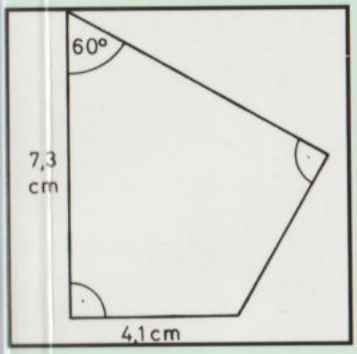
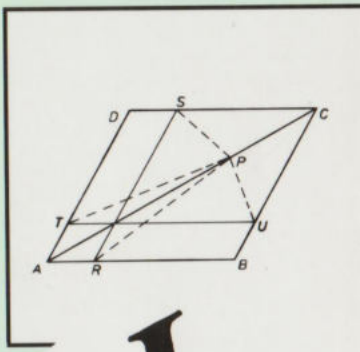
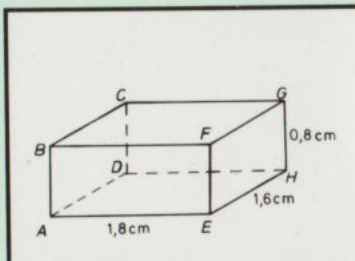
ÖSSZEFOGLALÓ FELADATGYŰJTEMÉNY MATEMATIKÁBÓL





megoldások I.





NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából

MEGOLDÁSOK I.

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA
NAGYNÉ PÁLMAY PIROSKA
PÁLMAY LÓRÁNTNÉ
POGÁTS FERENC
SCHARNITZKY VIKTOR

munkája

Alkotószerkesztő
GIMES GYÖRGYNÉ

Az ábrákat
FRIGYES MIKLÓS és VIDÉKI GUSZTÁV
rajzolta

Felelős szerkesztő
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ

Bírálta
DELI LAJOS

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, illetve utánközlése a kiadó engedélye nélkül tilos!

© Hárspatakiné Dékány Veronika, Nagyné Pálmay Piroska, Pálmay Lórántné, Pogáts Ferenc, Scharnitzky Viktor, 1996

Összkiadás ISBN 963 19 2727 X
ISBN 963 19 2716 4

Tartalom

II. fejezet Halmazok (Pogáts Ferenc) 7
III. fejezet Racionális kifejezések azonos átalakításai (Hárspatakiné Dékány Veronika) 18
IV. fejezet Irracionális kifejezések azonos átalakításai (Hárspatakiné Dékány Veronika) 36
V. fejezet A logaritmus fogalma, alkalmazásai (Hárspatakiné Dékány Veronika) 54
VI. fejezet Elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek (Scharnitzky Viktor) 65
VII. fejezet Másodfokú egyenletek és egyenletrendszerek (Scharnitzky Viktor) 76
VIII. fejezet Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó egyenletek (Scharnitzky Viktor) 90
IX. fejezet Gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenletek (Scharnitzky Viktor) 93
X. fejezet Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenletrendszerek (Scharnitzky Viktor) 101
XI. fejezet Egyenlettel vagy egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok (Scharnitzky Viktor) 119
XII. fejezet Egyenlőtlenségek (Scharnitzky Viktor) 153
XIII. fejezet Függvények értelmezése, ábrázolása (Pogáts Ferenc) 171
XIV. fejezet Geometriai bizonyítások, számítások (Pálmay Lórántné, Nagyné Pálmay Piroska) 204

Előszó

Azonos feladatok esetén csak az első feladatot oldottuk meg részletesen. A többi feladatnál csak a végeredményt közöltük. Abban az esetben, ha önállóan nem sikerül a feladatot megoldani, célszerű visszatérni az előtte levő részletes feladatmegoldáshoz.

Tudvalevő, hogy a feladatok megoldása gyakran több úton is lehetséges. Az alábbiakban többnyire egy megoldás kerül közlésre, nem is mindig a „legelegánsabb".

A megoldásoknak csak vázlatos gondolatmenetét és eredményét adjuk, s többször csak utalunk a felhasznált összefüggésekre, tételekre. Iskolai dolgozatban, érettségin ennél többre, részletesebb leírásra van szükség. A feladatok egy része diszkussziót kíván. Erre – néhány esetet leszámítva – csak utalunk.

A középiskolai tananyagban szereplő tételek, összefüggések ismeretét feltételezzük, ezért ezekre csak hivatkozunk.

Néhány olyan összefüggést, amely a tananyagban feladat eredményeként szerepel, itt gyakori előfordulása miatt nem részletezzük minden esetben.

Ilyenek pl.

1) Az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$, a élű kocka testátlója $a\sqrt{3}$.

2) Az a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ezen háromszög „felét" jelentő 30–60°-os derékszögű háromszög oldalainak aránya $1 : \sqrt{3} : 2$.

A geometriai feladatok megoldását mindig ábrakészítéssel érdemes kezdeni akkor is, ha itt többször mellőznünk kellett.

A zsebszámológépek elterjedése miatt célszerűbbnek látszott táblázat helyett a gépet használni. Ennek megfelelően nemcsak négy jegyet használtunk, kerekítést a számolás végén alkalmaztunk általában.

II. FEJEZET

Halmazok

162. $|A \times A| = 3 \cdot 3 = 9$, $|A \times B| = 3 \cdot 4 = 12$, $|B \times B| = 4 \cdot 4 = 16$.

163. $A = \{14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$,
$B = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99\}$.
$|A \cup B| = 39$, $|A \cap B| = 4$.

164. Az n elemű H halmaznak 2^n részhalmaza van.
$2^n > n + 1000$, ha $n \geqq 10$, H-nak tehát legalább 10 eleme van.

165. A 10 elemű halmaznak $\binom{10}{3}$ 3 elemű és $\binom{10}{2}$ 2 elemű részhalmaza van. Az előbbi $\frac{8}{3}$-szor nagyobb, mint az utóbbi.

166. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ miatt ugyanannyi 9 elemű, mint 6 elemű részhalmaza van a 15 eleműnek.

167. Az $A \setminus B$-nek minden olyan A-beli elem eleme, amely B-nek nem. A $B \setminus A$-nak minden olyan B-beli elem eleme, amely A-nak nem. Így csak $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, azaz $A = B$ lehet.

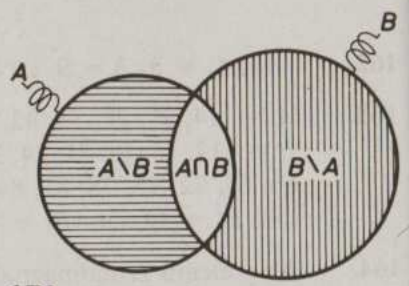
168. Az egy elemű részhalmazok között 1, a két eleműek között 4, a három eleműek között $\binom{4}{2} = 6$, a négy eleműek között $\binom{4}{3} = 4$ és az öt eleműek között 1 ilyen van. Összesen: 16. (Ahány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak, hiszen minden ilyenhez hozzávehető a c elem.)

169. Az A halmaznak $2^5 = 32$ részhalmaza közül $2^3 = 8$ olyan van, amelyek a b és a c egyikét sem tartalmazzák. 24 részhalmaz tehát legalább egyiküket tartalmazza.

170. A sok lehetőség közül egy:
$B := \{40; 50\}$, $C := \{20\}$, $D := \{10; 20; 30;$ elefánt kalappal$\}$.

171. Az n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van. Ezért az üres halmaznak 1, az 1 eleműnek 2, a 2 eleműnek 4, a 3 eleműnek 8 részhalmaza van. Az N halmazon értelmezett $2^n - n$ kifejezésnek értékkészletében nincs a 3 és a 4, mert $n > 3$-ra $2^n - n > 5$, amit a 2^n és az n grafikonjának egy koordináta-rendszerbeni ábrájáról rögtön láthatunk.

172. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \{b; d\}$ és $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A = \emptyset$ (**172.** ábra).



172

173. Az üres halmaznak nincs valódi részhalmaza, ezért $A = B$-re a reláció nem teljesül. Ha azonban A és B különböző halmazok, úgy a reláció fennáll (lásd **172.** ábra).

174. A H összes részhalmazából legalább egynek eleme H bármely eleme (például az ebből az egy elemből álló egy elemű részhalmaznak), továbbá egy halmaz nem változik azzal, hogy elemei közül némelyiket többször is felsorolunk, így az uniónak 999 eleme van, hiszen azonos H-val.

175. $B = A \cup B \subseteq A$ miatt B az A bármelyik részhalmaza lehet. Ilyen $2^4 = 16$ van.

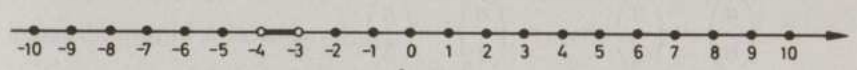
176. *a)* $A \cup B = A$ miatt $B \subseteq A$, hiszen B-nek nincs eleme, ami A-nak ne lenne eleme. $A \setminus B = \emptyset$ miatt A-nak nincs eleme, ami B-nek ne lenne eleme, tehát $A = B$.
b) $A \cap B = A$ miatt $A \subseteq B$, mert a metszet mindkét halmaznak részhalmaza, tehát A-nak minden eleme B-nek is eleme.
c) $A \setminus B = \emptyset$ miatt A-nak bármely eleme eleme B-nek is, $B \setminus A = \emptyset$ miatt B-nek minden eleme eleme A-nak is, a két halmaz tehát azonos.

177. Mivel $A \subset B$, ezért $(A \times A) \subset (B \times B)$ és így $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \times A)$.
$A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$.

178. 9 darab egyjegyű pozitív egész van. Ha belőlük elhagyjuk a 4-et és az 5-öt, akkor 2^7 olyan részhalmazhoz jutunk, amelynek sem a 4, sem az 5 nem eleme. A *d)*-re tehát 2^7 a válasz. Ezek mindegyikéhez elemként hozzávéve a 4-et, 2^7 olyan részhalmazt nyerünk, amelyeknek 4 az eleme, de az 5 nem. Ugyanezt a *d)*-beli 2^7 halmazzal és az 5-tel is megtéve a *c)*-nek eleget tevő részhalmazokat kaptuk. Végül, ha a *d)*-beli halmazok mindegyikét a 4 és az 5 elemekkel bővítjük, úgy ismét 2^7 olyan részhalmazt nyertünk, amely az *a)*-nak tesz eleget.

179. A sok közül egy-egy példa: Legyen $H := \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ és $K := \{-2; -1; 0; 1; 2\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \right\}$. $H \cap \mathbf{Z} = K \cap \mathbf{Z} = M$.

180. Ilyen halmaz végtelen sok van, de ezek bármelyikének a $]-4; -3[$ részhalmaza, de nem minden ilyen tulajdonságú halmaz jó. Jók még azok a halmazok, amelyek a $]-4; -3[$ halmaznak részhalmazai.



180

181. Mivel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ és egy 53 elemű halmaznak $\binom{53}{16}$ 16 elemű részhalmaza van, ezért $\binom{53}{37} = \binom{53}{53-37} = \binom{53}{16}$.
(Vagy: Bármelyik 16 elemű részhalmazhoz rendeljük a komplementerét. Ez a hozzárendelés bijekció.)

182. A $H \cap T$ elemei a szimmetrikus trapézok, melyek az alapok középvonalára szimmetrikusak. A deltoidoknak van átlója, amely szimmetriatengely. A $H \cap T \cap D$ elemeinek tehát mindkét átlója és mindkét középvonala tengely, vagyis $H \cap T \cap D$ a négyzetek halmaza.

183. A C elemei a paralelogrammák. T elemei a szimmetrikus trapézok és a deltoidok, így $C \cap T$ rombuszokból és téglalapokból áll.

184. Ha a páronkénti közös pontok nem mind különbözők, akkor a két azonos pont mindhárom zárt intervallumhoz hozzátartozik. Ha különbözők, úgy van közöttük két szélső, amelyeket a harmadik elválaszt. A két szélső ugyanabból a zárt intervallumból való, hiszen mindkettő legalább két intervallum közös részének eleme. E két szélső pont tehát olyan zárt intervallumot ad, amely a három adott intervallum egyikében van, és a harmadik pontot is tartalmazza, és ez a másik 2 zárt intervallum közös részéhez is hozzátartozik.

185. A három zárt intervallum határa az egyenesen legfeljebb 6 pontot határoz meg. Az egyenest 6 pontja legfeljebb 7 közös belső pont nélküli (2 félegyenesre és 5 szakaszra) darabolja.

186. Például: $\{1\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{1; 6\}$.

187. Például: $A := \{2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbf{N}^+\}$, $B := \{2^p \cdot 5^s \mid p, s \in \mathbf{N}^+\}$, $C := \{3^u \cdot 5^v \mid u, v \in \mathbf{N}^+\}$.

188. Az 1, 2, 3 számokból 3^{10} 10-jegyű szám készíthető. Ezek között 3 olyan van, amely csupa azonos jegyből áll, és $3 \cdot 2^{10}$ azok száma, amelyekben legfeljebb 2 jegy szerepel. Így $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$ olyan tízjegyű szám van, melyben az 1; 2 és 3 mindegyike szerepel legalább egyszer.

189. Az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$. Mivel

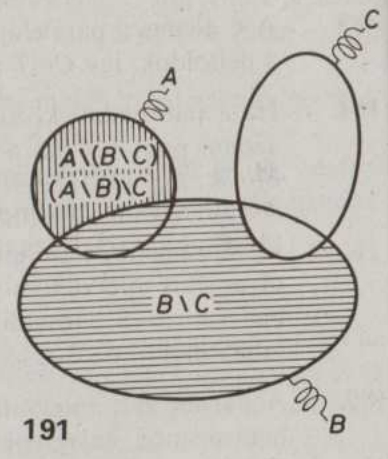
$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$, mert a binomiális tétel szerint

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n.$$

190. A nyolcelemű M halmaznak 2^8 részhalmaza van. Ha bármely részhalmazához az $M \setminus H$ (komplementer) részhalmazt rendeljük, akkor ez M részhalmazainak önmagára való bijektív leképezése. Ezért $2^7 + 1$ részhalmaz között van két olyan, hogy egyikük a másiknak komplementere, tehát közös részük az üres halmaz. Az M-nek 2^7 olyan részhalmaza van, amely az 1 elemet tartalmazza, tehát ezek bármely kettejének van közös eleme.

191. Venn-diagrammal (**191.** ábra):



191

192. Nem. Legyen $A = B = \mathbf{R}$. Az *a)* állítás szerint bármely valós számnál van nagyobb. A *b)* szerint van legnagyobb valós szám, ami nem igaz.

193. $A \cap B$ a 6-tal vagy a 4-gyel oszthatók halmaza. Ennek bármely eleme páros, tehát eleme A-nak és 3-mal vagy 4-gyel is osztható, tehát benne van B-ben.

194. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, tehát H 16 elemű,

$H = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$.
$H_1 = \{6, 10, 14, 15, 21, 35\}$.

195. Legyen $a \in A$. Mivel $A \subseteq A \cup C = B \cup C$, ezért $a \in B \cup C$, tehát $a \in B$ vagy $a \in C$. Az utóbbi esetben $a \in A$ és $a \in C$ miatt $a \in A \cap C = B \cap C$, azaz $a \in B$ is. Ezzel $A \subseteq B$. Az A és B szerepe felcserélhető, tehát $B \subseteq A$ is, ennélfogva $A = B$.

196. Legyen $a \in A$. Ha $a \in C$, úgy $a \in A \cap C = B \cap C$ miatt $a \in B$ is. Ha $a \notin C$, akkor $a \in A \setminus C = B \setminus C$ miatt $a \in B$ is. Ezek szerint $A \subseteq B$. Az A és B szerepének felcserélésével $B \subseteq A$ is adódik, tehát $A = B$.

197. Nem. Például: $C :=$ négyszögek $\quad A \cup C = B \cup C = C$,
$A :=$ paralelogrammák $\quad A \setminus C = B \setminus C = \emptyset$,
$B :=$ deltoidok $\quad A \neq B$.

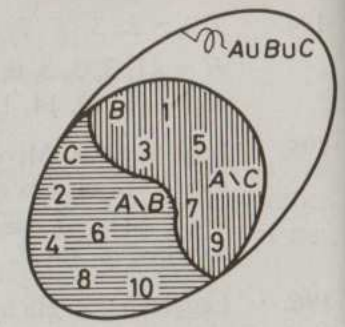
198. Legyen $a \in A$. Ekkor $A \subseteq A \cup C = B \cup C$ miatt, ha $a \notin B$, úgy $a \in C$ kell legyen. Erre viszont $a \in C \setminus B$ és $a \notin C \setminus A$, ami ellentmondás. Ezek szerint $A \subseteq B$. Hasonlóan $B \subseteq A$, azaz $A = B$.

199. M bármely x eleme $\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1}$ alakú, $n \in \mathbf{Z}$, tehát $0 < x - 1 = |x-1|$. Így $|x-1| < \frac{1}{10}$ pontosan akkor, ha $\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{10}$, vagyis $11 < 2n$. Az M-nek 501 eleme közül a $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$ nem tesz eleget a feltételnek, a többi 496 pedig igen.

200. Legyen $X := A \cup$ {páros pozitív egészek}, $Y := A \cup$ {páratlan pozitív egészek}. Így $X \cap Y = A$, $X \cup Y = \mathbf{N}$ és bármely $x \in X \setminus A$ pároshoz, ami legalább a 6, van olyan $y \in Y \setminus A$ páratlan, ami 1-gyel kisebb, mint x.

201. Ha a $B \cap C$ egy eleme páros lenne, akkor $A \setminus B$ elemei között, ha páratlan lenne, akkor $A \setminus C$ elemei között nem szerepelhetne, márpedig $A \cup B \cup C$ bármely eleme az előbb felsoroltak egyikében benne van, tehát $B \cap C = \emptyset$. Az $A \setminus B$-ből és $A \setminus C$-ből adódik, hogy B-nek csakis páratlan, míg C-nek csakis páros elemei lehetnek. Ha az $A \cup B \cup C$-nek volna olyan páratlan eleme, amely nem eleme a B-nek, akkor ez az elem

az $A \setminus B$-ben benne kell legyen, hiszen $A \cup B \cup C$ elemeihez C csak páros számokat hoz. Így $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Hasonlóan nyerjük $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ és ezekkel $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \cup B \cup C = B \cup C$ miatt $B \cup C = A$ (lásd **201.** ábra).



201

202. A metszet tulajdonságából következik, hogy $\{5; 6\} \subset C$, a $C \setminus B$ definíciójából pedig, hogy $1 \in C$, és $A \setminus C$-ből, hogy $\{2, 3, 4\} \cap C = \emptyset$, vagyis $C = \{1; 5; 6\}$. Az $(A \setminus C) \subseteq A$ és mivel $5 \notin B$ a $(C \setminus B)$ miatt, viszont $5 \in A \cup B$ az $(A \cup B) \cap C$ miatt, ezért $5 \in A$. Így $A = \{2, 3, 4, 5\}$, hiszen ha $6 \in A$ lenne, akkor $C \setminus B$ és $6 \in C$ miatt $6 \in B$ is teljesülne, ezt pedig $A \cap B$ kizárja. Az $1 \in A$ esetén, mivel $1 \notin B$ $C \setminus B$ miatt, $(A \cup B) \cap C$ tartalmazná az 1-et, hiszen minden tényezőjének eleme! Az $A \cap B$ és $(A \cup B) \cap C$-ből 3, 4, $5 \notin B$, $\{2; 6\} \subseteq B$. $C \setminus B$ miatt $1 \notin B$, tehát $B = \{2; 6\}$.

203. Ha M mindkét halmaz részhalmaza, akkor közös részüknek, a $\{3; 4\}$-nek is részhalmaza.

204. A két részhalmaz mindegyike M-nek részhalmaza, így egyesítésük az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \subset M$ is.

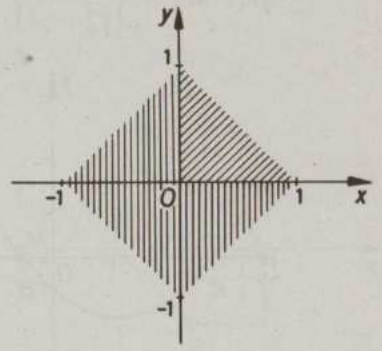
205. $(A \cap B) \subseteq A$ és $(A \setminus B) \subseteq A$ miatt $\{1; 3; 5\} \subseteq A$. A-nak más eleme nincs, különben $\{2; 4\} \subseteq B$ miatt a 2 vagy a 4 eleme lenne $A \cap B$-nek is. Így $A = \{1; 3; 5\}$ és $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

206. $A \cap B$ elemei között az 1 vagy a 2 ott kell legyen, különben a közös rész részhalmaza lenne a $\{3; 4; 5\}$-nek. Az $1 \in A \cap B$ nem lehet $A \setminus B$ miatt. Így $2 \in A \cap B$. Ebből és $(A \setminus B) \subseteq A$ miatt $\{1; 2; 4\} \subseteq A$. $|A \setminus B| = 2$ miatt $|B| \leq 3$, ám $3 \leq |A| = |B|$ miatt $|A| = |B| = 3$, tehát $A = \{1; 2; 4\}$ és $B = \{2; 3; 5\}$.

207. Két halmaz akkor egyenlő, ha azonosak az elemeik. Az $a = b$ esetén $a^2 + a = b^2 + b$ nyilván teljesül, tehát a két halmaz valóban azonos. Ha $a^2 + a = b$ és $b^2 + b = a$, akkor a két egyenlet összegéből $a^2 + b^2 + a + b = a + b$, azaz $a^2 + b^2 = 0$, vagyis $a = b = 0$ következik, hiszen nemnegatívok összege pontosan akkor 0, ha minden tag 0.

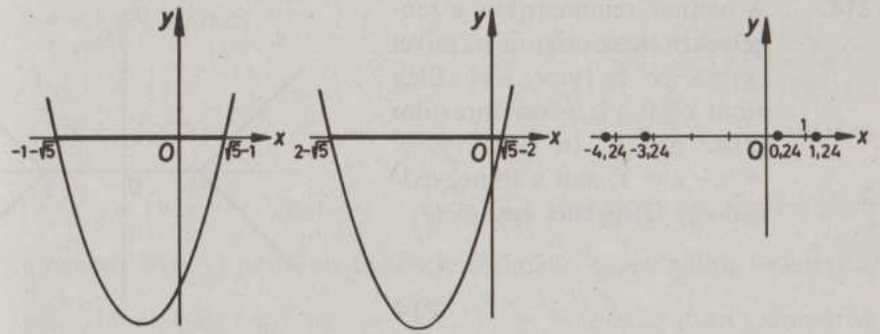
208. Nem. Legyen $A = \{2; 3\}$ és $B = \{1; 5\}$. Világos, hogy $\{2 \cdot 3; 2 + 3\} = \{1 + 5; 1 \cdot 5\}$, de $A \neq B$!

209. Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor $|x| = x$ és $|y| = y$, tehát $|x| + |y| = x + y$. Az $x + y < 1$ feltételt kielégítő pontokat az $x + y = 1$ egyenletű egyenes határolta, origót tartalmazó nyílt félsík és az első síknegyed közös része adja. Mivel $|x| = |-x|$ és $|y| = |-y|$, ezért az előbbi tartománynak a tengelyekre és az origóra vonatkozó tükörképeinek egyesítése (az $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$ csúcsú négyzet belseje) adja a keresett halmazt (**209.** ábra).



209

210. $x^2 + 2x - 4 = (x+1)^2 - 5 = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5}) \leq 0$,
ha $-1 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 1$.
$x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5 = (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}) \leq 0$, ha
$-2 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 2$.
$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 2\}$ és
$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 - \sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} - 1\}$ (**210.** ábra).

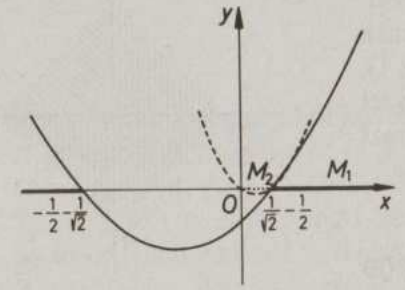


210

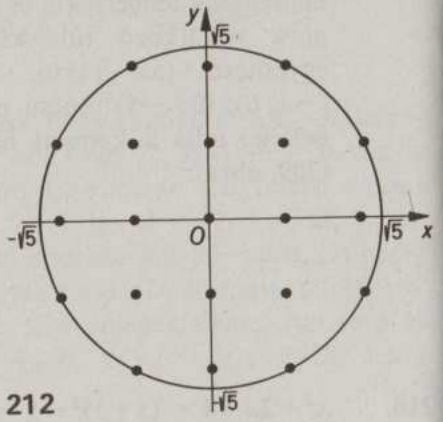
211. $x^2+x-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\geqq 0.$

Az $x\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\leqq 0$, ha $0\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$.

$M_1\cap M_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right\}$ (**211.** ábra).



211

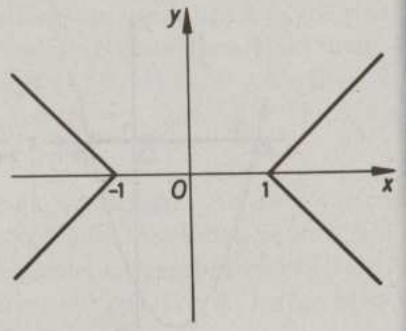


212

212. Az $x^2+y^2\leqq 5$ az origó közepű $r=\sqrt{5}$ sugarú körlap (pontjainak) egyenlete. Ezen a körlapon 21 rácspont van, tehát $M\cap(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$ 21 elemű (**212.** ábra).

213. Feltehető $m(A)\leqq m(B)$. Erre $m(A)=m(A\cup B)$ és $m(B)\leqq m(A\cap B)$, hiszen $A\cap B\subseteqq B$, tehát ennélfogva $m(A\cap B)<m(B)$ nem lehet, következésképpen $m(A)+m(B)\leqq m(A\cup B)+m(A\cap B)$.

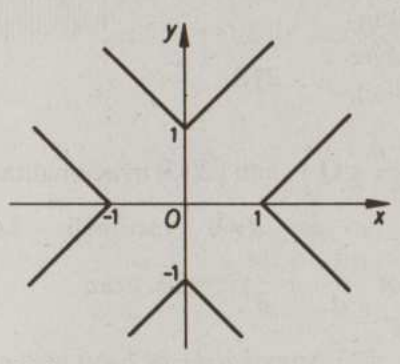
214. A halmaz szimmetrikus a tengelyekre és az origóra is, mivel $|x|=|-x|$ és $|y|=|-y|$. Elég tehát $x\geqq 0$, $y\geqq 0$-ban ábrázolni (**214.** ábra). Itt $|x|-|y|=x-y=1$, ami a síknegyedben egy félegyenes egyenlete.



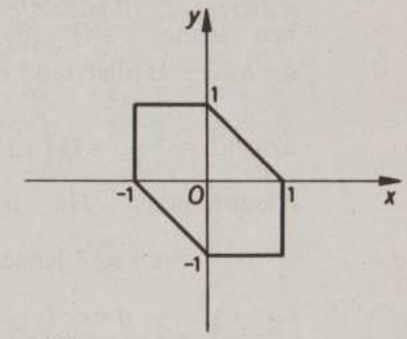
214

215. Lásd **209.** feladat.

216. Az $|x|-|y|=1$, illetve az $|y|-|x|=1$ egyenleteknek eleget tevő $P(x;y)$ pontok halmazának egyesítése adja a keresettet. Az elsőre lásd a **214.** feladatot. A halmaznak az $y=x$ egyenesre vonatkozó tükörképe (a tükrözés a tengelyek szerepét felcseréli) a második egyenletet kielégítő pontok halmazát adja (**216.** ábra).



216

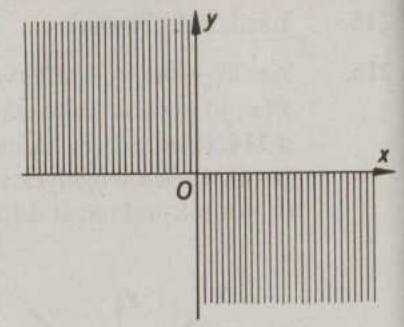


217

217. Ha $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, akkor $x+y\geqq 0$, tehát egyenletünk $x+y+x+y=2$, azaz $x+y=1$. Ha $x\leqq 0$, $y\leqq 0$, úgy $x+y\leqq 0$, tehát $|x|=-x$, $|y|=-y$ és $|x+y|=-x-y$. Erre egyenletünk $-x-y-x-y=2$, azaz $-x-y=1$. Ha $x\leqq 0$, $y\geqq 0$ és $x+y\geqq 0$, úgy $|x|=-x$, $|y|=y$ és $|x+y|=x+y$, és egyenletünk $-x+y+x+y=2$, tehát $y=1$, ha pedig $x\leqq 0$, $y\geqq 0$ és $|x+y|\leqq 0$, akkor az egyenlet $-x+y-x-y=2$, azaz $x=-1$. Végül $x\geqq 0$, $y\leqq 0$ és $x+y\geqq 0$ mellett $x-y+x+y=2$, tehát $x=1$ és $x+y\leqq 0$ esetén egyenletünk $x-y-x-y=2$, azaz $y=-1$ (**217.** ábra).

218. $x>0$ és $y>0$-ra $\frac{x}{|x|}=1$ és $\frac{y}{|y|}=1$. $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}=2$. $y<0$, $x<0$-ra $|x|=-x$, $|y|=-y$, tehát $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}=-2$. Ezekben az esetekben tehát nincs oly $P(x;y)$ pont, amelynek koordinátái egyenletünket kielégítenék. Ha $x>0$ és $y<0$, úgy $\frac{x}{|x|}=1$, $\frac{y}{|y|}=-1$, és az ilyen számpárok

egyenletünket kielégítik. A 2. és a 4. síknegyed belseje adja a keresett halmazt (**218.** ábra).



218

219. A $\mathbf{Q} \subset A$ és $\mathbf{Q} \subset B$, hiszen $b=0$ választásra minden $a \in \mathbf{Q}$ eleme A-nak is, B-nek is. Ezért $\mathbf{Q} \subseteq A \cap B$. Ha $b \neq 0$, $a+b\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ (illetve $a+b\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$), különben lenne $c \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, melyre $a+b\sqrt{2}=c$ (illetve $a+b\sqrt{3}=c$), azaz $\sqrt{2}=\frac{c-a}{b} \in \mathbf{Q}\left(\sqrt{3}=\frac{c-a}{b} \in \mathbf{Q}\right)$, ami $\sqrt{2}(\sqrt{3})$ irracionalitása miatt ellentmondás! Ha a, b, c és $d \neq 0$ racionális számokra $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{3}$ lenne, akkor $\frac{a-c}{d}+\frac{b}{d}\sqrt{2}=\sqrt{3}$, azaz $\left(\frac{a-c}{d}\right)^2+2\cdot\frac{a-c}{d}\cdot\frac{b}{d}\sqrt{2}+2\frac{b^2}{d^2}=3$, vagyis $a \neq c$ és $b \neq 0$ mellett $\sqrt{2}=\frac{3d^2-2b^2-(a-c)^2}{2b(a-c)} \in \mathbf{Q}$ lenne, ami lehetetlen. Az $a=c$, illetve $b=0$ mellett $\sqrt{\frac{3}{2}} \in \mathbf{Q}$ vagy $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$ lenne, és ez is ellentmondás. Ezekből $A \cap B = \mathbf{Q}$.

220. $2x \leqq 4x-6$ pontosan akkor, ha $3 \leqq x$ és $4x-11 \leqq 2x+11$ akkor és csak akkor, ha $x \leqq 11$. $A \cap B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

221. A pontosan egy nyelvet tanulók száma $32-9=23$, ami páratlan. Így a csak oroszt, illetve csak az angolt tanulók száma különböző paritású, mely számokhoz a 9-et adva ugyanilyen számpárt kapunk.

222. Ha A az angolul, O az oroszul, F a franciául tanulók halmazát jelöli, akkor

$|A \cup O \cup F| = |A|+|O|+|F|-(|A \cap O|+|A \cap F|+|O \cap F|)+|A \cap O \cap F|$,

azaz

$30 = 14+15+5-(6+3x)+x = 28-2x$,

ahol

$x = |A \cap O \cap F|$. Ebből $x<0$, tehát nincs megoldás.

223. Ha E az első feladatot, M a második feladatot megoldók halmaza, akkor $|E \cup M| = |E|+|M|-|E \cap M|$, azaz $x=\frac{7}{10}x+\frac{6}{10}x-9$, és ebből $x=30$, tehát ennyi induló volt.

224. Legalább egy tárgyból $8+6-4=10$ tanuló felvételizett, 18 tehát egyik tárgyból sem.

225. Az $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$ miatt az $(x-1)^2(x-5)=0$, illetve $(x-1)(x-5)^2=0$ adja az összes ilyen harmadfokú egyenletet.

Racionális kifejezések azonos átalakításai

226. $\frac{3}{2^8 \cdot 5^6} = \frac{3 \cdot 5}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{15}{2^8 \cdot 5^7}$; $\frac{8}{2^7 \cdot 5^7} = \frac{8 \cdot 2}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{16}{2^8 \cdot 5^7}$;
$\frac{15}{2^8 \cdot 5^7} < \frac{16}{2^8 \cdot 5^7}$, tehát $\frac{3}{2^8 \cdot 5^6} < \frac{8}{2^7 \cdot 5^7}$.

227. $\frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}} = \frac{2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4}{3^{20}} = \frac{26}{3^{20}}$; $\frac{1}{3^{17}} = \frac{3^3}{3^{20}} = \frac{27}{3^{20}}$;
$\frac{26}{3^{20}} < \frac{27}{3^{20}}$, tehát $\frac{2}{3^{18}} + \frac{4}{3^{19}} - \frac{4}{3^{20}} < \frac{1}{3^{17}}$.

228. $\frac{10}{3^6 \cdot 7^5} - \frac{4}{3^8 \cdot 7^4} = \frac{10 \cdot 3^2 - 4 \cdot 7}{3^8 \cdot 7^5} = \frac{62}{3^8 \cdot 7^5}$; $\frac{1}{3^6 \cdot 7^4} = \frac{3^2 \cdot 7}{3^8 \cdot 7^5} = \frac{63}{3^8 \cdot 7^5}$;
$\frac{62}{3^8 \cdot 7^5} < \frac{63}{3^8 \cdot 7^5}$, tehát $\frac{10}{3^6 \cdot 7^5} - \frac{4}{3^8 \cdot 7^4} < \frac{1}{3^6 \cdot 7^4}$.

229. $\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} = \frac{2^4 + 1}{2^{12}} = \frac{17}{2^{12}}$; $\frac{1}{2^9} = \frac{2^3}{2^{12}} = \frac{8}{2^{12}}$.
$\frac{8}{2^{12}} < \frac{17}{2^{12}}$, tehát $\frac{1}{2^9} < \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}}$.

230. $\frac{3}{3^{10} \cdot 5^8} = \frac{1}{3^9 \cdot 5^8}$; $\frac{1}{3^9 \cdot 5^6} = \frac{5^2}{3^9 \cdot 5^8} = \frac{25}{3^9 \cdot 5^8}$;
$\frac{1}{3^9 \cdot 5^8} < \frac{25}{3^9 \cdot 5^8}$, tehát $\frac{3}{3^{10} \cdot 5^8} < \frac{1}{3^9 \cdot 5^6}$.

231. $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$; $48 \cdot 50^5 = 3 \cdot 2^4 \cdot (5^2 \cdot 2)^5 =$
$= (3 \cdot 2^4 \cdot 5^{10} \cdot 2^5 = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$; $2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$,
tehát $10^{10} < 48 \cdot 50^5$.

232. $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15} = 2 \cdot 2^{14}$; $3 \cdot 4^7 = 3 \cdot (2^2)^7 = 3 \cdot 2^{14}$;
$2 \cdot 2^{14} < 3 \cdot 2^{14}$, tehát $8^5 < 3 \cdot 4^7$.

233. $\frac{72^3 \cdot 54^2}{108^4} = \frac{(2^3 \cdot 3^2)^3 \cdot (3^3 \cdot 2)^2}{(2^2 \cdot 3^3)^4} = \frac{2^9 \cdot 3^6 \cdot 3^6 \cdot 2^2}{2^8 \cdot 3^{12}} = \frac{2^{11}}{2^8} = 2^3 = 8.$

234. $\frac{45^3 \cdot 20^4 \cdot 18^2}{180^5} = \frac{(3^2 \cdot 5)^3 \cdot (2^2 \cdot 5)^4 \cdot (2 \cdot 3^2)^2}{(5 \cdot 2^2 \cdot 3^2)^5} = \frac{3^6 \cdot 5^3 \cdot 2^8 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4}{5^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^{10}} =$
$= \frac{3^{10} \cdot 5^7 \cdot 2^{10}}{3^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^5} = 5^2 = 25.$

235. $\frac{21^2 \cdot 14 \cdot 125}{35^3 \cdot 6} = \frac{(3 \cdot 7)^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^3}{(5 \cdot 7)^3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^3}{5^3 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 3} =$
$= \frac{3^2 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 5^3}{3 \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 5^3} = 3.$

236. $\frac{4002}{1000 \cdot 1002 - 999 \cdot 1001}$. Vezessük be az $x = 1000$ jelölést, így a kifejezés: $\frac{4x+2}{x(x+2) - (x-1)(x+1)} = \frac{4x+2}{x^2 + 2x - x^2 + 1} =$
$= \frac{2(2x+1)}{2x+1} = 2; \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$. (A kifejezés nem függ x-től.)

237. $\frac{10\,000 \cdot 10\,004 - 10\,002 \cdot 9998}{10\,000 \cdot 10\,001 - 10\,001 \cdot 9999}$.
Vezessük be az $x = 10\,000$ jelölést, így a kifejezés
$\frac{x(x+4) - (x+2)(x-2)}{x(x+1) - (x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 4x - x^2 + 4}{x^2 + x - x^2 + 1} = \frac{4(x+1)}{x+1} = 4; \quad (x \neq -1).$
(A kifejezés értéke nem függ x-től.)

238. $\frac{1\,234\,321\,234\,321 \cdot 2\,468\,642\,468\,641 - 1\,234\,321\,234\,320}{1\,234\,321\,234\,320 \cdot 2\,468\,642\,468\,641 + 1\,234\,321\,234\,321}$;
legyen $x = 1\,234\,321\,234\,320$, így a kifejezés:
$\frac{(x+1)(2x+1) - x}{x(2x+1) + x + 1} = \frac{2x^2 + 3x + 1 - x}{2x^2 + x + x + 1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1} = 1;$
($2x^2 + 2x + 1 \neq 0$ a valós számok körében). (A kifejezés értéke nem függ x-től.)

239. $\frac{(a^2)^3 \cdot a^4 \cdot (a^5)^2}{a^7 \cdot (a^2)^4} = \frac{a^6 \cdot a^4 \cdot a^{10}}{a^7 \cdot a^8} = \frac{a^{20}}{a^{15}} = a^5; (a \neq 0).$

240. $\dfrac{(ab)^2\cdot(b^2)^3\cdot a^4\cdot b^7}{(a^2b)^3\cdot(ab^3)^2}=\dfrac{a^2b^2\cdot b^6\cdot a^4\cdot b^7}{a^6\cdot b^3\cdot a^2\cdot b^6}=\dfrac{a^6\cdot b^{15}}{a^8\cdot b^9}=$
$=\dfrac{b^6}{a^2};\begin{pmatrix}a\neq 0;\\ b\neq 0\end{pmatrix}.$

241. $(3x-5)(3x+5)-(3x+2)^2+6(2x+5)=$
$=9x^2-25-9x^2-4-12x+12x+30=1.$

242. $(2x+1)(x-2)^2-2x(x+2)^2+15x^2=(2x+1)(x^2-4x+4)-$
$-2x(x^2+4x+4)+15x^2=2x^3-8x^2+8x+x^2-4x+4-2x^3-$
$-8x^2-8x+15x^2=-4x+4$, ha $x=-10$, a kifejezés értéke: 44.

243. $\dfrac{(3a-1)(2a+1)^2-3a(2a+3)^2+1}{-28a}=$
$=\dfrac{(3a-1)(4a^2+4a+1)-3a(4a^2+12a+9)+1}{-28a}=$
$=\dfrac{12a^3+12a^2+3a-4a^2-4a-1-12a^3-27a-36a^2+1}{-28a}=$
$=\dfrac{-28a^2-28a}{-28a}=\dfrac{-28a(a+1)}{-28a}=a+1;\ (a\neq 0)$, ha $a=100$, a kifejezés értéke: 101.

244. $\dfrac{(4a+b)(4a-b)-(3a+2b)^2+5b^2}{7a-12b}=$
$=\dfrac{16a^2-b^2-9a^2-4b^2-12ab+5b^2}{7a-12b}=\dfrac{7a^2-12ab}{7a-12b}=$
$=\dfrac{a(7a-12b)}{7a-12b}=a;\ a\neq\dfrac{12}{7}b$. Ha $a=\dfrac{1}{2};\ b=-\dfrac{3}{4}$, a kifejezés értéke $\dfrac{1}{2}$ (nem függ b-től).

245. $\dfrac{(2x+1)^2-(3x-1)(3x+1)+5x^2}{2x+1}=\dfrac{4x^2+4x+1-9x^2+1+5x^2}{2x+1}=$
$=\dfrac{4x+2}{2x+1}=2;\left(x\neq-\dfrac{1}{2}\right).$

246. $\dfrac{(x-1)^2-(2x+1)(2x-1)+3x^2}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+1-4x^2+1+3x^2}{x-1}=$
$=\dfrac{-2x+2}{x-1}=-2;\ (x\neq 1).$

247. $\dfrac{(a-b)^3-3ab(a+b)+b^3}{a-6b}=\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-3a^2b-3ab^2+b^3}{a-6b}=$
$=\dfrac{a^3-6a^2b}{a-6b}=\dfrac{a^2(a-6b)}{a-6b}=a^2;\ (a\neq 6b)$. Ha $a=5;\ b=-999$, akkor a kifejezés értéke 25.

248. $\dfrac{(9x^2y^3)^4}{(5x^3y^4)^3}:\dfrac{(3xy^2)^6}{(5xy^5)^3}=\dfrac{3^8x^8y^{12}}{5^3x^9y^{12}}\cdot\dfrac{5^3x^3y^{15}}{3^6x^6y^{12}}=\dfrac{3^2y^3}{x^4}=$
$=\dfrac{9y^3}{x^4};\ (x\neq 0;\ y\neq 0).$

249. $\dfrac{(7a^2b^6)^2}{(2a^3b^4)^3}:\dfrac{49a^3b^4}{(4a^4b^2)^2}=\dfrac{7^2a^4b^{12}}{2^3a^9b^{12}}\cdot\dfrac{4^2a^8b^4}{49a^3b^4}=\dfrac{2^4}{2^3}=2;\ (a\neq 0;\ b\neq 0).$

250. $\dfrac{a+3}{a-1}+\dfrac{5-a}{a}=\dfrac{a^2+3a+5a-5-a^2+a}{a(a-1)}=\dfrac{9a-5}{a(a-1)};\ (a\neq 1;\ a\neq 0).$

251. $\dfrac{2x+y}{x+y}+\dfrac{3x-y}{x-y}=\dfrac{(2x+y)(x-y)+(3x-y)(x+y)}{(x+y)(x-y)}=$
$=\dfrac{2x^2-xy-y^2+3x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{5x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2};\ (|x|\neq|y|).$

252. $\dfrac{3a}{a-b}-\dfrac{4b}{a+b}=\dfrac{3a(a+b)-4b(a-b)}{a^2-b^2}=\dfrac{3a^2+3ab-4ab+4b^2}{a^2-b^2}=$
$=\dfrac{3a^2-ab+4b^2}{a^2-b^2};\ (|a|\neq|b|).$

253. $\dfrac{2a+1}{a+1}+\dfrac{a-2}{a-1}-\dfrac{3a^2-1}{a^2-1}=\dfrac{(2a+1)(a-1)+(a-2)(a+1)-3a^2+1}{(a+1)(a-1)}=$
$=\dfrac{2a^2-a-1+a^2-a-2-3a^2+1}{a^2-1}=\dfrac{-2a-2}{(a+1)(a-1)}=\dfrac{-2(a+1)}{(a+1)(a-1)}=$
$=\dfrac{-2}{a-1}=\dfrac{2}{1-a};\ (|a|\neq 1).$

254. $\dfrac{3b+2}{2b+1}+\dfrac{1-4b}{2b-1}+\dfrac{2b^2-b}{4b^2-1}=$
$=\dfrac{(3b+2)(2b-1)+(1-4b)(2b+1)+2b^2-b}{4b^2-1}=$

$$= \frac{6b^2+b-2-2b+1-8b^2+2b^2-b}{4b^2-1} = \frac{-2b-1}{(2b+1)(2b-1)} =$$

$$= \frac{-(2b+1)}{(2b+1)(2b-1)} = \frac{-1}{2b-1} = \frac{1}{1-2b}; \left(|b| \neq \frac{1}{2}\right).$$

255. $\frac{3x+1}{x} + \frac{2x-3}{x+1} - \frac{5x-2}{x-1} =$

$$= \frac{(3x+1)(x^2-1)+(2x-3)x(x-1)-(5x-2)x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{3x^3+x^2-3x-1+2x^3-2x^2-3x^2+3x-5x^3-5x^2+2x^2+2x}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{-7x^2+2x-1}{x(x^2-1)}; (|x| \neq 1), (x \neq 0).$$

256. $\frac{2x+y}{3x-y} + \frac{x-y}{3x+y} - \frac{3x^2-xy+2y^2}{9x^2-y^2} =$

$$= \frac{(2x+y)(3x+y)+(x-y)(3x-y)-3x^2+xy-2y^2}{(3x-y)(3x+y)} =$$

$$= \frac{6x^2+5xy+y^2+3x^2-4xy+y^2-3x^2+xy-2y^2}{9x^2-y^2} =$$

$$= \frac{6x^2+2xy}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{2x}{3x-y}; \left(|x| \neq \left|\frac{y}{3}\right|\right).$$

257. $\frac{x+3}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x-1)-(2x-1)(x+1)-x+3}{(x+1)(x-1)} =$

$$= \frac{x^2+2x-3-2x^2-x+1-x+3}{x^2-1} = \frac{-x^2+1}{x^2-1} = -1; (|x| \neq 1).$$

258. $\frac{b+5}{b^2-16} \cdot \left(1 - \frac{9}{b+5}\right) = \frac{b+5}{(b+4)(b-4)} \cdot \frac{b+5-9}{b+5} = \frac{1}{b+4}; \quad (|b| \neq 4),$ $(b \neq -5).$

259. $\left(3 + \frac{1}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{1-2a}{3a-2} + 1\right) = \frac{3a-3+1}{a-1} \cdot \frac{1-2a+3a-2}{3a-2} =$

$$= \frac{3a-2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{3a-2} = 1; \left(a \neq 1; a \neq \frac{2}{3}\right).$$

260. $\left(2 + \frac{x-1}{3x-1}\right) \cdot \left(\frac{1-x}{7x-3} + 1\right) = \frac{6x-2+x-1}{3x-1} \cdot \frac{1-x+7x-3}{7x-3} =$

$$= \frac{7x-3}{3x-1} \cdot \frac{6x-2}{7x-3} = 2; \left(x \neq \frac{1}{3}; x \neq \frac{3}{7}\right).$$

261. $\left(\frac{2x+1}{3x-1} + \frac{5-2x}{3x+1}\right) \cdot \frac{9x^2-1}{11x-2} =$

$$= \frac{(2x+1)(3x+1)+(5-2x)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)} \cdot \frac{9x^2-1}{11x-2} =$$

$$= \frac{6x^2+5x+1+17x-6x^2-5}{9x^2-1} \cdot \frac{9x^2-1}{11x-2} =$$

$$= \frac{22x-4}{11x-2} = 2; \left(|x| \neq \frac{1}{3}; x \neq \frac{2}{11}\right).$$

262. $\frac{a^2-9}{a+2} : \left(1 - \frac{5}{a+2}\right) = \frac{(a+3)(a-3)}{a+2} : \frac{a+2-5}{a+2} =$

$$= \frac{(a+3)(a-3)}{a+2} \cdot \frac{a+2}{a-3} = a+3; (a \neq -2; a \neq 3).$$

263. $\frac{x^2-4}{x+3} : \frac{x-2}{x+3} - 2 = \frac{(x+2)(x-2)}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-2} - 2 =$

$$= x+2-2 = x; \begin{pmatrix} x \neq -3 \\ x \neq 2 \end{pmatrix}.$$

264. $\left(\frac{2}{1-x^2} + \frac{x+2}{x-1}\right) : \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-2+(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2-1}{x+3} =$

$$= \frac{-2+x^2+3x+2}{x+3} = \frac{x^2+3x}{x+3} = \frac{x(x+3)}{x+3} = x; (|x| \neq 1; x \neq -3).$$

265. $\left(\frac{1-6b}{2b+3} + 3\right) : \frac{5}{2b+3} = \frac{1-6b+6b+9}{2b+3} \cdot \frac{2b+3}{5} = 2; \left(b \neq -\frac{3}{2}\right).$

266. $\left(\frac{4c}{2c-5} - 2\right) : \frac{5}{4c^2-25} = \frac{4c-4c+10}{2c-5} \cdot \frac{(2c-5)(2c+5)}{5} =$

$$= 2(2c+5) = 4c+10; \left(|c| \neq \frac{5}{2}\right).$$

267. $\frac{b^2-4}{10b+2}:\left(\frac{11b}{10b+2}-1\right)=\frac{(b+2)(b-2)}{10b+2}:\frac{11b-10b-2}{10b+2}=$

$=\frac{(b+2)(b-2)}{10b+2}\cdot\frac{10b+2}{b-2}=b+2;\left(b\neq-\frac{1}{5};\ b\neq2\right).$

268. $\left(\frac{2x-1}{3x-6}-\frac{x+1}{2x-4}\right):\frac{x-5}{6}=\frac{4x-2-3x-3}{6(x-2)}\cdot\frac{6}{x-5}=$

$=\frac{x-5}{6(x-2)}\cdot\frac{6}{x-5}=\frac{1}{x-2};\ (x\neq2;\ x\neq5).$

269. $\frac{3a^2-6ab}{a^2+4b^2}\cdot\frac{a^4-16b^4}{15(a-2b)^2}=\frac{3a(a-2b)}{a^2+4b^2}\cdot\frac{(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)}{15(a-2b)^2}=$

$=\frac{a(a+2b)(a-2b)}{5(a-2b)}=\frac{a(a+2b)}{5}=\frac{a^2+2ab}{5};\ (a\neq2b).$

270. $\frac{x^2-25}{x^2-2x}:\frac{x^2+5x}{x^4-4x^2}=\frac{(x+5)(x-5)}{x(x-2)}\cdot\frac{x^2(x+2)(x-2)}{x(x+5)}=$

$=(x-5)(x+2)=x^2-3x-10;\ (x\neq0;\ x\neq2;\ x\neq-5).$

271. $\left(\frac{3-4x}{2x+1}+2\right):\frac{x}{2x+1}=\frac{3-4x+4x+2}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x}=\frac{5}{x};$

$\left(x\neq-\frac{1}{2};\ x\neq0\right)$. Ha $x=5$, akkor a kifejezés értéke 1.

272. $\frac{9a-3b}{9a^2-b^2}\cdot\frac{15a+5b}{3}=\frac{3(3a-b)}{(3a+b)(3a-b)}\cdot\frac{5(3a+b)}{3}=5;\ (|3a|\neq|b|).$

273. $\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{2x+2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2}\cdot\frac{2(x+1)}{x-2}=2;\ (x\neq-1;\ x\neq2).$

274. $\frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2}\cdot\frac{6b+3a}{a}=\frac{a(2b-a)}{(2b+a)(2b-a)}\cdot\frac{3(2b+a)}{a}=3;\ (|a|\neq|2b|;\ a\neq0).$

275. $\frac{5x^2-20y^2}{3x+6y}:\frac{5x-10y}{9x}=\frac{5(x+2y)(x-2y)}{3(x+2y)}\cdot\frac{9x}{5(x-2y)}=3x;$

$\left(\begin{matrix}|x|\neq|2y|;\\ x\neq0\end{matrix}\right)$. Ha $x=2;\ y=-\frac{1}{2}$, akkor a kifejezés értéke 6.

276. $\frac{a^2-4ab+4b^2}{a^2+ab-6b^2}\cdot\frac{3a+9b}{a-2b}=\frac{(a-2b)^2}{(a+3b)(a-2b)}\cdot\frac{3(a+3b)}{a-2b}=3;\left(\begin{matrix}a\neq2b;\\ a\neq-3b\end{matrix}\right).$

277. $\frac{a^2-10a+25}{a^2-3a-10}:\frac{a-5}{4a+8}=\frac{(a-5)^2}{(a+2)(a-5)}\cdot\frac{4(a+2)}{a-5}=4;\left(\begin{matrix}a\neq5;\\ a\neq-2\end{matrix}\right).$

278. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}+ab\right):\frac{a+b}{2}=\left[\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}+ab\right]\cdot\frac{2}{a+b}=$

$=\frac{(a+b)^2\cdot2}{a+b}=2(a+b);\ (|a|\neq|b|).$

279. $\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right):\frac{4b^2-9a^2}{ab}=\frac{2b-3a}{ab}\cdot\frac{ab}{(2b-3a)(2b+3a)}=$

$=\frac{1}{2b+3a};\ (a\neq0;\ b\neq0;\ |2b|\neq|3a|).$

280. $\frac{2-\frac{a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}}=\frac{\frac{6a+2-a}{3a+1}}{\frac{5a+2}{9a^2-1}}=\frac{5a+2}{3a+1}\cdot\frac{(3a+1)(3a-1)}{5a+2}=3a-1;$

$\left(|a|\neq\frac{1}{3};\ a\neq-\frac{2}{5}\right).$

281. $\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\frac{2-2x+3x-1}{-(x-1)}}=\frac{-1}{x^2-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x+1}=\frac{1}{(x+1)^2};\ (|x|\neq1).$

282. $\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=$

$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\cdot\frac{b+a}{ab}\right)\frac{a^2b^2}{a^3+b^3}=$

$=\frac{b^2+a^2+2ab}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{a^2-ab+b^2};$

$(a\neq0;\ b\neq0;\ a\neq-b).$

283. $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{a^3+b^3}{ab^2}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab^2}=$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab^2} \cdot \frac{ab^2}{a^2-ab+b^2} = a+b,\ (a\neq 0;\ b\neq 0).$$

284. $$\left(\frac{p}{q^2-pq}+\frac{q}{p^2-pq}\right)\cdot\frac{q^2p+p^2q}{q^2-p^2} = \frac{p^2-q^2}{pq(q-p)}\cdot\frac{qp(q+p)}{q^2-p^2} =$$

$$= -\frac{q+p}{q-p} = \frac{p+q}{p-q},\ (|p|\neq|q|;\ p\neq 0;\ q\neq 0).$$

285. $$\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}+\frac{1}{(y-x)(y-z)} =$$

$$= \frac{y-z+x-y-(x-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = 0,\ (x\neq y;\ y\neq z;\ z\neq x).$$

286. $$\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}-\left(\frac{a^4+ab^3}{a^2+ab}-ab\right) = \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2-b^2} -$$

$$-\left[\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b}-ab\right] = a^2+b^2-a^2+2ab-b^2 = 2ab,$$

$(a\neq 0;\ |a|\neq|b|)$.

287. $$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{b(b-a)} = \frac{b+a}{ab(a+b)}+\frac{b-a}{ab(a-b)} =$$

$$= \frac{1}{ab}-\frac{1}{ab} = 0\ (|a|\neq|b|;\ a\neq 0;\ b\neq 0).$$

288. $$\left(\frac{1}{a^2+2ab+b^2}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2-2ab+b^2}\right):\frac{b^2+4ab-a^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{(a-b)^2}\right)\frac{a^2-b^2}{b^2+4ab-a^2} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2+a^2-b^2-a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2+4ab-a^2} =$$

$$= \frac{a^2-4ab-b^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{1}{b^2+4ab-a^2} = -\frac{1}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2},\ (|a|\neq|b|;\ b^2+4ab-a^2\neq 0\Leftrightarrow b\neq a(-2\pm\sqrt{5})).$$

289. $$\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{1}{x^2+2xy+y^2}+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x-y}{x^3y^3} =$$

$$= \left[\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2}{(x+y)^3}\cdot\frac{y+x}{xy}\right]\frac{x^3y^3}{x-y} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2y^2(x+y)^2}\cdot\frac{x^3y^3}{x-y} = \frac{xy}{x-y},\ (x\neq 0;\ y\neq 0;\ |x|\neq|y|).$$

290. $$\left(\frac{2a^2+a}{a^3-1}-\frac{a+1}{a^2+a+1}\right)\left(1+\frac{a+1}{a}-\frac{a^2+5a}{a^2+a}\right) =$$

$$= \frac{2a^2+a-a^2+1}{(a-1)(a^2+a+1)}\cdot\frac{a^2+a+a^2+2a+1-a^2-5a}{a(a+1)} =$$

$$= \frac{a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)}\cdot\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)} = \frac{a-1}{a(a+1)},\ (a\neq 0;\ |a|\neq 1).$$

291. $$\left(\frac{(x+y)^2+2y^2}{x^3-y^3}-\frac{1}{x-y}+\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^2+2xy+3y^2-x^2-xy-y^2+x^2-y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\cdot\frac{x-y}{xy} =$$

$$= \frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\cdot\frac{x-y}{xy} = \frac{1}{xy},\ (x\neq y;\ x\neq 0;\ y\neq 0).$$

292. $$\frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2+z^2-2xz-y^2)} = \frac{[x^2-(y+z)^2](x+y-z)}{(x+y+z)[(x-z)^2-y^2]} =$$

$$= \frac{(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)}{(x+y+z)(x-z+y)(x-z-y)} = 1,\ (x+y+z\neq 0;\ x-z+y\neq 0;$$

$x-z-y\neq 0$).

293. $$\frac{\dfrac{1+2x}{4+2x}-\dfrac{x}{3x-6}+\dfrac{\frac{2}{3}x^2}{4-x^2}}{\dfrac{6+13x}{24-12x}} =$$

$$= \frac{3(x-2)(1+2x)-2x(x+2)-6\cdot\frac{2}{3}x^2}{\dfrac{6(x+2)(x-2)}{6+13x}{24-12x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{-9x-6+6x^2-2x^2-4x-4x^2}{6(x+2)(x-2)}}{\dfrac{13x+6}{12(2-x)}} = \frac{\dfrac{-13x-6}{6(x+2)(x-2)}}{\dfrac{13x+6}{12(2-x)}} =$$

$$= -\frac{12(2-x)}{6(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x+2}, \left(|x| \neq 2;\ x \neq \frac{-6}{13}\right).$$

294. $\left(\dfrac{3x+2}{3x^2+1} - \dfrac{18x^3-x-9}{9x^4-1} + \dfrac{3x-2}{3x^2-1}\right) : \dfrac{x^2+10x+25}{9x^4-1} =$

$$= \frac{(3x+2)(3x^2-1)-18x^3+x+9+(3x-2)(3x^2+1)}{(3x^2+1)(3x^2-1)} \cdot \frac{9x^4-1}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{9x^3+6x^2-3x-2-18x^3+x+9+9x^3-6x^2+3x-2}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{x+5}{(x+5)^2} = \frac{1}{x+5}, \quad \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{3}};\ x \neq -5\right).$$

295. $\left[\dfrac{1}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{(x-y)^2}\right] : \left[\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y}\right] =$

$$= \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{(x+y)^2(x-y)^2} : \frac{x-y+x+y}{(x+y)(x-y)} =$$

$$= \frac{-4xy}{(x+y)^2(x-y)^2} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{2x} = \frac{-2y}{(x+y)(x-y)} = \frac{2y}{y^2-x^2},$$

$(x \neq 0;\ |x| \neq |y|).$

296. $\left(\dfrac{2c}{c+2} + \dfrac{2c}{6-3c} + \dfrac{8c}{c^2-4}\right) : \dfrac{c-4}{c-2} = \dfrac{6c(c-2)-2c(c+2)+24c}{3(c+2)(c-2)} \cdot \dfrac{c-2}{c-4} =$

$$= \frac{6c^2-12c-2c^2-4c+24c}{3(c+2)} \cdot \frac{1}{c-4} = \frac{4c^2+8c}{3(c+2)(c-4)} =$$

$$= \frac{4c(c+2)}{3(c+2)(c-4)} = \frac{4c}{3(c-4)}, \quad (c \neq 4;\ |c| \neq 2).$$

297. $\left[\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \dfrac{1}{x-1}\right] : \dfrac{x^2+1}{1-x} =$

$$= \frac{x^2-2x+1-1+3x-x^2-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{1-x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{-x^2-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{-(x-1)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad (x \neq 1).$$

298. $\left(\dfrac{1}{p^2-pq} - \dfrac{3q^2}{p^4-pq^3} - \dfrac{q}{p^3+p^2q+pq^2}\right)\left(q + \dfrac{p^2}{p+q}\right) =$

$$= \frac{p^2+pq+q^2-3q^2-pq+q^2}{p(p-q)(p^2+pq+q^2)} \cdot \frac{pq+q^2+p^2}{p+q} =$$

$$= \frac{p^2-q^2}{p(p-q)(p^2+pq+q^2)} \cdot \frac{pq+p^2+q^2}{p+q} = \frac{1}{p}, \quad (p \neq 0;\ |p| \neq |q|).$$

299. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{b^2c^2(b-c)-a^2c^2(a-c)+a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{b^3c^2-b^2c^3-a^3c^2+a^2c^3+a^3b^2-a^2b^3}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{c^3(a^2-b^2)-c^2(a^3-b^3)+a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b)(c^3a+c^3b-c^2a^2-c^2b^2-c^2ab+a^2b^2)}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b)[c^2a(c-a)+c^2b(c-a)-b^2(c^2-a^2)]}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(c-a)(c^2a+c^2b-b^2c-b^2a)}{a^2b^2c^2(a-c)(b-c)} = \frac{-[bc(c-b)+a(c^2-b^2)]}{a^2b^2c^2(b-c)} =$$

$$= \frac{-(c-b)(bc+ac+ab)}{a^2b^2c^2(b-c)} = \frac{ab+ac+bc}{a^2b^2c^2},$$

$(a \neq 0;\ b \neq 0;\ c \neq 0;\ a \neq b;\ b \neq c;\ a \neq c).$

300. $c - \left[\dfrac{(16-c)c}{c^2-4} + \dfrac{3+2c}{2-c} - \dfrac{2-3c}{c+2}\right] : \dfrac{c-1}{c^3+4c^2+4c} =$

$$= c - \frac{16c-c^2-2c^2-7c-6-2c+4+3c^2-6c}{(c+2)(c-2)} \cdot \frac{c(c^2+4c+4)}{c-1} =$$

$$= c - \frac{c-2}{(c+2)(c-2)} \cdot \frac{c(c+2)^2}{c-1)} = c - \frac{c(c+2)}{c-1} = \frac{c^2-c-c^2-2c}{c-1} =$$

$$= \frac{-3c}{c-1} = \frac{3c}{1-c}, \quad (c \neq 0;\ c \neq 1;\ |c| \neq 2).$$

301. $\dfrac{a}{a^2-2a+1} - \dfrac{1-a(1-a)}{1-a} \cdot \dfrac{a}{1+a^3} - \dfrac{2a-2a^2-2}{(1-a^2)(a-1)} =$

$$= \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{1-a+a^2}{a-1} \cdot \frac{a}{1+a^3} - \frac{2a-2a^2-2}{(1-a^2)(a-1)} =$$

$$= \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{(1-a+a^2)a}{(a-1)(a+1)(a^2-a+1)} + \frac{2a-2a^2-2}{(a-1)^2(a+1)} =$$

$$= \frac{a}{(a-1)^2} + \frac{a}{a^2-1} + \frac{2a-2a^2-2}{(a-1)^2(a+1)} = \frac{a^2+a+a^2-a+2a-2a^2-2}{(a-1)^2(a+1)} =$$

$$= \frac{2(a-1)}{(a-1)^2(a+1)} = \frac{2}{a^2-1}, \quad (|a| \neq 1).$$

302.
$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{x}{ab}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{x}{ab}\right)(a+b-x)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{x^2}{a^2b^2}} =$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2b^2}\right](a+b-x)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 - \frac{x^2}{a^2b^2}} = a+b-x,$$

$(x \neq \pm(a+b);\ a \neq 0;\ b \neq 0)$.

303.
$$\frac{x+3}{2x-4} - \frac{x-2}{3x+9} - \frac{3x^2+53x+32}{12x^2+12x-72} =$$

$$= \frac{6(x+3)^2-4(x-2)^2-3x^2-53x-32}{12(x-2)(x+3)} =$$

$$= \frac{6x^2+36x+54-4x^2+16x-16-3x^2-53x-32}{12(x-2)(x+3)} = \frac{-x^2-x+6}{12(x-2)(x+3)} =$$

$$= \frac{-(x-2)(x+3)}{12(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{12}; \quad (x \neq 2;\ x \neq -3).$$

304.
$$\frac{x^2y-xy^2}{x^2-y^2} + \frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2} - \frac{x^2-2xy}{x+y} =$$

$$= \frac{xy(x^2-y^2)+x^2(x^2-y^2)}{(x+y)^2(x-y)} - \frac{x^2-2xy}{x+y} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2)x(y+x)-x(x-2y)(x^2-y^2)}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{(x^2-y^2)x(x+y-x+2y)}{(x+y)^2(x-y)} =$$

$$= \frac{x(x^2-y^2)3y}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{3xy}{x+y}, \quad (|x| \neq |y|).$$

305.
$$\left(\frac{a+1}{1-a} - \frac{1-a}{1+a} - \frac{4a^2}{a^2-1}\right) : \left[-2\left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1+a^2+2a-1-a^2+2a+4a^2}{(1-a)(1+a)} : \frac{-2(1+a^2-1-a^3-a^2)}{a^2(a+1)} =$$

$$= \frac{4a+4a^2}{1-a^2} \cdot \frac{a^2(a+1)}{-2(-a^3)} = \frac{4a(1+a)}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{a^2(a+1)}{2a^3} = \frac{2(a+1)}{1-a} = \frac{2(1+a)}{1-a},$$

$|a| \neq 1;\ a \neq 0$.

306.
$$\left(\frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+2b}\right) : \left(\frac{a-2b}{a+2b} + 1\right) =$$

$$= \frac{a^2+4ab+4b^2-a^2-4b^2+4ab}{(a+2b)(a-2b)} : \frac{a-2b+a+2b}{a+2b} =$$

$$= \frac{8ab}{(a+2b)(a-2b)} \cdot \frac{a+2b}{2a} = \frac{4b}{a-2b}, \quad (a \neq 0;\ |a| \neq |2b|).$$

Ha $a=3{,}5$; $b=-1{,}5$; a kifejezés értéke:

$$\frac{4(-1{,}5)}{3{,}5-2(-1{,}5)} = \frac{-6}{3{,}5+3} = -\frac{6}{6{,}5} = -\frac{12}{13}.$$

307.
$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy} = \frac{x^2+y^2+2xy-x^2-y^2+2xy}{4xy} = \frac{4xy}{4xy} = 1,$$

$(x \neq 0;\ y \neq 0)$.

Ha $x=1$; $y=\frac{3}{4}$, a kifejezés értéke: 1 (független x-től és y-tól).

308.
$$\frac{4-a^2-2ab-b^2}{2+a+b} = \frac{2^2-(a+b)^2}{2+a+b} = \frac{(2+a+b)(2-a-b)}{2+a+b} = 2-a-b,$$

$(a+b \neq -2)$.

Ha $a=0{,}01$; $b=0{,}99$, a kifejezés értéke: $2-0{,}01-0{,}99 = 1$.

309.
$$\frac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} = \frac{(a+1)(a^8+2a^4-a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} =$$

$$= \frac{(a+1)[(a^4+1)^2-a^4]}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} = \frac{(a+1)(a^4+1+a^2)(a^4+1-a^2)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)} =$$

$$= \frac{(a+1)[(a^2+1)^2-a^2]}{a^2+a+1} = \frac{(a+1)(a^2+1+a)(a^2+1-a)}{a^2+a+1} =$$

$= (a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$; ha $a=10$, a kifejezés értéke: 1001.

310. $\left(\frac{8+b^3}{x^2-y^2}:\frac{4-2b+b^2}{x-y}\right)\cdot\left(x+\frac{xy+y^2}{x+y}\right)=$

$=\frac{(2+b)(b^2-2b+4)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{x-y}{4-2b+b^2}\cdot\frac{x^2+xy+xy+y^2}{x+y}=$

$=\frac{2+b}{x+y}\cdot\frac{(x+y)^2}{x+y}=2+b,\quad (|x|\neq|y|).$

Ha $b=8$; $x=997{,}5$; $y=-\frac{3}{4}$, a kifejezés értéke: 10. (Nem függ x-től és y-tól.)

311. $\frac{a^2+b^2.-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}=\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)}=\frac{a+b-c}{a+c-b}$,

$(|a+c|\neq|b|)$.

Ha $a=2{,}5$; $b=3{,}5$; $c=-4$, a kifejezés értéke:

$\frac{2{,}5+3{,}5+4}{2{,}5-4-3{,}5}=\frac{10}{-5}=-2.$

312. $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}}\cdot\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x+z}}=\frac{\frac{y+z-x}{x(y+z)}}{\frac{y+z+x}{x(y+z)}}\cdot\frac{\frac{x+z+y}{y(x+z)}}{\frac{x+z-y}{y(x+z)}}=$

$=\frac{y+z-x}{y+z+x}\cdot\frac{y+z+x}{x+z-y}=\frac{y+z-x}{x+z-y}$,

$\begin{pmatrix} x\neq 0; & y\neq 0; \\ x+z\neq 0; & y+z\neq 0; \\ x+y+z\neq 0; & x-y+z\neq 0 \end{pmatrix}$.

Ha $x=-2{,}75$; $y=-\frac{1}{4}$; $z=\frac{3}{2}$, a kifejezés értéke:

$\frac{-0{,}25+1{,}5+2{,}75}{-2{,}75+1{,}5+0{,}25}=\frac{4}{-1}=-4.$

313. $\left(\frac{a^2-3ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=$

$=\frac{a^2-3ab+ab+b^2}{a+b}:\frac{a(a-b)+b(a+b)-2ab}{(a+b)(a-b)}=$

$=\frac{(a-b)^2}{a+b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}=a-b,\ (|a|\neq|b|).$

Ha $a=999$; $b=-1$, a kifejezés értéke: $999-(-1)=1000$.

314. $\left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2a}{3a-2}\right)^{-1}=$

$=\left(\frac{3}{a-2}-\frac{1}{a-1}\right)^{-1}-\frac{3a-2}{1-2a}=\left(\frac{3a-3-a+2}{(a-2)(a-1)}\right)^{-1}+\frac{3a-2}{2a-1}=$

$=\left(\frac{2a-1}{(a-2)(a-1)}\right)^{-1}+\frac{3a-2}{2a-1}=\frac{a^2-3a+2+3a-2}{2a-1}=\frac{a^2}{2a-1}$,

$(a>0,\ a\neq\frac{2}{3};\ a\neq 2;\ a\neq\frac{1}{2};\ a\neq 1)$.

315. $\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}+(xy)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right]^2=$

$=\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}\right]^2=$

$=\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^2}=1,\quad (x>0;\ y>0;\ x\neq y)$

316. $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}(x^{-1}+y^{-1})+\frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^3}\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)=$

$=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}\cdot\frac{y+x}{xy}+\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}\cdot\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2xy}=$

$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2xy}=\frac{1}{xy},\quad (x>0;\ y>0;\ x\neq y).$

317. $\left[\frac{cd^{-1}+dc^{-1}-2}{c^2d^{-2}-2cd^{-1}+1}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{\frac{c}{d}+\frac{d}{c}-2}{\frac{c^2}{d^2}-2\cdot\frac{c}{d}+1}\right]^{-\frac{1}{2}}=$

$$= \left[\frac{\frac{c^2+d^2-2cd}{cd}}{\frac{c^2-2cd+d^2}{d^2}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\frac{(c-d)^2}{cd}}{\frac{(c-d)^2}{d^2}}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{d}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{c}{d}}, \qquad (cd>0;\ c\neq d).$$

Ha $c=9$; $d=4$, a kifejezés értéke: $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

318. Legyen a két szám a és b.
Tudjuk, hogy $a-b=2 \Rightarrow a=b+2$.
A köbök különbsége: $a^3-b^3=(b+2)^3-b^3=$
$=b^3+6b^2+12b+8-b^3=6b^2+12b+8=$
$=b^2+4b+4+4b^2+8b+4+b^2=(b+2)^2+(2b+2)^2+b^2$, ez valóban három négyzetszám összege.

319. $a^2+2(a+d)^2+3(a+2d)^2+4(a+3d)^2=$
$=a^2+2a^2+4ad+2d^2+3a^2+12ad+12d^2+4a^2+24ad+36d^2=$
$=10a^2+40ad+50d^2=(a+5d)^2+(3a+5d)^2$. Ez két négyzetszám összege.

320. $a^3+b^3+3(a^3b+ab^3)+6(a^3b^2+a^2b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+$
$+3ab(a^2+b^2)+6a^2b^2(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+$
$+3ab[(a+b)^2-2ab]+6a^2b^2(a+b)=$
$=(a+b)[a^2-ab+b^2+6a^2b^2+3ab(a+b)]-6a^2b^2=$
$=1\cdot(a^2-ab+b^2+6a^2b^2+3ab\cdot 1)-6a^2b^2=$
$=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1^2=1$. (A feltétel szerint $a+b=1$.)

321. $a+b+c=0$; $a=-b-c$; $b=-a-c$; $c=-a-b$.

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=$$

$$=1+\frac{a-b}{c}\cdot\frac{a}{b-c}+\frac{a-b}{c}\cdot\frac{b}{c-a}+\frac{b-c}{a}\cdot\frac{c}{a-b}+1+$$

$$+\frac{b-c}{a}\cdot\frac{b}{c-a}+\frac{c-a}{b}\cdot\frac{c}{a-b}+\frac{c-a}{b}\cdot\frac{a}{b-c}+1=$$

$$=1+\frac{ab(a-b)+ac(c-a)}{bc(b-c)}+\frac{ab(a-b)+bc(b-c)}{ac(c-a)}+1+1+$$

$$+\frac{bc(b-c)+ac(c-a)}{ab(a-b)}=1+\frac{a^2(b-c)-a(b^2-c^2)}{bc(b-c)}+$$

$$+\frac{b^2(c-a)-b(c^2-a^2)}{ac(c-a)}+1+1+\frac{c^2(a-b)-c(a^2-b^2)}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{bc+a^2-ab-ac}{bc}+\frac{ac+b^2-bc-ba}{ac}+\frac{ab+c^2-ca-cb}{ab}=$$

$$=\frac{(a-c)(a-b)}{bc}+\frac{(b-c)(b-a)}{ac}+\frac{(c-a)(c-b)}{ab}=$$

$$=\frac{a^3-a^2c-a^2b+abc+b^3-b^2c-ab^2+abc}{abc}+$$

$$+\frac{c^3-ac^2-bc^2+abc}{abc}=$$

$$=\frac{3abc}{abc}+\frac{a^2(a-c-b)+b^2(b-c-a)+c^2(c-a-b)}{abc}=$$

$$=3+\frac{a^2 2a+b^2 2b+c^2 2c}{abc}=3+\frac{2(a+b)(a^2-ab+b^2)+2c^3}{abc}=$$

$$=3+\frac{2(-c)[(a+b)^2-3ab]}{abc}+\frac{2c^3}{abc}=$$

$$=3+\frac{2(-c)[(-c)^2-3ab]+2c^3}{abc}=3+\frac{-2c^3+6abc+2c^3}{abc}=$$

$$=3+6=9.$$

322. $2x^2+x+k=(x+3)(2x+c)=2x^2+6x+cx+3c$. A polinomok egyenlőségéből következik, hogy $6+c=1$; $c=-5$; $k=3c=-15$. Tehát $k=-15$ esetén $2x^2+x-15=(x+3)(2x-5)$.

323. $4x^2-6x+m=(x-3)(4x+c)=4x^2-12x+cx-3c$. A polinomok egyenlőségéből következik, hogy $-12+c=-6$; $c=6$; $-3c=-18$. Tehát $m=-18$ esetén $4x^2-6x-18=(x-3)(4x+6)$.

324. $a+b+c=0$.
$a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=a^2(a+c)+b^2(c+b)-abc=$
$=a^2(-b)+b^2(-a)-abc=-ab(a+b+c)=0$.

IV. FEJEZET

Irracionális kifejezések azonos átalakításai

325. $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$;
a) $|x-1| = x-1$, ha $x \geqq 1$;
b) $|x-1| = 1-x$, ha $x \leqq 1$;
c) $|x-1| = |x-1|$ minden x-re $x \in \mathbf{R}$.

326. $\sqrt{a^2-4ab+4b^2} = |a-2b|$;
a) $|a-2b| = a-2b$, ha $a \geqq 2b$;
b) $|a-2b| = 2b-a$, ha $a \leqq 2b$;
c) $|a-2b| = |a-2b|$ minden valós a, b-re.

327. $\sqrt{a(a^2-2ab+b^2)} = \sqrt{a(a-b)^2} = \sqrt{a}|a-b|$, $a \geqq 0$;
a) $\sqrt{a}|a-b| = \sqrt{a}(a-b)$, ha $a \geqq 0$ és $a \geqq b$, $a, b \in \mathbf{R}$;
b) $\sqrt{a}|a-b| = -\sqrt{a}(a-b)$, ha $a \geqq 0$ és $a \leqq b$.

328. $\sqrt{x^2+2x+1}+x-1 = |x+1|+x-1$;
a) $|x+1|+x-1 = 2x$, ha $x \geqq -1$;
b) $|x+1|+x-1 = -2$, ha $x \leqq -1$.

329. $\sqrt{a^2}+a+\sqrt{a^2-2ab+b^2}-b = |a|+a+|a-b|-b$;
a) $|a|+a+|a-b|-b = 3a-2b$, ha $|a|=a$ és $|a-b| = a-b$, tehát $a \geqq 0$ és $a \geqq b$;
b) $|a|+a+|a-b|-b = a$, ha $|a|=a$ és $|a-b| = b-a$, tehát $a \geqq 0$ és $a \leqq b$;
c) $|a|+a+|a-b|-b = a-2b$, ha $|a|=-a$ és $|a-b| = a-b$, tehát $a \leqq 0$ és $a \geqq b$;
d) $|a|+a+|a-b|-b = -a$, ha $|a|=-a$ és $|a-b| = b-a$, tehát $a \leqq 0$ és $a \leqq b$.

330. $x>y>0 \Rightarrow |x-y| = x-y$ és $|y| = y$.
$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+x+\sqrt{y^2} = |x-y|+x+|y|$.
a) $|x-y|+x+|y| = 2x$, az állítás igaz;
b) $|x-y|+x+|y| = 2y$, az állítás hamis a fenti feltételek mellett.

331. $2y<x<0$.
$\sqrt{(x-2y)^2}+\sqrt{x^2} = |x-2y|+|x| = x-2y-x = -2y$.
a) $|x-2y|+|x| = 2(x-y)$, az állítás hamis;
b) $|x-2y|+|x| = -2y$, az állítás igaz;
c) $|x-2y|+|x| = 2(y-x)$, az állítás hamis a fenti feltételek mellett.

332. a, b egész számok és $b \leqq 1$.
$\sqrt{(a-3b)^2}+\sqrt{a^2} = |a-3b|+|a| = 3b$, ha $|a-3b| = 3b-a$, és $|a|=a$, tehát $a \leqq 3b$ és $a \geqq 0$.
A $0 \leqq a \leqq 3b$ és $b \leqq 1$ feltételekből következik, hogy $0 \leqq a \leqq 3$; $0 \leqq b \leqq 1$; a lehetséges értékek: $b=0$; 1; $a=0$; 1; 2; 3. Figyelembe véve, hogy $a \leqq 3b$, a megfelelő $(a; b)$ párok a következők: (0; 0), (0; 1), (1; 1), (2; 1) és (3; 1), ezek kielégítik az egyenlőséget.

333. x egész szám.
$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2} = 3$;
$|x-2|+|x+1| = 3$.
a) ha $x<-1$; $-x+2-x-1 = 3$; $-2x=2$; $x=-1$ nincs az intervallumban,
b) ha $-1 \leqq x<2$; $-x+2+x+1 = 3$; $3=3$, ebben az intervallumban azonosság,
c) ha $x \geqq 2$; $x-2+x+1 = 3$; $2x=4$; $x=2$, a megoldás $-1 \leqq x \leqq 2$, x egész szám, tehát $x=-1$; 0; 1; 2.

334. x egész szám.
$\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{9+x^2-6x} = x+2$.
$|2x-1|+|3-x| = x+2$.
a) ha $x < \frac{1}{2}$, $-2x+1+3-x = x+2$; $2=4x$; $x = \frac{1}{2}$, nincs az intervallumban;
b) ha $\frac{1}{2} \leqq x<3$, $2x-1+3-x = x+2$; $x+2 = x+2$, ebben az intervallumban azonosság,
c) ha $x \geqq 3$, $2x-1+x-3 = x+2$, $2x=6$, $x=3$, a megoldás $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ és x egész szám, tehát $x=1$; 2; 3, ezek kielégítik az egyenlőséget.

335. $\sqrt{(x+4)^2}+\sqrt{(x+1)^2} = 3$, x egész szám.
$|x+4|+|x+1| = 3$.
a) ha $x<-4$, $-x-4-x-1 = 3$; $-2x=8$, $x=-4$, nincs az intervallumban;

b) ha $-4 \leqq x < -1$, $x+4-x-1 = 3$, $3=3$, ebben az intervallumban azonosság;
c) ha $x \geqq -1$, $x+4+x+1 = 3$, $2x = -2$, $x = -1$, a megoldás $-4 \leqq x \leqq -1$, x egész szám, tehát $x = -4; -3; -2; -1$, ezek kielégítik az egyenlőséget.

336. $\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{25-10x+x^2} = |2x-3| + |5-x|$.
a) $|2x-3| + |5-x| = 8-3x$, ha $|2x-3| = 3-2x$ és $|5-x| = 5-x$, tehát $2x \leqq 3$; $x \leqq \frac{3}{2}$ és $x \leqq 5$, vagyis $x \leqq \frac{3}{2}$;
b) $|2x-3| + |5-x| = x+2$, ha $|2x-3| = 2x-3$ és $|5-x| = 5-x$, tehát $2x \geqq 3$, $x \geqq \frac{3}{2}$ és $x \leqq 5$, vagyis $\frac{3}{2} \leqq x \leqq 5$;
c) $|2x-3| + |5-x| = 3x-8$, ha $|2x-3| = 2x-3$ és $|5-x| = x-5$, tehát $x \geqq \frac{3}{2}$ és $x \geqq 5$, vagyis $x \geqq 5$.

337. $\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{25-10x+x^2} = x+2$, x egész szám.
Az előző feladat szerint az egyenlőség a $\frac{3}{2} \leqq x \leqq 5$ intervallumban áll fenn, tehát $x = 2; 3; 4; 5$; ezek kielégítik az egyenlőséget.

338. $\sqrt{(a-5b)^2} + \sqrt{b^2-2b+1} + \sqrt{(10-2a)^2} = 6b-3a+9$.
$|a-5b| + |b-1| + |10-2a| = 6b-3a+9$.
Az egyenlőség akkor igaz, ha $|a-5b| = 5b-a$, $|b-1| = b-1$ és $|10-2a| = 10-2a$, tehát $a \leqq 5b$; $b \geqq 1$ és $2a \leqq 10$, $a \leqq 5$. A fentieknek a $b \geqq 1$ és $a \leqq 5$ feltételeknek eleget tevő egész számok felelnek meg.

339. $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(2-x)^2} = x+1$.
$x-1+|x|+|2-x| = x+1$, ha $|x| = x$, tehát $x \geqq 0$ és $|2-x| = 2-x$, tehát $x \leqq 2$;
a) $0 \leqq x \leqq 2$, $x \in \mathbf{R}$; *b)* $0 \leqq x \leqq 2$, $x \in \mathbf{Q}$; *c)* $x = 0; 1; 2$.

340. *a)* $\sqrt{x-1}$, $x \geqq 1$, $x \in \mathbf{R}$;
b) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$, $x > 1$, $x \in \mathbf{R}$.

341. *a)* $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}, \frac{x+2}{x-3} \geqq 0$, ha 1. $x+2 \geqq 0$ és $x-3 > 0$, tehát $x > 3$, vagy 2. $x+2 \leqq 0$ és $x-3 < 0$, tehát $x \leqq -2$;
b) $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}, \frac{x-3}{x+2} \geqq 0$, tehát $x \geqq 3$ vagy $x < -2$.

342. *a)* $\sqrt{|x-2|}$, $x \in \mathbf{R}$;
b) $|\sqrt{x-2}|$, $x \geqq 2$, $x \in \mathbf{R}$.

343. *a)* $\sqrt{x^2-1}$, $x \geqq 1$ vagy $x \leqq -1$, $x \in \mathbf{R}$;
b) $\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $x \geqq 1$, $x \in \mathbf{R}$.

344. *a)* $\sqrt{2^x-4}$, $2^x \geqq 4$, $x \geqq 2$, $x \in \mathbf{R}$;
b) $\sqrt{\frac{1}{2^x-4}}$, $2^x > 4$, $x > 2$, $x \in \mathbf{R}$.

345. *a)* $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \sqrt{\frac{7}{63}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$;
b) $\sqrt{8 \cdot 72} = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 9} = 8 \cdot 3 = 24$;
c) $\sqrt{32 \cdot 98} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 49} = 4 \cdot 2 \cdot 7 = 56$.

346. *a)* $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{147} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 0$;
b) $\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{63} = 2\sqrt{7} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 0$.

347. $\sqrt{\sqrt{41+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41-4\sqrt{2}}} = \sqrt{41-16 \cdot 2} = \sqrt{41-32} = \sqrt{9} = 3$.

348. $\sqrt{5\sqrt{3}+\sqrt{59}} \cdot \sqrt{\sqrt{75}-\sqrt{59}} = \sqrt{75-59} = \sqrt{16} = 4$.

349. $\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}+\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2 = 6+\sqrt{11}+6-\sqrt{11}+2\sqrt{(6+\sqrt{11}) \cdot (6-\sqrt{11})} =$
$= 12+2\sqrt{36-11} = 12+2\sqrt{25} = 12+2 \cdot 5 = 22$.

350. $\left(\sqrt{12+\sqrt{23}}+\sqrt{12-\sqrt{23}}\right)^2 = 12+\sqrt{23}+12-\sqrt{23}+2\sqrt{12+\sqrt{23}} \cdot \sqrt{12-\sqrt{23}} =$
$= 24+2\sqrt{144-23} = 24+2\sqrt{121} = 24+2 \cdot 11 = 46$.

351. $\left(\sqrt{15+10\sqrt{2}}-\sqrt{15-\sqrt{200}}\right)^2 =$
$= 15+10\sqrt{2}+15-10\sqrt{2}-2\sqrt{15+10\sqrt{2}} \cdot \sqrt{15-10\sqrt{2}} =$
$= 30-2\sqrt{225-200} = 30-2\sqrt{25} = 30-2 \cdot 5 = 20$.

352. *a)* $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} =$
$= |\sqrt{6}+1|-|\sqrt{6}-1| = \sqrt{6}+1-(\sqrt{6}-1) = 2$;

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=$

$=|2-\sqrt{3}|+|2+\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$

353. $(2\sqrt{72}-\sqrt{125}+3\sqrt{20})\cdot(6\sqrt{18}-\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{72})=$

$=(12\sqrt{2}-5\sqrt{5}+6\sqrt{5})\cdot(18\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-6\sqrt{2})=$

$=(12\sqrt{2}+\sqrt{5})(12\sqrt{2}-\sqrt{5})=144\cdot 2-5=283.$

354. $\left(\sqrt{84}-3\sqrt{\frac{7}{3}}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{21}+4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=$

$=\left(2\sqrt{21}-\sqrt{\frac{9\cdot 7}{3}}-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{21}+\sqrt{\frac{16}{2}}\right)=$

$=(2\sqrt{21}-\sqrt{21}-2\sqrt{2})(\sqrt{21}+2\sqrt{2})=$

$=(\sqrt{21}-2\sqrt{2})(\sqrt{21}+2\sqrt{2})=21-8=13.$

355. $(2\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{75}+7\sqrt{8}-3\sqrt{18})(4\sqrt{48}-3\sqrt{27}-5\sqrt{18}+2\sqrt{50})=$

$=(4\sqrt{3}-12\sqrt{3}+15\sqrt{3}+14\sqrt{2}-9\sqrt{2})(16\sqrt{3}-9\sqrt{3}-15\sqrt{2}+10\sqrt{2})=$

$=(7\sqrt{3}+5\sqrt{2})(7\sqrt{3}-5\sqrt{2})=49\cdot 3-25\cdot 2=147-50=97.$

356. $(5\sqrt{20}+\sqrt{45}-7\sqrt{5}-4\sqrt{28}+3\sqrt{7})(2\sqrt{80}-2\sqrt{5}+2\sqrt{63}+\sqrt{28}-3\sqrt{7})=$

$=(10\sqrt{5}+3\sqrt{5}-7\sqrt{5}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7})(8\sqrt{5}-2\sqrt{5}+6\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7})=$

$=(6\sqrt{5}-5\sqrt{7})(6\sqrt{5}+5\sqrt{7})=36\cdot 5-25\cdot 7=180-175=5.$

357. $\left(\frac{8}{\sqrt{5}+3}-\frac{20}{\sqrt{5}-3}-\frac{4}{\sqrt{5}-2}\right)(13+\sqrt{5})=$

$=\left(\frac{8(\sqrt{5}-3)}{-4}-\frac{20(\sqrt{5}+3)}{-4}-\frac{4(\sqrt{5}+2)}{1}\right)(13+\sqrt{5})=$

$=(-2\sqrt{5}+6+5\sqrt{5}+15-4\sqrt{5}-8)(13+\sqrt{5})=(13-\sqrt{5})(13+\sqrt{5})=$

$=169-5=164.$

358. $(3\sqrt{32}-\sqrt{8}+2\sqrt{48}+\sqrt{12}-5\sqrt{3})(\sqrt{242}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{27}-\sqrt{12})=$

$=(12\sqrt{2}-2\sqrt{2}+8\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3})(11\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{3})=$

$=(10\sqrt{2}+5\sqrt{3})(10\sqrt{2}-5\sqrt{3})=100\cdot 2-25\cdot 3=200-75=125.$

359. $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=\sqrt[3]{(a+b)^3}=a+b.$

360. *a)* $\left(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}\right)\sqrt[3]{3}=\left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}\right)\sqrt[3]{3}=$

$=\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{9}.$

b) $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16\frac{7}{8}}-\sqrt[3]{214\frac{3}{8}}=2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{1715}{8}}=$

$=2\sqrt[3]{5}+\frac{3\sqrt[3]{5}}{2}-\frac{7\sqrt[3]{5}}{2}=2\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}=0.$

361. *a)* $\left(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}\right)\left(\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192}\right)=$

$=\left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}\right)\left(5\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}\right)=\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{9}.$

b) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=5-2=3;$

az $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ azonosság alapján.

362. *a)* $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=$

$=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

b) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}=$

$=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$

363. *a)* $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=$

$=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$

b) $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(4+2\sqrt{3})^2}-\sqrt[4]{(4-2\sqrt{3})^2}=$

$=\sqrt[4]{(\sqrt{3}+1)^4}-\sqrt[4]{(\sqrt{3}-1)^4}=|\sqrt{3}+1|-|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)=2.$

364. $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};\ \frac{a}{2\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{2b};\ \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}.$

365. $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(9-2\sqrt{14})}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2(9-2\sqrt{14})}{7-2}=\frac{(9+2\sqrt{14})(9-2\sqrt{14})}{5}=$

$=\frac{81-4\cdot 14}{5}=\frac{81-56}{5}=\frac{25}{5}=5.$

366. $\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(9+\sqrt{77})}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}=\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2(9+\sqrt{77})}{11-7}=\frac{(18-2\sqrt{77})(9+\sqrt{77})}{4}=$

$=\frac{2(9-\sqrt{77})(9+\sqrt{77})}{4}=\frac{81-77}{2}=2.$

367. $\dfrac{(11-\sqrt{85})(\sqrt{17}+\sqrt{5})}{\sqrt{17}-\sqrt{5}} = \dfrac{(11-\sqrt{85})(\sqrt{17}+\sqrt{5})^2}{17-5} =$

$= \dfrac{(11-\sqrt{85})(22+2\sqrt{85})}{12} = \dfrac{2(11-\sqrt{85})(11+\sqrt{85})}{12} =$

$= \dfrac{121-85}{6} = \dfrac{36}{6} = 6.$

368. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{(3-\sqrt{5})^2+(3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \dfrac{14-6\sqrt{5}+14+6\sqrt{5}}{4} = 7.$

369. $\left(\dfrac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \dfrac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)(5\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \left[\dfrac{8(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} + \dfrac{12(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}\right](5\sqrt{7}-\sqrt{3}) =$

$= (2\sqrt{7}-2\sqrt{3}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3})(5\sqrt{7}-\sqrt{3}) =$

$= (5\sqrt{7}+\sqrt{3})(5\sqrt{7}-\sqrt{3}) = 25\cdot 7-3 = 172.$

370. $\left(\dfrac{6}{4+\sqrt{10}} + \dfrac{24}{8-\sqrt{40}}\right)(12-\sqrt{10}) =$

$= \left[\dfrac{6(4-\sqrt{10})}{6} + \dfrac{24(8+\sqrt{40})}{24}\right](12-\sqrt{10}) =$

$= (4-\sqrt{10}+8+2\sqrt{10})(12-\sqrt{10}) = (12+\sqrt{10})(12-\sqrt{10}) =$

$= 144-10 = 134.$

371. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}\ (a\neq b);$ $\qquad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ azonosság alapján;

b) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5};$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{-1} = -5-2\sqrt{6}.$

372. *a)* $\dfrac{b}{\sqrt{c}-2} = \dfrac{b(\sqrt{c}+2)}{c-4},\ c\geqq 0,\ c\neq 4;$

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b})}{a^3-b} = \dfrac{a^2-\sqrt{ab}}{a^3-b},\ a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ ab\neq 0;$

c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{3-5} = -\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right).$

373. *a)* $\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})}{12+2\sqrt{35}-3} = \dfrac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})}{9+2\sqrt{35}} =$

$= \dfrac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{3})(9-2\sqrt{35})}{81-4\cdot 35} =$

$= \dfrac{(\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{6}+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3})(9-2\sqrt{35})}{-59} =$

elvégezve a beszorzásokat és a lehetséges kiemeléseket, a következő eredményt kapjuk:

$= \dfrac{5\sqrt{10}+\sqrt{14}-9\sqrt{6}+15\sqrt{5}+3\sqrt{7}-27\sqrt{3}+2\sqrt{210}+6\sqrt{105}}{59};$

b) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1-\sqrt{2})}{6-2\sqrt{5}-2} = \dfrac{5-1-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{4-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{5})} = \dfrac{(4-\sqrt{10}-\sqrt{2})(2+\sqrt{5})}{2(4-5)} =$

elvégezve a beszorzást és a lehetséges kiemeléseket, az eredmény:

$= \dfrac{3\sqrt{10}+7\sqrt{2}-8-4\sqrt{5}}{2}.$

374. *a)* $\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{2(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{15+2\sqrt{50}-2} = \dfrac{2(\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{13+10\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{(2\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2})(13-10\sqrt{2})}{169-200} =$

elvégezve a beszorzást, az eredmény:

$= \dfrac{2(20+7\sqrt{5}-3\sqrt{10}-13\sqrt{2})}{31};$

$b)\ \dfrac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{a+b+2\sqrt{ab}-c} =$

$= \dfrac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab},$

$(a\geqq 0;\ b\geqq 0;\ c\geqq 0;\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}).$

375. $a)\ \dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{5}} = \dfrac{7-4}{\sqrt{5}(\sqrt{7}-2)} = \dfrac{3}{\sqrt{35}-2\sqrt{5}};$

$b)\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \dfrac{a-b}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\ a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ a\neq b.$

376. $\left(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{135}-2\sqrt[3]{40}\right)\left(10\sqrt[3]{72}+5\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{15}-4\sqrt[3]{120}+\right.$

$\left.+2\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{200}\right) = \left(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{5}\right)\left(20\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{15}-\right.$

$\left.-8\sqrt[3]{15}+2\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{25}\right) = \left(5\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{5}\right)\left(25\sqrt[3]{9}-10\sqrt[3]{15}+4\sqrt[3]{25}\right) =$

$= 5^3\cdot 3+2^3\cdot 5 = 375+40 = 415$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ alapján.

377. $20\sqrt[3]{0{,}005}+\sqrt[3]{5}+6\sqrt[3]{0{,}625}-5\sqrt[3]{0{,}04}+\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{0{,}625} =$

$= \sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{5} =$

$= 2\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}.$

378. $a)\ \left(\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{243}\right)\left(\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}\right) = \left(2\sqrt[4]{3}+3\sqrt[4]{3}\right)\left(2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}\right) =$

$= 5\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{9} = 5\sqrt{3}.$

$b)\ \left(\sqrt[5]{729}-\sqrt[5]{96}\right)\left(\sqrt[5]{96}-\sqrt[5]{3}\right) =$

$= \left(3\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{3}\right)\left(2\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3}\right) = \sqrt[5]{3}\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{9}.$

379. $\left(\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}-\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{162}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{32}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{2}) =$

$= \left(3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{2}-2\sqrt[4]{2}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{2}) =$

$= \left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = (\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = 5-2 = 3.$

380. $a)\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \dfrac{\sqrt{10}+2}{3};$

$b)\ \dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \dfrac{a(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{b-a},\quad a\geqq 0,\quad b\geqq 0,\quad a^2+b^2\neq 0,\quad a\neq b;$

$c)\ \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}{7-2} = \dfrac{9-2\sqrt{14}}{5}.$

381. $a)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{16}}{4};\quad b)\ \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{16}}{2};$

$c)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ azonosság alapján.

382. $2\sqrt{7} = \sqrt{7}+\sqrt{7};\quad \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7}+\sqrt{6}.$

$\sqrt{7}+\sqrt{7} > \sqrt{7}+\sqrt{6}$, tehát $2\sqrt{7} > \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}.$

383. $\sqrt[4]{4} = \sqrt[20]{4^5} = \sqrt[20]{1024};\quad \sqrt[5]{5} = \sqrt[20]{5^4} = \sqrt[20]{625};\quad$ tehát $\sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}.$

384. $\dfrac{5}{\sqrt{12}-\sqrt{7}} = \dfrac{5(\sqrt{12}+\sqrt{7})}{12-7} = \sqrt{12}+\sqrt{7} = 2\sqrt{3}+\sqrt{7};\ 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+2\sqrt{3}.$

$2\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+\sqrt{12} > 2\sqrt{3}+\sqrt{7},\quad$ tehát $\quad 4\sqrt{3} > \dfrac{5}{\sqrt{12}-\sqrt{7}}.$

385. $\dfrac{7}{5-3\sqrt{2}} = \dfrac{7(5+3\sqrt{2})}{25-18} = 5+3\sqrt{2};$

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}+3\sqrt{2} = \sqrt{18}+3\sqrt{2}.$

$5+3\sqrt{2} = \sqrt{25}+3\sqrt{2} > \sqrt{18}+3\sqrt{2},\quad$ tehát $\quad \dfrac{7}{5-3\sqrt{2}} > \sqrt{72}.$

386. $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$; $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$; $\sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}$, tehát $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$.

387. $\sqrt{16}\sqrt[6]{3} = 4\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{64}\sqrt[6]{2} = 4\sqrt[6]{2}$, tehát $\sqrt{16}\sqrt[6]{3} > \sqrt[3]{64}\sqrt[6]{2}$.

388. $2\sqrt{3} = \sqrt{3}+\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$; $2\sqrt{3} > \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

389. $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$;
$\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$; $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$.

390. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3 = (\sqrt{5}+2)^3 - (\sqrt{5}-2)^3 = 5\sqrt{5}+8+30+12\sqrt{5} -$
$-(5\sqrt{5}-8-30+12\sqrt{5}) = 76.$

391. $\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\sqrt{2} = \sqrt[20]{\dfrac{2^4}{3^4}\cdot\dfrac{3^5}{2^5}\cdot 2^{10}} = \sqrt[20]{2^9\cdot 3} = \sqrt[20]{1536}$.

392. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}\sqrt{\dfrac{5}{3}}\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2}{5^2}\cdot\dfrac{5^3}{3^3}\cdot\dfrac{9^2}{2^2}} = \sqrt[6]{5\cdot 3} = \sqrt[6]{15}$.

393. $\dfrac{\sqrt[4]{a}\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 a^{-1}b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}a^{-1}b^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{13}{20}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} =$

$= a^{\frac{3}{20}}b^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[20]{a^3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}} = \sqrt[60]{\dfrac{a^9}{b^{20}}}, \quad a>0, \quad b>0.$

394. $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}} = \left[a\left(aa^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[a\left(a^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} =$
$= \left(aa^{\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{30}} = \sqrt[30]{a^{13}}, \quad a\geqq 0.$

395. $\sqrt{a^2\sqrt[3]{b\sqrt{\dfrac{b}{a^4}}}} = \left\{\left[\left(\dfrac{b}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}b\right]^{\frac{1}{3}}a^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}a^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}}a^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}}a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{b^3a^8}, \quad a>0, \quad b\geqq 0.$

396. $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}}} = \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[6]{\dfrac{b^5}{a^4}}} = \sqrt[30]{\dfrac{a^6b^5}{b^6a^4}} = \sqrt[30]{\dfrac{a^2}{b}}, \quad a>0, \quad b>0.$

397. $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{12}}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{-\frac{3}{8}}b^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{24}}} =$

$= \dfrac{a^{\frac{7}{24}}}{a^{-\frac{1}{24}}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a>0, \quad b\geqq 0.$

398. *a)* $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x}}} = \sqrt{x\sqrt[12]{x^9}} = \sqrt[24]{x^{21}} = \sqrt[8]{x^7}, \quad x\geqq 0;$

b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\sqrt[4]{x}\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^{18}x^3x^{10}}}{\sqrt[12]{x^8}} = \sqrt[12]{x^{23}} = x\sqrt[12]{x^{11}}, \quad x>0.$

399. *a)* $\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}, \quad x>0;$

b) $\dfrac{\left(a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{a^3}\,a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{24}}}{a^{\frac{13}{12}}} = a^{-\frac{25}{24}} =$

$= \sqrt[24]{\dfrac{1}{a^{25}}} = \dfrac{1}{a}\sqrt[24]{\dfrac{1}{a}}, \quad a>0.$

400. $2x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-3\right)-3x^{\frac{3}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}\right)=2x-6x^{\frac{1}{2}}-3x+3x^{\frac{1}{2}}=$

$=-x-3\sqrt{x}, \quad (x>0).$

401. $10a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-1\right)-\left(5a^{\frac{2}{3}}-2\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}+3\right)=10a-10a^{\frac{2}{3}}-10a+$

$+4a^{\frac{1}{3}}-15a^{\frac{2}{3}}+6=-25\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a}+6, \quad (a\geqq 0).$

402. $\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)=x+2x^{\frac{1}{2}}-3-x+3x^{\frac{1}{2}}+4=$

$=5\sqrt{x}+1, \quad (x\geqq 0).$

403. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=$

$=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=$

$$=\begin{cases}\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}, & \text{ha } x\geqq 2,\\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2, & \text{ha } 1\leqq x\leqq 2.\end{cases}$$

404. $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3x-1}{x-1}=$

$$=\frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)-3x+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=$$

$$=\frac{2x-\sqrt{x}-1+x-\sqrt{x}-2-3x+1}{x-1}=\frac{-2\sqrt{x}-2}{x-1}=\frac{-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\frac{2}{1-\sqrt{x}}, \quad (x\geqq 0, \quad x\neq 1).$$

405. $\dfrac{3\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{2\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{a+1}{a-1}=$

$$=\frac{(3\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)-(2\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+1)-a-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=$$

$$=\frac{3a-5\sqrt{a}+2-2a+2\sqrt{a}+4-a-1}{a-1}=\frac{-3\sqrt{a}+5}{a-1}, \quad (a\geqq 0, \quad a\neq 1).$$

406. $\dfrac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}+1}-\dfrac{2\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}-1}-\dfrac{\sqrt{b}-3}{b-1}=$

$$=\frac{(\sqrt{b}+3)(\sqrt{b}-1)-(2\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)-\sqrt{b}+3}{(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)}=$$

$$=\frac{b+2\sqrt{b}-3-2b-\sqrt{b}+1-\sqrt{b}+3}{b-1}=\frac{-b+1}{b-1}=-1, \quad (b\geqq 0,\ b\neq 1).$$

407. $\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-16}\left(2+\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}\right)=\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-16}\cdot\dfrac{2\sqrt{x}+6+2}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+4)2}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+3)}=$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}-4}, \quad (x\geqq 0,\ x\neq 16).$$

408. $\dfrac{\sqrt{b}+2}{b-9}\left(1-\dfrac{5}{\sqrt{b}+2}\right)=\dfrac{\sqrt{b}+2}{b-9}\cdot\dfrac{\sqrt{b}+2-5}{\sqrt{b}+2}=\dfrac{\sqrt{b}-3}{(\sqrt{b}+3)(\sqrt{b}-3)}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}+3}, \quad (b\geqq 0,\ b\neq 9).$$

409. $\dfrac{6\sqrt{y}+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}:\dfrac{4y-x}{2\sqrt{xy}-x}=\dfrac{3(2\sqrt{y}+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}(2\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(2\sqrt{y}+\sqrt{x})(2\sqrt{y}-\sqrt{x})}=3,$

$(x>0,\ y\geqq 0,\ x\neq 4y).$

410. $\dfrac{3}{15\sqrt{c}+5\sqrt{d}}:\dfrac{9\sqrt{c}-3\sqrt{d}}{9c-d}=\dfrac{3}{5(3\sqrt{c}+\sqrt{d})}\cdot\dfrac{(3\sqrt{c}+\sqrt{d})(3\sqrt{c}-\sqrt{d})}{3(3\sqrt{c}-\sqrt{d})}=\dfrac{1}{5},$

$(c\geqq 0,\ d\neq 9c,\ d\geqq 0).$

411. $\dfrac{x-9y}{2\sqrt{x}+5\sqrt{y}}:\dfrac{x-3\sqrt{xy}}{2x+5\sqrt{xy}}=\dfrac{(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{2\sqrt{x}+5\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+5\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3\sqrt{y})}=$

$=\sqrt{x}+3\sqrt{y}, \quad (x>0,\ y\geqq 0,\ x\neq 9y).$

412. $\left(\dfrac{\sqrt{y}+2}{\sqrt{y}-1}-\dfrac{2}{y-1}\right):\dfrac{\sqrt{y}+3}{y-1}=\dfrac{(\sqrt{y}+2)(\sqrt{y}+1)-2}{y-1}\cdot\dfrac{y-1}{\sqrt{y}+3}=$

$$=\frac{y+3\sqrt{y}+2-2}{y-1}\cdot\frac{y-1}{\sqrt{y}+3}=\frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}+3)}{\sqrt{y}+3}=\sqrt{y}, \quad (y\geqq 0,\ y\neq 1).$$

413. $\left(\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}-\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right)\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4}=$

$=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(a+b)-(a-b)}\cdot\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4}=$

$=\frac{a+b+a-b-2\sqrt{a^2-b^2}-(a+b+a-b+2\sqrt{a^2-b^2})}{2b}\cdot\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4}=$

$=\frac{-4\sqrt{a^2-b^2}}{2b}\cdot\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4}=\frac{-(a^2-b^2)}{2}=\frac{b^2-a^2}{2},$

$(a>0,\ b\neq 0,\ |a|\geqq|b|).$

414. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}\right)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+$

$+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{2\sqrt{xy}}{2x\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=$

$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{1}{\sqrt{x}},\quad (x\neq y,\ x>0,\ y>0,\ xy\neq 0).$

415. $\left(\frac{2a+3\sqrt{a}}{4a+12\sqrt{a}+9}-\frac{3\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}+3}+\frac{4\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+3}\right)\frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3}=$

$=\left(\frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+3)}{(2\sqrt{a}+3)^2}-\frac{3\sqrt{a}+2}{2\sqrt{a}+3}+\frac{4\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+3}\right)\frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3}=$

$=\frac{\sqrt{a}-3\sqrt{a}-2+4\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}+3}\cdot\frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3}=\frac{2\sqrt{a}-3}{2\sqrt{a}+3}\cdot\frac{2\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-3}=1,$

$\left(a\geqq 0,\ a\neq\frac{9}{4}\right).$

416. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}+x+\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-(x^2-y^2)}=\frac{2x}{y^2},$

$(y\neq 0,\ x^2\geqq y^2).$

417. $\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=$

$=\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=$

$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=1,\quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ a\neq b).$

418. $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}=$

$=\frac{a^2+a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}-(a^2+a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2})}{a^2-a^2+b^2}:\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}=$

$=\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\cdot\frac{b^2}{4a\sqrt{a^2-b^2}}=1,\quad (a^2>b^2,\ b\neq 0).$

419. $\left(\frac{5}{2\sqrt{a}-1}+\frac{8}{2\sqrt{a}+1}+\frac{7+16\sqrt{a}}{1-4a}\right)\frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}=$

$=\frac{10\sqrt{a}+5+16\sqrt{a}-8-7-16\sqrt{a}}{4a-1}\cdot\frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}=$

$=\frac{10\sqrt{a}-10}{(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{a}-1)}\cdot\frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{10(\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}-1)}{(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)}=$

$=\frac{10}{2\sqrt{a}+1},\quad \left(a\geqq 0,\ a\neq 1,\ a\neq\frac{1}{4}\right).$

420. $\left(\frac{2\sqrt{xy}}{4x-9y}+\frac{\sqrt{y}}{3\sqrt{y}-2\sqrt{x}}\right):\left(1-\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}\right)=$

$=\frac{2\sqrt{xy}-\sqrt{y}(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}\cdot\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}-2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}=$

$=\frac{-3y}{(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})6\sqrt{y}}=\frac{-\sqrt{y}}{2(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}=\frac{\sqrt{y}}{6\sqrt{y}-4\sqrt{x}},$

$(x\geqq 0,\ y>0,\ 4x\neq 9y).$

421. $\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{a^3}}=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{ab(a^2-4ab+4b^2)}{a^3}}=$

$$= \frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{b(a-2b)^2}{a^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{a-2b}\cdot\frac{|a-2b|}{|a|} = \frac{a\sqrt{b}(a-2b)}{(a-2b)a} = \sqrt{b};$$

$a>2b$, $a>0$, $b\geqq 0$.

422. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a^2-b^2+a^2+b^2+2\sqrt{a^4-b^4}}{a^2-b^2-(a^2+b^2)} = \dfrac{2a^2+2\sqrt{a^4-b^4}}{-2b^2} =$

$$= \frac{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}{-b^2}, \quad (a^2\geqq b^2,\ b\neq 0).$$

Ha $a=\sqrt{5}$; $b=\sqrt{3}$, a kifejezés értéke: $\dfrac{5+\sqrt{25-9}}{-3} = -3.$

423. $\left(\sqrt{5\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{5\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2 = 5\sqrt{x}+\sqrt{y}+5\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{25x-y} =$

$= 10\sqrt{x}+2\sqrt{25x-y}$, $\quad (25x\geqq y,\ y\geqq 0).$

Ha $x=1$; $y=3$, a kifejezés értéke: $10\cdot 1+2\sqrt{25-9} = 18.$

424. $\dfrac{2\sqrt{xy}+4\sqrt{y}-3\sqrt{x}-6}{2-2y} : \left(\dfrac{4y+19-2\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}}-5\right) =$

$$= \frac{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+2)-3(\sqrt{x}+2)}{2(1-y)} : \frac{4y+19-2\sqrt{y}-10-10\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{y}-3)}{2(1-y)}\cdot\frac{2(1+\sqrt{y})}{(2\sqrt{y}-3)^2} = \frac{(\sqrt{x}+2)\,2(1+\sqrt{y})}{2(1+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})(2\sqrt{y}-3)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{(1-\sqrt{y})(2\sqrt{y}-3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{5\sqrt{y}-2y-3}, \quad (y\neq 1,\ y\geqq 0,\ x\geqq 0).$$

Ha $x=16$; $y=9$, a kifejezés értéke: $\dfrac{6}{15-18-3} = -1.$

425. $\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^3}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+\sqrt{b^3}}+\dfrac{\sqrt{b}}{a+b}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}\right) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})+b(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{b}}{a+b}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}}{a+b}+\frac{\sqrt{b}}{a+b}\right) : \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}\cdot\frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ a\neq b).$$

Ha $a=25$; $b=16$, a kifejezés értéke: $\dfrac{\sqrt{25}+\sqrt{16}}{\sqrt{25}-\sqrt{16}} = \dfrac{9}{1} = 9.$

426. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2(3\sqrt{3}-5)}}{2}} = \sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^3\,\dfrac{2(3\sqrt{3}-5)^2}{4}} =$

$$= \sqrt[6]{(26+15\sqrt{3})\,\frac{52-30\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[6]{(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})} =$$

$$= \sqrt[6]{676-675} = 1.$$

A logaritmus fogalma, alkalmazásai

427. $\log_a \dfrac{(a^2)^3(a^{-4})^5 a^{16}}{a^2} = \log_a \dfrac{a^6 a^{-20} a^{16}}{a^2} = \log_a \dfrac{a^2}{a^2} = \log_a 1 = 0,$

$a>0;\ a\neq 1.$

428. $\log_a \dfrac{\sqrt{a^3}\, a^{\frac{1}{2}} (a^2)^3}{a^{-1}} = \log_a \dfrac{a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} a^6}{a^{-1}} = \log_a a^9 = 9, \quad a>0,\ a\neq 1.$

429. $\log_c \sqrt{\dfrac{c}{d}\sqrt[3]{\dfrac{d}{c}\sqrt[4]{\dfrac{d^8}{c^5}}}} = \log_c \sqrt{\dfrac{c}{d}\sqrt[12]{\dfrac{d^{12}}{c^9}}} = \log_c \sqrt[24]{\dfrac{c^{12} d^{12}}{d^{12} c^9}} =$

$= \log_c \sqrt[24]{c^3} = \log_c c^{\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{8}, \quad d\neq 0,\ c>0,\ c\neq 1.$

430. $\log_a \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\dfrac{1}{b}\cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^{-1}b^{-1}}}}} = \log_a \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\dfrac{1}{b}\cdot \dfrac{1}{a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}}}} =$

$= \log_a \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}}} = \log_a \sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{1}{2}}}} = \log_a \sqrt[6]{a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{1}{2}}} =$

$= \log_a a^{\frac{3}{4}} + \log_a b^{-\frac{1}{12}} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{12}\log_a b, \quad a\neq 1,\ a>0,\ b>0.$

431. $\log_b \left(\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}\cdot \sqrt[3]{b^2\sqrt{b}}\right) = \log_b \left(\sqrt{b\sqrt[4]{b^3}}\cdot \sqrt[3]{\sqrt{b^5}}\right) =$

$= \log_b \left(\sqrt[8]{b^7}\cdot \sqrt[6]{b^5}\right) = \log_b \left(b^{\frac{7}{8}} b^{\frac{5}{6}}\right) = \log_b b^{\frac{41}{24}} = \dfrac{41}{24}, \quad b>0,\ b\neq 1.$

432. $\sqrt{a^{4+\log_a 36}} = \sqrt{a^4 a^{\log_a 36}} = a^2\sqrt{36} = 6a^2, \quad a>0,\ a\neq 1.$

433. $\sqrt[3]{b^{6-\log_b 8}} = \sqrt[3]{\dfrac{b^6}{b^{\log_b 8}}} = \dfrac{b^2}{2}, \quad b>0,\ b\neq 1.$

434. $5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} = 25 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} = 5\cdot (25^{\log_{25} 36})^{\frac{1}{2}} = 5\cdot 6 = 30.$

435. $a^{2-\log_a 3^{27}} = \dfrac{a^2}{((a^3)^{\log_a 3^{27}})^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^2}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^2}{3}, \quad a>0,\ a\neq 1.$

Ha $a=9$, a kifejezés értéke: $\dfrac{81}{3} = 27.$

436. $5^{1+\log_{25} a} = 5\cdot (25^{\log_{25} a})^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{a}, \quad a>0.$

Ha $a=9$, a kifejezés értéke: $5\sqrt{9} = 5\cdot 3 = 15.$

437. $4^{3-\log_2 b} = \dfrac{4^3}{4^{\log_2 b}} = \dfrac{64}{(2^{\log_2 b})^2} = \dfrac{64}{b^2}, \quad b>0.$

Ha $b=3$, a kifejezés értéke: $\dfrac{64}{9}.$

438. *a)* $\sqrt{10^{4+\lg 25}} = \sqrt{10^4\cdot 10^{\lg 25}} = 10^2\sqrt{25} = 500.$

b) $\sqrt[3]{10^{3+\lg 27}} = \sqrt[3]{10^3\cdot 10^{\lg 27}} = 10\sqrt[3]{27} = 30.$

439. $\sqrt{7}\,(23^{\log_{529} 7} + 2^{1+\log_4 7}) = \sqrt{7}\left[(529^{\log_{529} 7})^{\frac{1}{2}} + 2(4^{\log_4 7})^{\frac{1}{2}}\right] =$

$= \sqrt{7}\,(\sqrt{7} + 2\sqrt{7}) = 3\sqrt{7}\sqrt{7} = 21.$

440. $a^{2-\log_{a^2} b} = \dfrac{a^2}{(a^{2\log_{a^2} b})^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{b}}, \quad a>0,\ b>0,\ a\neq 1.$

Ha $a=2$; $b=16$, a kifejezés értéke: $\dfrac{4}{\sqrt{16}} = \dfrac{4}{4} = 1.$

441. $3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^2 (9^{\log_9 25})^{\frac{1}{2}} + \dfrac{25}{(5^{\log_5 2})^2} + \dfrac{1}{10^{\lg 4}} =$

$= 9\sqrt{25} + \dfrac{25}{2^2} + \dfrac{1}{4} = 45 + \dfrac{26}{4} = 45 + 6{,}5 = 51{,}5.$

442. $17^{1+\frac{1}{2}\log_{17} 25} = 17(17^{\log_{17} 25})^{\frac{1}{2}} = 17\sqrt{25} = 17\cdot 5 = 85.$

443. $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = (10^{\lg a})^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = 10^{\lg a \frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = 10^{\lg(\lg a)} = \lg a, \quad a>1.$

444. $\lg 75 = p; \quad \lg 45 = q; \quad \lg 15 = \lg 3 + \log 5,$

$$\left.\begin{aligned} p &= \log 3\cdot 5^2 = \lg 3 + 2\lg 5 \Rightarrow 2p = 2\lg 3 + 4\lg 5 \\ q &= \lg 3^2\cdot 5 = 2\lg 3 + \lg 5 \Rightarrow q = 2\lg 3 + \lg 5 \end{aligned}\right\} \; 2p-q = 3\lg 5.$$

$$q = 2\lg 3 + \frac{2p-q}{3},$$

$$3q = 6\lg 3 + 2p - q, \quad \lg 3 = \frac{4q-2p}{6} = \frac{2q-p}{3}.$$

$$\lg 15 = \lg 3 + \lg 5 = \frac{2q-p}{3} + \frac{2p-q}{3} = \frac{p+q}{3}.$$

445. $\lg 48 = a; \quad \lg 72 = b; \quad \lg 6 = \lg 3 + \lg 2.$

$$\left.\begin{aligned} a &= \lg 3\cdot 2^4 = \lg 3 + 4\lg 2 \Rightarrow 2a = 2\lg 3 + 8\lg 2 \\ b &= \lg 3^2\cdot 2^3 = 2\lg 3 + 3\lg 2 \Rightarrow b = 2\lg 3 + 3\lg 2 \end{aligned}\right\} \; \begin{aligned} 2a-b &= 5\lg 2, \\ \lg 2 &= \frac{2a-b}{5}. \end{aligned}$$

$$a = \lg 3 + \frac{4(2a-b)}{5}, \quad \lg 3 = \frac{4b-3a}{5}.$$

$$\lg 6 = \frac{4b-3a}{5} + \frac{2a-b}{5} = \frac{3b-a}{5}.$$

446. $\lg 20 = b; \quad \lg 40 = \lg 2^3\cdot 5 = 3\lg 2 + \lg 5 = 3\lg 2 + \lg\frac{10}{2} =$

$= 3\lg 2 + 1 - \lg 2 = 2\lg 2 + 1.$

$b = \lg 20 = \lg 2^2\cdot 5 = 2\lg 2 + \lg 5 = 2\lg 2 + \lg\frac{10}{2} =$

$= 2\lg 2 + 1 - \lg 2 = \lg 2 + 1 \Rightarrow \lg 2 = b-1.$

$\lg 40 = 2(b-1)+1 = 2b-1.$

447. $\lg 8 = \lg 2^3 = 3\lg 2 = 3\lg\frac{10}{5} = 3(\lg 10 - \lg 5) = 3(1-\lg 5) =$

$= 3 - 3\lg 5 = 3 - 3\cdot 0{,}699 = 3 - 2{,}097 = 0{,}903.$

448. $\lg 3 = 0{,}4771; \quad \lg 5 = 0{,}699.$

$\lg 540 = \lg(2^2\cdot 5\cdot 3^3) = 2\lg 2 + \lg 5 + 3\lg 3 =$

$= 2\lg\frac{10}{5} + \lg 5 + 3\lg 3 = 2 - 2\lg 5 + \lg 5 + 3\lg 3 =$

$= 2 + 3\lg 3 - \lg 5 = 2 + 3\cdot 0{,}4771 - 0{,}699 = 2 + 1{,}4313 - 0{,}699 =$

$= 2{,}7323.$

449. $\log_6 27 = \log_6 3^3 = 3\log_6 3 = 3\log_6\frac{6}{2} = 3(\log_6 6 - \log_6 2) =$

$= 3(1-\log_6 2) = 3 - 3\log_6 2 = 3 - 3a.$

450. $\log_6\sqrt{150} = \log_6\sqrt{25\cdot 6} = \log_6\left(5\cdot 6^{\frac{1}{2}}\right) = \log_6 5 + \frac{1}{2} = p + \frac{1}{2}.$

451. $\log_6 54 = \log_6\frac{324}{6} = \log_6 324 - \log_6 6 = \log_6 18^2 - 1 =$

$= 2\log_6 18 - 1 = 2k - 1.$

452. $\log_3\sqrt[3]{24} = \log_3\sqrt[3]{3\cdot 2^3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_3 2 = \frac{1}{3} + b.$

453. $\log_{\frac{a}{b}}\frac{a^5}{\sqrt{b}} = \frac{\log_a\frac{a^5}{\sqrt{b}}}{\log_a\frac{a}{b}} = \frac{5-\frac{1}{2}\log_a b}{1-\log_a b}.$

$$k = \log_{\frac{a}{b}} a = \frac{\log_a a}{\log_a\frac{a}{b}} = \frac{1}{1-\log_a b} \Rightarrow k - k\log_a b = 1, \quad \log_a b = \frac{k-1}{k}$$

A kapott eredményt behelyettesítve a fenti kifejezésbe:

$$\log_{\frac{a}{b}}\frac{a^5}{\sqrt{b}} = \frac{5-\frac{1}{2}\log_a b}{1-\log_a b} = \frac{5-\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{k}}{1-\frac{k-1}{k}} = \frac{\frac{10k-k+1}{2k}}{\frac{k-k+1}{k}} = \frac{9k+1}{2k}\cdot\frac{k}{1} =$$

$$= \frac{9k+1}{2}, \quad a>0;\ b>0,\ a\neq b.$$

454. $\log_{xy} x = k; \quad \log_{xy} x = \dfrac{\log_x x}{\lg_x xy} = \dfrac{1}{1+\log_x y} = k,$

$\log_x y = \dfrac{1-k}{k},$

$$\log_{xy} \sqrt[5]{x}\sqrt[3]{y} = \frac{\log_x x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{3}}}{\log_x xy} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\log_x y}{1+\log_x y} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-k}{k}}{1+\frac{1-k}{k}} =$$

$$= \frac{\frac{3k+5-5k}{15k}}{\frac{k+1-k}{k}} = \frac{5-2k}{15k}\cdot k = \frac{5-2k}{15}.$$

455. $$\log_2\left(\frac{2a-1}{a-1}-\frac{2a+3}{a+1}\right) = \log_2 \frac{(2a-1)(a+1)-(2a+3)(a-1)}{a^2-1} =$$

$$= \log_2 \frac{2a^2+a-1-2a^2-a+3}{a^2-1} = \log_2 \frac{2}{a^2-1}, \quad |a| \neq 1.$$

Ha $a=3$, a kifejezés értéke: $\log_2 \dfrac{2}{8} = \log_2 \dfrac{1}{4} = -2.$

456. $$\log_4\left(2-\frac{2x-1}{x-1}\right) = \log_4 \frac{2x-2-2x+1}{x-1} = \log_4 \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

Ha $x=-3$, a kifejezés értéke: $\log_4 \dfrac{1}{4} = -1.$

457. $$\log_2\left(\frac{a+3}{a-1}+\frac{5-a}{a}\right) = \log_2 \frac{a^2+3a+5a-5-a^2+a}{a(a-1)} = \log_2 \frac{9a-5}{a(a-1)},$$

$a \neq 0, \ a \neq 1.$

Ha $a=\dfrac{1}{2}$, a kifejezés értéke: $\log_2 \dfrac{\frac{9}{2}-5}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)} = \log_2 \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = \log_2 2 = 1.$

458. $$\log_a\left[\left(3-\frac{3a-2}{a+1}\right)\frac{a^2+a}{5}\right] = \log_a\left(\frac{3a+3-3a+2}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{5}\right) =$$

$= \log_a a = 1. \quad a \neq 1, \ a > 0.$

459. $$\lg\left[\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right):\frac{2a}{a^2-b^2}\right] = \lg\left(\frac{a-b+a+b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{2a}\right) = \lg 1 = 0.$$

Ha $a=5$; $b=2$, a kifejezés szintén 0. $\quad |a| \neq |b|, \ a > 0.$

460. $$\log_a\left[\left(\frac{a+2}{a-1}+\frac{a-2}{a+1}\right):\frac{2(a^2+2)}{a(a^2-1)}\right] =$$

$$= \log_a\left[\frac{a^2+3a+2+a^2-3a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a(a^2-1)}{2(a^2+2)}\right] =$$

$$= \log_a\left(\frac{2(a^2+2)}{a^2-1}\cdot\frac{a(a^2-1)}{2(a^2+2)}\right) = \log_a a = 1, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

461. $\lg 4 + \lg \sin 30° + \lg \operatorname{tg} 30° + \lg \sin 60° =$

$$= \lg(4 \sin 30° \operatorname{tg} 30° \sin 60°) = \lg\left(4 \sin 30° \frac{\sin 30°}{\cos 30°} \cos 30°\right) =$$

$$= \lg(4 \sin^2 30°) = \lg\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) = \lg 1 = 0.$$

462. $\lg \sin 30° \lg \sin 60° \lg \operatorname{tg} 45° = 0$, mert $\lg \operatorname{tg} 45° = \lg 1 = 0.$

463. $$\lg 2 + \lg \sin 30° + \lg \cos 30° - \lg \sin 60° = \lg \frac{2 \sin 30° \cos 30°}{\sin 60°} =$$

$$= \lg \frac{\sin 60°}{\sin 60°} = \lg 1 = 0. \quad (2 \sin x \cos x = \sin 2x.)$$

464. $\lg[(\sin 30° + \cos 30°)^2 - \sin 60°] =$

$= \lg(\sin^2 30° + \cos^2 30° + 2 \sin 30° \cos 30° - \sin 60°) =$

$= \lg(1 + \sin 60° - \sin 60°) = \lg 1 = 0.$

465. $$3 \lg 15 + 2 \lg 2 + \lg 14 - \lg 21 - \lg 9 = \lg \frac{15^3 \cdot 2^2 \cdot 14}{21 \cdot 9} =$$

$$= \lg \frac{3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 3^2} = \lg(5^3 \cdot 2^3) = \lg 10^3 = 3.$$

466. $$\log_5 15 + \log_5 35 - \log_5 21 = \log_5 \frac{15 \cdot 35}{21} = \log_5 \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7} =$$

$= \log_5 5^2 = 2.$

467. $3\log_3 6+\log_3 35-\log_3 20-\log_3 42=\log_3\dfrac{6^3\cdot 35}{20\cdot 42}=$

$=\log_3\dfrac{3^3\cdot 2^3\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 7}=\log_3\dfrac{3^3}{3}=\log_3 3^2=2.$

468. $\lg 33-\dfrac{1}{2}\lg 44-\lg 15-\lg\sqrt{1100}=\lg\dfrac{33}{\sqrt{44}\cdot 15\cdot\sqrt{1100}}=$

$=\lg\dfrac{3\cdot 11}{3\cdot 5\cdot 10\cdot\sqrt{11}\cdot 2\cdot\sqrt{11}}=\lg\dfrac{1}{10^2}=-2.$

469. $\lg\sqrt{52}+3\lg 2+\lg 125+\lg\sqrt{325}-\lg 13=\lg\dfrac{\sqrt{52}\cdot 2^3\cdot 125\cdot\sqrt{325}}{13}=$

$=\lg\dfrac{2\sqrt{13}\cdot 2^3\cdot 5^3\cdot\sqrt{13}\cdot 5}{13}=\lg(2^4\cdot 5^4)=\lg 10^4=4.$

470. $\dfrac{1}{2}\lg_3 45+\log_3\sqrt{20}-\log_3 30+\log_3 6-\log_3 2=$

$=\log_3\dfrac{\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}\cdot 6}{30\cdot 2}=\log_3\dfrac{6\cdot\sqrt{900}}{2\cdot 30}=\log_3\dfrac{6\cdot 30}{2\cdot 30}=\log_3 3=1.$

471. $1+\dfrac{1}{2}\log_5 175+\log_5 15+\log_5\sqrt{28}-\log_5 42=$

$=\log_5\dfrac{5\sqrt{175}\cdot 15\sqrt{28}}{42}=\log_5\dfrac{5\cdot 5\sqrt{7}\cdot 3\cdot 5\cdot 2\sqrt{7}}{2\cdot 3\cdot 7}=\log_5 5^3=3.$

472. $\lg x=3\lg 72+2\lg 54-4\lg 108.$

$\lg x=\lg\dfrac{72^3\cdot 54^2}{108^4},\quad x=\dfrac{72^3\cdot 54^2}{108^4}=\dfrac{(2^3\cdot 3^2)^3\cdot(3^3\cdot 2)^2}{(2^2\cdot 3^3)^4}=$

$=\dfrac{2^9\cdot 3^6\cdot 3^6\cdot 2^2}{2^8\cdot 3^{12}}=\dfrac{2^{11}}{2^8}=2^3=8.$

473. $\lg x=3\lg 45+3\lg 2-\lg 5-3\lg 18.$

$\lg x=\lg\dfrac{45^3\cdot 2^3}{5\cdot 18^3}=\lg\dfrac{(5\cdot 3^2)^3\cdot 2^3}{5\cdot(3^2\cdot 2)^3}=\lg\dfrac{5^3\cdot 3^6\cdot 2^3}{5\cdot 3^6\cdot 2^3}=\lg 5^2,$

$x=5^2=25.$

474. $\log_a x=\dfrac{\log_a c}{4}-\dfrac{5\log_a b}{4}+\dfrac{\log_a d}{2},\quad a>0;\ a\neq 1;\ b>0;\ c>0;\ d>0$

$\log_a x=\log_a\sqrt[4]{c}\sqrt{d}-\dfrac{5}{4}\log_a b=\log_a\dfrac{\sqrt[4]{cd^2}}{\sqrt[4]{b^5}}=\log_a\sqrt[4]{\dfrac{cd^2}{b^5}},$

$x=\sqrt[4]{\dfrac{cd^2}{b^5}}.$

475. $\log_b y=3(\log_b c-\log_{b^2} d),\quad b>0;\ b\neq 1;\ c>0;\ d>0.$

$\log_b y=\log_b c^3-\dfrac{\log_b d^3}{\log_b b^2}=\log_b\dfrac{c^3}{d^{\frac{3}{2}}}=\log_b\dfrac{c^3}{\sqrt{d^3}},\quad y=\left(\dfrac{c}{\sqrt{d}}\right)^3.$

476. $\log_a x=\dfrac{2}{3}\log_a b+\dfrac{4}{3}\log_a c-\dfrac{1}{3}\log_a d,\quad a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$

$\log_a x=\log_a b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}}d^{-\frac{1}{3}}=\log_a\sqrt[3]{\dfrac{b^2c^4}{d}},\quad x=\sqrt[3]{\dfrac{b^2c^4}{d}}.$

477. *a)* $\log_a x=\dfrac{1}{2}\log_a(b^2-c^2)-\dfrac{1}{2}\log_a(b+c)=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{b^2-c^2}{b+c}=$

$=\log_a\left[\dfrac{(b+c)(b-c)}{b+c}\right]^{\frac{1}{2}}=\log_a\sqrt{b-c},\quad x=\sqrt{b-c}.$

b) $\log_a x=2+\dfrac{1}{2}\log_a b-\dfrac{3}{4}\log_a c=\log_a a^2\sqrt{b}c^{-\frac{3}{4}},$

$x=\dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[4]{c^3}},\quad a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b>c.$

478. $x=\dfrac{\sqrt[3]{35{,}7}+\sqrt[4]{2{,}783}}{\sqrt{\sqrt[3]{542{,}1}}};$

$a=\sqrt[3]{35{,}7};\quad \lg a=\dfrac{1}{3}\lg 35{,}7=\dfrac{1}{3}\cdot 1{,}5527=0{,}5176;$

$a = 10^{0,5176} = 3,294.$

$b = \sqrt[4]{2,783}; \quad \lg b = \frac{1}{4}\lg 2,783 = \frac{1}{4}\cdot 0,4445 = 0,1111;$

$b = 10^{0,1111} = 1,291.$

$x = \frac{3,294+1,291}{\sqrt[6]{542,1}} = \frac{4,585}{\sqrt[6]{542,1}}; \quad \lg x = \lg 4,585 - \frac{1}{6}\lg 542,1 =$

$= 0,6614 - \frac{1}{6}\cdot 2,7341 = 0,6614 - 0,4557 = 0,2057, \quad x = 1,606.$

479. $x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{250}\sqrt[4]{0,01}}{32^2}}; \quad \lg x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\lg 250 + \frac{1}{4}\lg 0,01 - 2\lg 32\right] =$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot 2,3979 + \frac{1}{4}(0,0000-2) - 2\cdot 1,5051\right] =$

$= \frac{1}{3}(1,1989 - 0,5000 - 3,0102) = \frac{1}{3}(1,1989 - 3,5102) =$

$= \frac{1}{3}(4,1989 - 3,5102 - 3) = \frac{1}{3}(0,6887 - 3) = 0,2296 - 1$

$x = 10^{0,2296-1} = 1,696\cdot 10^{-1} = 0,1696.$

480. $x = \frac{\sqrt{54,3}+\sqrt[3]{0,2}}{\sqrt{5,6^3\sqrt{0,5}}}; \; a = \sqrt{54,3}; \; \lg a = \frac{1}{2}\lg 54,3 = \frac{1}{2}\cdot 1,7348 = 0,8674;$

$a = 7,369; \; b = \sqrt[3]{0,2}; \; \lg b = \frac{1}{3}\lg 0,2 = \frac{1}{3}(0,3010-1) =$

$= \frac{1}{3}(2,3010-3) = 0,7670-1; \; b = 5,848\cdot 10^{-1} = 0,5848.$

$x = \frac{7,369+0,5848}{\sqrt{5,6^3\sqrt{0,5}}} = \frac{7,9538}{\sqrt{5,6^3\sqrt{0,5}}},$

$\lg x = \lg 7,954 - \frac{1}{2}\left(3\lg 5,6 + \frac{1}{2}\lg 0,5\right) =$

$= 0,9006 - \frac{1}{2}\left(3\cdot 0,7482 + \frac{1}{2}(0,6990-1)\right) =$

$= 0,9006 - \frac{1}{2}(2,2446 + 0,3495 - 0,5000) = 0,9006 - \frac{1}{2}\cdot 2,0941 =$

$= 0,8536 - 1,$

$x = 10^{0,8536-1} = 7,139\cdot 10^{-1} = 0,7139.$

481. $x = \frac{\sqrt[5]{0,6} - \sqrt[3]{48,3}}{5,8^3 - 4,6^4}; \; a = \sqrt[5]{0,6}; \; \lg a = \frac{1}{5}\lg 0,6 = \frac{1}{5}(0,7782-1) =$

$= \frac{1}{5}(4,7782-5) = 0,9556-1; \; a = 0,9028.$

$b = \sqrt[3]{48,3}; \; \lg b = \frac{1}{3}\lg 48,3 = \frac{1}{3}\cdot 1,6839 = 0,5613; \; b = 3,642.$

$c = 5,8^3; \; \lg c = 3\lg 5,8 = 3\cdot 0,7634 = 2,2902; \; c = 195,1.$

$d = 4,6^4; \; \lg d = 4\lg 4,6 = 4\cdot 0,6628 = 2,6512; \; d = 447,9.$

$x = \frac{0,9028-3,642}{195,1-447,9} = \frac{-2,7392}{-252,8} = \frac{2,7392}{252,8}; \; \lg x = \lg 2,739 - \lg 252,8 =$

$= 0,4376 - 2,4028 = 0,0348 - 2; \; x = 1,083\cdot 10^{-2} = 0,01083.$

482. $x = \frac{\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}}{3,8^2 - 5,7\cdot 4,8} = \frac{\sqrt[5]{2+1,732}}{3,8^2 - 5,7\cdot 4,8}; \; a = 3,8^2; \; \lg a = 2\lg 3,8 =$

$= 2\cdot 0,5798 = 1,1596; \; a = 14,44.$

$b = 5,7\cdot 4,8; \; \lg b = \lg 5,7 + \lg 4,8 = 0,7559 + 0,6812 = 1,4371,$

$b = 27,36; \; x = \frac{\sqrt[5]{3,732}}{14,44-27,36} = \frac{\sqrt[5]{3,732}}{-12,92}.$

$\lg|x| = \frac{1}{5}\lg 3,732 - \lg 12,92 = \frac{1}{5}\cdot 0,5719 - 1,1113 =$

$= 0,1144 - 1,1113 = 0,0031 - 1; \quad |x| = 1,007\cdot 10^{-1}.$

$x = -0,1007$

483. $x = \sqrt{\frac{3-\sqrt[3]{4}}{5,2^2+3}}; \quad a = \sqrt[3]{4}; \; \lg a = \frac{1}{3}\cdot \lg 4 = \frac{1}{3}\cdot 0,6021 = 0,2007;$

$a = 1,588.$

$b = 5,2^2; \; \lg b = 2\lg 5,2 = 2\cdot 0,7160 = 1,4320; \; b = 27,04.$

$x = \sqrt{\frac{3-1{,}588}{27{,}04+3}} = \sqrt{\frac{1{,}412}{30{,}04}}$; $\lg x = \frac{1}{2}(\lg 1{,}412 - \lg 30{,}04) =$

$= \frac{1}{2}(0{,}1498 - 1{,}4777) = \frac{1}{2}(2{,}1498 - 1{,}4777 - 2) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6721 - 1 =$

$= 0{,}3360 - 1$; $x = 2{,}168 \cdot 10^{-1} = 0{,}2168.$

484. $x = \sqrt[5]{\frac{2{,}43^2\sqrt{0{,}75}}{\sqrt[3]{0{,}1}}}$; $\lg x = \frac{1}{5}\left[2 \lg 2{,}43 + \frac{1}{2}\lg 0{,}75 - \frac{1}{3}\lg 0{,}1\right] =$

$= \frac{1}{5}\left[2 \cdot 0{,}3856 + \frac{1}{2}(0{,}8751 - 1) - \frac{1}{3}(0{,}0000 - 1)\right] =$

$= \frac{1}{5}(0{,}7712 + 0{,}4375 - 0{,}5000 + 0{,}3333) = \frac{1}{5} \cdot 1{,}0420 = 0{,}2084;$

$x = 1{,}615.$

485. $x = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{582}\sqrt{0{,}02}}{\sqrt[5]{32{,}4^2}}}$; $\lg x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\lg 582 + \frac{1}{2}\lg 0{,}02 - \frac{2}{5}\lg 32{,}4\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} \cdot 2{,}7649 + \frac{1}{2}(0{,}3010 - 2) - \frac{2}{5} \cdot 1{,}5105\right] =$

$= \frac{1}{2}(0{,}9216 + 0{,}1505 - 1 - 0{,}6042) = \frac{1}{2}(1{,}0721 - 1{,}6042) =$

$= \frac{1}{2}(3{,}0721 - 1{,}6042 - 2) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4679 - 1 = 0{,}7339 - 1,$

$x = 5{,}419 \cdot 10^{-1} = 0{,}5419.$

486. $\log^2 x - 3 \lg x + 2 = 0$, $x > 0$.

Az egyenlet két gyöke x_1 és x_2, szorzatuk x_1x_2; $\lg(x_1x_2) = \lg x_1 + \lg x_2 = 3$ (a másodfokú egyenlet gyökeinek összege: $-\frac{b}{a}$). Ha $\lg(x_1x_2) = 3$, akkor $x_1x_2 = 10^3 = 1000$.

Ellenőrzés: oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

$\lg x = y$, $y^2 - 3y + 2 = 0$, $(y-2)(y-1) = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$,

$\lg x_1 = 2$; $x_1 = 100$; $\lg x_2 = 1$; $x_2 = 10$; a gyökök szorzata valóban 1000.

VI. FEJEZET

Elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek

487. Nincs megoldás a negatív számok halmazán ($x = 5$).

488. Nincs megoldás a negatív számok halmazán ($x = 3$).

489. Nincs megoldás az egész számok halmazán ($x = -0{,}6$).

490. $x = -3$.

491. $x = 20$.

492. $x = 3$.

493. $x = \frac{31}{30}$.

494. $x = 30$.

495. $x = 4$.

496. $x = 2{,}5$.

497. $x = -6$.

498. $x = 33$.

499. $x = 1$.

500. Minden valós x értékre teljesül.

501. Minden valós x értékre teljesül.

502. Az egyenletnek nincs megoldása a racionális számok halmazán (a valós számok halmazán sem), mert rendezés után a bal oldal ellentmond a jobb oldalnak.

503. $x = 9$.

504. $x = -2$.

505. $x=6$.

506. Nincs, $x=0$.

507. Van, $x=\frac{2}{7}$.

508. Van, $x=-2$.

509. A zárójel felbontása után $4x-12+17-10+2x+x+x=3x-7x$ $+2x+10-3$. Ebből $10x=12$, vagyis $x=\frac{6}{5}$.

510. $x=2$.

511. $x=\frac{5}{13}$.

512. $x=\frac{360}{13}$.

513. $x=32$.

514. $x=\frac{12}{5}$.

515. $x=3$.

516. $x=-\frac{7}{20}$.

517. $x=5$.

518. Az egyenlet mind a két oldalán közös nevezőre hozva $\frac{13x}{60}=\frac{4x-20}{30}$ és ebből $x=-8$.

519. $x=76$.

520. $x=5$.

521. $x=-3$.

522. $x=\frac{15}{4}$.

523. $x=\frac{31}{3}$.

524. $x=\frac{54}{37}$.

525. $x=\frac{11}{8}$.

526. $x=51$.

527. $x=2{,}5$.

528. Az egyenletnek nincs megoldása sem a racionális, sem a valós számok halmazán, mert a bal oldala ellentmond a jobb oldalának.

529. A nevezők legkisebb közös többszörösével, $24(x-8)$-cal megszorozva az egyenlet mind a két oldalát, $12(6x-37)-16(5x-39)=21(x-8)$, és ebből $x=12$.

530. $x=1$.

531. $x=7$.

532. Nincs.

533. A két egyenletnek ugyanakkora gyöke van: $x=6$.

534. A két egyenletnek ugyanakkora valós gyöke van: $x=4$.

535. A két egyenletnek ugyanakkora gyöke van: $x=1{,}5$.

536. $x=0$.

537. Az egyenletnek nincs megoldása a pozitív számok halmazán ($x=-30$).

538. Az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok halmazán ($x=2{,}22$).

539. Az egyenletnek nincs megoldása, mert két oldala minden x értékre ellentmond egymásnak.

540. $x=5$.

541. $x=2$.

542. Az egyenlet minden racionális számra teljesül.

543. Az egyenlet nem oldható meg a természetes számok halmazán $\left(x=-\frac{2}{3}\right)$.

544. $x = -\frac{60}{23}$.

545. $x = \frac{24}{7}$.

546. $z = 3$.

547. Az egyenletnek a negatív számok halmazán nincs megoldása ($x = 10$

548. $z = -3$.

549. $x = 13$.

550. $x = \frac{11}{3}$.

551. Az egyenletnek nincs megoldása a negatív számok halmazán ($x = 2$).

552. $x = 5$.

553. Az egyenlet nem oldható meg a valós számok halmazán.

554. Az egyenlet bal oldalán azonos átalakításokat végezve $\frac{53}{14}$-et kapun

Ez ellentmond az egyenlet jobb oldalának, ezért az egyenlet nem oldh
tó meg.

555. $x = 6$.

556. A $-2 \leqq x \leqq 0$ intervallumban nincs gyöke az egyenletnek $\left(x = \frac{31}{25}\right)$.

557. Az egyenletnek a $0 \leqq x \leqq 3$ intervallumban nincs megoldása (x
$= -0{,}5625$).

558. $x = 0{,}48$.

559. $x = 2{,}5$.

560. $y = -\frac{1}{3}$.

561. $y = 1{,}2$.

562. $x = 4$.

563. $x = 1$.

564. $y = 3$.

565. Rendezés után $3x^2 + 4x + 20 = 0$, és ennek az egyenletnek nincs valós (és így egész) gyöke.

566. $x = -2$.

567. $\emptyset$ (üres halmaz), mert $x = \frac{1}{2}$, de erre az értékre nincs értelmezve az eredeti egyenlet.

568. $x = 4$.

569. Az egyenletnek nincs megoldása, mert a bal oldala ellentmond a jobb oldalának.

570. $x = 5$.

571. $x = 2$.

572. Az egyenlet minden negatív x értékre teljesül.

573. Az egyenlet $x = -2$ kivételével minden racionális számra teljesül.

574. $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

575. Az egyenletnek nincs gyöke.

576. Az egyenletnek nincs gyöke (így a természetes számok halmazán sincs).

577. Az egyenletnek nincs gyöke.

578. $x = 0$.

579. $x = 24$.

580. $x = 5$.

581. $x = 4$.

582. Az egyenletnek nincs megoldása.

583. $x = 0{,}5$.

584. Az egyenletnek nincs valós megoldása.

585. $x = 0{,}48$.

586. Az egyenletnek nincs pozitív gyöke $\left(y = -\frac{5}{13}\right)$.

587. $x=8$. **588.** $x=0{,}5$.

589. $x=\dfrac{5}{b-2}$, $b\neq 2$.

590. $x=\dfrac{18}{a-1}$;

a	0	-1	-2	-5	-8	-17	19	10	7	4	3	2
x	-18	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9	18

$x\in\{-18;\ -9;\ -6;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 18\}$.

591. $x=\dfrac{7}{a-7}$;

a	8	14	0	6
x	7	1	-1	-7

$x\in\{-7;\ -1;\ 1;\ 7\}$.

592. Ha $a=0$, akkor a megoldás minden racionális szám, a 0 kivételével. Ha $a\neq 0$, akkor $x=a+1$.

593. $a=b=0$ nem lehet, mert akkor nincs értelme az egyenletnek. Ha $a=b\neq 0$, akkor az egyenlet minden $x\in\mathbf{Z}$ értékre teljesül. Ha $a\neq b$ és $ab\neq 0$, akkor $x=b-a$.

594. $x=a-1$, ahol a egész, de $a\neq 0$, $a\neq 1$.

595. $x\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$.

596. Ha $a=\pm 1$, akkor az egyenletnek nincs értelme. Minden más lehetséges esetben $x=1$ (a paramétertől függetlenül).

597. Ha $a\neq 45$, akkor $x=\dfrac{5a-4}{45-a}$. Az egyenletnek nincs értelme, ha vagy $a=\dfrac{4}{x}=\dfrac{4(45-a)}{5a-4}$, vagy ha $a=9x=\dfrac{9(5a-4)}{45-a}$. Mind a két feltételből $a^2=36$, vagyis $a=\pm 6$. Racionális megoldása tehát akkor van az egyenletnek, ha a paraméter az $a=-6$, $a=6$, $a=45$ értékektől különböző értékeket vesz fel.

598. Ha $m\neq -n$ és $mn\neq 0$, akkor $x=\dfrac{2mn}{3(m+n)}$. Ha $m=n=0$, akkor bármely racionális szám lehet, kivéve a 0.

599. Rendezés után az egyenlet $x^2+4ax+3a^2-4=0$ alakú, és ebből a gyökök $x_{1,2}=-2a\pm\sqrt{a^2+4}$. Ezek akkor és csak akkor racionálisak egész a esetén, ha $a=0$. Ekkor $x_1=2$, $x_2=-2$.

600. Ha $a\neq 0$, $a\neq 1$, akkor $x=2a+1$ minden egész a érték esetén.

601. $x=a$.

602. Ha $a=\dfrac{1}{3}$, akkor az egyenlet minden $x\in\mathbf{Q}\setminus\left\{\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{3}\right\}$ értékre teljesül. Minden más esetben az egyenletnek nincs megoldása.

603. Ha $a=0$, akkor $x=0$ kivételével minden x megoldása az egyenletnek. Ha $a\neq 0$, akkor az egyenletnek nincsen megoldása.

604. Ha $a=\dfrac{1}{3}$, akkor minden $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{3}\right\}$ érték kielégíti az egyenletet. A paraméter minden más értékére nincs megoldása az egyenletnek.

605. A feladat szövege sajtóhibás, így nem oldható meg.

Helyesen: $\dfrac{x}{2a+x}-\dfrac{2a+x}{x-2a}=\dfrac{16a^2}{4a^2-x^2}$.

Ha $a=0$, akkor minden $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ megoldása az egyenletnek. Más megoldása nincs az egyenletnek.

606. Nincs értelme az egyenletnek, ha $a=-1$, $a=0$, $a=1$. Minden más racionális a értékre $x=\dfrac{3a^2-4a+1}{(a-1)^2}=\dfrac{(3a-1)(a-1)}{(a-1)^2}=\dfrac{3a-1}{a-1}$.

607. Ha $a\neq 0$, akkor $x=-4a$.

608. $x=2a$, $a\neq 0$. **609.** $x=9a$, $a\neq 0$.

610. $y=5a$, $a\neq 0$.

611. Ha $a=-2$, nincs megoldás. Ha $a\neq -2$, akkor $x=\dfrac{1-a}{2+a}=\dfrac{3}{a+2}-1$. Ez akkor egész, ha $a+2=-3;\ -1;\ 1;\ 3$. Ekkor x egész értékei: -2; -4; 2; 0.

612. Az egyenlet $x=\dfrac{2a-2}{2a+1}$ gyöke pozitív, ha $a>1$ vagy $a<-\dfrac{1}{2}$.

613. $x>0$, ha $t>6$; $x<0$, ha $t<6$.

614. $x\geqq 0$, ha $a\geqq 5$.

615. $x>0$, ha $a>6$ vagy $a<-\frac{3}{2}$.

616. $x=3-p$. $x>0$, ha $p<3$ és $p\neq 0$. Ha $p=3$, akkor minden pozitív x megoldás.

617. $x=\frac{p-6}{p-4}$. $x<0$, ha $4<p<6$.

618. $x\neq\pm m$. $x=\frac{6m^2}{4-m}$, $m\neq 4$. $x<m$, ha $0<m<\frac{4}{7}$ vagy $m>4$. Ha $x=\frac{4}{5}$, akkor $m=\frac{2}{3}$. Az $m=-\frac{4}{5}$ az eredeti kikötés miatt rossz!

619. $x=-4$, $y=-8$. **620.** $x=-3$, $y=5$.

621. $x=2$, $y=1$.

622. $x=\frac{29}{14}$, $y=-\frac{2}{7}$.

623. $x=\frac{4}{143}$, $y=\frac{70}{143}$.

624. $x=0$, $y=-1$.

625. $x=\frac{5}{3}$, $y=-2$.

626. $x=\frac{3}{8}$, $y=\frac{1}{8}$.

627. $x=\frac{5}{7}$, $y=\frac{5}{7}$.

628. $x=-1$, $y=-6$.

629. $x=\frac{13}{12}$, $y=\frac{1}{16}$.

630. $x=-\frac{1}{39}$, $y=-\frac{2}{13}$.

631. $x=-\frac{1}{69}$, $y=-\frac{8}{69}$.

632. $x=-2$, $y=4$.

633. Az egyenletrendszernek a természetes számok halmazán nincs megoldása. ($x=5$; $y=-3$).

634. $x=3$, $y=2$.

635. $x=2$, $y=-3$.

636. Az egyenletrendszer egymásnak ellentmondó egyenletekből áll, megoldása nincs.

637. Nincs, mert az egyenletrendszer egymásnak ellentmondó egyenletekből áll.

638. Rendezés után az egyenletrendszer $14x-81y=30$, $7x+27y=60$ alakú. Ennek megoldása $x=6$, $y=\frac{2}{3}$.

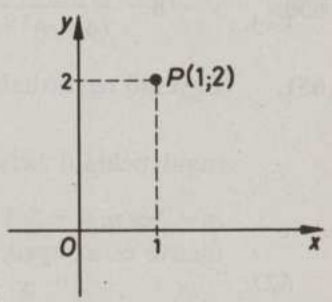
639. Azonos átalakítások után az egyenletrendszer $38x-21y=15$, $32x-21y=6$ alakú, és ennek megoldása $x=\frac{3}{2}$, $y=2$.

640. $x=-2$, $y=3$.

641. $x=11$, $y=6$.

642. Azonos átalakítások után az egyenletrendszer $3x-y+8=0$, $13x+2y+22=0$ alakú. Ennek megoldása $x=-2$, $y=2$.

643. $x=1$, $y=2$ (**643.** ábra).



643

644. Ha $a=1$, akkor x tetszőleges valós szám és $y=1-x$. Ha $a\neq 1$, akkor $x=a+1$, $y=-1$.

645. Ha $a=-1$, akkor $b=2$ és az egyenletrendszert minden x, y valós számpár kielégíti, amelyre teljesül $x+y=2$. Ha $a\neq -1$, akkor $x=\frac{b-2}{a+1}$, $y=\frac{ab+2}{a+1}$.

646. Ha $a=-1$, akkor nincs megoldás, mert az egyenletrendszer ellentmondó. Ha $a=1$, akkor minden valós x, y számpár, amelyre $x+y=1$, megoldás. Ha $a\neq\pm1$, akkor $x=y=\frac{1}{a+1}$.

647. Ha $a=0$ és $b=0$, akkor minden x; y valós számpár megoldás. Ha $a=0$ és $b\neq0$, akkor x tetszőleges valós szám és $y=0$. Ha $a\neq0$ és $b=0$, akkor $x=0$ és y tetszőleges valós szám. Ha $a=-1$, akkor $b=0$ és az előző megoldásokat kapjuk. Ha $a\neq-1$, $a\neq0$, akkor $x=\frac{b}{a+1}$, $y=-\frac{a}{a+1}$.

648. Ha $a=0$ vagy $a=-1$, akkor az egyenletrendszer ellentmondó. Minden más esetben $x=\frac{a^2+a+1}{a(a+1)}$, $y=\frac{-1}{a+1}$.

649. Ha $a=b=0$, akkor bármely x és bármely y megoldása az egyenletrendszernek. Ha $a=b\neq0$, akkor az egyenletrendszer $2ax=2a^2$, $2ay=0$ alakú, és ebből $x=a$, $y=0$. Ha a és b egyik sem 0 és $a\neq b$, akkor $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$. Ha $a=0$, $b\neq0$, akkor $x\in\mathbf{R}$ és $y=x-b$. Ha $a\neq0$, $b=0$, akkor $x\in\mathbf{R}$ és $y=a-x$.

650. $x=8-\frac{8(6+n)(n-4)}{(4-n)^2+100}$, $y=\frac{16(6+n)}{(4-n)^2+100}$.

651. Egyenlő együtthatók módszerével például $y=\frac{12(m-7)}{(m-1)^2-36}=\frac{12}{m+5}$, majd például helyettesítéssel $x=4-\frac{4(m-1)(m-7)}{(m-1)^2-36}=\frac{12}{m+5}$, ahol $m\neq7$ és $m\neq-5$. Ha $m=7$, akkor a második egyenlet az első következménye és az egyik ismeretlen szabadon választható meg. Ha ez pl. x, akkor $y=2-\frac{x}{2}$. Ha $m=-5$, akkor az egyenletrendszer ellentmondásra vezet.

652. $x=\frac{15}{a+1}$, $y=\frac{15}{2(a+1)}$, ahol $a\neq-1$ és $a\neq5$. Ha $a=-1$, akkor nincs megoldás, mert az egyenletrendszer ellentmondó. Ha $a=5$, akkor a két egyenlet azonos, és ezért végtelen sok megoldás van. Ebben az esetben az egyik ismeretlen szabadon választható meg. Ha ez x, akkor $y=\frac{5-x}{2}$.

653. $x=-\frac{a}{2a+1}$, $y=\frac{2a+1}{a+1}$, ahol $a\neq-1$, $a\neq-\frac{1}{2}$ és $a\neq1$. Az a paraméter előbbi két értékére az egyenletrendszer ellentmondó.

Ha $a\neq-1$, $a\neq-\frac{1}{2}$ és $a=1$, akkor $x\in\mathbf{R}$, de $x\neq-1$, $y=3-\frac{1}{x+1}$.

Ha $a=-1$ vagy $a=-\frac{1}{2}$, akkor nincs megoldás.

654. $x=a+b$, $y=a-b$, ahol $|a|\neq|b|$.

655. $b=2$ kivételével minden valós b értékre. $\left(x=\frac{1}{3},\ y=0.\right)$

656. $c\in\mathbf{R}\setminus\{-10\}$. ($-10$ kivételével minden valós szám.)

657. $(0;1)$; $\left(1;\frac{1}{2}\right)$; $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$; $(1992;-995)$.

658. Az egyenletrendszerből $x=\frac{16-9m^2}{8-2m^2}$, $y=\frac{1}{8-2m^2}$, ahol $m\neq\pm2$. $x=\frac{16-9m^2}{8-2m^2}<0$ akkor teljesül, ha $\frac{4}{3}<|m|<2$; $y=\frac{1}{8-2m^2}>0$ akkor teljesül, ha $|m|<2$. Mind a két feltétel akkor teljesül, ha $\frac{4}{3}<|m|<2$.

659. $a>2{,}25$.

660. $m>8$.

661. Ha $m<-15$ vagy $m>7$.

662. Ha $a<-8$ vagy $a>22$.

663. Ha $-4<a<-3$.

664. Ha $a<\frac{1}{2}$ vagy $a>2$.

665. Ha $a<-1$ vagy $a>1$.

666. Az egyenletrendszerből $x=3m-2n$, $y=3n-4m$. $x=y$, ha $n=\frac{7}{5}m$. A feltételnek egy számpár felel meg: $m=20$, $n=28$.

VII. FEJEZET

Másodfokú egyenletek és egyenletrendszerek

667. Mind a két oldalon gyököt vonva $3x-6 = \pm 12$. Ebből $x_1=6$, $x_2=-2$.

668. $0; -5$.

669. $0; 5$.

670. Nem oldható meg az egész számok halmazán.

671. Van, $x_1=0$ és $x_2=6$.

672. *a)–b)*. Az egész és a racionális számok halmazán nem oldható meg az egyenlet.
c) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$.

673. Van, $x=2$.

674. $\frac{10}{3}; -\frac{10}{3}$.

675. $2{,}4; 3{,}6$.

676. $\frac{1}{2}; 3$.

677. $1; 4$.

678. $1; -6$.

679. $-100; 1$.

680. $7; 7$.

681. $\frac{5+\sqrt{13}}{6}; \frac{5-\sqrt{13}}{6}$, közelítőleg $1{,}43; 0{,}23$.

682. 3. A másik gyök $\left(\frac{1}{5}\right)$ nem egész.

683. $\frac{3}{2}$. A másik gyök (-1) nem pozitív.

684. $x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{384}}{32}=\frac{3\pm\sqrt{6}}{4}$; $x_1=1{,}362$, $x_2=0{,}138$.

685. Az egyenletnek két (egyenlő) pozitív gyöke van $(x=1)$.

686. $\frac{-24+\sqrt{5832}}{36}=1{,}45$; $\frac{-24-\sqrt{5832}}{36}=-2{,}79$.

687. $-\frac{21}{2}; -\frac{4}{15}$.

688. $\frac{12}{5}$, mert a másik gyök $\left(-\frac{8}{5}\right)$ nem pozitív.

689. Az egyenletnek nincs megoldása a negatív számok halmazán (sőt a valós számok halmazán sem), mert az egyenlet diszkriminánsa negatív (-7416).

690. $-\frac{37}{17}$, mert a másik gyök (3) pozitív.

691. $2{,}5; 1{,}75$.

692. $\frac{2\sqrt{2}-1+\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2}=3{,}07$; $\frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2}=-1{,}25$.

693. Az első egyenlet két gyöke 1 és $\frac{2}{3}$, a második egyenleté 1 és $-2{,}8$, ezért a két egyenletnek van közös gyöke és ez az 1.

694. $-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}<\frac{7}{8}$.

695. $-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}<\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$.

696. $1<2<3<4$.

697. Az $x=-1$, mert a másik gyök ($x=3$) nincs a $-2 \leqq x \leqq 2$ intervallumban.

698. Az $x = \frac{3}{7} = 0{,}43$.

699. Nincs, mert az $x_1=8$ és $x_2=-4$ egyike sincs a $]-2; 3[$ intervallumban.

700. Egy sem, mert $x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{108}}{2}$, vagyis a gyökök egyike sem racionális.

701. A -3 balra, a $-\frac{1}{2}$ jobbra helyezkedik el a -1 értékhez képest a számegyenesen.

702. Mind a kettő, mert $x_1=4$, $x_2=3$.

703. Mivel $x_1=-1$, $x_2=3{,}5$, ezért az egyenlet mind a két gyöke a $[-2; 4]$ intervallumban van.

704. $(2-3x)(x-1)$.

705. $(x-3)(2x+1)$.

706. $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.

707. Az egyenlet minden valós x értékre teljesül (azonosság).

708. 5, mert -5 nem természetes szám.

709. 0; 0,4.

710. -8; 8.

711. 4; 6.

712. $1; \frac{11}{9}$.

713. Rendezés után az $x^2+11x-26=0$ egyenletet kapjuk. Ebből $x_1=2$, $x_2=-13$.

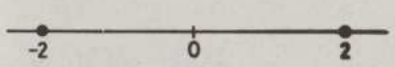
714. Rendezés után az $x^2-9x+18=0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $x_1=6$, $x_2=3$. Az $x_2=3$ nem jöhet szóba, mert ekkor a törtnek nincs értelme. Így a megoldás $x=6$.

715. Az egyenletnek a pozitív számok halmazán nincs megoldása, mert az $x_1=1$ pozitív gyök esetében a tört nevezője zérus, a másik gyök pedig negatív $\left(x_2=-\frac{3}{14}\right)$.

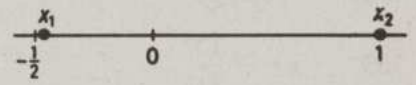
716. Az egyenletnek a negatív számok halmazán nincs megoldása, mert mind a két gyök $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$ pozitív.

717. $x_1=-2$, $x_2=2$ (**717.** ábra).

718. $x_1 = -\frac{34}{71} = -0{,}48$; $x_2=1$ (**718.** ábra).



717



718

719. 3.

720. $6; \frac{12}{23}$.

721. Rendezés után a $2x^2-3x+1=0$ egyenletet kapjuk, ebből $x_1=1$; $x_2=0{,}5$.

722. $-\frac{5}{13}$.

723. $x=\pm 5$.

724. $x^2=-45$, ezért nincs ilyen valós x.

725. $t=-3$.

726. $x=\frac{1}{2}$, mert az $x=-3$ értékre az egyenletnek nincs értelme.

727. 2.

728. Nincs megoldás a pozitív számok halmazán, mert $x_1=1$ értékre nem értelmezhető az egyenlet, a másik gyök pedig negatív: $x_2=-\frac{1}{2}$.

729. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

730. Az egyenletnek nincs pozitív gyöke ($x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}2$).

731. Nincs megoldás a természetes számok halmazán, mert az $x^2 = 4$ egyenletből $x_{1,2} = \pm 2$, de ezekre az értékekre az egyenlet nem értelmezhető.

732. Rendezés után $2x^2 - x - 3 = 0$, ebből $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -1$. A keresett megoldás: -1.

733. Rendezés után $2x^2 + x = 0$. Ebből $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. A $-\frac{1}{2}$ értékre nem értelmezhető az egyenlet, $x = 0$ valóban gyök.

734. $-0{,}5$.

735. $x = -\frac{15}{11}$.

736. $x_1 = 4$; $x_2 = 5$.

737. -3.

738. 1; $-\frac{7}{5}$.

739. Nincs megoldás a negatív számok halmazán, mert $y_1 = 2$ és $y_2 = -1$, de ez utóbbi értékre nem értelmezhető az egyenlet jobb oldalán álló tört.

740. 8.

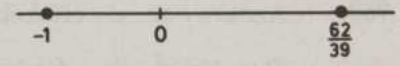
741. Nincs megoldás a pozitív számok halmazán.

742. $x = -3{,}2$, mert $x = 3$ nem megoldás.

743. Nincs megoldás az egész számok halmazán, sőt a valós számok halmazán sem, mert a megoldás során kapott két értékre $\left(x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\right)$ az egyenlet nem értelmezhető. Az a feltétel, hogy a gyökök közül válasszuk ki az egészeket, csak akkor vetődhet fel, ha már tudjuk, hogy egyáltalában vannak gyökök.

744. 8; 12.

745. $-\frac{1}{3}$.



749

746. $-\frac{11}{7}$.

747. 3.

748. 1.

749. -1; $\frac{62}{39}$ (**749.** ábra).

750. Rendezés után a $187y = -34$ elsőfokú egyenletet kapjuk. Ebből $y = -\frac{2}{11}$.

751. 1; -1; 0,25; $-0{,}25$.

752. $x_1^2 = 1$, ebből $x_{1,2} = \pm 1$, de $x > 0$ miatt $x = 1$. Az $x^2 = -\frac{1}{2}$ egyenlet nem ad újabb valós gyököt.

753. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\sqrt{2}$.

754. -1; 1.

755. 2; -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

756. -5; -1; 1; 5.

757. -3; 3.

758. Az egyenletből $x_1^3 = 8$, $x_2^3 = -1$. Két gyök van: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

759. Az egyenlet rendezés után $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ alakú. Ebből $x_1^2 = 3$, $x_2^2 = 1$. Az első egyenletből $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ és ezek megoldásai az eredeti egyenletnek is, a második esetben nem kapunk gyököt, mert ekkor az egyenlet nem értelmezhető.

760. Azokra az a értékekre, amelyekre az egyenlet diszkriminánsa $D = 156a^2 - 8a - 4 = 0$. Ebből $a_1 = \frac{2}{11}$, $a_2 = -\frac{2}{15}$. A két gyök $x_1 = -6$, $x_2 = -\frac{4}{5}$.

Ha $a_3 = \frac{1}{5}$, akkor az egyenlet elsőfokú, ekkor $x_3 = -\frac{17}{5}$.

761. Azokra, amelyekre $D = 12m + 8 > 0$. Ebből $m > \frac{2}{3}$, de $m \neq 1$.

762. A megoldandó egyenlet $x^2 + (p-1)x - 2(p+1) = 0$. Ebből vagy $x = 2$, de ez nem megoldás, vagy $x = -(p+1)$. Nincs valós megoldás, ha $p = -3$, $p = -1$, $p = 1$, mert ekkor az adott egyenlet nem értelmezhető.

763. $x = \frac{2}{3} - b$. Nincs valós gyöke az egyenletnek, ha $b = -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}$.

764. Két különböző gyöke van az egyenletnek, ha $m < \frac{13}{6}$. Mind a két gyök pozitív, ha $m < -2$ vagy $2 < m < \frac{13}{6}$.

765. Az egyenletnek akkor van legfeljebb egy valós gyöke, ha $p \leqq \frac{1}{2}$, vagy $p = 1$.

766. *a)* Ha $p < 0$. *b)* Ha $p = 0$.

767. A jobb oldalon a műveleteket elvégezve, majd rendezve $x^3 - (a+b+c)x^2 + (a+b+ab)x - abc$ áll. A bal és jobb oldal azonos fokszámú hatványainak együtthatóit összehasonlítva a $-a = -(a+b+c)$; $b = a+b+ab$; $-c = -abc$ egyenleteket kapjuk. Ezekből: $a = -1$; $b = -1$; $c = 1$.
Ha $a = b = c = 0$, akkor $x^3 \equiv x^3$, ha $a \in \mathbf{R}$ és $b = c = 0$, akkor $x^3 - ax^2 \equiv x^3 - ax^2$.

768. $a = \frac{1}{6}$; $b = -1$; $c = \frac{11}{6}$. Az $\frac{x^2}{6} - x + \frac{11}{6} = \frac{1}{x}$, vagyis az $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ harmadfokú egyenletnek három gyökét megadtuk. Mivel több gyöke nem lehet, ezért nincs olyan további x, amelyre $p(x) = \frac{1}{x}$.

769. $x = 0{,}5$; $a = 2$.

770. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

771. Az $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 6p + 10 = (p-3)^2 + 1$ akkor minimális, ha $p = 3$.

772. Ha $p = -4$.

773. Az első egyenlet gyökei $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. A második egyenletnek akkor gyöke az 1, ha $1 - (a^2+1) + 3a = 0$. Ebből $a = 0$, $a = 3$. A második egyenletnek akkor gyöke a 3, ha $9 - 3(a^2+1) + 3a = 0$. Ebből $a = 2$, $a = -1$. A két egyenletnek akkor van közös gyöke, ha $a = -1$, $a = 0$, $a = 2$, $a = 3$.

774. Ha $k = \frac{2}{3}$, akkor $x_1 = -3$, $x_2 = -6$.

775. Az első egyenlet gyökei $x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{4-a}$, a másodiké $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+56a}}{2}$. Csak két azonos előjelű gyök hasonlítható összesze. Az $x_1 = 3x_3$ feltételből $4 + 2\sqrt{4-a} = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{1+56a})$. Ebből rendezés után $4225a^2 - 2739a = 0$, és így $a = 0$ vagy $a = \frac{2739}{4225}$. Ha $a = 0$, akkor $x_1 = 8$, $x_3 = 0$ és ez nem felel meg, ha $a = \frac{2739}{4225}$, akkor $x_1 = \frac{498}{65} > 0$, $x_3 = \frac{166}{65} > 0$, és $x_1 = 3x_3$ valóban fennáll, tehát ez megoldás. Az $x_2 = 3x_4$ feltételből $4 - 2\sqrt{4-a} = \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{1+56a})$. Ebből rendezés után ugyanarra az egyenletre és ugyanazokhoz a gyökökhöz jutunk, mint az előbb. Ha $a = 0$, akkor $x_2 = 0$, $x_4 = -3$ és ez nem felel meg, ha $a = \frac{2739}{4225}$, akkor $x_2 = \frac{22}{65} > 0$, $x_4 = -\frac{231}{65} < 0$ és ez nem ad megoldást. *Megjegyzés:* Ha nincs megszabva, hogy az első egyenlet valamely gyöke háromszorosa a második egyenlet valamely gyökének, hanem pl. a (fordított) $3x_1 = x_3$ esetet is megengedtük volna, akkor ebből (sokkal kevesebb számolással) az $a^2 - 3a = 0$ egyenlethez jutottunk volna. Ebből $a = 0$ és $a = 3$. Ha $a = 0$, akkor $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, ha $a = 3$, akkor $x_1 = 2$, $x_3 = 6$, és mind a kettő megoldás.

776. $k=5$.

777. Mivel $x_1+x_2=a^2+b^2=5$ és $x_1x_2=ab=2$, ezért $a=1$, $b=2$ vagy $a=2$, $b=1$, vagy $a=-2$, $b=-1$, vagy $a=-1$, $b=-2$.

778. $x^2+\frac{7}{10}x+\frac{3}{25}=0$ vagy egész együtthatókkal $50x^2+35x+6=0$.

779. $7x^2-39x+20=0$.

780. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{1}{3}}{-8}=-\frac{1}{24}$.

781. 29.

782. $25x^2-60x+34=0$.

783. $x_1=1$, $x_2=-5$. $x_1+x_2=-4$, $x_1-x_2=6$ vagy $x_1+x_2=-4$, $x_2-x_1=-6$. Így két egyenlet írható fel: $x^2-2x-24=0$ és $x^2+10x+24=0$.

784. Az adott egyenlet gyökei: $x_1=-4$, $x_2=-2$. Az új egyenlet gyökei $x_1=-1$, $x_2=1$. Az új egyenlet: $x^2-1=0$.

785. $x^2+8x+16=0$.

786. *a)* Az adott egyenlet gyökeire $x_1+x_2=4$ és $x_1x_2=7$. Az új egyenlet gyökeire $5(x_1+x_2)=20$ és $(5x_1)(5x_2)=25(x_1x_2)=175$. Így az új egyenlet $x^2-20x+175=0$ alakú.
b) Az új egyenlet gyökeire $(x_1+5)+(x_2+5)=14$, $(x_1+5)(x_2+5)=x_1x_2+5(x_1+x_2)+25=7+5\cdot4+25=52$. Ezért az új egyenlet $x^2-14x+52=0$.

787. *a)* $x^2-0{,}2x-0{,}8=0$, *b)* $x^2-0{,}25x-1{,}25=0$.

788. Mivel $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, ezért a feltétel szerint $\left[\frac{3(t-1)}{2}\right]^2-2\cdot\frac{1-t^2}{2}=\frac{5}{4}$. Ebből $13t^2-18t=0$, vagyis $t_1=0$ vagy $t_2=\frac{18}{13}$ esetén teljesül a feltétel.

789. $p=-4$; $p=4$.

790. $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{3}{2}$.

791. *a)* $p=\pm4$; *b)* $p=\pm5$.

792. *a)* $q=3$; *b)* $q=4$; *c)* $q=1$.

793. Annak érdekében, hogy a keresett egyenlet együtthatói racionális számok legyenek, legyen az adott $x_1=2-\sqrt{5}$ mellett a másik gyök $x_2=2+\sqrt{5}$. Ekkor $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=-1$, az egyenlet pedig $x^2-4x-1=0$.

794. $x^2-8x+1=0$.

795. Ahhoz, hogy az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvénynek minimuma lehessen, szükséges, hogy $a>0$ legyen. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a=1$. Mivel a zérushelyek összege 2, ezért $b=-2$, és így $f(x)=x^2-2x+c=(x-1)^2+c-1$. Ennek akkor van minimuma, ha $x=1$. Mivel a minimum -3, ezért $-3=c-1$, és ebből $c=-2$. Így $f(x)=x^2-2x-2$ és $f(1)=-3$ (ez éppen a minimum). Ellenőrzésképpen: a két zérushely $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$ és $x_1+x_2=2$ valóban igaz.

796. $f_{max}=f(2)=0$.

797. Mivel az ismeretlenek összege (7) és szorzata (-18) adott, az ismeretlenek a $z^2-7z-18=0$ másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthetők. Ezek $z_1=9$ és $z_2=-2$. Ezért az egyenletrendszer megoldása $x=9$, $y=-2$ vagy $x=-2$, $y=9$. Ugyanerre az egyenletre jutunk, ha az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezzük és azt a másik egyenletbe helyettesítjük.

798. $x=5$, $y=-3$ vagy $x=3$, $y=-5$.

799. $x=4$, $y=1$.

800. Az első egyenletből $x=\frac{3y+15}{2}$. Ezt a másodikba helyettesítve az $y^2+5y-6=0$ egyenletet kapjuk. Gyökei $y_1=1$, $y_2=-6$. A hozzájuk tartozó x értékek $x_1=-9$, $x_2=\frac{3}{2}$. A feladat feltételeinek csak az $x=-9$, $y=1$ számpár felel meg.

801. $x=-2,\ y=-3;\ x=-4,\ y=-\frac{3}{2}$.

802. $x=2,\ y=7;\ x=-7,\ y=-2$.

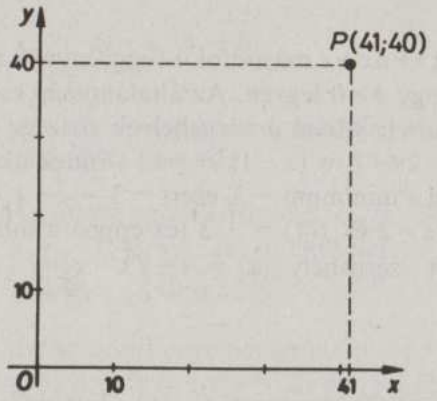
803. $x=1,\ y=-1;\ x=-1,\ y=1$.

804. Nincs valós megoldás.

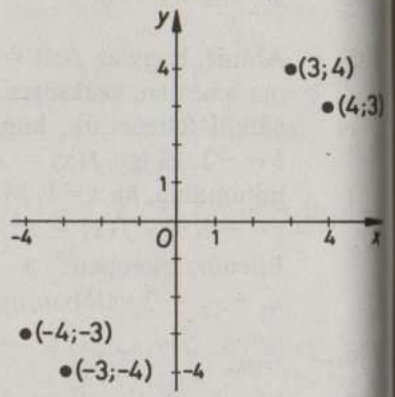
805. $x=2,\ y=1$, mert $x=-1,\ y=-2$ nem felel meg a feltételnek.

806. $x=4,\ y=2;\ x=0,\ y=-2$.

807. $x=41,\ y=40$ (**807.** ábra).



807



808

808. Ha a második egyenlet oldalainak kétszeresét kivonjuk az első egyenlet megfelelő oldalaiból, akkor $(x-y)^2=1$. Ebből $x-y=\pm 1$. Ha $x=1+y$, és ezt a második egyenletbe helyettesítjük, akkor $y^2+y-12=0$, és ebből $y_1=3,\ y_2=-4$, a megfelelő x értékek $x_1=4,\ x_2=-3$. Ha $x=-1+y$, akkor $y^2-y-12=0$, és ebből $y_3=-3,\ y_4=4$, illetve $x_3=-4,\ x_4=3$. Négy számpár tesz eleget az egyenletrendszernek: $x=3,\ y=4;\ x=-3,\ y=-4;\ x=4,\ y=3;\ x=-4,\ y=-3$ (**808.** ábra).

809. $x=1,\ y=2$.

810. $x=-4,\ y=0;\ x=0,\ y=-4$.

811. $x=0,\ y=1$.

812. $x=5,\ y=0;\ x=0,\ y=5$ (**812.** ábra).

813. $(5;\ 3),\ (-3;\ -5)$.

814. $x=6,\ y=4$ (**814.** ábra).

815. A megoldandó egyenlet $x^4-40x^2-441=0$. Ebből $x_1^2=49,\ x_2^2=-9$, de ez utóbbi nem felel meg. Így $x=7,\ y=3;\ x=-7,\ y=-3$.

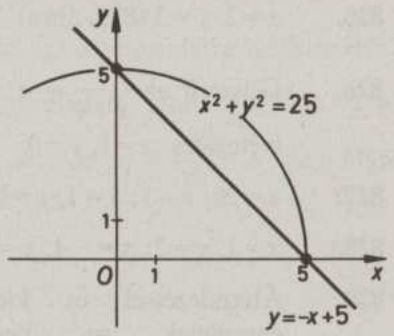
816. $x=4,\ y=2;\ x=2,\ y=4$.

817. $x=-8,\ y=-4;\ x=-4,\ y=-8$.

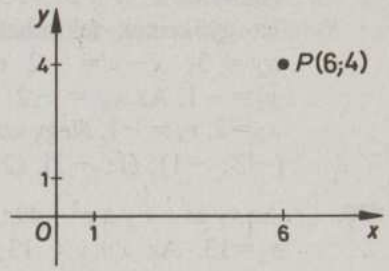
818. $x=0,\ y=3;\ x=1,\ y=4$.

819. A második egyenletből $y=10-x$. Ezt az elsőbe helyettesítve rendezés után $x^2-10x+16=0$; ebből $x_1=8,\ x_2=2$. A megoldás: $x=8,\ y=2;\ x=2,\ y=8$.

820. $x=1,\ y=3;\ x=3,\ y=1$.



812



814

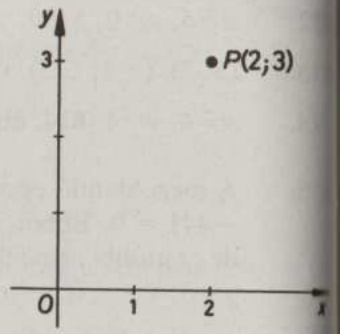
821. A második egyenletből $y=15-x$, ezt az elsőbe helyettesítve rendezés után az $x^2-15x+36=0$ egyenletet kapjuk. Ebből $x_1=12,\ x_2=3$. A megfelelő y értékek $y_1=3,\ y_2=12$. A megoldás $x=12,\ y=3$ és $x=3,\ y=12$.

822. Az első egyenletből $\frac{x+y}{xy}=1$. Mivel $x+y=4$, ezért $xy=4$. Megoldandó tehát a $z^2-4z+4=0$, vagyis a $(z-2)^2=0$ egyenlet. Az egyetlen $z=2$ gyökből $x=2,\ y=2$.

823. $x=3,\ y=2$.

824. Az egyszerűség kedvéért legyen $\frac{1}{x}=a$ és $\frac{1}{y}=b$. Akkor az első egyenletből $a=-\frac{3b}{2}$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $-\frac{9b}{2}-4b=-\frac{17}{6}$. Ebből $b=\frac{1}{3}$ és így $a=-\frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer megoldása $x=-2,\ y=3$.

825. $x=2$, $y=3$ (**825.** ábra).



825

826. Célszerű az $\frac{1}{x+y}=a$, $\frac{1}{x-y}=b$ helyettesítés. $x=1$, $y=0$.

827. $x=20$, $y=1$; $x=1$, $y=20$.

828. $x=1$, $y=2$; $x=-1$, $y=-2$.

829. Átrendezéssel és kiemeléssel az egyenletek az $xy+(x-y)=1$; $xy(x-y)=-6$ alakra hozhatók. Az xy és $x-y$ a $z^2-z-6=0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. Az utóbbi egyenletből $z_1=3$, $z_2=-2$. Az $xy=3$; $x-y=-2$ egyenletrendszerből $x_1=1$, $y_1=3$ és $x_2=-3$, $y_2=-1$. Az $xy=-2$; $x-y=3$ egyenletrendszerből $x_3=1$, $y_3=-2$ és $x_4=2$, $y_4=-1$. Négy számpár felel meg a feladat feltételeinek: $(1;3)$, $(-3;-1)$; $(1;-2)$, $(2;-1)$.

830. Az xy és $x+y$ a $z^2-49z+468=0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. $z_1=36$, $z_2=13$. Az $x+y=13$; $xy=36$ egyenletrendszerből $x_1=9$, $y_1=4$ és $x_2=4$, $y_2=9$. Az $x+y=36$; $xy=13$ egyenletrendszerből $x^2-36x+13=0$. Ebből $x_{3,4}=18\pm\sqrt{311}$ és így $y_{3,4}=18\mp\sqrt{311}$. Négy valós számpár elégíti ki az egyenletrendszert: $x=9$, $y=4$; $x=4$, $y=9$; $x=18+\sqrt{311}$, $y=18-\sqrt{311}$; $x=18-\sqrt{311}$, $y=18+\sqrt{311}$.

831. $(5;9)$, $(9;5)$.

832. A második egyenletből $x=y+4$. Ezt az elsőbe helyettesítve rendezés után az $y^2+4y-21=0$ egyenletet kapjuk. Ebből $y_1=3$, $y_2=-7$; a megfelelő x értékek $x_1=7$, $x_2=-3$. A keresett számpárok: $(7;3)$, $(-3;-7)$.

833. Az első egyenletet átalakítva $(3x-2y)^2-6(3x-2y)+9=0$. Ebből $3x-2y=3$. Így $x=\frac{3+2y}{3}$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve a $2y^2+3y=0$ egyenlethez jutunk. A megoldás: $x_1=1$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=-\frac{3}{2}$.

834. A második egyenletből $x=\frac{6-5y}{2}$; ezt az első egyenletbe helyettesítve és rendezve a $79y^2-178y+40=0$ egyenlethez jutunk. Ebből $y_1=2$, $y_2=\frac{20}{79}$. A megfelelő x értékek: $x_1=-2$, $x_2=\frac{187}{79}$. A megoldások $x=-2$, $y=2$ és $x=\frac{187}{79}$, $y=\frac{20}{79}$.

835. $x_1=-\frac{72}{11}$, $y_1=-\frac{37}{11}$; $x_2=9$, $y_2=7$.

836. Alkalmazva az $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ azonosságot, az $x^2-xy+y^2=31$, $x+y=11$ egyenletrendszerhez jutunk. Ebből $x=5$, $y=6$; $x=6$, $y=5$.

Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó egyenletek

837. $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. A feladat feltételének csak a 6 felel meg.

838. -2; 7.

839. 4.

840. Ha $x \geqq \frac{3}{2}$, akkor azonosságról van szó (minden $x \geqq \frac{3}{2}$ értékre teljesül az egyenlet), ha $x < \frac{3}{2}$, akkor az egyenlet bal oldala ellentmond a jobb oldalának. Megoldás $x \geqq \frac{3}{2}$.

841. $x < -1$ vagy $x \geqq 0$.

842. 3.

843. Ha $x \geqq 5$, akkor az egyenlet $x + x - 5 = 7$ alakú és ebből $x = 6$. Ha $0 \leqq x < 5$, akkor az egyenlet $x - x + 5 = 7$ alakú, de ebből nem kapunk megoldást. Ha $x < 0$, akkor az egyenlet $-x - x + 5 = 7$ alakú, és ebből $x = -1$, de ez nem felel meg a feladat feltételének. A megoldás: 6.

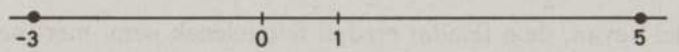
844. -1.

845. $\{-1; 3\}$.

846. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

847. Ha $x \leqq 2$, akkor az adott egyenlet $-x + 2 - 2x + 7 = 3$ alakú és ebből $x = 2$, és ez megfelel az előbbi feltételnek. Ha $2 < x \leqq \frac{7}{2}$, akkor az adott egyenlet $x - 2 - 2x + 7 = 3$ alakú, és ebből $x = 2$. Ez nem felel meg az előbbi feltételnek. Ha $x \geqq \frac{7}{2}$, akkor az adott egyenlet $x - 2 + 2x - 7 = 3$, és ebből $x = 4$. Ez megfelel az előbbi feltételnek. Az egyenletnek két megoldása van: $x = 2$ és $x = 4$.

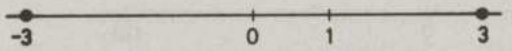
848. -3; 5 (**848.** ábra).



848

849. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

850. -3; 3 (**850.** ábra).



850

851. Ha $x < -3$, akkor $-x - 3 - x + 5 = 20$, ebből $x = -9$. Ha $-3 \leqq x < 5$, akkor $x + 3 - x + 5 = 20$, de ez nem ad megoldást. Ha $x \geqq 5$, akkor $x + 3 + x - 5 = 20$, ebből pedig $x = 11$. Két megoldás van: -9 és 11.

852. Nincs megoldás az egész számok halmazán.

853. 7.

854. $\frac{1}{7}$.

855. Négy esetet kell megkülönböztetnünk az abszolútértékek előjelváltásától függően. Ha $x < -2$, akkor $-x - 2(-x - 1) + 3(-x - 2) = 0$, és ebből $x = -2$, de ez a feltételnek nem felel meg. Ha $-2 \leqq x < -1$, akkor az egyenletből $4x = -8$, $x = -2$, és ez a feltételnek is megfelel, tehát gyök. Ha $-1 \leqq x < 0$, akkor az egyenlet bal oldala ellentmond a jobb oldalnak, gyök nincs. Végül ha $x \geqq 0$, akkor az egyenletből $x = -2$, de ez nem felel meg az előbbi feltételnek. A megoldás $x = -2$.

856. $x = 0$, $x = 4$.

857. -1; 0; 1.

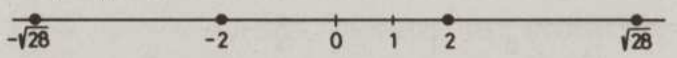
858. -2; 0; 2.

859. Ha $x \geqq 1$, akkor az egyenlet $2x^2 - x + 1 = 0$ alakú, de ennek diszkriminánsa negatív, tehát valós gyöke nincs. Ha $x < 1$, akkor az egyenlet $2x^2 + x - 1 = 0$ alakú és ebből $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$. Mind a két gyök megfelel az $x < 1$ feltételnek, tehát az eredeti egyenlet megoldása: -1; $\frac{1}{2}$.

860. Ha $x \geqq 2$, akkor az egyenlet $x^2-4x+3=0$, gyökei 3 és 1, de a feltételnek csak az $x=3$ felel meg. Ha $x<2$, akkor az egyenlet $x^2-x-3=0$, gyökei $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}>2$, $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}<2$. A feltételnek az utóbbi megfelel ugyan, de a feladat eredeti feltételének nem, mert nem egész szám. A megoldás: $x=3$.

861. $\sqrt{2}; \sqrt{6}$.

862. $\pm 2; \pm\sqrt{28}$ (**862.** ábra).



862

863. Ha $x^2-5x+4 \geqq 0$, vagyis $x \leqq 1$ és $x \geqq 4$, akkor az adott egyenlet $x^2-5x+3=0$ alakú. Ennek gyökei $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2}>4$ és $x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}<1$, tehát megoldások. Ha $x^2-5x+4<0$, vagyis $1<x<4$, akkor az adott egyenlet $x^2-5x+5=0$ alakú. Ennek gyökei: $x_3=\frac{5+\sqrt{5}}{2}(=3{,}61)$, $x_4=\frac{5-\sqrt{5}}{2}(=1{,}38)$. Mind a kettő megfelel a feltételnek, ezért végül négy megoldás van:
$\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

864. Az egyenlet bal oldala nemnegatív. A jobb oldal csak úgy lehet nemnegatív, ha $x \leqq 0$. Ha $x^2+2x-3 \geqq 0$, vagyis ha $x \geqq 1$ vagy $x \leqq -3$ (de az előbbi az $x \leqq 0$ feltétel miatt már nem lehet), akkor az adott egyenlet $x^2+6x-3=0$ alakú és ebből $x_1=-3+2\sqrt{3}>0$, és ez sem az $x \leqq 0$, sem az $x \leqq -3$ feltételnek nem felel meg, $x_2=-3-2\sqrt{3}<-3$, ez az előbbi feltételnek megfelelne, de nem természetes szám, ezért a feladat feltételének nem felel meg. Ha $x^2+2x-3<0$, vagyis ha $-3<x<1$, de az $x \leqq 0$ feltétel miatt $-3<x \leqq 0$, akkor az adott egyenlet $x^2-2x-3=0$ alakú és ebből $x_1=3$, $x_2=-1$. Az első gyök a $-3<x \leqq 0$ feltételnek, a második a feladat feltételének (a gyök természetes szám) nem felel meg. Mindezekből következik, hogy a feladatnak a természetes számok halmazán nincs megoldása.

865. $-3 \leqq x \leqq -2$ vagy $2 \leqq x \leqq 3$. **866.** $-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}$.

Gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenletek

867. Négyzetre emelve az egyenlet mind a két oldalán: $3-x=16$. Ebből $x=-13$, és ez valóban kielégíti az eredeti egyenletet.

868. $\frac{47}{4}$.

869. 508.

870. $\frac{17}{56}$.

871. 18.

872. $\frac{13}{48}$.

873. *Első megoldás:* Két nemnegatív szám összege akkor és csak akkor 0, ha mind a két szám külön-külön 0. A $\sqrt{x+2}=0$ egyenletből $x=-2$, a $\sqrt{1-3x}=0$ egyenletből $x=\frac{1}{3}$. Ez a kettő egyszerre nem teljesülhet, ezért az egyenletnek nincs megoldása a racionális számok halmazán. *Második megoldás.* Ha az egyik (például a második) gyökmennyiséget átvisszük az egyenlet jobb oldalára, majd négyzetre emelünk, akkor az $x+2=1-3x$ egyenletet kapjuk, és ebből $x=-\frac{1}{4}$. Ez azonban nem elégíti ki az eredeti egyenletet, mert visszahelyettesítve $\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2} \neq 0$; ezért az egyenletnek nincs megoldása a racionális számok halmazán. *Megjegyzések. 1.* Mind a két megoldásból (pl. az első megoldásbeli ellentmondásból) az is látszik, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán sincs megoldása.

2. Ha az eredeti egyenlet mind a két oldalán emelünk négyzetre, akkor a kétszeres szorzatban a négyzetgyök megmarad, és egy újabb négyzetre emelést kell végrehajtanunk. Ennek eredménye rendezés után a $16x^2+8x+1=0$ másodfokú egyenlet, amelynek kettős gyöke $x=-\frac{1}{4}$. Látható, hogy az utóbbi megoldás mennyire bonyolult.

874. Nincs megoldás a racionális számok halmazán.

875. Nincs megoldás a negatív számok halmazán.

876. $\frac{1}{36}$.

877. 9840.

878. $17\sqrt{2}$.

879. $\frac{17}{2}$.

880. $\frac{7}{30}$.

881. Igen. $x=\frac{25}{24}$.

882. 1.

883. 1,6.

884. -4.

885. $\frac{5}{32}$.

886. $-\sqrt{15}; \sqrt{15}$.

887. $-2; 2$.

888. 0.

889. $x_{1,2}=\pm 5\sqrt{2}$. Az egyenlet egyik valós gyöke sincs a $]-5; 5[$ intervallumban.

890. $x_{1,2}=\pm 3$. Igen, mind a kettő.

891. $-5; 5$.

892. 11, mert -11 nem természetes szám.

893. $x=\pm\sqrt{\frac{119}{120}}=\pm 0{,}992$, ezért az egyenletnek 1-nél nagyobb valós gyöke nincs. (Ez a $119<120$ egyenlőtlenségből is azonnal látszik.)

894. $\pm\sqrt{\frac{11}{12}}=\pm 0{,}916$.

895. Az egyenlet mind a két oldalán négyzetre emelve és rendezve az $x^2-4x-12=0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $x_1=6$, $x_2=-2$. A második gyök nem pozitív, ezért nem felel meg a feladat feltételének, tehát a pozitív számok halmazán egy megoldás van: $x=6$.

896. $x_1x_2=3(-4)=-12$.

897. Van. (Mind a két gyöke az adott intervallumba esik, mert $x_1=\frac{1+\sqrt{73}}{12}=0{,}795<1$, $x_2=\frac{1-\sqrt{73}}{12}=-0{,}629>-1$.)

898. $2; 7$.

899. A rendezés után kapott egyenlet $3x^2+2x-1=0$; ennek gyökei $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-1$. Az eredeti egyenletet az x_2 nem elégíti ki, x_1 igen, ezért a megoldás $x=\frac{1}{3}$.

900. 1.

901. 2.

902. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{5}$, $x_1+x_2=0{,}7$.

903. 0,5, mert az egyenletnek csak ez az egy valós gyöke van.

904. $\frac{1}{3}$.

905. $\frac{3}{2}$.

906. $\frac{1}{4}$.

907. A négyzetre emelés után kapott egyenlet $6x^2+5x-6=0$ alakú. Ebből $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{3}{2}$. Az eredeti egyenletet csak az $x=\frac{2}{3}$ elégíti ki.

908. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.

909. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.

910. 3.

911. Nincs ilyen gyök, mert $x_1=5$ és ez nem esik az adott intervallumba, $x_2=-2$, ez viszont nem elégíti ki az eredeti egyenletet.

912. $\frac{1}{2}$.

913. $-\frac{1}{4}$.

914. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

915. A négyzetre emelés és rendezés után kapott egyenlet $3x^2+7x-6=0$ alakú. Ebből $x_1=\frac{2}{3}$; ez kielégíti az eredeti egyenletet is és a feltételt is, $x_2=-3$, ez kielégíti ugyan az eredeti egyenletet, de a feladat feltételét nem, ezért a megoldás $x=\frac{2}{3}$.

916. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.

917. $\frac{4}{3}$.

918. -2; $\frac{3}{7}$.

919. $x_1=2$, $x_2=-\frac{5}{2}$, tehát van a gyökök között egész szám: $x=2$.

920. 4.

921. -4.

922. 4.

923. 10.

924. Az $]1;2[$ intervallumban nincs megoldás, mert $x_1=2$, $x_2=1$.

925. Az egyenlet gyökei: 0; 3. A feltételnek csak a 3 felel meg.

926. Nincs megoldása a feladatnak.

927. A négyzetre emelés és rendezés után kapott $x^2-7x+12=0$ egyenlet gyökei $x_1=4$, $x_2=3$. Ezek egyike sem elégíti ki az eredeti egyenletet, ezért nincs megoldás a valós számok halmazán.

928. 1.

929. Nincs megoldás a negatív számok halmazán.

930. $\frac{13}{2}$; $-\frac{7}{2}$.

931. *Első megoldás.* Ha az egyenletet $\sqrt{x+3}$-mal megszorozzuk és rendezzük, akkor az $x+7=4\sqrt{x+3}$ egyenletet, majd négyzetre emelés és rendezés után az $x^2-2x+1=0$ egyenletet kapjuk. Ennek egy kétszeres gyöke van: $x=1$. Ez az eredeti egyenletet is kielégíti.
Második megoldás. A $\sqrt{x+3}=y$ helyettesítés után az $y^2-4y+4=0$ egyenletet kapjuk. Ennek egyetlen kétszeres gyöke: $y=2$, ezzel $x=y^2-3=1$, és ez az eredeti egyenletet is kielégíti.

932. $x=5$, de ez nem elégíti ki az eredeti egyenletet, ezért nincs megoldás a valós számok halmazán.

933. 4.

934. $\frac{5}{2}$. ($x=0$ nem felel meg a feladat feltételeinek.)

935. Az első négyzetre emelés után $2\sqrt{(4-x)(x-3)}=0$, a második négyzetre emelés után $x^2-7x+12=0$. Ennek gyökei $x_1=4$, $x_2=3$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

936. $\frac{3}{2}$.

937. -1.

938. A kétszeri négyzetre emelés és rendezés után $x^2-2x-3=0$. Ebből $x_1=3$, de ez nem elégíti ki az eredeti egyenletet; $x_2=-1$, ez kielégíti az eredeti egyenletet, de nem természetes szám. Ezért nincs megoldás a természetes számok halmazán.

939. $\{34\}$.

940. $\emptyset$.

941. $\{5\}$.

942. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

943. Az adott egyenlet a $\sqrt{(2x+1)^2}-\sqrt{(2x-3)^2}=4$, illetve az $|2x+1|-|2x-3|=4$ alakba írható. Ha $x<-\frac{1}{2}$, akkor $-2x-1-(-2x+3)=4$, és ebből nincs gyök. Ha $-\frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{2}$, akkor $2x+1-(-2x+3)=4$, ebből $x=\frac{3}{2}$, de ez nem elégíti ki az előző feltételt. Ha $x\geqq\frac{3}{2}$, akkor $2x+1-(2x-3)=4$. Ez az egyenlet minden x értékre fennáll. Az adott egyenlet megoldáshalmaza tehát a $\left[\frac{3}{2};\infty\right[$ számhalmaz.

944. 4.

945. 1; 3.

946. 2.

947. A megoldandó egyenlet: $9x^2+20x+4=0$. Ebből $x_1=-\frac{2}{9}$, $x_2=-2$.

948. 6.

949. A megoldandó egyenlet: $3x^2-4x-24=0$. Nincs megoldás a racionális számok halmazán, mert a diszkrimináns (304) nem négyzetszám.

950. Van, $x=5$.

951. Nincs. ($x=3$).

952. 2.

953. $x=6$.

954. Az egyenlet bal oldala akkor van értelmezve, ha $x\geqq 2$, és ekkor értéke $\geqq\sqrt{2}$. Az egyenlet jobb oldala ugyanekkor $1-x\leqq -1$. E két megállapítás ellentmond egymásnak, ezért az egyenletnek nincs megoldása, megoldáshalmaza az üres halmaz: $\emptyset$.

Megjegyzés: Ha a gyökmennyiségek kiküszöbölése érdekében kétszer négyzetre emelünk és összevonunk, akkor az $x^4-8x^3+18x^2-16x+9=0$ negyedfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldáshalmazát középiskolai eszközökkel nem tudjuk meghatározni.

955. $\{3\}$.

956. 1.

957. Négyzetre emeléssel és rendezéssel az egyenlet az $x-1=16^2(x-1)^2$ alakra hozható. Ez vagy akkor teljesül, amikor $x_1=1$, vagy akkor, amikor $x-1=\frac{1}{16^2}$. Ebből $x_2=\frac{257}{256}$. Az x_1 gyök kielégíti az eredeti egyenletet és benne van az adott intervallumban. Ha a fenti átalakítást nem vesszük észre, akkor a megoldandó egyenlet $256x^2-513x+257=0$ alakú.

958. Nincs megoldása a valós számok halmazán.

959. A megoldandó egyenlet $x^2-14x+33=0$. Ennek $x_1=3$ gyöke kielégíti az eredeti egyenletet, de nincs az adott intervallumban, az $x_2=11$ gyöke nem elégíti ki az eredeti egyenletet.

960. Négyzetre emelések és rendezések után $x^2-18x+45=0$. Az $x_1=15$ nem elégíti ki az eredeti egyenletet, az $x_2=3$ gyök igen, a megoldás: 3.

961. $\frac{2}{3}$.

962. 3.

963. A megoldandó egyenlet $4x^2-15x-25=0$. Ennek $x_1=5$ gyöke kielégíti az eredeti egyenletet és benne van a [3; 5] számközben, tehát megoldás; $x_2=-\frac{5}{4}$ kielégíti az eredeti egyenletet, de nincs az adott intervallumban, tehát nem megoldás.

964. A megoldandó egyenlet $5x^2-47x+110=0$. Ennek csak az $x=\frac{22}{5}$ gyöke elégíti ki az eredeti egyenletet is és benne van a]4; 5[számközben is.

965. 26.

966. 7.

967. Köbre emelés és rendezés után az $x(x^2-4x+4)=0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei: $x_1=0$, $x_{2,3}=2$. Mind a három gyök kielégíti az eredeti egyenletet és a feltételt is, tehát két különböző gyök van: $x_1=0$ és $x_2=2$ (ez kétszeres gyök).
Megjegyzés: A természetes számok halmaza egyes definíciók szerint tartalmazza a 0-t, mások szerint nem. Az MSZ 4899/2–84 magyar szabvány szerint a természetes számok halmazának legkisebb eleme a 0.

968. -2; 2.

969. 1.

Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenletrendszerek

970. Azonos átalakítással $9^x=9^{-3}$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt ebből $x=-3$. A különböző pozitív és 1-től különböző alapú exponenciális függvények szigorú monotonitására a fejezet csaknem minden exponenciális egyenlete megoldásánál hivatkozni szükséges, de ezt helykímélés érdekében nem mindig tesszük meg a továbbiakban.

971. -5.

972. $-\frac{1}{3}$.

973. $-\frac{5}{4}$.

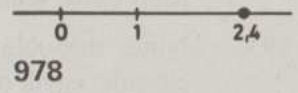
974. Van. $x=-2{,}5$.

975. $3^{-\frac{7}{3}}=3^x$, ebből $x=-\frac{7}{3}$.

976. Van, $x=\frac{5}{6}$.

977. $\frac{4}{3}$.

978. $\frac{12}{5}$ (**978.** ábra).



978

979. Azonos átalakítással $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$. Ebből $x=-\frac{8}{3}$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet.

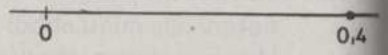
980. 3.

981. Azonos átalakításokkal $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{24}{54}$. Ebből $x=2$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet.

982. 1.

983. Felhasználva, hogy $1=5^0$, az eredeti egyenletből $3x-1=0$ következik. Ebből $x=\frac{1}{3}$.

984. $\frac{2}{5}$ (**984.** ábra).



984

985. 2.

986. Azonos átalakításokkal $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$. Ebből $x=3$.

987. $x=-3$.

988. Igen, $x=\frac{3}{2}$.

989. 4.

990. Azonos átalakításokkal $2^{\frac{2x-3}{3}} = 2^{-\frac{3-x}{7}}$. Ebből $14x-21=-9+3x$, vagyis $x=\frac{12}{11}$.

991. Az átalakított egyenlet $2^{2x-4} \cdot 2^{x-3} = 2^8$ alakú, ebből $3x-7=8$, illetve $x=5$.

992. Nincs megoldás az egész számok halmazán, mert a bal oldalon álló 2 hatványa páros, 3 hatványa páratlan szám, ezek különbsége pedig nem lehet páros szám. $2^{x+2}=1$ sem lehet, mert ekkor a bal oldal nem 702.

993. Nincs megoldás a valós számok halmazán, mert rendezés után az egyenlet egyik oldalán 0, a másik oldalán 72 áll, ez pedig ellentmondás.

994. $x=2$.

995. A megoldandó egyenlet $9^x=81$, ebből $x=2$.

996. Azonos átalakítások után $4^x=\frac{3}{2}$. Ebből $x=\frac{\lg 3-\lg 2}{\lg 4}=0{,}2925$.

997. 3.

998. Van, $x=3$.

999. 2.

1000. Az egyenlet megoldása $x=1$. Mivel ez kisebb, mint 2, a feladat kérdésére „igaz" a válasz. Sőt „igaz" a válasz akkor is, ha a kérdés (élesebben) így hangzott volna el: „Igaz-e az, hogy $x<2$, ha...".

1001. Azonos átalakítások után a $8 \cdot 2^{2x}-33 \cdot 2^x+4=0$, a 2^x ismeretlenre nézve másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $2^x=4$ és $2^x=\frac{1}{8}$. Ebből $x_1=2$, $x_2=-3$. Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek, de az adott intervallumban nincsenek benne, ezért az egyenletnek a $[0;\ 1]$ intervallumban nincsen megoldása.

1002. Van, $x=-1$.

1003. Az átalakított $2 \cdot 8^x+9 \cdot 9^x=11$ egyenletről leolvasható, hogy akkor teljesül, ha $x=0$, tehát a kérdezett és feltételezett egyetlen (mert egyesszámot használt a kérdező) valós gyököt megtaláltuk. A megoldás $x=0$.

1004. $\frac{1}{4}$.

1005. Azonos átalakításokkal $3x^2-2x-1=0$. Ebből $x_1=1$ és ez megfelel a feladat feltételének is, $x_2=-\frac{1}{3}$, de ez nem felel meg a feladat feltételének, mert nem pozitív. A megoldás $x=1$.

1006. 2.

1007. 2.

1008. 24.

1009. Kettes alapú hatványokra áttérve $2^{-3} \cdot 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-2}$. Ebből $-6+3x-1=-4$, és így $x=1$.

1010. A két oldal azonos átalakításával $\left(\frac{8}{5}\right)^{2(\sqrt{x}-1)} = \left(\frac{8}{5}\right)^{-4(\sqrt{x}-1)}$. Ebből $\sqrt{x}-1 = -2(\sqrt{x}-1)$, $\sqrt{x}-1 = 0$, $x=1$, és ez kielégíti az eredeti egyenletet is.

1011. Azonos átalakításokkal $5^{2x-4} = 2^{1-x}$, majd $50^x = 1250$. Ebből $x = \frac{\lg 1250}{\lg 50} = \left(2 - \frac{\lg 2}{\lg 50}\right) = 1{,}82$.

1012. -2.

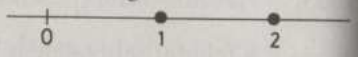
1013. Azonos átalakítások után $2^{\frac{3x^2-12}{3}} = 2^{-3x}$, ebből $x^2+3x-4 = 0$. A gyökök $x_1=1$, $x_2=-4$. Mind a kettő eleget tesz az egyenletnek is és a feladat feltételeinek is.

1014. A megoldandó egyenlet $x^2+2x-3 = 0$. Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=-3$, de ezek közül a feladat feltételének csak az $x=1$ felel meg.

1015. 1. **1016.** 1.

1017. Az egyenletből $|3x-2| = 2$. Ha $x \geqq \frac{2}{3}$, akkor $3x-2 = 2$, ebből $x = \frac{4}{3}$ és ez megfelel. Ha $x < \frac{2}{3}$, akkor $-3x+2 = 2$, és ebből $x=0$ és ez is megfelel. Két megoldása van az egyenletnek: $x = \frac{4}{3}$ és $x=0$.

1018. $\{-1; 1\}$.



1019

1019. A kitevők egyenlőségéből $x = \frac{1}{3}$, de ez nem gyök, mert a bal oldalon negatív szám törtkitevős hatványa állna, és ezt nem értelmezzük. Ha mind a két alap 1, akkor $x=2$. Ha mind a két alap 0, akkor $x=1$ (**1019.** ábra).

1020. A kitevők egyenlőségéből $x=6$ vagy $x=5$. Ha mind a két alap 0, akkor $x=3$, de ez nem gyök, mert a bal oldalon ekkor 0° áll. Ha mind a két alap 1, akkor $x=4$. Ha mind a két alap -1, akkor $x=2$, és ekkor a kitevők párosak, tehát az egyenlet teljesül. Így az egyenlet megoldáshalmaza: $\{2; 4; 5; 6\}$.

1021. 3. **1022.** 4. **1023.** -1.

1024. A megoldandó egyenlet: $3^{2x}-6\cdot 3^x-27 = 0$. Ennek egyik gyöke $3^x=9$, ebből $x=2$, másik gyöke $3^x=-3<0$ és ez nem lehetséges. A kapott gyök eleget tesz a feladat feltételének is (természetes szám), ezért a megoldás $x=2$.

1025. 2.

1026. 1; 3.

1027. -1.

1028. -2.

1029. 1.

1030. $x=1$.

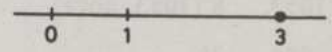
1031. A megoldandó egyenlet $9\cdot 3^{2x}+26\cdot 3^x-3 = 0$. Ennek egyik gyöke $3^x = \frac{1}{9}$, ebből $x=-2$, de ez nem felel meg a feladat feltételének, mert nem pozitív, másik gyöke $3^x=-3<0$, de ez lehetetlen. Nincs olyan pozitív x érték, amelyre az egyenlet teljesül.

1032. $x=2$; $x=3$.

1033. 0.

1034. -2.

1035. 3 (**1035.** ábra).



1035

1036. $\{5\}$.

1037. $\{6\}$.

1038. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

1039. $x=0$.

1040. 1.

1041. Azonos átalakításokkal $3\cdot 2^x = \frac{8}{9}\cdot 3^x$, majd $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$. Ebből $x=3$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet is és a feltételt is.

1042. 2.

1043. 1.

1044. 0.

1045. 1.

1046. 1.

1047. Az $5^{\sqrt{x+1}}$-ben másodfokú egyenlet egyik gyöke $5^{\sqrt{x+1}} = 5$, ebből $\sqrt{x+1} = 1$, és így $x=0$; másik gyöke $5^{\sqrt{x+1}} = 5^{-1}$, ebből $\sqrt{x+1} = -1$, de ez nem lehetséges, mert a bal oldalon pozitív szám áll. Az $x=0$ érték minden feltételt teljesít, ez a megoldás.

1048. Az egyenlet $\lg x = 4 \lg 2 = \lg 16$ alakra hozható. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt ez akkor és csak akkor teljesül, ha $x=16$. Az egyenletnek van egész gyöke, mégpedig a 16. A különböző pozitív (de nem 1) alapú logaritmusfüggvények szigorú monotonitására a fejezet csaknem valamennyi logaritmusos feladatának megoldásánál hivatkozni szükséges, de helykímélés végett ezt legtöbbször nem tesszük meg a továbbiak során.

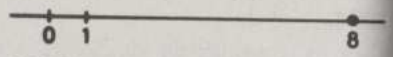
1049. 5.

1050. 200.

1051. 100.

1052. 9.

1053. 8 (**1053.** ábra).



1053

1054. 26.

1055. Az egyenlet jobb oldalának azonos átalakításaival $\lg(x-0{,}99) = \frac{\lg 100}{\lg 0{,}1} = \frac{2}{-1} = -2 = \lg 0{,}01$. Ebből $x-0{,}99 = 0{,}01$, vagyis $x=1$. Ez az érték megfelel a feladat feltételeinek is.

1056. 104.

1057. 4.

1058. A $\lg(2x-1) = \lg(x-2)$ egyenletből $2x-1 = x-2$, és ebből $x=-1$, de erre az értékre nincs értelme az adott egyenletnek, mert ekkor $x-2 = -3<0$. Az egyenletnek nincs megoldása (az egész számok halmazán sem).

1059. -1.

1060. $x = \frac{1}{2}$. Nincs megoldása a racionális számok halmazán, mert például $x-3 = \frac{1}{2} - 3 < 0$.

1061. 2.

1062. Átalakításokkal $100^{\lg(x+20)} = 100^2$, $\lg(x+20) = \lg 100$, $x+20 = 100$, $x=80$. Igaz, hogy $x \geqq 70$ (sőt az is, hogy $x>70$).

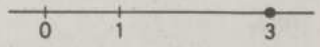
1063. 18.

1064. Átalakítások után $(5^{\sqrt{x}})^2 - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$. Ebből vagy $5^{\sqrt{x}} = 125$, $\sqrt{x}=3$, $x=9$, és ez a megoldás, vagy $5^{\sqrt{x}} = -1$, ami lehetetlen, mert a bal oldalon pozitív szám áll.

1065. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1066. A megoldandó egyenlet $16x^2 - 122x + 225 = 0$. Ebből $x_1 = \frac{9}{2}$, ez valóban megoldás, $x_2 = \frac{25}{8}$, de ez $4x-15 = \frac{25}{2} - 15 < 0$ miatt nem jöhet szóba.

1067. 3 (**1067.** ábra).



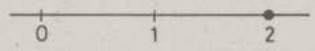
1067

1068. Az átalakítások után kapott egyenlet: $x^2 - 8x + 15 = 0$. Ennek (és az eredeti egyenletnek) gyökei: $x_1=3$; $x_2=5$.

1069. Az átalakítások után kapott egyenlet $\lg^2 x - 17 \lg x + 16 = 0$. Ennek gyökei $\lg x = 1$, $\lg x = 16$. Ezekből $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{16}$. Az első kielégíti az eredeti egyenletet, a második nem, mert $4 - 16 \neq 3 \cdot 4$. A megoldás $x=10$.

1070. Fokozatosan átalakítva az egyenletet: $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = \lg 100$, $2x^2 - 19x - 91 = 0$. Ennek egyik gyöke $x_1 = 13$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet is, másik gyöke $x_2 = 9$, de erre az értékre nem értelmezhető az egyenlet bal oldalának első tagja. Így a megoldás $x=13$.

1071. 2 (**1071.** ábra).



1071

1072. 6.

1073. Átalakítva az egyenletet: $\sqrt{3x-5}\sqrt{7x-3} = 10\sqrt{0{,}11}$; $21x^2-44x+4 = 0$. Ennek $x_1=2$ gyöke megoldás, $x_2 = \frac{2}{21}$ gyöke nem, mert erre az értékre az egyenlet nem értelmezhető.

1074. 0.

1075. Átalakítva az egyenletet: $(\lg x)^2 = \lg 1000 + \lg x^2$; $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$. Ebből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = -1$, vagyis $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

1076. $\frac{9}{2}$; $\frac{99}{2}$.

1077. Az adott egyenlet csak akkor áll fenn, ha $\log_3 (x-1) = 2$. Ez akkor igaz, ha $x-1 = 3^2$, ebből pedig $x=10$. Ez az érték kielégíti az eredeti egyenletet is, tehát megoldás.

1078. Az átalakítás lépései: $1+\log_2 (1+3\log_2 x) = 3$; $\log_2 (1+3\log_2 x) = 2^2$; $1+3\log_2 x = 4$; $\log_2 x = 1$; $x=2$. Ez az eredeti egyenletet is kielégíti, tehát megoldás.

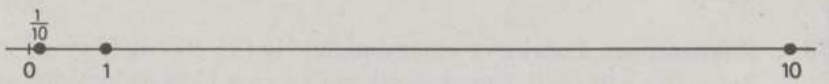
1079. $x=-1$.

1080. $x=2$.

1081. $\{4\}$. (Fel kell ismerni, hogy $0{,}4771 = \lg 3$.)

1082. $\{80\}$.

1083. A megoldandó egyenlet $(x^{\lg x})^2 - 11x^{\lg x} + 10 = 0$. Ebből $x^{\lg x} = 1$ és $x^{\lg x} = 10$. Az első egyenletből $(\lg x)^2 = 0$, $x_1 = 1$, a másodikból $(\lg x)^2 = 1$, $\lg x = \pm 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0{,}1$. Mind a három érték kielégíti az eredeti egyenletet is, tehát három megoldás van (**1083.** ábra).



1083

1084. 8.

1085. $\frac{7}{4}$.

1086. Az átalakított egyenlet $4x^2+3x-10 = 0$. Az $x_1 = \frac{5}{4}$ gyök a feltétel miatt nem jöhet szóba, az $x_2 = -2$ gyök pedig nem esik a feltételként előírt halmazba. Az adott egyenletnek a negatív számok halmazán nincs megoldása.

1087. 3; 1,5.

1088. -1.

1089. Az átalakításokkal kapott egyenletek $x^3+3x^2-27 = x^3$; $x^2=9$. Ebből $x_1=3$, $x_2=-3$. $x_2<0$, ezért nem lehet logaritmus alapja, x_1 kielégíti az eredeti egyenletet is, ezért a megoldás $x=3$.

1090. Az átalakított egyenlet $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 = 0$. Ebből $\log_2 x = 4$, $x_1 = 16$ és $\log_2 x = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet is.

1091. 4.

1092. $\frac{1+\sqrt{73}}{2}$ $(=4{,}77)$.

1093. 3.

1094. 2.

1095. 2.

1096. $\sqrt[3]{4}$.

1097. $\{2\}$.

1098. 5.

1099. 5.

1100. Az átalakításokkal kapható egyenletek: $\lg(10x^2+20) = \lg 100 + \lg 0{,}3x$; $10x^2+20 = 30x$; $x^2-3x+2 = 0$. Ebből $x_1=1$, $x_2=2$. Mind a két gyök minden feltételnek megfelel, tehát megoldás.

1101. 13.

1102. 0.

1103. Az átalakításokkal kapható egyenletek: $x \lg 2 = \lg(3+2^{x-2})$; $2^x = 3+\frac{2^x}{4}$; $2^x=4$. Ebből $x=2$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet is és a feltételt is.

1104. 10.

1105. A megoldandó egyenlet $2^{2x}-2\cdot 2^x+1=0$. Ebből $2^x=1$, így $x=0$.

1106. $\{0\}$.

1107. 0.

1108. Nincs. A két gyök $x=\sqrt{10}$ és $x=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

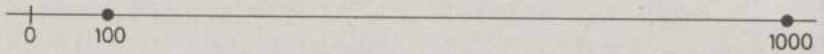
1109. $x=10$.

1110. A megoldandó egyenlet $(\log_2 x)^2+(\log_2 x)-6=0$. Ebből $\log_2 x=2$ vagy $\log_2 x=-3$. Az elsőből $x_1=4$, a másodikból $x_2=\frac{1}{8}$. Az egyenlet megoldáshalmaza: $\left\{\frac{1}{8};4\right\}$.

1111. 100.

1112. 1000, mert a másik gyök 100.

1113. 100; 1000 (**1113.** ábra).



1113

1114. $\left\{\frac{1}{10}\right\}$.

1115. Átalakítások után $2\lg^2 x-\lg x-1=0$. Ebből vagy $\lg x_1=1$ és így $x_1=10$, vagy $\lg x_2=-\frac{1}{2}$ és így $x_2=\frac{\sqrt{10}}{10}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet és a kisebbik gyök az $x_2=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

1116. 5 alapra hozva az egyenlet valamennyi tagját: $5^{\lg x-\lg^2 x}=5^{-3}\cdot 5^{\lg x-1}$. Ebből $\lg x-\lg^2 x=\lg x-4$, $\lg^2 x=4$, $\lg x=\pm 2$. Ha $\lg x=2$, akkor $x=100$ és ez megfelel valamennyi feltételnek; ha $\lg x=-2$, akkor $x=\frac{1}{100}$ és ez kielégíti az adott egyenletet, de a feladat feltételét nem (nem egész), így a megoldás $x=100$.

1117. $\frac{2}{3}$.

1118. Az egyenlet jobb oldala azonos átalakításokkal: $\log_2\frac{x^2}{2}+3=2\log_2 x-\log_2 2+3=2(\log_2 x+\log_2 2)-3\log_2 2+3=2\log_2 2x$. Így az egyenlet $(\log_2 2x)^2-2\log_2 2x=0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha vagy $\log_2 2x=0$, vagy ha $\log_2 2x=2$. Az első esetben $2x=1$ és így $x=\frac{1}{2}$, a második esetben $2x=2^2=4$, és így $x=2$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet, tehát a megoldás $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$.

1119. Átalakítások után az adott egyenlet $4\cdot(2^{\log_x 5})^2+15\cdot 2^{\log_x 5}-4=0$ alakra hozható. Innen $2^{\log_x 5}=\frac{1}{4}$ vagy $2^{\log_x 5}=-4$, de ez utóbbi nem lehetséges. A $2^{\log_x 5}=2^{-2}$ egyenletből $\log_x 5=-2$, $x^{-2}=5$, így $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. $x=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$ nem lehet logaritmus alapszáma, ezért $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ és ez minden feltételt kielégít.

1120. $\left\{\frac{1}{4};2\right\}$.

1121. $\left\{\frac{1}{9};27\right\}$.

1122. $x=\sqrt[3]{5}$.

1123. $x=\frac{1}{2}$; $x=4$.

1124. A $2^{\log_x 3}$-ban másodfokú egyenletből $2^{\log_x 3}=9$ vagy $2^{\log_x 3}=8$. Az első egyenlet $2^{\log_x 3}=2^{\log_2 9}$ alakba írható. Ebből $\log_x 3=\log_2 9$, vagy azonos alapokra áttérve $\frac{\log_2 3}{\log_2 x}=2\log_2 3$. Ebből $\log_2 x=\frac{1}{2}$ és végül $x=\sqrt{2}$. A második egyenlet $2^{\log_x 3}=2^3$ alakjából $\log_x 3=3$ és így $x^3=3$, vagyis $x=\sqrt[3]{3}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

1125. $x=1$.

1126. Az adott egyenletből $\lg x^2=5$ vagy $\lg x^2=-8$. Az első egyenletből $x^2=10^5$ és így $x_{1,2}=\pm\sqrt{10^5}$; a második egyenletből $x^2=10^{-8}$, és így $x_{3,4}=\pm 10^{-4}$. Az egyenletet mind a négy gyök kielégíti, a feladat feltételének azonban csak az $x=-100\sqrt{10}$ $(=-316{,}23)$ és az $x=-0{,}0001$ gyök felel meg.

1127. Azonos alapú logaritmusokra áttérve az egyenlet $\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2 0{,}5}=8$. Felhasználva, hogy $\log_2 0{,}5=-1$, az előbbi egyenletből $\log_2 x=4$, így $x=2^4=16$, és ez az érték kielégíti az eredeti egyenletet is.

1128. 16.

1129. 64.

1130. 25.

1131. a alapú logaritmusokra áttérve az adott egyenlet $\log_a x+2\frac{\log_a x}{\log_a a^2}+\frac{\log_a x}{\log_a a^3}=7$, illetve $\log_a x+2\frac{\log_a x}{2}+\frac{\log_a x}{3}=7$ alakú; ebből $\log_a x=3$, $x=a^3$, és ez kielégíti az adott egyenletet is.

1132. $\frac{1}{2}$.

1133. 49.

1134. $\{5\}$.

1135. Azonos, például 4-es alapú logaritmusokra áttérve $(2\log_4 x)(\log_4 2x)=1$. Átalakításokkal a $2(\log_4 x)(\log_4 2+\log_4 x)=1$, majd $2(\log_4 x)^2+\log_4 x-1=0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ebből $\log_4 x=-1$ vagy $\log_4 x=\frac{1}{2}$. Az első egyenletből $x_1=\frac{1}{4}$, a másodikból $x_2=2$. Az eredeti egyenletet mind a két gyök kielégíti, és mind a két gyök az adott számközbe esik.

1136. $x=9$.

1137. Azonos átalakításokkal: $\log_2(\sqrt{\lg x}+1)^2-\log_2(\sqrt{\lg x}+1)=\log_2 2$, $(\sqrt{\lg x}+1)^2=2(\sqrt{\lg x}+1)$. Ebből vagy $\sqrt{\lg x}=-1$, ami nem lehetséges, mert a jobb oldal negatív, a bal pedig nem; vagy $\sqrt{\lg x}+1=2$, $\sqrt{\lg x}=1$, $\lg x=1$, $x=10$ és ez kielégíti az eredeti egyenletet.

1138. 3; 9.

1139. x alapú logaritmusokra áttérve az egyenlet

$$\log_x 8-\frac{\log_x 8}{\log_x 4x}=\frac{\log_x 16}{\log_x 2x},\quad \text{illetve}\quad 3\log_x 2-\frac{3\log_x 2}{\log_x 4x}=\frac{4\log_x 2}{\log_x 2x}$$

alakú. Mivel $\log_x 2\neq 0$ minden megengedett x-re, ezért egyenletünk $3(\log_x 4x)(\log_x 2x)-3\log_x 2x=4\log_x 4x$ alakban írható fel. Felhasználva, hogy $\log_x x=1$, az előbbi egyenlet

$3(2\log_x 2+1)(\log_x 2+1)-3\log_x 2-3=8\log_x 2+4$

és ebből $3(\log_x 2)^2-\log_x 2-2=0$ alakra hozható. Az egyenlet gyökei $\log_x 2=1$ és $\log_x 2=-\frac{2}{3}$. Az elsőből $x=2$, a másodikból $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Az adott egyenletet mind a két gyök, a feladat feltételét csak az $x=2$ gyök elégíti ki. *Megjegyzés:* Hasonló megoldáshoz jutunk, ha 2-es alapú logaritmusokra térünk át. Ekkor a megoldandó egyenlet $2(\log_2 x)^2+\log_2 x-3=0$.

1140. 5.

1141. Azonos átalakításokkal $4(\log_4 x)^2+3\log_4 x-1=0$. Ennek gyökei $\log_4 x=\frac{1}{4}$, ebből $x_1=\sqrt{2}$ és $\log_4 x=-1$, ebből $x_2=\frac{1}{4}$. A megadott $[1;2]$ intervallumba ezek közül x_1 esik és ez kielégíti az adott egyenletet is. Megoldás: $x=\sqrt{2}$.

1142. 5.

1143. Írjuk át közös, például 10-es alapú logaritmusra az összes logaritmust! Ekkor $\frac{\lg(x-0{,}5)}{\lg(x+1)} = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-0{,}5)}$. Ebből $\lg^2(x-0{,}5) = \lg^2(x+1)$, majd $\lg(x-0{,}5) = \pm\lg(x+1)$. A pozitív előjelet figyelembe véve $x-0{,}5 = x+1$, de ez lehetetlen, a negatív előjelet tekintve $x-0{,}5 = \frac{1}{x+1}$ és ez rendezés után $2x^2+x-3 = 0$ alakú. Ebből $x_1 = 1$ és $x_2 = -\frac{3}{2}$. Ez utóbbi értékre nem értelmezhető az eredeti egyenlet, az előbbi kielégíti az adott egyenletet és egyetlen gyök lévén, egyúttal a legnagyobb is. Megoldás: $x = 1$.

1144. Ha az egyszerűbb írásmód kedvéért a $\log_9 x = y$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor az adott egyenlet az $5\frac{y}{y-1} + \frac{3y}{1-y} + \frac{16y}{1+2y} = 2$ alakban írható fel. Ez rendezés után $8y^2-6y+1 = 0$ alakú és ebből $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{4}$. A $\log_9 x = \frac{1}{2}$ egyenletből $x = \sqrt{9} = 3$, a $\log_9 x = \frac{1}{4}$ egyenletből $x = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$, de ez utóbbi nem racionális szám. Az $x=3$ gyök minden feltételnek megfelel, ez a megoldás.

1145. 64-es alapú logaritmussal dolgozva az egyenlet $6(\log_{64} x)^2 - \log_{64} x - 1 = 0$ alakra hozható. Ebből $\log_{64} x = \frac{1}{2}$, vagyis $x_1 = 8$ és $\log_{64} x = -\frac{1}{3}$, vagyis $x_2 = \frac{1}{4}$. Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. A két gyök összege $8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$.

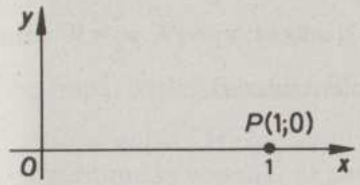
1146. Például egyenlő együtthatók módszerével számolva $3^x = 3$ és $2^y = 4$. Ebből $x=1$, $y=2$.

1147. $x=1$; $y=2$.

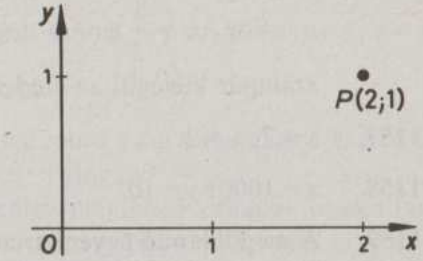
1148. $x=1$; $y=0$ (**1148.** ábra).

1149. $x=2$; $y=1$ (**1149.** ábra).

1150. $\lg x = 2$, $\lg y = 1$, így a számpár: (100; 10).



1148



1149

1151. $x=10$; $y = \frac{1}{10}$.

1152. Mind a két egyenlet mind a két oldalának 10-es alapú logaritmusát véve $\lg x + \lg y = \lg 500$, $(\lg y)(\lg x) = \lg 25$. $\lg x$ és $\lg y$ a $z^2-(2+\lg 5)z+2\lg 5 = 0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. Mivel $z_1 = 2$ és $z_2 = \lg 5$, ezért a $\lg x = 2$, $\lg y = \lg 5$ egyenletekből $x=100$, $y=5$; a $\lg x = \lg 5$, $\lg y = 2$ egyenletekből pedig $x=5$, $y=100$. Mind a két számpár megfelel a feladat feltételeinek.

1153. $(10^6; 10^{-1})$.

1154. Az egyenletrendszer $4x^2-y^2 = 3$, $\frac{2x+y}{2x-y} = 2$ alakra hozható. A második egyenletből $y = \frac{2}{3}x$, ezt az elsőbe helyettesítve $32x^2 = 27$. Ebből $x_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{8}$, a megfelelő y értékek $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$. A negatív számpár nem tartozik az egyenletrendszer értelmezési tartományába, a pozitív kielégíti az egyenletrendszert, tehát a megoldás a $\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ számpár.

1155. $x=1$, $y=8$; $x=8$, $y=1$.

1156. Ha a $\log_3 x = a$, $\log_9 y = b$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor a megoldandó egyenletrendszer $a+b = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$ alakú. A második egyenlet (az első felhasználásával) $ab = \frac{1}{2}$. Így a és b a $2z^2-3z+1 = 0$ egyenlet gyökeinek tekinthető. A gyökök: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Ha $a = \log_3 x = 1$ és $b = \log_9 y = \frac{1}{2}$, akkor $x_1 = 3$, $y_1 = 3$; ha

$a = \log_3 x = \frac{1}{2}$ és $b = \log_9 y = 1$, akkor $x_2 = \sqrt{3}$, $y_2 = 9$. Mind a két számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

1157. $x = 7$; $y = 3$.

1158. $x = 1000$; $y = 10$.

1159. A megoldandó egyenletrendszer: $11x = 13y$, $x^2 + y^2 = 290$. Csak a pozitív gyökpár felel meg: $x = 13$; $y = 11$.

1160. $x = \frac{15}{2}$; $y = \frac{25}{2}$ és $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$.

1161. Azonos átalakításokkal az első egyenlet $\sqrt{xy} = 4 - x$, a második $2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y}$ alakra hozható. E két egyenlet különbségéből $2x + \sqrt{y} = 5$, vagyis $\sqrt{y} = 5 - 2x$. Ha ezt a második egyenletbe helyettesítjük, akkor rendezés után a $4x\sqrt{x} - 2x - 10\sqrt{x} + 8 = 0$ egyenlethez jutunk. Azonnal látszik, hogy $\sqrt{x} = 1$, vagyis $x_1 = 1$ megoldás. Ha az előbbi $\sqrt{x}$-ben harmadfokú polinomot a $(\sqrt{x} - 1)$ gyöktényezővel elosztjuk, akkor a $4x + 2\sqrt{x} - 8$ hányadost kapjuk. Ennek zérushelyei $\sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$. A negatív gyök nem jöhet szóba, mert $\sqrt{x}$ pozitív. Így $\sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$, $x_2 = \frac{17 - \sqrt{33}}{8}$. A megfelelő y értékek: $y_1 = 9$, $y_2 = \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{4}\right)^2 = \frac{21 + 3\sqrt{33}}{8}$. Mind a két gyökpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert, tehát a megoldás: $x_1 = 1$, $y_1 = 9$; $x_2 = \frac{17 - \sqrt{33}}{8}$, $y_2 = \frac{21 + 3\sqrt{33}}{8}$.

1162. $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = -4$, $y_2 = -8$.

1163. $x = 4$; $y = 2$, vagy $x = 4$; $y = -2$.

1164. $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$.

1165. Az első egyenlet $xy = 5$, a második $x = 2 + 3y$ alakban írható fel. x értékét az első egyenletbe helyettesítve $3y^2 + 2y - 5 = 0$. Ebből $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{5}{3}$. A második gyök nem jöhet szóba. Így $x = 5$. Az $x = 5$, $y = 1$ számpár kielégíti az egyenletrendszert.

1166. *Első megoldás.* Ha az adott egyenletek mind a két oldalának 3-as alapú logaritmusát vesszük, akkor $(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = 5$, $2(\log_3 x)(\log_3 y) = 4$. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva $(\log_3 x + \log_3 y)^2 = 9$. Ebből vagy $\log_3 x + \log_3 y = 3$ vagy $\log_3 x + \log_3 y = -3$. Az első esetben $\log_3 x = 3 - \log_3 y$, ezt pl. a második egyenletbe helyettesítve $(3 - \log_3 y)(\log_3 y) = 2$, vagyis $(\log_3 y)^2 - 3\log_3 y + 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = 2$ vagy $\log_3 y = 1$, vagyis $y_1 = 9$ vagy $y_2 = 3$. A megfelelő x értékek például a második egyenletből $\log_3 x = 1$, illetve $\log_3 x = 2$ alapján $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. A második esetben $\log_3 x = -3 - \log_3 y$. Ezt pl. ismét a második egyenletbe helyettesítve $(-3 - \log_3 y)(\log_3 y) = 2$, vagyis $(\log_3 y)^2 + 3\log_3 y + 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = -1$, vagyis $y_3 = \frac{1}{3}$ vagy $\log_3 y = -2$, vagyis $y_4 = \frac{1}{9}$. Négy megoldás van: $x_1 = 3$, $y_1 = 9$; $x_2 = 9$, $y_2 = 3$; $x_3 = \frac{1}{3}$, $y_3 = \frac{1}{9}$; $x_4 = \frac{1}{9}$, $y_4 = \frac{1}{3}$.

Második megoldás. A két egyenlet megfelelő oldalainak a hányadosa $\left(\frac{x}{y}\right)^{\log_3 x} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\log_3 y} = 3$. Ebből $\left(\frac{x}{y}\right)^{\log_3 \frac{x}{y}} = 3$, majd $\left(\log_3 \frac{x}{y}\right)^2 = 1$, vagyis $\log_3 \frac{x}{y} = \pm 1$. Ez akkor teljesül, ha $\frac{x}{y} = 3$ vagy $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$. Az első esetben, vagyis ha $x = 3y$, akkor pl. az eredeti második egyenletbe helyettesítve $(3y)^{\log_3 y} y^{\log_3 3y} = 3^4$. Mind a két oldal 3-as alapú logaritmusát véve $2(\log_3 y)(\log_3 3y) = 4$, vagyis $(\log_3 y)^2 + \log_3 y - 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = 1$, vagyis $y_1 = 3$ vagy $\log_3 y = -2$, vagyis $y_3 = \frac{1}{9}$. Ezekből $x_1 = 9$, $x_3 = \frac{1}{3}$. Ha $x = \frac{y}{3}$, akkor hasonló módon a második egyenletből $(\log_3 y)^2 - \log_3 y - 2 = 0$. Ebből $\log_3 y = 2$, vagyis $y_2 = 9$, vagy $\log_3 y = -1$, vagyis $y_4 = \frac{1}{3}$, ekkor $x_2 = 3$, $x_4 = \frac{1}{9}$. Négy megoldáspár van: $x_1 = 9$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 9$; $x_3 = \frac{1}{3}$, $y_3 = \frac{1}{9}$; $x_4 = \frac{1}{9}$, $y_4 = \frac{1}{3}$.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy (1) az egyenletrendszernek a racionális számok halmazán négy megoldáspárja van; (2) ezeket, de az egész megoldásokat is a kétféle megoldásban más-más másodfokú egyenletekből más-más csoportosításban kaptuk meg; (3) az adott egyenletek x-ben és y-ban szimmetrikusak, ezért ennek a megoldásokra is teljesülnie kell.

1167. $x=2;\ y=6$.

1168. Az első egyenletből $\lg x = \frac{5}{2}\lg y$, a másodikból $(\lg x)(\lg y) - \lg^2 y = \lg x$. Ide $\lg x$ kifejezését behelyettesítve $\frac{5}{2}\lg^2 y - \lg^2 y = \frac{5}{2}\lg y$, vagyis $(\lg y)(3\lg y - 5) = 0$. Ez akkor teljesül, ha vagy $\lg y = 0$, de ekkor a második egyenletnek nincs értelme, vagy ha $\lg y = \frac{5}{3}$. Ekkor $y = 10^{\frac{5}{3}}$ és a $\lg x = \frac{25}{6}$ egyenletből $x = 10^{\frac{25}{6}}$. Egyetlen számpár a megoldás $\left(10^{\frac{25}{6}};\ 10^{\frac{5}{3}}\right)$.

1169. A két egyenlet mind a két oldalának 10-es alapú logaritmusát véve $\lg x + \lg y = \lg 300$, $(\lg y)(\lg x) = \lg 9$. $\lg x$ és $\lg y$ a $z^2 - z\lg 300 + \lg 9 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthető. Mivel

$$z_{1,2} = \frac{\lg 300 \pm \sqrt{\lg^2 300 - 4\lg 9}}{2} = \frac{2+\lg 3 \pm \sqrt{(2+\lg 3)^2 - 8\lg 3}}{2} =$$

$$= \frac{2+\lg 3 \pm \sqrt{(2-\lg 3)^2}}{2} = \frac{2+\lg 3 \pm (2-\lg 3)}{2},\ \text{ezért}\ z_1 = 2,\ z_2 = \lg 3.$$

Ebből következik, hogy $x_1 = 100$, $y_1 = 3$ vagy $x_2 = 3$, $y_2 = 100$. Mind a két gyökpár kielégíti az adott egyenletrendszert.

1170. A második egyenletből $y = \frac{3}{2}x$. Az első egyenlet mind a két oldalának x alapú logaritmusát véve $y = x\log_x y$. y kifejezett értékét ide helyettesítve $\frac{3}{2}x = x\log_x \frac{3}{2}x = x\left(\log_x \frac{3}{2} + 1\right)$. Ez akkor teljesül, ha vagy $x=0$ és ekkor $y=0$, de ez nem megoldás, mert 0^0-t nem értelmeztük, vagy ha $\log_x \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Ebből $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$, vagyis $x = \frac{9}{4}$. A hozzá tartozó y érték: $y = \frac{27}{8}$. A $\left(\frac{9}{4};\ \frac{27}{8}\right)$ számpár kielégíti az adott egyenletrendszert.

XI. FEJEZET

Egyenlettel vagy egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok

1171. Ha a tört nevezője x, akkor $\frac{x-5}{x} = \frac{x+2}{x+12}$. Ebből $x=12$. A tört $\frac{7}{12}$.

1172. Jelölje a szám tízeseit x, egyeseit y, akkor $x+y = 12$. A feladat feltétele szerint $1{,}75(10x+y) = 10y+x$. x helyébe $(12-y)$-t téve $17{,}5(12-y) + 1{,}75y = 10y+12-y$. Ebből $y=8$. A szám a 48.

1173. 96 vagy 69.

1174. Ha az első számot x jelöli, akkor a második szám $x-138$. A feladat feltétele szerint $x-15-(x-138+15) = 3(x-15+x-138+15)$. Ebből $x=87$, $x-138 = -51$. Az első szám 87, a második -51.

1175. Az első szám a 119, a második szám a 19.

1176. A nagyobbik szám az 1973, a kisebbik a 314.

1177. Ha a két szomszédos egész szám x és $x+1$, akkor $(x+1)^2 - x^2 = 51$, ebből $x=25$. A két szám 25 és 26, vagy $x^2-(x+1)^2 = 51$, és ebből $x=-26$. A két szám lehet -26; -25 is.

1178. 8.

1179. Legyen az eredeti tört nevezője x. Akkor $4\cdot\frac{3}{x} = \frac{3}{x-12}$. Ebből $x=16$. A keresett nevező 16.

1180. Ha a gondolt szám x, akkor $\frac{3x-5}{4} + 2x = 18$. Ebből $x=7$. A 7-re gondoltunk.

1181. A szám a 62.

1182. Ha x és y jelöl egy-egy számot, akkor $xy+x+y = 34$, illetve $(x+1)(y+1) = 35$. Mivel x és y egészek, ezért $x+1 = 5$, $y+1 = 7$ vagy fordítva. Ebből $x=4$, $y=6$ vagy $x=6$, $y=4$. $x+1 = 1$, $y+1 = 35$

vagy fordítva nem lehetséges, mert $x=0$ vagy $y=0$ nem felel meg a feladat feltételének. A két szám 4 és 6.

