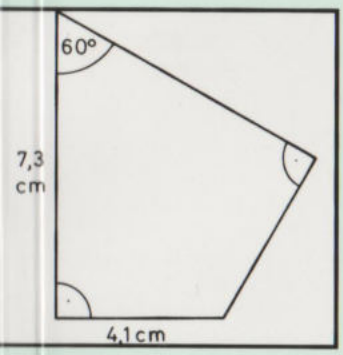
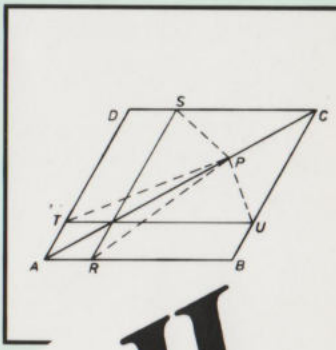
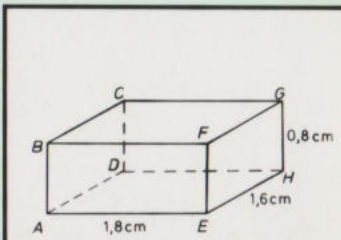
ÖSSZEFOGLALÓ FELADATGYŰJTEMÉNY MATEMATIKÁBÓL





megoldások II.





NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából

MEGOLDÁSOK II.

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

A kiadványt a Művelődési és Közoktatási Minisztérium
oktatáshoz szükséges segédkönyvvé nyilvánította

GÁDOR ENDRÉNÉ
GYAPJAS FERENCNÉ
HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA
KORÁNYI ERZSÉBET
POGÁTS FERENC és
REIMAN ISTVÁN
munkája

Alkotószerkesztő
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ

Az ábrákat
FRIGYESI MIKLÓS és VIDÉKI GUSZTÁV
rajzolta

Felelős szerkesztő
GIMES GYÖRGYNÉ

Bírálta
DELI LAJOS

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása,
illetve utánközlése a kiadó engedélye nélkül tilos!

© Gádor Endréné, Gyapjas Ferencné, Hárspatakiné Dékány Veronika,
Korányi Erzsébet, Pogáts Ferenc, Reiman István, 1996

Összkiadás ISBN 963 19 1319 8
ISBN 963 19 1318 X

Tartalom

Előszó 5

XV. fejezet Térfogat- és felszínszámítás (Reiman István) ... 7
XVI. fejezet Trigonometria (Pogáts Ferenc) 66
XVII. fejezet Vektorok (Reiman István), koordinátageometriai feladatok (Gádor Endréné) 211
XVIII. fejezet Számtani és mértani sorozatok (Korányi Erzsébet) 313
XIX. fejezet A teljes indukció módszerével megoldható feladatok (Hárspatakiné Dékány Veronika) 338
XX. fejezet Sorozatok konvergenciája. Differenciálszámítás (Korányi Erzsébet) 346
XXI. fejezet Integrálszámítás (Korányi Erzsébet) 362
XXII. fejezet Gráfok (Pogáts Ferenc) 379
XXIII. fejezet Számelmélet (Hárspatakiné Dékány Veronika) .. 382
XXIV. fejezet Kombinatorikai és valószínűségszámítási feladatok (Gyapjas Ferencné) 407

Előszó

A közölt megoldások: útmutatások, gondolatmenetek, illetve eredmények. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a megoldások nincsenek olyan részletességgel kidolgozva, mint amilyet az iskolai szintű szabatosság megkíván, a könnyebben megindokolható részleteknél pl. nem magyarázzuk külön az egyes számítási lépéseket.

Iskolai vagy érettségi dolgozatban természetesen ennél részletesebben indokolt, illetve kidolgozott megoldások szükségesek.

Általában csak egy megoldási módot közlünk, bár a feladatok gyakran sok más módszerrel is megoldhatók; lehetőleg olyan megoldásokat választottunk, amelyek a legismertebb utat járják.

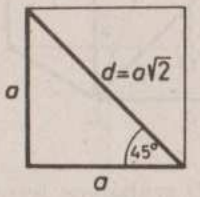
A számításokat zsebszámológéppel végeztük. Az eredmény pontossága zsebszámológépeknél függhet a gépektől és az egyes számítási lépések sorrendjétől is. Pontosabb eredmény várható, ha a részeredményeket lehetőleg csak számításaink végén kerekítjük; megoldásainkban erre törekedtünk. A π értékére többnyire a zsebszámológépekbe beépített többjegyű változatot használtuk a mindennapi 3,14 helyett. A szögértékeket számítógépes gyakorlatnak megfelelően általában a fok tizedeseiben adjuk meg.

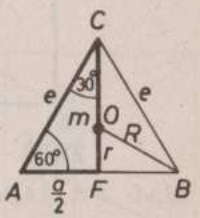
XV. FEJEZET

Térfogat- és felszínszámítás

Felsorolunk néhány összefüggést, amelyeket a következő feladatok megoldásánál gyakran felhasználunk, ezekre a megfelelő helyeken a (*) jellel hivatkozunk.

Az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza Pitagorasz tételéből $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$, és megfordítva, ha az átfogó d, az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Ugyanúgy: az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$, a d átlójú négyzet oldala $\frac{d}{\sqrt{2}}$.



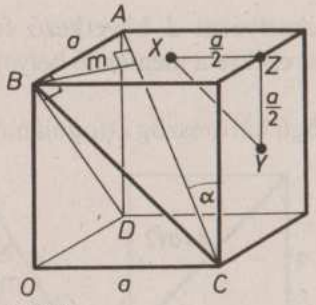


Az e oldalú szabályos háromszög magassága Pitagorasz tételével: $m = \sqrt{e^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \frac{e\sqrt{3}}{2}$, és így területe: $t = \frac{e^2\sqrt{3}}{4}$. A szabályos háromszög O középpontjába esik összes „nevezetes" pontja, így súlypontja, köréírt és beírt körének középpontja és magasságpontja is. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, a köréírt kör sugara: $OC = R = \frac{2}{3}\frac{e\sqrt{3}}{2} = \frac{e\sqrt{3}}{3}$, a beírt kör sugara: $OF = r = \frac{e\sqrt{3}}{6}$, e két távolság egyúttal O távolsága a csúcsoktól, illetve oldalaktól.

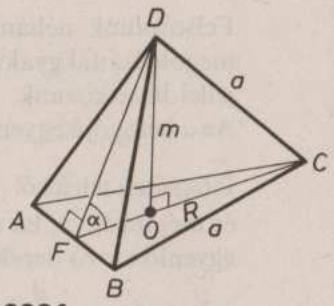
A szabályos háromszöget szimmetriatengelye olyan két derékszögű háromszögre vágja szét, amelyekben a hegyesszögek 30°-osak, illetve 60°-osak, az átfogó kétszerese a rövidebbik befogónak és a hosszabbik befogó $\sqrt{3}$-szorosa a rövidebbnek.

A megoldásoknál általában nem magyarázzuk külön az ábrákról leolvasható jelöléseket, az ábraszám a feladat számával egyezik meg.

2233. Az ABC derékszögű háromszögből (**2233.** ábra) $BC = a\sqrt{2}$ (*), az AC testátló hossza Pitagorasz tételével $\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$. Az ABC területét kétféle módon felírva, $\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot m}{2}$, ahol m egy tetszőleges kockacsúcs távolsága a testátlótól. Ebből $m = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ és $\cos\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}}$; $\alpha = 54{,}74°$.



2233



2234

2234. Az $ABCD$ szabályos tetraéder D csúcsából induló m magasság talppontja az ABC szabályos háromszög O középpontja (**2234.** ábra). $OC = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (*), Pitagorasz tételével $m = \sqrt{a^2-R^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ABC területe (*) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ezért a tetraéder felszíne: $A = \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$, térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

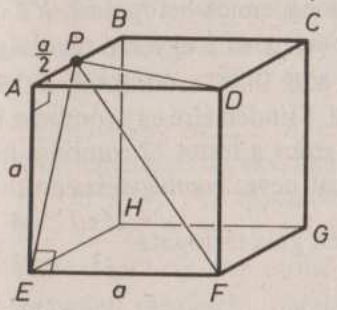
2235. Ha a kocka éle x, felszíne $6x^2$; a megnövelt felszín $6(x+4)^2$, $6(x+4)^2-6x^2 = 480$, $6x^2+48x+96-6x^2 = 480$, $x = 8$ cm; a térfogat: $8^3 = 512$ cm^3.

2236. A háromszögmetszet csúcsai a kocka egy O csúcsából kiinduló éleinek B, C, D végpontjai (**2233.** ábra). A BCD szabályos háromszög oldalai a kocka lapátlói, hosszuk $a\sqrt{2}$ (*), területe $\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 140$, ebből $a = 12{,}71$ cm.

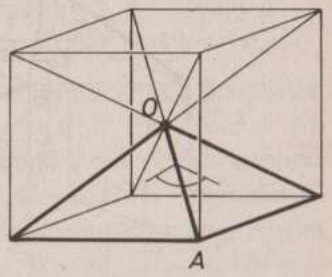
2237. A **2233.** feladat megoldása alapján $m = \frac{a\sqrt{6}}{3} = 4$, $a = \frac{12}{\sqrt{6}} = 4{,}90$ cm.

2238. A **2233.** ábráról a két középpont távolsága az XZT egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójával egyenlő: $XY = \frac{a}{2}\sqrt{2} = 8$ (*), ebből $a = \frac{16}{\sqrt{2}} = 11{,}31$ cm.

2239. Az AB él P felezőpontjának távolsága (**2239.** ábra) az A és B csúcsoktól $\frac{a}{2}$, a D, C, E, H csúcsoktól pl. a PAE derékszögű háromszögből $PE = \sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, az F és G csúcsoktól pl. a PEF derékszögű háromszögből $PF = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2+a^2} = \frac{3a}{2}$.



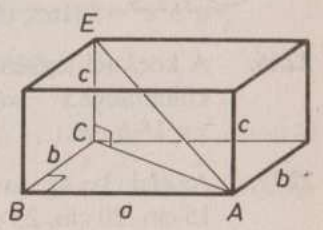
2239



2240

2240. Állítsunk a kocka minden lapjára ilyen négyoldalú gúlát úgy, hogy annak O csúcsa a kocka középpontja legyen (**2240.** ábra). Az OA élre így 3 egybevágó gúla illeszkedik, mindegyiknek oldaléle az OA, és körülötte három egyenlő lapszög tölti ki a 360°-os szögteret, egy lapszög ezért 120°-os.

2241. Legyen a téglatest egy csúcsából induló három él hossza rendre a, b, c (**2241.** ábra). Az ABC derékszögű háromszög $AC^2 = a^2+b^2$, az ACE derékszögű háromszögből az AE testátlóra: $AE^2 = AC^2+c^2 = a^2+b^2+c^2$. Feladatunkban $a = n$, $b = n+1$, $c = n(n+1)$, a testátló négyzete $a^2+b^2+c^2 = n^2+(n+1)^2+[n(n+1)]^2 = (n^2+n+1)^2$, ebből a testátló: n^2+n+1 egész szám.

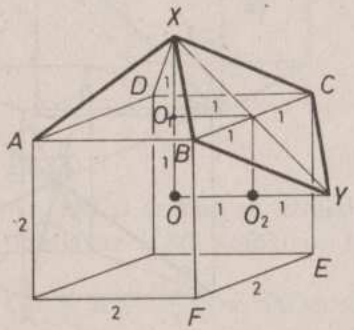


2241

2242. A **2233.** feladat megoldása alapján az a élű kocka testátlója $a\sqrt{3} = 3{,}84$; ebből $a = \dfrac{3{,}84}{\sqrt{3}} = 2{,}22$ dm.

2243. Legyenek az egy csúcsból induló élek rendre x, y, z, Pitagorasz tételét alkalmazva a lapátlók által lemetszett derékszögű háromszögekre $x^2+y^2 = 4^2 = 16$, $y^2+z^2 = 5^2 = 25$, $z^2+x^2 = 6^2 = 36$. A három egyenlet megfelelő oldalait összeadva és 2-vel osztva kapjuk, hogy $x^2+y^2+z^2 = 38{,}5$; ebből kivonva rendre az eredeti egyenleteket: $z^2 = 22{,}5$; $z = 4{,}74$ cm; $x^2 = 13{,}5$, $x = 3{,}67$ cm, $y^2 = 2{,}5$, $y = 1{,}58$ cm.

2244. Legyen a kocka élhossza 2 (**2244.** ábra). A kocka $ABCD$ lapja fölé X csúccsal, a $BCEF$ lap fölé pedig Y csúccsal állítunk gúlát, ezek magassága 1. A kocka O középpontja az X, Y csúcsokkal együtt egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg, ennek befogója 2, XY átfogója $2\sqrt{2}$ (*). X és Y egyenlő távolságra vannak a B, ill. C csúcsoktól. $XCBY$ rombusz. Minden élre egy rombusz illeszkedik, ezért a testet 12 rombusz határolja (a test neve: *rombdodekaéder*). Egy ráépített gúla térfogata $\dfrac{2^2 \cdot 1}{3} = \dfrac{4}{3}$, a teljes test térfogata ezért $V_r = 2^3 + 6 \cdot \dfrac{4}{3} = 16$,



2244

ez kétszerese a kocka térfogatának. Egy rombuszlap területe $\dfrac{BC \cdot XY}{2} = 2\sqrt{2}$, 12 rombuszé: $24\sqrt{2}$, ez a kocka 24-es felszínének a $\sqrt{2}$-szerese.

2245. A téglatest egy csúcsból kiinduló élei a, b, c. A feltétel szerint $ab = 15$, $bc = 33$, $ca = 67$. Szorozzuk össze a három egyenlet megfelelő oldalait $a^2b^2c^2 = 33165$, ebből a térfogat $abc = 182{,}11$ cm^3.

2246. A kockaél legyen x, a téglatest élei ekkor x, $x-6$, $x-4$. A térfogatok különbsége $x^3 - x(x-6)(x-4) = 2059{,}2$; ebből $10x^2 - 24x - 2059{,}2 = 0$; $x = 15{,}6$ cm.

2247. Az élek $3x$, $4x$, $5x$; a térfogat $3x \cdot 4x \cdot 5x = 60x^3 = 7500$, $x = 5$; az élek 15 cm, 20 cm, 25 cm. A téglatest felszíne $2(15 \cdot 20 + 20 \cdot 25 + 25 \cdot 15) = 2350$ cm^2.

2248. Az egy csúcsból induló élek a, b, c, $ab = 40$, $bc = 60$, $ca = 96$. Az egyenletek megfelelő oldalait összeszorozzuk $a^2b^2c^2 = 230400$, ebből a térfogat $abc = 480$ cm^3.

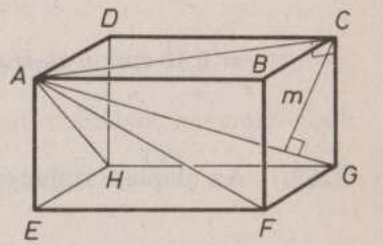
2249. A téglalap egy csúcsba futó élei $2x$, $3x$, $4x$, felszíne $2(2x \cdot 3x + 3x \cdot 4x + 4x \cdot 2x) = 52x^2 = 1400$, $x = \sqrt{\dfrac{350}{13}}$. A térfogat $2x \cdot 3x \cdot 4x = 24 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{350}{13}\right)^3} = 3352{,}73$ cm^3.

2250. Ha a téglatest élei a, b, c, testátlójának a négyzete (l. a **2241.** megoldását) $a^2+b^2+c^2 = 49$, felszíne $2(ab+bc+ca) = 72$. E két egyenlet megfelelő oldalait adjuk össze $(a+b+c)^2 = 121$, $a+b+c = 11$.

2251. Legyenek az élek: a, b, c. A testátló négyzete (l. a **2241.** megoldását) $a^2+b^2+c^2 = 49$, az alaplap területe $ab = 6$, kerülete $2(a+b) = 10$; e két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása $a = 2$, $b = 3$ (vagy $a = 3$, $b = 2$). Ezeket az első egyenletbe helyettesítve $13 + c^2 = 49$, $c = 6$.

2252. Legyenek az élek: a, b, c. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a lapátlók által lemetszett derékszögű háromszögekre: $a^2+b^2 = 25$, $b^2+c^2 = 34$, $c^2+a^2 = 41$. Az egyenleteket összegezve, majd 2-vel osztva kapjuk: $a^2+b^2+c^2 = 50$, a testátló hossza ezért (l. a **2241.** megoldását) $\sqrt{50} = 7{,}07$ cm. Az utolsó egyenletből rendre kivonva az első három egyenlet megfelelő oldalait kapjuk, hogy $c^2 = 25$, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$; $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm.

2253. A **2253.** ábra jelöléseit használva $AB = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $AE = 8$ cm. Pitagorasz tételének alkalmazásával $AC = \sqrt{12^2+6^2} = 13{,}42$ cm, $AF = \sqrt{12^2+8^2} = 14{,}42$ cm, $AH = \sqrt{8^2+6^2} = 10$ cm és $AG = \sqrt{12^2+6^2+8^2} = 15{,}62$ cm (l. a **2241.** feladat megoldását).



2253

2254. Legyenek az élek hosszai a, b, c. Mivel $c = 6$ és $V = abc = 36$, $ab = 6$ és ebből $b = \dfrac{6}{a}$. A testátló négyzete $7^2 = 49 = a^2+b^2+6^2$, $a^2+b^2 = 13$. Ebbe az egyenletbe helyettesítve b kifejezett értékét az

$a^2+\frac{36}{a^2}=13$ egyenletet kapjuk, ebből $a^4-13a^2+36=0$, a lehetséges értékei 2 és 3, b értékei 3 és 2, tehát a téglatest élei 2; 3; 6 cm.

2255. Ha az egy csúcsból kiinduló élek a, b, c; azt kell bizonyítani, hogy $(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$,
ami nyilvánvaló azonosság (l. a **2241.** feladat megoldását).

2256. A négyzetlap kerülete 84, a négyzet oldala 21; területe $21^2=441$. Ha a hasáb harmadik éle c, akkor térfogata $441c=19\,845$, $c=45$. A felszín: $A=2\cdot 21^2+4\cdot 21\cdot 45=4662\ \text{cm}^2$.

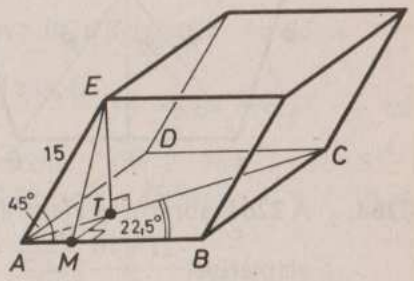
2257. Az élek $8x$, $9x$, $12x$; $(8x)^2+(9x)^2+(12x)^2=187^2$, $289x^2=187^2$, $x=11$. Az élek 88; 99; 132. A felszín: $A=2(88\cdot 99+99\cdot 132+132\cdot 88)=66\,792\ \text{cm}^2$; a térfogat: $V=88\cdot 99\cdot 132=1\,149\,984\ \text{cm}^3$.

2258. Használjuk a **2253.** ábra jelöléseit. $AE=4$, $AB=5$, $AD=20$. $AC=\sqrt{20^2+5^2}=\sqrt{425}$, $AF=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$, $AH=\sqrt{20^2+4^2}=\sqrt{416}$. A testátló hossza: $AG=\sqrt{4^2+5^2+20^2}=21$ (l. a **2241.** feladat megoldását). Az ACG derékszögű háromszög kétszeres területét két módon kiszámítva kapjuk, ha m a C távolsága az AG testátlótól: $21m=4\sqrt{425}$, $m=\frac{4\sqrt{425}}{21}=3{,}93$ cm, ugyanekkora E távolsága is. Hasonló módon kapjuk, hogy F és D távolsága a testátlótól $\frac{20\sqrt{41}}{21}=6{,}10$ cm; B és H távolsága $\frac{5\sqrt{416}}{21}=4{,}86$ cm.

2259. Az alaplap szabályos háromszög, területe $\frac{10^2\sqrt{3}}{4}$ (*); az oldallapok 10-es oldalú négyzetek. A felszín $2\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot 10^2=300+50\sqrt{3}=386{,}60\ \text{cm}^2$. A térfogat: $V=\frac{10^3\sqrt{3}}{4}=250\sqrt{3}=433{,}01\ \text{cm}^3$.

2260. Legyen az él e, az alapterület $\frac{e^2\sqrt{3}}{4}$ (*), a magasság e, ezért $V=\frac{e^3\sqrt{3}}{4}=184$, ebből $e=\sqrt[3]{\frac{4\cdot 184}{3}}=7{,}52$ cm.

