szobák számát! Ekkor az összes szoba száma $x + y = 24$, az összes ágy száma $2x + 3y = 64$, így x és y az

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 24 \\ 2x + 3y &= 64 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszer megoldása: $x = 8$, $y = 16$.

Tehát a szállodában 8 db kétágyas szoba van.

633. Ha x tanulója van az osztálynak, akkor:

$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 10 = x$, amiből $x = 24$ adódik, tehát 24 tanuló jár az osztályba.

Ellenőrzés:

$\frac{24}{4} = 6$ tanuló jár gyalog, $\frac{24}{3} = 8$ tanuló jár kerékpárral, tehát $24 - 6 - 8 = 10$ tanuló jár busszal. Ez megfelel a feladat szövegének.

634. Ha öt gépnek 60 percig tart 15 munkadarab elkészítése, akkor egy darabot 4 percig készítenek, míg ugyanez egy gépnek 5-ször annyi ideig, 20 percig tartana. Ha egy gép egy darabot 20 perc alatt munkál meg, akkor 40 darabot 800 perc alatt készít el, ugyanezt 8 gép nyolcadennyi ideig, 100 percig csinálja.

635. Ha x m hosszú a futópálya, akkor $x + \frac{3}{4}x$ az első táv, ennek a $\frac{2}{7}$-részét hozzáadva $\frac{9}{7}\left(x + \frac{3}{4}x\right)$ adódik, ehhez jön még a $\frac{2}{7}$ rész fele, így összesen $\frac{10}{7}\left(x + \frac{3}{4}x\right)$ a megtett út, ami $\frac{10}{7} \cdot \frac{7}{4}x = \frac{5}{2}x = 2500$ m, tehát 1000 m-es a pálya.

636. a) Ha az első szakaszon v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt, akkor $2v$ km utat tett meg, $\frac{1}{2}$ óra pihenés után 2,5 órán keresztül haladt $(v + 20)$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, így ekkor $2{,}5 \cdot (v + 20)$ km a megtett út, tehát: $2v + 2{,}5(v + 20) = 400$.

Ebből $v = \frac{700}{9}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}} = 77{,}\dot{7}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 77{,}8$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt az első útszakaszon a sebessége.

b) Ha az első szakaszon 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a sebessége, akkor a 2 óra alatt 200 km-t tesz meg, majd t óra pihenés után a maradék $3 - t$ órában 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val haladva $(3 - t) \cdot 120$ km a megtett út, tehát $200 + (3 - t) \cdot 120 = 400$ adódik, amiből $t = \frac{4}{3}$ óra a maximális pihenési idő.

637. A feladat szövegéből nyilvánvaló, hogy a könyvek fele, 60 könyv Antalé. A többieknek tehát együttesen 60 könyvük van. Bencéé ezeknek a fele, vagyis 30 könyv. A maradék 30-ból 16 Cilié, 14 pedig Dénesé.

638. A 20 forintos érmék száma x, az 50 forintosoké $24 - x$.
Így $20x + 50(24 - x) = 50x$.
Ebből $x = 15$, $24 - x = 9$ adódik.
A kiszámított $20 \cdot 15 + 50 \cdot 9 = 750$ forintból a diák éppen meg tudja vásárolni a könyvet.

639. A feladat módszeres próbálgatással megoldható. Figyelembe vesszük, hogy a perselyben 25 érme van 500 Ft értékben. Az 50 forintosok számát megadva azt vizsgáljuk, hogy hány 10 vagy 20 Ft-os lehet úgy, hogy éppen 500 forintot kapjunk. Nyilván, ha sok az 50 Ft-os, akkor az érme darabszáma úgy növelhető, hogy egy 20 Ft-os helyett 2 db 10 Ft-ost veszünk.

50 forintos	10 forintos	20 forintos	darabszám	összeg
10	0	0	10	500
9	5	0	14	500
8	10	0	18	500
7	15	0	22	500
6	18	1	25	500

Legfeljebb 6 db 50 Ft-os lehetett a perselyben.

Megjegyzés:
Megoldható kétismeretlenes egyenlettel is: a 25 darab pénzérméből legyen
x darab 50 Ft-os pénzérménk,
y darab 20 Ft-os pénzérme,
$25 - x - y$ darab 10 Ft-os pénzérme.
Tehát együtt $50x + 20y + 10(25 - x - y) = 500$. 10-zel való osztás és a kijelölt műveletek elvégzése után: $4x + y = 25$ adódik. Minthogy x és y pozitív egész, x legfeljebb 6 lehet.
Ezek szerint legfeljebb 6 darab 50 Ft-os pénzérme lehetett a perselyben.
Ekkor a 20 Ft-osok száma: 1, a 10 Ft-osok száma 18.
A perselyben lévő pénz értéke: $6 \cdot 50 + 20 + 18 \cdot 10 = 500$.

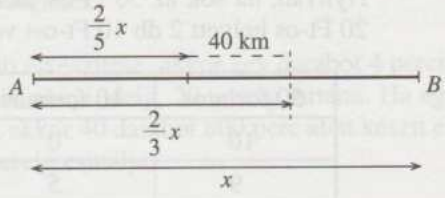
640. A 11. A osztályba x tanuló jár. Jeles a dolgozata $0{,}25x$ tanulónak.
$7(0{,}25x - 4) = 0{,}75x + 4$, ebből $x = 32$ az osztály tanulóinak száma.

Ellenőrzés:
A jeles tanulók száma 8, a nem jeleseké 24, ha a jelesek száma csak 4, akkor a nem jelesek száma $32 - 4 = 28$ lenne, ami valóban 7-szerese a jelesek számának.

Másik megoldás:
Ha a jeles dolgozatot író tanulók számát jelöljük y-szel, akkor az osztály létszáma $4y$. Ezzel a jelöléssel egyszerűbb a számolás.
$7(y - 4) = 3y + 4$; innen $y = 8$, az osztály létszáma $4y = 32$.

641. Az AB út hossza x. Az első útszakasz hossza $\frac{2}{5}x$, a második megállásig összesen megtett út $\frac{2}{3}x$.

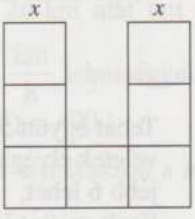
$\frac{2}{5}x + 40 = \frac{2}{3}x$, ebből $x = 150$.



Tehát az AB távolság 150 km.
A megtett út első szakasza: $\frac{2}{5} \cdot 150$ km,
azaz 60 km. Ha még megtesz 40 km-t,
a megtett út 100 km, ami a 150 km-es teljes út kétharmada.

642. Az automatából x db 50 Ft-os és $(12 - x)$ db 100 Ft-os esik ki.
$50x + (12 - x) \cdot 100 = 1000$,
ebből $x = 4$.
Tehát 4 db 50 Ft-os és 8 db 100 Ft-os esik ki az automatából.

643. Ha egy „kis" négyzet oldala x m, akkor a park területe $7x^2$ m², kerülete $16x$ hosszúságegység.



A feltétel szerint: $7x^2 = 16x \quad (x \neq 0)$

$7x = 16$

$x = \frac{16}{7}$ m.

A park területe: $7 \cdot \left(\frac{16}{7}\right)^2 = 7 \cdot \frac{256}{49} = \frac{256}{7}$ m².

A park kerülete: $16 \cdot \frac{16}{7} = \frac{256}{7}$ m. Tehát a kerítés $\frac{256}{7}$ m hosszú.

644. x db busz, $5x$ db autó és $(50 - 6x)$ db motorkerékpár.
A kerekek száma: $6x + 4 \cdot 5x + 2(50 - 6x) = 184$.
Ebből $x = 6$. Tehát 6 busz, 30 autó és 14 motorkerékpár van a parkolóban.

645. $64 = 5b + 4$, tehát $b = 12$, azaz 12-es számrendszerről van szó.
$6 \cdot 6 = 36 = 3 \cdot 12 + 0$, ezért $6 \cdot 6 = 30_{12}$.

646. $0{,}8 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 48 \frac{\text{km}}{\text{perc}}$; $1{,}2 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{perc}}$
A kilövés után x perccel indul be a második lépcső:
$48x + 72(25 - x) = 1500$, amiből $x = 12{,}5$.
Az első lépcső 12,5 percig tart. Ennyi idő alatt $48 \cdot 12{,}5 = 600$ km-t tesz meg a rakéta.
A második lépcsőt 600 km út megtétele után kell beindítani.

647. Az egyik államkötvény névértéke x eFt, hozama 10%, a másik államkötvény névértéke $(270 - x)$ eFt, hozama 9%. 300 Ft = 0,3 eFt

$$x \cdot 0{,}09 + (270 - x) \cdot 0{,}1 = x \cdot 0{,}1 + (270 - x) \cdot 0{,}09 - 0{,}3$$
$$-0{,}01x + 27 = 0{,}01x + 24$$
$$3 = 0{,}02x$$
$$x = 150$$

Eredetileg tehát 150 eFt névértékű, 10% hozamú, és 120 eFt névértékű, 9% hozamú államkötvényünk volt.
Az eredeti hozam összesen 25,8 eFt, a felcserélt kamatokkal pedig 25,5 eFt lenne, ami valóban 300 Ft-tal kevesebb az eredetinél.

648. a) $\frac{100}{500} = 0{,}2$ (gramm)

b) Igen, lehet.
100 darab 0,19 gramm tömegű kő együttes tömege 19 gramm. Legyen még pl. 400 darab, összesen 81 gramm tömegű (egyébként tetszőleges tömegeloszlású) kő az 500 között.

c) Igen, lehet.
100 darab 0,23 gramm tömegű kő együttes tömege 23 gramm. Legyen még pl. 400 darab, összesen 77 gramm tömegű (egyébként tetszőleges tömegeloszlású) kő az 500 között.

d) Az x darab, egyenként 0,24 grammos kő együttes tömege kisebb 100 grammnál: $0{,}24x < 100$, amiből $x \leq 416$ (mert x egész szám). Legfeljebb 416 darab 0,24 grammos, vagy annál nagyobb tömegű kő lehet az 500 között.

e) x darab legalább 0,24 grammos kő együttes tömege $m_1 \geq 0{,}24x$.
$500 - x$ darab legalább 0,19 grammos kő együttes tömege $m_2 \geq 0{,}19(500 - x)$.

$$0{,}24x + 0{,}19(500 - x) \leq m_1 + m_2 = 100$$
$$0{,}24x + 0{,}19(500 - x) \leq 100$$
$$0{,}05x + 95 \leq 100$$
$$x \leq 100$$

Ez azt jelenti, hogy a legalább 0,24 gramm tömegű kövek száma semmiképpen nem lehet több 100-nál (100-nál kevesebb lehet: pl. 20 db 0,26 grammos, 60 db 0,25 grammos és 420 db 0,19 grammos kő együttes tömege 100 gramm, a kövek együttes száma pedig 500).

649. Ha ebben a hónapban x lemezt adtak el, akkor az előző hónapban a felét, és ha a folytatásban marad ez a tendencia, akkor két hónap múlva már 10 000 hiján elérik a 100 000 példányt, tehát az alábbi egyenlet írható fel a szöveg alapján:
$\frac{x}{2} + x + 2x + 4x + 10\,000 = 100\,000$. Ebből $7{,}5x = 90\,000$, vagyis $x = 12\,000$. Tehát ebben a hónapban 12 000 CD-t adtak el. Ellenőrizhetjük: az előző hónapban a feltétel szerint 6000 CD-t adtak el, a következőkben pedig 24 000 és 48 000 eladott példány lenne, ha a növekedési arány nem változna.
Ez összesen (6000 + 12 000 + 24 000 + 48 000 =) 90 000 CD, tehát tényleg már csak 10 000 hiányozna a bűvös 100 000-hez.

650. 1 perc alatt az első csap $3x$, a második csap $4x$ vízmennyiséget juttat a medencébe. Mivel 40 perc alatt töltik meg együtt a medencét, ezért a medence térfogata:
$V = 40 \cdot 3x + 40 \cdot 4x = 280x$.
Ugyanezt a medencét az első csap megnyitásától számított y perc alatt töltik fel:
$V = y \cdot 3x + (y - 25)4x$.
Ezekből: $280x = 7xy - 100x$.
Innen $x \neq 0$ figyelembe vételével $y = \frac{380}{7}$ perc = 54 perc 17 másodperc adódik, tehát a medencét 6 óra 54 perc 17 másodpercre töltik meg.

651. Az egyik befolyó 4 óra, míg a második 10 óra alatt tölti meg a medencét egyedül. A kifolyó éppen szinten tudja tartani, tehát akkora a teljesítménye, mint a kettőnek együtt. Ez azt jelenti, hogy egy óra alatt befolyik $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$ rész, és akkor ennyi is kell, hogy kifolyjon maximális kapacitás mellett. Ezek szerint $\frac{1}{\frac{7}{20}} = \frac{20}{7}$ óra alatt ereszti le a kifolyó a teljes medencét. Ez körülbelül 2 óra 51 perc 26 másodperc, tehát ennyi idő alatt folyik ki az egész víz.

652. Tegyük fel, hogy n ember társult. A 8240-hez mind az n ember $40n$ koronát ad hozzá. Ehhez annyi százalékot nyernek, ahányan vannak. Ekkor ez a haszon: $\frac{n(8240 + 40n^2)}{100}$. Ezt osztják el, mindenki $10n$ koronát kap, és marad 224 korona.
Így az egyenlet, amelynek pozitív egész megoldásait keressük:
$(8240 + 40n^2)\frac{n}{100} = 10n^2 + 224$.

Ez harmadfokú egyenlet n-re nézve: $824n + 4n^3 = 100n^2 + 2240$, néggyel osztva és rendezve: $n^3 - 25n^2 + 206n - 560 = 0$. Ennek egész megoldása csak olyan lehet, amelyik 560-nak osztója, tehát 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, ..., 560 jön szóba. Ebből az első négy nem jó, de az $n = 7$ gyök, hiszen $7^3 - 25 \cdot 7^2 + 206 \cdot 7 - 560 = 343 - 1225 + 1442 - 560 = 0$. Ekkor, mint tudjuk az $(n - 7)$ tényező mint gyöktényező kiemelhető, s így az egyenlet bal oldala $(n - 7)(n^2 - 18n + 80)$ alakú. Ekkor még azt kell nézni, hogy a második tényező mikor lehet 0. Ez már másodfokú egyenlet, megoldásai az $(n - 8)(n - 10)$ felbontás miatt a 8 és a 10. Tehát lehettek a társult kereskedők heten, nyolcan vagy tizen. Ellenőrizhetjük, hogy mindhárom megoldás lehetséges. (Nem vizsgán lehet természetesen valamilyen egyenletmegoldó programmal is dolgozni grafikus kalkulátor vagy számítógép segítségével.)

653. Legyen Piszkos Fred x éves. Ekkor a hajó $x - 24$ méter hosszú, Fülig Jimmy $2(x - 24)$ kiló, naponta $2(x - 24) + 120$ km utat tesznek meg.

A hajón $\frac{2(x-24)+120}{20}$ matróz szolgál, a kabinok száma $\frac{2(x-24)+120}{20} - 2$, amivel felírva a kapitány $8\left(\frac{2(x-24)+120}{20} - 2\right)$ éves.

Ezt egyenlővé téve x-szel, az egyenletet megoldva adódik, hogy 64 éves a kapitány.

654. a) A bal oldalon álló szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább egy tényezője nulla.

Tehát $x = 3$ vagy $x = -\frac{5}{2}$ vagy $x = \frac{1}{14}$.

Az egyenlet megoldáshalmaza: $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{14}; 3\right\}$

b) A tört számlálója pozitív, ezért a tört értéke pontosan akkor negatív, ha a nevezője negatív: $x < 0$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát: $]-\infty; 0[$.

c) A tört számlálója pozitív (hiszen $x^2 + 1$ értéke mindig legalább 1), ezért a tört értéke pontosan akkor negatív, ha a nevezője negatív: $8 - 11x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{8}{11}$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát: $\left]\frac{8}{11}; +\infty\right[$.

655. a) Először a bal oldali törtet „bővítsük" -1-gyel:

$$\frac{7 + 5x}{12} > -29$$

$$7 + 5x > -348$$

$$x > -71.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát $M =]-71; +\infty[$.

b) Legyen az alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ezen a halmazon ekvivalens átalakításokat végzünk:

$$\frac{1}{x} \le 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \le 0.$$

A számláló és a nevező előjelvizsgálatából adódik a megoldáshalmaz:

$$M =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

656. $M = \left]-\infty; -\frac{8}{3}\right[\cup]3; +\infty[$ (Lásd 655. b) feladat megoldását!)

657. $M = \left]-3; \frac{8}{3}\right[$

658. A megadott alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végzünk:

$$\frac{3x+8}{x-3} > 3 \Leftrightarrow \frac{3x+8}{x-3} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{3x+8}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{17}{x-3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

Tehát $M =]3; +\infty[$.

659. a) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{3(x-3)}{x-3} < 3$$

$$3 < 3,$$

ami sosem teljesül, tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza üres halmaz.

b) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{3(x-3)}{x-3} \le x$$

$$3 \le x,$$

de a 3 nem eleme az alaphalmaznak, tehát a megoldáshalmaz: $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 3\}$.

c) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{x(x-3)}{x-3} > 3$$

$$x > 3,$$

tehát a megoldáshalmaz: $]3; +\infty[$. (Vagyis ugyanaz, mint a b) esetben.)

d) A lehető legbővebb alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. A számlálót szorzattá alakítva, a törtet egyszerűsítve:

$$\frac{x(x-3)}{x-3} \geq x$$

$$x \geq x.$$

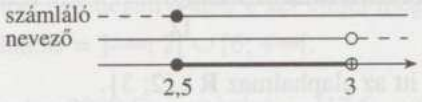
Ez az alaphalmaz minden elemére igaz, tehát a megoldáshalmaz: $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.

660. Mindkét esetben a jobb oldali konstanst átvisszük a bal oldalra, közös nevezőre hozunk, rendezünk, majd a számláló és a nevező előjel-vizsgálatával eldöntjük a tört előjelét.

a) $\frac{2x-4}{3-x} - 2 \geq 0$

$\frac{2x-4-2(3-x)}{3-x} \geq 0$

$\frac{4x-10}{3-x} \geq 0$

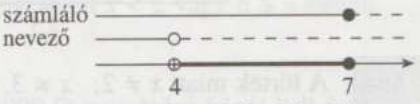


A tört nemnegatív, ahol a két előjel megegyezik, tehát $2{,}5 \leq x < 3$ esetén.

b) $\frac{3x-6}{4-x} + 5 \geq 0$

$\frac{3x-6+5(4-x)}{4-x} \geq 0$

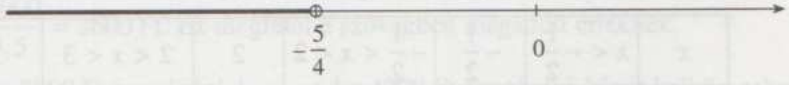
$\frac{-2x+14}{4-x} \geq 0$



A tört nemnegatív, ahol a két előjel megegyezik, tehát $x < 4$ vagy $7 \leq x$ esetén.

661. $x^2 - 4x + 4 + 2x + 10 < 9 - 6x + x^2$,

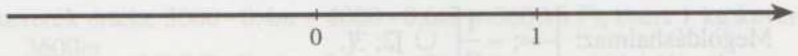
ebből $x < -\frac{5}{4}$, tehát a megoldáshalmaz: $]-\infty; -\frac{5}{4}[$.



662. $9x^2 - 6x + 1 - 6x < 4 - 12x + 9x^2$,

ebből $1 < 4$.

Ekvivalens lépések útján igaz állításhoz jutottunk, tehát az eredeti egyenlőtlenség minden valós számra teljesül.



663. A tört miatt $x \neq 2{,}5$, tehát itt az alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{2{,}5\}$.

$$\frac{3-5x}{2x-5}+3<0$$

$$\frac{3-5x+3(2x-5)}{2x-5}<0$$

$$\frac{x-12}{2x-5}<0$$

Vizsgáljuk a számláló és a nevező előjelét!

x	$x<2{,}5$	$2{,}5$	$2{,}5<x<12$	12	$x>12$
$x-12$	$\ominus$	$-9{,}5$	$\ominus$	0	$\oplus$
$2x-5$	$\ominus$	0	$\oplus$	19	$\oplus$
tört	$\oplus$	/	$\ominus$	0	$\oplus$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: ha $2{,}5 < x < 12$ teljesül, vagyis $M =]2{,}5;\ 12[$.



664. A törtek miatt $x \neq 2$; $x \neq 3$, tehát itt az alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{2;\ 3\}$.

$$\frac{7}{x-3}-\frac{5}{x-2}<0$$

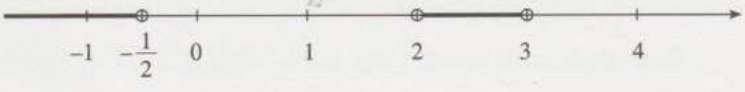
$$\frac{7(x-2)-5(x-3)}{(x-3)(x-2)}<0$$

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}<0$$

Vizsgáljuk a számláló és nevező tényezőinek előjelét!

x	$x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<2$	2	$2<x<3$	3	$x>3$
$2x+1$	$\ominus$	0	$\oplus$	5	$\oplus$	7	$\oplus$
$x-3$	$\ominus$	$-3{,}5$	$\ominus$	-1	$\ominus$	0	$\oplus$
$x-2$	$\ominus$	$-2{,}5$	$\ominus$	0	$\oplus$	1	$\oplus$
tört	$\ominus$	0	$\oplus$	/	$\ominus$	/	$\oplus$

Megoldáshalmaz: $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup\ ]2;\ 3[$.



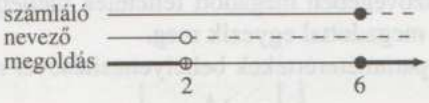
665. Az alaphalmaz $\mathbf{R} \setminus \{2\}$. Felbontjuk a zárójeleket, közös nevezőre hozunk, rendezünk, előjel-vizsgálatot végzünk.

$$\frac{x^3 - 10x^2 + 20x - 4}{2 - x} \geq -x^2 + 8x - 5$$

$$\frac{x^3 - 10x^2 + 20x - 4}{2 - x} + x^2 - 8x + 5 \geq 0$$

$$\frac{x^3 - 10x^2 + 20x - 4 + (x^2 - 8x + 5)(2 - x)}{2 - x} \geq 0$$

$$\frac{-x + 6}{2 - x} \geq 0$$



A tört nemnegatív, ahol a két előjel megegyezik, tehát $x < 2$ vagy $6 \leq x$ esetén.

Tehát $M =]-\infty; 2[\cup [6; +\infty[$.

666. a) x kg 3000 Ft egységárú és $(17{,}5 - x)$ kg 4000 Ft egységárú kávét kell összekeverni.

$$3000x + 4000(17{,}5 - x) = 3600 \cdot 17{,}5$$

$$70 - x = 63$$

$$x = 7$$

Tehát 7 kg olcsóbb és 10,5 kg drágább fajta kávét kell összekeverni.

Ellenőrzés:

A keverék értéke $3000 \cdot 7 + 4000 \cdot 10{,}5 = 63\,000$ Ft, ezért 1 kg keverék értéke $\frac{63\,000}{17{,}5} = 3600$ Ft. Ez megfelel a szövegben megadott értéknek.

b) x kg 3000 Ft egységárú és $m - x$ kg 4000 Ft egységárú kávét kell összekeverni.

$$3000x + 4000(m - x) = 3600m$$

$$40m - 10x = 36m$$

$$x = 0{,}4m$$

Tehát $0{,}4m$ kg olcsóbb és $0{,}6m$ kg drágább fajta kávét kell összekeverni.

Ellenőrzés:

A keverék értéke $3000 \cdot 0{,}4m + 4000 \cdot 0{,}6m = 3600m$ Ft, ezért 1 kg keverék értéke $\frac{3600m}{m} = 3600$ Ft. Ez megfelel a szövegben megadott értéknek.

c) x kg p Ft egységárú és $m-x$ kg q Ft egységárú kávét kell összekeverni.

$px+q(m-x)=rm$

$qm-(q-p)x=rm$

$(q-r)m=(q-p)x$

Mivel $q-p\neq 0$, ezért oszthatunk vele: $x=\frac{q-r}{q-p}\cdot m$.

Tehát $\frac{q-r}{q-p}\cdot m$ kg olcsóbb és $\frac{r-p}{q-p}\cdot m$ kg drágább fajta kávét kell összekeverni.

Ellenőrzés:

A keverék értéke $p\cdot\frac{q-r}{q-p}\cdot m+q\cdot\frac{r-p}{q-p}\cdot m=\frac{(q-p)r}{q-p}\cdot m=rm$ Ft, ezért 1 kg keverék értéke $\frac{rm}{m}=r$ Ft. Ez megfelel a szövegben megadott értéknek.

A feladat szövegében megadott feltételek mellett mindig van megoldás és ez a fentiekben megadottal egyezik meg.

A konkrét paraméterértékek behelyettesítésével az a) részben kapott eredményt kapjuk.

667. a) $px-p=3x+p-6$

$(p-3)x=2p-6$

$(p-3)x=2(p-3)$

Ha $p=3$, akkor egyenletünk $0=0$, azonosság, $M=\mathbf{R}$.

Ha $p\neq 3$, oszthatunk $p-3$-mal, és eredményül $x=2$ adódik.

b) $px+p=p+2x+1$

$(p-2)x=1$

Ha $p=2$, akkor azt kapjuk, hogy $0\cdot x=1$, ami nem igaz, tehát $M=\emptyset$.

Ha $p\neq 2$, oszthatunk $p-2$-vel, és eredményül $x=\frac{1}{p-2}$ adódik, most $M=\left\{\frac{1}{p-2}\right\}$.

668. A tört miatt: $p\neq 0$. Minden más esetben p^2 pozitív, megszorozzuk vele mindkét oldalt, majd rendezünk.

$$p^2x-p^2\leq 4p+4x+4$$

$$(p^2-4)x\leq p^2+4p+4$$

$$(p+2)(p-2)x\leq (p+2)^2$$

Itt három lehetőség van.

Ha $p=-2$, akkor a $0\leq 0$ állítást kapjuk, ami mindig igaz, tehát $\forall x\in\mathbf{R}$ megoldás.

Ha $p=2$, akkor a $0\leq 16$ állítást kapjuk, ami szintén mindig igaz, tehát $\forall x\in\mathbf{R}$ megoldás.

Ha pedig $p\neq\pm 2$, akkor $(p+2)(p-2)$-vel osztunk.

Ekkor

$p < -2$ vagy $2 < p$ esetén pozitív számmal osztunk, így eredményünk $x \le \frac{p+2}{p-2}$;

$-2 < p < 2$ esetén negatív számmal osztunk, így eredményünk $x \ge \frac{p+2}{p-2}$.

Összefoglalva:

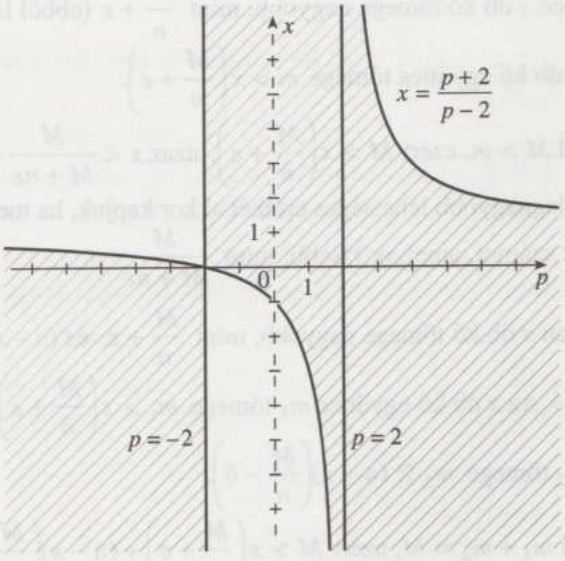
$p < -2$: $M = \left]-\infty;\ \frac{p+2}{p-2}\right]$ $\quad$ $0 < p < 2$: $M = \left[\frac{p+2}{p-2};\ +\infty\right[$

$p = -2$: $M = \mathbf{R}$ $\quad$ $p = 2$: $M = \mathbf{R}$

$-2 < p < 0$: $M = \left[\frac{p+2}{p-2};\ +\infty\right[$ $\quad$ $p > 2$: $M = \left]-\infty;\ \frac{p+2}{p-2}\right]$

$p = 0$: $M = \varnothing$

Ábrázolva pedig:

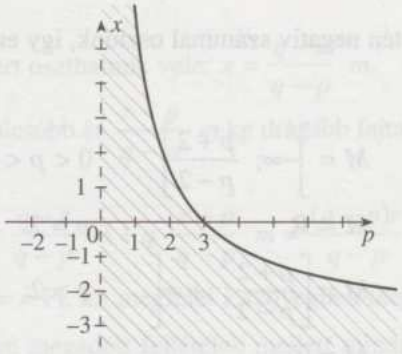


669. Mivel $p > 0$, a nevező pozitív, szorzunk vele, majd rendezünk:

$$(p+2)(x+3) \le 2x+15$$
$$px+2x+6 \le 2x+15$$
$$px \le -3p+9$$
$$x \le \frac{-3p+9}{p}.$$

A feladat értelmében a p pozitív paraméter, tehát a megoldás: $x \leq \frac{-3p+9}{p}$.

Ábrázolva pedig:



670. a) Legyen x db kő tömege nagyobb, mint $\frac{M}{n}+\varepsilon$ (ebből látható, hogy $x < n$).

Az x db kő együttes tömege $m > x\left(\frac{M}{n}+\varepsilon\right)$.

Mivel $M > m$, ezért $M > x\left(\frac{M}{n}+\varepsilon\right)$, azaz $x < \frac{M}{M+n\varepsilon}\cdot n$.

Az x legnagyobb lehetséges értékét akkor kapjuk, ha megadjuk azt a legnagyobb egész számot, amelyik kisebb, mint $\frac{M}{M+n\varepsilon}\cdot n$.

b) Legyen x db kő tömege nagyobb, mint $\frac{M}{n}+\varepsilon$, és $(n-x)$ db kő tömege legalább $\frac{M}{n}-\delta$. Az x db kő együttes m_1 tömege $m_1 > x\left(\frac{M}{n}+\varepsilon\right)$; az $(n-x)$ db kő együttes m_2 tömege $m_2 \geq (n-x)\left(\frac{M}{n}-\delta\right)$.

Mivel $m_1 + m_2 = M$, ezért $M > x\left(\frac{M}{n}+\varepsilon\right)+(n-x)\left(\frac{M}{n}-\delta\right)$.

Az egyenlőtlenséget megoldva: $x < \frac{\delta}{\delta+\varepsilon}\cdot n$.

Az x legnagyobb lehetséges értékét akkor kapjuk, ha megadjuk azt a legnagyobb egész számot, amelyik kisebb, mint $\frac{\delta}{\delta+\varepsilon}\cdot n$.

c) A k db kő együttes m tömegére $m > k\left(\frac{M}{n} + \varepsilon\right)$.

Mivel $M > m$, ezért $M > k\left(\frac{M}{n} + \varepsilon\right)$. Ezt n-re megoldva: $n > \frac{M}{M - k\varepsilon} \cdot k$ (világos, hogy $\varepsilon < \frac{M}{k}$, különben a k db kő együttes tömege M-nél nagyobb lenne).

Az n legkisebb megfelelő értéke az a legkisebb egész szám, amelyik nagyobb, mint $\frac{M}{M - k\varepsilon} \cdot k$.

2.9. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

671. a) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, a nevezőt az $x^2 - x - 20 = 0$ egyenlet megoldása után a gyöktényezős alak segítségével szorzattá alakíthatjuk: $(x-5)(x+4)$.

A tört tehát így is írható: $\frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+4)} = \frac{x-5}{x+4}$; $x \notin \{-4;\ 5\}$.

b) Az a) részben leírtak alapján az egyenlet így is írható: $\frac{k-5}{k+4} = \frac{k+4}{k-5}$, ahol $k \notin \{-4;\ 5\}$.

$$(k-5)^2 = (k+4)^2$$
$$k^2 - 10k + 25 = k^2 + 8k + 16$$
$$9 = 18k$$
$$k = \frac{1}{2}.$$

Mivel $0{,}5 \notin \{-4;\ 5\}$, ezért ez az egyetlen megoldása az eredeti egyenletnek: $M = \{0{,}5\}$.

672. $15(x^2 - 6x + 8) - 8(x^2 - 8x + 15) = 0$

$$7x^2 - 26x = 0$$
$$x(7x - 26) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0:

$x = 0 \vee 7x - 26 = 0$

$M = \left\{0;\ \frac{26}{7}\right\}$.

673. a) $-4x^2 + 4x - 1 = x^2 + 12x - 22$

$$5x^2 + 8x - 21 = 0$$

$M = \left\{-3;\ \frac{7}{5}\right\}$.

b) $9x^2 - 12x + 4 - (x^2 - 2x + 1) = 45 - 20x$

$$8x^2 + 10x - 42 = 0$$
$$4x^2 + 5x - 21 = 0$$

$M = \left\{-3;\ \frac{7}{4}\right\}$.

c) $-2(x^2+4x+4)+3(x^2-6x+9)=5(x^2-2x+1)+30$

$x^2-26x+19=5x^2-10x+35$

$0=4x^2+16x+16$

$0=(x+2)^2$

$x=-2$

$M=\{-2\}$.

674. $5=x^2-2x-3$

$0=x^2-2x-8$

$M=\{-2;\ 4\}$

675. $\dfrac{2(x+2)+17x}{x(x+2)}=24$

$19x+4=24x^2+48x$

$24x^2+29x-4=0$ $\qquad M=\left\{-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{1}{8}\right\}$

676. a) Vezessünk be új ismeretlent! $a:=x^2+2{,}5x$.

Ezzel az eredeti egyenlet így írható: $a^2-5a-6=0$, amiből $a=6 \vee a=-1$.

Ezért: $x^2+2{,}5x=6 \vee x^2+2{,}5x=-1$

$x^2+2{,}5x-6=0 \vee x^2+2{,}5x+1=0$

$x=-4 \vee x=1{,}5 \vee x=-2 \vee x=-0{,}5$

$M=\{-4;\ -2;\ -0{,}5;\ 1{,}5\}$.

b) Vezessünk be új ismeretlent! $a:=x^2+x$.

Ezzel az eredeti egyenlet így írható: $(a+1)(a-8)=52$, amiből $a=-5 \vee a=12$.

Ezért: $x^2+x=-5 \vee x^2+x=12$

$x^2+x+5=0 \vee x^2+x-12=0$

$x\in\{\ \} \vee x=-4 \vee x=3$

$M=\{-4;\ 3\}$.

677. $\dfrac{4x}{4(x+3)(x-3)}+\dfrac{4(x-3)^2}{4(x+3)(x-3)}=\dfrac{5(x+3)}{4(x+3)(x-3)}$

$4x+4(x^2-6x+9)=5x+15$

$4x^2-25x+21=0$

$M=\left\{1;\ \dfrac{21}{4}\right\}$.

678. $\dfrac{10x}{(4-x)^2}+\dfrac{3x(4-x)}{(4-x)^2}=-1 \quad \Leftrightarrow \quad 22x-3x^2=-x^2+8x-16$

$0=x^2-7x-8$

$M=\{-1;\,8\}$

679. $\dfrac{x^2-9x+20}{x-5}=\dfrac{x}{x^2-4x}$

Észre kell vennünk, hogy az egyenletnek nincs értelme, ha $x=0$, $x=4$, $x=5$.
A lehetséges szorzattá alakítást elvégezzük, hogy majd egyszerűsíthessünk.
$\dfrac{(x-4)(x-5)}{x-5}=\dfrac{x}{x(x-4)}$, egyszerűsítés után: $x-4=\dfrac{1}{x-4}$
$(x-4)^2=1$.
$x-4=1$, illetve $x-4=-1$, tehát $x=5$ vagy $x=3$. Az eredeti feladat megoldása csak az $x=3$ (lásd a kikötéseket).

680. $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-1}=2 \qquad x\neq 1$

$x^2-x-6=2x-2$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$x=-1$, $x=4$. Ezek ki is elégítik az eredeti egyenletet, amit behelyettesítéssel ellenőrzünk.

681. A törtek miatt $x\neq\dfrac{1}{2}$; $x\neq-\dfrac{1}{3}$

$(5-x)(3x+1)=(2x-1)(15-4x)$

A kijelölt műveletek elvégzése, összevonás és egyszerűsítés után:

$x^2-4x+4=0$, azaz $(x-2)^2=0$, melynek megoldása $x=2$.

Az eredeti egyenlet valós megoldása $x=2$.

682. A törtek miatt $x\neq\pm 2$

$-\dfrac{1}{x-2}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3(x-2)(x+2)}$

Az egyenlet mindkét oldalát $3(x-2)(x+2)$-vel szorozva

$-3(x+2)-3(x^2-4)=3(x+2)-(6-x)$.

Ebből $3x^2+7x-6=0$, melynek gyökei $x_1=\dfrac{2}{3}$, $x_2=-3$ valós számok az egyenlet megoldásai.

683. $x^2 =: y$, így az eredeti egyenlet $4y^2 - 5y + 1 = 0$ alakra írható, melynek megoldásai $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$, ezt visszahelyettesítve:

$x^2 = 1 \Rightarrow x_{1;2} = \pm 1$, $\quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{3;4} = \pm\frac{1}{2}$

$M = \left\{-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

684. $y := x^2$ helyettesítéssel a $3y^2 - 7y + 2 = 0$ egyenlet gyökei 2 és $\frac{1}{3}$. Az egyenlet negatív gyökei tehát $-\sqrt{2} \approx -1{,}414$ és $-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}577$.

685. $-3x^2 + 8x - 4 = 0 \qquad x \in \mathbf{R}$

$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$

Tudjuk, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletben $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, (Viète-formula). Ekkor $A = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = 2$.

Más módon is érhetünk el eredményt. Kiszámítjuk az egyenlet gyökeit: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$, majd ezeket a kérdezett kifejezésbe helyettesítjük.

686. a) A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja szerint egy ilyen egyenlet pl. az $\left(x - \frac{4}{5}\right)(x + 5) = 0$, ami írható a következő alakban is: $x^2 + \frac{21}{5}x - 4 = 0$.

b) $\left.\begin{array}{l} x_1 x_2 = 2 \\ \frac{x_1}{x_2} = 98 \end{array}\right\}$

Összeszorozzuk a két egyenlet megfelelő oldalát. Ebből kapjuk, hogy $x_1^2 = 196$, tehát az egyenlet két gyöke a 14 és az $\frac{1}{7}$, vagy a -14 és a $-\frac{1}{7}$.

Az első gyökpárral egy megfelelő egyenlet: $x^2 - \frac{99}{7}x + 2 = 0$.

A második gyökpárral egy megfelelő egyenlet: $x^2 + \frac{99}{7}x + 2 = 0$.

687. Az egyenlet gyökeit megkapjuk, ha a másodfokú kifejezést szorzattá bontjuk:
$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = 0$.
A gyökök tehát: $x_1 = 3$ és $x_2 = 2$.
A keresett másodfokú egyenlet: $(x-6)(x-4) = x^2 - 10x + 24 = 0$.
A $c \cdot (x^2 - 10x + 24) = 0$ egyenlet, ahol $c \neq 0$, $c \in \mathbf{R}$, az összes megoldást megadja.

688. Legyen az egyenlet két gyöke: x_1 és x_2.
A feltételeinket a következő két egyenlet írja le:

(1) $x_2 = x_1 + 3$,

(2) $x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2)$.

(1)-et (2)-be beírva: $x_1(x_1 + 3) = 2(x_1 + x_1 + 3) = 4x_1 + 6$, eszerint $x_1^2 + 3x_1 = 4x_1 + 6$, azaz $x_1^2 - x_1 - 6 = 0$, amiből $x_1 = 3$ vagy $x_1 = -2$, és ezzel $x_2 = 6$ vagy $x_2 = 1$. Így egy keresett másodfokú egyenlet pl. $(x-3)(x-6) = x^2 - 9x + 18 = 0$, vagy $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 = 0$. Ezek bármilyen, 0-tól különböző számszorosa is megfelel.

689. Behelyettesítve a 2-t az egyenletbe, kapjuk: $-2p^2 + 8p - 6 = 0$. Ennek gyökei $p_1 = 1$ és $p_2 = 3$. Az első esetben az eredeti egyenlet $2x^2 - x - 6 = 0$, amelynek gyökei (2 és) $-1{,}5$; a második esetben az eredeti egyenlet $6x^2 - 9x - 6 = 0$, ennek gyökei (2 és) $-0{,}5$.

Másik megoldás:

A Viète-formulák szerint ekkor $2 + x_2 = \frac{p}{2}$ és $2x_2 = -\frac{3}{p}$.

Kifejezve a második összefüggésből x_2-t és beírva az elsőbe, kapjuk: $2 - \frac{1{,}5}{p} = \frac{p}{2}$, azaz $\frac{p^2}{2} - 2p + 1{,}5 = 0$. Ebből $p_1 = 1$ és $p_2 = 3$, és $x_2 = -\frac{1{,}5}{p} = -1{,}5$ vagy $-0{,}5$.

690. Az egyenlet egyik gyöke 3, az $x = 3$-at behelyettesítve teljesül az egyenlőség.

a) $7 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - q = 0$, amiből $q = 54$.
Ekkor az egyenlet $7x^2 - 3x - 54 = 0$, amelynek gyökei 3 és $-\frac{18}{7}$.

b) $7 \cdot 3^2 - q \cdot 3 - 3 = 0$, amiből $q = 20$.
Így az egyenlet $7x^2 - 20x - 3 = 0$, amelynek gyökei 3 és $-\frac{1}{7}$.

c) $q \cdot 9 - 7 \cdot 3 + 3 = 0$, amiből $q = 2$.

Ekkor az egyenlet $2x^2 - 7x + 3 = 0$, amelynek gyökei 3 és $\frac{1}{2}$.

691. Az egyenlet egyik gyöke 5, ha az $x = 5$ értéket az egyenletbe behelyettesítve egyenlőséget kapunk.

$5^2 + 5p - 15 = 0$, innen $p = -2$.

Tehát $p = -2$ esetén lesz az egyenlet egyik gyöke 5.

Ekkor az egyenlet: $x^2 - 2x - 15 = 0$, melynek gyökei 5 és -3.

692. A másodfokú egyenletnek akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív.

Az első egyenlet diszkriminánsa $b^2 - 4c$, a másodiké $c^2 - 4b$. Ha mindkettő nemnegatív, akkor ebből egyrészt $4c \le b^2$, másrészt $4b \le c^2$ adódik. Behelyettesítve a konkrét adatokat:

a) $c \le 20{,}25$ és $36 \le c^2$, ez utóbbiból $c \le -6$ vagy $6 \le c$; vagyis összesítve $c \le -6$ vagy $6 \le c \le 20{,}25$;

b) $c \le 4$ és $16 \le c^2$, ez utóbbiból $c \le -4$ vagy $4 \le c$; vagyis összesítve $c \le -4$ vagy $c = 4$;

c) $c \le 0{,}25$ és $4 \le c^2$, ez utóbbiból $c \le -2$ vagy $2 \le c$; vagyis összesítve $c \le -2$.

693. a) Pontosan egy valós gyököt kapunk, ha az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz $p^2 - 4 \cdot 9 = 0$.

Ez $p = 6$ és $p = -6$ esetén teljesül.

b) Két valós gyököt kapunk, ha a diszkrimináns pozitív, azaz $25 - 4q > 0$.

Mivel q pozitív egész, q megfelelő értékei: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

694. $3x^2 - 6x + p = 0$ egyenletnek

a) egy valós gyöke van (két egyenlő valós gyöke van), ha az egyenlet diszkriminánsa 0.

$36 - 12p = 0$, ebből $p = 3$.

Ekkor az egyenlet $3x^2 - 6x + 3 = 0$, ennek egyetlen gyöke az 1.

b) különböző gyökei vannak, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív, azaz $36 - 12p > 0$, így $p < 3$. (I.)

Ebben az esetben az egyenlet gyökei

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 12p}}{6} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 12p}}{6}.$$

Mivel a négyzetgyök értéke $p < 3$ esetén mindig pozitív, így $x_1 > 0$.

Az egyenlet különböző gyökei pozitívak, ha $x_2 > 0$ is teljesül, azaz

$$\frac{6-\sqrt{36-12p}}{6} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6-\sqrt{36-12p} > 0,$$

$$6 > \sqrt{36-12p}.$$

$p < 3$ esetén mindkét oldal pozitív, így a négyzetre emelés ekvivalens művelet, az egyenlőtlenségjel iránya nem változik. Így $36 > 36 - 12p$, ebből $p > 0$. (II.) (I.) és (II.) figyelembevételével $0 < p < 3$ esetén lesz az egyenletnek két pozitív valós gyöke.

c) $p < 3$ esetén b) szerint $x_1 > 0$, ezért $x_2 < 0$-nak kell teljesülnie, azaz

$$\frac{6-\sqrt{36-12p}}{6} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6-\sqrt{36-12p} < 0,$$

$$6 < \sqrt{36-12p},$$

mivel $p < 3$ esetén mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens művelet, az egyenlőtlenségjel iránya nem változik.

$36 < 36 - 12p$, ebből $p < 0$

Tehát $p < 0$ esetén lesz az egyik valós gyök pozitív, a másik negatív.

d) nincs valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa negatív, azaz $p > 3$.

695. A keresett tört: $\frac{x+2}{x}$, a megváltoztatott tört: $\frac{x+7}{2x}$ $x \neq 0$.

A szöveg szerint: $\frac{x+2}{x} = \frac{x+7}{2x}$ $x \neq 0$, ebből $x = 3$.

Tehát a keresett eredeti tört: $\frac{5}{3}$.

Változtatás után a tört: $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ lesz, ami az eredeti törttel egyezik.

696. A két szereplő szám a és b.

$$a + b = 12 \qquad \text{I.}$$
$$a \cdot b = 27 \qquad \text{II.}$$
$$a^4 + b^4 = ?$$

Az I.-ből kapott $b = 12 - a$ értéket behelyettesítve a II.-ba, kapjuk:

$a(12 - a) = 27$, ami az $a^2 - 12 \cdot a + 27 = 0$ másodfokú egyenletre vezet.

Gyökei: $a_1 = 9$, illetve $a_2 = 3$. Ennek megfelelően $b_1 = 3$, illetve $b_2 = 9$.

A szereplő két szám, az egyenletrendszer megoldása: 3 és 9.

Ezek negyedik hatványának összege: 6642.

Második megoldás:

Tekinthető a és b az $x^2 + p \cdot x + q = 0$ egyenlet gyökeinek. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés (Viète-formula) alapján: $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, itt

$x^2 - 12x + 27 = 0$ egyenlet gyökei a keresett két szám: 9 és 3.
A negyedik hatványok összege: 6642.

Másik megoldás:
Az a, b kiszámítása nélkül is megoldható a feladat. Így:
$a^4 + b^4 = [a^2 + b^2]^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - (ab)^2 =$
$= [12^2 - 2 \cdot 27]^2 - 2 \cdot 27^2 = 6642$

697. A téglalap oldalai a és b, területe $ab = 32$, kerülete $2(a+b) = 24$, azaz $a + b = 12$
$b = 12 - a$,
$a(12 - a) = 32$.
E másodfokú egyenlet gyökei: 4 és 8.
Ezek a hosszúságok dm-ben az asztallap oldalainak felelnek meg.
Ezt a feladatot meg lehet oldani a 696-os feladat 2. megoldása szerint is.

698. Jelölje a középső természetes számot n. Ekkor a feladat szövege szerint
$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 974$; ezt kibontva
$3n^2 + 2 = 974$
$n^2 = 324$.
Mivel n természetes szám, $n = 18$. A három egymás utáni természetes szám tehát: 17; 18; 19.
Ellenőrzés: $17^2 + 18^2 + 19^2 = 289 + 324 + 361 = 974$.

699. Legyenek e számok $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Ekkor a feltétel:

a) $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$, zárójelfelbontás után:
$3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$, rendezve: $n^2 - 12n = 0$, amiből
$n = 0$ vagy $n = 12$, tehát az öt szám $-2, -1, 0, 1, 2$ vagy $10, 11, 12, 13, 14$.

b) $(n-2)^2 + (n-1)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$, zárójelfelbontás után:
$2n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$, rendezve: $12n = 0$, amiből
$n = 0$, tehát az öt szám $-2, -1, 0, 1, 2$.

700. a) Ha $ab = 6$ és $a + b = 5$, akkor a és b az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet gyökei (Viète-formulák), vagyis 3 és 2.

b) Ha $ab = 6$ és $a - b = 5$, akkor $a = b + 5$, így $(b+5)b = 6$,
amiből $b^2 + 5b - 6 = 0$. Ennek gyökei 1 és -6, így a keresett két szám lehet 6 és 1, vagy -1 és -6.

c) Ha $ab = 6$ és $\frac{a}{b} = 5$, akkor $a = 5b$, így $5b^2 = 6$, amiből $b = \pm\sqrt{1{,}2} \approx \pm 1{,}095$,
és így $a = \pm\sqrt{30} \approx \pm 5{,}477$ (az azonos előjelű gyökök tartoznak össze).

701. Állítás: ha $A = 2x + 1$, $B = x^2 + 2x$ és $|x| > 1$, akkor $A < B$.
A bizonyításhoz elég belátni, hogy $B - A > 0$.
Ez igaz is: $B - A = x^2 - 1 > 0$, mert $|x| > 1$ miatt $x^2 > 1$.

702. Egy konvex n-szög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.
A feladat szövege szerint $\frac{n(n-3)}{2} = 90$.
Innen $n^2 - 3n = 180$, azaz

$$n^2 - 3n - 180 = 0.$$

Megoldva $n = -12$ vagy $n = 15$. Mivel n pozitív egész, egy 15 oldalú konvex sokszögről van szó.

703. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2} = 77$. Innen a pozitív egész megoldás $n = 14$. A 14 oldalú sokszögnek valóban 77 átlója van.

704. a) Az a oldalú négyzet területe a^2, kerülete $4a$. A feladat szövege szerint $a^2 > 4a$. Mivel $a > 0$, a fenti egyenlőtlenség $a > 4$ esetén teljesül.

b) Azokat az x valós számokat keressük, amelyekre
$x^2 \le 4x$, azaz $x^2 - 4x \le 0$.
$x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$ esetén teljesül. Így, mivel az x^2 együtthatója pozitív, az $x^2 - 4x \le 0$ egyenlőtlenség azon x valós számokra teljesül, amelyekre $0 \le x \le 4$.

705. Dimenzió nélkül ekkor a megtett utakat az

a) $s_1 = 1 \cdot t + 2$ és $s_2 = 1 \cdot t^2$ egyenletek írják le. Az utolérés azonos megtett utat jelent, $s_1 = s_2$, vagyis $t + 2 = t^2$. A $t^2 - t - 2 = 0$ egyenlet gyökei 2 és -1, ez utóbbinak gyakorlati (fizikai) tartalma nincs. Tehát az indulás után 2 másodperccel, a starthelytől $(2 + 2 = 2^2 =)$ 4 méterre éri utol a második autó az elsőt.

b) $s_1 = 1(t + 2)$ és $s_2 = 1 \cdot t^2$ egyenletek írják le. Ezek lényegileg ugyanazok, mint az a) pontban, tehát az eredmények is megegyeznek az ottanival. (Az $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó autó 2 másodperc alatt épp 2 méter előnyre tesz szert, ebből láthatóan is ugyanaz a két eset.)

706. Egyenletünket rendezve: $\frac{g}{2}t^2 - vt - h = 0$.

A sebesség (irányától függően) $+10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ vagy $-10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lehet, ezért a számszerű behelyettesítés után $5t^2 - 10t - 40 = 0$ vagy $5t^2 + 10t - 40 = 0$ adódik. Az első egyenlet gyökei 4 és -2, a másodiké 2 és -4. A negatív gyökök a megfigyelés kezdete előtti állapotra utalnak, tehát most nincs szerepük.
Tehát a test 4 másodperc, illetve 2 másodperc múlva ér földet aszerint, hogy most még felfelé vagy már lefelé mozog.

707. A végső állapotban a mozgási energia: $E = \frac{100^2 m}{2} = 5000m$. Ennek a fele $2500m$, az $\frac{mv^2}{2}$ képletből ekkor $50\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a sebesség. Mivel 6 s alatt gyorsul fel $100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra, ezért $v(t) = \frac{100t}{6}$. A feltétel tehát, hogy $50\sqrt{2} = \frac{50t}{3}$, azaz $t = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ (s) múlva lesz a mozgási energiája a végső állapotbelinek a fele.

708. $220 = RI$, ahol R az ismeretlen ellenállás, amit ha 10 Ω-mal növelünk, akkor I csökken 2 A-rel, tehát: $220 = (R + 10)(I - 2) = RI + 10I - 2R - 20$. Mivel $RI = 220$, ezért $10I = 2R + 20$. Ezzel az eredeti egyenlet: $2200 = R(2R + 20) = 2R^2 + 20R$. Meg kell tehát oldani a $R^2 + 10R - 1100 = 0$ egyenletet. Ebből $R = 28{,}5$ vagy $-38{,}5$. A második gyök nem lehetséges, tehát az ismeretlen ellenállás kb. 28,5(Ω). A hozzá tartozó áramerősség-érték pedig kb. 7,7 (A).

709. Jelölje v a hajó állóvízben mért sebességét $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban. Árral szemben $v - 2$ km-t, a folyással megegyező irányban $v + 2$ km-t tesz meg óránként a hajó. A 15 km-es utat, tehát árral szemben $\frac{15}{v-2}$ óra alatt, ellenkező irányban $\frac{15}{v+2}$ óra alatt teszi meg. Felírva az idők közötti összefüggést:

$$\frac{15}{v-2} = \frac{15}{v+2} + 1.$$

Rendezés után kapjuk: $v^2 = 64$.

Mivel v sebességet jelöl, $v \geq 0$, tehát a hajó állóvízben mért sebessége $8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

710. Legyen a gépkocsik sebessége $v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $(v + 10)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ekkor menetidejük $\frac{150}{v}$, illetve $\frac{150}{v+10}$ óra. A szöveg szerint $\frac{150}{v} - \frac{150}{v+10} = \frac{1}{2}$.

Közös nevezőre hozás után: $\frac{150(v+10) - 150v}{v(v+10)} = \frac{1}{2}$

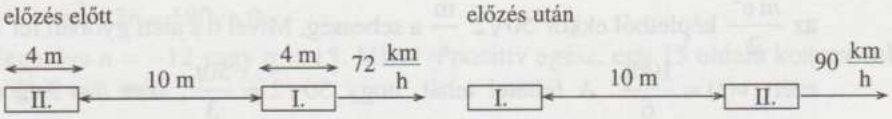
$$3000 = v^2 + 10v$$
$$0 = v^2 + 10v - 3000.$$

A megoldóképletből adódó gyökök -60 és 50, de a negatív gyök a feladat szövege miatt nem megfelelő.

A gépkocsik sebessége tehát $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

Ellenőrzés: A lassúbb gépkocsi menetideje 3 óra, míg a gyorsabbé 2,5 óra volt. Ez valóban fél órával kevesebb, mint a lassúbb kocsi menetideje.

711.



Az előző autónak le kell dolgoznia a 10 méter hátrányt, a kétszer 4 méter kocsihosszt és végül 10 méter előnnyel kerül vissza a másik elé. Tehát a manőver alatt 28 méterrel több utat kell megtennie. A sebessége $v_1 = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ról felmegy $v_2 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra $a = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ egyenletes gyorsulással.

Ez $\frac{v_2 - v_1}{a} = 2$ másodpercig tart. Utána már $25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad. Az első kérdés az előzés ideje, legyen ez t másodperc. Az egyenletet a megtett utakra írjuk fel. Az első autó megtesz $20t$ méter utat. A második, feltéve, hogy 2 másodpercnél tovább tart az előzés, megtesz 2 másodpercig $22{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagsebességgel 45 méter utat, majd $25(t-2)$ utat a hátralévő időben egyenletes sebességgel. Az útkülönbség, mint már szó volt róla 28 méter, tehát: $20t + 28 = 45 + 25(t-2)$, amiből $33 = 5t$, azaz $t = 6{,}6$ (s). Ez alatt a megelőzendő autó útja: $20 \cdot 6{,}6 = 132$ méter. Az előző megtesz 45 métert az első 2 másodpercben, majd $25 \cdot 4{,}6 = 115$ métert. Ez összesen 160 méter, ami éppen 28 méterrel több, mint a megelőzött kocsi útja. Ezzel egyben megválaszoltuk a másik kérdést is. A teljes előzés alatt 160 métert tett meg a kocsi.

712. A folyóvíz sebessége: $v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a távúszó sebessége állóvízben: $3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Az úszó sebessége a folyó folyásának irányában $(3+v)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

a folyással szemben $(3-v)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ahol $v < 3$.

Az 1600 m = 1,6 km távot oda-vissza 1 óra 12 perc = 1,2 óra alatt tette meg. Figyelembe véve az egyenletes mozgásra vonatkozó összefüggést:

	sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	út (km)	idő (h)
a folyás irányában:	$3+v$	1,6	$\frac{1,6}{3+v}$
a folyással szemben:	$3-v$	1,6	$\frac{1,6}{3-v}$

a szükséges idő: $\frac{1,6}{3+v}+\frac{1,6}{3-v}=1,2$

$1,6\cdot(3-v)+1,6\cdot(3+v)=1,2\cdot(3+v)(3-v)$

0,4-del végig osztunk, majd a kijelölt műveleteket elvégezzük és rendezünk.

$3v^2=3$, ebből a pozitív megoldás jöhet szóba, $v=1$.

Így a folyón lefelé az út megtételéhez szükséges idő $\frac{1,6}{4}=0,4$ óra volt, a folyón lyón felfelé az út megtételéhez szükséges idő $\frac{1,6}{2}=0,8$ óra volt. Összesen tehát 1,2 óra. A folyó sebessége tehát valóban 1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

713. Kerüljön egy csavar x forintba. Ekkor 50 csavar ára $50x$, 72 Ft-ért pedig $\frac{72}{x}$ darab csavart kapunk. Ezek egyenlőségéből $x^2=\frac{72}{50}=1,44$, amiből $x=\pm1,2$.

A negatív eredménynek nincs gyakorlati tartalma (vásárláskor még nekünk fizetne a bolt…), tehát egy csavar 1 Ft 20 fillérbe kerül(t, amikor még volt fillér…).

714. Legyen a bőr-, a vászon- és a papírkötéses könyv ára rendre b, v, p.

Ekkor $v=b\left(1-\frac{k}{100}\right)$, $p=v\left(1-\frac{2k}{100}\right)$, $p=b(1-0,405)$.

Beírva az első egyenletbeli v-t a másodikba, majd p két kifejezését egyenlővé téve b kiesik, és marad: $\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{2k}{100}\right)=0,595$.

Szorozva, rendezve, bővítve: $2k^2-300k+4050=0$, aminek gyökei 135 és 15. Ebből az első a feladat szövege miatt értelmetlen, a második révén pedig a vászonkötéses könyv ára 85%-a a bőrkötéses könyv árának.

715. Jelölje n azt a pozitív egész számot, ahány szál rózsát vásárolt Zoli. Egy rózsa ára $n+5$ picula. Mivel a díszítés 50 piculába kerül, a rózsákra Zoli maximum $820-50=770$ piculát költhetett. A rózsák ára $n\cdot(n+5)$ picula, így azt a legnagyobb pozitív egész n-et keressük, amelyre igaz, hogy $n(n+5)\le770$.

Az $n^2 + 5n - 770 \leq 0$ egyenlőtlenséget megoldva a legnagyobb pozitív egész megoldás $n = 25$. Egy szál rózsa tehát $25 + 5 = 30$ piculába kerül.

716. Ha az egyik munkás x nap alatt végzi el a munkát egyedül, akkor a másik $x + 6$ nap alatt. Ekkor az első munkás egy nap alatt a munka $\frac{1}{x}$-ed részét, a második munkás a munka $\frac{1}{x+6}$-od részét végzi el. Ha együtt dolgoznak, akkor egy nap alatt $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6}$-od részét végeznék el. Ez a munka $\frac{1}{4}$-e, mert együtt 4 nap alatt végeznek. Egyenletben felírva:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}.$$

Rendezés után a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$x^2 - 2x - 24 = 0.$$

Szorzattá bontva $(x - 6)(x + 4) = 0$, a két gyök $x_1 = 6$, $x_2 = -4$.

A feladat szövegét figyelembe véve $x = 6$ a megoldás, tehát az első munkás 6 nap alatt, a második pedig 12 nap alatt végezné el egyedül a munkát.

717. Jelölje x az először áttöltött folyadék térfogatát. A 8 literes edényben ekkor $8 - x$ liter 87,5 %-os alkohol maradt. Ebben a tiszta alkohol mennyisége $(8 - x) \cdot 0{,}875$ liter. A második edényben az alkohol mennyisége $x \cdot 0{,}875$ liter. Vízzel való feltöltés után az oldat koncentrációja $\frac{x \cdot 0{,}875}{10} \cdot 100\%$. Ebből x litert töltünk vissza, amiben a tiszta alkohol mennyisége $x \cdot \frac{x \cdot 0{,}875}{10}$.

Visszatöltés után tehát összesen $(8 - x) \cdot 0{,}875 + x \cdot \frac{x \cdot 0{,}875}{10}$ liter tiszta alkoholunk van. Tudjuk, hogy az oldat ekkor 70%-os, tehát a tiszta alkohol mennyisége $8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$ liter. Felírva az egyenletet:

$$(8 - x) \cdot 0{,}875 + x \cdot \frac{x \cdot 0{,}875}{10} = 5{,}6;$$

összevonás után:

$$0{,}0875x^2 - 0{,}875x + 1{,}4 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0.$$

Megoldóképletet alkalmazva a két gyök $x_1 = 8$ és $x_2 = 2$. Ellenőrzéssel beláthatjuk, hogy mind a két megoldás helyes, tehát vagy 8 litert (az egészet) vagy pedig 2 litert töltöttünk át először.

718. a) A doboz alapterülete $(30 - 2 \cdot 5)(20 - 2 \cdot 5) = 20 \cdot 10 = 200\ \text{cm}^2$, ezért térfogata $200 \cdot 5 = 1000\ \text{cm}^3$.

b) A négyzet oldala x cm hosszú.

$(x - 10)^2 \cdot 5 = 900$

$(x - 10)^2 = 180$

Mivel a doboz alapéle pozitív hosszúságú:

$x - 10 = \sqrt{180}$

$x = 10 + \sqrt{180}$.

A négyzet oldala kb. 23,42 cm hosszú.

719. Az a oldalú négyzet területe $169\ \text{cm}^2$, kerülete $4 \cdot 13\ \text{cm} = 52\ \text{cm}$.

A téglalap kerülete, $2(x + y) = 52$, I.

területe $xy = 168$, II.

ahol x és y pozitív számok.

Az I. egyenletet 2-vel végigosztjuk, majd kifejezzük belőle pl. az y-t: $y = 26 - x$, ezt behelyettesítjük a II.-ba: $x(26 - x) = 168$, ebből az $x^2 - 26x + 168 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $x_1 = 14$ és $x_2 = 12$, a megfelelő y értékek: $y_1 = 12$ és $y_2 = 14$.

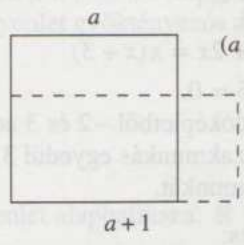
A téglalap oldalai: 12 cm és 14 cm.

Megjegyzés:

Ha a négyzet oldala $a > 1$, akkor mindig van olyan téglalap, amelynek kerülete megegyezik a négyzet kerületével, s területe 1 területegységgel kisebb.

A téglalap oldalai: $a + 1$; $a - 1$,

a területe $t = a^2 - 1$, kerülete $k = 4a$.



$(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$

720. x kg almát vettünk. 1 kg almáért $\frac{5400}{x}$ Ft-ot fizettünk, az ennél 12 Ft-tal drágább alma kilónkénti ára $\frac{5400}{x - 5}$ Ft.

$\frac{5400}{x - 5} - \frac{5400}{x} = 12$

$5400x - 5400(x - 5) = 12x(x - 5)$

$x^2 - 5x - 2250 = 0$

A megoldóképletből adódó gyökök -45 és 50, de a szövegnek csak a pozitív megoldás felel meg.

Tehát 50 kg almát vásároltunk, kilónként 108 forintért.

Ellenőrzés:

Ha kilónként 120 forintért vettünk volna almát, akkor $\frac{5400}{120} = 45$ kg almát kaptunk volna 5400 Ft-ért. Ez megfelel a feladat szövegének.

721. a) Legyen a hölgyek száma n. Ekkor $\frac{n(n-1)}{2} = 66$, vagyis $n^2 - n - 132 = 0$.

A megoldóképletből -11 és 12 adódik, de a szövegnek csak a 12 felel meg. Az idős hölgyek baráti körének 12 tagja van.

b) A két új hír birtokába jutott két hölgy egy telefonbeszélgetéssel elérheti, hogy mindketten mindkét hírt ismerjék. Ezután még legalább 10 telefonbeszélgetésre szükség van, hiszen minden egyes beszélgetésnél csak egy újabb hölgy ismerheti meg mindkét új hírt. Az összesen 11 telefonbeszélgetés elegendő is, hiszen az első telefonbeszélgetés után pl. a két hölgy egyike „végigtelefonálhatja" a még informálatlan 10 hölgyet (persze más „munkamegosztást" is találhatnak).

722. A szakmunkás egyedül x nap, a betanított munkás egyedül $x + 3$ nap alatt végezné el a munkát. Egy nap alatt az egész munkának $\frac{1}{x}$, illetve $\frac{1}{x+3}$ részét végzi el egyedül a szakmunkás, illetve a betanított munkás.

Együtt két nap alatt elkészülnek az egész munkával, tehát:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{x+3} = 1$$

$$2(x+3) + 2x = x(x+3)$$

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

A megoldóképletből -2 és 3 adódik, de a szövegnek csak a 3 felel meg.

Tehát a szakmunkás egyedül 3, a betanított munkás egyedül 6 nap alatt végezné el az egész munkát.

Ellenőrzés:

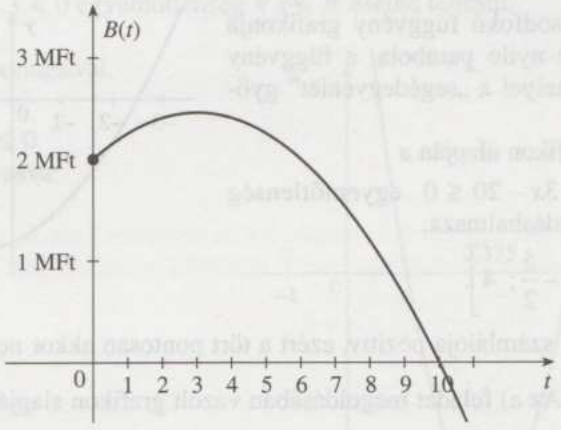
2 nap alatt a szakmunkás a munka kétharmadával végez, a betanított munkás pedig az egyharmadával; együtt tehát valóban elvégzik az egész munkát.

723. $T = 16$ m², $h = 3{,}5$ m, tehát 56 légköbméter a helyiség térfogata. Ha a magasság 0,7 méterrel csökken ($h' = 3{,}5 - 0{,}7 = 2{,}8$), és x jelöli a négyzet új alapélét, akkor a feltétel szerint: $56 = x^2 \cdot 2{,}8$, vagyis $x^2 = 20$, tehát az alapél centiméter pontossággal: 4,47 méter. Mivel nem csökkenhet a térfogat, ezért felfelé kell kerekíteni, inkább 4,48 méter.

724. a) A feltétel szerint $10\,000 - 1000t$ kg-ot tud eladni, azaz ha mind a 10 000 kg megmarad, akkor ez 0, vagyis $t = 10$. Így $200 + 50t = 700$ Ft kilogrammonkénti ár mellett marad az egész mennyiség a „nyakán".

b) A bevétel az ár és az eladott mennyiség szorzata:
$B(t) = (200 + 50t)(10\,000 - 1000t) = -50\,000t^2 + 300\,000t + 2\,000\,000$.
Ennek a $B(t)$ függvénynek a grafikonját lásd a mellékelt ábrán.

c) A legnagyobb bevétel a parabola maximumhelyénél t = 3-nál van.
Ekkor $B(3)$ = 2 450 000 Ft.
Ez a maximális bevétel, ha az ár $(200 + 50t =)$ 350 Ft/kg.



725. a) Először vizsgáljuk meg, lehet-e egyszerűsíteni a törtet. Ehhez alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja segítségével.

$$\frac{5(y+3)\left(y-\frac{4}{5}\right)}{2(y+3)\left(y+\frac{1}{2}\right)} = 0$$

Ebből az alakból megállapítható az egyenlet alaphalmaza: $\mathbf{R} \setminus \left\{-3;\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Egyszerűsítés után:

$\frac{5\left(y-\frac{4}{5}\right)}{2\left(y+\frac{1}{2}\right)} = 0$, amiből a megoldáshalmaz: $M = \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

b) Az a) feladat alapján az egyenlőtlenség alaphalmaza: $\mathbf{R} \setminus \left\{-3;\ \frac{4}{5}\right\}$ másrészt ezen a halmazon az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens a $\frac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{5\left(y-\frac{4}{5}\right)} \leq 0$.

A számláló és a nevező előjelének vizsgálatával adódik: $M = \left]-\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right[$.

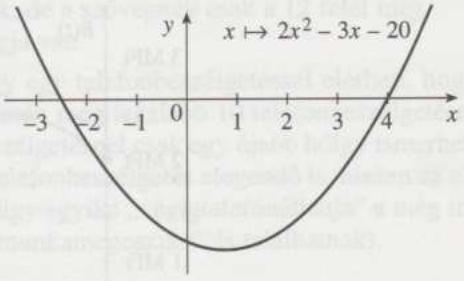
726. a) Oldjuk meg először a $2x^2 - 3x - 20 = 0$ „segédegyenletet", majd vázoljuk az $x \mapsto 2x^2 - 3x - 20;\ x \in \mathbf{R}$ függvény grafikonját.

A „segédegyenlet" gyökei $-\frac{5}{2}$ és 4.

A másodfokú függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, a függvény zérushelyei a „segédegyenlet" gyökei.

A grafikon alapján a $2x^2 - 3x - 20 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$M = \left[-\frac{5}{2}; 4\right]$.

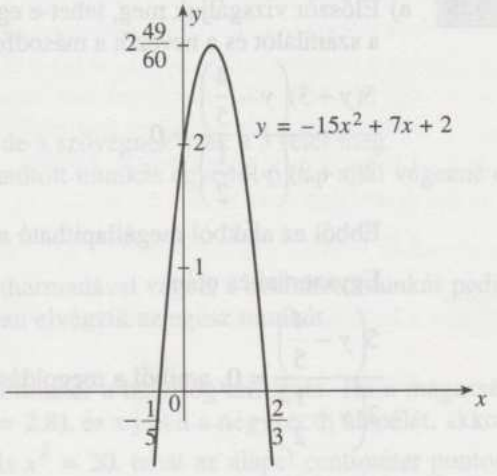


b) A tört számlálója pozitív, ezért a tört pontosan akkor negatív, ha a nevezője negatív. Az a) feladat megoldásában vázolt grafikon alapján: $M = \left]-\frac{5}{2}; 4\right[$.

727. Ábrázoljuk az $x \mapsto -15x^2 + 7x + 2;\ x \in \mathbf{R}$ függvényt!

(Zérushelyei: $\frac{2}{3}$, illetve $-\frac{1}{5}$)

Az ábráról leolvasva a $-15x^2 + 7x + 2 > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $\left]-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right[$ intervallum.



728. Mivel $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbf{R}$ esetén, így $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $(3x - 1)^2 = 0$, azaz $x = \frac{1}{3}$.

729. Alakítsuk teljes négyzetté:

$$-9x^2 + 6x - 3 = -9\left[x^2 - \frac{2}{3}x\right] - 3 = -9\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] - 3 =$$

$$= -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1 - 3 = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbf{R} \text{ esetén,}$$

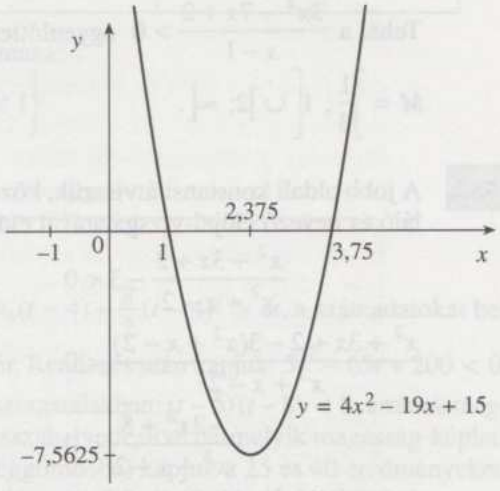
így $-9x^2 + 6x - 3 < 0$ egyenlőtlenség $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén teljesül.

730. A zárójelek felbontásával, rendezésével

$4x^2 - 19x + 15 \leq 0$

Az ábráról leolvasva:

$M = [1; 3{,}75]$.



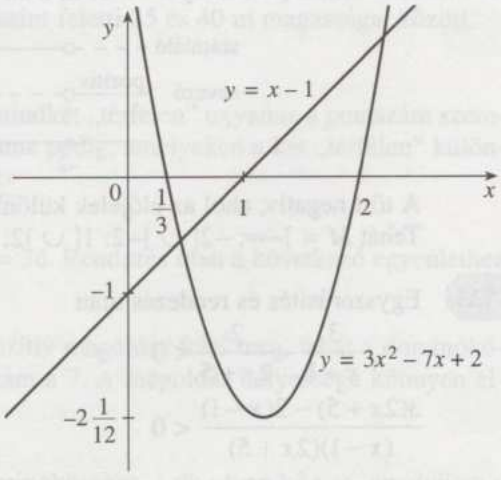
731. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az

$x \mapsto 3x^2 - 7x + 2; \quad x \in \mathbf{R}$

(zérushelyei: $\frac{1}{3}$; 2) és az

$x \mapsto x - 1; \quad x \in \mathbf{R}$ függvényeket!

A grafikonokról olvassuk le a számláló és nevező előjelét az egyes intervallumokban és ezek segítségével állapítsuk meg a tört előjelét!



x	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$3x^2-7x+2$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x-1$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$\frac{3x^2-7x+2}{x-1}$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Tehát a $\frac{3x^2-7x+2}{x-1}>0$ egyenlőtlenség valós megoldáshalmaza:

$M=\left]\frac{1}{3};1\right[\cup\left]2;\infty\right[$.

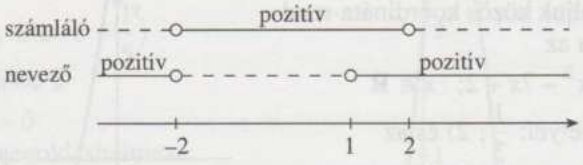
732. A jobb oldali konstanst átvisszük, közös nevezőre hozunk, rendezünk, majd a számláló és nevező előjel-vizsgálatával eldöntjük a tört előjelét.

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}-3<0$$

$$\frac{x^2+3x+2-3(x^2+x-2)}{x^2+x-2}<0$$

$$\frac{-2x^2+8}{x^2+x-2}<0$$

A számláló zérushelyei -2 és 2, a nevezőé -2 és 1, így:



A tört negatív, ahol az előjelek különbözőek: $x<-2$ vagy $-2<x<1$ vagy $2<x$.
Tehát $M=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]2;+\infty[$.

733. Egyszerűsítés és rendezés után

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{2x+5}<0 \qquad x\neq 1;\ x\neq -\frac{5}{2}$$

$$\frac{3(2x+5)-2(x-1)}{(x-1)(2x+5)}<0$$

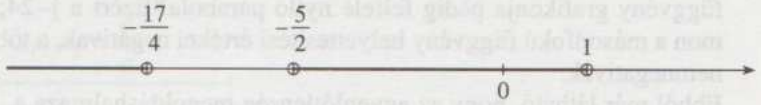
$$\frac{4x+17}{(x-1)(2x+5)}<0$$

Vizsgáljuk a számláló és nevező tényezőinek, majd a törtnek az előjelét!

x	$x < -\frac{17}{4}$	$-\frac{17}{4} < x < -\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2} < x < 1$	$x > 1$
$4x + 17$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$x - 1$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$2x + 5$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$\frac{4x+17}{(x-1)(2x+5)}$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$M = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x < -\frac{17}{4} \vee -\frac{5}{2} < x < 1 \right\}$$



734. A megoldandó egyenlőtlenség tehát $v_0(t-4) - \frac{g}{2}(t-4)^2 > vt$, a számadatokat behelyettesítve: $30(t-4) - 5(t-4)^2 > 5t$. Rendezés után kapjuk: $5t^2 - 65t + 200 < 0$, egyszerűsítve $t^2 - 13t + 40 < 0$, vagy szorzatalakban: $(t-5)(t-8) < 0$, aminek megoldása $5 < t < 8$. A két számértéket visszahelyettesítve bármelyik magasság-képletbe (célszerűen az egyszerűbbikbe, a léggömbébe) kapjuk a 25 és 40 eredményeket. Tehát a lövedék a léggömb felemelkedése utáni 5. és 8. másodperc között van magasabban a léggömbnél, annak a talajszint feletti 25 és 40 m magasságai között.

735. Legyen a legnagyobb pontszám x.

$x + 1$ darab olyan kő van, amelyiken mindkét „térfélen" ugyanaz a pontszám szerepel; azoknak a dominóköveknek a száma pedig, amelyeken a két „térfélen" különböző pontszámok szerepelnek $\frac{(x+1)x}{2}$.

Így a szöveg alapján $x + 1 + \frac{(x+1)x}{2} = 36$. Rendezés után a következő egyenlethez jutunk: $x^2 + 3x - 70 = 0$.

Ennek gyökei a -10 és a 7. Csak a pozitív megoldás felel meg, tehát a dominóköveken előforduló legmagasabb pontszám a 7. A megoldás helyessége könnyen ellenőrizhető.

Megjegyzés:

Másképpen is megszámlálhatjuk a dominóköveket. 1 db olyan kő van, amelyiken a legmagasabb pontszám a 0; 2 db olyan kő van, amelyiken a legmagasabb pontszám az 1; 3 db olyan kő van, amelyiken a legmagasabb pontszám a 2; …; $x + 1$ olyan kő

van, amelyiken a legmagasabb pontszám az x. Minden követ pontosan egyszer számoltunk össze, tehát a dominókövek száma $1+2+\ldots+x+(x+1)=\frac{(x+1)(x+2)}{2}$.

736. a) Helyettesítsünk -10-et a megadott egyenlőtlenségbe: $-12{,}4<-25$, ami hamis kijelentés. Atom Antal tehát valóban életben maradt (hiszen $-10=0$ is hamis).

b) Nem biztonságos a 0 és az $x+\frac{24}{x}<-25$ megoldáshalmazának megfelelő helyek.

Az egyenlőtlenséget rendezve: $\frac{x^2+25x+24}{x}<0$.

Az $x^2+25x+24=0$ „segédegyenlet" gyökei a -24 és a -1.

Az $x\mapsto x^2+25x-24;\ x\in\mathbf{R}$ függvény zérushelyei tehát a -24 és a -1, a függvény grafikonja pedig felfelé nyíló parabola. Ezért a $]-24;-1[$ intervallumon a másodfokú függvény helyettesítési értékei negatívak, a többi helyen pedig nemnegatívak.

Ebből már látható, hogy az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $]-\infty;-24[\cup]-1;0[$ halmaz.

Atom Antal számára biztonságos helyek tehát a $[-24;-1]\cup]0;+\infty[$ halmaz elemei által kijelölt pontok a számegyenesen.

c) Nem.

Atom a kezdeti helyéről, a -10-ről minden további nélkül eljuthat a számegyenesen a -1-ig. Innen 0,99 hosszúságút ugorva is legfeljebb a $-0{,}01$ helyre kerülhet, ami mérgező. Nem juthat ki tehát a $[-24;-1]$ intervallumból.

737. Az $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ másodfokú egyenlet $x_1;x_2$ valós gyökeire

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$, így

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}$$

Így a $7x^2-4x-1=0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege

$$x_1^2+x_2^2=\frac{(-4)^2}{7^2}-2\cdot\frac{-1}{7}=\frac{16}{49}+\frac{2}{7}=\frac{30}{49}$$

($D=16+28>0$, ezért az egyenletnek van két különböző valós gyöke.)

738.* A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján az $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ másodfokú egyenlet $x_1;x_2$ valós gyökeire $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Így a $8x^2+4x+k^3=0$ egyenlet $x_1;x_2$ gyökeire egyrészt $x_2=2x_1$, másrészt

(I) $x_1 + 2x_1 = -\frac{4}{8}$ és

(II) $x_1 \cdot 2x_1 = \frac{k^3}{8}$

(I)-ből $x_1 = -\frac{1}{6}$; (II)-ből $2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{k^3}{8} \Rightarrow \frac{4}{9} = k^3$, így $k = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

739. Feltétel: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{4}$, ahonnan $x_1 = 0{,}75x_2$.

Így a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján:

(I) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;

(II) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Behelyettesítve az eredeti értékeket:

(I) $0{,}75x_2 + x_2 = \frac{5}{3}$ innen: $x_2 = \frac{20}{21}$;

(II) $0{,}75x_2 \cdot x_2 = \frac{k}{3}$, ebből $k = 3 \cdot 0{,}75 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2 = \frac{100}{49}$.

Így az eredeti egyenlet:

$3x^2 - 5x + \frac{100}{49} = 0$,

melynek gyökei: $\frac{5}{7}$, illetve $\frac{20}{21}$, ezek aránya 3 : 4.

740. $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2$ minden pozitív x-re. Minimális akkor, ha $x = 1$.

Az $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ha $x > 0$

Ebből $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, vagyis

$(x-1)^2 \geq 0$, ez pedig mindig igaz.

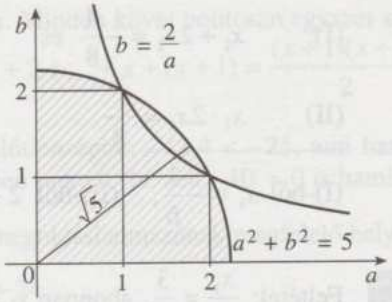
Mivel az átalakítás lépései ekvivalensek, az eredeti egyenlőtlenség minden pozitív x szám esetén igaz. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = 1$. Tehát a tört értéke $x = 1$ esetén a legkisebb pozitív egész.

741. A két szám x és y. A szöveg szerint $x + y = 100$. Az $x^2 + y^2$ minimumát keressük. $A = x^2 + (100 - x)^2 = 2(x^2 - 100x + 5000) = 2[(x - 50)^2 + 2500]$ minimális akkor, ha $x = 50$; ekkor $y = 50$.

742. A feltétel szerint, ha a és b jelöli a téglalap oldalait, akkor:

(1) $ab = 2$,

(2) $a^2 + b^2 \leq 5$.



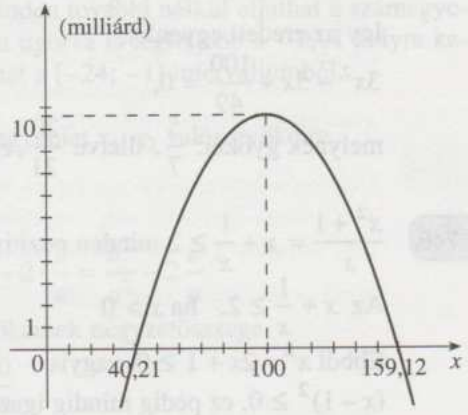
Kérdés, milyen intervallumba esnek a két feltételnek eleget tevő számok. Szemléletesen egy koordináta-rendszerben ábrázolva: a második feltétel egy kört és a belsejét jelöli ki, az első pedig egy hiperbola pozitív ága (csak az első negyedet nézzük, hiszen téglalapról van szó, a és b pozitívak). Az ábráról leolvasható, hogy két intervallum lesz, melyek határpontjait éppen az egyenlőség adja, tehát $a^2 + b^2 = 5$ kell (1) mellé. E két egyenletből: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5 + 4 = 9$. Ennek a pozitív megoldása $a + b = 3$, emellett $ab = 2$. Tehát $a(3 - a) = 2$, azaz $a^2 - 3a + 2 = 0$, ahonnan $a = 2$ vagy 1. Amiből b szintén (szimmetrikusan felcserélve) 1 vagy 2. Azaz a megoldás az ábra szerint: $1 \leq a \leq 2$ és $1 \leq b \leq 2$, ahol $b = \frac{2}{a}$.

743. a) Meg kell oldani a $g(x) > f(x)$ egyenlőtlenséget, amit lehet grafikusan is, pl. számítógéppel vagy egy grafikus kalkulátorral, de algebrailag is. Most az utóbbit mutatjuk meg:

$-3x^2 + 600x - 19\,200 > 5 + 2x$,

azaz $-3x^2 + 598x - 19\,195 > 0$.

Mivel a főegyüttható negatív, ezért a parabola lefelé nyitott, azaz a két gyöke között lesz pozitív, egyébként negatív (lásd az ábrát). Az egyenlet gyökei két tizedesre kerekítve: 40,21 és 159,12; azaz legalább 41 darab és legfeljebb 159 előállítása esetén lesz a bevétel nagyobb, mint a költség.



b) A nyereség maximuma a két iménti gyök számtani közepénél, vagyis a parabola maximumhelyénél van. Ez 99,6̇ – kérdéses lehet, hogy $x = 99$ vagy 100 ad nagyobb értéket. Mivel a maximumhely közelebb van a 100-hoz, a szimmetria miatt ott lesz nagyobb a függvényérték, vagyis ott maximális a nyereség. (Ennek értéke behelyettesítéssel kb. 10 605 millió Ft, azaz több mint 10,5 milliárd Ft. És ez mindössze 100 darab előállításával. Mondjuk repülőgépet gyárthatnak.)

744. A másodfokú egyenletnek akkor van valós gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív. Az első egyenlet diszkriminánsa $p^2 - 4q$, a másodiké $q^2 - 4p$. Ha mindkettő nemnegatív, akkor ebből egyrészt $4q \le p^2$, másrészt $4p \le q^2$ adódik, amit (felhasználva a két paraméter pozitivitását) egyben felírhatunk így: $2\sqrt{p} \le q \le \frac{p^2}{4}$. Ennek valódi tartalma akkor van, ha $2\sqrt{p} \le \frac{p^2}{4}$, vagyis, ha $4 \le p$, különben a q-ra kapott tartomány alsó határa nagyobb a felsőnél. Tehát a két feltétel ($2\sqrt{p} \le q \le \frac{p^2}{4}$ és $4 \le p$) együttes teljesülése esetén van mindkét másodfokú egyenletnek valós gyöke.

745. Az eladási ár $p = 265 - 5x$, ahol x az eladott darabszám. Nyilván a bevétel a darabonkénti eladási ár és az eladott darabszám szorzata: $B(x) = 265x - 5x^2$. Az összes költség szintén a darabszám függvényében: $K(x) = 5x + 500$. Nullszaldós az üzlet, ha a bevétel és a költségek egyenlők: $265x - 5x^2 = 5x + 500$, ahonnan $5x^2 - 260x + 500 = 0$, amiből 5-tel való osztás után: $x^2 - 52x + 100 = 0$.
Ha észrevesszük, hogy $x^2 - 52x + 100 = (x - 50)(x - 2)$, akkor a képlet nélkül is megkapjuk, hogy akkor nullszaldós az üzlet, ha 2 vagy 50 darabot gyártanak. A maximális haszon a bevétel és a költség különbségének a maximuma:
$B(x) - K(x) = -5x^2 + 260x - 500$.
Ennek a függvénynek maximumhelye a két gyöke számtani közepénél van. Így tehát a gyököket keressük, amik éppen az előbb számolt egyenlet gyökei is egyúttal, azaz 2 és 50. Ezek számtani közepe 26, vagyis a maximális haszon 26 darab gyártásából és eladásából van (értéke: 2880 pénzegység).

746. A háromszögek oldalai x, illetve $8 - x$, a háromszögek területének összege

$$T = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} + \frac{(8-x)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (8-x)^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 8x + 32) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x-4)^2 + 16\right], \text{ ami minimális } x = 4 \text{ esetén.}$$

A keresett szakaszok hossza 4 cm. (Ekkor mindkét háromszög területe: $4\sqrt{3}$, a két háromszög területének összege: $8\sqrt{3}$.)

747. $3x + 5y = 150 \qquad y = -\frac{3}{5}x + 30 \qquad x > 0, \quad y > 0$

$$x + y = \frac{2}{5}x + 30$$

A jobb oldal minimális lenne ott, ahol x minimális. Az $x > 0$ feltétel miatt az $x + y$ kifejezésnek nincs minimuma, mert a pozitív valós számok között nincs legkisebb.

$xy = -\frac{3}{5}x^2 + 30x$

A $-\frac{3}{5}x^2 + 30x$ másodfokú kifejezésnek maximuma van, mert a másodfokú tag előjele negatív. A maximum helyét és értékét megállapíthatjuk az alábbi kétféle átalakítás bármelyikének segítségével.

1. lehetőség: A kifejezést teljes négyzetté alakítjuk:
$-\frac{3}{5}(x^2 - 50x) = -\frac{3}{5}\left[(x-25)^2 - 625\right]$. Ebből a maximum helye 25, értéke 375.
Minthogy 25 és 375 is pozitív szám, teljesülnek az eredeti feltételek.

2. lehetőség: A $-\frac{3}{5}x^2 + 30x$ kifejezés szorzattá alakítva $-\frac{3}{5}x(x-50)$.
Ennek $x_1 = 0$ és $x_2 = 50$ a két zérushelye. A szélsőérték (jelen esetben a maximum) helye két zérushely számtani közepe, azaz $x = 25$. E helyen a kifejezés értéke 375.

748. A gyökök négyzetösszege a Viète-formulák segítségével kifejezhető. Ha az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$
$= (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$. De ehhez lenniük kell gyököknek, vagyis a diszkriminánsra teljesülnie kell: $0 \le p^2 - 4q$. Most $p = 2a + 1$ és $q = 1{,}5a^2 - 2a - 4$, vagyis keressük a $p^2 - 2q = (2a+1)^2 - 2(1{,}5a^2 - 2a - 4) = 4a^2 + 4a + 1 - 3a^2 + 4a + 8 =$
$= a^2 + 8a + 9 = (a+4)^2 - 7$ kifejezés minimumhelyét. Csábító (de rossz) válasz, hogy ez $a = -4$. Abból is látszik, hogy ez lehetetlen, mert ekkor a kifejezés minimumának értéke -7, ami bajosan lehetne két szám négyzetének összege. Ne feledkezzünk meg a feltételről: $0 \le p^2 - 4q = (2a+1)^2 - 4(1{,}5a^2 - 2a - 4) =$
$= 4a^2 + 4a + 1 - 6a^2 + 8a + 16 = -2a^2 + 12a + 17$.
Az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy csak $3 - \sqrt{17{,}5} \le a \le 3 + \sqrt{17{,}5}$ esetén (tehát kb. a $[-1{,}18;\ 7{,}18]$ intervallumban) van egyáltalán gyöke az eredeti paraméteres egyenletnek (tehát láthatóan -4-ben nincs). Ezen a tartományon kell tehát keresnünk az $(a+4)^2 - 7$ kifejezés minimumhelyét. Mivel a kifejezés pozitív együtthatós másodfokú, és az abszolút minimumhelyétől (a számegyenesen) jobbra eső intervallumon keressük minimumhelyét, ezért ezt a kérdéses intervallum bal oldali végpontjában, vagyis $a = 3 - \sqrt{17{,}5} \approx -1{,}18$ esetén találjuk meg. (Ekkor az eredeti egyenlet $x^2 + (7 - 2\sqrt{17{,}5})x + 29{,}75 - 7\sqrt{17{,}5} = 0$ alakú, vagyis
$p \approx -1{,}367$ és $q \approx 0{,}467$; az egyenletnek egy gyöke van $x_1 = x_2 = -3{,}5 + \sqrt{17{,}5} \approx$
$\approx -0{,}683$. Erre a kérdéses, minimális négyzetösszeg $59{,}5 - 14\sqrt{17{,}5} \approx 0{,}934$ – ami természetesen pontosan $2q$-val egyenlő, hiszen 0 diszkriminánsú esetről van szó, vagyis $p^2 = 4q$, és így $p^2 - 2q = 2q$.)

2.10. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

749. Két pozitív szám pontosan akkor egyenlő, ha a négyzeteik egyenlők.

a) Négyzetre emelés után kapjuk:
$(2+\sqrt{3})+2\cdot\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+(2-\sqrt{3})=6$, azaz $4+2\cdot\sqrt{4-3}=6$, igy $4+2=6$. (Felhasználtuk, hogy $2-\sqrt{3}>0$)

b) Négyzetre emelés után:
$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+2+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=16$, azaz $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=14$.
A bal oldalon közös nevezőre hozva: $\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=14$.
A kijelölt műveletet elvégezve: $\frac{4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=14$,
vagyis $\frac{14}{1}=14$. Ez igaz.

750. a) $\sqrt{x+1}+1=0$ b) $\sqrt{x+1}+1<0$ c) $\sqrt{x+1}+1>0$
A négyzetgyökfüggvény értelemezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, igy mindhárom esetben $x+1\geq 0$, azaz $x\geq -1$ valós számokra van értelmezve a $\sqrt{x+1}+1$ kifejezés.
A négyzetgyökfüggvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, az a), b) és c) esetben a baloldal értéke legalább 1. Ezért az a) és b) esetben nincs megoldás.
c) a bal oldal legalább 1, tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[-1;+\infty[$.

751. a) $\sqrt{3x-1}=3x-1$
A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, az értékkészletre ugyanez áll, ezért
$3x-1\geq 0$, azaz $x\geq\frac{1}{3}$ kikötés szükséges.
Az egyenlet $\sqrt{3x-1}(1-\sqrt{3x-1})=0$ alakban irható. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Így a megoldás $x_1=\frac{1}{3}$, illetve $x_2=\frac{2}{3}$.
Ezek az értékek a fenti kikötésnek megfelelnek, tehát ezek a megoldások.

b) $\sqrt{3x-1}=1-3x$. A négyzetgyökfüggvény. értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza. Ezért $3x-1\geq 0$, ebből $x\geq\frac{1}{3}$. Az értékkészlet is a nem-

negatív számok halmaza, ezért $1 - 3x \geq 0$, azaz $x \leq \frac{1}{3}$. A két kikötés egyszerre csak az $x = \frac{1}{3}$-ra teljesül. Ez valóban megoldás.

c) $\sqrt{3x-1} < 3x - 1$. A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $3x - 1 \geq 0$, (*) azaz $x \geq \frac{1}{3}$. Ekkor $3x - 1 < (3x - 1)^2$ egyenlőtlenség ekvivalens az eredetivel.

$(3x - 1)(3x - 2) > 0$

A két tényezőnek azonos előjelűnek kell lennie. Negatívok a (*) miatt nem lehetnek. Így a $3x - 1 > 0$ és $3x - 2 > 0$ egyenlőtlenségek adják a megoldást. Ezeknek egyszerre kell teljesülniük, így a megoldás $x > \frac{2}{3}$.

752. Minden nemnegatív b valós számra $\sqrt{b} \geq 0$.

Két nemnegatív kifejezés összege akkor 0, ha mindkét kifejezés egyszerre 0.

Az első kifejezés $x = -3$-ra, a másik $x = \frac{2}{3}$-ra nulla.

Mivel nincs olyan valós szám , amelyre a két kifejezés egyszerre 0, ezért az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása.

753. A négyzetgyök a nemnegatív valós számokra van értelmezve, ezért

$$\frac{2}{3} - 5x \geq 0 \quad \text{és} \quad 3x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x \leq \frac{2}{15} \qquad\qquad x \geq -\frac{1}{6}$$

Ezekből következik, hogy az egyenlet a $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{2}{15}$ valós számokra értelmezhető.

$$\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} = \sqrt{3x + \frac{1}{2}}$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív a $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{2}{15}$ valós számokra, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás $\frac{2}{3} - 5x = 3x + \frac{1}{2}$.

Innen $x = \frac{1}{48}$, amely a feltételnek megfelelő megoldása az egyenletnek.

754. Ha $x \in \mathbf{R}^-$, akkor $x - \frac{1}{3} < 0$, $\sqrt{x - \frac{1}{3}}$ nem valós szám, tehát $M = \emptyset$.

755. a) A négyzetgyök miatt egyrészt $2x + 7 \geq 0$, másrészt $3x + 8 \geq 0$ teljesülése szükséges.

Az egyenlet alaphalmaza tehát $A = \left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$.

Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$9x^2 + 48x + 64 = 2x + 7$

$9x^2 + 46x + 57 = 0$

A megoldóképlettel -3 és $-\frac{19}{9}$ adódik, de közülük csak a $-\frac{19}{9}$ eleme az alaphalmaznak. Így $M = \left\{-\frac{19}{9}\right\}$.

b) A négyzetgyök miatt egyrészt $3 - 4x \geq 0$, másrészt $5 - 12x \geq 0$ teljesülése szükséges.

Az egyenlet alaphalmaza tehát $A = \left]-\infty; \frac{5}{12}\right]$.

Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$144x^2 - 120x + 25 = 3 - 4x$

$144x^2 - 116x + 22 = 0$

$72x^2 - 58x + 11 = 0$

A megoldóképlettel $\frac{1}{2}$ és $\frac{11}{36}$ adódik, de közülük csak a $\frac{11}{36}$ eleme az alaphalmaznak. Így $M = \left\{\frac{11}{36}\right\}$.

756. a) Rendezzük az egyenletet: $\sqrt{2x - 2} = x - 13$.

A négyzetgyök miatt egyrészt $2x - 2 \geq 0$, másrészt $x - 13 \geq 0$ teljesülése szükséges. Az egyenlet alaphalmaza tehát $A = [13; +\infty[$.

Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$2x - 2 = x^2 - 26x + 169$

$x^2 - 28x + 171 = 0$

A megoldóképlettel 9 és 19 adódik, de csak a 19 eleme az alaphalmaznak. Így $M = \{19\}$.

b) Rendezzük az egyenletet: $2\sqrt{2x - 1} = \sqrt{7x + 1}$.

A négyzetgyökök miatt egyrészt $2x - 1 \geq 0$, másrészt $7x + 1 \geq 0$ teljesülése szükséges. Az egyenlet alaphalmaza tehát $A = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$4(2x - 1) = 7x + 1 \Rightarrow x = 5$

Mivel $5 \in A$, ezért az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{5\}$.

757. a) A négyzetgyök miatt: $x \le 3$ és $1{,}5 \le x$ és $-2 \le x$; vagyis $1{,}5 \le x \le 3$ esetén van mindhárom gyöknek értelme. Ezért $A = [1{,}5;\ 3]$

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{x+2} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$3 - x + 2\sqrt{3-x}\sqrt{2x-3} + 2x - 3 = x + 2$$

$$2\sqrt{3-x}\sqrt{2x-3} = 2 \qquad /:2, /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$(3-x)(2x-3) = 1$$

$$-2x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$x_1 = 2{,}5; \quad x_2 = 2$$

Mindkét gyök eleme A-nak, tehát $M = \{2;\ 2{,}5\}$.

b) A négyzetgyök miatt: $x \le 5$ és $0 \le x$; vagyis $0 \le x \le 5$. Ezért $A = [0;\ 5]$

$$\sqrt{3} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$3 + 2\sqrt{3}\sqrt{5-x} + 5 - x = x$$

$$2\sqrt{3}\sqrt{5-x} = 2x - 8 \qquad /:2, /^2, \text{ ha } 4 \le x; \text{ vagyis } 4 \le x \le 5$$

$$3(5-x) = x^2 - 8x + 16$$

$$0 = x^2 - 5x + 1$$

$$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{5{,}25} \begin{cases} x_1 \approx 4{,}79 \\ x_2 \approx 0{,}21 \end{cases}$$

Ebből x_1 gyöke az adott egyenletnek, x_2 nem.

758. a) A négyzetgyök miatt: $-1 \le x$ és $-2 \le x$ és $x \le 1$; vagyis $-1 \le x \le 1$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{1-x} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$x + 1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} + x + 2 = 1 - x$$

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} = -2 - 3x \qquad /^2, \text{ ha } x \le -\frac{2}{3}, \text{ vagyis } -1 \le x \le -\frac{2}{3}$$

$$4(x+1)(x+2) = 4 + 12x + 9x^2$$

$$0 = 5x^2 - 4$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{0{,}8} \approx \pm 0{,}89$$

Ebből x_2 gyöke az egyenletnek, x_1 nem, azaz a megoldás $x = -\sqrt{0{,}8}$.

b) A négyzetgyök miatt: $-2 \le x$ és $x \le 3$; vagyis $-2 \le x \le 3$; a jobb oldali gyökjel alatt álló szám is pozitív, értelmes

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} \qquad /^2, \text{ ha } \sqrt{3-x} < \sqrt{x+2}, \text{ azaz ha } 0{,}5 < x, \text{ vagyis } 0{,}5 < x \le 3$$

$$x + 2 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x} + 3 - x = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$-2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x} = -2\sqrt{6} \qquad /:(-2),\ /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$(x+2)(3-x) = 6$$

$$-x^2 + x = 0$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 0$$

Ebből x_1 gyöke az egyenletnek, x_2 nem.

759. a) A négyzetgyök miatt: $-2 \le x$ és $1 \le x$; vagyis $1 \le x$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1 \qquad /^2, \text{ ha } \sqrt{x-1} < \sqrt{x+2}, \text{ ami mindig teljesül}$$

$$x + 2 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + x - 1 = 1$$

$$-2\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} = -2x \qquad /:(-2),\ /^2, \text{ ha } 0 \le x, \text{ ami már teljesül}$$

$$(x+2)(x-1) = x^2$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

A kapott szám gyöke az egyenletnek.

b) A négyzetgyök miatt: $2 \le x$ és $-3 \le x$; vagyis $2 \le x$

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} = 2$$

Mivel $\sqrt{x+3}$ mindig nagyobb mint $\sqrt{x-2}$, a bal oldal mindig negatív, tehát nincs megoldás.

760. a) A négyzetgyök miatt: $-2 \le x$ és $1 \le x$; vagyis $1 \le x$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{4x-4} = 4 \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$x + 2 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{4x-4} + 4x - 4 = 16$$

$$2\sqrt{x+2}\sqrt{4x-4} = 18 - 5x \qquad /^2, \text{ ha } x \le 3{,}6; \text{ vagyis } 1 \le x \le 3{,}6$$

$$4(x+2)(4x-4) = 324 - 180x + 25x^2$$

$$0 = 9x^2 - 196x + 356$$

$x_1 = 19{,}\dot{7}$; $x_2 = 2$

Ebből x_2 gyöke az egyenletnek, x_1 nem.

b) A négyzetgyök miatt: a bal oldalon $x \le 2 - \sqrt{2}$ vagy $2 + \sqrt{2} \le x$,
a jobb oldalon $3 - \sqrt{3} \le x \le 3 + \sqrt{3}$, vagyis végül

$2 + \sqrt{2} \le x \le 3 + \sqrt{3}$ (a határok értéke kb. 3,41 és 4,73)

$$\sqrt{x^2 - 4x + 2} = \sqrt{-x^2 + 6x - 6} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 6x - 6$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 1$$

Ebből x_1 gyöke az egyenletnek, x_2 nem.

761. a) A belső gyökjel miatt $1 \le x$, a külső gyökjel alatti kifejezés mindig pozitív

$$\sqrt{3 + \sqrt{x - 1}} = 1 \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal pozitív}$$

$$3 + \sqrt{x - 1} = 1$$

$$\sqrt{x - 1} = -2,$$

ami lehetetlen, tehát a feladatnak nincs megoldása.

b) A bal oldali belső gyökjel miatt $-2{,}5 \le x$, a külső gyökjel alatti kifejezés mindig pozitív, a jobb oldal miatt $-2 \le x$; vagyis végül $-2 \le x$

$$\sqrt{1 + \sqrt{2x + 5}} = \sqrt{x + 2} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$1 + \sqrt{2x + 5} = x + 2$$

$$\sqrt{2x + 5} = x + 1 \qquad /^2, \text{ ha } -1 \le x;$$

$$2x + 5 = x^2 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 4$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2$$

Ebből az $x_1 = 2$ valóban gyöke az egyenletnek, az $x_2 = -2$ azonban nem.

762. A bal oldali belső gyökjel miatt $-0{,}25 \le x$, a külső gyökjel miatt $x \le 3{,}75$, a jobb oldal miatt $1 \le x$; vagyis végül $1 \le x \le 3{,}75$

$$\sqrt{4 - \sqrt{4x + 1}} = \sqrt{x - 1} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$

$$4 - \sqrt{4x + 1} = x - 1$$

$$5 - x = \sqrt{4x + 1} \qquad /^2, \text{ ha } x \le 5, \text{ ami már teljesül}$$

$$25 - 10x + x^2 = 4x + 1$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$x_1 = 12;\ x_2 = 2$$

Ebből x_2 gyöke az egyenletnek, x_1 nem.

763. A négyzetgyökök miatt egyrészt $x - 20 \geq 0$, másrészt $0 \leq 4 + x \leq 36$ szükséges.
Az egyenlet alaphalmaza tehát $A = [20; 32]$.
Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:
$6 - \sqrt{4+x} = x - 20$,
Rendezve: $\sqrt{4+x} = 26 - x$. (1)
Az A alaphalmaz 26-nál nagyobb elemei nem tartozhatnak a megoldáshalmazhoz, hiszen ezek bármelyikét behelyettesítve a most kapott – az eredetivel az A alaphalmazon ekvivalens – egyenletbe, a jobb oldalon negatív számot kapunk. Ez pedig nem lehet egyenlő a bal oldalon álló pozitív számmal.
Az eredeti egyenlet megoldását elegendő tehát egy A-nál szűkebb $A^* := [20; 26]$ halmazban keresni.
Az A^* halmazon az (1) egyenlet négyzetre emelése ekvivalens átalakítás:
$4 + x = x^2 - 52x + 676$,
$x^2 - 53x + 672 = 0$.
A megoldóképlettel 21 és 32 adódik, de csak a 21 eleme az A^* alaphalmaznak.
Így $M = \{21\}$.

764. a) A négyzetgyökök miatt $x + 3 \geq 0$, $x + 8 \geq 0$ és $x - 24 \geq 0$ szükséges, amiből $x \geq 24$. Az egyenlet mindkét oldala nemnegatív, négyzetre emelhetünk:
$x + 3 + 2\sqrt{x+3}\sqrt{x+8} + x + 8 = x - 24$, rendezve $2\sqrt{(x+3)(x+8)} = -x - 35$.
Szükséges, hogy $-x - 35 \geq 0$ teljesüljön, azaz $-35 \geq x$ legyen. Ezt összevetve az $x \geq 24$ kikötéssel, a feladatnak nem lehet megoldása.

b) Ha megtesszük a szükséges vizsgálatokat, akkor egyrészt $x \leq 3$, másrészt $x > 3$, tehát a feladatnak nincsen megoldása.

765. A négyzetgyökök miatt $7 - 4x \geq 0$, $-2x \geq 0$ és $1 - 14x \geq 0$ szükséges.
Az egyenlet alaphalmaza tehát $A :=]-\infty; 0]$.
Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:
$7 - 4x - 2x + 2\sqrt{-2x(7-4x)} = 1 - 14x$.
Rendezve:
$2\sqrt{8x^2 - 14x} = -6 - 8x$,
$\sqrt{8x^2 - 14x} = -(4x + 3)$.

Az A alaphalmaz $-\frac{3}{4}$-nél nagyobb elemei nem tartozhatnak a megoldáshalmazhoz, hiszen ezek bármelyikét behelyettesítve a most kapott – az eredetivel az A alaphalmazon ekvivalens – egyenletbe, a jobb oldalon negatív számot kapunk. Ez pedig nem lehet egyenlő a bal oldalon álló pozitív számmal.

Az eredeti egyenlet megoldását elegendő tehát egy A-nál szűkebb $A^* := \left]-\infty ; -\frac{3}{4}\right]$ halmazon keresni.

Az A^* halmazon az (1) egyenlet négyzetre emelése ekvivalens átalakítás:

$8x^2 - 14x = 16x^2 + 24x + 9,$

$8x^2 + 38x + 9 = 0.$

A megoldóképlettel $-\frac{9}{2}$ és $-\frac{1}{4}$ adódik, de csak a $-\frac{9}{2}$ eleme az A^* alaphalmaznak.

Ezért $M = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$.

766. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$

A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, ezért $1 - x \geq 0$, azaz $x \leq 1$, másrészt $1 + x \geq 0$, azaz $x \geq -1$, összefoglalva annak kell teljesülnie, hogy $|x| \leq 1$ (más jelöléssel: $-1 \leq x \leq 1$). Ennek teljesülése esetén a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$2 + 2\sqrt{1-x^2} = 1.$

Nincs megoldás, mert a jobb oldal 1, a bal oldal viszont legalább 2.

Másik megoldás:

Az értelmezési tartomány vizsgálata után azonnal látszik, hogy az egyenletnek nincs megoldása. Ugyanis

a jobb oldal értéke x-től függetlenül 1, a bal oldal ennél nagyobb, mert

ha $x = 0$, akkor a baloldal értéke 2;

ha $x \neq 0$, ($|x| \leq 1$), akkor a baloldal egyik tagja nagyobb egynél és a másik pozitív.

767. a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$. Ez $\sqrt{x}$-ben másodfokú egyenlet, melynek gyökei 3 és -2.

$\left((\sqrt{x})_1 = 3,\ (\sqrt{x})_2 = -2\right)$.

Minthogy a négyzetgyökfüggvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, csak a 3 jöhet szóba. Ezért $x = 9$, ami ki is elégíti az egyenletet.

b) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$. Ez $\sqrt{x}$-ben másodfokú egyenlet, melynek gyökei 3 és 2.

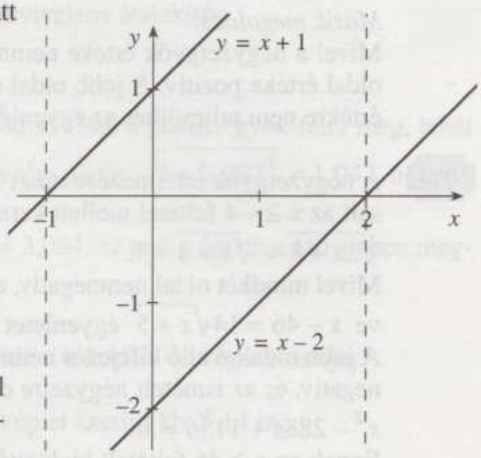
$\left((\sqrt{x})_1 = 3,\ (\sqrt{x})_2 = 2\right)$.

Ennek megfelelően az egyenlet gyökei $x_1 = 9$ és $x_2 = 4$. Ezek az eredeti egyenletnek valóban megoldásai.

768. A négyzetgyök és a tört értelmezése miatt kell, hogy $\frac{x+1}{x-2} > 0$ legyen.

Ennek megoldása az ábráról leolvasva:

$]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$. (1)



Legyen $a := \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$. (2)

Így az egyenlet

$2a + \frac{3}{a} = 5$, amelynek megoldásai:

$a_1 = 1{,}5$; $a_2 = 1$.

Ezt visszahelyettesítve (2)-be, mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens művelet.

Innen az első esetben $x = 4{,}4$ megoldást, a második eset ellentmondást ad.

Tehát az egyenlet racionális megoldása $x = 4{,}4$, amely megfelel az (1) feltételnek is.

769. A négyzetgyök miatt $x^2 + x + 7 \geq 0$. A bal oldal teljes négyzetté alakításából leolvasható, hogy ez minden valós x-re teljesül.

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{3}{4} \geq 0$.

Alakítsuk át az egyenletet!

$x^2 + x + 7 - 7 + \sqrt{x^2 + x + 7} = 5$.

Legyen $a := \sqrt{x^2 + x + 7}$.

Így az egyenlet $a^2 - 7 + a = 5$ alakra írható, melynek megoldásai: $a_1 = 3$; $a_2 = -4$.

$\sqrt{x^2 + x + 7} = 3$ esetén mivel mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens művelet.

$x^2 + x + 7 = 9$, melynek megoldásai: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

$\sqrt{x^2 + x + 7} \neq -4$, mivel a bal oldal minden x-re pozitív értéket ad.

A kapott értékeket az eredeti egyenletbe behelyettesítve, az egyenlet valós megoldásai: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

770. A négyzetgyök definíciója miatt

$\sqrt{-x}$ akkor van értelmezve, ha $-x \geq 0$, tehát $x \leq 0$.

$\sqrt{2x}$ akkor van értelmezve, ha $x \geq 0$

E két négyzetgyök egyszerre csak akkor van értelmezve, ha $x = 0$.

Ezt az egyenletbe behelyettesítve $\sqrt{14} + 5 \neq 0$.

Tehát az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása.

Másik megoldás:
Mivel a négyzetgyök értéke nemnegatív, ehhez a bal oldalon 5-öt hozzáadva a bal oldal értéke pozitív. A jobb oldal értéke negatív vagy nulla, így semmilyen valós x értékre nem teljesülhet az egyenlőség.

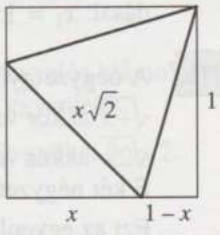
771. A négyzetgyök értelmezése miatt $2x + 8 \geq 0$ és $x + 5 \geq 0$, így az egyenlet megoldásait az $x \geq -4$ feltétel mellett keressük.
$\sqrt{2x+8} = \sqrt{x+5} + 7$.
Mivel mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. Rendezve $x - 46 = 14\sqrt{x+5}$ egyenletet kapjuk.
A jobb oldalon álló kifejezés nemnegatív, így $x \geq 46$ esetén lesz mindkét oldal nemnegatív, és az ismételt négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. Innen
$x^2 - 288x + 1136 = 0$.
Ennek az $x \geq 46$ feltételt kielégítő megoldása $x = 284$.
A kapott értéket behelyettesítve az eredeti egyenletbe, az egyenlet valós megoldása $x = 284$.