1183. A szám a 36.

1184. A feladat feltételei szerint $x+y+z = 10$, $xy+yz+zx = 31$. Az $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 100$ egyenlőségből $x^2+y^2+z^2 = 38$. Ez azt jelenti, hogy a legnagyobb szám (legyen ez például z) legfeljebb 6 lehetne, de 6 nem lehet, mert akkor $x=y=1$, és az összeg nem 10. Ha $z=5$, akkor $y=3$, $x=2$ megfelel. Ha $z=4$, akkor sem $y=4$, $x=2$, sem $y=3$, $x=3$ választás nem felel meg, mert a négyzetösszeg nem 38. A „legnagyobb" z 4-nél kisebb nem lehet. A három szám tehát 2, 3, 5.

1185. Mivel a feladat feltételei a 0-t nem zárják ki, a két szám 0 és 0 is lehet. Ha a két szám x és y, akkor $x+y = xy = x^2-y^2$. Az első egyenletből $x = \frac{y}{y-1}$ és ezt a második egyenletbe helyettesítve $\frac{y^2}{y-1} = \frac{y^2}{(y-1)^2} - y^2$. Ebből $y^2-y-1 = 0$. Az egyenlet gyökei $y_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. A megfelelő x értékek $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Két (nem zérus) számpár felel meg a feladat feltételeinek: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1186. Ha a szám második, harmadik, negyedik jegye rendre x, y, z, akkor a feltétel szerint:
$3(2\cdot 1000+100x+10y+z) = 1000x+100y+10z+2+27$.
Ebből rendezés után $5971 = 700x+70y+72$, vagyis
$853 = 100x+10y+z$. A keresett szám $2000+853 = 2853$.

1187. 4637.

1188. 2534.

1189. Ha a szám páros jegyeit x, páratlan jegyeit y jelöli, akkor $2(x+y) = 20$ és $100x+10y+x+y = 200$. Ebből a szám: 1919.

1190. Ha a négyjegyű szám jegyei rendre x, y, z, v, akkor $10x+y+10z+v = 95$, és $1000z+100v+10x+y = 1000x+100y+10z+v+5841$. Ebből $10z+v-10x+y = 59$. Összevetve ezt az első egyenlettel $2(10z+v) = 154$. Ebből $10z+v = 77$, és így $10x+y = 18$. A keresett szám 1877.

1191. 0 és 70.

1192. 0 és 48.

1193. Ha a számot x jelöli, akkor $\frac{30+x}{50+x} = \frac{50+x}{80+x}$. Ebből $x=10$.

1194. Ha a legfiatalabb testvér jelenleg x éves, akkor $x+11+5x+1 = 10x$. Ebből $x=3$ és így a három testvér 3, 11, 15 éves.

1195. Ha x jelöli a menetrend szerinti érkezés óráit, akkor $3x-6 = 2x-1$. Ebből $x=5$. Tehát 5 órakor érkezik a vonat menetrend szerint.

1196. Legyen az egyik zsebemben x forint, akkor a másikban $200-x$ forint van. A pénz átrakása után $x-\frac{1}{4}x-20 = 200-x+\frac{1}{4}x+20$ Ft van az egyes zsebekben. ebből $x=160$, így $200-x = 40$. Az egyik zsebemben 160 Ft, a másikban 40 Ft van.

1197. A megoldandó egyenlet $4x-1000 = 1000-x$. Így $x=400$ forintom van.

1198. Ha a játékos x forinttal ült le játszani, akkor
$\frac{5}{6}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{x}{2}+50\right)+40\right]-50 = 350$. Ebből $x=1000$.

1199. Ha a négyzet oldala x egység, akkor a feltétel szerint $(x+9)(x-6) = x^2$. Ebből a négyzet oldala 18 egység.

1200. 8 m.

1201. 40 m, 30 m, 32 m.

1202. A téglalap oldalai 5 cm és 8 cm hosszúak.

1203. Ha x jelöli a kelme hosszát, akkor $\frac{40\cdot\frac{7}{8}x}{25}+64 = \frac{45x}{25}$. Ebből $x=160$ cm.

1204. A kendő szélessége 28 cm, hosszúsága 84 cm.

1205. A megoldandó egyenlet $x+x+30^\circ = 180^\circ$. Ebből $x=75^\circ$.

1206. A háromszög szögei 38°, 86°, 56°.

1207. Ha a négy számot rendre x, y, z, v jelöli, akkor $x+y+z+v = 72$ és $x+5 = y-5 = 5z = \frac{v}{5}$. x-szel kifejezve a többi ismeretlent: $y = x+10$, $z = \frac{x+5}{5}$, $v = 5(x+5)$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $x+x+10+\frac{x+5}{5}+5(x+5) = 72$. Ebből $x=5$, majd rendre $y=15$, $z=2$, $v=50$. A keresett négy szám az 5; 15; 2; 50.

1208. A három szám a 8; 2; 15.

1209. A három szám a 4; 8; 3.

1210. Ha x számú alma volt, akkor a megoldandó egyenlet $2\{2[2(1+2)+2]+2\} = x$. Ebből $36 = x$. A 36 almából Péter 20-at, Pista 10-et, míg Mari 5-öt kapott.

1211. A 7–9. oldal megszámozásához 3, a 10–99. oldal megszámozásához $2 \cdot 90 = 180$ számjegy szükséges. A 100. oldaltól minden oldal megszámozásához három jegy szükséges. Így a feladat feltétele szerint (ahol x jelöli a 99-nél nagyobb sorszámú oldalak számát): $3+2 \cdot 90+3x = 819$. Ebből $x=212$. Mivel $212+99 = 311$, ezért 311 oldalas a könyv.

1212. A szótár 1996 oldalas.

1213. Ha az egyik gyereknek x, a másiknak y forintja volt, akkor a feladat feltételei szerint $\frac{10}{9}x = \frac{6}{5}y$ és $x+y-22 = \frac{10}{9}x$. Az egyenletrendszer megoldása $x=27$, $y=25$. A játék $\frac{6}{5}y = 30$ forintba került, az egyik gyereknek 27 Ft-ja, a másiknak 25 Ft-ja volt a vásárlás előtt.

1214. A téglalap területe a négyzet területének a $\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$-szöröse. Ez $1-\frac{24}{25} = \frac{1}{25} = 0{,}04$-résszel, vagyis 4%-kal kisebb a négyzet területénél.

1215. 37 db 5 és 10 forintosra van szükség.

1216. 1 perc alatt az első munkás $\frac{2}{3}$ terméket, a második munkás $\frac{1}{2}$, a harmadik munkás $\frac{1}{3}$ terméket készít el. Így 1 perc alatt együtt $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ terméket állítanak elő. Az első munkás teljesítménye $\frac{2}{3}:\frac{3}{2} = \frac{4}{9}$, a másodiké $\frac{1}{2}:\frac{3}{2} = \frac{1}{3}$, a harmadiké $\frac{1}{3}:\frac{3}{2} = \frac{2}{9}$. Mivel a 3150 forintot a teljesítmények arányában osztották el, ezért az első munkás $\frac{4}{9} \cdot 3150 = 1400$, a második munkás $\frac{1}{3} \cdot 3150 = 1050$, a harmadik munkás $\frac{2}{9} \cdot 3150 = 700$ forintot kapott.

1217. A hallgató a 2-esen kívül két 3-ast és egy-egy 4-est és 5-öst kapott.

1218. Ha x a fiúk, y a lányok száma, akkor $x-1 = y$ és $2(y-1) = x$. Ebből $y=3$, $x=4$.

1219. Az egyik raktárban 3820 kg, a másikban 955 kg liszt van.

1220. Ha x napig tartott a kirándulás, akkor $(x-1)15+10 = 10(x-1)+35$. Ebből $x=6$. 6 napig tartott a kirándulás.

1221. A csoportban 24 gyermek, az óvónőnek 80 cukorkája volt.

1222. Ha x jelöli a télen üdülők számát, akkor $x+x+72 = 214$. Ebből $x=71$. $\frac{71}{214} = 0{,}3318$, $\frac{143}{214} = 0{,}6682$. A dolgozók 33%-a télen, 67%-a nyáron üdült.

1223. Ha a szíj sebessége állandó, akkor a szóban forgó tárcsák fordulatszámának és átmérőjének a szorzata is állandó. Válasszuk a tárcsa átmérőjét 200 mm-nek.

1224. 150 fenyőfa és 50 tölgyfa van a farakásban.

1225. Ha az első rekeszben x kg alma van, akkor a másodikban $90-x$ kg alma és $0{,}25x = 0{,}2(90-x)$. Ebből $x=40$, $y=50$. Az első rekeszben 40 kg, a másodikban 50 kg alma van.

1226. A kereskedő 1 kg szőlőt 16 forintért vett. A feladat feltétele szerint $1{,}15 \cdot 16 \cdot x+0{,}95 \cdot 16 \cdot (50-x) = 856$, ha x jelöli a haszonnal eladott szőlő mennyiségét. Az egyenletből $x=30$. 30 kg szőlőt nyereséggel, 20 kg szőlőt veszteséggel adott el a kereskedő.

1227. 70 Ft.

1228. Ugyanakkora távolságon a két kerék átmérőjének és a fordulatszámának az aránya fordított. Ha x jelöli a hátsó kerék fordulatszámát, akkor $\frac{2x-50}{x}=\frac{3}{2}$. Ebből $x=100$. A keresett távolság $75\pi=236$ méter.

1229. A nehezebb téglából 676 darabot, a könnyebből 370 darabot tettek a gépkocsira.

1230. Az első utcában 26, a másodikban 22 háztömb van. Ha y jelöli az első utcában levő egy-egy tömb lakóinak a számát, akkor $26(y-50)=22y$. Innen $y=325$. Így összesen $21[26\cdot 275+22\cdot 325]=300\,300$ l vizet kell a vezetékbe szivattyúzni.

1231. Az első fiú 5, a második 6, az utolsó, az x-edik fiú, $x+4$ almát osztott ki, és mivel tőle mindegyik lány kapott almát, x fiú és $x+4$ lány volt az osztályban. Mivel $x+x+4=20$, ebből $x=8$, $x+4=12$. 12 lány volt az osztályban.

1232. Jelölje az út hosszát s. Az első turista (a visszafordulás miatt) $\frac{7}{5}s$ utat tesz meg és 140 percig (10 percet időzik) van úton, a második turista s utat tesz meg és 150 percig van úton. Ezért a feladat szerint $\frac{140}{\frac{7s}{5}}+5=\frac{150}{s}$. Ebből A és B távolsága: $s=10$ km.

1233. Jelölje x azt az utat, amit a B-ből induló jármű az A-ból indulóval való találkozásig megtesz, t azt az időt, ami a C-ből induló járműnek az A-ból indulóval való találkozásig eltelik. Készítsünk táblázatot az egyes járművek adatairól! (Nevezzük az A-ból induló járművet A-nak stb.)

	idő	út	sebesség
A és B találkozásáig			
az A-ból induló	2	$AB+x$	$\frac{AB+x}{2}$
a B-ből induló	2	x	$\frac{x}{2}$
B és C találkozásáig			
a B-ből induló	3	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{2}$
a C-ből induló	3	$\frac{3x}{2}-AB$	$\frac{\frac{3x}{2}-AB}{3}$
A és C találkozásáig			
az A-ból induló	t	$\frac{t}{2}(AB+x)$	$\frac{AB+x}{2}$
a C-ből induló	t	$\frac{t}{3}\left(\frac{3x}{2}-AB\right)$	$\frac{\frac{3x}{2}-AB}{3}$

Mivel a C jármű $AC=2\cdot AB$ úttal kevesebbet tett meg az A-val való találkozásig, ezért $\frac{t}{2}(AB+x)=2\cdot AB+\frac{t}{3}\left(\frac{3x}{2}-AB\right)$. Ebből $3t\cdot AB+3tx=12\cdot AB+3tx-2t\cdot AB$, vagyis $5t\cdot AB=12\cdot AB$, $t=\frac{12}{5}$. Az A-ból induló jármű $\frac{12}{5}$ óra (azaz 2 óra 24 perc) múlva éri utol a C-ből indulót.

1234. 3 óra alatt.

1235. Ha h, c, f jelöli rendre a hajó, a csónak és a folyó vizének a sebességét $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, akkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{5}{h-f}=\frac{3}{c+f};\quad \frac{1}{c+f}=\frac{1}{h-f}+\frac{1}{h+f};\quad \frac{1}{2c+f}+\frac{7}{6}=\frac{1}{h-f}+\frac{1}{h+f}.$$

Ebből $h=\frac{25}{38}\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $c=\frac{7}{38}\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $f=\frac{5}{38}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A hajó 3 óra 10 perc alatt ér vissza A-ba.

1236. Ha v jelenti a gyalogos sebességét, akkor $10v+135=10\cdot 10v$. A gyalogos sebessége $1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}=5{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a vonaté $15\frac{\text{m}}{\text{s}}=54\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1237. A gépkocsinak $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel kell haladnia.

1238. Ha a busz átlagsebességét v, a menetidejét t jelöli, akkor a megoldandó egyenletrendszer $(v+8)(t-0{,}8)=(v-2)(t+0{,}25)=vt$. Ebből $t=5$ óra, $v=42\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és az út hossza 210 km.

1239. Ha t óra múlva éri utol a személyszállító gép a teherszállítót, akkor $(t+2)\cdot 350 = 600t$. Ebből $t = \frac{14}{5}$, vagyis 2 óra 48 perc múlva éri utol a személyszállító gép a teherszállító gépet.

1240. Az út hossza 225 km, a gépkocsi átlagsebessége 75 km/h.

1241. Siófok 100 km-re van Tatabányától. Az első diák átlagsebessége 25 km/h, a másodiké 20 km/h volt.

1242. Ha a tehergépkocsi átlagsebességét v, a találkozásig megtett utat s jelöli, akkor $\frac{s+126}{v+42} = 5$; $\frac{2}{v} = 8$. Ebből $v=28$, $s=224$. Az AB út 574 km, a személygépkocsi átlagsebessége 70 km/h, a tehergépkocsié 28 km/h.

1243. A $11t-100 = 9t$ egyenletből $t=50$, vagyis 50 másodperc múlva éri utol Béla András.

1244. Ha v_1 és v_2 jelöli a testek sebességét, t a találkozásig eltelt időt, akkor a teljes kör hossza egyrészt $v_1t+v_2t = v_2(t+9)$, másrészt $v_1(t+4) = v_2(t+9)$. Ebből $\frac{9}{t} = \frac{t+9}{t+4}$, $t^2=36$, $t=\pm 6$. Csak $t=6$ jöhet szóba. A kört az egyik test $6+4 = 10$, a másik $6+9 = 15$ másodperc alatt futja végig, vagyis az egyik test 6-szor, a másik 4-szer futja le a kört 1 perc alatt.

1245. A két brigád egy napi termelése 107 t. Ha az első brigád egy napi teljesítménye x tonna, akkor a másiké $107-x$ tonna és a megoldandó egyenlet $0{,}4x+\frac{107-x}{3} = 39$. Ebből $x=50$. Az első brigád napi 50 t, a második 57 t szenet fejtett.

1246. A munkacsoport az egységnyi területűnek tekintett első parcellának $\frac{1}{10}$, a másodiknak $\frac{1}{15}$ hektárnyi részét műveli meg egy nap alatt. Ennek átlaga $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{12}$, ezért a munkacsoport átlagos napi teljesítménye 12 hektár.

1247. 25 m^3 homokot kellett a markolónak óránként kiraknia.

1248. Ha az egyik műhelyben x, akkor a másikban $180-x$ alkatrész készül a terv szerint. A feltétel szerint $1{,}12x+1{,}1(180-x) = 200$. Ebből $x=100$, $180-x = 80$ és az egyik műhely 112, a másik 88 alkatrészt gyártott.

1249. 105 alkatrész.

1250. Ha az egyik csapat x, a másik y nap alatt végzi el a munkát, akkor $30\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1$; $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{40}{x} = 1$. Ebből $x=50$, $y=75$ nap.

1251. Ha az egyes munkások munkabére rendre x, y, z, akkor a kereseti viszonyok az $x=0{,}9y$; $0{,}9y+400 = z$; $y=0{,}75z$ egyenletrendszerrel írhatók le. Az utolsó két egyenletből $y=923{,}08$; $z=1230{,}77$. Egész forintokra kerekítve: az első munkás 831 Ft-ot, a második 923 Ft-ot, a harmadik 1231 Ft-ot keresett.

1252. Még 2 munkást kell alkalmazni. Az a munkás, aki 6 napot dolgozott, 720 Ft-ot, aki 3 napot dolgozott, 360 Ft-ot kapott.

1253. Ha x jelöli a munka elvégzésének tervezett időtartamát, y a pótlólag felveendő munkások számát, akkor $(x-4)11 = (x-5)(11+y)$, ahol x, y pozitív egész számok. Ebből $x=6$, $y=11$ vagy $x=16$, $y=1$. Ha a munkát 6 nap alatt akarják befejezni, akkor 11 új munkást kell felvenni, ha csak 16 nap alatt, akkor elég 1 új munkást felvenni.

1254. Ha a segítő egyedül x óra alatt javította volna meg a gépet, akkor a feltételek szerint $\left(13\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{x}\right) = 1$, ebből $x=30$, vagyis a segítő egyedül 30 óra alatt javította volna meg a gépet.

1255. A második gépkezelő 60 m^3-ért 150 Ft-ot, a harmadik 70 m^3-ért 175 Ft-ot kapott.

1256. Ha a feladatot t óra alatt végzi el az A, B és C gép együtt, akkor a feltételek alapján $\frac{x}{12}+\frac{x-2}{16}+\frac{x-1{,}5}{18} = 1$. Ebből $x=6$, vagyis 6 óra alatt végeznek a munkával.

1257. A 8 óra alatt elkészíthető beton maximális mennyisége $8\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\right) = \frac{98}{3}$. 98 m^3 beton tehát nem készíthető el.

Megjegyzés. Ha 24 órás munkanapot engedett volna meg a feladat, akkor (pontosan) elkészíthető a kívánt mennyiségű beton.

1258. Eredetileg 20 szivattyú működött.

1259. Ha x, y, z jelöli rendre Péter győztes, vesztes, döntetlen játszmáit, akkor $x+y+z = 10$ és $20x-30y = 50$. A két egyenletből $y = \frac{3x-z}{7}$. Mivel y egész szám, ezért (az $x, z \leqq 10$ feltételt is figyelembe véve) vagy $x=7$, $z=0$, és akkor $y=3$, vagy $x=4$, $z=5$, és ekkor $y=1$. Péter kétféle módon is nyerhetett 50 forintot 10 játszma után, vagy úgy, hogy hétszer nyert és háromszor kikapott, vagy úgy, hogy négyszer nyert, egyszer kikapott és ötször döntetlenül mérkőzött.

1260. Ha x jelöli a kisebb tartály térfogatát, akkor a vásárolt olaj térfogata a feltétel szerint egyrészt $2x-50$, másrészt $x+\frac{2x-50}{3}$. A $2x-50 = x+\frac{2x-50}{3}$ egyenletből $x=100$, $2x=200$, $2x-50 = 150$. Ez azt jelenti, hogy 150 liter olajat vásároltak, az egyik tartály 100, a másik 200 literes.

1261. 1800 készülék.

1262. Ha x jelöli a készülék eredeti anyagköltségét, akkor eredeti energiaköltsége $3{,}5x$. A feltételek szerint $0{,}82 \cdot 3{,}5x+0{,}88x+1500 = 3{,}5x+x$. Ebből $x=2000$. Így a készülék eredeti energiaköltsége 7000 Ft, anyagköltsége 2000 Ft volt, amelyek az újítás következtében 5740 Ft-ra, illetve 1760 Ft-ra csökkentek.

1263. Az utolsó hónapban a negyedévi terv 33,6%-át kell teljesíteni.

1264. Ha x liter édesvizet kell felhasználnunk, akkor $0{,}05 \cdot 40 = 0{,}02(40+x)$. Ebből $x=60$, vagyis 60 liter édesvizet kell a tengervízhez keverni.

1265. $15{,}2 \cdot 34{,}5 \cdot 0{,}168 \cdot 0{,}88 = 77{,}527$ tonna cukrot gyártottak.

1266. 110,5 kg tejből készíthető 5 kg vaj.

1267. Ha a gazdaságnak x traktora volt, akkor a nagyobb földön $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$ műszakkal, a feleakkora területű földön $\frac{x}{4}+1$ műszakkal elvégezték a

szántást. A teljesítményekre az $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=2\left(\frac{x}{4}+1\right)$ feltétel igaz. Ebből $x=8$, vagyis 8 traktora volt a gazdaságnak.

1268. 62,5 °C hőmérsékletű volt a víz.

1269. Ha az 50%-os töménységű sóoldatból x litert veszünk, akkor $x\cdot 0{,}5+$ $+(45-x)0{,}7=45\cdot 0{,}62$. Ebből $x=18$. 18 liter 50%-os és 27 liter 70%-os töménységű sóoldatot kell összeönteni.

1270. 15 liter 6%-os és 9 liter 30%-os töménységű sósavat kell összeönteni.

1271. 115 liter 2,5%-os és 35 liter 5,5%-os töménységű sóoldatot kell összeönteni.

1272. Legyen az ötvözet x tömegű y%-os ezüst. Az első ötvözéskor az $yx+1\cdot 3=0{,}9(3+x)$, a második ötvözéskor az $yx+0{,}9\cdot 2=$ $=0{,}84(2+x)$ egyenlet írja le a színezüst változását. A két egyenlet különbségéből $1{,}2=1{,}02+0{,}06x$. Ebből $x=3$. Így az eredeti ötvözet tömege 3 kg, amelyből $3y=2{,}4$, $y=0{,}8$, $yx=0{,}8\cdot 3=2{,}4$ kg az ezüst.

1273. Ha az első csapon át összesen x liter 54 °C-os, a második csapon át $180-x$ liter 14 °C-os víz folyt a kádba, akkor a végén 180 liter 37 °C-os víz lett a kádban, vagyis $54x+14(180-x)=37\cdot 180$. Ebből $x=103{,}5$, továbbá $180-x=76{,}5$. A 103,5 liter víz az első csapon át $\frac{3\cdot 103{,}5}{20}=$ $=15{,}525$ perc alatt, a 76,5 liter víz a második csapon át $\frac{2\cdot 76{,}5}{15}=$ $=10{,}2$ perc alatt folyt be. Ezért az 54 °C-os víz csapját 15 perc 34,5 másodpercig, a 14 °C-os víz csapját pedig 10 perc 12 másodpercig kell nyitva tartani.

1274. Tegyük fel, hogy az aránypárok első helyén szereplő fémből x, a másodikból $10-x$ kg van az ötvözetben. Ekkor a feladat feltételei szerint $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}(10-x)=\frac{p}{p+1}\cdot 10$. Ebből $x=\frac{60-90p}{p+1}$ és $10-x=$ $=\frac{100p-50}{p+1}$.

A feladatnak akkor van értelme, ha $\frac{1}{2}\leqq p\leqq\frac{2}{3}$.

1275. Ha a három kohó x napig dolgozik együtt, akkor a feltételek szerint $x\left(\frac{36\,000}{60}+\frac{36\,000}{45}+\frac{36\,000}{90}\right)=36\,000$. Ebből $x=20$. A 3 kohó együtt 20 nap alatt olvasztja ki az ércet. Az első kohó 12 000 t, a második 8000 t, a harmadik pedig 16 000 t ércet olvaszt ki ennyi idő alatt.

1276. Ha a 23%-os töménységű alkohol mennyisége x kg, akkor a feltétel szerint $0{,}23x+0{,}9\cdot 10=0{,}4(10+x)$. Ebből $x=29{,}41$ kg. Ezért 39,4 kg a keverék tömege.

1277. A szerelvény „áthaladása" a hídon az első kocsinak a hídra érkezésétől az utolsó kocsi távozásáig tart, vagyis úgy tekintendő, mintha egy $2\cdot 500=1000$ m hosszú szerelvény pl. eleje érkezne és távozna a híd végén. Így a szerelvény sebessége $\frac{1000\text{ m}}{1\text{ perc}}=60$ km/óra.

1278. Készítsünk táblázatot az életkorokról a feladat közlései alapján:

	5 évvel ezelőtt	most	5 év múlva	
én	$x-5$	x	$x+5$	
barátom	$y-5$	y	$y+5$	éves.

A feltétel szerint $y+5=3(x-5)+5$ és $x+5=\frac{y+5}{2}$. Ebből $x=20$, $y=45$. Barátom most 45 éves.

Megjegyzés: A feladat feltételei beépíthetők a táblázat második sorába is. Ekkor a második sor utolsó adata: $3(x-5)+5$ és az egyenlet $\frac{3(x-5)+5}{2}=x+5$. A legutolsó egyenlet természetesen táblázat nélkül is felírható például így: Én öt év múlva $x+5$ éves leszek. Barátom ekkor az $x-5$ életkoromhoz képest $3(x-5)+5$ éves lesz. Ez pedig $x+5$ éves korom fele.

1279. Készítsünk táblázatot a lehetséges téglalapokról:

Négyzetek száma	Téglalapok mérete	Téglalapok területösszege
10	$1\cdot 10$ és $2\cdot 5$	20
9	$1\cdot 9$ és $3\cdot 3$	18
8	$1\cdot 8$ és $2\cdot 4$	16
7	$1\cdot 7$	7
6	$1\cdot 6$ és $2\cdot 3$	12
5	$1\cdot 5$	5
4	$1\cdot 4$ és $2\cdot 2$	8
3	$1\cdot 3$	3
2	$1\cdot 2$	2
1	$1\cdot 1$	1
	összesen:	92

15 különböző méretű téglalap alkotható, amelyek összterülete 92 cm^2.

1280. A megoldandó egyenlet $2^x=\frac{960}{15}=64=2^6$. Ebből $x=6$. $x+1=7$ fogaskereket illesztettek össze. (Érdemes ábrát is készíteni.)

1281. *a)* 67,5 óra múlva találkozik a két test ötödször az AB út felénél.

b) Az első test az AB felezőpontjába $t_m=\frac{75+150m}{75}=1+2m$, $m\in\mathbf{N}$, a második test $t_n=\frac{75+150n}{50}=\frac{3}{2}+3n$, $n\in\mathbf{N}$ óránként érkezik. Mivel nincs olyan természetes m és n, amelyre $t_m=t_n$, ezért a mozgó testek az AB út felénél nem találkozhatnak.

1282. Ha a kerékpáros odafelé rendre x, y, z km, akkor visszafelé rendre x, z, y km utat tett meg vízszintes úton, lejtőn, illetve emelkedőn. Az ehhez szükséges idő $3=\frac{2x}{16}+\frac{y+z}{24}+\frac{z+y}{12}$. Ebből $2(x+y+z)=48$. Az út hossza $AB=x+y+z=24$ km.

1283. A megoldandó egyenletrendszer: $x+y=16$, $x+8=y$. Ebből $x=4$, $y=12$. A testvérek most 4, illetve 12 évesek.

1284. Ha az A kosárban a, a B kosárban b alma van, akkor az átrakások a következő egyenletekkel írhatók le: $a-n=b+n$ és $a+n=2(b-n)$. A két egyenlet különbségéből $b=5n$, és így $a=7n$. Mivel a szöveg nem

mondta meg, hogy melyik kosárban lesz kétszer annyi alma, ezért a második egyenlet $2(a+n) = b-n$ is lehetne. Akkor a két egyenlet különbségéből $a = -5n$ és ez lehetetlen. Ezért az A kosárban $7n$, a B kosárban $5n$ alma van.

1285. Ha x számú második, y számú harmadik díjat adunk ki, akkor $1 \cdot 500 + x \cdot 120 + y \cdot 80 = 1500$. Ebből $x = \frac{25-2y}{3}$. Mivel x és y pozitív egész, ezért $x = 1; 3; 5; 7$. A kiadható díjak száma:

Második díj	1	3	5	7
Harmadik díj	11	8	5	2

.

1286. Ketten 3 teli, 1 félig teli és 3 üres hordót kapnak fejenként, míg a harmadik 1 teli, 5 félig teli és 1 üres hordót kap. Más megoldás is lehet.

1287. Összesen 8 cipójuk volt, így az osztozkodásnál egy vándornak $\frac{8}{3}$ cipó jutott. Ezért a $\frac{8}{3}$ cipóért adott a harmadik vándor 8 forintot, vagyis $\frac{1}{3}$ cipóért 1 forintot. Az egyik vándor $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$, a másik $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ cipót adott át, ezért akinek 5 cipója volt, az 7 Ft-ot kap, a másik 1 Ft-ot.

1288. Ha az út hossza x km, akkor a feltétel szerint $\frac{x}{45} + \frac{1}{3} = \frac{x}{30} - 1{,}6$. Ebből $x = 174$. Az út hossza 174 km, az átlagsebesség $v = \frac{174}{189} \cdot 45 = 41{,}43$ $v = 41{,}43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1289. A víz sebessége $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A feladat eredeti szövege irreális eredményhez vezet $\left(\text{a víz sebessége } 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} !\right)$.

Helyesen: Egy motorcsónak a Dunán a vízfolyás irányával ellentétesen halad. A 604. km-t jelző rúdnál labdát ejtenek a folyóba, 60 perc múlva visszafordulnak, és a labdát az 598. km-t jelző rúdnál érik utól. Mekkora a víz sebessége? $\left(\text{Ekkor a sebesség } 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}.\right)$

1290. Ha a kerékpáros x km utat tett meg az első találkozásig, akkor a busz $(144-x)$ km-t. A kerékpáros $2\frac{2}{3}$ óráig, a busz $3\frac{1}{3}$ óráig volt úton, így sebességük $v_k = \frac{3x}{8} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_{|b|} = \frac{3(144-x)}{10} \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ha a második találkozásig a kerékpáros y km-t, akkor a busz $(144+y)$ km-t tett meg és a kerékpáros is $5\frac{1}{3}$, a busz is $5\frac{1}{3}$ órát volt úton (a kerékpáros egy órával később indult, a busz összesen egy órát várakozott!), így sebességük $v_k = \frac{3y}{16}$, $v_b = \frac{3(144+y)}{16}$. A $\frac{3x}{8} = \frac{3y}{16}$ egyenletből $y = 2x$, a $\frac{3(144-x)}{10} = \frac{3(144+2x)}{16}$ egyenletből $x = 24$. Ezt felhasználva $v_b = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_k = 9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vagyis az autóbusz átlagsebessége $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a kerékpárosé $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1291. Ha x jelöli az AB távolságot, akkor $\frac{\frac{7}{8}x}{3} + \frac{\frac{1}{8}x}{6} = \frac{\frac{1}{8}x}{2} + \frac{\frac{7}{8}x}{4} + \frac{1}{4}$. Ebből $x = 8$.

a) A és B távolsága 8 km.

b) A-ból B-be 7 km az emelkedő, 1 km a lejtő.

c) 2,5 óra alatt ért A-ból B-be a turista.

1292. A két vonat hosszának összege 504 m.

a) Ha a két vonat egymással szemben halad, akkor ez $t = \frac{0{,}504}{72+54}$ óra $= 0{,}004$ óra $= 14{,}4$ másodpercig tart.

b) Ha a két vonat párhuzamosan halad, akkor ez $t = \frac{0{,}504}{72-54}$ óra $= 0{,}028$ óra $= 100{,}8$ másodpercig tart.

1293. Ha a két futó szemben fut egymással, akkor sebességük: $v_1 = \frac{x}{0{,}5}$,

illetve $v_2 = \frac{400-x}{0{,}5}\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$. Ha azonos irányban futnak, akkor $v_1 = \frac{y}{13}\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, $v_2 = \frac{400+y}{13}\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$. Az első két egyenletből $y = 26x$, a $\frac{400-x}{0{,}5} = \frac{400+26x}{13}$ egyenletből $x = \frac{2500}{13}$, így $y = 5000$ méter. A két futó sebessége $\frac{5000}{13} = 384{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$, illetve $\frac{5400}{13} = 415{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{perc}}$.

1294. Ha egy ceruza x forintba, egy füzet y forintba kerül, akkor a feltételek alapján a $11x = 7y$, $7x + 7{,}2 = 11y$ egyenletrendszer írható fel. Ennek megoldása $x = 0{,}7$, $y = 1{,}1$. Ezért 5 ceruza és 9 füzet 13,40 Ft-ba kerülnek.

1295. Ha egy könyv ára x, egy füzet ára y forint, akkor $x + y = 22$ és $x = 3y + 2$. Ebből $x = 5$, $y = 17$. Ha k db könyvet és f db füzetet óhajtanak venni 270 forintért, akkor $17k + 5f = 270$. Ebből $f = 54 - \frac{17}{5}k$, ahol f és k is természetes szám. Ez csak úgy lehetséges, ha k a 0; 5; 10; 15 számok egyike és ekkor f rendre 54; 37; 20; 3. Ezért 270 Ft-ért vagy 15 könyvet és 3 füzetet, vagy 10 könyvet és 20 füzetet, vagy 5 könyvet és 37 füzetet, vagy 54 füzetet vehetünk.

1296. 2 füzetet és 3 könyvet vásároltak.

1297. Ha a második szám x, akkor az első $x + 4$, a harmadik pedig $2 \cdot 30 - (x + 4) = 56 - x$. A három szám számtani közepe $\frac{x + x + 4 + 56 - x}{3} = 28$. Ebből $x = 24$, $x + 4 = 28$, $56 - x = 32$. A három szám sorrendben a 28, a 24 és a 32.

1298. Ha a könyv x oldalas, akkor $x - 220 = 3(x - 330)$. Ebből $x = 385$. A könyv 385 oldalas. (A gyakorlatban a könyvek csak páros oldalszámúak lehetnek.)

1299. Ha az üzemnek x kocsija van és egy kocsi y ládát tud elszállítani, akkor a feladat feltételeit a $(2x - 7)(y + 11) = xy$ egyenlet írja le, amelyben x és y természetes számok és $x \neq 0$, $y \neq 0$. Átalakításokkal $(x - 7)(y + 22) = -77$. -77 osztóit (± 1; ± 7; ± 11; ± 77) végigtekintve csak az $x - 7 = -1$ és $y + 22 = 77$ jöhet szóba, mert minden más esetben vagy x vagy y negatív vagy 0. Így $x = 6$, $y = 55$, vagyis az üzemnek 6 kocsija van és 330 ládát kell elszállítania.

1300. Ha x jelöli a tanulók számát, y az egy főre jutó összeget, akkor $(x + 4)(y - 2) = (x - 3)(y + 2)$ és $xy = (x + 4)(y - 2)$. A két egyenletből $x = 24$, $y = 14$, vagyis 24 tanuló között kell 336 Ft-ot felosztani.

1301. Ha az első osztályú szőlő kilója x, a másodosztályú szőlőé y forint, akkor a feltételeket a $25x + 45y = 705$; $45x + 25y = 765$ egyenletrendszer írja le. Ebből $x = 12$, $y = 9$, vagyis az első osztályú szőlő kilója 12 Ft, a másodosztályúé 9 Ft.

1302. Ha a raktárban x m piros és y m kék kelme van, akkor a feladat összefüggéseit a $60x + 50y = 16\,000$; $60 \cdot 0{,}25x + 50 \cdot 0{,}2y = 3500$ egyenletrendszer írja le. Az egyenletrendszer megoldása $x = 100$, $y = 200$. Ezt felhasználva $(1 - 0{,}25)100 = 75$ méter piros és $(1 - 0{,}20)200 = 160$ méter kék kelme maradt a raktárban.

1303. Ha x jelöli az első részt, akkor a második feltétel szerint $440 - x = x$, ebből $x = 220$ Ft. A második rész ekkor $\frac{0{,}4}{0{,}5}x = 176$ Ft, a harmadik rész $440 - (220 + 176) = 44$ Ft.

1304. Ha x jelöli az egyik betét, y a másik betét összegét, akkor a feltételek a $0{,}02x + 0{,}03y = 66$; $0{,}03x + 0{,}02y = 59$ egyenletrendszerrel írhatók le. Ebből $x = 900$, $y = 1600$. Így az egyik betét 1600 Ft, a másik 900 Ft.

1305. Ha az egyik gép x óra alatt, a másik y óra alatt permetezi meg a szőlőt egyedül, akkor a feladat feltételei szerint $12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$, $8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{7}{x} = 1$. Ebből $\frac{1}{x} = \frac{1}{21}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{28}$. Az egyik gép 28 óra, a másik 21 óra alatt végzett volna egyedül a permetezéssel.

1306. A munka elvégzéséhez összesen $30 \cdot 8 \cdot 9 = 2160$ munkaóra szükséges. Ha 9 nap elteltével x munkás csatlakozott a 9 régi munkáshoz és elvégezték a munkát, akkor $8 \cdot 9 \cdot 9 + 9(30 - 9 - 7)(9 + x) = 2160$. Ebből $x = 3$, vagyis 3 új munkás csatlakozott a régiekhez.

1307. A megoldandó egyenlet: $(m - x)p + xq = mr$ alakú. Ebből $x = \frac{r - p}{q - p}m$. $\frac{q - r}{q - p}m$ kg p%-os és $\frac{r - p}{q - p}m$ kg q%-os sóoldatot kell összekeverni. A feladat adataival: 72 kg 10%-os és 48 kg 20%-os oldatot kell összekeverni.

1308. Ha a sóoldat eredeti töménysége $x\%$, akkor $300x+400\cdot 0{,}05 = 760\cdot\frac{x}{2}$. Ebből $x=0{,}25$. Az oldat eredeti töménysége 25%-os.

1309. Ha x liter vizet adunk az 1 liter $a\%$-os alkoholhoz, akkor a megoldandó egyenlet $\frac{1+x}{2}b+\frac{1+x}{2}c=a$. Ebből $x=\frac{2a}{b+c}-1$, vagyis $\frac{2a}{b+c}-1$ liter vízre van szükség.

1310. Ha az egyes oldatokból rendre x, y, z kg szükséges, akkor a feltételeket az $55\cdot 0{,}45 = x\cdot 0{,}35+y\cdot 0{,}8+z\cdot 0{,}4$; $55\cdot 0{,}03 = y\cdot 0{,}1+z\cdot 0{,}05$; $55 = x+y+z$ egyenletrendszer írja le. Ebből $x=33$, $y=11$, $z=11$. Az első oldatból 33 kg, a második és harmadik oldatból 11–11 kg szükséges.

1311. Ha a 7%-os oldatból x, a 18%-os oldatból y litert keverünk össze, akkor a feltétel szerint $0{,}07x+0{,}18y = (x+y)0{,}13$. Ebből $6x=5y$. A 7%-os és a 18%-os cukoroldat szükséges aránya 5 : 6.

1312. Ha az első, második, harmadik oldatból rendre x, y, z litert keverünk össze, akkor a keverék NaCl- és KCl-tartalmára $x\cdot 0{,}04+y\cdot 0{,}13+z\cdot 0{,}08 = (x+y+z)\cdot 0{,}1$, $x\cdot 0{,}17+y\cdot 0{,}06+z\cdot 0{,}03 = (x+y+z)\cdot 0{,}05$ áll fenn. Ebből $x:z = 2:21$; $y:z = 18:21$; $x:y = 1:9$. A három oldatot sorrendben a következő arányban kell keverni: 2 : 18 : 21.

1313. Jelölje a $20\ \frac{1}{\text{perc}}$ hozamú csapok számát x. Akkor a feltétel szerint $10x\cdot 20+10(9-x)24{,}4 = 1976$. Ebből $x=5$. A $20\ \frac{1}{\text{perc}}$ hozamú csapból 5 db van, a másikból 4.

1314. Ha a csapok és a lefolyó x óráig vannak nyitva, akkor $\frac{x}{2}+x-\frac{x}{4}=1$. Ebből $x=\frac{4}{5}$. A kád 48 perc alatt telik meg.

1315. Ha a kemencék x óráig dolgoznak együtt, akkor a feltétel szerint $x\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4{,}5}\right)=1$. Ebből $x=2$. 2 óra alatt kisütik a kenyeret a kemencék. Az első 1200 kg-ot, a második 800 kg-ot, a harmadik 1600 kg-ot süt ki.

1316. Ha az első csapon át x, a másodikon y liter víz folyik át percenként, akkor a második feltétel szerint $2x=3y$, az első feltétel szerint pedig $20(x+y)+1000 = 70(x+y)-250$. Ebből $x=15$, $y=10$. A medence $20(x+y)+1000 = 1500$ literes és ezért az első csap 100 perc alatt, a második 150 perc alatt tölti meg a medencét.

1317. Legyen az első és a második csap vízhozama x, a harmadiké y. Akkor az első feltétel szerint $5x+4x+6y = 1$, a második feltétel szerint $\frac{1}{3}\cdot 2x = y$. Ebből $x=\frac{1}{13}$, $y=\frac{2}{39}$. Ha a három csap egyszerre t ideig van nyitva, akkor $\left(\frac{2}{13}+\frac{2}{39}\right)t = 1$. Ebből $t=\frac{39}{8}$, vagyis $\frac{39}{8}$ óra $=$ $=292{,}5$ perc alatt telik meg a medence.

1318. Ha a negyedik csap egyedül t óra alatt tölti meg a tartályt, akkor a feltételek szerint $2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{t}=1$. Ebből $t=3$. 3 óra alatt töltené meg egyedül a negyedik csap a tartályt.

1319. Ha a vízmelegítő eredeti árát x-ed részével változtatták meg, akkor a változások az $(1-x)(1+x)1600 = 1500$ egyenlettel írhatók le. Ebből $x = \pm\frac{1}{4} = \pm 0{,}25$. Ezért a vízmelegítő árát 25%-kal változtatták.

1320. Ha a második űrhajó az elsőt t óra alatt éri utol, akkor a sebességek aránya $\frac{1}{2}=\frac{t-2}{t}$. Ebből $t=4$. Ha a harmadik űrhajó a másodikat x óra alatt éri utol, akkor ismét a sebességek arányát felírva $\frac{2}{3}=\frac{4-x}{4}$. Ebből $x=\frac{4}{3}$. Ezért a harmadik űrhajónak a második indulása után $2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$ órával (40 perccel) később kell elindulnia.

1321. Ha a tanuló helyes feleleteinek száma x, akkor $10x-7(8-x) = 46$. Ebből $x=6$. A tanulónak 6 jó és 2 hibás felelete volt.

1322. Ha a sorok számát x, az egy sorban lévő betűk számát y jelöli, akkor a feltételeket az $(x-4)(y-5) = xy-360$, $(x+3)(y+2) = xy+228$ egyenletrendszerrel írhatjuk le. Rendezés után az egyenletrendszer $5x+4y = 380$, $2x+3y = 222$ alakú. Ennek megoldása $x=36$, $y=50$. Így 36 sor és egy sorban 50 betű van a könyv egy-egy oldalán.

1323. Ha a kocsik száma x, a szállítást pedig y óra alatt kell lebonyolítani, akkor a feltételek szerint $(x-2)(y+2) = xy$, $(x+4)(y-2) = xy$. Ebből $x=8$, $y=6$. Ezért 8 gépkocsi 6 óra alatt végzi el a szállítást.

1324. Ha a régi varrógépen x óra alatt készül el a sorozat, akkor a feltételek alapján a $40\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-30}\right)+\frac{60}{x}=1$ egyenlet írható fel. Ez rendezéssel az $x^2-170x+3000=0$ alakra hozható. Gyökei $x_1=150$, $x_2=20$. A második gyök nem jöhet szóba, mert ekkor $x-30$ negatív. Így a régi gépen 150, az új gépen 120 óra alatt készül el a munka. Ha a két gépen együtt dolgoznak y óráig, akkor $y\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{120}\right)=1$. Ebből $y=\frac{200}{3}$ óra, vagyis a két gépen $66\frac{2}{3}$ óra alatt készül el a sorozat.

1325. Ha a tört számlálója x, nevezője y, akkor a feltételek szerint $\frac{x-1}{y+1}=\frac{1}{2}$, $\frac{x+1}{y-1}=1$. Ebből $x=5$, $y=7$. Így ez a tört az $\frac{5}{7}$.

1326. Ha a tört számlálója x, nevezője y, akkor $\frac{x+1}{y+1}=\frac{2}{3}$, $\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{2}$. Ebből $x=3$, $y=5$, ezért ez a tört a $\frac{3}{5}$.

1327. Az örökösödési viszonyokat az $A+B+C=300\,000$, $A=B+C$ és $A-B=B-C$ egyenletekkel írhatjuk le. Ezekből $B=2C$, $A=3C$, végül $C=50\,000$. Így A 150 000 Ft-ot, B 100 000 Ft-ot, C 50 000 Ft-ot örökölt.

1328. Ha x tízforintosom és y húszforintosom van, akkor $10x+20y=240$ és $x:y=2:3$. Ebből $x=6$, $y=9$, azaz 6 db 10 Ft-osom és 9 db 20 Ft-osom van.

1329. Legyenek a téglalap oldalai a m és b m hosszúak, akkor a feltételek szerint $a-4=b+3$, $(a-4)(b+3)=ab+3$. Az egyenletrendszer megoldása: $a=13$, $b=6$. A téglalap oldalai 6 és 13 m hosszúak.

1330. Ha a nagyobb négyzet oldala x, akkor $x^2-(x-12)^2=240$. Ebből $x=16$. A két négyzet oldalai 16, illetve 4 m hosszúak.

1331. Ha a rózsaburgonya x forintba, a sárgaburgonya y forintba kerül kilónként, akkor a megoldandó egyenletrendszer $3x+2y=23$, $2x+3y=22$ alakú. Ebből $x=5$, $y=4$. Egy kg rózsaburgonya 5 Ft-ba, egy kg sárgaburgonya 4 Ft-ba került.

1332. Legyen a szóban forgó konvex sokszögnek n számú csúcsa. Minden csúcsból $n-3$ számú átló húzható, de ekkor minden átlót kétszer vettünk figyelembe, vagyis a feltétel szerint $\frac{n(n-3)}{2}=35$. Ebből $n_1=10$, $n_2=-7$, de ez utóbbi nem jöhet szóba. A válasz ezért igen, a konvex 10 szögnek van 35 átlója.

1333. Ha a konvex sokszögnek n oldala van, akkor a feltétel szerint $\frac{n(n-3)}{2}-n=25$. Ebből $n_1=10$, $n_2=-5$, de ez utóbbi lehetetlen. A konvex sokszög a tízszög.

1334. Ha az egyik konvex sokszög x oldalú, a másik y oldalú, akkor $\frac{x(x-3)}{2}+\frac{y(y-3)}{2}=47$; $x+y=17$. Ebből $x=9$, $y=8$. A nyolc- és a kilencszög felel meg.

1335. Az n oldalú sokszög minden csúcsa $n-1$ csúccsal köthető össze, de ekkor minden vonalat kétszer számoltunk meg, ezért $n(n-1)=2\cdot 171$. Ebből $n_1=19$, $n_2=-18$. Csak az első gyök jöhet szóba, ezért a keresett sokszög a 19 oldalú szabályos sokszög.

1336. Az n pont a feltétel szerint $n-1$ ponttal köthető össze, ezért az összekötő egyenesek száma $\frac{n(n-1)}{2}=28$. Ebből $n_1=8$, $n_2=-7$. Csak az első gyök jöhet szóba. 8 pontot helyeztek el a síkon.

1337. $\frac{25\cdot 24}{2}=300$ kézfogás történt.

1338. Mivel minden csapat minden ellenfelével kétszer játszott, ezért $x(x-1)=306$, ahol x a csapatok számát jelöli. Ebből $x_1=18$, $x_2=-17$. 18 csapat mérkőzött.

1339. 13 csapat vett részt a tornán.

1340. Ha az egyik parcella mindegyik sorába x, a másik parcella mindegyik sorába $x-5$ fát ültettek, akkor $x^2+(x-5)^2=630-5$. Ebből a pozitív gyök $x=20$. Az egyik parcellába $20^2=400$, a másikba $15^2=225$ fát ültettek.

1341. Ha a lépcsők száma x és a lépcsők magassága y cm, akkor egyrészt $xy = 360$, másrészt $(x+3)(y-4) = 360$. Az első egyenletből $y = \frac{360}{x}$, ezt a másodikba helyettesítve rendezés után az $x^2+3x-270 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek pozitív gyöke $x=15$. Ekkor $y=24$. 15 db (24 cm-es) lépcsője van a lépcsőháznak.

1342. Legyen az egyik szám egyeseinek száma x, ekkor a feltétel szerint $[10(x+2)+x]^2+(10x+x+2)^2 = 4034$. Rendezés után $x^2+2x-15 = 0$. Ebből $x_1=3$, $x_2=-5$. A keresett szám a 35 vagy az 53.

1343. Ha a kétjegyű szám második jegye x, akkor feltételünk alapján $[10(x+4)+x][x+4+x] = 306$. Rendezés után a $11x^2+62x-73 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek pozitív gyöke $x=1$. A keresett szám az 51.

1344. Ha a keresett szám egyeseit x jelöli, akkor $[10(x+1)+x](x+1+x) = 1666$. Ebből $x=8$. A keresett szám a 98.

1345. Ha a tört nevezője x, akkor számlálója $x-4$ és $\frac{x-4}{x}+\frac{x}{x-4}=\frac{58}{21}$. Rendezés után az egyenlet $x^2-4x-21 = 0$ alakú és gyökei $x_1=7$, $x_2=-3$. A keresett tört tehát a $\frac{3}{7}$.

Megjegyzés. A második gyök alapján felírható $\frac{-7}{-3}$ tört formailag megfelel ugyan a feladat követelményeinek, de az egyszerűsítés után kapott (vele egyenlő) $\frac{7}{3}$ tört nem felel meg annak a követelménynek, hogy a számlálója 4-gyel kisebb, mint a nevezője.

1346. Ha az egyik szám x, a másik y, akkor az első feltétel szerint $x^2-y^2 = 1805$, vagyis $(x+y)(x-y) = 5 \cdot 19^2$. Mivel x is és y is osztható 19-cel, ezért összegük is és különbségük is. Ezért az előbbi egyenletből következik, hogy vagy $x+y = 5 \cdot 19$ és $x-y = 19$ vagy az, hogy $x+y = 19$ és $x-y = 5 \cdot 19$. Az első esetben $x=57$ és $y=38$, a második esetben $x=57$ és $y=-38$, de ez utóbbi nem természetes szám, tehát nem felel meg a feltételnek. A keresett két szám az 57 és 38.

1347. Ha a keresett számrendszer alapszáma x, akkor a tízes számrendszerben $6 \cdot x^2+1 \cdot x+6 = 307$ érvényes. Ebből $x_1=7$, $x_2 = -\frac{43}{6}$, de ez utóbbi nem lehet egy számrendszer alapszáma. A válasz: a 7-es számrendszerben.

1348. Ha a téglalap egyik oldala a cm, a másik oldala b cm, akkor $2(a+b) = 85$, $\sqrt{a^2+b^2} = 32{,}5$ egyenletekkel írhatók le a feltételek. Ha az első egyenletből pl. a-t kifejezzük és a másodikba helyettesítjük, akkor a $2b^2-85b+750 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $b_1=30$, $b_2=12{,}5$. A hozzájuk tartozó a értékek: $a_1=12{,}5$, $a_2=30$. Egy téglalap van és területe 375 cm^2.

1349. Ha a telek egyik oldala a m, akkor a másik $a+20$ m és az első feltételből, az $a(a+20) = 2400$ egyenletből a telek méretei $a=40$ m, $a+20 = 60$ m, kerülete 200 m. A négy csúcsban az illesztéseknél az átfedés elkerülése miatt 4–4 cm-rel rövidebb a kerítés hossza, mint a telek kerülete, ezért a kerítéshez $x = \frac{100}{94} \cdot 199{,}84 \cdot 2 \cdot 0{,}04 = 17{,}0077$ m^3, kerekítve 17,0 m^3 deszkára van szükség.

1350. A téglalap és a keret területének összege $t_1+t_2 = 2 \cdot 15 = 30$ (m^2). A belső téglalap és a keret területének különbsége $t_1-t_2 = 16$ (m^2). E két egyenletből a belső téglalap területe 23 m^2, a keret területe 7 m^2. Ha a keret x m széles, akkor a területe $2 \cdot 2x+2(15-2x)x = 7$. Ebből $4x^2-34x+17 = 0$. A gyökök $x_1 = \frac{17+3\sqrt{29}}{4} = 8{,}289$, $x_2 = \frac{17-3\sqrt{29}}{4} = 0{,}211$. Az első gyök nem jöhet szóba, mert ez több, mint a téglalap egyik oldalának hossza, a másik megfelel, ezért a keret $\frac{17-3\sqrt{29}}{4} = 0{,}21$ m széles.

1351. A raktár teljes alapterülete 210 m^2, a fal alapterülete 210–180 = 30 (m^2). A fal alapterülete – ha a fal vastagsága x méter – $2x(31-2x) = 30$. Ebből $2x^2-31x+15 = 0$. Az $x_1=15$ gyök nem jöhet szóba, az $x_2=0{,}5$ gyök megfelel, ezért a raktár fala $\frac{1}{2}$ méter vastag.

1352. Ha az út szélességét x méterre tervezzük, akkor teljesülnie kell a $2x(17-2x) = (5-2x)(12-2x)$ egyenletnek. Ez rendezés után $2x^2-17x+15 = 0$ alakú. Egyik gyöke 7,5, de ez nem felel meg, másik gyöke 1, ez megfelel, tehát az út 1 m széles.

1353. Ha a, illetve b jelöli a két négyzet, x pedig a keletkezett téglalap rövidebb oldalát, akkor $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$, és a bizonyítandó állítás $\frac{a^2+b^2}{a+b} > \frac{a+b}{2}$. Ebből azonos átalakításokkal $(a-b)^2 > 0$, ez pedig $a \neq b$ miatt mindig igaz.

1354. Ha a paralelogramma hosszabbik oldala a, akkor a rövidebb oldala $a-3$, hosszabb átlója $a+2$, rövidebb átlója a, és $2[a^2+(a-3)^2] = a^2 + (a+2)^2$. Ebből $a=7$. Így a paralelogramma oldalai 4 cm és 7 cm, átlói 7 cm és 9 cm hosszúak.

1355. A derékszögű háromszög oldalainak szokásos jelölésével $a+b+c = 24$, $ab = 48$. Pitagorasz tétele alapján $\left(\frac{48}{b}\right)^2 + b^2 = \left(24-b-\frac{48}{b}\right)^2$. Ez rendezés után $b^2-14b+48 = 0$ alakú. Gyökei $b_1=8$, $b_2=6$. A hozzájuk tartozó a értékek $a_1=6$, $a_2=8$. Mind a két értékpárhoz a $c=10$ tartozik. Egy derékszögű háromszög van, oldalai 6 cm, 8 cm, illetve 10 cm hosszúak.

1356. A szokásos jelölésekkel a feltételek: $a+b = c+8$, $a+b+c = 48$, $c^2 = a^2+b^2$. Az első két egyenletből (pl. kivonással) $c=20$, és ezzel az első két egyenlet $a+b = 28$, $a^2+b^2 = 400$ alakú. Ezekből helyettesítéssel például a $b^2-28b+192 = 0$ egyenlethez juthatunk, amelynek gyökei $b_1=16$, $b_2=12$. Így $a_1=12$, $a_2=16$. A derékszögű háromszög oldalai 12 cm, 16 cm és 20 cm hosszúak.

1357. Két eset lehetséges. Ha az egyenlő szárú háromszög alapja a, akkor szárai $0{,}4a$ méter hosszúak vagy ha szárai b, akkor alapja $0{,}4b$ méter hosszú, ugyanis a feladat szövege mind a két lehetőséget megengedi. Az első esetben azonban $0{,}4a+0{,}4a < a$, a háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül, háromszög nem keletkezik. A második esetben a megoldandó egyenlet $2b+0{,}4b = 24$, ebből $b=10$ m és így az alap hossza 4 m. Egy háromszög felel meg a feladat feltételeinek, ennek alapja 4 m, szárai 10 m hosszúak.

1358. A rombusz oldala 13 cm. Ha a rombusz átlóinak a felét x és y jelöli, akkor $xy=60$, és $x^2+y^2 = 169$. Az egyenletrendszerből $x=5$, $y=12$. A rombusz átlói 10 cm és 24 cm hosszúak.

1359. A téglatest éleinek hossza az adott arány szerint a, $2a$, $3a$, a feltétel alapján pedig $(a+2)(2a+1)(3a+3) = 6a^3+426$. Ez rendezés után $a^2+a-20 = 0$ alakú. Gyökei $x_1=4$ és $x_2=-5$, de ez utóbbi nem felel meg. Így a téglatest élei 4 cm, 8 cm és 12 cm hosszúak.

1360. Ha az egyik kocka éle a méter, a másiké b méter, akkor a feltételek szerint $a+b = 1{,}7$, $a^3+b^3 = 1{,}853$. Ha az első egyenletből például a-t a másodikba helyettesítünk, rendezés után a $170b^2-289b+102 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $b_1=0{,}5$, $b_2=1{,}2$. Ezekkel $a_1=1{,}2$, $a_2=0{,}5$. A kockák élei 0,5 m, illetve 1,2 m hosszúak.

1361. Ha a húr x távolságra van a körök középpontjától és a belső körbe y hosszúságú része esik, akkor a külső körbe a $\frac{3}{2}y$ része és Pitagorasz tétele szerint $x^2+y^2 = 17^2$ és $x^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2 = 25^2$. Az első egyenletből x^2 kifejezett értékét a másodikba helyettesítve a $289-y^2+6{,}25y^2 = 625$, majd az $y^2=64$ egyenlethez jutunk. Ennek pozitív gyöke $y=8$ és ezzel $x=15$. Ebből következik, hogy a húr hossza $\frac{5}{2}y = 20$ egység, és 15 egységre van a körök középpontjától.

1362. Ha a tehervonat menetideje t óra és a személyvonat átlagsebessége $v\frac{\text{km}}{\text{h}}$, akkor a tehervonaté $v-12\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és a feltételek szerint $v\left(t-\frac{2}{3}\right) = 96$, $(v-12)t = 96$. A két egyenlet különbségéből $t = \frac{v}{18}$, ezt pl. a második egyenletbe helyettesítve rendezés után a $v^2-12v+1728 = 0$ egyenlethez jutunk; ennek gyökei $v_1=48$, $v_2=36$. Az első esetben a tehervonat átlagsebessége $v_1-12 = 36\frac{\text{km}}{\text{h}}$, e két adat megfelel a feladat feltételeinek, mert $\frac{96}{48}+\frac{2}{3} = \frac{96}{36}$, a második esetben $v_2-12 = 24\frac{\text{km}}{\text{h}}$, de ez nem felel meg, mert $\frac{96}{36}+\frac{2}{3} \neq \frac{96}{24}$. Ezért a személyvonat átlagsebessége $48\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a tehervonaté $36\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1363. Legyen a gépkocsi átlagsebessége $v\frac{\text{km}}{\text{h}}$, menetideje t óra. Akkor egy-

részt $310 = vt$, másrészt $310 = (v-12)\left(t+\frac{6}{5}\right)$. Az első egyenletből $t = \frac{v}{310}$, ezt a másodikba helyettesítve és rendezve a $v^2 - 12v - 3100 = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből a pozitív gyök $v = 62$. Ez megfelel a feltételeknek is, tehát a gépkocsi átlagsebessége $62 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1364. Ha v jelöli a lassúbb gépkocsi sebességét, akkor $\frac{150}{v} - \frac{150}{v+10} = \frac{1}{2}$. Ebből $v^2 + 10v - 3000 = 0$ és a pozitív gyök $v = 50$. Az egyik gépkocsi $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt.

1365. Legyen az egyik turista átlagsebessége $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, menetideje t óra, akkor $40 = vt$, $40 = (v+2)(t-1)$. Ezekből $v^2 + 2v - 80 = 0$, $v_1 = 8$, $v_2 = -10$. Ez utóbbi nem megoldás. Így az egyik turista sebessége $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1366. Ha a turista napi teljesítménye x km, akkor menetideje $\frac{105}{x}$ nap. A feltétel szerint $\left(\frac{105}{x}+2\right)(x-6) = 105$. Ebből $x^2 - 6x - 315 = 0$. $x_1 = 21$ megfelel a feladatnak, $x_2 = -15$ nem, ezért a turista naponta 21 km-t tett meg.

1367. Legyen a vonat eredeti sebessége $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, menetideje t óra. Ekkor a feladat feltételei szerint $192 = vt$, $192 = (v+10)\left(t-\frac{16}{60}\right)$. Az egyenletrendszer megoldása a $\left(80; \frac{12}{5}\right)$ és a $\left(-90; -\frac{32}{15}\right)$ számpár, de a feladat feltételeinek csak az első felel meg, tehát a gyorsvonat eredeti sebessége $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

1368. Legyen $AB = x$ és a gépkocsi átlagsebessége v_1, a motorkerékpáré v_2. Ha az első találkozásig t_1 idő telt el, akkor $v_1 t_1 = 37$ és $v_2 t_1 = x - 37$. Ha a második találkozásig további t_2 idő telt el, akkor $v_1 t_2 = 2x - 53$ és $v_2 t_2 = x + 53$. Szorozzuk össze az első és a harmadik, illetve a második és a negyedik egyenlet megfelelő oldalait! A kapott egyenletek bal oldala azonos, tehát kell, hogy a jobb oldalak egyenlők legyenek, azaz $37(x+53) = (x-37)(2x-53)$ legyen. Ebből rendezés után $x^2 - 82x = 0$. Mivel $x \neq 0$, ezért $x = 82$. A két város 82 km-re van egymástól.

Megjegyzés. Mivel a találkozásig azonos ideig haladtak a járművek, ezért a megtett utak aránya állandó, vagyis $\frac{37}{x-37} = \frac{2x-53}{x+53}$, és ez éppen az előzőekben kapott egyenlet. A kétféle módszert azért említettük meg, hogy megmutassuk: lehet egy feladat feltételeit apró lépésekben haladva felírni, majd a kapott egyenleteket algebrai jellegű felismerésekkel megoldani, és lehet a döntő kapcsolatot felismerve egyetlen lépésben, egyetlen egyenlettel a megoldáshoz eljutni.

1369. Ha a vetés x napig tartott, akkor a napi teljesítmény $\frac{2000}{x}$ hektár. A feltétel szerint $\left(\frac{200}{x}+5\right)(x-2) = 200$. Ebből $x^2 - 2x - 80 = 0$. Az $x_1 = 10$ gyök megfelel a feladat feltételének, az $x_2 = -8$ nem, ezért a vetés 10 napig tartott.

1370. Ha a szakmunkás x nap alatt végzi el a munkát, akkor a betanított munkás $x+3$ nap alatt teszi ezt és így napi teljesítményük a munka $\frac{1}{x}$, illetve $\frac{1}{x+3}$ része. A feltétel szerint $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right) = 1$. Ebből $x^2 - x - 6 = 0$. $x_1 = 3$ megfelel, $x_2 = -2$ nem. Így a szakmunkás 3 nap alatt, a betanított munkás $3+3 = 6$ nap alatt végzi el egyedül a munkát.

1371. Ha a bánya x db $\frac{600}{x}$ tonna teherbírású kocsit kért, és a vasút $(x-10)$ db $\frac{600}{x}+5$ tonna teherbírású kocsit küldött, akkor $(x-10)\left(\frac{600}{x}+5\right) = 600$. Ebből $x^2 - 10x - 1200 = 0$. $x_1 = 40$ megfe-

lel, $x_2 = -30$ nem. $\frac{600}{40} = 15$. A bánya 40 db 15 tonnás kocsit kért, de 30 db 20 tonnás kocsit kapott.

1372. Ha az árleszállítás x%-os volt, akkor a rádió ára $\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 \cdot 2500 = 2025$. Ebből $x = 100 \pm 90$. A pozitív előjel nem jöhet szóba, így 10%-os volt az árleszállítás.

1373. Ha a motorcsónak lefelé t óra alatt 3 km-t, felfelé 2 km-t tesz meg, akkor 24 km utat lefelé $8t$, felfelé $12t$ óra alatt tesz meg és a feltétel szerint $8t+12t = 2{,}5$ vagyis $t = 0{,}125$ óra. Ha a csónak sebessége állóvízben v, a folyóvízben f, akkor $v+f = \frac{3}{0{,}125} = 24$, $v-f = \frac{2}{0{,}125} = 16$. Ebből $f = 4$, $v = 20$. A folyóvíz sebessége $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a motorcsónaké állóvízben $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Megjegyzés. Jelöléseinkkel a feltételek a $\frac{v+f}{v-f} = \frac{3}{2}$, $\frac{24}{v+f} + \frac{24}{v-f} = 2{,}5$ egyenletrendszerrel is megadhatók.

1374. Ha az egyik versenyző sebessége $v\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és t másodperc alatt ér célba, akkor a megoldandó egyenletrendszer $960 = vt$, $960 = (v+0{,}2)(t-20)$. Megoldása $v = 3$, $t = 320$. Az egyik versenyző $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-os sebességgel 320 s alatt, a másik $3{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-os sebeséggel 300 s alatt ért célba.

1375. Ha az egyik szerelő x, a másik y nap alatt végzi el a munkát egyedül, akkor $24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1$ és $16\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + 16 \cdot \frac{1}{x} = 1$. Ebből $\frac{1}{x} = \frac{1}{48}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{48}$, $x = y = 48$. Mindkét szerelő 48 nap alatt végzi el a munkát egyedül. Ha észrevesszük, hogy az elküldött szerelő el nem végzett 8 napi munkáját az ottmaradt szerelő éppen $16-8 = 8$ nap alatt tudja pótolni, akkor azonnal azt kapjuk, hogy a két szerelő teljesítménye azonos, és így a $24 \cdot \frac{2}{x} = 1$ egyenletből $x = 48$.

1376. Ha a gépírónő x óra alatt írja le a 120 oldalt, akkor 1 oldalt $\frac{120}{x}$ óra alatt ír le és a feltétel szerint $\left(\frac{120}{x}+2\right)(x-2) = 120$. Ebből $x^2-2x-120 = 0$. Az $x_1 = 12$ gyök megfelel, az $x_2 = -10$ nem. A gépírónő 12 óra alatt írta le a szöveget.

1377. Ha a munkacsoport eredetileg x nap alatt lett volna készen, akkor napi teljesítménye $\frac{8000}{x}$ köbméter lett volna. Az új helyzet szerint $(x-8)\left(\frac{8000}{x}+50\right) = 8000$. Ebből $x^2-8x-1280 = 0$. $x_1 = 40$, $x_2 = -32$. x_2 nem felel meg. Mivel $x = 40$ napnál 8 nappal előbb lettek készen, így 32 nap alatt lettek készen, és ezért 25%-kal teljesítették túl a tervet.

1378. Ha az alkohol töménysége eredetileg x, akkor a kétszeri hígítás után $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(12x)\right] = 0{,}25 \cdot 12$ tiszta alkohol van az edényben. Ebből $x = 1$, tehát eredetileg az alkohol 100%-os töménységű volt.

1379. Ha a csapokat egyszerre nyitjuk ki és ezzel a tartályt t óra alatt töltjük meg, akkor az első csap $t+4$, a másik $t+9$ óra alatt tölti meg egyedül a tartályt, és így $t\left(\frac{1}{t+4}+\frac{1}{t+9}\right) = 1$. Ebből $t^2 = 36$, $t = \pm 6$. Csak a pozitív gyök jöhet szóba. Így az egyik csapon át 10 óra, a másik csapon át 15 óra alatt telik meg a tartály.

1380. Ha a második csap t óra alatt, akkor az első csap $t-3$ óra alatt tölti meg a tartályt. A feltételek szerint $10\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-3}\right) = \frac{5{,}75}{t-3}$. Ebből $t^2-28{,}75t+47{,}25 = 0$, $t_1 = 27$, $t_2 = -1{,}75$. A második gyök nem felel meg. Ezért az első csap 24 óra alatt, a második csap 27 óra alatt tölti meg a tartályt.

1381. Jelölje az egyik számot x, a másikat y. Ekkor a feladat feltételei szerint $x+y = 14$, $x^2+y^2 = 386$. Ebből $x^2-14x-95 = 0$, $x_1 = 19$, $x_2 = -5$. A megfelelő y értékek $y_1 = -5$, $y_2 = 19$. Ezért a két szám a 19 és a -5. *Megjegyzés:* Ha az első feltételt már az egyenlet felírásánál használjuk fel, akkor a másik szám $14-x$, és az egyetlen egyenlet $x^2+(14-x)^2 = 386$, vagyis $x^2-14x-95 = 0$.

1382. Ha az egyik szám x, akkor a megoldandó egyenlet $x^3+(18-x)^3 = 1674$. Ebből $x_1=11$, $x_2=7$, így $18-x_1=7$, $18-x_2=11$. A két szám a 11 és a 7.

1383. Ha az egyik szám x, akkor $(4+x)^3-x^3=1468$. Ebből $x^2+4x-117=0$, $x_1=9$, $x_2=-13$, így $4+x_1=13$, $4+x_2=-9$. A két szám a 13 és 9 vagy a -9 és -13.

1384. Ha x jelöli az egyik, y a másik számot, akkor $x^2+y^2=8{,}5$, $xy=3{,}75$. Ebből helyettesítéssel $y^4-8{,}5y^2+14{,}0625=0$, így vagy $y^2=6{,}25$, vagy $y^2=2{,}25$, $y_{1,2}=\pm 2{,}5$, $y_{3,4}=\pm 1{,}5$. A megfelelő x értékek: $x_{1,2}=\pm 1{,}5$, $x_{3,4}=\pm 2{,}5$. Két számpár felel meg, a 2,5; 1,5 és a $-2{,}5$; $-1{,}5$.

1385. Ha x jelöli az egyik, y a másik számot, akkor a megoldandó egyenletrendszer $xy=36$, $x^2+y^2=97$ alakú. Helyettesítés után a $\left(\frac{36}{y}\right)^2+y^2=97$, $y^4-97y^2+1296=0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $y_{1,2}=\pm 9$, $y_{3,4}=\pm 4$. A megfelelő x értékek: $x_{1,2}=\pm 4$, $x_{3,4}=\pm 9$. Két különböző számpár felel meg, a 9; 4 és a -9; -4.

1386. A feladat feltételei szerint $p=x_1+x_2=3-5=-2$, $-q=x_1x_2=-15$, vagyis $q=15$.

1387. Ha az egyik szám a, akkor a másik $10-a$ és $a(10-a)=9$, vagyis $a^2-10a+9=0$. Ebből $a_1=9$, $a_2=1$ és a megfelelő másik szám 1 és 9. A negyedik hatványok összege mind a két esetben 6562.

1388. Ha p és r egészek és p páros (páratlan), akkor az egyenlet diszkriminánsa $d=p^2-4r$ páros (páratlan), és mivel a diszkrimináns teljes négyzet is, ezért négyzetgyöke egész, mégpedig páros (páratlan). Ebből következik, hogy a megoldóképlet számlálója mindig páros és így az egyenlet gyökei egész számok.

1389. A feltételek alapján $p=x_1+x_2=6$, $-q=x_1x_2=8$, vagyis $p=6$, $q=-8$.

1390. Legyen a tört számlálója a, nevezője b, akkor $ab=42$ és $\frac{a+1}{b-1}=\frac{b}{a}$. Az utóbbi egyenletből $b^2-a^2=b+a$ és így vagy $a+b=0$, vagy $b-a=1$. Az első esetben $a=-b$, de ekkor az első egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala 42, és ez lehetetlen. A második esetben $b=a+1$, és ezt az első egyenletbe helyettesítve $a^2+a-42=0$. Ebből $a_1=6$, $a_2=-7$, a megfelelő b értékek: $b_1=7$, $b_2=-6$. Két tört felel meg, a $\frac{6}{7}$ és $\frac{-7}{-6}$.

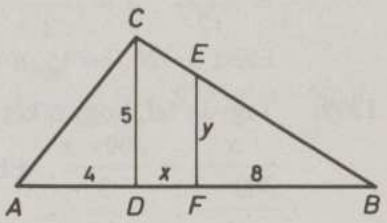
Megjegyzés: Az $\frac{a+1}{b-1}=\frac{b}{a}$ egyenletből csak speciális esetként következik, hogy $a+1=b$ és $b-1=a$ (és ez a kettő most éppen ugyanazt jelenti), mert eleve nem biztos, hogy a törtek között nincs áltört. Pl. az $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ egyenlőség alapján hiba volna azt mondani, hogy $1=2$ és $4=8$. Esetünkben azonban az $ab=42$ és $a+1=b$ egyenletrendszer is (de nem szükségszerűen) az egyébként helyes megoldást adja.

1391. Ha a derékszögű háromszög befogóit a és b, átfogóját c jelöli, akkor $a+b+c=24$, $a^2+b^2+c^2=200$ és $a^2+b^2=c^2$. E két utóbbi egyenletből $c=10$. Az $a^2+(14-a)^2=100$ egyenletből $a^2-14a+48=0$, és így $a_1=8$, $a_2=6$, a megfelelő b értékek $b_1=6$, $b_2=8$. Egy háromszög felel meg, amelyben a befogók 6 egység, illetve 8 egység, az átfogó 10 egység hosszú.

1392. Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b. Ekkor $ab=1260$ és $a^2+\left(\frac{1260}{a}\right)^2=53^2$. Rendezés után $a^4-2809a^2+1\,587\,600=0$; ebből $a_1^2=2025$, $a_2^2=784$. Csak a pozitív gyökök jöhetnek szóba. Így $a_1=45$, $a_2=28$. A megfelelő b értékek: $b_1=28$, $b_2=45$. A befogók 28 cm, illetve 45 cm hosszúak.

1393. Ha a téglalap oldalainak hossza a, illetve b, akkor $ab=1925$ és $a+b=90$. a és b a $b^2-90b+1925=0$ másodfokú egyenlet gyökeinek tekinthető. Mivel $b_1=55$, $b_2=35$, ezért az oldalak hossza 55 m és 35 m.

1394. A háromszög területe 30 területegység. Legyen a keresett szakasz hossza y egység és legyen a CD magasságtól x egységnyire (**1394.** ábra)! Ekkor az EFB derékszögű háromszög területe $\frac{(8-x)y}{2}=\frac{30}{2}$ és a $CDFE$ trapéz területe $\frac{5+y}{2}x=\frac{30}{2}-\frac{5\cdot 4}{2}=5$. A két egyenletből rendezés után $x^2-16x+16=0$, ebből pedig $x_{1,2}=8\pm 4\sqrt{3}$. $x_1=8+4\sqrt{3}=14{,}93>12$ nem felel



1394

meg a feladatnak, $x_2 = 8-4\sqrt{3}$ igen, és ezzel $y = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. A szakasz hossza $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (= 4,33) egység.

1395. Ha az egyes épületekben rendre a, b, c, d diák lakik, akkor a feladat feltételeit az $a+b+c+d = 436$, $a = d+10$, $d = c+8$, $b = c+10$ egyenletrendszerrel írhatjuk le. c-vel kifejezve az a-t is $a = c+8+10 = c+18$, és ezeket az első egyenletbe helyettesítve $(c+18)+(c+10)+c+(c+8) = 436$. Ebből $c=100$, és ezt felhasználva az egyes épületekben 118; 110; 100; 108 diák lakik.

1396. Ha egy jegy x forintba került, akkor $\left(\frac{384}{x}-4\right)(x+3) = 420$, vagy rendezve $x^2+12x-228 = 0$. Ebből $x_1=12$, $x_2=-24$, de ez utóbbi nem felel meg. Mivel $\frac{384}{12} = 32$, ezért az első osztály 32 jegyet vett darabonként 12 Ft-os áron, a második osztály 28 jegyet vett darabonként 15 Ft-os áron.

1397. Jelölje a hátsó kerék kerületét x, az elsőét y, akkor a feladat feltételei szerint $\frac{36}{x}+6 = \frac{36}{y}$, $\frac{36}{x+1}+3 = \frac{36}{y+1}$. A két egyenletből rendezés után $5x^2-13x-6 = 0$. Ebből $x_1=3$, $x_2=-0{,}4$. A második gyök nem jöhet szóba. $x=3$ esetében $y=2$. Így az első kerék 18, a második 12 fordulatot tesz meg a távon.

1398. Ha a jelöli az apa, b, c és d a fiúk mostani életkorát, akkor a feladat feltételei szerint $a-5 = b+c+d$, $a+10 = 2(b+10)$, $a+20 = 2(c+20)$, $a+30 = 2(d+30)$. b, c és d értékét a-val kifejezve $b = \frac{a-10}{2}$, $c = \frac{a-20}{2}$, $d = \frac{a-30}{2}$, és ezt az első egyenletbe helyettesítve $a=50$. Ezért $b=20$, $c=15$, $d=10$. A fiúk most 20, 15, 10 évesek.

1399. Tegyük fel, hogy a két vonat A-tól x km távolságra találkozik. Akkor $\frac{x}{\frac{300-x}{2}} = \frac{300-x}{\frac{3}{4{,}5}}$. Ebből $x=180$. Az egyik vonat átlagsebessége $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1400. Ha a gépek indulásuk után t óra múlva találkoztak, akkor az egyik gép sebessége $\frac{1400}{t+\frac{4}{3}}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $\frac{1400}{t+\frac{3}{4}}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A találkozásig együtt $1400 = \left(\frac{1400}{t+\frac{4}{3}}+\frac{1400}{t+\frac{3}{4}}\right)t$ km utat tettek meg. Ebből rendezés után $t^2=1$ és így $t=1$ (t negatív nem lehet). Ezért az A-ból B-be repülő repülőgép átlagsebessége $1400:\frac{7}{3} = 600\frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt, az ellenkező irányba repülőé $1400:\frac{7}{4} = 800\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1401. Ha az első fúrópajzs x, a második y méter alagutat fúr naponta, akkor az alagút hossza $60x+60y$ méter. Az első feltétel szerint $\frac{30}{100}\cdot 60x + \frac{26\frac{2}{3}}{100}\cdot 60y = 60$, a második feltétel szerint $\frac{2}{3}\cdot\frac{60y}{x} = \frac{3}{10}\cdot\frac{60x}{y}+4$. Az első egyenletből $y = \frac{30-9x}{8}$, ezt a másodikba helyettesítve és rendezve $7x^2-64x+100 = 0$, $x_1 = \frac{50}{7}$, $x_2=2$. Az első gyök nem felel meg, mert ekkor $y=-30<0$, a második igen $\left(y=\frac{3}{2}\right)$, ezért az első fúrópajzs 2 m, a második 1,5 m alagutat fúr naponta.

1402. Ha f jelöli a folyó vizének a sebességét, v a hajó sebességét állóvízben, akkor $\frac{9}{v+f}+\frac{9}{v-f} = 2{,}25$; $\frac{9}{v+2f}+\frac{9}{v-2f} = 3$. Ebből $v = \frac{26}{3}$, $f = \frac{2\sqrt{13}}{3}$. A folyó sebessége $\frac{2}{3}\sqrt{13} = 2{,}4\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a hajó sebessége állóvízben $26\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1403. Ha az egyik gépírónő x, a másik y óra alatt írja le a kéziratot, akkor a feltételek szerint $1 = 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$, $0{,}8 = 4\frac{1}{x} + 6\frac{1}{y}$. Ebből $\frac{1}{x} = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{15}$. Az egyik gépírónő 10 óra alatt, a másik 15 óra alatt írja le a kéziratot egyedül.

1404. Egy-egy traktoros 100%-os napi teljesítménye a terület $\frac{1}{18}$ részének a felszántása. Ha a második esetben t nap alatt lettek készen a munkával, akkor $1{,}2 \cdot \frac{1}{18}t + \frac{1}{18}(t-4) = 1$. Ebből $2{,}2t = 22$, vagyis $t = 10$. 10 nap alatt lettek készen a munkával.

1405. Ha az első munkás x, a második y óra alatt végzi el a munkát, akkor az első feltétel szerint $12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$, a második feltétel szerint $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25$. A második egyenletből $y = 50 - x$. Ezt az elsőbe helyettesítve $x^2 - 50x + 600 = 0$. Ebből $x_1 = 30$, $x_2 = 20$. A megfelelő y értékek $y_1 = 20$, $y_2 = 30$. Látszik, hogy két szimmetrikus, azaz lényegében egy megoldás van, ezért nem szükséges első és második munkásról beszélni, hanem elegendő az egyik, másik jelző. Az egyik munkás 20 nap, a másik 30 nap alatt végezné el a munkát egyedül.

1406. Tegyük fel, hogy az n ember $x(>0)$ óránként állt munkába és az utolsó ember munkába állása után még $x+y$ $(y \geqq 0)$ óráig dolgoztak együtt. Ekkor $(1+2+\ldots+n)x + ny = 24n$, és a másik feltétel szerint $nx + y = 5(x+y)$. A második egyenletből $y = \frac{(n-5)x}{4}$ (ahol $n \geqq 5$), és ezt az elsőbe helyettesítve $(n-1)x = 32$. Ebből $x = \frac{32}{n-1}$ és így $y = \frac{8(n-5)}{n-1}$, ahol $n \geqq 5$. (Figyeljük meg, hogy $x+y = 8$.) Ha x és y értékére nem teszünk további megszorításokat, végtelen sok megoldás van. Ha pl. $y=0$, akkor $n=5$, $x=8$, vagyis az utolsónak beállt munkás 8, az utolsó előtti 16 stb., az első 40 órát dolgozott. Ha pl. azt kötjük ki, hogy x legyen egész szám, akkor $y = 8-x$ is egész, és ekkor a következő négy megoldást kapjuk:

x	1	2	4	8
y	7	6	4	0
n	33	17	9	5

Egyenlőtlenségek

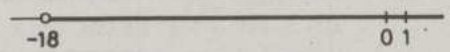
1407. $x > 2$.

1408. $x < 3$.

1409. $x \leqq 1$.

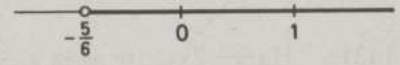
1410. $x \geqq -4$.

1411. $x > -18$ (**1411.** ábra).



1411

1412. $x > -\frac{5}{6}$ (**1412.** ábra).



1412

1413. $x \leqq \frac{120}{11}$. Igen.

1414. $x \leqq 6{,}3$. Igen.

1415. $x \geqq \frac{77}{6}$. Ennek nincs közös része a [10; 12] intevallummal.

1416. $x \geqq 12$. Nem.

1417. $x \leqq -0{,}6$.

1418. $x \leqq 6$.

1419. $x > \frac{71}{51}$. Nem.

1420. $x > -\frac{5}{3}$. Mivel a $\left]-\frac{5}{3}, \infty\right[$ intervallum nyílt, ezért ilyen érték nincs.

1421. $x \leqq 1$. A legnagyobb érték: $x = 1$.

1422. $x \geqq 2$. Igen, az $x = 2$.

1423. $x \leqq 0$. Van, az intervallum minden pontja.

1424. $x > 13$. Nincs.

1425. $x > 13$. Nincs.

1426. $x \geqq 2$, a legkisebb szám: $x = 2$.

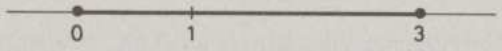
1427. Ha $x \geqq 1$, akkor az abszolútérték definíciója szerint $x - 1 < 2$ és így $x < 3$. Ha $x < 1$, akkor $1 - x < 2$, és ebből $x > -1$. Ez egyszerre akkor teljesül, ha: $-1 < x < 3$.

1428. Ha $x \geqq -2$, akkor $x + 2 < 3$, $x < 1$; ha $x < -2$, akkor $-x - 2 < 3$, $x > -5$. Így a megoldás: $-5 < x < 1$.

1429. $x < 2$ vagy $x > 4$.

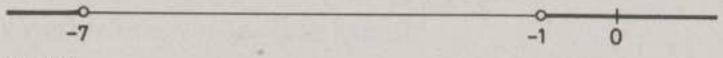
1430. $x < -6$ vagy $x > -2$.

1431. Ha $3 - 2x \geqq 0$, azaz $x \leqq \frac{3}{2}$, akkor az egyenlőtlenség $3 - 2x \leqq 3$ alakú, és ebből $x \geqq 0$. Így $0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$. Ha $3 - 2x < 0$, azaz $x > \frac{3}{2}$, akkor $-3 + 2x \leqq 3$, és ebből $x \leqq 3$. Így $\frac{3}{2} < x \leqq 3$. A megoldás tehát $0 \leqq x \leqq 3$ (**1431.** ábra).



1431

1432. Ha $x \geqq 4$, akkor $\frac{x}{2} + 2 > \frac{3}{2}$, $x > -1$. Ha $x < -4$, akkor $-\frac{x}{2} - 2 > \frac{3}{2}$, $-7 > x$. (**1432.** ábra).



1432

1433. $-\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{2}$ és így

$x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

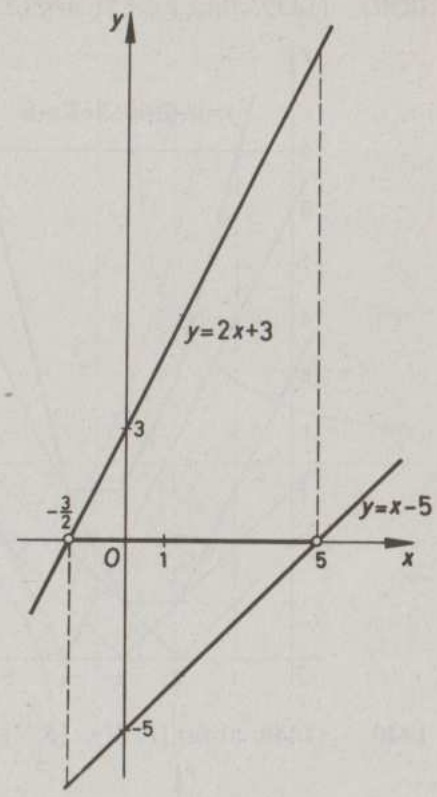
1434. $x \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

1435. Ha $2x + 1 \geqq 0$, azaz $x \geqq -\frac{1}{2}$, akkor $2x + 1 < 5$, ebből $x < 2$, tehát $-\frac{1}{2} \leqq x < 2$. Ha $2x + 1 < 0$, azaz $x < -\frac{1}{2}$, akkor $-2x - 1 < 5$, ebből $x > -3$, tehát $-3 < x < -\frac{1}{2}$.

Az x-re kapott értékek között két természetes szám van: $x = 1$ és $x = 0$.

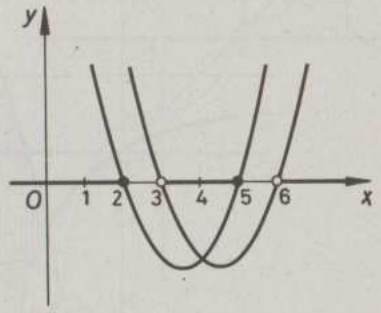
1436. $x \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

1437. A tört értéke negatív, ha a számláló és a nevező ellentett előjelű. Ez a $]-\frac{3}{2}; 5[$ intervallumban következik be (**1437.** ábra). Így a megoldás $-1{,}5 < x < 5$.



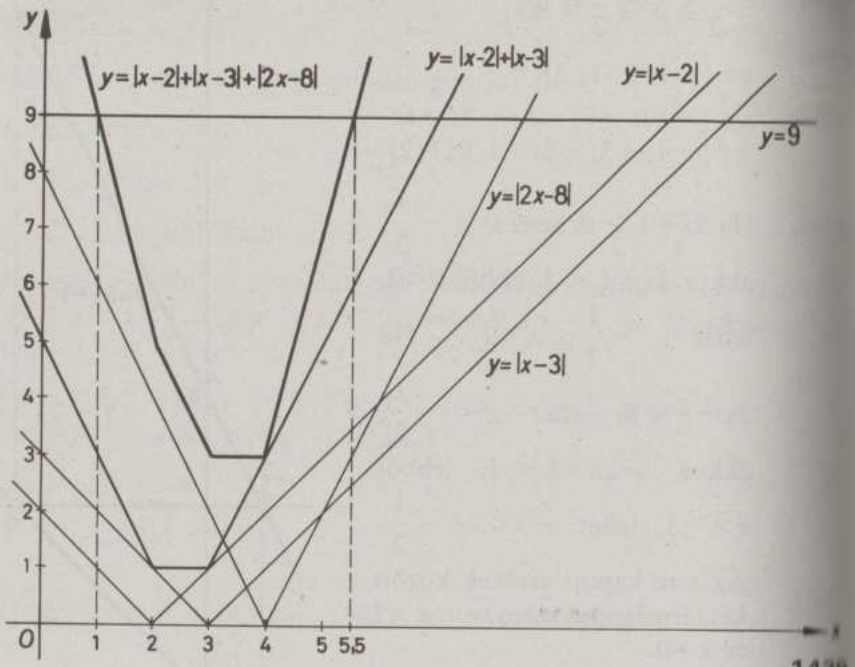
1437

1438. (**1438.** ábra)
$]-\infty; 2] \cup]3; 5] \cup]6; \infty[$.



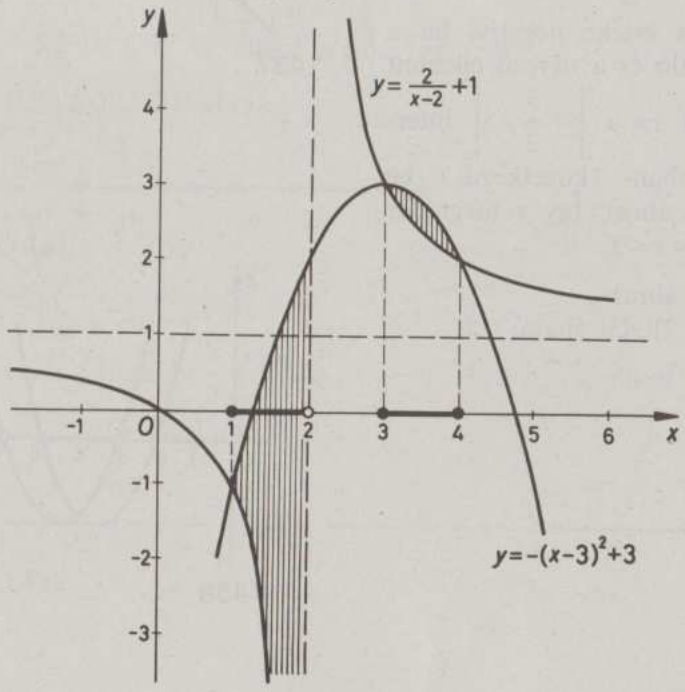
1438

1439. (**1439.** ábra.) $x = 1$; $x = 5{,}5$.



1439

1440. (**1440.** ábra) $[1; 2[\cup [3; 4]$.

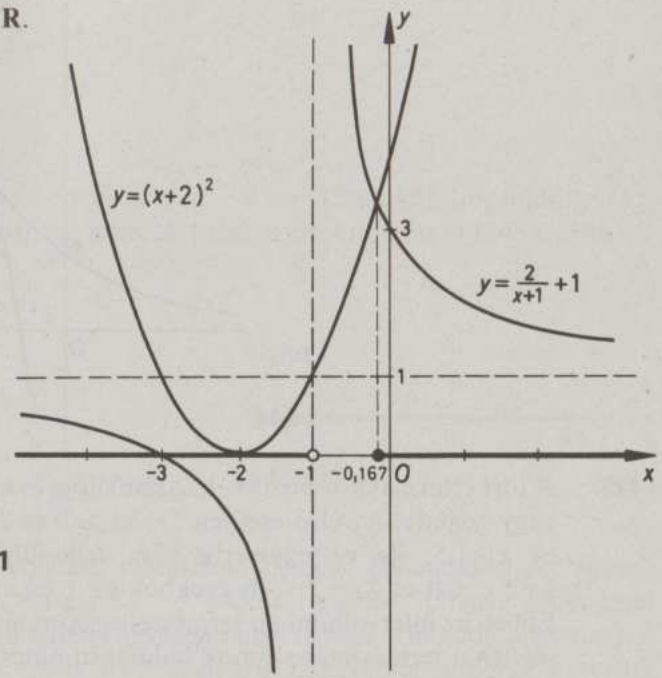


1440

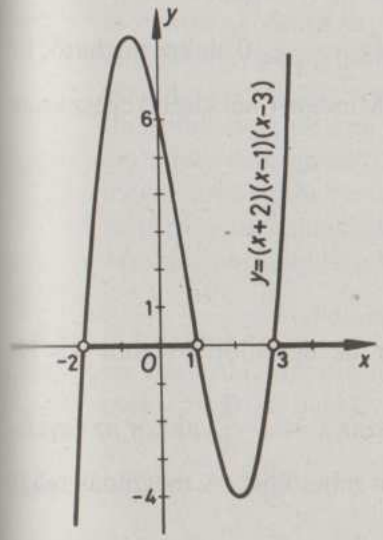
1441. (**1441.** ábra) $]-\infty; -1[\cup [-0{,}167; \infty[$.

1442. (**1442.** ábra) $]-2; 1[\cup]3; \infty[$.

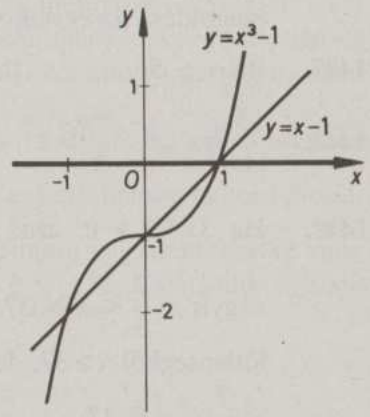
1443. (**1443.** ábra) $x \in \mathbf{R}$.



1441

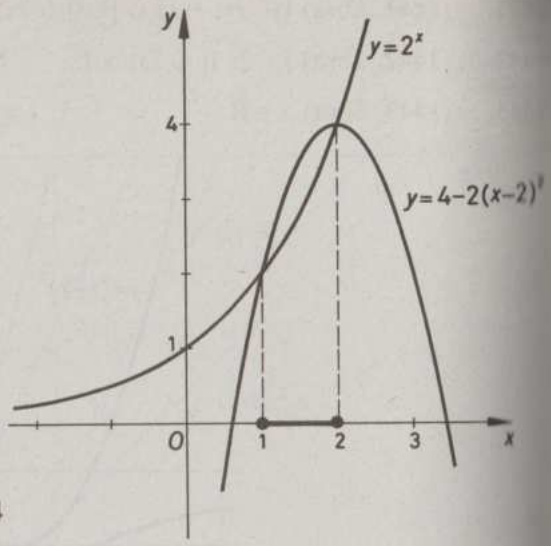


1442



1443

1444. (**1444.** ábra) [1; 2].



1444

1445. A tört értéke akkor pozitív, ha számlálója és nevezője egyszerre pozitív vagy negatív. Az első esetben $5-5x > 0$ és $2x-3 > 0$; ezekből $x < 1$ és $x > 1{,}5$, de ez egyszerre nem teljesülhet. A második esetben $5-5x < 0$ és $2x-3 < 0$; ezekből $x > 1$ és $x < 1{,}5$, vagyis $1 < x < 1{,}5$. Ebben az intervallumban természetes szám nincs, ezért az egyenlőtlenségnek a természetes számok halmazán nincs megoldása.

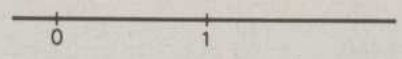
1446. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség $\frac{8}{x-4} \leqq 0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha $x-4 < 0$, azaz $x < 4$. Minden 4-nél kisebb egész szám megoldása az egyenlőtlenségnek.

1447. $0 < x \leqq 5$.

1448. $\frac{13}{4} < x < 5$.

1449. Ha $3x+7 > 0$, azaz $x > -\frac{7}{3}$, akkor az egyenlőtlenségből $x < 37$, vagyis $-\frac{7}{3} < x < 37$. Ha $3x+7 < 0$, azaz $x < -\frac{7}{3}$, akkor az egyenlőtlenségből $x > 37$, de ez egyszerre nem teljesülhet. A megoldás tehát $-\frac{7}{3} < x < 37$.

1450. $x > \frac{2}{5}$.



1453

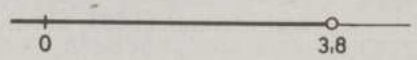
1451. $x > \frac{13}{3}$.

1452. $x > \frac{37}{11}$.

1453. Rendezés után az egyenlőtlenség $-1 > -12$ alakú, ami mindig igaz, ezért az egyenlőtlenség minden valós x értékre teljesül (**1453.** ábra).

1454. $x > \frac{9}{34}$ (**1454.** ábra).

1454



1455

1455. $x < \frac{19}{5}$ (**1455.** ábra).

1456. $x < -\frac{59}{2}$. Nem.

1457. *Első megoldás.* A törtek számlálója pozitív. Ha mind a két nevező pozitív, vagyis $x > 4$ és $x > -3$, akkor rendezve az egyenlőtlenséget $x < -10$. E három feltétel egyszerre nem teljesül. Ha mind a két nevező negatív, vagyis $x < 4$ és $x < -3$, akkor az egyenlőtlenségből $x < -10$, és ekkor az előző két feltétel is teljesül. Ha a két nevező ellenkező előjelű, vagyis ha (első eset) $x < 4$ és $x > -3$, akkor az adott egyenlőtlenségből $x > -10$, és e utolsó három egyenlőtlenségből $-3 < x < 4$; ha (második eset) $x > 4$ és $x < -3$, akkor nincs újabb megoldás, mert e két egyenlőtlenség egyszerre nem teljesül. Összefoglalva: Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $]-\infty; -10[\cup]-3; 4[$. Az adott intervallum nem tartozik a megoldáshalmazhoz.

Második megoldás: Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség az $\frac{x+10}{(x-4)(x+3)} < 0$ alakra hozható. Ez az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a bal oldalon álló három elsőfokú polinom vagy mindegyike vagy csak az egyike negatív. Az első esetben $x < -10$, a második esetben $-3 < x < 4$.

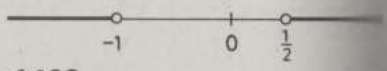
1458. $-1 < x < 2$ vagy $x > 8$. Nem.

1459. $x < -\frac{1}{2}$; $2 < x < 3$. Nem.

1460. $-\frac{11}{92} < x < -\frac{1}{32}$; $x > 2$. Nem, mert az $x = 2$ nem tartozik a megoldáshalmazhoz.

1461. $x < -2$; $-\frac{1}{2} < x < 2$. Igen.

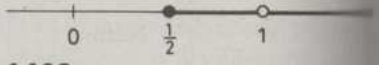
1462. $x < -1$; $x > \frac{1}{2}$ (**1462.** ábra).



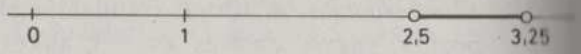
1462

1463. Azonos átalakításokkal az adott egyenlőtlenség a $\frac{2x-1}{(x-1)^2} \geqq 0$ alakra hozható. A nevező nem lehet 0, ezért $x \neq 1$. Minden más esetben a nevező pozitív, ezért az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $2x - 1 \geqq 0$, vagyis $x \geqq 0{,}5$. Az egyenlőtlenség megoldása tehát a $[0{,}5; 1[\cup]1; \infty[$ számhalmaz (**1463.** ábra).

1464. $\frac{5}{2} < x < \frac{13}{4}$ (**1464.** ábra).

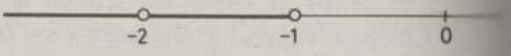


1463



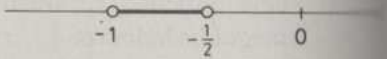
1464

1465. $x < -2$; $-2 < x < -1$ (**1465.** ábra).



1465

1466. $-1 < x < -\frac{1}{2}$. (**1466.** ábra).



1466

1467. $-2 < x < -1$; $0 < x < \frac{1}{2}$.

1468. $x < -7$; $3 - \sqrt{22} < x < 3 + \sqrt{22}$.

1469. $1 < x < 2$.

1470. Az egyenlőtlenség azonos átalakításokkal a $\frac{2x-3}{(x-2)(x-1)} \geqq 0$ alakra hozható. A tört akkor nemnegatív, ha vagy $2x - 3 \geqq 0$ és $(x-2)(x-1) > 0$, vagy $2x - 3 \leqq 0$ és $(x-2)(x-1) < 0$. Az első eset

ben $x>2$, a második esetben $1<x\leqq\frac{3}{2}$. Ezekre az x értékekre teljesül az egyenlőtlenség.

1471. Az első egyenlőtlenség azonos átalakításokkal a $\frac{2x-13}{3(5x+2)}<0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha vagy $2x-13<0$ és $5x+2>0$, vagy $2x-13>0$ és $5x+2<0$. Az első esetben $-\frac{2}{5}<x<\frac{13}{2}$, a második esetben nincs megoldás. A második egyenlőtlenség a $\frac{-23x}{2(5x+2)}<0$ alakra hozható. Ez akkor teljesül, ha vagy $x>0$, vagy $x<-\frac{2}{5}$. Az adott két egyenlőtlenség tehát akkor teljesül egyszerre, ha $0<x<\frac{13}{2}$.

1472. $(1{,}98=)\frac{103}{52}<x<\frac{97}{48}(=2{,}02)$.

1473. $-5<x<-2$.

1474. Nem. Az első egyenlőtlenség a $0<x<1$ értékekre, a második az $x<0$ értékekre teljesül.

1475. Nem. Mind a két egyenlőtlenség az $x>-1$ értékekre teljesül, de a második egyenlőtlenségben $x\neq0$.

1476. Az első egyenlőtlenség az $x<2$, a második a $-1\leqq x$ értékekre teljesül. A két egyenlőtlenség a $-1\leqq x<2$ értékekre áll fenn, és ezek között három egész szám van, mégpedig a -1; 0; 1.

1477. Az egyenlőtlenség megoldása $-\frac{1}{2}<x<\frac{4}{5}$, tehát $x=0$.

1478. $x=-2$; $x=-1$; $x=0$.

1479. $x<\frac{23}{6}$, tehát a legnagyobb egész szám a 3.

1480. 3.

1481. Ha $5x-3\geqq0$, azaz $x\geqq\frac{3}{5}$, akkor az egyenlőtlenség $5x-3<7$, és

ebből $x<2$. Ebben az esetben a megoldás $\frac{3}{5} \leqq x<2$. Ha $5x-3<0$, azaz $x<\frac{3}{5}$, akkor az egyenlőtlenség $-5x+3<7$, és ebből $x>-\frac{4}{5}$. Ebben az esetben a megoldás $-\frac{4}{5}<x<\frac{3}{5}$. A két esetet összevetve az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $\left]-\frac{4}{5}; 2\right[$ számhalmaz.

1482. $-\frac{2}{3}<x<0$.

1483. Az egyenlőtlenséget átalakítva $(x-4)^2>0$, és így a megoldás minden valós szám, kivéve a 4.

1484. $-2<x<3$.

1485. $x \leqq -1$; $x \geqq 5$ és x egész szám.

1486. $\{0; 1\}$.

1487. $0<x<2$.

1488. $(1{,}76 =)\, 4-\sqrt{5}<x<4+\sqrt{5}\,(=6{,}24)$.

1489. Minden valós számra teljesül.

1490. $0{,}5<x<1$.

1491. Mivel a nevező teljes négyzet, ezért az $x=0{,}5$ kivételével minden x értékre és így minden negatív x értékre is igaz az egyenlőtlenség.

1492. $x<-6$.

1493. Minden 4-nél nagyobb egész szám.

1494. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség a $\frac{-x^2+x+2}{2(x^2+3x-4)}<0$ alakra hozható. A számlálóban álló polinom zérushelyei $x_1=-1$ és $x_2=2$. A polinom e két zérushely közötti intervallumban pozitív, az intervallumon kívül negatív. A nevezőben álló polinom zérushelyei $x_3=-4$ és $x_4=1$. A polinom e két zérushely közötti intervallumban negatív, az intervallumon kívül pozitív. Ellentett előjelű a két polinom akkor, ha $x<-4$; $-1<x<1$; $x>2$. Érdemes a polinomok grafikonját elkészíteni (parabolák) és az ábráról az előjelviszonyokat leolvasni.

1495. $-\infty<x<-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{2}<x<2$. Nem (az $x=2$ érték nem tartozik a megoldáshalmazhoz).

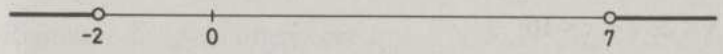
1496. $-1{,}5<x<2$; $x>3$. Nem.

1497. $-\infty<x<-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$. Igen.

1498. $x<-6$; $-3<x<0$.

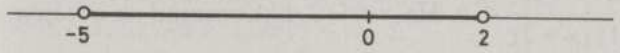
1499. $\frac{1}{3}<x<1$; $x>2$.

1500. Az egyenlőtlenség felírható a $\frac{3(x-2)^2\,(x+2)}{x-7}>0$ alakban, ahol $(x-2)^2$ az $x=2$ kivételével minden x értékre pozitív, tehát elegendő a továbbiakban az $\frac{x+2}{x-7}>0$ egyenlőtlenséggel foglalkozni. A tört értéke akkor pozitív, ha vagy $x+2>0$ és $x-7>0$, vagyis ha $x>7$, vagy akkor, ha $x+2<0$ és $x-7<0$, és ekkor $x<-2$. Az adott egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát $]-\infty; -2[\cup]7; \infty[$ (**1500.** ábra).



1500

1501. $-5<x<2$ (**1501.** ábra).



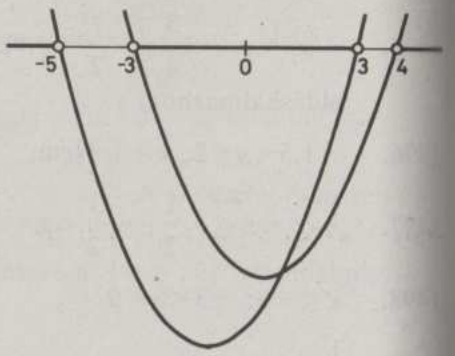
1501

1502. $x<0$; $1<x<6$.

1503. $x \leqq -0{,}25$; $x \geqq 1$.

1504. A számlálóban álló másodfokú polinom zérushelyei $x_1=-3$; $x_2=4$. A polinom a két zérushely közötti intervallumban negatív, az intervallumon kívül pozitív értékeket vesz föl. A nevezőben álló másodfokú polinom zérushelyei $x_3=-5$, $x_4=3$. A polinom a két zérushely közötti intervallumban negatív, az intervallumon kívül pozitív értékeket vesz föl. Mind a két polinom pozitív, ha $x<-5$ vagy $x>4$; mind a két

polinom negatív, ha $-3<x<3$. Az egyenlőtlenség megoldását tehát azok az x értékek adják, amelyekre $x<-5$; $-3<x<3$; $x>4$ (**1504.** ábra).



1504

1505. $x<-4$; $2<x<4$; $x>5$. Nem.

1506. $x=1$.

1507. $x<1$; $x>3$.

1508. $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$, tehát -1.

1509. 4.

1510. $0<x<2$.

1511. $1<x<2$; $7<x<10$.

1512. $0<x<1$; $x>6$.

1513. A tört számlálója is, nevezője is felírható elsőfokú polinomok szorzataként: $\frac{(x-2)(x-5)}{x(x-1)(x+2)}<0$. Ha $x<-2$, akkor mind az öt tényező és így a tört is negatív (megoldás). Ha $-2<x<0$, akkor egy tényező pozitív, négy negatív, így a tört értéke pozitív (nem megoldás). Ha $0<x<1$, akkor két tényező pozitív, három negatív, a tört negatív (megoldás). Ha $1<x<2$, akkor három tényező pozitív, kettő negatív, a tört pozitív (nem megoldás). Ha $2<x<5$, akkor négy tényező pozitív, egy negatív, a tört negatív (megoldás). Végül ha $x>5$, akkor mind az öt tényező és így a tört is pozitív (nem megoldás). *Összefoglalva:* az egyenlőtlenség teljesül, ha $x<-2$; $0<x<1$; $2<x<5$.

1514. $-5<x<3$; $5<x<6$. Nem.

1515. $\{3; 4\}$.

1516. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

1517. Az egyenlőtlenség megoldása: $-4<x<-1$; $1<x<5$. A közös rész: $-2\leqq x<-1$; $1<x\leqq 3$.

1518. Az egyenlőtlenség megoldása: $-3\leqq x<1$; $1<x\leqq 2$. A keresett egész számok így: -3; -2; -1; 0; 2.

1519. Minden valós x-re teljesül.

1520. $2<x<3$.

1521. $x<-\frac{1+3\sqrt{5}}{2}(=-3{,}85)$; $-3<x<2$; $x>\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}(=2{,}85)$.

1522. $\{2; 3; 4\}$.

1523. 2 és az 5-nél nagyobb egész számok.

1524. $1<x<1{,}8$; $x>2$.

1525. Az első egyenlőtlenség megoldása: $x<-3$; $-2<x<5$; $x>7$, a másodiké: $-3<x<\frac{1}{3}$; $x>5$. A megoldáshalmazok közös része: $-2<x<\frac{1}{3}$; $x>7$.

1526. Rendezve az egyenlőtlenséget $3(a-2)x>a-2$. $a\neq 2$, mert $a=2$ esetén ellentmondás ($0>0$) van. Ha $a>2$, akkor $x>\frac{1}{3}$, ha $a<2$, akkor $x<\frac{1}{3}$.

1527. Ha $m=3$, akkor minden valós x megoldás. Ha $m>3$, akkor $x\leqq m+3$, ha $m<3$, akkor $x\geqq m+3$.

1528. Ha $m=1$, akkor minden valós x megoldás, ha $m>1$, akkor $x\geqq m+1$, ha $m<1$, akkor $x\leqq m+1$.

1529. $x=\frac{2}{1-a}$. Ez akkor pozitív, ha $a<1$, de $a\neq -1$.

1530. $x=\frac{-4}{p+2}$; $p>-2$; $p\neq 2$.

1531. $x=\frac{p-2}{p-1}$; $p<1$.

1532. Az egyenletből kapott $x = \frac{a+12}{2a+3}$ akkor nagyobb, mint 1, ha $-\frac{3}{2} < a < 9$.

1533. $k \neq 1$, mert ha $k = 1$, akkor az egyenlet $\frac{x+2}{x+2} = 4$ alakú, és ez ellentmondás. Az egyenletből $x = \frac{k+5}{k-4}$; $\frac{k+5}{k-4} < 3$ akkor áll fenn, ha $k > 8{,}5$ vagy $k < 4$. Így a feladat feltételének az alábbi k értékek tesznek eleget: $k < 1$; $1 < k < 4$; $k > 8{,}5$.

1534. $m < 2$; $m > 3$; $m \neq -3$; $m \neq 0$.

1535. $x = \frac{p^2+p-2}{p^2+3p+2} > 1$, ha $p < -1$, de $p \neq -2$; $p \neq -3$.

1536. $x = \frac{2m+16}{5-m} > 2$, ha $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5} < m < 5$.

1537. Ha $a = 1$, akkor az egyenlőtlenség elsőfokú és $-3x+9 > 0$ alakú. Ebből $x < 3$, vagyis az egyenlőtlenség nem „bármely" x-re teljesül. Ezért $a \neq 1$. Ha $a > 1$, akkor a másodfokú polinom csak úgy lehet minden x-re pozitív, ha diszkriminánsa negatív, azaz (rendezés után) $-11a^2+4a+16 < 0$. A bal oldal akkor zérus, ha $a_{1,2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{5}}{11}$. A bal oldal akkor negatív (figyelembe véve az $a > 1$ feltételt is), ha $a > \frac{2+6\sqrt{5}}{11}$ $(= 1{,}4)$. Ha $a < 1$, akkor a másodfokú polinom másodfokú tagjának együtthatója negatív és ezért a polinom minden x értékre nem lehet pozitív. Az a paraméter kérdezett értékei ezért $a > \frac{2+6\sqrt{5}}{11}$ $(= 1{,}4)$.

1538. $2 < m < 4$.

1539. $k = 5$ esetén a bal oldalon álló polinom elsőfokú és alakja $8x - 8 = 0$, de ez nem minden x-re negatív; ezért $k \neq 5$. Ha $k < 5$, akkor a másodfokú polinom másodfokú tagjának együtthatója pozitív, és ezért a polinom minden x értékre nem lehet negatív. Ha $k > 5$, akkor csak úgy lehet a polinom minden x értékre negatív, ha diszkriminánsa negatív, vagyis

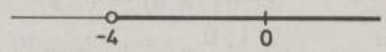
(rendezés után) $-k^2+10k-9 < 0$. Ebből vagy $k < 1$ vagy $k > 9$. Egybevetve ezt a $k > 5$ feltétellel, azt mondhatjuk, hogy a polinom minden x értékre akkor negatív, ha $k > 9$.

1540. $m > \frac{14+5\sqrt{10}}{6}$ $(= 4{,}96)$.

1541. Ha $x \geqq 0$, akkor az egyenlőtlenség $x^2 \leqq x$, azaz $x(x-1) \leqq 0$ alakú. A feltétel mellett ez akkor teljesül, ha $0 \leqq x \leqq 1$. Ha $x < 0$, akkor az egyenlőtlenség $x^2 \leqq -x$ alakú. A feltétel mellett ez akkor teljesül, ha $-1 \leqq x < 0$. Az adott egyenlőtlenség tehát azokra az x valós értékekre áll fenn, amelyekre $-1 \leqq x \leqq 1$.

Megjegyzés: Mivel mind az $x \mapsto x^2$, mind $x \mapsto |x|$ függvények grafikonja könnyen felrajzolható, az egyenlőtlenség grafikus úton is megoldható, vagy az ellenőrzéshez felhasználható.

1542. A négyzetre emelés és rendezés után kapott $x^2 - 13x + 30 < 0$ egyenlőtlenség megoldása $3 < x < 10$. Ebbe az intervallumba eső egész számok 4; 5; 6; 7; 8; 9, kielégítik az egyenlőtlenséget. $x + 6 \geqq 0$, $x \geqq -6$, de $x \leqq 3$ esetén a bal oldal $\geqq 0$ a jobb oldal $\leqq 0$, tehát ezek a megoldások is jók. Megoldás: $x \in \mathbf{Z}$; $-6 \leqq x \leqq 9$.



1545

1543. $-7 \leqq x < 2$. **1544.** $3 < x$.

1545. $x > -4$ (**1545.** ábra).

1546. Ha az egyenlőtlenség mind a két oldalát $\frac{1}{2}$ hatványaként írjuk fel, akkor az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a kitevőkre $\frac{x+1}{x-1} < 5$ áll fenn. Ha $x > 1$, akkor az előbbi egyenlőtlenségből $x > \frac{3}{2}$, és e két egyenlőtlenség az $x > \frac{3}{2}$ értékekre teljesül. Ha $x < 1$, akkor az előbbi egyenlőtlenségből $x < \frac{3}{2}$, és e két egyenlőtlenség az $x < 1$ értékekre teljesül. A megoldás tehát $x < 1$, $x > \frac{3}{2}$. A $[0; 1]$ intervallum $[0; 1[$ részintervalluma esik a megoldáshalmazba.

1547. Azonos átalakítások után $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 < 0$. A 2^x-ben másodfokú polinom zérushelyei -1 és 3. Mivel 2^x csak pozitív lehet, ezért az adott

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $0<2^x<3$, vagyis ha $-\infty < x < \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} (= 1{,}58)$.

1548. A logaritmusfüggvény akkor értelmezhető, ha $3x-2>0$, azaz $x>\frac{2}{3}$. Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő, ezért az adott egyenlőtlenség akkor teljesülhet, ha $0<3x-2<1$, vagyis $\frac{2}{3}<x<1$. Ezt nem szűkíti az előbbi feltétel, ezért ez a megoldás.

1549. $x>1$.

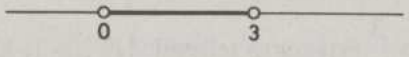
1550. $(-0{,}38=)\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \leqq x<0$.

1551. $1<x<2$; $x>3$.

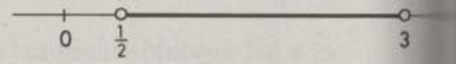
1552. Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $\frac{7-4x-x^2}{1+x^2}>1$, vagyis ha (mivel $x^2+1>0$) $x^2+2x-3<0$. Ebből $-3<x<1$, vagyis a megoldás: -2; -1; 0.

1553. $x>4$.

1554. A szereplő logaritmusfüggvények akkor értelmezhetők, ha $x>0$. A 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért $x+3>2x$, ebből $x<3$. A két korlátot egybevetve a megoldáshalmaz a $]0;3[$ intervallum (**1554.** ábra).



1554



1555

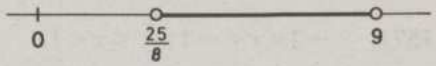
1555. $0{,}5<x<3$ (**1555.** ábra).

1556. $0{,}5<x<2$. A $]0{,}5;1]$ részintervallum.

1557. Az első egyenlőtlenségből $x\leqq -1$, a másodikból $x<-\frac{3}{5}$, a megoldás tehát: $x\leqq -1$.

1558. $x>0{,}5$.

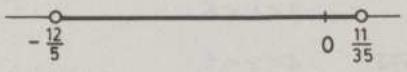
1559. $\frac{2}{7}<x<2$.



1560

1560. $3{,}125<x<9$ (**1560.** ábra).

1561. $-\frac{12}{5}<x<\frac{11}{35}$ (**1561.** ábra).



1561

1562. $-\frac{17}{13}<x<\frac{14}{5}$.

1563. $x\leqq 0$.

1564. Ha $x>0$, akkor rendezés után az első egyenlőtlenségből $x>\frac{13}{3}$, a másodikból $x>3$. A kettő akkor teljesül egyszerre, ha $x>\frac{13}{3}$. Ha $x<0$, akkor az első egyenlőtlenségből (változatlanul) $x>\frac{13}{3}$, a másodikból $x<3$. A kettő akkor teljesül egyszerre, ha $x>\frac{13}{3}$.

1565. $x<0$; $x>4$. A metszethalmaz a $[-1;0[$ intervallum.

1566. $1<x<\frac{10}{7}$.

1567. Az első egyenlőtlenség megoldása $x<1$ és $x>2{,}5$; a másodiké $x<2$. Közös megoldás tehát van, mégpedig minden 1-nél kisebb egész szám.

1568. Van. Minden 4-nél nagyobb egész szám. Például $x=5$.

1569. $-6<x<1$, de $x\neq -3$.

1570. Azonos átalakítás után az első egyenlőtlenség $2(x-3)^2(x-5)<0$ alakú, és ez akkor teljesül, ha $x<5$, de $x\neq 3$ (mert akkor a bal oldal 0), a második egyenlőtlenség akkor, ha $x>2$. A két egyenlőtlenséget azok az x értékek elégítik ki, amelyekre $2<x<5$, de $x\neq 3$.

1571. $-2<x<-1; \frac{2}{3}<x<1.$

1572. $-1; 0; 1; 2; 3.$

1573. Az első egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $3<x<6$, a második akkor, ha $-3<x<4$. Az első vagy a második egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-3<x<6$.

1574. $-4<x<5.$

1575. $-3<x<-2; 2<x<3.$

1576. Minden valós x értékre teljesül, vagy az egyik vagy a másik egyenlőtlenség.

1577. $2; 3; 4.$

1578. Az első egyenlőtlenségből $x \geqq 7$, a másodikból $x<10{,}1$. Tehát $x \in \{7; 8; 9; 10\}$.

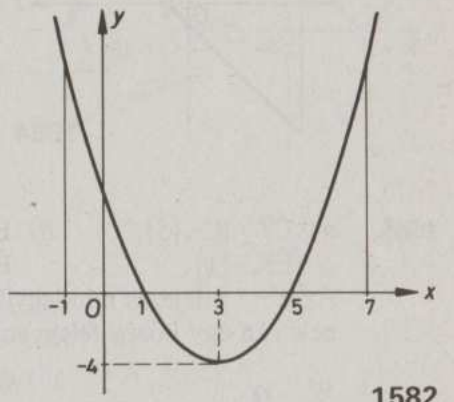
1579. $-2; -1; 0.$

1580. $-13<x<-6; 2<x<5.$

1581. $(-1{,}3=) \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<2.$

Függvények értelmezése, ábrázolása

1582. $x^2-6x+5=(x-3)^2-4$. ÉK: $[-4; \infty[$ (**1582.** ábra). A függvény pozitív a $]-\infty; 1[$ és az $]5; +\infty[$ intervallumokon, nulla az $x=1$ és $x=5$ helyeken, míg negatív az $]1; 5[$ számközön.



1582

1583. *a)* ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
ÉK: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$;

b) ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{-2; 3\}$,
ÉK: $\mathbf{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{5}\right\}$.