2261. Legyen a romboéder alaplapja az $ABCD$ rombusz (**2261.** ábra), az ACE sík szimmetriasíkja a rombusznak, ezért E-ből az alapra állított merőleges T talppontja az AC átlón van, T-ből az AB-re emelt merőleges talppontja M. Az AME egyenlő szárú derékszögű háromszögből $AM=EM=\frac{15}{\sqrt{2}}$ (*),

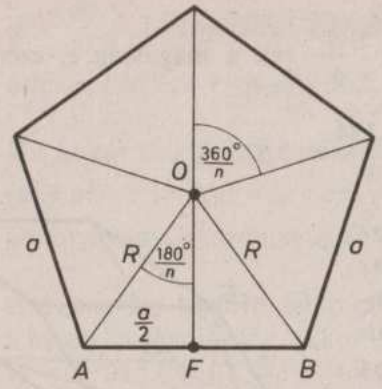


2261

az AMT derékszögű háromszögből $AT=\frac{AM}{\cos 22{,}5^\circ}=\frac{15}{\sqrt{2}\cos 22{,}5^\circ}$. Az ATE derékszögű háromszögből $ET=\sqrt{AE^2-AT^2}=\sqrt{15^2-\frac{15^2}{2\cos^2 22{,}5^\circ}}$. A rombuszlapok területe $15^2\sin 45^\circ$, ezért a felszín: $A=6\cdot 15^2\sin 45^\circ=954{,}59\ \text{cm}^2$, a térfogat: $V=15^2\sin 45\cdot ET=1535{,}93\ \text{cm}^3$.

2262. Az alaplap területe t_a, a síkmetszeté 197. Az alapot a síkmetszet merőleges vetületeként fogjuk fel, ezért $t_a=197\cos 30^\circ=\frac{197\sqrt{3}}{2}$. Ha az alapél hossza e, az alapterület hat, e oldalú szabályos háromszögből tevődik össze, ezért (*) $6\frac{e^2\sqrt{3}}{4}=\frac{197\sqrt{3}}{2}$, ebből $e^2=\frac{197}{3}$, $e=8{,}10$ cm.

2263. Az alaplap n oldalú szabályos sokszög, ennek O középpontjából egy oldal $\frac{360^\circ}{n}$ szögben látszik. A **2263.** ábra OFA derékszögű háromszögéből $OF=\frac{a}{2\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}}$, az alaplap területe: $t=n\cdot\frac{a\cdot OF}{2}=\frac{na^2}{4\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}}$. A ha-



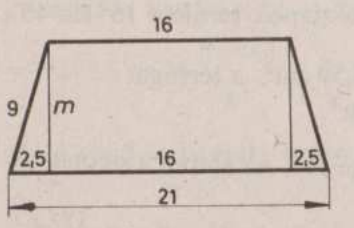
2263

sáb felszíne: $A_h = \dfrac{na^2}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}} + nam$;

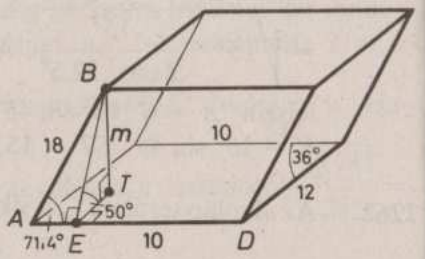
a térfogat: $V_h = \dfrac{na^2m}{4\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$.

2264. A **2264.** ábráról az alaptrapéz magassága: $m = \sqrt{9^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{74{,}25}$. Az alapterület $\dfrac{21+16}{2}\sqrt{74{,}25} = 159{,}41$. A hasáb felszíne: $A = 2 \cdot 159{,}41 + (2 \cdot 9 + 16 + 21)10 = 868{,}82\ \text{cm}^2$, a térfogat: $V = 1594{,}1\ \text{cm}^3$.

2265. Az alaplap területe: $t = 24 \cdot 7 \sin 42{,}8°$; a C él végpontjából induló magasság hossza: $m = 10 \sin 67°$; a térfogat: $V = t \cdot m = 24 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \sin 42{,}8° \cdot \sin 67° = 1050{,}72\ \text{cm}^3$.



2264



2267

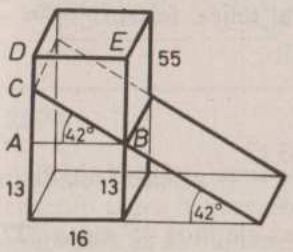
2266. Az alaplap területe $\dfrac{7{,}8^2\sqrt{3}}{4}$ (*), az egyik felső csúcsból az alapra emelt m magasság hossza: $m = 10 \sin 59°$ (l. az előző feladatot). A térfogat: $V = \dfrac{7{,}8^2 \cdot 10\sqrt{3} \sin 59°}{4} = 225{,}82\ \text{cm}^3$.

2267. A 10-es és 12-es éllel rendelkező alaplap területe: $t = 10 \cdot 12 \sin 36°$ (**2267.** ábra). A B csúcsból az alaplapra állított m merőleges talppontja T, a T-ből AD-re állított pedig E. A BEA derékszögű háromszögből $BE = 18 \sin 71{,}4°$, az ETB derékszögű háromszögből $m = BE \sin 50° = 18 \sin 71{,}4° \cdot \sin 50°$.

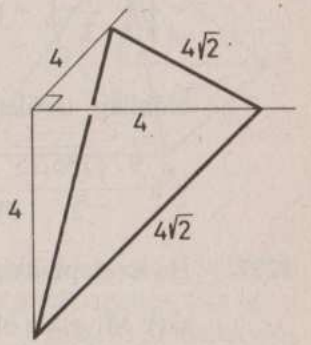
A térfogat: $V = tm = 10 \cdot 12 \cdot 18 \sin 36° \cdot \sin 71{,}4° \sin 50° = 921{,}78\ \text{cm}^3$.

2268. Az alaplap a síkmetszet merőleges vetülete, ezért az alaplap területe $t = 127 \cos 43°$. A hasáb térfogata: $V = 127 \cdot \cos 43° \cdot 80 = 7430{,}55\ \text{cm}^3$.

2269. A **2269.** ábra jelölései szerint $BE = 55$, $AC = 16 \operatorname{tg} 42° = 14{,}41$; $CD = 40{,}59$; $BC = \dfrac{16}{\cos 42°} = 21{,}53$. A $BCDE$ trapéz területe: $t = \dfrac{BE + (AD - AC)}{2} DE = \dfrac{55 + 55 - 16 \operatorname{tg} 42°}{2} 16 = 764{,}75\ \text{cm}^2$. A lemetszett rész trapézalapú hasáb, felszíne: $A = 2 \cdot 764{,}75 + 16 \cdot 55 + 16 \cdot 21{,}53 + 16 \cdot 40{,}59 + 16^2 = 3659{,}42\ \text{cm}^2$; a térfogat: $V = t \cdot 16 = 764{,}75 \cdot 16 = 12\,236\ \text{cm}^3$.



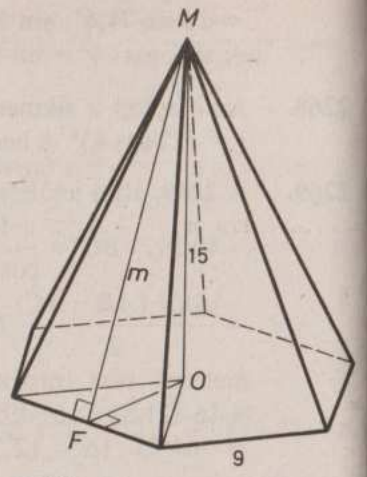
2269



2270

2270. Egy levágott gúla egy lapból olyan egyenlő szárú derékszögű háromszöget metsz le, amelynek befogója 4, átfogója $4\sqrt{2}$ (*), tehát területe 8, ezért minden kockalapból $12^2 - 4 \cdot 8 = 112$ területű nyolcszög marad meg, a hat lapból összesen $6 \cdot 112 = 672$ (**2270.** ábra). Viszont minden vágásnál létrejön egy $4\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszögmetszet, ennek területe (*) $\dfrac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$. Az új felszín: $A = 672 + 8 \cdot 8\sqrt{3} = 782{,}85\ \text{cm}^2$. Egy levágott gúla térfogata $\dfrac{4^3}{6} = \dfrac{32}{3}$, a nyolc csúcsnál ez összesen $\dfrac{256}{3}$, a maradék rész térfogata: $V = 12^3 - \dfrac{256}{3} = \dfrac{4928}{3} = 1642{,}67\ \text{cm}^3$.

2271. A t alapterület hat, 9-es oldalú szabályos háromszögből tevődik össze, $t = 6\,\frac{9^2\sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}$. A térfogat: $V = \frac{243\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{15}{3} = 1052{,}22\ \text{cm}^3$. Az alaplap O középpontjából az egyik alapélre emelt merőleges hossza $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (*), az oldallap magassága (l. a **2271.** ábrát) az MOF derékszögű háromszögből $m = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 15^2} = \sqrt{285{,}75}$, ezért egy oldallap területe $\frac{9\sqrt{285{,}75}}{2}$, ebből a teljes felszín: $A = \frac{243\sqrt{3}}{2} + 6\,\frac{9\cdot\sqrt{285{,}75}}{2} = 666{,}86\ \text{cm}^2$.



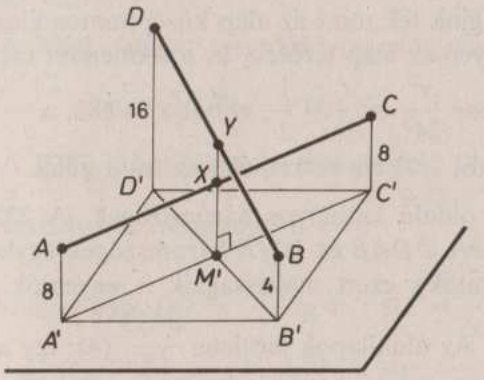
2271

2272. Ha az alaphatszög oldala 9, területe $\frac{243\sqrt{3}}{2}$ (l. az előző feladat megoldását). Mivel az oldallapok hajlásszöge az alaphoz 45°-os, a **2271.** ábrán az MOF derékszögű háromszög egyenlő szárú, s minthogy $OF = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $MF = \frac{9\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$, egy oldallap területe: $\frac{9\cdot 9\sqrt{6}}{2\cdot 2} = \frac{81\sqrt{6}}{4}$. A gúla felszíne: $A = \frac{243\sqrt{3}}{2} + 6\cdot\frac{81\sqrt{6}}{4} = 508{,}06\ \text{cm}^2$; a térfogat: $V = \frac{243\sqrt{3}}{2\cdot 3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{2187}{4} = 546{,}75\ \text{cm}^3$.

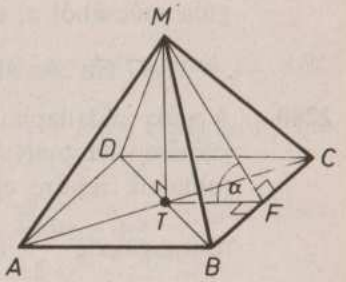
2273. A tetraéder súlypontjából a tetraédert 1 : 3 arányban kicsinyítve (és a súlypontra tükrözve) kapjuk meg a lapközéppontok által meghatározott tetraédert, ezért ennek térfogata az eredetinek $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-ed része, felszíne pedig $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$-ed része.

2274. A térképen levő pontokat jelöljük vesszővel (**2274.** ábra). A térkép kereszteződési pontja az $A'B'C'D'$ paralelogramma M' középpontja, e felett az AC vonal magassága 8, a BD vonal magassága a $BB'D'D$ trapéz középvonalával egyenlő, ennek hossza $\frac{16+4}{2} = 10$, tehát a vezetékek távolsága egymástól M' felett 2 m.

2275. Ha az eredeti terület t, $168 = t\cos 32{,}5°$, $t = \frac{168}{\cos 32{,}5°} = 199{,}20\ \text{m}^2$.



2274



2276

2276. A **2276.** ábra jelöléseit használva: $BC = 12$, $\alpha = 60°$. Mivel az oldallapok egyenlő szárú háromszögek, MF és BC merőlegesek egymásra és így α az alapsík és az oldallap hajlásszögét méri. $TF = 6$ és az MTF derékszögű háromszög egyik szöge 60°-os, (*) ezért az MF lapmagasság: $MF = 2TF = 12$, a testmagasság: $MT = 6\sqrt{3}$. Egy oldallap területe $\frac{12^2}{2} = 72$, ezért a felszín: $A = 12^2 + 4\cdot 72 = 432\ \text{cm}^2$, a térfogat: $V = \frac{12^2}{3}\cdot 6\sqrt{3} = 288\sqrt{3} = 498{,}83\ \text{cm}^3$.

2277. A **2276.** ábra jelöléseit használva $AB = 40$, $MT = 21$. Ebből $TF = 20$, $MF = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ következik. Egy oldallap területe $\frac{40\cdot 29}{2} = 580$, a felszín: $A = 40^2 + 4\cdot 580 = 3920\ \text{cm}^2$, a térfogat: $V = \frac{40^2\cdot 21}{3} = 11\,200\ \text{cm}^3$. $BM = \sqrt{MF^2 + BF^2} = \sqrt{29^2 + 20^2} = 35{,}23$.

2278. A **2276.** ábra jelöléseit használva $AB = 14$, $MB = 20$. Ebből $DB = 14\sqrt{2}$ (*) és $TB = 7\sqrt{2}$; az MTB derékszögű háromszögből $MT =$

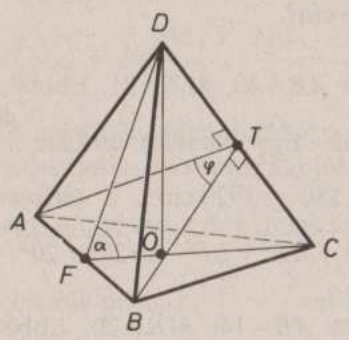
$= \sqrt{20^2-(7\sqrt{2})^2} = \sqrt{302}$, az MTF derékszögű háromszögből $MF = \sqrt{302+7^2} = \sqrt{351}$; egy oldallap területe $\frac{14\cdot\sqrt{351}}{2}$; a felszín: $A = 14^2+4\cdot 7\sqrt{351} = 720{,}58$ cm^2; a térfogat: $V = \frac{14^2\sqrt{302}}{3} = 1135{,}37$ cm^3.

2279. A síkmetszetet úgy fogjuk fel, mint az alap középpontos kicsinyítését a gúla csúcsából. Legyen az alap területe $2t$, a síkmetszet távolsága a gúla csúcsából x, ekkor $\frac{x^2}{24^2} = \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$, ebből $x^2 = 288$, $x = 12\sqrt{2} = 16{,}97$ cm. Az alaptól 7,03 cm-re kell elmetszeni a gúlát.

2280. A gúla oldallapjai a oldalú szabályos háromszögek. A **2276.** ábra jelöléseit használva ezért a DAB és DMB háromszögek egybevágóak (oldalaik rendre egyenlők), ezért magasságaik is egyenlők, az MT testmagasság $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (*). Az oldallapok területei $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (*); így a felszín: $A = a^2+a^2\sqrt{3} = a^2(1+\sqrt{3})$, a térfogat: $V = \frac{a^2\cdot a\sqrt{2}}{2\cdot 3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. $\alpha = 54{,}74°$.

2281. A **2271.** feladat megoldását követve $V = 294\sqrt{3} = 509{,}22$ cm^3, $A = \frac{294\sqrt{3}}{4} + 21\sqrt{\frac{723}{4}} = 409{,}64$ cm^2.

2282. A **2282.** ábra jelölését követve $AB = 6$, $DC = 12$. Az ABC szabályos háromszög középpontja O és $OF = \sqrt{3}$ (*), ezért a DFB derékszögű háromszögből $DF = \sqrt{12^2-3^2} = \sqrt{135}$, a DOF derékszögű háromszögből $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{135}}$, $\alpha = 81{,}43°$. ACD és BCD oldallapok lapszögének a meghatározására állítsunk merőlegest A-ból és B-ből a CD élre, ezek közös talppontja T, $\varphi = ATB\sphericalangle$, ezt kell kiszámítanunk. Az oldallapok egybevágóak, ezért területük $\frac{AB\cdot DF}{2} = 3\sqrt{135}$, ugyanezt a területértéket adja $\frac{CD\cdot BT}{2} = 6BT$ is. Mivel tehát $6BT = 3\sqrt{135}$, $BT = \frac{\sqrt{135}}{2} = AT$. Ha az ATB háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt, kapjuk, hogy $36 = \frac{135}{4} + \frac{135}{4} - 2\frac{135}{4}\cos\varphi$, ebből $\cos\varphi = \frac{63}{135}$, $\varphi = 62{,}18°$.



2282

2283. A **2280.** feladat megoldása szerint, ha az élek hossza a, a térfogat $\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = 408$, ebből $a = 12{,}01$ cm.

2284. A **2282.** ábra jelöléseit használjuk: $AB = 9$, $\alpha = 46°$; ebből az ABC szabályos háromszögben $OF = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; a DOF derékszögű háromszögből $DO = \frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} 46°$, $DF = \frac{OF}{\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cos 46°}$. A gúla felszíne: $A = \frac{9^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{9\cdot 3\sqrt{3}}{4\cos 46°} = 85{,}56$ cm^2.

A térfogat: $V = \frac{9^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}\operatorname{tg} 46°}{2\cdot 3} = 31{,}45$ cm^3.

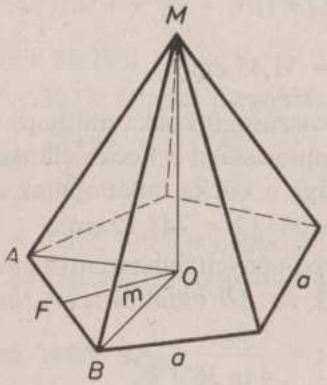
2285. Hat ilyen gúlából egy 46 cm-es élhosszúságú kocka állítható össze (l. a **2240.** ábrát), ezért egy ilyen gúla magassága a kocka élhosszának a fele: 23 cm. Az oldallapok magassága a kocka lapátlójának a felével egyenlő: $23\sqrt{2}$, egy oldallap területe $23^2\sqrt{2} = 748{,}12$ cm^2.

2286. A **2263.** feladat megoldásának részeredményeit felhasználva az a oldalú szabályos ötszög O középpontjának az AB oldaltól mért távolsága: $m = \frac{a}{2\operatorname{tg} 36°}$, az ötszög területe: $t = \frac{5a^2}{4\operatorname{tg} 36°}$. Az ABM szabályos háromszög magassága: $MF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (*), az MOF derékszögű háromszögből a gúla magassága: $MO = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\operatorname{tg} 36°}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2 36°}$. A gúla térfogata: $\frac{5a^3\operatorname{ctg} 36°}{3\cdot 8}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2 36°} = 243$, ebből az élhossz: $a = \sqrt[3]{\frac{1166{,}4}{\operatorname{ctg} 36°\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2 36°}}} = 9{,}31$ m (**2286.** ábra).

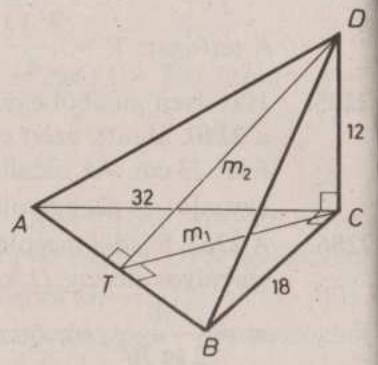
2287. A **2234.** feladat szerint az a élhosszú szabályos tetraéder térfogata: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 100$, $a = \sqrt[3]{\frac{1200}{\sqrt{2}}} = 9{,}47$ cm.

2288. A **2234.** feladat eredménye szerint az a élhosszúságú szabályos tetraéder felszíne $a^2\sqrt{3} = 120$, $a = \sqrt{\frac{120}{\sqrt{3}}} = 8{,}32$ cm, ugyanennek a feladatnak az eredményéből a tetraéder térfogata $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8{,}32^3\sqrt{2}}{12} = 67{,}87\ \text{cm}^3$.

2289. Legyen az élhossz e, a lapterület (*) $\frac{e^2\sqrt{3}}{4} = 17$, ebből $e = \sqrt{\frac{68}{\sqrt{3}}}$. A tetraéder térfogata a **2234.** feladat eredménye szerint $\frac{e^3\sqrt{2}}{12} = \sqrt{\left(\frac{68}{3}\right)^3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = 28{,}99\ \text{cm}^3$.



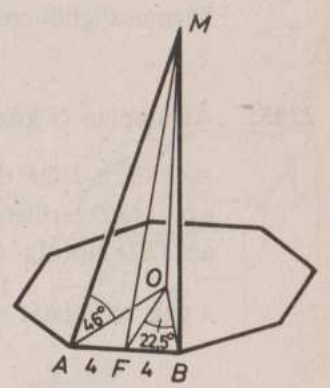
2286



2290

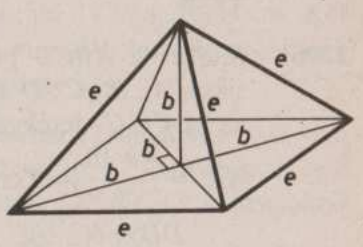
2290. Mivel az alapterület $\frac{32 \cdot 18}{2} = 288$, a magasság 12 (**2290.** ábra), a térfogat: $V = 288 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} = 1152\ \text{cm}^3$. A derékszögű lapok területei 288, 108, 192. A CD élen át az AB-re emelt merőleges sík a tetraéder ABC lapjából a $CT = m_1$ magasságot, az ABD lapból a $DT = m_2$ magasságot metszi ki. Az ABC derékszögű háromszög kétszeres területét kétféle módon felírva kapjuk, hogy $32 \cdot 18 = AB \cdot m_1$. Mivel $AB = \sqrt{18^2 + 32^2} = \sqrt{1348}$, $m_1 = \frac{576}{\sqrt{1348}}$. A DCT derékszögű háromszögből $m_2 = \sqrt{12^2 + m_1^2} = \sqrt{144 + \frac{576^2}{1348}}$. Ebből ABD területe $\frac{1}{2}\sqrt{1348}\sqrt{144 + \frac{576^2}{1348}} = \frac{1}{2}\sqrt{1348 \cdot 144 + 576^2} = 362{,}59$. A tetraéder felszíne: $A = 362{,}59 + 288 + 108 + 192 = 950{,}59\ \text{cm}^2$.