772. A négyzetgyök értelmezése miatt

$$\left.\begin{aligned} x+1 &\geq 0 \\ x-6 &\geq 0 \\ 2x+19 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

ezekből következik, hogy az egyenlet megoldását az $x \geq 6$ valós számok között keressük.
Ezekre az értékekre mindkét oldal nemnegatív, tehát itt a négyzetre emelés ekvivalens művelet.
$x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-6)} + x - 6 = 2x + 19$, ebből $\sqrt{x^2 - 5x - 6} = 12$.
Mivel $x \geq 6$, mindkét oldal nemnegatív, az újbóli négyzetre emelés is ekvivalens művelet.
$x^2 - 5x - 150 = 0$.
Ennek az egyenletnek az $x \geq 6$ feltételnek eleget tevő gyöke: $x = 15$, amely valós szám valóban gyöke az eredeti egyenletnek.

773. Az ábra jelöléseit használva a háromszög alapja $x\sqrt{2}$, a szára $\sqrt{1^2 + (1-x)^2}$ hosszú.



A háromszög kerülete: $2\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x\sqrt{2} = 3{,}084$.
Alaphalmaz a feladat szövegének megfelelően az $A :=]0; 1]$ halmaz.
Rendezzük az egyenletet:
$2\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3{,}084 - x\sqrt{2}$.

Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:
$4x^2 - 8x + 8 = 2x^2 - 8{,}723x + 9{,}511$,
$2x^2 + 0{,}723x - 1{,}511 = 0$.
A megoldóképletből $-1{,}069$ és $0{,}707$ adódik. Csak a pozitív gyök felel meg, tehát a háromszög alapja $0{,}707 \cdot \sqrt{2} = 1{,}000$, szára pedig $\sqrt{1 + 0{,}293^2} = 1{,}042$ hosszú.
Ellenőrzés:
A háromszög kerülete $1{,}000 + 2 \cdot 1{,}042 = 3{,}084$, ez pedig éppen a szövegben megadott érték.

774. Átrendezve a képletet: $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$. Átváltva a kezdő- és végsebességet

a) 0-ról $5{,}\dot{5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra kell gyorsulnia, ezt a képlet szerint kb. 5,14 m;

b) $8{,}\dot{3}$-ról $13{,}\dot{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra kell gyorsulnia, ezt a képlet szerint kb. 20,6 m;

c) $13{,}\dot{8}$-ról $19{,}\dot{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra kell gyorsulnia, ezt a képlet szerint kb. 30,9 m

úton tudja megtenni.

775. Átrendezve a képletet: $s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$. Átváltva a kezdő- és végsebességet, $13{,}\dot{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra kell lelassuljon

a) $16{,}\dot{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ról, ezt a képlet szerint kb. 5,3 m;

b) $19{,}\dot{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ról, ezt a képlet szerint kb. 11,6 m;

c) $22{,}\dot{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ról, ezt a képlet szerint kb. 18,8 m

úton tudja megtenni.

776. Átrendezve a képletet: $h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$, behelyettesítve az adatokat 13,75 m adódik eredményül, amit az adatok (különösen a g) csak két jegyre való pontossága miatt tekinthetünk 14 m-nek. (A sebesség lehet felfelé, illetve lefelé haladás közben is $25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ezek az esetek csak előjelben különböznek, s ezért a képletbe helyettesítéskor a négyzetre emelés miatt ez a különbség eltűnik. A kő tehát fel- és lefelé haladás közben azonos magasságban azonos nagyságú sebességgel mozog.)

777. Az első képletből átrendezéssel a fizikából jól ismert $s = \frac{a}{2}t^2$ képletet kapjuk, amelybe a helyébe beírva a második képletből átrendezéssel kapott $a = \frac{v}{t}$ kifejezést, adódik: $s = \frac{vt}{2}$. Átváltva $100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 27,\dot{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, így behelyettesítéssel kb.

a) 111 m az eredmény.

b) 139 m az eredmény.

c) 167 m az eredmény.

d) A gyorsulásokat az imént kapott $a = \frac{v}{t}$ kifejezéssel számolhatjuk, rendre kb. $3,47\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $2,78\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ és $2,31\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ adódik.

778. a) Átrendezve a képletet: $\ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$, behelyettesítve az adatokat kb. 1 m (0,994 m) adódik.

b) Az eredeti képletbe helyettesítve kb. 4,88 s adódik.

c) Az a)-beli képletből behelyettesítés után kb. 0,167 m adódik.

779. a) Átrendezve a képletet: $\ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$, behelyettesítve az adatokat kb. 2,24 m adódik.

b) Másképp átrendezve a képletet: $g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$, amibe behelyettesítve kb. $5,52\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ adódik.

c) Ismét az a)-beli képletbe helyettesítve kb. 1,26 m adódik.

780. a) A bambuszfa magasságára 100 év múlva $x = 100$ behelyettesítésével adódik: $m(100) = 2\sqrt{0,2 \cdot 100 + 1} + 0,5 = 2\sqrt{21} + 0,5 \approx 9,67$ méter.

b) Ha a maximum 30 méter, akkor $m(x) = 2\sqrt{0,2 \cdot x + 1} + 0,5 < 30$, ahonnan $x < 1082,8$ év adódik, tehát legfeljebb 1082 évig élhetne a bambuszfa.

c) Ehhez azt az egyenletet kell megoldani, hogy $3m(15) = m(x)$, azaz: $m(x) = 2\sqrt{0,2 \cdot x + 1} + 0,5 = 3(2\sqrt{0,2 \cdot 15 + 1} + 0,5) = 13,5$ (15 évesen éppen 4,5 méter magas a bambuszfa, ennek a háromszorosa a 13,5 méter). Ebből azt kapjuk, hogy: $2\sqrt{0,2 \cdot x + 1} = 13$, azaz $x = 206,25$. Tehát 206 és egynegyed évesen lesz háromszor olyan magas, mint 15 évesen.

781. a) A négyzetgyök miatt: $2 \le x$ és $1{,}5 \le x$; vagyis $2 \le x$, tehát $A = [2; +\infty[$

$$\sqrt{x-2} < \sqrt{2x-3} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$
$$x - 2 < 2x - 3$$
$$1 < x,$$

amit az alaphalmazzal összevetve a megoldáshalmaz: $[2; +\infty[$.

b) A négyzetgyök miatt: $0{,}4 \le x$ és $-1{,}\dot{3} \le x$; vagyis $0{,}4 \le x$, tehát $A = [0{,}4; +\infty[$

$$\sqrt{5x-2} \le \sqrt{3x+4} \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal nemnegatív}$$
$$5x - 2 \le 3x + 4$$
$$2x \le 6$$
$$x \le 3,$$

amit az alaphalmazzal összevetve a megoldáshalmaz: $[0{,}4; 3]$.

(A feladat grafikusan is megoldható.)

782. a) A belső gyökjel miatt $-3 \le x$, a külső gyökjel alatti kifejezés mindig pozitív, tehát $A = [-3; +\infty[$

$$\sqrt{5+\sqrt{x+3}} < 3 \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal pozitív}$$
$$5 + \sqrt{x+3} < 9$$
$$\sqrt{x+3} < 4 \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal pozitív}$$
$$x + 3 < 16$$
$$x < 13,$$

amit az alaphalmazzal összevetve a megoldáshalmaz: $[-3; 13[$.

b) A belső gyökjel miatt $1 \le x$, a külső gyökjel alatti kifejezés mindig pozitív. Ez utóbbi gondolatot tovább vezetve a külső gyökjel alatti kifejezés mindig legalább 3, ezért gyöke legalább $\sqrt{3}$, azaz sosem lehet kisebb 1-nél –, nincs megoldás.

Másik megoldás:
Levezetve:

$$\sqrt{3+\sqrt{x-1}} \le 1 \qquad /^2, \text{ mert mindkét oldal pozitív}$$
$$3 + \sqrt{x-1} \le 1$$
$$\sqrt{x-1} \le -2,$$

ami lehetetlen, tehát a feladatnak nincs megoldása.

783. A belső gyökjel miatt $-0{,}25 \le x$, a külső gyökjel miatt $x \le 3{,}75$; vagyis $-0{,}25 \le x \le 3{,}75$, tehát $A = [-0{,}25;\ 3{,}75]$

a) $\sqrt{4-\sqrt{4x+1}} < 1$ $\quad / ^2$, mert mindkét oldal nemnegatív

$4-\sqrt{4x+1} < 1$

$3 < \sqrt{4x+1}$ $\quad / ^2$, mert mindkét oldal nemnegatív

$9 < 4x+1$

$2 < x$,

amit az alaphalmazzal összevetve a megoldáshalmaz: $]2;\ 3{,}75]$

b) $\sqrt{4-\sqrt{4x+1}} < 3$ $\quad / ^2$, mert mindkét oldal nemnegatív

$4-\sqrt{4x+1} < 9$

$-5 < \sqrt{4x+1}$,

ami mindig teljesül, vagyis a megoldáshalmaz azonos az alaphalmazzal: $[-0{,}25;\ 3{,}75]$.

784. A egyenlet $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = 6$ alakra írható.

Mivel $\sqrt{a^2} = |a|$, egyenletünk így is felírható: $|x+3| + |x-2| = 6$.

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{ha } x \ge -3, \\ -(x+3), & \text{ha } x < -3. \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x \ge 2, \\ -(x-2), & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Az egyenlet megoldását 3 részre bontjuk.

I. $x \le -3$

$-(x+3) - (x-2) = 6$, ebből $x = -3{,}5$. Mivel $-3{,}5 < -3$, tehát a $-3{,}5$ megoldása az egyenletnek.

II. $-3 \le x \le 2$

$x + 3 - (x-2) = 6$, ebből $5 = 6$ adódik, amely ellentmondás. Ezen az intervallumon az egyenletnek nincs megoldása.

III. $x \ge 2$

$x + 3 + x - 2 = 6$, melyből $x = 2{,}5$. Mivel $2{,}5 > 2$, tehát a $2{,}5$ megoldása az egyenletnek.

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = -3{,}5$; $x_2 = 2{,}5$, melyek kielégítik az egyenletet.

785. Emeljük négyzetre mindkét oldalt, majd rendezés után $x = \sqrt{2x+3}$ egyenletet kapjuk, melyet ismét négyzetre emelünk (nem ekvivalens műveletek!) és rendezve $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei $x_1 = 3$; $x_2 = -1$. Ezeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve, csak az $x = 3$ megoldása az egyenletnek.

786. A négyzetgyök miatt: $x \geq 4$ vagy $x \leq 2$.
Ha $x \leq 2$, akkor a jobb oldal negatív, így teljesül az egyenlőtlenség.
Vizsgáljuk az $x \geq 4$ esetet, ekkor a jobb oldal is pozitív. Négyzetre emelünk:
$x^2 - 6x + 8 \geq 4x^2 - 24x + 36$, azaz
$0 \geq 3x^2 - 18x + 28$.
A másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, így az $x \geq 4$ esetben nincs megoldás, mert a másodfokú tag együtthatója pozitív.
A feladat megoldása tehát: $]-\infty; 2]$.

787. Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b, átfogója $a + 1$, tudjuk továbbá, hogy $1 \leq b \leq 4$.
Felírva a Pitagorasz-tételt:

$$a^2 + b^2 = (a+1)^2.$$

Kibontva:

$$b^2 = 2a + 1.$$

Az $1 \leq b \leq 4$ feltételből adódik, hogy $1 \leq b^2 \leq 16$, azaz egyrészt $1 \leq 2a + 1$, másrészt $2a + 1 \leq 16$. Ebből $0 \leq a \leq 7{,}5$ adódik. Mivel a egy szakasz cm-ben mért hossza, $0\text{ cm} < a \leq 7{,}5\text{ cm}$ a megoldás.

788. Az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$.
Csökkentsük a bal oldalt: $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 2\sqrt{n-1}$, és oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$2\sqrt{n-1} \geq 100.$$

Innen

$$n - 1 \geq 2500.$$

Az $n = 2501$ biztosan jó. Ez valóban a legkisebb jó n, mert ha $n < 2501$, azaz $n \leq 2500$, akkor $\sqrt{n} \leq 50$ és $\sqrt{n-1} < 50$, tehát $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 100$.
A megoldás: $n = 2501$.

2.11. Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

789. a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$M = \{0\}$

b) $|x| = 4{,}2 \Leftrightarrow (x = 4{,}2 \vee x = -4{,}2)$
$M = \{-4{,}2; 4{,}2\}$

c) $|x| = -4{,}2$
$M = \{\ \}$

790. a) $|x + 3{,}2| = 4{,}8 \Leftrightarrow (x + 3{,}2 = 4{,}8 \vee x + 3{,}2 = -4{,}8)$
$M = \{-8; 1{,}6\}$

b) $|x - 2{,}8| = 3{,}2 \Leftrightarrow (x - 2{,}8 = 3{,}2 \vee x - 2{,}8 = -3{,}2)$
$M = \{-0{,}4; 6\}$

c) $|2x + 5{,}4| = 11{,}6 \Leftrightarrow (2x + 5{,}4 = -11{,}6 \vee 2x + 5{,}4 = 11{,}6)$
$M = \{-8{,}5; 3{,}1\}$

791. a) $|x^3| = 8 \Leftrightarrow (x^3 = -8 \vee x^3 = 8)$
$M = \{-2; 2\}$

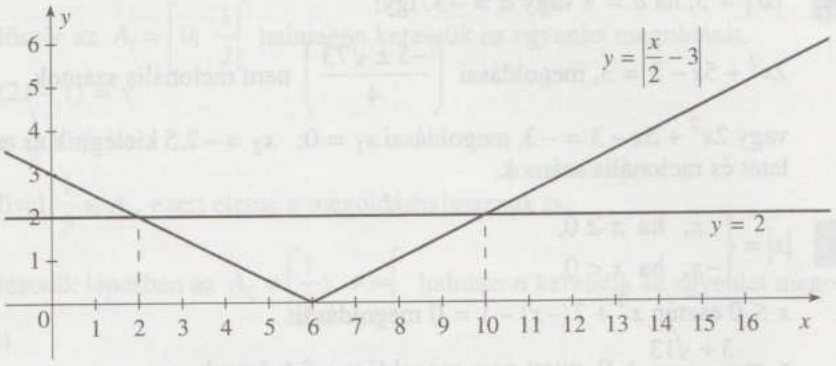
b) $x^6 = 3^4 \Rightarrow |x| = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(x = -3^{\frac{2}{3}} \vee x = 3^{\frac{2}{3}}\right)$
$M = \left\{-\sqrt[3]{9}; \sqrt[3]{9}\right\}$

c) $\sqrt{x^6} = \sqrt{x^2}$
$x^6 = x^2$
$x^2(x^4 - 1) = 0$
$M = \{-1; 0; 1\}$

792. $\left|\frac{x}{2} - 3\right| = 2 \qquad x \in \mathbf{N}$

Algebrai út:
Két egyenletre bontjuk:
$\frac{x}{2} - 3 = 2$, ha $x \geq 6$, illetve $\frac{x}{2} - 3 = -2$, ha $x < 6$;
ezekből $x_1 = 10$, illetve $x_2 = 2$.
Ezek megoldások, mert természetes számok és az egyenletet kielégítik. (Ellenőrzés behelyettesítéssel.)

Grafikus út (Lásd a következő ábrát!):



Megoldás $x = 2$, illetve $x = 10$.

793. $\frac{x}{|x|} = 1 + x \qquad x \neq 0$

Ha $x > 0$, akkor a bal oldal 1, a jobb oldal pedig nagyobb 1-nél. Ez ellentmondásra vezet, nincs megfelelő x.

Ha $x < 0$, a bal oldal -1, ebből $x = -2$ adódik. Ez a megoldás, mert kielégíti az egyenletet és a feltételnek megfelel.

794. a) $\frac{1}{|x|} + |x| = 2$ b) $\frac{1}{|-x|} + |-x| = 2$ c) $\frac{1}{|x|} + |x| = -2$

A nevező nem lehet nulla, ezért $x \neq 0$.

A nevezővel végigszorozva

a) $|x|$-ben másodfokú egyenletet kapunk, melynek gyöke: $|x| = 1$, amiből a megoldás $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$.

b) Minthogy minden x-re $|-x| = |x|$, a megoldást lásd az a)-nál.

Másik megoldás:

$|-x|$-ben másodfokú egyenletet kapunk, amelynek gyöke:

$|-x| = 1$, amiből a megoldás: $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$.

c) $x \neq 0$ miatt $|x| > 0$, ezért a bal oldal pozitív, ugyanakkor a jobb oldal negatív, ezért a feladatnak nincs megoldása.

795. $|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{ha } x \geq -5 \\ -(x + 5), & \text{ha } x < -5 \end{cases}$

$x < -5$ esetén $3x + (x + 5) = 7$. Ebből $x = \frac{1}{2} > -5$ miatt nem megoldása az egyenletnek.

$x \geq -5$ esetén $3x - (x + 5) = 7$. Ebből $x = 6$ megoldása az eredeti egyenletnek.

796. $|a| = 3$, ha $a = 3$ vagy $a = -3$. Így:

$2x^2 + 5x - 3 = 3$, megoldásai $\left(\frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4}\right)$ nem racionális számok,

vagy $2x^2 + 5x - 3 = -3$, megoldásai $x_1 = 0$; $x_2 = -2{,}5$ kielégítik az eredeti egyenletet és racionális számok.

797. $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

$x \leq 0$ esetén $x^2 + 3(-x) - 1 = 0$ megoldásai:

$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} > 0$ miatt nem megoldása a feladatnak,

$x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0$ valós szám kielégíti az eredeti egyenletet.

$x \geq 0$ esetén $x^2 + 3x - 1 = 0$ egyenlet megoldásai:

$x_3 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} > 0$ valós szám kielégíti az egyenletet,

$x_4 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} < 0$ miatt nem megoldása az egyenletnek.

Tehát az egyenlet valós gyökei: $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ és $\frac{\sqrt{13} - 3}{2}$.

798. Az egyenlet átalakítva:

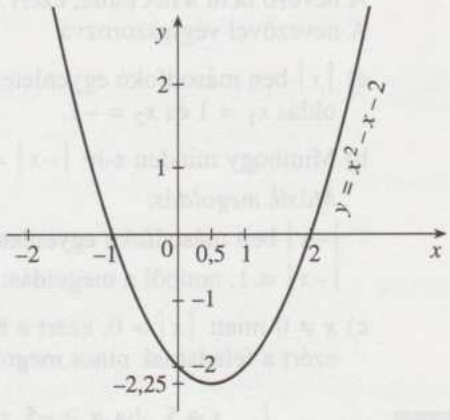
$|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2)$

$|a| = -a$, ha $a \leq 0$, így $x^2 - x - 2 \leq 0$ egyenlőtlenség egész gyökei adják az egyenlet megoldását.

Az $x \mapsto x^2 - x - 2$ $x \in \mathbf{R}$ függvény zérushelyei: -1 és 2. Az ábra alapján az egyenlőtlenség valós megoldásai:

$$-1 \leq x \leq 2.$$

Ezek közül egész számok: -1; 0; 1; 2, melyek kielégítik az eredeti egyenletet.



799. a) A négyzetgyök alatti kifejezés $(2x - 1)^2$-nel azonos, ez mindig nemnegatív. A négyzetgyök definíciója miatt az egyenlet jobb oldalán is nemnegatív számnak kell állnia (ha igaz kijelentést akarunk), így az egyenlet alaphalmaza $A = [0; +\infty[$.

$|2x - 1| = x$

Először az $A_1 = \left[0;\ \frac{1}{2}\right[$ halmazon keressük az egyenlet megoldását.

$-(2x-1) = x$

$x = \frac{1}{3}$

Mivel $\frac{1}{3} \in A_1$, ezért eleme a megoldáshalmaznak is.

Második lépésben az $A_2 = \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ halmazon keressük az egyenlet megoldását.

$2x - 1 = x$

$x = 1$

Mivel $1 \in A_2$, ezért eleme a megoldáshalmaznak is.

Tehát $M = \left\{\frac{1}{3};\ 1\right\}$.

b) A négyzetgyök alatti kifejezés mindig nemnegatív. A négyzetgyök definíciója miatt az egyenlet bal oldalán is nemnegatív számnak kell állnia (ha igaz kijelentést akarunk), így az egyenlet alaphalmaza $A = [-15; +\infty[$.
Az A alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$0{,}04x^2 + 1{,}2x + 9 = \frac{16x^2}{25}$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

A megoldóképlettel -3 és 5 adódik; mindkettő eleme az alaphalmaznak.
Ezért $M = \{-3; 5\}$.

c) A négyzetgyök alatti kifejezés $(5x + 2)^2$-nel azonos, ez mindig nemnegatív.
A négyztegyök definíciója miatt az egyenlet bal oldalán is nemnegatív számnak kell állnia (ha igaz kijelentést akarunk), így az egyenlet alaphalmaza:

$A = \left]-\infty;\ \frac{7}{2}\right]$.

Az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$4x^2 - 28x + 49 = 25x^2 + 20x + 4$$

$$21x^2 + 48x - 45 = 0$$

$$7x^2 + 16x - 15 = 0$$

A megoldóképlettel -3 és $\frac{5}{7}$ adódik; mindkettő eleme az alaphalmaznak.

Ezért $M = \left\{-3;\ \frac{5}{7}\right\}$.

800. a) Átrendezve: $|2x-4|+|x+3|=-1$, ami sosem teljesül (két nemnegatív szám összege nem lehet negatív), tehát nincs gyök.

b) Ekkor $\big|3-|x+2|\big|=4$

$3-|x+2|=4$; $3-|x+2|=-4$

$-1=|x+2|$, ez lehetetlen ; $7=|x+2|$

$7=x+2$; $-7=x+2$

$5=x$; $-9=x$

Mindkét kapott szám gyöke az eredeti egyenletnek is.

801. *Algebrai megoldás:* ekkor $x-a=\pm(x-4)$

$x-a=x-4$

ha $a=4$, $\forall x\in\mathbf{R}$ jó;

ha $a\neq 4$, nincs gyök

$x-a=-x+4$

$2x=a+4$

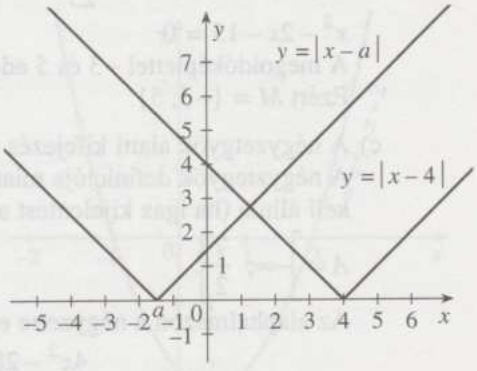
$x=\frac{a}{2}+2$,

ami bármely a esetén pontosan egy gyököt jelent.

Ezért az a) és c) eset (0 vagy 2 gyök) nem tud előfordulni, a b) $a\neq 4$ esetén teljesül, a d) pedig $a=4$ esetén.

Grafikus megoldás:

ábrázolva az $x\mapsto|x-a|$ és az $x\mapsto|x-4|$ függvényt láthatjuk, hogy a grafikonoknak vagy pontosan egy közös pontjuk van (ha $a\neq 4$), vagy minden pontjuk közös (ha $a=4$). Ezért az a) és c) eset nem fordul elő, a b) $a\neq 4$ esetén teljesül, a d) pedig $a=4$ esetén.



802. *Algebrai megoldás:* ekkor $x-b=\pm(2x-4)$

$x-b=2x-4$

$4-b=x$

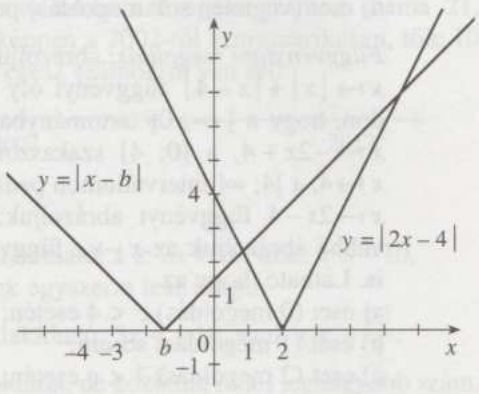
$x-b=-2x+4$

$3x=b+4$

$x=\frac{b+4}{3}$

mindkét ágon bármely b esetén pontosan egy-egy gyök van. Ez a két gyök egyenlő, ha $4-b=\frac{b+4}{3}$, vagyis ha $b=2$; minden más esetben két különböző gyökről van szó. Ezért az a) és d) eset (0 vagy végtelen sok gyök) nem tud előfordulni, a b) $b=2$ esetén teljesül, a c) pedig $b\neq 2$ esetén.

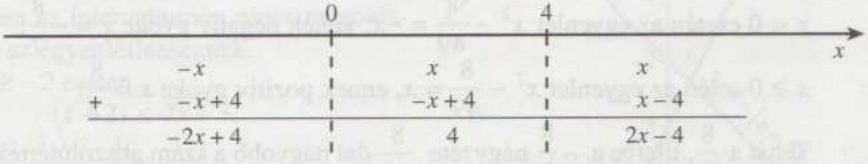
Grafikus megoldás: ábrázolva az $x\mapsto|x-b|$ és az $x\mapsto|2x-4|$ függvényt láthatjuk, hogy a grafikonoknak vagy pontosan egy közös pontjuk van (ha $b=2$), vagy pontosan két közös pontjuk van (ha $b\neq 2$). Ezért az a) és d) eset nem tud előfordulni, a b) $b=2$ esetén teljesül, a c) pedig $b\neq 2$ esetén.



803. A definíció révén:

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{ha } 0\le x,\\ -x, & \text{ha } x<0,\end{cases}\qquad |x-4|=\begin{cases}x-4, & \text{ha } 0<x-4, \text{ azaz } 4<x,\\ -x+4, & \text{ha } x-4\le 0, \text{ azaz } x\le 4.\end{cases}$$

Három tartományra osztjuk a számegyenest: $x<0$, $0\le x\le 4$, $4<x$, és tartományonként összegezzük a kifejezéseket:



Algebrai megoldás:

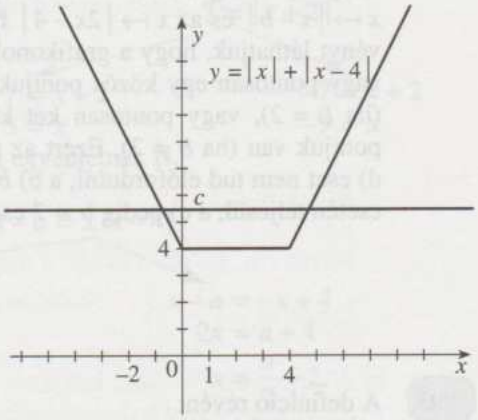
Ugyancsak tartományonként megoldjuk az egyenletet:

ha $x<0$:	ha $0\le x\le 4$:	ha $4<x$:
$-2x+4=c$	$4=c$	$2x-4=c$
$2-\frac{c}{2}=x$	ha $c=4$, $\forall x\in[0;4]$ jó; ha $c\neq 4$, nincs gyök	$x=\frac{c}{2}+2$
ez a megfelelő tartományba esik, ha		ez a megfelelő tartományba esik, ha
$2-\frac{c}{2}<0$		$4<\frac{c}{2}+2$
$4<c$		$4<c$

Összegezve tehát: $c < 4$ esetén nincs megoldás, $c = 4$ esetén $\forall x \in [0; 4]$ jó, $4 < c$ esetén pedig két megoldás van: $2 - \frac{c}{2}$ és $\frac{c}{2} + 2$ (és ez a feltétel mellett valóban két különböző gyök, hiszen $c = 4$-re esnének egybe). Ekkor az a) eset (0 megoldás) $c < 4$ esetén; a b) eset (1 megoldás) sosem; a c) eset (2 megoldás) $4 < c$ esetén; a d) eset (végtelen sok megoldás) pedig $c = 4$ esetén valósul meg.

Függvénytani megoldás: ábrázoljuk az $x \mapsto |x| + |x-4|$ függvényt oly módon, hogy a $]-\infty; 0[$ tartományban az $x \mapsto -2x + 4$, a $[0; 4]$ szakaszon az $x \mapsto 4$, a $]4; \infty[$ intervallumon pedig az $x \mapsto 2x - 4$ függvényt ábrázoljuk; továbbá ábrázoljuk az $x \mapsto c$ függvényt is. Látható, hogy az

a) eset (0 megoldás) $c < 4$ esetén;
b) eset (1 megoldás) sosem;
c) eset (2 megoldás) $4 < c$ esetén;
d) eset (végtelen sok megoldás) pedig $c = 4$ esetén valósul meg.



804. Legyen a keresett szám x. A feltétel szerint $x^2 - \frac{8}{49} = |x|$

Mivel $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$

$x < 0$ esetén az egyenlet $x^2 - \frac{8}{49} = -x$, ennek negatív gyöke $x = -\frac{8}{7}$.

$x \geq 0$ esetén az egyenlet $x^2 - \frac{8}{49} = x$, ennek pozitív gyöke $x = \frac{8}{7}$.

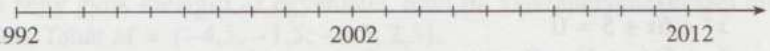
Tehát a $\frac{8}{7}$, illetve a $-\frac{8}{7}$ négyzete $\frac{8}{49}$-del nagyobb a szám abszolútértékénél, így a keresett szám $\frac{8}{7}$ vagy $-\frac{8}{7}$.

805. a) Az egyenlőtlenség ekvivalens az alábbiakkal:
$-0{,}6 \leq x - 0{,}4 \leq 0{,}6$
$-0{,}2 \leq x \leq 1$.
$M = [-0{,}2; 1]$.

b) Az egyenlőtlenség ekvivalens az alábbiakkal:
$-0{,}7 \leq x + 0{,}3 \leq 0{,}7$
$-1 \leq x \leq 0{,}4$.
$M = [-1; 0{,}4]$.

c) Az egyenlőtlenség ekvivalens az alábbiakkal:
$-7 \le 2x - 5 \le 7$
$-1 \le x \le 6$.
$M = [-1; 6]$.

806. $|2002 - x| \le 10$ Az [1992; 2012] intervallumba eső egész számok száma 21. Szemléltetve a számegyenesen tulajdonképpen a 2002-től szimmetrikusan, tőle 10 egységnél nem távolabbra elhelyezkedő egész számokról van szó.



807. $|x| > 2x + 10$

Ha $x \ge 0$, akkor az egyenlőtlenség így alakítható. $x \ge 2x + 10$, azaz $x \le -10$. Nincs olyan szám, amely a két feltételnek egyszerre tesz eleget.

Ha $x < 0$, akkor az egyenlőtlenség így alakítható: $3x < -10$, azaz $x < -\frac{10}{3}$.

Ezek az x-ek az egyenlőtlenségnek megoldásai, de közöttük nincs legnagyobb szám.

808. $|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \ge -2, \\ -(x+2), & \text{ha } x < -2. \end{cases}$

$x < -2$ esetén

$x + 2 < 2x - 3$, azaz

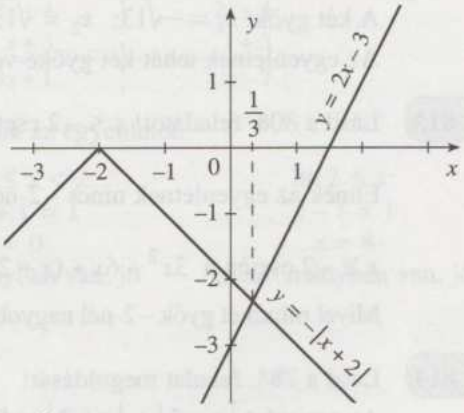
$5 < x$.

Ez ellentmond az $x < -2$ feltételnek, ezen az intervallumon nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.

$x \ge -2$ esetén

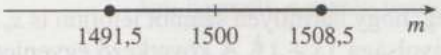
$-(x + 2) < 2x - 3$,

$\frac{1}{3} < x$.



Tehát az adott egyenlőtlenség az összes $x > \frac{1}{3}$ racionális számokra teljesül és másra nem. A megoldás helyességét a grafikonról is leolvashatjuk.

809. $-8{,}5 \le m - 1500 \le 8{,}5$
$1491{,}5 \le m \le 1508{,}5$



810. A c)-vel jelölt.

811. Mindhárom.

812. Bontsuk szorzattá az abszolútérték-zárójelben lévő kifejezést:
$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$
Két esetet vizsgálunk.
Első eset, ha $x^2 + 3x - 4 \geq 0$, ez $x \leq -4$ vagy $x \geq 1$ esetén áll fenn.
Ekkor
$x^2 + 3x - 4 + 3x + 9 = 0$
$x^2 + 6x + 5 = 0$
$(x + 5)(x + 1) = 0$, azaz $x_1 = -5$, $x_2 = -1$.
Ezek közül csak az $x = -5$ megoldás.

Második eset, ha $x^2 + 3x - 4 < 0$, ez $-4 < x < 1$ esetén teljesül.
Ekkor
$-(x^2 + 3x - 4) + 3x + 9 = 0$, azaz
$-x^2 + 4 + 9 = 0$, innen
$x^2 = 13$.
A két gyök: $x_1 = -\sqrt{13}$; $x_2 = \sqrt{13}$, ezek közül csak az $x = -\sqrt{13}$ megoldás.
Az egyenletnek tehát két gyöke van: -5 és $x = -\sqrt{13}$.

813. Lásd a 808. feladatot! $x \leq -2$ esetén $3x^2 - 6x - (x + 2) = 0$.

Ennek az egyenletnek nincs -2-nél kisebb gyöke $\left(\frac{7 \pm \sqrt{73}}{6}\right)$.

$x \geq -2$ esetén a $3x^2 - 6x + (x + 2) = 0$ egyenlet gyökei: $\frac{2}{3}$ és 1.

Mivel mindkét gyök -2-nél nagyobb, ezért ezek az eredeti egyenletnek is megoldásai.

814. Lásd a 784. feladat megoldását!
Az egyenlet $|x + 3| + |x - 2| = 5$ alakra írható.
$x \leq -3$ esetén $-(x + 3) - (x - 2) = 5$, melyből $x = -3$.
$-3 \leq x \leq 2$ esetén $x + 3 - (x - 2) = 5$ azonosság, tehát a $[-3; 2]$ intervallumba eső racionális számok megoldásai az eredeti egyenletnek.
$x \geq 2$ esetén $x + 3 + x - 2 = 5$, melyből $x = 2$.
Összefoglalva: az egyenlet gyökei: a $[-3; 2]$ intervallumba eső racionális számok.

815. Gondoljuk meg, hogy bármilyen számot jelöljön is x, az x és az 1 távolsága $|x - 1|$, az x és a -1 távolsága $|x + 1|$. A következő egyenletet kell megoldani:
$|x - 1| + |x + 1| = 4$.
Eset szétválasztással bontsuk fel az abszolútérték-zárójeleket, majd oldjuk meg az egyenletet. A gyökök -2 és 2.

816. a) $\big||x+1|-2\big| = 1{,}5$

$|x+1|-2 = 1{,}5$ vagy $|x+1|-2 = -1{,}5$

$|x+1| = 3{,}5$ vagy $|x+1| = 0{,}5$

$x+1 = \pm 3{,}5$ vagy $x+1 = \pm 0{,}5$

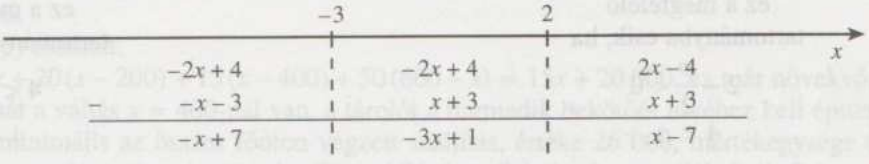
$x = -1 \pm 3{,}5 =$ $2{,}5$ vagy $-4{,}5$; $x = -1 \pm 0{,}5 =$ $-0{,}5$ vagy $-1{,}5$

Mind a négy gyök kielégíti az egyenletet, amit pl. visszahelyettesítéssel ellenőrizhetünk. Tehát $M = \{-4{,}5; -1{,}5; -0{,}5; 2{,}5\}$.

b) A definíció szerint:

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{ha } 2 \le x, \\ -2x+4, & \text{ha } x < 2, \end{cases} \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{ha } -3 \le x, \\ -x-3, & \text{ha } x < -3. \end{cases}$$

Három tartományra osztjuk a számegyenest: $x < -3$, $-3 \le x < 2$, $2 \le x$, és tartományonként végezzük el a kivonást:



Ugyancsak tartományonként megoldjuk az egyenletet:

ha $x < -3$:	ha $-3 \le x < 2$:	ha $2 \le x$:
$-x+7 = 1$	$-3x+1 = 1$	$x-7 = 1$
$x = 6$	$x = 0$	$x = 8$
nincs a tartományban, nem gyök	a tartományban van, jó	a tartományban van, jó

Összegezve: két gyök van, a 0 és a 8.

817. Ekkor $x - p = \pm(x-4)$

$x - p = x - 4$ vagy $x - p = -x + 4$

ha $p = 4$, $\forall x \in \mathbf{R}$ jó; $2x = p + 4$

ha $p \ne 4$, nincs gyök $x = \frac{p}{2} + 2$,

ami bármely p esetén pontosan egy gyököt jelent.

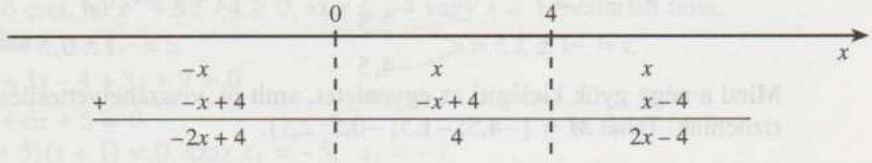
Ezért $p \ne 4$ esetén pontosan egy gyök van: $\frac{p}{2} + 2$; $p = 4$ esetén pedig végtelen sok: $\forall x \in \mathbf{R}$.

(A feladat grafikusan is megoldható.)

818. A definíció szerint:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad |x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{ha } 0 < x-4, \text{ azaz } 4 < x, \\ -x+4, & \text{ha } x-4 \le 0, \text{ azaz } x \le 4. \end{cases}$$

Három tartományra osztjuk a számegyenest: $x < 0$, $0 \le x \le 4$, $4 < x$, és tartományonként összegezzük a kifejezéseket:



Ugyancsak tartományonként megoldjuk az egyenletet:

ha $x < 0$:
$-2x + 4 = p$
$2 - \frac{p}{2} = x$
ez a megfelelő tartományba esik, ha
$2 - \frac{p}{2} < 0$
$4 < p$

ha $0 \le x \le 4$:
$4 = p$
ha $p = 4$, $\forall x \in [0; 4]$ jó;
ha $p \ne 4$, nincs gyök

ha $4 < x$:
$2x - 4 = p$
$x = \frac{p}{2} + 2$
ez a megfelelő tartományba esik, ha
$4 < \frac{p}{2} + 2$
$4 < p$

Összegezve tehát: $p < 4$ esetén nincs megoldás; $p = 4$ esetén végtelen sok megoldás van: $\forall x \in [0; 4]$; $4 < p$ esetén pedig két megoldás van: $2 - \frac{p}{2}$ és $\frac{p}{2} + 2$ (és ez a feltétel mellett valóban két különböző gyök, hiszen $p = 4$-re esnének egybe). (A feladat grafikusan is megoldható.)

819. Először oldjuk meg a $2x - 2 < \frac{1}{100}$ egyenlőtlenséget.

Mindkét oldalhoz 2-t hozzáadva, majd 2-vel osztva kapjuk: $x < \frac{201}{200}$.

A $-\frac{1}{100} < 2x - 2$ egyenlőtlenség megoldása $\frac{199}{200} < x$. Tehát $\frac{199}{200} < x < \frac{201}{200}$.

Ha $0 < \delta \le \frac{1}{200}$, akkor az $]1 - \delta; 1 + \delta[$ intervallum részhalmaza az egyenlőtlenség megoldáshalmazának.

Tehát minden olyan δ szám megfelel, amelyre $0 < \delta \le \frac{1}{200}$.

820. Legyen az első bekötőúttól számított x méterre a tároló. Akkor a főúton a következő utakat kell megtenni: x, $|x-200|$, $|x-400|$ és $|x-600|$. Az első útról 30, a másodikról 20, a harmadikról 15, végül a negyedikről 50 t érkezik. A szállított mennyiségekkel arányos, hogy hány teherautóval (illetve hány fordulóval) lehet ezt elszállítani. Ezért a következő függvényt vizsgáljuk:

$30x + 20|x-200| + 15|x-400| + 50|x-600|$.

Ez egy abszolútértékes függvény (hiszen az első tagban is írható abszolútérték), és ennek a minimumhelye a kérdés. Ezt esetszétválasztással keressük meg.

Előbb (1) $0 \le x < 200$, majd (2) $200 \le x < 400$, végül (3) $400 \le x \le 600$. Nyilván a két szélső út között lesz a tároló megfelelő helye, ezért negatív vagy 600-nál nagyobb x értékeket nem kell nézni.

Az (1) esetben a függvény:

$30x + 20(200-x) + 15(400-x) + 50(600-x) = -55x + 40\,000$, ami növekvő x-ek esetén csökken.

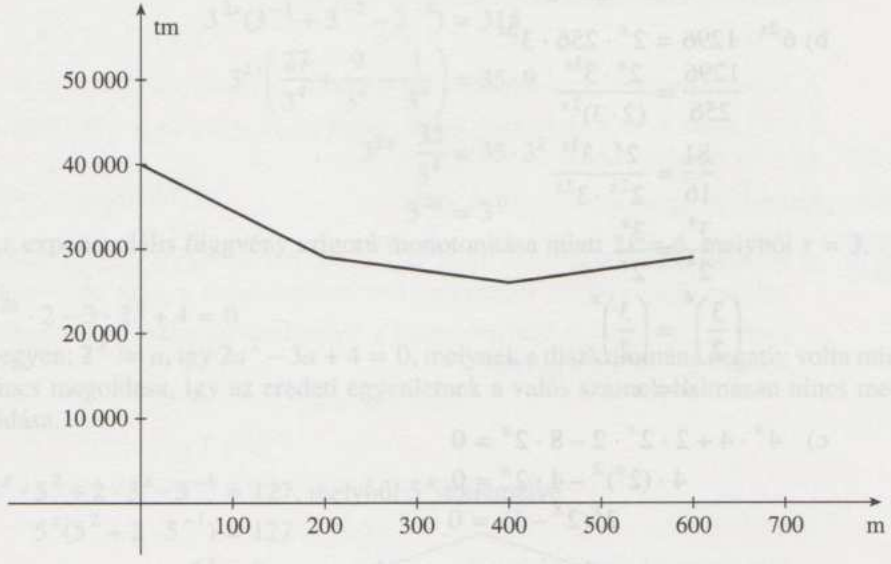
A (2) esetben:

$30x + 20(x-200) + 15(400-x) + 50(600-x) = -15x + 32\,000$, még mindig csökkenő.

A (3) esetben:

$30x + 20(x-200) + 15(x-400) + 50(600-x) = 15x + 20\,000$, ez már növekvő.

Tehát a váltás $x = 400$-nál van, a tárolót a harmadik bekötőút tövéhez kell építeni. Itt minimális az összes főúton végzett szállítás, értéke 26 000, mértékegysége tm (tonna-méter, „tonnászor méter"), ami 26 tkm. (Lásd még a mellékelt ábrát.)



2.12. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek

821. a) $2^{-x} = 16$. Minthogy $16 = 2^4$, ezért $2^{-x} = 2^4$, amiből $a \mapsto 2^a$ alakú exponenciális függvény szigorúan monoton volta miatt: $x = -4$.

b) $2^{-x} = -16$. Nincs megoldás, mert az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív számok halmaza.

c) $2^{-x} > 16$ Ezt átírva: $2^{-x} > 2^4$. Minthogy $a \mapsto 2^a$ alakú exponenciális függvény szigorúan monoton növő, ezért $-x > 4$, tehát $x < -4$.

822. $2^{x+1} + 8 = 2^{x+2}$. Átalkítás és rendezés után:

$4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 2^3$

Ebből $2^{x+1} = 2^3$. Figyelembe véve, hogy az $a \mapsto 2^a$ alakú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $x = 2$.

823. a) $2^x \cdot 8 + 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{4} = 280$

$$8{,}75 \cdot 2^x = 280$$
$$2^x = 32$$
$$x = 5$$

b) $6^{2x} \cdot 1296 = 2^x \cdot 256 \cdot 3^{3x}$

$$\frac{1296}{256} = \frac{2^x \cdot 3^{3x}}{(2 \cdot 3)^{2x}}$$
$$\frac{81}{16} = \frac{2^x \cdot 3^{3x}}{2^{2x} \cdot 3^{2x}}$$
$$\frac{3^4}{2^4} = \frac{3^x}{2^x}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$
$$4 = x$$

c) $4^x \cdot 4 + 2 \cdot 2^x \cdot 2 - 8 \cdot 2^x = 0$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x = 0$$
$$2^x(2^x - 1) = 0$$

$2^x = 0$ lehetetlen

$2^x = 1$, $x = 0$

Mind a három megoldás során kihasználtuk, hogy a (nem 1 alapú) exponenciális függvény szigorúan monoton.

824. a) Mivel $\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{9}} = 9^{-0,5}$, és a hatványozás kölcsönösen egyértelmű művelet, ezért a kitevők egyenlők: $0,5x^2 - 3x + 4 = -0,5$

$$0,5x^2 - 3x + 4,5 = 0$$
$$x = 3.$$

b) Mivel $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, és a hatványozás kölcsönösen egyértelmű művelet, ezért a kitevők egyenlők: $x^2 - 4x + 2 = -2$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x = 2.$$

c) $(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

$$2^x = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

825. $3^{2x} \cdot 3^{-1} + 3^{2x} \cdot 3^{-2} - 3^{2x} \cdot 3^{-4} = 315$

$$3^{2x}(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-4}) = 315$$
$$3^{2x}\left(\frac{27}{3^4} + \frac{9}{3^4} - \frac{1}{3^4}\right) = 35 \cdot 9$$
$$3^{2x} \cdot \frac{35}{3^4} = 35 \cdot 3^2$$
$$3^{2x} = 3^6$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $2x = 6$, melyből $x = 3$.

826. $2^{2x} \cdot 2 - 3 \cdot 2^x + 4 = 0$

Legyen: $2^x := a$, így $2a^2 - 3a + 4 = 0$, melynek a diszkriminánsa negatív volta miatt nincs megoldása, így az eredeti egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása.

827. $5^x \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} = 127$, melyből 5^x-t kiemelve

$$5^x(5^2 + 2 \cdot 5^{-1}) = 127$$
$$5^x = 5.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x = 1$.

828. A négyzetgyök értelmezése miatt $x + 1 \geq 0$

$$(3^2)^{\sqrt{x+1}} = 3^{6+\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad 3^{2\sqrt{x+1}} = 3^{6+\sqrt{x+1}}$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $2\sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1}$ adódik, melyből $\sqrt{x+1} = 6$.
$x \geq -1$ esetén mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens művelet. Ebből a megoldás $x = 35$.

829. Mivel $5^0 = 1$, az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:
$(2x - 1)(x + 3) = 0$. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.
Így $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$ az egyenlet gyökei.

830. $11^{x-2} = 4^{2(x-2)}$, innen $\left(\frac{11}{16}\right)^{x-2} = 1$.

Mivel $\left(\frac{11}{16}\right)^0 = 1$, az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x - 2 = 0$, tehát az egyenlet gyöke 2.

831. A három egyenlet igen hasonló, de mégsem ugyanaz. Átalakítások után mindhárom arra vezet, hogy $(x-2)^2 \cdot (x-4)^2 = 1$, vagyis $x^2 - 6x + 8 = \pm 1$. Az eltérés az egyes kifejezések értelmezési tartományában van. Ezek:

a) $4 < x$; b) $2 < x \neq 4$; c) $x \neq 2$, $x \neq 4$.

A kapott következmény-egyenlet kettéágazik: egyrészt $x^2 - 6x + 7 = 0$-ra (gyökei $3 \pm \sqrt{2}$, azaz $x_1 \approx 4{,}41$ és $x_2 \approx 1{,}59$), másrészt $x^2 - 6x + 9 = 0$-ra (egyetlen gyöke $x_3 = 3$). A megoldások:

a) x_1; b) x_1 és x_3; c) mindhárom gyök jó.

832. a) A logaritmus értelmezése miatt: $0{,}5 < x$ és $0 < x$; vagyis $0{,}5 < x$. Tehát az alaphalmaz $]0{,}5; +\infty[$. A logaritmus azonosságai miatt a jobb oldal előbb $2\lg 3x$, majd $\lg(3x)^2$ alakra hozható, majd a logaritmust mindkét oldalon elhagyhatjuk annak egyértelműsége miatt:

$$-9 + 18x = 9x^2 \qquad / : 9, \text{ rendezés}$$
$$0 = x^2 - 2x + 1$$
$$0 = (x-1)^2$$
$$x = 1,$$

ami eleme az alaphalmaznak.

b) A logaritmus értelmezése miatt: $0 < x$ és $0 < \frac{4}{x} - 1$, azaz $1 < \frac{4}{x}$, azaz (mivel $x > 0$) $1 > \frac{x}{4}$, azaz $x < 4$; tehát az alaphalmaz: $]0; 4[$

$$2 \cdot \lg\frac{6}{x} = \lg 9\left(\frac{4}{x} - 1\right)$$

$$\lg\left(\frac{6}{x}\right)^2 = \lg\left(\frac{36}{x} - 9\right)$$

$$\frac{36}{x^2} = \frac{36}{x} - 9 \qquad / \cdot x^2$$

$$36 = 36x - 9x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 2,$$

ami eleme az alaphalmaznak.

833. A logaritmus értelmezése miatt: $0 < x$ és $-\sqrt{6} < x$ és $\sqrt{6} < x$; tehát az alaphalmaz $]\sqrt{6}; +\infty[$.

a) $\lg x = \lg(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$ / a lg kölcsönös egyértelműsége miatt

$x = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$

$x = x^2 - 6$

$0 = x^2 - x - 6$

$x_1 = 3, \quad x_2 = -2$

$M = \{3\}$, mert a -2 nem eleme az alaphalmaznak.

b) $\lg x = \lg\frac{x + \sqrt{6}}{x - \sqrt{6}}$ / a lg kölcsönös egyértelműsége miatt

$x = \frac{x + \sqrt{6}}{x - \sqrt{6}}$ $\qquad / \cdot (x - \sqrt{6})$

$x^2 - \sqrt{6}x = x + \sqrt{6}$

$x^2 - (\sqrt{6} + 1)x - \sqrt{6} = 0$

$x_1 \approx 4{,}05, \quad x_2 \approx -0{,}60$

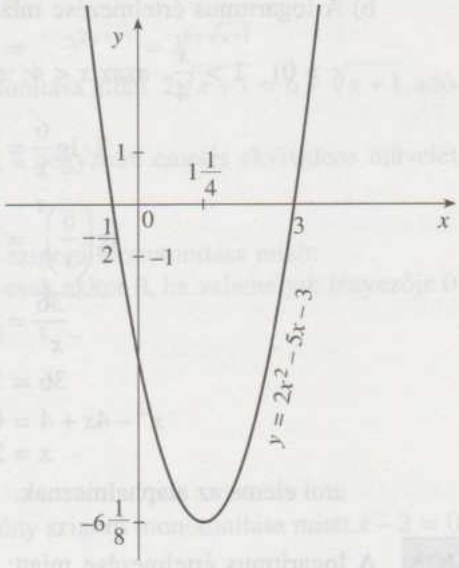
$M = \{4{,}05\}$, mert a $-0{,}60$ nem eleme az alaphalmaznak.

834. $\dfrac{\lg(2x^2-5x-3)}{\lg(3-x)}=2$

A logaritmus értelmezése miatt:

$2x^2-5x-3>0$, megoldása az ábráról leolvasható

(I.) $\quad x<-\dfrac{1}{2} \vee x>3.$



Ugyancsak a logaritmus értelmezése miatt $3-x>0$, azaz

(II.) $\quad x<3.$

A tört miatt $\lg(3-x)\neq 0$

$3-x\neq 1$

(III.) $\quad x\neq 2.$

Az alaphalmaz tehát: $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$.

$\lg(2x^2-5x-3)=2\lg(3-x)$

$\lg(2x^2-5x-3)=\lg(3-x)^2$

Mivel az $a\mapsto \lg a$ függvény szigorúan monoton, ezért vehetjük az egyenletünkkel ekvivalens egyenletet:

$2x^2-5x-3=(3-x)^2$, melyből $x^2+x-12=0$.

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1=3$; $x_2=-4$.

Mivel a 3 nem eleme az alaphalmaznak, csak az $x=-4$ megoldása az egyenletnek, erre $\dfrac{\lg(2\cdot 16-5(-4)-3)}{\lg 7}=\dfrac{\lg 49}{\lg 7}=\dfrac{2\lg 7}{\lg 7}=2.$

835. A logaritmus értelmezése miatt $x>0$, illetve $1+\log_{16}x>0$ ebből $x>\dfrac{1}{16}$.

Írjuk hatványalakra az egyenletet!

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^1=2(1+\log_{16}x)$,

ebből $\log_{16}x=\dfrac{1}{4}$, melyből $x=16^{\frac{1}{4}}=2$.

836. Hatványalakra átírva

$3^0=\log_4(\log_5 x) \qquad (x>0)$

$4^1=\log_5 x$, ebből $x=5^4$.

Az egyenlet egész megoldása $x=5^4$, mert

$\log_3(\log_4(\log_5 5^4))=\log_3(\log_4 4)=\log_3 1=0.$

837. A logaritmus azonosságait felhasználva $\lg\frac{10x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = 11 = \lg 10^{11}$.

A logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $\frac{10x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = 10^{11}$, innen

$x^{\frac{5}{3}} = 10^{10}$, azaz $x = 10^6$.

Ellenőrzéssel belátható, hogy ez valóban megoldása az egyenletnek.

838. a) Egy megoldása van, a (0; 0) számpár. Más megoldás nincs, hiszen ha $x \geq 1$, akkor a bal oldalon mindig páros, a jobb oldalon mindig páratlan szám áll.

b) $3^x = 3^{2y}$, ezért minden olyan rendezett számpár megoldás, amelyik $(2y; y)$ alakú ($y \in \mathbf{N}$). A megadott egyenletnek tehát végtelen sok megoldása van.

c) Ha $x := 0$, akkor az egyenlet: $2 = 2^y$, amiből $y = 1$ adódik.
Ha $x \geq 1$, akkor az egyenlet bal oldalán egy 9-nél nem kisebb páratlan szám áll, míg a jobb oldalon az 1 vagy egy páros szám. Összesen egy megoldása van tehát a megadott egyenletnek, a (0; 1) rendezett számpár.

839. $\log_2 10 = \frac{1}{\lg 2} \approx 3{,}322$; $\log_5 10 = \frac{1}{\lg 5} \approx 1{,}431$

Megjegyzés:
Felhasználtuk a logaritmus definícióját és a következő összefüggést:
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ és $c \neq 1$.

840. A $t = 2002$ év adattal számolva $\frac{m}{m_0} = 2^{-\frac{2002}{80000}} \approx 0{,}983$, azaz kb. 98,3%-a van meg 2002-ben a tórium-izotópnak. (Még 35 évig jó az eredmény ennyi értékes jegyre kerekítve.)

841. Átrendezve: $\frac{m}{m_0} = 2^{-\frac{60}{19{,}7}} \approx 0{,}121$, azaz kb. 12,1%-ára csökken 1 óra alatt a bizmut-izotóp tömege. (Egy óra alatt kicsit túl vagyunk már a harmadik felezésen is, vagyis az eredeti tömeg nyolcadrészénél kicsit kevesebb van még meg.)

842. Átrendezzük az egyenletet: $\log_2 \frac{C}{C_0} = -\frac{t}{T}$, amiből $T = -\frac{t}{\log_2 \frac{C}{C_0}} = -\frac{t \cdot \lg 2}{\lg \frac{C}{C_0}}$.

Behelyettesítve az adatokat ($t = 2$ hét, $C_0 = 4 \cdot 10^{-15}$ Bq, $C = 2{,}97 \cdot 10^{-15}$ Bq), T-re (a felezési időre) kb. 4,66 hét, azaz kb. 32,6 nap adódik.

843. Átrendezzük az egyenletet: $\log_2 \frac{C}{C_0} = -\frac{t}{T}$, amiből $t = -T \cdot \log_2 \frac{C}{C_0} = -T \frac{\lg \frac{C}{C_0}}{\lg 2}$.

Behelyettesítve az adatokat ($T = 5$ nap, $C_0 = 2 \cdot 10^{-14}$ Bq, $C = 7{,}58 \cdot 10^{-15}$ Bq), t-re (a szükséges eltelt időre) meglehetős pontossággal 7 nap, azaz 1 hét adódik.

844. $0{,}99 \cdot N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$

$\lg 0{,}99 = \frac{t}{1600} \cdot \lg \frac{1}{2}$

Ebből $t = 23{,}2$ év. Ennyi idő alatt bomlik el a rádiumatomok 1%-a.

845. a) A felezési idő az az időtartam, amennyi alatt pontosan az anyag fele bomlik el. Tudjuk, hogy 3 perc alatt 10% bomlik el, tehát $0{,}9m_0$ marad, azaz $0{,}9m_0 = m_0 \cdot 2^{-\frac{3}{T}}$, ahonnan egyszerűsítés után és mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve azt kapjuk, hogy $\lg 0{,}9 = -\frac{3}{T} \lg 2$, vagyis $T = \frac{-3 \lg 2}{\lg 0{,}9} \approx 19{,}74$, azaz a felezési idő kb. 19 perc 44 másodperc.

b) Az eredeti mennyiség egy század százaléka t idő múlva marad, amit a következő egyenlet megoldása ad: $0{,}0001m_0 = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, ebből $\lg 0{,}0001 = -\frac{t}{T} \lg 2$, azaz $t = \frac{4T}{\lg 2}$. Az a) részből $T = 19{,}74$ perc, tehát $t = 262{,}25$ perc, azaz kb. 4 óra 22 perc 15 másodperc.

846. Egyenletünk tehát $\frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \frac{(1{,}69p)^{\kappa-1}}{(1{,}23T)^{\kappa}}$.

Felhasználva a hatványozás azonosságait, egyszerűsítés után:

$$1 = \frac{1{,}69^{\kappa-1}}{1{,}23^{\kappa}}$$

$$1 = \frac{1{,}69^{\kappa}}{1{,}23^{\kappa} \cdot 1{,}69}$$

$$1{,}69 = \left(\frac{1{,}69}{1{,}23}\right)^{\kappa}$$

$$\lg 1{,}69 = \kappa \cdot \lg \frac{1{,}69}{1{,}23},$$

amiből $\kappa \approx 1{,}65$. Ekkora tehát a keresett arányszám.

847. A feltétel szerint $\frac{2}{3}p_0 = p_0 e^{-0{,}1275h}$.

Mivel mindkét oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal ugyanazon alapú logaritmusát.

(Természetes alapú logaritmust véve: $\ln\frac{2}{3} = -0{,}1275h$, innen $h = 3{,}180$ km)

(Tízes alapú logaritmussal)

$$\lg\frac{2}{3} = -0{,}1275h \cdot \lg e$$

$$\frac{\lg\frac{2}{3}}{-0{,}1275 \cdot \lg e} = h$$

$$h = \frac{\lg 2 - \lg 3}{-01275 \cdot \lg 2{,}718} \approx 3{,}180 \text{ (km)}$$

Tehát a Föld felszínétől kb. 3180 m magasságban a légnyomás a tengerszinten mért légnyomás kétharmada.

848. $40 = 20 \cdot \lg(\text{jel} / \text{zaj})$;

$\lg(\text{jel} / \text{zaj}) = 2$;

$\text{jel} / \text{zaj} = 10^2 = 100$.

849. a) A cukor mennyiség fele akkor oldódik fel, ha $\frac{M_0}{2}$ a meglevő cukormennyiség.

Ha ez éppen t idő múlva következik be, akkor: $\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot 0{,}95^t$, ahonnan $0{,}5 = 0{,}95^t$. Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk, hogy

$\lg 0{,}5 = t \lg 0{,}95$, azaz $t = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}95} \approx 13{,}51$ (min).

b) A 99,9%-os oldódás esetén a még fel nem oldódott mennyiség $0{,}001\,M_0$, így:

$0{,}001\,M_0 = M_0 \cdot 0{,}95^t$, azaz az a) részhez hasonlóan ezúttal:

$t = \frac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}95} \approx 134{,}67$ (min), tehát közel 2 és negyed óra (az 135 perc).

850. Ha behelyettesítjük a képletbe a $G = 1500, 3000, 6000, 12\,000$ $ adatokat, akkor rendre $É \approx 48, 60, 70, 75$ év eredmény adódik. Tehát a kérdéses konkrét kétszeres GDP-növekedések

a) $(60 - 48 =) 12$, b) $(70 - 60 =) 10$, c) $(75 - 70 =) 5$

évvel növelik a lakosság várható élettartamát.

851. Rendezzük át a képletet, kifejezendő G-t! Kapjuk: $G = 6000 - 206\dfrac{\lg\dfrac{75,5-É}{5}}{\lg 1,081}$.

Ha behelyettesítjük ebbe az $É = 40, 50, 60, 70$ év adatokat, akkor rendre $G \approx 820$, 1690, 3010, 5750 $ eredmény adódik. Tehát a kérdéses konkrét 10 éves várható élettartam növekedésekhez

a) $(1690 - 820 =) 870$; b) $(3010 - 1690 =) 1320$; c) $(5750 - 3010 =) 2740$

$-ral kell növekednie a GDP-nek.

852. $1,005^n = 2$

$n \cdot \lg 1,005 = \lg 2$

$n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1,005} = 139,0$

Tehát 139 hét után duplázódik meg a befektetésünk.

853. A bank $p\%$ évi kamatot ad. A bankba betett pénz két év alatt felnövekedett értéke:

$50\,000\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2 = 57\,245$, ebből $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2 = 1,1449$, $1+\dfrac{p}{100} = 1,07$,

az éves kamat (kamatláb) ezek szerint 7%.

A pénzünk n év múlva duplázódik meg.

$50\,000 \cdot 1,07^n = 100\,000$; $1,07^n = 2$; $n \cdot \lg 1,07 = \lg 2$; $n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1,07}$; $n \approx 10,2$,

azaz a 11. év folyamán duplázódik meg a pénzünk.

Megjegyzés:

A számításból látszik, hogy az adott évi kamat mellett a betett összeg duplázódásának ideje független a betett összegtől.

854. a) Ha Gyuri 40 000 forintot évi 14%-os kamatra tesz be, akkor az n. év végére lesz $40\,000 \cdot 1,14^n$ forintja. Ennek kell elérnie a 65 000 Ft-ot, feltéve, hogy a bicikli nem drágul! Tehát keressük a $40\,000 \cdot 1,14^n = 65\,000$ egyenlet megoldását. Innen $1,14^n = 1,625$, mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $n = \dfrac{\lg 1,625}{\lg 1,14} \approx$ $\approx 3,7$. Általában éves kamat és lejárat (azaz év vége) előtti felvétel esetén nemcsak összegében, hanem arányában is kisebb kamatot kapunk, így csak a 4. év végére lesz meg a pénz; igaz ekkor már a szükségesnél több: 67 558 Ft.

b) Havi elszámolású kamatos kamat esetén az évi 24% havi 1,81%-os kamatnak felel meg, mivel $1,0181^{12} \approx 1,24$. Ekkor a két év 24 hónapot jelent, és az ismeretlen havi t törlesztő részletre az alábbi egyenlet adódik:

$\{[(25\,000 \cdot 1,0181 - t) \cdot 1,0181 - t]\ldots\} \cdot 1,0181 - t = 0$,

ahol 24-szer szerepel az 1,0181-es szorzó, és az utolsó törlesztő részlet befizetése után fogy el az adósság. Az egyenlet szebb alakra hozható némi rendezéssel, elvégezve a beszorzásokat:

$$25\,000 \cdot 1{,}0181^{24} - t(1{,}0181^{23} + 1{,}0181^{22} + \ldots + 1{,}0181 + 1) = 0,$$

ahol a zárójelben felismerve egy mértani sorozatot és alkalmazva annak összegképletét sokkal szebb alakhoz jutunk:

$$25\,000 \cdot 1{,}0181^{24} - t\frac{1{,}0181^{24} - 1}{1{,}0181 - 1} = 0.$$

Mivel az $1{,}0181^{24}$ éppen $1{,}24^2 = 1{,}5376$, ezt beírva és t-re rendezve az alábbit kapjuk: $\frac{0{,}5376}{0{,}0181}t = 25\,000 \cdot 1{,}5376 = 38\,440$, amiből $t = 1294{,}2$ adódik, vagyis kerekítve 1294 Ft lesz a havi törlesztő részlet.

855. *A*: 12 hónap alatti nyeresége x (Ft) [havi nyereség $\frac{x}{12}$ Ft].

B: 10 hónap alatti nyeresége x (Ft) [havi nyereség $\frac{x}{10}$ Ft].

A: nyeresége minden évben 10%-kal nő, így

1 év múlva a nyereség $1{,}1x$;

2 év múlva a nyereség $1{,}1^2x$;

3 év múlva a nyereség $1{,}1^3x$;

⋮

n év múlva a nyereség $1{,}1^nx$.

B: nyeresége minden évben 5%-kal nő,
mivel 10 hónap alatti nyeresége $x \Rightarrow$ 12 hónap alatt a nyeresége $1{,}2x$, így

Nyeresége 1 év múlva $1{,}05 \cdot 1{,}2x$;

2 év múlva $1{,}05^2 \cdot 1{,}2x$;

⋮

n év múlva $1{,}05^n \cdot 1{,}2x$.

n év múlva *A* nyeresége ugyanannyi, mint *B* nyeresége.

Tehát $1{,}1^n \cdot x = 1{,}05^n \cdot 1{,}2x$

[x kiesik, tehát az adott százalékos nyereségnövekedés és feltételek mellett n független x-től]

$$\left(\frac{1{,}1}{1{,}05}\right)^n = 1{,}2$$

$$n \lg 1{,}04762 = \lg 1{,}2$$

$$n = 3{,}92$$

Tehát kb. 4 év múlva éri utol *A* nyeresége *B* nyereségét.

856. a) Ha minden évben megkapják az évi 6%-os béremelést, akkor 5 év múlva a mai 96 000 Ft bruttó fizetésből $96\,000 \cdot 1{,}06^5 \approx 128\,470$ Ft lesz.

b) A kérdés az, hogy mikorra éri el ezzel a trenddel a 192 000 Ft-ot a bruttó fizetés, tehát meg kell oldani a $192\,000 = 96\,000 \cdot 1{,}06^n$ egyenletet. Ez ekvivalens az $1{,}06^n = 2$ egyenlettel, amelynek logaritmusát véve:

$n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}06} \approx 11{,}9$ év adódik, azaz ha csak évenként változik a fizetés, akkor a 11. évben még kevesebb, a 12. évben már kicsit több, mint kétszeres lesz a bruttó fizetés. (A 12. évre kb. 193 171 Ft jön ki.)

857. A logaritmus azonosságai miatt

$$n = \frac{\lg \frac{F}{f}}{\lg \frac{r}{R}}, \text{ amiből } \lg \frac{r}{R} = \frac{\lg \frac{F}{f}}{n}.$$

A számadatokkal: $\lg \dfrac{r}{1{,}02} = \dfrac{\lg 3{,}77}{20} = 0{,}02882$. A logaritmus definíciója miatt

ezért $\dfrac{r}{1{,}02} = 10^{0{,}02882} = 1{,}0686$, amiből $r = 1{,}02 \cdot 1{,}0686 = 1{,}0900$.

Az utoléréshez 20 éven keresztül évi 9%-os növekedést kellett volna elérni.

858. Egy papucsállatka térfogata kb. 10^{-3} mm³.

A Föld térfogata kb. $4{,}19 \cdot (6{,}378 \cdot 10^3)^3 = 1{,}087 \cdot 10^{12}$ km³ $= 1{,}087 \cdot 10^{30}$ mm³, vagyis kb. $1{,}087 \cdot 10^{33}$ számú papucsállatka térfogata egyezik meg a Föld térfogatával.

A $2^x = 1{,}087 \cdot 10^{33}$ egyenlet megoldásából megtudhatjuk, hány osztódásra van szükség ennyi papucsállatka létrejöttéhez.

$x \cdot \lg 2 = 33{,}036\,23$

$x = 109{,}7$

Tehát 110 osztódásra van szükség; ez 2963 óráig, azaz (mindössze) kb. 124 napig tart.

859. $10^7 \cdot 0{,}996^x = 8 \cdot 10^6$

$0{,}996^x = 0{,}8$

$$x = \frac{\lg 0{,}8}{\lg 0{,}996} = 55{,}7$$

Körülbelül 56 év alatt csökkenne a népesség 8 millió főre.

860. $6{,}2 \cdot 1{,}0148^n \geq 8$; $n \geq \dfrac{\lg 8 - \lg 6{,}2}{\lg 1{,}0148} = 17{,}35$

Tehát 18 év elteltével (2019-ben) érné el a 8 milliárdot az össznépesség száma.

861. a) A 2020-hoz tartozó x érték 183, tehát a képlet szerinti várható népesség $897{,}9 \cdot 1{,}011^{183} = 6648{,}0$ millió, azaz 6,65 milliárd fő.

b) $6000 = 897{,}9 \cdot 1{,}011^x$

$1{,}011^x = 6{,}6823$

$x = \dfrac{\lg 6{,}6823}{\lg 1{,}011} = 173{,}6$

A képlet szerint 1837 + 174 = 2011-ben kellett volna elérnie a 6 milliárdot a Föld népességének.

862. a) Ha 1650-ben 500 millió volt a népesség, és évente 0,3%-kal, azaz 1,003-szorosára nőtt, akkor 100 év múlva, 1750-ben eszerint: $500\,000\,000 \cdot 1{,}003^{100} \approx$ $\approx 674\,626\,400$-ra becsülnénk az emberiség létszámát 350 év múlva, 2000-ben; pedig $500\,000\,000 \cdot 1{,}003^{350} \approx 1\,426\,581\,400$-ra.

b) Nyilván ez a becslés nem számol háborúkkal, járványokkal és bizonyos szakaszokban a jólét növekedése miatti népességrobbanással. A szorzó változik évről évre, ez nyilván egy bizonyos sorozat megfigyeléséből adódott, középérték számításával. A számítottnál jóval nagyobb volt az emberiség létszáma 2000-ben: több mint 6 milliárd.

c) Az 1970-es évből indulva az akkori $1{,}021^{30}$-os szorzóval (nagyobb növekedési ütem, hétszerese a középkorinak!) 2000-re

$3\,600\,000\,000 \cdot 1{,}02^{30} \approx 6\,715\,444\,500$ a becslés.

d) Nyilván minden közelítés kis távon ad viszonylag jó becslést, így 350 év távlatában már nagyon rossz, a 30 év még nem olyan nagy idő. Így az utóbbi, c)-beli becslés sokkal jobb, mint a b)-beli.

863. a) Ha 10 naponta 2% a veszteség, akkor 10 nap után 0,98 rész marad, 30 nap alatt ez 3-szor történik meg: $0{,}98^3 \approx 0{,}941$, azaz kb. 94,1% marad, tehát kb. 5,9% a havi veszteség.

b) Ha a gáz fele elfogy, akkor a másik fele még megmarad, erre felírható: $0{,}98^n = 0{,}5$, ahol n azt jelenti, hogy hányszor 10 nap alatt telik el. A megoldás logaritmus alkalmazásával $n \approx 34{,}3$, tehát kb. 343 nap alatt következik be, hogy felére csökken a gáz mennyisége.

c) Ha 80% = 0,8 résztől kezdve már süllyed, akkor most a $0{,}98^n = 0{,}8$ egyenletet kell vizsgálni, ahonnan $n \approx 11{,}04$ adódik. Tehát kb. 110,4 nap múlva kezd süllyedni, azaz a 111. napon.

864. a) $1 \cdot \log_2 90 = 6{,}4919$, illetve $1 \cdot \log_2 89 = 6{,}4757$

b) $5 \cdot \log_2 n = 15$

$\log_2 n = 3$

$n = 8$

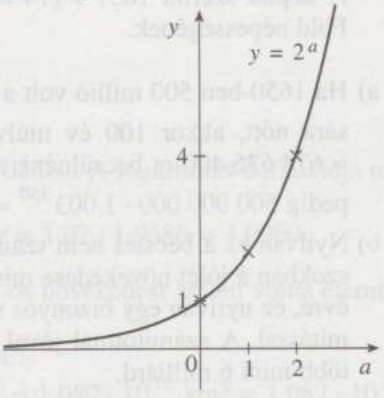
c) $7 \cdot \log_2 10 = 23{,}2535$

865. $3^x > 9$. Ez átírható: $3^x > 3^2$ alakra. Az $x \mapsto 3^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért a megoldás $x > 2$.

Megjegyzés: érdemes grafikont is készíteni.

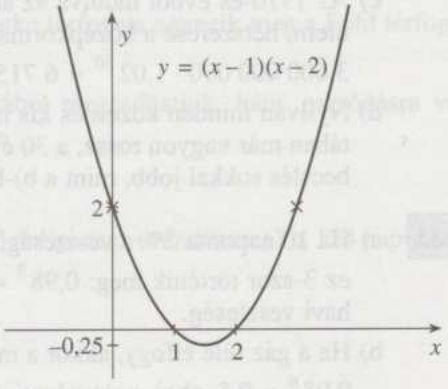
866. Legyen $a := (x-1)(x-2)$, így az egyenlőtlenség $2^a < 1$ alakra írható.

Az ábráról leolvasható, hogy az $a \mapsto 2^a$ függvény szigorúan monoton növekedő, így a $2^a < 1$ akkor teljesül, ha $a < 0$.



Innen $(x-1)(x-2) < 0$

Ez az egyenlőtlenség $1 < x < 2$ intervallumon belüli valós számokra teljesül. Így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]1; 2[$.



867. a) Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő, így az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$x - 2 < 4$, azaz

$x < 6$.

A logaritmus definíciója miatt $x > 2$, így a megoldás: $2 < x < 6$.

b) Az 1-et átírjuk $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$ alakba és felhasználjuk, hogy az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton fogyó, így

$x+1<\frac{1}{2}$, azaz $x<-\frac{1}{2}$.

A logaritmus definíciója miatt $x>-1$, így a megoldáshalmaz: $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.

868. Alakítsuk át az egyenletet!

$6\cdot(2^x)^2+4\cdot(5^x)^2=10\cdot 2^x\cdot 5^x$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $(5^x)^2\neq 0$ kifejezéssel!

$$6\cdot\left(\frac{2^x}{5^x}\right)^2+4=10\cdot\frac{2^x}{5^x}$$

Legyen $a:=\frac{2^x}{5^x}$, így az egyenlet

$6a^2-10a+4=0$, melynek gyökei $a_1=1$; $a_2=\frac{2}{3}$.

Ha $\left(\frac{2}{5}\right)^x=1$, akkor az exponenciális függvény szigorú monotonitásából következik, hogy $x=0$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ 0{,}4^x=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ x=\log_{0{,}4}\frac{2}{3}=\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg 0{,}4}\approx 0{,}4425$$

Tehát az egyenlet megoldásai: $x_1=0$; $x_2=\log_{0{,}4}\frac{2}{3}\approx 0{,}4425$.

869. A logaritmus értelmezése miatt $9^{x-1}+7>0$ és $3^{x-1}+1>0$, amely egyenlőtlenségek $\forall x\in\mathbf{R}$ esetén teljesülnek. Így az egyenlet megoldásait a valós számok között keressük.

Mivel $\log_2 4=2$, így a logaritmus azonosságai miatt

$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2\left[4\cdot(3^{x-1}+1)\right]$.

Az $a\mapsto\log_2 a$ függvény szigorú monotonitása miatt

$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$,

$3^{2x-2}+7=4\cdot 3^x\cdot 3^{-1}+4$,

$(3^x)^2\cdot 3^{-2}-4\cdot 3^{-1}\cdot 3^x+3=0$.

Legyen $3^x=a$.

$a^2\cdot\frac{1}{9}-\frac{4}{3}a+3=0$.

Ennek megoldásai $a_1=9$; $a_2=3$.

$3^x = 9$, illetve $3^x = 3$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x_1 = 2$; $x_2 = 1$. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

870. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$. Mivel mindkét oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát.

$$\lg\left(x^{3-\lg\frac{x}{3}}\right) = \lg 900$$

A logaritmus azonosságai miatt:

$$\left(3-\lg\frac{x}{3}\right)\lg x = \lg 9 + \lg 100,$$

$$\left[3-(\lg x - \lg 3)\right]\lg x = 2\lg 3 + 2.$$

Legyen $\lg x = b$.

$$(3 - b + \lg 3)b = 2\lg 3 + 2$$

$$b^2 - (\lg 3 + 3)b + 2\lg 3 + 2 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{\lg 3 + 3 \pm \sqrt{(\lg 3+3)^2 - 4(2\lg 3+2)}}{2} =$$

$$= \frac{\lg 3 + 3 \pm \sqrt{(\lg 3)^2 - 2\lg 3 + 1}}{2} = \frac{\lg 3 + 3 \pm \sqrt{(\lg 3 - 1)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\lg 3 + 3 \pm |\lg 3 - 1|}{2} = \begin{cases} \lg 3 + 1 \\ 2 \end{cases}$$

$\lg x = \lg 3 + 1$, illetve $\lg x = 2$

$\lg x = \lg 30$

A logaritmus függvény szigorú monotonitásából következik: $x_1 = 30$; $x_2 = 100$, azaz $M = \{30; 100\}$.

871. Bontsuk fel a kitevőben szereplő zárójelet és osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 3^6-nal, kapjuk:

$$3^{x^4-x^2-6} = 7^{x^4-x^2-6}.$$

$7^{x^4-x^2-6}$ sosem 0, mindkét oldalt elosztjuk vele: $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^4-x^2-6} = 1$.

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $x^4 - x^2 - 6 = 0$ esetén teljesül csak a fenti egyenlet.

Szorzattá bontva $(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$.

Innen a megoldás: $x = \sqrt{3}$ vagy $x = -\sqrt{3}$, azaz $M = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

872. Adott pontos érték $a := \log_5 10$, $a > 1$. $\log_2 10 = ?$

$$\log_2 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 2} = \frac{\log_5 10}{\log_5 \frac{10}{5}} = \frac{\log_5 10}{\log_5 10 - \log_5 5} = \frac{a}{a-1}$$

Megjegyzés: felhasználtuk a logaritmus definícióját és a következő összefüggést:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$; $c \neq 1$.

873. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$. Új változót bevezetve $\log_5 x$ helyére egy másodfokú egyenletet kapunk: $\log_5 x = y$, ekkor

$y^2 + y = 2$, azaz

$y^2 + y - 2 = 0$, szorzattá bontva

$(y + 2)(y - 1) = 0$. Tehát $y = -2$ vagy $y = 1$.

Ha $\log_5 x = -2$, akkor $x = \frac{1}{25}$, ha $\log_5 x = 1$, akkor $x = 5$, tehát $M = \left\{\frac{1}{25}; 5\right\}$.

874. A logaritmus értelmezése miatt $0 < x - 2y$; $0 < x$; $0 < y$, vagyis $0 < 2y < x$ (ami miatt $2 < \frac{x}{y}$). A logaritmus azonosságai miatt: $\lg(x - 2y)^2 = \lg xy$, a logaritmus monotonitása miatt pedig: $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$. A biztosan nem nulla y^2-tel osztva: $\frac{x^2}{y^2} - 4\frac{x}{y} + 4 = \frac{x}{y}$, vagy másképp: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 4 = 0$. Megoldva a másodfokú egyenletet, $\frac{x}{y}$-ra 4 és 1 adódik; a 4 jó, az 1 ellentmond az $\frac{x}{y} > 2$ feltételnek.

875. a) 10 km = 10 000 m; $p_{10000} = 10^5 \cdot 2{,}718^{-\frac{1{,}3 \cdot 9{,}81}{10^5} \cdot 10^4} = 2{,}79 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, ami a normális légnyomás 27,9%-a.

b) $0{,}9 \cdot p_0 = p_0 \cdot 2{,}718^{-\frac{1{,}3 \cdot 9{,}81}{10^5} \cdot x}$

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve:

$\lg 0{,}9 = -\frac{1{,}3 \cdot 9{,}81}{10^5} \cdot x \cdot \lg 2{,}718$, amiből $x = 826$.

A léghajó a tengerszint felett kb. 830 méter magasságban lebeg.

876. a) Jelentsen 1 magnitúdó-változás x-szeres fényerősség-változást. 2 magnitúdó-változás ekkor $x \cdot x = x^2$-szeres fényerősség-változást jelent, 5 magnitúdó-változás tehát x^5-szerest. A feladatból tudjuk, hogy 5 magnitúdó-változás 100-szoros különbséget jelent, tehát $x^5 = 100$, azaz $x = \sqrt[5]{100} = 2{,}51$.

b) A Nap és a Hold közötti magnitúdó-különbség $-12{,}2-(-26{,}8)=14{,}6$.
1 magnitúdó-változás $\sqrt[5]{100}$-szeres különbség, így 14,6 magnitúdó-változás $\left(\sqrt[5]{100}\right)^{14{,}6}$-szeres fényerősség-változást jelent. Tehát a Nap a Holdnál $\left(\sqrt[5]{100}\right)^{14{,}6}$-szer, azaz kb. 692 000-szer olyan fényes.

877. a) 10 év = 120 hónap, ha a havi kamat 0,5%, akkor a 10 000 000 Ft hitelre a következőt lehet mondani:
$\{[(10\,000\,000\cdot 1{,}005-x)\cdot 1{,}005-x]\cdot 1{,}005\ldots\}\cdot 1{,}005-x=0$,
ahol 120 lépéses a folyamat. Felbontva a zárójeleket, és rendezve:
$10\,000\,000\cdot 1{,}005^{120}-x\cdot(1{,}005^{119}+1{,}005^{118}+\ldots+1)=0$.
Innen a keresett havi részletre, felhasználva, hogy a zárójelben egy mértani sorozat 120 tagjának az összege áll:
$10\,000\,000\cdot 1{,}8194-x\cdot\dfrac{1{,}8194-1}{1{,}005-1}=0$, azaz $x=111\,020$ Ft.
Tehát havonta ennyit kell 10 éven át fizetni, ha 10 000 000 Ft hitelt veszünk fel.
(Ez egyébként évi 6,17%-os kamatot jelent, hiszen $1{,}005^{12}\approx 1{,}0617$.)

b) Ha csak évente tőkésítenek, akkor számoljunk évi ütemben, és az így kapott összeget kell 12-vel osztani, hogy megkapjuk a havi törlesztő részletet:
$10\,000\,000\cdot 1{,}0617^{10}-y(1{,}0617^{9}+1{,}0617^{8}+\ldots+1)=0$, ahonnan
$y=1\,369\,644$ (ami a kerekített 1,0617-tel jön ki, a pontos $1{,}005^{12}$-nel pedig 1 369 500) Ft, azaz a havi részlet: 114 137 (illetve a pontos értékkel: 114 125) Ft. Havonta „mindössze" kb. 3000 Ft-tal fizetnénk többet ezzel a módszerrel, de ez 10 év alatt kb. 374 000 Ft többlet. Azért nem korrekt ez az eljárás, mert a pénzünket a bank egy éven át használja kamat nélkül.

c) Most az a)-beli eljárást (a korrektet) véve alapul: 5 év múlva a tartozásunk:
$10\,000\,000\cdot 1{,}005^{60}-111\,020(1{,}005^{59}+1{,}005^{58}+\ldots+1)$. Ebből a mértani sorozat összegképletét használva: $13\,488\,502-111\,020\cdot 69{,}77=5\,742\,633$ Ft.
Tehát nem a felvett tőke felére fogy a tartozás félidő alatt.

878. a) 5 év = 60 hónap, évi 20% kamat havi 1,53%-ot jelent, mivel $\sqrt[12]{1{,}2}\approx 1{,}0153$.
Mivel a felvett pénz 1 000 000 Ft, a havi részletet x-szel jelölve, a 60. hónap végére akkor fogy el a tartozás, ha:
$$\{[(1\,000\,000\cdot 1{,}0153-x)\cdot 1{,}0153-x]\cdot 1{,}0153\ldots\}\cdot 1{,}0153-x=0.$$
Ezt átalakítva, a zárójeleket felbontva és rendezve:
$$1\,000\,000\cdot 1{,}0153^{60}-x(1{,}0153^{59}+1{,}0153^{58}+\ldots+1)=0.$$
Felhasználva, hogy $1{,}0153^{12}=1{,}2$, tehát $1{,}0153^{60}=1{,}2^{5}=2{,}48832$, valamint, hogy a zárójelben egy mértani sorozat 60 egymást követő tagja áll, amelynek összegképletét ismerjük:

$1\,000\,000 \cdot 2{,}448\,32 - x\dfrac{2{,}448\,32-1}{1{,}0153-1} = 0$. Ebből x-et kifejezve:

$x = \dfrac{2\,488\,320 \cdot 0{,}0153}{1{,}488\,32} \approx 25\,580$ Ft. Tehát a havi részlet 25 580 Ft.

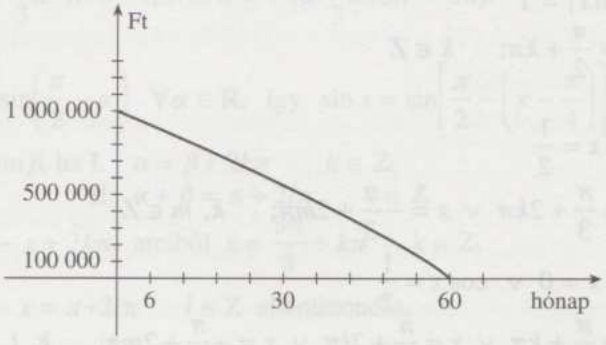
b) A pillanatnyi tartozás az idő függvényében n hónap elmúltával:

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}0153^n - 25580(1{,}0153^{n-1} + 1{,}0153^{n-2} + \ldots + 1) =$$

$$= 1\,000\,000 \cdot 1{,}0153^n - \frac{1{,}0153^n - 1}{0{,}0153} \cdot 25\,580 =$$

$$= 1{,}0153^n\left(1\,000\,000 - \frac{25\,580}{0{,}0153}\right) + \frac{25\,580}{0{,}0153} = -671\,895 \cdot 1{,}0153^n + 1\,671\,895.$$

Havi lekötés esetén a függvénynek lépcsősfüggvénynek kell lennie, hiszen ha egy hónap eltelte előtt vesszük fel, akkor az utolsó havi kamatot már nem kapjuk meg, legalábbis havi lekötés esetén nem. Ha folyószámláról van szó, ahol napi lekötés van, akkor a kamatot időarányosan kapjuk, így az egész koordinátájú pontok között egyenes szakaszokat kell rajzolni, tehát nem pontosan az exponenciális függvényről van szó.



c) A tartozás fele, azaz 500 000 forint n hónap múlva, de a b)-beli függvénygörbe konkávitása miatt nem fele időben lesz, amit az alábbi egyenlőség ad meg:
$1\,671\,895 - 671\,895 \cdot 1{,}0153^n = 500\,000$, amelyből:
$1\,171\,895 = 671\,895 \cdot 1{,}0153^n$. Innen $1{,}744\,164 = 1{,}0153^n$ ebből $n \approx 36{,}64$, tehát 36 hónap múlva még több mint a kölcsön fele az adósság, 37 hónap múlva már kicsit kevesebb.

2.13. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

879. $\cos^2(72°) = 1 - \sin^2(72°) = 1 - \frac{2\sqrt{5}+10}{16} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}$

Mivel $\cos(72°) > 0$, ezért $\cos(72°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}$, ezért a letakart részen a $\frac{\sqrt{5}}{4}$ tört áll.

880. a) $\sin x = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}$

b) $\sin x = 0 \vee \sin x = -1$

$x = k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi; \quad k, m \in \mathbf{Z}$

c) $|\sin x| = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}$

881. a) $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi; \quad k, m \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi; \quad k, l, m \in \mathbf{Z}$

c) $|\cos x| = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + m\pi; \quad k, m \in \mathbf{Z}$

882. $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi; \quad k, m \in \mathbf{Z}$

$x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + m\pi; \quad k, m \in \mathbf{Z}$

883. Felhasználva, hogy $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, írhatjuk:

$\cos\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{2\pi} + 1\right)\right)$.

Ekkor $\frac{x}{\pi} - \frac{1}{3} = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2\pi} - 1\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

6π-vel szorozva: $6x - 2\pi = \pm(3\pi^2 - 3x - 6\pi) + 12k\pi^2$.

A pozitív előjel esetén $x = -\frac{4}{9}\pi + \frac{4k+1}{3}\pi^2$,

a negatív előjel esetén $x = \frac{8}{3}\pi + (4k-1)\pi^2$ adódik.

Az első gyökseregből $k = 0$ és 1 esetén esik az eredmény a [0; 20] intervallumba:
$-\frac{4}{9}\pi + \frac{1}{3}\pi^2 \approx 1{,}894$ és $-\frac{4}{9}\pi + \frac{5}{3}\pi^2 \approx 15{,}05$;
a második gyökseregből sosem (hiszen k-ra monoton növő az összefüggés, értéke pedig $k = 0$-ra $\frac{8}{3}\pi - \pi^2 \approx -1{,}5$ és $k = 1$-re $\frac{8}{3}\pi + 3\pi^2 \approx 38$).

884. Mivel $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \forall\alpha \in \mathbf{R}$, így $\sin x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Mivel $\sin\alpha = \sin\beta$, ha I. $\alpha = \beta + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$,

II. $\alpha + \beta = \pi + 2l\pi \quad l \in \mathbf{Z}$.

Így I. $x = \frac{3\pi}{4} - x + 2k\pi$, amiből $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$,

II. $x + \frac{3\pi}{4} - x = \pi + 2l\pi \quad l \in \mathbf{Z}$ ellentmondás.

Az egyenlet megoldása: $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$.

885. A tangens értelmezése miatt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, illetve $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \in \mathbf{Z})$,

amiből $x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{l\pi}{2} \quad (l \in \mathbf{Z})$.

Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, ha $\alpha = \beta + n\pi \quad (n \in \mathbf{Z})$, így $2x - \frac{\pi}{3} = x + n\pi$,

amiből $x = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (n \in \mathbf{Z})$.

886. A tangens és a kotangens értelmezése miatt $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Mivel $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$ (a fenti valós számokra), az egyenlet $\operatorname{tg}x - \frac{1}{\operatorname{tg}x} = 2$ alakba írható.

$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}x - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei:

$\operatorname{tg}x = 1 + \sqrt{2}$, amiből $x_1 = \frac{3\pi}{8} + l\pi \approx 1{,}178 + l\pi \qquad l \in \mathbf{Z}$,

illetve $\operatorname{tg}x = 1 - \sqrt{2}$, amiből $x_2 = -\frac{\pi}{8} + n\pi \approx -0{,}393 + n\pi \qquad n \in \mathbf{Z}$.

887. a) Mivel a tört nevezője nem lehet 0: $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Szorozzunk $\frac{\sin x}{\cos x}$-szel, kapjuk: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 3\frac{\sin x}{\cos x}$,

vagy másképp: $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 3\frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0$.

A másodfokú egyenlet gyökei: $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (kb. 2,618 és 0,3820),

amiből $x \approx 1{,}206 + k\pi$ vagy $x \approx 0{,}3649 + k\pi$, benne vannak az alaphalmazban.

Másik megoldás:

Szorozzunk $\sin x \cdot \cos x$-szel, kapjuk: $\sin^2 x + \cos^2 x = 3 \cdot \sin x \cdot \cos x$, vagy

másképp: $1 = \frac{3}{2} \cdot \sin 2x$, amiből $\frac{2}{3} = \sin 2x$.

Ebből $2x \approx 0{,}7297 + 2k\pi$ vagy $2{,}412 + 2k\pi$, és így $x \approx 0{,}3649 + k\pi$ vagy

$x \approx 1{,}206 + k\pi$, benne vannak az alaphalmazban.

b) A tangens és kotangens függvény értelmezése miatt: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ és $x \neq k\pi$,

azaz $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. Felhasználva, hogy $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$, kapjuk: $\frac{1}{\operatorname{tg}x} = 4 - \operatorname{tg}x$,

amiből $\operatorname{tg}x$-szel való szorzás után:

$1 = 4 \cdot \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^2 x$, átrendezve: $\operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg}x + 1 = 0$.

Ennek gyökei: $\operatorname{tg}x = 2 \pm \sqrt{3}$ (kb. 3,732 és 0,2679).

Visszakeresés után $x \approx 1{,}309 + k\pi$ vagy $x \approx 0{,}2618 + k\pi$, benne vannak az alaphalmazban.

888. a) Legyen $a := \sin x$, így $2a^2 - 5a + 2 = 0$, gyökei: $a_1 = 2$; $a_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x \neq 2$, mert $-1 \leq \sin x \leq 1$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$\sin x = \frac{1}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ $(l \in \mathbf{Z})$.

b) Felhasználjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, majd $\sin x =: y$-t helyettesítünk be:
$y^2 - (1 - y^2) + 3y = 1$, azaz $2y^2 + 3y - 2 = 0$.
A másodfokú egyenlet két gyöke: $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -2$.
Ha $\sin x = \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, ahol $k, l \in \mathbf{Z}$.
$\sin x = -2$ nem lehetséges, mert $\sin x \geq -1$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

889. a) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosság alkalmazásával az egyenlet így is írható:
$\sin^2 x = 0$
$x = k\pi; \qquad k \in \mathbf{Z}$

b) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosság alkalmazásával az egyenlet így is írható:
$3 - 4\cos^2 x = 3$
$\cos x = 0$
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \qquad k \in \mathbf{Z}$

c) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosság alkalmazásával az egyenlet így is írható:
$4\cos^2 x = 3$
$|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{6} + m\pi; \quad k, m \in \mathbf{Z}$

890. a) A megoldóképletből $\sin x = -4$ és $\sin x = \frac{1}{2}$ adódik. Csak a második eset lehetséges.
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi; \qquad k, m \in \mathbf{Z}$

b) A megoldóképletből $\cos x = 5$ és $\cos x = -\frac{1}{2}$ adódik. Csak a második eset lehetséges.
$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi; \qquad k, m \in \mathbf{Z}$

c) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosság alkalmazásával az egyenlet így is írható:
$5 + 8\sin x - 4\sin^2 x = 0$
A megoldóképletből $\sin x = -\frac{1}{2}$ és $\sin x = \frac{5}{2}$ adódik. Csak az első eset lehetséges.
$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{11\pi}{6} + 2m\pi; \qquad k, m \in \mathbf{Z}$

891. a) Az egyenlet $\sin x$-ben másodfokú. A $\sin x = a$ helyettesítéssel a $4a^2 + 4a - 3 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből $a_1 = \frac{1}{2}$, illetve $a_2 = -\frac{3}{2}$. Ez utóbbi nem ad megoldást, mert minden x valós számra $|\sin x| \leq 1$.

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, illetve $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) $\cos x$-ben másodfokú egyenlet. A $\cos x = a$ helyettesítéssel a $3a^2 - 4a - 4 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből: $a_1 = 2$, illetve $a_2 = -\frac{2}{3}$. Az előbbi nem ad megoldást, mert minden x valós számra $|\cos x| \leq 1$. A $\cos x = -\frac{2}{3}$ megoldásai nincsenek a megadott $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumban.

Tehát az adott egyenletnek az adott intervallumban nincs megoldása.

c) Az egyenletet megfelelően rendezve: $\cos x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$,

$\cos^2 x - \cos x = 0$, majd szorzattá alakítás után kapjuk: $\cos x(\cos x - 1) = 0$.

Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ebből adódik $\cos x_1 = 1$, illetve $\cos x_2 = 0$.

Ezek megoldásai a $[0; 2\pi[$ intervallumban: $x_1 = 0$, illetve $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

892. $\sin x = -\cos x$. Mivel $\sin x$ és $\cos x$ nem lehet egyszerre 0 (mert $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$), ezért oszthatunk $\cos x$-szel.

$\operatorname{tg} x = -1$, ebből $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$.

Ekvivalens lépésekkel kaptuk a gyököket, ezért ezek a valós számok az eredeti egyenletnek is megoldásai.

893. a) A tangens értelmezése miatt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$

$5\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$5\cos^2 x = \sin x$.

Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}$

$5(1 - \sin^2 x) = \sin x$

$5\sin^2 x + \sin x - 5 = 0$, ennek gyökei 0,9050, illetve $-1{,}105$.

I. $\sin x = 0{,}9050$, ebből $x_1 \approx 1{,}131 + 2n\pi \qquad n \in \mathbf{Z}$;

$x_2 \approx 2{,}011 + 2l\pi \qquad l \in \mathbf{Z}$.

II. $\sin x \neq -1{,}105$, mert $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.
Ekvivalens lépések útján kaptuk a gyököket, ezért ezek a valós számok az eredeti egyenletnek is megoldásai.

b) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$, mert ekkor az egyenlet bal oldala 0, a jobb pedig nem 0.
Ekkor végigoszthatunk $\cos x$-szel: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, amiből $x = 0{,}4636 + l\pi \quad l \in \mathbf{Z}$.

894. A grafikonok helyzetéből látható, hogy a metszéspontok első koordinátája a $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ intervallumban van. Ezen az alaphalmazon oldjuk meg a $2\sin x = \cos x$ egyenletet.
Az eredeti egyenletnek nem megoldásai a $\cos x = 0$ egyenlet megoldásai, hiszen ezekben az esetekben az eredeti egyenlet bal oldalán 2 vagy -2 áll.
Osszunk mindkét oldalon $\cos x$-szel: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.
A metszéspontok első koordinátái tehát $0{,}4636$; $0{,}4636 + \pi$; $0{,}4636 + 2\pi$.
A második koordináták rendre $\cos(0{,}4636) = 0{,}8944$; $\cos(0{,}4636 + \pi) = -0{,}8944$; $\cos(0{,}4636 + 2\pi) = 0{,}8944$.
A három metszéspont: $P(0{,}4636; 0{,}8944)$; $Q(3{,}6052; -0{,}8944)$; $R(6{,}7468; 0{,}8944)$.

895. β a háromszög egyik szöge, ezért $-15° < \beta - 15° < 165°$.
Mivel $\sin(\beta - 15°) = 0{,}3588$, ezért a fentiek miatt két lehetőség van:
$\beta - 15° = 21{,}03°$, vagy $\beta - 15° = 180° - 21{,}03° = 158{,}97°$.
Ebből $\beta = 36{,}03°$, vagy $\beta = 173{,}97°$.

896. β a háromszög egyik szöge, ezért $15° < \beta + 15° < 195°$.
Mivel $\cos(\beta + 15°) = -09848$, a fentiek miatt két lehetőség van:
$\beta + 15° = 170{,}0°$, vagy $\beta + 15° = 190{,}0°$.
Ebből $\beta = 155{,}0°$, vagy $\beta = 175{,}0°$.

897. Használjuk fel, hogy $\sin(12° - \alpha) = -\sin(\alpha - 12°) = -0{,}91$, ezért
$\sin(\alpha - 12°) = 0{,}91$.
α a háromszög egyik szöge, ezért $-12° < \alpha - 12° < 168°$.
Mivel $\sin(\alpha - 12°) = 0{,}91$, ezért két lehetőség van: $\alpha - 12° = 65{,}51°$, vagy $\alpha - 12° = 114{,}49°$.
Ebből $\alpha = 77{,}51°$, vagy $\alpha = 126{,}49°$.

898. Használjuk fel, hogy $\cos(72° - \alpha) = \cos(\alpha - 72°) = 0{,}6018$.
α a háromszög egyik szöge, ezért $-72° < \alpha - 72° < 108°$.
Mivel $\cos(\alpha - 72°) = 0{,}6018$, ezért $\alpha - 72° = -53{,}0°$, vagy $\alpha - 72° = 53{,}0°$.
Ebből $\alpha = 19{,}0°$, vagy $\alpha = 125{,}0°$.

899. A derékszögű háromszögben $\beta = 90° - \alpha$, ezért a megadott összefüggés így is írható: $\sin\alpha + \cos(90° - \alpha) = 1{,}3289$. A $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ azonosságot felhasználva adódik: $2\sin\alpha = 1{,}3289$, vagyis $\sin\alpha = 0{,}6645$.
Az α hegyesszög tehát 41,64°, a β pedig 48,36°.

900. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a pozitív $\operatorname{tg}\alpha$-val és használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 2{,}6108 \cdot \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha - 2{,}6108 \cdot \operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$

A megoldóképletből $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4663$, illetve $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1445$ adódik.
$\alpha = 25{,}0°$ vagy $\alpha = 65{,}0°$.

901. Tompaszög koszinusza negatív, ezért $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{0{,}84} = -0{,}9165$, s így $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -0{,}4364$.

902. Hegyesszög szinusza pozitív: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{0{,}8775} = 0{,}9367$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2{,}675$.

903. Tompaszög szinusza pozitív, koszinusza negatív. $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1{,}44$

$1{,}44 \cdot \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$2{,}44 \cdot \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 0{,}4098$

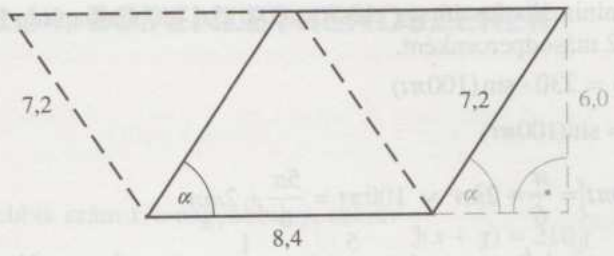
Tehát $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}4098} = -0{,}6402$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{0{,}5902} = 0{,}7682$.

904. A háromszög területe: $\dfrac{30 \cdot 42 \cdot \sin\alpha}{2} = 420$, ebből $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.
A keresett szög: $\alpha_1 \approx 41{,}8°$ vagy $\alpha_2 \approx 138{,}2°$.

Megjegyzés:
A háromszöget két oldala és a területe nem határozza meg egyértelműen.

905. A 7,2 dm-es oldal és a 6,0 dm-es magasság egy derékszögű háromszög átfogója, illetve befogója. A paralelogramma hegyes szöge α, $\sin\alpha = \dfrac{6{,}0}{7{,}2}$, $\alpha = 56{,}4°$, a másik szög ennek kiegészítő-szöge 123,6°.

Megjegyzés:
E szögek meghatározásához nem kellett felhasználnunk a paralelogramma másik, 8,4 dm-es oldalát.



906. A paralelogramma másik oldala akkor a legkisebb, ha éppen az adott magassággal egyenlő, azaz 6,0 dm. Ekkor derékszögű paralelogramma, tehát téglalap jön létre. Tehát a paralelogramma másik oldala legalább 6 dm.

907. a) Maximális kitéréskor $y = \pm A$, vagyis $\sin\left(\frac{2\pi\frac{T}{8}}{T} + \varphi\right) = \pm 1$.

Ekkor $\frac{\pi}{4} + \varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, amiből $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ vagy $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avagy „összefésülve" $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

b) Ekkor $A = \left|\frac{y}{\sin\varphi}\right|$, ahol az abszolútértékjel azért kell, mert az amplitúdó definíció szerint pozitív. Behelyettesítve az adatokat, φ bármelyik értéke esetén $A \approx 2$ cm.

908. a) $u(0) = 230 \cdot \sin 0 = 0$; $u(0{,}01) = 230 \cdot \sin\pi = 0$;
$u(0{,}015) = 230 \cdot \sin(1{,}5\pi) = -230$.
Az egyes időpontokhoz rendre 0 V, 0 V és −230 V feszültség tartozik.

b) A szinuszfüggvény maximuma 1, minimuma −1, ezért a maximális feszültség 230 V, a minimális pedig −230 V.
A szinuszfüggvény maximumhelyeinek segítségével:

$100\pi t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

$t = \frac{1}{200} + k \cdot \frac{1}{50}$; $\quad k \in \mathbf{N}$.

A maximális feszültség először a 0,005 s időpontban lép fel, majd ezt követően 0,02 másodpercenként.
A szinuszfüggvény minimumhelyeinek segítségével:

$100\pi t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$;

$t = \frac{3}{200} + k \cdot \frac{1}{50}$; $\quad k \in \mathbf{N}$.

A minimális feszültség először a 0,015 s időpontban lép fel, majd ezt követően 0,02 másodpercenként.

c) $115 = 230 \cdot \sin(100\pi t)$

$$\frac{1}{2} = \sin(100\pi t)$$

$$100\pi t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 100\pi t = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi$$

$$t = \frac{1}{600} + k \cdot \frac{1}{50} \ \vee \ t = \frac{5}{600} + m \cdot \frac{1}{50}; \qquad k, m \in \mathbf{N}.$$

A fenti (másodpercben megadott) időpontokban lesz +115 V a feszültség.

909. A hullámhossz: $\lambda = vT = 4{,}2$ m.

a) A kitérés ekkor $y = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{3 \text{ s}}{0{,}2 \text{ s}} - \frac{3{,}5 \text{ m}}{4{,}2 \text{ m}}\right)\right) = 2\sqrt{3} \text{ cm} \approx 3{,}46 \text{ cm}.$

b) Először akkor lesz maximális a kitérés, amíg az indulástól „odaér" a jel és még egy negyed periódus múlva eléri a szélső helyzetet: $\frac{3{,}5 \text{ m}}{21 \frac{\text{m}}{\text{s}}} + \frac{0{,}2 \text{ s}}{4} \approx 0{,}217$ s.

Ezután fél periódusonként (azaz 0,1 s-onként) lesz maximális a kitérés, persze váltakozva egyik, illetve másik irányba.

910. Bevezetve a fizikában szokásos $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jelölést, az egyes összefüggések:

$y = A \cdot \sin\omega t, \quad v = A\omega \cdot \cos\omega t, \quad a = -A\omega^2 \cdot \sin\omega t.$

a) Könnyen látható (és fizikából jól ismert), hogy $a = -\omega^2 y$.

A másik két összefüggéshez felhasználjuk, hogy $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$. Mindhárom képletből kifejezve a trigonometrikus kifejezéseket:

$$\sin\omega t = \frac{y}{A} = -\frac{a}{A\omega^2}, \quad \cos\omega t = \frac{v}{A\omega}.$$

b) $\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$, amiből a kívánt összefüggés: $\omega^2 y^2 + v^2 = A^2\omega^2$

(vagy másképp $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \pm\omega\sqrt{y_{\max}{}^2 - y^2}$).

c) $\left(-\frac{a}{A\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$, amiből $\omega^2 v^2 + a^2 = A^2\omega^4$

(vagy másképp $a = \pm\omega\sqrt{A^2\omega^2 - v^2} = \pm\omega\sqrt{v_{\max}{}^2 - v^2}$).

2.14. EGYENLETRENDSZEREK

911. Legyen a kisebbik szám x, a nagyobbik y, ekkor: $\left.\begin{array}{l} x+50=y \\ 3(x+y)=210 \end{array}\right\}$. Beírva a második egyenletbe y helyére az első egyenlet bal oldalát: $3(x+x+50)=210$, amiből $2x+50=70$, és $x=10$. Az első egyenletből ekkor $y=60$. (Persze megoldható a feladat egyismeretlenes egyenletként is, lásd 620.) Tehát a két szám a 10 és a 60.

912. Legyen az idősebb i, a fiatalabb f éves, ekkor: $\left.\begin{array}{l} i+f=32 \\ i-f=2 \end{array}\right\}$. A két egyenlet összegéből, illetve különbségéből $2i=34$, illetve $2f=30$, vagyis $i=17$ és $f=15$. Tehát a két testvér 17 és 15 éves.

913. Kerüljön egy doboz sárga festék s forintba, egy doboz kék k forintba, ekkor:

$\left.\begin{array}{l} 3s+4k=7840 \\ 4s+3k=8050 \end{array}\right\}$.

Az első egyenletet 3-mal, a másodikat 4-gyel megszorozva:

$\left.\begin{array}{l} 9s+12k=23520 \\ 16s+12k=32200 \end{array}\right\}$,

a másodikból az elsőt kivonva: $7s=8680$, amiből $s=1240$. Visszahelyettesítve ezt például az első eredeti egyenletbe, $k=1030$.

Tehát egy doboz sárga festék 1240 Ft-ba, egy doboz kék 1030 Ft-ba kerül.

914. Míg a róka elért a nyúl kiindulási helyéig, x utat tett meg – ezalatt a nyúl $\frac{x}{3}$ utat. A nyúl a tragikus találkozásig további y utat tesz meg – a róka a nyúl kiindulási helyétől $1{,}5y$ utat. Vagyis $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$, és

a) $\frac{4x}{3}+y=120$ – ekkor az egyenletrendszerből $y=40$ m és $x=60$ m,

b) $\frac{x}{3}+y=120$ – ekkor pedig $y=80$ m és $x=120$ m,

vagyis az első esetben 60, a másodikban 120 m távolról vette üldözőbe a róka a nyulat.

915. Legyen a csónak sebessége állóvízben c, a Duna vizének sebessége pedig d. Ekkor Karesz a parthoz képest folyásiránnyal szemben $c - d$, a folyás irányában $c + d$ sebességgel halad.

Az első sebesség $\frac{24\text{ km}}{6\text{ h}} = 4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második pedig $\frac{24\text{ km}}{2\text{ h}} = 12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Egyenletrendszerünk: $\left.\begin{aligned} c-d&=4\\ c+d&=12\end{aligned}\right\}$.

A két egyenlet összegéből, illetve különbségéből $2c = 16$, illetve $2d = 8$, amiből $c = 8$, illetve $d = 4$. Tehát a csónak állóvízben $8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladna, a Duna vize pedig $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel folyik.

916. Legyen a hajó sebessége állóvízben h, a folyó vizének eredeti sebessége pedig f. Ekkor a hajó a parthoz képest folyásiránnyal szemben $h - f$, másnap a folyás irányában $h + 2f$ sebességgel halad.

Az első sebesség $\frac{64\text{ km}}{3{,}2\text{ h}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második pedig $\frac{64\text{ km}}{2\text{ h}} = 32\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Egyenletrendszerünk: $\left.\begin{aligned} h-f&=20\\ h+2f&=32\end{aligned}\right\}$.

A második egyenletből kivonva az elsőt $3f = 12$, amiből $f = 4$, ezt visszaírva pl. az első egyenletbe $h = 24$.

Tehát a hajó állóvízben $24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladna, a folyó vizének (első napi, áradás előtti, eredeti) sebessége pedig $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

917. Legyen a repülő sebessége szélcsendben r, a szél eredeti sebessége pedig s. Ekkor a repülő a talajhoz képest hátszélben $r + s$, másnap a (fele akkora) szembeszélben $r - 0{,}5s$ sebességgel halad.

Az első sebesség $\frac{990\text{ km}}{1{,}1\text{ h}} = 900\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második pedig $\frac{990\text{ km}}{1{,}375\text{ h}} = 720\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Egyenletrendszerünk: $\left.\begin{aligned} r+s&=900\\ r-0{,}5s&=720\end{aligned}\right\}$.

Az első egyenletből kivonva a másodikat $1{,}5s = 180$, amiből $s = 120$, ezt visszaírva pl. az első egyenletbe $r = 780$. Tehát a repülő szélcsendben $780\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladna, a szél (első napi, eredeti) sebessége pedig $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

918. Legyen a két keresett természetes szám x és y, ahol $y > x$. Tudjuk, hogy
$x + y = 256$, valamint
$y = 8x + 13$.
Az első egyenletből $y = 256 - x$, ezt a második egyenletbe beírjuk:
$256 - x = 8x + 13$, innen $x = 27$, $y = 256 - 27 = 229$.

919.* Jelölje x a 25%-os, y a 65%-os oldat szükséges mennyiségét.
Ekkor tehát $x + y = 110$.
A 110 kilogramm 37%-os oldatban $110 \cdot 0{,}37 = 40{,}7$ kg só van (ha a % tömeg%-ot jelent). Az x kilogramm 25%-os oldatban $x \cdot 0{,}25$ kg, az y kilogramm 65%-os oldatban pedig $y \cdot 0{,}65$ kg só van. A só mennyisége nem változik az összeöntés után, tehát $x \cdot 0{,}25 + y \cdot 0{,}65 = 40{,}7$.
A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 110 \\ x \cdot 0{,}25 + y \cdot 0{,}65 &= 40{,}7 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből $y = 110 - x$, ezt a második egyenletbe beírjuk:
$x \cdot 0{,}255 + (110 - x) \cdot 0{,}65 = 40{,}7$
$71{,}5 - 4x = 40{,}7$, innen $x = 77$ (kilogramm), $y = 110 - 77 = 33$ (kilogramm).

920. Legyen a tanulók száma t, az asztalok száma n. Ekkor t és n is természetes számot jelöl. Az első eset (amikor minden asztalhoz 8 tanuló ül) a következő egyenlettel írható fel:
$t = n \cdot 8 + 9$.
A második eset egyenlete:
$t = n \cdot 10 - 15$.
A két egyenletből:
$n \cdot 8 + 9 = n \cdot 10 - 15$
$24 = 2n$
$12 = n$.
$t = n \cdot 8 + 9 = 12 \cdot 8 + 9 = 105$.
Tehát a teremben 12 asztal van, a csoport pedig 105 személyből áll.

921. Az apa életkora y, a fiúé x. Az első feltétel szerint
$y - 3 = 9(x - 3)$.
A második feltétel szerint
$y + 6 = 12(x - 3)$.
Mindkét egyenletből y-t kifejezve kapjuk:
$9(x - 3) + 3 = 12(x - 3) - 6$
$9x - 27 + 3 = 12x - 36 - 6$, rendezve
$18 = 3x$
$6 = x$.
$y = 9(x - 3) + 3 = 9(6 - 3) + 3 = 30$. Tehát az apa 30, a fiú pedig 6 éves.

922. Az első kosárban n, a második kosárban m db alma van. Egyenletként felírva az első feltételt:
$2(n-5) = m+5$.
A másik feltétel szerint:
$n+5 = m-5$.
Mindkét egyenletből kifejezve m-et, kapjuk:
$2(n-5)-5 = n+5+5$
$2n-10-5 = n+10$, innen
$n = 25$, $m = n+10 = 35$.
Tehát az első kosárban 25, a másodikban 35 db alma van.

923. Legyen a gyorsabb lovas sebessége $v_1 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, a lassabbé $v_2 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$. Az első esetben 5 perc alatt a gyorsabb lovas $v_1 \cdot 5$ m-t, a lassabbik $v_2 \cdot 5$ m-t tesz meg. A két út összege 2500 m, azaz $v_1 \cdot 5 + v_2 \cdot 5 = 2500$.
A második esetben 25 perc alatt a gyorsabb $v_1 \cdot 25$ m-t, a lassabb $v_2 \cdot 25$ m-t tesz meg. Mivel a gyorsabb lekörözte a lassabbat, a megtett útja éppen 2500 m-rel több, azaz $v_1 \cdot 25 - v_2 \cdot 25 = 2500$.
A kétismeretlenes egyenletrendszer tehát:
$5(v_1+v_2) = 2500$, azaz $v_1+v_2 = 500$, és
$25(v_1-v_2) = 2500$, azaz $v_1-v_2 = 100$.
Összeadva a két egyenletet:
$2v_1 = 600$, azaz $v_1 = 300$,
$v_2 = 500 - v_1 = 500 - 300 = 200$.
Tehát a gyorsabb lovas sebessége $300 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, a lassabbé $200 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$.