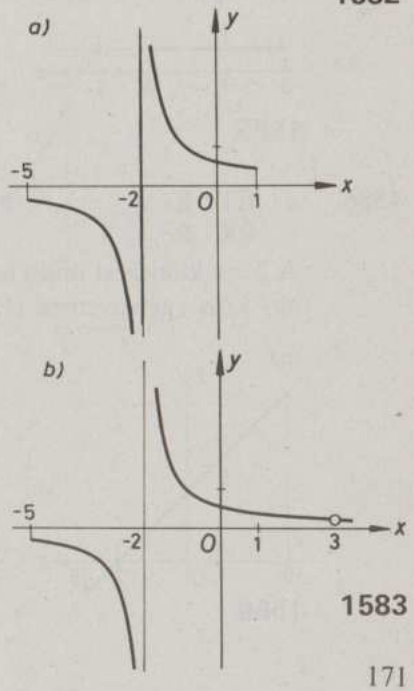
Mivel

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3),$$

ezért $g: \mathbf{R} \setminus \{-2; 3\} \to \mathbf{R}$,

$$x \mapsto \frac{x-3}{x^2-x-6}=\frac{1}{x+2}.$$

A hozzárendelés módja közös, de a két függvény különböző, mert ÉT-ban (és így ÉK-ben is) különböznek. Görbéjük egy pont híján azonos (a *b)* görbéjén nincs a $\left(3; \frac{1}{5}\right)$) (**1583.** ábra).

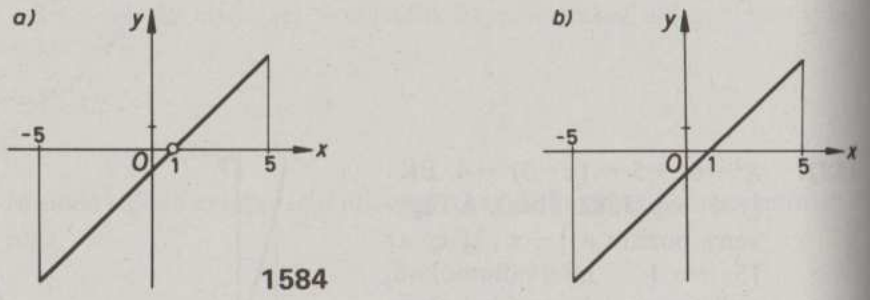


1583

1584. $x^2-2x+1=(x-1)^2$, tehát

a) ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{1\}$. *b)* ÉT: $\mathbf{R}$,
ÉK: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$; ÉK: $\mathbf{R}$.

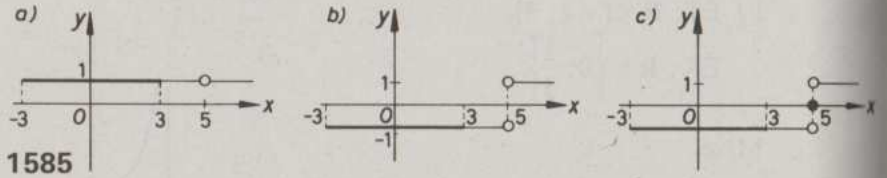
Görbéjük egy pont híján azonos, az *a)*-nak nincs (1; 0) pontja (**1584.** ábra)!



1584

1585. *a)* ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{5\}$, *b)* ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{5\}$, *c)* ÉT: $\mathbf{R}$,
ÉK: $\{1\}$; ÉK: $\{-1;1\}$; ÉK: $\{-1;0;1\}$.

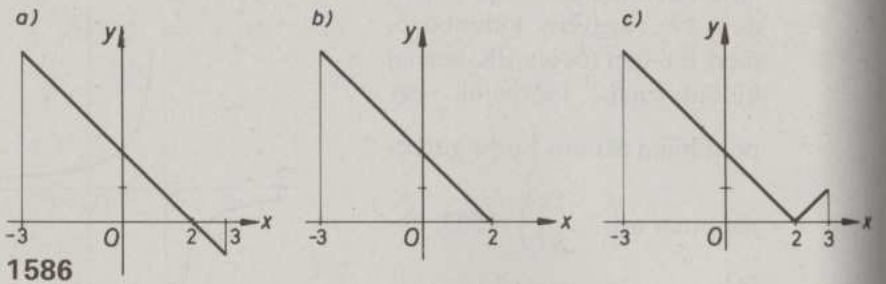
Az $x-5$ kifejezés mindegyikben szerepel, és így mindegyikük görbéjének van egy közös félegyenese (**1585.** ábra).



1585

1586. *a)* ÉT: $\mathbf{R}$, *b)* ÉT: $]-\infty;2]$, *c)* ÉT: $\mathbf{R}$,
ÉK: $\mathbf{R}$; ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$; ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

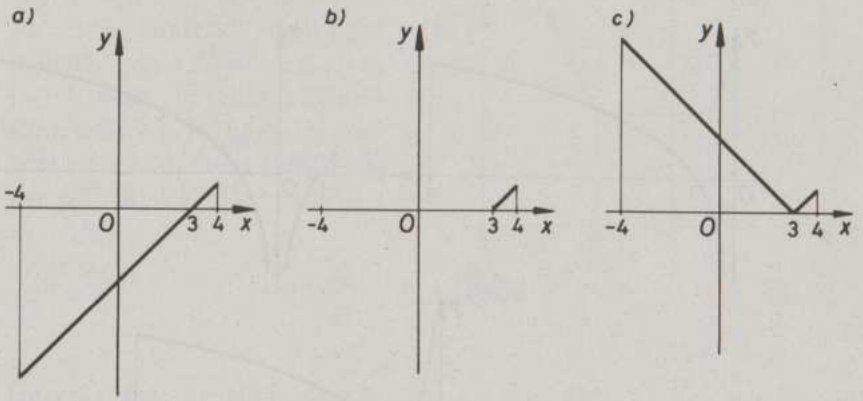
A $2-x$ kifejezést mind tartalmazza, s így mindegyikük görbéjének van egy közös félegyenese (**1586.** ábra).



1586

1587. *a)* ÉT: $\mathbf{R}$, *b)* ÉT: $[3;+\infty[$, *c)* ÉT: $\mathbf{R}$,
ÉK: $\mathbf{R}$; ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$; ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

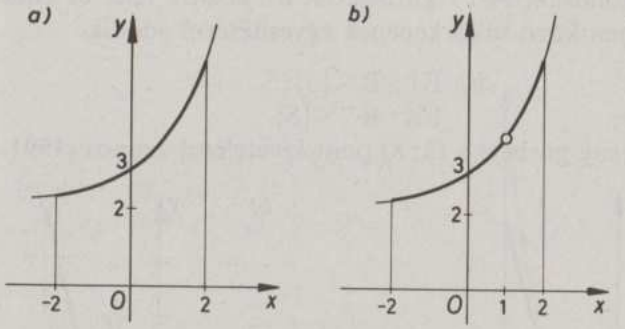
Az $x-3$ kifejezést mindegyik tartalmazza, és így mindegyikük görbéjének van egy közös félegyenese (**1587.** ábra).



1587

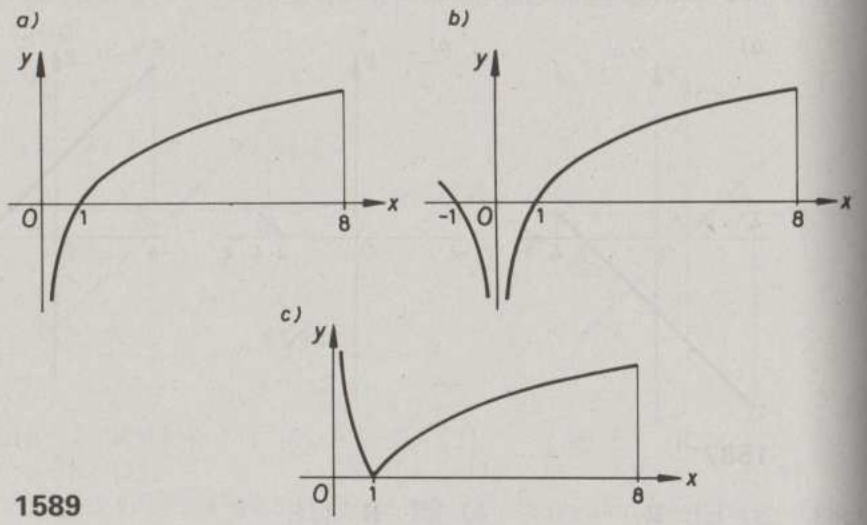
1588. *a)* ÉT: $\mathbf{R}$, *b)* ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{1\}$,
ÉK: $]2;+\infty[$; ÉK: $]2;+\infty[\setminus\{4\}$.

Az (1; 4) pont híján azonos a két görbe (**1588.** ábra).



1588

1589. *a)* ÉT: $\mathbf{R}^+$, ÉK: $\mathbf{R}$; *b)* ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, ÉK: $\mathbf{R}$; *c)* ÉT: $\mathbf{R}^+$, ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$. (**1589.** ábra).



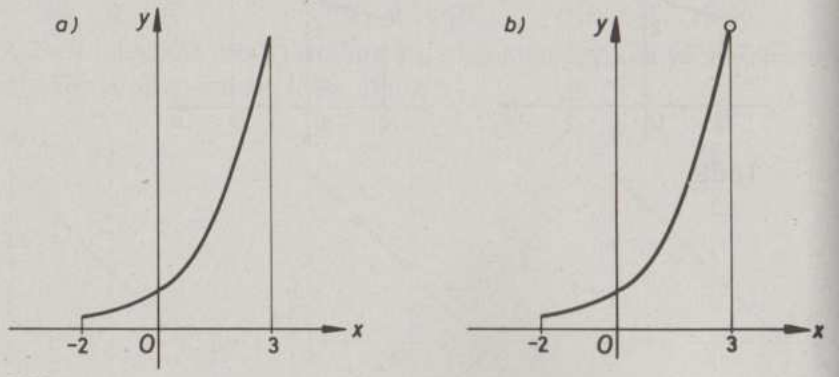
1589

1590. *a)* ÉT: $\mathbf{R}$, ÉK: $\mathbf{R}^+$; *b)* ÉT: $\mathbf{R}$, ÉK: $\mathbf{R}^+$; *c)* ÉT: $\mathbf{R}$, ÉK: $[1; +\infty[$.

a) és *b)* azonosak. A *c)* görbéje az *a)* pozitív fele, és ennek az y tengelyre vonatkozó tükörképének egyesítésével adódik.

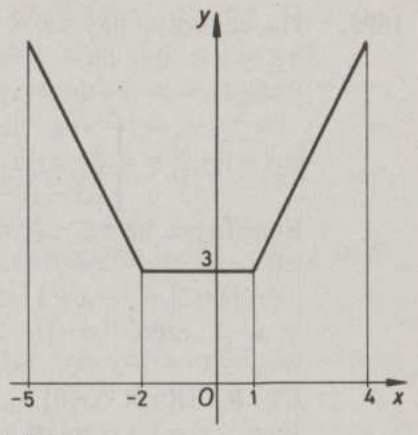
1591. *a)* ÉT: $\mathbf{R}$, ÉK: $\mathbf{R}^+$; *b)* ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{3\}$, ÉK: $\mathbf{R}^+\setminus\{8\}$.

A két függvény görbéje a (3; 8) pont kivételével azonos (**1591.** ábra).



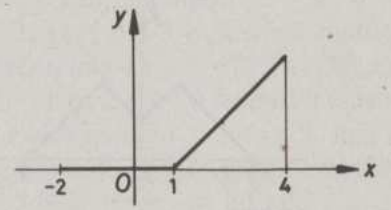
1591

1592. Ha $x\leqq -2$, úgy $|x+2| = -x-2$ és $|x-1| = -x+1$, tehát kifejezésünk $-2x-1$. Ha $-2\leqq x\leqq 1$, úgy kifejezésünk $|x+2| = x+2$ és $|x-1| = -x+1$ miatt a 3, végül $1\leqq x$ mellett $|x+2| = x+2$ és $|x-1| = x-1$, tehát kifejezésünk a $2x+1$. A függvény görbéje a $[-5; 4]$ felett (**1592.** ábra). ÉT: $\mathbf{R}$; ÉK: $[3; +\infty[$.



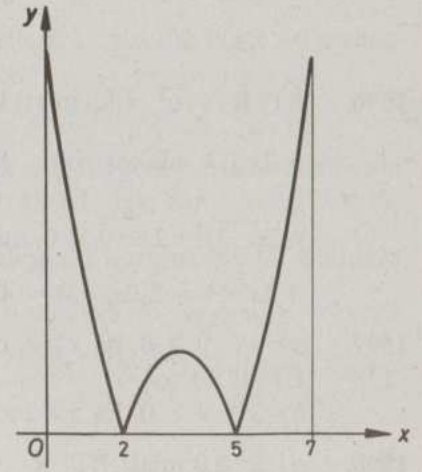
1592

1593. Ha $x\leqq 1$, úgy $|x-1| = -x+1$, ha viszont $1\leqq x$, akkor $|x-1| = x-1$, tehát az első esetben kifejezésünk az azonosan 0, míg az utóbbi esetben az $x-1$ (**1593.** ábra). ÉT: $\mathbf{R}$; ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.



1593

1594. Az $x^2-7x+10=(x-2)\cdot(x-5)$, és ezért $x\leqq 2$-re $|x^2-7x+10|=|(x-2)\cdot(x-5)| = |x-2|\,|x-5| = (-x+2)(-x+5) = x^2-7x+10$. Ha $2\leqq x\leqq 5$, akkor $|x^2-7x+10|=|x-2|\,|x-5| = (x-2)(-x+5) = -x^2+7x-10$, végül $5\leqq x$ esetén $|x^2-7x+10|=|x-2||x-5| = (x-2)(x-5) = x^2-7x+10$. ÉT: $\mathbf{R}$; ÉK: $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ (**1594.** ábra).



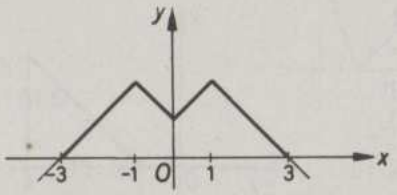
1594

1595. Ha az $x \leqq 0$, úgy $|x| = -x$, tehát $|x|-1 = -x-1$. Ha most még $x \leqq -1$ is, úgy $||x|-1| = |-x-1| = -x-1$, míg $0 \geqq x \geqq -1$ mellett $||x|-1| = |-x-1| = x+1$. Vagyis

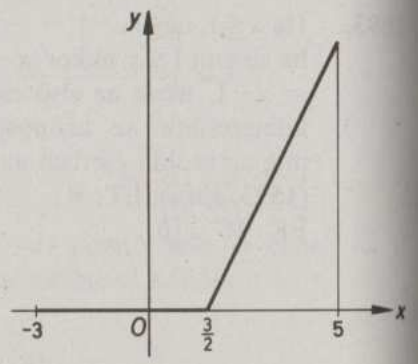
$$\big||x|-1|-2\big| = \begin{cases} |-x-1-2| = |-x-3|, & \text{ha} \quad x \leqq -1; \\ |-x-1| = x+1, & \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq 0; \\ ||x-1|-2|, & \text{ha} \quad 0 \leqq x. \end{cases}$$

Ennélfogva, ha $x \leqq -3$, akkor $|-x-3| = -x-3$ és $-3 \leqq x \leqq -1$ mellett $|-x-3| = x+3$. Ha pedig $0 \leqq x \leqq 1$, úgy $|x-1| = -x+1$, tehát $||x-1|-2| = |-x+1-2| = |-x-1| = x+1$. Az $1 \leqq x$-re $|x-1| = x-1$, ezért $||x-1|-2| = |x-3|$, tehát $1 \leqq x \leqq 3$-ra $||x-1|-2| = |x-3| = -x+3$, és $3 \leqq x$ esetén $||x-1|-2| = |x-3| = x-3$. ÉT: $\mathbf{R}$; ÉK: $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

Vagy: $|x| = |-x|$ miatt a függvény páros függvény, menetét tehát elég a nemnegatív helyeken vizsgálni. Görbéje tükrös az y tengelyre (**1595.** ábra).



1595



1596

1596. ÉT: $\mathbf{R}$ és $\sqrt{c^2} = |c|$ miatt kifejezésünk a $\sqrt{(2x-3)^2}+2x-3 = |2x-3|+2x-3$ alakot ölti. Ezért $x \leqq \frac{3}{2}$-re $|2x-3| = -2x+3$, vagyis $\sqrt{(2x-3)^2}+2x-3 = 0$, míg $\frac{3}{2} \leqq x$-re $|2x-3| = 2x-3$, tehát $\sqrt{(2x-3)^2}+2x-3 = 2(2x-3) = 4x-6$. Képe: (**1596.** ábra). ÉK: $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

1597. *a)* $3^x - 9 \geqq 0$, ha $x \geqq 2$, mert az $x \mapsto 3^x$ szigorúan növekedő függvény. ÉT: $[2; +\infty[$.

b) $3^x - 9 > 0$, ha $x > 2$ az előzőek miatt. ÉT: $]2; +\infty[$.

1598. *a)* $x^2 \geqq 0$ miatt ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$;

b) ÉT: $\mathbf{R}^+$.

1599. *a)* $x-4 > 0$ és $x+1 > 0$ egyszerre kell teljesüljön. Így ÉT: $]4; +\infty[$.

b) Mivel $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$, amiből $x-4 > 0$ és $x+1 > 0$, vagy $x-4 < 0$ és $x+1 < 0$ kell egyszerre fennálljon. Ezek az $x > 4$ vagy $x < -1$ mellett teljesülnek, tehát ÉT: $]-\infty; -1[$ és $]4; +\infty[$.

1600. *a)* Mivel $\sqrt{x-1} \geqq 0$ valós számot jelöl, ezért ha $x > 1$, úgy $\sqrt{x-1} > 0$, és így $\lg \sqrt{x-1}$ létezik. ÉT: $]1; +\infty[$.

b) $x > 1$ mellett értelmezhető a $\lg(x-1)$ kifejezés és $\lg(x-1) \geqq 0$, ha $x-1 \geqq 1$, azaz $x \geqq 2$. ÉT: $[2; +\infty[$.

1601. *a)* $\frac{x+1}{x} > 0$ pontosan akkor, ha $x+1 > 0$ és $x > 0$, vagy $x+1 < 0$ és $x < 0$. Így ÉT: $]-\infty; -1[$ és $]0; +\infty[$.

b) $x \neq 0$ kell legyen a nevező miatt, míg $x+1 > 0$ a számláló miatt. ÉT: $]-1; 0[$ és $]0; +\infty[$.

1602. *a)* $x^2-x-6 > 0$ és $4-x^2 > 0$ egyszerre kell teljesüljön. $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ miatt $x > 3$ és $x > -2$, vagy $x < 3$ és $x < -2$ mellett következik be az első tag értelmezhetősége, míg $4-x^2 = (2-x)(2+x)$, így $2-x > 0$ és $2+x > 0$, vagy $2-x < 0$ és $2+x < 0$ teljesíti a második taggal szembeni követelményt. Az első esetben $-2 < x < 2$, míg a második feltétel nem teljesíthető. A tagok külön-külön értelmezhetők, de értelmezési tartományaiknak nincs közös része, így ÉT: $\emptyset$.

b) A nevező zérustól különböző kell legyen, ezért $|x| \neq 1$, tehát $x \neq -1$ és $x \neq 1$. A számlálóban $1-x^2 \geqq 0$ kell legyen. Ez előbbi megszorításaink miatt a $-1 < x < 1$ mellett teljesül ÉT: $]-1; 1[$.

1603. Az első tag $2-x \geqq 0$, vagyis $x \leqq 2$ mellett, a második tag $x > 0$ mellett értelmezhető, így az összeg a $]0; 2]$-ben.

a) ÉT: $]0; 2]$; *b)* ÉT: $]0; 2] \cap \mathbf{Q}$; *c)* ÉT: $\{1, 2\}$.

1604. *a)* A nevező miatt $\sin x > 0$ kell legyen a lg függvény értelmezhetősége miatt, de $\lg \sin x = 0$, azaz $\sin x = 1$ kizárt. Így $2\pi k < x < \pi(2k+1)$; $k \in \mathbf{Z}$, de $x \neq \frac{\pi}{2}(4k+1)$, a nevező értelmezési tartománya. A számláló $16-x^2 = (4-x)(4+x) \geqq 0$ mellett értelmezhető, vagyis $-4 \leqq x \leqq 4$ kell legyen. A hányados tehát a $[-4; -\pi[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ számközön értelmezhető.

b) $\sin x > 0$ kell legyen az lg függvény értelmezhetősége és $\lg \sin x \geqq 0$ a négyzetgyökfüggvény értelmezhetősége miatt. Mivel $|\sin x| \leqq 1$ és 1-nél kisebb valósakra az lg értékkészlete negatív, ezért $\sin x = 1$ lehet csak. ÉT: $\left\{\frac{\pi}{2}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

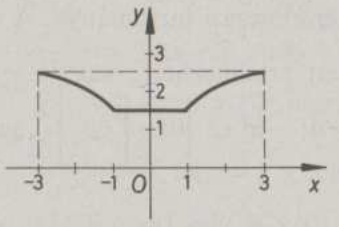
1605. *a)* Mivel $|\sin x| \leqq 1$, ezért $1 + \sin x \geqq 0$ és így ÉT: **R**.

b) $1 + \operatorname{tg} x \geqq 0$, ha $-1 \leqq \operatorname{tg} x$, tehát ÉT: $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

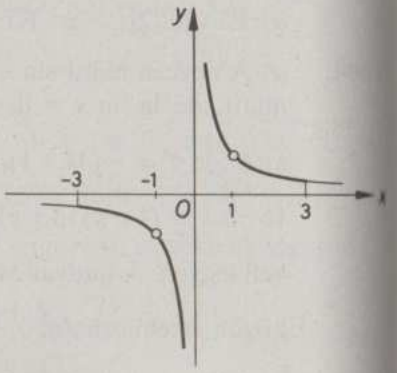
1606. *a)* $x \geqq 0$ kell legyen a nevező $\sqrt{x}$ tagja miatt, és $x \leqq 1$ a számláló miatt. Ezért ÉT: $[0; 1]$.

b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqq 0$ pontosan akkor, ha $\left(\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \text{ miatt}\right)$ $0 \leqq \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x}$. Ennek számlálója pozitív, tehát $\operatorname{tg} x > 0$ lesz annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a kifejezés értelmezhető legyen. ÉT: $\left]\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right[$, $(k \in \mathbf{Z})$.

1607. A gyökjel alatti tagok mindegyike nemnegatív, ezért ÉT: **R**. Ha $x \leqq -1$, úgy $\sqrt{|x+1| + |x-1|} = \sqrt{-x-1-x+1} = \sqrt{-2x}$, ha $-1 \leqq x \leqq 1$, úgy $\sqrt{|x+1| + |x-1|} = \sqrt{x+1-x+1} = \sqrt{2}$, végül $1 \leqq x$-re $\sqrt{|x+1| + |x-1|} = \sqrt{x+1+x-1} = \sqrt{2x}$ (**1607.** ábra).



1607



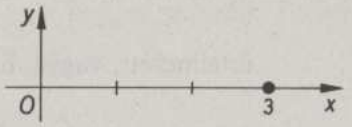
1608

1608. Egyrészt $x - 1 \neq 0$ és $x + 1 \neq 0$, azaz $x \neq -1$ és $x \neq 1$ az 1 számlálójú törtek miatt, másrészt $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = 0$ is kizárt, vagyis $1 + x - (1 - x) = 0$, tehát $x = 0$ sem lehet. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}} = \frac{\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}}{\frac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

ÉK: $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ (**1608.** ábra).

1609. Mivel $x - 3 \geqq 0$ és $3 - x \geqq 0$ egyszerre kell teljesüljön, ami egyedül $x = 3$ mellett teljesül, s ekkor $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-3} = 0$, ÉT: $\{3\}$, ÉK: $\{0\}$ (**1609.** ábra).



1609

1610. Az $x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$ miatt $x + \frac{a}{2} = 0$ adja a minimum helyét, tehát $3 + \frac{a}{2} = 0$, azaz $a = -6$. Erre $x^2 + ax + b = -2$, ha $9 + (-6) \cdot 3 + b = -2$, azaz $b = 7$.

1611. A $-x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b + \frac{a^2}{4}$ maximális, ha $x = \frac{a}{2}$, azaz $-1 = \frac{a}{2}$, tehát $a = -2$. Erre a maximum $b + \frac{a^2}{4} = 3$, ha $b = 2$.

1612. A $\cos \frac{x}{2}$ értelmezési tartománya: **R**, a $\operatorname{tg} x$ függvényé

$$\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Így ezek közös része $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ a kifejezés értelmezési tarto-

mánya. A $\operatorname{tg} x$ periódusa π, a $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x+4\pi k}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt a $\cos\frac{x}{2}$ periódusa 4π, így függvényünk 4π-ben periodikus.

1613. A tagok mindenütt értelmezettek, így ÉT: $\mathbf{R}$. A $\sin 2x$ periódusa $\sin 2x = \sin 2(x+\pi k) = \sin(2x+2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt π. A $\cos(x+\pi) = -\cos x$ és ennélfogva $\cos^2 x = \cos^2(x+\pi)$, tehát a $\cos^2 x$ periódusa is π, ezért $\sin 2x + \cos^2 x = \sin(2(x+\pi)) + \cos^2(x+\pi)$, tehát a függvény periódusa π.

1614. A $\sin 4x$ mindenütt, a $\operatorname{tg} 2x$ a $2x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken nem értelmezett, vagyis ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

$\sin 4x = \sin 4\left(x+\frac{\pi}{2}n\right) = \sin(4x+2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$

miatt a $\sin 4x$-nek $\frac{\pi}{2}$ a periódusa, míg $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2\left(x+\frac{\pi}{2}n\right) = \operatorname{tg}(2x+\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$ szerint a $\operatorname{tg} 2x$ is $\frac{\pi}{2}$-ben periodikus, így a $\sin 4x - \operatorname{tg} 2x + 1$ periódusa $\frac{\pi}{2}$.

1615. A kifejezés minden valós x-re értelmezett, hiszen tagjai ilyenek. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (minden $x \in \mathbf{R}$) és $\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x+4\pi k}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt függvényünk 4π-ben periodikus.

1616. A $\operatorname{tg} x$ $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2n+1) \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ értelmezési tartománya adja a kifejezés értelmezési tartományát, hiszen többi tagja minden $x \in \mathbf{R}$-re értelmezett. A $\cos 2x = \cos 2(x+\pi n) = \cos(2x+2\pi n)$ miatt a függvény π-ben periodikus, hiszen $\cos 2x + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \pi = \cos 2(x+\pi n) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x+\pi n) - \pi$ minden szóba jövő valós x-re.

1617. A $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ azonosság miatt $\sin^2 2x - \cos^2 2x = -\cos 4x$, tehát egyrészt az ÉT: $\mathbf{R}$, másrészt $\cos 4x = \cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}n\right) = \cos(4x+2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$, tehát a függvény periódusa $\frac{\pi}{2}$.

1618. Mind a sinus-, mind a cosinusfüggvény mindenütt értelmezett, így kifejezésünkre is az ÉT: $\mathbf{R}$. Mivel $\sin\left(\frac{2}{3}x-\pi\right) = \sin\frac{2}{3}\left(x-\frac{3\pi}{2}+3\pi n\right) = \sin\left(\frac{2}{3}x-\pi+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$ és $\cos\left(\frac{2}{5}x+\pi\right) = \cos\frac{2}{5}\left(x+\frac{5\pi}{2}+5\pi n\right) = \cos\left(\frac{2}{5}x+\pi+2\pi n\right)$, tehát az első tag 3π-ben, a második 5π-ben periodikus, így összegük a 15π-ben periodikus.

1619. $\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, ha $x = \frac{5\pi}{4}(4k+1)$. Ezért a kifejezés az $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{4}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ halmazon értelmezett. Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x+5\pi n}{5}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, ezért a függvény periódusa 5π.

1620. Kizárni csak az $\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ eshetőséget kell a tangens értelmezése miatt, tehát ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi(6k-1) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

A $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x = \operatorname{tg}\left(\frac{x+6\pi k}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(x+6\pi k) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3}+\pi k\right) - \sin(x+2\pi m)$, $m = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$ miatt 6π-ben periodikus függvény.

1621. A sinusfüggvény mindenütt értelmezett, tehát ÉT: $\mathbf{R}$.

Mivel $\sin\left(\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{6}+\pi\right)$, ezért a $\sin^2\left(\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{6}\right) - 1$ periódusa $\frac{5\pi}{2}$.

1622. Mindkét tag értelmezési tartománya a valós számok halmaza, így a kifejezésé is, ÉT: **R**.

$\cos\frac{3x}{2} = \cos\left(\frac{3}{2}\left(x+\frac{4\pi}{3}n\right)\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$ és $\sin\frac{x}{3} = \sin\frac{x+6\pi n}{3} = \sin\left(\frac{x}{3}+2\pi n\right)$ miatt a függvény a $\frac{4\pi}{3}$ és 6π legkisebb közös többszörösében, azaz 12π-ben periodikus $\left(12\pi = 2\cdot 6\pi = 9\cdot\frac{4\pi}{3}\right)$.

1623. ÉT: **R**, mivel a tagok mindegyike külön-külön is értelmezhető a valós számok halmazán. $\cos 2x = \cos 2(x+\pi)$ miatt ez a tag π-ben periodikus. A $\sin\frac{nx}{4} = \sin\frac{n}{4}\left(x+\frac{8\pi}{n}\right)$, ha $n\neq 0$ és $\sin\frac{nx}{4} = \sin 0 = 0$, ha $n=0$. Ezért $n=0$-ra a függvény π-ben, míg $n\neq 0$-ra a periódus a π és a $\frac{8\pi}{n}$ legkisebb közös többszöröse. Ez, ha n a 8-nak osztója $\frac{8\pi}{n}$, ha 8 osztója az n-nek, akkor π és minden más n-re 8π.

1624. ÉT: **R**, mivel a tagok mindenütt értelmezhetők!

$\sin ax = \sin a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)$ és $\cos\frac{x}{a} = \cos\frac{x+2a\pi}{a} = \cos\left(\frac{x}{a}+2\pi\right)$ miatt a függvény periódusa a $\frac{2\pi}{a}$ és a $2a\pi$ „legkisebb" közös többszöröse, ha van olyan x és y pozitív egész, melyekre $\frac{2\pi}{a}x = 2a\pi y$, azaz $x=a^2y$. Ez pontosan akkor áll, ha $a^2\in\mathbf{Q}^+$.

1625. $\sin\frac{2x}{3} > 0$ kell legyen az lg értelmezhetősége miatt. Ez $2\pi k < \frac{2x}{3} < \pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, vagyis $3\pi k < x < \frac{3\pi}{2}+3\pi k$ adja az $\lg\sin\frac{2x}{3}$ értelmezési tartományát.

A $\sin\frac{2x}{3} = \sin\frac{2}{3}(x+3\pi) = \sin\left(\frac{2x}{3}+2\pi\right)$ miatt a függvény periódusa 3π.

1626. $\sin 2x \leqq 1$ miatt $1-\sin 2x \geqq 0$, tehát $\sqrt{1-\sin 2x} \geqq 0$ minden $x\in\mathbf{R}$-re. $\sqrt{1-\sin 2x} > 0$, ha $\sin 2x \neq 1$, azaz $2x \neq \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$, vagyis ha $x \neq \frac{\pi}{4}(4k+1)$. A kifejezés ÉT-je: $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}(4k+1)\mid k\in\mathbf{Z}\right\}$. Minden $x\in$ ÉT-re $\sin 2x = \sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi)$, tehát függvényünk periódusa π.

1627. $\sin\frac{\pi x}{5} > 0$ kell legyen, vagyis $2\pi k < \frac{\pi x}{5} < \pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, azaz $10k < x < 10k+5$, $k\in\mathbf{Z}$ mellett $\lg\sin\frac{\pi x}{5}$ értelmezett. Mivel $\sin\frac{\pi}{5}x = \sin\frac{\pi}{5}(x+10) = \sin\left(\frac{\pi x}{5}+2\pi\right)$, ezért a függvény periódusa 10.

1628. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3} > 0$ kell legyen, azaz $\pi k < \frac{\pi x}{3} < \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, tehát $3k < x < \frac{3}{2}+3k$, $k\in\mathbf{Z}$ adja a kifejezés értelmezési tartományát. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}(x+3) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}+\pi\right)$ miatt a függvény periódusa 3.

1629. A $\sin^2 x$ értelmezési tartománya is, a 2^t értelmezési tartománya is a valós számok halmaza, tehát ÉT: **R**.

Mivel $\sin^2 x = \sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2$, ezért a függvény periódusa π.

1630. $\sin 5x > 0$ kell legyen. Ez a $2\pi n < 5x < \pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ mellett, azaz $\frac{2\pi}{5}n < x < \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n$, $n\in\mathbf{Z}$ esetén áll fenn. Ez az ÉT.

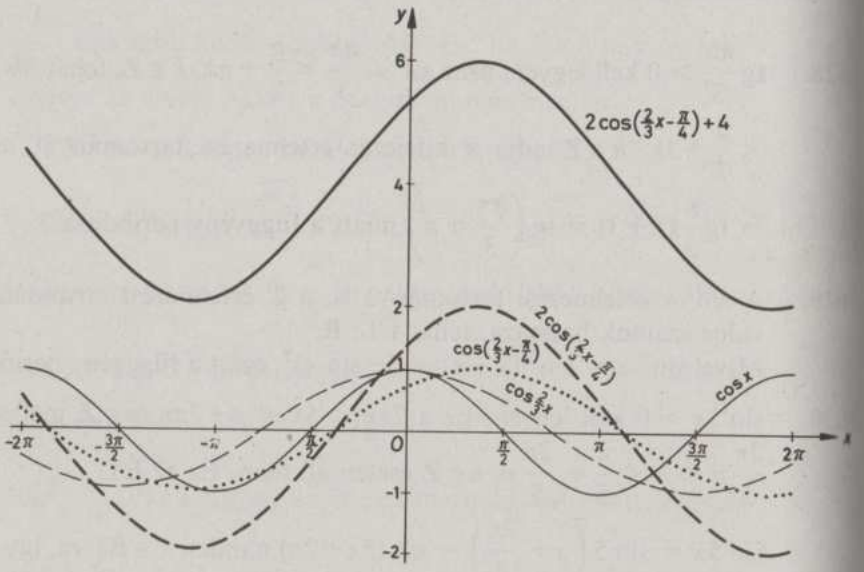
$\sin 5x = \sin 5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right) = \sin(5x+2\pi)$ minden $x\in$ ÉT-ra, így a függvény periódusa $\frac{2\pi}{5}$.

1631. $\sin x > 0$ és $\cos x > 0$ szükséges és elégséges feltétele a kifejezés értelmezhetőségének. Ez a $2\pi k < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ feltétellel teljesül. Ez adja a kifejezés ÉT-át.

$\sin x = \sin(x+2\pi)$ és $\cos x = \cos(x+2\pi)$ minden $x\in\mathbf{R}$-re, tehát a függvény periódusa 2π.

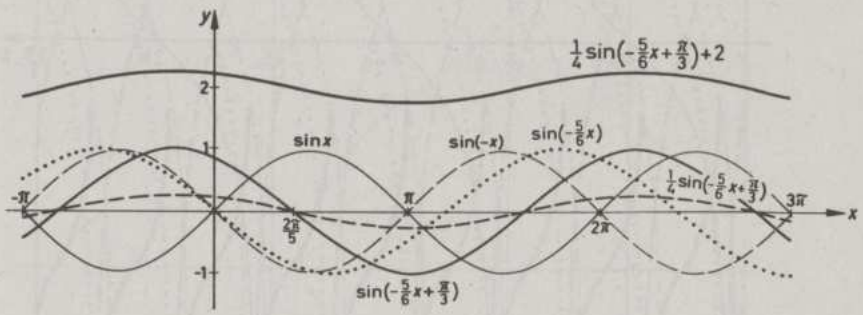
1632. ÉT: **R**. A függvény képét transzformációval állítjuk elő a cos x képéből. Az x tengely menti $\frac{3}{2}$-szeres nyújtással a $\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ képét a tengely mentén történő $\frac{3\pi}{8}$-dal pozitív irányba való eltolással a $\cos\frac{2}{3}\left(x-\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)$ képét kapjuk. Ha ezt 2-szeresére nyújtjuk, majd 4 egységgel eltoljuk és mindezt az y tengely mentén, úgy a függvény képét nyerjük.

A $\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2(x+3\pi)}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ miatt a függvény 3π-ben periodikus (**1632.** ábra).



1632

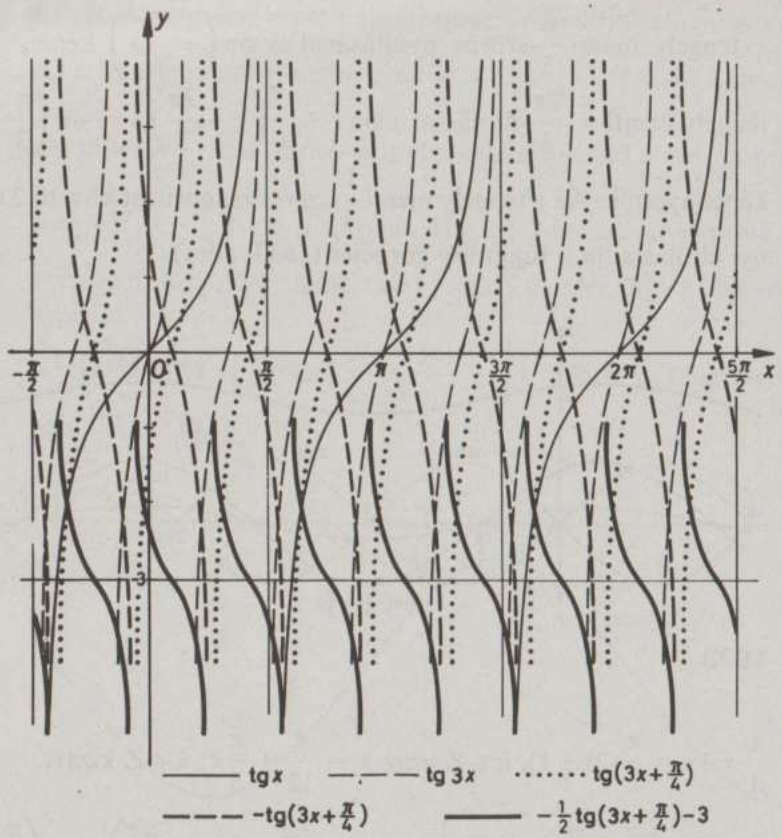
1633. ÉT: **R**. A $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{6}\left(x+\frac{12\pi}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{6}x\right)$ miatt a görbe $\frac{12\pi}{5}$-ben periodikus. A függvény képét a sin x képéből transzformációval kaphatjuk. A sin x képét az y tengelyre tükrözve a sin $(-x)$ képét, az x tengely menti $\frac{6}{5}$-szörös nyújtásával a $\sin\left(-\frac{5}{6}x\right)$ képét, majd a tengely menti $+\frac{2\pi}{5}$ eltolással a $\sin\left(-\frac{5}{6}\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5}{6}x\right)$ képét nyerjük. Az y tengely menti $\frac{1}{4}$-szeres zsugorítást követő 2 egységnyi eltolás adja a függvény görbéjét (**1633.** ábra).



1633

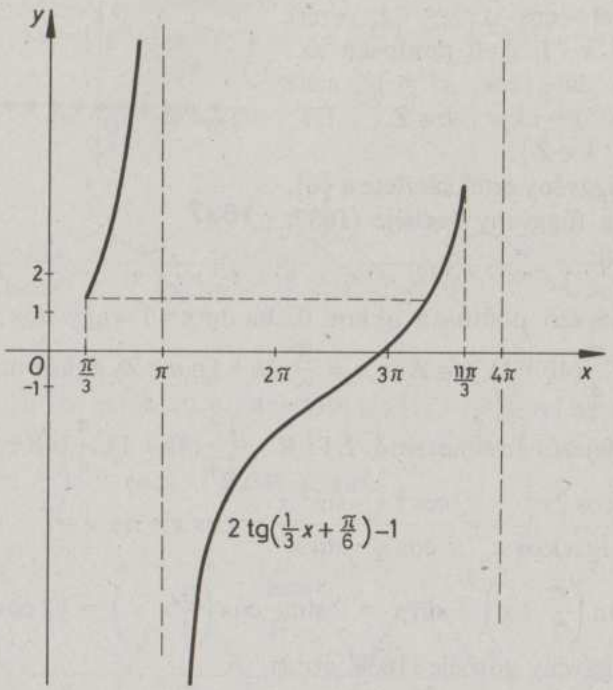
1634. $\frac{\pi}{4}+3x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ azaz $x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$ kizárt.

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$, ezért a függvény $\frac{\pi}{3}$-ban periodikus. Képét a tg x képéből transzformációval nyerjük. A tg x képéből x tengely menti $\frac{1}{3}$-szoros zsugorítással tg $3x$ képét, ebből a tengellyel párhuzamos negatív irányú $\frac{\pi}{12}$-vel történő eltolás a $\operatorname{tg} 3\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ képét eredményezi. Ezt tükrözve az x tengelyre a $-\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ képét nyerjük. Az y tengely menti $\frac{1}{2}$-szeres zsugorítással és 3-mal negatív irányba eltolva a kívánt görbét kapjuk (**1634.** ábra).



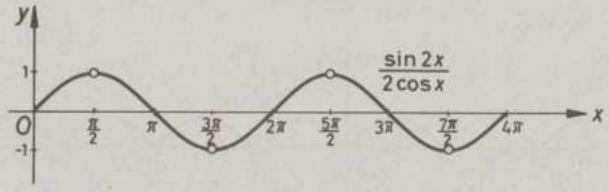
1634

1635. $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, azaz $x = \pi(3k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, kizárt. Mivel $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}(x+3\pi) + \frac{\pi}{6}\right)$, ezért a függvény 3π-ben periodikus. A $\operatorname{tg} x$ képéből x tengely mentén történt 3-szoros nyújtás a $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$ képét adja, és ezt $\frac{\pi}{2}$-lel negatív irányba eltolva a $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ képét nyerjük. Ha most y tengely mentén 2-szeresre nyújtjuk a görbét, majd e tengely mentén negatív irányba 1 egységgel eltoljuk, a kívánt képet kapjuk (**1635.** ábra).



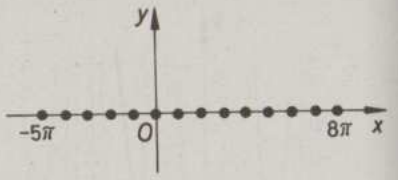
1635

1636. Mivel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ezért $\frac{\sin 2x}{\cos x} = \sin x$, minden $x \in \mathbf{R}$, melyre $\cos x \neq 0$. $\cos x = 0$ pontosan akkor, ha $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, tehát ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ (**1636.** ábra).



1636

1637. Mivel $|\cos x| \leqq 1$, ezért $\cos^2 x - 1 \geqq 0$ pontosan akkor, ha $|\cos x| = 1$, azaz ha $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ÉT: $\{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
A függvény értékkészlete a $\{0\}$, így a függvény görbéje (**1637.** ábra):

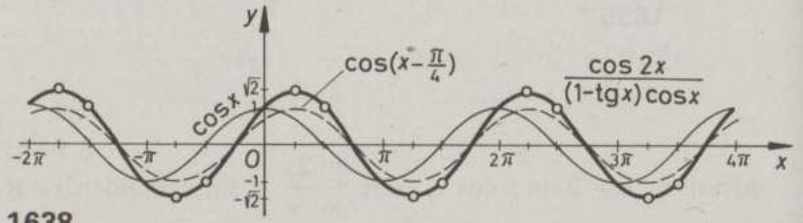


1637

1638. A nevező pontosan akkor 0, ha $\operatorname{tg} x = 1$ vagy $\cos x = 0$. Ha tehát $x \neq \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ és $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, akkor mind a $\operatorname{tg} x$, mind a kifejezés értelmezhető. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}(4k+1), \frac{\pi}{4}(4k+2)\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

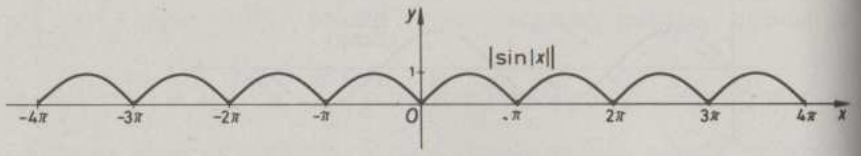
$$\frac{\cos 2x}{(1-\operatorname{tg} x)\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$ miatt a függvény görbéje (**1638.** ábra).



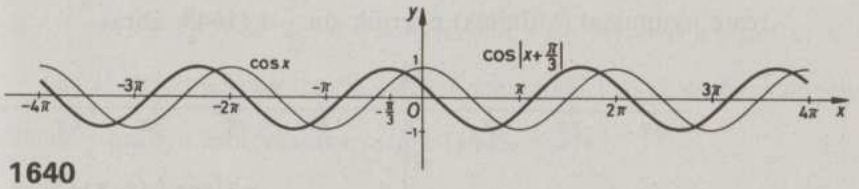
1638

1639. A $\big|\sin|x|\big|$ kifejezés mindenütt értelmezhető, így ÉT: **R**.
$\sin|x| = \sin|-x|$, tehát a függvény páros (**1639.** ábra).



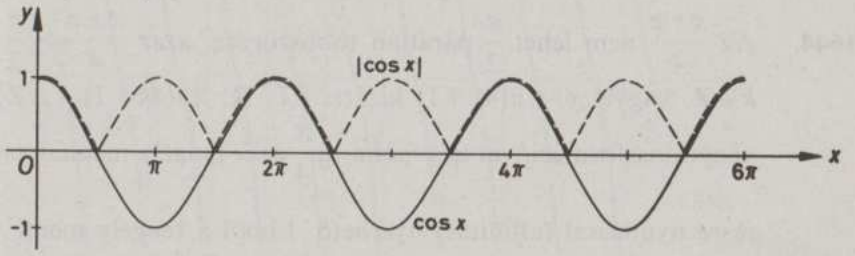
1639

1640. ÉT: **R**. Mivel $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)$, és $|a| = a$, ha $a \geqq 0$, $|a| = -a$, ha $a \leqq 0$, ezért $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$ (**1640.** ábra).



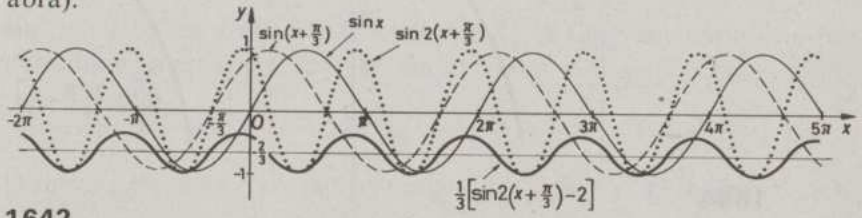
1640

1641. ÉT: **R**. $\sqrt{a^2} = |a|$ miatt a kifejezés $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$-vel azonos.
$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x|$ (**1641.** ábra).



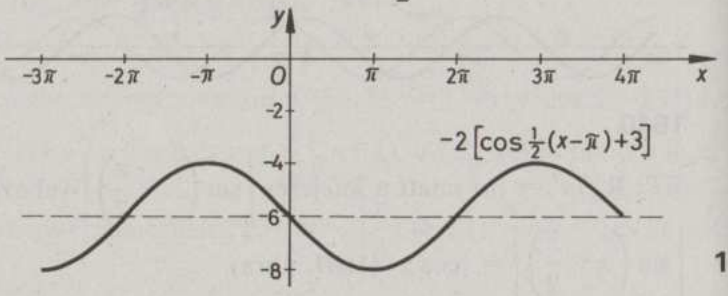
1641

1642. ÉT: **R**. Függvénytranszformációval: $\sin x$-ből az x tengely menti $-\frac{\pi}{3}$ eltolással $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Ebből x tengely menti $\frac{1}{2}$ arányú zsugorítással (affinitással) a $\sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nyerhető. Ezt az y tengely mentén -2-vel eltoljuk, majd y tengely mentén $\frac{1}{3}$ arányú affinitást alkalmazunk (**1642.** ábra).



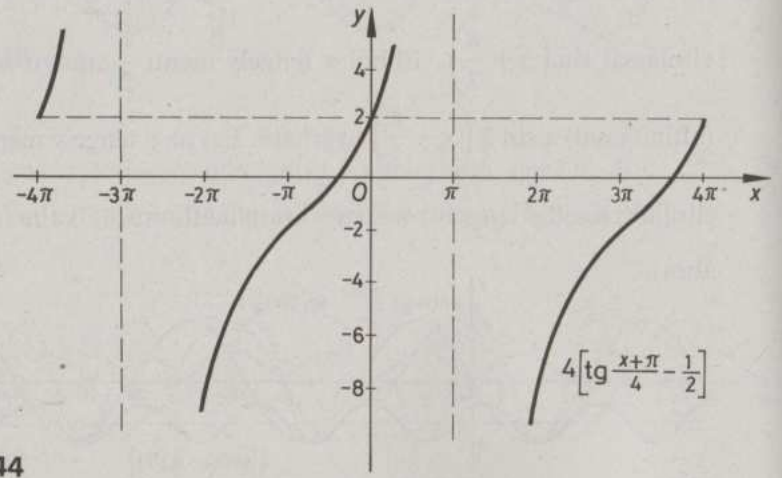
1642

1643. ÉT: **R**. $\cos\frac{1}{2}(x-\pi) = \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) = \sin\frac{x}{2}$, mert a cosinusfüggvény páros és a pótszög szögfüggvényéről ismertek alkalmazhatók. Így függvénytranszformációval, az x tengely menti kétszeresre nyújtással (affinitás) nyerjük $\sin\frac{x}{2}$-t (**1643.** ábra).



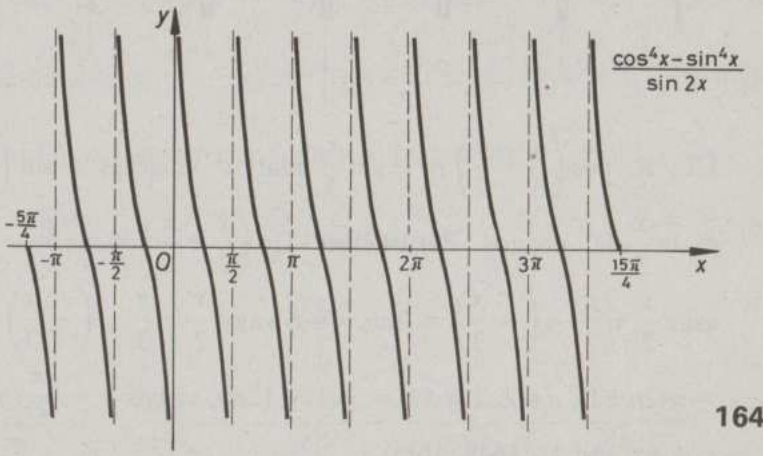
1643

1644. Az $\frac{x+\pi}{4}$ nem lehet $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröse, azaz $\frac{x+\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = \pi(4k+1)$ kizárt. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Függvénytranszformációval tg x-ből a $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ az x tengely mentén való 4-szeresre nyújtással (affinitás) nyerhető. Ebből a tengely menti $-\frac{\pi}{4}$-del való eltolás adja a $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$ görbéjét. Ezt az y tengellyel párhuzamosan eltoljuk $-\frac{1}{2}$-nyit, majd ugyane tengely mentén 4-szeresére nyújtjuk (**1644.** ábra).



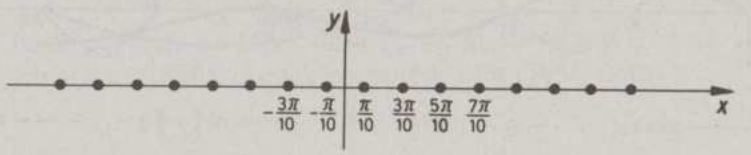
1644

1645. Csak a $\sin 2x = 0$ helyeken nem értelmezhető a kifejezés, tehát ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$. $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$, tehát a kifejezés ctg $2x$-szel azonos! Ezt a ctg x-ből x-tengely menti $\frac{1}{2}$ arányú affinitással nyerjük (**1645.** ábra).



1645

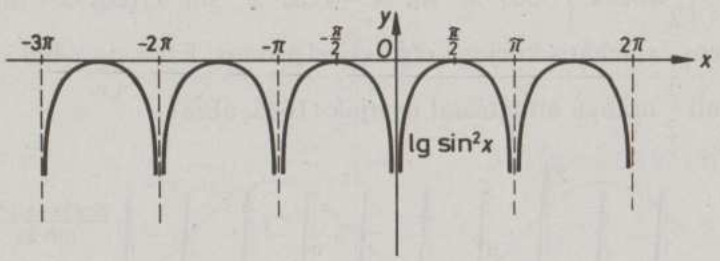
1646. Mivel $|\sin\alpha| \leqq 1$, ezért $|\sin^2\alpha| \leqq 1$ is, tehát $\sin^2 5x - 1 \geqq 0$ csakis akkor, ha $\sin^2 5x = 1$. Ezért ÉT: $\left\{\frac{\pi}{10}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ (**1646.** ábra).



1646

1647. $\sin^2 x > 0$, ha $\sin x \neq 0$, ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. A függvény páros és π-ben periodikus, mert $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$ és $\sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. $\lim_{x \to +\pi k} \lg \sin^2 x = -\infty$, $\lg \sin^2\left(\frac{\pi}{2}k\right) = 0$, $\lg \sin^2 x \leqq 0$. $\sin x = \sin(\pi - x)$ miatt a $\lg \sin^2 x$ görbéje az $x =$

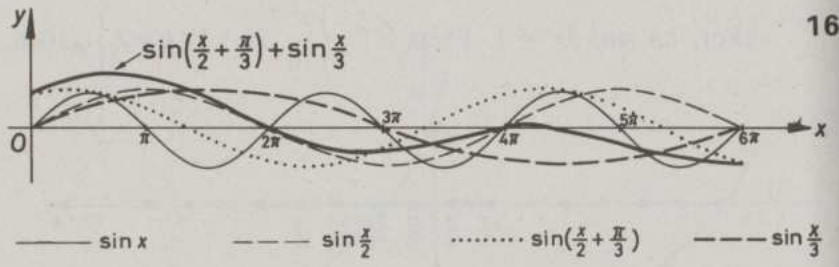
$= \frac{\pi}{2}(2k+1)$ egyenesekre szimmetrikus. Mivel a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben a $\sin x$ szigorúan nő és a lg függvény is szigorúan növő, ezért $\lg \sin^2 x$ itt szigorúan növő (**1647.** ábra).



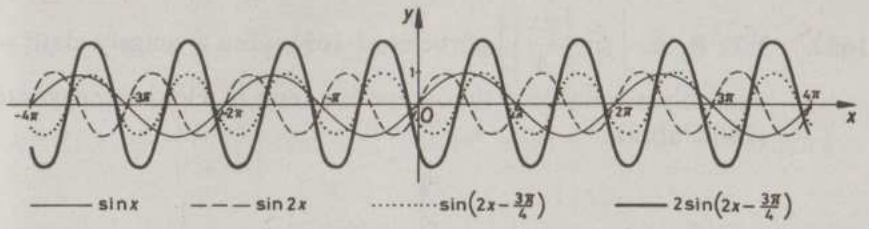
1647

1648. ÉT: **R**. $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{x}{3}$ miatt a kifejezés a $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{x}{3}$-dal azonos. Zérushelyei: $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{x}{3}\right)$ gyökei, azaz $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{x}{3}\right) = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ vagy $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{x}{3}\right) = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Így $5x = -2x+12\pi n$, vagyis $x = \frac{2\pi}{5}(6n-1)$ vagy $x = 4\pi(3n+1)$ (**1648.** ábra).

1648

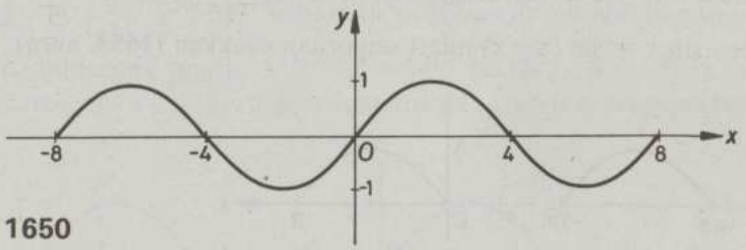


1649. ÉT: **R**. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ miatt $\cos\left(\frac{5\pi}{4}-2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}+2x\right) = \sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$, azaz a kifejezés $2\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$-gyel azonos. (**1649.** ábra).



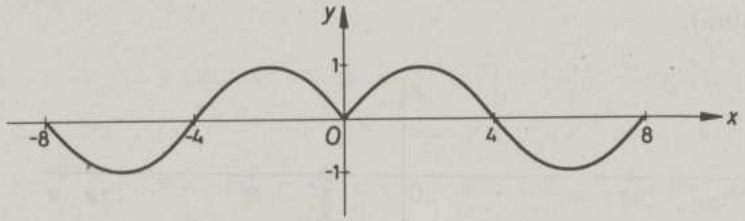
1649

1650. ÉT: **R**. Zérushelyei: $\frac{\pi x}{4} = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = 4n$, $n \in \mathbf{Z}$ helyeken. Szélsőértékeit a $\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, azaz $x = 4k+2$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken veszi fel. A függvény periódusa 8, hiszen $\sin\frac{\pi(x+8)}{4} = \sin\left(\frac{\pi x}{4}+2\pi\right) = \sin\frac{\pi x}{4}$ (**1650.** ábra).



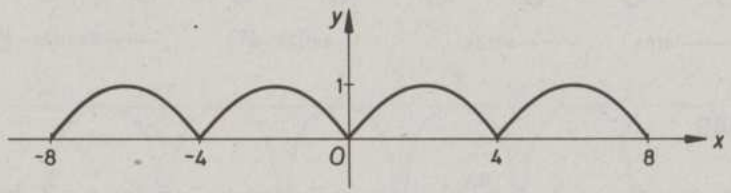
1650

1651. ÉT: **R**. Mivel $\sin\left|\frac{\pi x}{4}\right| = \sin\left|\frac{-\pi x}{4}\right|$, ezért a kifejezés páros függvény, tehát görbéjét az **1650.** ábra [0; 8] feletti részének és az y tengelyre vonatkozó tükörképének egyesítése adja (**1651.** ábra).



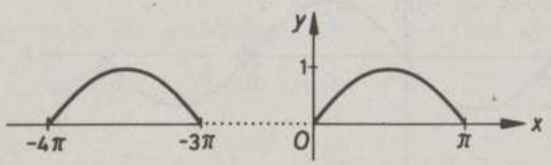
1651

1652. ÉT: **R**. Az $\left|\sin\left|\frac{\pi x}{4}\right|\right|$ görbéjét az **1651.** ábra x tengely alatti részének e tengelyre vonatkozó tükörképe és a tengely feletti rész egyesítése adja (**1652.** ábra).



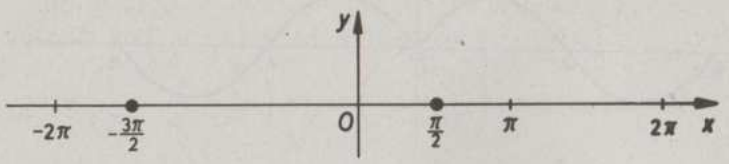
1652

1653. ÉT: $0 \leqq \sin x$, azaz $2\pi n \leqq x \leqq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Zérushelyei: $\sqrt{\sin x} = 0$, ha $\sin x = 0$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Maximuma: $\sin x \leqq 1$ miatt $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ helyeken. A függvény 2π-ben periodikus, hiszen $\sin(x+2\pi) = \sin x$, és a $\left[-4\pi, -\frac{7\pi}{2}\right]$ és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben szigorúan nő, mert a $\sin x$ is és négyzetgyök is ilyen, míg a $\left[-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right]$ és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben $\sin x = \sin(\pi - x)$ miatt szigorúan csökken (**1653.** ábra).



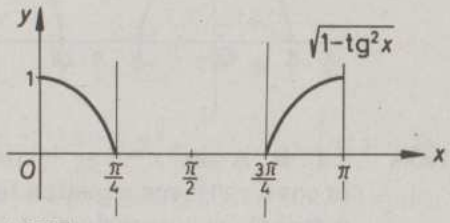
1653

1654. ÉT: $\sin x > 0$ kell legyen (vagyis $2\pi n < x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$) ahhoz, hogy logaritmusa értelmezhető legyen. Ám $\sin x \leqq 1$ miatt $\lg \sin x \leqq 0$, tehát $\sqrt{\lg \sin x}$ csakis $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ helyeken értelmezhető (**1654.** ábra).



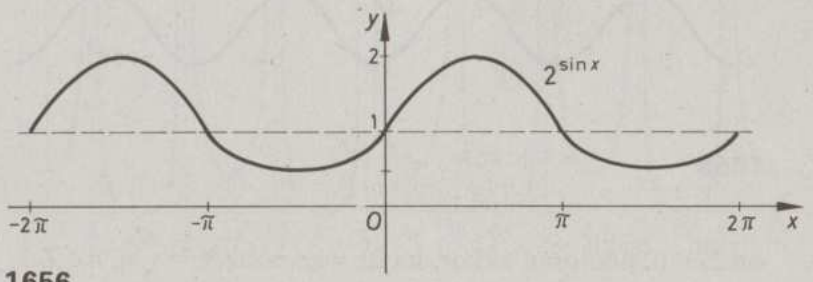
1654

1655. ÉT: $1 - \mathrm{tg}^2 x \geqq 0$, azaz $\mathrm{tg}^2 x \leqq 1$, tehát $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. A $\mathrm{tg}\, x$ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$-ben szigorúan nő, ezért a $\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2 x}$ itt szigorúan csökken. A $\left[\frac{3}{4}\pi; \pi\right]$-ben a $\mathrm{tg}\, x$ negatív és szigorúan nő, így $\mathrm{tg}^2 x$ szigorúan csökken, tehát $1 - \mathrm{tg}^2 x$ és $\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2 x}$ szigorúan nő (**1655.** ábra).



1655

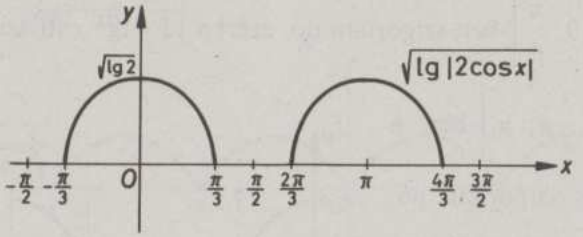
1656. ÉT: **R**. A függvény 2π-ben periodikus, a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-ben szigorúan nő, mert a szinuszfüggvény is és a 2^x exponenciális függvény is növekedő itt. A $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$-ben szigorúan csökken az előbbi függvények ilyen tulajdonsága miatt. A $2^{\sin(x+\pi)} = 2^{-\sin x}$ és $2^{\sin(-x)} = 2^{-\sin x}$ miatt $2^{\sin(x+\pi)}$ görbéje és a $2^{\sin x}$ görbéje szimmetrikus az $x = 0$ egyenesre (**1656.** ábra).



1656

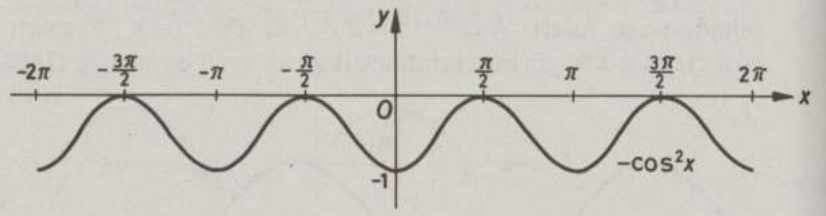
1657. $|2\cos x| \geqq 1$ a feltétele annak, hogy $\lg|2\cos x| \geqq 0$ legyen. $|\cos x| \geqq \frac{1}{2}$, ha ÉT: $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. $\cos(-x) = \cos x$ és $|\cos(x+\pi)| = |-\cos x| = |\cos x|$, elég tehát a görbe menetét a $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$-ban ismerni. A $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$-ban $\cos x$ szigorúan csökken, ezért

$|2\cos x|$ is, így $\lg|2\cos x|$ és $\sqrt{\lg|2\cos x|}$ szigorúan csökkenők, mert a lg és a négyzetgyökfüggvény szigorúan nő (**1657.** ábra).



1657

1658. ÉT: **R**. $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$ és $\cos^2 x = \cos^2(x+\pi) = (-\cos x)^2$ és $\cos(-x) = \cos x$ miatt a függvény görbéje π-ben periodikus és szimmetrikus az y tengelyre. A $[0;\pi]$-ben a koszinuszfüggvény szigorúan csökken, tehát a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben a $\cos^2 x$ is, hiszen itt $\cos x \geqq 0$, és ezért a $-\cos^2 x$ szigorúan nő, míg a $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$-ben $\cos x \leqq 0$, tehát $\cos^2 x$ szigorúan nő és így $-\cos^2 x$ szigorúan fogy (**1658.** ábra).



1658

1659. $\sin 2x = 0$, pontosan akkor, ha $2x = \pi n$, azaz $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$. A függvény zérushelyei $\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin 2x} =$

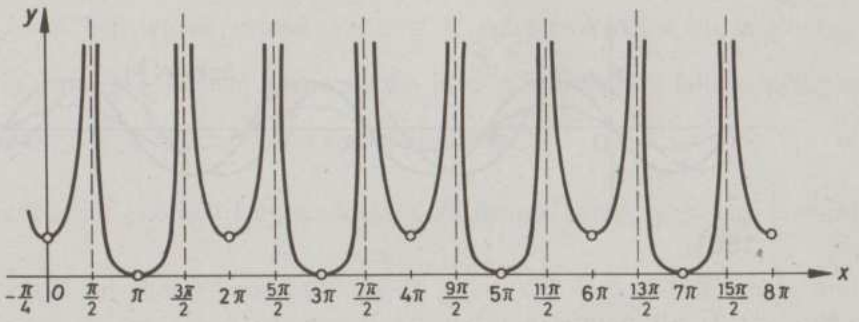
$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x}{2\sin x \cos x} = \frac{1+\cos x}{2\cos^2 x}$ miatt csak a $\cos x = -1$ gyökei lehetnek, itt azonban nincs értelmezve, tehát függvényünk azonos ez utóbbi kifejezéssel annak ÉT-án. A függvény 2π-ben periodikus, mivel mind

a számláló, mind a nevező ilyen. A függvény páros is, mert a $\cos x$ is páros. A függvény mindenütt pozitív, mert nevezője ilyen, és $|\cos x| \leqq 1$ miatt a számlálója is. A szakadási helyeken $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ egész többszöröseinél$\left.\right)$ a függvény határértékei rendre: $\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{2\cos^2 x} = 1$;

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{2\cos^2 x} = +\infty$; $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{2\cos^2 x} = 0$ és $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{2\cos^2 x} = +\infty$.

A függvény $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$-ben szigorúan nő, mert az $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x}$ összeg minden tagja (a $\cos x$ szigorúan fogyó volta miatt) növekedő. Hasonlóan: $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$-ben e tagok szigorúan fogyók.

Az $\frac{1+\cos(\pi-x)}{2\cos^2(\pi-x)} = \frac{1-\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{1+\cos(\pi+x)}{2\cos^2(\pi+x)}$ miatt a függvény görbéje az $x=\pi$ (és a periodikusság miatt, minden $x=\pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$) egyenesre szimmetrikus (**1659.** ábra).

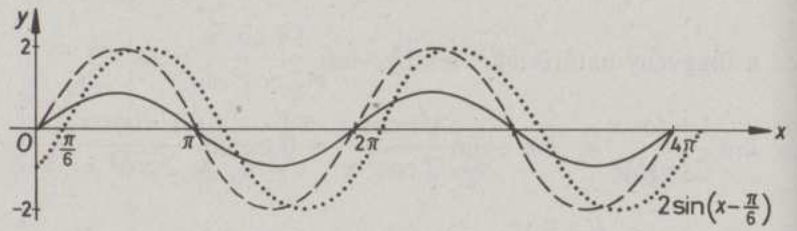


1659

1660. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. ÉT: **R**. A függvény képét a $\sin x$ képéből transzformációval: x tengelyre merőleges 2-szeres

nyújtással és x tengely mentén, pozitív irányú $\frac{\pi}{6}$-tal való eltolással nyerjük (**1660.** ábra).



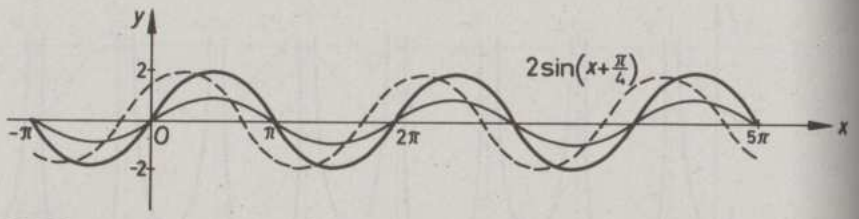
1660

1661. ÉT: **R**, hiszen minden tagja értelmezhető **R**-en.

$$\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Függvénytranszformációval a görbe (**1661.** ábra):



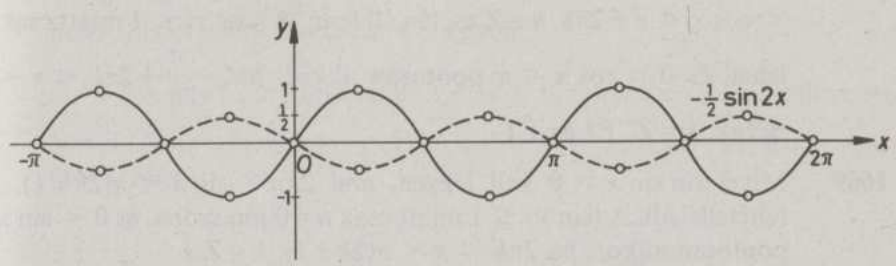
1661

1662. A nevező zérushelyei $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x$, azaz $\operatorname{tg}^2 x=1$, tehát $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. Mivel a $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények $\frac{\pi}{2}$ páratlan, illetve páros többszöröseiben nincsenek értelmezve, ezért

$$\text{ÉT: } \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}n\,|\,n\in\mathbf{Z}\right\}.\ \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}} =$$

$$= -\sin x\cos x = -\frac{1}{2}\sin 2x$$

miatt a görbe függvénytranszformációval (**1662.** ábra):



1662

1663. A $|\sin x|\leqq 1$ miatt $\log_2\sin x\leqq 0$, ahol $0<\sin x$. A $\log_2\sin x=0$ adja tehát az ÉT: $\left\{\frac{\pi}{2}(4k+1)\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$ halmazt.

1664. $\operatorname{tg}\sin x\geqq 0$ kell legyen. A $\operatorname{tg}\alpha$ függvényről ismert, hogy csak a $\pi k\leqq$ $\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ helyeken nemnegatív. Így $\pi k\leqq\sin x\leqq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ kell legyen. Mivel $|\sin x|\leqq 1$, ezért csakis a $k=0$, azaz $0\leqq$ $\leqq\sin x\leqq\frac{\pi}{2}$ feltétel adja a szóba jövő x helyeket. E feltétel pedig a $2\pi k\leqq x\leqq\pi(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$ esetén teljesül.

1665. $\operatorname{ctg}\cos x\geqq 0$ kell legyen. A $\operatorname{ctg}\alpha$-ról ismert, hogy $\pi k<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ helyeken nemnegatív, így $\pi k<\cos x\leqq\frac{\pi}{2}+\pi k$ kell legyen, ami $|\cos x|\leqq 1$ miatt csak $k=0$ mellett lehetséges. A $0<\cos x\leqq 1$ pedig a $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$ intervallumokon teljesül.

1666. $\log_{\frac{1}{2}}\cos x\geqq 0$ kell legyen. Mivel $|\cos x|\leqq 1$ és $\log_{\frac{1}{2}} y$ nemnegatív minden $0<y\leqq 1$-re, ezért $0<\cos x\leqq 1$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy függvényünk az **R** legbővebb részhalmazán értelmezhető legyen. Ezért ÉT: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

1667. $\lg(1-\sin^2 x) = \lg\cos^2 x \geqq 0$ kell legyen. Ám $|\cos x| \leqq 1$ miatt ama csak $\cos^2 x = 1$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén teljesül.

1668. sin cos $x > 0$ feltétel mellett értelmezhető a kifejezés, ami csakis $2\pi n <$ $< \cos x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén áll fenn. A $|\cos x| \leqq 1$ miatt csak $n = 0$ lehet, és $0 < \cos x < \pi$ pontosan akkor, ha $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} +$ $+ 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ez az ÉT.

1669. Mivel sin sin $x > 0$ kell legyen, ami $2\pi n < \sin x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ feltétellel áll. A $|\sin x| \leqq 1$ miatt csak $n = 0$ jön szóba, és $0 < \sin x < 1$ pontosan akkor, ha $2\pi k < x < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

1670. Az értelmezhetőségnek cos sin $x \geqq 0$ a szükséges és elégséges feltétele. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $-\frac{\pi}{2} < -1 \leqq \sin x \leqq 1 < \frac{\pi}{2}$, ami minden $x \in \mathbf{R}$-re teljesül.

1671. Mivel $\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$, és lg $|\cos x|$ minden $\cos x \neq 0$ helyen értelmezhető, ezért ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2n+1) \,\middle|\, n \in \mathbf{Z} \right\}$.

1672. A kifejezés pontosan akkor értelmezhető, ha $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} > 0$, ami a $\log_{\frac{1}{2}} y$ függvény szigorúan csökkenő volta miatt $0 < \frac{2}{x} < 1$, azaz $2 < x$ mellett teljesül.

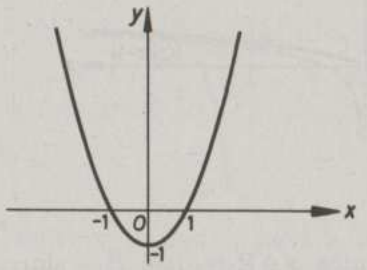
1673. Egyrészt a $0 < a < 1$, másrészt az $1 < a$ eseteket kell vizsgáljuk, ugyanakkor $\frac{1}{\log_a x} = 1$, azaz $x = a$ lehetőséget ki kell zárjuk, mert különben a nevező 0 lenne.

Ha $0 < a < 1$, úgy $\frac{1}{\log_a x} > 0$ pontosan akkor, ha $\log_a x > 0$, és ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $0 < x < 1$ legyen. Ha pedig $1 < a$, úgy $\frac{1}{\log_a x} > 0$, akkor és csak akkor, ha $0 < \log_a x$, és ez pontosan az $1 < x$ feltétellel teljesül.

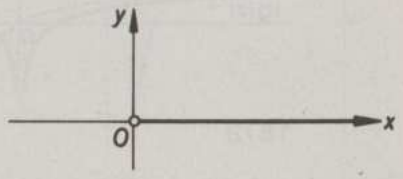
1674. $\log_{\frac{1}{a}} x > 0$ kell legyen. Ha $0 < \frac{1}{a} < 1$, azaz $1 < a$, úgy $0 < x < 1$, ha pedig $1 < \frac{1}{a}$, azaz $0 < a < 1$, akkor $1 < x$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy kifejezésünk értelmezhető legyen.

1675. Ha $x \geqq 0$, úgy $\sqrt{x}$ értelmezett és $x + \sqrt{x} \geqq 0$, tehát $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ is értelmezett.

1676. Mivel $(|x|-1)(|x|+1) = |x|^2 - 1 = x^2 - 1$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, ezért (**1676.** ábra):



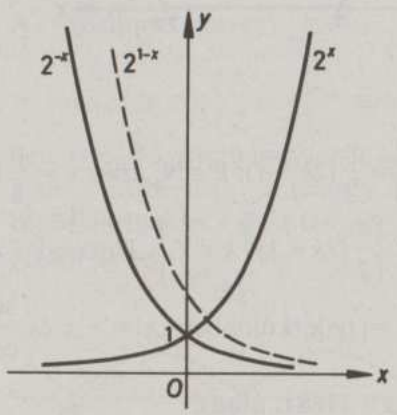
1676



1677

1677. $x^2 > 0$ és $x > 0$ annak feltétele, hogy a tagok külön-külön értelmezhetők legyenek. Így ÉT: $\mathbf{R}^+$. A pozitív x-ekre $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, függvényünk tehát az azonosan zérusfüggvény (a pozitív valós számok halmazán) (**1677.** ábra).

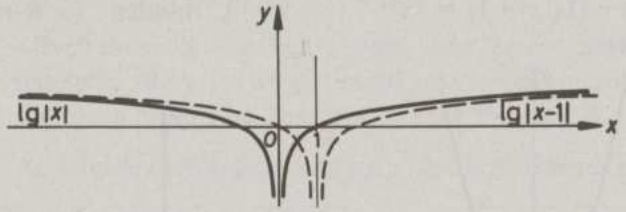
1678. $2^{1-x} = 2 \cdot 2^{-x}$. Ha a 2^x képét az y tengelyre tükrözzük, úgy 2^{-x} képét nyerjük. Ennek 2-szeresre nyújtása (y tengely mentén) adja görbénket (**1678.** ábra).



1678

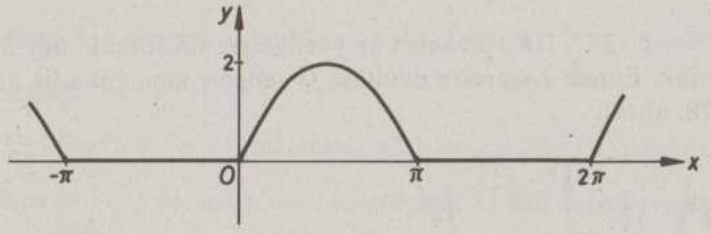
1679. $|x-1| > 0$, azaz $x \neq 1$ annak feltétele, hogy a kifejezés értelmezhető legyen. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

A $\lg |x|$ görbéjéből x tengely menti egységnyi eltolással nyerjük $\lg |x-1|$ görbéjét, hiszen ez az 1-gyel nagyobb x helyeken veszi fel ugyanazokat az értékeket, mint a $\lg |x|$. Mivel $x>0$ esetén $|x| = x$ és $x<0$ mellett $|x| = -x$, ezért a $\lg |x|$ képe a $\lg x$ képe és ennek y tengelyre tükrözöttjének egyesítése (**1679.** ábra).



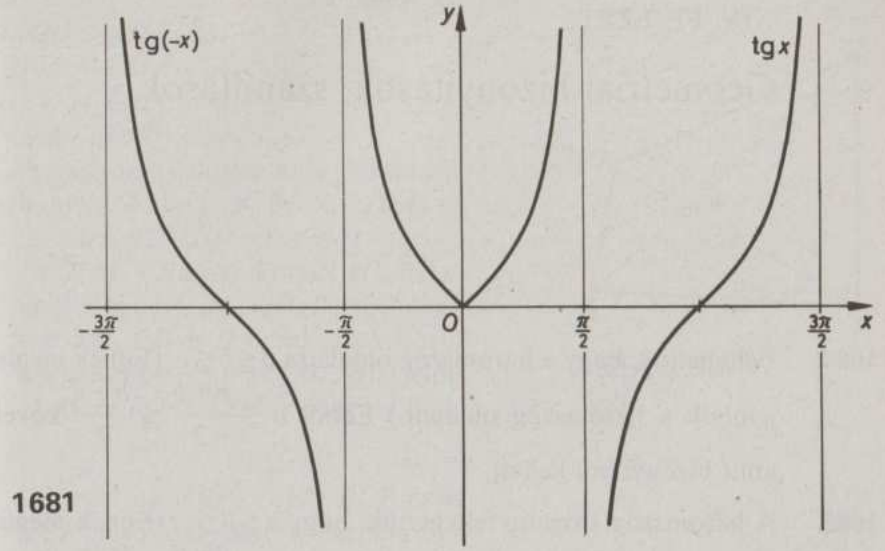
1679

1680. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, minden $x \in \mathbf{R}$-re. $|\sin x| = \sin x$, ha $\sin x \geqq 0$, azaz $2\pi n \leqq x \leqq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, és különben $|\sin x| = -\sin x$. Ezért a függvény $2 \sin x$, ha az előbbi intervallumból való az x, és 0 különben. A függvény 2π-ben periodikus, mert tagjai is ilyenek (**1680.** ábra).



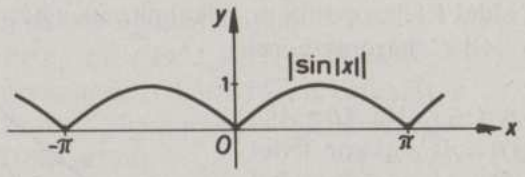
1680

1681. $\cos |x| = 0$ nem lehet. Ez $|x| = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ esetén áll fenn. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}$. Ha $x \in$ ÉT és $0 < x$, úgy $|x| = x$ és $\frac{\sin |x|}{\cos |x|} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, különben $|x| = -x$ és $\frac{\sin |x|}{\cos |x|} = \frac{\sin (-x)}{\cos (-x)} = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (**1681.** ábra).



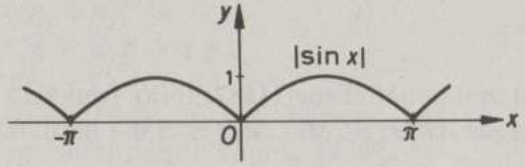
1681

1682. Mivel $\sin |-x| = \sin |x|$, ezért a függvény görbéje szimmetrikus az y tengelyre, ugyanakkor $\sin |x+\pi| = -\sin |x|$, tehát $|\sin |x+\pi|| = |\sin |x||$, vagyis függvényünk π-ben periodikus. Ezért a $[0; \pi]$ feletti képéből eltolással nyerjük az ÉT-on való képét. Ha $0 \leqq x \leqq \pi$, úgy $0 \leqq \sin |x| = \sin x \leqq 1$, tehát $|\sin |x|| = \sin x$ (**1682.** ábra).



1682

1683. A koszinuszfüggvény páros, tehát $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, így $\cos\left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ minden x-re. Függvényünk tehát azonos a $|\sin x|$ függvénnyel. Ezt pedig a $\sin x$ görbéjének „x tengely alatti" részének e tengelyre vonatkozó tükörképének és a $\sin x$ tengely „feletti" részének egyesítéséből nyerjük (**1683.** ábra).



1683

XIV. FEJEZET

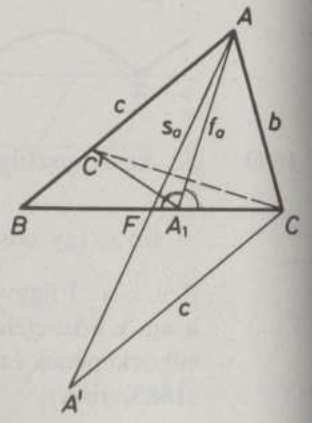
Geometriai bizonyítások, számítások

1684. Feltehetjük, hogy a háromszög oldalaira $a \leqq b \leqq c$. (Ennek megfelelően jelöljük a háromszög oldalait.) Ebből $a \leqq \frac{b+b}{2} \leqq \frac{b+c}{2}$ következik, amit bizonyítani kellett.

1685. A háromszög szögeire feltehetjük, hogy $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$. (Ennek megfelelően jelöljük a háromszög szögeit.) Ebből $\alpha \leqq \frac{\beta+\beta}{2} \leqq \frac{\beta+\gamma}{2}$ következik, amit bizonyítani kellett.

1686. I. Először belátjuk, hogy $s_a < \frac{b+c}{2}$ (**1686.** ábra). Tükrözzük a háromszög A csúcsát a BC oldal F felezőpontjára. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $AA'C$ háromszögre: $2s_a < b+c$.

II. Megmutatjuk, hogy $f_a \leqq s_a$. Ha $AB = AC$, akkor $f_a = s_a$. Ha $AB \neq AC$, akkor feltehetjük, hogy $AB > AC$. A szögfelezőtétel szerint $A_1B : A_1C = AB : AC$, így $A_1B > A_1C$. Tükrözzük C-t az f_a szögfelezőre (C'). $AB > AC$ miatt C' AB belső pontja. Ezért $CA_1A\sphericalangle = C'A_1A\sphericalangle < BA_1A\sphericalangle$, így $BA_1A\sphericalangle$ tompaszög. Tehát az FA_1A háromszögben $s_a > f_a$.

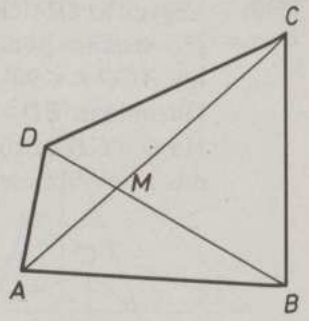


1686

1687. Jelöljük az átlók metszéspontját M-mel (**1687.** ábra). Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az ABM, BCM, CMD és DMA háromszögekre.

$AB < AM + BM$,
$BC < BM + CM$,
$CD < CM + DM$,
$DA < DM + AM$.

A négy egyenlőtlenséget összeadva kapjuk: $4 \min(AB, BC, CD, DA) \leqq AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD) \leqq 4 \max(AC, BD)$, ahol $\min(AB, BC, CD, DA)$ jelöli az AB, BC, CD és DA szakaszok közül a legkisebbet, és $\max(AC, BD)$ jelöli az AC és BD szakaszok nagyobbikát.



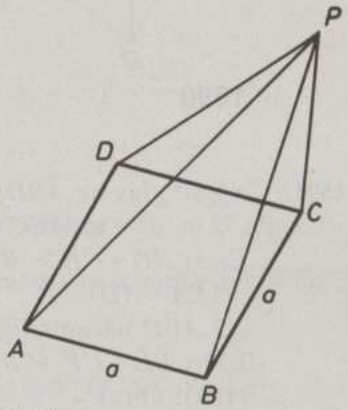
1687

1688. Írjuk fel az ABP, DAP, BCP és a DCP háromszögekre a háromszög-egyenlőtlenségeket.

$PA < PB + a$,
$PA < PD + a$,
$a < PC + PB$,
$a < PC + PD$.

Az egyenlőtlenségeket összeadva és rendezve a bizonyítandó $PA < PB + PC + PD$ egyenlőtlenséget kapjuk. A másik három egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható (**1688.** ábra).

Megjegyzés: Ha P a rombusz valamelyik oldalegyenesére esik, akkor a négy egyenlőtlenség közül legfeljebb két egyenlőtlenség helyett állhat fenn egyenlőség.

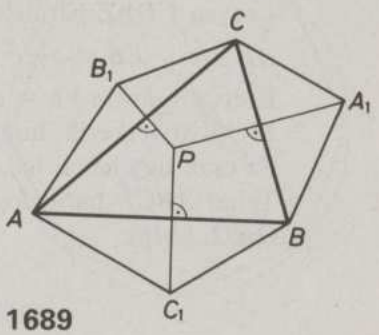


1688

1689. Írjuk fel az ABC_1, BCA_1 és CAB_1 háromszögekre a háromszög-egyenlőtlenséget.

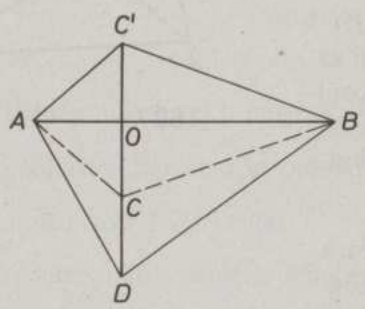
$AB_1 + B_1C > AC$,
$CA_1 + A_1B > CB$,
$BC_1 + C_1A > BA$.

Ezeket összeadva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk (**1689.** ábra).

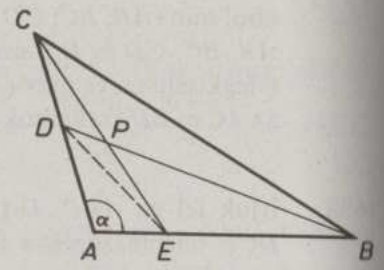


1689

1690. Legyen az OD félegyenes pontja C. Ekkor a $CO < DO$ feltétel miatt C az OD szakasz pontja. Az AOC, esetleg elfajuló, háromszög derékszögű, így $ACO\sphericalangle < 90°$, ezért $ACD\sphericalangle > 90°$, így $AD > AC$.
Hasonlóan $BD > BC$. Ezek összege: $AD + BD > AC + BC$.
Ha O a CD belső pontja, akkor C-nek O-ra való tükrözésével a megoldás az előbbi esetre visszavezethető (**1690.** ábra).



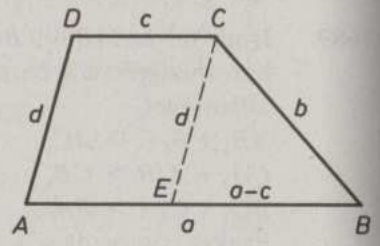
1690



1691

1691. $\alpha \geqq 90°$, így az ABD háromszögben $BD > BA$, valamint
az AEC háromszögben $CE > AC$.
Ezért $BD + CE > BA + AC = (BE + EA) + (AD + DC) = BE + DC + (EA + AD)$.
Az AED háromszögben $EA + AD > ED$.
Ezért $BD + CE > BE + ED + DC$.
(**1691.** ábra).

1692. Az $ABCD$ trapézban $a \| c$ és a feltétel szerint
$a + b = c + d$.
Feltehető, hogy $a \geqq c$.
Legyen $CDAE$ paralelogramma. Itt $E \bullet AB$, valamint
$AE = c$, $EB = a - c$ és $EC = d$.
Ezért $c + d = a + b = c + EB + b$.
Ebből következik, hogy $d = EB + b$.
Ez csak úgy lehet, ha $B = E$.
Tehát $ABCD$ paralelogramma.
(**1692.** ábra).



1692

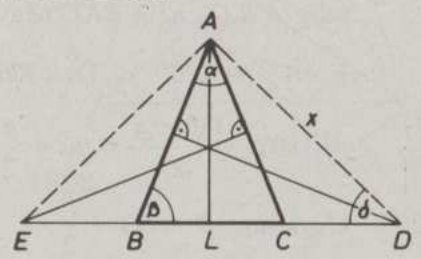
1693. D az AB felezőmerőlegesének pontja. Ezért $AD = BD$. Az ABC és ADB egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlőek, így ezek a háromszögek hasonlóak. $\delta = \alpha$. Az $ALD\triangle$-ből

$$\frac{\frac{1}{2}DE}{AD} = \cos\delta = \cos\alpha,$$

azaz

$$\frac{DE}{AD} = 2\cos\alpha \text{ következik.}$$

(**1693.** ábra).



1693

1694. Az n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2} = 54$.

Ebből $n > 0$ miatt $n = 12$.

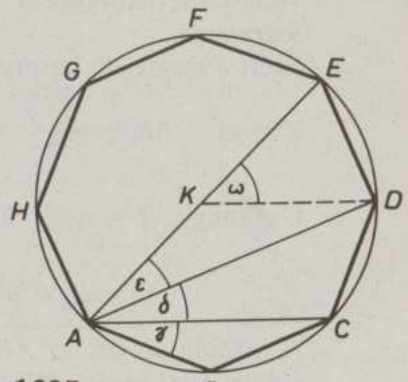
Az n oldalú szabályos sokszög egy szöge: $\alpha = \frac{(n-2)180°}{n}$.

Ezért: $\alpha = \frac{10 \cdot 180°}{12} = 150°$.

(Vagy: az n oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó középponti szög $\frac{360°}{n}$, itt $\frac{360°}{12} = 30°$. A 12 oldalú szabályos sokszög egy szöge: $180° - 30° = 150°$.)

1695. A K középpontú, KE sugarú kör egyenlő íveihez ($\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} =$ stb.) tartozó középponti szög $\frac{360°}{8} = 45°$, ezeken az íveken nyugvó kerületi szögek $\gamma = \delta = \varepsilon = \ldots = \frac{45°}{2} = 22{,}5°$.

Ezek egyúttal az A-ból induló szomszédos átlók által bezárt szögek. Az A-ból induló bármely 2 átló hajlásszöge $n \cdot 22{,}5°$, ahol $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
(Pl. AB és AD szöge $2 \cdot 22{,}5° = 45°$, AB és AH szöge $6 \cdot 22{,}5° = 135°$.)
(**1695.** ábra).



1695

1696. Ismert, hogy a háromszög belső és a hozzá tartozó külső szögfelezői merőlegesek egymásra. Ezért, ha a belső szögfelezők metszéspontja K és az ABC háromszög külső szögfelezői által meghatározott háromszög $A'B'C'$, az $A'BKC$ négyszög húrnégyszög.

Ezért $\alpha' = 180° - \omega$. De a KBC háromszögben $\omega = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) =$

$= 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, tehát $\alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Ugyanúgy $\beta' = 90° - \frac{\beta}{2}$,

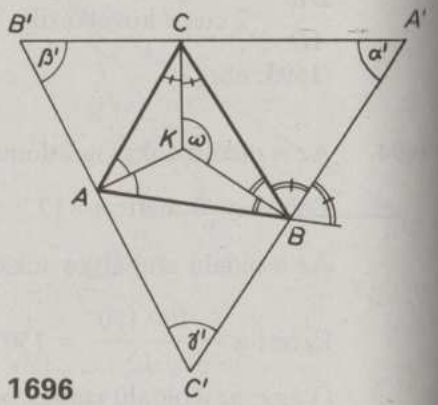
$\gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Megjegyzés: $\alpha' + \beta' + \gamma' =$

$= 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + 90° -$

$- \frac{\gamma}{2} = 180°$.

(**1696.** ábra).



1696

1697. A megoldást paraméteresen lásd az **1698**-as feladatnál. Ha $\alpha = 66°$, $\beta = 72°$, akkor $\gamma = 42°$, így a hatszög két-két szemköztes szöge: $90° + 33° = 123°$, $90° + 36° = 126°$, $90° + 21° = 111°$.
(*Megjegyzés:* teljesül a szögösszegre az $(n-2)180° = 720°$.)

1698. A szögfelezők metszéspontja: K. K-nak a BC oldal felezőpontjára, F-re vonatkozó tükörképe A'. A középpontos tükrözés miatt $KBA'C$ paralelogramma.
Ezért a megfelelő háromszögek belső szögösszege alapján:

$$\alpha' = \omega_a = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Ugyanúgy: $\beta' = \omega_b = 90° + \frac{\beta}{2}$,

$$\gamma' = \omega_c = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

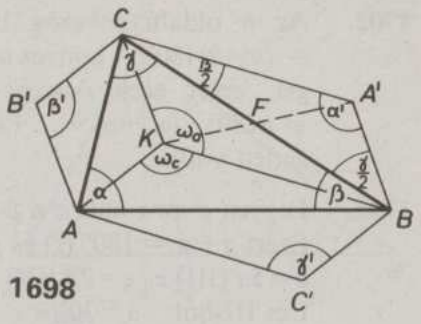
A további szögek az ABC háromszög belső szögfelezői és megfelelő oldalai által bezárt szögek váltószögeként adódik. Így

$$B'AC' \sphericalangle = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2},$$

$$C'BA' \sphericalangle = \beta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90° + \frac{\beta}{2},$$

$$A'CB' \sphericalangle = \gamma + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

(**1698.** ábra).



1698

1699. Jelöljük φ-vel a két belső szögfelező hajlásszögét. φ az ABF háromszög külső szöge, ezért $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{85°}{2} = 47{,}5°$.

(**1699.** ábra).

1700. Az AOB háromszögben $AOB \sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \frac{180° - \gamma}{2} =$

$= 90° + \frac{\gamma}{2} = 126°$.

(**1700.** ábra).

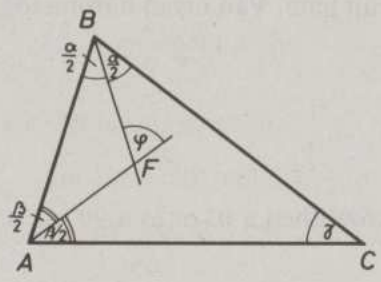
1701. Az AOB háromszögben (**1700.** ábra).

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 145° = 180°$,

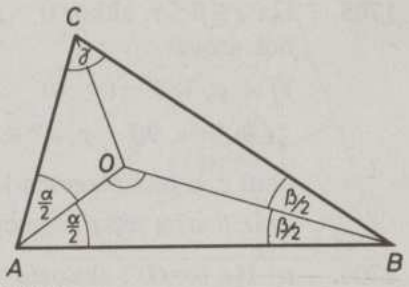
$\alpha + \beta = 180° - \gamma = 70°$,

$\gamma = 110° > 90°$, tehát az

ABC háromszög tompaszögű.



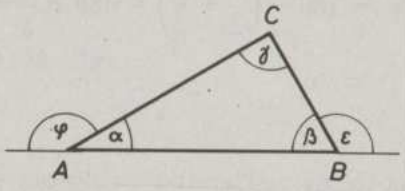
1699



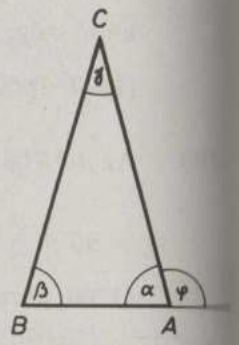
1700

1702. Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = (n-2)180°$. A konvex sokszög külső szögei a belső szögek mellékszögei, ezért ezek összege $(180°-\alpha_1)+(180°-\alpha_2)+\ldots+(180°-\alpha_n) = n180°-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) = n180°-(n-2)180° = 360°$, tehát független n-től.

1703. Legyen φ az α-nak, ε a β-nak mellékszöge.
Ezért $\alpha+\varphi = 180°$ (I) és $\beta+\varepsilon = 180°$ (II). A feltételek szerint
$\varphi = 5\alpha$ (III) és $\varepsilon = 2\beta$ (IV).
I és III-ból $\alpha = 30°$,
II és IV-ből $\beta = 60°$.
Minthogy $\alpha+\beta = 90°$, a harmadik szög $\gamma = 90°$, tehát a háromszög derékszögű.
(**1703.** ábra).



1703



1704

1704. A feltételből adódik $\alpha = \beta$ és $\varphi = 3{,}5\gamma$, ahol φ az α mellékszöge. Másrészt $\varphi = \gamma+\beta$, mert φ az ABC háromszög külső szöge. Az ABC háromszög belső szögeinek összege $180° = 2\beta+\gamma = 5\gamma+\gamma = 6\gamma$. Innen $\gamma = 30°$, $\alpha = \beta = 75°$.
(**1704.** ábra).

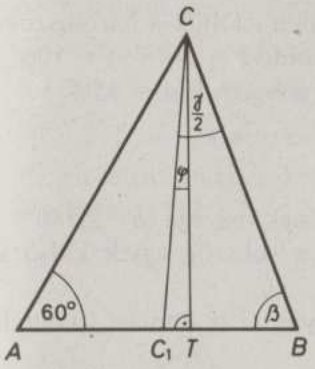
1705. Ha $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, akkor $0° < \beta < 90°$ áll fenn. Van olyan háromszög, amelynek szögei

1) ε, φ, $180°-(\varepsilon+\varphi)$,

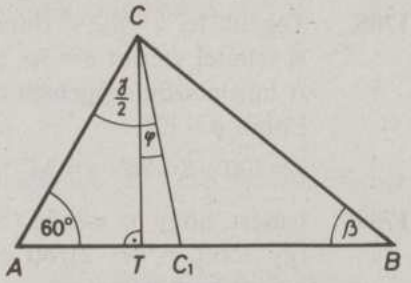
2) $90°-\varepsilon$, $90°-\varphi$, $\varepsilon+\varphi$,

ahol ε, φ tetszőlegesen kicsi,
azaz β szög tetszőlegesen megközelítheti a 0°-ot és a 90°-ot is.

1706. *a)* Ha $\beta = 60°$, akkor $\varphi = 0°$.
b) Ha $\beta > 60°$: az ábra jelöléseit alkalmazva az ATC, ill. BTC derékszögű háromszögben $\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)+60° = 90°$, ill. $\left(\frac{\gamma}{2}-\varphi\right)+\beta = 90°$. A két egyenlet különbsége: $2\varphi+60°-\beta = 0°$, azaz: $\varphi = \frac{\beta}{2}-30°$. (**1706.***b)* ábra).



1706b



1706c

c) Ha $\beta < 60°$: a BTC, ill. ATC derékszögű háromszögben $\left(\frac{\gamma}{2}+\varphi\right)+\beta = 90°$, ill. $60°+\left(\frac{\gamma}{2}-\varphi\right) = 90°$. A két egyenlet különbsége $2\varphi+\beta-60° = 0°$, azaz $\varphi = 30°-\frac{\beta}{2}$. (**1706.***c)* ábra).

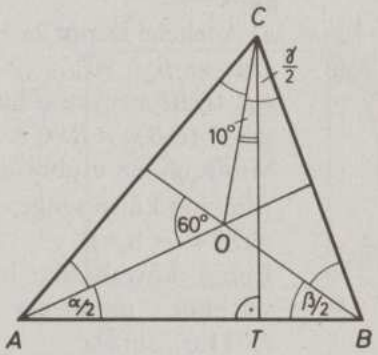
Összefoglalva a 3 esetet: $\varphi = \left|30°-\frac{\beta}{2}\right|$.

1707. Az AOB háromszög egyik külső szöge 60°. Ezért

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} = 60°$, így $\gamma = 60°$.

A CTB háromszögben

$\frac{\gamma}{2}-10°+\beta = 90°$, ebből $\beta = 70°$ s végül $\alpha = 50°$ adódik (**1707.** ábra).



1707

1708. Tegyük fel $\alpha > \beta \geqq \gamma$. Ennek megfelelően jelöljük a háromszög szögeit.
A feltétel szerint $\beta = 3\varphi$, $\gamma = 2\varphi$, valamint $\alpha = 2(\beta+\gamma) = 10\varphi$.
A háromszög szögeinek összege: $\alpha+\beta+\gamma = 15\varphi = 180°$.
Ebből $\varphi = 12°$,

$\alpha = 120°$, $\beta = 36°$, $\gamma = 24°$.

1709. Ismert, hogy az n-szög (belső) szögeinek összege $(n-2)180°$.
Így $1560° = (n-2)180° + \alpha$, ahol α a sokszög egyik külső szöge és nyilván $\alpha < 180°$.
Minthogy $1560° = 8 \cdot 180° + 120°$, így $n-2 = 8$ miatt 10 oldalú a sokszög.

1710. A feltétel szerint APB, BPC, CPA háromszögek egyenlő szárúak, azaz P az ABC háromszög köré írható körének középpontja. A kerületi és középponti szögek összefüggése alapján

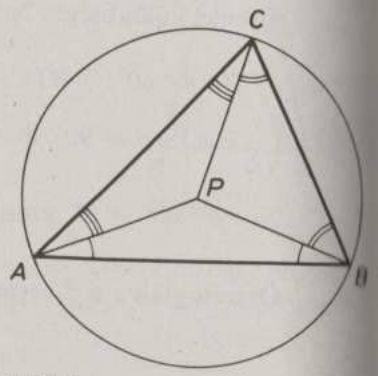
$APB\sphericalangle = 2\gamma$, amiből $PAB\sphericalangle = 90° - \gamma = \alpha + \beta - 90°$,

$BPC\sphericalangle = 2\alpha$, $\quad PBC\sphericalangle = 90° - \alpha$,

$CPA\sphericalangle = 2\beta$, $\quad PCA\sphericalangle = 90° - \beta$.

(**1710.** ábra).

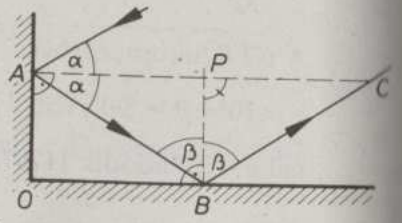
Megjegyzés: a feladat a kerületi-középponti szögek összefüggése nélkül is megoldható.



1710

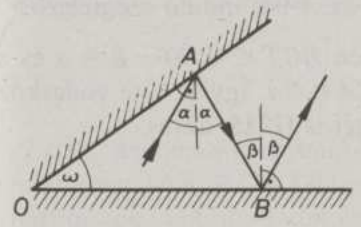
1711. Ismert, hogy a beesési és visszaverődési szög egyenlő. Az először beérkező és másodjára visszaverődő sugarak lehetnek *a)* ellentétes irányúak, vagy *b)* egyező irányúak.

a) A feltétel szerint $2\alpha + 2\beta = 180°$, azaz $\alpha + \beta = 90°$.
Az $AOBP$ négyszög húrnégyszög, ezért $AOB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$.
Minthogy ez utóbbi az ABP háromszög külső szöge,
$AOB\sphericalangle = \alpha + \beta$.
Ebből következik, hogy a két síktükör merőleges egymásra (**1711.***a)* ábra).

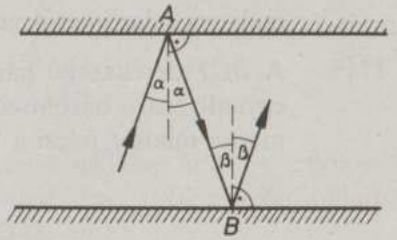


1711a

b) A feltétel szerint az ábrán váltószögek szerepelnek, így
$2\alpha = 2\beta$, amiből $\alpha = \beta$.
Az AOB háromszögnek B-nél lévő külső szöge:
$90° + \beta = \omega + 90° + \alpha$, ezért $\omega = 0°$.
Ez azt jelenti, hogy a két tükör párhuzamos (az AOB háromszög nem jön létre) (**1711.** *b), c)* ábra).

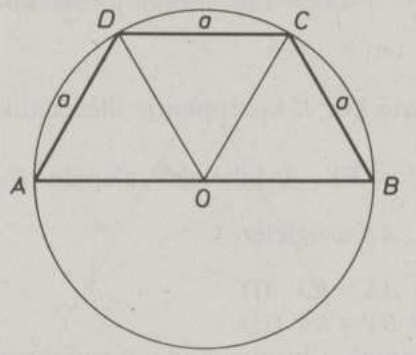


1711b

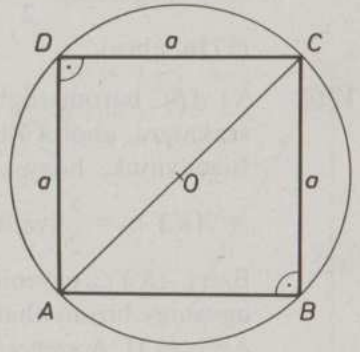


1711c

1712. Ha a trapéz két csúcsát összekötő egyenes áthalad a köréírt kör középpontján, akkor ez vagy *a)* az AB oldal ($AB > CD$), vagy *b)* pl. az AC átló egyenese lehet.
a) $AD = DC = CB$ miatt $AOD\sphericalangle = DOC\sphericalangle = COB\sphericalangle = 60°$.
Így a trapéz szögei 60° és 120° (**1712.***a)* ábra).
b) Thalesz tétele szerint $ADC\sphericalangle = 90°$, $ABC\sphericalangle = 90°$, ezért
$\alpha = 90°$, tehát $ABCD$ négyszög téglalap, sőt $AD = DC$ miatt négyzet (**1712.***b)* ábra).
A feladatban szereplő trapéz vagy olyan szimmetrikus trapéz, melynek hegyesszöge 60°, vagy négyzet.



1712a

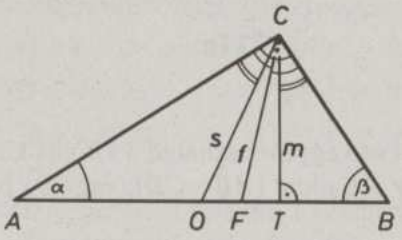


1712b

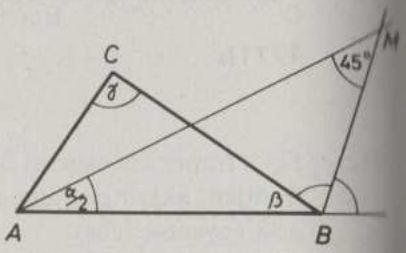
1713. Jelöljük az $ABCD$ négyszög szögeit rendre α, β, γ és δ-val. A feltétel szerint $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.
Minthogy a négyszög belső szögeinek összege 360°, így $\alpha+\beta=\gamma+\delta=$ $=180°$. Ebből $AD\|BC$ következik, tehát ennek a négyszögnek van két párhuzamos oldala, azaz trapéz.

1714. Az AB oldal kétszer akkora, mint a vele párhuzamos középvonal. Ezért a feltétel szerint $AB=AC$, a háromszög egyenlő szárú, alapja BC, melynek felezőmerőlegese éppen az A-ból induló szögfelező.

1715. A BCT derékszögű háromszögben $BCT\sphericalangle=90°-\beta=\alpha$ és az AOC egyenlő szárú háromszögben $OCA\sphericalangle=\alpha$. Így az f-re vonatkozó szimmetria miatt f felezi a TCO szöget is (**1715.** ábra).



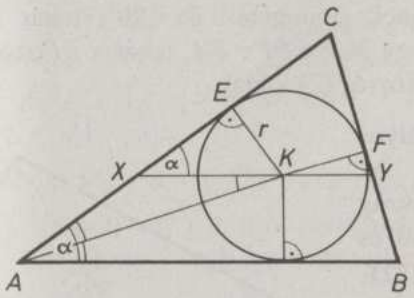
1715



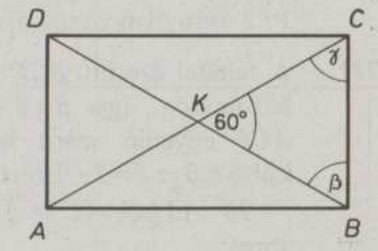
1716

1716. Mivel BM külső szögfelező, ezért $CBM\sphericalangle=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Az ABM háromszög szögösszege $\dfrac{\alpha}{2}+\beta+\dfrac{\alpha+\gamma}{2}+45°=180°$. Ebből $\gamma=90°$ következik (**1716.** ábra).

1717. Az ABC háromszögbe beírható kör K középpontja illeszkedik az XY szakaszra, ahol $XY\|AB$.
Bizonyítjuk, hogy $AX+BY=XY$. A feltételek alapján $KAB\sphericalangle=$ $=AKX\sphericalangle=\dfrac{\alpha}{2}$ (váltószögek, AK szögfelező).
Ezért $AKX\triangle$ egyenlő szárú: $AX=KX$ (I)
ugyanígy bizonyítható, hogy $BY=KY$ (II).
Az I. és II. összegezéséből kapjuk a bizonyítandó összefüggést (**1717.** ábra).



1717

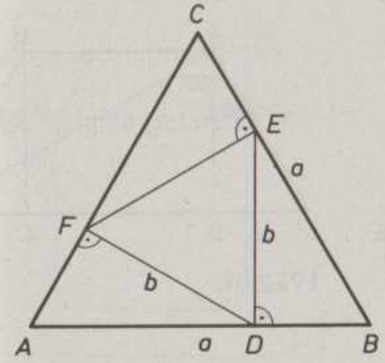


1718

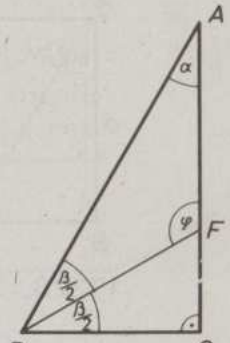
1718. A BKC háromszög egyenlő szárú, mivel a téglalap átlói egyenlők és felezik egymást. $KC=KB$, ezért $\beta=\gamma=60°$, azaz BKC egyenlő oldalú háromszög. Ebből adódik az állítás (**1718.** ábra).

1719. BDE háromszögben $b=BD\sqrt{3}$ és $BD=\dfrac{1}{2}BE$. Másrészt a derékszögű háromszögek egybevágósága miatt $BD=CE=AF$, illetve $AD=BE=$ $=CF$. Ebből $BD=\dfrac{1}{3}AB=\dfrac{1}{3}a$, így $b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ (**1719.** ábra).

1720. A feltétel szerint BCF és ABF háromszögek egyike egyenlő szárú. $\dfrac{\beta}{2}<45°$ miatt ez csak az ABF háromszög lehet. BCF háromszög külső szöge $\varphi=90°+\dfrac{\beta}{2}$, így az egyenlő oldalak $AF=BF$, illetve az egyenlő szögek $\alpha=\dfrac{\beta}{2}$ (**1720.** ábra).



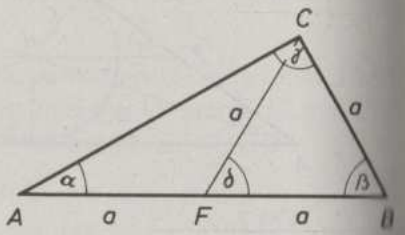
1719



1720

Az ABC háromszög szögeinek összegéből $3\alpha = 90°$, tehát $\alpha = 30°$. A BCF háromszögre igaz, hogy $2CF = BF = FA$, tehát a BF szögfelező 1 : 2 arányban osztja a szemköztes CA oldalt.

1721. A feltétel szerint BCF szabályos háromszög, így $\beta = \delta = 60°$. Az ACF egyenlő szárú háromszög külső szöge $\delta = 2\alpha$. Ezért $\alpha = 30°$ és $\gamma = 90°$. Ebből $AC = a\sqrt{3}$ (**1721.** ábra).



1721

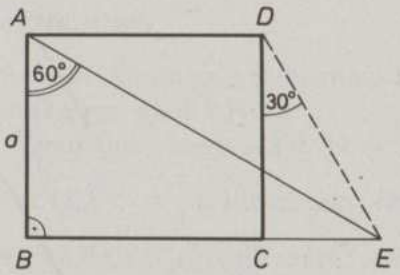
1722. I. *megoldás.* Az ABE derékszögű háromszögben $EB = a\sqrt{3}$, a DCE derékszögű háromszögben $DC = a = CE\sqrt{3}$.

Ezek segítségével EB szakasz kétféleképpen is kifejezhető:

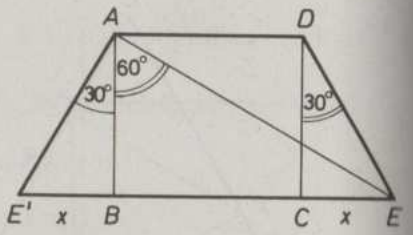
$EB = a\sqrt{3} = 3CE$,
$EB = 5 + CE$.

Így $CE = 2{,}5$ cm és $EB = 7{,}5$ cm (**1722**/I. ábra).

II. *megoldás.* ED-t tükrözve DC-re és $\overrightarrow{DA}$-val eltolva kapjuk az EAE' derékszögű háromszöget. Erre alkalmazva a magasságtételt $AB^2 = (5+x)x$ és ismerve, hogy ABE' háromszögben $AB = x\sqrt{3}$, x értéke kiszámítható. $x = 2{,}5$ cm. $EB = 7{,}5$ cm (**1722**/II. ábra).



1722/I.

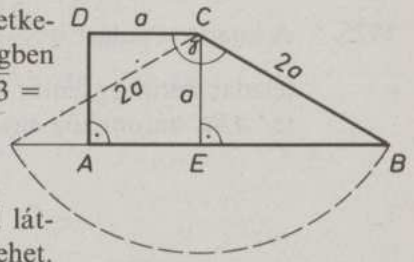


1722/II.

1723. $CE \| AD$ és $CE = AD = a$. Ebből következik, hogy az ECB háromszögben $EB = a\sqrt{3}$. $AB = AE + EB = a + a\sqrt{3} = a(1+\sqrt{3})$.

$\gamma = 90° + 60° = 150°$ (**1723.** ábra).

Megjegyzés: a trapéz szerkesztéséből látszik, hogy a csak a rövidebbik alap lehet.



1723

1724. Kétféleképpen helyezkedhet el A és B az S síkhoz képest.

a) Ha A-t és B-t az S sík nem választja szét:
$CB \| A'B'$ és $CB = A'B' = a$, $BB' \| CA'$ és $BB' = CA' = a$.
Az ABC derékszögű háromszögre:

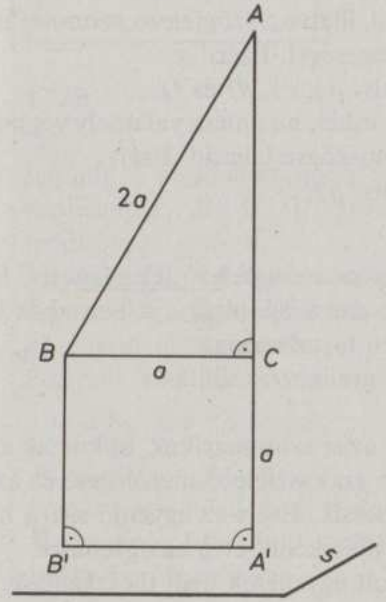
$AC = BC\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

$AA' = AC + CA' = a(1+\sqrt{3})$ (**1724.***a)* ábra).

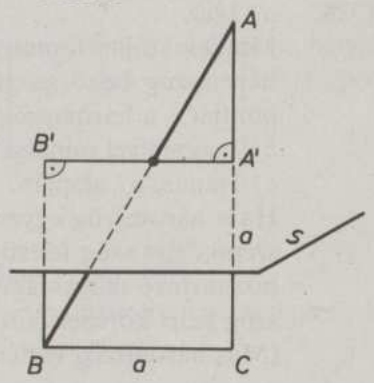
b) Ha A-t és B-t az S sík szétválasztja, a gondolatmenet az előbbivel azonos, csak az utolsó részben van eltérés:

$AA' = AC - A'C = a(\sqrt{3}-1)$ (**1724.***b)* ábra).

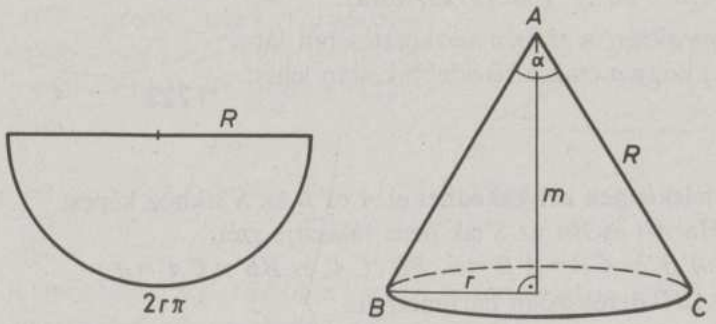
1724a



1724b



1725. A kiterített palást íve $\frac{2R\pi}{2} = R\pi$ és a kúp alapkörének kerülete $2r\pi$ a feladat szerint egyenlő: $R\pi = 2r\pi$, így $R = 2r$. Ezért a kúp tengelymetszete: ABC háromszög egyenlő oldalú, azaz $\alpha = 60°$ (**1725.** ábra).



1725

1726. A megoldás elvét lásd az **1725**-ös feladat megoldásánál. Ebből adódik: a kúp alapkörének kerülete $2r\pi = 10\pi$, így $r = 5$ cm.
ABC háromszög ezek szerint szabályos, ezért $m = 5\sqrt{3}$ cm.

1727. A háromszög köré írt kör K középpontja az oldalfelező-merőlegesek metszéspontja. K valamelyik súlyvonalra, illetve valamelyik szögfelezőre csak akkor esik, ha a súlyvonal, illetve a szögfelező azonos a háromszög valamely oldalfelező-merőlegesével. Ezért
igaz: *b), e)*; hamis: *a), c), d)* és *f)*.
A K pont középvonalra csak úgy eshet, ha annak valamely végpontjára esik. Ez csak a derékszögű háromszögre teljesül. Ezért
igaz: *h)*; hamis: *g), i)*.

1728. *a)* Igaz.
Minden szögtartomány tartalmazza a szögfelező félegyenesét. Ezért a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontját – a beírt kör középpontját – a háromszög belsejében tartalmazza.
b) Igaz, mivel minden háromszögre igaz az állítás.
c) Hamis, *a)* alapján.
Ha a háromszög egyenlő szárú, azaz szimmetrikus, akkor az alappal szemköztes szög felezője, az alap szakaszfelező-merőlegese és az alaphoz tartozó magasságvonal egybeesik. Ezért az egyenlő szárú háromszög beírt körének középpontja illeszkedik erre az egyenesre.
(Más háromszög esetén a felsorolt egyenesek nem illeszkedőek.)

Ezek alapján:
d) Hamis. *e)* Igaz. *f)* Hamis. *g)* Hamis. *h)* Igaz. *i)* Hamis.

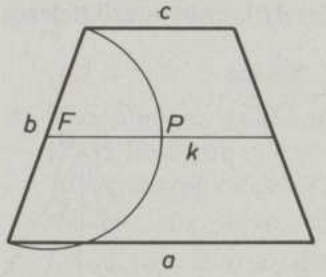
1729. *a)* A feltétel szerint

$b = k$, és ismert, hogy $k = \frac{a+c}{2}$.

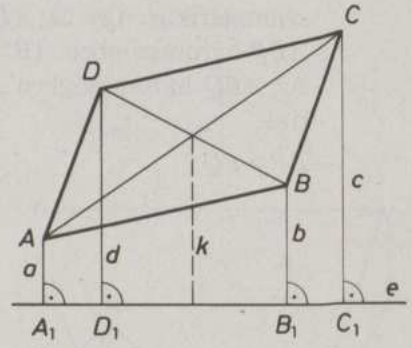
Ezért a trapéz kerülete:
$K = a + 2b + c = 4k$.

b) A Thalész-kör középpontja F, sugara $\frac{b}{2} = \frac{k}{2}$.

A Thalész-kör a középvonalat P-ben metszi. $FP = \frac{k}{2}$ miatt P a középvonal felezőpontja (**1729.** ábra).



1729



1730

1730. Jelöljük a paralelogramma csúcsainak az e egyenesre eső merőleges vetületeit A_1, B_1, C_1, D_1-gyel, a csúcsok e egyenestől mért távolságait rendre a, b, c, d-vel.
Vizsgáljuk az AA_1C_1C és a DD_1B_1B (esetleg elfajuló) trapézokat. Mivel a paralelogramma átlói felezve metszik egymást, ezért a két trapéz középvonala egybeesik.
Fejezzük ki a középvonalat a vele párhuzamos oldalakkal!

$$k = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2},$$

azaz $a + c = b + d$, amit bizonyítani kellett (**1730.** ábra).
Megjegyzés: Elfajuló trapézt kapunk, ha a paralelogramma valamelyik átlója merőleges e-re.