2291. Az alaplap O középpontjából (**2291.** ábra) pl. az AB oldal 45°-os szögben látszik, ezért $OA = \frac{4}{\sin 22{,}5°}$, $OF = 4 \operatorname{ctg} 22{,}5° = 9{,}66$. Az AM oldalél hossza az MOA derékszögű háromszögből $\frac{OA}{\cos 46°} = \frac{4}{\sin 22{,}5° \cdot \cos 46°} = 15{,}05$; a gúla magassága: $MO = OA \operatorname{tg} 46° = \frac{4 \operatorname{tg} 46°}{\sin 22{,}5°} = 10{,}82$. Az oldallap magassága: $MF = \sqrt{OF^2 + MO^2} = 14{,}50$, ebből az oldallap területe: $\frac{AB \cdot MF}{2} = 58$. Az alaplap területe $8 \cdot \frac{8 \cdot 9{,}66}{2} = 309{,}12$, a gúla felszíne $309{,}12 + 8 \cdot 58 = 773{,}12\ \text{cm}^2$. A gúla térfogata $\frac{309{,}12 \cdot 10{,}82}{3} = 1114{,}9\ \text{cm}^3$.



2291

2292. Legyen a félátló hossza b (**2292.** ábra), ekkor az alapterület $2b^2$, a térfogat $\frac{2b^3}{3} = 49{,}8$; ebből $b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 49{,}8}{2}} = 4{,}21$. Az alapél hossza $e = 4{,}21\sqrt{2}$. Az oldallapok e oldalú szabályos háromszögek, ezért a felszín $e^2 + 4\frac{e^2\sqrt{3}}{4} = e^2(1 + \sqrt{3}) = 96{,}86\ \text{cm}^2$.

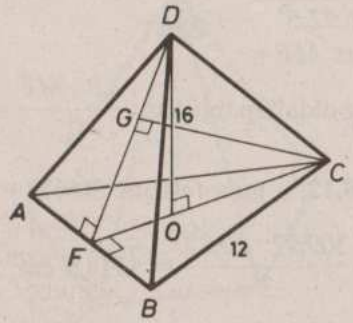


2292

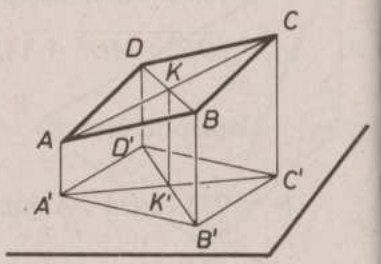
2293. A **2276.** ábra jelöléseivel $AB = 20$, $MT = 18$, $TF = 10$. Az MTF derékszögű háromszögből $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MT}{TF} = 1{,}8$; $\alpha = 60{,}95°$. A gúla térfogata: $V = \dfrac{20^2 \cdot 18}{3} = 2400\ \text{cm}^3$.

2294. A **2234.** ábra jelöléseit használva $OF = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $DF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (*), a DOF háromszögből $\cos\alpha = \dfrac{OF}{DF} = \dfrac{1}{3}$, $\alpha = 70{,}53°$.

2295. Az alaplap O középpontjának távolsága az oldalaktól $OF = \dfrac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$; a DOF derékszögű háromszögből $DF = \sqrt{OF^2 + 16^2} = \sqrt{268}$, s így ABD területe $6\sqrt{268}$ (**2295.** ábra). Az alap C csúcsának távolsága az ABD laptól a CG testmagassággal egyenlő; írjuk fel kétféle módon a gúla térfogatát $\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4 \cdot 3} \cdot 16 = \dfrac{6\sqrt{268}}{3} CG$, ezért $CG = \dfrac{96\sqrt{3}}{\sqrt{268}} = 10{,}16$ cm.



2295

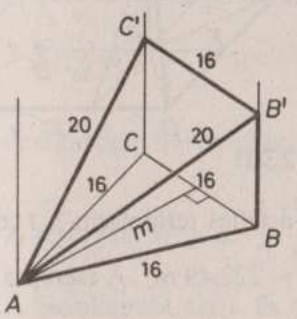


2296

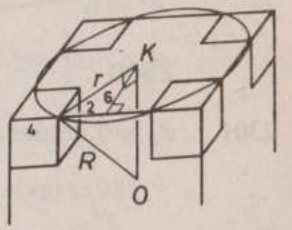
2296. Jelölje az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak merőleges vetületét a síkon A', B', C', D' (**2296.** ábra). A K középpont síktól mért távolsága az $AA'C'C$ derékszögű trapéz KK' középvonalával egyenlő, ezért $KK' = \dfrac{4 + 10}{2} = 7$ cm, de egyenlő a $BB'D'D$ trapéz középvonalával is, azaz $\dfrac{DD' + 6}{2} = 7$, ebből a D távolsága a síktól $DD' = 8$ cm.

2297. A bizonyítás gondolatmenete azonos az előző feladatéval.

2298. Az ABB' és ACC' derékszögű háromszögekből (**2298.** ábra) $BB' = CC' = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$. A szóban forgó test olyan négyoldalú gúla, amelynek alaplapja a $BB'C'C$ téglalap, magassága az ABC szabályos háromszög m magasságával egyenlő; mivel $m = \dfrac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (*), ezért a térfogat $\dfrac{12 \cdot 16 \cdot 8\sqrt{3}}{3} = 886{,}81\ \text{cm}^3$.



2298

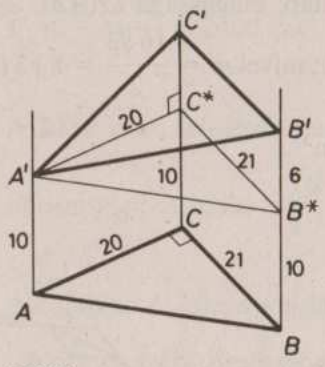


2299

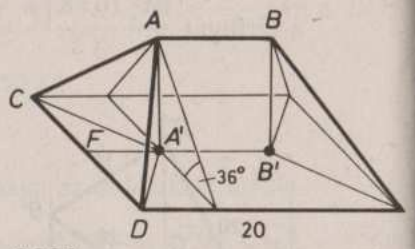
2299. A kocka térfogata 12^3, a kivágott kiskockáké $8 \cdot 4^3$, a maradék $12^3 - 8 \cdot 4^3$, a kettő aránya $\dfrac{12^3 - 8 \cdot 4^3}{12^3} = 1 - 8\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{19}{27}$. A kivágásokkal a felszín nem változik, ugyanakkora „új" felület keletkezik, mint amennyit kivágunk. A megmaradó test olyan gömbbe foglalható be, amely átmegy a kocka élharmadoló pontjain (a **2299.** ábrán ennek a gömbnek egyik lappal való metszetét mutatjuk be), a gömbből a kockalapon $r = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$ sugarú kört metszenek ki, ezért a gömb sugara $R = \sqrt{6^2 + r^2} = \sqrt{76}$, a gömb átmérője $2\sqrt{76} = 17{,}44$ cm. Két gömbi pont maximális távolsága és így a maradék test két csúcsának maximális távolsága a gömbátmérővel egyenlő.

2300. Messe a sík a hasáb éleit az A', B', C' pontokban (**2300.** ábra), az A'-nát az alappal párhuzamos sík az éleket B^*-ban, ill. C^*-ban metszi, és a vizsgált hasábrészt az $ABCA'B^*C^*$ hasábra és a $B^*B'C'C^*A'$ négyoldalú gúlára vágja szét. A hasáb térfogata $\dfrac{20 \cdot 21 \cdot 10}{2} = 2100$; a gúla

magassága az $A'C^*$, ezért térfogata $\frac{21 \cdot 6 \cdot 20}{3} = 840$; a teljes térfogat $2100 + 840 = 2940\ \text{cm}^3$.



2300



2301

2301. A tető vetületének a területe 180; ha a teljes tetőfelszín t, $t \cos 36° = 180$ és így a tetőfelszín: $t = \frac{180}{\cos 36°} = 222{,}49\ \text{m}^2$. A cserépszükséglet (10%-kal növelve) $\frac{222{,}49}{0{,}08} \cdot 1{,}10 = 3059{,}24$, azaz 3060 db.

A tető vetületén a téglalapcsúcsokból induló szakaszok felezik a téglalap szögeit (**2301.** ábra), ezért $CA'D$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, $A'F = \frac{9}{2} = 4{,}5$, s így az AB gerincél hossza $20 - 9 = 11$.

Az A és B pontokban a gerincélre állított merőleges síkok két egybevágó gúlát vágnak le a tetőrészből, ezeket egymásba tolva olyan négyoldalú gúlát kapunk, amelynek alapja 9-es oldalú négyzet, magassága pedig $AA' = 4{,}5 \operatorname{tg} 36°$, tehát térfogata $\frac{9^2 \cdot 4{,}5 \operatorname{tg} 36°}{3} = 9^2 \cdot 1{,}5 \cdot \operatorname{tg} 36°$.

A megmaradt rész olyan háromoldalú hasáb, amelynek alapterülete $\frac{9 \cdot AA'}{2} = 4{,}5^2 \operatorname{tg} 36°$, magassága 11, ezért térfogata $11 \cdot 4{,}5^2 \operatorname{tg} 36°$.

A teljes padlástér térfogata: $V = \operatorname{tg} 36°(9^2 \cdot 1{,}5 + 11 \cdot 4{,}5^2) = 250{,}11\ \text{m}^3$.

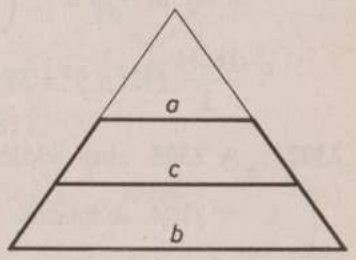
2302. A gúla csúcsától x és y távolságra ($x < y$) levő, az alappal párhuzamos síkok harmadolják a gúlát. Legyen a gúla térfogata V, az x, ill. y magasságú, az eredetihez hasonló gúlák térfogata $\frac{V}{3}$, ill. $\frac{2V}{3}$. Mivel

hasonló testek térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint megfelelő hosszméreteik köbei, ezért $V : \frac{V}{3} = 90^3 : x^3$, ebből $x = \sqrt[3]{\frac{90^3}{3}} = 62{,}40$ cm, $V : \frac{2V}{3} = 90^3 : y^3$, $y = \sqrt[3]{\frac{90^3 \cdot 2}{3}} = 78{,}62$ cm. Ezek szerint a legalsó csonkagúla magassága $90 - 78{,}62 = 11{,}38$ cm, a középső $78{,}62 - 62{,}40 = 16{,}22$ cm, a legfelső gúláé pedig 62,40 cm.

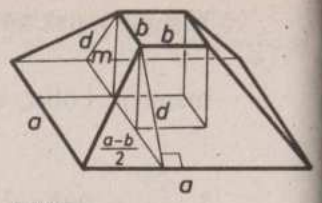
2303. A gúla magasságának T talppontja a szabályos hatszög középpontja. T távolsága az alapéltől: $TF = \frac{4{,}5\sqrt{3}}{2}$. A gúla csúcsa M, az MTF derékszögű háromszögből a gúla MT magassága $\sqrt{9^2 - \left(\frac{4{,}5\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

A térfogat: $V = 6 \cdot \frac{4{,}5^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4 \cdot 2}\sqrt{324 - 3 \cdot 4{,}5^2} = 142{,}27\ \text{cm}^3$.

2304. A csonkagúla alap- és fedőlapja, valamint a feladatban meghatározott középmetszet hasonló alakzatok, amelyeknek a területe úgy aránylik egymáshoz, mint hosszméreteik négyzete. A kiegészítő gúla csúcsán át vegyünk fel egy, az alapéllel párhuzamos síkot, ez a csonkagúlából olyan trapézt metsz ki, amelynek a és b alapja, valamint c középvonala a hasonló alakzatok egymásnak megfelelő szakaszai (**2304.** ábra), ha tehát a középmetszet területe t, akkor $\frac{a^2}{c^2} = \frac{t_1}{t}$, $\frac{b^2}{c^2} = \frac{t_2}{t}$, azaz $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t}}$, $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t}}$. Adjuk össze a két egyenlet megfelelő oldalait és helyettesítsünk $a+b$ helyébe $2c$-t: $\frac{a+b}{c} = \frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}}{\sqrt{t}} = 2$, ebből $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}}{2}$, $t = \left(\frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}}{2}\right)^2$.



2305. A csonkagúla egy felső élén át az alapra emelt merőleges sík olyan szimmetrikus trapézt metsz ki belőle, amelynek párhuzamos oldalai a, b, szárai az oldallap-trapézok d magasságával, m magassága pedig a csonkagúla magasságával egyenlő (**2305.** ábra). A metszettrapézból $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + m^2 = d^2$, a feltétel szerint $4 \cdot \frac{a+b}{2} d = a^2 + b^2$, ebből $d = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve és rendezve kapjuk, hogy $m = \frac{ab}{a+b}$.

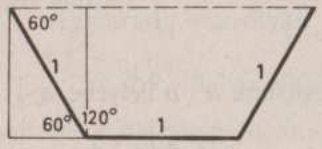


2305

2306. A **2305.** ábra jelöléseit alkalmazzuk. Egy oldallap területe $\frac{1}{4}(2873 - 32^2 - 9^2) = 442 = \frac{32+9}{2} d$, ebből $d = \frac{884}{41}$. Pitagorasz tételével: $m = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{884^2}{41^2} - \frac{23^2}{4}} = 18{,}24$. A gúla térfogata $\frac{18{,}24}{3}(32^2 + 9^2 + 32 \cdot 9) = 8469{,}4\ \text{cm}^3$.

2307. A **2305.** ábra jelöléseit használjuk. A lapmagasság: $d = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104}$. A felszín: $A = 12^2 + 8^2 + 4\frac{12+8}{2}\sqrt{104} = 615{,}92\ \text{cm}^2$. A térfogat: $V = \frac{10}{3}(12^2 + 8^2 + 8 \cdot 12) = 1013{,}33\ \text{cm}^3$.

2308. A **2308.** ábráról: a trapéz-keresztmetszet hosszabik alapja $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$,

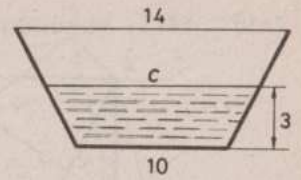


2308

magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*), ezért területe: $t = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, az árok térfogata $100t = 75\sqrt{3} = 129{,}90\ \text{m}^3$.

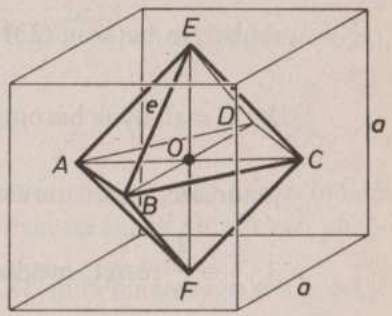
2309. A víz 1 perc alatt $60 \cdot 1{,}2 = 72$ m-t folyik, az árok keresztmetszetének területe $0{,}5\ \text{m}^2$; a vízoszlop térfogata $0{,}5 \cdot 72 = 36\ \text{m}^3$.

2310. A medence térfogata: $V = \frac{6}{3}(14^2 + 10^2 + 14 \cdot 10) = 872\ \text{m}^3$. **2310.** ábránk szerint fele magasságig megtöltve a vízszint $c = \frac{10+14}{2} = 12$ oldalú négyzet, mivel a c hosszúságú metszet a trapéz középvonala. A víz térfogata: $V_v = \frac{3}{3}(12^2 + 10^2 + 10 \cdot 12) = 364\ \text{m}^3$.



2310

2311. A szabályos oktaéder két egybevágó szabályos négyoldalú gúlából tevődik össze (**2311.** ábra), ezek közös alapja az $ABCD$ négyzet; a négyzet átlóinak hossza a, ezért területe $\frac{a^2}{2}$. Egy gúla magassága $\frac{a}{2}$, ezért egynek a térfogata $\frac{a^3}{4 \cdot 3}$, a teljes oktaéder térfogata $\frac{a^3}{6}$ (vagy az oktaéder élével kifejezve $\frac{e^3\sqrt{2}}{3}$). Az oktaéder e éle olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói $\frac{a}{2}$, ezért $e = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (*).

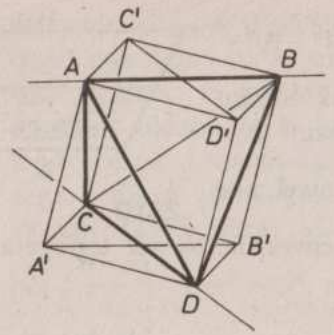


2311

A lapok e oldalú szabályos háromszögek, ezért felszíne: $8\frac{e^2\sqrt{3}}{4} = 2e^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

2312. A **2311.** és **2234.** feladatok eredményét felhasználva a térfogatarány $a^3 : a^3\frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{12}$ vagy $6\sqrt{2}(= 8{,}49) : 4 : 1$.

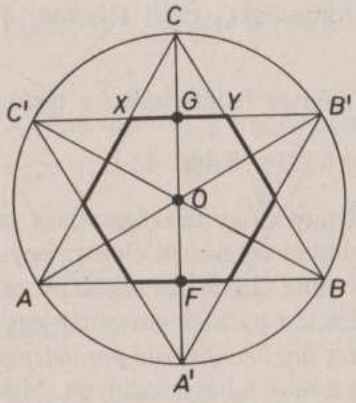
2313. Toljuk el a tetraéder minden élét úgy, hogy felezőpontja a szemközti él felezőpontjába kerüljön. Így minden szemközti élpárra egy-egy egybevágó paralelogramma-párt illesztünk (**2313.** ábránkon pl. az $AD'BC'$ és $A'DB'C$ paralelogrammákat. Ezek a paralelogrammák egy paralelepipedont zárnak közre, a tetraéder ún. *bennfoglaló paralelepipedonját*, ennek térfogata a tetraéder térfogatának a háromszorosa. Miközben a CD élt egyenesén elmozdítjuk, a bennfoglaló paralelepipedonnak az $A'DB'C$ lapja az eredetivel egybevágó marad, s nem változik a paralele-



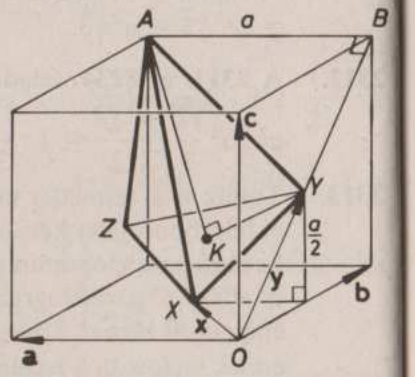
2313

pipedon magassága és így térfogata sem, ezért nem változik meg a tetraédernek sem a térfogata.

2314. Elforgatás közben a magasság változatlan, ezért elegendő az alaplapot vizsgálni. Az ABC háromszög és az elforgatott $A'B'C'$ közös része szabályos hatszög (**2314.** ábra). Mivel $OF = OG = GC = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (*) az XYC szabályos háromszög magassága az eredetinek $\left(= \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ a harmadrésze, ezért területe az eredetinek $\frac{1}{9}$-e. Az ABC-ből levágva $3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$-részét, megkapjuk a hatszöget. A hatszög területe az ABC területének a $\frac{2}{3}$-a, ezért a közös rész térfogata az eredeti térfogatának (l. **2234.** feladatot) a $\frac{2}{3}$-a, ezért $V = \frac{2}{3}\,\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.



2314



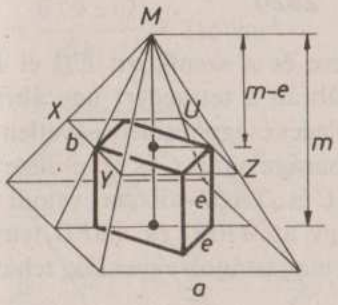
2315

2315. A tetraéder alaplapja az XYZ szabályos háromszög (**2315.** ábra), amelynek oldala $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ (*), ezért területe:

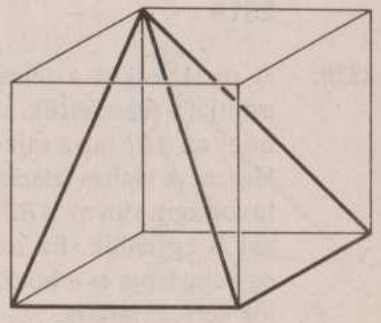
$$t = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Az oldalél (pl. AY) négyzete az ABY derékszögű háromszögből $AY^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$. Az XYZ háromszög K középpontjára $KY^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^2}{6}$, és így az AKY derékszögű háromszögből a tetraéder AK magassága: $AK = \sqrt{AY^2 - KY^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. A tetraéder térfogata: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^3}{12}$.

2316. A beírt kocka éle legyen e, fedőlapjának a síkja a gúlából a b oldalú $XYZU$ négyzetet metszi ki, a kockalap csúcsai ennek oldalfelező pontjai, ezért $e = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $b = e\sqrt{2}$. Az $MXYZU$ gúla magassága $m - e$, ezt a gúlát M középpontú hasonlóság viszi át az eredeti gúlába, ezért $\frac{m-e}{m} = \frac{b}{a} = \frac{e\sqrt{2}}{a}$, ebből $e = \frac{am}{a + m\sqrt{2}}$ (**2316.** ábra).