924. A gyorsabb korcsolyázó sebessége $v_1 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, a lassabbé $v_2 \frac{\text{m}}{\text{perc}}$. A körpálya egyik pontjából indulnak egymással szemben, ekkor 5 perc alatt együtt 1800 m-t, a teljes kört tették meg. Egy irányba haladva két találkozás (utolérés) között a megtett út különbsége is éppen a kör kerülete.
Egymással szemben: $5v_1 + 5v_2 = 1800$.
Egy irányban haladva: $15v_1 - 15v_2 = 1800$.
Megoldás: $v_1 = 240 \frac{\text{m}}{\text{perc}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 120 \frac{\text{m}}{\text{perc}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
A szövegbe helyettesítve látható, hogy a kapott értékek valóban megoldások.
Egymással szemben: $5 \cdot 240 + 5 \cdot 120 = 1200 + 600 = 1800$.
Egy irányban haladva: $15 \cdot 240 - 15 \cdot 120 = 3600 - 1800 = 1800$.

925. Ha a téglalap oldalai a és b, átlója 20 m, akkor a Pitagorasz-tételt felírva
$a^2 + b^2 = 400$.
Másrészt a kerülete 56 m, azaz
$2(a + b) = 56$.
A második egyenletből $b = 28 - a$, ezt az első egyenletbe beírva:
$a^2 + (28 - a)^2 = 400$,
$2a^2 - 56a + 384 = 0$.
A másodfokú egyenlet két gyöke: $a_1 = 16$ és $a_2 = 12$.
Ha $a = 16$ m, akkor $b = 12$ m; ha $a = 12$ m, akkor $b = 16$ m.
A kert területe tehát: $a \cdot b = 16 \cdot 12 = 192$ (m²).

926. A két szám x és y; a két összefüggést felírva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = 5 \qquad (xy \neq 0 \text{ és } x \neq y).$$

Rendezés után az egyenletek:
$24y + 24x = 5xy$
$x + y = 5x - 5y$
A második egyenletből $x = \frac{3}{2}y$, ezt az első egyenletbe beírjuk:
$24y + 24 \cdot \frac{3}{2}y = 5 \cdot \frac{3}{2}y \cdot y$, azaz
$60y = \frac{15}{2}y^2$.
Mivel $y \neq 0$, ezért osztunk vele:
$60 = \frac{15}{2}y$, innen $y = 8$.
$x = \frac{3}{2} \cdot y = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.
A megoldás tehát $x = 12$ és $y = 8$.

927. a) Például $x + y = 0$, ekkor az egyetlen megoldás $x = -2$, $y = 2$.
b) Például: $2x - 3y + 7 = 0$.
c) Például: $4x - 6y + 20 = 0$.

928. a) $M = \left\{\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$ b) $M = \{(6; 4)\}$

929. $4(x+2)-3(y-3)=36 \wedge 3(y-3)-(x+2)=0; \quad x \neq -2; \quad y \neq 3$
$4x-3y=19 \wedge -x+3y=11$
$x=10 \wedge y=7$
$M=\{(10;7)\}$

930. A kőműves x napot dolgozott és y napot pihent.
$x+y=48 \wedge 5x-7y=0$
$x=28 \wedge y=20$
A kőműves 28 napot dolgozott (ezért 140 ezüstöt kapott) és 20 napot pihent (ezért 140 ezüstöt fizetett).

931. Egy hordó bor x ezüstöt ér; egy hordó bor után y ezüst vámot kell fizetni.
Az első kereskedő 59 hordó bort visz át a határon, ezért $59y$ ezüst vámot kell fizetnie. A szöveg szerint: $59y = 5x + 40$.
A második kereskedő 18 hordó bort visz át a határon, ezért $18y$ ezüst vámot kell fizetnie. A szöveg szerint: $18y = 2x - 40$.
Megoldandó tehát a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 59y-5x&=40\\ 18y-2x&=-40 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = 110$ és $y = 10$, vagyis egy hordó bor értéke 110 ezüst és egy hordó bor után 10 ezüst vámot kell fizetni.

Ellenőrzés:
Az első kereskedőnek az 59 átvitt hordó után 590 ezüst vámot kellett fizetnie; 5 hordó bor értéke 550 ezüst, így a készpénzben odaadott 40 ezüsttel valóban megfizette a vámot.
A második kereskedőnek a 18 átvitt hordó után 180 ezüst vámot kellett fizetnie; 2 hordó bor értéke 220 ezüst, így a készpénzben visszakapott 40 ezüsttel ő is megfizette a vámot.

932.

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+2xy-2xy-y&=x^2-y^2+1\\ 40x-12y&=7 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2y^2-y-1&=0\\ 40x-12y&=7 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet megoldóképlettel megoldva $y=-\frac{1}{2}$, illetve $y = 1$ adódik.
A második egyenletbe történő behelyettesítések után kapjuk:

$$M=\left\{\left(\frac{1}{40};\ -\frac{1}{2}\right);\ \left(\frac{19}{40};\ 1\right)\right\}.$$

933. a) $x \geq 0$ és $y \geq 0$ szükséges.

$2x = 12 - 2\sqrt{x} \wedge y = 2\sqrt{x}$

$x + \sqrt{x} - 6 = 0 \wedge y = 2\sqrt{x}$

$(\sqrt{x} = -3 \vee \sqrt{x} = 2) \wedge y = 2\sqrt{x}$

Mivel $\sqrt{x} = -3$ nem lehetséges, ezért csak egy megoldás van: $M = \{(4; 4)\}$.

b) Adjuk hozzá a második egyenletet az elsőhöz:

$$\left.\begin{aligned} 2x + \sqrt{x} - 21 = 0 \\ 5\sqrt{x} - y - 17 = 0 \end{aligned}\right\} \quad x \geq 0$$

Az első egyenletet megoldóképlettel megoldva: $\sqrt{x} = -\frac{7}{2}$, illetve $\sqrt{x} = 3$ adódik, de csak az utóbbi lehetséges ($\sqrt{x} \geq 0$ miatt).

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x} = 3 \\ 5 \cdot 3 - y - 17 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Ebből $M = \{(9; -2)\}$.

934. a) Legyen $a := 3^x$ és $b := 4^y$. Ekkor az eredeti egyenletrendszer így írható:

$$\left.\begin{aligned} a + b = 73 \\ ab = 576 \end{aligned}\right\}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva: $a = 9 \wedge b = 64$, illetve $a = 64 \wedge b = 9$ adódik. Az a és a b definíciójába visszahelyettesítve kapjuk:

$M = \{(2; 3); (\log_3 64; \log_4 9)\}$.

b) Az első egyenlet így is írható: $(3^{xy})^2 - 4 \cdot 3^{xy} - 528\,525 = 0$. Megoldóképlettel $3^{xy} = -725$, illetve $3^{xy} = 729$ adódik, de csak a második eset lehetséges ($3^{xy} > 0$ miatt). Mivel $729 = 3^6$ és $243 = 3^5$, ezért az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$xy = 6 \wedge x + y = 5$.

Ezt megoldva kapjuk: $M = \{(2; 3); (3; 2)\}$.

935. Legyenek az egész számok x és y.

$x + y = 120 \wedge xy = 3456$

$y = 120 - x \wedge x(120 - x) = 3456$

$y = 120 - x \wedge x^2 - 120x + 3456 = 0$

$y = 120 - x \wedge (x = 48 \vee x = 72)$

$(x = 48 \wedge y = 72) \vee (x = 72 \wedge y = 48)$

A keresett egész számok a 48 és a 72.

Ellenőrzés:

$48 + 72 = 120$ igaz és igaz az is, hogy $48 \cdot 72 = 3456$.

936. A pénzhez jutó alapítványok száma a terv szerint x, az egy alapítványnak szánt összeg y Ft volt. A szöveg alapján (az összegeket ezer forintban számolva):

$$\left.\begin{aligned} xy &= (x+8)(y-300) \\ 1000(x+8) &= xy + 9600 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 300x - 8y &= -2400 \\ xy - 1000x + 1600 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 37{,}5x + 300 \\ x(37{,}5x + 300) - 1000x + 1600 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 37{,}5x + 300 \\ 37{,}5x^2 - 700x + 1600 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletet megoldóképlettel megoldva $\frac{8}{3}$, illetve 16 adódik, de a feladat szövege alapján csak a 16 lehetséges.
Ezt behelyettesítve az egyenletrendszer első egyenletébe $y = 900$ adódik.
Eredetileg tehát 16 alapítvány kapott volna egyenként 900 ezer forintot; végül 24 alapítvány kapott támogatást, összesen 24 millió forint értékben.

Ellenőrzés:
A kezdetben rendelkezésre álló pénz:
$16 \cdot 900$ ezer = 14 400 ezer = 14 millió 400 ezer forint volt.
A 9 millió 600 ezer forintos bevétellel ez az összeg valóban 24 millió forintra nőtt.

937. x db értékpapírt akartunk venni; a kezdeti árfolyam y Ft/db volt. A szöveg alapján:

$$\left.\begin{aligned} x(y+5) &= 12\,000 \\ (x+4)y &= 12\,000 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} xy + 5x &= 12\,000 \\ xy + 4y &= 12\,000 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az egyenletrendszer 2. egyenletét az elsőből:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 4y &= 0 \\ xy + 4y &= 12\,000 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}y^2 + 4y - 12\,000 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A most kapott egyenletrendszer második egyenletét $y^2 + 5y - 15\,000 = 0$ alakra hozva, majd megoldóképlettel megoldva $y = -125$, illetve $y = 120$ adódik, de csak a második gyök felel meg a feladat szövegének. Az egyenletrendszer megfelelő megoldása tehát a (96; 120) rendezett számpár.

Eredetileg tehát 96 db részvényt akartunk vásárolni, és ekkor az árfolyam 120 Ft/db volt.

Ellenőrzés:

Amikor az értékpapírokat megvásároltuk, akkor az árfolyam $\frac{12\,000}{96} = 125$ Ft/db volt és ez valóban 5 Ft-tal több az eredeti árfolyamnál. Mivel $\frac{12\,000}{120} = 100$, ezért az is igaz, hogy 12 ezer forintért 4 darabbal több értékpapírt kaptunk volna.

938. A háromszög befogóinak cm-ben mért hossza a és b; az átfogó a szöveg szerint 410 cm hosszú és $a + b = 490$.

A Pitagorasz-tétel szerint $a^2 + b^2 = 410^2$.

Megoldandó tehát a következő egyenletrendszer:

$a + b = 490 \wedge a^2 + b^2 = 168\,100$.

Ennek megoldáshalmaza $M = \{(400; 90); (90; 400)\}$, azaz a derékszögű háromszög befogóinak hossza 400 cm és 90 cm, a háromszög átfogója 410 cm hosszú.

Ellenőrzés:

A 490 cm valóban 80 cm-rel több, mint a 410 cm, továbbá:

$400^2 + 90^2 = 160\,000 + 8100 = 168\,100 = 410^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög valóban derékszögű.

939. A kockák élhossza x m és y m. A szöveg alapján:

$x + y = 6 \wedge x^3 + y^3 = 75{,}78$.

Tudjuk, hogy $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, ezért egyenletrendszerünk így is írható:

$x + y = 6 \wedge 6(x^2 - xy + y^2) = 75{,}78$.

Az első egyenletből y-t kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$y = 6 - x \wedge x^2 - x(6 - x) + (6 - x)^2 = 12{,}63$

$y = 6 - x \wedge 3x^2 - 18x + 23{,}37 = 0$

$y = 6 - x \wedge (x = 1{,}9 \vee x = 4{,}1)$

$(x = 1{,}9 \wedge y = 4{,}1) \vee (x = 4{,}1 \wedge x = 1{,}9)$.

A kockák élhossza tehát 1,9 m és 4,1 m, ezért felszínük $6 \cdot 1{,}9^2 = 21{,}66$ m^2, illetve $6 \cdot 4{,}1^2 = 100{,}86$ m^2.

Ellenőrzés:

A kockák élhosszának összege 6 m; térfogatuk 6,859 m^3, illetve 68,921 m^3; a két térfogat összege valóban 75,78 m^3.

940. Az egyik osztály x tanulója fejenként y Ft-ot fizet,
a másik osztály $x + 4$ tanulója fejenként $y - 100$ Ft-ot fizet.

I. $xy = 22\,400 \qquad x \in \mathbf{Z}^+, \quad y \in \mathbf{Z}^+$

II. $(x + 4)(y - 100) = 22\,400$

Az I-et figyelembe véve II. így alakul:

$4y - 100x - 400 = 0$, innen $y = 25x + 100$.

Ezt behelyettesítve az I.-be és egyszerűbb alakra hozva:

$x^2 + 4x - 896 = 0$.

A feladat szövegének csak pozitív érték felel meg: $x = 28$; $y = 800$.

Ezek a fenti feltételeknek eleget tesznek, a szövegnek megfelelnek.

Az egyik osztályban 28 tanuló fejenként 800 Ft-ot fizetett: $28 \cdot 800 = 22\,400$, a másik osztályban 32 tanuló fejenként 700 Ft-ot fizetett: $32 \cdot 700 = 22\,400$.

Az osztályokba 28, illetve 32 tanuló jár.

941. A két szám x és y.

$$\left.\begin{aligned} xy &= 180 \\ x^2 - y^2 &= 81 \end{aligned}\right\}$$ Az elsőből $x = \frac{180}{y}$, ami behelyettesítve a másodikba

$$\frac{180^2}{y^2} - y^2 = 81$$

$$(y^2)^2 + 81y^2 - 180^2 = 0$$

Az y^2-re adódó negatív érték nem vezet megoldásra, mert nincs olyan valós szám, amelynek négyzete negatív. Az y^2-re kapott pozitív érték 144, ebből

$y_1 = 12$, $y_2 = -12$, a hozzájuk tartozó x érték

$x_1 = 15$, $x_2 = -15$.

A két értékpár kielégíti az adott egyenleteket és a feladat szövegének megfelel.

942. Az egyik baráti társaság x főből állt, a másik $x - 1$ főből.

Fejenként y Ft-ot, illetve $y + 5000$ Ft-ot nyertek.

$$\left.\begin{aligned} xy &= 150\,000 \\ (x - 1)(y + 5000) &= 150\,000 \end{aligned}\right\}$$

Az y-t kiküszöbölve kapjuk: $x^2 - x - 30 = 0$,

ennek gyökei: $x_1 = 6$, $x_2 = -5$, de itt csak a pozitív érték jöhet szóba (emberek száma), ennek megfelelően $y_1 = 25\,000$.

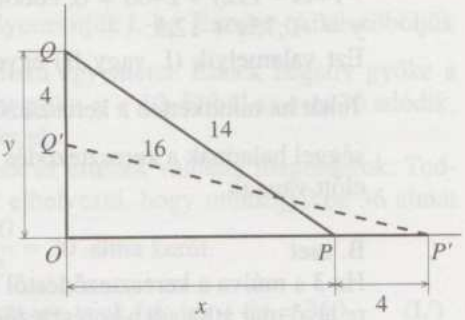
A két társaság eszerint 6, illetve 5 tagú volt, fejenkénti nyereségük 25 000 Ft, illetve 30 000 Ft.

A feladat szövegébe helyettesítéssel igazolható a megoldás helyessége:

$6 \cdot 25\,000 = 150\,000$, illetve

$5 \cdot 30\,000 = 150\,000$.

943. A derékszög csúcsa O, az innen távolodó test kiindulási pontja a megfigyelés kezdetén az egyik száron P. A csúcshoz közeledő test kiindulási pontja a másik száron a megfigyelés kezdetén Q. Legyen $x = OP$, $y = OQ$. Az OPQ háromszög derékszögű, átfogója 14. A testek 1 sec alatt 4 métert tesznek meg. Az újabb megfigyelési helyet P', illetve Q'-vel jelölve a kapott $OP'Q'$ derékszögű háromszög befogói $OP' = x + 4$, $OQ' = y - 4$, átfogója 16.



$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 196 \\ (x+4)^2 + (y-4)^2 &= 256 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer pozitív megoldása:

$y = 7{,}99 \quad (\approx 8{,}0)$

$x = 11{,}49 \quad (\approx 11{,}5)$

Az x-re és y-ra kapott negatív érték nem megoldása a feladatnak.

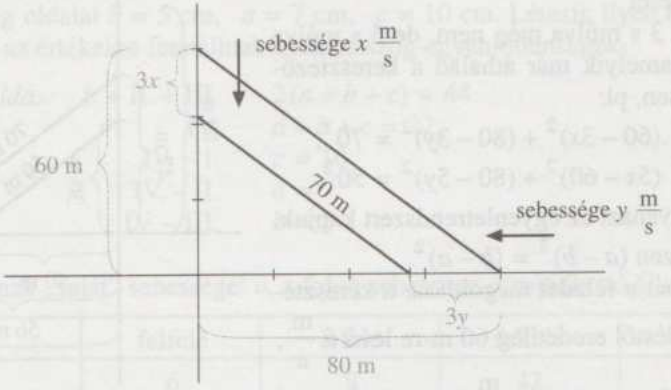
A kapott pozitív értékek megfelelnek a feladat szövegének.

Az első megfigyeléskor a csúcsponttól a távolodó test 11,5 m-re, a közeledő pedig 8,0 m-re volt.

Megjegyzés: a csúcs felé közeledő test a kiindulási helytől az adott idő (1 sec) alatt nem éri el a derékszög csúcsát.

944. A. eset

Ha 5 s múlva még mindketten a kereszteződés előtt vannak:



I. $(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2$

II. $(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2$

I. $9x^2 - 360x + 9y^2 - 480y + 5100 = 0$

II. $25x^2 - 600x + 25y^2 - 800y + 7500 = 0$

Szorozzuk be a II. egyenletet $\frac{9}{25}$-del, vonjuk ki az I. egyenletből az így kapott II. egyenletet, rendezés után:

$-144x - 192y + 2400 = 0$, ebből

$y = -0{,}75x + 12{,}5$.

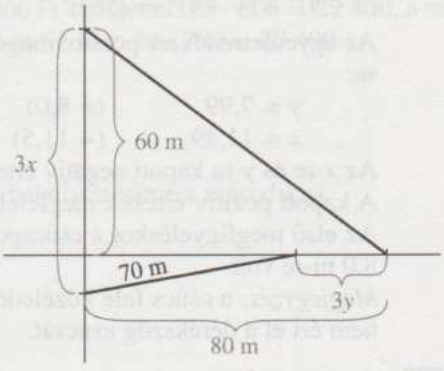
Ezt valamelyik (I. vagy II) egyenletbe visszahelyettesítve $x = 6$ és $y = 8$ adódik. Tehát ha mindketten a kereszteződés előtt vannak, akkor $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, illetve $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladnak a kereszteződés felé, és 5 s múlva még mindketten a kereszteződés előtt vannak.

B. eset

Ha 3 s múlva a kereszteződéstől 60 m-re levő már áthaladt a kereszteződésen, de az eredetileg 80 m-re levő még nem, és 5 s múlva sem:

III. $(3x - 60)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2$,

IV. $(5x - 60)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2$.



Az egyenletrendszer ugyanaz, ennek megoldása:

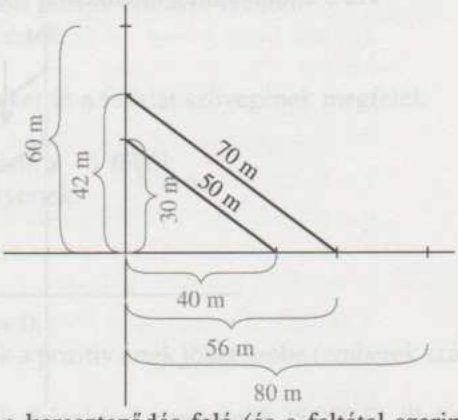
$x = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $y = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, de ezzel nem érnek át 3, illetve 5 s alatt a kereszteződésen.

C. eset

Ha 3 s múlva még nem, de 5 s múlva valamelyik már áthalad a kereszteződésen, pl:

V. $(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2$,

VI. $(5x - 60)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2$.



Ugyanazt az egyenletrendszert kapjuk, hiszen $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

Tehát a feladat megoldása: a kereszteződéstől eredetileg 60 m-re levő $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a 80 m-re levő $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, sebességgel halad a kereszteződés felé (és a feltétel szerint 3 s, illetve 5 s alatt nem érik el a kereszteződést).

Az érdekes az, hogy a sebességek értéke minden esetben azonos, tehát a válasz: $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladnak.

945. Eredetileg x db kosarunk van s egy-egy kosárba a db alma fér, x kosárba ax db alma.
Első alkalommal: $(a+6)x = 360$, (I.)
ha lenne még további 2 kosarunk: $a(x+2) = 360$. (II.)

A II.-ból a-t kifejezzük: $a = \dfrac{360}{x+2}$ és behelyettesítjük I.-be. Ezzel a-t kiküszöböljük s így kapjuk az $x^2 + 2x - 120 = 0$ másodfokú egyenletet. Ennek negatív gyöke a feladat szövegének nem felel meg, a pozitív gyök: $x = 10$. Ebből az a-ra 30 adódik. 10 kosarunk van és egy kosárba 30 alma fér el.

A szöveg alapján megállapítható, hogy ezek az értékek valóban megoldások. Tudniillik: 360 almát 10 kosárba úgy tudnánk elhelyezni, hogy mindegyikbe 36 almát tennénk, 12 kosár esetén mindegyikbe $\dfrac{360}{12} = 30$ alma kerül.

Megjegyzés: ha a kiinduló egyenletrendszert így írjuk fel: $ax + 6x = 360$ (I.')
és $ax + 2a = 360$, (II.')
akkor ebből azonnal látható, hogy $a = 3x$.

Így I.'-be vagy II.'-be helyettesítve, a $3x^2 + 6x - 360 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A folytatást lásd fent.

946. A háromszög oldalai legyenek a, b és c. Ekkor $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

I. $a+b=12$ $\Big\}$ $a = 12-b$
II. $b+c=15$ $\Big\}$ $c = 15-b$
III. $c+a=17$

$(15-b)+(12-b) = 17$

A háromszög oldalai $b = 5$ cm, $a = 7$ cm, $c = 10$ cm. Létezik ilyen háromszög, mert ezekre az értékekre fennállnak a háromszög-egyenlőtlenségek.

Másik megoldás: I. + II. + III. $2(a+b+c) = 44$
IV. $a+b+c = 22$
IV. – I. $c = 10$
IV. – II. $a = 7$
IV. – III. $b = 5$

947. A motorcsónak „saját" sebessége: v, a folyó sebessége c, mindkettő állandó.

a folyón	felfelé	lefelé	felfelé	lefelé
út (km)	6	8	42	42
sebesség $\left(\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	$v-c$	$v+c$	$v-c$	$v+c$
idő (h)	$\dfrac{6}{v-c}$	$\dfrac{8}{v+c}$	$\dfrac{42}{v-c}$	$\dfrac{42}{v+c}$

A feladat szövege szerint felírhatók a következő egyenletek.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } \dfrac{6}{v-c}=\dfrac{8}{v+c} \\ \text{II. } \dfrac{42}{v-c}+\dfrac{42}{v+c}=4+\dfrac{1}{12}=\dfrac{49}{12} \end{array}\right\}$$

Érdemes az első egyenletet 2-vel, a másodikat 7-tel osztani, majd a nevezőkkel végig szorozva kapjuk a $3v+3c=4v-4c$

és a $72v+72c+72v-72c=7(v^2-c^2)$ egyenleteket.

Összevonás, rendezés után: $v=7c \quad (*)$

és $7v^2-144v-7c^2=0.$

Ezeket figyelembe véve kapjuk:

$7(49c^2)-144(7c)-7c^2=0. \qquad /:7$

$48c^2-144c=0 \qquad /:48$; majd szorzattá alakítjuk

$c(c-3)=0$

$c>0$ miatt csak $c=3$ és $v=21$ jöhet szóba.

Tehát a motorcsónak „saját" sebessége (azaz állóvízben) 21 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, a folyó sebessége 3 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Ekkor $v+c=24$, $v-c=18$. A feladat szövegébe helyettesítve megállapítható, hogy a kapott c és v érték megoldást jelent, ugyanis teljesül:

$\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$ és $\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$, továbbá $\dfrac{42}{18}+\dfrac{42}{24}=\dfrac{7}{3}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{49}{12}$.

Másik megoldás:

Az I. egyenletből kaptuk a $(*)$-gal jelölt összefüggést. Ezt behelyettesítjük a II.-ba: $\dfrac{42}{8c}+\dfrac{42}{6c}=\dfrac{49}{12}$. Ezt végig szorozhatjuk $\dfrac{2}{7}$-tel: $\dfrac{6}{4c}+\dfrac{6}{3c}=\dfrac{7}{6}$, amiből közös nevezőre hozás és egyszerűsítés után $c=3$ adódik.

A $(*)$ sor alapján $v=21$. (A befejezést lásd az előbbi megoldásnál.)

948. Tudjuk, hogy egy 6 méteres alagút építési költsége 23 000 000 Ft, tehát a megadott költségképletbe behelyettesítve az $x=6$ értéket:

$23\,000\,000=6a+36b \qquad /\cdot 2$

$46\,000\,000=12a+72b$

A 12 méteresé 54 000 000 Ft, azaz: $54\,000\,000=12a+144b$.

Ha kivonjuk ebből az egyenletből a másikat:

$8\,000\,000=72b \Rightarrow b=111\,111,\dot{1}$.

Visszahelyettesítve pl. a második feltételbe:

$54\,000\,000=12a+144\cdot 111\,111,\dot{1}$

$12a=38\,000\,000 \Rightarrow a=3\,166\,666,\dot{6}$

Ezután a 15 m hosszú alagút költségei:
$C = 15 \cdot 3\,166\,666{,}\dot{6} + 225 \cdot 111\,111{,}\dot{1} = 72\,500\,000$ (Ft).

949. Fejezzük ki az első egyenletből x-et és helyettesítsük be a második egyenletbe!

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5$$

Ezt y^2-tel beszorozva egy másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet kapunk: $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$.

Legyen $y^2 = a$, így $a^2 - 5a + 4 = 0$, melynek gyökei 1 és 4.

Ha $y^2 = 1$, ebből $y_1 = 1$, $x_1 = 2$
$y_2 = -1$, $x_2 = -2$

Ha $y^2 = 4$, ebből $y_3 = 2$, $x_3 = 1$
$y_4 = -2$, $x_4 = -1$

A kapott rendezett számpárok az eredeti egyenletrendszer megoldásai.

Másik megoldás:

Az 1. egyenlet kétszeresét levonva, illetve hozzáadva a második egyenlethez kapjuk:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 9 \Rightarrow (x+y)^2 = 9 \begin{cases} x+y=3, \\ x+y=-3. \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1 \Rightarrow (x-y)^2 = 1 \begin{cases} x-y=1, \\ x-y=-1. \end{cases}$$

Az egyenletek megfelelő párosítása után az I. megoldás eredményeit kapjuk.

950. $x = 8$, $y = -2$

951. A tört miatt $a \neq 0$, $b \neq 0$. Legyen $x := \frac{1}{a}$; $y := \frac{1}{b}$.

Így az egyenletrendszer

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y = \frac{13}{20} \\ \text{II.} & 5x - \frac{1}{3}y = \frac{53}{6} \end{array}\right\}.$$

Az I. egyenletet 5-tel, a II.-at 6-tal szorozva, majd a két egyenletet összeadva kapjuk: $x = 1{,}5$, melyből $a = \frac{2}{3}$. Ezt az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe helyettesítve kapjuk: $b = -\frac{1}{4}$.

A $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{1}{4}\right)$ számpár az egyenletrendszer megoldása.

952. Első osztályú 500 Ft-os árucikkből x db, másodosztályú 300 Ft-os árucikkből $1200 - x$ db volt. Ezek ára: $500x + 300(1200 - x)$. Ha minden darabot 600 Ft-ért adnak el, a haszon 50%.

$1{,}5[500x + 300(1200 - x)] = 600 \cdot 1200$

Ebből $x = 600$, azaz 600 db 500 Ft-os és 600 db 300 Ft-os áru volt.

Ezek összértéke $600 \cdot 500 + 600 \cdot 300 = 480\,000$ Ft, 600 Ft-os egységár esetén $1200 \cdot 600 = 720\,000$ Ft lenne a bevétel. $1{,}5 \cdot 480\,000 = 720\,000$, tehát 50%-os a haszon.

Másik megoldás (egyenletrendszerrel):

Ha 500 Ft-os árucikkből x db, 300 Ft-osból y db van:

$x + y = 1200$.

Ezek ára: $500x + 300y$.

$600 \cdot 1200 = 1{,}5(500x + 300y)$

Ebből $x = 600$; $y = 600$.

953. Legyen a kétjegyű szám első számjegye x, második számjegye y. ($x \in \mathbf{N}^+$; $y \in \mathbf{N}^+$; $1 \leq x \leq 9$; $1 \leq y \leq 9$).

Az eredeti kétjegyű szám $10x + y$.

A felcserélt szám $10y + x$.

A feltétel szerint $10x + y - 45 = 10y + x$, amiből $y = x - 5$.

Az eredeti számot 12,5%-kal növelve és a számjegyek összegével osztva

$$\frac{1{,}125(10x + y)}{x + y} = 9.$$

Az y-ra kapott értéket behelyettesítve $x = 7$, $y = 2$ adódik. Tehát a keresett kétjegyű szám a 72.

A felcserélt szám a 27, amely 45-tel kisebb az eredetinél.

Az is teljesül, hogy $\frac{1{,}125 \cdot 72}{9} = 9$.

954. Az egyik csoport x óra alatt, a másik csoport y óra alatt végezné el egyedül a teljes munkát. Így 1 óra alatt az egyik csoport egyedül a teljes munka $\frac{1}{x}$ részét, a másik csoport $\frac{1}{y}$ részét végzi el.

16 óra alatt szedték volna fel együtt az összes burgonyát:

$$\frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \qquad \text{(I.)}$$

Az első csoport $36 + 4 = 40$ órát dolgozott, a másik csoport 4 órát, így befejezték a munkát.

$$\frac{40}{x} + \frac{4}{y} = 1 \qquad \text{(II.)}$$

A (II.) egyenlet 4-szereséből kivonjuk az (I.) egyenletet:

$\frac{144}{x} = 3 \Rightarrow x = 48.$

Ezt (II.) visszahelyettesítve kapjuk:

$\frac{40}{48} + \frac{4}{y} = 1 \Rightarrow y = 24.$

Tehát az egyik csoport 48 óra alatt, a másik csoport 24 óra alatt végezné el egyedül a teljes munkát.

Ellenőrzés:

36 óra alatt az egyik csoport $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ részét végzi el a munkának. Együtt 4 óra alatt $\frac{4}{48} + \frac{4}{24} = \frac{1}{4}$ részét végzik el a teljes munkának, így befejezik a burgonyaszedést.

16 óra alatt együtt $\left(\frac{16}{48} + \frac{16}{24} = 1\right)$ elvégzik a teljes munkát.

955. A teremben x sor és minden sorban y szék van.

A teremben levő összes szék száma:

$xy = 330.$ (I.)

Ha a sorok számát 3-mal megnöveljük $(x + 3)$,

és soronként 2-vel több széket teszünk $(y + 2)$,

a teremben levő összes szék száma:

$(x + 3)(y + 2) = 425$ (II.)

$xy + 2x + 3y + 6 = 425.$

(I.)-et figyelembe véve:

$2x + 3y = 89.$

Ebből x-et kifejezve: $x = 44{,}5 - 1{,}5y.$

Ezt behelyettesítjük (I.)-be:

$(44{,}5 - 1{,}5y)y = 330,$

$1{,}5y^2 - 44{,}5y + 330 = 0.$

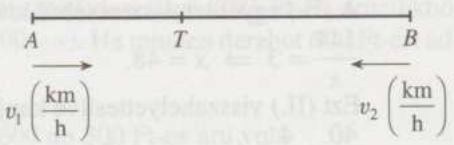
Ennek megoldása $y_1 = 15$, $y_2 = \frac{44}{3}$. Csak az $y_1 = 15$ megoldása a feladatnak, mivel y az egy sorban levő székek száma.

A teremben $\frac{330}{15} = 22$ sor van eredetileg.

Ha a sorok számát 25-re, az egy sorban levő székek számát 17-re növelik, akkor a teremben $25 \cdot 17 = 425$ ülőhely lesz.

Tehát eredetileg 22 sor és minden sorban 15 szék, a második elrendezésben 25 sor, és soronként 17 szék van.

956. A-ból v_1 sebességgel, B-ből v_2 sebességgel halad a vonat. T-ben találkoznak, a találkozásig eltelt idő t (h), tehát:



$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 400.$ (1.)

A-ból B felé, a találkozás után TB távolságot az A-ból induló 3 óra alatt teszi meg, ugyanezt a távolságot a B-ből induló t idő alatt v_2 sebességgel tette meg, így

$v_2 t = v_1 \cdot 3.$ (2.)

B-ből A felé a találkozás után TA távolságot a B-ből induló 80 perc $= \frac{4}{3}$ óra alatt teszi meg, ugyanezt a távolságot A-ból induló t idő alatt v_1 sebességgel tette meg, így:

$v_1 t = v_2 \cdot \frac{4}{3}.$ (3)

(2.) és (3.) egymással osztva, majd rendezve:

$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{4}{9}$;

mivel $\frac{v_1}{v_2} > 0 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$.

Ezt (1.)-be helyettesítve: $v_1 t = 160 \Rightarrow AT = 160$ km; $BT = 240$ km.

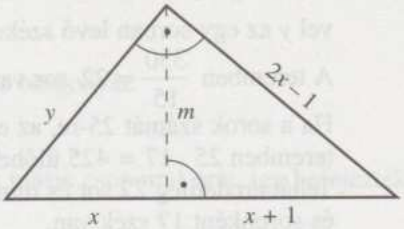
Ezeket (2.) és (3.)-ba helyettesítve: $v_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v_2 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A találkozásig 2 óra telt el, a találkozás után A-ból induló valóban 3 óra alatt ér B-be, a B-ből induló $\frac{4}{3}$ óra alatt ér A-ba.

957. A derékszögű háromszög köré írt kör (azaz Thalész-kör) sugara 3 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság ennél nagyobb nem lehet. Ilyen háromszög tehát nem létezik.

958. A legrövidebb magasság az átfogóhoz tartozik (ez tudniillik rövidebb mindkét befogónál, amelyek a másik két magasságot jelentik).

Az átfogón létrejövő két szakasz hossza legyen x és $x + 1$, ekkor a hosszabb befogó hossza $2x - 1$. A másik befogó hosszát y-nal jelöljük.



Az átfogóhoz tartozó magasságra érvényes a mértaniközép-tétel:

$m^2 = x(x + 1)$.

Ezt is felhasználva felírhatjuk a Pitagorasz-tételt az egyik kisebb és az eredeti háromszögre.

I. $(2x-1)^2 = (x+1)^2 + x(x+1)$

II. $y^2 = (2x+1)^2 - (2x-1)^2$

Az I.-ből a pozitív gyök $x = \frac{7}{2}$, ennek ismeretében a II.-ból:

$y^2 = 28$, illetve $y = \pm 2\sqrt{7}$, de ebből csak a pozitív érték jelent megoldást.

A háromszög oldalai: $2\sqrt{7}$ cm, 6 cm, 8 cm, ezek a követelményeinek megfelelnek.

Megjegyzés: a feladat a befogó tétel kétszeri alkalmazásával is megoldható.

959. Legyen a keresett két szám: x és y.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } x+y=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \end{array}\right\} \quad \text{innen} \quad \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4}.$$

Az I.-et is figyelembe véve $\frac{6}{xy}=\frac{3}{4}$, azaz $xy = 8$ II.

Az I. és II.-ból álló egyenletrendszer megoldása, azaz a keresett két szám 4 és 2, amelyek a feladat szövegének megfelelnek.

960. A paprika ára x Ft/kg, a paradicsom ára y Ft/kg.

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y=930 \\ 1{,}5x+y=330 \end{array}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 120$, $y = 150$. Tehát a paprika ára 120 Ft/kg, a paradicsom ára 150 Ft/kg. Ezek az értékek a feladat szövegének megfelelnek, hiszen teljesül, hogy $4 \cdot 120 + 3 \cdot 150 = 930$, és $1{,}5 \cdot 120 + 150 = 330$.

961.

	az egészet egyedül elvégezné	1 óra alatt elvégzi a munka
Az első munkás	x óra alatt	$\frac{1}{x}$-ed részét
A második munkás	y óra alatt	$\frac{1}{y}$-od részét

A feladat szövegének megfelelően az egész (egységnyinek tekinthető) munkát elvégzik:

az első elgondolás szerint: I. $\frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{2}$

a második elgondolás szerint: II. $\frac{18}{x}+\frac{12}{y}=1$

Ezt 2-vel osztva kapjuk: II.' $\frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{2}$.

I.-ből kivonjuk a II.'-t: $\frac{8}{y} = \frac{1}{2}$, ebből: $y = 16$.
Ezt behelyettesítve az egyik egyenletbe, kapjuk: $x = 72$.
Ha együtt dolgoznak t óra alatt végeznek a munkával,
$\frac{t}{16} + \frac{t}{72} = 1$, innen $t = \frac{144}{11} \approx 13{,}09$.
Ha együtt dolgoznak, a munkát 13,1 óra alatt végzik el. A kapott megoldás megfelel a feladat szövegének.
Megjegyzés: a feladat az x és az y ismeretében újabb változó bevezetése nélkül, egyenlet nélkül is megoldható:
Ha együtt dolgoznak, akkor egy óra alatt a munka $\frac{1}{16} + \frac{1}{72} = \frac{9+2}{144} = \frac{11}{144}$-ed részét végzik el. Az egész munka elvégezhető $\frac{144}{11}$ óra alatt.

962. Az eredeti téglalap oldalai a és b. Első változtatás után a terület növekedése
$(a+3)(b+3) - ab = 30$; $3a + 3b + 9 = 30$. Innen $a + b = 7$. $(*)$
A második változtatás után az új téglalap területe: $(a-3)(b+3) = ab - 9$.
Ebből: $3a - 3b = 0$, azaz $a = b$.
Figyelembe véve a $(*)$-ot $a = 3{,}5$, $b = 3{,}5$.
Az eredeti téglalap tehát négyzet, oldalainak hossza 3,5 m, kerülete 14 m. Ez megfelel a feladat szövegének, tudniillik az eredeti téglalap területe $3{,}5^2 = 12{,}25$.
Az első változtatás után is négyzetet kapunk, oldalainak hossza 6,5 m, területe 42,25 m^2 (12,25 + 30).
A második változtatással kapott téglalap oldalainak hossza: 0,5 m, illetve 6,5 m, területe 3,25 m^2 (12,25 – 9).

963. A folyó sebessége: c $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a motorcsónak sebessége állóvízben: v $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$. A motorcsónak sebessége a folyón felfelé (a folyás irányával szemben) $v - c$,
lefelé (a folyás irányában) $v + c$.
Az egyenletes mozgásra vonatkozó összefüggés szerint:
első alkalommal 4 óra alatt tette meg az utat: $\frac{20}{v-c} + \frac{42}{v+c} = 4$.
$$\frac{30}{v-c} + \frac{30}{v+c} = 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}.$$
Második alkalommal 4 óra 10 perc alatt tette meg az utat.
Ezen egyenleteket 2-vel, illetve 3-mal osztva:

I. $\frac{10}{v-c} + \frac{21}{v+c} = 2$;

II. $\frac{10}{v-c} + \frac{10}{v+c} = \frac{25}{18}$.

I. – II. $\frac{11}{v+c} = 2 - \frac{25}{18}$, ebből $v + c = 18$. (III.)

III.-at az I.-be vagy II.-ba helyettesítve kapjuk: $v - c = 12$. (IV.)

III. + IV. $v = 15$, illetve $c = 3$.

A folyó sebessége 3 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a motorcsónak sebessége állóvízben 15 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$.

A feladat szövegével összevetve látható, hogy a kapott eredmény helyes:

az első alkalommal a szükséges idő felfelé: $\frac{20}{12}$, lefelé: $\frac{42}{18}$, ezek összege: 4;

a második alkalommal a szükséges idő felfelé: $\frac{30}{12}$, lefelé: $\frac{30}{18}$, összegük: $4 + \frac{1}{6}$.

964. A két szám x és y. Így $\left.\begin{aligned} x + y &= 32 \\ x - y &= 8 \end{aligned}\right\}$.

Megoldás: $x = 20$; $y = 12$. A feladat szövegének megfelel.

965. A két szám x és y. Így $\left.\begin{aligned} x + y &= 32 \\ x^2 - y^2 &= 256 \end{aligned}\right\}$.

Megoldás: $x = 20$, $y = 12$.

Minthogy $20 + 12 = 32$ és $400 - 144 = 256$, a kapott két érték a feladat megoldása.

966. $\left.\begin{aligned} x^2 - 4y^2 &= 0 \\ xy - y^2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \pm 2y$.

Ha $x = 2y$, akkor $y = \pm\sqrt{2}$ és $x = \pm 2\sqrt{2}$.

Ha $x = -2y$, akkor $-3y^2 = 2$, nincs ilyen valós y,

tehát $M = \left\{(2\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})\right\}$.

Behelyettesítve az eredeti egyenletrendszerbe, azt kielégítik.

a) A pozitív valós számpárok halmazán: $(2\sqrt{2}; 2)$.

b) Nincs racionális számpár megoldás.

c) Megoldás-párok a rendezett valós számpárok halmazán:
$(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ és $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

967. Eredetileg x szál rózsát akart venni Szabolcs a pirosból és a fehérből is. A fehér ára szálanként f Ft, a pirosé $1{,}2f$ Ft.

Az eredeti elképzelés szerint $x(f + 1{,}2f) = 1320$, (I.)

az ajánlat után: $(x + 3)f + (x + 3)0{,}8f = 2160$, azaz $(x + 3)1{,}8f = 2160$. (II.)

Az I. egyenletből: $2{,}2xf = 1320$, ebből $xf = 600$. (III.)

A II. egyenlet így is írható: $1{,}8xf + 5{,}4f = 2160$. (IV.)

A III.-at a IV.-be helyettesítve kapjuk: $1{,}8 \cdot 600 + 5{,}4f = 2160$, ahonnan $f = 200$, ezt figyelembe véve a III.-ból adódik, hogy $x = 3$, és ezért $p = 240$.
Eredetileg 6 szálat akart venni Szabolcs, ekkor egy szál fehér rózsa ára 200 Ft, a pirosé 240 Ft. A kapott értékek a feladat szövegének megfelelnek, mert eredetileg 3 fehér és 3 piros rózsát akart vásárolni $3 \cdot 200$ Ft $+ 3 \cdot 240$ Ft $= 1320$ Ft-ért. Az ajánlat után 6 fehér és 6 piros rózsát vásárolt: $6 \cdot 160$ Ft $+ 6 \cdot 200$ Ft $= 2160$ Ft-ért.

968. I. $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{5}{8}$

II. $\dfrac{2}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{7}{8}$

I. + II. $\dfrac{3}{x-y} = \dfrac{3}{2}$, ahonnan $x - y = 2$ III.

Ezt pl. az I.-be behelyettesítve: $x + y = 8$ IV.

A III. és IV.-ből álló egyenletrendszer megoldása: $x = 5$, $y = 3$.

Ez a megoldása az eredeti egyenletrendszernek is, mert $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$ és $\dfrac{2}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ is teljesül.

969. a) A nevező miatt $y \neq 0$.

Az egyenletrendszer első egyenletéből $|2x + y| = 4$, így egyenletrendszerünk két egyszerűbb egyenletrendszerre „esik szét":

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} 2x + y &= -4 \\ x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{y} + y &= 3 \\ x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} \frac{2}{y} + y &= -5 \\ x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 - 3y + 2 &= 0 \\ x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} y^2 + 5y + 2 &= 0 \\ x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

A másodfokú egyenletek megoldása és behelyettesítés után kapjuk:

$$M = \left\{(1;\ 2);\ \left(\frac{3}{2};\ 1\right);\ \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4};\ \frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right);\ \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\ \frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$$

b) $\left.\begin{aligned} (x-3y)^2 &= 25 \\ x &= 9 - \frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$ és $y \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} |x-3y| &= 5 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x-3y &= 5 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} x-3y &= -5 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 9-\frac{1}{y}-3y &= 5 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} 9-\frac{1}{y}-3y &= -5 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 3y^2-4y+1 &= 0 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{aligned} 3y^2-14y+1 &= 0 \\ x &= 9-\frac{1}{y} \end{aligned}\right\}$$

A másodfokú egyenletek megoldása, majd behelyettesítés után kapjuk:

$$M=\left\{(8;\ 1);\ \left(6;\ \frac{1}{3}\right);\ \left(2-\sqrt{46};\ \frac{7-\sqrt{46}}{3}\right);\ \left(2+\sqrt{46};\ \frac{7+\sqrt{46}}{3}\right)\right\}.$$

970. Vehetjük mindkét egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát, ha $x > 0$, $y > 0$.

$\lg(x^{\lg y}) = \lg 10$

$\lg(x \cdot y) = \lg 1000$

A logaritmus azonosságait felhasználva

$\lg y \cdot \lg x = 1$

$\lg x + \lg y = 3.$

Legyen $\lg x =: a$; $\lg y =: b$, ekkor az egyenletrendszer:

$a \cdot b = 1$

$a + b = 3$

A második egyenletből $b = 3 - a$, ezt az első egyenletbe beírva

$a(3-a) = 1$, azaz

$0 = a^2 - 3a + 1.$

Innen $a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ekkor $b_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $a_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ekkor $b_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Felhasználva, hogy $x = 10^a$, $y = 10^b$, a feladat megoldásai:

$\left(10^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\ 10^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)$ és $\left(10^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};\ 10^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

Ellenőrzéssel beláthatjuk, hogy ezek valóban megoldások.

971. (I.) $\left.\begin{aligned}\frac{4}{a-1}-\frac{5}{b+1}&=1\\ \frac{3}{a+3}-\frac{2}{b}&=0\end{aligned}\right\}$ A törtek miatt $a \neq 1$; $a \neq -3$; $b \neq 0$; $b \neq -1$.

(II.) $\frac{3}{a+3}=\frac{2}{b}$

Ebből „a"-t kifejezve: $a = 1{,}5b - 3$ (III.) ezt az (I.) egyenletbe helyettesítve

(I'.) $\frac{4}{1{,}5b-4}-\frac{5}{b+1}=1$

$4(b+1)-5(1{,}5b-4)=(1{,}5b-4)(b+1)$.

Innen $1{,}5b^2+b-28=0$.

A másodfokú egyenlet megoldása:

$b_1 = 4$; $b_2 = -\frac{14}{3}$,

visszahelyettesítve (III.)-ba $a_1 = 3$; $a_2 = -10$.

Tehát az egyenletrendszer megoldásai a (3; 4) és $\left(-10; -\frac{14}{3}\right)$ számpárok.

972. (I.) $xy+(x+y)=29$

(II.) $xy-2(x+y)=2$

Legyen $xy =: a$

$x+y =: b$

(III.) $a+b=29$

(IV.) $a-2b=2$

Vonjuk ki (III.)-ból (IV.)-et.

$3b = 27$

$b = 9$; $a = 20$

(V.) $xy = 20$

(VI.) $x+y=9 \Rightarrow x=9-y$

Ezt behelyettesítve (V.)-be:

$(9-y)y = 20$

$y^2-9y+20=0$.

Ennek megoldásai: $y_1 = 4$; $y_2 = 5$, ezekhez tartozó x értékek:

$x_1 = 5$; $x_2 = 4$.

Az egyenletrendszer megoldásai: (5; 4) és (4; 5), melyek mindkét egyenletet kielégítik.

973. $x+y+xy=47$ I.

$x^2y+xy^2=420$ II. innen kiemelve xy-t kapjuk a III.-at.

$xy(x+y)=420$ III.

Az I. és III. egyenlet sugallja, hogy tekintsük a következő két helyettesítést: az $a := x+y$ és az $b := xy$ kifejezést.

Ekkor az eredeti egyenletrendszert így írhatjuk fel: $a+b=47$
$ab=420.$

A megoldások: $a=35$; $b=12$ és $a=12$; $b=35$.
Behelyettesítve a és b értelmezésébe:

A) $\left.\begin{matrix} x+y=12 \\ xy=35 \end{matrix}\right\}$ illetve B) $\left.\begin{matrix} x+y=35 \\ xy=12 \end{matrix}\right\}$

Az A) egyenletrendszer megoldásai:
$x_1=7,\ y_1=5 \quad x_2=5,\ y_2=7$
A kapott x és y racionális, az eredeti egyenletrendszernek eleget tesznek, amit behelyettesítéssel ellenőrzünk.

A B) egyenletrendszernek a megoldása nem racionális számpár.

974. Legyen a két pozitív szám x és y. Ekkor a feltételeink:
$x\cdot y=10$ és $x^3-y^3=5(x^2-y^2)$. Ebből a másodikat átalakítva:
$(x-y)(x^2+xy+y^2)=5(x-y)(x+y)$.
Egyik eset, hogy $x=y$, ami az első feltétellel együtt azt eredményezi, hogy mindkét szám az $x_1=y_1=\sqrt{10}$. Másik eset, ha nem egyenlők, ekkor osztva az $(x-y)$ tényezővel: $x^2+xy+y^2=5(x+y)$.

Beírva az első feltételből kapható $y=\frac{10}{x}$-et: $x^2+x\frac{10}{x}+\left(\frac{10}{x}\right)^2=5x+5\frac{10}{x}$.

Ha most $x+\frac{10}{x}$-et elnevezzük egy új változónak, z-nek,
akkor a bal oldalon z^2-10-et kapunk, a jobb oldalon $5z$-t, vagyis az egyenlet:
$z^2-5z-10=0$, aminek megoldásai: $z_1=\frac{5+\sqrt{65}}{2}$ és $z_2=\frac{5-\sqrt{65}}{2}$.

Eszerint $x+\frac{10}{x}=\frac{5+\sqrt{65}}{2}$ vagy $x+\frac{10}{x}=\frac{5-\sqrt{65}}{2}$.

Mivel azonban x pozitív szám, ezért a második eset nem lehetséges, mert ott a jobb oldal negatív.

Marad tehát az első eset, ahonnan az $x^2-\frac{5+\sqrt{65}}{2}x+10=0$ egyenletet kapjuk, amiből $x_2\approx 4{,}0804$; $y_2\approx 2{,}4508$, illetve: $x_3\approx 2{,}4508$; $y_3\approx 4{,}0804$.

Másik megoldás:
$x^2+xy+y^2=5(x+y)$-ben a bal oldal teljes négyzetté kiegészíthető:
$(x+y)^2-xy=5(x+y)$, ahol tudjuk, hogy $xy=10$, tehát: $(x+y)^2-10=5(x+y)$, azaz $x+y$-ra másodfokú egyenletet kapunk: $(x+y)^2-5(x+y)-10=0$. Innen
$x+y=\frac{5+\sqrt{65}}{2}$ vagy $\frac{5-\sqrt{65}}{2}$ amiből az utóbbi a pozitivitás miatt nem lehet, és innen lásd tovább az első megoldás lépéseit.

Három számpár tehát a megoldás:
$x_1 = y_1 = \sqrt{10}$; $x_2 \approx 4{,}0804$; $y_2 \approx 2{,}4508$; $x_3 \approx 2{,}4508$; $y_3 \approx 4{,}0804$.

975. Béla bácsi b sebességgel t_1 idő alatt tesz meg 15 lépést – ez azonban a fatörzs f hosszánál annyival rövidebb, amennyit ennyit idő alatt a ló megtesz (l sebességgel): $15 = b \cdot t_1 = f - l \cdot t_1$. Hasonlóan: $75 = b \cdot t_2 = f + l \cdot t_2$. Úgy tűnik, túl sok az ismeretlen (négy egyenlethez öt). Az első sorból: $t_1 = \frac{15}{b}$, a másodikból $t_2 = \frac{75}{b}$, behelyettesítve: $f - 15\frac{l}{b} = 15$ és $f + 75\frac{l}{b} = 75$. Az elsőt 5-tel szorozva és összeadva őket $6f = 150$, amiből $f = 25$, tehát a fatörzs 25 lépés hosszú.

(Ha azonban $\frac{l}{b}$-t kifejezzük az iménti első összefüggésből $\left[= \frac{f}{15} - 1\right]$ és beírjuk a másodikba, akkor rendezés után: $f = \frac{2 \cdot 75 \cdot 15}{75 + 15}$, ami persze szintén 25, de ez utóbbi módszer megmutatja, hogy a két mérés harmonikus közepéről van szó. [Mellékesen: $\frac{l}{b} = \frac{2}{3}$.])

2.15. Összetett feladatok

976. Legyen az eredeti terjedelem után járó összes honorárium x, ekkor egy szerző eredetileg $\frac{x}{5}$ összegre számíthatott. A terjedelemmel együtt a teljes összeg is csökkent $\frac{3}{5}x$-re, és azt $5 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}75 = 5{,}75$ részre osztották, így egy-egy (eredeti) szerző végül $\frac{\frac{3}{5}x}{5{,}75} = \frac{3x}{28{,}75} = \frac{12x}{115}$ honoráriumot kapott. Ez $\frac{12x}{115} : \frac{x}{5} = \frac{60x}{115x} = \frac{12}{23}$-ad része, azaz kb. 52%-a annak az összegnek, mint amire kezdetben számíthatott, vagyis kb. 48%-kal kapott annál kevesebbet.

977. Megmutatjuk a feladat megoldását a 2002-es évszámmal. A későbbi évszámok hasonló elv alapján következnek (pl. 2003-at 2001 és 2002 közé kell majd beírni, és minden következőt mindig a két megelőző szám közé – persze ábrázoláskor mindig arányosan összébb zsúfolódik a többi szám a kör kerületén).



978. Alakítsuk át a törtet: $\frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$. A szám akkor egész, ha a $\frac{6}{x-3}$ tört is az; ehhez pedig az kell, hogy $x-3 \mid 6$ legyen. Vagyis $x-3$ lehet $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$. Ekkor rendre x lehet $-3, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9$. (Ezekben az esetekben az $\frac{x+3}{x-3}$ tört értéke rendre $0, -1, -2, -5, 7, 4, 3, 2$ – vagyis valóban mindig egész.)

979. Legyen az eredeti határidő k nap. Ekkor egy munkás egy nap alatt $\frac{1}{11k}$-ad részét végzi el a munkának. 4 nap után a munka $\frac{k-4}{k}$-ad része van még hátra, s ezt kell elvégezni $k-5$ nap alatt összesen n munkásnak.

Ekkor az egyenlet: $n \cdot \frac{1}{11k} \cdot (k-5) = \frac{k-4}{k}$, amiből $n = \frac{(k-4) \cdot 11k}{k(k-5)}$. Ekkor k kiesik, és a hányadosnak persze egésznek kell lennie. A $k-5$ a $k-4$-et, tehát egy szám a nála eggyel nagyobbat egészen ritkán osztja: $1 \mid 2$, vagyis $k = 6$ esetben; és $-1 \mid 0$, ekkor $k = 4$, de ekkor 4 nap után a munka kész lenne, nem lenne tovább példa, ettől tekintsünk el. Vagyis kell: $k-5 \mid 11$. Így $k-5$ lehet $-11, -1, 1$ vagy 11 –

azaz k lehet -6 (ez most értelmetlen), 4 (ez is, lásd az előző zárójel megjegyzését), 6 (az előbb kapott eredmény másik úton is kijött) vagy 16. Ekkor az n lehet 22 vagy 12, vagyis a meglévők mellé még 11 vagy 1 munkást kell beállítani.

980. Közös nevezőre hozva, a nevező pozitív lesz, már csak a számláló előjele a kérdés:

$(10^{n-1}+1)(10^{n+1}+1)-(10^n+1)^2=$

$=10^{2n}+10^{n+1}+10^{n-1}+1-10^{2n}-2\cdot 10^n-1=$

$=10^{n-1}\cdot(100+1-2\cdot 10)=10^{n-1}\cdot 81$, ami pozitív.

981. Levezetjük a megoldást konkrétan a 2002-es évre, ennek alapján bármely másra is megtehető, majd táblázatba foglaljuk a következő évekre adódó jó eredmény(eke)t. Az eddig eltelt évek jegyeinek összege maximum 28 lehet (1999 esetén), reális életkort figyelembe véve pedig minimum 2 (2000), ezért születési évként csak 1974 és 2000 közti dátumok jöhetnek szóba. 1974-től indulva a számjegyek összege 21-től évenként egyesével növekszik, a kor 28-tól egyesével csökken, így (a 70-es évtizedben) sosem lehetnek egyenlők. 1980-nál ugrik az összeg: 18-tól növekszik újra, míg a kor 22-től csökken, ezek 1982-es születés (20 éves kor) esetén egyenlők. 1990-nél az összeg ismét ugrik: 19-től növekszik, míg a kor 12-től csökken, ezek között nem lehet egyenlő. 2000-nél ismét ugrik az összeg: 2-től növekszik, míg a kor 2-től csökken, ezek éppen egyenlők. Tehát (2002-ben) két ilyen eset lehetséges: 20, illetve 2 éves életkor, 1982-es, illetve 2000-es születési évvel.

évszám	életkor	születési év
2002	20	1982
	2	2000
2003	25	1978
2004	21	1983
	3	2001
2005	26	1979
2006	22	1984
	4	2002
2007	–	–
2008	23	1985
	5	2003
2009	19	1990

évszám	életkor	születési év
2010	24	1986
	6	2004
2011	20	1991
2012	25	1987
	7	2005
2013	21	1992
	3	2010
2014	26	1988
	8	2006
2015	22	1993
	4	2011

évszám	életkor	születési év
2016	27	1989
	9	2007
2017	23	1994
	5	2012
2018	10	2008
2019	24	1995
	6	2013
2020	11	2009
2021	25	1996
	7	2014
2022	–	–

982. 1 órakor a gyalogos az út negyedében volt, mert 4 óra alatt tette meg az egész utat. A kerékpáros a következő 3 óra alatt megtette (visszafelé) az út negyedét, majd (odafelé) az egészet, tehát az út $\frac{5}{4}$-ét. Ezalatt a gyalogos megtette az út (hátralevő) $\frac{3}{4}$-ét, tehát a kerékpáros és a gyalogos sebességének aránya: $\frac{5}{3}$. A gyalogos kezdeti

1 órai útját tehát $\frac{3}{5}$ óra alatt tette meg a kerekező, vagyis $\frac{2}{5}$ órával (24 perccel) indult később.

983. a) Nem igaz, mint azt egy egyszerű ellenpéldával igazolhatjuk. Álljon pl. egy szám $3 \cdot 5 = 15$ darab 1-esből, ez nyilván nem osztható $3 \cdot 5 = 15$-tel, hiszen nem 0-ra vagy 5-re végződik.

b) Ez viszont igaz, teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen A_n a 3^n db csupa A-s számjeggyel leírt szám. Ekkor $n = 1$ esetén $A_1 = \overline{AAA} = A \cdot 111 = A \cdot 3^1 \cdot 37$, tehát igaz rá az állítás.

Tegyük fel, hogy $3^k | A_k = \underbrace{\overline{AA\ldots A}}_{3^k \text{ db}}$. A következő kérdéses szám

$A_{k+1} = \underbrace{\overline{AA\ldots A}}_{3^k \text{ db}}\underbrace{AA\ldots A}_{3^k \text{ db}}\underbrace{AA\ldots A}_{3^k \text{ db}} = A_k \cdot \left(100^{3^k} + 10^{3^k} + 1\right)$. E zárójelben álló számnak 3 db 1-es számjegye van, a többi 0, így persze osztható 3-mal; A_k az indukciós feltétel miatt osztható 3^k-nal, így szorzatuk is osztható 3^{k+1}-nel.

A bizonyítás két része együtt azt jelenti, hogy az állítás minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz.

984. Ha a -2 gyöke az egyenletnek, akkor

$3(-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0$, azaz

$12 - 2b + c = 0$, innen $c = 2b - 12$.

Az egyenletnek akkor van pontosan egy gyöke, ha a diszkriminánsa 0, vagyis

$b^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0$.

c helyére $(2b - 12)$-t írva

$b^2 - 12(2b - 12) = 0$, azaz

$b^2 - 24b + 144 = 0$.

Ekkor $b = 12$, $c = 12$.

Ez valóban jó megoldás, mert $3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)^2$.

985. $A = [4 \cdot 10^7; 49 \cdot 10^7]$, $B =]1{,}9 \cdot 10^7; 4{,}9 \cdot 10^7]$

a) $4 \cdot 10^7$; $5{,}8 \cdot 10^7$; $7 \cdot 10^7$; $2 \cdot 10^8$; $4{,}9 \cdot 10^8$, illetve
$2 \cdot 10^7$; $2{,}1 \cdot 10^7$; $4 \cdot 10^7$; $4{,}3 \cdot 10^7$; $4{,}9 \cdot 10^7$.

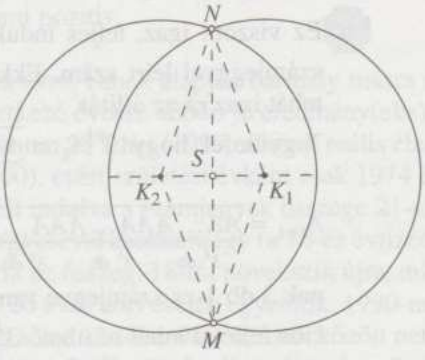
b) $A \cap B = [4 \cdot 10^7; 4{,}9 \cdot 10^7]$; $A \cup B =]1{,}9 \cdot 10^7; 4{,}9 \cdot 10^7]$;
$A \setminus B =]4{,}9 \cdot 10^7; 4{,}9 \cdot 10^8]$; $B \setminus A =]1{,}9 \cdot 10^7; 4 \cdot 10^7[$

c) $\frac{4\cdot10^7+49\cdot10^7}{2}=26{,}5\cdot10^7=2{,}65\cdot10^8$;

$\sqrt{4\cdot10^7\cdot49\cdot10^7}=2\cdot7\cdot10^7=1{,}4\cdot10^8$.

986. a) $(4{,}5^2\pi-1{,}5^2\pi)=6\cdot3\cdot\pi=18\pi\approx56{,}55\ (\text{m}^2)$.

b) A K_1 és a K_2 szórófejek távolsága 3 méter. Pitagorasz-tétellel: $SM=\sqrt{4{,}5^2-1{,}5^2}=\sqrt{18}\approx4{,}24$ (m), az SK_1M szöget egy szögfüggvénnyel meghatározhatjuk (pl. a koszinusza egyharmad): $SK_1M\sphericalangle=70{,}53°$.



A K_1MK_2N rombusz K_1K_2 átlója 3 m, MN átlója 8,48 m, területe így 12,7 m^2.

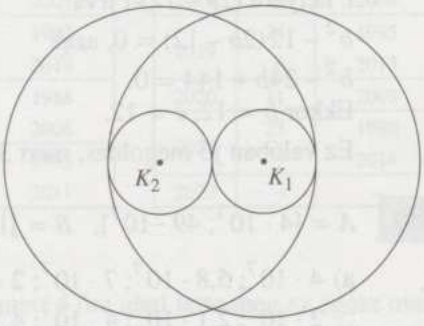
A két 4,5 m sugarú kör közös részének T_k területét a következő megfontolással is megkaphatjuk: 4 db, 70,53° középponti szögű, 4,5 m sugarú körcikk (kettőnek-kettőnek K_1, illetve K_2 a középpontja) együttesen lefedi a közös részt, a rombuszt azonban kétszer is. A közös rész területe ezért: $4\cdot t_{\text{cikk}}-t_{\text{rombusz}}$.

A 4 cikk együttes területe egy 4,5 m sugarú kör területének $4\cdot\frac{70{,}53}{360}$-része, így

$T_k=\frac{282{,}12}{360}\cdot4{,}5^2\pi-12{,}7\approx37{,}2\ (\text{m}^2)$.

Az öntözött területet megkaphatjuk, ha a két 4,5 m sugarú kör területének összegéből levonjuk a közös részük T_k területét:

$T_1=2\cdot4{,}5^2\pi-T_k\approx90\ (\text{m}^2)$.



A kétszeresen öntözött területet megkaphatjuk, ha a két 4,5 m sugarú kör közös részének T_k területéből levonjuk a két 1,5 m sugarú kör területét (hiszen ezeken belül csak egyszeres öntözés történik):

$T_2=T_k-21{,}5^2\pi\approx23{,}1\ (\text{m}^2)$.

987. a) $8\pi \approx 25{,}1$ (m^2)

b) A két szórófejet egymástól legalább 6 m-re kell elhelyezni. A megöntözhető legnagyobb terület $16\pi \approx 50{,}3$ (m^2).

c) A kertből akkora területet öntöznek meg együtt, mint amekkora területet egyetlen szórófejjel meg lehet öntözni, vagyis 25,1 m^2-t. Ez a kert területének 26,1%-a.

988. a) Ha Géza igazat mond, akkor a nyolc, év végi osztályzatának összege $8 \cdot 3{,}2 = 25{,}6$. Mivel ez nem lehetséges, Géza nem mondhatott igazat. (Pontosabban, ha Géza egy tizedes jegyre kerekített értéket mondott, akkor a nyolc osztályzat S összegére $8 \cdot 3{,}15 \leq S < 8 \cdot 3{,}25$, azaz $25{,}2 \leq S < 26$ kijelentésnek igaznak kell lenni. A [25,2; 26[intervallumban azonban nincs egész szám.)

b) A nyolc osztályzat összege $8 \cdot 2{,}875 = 23$, ebből egy ötös, így a maradék hét osztályzat összege 18.
Minden jegye legalább kettes, hiszen elvégezte a negyedik osztályt. Három vagy négy négyese nem lehet, hiszen akkor ezek összege 12, illetve 16 lenne, így a megmaradó 4, illetve 3 osztályzatra 6, illetve 2 jutna. Ezek egyike sem lehetséges. Táblázatban szemléltetjük a megvalósítható lehetőségeket.

	jó	közepes	elégséges
I.	2	0	5
II.	1	2	4
III.	0	4	3

989. a) Ha a téglalap hossza x cm, akkor a szélessége $50 - x$ cm.
$x(50 - x) = 600$
$x^2 - 50x + 600 = 0$
A megoldóképlettel 20, illetve 30 adódik.
A keret tehát 20 cm × 30 cm méretű. A léceket egy 20 cm-es és egy 30 cm-es darabra kell vágni.

b) A téglalap fél kerülete 50 cm, a hosszabbik oldal x cm-es. A szöveg alapján:
$\frac{x}{50 - x} = \frac{50}{x}$
$x^2 + 50x - 2500 = 0$
A megoldóképlettel $-80{,}90$, illetve 30,90 adódik. Csak a pozitív gyök felel meg. Az 50 cm-es lécek mindegyikét egy 30,9 cm-es és egy 19,1 cm-es darabra vágjuk. (A keretbe foglalt terület 590,2 cm^2.)
Ellenőrzés: $\frac{30{,}9}{19{,}1} = 1{,}618$ és $\frac{50}{30{,}9} = 1{,}618$, tehát a két arány egyenlő.

c) 8 : 5 arány esetén az oldalak $\frac{400}{13}$, illetve $\frac{250}{13}$ cm hosszúak, a terület ezért $\frac{10^5}{169} \approx 591{,}7$ (cm²).

5 : 3 arány esetén az oldalak $\frac{125}{4}$, illetve $\frac{75}{4}$ cm hosszúak, a terület ezért $\frac{9375}{16} \approx 585{,}9$ (cm²).

990. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót x, illetve $(3 - x)$ cm hosszú szakaszokra osztja. A magasságtétel szerint ezért $x(3 - x) = 1$. Rendezve: $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Megoldóképlettel $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, illetve $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ adódik (2,6180 és 0,3820). A gyökök éppen az átfogó szeleteinek cm-ben mért hosszával egyenlők. Mivel az átfogóhoz tartozó magasság hossza 1 és ez a magasság a derékszöget éppen a háromszög hegyesszögeivel megegyező szögekre bontja, ezért a gyökök a hegyesszögek tangenseivel egyeznek meg.

A hegyesszögek 69,09° és 20,91°.

991. a) A derékszögű háromszög befogói legyenek a és b, átfogója c.

$a = 40$, $b + c = 90$, és a Pitagorasz-tétel miatt $40^2 + b^2 = c^2$.

Megoldandó tehát a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} b + c &= 90 \\ 1600 + b^2 &= c^2 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldáshalmaza $M = \left\{\left(\frac{325}{9}; \frac{485}{9}\right)\right\}$.

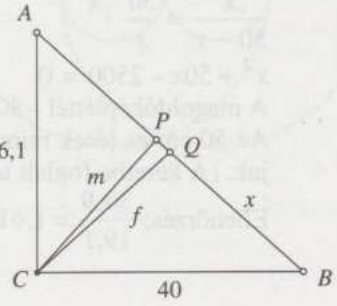
A b befogó hossza $\frac{325}{9}$ cm (36,1 cm), a c átfogó hossza $\frac{485}{9}$ cm (53,9 cm), a háromszög területe $\frac{6500}{9}$ cm² (722,2 cm²).

b) Az BP szakasz befogótétellel számolható: $40 = \sqrt{BP \cdot \frac{485}{9}}$, ebből

$BP = \frac{1600 \cdot 9}{485} = 29{,}7$ cm, ebből

$AP = 24{,}2$ cm.

A BQ szakasz szögfelezőtétellel számítható (jelöljük BQ hosszát x-szel):



$\frac{x}{53{,}9-x}=\frac{40}{36{,}1}$, vagyis $36{,}1\cdot x=40\cdot(53{,}9-x)$.

Ebből $x=28{,}3$, azaz $BQ=28{,}3$ cm.

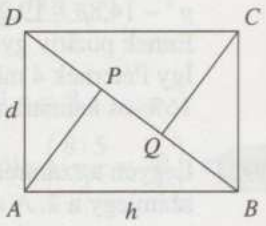
Így $PQ=BP-BQ=29{,}7-28{,}3=1{,}4$ (cm). Az átfogó három szakaszának hossza az ábra szerinti sorrendben: 28,3; 1,4 és 24,2 cm.

992. Használjuk az ábra jelöléseit!

A szimmetria miatt $DP=BQ$, ezért $PQ=BP-DP$.

A BAD derékszögű háromszögre írjuk fel a két befogótételt: $h=\sqrt{c\cdot BP}$, illetve $d=\sqrt{c\cdot DP}$. Ezekből $BP=\frac{h^2}{c}$, illetve $DP=\frac{d^2}{c}$, ezért $PQ=\frac{h^2}{c}-\frac{d^2}{c}=$

$=\frac{h^2-d^2}{c}$. Ezt kellett a b) feladatban belátni.



Az a) feladat eredménye a $d:=3$, $h:=4$ helyettesítéssel (felhasználva, hogy ekkor $c=5$): $PQ=\frac{7}{5}=1{,}4$ (cm).

993. a) $x>-\frac{19}{3}$, tehát a legkisebb egész megoldás $x=-6$.

b) A $-x^2-5x+6=0$ egyenlet megoldásai -6 és 1.

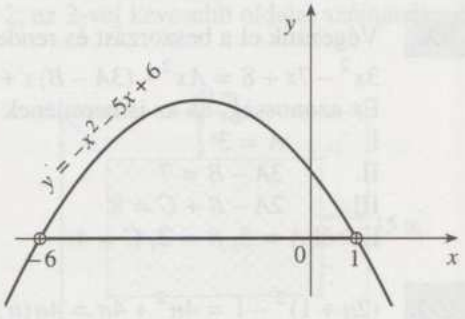
Az ábráról leolvasható, hogy a

$-x^2-5x+6>0$

ha $-6<x<1$,

így a legkisebb egész megoldás

$x=-5$.



c) Mivel $-1\le\sin x\le 1\ \ \forall x\in\mathbf{R}$ így csak $\sin x=1$ teljesülhet, ebből

$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad k\in\mathbf{Z}$. Ez semmilyen k egész számra sem lesz egész szám, így a feladatnak nincs legkisebb egész szám megoldása.

994. Péternek x Ft-ja, Pálnak (10^7-x) Ft-ja van. Péter $(p+2)$%-os hozamra, Pál p%-os kamatra teszi be a pénzét.

I. $\frac{x(p+2)}{100}=720\,000$

II. $\frac{(10^7-x)p}{100}=960\,000$

Fejezzük ki az I. egyenletből x-et, és helyettesítsük be a II. egyenletbe.

$$x = \frac{7{,}2 \cdot 10^7}{p+2}$$

II. $\left(10^7 - \frac{7{,}2 \cdot 10^7}{p+2}\right)p = 9{,}6 \cdot 10^7 \Rightarrow \frac{(10^7 p + 2 \cdot 10^7 - 7{,}2 \cdot 10^7)p}{p+2} = 9{,}6 \cdot 10^7$

Az összevonásokat elvégezve, egyszerűsítsünk 10^7-nel.

$p^2 - 14{,}8p - 19{,}2 = 0$

Ennek pozitív gyöke $p = 16$.

Így Péternek 4 millió Ft-ja volt, 18%-os hozamra tette be, Pálnak 6 millió Ft-ja volt, 16%-os kamatra tette be a bankba.

995. Legyen a számrendszer alapszáma x. $x \geq 3$; $x \in \mathbf{N}$, mert a számban a legnagyobb számjegy a 2. A számot tízes számrendszerbe átírva

$10202_x = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2.$

Így $x^4 + 2x^2 + 2 = 101$.

Legyen $x^2 =: a$ $(a > 0;\ a \in \mathbf{N})$ $a^2 + 2a - 99 = 0$, ennek gyökei -11 és 9.

Ebből $x^2 = 9$ ($x \geq 3$ miatt) $x = 3$.

A keresett számrendszer alapja 3;

$10202_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = 101.$

996. Végezzük el a beszorzást és rendezzük x hatványai szerint a kifejezést!

$3x^2 - 7x + 8 = Ax^2 - (3A - B)x + 2A - B + C$

Ez azonosság, ha az ismeretlenek megfelelő hatványainak együtthatói egyenlők.

I. $A = 3$

II. $3A - B = 7$

III. $2A - B + C = 8$

Ebből $A = 3$, $B = 2$, $C = 4$.

997. $(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$ $\quad n \in \mathbf{N}^+$

n és $n+1$ két egymást követő pozitív természetes szám, melyek közül az egyik páros, a másik páratlan, így szorzatuk osztható 2-vel, ezért a kifejezés osztható $4 \cdot 2 = 8$-cal.

998. A két sebesség számtani közepe $\frac{40+60}{2} = 50\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

a) Ha ezzel a sebességgel haladna oda-vissza, a menetidő a teljes útra

$t = \frac{2d}{50}$ (h) (ha d km-ben adott).

b) ha $d = 120$ km; oda $t_1 = \frac{120}{40} = 3$ (h) vissza $t_2 = \frac{120}{60} = 2$ (h), tehát ezzel a sebességekkel haladva 5 óra a menetidő.

Átlagsebességgel haladva $t = \frac{2 \cdot 120}{50} = 4{,}8$ (h) a menetidő.

999. n oldalú konvex sokszög ($n > 3$; $n \in \mathbf{N}^+$) átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.

Így $\frac{n(n-3)}{2} = 2{,}5n$, mivel $n \neq 0$, oszthatunk vele. Ebből $n = 8$.

Tehát a 8 oldalú konvex sokszögnek van 2,5-szer annyi átlója $\left(\frac{8 \cdot 5}{2} = 20\right)$, mint oldala.

1000. Az n oldalú konvex sokszög ($n > 3$; $n \in \mathbf{N}^+$) átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, a külső szögek összege $360° = 2 \cdot 180°$.

A feltétel szerint $n = \frac{n(n-3)}{2} + 2$

Rendezés után $n^2 - 5n + 4 = 0$, melynek gyökei 1 és 4. Mivel $n > 3$, így $n \neq 1$. A 4 oldalú konvex sokszög átlóinak száma 2, ez 2-vel kevesebb oldalai számánál.

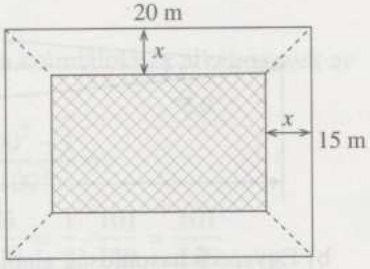
1001. A besatírozott terület az egész terület 42%-a.

$(20 - 2x)(15 - 2x) = 0{,}42 \cdot 20 \cdot 15$, ahol $x < 7{,}5$.

Ebből $4x^2 - 70x + 174 = 0$, melynek gyökei 14,5 és 3.

A feltételnek eleget tévő megoldás $x = 3$.

Tehát a tér oldalaitól 3 m távolságra kell lennie a virágágyás szélének.



1002. a) Legyen a repülőgép tervezett sebessége v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Eredetileg $t_1 = \frac{2400}{v}$ óra alatt tette volna meg a távolságot.

Az út $\frac{1}{3}$-án, 800 km-en 25%-kal csökkentette a sebességét, azaz $0{,}75v$-vel haladt, így az út $\frac{1}{3}$-a megtételéhez szükséges idő $t_2 = \frac{800}{0{,}75v} = \frac{3200}{3v}$ óra.

Ha késés nélkül szeretne odaérni, akkor $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel t_3 idő alatt kell odaérnie, ahol $t_3 = t_1 - t_2 = \frac{1600}{x}$, azaz $\frac{1600}{x} = \frac{2400}{v} - \frac{3200}{3v}$.

Ebből $x = 1{,}2v$ adódik.

Tehát az út hátralevő részén az eredetihez képest 20%-kal kell növelnie a sebességét, hogy késés nélkül odaérjen.

b) Ha az út hátralevő részén $(v-160)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val haladna, a késés 1 h lenne, azaz

$\frac{2400}{v} + 1 = \frac{3200}{3v} + \frac{1600}{v-160}$.

$7200(v-160) + 3v(v-160) = 3200(v-160) + 1600 \cdot 3v$.

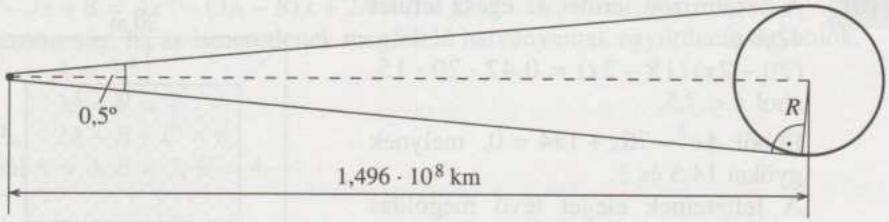
Az összevonás és rendezés után kapjuk:

$3v^2 - 1280v - 640\,000 = 0$.

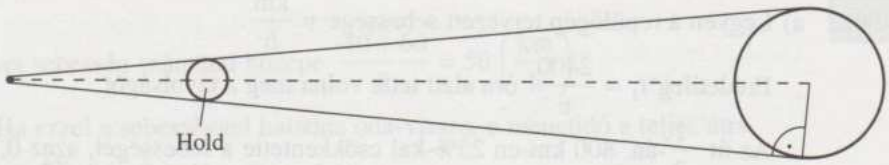
Ennek pozitív gyöke $v \approx 722{,}1$.

Tehát a repülőgép eredetileg 722,1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt volna, menetideje ekkor 3,32 óra lett volna.

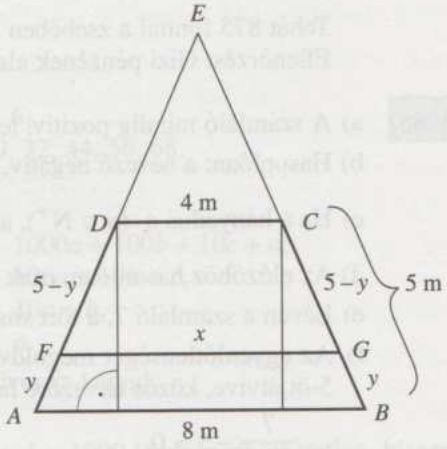
1003. a) Az ábra alapján: $\sin 0{,}25° = \frac{R}{1{,}496 \cdot 10^8}$, ahonnan $R \approx 652\,751$ km, tehát a Nap átmérője kb. 1 305 502 km.



b) Egyszerű hasonlóság alapján: $\frac{R_H}{R_N} = \frac{384\,000}{149\,600\,000} \approx 0{,}002567$ (ahonnan $R_H \approx 1675{,}5$ km, a Hold átmérője tehát kb. 3351 km, a Földének kb. negyede.)



1004. Az ábrán x-szel jelölt szakasz hossza a kérdés, és az, hogy hol helyezkedik el. A feltétel szerint: $x + 2(5 - y) + 4 = x + 2y + 8$, azaz $10 - 2y + 4 = 2y + 8$. Innen $4y = 6$, vagyis $y = 1{,}5$ – a hosszabbik alaptól a szár mentén ekkora távolságra kell a szobát kettévágni a válaszfallal. Ha a trapézt kiegészítjük háromszöggé (ABE), akkor – mivel 4 a 8 fele – a kis DCE háromszög éppen 0,5 arányú kicsinyítése a nagynak (ABE). Ezért $EB = 10$, és $y = GB = 1{,}5$ miatt $EG = 8{,}5$. A közbülső, x alapú háromszög (FGE) is hasonló a nagyhoz, megfelelő oldalaik hányadosa egyenlő: $\frac{8{,}5}{10} = \frac{x}{8}$, vagyis $\frac{EG}{EB} = \frac{FG}{AB}$, ahonnan $x = 6{,}8$ méter. Ilyen hosszú tehát a válaszfal. (Láthatóan hosszabb a középvonalnál, azzal összhangban – lásd az y-ra kapott eredményt –, hogy közelebb van a hosszabbik alaphoz. A megoldás során a modell kedvéért elhanyagoltuk a válaszfal vastagságát.)



1005. A zárójeleken belül végezzük el az összeadást, majd végezzük el az egyszerűsítéseket: $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{101}{100} = \frac{101}{2} = 50{,}5$.

1006. A zárójelen belüli közös nevezőre hozás után a számlálókban alkalmazzuk az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot.

$$\frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \frac{5^2-1}{5^2} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2-1}{99^2} \cdot \frac{100^2-1}{100^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{98 \cdot 100}{99 \cdot 99} \cdot \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{101}{100} = \frac{101}{200}$$

Másik megoldás:

$1 - \frac{1}{2^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)$, $1 - \frac{1}{3^2} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)$, ... alkalmazásával a szorzat így is felírható:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{100}\right),$$

amivel (részben) az előző feladatra vezethetjük vissza a mostani feladatot.

1007. a) A Géza zsebében levő pénz alakulása: 2200; 1200; 2400; 1400; 2800; 1800. Tehát 1800 fonttal a zsebében lépi át Géza a határt.

b) A Gizi zsebében levő pénz alakulása, ha kezdetben x fontja volt:
$2x$; $2x - 1000$; $4x - 2000$; $4x - 3000$; $8x - 6000$; $8x - 7000$.
Mivel $8x - 7000 = 0$, ezért $x = \frac{7000}{8} = 875$.
Tehát 875 fonttal a zsebében érkezett Gizi a határhoz.
Ellenőrzés: Gizi pénzének alakulása: 1750; 750; 1500; 500; 1000; 0.

1008. a) A számláló mindig pozitív, tehát a tört akkor az, ha a nevező is az: $k > 1$.

b) Hasonlóan: a nevező negatív, ha $k < 1$.

c) Ha a hányados n ($n \in \mathbf{N}^+$), akkor $k = \frac{7}{n} + 1$ alakú, végtelen sok lehetőség van.

d) Az előzőhöz hasonlóan, csak most n értéke negatív egész is lehet.

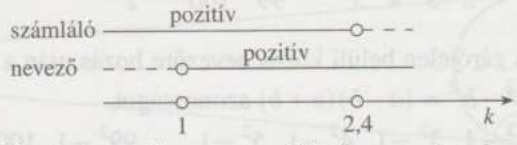
e) Lévén a számláló 7, a tört sosem 0.

f) Az egyenlőtlenséget megoldva (persze nem felszorozva a nevezővel; hanem az 5-öt átvíve, közös nevezőre hozva, előjelet vizsgálva):

$$\frac{7}{k-1} - 5 > 0$$

$$\frac{7 - 5(k-1)}{k-1} > 0$$

$$\frac{-5k + 12}{k-1} > 0$$



A tört pozitív, ha számlálója és nevezője azonos előjelű, azaz: $1 < k < 2{,}4$.

1009. A keresett kétjegyű szám $10a + b$, ahol $1 \le a \le 9$ és $0 \le b \le 9$, továbbá a és b egész szám.
A feladat szövege szerint: $10a + b = 4(a + b) + 12$.
Célszerű átalakítás után $2a = b + 4$. (*)
Minthogy b számjegy, 9-nél nem lehet nagyobb és a (*)-ból látható, hogy csak páros lehet, a szóba jöhető értékek:

	b	a	$10a + b$	=	$4(a + b) + 12$
ellenőrzés:	0	2	20	=	$4 \cdot 2 + 12$
	2	3	32	=	$4 \cdot 5 + 12$
	4	4	44	=	$4 \cdot 8 + 12$
	6	5	56	=	$4 \cdot 11 + 12$
	8	6	68	=	$4 \cdot 14 + 12$

Mindegyik kapott kétjegyű szám megoldás.

Megjegyzés:
A (∗)-tól más elgondolás szerint is megoldható a feladat.
A (∗)-ból b-t kifejezve $b = 2a - 4$, b-t két érték közé zárhatjuk, figyelembe véve, hogy a egész szám, mert számjegy.

$0 \le 2a - 4 \le 9$
$4 \le 2a \le 13$
$2 \le a \le 6$

Ebből az a lehetséges értékei: 2, 3, 4, 5, 6.
A hozzájuk tartozó kétjegyű számok: 20, 32, 44, 56, 68.
Az ellenőrzés lehet a fentiek szerint.

1010. A keresett négyjegyű szám így is írható: $1000a + 100b + 10c + d$,
a háromjegyű $100a + 10b + c$,
a kétjegyű $10a + b$,
az egyjegyű a.

A négyjegyűből a másik három összegét kivonva kapjuk:
$889a + 89b + 9c + d = 2002$

Az $a = 1$ nem lehet, mert akkor $89b + 9c + d > 1000$ lenne, ami lehetetlen, hiszen b, c, d számjegyek.
Az $a = 2$, mert $2 \cdot 889 < 2002 < 3 \cdot 889$ Így: $89b + 9c + d = 224$
A $b = 2$, mert $2 \cdot 89 < 224 < 3 \cdot 89$ Így: $9c + d = 46$
A $c = 5$, mert $5 \cdot 9 < 46 < 6 \cdot 9$ Így: $d = 1$

Az eredeti négyjegyű szám 2251 volt, ami a feladat szövegének eleget tesz.

1011. Mivel van alapdíj, nappali és éjszakai áram, valamint 12% áfa (ami 1,12-es szorzót jelent) ezért:

a) $(240 + 33 \cdot 19{,}80 + 26 \cdot 10{,}20) \cdot 1{,}12 = 1297{,}632$ (Ft), ami 1298 Ft-ot jelent.

b) $(240 + x \cdot 19{,}80 + y \cdot 10{,}20) \cdot 1{,}12 = 22{,}176x + 11{,}424y + 268{,}8$.

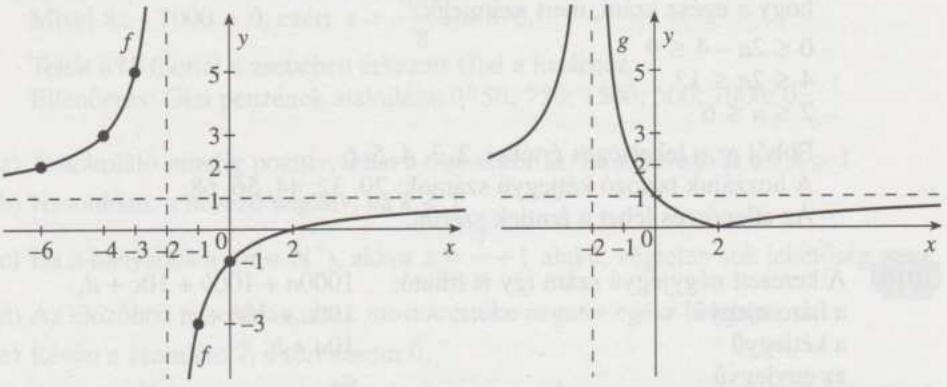
c) $y = x : 2$, ebből és az előző pontbeli eredményből:

$$22{,}1756x + 5{,}712x + 268{,}8 = 10\,458$$
$$27{,}888x + 268{,}8 = 10\,458$$
$$27{,}888x = 10\,189{,}2$$
$$x \approx 365{,}4.$$

Tehát 365,4 kWh nappali áramot, és feleannyi éjszakai áramot (182,7 kWh) használtunk el.

1012. $\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+2-4}{x+2}=1-\dfrac{4}{x+2}$

Ábrázoljuk az $f(x)=1-\dfrac{4}{x+2}$, majd a $g(x)=\left|1-\dfrac{4}{x+2}\right|$ függvényeket!



Az ábráról leolvasható, hogy $g(x)<1$, ha $x>0$. Tehát a megoldáshalmaz: $\mathbf{N}^+$.

Másik megoldás:

$$-1<\frac{x-2}{x+2}<1$$

$$-1<\frac{x-2}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{x-2}{x+2}<1$$

$$0<1+\frac{x-2}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{x-2}{x+2}-1<0$$

$$0<\frac{2x}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{-4}{x+2}<0$$

számláló negatív $\Rightarrow$ $x+2>0$

$x>-2$

	$x<-2$	$-2<x<0$	$x>0$
számláló	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
nevező	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
tört	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

$x<-2 \vee x>0$

A két feltétel egyszerre teljesül, ha $x>0$. Tehát a megoldáshalmaz: $\mathbf{N}^+$.

1013. a) Mivel 5% kell a látáshoz és $a = 0{,}95$, ezért a legtávolabbi autó esetén: $0{,}05I_0 = I_0 \cdot 0{,}95^d$, ahonnan I_0-lal való osztás után, és a két oldal logaritmusát véve: $d = \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}95} \approx 58{,}4$. Vagyis 58,4 méternél távolabbi autó lámpáját ezen a ködös novemberi napon már nem látjuk.

b) Mivel mindkét autó sebessége $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, és egyszerre 58,4 méterről veszik észre egymást, a találkozásig eltelt t időre igaz lesz, hogy $25t + 25t = 58{,}4$, ahonnan $t = 1{,}168$ (s), azaz még 1,2 s sem telik el a találkozásig.

c) Az előzés alatt az előzőnek meg kell tennie a 2 m hátrányt; a teherautó hosszát, 8 métert; a saját hosszát, 4 métert; és még legalább 1 méter előnyt, amivel visszajön a teherautó elé. Ez összesen 15 méter többlet. Tegyük fel, hogy már a gyorsítás megtörtént, tehát az előző autó végig $25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladt, míg a teherautó $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 12{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. Ekkor a teljes előzéshez szükséges x időre igaz lesz, hogy $25x = 12{,}5x + 15$, ahonnan $x = 1{,}2$ s. Mivel ezalatt több utat tesz meg, mint az 58,4 méter fele, ezért ha balszerencsés, és éppen szintén $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$-val szembe is jött egy autó, ami az előzés indításának pillanatában éppen 58,4 méterre volt, akkor ütközés állhat elő. Persze fékezhet a szembe jövő, meg az előző is rövid időre átlépheti a megengedett sebességhatárt, tehát ekkor még talán elkerülhető az ütközés, de jobb ködben nem előzni!

1014. a) Most 65 000 Ft; egy év múlva: $65\,000 \cdot 1{,}05$ Ft; két év múlva: $65\,000 \cdot 1{,}05^2$ Ft; … öt év múlva $65\,000 \cdot 1{,}05^5 \approx 82\,958{,}30$ (Ft), azaz 82 958 Ft lesz a fizetése.

b) Mérjük Géza fizetésének értékét azzal, hogy hány kg sittyőt tud megvenni a havi béréből! Nézzük meg a sittyő árának változását. Ma $(65\,000 : 13 =)$ 5000 Ft-ba kerül 1 kg sittyő. Két év 8% infláció után a sittyő ára: $5000 \cdot 1{,}08^2 = 5832$ Ft lesz. Utána 6% az infláció, $5832 \cdot 1{,}06 \approx 6182$ Ft lesz az ára. Ezt két 4%-os év követi, tehát végül 1 kg sittyő ára: $6182 \cdot 1{,}04^2 \approx 6686$ Ft lesz. Az egész folyamat egy lépésben: $5000 \cdot 1{,}08^2 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}04^2 = 6686{,}36$ (Ft) ≈ 6686 Ft. Géza a havi fizetéséből 5 év múlva $82\,958{,}30 : 6686{,}36 \approx 12{,}4$ kg sittyőt tud megvenni. Ez kevesebb, mint 13 kg, azaz Géza fizetésének reálértéke csökkent, mégpedig $0{,}6 : 13 \cdot 100 \approx 4{,}615\%$-kal. Azaz ez az öt év (persze csak ezt a terméket és csak Géza fizetését nézve) 4,6%-os reálérték csökkenést (életszínvonal romlást) jelentett.

1015. Először számoljuk ki, hogy mennyi lehetett a dolgozó bruttó fizetése a 20%-os emelés előtt: $1{,}2 \cdot f = 115\,200$, ahonnan $f = 96\,000$ Ft.
Ezután nézzük meg, hogy korábban és most mit kap kézhez.
Először le kell vonni 13% járulékot, majd a jövedelem adót, amit a megadott táblázat segítségével számolunk ki. Az első eset járuléka 12 480 Ft, az új fizetése: 14 976 Ft (ami persze szintén 20%-kal több).
A 96 000 Ft 12 hónap alatt 1 152 000 Ft-ot jelent, és ha nem volt prémium és egyéb, akkor ezen fizetés adója: a 3. sor szerint: 260 000 Ft + 60 800 Ft, ami a millió feletti 152 000 Ft 40%-a. Ennek az adónak az 1 tizenketted részét vonják le havonta: 320 800 : 12 = 26 733 Ft.
Tehát régen kézhez kapott 96 000 Ft – (12 480 Ft + 26 733 Ft) = 56 787 Ft-ot.
Az emelt évi 1 382 400 Ft fizetés adója: 260 000 Ft + 152 960 Ft (a millió feletti rész 40%-a) azaz 412 960 Ft, ebből egy hónapra: 34 413 Ft jut.
Azaz az emelés után kézhez kap: 115 200 Ft – (14 976 Ft + 34 413 Ft) = 65 811 Ft-ot. Vagyis a nettó emelkedés 9024 Ft. Ez az eredeti nettó 56 787 Ft-nak a 15,9%-a, tehát a 20%-os emelés csak nettó 15,9%-nak felel meg! Ha az infláció eközben 9%-os, akkor még lesz némi reálbér növekedés, hiszen 100 Ft helyett 115,9 Ft-ot kapunk kézhez, és a 100 Ft-os áru most 109 Ft-ba kerül, azaz marad 6,9 Ft-unk, azaz 6,9%. Ám ez jóval kisebb, mint a várt növekedés a megadott 20%-os bruttó fizetés emelés alapján.

1016. Ez a feladat az 1004-es a párja. Ezúttal a terület-felező párhuzamost keressük (az 1004-ben a kerület-felezőt számoltuk ki). Mivel a DCK háromszög hasonló az ABK háromszöghöz ($\lambda = 2$),

$$T_{DCK} = \tau = \frac{1}{4} T_{ABK};$$

tehát $2t = 3\tau$,

$$t = 1{,}5\tau.$$

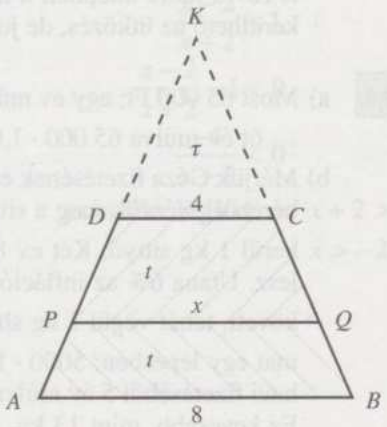
Kihasználva a DCK és PQK háromszögek hasonlóságát:

$$\frac{x^2}{4^2} = \frac{\tau + t}{\tau} = 2{,}5$$

$$x^2 = 16 \cdot 2{,}5 = 40$$

$$x = 2\sqrt{10}.$$

Tehát a keresett fal hossza mintegy 6,32 méter.



1017. A háromjegyű szám különböző jegyei: a, b, c. Ezek sorrendjének változtatásával 6 különböző számot kapunk. Ezeket $100a + 10b + c$ alakba írva, összegül $222(a + b + c)$ adódik. Törzstényezős felbontásban: $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$. Négyzetszámot a képzett összeg akkor ad, ha törzstényezőinek (prímtényezőinek) mindegyike

páros kitevővel szerepel. Az $a+b+c$ primtényezői között 2, 3 és 37-nek kellene szerepelnie. Ez lehetetlen, tudniillik 37 nem adódhat három különböző egyjegyű szám összegéből (három különböző számjegy összege legfeljebb 24 lehet). Tehát a fenti összeg nem lehet négyzetszám.

1018. $x+y+z=20$ és $600x+500y+100z=7200$ $(x, y, z \in \mathbf{N}^+)$.
Utóbbit 100-zal egyszerűsítve és kivonva belőle az elsőt: $5x+4y=52$, vagy másként: $5x=52-4y=4(13-y)$. Mivel $4 \nmid 5$, kell, hogy $4 \mid x$ legyen.
Kifejezve: $y=13-5\frac{x}{4}$, és az elsőből ennek segítségével: $z=7+\frac{x}{4}$.
Sorba véve x-re a 4-gyel osztható pozitív számokat: ha $x=4$, akkor $y=8$ és $z=8$; ha $x=8$, akkor $y=3$ és $z=9$; ha $x=12$ vagy még nagyobb szám, akkor y-ra negatív számot kapunk. Megoldásaink tehát: a háromféle ajándékból rendre 4, 8, 8, vagy pedig 8, 3, 9 darabot vettünk. (Elvileg a 0, 13, 7 is megoldás lenne, de akkor nem mondhatnánk, hogy háromféle ajándékot vettünk.)

1019. A keresett számrendszer alapja legyen x, $x>1$; $x \in \mathbf{N}$.
Mivel az x alapú számrendszerben a legnagyobb számjegy $x-1$ lehet, így (654_x miatt) $x \geq 7$.
654_x számot átírva tízes alapú számrendszerbe: $6x^2+5x+4=333$. Ebből $x=7$ vagy $x=-\frac{47}{6}$, ez nem egész szám, így a keresett számrendszer alapja 7.

1020. Mivel n nem osztható 5-tel, utolsó számjegye nem lehet 0 vagy 5.

n utolsó számjegye	1	2	3	4	6	7	8	9
n^4 utolsó számjegye	1	6	1	6	6	1	6	1
n^4-1 utolsó számjegye	0	5	0	5	5	0	5	0

Leolvasható, hogy n^4-1 utolsó számjegye 0 vagy 5, tehát osztható 5-tel.

Másik megoldás:
$n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$; $n \in \mathbf{N}^+$
Ha n nem osztható 5-tel, akkor n 5-tel osztva 1; 2; 3 vagy 4 maradékot adhat.
Ha $n=5k+1$, illetve $n=5k+4$ alakú $(k \in \mathbf{N})$, akkor $5 \mid n-1$, illetve $5 \mid n+1$,
ha $n=5k+2$ alakú, akkor $5 \mid n^2+1$,
mert $(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5=5(5k^2+4k+1)$
ha $n=5k+3$ alakú, akkor $5 \mid n^2+1$,
mert $(5k+3)^2+1=25k^2+30k+10=5(5k^2+6k+2)$
Így minden $n \in \mathbf{N}^+$ és $5 \nmid n$ esetén beláttuk, hogy $5 \mid n^4-1$.

1021. Két (nem egyforma) számjegy összeadásából legfeljebb 1 maradék keletkezhet, három (nem egyforma) számjegyéből pedig legfeljebb 2, még ha az előző oszlopból van is áthozott maradék. A legelső oszlopban ezért $H = D + 1$, vagyis a szorzat legalább 200 000. Ekkor kell, hogy $A \geq 4$ legyen, mert különben $(ABC)^2 < 200\,000$. Ezután vizsgáljuk meg a 2. részszorzat-sor végét: milyen számok esetén végződhet $C \cdot B$ B-re? Mindössze 6 ilyen eset van: $6 \cdot 2$, $6 \cdot 4$, $6 \cdot 8$, $3 \cdot 5$, $7 \cdot 5$, $9 \cdot 5$ (mivel jól látható, hogy $C \neq 1$). Még izgalmasabb, hogy $BC \cdot B$ pedig CB-re végződik. Ez a fenti 6 eset közül csak egyszer teljesül: $59 \cdot 5 = (2)95$ – tehát $B = 5$, $C = 9$. Beírva most már:

$$\begin{array}{cccccccc} & A & 5 & 9 & \cdot & A & 5 & 9 \\ \hline D & E & F & G & & & & \\ & H & H & 9 & 5 & & & \\ & & A & D & 3 & 1 & & \\ \hline H & D & K & G & 8 & 1 & & \end{array}$$

Így már ismertté válik D, E és F is:

$$\begin{array}{cccccccc} & A & 5 & 9 & \cdot & A & 5 & 9 \\ \hline 1 & 8 & 3 & G & & & & \\ & H & H & 9 & 5 & & & \\ & & A & 1 & 3 & 1 & & \\ \hline 2 & 1 & K & G & 8 & 1 & & \end{array}$$

Mivel az első sorban $A \cdot A$ ($A \cdot 5$ maradékával együtt) csak 18, így $A < 5$, de ez a feladat elején tett kikötéssel együtt azt adja: $A = 4$. A teljes szorzat tehát:

$$\begin{array}{cccccccc} & 4 & 5 & 9 & \cdot & 4 & 5 & 9 \\ \hline 1 & 8 & 3 & 6 & & & & \\ & 2 & 2 & 9 & 5 & & & \\ & & 4 & 1 & 3 & 1 & & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 6 & 8 & 1 & & \end{array}$$

1022. Legyen $a = b + x$, $c = b - y$ (ahol $0 < x, y$).

Így az összeg $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{-x-y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x+y}$, közös nevezőre hozva, rendezve: $\dfrac{(x+y)^2 - xy}{xy(x+y)} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{xy(x+y)}$, ami természetesen pozitív, hiszen számlálója, nevezője is az.

1023. Legyen A a számban a 6 előtt álló, ismeretlen számú jegyet tartalmazó szám. Ekkor a feltétel: $4 \cdot (10A + 6) = 6 \cdot 10^n + A$, ahol n is ismeretlen, hiszen nem tudjuk, melyik

helyiértékre kerül a 6, amikor előrevisszük. Kifejezve: $A = \frac{2(10^n - 4)}{13}$. Mivel A egész, és $13 \nmid 2$, így kell: $13 \mid 10^n - 4$. Konkrétan megvizsgálva, a legkisebb n, amire ez teljesül: 5 (99 996 : 13 = 7692), vagyis A legkisebb lehetséges értéke: 15 384. Így a keresett szám: 153 846.

1024. a) 6 gépkocsi egy fordulóban legfeljebb 30 tonna szenet képes elszállítani, ezért legalább 7 teherautóra van szükség.

b) Az egyes teherautók összköltsége az egy fordulós szállításnál:
5 tonnás–120 batka, 4 tonnás–97 batka és 3 tonnás–76 batka.
Foglaljuk táblázatba 7 teherautó összes lehetséges különböző megrendelését és rendezzük sorba az összkapacitás szerint az eseteket!

	5 tonnás	4 tonnás	3 tonnás	Összkapacitás (t)	Költség (batka)
1.	0	0	7	21	532
2.	0	1	6	22	553
3.	1	0	6	23	576
4.	0	2	5	23	574
5.	1	1	5	24	597
6.	0	3	4	24	595
7.	2	0	5	25	620
8.	1	2	4	25	618
9.	0	4	3	25	616
10.	2	1	4	26	641
11.	1	3	3	26	639
12.	0	5	2	26	637
13.	3	0	4	27	664
14.	2	2	3	27	662
15.	1	4	2	27	660
16.	0	6	1	27	658
17.	3	1	3	28	685
18.	2	3	2	28	683
19.	1	5	1	28	681
20.	0	7	0	28	679
21.	4	0	3	29	708
22.	3	2	2	29	706
23.	2	4	1	29	704
24.	1	6	0	29	702
25.	4	1	2	30	729
26.	3	3	1	30	727
27.	2	5	0	30	725

a táblázat folytatódik

a táblázat folytatása

28.	5	0	2	31	752
29.	4	2	1	31	750
30.	3	4	0	31	748
31.	5	1	1	32	773
32.	4	3	0	32	771
33.	6	0	1	33	796
34.	5	2	0	33	794
35.	6	1	0	34	817
36.	7	0	0	35	840

Az első 9 esetről könnyen látható, hogy csak úgy lehet legalább 31 tonnára növelni az összkapacitást, ha még legalább két autót rendelünk. Ellenőrizhető, hogy ekkor mindegyik esetben túllépjük a 30. esethez tartozó 748 batkás költséget. A 10–12. esetekben még legalább 120 batka, a 13–16. esetekben még legalább 97 batka, a 17–27. esetekben pedig még legalább 76 batka szükséges ahhoz, hogy újabb kocsirendeléssel elérjük a legalább 31 tonnás összkapacitást. Mindegyik esetben túllépjük a 748 batkás költséget, ha ilyen módon szállíttatunk. A 28–29. és 31–36. esetekről közvetlenül látható, hogy 748 batkánál drágább a megvalósításuk.

A fenti táblázatból az is látható, hogy 7-nél több – legalább 31 tonna összkapacitású – teherautó bármilyen összeállításban történő megrendelése sem lesz olcsóbb 748 batkánál. Ez tehát a minimális szállítási költség, amit 3 db 5 tonnás és 4 db 4 tonnás teherautó megrendelésével érhetünk el.

1025. A kő t ideig esik a csobbanásig, útja $s = \frac{10}{2} \cdot t^2$.

A hang $(2{,}7 - t)$ idő alatt tér vissza az észlelőig, megtett útja ugyanakkora, mint a kő útja, $s = 340(2{,}7 - t)$.

$\frac{10}{2} t^2 = 340(2{,}7 - t)$,

ebből a pozitiv megoldás $t = 2{,}60$, tehát 2,60 másodperc alatt ér le a kő szabadeséssel, útja 33,81 méter, tehát a víz felszíne kb. 34 méter mélyen van a kútban..

1026. A jobb oldalon egészrészek összege áll, így x is egész, legyen $12a + b$ alakú, ahol a egész, b pedig a 0, 1, ..., 11 egészek valamelyike. Így:

$$12a + b = 6a + \left[\frac{b}{2}\right] + 4a + \left[\frac{b}{3}\right] + 3a + \left[\frac{b}{4}\right] = 13a + \left[\frac{b}{2}\right] + \left[\frac{b}{3}\right] + \left[\frac{b}{4}\right].$$

Jelöljük e három egészrész összegét S-sel. Ekkor $12a$-t kivonva: $b = a + S$. Most b lehetséges értékeit végigvizsgálva kapjuk:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\left[\frac{b}{2}\right]$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
$\left[\frac{b}{3}\right]$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$\left[\frac{b}{4}\right]$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
S	0	0	1	2	4	4	6	6	8	9	10	10
$a = b - S$	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
$x = 12a + b$	0	13	14	15	4	17	6	19	8	9	10	23

Vagyis nagyság szerint rendezve a megoldásokat: 0, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 23.

1027. A bal oldalt átírva: $\left[A - \frac{A}{B}\right]$. Ha $B \mid A$, a két oldal egyenlő, hiszen egészek különbsége egész, és egész egészrésze önmaga. Egyébként pedig a bal oldal a kisebb; hiszen ott nem-egész kivonásakor az egészrész-képzés lefelé „kerekít" (nem a szokásos értelemben használva most e kifejezést), a jobb oldalon pedig a képlet szerint előbb képezzük az egészrészt (kerekítünk lefelé), aztán vonunk ki, azaz tulajdonképpen felfelé kerekítünk. (Konkrét példával: legyen $A = 15$, $B = 4$, a bal oldalon ekkor $\left[A - \frac{A}{B}\right] = \left[15 - \frac{15}{4}\right] = [15 - 3{,}75] = [11{,}25] = 11$, míg a jobb oldalon $A - \left[\frac{A}{B}\right] = 15 - \left[\frac{15}{4}\right] = 15 - [3{,}75] = 15 - 3 = 12$.)

1028. Legyen h a kút keresett mélysége, ekkor a T időtartam alatt leesik a kő, és visszaér a hangja. A kő leér (a megadott út-idő összefüggés átalakításával kapjuk:) $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (s) idő alatt. A hang felér $\frac{h}{340}$ (s) alatt, és a kettő összege a teljes idő, T, azaz: $\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{340} = T$. Ezt az egyenletet kell megoldani h-ra, ahol $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel számolunk, és T egy paraméter, amit a konkrét esetben meg kell mérni.

Egyszerűbb azonban ezúttal $\sqrt{h}$ -ra írni fel az egyenletet, ami rendezve:

$\frac{\sqrt{5}}{340} h + \sqrt{h} - \sqrt{5} \cdot T = 0$, ami $\sqrt{h}$ -ra másodfokú egyenlet. Innen

$\sqrt{h} = \dfrac{-1+\sqrt{1+\dfrac{20}{340}T}}{\dfrac{\sqrt{5}}{170}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{170^2+1700T}-170\right)$, a másodfokú egyenlet másik gyöke negatív, az nem lehet megoldás, mert nem értelmezhető. Ebből végül a kút mélysége: $h = \dfrac{1}{5}\left(2\cdot 170^2+1700T-340\sqrt{170^2+1700T}\right)$. Ez például $T = 3$ s idő esetén: $h \approx 11\,560 + 1020 - 12\,538{,}58 = 41{,}42$ (m) mély kutat jelent.

1029. A törtek nevezői miatt: $x, y \neq 0$. Mindhárom nevezővel szorozva $7(x+y) = xy$. Mivel $x, y \in \mathbf{Z}$, valamelyikük osztható kell legyen 7-tel, mondjuk (mivel szerepük szimmetrikus) $x = 7a$ ($a \in \mathbf{Z}$).

Ekkor $7(7a+y) = 7ay$, amiből (az egész) $y = \dfrac{7a}{a-1}$.

Ekkor $a-1$ a 7 osztói közül kerül ki: $-7, -1, 1, 7$; vagyis a lehet $-6, 0, 2, 8$. (Az, hogy $a-1$ az a-nak legyen osztója – vagyis egy szám az eggyel nagyobbnak –, csak $-1 \mid 0$ és $1 \mid 2$ esetén fordul elő, de ezeket már megkaptuk.) Ekkor y lehetséges értékei rendre 6, 0 (ez a kikötés miatt nem lehetséges), 14, 8 – a lehetséges eredményekhez tartozó x értékek pedig rendre: -42, 14, 56. Az eredeti egyenlet szimmetriája miatt persze x és y szerepe felcserélhető, így végül öt számpár adja a megoldáshalmazt: $M = \{(-42; 6), (14; 14), (56; 8), (6; -42), (8; 56)\}$.

1030. a) Az eredeti egyenlet ekvivalens a $(b-1)x = b$ egyenlettel.

1. Ha $b-1 = 0$, azaz $b = 1$, akkor ez az egyenlet így írható: $0 \cdot x = 1$. Egyetlen valós szám sem teszi igazzá ezt az egyenletet, így az eredeti egyenletnek sincs megoldása ebben az esetben.

2. Ha $b-1 \neq 0$, azaz $b \neq 1$, akkor a $(b-1)x = b$ egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $b-1$-gyel: $x = \dfrac{b}{b-1}$.

Összefoglalva: Ha a b paraméter értéke 1, akkor az eredeti egyenletnek nincs megoldása; ha $b \neq 1$, akkor az egyenletnek egyetlen gyöke van: a $\dfrac{b}{b-1}$ valós szám.

b) Az a)-ban leírt második esetről van szó, tehát $M = \left\{\dfrac{2001}{2002}\right\}$.

c) $\dfrac{b}{b-1} = \dfrac{2}{3}$, és $b \neq 1$

$3b = 2b - 2$

$b = -2$

Tehát a $b = -2$ választással az egyenlet egyetlen gyöke a $\dfrac{2}{3}$.

Ellenőrzés: A $-3(x-1) = 1$ egyenletnek valóban a $\dfrac{2}{3}$ az egyetlen megoldása.

1031. Az eredeti egyenlet ekvivalens a következőkkel:

$(k^2 + 1)x + 3 = 3k + 2kx$

$(k^2 + 1)x - 2kx = 3k - 3$

$(k^2 - 2k + 1)x = 3(k - 1)$

$(k - 1)^2 x = 3(k - 1)$

1. Ha $k - 1 = 0$, azaz $k = 1$, akkor az utolsó egyenlet (amely az eredetivel ekvivalens) így írható: $0 \cdot x = 0$.
Minden valós szám igazzá teszi ezt az egyenletet, tehát $M = \mathbf{R}$.

2. Ha $k - 1 \neq 0$, azaz $k \neq 1$, akkor a $(k - 1)^2 x = 3(k - 1)$ egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $(k - 1)^2$-nel: $x = \frac{3}{k-1}$.

Ebben az esetben tehát egyetlen megoldás van: $M = \left\{\frac{3}{k-1}\right\}$.

Összefoglalva: Ha a k paraméter értéke 1, akkor az eredeti egyenletnek minden valós szám megoldása; ha $k \neq 1$, akkor az egyenletnek egyetlen gyöke van: a $\frac{3}{k-1}$ valós szám.

A második kérdés megválaszolásához meg kell oldani a $\frac{3}{k-1} = -6$ $(k \neq 1)$ egyenletet.

Azt kapjuk, hogy $k = \frac{1}{2}$.

1032. a) Az eredeti egyenlet ekvivalens a következőkkel:

$3kx - 4x = 9k^2 - 24k + 16$

$(3k - 4)x = (3k - 4)^2$

1. Ha $3k - 4 = 0$, azaz $k = \frac{4}{3}$, akkor az utolsó egyenlet (amely az eredetivel ekvivalens) így írható: $0 \cdot x = 0$.
Minden valós szám igazzá teszi ezt az egyenletet, tehát $M = \mathbf{R}$.