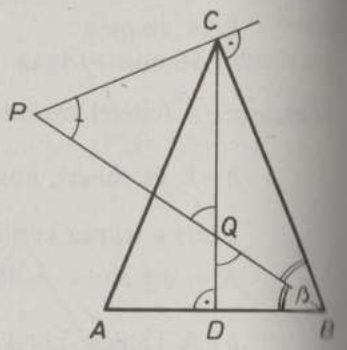
1731. A PBC derékszögű háromszögben

$$CPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

A DQB derékszögű háromszögben

$$DQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

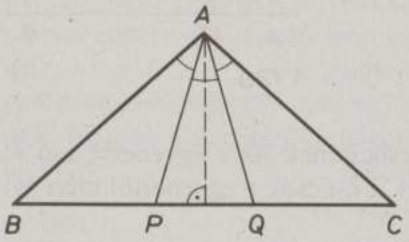
Felhasználva, hogy $PQC\sphericalangle = DQB\sphericalangle$ csúcsszögek, $CPQ\sphericalangle = PQC\sphericalangle$ adódik, tehát a PQC háromszög egyenlő szárú (**1731.** ábra).



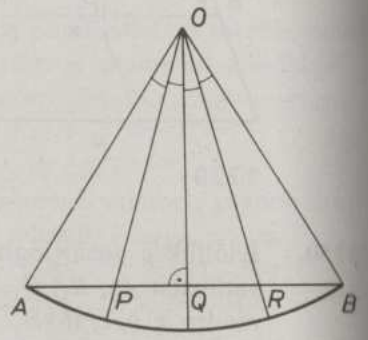
1731

1732. Mivel az ABC háromszög szimmetrikus, ezért az APQ háromszög is szimmetrikus. Így az $APQ\sphericalangle$ hegyesszög, $APB\sphericalangle$ tompaszög. Ezért ABP háromszögben $AB > AP$ (**1732.** ábra).
Az ABQ háromszögben $AB > AQ$ $(= AP)$, ezért a szögfelezőtétel szerint:

$BP > PQ$.



1732



1733

1733. A feladatban szereplő sugarak az AOB szöget negyedelik, de az AB húrt nem negyedelik. Jelöljük a szögnegyedelőknek az AB húrral való metszéspontjait P, Q, R-rel. Ekkor a szimmetria miatt $AP = RB$ és $PQ = QR$.
Mivel $OQ < OA$, ezért az $AOQ\sphericalangle$ szögfelezője az AQ oldalt Q-hoz közelebb metszi. (Lásd a szögfelezőtételt.) (**1733.** ábra).

1734. Két különböző típusú négyszög állítható össze a 2-2 szakaszból:
a) Ha az egymás mellett fekvő oldalak különbözőek (1, 2, 1, 2 hosszúságúak), akkor a négyszög *paralelogramma* lesz, mivel szemköztes oldalai egyenlőek. A paralelogramma szögei nem meghatározottak, így speciális esetként adódik egy téglalap is.
b) Ha a négyszög két-két szomszédos oldala egyenlő, akkor ez deltoid. (Ebben az esetben is végtelen sok négyszöget kapunk.)

1735. A szabályos ötszög tengelyesen szimmetrikus, így a keletkezett négyszög is tengelyesen szimmetrikus lesz. Mivel két oldala párhuzamos, ezért a négyszög szimmetrikus trapéz.
A szabályos ötszög szögei 108°-osak, így a trapéz szögei 72°, 72°, 108°, 108°.
A trapéz ismeretlen oldalát, $AD = x$-et, többféleképpen is meghatározhatjuk (I, II):

I. Az ATE derékszögű háromszögből (**1735**/I. ábra)

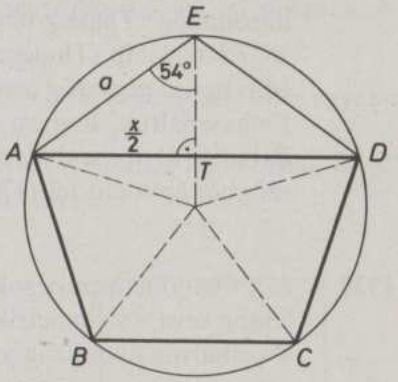
$$\frac{x}{2} = a \sin 54°,$$

$$AD = x = 2a \sin 54°.$$

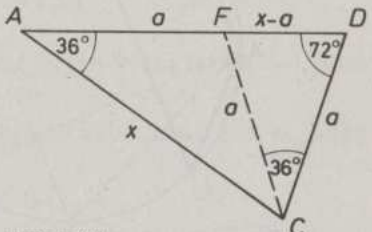
II. Vizsgáljuk az ACD háromszöget! (**1735**/II. ábra.)
A háromszög szögei: 72°, 72°, 36°, oldalai: x, x, a.

A C csúcsnál levő szög felezője az AD oldalt F pontban metszi.
A szögeket figyelembe véve megállapítható, hogy az FDC háromszög egyenlő szárú $(FC = a)$ és hasonló a DCA háromszöghöz. Másrészt az AFC háromszög is egyenlő szárú, $AF = FC = a$.
Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{x-a}{a} = \frac{a}{x}.$$



1735/I.



1735/II.

Az egyenlet rendezésével x-re

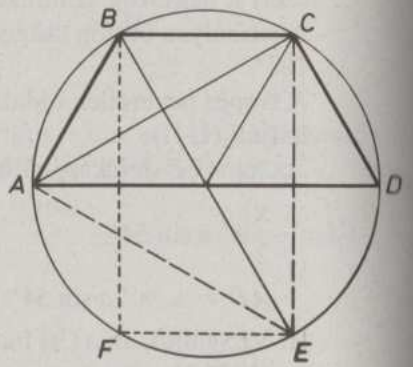
$$x = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

adódik.

Megjegyzés: A fenti levezetésekből sin 54° pontos értékét is megkaptuk:

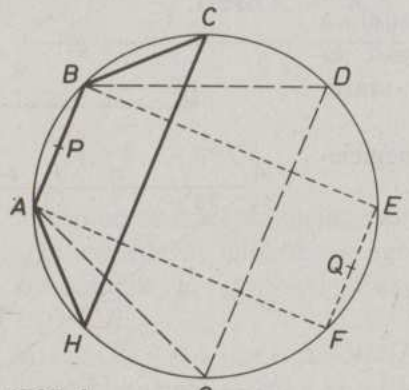
$$\sin 54° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

1736. A lehetséges esetek:
ABCD szimmetrikus trapéz szögei 60°, 60°, 120°, 120° (3 db szabályos háromszögből áll).
ABCE deltoid szögei 90°, 60°, 90°, 120° (2 db 30°–60°-os derékszögű háromszög; Thalész-tétel).
BCEF téglalap (Thalész-tétel).
Más típusú négyszög nem jön létre.
Felhasználtuk, hogy a szabályos hatszög 6 db szabályos háromszögből építhető fel (**1736.** ábra).

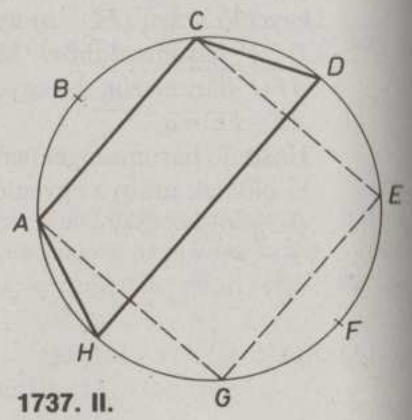


1736

1737. A szóba jöhető trapézok – a szabályos nyolcszög tulajdonságait figyelembe véve – szimmetrikusak. A trapéz szimmetriatengelye illeszkedik a szabályos nyolcszög valamelyik szimmetriatengelyére.



1737. I.

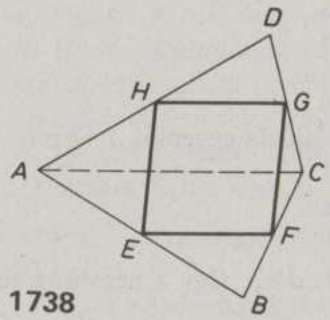


1737. II.

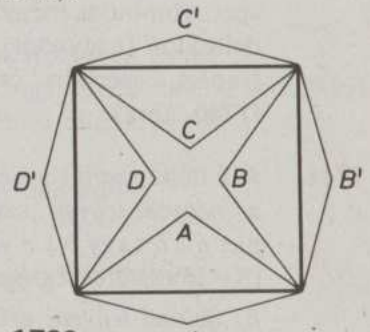
a) I. A közös szimmetriatengely a szabályos nyolcszög szemköztes oldalfelező pontjaira (P, Q) illeszkedő egyenes. A megfelelő trapéz nem hosszabb alapjának végpontjai: A, B közvetlen szomszédos csúcspontok. A másik alap lehet: CH, DG, FE (téglalap) (**1737. I.** ábra).
II. A közös szimmetriatengely a szabályos nyolcszög szemköztes csúcspontjaira (B, F) illeszkedő egyenes. A megfelelő trapézok nem hosszabb alapjának végpontjai: A, C, második szomszédos csúcspontok. A másik alap lehet: DH vagy EG (négyzet) (**1737. II.** ábra).
Több eset nincs, mert a 3., illetve 4. szomszédos csúcspontokra épülő trapézok az *I.* vagy *II.* esetben már szerepeltek.

b) Az $ABCH$ trapéz szögei: 45°; 45°; 135°; 135°; az $ABDG$ és az $ACDH$ trapéz szögei: 67,5°; 67,5°; 112,5°; 112,5°; az $ABEF$ és az $ACEG$ trapéz minden szöge 90°.

1738. A H, E, F, G oldalfelező pontok, ezért EF az ABC, GH a CDA háromszög AC oldalával párhuzamos középvonala. Így $EF \| AC \| GH$ és $EF = GH = \frac{1}{2} AC$. Ezért minden négyszög (térbeli is) oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg.
A feltétel szerint $EFGH$ rombusz, ezért az $ABCD$ négyszög átlói egyenlőek (a rombusz oldalának kétszeresével).
Tehát ha egy négyszög oldalfelező pontjai rombuszt határoznak meg, akkor a négyszög átlói egyenlők (**1738.** ábra).



1738

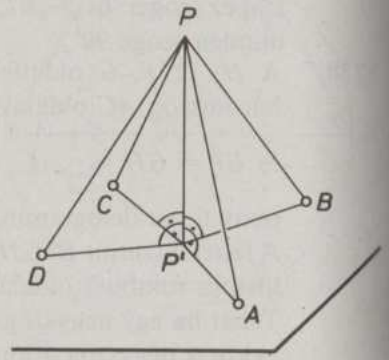


1739

1739. Az adott négyzet belsejében lévő és a négyzeten kívül fekvő 4-4 pont négyzetet határoz meg.
Négyszöget kaphatunk, ha a 8 pont közül úgy választunk ki 4-et, hogy a külső négyzet csúcsaiból rendre
a) 4-et, *b)* 3-at, *c)* 2-t, *d)* 1-et, illetve *e)* 0-t,
s a többit a belső négyzet csúcspontjai közül választjuk (**1739.** ábra).

Ennek megfelelően:
a) $A'B'C'D'$ négyzet.
b) $A'B'C'B$, $A'B'C'D$ deltoidok. Az A, illetve a C illeszkedik $A'C'$ egyenesre, így ebből nem kapunk négyszöget.
c) Ha a külső négyzet két *szomszédos* csúcspontját választjuk ki: $A'B'AB$, $A'B'CD$ szimmetrikus trapézok.
($A'B'BC$ nem speciális konkáv négyszög.)
Ha a nagy négyzet két *szemköztes* csúcspontját választjuk ki: $A'BC'D$ rombusz.
d) $ABCB'$, $ABCD'$ deltoidok. (A'. illetve C' nem felelnek meg, lásd a *b)* esetet.)
e) $ABCD$ négyzet.

1740. Legyen P-nek az $ABCD$ síkjára eső merőleges vetülete P'. A feltételek miatt a PAP', PBP', PCP' és PDP' derékszögű háromszögek egybevágóak (2-2 oldal és a nagyobbikkal szemköztes szög egyenlő), így $P'A=P'B=P'C=P'D$, tehát A, B, C és D egy P' középpontú kör pontjai. Tehát $ABCD$ húrnégyszög. Alkothatnak négyzetet, téglalapot, spec. rombuszt (négyzetet), speciális deltoidot (négyzetet), szimmetrikus trapézt, speciális érintőnégyszöget (**1740.** ábra).



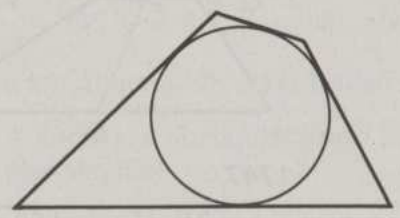
1740

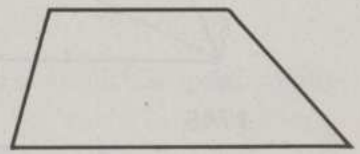
1741. A feltétel szerint a négyszög három oldala egyenlő: $a=b=c$.
α) négyzet legyen: szükséges feltétel
pl.: $a\perp b$ vagy $b\perp c$ vagy $a=d$ legyen.
(Kettő együtt elégséges feltétel is.)
β) deltoid legyen: szükséges feltétel: $d=a$. (Így a négyszög rombusz, azaz speciális deltoid lesz.)
Ez egyúttal elégséges feltétel is.
γ) érintőnégyszög legyen 1. *β)* pont.

1742. A feltétel szerint a négyszög két szomszédos oldala egyenlő: $a=b$ és merőleges egymásra: $a\perp b$.
α) négyzet legyen: szükséges feltétel pl. $c\parallel a$ vagy $c\perp b$.

Ezek szükséges, de nem elégséges feltételek. Elégséges feltétel pl. $c\perp b$ és $c=b$.
β) trapéz legyen: szükséges feltétel pl. $a\parallel c$.
Ez egyúttal elégséges feltétel is.
γ) húrnégyszög legyen: szükséges (és egyben elégséges) feltétel $c\perp d$.

1743. *a)* Igaz, mert a rombuszra teljesül, hogy olyan konvex négyszög, amelyben két-két szemköztes oldal összege egyenlő.
b) Hamis. (Például: **1743.***b)* ábra).
c) Igaz. Mivel a téglalapnak van két párhuzamos oldala, ezért trapéz.
d) Igaz. A szimmetrikus trapéz szemköztes szögeinek összege 180°.


1743b

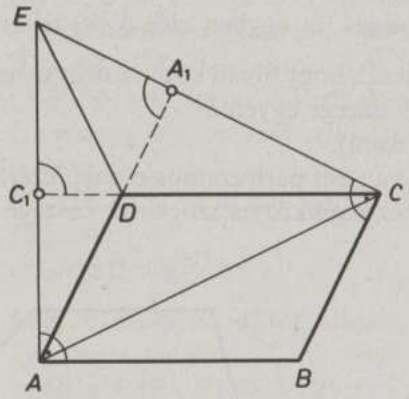

1745d

1744. *a)* Hamis. Ha a deltoid egymással egyenlő szögei nem 90°-osak, akkor nem húrnégyszög.
b) Igaz. A *konvex* deltoid érintőnégyszög, hiszen két-két szemköztes oldalának összege egyenlő.
c) Hamis. A rombusz olyan deltoid, amely egyben trapéz is.
d) Hamis. Deltoidnak nevezzük azt a négyszöget, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő. Tehát a deltoid oldalai rendre a, a, b, b, ahol a és b nem feltétlenül egyenlőek.
e) Igaz. A négyzet olyan téglalap, amely deltoid is.
f) Hamis. Lehet konkáv is.

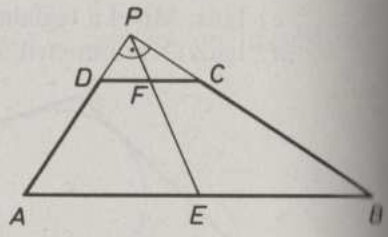
1745. *a)* Igaz, mivel *minden* deltoid tengelyesen szimmetrikus.
b) Igaz.
c) Igaz: a szimmetrikus trapéz.
d) Hamis. (Pl.: **1745.***d)* ábra).
e) Igaz. Pl.: a négyzet, a konvex deltoidok stb.
f) Hamis. (Lásd az **1743.***b)* ábráját!)

1746. Jelöljük az AD és CE egyenesek metszéspontját A_1-gyel, CD és AE egyenesek metszéspontját C_1-gyel!
$AA_1\parallel BC$ és $BC\perp CE$ miatt $AA_1\perp CE$, valamint
$CC_1\parallel BA$ és $BA\perp AE$ miatt $CC_1\perp AE$.

Ezért AA_1 és CC_1 az ACE háromszög két magasságvonala, D metszéspontjuk a magasságpont. Így az ED egyenes az ACE háromszög AC oldalához tartozó magasságvonala, tehát $ED \perp AC$ (**1746.** ábra).



1746



1747

1747. Mivel E az AB szakasz felezőpontja, ezért a PE súlyvonal felezi a CD alapot is (F-ben). Így $EF = EP - FP$.
Az ABP és DCP derékszögű háromszögekben

$$EP = \frac{1}{2}AB \text{ és } FP = \frac{1}{2}CD.$$

Tehát $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ (**1747.** ábra).

1748. A kör íveinek hossza (i), a hozzájuk tartozó középponti (ω) és kerületi (α) szögek közötti összefüggés alapján:

$i_1 : i_2 = \omega_1 : \omega_2 = \alpha_1 : \alpha_2$,

$16 : 10 = \alpha_1 : 35°$.

Innen

$\alpha_1 = 56°$.

1749. Mivel a megadott szögek összege 360°, ezért a kör középpontja a háromszög belsejében van.
Az $A\overset{\frown}{B}$ ívhez tartozó $ACB\sphericalangle$ kerületi szög fele az AB íven nyugvó $AOB\sphericalangle$ középponti szögnek. Így a háromszög szögei a megadott szögek $\frac{1}{2}$-szeresei:

50°, 55°, 75°.

1750. Az ívek adott arányából következik, hogy a háromszög hegyesszögű. Az ABC háromszög oldalai a köré írt kör középpontjából 2α, 2β, 2γ szögben látszódnak. Az $\alpha = 3\delta$, $\beta = 4\delta$, $\gamma = 5\delta$ és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$-ból $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 75°$.

1751. A megoldás gondolatmenetét lásd az **1750**-esnél. Itt α, $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$ szerepel. A háromszög szögei: 30°, 60° és 90°, tehát a feltételeknek eleget tevő háromszögek derékszögűek.

1752. A középponti szögek arányát figyelembe véve $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 360°$, amiből $\alpha = 60°$ (lásd az **1750**-es megoldását is). A háromszög szögei $\frac{\alpha}{2} = 30°$, $\frac{2\alpha}{2} = 60°$, $\frac{3\alpha}{2} = 90°$. A kapott derékszögű háromszög átfogója a kör átmérője $2r$, a két befogó r és $r\sqrt{3}$.

1753. A körívek, a hozzájuk tartozó középponti és kerületi szögek összefüggése alapján

$7 : 11 = \omega : (2\pi - \omega) = \alpha : (\pi - \alpha)$. Eszerint $\alpha = \frac{7\pi}{18}$ rad.

1754. Az összetartozó kerületi és középponti szögek α és ω. Ezért $2\alpha = \omega$.
A feltétel szerint $\omega + \alpha = \frac{11\pi}{6}$. Ezekből: $\alpha = \frac{11\pi}{18}$ rad.

1755. A keresett szögek δ és γ.

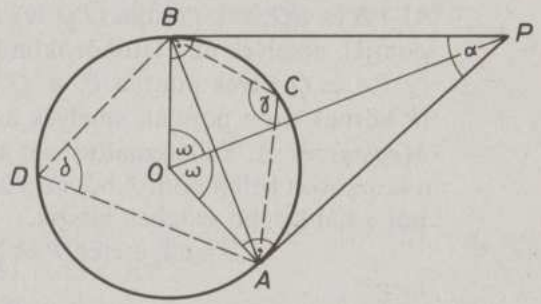
Az AOP derékszögű háromszögből $\omega = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

δ és 2ω összetartozó kerületi és középponti szögek, ezért

$\delta = \omega = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

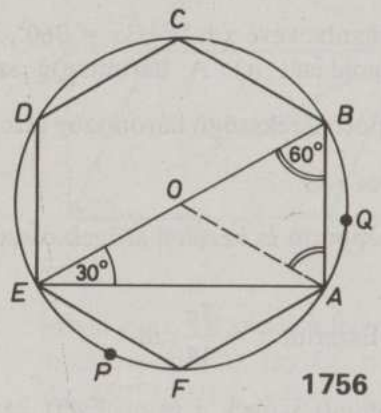
Az $ACBD$ húrnégyszög lévén $\gamma = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

(**1755.** ábra.)

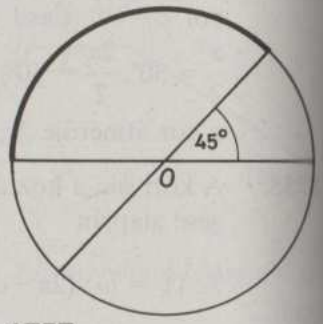


1755

1756. Az $AOB\sphericalangle = 60°$, ezért – a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján – a kisebbik $\overset{\frown}{AB}$-hez tartozó kerületi szög: $BEA\sphericalangle = 30°$, a kiegészítő ívhez tartozó szög 150°-os (pl. $APB\sphericalangle = 30°$, $AQB\sphericalangle = 150°$). Ugyanígy az AC ívhez tartozó középponti és kerületi szögeket figyelembe véve pl. $APC\sphericalangle = 60°$, $AQC\sphericalangle = 120°$. A legnagyobb átló egyúttal a kör átmérője, így ez a körvonal szóba jöhető pontjaiból 90°-ban látszik (**1756.** ábra).



1756

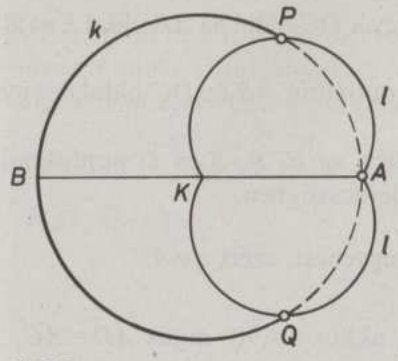


1757

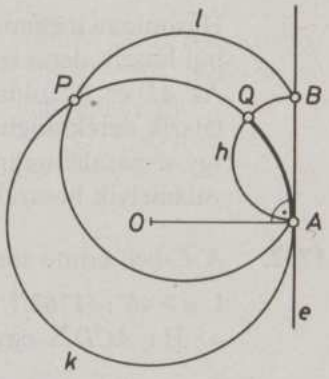
1757. A nagyobbik ívhez tartozó középponti szög $180° - 45° = 135°$. Ezért a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján a keresett szög $\frac{135°}{2} = 67{,}5°$ (**1757.** ábra).

1758. A keresett pontok az AK húrhoz tartozó 60°-os (l) körök és az adott (k) kör segítségével határozhatók meg. Ezek a pontok (**1758.** ábra):
a) P és Q (l és k metszéspontjai).
b) PB és BQ ívek pontjai (PQ ív) P és Q nélkül. (A k körnek azok a pontjai, amelyek az l látókörökön kívül vannak.)
c) PA és QA ívek pontjai P, A, Q nélkül
(k körnek azon pontjai, amelyek az l körökön belül vannak).
Megjegyzés: 1. Felhasználtuk azt az ismert tényt, hogy adott szakasz a látókörön belüli pontokból az α látószögnél nagyobb, külső pontokból α-nál kisebb szögben látszik.
2. $\alpha = 60°$ esetén P és Q nemcsak látókörrel szerkeszthető meg.

1759. A keresett pontok az AB szakaszhoz tartozó l látókör és az adott k kör segítségével határozhatók meg.
a) P (a 30°-os l látókör és k kör metszéspontja).
b) Q (AB átmérőjű h Thalész-kör és k metszéspontja).



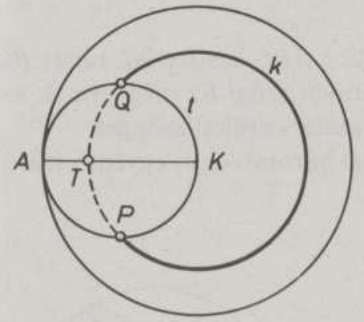
1758



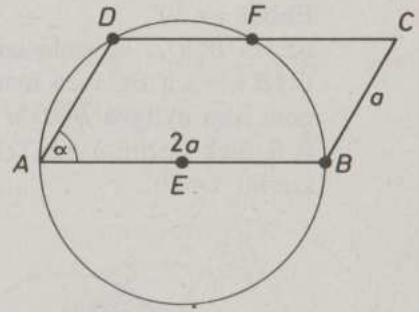
1759

c) AQ kisebbik ív megfelelő pontja A és Q nélkül.
Megjegyzés: lásd az **1758.** megoldásához fűzött megjegyzés 1) pontját is (**1759.** ábra).

1760. A belső k körvonal és az AK átmérőjű Thalész-körvonal (t) közös pontjai P és Q (**1760.** ábra).
a) k körvonal P és Q pontjából látszik az AK szakasz derékszögben.
b) Az AK szakasz tompaszögben látszik a k körvonal azon pontjaiból, amelyek t körlemez belső pontjai, kivéve a T pontot.
c) Az AK szakasz hegyesszögben látszik a k körvonal azon pontjaiból, amelyek a t körlemezen kívül fekszenek.



1760



1761

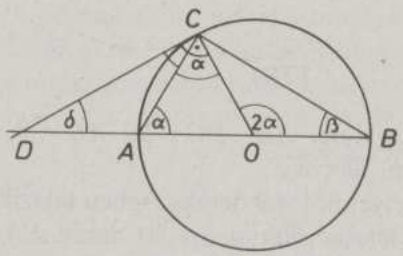
1761. Legyenek a paralelogramma oldalai $AB = DC = 2a$, $AD = BC = a$, az AB, illetve DC felezőpontjai E, illetve F.
A DC oldal azon pontjai, amelyekből AB derékszögben látszik, az AB átmérőjű Thalész-kör és DC közös pontjai. $\alpha = 60°$ miatt $EA = ED = EF = a$, ezért a keresett pontok F és D (**1761.** ábra).

Hasonlóan megmutatható, hogy a DC oldal az AB oldal E és B pontjából látszik derékszögben.
Az AD és BC oldalak belső pontjaiból AB és DC oldalak egyike sem látszik derékszögben.
Így a paralelogramma kerületén az E, B, F és D pontokból látszik valamelyik hosszabbik oldal derékszögben.

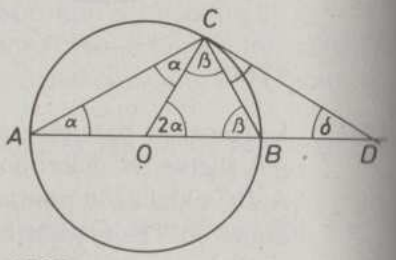
1762. A C-beli érintő metszi az AB egyenest, ezért $\alpha \neq 45°$.

I. $\alpha > 45°$: (**1762**/I. ábra).
a) Ha $ACD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $\alpha < 90°$ miatt $AD = AC$. A DAC háromszög egyik külső szöge $\alpha = 2\delta$. Ezért $DCO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \alpha = 90°$, így $\alpha = 60°$.
b) Ha $BCD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $BCD\sphericalangle > 90°$ miatt $BC = DC$ és $\beta = \delta$. Az ABC derékszögű háromszögből $\beta = 90° - \alpha$. A BCD háromszög belső szögeinek összege:
$3(90° - \alpha) + 90° = 180°$.
Ebből $\alpha = 60°$

II. Ha $\alpha < 45°$ (**1762.**/II. ábra.)
a) Ha $ACD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $ACD\sphericalangle > 90°$ miatt $AC = DC$ és $\delta = \alpha$. Az ACD háromszög belső szögeinek összege:
$3\alpha + 90° = 180°$.
Ebből $\alpha = 30°$.
b) Ha $BCD\triangle$ egyenlő szárú, akkor $ABC\sphericalangle = \beta < 90°$ miatt $BC = BD$. $CAB\sphericalangle = \alpha$ a BC íven nyugvó kerületi szög. Ez megegyezik az ugyanezen íven nyugvó $BCD\sphericalangle$ érintő szárú kerületi szöggel.
A fentiek szerint $\delta = \alpha$. Tehát ACD háromszög is egyenlő szárú. Így *a)* szerint $\alpha = 30°$.



1762/I.

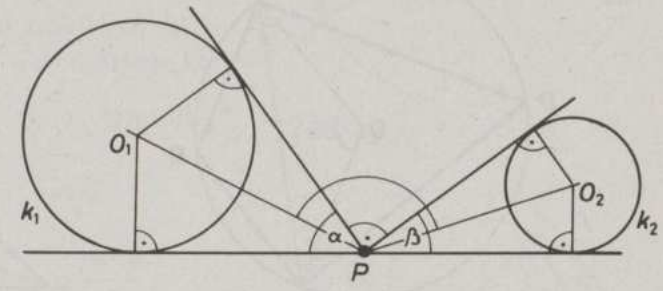


1762/II.

1763. A P pontból k_1 körhöz húzott érintők szögét jelöljük α-val, a k_2 körhöz húzott érintők szögét β-val. A feladat szerint $\alpha + \beta = 90°$. O_1P, illetve O_2P a tengelyes szimmetria miatt felezi α-t, illetve β-t. Így

$$O_1PO_2\sphericalangle = \frac{1}{2}\alpha + 90° + \frac{1}{2}\beta = 135°.$$

(**1763.** ábra.)



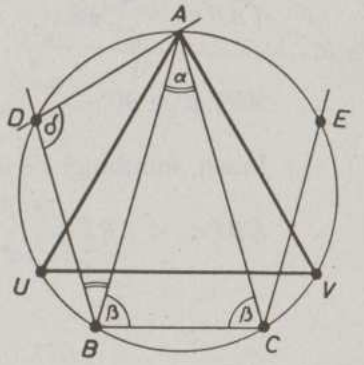
1763

1764. A tengelyes szimmetria miatt $AU = AV$, ezért elég belátni, hogy $UAV\sphericalangle = 60°$.
$BD \parallel AC$ miatt $DBA\sphericalangle = \alpha$.
$DBCA$ húrnégyszög, ezért $\delta = BDA\sphericalangle = 180° - \beta$.
Az ABD háromszögből $DAB\sphericalangle = 180° - \alpha - \delta = (180° - \delta) - \alpha = \beta - \alpha$.

$$UAV\sphericalangle = \frac{2}{3}DAB\sphericalangle + \alpha = \frac{1}{3}(2\beta + \alpha) = \frac{1}{3}\cdot 180° = 60°.$$

Tehát a VAU háromszög szabályos (**1764.** ábra).

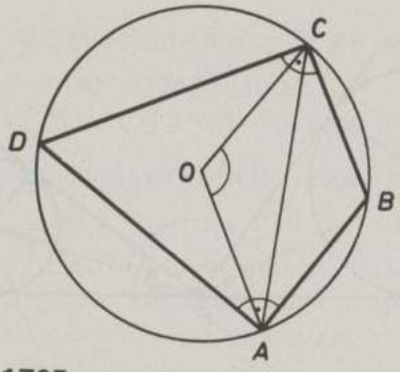
1764



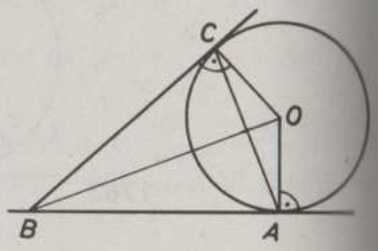
1765. A feltételek szerint a négyszög húrnégyszög és BD átlója a köré írt kör egyik átmérője.

Ha az AC átló az O pontból 120°-os szögben látszik, akkor a kisebbik $\overset{\frown}{AC}$ ívre is igaz ez. Az ehhez az $\overset{\frown}{AC}$ ívhez tartozó kerületi szögek 60°-osak.

Mivel $ABCD$ húrnégyszög, ezért a kiegészítő ívhez tartozó $ABC\sphericalangle = 120°$ (**1765.** ábra).



1765



1766

1766. Az $AOCB$ négyszög deltoid. (Két-két egyenlő oldala a körsugár, illetve a B pontból húzott érintőszakaszok.)

A deltoid átlói merőlegesek egymásra. Így az átlók metszéspontjából az oldalak (pl.: AB is) derékszög alatt látszanak (**1766.** ábra).

1767. Be kell látni, hogy BTK derékszögű háromszög egyenlő szárú. Ehhez elég megmutatni, hogy $KBT\sphericalangle = 45°$ (**1767.** ábra).

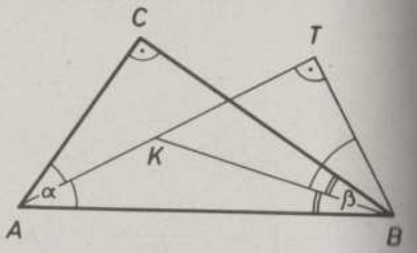
Az ABT derékszögű háromszögben

$TAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, ezért

$ABT\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Innen, minthogy $\alpha + \beta = 90°$, ezért

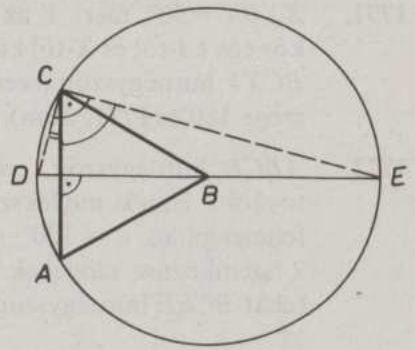
$KBT\sphericalangle = ABT\sphericalangle - \frac{\beta}{2} = 45°$.



1767

1768. BD szögfelező, ezért az AD ívhez tartozó középponti szög 30°-os, ugyanezen ívhez tartozó kerületi szög $ACD\sphericalangle = 15°$.

A DEC háromszög derékszögű (Thalész-tétel), ezért $ACE\sphericalangle = 75°$ (**1768.** ábra).



1768

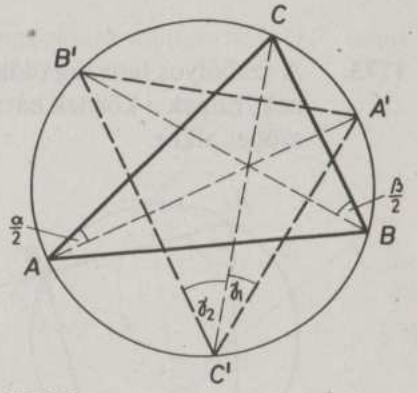
1769. Az A-ból induló szögfelező felezi a BC ívet. Az $\overset{\frown}{A'C}$-hez tartozó kerületi szög $\gamma_1 = \frac{\alpha}{2}$. Ugyanígy $\gamma_2 = \frac{\beta}{2}$.

Tehát: $\gamma' = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\alpha+\beta}{2}$,

ugyanígy: $\beta' = \frac{\alpha+\gamma}{2}$,

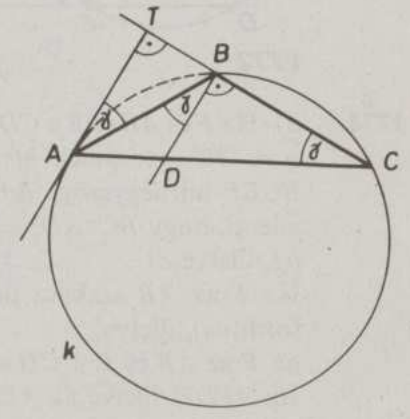
továbbá: $\alpha' = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

(**1769.** ábra.)



1769

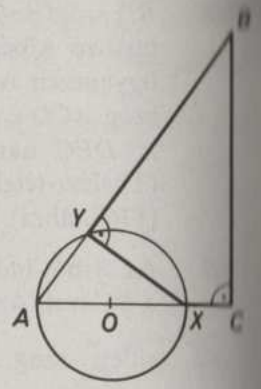
1770. A feltételeknek megfelelő ABC háromszögben $\beta = 90° + \gamma$ és legyen $BD \perp BC$, továbbá az A-ból induló magasság $AT \perp BC$. Így $BD \parallel AT$ miatt $TAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle = \gamma$ (váltószögek). Az $\overset{\frown}{AB}$-hez tartozó kerületi szög és ezen ívet tartalmazó, A csúcsú érintőszárú kerületi szög is γ. Minthogy a körhöz A-ban csak egy érintő húzható, ezért AT egyenes a kör A-beli érintője (**1770.** ábra).



1770

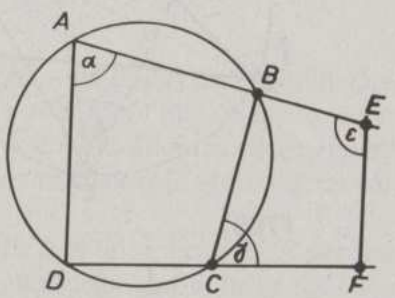
1771. $XYB\sphericalangle = 90°$, mert Y az AX átmérőjű Thalész-kör egy (A-tól és X-től különböző) pontja. Ezért $BCXY$ húrnégyszög (szemköztes szögeinek összege 180°) (**1771.** ábra).

1772. $ABCD$ húrnégyszög, ezért $BCD\sphericalangle = 180° - \alpha$, továbbá ennek mellékszöge $\gamma = \alpha$. Az $AD \| EF$ feltétel miatt $\varepsilon = 180° - \alpha$. A $BCFE$ négyszög 2 szemköztes szögének összege: $\varepsilon + \gamma = 180°$, tehát $BCFE$ húrnégyszög (**1772.** ábra).

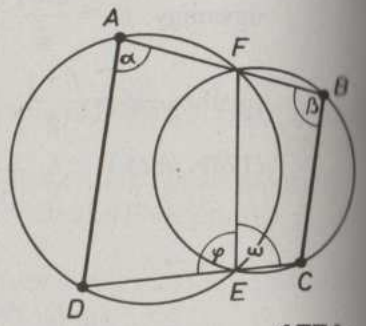


1771

1773. A szabályos hatszög oldalfelező pontjai a hatszögbe írt körre illeszkednek. Ennek a körnek bármely négy pontja – definíció szerint – húrnégyszöget alkot.



1772



1774a

1774. *a)* Ha F és AB és E a CD szakasz belső pontja: Az $AFED$ húrnégyszög: $\varphi = 180° - \alpha$; φ-nek mellékszöge $\omega = 180° - \varphi = \alpha$ (**1774.** *a)* ábra). $BCEF$ húrnégyszög: $\beta + \omega = 180°$, amelyekből $\beta + \alpha = 180°$. Ez azt jelenti, hogy $BC \| AD$, tehát $ABCD$ trapéz.

b), illetve *c)*

Ha F az AB szakasz pontja és E a CD szakaszon kívül van (vagy fordítva), illetve

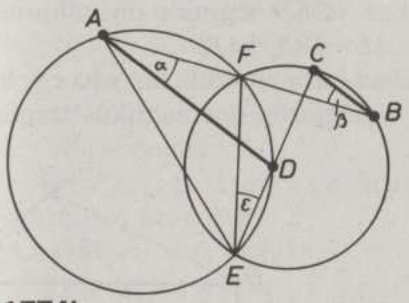
ha F az AB és E a CD szakaszon kívül van:

Az $AFDE$, illetve az $AEFD$ négyszög húrnégyszög, ezért $\alpha = \varepsilon$,

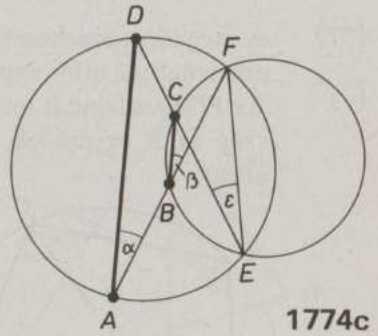
$BCFE$ négyszög húrnégyszög, ezért $\beta = \varepsilon$,

tehát $\alpha = \beta$.

Ebből következik, hogy $AD \| BC$, így a vizsgált négyszög trapéz (**1774.** *b)*, **1774.** *c)* ábra).

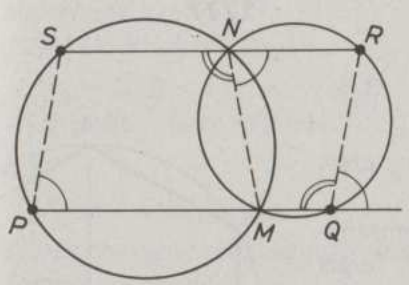


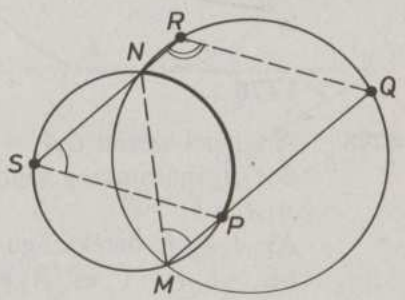
1774b

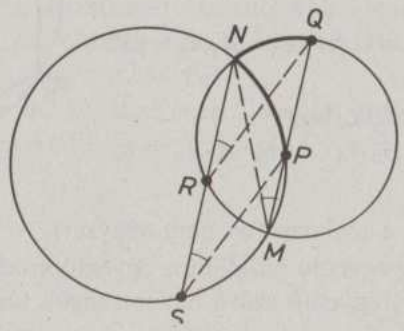


1774c

1775. A feltétel szerint $PQ \| RS$; az **1774.** megoldása alapján $PS \| QR$, tehát a vizsgált négyszög paralelogramma (**1775.** ábra).







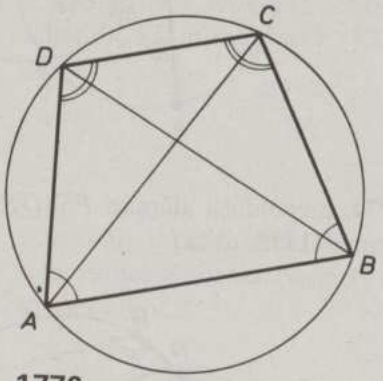
1775

1776. Az $AC = BD$ feltételből vagy

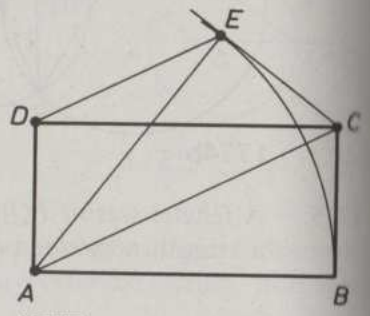
a) $ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle$ (és $ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$) egyenlőség (**1776.** ábra), vagy

b) $ABC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$ (és $ADC\sphericalangle = DAB\sphericalangle$) egyenlőség következik. Így az $ABCD$ négyszögben két-két szomszédos szög egyenlő. Tehát $ABCD$ szimmetrikus trapéz.

1777. A megadott szerkesztés miatt az $ACED$ négyszög olyan húrnégyszög, amelynek az átlói egyenlőek: $AE = DC (= AB)$.
Az **1776**-os feladat megoldásában bizonyítottuk, hogy ha egy húrnégyszög átlói egyenlőek, akkor a négyszög szimmetrikus trapéz (**1777.** ábra).

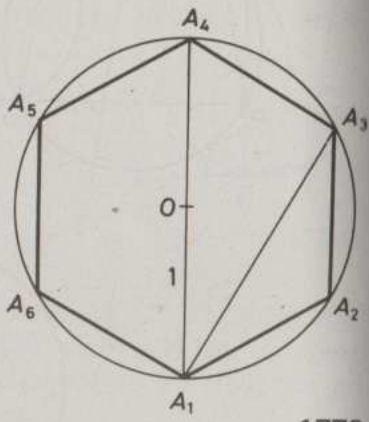


1776



1777

1778. A feltétel szerint $OA_1 = 1$.
OA_1A_2 háromszög szabályos, ezért $A_1A_2 = 1$.
Az $A_1A_3A_4$ derékszögű háromszögben $A_3A_4 = 1$ és $A_1A_4 = 2$, ezért $A_1A_3 = \sqrt{3}$.
Tehát
$A_1A_2 = A_1A_6 = 1$, $A_1A_3 = A_1A_5 = \sqrt{3}$ és $A_1A_4 = 2$.
Ebből következik, hogy
$A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_1A_5 \cdot A_1A_6 = 6$
(**1778.** ábra).

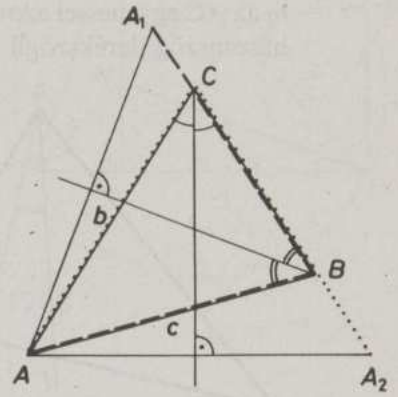


1778

1779. Igen. Például a téglalap (ha nem négyzet).

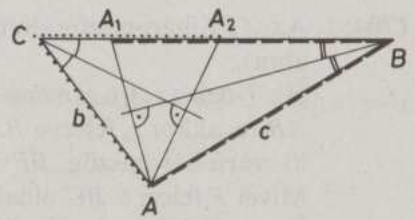
1780. A húrsokszög egyenlő oldalaihoz egyenlő középponti szögek és egybevágó A_iOA_{i+1} egyenlő szárú háromszögek tartoznak. O középpontú, $\frac{360°}{n}$ szögű forgatással a fenti n oldalú sokszög képe önmaga.
Tehát ha egy húrsokszög oldalai egyenlőek, akkor szögei is egyenlőek.

1781. A BA és BC félegyenes szimmetrikus a B csúcson átmenő szögfelezőre, így A_1 a BC félegyenes pontja. Hasonlóan A_2 is illeszkedik a CB félegyenesre.
A tükrözés miatt $c = AB = A_1B$, illetve $b = CA = CA_2$. Az a oldalnak a b és c oldalakhoz való viszonyától függően a levezetés innen két részre bomlik:
a) Ha $a \leqq b$ ($a \leqq c$ és $a > c$ esetén az egyenletek azonosak).
Az **1781.** *a)* ábra alapján:
$A_1A_2 = A_1B + BA_2 = c + BA_2$,
$BA_2 = CA_2 - CB = b - a$.
Ezekből
$A_1A_2 = c + b - a$.



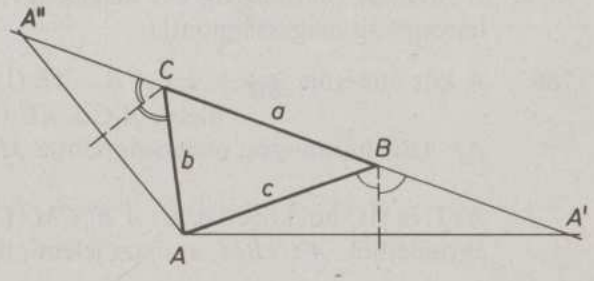
1781a

b) Ha $a > b$ ($a \leqq c$ és $a > c$ esetén az egyenletek azonosak).
Az **1781.** *b)* ábra alapján:
$A_1A_2 = A_1B - A_2B = c - A_2B$,
$A_2B = BC - CA_2 = a - b$,
így
$A_1A_2 = c + b - a$.
A végeredmény tehát minden háromszögre azonos.



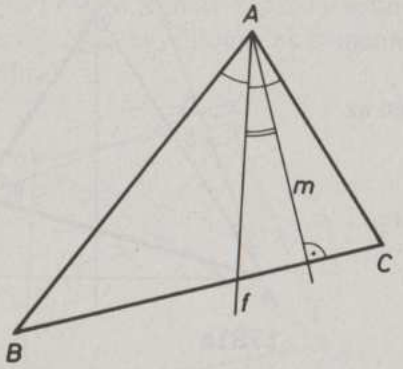
1781b

1782. Az A csúcsnak a B csúcson átmenő külső szögfelezőre vonatkozó tükörképe A' a BC oldalegyenes B kezdőpontú C-t nem tartalmazó félegyenesére esik és $c = AB = A'B$.
Hasonlóan A'' a BC oldalegyenes C kezdőpontú B-t nem tartalmazó félegyenesére illeszkedik és $b = CA = CA''$.
Ezért
$A'A'' = A'B + BC + CA'' = a + b + c$
(**1782.** ábra).

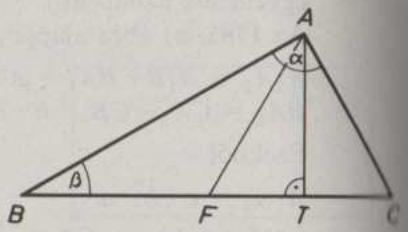


1782

1783. Ha az A csúcson átmenő m magasságvonalának az A-beli f szögfelezőre vonatkozó tükörképe az AB egyenes, akkor f és m szöge megegyezik f és AB hajlásszögével (**1783.** ábra). Mivel f felezi a $BAC\sphericalangle$-et, ezért m az AC egyenessel azonos. Ebből $AC \perp BC$ következik. Tehát az ABC háromszög derékszögű ($\gamma = 90°$).



1783



1784

1784. Az ABT háromszög derékszögű és $\beta = 30°$, ezért $BAT\sphericalangle = 60°$ (**1784.** ábra).

Ha T-nek az A-n átmenő súlyvonalra vonatkozó tükörképe illeszkedik AB-re, akkor s_a felezi a $BAT\sphericalangle$-et, azaz $BAF\sphericalangle = 30°$. Ezért BFA egyenlő szárú háromszög, $BF = FA$.

Mivel F felezi a BC oldalt, ezért $BF = FC$.

Így az F középpontú, BF sugarú körre illeszkedik az A csúcs, tehát $\alpha = 90°$, az ABC háromszög derékszögű.

1785. $AA'B$ háromszög (a tükrözés miatt) derékszögű: $A'B \perp AB$.

A $BA'CA''$ négyszög középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma: $CA'' \parallel A'B$ (**1785.** ábra).

Tehát $CA'' \perp AB$.

Hasonlóan mutatható meg, hogy $BA'' \perp AC$.

A'' az ABC háromszög két magasságvonalára illeszkedik, ezért A'' a háromszög magasságpontja.

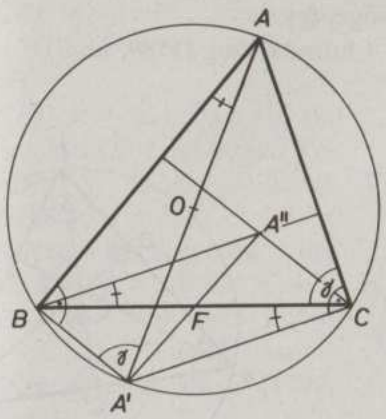
1786. A kör átmérője AA', ezért $A'B \perp AB$ (I),

illetve $A'C \perp AC$ (II).

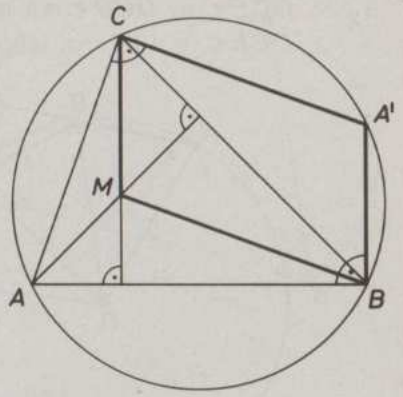
Az ABC háromszög magasságpontja M, ezért $CM \perp AB$ (III),

illetve $BM \perp AC$ (IV).

Az I. és III.-ból következik: $A'B \parallel CM$ (**1786.** ábra), továbbá a II. és IV. egyenletből: $A'C \parallel BM$, ami azt jelenti, hogy $A'BMC$ paralelogramma.



1785

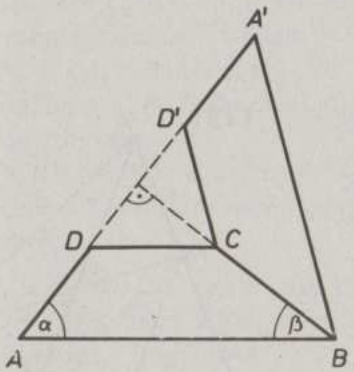


1786

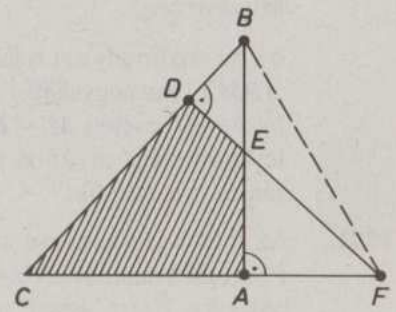
1787. A tengelyes tükrözés miatt $AA' \perp BC$, illetve $DD' \perp BC$. A feltételt is figyelembe véve $AD \perp BC$, azaz $\alpha + \beta = 90°$ (**1787.** ábra).

1788. *a)* $AB \perp CF$ és $BC \perp DF$ miatt A és D az FB átmérőjű Thalész-kör 1-1 pontja ($ADBF$ húrnégyszög).

b) A és D a CE átmérőjű Thalész-kör 1-1 pontja: $ACDE$ húrnégyszög (**1788.** ábra).



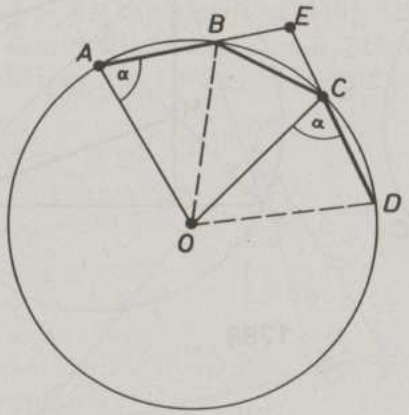
1787



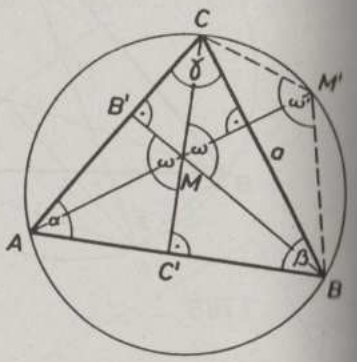
1788

1789. ABO és CDO egybevágó egyenlő szárú háromszögek, az alapon fekvő szögük α.

$OCE\sphericalangle$ az $OCD\sphericalangle = \alpha$ mellékszöge, így
$OCE\sphericalangle = 180° - \alpha$, tehát $OCEA$ húrnégyszög (**1789.** ábra).



1789



1790

1790. Jelölhetjük az ABC háromszög szögeit úgy, hogy $\gamma \geqq \beta$ legyen. Ábránkon (**1790.** ábra) $\gamma < 90°$.

A B-ből, illetve C-ből induló magasságok talppontjai B', illetve C', a magasságpont M. Az $AB'MC'$ húrnégyszög (2 szemközti szöge 90°–90°-os).

$\omega = 180° - \alpha$;

$\omega' = \omega$ a tükrözés miatt. Tehát M'-ből az a oldal $180° - \alpha$ szögben látszódik.

Megjegyzés:

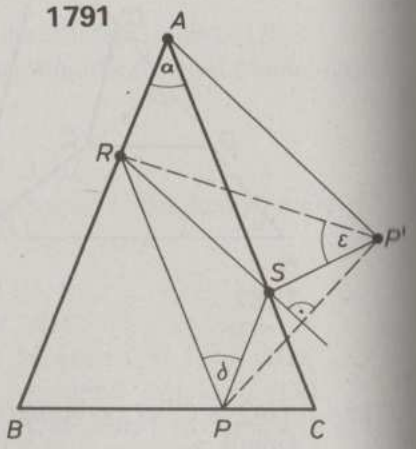
a) Az eredmény azt is jelenti, hogy $ABM'C$ húrnégyszög.

b) $\gamma = 90°$ esetén $M' = B$, nem keletkezik szög, továbbá $\gamma > 90°$ esetén $\omega' = \alpha$ adódik.

1791. Az R és S szerkesztése miatt $\delta = \alpha$, P' szerkesztése miatt $\varepsilon = \delta$. Ezekből $\alpha = \varepsilon$. Ezért A és P' az RS-hez tartozó α látószögű látókör pontjai, tehát $ARSP'$ húrnégyszög (**1791.** ábra).

Megjegyzés: Az $ARSP'$ négyszög szimmetrikus trapéz.

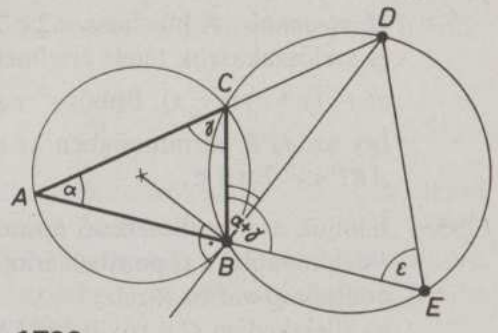
1791



1792. $CBE\sphericalangle = \alpha + \gamma$, mert az ABC háromszög külső szöge.

$CBD\sphericalangle = \alpha$, mert a CB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög. Ezért $DBE\sphericalangle = \gamma$.

$BCDE$ húrnégyszög, így $\varepsilon + BCD\sphericalangle = 180°$, ahol $BCD\sphericalangle = 180° - \gamma$. Ebből $\varepsilon = \gamma$. Tehát a BDE háromszög egyenlő szárú (**1792.** ábra).



1792

1793. *I. megoldás:* AP-t toljuk el C-be, így megkapjuk a CRP háromszög PR-hez tartozó magasságát. E háromszög másik magassága BP.

$CT = AP$ a szerkesztés miatt,

$BP = AP$ a CP-re vonatkozó szimmetria miatt.

Tehát $CT = BP$. Így a CRP háromszög két magassága egyenlő, ezért e háromszög egyenlő szárú (**1793.** ábra).

II. megoldás:

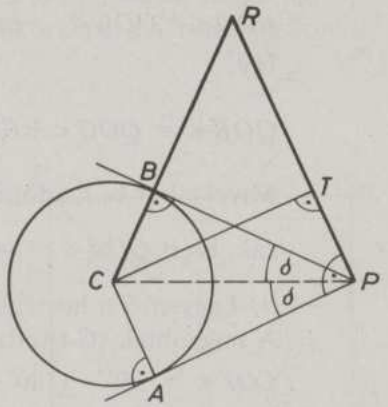
$BPC\sphericalangle = CPB\sphericalangle = \delta$ a CP-re vonatkozó szimmetria miatt.

$PR \perp PA$, ezért $CPR\sphericalangle = 90° - \delta$.

Másrészt a PCB derékszögű háromszögben

$PCB\sphericalangle = 90° - \delta$,

tehát a CRP háromszög egyenlő szárú.



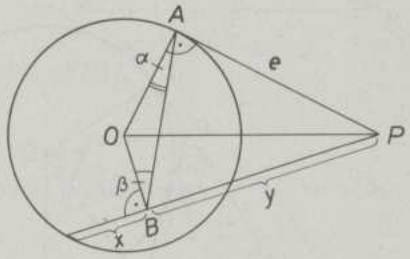
1793

1794. *I. megoldás:* A szerkesztés miatt $OA > OB$, ezért a szemközti szögekre igaz, hogy $\beta > \alpha$,

$PAB\sphericalangle = 90° - \alpha$,

$PBA\sphericalangle = 90° - \beta$.

A fentieket figyelembe véve $90° - \alpha > 90° - \beta$, tehát az állítás igaz (**1794.** ábra).



1794

II. megoldás: A húr hossza $2x$, $PB=y$, az érintőszakasz: e. Az érintő- és szelőszakaszok tétele értelmében:

$e^2 = (y+x)(y-x)$. Ebből $e^2+x^2 = y^2$, tehát $e<y$.

Így az APB háromszögben az e és y oldallal szemköztes szögekre is $ABP\sphericalangle < PAB\sphericalangle$.

1795. Jelöljük a P-re illeszkedő érintőkön fekvő érintési pontokat E-vel és F-fel, továbbá a G pontbeli érintőnek az előző érintőkkel való metszéspontjait Q-val és R-rel.

a) Illeszkedjen G a rövidebb EF ívre. (**1795.** *a)* ábra).

Bizonyítandó, hogy $QOR\sphericalangle$ állandó, azaz G-től független.

$PEOF$ húrnégyszög, mert két szemköztes szöge 90°-os. Ezért a kisebbik $EOF\sphericalangle = 180° - EPF\sphericalangle = 180° - \varphi$.

QOE és QOG, valamint RGO és RFO derékszögű háromszögek – az oldalak egyenlősége miatt – egybevágóak, ezért

$EOQ\sphericalangle = QOG\sphericalangle$ és $GOR\sphericalangle = ROF\sphericalangle$.

Így

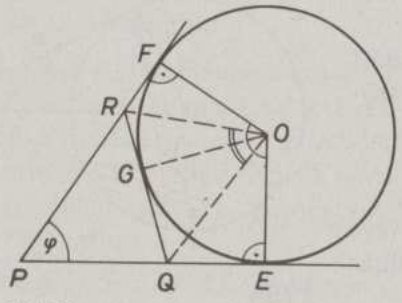
$$QOR\sphericalangle = QOG\sphericalangle + GOR\sphericalangle = \frac{1}{2}EOF\sphericalangle = 90° - \frac{\varphi}{2}.$$

Mivel a kör és P adottak voltak és ezek φ-t egyértelműen meghatározzák, ezért $QOR\sphericalangle = 90° - \frac{\varphi}{2}$ is állandó.

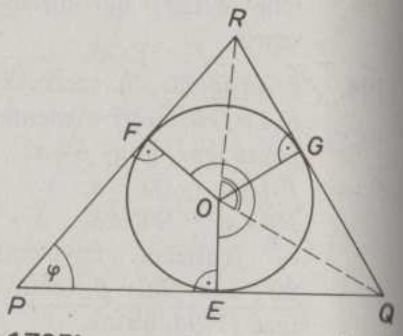
b) Legyen G a hosszabbik EF ív pontja (**1795.** *b)* ábra).

A nagyobbik (G-t tartalmazó)

$EOF\sphericalangle = 360° - (180° - EPF\sphericalangle) = 180° + \varphi$.



1795a



1795b

Itt is megmutatható (az előző részben felhasznált derékszögű háromszögek segítségével), hogy

$$QOR\sphericalangle = \frac{1}{2}EOF\sphericalangle = 90° + \frac{\varphi}{2}.$$

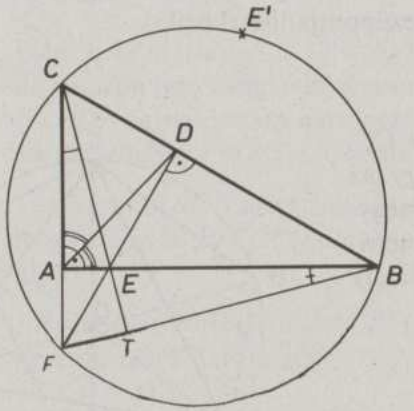
Tehát ha G-t a nagyobbik EF köríven tetszőlegesen választjuk, akkor $QOR\sphericalangle$-et P és a kör egyértelműen meghatározza.

Megjegyzés: Az adott kör a PQR háromszög *a)* QR oldalához írt köre, illetve *b)* beírt köre. Így a keresett szögek az **1696**-os és **1699**-es feladatok megoldásából is meghatározhatók.

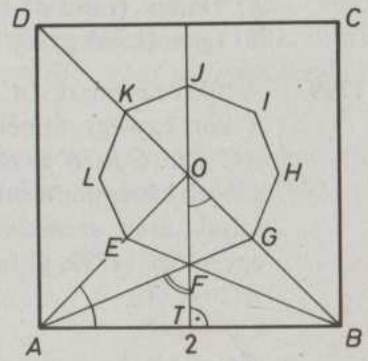
1796. Az FBC háromszögben $AB \perp CF$ és $FD \perp BC$, ezért E e háromszög magasságpontja (**1796.** ábra).

a) Tehát CE is magasságvonal, azaz $CE \perp BF$. Ebből $ETB\triangle \sim EAC\triangle$ következik, amiből adódik, hogy $EBF\sphericalangle = ECA\sphericalangle$.

b) Az **1790**-es feladat megoldásából következik, hogy a magasságpontnak a háromszög oldalaira vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körre illeszkednek.



1796



1797

1797. *a)* Tetszőleges két szomszédos csúcs az O pontból $\frac{360°}{8} = 45°$-os szögben látszik.

Megmutatjuk, hogy a csúcsoknak O-tól mért távolsága azonos (**1797.** ábra).

A szerkesztési utasítás szerint F és G is illeszkedik az $OAB\sphericalangle$ szögfelező-

jére. Alkalmazzuk a szögfelező-tételt az ATO és az AOB egyenlő szárú derékszögű háromszögekre (figyelembe véve, hogy

$AB=2$, $AO = OB = OG+GB = \sqrt{2}$ és $AT = OT = OF+FT = 1$),

$OF : FT = \sqrt{2} : 1$ és $OG : GB = \sqrt{2} : 2$.

Ezekből $OF = OG = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$.

Tehát a nyolcszög szabályos.

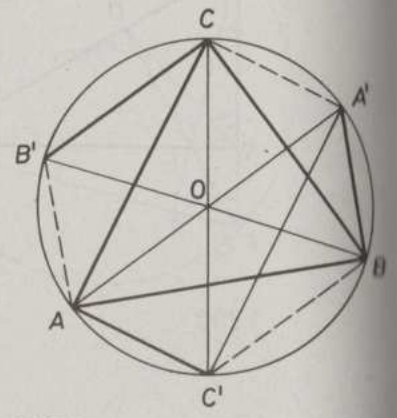
b) A fenti levezetésből következik, hogy a szabályos nyolcszög köré írható körének sugara $R = OF = 2-\sqrt{2}$.

1798. *a)* Igaz.
b) Igaz. (Lásd *a)*-t.)
c) Hamis. (Lásd *a)*-t.)
d) Igaz.
e) Igaz. (Lásd *d)*-t.)
f) Hamis. (Lásd *d)*-t.)
g) Hamis. (Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyére csak egy oldalfelező pont, az alap felezőpontja illeszkedik.)
h) Hamis. (Lásd *g)*-t.)
i) Igaz. (Lásd *g)*-t.)

1799. A tükrözés miatt AA', BB' és CC' a kör egy-egy átmérője. Így az $AC'A'C$, $C'BCB'$ és $BA'B'A$ négyszögek középpontosan szimmetrikusak, ezért szemköztes oldalaik egyenlőek (**1799.** ábra):
$AC' = CA'$,
$CB' = BC'$,
$BA' = AB'$.
A három egyenletet összeadva a bizonyítandó

$AC'+CB'+BA' = CA'+BC'+AB'$

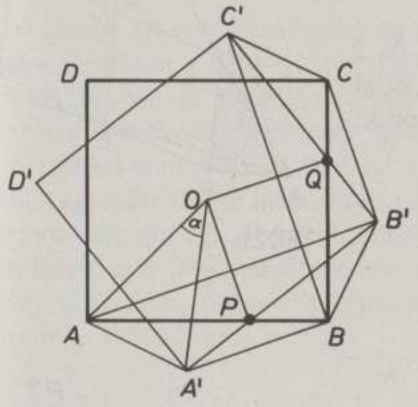
egyenlőséget kapjuk.



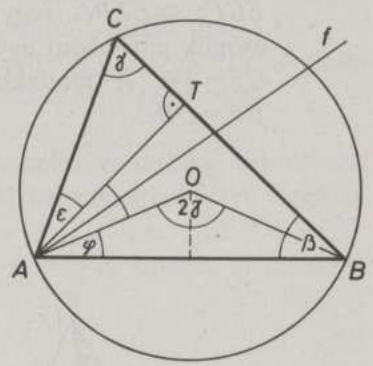
1799

1800. Az $AA'BB'$ négyszög O pont körüli 90°-os elforgatottja $BB'CC'$ négyszög.

Az $AA'BB'$ négyszög átlóinak metszéspontja P. Ennek O körüli 90°-os elforgatottja a $BB'CC'$ négyszög átlóinak Q metszéspontja. Így POQ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ebből következik, hogy az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzet megfelelő oldalainak metszéspontjai négyzetet alkotnak (**1800.** ábra).



1800

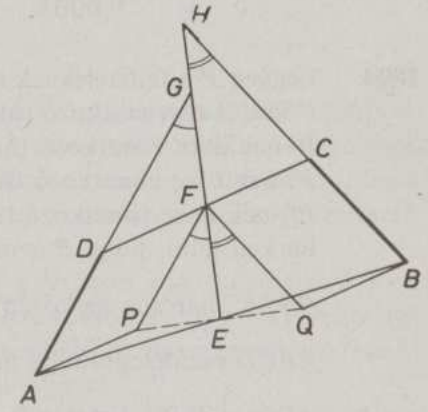


1801

1801. Elég belátni, hogy $CAT\sphericalangle = OAB\sphericalangle$. $AOB\sphericalangle = 2ACB\sphericalangle = 2\gamma$, mert ugyanazon íven nyugvó középponti, illetve kerületi szögek (**1801.** ábra). Az AOB egyenlő szárú háromszögből $\varphi = 90° - \gamma$, az ACT derékszögű háromszögből $\varepsilon = 90° - \gamma$, tehát $\varphi = \varepsilon$.

1802. Legyen az $ABCD$ négyszög két egyenlő oldala $AD = BC$. Szerkesszük meg az $FDAP$ és $FCBQ$ paralelogrammákat. Ezekre fennáll (**1802.** *a)* ábra):

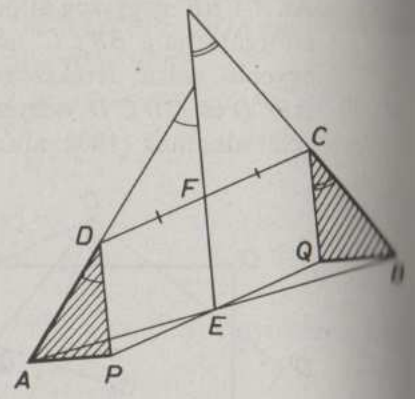
$FP = DA = CB = FQ$, ezért PFQ egyenlő szárú háromszög.
$PFE\sphericalangle = AGE\sphericalangle$ és
$QFE\sphericalangle = BHE\sphericalangle$. Tehát elég belátni, hogy $PFE\sphericalangle = QFE\sphericalangle$.
$APBQ$ négyszög paralelogramma (hiszen $AP = DF = FC = QB$, és $AP \parallel QB$), ezért átlói felezik egymást. Így E a PQ szakasz felezőpontja, FE a PQF egyenlő szárú háromszög F csúcsához tartozó szögfelezője.



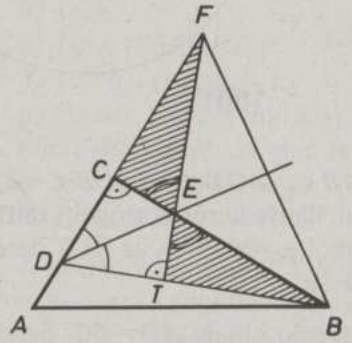
1802a

Megjegyzés: egy másik lehetséges megoldáshoz ad segítséget az **1802.** *b)* ábra.

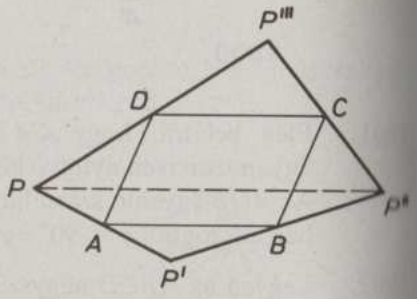
1803. Az $FDB\sphericalangle$ felezőjének pontja E, ezért $EC = ET$, továbbá $DC = DT$ (**1803.** ábra).
$ECF\triangle \cong ETB\triangle$ (egy oldal és 2 szögük páronként egyenlő), ezért $CF = TB$. A fentiekből adódik: $DF = DB$.



1802b



1803

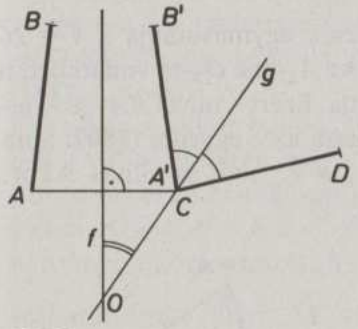


1804

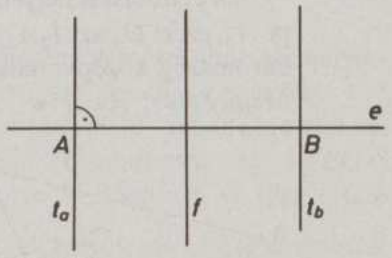
1804. Legyen P a feltételeknek eleget tevő pont (**1804.** ábra).
P-nek A-ra vonatkozó tükörképe P',
P'-nek B-re vonatkozó tükörképe P'',
P''-nek C-re vonatkozó tükörképe P''',
P'''-nek D-re vonatkozó tükörképe P^*.
Be kell látni, hogy P azonos P^*-gal. Egyrészt $BC \| P'P'''$, mert BC a $P'P''P'''$ háromszög középvonala. Ugyanezért $BC = \frac{1}{2} P'P'''$. Másrészt $ABCD$ paralelogramma miatt ez érvényes AD-re is: $AD \| P'P'''$, illetve $AD = \frac{1}{2} P'P'''$. Ezért AD a $PP'P'''$ és $P^*P'P'''$ háromszögnek is A-ra

illeszkedő, $P'P'''$-vel párhuzamos középvonala, melynek „másik" végpontja D. Így P^*P''' és PP'''-nek a P'''-n kívül a D is közös pontja, tehát a két egyenes azonos, $P^*D = P'''D = PD$, tehát P^* egybeesik P-vel.
Megjegyzés: Adott P esetén a fenti szerkesztési utasítással kaphatunk hurkolt négyszöget is.

1805. *a)* Ha az AB és CD szakaszok egy-egy megfelelő végpontja azonos (pl. $A = C$), akkor a keresett forgatás középpontja a közös pont (A).
b) Különben AC f felezőmerőlegesére, majd a $B'CD\sphericalangle$ ($\neq 0$) g szögfelezőjére vonatkozó tükrözések egymásutánja AB-t CD-be viszi.
A feladat szerint $AB \nparallel CD$, ezért $f \nparallel g$.
Két egymást O-ban metsző (f és g) egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánja egy O körüli elforgatással helyettesíthető. (A forgatás szöge f és g szögének kétszerese.)
Így a keresett forgatás középpontja az f és g egyenesek O metszéspontja. (**1805.** ábra).



1805

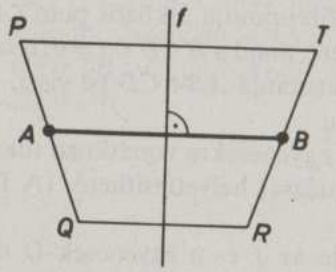


1806/I.

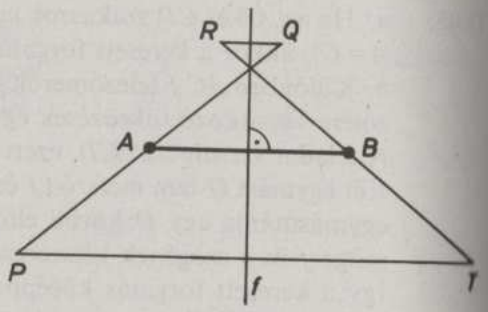
1806. *I. megoldás.* Az A pontra vonatkozó tükrözés helyettesíthető az A ponton átmenő $e = AB$ és a rá merőleges t_a egyenesre vonatkozó tükrözések egymásutánjával. Hasonlóan a B pontra vonatkozó tükrözés a t_b és e egyenesre vonatkozó tükrözések egymásutánjával helyettesíthető (**1806**/I. ábra).
Ennek alapján az A pontra és az f egyenesre vonatkozó tükrözések egymásutánja az e egyenesre vonatkozó tükrözés és a $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ vektorral való eltolás egymásutánjával helyettesíthető. Ez megegyezik az f-re és B-re vonatkozó tükrözések egymásutánjával.
II. megoldás. P-ből indulva a tükrözésekkel létrejött Q, R, illetve T pontra igaz, hogy $QR \| AB \| PT$, azaz $PTRQ$ trapéz, melynek közép-

vonala AB. Tehát B a TR felezőpontja, azaz R tekinthető a T pont B-re vonatkozó tükörképének (**1806**/II. ábra).

Megjegyzés: A tükrözéssel kapott T, R, Q a P-vel alkothatnak hurkolt négyszöget, vagy illeszkedhetnek az AB egyenesre. Ezen esetekre is kimutatható az állítás igaz volta (**1806**/M ábra).



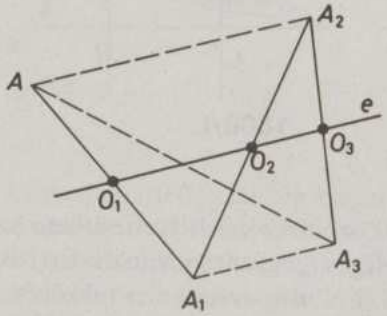
1806/II.



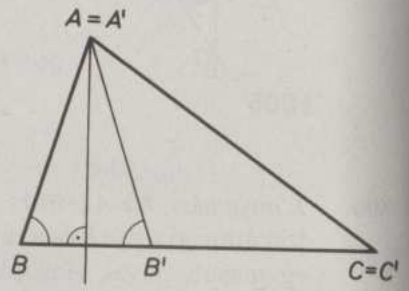
1806/M

1807. Az O_1 és O_2 középpontú tükrözések egymásutánja a $\mathbf{v} = 2\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AA_2}$ eltolással helyettesíthető. Az A_2-nek O_3-ra vonatkozó tükörképe A_3, ezért O_3 az A_2A_3 felezőpontja. Ezért – mivel $AA_2 \| e$ –, az AA_2A_3 háromszög középvonalát tartalmazza az e egyenes (**1807.** ábra).

Megjegyzés: Ha $A \bullet e$, akkor $A_3 \bullet e$, tehát az állítás ekkor is igaz.



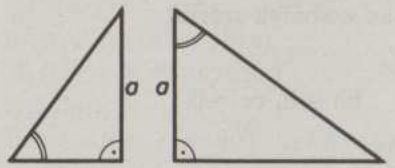
1807



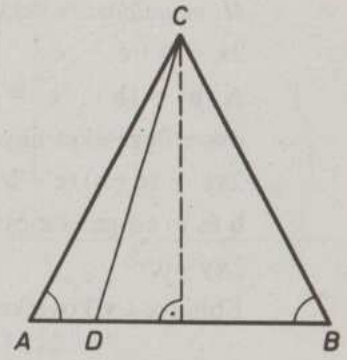
1808

1808. Nem. A feltételeket az ABC és $AB'C$ háromszög egyaránt teljesíti, de nem egybevágóak (**1808.** ábra).

1809. Nem (lásd az **1809.** ábrát). Az egybevágósághoz biztosítani kell, hogy a szereplő 2 szög a 2 háromszögben megfelelő szögek legyenek. Ezt az oldalhoz viszonyított helyzetük adja meg.



1809



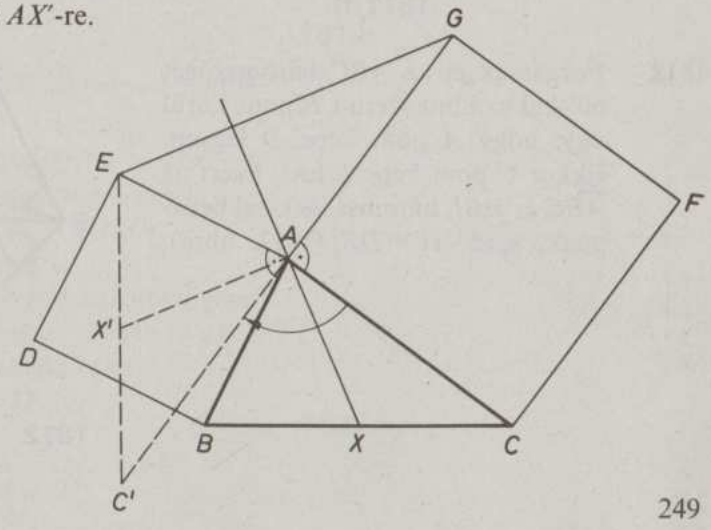
1810

1810. Az ADC és BDC háromszögben $DC < AC = BC$, így a két háromszögben két oldal és a rövidebbel szemközti szög páronként egyenlő. Ebből nem következik, hogy a két háromszög egybevágó. (**1810.** ábra.)

1811. *I. megoldás.* Belátjuk, hogy az ABC háromszög AX súlyvonala merőleges az EG szakaszra és fele akkora. (Ebből következik, hogy az AEG háromszög A-ból induló magasságvonala felezi a BC szakaszt.) (**1811.**/I. ábra.)

Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha valamelyiknek a 90°-os elforgatottja, a másik egyenessel egyállású egyenes.

Forgassuk el az ABC háromszöget A pont körül 90°-kal az ábra szerint. Ekkor $A' = A$, $B' = E$ és C' illeszkedik az AG egyenesre. AX' az $EC'G$ háromszög középvonala, hiszen A, illetve X' felezi a $C'G$, illetve $C'E$ szakaszt. Ezért $AX = AX' = \frac{1}{2}EG$, és AX merőleges az EG szakasszal párhuzamos AX'-re.



1811/I.

II. megoldás. A vektorösszeadás szabálya szerint

$2\mathbf{x} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{c}'-\mathbf{b}'$.

A $|\mathbf{b}| = |\mathbf{b}'|$, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{c}'|$ és $\mathbf{bb}'=0$, $\mathbf{cc}'=0$

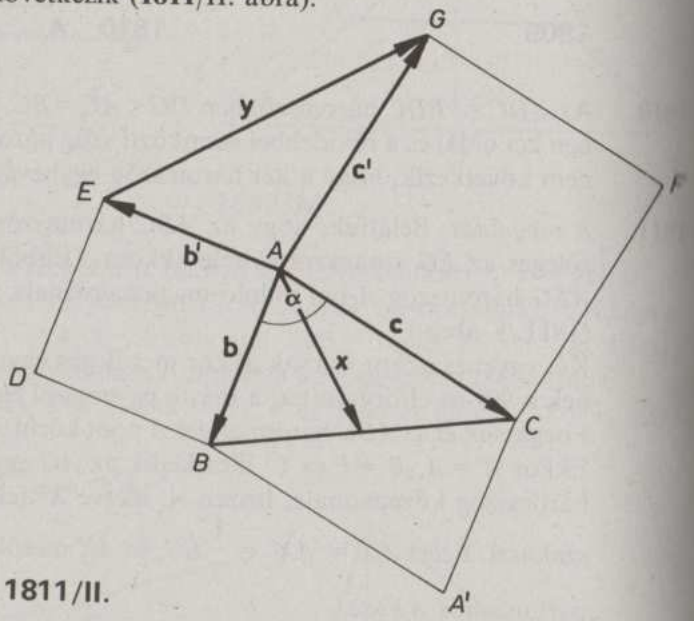
összefüggéseket figyelembe véve

$2\mathbf{xy} = (\mathbf{c}+\mathbf{b})(\mathbf{c}'-\mathbf{b}') = \mathbf{bc}'-\mathbf{cb}'$.

b és **c**′ szöge és **c** és **b**′ szöge egyenlő $(\alpha+90°)$, ezért

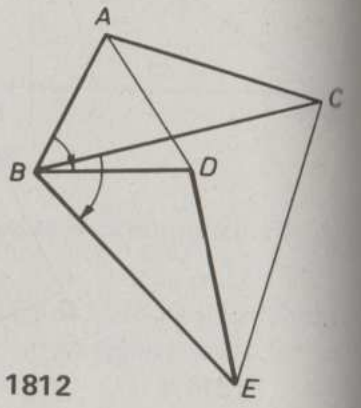
$2\mathbf{xy}=0$.

Ebből $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ következik (**1811**/II. ábra).



1811/II.

1812. Forgassuk el az ABC háromszöget 60°-kal az ábra szerint B pont körül úgy, hogy A pont képe D legyen. Ekkor C pont képe E lesz. Ezért az ABC és DBE háromszögek egybevágóak, azaz $AC=DE$ (**1812.** ábra).



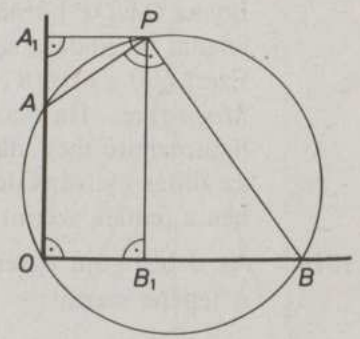
1812

1813. $APB\sphericalangle = 90°$, mert $OAPB$ húrnégyszög (**1813.** ábra).

$A_1PB_1\sphericalangle = 90°$, mivel OA_1PB_1 téglalap.

Ezért $APA_1\sphericalangle = 90° - APB_1\sphericalangle = BPB_1\sphericalangle$.

Megjegyzés: A bizonyításban nem használtuk fel, hogy P az AOB szögfelezőjének pontja. A megoldásból adódik, hogy $PAA_1\triangle \sim PBB_1\triangle$. Ha P a szögfelezőre illeszkedik, e két háromszög egybevágó.



1813

1814. Az $AOP\sphericalangle = POB\sphericalangle = \frac{\varphi}{2}$, ezért a hozzájuk tartozó körívek, illetve húrok egyenlőek, tehát

$PB' = PA'$ és $PB = PA$.

$OA'PB'$ és $OAPB$ négyszögek húrnégyszögek, ezért

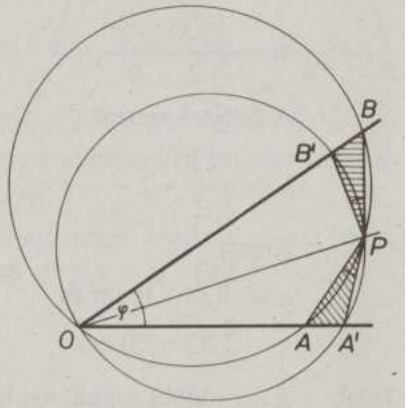
$A'PB'\sphericalangle = 180° - \varphi = APB\sphericalangle$,

így $A'PA\sphericalangle = B'PB\sphericalangle$.

A fentiekből következik, hogy

$AA'P\triangle \cong BB'P\triangle$.

Ezért $AA' = BB'$ (**1814.** ábra).



1814

1815. Ha P az AOB síknegyed pontja (**1815.** ábra):

$OB \| QM$, ezért $MQP\sphericalangle = 180° - \beta$.

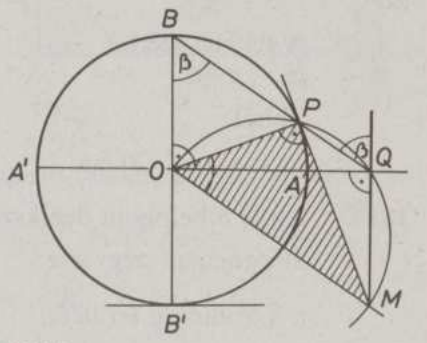
$OMQP$ húrnégyszög, ezért

$MQP\sphericalangle = 180° - POM\sphericalangle$.

Így $POM\sphericalangle = \beta$.

Az OBQ és OPM háromszögben $OB = OP = r$ és az ezeken nyugvó szögek egyenlőek, ezért

$OBQ\triangle \cong POM\triangle$.



1815

Így az $OMQP$ húrnégyszög átlói: OQ és MP egyenlőek, tehát a **1776.** feladat megoldása szerint e négyszög szimmetrikus trapéz.
Ezért $QM = r = OB'$, azaz M illeszkedik a kör B' pontbeli érintőjére.
Megjegyzés: Ha P az A-val, A'-vel vagy B-vel esik egybe, M pont nem határozható meg, illetve Q nem létezik. Ha $P = B'$, akkor $M = B'$, így az állítás nyilvánvalóan igaz. P más helyzetében a bizonyítás lényegében a fentiek szerint történik.

1816. Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója: $a\sqrt{2}$.
A feltétel szerint:

$$a\sqrt{2} = a + 3.$$

Ebből $a = 3(\sqrt{2}+1)$ cm és
a háromszög kerülete: $k = 3a + 3 = 3(3\sqrt{2}+4)$ cm.

1817. Az a oldalú szabályos háromszög magassága

$$m = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A feltétel szerint

$$a = a\frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

Ebből

$a = 4(2+\sqrt{3})$ cm és

$k = 12(2+\sqrt{3})$ cm.

1818. Az a oldalú szabályos háromszög magassága

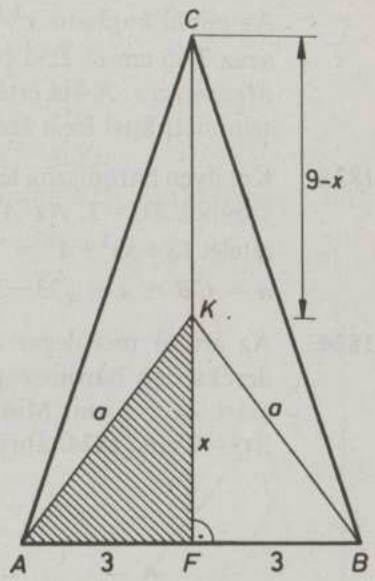
$$m = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A feltétel szerint
$m = a - 6$.
Ebből

$m = 6(3+2\sqrt{3})$ cm.

1819. Az a, b befogójú derékszögű háromszög
átfogójának négyzete: $a^2 + b^2 = 41^2$ és
a háromszög területe: $\frac{1}{2}ab = 180$.
Innen a két befogó 9 cm és 40 cm.

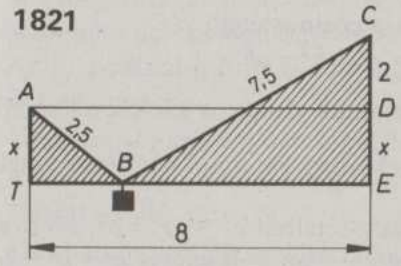
1820. A keresett távolság $FK = x$. Az ABC háromszög szimmetriája miatt, $AK = BK = a$, így a feltétel szerint $2a + (9-x) = 15$. Az AFK derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel szerint $x = \sqrt{a^2 - 9}$. E két összefüggésből adódó $a^2 - 3a + 15 = 0$ egyenlet gyökei $a = 3$ és $a = 5$. Az előbbi alapján $x = 0$ cm, tehát K az alap felezőpontjára esik. Az utóbbiból $x = 4$ cm, így K az ABC háromszög köréírt körének a középpontja (**1820.** ábra).

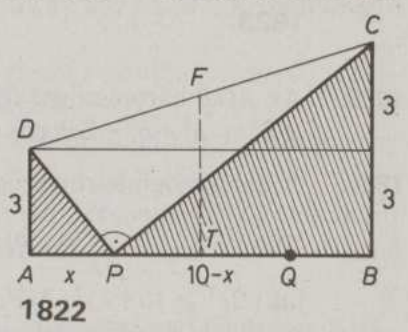


1820

1821. A keresett szakasz $AT = x$. A feltételből adódóan $AB = 2{,}5$ és $BC = 7{,}5$. Az ABT és BCE derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét, figyelembe véve, hogy $AD = 8$, írható:
$\sqrt{2{,}5^2 - x^2} + \sqrt{7{,}5^2 - (2+x)^2} = 8$. Ebből megfelelő rendezéssel két négyzetre emelés után kapjuk: $68x^2 + 36x - 319 = 0$. Ebből kerekítve $x = 1{,}9$ m-t kapunk (**1821.** ábra).

1821





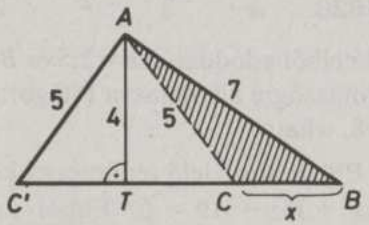
1822

1822. A megoldás feltétele, hogy a DC átmérőjű Thalész-körnek AB szakasszal legyen közös pontja. Itt ez teljesül, mert $FP = \frac{DC}{2} = \frac{\sqrt{109}}{2} > \frac{9}{2} = FT$. A feltétel szerint $CPD\sphericalangle = 90°$. Ezért $APD\sphericalangle = PCB\sphericalangle$, így a $PAD\triangle \sim CBP\triangle$ alapján felírható $\frac{10-x}{6} = \frac{3}{x}$.

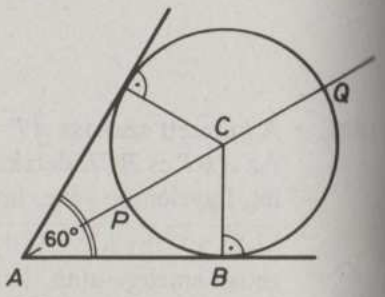
Az ebből kapható $x^2-10x+18=0$ egyenlet gyökei $5+\sqrt{7}$ és $5-\sqrt{7}$, azaz 7,65 cm és 2,35 cm a megoldás (**1822.** ábra).
Megjegyzés: A két értékből látható, hogy P és Q az AB felezőpontjára szimmetrikus. Ez a szerkesztésből is nyilvánvaló.

1823. Két ilyen háromszög létezik ABC és ABC'. Az ATC derékszögű háromszögből $TC=3$. Az ABT derékszögű háromszögre felírva Pitagorasz tételét $(3+x)^2+4^2=7^2$. Innen $3+x=\sqrt{33}$. Ebből
$a=CB=x=\sqrt{33}-3$ és $a'=C'B=x+6=\sqrt{33}+3$ (**1823.** ábra).

1824. Az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Az ABC derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szemközti befogó 3 cm, ezért $AC=6$ cm. Minthogy $BC=CP=CQ=3$ cm, így $AP=3$ cm és $AQ=9$ cm (**1824.** ábra).



1823

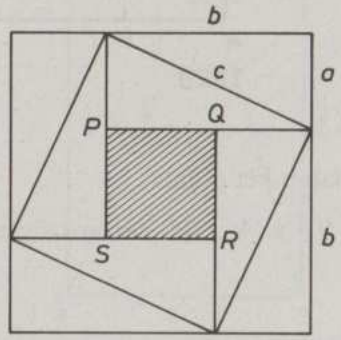


1824

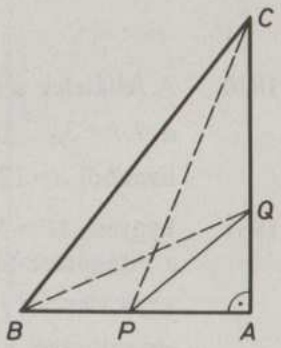
1825. Az AOB háromszögre felírjuk a cosinustételt,
$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°=a^2+b^2-ab$.

1826. A derékszögű háromszög oldalainak szokásos jelölésével az állítás így írható fel: $c\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$. $\sqrt{2}$-vel szorozva, majd négyzetre emelve kapjuk: $2c^2\geqq(a+b)^2$. A Pitagorasz-tételből $c^2=a^2+b^2$, ezért a $2c^2\geqq$ $\geqq a^2+b^2+2ab$ összefüggésből $c^2-2ab\geqq 0$ vagyis $a^2+b^2-2ab\geqq 0$, ami $(a-b)^2\geqq 0$ alakban írható. Ez mindig igaz; egyenlőség $a=b$ esetén adódik. A lépések ekvivalensek, tehát a kiinduló összefüggés is igaz.
Megjegyzés: 1) Az állítás igaz volta leolvasható a Pitagorasz-tétel bizonyításából ismert ábra kiegészítéséből. Itt c^2-2ab a $PQRS$ négyzet területét adja (**1826.***M*. ábra). 2) A négyzetes és a számtani közép közötti összefüggésből az állítás közvetlenül adódik.

1827. Felírjuk a Pitagorasz-tételt (**1827.** ábra)
az ABQ háromszögre $BQ^2=AB^2+AQ^2$ (I.),
APC háromszögre $PC^2=AP^2+AC^2$ (II.),
ABC háromszögre $BC^2=AB^2+AC^2$ (III.),
APQ háromszögre $PQ^2=AP^2+AQ^2$ (IV.).
Az I. és II. egyenlet összege ugyanannyi, mint a III. és IV. összege, amit bizonyítani akartunk.



1826.*M*



1827

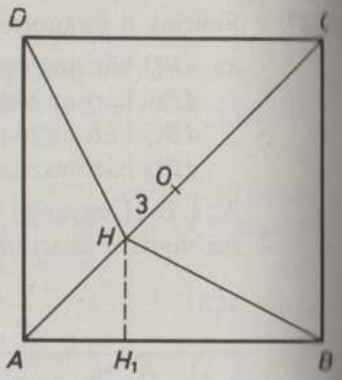
1828. A Pitagorasz-tétel megfordítása szerint az *a)*, *b)*, *d)*, *f)* pontokban szereplő háromszögek derékszögűek.
A Pitagorasz-tételből következik, hogy a *c)* pontban szereplő szakaszok nem derékszögű háromszög oldalai.
Az *e)* pontnál a és b viszonylagos értékétől függ, hogy a háromszög derékszögű-e:
Ha $\sqrt{2}(a+b)$ lenne a derékszögű háromszög legnagyobb oldala, akkor a számításból $b=0$ adódik. Ilyen háromszög nincs, mert a feltétel szerint $b>0$.
Ha a háromszög legnagyobb oldala $a+2b$, úgy pontosan akkor lesz derékszögű, ha $a=b$, tehát a derékszögű háromszög oldalai: a, $3a$, $2\sqrt{2}a$.

1829. Ha $HO=3$ cm, akkor a négyzet átlója $AC=6\cdot HO=18$ cm, s a négyzet oldala $AB=9\sqrt{2}$ cm (**1829.** ábra).
Ebből $HA=6$ cm, és $HC=12$ cm.
Legyen $HH_1\parallel BC$, ekkor H_1 az AB A-hoz közelebb eső harmadoló

pontja, és $HH_1 = \frac{1}{3}BC = 3\sqrt{2}$ cm (pl. a párhuzamos szelők tétele alapján).

$HD = HB$-t a HH_1B derékszögű háromszögből kapjuk:

$$HD = HB = \sqrt{HH_1^2 + H_1B^2} = \sqrt{18+72} = 3\sqrt{10} \text{ (cm)}.$$



1829

1830. A feltételek szerint:

$a = b+3$, $\sqrt{a^2+b^2}+6 = a+b$.

Ezekből $a=12$ dm, $b=9$ dm a téglalap két oldala.

1831. Legyen $AP=PC=x$, ekkor $PB = 9-x$. A PBC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt, az

$x^2 = (9-x)^2+3^2$

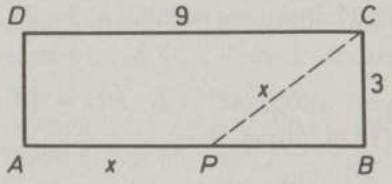
egyenlőséget kapjuk. Ebből $x=5$ (**1831.** ábra).
Tehát P az A csúcstól 5 cm távolságra van.

1832. Legyen $PC=x$, ekkor $AP = 12-x$ és $PB = x-2$. A PBC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt kapjuk (**1832.** ábra):

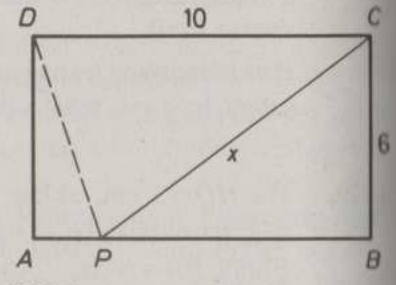
$x^2 = (x-2)^2+6^2$.
Ebből $x=10$, $AP=2$, s az APD derékszögű háromszögből a keresett szakasz

$PD = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$ (cm).

Megjegyzés: $AP<10$ adódott, tehát van AB-nek ilyen tulajdonságú belső pontja.



1831



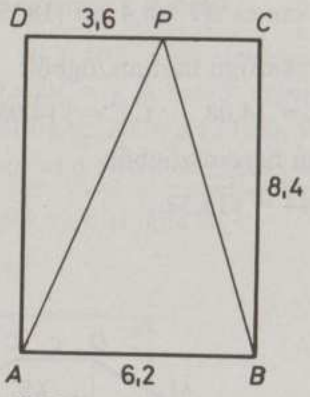
1832

1833. Két eset lehetséges.

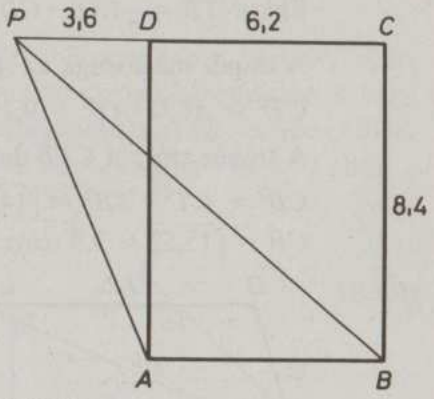
a) P a DC oldal pontja (**1833.** *a)* ábra):
$PC = 6{,}2-3{,}6 = 2{,}6$ (cm).
PA-t és PB-t a Pitagorasz-tétel felhasználásával határozzuk meg.

$PA = \sqrt{8{,}4^2+3{,}6^2} = \sqrt{83{,}52} \approx 9{,}1$ (cm),

$PB = \sqrt{8{,}4^2+2{,}6^2} = \sqrt{77{,}32} \approx 8{,}8$ (cm).



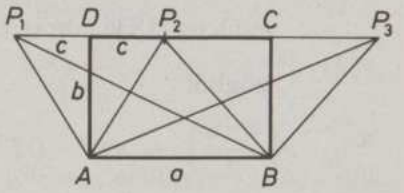
1833a



1833b

b) P nincs a PC szakaszon (**1833.** *b)* ábra): $PC = 6{,}2+3{,}6 = 9{,}8$ (cm), $PA = \sqrt{83{,}52} \approx 9{,}1$ (cm), $PB = \sqrt{9{,}8^2+8{,}4^2} = \sqrt{166{,}6} \approx 12{,}9$ (cm).

1834. A feladatot a Pitagorasz-tétel alkalmazásával oldhatjuk meg (**1834.** ábra).



1834

Ha P a téglalap CD oldalán kívül, a D csúcshoz fekszik közelebb (P_1), akkor

$P_1A = \sqrt{c^2+b^2}$, $P_1C = a+c$, $P_1B = \sqrt{(a+c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$.

Ha P a CD szakasz pontja (P_2), akkor

$P_2A = \sqrt{c^2+b^2}$, $P_2C = a-c$, $P_2B = \sqrt{(a-c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}$.

Ha P a téglalap CD oldalán kívül, a C csúcshoz fekszik közelebb (P_3), akkor

$P_3A = \sqrt{c^2+b^2}$, $P_3C = c-a$, $P_3B = \sqrt{(c-a)^2+b^2} =$

$= \sqrt{(a-c)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}$.

Ezek szerint:

a) Csak akkor van ilyen csúcs – a B –, ha P a DC egyenes D kezdőpontú, C-t nem tartalmazó félegyenesének a pontja.

b) Csak akkor van ilyen csúcs – a B –, ha P a DC félegyenes pontja.

c) A téglalap A csúcsa a keresett csúcs.

1835. Jelöljük T-vel a C pontnak az AB oldalra eső merőleges vetületét. Ekkor $TB = \frac{1}{2}(AB - CD) = 1{,}2$ cm és $AT = 8{,}4$ cm (**1835.** ábra).

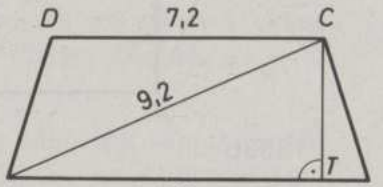
A trapéz magassága az ATC derékszögű háromszögből:

$CT^2 = AC^2 - AT^2 = 9{,}2^2 - 8{,}4^2 = 14{,}08, \quad CT = \sqrt{14{,}08}.$

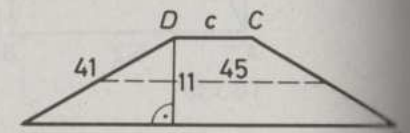
A trapéz szára a CTB derékszögű háromszögből:

$CB^2 = CT^2 + TB^2 = \sqrt{14{,}08 + 1{,}44} = \sqrt{15{,}52},$

$CB = \sqrt{15{,}52} \approx 3{,}9$ (cm).



1835



1836

1836. Jelöljük T-vel a D csúcsnak az AB hosszabbik alapra eső merőleges vetületét (**1836.** ábra). Ekkor $AT = \frac{a-c}{2}$. Az ADT derékszögű háromszögből

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = AD^2 - DT^2,$$

azaz $\quad (a-c)^2 = (41^2 - 11^2) \cdot 4.$

Innen $\quad a - c = 4\sqrt{390},$

másrészt $\quad a + c = 2 \cdot 45 = 90.$

Így $\quad a = 45 + 2\sqrt{390} \approx 84{,}5$ (mm),

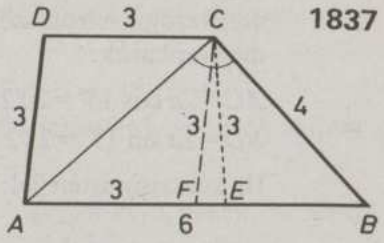
$\quad c = 45 - 2\sqrt{390} \approx 5{,}5$ (mm).

1837. Húzzunk a C ponton keresztül párhuzamost AD-vel. Az így kapott $AFCD$ paralelogramma 3 cm oldalú rombusz. Ezért F felezi az AB oldalt. Ez azt jelenti, hogy C pont rajta van az AB átmérőjű körön, tehát $ACB\sphericalangle = 90°$. AC az ABC háromszögből Pitagorasz-tétellel számítható ki (**1837.** ábra):

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 20,$

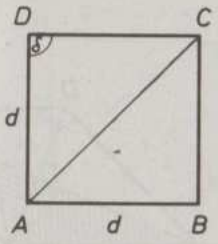
$AC = 2\sqrt{5}$ cm.

Megjegyzés: $AC < BD$, mert az $AECD$ szimmetrikus trapéz átlói $AC = ED$ és a BDE tompaszögű háromszögben $ED < BD$.

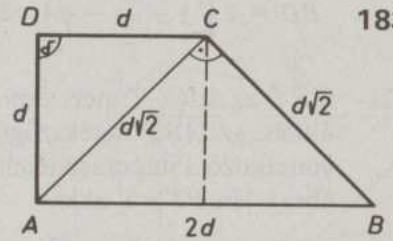


1837

1838. Az AC átló által lemetszett ACD háromszögben $\delta = 90°$, ezért $AD = DC = d$. A másik egyenlő szárú derékszögű háromszögnek vagy az átfogója $AC = d\sqrt{2}$ (*a)*), vagy a befogója (*b)*). Az *a)* esetben (**1838.** *a)* ábra) d oldalú négyzet területe $t = d^2$, a *b)* esetben (**1838** *b)* ábra) a trapéz alapjai d és $2d$, $t = \frac{d + 2d}{2} \cdot d = \frac{3}{2}d^2$.



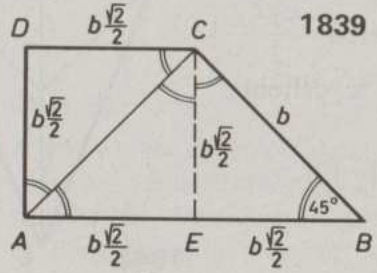
1838a



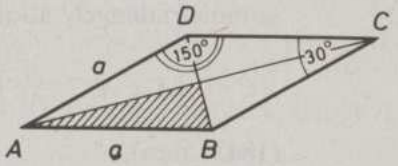
1838b

1839. Ha $\gamma > 90°$, akkor csak $\gamma = 3 \cdot 45° = 135°$ esetén lehet a 3 egyenlő szárú háromszög derékszögű. Ezért a háromszögek befogói $EB = EC = AE = AD = DC = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, a trapéz kerülete: $b + 4\frac{b\sqrt{2}}{2} = b(1 + 2\sqrt{2})$ (**1839.** ábra).

1840. Az $ABCD$ rombusz területe $T = a^2 \sin 150° = 1$, ebből $a = \sqrt{2}$. Az átlók többféle úton is kiszámíthatók (**1840.** ábra). I. Az átlók által létrehozott



1839



1840

derékszögű háromszögből a félátlók sin, illetve cos szögfüggvénnyel megkaphatók:

$AC = 2a \cos 15° = 2\sqrt{2} \cos 15° = \sqrt{3}+1$, illetve (2,73),

$BD = 2a \sin 15° = 2\sqrt{2} \sin 15° = \sqrt{3}-1$, illetve (0,73).

II. két cosinustétellel:

$$AC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 150° = 4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$AC = 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1;$$

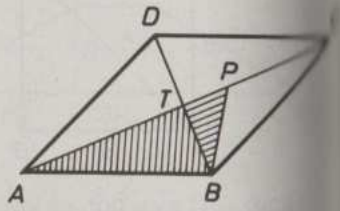
$$BD^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 30° = 4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$BD = 2\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1.$$

1841. Ha P az átlók T metszéspontjára esik, az állítás az ABT derékszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz-tételt jelenti (**1841.** ábra). Ha $PT \neq 0$, akkor

ABT háromszögre $AB^2 = BT^2 + AT^2$ és PBT háromszögre $PB^2 = BT^2 + PT^2$.

A két egyenlet különbsége: $AB^2 - PB^2 = AT^2 - PT^2 = (AT+PT)(AT-PT) = AP \cdot PC$, így az összefüggés teljesül. Felhasználtuk, hogy a rombusz átlói felezik egymást, azaz $AT = CT$.



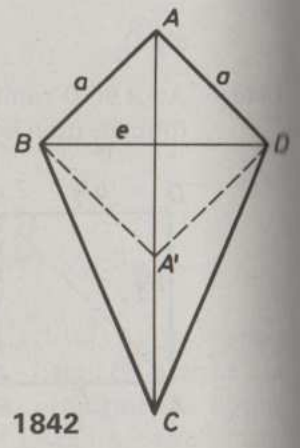
1841

1842. A feltételek miatt $ABA'D$ négyszög a oldalú négyzet, melynek átlója e. Ezért $a = \frac{e\sqrt{2}}{2}$.

Továbbá $A'D = A'C = a$, így a deltoid szimmetriatengely átlója

$$AC = AA' + A'C = e + a = \frac{e(2+\sqrt{2})}{2}$$

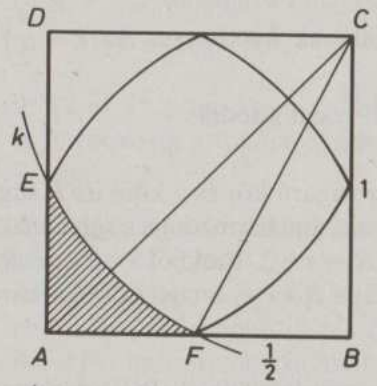
(**1842.** ábra).



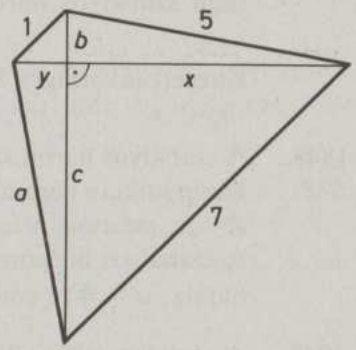
1842

Megjegyzés: Belátható, hogy A a BD átlóhoz közelebbi csúcspont, így A' az átlószakaszra illeszkedik.

1843. A négyzet belsejében C ponttól $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél távolabb azok a pontok vannak, amelyek a $CF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ sugarú, C közepű k körön kívül esnek, az ábrán az EAF idom belső pontjai, ahol E és F a négyzet oldalfelezőpontjai. Ugyanígy kapjuk meg az A-tól, B-től, illetve D-től $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél távolabbi pontokat. A 4 körlemez közös pontjai egyik csúcstól sincsenek $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél távolabb (**1843.** ábra). Ezzel igazoltuk az állítást.



1843



1844

1844. A konvex négyszöget a két egymásra merőleges átló 4 derékszögű háromszögre bontja. Ezekre alkalmazva a Pitagorasz-tételt

$$x^2+b^2 = 25 \qquad x^2+c^2 = 49$$
$$y^2+c^2 = a^2 \qquad y^2+b^2 = 1$$

összegük: $x^2+y^2+b^2+c^2 = 25+a^2$; $\qquad x^2+y^2+b^2+c^2 = 50$.

A két utóbbi egyenlet összehasonlításából $a^2 = 25$, tehát a negyedik oldal $a = 5$ hosszúságegység (**1844.** ábra).

Megjegyzés: Ilyen négyszög létezik: pl. az a trapéz, melynek alapjai 1 és 7 egység, szárai 5 egység.

1845. A gömbfa átmérője egyúttal a téglalap átlója, ami Pitagorasz-tétellel meghatározható.

$d^2 = 36^2 + 22^2 = 1780, \quad d \approx 42{,}2$ cm.

1846. A téglalap átlója a kör átmérője, oldalai $3x$, illetve $4x$. Pitagorasz tétele szerint:

$(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2$. Ebből $x = 4$, ezért az oldalak 12 cm, illetve 16 cm.

1847. A szabályos hatszög középpontja és két szomszédos csúcspontja r oldalú szabályos háromszöget határoz meg.

a) A szabályos hatszög szemköztes oldalainak távolsága két, r oldalú szabályos háromszög magasságának az összege $2 \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, illetve $4\sqrt{3}$ cm.

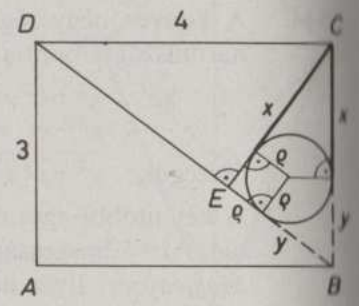
b) A szabályos hatszög szemköztes csúcspontjainak távolsága r magasságú szabályos háromszög oldalának kétszerese. Az $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$-ból a keresett távolságra $2a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$, itt $\frac{16}{\sqrt{3}}$ cm adódik.

1848. A szabályos háromszögbe beírt r sugarú kör és a köré írt R sugarú kör középpontja a háromszög súlypontja, ami harmadolja a súlyvonalat. Ezért $R = 2r$, másrészt a feltétel miatt $R = r + 2$. Ezekből $r = 2$ cm, $R = 4$ cm. A szabályos háromszög magassága $R + r = 6$ cm. Ebből a háromszög oldala: $a = 4\sqrt{3}$ cm.

1849. A téglalap átlója $BD = 5$ (Pitagorasz-tétellel). A BCD derékszögű háromszögre alkalmazva a befogótételt $EB \cdot BD = 9$, ebből $EB = \frac{9}{5}$ (**1849.** ábra).

EC kiszámítása: a BCD háromszög területének kétféle felírásából $2t = 3 \cdot 4 = 5 \cdot EC$ s így $EC = \frac{12}{5}$.

A beírt kör ϱ sugara megkapható a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét figyelembe



1849

véve: $EB + EC = (x+\varrho) + (y+\varrho) = 2\varrho + 3 = \frac{21}{5}$, mert $x + y = BC = 3$. Így $\varrho = \frac{3}{5}$ hosszúságegység.

1850. A szabályos háromszög köréírt és beírt körének középpontja, súlypontja és magasságpontja egybeesik. Ezért a köréírt kör R sugara és a beírt kör r sugara között $R = 2r$ áll fenn, valamint a háromszög m magassága $m = R + r$.

Ezért $3r = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, illetve $\frac{3}{2}R = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ebből

a) az $R = 8$ cm sugarú körbe írt szabályos háromszög oldala

$a = \sqrt{3}R = 8\sqrt{3}$ cm,

b) az $r = 8$ cm sugarú kör köré írt szabályos háromszög oldala

$a = 2\sqrt{3}r = 16\sqrt{3}$ cm.

1851. 9, 12 és 15 pitagoraszi számhármas, ezért a háromszög derékszögű. A háromszög átfogója 15 cm, ezért a köréírt kör sugara ennek fele: 7,5 cm.

1852. A három egyenlő sugarú kör középpontjai: A, B, C, sugara r (**1852.** ábra).

Az ABC háromszög oldalai $2r$ hosszúságúak, ezért szabályos. A háromszög O középpontja az adott k kör középpontja.

Az ABC háromszög köréírt körének sugara:

$OA = 1 - r$,

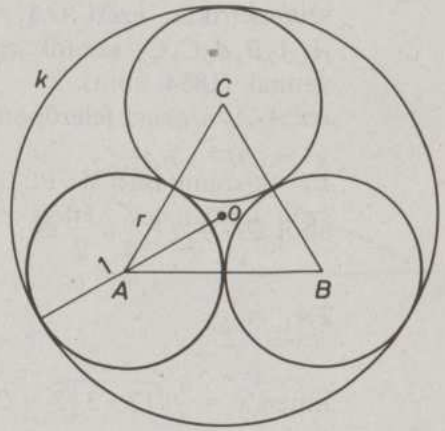
ezért magassága

$m = \frac{3}{2}(1 - r)$.

Másrészt

$m = 2r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ezért $r = 2\sqrt{3} - 3$ egység.



1852

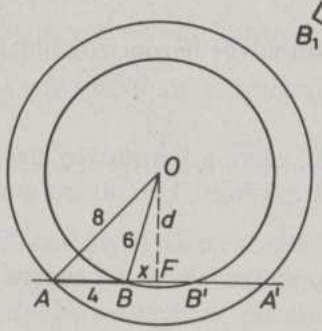
1853. Legyenek a szelőnek a körökkel való metszéspontjai A, A', illetve B, B'. A húrok közös felezőpontját jelöljük F-fel, s legyen $FO = d$, $BF = x$ (**1853.** ábra).

Írjuk fel az AFO és BFO derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt!

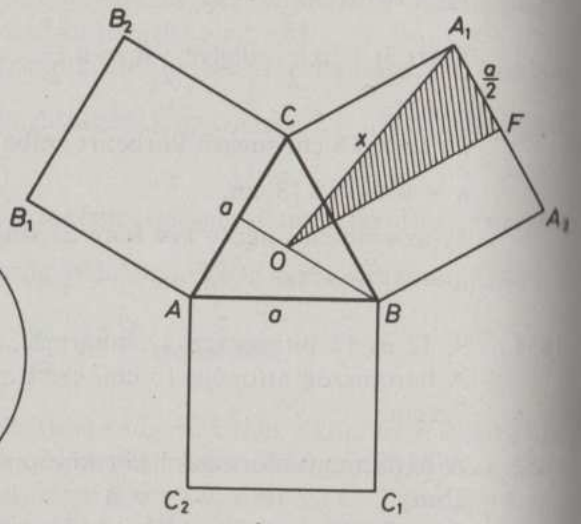
$d^2 + (4+x)^2 = 8^2$,

$d^2 + x^2 = 6^2$.

Ezekből ($x = 1{,}5$ cm) $d = \sqrt{33{,}75} \approx 5{,}81$ (cm).



1853



1854

1854. A kapott alakzat a szabályos háromszög szimmetriatengelyeire szimmetrikus, ezért $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$, azaz az $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ pontok egy O középpontú, $x = OA_1$ sugarú körön vannak (**1854.** ábra).

Az A_1A_2 szakasz felezőpontja F. Az OFA_1 derékszögű háromszögben

$x^2 = OF^2 + FA_1^2$,

ahol $OF = a + \frac{1}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2}$ és

$FA_1 = \frac{a}{2}$.

Innen $x = \frac{a}{3}\sqrt{12 + 3\sqrt{3}} = 2{,}4\sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$ (cm) $\approx 9{,}95$ (cm).

1855. A párhuzamos húrok szakaszfelező-merőlegese közös és átmegy a kör középpontján (**1855.** ábra). A besatírozott derékszögű háromszögek segítségével a 16 cm-es húr a középponttól

$d_1 = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5}$ (cm) ($\approx 8{,}944$ cm),

a 20 cm-es húr pedig

$d_2 = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11}$ (cm) ($\approx 6{,}633$ cm)

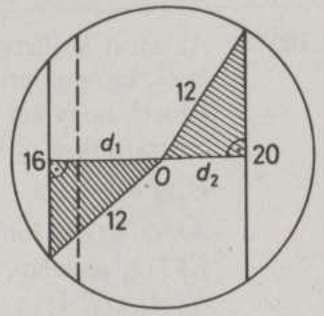
távolságra van.

Ha a két párhuzamos húrt a kör középpontja elválasztja, akkor távolságuk

$d_1 + d_2 = (4\sqrt{5} + 2\sqrt{11})$ cm ($\approx 15{,}58$ cm),

ha nem választja el, akkor távolságuk

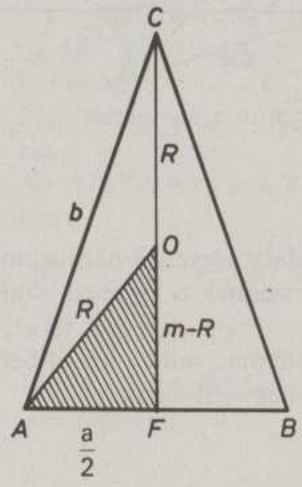
$d_1 - d_2 = (4\sqrt{5} - 2\sqrt{11})$ cm ($\approx 2{,}31$ cm).