2316



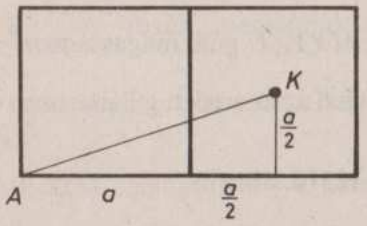
2317

2317. A **2317.** ábrán vastagon kihúztuk a három gúla egyikét. Egy gúlának egy lapja négyzet, két lapja egyenlő szárú derékszögű háromszög és két

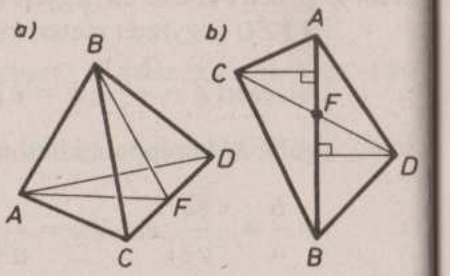
lapja olyan derékszögű háromszög, amelyet egy kockaél, egy lapátló és egy testátló határolnak.

2318. Legyen a negyedik távolság t. P-t összekötve a tetraéder csúcsaival, négy olyan kis tetraédert kapunk, amelynek egy-egy lapja a szabályos tetraéder lapjai, a hozzájuk tartozó magasságok pedig t_1, t_2, t_3, t. A szabályos tetraéder lapterületei T-vel egyenlők; a négy kis tetraéder térfogatát összeadva a szabályos tetraéder térfogatát kapjuk: $\frac{1}{3}(Tt_1+Tt_2+Tt_3+Tt)=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, ebből $t=\frac{a^3\sqrt{2}}{4T}-(t_1+t_2+t_3)$. Mivel $T=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (*), $t=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-(t_1+t_2+t_3)$. (Lásd még a **2234.** feladat megoldását.)

2319. A kocka-felület két szomszédos lapját kiterítve rajzoltuk meg a legrövidebb AK utat, $AK=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$ (**2319.** ábra).



2319



2320

2320. A metszősíkot a tetraéder AB élére és a szemközti CD él F felező pontjára illesztettük. A **2230.** *b)* ábrán a tetraédert úgy ábrázoltuk, hogy az ABF lap a rajz síkjára merőleges és így vetülete egyetlen szakasz legyen. A vetítés felezéstartó tulajdonsága miatt C és D vetülete egyenlő távolságra van az ABF síktól, ezért C és D ABF-től mért valódi távolságai is egyenlők. Ez azt jelenti, hogy az $ABFC$ és $ABFD$ tetraéderek egy-egy lapja és a hozzájuk tartozó magasságok egyenlők, tehát egyenlők térfogataik is.

2321. A tetraéder bennfoglaló paralelepipedonját (l. a **2313.** feladat megoldását).

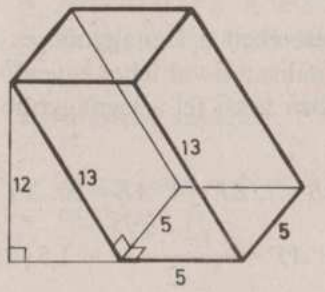
2322. A téglatest egy csúcsból induló éleinek hossza legyen x, y, z; az ezek által közrezárt derékszögű háromszögek átfogói a, b, c; ezekre alkalmazzuk Pitagorasz tételét $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. E három egyenlet megfelelő oldalait összeadva, majd egyszerűsítve az $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ egyenletet kapjuk. A jobb oldali értéket S-sel jelöljük; ha egyenletünkből rendre kivonjuk az első három egyenletet, négyzetgyökvonás után kapjuk az eredményt: $z=\sqrt{S-a^2}$, $x=\sqrt{S-b^2}$, $y=\sqrt{S-c^2}$.

2323. A tetraéder szemközti élei szükségképpen egyenlők, ezért bennfoglaló paralelepipedonja (l. a **2313.** feladatot) téglatest, mivel egy-egy lapján egyenlők az átlók. A téglatest élei az előző feladat megoldása alapján $\sqrt{30}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{6}$, térfogata $\sqrt{3420}$; a tetraéder térfogata ennek harmadrésze $\sqrt{380}=19{,}49\ \text{cm}^3$.

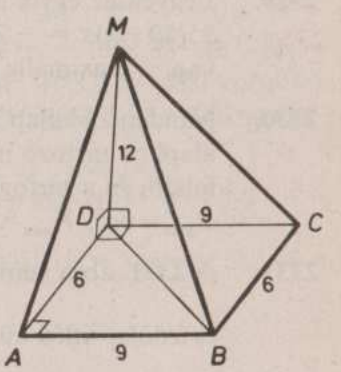
2324. A hasáb térfogata $V=5^2\cdot 12=300\ \text{cm}^3$, az oldallapok közül kettőnek a magassága a testmagassággal egyenlő (**2324.** ábra), kettő pedig téglalap, ezért felszíne: $A=2(5^2+5\cdot 13+5\cdot 12)=300\ \text{cm}^2$.

2325. Ha a rombusz oldala e, területe $e^2\sin 60°$, térfogata $e^2\sin 60°\cdot 34=2944{,}49$; $e=\sqrt{\frac{2944{,}49\cdot 2}{34\sqrt{3}}}=10{,}00$ cm. $A=2\cdot 10^2\sin 60°+4\cdot 10\cdot 34=1533{,}2\ \text{cm}^2$.

2326. (**2326.** ábra). $DB^2=6^2+9^2=117$, $MA=\sqrt{12^2+6^2}=13{,}42$ cm, $MB=\sqrt{117+12^2}=16{,}16$ cm, $MC=\sqrt{9^2+12^2}=15$ cm. $V=\frac{6\cdot 9\cdot 12}{3}=216\ \text{cm}^3$.



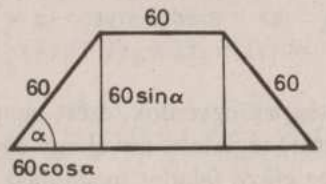
2324



2326

2327. Pitagorasz tételével $AB=5$, $BC=4\sqrt{2}$, $CA=5$, az ABC háromszög ezért egyenlő szárú, s így $\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{5}=0{,}5657$; $\beta=55{,}55°$; $\gamma=55{,}55°$; $\alpha=68{,}9°$.

2328. A hasáb térfogata akkor maximális, ha az alapterület is maximális. A trapéz hegyesszöge legyen α, ekkor a hosszabb alap: $60+60\cdot 2\cos\alpha$, a magasság $60\sin\alpha$, a terület $\frac{60+60+2\cdot 60\cos\alpha}{2}\cdot 60\sin\alpha=60^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$ (**2328.** ábra). Az $f(\alpha)=(1+\cos\alpha)\sin\alpha$ függvény maximumát kell meghatároznunk a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban. A derivált 0 helye a $-\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)\cos\alpha=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$ egyenletből $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ esetén $\alpha=\frac{\pi}{3}(=60°)$, s mivel itt a derivált pozitívból negatívba megy át, helyi maximuma van, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$; ez nagyobb mint az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékek, s így abszolút maximum is. A maximális terület $60^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}$; s így a maximális térfogat $\frac{100\cdot 60^2\cdot 3\sqrt{3}}{4}=467\,653{,}72\ \text{cm}^3$.



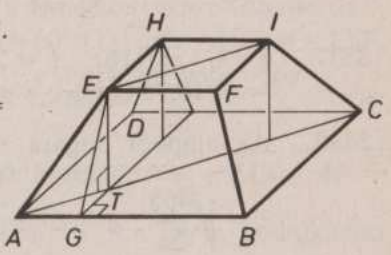
2328

2329. Legyen az egyik él hossza x, a másik két élé $50-x$ és 25. A térfogat $25(50-x)x=-25(x-25)^2+15\,625$. Ennek maximuma $x=25$ esetén van, a maximális térfogat $15\,625\ \text{cm}^3$.

2330. Minden oldallap területe négyzet esetében a legnagyobb és bármely alaphoz tartozó magasság is maximálisan a-val lehet egyenlő, ezért a felszín és a térfogat is kocka esetében veszi fel a legnagyobb értékét. $A_{max}=6a^2$, $V_{max}=a^3$.

2331. A **2331.** ábra jelöléseit használva $AB=7$, $EF=4$, $AE=10$. AT az alap- és fedőlap átlók különbségének a fele: $AT=\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}=1{,}5\sqrt{2}$; az ATE derékszögű háromszögből a testmagasság: $ET=\sqrt{10^2-(1{,}5\sqrt{2})^2}=\sqrt{95{,}5}$. A TGE derékszögű háromszögből az oldallap magassága a $EG=\sqrt{ET^2+TG^2}=\sqrt{95{,}5+1{,}5^2}=\sqrt{97{,}75}$. A térfogat: $V=\frac{\sqrt{95{,}5}}{3}(7^2+4^2+4\cdot 7)=302{,}94\ \text{cm}^3$.

A felszín: $A=7^2+4^2+4\frac{4+7}{2}\sqrt{97{,}75}=282{,}51\ \text{cm}^2$.



2331

2332. A **2316.** feladat módszerét felhasználva legyen a beírt kocka éle e, $\frac{12}{e}=\frac{20}{20-e}$; ebből $e=7{,}5$ cm.

2333. A **2331.** ábra jelöléseit használjuk. $AB=10$; a fedőlap területe $\frac{10^2}{2}=50$, tehát $EF=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Mivel az oldallapoknak is 100 a területe, $\frac{10+5\sqrt{2}}{2}EG=100$, ebből $EG=\frac{40}{2+\sqrt{2}}=20(2-\sqrt{2})$, $GT=\frac{AB-EF}{2}=\frac{10-5\sqrt{2}}{2}$. A testmagasság az ETG derékszögű háromszögből $ET=\sqrt{EG^2-GT^2}=\sqrt{20^2(2-\sqrt{2})^2-\left(\frac{10-5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=11{,}62$; a térfogat $\frac{11{,}62}{3}(10^2+50+10\sqrt{50})=854{,}89\ \text{cm}^3$.

2334. A 6-os oldal közül forgatva $V_1=8{,}5^2\pi\cdot 6=1361{,}88\ \text{cm}^3$, $A_1=2r\pi(r+m)=2\cdot 8{,}5\pi(8{,}5+6)=774{,}40\ \text{cm}^2$. A 8,5-ös oldal körül forgatva: $V_2=6^2\pi\cdot 8{,}5=961{,}33\ \text{cm}^3$, $A_2=2\cdot 6\pi(6+8{,}5)=546{,}64\ \text{cm}^2$.

2335. Az alapkör sugara r, $r^2\pi=34$, $r=\sqrt{\frac{34}{\pi}}$, a felszín és térfogat: $A=2r^2\pi+2r\pi m=68+96\sqrt{34\pi}=1060{,}17\ \text{cm}^2$, $V=r^2\pi m=34\cdot 48=1632\ \text{cm}^3$.

2336. Az alapkör sugara $r=4x$, a magasság $m=5x$; a felszín $2\cdot 4x\pi(4x+5x)=$ $=6418$, $x=\sqrt{\frac{6418}{72\pi}}$, $r=21{,}31$ cm, $m=26{,}63$ cm.

2337. $r=8$, $m=16$; $A=2\cdot 8\pi(8+16)=1206{,}37$ cm^2, $V=8^2\pi\cdot 16=$ $=3216{,}99$ cm^3.

2338. Az alapkör sugara r, a magasság $2r$, $V=2r\cdot r^2\pi=2\pi r^3=865$, $r=\sqrt[3]{\frac{865}{2\pi}}$, $A=2r^2\pi+2r\pi\cdot 2r=6r^2\pi=502{,}56$ cm^3.

2339. $10^2\pi m=1000$, $m=\frac{10}{\pi}=3{,}18$ cm.

2340. Az edényhenger magassága m; $6^2\pi+2\cdot 6\pi m=480$, $m=9{,}73$; $V=$ $=6^2\pi\cdot 9{,}73=1100{,}44$ cm^3.

2341. A felszín $2r^2\pi+2r\pi\cdot 2r=6r^2\pi=597$, $r=\sqrt{\frac{597}{6\pi}}$; a térfogat $r^2\pi\cdot 2r=$ $=2\pi r^3=1119{,}93$ cm^3.

2342. $A=2\cdot 6{,}9^2\pi+2\cdot 6{,}9\pi\cdot 6{,}9=4\cdot 6{,}9^2\pi=598{,}28$ cm^2, $V=6{,}9^2\pi\cdot 6{,}9=$ $=6{,}9^3\pi=1032{,}04$ cm^3.

2343. Legyen a téglalap két oldala a és b. $V_1=a^2\pi\cdot b$, $V_2=b^2\pi\cdot a$. Ebből $a=\frac{V_2}{b^2\pi}$, $V_1=\left(\frac{V_2}{b^2\pi}\right)^2\pi b$, $b=\sqrt[3]{\frac{V_2^2}{V_1\pi}}$, $a=\sqrt[3]{\frac{V_1^2}{V_2\pi}}$. Az átló: $\sqrt{a^2+b^2}$.

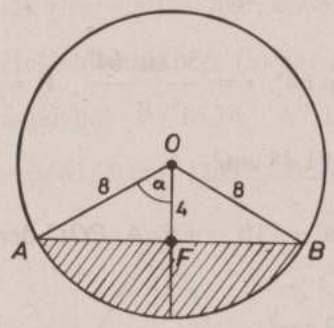
2344. A tengelymetszet olyan téglalap, amelynek egyik oldala $2r$, másik m; területe $2rm=969{,}5$; ebből $2rm\pi=969{,}5\pi$. Mivel a felszín $2r^2\pi+$ $+2rm\pi=4532{,}6$; $2r^2\pi=4532{,}6-969{,}5\pi$, $r=\sqrt{\frac{4532{,}6}{2\pi}-\frac{969{,}5}{2}}=$ $=15{,}38$; $m=\frac{969{,}5}{2r}$; $V=r^2\pi\cdot\frac{969{,}5}{2r}=\frac{969{,}5\cdot 15{,}38\pi}{2}=23\,422{,}00$ cm^3.

2345. A henger magassága: $m=42$, az alapkör kerülete $2r\pi=42$, $r=\frac{42}{2\pi}$. A térfogat $r^2\pi m=\frac{42^2\cdot\pi\cdot 42}{4\pi^2}=\frac{42^3}{4\pi}=5895{,}74$ cm^3.

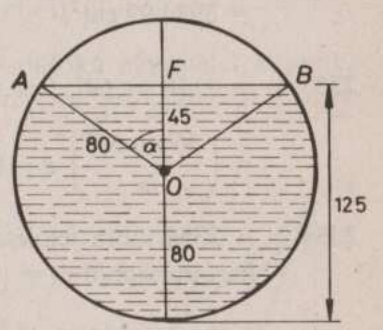
2346. A rövidebb középvonal körül megforgatva: $V_1=6{,}5^2\pi\cdot 7=929{,}13$ cm^3, a hosszabbik körül: $V_2=3{,}5^2\pi\cdot 13=500{,}30$ cm^2, $V_1>V_2$.

2347. A **2347.** ábrán az alapkört vettük fel, a lemetszett részt vonalkáztuk. Az OFA derékszögű háromszögben $\alpha=60°$ (*), ezért $AOB\sphericalangle=120°$, ezért a kisebbik AB ív a kör kerületének harmada: $\frac{2\cdot 8\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$; és az AOB körcikk területe a kör területének harmada: $\frac{64\pi}{3}$. Mivel $AF=$ $=4\sqrt{3}$ (*), az AOB háromszög területe $16\sqrt{3}$ s így a vonalkázott körszelet területe: $t=\frac{64\pi}{3}-16\sqrt{3}$, a hengerszelet térfogata: $V=$ $=12t=256\pi-192\sqrt{3}=471{,}69$ cm^3. A szelet felszíne: $A=2t+$ $+\frac{16\pi}{3}\cdot 12+8\sqrt{3}\cdot 12=\frac{320\pi}{3}+64\sqrt{3}=445{,}95$ cm^2.

2348. Ha a víz magassága m, $10^2\pi m=3000$ cm^3 ($=3$ l), ebből $m=9{,}55$ cm.



2347



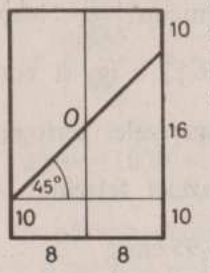
2350

2349. A csőtest térfogata egy külső és egy belső henger térfogatának a különbsége. A külső henger térfogata $0{,}5^2\pi\cdot 120$, a belsőé $0{,}25^2\pi\cdot 120$, a kettő különbsége $120\pi(0{,}5^2-0{,}25^2)=70{,}69$ cm^3.

2350. Azt kell kiszámítanunk, hogy az alapkör mekkora részét fedi be a víz. Jelölje a víz felső szintjét az AB húr, ennek a távolsága O-tól 45 (**2350.** ábra). $\cos\alpha=\frac{45}{80}$, $\alpha=55{,}77°$. Az AOB háromszög területe $\frac{80^2\sin 2\cdot 55{,}77°}{2}=3200\sin 111{,}54°=2976{,}52$. A nagyobbik AOB

körcikk területe $\frac{r^2\pi(360-2\alpha)}{360} = \frac{80^2\pi \cdot 248{,}46}{360} = 13\,876{,}62$; a fedett rész tehát összesen 16 853,14. A víz térfogata $16\,853{,}14 \cdot 250 = 4\,213\,285\ \text{cm}^3 = 4213{,}285\ \text{l}$.

2351. A henger egy tengelymetszetéről leolvasható, hogy a leghosszabb alkotó hossza 26. Tükrözzük a sík alatti részt a metszet középpontjára (**2351.** ábra), így együttesen olyan hengert kapunk, amelynek magassága 36, térfogata $8^2\pi \cdot 36$, éppen a kétszerese a vizsgált testének. Ezért a keresett térfogat $8^2\pi \cdot 18 = 3619{,}11\ \text{cm}^3$.



2351

2352. A henger magassága: $m = 26 \sin 43°$, térfogata $12{,}7^2\pi \cdot 26 \sin 43° = 8984{,}92\ \text{cm}^2$.

2353. $m = 18 \sin 64°$, $2r\pi = 4m = 72 \sin 64°$, $r = \frac{36 \sin 64°}{\pi}$. $V = r^2\pi m = \left(\frac{36 \sin 64°}{\pi}\right)^2 \pi \cdot 18 \sin 64° = 5391{,}48\ \text{cm}^3$.

2354. A **2354.** ábra jelöléseit alkalmazva $a=10$, $r=6$. A POC derékszögű háromszögből $m = \sqrt{10^2-6^2} = 8$.

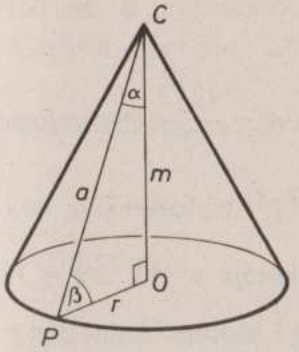
$V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot m = \frac{1}{3}6^2\pi \cdot 8 = 301{,}59\ \text{cm}^3$;

$A = r\pi(r+a) = 6\pi \cdot 16 = 301{,}59\ \text{cm}^2$.

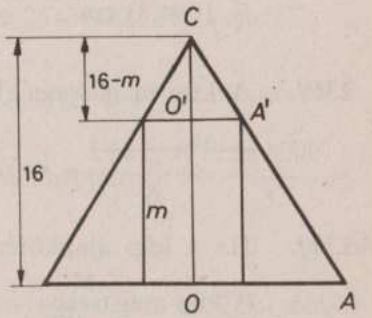
2355. A **2354.** ábra jelöléseit használva α a nyílásszög fele, ezért 45°-os; a POC ezért egyenlő szárú derékszögű háromszög, $r=m=20$, $a = 20\sqrt{2}$ (*).

$V = \frac{1}{3}r^2\pi m = \frac{1}{3}20^3\pi = 8377{,}58\ \text{cm}^3$. $A = r\pi(r+a) = 20\pi(20+20\sqrt{2}) = 3033{,}79\ \text{cm}^2$.

2356. A tengelymetszeti ábrán az AOC és $A'O'C$ hasonló háromszögek, ezért ha a henger magassága m, $\frac{16-m}{2} = \frac{16}{8}$; $m=12$. A henger térfogata $V = r^2\pi m = 4\pi \cdot 12 = 150{,}80\ \text{cm}^3$, felszíne $2r\pi(r+m) = 4\pi \cdot 14 = 175{,}93\ \text{cm}^2$ (**2356.** ábra).