2. Ha $3k - 4 \neq 0$, azaz $k \neq \frac{4}{3}$, akkor a $(3k - 4)x = (3k - 4)^2$ egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $(3k - 4)$-gyel: $x = 3k - 4$.
Ebben az esetben tehát egyetlen megoldás van: $M = \{3k - 4\}$.

Összefoglalva: Ha a k paraméter értéke $\frac{4}{3}$, akkor az eredeti egyenletnek minden valós szám megoldása; ha $k \neq \frac{4}{3}$, akkor az egyenletnek egyetlen gyöke van: a $3k - 4$ valós szám.

b) Csak a $k \neq \frac{4}{3}$ esetről lehet szó, így a $3k - 4 < 11$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.
Ennek megoldáshalmaza: $H :=]-\infty; 5[$.
A H halmaz bármely elemét írjuk a k helyébe, olyan egyenletet kapunk, amelynek egy gyöke van, és az kisebb 11-nél.

c) Most $k \neq \frac{4}{3}$, tehát a megoldáshalmaz egyetlen eleme: $3 \cdot \left(-\frac{2\,999\,996}{3}\right) - 4 =$
$= -3\,000\,000$.

1033. a) Az eredeti egyenlet ekvivalens a következőkkel:
$p(p+2)x - 2(p+2)x = 5p + 10$,
$(p+2)(p-2)x = 5(p+2)$.
1. Ha $p + 2 = 0$, azaz $p = -2$, akkor az utolsó egyenlet (amely az eredetivel ekvivalens) így írható: $0 \cdot x = 0$.
Minden valós szám igazzá teszi ezt az egyenletet, tehát $M = \mathbf{R}$.
2. Ha $p - 2 = 0$, azaz $p = 2$, akkor a $(p+2)(p-2)x = 5(p+2)$ egyenlet (amely az eredetivel ekvivalens) így írható: $0 \cdot x = 20$.
Látható, hogy egyetlen valós szám sem teszi igazzá az egyenletet, tehát $M = \emptyset$.
3. Ha $p + 2 \neq 0$ és $p - 2 \neq 0$, azaz $|p| \neq 2$, akkor a $(p+2)(p-2)x = 5(p+2)$ egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk $(p+2)(p-2)$-vel: $x = \frac{5}{p-2}$, tehát egyetlen elemű a megoldáshalmaz: $M = \left\{\frac{5}{p-2}\right\}$.
Összefoglalva: Ha $p = -2$, akkor az eredeti egyenletnek minden valós szám megoldása.
Ha $p = 2$, akkor az eredeti egyenletnek nincs megoldása; ha $|p| \neq 2$, akkor az egyenlet egyetlen gyöke az $\frac{5}{p-2}$ valós szám.

b) $\frac{5}{-4998-2} = -\frac{5}{5000} = -\frac{1}{1000}$, tehát $M = \left\{-\frac{1}{1000}\right\}$.

c) Ha $|p| \neq 2$, akkor az $\frac{5}{p-2} = -\frac{1}{100}$ egyenletet kell megoldani. Egyetlen gyöke a -498.
Akkor is eleme a megoldáshalmaznak a $-\frac{1}{100}$, ha $p = -2$, hiszen ekkor $M = \mathbf{R}$.
Tehát a $p := -2$, vagy a $p := -498$ választás esetén a $-\frac{1}{100}$ az egyenlet megoldáshalmazának eleme lesz.

3. FÜGGVÉNYEK

3.1. Függvénytípusok

1034. *a*, *b*, *c*, *d*, *f* függvények (hiszen egy halmaz minden egyes eleméhez egy-egy elemet rendelünk).

e nem függvény, mert egy számhoz több elemet is hozzárendelünk.

Kölcsönösen egyértelmű: *a* (különböző elemekhez különböző értékeket rendeltünk).

Nem kölcsönösen egyértelmű: *b*, *c*, *d*, *f* (van két olyan különböző elem, melyhez ugyanazt a számot rendeljük)
(pl.: c) $4 \mapsto 2$; $6 \mapsto 2$;
d) $2 \mapsto 2$; $3 \mapsto 2$;
f) $0{,}5 \mapsto 0$; $1 \mapsto 0$; stb.).

1035. a) Igen, a hozzárendelés egyértelmű.

b) Nem, ha valakinek több testvére is van, vagy van olyan, akinek nincs testvére, akkor a hozzárendelés nem egyértelmű.

c) András osztályában András minden osztálytársának pontosan 1 testvére van. Béla osztályában Béla osztálytársai között van olyan, akinek legalább két testvére van, vagy olyan, akinek nincs testvére. (Azt nem tudjuk, hogy Andrásnak, illetve Bélának van-e testvére.)

1036. a) Amennyiben az osztályba egyetlen lány sem jár, akkor igen (pl. mindenkihez hozzárendeljük önmagát); ha viszont vannak lánytanulók is, akkor nem (nem lévén azonos a két halmaz elemeinek száma, ami pedig a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés esetén szükséges – és elégséges – feltétel).

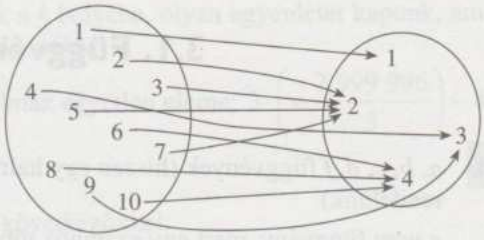
b) Az első halmaz persze üres (dacára a különböző fantasy-könyveknek és filmeknek), a második halmaznak pedig van egy eleme, a nulla. Üres halmaz eleve nem lehet egy hozzárendelés értelmezési tartománya, sem értékkészlete – de a két halmaz különböző elemszáma sem teszi lehetővé a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést.

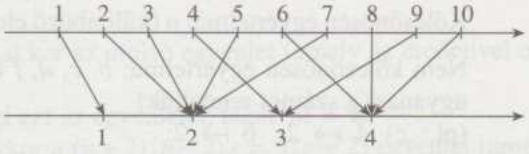
c) Ez a hozzárendelés végrehajtható, pl. a következő (bizonyára ismert) párosítás révén:

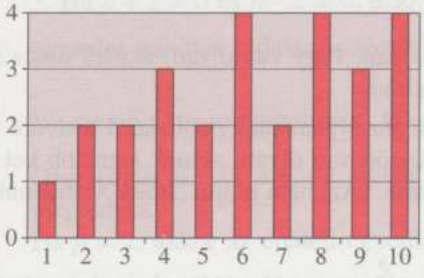
$$\begin{array}{ccccccccc} \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & \ldots\} \end{array}$$

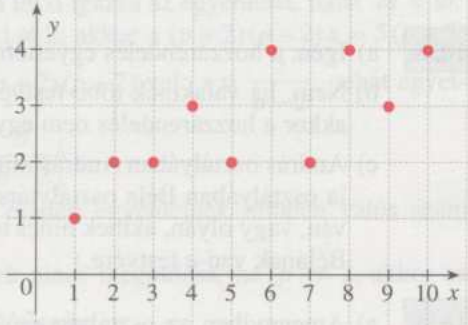
1037. A táblázatban a (pozitív) osztók száma látható. Nyíldiagramból kétfélét is mutatunk. Az oszlopdiagram értelemszerű. A koordináta-rendszerben ábrázolt függvénygrafikon külön pontokból áll, mivel csak egész helyeken van hozzárendelés.

szám	osztóinak száma
1	1
2	2
3	2
4	3
5	2
6	4
7	2
8	4
9	3
10	4









1038. Az értéktáblázat mutatja, hogy a felvett értékek egyenletesen (0,5-enként) növekszenek a hely egyenletes (egyesével való) növekedtével, így elsőfokú függvényt kereshetünk, amelynek meredeksége 0,5. E tendenciát visszafelé követve a tengelymetszet is adódik: $-0{,}5$.

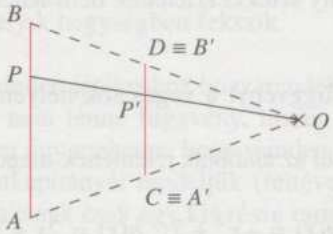
x	1	2	3
y	0	0,5	1

Egy szabály tehát $x \mapsto 0{,}5x - 0{,}5 = \dfrac{x-1}{2}$.

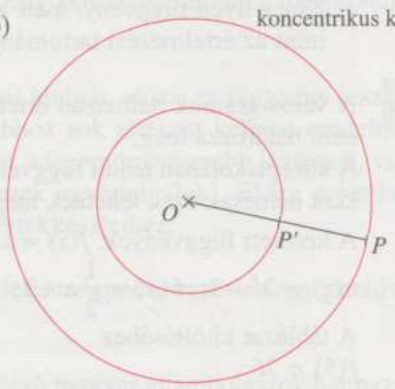
1039. Minden egyes csapathoz rendeljük hozzá a lejátszott meccsek számát.
Minden egyes csapathoz rendeljük hozzá a győztes meccsek számát.
Minden egyes csapathoz rendeljük hozzá a rúgott gólok számát.
Minden egyes csapathoz rendeljük hozzá gólkülönbségüket.

Minden egyes csapathoz rendeljük hozzá szerzett pontjaik számát.
Minden egyes csapathoz rendeljük hozzá nem vesztes meccseik számát.

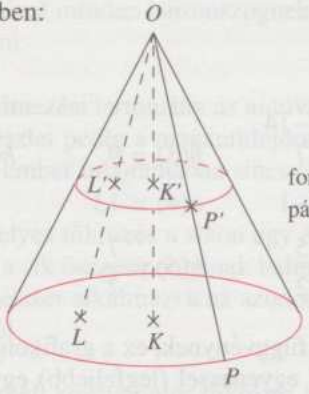
1040. a)



b)



c) Térben:



forgáskúp
párhuzamos síkok

1041. a) hamis (minden egyismeretlenes elsőfokú egyenletnek van valós megoldása, és csak egy)

b) hamis (– a második halmaz minden elemének nem kell szerepelnie az értékkészletben
– egyébként is bármely valós szám lehet gyöke elsőfokú egyenletnek)

c) hamis (lásd a))

d) hamis (nem kell, hogy a függvény kölcsönösen egyértelmű legyen)

e) hamis (nem kell, hogy a két halmaz számossága egyenlő legyen)

f) hamis (A és B is halmaz)

g) igaz (A minden egyes eleméhez B egy-egy elemét rendeltük)

1042. a) Az egy-egyértelmű hozzárendelés lényege, hogy különböző A-beli elemek képe különböző, és minden A-beli elemnek van képe, ezért az egy-egyértelmű hozzárendelések száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

b) Pontosan 1 db szigorúan monoton növekedő és pontosan 1 db szigorúan monoton csökkenő.

1043. a) $f: K \to L$; $a \mapsto 1$; $b \mapsto 1$; $c \mapsto 1$; $d \mapsto 5$

b) $g: K \to L$; $a \mapsto 1$; $b \mapsto 4$; $c \mapsto 2$; $d \mapsto 5$

c) Nincs ilyen függvény, mert a függvény értékkészletének nem lehet több eleme, mint az értelmezési tartományának.

1044. A valós számok halmazán értelmezett függvényt a véges sok helyen felvett érték nem határozza meg.

A középiskolában tanult függvények közül az alábbiak jelentenek megoldást, egyébként nemcsak ezek lehetnek megoldások.

A keresett függvények: $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x^2 + 2$; $h(x) = 2x + 3$;

$a(x) = 2^x - 3$; $b(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

A táblázat kitöltéséhez

$f(5) = 26$

$g(-2) = -2$	$g(1) = 1$	$g(4) = -14$		
$h(-3) = -3$	$h(-1) = 1$	$h(2) = 7$	$h(3) = 9$	$h(5) = 13$
$a(-3) = \frac{-23}{8}$	$a(-2) = \frac{-11}{4}$	$a(1) = -1$	$a(4) = 13$	
$b(-3) = -\frac{1}{2}$	$b(1) = \frac{3}{2}$	$b(3) = \frac{5}{2}$	$b(5) = \frac{7}{2}$	

1045. Az egyértelmű hozzárendelést nevezzük függvénynek, ez a grafikonján képszerűen úgy látszik, hogy bármely „függőleges" egyenessel (legfeljebb) egy közös pontja lehet. A kölcsönösen egyértelmű függvény grafikonjának ezen kívül bármely „vízszintes" egyenessel is csak (legfeljebb) egy közös pontja lehet. Ezek alapján az a) rajz kölcsönösen egyértelmű függvényt, a b) nem kölcsönösen egyértelmű, de függvényt, a c) és d) még csak nem is függvényt ábrázol.

1046. a) Mindkét esetben a vehető részvények alkotják az értelmezési tartományt.

b) A két értékkészlet a természetes számok halmazának része (részhalmaza), hiszen fillér már nincsen.

c) A „záróár – nyitóár" adja meg az aznapi nyereséget, illetve, ha negatív, akkor a veszteséget.

1047. Nem jogos, mert egyáltalán nem biztos, hogy két mérés között lineárisan változik a láz. Másrészt legalább elvileg nem rossz, hiszen minden közbülső időpontban is van testhőmérséklet, csak nem mérjük állandóan. (A gyakorlati függvény-alkalmazások esetében sokszor még értelmetlen is az összekötés, ez itt nem áll fenn, csak a linearitás nem jogos.)

1048. a) Nem lesz függvény, mivel több a hegycsúcs, így biztosan lesz olyan hegység, amelyhez egynél több csúcsot rendelünk hozzá.

b) Ez függvény, hiszen a 20 hegycsúcs mindegyikéről egyértelműen megmondható, melyik hegységben fekszik.

1049. Ha minden játékoshoz hozzárendeljük a saját klubját, akkor ez függvény lesz. Fordítva nem lenne függvény, hiszen egy klubhoz sok játékost kellene rendelni. Ez esetleg úgy mehetne, hogy minden csapathoz a legeredményesebb játékosát, vagy a csapatkapitányát rendeljük (feltéve, hogy ezek egyértelműek). Ekkor a játékosok halmazának csak egy kis része tartozna az értékkészlethez.

1050. Igen, mivel minden háromszögnek van területe, mégpedig egyetlen egy pozitív valós szám.

1051. Az értelmezési tartomány az autóval rendelkező magyar állampolgárok halmaza, az értékkészlet pedig a magántulajdonú gépkocsik halmaza. Ez csak akkor függvény, ha egy ember tulajdonában sincs több gépkocsi.

1052. A tengelyes tükrözés a síkon egy egy-egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartománya a sík összes pontjának halmaza, s értékkészlete szintén. Ráadásul az is igaz, hogy kétszer alkalmazva az azonos leképezést kapjuk, azaz megegyezik a saját inverzével.

1053. Egy síkbeli középpontos tükrözés inverze is önmaga, ebben rokona a tengelyes tükrözésnek, hiszen kétszer alkalmazva minden pont visszakerül eredeti helyére.

1054. Az első függvény a pozitív valós számok halmazán van értelmezve, hiszen a szakaszhossz pozitív valós szám (az egy pontot nem vesszük szakasznak), s ehhez a képszakasz hosszát rendeljük, ami szintén pozitív valós szám. Mivel középpontos hasonlóságról van szó: $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+,\ x \mapsto \lambda \cdot x$, mivel a hasonlóság arányáról feltettük, hogy pozitív.

Hasonlóan $g: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+,\ x \mapsto \lambda^2 \cdot x$, hiszen a terület pozitív, és a hasonlóság arányának négyzete segítségével kapjuk a képalakzat területét.

Végül $h: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+,\ x \mapsto \lambda^3 \cdot x$, hiszen a térfogat is pozitív, és a hasonlóság arányának köbe segítségével kapjuk a képalakzat térfogatát.

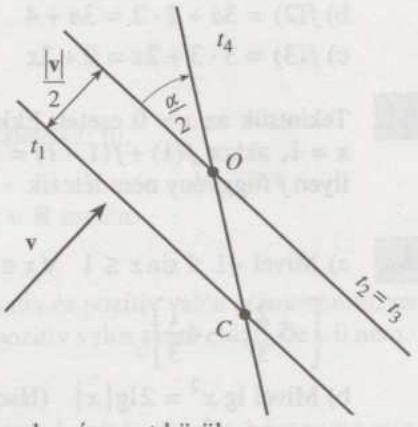
1055. Ekkor „meg kell szabadulnunk" a szám százasnál nagyobb és kisebb helyiértékein álló számjegyektől. Ha egy szám századrészének vesszük az egészrészét, akkor ez az eljárás a tizes, egyes (és minden tizedesvessző utáni) helyiértéken álló számjegyet „eltüntet". Ha viszont egy szám ezredrésze egészrészének ezerszeresét tekintjük, akkor ez a százasnál nagyobb helyiértékeken ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza, mint a szám maga, de három 0-ra végződik. Tehát az eljárás a következő:

$x-1000\left[\frac{x}{1000}\right]$ már csak a százas és annál kisebb helyiértékeken tartalmaz számjegyet. Ezen szám századának egészrésze pedig a kívánt számjegyet szolgáltatja: $\left[\frac{x-1000\left[\frac{x}{1000}\right]}{100}\right]$, egyszerűsítés után: $\left[\frac{x}{100}-10\left[\frac{x}{1000}\right]\right]$. Tehát a keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto \left[\frac{x}{100}-10\left[\frac{x}{1000}\right]\right]$.

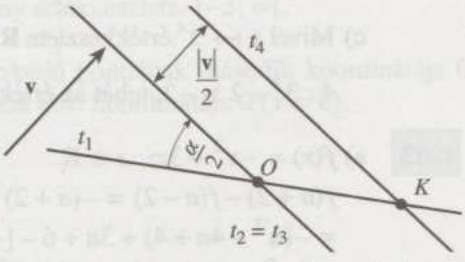
1056. Az f függvény legyen az, amelyiknek az értelmezési tartománya a személygépkocsik halmaza, és a rendszámot rendeli hozzá a kocsikhoz. A másik függvény, a g, az „egyszerű" (egy autóval rendelkező) autótulajdonosok, tehát bizonyos emberek halmazán van értelmezve, és értékkészlete a hozzájuk rendelt autók, tehát az összes személygépkocsik egy részhalmaza. Kétféleképpen lehetne elvileg a két függvényt összetenni, de ebből itt csak az egyik lehetséges. Tudniillik a másodikként használt függvény értelmezési tartománya az első függvény értékkészletével kell, hogy megegyezzen, vagy annak része legyen. Tekintsük először g-t, amelyik a személyekhez hozzárendeli a tulajdonukban levő gépkocsit, majd f ezekhez hozzárendeli a rendszámukat. Ez is csak némi korrekcióval megy, nevezetesen f-et le kell szűkíteni azokra a kocsikra, amelyek „egyszerű" tulajdonosokhoz tartoznak.
Ha először f-et alkalmaznánk, akkor a kocsikhoz a rendszámukat rendelnénk. Ezután csak olyan függvény jöhet, ami a rendszámokhoz rendel valamit, ami itt nincs, tehát f után g-t nem lehet alkalmazni.

1057. Két függvény van: f értelmezési tartománya az áruk halmaza, értékkészlete a lehetséges vonalkódok halmaza; és g, amelynek értelmezési tartománya a vonalkódok halmaza, értékkészlete pedig a pozitív egész számok egy részhalmaza (forintban vett árak). Itt is csak az egyik (f után g) az egyetlen lehetséges összetétel, lásd az előző feladatmegoldást. Ez olyan függvény, amelyik minden áruhoz az árát rendeli. Az f függvénynek inverze csak akkor van, ha minden áruhoz egy külön vonalkódot rendelnek, tehát a típuson belül a darabnak külön jelzése van. Ekkor ennek van inverze, tehát a kódhoz meg lehet találni egyértelműen az árut. A g függvénynek általában nincs inverze, mert különböző vonalkódhoz tartozhat ugyanaz az ár, sok teljesen különböző dolog kerülhet ugyanannyiba. Ennek tehát nincs inverze, és akkor az összetett függvénynek sem lesz.

1058. a) Egy eltolás és egy forgatás egymásutánjának eredménye egy forgatás lesz: másik (C) pont körül, de ugyanakkora szöggel, mint O körül volt. Lásd az ábrát! Az indokláshoz azt kell felhasználni, legalábbis legegyszerűbben, hogy mind az eltolás, mind a forgatás két-két tengelyes tükrözés segítségével felírható, és lehet a t_2, t_3 tengelyeket úgy választani, hogy kettő egybeessen, s ezekre tükrözve a helybenhagyás lép fel, s marad két (metsző tengelyre való) tükrözés, ami egy forgatás újra, csak más pont körül.



b) Egy forgatás és egy eltolás egymásutánja is forgatás, csak egy másik (még újabb, K) pont körül ($C \neq K$), szintén az eredeti szöggel. Lásd az ábrát! Hasonló módon indokolható, mint az a) esetben, csak most más tengelyes tükrözések lesznek (a sorrendváltozás miatt).



c) Az $f(x) = x$ egyenlet megoldása olyan x pont lenne, amely az eltolás során helyben marad, azaz önmaga képe. Ha a $\mathbf{v}$ vektor nem nullvektor, akkor ilyen pont nincs; ha az, akkor viszont minden x megoldása az egyenletnek.

d) A $f(g(x)) = x$ egyenlet megoldása(i) a b) esetben helyben maradó pont(ok), és mint láttuk, az egy forgatás, annak pedig pontosan egy fixpontja van, a középpontja, tehát $x = K$. Több megoldás nincs. Lásd még a b) feladat ábráját!

1059. a) $[-2; 3]$

b) $f:[-5; 6] \to \mathbf{R}$; $f(x) = \begin{cases} -2x - 8, \text{ ha } x \leq -3; \\ \frac{1}{3}x - 1, \text{ ha } -3 < x < 3; \\ (x-4)^2 - 1, \text{ ha } x \geq 3. \end{cases}$

c) $[-3{,}5; 0] \cup \{4\}$

1060. a) Az értelmezési tartomány egy adott eleméhez tartozó helyettesítési érték a függvény által hozzárendelt érték. Nevét onnan kapta, hogy ha a hozzárendelési szabály képletszerűen ismert, akkor a képletbe a helyet általánosan jelölő változó (többnyire x) helyébe a konkrét számot helyettesítve megkapjuk a hozzá tartozó értéket.

b) $f(2) = 3a + 2 \cdot 2 = 3a + 4$

c) $f(3) = 3 \cdot 3 + 2x = 9 + 2x$

1061. Tekintsük az $x = 0$ esetet. Ekkor $f(0) + f(1 - 0) = 1 - 0$, azaz $f(0) + f(1) = 1$. Ha $x = 1$, akkor $f(1) + f(1 - 1) = 1 - 1$, azaz $f(1) + f(0) = 0$. Ez ellentmondás, tehát ilyen f függvény nem létezik.

1062. a) Mivel $-1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ esetén, ezért $-5\frac{2}{3} \le \frac{2}{3}\sin x - 5 \le -4\frac{1}{3}$, azaz $\left[-5\frac{2}{3};\ -4\frac{1}{3}\right]$.

b) Mivel $\lg x^2 = 2\lg|x|$ (lásd az 1218. feladatot!), ezért $\lg x^2 \in \mathbf{R}$, azaz az értékkészlet a valós számok halmaza.

c) Mivel $x \mapsto 3^x$ értékkészlete $\mathbf{R}^+$, ezért $\frac{4}{3^x}$ is minden pozitív valós értéket felvesz. $4 : 3^x - 2 > -2$, tehát az értékkészlet a -2-nél nagyobb valós számok halmaza.

1063. a) $f(x) = -x^2 + 3x; \quad x \in \mathbf{R}$

$f(a+2) - f(a-2) = -(a+2)^2 + 3(a+2) - [-(a-2)^2 + 3(a-2)] =$

$= -(a^2 + 4a + 4) + 3a + 6 - [-(a^2 - 4a + 4) + 3a - 6] =$

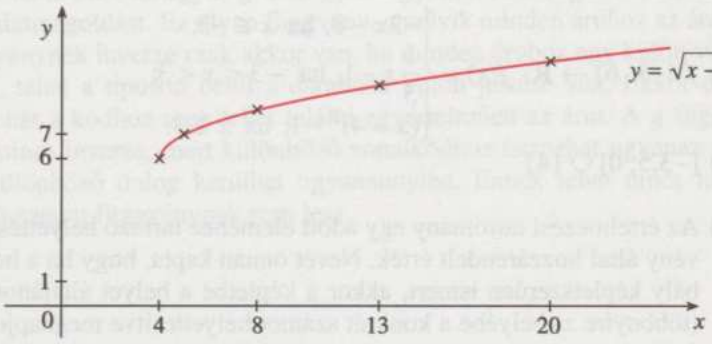
$= -a^2 - 4a - 4 + 3a + 6 + (a^2 - 4a + 4) - 3a + 6 = -8a + 12$

b) $f(x) = 3^x$

$f(a+2) - f(a-2) = 3^{a+2} - 3^{a-2} = 3^a \cdot 3^2 - 3^a \cdot 3^{-2} = 3^a\left(9 - \frac{1}{9}\right) = \frac{80}{9} \cdot 3^a =$

$= 80 \cdot 3^{a-2}$

1064. A négyzetgyök miatt az $x \mapsto \sqrt{x-4}$ függvény értelmezési tartománya $[4; +\infty[$.



A keresett függvény értékkészlete: $[6; +\infty[$.

1065. Mivel $-1 \le \sin\alpha \le 1$ ha $\alpha \in \mathbf{R}$

$-2 \le 2\sin\alpha \le 2$

$2 \le 2\sin\alpha + 4 \le 6$

$x \mapsto 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$ függvény értékkészlete $[2; 6]$,

mert $2 \le 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \le 6$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

1066. Ekkor $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Így $x + 2$ minden negatív és pozitív valós számot befut, reciprokaként pedig szintén minden negatív és pozitív valós szám előáll, de a 0 nem. Vagyis a függvény értékkészlete: $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.

1067. Ekkor $D = \mathbf{R}$. Így $x - 1$ minden valós számot végigfut, négyzeteként pedig minden nemnegatív szám előáll. Vagyis a függvény értékkészlete: $[-3; \infty[$.

1068. A függvény grafikonja x tengelyre illeszkedő pontjának második koordinátája 0 ($f(x) = 0$); y tengelyre illeszkedő pontjának első koordinátája 0 ($x = 0$).

	x tengelymetszet	y tengelymetszet
a)	nincs	$y = 7$
b)	nincs	$y = -\frac{1}{4}$
c)	$x = 0$	$y = 0$
d)	$x = 0$	$y = 0$
e)	nincs	$y = 2$
f)	nincs	nincs
g)	nincs	nincs
h)	nincs	$y = 3$
i)	nincs	nincs
j)	nincs	nincs

Megjegyzés:

a) Nincs, mert $-7 \notin \mathbf{N}$.

d) $\frac{x^2 + x - 12}{x - 3} - 4 = \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} - 4 = x + 4 - 4 = x; \quad x \ne 3$

e) $\cos x + 1 = 0$, ha $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$; ezek irracionális számok, így ezeken a helyeken a függvény nincsen értelmezve.

f, g, i) $x = 0$-ra nincs értlemezve, így az y tengelyt nem metszi a grafikon.
Ha egy tört számlálója 0-tól különböző szám, akkor a tört értéke sosem lehet 0, így a grafikon nem metszi az x tengelyt.

j) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

A p függvény $x = 0$-ra nincs értelmezve, tehát a grafikon nem metszi az y tengelyt, a tört számlálója sem lehet 0, tehát a grafikon az x tengelyt sem metszi.

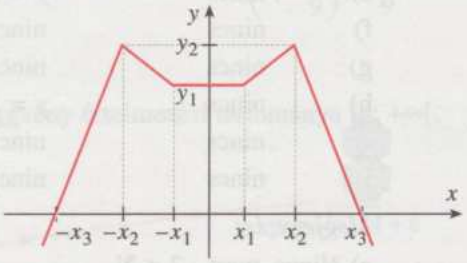
1069. a) Páros nem lehet, mert ha $x > 0$, akkor $-x < x$, így a szigorúan monoton növekedés miatt $f(-x) < f(x)$. Páros függvény esetén azonban $f(-x) = f(x)$.
Páratlan lehet, például az $x \mapsto x$ függvény ilyen.

b) Páros lehet, például az $x \mapsto |x| + 1$ ilyen.
Páratlan nem lehet, mert ha $x > 0$, akkor a páratlan függvény definíciója miatt $f(x) = -f(-x)$. Az f függvény mindenhol pozitív, ez pedig ellentmond a fenti egyenletnek.

c) Páros függvény grafikonja az y tengelyre tengelyesen szimmetrikus, páratlan függvény grafikonja pedig az origóra középpontosan szimmetrikus. Azt kell meggondolni, hogy mind páros, mind páratlan függvény esetén, ha az $x \neq 0$ helyen a függvénynek szélsőértéke van, akkor szükségszerű, hogy a $-x$ helyen is szélsőértéke legyen. Páros függvénynek lehet az $x = 0$ helyen is szélsőértéke, így akárhány szélsőértéke lehet. Páratlan függvénynek az $x = 0$ helyen sosincs szélsőértéke, így csak páros számú szélsőértéke lehet.

d) Van, például az $x \mapsto 0$ függvény ilyen.

1070. A páros függvények grafikonja az y tengelyre szimmetrikus, ezért a harmadik és a negyedik ábra páros függvénnyé nem egészíthető ki.
Az első egy lehetséges kiegészítése:

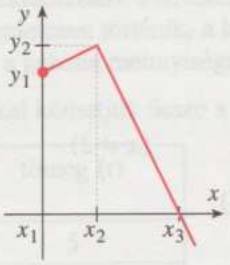


Többféle kiegészítés is lehetséges.

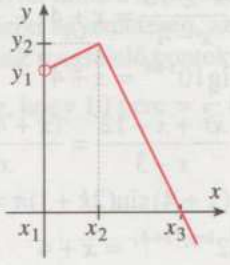
A második csak egyféleképpen egészíthető ki páros függvénnyé, úgy, hogy a függvény nemnegatív x értékekhez tartozó grafikonját tükrözzük az y tengelyre.

A páratlan függvények középpontosan szimmetrikusak az origóra, így szükséges, hogy a 0-ban vett függvényérték 0 legyen.
A második páratlanná való kiegészíthetősége attól függ, hogy a 0-hoz rendelve van már függvényérték, vagy sem. Ez az ábra alapján lehet igaz is és hamis is (lásd következő oldal).

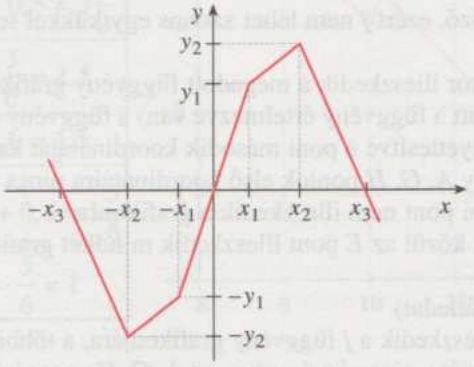
Nem lehet.



Lehet.



A negyedik 0-ban nem 0, tehát nem egészíthető ki páratlan függvénnyé. A harmadik meglévő része nem szimmetrikus az origóra, tehát az sem egészíthető ki.
Az első egy lehetséges kiegészítése:



1071. Az egyenes arányosság képe egy origón átmenő egyenes (de persze nem az y tengely), amely pozitív arányossági tényező (a) esetén az I. és III., negatív a esetén a II. és IV. síknegyedben fut. (Ha $a = 0$, akkor az x tengely a kép.) A fordított arányosság képe egy hiperbola, amelynek szárai pozitív arányossági tényező (b) esetén az I. és III., negatív b esetén a II. és IV. síknegyedben haladnak. (A $b = 0$ eset definíció szerint nem fordulhat elő.) Ezért, ha a két arányossági tényező azonos előjelű ($ab > 0$), akkor két metszéspontja van a grafikonoknak; ha viszont ellentétes előjelűek e tényezők (vagy akár $a = 0$, tehát összefoglalóan $ab \le 0$), akkor nincs metszéspont. Ha vannak, akkor azok helyei az $ax = \frac{b}{x}$ egyenlet gyökei: $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Az ezekhez tartozó értékek: $y = \pm\sqrt{ab}$. (Ha mindkét arányossági tényező pozitív, akkor az azonos előjelű helyek és értékek tartoznak össze; ha mindkettő negatív, akkor az ellentétesek.)

1072. $f\colon]-\infty;\ 0] \to \mathbf{R};\quad x \mapsto \sqrt{-x};$

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad x \mapsto (x+1)^2;$

$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad x \mapsto (x-3)^2;$

$i\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad x \mapsto -x^2 + 9;$

$j\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\quad x \mapsto -2x + 2.$

1073. $\dfrac{x^2-16}{x-4} = x+4 \qquad (x \neq 4)$

$\lg 10^{x+4} = x+4$

$\dfrac{x^2+x-12}{x-3} = \dfrac{(x+4)(x-3)}{x-3} = x+4 \qquad (x \neq 3)$

$(x+4)\sin(2k+1)\pi = 0 \qquad (k \in \mathbf{Z})$

$2^{\log_2(x+4)} = x+4 \qquad$ (itt $x \in \mathbf{N}$)

f, h, k azonosak (értelmezési tartományuk és a hozzárendelési szabály is megegyezik). g, i értelmezési tartománya nem egyezik meg a többi függvény értelmezési tartományával.

A j függvény értékkészlete csak a 0-t tartalmazza, a többi függvény értékkészlete ettől különböző, ezért j nem lehet azonos egyikükkel sem.

1074. Egy pont akkor illeszkedik a megadott függvény grafikonjára, ha a pont első koordinátáját (ha itt a függvény értelmezve van) a függvény hozzárendelési szabályában x helyébe helyettesítve a pont második koordinátáját kapjuk.

Az f függvény A, G, H pontok első koordinátáira nincs értelmezve, az E pont kivételével a többi pont nem illeszkedik a grafikonra.

A felsoroltak közül az E pont illeszkedik mindkét grafikonra.

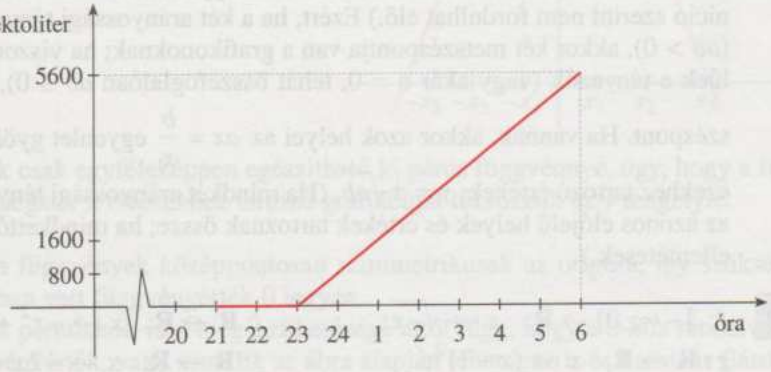
1075. (Lásd 1074. feladat)

Az A pont illeszkedik a j függvény grafikonjára, a többi adott pont első koordinátájánál a j függvény nincs értelmezve; az A, G, H pont első koordinátájának értékére a k függvény nincs értelmezve; csak az E pont illeszkedik a k függvény grafikonjára.

Tehát a felsorolt pontok között nincs olyan pont, amely mindkét megadott függvény grafikonjára egyszerre illeszkedne.

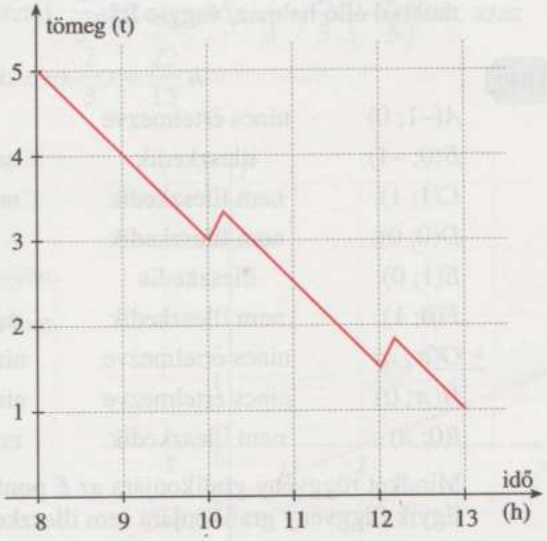
B, C, D, F, G, H, I a két megadott függvény közül egyik grafikonjára sem illeszkedik.

1076.



1077. Készítsünk értéktáblázatot a nevezetes időpontokban. Mivel mind a kiengedés, mind a betöltés egyenletesen történik, a kiszámolt értékek között egyenletesen, azaz lineárisan változik a gabona mennyisége, így az értékpároknak megfelelő pontokat egyenes szakaszokkal köthetjük össze a rajzon. (Fontos még, hogy 10 perc $= \frac{1}{6}$ óra.)

időpont (h)	tömeg (t)
8	5
9	$5-1=4$
10	$4-1=3$
$10^{\underline{10}}$	$3-\frac{1}{6}+0{,}5=3\frac{1}{3}$
11	$3\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=2{,}5$
12	$2{,}5-1=1{,}5$
$12^{\underline{10}}$	$1{,}5-\frac{1}{6}+0{,}5=1\frac{5}{6}$
13	$1\frac{5}{6}-\frac{5}{6}=1$



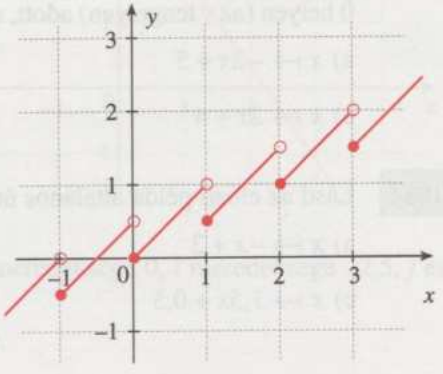
1078. a) egyenes arányosság *h*, *i*

b) fordított arányosság *l*, *p*

c) elsőfokú: *f*, *h*, *i*

Megjegyzés: $i(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}-4=\frac{(x+4)(x-3)}{x-3}-4=x+4-4=x;\quad x\neq 3$

1079. Például: $x \mapsto \frac{x+\{x\}}{2}$.



1080. Keressük a függvényt $f(x) = 2x + a$ alakban!
Ekkor $f(f(x)) = 2(2x + a) + a = 4x + 2a + a = 4x + 3a$, vagyis $a = -1$ esetén a kívánt alakú. Tehát a keresett lineáris függvény: $f(x) = 2x - 1$.

1081. Mivel $[x] = x - \{x\}$, ezért $3x - 3[x] = 3\{x\}$, így az $x \mapsto 3x - 3[x]$ függvény értékkészlete $[0; 3[$ halmaz (ha az értelmezési tartomány a lehető legbővebb, valós számokból álló halmaz, vagyis **R**).

1082.

	h	i
$A(-1; 0)$	nincs értelmezve	illeszkedik
$B(0; -1)$	illeszkedik	nem illeszkedik
$C(1; 1)$	nem illeszkedik	nem illeszkedik
$D(0; 0)$	nem illeszkedik	illeszkedik
$E(1; 0)$	illeszkedik	illeszkedik
$F(0; 1)$	nem illeszkedik	nem illeszkedik
$G(\pi; \pi)$	nincs értelmezve	nincs értelmezve
$H(\pi; 0)$	nincs értelmezve	nincs értelmezve
$I(0; \pi)$	nem illeszkedik	nem illeszkedik

Mindkét függvény grafikonjára az E pont illeszkedik.
Egyik függvény grafikonjára sem illeszkedő pontok: C, F, G, H, I.

1083. Általában, ha egy lineáris függvény grafikonjának ismerjük két pontját: $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor a függvény meredeksége a pontok második és első koordinátái különbségének a hányadosa $\left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right)$, az ordinátatengellyel való metszete pedig úgy számolható, hogy ezzel a meredekséggel bármely pont ordinátájából „visszalépegetünk" a 0 helyig $\left(a_2 - a_1 \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - a_1}\right)$. Persze, ha az egyik pont eleve a 0 helyen (az y tengelyen) adott, akkor egyszerűen ennek ordinátája a tengelymetszet.

a) $x \mapsto -2x + 5$ b) $x \mapsto x + 5$

c) $x \mapsto 3x + 4$ d) $x \mapsto \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$

1084. Lásd az előző példa általános útmutatóját.

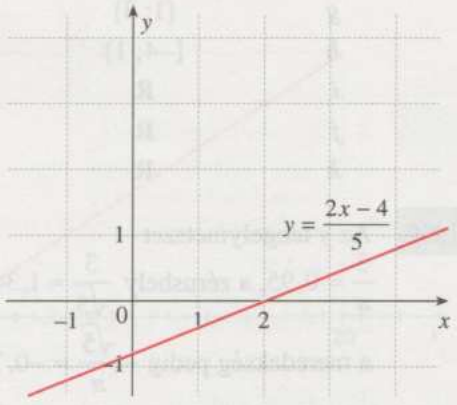
a) $x \mapsto -x + 3$ b) $x \mapsto 3x - 1$

c) $x \mapsto 1{,}5x + 0{,}5$ d) $x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

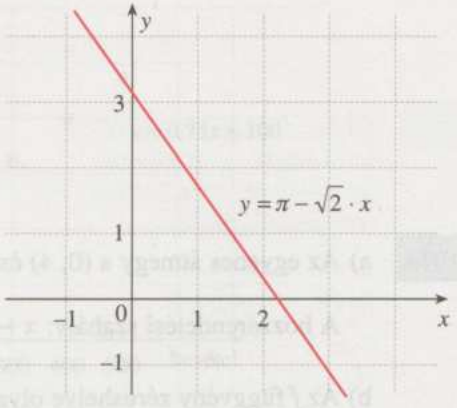
1085. a) Az $x \mapsto m \cdot x + b$ hozzárendeléssel megadott elsőfokú függvény grafikonjának meredeksége m, és az y tengelyt b-ben metszi a grafikonja. A hozzárendelési szabály tehát: $x \mapsto 3x + 2$.

b) $x \mapsto \frac{2}{3}x + b$. Mivel a $P\left(-\frac{1}{5}; \frac{4}{3}\right)$ pont illeszkedik a függvény grafikonjára (azaz a $-\frac{1}{5}$-höz rendelt függvényérték $\frac{4}{3}$-dal egyenlő): $\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + b$, azaz $b = \frac{22}{15}$. A hozzárendelés tehát: $x \mapsto \frac{2}{3}x + \frac{22}{15}$.

1086. Az ordinátatengelyt az $f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 4}{5} = -\frac{4}{5}$ pontban metszi. A $\frac{2x - 4}{5} = 0$ egyenletből az abszcisszatengellyel való metszéspontot kapjuk meg: $x = 2$.



1087. Az ordinátatengely-metszet π,
a zérushely $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2{,}22$,
a meredekség pedig $-\sqrt{2}$.



1088. a) f meredeksége 3, g meredeksége –1, h meredeksége 0, i meredeksége –2,5, j és k meredeksége egyaránt –1.

b) A konstans függvény grafikonja a h jelű.

c) Az egyenes arányosságot leíró hozzárendelés $x \mapsto c \cdot x$, ezért a függvény grafikonja (vagy a meghosszabbítása) átmegy az origón. Tehát egyenes arányosság: f, g, j.

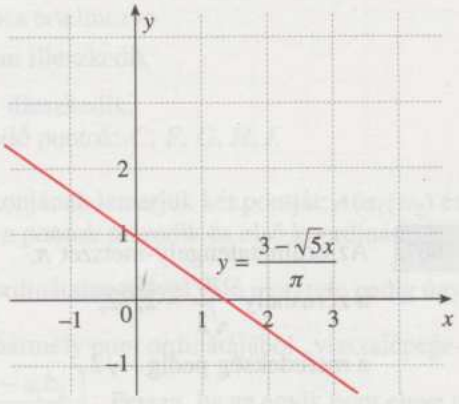
d) Elsőfokú függvény értelmezési tartománya **R**!
Elsőfokúak azok a lineáris függvények, amelyeknek a meredeksége nem 0, azaz: i, j, k.

e) Mindegyik függvény képe egyenes vagy szakasz tehát mind lineáris függvény.

f)

	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
f	$[-1; 1]$	$[-3; 3]$
g	$[1; 3]$	$[-3; -1]$
h	$[-4; 1]$	$\{-1\}$
i	**R**	**R**
j	**R**	**R**
k	**R**	**R**

1089. Az y tengelymetszet $\frac{3}{\pi} \approx 0{,}95$, a zérushely $\frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1{,}34$, a meredekség pedig $-\frac{\sqrt{5}}{\pi} \approx -0{,}71$.



1090. a) Az egyenes átmegy a (0; 4) és a (3; 6) ponton, ezért meredeksége $\frac{6-4}{3-0} = \frac{2}{3}$.

A hozzárendelési szabály: $x \mapsto \frac{2}{3}x + 4$.

b) Az f függvény zérushelye olyan a valós szám, amelyre $f(a) = \frac{2}{3}a + 4 = 0$.

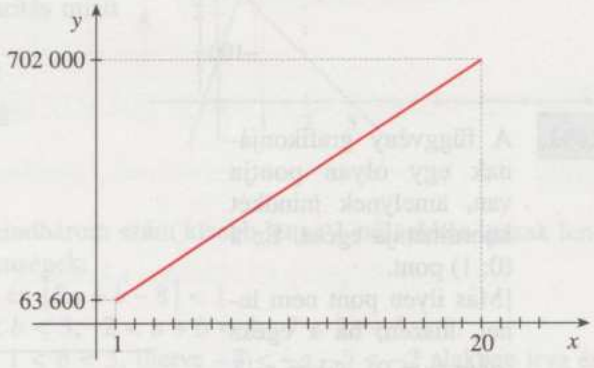
Ebből $a = -6$, ez tehát a függvény zérushelye.

c) Az egyenes meredekségével, tehát $\frac{2}{3}$-dal egyenlő a tört értéke.

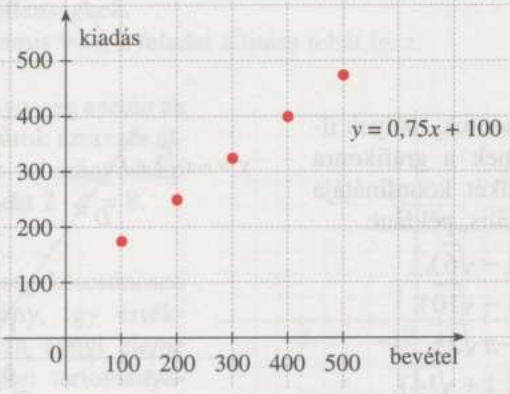
1091. Keressük a hozzárendelési szabályt $x \mapsto ax + b$ alakban. A párhuzamos grafikonok meredeksége azonos, így $a = 4$.
A $4 \cdot 2 + b = 3$ egyenletből pedig $b = -5$,
vagyis a hozzárendelési szabály $x \mapsto 4x - 5$.

1092. Keressük a hozzárendelési szabályt $x \mapsto ax + b$ alakban. A merőleges grafikonok meredekségének szorzata -1, így $a = -0{,}5$.
A $-0{,}5 \cdot 1 + b = 4$ egyenletből $b = 4{,}5$,
vagyis a hozzárendelési szabály $x \mapsto -0{,}5x + 4{,}5$.

1093. Ha a víz dl-ben mért térfogatát jelöljük x-szel, akkor a keresett hozzárendelési szabály:
$x \mapsto 33\,600x + 30\,000$,
és az [1; 20] intervallumon kell ábrázolnunk e függvényt.



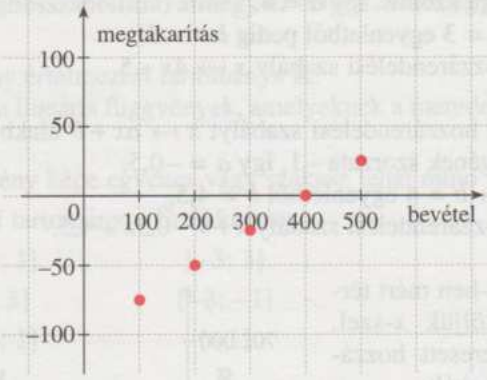
1094. a) Ábrázoljuk a kiadást a bevétel függvényében! A hozzárendelés szabályát az ábráról leolvashatjuk.



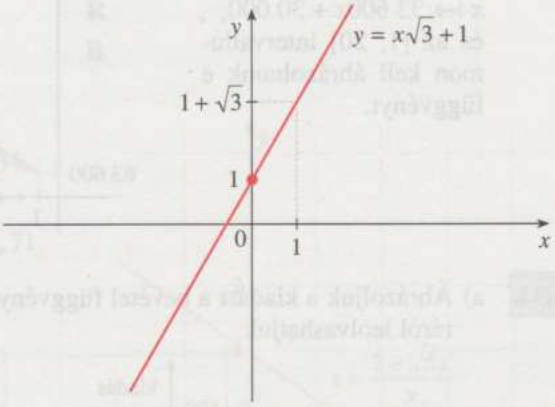
b) A megtakarítást a bevétel – kiadás szabály szerint határozhatjuk meg.

bevétel	100	200	300	400	500
megtakarítás	−75	−50	−25	0	25

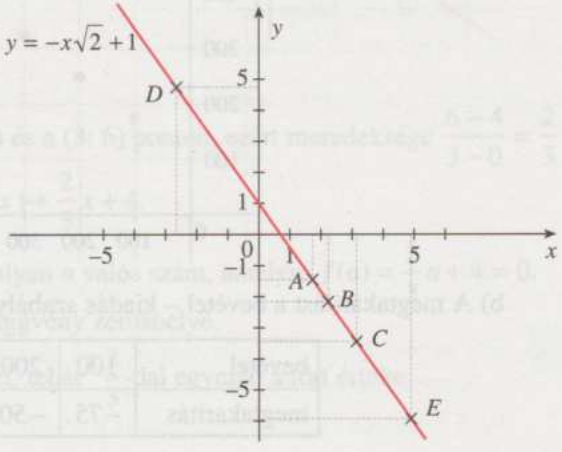
c) A hozzárendelés: $x \mapsto 0{,}25x - 100$.



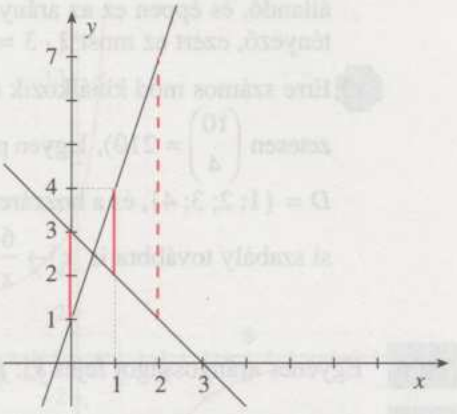
1095. A függvény grafikonjának egy olyan pontja van, amelynek mindkét koordinátája egész. Ez a (0; 1) pont.
[Más ilyen pont nem lehet, hiszen, ha x egész szám ($x \neq 0$), akkor $x\sqrt{3}$ nem egész szám $\Rightarrow$ $x\sqrt{3}+1 \notin \mathbf{Z}$].



1096. Olyan pontok, melyek illeszkednek a grafikonra és mindkét koordinátája irracionális, például:
$A(\sqrt{3};\ 1-\sqrt{6})$,
$B(\sqrt{5};\ 1-\sqrt{10})$,
$C(\pi;\ 1-\pi\sqrt{2})$,
$D(-\sqrt{7};\ 1+\sqrt{14})$,
$E(2\sqrt{6};\ 1-4\sqrt{3})$.
(x minden olyan irracionális szám lehet, amely a $\sqrt{2}$-nek nem egész számú többszöröse.)



1097. Ha $|f(0)-2|<1$, akkor $-1<f(0)-2<1$, vagyis $1<f(0)<3$. Ha $|f(1)-3|<1$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $2<f(1)<4$. Bármely lineáris függvény képe ezen két szakasz egy-egy pontján halad át. Legmeredekebben akkor, ha $f(0)$ legkisebb és $f(1)$ legnagyobb lehetséges értékén át halad; legkisebb meredekséggel akkor, ha $f(0)$ legnagyobb és $f(1)$ legkisebb értékén át (l. ábra). Ezért ezen alsó és felső határokat keresztben összekötve a kapott egyenesekről leolvasható, hogy $f(2)$ lehetséges értéke a linearitás miatt $1<f(2)<7$. Átalakítva:
$-7<f(2)-8<-1$, de ekkor
$1<|f(2)-8|<7$, nem pedig
$|f(2)-8|<1$.

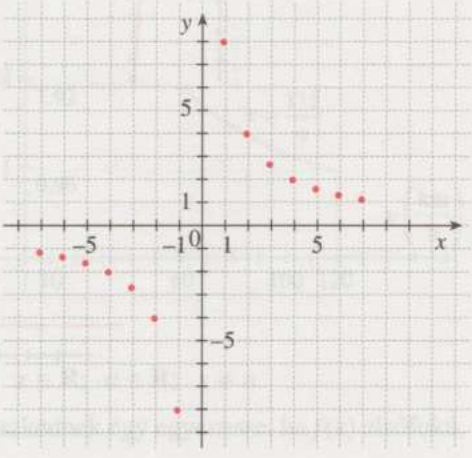


Másik megoldás:
Ha az állítással ellentétben mindhárom szám kisebb lenne 1-nél, akkor igazak lennének a következő egyenlőtlenségek:
$|b-2|<1$, $|a+b-3|<1$, és $|2a+b-8|<1$.
Abszolútérték jele nélkül: $1<b<3$, $2<a+b<4$, $7<2a+b<9$.
Az első két egyenlőtlenséget $1<b<3$, illetve $-4<-a-b<-2$ alakban írva és összeadva kapjuk: $-3<-a<1$.
Ehhez hozzáadva a harmadik, $7<2a+b<9$ egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy $4<a+b<10$, ami nyilvánvalóan ellentmond a feltételek között szereplő $2<a+b<4$ egyenlőtlenségnek.
Indirekt feltevésünk hamis volt, a feladat állítása tehát igaz.

1098. a) Mivel fordított arányosság esetén az összetartozó értékpárok szorzata állandó, és éppen ez az arányossági tényező, ezért ez most $2\cdot 4=8$.

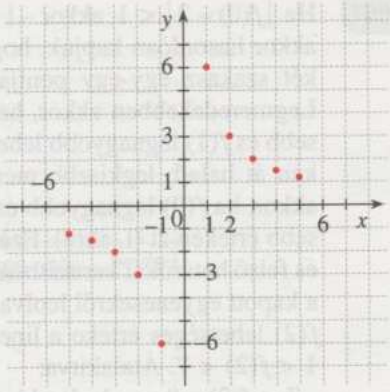
b) Lásd a grafikont!

c) A fordított arányosság kölcsönösen egyértelmű függvény, így értékkészletének pontosan annyi eleme van, mint értelmezési tartományának, vagyis 14.



1099. a) Mivel fordított arányosság esetén az összetartozó értékpárok szorzata állandó, és éppen ez az arányossági tényező, ezért ez most $2 \cdot 3 = 6$.

b)



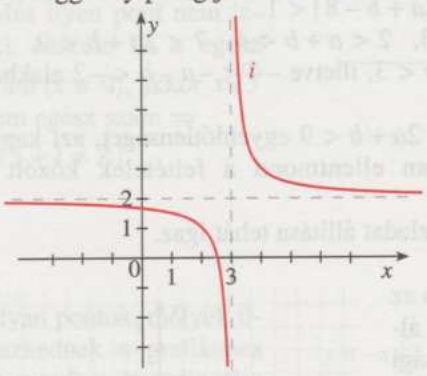
c) Erre számos mód kínálkozik (nevezetesen $\binom{10}{4} = 210$), legyen például $D = \{1; 2; 3; 4\}$, és a hozzárendelési szabály továbbra is $x \mapsto \frac{6}{x}$.

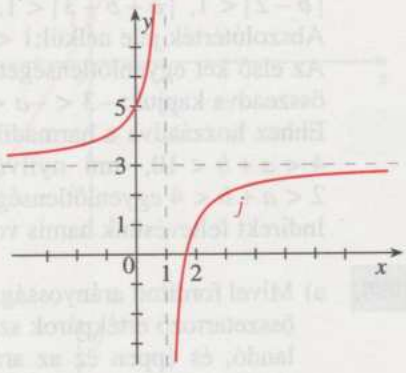
1100. Egyenes arányosságot fejez ki: $f(x)$, $g(x)$; fordított arányosságot: $h(x)$.

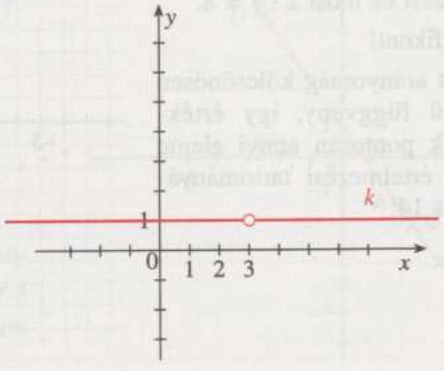
1101. Az i függvény azonnal ábrázolható, j esetében kis átalakítás célszerű:

$$\frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = 3 - \frac{2}{x-1}.$$

A k függvény pedig jól láthatóan a konstans 1 (de $x \neq 3$).



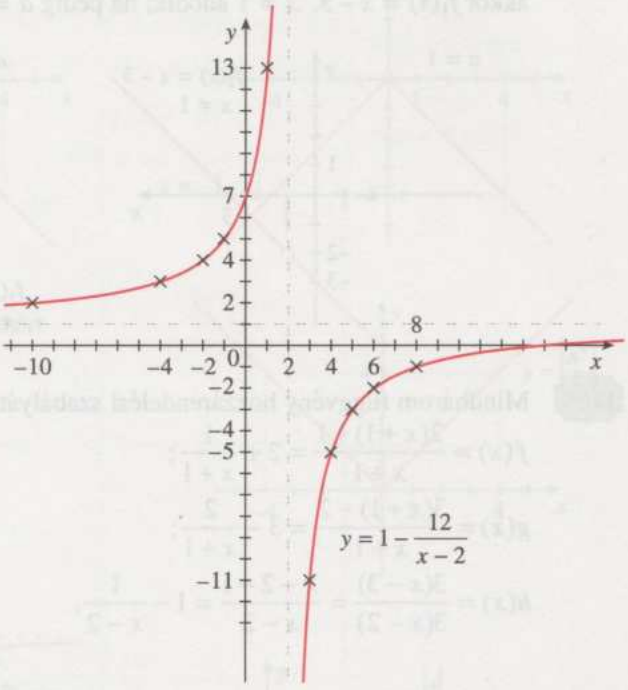




1102. $x \mapsto \dfrac{x-14}{x-2} = \dfrac{x-2-12}{x-2} = 1 - \dfrac{12}{x-2}$ $\quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$

A grafikon azon pontjainak koordinátái egész számok, melyekre $x-2 \mid 12$ teljesül.
Foglaljuk táblázatba:

$x-2$	x	$\dfrac{x-14}{x-2}$
1	3	−11
2	4	−5
3	5	−3
4	6	−2
6	8	−1
12	14	0
−1	1	13
−2	0	7
−3	−1	5
−4	−2	4
−6	−4	3
−12	−10	2



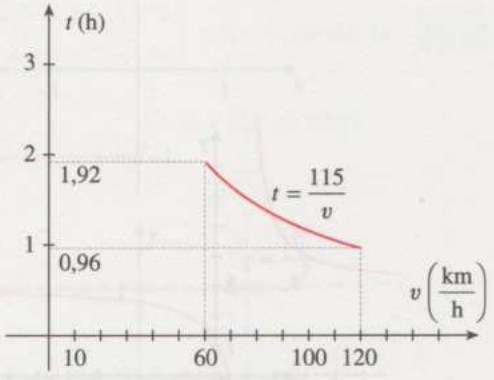
1103. a) Mint az fizikából jól ismert,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{115\ \text{km}}{92\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}25\ \text{h}.$$

b) A [60; 120] intervallumban ábrázolunk.

c) A hozzárendelési szabály:

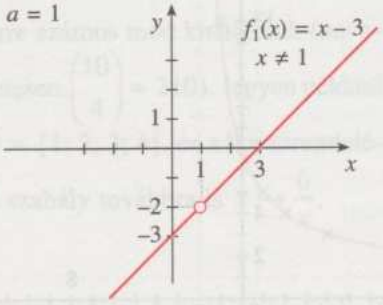
$$v \mapsto \frac{115}{v}.$$

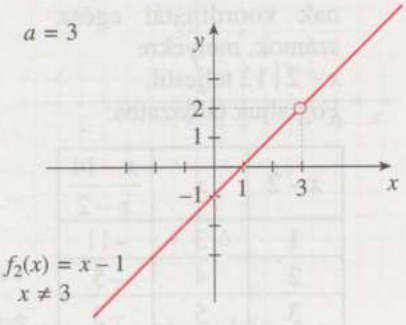


1104. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-a} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-a}$ $\quad x \in \mathbf{R};\ a \in \mathbf{R};\ x \neq a$

függvény grafikonjának pontjai akkor illeszkednek egy egyenesre, ha $f(x)$ elsőfokú,

azaz $\frac{(x-1)(x-3)}{x-a}$ egyszerűsíthető. Ez $a = 1$ és $a = 3$ esetén lehetséges. Ha $a = 1$, akkor $f_1(x) = x - 3$, $x \neq 1$ adódik; ha pedig $a = 3$, akkor $f_2(x) = x - 1$, $x \neq 3$.



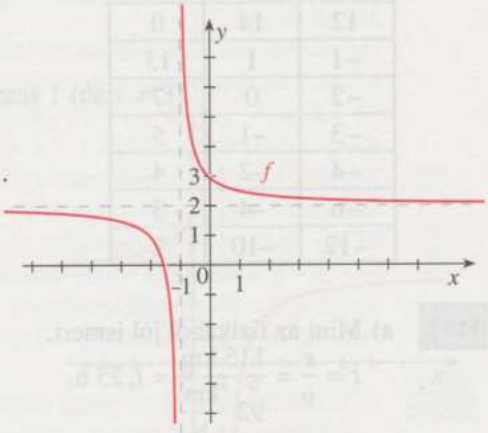


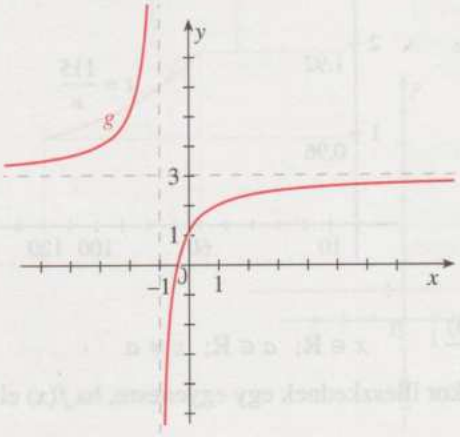
1105. Mindhárom függvény hozzárendelési szabályát célszerű átalakítani:

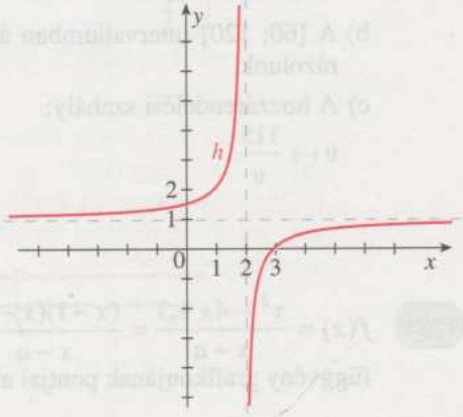
$$f(x) = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1};$$

$$g(x) = \frac{3(x+1)-2}{x+1} = 3 - \frac{2}{x+1};$$

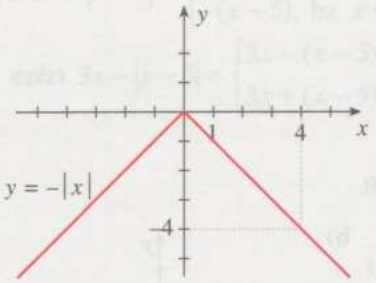
$$h(x) = \frac{3(x-3)}{3(x-2)} = \frac{x-2-1}{x-2} = 1 - \frac{1}{x-2}.$$



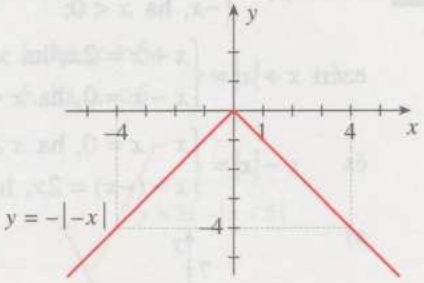




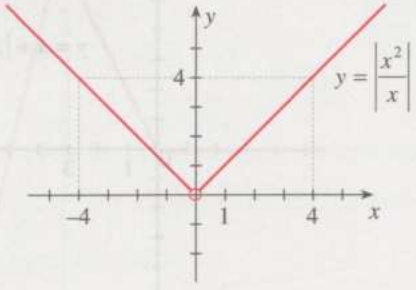
1106. a)



b) Mivel $|-x| = |x|$, ezért $-|-x| = -|x|$

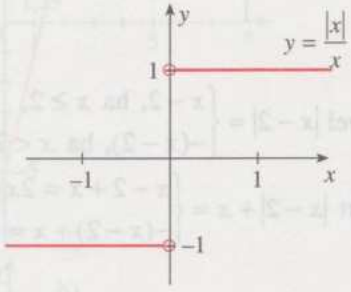


1107. Mivel $\left|\frac{x^2}{x}\right| = |x|$, ha $x \neq 0$, ezért a grafikon a következő:

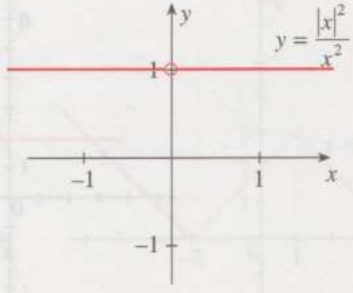


1108. a) Mivel $|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0, \\ -x, \text{ ha } x < 0; \end{cases}$

ezért $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ ha } x > 0, \\ -1, \text{ ha } x < 0. \end{cases}$



b) Mivel $|x|^2 = x^2$, a grafikon:

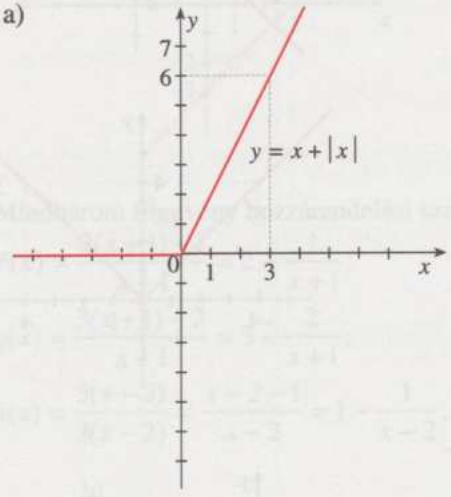


1109. Mivel $|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0, \\ -x, \text{ ha } x < 0; \end{cases}$

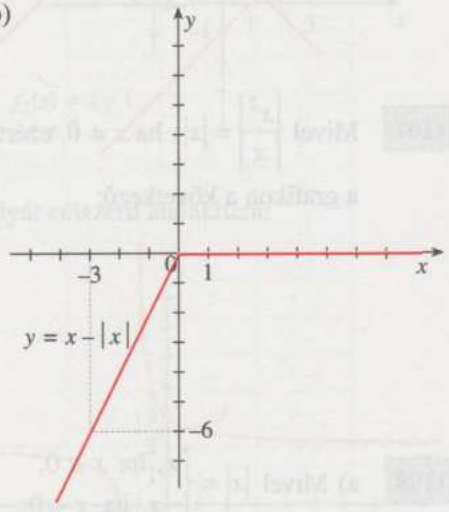
ezért $x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, \text{ ha } x \geq 0, \\ x - x = 0, \text{ ha } x < 0; \end{cases}$

és $x - |x| = \begin{cases} x - x = 0, \text{ ha } x \geq 0, \\ x - (-x) = 2x, \text{ ha } x < 0. \end{cases}$

a)

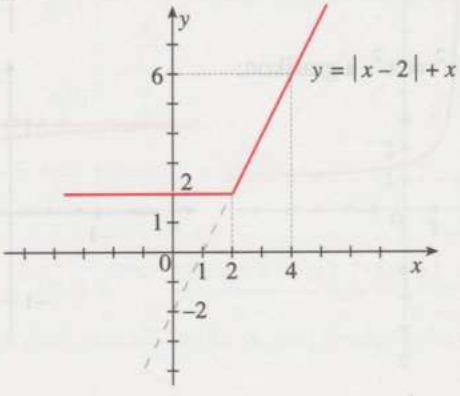


b)



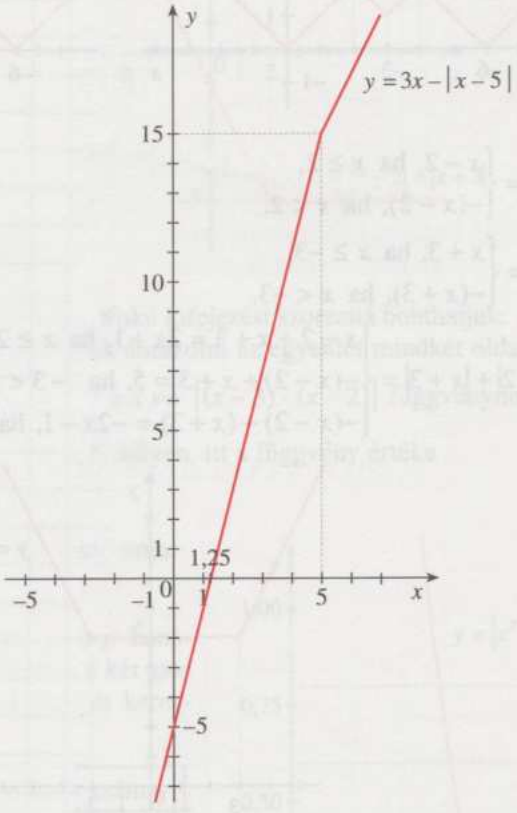
1110. a) Mivel $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ ha } x \geq 2, \\ -(x-2), \text{ ha } x < 2; \end{cases}$

ezért $|x-2| + x = \begin{cases} x-2+x = 2x-2, \text{ ha } x \geq 2, \\ -(x-2)+x = 2, \text{ ha } x < 2. \end{cases}$

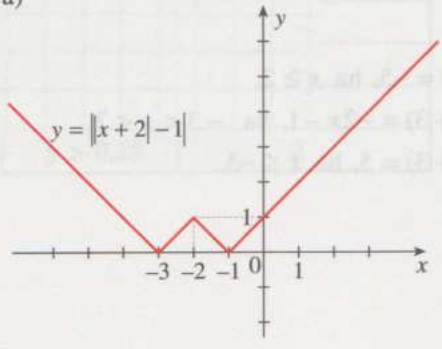


b) Mivel $|x-5| = \begin{cases} x-5, \text{ ha } x \geq 5, \\ -(x-5), \text{ ha } x < 5, \end{cases}$

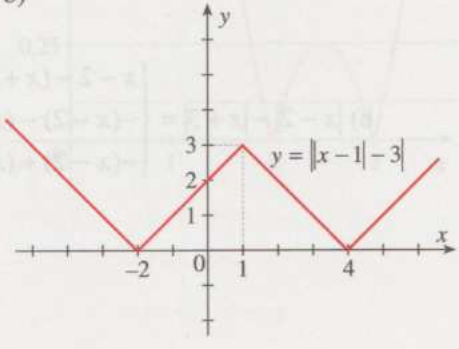
ezért $3x-|x-5| = \begin{cases} 3x-(x-5) = 2x+5, \text{ ha } x \geq 5, \\ 3x+(x-5) = 4x-5, \text{ ha } x < 5. \end{cases}$



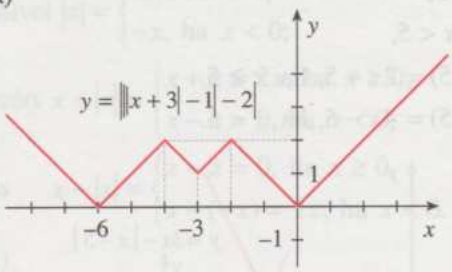
1111. a)



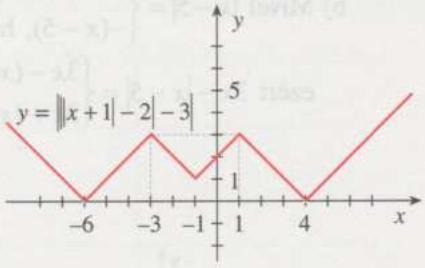
b)



1112. a)



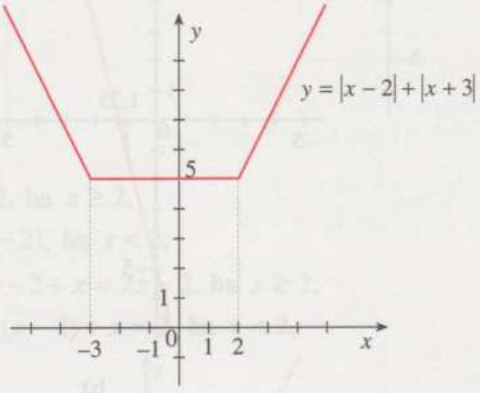
b)



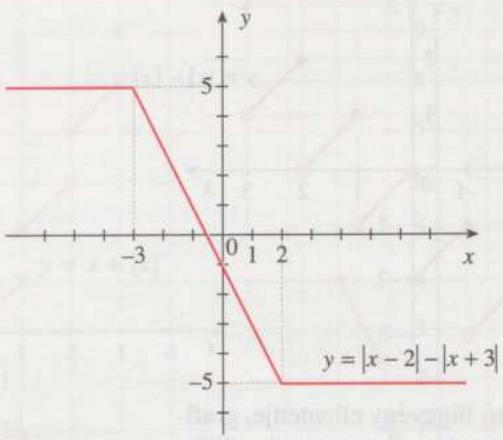
1113. $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ ha } x \geq 2, \\ -(x-2), \text{ ha } x < 2. \end{cases}$

$|x+3| = \begin{cases} x+3, \text{ ha } x \geq -3, \\ -(x+3), \text{ ha } x < -3. \end{cases}$

a) $|x-2|+|x+3| = \begin{cases} x-2+x+3 = 2x+1, \text{ ha } x \geq 2, \\ -(x-2)+x+3 = 5, \text{ ha } -3 < x < 2, \\ -(x-2)-(x+3) = -2x-1, \text{ ha } x \leq -3. \end{cases}$

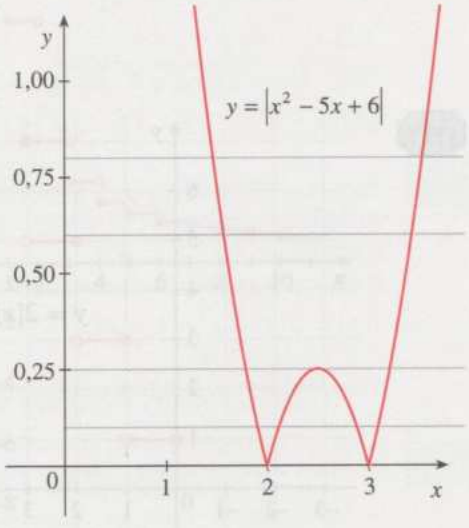


b) $|x-2|-|x+3| = \begin{cases} x-2-(x+3) = -5, \text{ ha } x \geq 2, \\ -(x-2)-(x+3) = -2x-1, \text{ ha } -3 < x < 2, \\ -(x-2)+(x+3) = 5, \text{ ha } x \leq -3. \end{cases}$



1114. Az egyenletben szereplő másodfokú kifejezést szorzattá bonthatjuk: $|(x-3)(x-2)| = p$. Szeretnénk ábrázolni az egyenlet mindkét oldalát. A bal oldal zérushelyei $x_1 = 3$ és $x_2 = 2$. Az $x \mapsto |(x-3)\cdot(x-2)|$ függvénynek lokális maximuma lesz az $x = \frac{3+2}{2} = 2{,}5$ helyen, itt a függvény értéke $|(2{,}5-3)(2{,}5-2)| = 0{,}25$.

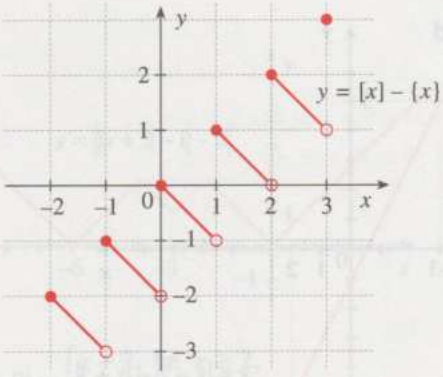
Az $x \mapsto |(x-3)\cdot(x-2)|$ grafikonja:



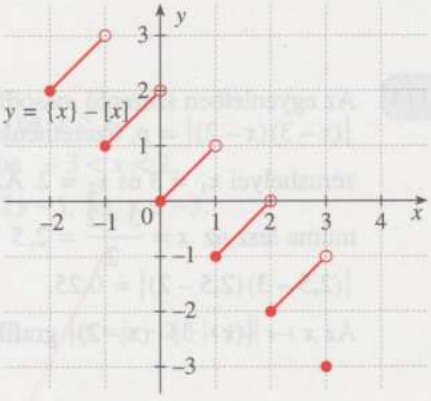
Az egyenlet bal oldalát $x \mapsto p$ konstans függvényként ábrázolva a két grafikon közös pontjainak számát keressük.

p értéke	megoldások száma
$p < 0$	0
$p = 0$	2
$0 < p < 0{,}25$	4
$p = 0{,}25$	3
$p > 0{,}25$	2

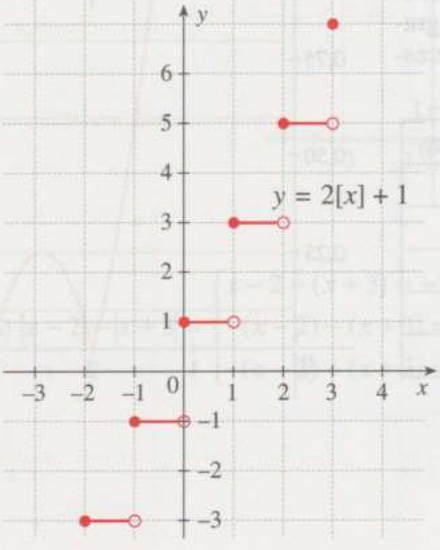
1115.



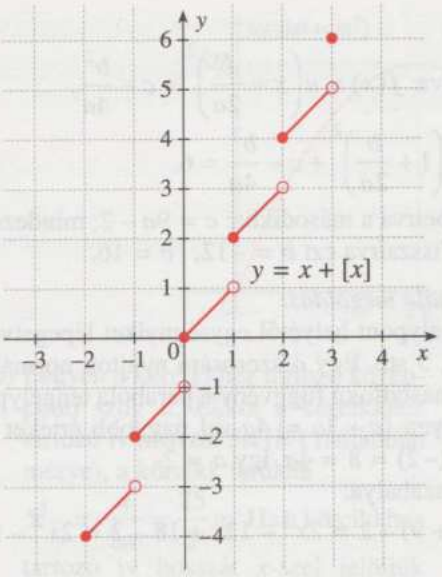
1116. Ez az előző függvény ellentettje, grafikonjaik az x tengelyre egymás tükörképei.

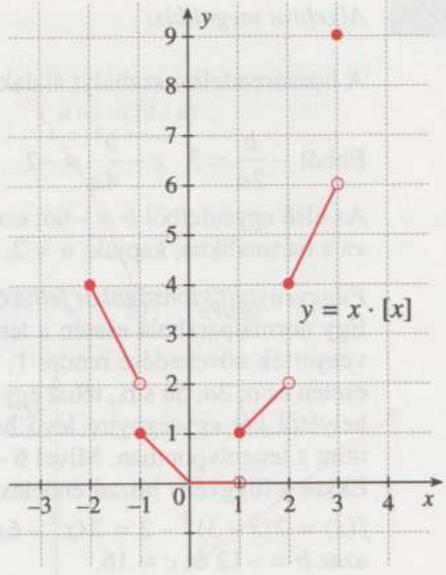


1117.

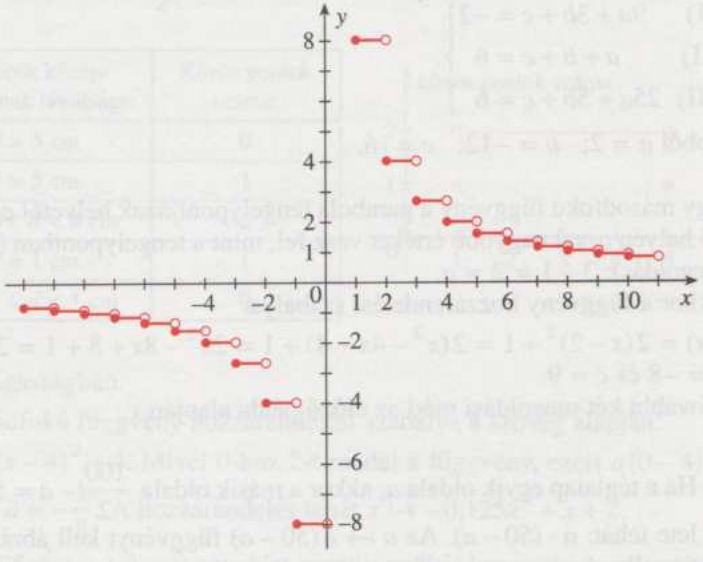


1118.





1119. Az $x \mapsto \frac{8}{[x]}$ értelmezhető, ha $[x] \neq 0$, azaz $x \in \mathbf{R} \setminus [0; 1[$.



1120. *Algebrai megoldás:*

A hozzárendelési szabályt átalakítva: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Ebből $-\frac{b}{2a} = 3$, $c - \frac{b^2}{4a} = -2$, $a\left(1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 6$.

Az első egyenletből $b = -6a$; ezt beírva a másodikba: $c = 9a - 2$; mindezeket beírva a harmadikba, kapjuk: $a = 2$. Visszaírva ezt $b = -12$, $c = 16$.

Függvénytulajdonságokat felhasználó megoldás:
Egy normálparabola esetén a tengelypont helyétől egységnyiket lépegetve a függvényérték növekedése rendre 1, 3, 5 stb. Egy a-szorosára nyújtott normálparabola esetén ez a, $3a$, $5a$ stb., tehát egy másodfokú függvény a parabola tengelypontjának helyétől két egységnyire lévő helyen $(a + 3a =)\ 4a$-val nagyobb értéket vesz fel, mint a tengelypontban. Mivel $6 - (-2) = 8 = 4a$, így $a = 2$.
Ekkor a függvény hozzárendelési szabálya:
$f(x) = 2(x-3)^2 - 2 = 2(x^2 - 6x + 9) - 2 = 2x^2 - 12x + 18 - 2 = 2x^2 - 12x + 16$, azaz $b = -12$ és $c = 16$.

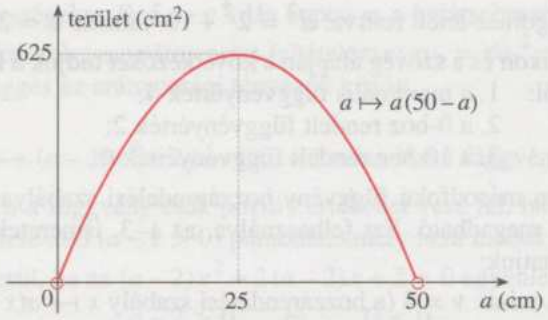
Vegyes megoldás:
A parabola szimmetriája miatt ekkor $f(5) = 6$ is fennáll.
Beírva mindhárom értékpárt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & 9a + 3b + c = -2 \\ \text{(II)} & a + b + c = 6 \\ \text{(III)} & 25a + 5b + c = 6 \end{array}\right\}.$$

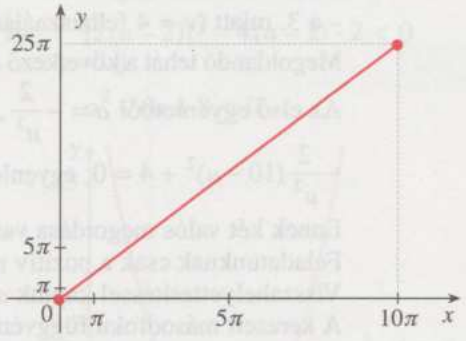
Ebből $a = 2$; $b = -12$; $c = 16$.

1121. Egy másodfokú függvény a parabola tengelypontjának helyétől egy egységnyire lévő helyen a-val nagyobb értéket vesz fel, mint a tengelypontban (l. előző feladat, 2. megoldás): $3 - 1 = 2 = a$.
Ekkor a függvény hozzárendelési szabálya:
$f(x) = 2(x-2)^2 + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) + 1 = 2x^2 - 8x + 8 + 1 = 2x^2 - 8x + 9$, azaz $b = -8$ és $c = 9$.
(További két megoldási mód az előző példa alapján.)

1122. a) Ha a téglalap egyik oldala a, akkor a másik oldala $\frac{100}{2} - a = 50 - a$ cm. A területe tehát: $a \cdot (50 - a)$. Az $a \mapsto a(50 - a)$ függvényt kell ábrázolni a $]0; 50[$ intervallumon.

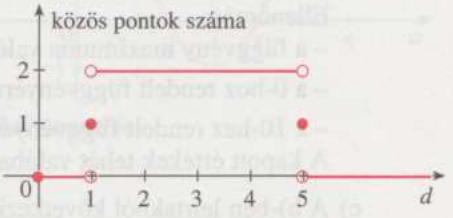


b) Legyen a körcikkhez tartozó középponti szög α. Ekkor a körcikkhez tartozó ív hossza: 5α (α-t radiánban mérve), a körcikk területe $5^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{25}{2}\alpha$. Ha a körcikkhez tartozó ív hosszát x-szel jelöljük ($x = 5\alpha$), akkor a területe $\frac{5}{2}x$. A hozzárendelés: $x \mapsto \frac{5}{2}x$.



c)

A körök középpontjainak távolsága:	Közös pontok száma:
$d > 5$ cm	0
$d = 5$ cm	1
1 cm $< d <$ 5 cm	2
$d = 1$ cm	1
0 cm $\leq d <$ 1 cm	0



1123. a) 2 m magasságban.

b) A másodfokú függvény hozzárendelési szabálya a szöveg alapján: $x \mapsto a(x-4)^2 + 4$. Mivel 0-hoz 2-t rendel a függvény, ezért $a(0-4)^2 + 4 = 2$, amiből $a = -\frac{1}{8}$. A hozzárendelés tehát $x \mapsto -0{,}125x^2 + x + 2$.

c) A $-0{,}125x^2 + x + 2 = 0$ egyenlet pozitív gyökét keressük. A másodfokú egyenletet megoldva a pozitív gyök $\frac{1+\sqrt{2}}{0{,}25} \approx 9{,}66$. Tehát a golyó körülbelül 9,66 m távolságban ért földet.

1124. a) A Pitagorasz-tételt felírva: $d^2 = 2^2 + 10^2$, innen $d = 2\sqrt{26}$ m $\approx 10{,}2$ m.

b) A grafikon és a szöveg alapján a következőket tudjuk a keresett másodfokú függvényről: 1. a maximális függvényérték 4;
2. a 0-hoz rendelt függvényérték 2;
3. a 10-hez rendelt függvényérték 0.

Minden másodfokú függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto a(x-u)^2 + v$ alakban is megadható. Ezt felhasználva, az 1–3. ismeretek alapján a következőket mondhatjuk:

– az 1. miatt: $v = 4$ (a hozzárendelési szabály $x \mapsto a(x-u)^2 + 4$ alakú);

– a 2. miatt ($v = 4$ felhasználásával): $au^2 + 4 = 2$;

– a 3. miatt ($v = 4$ felhasználásával): $a(10-u)^2 + 4 = 0$.

Megoldandó tehát a következő egyenletrendszer: $au^2 = -2 \wedge a(10-u)^2 + 4 = 0$.

Az első egyenletből $a = -\frac{2}{u^2}$, amit a második egyenletbe helyettesítve a $-\frac{2}{u^2}(10-u)^2 + 4 = 0$ egyenlethez jutunk. Rendezve: $u^2 + 20u - 100 = 0$.

Ennek két valós megoldása van: $-10(\sqrt{2}+1) \approx -24{,}142$ és $10(\sqrt{2}-1) \approx 4{,}142$.
Feladatunknak csak a pozitív megoldás felel meg, tehát $u \approx 4{,}142$.
Visszahelyettesítéssel kapjuk a értékét: $a \approx -0{,}117$.
A keresett másodfokú függvény hozzárendelési szabálya tehát így is írható:
$x \mapsto -0{,}117(x-4{,}142)^2 + 4$

Ellenőrzés:
– a függvény maximuma valóban 4 (és ezt kb. 4,142-nél veszi fel);

– a 0-hoz rendelt függvényérték: $-0{,}117 \cdot (-4{,}142)^2 + 4 \approx 2{,}0$;

– a 10-hez rendelt függvényérték: $-0{,}117 \cdot (10-4{,}142)^2 + 4 \approx 0{,}0$.
A kapott értékek tehát valóban megfelelnek.

c) A b)-ben leírtakból következik, hogy a golyó a (4,142; 4) pontban volt a legmagasabban.

1125. Az origón átmenő, az x tengelyre szimmetrikus parabolák olyan másodfokú függvények grafikonjai, melyeknek hozzárendelési szabálya: $x \mapsto ax^2$. A C pont koordinátái $x = 30$, $y = 6$; a C pont rajta van a parabolán, tehát $a \cdot 30^2 = 6$, innen $a = \frac{1}{150}$. A hozzárendelési szabály $x \mapsto \frac{1}{150}x^2$. Értelmezési tartomány: $[-30; 30]$, értékkészlet: $[0; 6]$.

1126. a) Mivel a sebességgel egyenesen arányos a K közegellenállási erő kis sebességek esetén, ezért $K = c \cdot v$, ahol c egy a testtől, illetve a közegtől függő állandó.

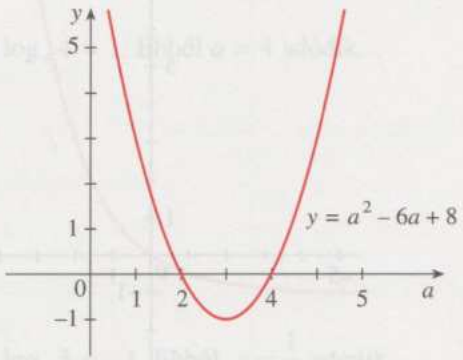
b) Nagyobb sebességekre $K = d \cdot v^2$. Ha éppen v_0 a határsebesség, ahol a kettő illeszkedik, akkor folytonos átmenetet feltételezve: $cv_0 = dv_0^2$, azaz $c = dv_0$ a keresett összefüggés az arányossági tényezők között.

1127. Ha $a \neq 2 \Rightarrow x \mapsto (a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2$ másodfokú függvény.

a) $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén a függvény csak pozitív értékeket vesz fel, ha grafikonja olyan, nyílásával felfelé álló $(a - 2 > 0)$ parabola, amely nem metszi az x tengelyt.
Ez akkor teljesül, ha az $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ egyenletben

$$\begin{array}{ccc} a-2>0 & \text{és} & D<0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a>2 & \text{és} & [2(a-2)]^2 - 4(a-2)\cdot 2 < 0 \\ & & \Downarrow \\ & & a^2 - 6a + 8 < 0 \end{array}$$

Az ábrából leolvasható, hogy ez akkor teljesül, ha $2 < a < 4$.
$2 < a < 4$ esetén lesz $\forall x \in \mathbf{R}$-re minden függvényérték pozitív.



b) $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén a függvény csak negatív értékeket vesz fel, ha grafikonja olyan nyílásával lefelé álló $(a - 2 < 0)$ parabola, melynek nincs zérushelye $(2 < a < 4)$. E két feltétel egyszerre nem teljesül, tehát nincs olyan a valós paraméter, melyre a keresett függvény csak negatív értéket venne fel.

1128. a) $f\colon x \mapsto x^{-1}$

$g\colon x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$

$h\colon x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$

b) $10 = 10\,000^{\frac{1}{4}}$, tehát a P pont a h grafikonjára illeszkedik.
$\frac{1}{25} = 25^{-1}$, tehát a Q pont az f grafikonjára illeszkedik.

c) Egyiknek sincs minimuma, hiszen mindegyiknek az értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ennek pedig nincs legkisebb eleme.

1129.

a) hamis (ez a grafikonon is „látszik", de tudjuk is, hogy a harmadfokú polinomfüggvényeknek nincs abszolút szélsőértéke)

b) hamis (van ugyan lokális minimuma a függvénynek, de azt negatív számnál veszi fel)

c) hamis (a megadott információkból ez semmiképpen nem következik)

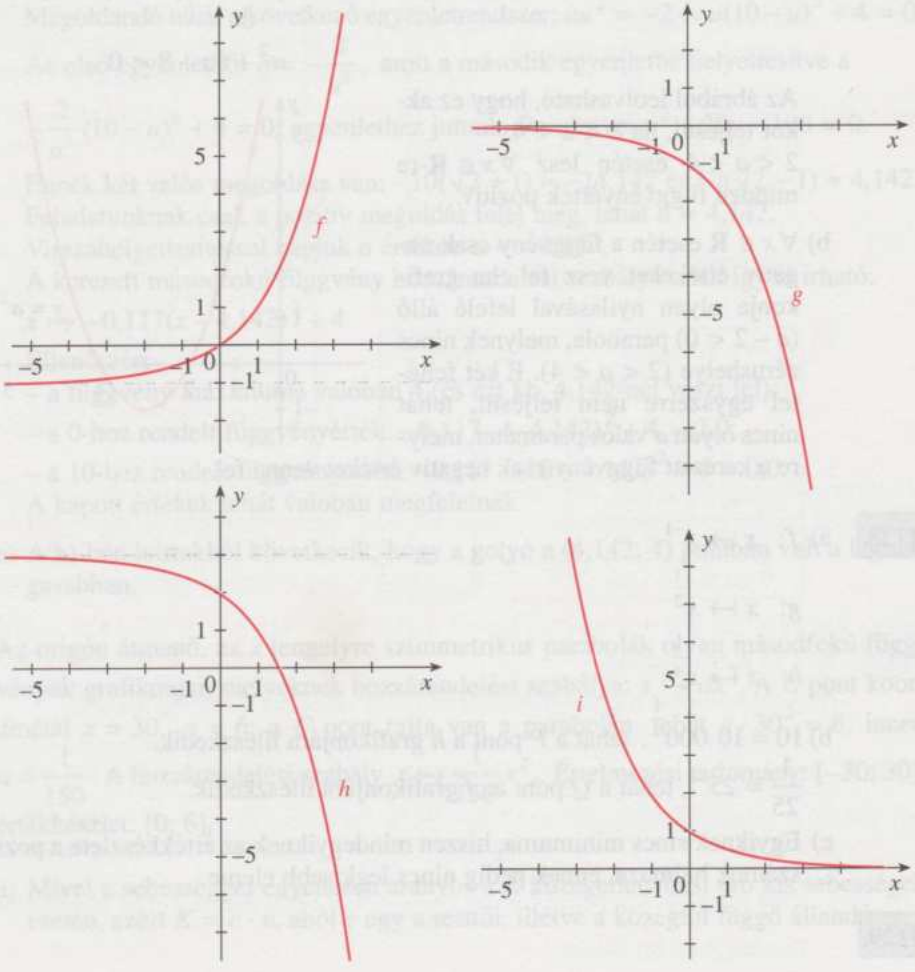
d) igaz

e) hamis (hiszen a harmadfokú függvény értékkészletében minden valós szám benne van)

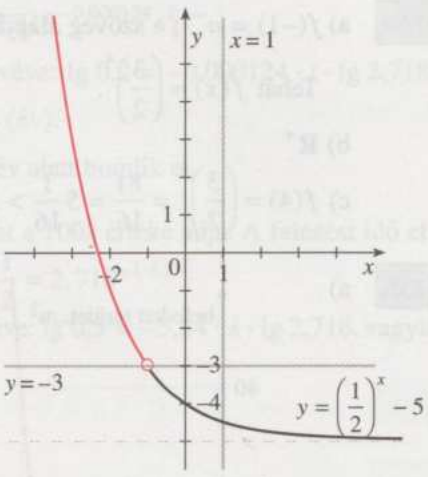
f) hamis (a 0,96 eleme az első intervallumnak, de 4,7649 nem eleme a másodiknak)

g) hamis (hiszen d) igaz)

1130.



1131. A piros színnel jelölt pontok teljesítik a megadott feltételeket.



1132. a) A megadott ábráról leolvasható, hogy $\log_a 4 = 1$. Ebből $a = 4$ adódik.
Tehát $g(x) = \log_4 x$, ha $x \in \mathbf{R}^+$.

b) $g\left(2^5\right) = \log_4 2^5 = \log_4 4^{2,5} = 2,5$

$g\left(\frac{1}{4^3}\right) = \log_4\left(\frac{1}{4^3}\right) = \log_4 4^{-3} = -3$

$g\left(16^{-3}\right) = \log_4 16^{-3} = \log_4 4^{-6} = -6$

1133. a) A megadott ábráról leolvasható, hogy $\log_a 3 = -1$. Ebből $a = \frac{1}{3}$ adódik.
Tehát $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, ha $x \in \mathbf{R}^+$.

b) $h\left(9^5\right) = \log_{\frac{1}{3}} 9^5 = \log_{\frac{1}{3}} 3^{10} = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} = -10$

$h\left(\frac{1}{27^3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27^3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3^9}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^9 = 9$

$h\left(3^{1,8}\right) = \log_{\frac{1}{3}} 3^{1,8} = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1,8} = -1,8$

c) $\log_{\frac{1}{3}} b = -4$, ami a logaritmus definíciója szerint azt jelenti, hogy

$b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81.$

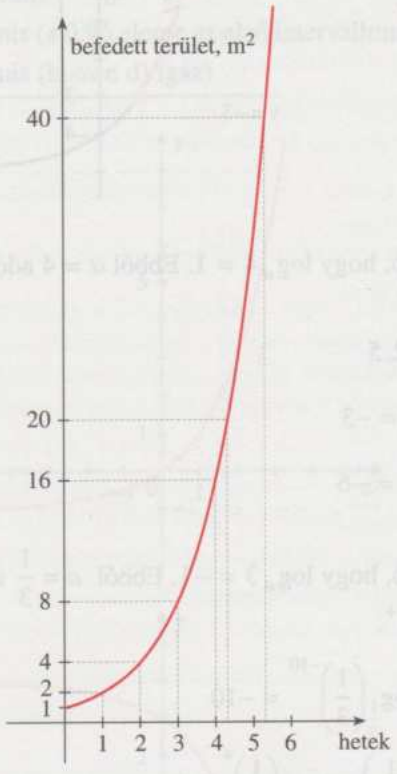
1134. a) $f(-1) = a^{-1}$; a szöveg alapján $a^{-1} = \frac{2}{3}$, azaz $a = \frac{3}{2}$.

Tehát $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

b) $\mathbf{R}^+$

c) $f(4) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} > 5$; a sejtés tehát nem igaz.

1135. a)



b) 16 m²-t pontosan a 4. hét végére fed be. 20 m²-t a 4. és az 5. hét között ér el, 40 m²-t a 20 m²-es időpont után pontosan 1 héttel ér el a lefedettség.

1136. a) A szöveg szerint $\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot 2{,}718^{-\lambda \cdot 5570}$, amiből $\frac{1}{2} = 2{,}718^{-\lambda \cdot 5570}$.

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 0{,}5 = -5570 \cdot \lambda \cdot \lg 2{,}718$, vagyis

$$\lambda = \frac{-\lg 0{,}5}{5570 \cdot \lg 2{,}718} = 1{,}24 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{\text{év}}\right).$$

b) $N_1 = N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}000124}$, amiből $\frac{N_1}{N_0} = 2{,}718^{-0{,}000124} = 0{,}99988$, azaz a radioaktív szénatomoknak 0,012%-a bomlik el évente.

c) A szöveg szerint $\frac{N_t}{N_0} = 0,2$, ezért $0,2 = 2,718^{-0,000124 \cdot t}$.

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 0,2 = -0,000124 \cdot t \cdot \lg 2,718$, vagyis $t = \frac{-\lg 0,2}{0,000124 \cdot \lg 2,718} = 12\,980$ (év).

A radioaktív szénatomok 80%-a 12 980 év alatt bomlik el.

1137. a) A szöveg szerint a kérdezett százaléklábat a 100λ értéke adja. A felezési idő eltételével: $\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot 2,718^{-\lambda \cdot 5,24}$, vagyis $\frac{1}{2} = 2,718^{-\lambda \cdot 5,24}$.

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 0,5 = -5,24 \cdot \lambda \cdot \lg 2,718$, vagyis $\lambda = \frac{-\lg 0,5}{5,24 \cdot \lg 2,718} = 0,1323 \left(\frac{1}{\text{év}}\right)$.

$N_1 = N_0 \cdot 2,718^{-0,1323}$

$\frac{N_1}{N_0} = 0,8761$.

A radioaktív atomok 12,4%-a bomlik el évente.

b) $N_3 = N_0 \cdot 2,718^{-0,1323 \cdot 3}$, amiből $\frac{N_3}{N_0} = 2,718^{-0,3969} = 0,6724$, azaz a radioaktív kobaltatomoknak 32,76%-a bomlik el 3 év alatt.

c) A szöveg szerint $\frac{N_t}{N_0} = 0,8$, ezért $0,8 = 2,718^{-0,1323 \cdot t}$.

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 0,8 = -0,1323 \cdot t \cdot \lg 2,718$, vagyis $t = \frac{-\lg 0,8}{0,1323 \cdot \lg 2,718} = 1,69$ (év).

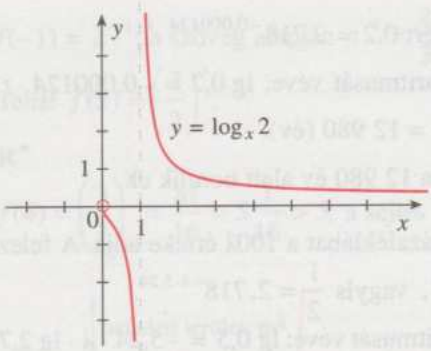
A radioaktív kobaltatomok 20%-a 1,69 év alatt bomlik el.

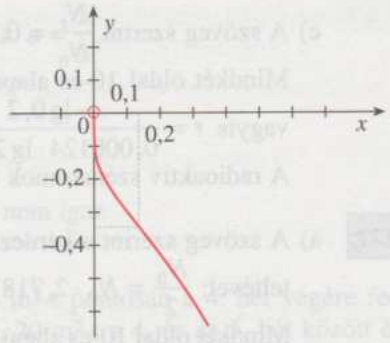
1138. A szöveg szerint $A_t = 3 \cdot A_0$, ezért $3 \cdot A_0 = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{5570}}$. Ebből $3 = 2^{\frac{t}{5570}}$.

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\lg 3 = \frac{t}{5570} \cdot \lg 2$, vagyis $t = \frac{5570 \cdot \lg 3}{\lg 2} = 8830$ (év). A régészeti lelet 9000 évesnek mondható.

(Több ok miatt sem lehet a radiokarbon módszerrel 100 év pontossággal mérni.)

1139. Átalakítás után: $\log_x 2 = \frac{\lg 2}{\lg x}$. Fontos, hogy a $]0; 1[$ szakaszon nem végig konkáv, hanem $\frac{1}{e^2} \approx 0,135$-ben inflexiója van (addig konvex, kinagyítottuk).





1140. Az $x \mapsto -2\cos x$; $x \in \mathbf{R}$ és $x \mapsto -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $x \in \mathbf{R}$ függvényeké.

1141. a) g: $x \mapsto -1 + \cos 2x$

h: $x \mapsto -1 + \cos x$

i: $x \mapsto -1 + \cos\frac{x}{2}$

b) Igaz a sejtés.

Keressük a $\cos 2x = \cos x$ egyenlet néhány megoldását és ellenőrizzük, hogy ezek megoldásai-e pl. a $\cos x = \cos\frac{x}{2}$ egyenletnek.

$P(0; 0)$; $Q\left(\frac{4\pi}{3}; -\frac{3}{2}\right)$; $R\left(-\frac{4\pi}{3}; -\frac{3}{2}\right)$; $S(4\pi; 0)$; stb.

1142. a) A tangensfüggvényről van szó.

b) Mivel $f(x) = \operatorname{tg} x$ és a megadott $0 < x < 0{,}5\pi$ intervallumban $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, ezért a feladat kijelentése így is írható: $(\operatorname{tg} x \cdot \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$, vagy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ez pedig igaz.

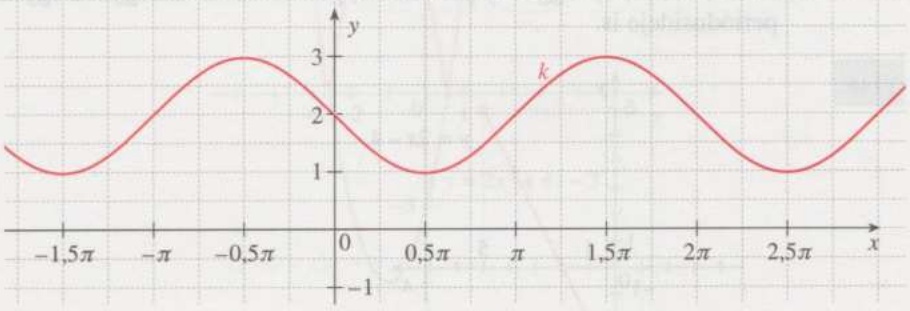
1143. a) A kotangensfüggvény grafikonja látható az ábrán.

b) Mivel $f(x) = \operatorname{ctg} x$, ezért a feladatban megadott kifejezés így is írható:

$$4 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot 0 = 4 + \sqrt{3}.$$

1144.* a) f: $x \mapsto 2 + \sin x$
g: $x \mapsto 2\sin x$
h: $x \mapsto \sin 2x$

b) $f(x) - g(x) = 2 + \sin x - 2\sin x = 2 - \sin x$, tehát a következő függvényről van szó:
k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 - \sin x$
A k függvény grafikonja:



– értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
– értékkészlete az [1; 3] zárt intervallum (tehát korlátos függvény);
– a függvény periodikus, periódusa 2π;
– zérushelye nincs;
– nem páros és nem páratlan;
– maximumhelyek: $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, a maximum értéke 3;
– minimumhelyek: $\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, a minimum értéke 1.

1145. a) Hamis. Például $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.

b) Hamis. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

c) Igaz. A szinusz definíciójából adódik.

d) Igaz. A koszinuszfüggvény a $]0; \pi[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

e) Hamis. Például $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{3}$, de $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$.

1146. a) $y(2) = 3\sin(2 \cdot 2) = 3\sin(4) \approx -2{,}27$.

b) $3 = 3\sin(2t)$, amiből $\sin(2t) = 1$. $2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$.

A keresett időpontok tehát: $\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(\approx 0{,}785 + \pi k;\ k \in \mathbf{N})$.

c) A $t \mapsto 3\sin(2t)$ függvény periodikus, periódusa π. Ez egyben egy teljes rezgés periódusideje is.

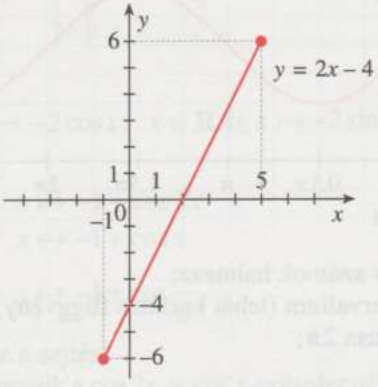
1147. a) $v(2) = 3\cos(0{,}5 \cdot 2) = 3\cos(1) = 1{,}62$.

b) A megadott értékből $\cos(0{,}5t) = -2$ adódik, ami lehetetlen. A rezgőmozgást végző test sebessége nem lehet a megadott értékkel egyenlő.

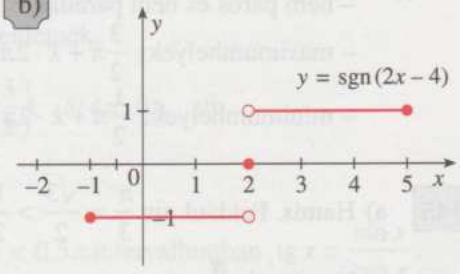
c) A $t \mapsto \cos(0{,}5t)$ függvény periodikus, periódusa 4π. Ez egyben egy teljes rezgés periódusideje is.