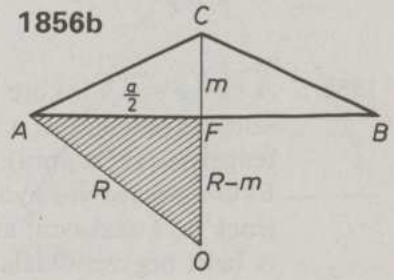
1855

1856. Jelöljük az alap felezőpontját F-fel, a körülírt kör középpontját O-val. Az OAF derékszögű háromszög oldalai $\frac{a}{2}$, $|m-R|$ és R (**1856.***a), b)* ábra). Ezekre $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (m-R)^2 = R^2$.

1856a



1856b



Másrészt a feltétel szerint

$a+m = 2R$, azaz $m-R = R-a$,

így

$(R-12)^2+36 = R^2$.

Innen $R=7{,}5$, $m=3$.

Tehát az ABC egyenlő szárú háromszög tompaszögű és szára az AFC háromszögből:

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2} = 3\sqrt{5}\ \text{(cm)} \quad (\approx 6{,}71\ \text{cm}).$$

1857. Az adott K, illetve O középpontú köröket és a húrt érintő r sugarú, O_1 és O_2 középpontú körök a szimmetria miatt egybevágóak (**1857.** ábra). Ismert, hogy két kör pontosan akkor érinti egymást, ha sugaraikra és centrálisukra $r_1+r_2 = c$ vagy $|r_1-r_2| = c$ igaz. Ennek alapján

$O_1O = r+1{,}5$, $O_1K = 4{,}5-r$ és $OK=3$.

Az O_1KO háromszög O_1 csúcsához tartozó magasság talppontja T, $EFTO_1$ téglalap, ezért $TK = 1{,}5+r$, és így $TO = 1{,}5-r$.

Az O_1OT és a KO_1T derékszögű háromszögekből

$O_1T^2 = O_1O^2 - TO^2$

és

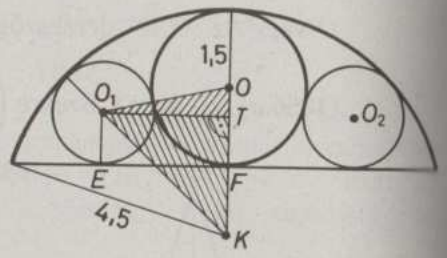
$O_1T^2 = O_1K^2 - TK^2$,

azaz

$(r+1{,}5)^2-(1{,}5-r)^2 =$

$= (4{,}5-r)^2-(1{,}5+r)^2$.

Ebből a körök keresett sugara $r=1$ cm.



1857

1858. A körbe és a kör köré írt négyzetek oldalai legyenek párhuzamosak, és szimmetriatengelyei a szabályos nyolcszögnek is legyenek szimmetriatengelyei (**1858.** ábra).

Ekkor a szabályos nyolcszög oldala nem más, mint a kör A-beli érintőjének az a szakasza, amely a körülírt négyzetbe esik.

A beírt négyzet oldala AB,

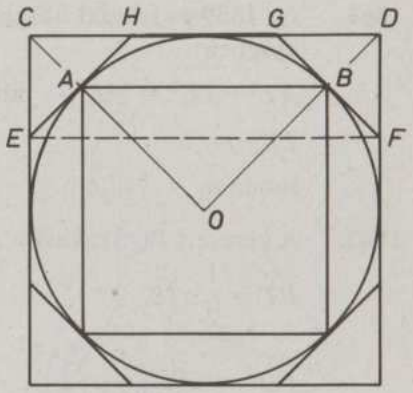
a körülírt négyzet oldala $CD=EF$, a körülírt szabályos nyolcszög oldala $EH=HG=GF$.

$EFGH$ szimmetrikus trapéz alapjai EF, HG és középvonala AB. Ezért

$$AB = \frac{CD+HG}{2},$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés: Az állítást úgy is bizonyíthatjuk, ha a szakaszokat a kör sugarával fejezzük ki. ($AB = \sqrt{2}r$, $CD=2r$, $HG = 2(\sqrt{2}-1)r$.)



1858

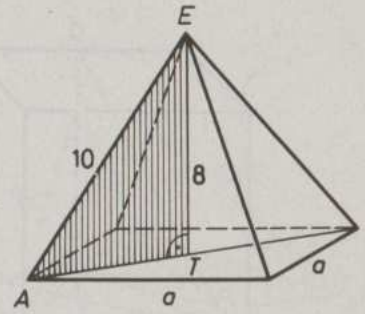
1859. A gúla magasságának T talppontja egyúttal az alaplap középpontja is (**1859.** ábra).

Ha az alapél a, $AT = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Az ATE derékszögű háromszögben

$AT^2+TE^2 = AE^2$,

azaz $\frac{a^2}{2} = 100-64$,

amiből $a = 6\sqrt{2}$ cm.



1859

1860. A szabályos tetraéder D csúcsából az ABC lapra bocsátott merőleges talppontja T, az ABC szabályos háromszög súlypontja (**1860.** ábra).

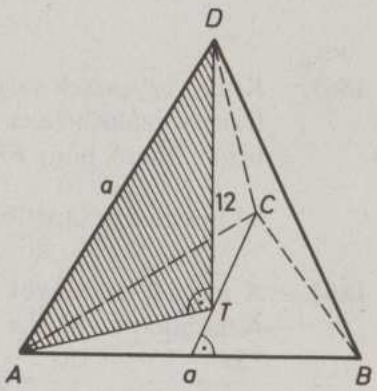
Az ATD derékszögű háromszögben:

$AD=a$, $TD=12$, $AT = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}$ és

$AD^2 = TD^2+AT^2$.

Ebből a tetraéder éle:

$a = 6\sqrt{6}$ cm.



1860

1861. Az **1859**-es feladat ábráját használjuk fel. Az ATE derékszögű háromszögben

$AT^2 + TE^2 = AE^2$, ahol $AT = 2\sqrt{2}$ cm, $AE = 6$ cm,

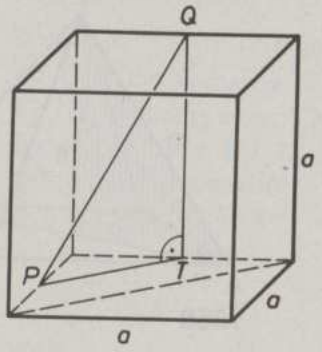
$TE = m$.

Innen $m = 2\sqrt{7}$ cm.

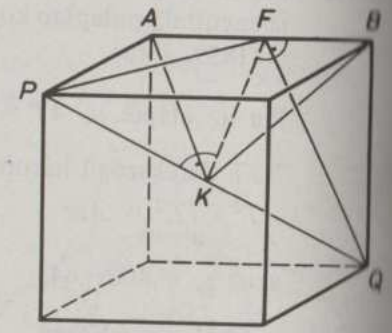
1862. A keresett PQ szakasz a PQT derékszögű háromszög átfogója. $QT = a$, $PT = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

$$PQ^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2, \quad \text{ebből} \quad PQ = \frac{a}{2}\sqrt{6}.$$

$a = 2$ esetén $PQ = \sqrt{6}$ hosszúságegység (**1862.** ábra).



1862



1863

1863. Kitérő egyenesek távolsága a mindkettőjükre merőleges ún. normáltranszverzális hossza. Két egyenlő szárú háromszöggel (PQF és ABK) bizonyítható, hogy FK a keresett szakasz (merőleges PQ-ra is és AB-re is) hossza egy lapátló fele: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**1863.** ábra).

1864. A megadott arányok alapján az egy csúcsba futó élek: $2x$, $5x$, $14x$. A testátló $f^2 = 4x^2 + 25x^2 + 196x^2$, ebből $f = 15x$. A keresett arányok:

$\frac{15x}{2x} = \frac{15}{2}$; $\frac{15x}{5x} = 3$; $\frac{15x}{14x} = \frac{15}{14}$ mind racionális.

1865. A közölt számok akkor és csak akkor lehetnek egy téglatest oldalélei és testátlója, ha teljesül rájuk az ún. térbeli Pitagorasz-tétel.
Teljesül: *a), c), d).*
Nem teljesül: *b), e).*

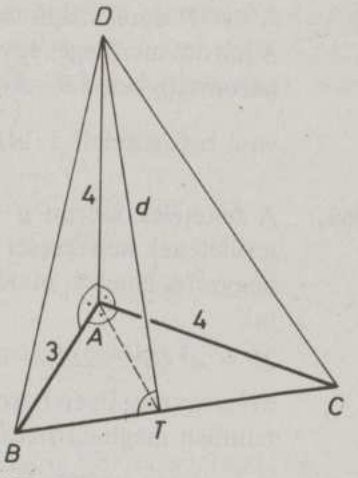
1866. ABC háromszögből Pitagorasz-tétellel $BC = 5$.
Felírhatjuk az ABC háromszög területét két úton:

$$t = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,$$

ebből

$$AT = \frac{12}{5}.$$

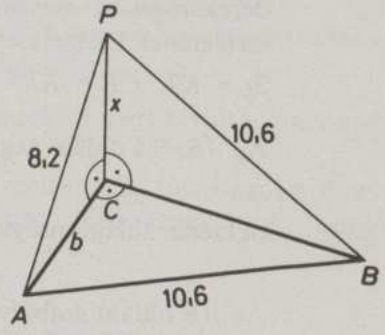
Az ADT derékszögű háromszögből $d^2 = 4^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{544}{25}$, ezért a keresett szakasz $\frac{4\sqrt{34}}{5}$ egység (**1866.** ábra).



1866

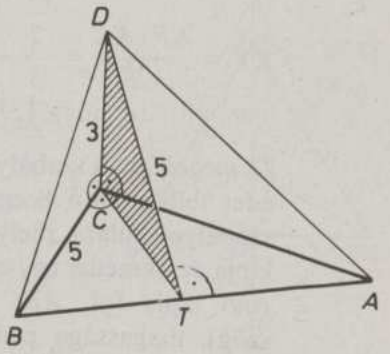
1867. A keresett szakasz $CP = x$. Létrejött 2 egybevágó háromszög (2 oldal és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő). $ABC\triangle \cong PBC\triangle$, ezért $x = b$. Így ACP háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát $x\sqrt{2} = 8{,}2$ (**1867.** ábra).
Ebből

$$x = \frac{8{,}2}{\sqrt{2}} = 4{,}1\sqrt{2}\ (\approx 5{,}80)\ \text{(cm)}.$$



1867

1868. D pontnak az AB-től való távolsága a D-ből az AB-re állított merőleges egyenesből kimetszett DT szakasz hossza (**1868.** ábra).



1868

A DCT derékszögű háromszögben $CT=4$ cm. (Pitagorasz-tétellel.) A három merőleges egyenes tétele alapján $CT \perp AB$. A BTC derékszögű háromszögben $TB=3$ cm. Az ABC derékszögű háromszögre alkalmazva a befogótételt $3 \cdot AB = 5^2$, ahonnan $AB = \frac{25}{3}$ cm.

1869. A feltételek szerint $a-b = 5$ (I.) és $a^2+b^2 = c^2$ (II.). A háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva $2t = ab = 12c$ (III.). Az I-et négyzetre emelve, majd figyelembe véve a II. és III. összefüggést, kapjuk:

$25 = a^2+b^2-2ab = c^2-24c$, ahonnan $c=25$ dm.

Megjegyzés: Ilyen háromszög létezik, s az adatok e háromszöget egyértelműen meghatározzák.

1870. *I. megoldás* (**1870.** ábra). A keresett távolság, a K középpontnak az ABC háromszög síkjától való KT távolsága nem más, mint a CKF derékszögű háromszög K-ból induló magassága. Ezért e háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva

$2t = KT \cdot CF = KF \cdot KC.$

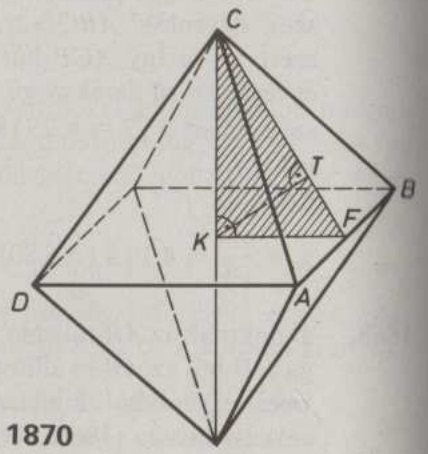
Az $AB=\sqrt{6}$ oldalú négyzet középvonalának fele $KF = \frac{\sqrt{6}}{2}$. A szabályos oktaéder tulajdonságai alapján $KC \perp KB$ és $KC = KB = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

Az AB oldalú szabályos háromszög magassága $CF = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Mindezt figyelembe véve

$$KT = \frac{KF \cdot KC}{CF} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{3}}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}} = 1.$$

II. megoldás. A szabályos oktaéder felbontható 8 egybevágó szabályos gúlára, melyek alaplapja az oktaéder egy-egy határoló lapja (pl. ABC háromszög), magassága pedig e lapoknak a K középponttól való



1870

távolsága (pl. KT). Az oktaéder térfogata egyrészt e 8 tetraéder térfogatának összege, másrészt alapjával összeillesztett 2 szabályos 4 oldalú gúla térfogatának összege. Ezen összefüggésből is eljuthatunk a fenti eredményhez.

1871. A Pitagorasz-tétel szerint $a^2+b^2 = c^2$.
A háromszög területének négyszerese $2ab=2cm$.
A két egyenlet különbsége: $(a-b)^2 = c^2-2cm$.
A feltétel szerint $a-b = m$, így m-re az

$m^2+2cm-c^2 = 0$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek pozitív gyöke:

$m = c(\sqrt{2}-1)$.

1872. Felhasználjuk, hogy a derékszögű háromszög kétszeres területe $ab=cm$, és hogy a Pitagorasz-tétel szerint $a^2+b^2 = c^2$, kapjuk:

$m^2+(a-b)^2 = m^2+a^2+b^2-2ab = m^2+c^2-2cm = (c-m)^2$.

Ezért az m, $a-b$ és $c-m$ szakaszok a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján, egy derékszögű háromszög oldalai.

1873. A szimmetria miatt P-nek a B és C csúcsoktól mért távolsága azonos (**1873.** ábra).
A BFP derékszögű háromszögből a keresett $d=BP$ távolságot a Pitagorasz-tétel segítségével határozzuk meg. Felhasználhatjuk, hogy

$BF = \frac{a}{2}$ és $AF = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

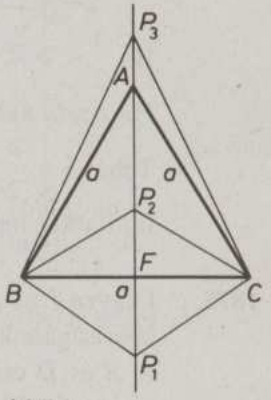
P-t az AF egyenesen A-tól kétféle irányba mérhetjük fel.
Ha P az AF félegyenes pontja (P_1, P_2), akkor

$FP = \left| b - a\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$, és a keresett távolság:

$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}.$

Ha P az A kezdőpontú, F-et nem tartalmazó félegyenes pontja (P_3), akkor $FP = b+a\frac{\sqrt{3}}{2}$, és a keresett távolság:

$d = \sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$.



1873

1874. (Az **1873**-as ábráját használjuk.)
Ha P a B és C csúcstól b távolságra van, akkor P illeszkedik a BC oldalfelező-merőlegesére. $\left(P \text{ csak akkor létezik, ha } b \geqq \frac{a}{2}.\right)$

PFB derékszögű háromszögben $PB=b$, $BF=\frac{a}{2}$, ezért

$$PF=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad \text{másrészt} \quad AF=a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

BC oldalfelező-merőlegesét az A és F pont két félegyenesre és egy (AF) szakaszra bontja. A PA távolság attól függ, hogy P a felsorolt ponthalmazok melyikének pontja.
Az ábrának megfelelően:

$$P_1A=AF+P_1F=a\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}};$$

$$P_2A=AF-P_2F=a\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}};$$

$$P_3A=P_3F-AF=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}-a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Megjegyzés:

$b<\frac{a}{2}$ esetén nincs P.

$b=\frac{a}{2}$ esetén $P=F$.

Ha $\frac{a}{2}<b<a$, akkor két P pont van: P_1 és P_2 típusúak.

Ha $a\leqq b$, akkor két P pont van: P_1 és P_3 típusúak.

Tehát $b>\frac{a}{2}$ esetén a három képlet közül a fentiek szerint kell kiválasztani a két megfelelőt.

1875. Legyen P az A csúcstól b távolságra. A P pontnak a C-től és O-tól mért távolságának leolvasásához felhasználjuk, hogy a négyzet átlója $a\sqrt{2}$. A B és D csúcsoktól mért távolságát a POD derékszögű háromszög segítségével határozzuk meg: $PD^2=PO^2+OD^2$ (**1875.** ábra).

Ha P a négyzeten kívül, a C csúcshoz fekszik közelebb, mint A-hoz (P_1), akkor

$$P_1C=b-a\sqrt{2}, \quad P_1O=b-a\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_1D=P_1B=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}.$$

Ha P az OC szakasz pontja (P_2), akkor

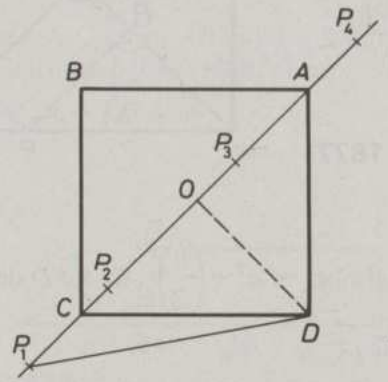
$$P_2C=a\sqrt{2}-b, \quad P_2O=b-a\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_2D=P_2B=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}.$$

Ha P az OA szakasz pontja (P_3), akkor

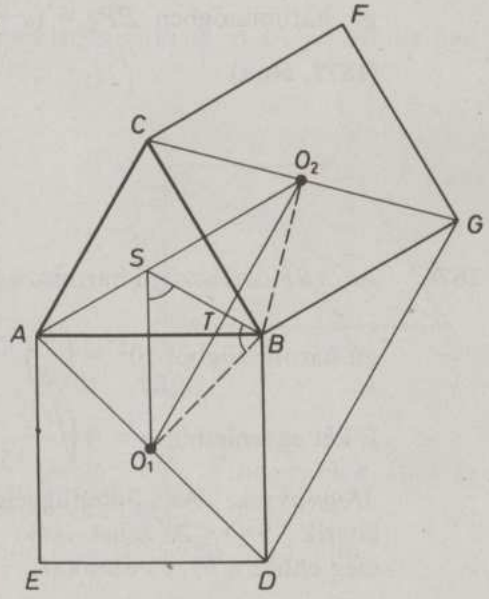
$$P_3C=a\sqrt{2}-b, \quad P_3O=a\frac{\sqrt{2}}{2}-b, \quad P_3D=P_3B=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}.$$

Ha P a négyzeten kívül az A csúcshoz fekszik közelebb, mint C-hez (P_4), akkor

$$P_4C=a\sqrt{2}+b, \quad P_4O=a\frac{\sqrt{2}}{2}+b, \quad P_4D=P_4B=\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}.$$



1875



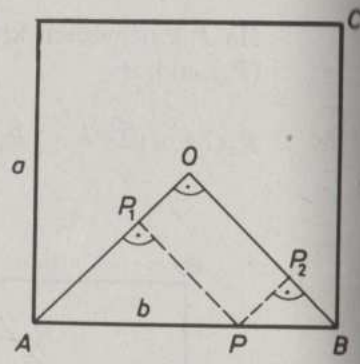
1876

1876. *I. megoldás:* Az O_1O_2S egyenlő szárú háromszög szára $SO_1=\frac{a}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, szárszöge 120° (**1876.** ábra).

Az alap felét az STO_1 derékszögű háromszögből kapjuk. $O_1T = \frac{a}{4}(1+\sqrt{3})$. Ebből $O_1O_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a$.

II. megoldás: Az O_1O_2B egyenlő szárú háromszög szára $O_1B = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, szárszöge 150°.
Ebből az alapot cosinustétellel kapjuk.
III. megoldás: O_1O_2 az $ADGC$ szimmetrikus trapéz középvonala.

1877. Ha P az AB oldal pontja, akkor $AP = b \leqq a$.
Állítsunk P-ből merőlegest a két átlóra; a talppontok P_1, P_2. A keresett szakaszok PP_1 és PP_2.
APP_1 egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $PP_1 = b\frac{\sqrt{2}}{2}$, hasonlóan a PP_2B egyenlő szárú derékszögű háromszögben $PP_2 = (a-b)\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**1877.** ábra).

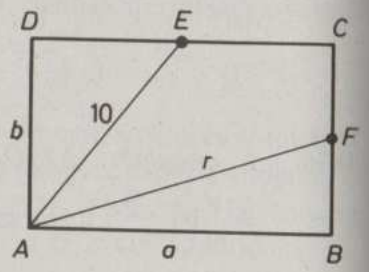


1877

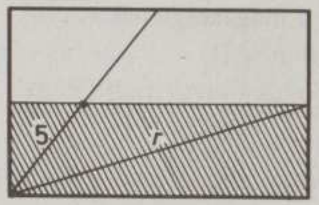
1878. Az ABF derékszögű háromszögből $r^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, az AED derékszögű háromszögből $10^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$.

E két egyenletből $a = 4\sqrt{\frac{r^2-25}{15}}$, $b = 2\sqrt{\frac{400-r^2}{15}}$ (**1878.***a)* ábra).

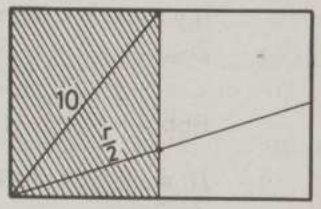
Megjegyzés: Az összefüggésekből látszik: $5 < r < 20$ lehet csak. Lásd még ehhez a *b), c)* ábrákat.



1878a



1878b



1878c

1879. A hosszabbik átlót az ACC_1, a rövidebbik átlót a BDD_1 derékszögű háromszögből határozhatjuk meg. ADD_1 és BCC_1 derékszögű háromszögek egybevágóak és $BC_1 = AD_1 = a\sqrt{3}$. Ezt felhasználva kapjuk:

$AC^2 = (AB+BC_1)^2 + CC_1^2$, azaz $AC = a\sqrt{13+6\sqrt{3}}$,

és $BD^2 = (AB-AD_1)^2 + DD_1^2$, azaz $BD = a\sqrt{13-6\sqrt{3}}$.

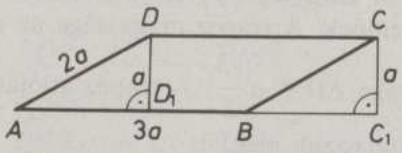
(**1879.** ábra).

1880. A rövidebbik átló az ACD derékszögű háromszögből:

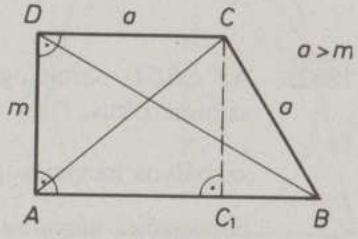
$AC = \sqrt{a^2+m^2}$.

C_1 a C csúcs AB oldalra eső merőleges vetülete. A CC_1B derékszögű háromszögből (**1880.** ábra)

$C_1B = \sqrt{a^2-m^2}$.



1879



1880

Ezért a hosszabbik alap: $AB = a + \sqrt{a^2-m^2}$. A hosszabbik átlót az ABD derékszögű háromszögből kapjuk meg:

$BD = \sqrt{m^2+(a+\sqrt{a^2-m^2})^2} = \sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-m^2}}$.

1881. *I. megoldás:* Az O középpontú körhöz B-ből, illetve C-ből húzott érintőszakaszok egyenlők. Ezért

egyrészt $BE = BF = a-r$, illetve $CF = CG = c-r$,

másrészt $COB\sphericalangle = 90°$.

Így a COB háromszögre felírhatjuk a magasságtételt:

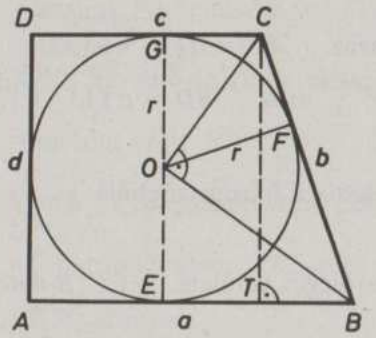
$r^2 = (c-r)(a-r)$.

Ebből $r = \dfrac{ac}{a+c}$ (**1881.** ábra).

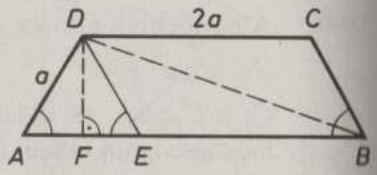
II. megoldás: Az adott trapéz érintőnégyszög, ezért $b+d = a+c$, ahol $d=2r$.

A CTB derékszögű háromszögben $b^2-d^2 = (a-c)^2$.

Az egyenletrendszerből: $d = 2r = \dfrac{2ac}{a+c}$.



1881



1882

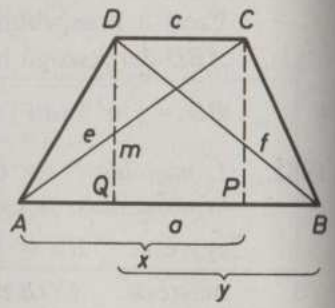
1882. Az $EBCD$ paralelogrammában $EBC\sphericalangle = 60°$, ezért az $ABCD$ trapéz szimmetrikus, s így átlói egyenlőek. A trapéz magassága az a oldalú szabályos háromszög magassága $FD = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. A trapéz átlóját a DFB derékszögű háromszögből határozzuk meg.

$BD^2 = FD^2 + FB^2$, ahol $FB = FE + EB = 2{,}5a$,

azaz $BD = a\sqrt{7}$ (**1882.** ábra).

1883. Legyen a C-ből, illetve D-ből húzott magasság talppontja P, illetve Q, $AP = x$ és $QB = y$.

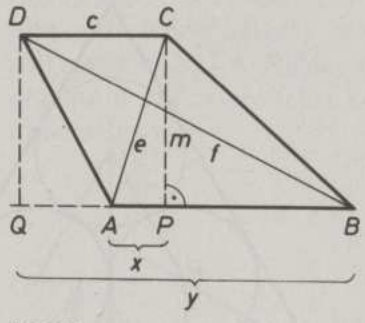
Az APC, illetve BQD derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből $x = \sqrt{e^2-m^2}$, $y = \sqrt{f^2-m^2}$.



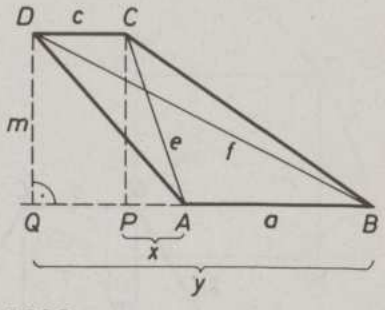
1883a

Minthogy $a = x+y-c$ (I.) (**1883.** *a), b)* ábra), így $a = \sqrt{f^2-m^2} + \sqrt{e^2-m^2} - c$ (II.). A feltételek szerint $f \geqq m$, $e \geqq m$, és x és y közül legalább az egyik nagyobb mint c, ezért $a > 0$ teljesül.

Megjegyzés: A „nagyon ferde" trapéz esetében I. $a = |y-x| - c$, illetve II. $a = \left|\sqrt{e^2-m^2} - \sqrt{f^2-m^2}\right| - c$ adódik (**1883.***c)* ábra).



1883b



1883c

1884. Ha az alapoknak közös a felezőmerőlegese (PQ), akkor a trapéz tengelyesen szimmetrikus.

A-ból és B-ből a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.

$BQ = BT = \dfrac{c}{2}$, $\quad AP = AT = \dfrac{a}{2}$

(**1884.** ábra).

BK és AK szögfelező lévén könnyen belátható, hogy AKB háromszög derékszögű, alkalmazható rá

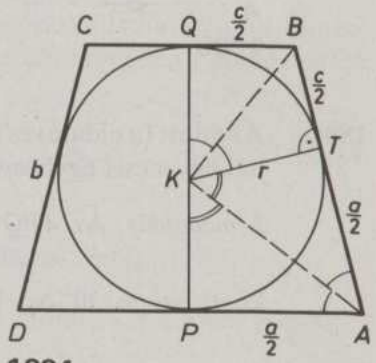
a magasságtétel $\quad \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{c}{2} = r^2, \qquad ac = 4r^2,$

másrészt $\quad \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} = b, \qquad a+c = 2b$

} Az egyenletrendszert

megoldva $a = b + \sqrt{b^2-4r^2}$, $c = b - \sqrt{b^2-4r^2}$.

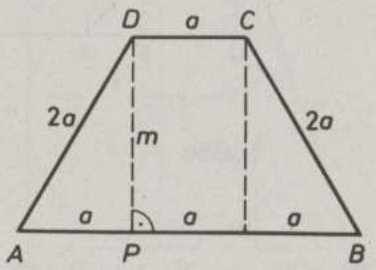
Megjegyzés: A feltételek miatt itt valós értékek adódnak.



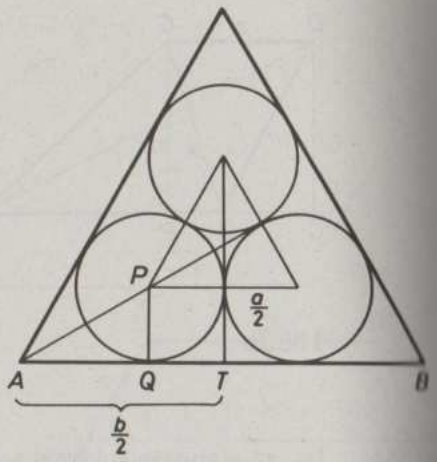
1884

1885. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézból a D-ből induló magasság, DP a $2a$ átfogójú, a befogójú derékszögű háromszöget metszi le, ezért $DAP\sphericalangle = 60°$. Így $DP = a\sqrt{3}$. A keresett $(AC=)\ BD$ átló a BDP derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel adódik:

$BD^2 = BP^2 + PD^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{3})^2$; $\quad BD = a\sqrt{7}$ (**1885.** ábra).



1885



1886

1886. Az adott (a oldalú) és a keresett (b oldalú) szabályos háromszög súlyvonal egyenesei egybeesnek, tehát súlypontjuk közös (**1886.** ábra).

I. megoldás: Az APQ derékszögű háromszög $PQ = \frac{a}{2}$ oldalával szemközti szöge 30°-os, így $AQ = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. A keresett háromszög oldala

$$b = 2AT = 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\right) = a(\sqrt{3}+1).$$

II. megoldás: A súlypont itt egyúttal a két szabályos háromszög hasonlósági középpontja. Így az oldalak és a megfelelő súlyvonalak harmadának arányát figyelembe véve:

$$b : a = \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right) : \left(\frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right),$$

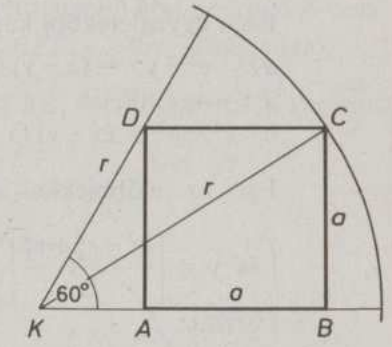
amiből $b = a(\sqrt{3}+1)$ adódik.

1887. A KAD derékszögű háromszög egyik szöge 60°-os. Ezért $KA = a : \sqrt{3}$.

A KBC háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt $KB = \frac{a}{\sqrt{3}} + a$ miatt

$$\left[\frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right]^2 + a^2 = r^2.$$ Ebből $a = r\sqrt{\frac{3}{7+2\sqrt{3}}} = r\sqrt{\frac{3(7-2\sqrt{3})}{37}} \approx 0{,}5354r$ (**1887.** ábra).

(*Megjegyzés:* 1. A négyzet K középpontú hasonlósággal meg is szerkeszthető. 2. A feladat megoldható a $KAC\triangle$-re felírt koszinusztétellel is.



1887

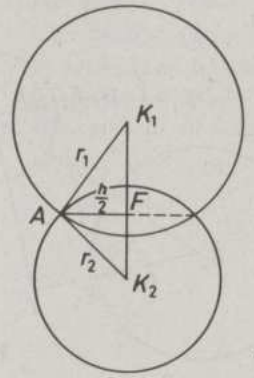
1888. A K_1 és K_2 középpontú körök egyik metszéspontja A. Az AK_1K_2 háromszög magassága $AF = \frac{h}{2}$.

Az AK_1F és AK_2F derékszögű háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt. K_1, K_2 és F viszonylagos helyzetétől függően a középpontok távolsága:

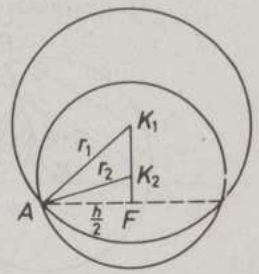
$$K_1K_2 = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$ (**1888.** *a)* ábra), illetve

$$K_1K_2 = \left|\sqrt{r_1^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}\right|$$ (**1888.** *b)* ábra).

Megjegyzés: A feltételekből adódóan itt mindig valós érték adódik.



1888a



1888b

1889. Az **1888**-as feladat jelöléseit és alapgondolatát felhasználva, továbbá $K_1F=x$ és $K_2F=y$ jelölést alkalmazva kapjuk: $x^2 = r_1^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2$ és $y^2 = r_2^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2$.

Ezen egyenletekből kapjuk:

a) $x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = c(x-y) = r_1^2-r_2^2$ összefüggést, ha $x+y = c$, illetve

b) $x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = (x+y)c = r_1^2-r_2^2$, ha $x \geqq y$ és $x-y = c$.

Ezt az előbbiekkel összevetve mindkét esetben $x = \frac{c^2+r_1^2-r_2^2}{2c}$ $\left(\text{és } y = \left|\frac{c^2-r_1^2+r_2^2}{2c}\right|\right)$ adódik, s meghatározhatjuk a keresett húr hosszát:

$$h = \frac{1}{c}\sqrt{2c^2r_1^2+2r_1^2r_2^2+2r_2^2c^2-c^4-r_1^4-r_2^4},$$

ami átírható így is:

$$h = \frac{1}{c}\sqrt{(r_1^2+r_2^2+c^2)^2-2(r_1^4+r_2^4+c^4)}.$$

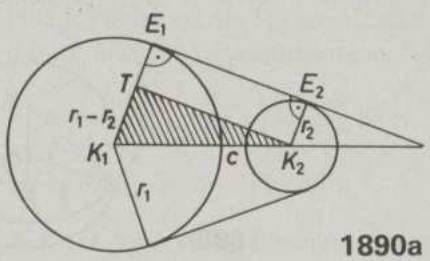
1890. A körök K_1, K_2 középpontjai és az E_1, E_2 érintési pontok trapézt határoznak meg. A keresett érintőszakasz $E_1E_2 \| K_2T$ és $E_1E_2 = K_2T$, K_2T a trapéz K_2-re illeszkedő magassága. A Pitagorasz-tételt felírva a K_1K_2T derékszögű háromszögre

a) közös külső érintő esetén (**1890.***a)* ábra):

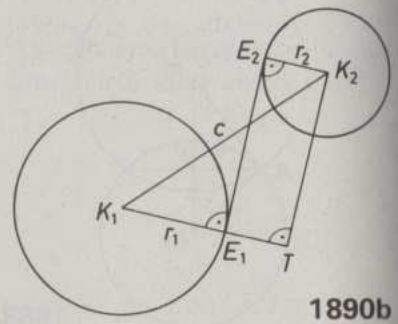
$E_1E_2 = \sqrt{c^2-(r_1-r_2)^2}$, továbbá

b) közös belső érintő esetén (**1890.***b)* ábra):

$E_1E_2 = \sqrt{c^2-(r_1+r_2)^2}$.



1890a

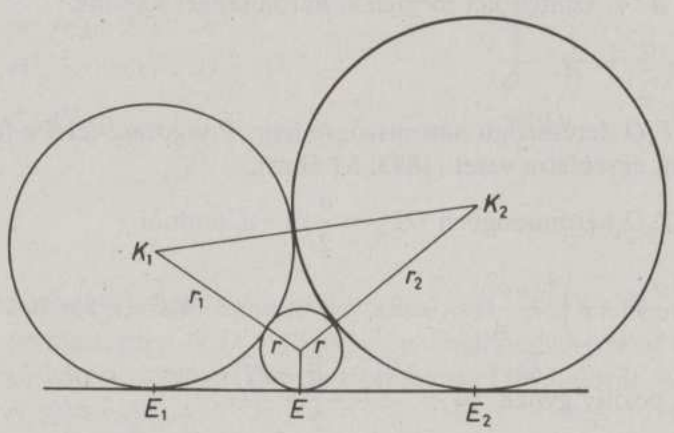


1890b

1891. Az **1890**-es feladat jelöléseit és gondolatmenetét alkalmazva $E_1E_2 = \sqrt{c^2-(r_1-r_2)^2}$. Itt a két kör érintése miatt $c = r_1+r_2$, ezért $E_1E_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$ összefüggést kapjuk.

1892. Az **1890**-es feladat jelöléseit alkalmazva kapjuk, mint az **1891**-es feladatban, $E_1E_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$. Érintse a keresett r sugarú kört az érintő E-ben. Az előbbieket alkalmazva $E_1E = 2\sqrt{r_1r}$ és $EE_2 = 2\sqrt{rr_2}$ (**1892.** ábra).

Ezekből, felhasználva az $E_1E_2 = E_1E+EE_2$ összefüggést is, a keresett sugár: $r = \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$.



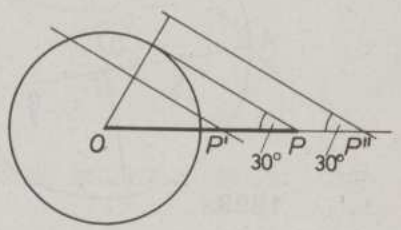
1892

1893. A szabályos háromszög szimmetriatengelye az OP egyenes. Ezért az ezzel 30°-os szöget bezáró, P-re illeszkedő egyenesek és a kör közös pontjai lesznek a háromszög további csúcspontjai.

Az **1893.** *c)* ábra mutatja, hogy csak $d \leqq 2r$ esetén van ilyen ABP háromszög. (Egy háromszög, ha $d=2r$, két háromszög, ha $d<2r$.)

A szabályos háromszög a oldalát az ATO derékszögű háromszögből határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy az ATP háromszögben

$$PT = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{és} \quad AT = \frac{a}{2}.$$



1893c

a) Ha $d>r$, az ATO, ill. $A'T'O$ derékszögű háromszögben

$$OT = \frac{a}{2}\sqrt{3}-d, \quad OT' = d-\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

A Pitagorasz-tétel szerint mindkét esetben

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}-d\right)^2 + \frac{a^2}{4}, \quad \text{azaz} \quad a^2 - ad\sqrt{3} + (d^2-r^2) = 0.$$

Ez a-ban másodfokú egyenlet, melynek gyökei a keresett oldalak:

$$a = \frac{d\sqrt{3}+\sqrt{4r^2-d^2}}{2} \quad \text{és} \quad a' = \frac{d\sqrt{3}-\sqrt{4r^2-d^2}}{4}$$ (**1893.** *a)* ábra).

b) Ha $d<r$, szintén két megfelelő háromszöget kapunk.

$$OT_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}-d.$$

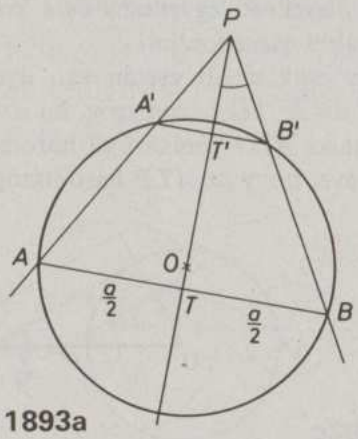
Az A_1T_1O derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel a fenti másodfokú egyenletre vezet (**1893.** *b)* ábra).

Az A_2T_2O háromszögben $OT_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}+d$, amiből

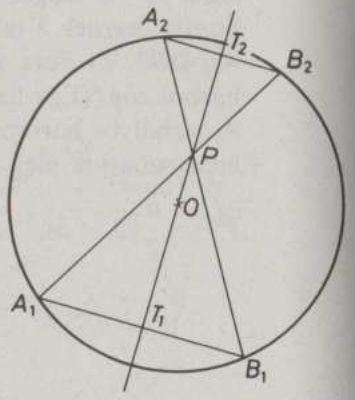
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}+d\right)^2 + \frac{a^2}{4}, \quad \text{azaz} \quad a^2 + ad\sqrt{3} + (d^2-r^2) = 0.$$

Ennek pozitív gyöke: $a_2 = \frac{\sqrt{4r^2-d^2}-d\sqrt{3}}{2}$.

Az a, a_2, illetve a', a_2 értékpárok közül $a'+a_2 = 0$, ez nem megoldás. A keresett oldalakat $a_1 = a$ és a_2 adja meg.



1893a



1893b

1894. Jelöljük az ismeretlen sugarat x-szel! Egymást érintő körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesre illeszkednek (**1894.** ábra).

Ezért $OQ = OF - QF = r-x$ és $QP = QE + EP = x+r$.

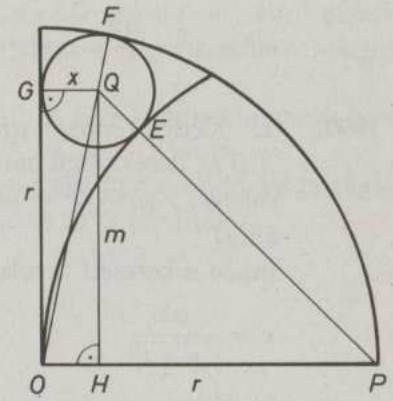
Legyen az OPQ háromszög Q csúcsbeli magasságának talppontja H. $QG \perp OG$, ezért az $OHQG$ téglalap, s így $OH = QG = x$.

Az OPQ háromszög QH magasságát kétféleképpen fejezzük ki az OHQ és a PHQ derékszögű háromszögből:

$$m^2 = (r-x)^2 - x^2,$$

$$m^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2.$$

Ezekből $x = \frac{r}{6}$.



1894

1895. Jelöljük a körök sugarait r_1-gyel és r_2-vel. A két kör merőlegesen metszi egymást, ezért O_1O_2P háromszög derékszögű. ABP és CDP derékszögű háromszögek a Thalész-tétel szerint (**1895.** ábra). A fentiek miatt

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

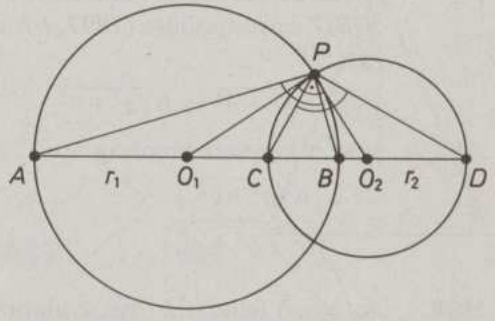
$$(2r_1)^2 = PA^2 + PB^2,$$

$$(2r_2)^2 = PC^2 + PD^2.$$

Ezért

$$O_1O_2^2 = \frac{PA^2+PB^2+PC^2+PD^2}{4},$$

amit bizonyítanunk kellett.

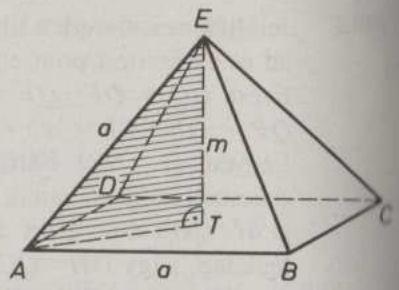


1895

1896. A gúla csúcsának alaplapra eső merőleges vetülete a négyzet középpontja: T (**1896.** ábra).

$AT = \frac{a}{\sqrt{2}}$, s így az ATE derékszögű háromszögben

$m^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$, azaz $a = m\sqrt{2}$.



1896

1897. *a)* Kétféleképpen írjuk fel az $A'B'D'$ derékszögű háromszög területét: $x\sqrt{a^2+b^2} = ab$ (**1897.** *a)* ábra).

Innen a keresett távolság:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b) $A'D'$ merőleges az $ABB'A'$ lapra, ezért merőleges $A'B$ lapátlóra is. Tehát $A'BD'$ derékszögű háromszög.

Ebben $A'D' = b$,

$A'B = \sqrt{a^2+c^2}$ (lapátló)

és

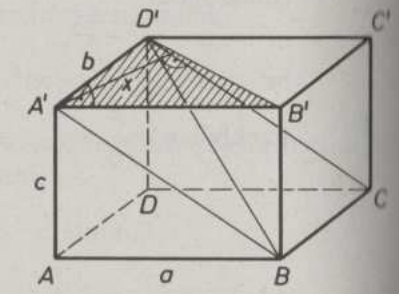
$BD' = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (testátló).

Az előző módszert alkalmazva az $A'BD'$ háromszögre (**1897.** *b)* ábra):

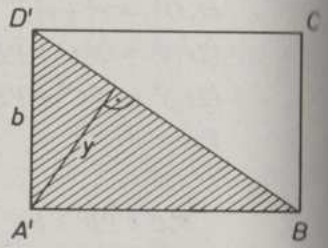
$y\sqrt{a^2+b^2+c^2} = b\sqrt{a^2+c^2}$,

azaz a keresett távolság

$$a = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



1897a



1897b

1898. Az előző feladat *b)* része alapján, ha a kocka élét x-szel jelöljük:

$$a = \frac{x\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x} = x\sqrt{\frac{2}{3}},$$

s innen a kocka éle $\sqrt{\frac{3}{2}}a$.

1899. A háromszög síkjában a köré írt kör középpontja (az oldalfelező-merőlegesek metszéspontja) van egyenlő távolságra a csúcsoktól (**1899.** ábra).

Ha egy pont (a térben) egyenlő távol van a háromszög csúcsaitól, akkor illeszkedik a köré írt kör középpontjában a síkra emelt merőleges egyenesre.

Ez derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontjában emelt merőleges egyenes.

Tehát az ABP egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságát kell meghatározni, ha a szár d, és az alap $\sqrt{a^2+b^2}$. Ebből

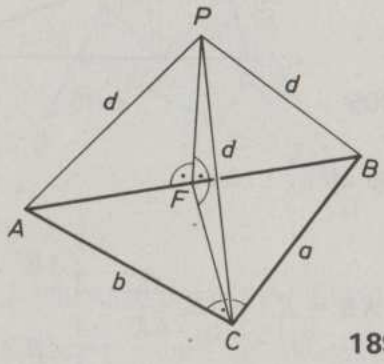
$$PF^2 = d^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2,$$

$$PF = \frac{\sqrt{4d^2-a^2-b^2}}{2}.$$

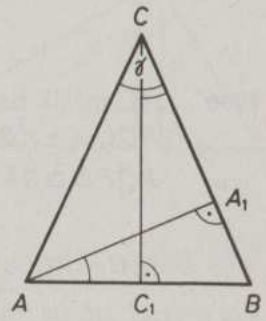
1900. $A_1AB\sphericalangle$ és $C_1CB\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Mivel CC_1 az ACB szög felezője, ezért

$\gamma = 2A_1AB\sphericalangle$.

(A keresett arány 2 : 1.)
(**1900.** ábra).



1899



1900

1901. A feladat a párhuzamos szelők témakörébe tartozó összefüggésekkel vagy az ABE és ACD háromszögek hasonlóságával oldható meg.

a) $\frac{x}{2} = \frac{1}{1{,}5}$, ebből $x = \frac{4}{3}$;

b) $\frac{y}{1{,}4} = \frac{3{,}5}{2}$, ebből $y = 2{,}45$.

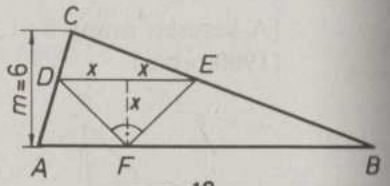
1902. Az a alapú, b szárú háromszögre felírva kétszer a terület kétszeresét: $2t = 8a = 6b$, másrészt az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. A Pitagorasz-tétel szerint $b^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. A két összefüggésből $a = \frac{48}{\sqrt{55}}$, $b = \frac{64}{\sqrt{55}}$.

1903. Az $ABC\triangle \sim BDC\triangle$, mert 2-2 szögük páronként egyenlő. Ezért $a : 9 = 16 : a$. Ebből $a = 12$ ($a = BC$).

1904. Az $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert 2-2 szögük páronként egyenlő, ezért $AD : 2 = 2 : 4$. Ebből $AD = 1$, $DC = 3$.

1905. Az $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, ezért, ha $DE = 2x$, felírható $2x : (m - x) = c : m$. Ebből $x = \frac{cm}{2m + c} = \frac{18}{5} = 3{,}6$. Így a DEF háromszög oldalai: $DE = \frac{36}{5} = 7{,}2$; $EF = \frac{18}{5}\sqrt{2} = 3{,}6\sqrt{2}$ (**1905.** ábra).

Megjegyzés: a feltétel – ABC háromszög hegyesszögű – biztosítja, hogy létezik DEF háromszög.



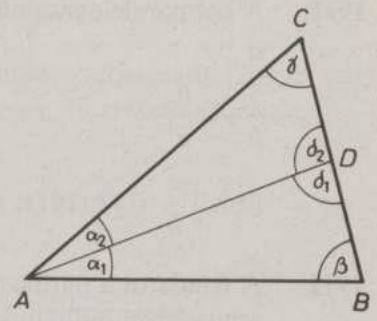
1905

1906. AC másik harmadolópontja R.
$RQC\triangle \sim ABC\triangle$, a hasonlósági arány 1 : 3 és
$RQP\triangle \cong AKP\triangle$, ezért

$KA = RQ = \frac{1}{3}AB$. Minthogy $KB = KA + AB$, $\frac{AK}{BK} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{4}{3}AB} = \frac{1}{4}$.

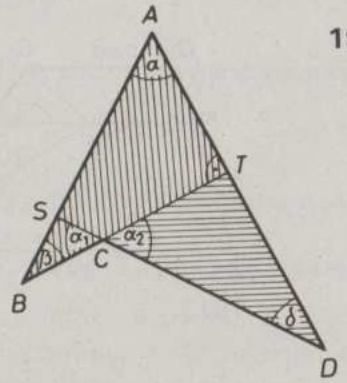
1907. Mivel az ABC háromszöget két háromszögre bontjuk, ezért a szelő átmegy az egyik csúcson. Legyen a szelő AD. A feltétel szerint ADB és ADC háromszögek hasonlóak (ahol nem biztos, hogy például B-nek C csúcs felel meg) (**1907.** ábra).
δ_1 az ADC háromszög (δ_2 mellett fekvő) külső szöge, ezért $\delta_1 > \gamma$ és $\delta_1 > \alpha_2$. Így $\delta_1 = \delta_2 = 90°$ esetén lehet csak hasonló a két háromszög.

Két eset lehetséges:
a) Ha $\beta = \gamma$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú és $AB = AC$.
b) Ha $\beta = \alpha_2$, akkor $\gamma = 90° - \beta$, így ABC derékszögű háromszög, ahol $\alpha = 90°$.



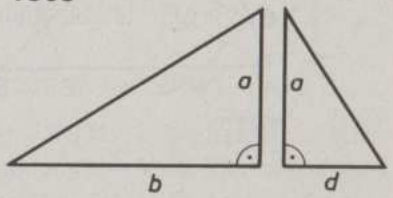
1907

1908. A két háromszög hasonlósága miatt $\alpha_2 = \alpha$ és $\delta = \beta$, ahol $\alpha + \beta = 90°$. $\alpha_1 = \alpha_2$, mert csúcsszögek. Ezért a BSC háromszögben $\alpha_1 + \beta = 90°$, azaz $BSC\sphericalangle = 90°$. Tehát $AB \perp CD$ (**1908.** ábra).
Megjegyzés: Ha a hasonló háromszögekben az A-nak megfelelő pont nem a C lenne, az állítás hamis lenne.



1908

1909



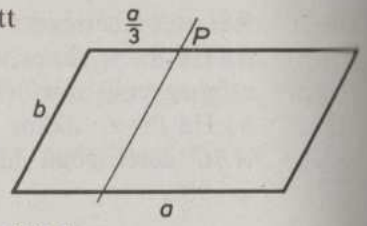
1909. A feltétel szerint $a^2 = bd$. Ebből $\frac{a}{b} = \frac{d}{a}$ következik, ami az oldalak által közbezárt szögek egyenlősége (90°) miatt éppen azt jelenti, hogy a két háromszög hasonló (**1909.** ábra).

1910. A megadott téglalap kerülete $k = 8{,}4$ dm $= 84$ cm. Ezért a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{52}{84} = \frac{13}{21}$. Az adott téglalaphoz hasonló téglalap oldalai $\left(24 \cdot \frac{13}{21} =\right) \frac{104}{7}$ cm és $\frac{78}{7}$ cm.

1911. A két paralelogramma hasonlósága miatt

$$\frac{\frac{a}{3}}{b} = \frac{b}{a}.$$

Ebből $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ (**1911.** ábra).



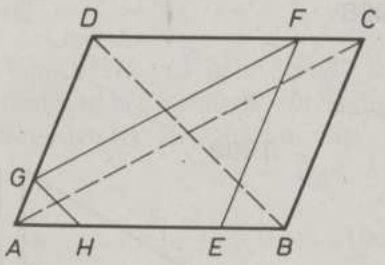
1911

1912. A feladatot a párhuzamos szelők tételével vagy hasonló háromszögek segítségével oldhatjuk meg (**1912.** ábra).

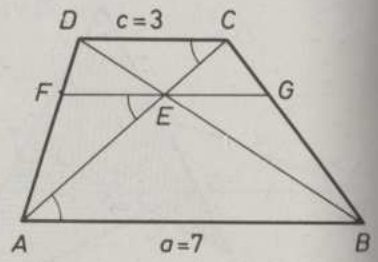
$EBCF$ paralelogramma, ezért $FC = EB = \frac{1}{4}AB$. Mivel $FG \| AC$, így $AG = \frac{1}{4}AD$. Hasonlóan $GH \| BD$-ből következik, hogy $AH = \frac{1}{4}AB$.

Ezért H az AB szakasz másik negyedelőpontja.

Megjegyzés: Az eredmény független AB és BC hosszától, csak az $EB : AB$ aránytól függ.



1912



1913

1913. *a)* $ABE\triangle \sim CDE\triangle$, ezért $AB : CD = AE : EC$. Tehát az átlók 7 : 3 arányban osztják egymást.

b) Az átlók E metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos egyenes a szárakat F és G pontban metszi.

$DCA\triangle \sim FEA\triangle$, ezért $FE : DC = AE : AC$. Tudjuk az *a)* pontból, hogy $AE : AC = 7 : 10$. Ebből $FE = 2{,}1$ cm.

Hasonlóan megmutatható, hogy $EG = 2{,}1$ cm. Tehát $FG = 4{,}2$ cm (**1913.** ábra).

Megjegyzés: Általában a trapéz átlói az alapok arányában $(a : c)$ osztják egymást és $FE = EG = \frac{ac}{a+c}$.

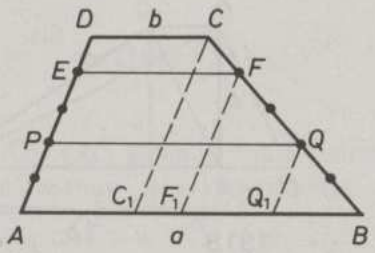
1914. Legyen $CC_1 \| FF_1 \| QQ_1 \| AD$ (**1914.** ábra).

Ekkor $C_1B = a - b$ és $PQ - EF = F_1Q_1$.

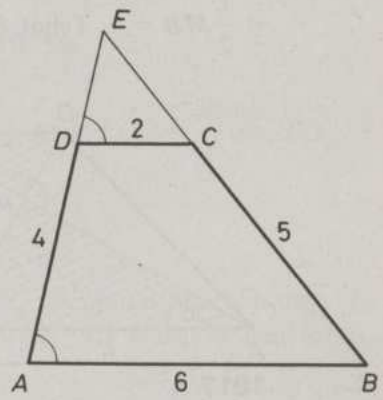
A C_1BC háromszög CB oldalának ötödölő pontjain át CC_1-gyel párhuzamos egyenesek a C_1B szakaszt öt egyenlő részre osztják.

Ezért $F_1Q_1 = \frac{2}{5}C_1B$.

Tehát $PQ - EF = \frac{2}{5}(a-b)$.



1914



1915

1915. *a)* A szárak egyenesének metszéspontja E. $EDC\triangle \sim EAB\triangle$, ezért

$$\frac{AE}{DE} = 3, \quad \text{illetve} \quad \frac{BE}{CE} = 3.$$

Tehát a kiegészítő háromszög ismeretlen oldalai: $DE = 2$ és $CE = 2{,}5$ egység.

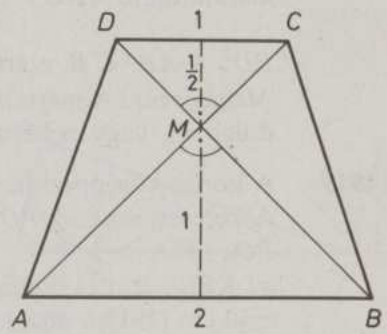
b) Az **1913.***a)* megoldása szerint ez az arány 1 : 3 (**1915.** ábra).

1916. Az átlók metszéspontja M, $CDM\triangle \sim ABM\triangle$, megfelelő oldalainak aránya 1 : 2, valamint $CD = 1$ miatt $AB = 2$. A két háromszög egyenlő szárú derékszögű, az átfogóhoz tartozó magasságok összege $m = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$ (**1916.** ábra).

Az $ABCD$ trapéz területe

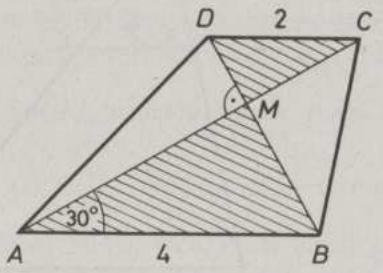
$$t = \frac{a+c}{2}m = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{9}{4} \text{ területegység.}$$

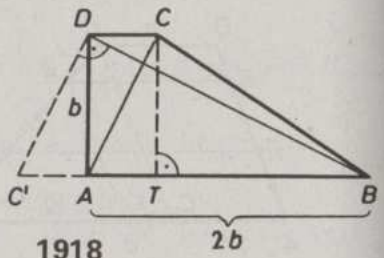


1916

1917. Az $ABCD$ trapéz AC átlóját a rövidebb BD átló M-ben metszi. $ABM\triangle$ az AB oldalú szabályos háromszög fele, ezért $BM = \frac{1}{2}AB = 2$ cm. Az $MCD\triangle \sim MAB\triangle$, megfelelő oldalaik aránya $1:2$. Ezért $MD = \frac{1}{2}MB = 1$. Tehát $BD = 3$ cm (**1917.** ábra).



1917



1918

1918. Az adott szár $AD = b$, ebből $AB = 2b$. C-t tükrözve AD felezőpontjára, a kapott C' AB egyenesére esik. $ACDC'$ paralelogramma, ezért $DC' \perp BD$. $BC'D$ derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságtételt $AC' \cdot AB = b^2$, $AC' = DC = \frac{b}{2}$ (**1918.** ábra).

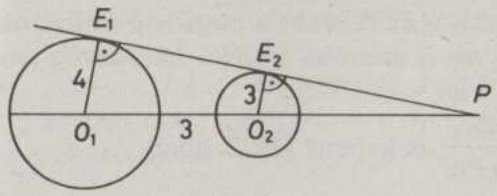
A BCT derékszögű háromszögből $BC^2 = TB^2 + TC^2 = \left(\frac{3}{2}b\right)^2 + b^2$, $BC = \frac{b}{2}\sqrt{13}$. Az átlók hossza a $BC'D$ háromszögből befogótétellel kiszámítható: $(DC')^2 = C'A \cdot C'B$, azaz $DC' = AC = \frac{b}{2}\sqrt{5}$.

$BD^2 = AB \cdot C'B$, ezért $BD = b\sqrt{5}$.

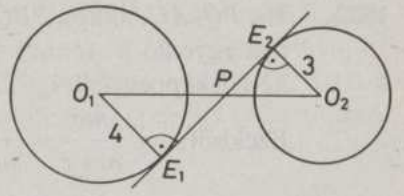
Megjegyzés: A mértani közép tételek helyett lehet Pitagorasz tételével dolgozni, vagy például ABD és DAC háromszögek hasonlóságával.

1919. A körök középpontja O_1 és O_2, a közös érintő érintési pontja E_1, E_2. A keresett szakasz $PO_2 < PO_1$, $PO_2E_2\triangle \sim PO_1E_1\triangle$, ezért $PO_2 : PO_1 = 3:4$.

a) Külső érintés esetén $PO_1 = PO_2 + 10$, ebből $PO_2 = 30$ cm, $PO_1 = 40$ cm (**1919.***a* ábra).



1919a



1919b

b) Belső érintés esetén, $PO_1 + PO_2 = 10$, ezért $PO_2 = \frac{30}{7}$ cm, $PO_1 = \frac{40}{7}$ cm (**1919.***b)* ábra).

1920. Az ABC egyenlő szárú háromszög BC alapjának felezőpontja F, a beírható kör középpontja: K. A kör az AB szárat T-ben érinti, $TA = x = b - \frac{a}{2}$, $BC = a$, $AC = b$.

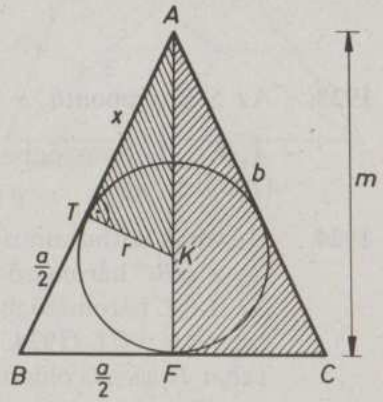
$AKT\triangle \sim ACF\triangle$, $x : r = m : \frac{a}{2}$.

$AKT\triangle$-re Pitagorasz tételét felírva: $x^2 + r^2 = (m-r)^2$ (**1920.** ábra).
Az x-et kiküszöbölve

$$a = 2r\sqrt{\frac{m}{m-2r}}.$$

A fentebbieket figyelembe véve kapható:

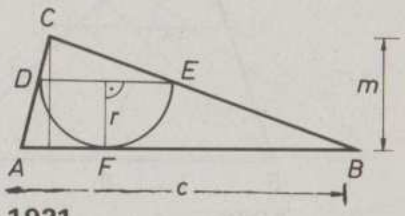
$$b = (m-r)\sqrt{\frac{m}{m-2r}}.$$



1920

1921. A gondolatmenetet lásd az **1905.** megoldásánál: DE a kör átmérője, F az érintési pont. A kör sugara (**1921.** ábra):

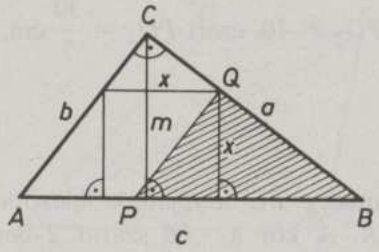
$$r = \frac{cm}{2m+c} = \frac{12 \cdot 4}{8+12} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$



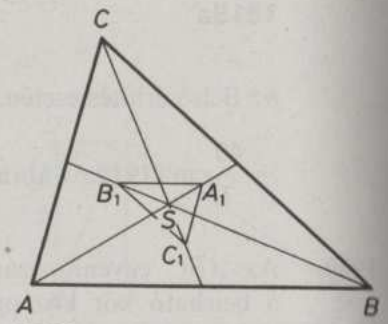
1921

1922. Ha $PQ \| AC$, akkor $PBQ\triangle \sim ABC\triangle$, ezért a megfelelő szakaszok aránya egyenlő $x:(c-x)=m:c$, másrészt az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva: $2t=mc=ab$.

Ezekből $x=\dfrac{mc}{m+c}=\dfrac{abc}{ab+c^2}$-et kapunk (**1922.** ábra).



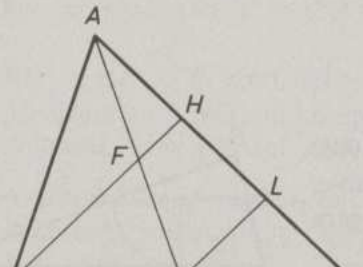
1922



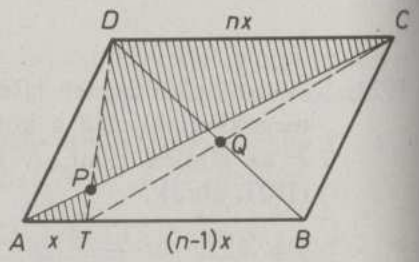
1923

1923. Az S középpontú $-\dfrac{1}{4}$ arányú hasonlóság az ABC háromszöget az $A_1B_1C_1$ háromszögbe viszi, ahol S a két háromszög közös súlypontja (**1923.** ábra).

1924. Húzzunk párhuzamost a HB egyenessel A_1-ben. Ez AC-t L-ben metszi. Így a HBC háromszögnek LA_1 középvonala, ezért $CL=HL$.
Az AA_1L háromszögben HF az A_1L oldallal párhuzamos középvonal, ezért $AH=HL$ (**1924.** ábra).
Tehát H az AC oldalt harmadolja.



1924



1925

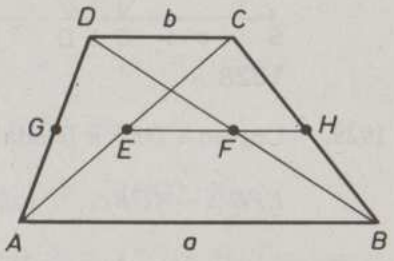
1925. A szomszédos osztáspontok távolsága: x (**1925.** ábra). Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalára illeszkedő T-re igaz, hogy $AT=x$, továbbá $CD=nx$. Az ATP háromszög és CDP háromszög hasonlóak, ezért a keresett arány: $AP:PC=1:n$. Ugyanígy a BTQ és DCQ háromszögek hasonlóak, ezért $BQ:QD=(n-1):n$.

1926. Legyenek G, H a szárak, E, F az átlók felezőpontjai, és $a \geqq b$ (**1926.** ábra). EH az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos középvonala, ezért $EH=\dfrac{a}{2}$.

FH a CDB háromszög DC oldalával párhuzamos középvonala, ezért $FH=\dfrac{b}{2}$.

Így $EF=EH-FH=\dfrac{1}{2}(a-b)$.

1927. A trapéz AD szárán az n-edik osztópontot $(n<k)$ P-vel jelöljük (**1927.** ábra). Legyen $PQ \| AB$. Ebből (a párhuzamos szelők tétele alapján) $QB:CB=n:k$.
A BD átló a PQ szakaszt R-ben metszi.



1926

$PRD\triangle \sim ABD\triangle$, ezért

$\dfrac{PR}{a}=\dfrac{PD}{AD}=\dfrac{k-n}{k}$, azaz

$PR=a\dfrac{k-n}{k}$.

Hasonlóan

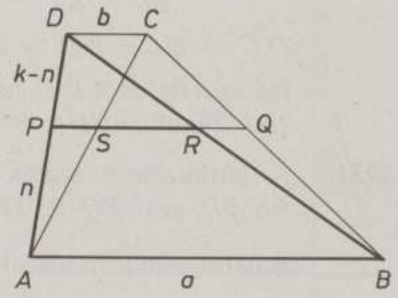
$RQB\triangle \sim DCB\triangle$, ezért $\dfrac{RQ}{b}=\dfrac{n}{k}$,

azaz $RQ=b\dfrac{n}{k}$.

Tehát $\dfrac{PR}{RQ}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{k-n}{n}$.

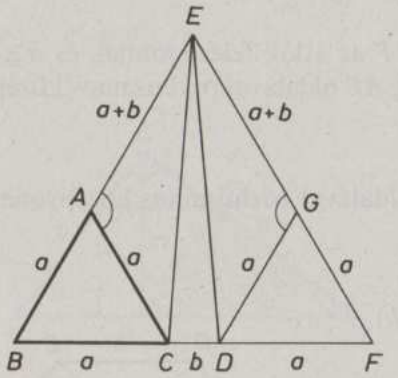
Megmutatható, hogy a PQ szakasz az AC átlót olyan S pontban metszi, amelyre $PS=RQ$, s így

$\dfrac{PS}{SQ}=\dfrac{bn}{a(k-n)}$.

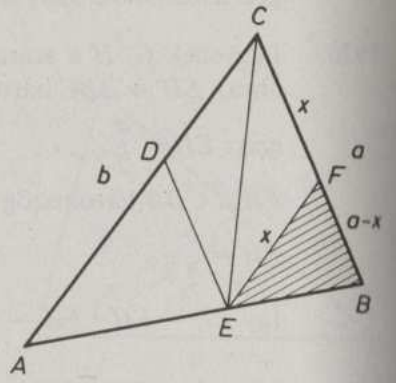


1927

1928. Kiegészítjük az ábrát a $2a+b$ oldalú BEF szabályos háromszöggé. Legyen G az EF szakasznak az a pontja, amelyre $GF=a$. Így $DG=a$. $ACE\triangle \cong GDE\triangle$, hiszen oldalai $a+b$ és a, és az ezek által bezárt szög 120°. Tehát harmadik oldaluk is egyenlő $EC=ED$ (**1928.** ábra).



1928



1929

1929. Legyen $CDEF$ a feladatban szereplő x oldalú rombusz (**1929.** ábra).

$EFB\triangle \sim ACB\triangle$, ezért $\dfrac{a-x}{x}=\dfrac{a}{b}$.

Ebből $x=\dfrac{ba}{b+a}=\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

Megjegyzés: A rombusz átlója egyben szögfelező is. Ennek felhasználásával mindig megszerkeszthető a $CDEF$ rombusz.

1930. $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, ezért $k=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

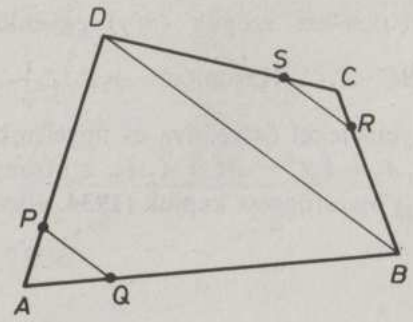
Másrészt $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{B'D'}{B'C'}$, ebből $\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{B'D'}{BD}=k$ következik.

$D'C'=B'C'-B'D'=k(BC-BD)=kDC$.

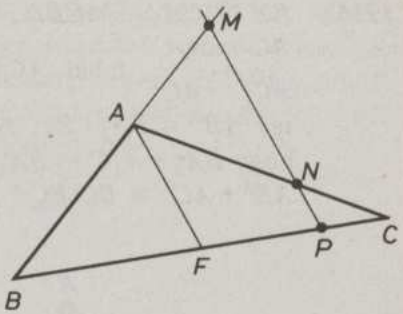
Így az ADC és $A'D'C'$ háromszögekben két-két oldal aránya és a közbezárt szögük ($ACD\sphericalangle$ és $A'C'D'\sphericalangle$) egyenlő. Tehát $ACD\triangle \sim A'C'D'\triangle$.

1931. A párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $PQ\|BD$ és $RS\|BD$, azaz $PQ\|RS$ (**1931.** ábra).

A párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint $PQ=RS=\dfrac{1}{n}\cdot BD$. Ebből következik, hogy $PQRS$ paralelogramma.



1931



1932

1932. *a)* $BPM\triangle \sim BFA\triangle$, ezért $\dfrac{PM}{AF}=\dfrac{BP}{BF}$, másrészt

$CPN\triangle \sim CFA\triangle$, ezért $\dfrac{PN}{AF}=\dfrac{PC}{FC}$.

Tudjuk, hogy $BF=FC$ és $BP+PC=2BF$, ezért

$\dfrac{PM}{AF}+\dfrac{PN}{AF}=2$, azaz $PM+PN=2AF$ (**1932.** ábra).

b) A párhuzamos szelők tételét alkalmazzuk az ABC és ACB szögekre:

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{FP}{BF}$ és $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{FP}{FC}$.

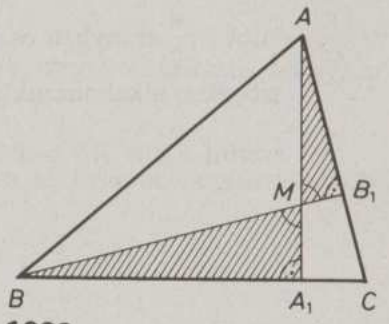
Mivel $BF=FC$, ezért a két egyenletből:

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$ adódik.

Megjegyzés: A bizonyítás a fentivel azonos akkor is, ha P a BF szakasz belső pontja.

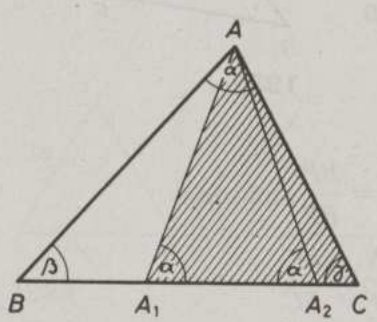
1933. $AMB_1\sphericalangle=BMA_1\sphericalangle$, mert csúcsszögek és $MB_1A\sphericalangle=MA_1B\sphericalangle=90°$, ezért $MB_1A\triangle \sim MA_1B\triangle$. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így

$\dfrac{AM}{MB_1}=\dfrac{BM}{MA_1}$, azaz $AM\cdot MA_1=BM\cdot MB_1$ (**1933.** ábra).

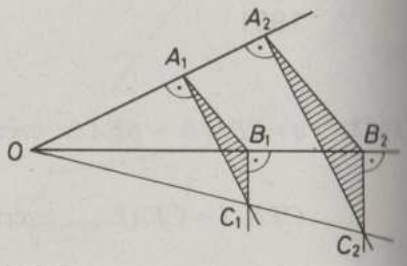


1933

1934. Az $A_1CA\triangle \sim ACB\triangle$, mert két-két szögük ($\alpha, \gamma$) egyenlő, ezért $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C}{AC}$, tehát $AC^2 = BC \cdot A_1C$. Hasonlóan $A_2BA\triangle \sim ABC\triangle$, így $AB^2 = BA_2 \cdot BC$. Az egyenleteket összeadva és figyelembe véve, hogy $BA_2 + A_1C = BA_1 + A_1A_2 + A_1C = BC + A_1A_2$, a bizonyítandó $AB^2 + AC^2 = BC(BC + A_1A_2)$ összefüggést kapjuk (**1934.** ábra).



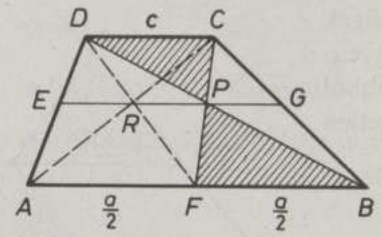
1934



1935

1935. Tekintsük az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ háromszögeket. A szerkesztési utasítás alapján oldalaik páronként párhuzamosak, így középpontosan hasonlóak. A hasonlósági középpont az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek O metszéspontja. Ezért erre kell illeszkednie a 3. csúcsokat összekötő C_1C_2 egyenesnek is (**1935.** ábra).

1936. *I. megoldás.* Az AFR és CDR háromszögek hasonlósági középpontja R, az FBP és CDP háromszögeké pedig P. Ezért R és P is a megfelelő átlót $c : \frac{a}{2}$ arányban osztja, így $PR \| AB \| CD$. Az ADF, az ACF és FCB szögekre alkalmazzuk a párhuzamos szelőszeletek tételét. A fentiek szerint $ER = RP = PG = \dfrac{c}{c + \frac{a}{2}} = \dfrac{2c}{a+2c}$ (**1936.** ábra).



1936

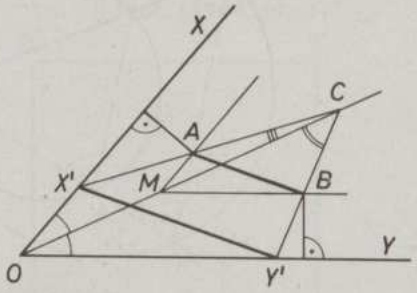
II. megoldás. Az **1913**-as feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazzuk az $AFCD$ és $FBCD$ trapézokra. Ebből $ER = RP = PG$ adódik.

1937. Az A-n át OX-szel, a B-n át OY-nal húzott párhuzamosok M metszéspontja – A és B szerkesztéséből adódóan – az OC szögfelezőre esik. A párhuzamos szelők tételét alkalmazva az

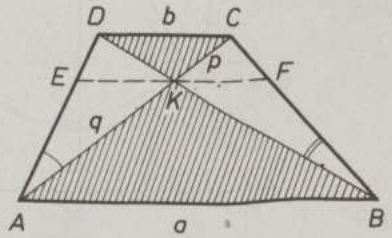
OCX' szögre $CA : CX' = CM : CO$, továbbá az

OCY' szögre $CB : CY' = CM : CO$.

Ezekből $CA : CX' = CB : CY'$. Ez a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt éppen azt jelenti, hogy $AB \| X'Y'$ (**1937.** ábra).



1937



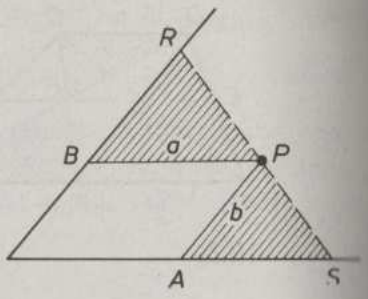
1938

1938. A CDK és ABK háromszögek hasonlóak, megfelelő oldalaik aránya a feltétel szerint $a : b = q : p$, azaz $a = \frac{bq}{p}$.

A DAC és DBC szögekre alkalmazva a párhuzamos szelőszakaszok tételét, kapjuk, hogy $EK = KF = \dfrac{bq}{p+q}$.

Ezért $EF = \dfrac{2bq}{p+q}$ (**1938.** ábra).

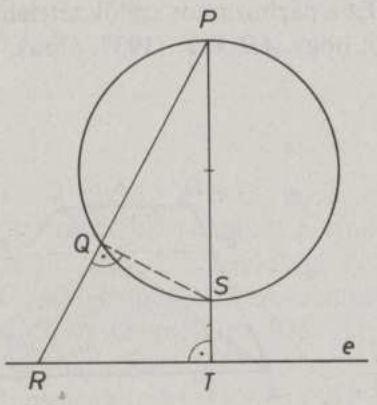
1939. *ASP* és *BPR* hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $AS : AP = BP : BR$, ebből $AS \cdot BR = AP \cdot BP$, ami független az *R* felvételétől (**1939.** ábra).



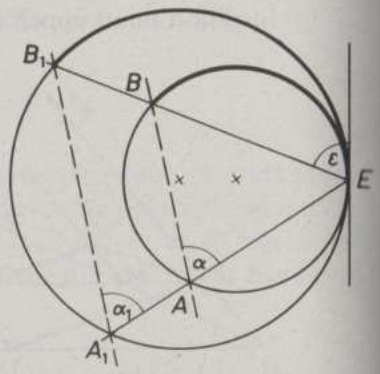
1939

1940. Az *e* egyenest a rá merőleges *PS* átmérő egyenese *T*-ben metszi (**1940.** ábra).

A *PQS* és *PTR* derékszögű háromszögek hasonlóak, megfelelő oldalaik aránya egyenlő: $PQ : PS = PT : PR$. Ebből $PQ \cdot PR = PS \cdot PT$, azaz $PQ \cdot PR$ független a szelő irányától.



1940



1941

1941. *I. megoldás:* A $\overset{\frown}{BE}$, illetve a $\overset{\frown}{B_1E}$ ívhez tartozó (vastagabb vonallal jelölt) kerületi és érintőszárú kerületi szögek egyenlők. Ezért $\alpha = \varepsilon$, illetve $\alpha_1 = \varepsilon$, tehát $\alpha = \alpha_1$ miatt $AB \| A_1B_1$ (**1941.** ábra).

II. megoldás: A két kör közös érintési pontja a két kör hasonlósági pontja. Az *E*-re illeszkedő mindkét szelő a körökből összetartozó pontokat metsz ki. Ezért a feladatban szereplő húrok párhuzamosak.

1942. Itt *A*, *A'*, *B'*, *B* egy egyenesre esik, ezért a hasonlósági középpont is erre az egyenesre illeszkedik.

Mivel $\lambda = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{1}{2}$, ezért a hasonlóság középpontja az *AB* szakasz *A*-hoz közelebbi harmadolópontja.

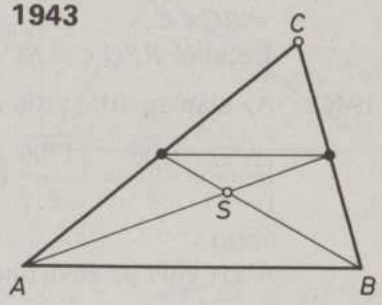
1943. Az *AB* szakasz és középpontos hasonlósággal nyert képe, *A'B'* egyállásúak, ezért *A'B'* az *ABC* háromszög *AB* oldallal párhuzamos középvonala.

Két eset lehetséges

a) Ha *A'* az *AC*, *B'* a *BC* szakasz felezőpontja, akkor a hasonlóság középpontja *C*.

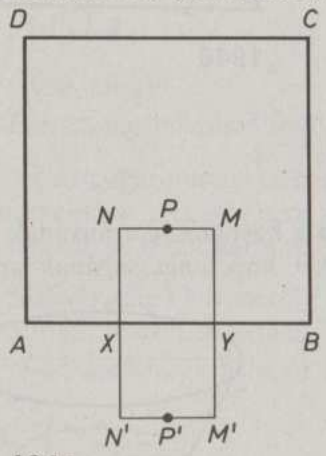
b) Ha *A'* a *BC*, *B'* az *AC* szakasz felezőpontja, akkor a hasonlóság középpontja *S*, a háromszög súlypontja. A háromszög súlypontja mindig a háromszög belső pontja (**1943.** ábra).

1943



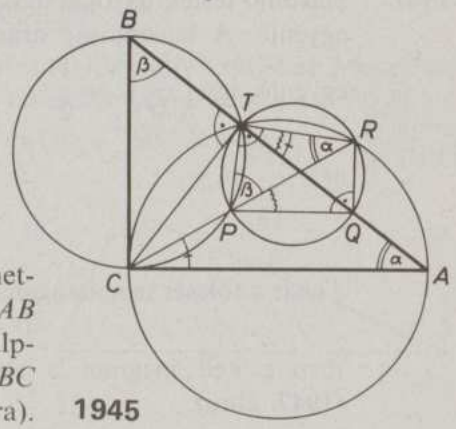
1944. Nem.

Ha a hasonlóság *P* középpontja az *MN* szakasz felezőpontja, akkor az *MN* szakasz képe, *BA* vagy *CD* is illeszkedne az *MN* egyenesére. Ez itt nem áll fenn (**1944.** ábra).



1944

1945. A két befogó Thalész-körének metszéspontjai *C* és *T*, ahol *T* az *AB* átfogóhoz tartozó magasság talppontja, mivel *T*-ből az *AC* és *BC* befogó 90° alatt látszik (**1945.** ábra).



1945

A $BCPT$ és $CART$ húrnégyszögek vizsgálatából adódik, hogy $TPR\sphericalangle = \beta$ és $TRP\sphericalangle = \alpha$. Ezért a T pontból a PR szakasz derékszög alatt látszik. A PR szakasz Thalész-köre az AB szakaszt T-ben és Q-ban metszi. Bebizonyítjuk: $PQ \| CA$.

A $PQRT$ húrnégyszögben az RQ ívhez tartozó kerületi szögek: $RPQ\sphericalangle = RTQ\sphericalangle$, másrészt

a $CART$ húrnégyszög AR ívéhez tartozó kerületi szögek: $RTQ\sphericalangle = RCA\sphericalangle$.

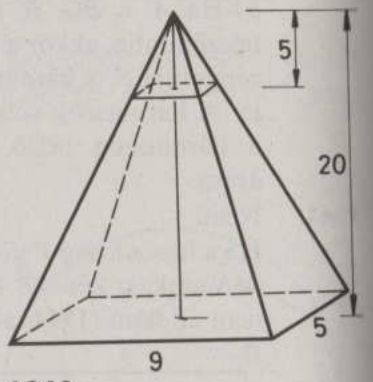
Ezekből $RPQ\sphericalangle = RCA\sphericalangle$, tehát $PQ \| CA$.

1946. Az alaplap átlói $\sqrt{106}$ cm hosszúak, ebből a gúla oldaléle

$\sqrt{20^2 + \frac{106}{4}} = \frac{\sqrt{1706}}{2}$ (cm) (**1946.** ábra).

A kis gúla az eredetihez hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Ezért a kis gúla alapélei $\frac{9}{4}$ cm = $= 2{,}25$ cm, és $\frac{5}{4}$ cm $= 1{,}25$ cm, oldalélei $\frac{\sqrt{1706}}{8}$ cm $\approx 5{,}16$ cm hosszúak.

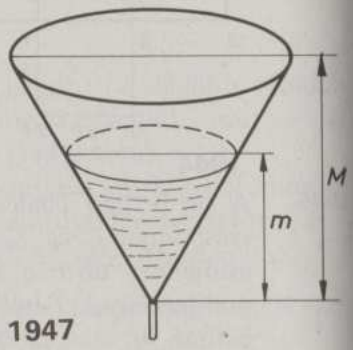


1946

1947. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő. A hasonlóság aránya a két kúp magasságának arányával egyenlő, így $\left(\frac{m}{M}\right)^3 = \frac{1}{2}$,

$m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} M$.

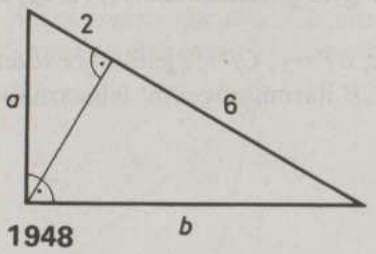
Tehát a tölcsér magasságának $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ részéig kell meginni a szörpöt (**1947.** ábra).



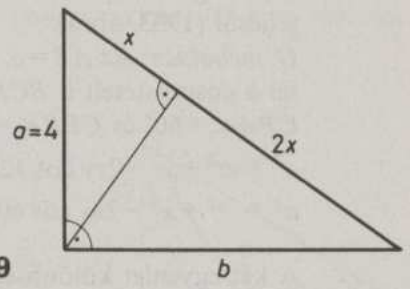
1947

1948. Az átfogó két szakasza 2 cm, illetve 6 cm (**1948.** ábra).

A befogótétel szerint $a^2 = 2 \cdot 8 = 16$ és $b^2 = 6 \cdot 8 = 48$, ezekből a befogók 4 cm és $4\sqrt{3}$ cm. Ezért a háromszög hegyesszögei: 30° és 60°.



1948



1949

1949. Az átfogó két szelete x és $2x$ (**1949.** ábra).

A befogótétel alapján $x \cdot 3x = 16$. Ebből $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm, és az átfogó $4\sqrt{3}$ cm.

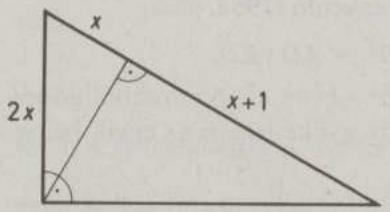
A másik befogó a $b^2 = 2x \cdot 3x = 6x^2 = 32$ egyenletből $b = 4\sqrt{2}$ cm.

1950. Az átfogó két szelete x és $x+1$ cm, a kisebbik befogó $2x$ cm. A befogótétel szerint $(2x)^2 = x(2x+1)$. Ebből ($x > 0$ miatt) $x = \frac{1}{2}$ cm adódik (**1950.** ábra).

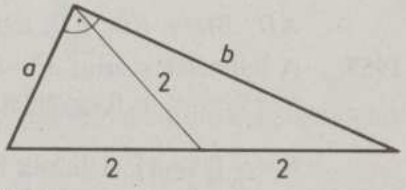
Ezért a háromszög átfogója 2 cm, a két befogó 1 cm és $\sqrt{3}$ cm.

1951. Az ABC háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a feladatban szereplő m, p és q-ra igaz, hogy $m^2 = pq$. Az $m^2 = pq$ csak az $e)$-re nem teljesül. A többi háromszög derékszögű.

1952. A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonalának hossza az átfogó hosszának a fele. Ezért a feltételek szerint $ab = 4$ és $a^2 + b^2 = 4^2$. Ezekből a befogók $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ és $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (**1952.** ábra).



1950



1952

1953. *I. megoldás:* $ABPC$ húrnégyszög, ezért $CPB\sphericalangle = 120°$. A BPC háromszöget B körül 60°-kal elforgatva C az A-ba, P a Q-ba kerül. Így $AQ = CP$, $QB = BP$ és $AQB\sphericalangle = 120°$. $PBQ\sphericalangle = 60°$, ezért a BPQ háromszög szabályos, tehát $PB = PQ$ és Q illeszkedik AP-re. Így az állítás teljesül (**1953.** ábra).

II. megoldás: Az $AB = a$, $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$ jelölést bevezetve írjuk fel a cosinustételt a BCP és ACP háromszögekre, felhasználva, hogy $CPA\sphericalangle = 60°$ és $CPB\sphericalangle = 120°$!

$a^2 = z^2 + y^2 - 2zy \cos 120°$,

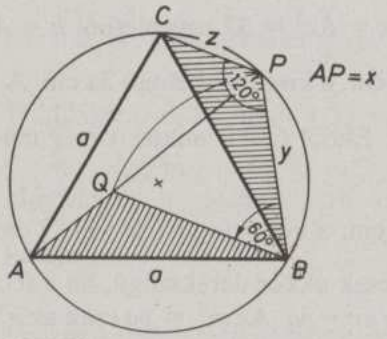
$a^2 = z^2 + x^2 - 2zx \cos 60°$.

A két egyenlet különbsége $\left(\text{ismerve: } \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}\right)$:

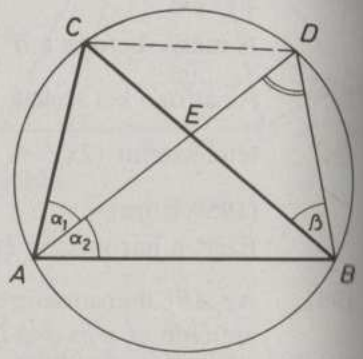
$y^2 - x^2 + z(x+y) = 0$,

$(x+y)(y-x+z) = 0$. Ebből $x = y+z$ adódik.

Megjegyzés: Szép a megoldás a $h = 2r \sin\alpha$ összefüggés felhasználásával is.



1953/II.



1954

1954. AD szögfelező, ezért $\alpha_1 = \alpha_2$. Az $\alpha_1 = \beta$, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek. ABD és BED háromszögek hasonlók (két-két szögük egyenlő), így a megfelelő oldalak aránya egyenlő (**1954.** ábra).

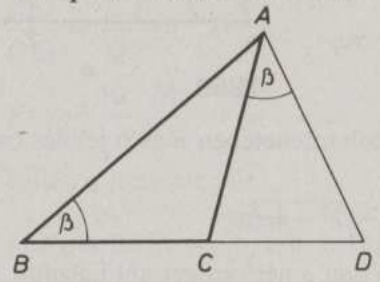
$AD : BD = BD : ED$, tehát $BD^2 = AD \cdot ED$.

1955. A feltételek szerint $a^2 = bc$ és $a^2 + b^2 = c^2$. Az ezekből adódó $b^2 + bc - c^2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke jelenti az egyik befogót:

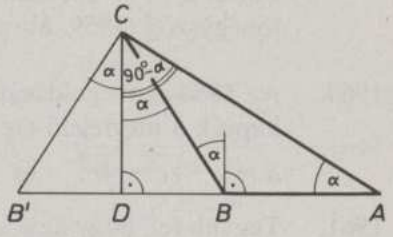
$b = \frac{c}{2}(\sqrt{5}-1)$. A másik befogó: $a = c\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{c}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-2}$.

1956. A feltételek szerint az ABD és a CAD háromszögek hasonlók (2-2 szögük páronként egyenlő). A megfelelő oldalak aránya ennek alapján:
$AD : BD = CD : AD$, ami azt jelenti (**1956.** ábra):
$AD^2 = BD \cdot CD$.

Megjegyzés: Ha D a CB félegyenes pontja, akkor AD nem mértani közepe a BD és a CD szakasznak.



1956



1957

1957. *I. megoldás:* A feltételek miatt az ACD és CBD derékszögű háromszögek hasonlóak (2-2 szögük páronként egyenlő). Ennek alapján a megfelelő oldalak aránya: $CD : AD = BD : CD$, másként $CD^2 = AD \cdot BD$ (**1957.** ábra).

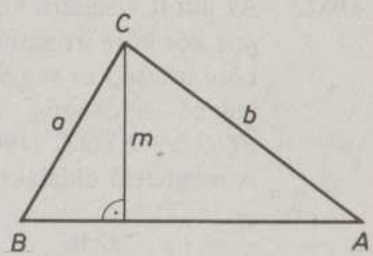
II. megoldás: A B pontot D-re tükrözve kapjuk B'-t. Ekkor $B'AC$ háromszögben $B'CA\sphericalangle = (90° - \alpha) + \alpha = 90°$ az ABC háromszög belső szögeinek összefüggése alapján. Az $AB'C$ háromszögre felírt magasságtétel: $CD^2 = AD \cdot DB' = AD \cdot DB$ az állítás teljesülését jelenti.

1958. A háromszög egy csúcsból induló oldalai és magassága között fennáll:

$0 < m \leqq a$,

$0 < m \leqq b$.

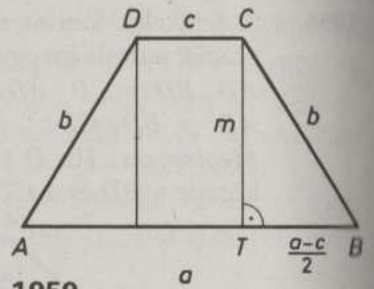
Itt egyenlőség nem állhat fenn a két egyenlőtlenségben egyszerre. Ezért szorzatukra $m^2 < ab$, azaz $m < \sqrt{ab}$ áll fenn, amit bizonyítani kellett (**1958.** ábra).



1958

1959. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz C csúcspontjából induló magasságának talppontja T. Figyelembe véve, hogy $TB = \frac{a-c}{2}$, felírva a TBC (esetleg

elfajuló) háromszögre a Pitagorasz-tételt: $m^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=b^2$. Felhasználva az $m^2=ac$ feltételt: $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=b^2$ összefüggést kapjuk. Ebből $a+c=2b$, azaz $ABCD$ érintőnégyszög (**1959.** ábra).



1959

1960. Az **1884**-es megoldásának gondolatmenetében a és b jelölés cseréjével kapjuk a megfelelő eredményt:

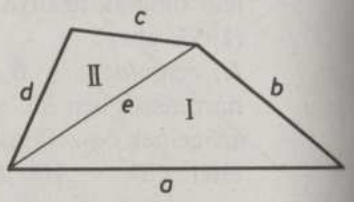
$a=c+\sqrt{c^2-4r^2}$ és $b=c-\sqrt{c^2-4r^2}$.

1961. Tegyük fel, hogy az e átló vágja szét a négyszöget két hasonló, de nem egybevágó háromszögre. Mivel a háromszögek nem egybevágóak, ezért az I. háromszög e oldalának a II. háromszögben c vagy d, illetve a II. háromszög e oldalának az I. háromszögben a vagy b felel meg. Ha például e-nek c, illetve b felel meg, akkor a háromszögekben a megfelelő oldalak aránya (**1961.** ábra):

$\frac{e}{c}$ és $\frac{b}{e}$ egyenlő.

Ebből

$e=\sqrt{bc}$.



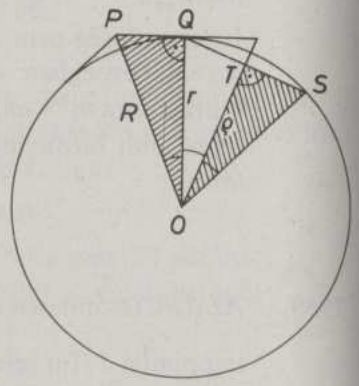
1961

Az állítás igaz az oldalak más megfeleltetése esetén is.

1962. Az adott r sugarú körbe írt szabályos nyolcszögbe írható kör sugara ϱ, a kör köré írt szabályos nyolcszög köré írható kör sugara R. A két szabályos nyolcszög hasonló, ezért $PQO\triangle \sim STO\triangle$ (**1962.** ábra).

A megfelelő oldalakra

$\frac{R}{r}=\frac{r}{\varrho}$, azaz $r^2=R\varrho$ áll fenn.



1962

Megjegyzés: A feladat megoldásakor nem használtuk ki, hogy a szabályos sokszög 8 oldalú. Ezért a kapott összefüggés tetszőleges szabályos n-szögre igaz.

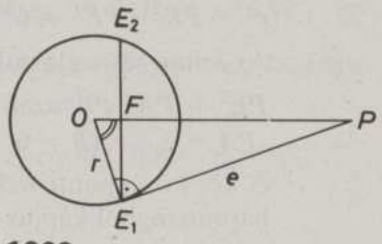
1963. Az OE_1P derékszögű háromszögből $OP=26$ cm (**1963.** ábra). OE_1P és OFE_1 derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$\frac{FE_1}{OE_1}=\frac{E_1P}{OP}$, ebből

$FE_1=\frac{10\cdot 24}{26}$.

Innen a keresett húr

$E_1E_2=2FE_1=\frac{240}{13}$ cm $\approx 18{,}5$ cm.



1963

1964. A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján (**1964.** ábra):

$PA\cdot PB=PE^2$.

A feltételek szerint:

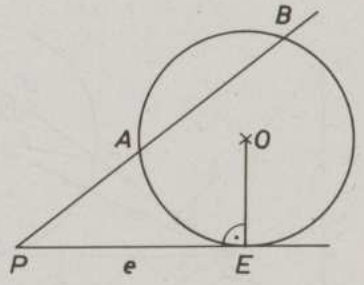
$PA=e-5$,

$AB=e+5$, s így

$PB=PA+AB=2e$, ahol $PE=e$.

Tehát $(e-5)2e=e^2$.

Ebből az érintőszakasz $e=10$ cm.



1964

1965. P pont a kör középpontjától x távolságra van (**1965.** ábra).

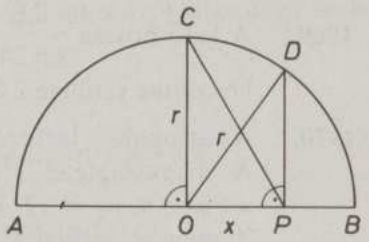
Az (esetleg elfajuló) OPC és OPD derékszögű háromszögből:

$CP^2=r^2+x^2$ és $DP^2=r^2-x^2$.

A két egyenletet összeadva a

$CP^2+DP^2=2r^2$

egyenlőséget kapjuk.



1965

1966. A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján (**1966.** ábra)

$PA \cdot PB = PE^2$, ahol $PB = 40$ cm és $PE = 20$ cm.

Ebből $PA = 10$ cm és $AB = 30$ cm.

Az AKF derékszögű háromszögből

$r^2 = AF^2 + FK^2 = 15^2 + 8^2$ így a kör sugara $r = 17$ cm.

1967. (Az **1966**-os ábra alapján):

A KPE derékszögű háromszögből a kör sugara:

$r^2 = PK^2 - PE^2 = 6^2 - 4^2 = 20$, $r = 2\sqrt{5}$.

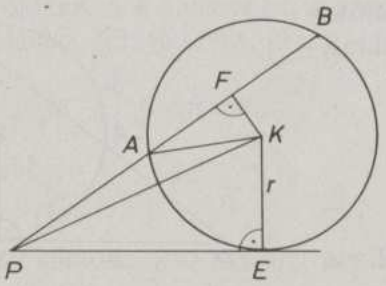
Az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint

$PE^2 = PA \cdot PB$, azaz $16 = PA \cdot 8$,

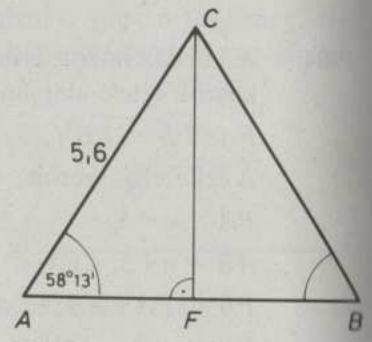
$PA = 2$, $AB = 6$.

A kör középpontjának a szelőtől mért távolságát az AKF derékszögű háromszögből kapjuk:

$FK^2 = r^2 - AF^2 = 20 - 9$, azaz $FK = \sqrt{11}$ cm.



1966



1968

1968. Az AB alapot az AFC derékszögű háromszögből kapjuk meg (**1968.** ábra):

$AB = 2AC \cos\alpha = 11{,}2 \cos 58° 13' \approx 5{,}90$ (cm).

1969. A lejtő hossza $\dfrac{2{,}8}{\sin 24°} \approx 6{,}9$ (m),

vízszintes vetülete $2{,}8 \operatorname{ctg} 24° \approx 6{,}3$ (m).

1970. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót p és q szakaszokra bontja. A magasságtétel szerint: $pq = m^2$. Az adatokat figyelembe véve: $p + q = 8$, $pq = 12$. Ebből a két szakasz 2 és 6 egység.

A magasságvonal a háromszöget két olyan egymáshoz és az eredeti derékszögű háromszöghöz is hasonló háromszögre bontja, amelyekben

a befogók aránya $1 : \sqrt{3}$. E háromszögek hegyesszögei 30°- és 60°-osak. Így a háromszög befogói 4 és $4\sqrt{3}$ egység.

1971. Az ATC derékszögű háromszögből (**1971.** ábra):

$AT = 3$ egység, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. Ebből I. $\alpha_1 = 53{,}13°$, II. $\alpha_2 = 126{,}87°$.

I. $AC_1T_1 \sphericalangle = 36{,}87° > 30°$, ezért CT az AB_1C_1 háromszögön kívül esik.

A $B_1T_1C_1$ derékszögű háromszögben $B_1C_1T_1 \sphericalangle = 6{,}87°$, így

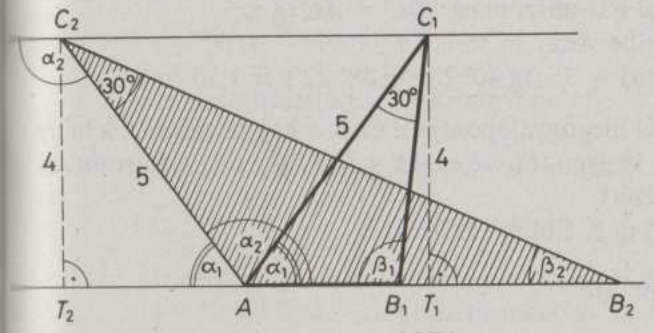
$B_1C_1 = \dfrac{4}{\cos 6{,}87°}$ ($\approx 4{,}03$) egység, $B_1T_1 = 4 \cdot \operatorname{tg} 6{,}87°$ ($\approx 0{,}482$) egység.

Ezekből $AB_1 = 3 - 4 \operatorname{tg} 6{,}87°$ ($\approx 2{,}52$) egység, illetve $\beta_1 = 96{,}87°$.

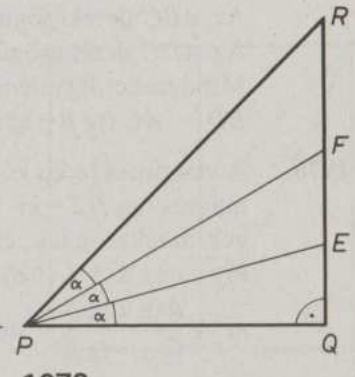
II. $B_2C_2T_2 \sphericalangle = 30° + 36{,}87° = 66{,}87°$

$B_2C_2 = \dfrac{4}{\cos 66{,}87°}$ ($\approx 10{,}2$) egység.

$AB_2 = T_2B_2 - T_2A = 4 \cdot \operatorname{tg} 66{,}87° - 3$ ($\approx 6{,}36$) egység, $\beta_2 = 23{,}13°$.



1971



1972

1972. A PQF derékszögű háromszögben $PF > PQ$, így a szögfelezőtétel szerint (**1972.** ábra)

$\dfrac{EF}{QE} = \dfrac{PF}{PQ} > 1$, azaz $EF > QE$.

A PER háromszögben $PER \sphericalangle$ tompaszög, ezért $PR > PE$.

A szögfelezőtétel szerint $\dfrac{FR}{EF} = \dfrac{PR}{PE} > 1$, azaz $FR > EF$.

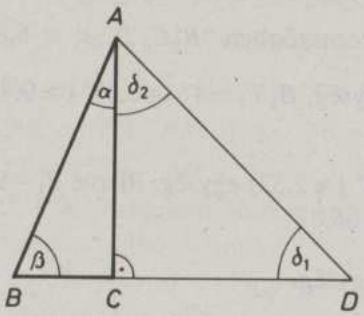
Tehát $FR > EF > OE$.

1973. Az ACD egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $\delta_1 = \delta_2 = 45°$, $AD = BD$ miatt $\beta = \alpha + 45°$ (**1973.** ábra). Az ABC háromszög belső szögösszege miatt: $\beta = 90° - \alpha$, tehát $\alpha = 22{,}5°$, $\beta = 67{,}5°$.

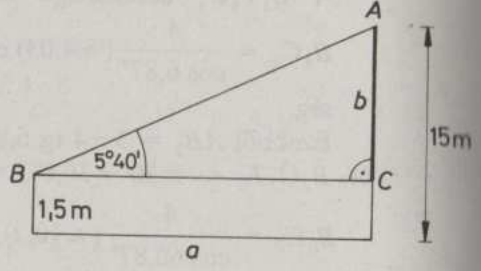
1974. $b = 15 - 1{,}5 = 13{,}5$. ABC derékszögű háromszögben (**1974.** ábra):

$$a = \frac{b}{\operatorname{tg} 5° 40'} \approx 136.$$

Tehát a keresett távolság 136 m.



1973

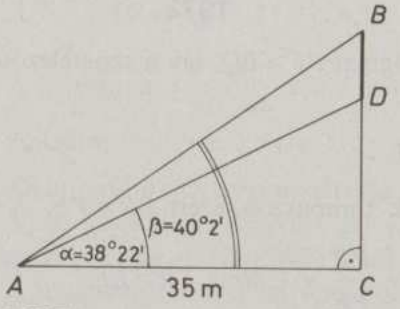


1974

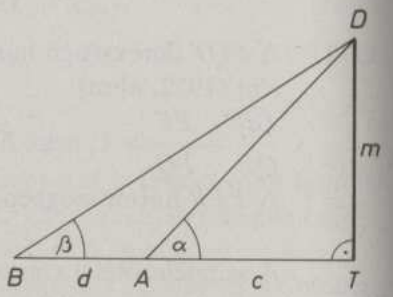
1975. Az ablak „magassága": $BD = BC - DC$ (**1975.** ábra).
Az ABC derékszögű háromszögben: $BC = AC \operatorname{tg} \beta$.
Az ADC derékszögű háromszögben: $DC = AC \operatorname{tg} \alpha$.
Mindezeket figyelembe véve:
$BD = AC(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = 35(\operatorname{tg} 40° 2' - \operatorname{tg} 38° 22') \approx 1{,}70$ (m).

1976. A vízszintes terep két megfigyelőpontja A és B, a hegy csúcsa D, a hegy magassága $DT = m$. Legyen $AT = c$ és $AB = d$. ATD és BTD háromszögek derékszögűek, ezért
$m = c \operatorname{tg} \alpha = (c + d) \operatorname{tg} \beta$. Ebből (**1976.** ábra):

$$m = \frac{d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = 466 \text{ (m)}.$$



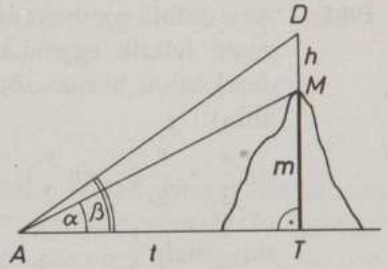
1975



1976

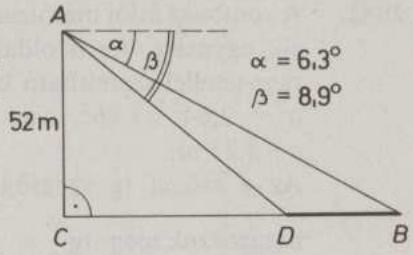
1977. A vízszintes terep megfigyelőpontja A, a hegy magassága $m = MT$, a toronyé $h = MD$ (**1977.** ábra).
Legyen $AT = t$.
Az ATM derékszögű háromszögben:
$m = t \operatorname{tg} \alpha$,
az ATD derékszögű háromszögben:
$m = t \operatorname{tg} \beta - h$.

Ezekből $m = \dfrac{h \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} = 731$ (m).



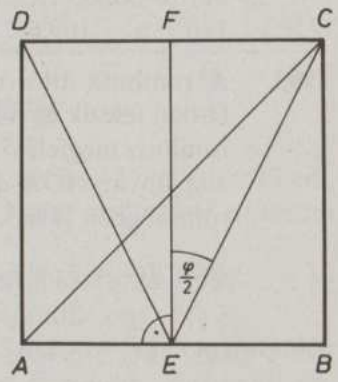
1977

1978. $BC = AC \operatorname{tg}(90° - \alpha) = 52 \operatorname{tg} 83{,}7°$,
$DC = AC \operatorname{tg}(90° - \beta) = 52 \operatorname{tg} 81{,}1°$.
$DB = BC - DC =$
$= AC[\operatorname{tg}(90° - \alpha) - \operatorname{tg}(90° - \beta)] =$
$= 138{,}9$ m hosszú a híd.



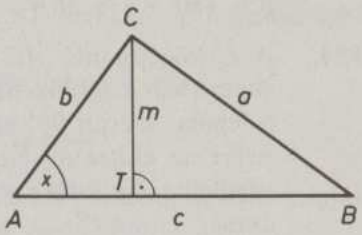
1978

1979. Az AB oldal E felezőpontjából az AC és BD átló azonos szögben $\varepsilon = 90° + \dfrac{\varphi}{2}$ látszódik, mert az ábra szimmetrikus az EF középvonalra (**1979.** ábra).
Az EFC derékszögű háromszögből
$\operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Innen a DC-hez tartozó látószög: $\varphi = 53{,}13°$ és az átlókhoz tartozó látószög $\varepsilon = 116{,}6°$.



1979

1980. Az ABC és ATC derékszögű háromszögekből (**1980.** ábra): $c = \dfrac{b}{\cos x}$;
$m = b \sin x$. A feladat feltétele szerint $m = \sin x \cos x$, ezért $b = \cos x$ és $c = 1$.

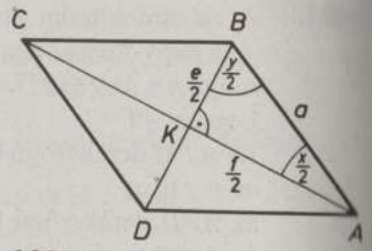


1980

1981. Az a oldalú rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Az ABK derékszögű háromszögből (**1981.** ábra):

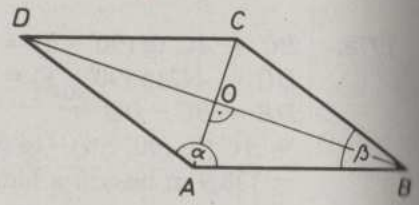
$$\sin\frac{x}{2}=\frac{e}{2a},\quad \sin\frac{y}{2}=\frac{f}{2a},\quad \text{ezért}$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}}{2}=\frac{e+f}{4a}=\frac{e+f}{k}.$$



1981

1982. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Az a oldal Pitagorasz-tétellel számítható ki:
$a^2=2{,}64^2+1{,}86^2$, azaz
$a=3{,}23$ m.
Az α szöget tg szögfüggvénnyel határozzuk meg: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1{,}86}{2{,}64}$, ebből $\alpha=70{,}33°$, és a másik szög: $180°-\alpha=109{,}67°$

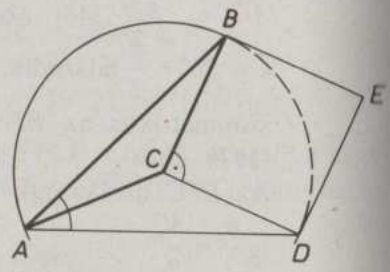


1983

1983. A rombusz átlói merőlegesek és O-ban felezik egymást valamint a rombusz megfelelő szögeit. Ennek alapján az AOB derékszögű háromszögben (**1983.** ábra):

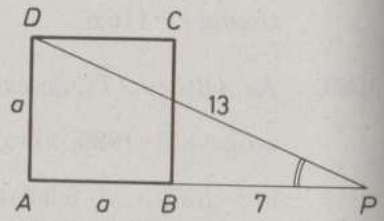
$$BO:AO=3:1 \text{ és } OAB\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}.$$

Így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$-ból $\frac{\alpha}{2}=71{,}57°$, a rombusz szögei: $\alpha=143{,}1°$ és $\beta=180°-\alpha=36{,}9°$.



1984

1984. A C középpontú $AC=BC=DC$ sugarú kör kisebbik BD íve C-ből a feladat szerint 90° alatt látszik. Ezért az ehhez az ívhez tartozó kerületi szög $BAD\sphericalangle=45°$ (**1984.** ábra).



1985

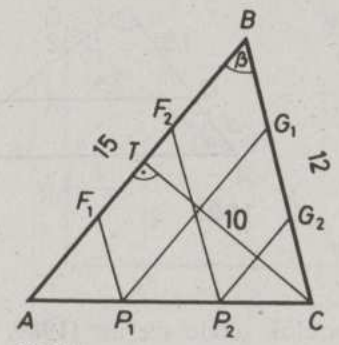
1985. Az APD derékszögű háromszögben (**1985.** ábra): $a^2+(a+7)^2=13^2$.

A négyzet oldala, ennek pozitív gyöke, $a=5$ cm.
Az APD háromszögből

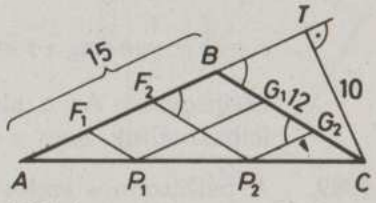
$$\operatorname{ctg} APD\sphericalangle=\frac{12}{5},\ \text{így}\ APD\sphericalangle=22{,}62°.$$

1986. A 13 cm átfogójú derékszögű háromszög 42°-os szöggel szemköztes befogója $b=13\sin 42°=8{,}7$ (cm). A keresett szakasz Pitagorasz-tétellel határozható meg: $a^2=b^2+6{,}2^2$, azaz $a=10{,}7$ cm.

1987. A háromszög két oldala 12 cm és 15 cm, magassága 10 m. Ilyen háromszög nem létezik. A feladatnak ilyen adatokkal nincs megoldása.



1987a



1987b

Megjegyzés: Ha az ABC háromszög oldalai: $AB=15$ cm, $BC=12$ cm, és az AB oldalhoz tartozó magassága: $CT=10$ cm, akkor a feladat megoldása:
Az ABC háromszög nincs egyértelműen meghatározva (**1987.** *a), b)* ábra). Az AC szakasznak is két harmadolópontja van: P_1, P_2.
A két háromszögben a $BF_1P_1G_1$, illetve $BF_2P_2G_2$ paralelogrammák oldalai egyenlőek, azaz mindkét esetben: $P_1F_1=4$ cm, $P_1G_1=10$ cm, illetve $P_2F_2=8$ cm és $P_2G_2=5$ cm. Az ABC háromszög β szöge a paralelogrammák egyik szöge. β-t a CBT derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:
(a) esetben $CBT\sphericalangle=\beta$, $b)$ esetben $CBT\sphericalangle=180°-\beta$)

$$\sin CBT\sphericalangle=\frac{10}{12},\ \text{innen}\ CBT\sphericalangle=56{,}44°\ (<90°).$$

Tehát mindkét háromszögből a következő két paralelogrammát kapjuk:
1. oldalai: 4 cm és 10 cm, szögei: 56,44° és 123,56°,
2. oldalai: 8 cm és 5 cm, szögei: 56,44° és 123,56°.

1988. Az AD_1D derékszögű háromszögből (**1988.** ábra):

$d = \dfrac{m}{\sin\alpha}$ és $AD_1 = x = m\operatorname{ctg}\alpha$.

A BC_1C derékszögű háromszögből:

$b = \dfrac{m}{\sin\beta}$ és $C_1B = y = m\operatorname{ctg}\beta$.

Az alapokat az

$a = x + y + c$,

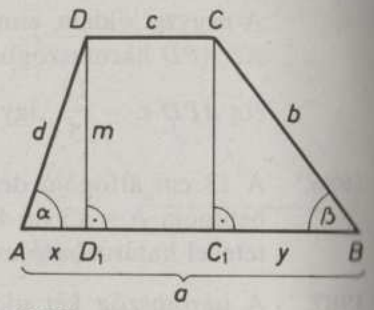
$k = \dfrac{a+c}{2}$

egyenletrendszerből kapjuk (x és y fenti értékeinek figyelembevételével):

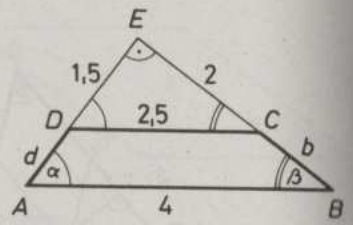
$a = k + \dfrac{1}{2}m(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$,

$c = k - \dfrac{1}{2}m(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$.

Megjegyzés: Az a alap felírásakor felhasználtuk, hogy $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$.



1988



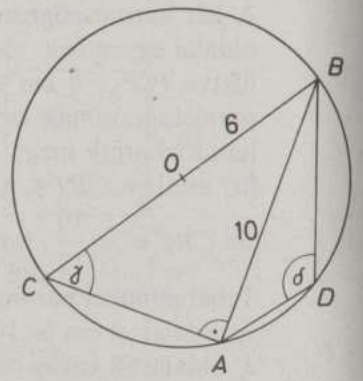
1989

1989. A párhuzamos szelőszakaszok és szelők tétele szerint (**1989.** ábra): $\dfrac{d+1,5}{1,5} = \dfrac{4}{2,5}$ és $\dfrac{d}{b} = \dfrac{1,5}{2}$. Ezekből $d = 0,9$ és $b = 1,2$-et kapjuk.

A DCE háromszög, a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján, derékszögű. A háromszög hegyesszögei egyben a trapéz hegyesszögei az egyállású szögek miatt. Így $\sin\alpha = 0,8$, a trapéz hegyesszögei $\alpha = 53,13°$ és $\beta = 36,87°$.

1990. Az AB húrhoz tartozó kisebbik kerületi szög az ABC derékszögű háromszögből $\sin\gamma = \dfrac{10}{12}$-ből $\gamma = 56,44°$.

Az $ADBC$ húrnégyszögből a húrhoz tartozó nagyobbik kerületi szög $\delta = 180° - \gamma = 123,56°$ (**1990.** ábra).

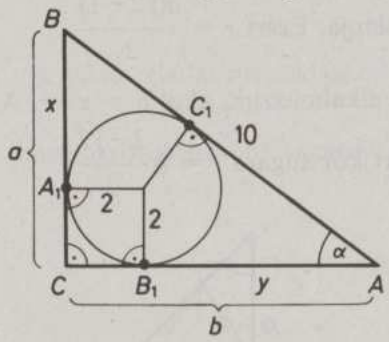


1990

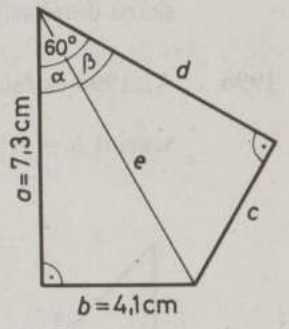
1991. A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt (**1991.** ábra): $B_1A = C_1A = y$; $A_1B = C_1B = x$, valamint $a = x + 2$, $b = y + 2$ és $c = x + y = 10$. A Pitagorasz-tétel szerint $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 100$, azaz $(x+2)^2 + (12-x)^2 = 100$.

Innen a háromszög befogói $2 + 4 = 6$ (cm) és $2 + 6 = 8$ (cm), és hegyesszögei $\sin\alpha = \dfrac{6}{10}$-ből $\alpha = 36,87°$, $\beta = 53,13°$.

Megjegyzés: A Pitagorasz-tétel helyett a háromszög területének kétféle felírásából a $2t = ab = (a+b+c)\varrho$, azaz az $(x+2)(y+2) = 48$ egyenletből és $x + y = 10$-ből is meghatározhatók a háromszög befogói.



1991



1992

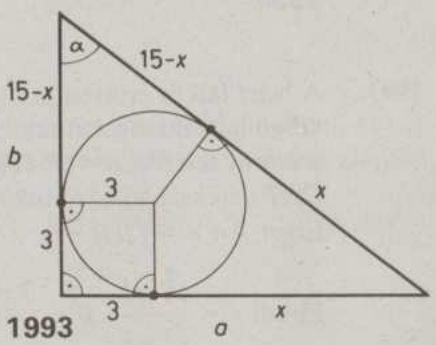
1992. A négyszöget az e átlóval két derékszögű háromszögre bontjuk. Ezekből (**1992.** ábra):

$e = \sqrt{7,3^2 + 4,1^2} = \sqrt{70,10}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4,1}{7,3}$, azaz $\alpha = 29,32°$, valamint $\beta = 30,68°$, $c = e\sin\beta = 4,3$ cm és $d = e\cos\beta = 7,2$ cm adódik.