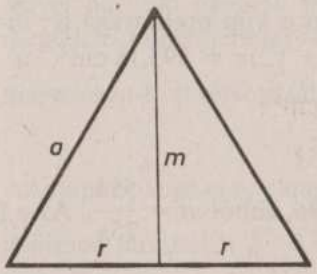


2354

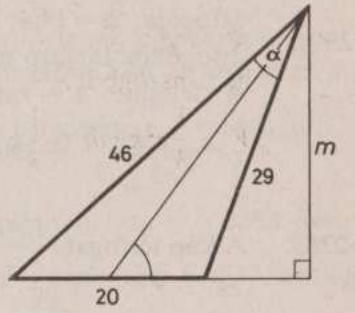


2356

2357. A tengelymetszet területe $rm=209$ (1), a felszín $r\pi(r+a) = 1978{,}11$; $r(r+a) = 629{,}65$ (2). Mivel $m^2 = a^2-r^2$, (1) négyzetébe ezt helyettesítjük $r^2(a^2-r^2) = 209^2$, ebből $a^2 = \frac{209^2}{r^2} + r^2$ (3). (2)-ből $a = \frac{629{,}65}{r} - r$. Helyettesítsük ezt (3)-ba: r-re tiszta másodfokú egyenletet kapunk, amelyből $r=16{,}74$. A térfogat $\frac{r^2\pi m}{3} = \frac{rm \cdot r\pi}{3} = \frac{209 \cdot 16{,}74\pi}{3} = 3663{,}79\ \text{cm}^3$ (**2357.** ábra).



2357



2358

2358. A legkisebb és legnagyobb alkotó és a végpontjaikat összekötő körátmérő olyan háromszöget zár közre, amelynek a magassága a kúp magasságával egyenlő (**2358.** ábra). A koszinusztételből $\cos\alpha = \frac{46^2+29^2-20^2}{2 \cdot 46 \cdot 29}$, $\alpha = 16{,}59°$.

A háromszög kétszeres területe $46 \cdot 29 \cdot \sin 16{,}59° = 20m$, ebből $m = \frac{46 \cdot 29 \cdot \sin 16{,}59°}{20} \cdot V = \frac{r^2\pi m}{3} = \frac{100 \cdot 46 \cdot 29 \cdot \sin 16{,}59° \cdot \pi}{3 \cdot 20} = 1994{,}31\ \text{cm}^3$.

2359. A kúp magassága (l. a **2358.** ábrát) $m = \frac{12\sqrt{3}}{2}$ (*), térfogata: $V = \frac{3^2\pi \cdot 12\sqrt{3}}{6} = 97{,}95\ \text{cm}^3$.

2360. Ha a kúp alapkörének sugara r, alkotója $a=12$, $2r\pi = 12\pi$, $r=6$. A kúp magassága: $m = \sqrt{a^2-r^2} = 6\sqrt{3}$. A kúp felszíne $36\pi + \frac{12^2\pi}{2} = 108\pi = 339{,}29\ \text{cm}^2$, térfogata $\frac{r^2\pi m}{3} = \frac{36 \cdot 6\sqrt{3}\pi}{3} = 391{,}78\ \text{cm}^3$.

2361. Az alapkör sugara r, az alkotó a; az alapkör kerülete és a kiterített palást ívhossza egyenlő: $2r\pi = \frac{20\pi}{4}$, ebből $a=4r$. A magasság: $m = \sqrt{a^2-r^2} = r\sqrt{15}$, $\frac{m}{r} = \sqrt{15}$.

2362. A kúp tengelymetszete egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek átfogója: $2r=14{,}4$; befogói (azaz a kúp alkotója): $a = 7{,}2\sqrt{2}$ (*), az átfogóhoz tartozó magasság egyben a kúp magassága is: $m=r=7{,}2$. A felszín: $A = r\pi(r+a) = 7{,}2^2(1+\sqrt{2})\pi = 393{,}18\ \text{cm}^2$, a térfogat $\frac{1}{3}r^2\pi m = \frac{r^3\pi}{3} = 390{,}86\ \text{cm}^3$.

2363. A kúp térfogata $\frac{r^2\pi m}{3} = \frac{25\pi m}{3} = 186$, ebből $m = \frac{558}{25\pi}$. Az α félnyílásszögre: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{m} = \frac{125\pi}{558}$, ebből $\alpha = 35{,}14°$; a nyílásszög $2\alpha = 70{,}28°$.

2364. A sátorkúpnál $2r=2{,}3$; $r=1{,}15$; ha az alkotó a, a felszín: $r\pi(r+a) = 9$, ebből $a = \frac{9}{r\pi} - r = \frac{9-1{,}15^2\pi}{1{,}15\pi}$, $m = \sqrt{a^2-r^2} = 0{,}69$; $m=69$ cm.

2365. Az egyenlő alapterületű és térfogatú kúp és henger közül a kúp magassága a háromszorosa a henger magasságának, ezért a kúp magassága 150 cm, a kúpalkotó: $a = \sqrt{r^2+m^2} = \sqrt{22{,}5^2+150^2} = \sqrt{23\,006{,}25}$. A felszín $r\pi(r+a) = 22{,}5\pi(22{,}5+\sqrt{23\,006{,}25}) = 12\,311{,}93\ \text{cm}^2$.

2366. Az alapkör sugara r, $2r\pi = \frac{2 \cdot 15\pi}{3}$, ebből $r=5$. Mivel az alkotó 15, a kúp magassága $m = \sqrt{15^2-5^2} = \sqrt{200}$, a térfogat: $V = \frac{25\pi\sqrt{200}}{3} = 370{,}24\ \text{cm}^3$.

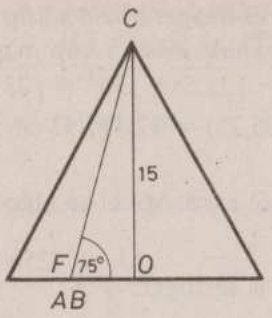
2367. A körcikk területe, ha sugara a, $\frac{a^2\pi \cdot 74{,}78}{360} = 1052{,}9$; ebből $a^2 = \frac{1052{,}9 \cdot 360}{74{,}78}$; a körcikk ívhossza az alapkör kerületével egyenlő $2r\pi = \frac{a\pi \cdot 74{,}78}{180}$, $r = \frac{a \cdot 74{,}78}{360}$; $V = \frac{r^2\pi\sqrt{a^2-r^2}}{3} = 2864{,}50\ \text{cm}^3$.

2368. A keletkezett kettőskúp közül az egyik alapkörének a sugara $4\sqrt{2}$, magassága $4\sqrt{2}$, alkotója 8, ezért a kettőskúp térfogata: $V = 2 \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2\pi \cdot 4\sqrt{2}}{3} = 379{,}13\ \text{cm}^3$. Felszíne $2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 8 = 284{,}34\ \text{cm}^2$.

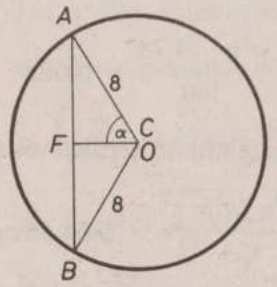
2369. Mivel hasonló idomok térfogatai úgy aránylanak egymáshoz, mint megfelelő hosszméreteik köbgyöke; a lemetszett kúp térfogata az m magasságú kúp térfogatának a fele, ezért magassága $\frac{m}{\sqrt[3]{2}}$-vel egyenlő.

2370. Az alapkör sugara r, a magassága m, az alkotó hossza a. A **2353.** ábra jelöléseit használva $\beta = 67°$, $m = r\operatorname{tg}\beta$, $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot r\operatorname{tg}\beta = 4{,}37$; ebből $r = \sqrt[3]{\frac{13{,}11}{\pi \operatorname{tg} 67°}}$; $a = \frac{r}{\cos 67°}$, a felszín: $A = r\pi(r+a) = 16{,}37\ \text{m}^2$.

2371. A kúpot elölnézetben és felülnézetben ábrázoltuk (**2371.** ábra). A metsző sík az alapkörből olyan AB húrt metsz ki, amelynek az alapkör O

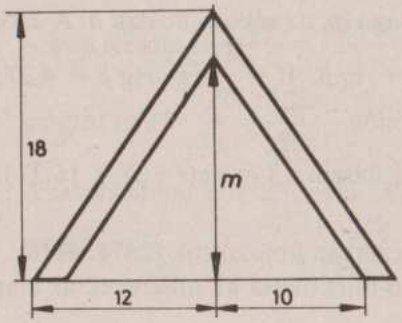


középpontjától mért távolsága $OF = 15 \operatorname{ctg} 75°$; $AOB\sphericalangle = 2\alpha$, $\cos\alpha = \frac{OF}{8} = \frac{15 \operatorname{ctg} 75°}{8}$, $\alpha = 59{,}84°$, $2\alpha = 119{,}68°$. Az AOB körcikk területe $\frac{r^2\pi \cdot 2\alpha}{360°} = \frac{64\pi \cdot 59{,}84°}{180°} = 66{,}84$. Az AOB háromszög területe $\frac{1}{2} 8^2 \sin 119{,}68° = 27{,}80$; az AB húr által lemetszett kisebbik körszelet területe ezért $66{,}84 - 27{,}80 = 39{,}04$. A nagyobbik körszelet területe $8^2\pi - 39{,}04 = 162{,}02$; így a körszelet alapú kúpok térfogatai: $V_1 = \frac{39{,}04 \cdot 15}{3} = 195{,}2\ \text{cm}^3$, $V_2 = 162{,}02 \cdot 5 = 810{,}10\ \text{cm}^2$.

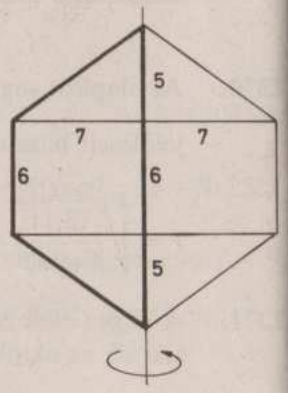


2371

2372. A két kúp közös tengelye mentén két hasonló, egyenlő szárú háromszög van (**2372.** ábra), alapjaik aránya magasságaik arányával egyenlő $\frac{12}{10} = \frac{18}{m}$, $m = 15$. A kúpok térfogatainak a különbsége $\frac{12^2\pi \cdot 18}{3} - \frac{10^2\pi \cdot 15}{3} = 364\pi = 1143{,}54\ \text{cm}^3$.



2372



2373

2373. A forgástest két forgáskúpból és egy hengerből áll; a térfogat: $V = 2 \cdot \frac{7^2\pi \cdot 5}{3} + 7^2\pi \cdot 6 = 49\pi \cdot \frac{28}{3} = 1436{,}76\ \text{cm}^3$ (**2373.** ábra).

2374. A 48-as oldalhoz tartozó m magasság x és $48 - x$ hosszúságú szakaszokra vágja a leghosszabb oldalt (**2374.** ábra). A két derékszögű háromszögből: $m^2 = 28^2 - x^2$, $(48 - x)^2 + m^2 = 36^2$. m^2-et a második egyenletbe helyettesítve rendezés után kapjuk, hogy

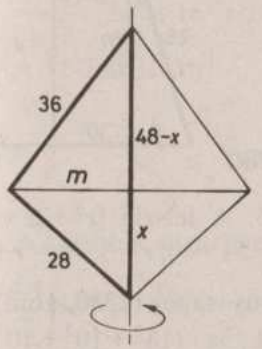
$$x = \frac{56}{3},\quad m = \sqrt{28^2 - \frac{56^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{3920}}{3}.$$

A keletkezett kettős kúp térfogata:

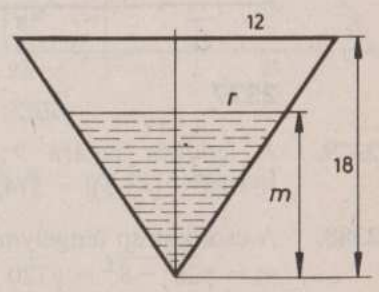
$$\frac{m^2\pi(48-x)}{3} + \frac{m^2\pi x}{3} = \frac{m^2\pi \cdot 48}{3} = \frac{3920 \cdot \pi \cdot 16}{9} = 21893{,}41\ \text{cm}^3,$$

felszíne:

$$m\pi \cdot 36 + m\pi \cdot 28 = \frac{64 \cdot \pi\sqrt{3920}}{3} = 4196{,}16\ \text{cm}^2.$$



2374



2375

2375. A víz olyan forgáskúpot tölt ki, amelynek alapköre r sugarú, magassága m, $\frac{r}{m} = \frac{12}{18}$, $r = \frac{2m}{3}$. Mivel $1\ \text{l} = 1000\ \text{cm}^3$, $\frac{r^2\pi m}{3} = \frac{4m^3\pi}{27} = 1000$, ebből $m = \sqrt[3]{\frac{27\,000}{4\pi}} = 12{,}90\ \text{cm}$ (**2375.** ábra).

2376. Az előző feladat módszerét követve $\frac{r}{m}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$, $r=\frac{m}{3}$, $\frac{r^2\pi m}{3}=$

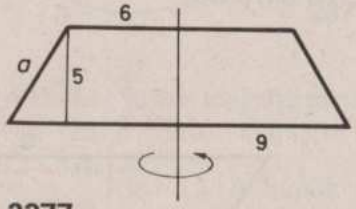
$=\frac{m^3\pi}{27}=\frac{15^2\pi\cdot 45}{3}-7457{,}5$, $m=\sqrt[3]{\frac{27}{\pi}(3375\pi-7457{,}5)}=30{,}01$ cm.

2377. A csonkakúp alapkörének a sugara: $R=9$, fedőköréé: $r=6$, magassága: $m=5$, alkotója: $a=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$. $V=\frac{5\pi}{3}(6^2+6\cdot 9+9^2)=$

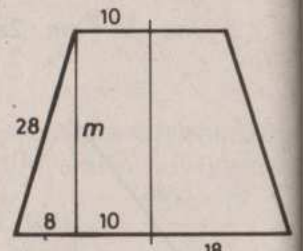
$=895{,}35$ cm^3. $A=(R^2+r^2)\pi+a\pi(R+r)=(6^2+9^2)\pi+\sqrt{34}\pi(6+9)=$

$=642{,}34$ cm^2 (**2377.** ábra).

2378. A csonkakúp térfogata $\frac{10\pi}{3}(12^2+8^2+12\cdot 8)=\frac{3040\pi}{3}$, a henger térfogata $8^2\pi\cdot 10=640\pi$. A kettő különbsége $\frac{1120\pi}{3}=1172{,}86$ cm^3.



2377



2380

2379. A fedőkör sugara: r; az alapköré $r+5$. A felszín $[r^2+(r+5)^2]\pi+$

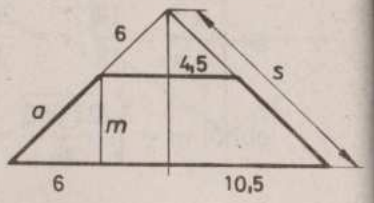
$+10\pi[r+(r+5)]=574{,}62$; ebből $r^2+15r-54=0$, $r=3$, $R=r+5=8$.

2380. A csonkakúp tengelymetszete szimmetrikus trapéz (**2380.** ábra), ebből $m=\sqrt{28^2-8^2}=\sqrt{720}=12\sqrt{5}$, $V=4\sqrt{5}\pi\cdot(18^2+10^2+10\cdot 18)=$

$=16\,971{,}95$ cm^3.

2381. A tengelymetszet ábrájáról leolvasható, hogy ha a teljes kúp alkotója s, $\frac{s}{10{,}5}=$

$=\frac{6}{4{,}5}$, ebből $s=14$, a csonkakúp alkotója: $a=14-6=8$. Pitagorasz tételét alkalmazva: a csonkakúp magassága: $m=\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}$. A csonkakúp felszíne: $A=\pi(10{,}5^2+4{,}5^2)+8\pi(10{,}5+4{,}5)=$



2381

$=786{,}97$ cm^2, a térfogat: $V=\frac{\pi\sqrt{28}}{3}(10{,}5^2+4{,}5^2+10{,}5\cdot 4{,}5)=$

$=984{,}96$ cm^3 (**2381.** ábra).

2382. A csonkakúp és henger térfogatának a különbsége $\frac{m\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)-$

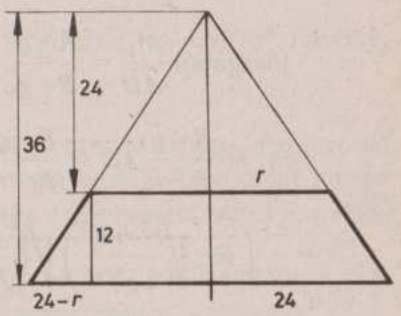
$-\frac{(R+r)^2m\pi}{4}=\frac{m\pi}{12}(R^2+r^2-2Rr)=\frac{m\pi(R-r)^2}{12}$ mindig pozitív, tehát a csonkakúp térfogata a nagyobb.

2383. A kúp tengelymetszetének az ábrájáról leolvasható, hogy a kúp sugarának és magasságának az aránya megegyezik a csonkakúp kiegészítő kúpján a sugár és a magasság arányával, tehát $\frac{r}{24}=\frac{24}{36}$, ebből $r=16$ (**2383.** ábra). A csonkakúp alkotója: $a=\sqrt{12^2+(24-r)^2}=4\sqrt{13}$. A felszín: $A=\pi(16^2+24^2)+4\sqrt{13}(16+24)\pi=$

$=4426{,}15$ cm^2, a térfogat: $V=$

$=\frac{12\pi}{3}(24^2+16^2+24\cdot 16)=$

$=15\,280{,}71$ cm^3.



2383

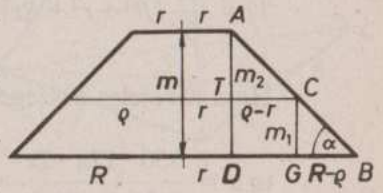
2384. A kisebbik sugár legyen r, a nagyobbik $R=r+5$; a térfogat:

$\frac{6\pi}{3}[(r+5)^2+r^2+r(r+5)]=544{,}5$;

ebből $r^2+5r-20{,}55=0$, $r=2{,}68$ cm, $R=7{,}68$ cm.

2385. A tengelymetszeti ábrán ϱ-val jelöltük a metszetkör sugarát, a két csonkakúp magassága m_1, ill. m_2 (**2385.** ábra). Az ATC és CGB derékszögű háromszögek hasonlóságából $\frac{m_1}{m_2}=\frac{R-\varrho}{\varrho-r}$;

a két csonkakúp térfogatának egyenlősége $\frac{m_2\pi}{3}(r^2+\varrho^2+r\varrho)=\frac{m_1\pi}{3}(\varrho^2+$



2385

$+R^2+R\varrho$), e két egyenletből $\frac{m_1}{m_2}=\frac{r^2+\varrho^2+r\varrho}{\varrho^2+R^2+R\varrho}=\frac{R-\varrho}{\varrho-r}$; ebből $\varrho=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}$.

2386. A **2385.** ábra jelölései szerint $R=16{,}5$; $r=14{,}7$; $AB=19{,}3$. A két palástfelszín egyenlősége $AC\cdot\pi(r+\varrho)=CB\cdot\pi(\varrho+R)$, ebből $\frac{AC}{CB}=\frac{\varrho+R}{r+\varrho}$. Az ATC és CGB háromszögek hasonlóságából $\frac{AC}{CB}=\frac{\varrho-r}{R-\varrho}$; ezt az előbbi egyenletbe helyettesítjük, a kapott egyenletből ϱ-t kifejezve kapjuk: $\varrho=\sqrt{\frac{r^2+R^2}{2}}=15{,}63$ cm. Az ADB és CGB háromszögek hasonlóságából $\frac{m_1}{AD}=\frac{R-\varrho}{R-r}$, ebből a metszősík távolsága az alaptól:

$$m_1=\frac{R-\varrho}{R-r}AD=\frac{R-\varrho}{R-r}\sqrt{AB^2-(R-r)^2}=(R-\varrho)\sqrt{\left(\frac{AB}{R-r}\right)^2-1}=$$

$$=\left(R-\sqrt{\frac{r^2+R^2}{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{AB}{R-r}\right)^2-1}=$$

$$=\left(16{,}5-\sqrt{\frac{16{,}5^2+14{,}7^2}{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{19{,}3}{1{,}8}\right)^2-1}=9{,}33\text{ cm}.$$

2387. A **2385.** ábra jelöléseit használva $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{R-r}$, ezért R, r, m értékét kell kiszámítanunk. Mivel $2R\pi=51{,}7$; $2r\pi=29{,}8$; $R=\frac{51{,}7}{2\pi}$, $r=\frac{29{,}8}{2\pi}$; a térfogatképlet felhasználásával:

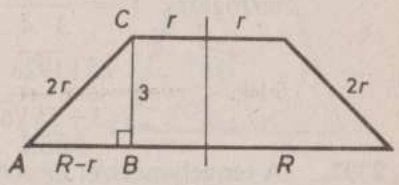
$$V=\frac{m\pi}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{m\cdot\pi}{3\cdot4\pi^2}(51{,}7^2+29{,}8^2+51{,}7\cdot29{,}8)=350.$$

Ha a zárójeles összeget S-sel jelöljük, $m=\frac{350\cdot12\pi}{S}$, és

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{350\cdot12\pi\cdot2\pi}{S(51{,}7-29{,}8)}=\frac{8400\pi^2}{21{,}9S};\quad\alpha=36{,}58°.$$

2388. A fedőlap sugara r. $V=\frac{32{,}5\pi}{3}(5{,}7^2+r^2+5{,}7r)=2021{,}6$; ebből $r^2+5{,}7r-26{,}91=0$, és $r=3{,}07$ dm.