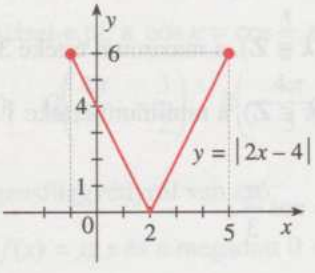
1148.

a)

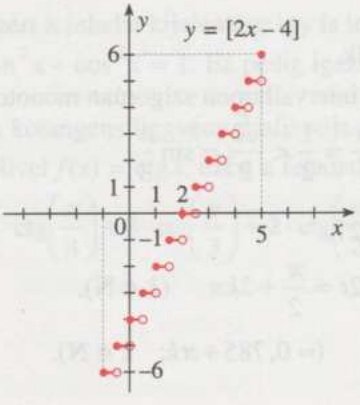


b)

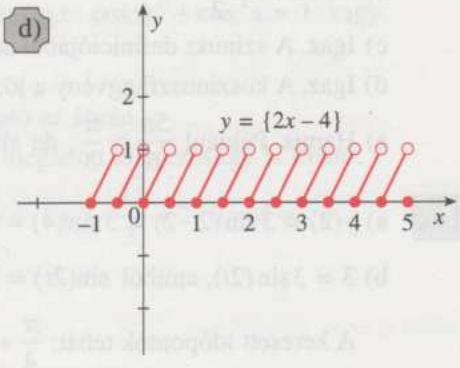




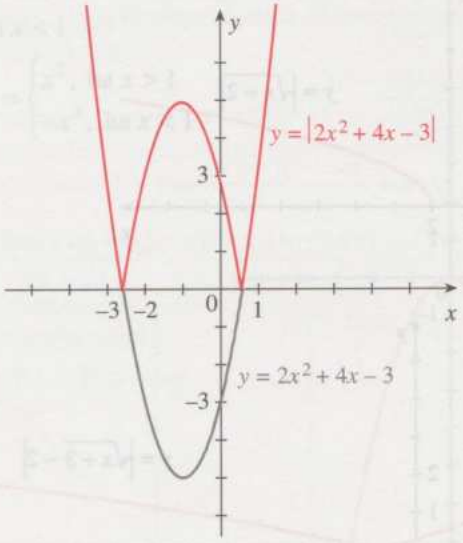
c)



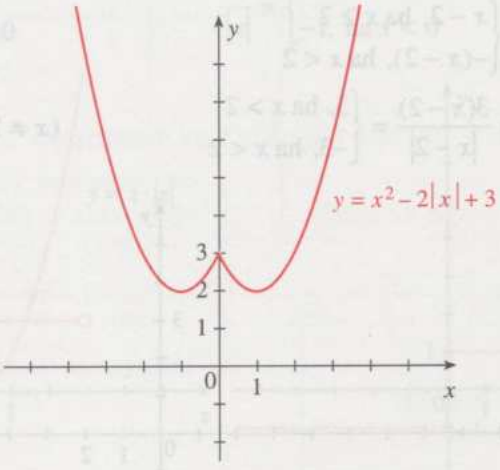
d)



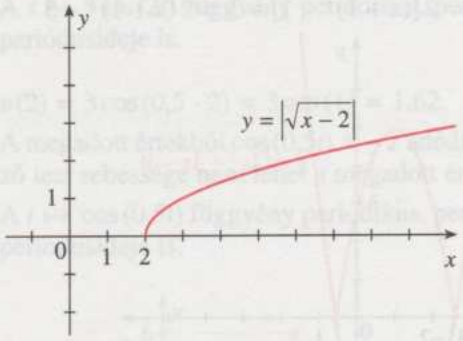
1149. $2x^2+4x-3=2(x^2+2x)-3=2[(x+1)^2-1]-3=2(x+1)^2-5$



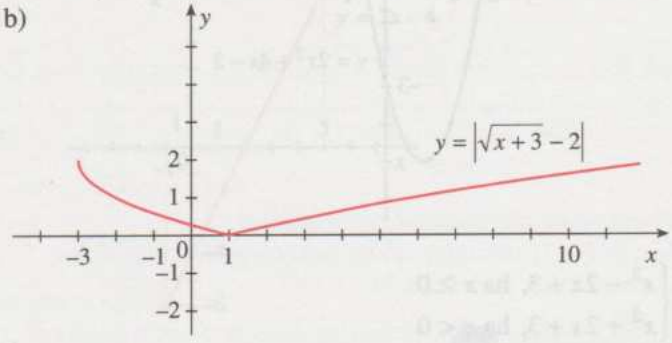
1150. $x^2-2|x|+3=\begin{cases}x^2-2x+3, & \text{ha } x\geq 0\\ x^2+2x+3, & \text{ha } x<0\end{cases}$



1151. a)

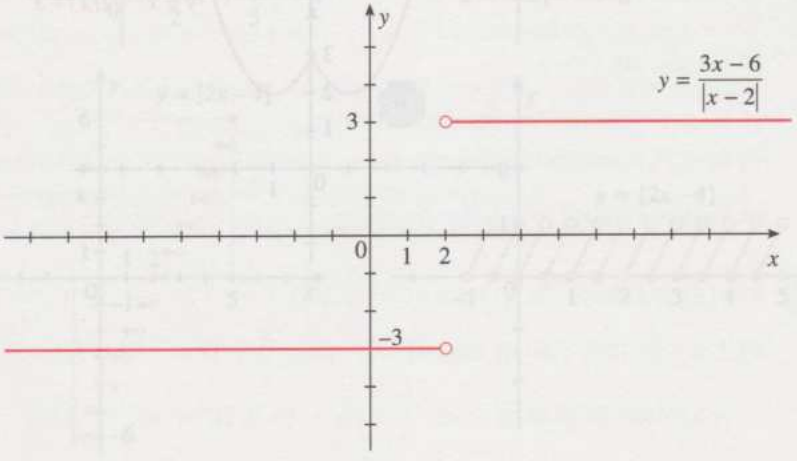


b)



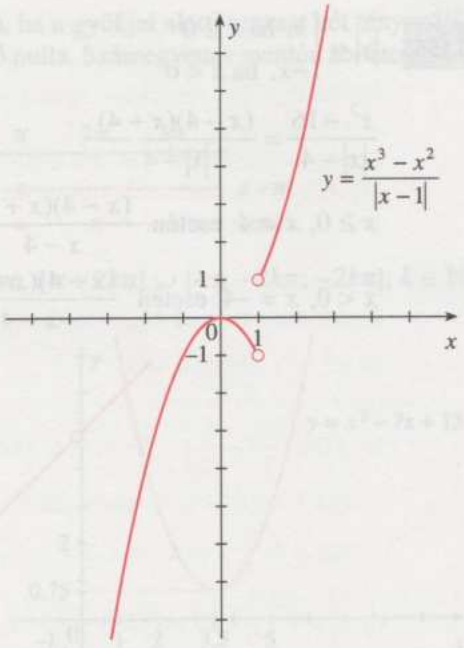
1152. $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ ha } x \geq 2 \\ -(x-2), \text{ ha } x < 2 \end{cases}$

$\dfrac{3x-6}{|x-2|} = \dfrac{3(x-2)}{|x-2|} = \begin{cases} 3, \text{ ha } x > 2 \\ -3, \text{ ha } x < 2 \end{cases}$ $(x \neq 2)$



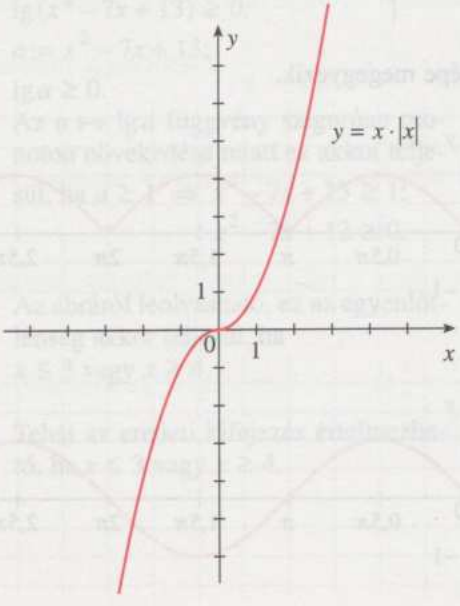
1153. $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ ha } x \geq 1 \\ -(x-1), \text{ ha } x < 1 \end{cases}$

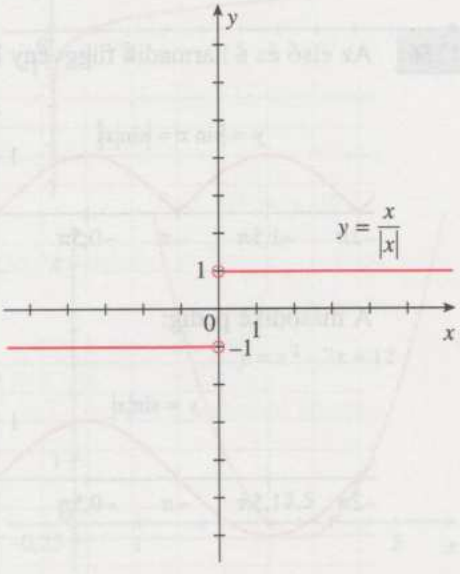
$$\frac{x^3-x^2}{|x-1|} = \frac{x^2(x-1)}{|x-1|} = \begin{cases} x^2, \text{ ha } x > 1 \\ -x^2, \text{ ha } x < 1 \end{cases}$$



1154. $x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, \text{ ha } x \geq 0 \\ -x^2, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, \text{ ha } x > 0 \\ -1, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$



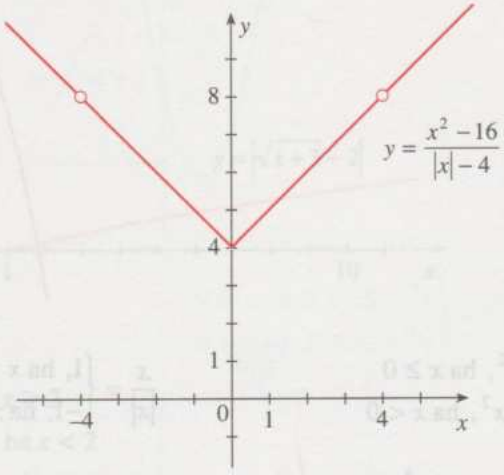


1155. $|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0 \\ -x, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$

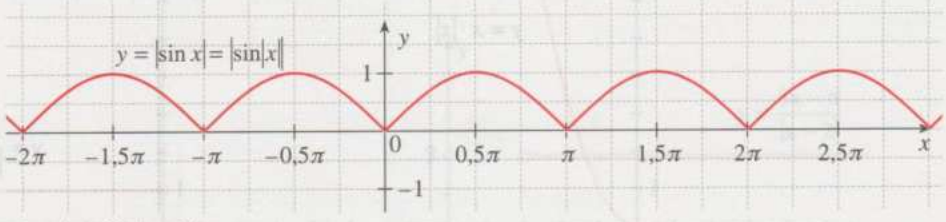
$$\frac{x^2-16}{|x|-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{|x|-4}$$

$x \geq 0$, $x \neq 4$ esetén $\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$

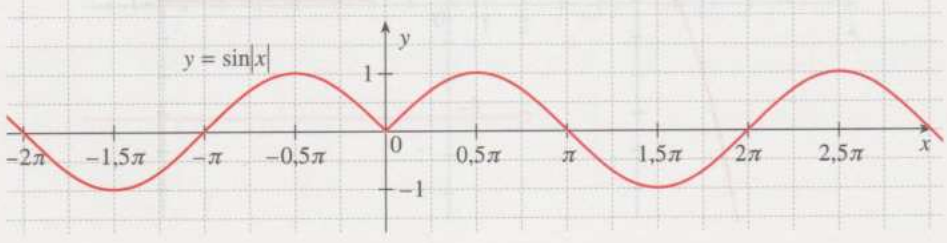
$x < 0$, $x \neq -4$ esetén $\dfrac{(x-4)(x+4)}{-x-4} = \dfrac{(x-4)(x+4)}{-(x+4)} = 4-x$



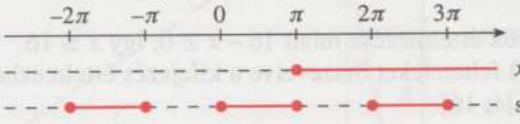
1156. Az első és a harmadik függvény képe megegyezik.



A másodiké pedig:

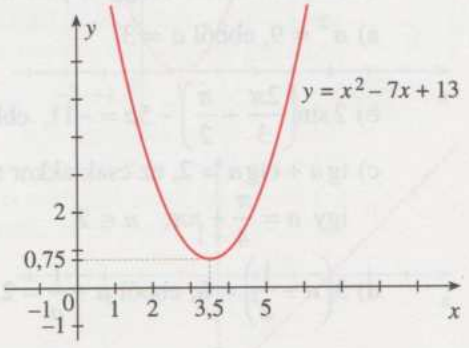


1157. A megadott kifejezés akkor értelmezhető, ha a gyökjel alatti szorzat két tényezőjének előjele azonos, vagy az egyik tényező nulla. Számegyenes mentén ábrázolva leolvashatjuk, hol történik meg ez.

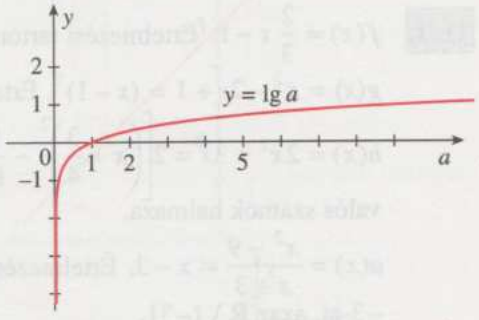


A keresett halmaz tehát: $\{\pi\} \cup [2\pi + 2k\pi; 3\pi + 2k\pi] \cup [-\pi - 2k\pi; -2k\pi]$; $k \in \mathbf{N}$.

1158. Mivel csak pozitív számoknak van logaritmusa (a log definíciója miatt):
$x^2 - 7x + 13 > 0$, ez $\forall x \in \mathbf{R}$ számra teljesül.

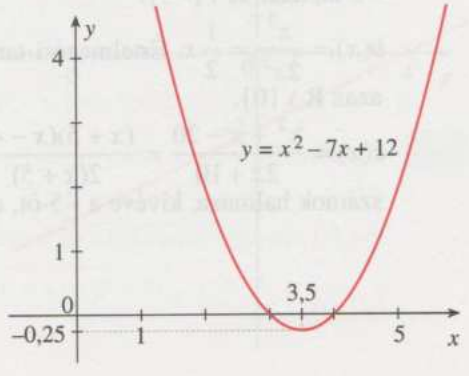


A négyzetgyök miatt
$\lg(x^2 - 7x + 13) \geq 0$.
$a := x^2 - 7x + 13$;
$\lg a \geq 0$.
Az $a \mapsto \lg a$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt ez akkor teljesül, ha $a \geq 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 13 \geq 1$;
$x^2 - 7x + 12 \geq 0$.



Az ábráról leolvasható, ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha
$x \leq 3$ vagy $x \geq 4$.

Tehát az eredeti kifejezés értelmezhető, ha $x \leq 3$ vagy $x \geq 4$.



1159. Mivel csak pozitív számoknak van logartimusuk (a log defincíciója miatt), ezért $x-3>0$, így $x>3$. (1)

Mivel egy tört nevezője nem lehet 0, ezért $\lg(x-3)\neq 0$, így $10^0\neq x-3$, azaz $x\neq 4$. (2)

A négyzetgyök értelmezése miatt $16-x\geq 0$, így $x\leq 16$. (3)

(1), (2) és (3) feltételeket összevetve a kifejezés értelmezhető, ha $x\in\,]3;\,4[\,\cup\,]4;\,16]$.

1160. A P pont akkor és csak akkor van rajta az f függvény grafikonján, ha a P első koordinátájához tartozó függvényérték a P második koordinátájával egyenlő.

a) $a^2=9$, ebből $a=3$.

b) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-5a=-11$, ebből $\frac{2\sin\frac{7\pi}{6}+11}{5}=a$, így $a=2$.

c) $\operatorname{tg}a+\operatorname{ctg}a=2$, ez csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}a=1$,

így $a=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

d) $3\left(a+\frac{1}{a}\right)=6$, ebből $a+\frac{1}{a}=2$, csak akkor teljesül, ha $a=1$.

1161. $f(x)=\frac{2}{3}x-1$. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

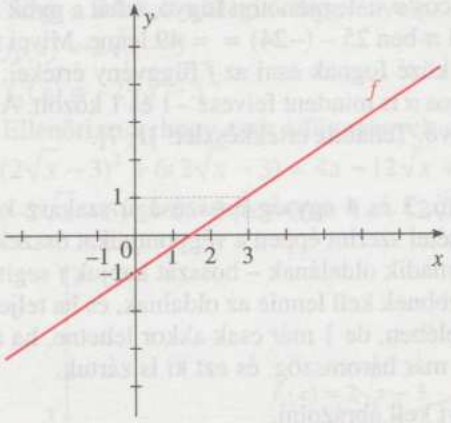
$g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

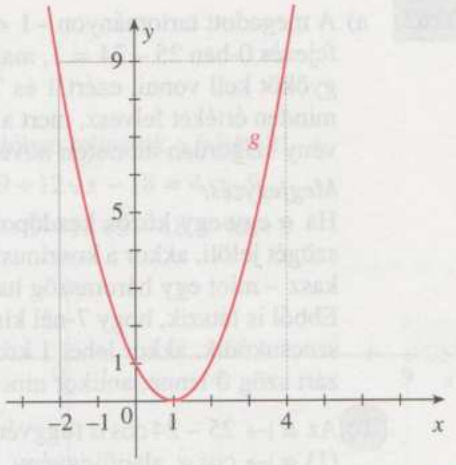
$h(x)=2x^2+3x=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

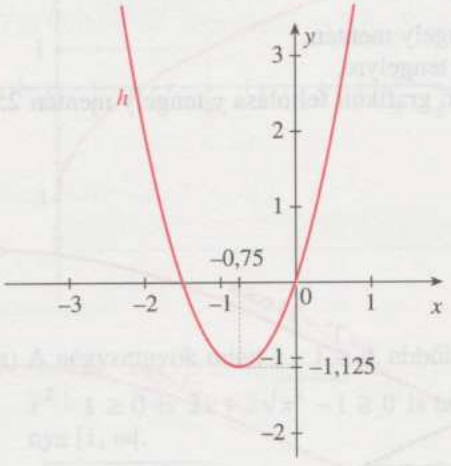
$a(x)=\frac{x^2-9}{x+3}=x-3$. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a -3-at, azaz $\mathbf{R}\setminus\{-3\}$.

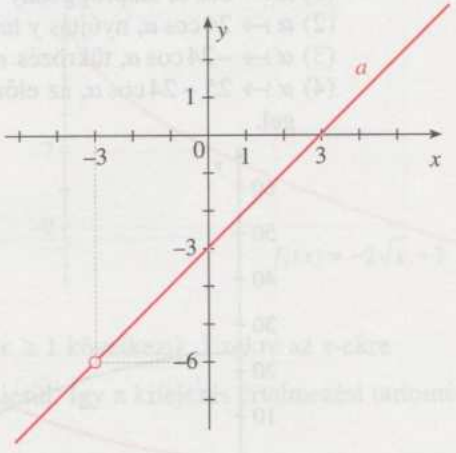
$b(x)=\frac{x^3}{2x^2}=\frac{1}{2}x$. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a 0-t, azaz $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

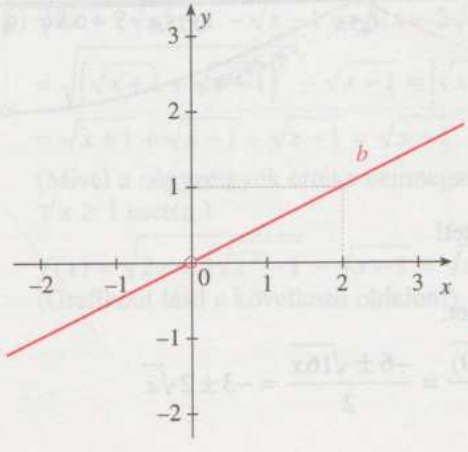
$c(x)=\frac{x^2+x-20}{2x+10}=\frac{(x+5)(x-4)}{2(x+5)}=\frac{1}{2}(x-4)$. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a -5-öt, azaz $\mathbf{R}\setminus\{-5\}$.

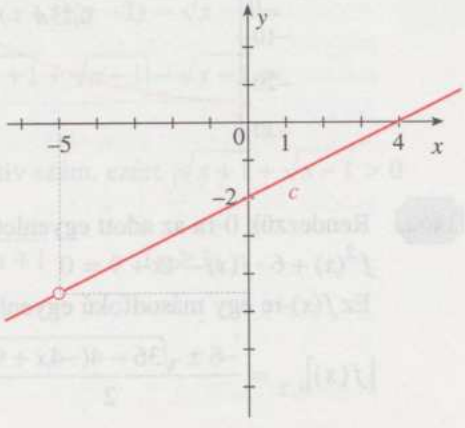

y
x
f
1
−1
0
1
2
3
−1


y
x
g
9
5
1
−2
−1
0
1
4


y
x
h
3
2
1
−0,75
−3
−2
−1
0
1
−1
−1,125
−2


y
x
a
1
−3
0
1
3
−3
−6

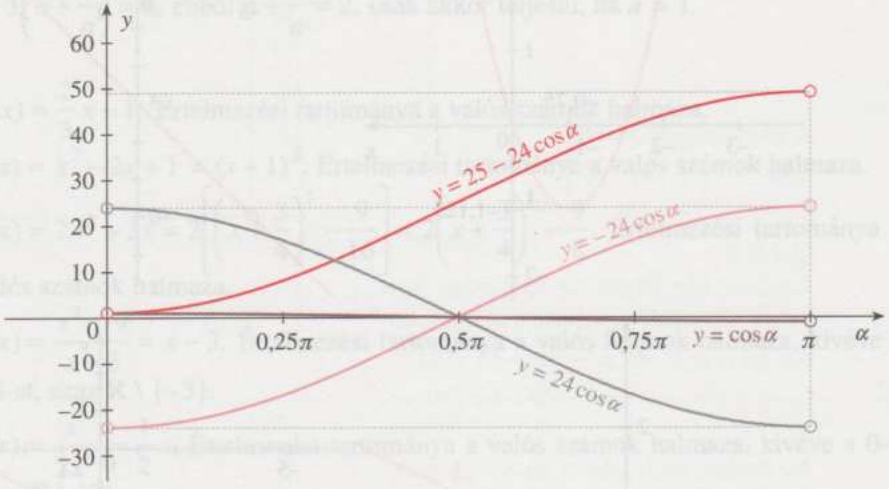

y
x
b
3
2
1
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2


y
x
c
−5
0
1
4
−2

1162. a) A megadott tartományon $-1 < \cos\alpha < 1$, monoton fogyó, tehát a gyök alatti kifejezés 0-ban $25 - 24 = 1$, majd π-ben $25 - (-24) = 49$ lenne. Mivel négyzetgyököt kell vonni, ezért 1 és 7 közé fognak esni az f függvény értékei. Közben minden értéket felvesz, mert a $\cos\alpha$ is mindent felvesz -1 és 1 között. Az f függvény szigorúan monoton növekvő. Tehát az értékkészlet: $]1; 7[$.

Megjegyzés:
Ha α egy-egy közös kezdőpontú, 3 és 4 egység hosszúságú szakasz közbezárt szögét jelöli, akkor a koszinusztétel szerint éppen a végpontjaikat összekötő szakasz – mint egy háromszög harmadik oldalának – hosszát kapjuk f segítségével. Ebből is látszik, hogy 7-nél kisebbnek kell lennie az oldalnak, és ha teljesen összecsukódik, akkor lehet 1 közelében, de 1 már csak akkor lehetne, ha a közbezárt szög 0 lenne, amikor nincs már háromszög, és ezt ki is zártuk.

b) Az $\alpha \mapsto 25 - 24\cos\alpha$ függvényt kell ábrázolni.
(1) $\alpha \mapsto \cos\alpha$, alapfüggvény
(2) $\alpha \mapsto 24\cos\alpha$, nyújtás y tengely mentén.
(3) $\alpha \mapsto -24\cos\alpha$, tükrözés α tengelyre.
(4) $\alpha \mapsto 25 - 24\cos\alpha$, az előző grafikon feltolása y tengely mentén 25 egységgel.



1163. Rendezzük 0-ra az adott egyenletet!
$f^2(x) + 6 \cdot f(x) - 4x + 9 = 0$
Ez $f(x)$-re egy másodfokú egyenlet.

$$[f(x)]_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(-4x + 9)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16x}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{x}$$

Tehát a feltételt kielégítő függvények:

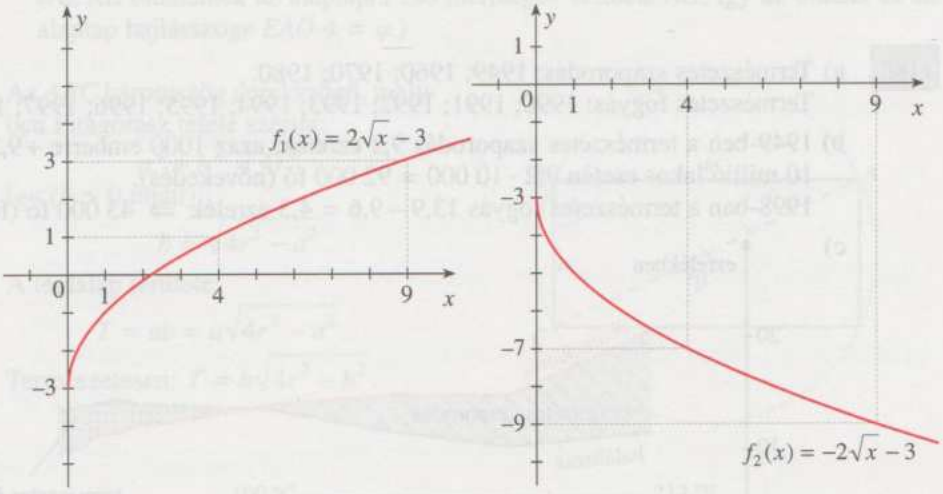
$f_1(x) = 2\sqrt{x} - 3$

$f_2(x) = -2\sqrt{x} - 3$

Ellenőrizzük, hogy ezek a függvények valóban teljesítik a feltételt!

$(2\sqrt{x} - 3)^2 + 6(2\sqrt{x} - 3) = 4x - 12\sqrt{x} + 9 + 12\sqrt{x} - 18 = 4x - 9$

$(-2\sqrt{x} - 3)^2 + 6(-2\sqrt{x} - 3) = 4x + 12\sqrt{x} + 9 - 12\sqrt{x} - 18 = 4x - 9$



1164. a) A négyzetgyök miatt $x - 1 \geq 0$, ebből $x \geq 1$ következik. Ezekre az x-ekre $x^2 - 1 \geq 0$ és $2x + 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ is teljesül. Így a kifejezés értelmezési tartománya $[1; \infty[$.

b) $\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 2\sqrt{(x+1)(x-1)}} - \sqrt{x-1} =$

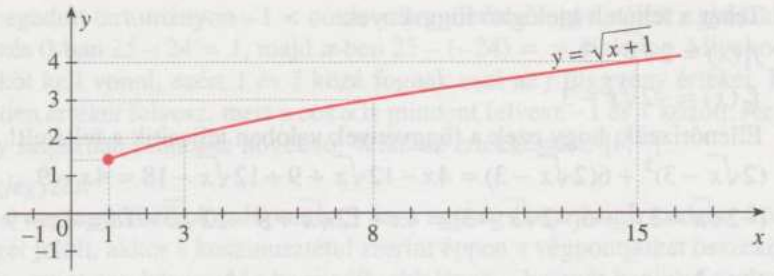
$= \sqrt{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2} - \sqrt{x-1} = \left|\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right| - \sqrt{x-1} =$

$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$

(Mivel a négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} > 0$ $\forall x \geq 1$ esetén.)

$f(x) = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{x+1}$ $\qquad (x \geq 1)$

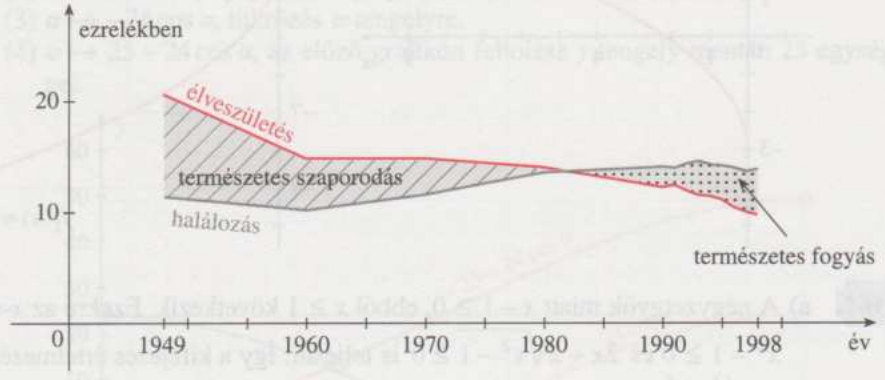
(Grafikont lásd a következő oldalon!)



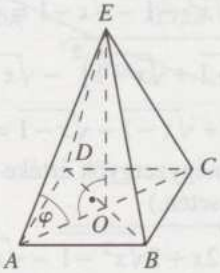
1165. a) Természetes szaporodás: 1949; 1960; 1970; 1980.
Természetes fogyás: 1990; 1991; 1992; 1993; 1994; 1995; 1996; 1997; 1998.

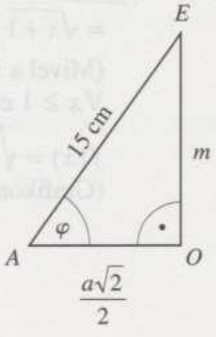
b) 1949-ben a természetes szaporodás 9,2 ezrelék, azaz 1000 emberre +9,2 fő ⇒ 10 millió lakos esetén $9{,}2 \cdot 10\,000 = 92\,000$ fő (növekedés).
1998-ban a természetes fogyás $13{,}9 - 9{,}6 = 4{,}3$ ezrelék ⇒ 43 000 fő (fogyás).

c)



1166. A szabályos négyoldalú gúla alaplapja négyzet, és E csúcsának az alaplapra eső merőleges vetülete a négyzet O középpontja. Így EOA háromszög derékszögű, melyben Pitagorasz tétele szerint: $m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 15^2$.





Ebből, mivel $m > 0$:

$m = \frac{1}{2}\sqrt{900 - 2a^2}$.

A gúla térfogata $V = \frac{T_{alap} \cdot m}{3}$.

a) $V = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{900 - 2a^2}}{6}$ (cm^3; a cm-ben) $(0 < a < 15\sqrt{2})$

b) AOE derékszögű háromszögben

$\sin\varphi = \dfrac{m}{15}$, így $m = 15\sin\varphi$; $a = 15\sqrt{2}\cos\varphi$

$V = \dfrac{15a^2 \sin\varphi}{3} = 5a^2 \sin\varphi = 2250\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi$ (cm^3)

(Az AE oldalélnek az alaplapra eső merőleges vetülete AO, így az oldalél és az alaplap hajlásszöge $EAO \sphericalangle = \varphi$.)

1167. Az ABC háromszög derékszögű, melyben Pitagorasz tétele szerint:

$$a^2 + b^2 = 4r^2,$$

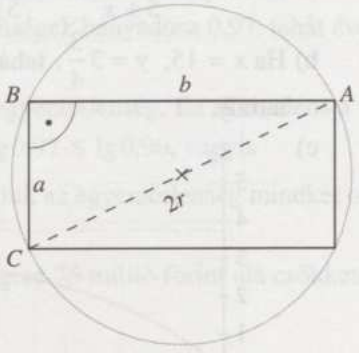
így ($b > 0$ miatt):

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2}.$$

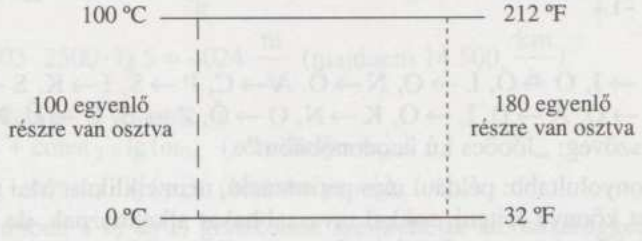
A téglalap területe:

$$T = ab = a\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Természetesen: $T = b\sqrt{4r^2 - b^2}$.



1168.*



0 °C = 32 °F; 100 °C = 212 °F

a) Jelöljük a Celsius fokot c-vel, a Fahrenheitben mért fokot f-fel.

$$f = 1{,}8c + 32$$

$$c = \frac{5f - 160}{9}$$

b) $90\ ^\circ\text{F} = \dfrac{5 \cdot 90 - 160}{9}\ ^\circ\text{C} = 32{,}2\ ^\circ\text{C}$

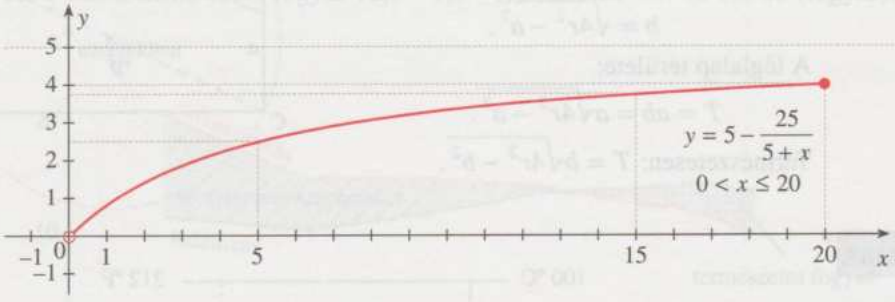
c) $20\ ^\circ\text{C} = 1{,}8 \cdot 20 + 32\ ^\circ\text{F} = 68\ ^\circ\text{F}$

1169. a) Az első csövön keresztül 1 óra alatt a tartály $\frac{1}{5}$ része telik meg, csak a második csövön keresztül 1 óra alatt a tartály $\frac{1}{x}$-ed része telik meg. Egyszerre mindkét csövön keresztül 1 óra alatt a tartály $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{x}\right)$-ed része telik meg, az egész pedig y óra alatt telik meg, így $y\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{x}\right)=1$.

Ebből $y=\frac{5x}{5+x}=\frac{5(5+x)-25}{5+x}=5-\frac{25}{5+x}$.

b) Ha $x=15$, $y=3\frac{3}{4}$, tehát $3\frac{3}{4}$ óra alatt telik meg ekkor a két csövön keresztül a tartály.

c)



1170. a) H → J, O → Ő, L → O, N → Ö, A → C, P → S, I → K, S → Ú, T → Ü, A → C, L → O, Á → D, L → O, K → N, O → Ő, Z → B, U → Ű, N → Ö, K → N, ezzel a szöveg: „Jőoöcs kú ücodonőbűön."

b) Bonyolultabb: például más permutáció, nem ciklikus. Mai számítógépekkel ezeket könnyű fejteni, sokkal ravaszabbakat alkalmaznak, de ez túlmegy a megoldáskötet keretein. Sok lehetőség van. Egy példa, amivel Sándor Mátyás küldött titkos üzeneteket, hogy egy négyzetlapból bizonyos négyzeteket kivágva kapunk egy rácsot. A szöveget úgy rendezzük el, hogy ebbe a rácsba írjuk, a hiányzó elemeket pedig kitöltjük tetszőlegesen más betűkkel. Így egy teljesen kaotikusnak tűnő betűhalmaz keletkezik, amelynek csak bizonyos jól meghatározott elemeit kell összeolvasni, de hogy melyiket, azt csak az tudja, aki rájön a rácsra.

1171. a) 0 decibel, illetve 60 decibel.

b) $130=10\cdot\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, ebből $\frac{I}{10^{-12}}=10^{13}$.

A motorzaj objektív hangerőssége tehát 10^{13}-szorosa (tízezer milliárdszorosa) a halk suttogásénak.

1172. a) $1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 1{,}06^0 = 1{,}8 \cdot 10^8$, azaz száznyolcvanmillió forint.

b) Bármelyik két egymást követő évben az elért bevételek hányadosa 1,06, tehát évente 6%-kal nőtt a bevétel.

c) Megoldandó az $1{,}8 \cdot 10^8 \cdot 1{,}06^t \geq 2 \cdot 10^8$ egyenlőtlenség. Ez ekvivalens az $1{,}06^t \geq 1{,}11$ egyenlőtlenséggel, amiből $t \geq \frac{\lg 1{,}11}{\lg 1{,}06} = 1{,}81$.

A kezdő évet ($t = 0$) követő második év októberében már elérték a 200 millió forintos bevételt.

1173. a) $8{,}3 \cdot 10^7 \cdot 0{,}97^0 = 8{,}3 \cdot 10^7$, azaz nyolcvanhárommillió forint.

b) Bármely két egymást követő évben az önköltségek hányadosa 0,97, tehát évente 3%-kal csökkent az önköltség.

c) Megoldandó a $8{,}3 \cdot 10^7 \cdot 0{,}97^t \leq 7{,}5 \cdot 10^7$ egyenlőtlenség. Ez ekvivalens a $0{,}97^t \leq 0{,}90$ egyenlőtlenséggel, amiből $t \cdot \lg 0{,}97 \leq \lg 0{,}90$, vagyis $t \geq \frac{\lg 0{,}90}{\lg 0{,}97} = 3{,}33$ (negatív számmal osztottuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát).

A kezdő évet ($t = 0$) követő negyedik év végére 75 millió forint alá csökkent az önköltség.

1174. a) $2358 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (majdnem $8500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$).

b) $v_{max} = 2{,}303 \cdot 2500 \cdot \lg 5 = 4024 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (majdnem $14\,500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$).

c) A szöveg alapján: $v = \text{const} \cdot u$

$v = \text{const}_1 + \text{const}_2 \cdot \lg(m_0)$ (zérushelye m_v),

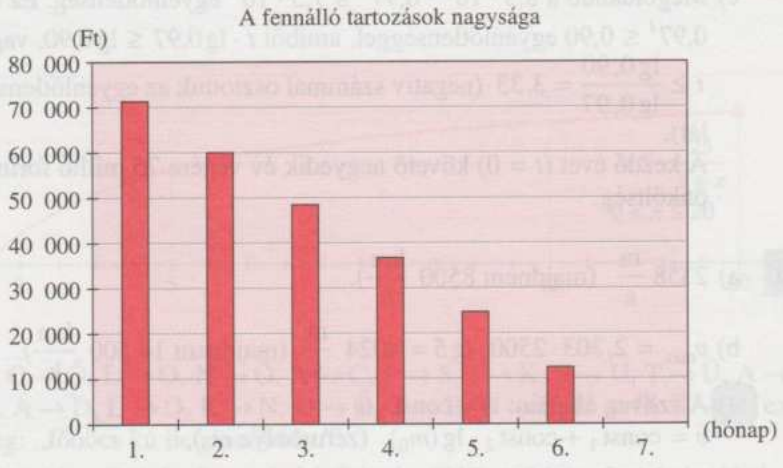
$v = \text{const}_3 - \text{const}_4 \cdot \lg(m_v)$ (zérushelye m_0),

tehát sorrendben a δ) α) ε) grafikonok szemléltetik az összefüggéseket (mindegyik konstans pozitív).

1175.* a) A kezelési díjjal együtt tartozásunk 82 400 Ft.

	Használt összeg	Kamatra	Tőketartozásra	Törlesztés után maradt
1.	82 400	1 648	11 084	71 316
2.	71 316	1 426	11 306	60 010
3.	60 010	1 200	11 532	48 479
4.	48 479	970	11 762	36 716
5.	36 716	734	11 998	24 718
6.	24 718	494	12 238	12 481
7.	12 481	250	12 482	0

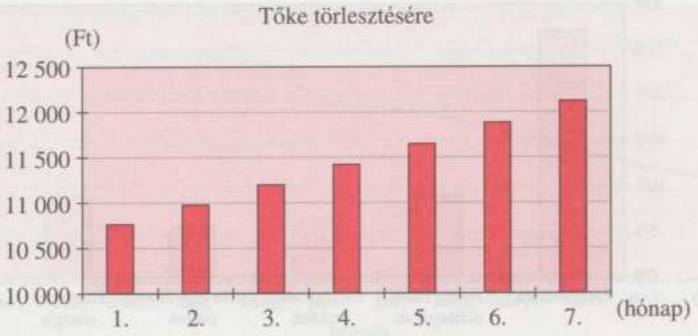
b)

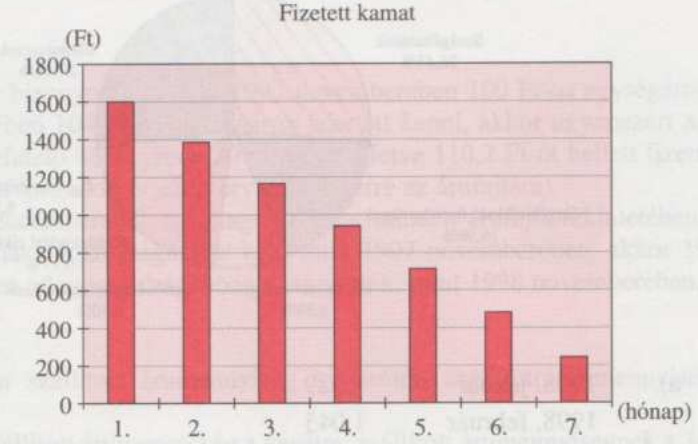


1176.* a)

	Használt összeg	Kamatra	Tőketartozásra	Törlesztés után maradt
1.	80 000	1 600	10 761	69 239
2.	69 239	1 385	10 976	58 263
3.	58 263	1 165	11 196	47 067
4.	47 067	941	11 420	35 647
5.	35 647	713	11 648	23 999
6.	23 999	480	11 881	12 118
7.	12 118	242	12 119	0

b)



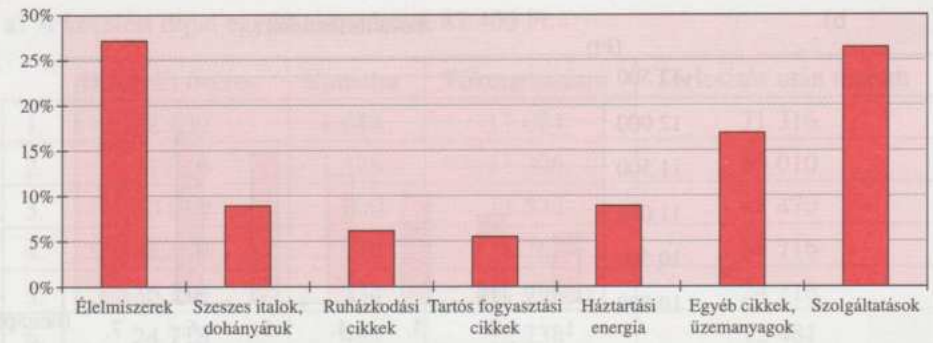


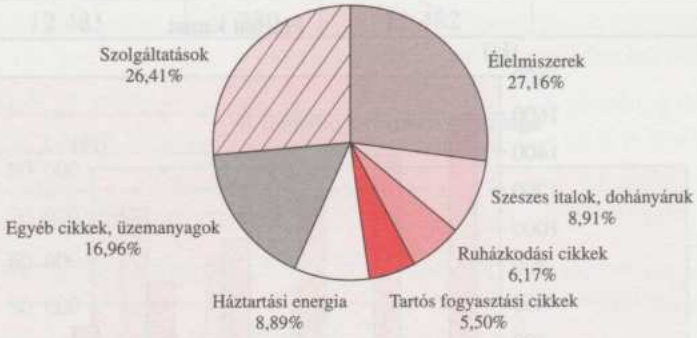
1177. a) Igen, a grafikon szerint 5 év után kb. 3,2 millió forintja lesz.

b) A kamatláb megállapításához a nagyobb pontosság elérése érdekében hosszabb időtartamot érdemes választani. Pl. 10 év után a grafikon szerint 5,2 millió forintra számíthatunk. Ezért $2 \cdot x^{10} = 5{,}2$, amiből ($x > 0$ miatt) $x \approx 1{,}100$, vagyis kb. évi 10%-os kamatos kamatot ígér a cég.

c) A másik cég 10 év után $2 \cdot 1{,}14^5 \cdot 1{,}05^5 \approx 4{,}91$ millió forintot fizet ki, ezért az első ajánlat kedvezőbb.

1178.





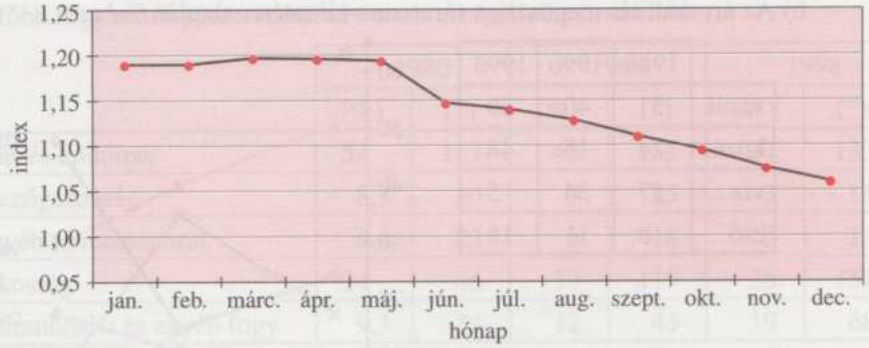
1179. a)

1998. január	1,029
1998. február	1,045
1998. március	1,061
1998. április	1,077
1998. május	1,103
1998. június	1,102
1998. július	1,075
1998. augusztus	1,055
1998. szeptember	1,056
1998. október	1,058
1998. november	1,059
1998. december	1,061

b) 6,1%-kal.

c) $\frac{1,061}{1,103} \approx 0,962$, tehát 96,2%-a a májusi árindexnek a decemberi.

1180. a)



b) Igen.

c) Nem.
Ha pl. egy bizonyos fajta árut 1997 novemberében 100 Ft-os egységáron, 1997 decemberében 104 Ft-os egységáron lehetett kapni, akkor ugyanezért az áruért 1998. megfelelő hónapjában 107,5 Ft-ot, illetve 110,2 Ft-ot kellett fizetni (ha a táblázatban megadott értékek érvényesek erre az árufajtára).
Ha 1997 decemberében az átlagos árszint minden árufajta tekintetében a fenti példához hasonlóan magasabb volt, mint 1997 novemberében, akkor 1998 decemberében átlagosan drágábban vásároltunk, mint 1998 novemberében.

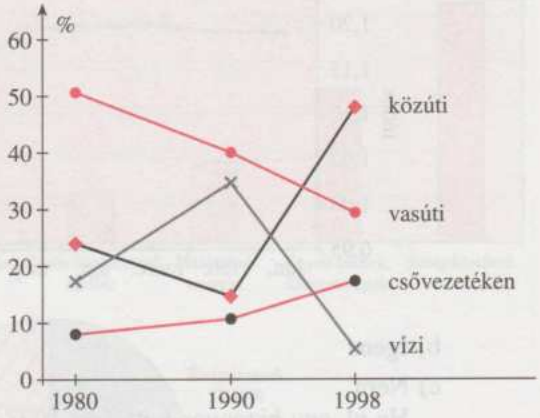
1181. a) 1980.
A közúton szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 47,4%-a.
A vízen szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 34,2%-a.
A csővezetéken szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 15,8%-a.

1990.
A közúton szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 36,6%-a.
A vízen szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 90%-a.
A csővezetéken szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 23,3%-a.

1998.
A közúton szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 164%-a.
A vízen szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek a 18%-a.
A csővezetéken szállított árumennyiség a vasúton szállított árumennyiségnek az 59%-a.

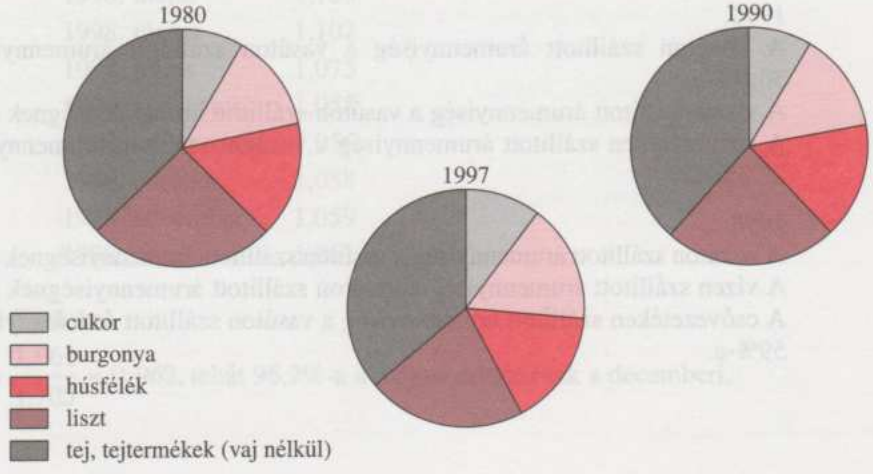
b) Az áruszállítás megoszlása (árutonna-kilométer alapján %-ban)

	1980	1990	1998
vasút	51	40	29
közút	24	15	48
víz	17	34	5
cső	8	11	18



1182. Főbb élelmiszerek egy főre jutó fogyasztása

	1980		1990		1997	
	kg/fő	(°)	kg/fő	(°)	kg/fő	(°)
cukor	38	30	38	31	39	37
burgonya	60	48	60	49	62	58
húsfélék	70	57	70	57	61	57
liszt	112	91	105	85	81	78
tej, tejtermékek (vaj nélkül)	165	134	170	138	137	130



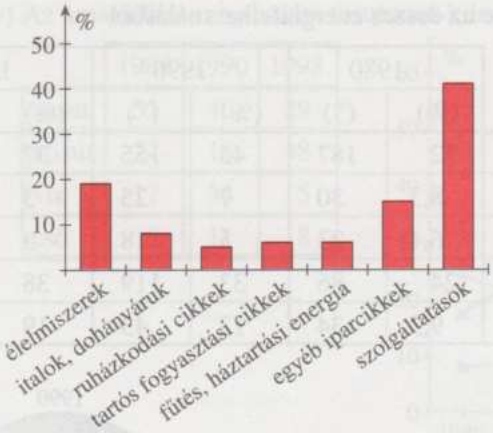
1183. A főbb fogyasztók részesedése az összes energiafelhasználásból

	1980		1990		1998	
	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)
ipar és építőipar	52	187	43	155	37	133
mezőgazdaság	8,3	30	7	25	3	11
egyéb termelőágazat	6,4	23	5	18	3	11
lakosság	24	86	33	119	38	137
kommunális és egyéb fogy.	9,3	34	12	43	19	68

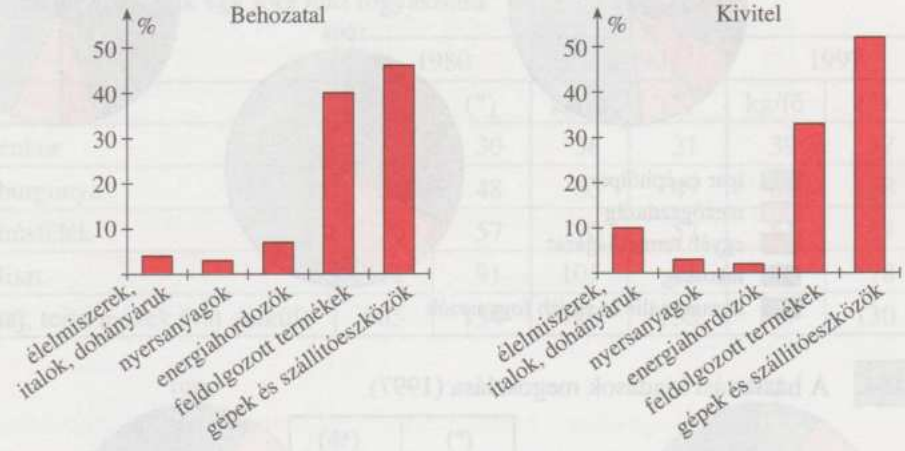


1184. A háztartási kiadások megoszlása (1997)

	(°)	(%)
élelmiszerek	68	19
italok, dohányáruk	30	8
ruházkodási cikkek	17	5
tartós fogyasztási cikkek	22	6
fűtés, háztartási energia	23	6
egyéb iparcikkek	52	15
szolgáltatások	148	41

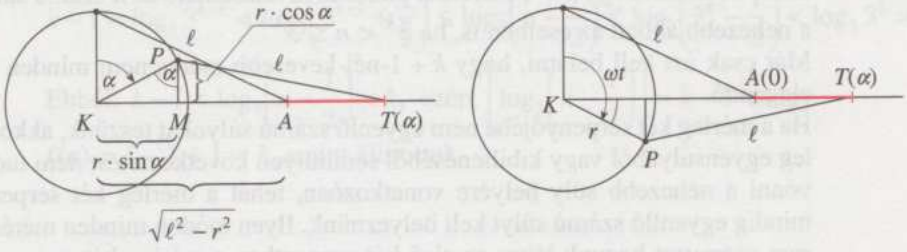


1185. A külkereskedelmi forgalom áruszerkezete (1998)



1186. Kezdetben, ha $t = 0$, akkor A a 0 pont, egyébként ez K-tól éppen $\sqrt{\ell^2 - r^2}$ távolságban van. Az első szakaszon, amíg egy negyedkört megtesz a kar körhöz rögzített vége, A távolodik, majd utána közelebb lesz K-hoz; sőt, a kezdeti 0 pontnál is közelebb kerül, majd ismét távolodva éri el azt újra. Ezt kell felírnunk: ha a kar körön lévő végpontjába mutató sugár α szöget zár be – az ábra szerint – a függőleges iránnyal, akkor igaz lesz a kör középpontjától a rúd végpontját jelző $T(\alpha)$ pontig terjedő szakasz hosszára, hogy $r \cdot \sin\alpha + \sqrt{\ell^2 - (r \cdot \cos\alpha)^2}$ -val egyenlő, hiszen az első tag az ábra szerinti KM szakasz hossza, a második pedig a PMT derékszögű háromszögben felírható Pitagorasz-tételből adódik. Mivel mi a kezdő pontként az A pontot vettük, amelynek távolsága a kör K középpontjától: $\sqrt{\ell^2 - r^2}$, s ezt le kell

vonni, hogy az $AT(\alpha)$ távolságot megkapjuk. Így tehát ha A pont az origó, akkor a $T(\alpha)$ pont koordinátája: $\sqrt{\ell^2-(r\cdot\cos\alpha)^2}+r\cdot\sin\alpha-\sqrt{\ell^2-r^2}$ lesz, ahol az időtől való függés az $\alpha=\omega t$ kifejezésen keresztül kerül a képletbe.



1187. a) 2 súly esetén: 1 mérés kell;
3 súly esetén: 1 mérés kell;
4 súly esetén: 2 mérés kell;
⋮
9 súly esetén: 2 mérés kell;
10 súly esetén: 3 mérés kell;
11 súly esetén: 3 mérés kell.

b) Ha a szemre egyforma súlyok száma n, és $3^{k-1}<n\le 3^k$, akkor a szükséges mérések száma éppen k ($k\in\mathbf{N}^+$), amint ezt pl. teljes indukcióval igazolhatjuk. Az a) részben láttuk, hogy az állítás igaz $k=1$ esetén (azaz $1<n\le 3$ esetén). Ha valamely rögzített k esetében már tudjuk, hogy tetszőleges n számú ($3^{k-1}<n\le 3^k$) súly közül k méréssel kiválasztható a nehezebb súly (de k-nál kevesebb mérés nem biztos hogy elég), akkor a következőképpen okoskodhatunk. Ha $3^k<n\le 3^{k+1}$, akkor osszuk három csoportba a súlyokat. Ha $n=3m$ alakú, akkor mindegyik csoportban m darab súly legyen, ha $n=3m-1$ alakú, akkor az első két csoportban m darab, a harmadik csoportban $m-1$ darab, ha pedig $n=3m-2$ alakú, akkor az első két csoportban m darab, a harmadik csoportban $m-2$ darab súly legyen. Mindegyik esetben igaz, hogy $3^{k-1}<m\le 3^k$, hiszen az első esetben $m=\frac{n}{3}\le\frac{3^{k+1}}{3}=3^k$, a másik két esetben pedig az $m>3^k$ feltevésből $n>3^{k+1}$, az $m\le 3^{k-1}$ feltevésből pedig $n<3^k$ adódna, ami most lehetetlen.
Egy méréssel eldönthetjük, hogy a három csoport közül melyikben van a nehezebb súly: tegyük a kétkarú mérleg egy-egy serpenyőjébe az első két csoport súlyait (tehát mindkét serpenyőjébe ugyanannyi súly kerül). Ha a mérleg kibillen, akkor a nehezebb oldal súlyai között van a hibás, ha egyensúlyban van, akkor a harmadik csoportban van a hibás.

Mindkét esetben, az első mérést követően, az indukciós feltevés szerint k mérés elegendő a legfeljebb 3^k (de 3^{k-1}-nél több) darab súly közül a hibás súly biztos kiválasztásához, összesen tehát $k + 1$ mérés.
Ezzel beláttuk, hogy $k + 1$ méréssel biztosan kiválasztható az n számú súly közül a nehezebb abban az esetben is, ha $3^k < n \leq 3^{k+1}$.
Már csak azt kell belátni, hogy $k + 1$-nél kevesebb mérés nem minden esetben elegendő.
Ha a mérleg két serpenyőjébe nem egyenlő számú súlyokat teszünk, akkor a mérleg egyensúlyából vagy kibillenéséből semmilyen következtetést nem tudunk levonni a nehezebb súly helyére vonatkozóan, tehát a mérleg két serpenyőjébe mindig egyenllő számú súlyt kell helyeznünk. Ilyen módon minden mérésnél három csoportot hozunk létre: az első két csoportban a mérleg két serpenyőjében levő súlyok vannak (mindkét csoportban ugyanannyi), a harmadik csoportban pedig a maradék súlyok (ez a csoport állhat 0 db-ból is). Bárhogyan is csoportosítjuk három részre a súlyokat, mindig lesz olyan csoport, amelyikben legalább $\frac{n}{3}$ darab súly van (ahol $3^{k-1} < \frac{n}{3} \leq 3^k$).
A legelső mérés kimenetele mindig lehet olyan, amiből az következik, hogy egy legalább $\frac{n}{3}$ darab súlyt tartalmazó csoportban van a hibás súly. Ez megtörténhet akár azért, mert a mérleg két serpenyőjébe két, egyenlő számú, egyenként legalább $\frac{n}{3}$ darab súlyt tartalmazó csoport került és a mérleg kibillent, akár azért, mert a két serpenyőbe egyenként $\frac{n}{3}$ darabnál kevesebb, egyenlő számú súly került ugyan, ám a mérleg egyensúlyban maradt, ezért a harmadik, $\frac{n}{3}$ darabnál több súlyt tartalmazó csoportban van a hibás. Ha ez utóbbi csoport 3^k-nál több súlyt tartalmaz, akkor további mérés, illetve mérések lehetnek szükségesek ahhoz, hogy a hibás súlyt biztosan tartalmazó csoport elemszámát a $]3^{k-1}; 3^k]$ intervallumban lévő egész számra tudjuk leszorítani. A legelső mérést követően tehát mindig előfordulhat, hogy – az indukciós feltevés szerint – még legalább k mérésre van szükség a nehezebb súly kiválasztásához. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy legfeljebb k mérés nem elegendő minden esetben a hibás súly megtalálásához.
Beláttuk tehát, hogy ha $3^k < n \leq 3^{k+1}$, akkor $k + 1$ (megfelelően végrehajtott) méréssel mindig megtalálható a nehezebb súly, ennél kevesebb mérés esetén azonban nincs olyan eljárás, amelyik minden esetben a hibás súly megtalálását eredményezné. Ezzel a teljes indukciós bizonyítás befejeződött.
Térjünk rá eredeti állításunk bizonyítására. Feltesszük, hogy $3^{k-1} < n < 3^k$. A teljes indukcióval bizonyítottak szerint ekkor azt kell belátnunk, hogy a megadott f függvény n-hez tartozó helyettesítési értéke éppen k-val lesz egyenlő.

Mivel $3^{k-1} < n < 3^k$, és egész számokról van szó, ezért

$3^{k-1} + \frac{1}{2} \le n - \frac{1}{2} \le 3^k - \frac{1}{2}$ nyilván igaz, tehát igaz, hogy

$$k-1 = \log_3 3^{k-1} < \log_3\left(3^{k-1} + \frac{1}{2}\right) \le \log_3\left(n - \frac{1}{2}\right) \le \log_3\left(3^k - \frac{1}{2}\right) < \log_3 3^k = k.$$

Ebből: $k-1 < \log_3\left(n - \frac{1}{2}\right) < k$, ezért $\left[\log_3\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = k-1$ és így

$f(n) = k - 1 + 1 = k$, amint állítottuk.

3.2. Függvénytranszformációk

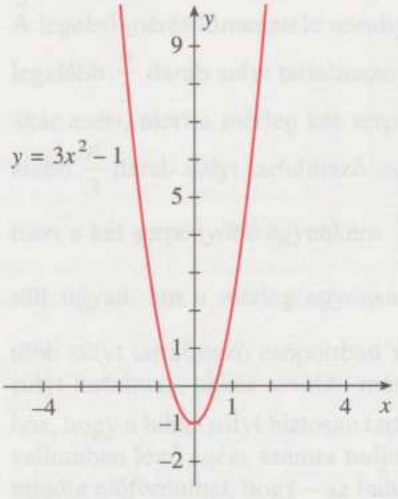
1188. a) $(0; -1)$ tengelypontú parabola. A normálparabolát előbb függőlegesen háromszorosra nyújtjuk, majd egy egységgel függőlegesen lefelé eltoljuk.

b) $x^2 - 12x + 30 = (x-6)^2 - 36 + 30 = (x-6)^2 - 6$.
$(6; -6)$ tengelypontú parabola. A normálparabolát 6 egységgel jobbra és 6 egységgel lefelé eltoljuk.

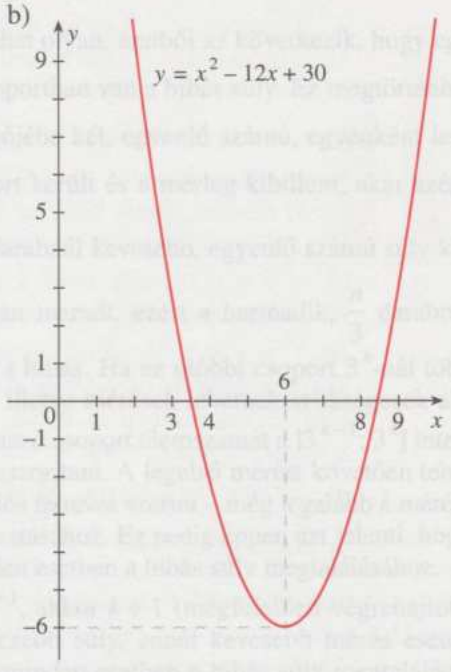
c) $x^2 + 6x - 6 = (x+3)^2 - 9 - 6 = (x+3)^2 - 15$.
$(-3; -15)$ tengelypontú parabola. A normálparabolát 3 egységgel balra és 15 egységgel lefelé eltoljuk.

d) $2x^2 + 6x + 8 = 2(x^2 + 3x + 4) = 2((x+1{,}5)^2 - 2{,}25 + 4) = 2(x+1{,}5)^2 + 3{,}5$.
$(-1{,}5; 3{,}5)$ tengelypontú parabola. A normálparabolát előbb függőlegesen kétszeresre nyújtjuk, majd 1,5 egységgel balra és 3,5 egységgel felfelé eltoljuk.

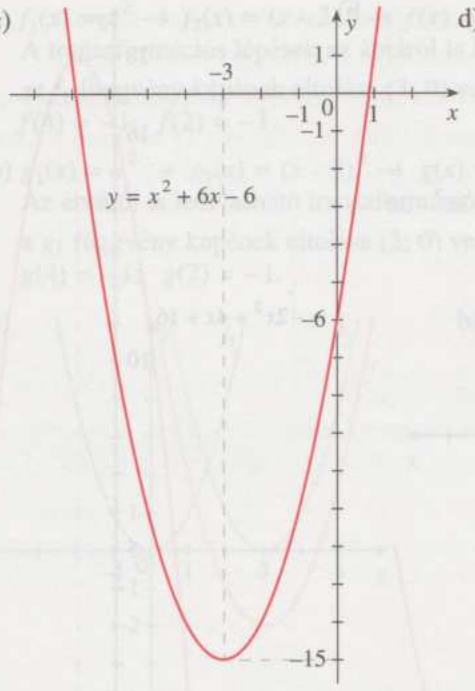
a)



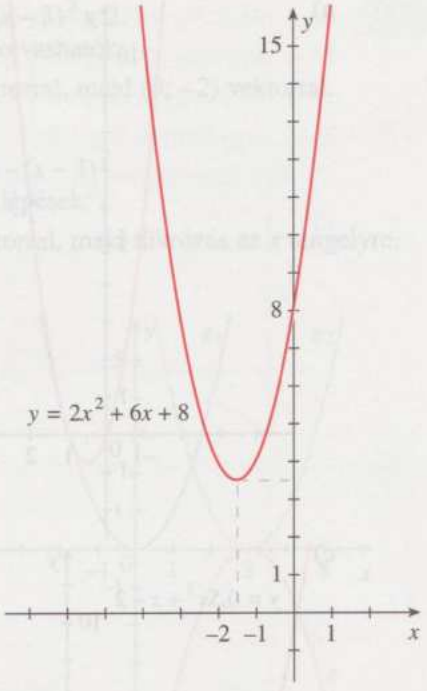
b)



c)



d)

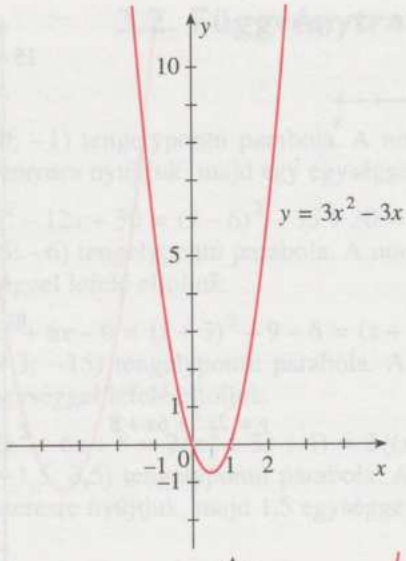


1189. a) $3x^2 - 3x = 3(x^2 - x) = 3((x - 0{,}5)^2 - 0{,}25) = 3(x - 0{,}5)^2 - 0{,}75$.
(0,5; −0,75) tengelypontú parabola. A normálparabolát előbb függőlegesen háromszorosra nyújtjuk, majd 0,5 egységgel jobbra és 0,75 egységgel lefelé eltoljuk.

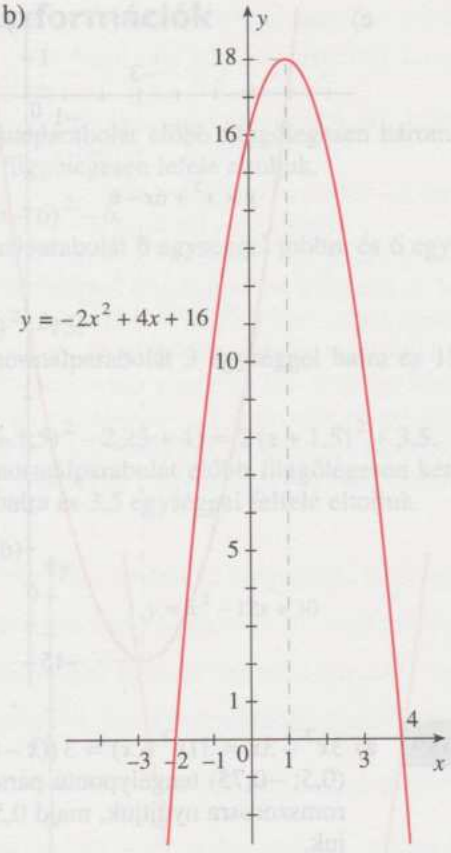
b) $-2x^2 + 4x + 16 = -2(x^2 - 2x - 8) = -2((x - 1)^2 - 1 - 8) = -2(x - 1)^2 + 18$.
(1; 18) tengelypontú parabola. A normálparabolát előbb függőlegesen kétszeresre nyújtjuk, az x tengelyre tükrözzük, majd 1 egységgel jobbra és 18 egységgel felfelé eltoljuk.

c) $0{,}5x^2 + x - 2 = 0{,}5(x^2 + 2x - 4) = 0{,}5((x + 1)^2 - 1 - 4) = 0{,}5(x + 1)^2 - 2{,}5$.
(−1; −2,5) tengelypontú parabola. A normálparabolát előbb függőlegesen félszeresre összenyomjuk, majd 1 egységgel balra és 2,5 egységgel lefelé eltoljuk.

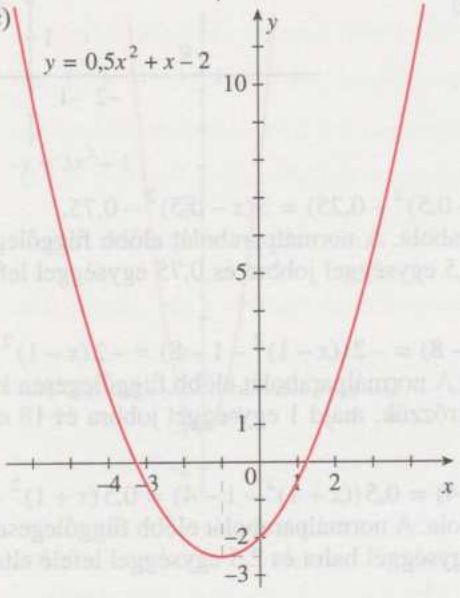
a)


y
10
5
1
−1
0
1
2
x
−1
y = 3x² − 3x

b)


y
18
16
10
5
1
−3
−2
−1
0
1
3
4
x
y = −2x² + 4x + 16

c)


y
10
5
1
−4
−3
0
1
2
x
−2
−3
y = 0,5x² + x − 2

1190. a) $f_1(x) = x^2 \to f_2(x) = (x-3)^2 \to f(x) = (x-3)^2 - 2$.

A transzformációs lépések az ábráról is leolvashatók:

az f_1 függvény képének eltolása (3; 0) vektorral, majd (0; –2) vektorral.

$f(4) = -1$; $f(2) = -1$.

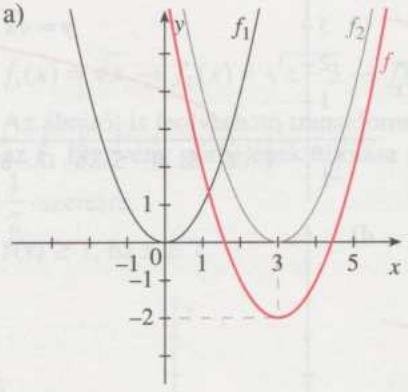
b) $g_1(x) = x^2 \to g_2(x) = (x-3)^2 \to g(x) = -(x-3)^2$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések:

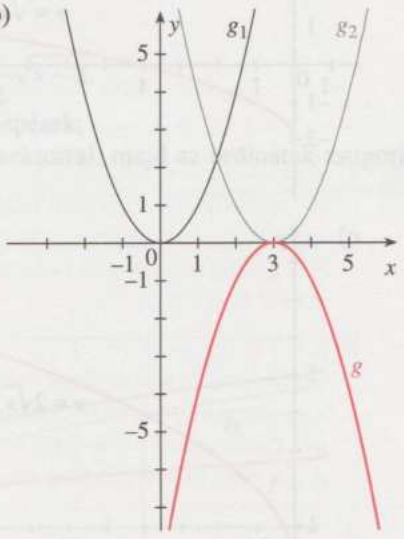
a g_1 függvény képének eltolása (3; 0) vektorral, majd tükrözés az x tengelyre.

$g(4) = -1$; $g(2) = -1$.

a)



b)

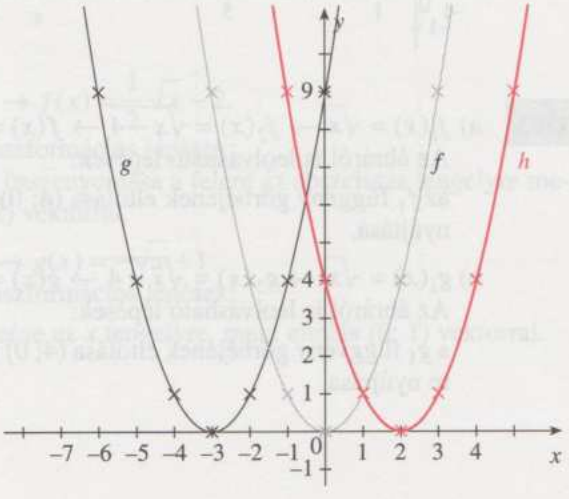


1191. A hozzárendelési szabályok:

f: $x \mapsto x^2$;

g: $x \mapsto (x+3)^2$;

h: $x \mapsto (x-2)^2$.

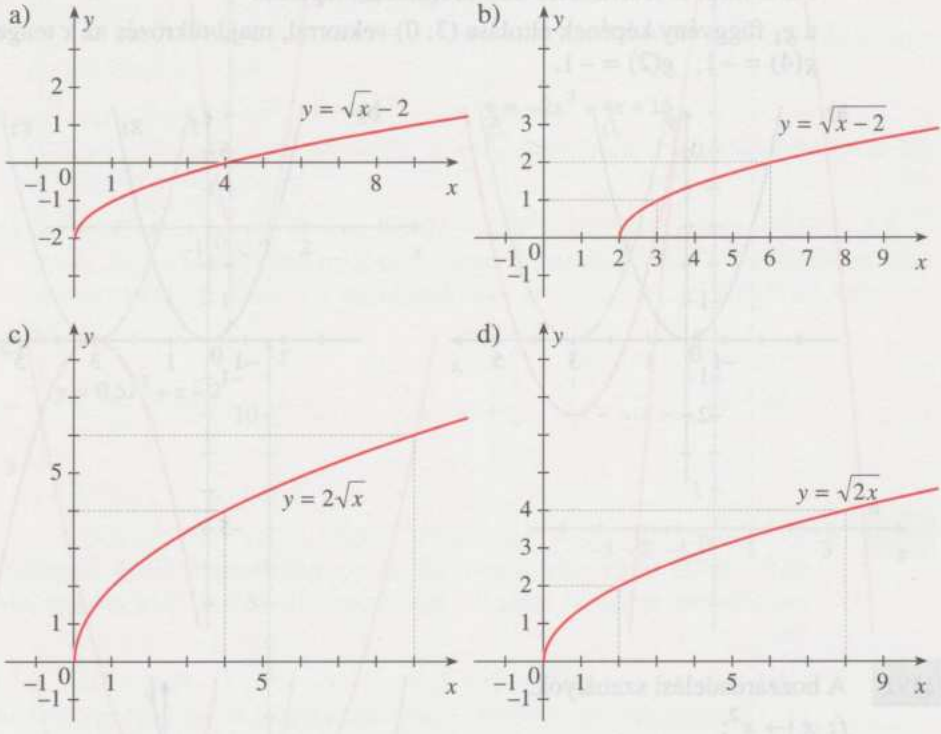


1192. a) A négyzetgyökfüggvény félparaboláját 2 egységgel lefelé toljuk.

b) A négyzetgyökfüggvény félparaboláját 2 egységgel jobbra toljuk.

c) A négyzetgyökfüggvény félparaboláját függőlegesen kétszeresre nyújtjuk.

d) A négyzetgyökfüggvény félparaboláját vízszintesen félszeresre összenyomjuk, vagy függőlegesen $\sqrt{2}$-szeresre nyújtjuk.



1193. a) $f_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow f_2(x) = \sqrt{x-4} \rightarrow f(x) = 2\sqrt{x-4}$.

Az ábráról is leolvasható lépések:

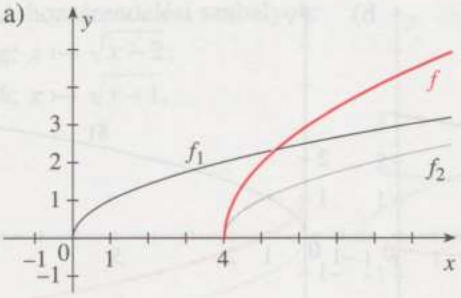
az f_1 függény görbéjének eltolása (4; 0) vektorral, majd az ordináták 2-szeresre nyújtása.

b) $g_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow g_2(x) = \sqrt{x-4} \rightarrow g(x) = \sqrt{2(x-4)}$.

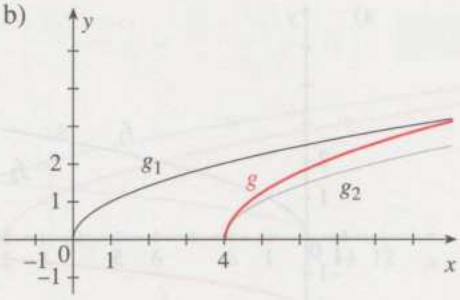
Az ábráról is leolvasható lépések:

a g_1 függvény görbéjének eltolása (4; 0) vektorral, majd az ordináták $\sqrt{2}$-szeresre nyújtása.

a)



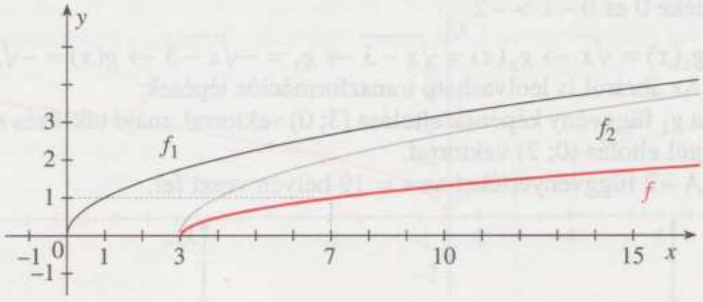
b)



1194. $f_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow f_2(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-3}$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések:
az f_1 függvény görbéjének eltolása (3; 0) vektorral, majd az ordináták zsugorítása $\frac{1}{2}$-szeresre.

$f(x) \geq 1$, ha $x \geq 7$.



1195. a) $f_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 2$.

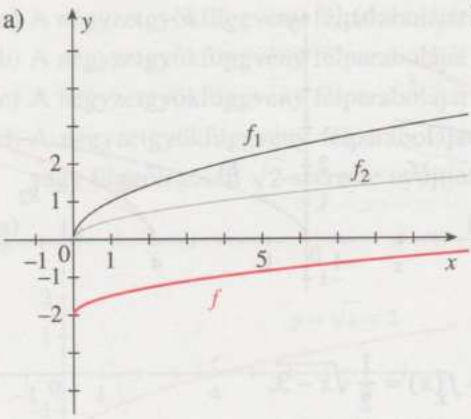
Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések:
az f_1 függvény grafikonjának összenyomása a felére az abszcissza tengelyre merőlegesen, majd eltolás (0; –2) vektorral.

b) $g_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow g_2(x) = -\sqrt{x} \rightarrow g(x) = -\sqrt{x} + 1$.

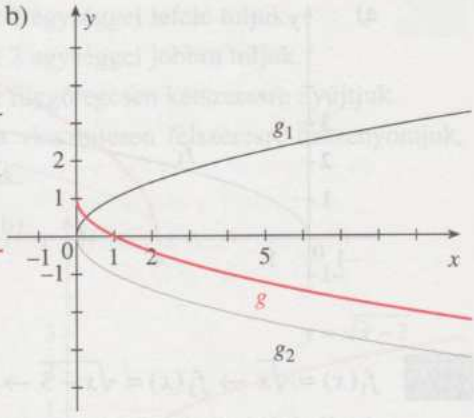
Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések:

a g_1 függvény képének tükrözése az x tengelyre, majd eltolás (0; 1) vektorral.

a)



b)



1196. a) $f_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow f_2(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow f(x) = \sqrt{x-3} - 1$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések:

az f_1 függvény képének eltolása (3; 0) vektorral, majd (0; −1) vektorral.

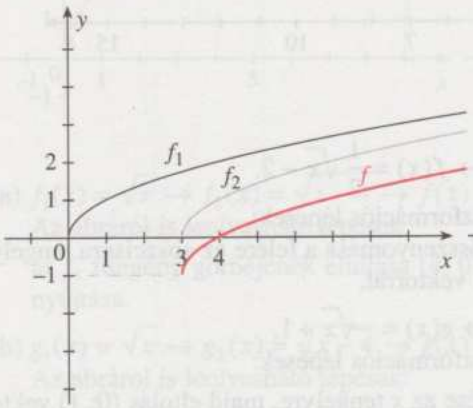
A −2 függvényértéket nem veszi fel, mert a négyzetgyökfüggvény minimumértéke 0 és $0 - 1 > -2$

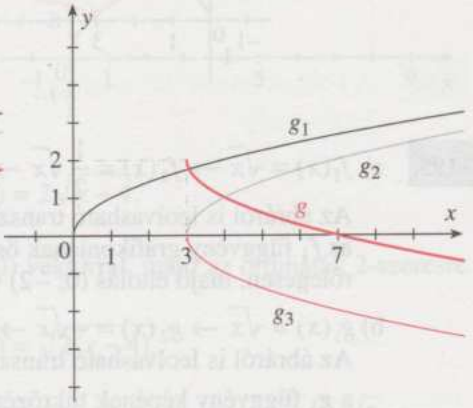
b) $g_1(x) = \sqrt{x} \rightarrow g_2(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow g_3 = -\sqrt{x-3} \rightarrow g(x) = -\sqrt{x-3} + 2$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések:

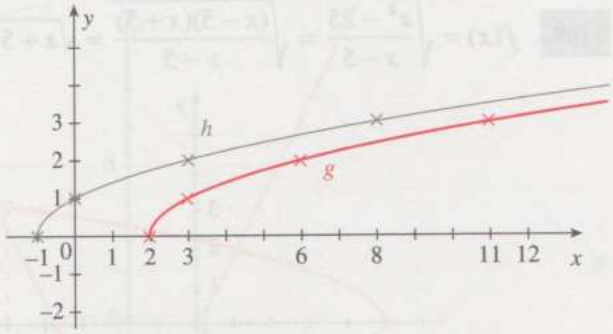
a g_1 függvény képének eltolása (3; 0) vektorral, majd tükrözés az x tengelyre, végül eltolás (0; 2) vektorral.

A −2 függvényértéket az $x = 19$ helyen veszi fel.

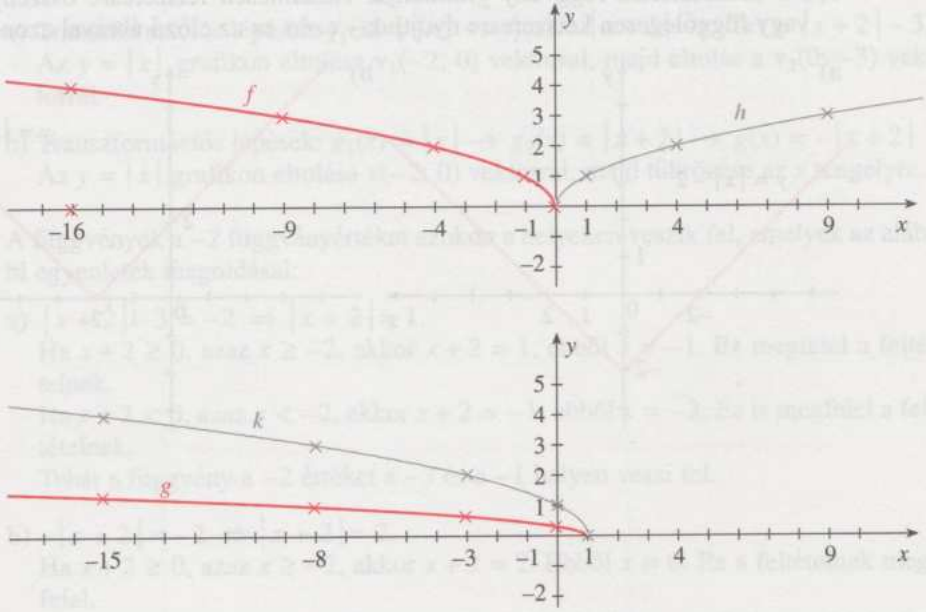




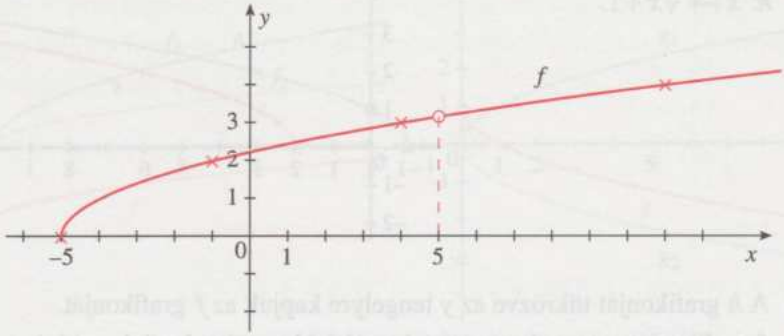
1197. A hozzárendelési szabályok:
$g\colon x \mapsto \sqrt{x-2}$;
$h\colon x \mapsto \sqrt{x+1}$.



1198. A h grafikonját tükrözve az y tengelyre kapjuk az f grafikonját.
f grafikonját x tengely mentén 1-gyel jobbra tolva kapjuk a $k(x) = \sqrt{-x+1}$ függvény grafikonját.
A k függvény grafikonját az x tengelyre merőlegesen harmadára összenyomjuk, kapjuk a $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{-x+1}$ függvény grafikonját.



1199. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-25}{x-5}} = \sqrt{\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}} = \sqrt{x+5}$ $\quad x \geq -5;\ x \neq 5$



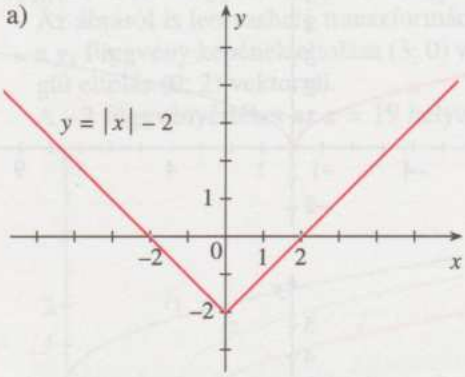
1200. a) Az abszolútérték-függvény grafikonját 2 egységgel lefelé toljuk.

b) Az abszolútérték-függvény grafikonját 2 egységgel jobbra toljuk.

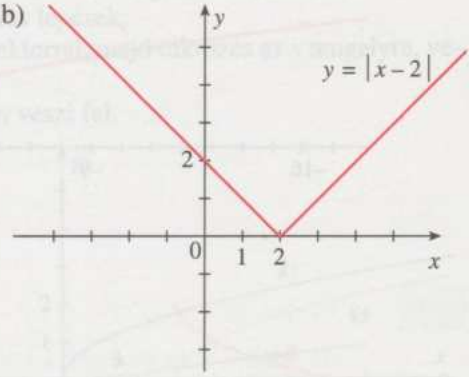
c) Az abszolútérték-függvény grafikonját függőlegesen kétszeresre nyújtjuk.

d) Az abszolútérték-függvény grafikonját vízszintesen félszeresre összenyomjuk, vagy függőlegesen kétszeresre nyújtjuk – ezért ez az előző ábrával azonos.

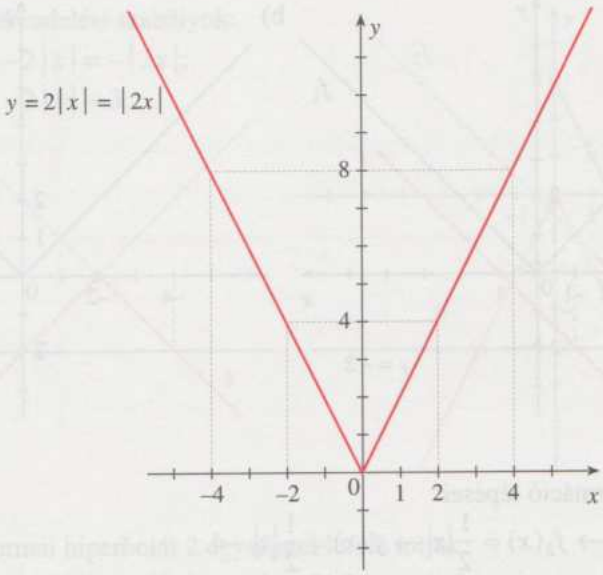
a)



b)



c), d)



1201. a) Transzformációs lépések: $f_1(x) = |x| \rightarrow f_2(x) = |x+2| \rightarrow f(x) = |x+2| - 3$.
Az $y = |x|$ grafikon eltolása $\mathbf{v_1}(-2; 0)$ vektorral, majd eltolás a $\mathbf{v_2}(0; -3)$ vektorral.

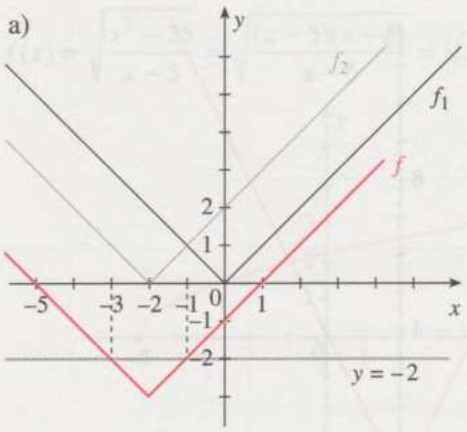
b) Transzformációs lépések: $g_1(x) = |x| \rightarrow g_2(x) = |x+2| \rightarrow g(x) = -|x+2|$
Az $y = |x|$ grafikon eltolása $\mathbf{v}(-2; 0)$ vektorral, majd tükrözése az x tengelyre.

A függvények a -2 függvényértéket azokon a helyeken veszik fel, amelyek az alábbi egyenletek megoldásai:

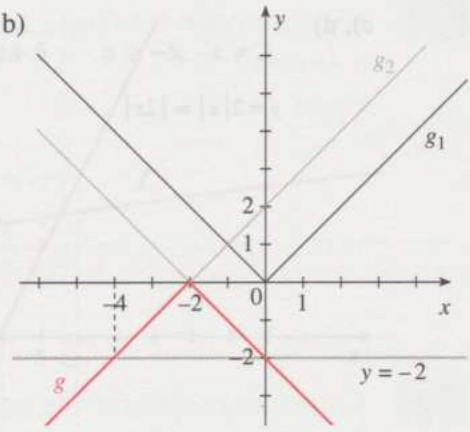
a) $|x+2| - 3 = -2 \Rightarrow |x+2| = 1$.
Ha $x + 2 \geq 0$, azaz $x \geq -2$, akkor $x + 2 = 1$, ebből $x = -1$. Ez megfelel a feltételnek.
Ha $x + 2 < 0$, azaz $x < -2$, akkor $x + 2 = -1$, ebből $x = -3$. Ez is megfelel a feltételnek.
Tehát a függvény a -2 értéket a -3 és a -1 helyen veszi fel.

b) $-|x+2| = -2 \Rightarrow |x+2| = 2$.
Ha $x + 2 \geq 0$, azaz $x \geq -2$, akkor $x + 2 = 2$. Ebből $x = 0$. Ez a feltételnek megfelel.
Ha $x + 2 < 0$, azaz $x < -2$, akkor $x + 2 = -2$. Ebből $x = -4$. Ez is megfelel a feltételnek.
Tehát a függvény a -2 értéket a 0 és a -4 helyen veszi fel.

a)



b)



1202. a) A transzformáció lépései:

$f_1(x) = |x| \rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2}|x| \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}|x| - 4.$

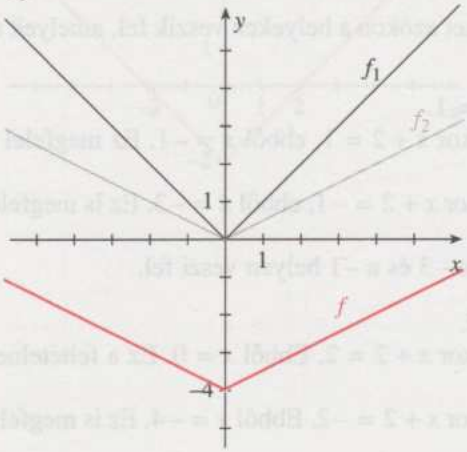
Az ábráról is leolvasható az $y = |x|$ grafikon pontjai ordinátáinak zsugorítása a felére, majd $\mathbf{v}(0; -4)$ vektorral való eltolás.

b) A transzformáció lépései:

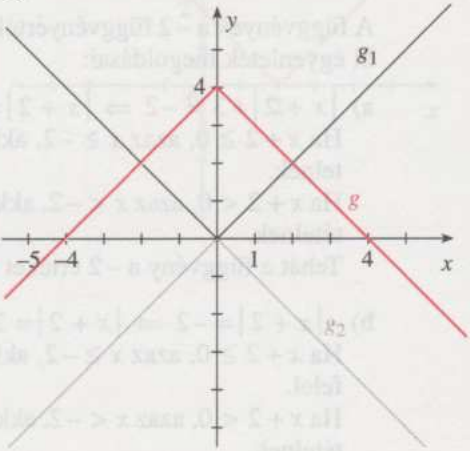
$g_1(x) = |x| \rightarrow g_2(x) = -|x| \rightarrow g(x) = -|x| + 4.$

Az ábráról is leolvasható az $y = |x|$ grafikon tükrözése az x tengelyre, majd $\mathbf{v}(0; 4)$ vektorral való eltolása.

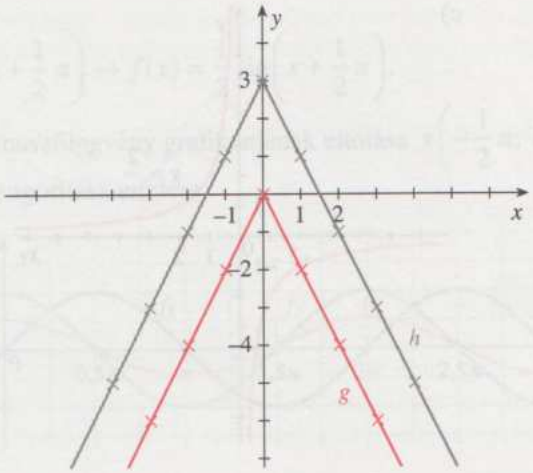
a)



b)



1203. A hozzárendelési szabályok:
$g: x \mapsto -2|x| = -|2x|$;
$h: x \mapsto -2|x| + 3$.



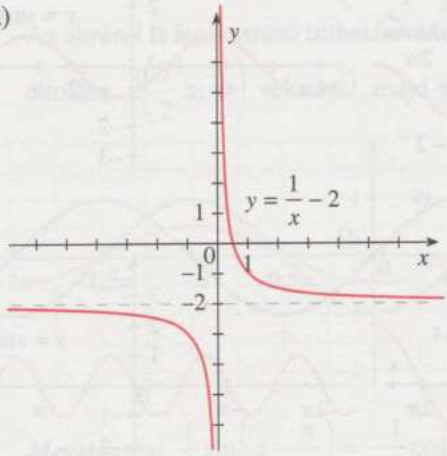
1204. a) A normál hiperbolát 2 egységgel lefelé toljuk.

b) A normál hiperbolát 2 egységgel jobbra toljuk.

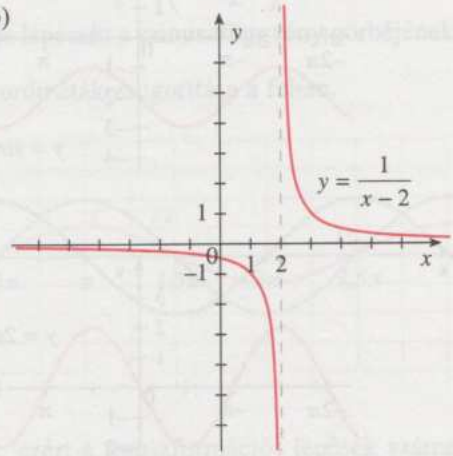
c) A normál hiperbolát függőlegesen kétszeresre nyújtjuk.

d) A normál hiperbolát vízszintesen félszeresre összenyomjuk vagy függőlegesen félszeresre összenyomjuk.

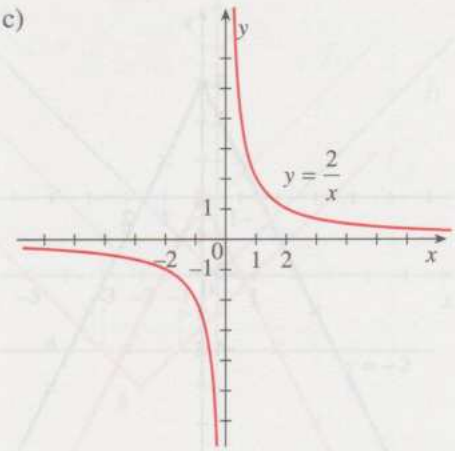
a)



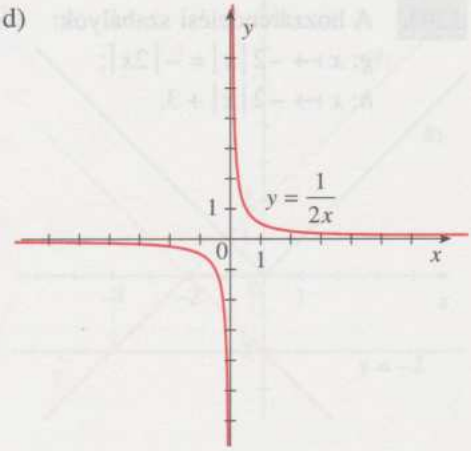
b)



c)



d)



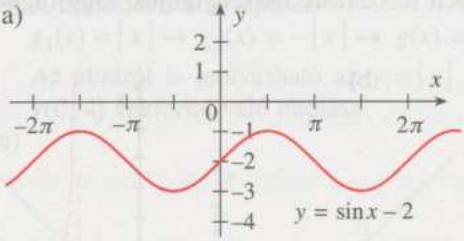
1205. a) A szinuszfüggvény képét 2 egységgel lefelé toljuk.

b) A szinuszfüggvény képét 2 egységgel jobbra toljuk.

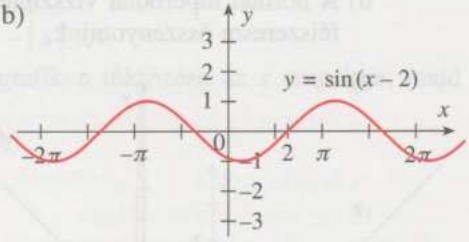
c) A szinuszfüggvény képét függőlegesen kétszeresre nyújtjuk.

d) A szinuszfüggvény képét vízszintesen félszeresre összenyomjuk.

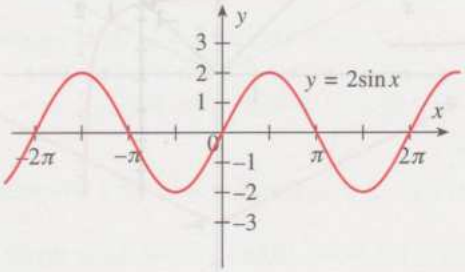
a)



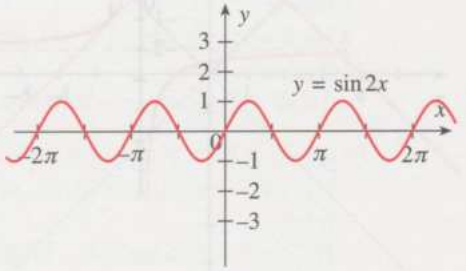
b)



c)



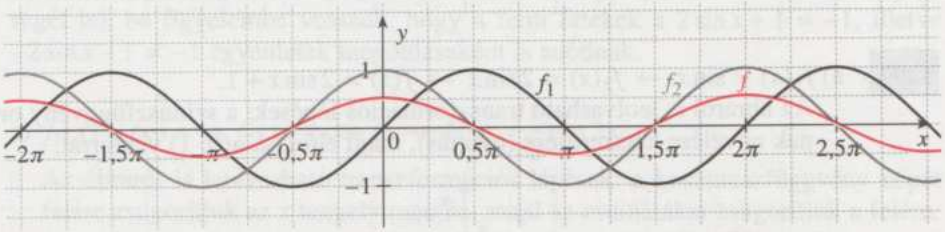
d)



1206. a) A transzformáció lépései:

$$f_1(x) = \sin x \to f_2(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) \to f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Az ábráról is leolvasható: a szinuszfüggvény grafikonjának eltolása $\mathbf{v}\left(-\frac{1}{2}\pi;\ 0\right)$ vektorral, majd az ordináták zsugorítása a felére.



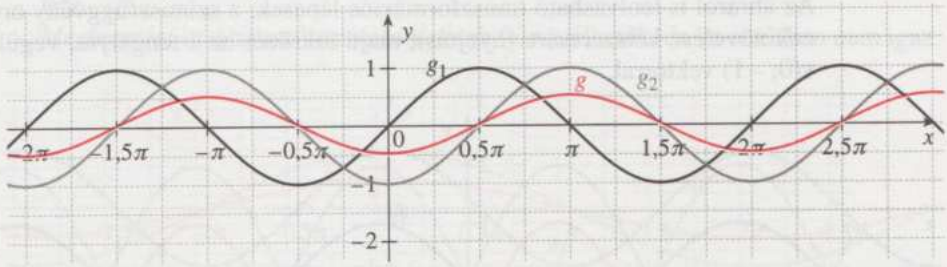
Megjegyzés: $\frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\cos x$

Ha ezt az átalakítást alkalmazzuk, akkor a transzformáció egyetlen lépésből áll a koszinuszfüggvény görbéjének ordinátáit zsugorítjuk a felére.

b) A transzformáció lépései:

$$g_1(x) = \sin x \to g_2(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) \to g(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right).$$

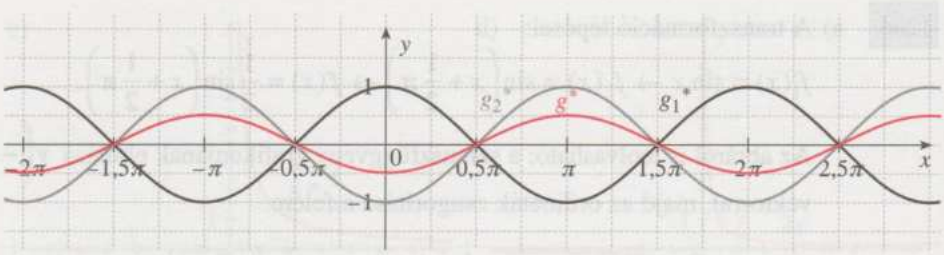
Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a szinuszfüggvény görbéjének eltolása $\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}\pi;\ 0\right)$ vektorral, majd az ordináták zsugorítása a felére.



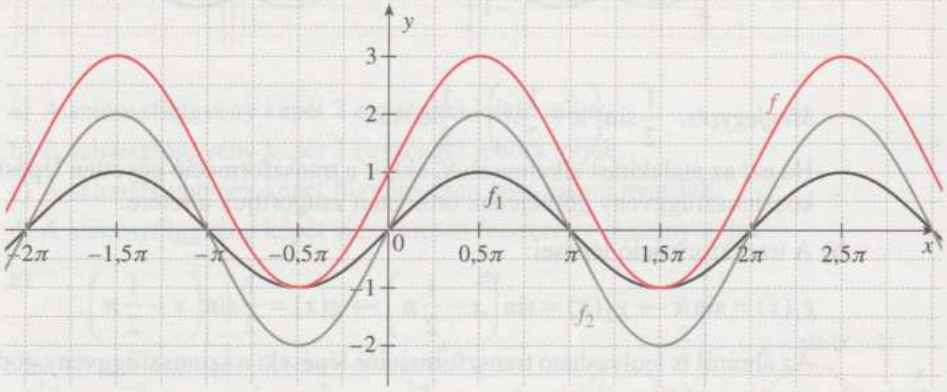
Megjegyzés: $\frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos x$, ezért a transzformációs lépések száma csökkenthető: $g^*(x) = -\frac{1}{2}\cos x$ jelöléssel.

A transzformációs lépések:

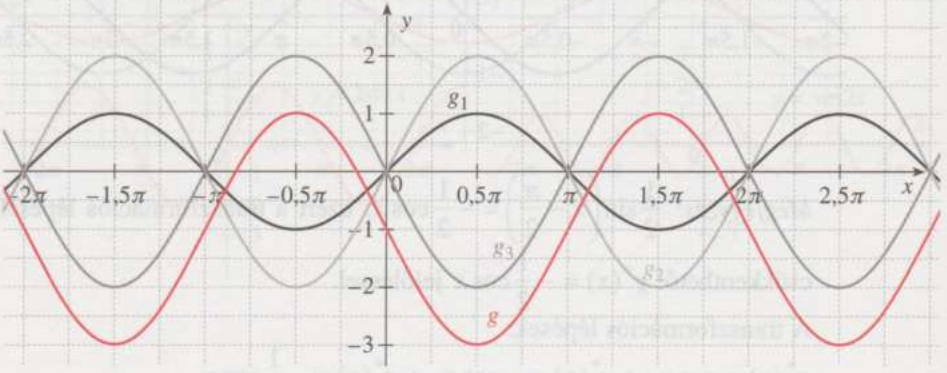
$$g_1^*(x) = \cos x \to g_2^*(x) = -\cos x \to g^*(x) = -\frac{1}{2}\cos x.$$



1207. a) $f_1(x) = \sin x \rightarrow f_2(x) = 2\sin x \rightarrow f(x) = 2\sin x + 1$.
Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a szinuszfüggvény ordinátáinak növelése kétszeresére (nyújtás), majd eltolása $\mathbf{a}(0; 1)$ vektorral.



b) $g_1(x) = \sin x \rightarrow g_2(x) = 2\sin x \rightarrow g_3(x) = -2\sin x \rightarrow g(x) = -2\sin x - 1$.
Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a szinuszfüggvény ordinátáinak növelése kétszeresére (nyújtás), majd tükrözés az x tengelyre, végül eltolás $\mathbf{v}(0; -1)$ vektorral.



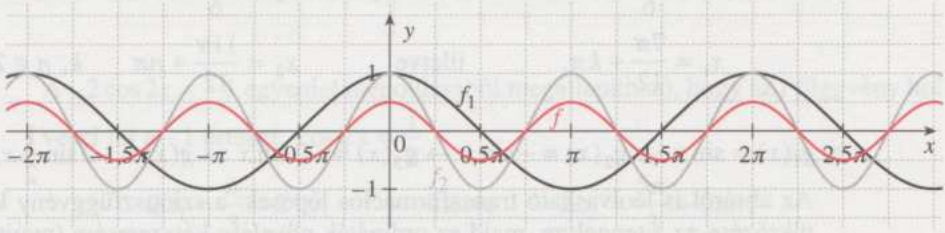
Megjegyzés: ha figyelembe vesszük, hogy $-2\sin x - 1 = -(2\sin x + 1)$ alakban is írható, itt felcserélhető az eltolás (amelynek iránya az előbbivel ellentétes) és a tükrözés sorrendje.

Az ábrákról leolvasható, hogy $f(x) = -1$ esetén $x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, ahol n egész szám, illetve $g(x) = -1$ esetén $x = k\pi$, ahol k egész szám.

Ellenőrizhetjük a leolvasás helyességét (tulajdonképpen a transzformáció helyességét is), ha figyelembe vesszük, hogy a fenti értékek a $2\sin x + 1 = -1$, illetve $-2\sin x - 1 = -1$ egyenletek megoldásaként is adódnak.

1208. a) $f_1(x) = \cos x \to f_2(x) = \cos 2x \to f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$.

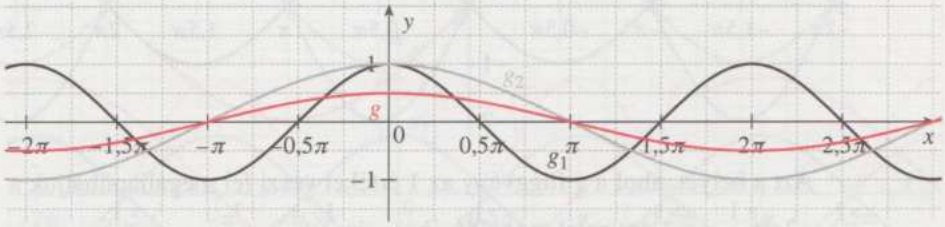
Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a koszinuszfüggvény képét felére zsugorítjuk az x tengely mentén, majd az ordinátákat zsugorítjuk a felére.



b) $g_1(x) = \cos x \to g_2(x) = \cos\frac{1}{2}x \to g(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a koszinuszfüggvény képének nyújtása kétszeresére az x tengely irányában, majd az ordináták zsugorítása a felére.

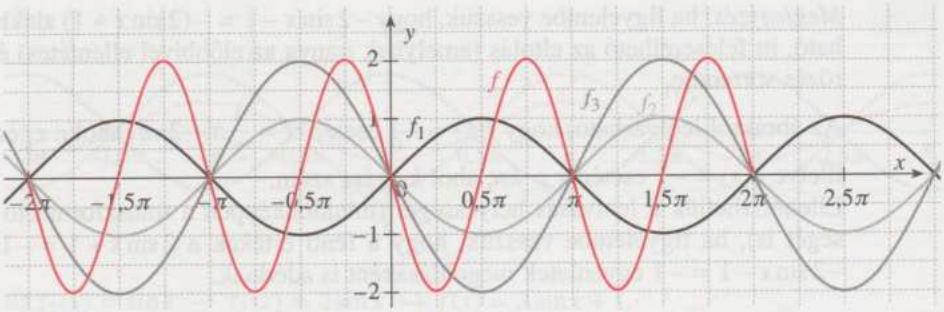
Megjegyzés: itt a transzformációs lépések felcserélhetők, de ez általában nem igaz.



1209. a) $f_1(x) = \sin x \to f_2(x) = -\sin x \to f_3(x) = -2\sin x \to f(x) = -2\sin 2x$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a szinuszfüggvény képének tükrözése az x tengelyre, majd az ordináták növelése kétszeresére (nyújtás), végül felére zsugorítás az x tengely irányában.

Megjegyzés: itt a transzformációs lépések felcserélhetők, de ez általában nem igaz.



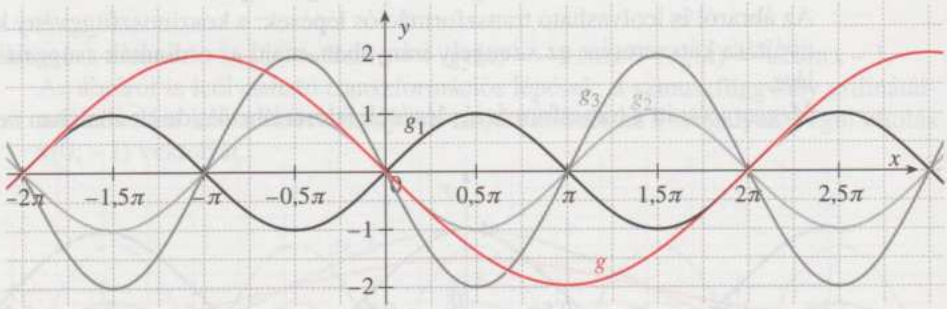
Az f függvény az 1 értéket ott veszi fel, ahol $-2\sin 2x = 1$.
Innen:

$$2x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \text{illetve} \qquad 2x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi;$$

$$x_1 = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \qquad \text{illetve} \qquad x_2 = \frac{11\pi}{12} + n\pi \qquad k,\ n \in \mathbf{Z}.$$

b) $g_1(x) = \sin x \to g_2(x) = -\sin x \to g_3(x) = -2\sin x \to g(x) = -2\sin\frac{1}{2}x$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a szinuszfüggvény képének tükrözése az x tengelyre, majd az ordináták növelése kétszeresére (nyújtás), végül kétszeresre nyújtás az x tengely irányában.
Megjegyzés: itt a transzformációs lépések sorrendje felcserélhető.



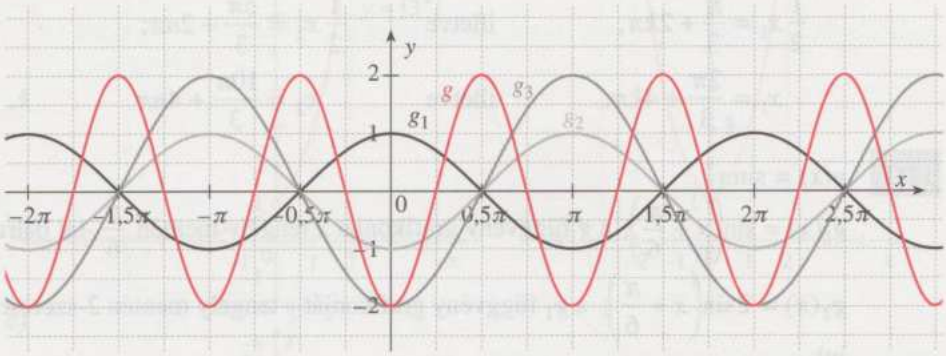
Azt a helyet, ahol a g függvény az 1 értéket veszi fel megállapíthatjuk a $-2\sin\frac{1}{2}x = 1$ egyenlet megoldásából. $\sin\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{1}{2}x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi;$$

$$x_1 = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi, \qquad x_2 = \frac{11\pi}{3} + 4n\pi \qquad k,\ n \in \mathbf{Z}.$$

1210. a) $f_1(x) = \cos x \rightarrow f_2(x) = -\cos x \rightarrow f_3(x) = -2\cos x \rightarrow f(x) = -2\cos 2x$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a koszinuszfüggvény grafikonjának tükrözése az x tengelyre, majd az ordináták nyújtása a kétszeresére, végül x tengely irányú felére zsugorítás.



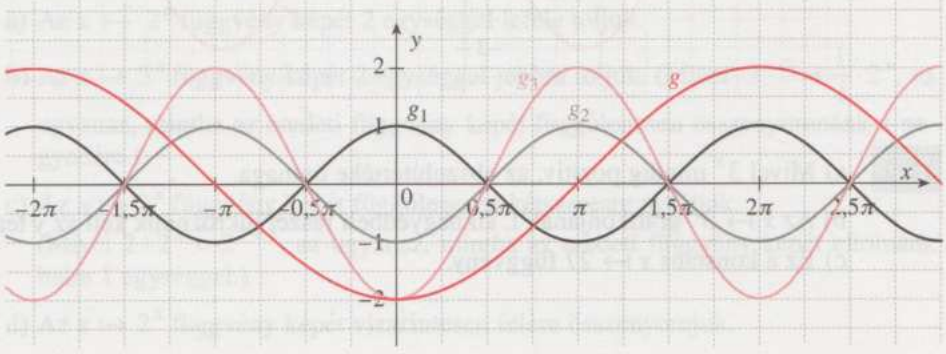
A $-2\cos 2x = -1$ egyenlet megoldásából megállapítható, hogy az f függvény hol veszi fel a -1 értéket. $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$$2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad \text{illetve} \qquad 2x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \text{illetve} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} + n\pi \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

b) $g_1(x) = \cos x \rightarrow g_2(x) = -\cos x \rightarrow g_3(x) = -2\cos x \rightarrow g(x) = -2\cos\frac{1}{2}x$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépések: a koszinuszfüggvény grafikonjának tükrözése az x tengelyre, majd az ordináták nyújtása kétszeresére, végül x tengely irányú kétszeresre való nyújtás.



A $-2\cos\frac{1}{2}x = -1$ egyenlet megoldásából megállapítható, hogy a g függvény a -1 értéket hol veszi fel. $\cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{1}{2}x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$;

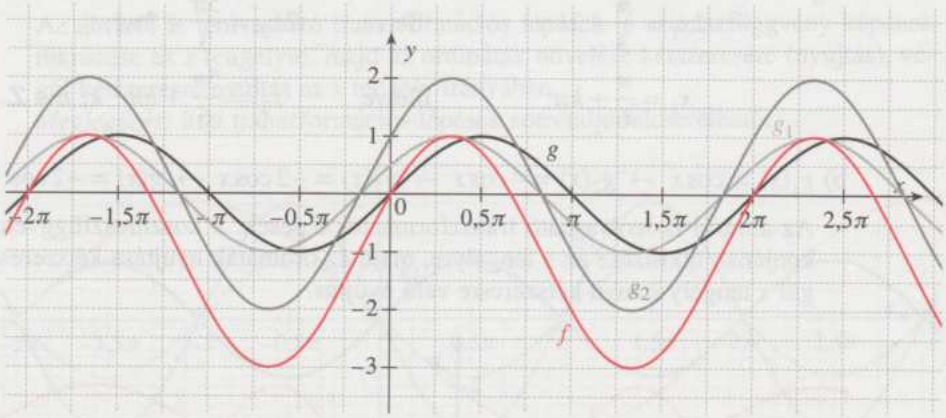
$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, illetve $x_2 = \frac{10\pi}{3} + 4n\pi$ $\quad k, n \in \mathbf{Z}$.

1211. $g(x) = \sin x$

$g_1(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; a g függvény grafikonját x tengely mentén $\frac{\pi}{6}$-tal balra toljuk.

$g_2(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; a g_1 függvény grafikonját y tengely mentén 2-szeresre nyújtjuk.

$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$; a g_2 függvény grafikonját y tengely mentén 1-gyel lefelé toljuk.

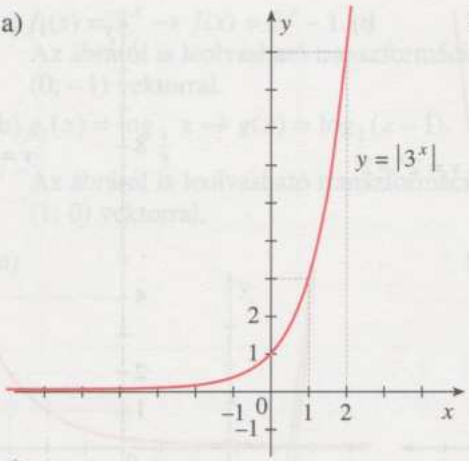


1212. a) Mivel 3^x mindig pozitív, az abszolútértéke önmaga.

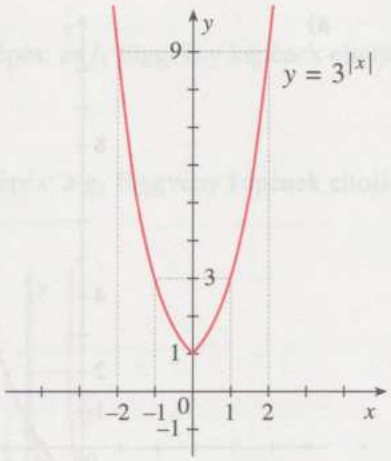
b) Az $x \mapsto 3^x$ grafikonjának I. síknegyedbeli részét tükröznünk kell az y tengelyre.

c) Ez a konstans $x \mapsto 27$ függvény.

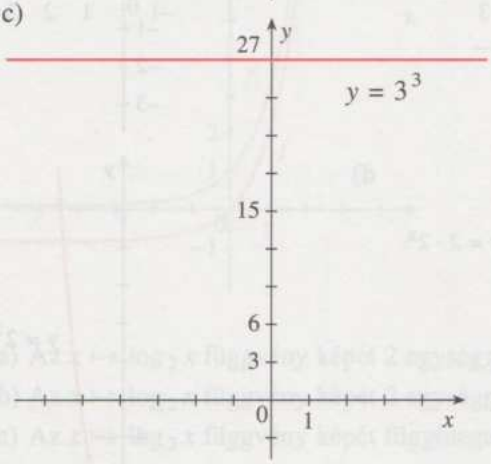
a)



b)



c)



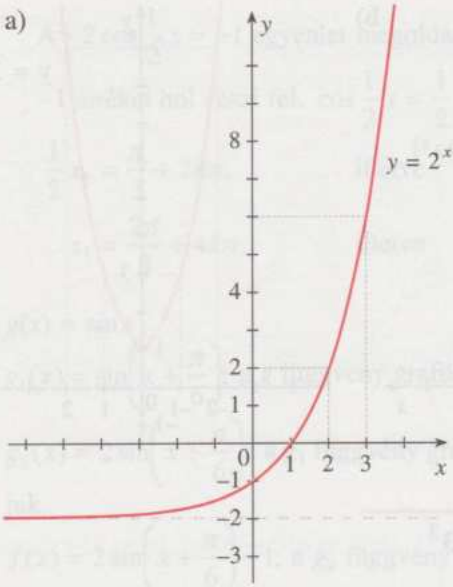
1213. a) Az $x \mapsto 2^x$ függvény képét 2 egységgel lefelé toljuk.

b) Az $x \mapsto 2^x$ függvény képét 2 egységgel jobbra toljuk. (Mivel $2^{x-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^x$, ez ugyanaz, mintha az eredeti függvény képét függőlegesen összenyomnánk a negyedére.)