Megjegyzés: A b és d oldalak meghosszabbításával nyert speciális derékszögű háromszögből is meghatározhatók a keresett adatok.

1993. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért ha $a = 3 + x$, akkor a beírt kör érintési pontja az átfogót x és $15 - x$ részekre bontja, és $b = 15 - x + 3 = 18 - x$.

A Pitagorasz-tétel alapján $(18-x)^2 + (3+x)^2 = 15^2$ (**1993.** ábra). A másodfokú egyenlet megoldásával ($x_1 = 9$,



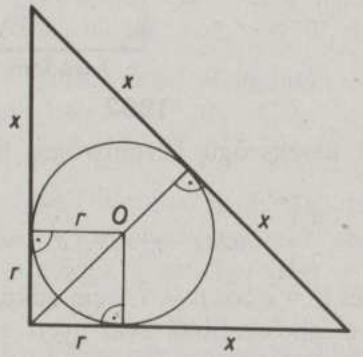
1993

$x_2 = 6$) a befogókra $a = 12$ cm-t és $b = 9$ cm-t kapunk. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; így $\alpha = 53{,}13°$ és $\beta = 36{,}87°$.

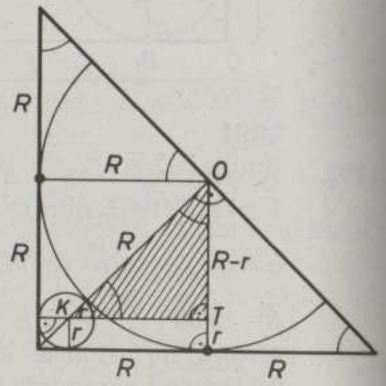
1994. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége és a szimmetria miatt a jelölt (x) szakaszok egyenlőek (**1994.** ábra).
Az átfogó $(r+x)\sqrt{2} = 2x$. Ebből $x = r(\sqrt{2}+1)$, és
a kerület $k = 4x + 2r = 2(2\sqrt{2}+3)r$.

1995. Az **1994**-es feladat megoldása szerint $r = \frac{x}{\sqrt{2}+1}$, ahol $2x$ az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapja. Ezért $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$.

1996. Az **1994**-es feladat megoldását alkalmazzuk, ahol $b = x + r$. A feltétel szerint $b = r(\sqrt{2}+2)$, így a beírt kör sugara $r = b\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.



1994



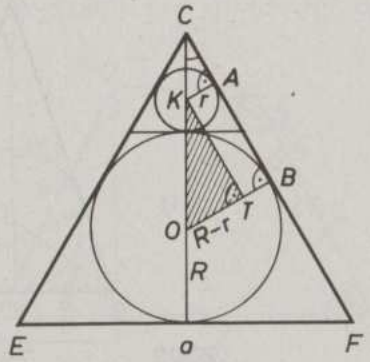
1997

1997. A beírt félkör érintési pontjaihoz tartozó sugarak egyenlő szárú derékszögű háromszögeket metszenek le az eredetiből. Így az érintési pontok a szárat felezik: $a = 2R$ (**1997.** ábra).
OKT derékszögű háromszög egyenlő szárú és $OK = r + R$, $OT = R - r$. Ezért $R + r = \sqrt{2}(R - r)$.

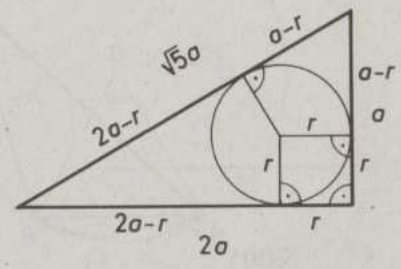
Ebből $r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot R = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \cdot a$ adódik.

1998. *I. megoldás:* $KT \| CF$, ezért KOT derékszögű háromszögben $OKT\sphericalangle = 30°$. Így $2OT = KO$, azaz $2(R-r) = R+r$. Ebből $r = \frac{R}{3}$. Mivel O egyben az EFC háromszög súlypontja, ezért $3R = m = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Innen $r = a\frac{\sqrt{3}}{18}$ (**1998.** ábra).
II. megoldás: Húzzuk meg a beírt kör EF-fel párhuzamos érintőjét. Mivel $m = 3R$, ezért ez az egyenes a háromszögből egy R magasságú szabályos háromszöget vág le. E háromszög beírt körének sugarát kell meghatározni. Így $r = \frac{R}{3} = \frac{m}{9} = a\frac{\sqrt{3}}{18}$.

1999. Az előző feladat megoldásából láttuk, hogy $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$. A CAK és CBO háromszögek hasonlóságából $\frac{AC}{BC} = \frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.



1998



2000a

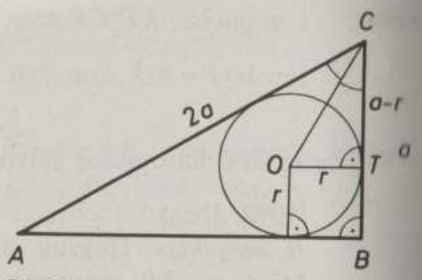
2000. *a)* Ha a háromszög befogói a, $2a$ és átfogója $\sqrt{5}a$ (**2000.** *a)* ábra), akkor a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján az átfogó $(a-r)+(2a-r) = \sqrt{5}a$. Az egyenletből $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}r$, így a háromszög oldalai: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}r$, $(3+\sqrt{5})r$, $\frac{3\sqrt{5}+5}{2}r$.

b) Ha az átfogó kétszerese az egyik befogónak, akkor a háromszögben $\alpha = 30°$ és $\gamma = 60°$. CO szögfelező, ezért $OCT\sphericalangle = 30°$, és az OCT derékszögű háromszögben $a - r = r\sqrt{3}$ (**2000.** *b)* ábra). Ebből a háromszög oldalai

$BC = a = r(1+\sqrt{3})$,

$AB = a\sqrt{3} = r(\sqrt{3}+3)$ és

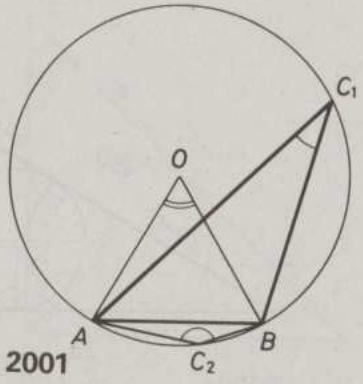
$AC = 2a = 2(1+\sqrt{3})r$.



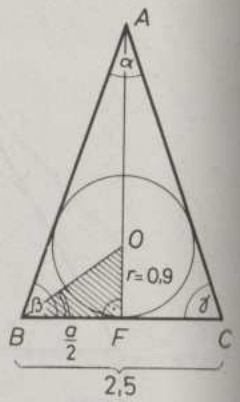
2000b

Megjegyzés: A feladat a derékszögű háromszög területének kétféle felírásával is megoldható:
$(a+b+c)r = ab\ (= 2t)$, ahol a háromszög befogói: a, b, átfogója: c.

2001. A feltételek szerint AOB szabályos háromszög, a jelölt $AOB\sphericalangle = 60°$. A kisebb AB ívhez tartozó kerületi szög 30°, a nagyobbik ívhez tartozó kerületi szög 150°. Tehát az ABC háromszög AB oldallal szemben fekvő szöge 30° vagy 150° (**2001.** ábra).



2001



2002

2002. A háromszög beírt körének középpontja a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja. Ezért $OBF\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$. Ezt az OBF derékszögű háromszögből kapjuk meg (**2002.** ábra):

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = 0{,}72, \qquad \frac{\beta}{2} = 35{,}75°.$$

Így $\beta = \gamma = 71{,}5°$, $\alpha = 37°$.

2003. OB a β, OC a β-t 180°-ra kiegészítő γ szögfelezője, ezért BOC derékszögű háromszög (**2003.** ábra).
A beírt kör a BC szárat E-ben érinti, így az érintőszakaszok egyenlősége alapján $BE = 5$ cm és $EC = \frac{c}{2}$.

A BOC háromszögre alkalmazva a magasságtételt kapjuk:

$$3^2 = 5 \cdot \frac{c}{2}.$$

Ebből $c = 3{,}6$ cm, $b = 6{,}8$ cm.
A trapéz hegyesszögei az ADT háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{3{,}2}, \qquad \alpha = \beta = 61{,}93°.$$

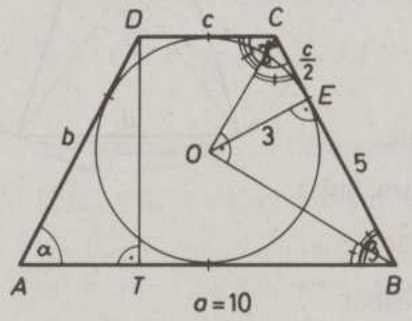
2004. Az adott c oldallal szemben fekvő (hegyes)szög a tanult

$c = 2r \sin\gamma$

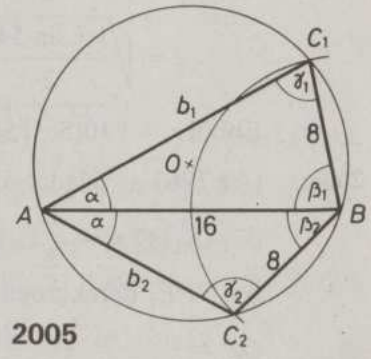
összefüggésből $\sin\gamma = \frac{4}{6}$, $\gamma = 41{,}81°$. Ugyanezért

$a = 6 \sin 102° \approx 5{,}9$ (cm).

$\beta = 180° - (\alpha+\gamma) = 36{,}19°$, és $b = 6 \sin 36{,}19° \approx 3{,}5$ (cm).



2003



2005

2005. Ismert, hogy az r sugarú kör h húrja és a húrhoz tartozó φ kerületi szög között fennáll: $h = 2r \sin\varphi$ (**2005.** ábra). Tehát $8 = 16{,}8 \sin\alpha$. $8 < 16$ miatt $\alpha < \gamma$, tehát α hegyesszög, így $\alpha = 28{,}44°$.

Hasonlóan $\sin\gamma = \frac{16}{16{,}8}$. Ebből γ nincs egyértelműen meghatározva, így $\gamma_1 = 72{,}25°$ és $\gamma_2 = 107{,}75°$. Tehát két háromszög létezik.
A háromszögek harmadik szöge $\beta_1 = 79{,}31°$, illetve $\beta_2 = 43{,}81°$, és harmadik oldala ($b = 16{,}8 \sin\beta$ alapján) $b_1 = 16{,}5$ cm és $b_2 = 11{,}6$ cm.

2006. Az r sugarú körbe írt trapéz r hosszúságú oldala a kör középpontjából 60°-os szögben, az $r\sqrt{2}$ hosszúságú szárak 90°-os szögben látszanak. Ezért a keresett oldal a kör középpontjától 120°-os szögben látszik. Ebből a trapéz hosszabbik alapja $a = r\sqrt{3}$.

2007. Az egyenlő szárú háromszög a alapja az $R = 10$ cm sugarú kör 36°-os középponti szögéhez tartozó húrja (**2007.** ábra). Ezért
$a = 2R \sin 18°$.
Ugyanakkor a köré írt körben az a húrhoz tartozó kerületi szög 36°, így $a = 2r \sin 36°$.

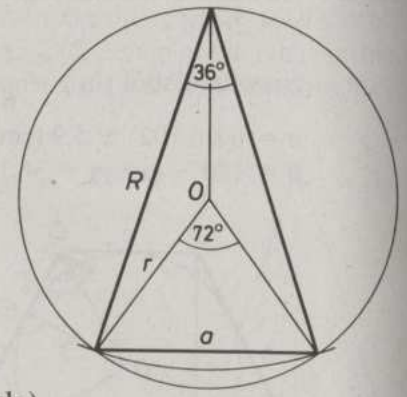
Ezekből $r = R\dfrac{\sin 18°}{\sin 36°} = \dfrac{R}{2\cos 18°} \approx 5{,}3$ (cm).

r pontos értékét (az **1735**-ös feladat megoldása alapján) a $\sin 54° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ felhasználásával kapjuk.

A $\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ összefüggés alapján

$$\cos 18° = \sqrt{\frac{1+\cos 36°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin 54°}{2}}.$$

Ebből $r = \sqrt{10(5-\sqrt{5})}$ cm adódik.



2007

2008. (Az **1963**-as feladat ábráját használjuk.)

$\varphi = E_1PO\sphericalangle = \dfrac{1}{2}E_1PE_2\sphericalangle = 24° 15'$.

Az OPE_1 derékszögű háromszögből

$OP = \dfrac{r}{\sin\varphi} = \dfrac{10}{\sin 24° 15'} = 24{,}35$ (cm) és

$E_1P = r \operatorname{ctg}\varphi = 10 \operatorname{ctg} 24° 15' = 22{,}2$ (cm).

2009. (Az **1963**-as feladat ábráját használjuk.)

Az OE_1F derékszögű háromszögben $OE_1F\sphericalangle = \varphi$ és $\cos\varphi = \dfrac{1{,}4}{2{,}4}$.

Ebből $\varphi = 54{,}315°$, az érintők hajlásszöge $2\varphi = 108{,}63°$. Az OPE_1 derékszögű háromszögből

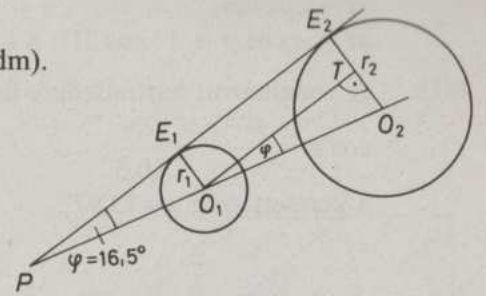
$OP = d = \dfrac{r}{\sin\varphi} = \dfrac{2{,}4}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} \approx 3{,}0$ (dm).

Az OPE_1 és OE_1F háromszögek hasonlósága alapján

$\dfrac{e}{d} = \dfrac{E_1F}{r}$,

azaz $PE_1 = e = \dfrac{1{,}4}{2{,}4}d \approx 1{,}7$ (dm).

2010. Az O_1O_2T derékszögű háromszögben (**2010.** ábra):
$TO_1O_2\sphericalangle = E_1PO_1\sphericalangle = 16{,}5°$ $(= \varphi)$,
$TO_2 = r_2 - r_1 = 1{,}6$,
így $E_1E_2 = O_1T =$
$= TO_2 \operatorname{ctg}\varphi = 5{,}40$ a keresett szakasz.



2010

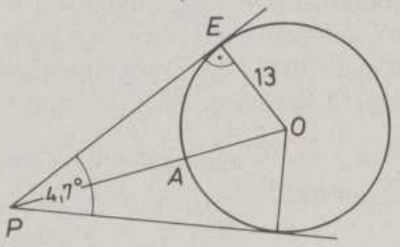
Mivel $O_1O_2 = \sqrt{5{,}40^2 + 1{,}6^2} = 5{,}63 < r_1 + r_2$, ezért a két kör metszi egymást.

2011. (Az **1966.** feladat ábráját használjuk.) Az AKF derékszögű háromszögből $FA = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Így $AB = 30$ cm, $PB = 40$ cm. Az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint: $PE^2 = PA \cdot PB = 10 \cdot 40$, azaz $PE = 20$ cm. A PEK derékszögű háromszögből $PK = \sqrt{20^2 + 17^2} = 26{,}2$ (cm) és

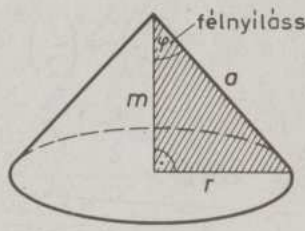
$\operatorname{tg} KPE\sphericalangle = \dfrac{17}{20} = 0{,}85$, $KPE\sphericalangle = 40{,}36°$.

2012. A POE derékszögű háromszögből $PO = \dfrac{13}{\sin 2{,}35°} = 317$ (cm) (**2012.** ábra). P-nek a lámpaburától való távolsága $PA = PO - r = 304$ cm.

2013. Az ábrán feltüntetett derékszögű háromszögre (**2013.** ábra):
$m^2 = a^2 - r^2 = 8{,}2^2 - 5{,}6^2 = 35{,}88$, ezért a magasság $m = 6{,}0$ dm,
$\sin\varphi = \dfrac{r}{a} = \dfrac{5{,}6}{8{,}2} = 0{,}6829$. A kúp nyílásszöge $2\varphi = 86{,}15°$.



2012



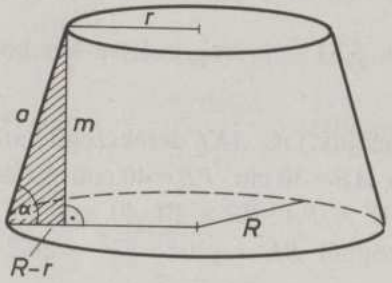
2013

2014. A **2013**-as ábra jelöléseivel:
$r = a \sin \varphi = 15 \sin 31°$; az alapkör átmérője:
$2r = 15{,}5$ cm,
$m = a \cos \varphi = 15 \cos 31°$; a kúp magassága $m = 12{,}9$ cm.

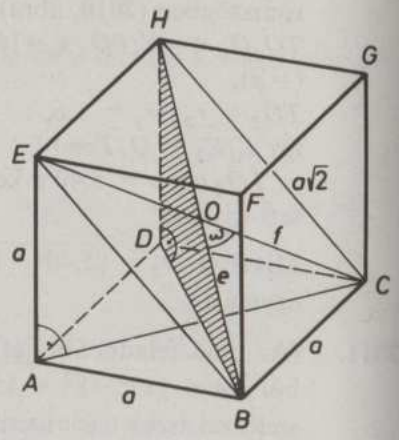
2015. A vonalkázott háromszögre felírhatjuk (**2015.** ábra):

$$\cos \alpha = \frac{R-r}{a} = \frac{2{,}9}{10{,}5};$$

a keresett szög $\alpha = 73{,}97°$.



2015



2016

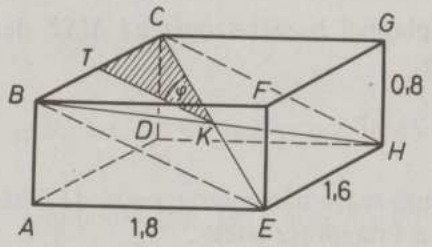
2016. Az $ABCD$ alaplap átlói: $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$ (**2016.** ábra).
A testátlókat az ábrán feltüntetett BDH egyenlő szárú derékszögű és CAE derékszögű háromszögekből Pitagorasz-tétellel kapjuk.
$e = a\sqrt{2}$, $f = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$.
A két testátlót tartalmazó síkmetszet (pl. $EBCH$) a és $a\sqrt{2}$ oldalú (nem derékszögű) paralelogramma. Az e és f szögét cosinustétellel számíthatjuk ki az OBC háromszögből:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\,\frac{e}{2}\,\frac{f}{2}\cos\omega,$$

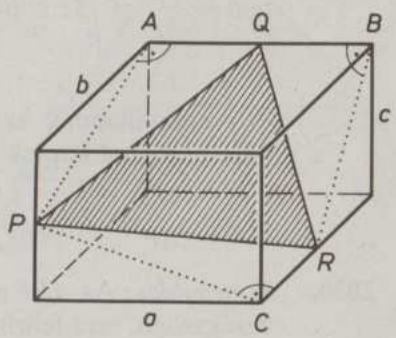
$$\cos\omega = \frac{\frac{a^2}{2} + a^2 - a^2}{2\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\,\frac{2a}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \omega = 69{,}3°.$$

2017. A két testátlót tartalmazó síkmetszet téglalap, melynek oldalai 1,6 és $\sqrt{1{,}8^2 + 0{,}8^2}$ (**2017.** ábra).
A CE és BH testátlók szöge a $CKT\sphericalangle$ kétszerese: 2φ.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{CT}{KT} = \frac{0{,}8}{\frac{1}{2}\sqrt{3{,}88}}; \qquad 2\varphi = 78°\,17'.$$



2017



2018

2018. $PQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2 + c^2 + 4b^2}{4}$ az APQ,

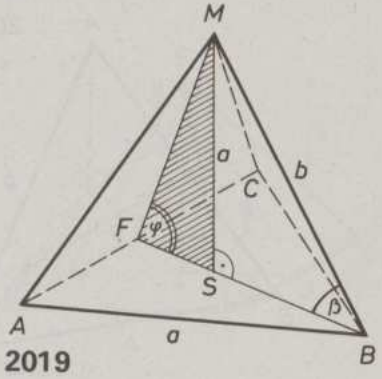
$QR^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{4}$ a BRQ,

$PR^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{b^2 + c^2 + 4a^2}{4}$ a CPR derékszögű háromszögekből (**2018.** ábra).

Összegük: $\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2019. A szabályos gúla magasságának talppontja az ABC alaphárom-szög súlypontja: S (**2019.** ábra).
SB az a oldalú szabályos háromszög súlyvonalának $\frac{2}{3}$-a:

$$SB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



2019

Az MSB derékszögű háromszögből:

a) Pitagorasz-tétellel számítjuk ki az oldalélt:

$$b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

b) és az oldalélnek az alaplappal bezárt szöge:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}; \quad \beta = 60°.$$

c) Az oldallapnak az alaplappal bezárt szögét az MSF derékszögű háromszögből kapjuk meg:

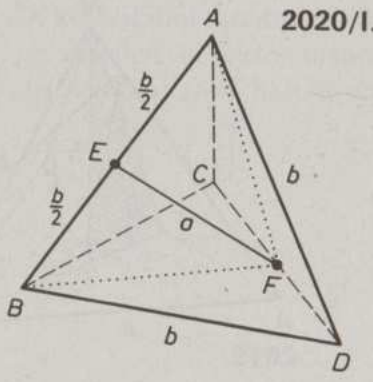
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MS}{SF} = 2\sqrt{3}; \quad \varphi = 73{,}90°.$$

2020. *I. megoldás:* Az ABF egyenlő szárú háromszög, ezért AEF háromszög derékszögű, erre felírható a Pitagorasz-tétel:

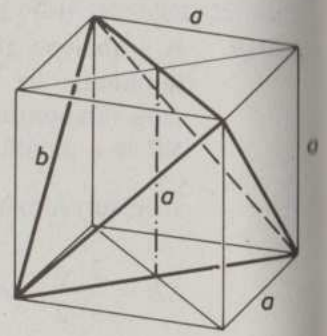
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = AF^2 - a^2 \quad \textbf{(2020/I. ábra)}.$$

Minthogy itt AF az ACD szabályos háromszög magassága $AF = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, ezért $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)^2 - a^2$. Ebből $b = a\sqrt{2}$.

II. megoldás: A szabályos tetraéder köré – az ismert módon – kocka írható **(2020/II. ábra)**. A tetraéder két szemközti élének távolsága éppen a kocka a élével egyenlő, a tetraéder éle pedig a kocka lapátlója: $b = a\sqrt{2}$.



2020/I.



2020/II.

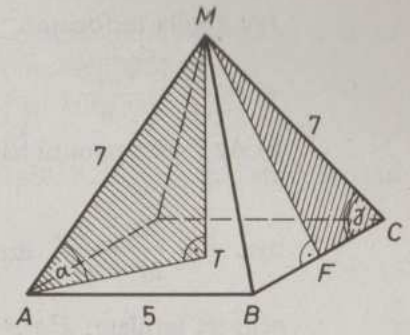
2021. *a)* Az oldalélnek az alapéllel bezárt szögét az MFC derékszögű háromszögből kapjuk: $\cos\gamma = \frac{FC}{MC} = \frac{2{,}5}{7}$; $\gamma = 69{,}08°$ **(2021. ábra)**.

b) Az oldalélnek az alaplappal bezárt α szögét az AMT derékszögű háromszögből számítjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{AT}{AM}.$$

AT az alaplap átlójának fele: $\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2}$, így

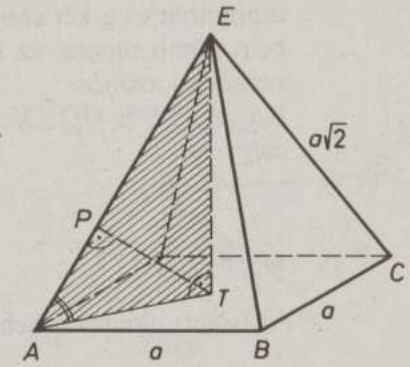
$$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{14}; \quad \alpha = 59{,}66°.$$



2021

2022. A gúla oldaléle $AE = a\sqrt{2}$, az AT szakasz kétszerese **(2022. ábra)**. ACE szabályos háromszög, $EAT\sphericalangle = 60°$. Így az alaplap középpontjának az oldaléltől való távolsága az AT oldalú szabályos háromszög magassága:

$$PT = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$



2022

2023. *a)* A gúla oldallapjainak magassága az $a\sqrt{2}$ szárú egyenlő szárú háromszög a alaphoz tartozó magassága **(2023.a), b)** ábra)

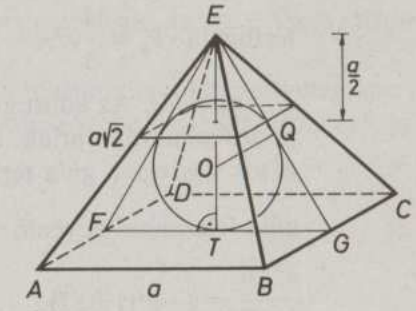
$$m = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}a,$$

területe:

$$t = \frac{\sqrt{7}a^2}{4}.$$

Tehát a gúla felszíne

$$A = a^2 + 4t = a^2(1 + \sqrt{7}).$$



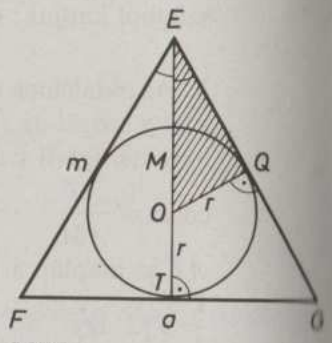
2023a,b

A gúla magassága az előző feladat eredménye alapján:

$$M = ET = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3} = a\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Így a gúla térfogata:

$$V = \frac{tM}{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



2023c

b) Az E középpontú hasonlóság aránya $\lambda = \frac{\frac{a}{2}}{M} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, ezért a kapott négyzet területe: $\lambda^2 a^2 = \frac{a^2}{6}$.

c) I. megoldás (**2023.***c)* ábra): Tekintsük a gúla szemköztes oldallapjai magasságára illeszkedő síkmetszetét. Ez tartalmazza a beírt gömb középpontját és a két szemköztes oldallapon az érintési pontokat. Így a beírt gömb sugara, az EFG egyenlő szárú háromszög beírt körének r sugarával azonos.

Ezt az FTE és OQE hasonló háromszögek segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{r}{M-r} = \frac{\frac{a}{2}}{m}.$$

Az ismert oldalakat behelyettesítve az $r = a\frac{\sqrt{6}(\sqrt{7}-1)}{2}$ értéket kapjuk.

Így a beírt gömb felszíne: $A_g = 4r^2\pi = \frac{4-\sqrt{7}}{3}a^2\pi$ és

térfogata: $V_g = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{\sqrt{6}(5\sqrt{7}-11)}{108}a^3\pi$.

II. megoldás: Az adott gúlát a beírt gömb középpontjával közös csúcspontú gúlákra bontjuk. Ezek magassága a beírt gömb sugara: r, térfogatuk összege a gúla térfogatával, az alaplapok területének összege a gúla felszínével egyenlő. Így: $V = \frac{r}{3}A$, azaz

$$\frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{r}{3}\cdot a^2(1+\sqrt{7}).$$

Ebből:

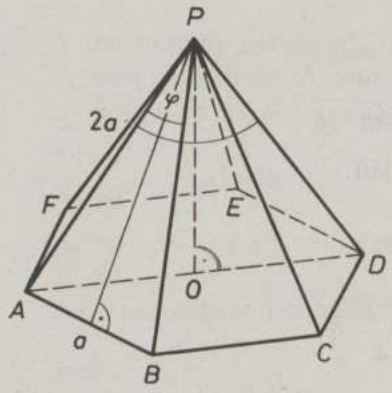
$$r = a\frac{\sqrt{6}(\sqrt{7}-1)}{12}.$$

2024. A szabályos hatszög két szemköztes csúcsának távolsága az a alapél kétszerese; ezért ADP szabályos háromszög (**2024.** ábra).

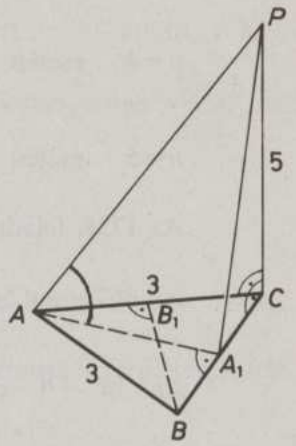
Ebből: *a)* a gúla magassága az alapéllel kifejezve: $a\sqrt{3}$ és *c)* a szemköztes oldalélek szöge 60°.

b) A szomszédos oldalélek szögét az ABP egyenlő szárú háromszögből határozzuk meg:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}.$$ Ebből $\varphi = 28{,}96°$.



2024



2025

2025. PC merőleges a háromszög síkjára, így a sík összes egyenesére is. Tehát $PC \perp AA_1$ és $PC \perp BB_1$ (**2025.** ábra).

BB_1 merőleges PC-re és AC-re, ezért merőleges az ACP síkra, tehát $PA \perp BB_1$. Ugyanígy: $PA_1 \perp AA_1$.

PA és AA_1 szögét a PAA_1 derékszögű háromszögből kapjuk meg, mert e háromszög oldalai derékszögű háromszögekből meghatározhatóak.

$$AP = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34},$$

$$AA_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{6{,}75}.$$

Így $\cos PAA_1\sphericalangle = \frac{\sqrt{6{,}75}}{\sqrt{34}} = 0{,}4456$, $\quad PAA_1\sphericalangle = 63{,}54°$.

2026. Az a oldalú szabályos n-szög köréírt körének sugara:

$$r = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}.$$

Ha a gúla oldaléle a, akkor szükségképpen

$a > r$.

Az egyenlőtlenséget megoldva $30° < \frac{180°}{n}$ $(< 90°)$, azaz $n < 6$ adódik.

A gúla magasságát az $m^2 = a^2 - r^2$ összefüggésből kapjuk:

$n = 3$ esetén $\quad m = a\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$n = 4$ esetén $\quad m = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$n = 5$ esetén $\quad m = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2 36°}}$.

Az **1735.** feladat megoldása alapján:

$\cos 36° = \sin 54° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, így

$$\sin^2 36° = 1 - \cos^2 36° = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2.$$

Ebből $m = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

2027. Az egység átfogójú x hegyesszögű, derékszögű háromszög x-szel szemköztes befogója $\sin x$, a másik befogó $\cos x$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $\sin x + \cos x > 1$.

2028. *I. megoldás:* Az AT_1OT_2 derékszögű deltoid területe (**2028.** ábra).

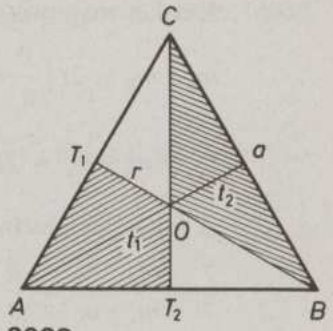
$$t_1 = AT_2 \cdot T_2O = \frac{a}{2}r,$$

ahol r a háromszög beírt körének sugara.

A BCO háromszög területe:

$t_2 = \frac{1}{2}ar$, mivel a CB oldalhoz tartozó magasság r. Tehát $t_1 = t_2$.

II. megoldás: Az OA szögfelező felezi az AT_1OT_2 négyszög és a BCO háromszög területét. Az így keletkező négy háromszög egybevágóságából $t_1 = t_2$ következik.



2028

2029. Ismert, hogy a háromszög területe $t = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

A feltételből következik, hogy $\sin\gamma = \frac{1}{2}$. Ezért $\gamma < 90°$ miatt $\gamma = 30°$.

2030. A derékszögű háromszög B csúcs melletti külső szöge $\alpha + 90°$, az A csúcs melletti külső szög $\beta + 90°$.

$a < b$, így $\alpha < \beta$, ezért a feltételekből

$\frac{\alpha+90°}{\beta+90°} = \frac{4}{5}$ adódik.

Az $\alpha = 90° - \beta$ egyenlőséget figyelembe véve kapjuk, hogy $\beta = 60°$, $\alpha = 30°$.

A háromszög területe a $2a$ oldalú szabályos háromszög területének fele, azaz $t = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

2031. Az átfogó $c = \sqrt{6^2+9^2} = 3\sqrt{13}$.

A háromszög területének kétszerese: $ab = mc$.

Innen $m = \frac{54}{3\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}} \approx 5{,}0$ (dm).

2032. A háromszögek kerületének aránya $\lambda = \frac{27}{5+6+7} = \frac{3}{2}$. Területük aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, azaz 9 : 4.

2033. Tegyük fel, hogy $b = B \cdot a$ és $c = C \cdot a$. Ekkor a háromszög magasságai:

$$m_a = \frac{2t}{a}, \quad m_b = \frac{2t}{B \cdot a} \quad \text{és} \quad m_c = \frac{2t}{C \cdot a}.$$

Két-két magasság összege:

$$m_a+m_b = 2t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{B\cdot a}\right) = 2t\frac{B+1}{B\cdot a}, \qquad m_b+m_c = 2t\frac{B+C}{B\cdot C\cdot a},$$

és $\quad m_c+m_a = 2t\dfrac{C+1}{C\cdot a}$.

A feltételek szerint:

$$\frac{5}{7} = \frac{m_a+m_b}{m_b+m_c} = \frac{B+1}{B+C}\cdot C \quad \text{és} \quad \frac{8}{7} = \frac{C+1}{B+C}\cdot B.$$

Az egyenletrendszerből $B=\dfrac{3}{2}$ és $C=\dfrac{3}{5}$. Innen az oldalak aránya:

$$a:b:c = 1:\frac{3}{2}:\frac{3}{5} = 10:15:6.$$

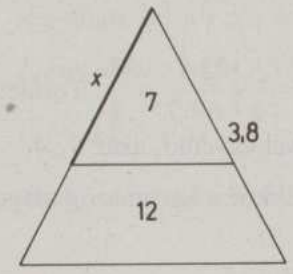
2034. $t=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = 56{,}8\ (\text{cm}^2)$.

2035. $t=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ alapján $\sin\gamma = \dfrac{208}{15{,}0\cdot 20{,}5} = 0{,}6764$. Innen $\gamma_1=42{,}56°$, $\gamma_2=137{,}44°$. (Az adatok a háromszöget nem határozzák meg egyértelműen.)

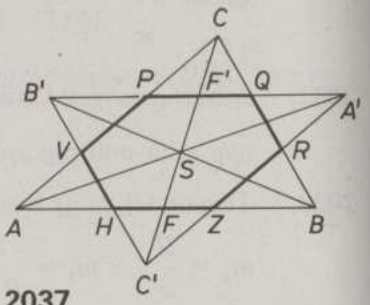
$t=\dfrac{am_a}{2}$-ből, $\quad m_a=\dfrac{208}{20{,}5}=10{,}1$ (cm).

2036. A lemetszett háromszög az eredetihez hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda=\dfrac{x}{3{,}8}$, területük aránya a feltételt figyelembe véve $\lambda^2=\left(\dfrac{x}{3{,}8}\right)^2=\dfrac{7}{19}$.

Ebből $x=3{,}8\sqrt{\dfrac{7}{19}}=\dfrac{\sqrt{133}}{5}$ (cm) ($\approx$2,31 cm) (**2036.** ábra).



2036



2037

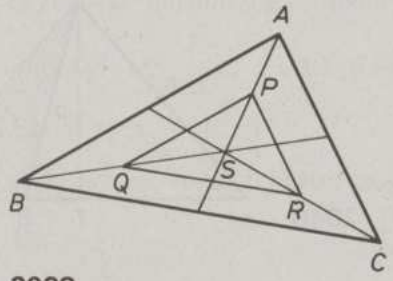
2037. $A'B'$ az AC, illetve BC oldalt P, illetve Q pontokban metszi (**2037.** ábra).

$PQC\triangle \sim ABC\triangle$.

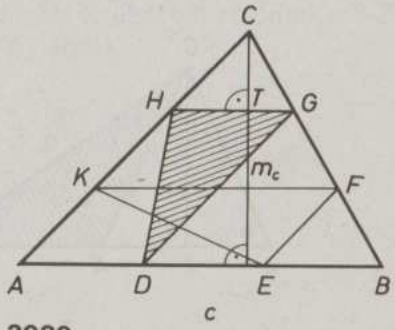
A tükrözés miatt $FS=F'S$, másrészt $FS=\dfrac{1}{3}FC$. Ezért F' az FC súlyvonalat harmadolja. Így a hasonlóság aránya $\lambda=\dfrac{F'C}{FC}=\dfrac{1}{3}$, a PQC és ABC háromszögek területének aránya $\lambda^2=\dfrac{1}{9}$.

$PQC\triangle \cong ZBR\triangle \cong AHV\triangle$, ezért a két háromszög közös részének területe $t=T-3\cdot\dfrac{1}{9}T=\dfrac{2}{3}T$, tehát a területek aránya $\dfrac{t}{T}=\dfrac{2}{3}$.

2038. $PQR\triangle \sim ABC\triangle$, mert PQ, QR, RP az ABS, BCS, CAS háromszögek középvonalai ($PQ\|AB$, $QR\|BC$, $RP\|CA$). A hasonlóság aránya $\dfrac{PQ}{AB}=\dfrac{1}{2}$, a területek aránya $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ (**2038.** ábra).



2038



2039

2039. $HGC\triangle \sim ABC\triangle$ (két oldal aránya és a körbezárt szög egyenlősége miatt) (**2039.** ábra).

A megfelelő szakaszok aránya: $\dfrac{HG}{c}=\dfrac{CT}{m_c}=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{1}{3}$.

Ezért a HGD háromszög területe:

$$t_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot c\cdot\frac{2}{3}\cdot m_c=\frac{2}{9}t,$$

ahol t az ABC háromszög területe.

Hasonlóan megmutatható, hogy az EFK háromszög területe $t_2 = \frac{2}{9}t$.

Tehát $t_1 : t_2 : t = \frac{2}{9} : \frac{2}{9} : 1$ $(= 2 : 2 : 9)$.

2040. $A'BC$ és ABC háromszögek C csúcsból induló magasságai azonosak, így $t' : t = A'B : AB$ (**2040.** ábra).

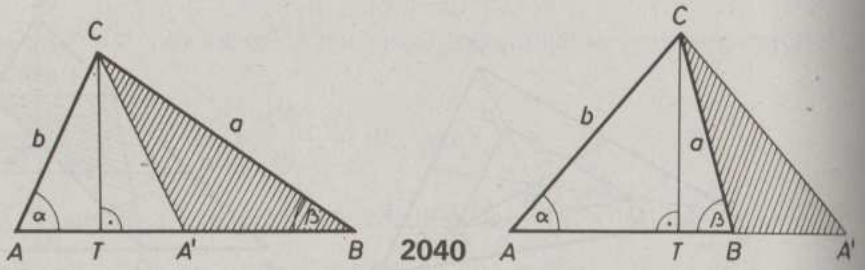
α és β hegyesszögek, mert ellenkező esetben az AB oldalt nem metszené a magasságvonal.

Ha $a > b$, A' az AB szakasz pontja: $AT = TA'$ és $A'B = \frac{1}{2}AB$. Így

$AA' = A'B$, $AT = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB$, azaz $AT : AB = 1 : 4$. Tehát a magasságvonal az AB oldalt $1 : 3$ arányban osztja.

Hasonlóan megmutatható $a < b$ esetén is, hogy T az AB szakasz B csúcshoz közelebb eső negyedelő pontja.

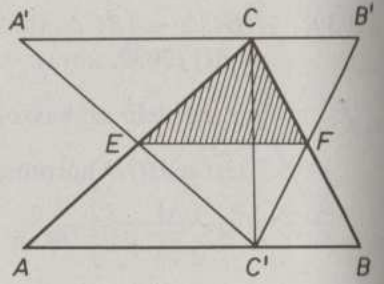
Összefoglalva: a magasságtalppont az AB oldalnak a csatlakozó rövidebb oldalhoz közelebb eső negyedelő pontja.



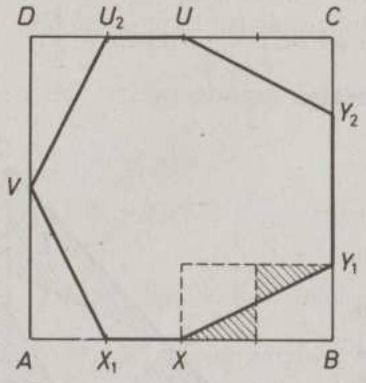
2040

2041. $EFC\triangle \sim ABC\triangle$, a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, területük aránya $\frac{1}{4}$.

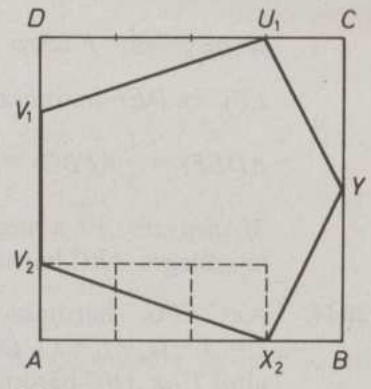
$EFC\triangle \cong EFC'\triangle$, így $t(CEC'F) = 2t(EFC) = \frac{1}{2}t(ABC)$ (**2041.** ábra).



2041



2042a



2042b

2042. A hétszög területét megkapjuk, ha a négyzet T területéből kivonjuk a négy egybevágó háromszög területét (**2042.** *a)* ábra).

$t(XBY_1) = \frac{T}{16}$, így $t_7 = \frac{3}{4}T$.

Az ötszög területét megkapjuk, ha a négyzet területéből kivonjuk a 2-2 egybevágó háromszög területét (**2042.** *b)* ábra).

$2t(AX_2V_2) = \frac{3}{16}T$, $2t(X_2BY) = \frac{T}{8}$, így $t_5 = \frac{11}{16}T$.

Ebből $t_7 : t_5 = 12 : 11$.

2043. *I. megoldás:* A DEF háromszögben

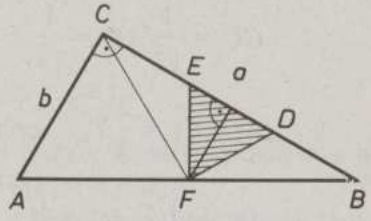
$DE = \frac{a}{3}$,

az ehhez tartozó magasság az ABC háromszög a oldalához tartozó magasság fele (mivel F felezi AB-t), itt $\frac{b}{2}$. (**2043.** ábra).

Ezért

$t(EDF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{6}t(ABC) = \frac{1}{6}$.

Megjegyzés: A megoldás során nem használtuk fel, hogy az adott háromszög hegyesszögei 30°, 60°-osak.



2043

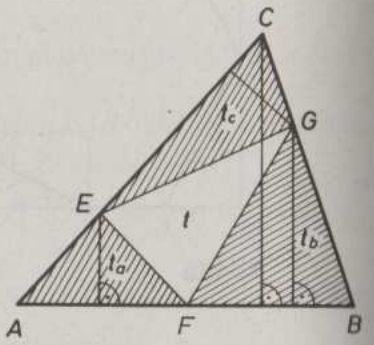
II. megoldás: F felezi AB-t, ezért $t(FBC) = \frac{1}{2}t(ABC) = \frac{1}{2}$.

FBC és DEF háromszögek magassága azonos, így

$$t(DEF) = \frac{1}{3}t(FBC) = \frac{1}{6}t(ABC).$$

Megjegyzés: Ez a megoldás tetszőleges ABC háromszögre jó.

2044. Az EFG háromszög területe $t = T-(t_a+t_b+t_c)$ (**2044.** ábra), ahol T az ABC háromszög területe. A kis háromszögek területét egy oldalból és a hozzá tartozó magasságból számoljuk ki például a következő táblázat szerint:



2044

háromszög	oldala	a hozzá tartozó magasság	területe
AFE	$\frac{c}{2}$	$\frac{m_c}{3}$	$t_a = \frac{T}{6}$
BGF	$\frac{c}{2}$	$\frac{2}{3}m_c$	$t_b = \frac{T}{3}$
CEG	$\frac{2}{3}b$	$\frac{m_b}{3}$	$t_c = \frac{2T}{9}$.

Így $t = T\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{18}\cdot 36 = 10\ (\text{cm}^2)$.

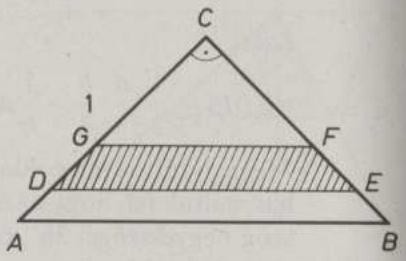
2045. ABC, DEC és GFC háromszögek hasonlóak (**2045.** ábra). Területeik arányából a hasonlóság arányára következtethetünk. Így

$t(GFC) = \frac{1}{3}T$, ezért

$GC = \frac{1}{\sqrt{3}}AC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, valamint

$t(DEC) = \frac{2}{3}T$, ezért

$DC = \sqrt{\frac{2}{3}}AC = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



2045

Ebből a szimmetrikus trapéz szárai:

$DG = EF = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ egység.

A trapéz alapjai

$GF = \sqrt{2}GC = \sqrt{\frac{2}{3}}$ egység,

$DE = \sqrt{2}DC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ egység.

2046. Az ABC háromszöghöz hasonló PQC háromszög területe az ABC háromszög területének $\frac{1}{3}$ vagy $\frac{2}{3}$ része. A $\frac{t}{T} = \lambda^2$ összefüggés alapján a hasonlóság aránya: $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, illetve $\lambda_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ezért $CP_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot CA = 3\sqrt{3}$ cm, illetve $CP_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot CA = 3\sqrt{6}$ cm.

2047. A hasonló háromszögeket figyelembe véve:

$DE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}c$, $FG = \frac{2}{3}c$,

$DP = \frac{2}{3}m_c$, $FR = \frac{1}{3}m_c$.

Így $t(DEQP) = DE\cdot DP = \frac{2}{9}t$,

$t(FGSR) = FG\cdot FR = \frac{2}{9}t$,

tehát a két téglalap területe egyenlő.

A téglalapok kerülete:

$k(DEQP) = 2DE+2DP = \frac{2}{3}c+\frac{4}{3}m_c \quad \left(=\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}m_c+\frac{2}{3}m_c\right)$

és

$k(FGSR) = \frac{4}{3}c+\frac{2}{3}m_c \quad \left(=\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}m_c+\frac{2}{3}c\right)$.

Tehát c és m_c viszonyától függ, hogy melyik téglalap kerülete a nagyobb. Például ha $m_c < c$, akkor $k(DEQP) < k(FGSR)$.

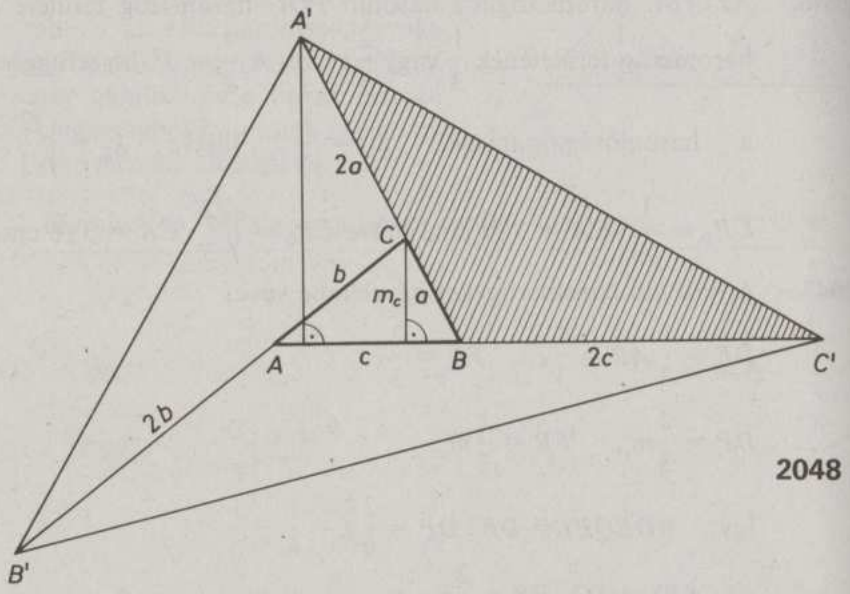
Megjegyzés: A területek egyenlősége a téglalapok átdarabolásával is megmutatható.

2048. Tekintsük a $BC'A'$ háromszöget (**2048.** ábra). Ebben $BC' = 2c$, az ehhez tartozó magasság a párhuzamos szelőszakaszok tételét (vagy a hasonló háromszögeket) figyelembe véve: $3m_c$.
Így $t(BC'A') = 6t$, ahol t az ABC háromszög területe.
Hasonlóan belátható, hogy

$t(CA'B') = t(AB'C') = 6t$.

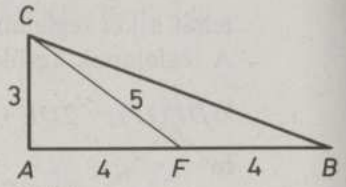
Tehát

$t(A'B'C') = t + 3 \cdot 6t = 19t$, azaz az $A'B'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének 19-szerese.



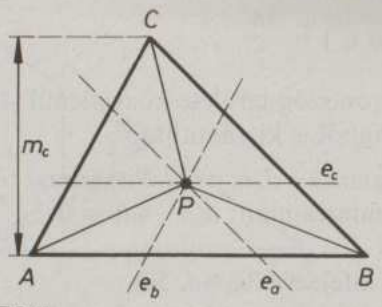
2048

2049. A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján az AFC háromszög derékszögű. Az ABC háromszög befogói 3 cm, illetve 8 cm, így a területe 12 cm^2 (**2049.** ábra).

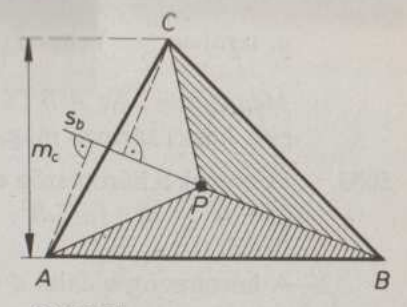


2049

2050. *I. megoldás:* A feltétel azt jelenti, hogy $T(ABP) = \frac{1}{3}T(ABC)$. Ez úgy lehetséges, hogy ABP háromszög P-ből induló magassága: $\frac{1}{3}m_c$. Így



2050/I.



2050/II.

P rajta van az m_c-nek, a C-től távolabbi harmadolópontján átmenő, AB-vel párhuzamos e_c egyenesen. Az e_c-re illeszkedik az S súlypont. Hasonlóan ez áll a többi oldalra is: S illeszkedik az $e_a \| BC$ és $e_b \| AC$ egyenesekre is. Így e_a, e_b, e_c-nek S közös pontja, de más közös pontja nem lehet. Ezért P azonos S-sel (**2050**/I. ábra).
II. megoldás: A $t(ABP) = t(BCP)$ egyenlőségből következik, hogy a két háromszög közös PB oldalához tartozó magassága egyenlő, azaz A-nak és C-nek PB egyenestől mért távolsága azonos. Ezért a PB egyenes felezi az AC oldalt, tehát P rajta van a b oldalhoz tartozó s_b súlyvonalon (**2050**/II. ábra).
Hasonlóan mutatható meg, hogy P az s_a és s_c súlyvonalakra is illeszkedik. Ezért, ha $t(ABP) = t(BCP) = t(CAP)$ fennáll, akkor P csak az ABC háromszög súlypontja lehet.
A háromszög súlypontjára a fenti egyenlőség teljesül, hiszen pl.:

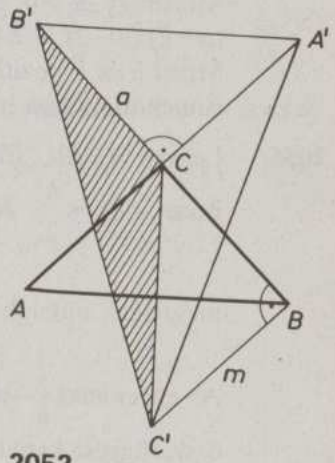
$$t(ABP) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_c AB\right) = \frac{1}{3}t(ABC).$$

2051. A megoldást lásd **2037**-nél.

2052. Az $A'B'C'$ háromszög három egyenlő területű háromszögre bontható (**2052.** ábra).

$T(A'B'C') =$
$= T(A'B'C) + T(A'C'C) + T(B'C'C)$.

$A'B'C\triangle \cong ABC\triangle$ $\left(t = \frac{a^2}{2}\right)$.



2052

A másik két háromszög egyik oldala és a hozzá tartozó magassága is a, területe $\frac{a^2}{2}$. Tehát $T(A'B'C') = \frac{3a^2}{2}$.

Megjegyzés: Az $A'B'C'$ háromszög területe közvetlenül $A'B'$ oldalból és a hozzá tartozó magasságból is kiszámítható.

2053. Legyenek a háromszög oldalai: $a-d$, a, $a+d$. Pitagorasz tétele szerint: $(a+d)^2 = a^2+(a-d)^2$. Rendezés után: $a(a-4d) = 0$.
Ebből $0 < a = 4d$.
A háromszög oldalai d-vel kifejezve $3d$, $4d$, $5d$.
Területe: $6d^2 = 600$, így $d = 10$, tehát a háromszög oldalai:
30 cm, 40 cm, 50 cm.

2054. A feltételek szerint $k = a+b+c = 60$,

$$t = \frac{1}{2}ab = 120,$$

$$a^2+b^2 = c^2.$$

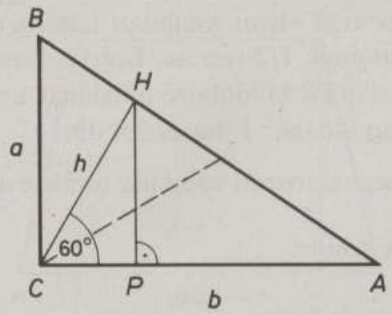
Az egyenletrendszerből: $a+b = 60-c$ és $ab = 240$ egyenleteket kapjuk, ami a $c^2 = (60-c)^2-480$ egyenletre vezet. Ebből az átfogó $c = 26$ m, a befogók: 10 m és 24 m.

2055. A derékszögű háromszög oldalaira a szokásos jelölést alkalmazva:
$a^2+b^2 = c^2$ a Pitagorasz-tétel, továbbá
$a+b+c = ab$ a feltétel szerint.
Ezekből $a^2+b^2 = (ab-a-b)^2$.
A kijelölt műveleteket elvégezve és szorzattá alakítva:
$ab(ab-2a-2b+2) = 0$.
Minthogy $ab > 0$, ezért kell, hogy $ab-2a-2b+2 = 0$, azaz
$(a-2)(b-2) = 2$ legyen.
Mivel a és b pozitív egész, ezért $a-2 = 1$ és $b-2 = 2$ vagy fordítva.
Ennek alapján a háromszög oldalai 3, 4 és 5 egység.

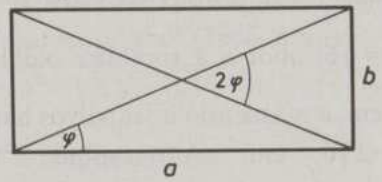
2056. Legyen $HP \| BC$. Ekkor HCP derékszögű háromszögben a $HCP\sphericalangle = 60°$ miatt $CP = \frac{h}{2}$, $HP = \frac{h}{2}\sqrt{3}$ (**2056.** ábra). $AHP\triangle \sim ABC\triangle$, ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő: $\frac{HP}{BC} = \frac{PA}{CA}$, azaz $\frac{\frac{h}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{b-\frac{h}{2}}{b}$.

Az egyenletet $\frac{2}{h}$-val szorozva és rendezve, a bizonyítandó $\frac{1}{b}+\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{h}$ összefüggést kapjuk.

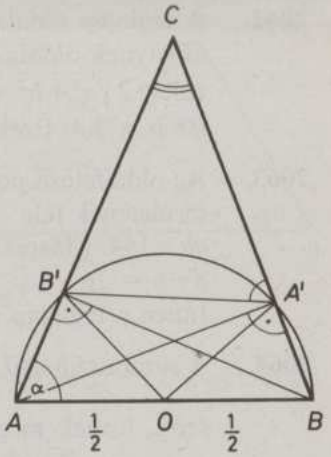
2057. Lásd az **1811**-es feladatot.



2056



2060



2058

2058. $ABA'B'$ négyszög húrnégyszög, ezért például: $CA'B'\sphericalangle = \alpha$. Az ABC és $A'B'C$ háromszögek hasonlóak, mert két-két szögük páronként egyenlő. A hasonlóság aránya $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, így a két háromszög területének aránya $\frac{1}{2}$, tehát $A'B'$ felezi az ABC háromszög területét (**2058.** ábra).

2059. ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak. (Lásd a **2058**-as feladat megoldását!) Mivel $\frac{t'}{t} = \frac{1}{n}$, ezért a hasonlóság aránya $\frac{1}{\sqrt{n}}$, így $A'B' = \frac{c}{\sqrt{n}}$.

2060. A feltételekből $ab = 60$, $a^2+b^2 = 169$. Az egyenletrendszer gyökei a téglalap oldalai: 12 cm, 5 cm. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{5}{12}$, $\varphi = 22{,}62°$. Ezért az átlók szöge $2\varphi = 45{,}24°$ (**2060.** ábra).

2061. A feltételek alapján: $2b = \sqrt{4+b^2}$.

Ebből $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ adódik.

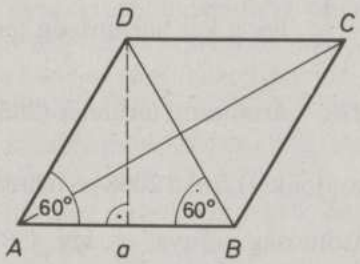
Ha az átlók az a oldallal φ szöget zárnak be, akkor

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\varphi < 90°$ miatt $\varphi = 30°$.

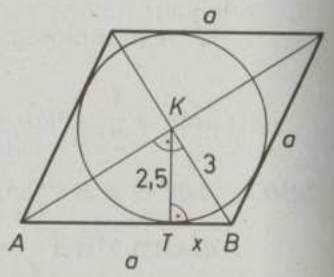
2062. A téglalap oldalainak felezőpontjai olyan rombuszt határoznak meg, amelynek oldala a téglalap átlóinak 1/2-szerese. Ezért a rombusz kerülete $2\sqrt{a^2+b^2} = 5{,}2$. A téglalap két különböző oldalának az összege: $a+b = 3{,}4$. Ezekből a téglalap oldalai: 1 dm és 2,4 dm.

2063. Az oldalfelező pontok által meghatározott rombusz területe a téglalap területének fele:
$ab = 144$. Másrészt a feltételek szerint
$a+b = 26$.
Innen a téglalap oldalai: 18 cm és 8 cm.

2064. A rombusz másik szögét a BD átló felezi. Ezért ABD szabályos háromszög. Ennek magassága $a\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$, ahol a a rombusz oldala. Így a rombusz egyik átlója $a = 2\sqrt{2}$ cm, a másik átló a szabályos háromszög magasságának kétszerese: $2\sqrt{6}$ cm. A rombusz területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (cm²) (**2064.** ábra).



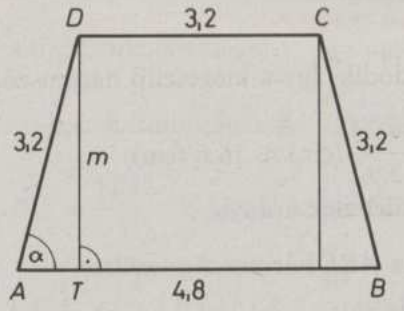
2064



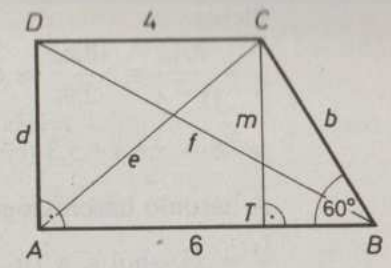
2065

2065. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást (**2065.** ábra). A KTB derékszögű háromszögből $TB = x = \sqrt{3^2-2{,}5^2} = \sqrt{2{,}75}$. Az ABK derékszögű háromszögre alkalmazzuk a befogótételt:
$ax = 3^2$,
azaz $a = \frac{9}{\sqrt{2{,}75}}$.

Így a rombusz területe $t = 2ra = \frac{45}{\sqrt{2{,}75}}\text{cm}^2 \approx 27{,}1\text{ cm}^2$.



2066



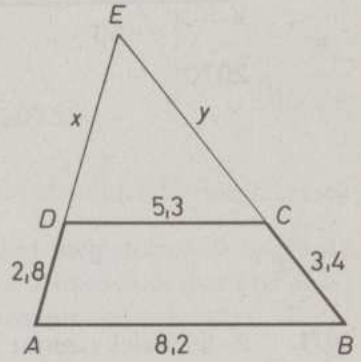
2067

2066. A szimmetrikus trapéz magassága és α hegyesszöge az ATD derékszögű háromszögből (**2066.** ábra):
$m = \sqrt{3{,}2^2-0{,}8^2} = 0{,}8\sqrt{15}$; $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = 75{,}52°$.
A trapéz területe: $t = \frac{a+c}{2}m = 3{,}2\sqrt{15}\text{ cm}^2$ ($\approx 12{,}4\text{ cm}^2$).

2067. A trapéz szárai a CTB derékszögű háromszögből (**2067.** ábra):
$d = m = 2\sqrt{3}$ cm, $b = 4$ cm.
A trapéz területe:
$t = \frac{a+c}{2}m = 10\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
Az átlókat az ATC és az ABD derékszögű háromszögből határozzuk meg:
$e = \sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$, $f = \sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$.

2068. A feltételek szerint: $m = c+6$, $a = c+12$ és
$t = \frac{a+c}{2}m = 576$.
Behelyettesítés után:
$t = (c+6)^2 = 576$.
Ebből $m = c+6 = 24$ cm, $c = 18$ cm és $a = 30$ cm adódik.

2069. $DCE\triangle \sim ABE\triangle$, és a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{5{,}3}{8{,}2}$ (**2069.** ábra). Ezért $\frac{x}{x+2{,}8} = \lambda$ és $\frac{y}{y+3{,}4} = \lambda$ áll fenn.
Ezekből $x = \frac{2{,}8\lambda}{1-\lambda} = \frac{14{,}84}{2{,}9} \approx 5{,}12$,



2069

illetve

$y = \frac{3{,}4\lambda}{1-\lambda} = \frac{18{,}02}{2{,}9} \approx 6{,}21$ adódik. Így a kiegészítő háromszög kerülete: $k = x+y+5{,}3\ (\text{cm}) = \frac{48{,}23}{2{,}9}\ (\text{cm}) \approx 16{,}6\ (\text{cm})$.

A hasonló háromszögek területének aránya

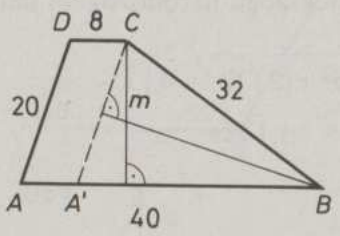
$\frac{t_1}{T} = \lambda^2$, ahol t_1 a DCE, T az ABE háromszög területe.

Így $t_1 = \lambda^2 T$, és a trapéz területe $t_2 = T - t_1 = (1-\lambda^2)T$.

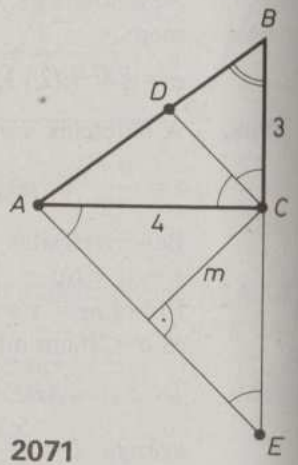
Ebből a keresett arány

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{5{,}3^2}{8{,}2^2 - 5{,}3^2} = \frac{28{,}09}{39{,}15} \approx 0{,}72.$$

2070. C ponton keresztül AD-vel húzott párhuzamos AB-t A'-ben metszi (**2070.** ábra). Ezért $AA' = 8$ cm, $A'B = 32$ cm, így $A'BC$ egyenlő szárú háromszög. Ennek az alaphoz tartozó magassága $\sqrt{32^2 - 10^2} = 2\sqrt{231}$. Az $A'BC$ háromszög kétszeres területe: $2t = 32m = 20 \cdot 2\sqrt{231}$. Tehát a trapéz magassága $m = \frac{5}{4}\sqrt{231}$ cm, és területe $t = \frac{a+c}{2}m = 30\sqrt{231}\ \text{cm}^2$.



2070

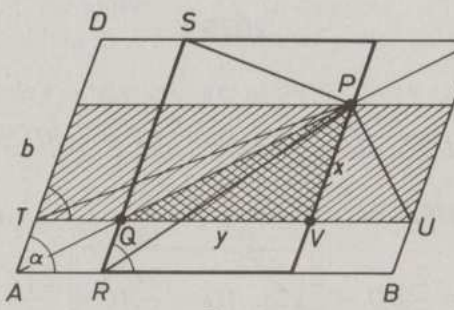


2071

2071. A feltételek szerint $CAE\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 45°$, így ACE egyenlő szárú derékszögű háromszög (**2071.** ábra). Ezért $CE = 4$; $AE = 4\sqrt{2}$ egység, és a trapéz magassága $m = \frac{4\sqrt{2}}{2}$ egység. DC oldalt a DCB és AEB háromszögek hasonlóságának figyelembevételével kapjuk: $\frac{DC}{AE} = \frac{3}{7}$, azaz $DC = \frac{12\sqrt{2}}{7}$. Ezekből az $AECD$ trapéz területe:

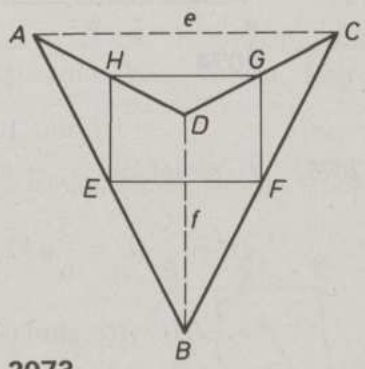
$$t = \left(\frac{12\sqrt{2}}{7} + 4\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \frac{80}{7}\ \text{(területegység)}.$$

2072. $PQV\triangle \sim CAB\triangle$, ezért $y = QV$-re és $x = PV$-re fennáll: $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$, azaz $yb = ax$ (*). TPU háromszög területe fele egy a és x oldalú α szögű paralelogrammának, így $t(TPU) = \frac{1}{2}ax\sin\alpha$ (**2072.** ábra). Hasonlóan RPS háromszög területe egy b és y oldalú α szögű paralelogramma területének a fele: $t(RPS) = \frac{1}{2}by\sin\alpha$. (*) miatt a két háromszög területe egyenlő.



2072

a



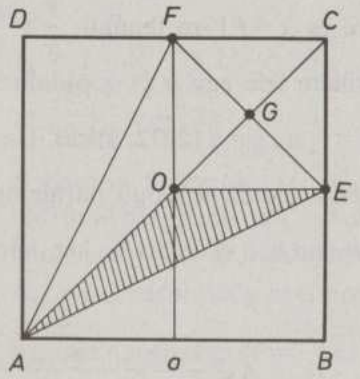
2073

2073. A deltoid területe $t = \frac{1}{2}ef$ (**2073.** ábra). A deltoid átlói merőlegesek egymásra, ezért az oldalfelező pontok által meghatározott négyszög téglalap. A téglalap oldalainak kétszerese a deltoid átlói (mert például: $EF = HG$ az ADC háromszög e-vel párhuzamos középvonala). Tehát a téglalap területe $t' = \frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2} = \frac{t}{2}$. A keresett arány 1 : 2.

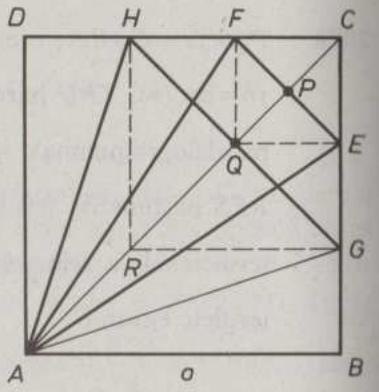
2074. *I. megoldás:* $t = \frac{1}{2} EF \cdot AG$, ahol $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ és $AG = \frac{3}{4} a\sqrt{2}$. Ezért $t = \frac{3}{8} a^2 = 54\ \text{cm}^2$ (**2074.** ábra).

II. megoldás: Az AEO, AOF és EOF háromszögek területe egyenlő, mert egyik oldaluk, és a hozzá tartozó magasság: $\frac{a}{2}$.

Ezért $t = 3\frac{a^2}{8}$.



2074



2075

2075. *I. megoldás:* $t_1 = t(AEF) = \frac{1}{2} EF \cdot AP$, ahol $EF = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} a\sqrt{2}$, $AP = \frac{5}{6} AC = \frac{5}{6} a\sqrt{2}$ (**2075.** ábra). Ezért $t_1 = \frac{5a^2}{18}$. $t_2 = t(AGH) = \frac{1}{2} GH \cdot AQ$, ahol $GH = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$, $AQ = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} a$. Ezért $t_2 = \frac{4}{9} a^2$. A két háromszög területének aránya: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{5}{8}$.

Megjegyzés: A szakaszokat az ábrán látható hasonló háromszögekből határoztuk meg.

II. megoldás: A háromszögeket három-három háromszögre bontjuk:
AEF-et AEQ, AQF, EQF-re,
AGH-t AGR, ARH, GRH-ra.
Ezek területét a négyzet oldalaival párhuzamos oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével kapjuk meg. (Például: $AEQ\triangle \cong AFQ\triangle$ és $QE = \frac{a}{3}$, az ehhez tartozó magasság $\frac{2a}{3}$.

Így $t(AEF) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{5a^2}{18}$.)

2076. A keletkező nyolcszög szabályos, hiszen oldalai és szögei is egyenlőek (**2076.** ábra).

Oldalát kétféleképpen kifejezve kapjuk: $x\sqrt{2} = a - 2x$. Ebből $x = a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

A nyolcszög területe a négyzet és a négy egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög területének különbsége.

$t = a^2 - 2x^2 = 2(\sqrt{2}-1)a^2 = 72(\sqrt{2}-1)\ \text{cm}^2$.

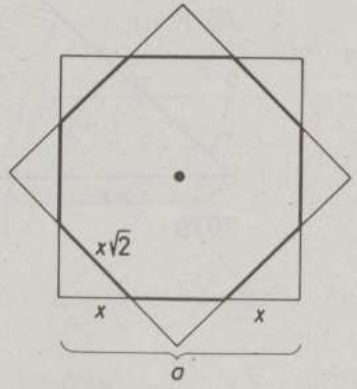
2077. Az előző feladat alapján

$t = 2a^2(\sqrt{2}-1) = 80$.

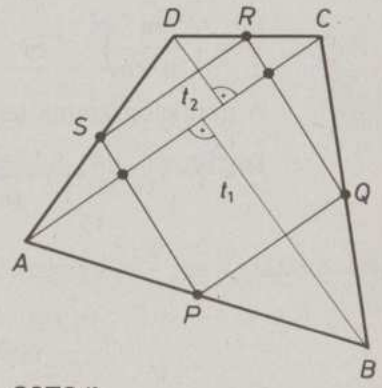
Ebből a négyzet oldala $a = 2\sqrt{10\,(\sqrt{2}+1)}$ cm.

2078. *I. megoldás:* A $PQRS$ négyszög PQ oldala az ABC háromszög, RS oldala a CDA háromszög AC-vel párhuzamos középvonala. Ezért $PQ = RS = \frac{1}{2} AC$ és $PQ \| AC \| RS$ (**2078**/I. ábra).

Az AC átló a paralelogrammát két paralelogrammára bontja. Ezek



2076



2078/I.

alapjai $\frac{1}{2}AC$, és az alaphoz tartozó magasságok az ACD, illetve az ACB háromszögek AC oldalához tartozó magasságainak fele. Azaz

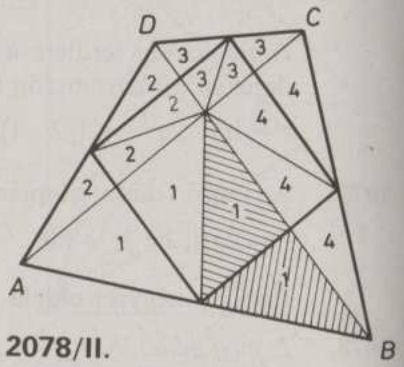
$$t_1 = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}m_B \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}m_D.$$

Ezek összege:

$$t(PQRS) = t_1 + t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC(m_B + m_D) = \frac{1}{2}t(ABCD).$$

Tehát a keresett arány 1 : 2.

II. megoldás: Az $ABCD$ négyszöget a **2078**/II. ábra szerint egyenlő területű háromszögekre bontjuk. Az azonos számmal jelölt háromszögek területe egyenlő. Ebből leolvasható a megoldás.



2078/II.

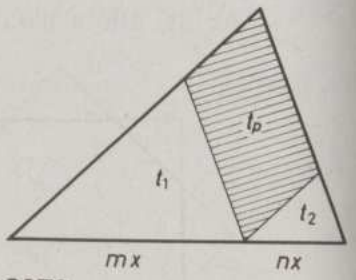
2079. A lemetszett háromszögek az adotthoz hasonlóak, a hasonlóság aránya $\frac{m}{m+n}$, illetve $\frac{n}{m+n}$ (**2079.** ábra).

Ezért

$$\frac{t_1}{t} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{t_2}{t} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^2.$$

A paralelogramma területe:

$$t_p = t - t_1 - t_2 = t \cdot \frac{2mn}{(m+n)^2}.$$



2079

2080. $CDP\triangle \sim BQP\triangle$ (*), ezért $\frac{BQ}{CD} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{1}$.

Ebből $BQ = 10$ cm.

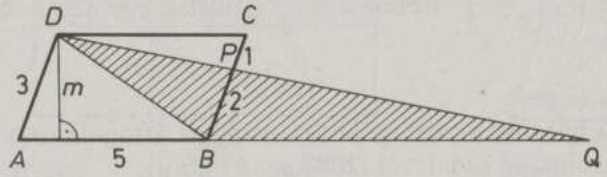
I. megoldás: Legyen a paralelogramma AB oldalához tartozó magassága: m. (Ez lesz a BQD háromszög BQ oldalához tartozó magassága is.) (**2080**/I. ábra.)

Így

$t(ABCD) = 5m$,

$$t(BQD) = \frac{1}{2} \cdot 10m.$$

Tehát a két alakzat területe egyenlő.



2080/I.

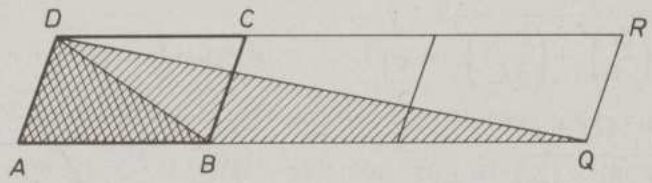
II. megoldás: A BCD háromszög területét DP harmadolja, így $t(CDP) = \frac{1}{6}t(ABCD)$ és $t(DBP) = \frac{1}{3}t(ABCD)$. Másrészt a (*) hasonlóság miatt $t(BQP) = 4t(CDP)$.

Így $t(BQD) = t(DBP) + t(BQP) = t(ABCD)$.

III. megoldás: Átdarabolással (**2080**/III. ábra):

$$t(BQD) = t(AQD) - t(ABD) = \frac{1}{2} \cdot 3t(ABCD) - \frac{1}{2} \cdot t(ABCD) =$$

$$= t(ABCD).$$



2080/III.

2081. A feltételekből következik, hogy a trapéz magassága $\frac{b}{2}$, és a száraknak a hosszabbik alapra eső merőleges vetületei $\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Ezért a trapéz területe:

$$t = \frac{a+(a+b\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{(2a+b\sqrt{3})b}{4}.$$

2082. A feltételekből következik, hogy a száraknak az alapra eső merőleges vetülete $\frac{a-c}{2}$ ($a>c$ feltétel mellett), a trapéz magasságával egyenlő.

Ezért a trapéz területe:

$$t = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a-c}{2} = \frac{a^2-c^2}{4}.$$

2083. A lemetszett háromszög az eredetihez hasonló. A hasonlóság arányának négyzete $\left(\frac{d}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Ebből $d = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, illetve $c = \sqrt{2}d = 5\sqrt{2}$ egység.

2084. Két eset lehetséges:
a derékszögű háromszög befogója (*a)*) vagy az átfogója (*b)*) közös a szabályos háromszög oldalával (**2084.***a), b)* ábra).
Mindkét esetben a derékszögű háromszög 30° – 60°-os, kisebbik befogója c, átfogója $2c$.
Ebből adódik, hogy a trapéz magassága *a)* esetben $\frac{c}{2}\sqrt{3}$, *b)* esetben $c\sqrt{3}$.
A terület:

a) $t = \frac{c+2c}{2} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2$,

b) $t = \frac{c+2c}{2} \cdot c\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$.

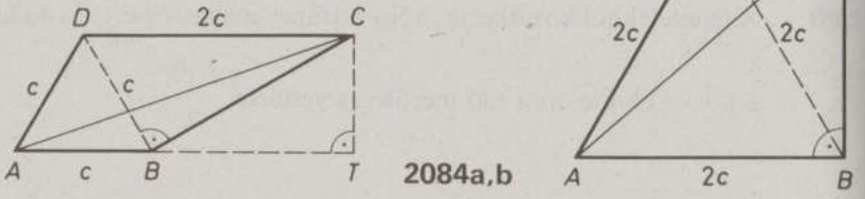
A hosszabb átló

a) $AC^2 = AT^2 + CT^2$, ahol $CT \perp BA$,

$$AC = \sqrt{\left(\frac{5c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2} = c\sqrt{7}.$$

b) $AC^2 = AB^2 + BC^2$,

$AC = \sqrt{(c\sqrt{3})^2 + (2c)^2} = c\sqrt{7}$.



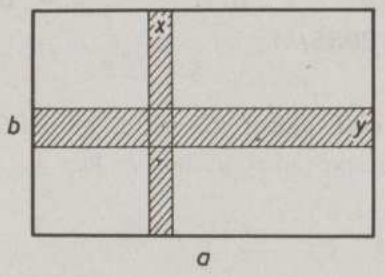
2084a,b

2085. Az utak területe (külön-külön) (**2085.** ábra)

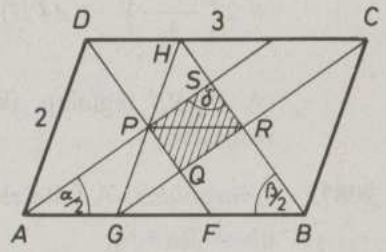
$xb = 250$,

$ya = 400$.

A két egyenlet szorzata $abxy = 100\,000$.
A telek területe: $ab = 4000$.
Ezekből $xy = 25$.
Így az utak együttes területe $xb + ya - xy = 625\ \text{m}^2$.



2085



2086

2086. Előbb belátjuk, hogy $PQRS$ téglalap. A paralelogramma szomszédos szögeire: $\alpha + \beta = 180°$, ezért ASB háromszögben

$$\delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90°$$ (**2086.** ábra).

$AP \perp DF$ miatt ADF háromszög egyenlő szárú $AD = AF = 2$, tehát $FB = 1$, így $AG = PR = DH = 1$ is teljesül.

Minthogy $PRS\triangle \sim APD\triangle$ s a hasonlóság aránya: $\frac{1}{2}$, ezért

$$t(PQRS) = \frac{1}{2}t(APD).$$

Továbbá P a GH szakasz (felező)pontja és

$t(APD) = \frac{1}{2}t(AGHD)$, valamint $AG : AB = 1 : 3$ miatt

$$t(APD) = \frac{1}{6}t(ABCD).$$

Így $t(PQRS) = \frac{1}{12}t(ABCD)$.

Megjegyzés: Általában

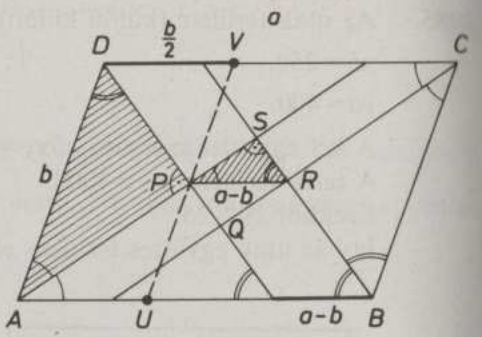
$$t(PQRS) = \frac{(a-b)^2}{2ab}\, t(ABCD),$$

mert (**2086.**/*M* ábra)

$$t(APD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{b}{2}}{a} \cdot t(ABCD),$$

$$t(PQRS) = 2t(PRS) =$$

$$= 2\left(\frac{a-b}{b}\right)^2 \cdot t(APD).$$



2086/*M*

(A *PQRS* téglalap akkor és csak akkor jön létre, ha *ABCD* nem rombusz.)

2087. *I. megoldás:* A feltételek szerint:

$ab = 2(a+b)$,

amiből a-t kifejezzük:

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Minthogy a és b pozitív egész, kell, hogy $b-2$ a 4 osztója legyen. Ebből a téglalap oldalaira 3 és 6 vagy 4 és 4 egységet kapunk.

II. megoldás: $t-k = ab-2a-2b = (a-2)(b-2)-4 = 0$. Így $(a-2)(b-2) = 4$, ahol a és b pozitív egész. A 4 vagy $1 \cdot 4$, vagy $2 \cdot 2$, vagy $(-1)(-4)$ vagy $(-2)(-2)$ lehetne. Ebből a téglalap oldalaira 3 és 6, illetve 4 és 4 egységet kapunk.

2088. Bizonyítani kell, hogy $T(ABP)+T(CDP) = T(BCP)+T(ADP)$. (**2088.** ábra).

Húzzunk a paralelogramma oldalaival párhuzamost P-n keresztül. Az így létrejött „kis" paralelogrammák területét az átlók: PA, PB, PC, PD felezik. Ebből az állítás leolvasható. (Az egyenlő területű háromszögeket azonos számmal jelöltük.)

2089. A trapéz oldalai: $2c$, $c\sqrt{2}$, c és c, területe: $\frac{3c^2}{2}$.

A szabályos háromszög a trapéz bármelyik oldalára állítható, de csak 3 különböző területű és kerületű ötszöget kapunk (**2089.** ábra).

1. eset: a szabályos háromszög oldala: c, $t_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sqrt{3}$, így

$$T_1 = \frac{3}{2}c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{6+\sqrt{3}}{4}c^2,$$

$$K_1 = 5c + c\sqrt{2} = c(5+\sqrt{2}).$$

2. eset: a szabályos háromszög oldala: $c\sqrt{2}$, $t_2 = \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{3}$, így.

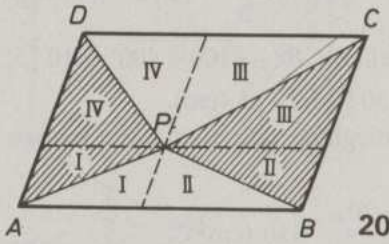
$$T_2 = \frac{3}{2}c^2 + \frac{c^2}{2}\sqrt{3} = \frac{c^2}{2}(3+\sqrt{3}),$$

$$K_2 = 4c + 2c\sqrt{2} = 2c(2+\sqrt{2}).$$

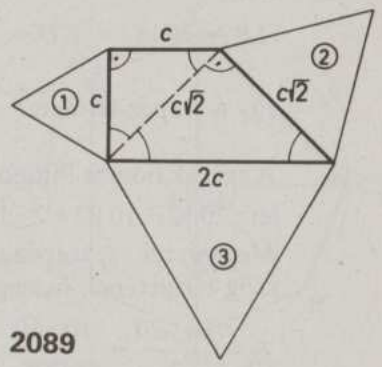
3. eset: a szabályos háromszög oldala: $2c$, $t_3 = c^2\sqrt{3}$, így

$$T_3 = \frac{3}{2}c^2 + c^2\sqrt{3} = c^2\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right),$$

$$K_3 = 6c + c\sqrt{2} = c(6+\sqrt{2}).$$



2088



2089

2090. Az r sugarú körbe írt szabályos ötszög átlója

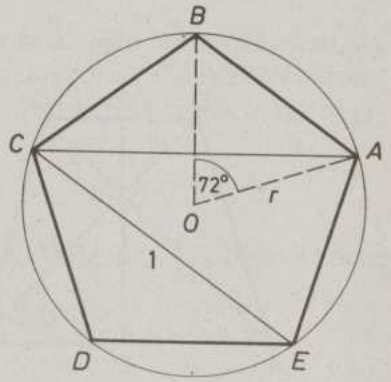
$AC = 2r \sin 72° = 1$,

ezért $r = \frac{1}{2 \sin 72°}$ (**2090.** ábra).

A szabályos ötszög területe:

$$T = 5t(OAB) = \frac{5}{2}r^2 \sin 72° =$$

$$= \frac{5}{8}\,\frac{1}{\sin 72°} \approx 0{,}6572 \text{ (területegység).}$$



2090

Megjegyzés: T pontos értékét megkapjuk, ha felhasználjuk az **1735**-ös feladatban szereplő összefüggést: $\sin 54° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ és figyelembe vesszük, hogy

$$\sin 72° = \cos\frac{36°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 36°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin 54°}{2}}.$$

Ebből

$$\sin 72° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad \text{és} \quad T = \frac{5}{8}\,\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{8}.$$

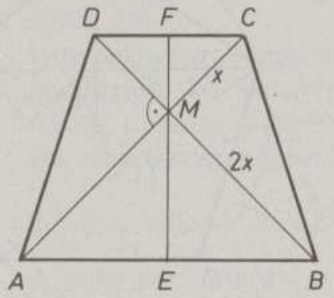
2091. A körbe írt trapéz szimmetrikus, így átlói egyenlőek. Minthogy harmadolják egymást, az átlómetszetek 10 cm és 20 cm (**2091.** ábra).
Ebből az ABM és CDM háromszögek átfogója és magassága kiszámítható:

$$AB = 20\sqrt{2}, \quad CD = 10\sqrt{2}, \quad ME = 10\sqrt{2}, \quad MF = 5\sqrt{2}.$$

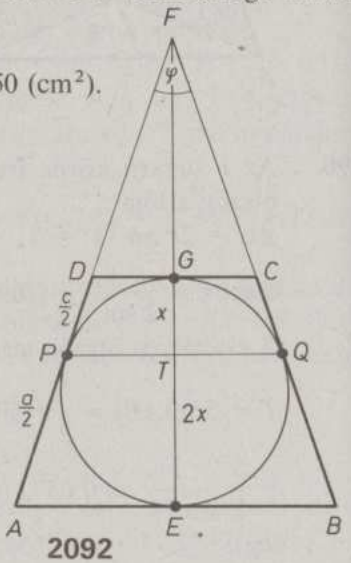
Így a trapéz területe: $\frac{AB+CD}{2} \cdot EF = \frac{30\sqrt{2}}{2} \cdot 15\sqrt{2} = 450\ (\text{cm}^2)$.

A szárak hossza Pitagorasz-tétellel: $CB = \sqrt{100+400} = 10\sqrt{5}$. A kerület: $20\sqrt{2}+10\sqrt{2}+2\cdot 10\sqrt{5} = 30\sqrt{2}+20\sqrt{5}$ (cm).
Megjegyzés: A trapéz területe meghatározható a 4 derékszögű háromszög területének összegéből:

$$T = \frac{20\cdot 20}{2} + \frac{10\cdot 10}{2} + 2\cdot\frac{10\cdot 20}{2} = 450\ (\text{cm}^2).$$



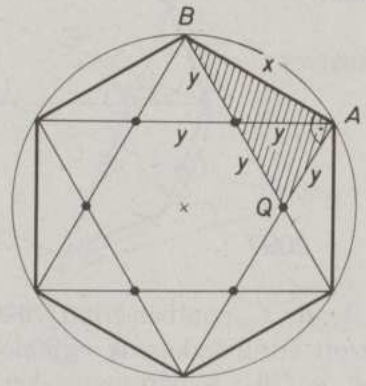
2091



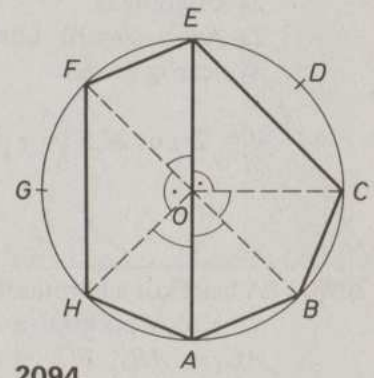
2092

2092. Külső pontból (A-ból, illetve D-ből) a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért $PA = AE = \frac{a}{2}$ és $PD = DG = \frac{c}{2}$ (**2092.** ábra).
A feltétel szerint T harmadolja EG-t, így $TG : TE = 1 : 2$. Az AFE szögre alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét: $\frac{c}{2} : \frac{a}{2} = 1 : 2$. Ebből $c : a = 1 : 2$.

2093. A 2 szabályos háromszög egymás oldalait harmadolja (lásd a **2093.** ábrát). Így ha a „kis" szabályos hatszög oldala y, akkor a „nagyé" $x = y\sqrt{3}$ (az ABQ háromszögből). A két szabályos hatszög területének aránya: $\frac{t}{T} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{y\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$.



2093



2094

2094. Bontsuk fel a két négyszöget a **2094.** ábra alapján háromszögekre. Az AOB, BOC, EOF, HOA háromszögek, valamint a COE és FOH háromszögek egybevágóak. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy a két négyszög területe és kerülete is egyenlő.

2095. Az r sugarú kör területe: $r^2\pi$.

Az r sugarú körbe írt szabályos hatszög területe: $6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Ezért a körbe írt szabályos hatszög területe a kör területének

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot 100\%\text{-a} \quad (\approx 82{,}70\%).$$

2096. Az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög területe

$$t = 8 \cdot \frac{r^2 \sin 45^\circ}{2} = 2\sqrt{2}r^2.$$

A feltételt figyelembe véve:

$2\sqrt{2}r^2 = 20.$

Ebből $r = \sqrt{5 \cdot \sqrt{2}} \approx 2{,}7$ (cm).

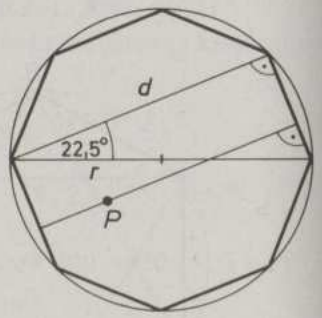
2097. Jelöljük a szabályos nyolcszög szemben fekvő oldalainak távolságát d-vel (**2097.** ábra).

A P pontnak a nyolcszög két szemköztes oldalegyenesétől mért távolságának összege d. Ezért a P pontnak az oldalegyenesektől mért távolságösszege $4d$, független P helyzetétől.

Megjegyzés:

1. A feladat állítása minden szabályos $2n$-szögre igaz.
2. Az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög esetén

$$d = 2r \cos 22{,}5^\circ = r\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$



2097

2098. A beírt kör a háromszög oldalait A_1, B_1, C_1 pontban érinti (**2098.** ábra).

a) Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, így: $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$ és $CA_1 = CB_1$. A háromszög kerülete az előbbi hat szakasz összege.

Az AC_1O derékszögű háromszögből:

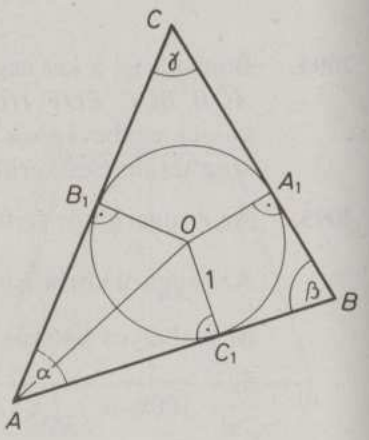
$$AC_1 = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$BC_1 = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad CA_1 = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ezért a háromszög kerülete:

$$k = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right).$$



2098

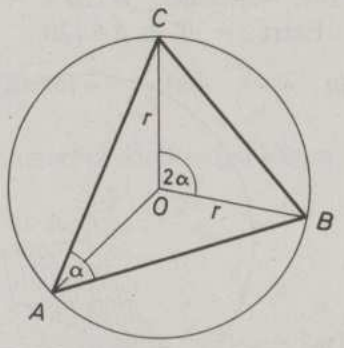
b) A háromszög területe az ABO, BCO, CAO háromszögek területének összege:

$$t = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA) = \frac{1}{2}k = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

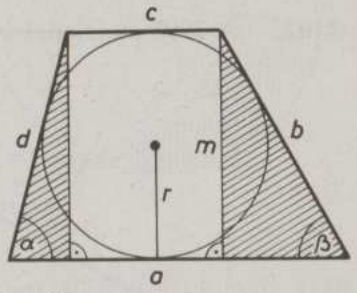
2099. Tudjuk, hogy a hegyesszögű háromszög belsejében tartalmazza a köré írható kör középpontját (O) (**2099.** ábra). Így az ABC háromszöget olyan három háromszögre bonthatjuk (AOB, BOC, COA), amelyekre $t(AOB)+t(BOC)+t(COA) = t(ABC)$.

Így $\frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta = \frac{1}{2}r^2$,

amiből $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 1$ adódik.



2099



2100

2100. A trapéz területe: $t = \frac{a+c}{2}m$.

Az érintő trapéz magassága $m = 2r$,

és szemben fekvő oldalainak összege egyenlő: $a+c = b+d$ (**2100.** ábra).

b-t és d-t a besatírozott derékszögű háromszögekből határozhatjuk meg:

$$b = \frac{2r}{\sin\beta} \quad \text{és} \quad d = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Ezekből a trapéz területe:

$$t = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

2101. *I. megoldás:* E pont meghatározása alapján $DCB\sphericalangle = BCE\sphericalangle = \gamma$ (**2101.** ábra).

$CBD\sphericalangle$ az ABC háromszög egyik külső szöge, ezért $CBD\sphericalangle = \alpha+\gamma$.

A feladat szövege szerint:

$$DC^2 = AD \cdot BD, \quad \text{azaz} \quad \frac{DC}{BD} = \frac{AD}{DC}.$$

Így a BDC és CDA derékszögű háromszögek 2-2 befogójának aránya egyenlő, tehát a két háromszög hasonló, megfelelő szögeik egyenlőek: $\gamma = \alpha$.

Ezért az ABC háromszög szögei: 30°, 30°, 120°.

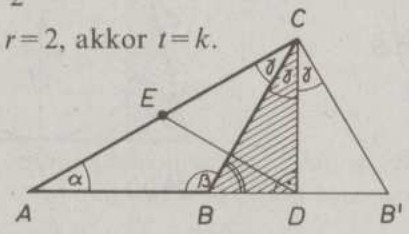
II. megoldás: Tükrözzük a B pontot a CD egyenesre. Az így adódó $AB'C$ háromszög derékszögű, a $DC^2 = AD \cdot BD = AD \cdot B'D$ egyenlőség alapján.

A tükrözések miatt $BCD\sphericalangle = \gamma$ és $B'CD\sphericalangle = \gamma$. Így $ACB'\sphericalangle = 3\gamma = 90°$, azaz $\gamma = 30°$. Ezért $\alpha = 30°$ és $\beta = 120°$.

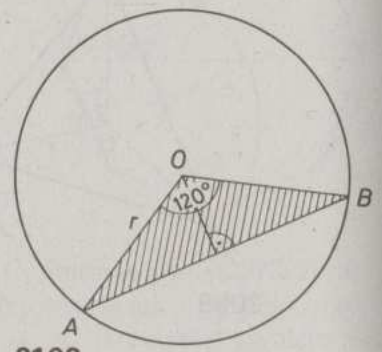
2102. A **2098**-as feladat *b)* része alapján

$$t = \frac{1}{2}rk.$$

Ha $r = 2$, akkor $t = k$.



2101



2103

2103. A két körszelet területét a megfelelő körcikk és az OAB háromszög területének összegeként, illetve különbségeként kapjuk meg (**2103.** ábra).

A kisebbik körszelet területe:

$$t_1 = \frac{1}{3}r^2\pi - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 12(4\pi - 3\sqrt{3}),$$

a nagyobbik területe:

$$t_2 = \frac{2}{3}r^2\pi + \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = 12(8\pi + 3\sqrt{3}).$$

Felhasználtuk, hogy az AOB háromszög egy r oldalú szabályos háromszöggé darabolható át.

2104. Az r sugarú kör i hosszúságú ívével határolt körcikk területe: $t = \frac{ir}{2}$;

$$16 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}4i.$$

Ebből

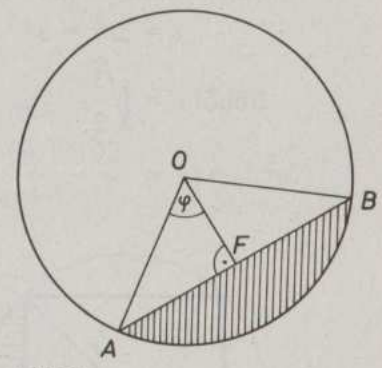
$$i = \frac{80}{21}\text{ cm}.$$

2105. Az $\widehat{\alpha}$ középponti szögű r sugarú körcikk területe

$$t = \frac{1}{2}r^2\widehat{\alpha},$$

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 36\widehat{\alpha}.$$

Ebből $\widehat{\alpha} = \frac{2}{3}$ rad.



2106

2106. Az AFO derékszögű háromszögből

$$\sin\varphi = \frac{3}{5},$$

$$OF = 20,$$

$$\varphi \approx 36{,}87°.$$

A körszelet területe a 2φ középponti szögű AOB körcikk és az AOB háromszög területének különbsége (**2106.** ábra):

$$t = 25^2\pi\frac{2\varphi}{360} - 30 \cdot 10 \approx 102{,}2\ (\text{cm}^2).$$

2107. Az AFO derékszögű háromszögben $\varphi = 60°$ (**2106.** ábra).

A két körszelet területe a 120°-os, illetve 240°-os középponti szögű körcikkek és az AOB háromszög területének különbsége, illetve összege. Ezért

$$t_1 = \frac{1}{3}r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3} \quad \text{és}$$

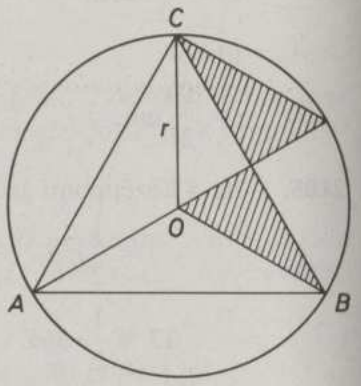
$$t_2 = \frac{2}{3}r^2\pi + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{128}{3}\pi + 16\sqrt{3}.$$

Felhasználtuk, hogy az AOB háromszög átdarabolható egy AO oldalú szabályos háromszöggé.

2108. Az ABC háromszög három r oldalú szabályos háromszöggé darabolható (**2108.** ábra), ezért területe $t = 3\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

A feladat szerint $t = 3$.

Így $r = \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

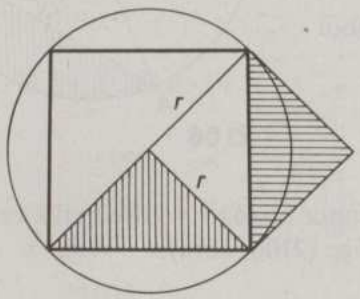


2108

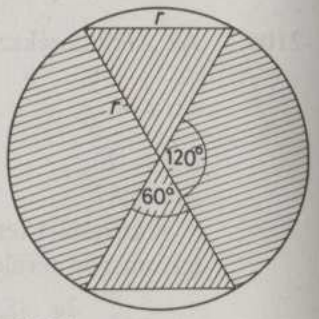
2109. A négyzet két r oldalú négyzetté darabolható át (**2109.** ábra), így

$$t = 2r^2 = 3.$$

Ebből $r = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.



2109



2110

2110. A körnek a két párhuzamos húr közé eső része a **2110.** ábrának megfelelően, két 120°-os körcikkre és két szabályos háromszögre vágható szét. Ezért

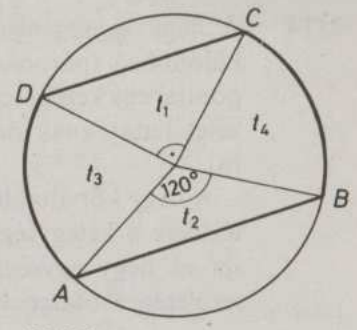
$$t = 2 \cdot \frac{1}{3} r^2\pi + 2 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{6}(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

2111. A feladatban szereplő alakzat területe két háromszög és két körcikk területének összege (**2111.** ábra):

$$t_1 = \frac{r^2}{2}, \quad t_2 = r^2\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad t_3 + t_4 = r^2\pi\frac{150°}{360°} = \frac{5}{12}r^2\pi.$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 =$$
$$= \frac{r^2}{12}(5\pi + 6 + 3\sqrt{3}).$$

Megjegyzés: A keresett területet megkaphatjuk úgy is, ha a kör területéből kivonjuk a 90°-os és a 120°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területét.



2111

2112. A háromszög harmadik szöge $\alpha = 44°$.
Így az $a = 2r \sin\alpha$ összefüggésből

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{12{,}4}{2\sin 44°} \approx 8{,}93 \text{ (cm)}.$$

$b = 2r\sin\beta$, így az ABC háromszög területe:

$$t = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{12{,}4^2\sin 64°\sin 72°}{2\sin 44°} \approx 94{,}60 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

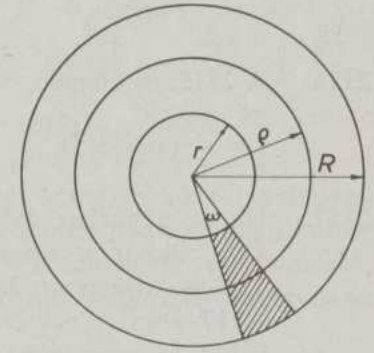
2113. A feltétel szerint

$$t = \varrho^2\pi = \left(\frac{r+R}{2}\right)^2\pi = 2R\pi, \text{ ahol } r = 0{,}5.$$

Ebből, figyelembe véve, hogy $R > r$, $R = \dfrac{7+4\sqrt{3}}{2}$ adódik (**2113.** ábra).

A körgyűrűcikk területe a két körcikk területének különbsége:

$$t = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{\omega}{360°} =$$
$$= (R+r)(R-r)\pi\frac{\omega}{360°} =$$
$$= \frac{3{,}1}{30}(2+\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})\pi \text{ (dm}^2\text{)} =$$
$$= \frac{3{,}1}{30}(12+7\sqrt{3})\pi \text{ (dm}^2\text{)} \approx$$
$$\approx 7{,}8 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

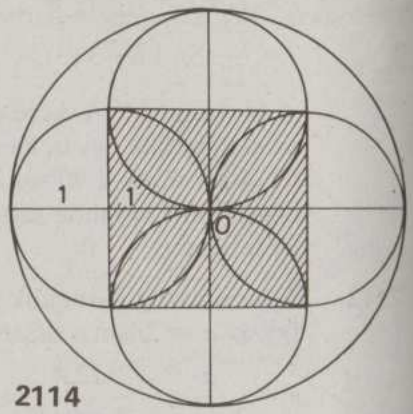


2113

2114. A négy egységsugarú kör O-tól különböző (páronkénti) metszéspontjai egy kétegység oldalú négyzetet határoznak meg (**2114.** ábra).

A négy kör által lefedett síkrész területe a kétegység oldalú négyzet és négy egységsugarú félkör területének összegeként adódik:

$$t = (2r)^2 + 4 \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 4 + 2\pi.$$



2114

2115. *a)* $2\overrightarrow{OF}$ vektorral való eltolással, vagy t-re ($t \bullet\!\!-\!\!\bullet F$ és $t \perp OF$) vonatkozó tengelyes tükrözéssel, vagy pl.: A pont körüli 60°-os elforgatással kaphatjuk k'-t k-ból (**2115.** ábra).

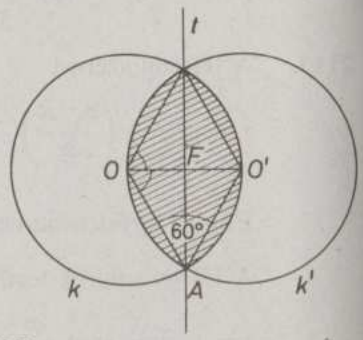
(*Megjegyzés:* Az utóbbi transzformációnál figyelembe vettük, hogy $OO'A$ szabályos háromszög.)

b) A két kör közös része két 120°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területének összege.

A **2107**-es feladat megoldása alapján:

$$t = 2\left(\frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$



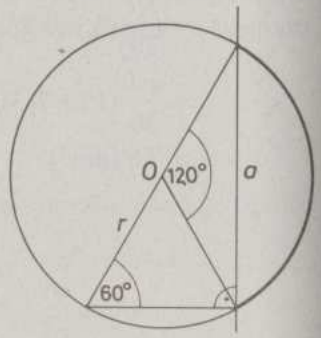
2115

2116. A **2115.** *b)* alapján

$$t = \frac{25}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

2117. Ha az a húrhoz 60°-os kerületi szög, akkor a megfelelő ívhez 120°-os középponti szög tartozik (**2117.** ábra). a egy $2r$ oldalú szabályos háromszög magassága, így

$$a = r\sqrt{3}, \quad \text{azaz} \quad r = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



2117

A **2107.** feladat megoldása alapján a két körszelet területe:

$$t_1 = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{2r^2\pi}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4},$$

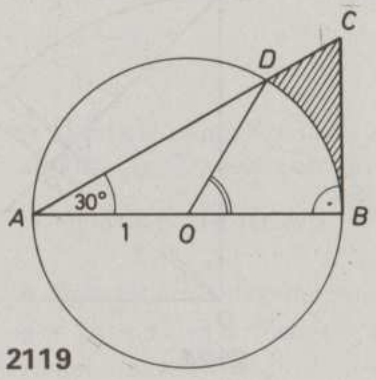
a-val kifejezve:

$$t_1 = \frac{a^2\pi}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{2a^2\pi}{9} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

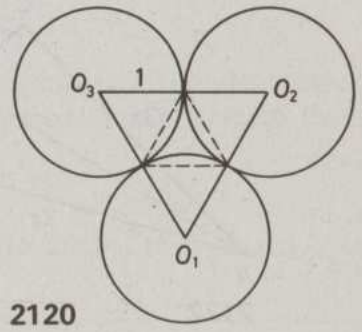
2118. Az α középponti szögű, a sugarú körcikk területe: $\frac{\alpha}{2\pi}a^2\pi = a$ a feladat szerint. Innen $\alpha = \frac{2}{a}$ rad.

2119. Az ABC derékszögű háromszög befogói $AB = 2$, $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$, hiszen $\alpha = 30°$ (**2119.** ábra). A BDC síkidom területét megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből kivonjuk az AOD egyenlő szárú háromszög és a 60°-os BOD körcikk területét. Az AOD háromszög átdarabolható egy egység oldalú szabályos háromszöggé, így

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{12}.$$



2119



2120

2120. A három egybevágó kör középpontjai egy kétegység oldalú szabályos háromszöget alkotnak (**2120.** ábra). Az érintési pontok által alkotott háromszög oldalai az $O_1O_2O_3$ háromszög középvonalai, ezért hosszuk 1 egység. Így az érintési pontok által alkotott háromszög szabályos és területe: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2121. Tudjuk, hogy a d átmérőjű kör kerülete $d\pi$.
Az $n+1$ kör kerületének összege:

$$\pi(AP_1+P_1P_2+\ldots+P_{n-1}P_n+P_nB)=\pi\cdot AB,$$

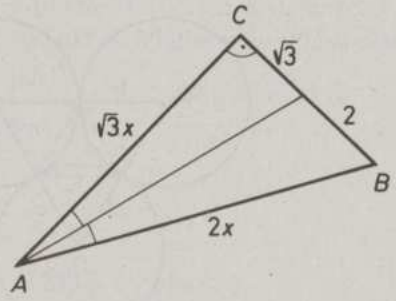
tehát az állítás igaz.

2122. A szögfelező-tétel szerint az AC befogó és AB átfogó aránya $\sqrt{3}:2$, így valamely x pozitív számra $AC=\sqrt{3}x$ és $AB=2x$ (**2122.** ábra).
Írjuk fel az ABC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt!

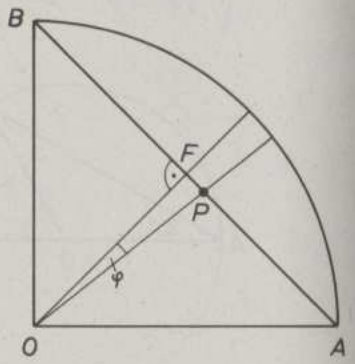
$$4x^2=3x^2+(2+\sqrt{3})^2.$$

Ebből $x=2+\sqrt{3}$.
Ezért az ABC derékszögű háromszög oldalai $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ és $2(2+\sqrt{3})$, az oldalak aránya $1:\sqrt{3}:2$, tehát hegyesszögei: 30°, 60°.

2123. Az egységsugarú körbe írt szabályos háromszög oldala $\sqrt{3}$, a beírt négyzet oldala $\sqrt{2}$.
A kör kerülete $k=2\pi$; 5 tizedesjegy pontossággal $k=6{,}28319$.
A számított kerület $k'=2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 5 tizedesjegy pontossággal $k'=6{,}29252$. A hiba $k'-k=0{,}00933$.



2122



2124

2124. Ha OP egyenes a körcikk területét 4 : 5 arányban osztja, akkor a középponti szöget is így osztja (**2124.** ábra). Ha a szerkesztési eljárás helyes lenne, $AP:PB=4:5$ esetén $POA\sphericalangle=40°$ lenne, illetve $\varphi=FOP\sphericalangle=5°$ lenne, ahol F a húr felezőpontja.

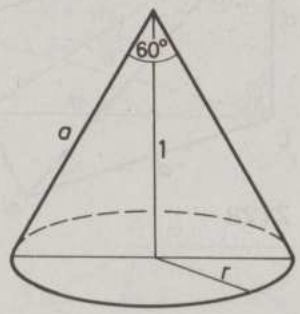
Legyen például $OA=\sqrt{2}$, ekkor $FO=FA=1$ és $FP=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$. Az FOP derékszögű háromszögben

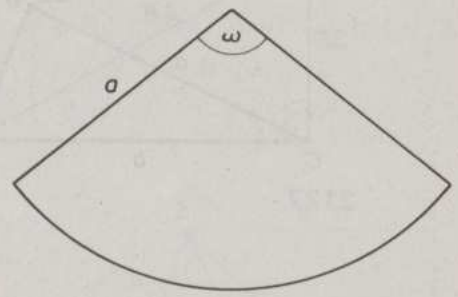
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{FP}{FO}=\frac{1}{9}.$$

Ebből $\varphi=6{,}340°>5°$, tehát a szerkesztés téves.
Megjegyzés: A gondolatmenet hibás voltát mutatja az **1732**-es feladat megoldása is.

2125. A forgáskúp tengelymetszete szabályos háromszög (**2125.** ábra), ezért

$$2r=a=\frac{2}{\sqrt{3}}m=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$



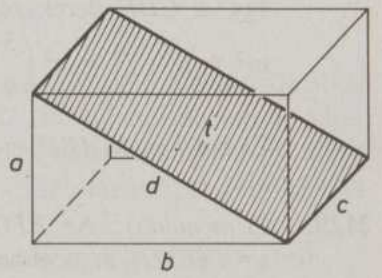


2125

A kiterített kúppalást határoló körívének hossza a kúp alapkörének kerülete. Így $2r\pi=a\omega$, ahol ω a kiterített palást középponti szöge. Ezért $\omega=\pi$, és a palást területe $\frac{a^2\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$.

2126. A téglatest átlós síkmetszete téglalap (**2126.** ábra). Ennek oldalai: c, és $d=\sqrt{a^2+b^2}$, és területe $t=c\sqrt{a^2+b^2}$.
Ebből a keresett él:

$$c=\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



2126

2127. Az MCB derékszögű háromszögből (**2127.** ábra):

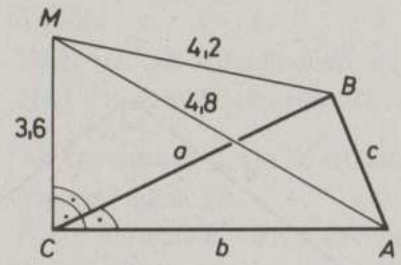
$a = \sqrt{4{,}2^2 - 3{,}6^2} = \sqrt{4{,}68}$, valamint

az MCA derékszögű háromszögből:

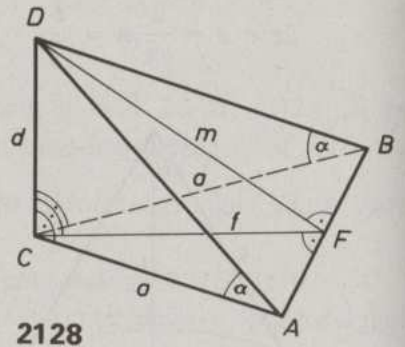
$b = \sqrt{4{,}8^2 - 3{,}6^2} = \sqrt{10{,}08}$.

Ezekből az ABC derékszögű háromszög területe:

$t = \frac{1}{2}ab = 3{,}434\ \text{cm}^2$.



2127



2128

2128. Ismert a síkidom területe (t) és vetületének területe (t') közötti összefüggés: $t' = t\cos\varphi$, ahol φ a két sík hajlásszöge. Itt $t = T(ABD)$ és $t' = T(ABC)$. A 4 lap közül – a oldaluk egyenlő lévén – az a legnagyobb területű, amelyben az a-hoz tartozó magasság a legnagyobb. Minthogy $DF > FC$ és $DF > DC$, ezért az ABD oldallap a legnagyobb területű (**2128.** ábra).

Az ABD egyenlő szárú háromszög, ezért $m = DF \perp AB$.

Az ABC háromszög magassága $f = CF = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Így a CDF derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel szerint

$m^2 = d^2 + f^2 = a^2\left(\frac{3}{4} + \operatorname{tg}^2\alpha\right)$.

Ebből $t = T(ABD) = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3}{4} + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2129. *I. megoldás:* Az $EFGA$ gúla térfogatát kétféleképpen felírva, ahol $t = T(EFG)$, m az ehhez tartozó (A-ból induló) magasság (**2129.** ábra):

$V = \frac{1}{3}tm = \frac{1}{3}\frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}m$, illetve $V = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a$.

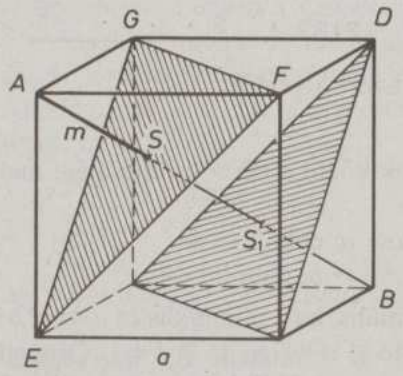
Ebből $m = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$.

II. megoldás: A harmadrendű forgásszimmetriát figyelembe véve belátható, hogy az AB testátló az EFG szabályos háromszöget az S súlypontjában metszi. A kocka élei a testátlóval egyenlő szöget zárnak be, ezért AB-re eső merőleges vetületei is egyenlők (AG vetülete AS, GD-é SS_1 és DB-é S_1B). Ezért $AS = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

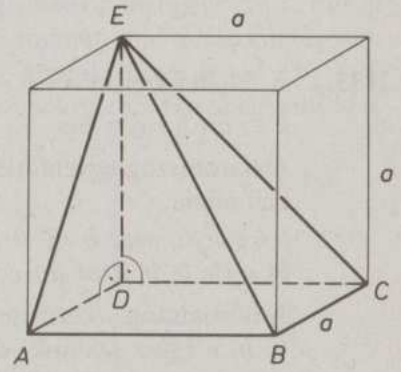
2130. Ábrát lásd a **2129**-nél.

A szabályos háromszög oldalai az a élű kocka lapátlói, tehát $a\sqrt{2}$.

Ennek a háromszögnek a területe $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



2129



2131

2131. A kapott négyzet alapú gúla szimmetriasíkja a BDE háromszög síkja. Ezért $ADE\triangle \cong CDE\triangle$ és $ABE\triangle \cong CBE\triangle$. A határoló lapok tehát: alaplap négyzet, a 4 oldallapjuk: 2-2 egybevágó háromszög. Az utóbbiak oldalai a, a, $a\sqrt{2}$, illetve a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ (él, lapátló, testátló) (**2131.** ábra).

A test köré írható gömb, mégpedig ez a kocka köré írható gömb.

2132. Az adott ABC háromszög átfogója 1, befogói $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hosszúak (**2132.** ábra).

Az S síkra eső vetülete ABC' háromszög. A két sík hajlásszöge $\varphi = CFC' \sphericalangle = 30°$. A $t' = t\cos\varphi$ összefüggés alapján – ahol

$t = T(ABC) = \frac{1}{4}$ és $t' = T(ABC')$ –,

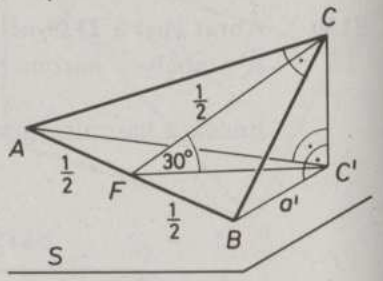
$t' = \frac{1}{4}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Minthogy $C'C = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}FA = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, a BCC' derékszögű háromszögből

$q' = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

A vetület kerülete: $k' = 1 + 2a' =$

$= 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.



2132

2133. A feltétel szerint $a+b = 7c$. Ezért a kerület:

$k = a+b+c = 8c$.

A háromszög-egyenlőtlenségek közül $a+b > c$ teljesülése mellett fent kell állnia:

$b+c > a$, azaz $b+c = 8c-a > a$, ebből $a<4c$

és $a+c > b$, azaz $a+c = 8c-b > b$, ebből $b<4c$.

A háromszög k kerülete minimális, ha c minimális és $a<4c$, $b<4c$. Az a, b, c egész számok, ezért $4c \geqq a+1$ és $4c \geqq b+1$. Összegük: $k = 8c \geqq a+b+2 = 7c+2$, azaz $c \geqq 2$. Tehát k minimális, ha $c=2$. Ekkor $a+b = 14$ és $a<8$, $b<8$.

Minthogy $b = 14-a > 14-8 = 6$ és ugyanígy $a>6$, kapjuk, hogy $6<a<8$ és $6<b<8$, vagyis $a=b=7$ lehet csak.

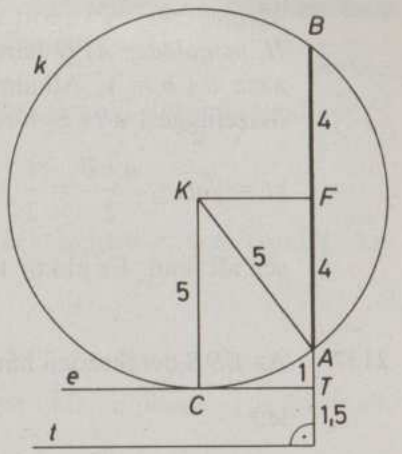
2134. Az A, B pontokon átmenő körök egyike (k) C-ben érinti az e egyenest. (e a t talajtól 1,5 m-re, vele párhuzamosan haladó egyenes.)

Ismert, hogy adott szakaszhoz tartozó α szögű látókörön kívüli pontokból a szakasz α-nál kisebb szögben látszik. Ezért az e egyenes C pontjából látszik maximális szögben az AB szakasz (**2134.** ábra).

Az ABK egyenlő szárú háromszögben AB felezőpontja F.

$FT = FA + AT = 4+1 = 5$.

A keresett távolságot $CT = KF$ miatt az AFK derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítjuk ki. $KF = \sqrt{25-16} = 3$ (méter).



2134

2135. *I. megoldás:* $D = \cos\alpha\cos\beta$ maximumát kell meghatározni. A $\cos\beta = \sin\alpha$ összefüggést felhasználva

$D = \sin\alpha\cos\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqq \frac{1}{2}$.

Tehát D maximuma $= \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: Ekkor $\sin 2\alpha = 1$, így $2\alpha = 90°$, azaz $\alpha = \beta = 45°$.

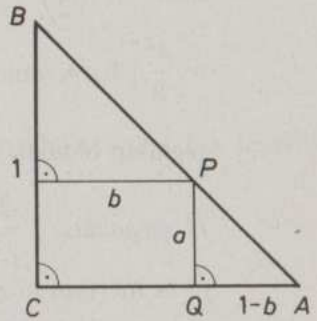
II. megoldás: Legyen a derékszögű háromszög átfogója $c=1$. Ekkor $a = \cos\beta$, $b = \cos\alpha$. Keressük ab maximumát, ami a háromszög kétszeres területének maximumát jelenti. Tudjuk, hogy itt $a^2+b^2 = 1$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget: a^2 és b^2-re:

$\frac{1}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} \geqq \sqrt{a^2b^2} = ab$.

$ab = \cos\alpha\cos\beta$ maximuma tehát $\frac{1}{2}$.