2389. A tengelymetszet ABC derékszögű háromszögéből (**2389.** ábra) $AB=\sqrt{4r^2-9}$, s így a tengelymetszet kerülete $2\sqrt{4r^2-9}+8r=15$. Átrendezve mindkét oldal négyzetre emelése után a $16r^2-80r+87=0$ egyenletet kapjuk, amiből r lehetséges értékei $r_1=1{,}6$; $r_2=3{,}4$. Mivel $R=\frac{15-6r}{2}$, $R_1=2{,}7$; $R_2=-2{,}7$, ami lehetetlen, s így csak $r=1{,}6$ dm, $R=2{,}7$ dm lehetséges; ebből $a=2r=3{,}2$.

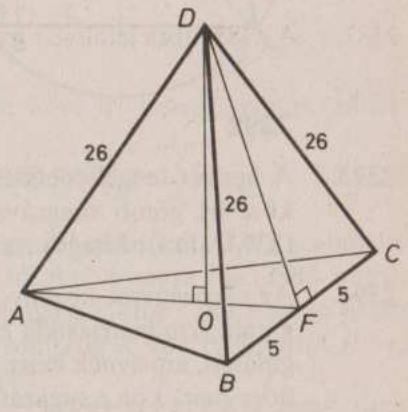


2389

A csonkakúp térfogata: $V=\frac{3\pi}{3}(2{,}7^2+1{,}6\cdot2{,}7)=44{,}52\text{ m}^3$, felszíne: $A=\pi(1{,}6^2+2{,}7^2)+3{,}2\pi(1{,}6+2{,}7)=74{,}17\text{ m}^2$.

2390. A szabályos tetraéder középpontja a súlypontjával azonos, a súlyvonal és a magasság egyenlő. Mivel a súlypont negyedeli a súlyvonalat, a beírt gömb sugara a súlyvonal, ill. a magasság negyedrésze. Mivel a magasság a **2234.** feladat megoldása szerint $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, a beírt gömb sugara $\frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

2391. Az oldallapok 26, 26, 10 oldalhosszúságú egyenlő szárú háromszögek, ezek lapmagassága (**2391.** ábra) $DF=\sqrt{26^2-5^2}=\sqrt{651}$. Az ABC szabályos háromszögből $OF=\frac{10\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (*), és így a testmagasság $DO=\sqrt{651-\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{1928}{3}}$.



2391

Ebből a tetraéder felszíne:

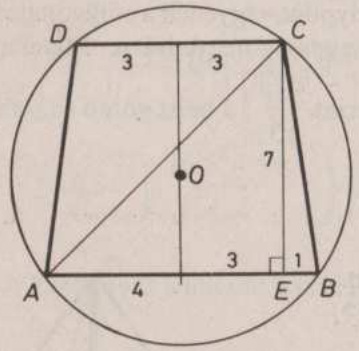
$$A = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{10 \cdot \sqrt{651}}{2} = 25\sqrt{3} + 15\sqrt{651},$$

térfogata: $V = \frac{10^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4} \cdot \sqrt{\frac{1928}{3}} = \frac{25\sqrt{1928}}{3}$. A beírt gömb sugara:

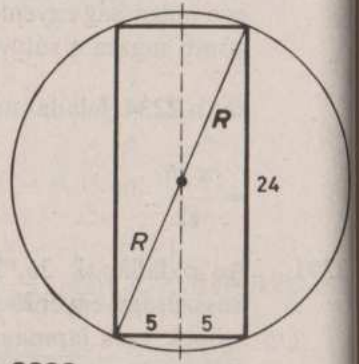
$$r = \frac{3V}{A} = \frac{25\sqrt{1928}}{25\sqrt{3} + 15\sqrt{651}} = 2{,}58 \text{ cm}.$$

2392. A tengelymetszet az $ABCD$ szimmetrikus trapéz (**2392.** ábra), a trapéz köré írt kör R sugara egyenlő a csonkakúp köré írt gömb sugarával. A BEC, ill. AEC derékszögű háromszögekből $BC = \sqrt{7^2 + 12^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$, $AB = 8$. A trapéz köré írt kör azonos az ABC háromszög köré írt körrel; ABC területe 28, $R = \frac{abc}{4t} =$

$$= \frac{5\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{2} \cdot 8}{4 \cdot 28} = 5 \text{ cm}.$$



2392



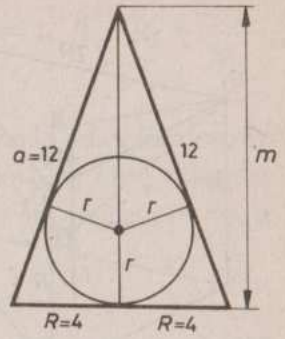
2393

2393. A henger tengelymetszete téglalap, az e köré írt kör sugara a henger köré írt gömb sugarával egyenlő. A téglalap átlója a kör átmérője (**2393.** ábra); Pitagorasz tételével $4R^2 = 10^2 + 24^2$, $2R = 26$, $R = 13$ cm.

2394. Az alapnégyzet középvonalára és a szemközti csúcsra illesztett sík és a gúla szimmetriasíkja és olyan egyenlő szárú háromszöget metsz ki a gúlából, amelynek beírt köre a beírt gömbnek egy főköre, ezért elegendő a beírt kör r sugarát kiszámítanunk (**2394.** ábra). Mivel a háromszögbe írt kör sugara a terület és az s félkerület hányadosa, először a

háromszög t területét számítjuk ki. A magasság: $m = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$, $t = \frac{8m}{2} = 32\sqrt{2}$,

ebből $r = \frac{t}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{16} = 2\sqrt{2} = 2{,}83$ cm.



2394

2395. A szabályos tetraéder köré írt gömb R sugara az m magasság (= súlyvonal) $\frac{3}{4}$-e; mivel a **2334.** feladat megoldása szerint $m = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

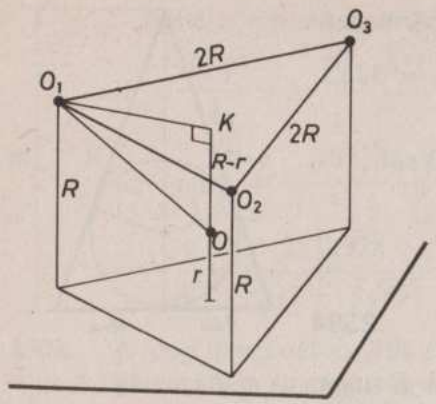
$$R = \frac{24\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} = 4{,}90 \text{ cm}.$$

2396. A gúla egy átlósmetszete olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek körülírt köre a gúla köré írt gömbjének a főköre, ezért elegendő a háromszög köré írt kör sugarát kiszámítanunk. Az alap átlója $12\sqrt{2}$ (*), ennek fele és a testmagasság olyan derékszögű háromszöget zár közre, amelynek átfogója a b oldalél: $b = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 10^2} = \sqrt{172}$. Az átlósmetszet oldalai $12\sqrt{2}$, $\sqrt{172}$, $\sqrt{172}$, területe $\frac{12\sqrt{2} \cdot 10}{2} = 60\sqrt{2}$. A körülírt kör sugara az oldalak szorzatának és a terület négyszeresének a hányadosa:

$$R = \frac{12\sqrt{2} \cdot \sqrt{172} \cdot \sqrt{172}}{4 \cdot 60\sqrt{2}} = 8{,}6 \text{ cm}.$$

2397. A kimetszett kör a kocka oldallapja köré írt körrel azonos, ennek sugara a lapátló fele $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (*), területe $r^2\pi = \frac{a^2\pi}{2}$.

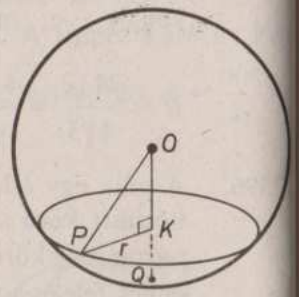
2398. A három nagy gömb középpontja egy $2R$ oldalú $O_1O_2O_3$ szabályos háromszöget alkot, a háromszög a síktól R távolságra van (**2398.** ábra). A kis gömb O középpontjának távolsága a síktól r (ha r a kis gömb sugara), O_1-től $R + r$, az $O_1O_2O_3$ háromszög K középpontjától $R - r$. Az $O_1O_2O_3$ háromszögből $OK = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ (*), ezért az O_1KO derékszögű



2398

háromszögből $\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$; ebből $r = \frac{R}{3}$.

2399. Ha a síkmetszet sugara r, $r^2\pi = 25{,}8$; $r^2 = \frac{25{,}8}{\pi}$, az OKP derékszögű háromszögből (**2399.** ábra) $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - \frac{25{,}8}{\pi}} = 4{,}10$ cm.



2399

2400. A **2399.** ábra jelöléseit alkalmazva $d = OK = \frac{R}{2}$, $r^2 = R^2 - d^2 = \frac{3R^2}{4}$, ezért a körterület $r^2\pi = \frac{3R^2\pi}{4} = \frac{3 \cdot 27 \cdot 9^2\pi}{4} = 1834{,}09$ cm^2.

2401. A **2399.** ábra jelöléseit használva $R = 10$; $r = 5$; $d = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66$ cm.

2402. A **2392.** feladat megoldásának a módszerét alkalmazva $R = 29{,}55$ cm.

2403. Minden gömbnek a nyolcadrésze esik a kocka belsejébe; a 8 gömb tehát a kockából annyit tartalmaz, mint amekkora az $\frac{a}{2}$ sugarú gömb térfogata. A kocka gömbökön kívüli részének a térfogata $a^3 - \left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{4\pi}{3} = \frac{a^3(6-\pi)}{6} = 0{,}48a^3$.

2404. $4R^2\pi = 1978{,}92$; $R = \sqrt{\frac{1978{,}92}{4\pi}} = 12{,}55$ cm.

2405. Ha a gömbök sugarai R_1 és R_2, $2R_1\pi - 2R_2\pi = 1$, $R_1 - R_2 = \frac{1}{2\pi} = 0{,}16$ m.

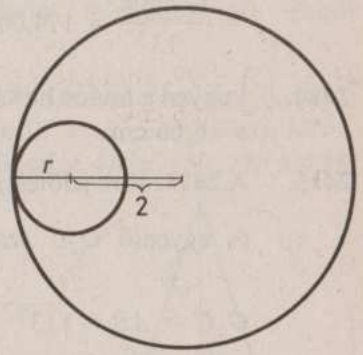
2406. A gömb sugara a tengelymetszetként kapott egyenlő szárú háromszög beírt körének a sugarával egyenlő. A kúp alkotója $\sqrt{r^2 + m^2}$, ekkora a háromszög szára, ezért fél-kerülete: $s = r + \sqrt{r^2 + m^2}$, területe $t = rm$; a beírt kör (gömb) sugara: $\frac{t}{s} = \frac{rm}{r + \sqrt{r^2 + m^2}}$.

2407. A gömb sugara a tengelymetszetként nyert egyenlő szárú háromszög köré írt körének a sugarával egyenlő $R = \frac{abc}{4t} = \frac{\sqrt{r^2 + m^2}\sqrt{r^2 + m^2} \cdot 2r}{4rm} = \frac{r^2 + m^2}{2m}$ (vö. az előző feladat megoldásával).

2408. Egy kis golyó térfogata $\frac{4 \cdot 1^3\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, felszíne: 4π. A nagy golyó térfogata $1000\,\frac{4\pi}{3}$, tehát 1000 kis golyó önthető belőle, ezek felszíne összesen 4000π, ami a nagy golyó felszínének, 400π-nek éppen a tízszerese.

2409. $\frac{5^3 \cdot 4\pi}{3} + \frac{8^3 \cdot 4\pi}{3} + \frac{12^3 \cdot 4\pi}{3}$, $V = \frac{R^3 \cdot 4\pi}{3}$, ahol R a nagy gömb sugara; ebből $R = \sqrt[3]{5^3 + 8^3 + 12^3} = 13{,}32$ cm.

2410. A kisebbik gömb sugara r, a nagyobbiké $r+2$ (**2410.** ábra), térfogataik különbsége $\frac{4\pi}{3}(r+2)^3 - \frac{4\pi}{3}r^3 = 108{,}909$; ebből $r^2 + 2r - 3 = 0$, $r = 1$ cm, $R = 3$ cm.

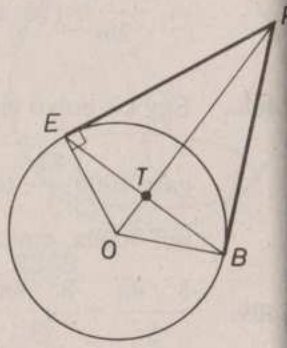


2410

2411. Legyen a kocka éle e, felszíne $6e^2 = 144$, $e = \sqrt{24}$. A kocka köré írt gömb sugara a testátló fele: $R = \frac{e\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2}$; a gömb felszíne $4R^2\pi = 4\pi\frac{72}{4} = 72\pi = 226{,}19\ \text{cm}^2$.

2412. Legyen a kocka éle e. A kocka csúcsain átmenő gömb sugara a testátló fele $\frac{e\sqrt{3}}{2}$; a kocka éleit érintő gömb sugara a lapátló fele: $\frac{e\sqrt{2}}{2}$; a lapérintő gömb az él fele: $\frac{e}{2}$. A keresett arányok $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

2413. Ábránkon a P ponton és a gömb O középpontján átfektetett síkkal a gömbből, ill. a kúpból kimetszett kört, ill. EBP háromszöget ábrázoltuk (**2413.** ábra). Mivel a kúpalkotók érintik a gömböt, az OEP háromszög derékszögű és így $EP = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Az OEP derékszögű háromszög kétszeres területét két módon felírva $OE \cdot EP = OP \cdot ET$; $5 \cdot 12 = 13ET$, ebből a kúp alapkörének sugara: $ET = \frac{60}{13}$. A palástfelszín $EP \cdot ET \cdot \pi = \frac{12 \cdot 60\pi}{13} = 174{,}00\ \text{cm}^2$.



2413

2414. Legyen a hosszabbítás d, ekkor $4(20+d)^2\pi - 4 \cdot 20^2\pi = 3906{,}16$; ebből $d = 6{,}66$ cm.

2415. A **2415.** ábra jelölései szerint húzzuk meg O_2-ből az AB-vel párhuzamos és egyenlő O_2C szakaszt. Az O_1O_2C háromszögből $\sin\alpha = \frac{3}{13}$ és $O_2C = AB = \sqrt{13^2 - 3^2} = 4\sqrt{10}$, s így $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{10}}{13}$. Az O_2PB derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{PB}{5} = \frac{4\sqrt{10}}{13}$; $PB = \frac{20\sqrt{10}}{13}$. Hasonlóan az O_1QA háromszögből $\cos\alpha = \frac{QA}{8} = \frac{4\sqrt{10}}{13}$, $QA = \frac{32\sqrt{10}}{13}$. A csonkakúp palástnál tehát $r = PB = \frac{20\sqrt{10}}{13}$, $R = QA = \frac{32\sqrt{10}}{13}$, $a = AB = 4\sqrt{10}$, ezért felszíne $4\sqrt{10}\pi\left(\frac{20\sqrt{10}}{13} + \frac{32\sqrt{10}}{13}\right) = 160\pi = 502{,}65\ \text{cm}^2$.

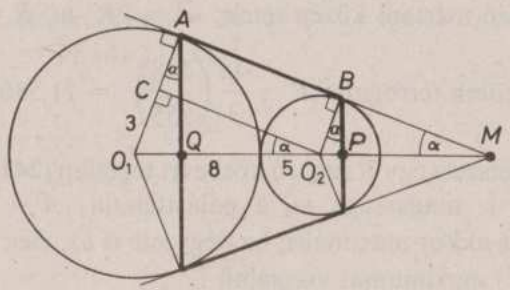
2416. Ha a kocka éle e, a csúcsokon átmenő gömb sugara a testátló fele $\frac{e\sqrt{3}}{2}$, a lapokat érintő gömb sugara az él fele $\frac{e}{2}$. A gömbök felszínének a különbsége $4\left(\frac{e\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi - 4\left(\frac{e}{2}\right)^2\pi = 2e^2\pi = 540$, $e = \sqrt{\frac{540}{2\pi}} = 9{,}27$ cm.

2417. Mivel a gúla térfogata a felszín és a sugár szorzatának a harmadával egyenlő, $V = \frac{8 \cdot 684}{3} = 1824\ \text{cm}^3$ lenne, de a gömb felszíne $\approx 804\ \text{cm}^2$. $F_{\text{gömb}} > F_{\text{gúla}}$, tehát ebbe a gúlába ilyen sugarú gömb nem fér bele.

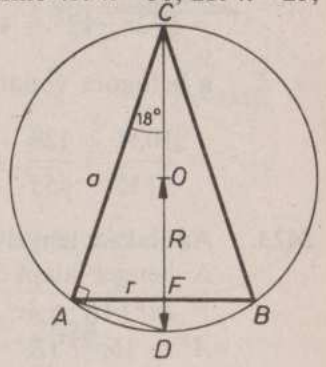
2418. A téglatest köré írt gömb sugara a testátló felével egyenlő; legyenek az egy csúcsból induló élek 4; 6 és c, $4^2 + 6^2 + c^2 = 14^2$ (vö. a **2241.** feladat megoldásával), ebből $c = 12$ cm.

2419. Mivel a téglatest köré írt gömb R sugara a testátló felével egyenlő, ezért $(2R)^2 = 2^2 + 8^2 + 16^2$ (vö. a **2241.** feladat megoldásával), ebből $R = 9$ cm.

2420. Ha a gömb sugara R, a kúp tengelymetszetének ábrájáról a kúp alkotója: $a = 2R\cos 18°$, az alapkör sugara: $r = a\sin 18° = R \cdot 2\sin 18°\cos 18° = R\sin 36°$ (**2420.** ábra). Mivel a gömb felszíne $4R^2\pi = 50$, $2R^2\pi = 25$,



2415



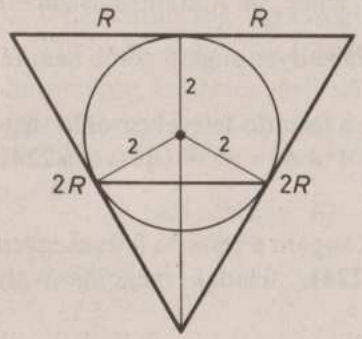
2420

a kúppalást felszíne:

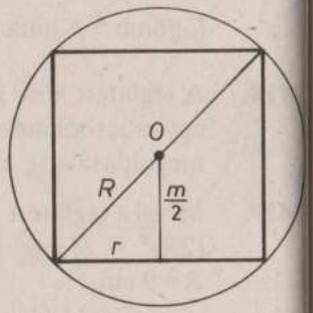
$r\pi a = \pi \cdot R \sin 36° \cdot 2R \cos 18° = 2R^2\pi \sin 36° \cos 18° =$

$= 25 \cdot \sin 36° \cdot \cos 18° = 13{,}98\ \text{cm}^2$.

2421. (A feladatot úgy értelmezzük, hogy a kúpban a golyó alatt is víz van.) (**2421.** ábra) Az alakzat tengelymetszete $2R$ oldalú szabályos háromszög $r=2$ sugarú beírt körrel. Mivel a beírt kör sugara (*) $\frac{2R\sqrt{3}}{6} = 2$, ebből $R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. A kúp (azaz a szabályos háromszög) magassága $\frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = 6$. A víz térfogata a kúp és a gömb térfogatának a különbsége $\frac{(2\sqrt{3})^2\pi \cdot 6}{3} - \frac{4 \cdot 2^3\pi}{3} = 41{,}89\ \text{cm}^3$.



2421



2423

2422. A **2420.** ábra jelöléseit alkalmazva $AF=r=12$, $a=32$. $CF = m = \sqrt{32^2-12^2} = 4\sqrt{55}$. Az ADC derékszögű háromszögre alkalmazzuk a befogóra vonatkozó mértani közép tételt: $a^2 = 2R \cdot m$, $R = \frac{a^2}{2m} = \frac{1024}{8\sqrt{55}} = \frac{128}{\sqrt{55}}$. A gömb térfogata: $V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{128}{\sqrt{55}}\right)^3 = 21\,536{,}47\ \text{cm}^3$.

2423. Az alakzat tengelymetszete egy R sugarú körbe írt téglalap (**2423.** ábra). A henger alapköre r, magassága m, a palástfelszín: $A = 2r\pi m = 2\pi r\sqrt{4R^2-4r^2}$. Ez akkor maximális, ha négyzete is az, elég tehát az $A^2 = 16\pi^2r^2(R^2-r^2)$ maximumát vizsgálni.

$$A^2 = 16\pi^2\left[-\left(r^2-\frac{R^2}{2}\right)^2 + \frac{R^4}{4}\right];$$

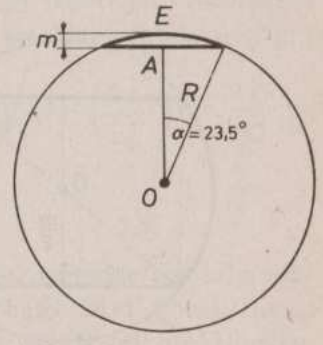
ez rögzített R esetén akkor maximális, ha $r^2 = \frac{R^2}{2}$, ekkor $A^2_{\max} = 4\pi^2R^4$, $A_{\max} = 2\pi R^2$, $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

2424. A **2423.** ábra jelöléseit használva $r^2 = R^2 - \frac{m^2}{4}$, a henger térfogata:

$V = r^2\pi m = \pi m\left(R^2 - \frac{m^2}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(-m^3+4R^2m)$, $(0<m<2R)$; $V' = \frac{\pi}{4}(-3m^2+4R^2) = 0$, $m = \frac{2R}{\sqrt{3}}$; e hely előtt a függvény pozitív, utána negatív, tehát helyi maximuma van; az intervallumban $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ előtt a függvény növekvő, utána csökkenő, tehát ezen a helyen abszolút maximuma van. A maximális térfogatú helyen alapkörének sugara: $r = \sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{3\cdot 4}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}}$; a maximális térfogat: $V_{\max} = \frac{2R^2}{3} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}}\pi = \frac{4R^3\pi}{3\sqrt{3}}$.