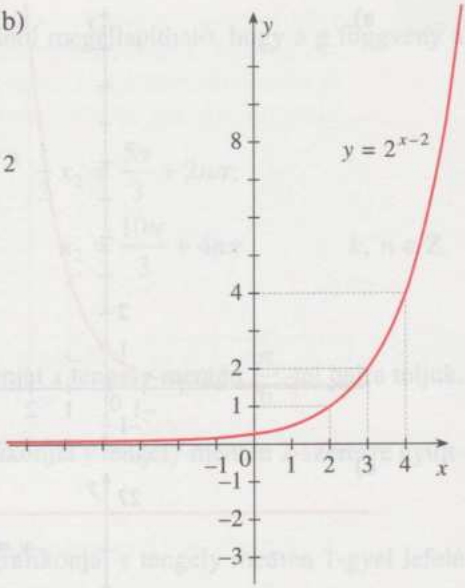
c) Az $x \mapsto 2^x$ függvény képét függőlegesen kétszeresre nyújtjuk.
(Mivel $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$, ez ugyanaz, mintha az eredeti függvény képét eltolnánk balra 1 egységgel.)

d) Az $x \mapsto 2^x$ függvény képét vízszintesen felére összenyomjuk.

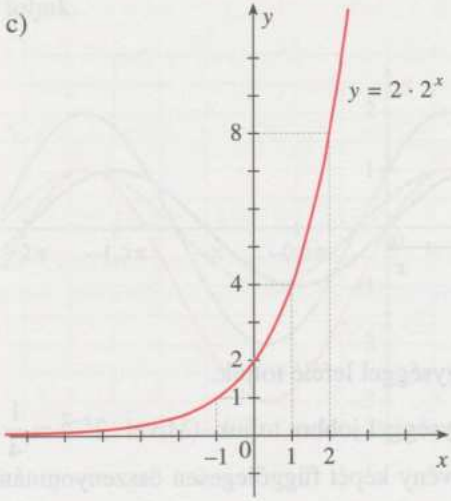
a)


y
x
y = 2^x − 2
8
4
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3

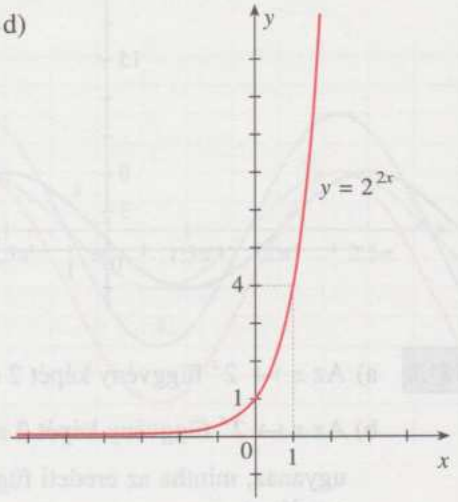
b)


y
x
y = 2^{x−2}
8
4
2
1
0
−1
−2
−3
−1
1
2
3
4

c)


y
x
y = 2 · 2^x
8
4
2
1
0
−1
1
2

d)


y
x
y = 2^{2x}
4
1
0
1

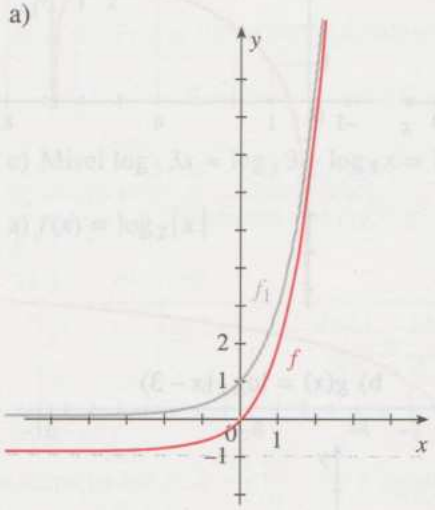
1214. a) $f_1(x) = 3^x \to f(x) = 3^x - 1$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépés: az f_1 függvény képének eltolása $(0; -1)$ vektorral.

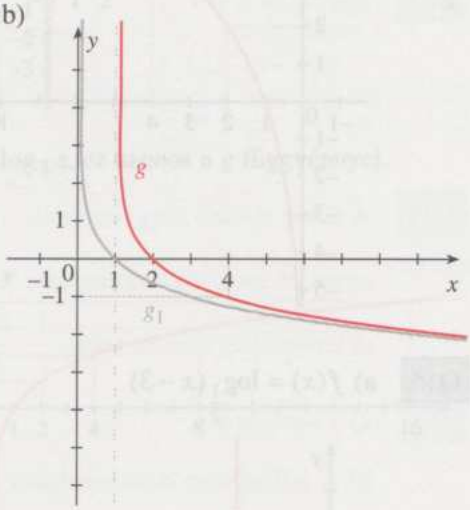
b) $g_1(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \to g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$.

Az ábráról is leolvasható transzformációs lépés: a g_1 függvény képének eltolása $(1; 0)$ vektorral.

a)



b)



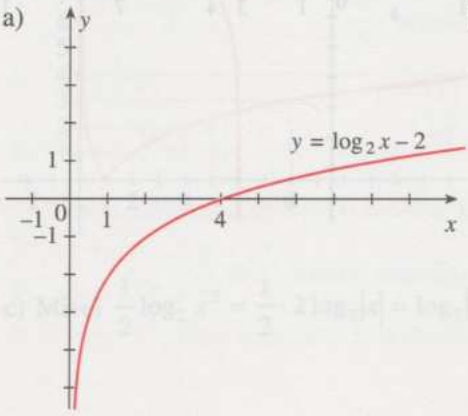
1215. a) Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény képét 2 egységgel lefelé toljuk.

b) Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény képét 2 egységgel jobbra toljuk.

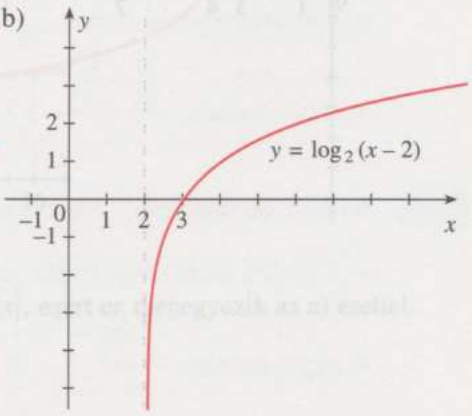
c) Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény képét függőlegesen kétszeresre nyújtjuk.

d) Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény képét vízszintesen félszeresre összenyomjuk.

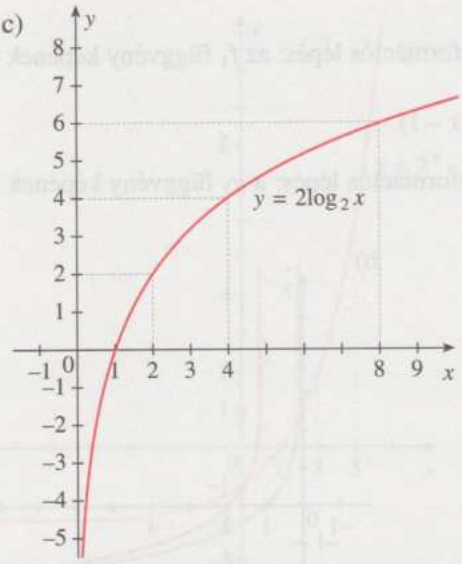
a)



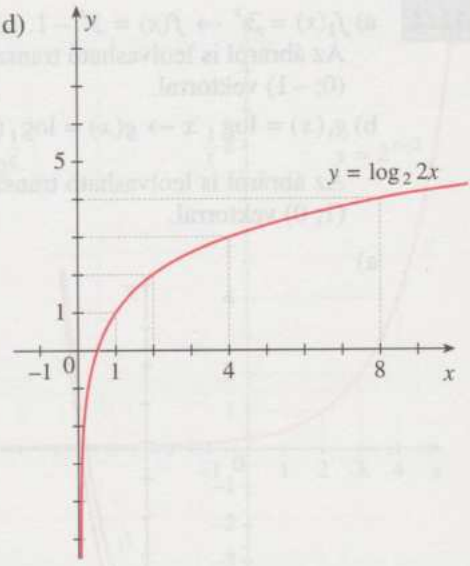
b)



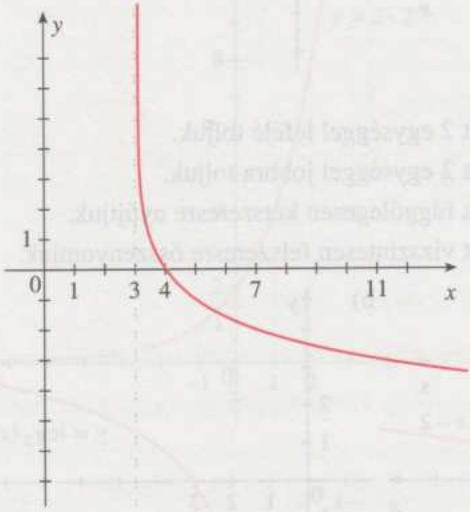
c)



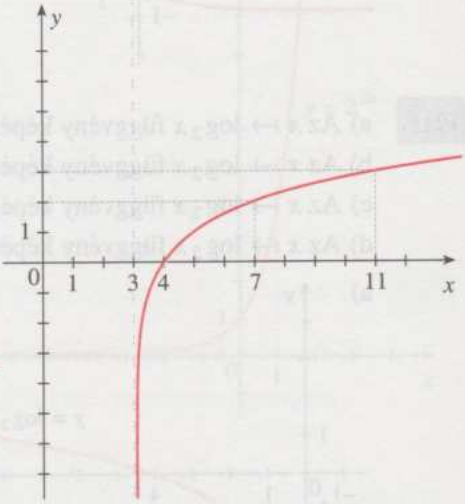
d)



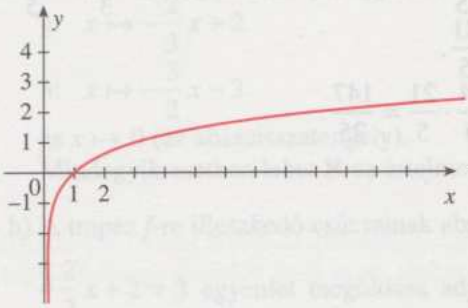
1216. a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$



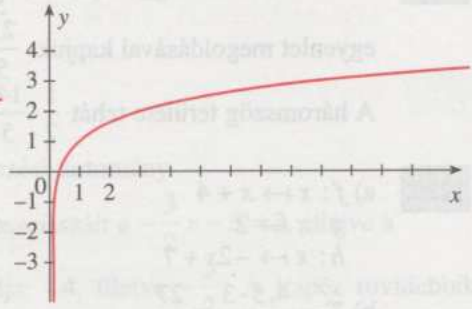
b) $g(x) = \log_2(x-3)$



1217. a) $f(x) = \log_3 x$

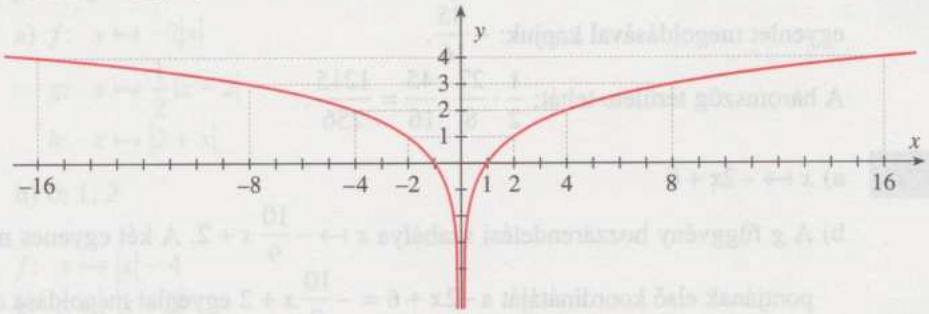


b) $g(x) = 1 + \log_3 x$

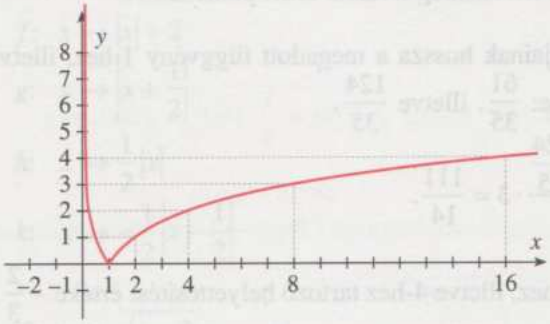


c) Mivel $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$, ez azonos a g függvénnyel.

1218. a) $f(x) = \log_2 |x|$



b) $g(x) = |\log_2 x|$



c) Mivel $\frac{1}{2}\log_2 x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\log_2|x| = \log_2|x|$, ezért ez megegyezik az a) esettel.

1219. A 0-hoz rendelt függvényérték $\frac{14}{5}$, a függvény zérushelyét a $-\frac{2}{3}x+\frac{14}{5}=0$ egyenlet megoldásával kapjuk: $\frac{21}{5}$.

A háromszög területe tehát $\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{21}{5}=\frac{147}{25}$.

1220. a) $f: x \mapsto x+4$
$g: x \mapsto 2$
$h: x \mapsto -2x+7$

b) $T=\frac{4{,}5\cdot 3}{2}=\frac{27}{4}$

1221. A 0-hoz rendelt függvényérték $-\frac{27}{8}$, a függvény zérushelyét a $-\frac{6}{5}x-\frac{27}{8}=0$ egyenlet megoldásával kapjuk: $-\frac{45}{16}$.

A háromszög területe tehát: $\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{8}\cdot\frac{45}{16}=\frac{1215}{256}$.

1222. a) $x \mapsto -2x+6$

b) A g függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto -\frac{10}{9}x+2$. A két egyenes metszéspontjának első koordinátáját a $-2x+6=-\frac{10}{9}x+2$ egyenlet megoldása adja: $\frac{9}{2}$.
Ez egyben a háromszög ordinátatengelyre illeszkedő, 4 hosszúságú oldalához tartozó magassága is. A háromszög területe ezért pontosan 9.

1223. A derékszögű trapéz alapjainak hossza a megadott függvény 1-hez, illetve 4-hez tartozó helyettesítési értéke: $\frac{61}{35}$, illetve $\frac{124}{35}$.

A trapéz területe: $\frac{\frac{61}{35}+\frac{124}{35}}{2}\cdot 3=\frac{111}{14}$.

1224. A megadott függvény -2-hez, illetve 4-hez tartozó helyettesítési értéke $-\frac{2}{3}$, illetve $-\frac{8}{3}$, tehát a derékszögű trapéz alapjainak hossza $\frac{2}{3}$ és $\frac{8}{3}$.

A trapéz területe: $\frac{\frac{2}{3}+\frac{8}{3}}{2}\cdot 6=10$.

1225. a) f: $x \mapsto 3$

g: $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 2$

h: $x \mapsto -\frac{3}{2}x - 3$

és $x \mapsto 0$ (az abszcisszatengely).

Mindegyik esetben lehet **R** az értelmezési tartomány.

b) A trapéz f-re illeszkedő csúcsainak abszcisszáit a $-\frac{3}{2}x - 3 = 3$, illetve a $-\frac{2}{3}x + 2 = 3$ egyenlet megoldása adja: -4, illetve $-\frac{3}{2}$. A trapéz rövidebbik alapja ezért $\frac{5}{2}$, területe tehát $\frac{5+\frac{5}{2}}{2} \cdot 3 = \frac{45}{4}$.

1226. a) f: $x \mapsto -2|x|$

g: $x \mapsto \frac{1}{2}|x-2|$

h: $x \mapsto |2+x|$

b) 0; 1; 2

1227. f: $x \mapsto |x| - 4$

g: $x \mapsto |x+2|$

h: $x \mapsto |x-3|$

1228. f: $x \mapsto |x| + 2$

g: $x \mapsto \left|x + \frac{1}{2}\right|$

h: $x \mapsto \frac{1}{2}|x|$

k: $x \mapsto -\frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{2}\right|$

1229. f: $x \mapsto \sqrt{x-3}$

g: $x \mapsto \sqrt{3+x}$

h: $x \mapsto \sqrt{x^2}$, mert minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $\sqrt{x^2} = |x|$.

1230. a) $f: x \mapsto |x|, \ x \in \mathbf{R}$

b) $g: x \mapsto |x+2|, \ x \in \mathbf{R}$

1231. a) $x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^2$

b) $\frac{1}{2} \cdot (-5)^2 = \frac{25}{2}$

c) A grafikonról leolvasható, hogy a -1-hez és az 5-höz rendel 4,5-et a függvény. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ezek valóban meg is felelnek.

Megjegyzés: algebrai úton az $\frac{1}{2}(x-2)^2 = 4{,}5$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg a keresett számokat.

1232. a) $x \mapsto 4 - x^2$

b) $4 - 4^2 = -12$

c) Az 1-hez és a -1-hez.

1233. $f: \ x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$

$g: \ x \mapsto \frac{1}{4}x^2$

1234. A grafikonok alapján megállapítható, hogy az f függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto (x-2)^2$, a g függvényé $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$.

$f\left(\frac{4}{3}\right) = g\left(\frac{4}{3}\right)$ és $f(4) = g(4)$.

Az értéktáblázat a g-hez tartozik, hiszen $g(100) = \frac{1}{4} \cdot 100^2 = 2500$, míg $f(100) = 98^2 = 9604$.

1235. A grafikonok alapján megállapítható, hogy az f függvény hozzárendelési szabálya $x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)^2$, a g függvényé $x \mapsto \frac{1}{8}x^2$.

$f(-2) = g(-2)$ és $f\left(-\frac{2}{3}\right) = g\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Az értéktáblázat az f-hez tartozik, hiszen $f(-101) = \frac{1}{2} \cdot 100^2 = 5000$, míg $g(-101) = \frac{1}{8} \cdot (-101)^2 = 1275{,}125$.

1236. a) $f\colon x \mapsto \left(\frac{5}{3}\right)^x$

$g\colon x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$h\colon x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^x$

b) $\left|5-\left(\frac{3}{2}\right)^4\right| = \left|5-\frac{81}{16}\right| = \frac{1}{16} = 0{,}063$

1237. $f\colon x \mapsto \left(\frac{5}{6}\right)^x$

$g\colon x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$h\colon x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1238. $f\colon x \mapsto 2^x$

$g\colon x \mapsto \frac{2}{x}$

$h\colon x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$

1239. $f\colon x \mapsto \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$g\colon x \mapsto \frac{1}{3}\cdot x^3$

$h\colon x \mapsto \frac{1}{3}\cdot 2^x$

1240. a) $f\colon x \mapsto \log_2 x$

$g\colon x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$h\colon x \mapsto -\frac{2}{x}$

b) $f(1) = 0$; $f\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

1241. a) $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$
$g\colon x \mapsto \sqrt[4]{x}$
$h\colon x \mapsto \lg x$

b) f és g zérushelye a 0, h zérushelye az 1.

1242. A függvény grafikonjának egyenlete $y^2 = 25 - x^2$, ahol $y \geq 0$.
Az egyenlet másképpen $x^2 + y^2 = 25$, ezért a grafikon egy origó középpontú, 5 egység sugarú félkör. A színezett terület tehát $\frac{25\pi}{2}$.

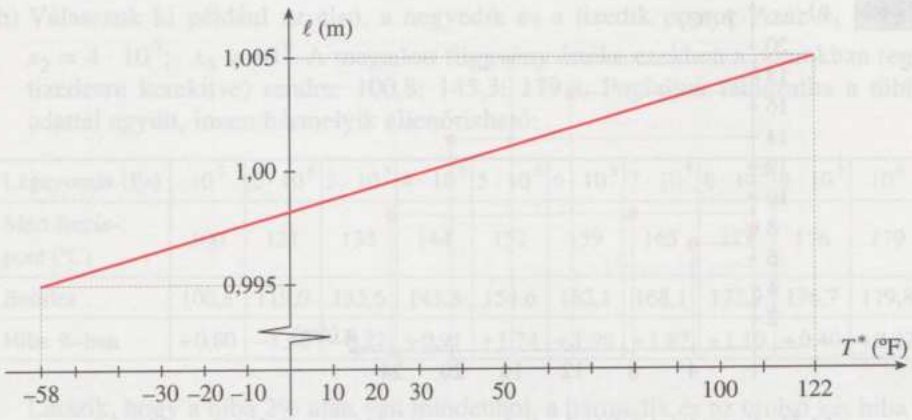
1243. a) $f\colon x \mapsto 3, \quad x \in \mathbf{R}$

b) $g\colon x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

1244. $f\colon x \mapsto 2\sin x$
$g\colon x \mapsto \cos 2x$
$h\colon x \mapsto \sin x - 2$

1245. $f\colon x \mapsto \cos x + 2$
$g\colon x \mapsto -2\cos x$
$h\colon x \mapsto \sin\frac{x}{2}$

1246. Ha áttérünk Fahrenheit-fokokra, akkor először nézzük meg a határokat:
$0\,°\text{C} = 32\,°\text{F}$ és $1\,°\text{C} = \frac{180\,°\text{F}}{100} = \frac{9\,°\text{F}}{5} = 1{,}8\,°\text{F}$.
Ekkor $-50\,°\text{C} = 32\,°\text{F} - 50 \cdot 1{,}8\,°\text{F} = -58\,°\text{F}$, míg $50\,°\text{C} = 122\,°\text{F}$.
Tehát a határok: $-58\,°\text{F} < T^* < 122\,°\text{F}$. Azt kell még megkeresni, hogy T^*-ból hogyan lehet megkapni T-t, mert azt kell beírni a képletbe. $T = \frac{T^* - 32}{1{,}8}$ lesz az átalakítási képlet, erre teljesül, hogy $T^* = 212\,°\text{F}$ esetén $T = 100\,°\text{C}$, és $T^* = 32\,°\text{F}$ esetén $T = 0\,°\text{C}$; mivel lineáris az összefüggés, csak ilyen alakú lehet. Ezzel a képlet (figyelembe véve, hogy $1{,}8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$, aminek a reciproka kell, mert a nevezőben van): $\ell(T^*) = \ell_0 + \frac{5\alpha \cdot \ell_0 \cdot (T^* - 32)}{9}$ alakú lesz. Beírva a megadott paramétereket: $\ell(T^*) = 1 + \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot (T^* - 32)}{9}$, ahol tehát T^* a Fahrenheitben mért hőmérsékletet jelenti.



1247. a) Az árkülönbözet $14{,}5 - 8 = 6{,}5$ millió Ft. Be kell fizetnünk 2000 Ft kezelési költséget, továbbá az első 4 millió után 2%-ot (ez újabb 80 000 Ft), valamint még a fennmaradó 2,5 millió után 6%-ot (ami 150 000 Ft). Így összesen 232 000 Ft lesz az átírás teljes költsége.

b) Az ábrázoláshoz vegyük figyelembe, hogy 8 millióig csak kezelési költség van, tehát 2000 Ft a fizetendő összeg. 8 milliótól 12 millióig:

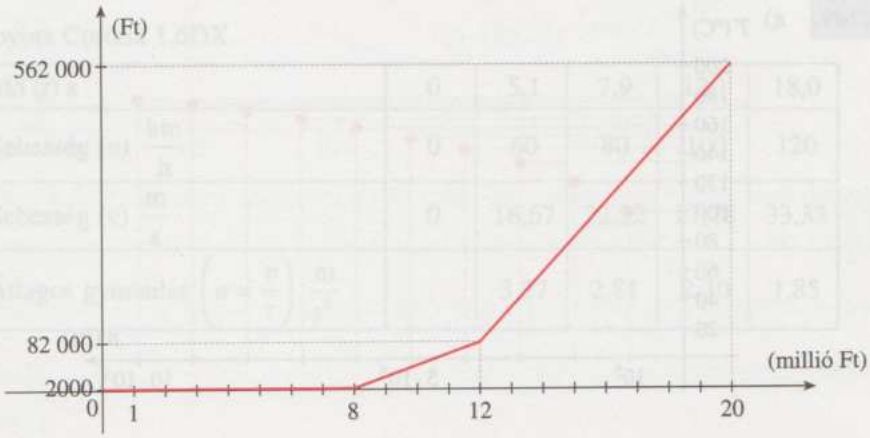
$2000 + (x - 8 \cdot 10^6) \cdot 0{,}02 = 0{,}02x - 158\,000$ fizetendő;

míg 12 milliótól a kért 20 millióig:

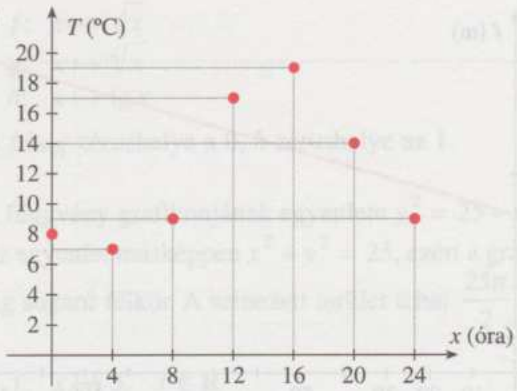
$2000 + 80\,000 + (x - 12 \cdot 10^6) \cdot 0{,}06 = 0{,}06x - 638\,000$.

Lásd a mellékelt grafikont!

$$i(x) = \begin{cases} 2000, \text{ ha } 0 \le x \le 8 \cdot 10^6 \\ 0{,}02x - 158\,000, \text{ ha } 8 \cdot 10^6 < x \le 1{,}2 \cdot 10^7 \\ 0{,}06x - 638\,000, \text{ ha } 1{,}2 \cdot 10^7 < x \le 2 \cdot 10^7 \end{cases}$$

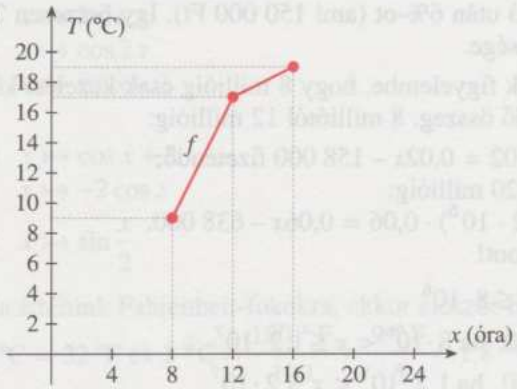


1248. a)

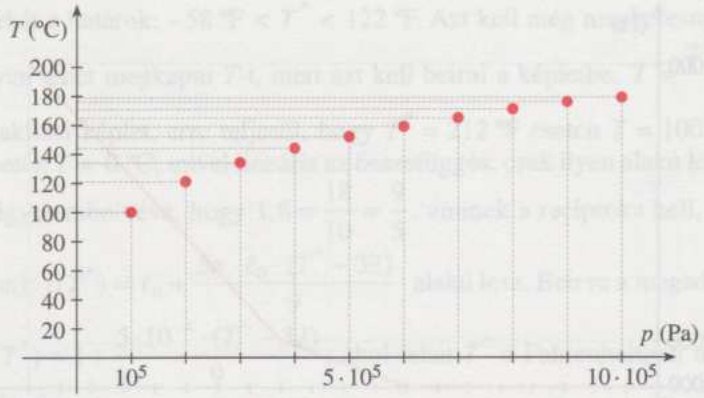


b) Ha linearitást feltételezünk az egyes időpontok között, akkor:
$f(t) = 9 + 2(t - 8)$, ha $8 \le t \le 12$,
$f(t) = 17 + 0{,}5(t - 12)$, ha $12 < t \le 16$.

c)



1249. a)

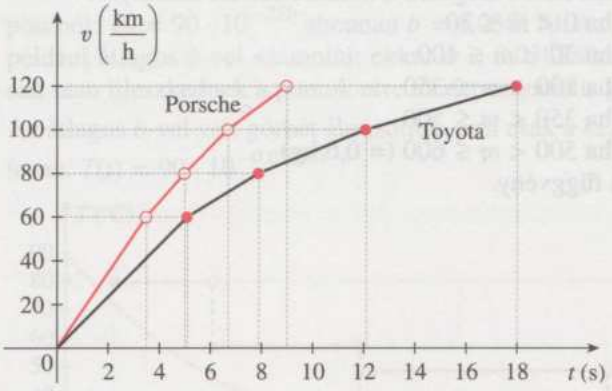


b) Válasszuk ki például az első, a negyedik és a tizedik pontot. Azaz $x_1 = 10^5$, $x_2 = 4 \cdot 10^5$; $x_3 = 10^6$. A megadott függvény értéke ezekben a pontokban (egy tizedesre kerekítve) rendre: 100,8; 145,3; 179,8. Foglaljuk táblázatba a többi adattal együtt, innen bármelyik ellenőrizhető:

Légnyomás (Pa)	10^5	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^5$	10^6
Mért forráspont (°C)	100	121	134	144	152	159	165	171	176	179
Becslés	100,8	119,0	133,6	145,3	154,6	162,1	168,1	172,9	176,7	179,8
Hiba %-ban	+0,80	−1,62	−0,27	+0,91	+1,74	+1,96	+1,87	+1,10	+0,40	+0,42

Látszik, hogy a hiba 2% alatt van mindenhol, a harmadik és az utolsó két hiba a legkisebb, a legnagyobb eltérés a $6 \cdot 10^5$ értéknél van, ahol majdnem 2%-ot elérő eltérés adódik. Mindenhol századszázalék pontossággal számoltunk.

1250. a)



b) Toyota Corolla 1,6DX

Idő (t) s	0	5,1	7,9	12,1	18,0
Sebesség (v) $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	0	60	80	100	120
Sebesség (v) $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	16,67	22,22	27,78	33,33
Átlagos gyorsulás $\left(a = \frac{v}{t}\right)$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$		3,27	2,81	2,30	1,85

Porsche 928S

Idő (t) s	0	3,5	5,0	6,7	9,0
Sebesség (v) $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	0	60	80	100	120
Sebesség (v) $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	16,67	22,22	27,78	33,33
Átlagos gyorsulás $\left(a = \frac{v}{t}\right)$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$		4,76	4,44	4,14	3,70

1251.

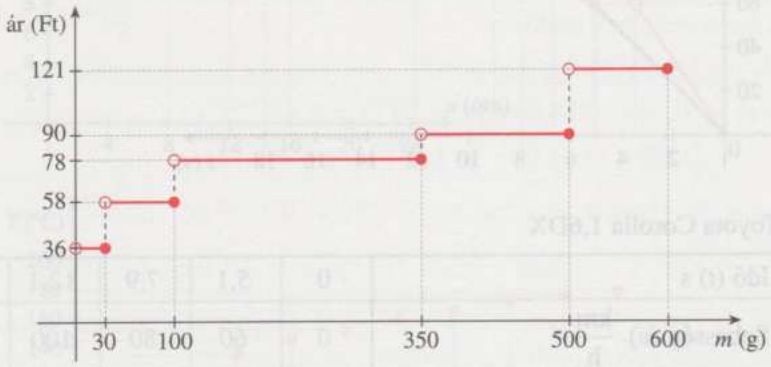
Tömegintervallum (g)	[0; 20]	]20; 100]	]100; 250]	]50; 1000]	]1000; ∞[
Ár (Ft)	36	240	550	2050	3130

1252. a) Öt szakaszon kell külön megadni a hozzárendelési szabályt.

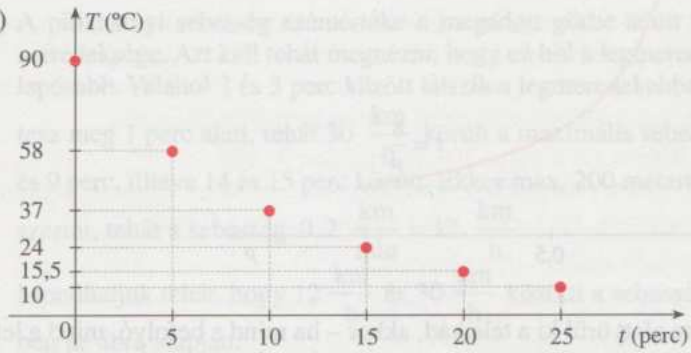
$$f(x) = \begin{cases} 36, \text{ ha } 0 < m \leq 30 \\ 58, \text{ ha } 30 < m \leq 100 \\ 78, \text{ ha } 100 < m \leq 350 \\ 90, \text{ ha } 350 < m \leq 500 \\ 121, \text{ ha } 500 < m \leq 600 \ (= 0{,}6 \text{ kg}) \end{cases}$$

Ez egy lépcsős függvény.

b)

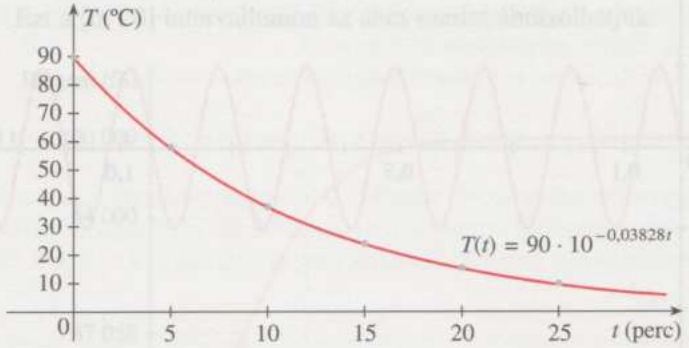


1253. a)

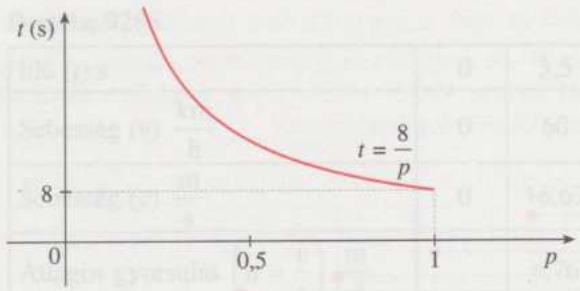


b) Az első pont alapján: $a = 90$, ebből és a második pontból $58 = 90 \cdot 10^{-5b}$, ahonnan $b \approx 0{,}038163$; a harmadik pont adatából: $37 = 90 \cdot 10^{-10b}$, ahonnan $b = 0{,}038604$; a negyedik pontból: $24 = 90 \cdot 10^{-15b}$ ahonnan $b = 0{,}038269$; az ötödik pontból: $15{,}5 = 90 \cdot 10^{-20b}$ ahonnan $b = 0{,}038196$; és végül a hatodik pontból: $10 = 90 \cdot 10^{-25b}$ ahonnan $b = 0{,}038170$. Az eltérő értékek miatt lehet például átlagos b-vel számolni: ekkor $b = 0{,}038280$ adódik – meglehet, pontosan nem illeszkednek a pontok erre az exponenciális görbére.

c) Az átlagos b-vel vett görbét ábrázoljuk, ami csak a kezdőpontra illeszkedik pontosan. $T(t) = 90 \cdot 10^{-0{,}03828t}$

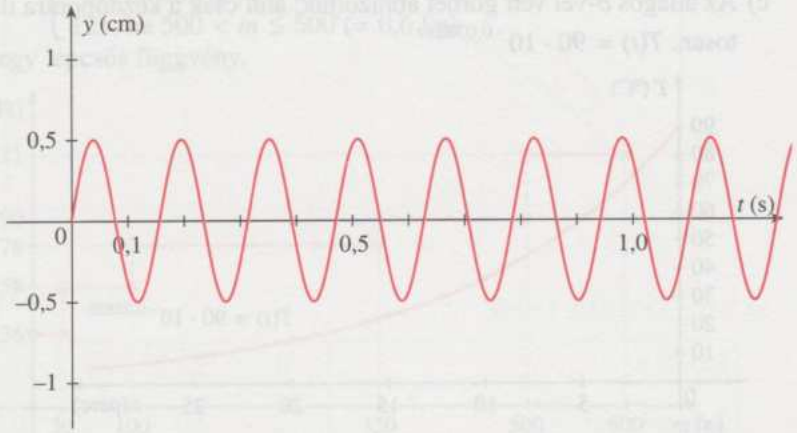


1254. a) Ha a befolyó p-szeres teljesítménnyel működik, akkor nem 8 perc alatt, hanem annál lassabban tölti meg a kádat. A maximális teljesítmény $\frac{1 \text{ kád}}{8 \text{ perc}}$. Ha a teljesítmény $\frac{p \text{ kád}}{8 \text{ perc}}$, akkor $\frac{8}{p}$ idő alatt telik meg a kád. Azaz a (0; 1] intervallumon értelmezett $p \mapsto \frac{8}{p}$ függvényt kell ábrázolni, amelynek a grafikonja egy hiperbola ív.



b) Ha 12 perc alatt ürül ki a tele kád, akkor – ha mind a befolyó, mind a lefolyó maximális kapacitással megy – 1 perc alatt $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$ része telik meg a kádnak, ami éppen $\frac{1}{24}$-ed rész. Tehát az üres kád – a befolyó és a lefolyó maximális kapacitású használata mellett – 24 perc alatt telik meg teljesen.

1255. Ha negyed annyira térítjük ki, akkor az új amplitúdó a megadott 2 cm-nek a negyede 0,5 cm. Ha a rugó négyszer olyan erős, azaz $D^* = 4D$, akkor az új $\omega^* = 2\omega$ lesz. Azaz a függvény periódusa a felére, lokális szélsőértékei a negyedére csökkennek.

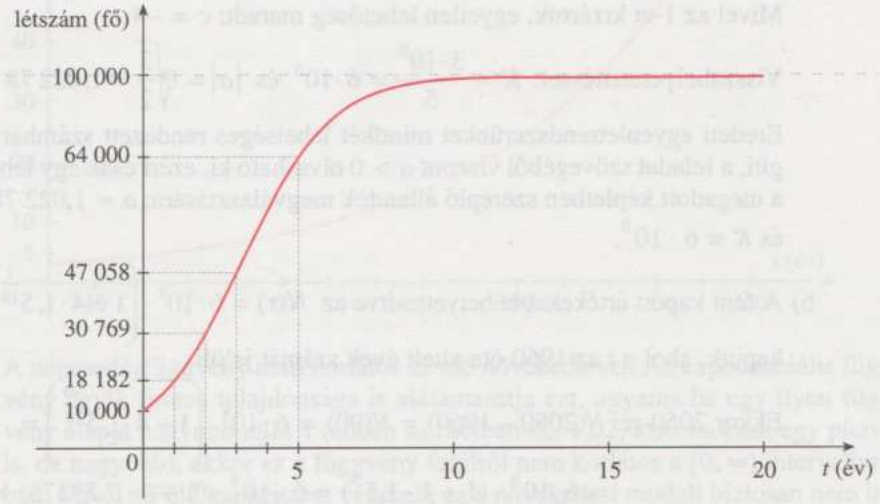


1256. a) Az ábráról leolvasható, hogy 15 perc alatt összesen 5 km-t tett meg a kerékpáros. Ekkor az átlagsebessége a teljes megtett út és a hozzá szükséges idő hányadosa, azaz $\frac{5}{0,25} = 20\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

b) A pillanatnyi sebesség számértéke a megadott görbe adott pontbeli érintőjének meredeksége. Azt kell tehát megnézni, hogy ez hol a legmeredekebb, illetve a leglaposabb. Valahol 2 és 3 perc között látszik a legmeredekebbnek. Ott kb. 0,5 km-t tesz meg 1 perc alatt, tehát 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ körüli a maximális sebesség. Leglaposabb 8 és 9 perc, illetve 14 és 15 perc között. Ekkor max. 200 métert tesz meg a grafikon szerint, tehát a sebesség $0,2\ \frac{\text{km}}{\text{min}} = 12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Mondhatjuk tehát, hogy 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ közötti a sebessége ebben a 15 percben az ábra alapján.

1257. a) Be kell helyettesíteni a megadott képletbe t helyére az 5, 10, 15 és 20 számokat, felhasználva, hogy $N_0 = 10\,000$; $K = 100\,000$ és $a = 0,5$.
Adódik: $N(5) = \frac{100000 \cdot 10000}{10000 + (100000 - 10000) \cdot 0,5^2} = 78\,049$, hasonlóan kapjuk: $N(10) = 99\,129$; $N(15) = 99\,973$ és $N(20) = 99\,999$ értékeket.
Látható, hogy gyorsan telítődik a létszám, a K az elérhető maximum, és ezt már kb. 20 év alatt el is éri a populáció létszáma.

b) Az ábrázolás előtt egyszerűsítsük a törtet 10 000-rel:
$N(t) = \frac{100000}{1 + (10 - 1) \cdot 0,5^t} = \frac{100000}{1 + 9 \cdot 2^{-t}} = 100000 \cdot \frac{2^t}{2^t + 9} = 100000 - \frac{900000}{2^t + 9}$.
Ezt a [0; 20] intervallumon az ábra szerint ábrázolhatjuk.



1258. a) Tekintsük 1960-at a vizsgálat kezdeti időpontjának, annak érdekében, hogy egyenleteink a legegyszerűbbek legyenek.
Ekkor rendre $t_1 = 0$, $t_2 = 1978 - 1960 = 18$, $t_3 = 1996 - 1960 = 36$ adódik, mely t értékekre felírva a modellt, három egyenletet kapunk:

(I) $N(0) = K(1 - c \cdot a^0) = K(1 - c) = 3 \cdot 10^9$,

itt a $c \neq 1$ kikötés megtehető, ellenkező esetben ez az egyenlet semmilyen K-ra nem teljesülhetne, hisz a bal oldal minden esetben 0 lenne,

(II) $N(18) = K(1 - c \cdot a^{18}) = 4{,}2 \cdot 10^9$

(III) $N(36) = K(1 - c \cdot a^{36}) = 6 \cdot 10^9$

I-ből $K = \frac{3 \cdot 10^9}{1 - c}$, amit a II-be és a III-ba beírva, majd a törtet eltávolítva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} 1 - ca^{18} &= 1{,}4(1 - c) \\ 1 - ca^{36} &= 2(1 - c) \end{aligned}\right\}; \text{ ez ekvivalens a } \left.\begin{aligned} ca^{18} &= 1{,}4c - 0{,}4 \\ ca^{36} &= 2c - 1 \end{aligned}\right\} \text{ egyenletrendszerrel.}$$

Az első egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, a második egyenlet mindkét oldalát c-vel megszorozva:

$$\left.\begin{aligned} c^2a^{36} &= 1{,}96c^2 - 1{,}12c + 0{,}16 \\ c^2a^{36} &= 2c^2 - c \end{aligned}\right\}, \text{ amiből a}$$

$2c^2 - c = 1{,}96c^2 - 1{,}12c + 0{,}16$ egyenlethez jutunk.

Ezt 0-ra rendezve, majd mindkét oldalt 0,04-dal elosztva a $c^2 + 3c - 4 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai az 1 és a -4.
Mivel az 1-et kizártuk, egyetlen lehetőség maradt: $c = -4$.

Visszahelyettesítéssel: $K = \frac{3 \cdot 10^9}{5} = 6 \cdot 10^8$ és $|a| = \sqrt[18]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}022\,78$ adódik.

Eredeti egyenletrendszerünket mindkét lehetséges rendezett számhármas kielégíti, a feladat szövegéből viszont $a > 0$ olvasható ki, ezért csak egy lehetőség van a megadott képletben szereplő állandók megválasztására: $a \approx 1{,}022\,78$, $c = -4$ és $K = 6 \cdot 10^8$.

b) A fent kapott értékeket behelyettesítve az $N(t) = 6 \cdot 10^8 \cdot \left(1 + 4 \cdot 1{,}5^{\frac{t}{18}}\right)$ képletet kapjuk, ahol a t az 1960 óta eltelt évek számát jelöli.

Ekkor 2050-re: $N(2050 - 1960) = N(90) = 6 \cdot 10^8 \cdot \left(1 + 4 \cdot 1{,}5^{\frac{90}{18}}\right) =$

$= 6 \cdot 10^8 \cdot (1 + 4 \cdot 1{,}5^5) = 6 \cdot 10^8 \cdot (1 + 4 \cdot 7{,}59375) =$

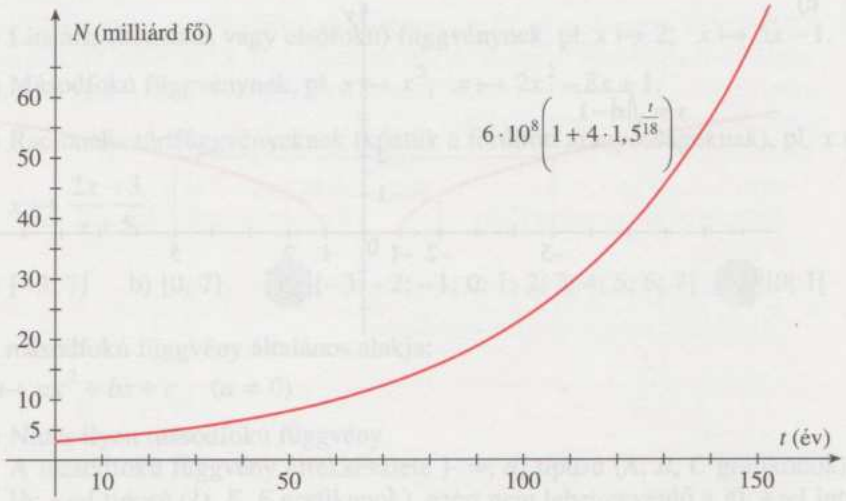
$= 6 \cdot 10^8 \cdot 31{,}375 = 188{,}25 \cdot 10^8 \approx 1{,}9 \cdot 10^{10}$ adódik.

2100-re pedig: $N(2100 - 1960) = N(140) = 6 \cdot 10^8 \cdot \left(1 + 4 \cdot 1{,}5^{\frac{140}{18}}\right) \approx$

$$\approx 6 \cdot 10^8 \cdot (1 + 4 \cdot 1{,}5^{7{,}8}) \approx 6 \cdot 10^8 \cdot (1 + 4 \cdot 23{,}42) \approx$$
$$\approx 6 \cdot 10^8 \cdot 94{,}68 \approx 568{,}1 \cdot 10^8 \approx 5{,}7 \cdot 10^{10}.$$

Megjegyzés:
A két időpontra tehát a modell 19, illetve 57 milliárdot jósol az emberiség létszámául. (Utóbbi majdnem 10-szerese az 1996-os értéknek. A pontosabb demográfiai számítások szerint ez nem valószínű.)

c) Az egyes lépéseket az áttekinthetőség miatt nem ábrázoltuk.
(1) $1{,}5^t$
(2) $1{,}5^{\frac{t}{18}}$
(3) $4 \cdot 1{,}5^{\frac{t}{18}}$
(4) $1 + 4 \cdot 1{,}5^{\frac{t}{18}}$



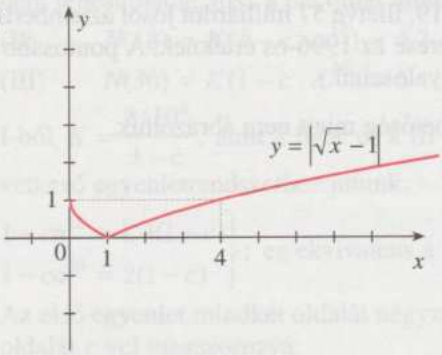
d) A népesedésfüggvény nem korlátos az idő növekedtével. Az exponenciális függvény egyik fontos tulajdonsága is alátámasztja ezt, ugyanis ha egy ilyen függvény alapja nagyobb mint 1 (ebben az esetben kb. 1,02; azaz ha csak egy picivel is, de nagyobb), akkor ez a függvény felülről nem korlátos a $[0; \infty)$ intervallumban. Mivel a Föld kapacitásai végesek, ez a növekedési modell biztosan nem írja le jól a népesség tényleges növekedését.

1259. a) A négyzetgyökfüggvény grafikonját 1 egységgel lejjebb toljuk ($\sqrt{x}-1$), majd e grafikon x tengely alatti részét tükrözzük az x tengelyre.

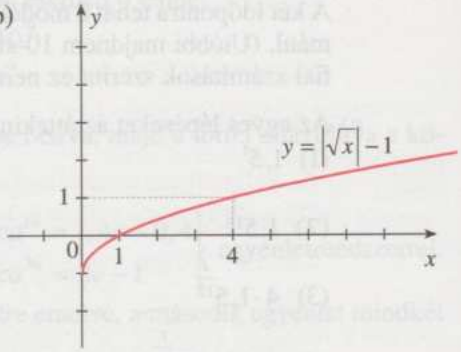
b) A $\sqrt{x}$ definíciója miatt ez ugyanaz, mint az $x \mapsto \sqrt{x}-1$ képe, lásd előző pont.

c) Az $x \mapsto \sqrt{x-1}$ grafikonját (ez a négyzetgyökfüggvény grafikonjának jobbra egy egységgel való eltolása) tükrözzük az y tengelyre.

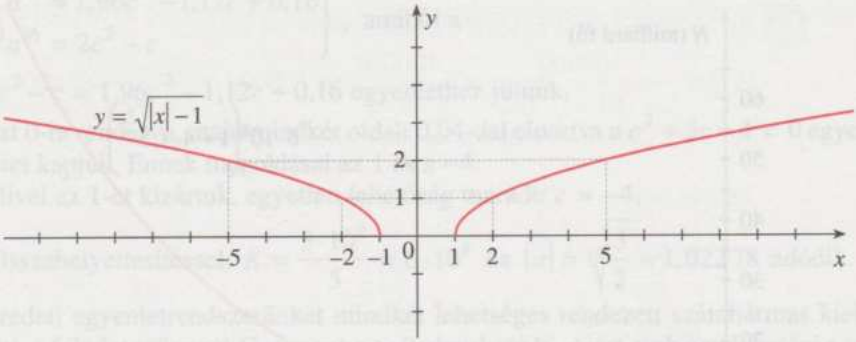
a)



b)



c)



3.3. Függvénytulajdonságok, -vizsgálat

1260. Az adott kifejezés minden valós számon értelmezhető. A függvény értékkészlete szintén **R**. A függvény páratlan, hiszen $\forall x \in D$-re $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.
A függvény zérushelyei az $x^3 - x = 0$ egyenletből,
szorzattá alakítás ($x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$) után: -1, 0 és 1.

1261. Táblázatba foglaljuk az értékpárokat.

szám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pozitív osztóinak száma	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

Ennek alapján

a) a függvény értékkészlete: {1; 2; 3; 4; 6};

b) a függvény minimuma 1, maximuma 6; minimumhelye 1, maximumhelye 12;

c) a függvénynek nincs zérushelye.

1262. a) Lineáris (konstans vagy elsőfokú) függvénynek, pl. $x \mapsto 2$; $x \mapsto 5x - 1$.

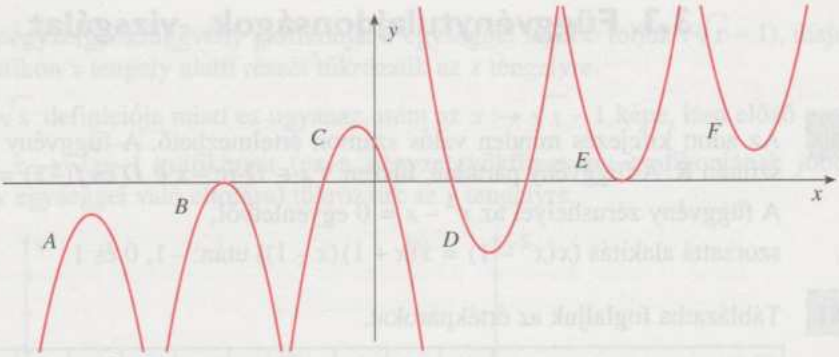
b) Másodfokú függvénynek, pl. $x \mapsto x^2$; $x \mapsto 2x^2 - 8x + 1$.

c) Racionális törtfüggvényeknek (köztük a fordított arányosságoknak), pl. $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{2x - 3}{x + 5}$.

1263. a) $[-3; 7]$ b) $[0; 7]$ c) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ d) $[0; 1[$

1264. A másodfokú függvény általános alakja:
$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

a) Nincs ilyen másodfokú függvény.
A másodfokú függvény értékkészlete $]-\infty; a]$ típusú (A, B, C grafikonok) vagy $[b; +\infty[$ típusú (D, E, F grafikonok), ezért nem lehet egyenlő a $]0; +\infty[$ intervallummal.



b) pl. $x \mapsto -x^2 + 4$ (C eset)

c) pl. $x \mapsto x^2 - 6$ (D eset)

1265. a) pl. $x \mapsto -2$ vagy $x \mapsto -x^2 - 1$

b) pl. $x \mapsto x^2$; vagy $x \mapsto (x-1)^4$

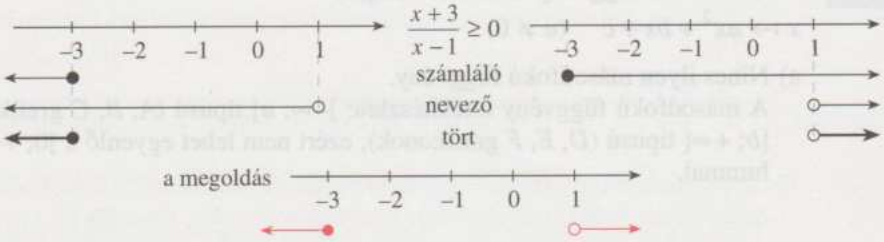
c) pl. $x \mapsto (x-3)^2 - 100$

1266. Értelmezési tartományok: A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya a nem negatív valós számok halmaza. A tört nevezője nem lehet nulla. Törtfüggvény akkor nem negatív, ha a nevező pozitív és a számláló nem negatív, vagy ha a nevező negatív és a számláló nem pozitív.

a) $x + 3 \le 0$ és $x - 1 < 0$, azaz $x \le -3$ és $x < 1$. Egyszerre akkor teljesül, ha $x \le -3$.
vagy
vagy $x + 3 \ge 0$ és $x - 1 > 0$, azaz $x \ge -3$ és $x > 1$ Egyszerre akkor teljesül, ha $x > 1$.

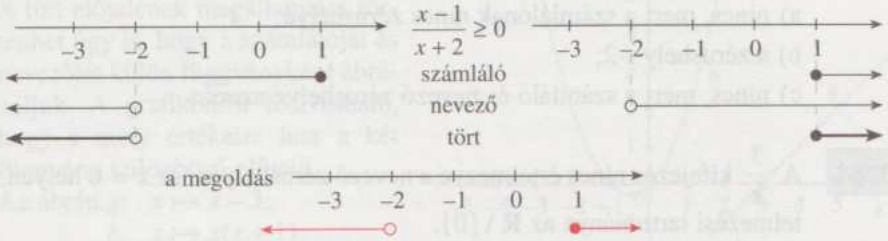
Tehát az értelmezési tartomány: $]-\infty; -3] \cup]1; +\infty[$

Mindezt számegyenesen szemléltetve:



b) $x - 1 \le 0$ és $x + 2 < 0$, azaz $x \le 1$ és $x < -2$. Egyszerre akkor teljesül, ha $x < -2$.
vagy
vagy $x - 1 \ge 0$ és $x + 2 > 0$, azaz: $x \ge 1$ és $x > -2$. Egyszerre akkor teljesül, ha: $x \ge 1$.
vagy

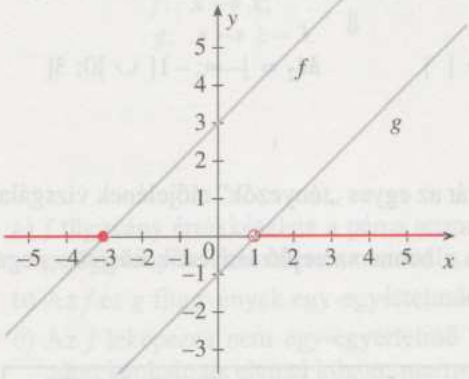
Az értelmezési tartomány tehát: $]-\infty; -2[\cup [1; +\infty[$



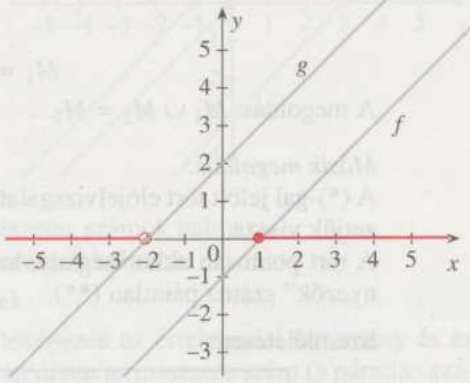
c) Az értelmezési tartomány: $]-1; +\infty[$.
Zérushelyek: a) -3; b) 1; c) nincs.

Megjegyzés:
A feladat megoldható úgy is, hogy a gyök alatti tört számlálóját és nevezőjét külön-külön függvényként ábrázoljuk. A képről leolvasható, hogy mely x értékekre lesz egyszerre pozitív, illetőleg mely x értékekre lesz egyszerre negatív. Ehhez még hozzá kell venni a számláló zérushelyét (ha az a nevezőnek nem zérushelye).

a) $\frac{x+3}{x-1} \geq 0$ $\quad f(x) = x+3$, $\quad g(x) = x-1$



b) $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ $\quad f(x) = x-1$, $\quad g(x) = x+2$



Az ábrákról leolvasható, hogy az értelmezési tartomány az a), illetve b) feladatban: $]-\infty; -3] \cup]1; +\infty[$, illetve $]-\infty; -2[\cup [1; +\infty[$.

1267. A négyzetgyökfüggvény a nem negatív számokra van értelmezve, a tört nevezője nem lehet nulla, a szinuszfüggvény minden valós számra, a logaritmusfüggvény csak a pozitív számokra értelmezett. Ezért az értelmezési tartományok:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0 \wedge x \neq 1\}$;

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}\}$;

c) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 1\}$.

A tört zérus, ha a számláló zérus, de a nevező nem, tehát a függvények zérushelyei:

a) nincs, mert a számlálónak nincs zérushelye;

b) a zérushely -2;

c) nincs, mert a számláló és nevező zérushelye azonos.

1268. A $\frac{3}{x}$ kifejezés nincs értelmezve a nevező zérushelyén, az $x = 0$ helyen, tehát az értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

A $\frac{4}{x+1}$ kifejezés nincs értelmezve a nevező zérushelyén, az $x = -1$ helyen, tehát az értelmezési tartomány az $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

A második kérdés megválaszolásához oldjuk meg a $\frac{3}{x} > \frac{4}{x+1}$ egyenlőtlenséget az $\mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$ alaphalmazon!

Ezt egy oldalra rendezzük és közös nevezőre hozzuk: $\frac{x-3}{x(x+1)} < 0$. *

A tört pontosan akkor negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

$$[x-3>0 \wedge x(x+1)<0] \vee [x-3<0 \wedge x(x+1)>0]$$

azaz

$$[x>3 \wedge -1<x<0] \vee [x<3 \wedge (x<-1 \vee 0<x)$$

$$\Downarrow$$

$$M_1 = \{\} \qquad M_2 =]-\infty; -1[\cup]0; 3[$$

A megoldás: $M_1 \cup M_2 = M_2$.

Másik megoldás:

A (*)-gal jelölt tört előjelvizsgálatát az egyes „tényezők" előjelének vizsgálatára vezetjük vissza.

A tört pontosan akkor negatív, ha a benne szereplő tényezők között a negatív „tényezők" száma páratlan (**).

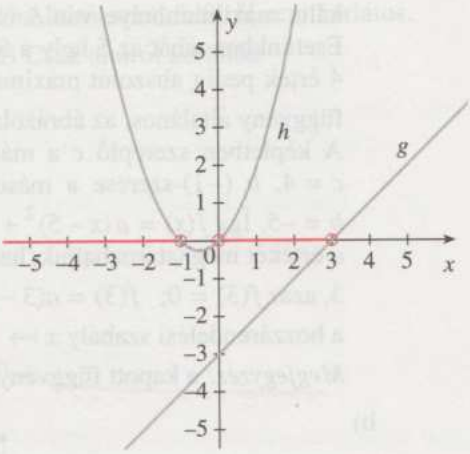
Szemléletesen:

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<3$	$3<x$
$x-3$	⊖	⊖	⊖	⊕
x	⊖	⊖	⊕	⊕
$x+1$	⊖	⊕	⊕	⊕
$\frac{x-3}{x(x+1)}$	⊖	⊕	⊖	⊕

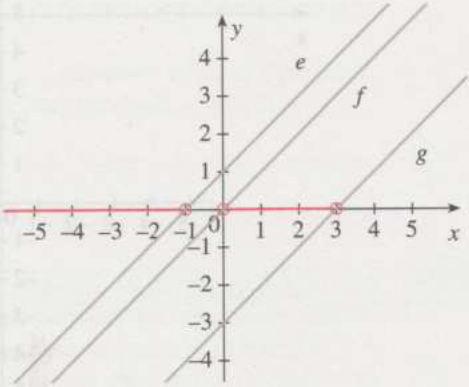
Tehát $\frac{x-3}{x(x+1)} < 0$, pontosan akkor, ha $x < -1$ vagy, ha $0 < x < 3$.

Grafikus megoldás:

1) A tört előjelének megállapítása történhet úgy is, hogy a számlálóját és nevezőjét külön függvényként ábrázoljuk. A grafikonról leolvasható, hogy x mely értékeire lesz a két függvény különböző előjelű.
Az ábrán g: $x \mapsto x-3$;
h: $x \mapsto x(x+1)$.



2) Ha a nevező két tényezőjét is külön függvénynek tekintjük, akkor a grafikon három, (jelen esetben párhuzamos) egyenesből áll. A leovasásra érvényes a **-gal jelölt mondat.
Az ábrán e: $x \mapsto x+1$;
f: $x \mapsto x$;
g: $x \mapsto x-3$.



1269. a) f függvény értékkészlete a páros természetes számok halmaza, g függvény értékkészlete a racionális számok halmaza.

b) Az f és g függvények egy-egyértelműek.

c) Az f leképezés nem egy-egyértelmű leképezés az értelmezési tartomány és az adott képhalmaz elemei között, mert van olyan természetes szám (a páratlan számok), amelynek a fele nem természetes szám.
A g leképezés egy-egyértelmű megfeleltetést ad meg az értelmezési tartomány és az adott képhalmaz elemei között, mert minden racionális szám kétszerese is racionális, különböző racionális számok kétszerese különböző, és a képhalmaz minden elemének van „őse" a racionális számok halmazában (azaz minden racionális szám fele is racionális).

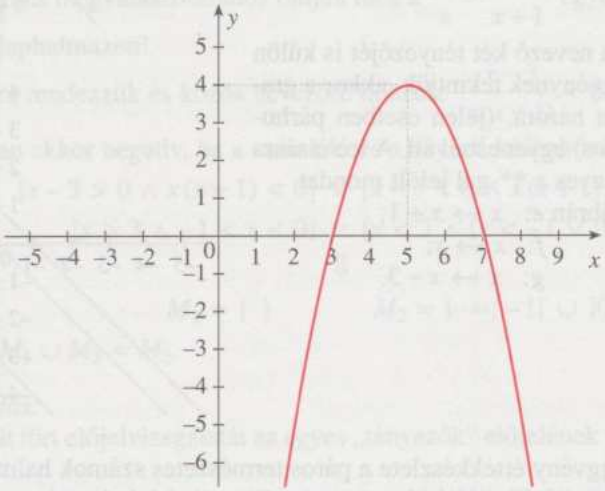
1270. a) A valós számok halmazán értelmezett folytonos függvényre igaz, hogy ha egy helyen monoton növőből monoton csökkenővé vált, akkor ott lokális maximumhelye van. Egy másodfokú függvény esetén pedig tudjuk, hogy legfeljebb egy lo-

kális maximumhelye van, amely, ha létezik, akkor abszolút maximumhely is. Esetünkben tehát az 5 hely a függvény abszolút maximumhelye, és az itt felvett 4 érték pedig abszolút maximuma. Tekintsük ezek után a másodfokú polinomfüggvény általános, az ábrázolást leginkább segítő képletét $f(x) = a(x + b)^2 + c$. A képletben szereplő c a másodfokú függvény szélsőértéke a feladat szerint $c = 4$. b (-1)-szerese a másodfokú függvény szélsőértékhelye, itt $-b = +5$, $b = -5$. Így $f(x) = a(x - 5)^2 + 4$.

a értékét meghatározhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a függvény zérushelye 3, azaz $f(3) = 0$; $f(3) = a(3 - 5)^2 + 4 = 0$, ahonnan $4a + 4 = 0$, $a = -1$. Tehát a hozzárendelési szabály $x \mapsto -(x - 5)^2 + 4$.

Megjegyzés: a kapott függvénynek valóban maximuma van az 5 helyen ($a < 0$).

b)



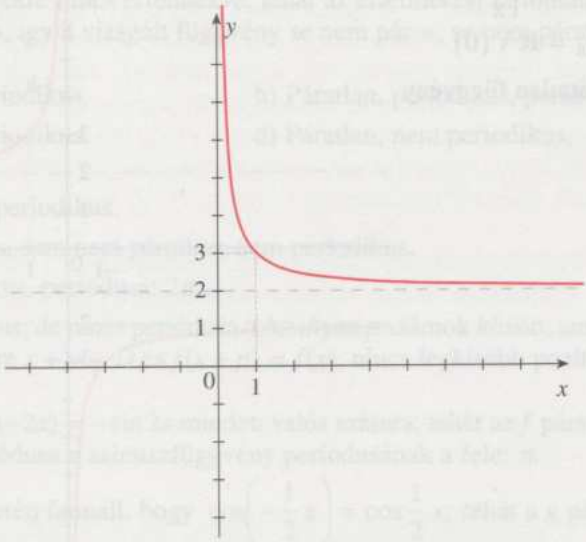
1271. Ha egy függvény grafikonjának meredeksége mindig 3, akkor az azt jelenti, hogy lineáris, és $f: x \mapsto 3x + a$ alakú a hozzárendelési szabálya. A második és harmadik megkötés alapján az értelmezési tartománya jól behatárolható, azaz az $\mathbf{R}^+$ halmaz lesz az. Mivel egy állandó pozitív meredekségű függvényről van szó, ezért ez szigorúan monoton növő. Ebből következik, hogy az értelmezési tartomány legkisebb eleme (ha van ilyen) lesz a függvény minimumhelye. Mivel az $\mathbf{R}^+$ halmaz balról nyílt, azaz a 0 nem eleme, de minden nála nagyobb valós szám igen, nem létezhet legkisebb függvényérték, azaz a feladatnak nincs a feltételeknek eleget tevő megoldása.

1272. a) Alulról sem, felülről sem korlátos. b) Csak alulról korlátos.
c) Alulról sem, felülről sem korlátos. d) Csak alulról korlátos.

1273. a) Csak alulról korlátos.
b) Alulról sem, felülről sem korlátos.
c) Korlátos.
d) Csak alulról korlátos.

1274. $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

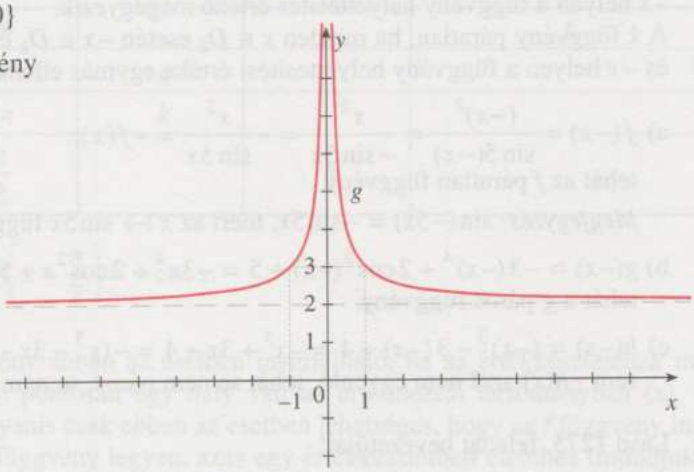
$D_f := \mathbf{R}^+$



a) $g(x) = \frac{1}{|x|} + 2$

$D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

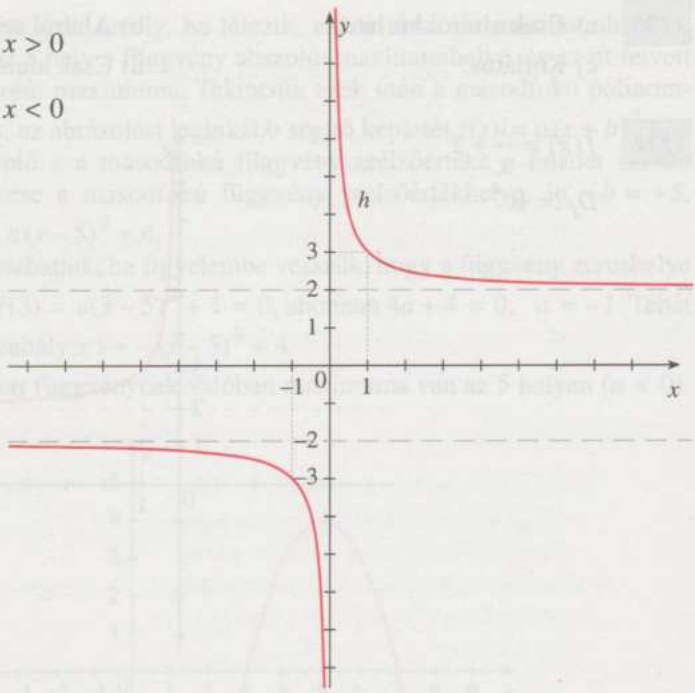
Páros függvény



b) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2, \text{ ha } x > 0 \\ \frac{1}{x} - 2, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$

$D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Páratlan függvény



1275. A k függvény páros, ha minden $x \in D_k$ esetén $-x \in D_k$, és $k(x) = k(-x)$, azaz x és $-x$ helyen a függvény helyettesítés értéke megegyezik.
A k függvény páratlan, ha minden $x \in D_k$ esetén $-x \in D_k$ és $k(-x) = -k(x)$, azaz x és $-x$ helyen a függvény helyettesítési értéke egymás ellentettje.

a) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin 5(-x)} = \frac{x^2}{-\sin 5x} = -\frac{x^2}{\sin 5x} = -f(x)$,
tehát az f páratlan függvény.

Megjegyzés: $\sin(-5x) = -\sin 5x$, mert az $x \mapsto \sin 5x$ függvény páratlan.

b) $g(-x) = -3(-x)^4 + 2\cos^2(-x) + 5 = -3x^4 + 2\cos^2 x + 5 = g(x)$,
tehát a g páros függvény.

c) $h(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 4 = -x^3 + 3x + 4 = -(x^3 - 3x - 4)$, és ez sem $h(x)$-szel, sem $-h(x)$-szel nem egyenlő, tehát se nem páros, se nem páratlan függvény.

1276. Lásd 1275. feladat bevezetőjét!

a) $f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{\sin 3(-x)} = \frac{(-\sin x)^2}{-\sin 3x} = -\frac{\sin^2 x}{\sin 3x} = -f(x)$,
tehát az f páratlan függvény.

b) $g(-x) = \sin^2(-x) - 3(-x)^6 + 2 = (-\sin x)^2 - 3x^6 + 2 = g(x)$, tehát a g páros függvény.

c) $\sqrt{x^3}$ negatív x-ekre nincs értelmezve, tehát az értelmezési tartomány nem szimmetrikus a 0-ra, így a vizsgált függvény se nem páros, se nem páratlan.

1277. a) Páros, nem periodikus.

b) Páratlan, periodikus, periódusa: 2π.

c) Páros, nem periodikus.

d) Páratlan, nem periodikus.

1278. a) Páratlan, nem periodikus.

b) Sem nem páros, sem nem páratlan; nem periodikus.

c) Páros, periodikus, periódusa: 2π.

d) Páros, periodikus, de nincs periódusa. (Az olyan p számok között, amelyekre igaz, hogy $\forall x \in D$-re $x + p \in D$ és $f(x + p) = f(x)$, nincs legkisebb pozitív!)

1279. Fennáll, hogy $\sin(-2x) = -\sin 2x$ minden valós számra, tehát az f páratlan.
f periodikus, periódusa a szinuszfüggvény periódusának a fele: π.

Minden $x \in \mathbf{R}$ esetén fennáll, hogy $\cos\left(-\frac{1}{2}x\right) = \cos\frac{1}{2}x$, tehát a g páros.

g periodikus, periódusa a koszinuszfüggvény periódusának kétszerese: 4π.

1280.

	periódus	páros	páratlan	nem páros és nem páratlan
f	4π			f
g	π	g		
k	2π	k		
h	$\frac{\pi}{2}$		h	

Megjegyzés: $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

1281. a) Egy f függvény abban az esetben invertálható, ha az értékkészletének minden eleméhez (y) pontosan egy hely van az értelmezési tartományban (x), amire $f(x) = y$. Ugyanis csak ebben az esetben lehetséges, hogy az f függvény inverze, mondjuk g, függvény legyen, azaz egy értékkészletbeli elemhez (mondjuk y) az értelmezési tartományból csak egy elemet rendeljen hozzá (jelen esetben $g(y) = x$). Ha f páros és értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, akkor mondjuk $f(1)$ létezik és egyenlő $f(-1)$-gyel. Azaz van legalább 2 eleme az értelmezési tartománynak, amire a függvény értéke egyenlő, amiből következik, hogy nem invertálható.

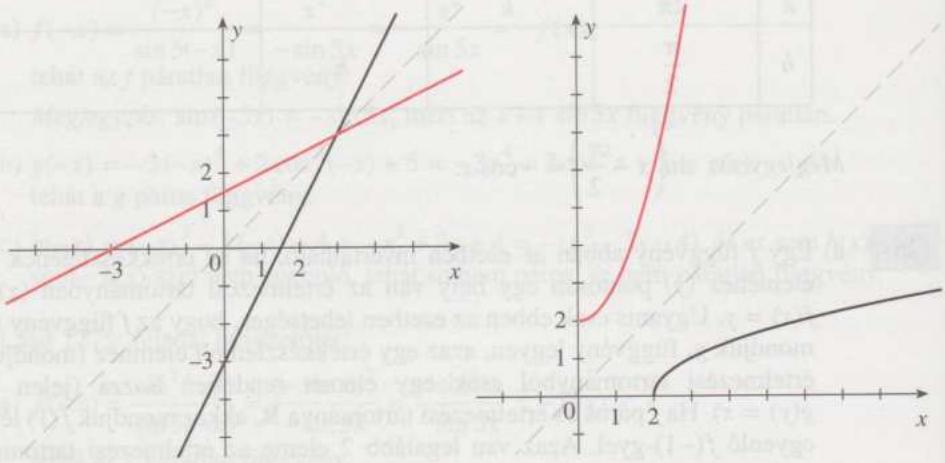
b) Mivel az f függvénynek van abszolút minimuma, ezért van olyan hely – az abszolút minimumhely, nevezzük ezt a-nak –, melyre az $f(a)$ kisebb vagy egyenlő $f(x)$-nél az összes $x \in \mathbf{R}$-re. Mivel f páratlan, ezért értelmezési tartományának minden elemére – és így a-ra is – igaz, hogy $f(a) = -f(-a)$. Vegyük észre, hogy $-a$ abszolút maximumhelye lesz az f-nek. Indirekt módon legegyszerűbb ezt belátni, ugyanis tegyük fel, hogy nem az, azaz létezik olyan $x \in \mathbf{R}$, amire $f(x) > f(-a)$, amiből az is következik, hogy $-f(x) < -f(-a)$. Ekkor az f páratlansága miatt $f(a) = -f(-a) > -f(x) = f(-x)$ teljesülne, ami viszont ellentmond annak, hogy a abszolút minimumhely, ami az alapfeltevésünk volt. Tehát ekkor létezik abszolút maximum is és értéke $f(-a)$ lesz.

1282. Egy ilyen függvény lehet periodikus, hiszen például a szinuszfüggvény teljesíti a kívánt feltételeket, hiszen minden valós számra értelmezve van, páratlan függvény, van maximuma (1) és minimuma (–1), illetve periodikus, azaz $\sin x = \sin(x + 2\pi)$, minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

1283. Az a), c) és d) kölcsönösen egyértelmű, a b) nem. Utóbbi végtelen sok értéket kétszer is felvesz, a többi három egyet sem, mert mindegyikük szigorúan monoton.

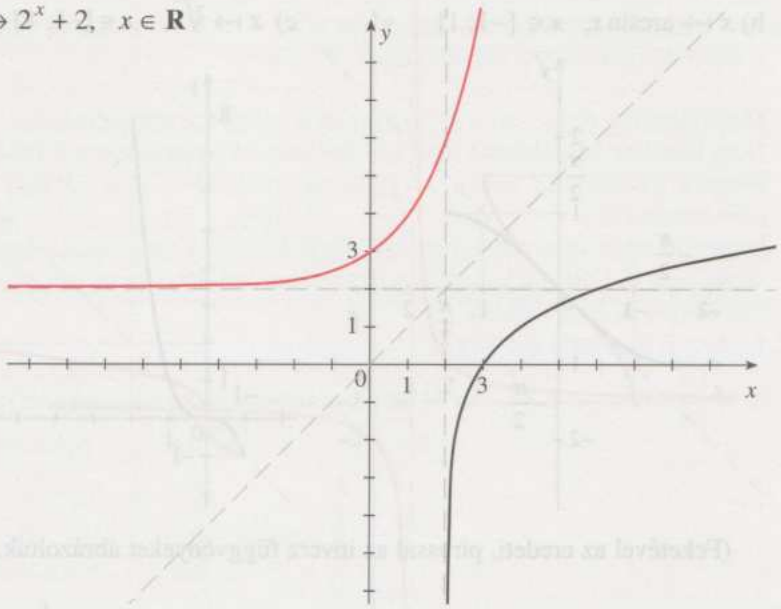
1284. Egyedül a b) kölcsönösen egyértelmű, a többi nem az. Egy másodfokú függvény (a)) végtelen sok értéket kétszer is felvesz, egy trigonometrikus (c), d)) pedig minden felvett értéket végtelen sokszor felvesz, hiszen periodikus. A racionális törtfüggvény (b)) azonban – bár két külön szakaszon – szigorúan monoton, és egyes részeinek értékei között sincs azonos.

1285. a) $x \mapsto \dfrac{x+3}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ b) $x \mapsto x^2 + 2$, $x \in [0; \infty[$



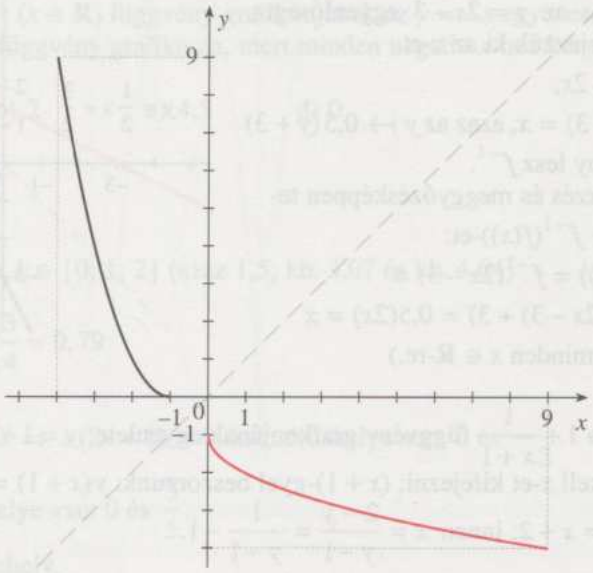
(Feketével az eredeti, pirossal az inverz függvényeket ábrázoltuk.)

c) $x \mapsto 2^x + 2, \quad x \in \mathbf{R}$



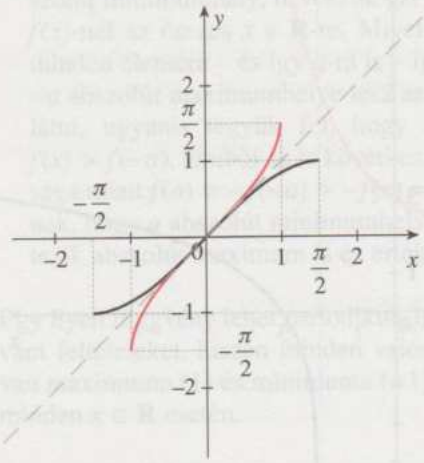
(Feketével az eredeti, pirossal az inverz függvényt ábrázoltuk.)

1286. a) $x \mapsto -\sqrt{x} - 1, \quad x \in [0; 9]$

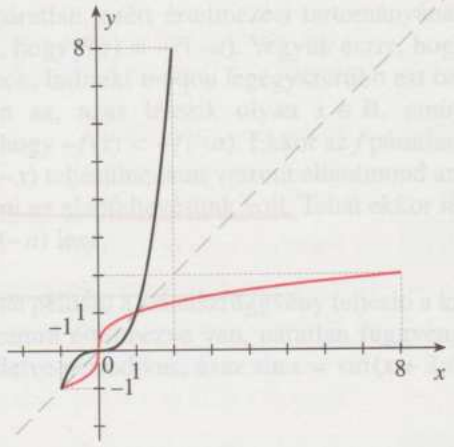


(Feketével az eredeti, pirossal az inverz függvényt ábrázoltuk.)

b) $x \mapsto \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$



c) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1; 8]$



(Feketével az eredeti, pirossal az inverz függvényeket ábrázoltuk.)

1287. Nevezzük f-nek az $x \mapsto 2x - 3$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényt és jelöljük f^{-1}-gyel a keresett inverz függvényt. Ekkor teljesülnie kell minden $y = 2x - 3$ ($y \in \mathbf{R}$) értékre, hogy $f^{-1}(y) = x$.
Tekintve az $y = 2x - 3$ egyenlőséget, abból fejezzük ki az x-et:

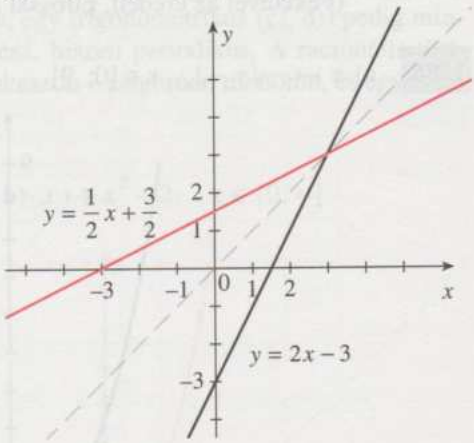
$y + 3 = 2x$,

$0{,}5(y + 3) = x$, azaz az $y \mapsto 0{,}5(y + 3)$ függvény lesz f^{-1}.
(Ellenőrzés és meggyőzésképpen tekintsük $f^{-1}(f(x))$-et:

$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 3) =$

$= 0{,}5((2x - 3) + 3) = 0{,}5(2x) = x$

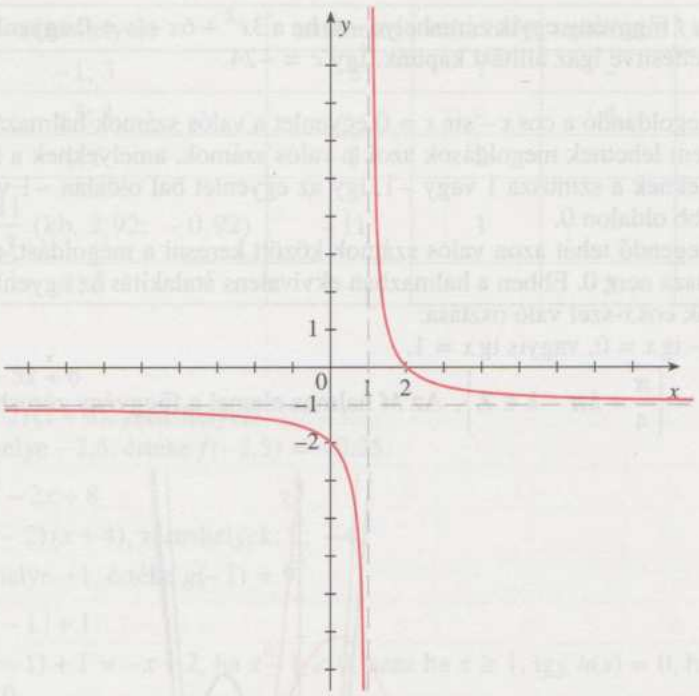
adódik minden $x \in \mathbf{R}$-re.)



1288. Az $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x+1}$ függvény grafkonjának egyenlete: $y = 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
Ebből kell x-et kifejezni; $(x + 1)$-gyel beszorzunk: $y(x + 1) = x + 1 + 1$.

$yx + y = x + 2$; innen $x = \dfrac{2 - y}{y - 1} = \dfrac{1}{y - 1} - 1$.

Az inverz függvény tehát: $x \mapsto \dfrac{1}{x - 1} - 1$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{1\})$.



1289. Az $f(x) = |x|$, $(x \in \mathbf{R})$ függvény grafikonjának az $y = -x$ egyenesre vonatkozó tükörképe nem függvény grafikonja, mert minden negatív x-hez két y érték tartozik.

1290. a) 1,5 b) 2 c) 4,5 d) 0

1291. a) 1,5

b) 0,125

c) $1{,}5 + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \{0; 1; 2\}$ (azaz 1,5; kb. 3,07 és kb. 4,64)

d) $\log_4 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 4} \approx 0{,}79$

1292. a) $2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x + 1) = 0$, két zérushelye van: 0 és $-\dfrac{1}{2}$.

b) Két zérushelye van: 0 és $\dfrac{3}{5}$.

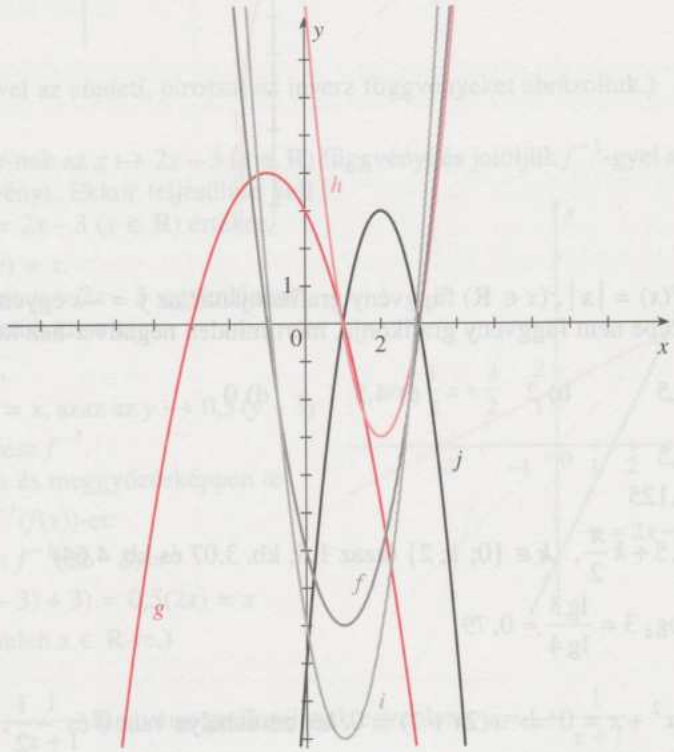
c) Nincs zérushely.

d) Két zérushelye van: 2 és -2.

1293. Az f függvény egyik zérushelye -4, ha a $3x^2 + 6x + c = 0$ egyenletbe $x = -4$-et helyettesítve igaz állítást kapunk. Így $c = -24$.

1294. Megoldandó a $\cos x - \sin x = 0$ egyenlet a valós számok halmazán.
Nem lehetnek megoldások azok a valós számok, amelyeknek a koszinusza 0, mert ezeknek a szinusza 1 vagy -1, így az egyenlet bal oldalán -1 vagy 1 állna, míg a jobb oldalon 0.
Elegendő tehát azon valós számok között keresni a megoldást, amelyeknek koszinusza nem 0. Ebben a halmazban ekvivalens átalakítás az egyenlet mindkét oldalának $\cos x$-szel való osztása:
$1 - \operatorname{tg} x = 0$, vagyis $\operatorname{tg} x = 1$.
$M = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z}\right\}$. Az M halmaz elemei a függvény zérushelyei.

1295.



A zérushelyeket a másodfokú egyenlet megoldóképletével kapjuk. A szélsőértéket és -helyet teljes négyzetté kiegészítés módszerével kapjuk, pl. f esetén: $2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2((x-1)^2 - 1 - 3) = 2(x-1)^2 - 8$, a többinél hasonlóan. Azt pedig, hogy a szélsőérték minimum vagy maximum, a négyzetes tag előjele dönti el.

	zérushelyek	minimum	min. hely	maximum	max. hely
f	$-1;\ 3$	-8	1	–	–
g	$-3;\ 1$	–	–	4	-1
h	$1;\ 3$	-3	2	–	–
i	$1 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}$ (kb. 2,92; $-0,92$)	-11	1	–	–
j	$1;\ 3$	–	–	3	2

1296. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

$f(x) = (x + 2)(x + 3)$, zérushelyek: -2; -3.

Minimumhelye $-2,5$, értéke $f(-2,5) = -0,25$.

$g(x) = -x^2 - 2x + 8$

$g(x) = -(x - 2)(x + 4)$, zérushelyek: 2; -4.

Maximumhelye -1, értéke $g(-1) = 9$.

$h(x) = -|x - 1| + 1$

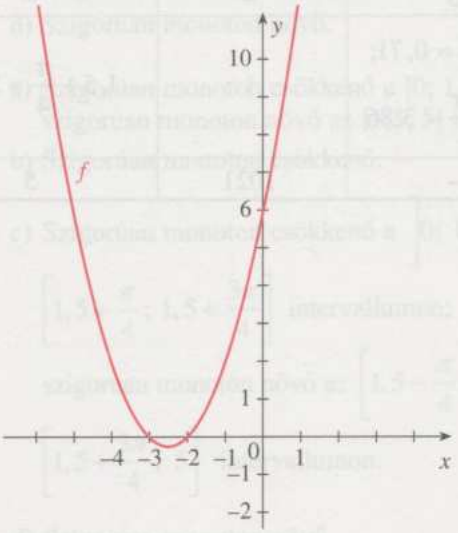
$h(x) = -(x - 1) + 1 = -x + 2$, ha $x - 1 \geq 0$, azaz ha $x \geq 1$, így $h(x) = 0$, ha $x = 2$.

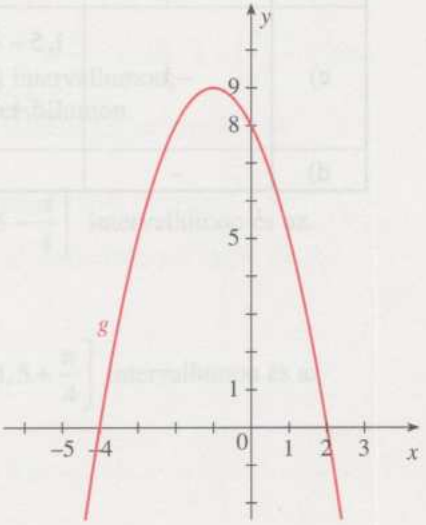
Így $h(2) = 0$.

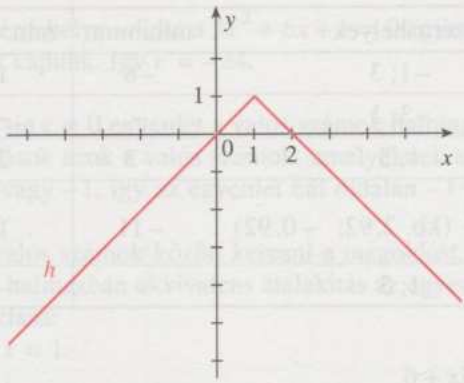
$h(x) = x - 1 + 1 = x$, ha $x - 1 < 0$, azaz ha $x < 1$, így $h(x) = 0$, ha $x = 0$.

Így $h(0) = 0$.

h maximumhelye 1 és értéke $h(1) = 1$.







1297.

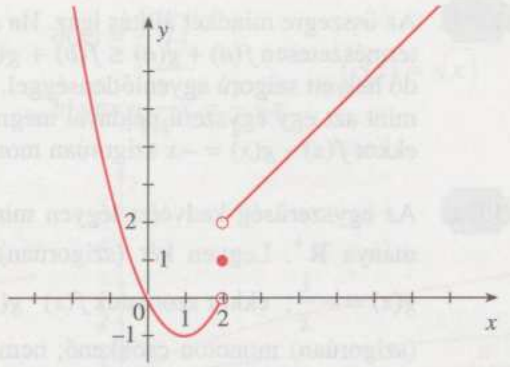
	minimum	min. hely	maximum	max. hely
a)	-3	0	7	5
b)	0	2	6	5
c)	-3	0	$\sqrt{10}-3 \approx 0{,}16$	5
d)	0	0	$\lg 11 \approx 1{,}04$	5

1298.

	minimum	min. hely	maximum	max. hely
a)	0	1,5	49	5
b)	$-3{,}9$	5	–	–
c)	-1	$1{,}5-\frac{\pi}{4} \approx 0{,}71$; $1{,}5+\frac{3\pi}{4} \approx 3{,}86$	1	$1{,}5+\frac{\pi}{4} \approx 2{,}29$
d)	–	–	1021	5

1299. Ábrázoljuk az adott függvényt!
Az ábráról leolvasható, hogy a függvénynek nincs maximuma, minimumhelye 1, minimumértéke $f(1) = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ ha } x < 2; \\ 1, \text{ ha } x = 2; \\ x, \text{ ha } x > 2. \end{cases}$$



1300. a) Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ alakú másodfokú függvények a szélsőértéküket az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen veszik fel. Így $-2 = \frac{-b}{-8}$, ebből $b = -16$.
Így a keresett függvény $f(x) = -4x^2 - 16x + 12$.

b) $-4x^2 - 16x + 12 = -4(x + 2)^2 + 28$, grafikonja egy lefelé nyitott parabola. Így a függvénynek $x = -2$ helyen maximuma van, melynek értéke 28.

1301. a) Szigorúan monoton növő.

b) Szigorúan monoton csökkenő a [0; 2] intervallumon; szigorúan monoton növő a [2; 5] intervallumon.
Megjegyzés: az ilyen függvényt nevezzük szakaszonként monotonnak.

c) Szigorúan monoton növő.

d) Szigorúan monoton növő.

1302. a) Szigorúan monoton csökkenő a]0; 1,5] intervallumon;
szigorúan monoton növő az [1,5; 5] intervallumon.

b) Szigorúan monoton csökkenő.

c) Szigorúan monoton csökkenő a $\left]0;\ 1{,}5 - \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon és az $\left[1{,}5 + \frac{\pi}{4};\ 1{,}5 + \frac{3\pi}{4}\right]$ intervallumon;
szigorúan monoton növő az $\left[1{,}5 - \frac{\pi}{4};\ 1{,}5 + \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon és az $\left[1{,}5 + \frac{3\pi}{4};\ 5\right]$ intervallumon.

d) Szigorúan monoton növő.

1303. Az összegre mindkét állítás igaz. Ha $a < b$ esetén $f(a) \le f(b)$ és $g(a) \le g(b)$, akkor természetesen $f(a) + g(a) \le f(b) + g(b)$ is teljesül; csakúgy, mint végig a megengedő helyett szigorú egyenlőtlenséggel. A különbségre viszont egyik állítás sem igaz, mint azt egy egyszerű példával megmutathatjuk. Legyen pl. $f(x) = x$ és $g(x) = 2x$, ekkor $f(x) - g(x) = -x$ szigorúan monoton csökkenő, nem pedig növekedő.

1304. Az egyszerűség kedvéért legyen minden itt szereplő függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}^+$. Legyen két (szigorúan) monoton növekedő függvény $f(x) = x^2$ és $g(x) = -\frac{1}{x}$; ekkor szorzatuk $f(x) \cdot g(x) = -x$ és hányadosuk $\frac{f(x)}{g(x)} = -x^3$ egyaránt (szigorúan) monoton csökkenő, nem pedig növekedő. Vagyis mind a négy feltett kérdésre nemleges a válasz.

1305. Lásd az 1211. feladatot!

Az $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$, $(x \in \mathbf{R})$ függvény ott veszi fel a szélsőértékeit, ahol $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ értéke minimális (-1) vagy maximális $(+1)$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, ha $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$;

az f függvény minimumhelye: $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$,

az f függvény minimuma: $f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = -3 \qquad k \in \mathbf{Z}$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, ha $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \qquad l \in \mathbf{Z}$;

az f függvény maximumhelye: $\frac{\pi}{3} + 2l\pi \qquad l \in \mathbf{Z}$,

az f függvény maximuma: $f\left(\frac{\pi}{3} + 2l\pi\right) = 1 \qquad l \in \mathbf{Z}$.

A függvény periódusa 2π.

1306. a) $g(x) = -\sqrt{x}$

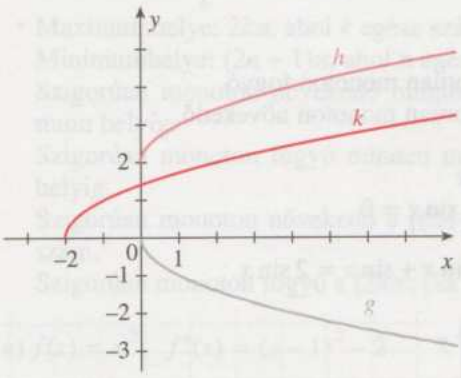
$h(x) = \sqrt{x} + 2$

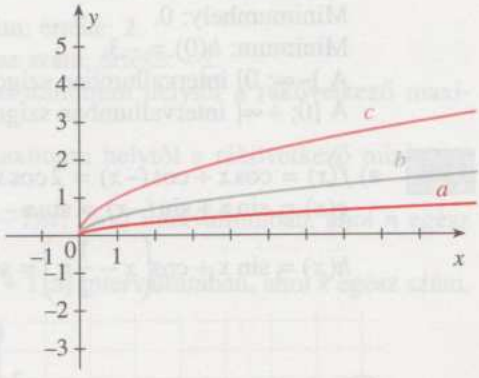
$k(x) = \sqrt{x+2}$

$a(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$

$b(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$(c(x) = \sqrt{x})$





b) $k(x) = \sqrt{x+2}$

Értelmezési tartomány: $[-2; +\infty[$, azaz $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -2\}$.

Értékkészlet: a nemnegatív valós számok halmaza, azaz $[0; +\infty[$.

Nem páros, nem páratlan.

Zérushely: -2.

Szélsőérték: minimumhely: -2;

minimum: $k(-2) = 0$.

Szigorúan monoton növekedő.

1307. a) $f(x) = -|x|$

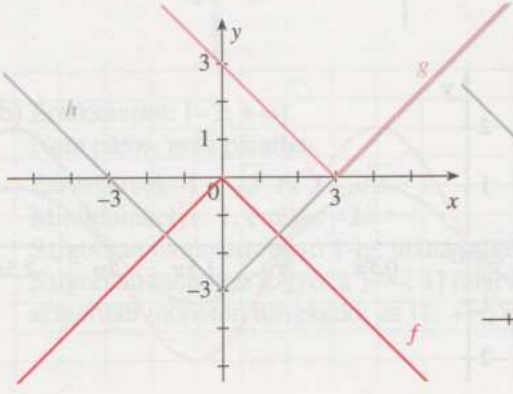
$g(x) = |x-3|$

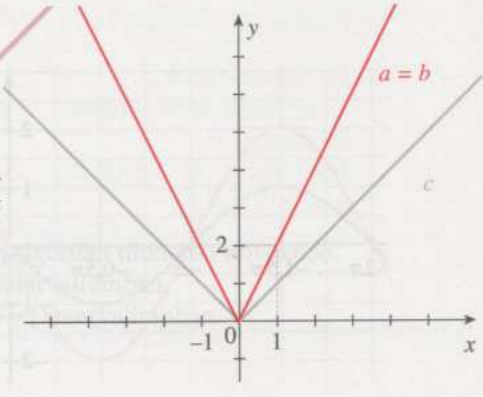
$h(x) = |x| - 3$

$a(x) = 2|x|$

$b(x) = |2x|$

$(c(x) = |x|)$

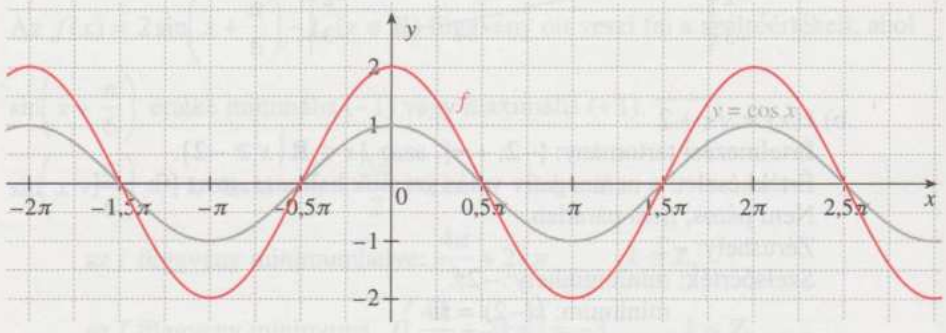


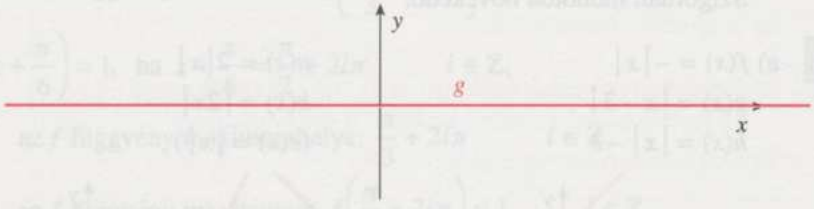


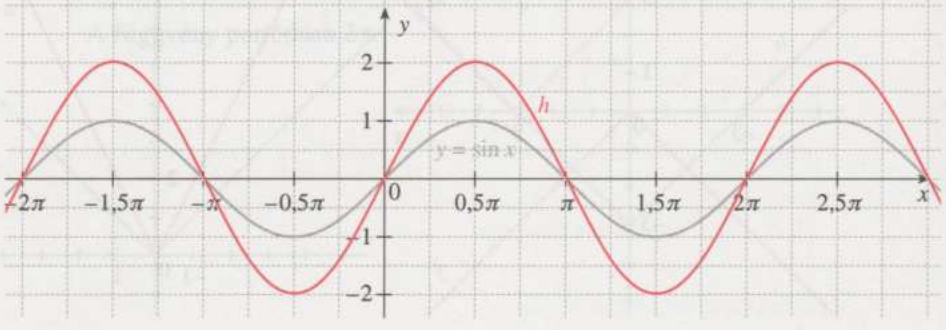
b) $h(x) = |x| - 3$
Értelmezési tartomány: a valós számok halmaza, **R**.
Értékkészlet: $[-3; +\infty[$.
Páros függvény, mert $|-x| = |x|$, minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.
Zérushelyek: -3 és 3.
Minimumhely: 0.
Minimum: $h(0) = -3$.
A $]-\infty; 0]$ intervallumban szigorúan monoton fogyó.
A $[0; +\infty[$ intervallumban szigorúan monoton növekedő.

1308. a) $f(x) = \cos x + \cos(-x) = 2\cos x$
$g(x) = \sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = 0$

$$h(x) = \sin x + \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin x + \sin x = 2\sin x$$

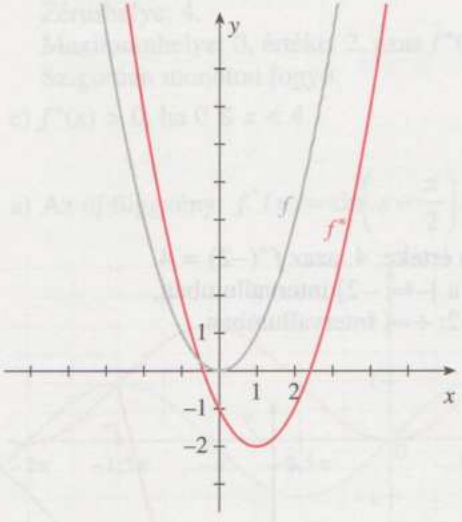






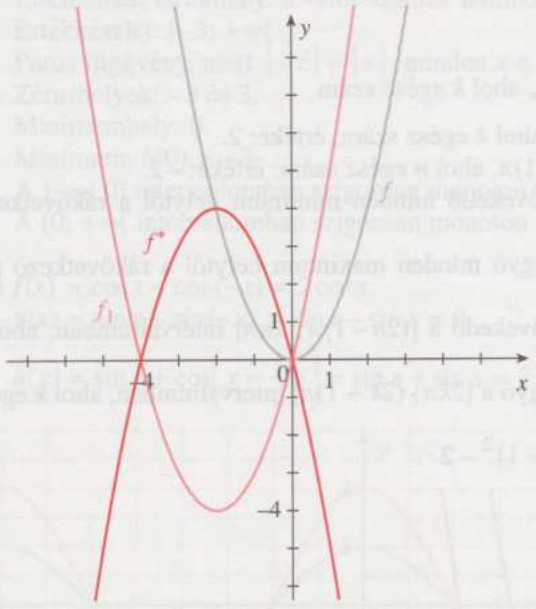
b) Értékkészlet: $[-2; 2]$.
Páros.
Periódusa: 2π.
Zérushelyek: $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, ahol k egész szám.
Maximumhelye: $2k\pi$, ahol k egész szám; értéke: 2.
Minimumhelye: $(2n + 1)\pi$, ahol n egész szám; értéke: -2.
Szigorúan monoton növekedő minden minimum helytől a rákövetkező maximum helyig.
Szigorúan monoton fogyó minden maximum helytől a rákövetkező minimum helyig.
Szigorúan monoton növekedő a $[(2n - 1)\pi; 2n\pi]$ intervallumban, ahol n egész szám.
Szigorúan monoton fogyó a $[2k\pi; (2k + 1)\pi]$ intervallumban, ahol k egész szám.

1309. a) $f(x) = x^2$; $f^*(x) = (x - 1)^2 - 2$



b) Értékkészlet: $[-2; +\infty[$.
Nem páros, nem páratlan.
Zérushelyek: $1 + \sqrt{2}$ és $1 - \sqrt{2}$.
Minimumhelye: 1, értéke: -2.
Szigorúan monoton fogyó 1-ig, utána szigorúan monoton növekedő.
Szigorúan monoton fogyó: a $]-\infty; 1]$ intervallumban,
szigorúan monoton növekedő: az $[1; +\infty[$ intervallumban.

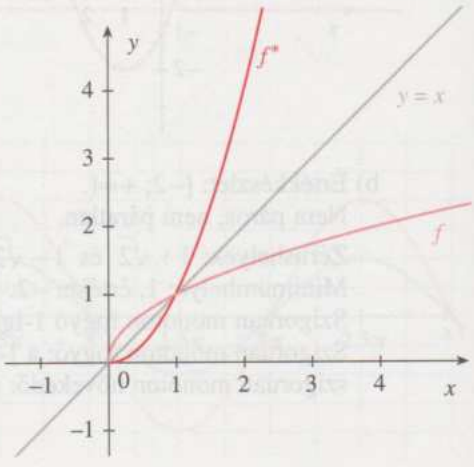
1310. a) $f(x) = x^2 \rightarrow f_1(x) = (x+2)^2 - 4 \rightarrow f^*(x) = -[(x+2)^2 - 4] = -(x+2)^2 + 4$



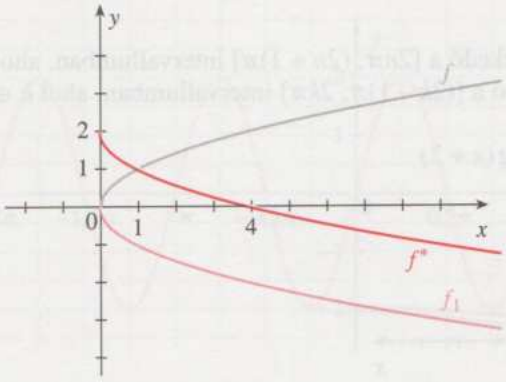
b) Értékkészlet: $]-\infty; 4]$.
Nem páros, nem páratlan.
Zérushelyek: -4; 0.
Maximum helye -2, maximum értéke: 4, azaz $f^*(-2) = 4$.
Szigorúan monoton növekedő: a $]-\infty; -2]$ intervallumban,
szigorúan monoton fogyó: a $[-2; +\infty[$ intervallumban.

1311. a) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0; +\infty[$.
Az új függvény:
$f^*(x) = x^2$, $x \in [0; +\infty[$.

b) Értékkészlete: $\mathbf{R}_0^+$.
Nem páros, nem páratlan.
Zérushely: 0.
Minimumhely: 0, értéke 0,
azaz $f^*(0) = 0$.
Szigorúan monoton növekedő.



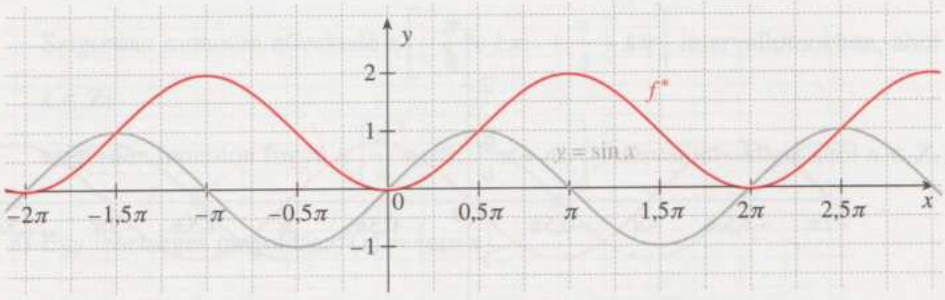
1312. a) $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f_1(x) = -\sqrt{x} \rightarrow f^*(x) = -\sqrt{x} + 2$



b) Értékkészlet: $]-\infty; 2]$.
Nem páros, nem páratlan.
Zérushelye: 4.
Maximumhelye: 0, értéke: 2, azaz $f^*(0) = 2$.
Szigorúan monoton fogyó.

c) $f^*(x) > 0$, ha $0 \leq x < 4$.

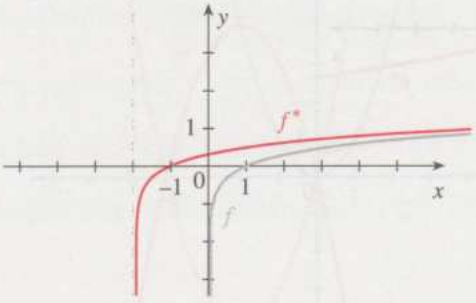
1313. a) Az új függvény: $f^*(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = -\cos x + 1$.



b) Értékkészlet: $[0; 2]$.
Páros.
Periódus: 2π.
Zérushely: $2k\pi$, ahol k egész szám.
Maximumhely: $(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; értéke: 2.
Minimumhely: $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; értéke: 0.
Szigorúan monoton növekedő minden minimum helytől a rá következő maximum helyig.

Szigorúan monoton fogyó minden maximumhelytől a rá következő minimumhelyig.
Jelöléssel:
szigorúan monoton növekedő a $[2n\pi; (2n + 1)\pi]$ intervallumban, ahol $n \in \mathbf{Z}$;
szigorúan monoton fogyó a $[(2k - 1)\pi; 2k\pi]$ intervallumban, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

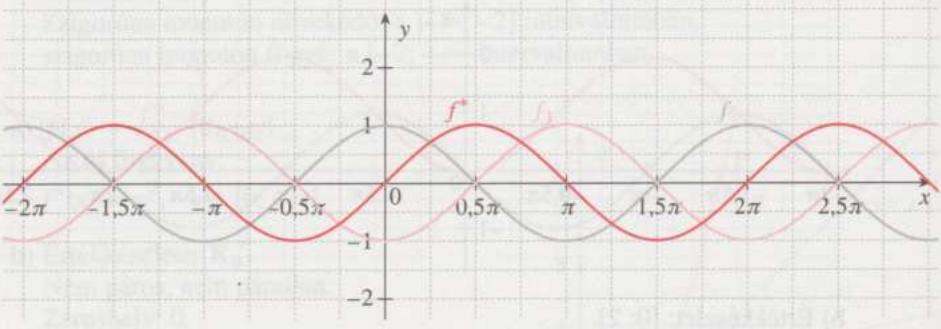
1314. a) $f(x) = \lg x \rightarrow f^*(x) = \lg(x + 2)$



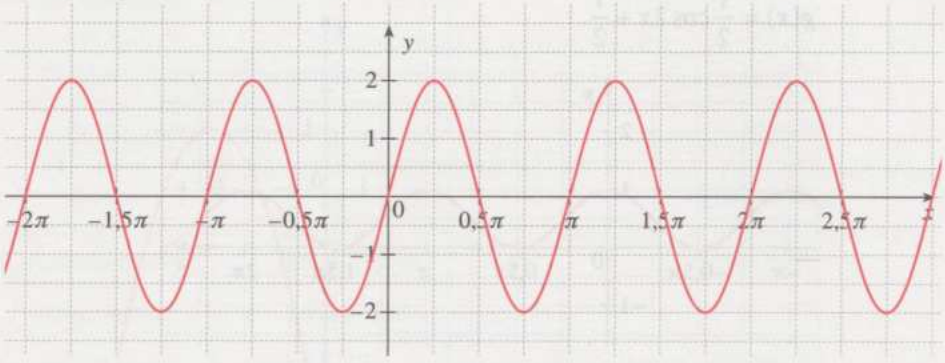
b) Változott a zérushely: $f(1) = 0$; $f^*(-1) = 0$,
új az értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbf{R} \mid x > -2\}$.

1315. $f(x) = \cos x \rightarrow f_1(x) = -\cos x \rightarrow f^*(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$

Az új függvény: $f^*(x) = \sin x$.



1316. a) Egyik lehetséges megoldás: $f(x) = 2\sin 2x$.



b) Értékkészlet: $[-2; 2]$.
Páratlan.

Zérushely: $l \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $l \in \mathbf{Z}$.

Maximumhelyek: $\frac{\pi}{4} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$, a maximum értéke: 2.

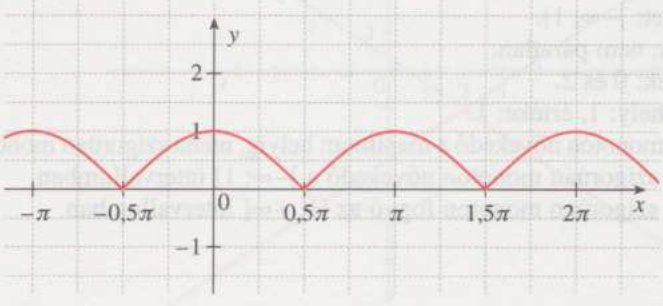
Minimumhelyek: $\frac{3}{4}\pi + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, a minimum értéke: -2.