Megjegyzés: A maximum $a=b$ esetén áll fenn, ekkor

$\alpha = \beta = 45°$.



2136

2136. *I. megoldás:* A $T = ab$ maximumát keressük.

Az $ABC\triangle \sim APQ\triangle$, tehát ez utóbbi ugyancsak egyenlő szárú (**2136.** ábra). Ezért $a = 1-b$, azaz $T(b) = b(1-b) = -b^2+b$ másodfokú függvény maximumát kell meghatározni.

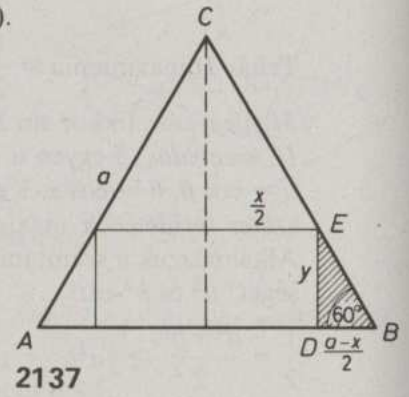
E függvény maximumhelye $b = \frac{1}{2}$, a maximum értéke $T = \frac{1}{4}$.

Megjegyzés: A kapott téglalap oldalai egyenlők, tehát négyzet.
II. megoldás: APQ háromszög egyenlő szárú derékszögű, így $AQ=a$, azaz $a+b=1$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést a-ra és b-re!

$\sqrt{t}=\sqrt{ab}\leqq\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$. t maximális, ha az egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. Ez akkor teljesül, ha $a=b$. Ekkor $t_{max}=\frac{1}{4}$.

2137. Az EDB derékszögű háromszögből $y=\frac{a-x}{2}\sqrt{3}$. A beírt téglalap területe:

$T(x)=xy=\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x)$ (**2137.** ábra).



2137

I. megoldás: Ez x-ben másodfokú függvény, melynek maximumhelye $\frac{a}{2}$.

$T_{max}=T\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)=$

$=\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$. A maximális területű téglalap oldalai: $x=\frac{a}{2}$ és $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

II. megoldás: $T\frac{2}{\sqrt{3}}=x(a-x)$. Alkalmazzuk x-re és $(a-x)$-re a számtani és mértani közép közötti összefüggést:

$\sqrt{x(a-x)}\leqq\frac{x+a-x}{2}=\frac{a}{2}=$ konstans. T maximális, ha $x=a-x$, azaz, ha $x=\frac{a}{2}$. Ebből $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ adódik.

2138. A feladat megoldásához felhasználjuk a következő, a számtani és a négyzetes középre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$\frac{a+b}{2}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, ahol a, b nemnegatív számok. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b$.
Bizonyítás:
$0\leqq(a-b)^2=2a^2+2b^2-(a^2+2ab+b^2)$ minden a, b-re fennáll. Átrendezéssel az

$\frac{(a+b)^2}{4}\leqq\frac{a^2+b^2}{2}$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel mindkét oldalon nemnegatív szám áll, ezért gyököt vonva az

$\frac{a+b}{2}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

egyenlőtlenséget kapjuk. Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $(a-b)^2=0$, azaz ha $a=b$.

A feladat megoldása:
A derékszögű háromszög oldalait a szokásos módon jelölve felírhatjuk:

$t=\frac{ab}{2}$, $\quad k=a+b+c\quad$ és $\quad c^2=a^2+b^2$.

Ezekből: $c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(k-c)^2-4t$,
azaz $4t=(k-c)^2-c^2=k(k-2c)$.
Így t akkor maximális, ha $k-2c$ a legnagyobb, azaz ha c a lehető legkisebb.
A fent bizonyított egyenlőtlenség szerint

$\frac{a+b}{2}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Ebből $k=a+b+c\leqq c(\sqrt{2}+1)$, azaz $c\geqq k(\sqrt{2}-1)$. Tehát c minimális értéke $k(\sqrt{2}-1)$ és c akkor egyenlő ezzel, ha az egyenlőtlenségek egyenlőségekké válnak, azaz ha $a=b$. Ekkor a derékszögű háromszög egyenlő szárú és valóban $c=a\sqrt{2}=a(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=k(\sqrt{2}-1)$.

Ekkor $t_{max}=\frac{1}{4}k^2[1-2(\sqrt{2}-1)]=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}k^2$.

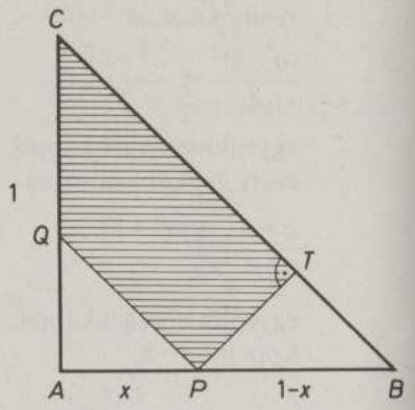
2139. *I. megoldás:* Ha P a derékszögű csúcstól x távolságra van, azaz $AP=x$, akkor $PB = 1-x$, és így a trapéz magassága $PT = TB = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$, alapjai $CT = \sqrt{2}-BT = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)$ és $QP = x\sqrt{2}$ (**2139.** ábra).

A trapéz területe:

$$t(x) = \frac{CT+QP}{2}\cdot PT =$$

$$= \frac{1}{4}(-3x^2+2x+1) =$$

$$= -\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{3}.$$



2139

Ebből leolvasható, hogy a trapéz területe maximális, ha a $-\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ kifejezés maximális, azaz 0, tehát ha $x=\frac{1}{3}$. Ekkor a trapéz területe $\frac{1}{3}$ területegység.

II. megoldás: A $PTCQ$ trapéz területe maximális, ha az APQ és PBT háromszögek területének összege minimális. A háromszögek területének összege:

$$t^*(x) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}(3x^2-2x+1) = \frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6} \geqq \frac{1}{6}.$$

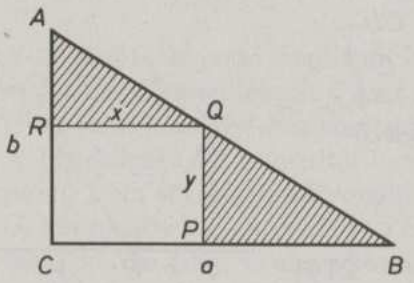
$t^*(x)$ minimális, ha $x=\frac{1}{3}$, $t^*\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$, ezért $t_{max} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (területegység).

2140. *I. megoldás:* Legyen $CPQR$ a feladatnak megfelelő téglalap és tegyük fel $a>b$. $ARQ\triangle \sim ACB\triangle$, ezért ARQ háromszög oldalaira $x > b-y$, azaz a téglalap kerülete: $k = 2x+2y > 2b$ (**2140**/I. ábra).
Hasonlóan a BQP háromszög befogóira $y < a-x$ igaz, így $k<2a$.
Tehát $a>b$ esetén a beírt téglalapok kerületére $2b<k<2a$ áll fenn.
Ha $a=b$, akkor a beírt téglalapok egyenlő kerületűek és $k=2a$.

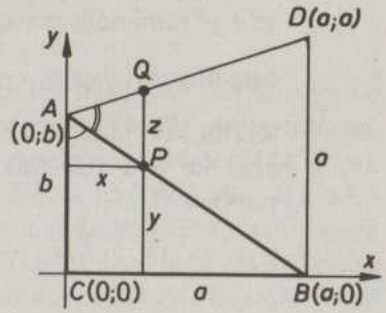
II. megoldás: Készítsük el az a, b alapú, a magasságú derékszögű $ACBD$ trapézt (**2140**/II. ábra). Az ABC háromszögbe beírt téglalap C-vel szemköztes csúcsát jelöljük P-vel. Az AC oldallal párhuzamos P-n átmenő egyenes AD-t Q-ban metszi.
Megmutatjuk, hogy $z=PQ$ x-szel egyenlő. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a CAB és BAD szögekre! Így

$\frac{x}{a}=\frac{AP}{AB}=\frac{z}{a}$ adódik, azaz $x=z$.

Tehát az ABC háromszögbe a feladat szerint beírt téglalapok félkerületei az $ACBD$ trapéz alappal párhuzamos metszetei.
Így $2b<k<2a$, ha $b<a$ és $k=2a$, ha $a=b$.



2140/I.



2140/II.

III. megoldás: $k = 2(x+y)$ (**2140**/II. ábra).
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{x}{a}=\frac{b-y}{b}.$$

Ebből $y = b-\frac{bx}{a}$, és $\frac{k(x)}{2} = \frac{a-b}{a}x+b$.

Tehát $x\in\,]0, a[\; x\mapsto k(x)$ elsőfokú függvény.
Ez $a>b$ esetén szigorúan monoton nő és

$k(0)<k(x)<k(a)$

miatt a beírt téglalapok kerületére

$2b<k<2a$

áll fenn.
Ha $a=b$, akkor $k(x)=2b$ konstans függvény.

2141. Legyen A-nak és B-nek az e-re eső merőleges vetülete C és D (**2141.** ábra). Ekkor e tetszőleges P pontjára

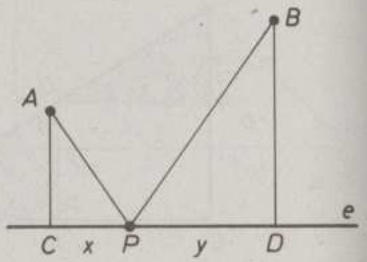
$PA^2 = PC^2 + AC^2$ és

$PB^2 = PD^2 + BD^2$.

(Ez akkor is igaz, ha nincs két derékszögű háromszög, például $P = C$.) Mivel AC^2 és BD^2 konstansok, ezért $PA^2 + PB^2$ arra a P pontra minimális, amelyre $PC^2 + PD^2$ minimális.

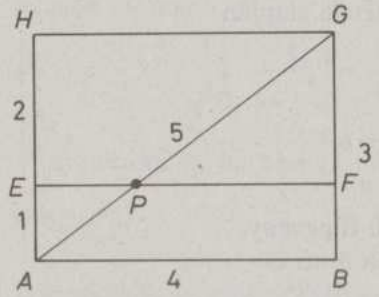
Nyilvánvaló, hogy a keresett P csak a CD szakasz pontja lehet, mert például ha $PC = x$ és $PD = x + CD$, akkor az $x^2 + (x + CD)^2$ akkor minimális, ha $x = 0$. Tehát legyen P a CD szakasz pontja és $PC = x$ és $PD = y$.

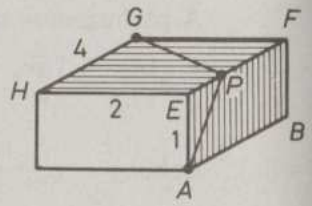
A vizsgált kifejezés $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = CD^2 - 2xy$. Ezért $x^2 + y^2$ minimális, ha xy maximális. A számtani és mértani közép közti összefüggés $\left(\sqrt{xy} \leqq \frac{x+y}{2} = \frac{CD}{2}\right)$ szerint xy maximális, ha $x = y$, azaz ha P a CD szakasz felezőpontja.



2141

2142. A téglatest két lapját EF körüli forgatással egy síkba forgatjuk. A megoldás az ábrákról leolvasható (**2142.***a), b)* ábra).



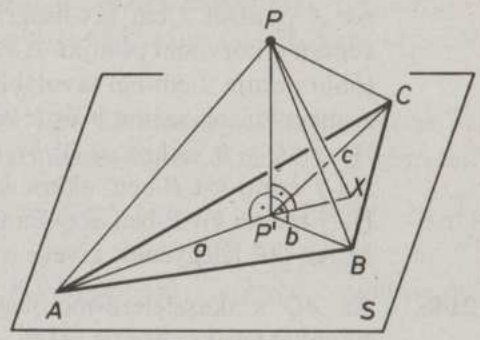


2142a,b

2143. *I. megoldás:* Legyen a P pontnak az ABC háromszög síkjára eső merőleges vetülete P'. A háromszöglemez tetszőleges X pontjára $PX^2 = P'X^2 + PP'^2$. Mivel PP' állandó, elég megmutatni, hogy $P'X$ nem nagyobb, mint $P'A$, $P'B$ és $P'C$ közül a legnagyobb (**2143.** ábra). Legyen P' pontnak a csúcsoktól mért távolsága a, b, c, ahol $a \geqq b \geqq c$.

Tekintsük a P' középpontú a sugarú kört. Ez tartalmazza a háromszöget, így a háromszög egyik pontja sem fekszik távolabb P'-től, mint a.

II. megoldás: Legyen $PA \geqq PB \geqq PC$. Tekintsük a P középpontú, PA sugarú gömböt. Ez a gömb belsejében vagy határán tartalmazza a háromszög csúcspontjait, így a háromszöglemezt is.



2143

2144. A-tól és B-től egyenlő távolságra levő pontok halmaza (a síkban) az AB szakaszfelező-merőlegese: f. Az f egyenes által határolt, A-t tartalmazó félsík belső pontjai A-hoz közelebb fekszenek, mint B-hez (**2144.** ábra). A 2 cm sugarú k körvonaltól 1 cm távolságra levő pontok a B középpontú 1 cm sugarú (j) körvonalra vagy a B középpontú 3 cm sugarú (l) körvonalra illeszkednek. A j és l körvonal által határolt körgyűrű belső pontjai k-hoz 1 cm-nél közelebb vannak, a körgyűrűn kívül fekvő pontok 1 cm-nél távolabb vannak.

Ezek alapján:

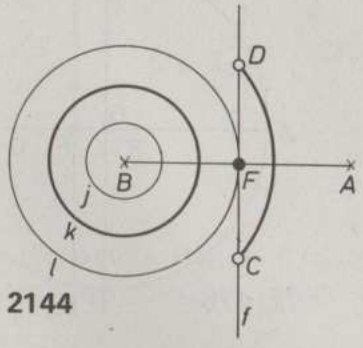
a) AB felezőpontja: F.

b) $f \setminus \{F\}$.

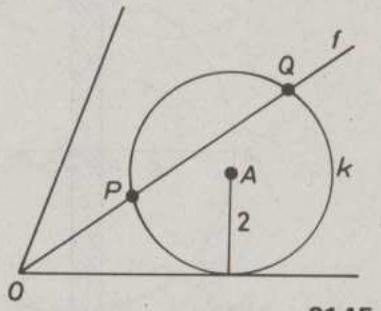
c) $\emptyset$.

d) A B középpontú 4 cm sugarú körvonal jelölt CD íve (C és D nélkül).

2145. A szögtartományban a szög száraitól egyenlő távolságra levő pontok az f szögfelező félegyenes pontjai (**2145.** ábra).



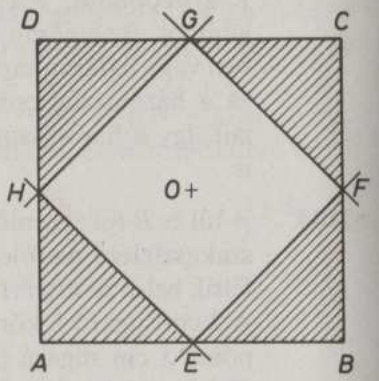
2144



2145

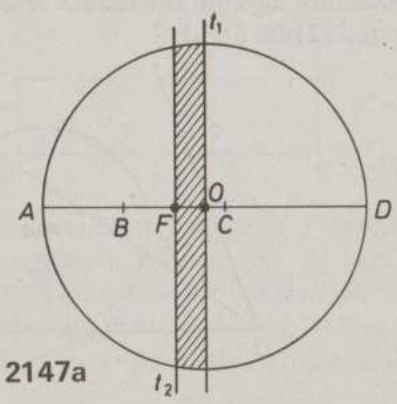
Az A ponttól 2 cm távolságra levő pontok az A középpontú 2 cm sugarú k körvonal pontjai. A körlemez pontjai legfeljebb 2 cm-re, a sík többi pontja 2 cm-nél távolabb fekszik A-tól.
A megoldások száma f és k kölcsönös helyzetétől függ.
Ha $f \cap k = \emptyset$, akkor *a)* $\emptyset$; *b)* f; *c)* $\emptyset$.
Ha f érinti k-t P-ben, akkor *a)* $\{P\}$; *b)* $f \frown \{P\}$; *c)* $\{P\}$.
Ha f metszi k-t P-ben és Q-ban, akkor *a)* $\{P, Q\}$; *c)* PQ (zárt) szakasz; *b)* Az OP félegyenes, kivéve a PQ (zárt) szakaszt ($f \frown PQ$).

2146. Az AO szakaszfelező-merőlegese a síkot két félsíkra bontja (**2146.** ábra). Ismert, hogy az A-t tartalmazó félsík pontjaira $PA < PO$ áll fenn. Ezek alapján a keresett ponthalmaz
a) az $ABCD$ négyzet pontjai, kivéve az $EFGH$ (zárt) négyzet pontjait,
b) a sík azon pontjai, amelyek az $EFGH$ négyzetnek nem pontjai.

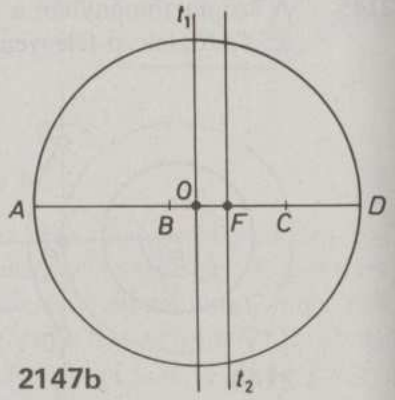


2146

2147. A Thalész-kör belsejének azon pontjai, amelyekre $PA \leqq PD$ fennáll, az AD szakaszfelező-merőlegese (t_1) által határolt, A-t tartalmazó félkörlemez pontjai, a határoló körvonal nélkül. Hasonlóan a $PB \geqq PC$ egyenlőtlenség BC, szakaszfelező-merőlegese (t_2) által határolt, C-t tartalmazó körszelet pontjaira teljesül a határoló körvonal nélkül.
A feladat megoldása e két ponthalmaz metszete. Ez t_1 és t_2, illetve O és F helyzetétől függően: a körlemez két párhuzamos t_2, illetve t_1-re illeszkedő húr által határolt része a körívek nélkül (**2147.** *a)* ábra); a t_1-re illeszkedő átmérő a végpontjai nélkül (ha $O = F$); vagy üres halmaz (**2147.** *b)* ábra).



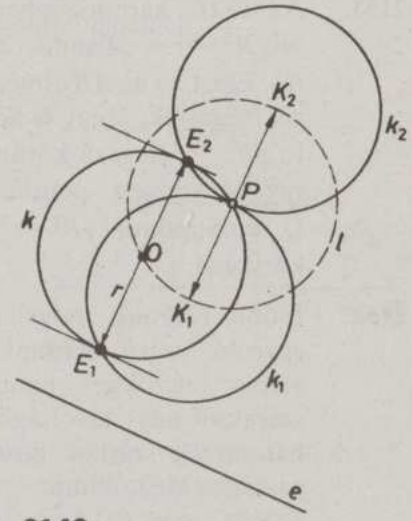
2147a



2147b

2148. Ha az AB szakasz felezőpontja F, a háromszög S súlypontja az FC szakasz F-hez közelebb fekvő harmadolópontja. Ezért az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonlóság C-t S-be viszi. Ha C befutja az AB ívet, akkor S ennek az ívnek F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlósággal nyert képére ($\widehat{A'B'}$) illeszkedik.
Megfordítva, ha S' illeszkedik erre az $\widehat{A'B'}$ nyílt ívre, akkor S'-nek az F középpontú $\lambda = 3$ hasonlósággal nyert C' képe illeszkedik az $\widehat{AB}$-re és ABC' háromszög súlypontja S'.

2149. Az adott k kör e-vel párhuzamos érintőinek érintési pontjai a kör e-re merőleges átmérőjének végpontjai (**2149.** ábra): E_1, E_2. Ezeket úgy is megkaphatjuk, hogy a kör középpontját e-re merőlegesen eltoljuk – mindkét irányba – egy r hosszúságú vektorral.
Ha k kört forgatjuk P körül, akkor k középpontja a P középpontú r sugarú l kört futja be. (Az l körvonal minden pontjához ilyen módon eljutunk.)
Az elforgatott körök e-vel párhuzamos érintőinek érintési pontjait, a fentiek szerint megkapjuk, ha l-et e-re merőlegesen r nagyságú vektorokkal eltoljuk (k_1, k_2).



2149

2150. Illeszkedjék P az ACB félkörre (**2150.** ábra) OTP és DQO háromszögek egybevágóak, hiszen a feladat szerint $OP = OD$, $PT = OQ$ és

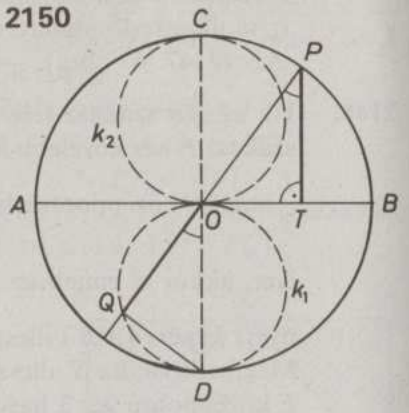
$TPO\sphericalangle = DOQ\sphericalangle$. Ezért $OQD\sphericalangle = 90°$, tehát Q az OD átmérőjű k_1 körre illeszkedik.

Belátjuk, hogy k_1 minden pontja hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz. Legyen Q a k_1 kör tetszőleges pontja, QO az adott kört P-ben metssze és P merőleges vetülete AB-re legyen T. Ekkor OTP és DQO háromszögek egybevágóak (a szögek és OP, OD oldalak egyenlősége miatt). Így $PT = OQ$, tehát Q a mértani hely pontja.

Ha P az ADB félkörre illeszkedik, akkor az ehhez rendelt Q pont az OC átmérőjű k_2 körvonal pontja.

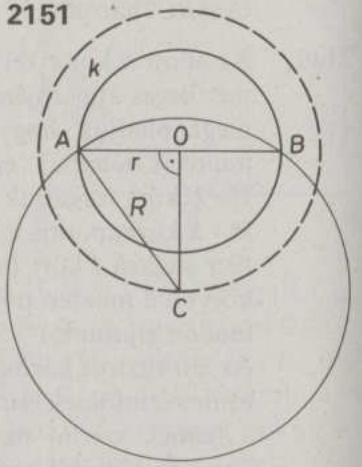
Így a keresett ponthalmaz a k_1 és k_2 kör.

2150



2151. Az OAC háromszögben $OC = \sqrt{R^2 - r^2}$ = állandó (**2151.** ábra). Ezért ha az AB átmérőt O körül forgatjuk, C egy O középpontú $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú körön mozog. Így a keresett ponthalmaz az O középpontú $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú körvonal.

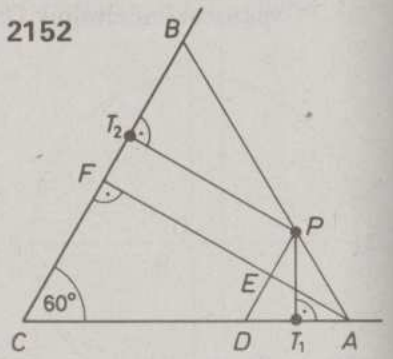
2151



2152. Előbb belátjuk, hogy az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja tetszőleges pontjának a száraktól mért távolságösszege a háromszög szárhoz tartozó magassága (**2152.** ábra).

$PD \| BC$, ezért PDA is egyenlő szárú, és a szárakhoz tartozó magasságok egyenlőek, ezért $PT_1 = AE$. Másrészt $PT_2 = EF$. Így $PT_1 + PT_2 = AE + EF = AF$.

2152



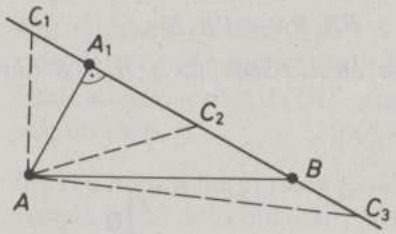
Ezért ha az adott szög száraiból egyenlő szárú (itt $\gamma = 60°$ miatt egyenlő oldalú) háromszöget metszünk le, akkor az így nyert háromszög alapjának tetszőleges pontjára a száraktól mért távolságok összege állandó. Ha a szár hosszát növeljük, illetve csökkentjük, akkor ez a háromszögre jellemző állandó (a szárhoz tartozó magasság) is nő, illetve csökken. Ezért azon pontok halmaza, amelyeknek a két szögszártól mért távolságösszege a, az a magasságú $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\text{ oldalú}\right)$ szabályos háromszög AB alapja.

2153. A háromszög két csúcsa A, B, az A-ból induló magasságvonal talppontja A_1.

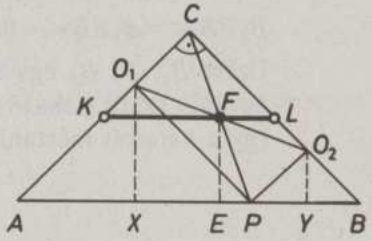
$A_1 \neq B$ esetén szükségképpen $AA_1B\sphericalangle = 90°$ (**2153.** ábra). (Ezért, ha a három különböző pontra ez nem teljesül, a feladatnak nincs megoldása.)

Az a oldalegyenesre illeszkedik B, C és A_1. Ezért C az A_1B egyenesre illeszkedik. A keresett ponthalmaz az A_1B egyenes, kivéve a B pontot. (Ha C az A_1B szakasz belső pontja, γ tompaszög; ha $C = A_1$, $\gamma = 90°$; ha C nem illeszkedik az A_1B szakaszra, γ hegyesszög.)

Ha $A_1 = B$, akkor a háromszögek C csúcsai a B-n átmenő, AB-re merőleges egyenes B-től különböző pontjai lehetnek.



2153



2154

2154. *I. megoldás:* O_1, illetve O_2 AB-re eső merőleges vetülete X, illetve Y. AO_1P és PO_2B egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért $O_1X = \frac{1}{2}AP$ és $O_2Y = \frac{1}{2}PB$. Az O_1XYO_2 trapéz középvonala $EF = \frac{1}{2}(O_1X + O_2Y) = \frac{1}{4}AB$. Így F illeszkedik az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög KL középvonalára (**2154.** ábra).

Megfordítva, ha F a KL középvonalnak belső pontja, akkor legyen CF AB-vel való metszéspontja P, és O_1, O_2 az AP és PB átfogójú derékszögű háromszögek harmadik csúcsa. Ekkor CO_1PO_2 téglalap. A téglalap átlói felezik egymást, ezért CP felezőpontja, F felezi O_1O_2-t is.

II. megoldás: A szerkesztés miatt CO_1PO_2 téglalap. A téglalap átlói felezik egymást, ezért O_1O_2 szakasz F felezőpontja felezi CP-t. Így a C középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság P-hez F-et rendeli. Ez a középpontos hasonlóság AB nyílt szakaszhoz a KL nyílt középvonalat rendeli.

2155. Jelöljük a négyzetek középpontját O_1, O_2-vel. A keresett ponthalmaz meghatározása a **2154.** feladatban található.

2156. A két körben az egybevágó PB ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlőek, ezért APC egyenlő szárú háromszög. Tehát P illeszkedik az AC szakasz f felezőmerőlegesére (**2156.** ábra).

F nem tartozik a keresett ponthalmazhoz.

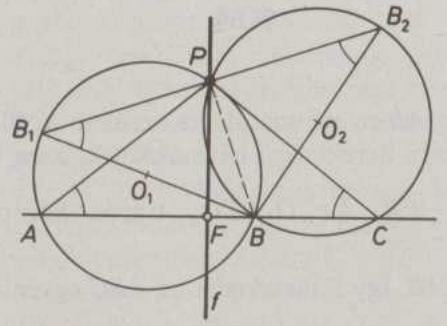
Megfordítva: Legyen P az f egyenes F-től különböző pontja. Ekkor $PAC\sphericalangle = PCA\sphericalangle$.

Tükrözzük a B pontot az ABP és BCP-háromszögek köré írt körének O_1 és O_2 középpontjaira. A tükrözés miatt

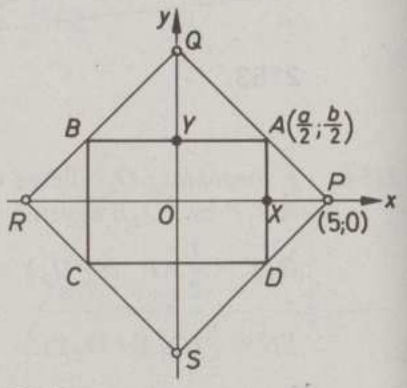
$B_1PB\sphericalangle = B_2PB\sphericalangle = 90°$ és $PB_1B\sphericalangle = PB_2B\sphericalangle$.

Ezért B_1, P, B_2 egy egyenesre illeszkednek, és a B_1B_2B háromszög egyenlő szárú, tehát $r_1 = r_2$.

Így a keresett mértani hely $f \setminus \{F\}$.



2156



2157

2157. *I. megoldás:* Metssze a téglalap AB, illetve AD oldala a két adott y, illetve x egyenest Y, illetve X pontban (**2157.** ábra). Forgassuk le az A pontot X pont körül, illetve Y pont körül 90°-kal az x, illetve az y egyenesre. Az így kapott AXP és AYQ egyenlő szárú derékszögű háromszögek. (Hasonlóan járunk el a téglalap B, C, D csúcsával is. Így adódnak az R és S pontok.)

A téglalap k kerülete: $k = 4OP = 4OQ (= 4OR = 4OS)$. Tehát minden megfelelő A csúcshoz ugyanez a P és Q pont (B-hez Q és R, C-hez R és S, D-hez R és P) tartozik.

Megfordítva: a PQO egyenlő szárú (derékszögű) háromszög PQ alapja tetszőleges A pontjának a száraktól mért távolságösszege állandó: $XA + AY = OP = 5$ cm (lásd a **2152**-es feladat megoldásának első részét).

Így a vizsgált téglalapok a $PQRS$ négyzetet fedik le, kivéve a P, Q, R és S pontokat.

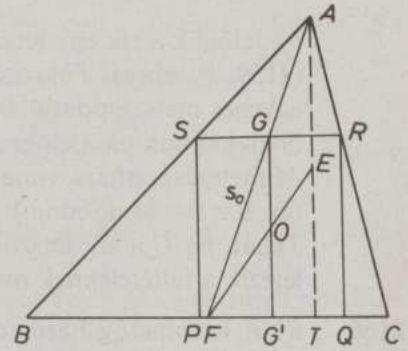
II. megoldás: Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy O legyen az a és b oldalú téglalapok közös középpontja, az x és y tengely pedig legyen párhuzamos a két adott egyenessel.

A téglalapok csúcsai $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, $D\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. A feltétel szerint $a+b = 10$, $0 < a < 10$, $0 < b < 10$. Így a fenti csúcsok rendre az $y = 5-x$, $y = x+5$, $y = -x-5$, $y = x-5$ egyenletű egyenesekre illeszkednek, ahol $0 < |x| < 5$ és $0 < |y| < 5$.

Ezért a téglalapok a $PQRS$ négyzetet fedik le, a P, Q, R és S csúcspontok kivételével.

2158. Ismert, hogy a háromszög s_a súlyvonala felezi az a oldallal párhuzamos egyeneseknek a háromszögbe eső szakaszát. Ezért a háromszögbe beírt $PQRS$ téglalap RS oldalának G felezőpontja illeszkedik az AF súlyvonalra (**2158.** ábra).

$GG' \perp PQ$, így GG' az AT magasságvonallal párhuzamos. A téglalap O középpontja a GG' szakasz felezőpontja, ezért O rajta van az AFT háromszög FE súlyvonalán.



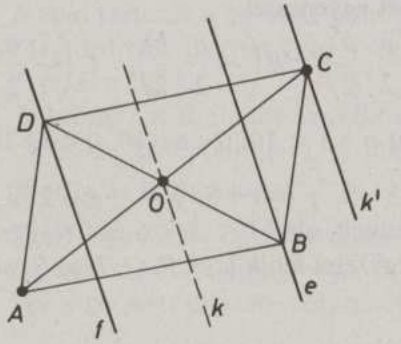
2158

Megfordítva, ha O az FE szakasz tetszőleges belső pontja, az ábra segítségével egyértelműen megszerkeszthető a megfelelő $PQRS$ téglalap.

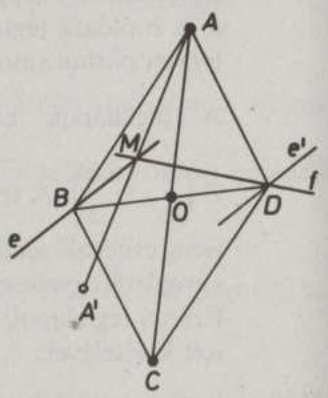
Megjegyzés: $AB = AC$ esetben is a keresett ponthalmazt a BC oldal F felezőpontját a BC oldalhoz tartozó magasság E középpontjával összekötő szakasz belső pontjai alkotják.

2159. A paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlók O metszéspontjára. Az adott e és f egyenesek kölcsönös helyzetük alapján lehetnek *a)* párhuzamosak és *b)* metszők.

a) Mivel $B \bullet\!\!-\!\!\bullet e$, O-ra vonatkozó tükörképe $B' = D \bullet\!\!-\!\!\bullet f$, ezért O az e és f egyenesek k középpárhuzamosára illeszkedik (**2159.** *a)* ábra). A C pontok halmazát megkapjuk, ha az A középpontú $\lambda = 2$ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazzuk k-ra. Minden k'-re illeszkedő C pont esetén végtelen sok, a feltételeket kielégítő paralelogramma létezik. Ezek közös középpontja AC felezőpontja.



2159a



2159b

b) Jelöljük a sík egy tetszőleges pontját C-vel, AC felezőpontját O-val (**2159.** *b)* ábra). Tükrözzük az e egyenest O-ra. A kapott e' és az f egyenes metszéspontja D, ennek O-ra vonatkozó tükörképe B.

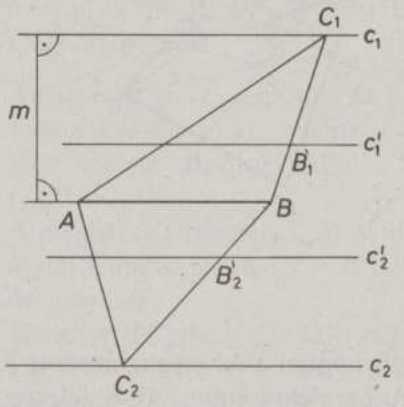
Nem kapunk paralelogrammát, ha C éppen az A-nak e és f egyenesek M metszéspontjára vonatkozó tükörképe: A'. (Ekkor $O = M$ és $e' = e$, így $B = D = M$ adódna.)

Tehát, ha C a sík tetszőleges A'-től különböző pontja, akkor mindig létezik a feltételeknek megfelelő (esetleg elfajuló) paralelogramma.

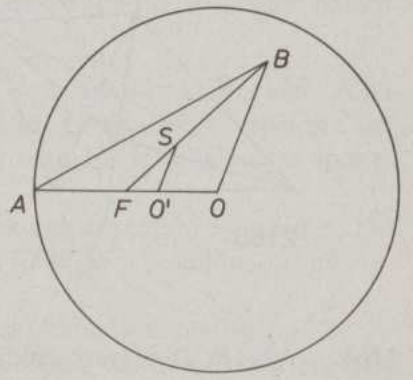
2160. *a)* A háromszög harmadik, C csúcsa az AB egyenestől m távolságra levő párhuzamos egyenesek egyikére (c_1, c_2) illeszkedik. Mivel B rögzített és $\frac{B'B}{CB} = \frac{1}{3}$, ezért B' C-nek B középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú hasonlósággal nyert képe. Így B' illeszkedik az AB-vel párhuzamos, ettől $\frac{1}{3}$ m távolságra levő egyenesek egyikére. (A keresett ponthalmaz $c_1' \cup c_2'$.) (**2160.** ábra.)

Megjegyzés: Ugyanezekhez az egyenesekhez jutunk, ha a b oldal A-hoz közelebb eső harmadolópontját vizsgáljuk.

b) Térben a C csúcsok halmaza az AB tengelyű m sugarú hengerfelület, s a fentiek szerint a keresett ponthalmaz: az AB tengelyű $\frac{m}{3}$ sugarú hengerfelület.



2160

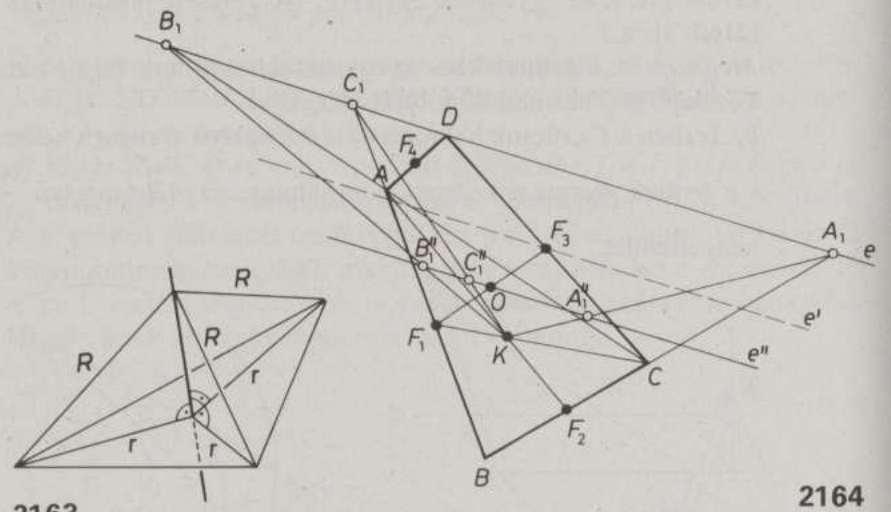


2162

2161. A P középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlósággal megkapjuk a húrok P-hez közelebb eső harmadoló pontjait. Ezek egy $\frac{r}{3}$ sugarú, felületén P-t tartalmazó gömbfelületre, illetve körvonalra illeszkednek.

2162. Az OAB háromszög S súlypontjára igaz, hogy $\frac{FS}{FB} = \frac{1}{3}$, ahol F az adott OA sugár felezőpontja. Ezért az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság B-hez S-et, azaz az adott gömbfelülethez egy $\frac{1}{3}$ OA sugarú gömbfelületet rendel (**2162.** ábra).

2163. A gömbök középpontja a három ponttól egyenlő távol van, ezért illeszkedik a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges egyenesre. Ezen egyenes minden pontja, egy a három adott ponton átmenő gömb középpontja (**2163.** ábra).



2163

2164

2164. Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezve metszik egymást (**2164.** ábra).

Így a C középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság D-t F_3-ba, e-t az e-vel párhuzamos e' egyenesbe viszi.

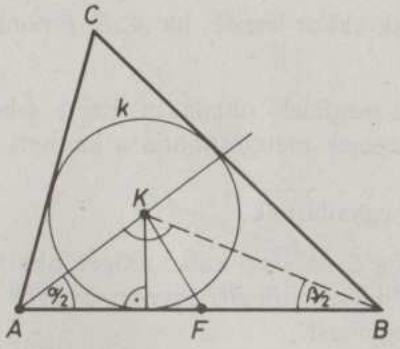
AB felezőpontja, F_1 rögzített. Az F_1 középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság F_3-at O-ba, az F_3 pontra illeszkedő e' egyenest e''-be viszi.
Tehát a vizsgált paralelogrammák középpontjai e''-re illeszkednek.
e'' nem minden pontja lesz egy $ABCD$ négyszögből szerkesztett paralelogramma középpontja. Például az AB egyenesnek e-vel való C_1 metszéspontja nem lehet a feladatban szereplő négyszög negyedik csúcsa. Hasonlóan AC és BC e-vel való B_1 és A_1 metszéspontja (ha létezik) sem csúcsa a négyszögnek. Ezért A_1'', B_1'' és C_1'' nem tartozik a keresett ponthalmazhoz.

Az e'' minden pontjából (A_1'', B_1'' és C_1'' kivételével) eljuthatunk egy F_1 középpontú kétszeres nagyítás, majd egy C középpontú kétszeres nagyítás alkalmazásával a négyszögek e-re illeszkedő D csúcsához.
Megjegyzés: Megmutatható, hogy a két középpontos hasonlóság egymásutánja egy olyan középpontos hasonlósággal helyettesíthető, amelynek középpontja illeszkedik F_1C-re $\left(\text{és aránya } \frac{1}{4}\right)$.

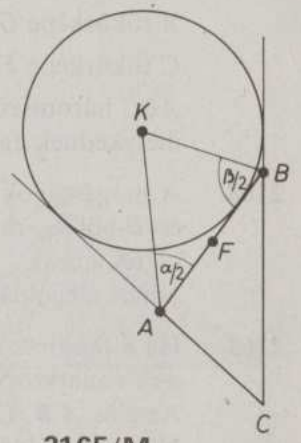
A paralelogrammák középpontjait egy A középpontú és egy F_2 középpontú $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ arányú hasonlósággal is megkaphattuk volna.

Így a K középpontú, $\frac{1}{4}$ arányú középpontos hasonlóság e-t e''-be viszi, ahol K az AF_2 és CF_1 egyenesek metszéspontja (azaz az ABC háromszög súlypontja).

2165. A háromszög B csúcspontja az A-nak F-re vonatkozó tükörképe. A háromszögbe írható kör sugara a K-ból az AB-re állított merőleges szakasz hossza. A-ból és B-ből a körhöz húzott érintők metszéspontja C (**2165.** ábra).
A megoldás feltétele: A, F, K ne essék egy egyenesre és ($\alpha+\beta < 180°$ álljon fenn, azaz $AKB\sphericalangle > 90°$, s így) $KF < AF$ teljesüljön.
Megjegyzés:
Ha $KF = AF$ ($AKB\sphericalangle = 90°$), akkor nem kapunk C pontot.
Ha $KF > AF$ ($AKB\sphericalangle < 90°$), akkor a k kör az így szerkesztett ABC háromszög hozzáírt köre (**2165**/M).



2165

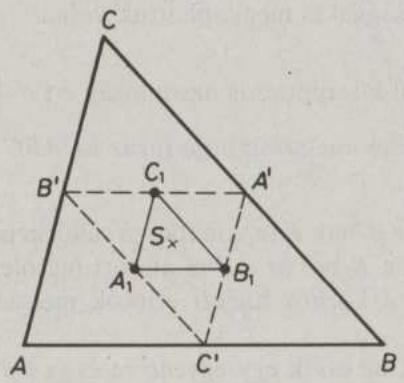


2165/M

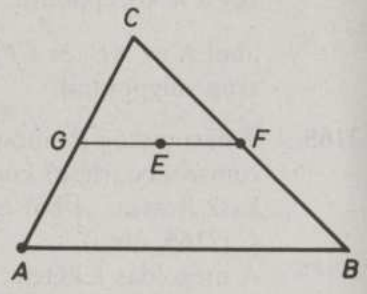
2166. *I. megoldás:* Az A_1-en át B_1C_1-gyel, a B_1-en át A_1C_1-gyel, a C_1-en át A_1B_1-gyel húzott párhuzamosokra esnek a keresett ABC háromszög középvonalai. Az eljárást az $A'B'C'$ háromszögre ismételve kapjuk az ABC háromszöget (**2166.** ábra).

II. megoldás: Az S (súlypont) középpontú, $\lambda = -2$, arányú hasonlóság A_1-et A'-be viszi át, A'-t A-ba viszi át, ezért S középpontú $\lambda = 4$ arányú hasonlóság A_1-et A-ba viszi át stb.

A megoldás feltétele: A_1, B_1, C_1 ne essék egy egyenesre.



2166



2167

2167. A hiányzó csúcspontokat pontra vonatkozó tükrözéssel kapjuk (**2167.** ábra):

F tükörképe E-re G,

A tükörképe G-re C,

C tükörképe F-re B.

ABC háromszög akkor és csak akkor létezik, ha A, E, F pontok nem illeszkednek egy egyenesre.

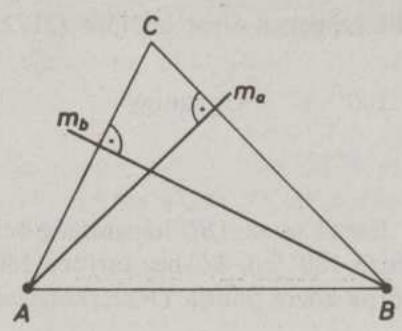
2168. A magasságok merőlegesek a megfelelő oldalakra. Ezért A-ból m_b-re és B-ből m_a-ra állított merőlegesek metszéspontja a keresett C csúcs (**2168.** ábra).

Nincs megoldás, ha m_a és m_b egyállásúak.

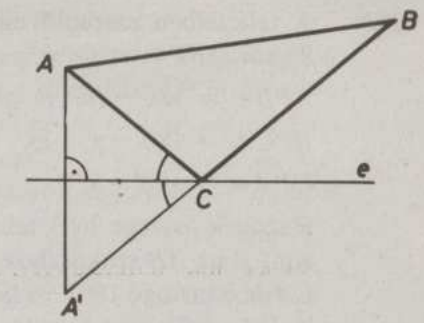
2169. Ha e felezi az ABC háromszög C-nél lévő külső szögét, akkor A-nak e-re vonatkozó tükörképe, A' illeszkedik BC egyenesre (**2169.** ábra).

Az e és $A'B$ C-ben metszik egymást.

Nincs megoldás, ha AB merőleges e-re.



2168



2169

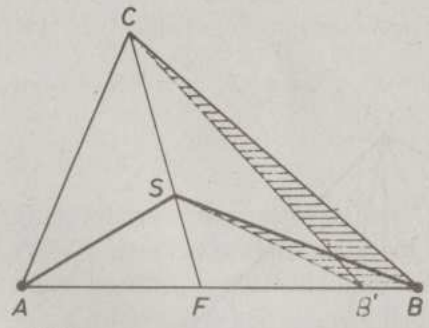
2170. S középpontú, $\lambda = -2$ arányú hasonlóság az AB oldal F felezőpontját C-be viszi át (**2170.** ábra).

A megoldás feltétele, hogy az ABS háromszög létezzen, azaz az $|AS - BS| < AB < AS + BS$ egyenlőtlenség-rendszer fennálljon. Ekkor adott SA és SB esetén két S és ennek megfelelően két, AB egyenesre tükrös háromszög jön létre.

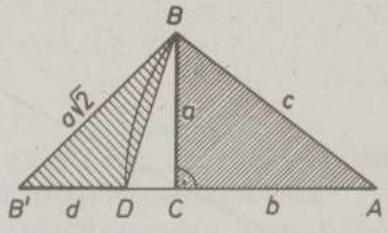
2171. Az a befogójú, BCB' egyenlő szárú derékszögű háromszög $B'C$ oldalán D megszerkeszthető $B'D = d$ (**2171.** ábra).

Az ABD egyenlő szárú háromszög, ezért a $B'C$ egyenes és a BD felezőmerőlegesének metszéspontja: A.

Minthogy $b < c$-nek teljesülnie kell, megoldás csak akkor lehet, ha $d = a + b - c = B'D < BC = a$.



2170



2171

2172. A feltételben szereplő egyenlő szögeket δ-val jelöljük (**2172.** ábra). Ekkor $ABP\sphericalangle = \beta - \delta$, s ezért

$APB\sphericalangle = 180° - (\delta + \beta - \delta) = 180° - \beta$. Ugyanígy

$BPC\sphericalangle = 180° - \gamma$ és

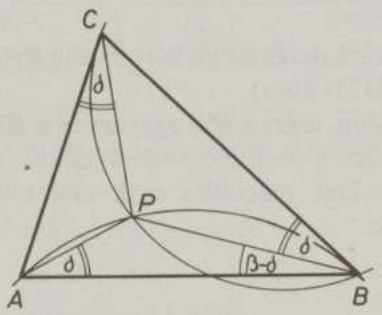
$CPA\sphericalangle = 180° - \alpha$.

E szögek összege 360°, tehát P létezik és az ABC háromszög belsejében van. P az AB szakaszhoz tartozó $180° - \beta$, BC-hez tartozó $180° - \gamma$ és CA-hoz tartozó $180° - \alpha$ látókörök közös pontja. (P szerkesztéséhez két látókör szükséges.)

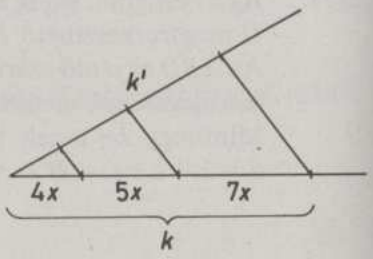
2173. Az adott k kerületet 4 : 5 : 7 arányú részekre bontjuk (**2173.** ábra). A $4x$, $5x$, $7x$ oldalakra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ezért e szakaszokból szerkeszthető háromszög.

2174. Szerkesztési lépések lehetnek (**2174.** *a)* ábra).

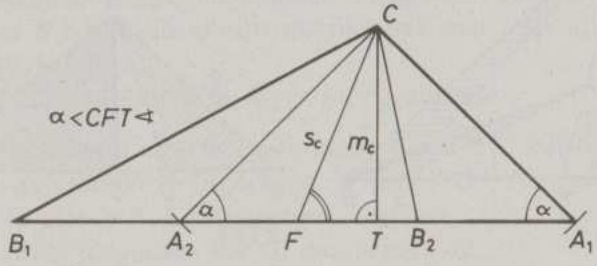
1. FTC derékszögű háromszög szerkesztése (s_c, m_c, 90°).
2. FC-hez tartozó α látókör és FT egyenesének metszéspontja: A.



2172



2173



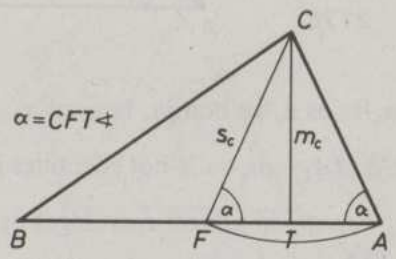
2174a

3. A-nak F-re vonatkozó tükörképe: B.

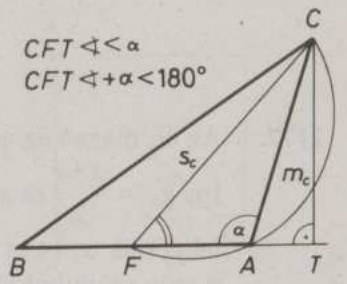
Ha $s_c > m_c$, akkor $\alpha < CFT\sphericalangle$ esetén 2 megoldás (**2174.** *a)* ábra),
$\alpha = CFT\sphericalangle$ esetén 1 megoldás (**2174.** *b)* ábra),
$\alpha > CFT\sphericalangle$ és $CFT\sphericalangle + \alpha < 180°$ esetén 1 megoldás van (**2174.** *c)* ábra).

Ha $s_c = m_c$, akkor $\alpha < 90°$ esetén 1 megoldás van (**2174.** *d)* ábra).

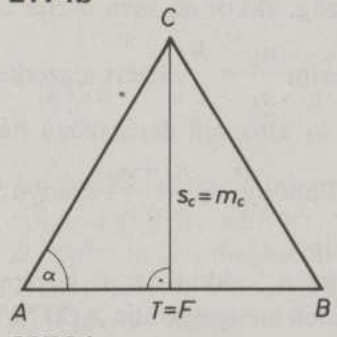
Nincs megoldás, ha 1. $s_c < m_c$,
2. $s_c = m_c$ és $\alpha \geqq 90°$,
3. $s_c > m_c$ és $CFT\sphericalangle + \alpha \geqq 180°$ áll fenn.



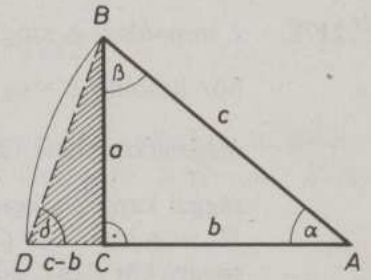
2174b



2174c



2174d



2175

2175. Az ABD háromszög egyenlő szárú (**2175.** ábra).

a) $\delta = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Az $\alpha + \beta = 90°$ figyelembevételével,

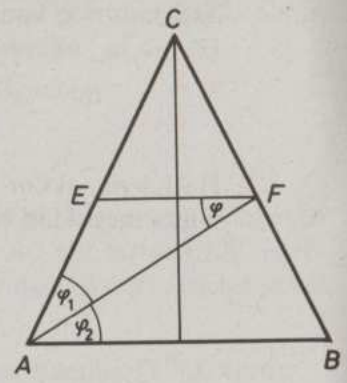
b) $\delta = 45° + \frac{\beta}{2}$.

Ezek szerint δ megszerkeszthető.

A BDC derékszögű háromszög ($c - b$, δ és 90°-ból), majd BDA egyenlő szárú háromszög (BD oldal, δ és szimmetria) megszerkeszthető.

Az α, illetve β a szerkesztendő derékszögű háromszög hegyesszögei, ezért csak $\alpha < 90°$, illetve $\beta < 90°$ esetén van megoldás és az egyértelmű.

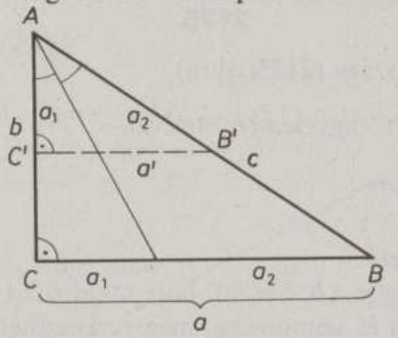
2176. Egyrészt a feltétel szerint AEF háromszög egyenlő szárú, ezért $\varphi = \varphi_1$ (**2176.** ábra).
Másrészt $EF \parallel AB$, ezért $\varphi = \varphi_2$,
tehát $\varphi_1 = \varphi_2$,
ami azt jelenti, hogy BC-ből az F pontot a $CAB\sphericalangle$ felezője metszi ki.
Mindig van (egy) megoldás.



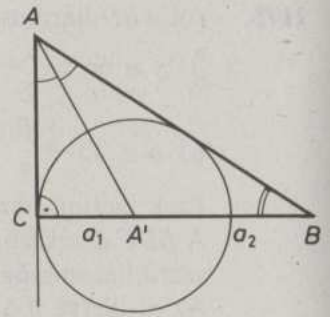
2176

2177. Az m_a magasság az α szöget α_1-re és α_2-re bontja. Legyen $\alpha_1 - \alpha_2 = \varepsilon$. Így $\alpha_1 = \frac{\alpha+\varepsilon}{2}$ és $\alpha_2 = \frac{\alpha-\varepsilon}{2}$. Az $AA_1 = m_a$-ra A-ból ellentétes irányban felmérjük α_1-et és α_2-t. Az A_1-ben m_a-ra állított merőleges egyenes az α szög száraiból kimetszi B-t és C-t.
Megjegyzés: Ha β vagy γ tompaszög, akkor m_a nem osztja α-t.

2178. *I. megoldás:* A szögfelező-tétel szerint $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}$. Ezért a szerkesztendőhöz hasonló $b' = a_1$ befogójú $c' = a_2$ átfogójú derékszögű háromszög megszerkeszthető (**2178**/I. ábra). Ebből $\frac{a}{a'} = \frac{a_1+a_2}{a'}$ arányú hasonlósággal kapjuk a keresett háromszöget.
II. megoldás: Ha $CA' = a_1$ és $A'B = a_2$, akkor az A' középpontú a_1 sugarú kör B és C pontbeli érintőjének metszéspontja A (**2178**/II. ábra).

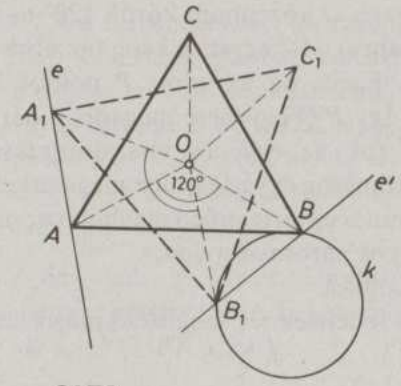


2178/I.

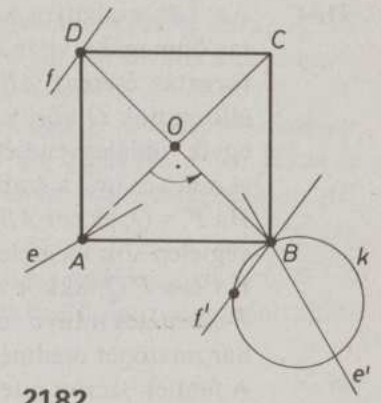


2178/II.

2179. $AOB\sphericalangle = 120°$. Ezért az A pont O körüli 120°-os elforgatottja $A' = B$. Így e-nek O körüli 120°-os elforgatottja, e' átmegy B-n (**2179.** ábra). A háromszög B csúcsa k és e' közös pontja. O és B ismeretében A és C megszerkeszthető.
Adott irányú elforgatás esetén a megoldások száma e' és k közös pontjainak a számával azonos: 2, 1 vagy 0.
A két irányú forgatást figyelembe véve: 4, 3, 2, 1 vagy 0 a megoldások száma.



2179



2182

2180. Az előző feladat gondolatmenete alapján e egyenes $O = S$ körüli 120°-os elforgatottja átmegy az f félegyenesre illeszkedő B ponton. S és B egyértelműen meghatározzák a háromszöget.
A megoldások számát e' és f, valamint e'' és f közös pontjai adják: 2, 1, 0 vagy végtelen sok (e' és e'' e-nek S körüli két különböző irányú 120°-os elforgatottja).

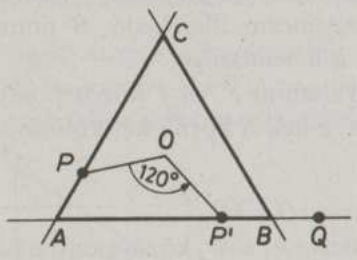
2181. Lásd a **2179**-es feladat megoldását ($O = M$).
A megoldások számát k_1' és k_2, illetve k_1'' és k_2 közös pontjai határozzák meg (ahol k_1' és k_1'' k_1-nek M körüli két különböző irányú 120°-os elforgatottja). Így a megoldások száma 4, 3, 2, 1, 0 vagy végtelen sok lehet.

2182. *a)* $AOB\sphericalangle = 90°$ (**2182.** ábra). A **2179**-es feladat gondolatmenete alapján e egyenes O pont körüli 90°-os elforgatottjára illeszkedik $A' = B$. Így e' és k közös pontja a négyzet B csúcsa. Adott O és B pontokból az $ABCD$ négyzet egyértelműen megszerkeszthető. A megoldások száma, a két irányú forgatást figyelembe véve 4, 3, 2, 1 vagy 0 lehet.

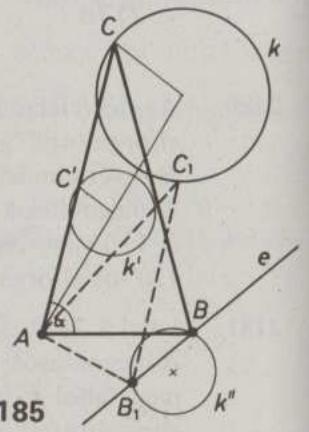
b) D-nek O-ra vonatkozó tükörképe B. Ezért a D-re illeszkedő f egyenes O-ra vonatkozó tükörképe, f' átmegy B-n. Így B, s a négyzet is megszerkeszthető.
A megoldások száma f' és k közös pontjainak a számával azonos: 2, 1 vagy 0.

2183. A megoldás gondolatmenete a **2180**-as feladatban megtalálható, figyelembe véve, hogy itt $AOB\sphericalangle = 60°$. Az AOB szabályos háromszögből a szabályos hatszög egyértelműen megszerkeszthető.

2184. Az ABC szabályos háromszöget a O középpont körüli 120°-os elforgatás önmagába viszi át (**2184.** ábra). AC egyenes képe (az ábra szerinti forgatás esetén) AB egyenes. Ezért, ha az adott P pontot 120°-kal elforgatjuk O körül, $P' \bullet\!\!-\!\!\bullet AB$. Így $P'Q$ egyenese megadja a háromszög egyik oldalegyenesét. Ebből (pl. az egyenes visszaforgatásával az A csúcs és így) a szabályos háromszög egyértelműen megszerkeszthető. Ha $P' = Q$, akkor AB egyenes nincs egyértelműen meghatározva. Ekkor végtelen sok megfelelő szabályos háromszög van.
Ha $O \bullet\!\!-\!\!\bullet P'Q$, akkor nincs megoldás.
P ellentétes irányú forgatása a feltételeknek megfelelő másik szabályos háromszöget eredményezhet.
A fentiek szerint a feladatnak 1, 2 vagy végtelen sok megoldása van.



2184



2185

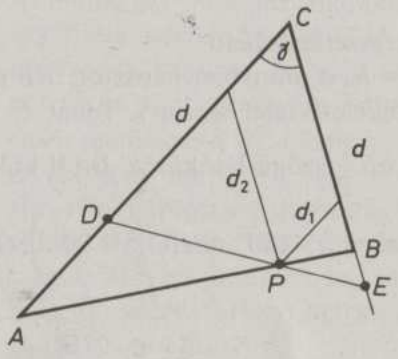
2185. Az oldalak arányának ismeretében a keresetthez hasonló háromszög megszerkeszthető. Ebből α meghatározható (**2185.** ábra).

C' felezi AC-t. Így ha $C \bullet\!\!-\!\!\bullet k$, akkor az A középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság C-t C'-be, k-t k'-be viszi, ahol $C' \bullet\!\!-\!\!\bullet k'$.

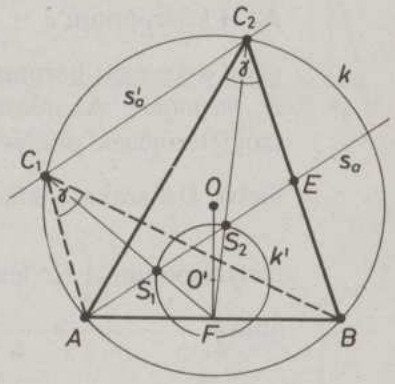
C'-nek A középpontú α szögű elforgatottja B, ezért B illeszkedik a k' kör A középpontú α szögű elforgatottjára, k''-re.
Tehát e és k'' közös pontja(i) az alap másik végpontja(i) lesz(nek). Ebből a háromszög egyértelműen megszerkeszthető.
A megoldások száma k'' és e közös pontjainak számától függ, figyelembe véve, hogy az α szögű forgatás két irányba történhet.
Megjegyzés: ABC úgy is megszerkeszthető, ha e-re egy A középpontú 2 arányú hasonlóság és egy α szögű elforgatás egymásutánját alkalmazzuk.

2186. CDE d szárú γ csúcsszögű egyenlő szárú háromszög (**2186.** ábra). A DE alap tetszőleges pontján keresztül a szárakkal párhuzamos egyenesek háromszögbe eső szakaszainak összege $d_1 + d_2 = d$.
Így a keresett P pont DE és AB egyenesek metszéspontja. $b > a$ esetén akkor van ilyen pont az AB oldalon, ha $a \leqq d \leqq b$. Ha $b = a$, akkor a fentiek szerint csak $d = a = b$ esetén van ilyen pont, mégpedig az AB oldal minden pontja jó.

2187. *I. megoldás:* A háromszög köré írható köre – AB γ szögű látókköre – megszerkeszthető. (A két látókörív közül azzal dolgozunk, amely metszi s_a-t.) (**2187.** ábra.)



2186



2187

Az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság C-t az S súlypontba, a C-t tartalmazó k-t k'-be viszi át. Így $S \bullet\!\!-\!\!\bullet k'$ és $S \bullet\!\!-\!\!\bullet s_a$. Ezért k' és s_a metszéspontja: S. Ebből ABC egyértelműen megkapható.
A megoldások száma k' és s_a közös pontjainak a száma (0, 1, 2).

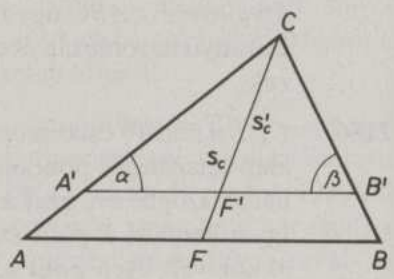
II. megoldás: Egyrészt C illeszkedik az AB szakasz γ szögű k látókörére. Másrészt s_a illeszkedik a BC szakasz E felezőpontjára. Ezért a B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóság E-t C-be, s_a-t a vele párhuzamos s_a'-be viszi.

Így a keresett C csúcs s_a' és k közös pontja.

A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

2188. Az adott szögekkel a keresetthez hasonló háromszög szerkeszthető.

A hasonlóság aránya $\frac{s_c'}{s_c}$, és pl. $A'F' = \frac{c'}{2}$ ismeretében AF, majd ABC egyértelműen megszerkeszthető (**2188.** ábra).

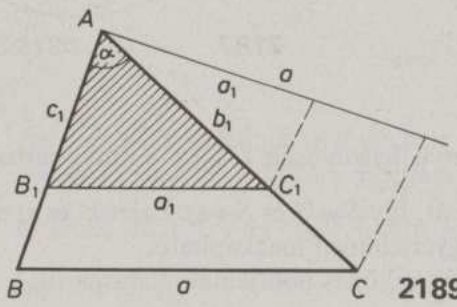


2188

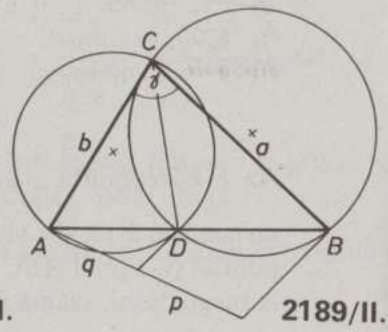
2189. *I. megoldás:* A keresett háromszöghöz hasonló AC_1B_1 háromszöget szerkesztünk: b_1, c_1 oldalakkal és az α közbezárt szöggel, ahol $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$ (**2189**/I. ábra).

Az A középpontú $\lambda = \frac{a}{a_1}$ arányú középpontos hasonlóság alkalmazásával a keresett háromszög megszerkeszthető.

II. megoldás: Az adott $q : p = b : a$ arányban felosztott AB-n D a γ szögfelezőjének pontja (a szögfelező-tétel szerint). Tehát C az AD, illetve DB szakaszokhoz tartozó $\frac{\gamma}{2}$ szögű látókörök D-től különböző metszéspontja. $\left(\text{Ez létezik, mivel } \gamma < 180° \text{ miatt } \frac{\gamma}{2} < 90°.\right)$ (**2189**/II. ábra.)



2189/I.



2189/II.

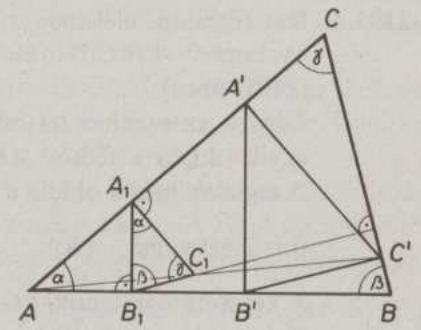
2190. Vegyünk fel a hegyesszögű háromszög AB oldalán olyan B_1 pontot, hogy B_1-ben az AB-re emelt merőleges metssze az AC oldalt egy A_1 pontban. Állítsunk merőlegest B_1-ben BC-re és A_1-ben AC-re. A két egyenes metszéspontja C_1. Az ábráról leolvasható, hogy $B_1A_1C_1 \sphericalangle = \alpha$ és $A_1B_1C_1 \sphericalangle = \beta$. Így $B_1C_1A_1 \sphericalangle = \gamma$, tehát $A_1B_1C_1$ a megszerkesztendő $A'B'C'$ háromszöghöz hasonló helyzetű.

A keresett $A'B'C'$ háromszöget $A_1B_1C_1$-ből A középpontú középpontos hasonlósággal állítjuk elő. AC_1 félegyenes BC oldalt C'-ben metszi. E pontból C_1A_1-gyel és C_1B_1-gyel párhuzamosokat húzva megkapjuk a keresett $A'B'C'$ háromszöget (**2190.** *a)* ábra).

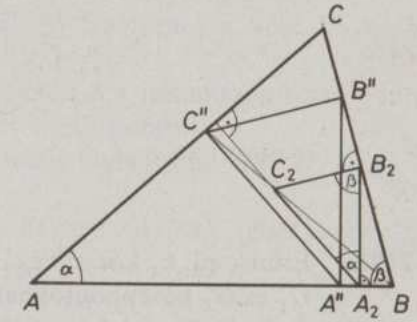
A fentiekhez hasonló eljárással egy másik megfelelő ($A''B''C''$) háromszöget kapunk, ha A_2 AB-nek olyan pontja, hogy az A_2-ben emelt merőleges a BC oldalt metszi (**2190.** *b)* ábra).

Ha ABC háromszög derékszögű, akkor $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögek átfogója az eredeti háromszög átfogóhoz tartozó magassága (**2190.** *c)* ábra).

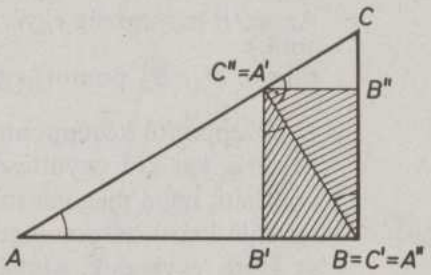
Ha ABC tompaszögű háromszög, *nincs* a feladatnak megfelelő *beírt* háromszög. (A fenti eljárással kapott $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögek csúcsai az ABC háromszög oldalegyeneseire illeszkednek.)



2190a



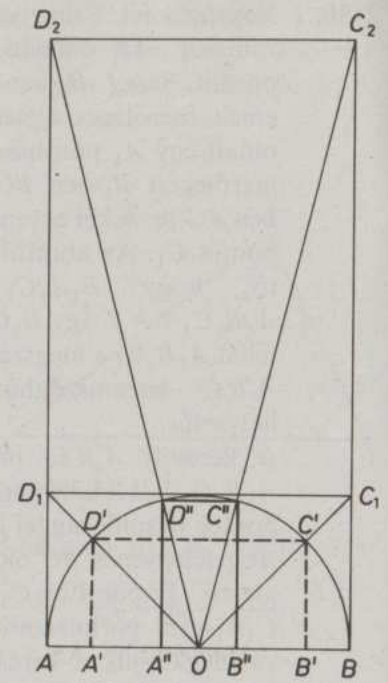
2190b



2190c

2191. Két téglalap felel meg a követelményeknek: $A'B'C'D'$ és $A''B''C''D''$ (**2191.** ábra).
Legyen az ezekhez hasonló téglalap egyik oldala a félkör AB átmérője. A téglalap másik oldala a feltétel szerint $2AB$ vagy $\frac{1}{2}AB$.

A keresett téglalapokat O középpontú hasonlósággal állítjuk elő.
A megoldások száma: 2.

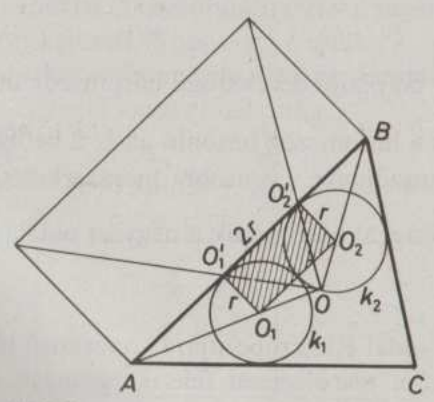


2191

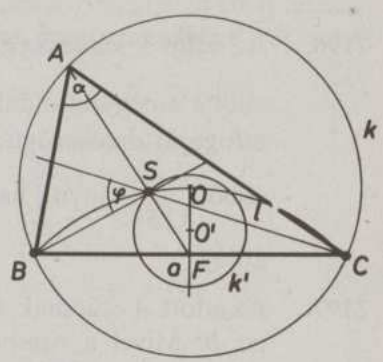
2192. Érintse pl. k_1 kör a b és c, k_2 kör az a és c oldalt (**2192.** ábra). Ekkor O_1 és O_2 középpontoknak a c oldalra eső merőleges vetületei O_1', O_2'. $O_1O_2O_2'O_1'$ téglalap, oldalai $2r$, r.
O_1, illetve O_2 rajta van a háromszög AO, illetve BO belső szögfelezőjén. Így $O_1O_2O_2'O_1'$ az AOB háromszögbe írt olyan téglalap, amelynek egyik oldala illeszkedik AB-re, és ez a téglalap másik oldalának kétszerese.
Az AOB háromszög egyértelműen meghatározható. A beírt téglalapot (illetve O_1, O_2 pontot) egy AB oldalhoz írt c, $\frac{1}{2}c$ oldalú téglalapból O középpontú középpontos hasonlósággal kapjuk meg.
Mivel a két kör együttesen az ABC háromszög a, b vagy c oldalait érintheti, így a megoldások száma: 3. (A háromszor két kör közül az egyenlő szárú háromszögeknél a szárakat érintő körök egybevágóak, és kettő egybeesik, szabályos háromszög esetén a hat helyett csak három egybevágó kör jön létre.)

2193. A háromszögbe írt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, sugara, ennek a pontnak az oldalaktól mért távolsága.
Szerkesszük meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög beírt körének az átfogóval párhuzamos érintőjét. Ez az egyenes a befogókból egy újabb egyenlő szárú derékszögű háromszöget metsz le.
A fenti eljárással megszerkeszthető az így kapott háromszögbe írható kör. Ez az eredeti háromszög beírt körét is érinti. (A két kör középpontja, s ezért az érintési pont is illeszkedik a derékszög szögfelezőjére.)

2194. Az a oldalhoz tartozó α látószög segítségével a háromszög köré írható köre megrajzolható (**2194.** ábra).
Az F középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság az A csúcsot S-be, így a háromszög köré írt körét egy S ponton átmenő k' körbe viszi.
S tehát illeszkedik az a szakasz adott BSC szögű l látókörére és a k' körre. Ebből S megszerkeszthető. FS félegyenes a köré írt körből kimetszi a háromszög A csúcsát.
Nincs megoldás, ha 1) $\alpha \geqq BSC\sphericalangle$, mert S a háromszög belső pontja, vagy ha 2) l és k' köríveknek nincs közös pontjuk.
Megjegyzés: Az s_c és s_b súlyvonalak hajlásszöge $BSC\sphericalangle$, vagy ha $BSC\sphericalangle > 90°$, akkor $180° - BSC\sphericalangle$.
Keletkezhet 2 vagy 4 háromszög is, de ezek tükrösek, tehát egybevágóak. Így a megoldások száma: 1.



2192

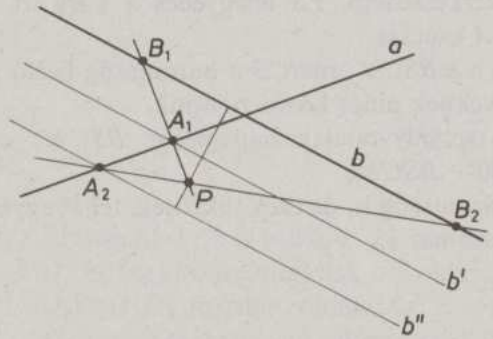


2194

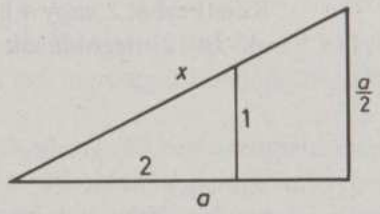
2195. Ha egy egyenes három pontjára $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$ áll fenn, akkor két eset lehetséges (**2195.** ábra):

1. P A-t és B-t nem választja el. Ekkor a P középpontú $\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság B-t A-ba viszi. Így a B-n átmenő b egyenes képe, b' illeszkedik A-ra. $b' \| b$, ezért b' metszi a-t A_1-ben. A_1P egyenes b-t B_1-ben metszi. Az eljárásból következik, hogy a $\frac{PA_1}{PB_1} = \frac{1}{3}$ egyenlőség teljesül.

2. Ha P az AB szakasz pontja, akkor a P középpontú $-\frac{1}{3}$ arányú hasonlóság B-t A-ba viszi. Ezt a hasonlóságot b egyenesre alkalmazva az előzőhöz hasonlóan adódó A_2B_2 egyenes a feltételeket kielégíti.



2195



2196

2196. Az adott x szakasz egy a, $\frac{a}{2}$ befogójú derékszögű háromszög átfogója, ahol a a négyzet oldala. Ez a háromszög hasonló az 1, 2 befogójú ($\sqrt{5}$ átfogójú) derékszögű háromszöghöz. Ez utóbbi megszerkeszthető és ebből $\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right.$ arányú$\left.\right)$ hasonlósággal megkapjuk a négyzet oldalát (**2196.** ábra).

2197. Az adott A csúcsnak az AB oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképe B. Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, ezért a feladatnak csak akkor van megoldása, ha AOB derékszögű háromszög,

ahol O az AC szakasz felezőpontja. Ha ez teljesül, a rombusz D csúcsa a B pont O-ra vonatkozó tükörképe.

F lehet a C csúcs mellett fekvő egyik oldal felezőpontja is. Így legyen C-nek F-re vonatkozó tükörképe C'. Ha $COC' \sphericalangle$ derékszög, akkor létezik és a fentiek szerint megszerkeszthető a rombusz.

2198. Az a oldalú rombusz e, f $(e \leqq f)$ átlói merőlegesen felezik egymást. A Pitagorasz-tétel szerint:

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = a^2.$$

Minthogy $f > a$, a szóba jöhető derékszögű háromszög átfogója csak f lehet.

$$f^2 = e^2 + a^2,$$

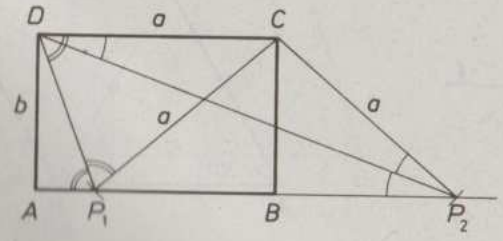
$$f^2 = e^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2,$$

$$3f^2 = 5e^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{e}{f} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Akkor és csak akkor alkot f, e, a derékszögű háromszöget, ha $e = \sqrt{\frac{3}{5}} f$ teljesül. Ekkor $a = f\sqrt{\frac{2}{5}}$, azaz $e : a : f = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$.

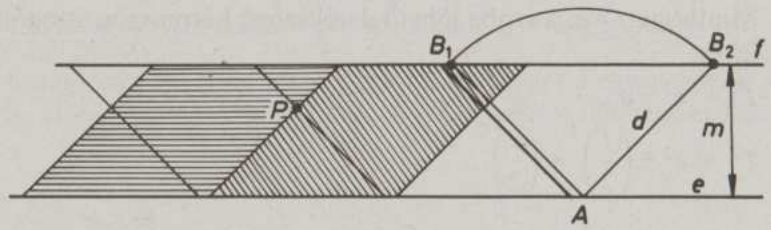
2199. A feltétel szerint $DPA \sphericalangle = DPC \sphericalangle$. $AP \| DC$ miatt $DPA \sphericalangle = PDC \sphericalangle$, mert váltószögek. Így $DPC \sphericalangle = PDC \sphericalangle$, azaz DCP egyenlő szárú háromszög (**2199.** ábra).

Ezért a C középpontú $CD = a$ sugarú kör és az AB egyenes közös pontja a keresett P pont. $a > b$ esetén 2, $a = b$ esetén 1 megfelelő pont létezik. $a < b$ esetén nincs az AB egyenesnek olyan pontja, amelyből AD és DC egyenlő szögben látszana.



2199

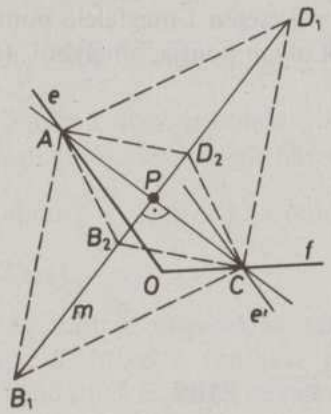
2200. Jelöljük e és f távolságát m-mel (**2200.** ábra)!
Ha $m > d$, akkor nincs megfelelő rombusz.
Ha $m = d$, akkor P-ből e-re állított merőlegesnek a párhuzamosok közé eső szakasza megadja a speciális rombusz (négyzet) egyik oldalát. Ebből két megfelelő négyzet szerkeszthető.
Ha $m < d$, az e egyenes egy tetszőleges A pontja mint középpont körül rajzolt d sugarú kör kimetszi f egyenesből a d oldalú rombusz A melletti B csúcsát. (Két rombuszt kapunk!) Ha P-n keresztül AB-vel párhuzamost húzunk, megkapjuk a keresett rombusz egyik oldalát. Ezt d-vel (mindkét irányba) eltolva 2-2, a feltételeket kielégítő rombuszt kapunk.



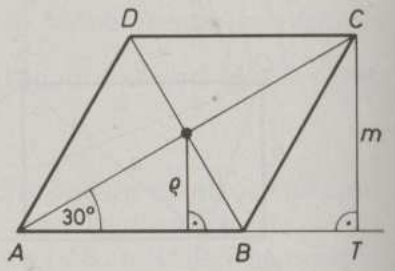
2200

2201. A rombusz átlói felezik egymást, ezért A-nak P-re vonatkozó tükörképe C. Ha $A \bullet\!\!-\!\!\bullet e$, akkor $A' = C \bullet\!\!-\!\!\bullet e'$ és $C \bullet\!\!-\!\!\bullet f$. A konvex szögtartomány miatt e' és f metszik egymást. C P-re vonatkozó tükörképe A (**2201.** ábra).
BD az AC-re szimmetrikus. Az adott arány felhasználásával két megfelelő rombusz szerkeszthető.

2202. Az előző feladat útmutatása és ábrája szerint AC megszerkeszthető.
A rombusz másik két csúcsa AC szakaszfelező-merőlegesére (m-re) illeszkedik. A feladatnak akkor van megoldása, ha m metszi e-t. (A megoldások száma 0 vagy 1.)



2201



2203

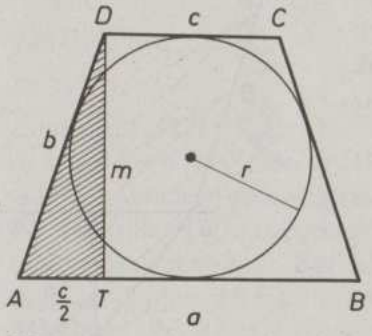
2203. ATC háromszögben $TC = m = 2\varrho$, $AC = 2m$ $(= 4\varrho)$, így $CAT\sphericalangle = 30°$. Ennek alapján ATC háromszög megszerkeszthető (**2203.** ábra). AC szakaszfelező-merőlegesének AT-vel való metszéspontja B. Ebből a rombusz egyértelműen megszerkeszthető.

2204. *a)* A feltételek szerint $a = 2c$, $m = 2r$, valamint $b = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{3}{2}c$. Az ATD derékszögű háromszögben $\left(\dfrac{3}{2}c\right)^2 - \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = (2r)^2$. Ebből $c = \sqrt{2}r$, $a = 2\sqrt{2}r$ és $b = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}r$ adódik (**2204.** ábra).

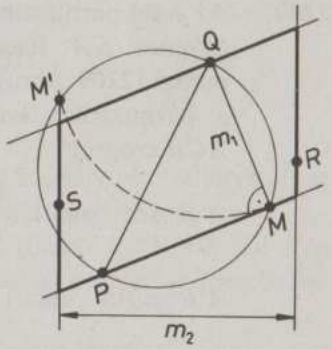
b) A beírt körhöz húzott párhuzamos érintőkre, az érintési pontokból két irányba $\dfrac{c}{2}$, illetve c szakaszok felmérésével a C, D, illetve A, B csúcsokhoz jutunk.

2205. A párhuzamos oldalakra illeszkedő pontokat jelöljük P, Q-val, illetve R, S-sel (**2205.** ábra).
PQ szakasz Thalész-köre és a Q középpontú m_1 sugarú kör közös pontja M. A paralelogramma két oldalegyenese PM, és a vele párhuzamos Q-n átmenő egyenes.
Csak akkor van megoldás, ha $m_1 \leqq PQ$. ($m_1 < PQ$ esetén két, $m_1 = PQ$ esetén egy párhuzamos oldalegyenespárt kapunk.)
A másik két párhuzamos oldalegyenest (RS és m_2 segítségével) ugyanígy kapjuk.

2206. Jelöljük a négyzet oldalát a-val, a téglalapét b, c-vel ($b \leqq c$). A négyzetből levágandó téglalap rövidebb oldala x. A hasonlóság alapján $x : a = b : c$. Ebből x-et pl. a párhuzamos szelők tételének segítségével szerkeszthetjük meg.

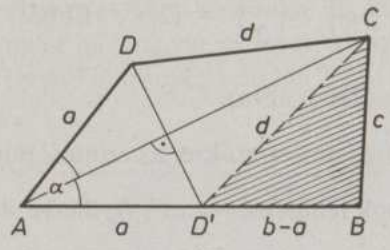


2204

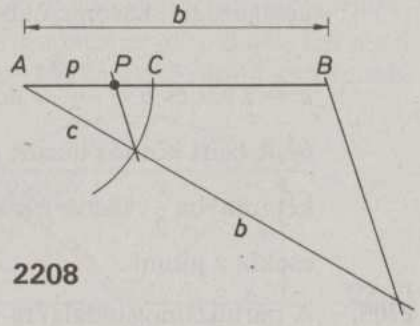


2205

2207. Ha $b > a$; tükrözzük a D csúcsot az α szög AC felezőjére (**2207.** ábra). A kapott $AD'CD$ négyszög deltoid. A $D'BC$ háromszög (c, d, $b-a$ oldalakból) megszerkeszthető. B-ből a BD' félegyenesre b-t felmérve megkapjuk az A csúcsot, majd a D' pontot AC-re tükrözve D-t.
A szerkesztés feltétele: $b-a$, c és d szakaszokra teljesüljön a háromszög-egyenlőtlenség.



2207



2208

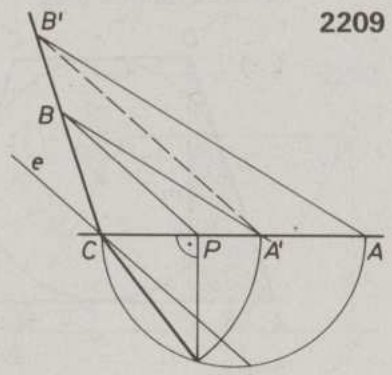
(Ha $b < a$, akkor a fentihez hasonlóan először az $a-b$, c, d oldalú $B'CD$ háromszöget szerkesztjük meg.)
Ha $a = b$, akkor AC átló csak akkor lehet szögfelező is, ha egyúttal $c = d$ is teljesül. (Ha $c \neq d$, akkor nincs megfelelő négyszög.) Az $ABCD$ deltoid az oldalaival nem egyértelműen meghatározott, így végtelen sok megoldás van.

2208. Legyen $AC = c$, $AB = b$ és $AP = p$. A feltétel szerint $p^2 = (c-p)(b-p)$. Ebből $p = \dfrac{bc}{b+c}$ adódik. p-t és így a keresett P pontot negyedik arányos szerkesztéssel határozhatjuk meg (**2208.** ábra).

2209. Az e-vel párhuzamos B-n átmenő egyenes CA félegyenest P-ben metszi (**2209.** ábra). Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az ACB szögre!

$A'B \| AB'$ miatt $\dfrac{CA'}{CA} = \dfrac{CB}{CB'}$ és

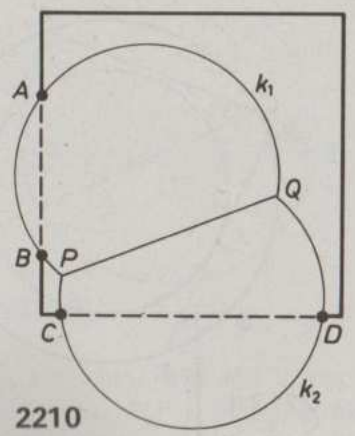
$A'B' \| e \| PB$ miatt $\dfrac{CB}{CB'} = \dfrac{CP}{CA'}$.



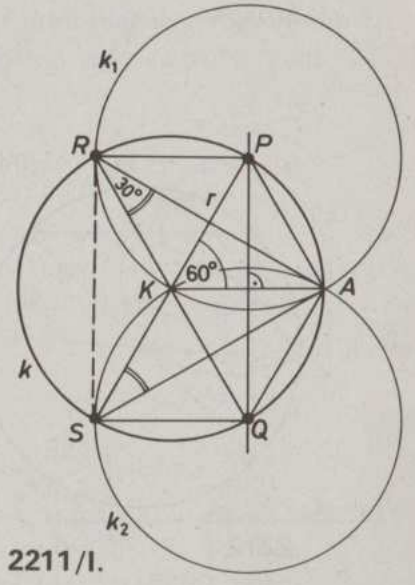
2209

Ezekből $(CA')^2 = CA \cdot CP$. Így CA' megszerkeszthető: például egy olyan derékszögű háromszög befogója, amelynek átfogója CA és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete CP.

2210. *a)* A PQ szakasz 60°-os látóköreinek (k_1, k_2) a négyzet oldalaival való közös pontjai (itt: A, B, C, D) (**2210.** ábra).
b) A négyzet oldalainak azon pontjai, amelyek a k_1 és k_2 ívek által határolt körszeletek belső pontjai (itt: AB és CD szakaszok belső pontjai).
c) A négyzet oldalainak a fenti körszeleteken kívül fekvő pontjai. (Az ábrán a négyzet oldalainak az AB és CD szakaszokhoz nem tartozó pontjai.)
Az adatokat figyelembe véve egy látókörív legfeljebb két szomszédos oldalt metszhet és a két körív közül legalább az egyiknek két metszéspontja van az egyik oldallal.



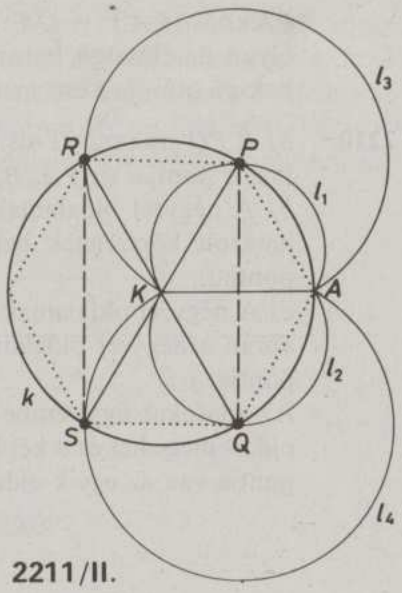
2210



2211/I.

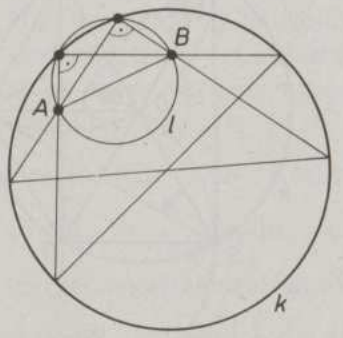
2211. *I. megoldás* (**2211**/I. ábra):
a) Ha $PKA\sphericalangle = 60°$, akkor APK háromszög szabályos. P (illetve Q) az AK szakaszfelező-merőlegese és a k kör közös pontja.
b) A P (illetve Q) középpontú, r sugarú k_1 (illetve k_2) kör k-ból R-et (illetve S-et) metszi ki. Ezekből a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján $ARK\sphericalangle (= ASK\sphericalangle) = 30°$.
Minthogy $RP \| AK \| SQ \perp PQ$, a $PQSR$ négyszög téglalap, oldalai r és $r\sqrt{3}$.

II. megoldás (**2211**/II. ábra):
A keresett pontokat a k körből az AK szakaszhoz tartozó *a)* 60°-os l_1, l_2, illetve *b)* 30°-os l_3, l_4 látókörök metszik ki. PR és SQ a K középpontú r sugarú körbe írt szabályos hatszög 2 szemközti oldala, ebből adódóan e négy pont téglalapot határoz meg.

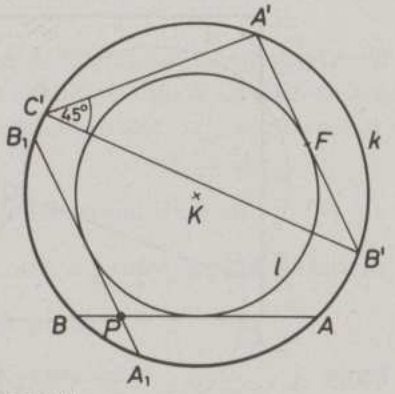


2211/II.

2212. A háromszög derékszögű csúcspontja a k kör és az AB átmérőjű l Thalész-kör közös pontja (**2212.** ábra).
A megoldások száma 2, 1 vagy 0.
Megjegyzés: A és B a k kör belső pontja, tehát l és k kör nem lehet azonos.



2212

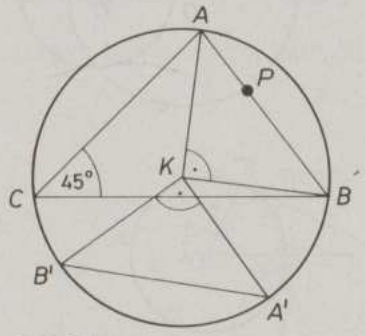


2213/I.

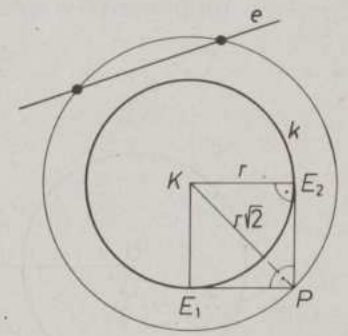
2213. *I. megoldás* (**2213**/I. ábra):
A kör tetszőleges C' pontjából húzott két húr – melyek hajlásszöge 45° – A'-ben és B'-ben metszi a k kört. Egy körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok tartoznak. Ezért a keresett, P-re illeszkedő húrt megkapjuk, ha $A'B'$-t megfelelően elforgatjuk. $A'B'$ szakasz felezőpontja F. A K közepű, KF sugarú l körhöz P-ből húzott érintőből a keresett húrt a k kör metszi ki.

Ha P illeszkedik l-re: 1 megoldás van ($KP = KF$).
Ha P l-en kívül van, 2 megoldás van ($KP > KF$).
Ha P l-en belül van, nincs megoldás ($KP < KF$).
II. megoldás (**2213**/II. ábra):
Legyen AB egy, a feltételeknek megfelelő, P-re illeszkedő húr. A kerületi és középponti szögek összefüggése szerint: $AKB\sphericalangle = 90°$. Az AKB háromszöggel egybevágó, egyenlő szárú derékszögű $A'KB'$ háromszög megszerkeszthető. Az $A'B'$-t K körül a fentiek szerint elforgatva kapjuk a keresett AB szakaszt.

2214. A P pontból a K középpontú, r sugarú körhöz húzott érintők merőlegesek, ezért KE_1PE_2 négyzet és $PK = r\sqrt{2}$ (**2214.** ábra). Így azon P pontok halmaza, amelyből a k körhöz húzott érintők merőlegesek egymásra, a K középpontú, $r\sqrt{2}$ sugarú l kör. A keresett pont az e egyenes és l kör közös pontja.
A megoldások száma lehet 2, 1 vagy 0, attól függően, hogy K-nak az e egyenestől mért távolsága kisebb, egyenlő vagy nagyobb, mint $r\sqrt{2}$.

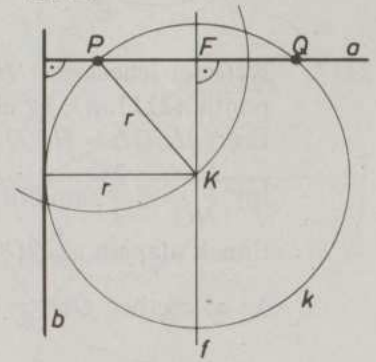


2213/II.



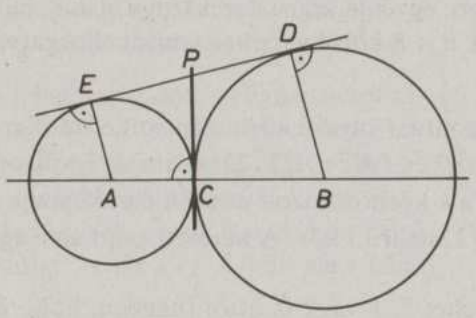
2214

2215. A keresett k kör K középpontja illeszkedik PQ f felezőmerőlegesére (**2215.** ábra). A kör sugara K-nak b-től mért távolsága r. Így PQ szakasz felezőmerőlegese és a P közepű, r sugarú kör metszéspontja K.
(Mindig van megoldás, mivel $PF < r$.)

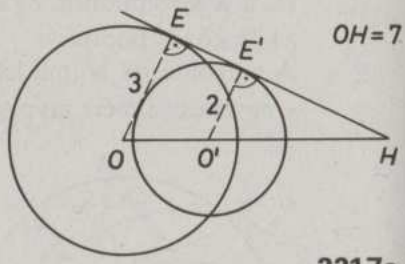


2215

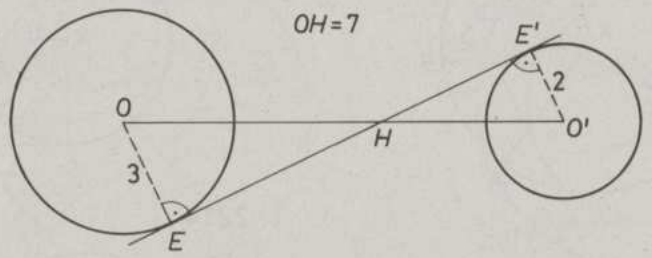
2216. A feltételek szerint a két kör kívülről érinti egymást (mert csak így szerepelhet két különböző érintési pont) (**2216.** ábra). $ABDE$ derékszögű trapéz: az érintési pontokhoz tartozó sugár AE, illetve BD merőleges ED-re, a közös érintőre. $AEPC$ és $BDPC$ akkor és csak akkor húrnégyszög, ha C-nél levő szöge derékszög. A megoldás a két kör C-beli közös (belső) érintője.



2216



2217a



2217b

2217. Két eset lehetséges: H a két kör *a)* külső vagy *b)* belső hasonlósági pontja (**2217.** *a), b)* ábra).

Ezért $HEO\triangle \sim HE'O'\triangle$, ahol $EO = 3$ cm, $E'O' = 2$ cm és $HO = 7$ cm.

Így $\frac{HO'}{HO} = \frac{2}{3}$, amiből $HO' = \frac{14}{3}$.

Ennek alapján az OO' szakasz hossza kiszámítható:

Az *a)* esetben $OO' = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$ (cm);

b) esetben $OO' = 7 + \frac{14}{3} = \frac{35}{3}$ (cm).

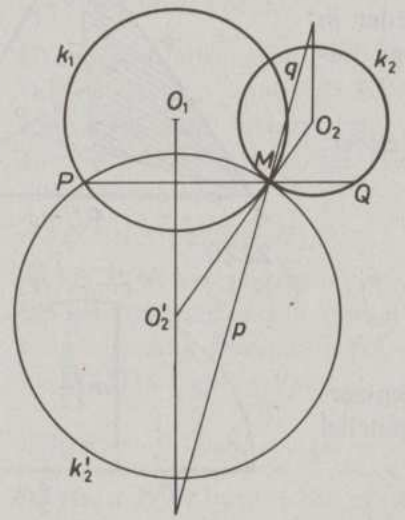
2218. Ismert, hogy két érintkező kör M érintési pontja egyben a két kör hasonlósági pontja. Ezért az M-re illeszkedő szelőkből a két kör által kimetszett húrok aránya egyenlő a hasonlóság λ arányával (**2218.** ábra).

Tegyük fel, hogy PQ a keresett szelő. Erre $\frac{PM}{QM} = \frac{p}{q}$ (ahol p, q a két adott szakasz hossza). Az M középpontú $\lambda = -\frac{p}{q}$ arányú hasonlóság Q-t P-be, a Q-ra illeszkedő k_2 kört a $Q' = P$-n átmenő k_2' körbe viszi. Így k_2' és k_1 metszéspontjai M és P.

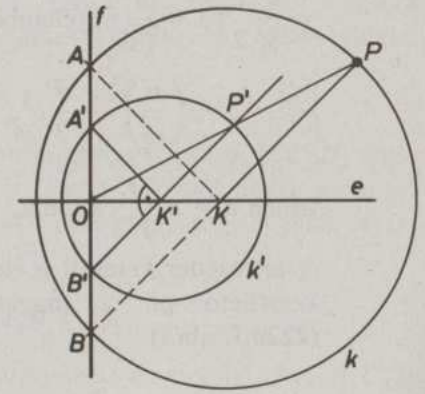
(k_2' és k_1 mindig metszők, ezért kiválasztott M esetén P egyértelműen meghatározott.)

2219. Az egyik feltétel szerint $AKB\sphericalangle = 90°$ és $K \bullet\!\!-\!\!- e$, ezért $AKO\sphericalangle = BKO\sphericalangle = 45°$ (**2219.** ábra).

Szerkesszünk ezen feltételeket kielégítő, K' középpontú k' kört. ($K' \bullet\!\!-\!\!- e$, valamint $K'B' = K'A'$, azaz $r' = \sqrt{2}K'O$.) Ezt a O középpontú $\lambda = \frac{OP}{OP'}$ arányú hasonlóság a keresett k körbe viszi.

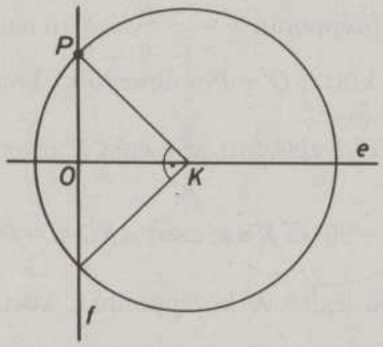


2218

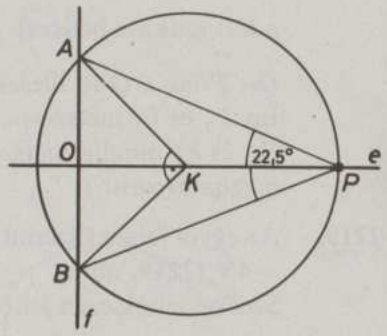


2219

A következő két speciális esetben a szerkesztés egyszerűbb:
a) Ha $P \bullet\!\!- f$, akkor $PO = OK$ alapján kapjuk meg K-t (**2219.***a)* ábra).
b) Ha $P \bullet\!\!- e$, akkor a kerületi és középponti szögek összefüggése alapján $OPA\sphericalangle = OPB\sphericalangle = 22{,}5°$. Ennek alapján szerkeszthető meg $A \bullet\!\!- f$ és $B \bullet\!\!- f$ pont.
Az AB átmérőjű Thalész-kör és e metszéspontja: K (**2219.***b)* ábra).



2219a



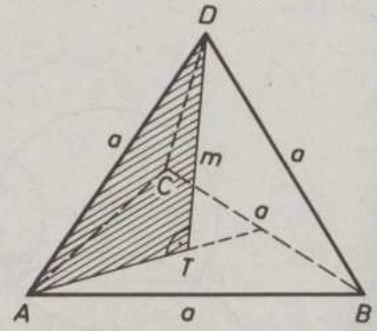
2219b

2220. A szabályos tetraéder magasságának talppontja az alapháromszög súlypontja (**2220.** ábra).
I. megoldás: Az a élű tetraéder m magassága a DTA derékszögű háromszögből meghatározható $TA = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ figyelembevételével:

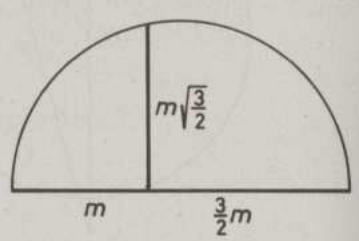
$$m^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

Innen $a = m\sqrt{\frac{3}{2}}$ adódik.

A tetreaéder keresett a éle megszerkeszthető pl. a magasságtétellel (**2220**/I. ábra).

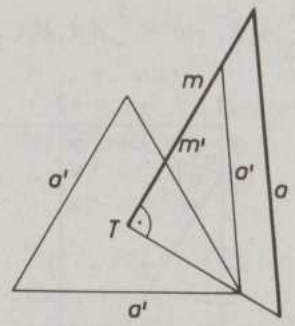


2220

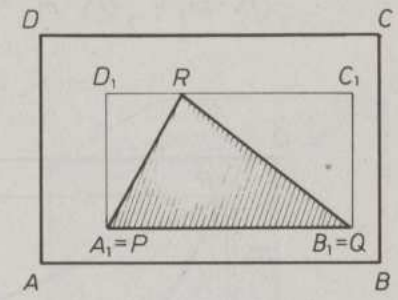


2220/I.

II. megoldás: A keresett a élű m magasságú tetraéderhez hasonló a' élű tetraéder magassága m'. A hasonlóság miatt $a : a' = m : m'$. Ezért tetszőlegesen választott a'-ből megszerkesztjük a keresett tetraéderben feltüntetett ATD derékszögű háromszöghöz hasonlót, majd $\lambda = \frac{m}{m'}$ arányú hasonlóság alkalmazásával megkaphatjuk a-t.



2220/II.



2221a

Megjegyzés: A **2220**/II. ábrában a testmagasságot tartalmazó ATD derékszögű háromszöget a gúla alaplapjának síkjába forgattuk az alaplap súlyvonala körül.

2221. Húzzunk a háromszög P, Q, R csúcsain keresztül az $ABCD$ téglalap valamelyik vagy mindkét oldalával párhuzamos egyenest, ha ez a háromszöget nem metszi. Egy olyan $A_1B_1C_1D_1$ téglalapot kapunk, amelynek beírt háromszöge PQR. Ezt a téglalapot az eredeti téglalap tartalmazza, ezért

$$t(ABCD) \geqq t(A_1B_1C_1D_1).$$

a) Ha PQR háromszög két csúcspontja egybeesik az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap két szomszédos csúcspontjával, itt $P = A_1$, $Q = B_1$, akkor a háromszög harmadik csúcspontjából, R-ből induló magassága egyenlő A_1D_1-gyel (**2221.***a)* ábra). Ezért

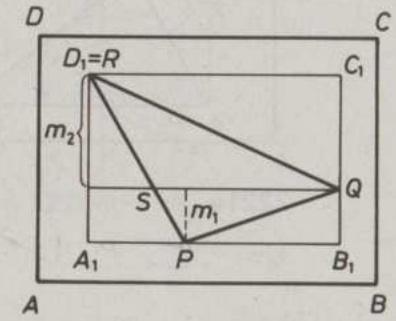
$$t(PQR) = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot A_1D_1 = \frac{1}{2} \cdot t(A_1B_1C_1D_1).$$

b) Ha a PQR háromszög egyik csúcspontja egybeesik az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap egyik csúcspontjával (itt $R = D_1$), másik két csúcspontja a

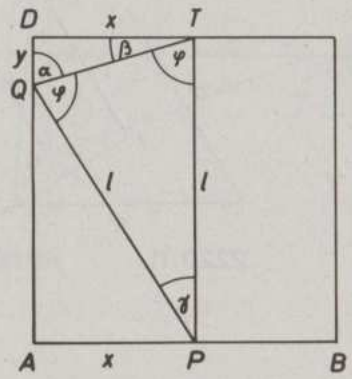
D_1-gyel szemközti egy-egy oldal belső pontja, akkor e két utóbbi csúcspont egyikén át (itt Q-n át) a téglalap megfelelő (A_1B_1) oldalával párhuzamosan húzott egyenes S-ben metszi a háromszög szemköztes oldalát (**2221.***b)* ábra).

Legyen m a paralelogramma A_1B_1 oldalához, m_1 a PQS, m_2 a QRS háromszög QS oldalához tartozó magassága. Ekkor $m_1+m_2=m$ és a PQR háromszög területe

$$\frac{1}{2}QS\cdot m_1+\frac{1}{2}QS\cdot m_2=\frac{1}{2}QS\cdot m\leqq\frac{1}{2}A_1B_1\cdot m=\frac{1}{2}t(A_1B_1C_1D_1).$$



2221b



2222

2222. A létra hossza l, lecsúszása y, kicsúszása x. A csúszás egyik pillanatában a létra alja P, teteje Q pontba kerül (**2222.** ábra).

I. megoldás: Az APQ háromszögben, a háromszög-egyenlőtlenség szerint: $QA+AP>QP$, azaz $l-y+x>l$. Tehát a szélső helyzeteket ($x=0$, $x=l$) leszámítva $x>y$. A szélső helyzetekben nincs háromszög és $x=y=0$, illetve $x=y=l$.

II. megoldás: Legyen $PT\|AD$. Ekkor $DT=x$. A QDT derékszögű háromszög befogói y, x, a velük szemköztes szögek β és α. QTP egyenlő szárú háromszög (szára l), alapon fekvő szöge φ, szárszöge γ. $\beta=90°-\varphi$, $\alpha=180°-\varphi-\gamma=(90°-\varphi)+(90°-\gamma)=\beta+(90°-\gamma)$. A létra mozgása során $0°<\gamma<90°$, ezért ekkor $\alpha>\beta$ s így $x>y$.

2223. A háromszög szögei α, β, γ, ezért $\alpha+\beta+\gamma=180°$. A feltételt kielégítő háromszögeknél léteznek olyan a, b, c pozitív egész számok, amelyekre $a\alpha=b\beta=c\gamma=180°$. A két összefüggésből az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$ diofantoszi egyenlet adódik.

Feltételezhetjük: $a\leqq b\leqq c$. Így $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq 3\cdot\frac{1}{a}$, azaz $a\leqq 3$.

$a=1$ nem lehet.

$a=2$ esetben $\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{2}{b}$, így $b\leqq 4$.

Mivel $b=2$ nem lehet, $b=3$ vagy $b=4$. Ekkor $c=6$, illetve $c=4$.

$a=3$ esetben $\frac{2}{3}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{2}{b}$, így $b\leqq 3$.

$b\geqq a=3$ miatt $b=3$ lehet csak. Ekkor $c=3$.

Ezek alapján a keresett háromszögek szögei:

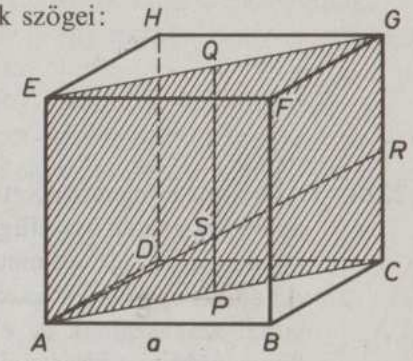
a) 90°, 60°, 30°;

b) 90°, 45°, 45°;

c) 60°, 60°, 60°.

2224. AR és PQ az $ACGE$ sík nem párhuzamos egyenesei, ezért metszik egymást. $QP\|RC$ és P az AC-t felezi, ezért PS a CAR háromszög középvonala (**2224.** ábra).

Így $PS=\frac{1}{2}\cdot CR=\frac{a}{4}$, $SQ=\frac{3}{4}a$.



2224

Az ACR derékszögű háromszögből $AR^2=AC^2+CR^2=2a^2+\frac{1}{4}a^2=$

$=\frac{9}{4}a^2$, azaz $AR=\frac{3}{2}a$. S (a fentiek szerint) AR felezőpontja, ezért

$SA=SR=\frac{3}{4}a$.

Tehát $SA=SQ=SR$.

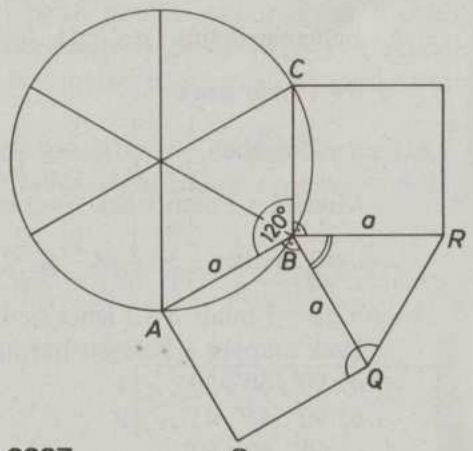
2225. A téglalap oldalai a, b.

$\frac{k^2}{16}=\frac{4(a+b)^2}{16}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqq ab=T$, a két pozitív szám számtani és mértani közepe közti összefüggés alapján.

2226. Ismert, hogy a (konvex) sokszögek külső szögeinek összege 360°. (Lásd az **1702**-es feladat megoldását.)

Konvex sokszögnek legfeljebb 3 hegyesszöge lehet, mert ha lenne 4 hegyesszöge, akkor a külső szögek között lenne 4 tompaszög, s ezek összege 360°-nál nagyobb lenne.

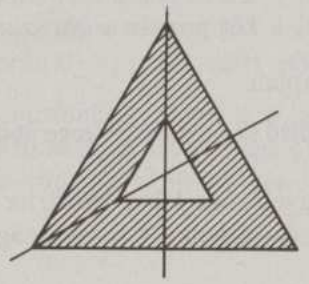
2227. A tizenkétszög oldalai a szabályos hatszög oldalaival egyenlőek, mert pl. $ABQP$ négyzet és BQR szabályos háromszög, hiszen $QBR\sphericalangle = 60°$ (**2227.** ábra). A tizenkétszög minden szöge $90° + 60° = 150°$.
Tehát a kapott sokszög szabályos.

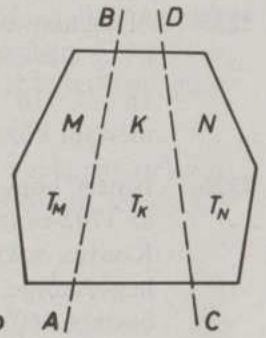


2227

2228. Általános értelemben vett sokszögre az állítás nem igaz. Ha a sokszög nem egyszeresen összefüggő, akkor szimmetriatengelyei nem feltétlenül a sokszög belsejében metszik egymást. (Lásd az **2228.***a)* ábrát.)
Az állítás egyszerű sokszögekre igaz. (Ha egy $A_0A_1 \ldots A_nA_0$ zárt töröttvonal szakaszainak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincsenek közös pontjai, akkor a sík A_0A_1, A_1A_2, ..., A_nA_0 szakaszai által határolt korlátos részét egyszerű sokszögnek nevezzük.) (**2228.***b)* ábra.)
A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy AB és CD a sokszög két olyan szimmetriatengelye, amelyek a sokszög belsejében nem metszik egymást. Az egymással szimmetrikus részek területei egyenlőek. Ezért $T_N = T_M + T_K$ és $T_M = T_N + T_K$. Ebből $T_N > T_M$ és $T_M > T_N$ következik, ami egyidejűleg nem lehet igaz.

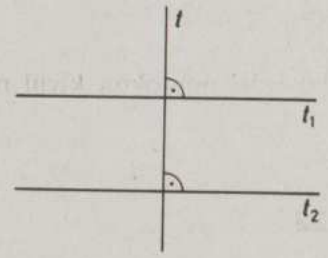
2229. Tengelyesen szimmetrikus síkidom szimmetriatengelyre vonatkozó tükörképe önmaga.


2228a

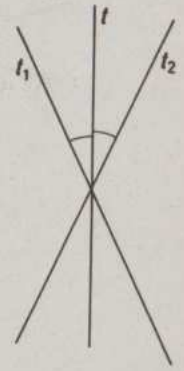


2228b

Legyen a síkidom egyik, tetszőlegesen választott szimmetriatengelye t, a másik kettő t_1 és t_2. Tükrözzük a síkidomot t-re! Ekkor t_1 képe t_1' és t_2 képe t_2' a síkidom képének, tehát az eredeti síkidomnak, szimmetriatengelyei.
Mivel a síkidomnak pontosan három szimmetriatengelye van, ezért vagy $t_1' = t_1$ és $t_2' = t_2$ *a)* **2229.***a)* ábra, vagy $t_1' = t_2$ és $t_2' = t_1$ *b)* **2229.***b)* ábra.
a) Ebben az esetben $t_1 \perp t$ és $t_2 \perp t$, tehát $t_1 \| t_2$ állna fenn, ami nem lehetséges, hiszen pl. t_1-re vonatkozó tükrözés esetén t_2 tükörképe t_1-től és t-től különböző szimmetriatengelye lenne a síkidomnak.
b) Ebben az esetben a három tengely egy ponton megy át, mivel *a)* szerint párhuzamosak nem lehetnek.
Mivel t, t_1 és t_2 szerepe felcserélhető, ezért ezek szöge egyenlő.
Tehát, ha egy síkidomnak pontosan három szimmetriatengelye van, akkor ezek egy ponton mennek át és egymással páronként 60°-os szöget zárnak be.



2229a

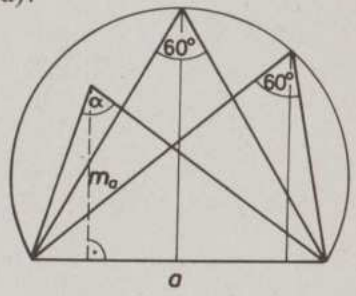


2229b

2230. Tegyük fel, hogy a háromszög legnagyobb oldala a. Az ezzel szemközti szög a háromszög legnagyobb szöge, nem lehet kisebb 60°-nál. Ezért az a oldalhoz tartozó magasság nem lehet nagyobb az a oldalú szabályos háromszög magasságánál (**2230.** ábra):

$$m_a \leqq a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből $a \geqq \frac{2}{\sqrt{3}} m_a$, s a háromszög területe $1 = t = \frac{am_a}{2} \geqq \frac{m_a^2}{\sqrt{3}}$. Tehát $m_a \leqq \sqrt[4]{3}$.

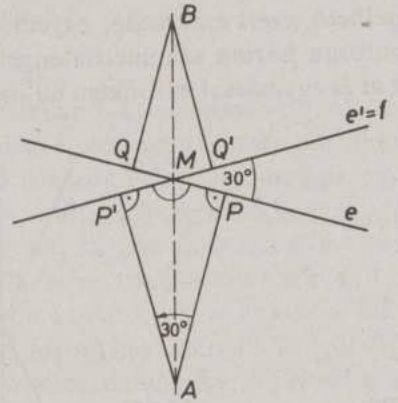


2230

2231. A feladat a **2050**-es feladattal azonos, más megfogalmazásban.

2232. Legyen A a sík olyan pontja, amely körül e-t 30°-kal elforgatva $e' = f$ (**2232.** ábra). Az A pontból e-re állított merőleges talppontja P. A forgatás P-t P'-be viszi. Így $AP = AP'$, tehát A rajta van e és f egyik szögfelezőjén. Az e és f metszéspontját M-mel jelölve $APMP'$ négyszög deltoid, $PMP' \sphericalangle = 150°$, $APM \sphericalangle = AP'M \sphericalangle = 90°$, $PAP' \sphericalangle = 30°$. E deltoid szimmetriatengelye AM. Ezért A rajta van e és f 150°-os szögét felező egyenesen.

Ezen egyenes tetszőleges B pontja egyenlő távol van e-től és f-től. $BQ = BQ'$ és $QBQ' \sphericalangle = 30°$, így B körüli, megfelelő irányú 30°-os forgatás e-t f-be viszi.



2232

JEGYZET

JEGYZET

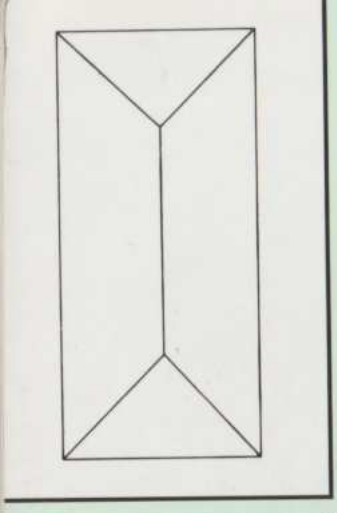
JEGYZET

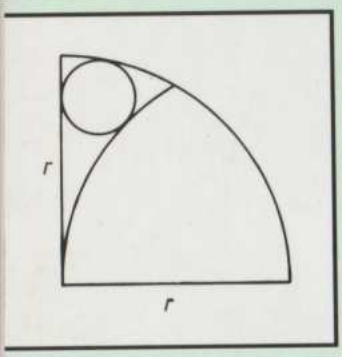
JEGYZET

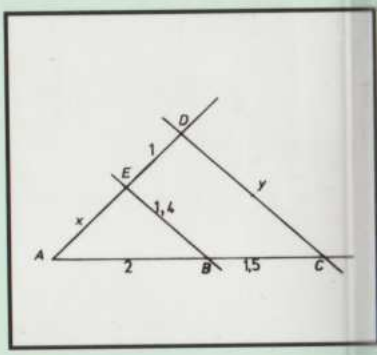
JEGYZET

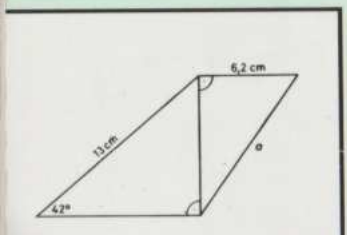
HT 100

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. A kiadásért felel: Pálfi József vezérigazgató. Raktári szám: 81 367/I. Utánnyomásra előkészítette: Füleki Lászlóné. Műszaki vezető: Babicsné Vasvári Etelka igazgatóhelyettes. Műszaki szerkesztő: Wéber Andrea. Grafikai szerkesztő: Takács László. Terjedelem: 30,94 (A/5) ív. 14. kiadás, 2002. Nyomtatta és kötötte a Kaposvári Nyomda Kft. – 220924. Felelős vezető: Pogány Zoltán igazgató









720

9 789631 927160