2425. Legyen a két párhuzamos sík távolsága m. A hengerből kimetszett palástrész felszíne $2r\pi m$, a gömbből kimetszett gömböv felszíne ugyanennyivel egyenlő.

2426. A sarköv geometriailag (jó közelítéssel) gömbsüveg. A **2426.** ábrától $OA = R\cos\alpha$, $m = R - R\cos\alpha = 6370(1-\cos 23°30')$, a felszín $2R\pi m = 2\pi \cdot 6370^2(1-\cos 23°30') =$ $= 21\,145\,715\ \text{km}^2$.



2426

2427. Legyen a henger alapkörének a sugara ϱ. A **2427.** ábráról Pitagorasz tételével $\varrho^2 = r^2 - \frac{m^2}{4}$. A henger térfogata: $V_h = \varrho^2\pi m = m\pi r^2 - \frac{m^3\pi}{4}$: Az alapkör és a fedőkör egy-egy ϱ határsugarú és $r - \frac{m}{2}$ magasságú gömbszeletet vág le a gömbből, egy ilyen térfogat:

$$V_{sz} = \frac{\pi}{6}\left(r - \frac{m}{2}\right)\left[3\varrho^2 + \left(r - \frac{m}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(r - \frac{m}{2}\right)\left[3\left(r^2 - \frac{m^2}{4}\right) + \left(r - \frac{m}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(4r^3 - 3r^2m + \frac{m^3}{4}\right).$$

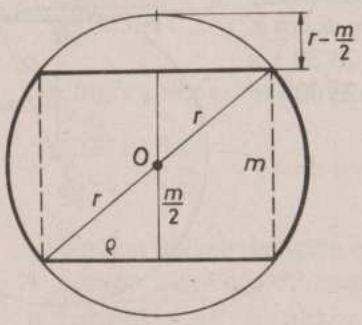
A megmaradó rész térfogata a gömb és az eltávolított részek térfogatának a különbsége:

$$V = V_{gömb} - V_h - 2V_{sz} =$$

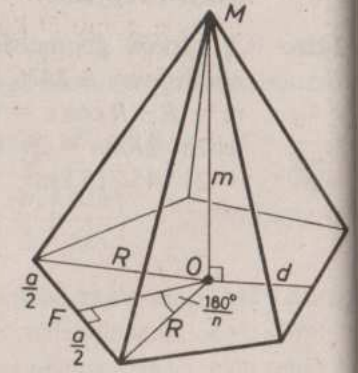
$$= \frac{\pi}{3}\left(4r^3 - 3r^2m + \frac{3m^3}{4} - 4r^3 + 3r^2m - \frac{m^3}{4}\right) = \frac{m^3\pi}{6},$$

és ez független a gömb sugarától.

2428. A feladatot a **2415.** feladat megoldásában közölt módszerrel oldhatjuk meg; a részeredmények: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $AB = 8\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $PB = \frac{8\sqrt{2}}{3}$, $QA = \frac{16\sqrt{2}}{3}$, a felszín $128\pi = 402{,}12\ \text{cm}^2$.



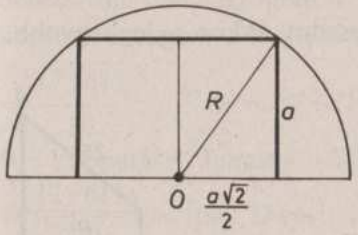
2427



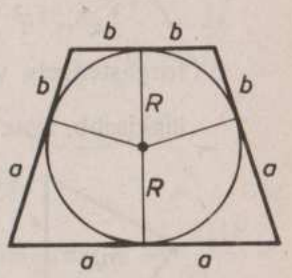
2429

2429. Az alapsokszög egy oldala a sokszög O középpontjából $\frac{360^\circ}{n}$ nagyságú szögben látszik, O távolsága a sokszög oldalaitól: $d = \frac{a}{2\,\text{tg}\frac{180^\circ}{n}}$, az oldallapok magassága $\sqrt{m^2 + d^2}$ (**2429.** ábra). Az alaplap területe: $\frac{nad}{2}$, az oldallap területe $\frac{a\sqrt{m^2 + d^2}}{2}$. A gúla felszíne: $A = \frac{na}{2}(d + \sqrt{m^2 + d^2})$, térfogata: $V = \frac{nadm}{6}$. A beírt gömb sugara:

$$r = \frac{3V}{A} = \frac{am}{a + \sqrt{4m^2\,\text{tg}^2\frac{180^\circ}{n} + a^2}}.$$



2430



2431

2430. Legyen a félgömb sugara R. Vegyük a félgömbnek olyan metszetét, amely a gömb O középpontját és a kocka egy lapátlóját tartalmazza (**2430.** ábra). Az átlósmetszet olyan téglalap, amelynek oldalai a és $a\sqrt{2}$ (*). Az ábra derékszögű háromszögéből $R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

2431. A csonkakúpnak és beírt gömbjének a tengelymetszete egy szimmetrikus trapéz, amelybe R sugarú érintőkör írható (**2431.** ábra). Ha az alapkör, ill. fedőkör sugara a, ill. b, akkor a szárak (alkotók) hossza $a + b$. A trapéz (és így a csonkakúp) magassága $2R$. A gúla térfogata

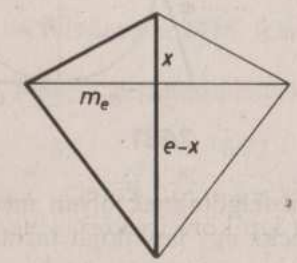
$V = \frac{2R\pi}{3}(a^2+ab+b^2)$, felszíne $A = (a^2+b^2)\pi+(a+b)(a+b)\pi =$

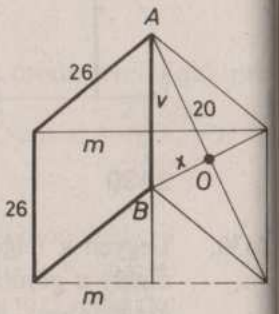
$= (a^2+ab+b^2)2\pi$, ezért $\frac{V}{A} = \frac{R}{3}$, az arány valóban csak R-től függ.

2432. Az 1 cm magasságú vízoszlop térfogata $4^2\pi \cdot 1 = 16\pi$, ugyanennyi az r sugarú golyó térfogata is $\frac{4r^3\pi}{3} = 16\pi$, ebből $r = \sqrt[3]{12} = 2{,}29$ cm.

2433. Legyen a háromszög területe t, egyik oldala e és az ehhez tartozó magasság m_e. Mivel $em_e = 2t$, $m_e = \frac{2t}{e}$. Forgassuk meg a háromszöget e körül; két, m_e alapsugarú forgáskúp keletkezik (**2433.** ábra), ezek magasságai x, ill. $e-x$; térfogataik összege: $V = \frac{m_e^2\pi x}{3} + \frac{m_e^2\pi(e-x)}{3} =$

$= \frac{m_e^2 e\pi}{3} = \frac{4t^2\pi}{3} \cdot \frac{1}{e}$. Ennek a szorzatnak az első tényezője független a forgástengely választásától, $\frac{1}{e}$ viszont akkor a legnagyobb, ha e a legkisebb, azaz $e=a$ esetén.





2434. Legyen a rombusz egyik oldalán a vele hegyesszöget bezáró oldal vetülete v, a rombusz magassága m. A **2434.** ábrán megfigyelhetjük, hogy forgatás közben keletkezik egy m alapkörsugarú és v magasságú forgáskúp, egy 26-os magasságú és m alapkörsugarú henger, amiből ki van vágva egy, az előbbivel egybevágó kúp, a keletkezett test térfogata tehát a henger térfogatával egyenlő. Ha a másik átló hossza $2x$, az ABO derékszögű háromszögből $x = \sqrt{26^2-20^2} = \sqrt{276}$. A rombusz területe az átlók szorzatának a fele: $t = 40\sqrt{276}$; ugyanennyi az oldal- és a

hozzá tartozó magasság szorzata: $26m = 40\sqrt{276}$, $m = \frac{40\sqrt{276}}{13} =$

$= \frac{20\sqrt{276}}{13}$. A henger (és így a forgástest) térfogata:

$V = m^2\pi \cdot 26 = \frac{20^2 \cdot 276 \cdot 26 \cdot \pi}{13^2} = 53\,358{,}74\ \text{cm}^3$.

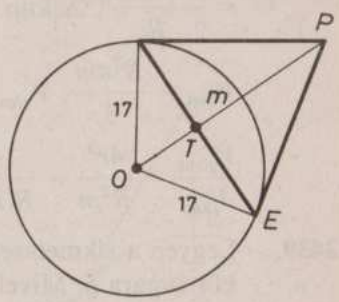
A felület két kúppalástból és egy hengerpalástból áll, ezért felszíne:

$A = m\pi \cdot 26 \cdot 2 + 2m\pi \cdot 26 = 4 \cdot m\pi \cdot 26 = 160\sqrt{276}\pi = 8350{,}73\ \text{cm}^2$.

2435. A keletkezett alakzatnak egy tengelymetszetét ábrázoltuk (**2435.** ábra). Az OEP derékszögű háromszögre alkalmazva a befogótételt kapjuk, hogy $17^2 =$

$= OT \cdot 30$, $OT = \frac{289}{30}$. Pitagorasz tételével $EP = \sqrt{30^2-17^2} = \sqrt{611}$. Az OTE derékszögű háromszögből a kúp alapkörének a sugara $ET = \sqrt{17^2-OT^2} =$

$= \frac{17\sqrt{611}}{30}$; $m = 17 - OT = \frac{221}{30}$.



2435

A kúppalást felszíne $ET \cdot EP\pi =$

$= \frac{17 \cdot 611\pi}{30} = 1087{,}72\ \text{cm}^2$, a gömbsüveg felszíne $2r\pi m = \frac{34 \cdot 211\pi}{30} =$

$= 786{,}86\ \text{cm}^2$.

2436. Egybevágó háromszögeknek egybevágók a köré írt körei is, s mivel a tetraéderlap síkja a köré írt gömbből a lap köré írt kört metszi ki, a tetraéder lapjainak a köré írt körei egyenlő gömbi körök. Az egyenlő gömbi körök viszont egyenlő távolságra vannak a gömb középpontjától, ezért a lapok gömbközépponttól mért távolságai is mind egyenlők.

2437. Az érintőgömb középpontja minden éltől egyenlő távolságra van, ezért sugara a lapátló fele: $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A gömbből minden kockalap olyan gömbszeletet metsz le, amelynek magassága: $m = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$, ezért térfogata: $V_{sz} = \frac{\pi}{3}m^2(3R-m) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) =$

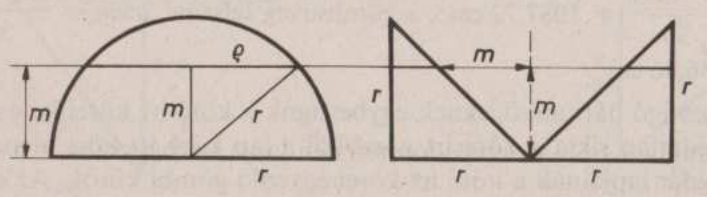
$= \frac{(4\sqrt{2}-5)\pi}{24}$. A gömb kockán belüli részének térfogata $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 6V_{sz} = \frac{(15-8\sqrt{2})\pi}{12}$. A kocka gömbön kívüli részének térfogat $1 - \frac{(15-8\sqrt{2})\pi}{12} = 0{,}0349$ t. e.

2438. A tengelymetszet (**2394.** ábra) jelöléseivel a metszetháromszögre írt kör r sugara a beírt gömb sugarával egyenlő. $r = \frac{t}{s} = \frac{Rm}{R+a}$, ebből $m = \frac{r(R+a)}{R}$. A kúp és a gömb térfogata, ill. felszíne és hányadosaik:

$V_{kúp} = \frac{R^2\pi m}{3}$; $V_{gömb} = \frac{4r^3\pi}{3}$; $A_{kúp} = R\pi(R+a)$; $A_{gömb} = 4r^2\pi$.

$\frac{V_{gömb}}{V_{kúp}} = \frac{4r^3}{R^2m} = \frac{4r^2}{R(R+a)}$; $\frac{A_{gömb}}{A_{kúp}} = \frac{4r^2}{R(R+a)}$; a két arány egyenlő.

2439. Legyen a síkmetszet távolsága az alapsíktól m, a gömbből kimetszett kör sugara ϱ. Mivel $\varrho^2 = r^2 - m^2$, a metszet területe $\varrho^2\pi = r^2\pi - m^2\pi$. A kivájt hengerből a sík körgyűrűt metsz ki, a külső kör sugara r, a belsőé m, ezért a körgyűrű területe $r^2\pi - m^2\pi$ (**2439.** ábra).



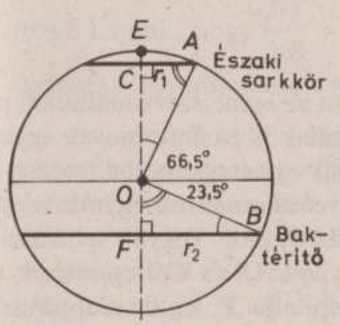
2439

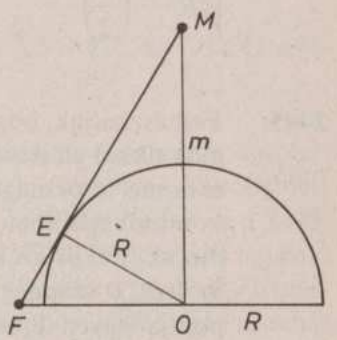
2440. A **2440.** ábrán a Föld egy főkörmetszetét (délkörét) ábrázoltuk; a sarkkör sugara r_1, a baktérítőé r_2. Ábránkon az AOB derékszög, ebből következik, hogy az ACO és OFB derékszögű háromszögek egybevágók és így $OC = r_2$, $OF = r_1$, ezért a két kör síkjának távolsága $CF = r_1 + r_2$.

2441. Ebben a megoldási módban nem választjuk szét a páros és a páratlan esetet. A gúla szimmetria tulajdonságaiból következik, hogy a félgömb az oldallapokat a szimmetriatengelyükön, azaz a magasságvonalaikon

érinti. A **2441.** ábrán a gúla olyan metszetrészletét rajzoltuk meg, amely a félgömb egy főkörét, egy ezt érintő lapmagasságvonalat és a gúla magasságát ábrázolja; O az alaplap középpontja, M a gúla csúcsa, E a beírt félgömb érintési pontja az MF magasságvonalon. Ha a gúla alapéle a, a **2429.** feladat megoldása alapján $OF = d = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$, $MF = \sqrt{m^2 + d^2}$.

Az OMP derékszögű háromszög kétszeres területét kétféle módon felírva $OF \cdot m = MF \cdot R$, ebből, $R = \frac{OFm}{MF} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2\,\mathrm{tg}^2\frac{180°}{n} + a^2}}$.





2440

2442. A gömbbe írt paralelepipedon minden lapja húrnégyszög, tehát téglalap, a paralelepipedon csak téglatest lehet. Viszont minden téglatest köré lehet gömböt írni, mert testátlói egyenlők és ezért középpontja minden csúcstól egyenlő távolságra van.

2443. A hasábot felülnézetben olyan szabályos n-szögnek látjuk, amelynek beírt köre a hasábba írt gömb főkörével egyenlő. A **2429.** feladat megoldása szerint a beírt kör sugara: $OF = r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$. A hasáb magassága a gömb átmérője $2r$; az alapterület $n \cdot \frac{ar}{2}$. A hasáb térfogata

$\frac{nar}{2} \cdot 2r = nar^2$; a gömb térfogata $\frac{4r^3\pi}{3}$, a kettő különbsége

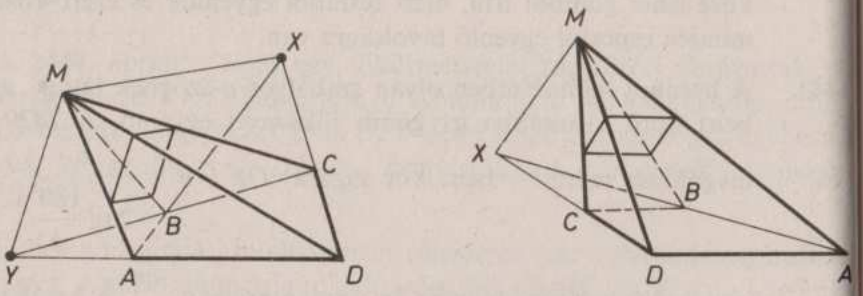
$$r^2\left(na - \frac{4r\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}\left(na - \frac{2a\pi}{3\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\right).$$

2444. Az alapsokszög köré írt kör sugara (l. a **2429.** ábrát) $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

Az alapsokszög és a fedőlap középpontját b hosszúságú szakasz köti össze, ennek O felezőpontja egyenlő távolságra van a hasáb minden csúcsától, ezért ez a köré írt gömb középpontja. A gömb sugara

$$\sqrt{R^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}} + b^2}.$$

2445. Felhasználjuk, hogy két metszősíkot az m metszésvonalukkal párhuzamos síkkal elmetszve a metszésvonalak is párhuzamosak egymással is és m-mel is, és megfordítva: ha két sík egy m egyenesben metszi egymást és mindkét síkban van egy-egy egyenes, amelyek egymással párhuzamosak, akkor ezek m-mel is párhuzamosak. Tegyük fel először, hogy az $ABCD$ alapnégyzet nem trapéz. Az AB és CD egyenesek metszéspontja legyen X, AD és BC metszéspontja Y; a gúla alappal szemközti csúcsa M. Az MXY síkkal párhuzamos síkok a gúlát paralelogrammában metszik, amelynek két oldala MX-szel, kettő pedig MY-nal párhuzamos (**2445.** ábra). Ha AB és CD az X pontban metszi egymást, de AD és BC párhuzamos, akkor az MX-szel és AD-vel párhuzamos síkok metszik paralelogrammában a gúlát. Ha a gúla alapja paralelogramma,



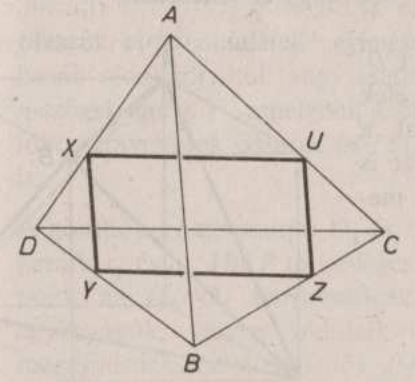
2445

akkor az alappal párhuzamos síkok szintén paralelogrammában metszik a gúlát.

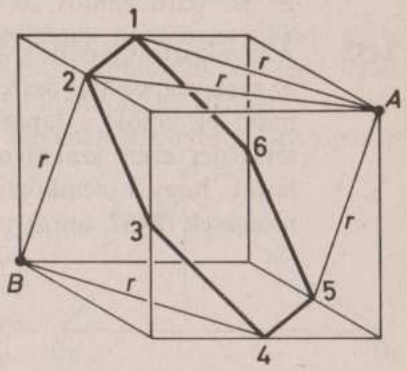
2446. Két szemközti éllel párhuzamos síkok paralelogrammában metszik a tetraédert. Speciálisan: az $ABCD$ tetraéder AC, AD, BC, BD éleinek a felezőpontjai is paralelogramma csúcsai, mivel a metszet két-két oldala AB-vel, ill. CD-vel párhuzamos (**2446.** ábra).

2447. A **2246.** ábra jelöléseit használva legyen $AB = a$, $CD = b$. A **2245.** feladat megoldásában alkalmazott indoklással láthatjuk, hogy az AB és CD élekkel egyaránt párhuzamos síkok paralelogrammában metszik a tetraédert. Válasszuk a metszősíkot úgy, hogy pl. $\frac{DY}{YB} = \frac{b}{a}$ legyen, ekkor $\frac{DY}{DB} = \frac{XY}{a}$; $\frac{DB}{YB} = \frac{b}{YZ}$. E két egyenlet megfelelő oldalait összeszorozva kapjuk, hogy $\frac{DY}{YB} = \frac{XY \cdot b}{YZ \cdot a}$, amiből $XY = YZ$, az $XYZU$ metszetparalelogramma ezért rombusz.

2448. Az egy csúcsból induló élek végpontjai szabályos háromszög csúcsai; a lapokkal párhuzamos metszetek négyzetek. Szabályos hatszögmetszet készítésére szemeljük ki egy testátló A és B végpontjait és a **2448.** ábrán jelölt *1, 2, 3, 4, 5, 6* élfelező pontokat. Ezek mindegyike egyenlő távol van mind az A, mind a B csúcsoktól (legyen ez a távolság r), ezért rajta vannak az A, ill. B körüli r sugarú gömbök közös részén, tehát egy körön. Az *12, 23, ..., 61* szakaszok mind egyenlők a lapátlók felével, ezért az *123456* hatszög körbe írt egyenlő oldalú hatszög, ami szabályos.