Mindkét függvény szigorúan monoton növő mindegyik minimum helytől a rákövetkező maximum helyig, szigorúan monoton csökkenő a többi helyen.
Jelöléssel:

Szigorúan monoton növekedő a $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ +\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$ intervallumokban, ahol $k \in \mathbf{Z}$;

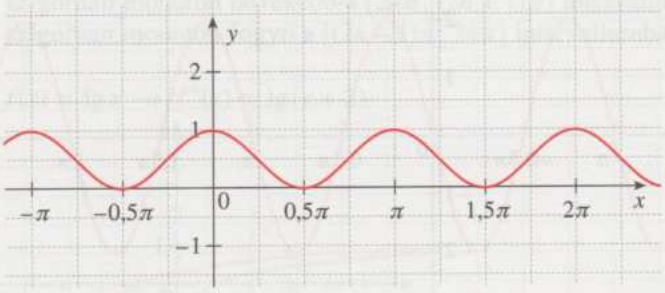
szigorúan monoton fogyó a $\left[\frac{\pi}{4} + n\pi;\ \frac{3}{4}\pi + n\pi\right]$ intervallumokban, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

1317. a) Egy lehetséges megoldás: $f(x) = |\cos x|$.



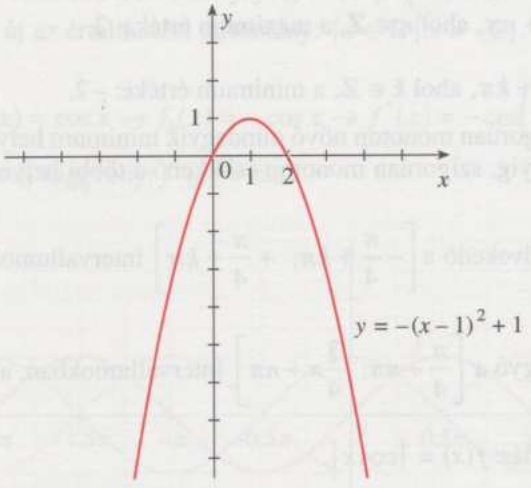
Más megoldás:

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$



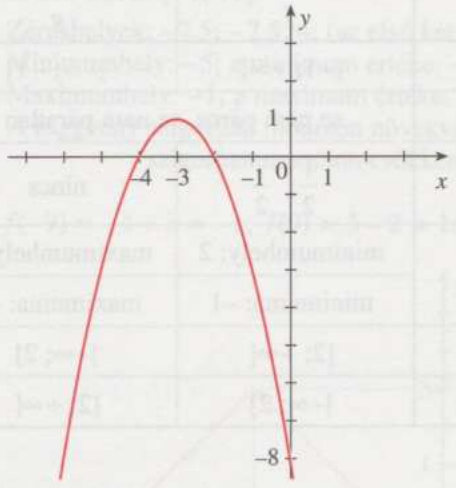
b) E függvények fogyók a $\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ intervallumokban, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

1318. a) Ilyen függvény az $f(x) = -(x-1)^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$.



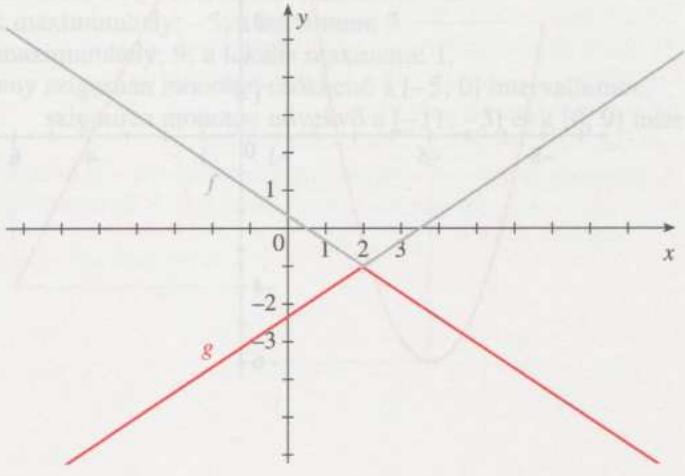
b) Értékkészlet: $]-\infty; 1]$.
Nem páros, nem páratlan.
Zérushelyek: 0 és 2.
Maximumhely: 1, értéke: 1.
Szigorúan monoton növekedő a maximum helyig, utána szigorúan monoton fogyó.
Jelöléssel: szigorúan monoton növekedő a $]-\infty; 1]$ intervallumban,
szigorúan monoton fogyó az $[1; +\infty[$ intervallumban.

1319. a) A függvény: $f(x) = -(x+3)^2 + 1, \quad x \in \mathbf{R}$.



b) Értékkészlete: $]-\infty; 1]$.
Nem páros, nem páratlan.
Zérushely: -4 és -2.
Maximumhely: -3, értéke: 1.
Szigorúan monoton növekedő a maximumhelyig, utána szigorúan monoton fogyó.
Jelöléssel: szigorúan monoton növekedő a $]-\infty; -3]$ intervallumban,
szigorúan monoton fogyó a $[-3; +\infty[$ intervallumban.

1320. a) A függvény: $f(x) = \frac{2}{3}|x-2| - 1, \quad x \in \mathbf{R}$ vagy $g(x) = -\frac{2}{3}|x-2| - 1, \quad x \in \mathbf{R}$.

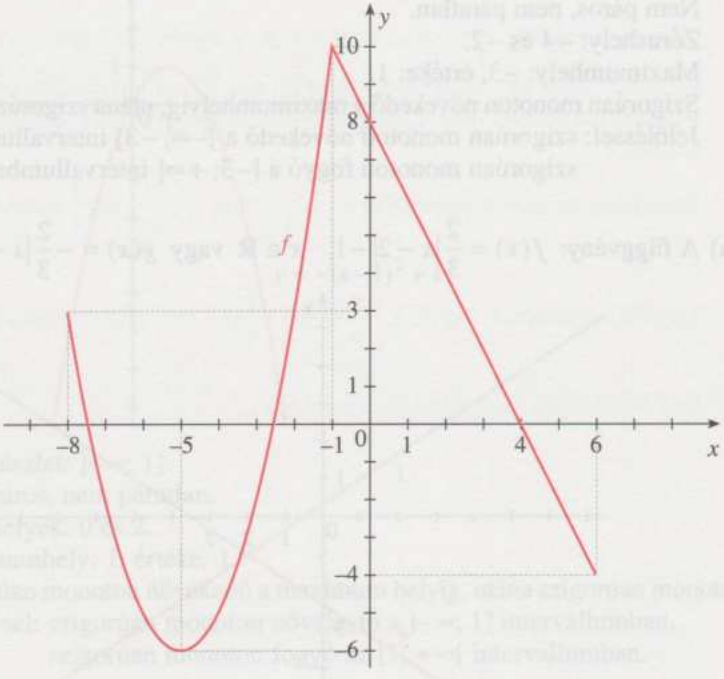


b) Jellemzésük:

	f	g
Értékkészlet	$[-1; +\infty[$	$]-\infty; -1]$
Paritás	se nem páros, se nem páratlan	
Zérushely	$\frac{1}{2}; \frac{7}{2}$	nincs
Szélsőérték	minimumhely: 2	maximumhely: 2
	minimuma: –1	maximuma: –1
Szigorúan monoton nő	$[2; +\infty[$	$]-\infty; 2]$
Szigorúan monoton csökken	$]-\infty; 2]$	$[2; +\infty[$

1321. a) $f(-8) = (-3)^2 - 6 = 3$; $f(-4) = 1^2 - 6 = -5$; $f(4) = 0$; $f(-0{,}8) = 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6$

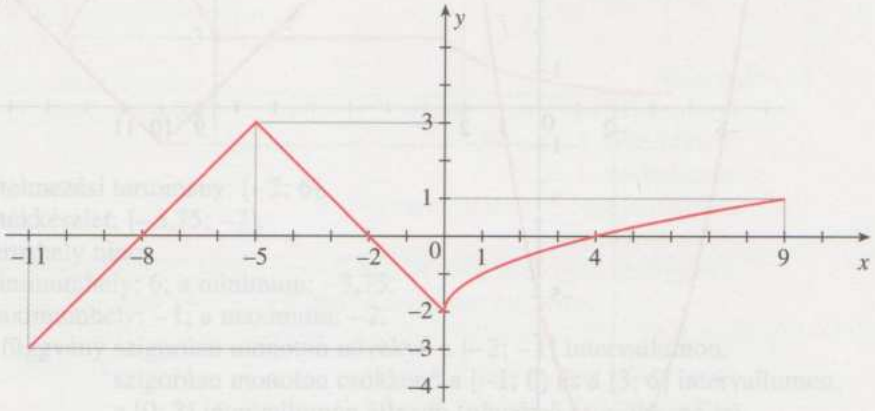
b)



c) Értelmezési tartomány: $[-8; 6]$.
Értékkészlet: $[-6; 10]$.
Zérushelyek: $-7{,}5$; $-2{,}5$; 4; (az első két érték pontosan: $-5-\sqrt{6}$ és $-5+\sqrt{6}$).
Minimumhely: -5; a minimum értéke: -6.
Maximumhely: -1; a maximum értéke: 10.
A függvény szigorúan monoton növekvő a $[-5; -1]$ intervallumon,
szigorúan monoton csökkenő a $[-8; -5]$ és a $[-1; 6]$ intervallumon.

1322. a) $f(-9) = -4 + 3 = -1$; $f(9) = 3 - 2 = 1$; $f(4) = 0$; $f(-0{,}2) = -4{,}8 + 3 = -1{,}8$

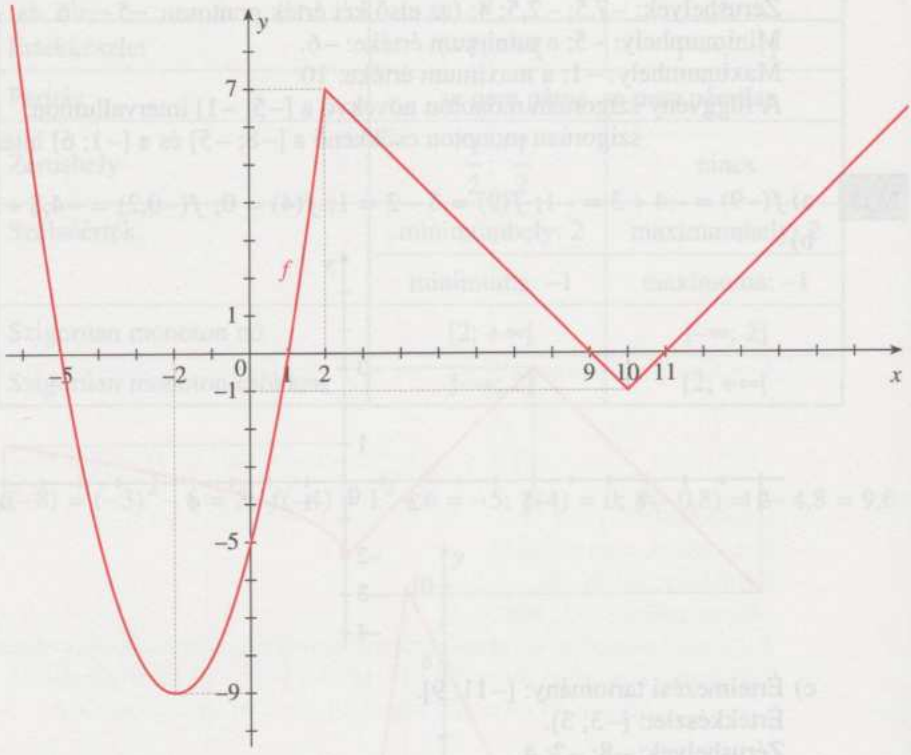
b)



c) Értelmezési tartomány: $[-11; 9]$.
Értékkészlet: $[-3; 3]$.
Zérushelyek: -8; -2; 4.
Abszolút minimumhely: -11; a minimum: -3.
Lokális minimumhely: 0; a lokális minimum: -2.
Abszolút maximumhely: -5; a maximum: 3.
Lokális maximumhely: 9; a lokális maximum: 1.
A függvény szigorúan monoton csökkenő a $[-5; 0]$ intervallumon,
szigorúan monoton növekvő a $[-11; -5]$ és a $[0; 9]$ intervallumon.

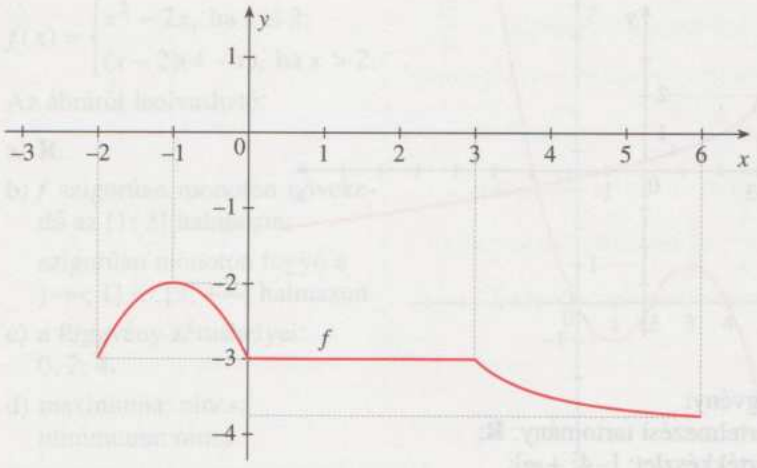
1323. a) $f(-6) = (-4)^2 - 9 = 7$; $f(0) = 2^2 - 9 = -5$; $f(200) = 190 - 1 = 189$;
$f(2{,}1) = 7{,}9 - 1 = 6{,}9$

b)



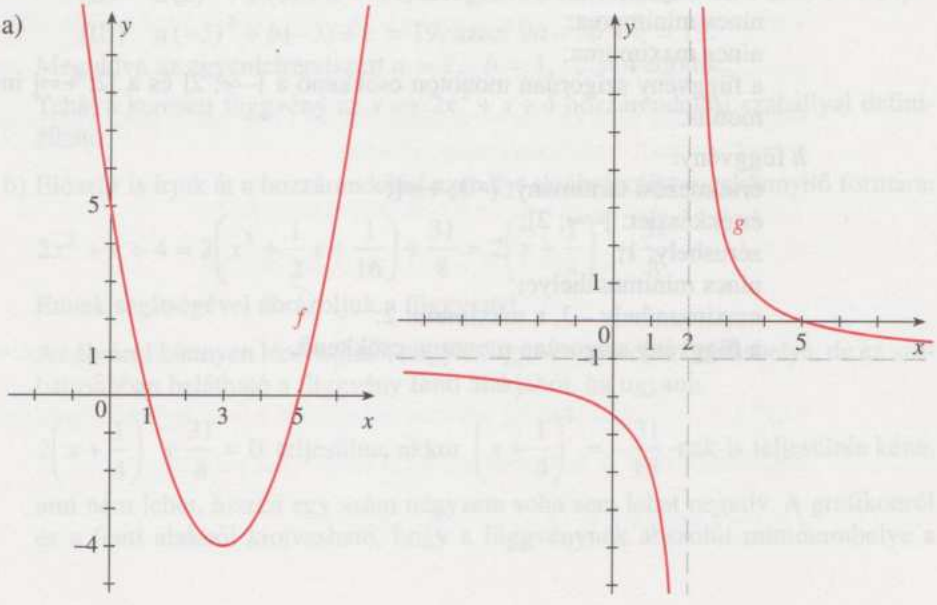
c) Értelmezési tartomány: **R**.
Értékkészlet: $[-9; +\infty]$.
Zérushelyek: -5; 1; 9; 11.
Abszolút minimumhely: -2; a minimum: -9.
Lokális minimumhely: 10; a lokális minimum: -1.
Abszolút maximumhely nincs.
Lokális maximumhely: 2; a lokális maximum: 7.
A függvény szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; -2]$ és a $[2; 10]$ intervallumon, szigorúan monoton növekvő a $[-2; 2]$ és a $[10; +\infty]$ intervallumon.

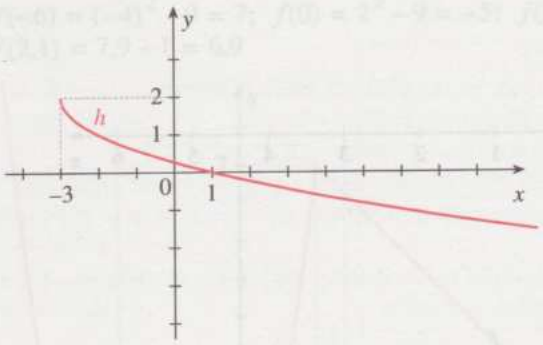
1324.



Értelmezési tartomány: $[-2; 6]$.
Értékkészlet: $[-3{,}75; -2]$.
Zérushely nincs.
Minimumhely: 6; a minimum: $-3{,}75$.
Maximumhely: -1; a maximum: -2.
A függvény szigorúan monoton növekvő a $[-2; -1]$ intervallumon,
szigorúan monoton csökkenő a $[-1; 0]$ és a $[3; 6]$ intervallumon,
a $[0; 3]$ intervallumon állandó (növekvő és csökkenő is).

1325. a)



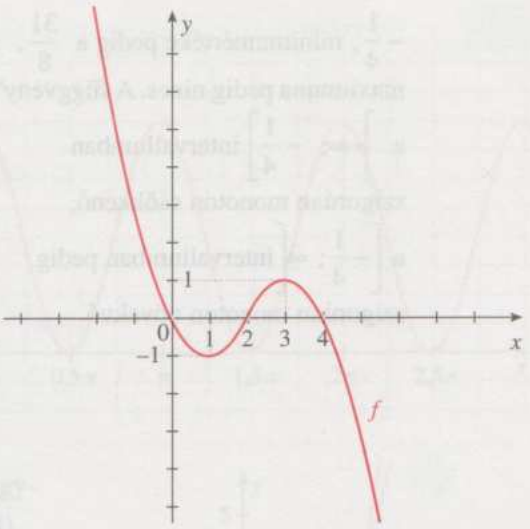


b) *f* függvény:
értelmezési tartomány: **R**;
értékkészlet: $[-4; +\infty]$;
zérushelyek: 1 és 5;
minimumhely: 3; a minimum: -4;
nincs maximuma;
a függvény szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; 3]$ intervallumon,
szigorúan monoton növekvő a $[3; +\infty[$ intervallumon.

g függvény:
értelmezési tartomány: $\mathbf{R} \setminus \{2\}$;
értékkészlet: $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$;
zérushely: 5;
nincs minimuma;
nincs maximuma;
a függvény szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; 2[$ és a $]2; +\infty[$ intervallumon is.

h függvény:
értelmezési tartomány: $[-3; +\infty[$;
értékkészlet: $]-\infty; 2]$;
zérushely: 1;
nincs minimumhelye;
maximumhely -3, a maximum: 2;
a függvény szigorúan monoton csökkenő.

1326. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{ha } x \le 2; \\ (x-2)(4-x), & \text{ha } x > 2. \end{cases}$



Az ábráról leolvasható:

a) **R**.

b) f szigorúan monoton növekedő az $[1; 3]$ halmazon;
szigorúan monoton fogyó a $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ halmazon.

c) a függvény zérushelyei:
0; 2; 4.

d) maximuma: nincs;
minimuma: nincs.

1327. a) Tekintsük a másodfokú függvény általános hozzárendelési utasítását:
$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.
Mivel három helyen ismerjük a függvény értékét, ezeket behelyettesítve felírható három egyenlet:

(I) $a(-1)^2 + b(-1) + c = 5$, rendezve: $a - b + c = 5$;

(II) $a(2)^2 + b(2) + c = 14$, elvégezve a műveleteket: $4a + 2b + c = 14$;

(III) $a(-3)^2 + b(-3) + c = 19$, azaz: $9a - 3b + c = 19$.

Megoldva az egyenletrendszert $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$ adódik.

Tehát a keresett függvény az $x \mapsto 2x^2 + x + 4$ hozzárendelési szabállyal definiálható.

b) Először is írjuk át a hozzárendelési szabályt az ábrázolást megkönnyítő formára:

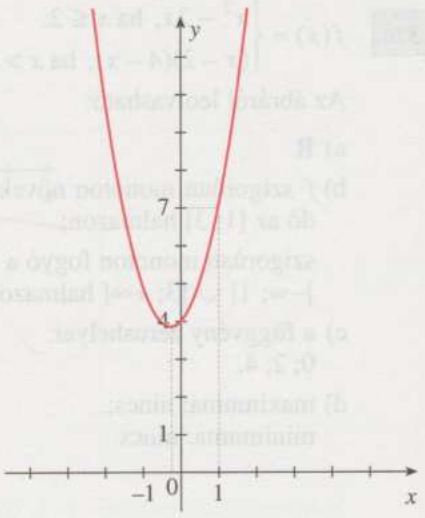
$$2x^2 + x + 4 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + \frac{31}{8} = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}.$$

Ennek segítségével ábrázoljuk a függvényt.

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy a függvénynek nincs zérushelye, de ez szabatosabban belátható a függvény fenti alakjából, ha ugyanis

$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} = 0$ teljesülne, akkor $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{31}{16}$-nak is teljesülnie kéne, ami nem lehet, hiszen egy szám négyzete soha sem lehet negatív. A grafikonról és a fenti alakból kiolvasható, hogy a függvénynek abszolút minimumhelye a

$-\frac{1}{4}$, minimumértéke pedig a $\frac{31}{8}$, maximuma pedig nincs. A függvény a $\left]-\infty;\ -\frac{1}{4}\right]$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő, a $\left[-\frac{1}{4};\ \infty\right[$ intervallumban pedig szigorúan monoton növekvő.



1328. a) Tekintsük a szinuszfüggvényt, és ezt transzformálva fogunk kapni egy, a feltételeknek megfelelő függvényt. Keressük a megoldást az $A \cdot \sin(Bx + C) + D$ alakú hozzárendeléssel megadott függvények között..

Mivel periódusként π van megadva, ez fele a szinusz eredeti periódusának, azaz B értéke 2. Mivel a minimum 0 és a maximum 4, ebből következik, hogy amplitúdója pedig 2-szerese a szinusz eredeti amplitúdójának, ezért A értéke 2. Ha D értéke 0 lenne ($A = 2$ mellett), akkor a minimum a -2, és a maximum a 2 értéket venné fel; ebből következik, hogy ha a függvény képét 2-vel feljebb toljuk, akkor teljesíteni fogja a feltételt, azaz D ugyancsak 2. A feltétel szerint $\frac{\pi}{2}$-nél a függvény 0 értéket vesz fel. Helyettesítsük ezt be a már eddig talált változókkal „felszerelt" transzformált szinuszfüggvénybe:

$$2\sin\left(2\frac{\pi}{2} + C\right) + 2 = 0, \text{ ezt egyszerűsítve:}$$

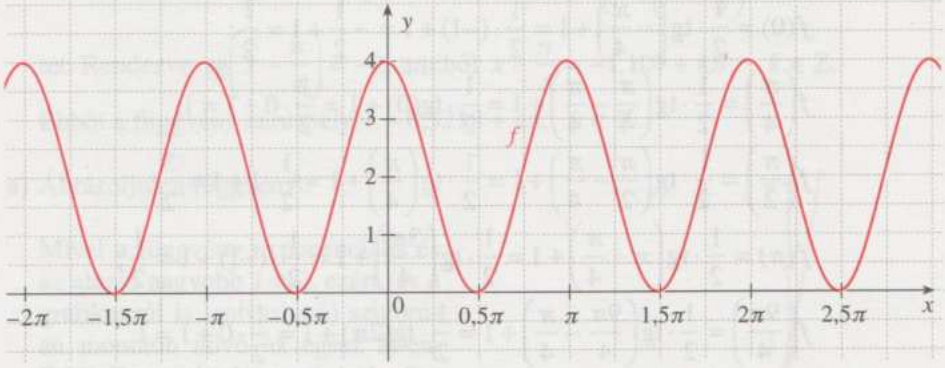
$$2\sin(\pi + C) + 2 = 0, \text{ majd átalakítva:}$$

$$\sin(\pi + C) = -1.$$

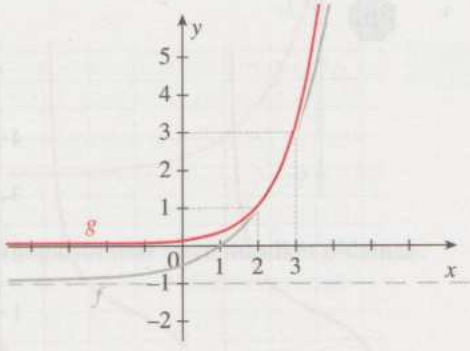
Mivel a szinuszfüggvény a -1 értéket a $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ helyeken veszi fel, ezért a $C = \frac{\pi}{2}$ választással valóban teljesülnek a fenti egyenlőségek és ezzel az utolsó feltétel is. A feltételeknek tehát eleget tesz például az

$f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$, $x \in \mathbf{R}$ függvény.

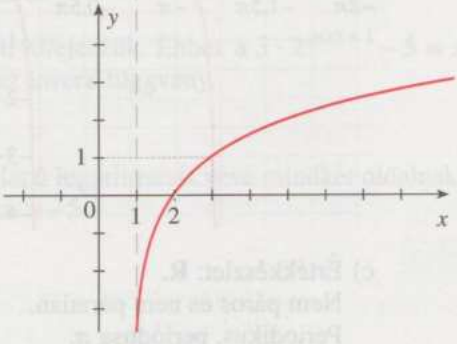
b)



1329. Számtalan megoldás van, a két legegyszerűbb az $f(x) = 2^{x-1} - 1$ $(x \in \mathbf{R})$ és a $g(x) = 3^{x-2}$ $(x \in \mathbf{R})$.



1330. A számtalan megoldás közül talán az $x \mapsto \log_2(x-1)$ $(x \in]1; \infty[)$ a legegyszerűbb.



1331. a) Helyettesítsük be x helyére a megadott értékeket:

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2};$$

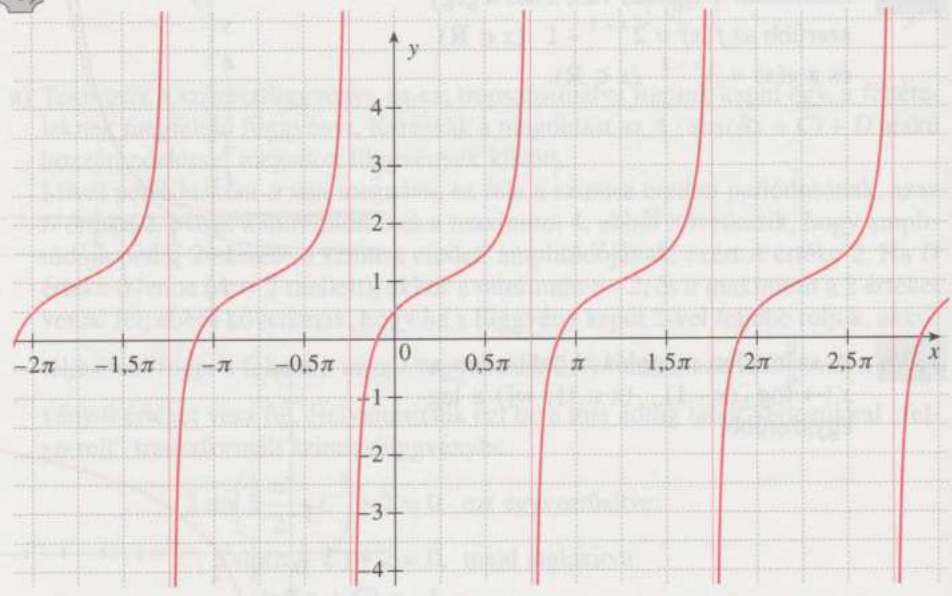
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(0) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2};$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 = \frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(2\pi) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1.$$

b)

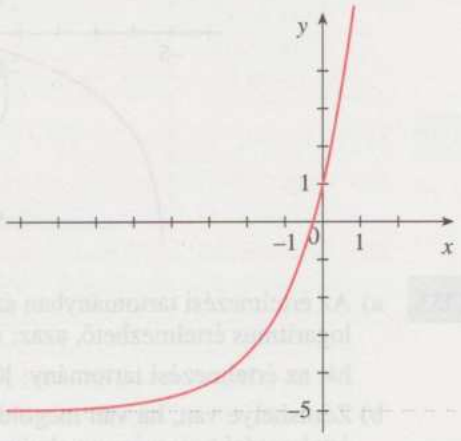


c) Értékkészlet: **R**.
Nem páros és nem páratlan.
Periodikus, periódusa π.
Nincs szélsőértéke.
Monotonitás: a $\left]-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumokon szigorúan monoton növekvő.

A zérushelyek meghatározásához oldjuk meg az $\frac{1}{2}\cdot \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ egyenletet. Rendezve $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2$, amiből $x-\frac{\pi}{4}\approx -1{,}107+k\pi, \quad k\in \mathbf{Z}$.

Ebből a függvény zérushelyei: $-0{,}3218+k\pi, \quad k\in \mathbf{Z}$.

1332. a) Ábrázoljuk a függvényt:



Mivel a függvény exponenciális és az alapja nagyobb 1-nél, ezért (és a grafikonról is leolvasható) szigorúan monoton növő az egész **R**-en. Felülről nem korlátos, alulról -5 a legnagyobb korlátja, amely értéket azonban semelyik $x\in \mathbf{R}$ helyen nem veszi fel. Ebből következik, hogy nincs szélsőértéke. A zérushely meghatározásához oldjuk meg a következő egyenletet:

$3\cdot 2^{x+1}-5=0$

$6\cdot 2^{x}=5$ / 2 alapú logaritmusát véve mindkét oldalnak:

$x=\log_2\frac{5}{6}=\frac{\lg\frac{5}{6}}{\lg 2}\approx -0{,}2630$

A függvény egyetlen zérushelye: $-0{,}2630$.

b) Mielőtt ábrázoljuk az inverz-függvényt, kifejezzük. Ehhez a $3\cdot 2^{g(x)+1}-5=x$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ahol g az inverz-függvény.

$3\cdot 2^{g(x)+1}=x+5$ / :3

$2^{g(x)+1}=\frac{1}{3}(x+5)$ / 2 alapú logaritmusát véve mindkét oldalnak, ha $x>-5$

$g(x)+1=\log_2\left(\frac{1}{3}(x+5)\right)$

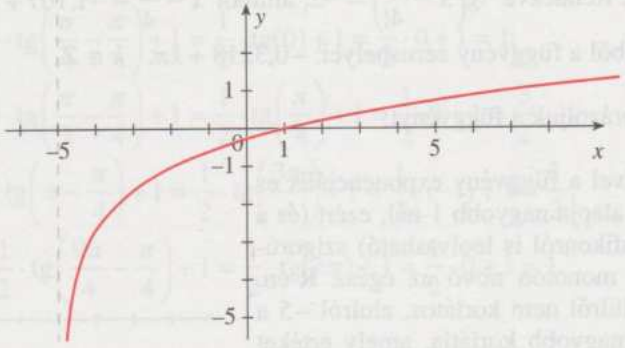
$g(x)=\log_2\frac{x+5}{3}-1$

(Ellenőrzésképpen behelyettesítve:

$f(g(x))=3\cdot 2^{g(x)+1}-5=3\cdot 2^{\log_2\frac{x+5}{3}-1+1}-5=3\cdot 2^{\log_2\frac{x+5}{3}}-5=$

$=3\cdot 2^{\log_2(x+5)-\log_2 3}-5=3\cdot\frac{2^{\log_2(x+5)}}{2^{\log_2 3}}-5=3\cdot\frac{x+5}{3}-5=x+5-5=x$

teljesül), azaz a $g\colon x \mapsto \log_2 \frac{x+5}{3} - 1$, $x \in]-5; +\infty[$ függvény az f inverzfüggvénye.



1333. a) Az értelmezési tartományban azok az x értékek szerepelnek, amelyekre mindkét logaritmus értelmezhető, azaz: $x > 0$ és $x > -2$. Mindkettő teljesül, ha $x > 0$. Tehát az értelmezési tartomány: $]0; \infty[= \mathbf{R}^+$.

b) Zérushelye van, ha van megoldása a $\lg x + \lg(x+2) - 1 = 0$ egyenletnek. Ez az értelmezési tartományon ekvivalens a $\lg x(x+2) = \lg 10$ egyenlettel, ahonnan az $x(x+2) = 10$ egyenletet kapjuk, mivel a logaritmusfüggvény egy-egyértelmű.

Rendezés után: $x^2 + 2x - 10 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $-1 \pm \sqrt{11}$. Mivel $x > 0$, ezért csak $-1 + \sqrt{11}$ zérushely.

c) Az adott kifejezéssel megadott függvény b) szerint átalakítható: $x \mapsto \lg \frac{x(x+2)}{10}$ alakba. Itt a külső, logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő. A belső függvényt kell vizsgálni. Az egy másodfokú függvény, amelyik a minimumhelyéig fogyó, azután pedig növekvő. A minimumhely a b)-ben kiszámolt két gyök számtani közepe, $x = -1$. Mivel $x > 0$, ezért az értelmezési tartományon belül a belső függvény is szigorúan monoton növekvő, tehát az összetett függvény is szigorúan monoton növekvő a megadott intervallumon.

1334. a) f függvény:

értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$;

értékkészlet: $\mathbf{R}$;

hozzárendelési szabály: $x \mapsto \log_2 x$.

g függvény:

értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$;

értékkészlet: $\mathbf{R}$;

hozzárendelési szabály: $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$.

h függvény:
értelmezési tartomány: $\mathbf{R}$;
értékkészlet: $\mathbf{R}^+$;
hozzárendelési szabály: $x \mapsto 2^x$.

k függvény:
értelmezési tartomány: $\mathbf{R}$;
értékkészlet: $\mathbf{R}^+$;
hozzárendelési szabály: $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

b) 1. hamis
2. igaz
3. hamis
4. hamis
5. igaz
6. hamis

1335. a) A 3. jelű függvényé.

b) Értékkészlet: $[-5; 5]$;
maximumhelyek: $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 6\pi; \quad k \in \mathbf{Z}$;
minimumhelyek: $-\frac{3\pi}{2} + k \cdot 6\pi; \quad k \in \mathbf{Z}$.

c) 1. igaz
2. hamis
3. igaz
4. igaz
5. igaz

1336. – Értelmezési tartomány: $\mathbf{R}$; (polinomfüggvény)
– értékkészlet: $\mathbf{R}$; (harmadfokú polinomfüggvény)
– három zérushelye van: -2; $-1{,}29$ és $-1{,}28$ között egy, továbbá $0{,}78$ és $0{,}79$ között is egy;
– nincs abszolút maximuma;
– lokális maximumhely: a táblázatok szerint $-1{,}69$ és $-1{,}3$ között, de a grafikon alapján ennél pontosabb a $-1{,}69$ és $-1{,}5$ közötti becslés;
– nincs abszolút minimuma;
– lokális minimumhely: a táblázat szerint $-0{,}02$ és $0{,}01$ között;
– a függvény a lokális maximumhelyig szigorúan monoton növekvő, majd a lokális minimumhelyig szigorúan monoton csökkenő, ezután mindvégig szigorúan monoton növekvő.

1337. a) $f(-3) = 1$; $f(0) = -1{,}5$; $f(4) = 2$; $f(5) = -1$

b) 1 függvényérték tartozik a (-3)-hoz, az $(1{,}6)$-hez és a $(4{,}4)$-hez; -1 tartozik a $(-1{,}6)$-hez az (1)-hez és az (5)-höz.

c) – Értékkészlet: $[-3; 3]$;
– zérushelyek: -4; -2; 1,25; 4,75.
– minimumhely: -1; a minimum: -3;
– maximumhely: 3; a maximum: 3;
– a függvény (-3)-ig szig. mon. növekvő, (-3)-tól (-1)-ig szig. mon. csökkenő, (-1)-től (3)-ig szig. mon. növekvő, majd (3)-tól ismét szig. mon. csökkenő.

1338. a) $f(-4) = 0$; $f(-1) = 3$; $f(3) = -3$; $f(5) = 1$

b) 1 függvényérték tartozik a $(-1{,}6)$-hez, az (1)-hez és az (5)-höz; -1 tartozik a (-3)-hoz az $(1{,}6)$-hez és a $(4{,}4)$-hez.

c) – Értékkészlet: $[-3; 3]$;
– zérushelyek: -4; -2; 1,25; 4,75.
– minimumhely: 3; a minimum: -3;
– maximumhely: -1; a maximum: 3;
– a függvény (-3)-ig szig. mon. csökkenő, (-3)-tól (-1)-ig szig. mon. növekvő, (-1)-től (3)-ig szig. mon. csökkenő, majd (3)-tól ismét szig. mon. növekvő.

1339. a) Az értelmezési tartományban 9, az értékkészletben 6 egész szám van.

b) – Értékkészlet: $[-3; 2]$;
– páros függvény;
– nem periodikus;
– zérushelyek: -4; -2; $-0{,}4$; 0,4; 2; 4;
– minimumhelyek: -1 és 1; a minimum: -3;
– maximumhely: 0; a maximum: 2;
– a függvény (-3)-ig szig. mon. növekvő, (-3)-tól (-1)-ig szig. mon. csökkenő, (-1)-től (0)-ig szig. mon. növekvő, (0)-tól (1)-ig szig. mon. csökkenő, (1)-től (3)-ig szig. mon. növekvő, végül (3)-tól ismét szig. mon. csökkenő.

1340. – Értékkészlet: $[1; 3]$;
– páros függvény;
– periodikus, periódusa 2;
– zérushelye nincs;
– minimumhelyek: $1 + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$; a minimum: 1;
– maximumhelyek: $2k$, $k \in \mathbf{Z}$; a maximum: 3;
– a függvény a $[2k; 2k + 1]$ intervallumokban szig. mon. csökkenő, a $[2k - 1; 2k]$ intervallumokban pedig szig. mon. növekvő ($k \in \mathbf{Z}$).

1341. a) $x \mapsto \frac{3}{x} + 2$

b) – Értékkészlet: $\mathbf{R} \setminus \{2\}$;
– nem páros és nem páratlan függvény;
– nem periodikus;
– zérushely: $-1{,}5$;
– nincs minimuma;
– nincs maximuma;
– a függvény a $]-\infty; 0[$ intervallumban és a $]0; +\infty[$ intervallumban is szig. mon. csökkenő.

1342. – Értékkészlet: $[-6; 0]$;
– nem páros és nem páratlan függvény;
– periodikus, periódusa 6;
– zérushelyek: $1{,}5 + 6k$, $k \in \mathbf{Z}$;
– minimumhelyek: $-1{,}5 + 6k$, $k \in \mathbf{Z}$; a minimum: -6;
– maximumhelyek: $1{,}5 + 6k$, $k \in \mathbf{Z}$; a maximum: 0;
– a függvény az $[1{,}5 + 6k; 4{,}5 + 6k]$ intervallumokban szig. mon. csökkenő, a $[-1{,}5 + 6k; 1{,}5 + 6k]$ intervallumokban pedig szig. mon. növekvő ($k \in \mathbf{Z}$).

1343. – Értékkészlet: $[-3; 3]$;
– páratlan függvény;
– periodikus, periódusa 6;
– zérushelyek: $3k$, $k \in \mathbf{Z}$;
– minimumhelyek: $1{,}5 + 6k$, $k \in \mathbf{Z}$; a minimum: -3;
– maximumhelyek: $-1{,}5 + 6k$, $k \in \mathbf{Z}$; a maximum: 3;
– a függvény a $[-1{,}5 + 6k; 1{,}5 + 6k]$ intervallumokban szig. mon. csökkenő, az $[1{,}5 + 6k; 4{,}5 + 6k]$ intervallumokban pedig szig. mon. növekvő ($k \in \mathbf{Z}$).

1344. – Értelmezési tartomány: $[-3; 3]$
– értékkészlet: $[-0{,}63; 2]$;
– nem páros és nem páratlan függvény;
– zérushely: 0;
– minimumhely: 0,8; a minimum: $-0{,}63$;
– maximumhely: -1; a maximum: 2;
– a függvény a $[-3; -1]$ és a $[0{,}8; 3]$ intervallumon szig. mon. növekvő, a $[-1; 0{,}8]$ intervallumon pedig szig. mon. csökkenő.

1345. a) Az értelmezési tartományban 17, az értékkészletben 9 egész szám van.
b) – Értékkészlet: $[-4; 4]$;
– páratlan függvény;
– zérushelyek: -7; 0; 7;

– minimumhely: -5; a minimum értéke -4;
– maximumhely: 5; a maximum értéke 4;
– a függvény a $[-8; -5]$ és az $[5; 8]$ intervallumon szig. mon. csökkenő,
a $[-5; 5]$ intervallumon pedig szig. mon. növekvő.

1346. – Értelmezési tartomány: $[-3; 3]$;
– értékkészlet: $[-1; 1{,}65]$;
– nem páros és nem páratlan függvény;
– zérushelyek: 0,38; 2,65;
– minimumhely: 1; a minimum értéke -1;
– maximumhely: $-0{,}8$; a maximum értéke 1,65;
– a függvény a $[-3; -0{,}8]$ és az $[1; 3]$ intervallumon szig. mon. növekvő,
a $[-0{,}8; 1]$ intervallumon pedig szig. mon. csökkenő.

1347. Néhány lehetséges szempontot sorolunk fel az alábbiakban. A beszámoló ezek közül egyeseket kiemelhet, vagy kevésbé lényegesnek minősíthet, vagy akár újabbakat is tartalmazhat a „szerző" szándékának megfelelően.

Tendencia:
– 1980-ig gyakorlatilag állandó szinten volt az ismertté vált bűncselekmények és a felderített bűnelkövetők száma.
– 1980–1987 között egyenletes növekedés volt a bűncselekmények számában (kb. 80%-os emelkedés a 7 év alatt), míg a bűnelkövetők száma alig változott.
– Jelentősen megváltozott a bűnesetek száma növekedési üteme 1987 és 1997 között. Kiemelkedően nagy a növekedési ütem az 1988–1990 közötti időszakban. Az ismertté vált bűnelkövetők száma alig növekedett ebben az időszakban (mintegy 10%-kal, miközben a bűnesetek száma megháromszorozódott).
– A bűnözés elleni fokozott védekezés lehet az oka az átmeneti „visszaeséseknek" 1991–1993 között, vagy 1995-ben és 1998-ban. A visszaesések után azonban még magasabbra szökött a bűnesetek száma.

Számszerű adatok:
– A vizsgált időszakban 1974-ben volt a legalacsonyabb, 1997-ben a legmagasabb az ismertté vált bűnesetek száma (kb. 105 ezer, illetve 600 ezer)
– 1974-ben az ismertté vált elkövetők száma a bűnesetek számának kb. 70%-a, 1997-ben kb. 25%-a volt.
– A növekedés üteme 1988–1990 között évi 120 000 bűncselekmény volt, míg 1972–1988 között átlagosan évi 6-7 ezer bűncselekmény.
– Az ismertté vált bűnelkövetők számának alacsony szinten maradását matematikailag azzal is indokolhatjuk, hogy folyamatosan nőtt az egy-egy bűnöző által a „lebukásig" elkövetett bűnesetek száma. Ennek igazolásához, vagy elvetéséhez további információkra lenne szükség.

1348. Az 1347. feladat megoldásában megadott szempontok szerint célszerű elemezni ezt a grafikont is. Az egyéni beszámoló az itt közölt észrevételek közül egyeseket kiemelhet, vagy kevésbé lényegesnek minősíthet, vagy akár újakat is tartalmazhat a „szerző" szándékának megfelelően.

A korrupciós bűncselekmények száma a vizsgált 26 év folyamán enyhén csökkenő tendenciát mutat még akkor is, ha közben kiugróan sok korrupciós bűncselekmény fordult elő 1973-ban, 1979-ben és 1985-ben. Ugyanakkor 1977-ben, 1980-ban, 1989-ben és 1990-ben a „megszokottnál" jóval kevesebb volt az ilyen esetek száma. A grafikon lüktetése arra is utalhat, hogy a magas korrupciós esetszámú években megpróbáltak intézkedéseket hozni a korrupció visszaszorítására és ez visszatartó hatású volt (igaz, nem túl sokáig), ám ezeket az intézkedéseket viszonylag rövid idő után kijátszották (talán az 1985–1990-es szakasz volt hatékonyabb).

1990-től a korrupciós bűncselekmények száma továbbra is ingadozó, összességében lassan emelkedő.

A bűnelkövetők számában jóval kisebb ingadozások figyelhetők meg, ez a szám a 26 év során 195 ezer és 500 ezer között változott.

1349. A beszámoló pontjai lehetnek az alábbiak:
- a vizsgált 12 év fő tendenciái az egyes szektorokban (növekvő, csökkenő tendencia, a tendencia tartóssága);
- egy-egy szektoron belüli változások iránya, mértéke, időtartama;
- maximumok és minimumok egy-egy szektoron belül;
- két-két szektor összehasonlítása.
- Nem állapítható meg a grafikonról, hogy melyik szektor a legnagyobb/legkisebb széndioxid kibocsátó (nem ismertek a bázisévben – 1985-ben – mért adatok, csak az ebben az évben mért értékekhez képesti viszonyszámok).

Az egyéni beszámoló az itt közölt szempontok közül egyeseket kiemelhet, vagy kevésbé lényegesnek minősíthet, vagy akár újakat is tartalmazhat a „szerző" szándékának megfelelően.

1350. a) 1 Hz és 7 Hz közötti frekvenciatartomány.

b) A legnagyobb amplitúdó 4,5 mm, a legkisebb 0,3 mm volt; ezeket 4 Hz-nél, illetve 7 Hz-nél tapasztalhattuk.

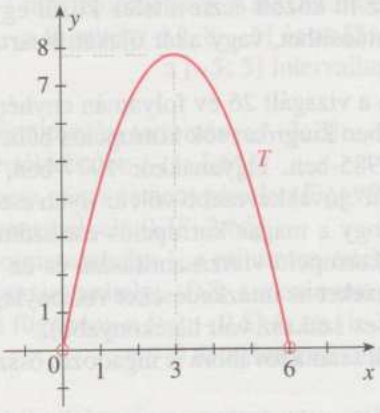
c) Az 1–2,8 Hz és a 4,8–7 Hz tartományban.

1351. a) A másik két oldal hossza a BQR háromszögből: $\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$.

b) $H =]0; 6[$

c) $T(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(6-x)x = \frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+6x)$

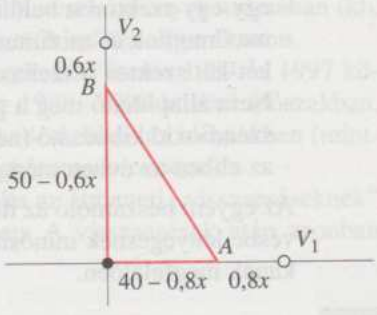
d) Egy másodfokú függvény grafikonjának egy íve lesz a T függvény grafikonja:



e) A T függvénynek a 3 a maximumhelye, ezért a maximális területű téglalap oldalai 3 és $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; a maximális terület pedig $\frac{9\sqrt{3}}{2} = 7{,}79$ (ami éppen a háromszög területének a fele).

1352. a) Ha a távolságokat km-ben mérjük, akkor a kereszteződéstől az egyes vonatok $|40 - 0{,}8x|$, illetve $|50 - 0{,}6x|$ kilométerre vannak.

b) Az AB távolság:
$\sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}$,
vagy másképpen:
$\sqrt{x^2 - 124x + 4100}$.



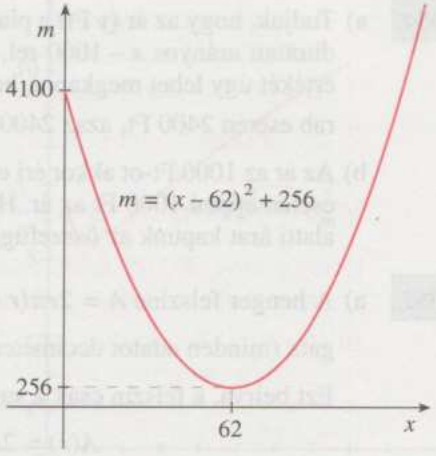
c) $m(x) = (40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2 = x^2 - 124x + 4100$

Teljes négyzetté alakítással: $m(x) = (x - 62)^2 + 256$.

Tehát az m: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto (x - 62)^2 + 256$ függvényt kell ábrázolni (lásd a következő oldalon az ábrát) és elemezni.

– Értelmezési tartomány: $\mathbf{R}^+$;
– értékkészlet: $[256; +\infty[$;
– zérushely nincs;
– minimumhely: 62; a minimum: 256;
– nincs maximuma;
– 0-tól 62-ig a függvény szigorúan monoton csökkenő, aztán szigorúan monoton növekvő.

d) Az indulástól számított 62 perc után lesz a két vonat közti távolság a legkisebb, és ez a legkisebb távolság 16 km.
(Az első vonat eddigre túljutott a két vasútvonal kereszteződési pontján, a másik vonat még nem.)



1353. a) Tudjuk, hogy erre a gázra: $pV = 3T$, és a hőmérséklet $T = 300$ (K).
Akkor $p = \frac{900}{V}$, ahol a feltétel szerint $1 \le V \le 10$.

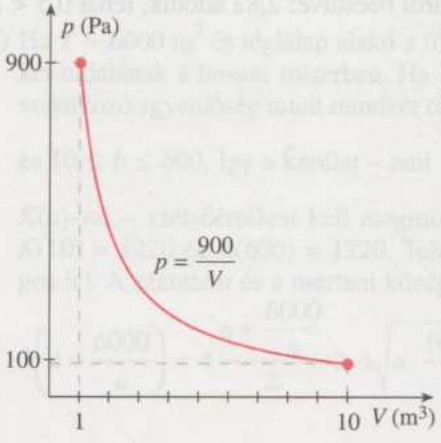
b) A grafikon a megadott intervallumon egy hiperbolaív, lásd az ábrát.

c) Ha most $p = 10^5$ (Pa) állandó érték, akkor $T = \frac{10^5}{3} V$, azaz egyenes arányosság van.

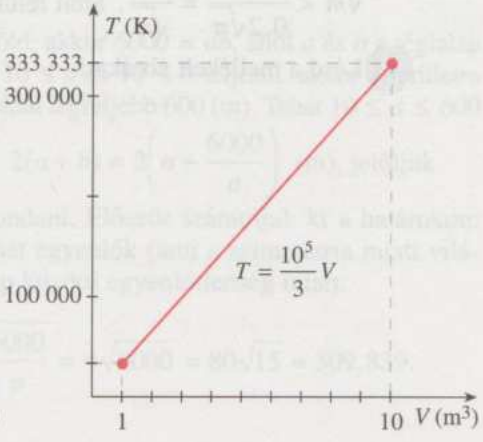
d) A grafikon egy egyenes szakasz, lásd az ábrát.

Megjegyzés: a megadott tartományban a hőmérséklet 33 333 K és 333 333 K között mozog, ilyenkor a gáz már általában plazmaállapotban van, mint a csillagok belsejében.

b) feladat ábrája



d) feladat ábrája



1354. a) Tudjuk, hogy az ár (y Ft) a piacon levő mennyiségtől, x-től úgy függ, hogy y fordítottan arányos $x - 1000$-rel, tehát: $y(x - 1000) = c$. Itt a jobb oldali konstans értékét úgy lehet megkapni, hogy felhasználjuk a megadott értékpárt: 10 000 darab esetén 2400 Ft, azaz $2400 \cdot 9000 = c$, vagyis $c = 21\,600\,000 = 2{,}16 \cdot 10^7$.

b) Az ár az 1000 Ft-ot akkor éri el, ha $x - 1000 = 2{,}16 \cdot 10^4$, tehát $x = 22\,600$ darab esetén éppen 1000 Ft az ár. Ha ennél több áru van a piacon, akkor már 1000 Ft alatti árat kapunk az összefüggésünkből.

1355. a) A henger felszíne $A = 2r\pi(r + m)$. Ha a doboz éppen 1 l = 1 dm^3, akkor térfogata (minden adatot deciméterben számolva): $1 = r^2\pi m$, ahonnan $m = \frac{1}{r^2\pi}$.

Ezt beírva, a felszín csak a sugártól függ:

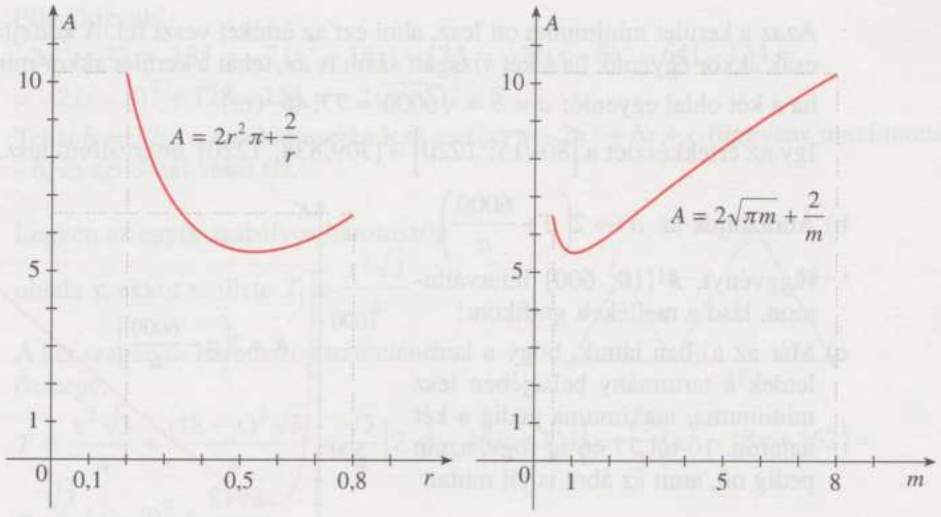
$$A(r) = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{1}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2}{r}.$$

A másik lehetőség m függvényében megadni a felszínt: ekkor a térfogatból $r = \sqrt{\frac{1}{\pi m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$, ezt beírva a felszín képletbe:

$$A(m) = \frac{2}{m} + \frac{2}{\sqrt{\pi m}}\pi m = 2\sqrt{\pi m} + \frac{2}{m}.$$

b) Mivel minden adat dm-ben van, ezért a feltétel szerint $0{,}2 < r$ és $0{,}5 < m$. Ebből ismét kapunk a sugárra egy feltételt, hiszen $m = \frac{1}{r^2\pi} > 0{,}5$, amiből: $r^2 < \frac{2}{\pi}$, és mivel r pozitív, ezért $r < 0{,}8$ (felfelé kerekítettünk, ez biztos igaz!).
Vagyis $0{,}2 < r < 0{,}8$ lesz az a)-beli $A(r)$ függvény értelmezési tartománya. Ha a másik függvényt nézzük, akkor a feltétel szerint $0{,}5 < m$, és a felső határ a sugárból adódik. Mivel $0{,}2 < r$, ez azt jelenti, hogy $0{,}2 < r = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$, tehát $\sqrt{m} < \frac{1}{0{,}2\sqrt{\pi}} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$, amit felülről becsülve: 2,82 adódik, tehát $0{,}5 < m < 8{,}0$.

c) Lásd a mellékelt ábrákat!



d) Az adott tartományokban a monotonitási viszonyok leolvashatók az ábrákról, de ezeket enélkül, pusztán algebrai meggondolással is meg lehet mondani: például $A(r)$ kis értékekre a második tag miatt nagy, nagy értékekre az első miatt. Azaz a kettő között valahol minimuma van, addig csökken, aztán nő. Mivel csak egy minimum van, ezért ezzel el is dőlt a monotonitás. $A(m)$ esetén hasonló a helyzet, kis m értékekre a második tag dominál, nagy m értékekre az első, így ez is monoton fogy, minimuma van, majd monoton nő. (Az ábrázolás pontosságától függően leolvashatunk számszerű eredményeket is. Az első függvény értéke a tartomány két határán 10,25, illetve 6,52; minimuma a kb. 0,54 helyen kb. 5,54. A második függvény esetén ezen értékek: 6,51, illetve 10,28, és kb. 1,08 helyen kb. 5,54. Ez utóbbi egzaktul megegyezik az első függvény minimumával, ami nem meglepő, hiszen adott alakú és rögzített térfogatú test esetén bármelyik hosszadat szerint vizsgálva ugyanakkora a minimális felszín.)

1356. a) Ha $T = 6000\ \text{m}^2$ és téglalap alakú a föld, akkor $6000 = ab$, ahol a és b a téglalap két oldalának a hossza méterben. Ha $10 \le a$ és $10 \le b$ teljesül, akkor a területre vonatkozó egyenlőség miatt mindkét oldal legfeljebb 600 (m). Tehát $10 \le a \le 600$ és $10 \le b \le 600$. Így a kerület – ami $2(a+b) = 2\left(a + \frac{6000}{a}\right)$ (m), jelöljük $K(a)$-val – szélsőértékeit kell megmondani. Először számoljuk ki a határokon: $K(10) = 1220$ és $K(600) = 1220$. Tehát egyenlők (ami a szimmetria miatt világos is). A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

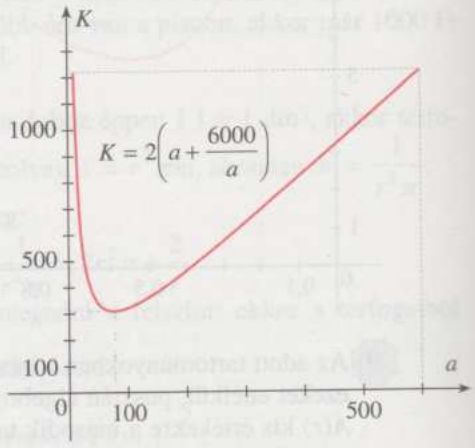
$$2\left(a + \frac{6000}{a}\right) = 4\frac{a + \frac{6000}{a}}{2} \ge 4\sqrt{a \cdot \frac{6000}{a}} = 4\sqrt{6000} = 80\sqrt{15} \approx 309{,}839.$$

Azaz a kerület minimuma ott lesz, ahol ezt az értéket veszi fel. A kétfajta közép csak akkor egyenlő, ha a két vizsgált szám is az, tehát a kerület akkor minimális, ha a két oldal egyenlő: $a = b = \sqrt{6000} \approx 77{,}46$ (m).

Így az értékkészlet a $\left[80\sqrt{15};\ 1220\right] \approx [309{,}838;\ 1220]$ intervallum lesz.

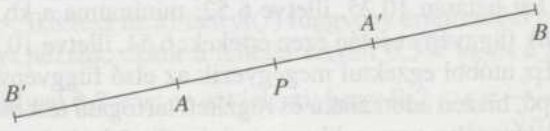
b) Ábrázoljuk az $a \mapsto 2\left(a + \frac{6000}{a}\right)$ függvényt, a [10; 600] intervallumon, lásd a mellékelt grafikont!

c) Már az a)-ban láttuk, hogy a kerületnek a tartomány belsejében lesz minimuma, maximuma pedig a két határon. 10-től 77,46-ig fogy, aztán pedig nő, amit az ábra is jól mutat.



1357. a) A függvény értékkészlete az S koordinátasík pontjainak halmaza.

b) A függvény nem egy-egyértelmű, mert például A–A' pontpárhoz és B–B' pontpárhoz is egyaránt a P pontot rendeli ($\overline{PA} = \overline{PA'}$; $\overline{PB} = \overline{PB'}$)



1358. Alakítsuk a kifejezést teljes négyzetté!

$$f(x) = -2x^2 + bx + c = -2\left(x^2 - \frac{b}{2}x\right) + c = -2\left[\left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{16}\right] + c =$$

$$= -2\left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{8} + c$$

Az f függvény a maximumát $\frac{b}{4}$-nél veszi fel, a maximum: $\frac{b^2}{8} + c$.

Így $\frac{b}{4} = 8$, ebből $b = 32$,

$\frac{b^2}{8} + c = -6$, melyből $c = -134$.

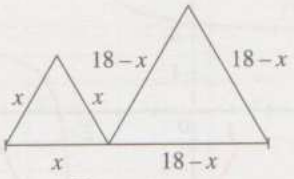
Ellenőrizzük!

$-2x^2 + 32x - 134 = -2(x^2 - 16x) - 134 = -2[(x-8)^2 - 64] - 134 =$

$= -2(x-8)^2 + 128 - 134 = -2(x-8)^2 - 6$

Tehát $b = 32$; $c = -134$ esetén lesz az $f(x) = -2x^2 + bx + c$ függvény maximuma -6, és azt 8-nál veszi fel.

1359. Legyen az egyik szabályos háromszög oldala x, ekkor területe $T_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.



A két szabályos háromszög területének összege:

$$T = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(18-x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[2x^2 - 36x + 324\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - 18x + 162\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(x-9)^2 + \frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát a területek összege minimális, ha $x = 9$, a minimum értéke $\frac{81\sqrt{3}}{2}$.

(A területek összege minimális, ha a szakaszt felezzük.)

1360. $\cos^2 x - 2\cos x - 3 = (\cos x - 1)^2 - 4$

Mivel $-1 \le \cos x \le 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

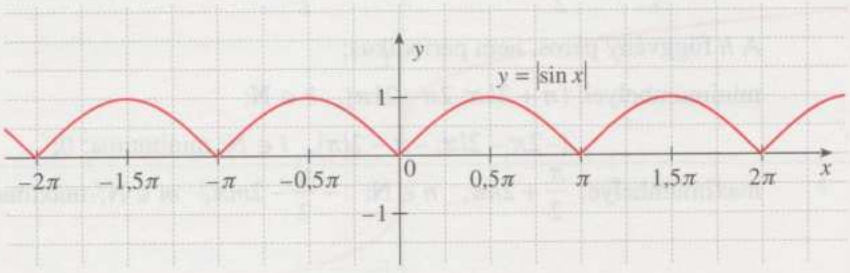
$-2 \le \cos x - 1 \le 0$

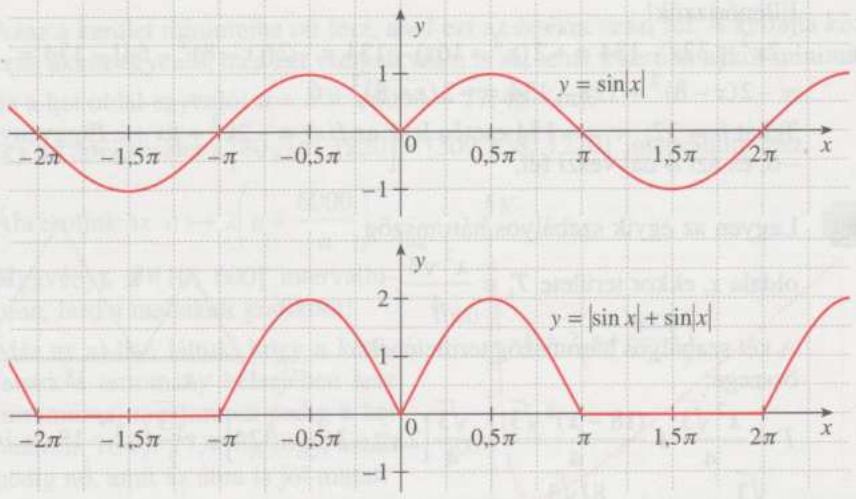
$0 \le (\cos x - 1)^2 \le 4.$

Tehát minimumát akkor veszi fel, ha $\cos x - 1 = 0$, azaz $\cos x = 1$, ekkor $x = 2k\pi$ $k \in \mathbf{Z}$, a függvény minimuma -4.

Maximuma $\cos x - 1 = -2$ esetén van, azaz $\cos x = -1$-nél, ekkor $x = \pi + 2l\pi$ $l \in \mathbf{Z}$, a függvény maximuma 0.

1361. a)





b) Értékkészletek:

$\{f(x) \in \mathbf{R} \mid 0 \le f(x) \le 1\}$;

$\{g(x) \in \mathbf{R} \mid -1 \le g(x) \le 1\}$;

$\{h(x) \in \mathbf{R} \mid 0 \le h(x) \le 2\}$.

c) Az f függvény páros; periódusa π;
minimumhelye: $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; minimuma: 0;

maximumhelye: $\frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$; maximuma: 1.

A g függvény páros, nem periodikus;

minimumhelye: $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{N}$; $-\frac{3\pi}{2} - 2m\pi$, $m \in \mathbf{N}$; minimuma: -1;

maximumhelye: $\frac{\pi}{2} + 2\varrho\pi$, $\varrho \in \mathbf{N}$; $-\frac{\pi}{2} - 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{N}$; maximuma: 1.

A h függvény páros, nem periodikus;

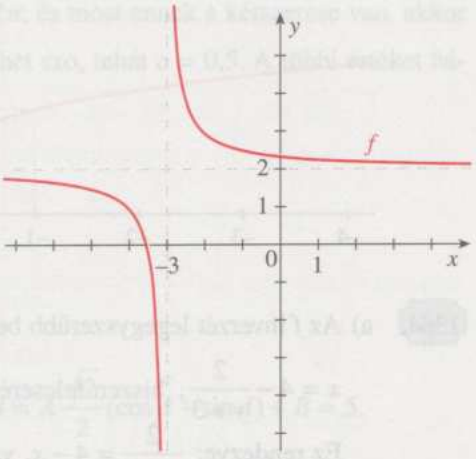
minimumhelyei: $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{N}$;

$[-2\pi - 2l\pi; -\pi - 2l\pi]$, $l \in \mathbf{N}$; minimuma: 0;

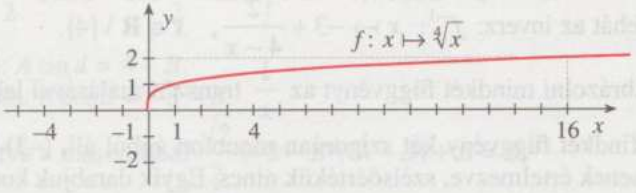
maximumhelye: $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{N}$; $-\frac{\pi}{2} - 2m\pi$, $m \in \mathbf{N}$; maximuma: 2.

1362. $f(x) = \dfrac{2x+7}{x+3} = \dfrac{2(x+3)+1}{x+3} = 2 + \dfrac{1}{x+3} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$

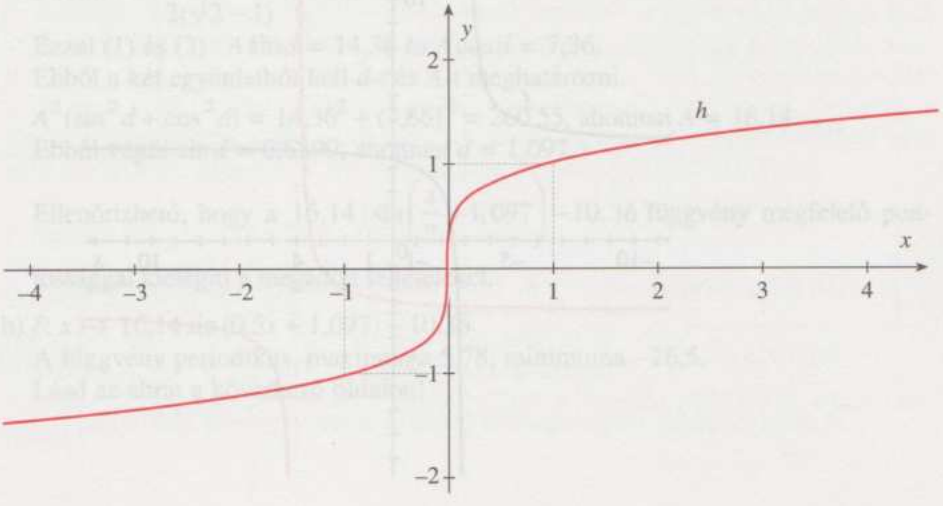
Értelmezési tartomány: $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$.
Értékkészlet: $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.
Se nem páros, se nem páratlan.
Zérushely: $-3{,}5$.
Szélsőértéke nincs.
$]-\infty; -3[$ szigorúan monoton csökkenő,
$]-3; +\infty[$ szigorúan monoton csökkenő.



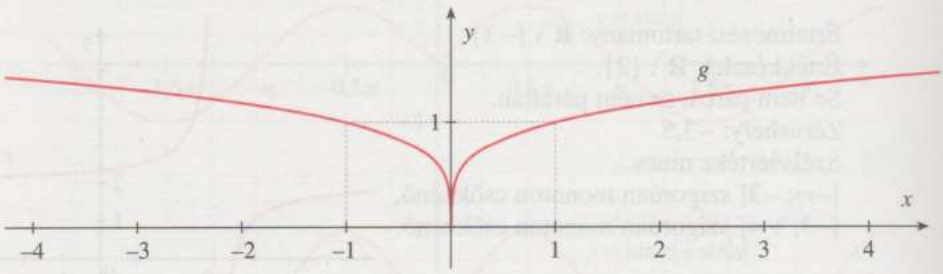
1363.



a) Páratlan függvény: $h(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x}, & \text{ha } x \geq 0; \\ -\sqrt[4]{-x}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$



b) Páros függvény: $g(x) = \sqrt[4]{|x|}$.



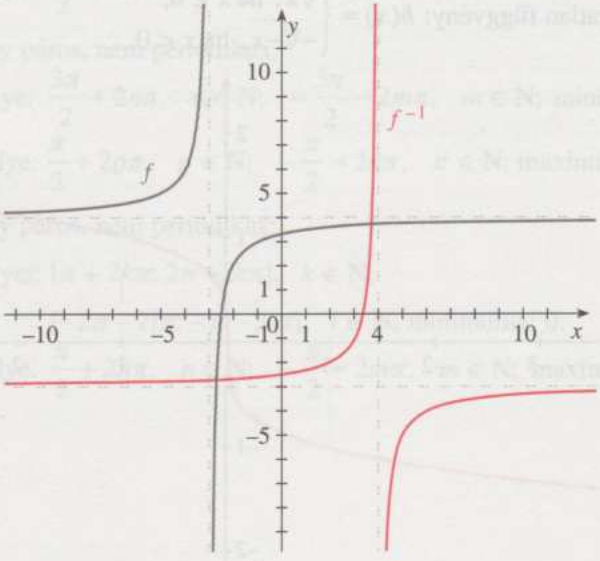
1364. a) Az f inverzét legegyszerűbb betűcserével meghatározni: $y = 4 - \frac{2}{x+3}$ helyett $x = 4 - \frac{2}{y+3}$, hiszen felcseréltük az x és y tengelyt.

Ez rendezve: $\frac{2}{y+3} = 4 - x$, vagyis $\frac{y+3}{2} = \frac{1}{4-x}$, ahonnan $y = -3 + \frac{2}{4-x}$.

Tehát az inverz: f^{-1}: $x \mapsto -3 + \frac{2}{4-x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$.

Ábrázolni mindkét függvényt az $\frac{1}{x}$ transzformálásával lehet.

b) Mindkét függvény két szigorúan monoton ágból áll, (–3)-nál, illetve 4-nél nincsenek értelmezve, szélsőértékük nincs. Egyik darabjuk konvex, a másik konkáv, lásd az ábrát!



1365. a) A megadott képletben négy paraméter van, amit a megadott információkból kell kitalálni: nevezetesen, hogy a periódushossz 4π, és három helyen tudjuk az értékét is. Mivel a szinusz alapperiódusa 2π, és most ennek a kétszerese van, akkor a $\sin\frac{x}{2}$ függvény transzformáltjáról lehet szó, tehát $c = 0{,}5$. A többi értéket három egyenletből kapjuk majd:

(1) $A\sin d + B = 4$;

(2) $A\sin\left(\frac{\pi}{4} + d\right) + B = 5$;

(3) $A\sin\left(\frac{\pi}{2} + d\right) + B = -3$.

Az utolsó két egyenlet átalakítva:

(2) $A\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos d + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin d\right) + B = A\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos d + \sin d) + B = 5$.

(3) $A\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos d + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin d\right) + B = A\cdot\cos d + B = -3$.

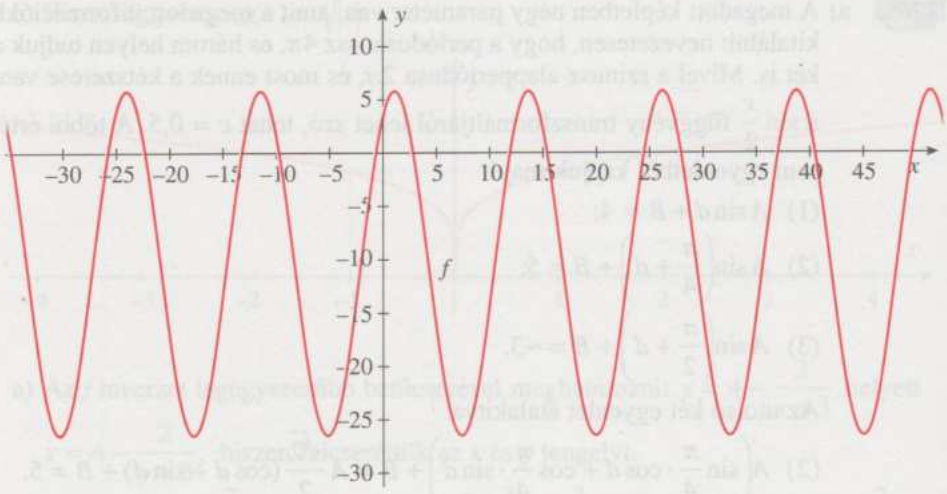
Az elsőből: $A\sin d = 4 - B$.
Az utolsóból: $A\cos d = -3 - B$.
Ezeket beírva a másodikba: $\frac{\sqrt{2}}{2}(-3 - B + 4 - B) + B = 5$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2B) = 5 - B.$$

Ebből $B = \frac{\sqrt{2} - 10}{2(\sqrt{2} - 1)} \approx -10{,}36$.
Ezzel (1) és (3) $A\sin d = 14{,}36$ és $A\cos d = 7{,}36$.
Ebből a két egyenletből kell d-t és A-t meghatározni.
$A^2(\sin^2 d + \cos^2 d) = 14{,}36^2 + (7{,}36)^2 = 260{,}55$, ahonnan $A = 16{,}14$.
Ebből végül $\sin d = 0{,}8899$, ahonnan $d = 1{,}097$.

Ellenőrizhető, hogy a $16{,}14\cdot\sin\left(\frac{x}{2} + 1{,}097\right) - 10{,}36$ függvény megfelelő pontossággal kielégíti a megadott feltételeket.

b) $f\colon x \mapsto 16{,}14\sin(0{,}5x + 1{,}097) - 10{,}36$
A függvény periodikus, maximuma 5,78; minimuma –26,5.
Lásd az ábrát a következő oldalon!



1366. $x + y = 60$; $x \in \mathbf{R}^+$; $y \in \mathbf{R}^+$

A négyzetösszeg: $x^2 + y^2 = x^2 + (60 - x)^2 = 2x^2 - 120x + 3600 =$

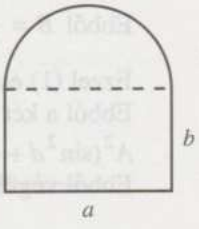
$$2(x^2 - 60x) + 3600 = 2(x - 30)^2 + 1800$$

ennek van minimuma, minimumhelye 30, minimum értéke 1800.

Ha $x = 30$, akkor $y = 30$, tehát a négyzetösszeg akkor minimális, ha a 60-at két egyenlő összeadandóra bontjuk. (Ekkor a minimális összeg: $30^2 + 30^2 = 1800$.)

1367. Az ablak téglalap alakú részének méretei: a és b, $(a > 0,\ b > 0)$.

A félkör alakú ablak sugara $\frac{a}{2}$.



Az ablak kerülete: $a + 2b + \frac{a}{2}\pi = 8$,

ebből $b = 4 - a\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$,

$b > 0 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 4$, innen $a < \frac{16}{2 + \pi}$.

Az ablak területe: $ab + \frac{a^2}{8}\pi$. Ebbe behelyettesítve b értékét kapjuk a:

$T(a) = 4a - a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{a^2\pi}{8} = -a^2\frac{4 + \pi}{8} + 4a$; $0 < a < \frac{16}{2 + \pi}$ függvényt.

A maximumhely meghatározása céljából teljes négyzetté alakítunk.

$$T(a) = -\frac{4+\pi}{8}\left(a^2 - \frac{32}{4+\pi}a\right);$$

$$T(a) = -\frac{4+\pi}{8}\left(a - \frac{16}{4+\pi}\right)^2 + \frac{32}{4+\pi}.$$

Innen már leolvasható, hogy a T függvény a maximumot a $\frac{16}{4+\pi}$ helyen veszi fel és a maximum értéke $\frac{32}{4+\pi}$.

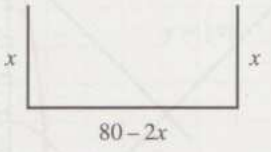
Minthogy $0 < \frac{16}{4+\pi} < \frac{16}{2+\pi}$, a kapott maximumhely a $T(a)$ értelmezési tartományához tartozik.

A maximális területű ablak méretei tehát

$$a = \frac{16}{4+\pi} \ (\approx 2{,}24 \text{ m}), \qquad b = 4 - \frac{16}{4+\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{4+\pi} \ (\approx 1{,}12 \text{ m}).$$

Az ablak kerülete így valóban 8 m.

1368. A téglalap keresztmetszetű vízlevezető két oldalának hossza cm-ben mérve x és $(80 - x)$, ahol $0 < x < 40$.



Területe:

$t(x) = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x = -2(x - 20)^2 + 800$.

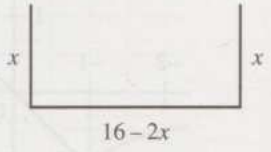
A függvény maximumhelye: 20, értéke: 800.

Maximális területet akkor kapunk, ha a felhajtandó rész 20 cm széles.

Ekkor $t = 20 \cdot 40 = 800$, azaz a maximális terület 800 cm^2.

1369. A patakkal párhuzamos téglalap-oldal hossza legyen b, a másik oldal hossza a. A szükséges kerítésanyag ekkor $2 \cdot a + b$. A szöveg szerint $2a + b = 400$, azaz $b = 400 - 2a$. (Világos, hogy $0 < b < 400$ és $0 < a < 200$). A téglalap területe $a \cdot b$, azaz $a(400 - 2a)$. Tehát az $a(400 - 2a)$ kifejezés maximumát keressük a $]0; 200[$ intervallumon. Ez a kifejezés két zérushelyének számtani közepénél van, azaz $a = 100$ m. Ekkor $b = 200$ m. A kert maximális területe 20 000 m^2.

1370. A téglalap két oldalának hossza méterben mérve: x és $(16 - 2x)$, ahol $0 < x < 8$.

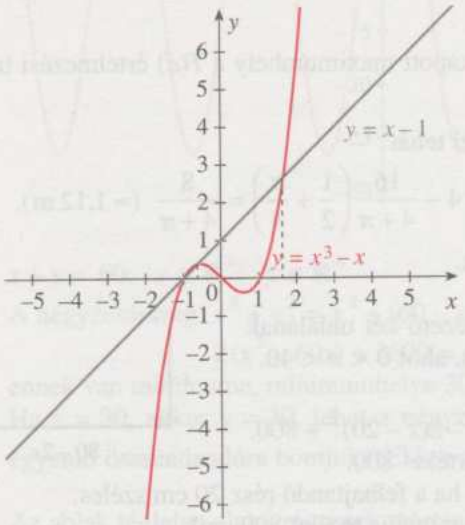


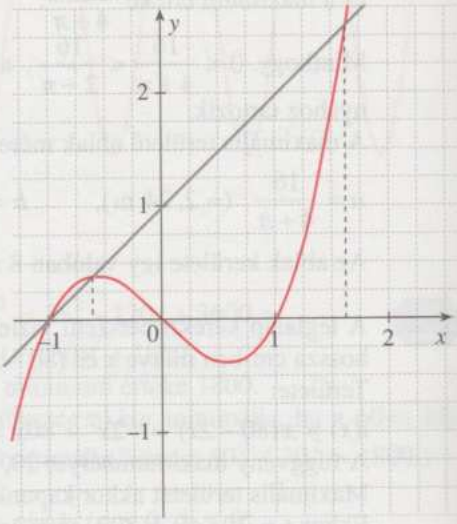
Területe $t(x) = x(16 - 2x)$.

A $t(x) = -2x^2 + 16x = -2(x^2 - 8x) = -2(x - 4)^2 + 32$ átalakítás szerint a vizsgált függvény maximumhelye 4, értéke 32. Tehát a baromfiudvar területe 32m^2, a rövidebb oldala 4 m, a hosszabb oldala 8 m.

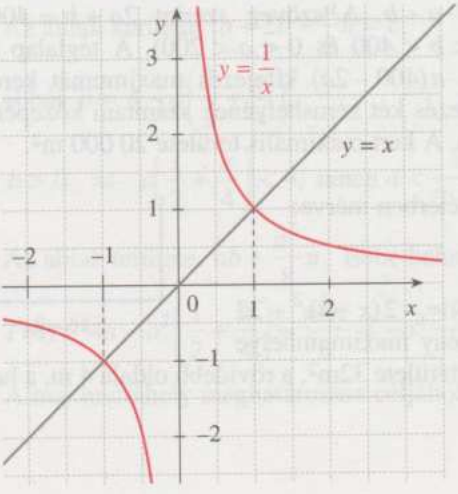
3.4. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

1371. A gyökök egy tizedes pontossággal leolvasva $-1{,}0$; $-0{,}6$; $1{,}6$. (Algebrailag megoldva az egyenletet megkaphatjuk a pontos gyököket is: -1 és $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\approx\begin{cases}1{,}618\\-0{,}618\end{cases}$.)

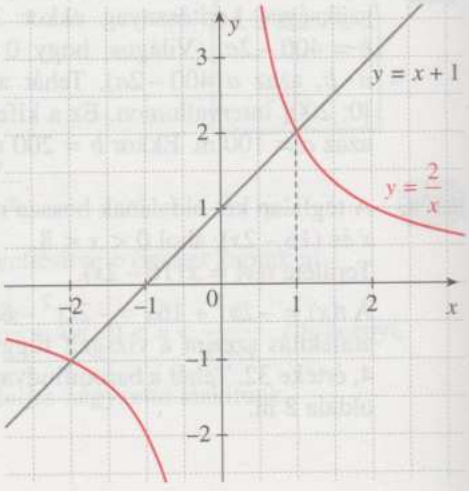




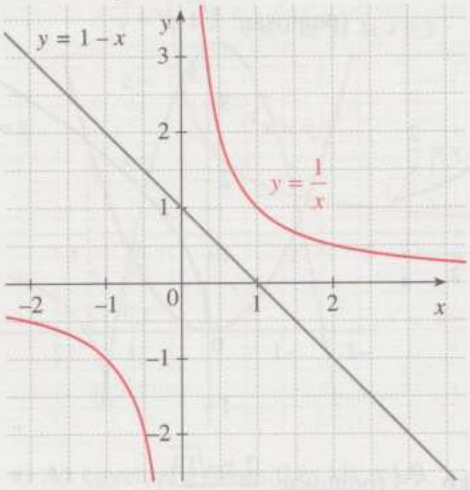
1372. a) Az egyenlet gyökei: -1 és 1.



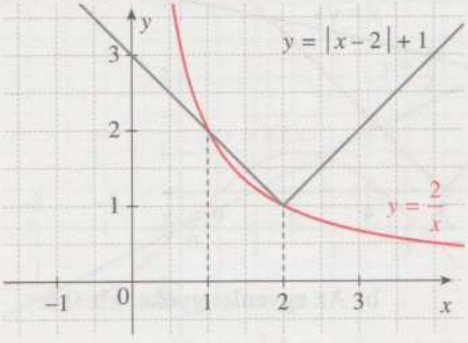
b) Az egyenlet gyökei: -2 és 1.



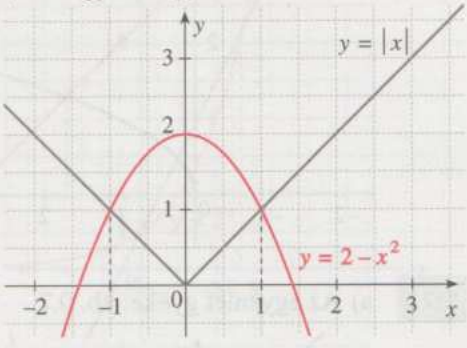
c) Nincs gyöke.



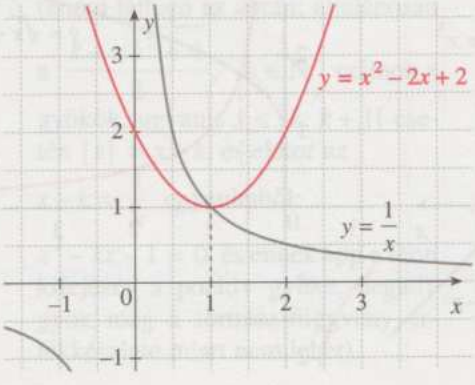
1373. a) Az egyenlet gyökei: 1 és 2.



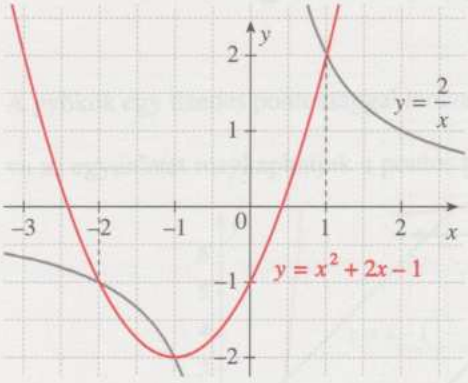
b) Az egyenlet gyökei: –1 és 1.



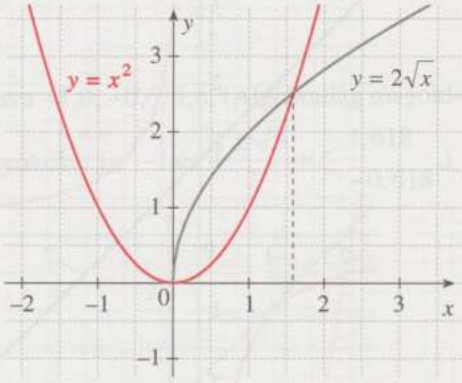
c) Az egyenlet gyöke: 1.



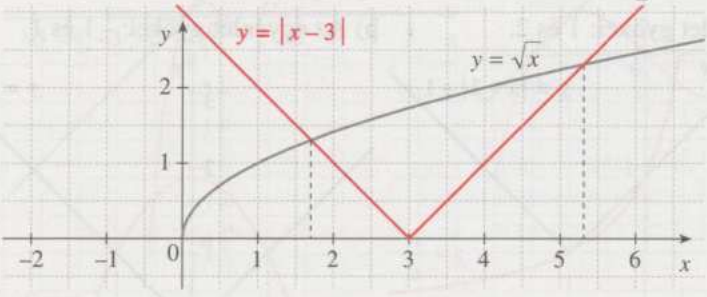
1374. a) Az egyenlet gyökei: -2 és -1 és 1.



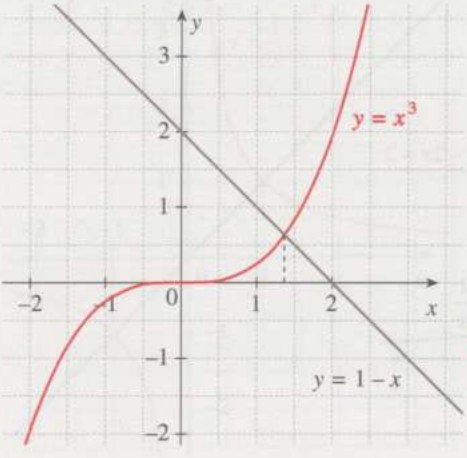
b) Az egyenlet gyökei: 0 és kb. 1,6 (pontosan: $\sqrt[3]{4}$).



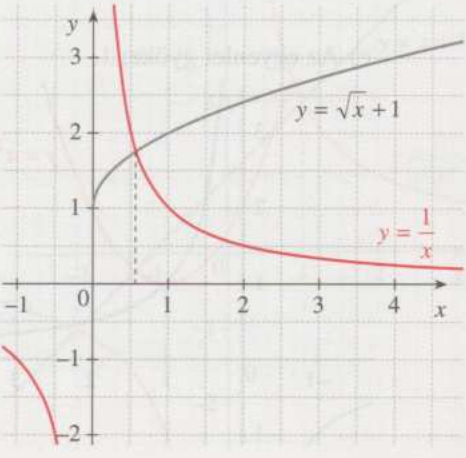
c) Az egyenlet gyökei: kb. 1,7 és kb. 5,3 (pontosan: $\frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$).



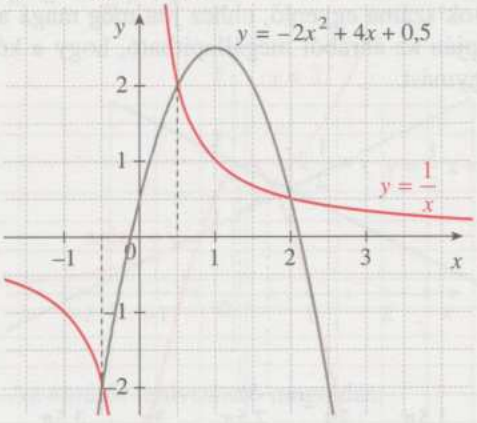
1375. a) Az egyenlet gyöke: kb. 0,7.



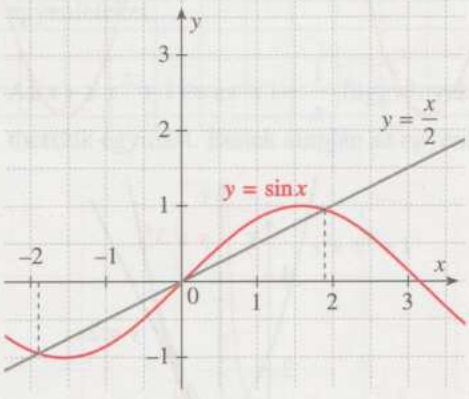
b) Az egyenlet gyöke: kb. 0,6.



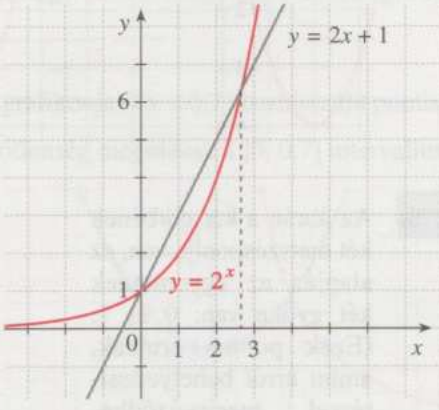
c) Az egyenlet gyökei: –0,5 és 0,5 és 2.



1376. a) Az egyenlet gyökei: 0 és kb. ±1,9.

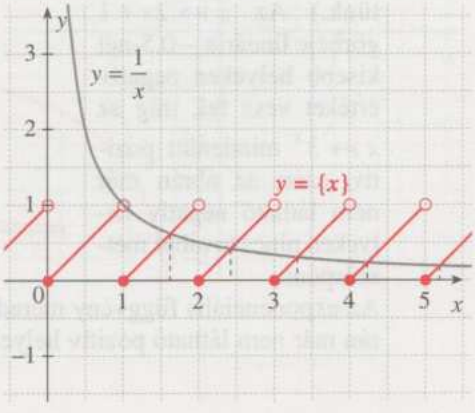


b) Az egyenlet gyökei: 0 és kb. 2,7.

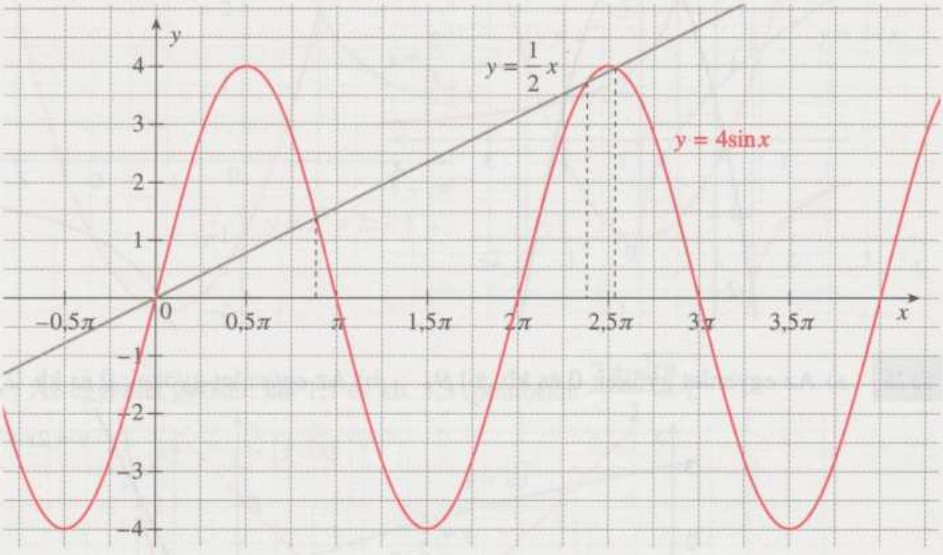


c) Kb. 1,6; 2,4; 3,3; 4,2; 5,2 (ennyi látható az ábrán; általánosan a $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $k \in \mathbf{N}^+$ számok a gyökök; ugyanis $x \in [k; k+1[$ esetén $\{x\} = x - k$, és ekkor az $x - k = \frac{1}{x}$ egyenletből:

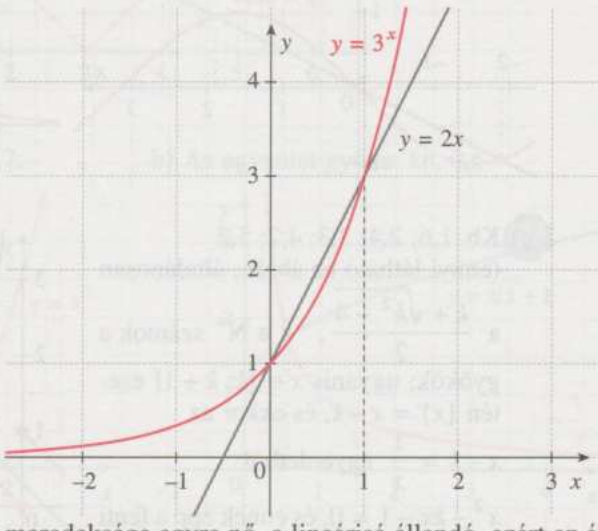
$x^2 - kx - 1 = 0$, és ennek épp a fenti kifejezés a pozitív gyöke, negatív gyök meg a törtrész-függvény értékkészlete miatt nem lehet).



1377. Az ábra az origóra szimmetrikus. Ebből következik, hogy a pozitív abszcisszájú és negatív abszcisszájú metszéspontok száma egyenlő, ehhez jön még maga az origó (0 abszcisszájú pont). Ennek alapján az ábrából megállapítható, hogy a két függvény görbéje 7 pontban metszi egymást.

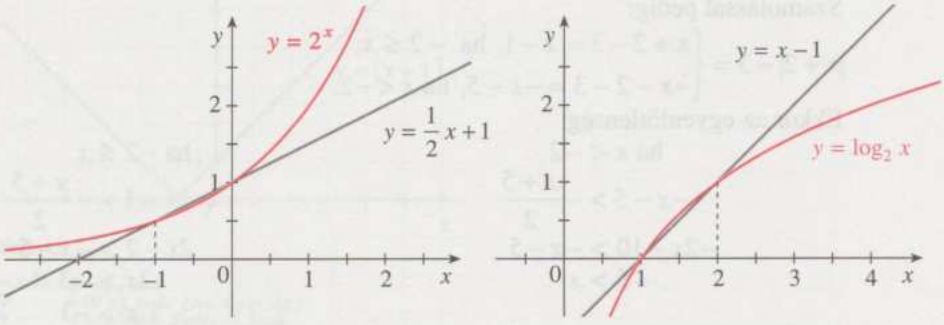


1378. Az ábrán a két görbének két metszéspontja van, ez alapján az egyenletnek két gyöke van: 0 és 1. (Ezek pontos értékek, amint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk.) Az $x \mapsto 2x + 1$ görbéje lineáris, −0,5-nél kisebb helyeken negatív értéket vesz fel, míg az $x \mapsto 3^x$ mindenütt pozitív, ezért az ábrán már nem látható negatív helyeken nincs további metszéspont.



Az exponenciális függvény meredeksége egyre nő, a lineárisé állandó, ezért az ábrán már nem látható pozitív helyeken sincs további metszéspont.

1379. a) $2^x = \frac{1}{2}x + 1$ b) $\log_2 x = x - 1$

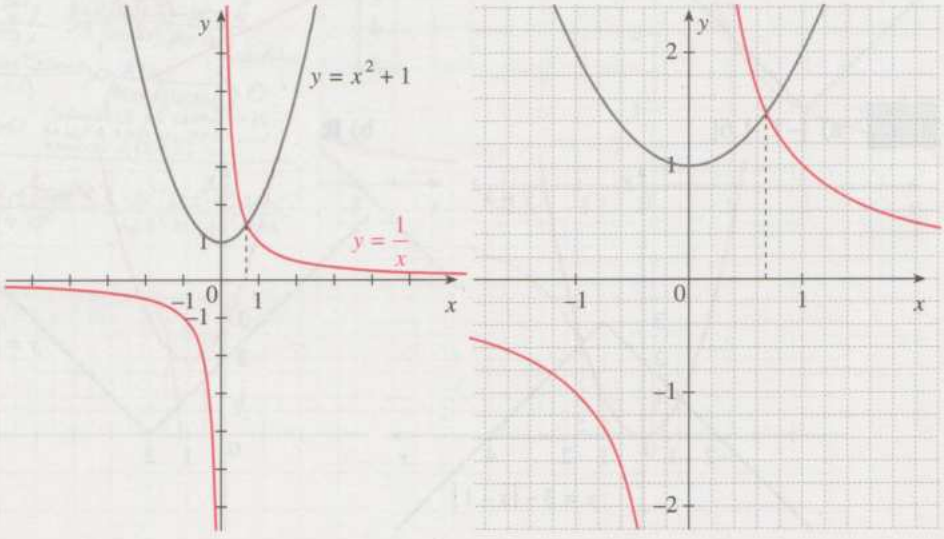


Az ábráról leolvasható megoldás:

a) $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; b) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ezen értékek valóban kielégítik az egyenleteket.

1380. Az $x \mapsto x^2 + 1$ és az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvények grafikonjai kb. a 0,7 abszcisszájú pontban metszik egymást. Ennek alapján az egyenlőtlenség megoldása a]0; 0,7] intervallum.



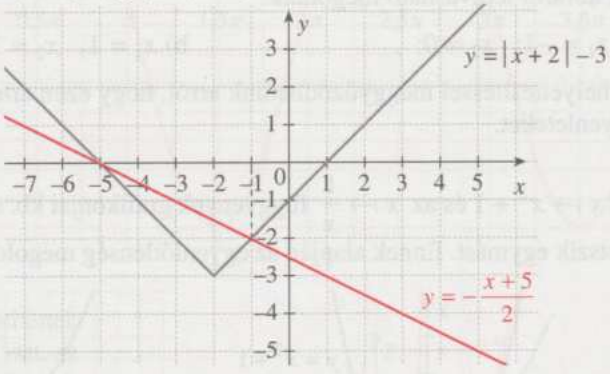
1381. A két függvény grafikonja a -5 és a -1 helyen metszi egymást, ebből az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty; -5[$ vagy $]-1; +\infty[$.
Számolással pedig:

$$|x+2|-3=\begin{cases} x+2-3=x-1, \text{ ha } -2\le x; \\ -x-2-3=-x-5, \text{ ha } x<-2. \end{cases}$$

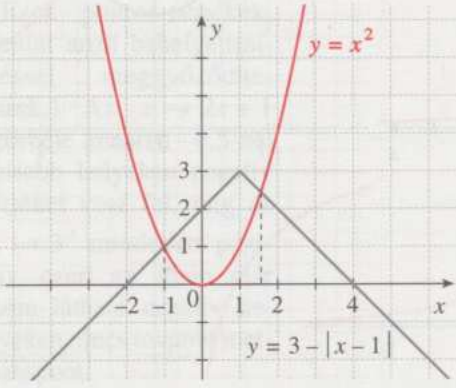
Ekkor az egyenlőtlenség:

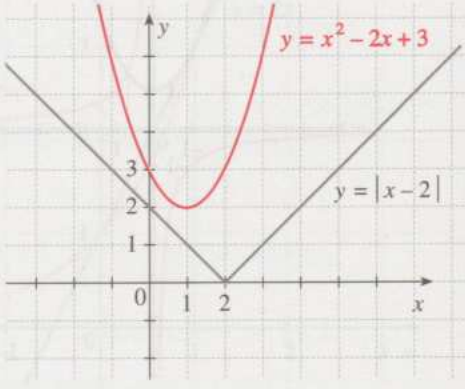
ha $x<-2$	ha $-2\le x$
$-x-5>-\frac{x+5}{2}$	$x-1>-\frac{x+5}{2}$
$-2x-10>-x-5$	$2x-2>-x-5$
$-5>x$	$3x>-3$
	$x>-1$

vagyis szintén $]-\infty; -5[$ vagy $]-1; +\infty[$.



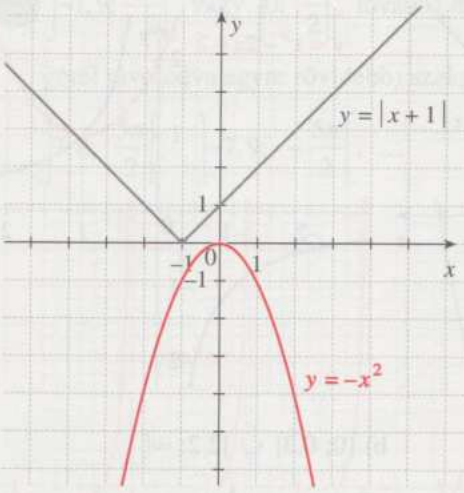
1382. a) $]-1; 1{,}6[$ b) $\mathbf{R}$



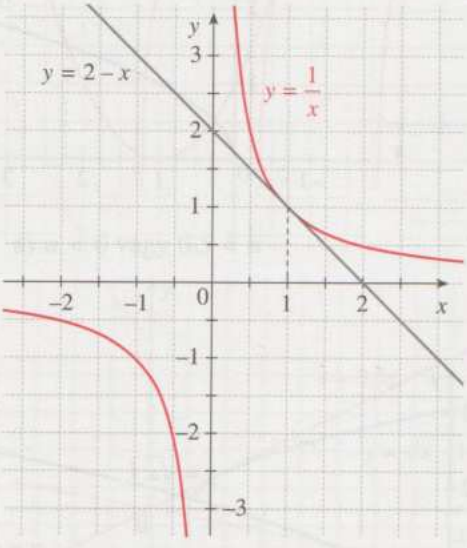


(pontosan: $\left]-1; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right[$)

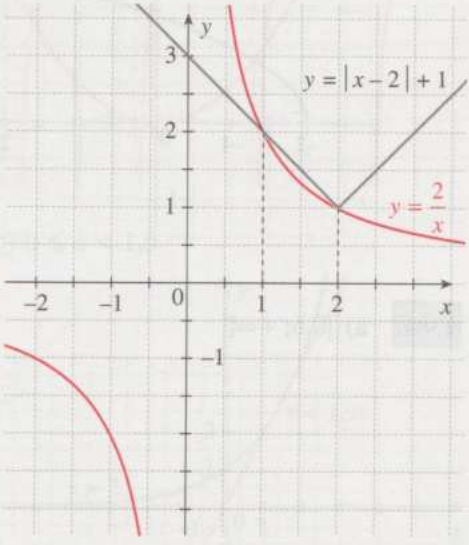
c) $\varnothing$



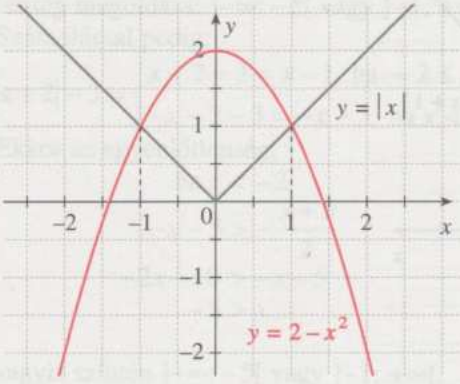
1383. a) $]0; 1[\cup]1; \infty[$



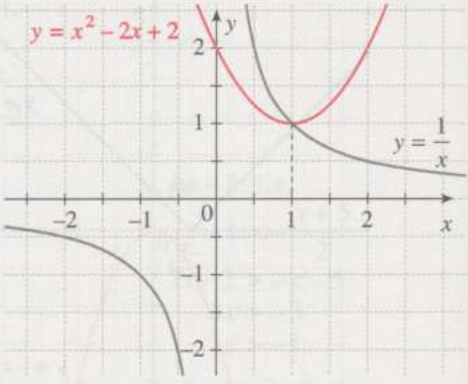
b) $]-\infty; 0[\cup [1; \infty[$



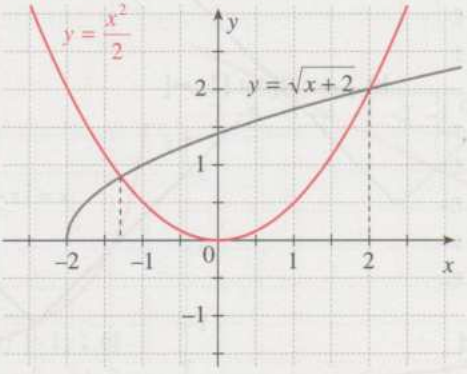
1384. a) $[-1; 1]$



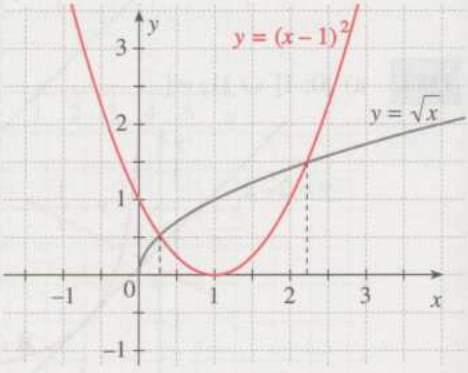
b) $]-\infty; 0[\cup]1; \infty[$



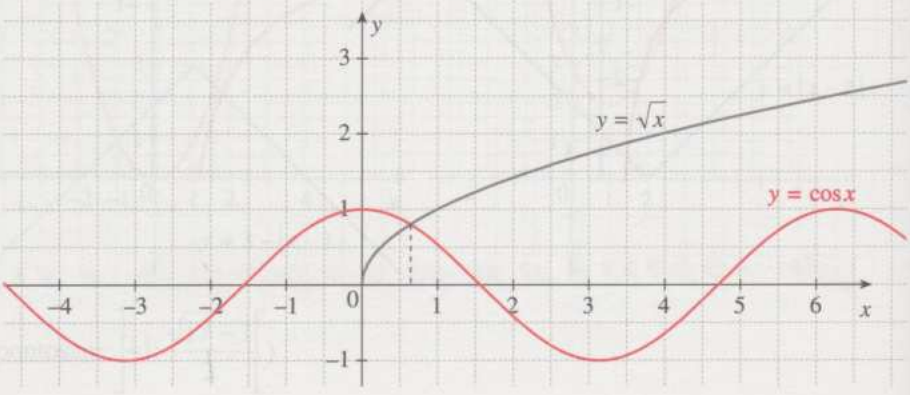
1385. a) $]-1{,}3; 2[$



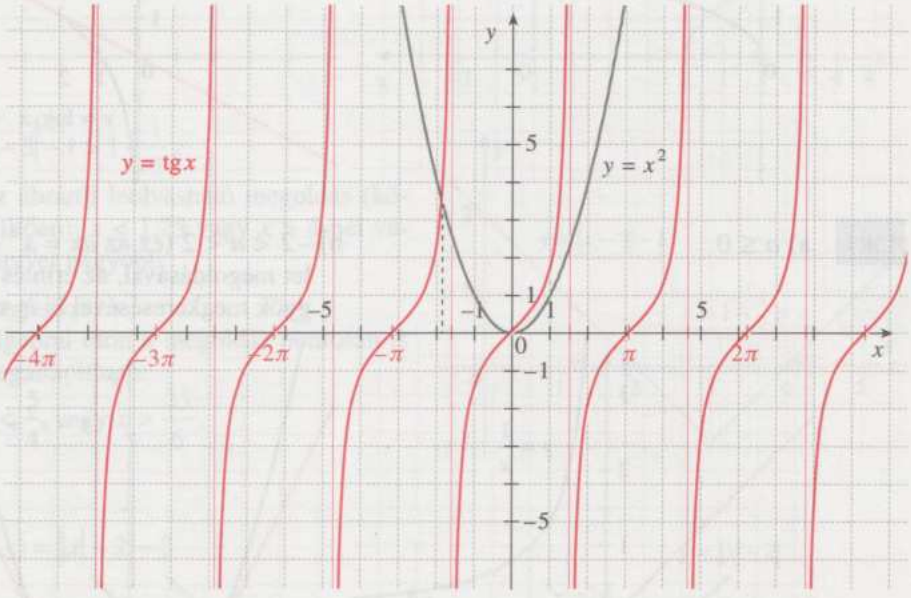
b) $[0; 0{,}3[\cup]2{,}2; \infty[$



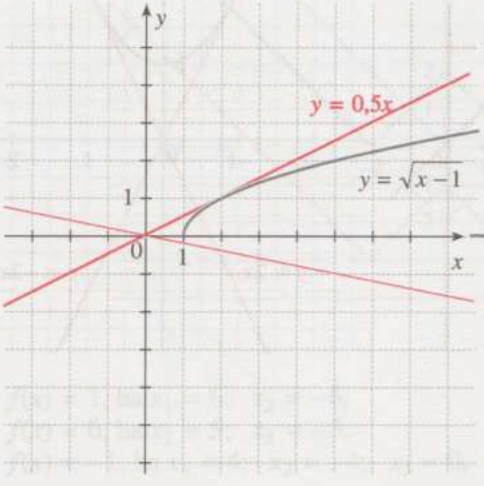
1386. a) $]0{,}6; +\infty[$



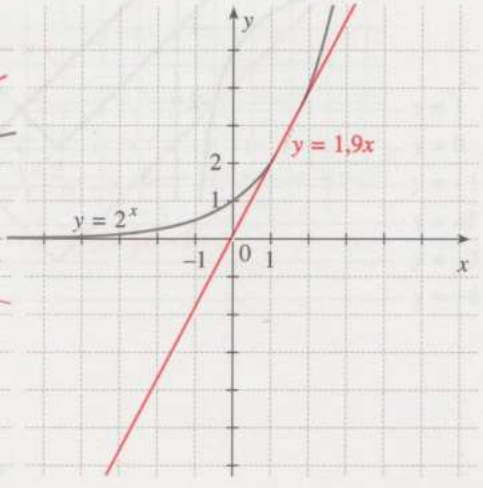
b) $\left]-1,9; -\frac{\pi}{2}\right[$ vagy $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, továbbá minden periódus vége előtt egy rövid (az origótól távolodva egyre rövidebb) szakaszon, pl. $\left]4,7; \frac{3\pi}{2}\right[$; $\left]-4,8; -\frac{3\pi}{2}\right[$; $\left]7,8; \frac{5\pi}{2}\right[$; $\left]-7,9; -\frac{5\pi}{2}\right[$; ...



1387. a) $a < 0$ vagy $0,5 < a$

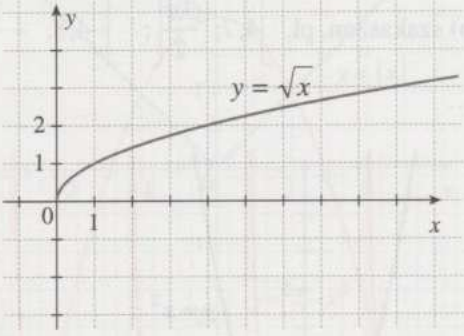


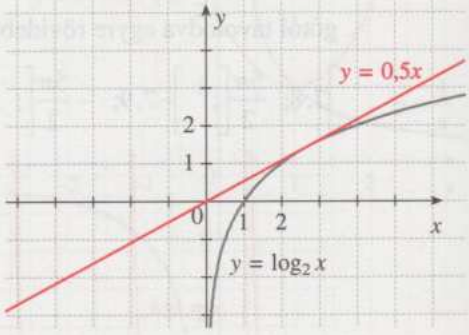
b) $0 \le a < 1,9$



1388. a) nincs ilyen a (mert az origó mindenképpen közös pont)

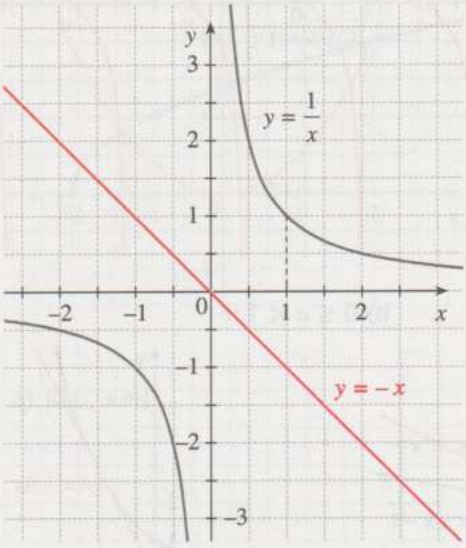
b) $0{,}5 < a$

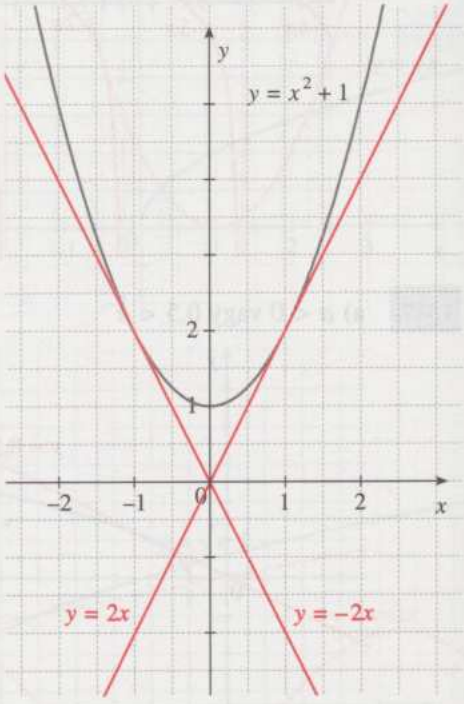




1389. a) $a \leq 0$

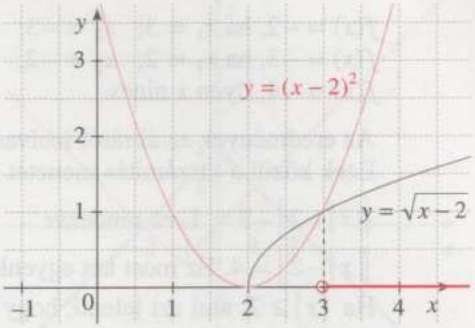
b) $-2 < a < 2$ (ez az $ax = x^2 + 1$ egyenlet megoldásával, az érintés miatti egy gyök megkeresésével ki is számítható)





1390. $(x-2)^2 > \sqrt{x-2}$

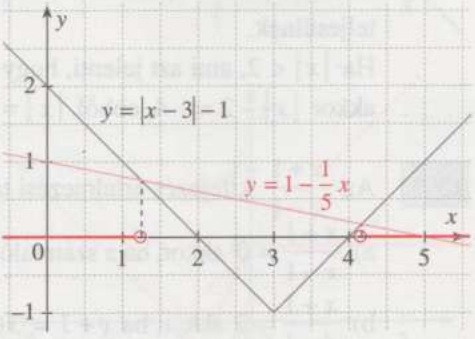
Az ábráról megállapítható, hogy a megoldás: $x > 3$. (A $\sqrt{x-2}$ kifejezés csak $x \geq 2$ esetén értelmezhető.)



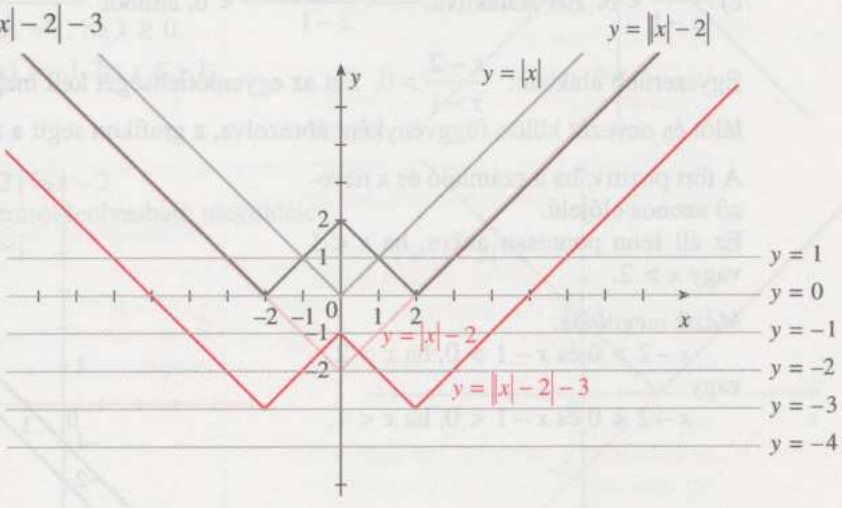
1391. $|x-3|-1 > 1-\frac{1}{5}x$

Az ábráról leolvasható megoldás (közelítően): $x < 1{,}25$ vagy $x > 4$-nél valamivel nagyobb.

Megjegyzés:
Algebrai úton a megoldás pontosan is megállapítható:
$x < \frac{5}{4}$ vagy $x > \frac{25}{6}$.



1392. $f(x) = \big||x|-2\big|-3$



$f(x) = 1$, ha $x_1 = 6$; $x_2 = -6$,
$f(x) = 0$, ha $x_1 = 5$; $x_2 = -5$,
$f(x) = -1$, ha $x_1 = 4$; $x_2 = -4$; $x_3 = 0$,

$f(x) = -2$, ha $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$,
$f(x) = -3$, ha $x_1 = 2$; $x_2 = -2$,
$f(x) = -4$, ilyen x nincs.

Az eredmények az ábráról leolvashatók.
Ezek közül a kiszámítás menetét pl. az elsőn követjük nyomon.

$\big||x|-2\big|-3 = 1$, ez rendezve:

$\big||x|-2\big| = 4$. Ez most két egyenletre bontható:

Ha $|x| \geq 2$, ami azt jelenti, hogy $x \leq -2$ vagy $x \geq 2$,
akkor $|x| - 2 = 4$, ebből $|x| = 6$, eszerint $x = 6$ és $x = -6$ is megoldás. A feltételek teljesülnek.

Ha $|x| < 2$, ami azt jelenti, hogy $-2 < x < 2$,
akkor $|x| - 2 = -4$, ebből $|x| = -2$, ilyen x nincs.

1393. Az $\dfrac{x+1}{x-1}$ kifejezés értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

a) $\dfrac{x+1}{x-1} = 0$ akkor, ha a számláló $= 0$ (de ugyanakkor a nevező $\neq 0$). Tehát $x = -1$.

b) $\dfrac{x+1}{x-1} = 3$ akkor, ha $x + 1 = 3(x-1)$, $x \neq 1$. Ebből $x = 2$ adódik.

c) $\dfrac{x+1}{x-1} < 3$. Ezt átalakítva: $\dfrac{x+1-3(x-1)}{x-1} < 0$, amiből $\dfrac{-2(x-2)}{x-1} < 0$ adódik.

Egyszerűbb alakban: $\dfrac{x-2}{x-1} > 0$. Ezt az egyenlőtlenséget kell megoldani. A számlálót és nevezőt külön függvényként ábrázolva, a grafikon segít a megoldásban.

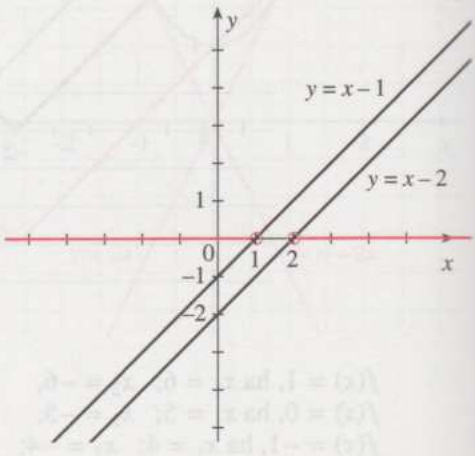
A tört pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.
Ez áll fenn pontosan akkor, ha $x < 1$ vagy $x > 2$.

Másik megoldás:

$x - 2 > 0$ és $x - 1 > 0$, ha $x > 2$

vagy

$x - 2 < 0$ és $x - 1 < 0$, ha $x < 1$.

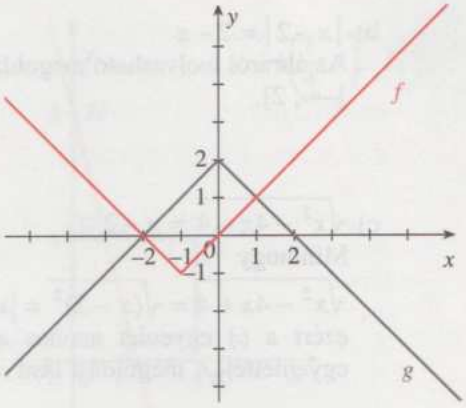


1394. $f(x) = |x+1| - 1$; $g(x) = -|x| + 2$.

$f(x) = g(x)$, $|x+1| - 1 = -|x| + 2$,
ha $x_1 = -2$ vagy $x_2 = 1$.

$f(x) < g(x)$, ha $-2 < x < 1$.

$f(x) > g(x)$, ha $x < -2$ vagy $1 < x$.



1395. $f(x) = |x+1| - |x|$

Az ábra 3 részből áll:
$g(x) = |x+1|$; $h(x) = -|x|$ és ezek összege f.

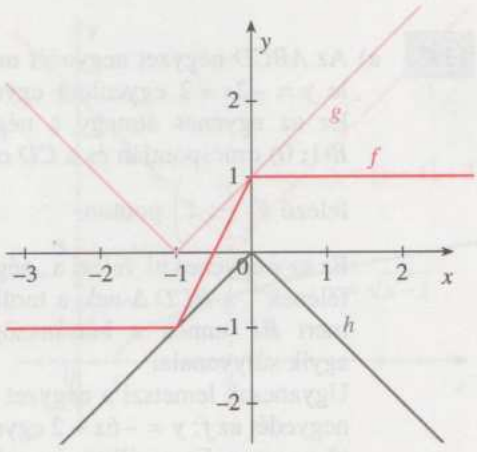
a) Értelmezési tartomány: **R**.

b) Értékkészlet: $[-1; 1]$.

c); e) Zérushely: $f(x) = 0$, ha $x = -\frac{1}{2}$.

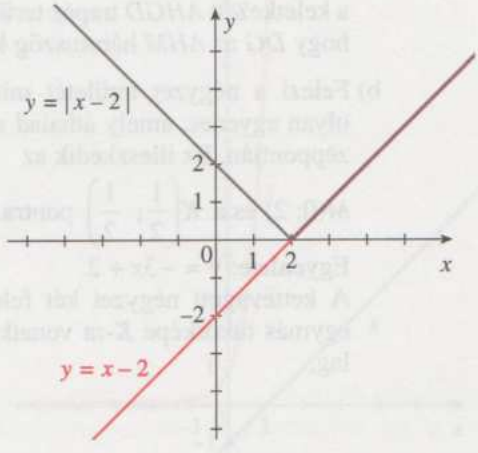
d) $f(x) = 1$, ha $x \geq 0$.

f) $f(x) = -1$, ha $x \leq -1$.



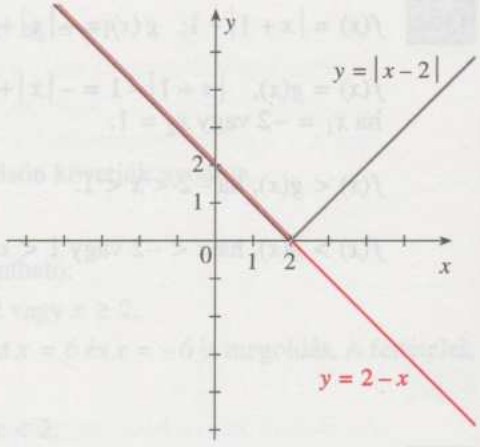
1396. a) $|x-2| = x-2$

Az ábráról leolvasható megoldás:
$[2; +\infty[$.



b) $|x-2| = 2-x$

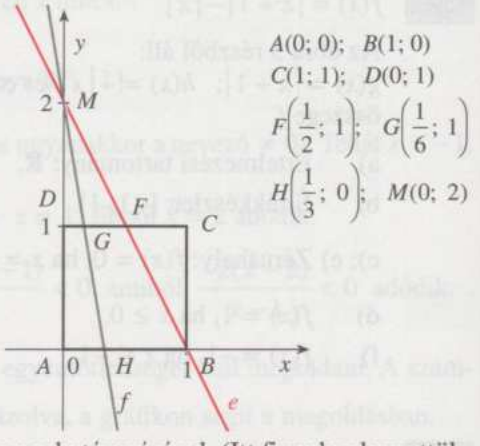
Az ábráról leolvasható megoldás: $]-\infty; 2]$.



c) $\sqrt{x^2-4x+4} = x-2$

Minthogy $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, ezért a c) egyenlet azonos az a) egyenlettel. A megoldást lásd ott.

1397. a) Az $ABCD$ négyzet negyedét metszi le $y = -2x+2$ egyenletű egyenes. Ez az egyenes átmegy a négyzet $B(1; 0)$ csúcspontján és a CD oldalt felező $F\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ponton.

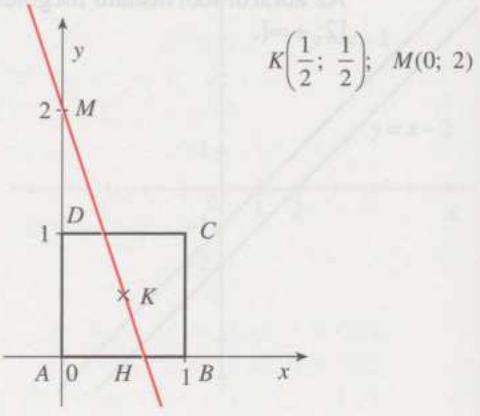


$A(0; 0)$; $B(1; 0)$
$C(1; 1)$; $D(0; 1)$
$F\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $G\left(\frac{1}{6}; 1\right)$
$H\left(\frac{1}{3}; 0\right)$; $M(0; 2)$

Ez az e egyenes ui. felezi a „négyzet felének", a BCD Δ-nek a területét, mert BF ennek a háromszögnek egyik súlyvonala.

Ugyancsak lemetszi a négyzet egynegyedét az f: $y = -6x+2$ egyenletű egyenes. Ez az állítás igazolható a keletkezett $AHGD$ trapéz területének meghatározásával. (Itt figyelembe vettük, hogy DG az AHM háromszög középvonala.)

b) Felezi a négyzet területét minden olyan egyenes, amely áthalad a középpontján. Ez illeszkedik az $M(0; 2)$ és a $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ pontra.

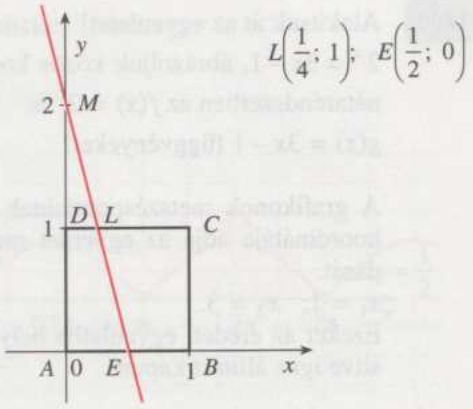


$K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $M(0; 2)$

Egyenlete: $y = -3x+2$.

A kettévágott négyzet két fele ui. egymás tükörképe K-ra vonatkozólag.

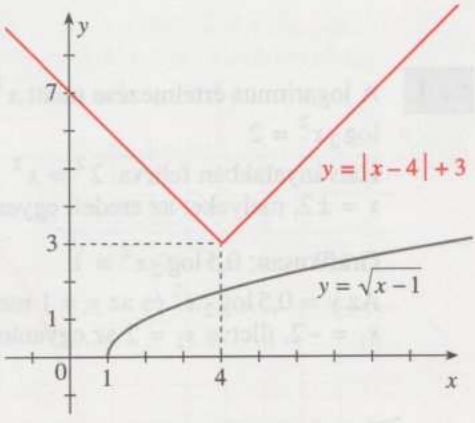
c) Az $y = -4x + 2$ egyenes illeszkedik az $M(0; 2)$ és az $E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ pontra. A keletkező két trapéz területe $\frac{3}{8}$, illetve $\frac{5}{8}$, ezért a két terület aránya 3:5.



$L\left(\frac{1}{4}; 1\right)$; $E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

1398. $\sqrt{x-1} = |x-4| + 3$

Az ábráról leolvasható: a két grafikonnak nincs közös pontja, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

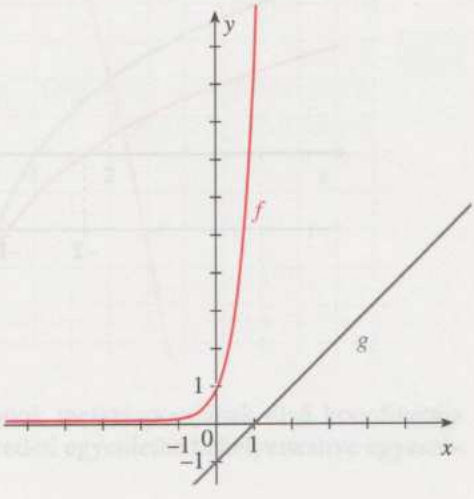


1399. $f(x) = 10^x$

$g(x) = x - 1$

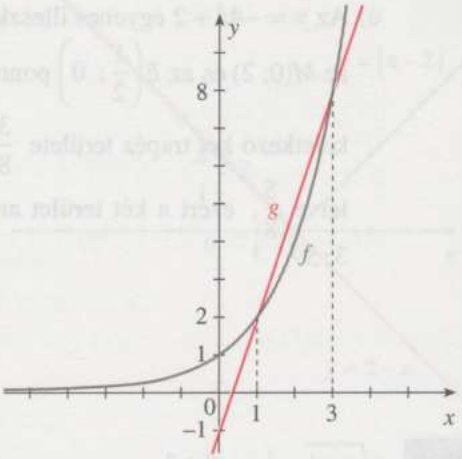
Értelmezési tartomány: **R**.

Az $y = 10^x$ és az $y = x - 1$ görbének nincs közös pontja (mindkét függvény szigorúan monoton növekvő), így az egyenletnek nincs megoldása.



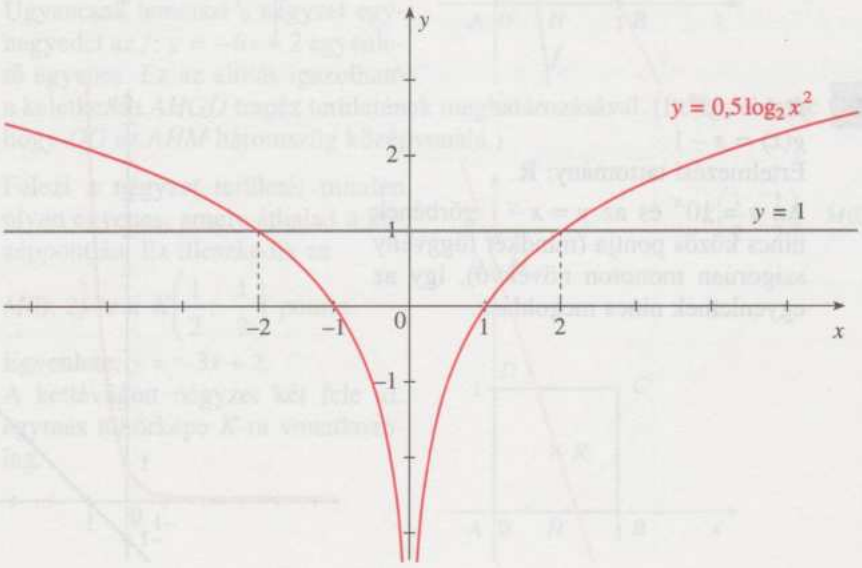
1400. Alakítsuk át az egyenletet!
$2^x = 3x - 1$, ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az $f(x) = 2^x$ és $g(x) = 3x - 1$ függvényeket!

A grafikonok metszéspontjainak első koordinátája adja az egyenlet megoldását:
$x_1 = 1$; $x_2 = 3$.
Ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve igaz állítást kapunk.



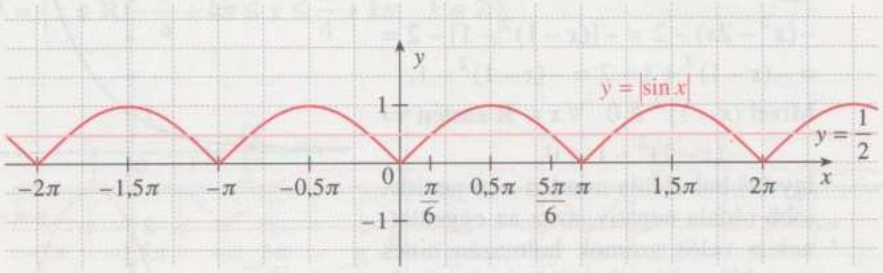
1401. A logaritmus értelmezése miatt $x^2 > 0$, azaz itt az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ az alaphalmaz.
$\log_2 x^2 = 2$
Hatványalakban felírva: $2^2 = x^2$
$x = \pm 2$, melyeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve egyenlőséget kapunk.

Grafikusan: $0{,}5 \log_2 x^2 = 1$.
Az $y = 0{,}5 \log_2 x^2$ és az $y = 1$ metszéspontjainak első koordinátája $x_1 = -2$, illetve $x_2 = 2$ az egyenlet megoldása.



1402. Az egyenlet megoldása az ábráról leolvasható:

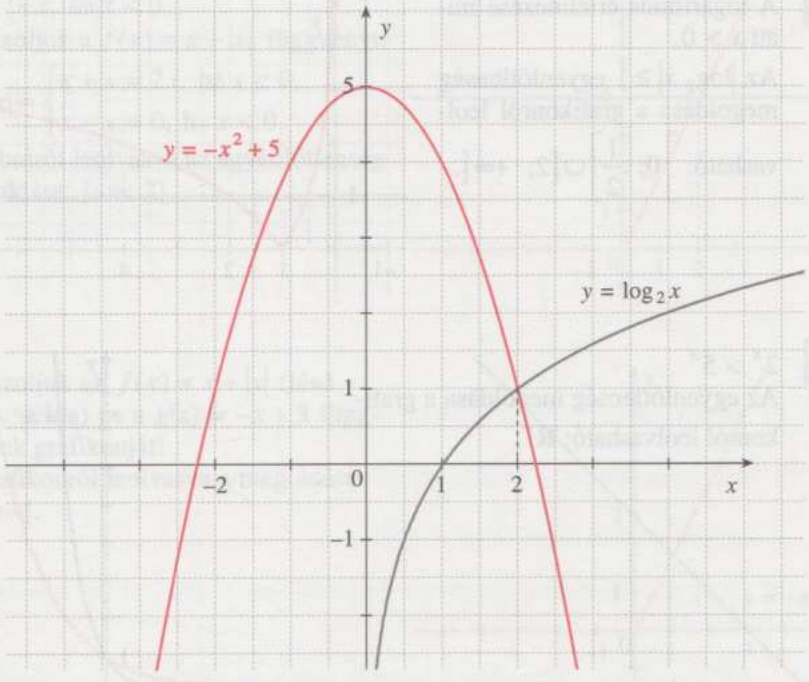
$$M = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z};\ \frac{5\pi}{6} + l\pi \quad l \in \mathbf{Z}\right\}.$$



1403. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$.

Alakítsuk át az egyenletet!

$\log_2 x = -x^2 + 5$



Az $y = \log_2 x$ és az $y = -x^2 + 5$ grafikonok metszéspontjának első koordinátája $x = 2$ az egyenlet megoldása; melyet az eredeti egyenletbe behelyettesítve egyenlőséget kapunk.

1404. Alakítsuk át az egyenletet!

$2^x = -x^2 + 2x - 2 \quad (*)$

A jobb oldal teljes négyzetté alakításával:

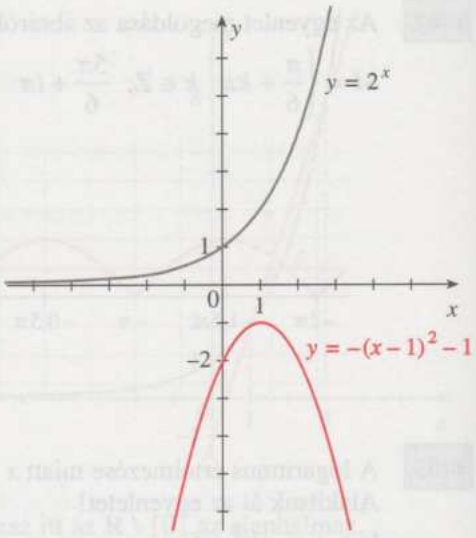
$-(x^2 - 2x) - 2 = -[(x-1)^2 - 1] - 2 =$

$= -(x-1)^2 + 1 - 2 = -(x-1)^2 - 1.$

Mivel $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ esetén $\Rightarrow$

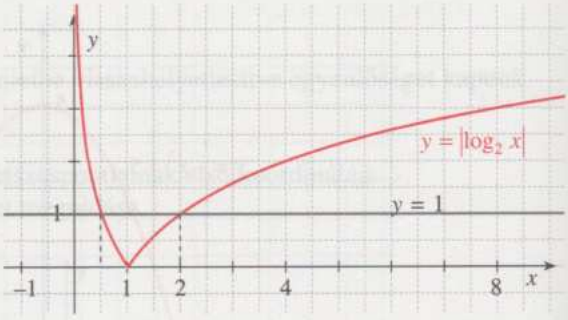
$-(x-1)^2 - 1 < 0,$

így $(*)$ bal oldala minden x-re pozitív, jobb oldala negatív, azaz az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása. (Az ábráról is leolvasható, hogy az $y = 2^x$ és $y = -(x-1)^2 - 1$ grafikonoknak nincs közös pontja.)



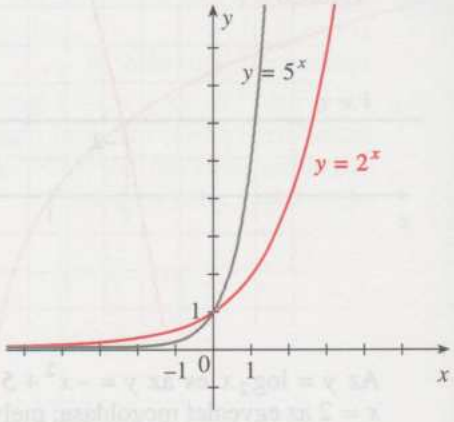
1405. A logaritmus értelmezése miatt $x > 0$.

Az $|\log_2 x| \geq 1$ egyenlőtlenség megoldása a grafikonról leolvasható: $\left]0;\ \frac{1}{2}\right] \cup [2;\ +\infty[$.



1406. $2^x > 5^x$

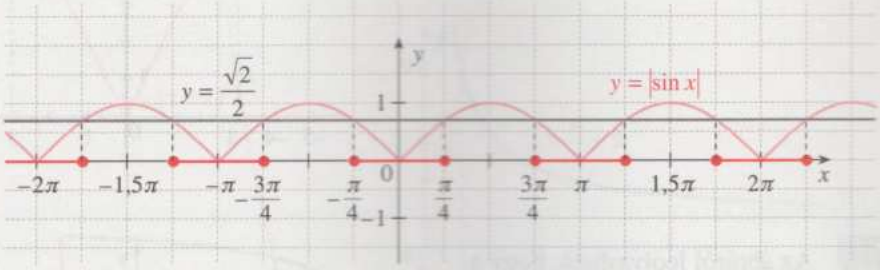
Az egyenlőtlenség megoldása a grafikonról leolvasható: $\mathbf{R}^-$.



1407. $|\sin x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

Az ábráról leolvasható az egyenlőtlenség megoldása:

$$M = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

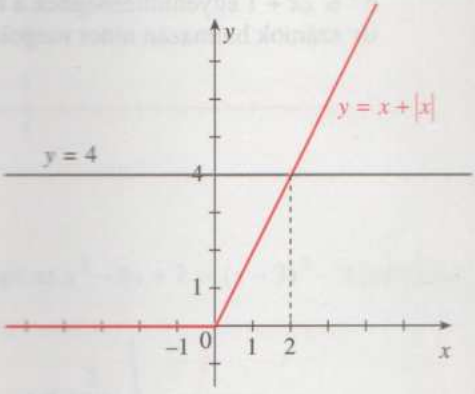


1408. $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \ge 0; \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

Ábrázoljuk a $f(x) = x + |x|$ függvényt!

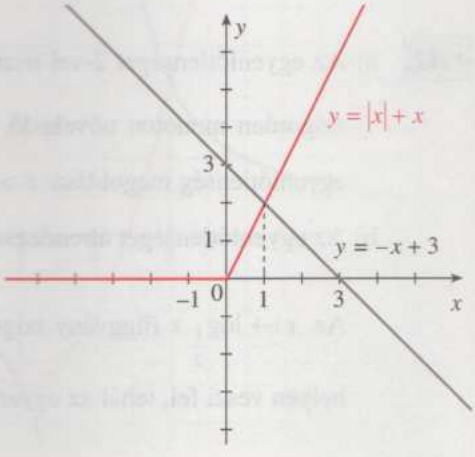
$$x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, & \text{ha } x \ge 0; \\ x - x = 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Az ábráról leolvasva az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty; 2]$.



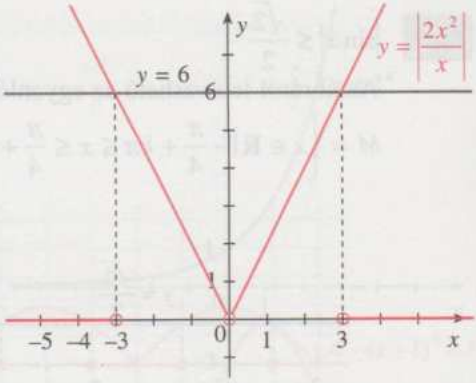
1409. Ábrázoljuk az $f(x) = x + |x|$ (lásd 1408. példa) és a $g(x) = -x + 3$ függvények grafikonját!

A grafikonról leolvasva a megoldást: $[1; +\infty[$.

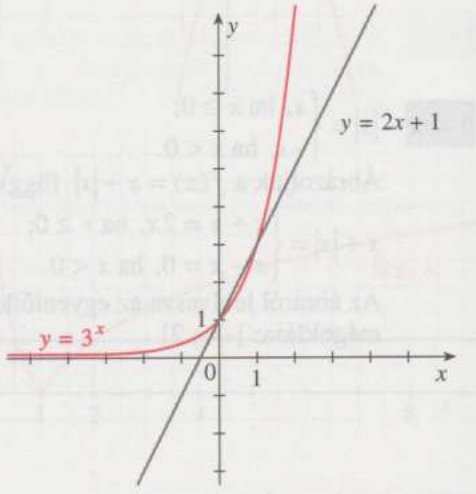


1410. $y = \left|\frac{2x^2}{x}\right| = \begin{cases} |2x|, \text{ ha } x \neq 0; \\ \text{nincs értelmezve, ha } x = 0. \end{cases}$

A grafikonról leolvasva az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.



1411. Az ábráról leolvasható, hogy a $3^x \leq 2x + 1$ egyenlőtlenségnek a negatív számok halmazán nincs megoldása.



1412. a) Az egyenlőtlenséget 2-vel osztva $\log_3 x > \frac{1}{2}$ adódik. Az $x \mapsto \log_3 x$ függvény szigorúan monoton növekedő, az $\frac{1}{2}$ értéket $x = \sqrt{3}$ helyen veszi fel, tehát az egyenlőtlenség megoldása: $x > \sqrt{3}$.

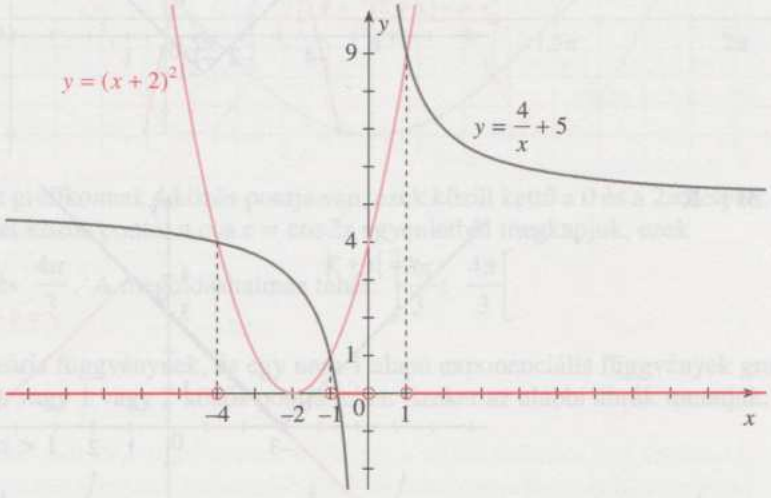
b) Az egyenlőtlenséget átrendezve és 3-mal osztva $\log_{\frac{1}{2}} x < \frac{1}{3}$ adódik.

Az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, az $\frac{1}{3}$ értéket $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ helyen veszi fel, tehát az egyenlőtlenség megoldása $x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

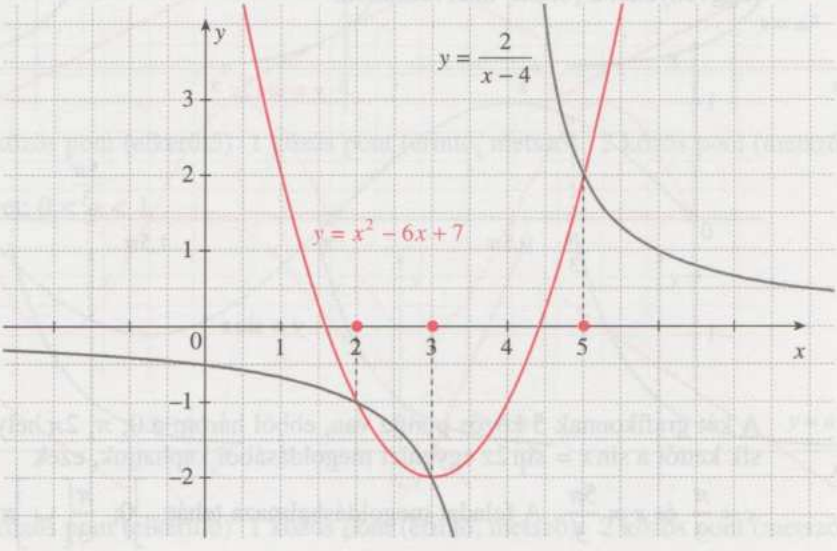
c) Az egyenlőtlenség mindkét oldalából vonjunk ki $\frac{1}{2} \cdot \lg x$-et, kapjuk: $\frac{1}{2} \cdot \lg x \geq 0$.

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\lg x \geq 0$. Az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton növekedő, a 0 értéket $x = 1$ esetén veszi fel, tehát a megoldás $x \geq 1$.

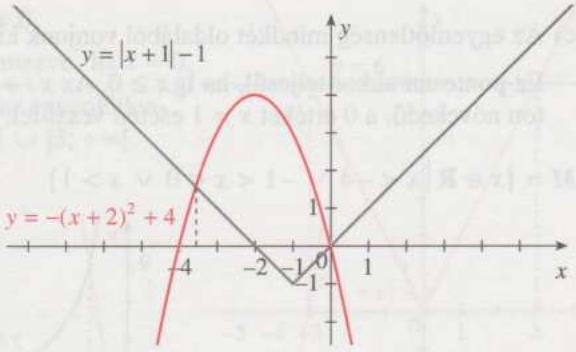
1413. $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -4 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1\}$



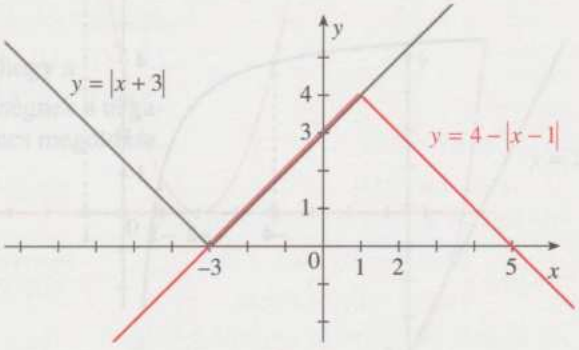
1414. A másodfokú függvény ábrázolásában segít az $x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$ átalakítás.
$M = \{2; 3; 5\}$



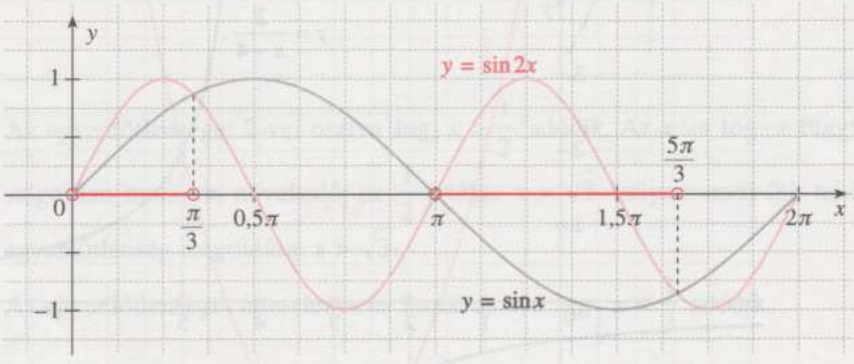
1415. $M = \{-3{,}6;\ 0\}$.



1416. $M = \mathbf{R}$

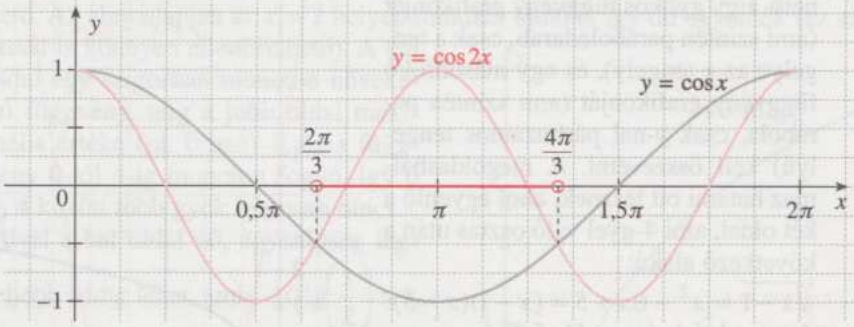


1417. a) Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az $x \mapsto \sin x$ és az $x \mapsto \sin 2x$ függvényeket a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon.



A két grafikonnak 5 közös pontja van, ebből három a 0; π; 2π helyeken, a másik kettőt a $\sin x = \sin 2x$ egyenlet megoldásából kaphatjuk, ezek $x = \frac{\pi}{3}$ és $x = \frac{5\pi}{3}$. A feladat megoldáshalmaza tehát: $\left]0;\ \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\pi;\ \frac{5\pi}{3}\right[$.

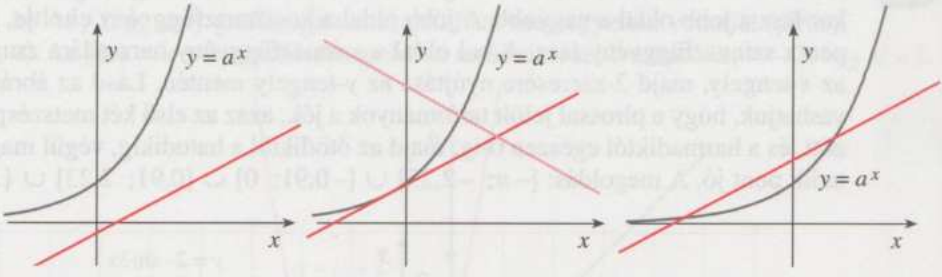
b) Ábrázoljuk az $x \mapsto \cos x$ és az $x \mapsto \cos 2x$ függvényeket a $[0; 2\pi]$ intervallumon.



A két grafikonnak 4 közös pontja van, ezek közül kettő a 0 és a 2π helyen. A másik két közös pontot a $\cos x = \cos 2x$ egyenletből megkapjuk, ezek $\frac{2\pi}{3}$ és $\frac{4\pi}{3}$. A megoldáshalmaz tehát: $\left]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right[$.

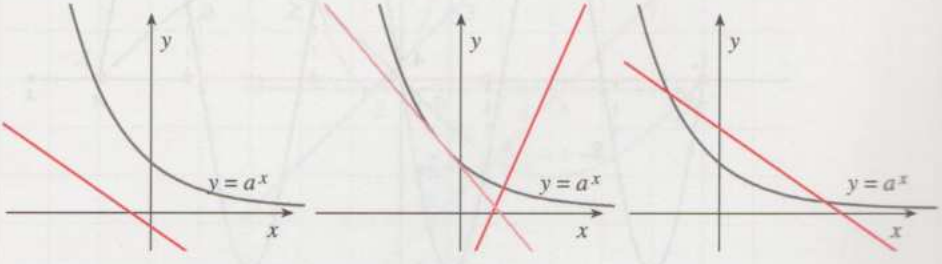
1418. Egy lineáris függvénynek, és egy nem 1 alapú exponenciális függvények grafikonjainak 0, vagy 1 vagy 2 közös pontja lehet. Ezeket az alábbi ábrák mutatják.

I. eset: $a > 1$



0 közös pont (elkerülő) 1 közös pont (érintő, metsző) 2 közös pont (metsző)

II. eset: $0 < a < 1$

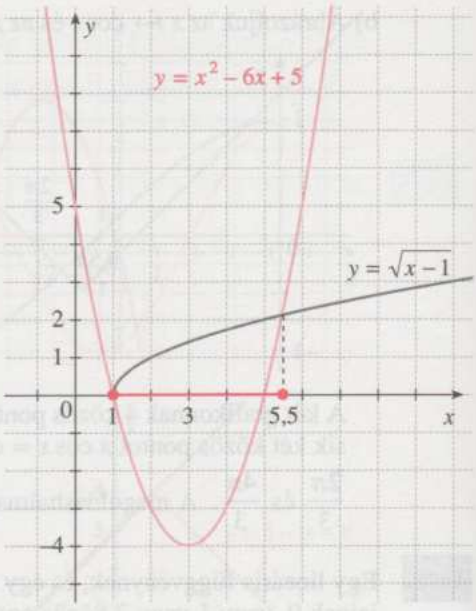


0 közös pont (elkerülő) 1 közös pont (érintő, metsző) 2 közös pont (metsző)

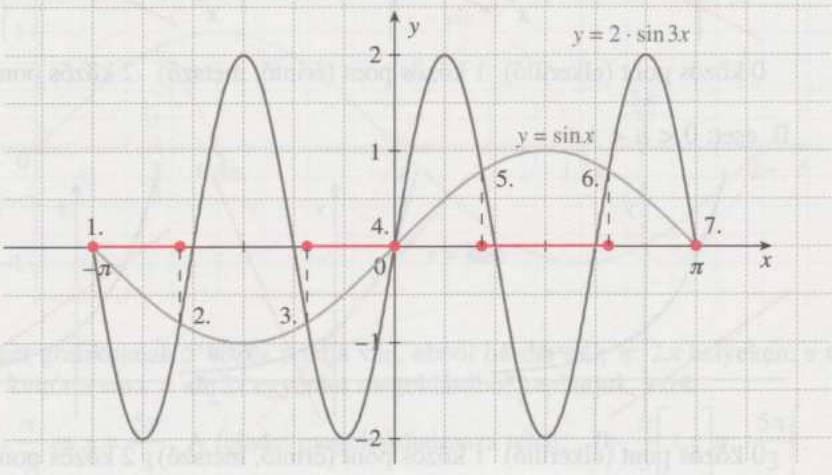
1419. A bal oldal csak $1 \leq x$ esetén értelmezhető. Egy gyökös függvény grafikonját (ami szintén paraboladarab, csak a tengelye az x tengely), és egy másodfokú függvény grafikonját (ami szintén parabola, csak y-nal párhuzamos tengelyű) kell összevetni. A megoldáshalmaz határai ott lesznek, ahol egyenlő a két oldal, ami 4-gyel való osztás után a következő alakú:

$\sqrt{x-1} = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$.

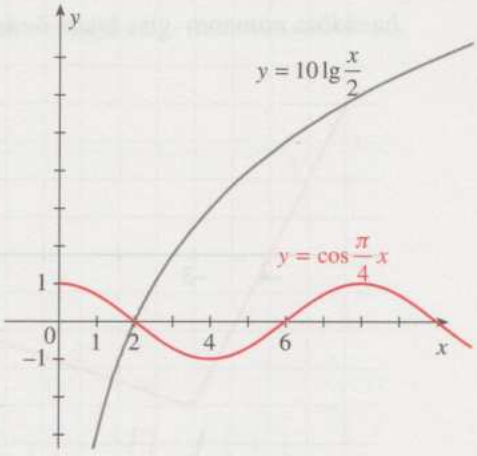
A megoldáshalmaz: $[1; 5{,}5]$.



1420. Ábrázolni kell mindkét oldalt a megadott intervallumon, és megvizsgálni, hogy mikor lesz a jobb oldal a nagyobb. A jobb oldal a koszinuszfüggvény eltoltja, ami éppen a szinuszfüggvény lesz. A bal oldal a szinuszfüggvény harmadára zsugorítása az x-tengely, majd 2-szeresére nyújtása az y-tengely mentén. Lásd az ábrát! Leolvashatjuk, hogy a pirossal jelölt tartományok a jók, azaz az első két metszéspont között, és a harmadiktól egészen 0-ig, majd az ötödiktől a hatodikig, végül maga a hetedik pont jó. A megoldás: $[-\pi; -2{,}23] \cup [-0{,}91; 0] \cup [0{,}91; 2{,}23] \cup \{\pi\}$.



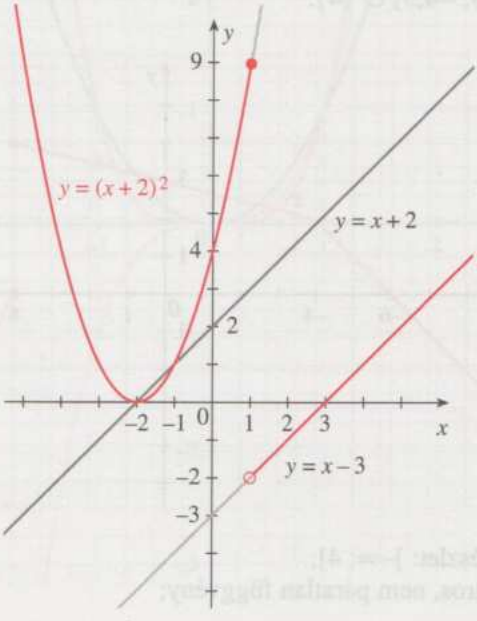
1421. Eleve csak a pozitív x értékek jönnek szóba, különben a bal oldal nem is értelmezhető. Az ábra alapján az $x = 2$ helyen mindkét oldal 0, így ott egyenlők (ez számolással is könnyen ellenőrizhető). A bal oldal egy szigorúan monoton növekedő függvény, míg a jobb oldal maximális értéke (pl. 0-ban) 1, és a függvény 0-tól 4-ig monoton fogyó, így 0 és 4 között több gyök biztosan nincs. Mivel a bal oldal nő, egyenlőség legfeljebb addig lehet, amíg $10\lg\left(\frac{x}{2}\right) \le 1$, azaz $x \le 2\sqrt[10]{10} \approx 2{,}52$. Azonban 4-ig nincs több megoldás, csak a 2; a 4 pedig már nagyobb a kb. 2,52-nél, onnan már nem lehet további gyök.
Tehát csak az $x = 2$ a megoldás.



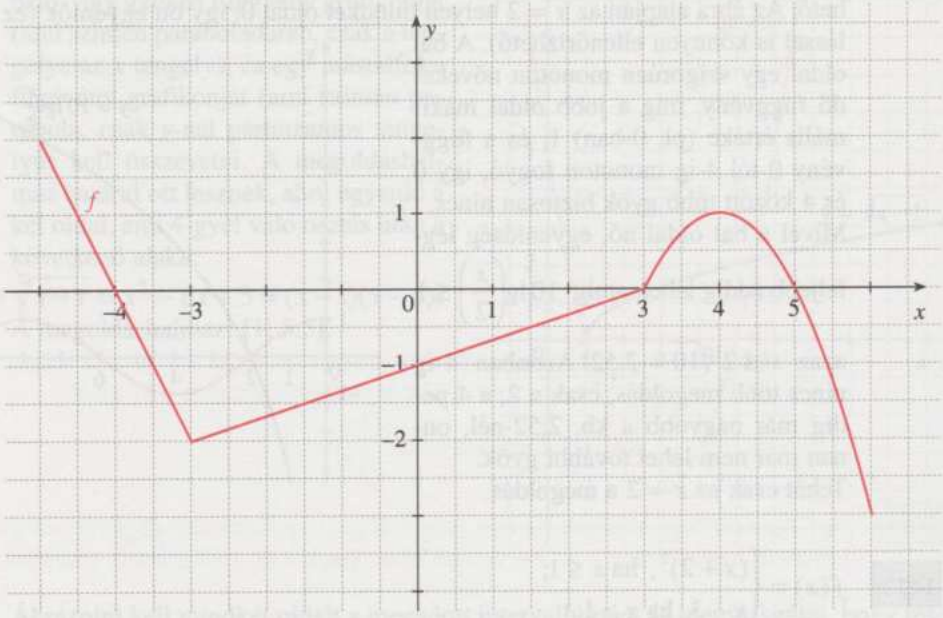
1422. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & \text{ha } x \le 1; \\ x-3, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

b) Az f függvény grafikonja nem rajzolható meg egyetlen vonallal (piros).

c) Az $f(x) = x + 2$ egyenlet megoldása az ábráról leolvasható: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$.

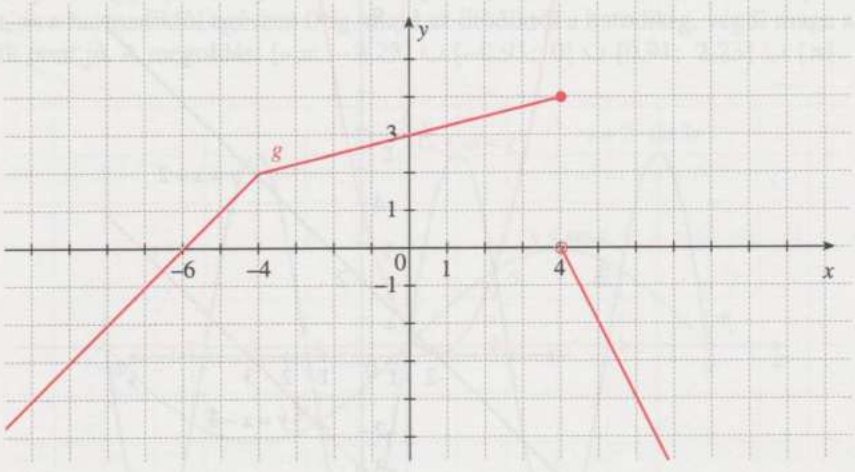


1423. a)



b) Grafikus megoldás a fenti grafikon segítségével:
$M_1 = \{-3{,}5;\ 0;\ 5{,}4\}$;
$M_2 = [-5; -4{,}5] \cup \{4\}$.

1424. a)



b) – Értékkészlet: $]-\infty; 4]$;
– nem páros, nem páratlan függvény;

– zérushely: –6;
– minimuma nincs;
– maximumhely: 4; a maximum: 4;
– a függvény 4-ig szig. monoton növekvő, majd szig. monoton csökkenő.

c) $b \in [0; 4]$

1425. a) $x^2 < x^3 < x^4$, ha $x > 1$.

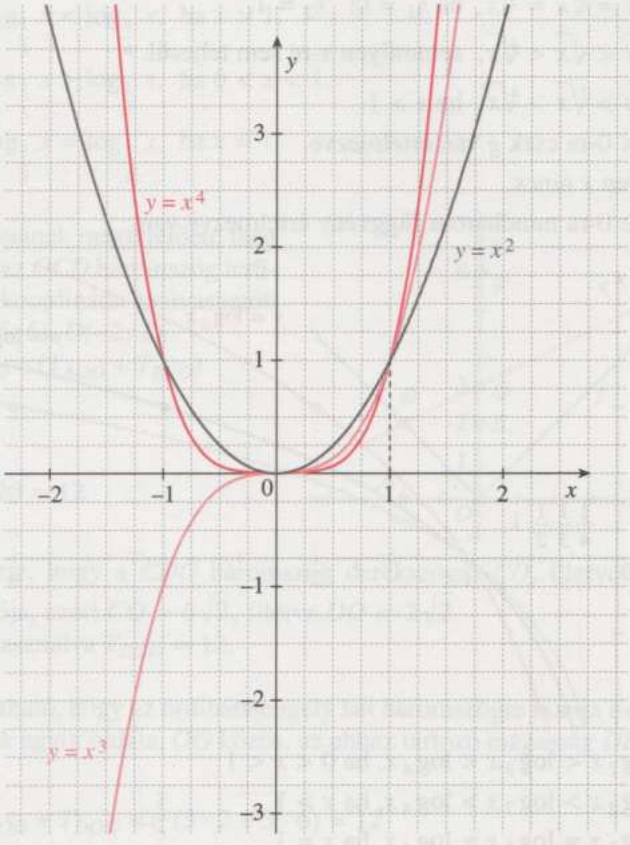
b) $x^3 < x^4 < x^2$, ha $-1 < x < 0$.

c) $x^4 < x^3 < x^2$, ha $0 < x < 1$.

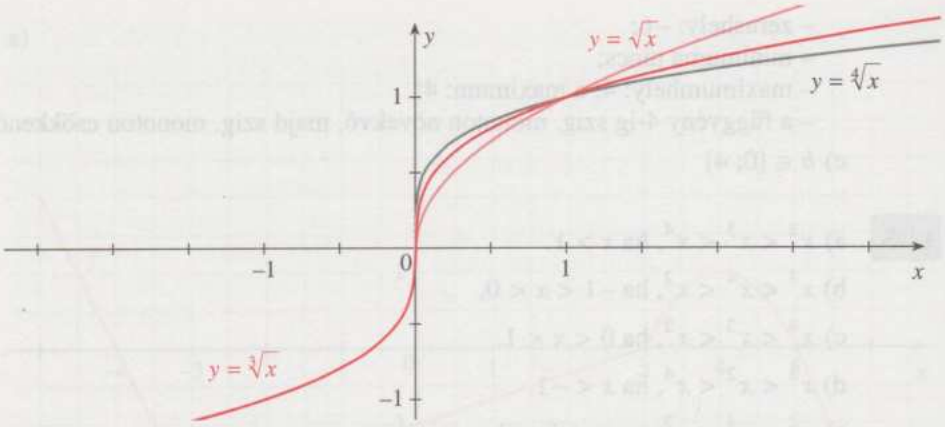
d) $x^3 < x^2 < x^4$, ha $x < -1$.

e) $x^2 < x^4 < x^3$ sosem teljesül.

f) $x^2 = x^3 = x^4$, ha $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.



1426.



a) $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x}$, ha $0 < x < 1$.

b) $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x}$, ha $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

c) $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < \sqrt[4]{x}$, semmilyen x-re sem teljesül.

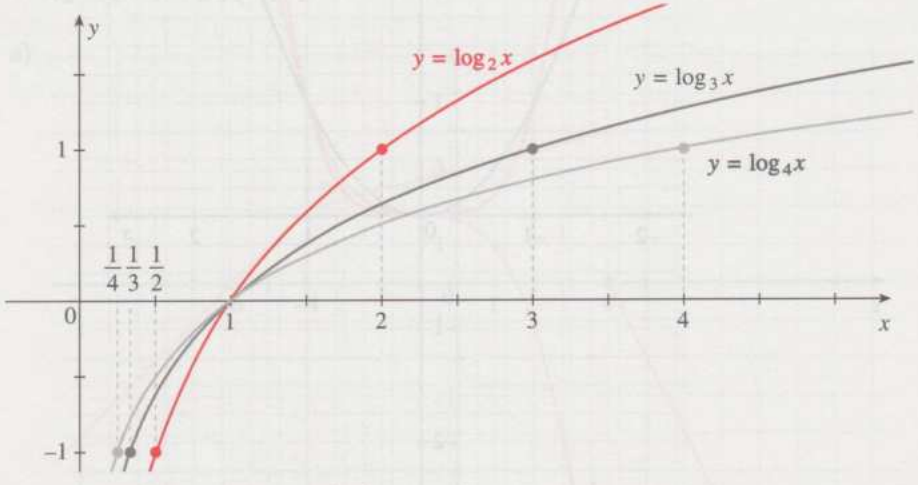
d) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x}$, ha $x > 1$.

e) $x < 0$-ra csak g van értelmezve.

f) Ilyen x nincs.

g) $x \geq 0$-ra mindhárom függvény értelmezve van.

1427.

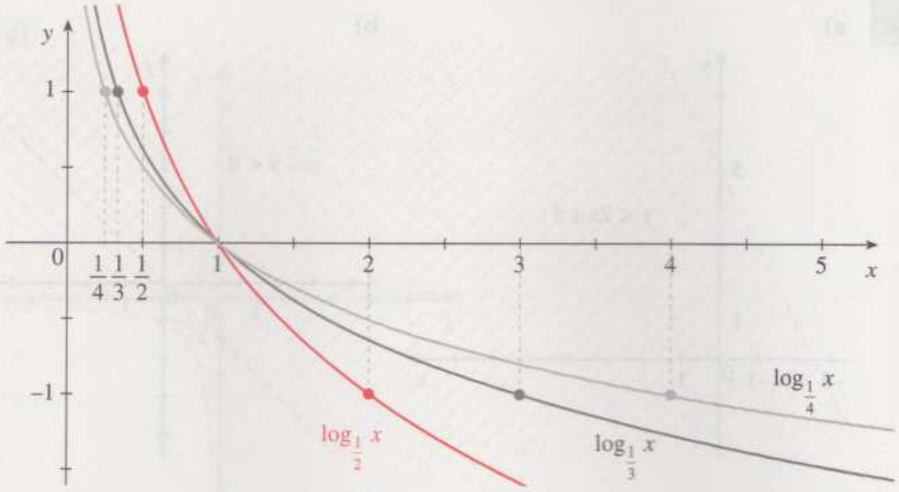


a) $\log_2 x < \log_3 x < \log_4 x$, ha $0 < x < 1$

b) $\log_2 x > \log_3 x > \log_4 x$, ha $x > 1$

c) $\log_2 x = \log_3 x = \log_4 x$, ha $x = 1$

1428.

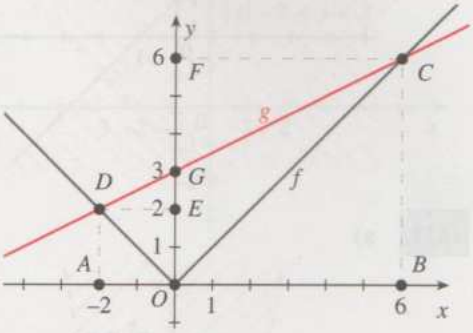


a) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{4}} x$, ha $x > 1$.

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{4}} x$, ha $0 < x < 1$.

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{4}} x$, ha $x = 1$.

1429. Az ábra jelöléseinek megfelelően: meg kell határozni az OCD háromszög területét. C és D koordinátái leolvashatók az ábráról. $C(6; 6)$, $D(-2; 2)$.



$T_{CDO} = T_{ABCD} - (T_{ADO} + T_{BCO})$

$T_{ABCD} = 32$

$T_{AOD} = 2$

$T_{BCO} = 18$

$T_{CDO} = 32 - 20 = 12$

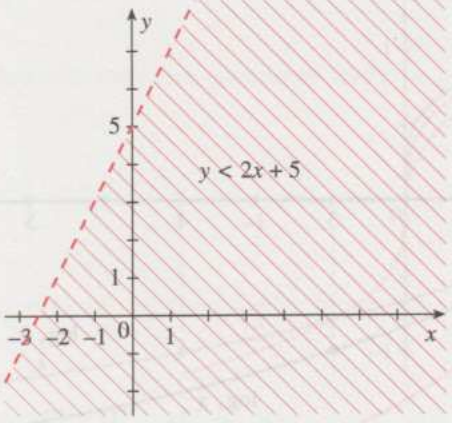
Megjegyzés:

1. Vegyük észre, hogy a CDO háromszög derékszögű. CO, illetve DO egy-egy négyzet átlója, ezért $CO = 6\sqrt{2}$, illetve $DO = 2\sqrt{2}$.
   Ezeket felhasználva $T_{CDO} = 12$.

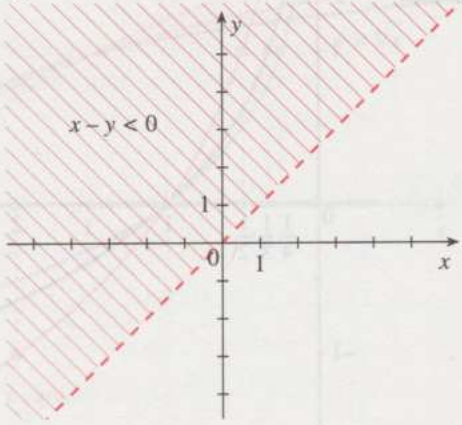
2. Az ábrán látható, hogy az ordinátatengely két háromszögre bontja a CDO háromszöget. Ezek egyik oldala, OG közös, az ehhez tartozó magasság $DE = 2$, illetve $CF = 6$.

$$T_{CDO} = T_{COG} + T_{DOG} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 + 3 \cdot 6) = 12$$

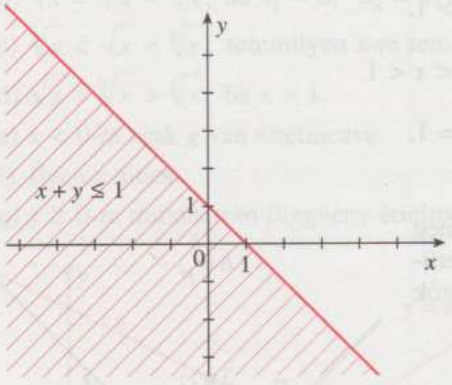
1430. a)



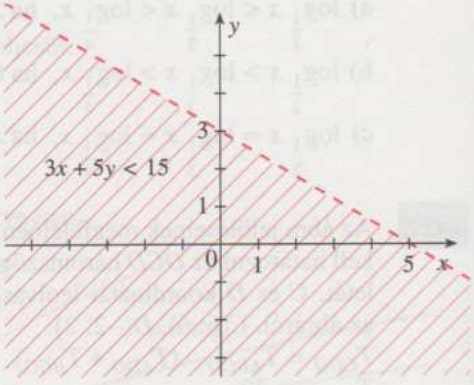
b)



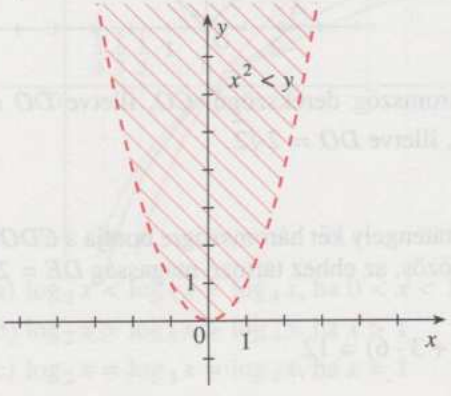
c)



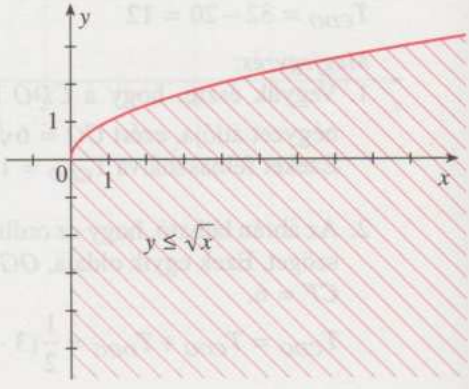
d)



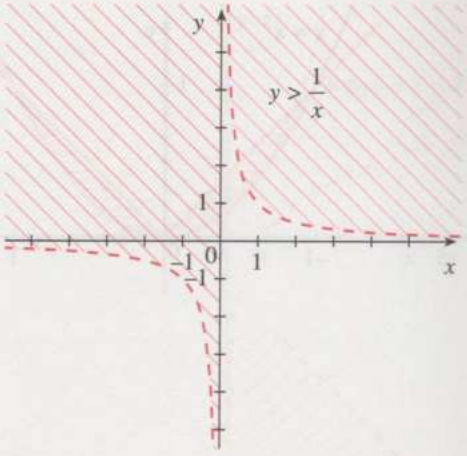
1431. a)



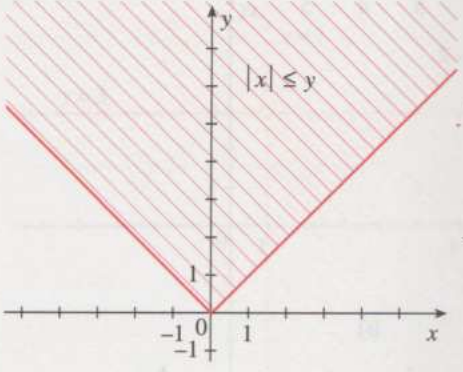
b)



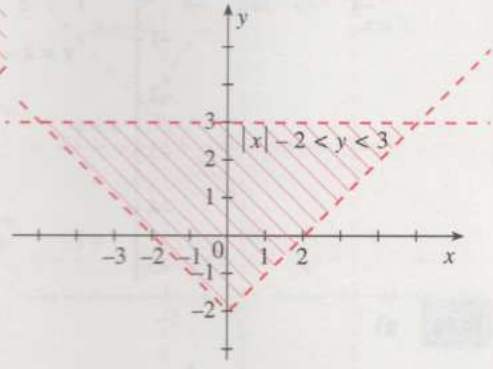
c)


y
$y > \frac{1}{x}$
1
−1
0
1
x
−1

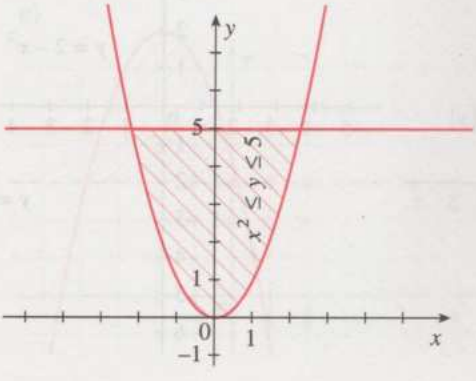
1432. a)


y
$|x| \leq y$
1
−1
0
1
x
−1

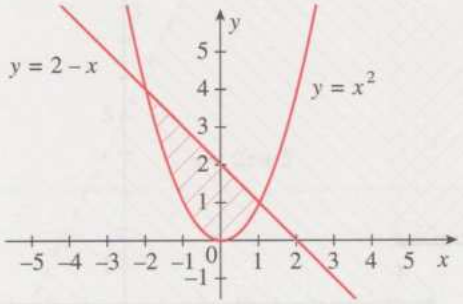
b)


y
3
2
1
$|x| - 2 < y < 3$
−3
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2

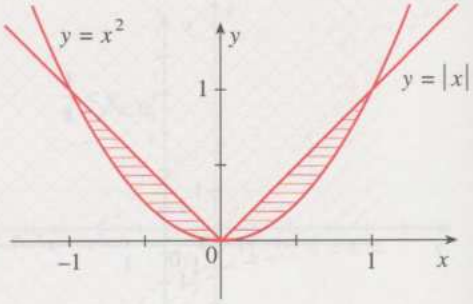
c)


y
5
$x^2 \leq y \leq 5$
1
0
1
x
−1

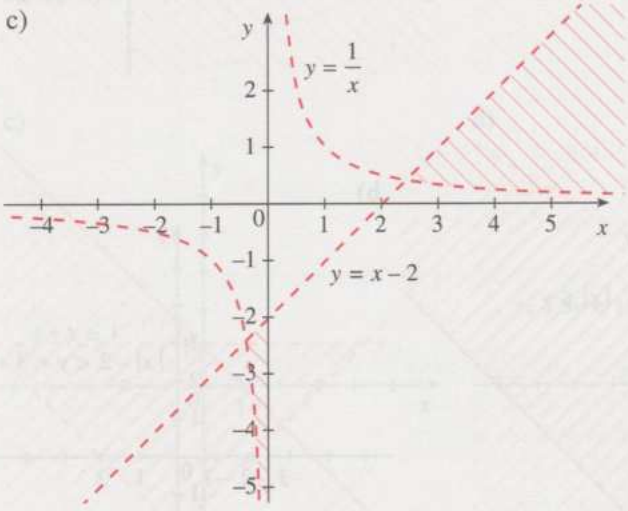
1433. a)



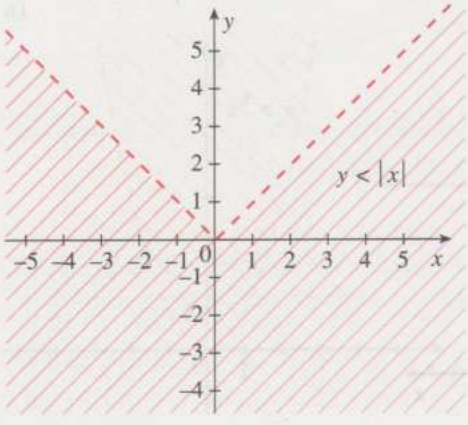
b)



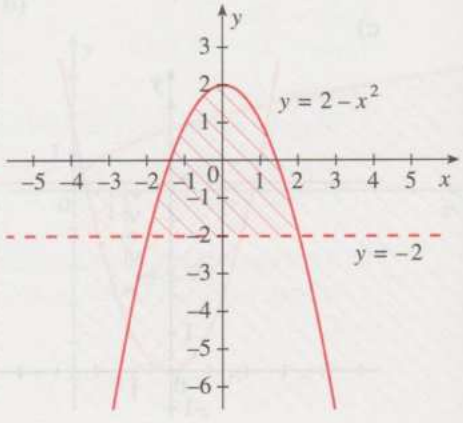
c)



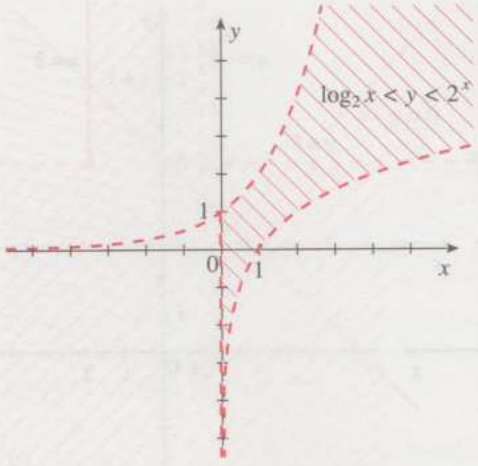
1434. a)



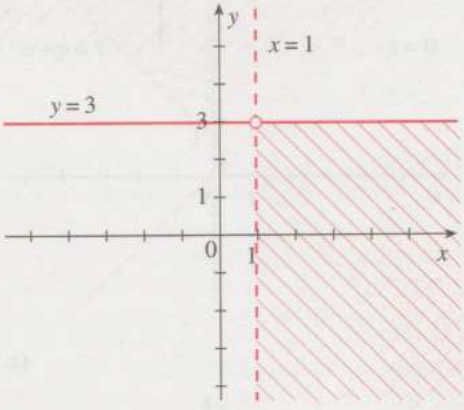
b)



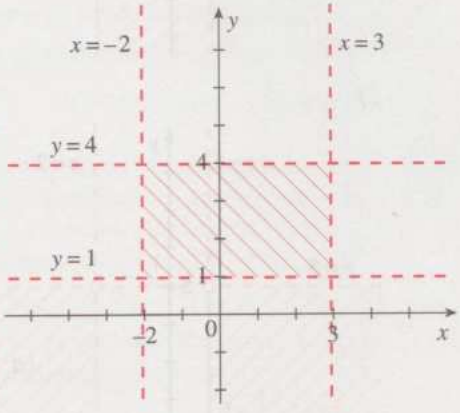
c)



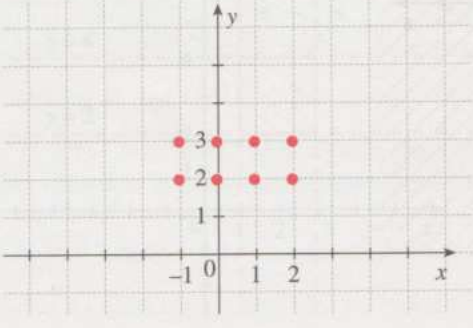
1435. a)



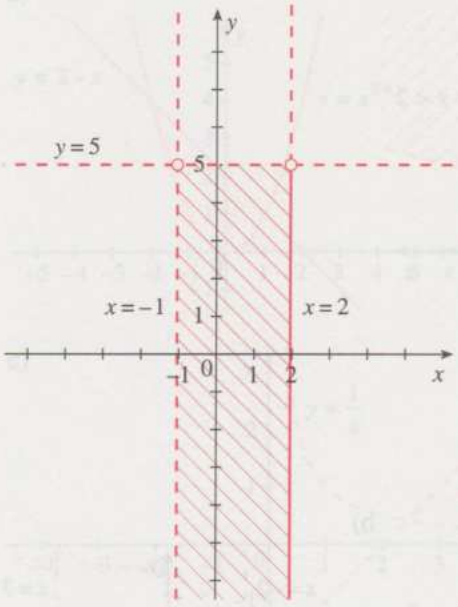
b)



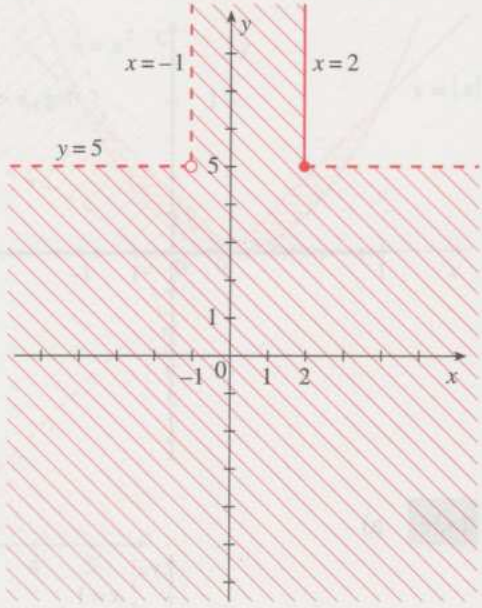
c)



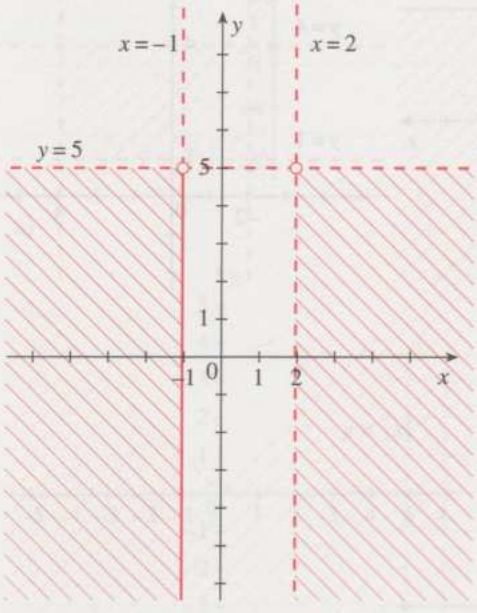
1436. a)



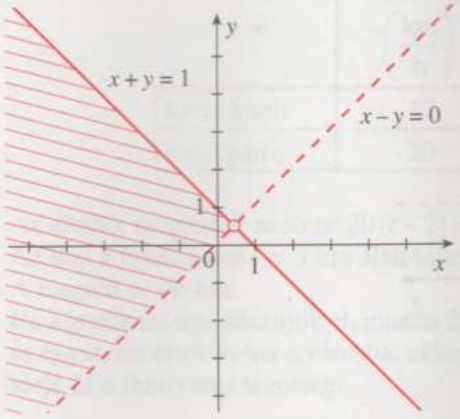
b)



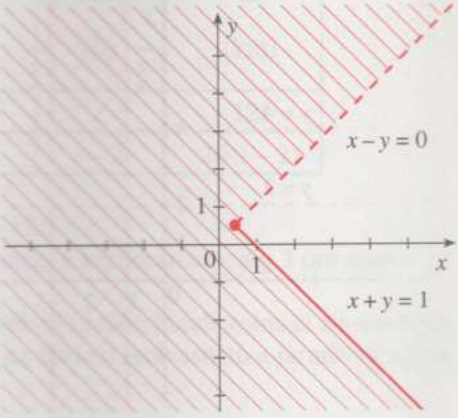
c)



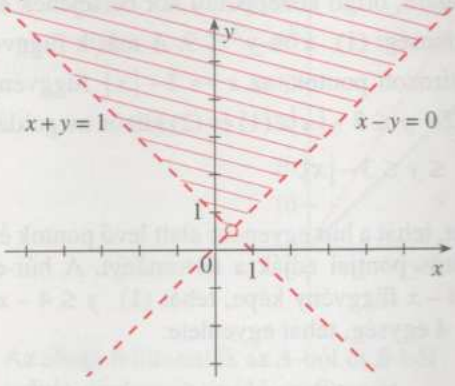
1437. a)



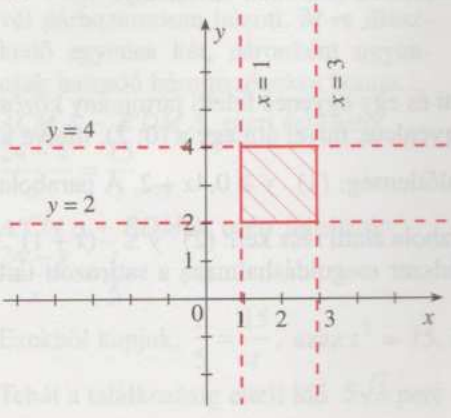
b)



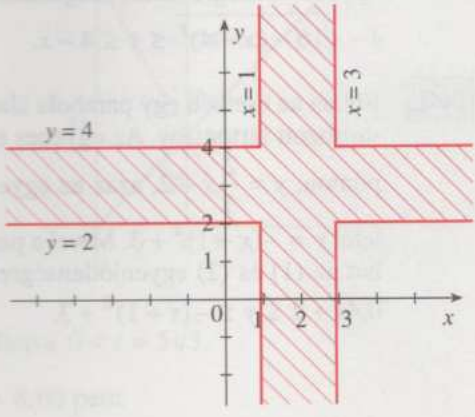
c)



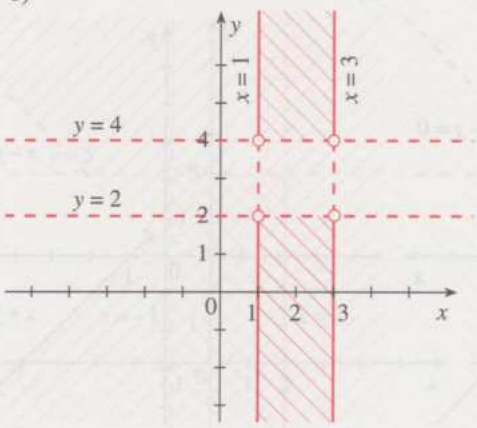
1438. a)



b)



c)



1439. A satírozott tartomány része a 3 sugarú, origó középpontú kör belsejének és határpontjainak, tehát az egyik egyenlőtlenség: (1) $x^2 + y^2 \leq 9$. A másik függvénygörbe, ami alatt helyezkednek el a satírozott pontok, az $x \mapsto 3 - |x|$ függvény képe, vagyis a második egyenlőtlenség: (2) $y \leq 3 - |x|$. (1) és (2) közös megoldása a satírozott sárga tartomány: $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq 3 - |x|$.

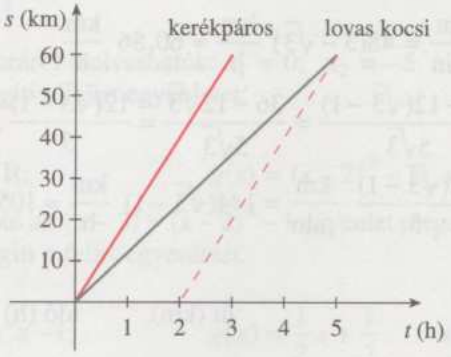
1440. A satírozott tartomány egy körszelet, tehát a húr egyenese alatt levő pontok és a körlemez belsejének és határának közös pontjai adják a tartományt. A húr-egyenes egyenlete leolvasható: ez az $x \mapsto 4 - x$ függvény képe, tehát (1) $y \leq 4 - x$. A kör középpontja a $K(4; 4)$ pont, sugara 4 egység, tehát egyenlete:
$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.
Mivel a belsejéről van szó, ezért (2) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 16$. Tehát az (1) és (2) egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza a satírozott tartomány:
$4 - \sqrt{16 - (x - 4)^2} \leq y \leq 4 - x$.

1441. Ebben az esetben egy parabola alatti és egy egyenes feletti tartomány közös része a satírozott tartomány. Az egyenes egyenlete, mivel átmegy a (0; 2), illetve a (–5; 0) ponton, $y = \frac{2}{5}x + 2$, azaz az egyenlőtlenség: (1) $y \geq 0{,}4x + 2$. A parabola egyenlete: $y = -(x + 1)^2 + 3$. Mivel a parabola alatti rész kell: (2) $y \leq -(x + 1)^2 + 3$. Tehát az (1) és (2) egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza a satírozott tartomány:
$0{,}4x + 2 \leq y \leq -(x + 1)^2 + 3$.

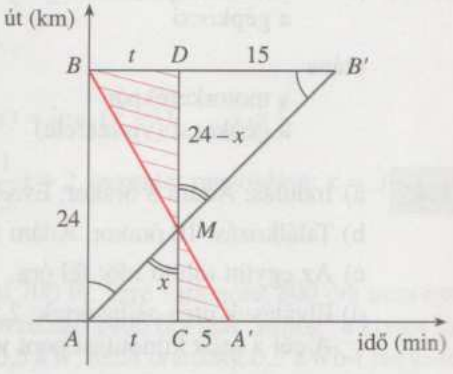
1442.

	sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	idő (h)	út (km)
lovas kocsi	12	t	$12t$
kerékpáros	20	$t-2$	$20(t-2)$

Az általuk megtett út azonos: $20(t-2) = 12t$.
Az utat a lovas kocsi $t = 5$ óra alatt tette meg, a kerékpáros pedig 3 óra alatt.
A megtett út 60 km.
Ha a grafikont úgy készítjük el, mintha 2 órával később indult volna el a lovas kocsi, és egyszerre értek volna a városba, akkor az ábráról leolvasható a járművek menetideje és a falu-város távolság.



1443. Az ábrán feltüntettük az A-ból és B-ből induló gépkocsik út-idő grafikonját.



Az $AMA'\Delta \sim B'MB\,\Delta$. Ezeket az AB-vel párhuzamosan húzott, M-re illeszkedő egyenes két, páronként ugyancsak hasonló háromszögekre bontja.
$ACM\,\Delta \sim B'DM\,\Delta$, ezért felírható:
$\frac{24-x}{x} = \frac{15}{t}$,
$A'CM\,\Delta \sim BDM\,\Delta$, ezért felírható:
$\frac{24-x}{x} = \frac{t}{5}$. (*)
Ezekből kapjuk: $\frac{t}{5} = \frac{15}{t}$, azaz $t^2 = 75$, illetve $0 < t = 5\sqrt{3}$.
Tehát a találkozásig eltelt idő $5\sqrt{3}$ perc $\approx 8,66$ perc.

Az A-ból induló gépkocsi tehát $5\sqrt{3}+5=13,66$ (min),
a B-ből induló pedig $5\sqrt{3}+15=23,66$ (min) időt töltött úton.
A $*$-gal jelzett egyenletet $5x$-szel szorozva és a kapott t értéket behelyettesítve kapjuk:

$5(24-x)=5\sqrt{3}x$, innen

$24-x=x\sqrt{3}$

$$x=\frac{24}{\sqrt{3}+1}=\frac{24(\sqrt{3}-1)}{2}=12(\sqrt{3}-1),$$ tehát a találkozási hely A-tól való távolsága $12(\sqrt{3}-1)$ km $\approx 8,78$ km.

Az A-ból induló kocsi a találkozásig $12(\sqrt{3}-1)$ km $\approx 8,78$ km utat tett meg.

$\frac{x}{t}=\frac{12(\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{3}}=\frac{12(3-\sqrt{3})}{15}=\frac{4(3-\sqrt{3})}{5}$, tehát az A-ból induló kocsi sebessége:

$\frac{4(3-\sqrt{3})}{5}\ \frac{\text{km}}{\text{min}}=48(3-\sqrt{3})\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 60,86\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$\frac{24-x}{t}=\frac{24-12(\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{3}}=\frac{36-12\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=\frac{12(\sqrt{3}-1)}{5}$, tehát a B-ből induló kocsi sebessége: $\frac{12(\sqrt{3}-1)}{5}\ \frac{\text{km}}{\text{min}}=144(\sqrt{3}-1)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 105,42\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1444.

	út (km)	idő (h)	sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$
A találkozásig			
a motorkerékpár	180	3	60
a gépkocsi	180	2	90
utána			
a motorkerékpár	60	1	60
a gépkocsi (visszafelé)	180	1,5	120

1445. a) Indulás: Ádám 8 órakor, Éva 9 órakor, egymástól való távolságuk 15 km.

b) Találkozás: 10 órakor, Ádám indulási pontjától 10 km-re.

c) Az együtt töltött idő: fél óra.

d) Elválásuk után célba értek: 2,5 óra múlva Ádám; 1 óra múlva Éva.
A cél a saját kiindulási pont volt.

1446. A farkassal való találkozásig Piroska otthontól 2 km-re jutott 40 perc alatt. A sebessége ezért $\frac{2}{\frac{2}{3}} = 3\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

A 2 km-es út a teljes út $\frac{1}{3}$-a, a teljes út hossza tehát 6 km.

Az eredeti sebességgel a 6 km-t 2 óra alatt tehette volna meg. A kitérő miatt Piroskának a hátralévő 4 km-es utat 60 perc alatt kell megtennie, mert nem akarja a nagymamát megvárakoztatni. Tehát ez utóbbi szakaszon 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel kell haladnia.

1447. $f(x) = |x+2| - 1 \quad x \in \mathbf{R}$; $\qquad g(x) = -\frac{1}{5}x + 1 \quad x \in \mathbf{R}$.

$|x+2| - 1 = -\frac{1}{5}x + 1$

A megoldások az ábráról leolvashatók: $x_1 = 0$; $x_2 = -5$.
Mindkét érték kielégíti a felírt egyenletet.

1448. $f(x) = |x-3| \quad x \in \mathbf{R}$; $\qquad g(x) = (x-2)^2 - 1 \quad x \in \mathbf{R}$.

Az ábráról leolvasható az $|x-3| = (x-2)^2 - 1$ egyenlet megoldása: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.
Mindkét érték kielégíti a felírt egyenletet.

1449. $f(x) = \sqrt{x+1} \quad x \geq -1$; $\qquad g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad x \in \mathbf{R}$.

Az ábráról leolvasható az $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ egyenlet megoldása: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.
Mindkét érték kielégíti a felírt egyenletet.

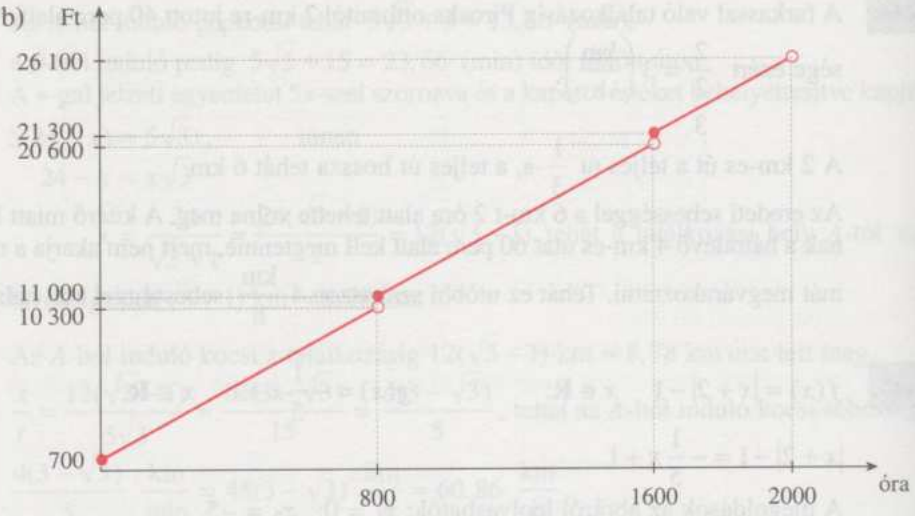
1450. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2 \quad x \in \mathbf{R}$; $\qquad g(x) = \log_2(x-1) \quad x > 1$.

Az ábráról leolvasható a $\log_2(x-1) = -\frac{1}{3}x + 2$ egyenlet megoldása: $x = 3$.

Ez az érték kielégíti a felírt egyenletet.

1451. a) A beruházás 5 darab 140 Ft-os égő, ami 700 Ft. Erre várhatóan 800 óra után újra szükség lesz, és 1600 óránál ismét (a következő 2400 óra már „túllóg" a kívánt intervallumon). Az öt izzó teljesítménye 0,5 kW, tehát óránként 0,5 kWh-t fogyasztanak, ami 12 Ft. Tehát, ha t óra jelenti a kezdettől eltelt időt, akkor a költség:
$700 + 12t$, ha $0 \leq t < 800$,
$1400 + 12t$, ha $800 \leq t < 1600$,
$2100 + 12t$, ha $1600 \leq t < 2000$.

b)



(Lásd a 3684. feladatot!)

1452. a) Tegyük fel, hogy x a sonkás-sajtos, y pedig a szalámis-paprikás szendvicsek száma. Ekkor a mennyiségi viszonyok feltételeket szabnak, hogy hány szendvics készíthető:

(1) $4x + 4y \leq 300$, mivel 4-4 dkg kenyér kell, és összesen 3 kg = 300 dkg van,

(2) $x + y \leq 50$, mivel 1-1 dkg vaj kell, és összesen 5 db 10 dkg-os (= 50 dkg) van,

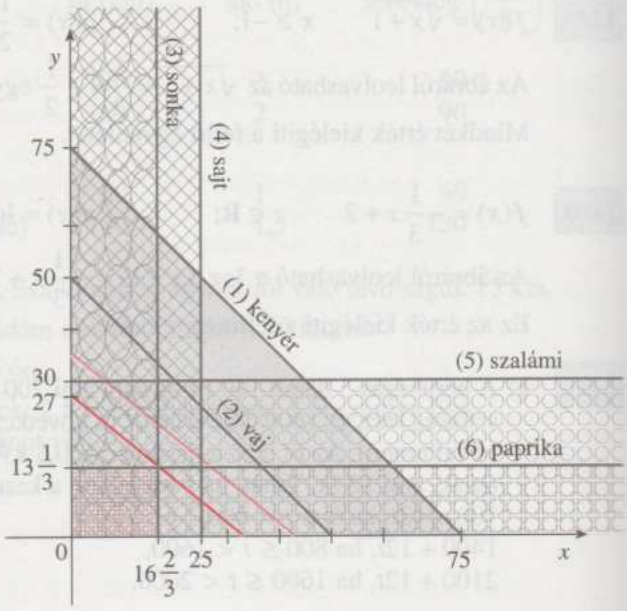
(3) $3x \leq 50$ a „sonka feltétel",

(4) $2x \leq 50$ a „sajt feltétel",

(5) $y \leq 30$ a „szalámi feltétel",

(6) $3y \leq 40$ a „paprika feltétel".

A koordináta-rendszer azon nemnegatív egész koordinátájú pontjai, amelyekre ezek a feltételek teljesülnek, adják az a) megoldást, amit így síktartományok közös részeként kapunk meg.
(Lásd az ábrát!)



Eredményül $\{(x; y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid 0 \leq x \leq 16; 0 \leq y \leq 13\}$ adódik, tehát egy téglalap rácspontjainak halmaza. Mivel csak egész számok jöhetnek szóba, $17 \cdot 14 = 238$-féle lehetőség van (mivel 0 is lehet bármelyik).

b) Az a) részben megkapott tartományon kell a bevételt, a $140x + 160y$ mennyiséget maximalizálni. Ez mind x-nek, mind y-nak monoton növő függvénye, így akkor lesz a legnagyobb, ha x és y is a lehető legnagyobb. Ez $x = 16$; $y = 13$ esetben következik be, ekkor a bevétel maximuma $140 \cdot 16 + 160 \cdot 13 = 4320$.

Másik megoldás:
Grafikusan úgy fogalmazható meg a kérdés, hogy a $140x + 160y = c$ egyenletű egyenesek közül melyik haladhat a „legmagasabban" úgy, hogy még legyen közös pontja a lehetséges megoldásokat jelző (csak rácspontokból álló!) téglalappal. 20-szal való egyszerűsítés után a $7x + 8y = c'$ egyenletű egyenesek között keressük a megfelelőt. Ezek mind egymással párhuzamosak, normálvektoruk a (7; 8), irányvektoruk a (8; −7) vektor. A „legmagasabban" haladó, alkalmas egyenes átmegy a (16; 13) ponton; innen éppen két irányvektornyival „visszafelé" lépve eljutunk a tengelymetszetig: $13 - 2(-7) = 27$. Visszahelyettesítve ezt az eredeti kifejezésbe, annak maximuma tehát:

$$140x + 160y = 140 \cdot 0 + 160 \cdot 27 = 4320.$$

Ezt persze most is megkaphatjuk $140 \cdot 16 + 160 \cdot 13$ módon is.

Megjegyzés: az ilyen tipusú feladatot nevezik lineáris programozásnak vagy optimumszámításnak. A gazdasági életben gyakran előfordul – szintén haszon-maximalizálás vagy épp költség-minimalizálás formájában –, ennél persze jóval bonyolultabb feltételrendszerekkel. A most ismertetett koordinátageometriai módszeren kívül létezik mátrixalgebrai megoldási mód is; és természetesen a gyakorlati életben a számítástechnikát hívják segítségül a megoldáshoz.

1453. a) A K_1 kutatócsoport.

b) A szöveg szerint az éves energiatermelés 1,7 egység. Mindkét kutatócsoport szerint a 10. évben szorul először energiaimportra az ország.

c) A 7. évre mindkettő 1,5 egységnyi energiafogyasztást jósol.

d) Kb. 0,08 egység, ami a jelenleginek 8%-a.

e) A 7. évre jósolt fogyasztás mindkét esetben jó kiindulópont:

– lineáris növekedés esetén t év múlva a fogyasztás: $f_l(t) = 1 + \frac{0,5}{7} \cdot t$;

– exponenciális növekedés esetén t év múlva a fogyasztás: $f_e(t) = \left(\sqrt[7]{1,5}\right)^t$.

$f_l(15) = 1 + \frac{0,5}{7} \cdot 15 = 2,07$; $\qquad f_e(15) = \left(\sqrt[7]{1,5}\right)^{15} = 2,38$.

A K_1 kutatócsoport szerint 2,38, a K_2 szerint 2,07 egység lesz a 15 év múlva várható energiafelhasználás.

1454. a) Az 5. évben az energiafelhasználás a grafikon szerint 97,5 egység, ezért ebben az évben 7,5 egységnyi importra van szükség.

$\frac{7,5}{97,5} = 0,077$, azaz az energiaimport az éves energiafelhasználás 7,7%-a.

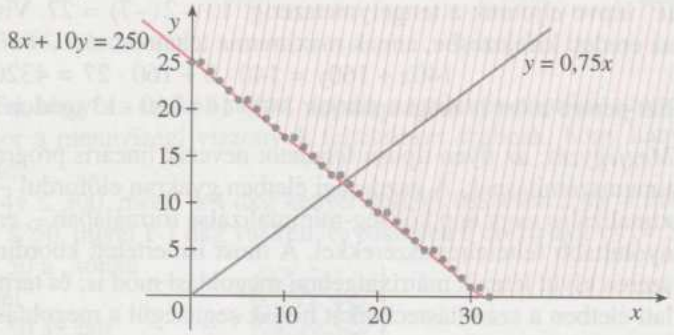
b) A 9. évben.

c) Évente 3 egységnyi energiát exportálhatnának. $\frac{3}{87} = 0,034$, azaz az energiaexport az éves energiafelhasználás 3,4%-a lehetne.

1455. a) Ha az első kocsi x, a másik kocsi y esetben fordul, akkor a mennyiségre:

$$8x + 10y \geq 250.$$

Az ennek (és persze még az $x, y \in \mathbf{N}^+$ feltételeknek) megfelelő $(x; y)$ pontpárok alkotják a lehetséges megoldások halmazát. Koordináta-rendszerben ábrázolva egy síktartományt (illetve annak csak egész koordinátájú pontjait, rácspontjait) kapjuk eredményül.



b) Az első kocsi $30x$, a második $40y$ idő alatt szállítja el a rá jutó adagot. Ha egyszerre kezdenek dolgozni, akkor ezek közül a nagyobbik egyúttal a teljes szállítási időt is jelenti. Ezek közül a legrövidebbet tehát úgy kapjuk meg, hogy mindegyik a)-beli lehetséges megoldásból képezzük a $(30x; 40y)$ számpárt, vesszük ezek maximumát, és megkeressük e maximumok halmazának minimumát: $\min\{\max(30x; 40y)\}$. Ha bármelyik, rögzített x mellett növeljük y-t, vagy fordítva, a $\max(30x; 40y)$ érték nem csökken (nő, vagy ugyanannyi marad), tehát ezek minimumát csak a tartomány határa (a $8x + 10y = 250$ egyenes) mentén fekvő rácspontokban érdemes keresni. (Az ábrán jelöltük ezeket.) Először megkeressük, hogy a $30x$ és $40y$ közül mikor melyik a nagyobb. A $30x = 40y$ egyenlőségből $y = 0,75x$ (az ennek megfelelő egyenest is bejelöltük az ábrán); ezt behelyettesítve a $8x + 10y = 250$ egyenletbe kapjuk: $x \approx 16,13$, és ebből $y \approx 12,10$. A tartomány határán tehát ezen metszésponttól „balra felfelé" (kisebb x-ek, nagyobb y-ok esetén) a $40y$ lesz a keresett maximum (mivel nagyobb a $30x$-nél), „jobbra lefelé" (nagyobb x-ek, kisebb y-ok esetén) pedig fordítva. A bal oldali szakaszon a 25 és 13 közti y-okra a $40y$ egyre csökken, tehát 13-nál van a mini-

muma; a jobb oldali szakaszon a 17 és 32 közti x-ekre a $30x$ egyre nő, tehát 17-nél van a minimuma. Azaz a metszéspont, a „szerepváltás" két szomszédos rácspontját kell csak összevetni az abszolút minimum megtalálásához. Ezek a (16; 13) és a (17; 12). Az elsőre $40y = 520$, a másodikra $30x = 510$, ez a kisebb. A szállítási idő minimuma tehát 510 perc (8,5 óra); ha a kisebb (de gyorsabb) kocsi 17, a nagyobb (de lassabb) 12 fordulót teljesít. (Az utolsó fuvarra a kisebb kocsinak csak 2 t teher marad, tehát akár a 30 percnél hamarabb is teljesítheti ezt a fordulót.)

1456. a) 27 000 dollár.

b) 20 000 dollárról 7000 dollárra csökkent a GDP; a csökkenés az eredeti érték 65%-a.

c) A 7. évtől a 20. évig minden évben.

1457.* a) 4 év alatt.

b) Az A országban 2-szeresére, a B-ben kb. 1,25-szörösére.

c) A ország 4,5 év, B ország 7,5 év alatt.

d) 10 év alatt kb. 750 dollárral nőtt, tehát évi 75 dolláros emelkedés kellett volna.

1458. a) 4 ezer euró; a K országban több.

b) A grafikon alapján kb. 14,8 ezer euró a legnagyobb különbség, és ez kb. 78 év múlva következik be (100 éven belül);
a K-ban ekkor a képlet szerint $2 \cdot 1{,}05^{78} = 89{,}91$ ezer euró, az N-ben a képlet szerint $0{,}8 \cdot 1{,}06^{78} = 75{,}33$ ezer euró lenne az egy főre jutó GDP.

c) Körülbelül 97 év múlva lenne a két országban azonos az egy főre jutó GDP (228 ezer euró). Újabb 5 év elteltével N-ben már nagyobb lenne az egy főre jutó GDP (305 ezer euró), mint K-ban (290 ezer euró).

1459. a) Az egyenlet megoldása az f függvény zérushelye: 97.

b) A megadott egyenlőtlenség megoldáshalmaza azonos az $f(x) < 0$ egyenlőtlenségével:]97; 100].

c) – maximumhely: 78; a maximum: 14,8;
– minimumhely: 100; a minimum: –8,5.

1460. a) 1%-kal nyúlt meg: 151,5 cm hosszú a szál.

b) Három eset van. Az egyik esetben a megnyúlás 1,7%-os, a másik esetben 5,5%-os, a harmadik esetben 15%-os. A megfelelő hosszak: 152,6 cm, 158,3 cm, illetve 172,5 cm.

c) A megadott hossz 3%-os megnyúlást jelent. Az ehhez tartozó húzóerő 75 N.

d) A 60 N-nál kisebb húzóerőhöz 1,3%-nál kisebb megnyúlás tartozik, tehát a szál hossza 152,0 cm-nél kisebb volt.

1461. a) 4,2 másodperc.

b) A legnagyobb: 0,8 V; a legkisebb: −0,8 V.

c) +0,5 V-nál nagyobb volt a feszültség kb. 0,08 + 0,09 + 0,09 + 0,06 = 0,32 másodpercig;
−0,5 V-nál kisebb volt a feszültség kb. 0,05 + 0,09 + 0,09 + 0,08 = 0,31 másodpercig; azaz összesen kb. 0,63 másodpercig haladta meg a feszültség abszolútértéke a 0,5 voltot az első 2 másodpercben.

d) 14-szer.

1462. a) A levélzöld színre.

b) A kék és a vörös szín esetében.

c) A levélzöldhöz közeli sötétebb és világosabb zöldek, a sárgászöld és a sárga szín ebbe a tartományba esik.

1463. a) $f(-10) = 1{,}5440$; $f(-5) = 1{,}459$; tehát $f(-10) > f(-5)$.

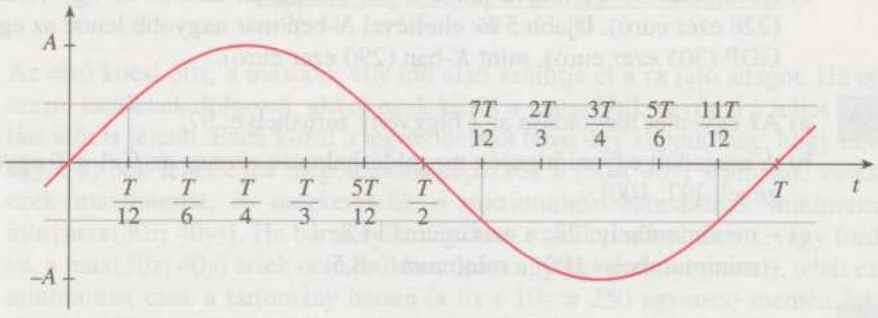
b) A minimumhely 17,4; a minimum értéke −2,7.

c) Az egyenlet megoldásainak száma az f zérushelyeinek számával egyezik meg. Ez a grafikon alapján 7.

1464. a) 0,69; 4,82

b) $1{,}6^{x_1} = 1{,}38 = 2x_1$; $1{,}6^{x_2} = 9{,}64 = 2x_2$

1465.

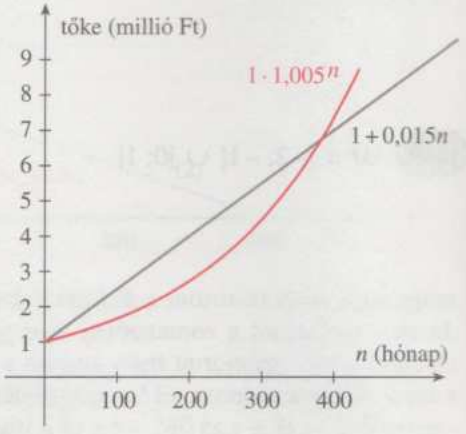


a) Ekkor az $|y| > \frac{A}{2}$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek megoldása:
$\frac{T}{12} + kT < t < \frac{5T}{12} + kT$ vagy $\frac{7T}{12} + kT < t < \frac{11T}{12} + kT$ $(k \in \mathbf{N})$.

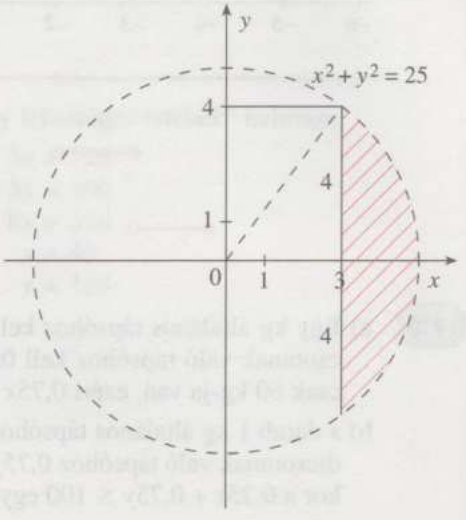
b) Ekkor az $|y| > \frac{A}{3}$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek megoldása (közelítőleg): $0{,}05T + kT < t < 0{,}45T + kT$ vagy $0{,}55T + kT < t < 0{,}95T + kT$ $(k \in \mathbf{N})$.

c) Ekkor az $|y| > \frac{A}{4}$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ennek megoldása (közelítőleg): $0{,}04T + kT < t < 0{,}46T + kT$ vagy $0{,}54T + kT < t < 0{,}96T + kT$ ($k \in \mathbf{N}$).

1466. Az első esetben havi tőkésítés mellett, ha n hónapig van bent a pénz, akkor $1\,000\,000 \cdot 1{,}005^n$ Ft-ra növekszik. Ez az első év végére: 1 061 678 Ft. Ez egy exponenciális függvény. A második esetben mindig csak az eredeti összeg havi 1,5%-a a növekmény. Így n hónap múlva az összeg: $1\,000\,000 + 1\,000\,000 \cdot 0{,}015 \cdot n = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}015n)$ Ft lesz. Ez egy lineáris függvény. Rövid távon a magas kamat miatt jobb a második módszer, de hosszabb távon biztos az első a jobb. Grafikonról leolvasható, de monotonitási megfontolásokból is adódik, hogy a második metszéspontjuk után jobb lesz az első. Egy év, azaz 12 hónap még kevés időt jelent, ekkor még majd 120 000 Ft-tal jobb a második módszer. Ez sokáig így is marad, még 30 év (= 360 hónap) múlva is a második a jobb (6 022 575, illetve 6 400 000 Ft).
50 év (= 600 hónap) után viszont már majdnem 10 000 000 Ft-tal az első javára billen a mérleg (19 935 955, illetve 10 000 000 Ft). A fordulat a 383. hónapban (tehát a 32. év vége felé) következik be, 6 737 000 Ft betétértéknél.



1467. A legegyszerűbb, ha a kör középpontja az origó, ekkor az első egyenlőtlenség az (1) $x^2 + y^2 \leq 25$. Keresni kell egy 8 cm hosszú húrt. Tudjuk, hogy a húr felezőmerőlegese éppen a középponton megy keresztül: a fele húr 4 egység, a sugár 5, akkor a Pitagorasz-tétel miatt a húr felezőpontja 3 egységre van a kör középpontjától. Az egyik legegyszerűbb ilyen húr az $x = 3$ egyenes, ekkor a (2) $x \geq 3$ egyenlőtlenség a másik, amivel az egyenestől jobbra levő pontokat jelöltük ki. Tehát (1) és (2)-nek közös megoldása egy körszelet, amelynek húrja éppen 8 egység hosszú.

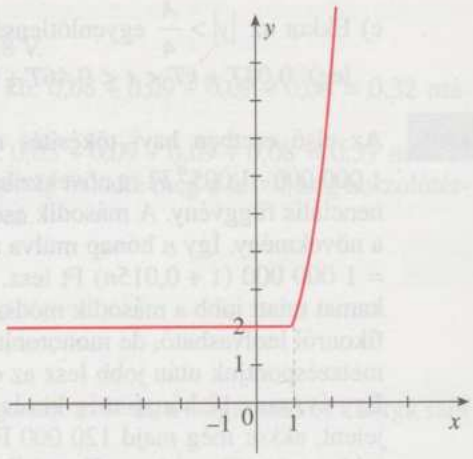


1468. $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ ha } x \geq 1; \\ -(x-1), \text{ ha } x < 1, \text{ így} \end{cases}$

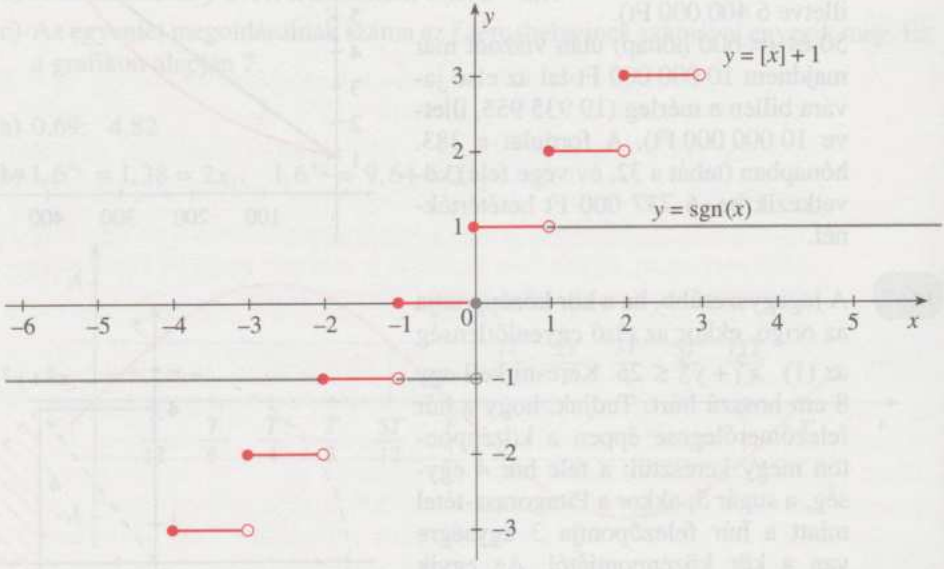
$2^{|x-1|+x} = \begin{cases} 2^{x-1+x} = 2^{2x-1}, \text{ ha } x \geq 1; \\ 2^{-x+1+x} = 2^1, \text{ ha } x < 1. \end{cases}$

Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^{|x-1|+x}$ függvényt!

Az ábráról leolvasható az egyenlet megoldása: $x \leq 1$.



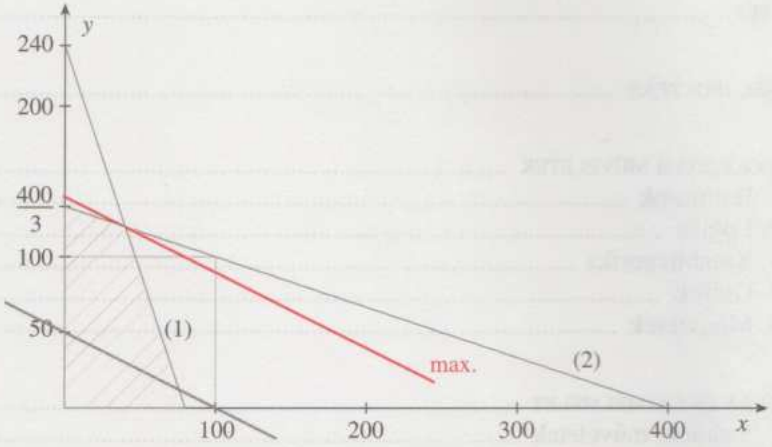
1469. $M = [-2; -1[\cup]0; 1[$



1470. a) Egy kg általános tápsóhoz kell 0,75 kg *A*-ból, és 0,25 kg *B*-ből. Egy kg paradicsomnak való tápsóhoz kell 0,25 kg *A*-ból és 0,75 kg *B*-ből. Tehát mivel *A*-ból csak 60 kg-ja van, ezért $0{,}75x + 0{,}25y \leq 60$ kell teljesüljön.

b) x darab 1 kg általános tápsóhoz kell $0{,}25x$ kg a *B*-ből, míg y darab 1 kg-os paradicsomnak való tápsóhoz $0{,}75y$ kg kell *B*-ből. Ha *B*-ből 100 kg van raktáron, akkor a $0{,}25x + 0{,}75y \leq 100$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

c) A haszon $30x + 60y$ lesz, ehhez a feltételeknek megfelelő x, y lehetőségek közül kell kiválasztani azt, amelyikre maximális lesz a haszon. Először ábrázoljuk a két feltételnek megfelelő tartományt, majd a $30x + 60y = h$ egyenesek közül keressük a maximális h-t, amelyre még az egyenesnek van a megengedett tartományban pontja.



Az ábráról leolvasható, hogy a megengedett értékek a satírozott tartomány egész koordinátájú pontjai, míg a keresett egyenes párhuzamos a fekete egyenessel. Látszik, hogy a piros lenne a legjobb, a megengedett tartomány csúcsán át, de ehhez tudni kell, hogy az egész koordinátájú pont-e? Ez azonban teljesül, mert a két határ-egyenes metszéspontja a kielégíti a $3x + y = 240$ és $x + 3y = 400$ egyenletrendszert, amelynek megoldása $x = 40$; $y = 120$, így a maximális haszon: $30 \cdot 40 + 60 \cdot 120 = 8400$ Ft.

(1) $3x + y \leq 240$
(2) $x + 3y \leq 400$

A satírozott terület a „megengedett vagy lehetséges értékek" halmaza.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 240 \quad / \cdot 3 \\ x + 3y &= 400 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9x + 3y &= 720 \\ x + 3y &= 400 \\ 8x &= 320 \\ x &= 40 \\ y &= 120 \end{aligned}$$

VK 2000

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés 3

Jelölések jegyzéke 5

1. Gondolkodási műveletek 7
1.1. Halmazok 7
1.2. Logika 21
1.3. Kombinatorika 36
1.4. Gráfok 71
1.5. Módszerek 89

2. Algebra és számelmélet 106
2.1. Számok, műveletek 106
2.2. Hatvány 114
2.3. Gyök 121
2.4. Logaritmus 129
2.5. Számelmélet, oszthatóság 135
2.6. Polinomok, algebrai törtek 152
2.7. Közepek 167
2.8. Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek 183
2.9. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek 202
2.10. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek 227
2.11. Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek 242
2.12. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek 254
2.13. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek 272
2.14. Egyenletrendszerek 281
2.15. Összetett feladatok 307

3. Függvények 331
3.1. Függvénytípusok 331
3.2. Függvénytranszformációk 394
3.3. Függvénytulajdonságok, -vizsgálat 433
3.4. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása 488

Az új, kétszintű érettségi vizsga előkészítése keretében, a középszintű matematikavizsgára való felkészülést szolgáló feladatgyűjtemény megoldáskötetét tartja kezében az olvasó.

A megoldások leírásai változatos formában jelennek meg a kötetben. Az újszerű feladatoknál az alkotók igyekeztek a felhasznált ismereteket bővebben közölni. Ahogy a feladatok között számottevően több szöveges, életközeli példát találhatunk, úgy a megoldások is gyakorlatiasabbak, több magyarázó szöveget tartalmaznak. A szerzők igyekeztek a helyes egyensúlyt megtalálni az egzakt, formájában is precíz megoldásleírás, és a feladat tartalmából következő, a feltett kérdésre életszerűségében kielégítő választ adó megfogalmazás között. Minden esetben utalnak az alkalmazható gondolatmenetre, hivatkoznak a használható összefüggésekre, tételekre.

A feladatok megoldásához önállóan célszerű hozzáfogni. Csak többszöri, sikertelen nekikezdés után érdemes a megoldáskötethez fordulni, először inkább csak ötletszerzés céljából. Ha még így sem sikerül önállóan megoldani a feladatot, akkor javasolt a megoldás részletes áttanulmányozása. Természetesen sikeres megoldás esetén is ajánlott az eredmény ellenőrzése, esetleg egy más megoldás megismerése ezekből a kötetekből.
A feladatgyűjtemények megoldásköteteit haszonnal forgathatják tanárok és diákok egyaránt.

2300-

KT-0322

ISBN 963 9362 41 7

9 789639 362413