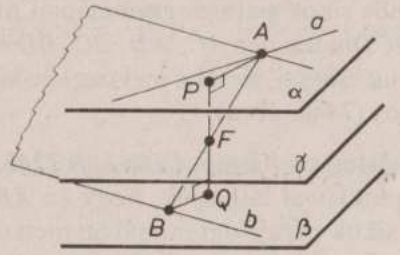


2446



2448

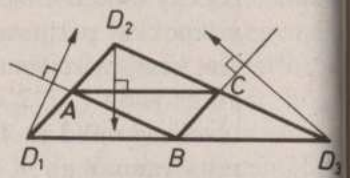
2449. Fektessünk az a-n át a b-vel párhuzamos α és b-n át az a-val párhuzamos β síkot és legyen A az a egyenes, B a b egyenes tetszőleges pontja. Az AB szakasz F felezőpontja egyenlő távol van az α és β síkoktól; ha F-ből a síkokra állított merőlegesek talppontjai P, ill. Q, az FPA és FQB derékszögű háromszögek egybevágók. F tehát rajta van α és β középpárhuzamos síkján, a mindkettőtől egyenlő távolságra lévő γ síkon (**2449.** ábra). γ minden pontja lehet összekötő szakasz felezőpontja; ha F a γ tetszőleges pontja, F és b közös síkja a-ból egy A pontot metsz ki, az AF egyenes b-ből pedig egy B pontot és AB felezőpontja éppen az F pont. A vizsgált ponthalmaz tehát a γ sík pontjaiból áll.



2449

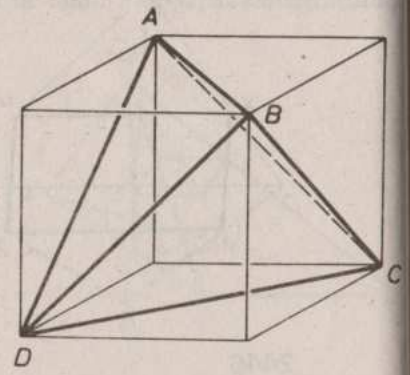
2450. Szabályos tetraédernél a szemközti élek merőlegesek, ezért **2446.** ábra $XYZU$ rombuszában a szögek derékszögek, a metszet tehát négyzet.

2451. Ha léteznének egybevágó derékszögű vagy tompaszögű háromszöglapokkal határolt tetraéder, akkor az ABC lap síkjába terített hálója a **2451.** ábrának megfelelően egy tompaszögű háromszögből és középvonalaiból állna. Az AB, BC, CA élek mentén felhajtva a lapokat, a D_1, D_2, D_3 csúcsoknak egy D csúcsban kellene egyesülnie; ábránkon meggyőződhetünk róla, hogy ez lehetetlen.



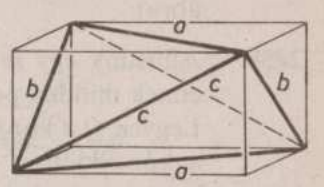
2451

2452. A kiválasztott lapátlók AB és CD, az ezek végpontjait összekötő élek mind egyenlők a lapátlókkal, a tetraéder ezért szabályos. Azt is látjuk, hogy a szemközti élek merőlegesek (**2452.** ábra).



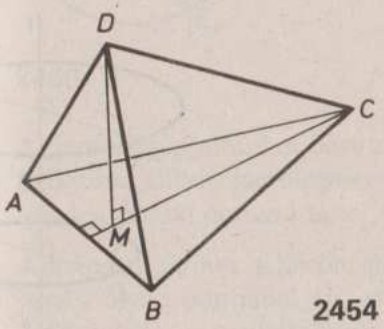
2452

2453. A téglalap átlói egyenlők, tehát egyenlők a tetraéder szemközti élei is; ezeket páronként a-val, b-vel, c-vel jelölve látható, hogy minden háromszöglapon az oldalak a, b és c (**2453.** ábra).



2453

2454. Legyen az ABC háromszög magasságpontja M (**2454.** ábra), az itt állított merőleges tetszőleges D pontja pedig a tetraéder negyedik csúcsa. Megmutatjuk egy tetszőleges élpár, pl. AB és CD merőlegességét. AB merőleges CM-re, mert CM magasságvonal; AB merőleges DM-re is, mert DM az alapsík minden egyenesére merőleges. AB így merőleges a DMC sík két metsző egyenesére, tehát minden egyenesére is, ezért AB valóban merőleges CD-re.

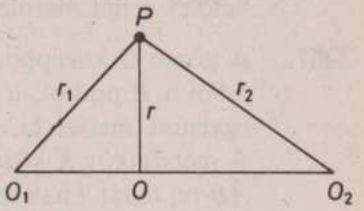


2454

2455. Ez pl. annak a következménye, hogy két szemközti lap egyirányú lapátlói egy paralelogrammát határoznak meg, amelynek az átlói a paralelepipedon testátlói, tehát felezve metszik egymást. Bármely két testátló átlópárja egy ilyen paralelogrammának, ezért bármely kettő felezve metszi egymást, azaz minden testátló átmegy az egyik felezőpontján, ez éppen azt jelenti, hogy egy ponton mennek át és ez a pont felez minden testátlót.

2456. Messük el az oldalélek egyeneseit egy rájuk merőleges síkkal. Ez a hasáb oldallapjaiból (vagy esetleg meghosszabbításaikból) egy olyan n-szöget metsz ki, amelynek szögei az oldallapok lapszögeivel egyenlők; s mivel ezek összege $(n-2)180°$, ugyanez érvényes a lapszögekre is.

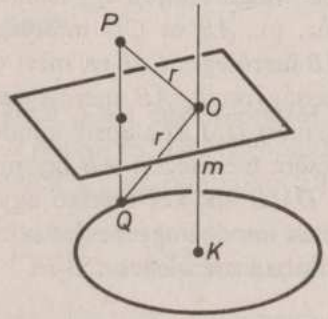
2457. A gömbök középpontjai O_1 és O_2, sugaraik r_1 és r_2. Ha P tetszőleges közös pont, az O_1PO_2 háromszögek mind egybevágók, hiszen oldalaik rendre megegyeznek, ezért egyenlők P-ből induló PO magasságaik is, ennélfogva



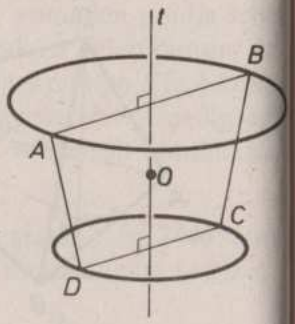
2457

a P pontok rajta vannak az O középpontú $OP=r$ sugarú körön (**2457.** ábra).

2458. Állítsunk egy m merőlegest a kör K középpontjában a kör síkjára; ennek minden pontja egyenlő távol van a kör pontjaitól (**2458.** ábra). Legyen Q a kör tetszőleges pontja és P a tér olyan pontja, amely nincs a kör síkjában. A PQ szakasz felezőmerőleges síkja az O pontban metszi m-et. Az O távolsága ezért P-től és Q-tól egyenlő, tehát ugyanilyen r távolságra van O a kör minden pontjától is. A kör és P ennélfogva rajta vannak az O körül r sugárral írt gömbön.



2458



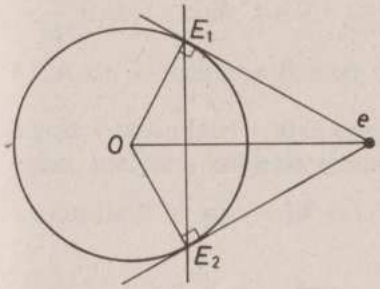
2459

2459. Legyen a körközéppontokat összekötő egyenes t. Húzzuk meg a körök AB, ill. CD párhuzamos átmérőit (**2459.** ábra), az $ABCD$ szimmetrikus trapéz, tehát húrnégyszög; köré írt körének O középpontja t-n van. A trapéz köré írt kört t körül megforgatva olyan gömböt kapunk, amely tartalmazza a két kört.

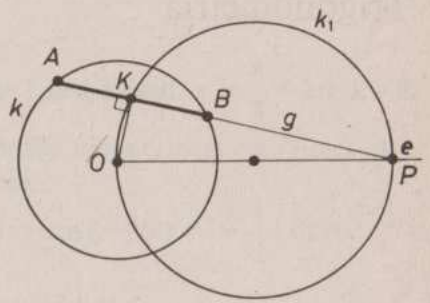
2460. Állítsunk a gömb O középpontjából merőleges síkot az adott e egyenesre, ez a gömbből egy k főkört, az érintősíkokból pedig a k kör egy-egy érintőjét metszi ki, amelyek a kört az E_1, ill. E_2 pontban érintik. Az e egyenes merőleges a metszet síkjára (a **2460.** ábrán csak egy pont van belőle), tehát merőleges az E_1E_2 egyenesre is.

2461. A gömb O középpontjából az adott e egyenesre állított merőleges sík e-ből a P pontot, a gömbből a k kört, a metsző síkokból pedig a g egyenest metszi ki, ennek k-ba eső része az AB húr (**2461.** ábra). A metszetkör K középpontja az AB felezőpontja, ezért OK merőleges AB-re, tehát Thalesz tétele miatt K rajta van az OP átmérő fölé szerkesztett k_1 körön. A kérdéses körközéppontok a k_1 kör k-ba eső ívén

helyezkednek el, s ennek az ívnek minden pontja lehet metszetkör középpontja.



2460



2461

2462. A gömbközéppontok a három ponton átmenő k kör középpontjában a síkjukra állított merőlegesen helyezkednek el, ennek (és csakis ennek) minden pontja egyenlő távol van a három adott ponttól.

2463. A keresett halmaz a három ponton átmenő k kör pontjaiból és a tér összes olyan pontjából áll, amelyek nincsenek k síkjában (indoklása **2458.** feladat megoldásában).

XVI. FEJEZET

Trigonometria

2464. Ha derékszögű, akkor $\alpha = 90°$ kell legyen. Így a szinusztétellel $4 : 3 = \sin 90° : \sin \beta$, azaz $\sin \beta = \frac{3}{4}$ és ezzel $\beta = 48{,}59° > 13°$. A háromszög nem derékszögű.

2465. A legnagyobb oldallal szemköztes γ szögre: $22^2 = 17^2 + 11^2 - 2 \cdot 17 \cdot 11 \cdot \cos \gamma$ és ebből $\cos \gamma < 0$, azaz γ tompaszög. A háromszög nem hegyesszögű.

2466. A legnagyobb oldallal szemköztes α szögre: $53^2 = 47^2 + 35^2 - 2 \cdot 47 \cdot 35 \cos \alpha$, amiből $\cos \alpha > 0$, azaz α hegyesszög, a háromszög tehát hegyesszögű.

2467. A legnagyobb magasság a 10 cm-es befogó, mert a másik befogóval (és a magassággal) szemközti szög 20°, tehát ez a kisebbik befogó. A másik befogó $10 \cdot \operatorname{tg} 20° = 3{,}6397$ cm, az átfogó $10\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 20°} = 10{,}6418$ cm.

2468. $\sin \alpha = \frac{9}{16}$, azaz $\alpha = 34{,}2283°$ és $90° - \alpha = \beta = 55{,}7717°$.

2469. $\sqrt{6{,}5^2 + 7{,}3^2 - 2 \cdot 6{,}5 \cdot 7{,}3 \cdot \cos 72°} = 8{,}14 < 13{,}4$, tehát nem egybevágóak!

2470. $\sqrt{16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cos 106°} = 25{,}56 < 31$, tehát nem egybevágóak!

2471. *a)* $\sin 2x \neq 1$, azaz minden valós x, amire $x \neq \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ adja az értelmezési tartományt.

b) $\sin 3x - 1 \leqq 0$ miatt csak $\sin 3x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{6}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2472. *a)* $\operatorname{tg} x \geqq \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ pontosan akkor, ha $\pi k < x \leqq \frac{\pi}{4} + \pi k$ vagy $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) A $\sin x - \cos x \neq 0$, azaz $\operatorname{tg} x \neq 1$ kell legyen. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2473. Egész x-re $\sin(\pi x) = 0$ és erre reciproka nincs értelmezve. Nincs oly x egész, melyre a kifejezés értelmezhető.

2474. *a)* $\sin 1050° = \sin(-30° + 3 \cdot 360°) = \sin(-30°) = -\frac{1}{2}$. *c)* $2^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. *b)* $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < -\frac{1}{2}$, mert az 1-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvény szigorúan nő, tehát $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < (\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Így *b)* < *a)* < *c)*.

2475. $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{8}} = \log_2 2^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$; $\sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Így $-\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{3}{4} < 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

2476. *a)* $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$;

b) $32 \cdot 8^{-\frac{5}{3}} + 81^{0{,}75} = 32 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^5} + \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 1 + 27 = 28$;

c) $\sin 990° + \operatorname{tg}(-225°) = \sin 270° + \operatorname{tg}(-45°) = -1 + (-1) = -2$.

2477. $\sin 5 = -0{,}95\,892 < \sin 3 = 0{,}14\,112 < \sin 7 = 0{,}65\,698 < \sin 1 = 0{,}84\,147$.

2478. *a)* $\pi(\sin x) \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $\sin x \neq \frac{1}{2}(2k+1)$. $|\sin x| \leqq 1$ miatt $k = 0$ vagy $k = -1$ lehet csak, és erre $x \neq 30° + 180° \cdot n$ és $x \neq 150° + 180°n$, $n \in \mathbf{Z}$. Minden más $x \in \mathbf{R}$-re értelmezhető.

b) $\sin x \geqq 0$ kell legyen. Ez minden $2\pi k \leqq x \leqq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$-re és csak ezekre teljesül.

2479. *a)* $x \neq 0$ és $\sin\frac{\pi}{x} \neq 0$, amire $\frac{\pi}{x} \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, azaz $x \neq \frac{1}{n}$. *b)* $x \neq 0$ és $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} \neq 0$ és $\frac{\pi}{x} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, azaz $x \neq \frac{2}{2n+1}$ és $\frac{\pi}{x} \neq \pi k$, vagyis $x \neq \frac{1}{k}$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

2480. Mivel $\cos 7x \leqq 1$, ezért *d), e)* és *f)* igazak.

2481. $\cos x - \sin x = -1$ pontosan akkor, ha $\cos x = 0$ és $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, vagy $\cos x = -1$ és $\sin x = 0$, azaz $x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

$x = 0$-ra $\cos x - \sin x + 1 = 2$. Ha $\cos x - \sin x = -\frac{1}{2}$, akkor $\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$, azaz $\frac{3}{4} = \sin 2x$.

Tehát *b), c), d), e)* igaz.

2482. $\operatorname{tg} x \geqq 1$ pontosan akkor, ha $\frac{\pi}{4} + \pi k \leqq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. A *c)* igaz.

2483. Mivel $|\sin x| \leqq 1$ és $|\cos x| \leqq 1$, ezért $|\sin x \cos x| \leqq 1$ és az egyenlőség csak akkor, ha $|\sin x| = |\cos x| = 1$, ami lehetetlen, tehát *a)* hamis.

Egy tört pontosan akkor 0, ha számlálója 0, így *b)* is hamis. Ha $\sin x \cos x - 1 = \frac{1}{100}$, akkor $\sin x \cos x = \frac{101}{100} > 1$ és ez, mint *a)*-nál láttuk, lehetetlen.

$\frac{1}{\sin x \cos x - 1} > \operatorname{tg} x$ akkor és csak akkor, ha $1 < \frac{\sin x}{\cos x}(\sin x \cos x - 1) = \sin^2 x - \frac{1}{\cos x}$ és ez pl. $x = \frac{3\pi}{4}$-re teljesül; *d)* tehát igaz.

Az *a)*-ban látottak miatt $\sin x \cos x - 1 \neq 0$, tehát *e)* igaz. $x = \frac{\pi}{2}$-re $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, tehát a kifejezés racionális, így *f)* hamis.

2484. *a)* Van $x > 0$, pl. $x = \pi$, melyre $\operatorname{tg}\pi = 0$ és ennek nincs logaritmusa.

b) Nem igaz, mert $x = 0$-ra $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ értelmezhető, de $\log \operatorname{tg} x$ nem!

c) Mivel $\frac{\pi}{2} < \sqrt{3} < \pi$, így $\operatorname{tg}\sqrt{3} < 0$, tehát $\lg \operatorname{tg} x$ itt nem értelmezhető!

d) $\operatorname{tg} x > 0$ az adott intervallumon, így $\lg \operatorname{tg} x$ itt értelmezhető.

2485. A $\lg \cos \lg x$ olyan pozitív x-ekre értelmezett, melyekre $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \lg x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, azaz $10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} < x < 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$.

A $\cos \lg \cos x$ értelmezési tartománya olyan $x \in \mathbf{R}$, melyre $\cos x > 0$, vagyis $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. A két tartomány nem azonos!

2486. *a)* ÉT: $\mathbf{R}$; *b)* és *c)* azonosak, mivel a koszinuszfüggvény 2π-ben periodikus. ÉT: $\mathbf{R}$; *d)* ÉT: $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$; *e)* ÉT: $\mathbf{R}$; *a)* és *f)* azonos, mert $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; *g)* $\cos x^2 \geqq 0$ kell legyen. Ez pontosan akkor teljesül, ha $-\frac{\pi}{2} + \pi k \leqq x^2 \leqq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{N}$.

ÉT: $\sqrt{-\frac{\pi}{2} + \pi k} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, vagy

$-\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k} \leqq -x \leqq -\sqrt{-\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in \mathbf{N}$.

2487. *a)* ÉT: $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k\mathbf{Z}\}$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$;

b) és *a)* azonosak, mert $\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \sin y} = \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x$;

c) ÉT: Minden olyan $(x; y)$ valós számpár, melyre $x - y \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

d) Minden $(x; y)$ valós számpár.

2488. $\operatorname{ctg} x \geqq 0$ és $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ kell legyen. Ezért ÉT: $\pi k < x \leqq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2489. Az $x \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Mivel $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, az ÉT minden elemére, ezért ÉK: $\{0\}$.

2490. A $\operatorname{tg} x$ miatt $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. A $\operatorname{tg} x \cdot \cos x \neq 0$, ha $x \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

2491. $\sin x \geqq 0$, ha $2\pi k \leqq x \leqq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. $\cos x \neq 0$, ha $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. ÉT: $2\pi k \leqq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ vagy $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leqq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2492. $x > 0$ és $\lg x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, azaz $x \neq 10^{\pi k}$. ÉT: $\mathbf{R}^+ \setminus \{10^{\pi k} \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2493. $\sin x \leqq 1$ miatt csak $\sin x = 1$ lehet, erre $\cos x = 0$ és ezt a $\operatorname{tg} x$ zárja ki. A kifejezés tehát seholsem értelmezhető.

2494. A kifejezés $x \in \mathbf{R}^+$, illetve $x \in \{\pi k, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ valósakra értelmezhető.

2495. ÉT: $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

2496. ÉT: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Mivel $\frac{\cos(-x)}{-x} = -\frac{\cos x}{x}$, ezért a függvény páratlan. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\cos x}{x} = +\infty$. $\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 0$ és a függvény a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$-en folytonos, mert a folytonos $\cos x$ és $\frac{1}{x}$ függvények szorzata. Ezek szerint ÉK: $\mathbf{R}$.

2497. ÉT: $\mathbf{R}$. $\operatorname{tg} \pi = 0$ miatt ÉK: $\{-1\}$.

2498. $\cos x - 1 \leqq 0$ miatt csak $\cos x = 1$ lehetséges. Erre $\sin x = 0$, és $\operatorname{ctg} x$ nincs értelmezve. ÉT: $\emptyset$, ÉK: $\emptyset$.

2499. $\cos x > 0$ kell legyen, azaz ÉT: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $0 < \cos x \leqq 1$ és a $\cos x$ folytonossága miatt ÉK: a nempozitív valós számok halmaza.

2500. $\sin x > 0$ kell legyen. Így ÉT: $2\pi k < x < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. $0 < \sin x \leqq 1$ és a $\sin x$ folytonossága miatt ÉK: a nempozitív valós számok halmaza.

2501. A tg függvény miatt $x+1 \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. $\operatorname{tg}(x+1) \geqq 0$ kell legyen, azaz $\pi k \leqq x+1 < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, tehát ÉT: $-1 + \pi k \leqq x < \frac{\pi}{2} - 1 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. A $\operatorname{tg}(x+1)$ minden nemnegatív értéket felvesz, ezért ÉK: $\mathbf{R}_0^+$.

2502. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Mivel $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\frac{\sin \pi}{\pi} = 0$ és az $x \mapsto \sin x$ folytonos, továbbá, ha $x \neq 0$, $|\sin x| < |x|$ miatt $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, ezért ÉK: 1-nél kisebb nemnegatív számok.

2503. ÉT: $\mathbf{R}$; Mivel $0 \leqq |\sin x| \cdot |\cos x| = |\sin x \cos x| = \frac{1}{2}$, mert $|\sin 2x| \leqq 1$, továbbá $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$-ban $x \mapsto \sin 2x$ folytonos (és szigorúan monoton nő), ezért ÉK: $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2504. $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ minden $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, mert a tg függvény π-ben periodikus. Így ÉT. a fenti halmaz. ÉK: $\mathbf{R}$, mert a $\operatorname{tg} x$ minden valós értéket felvesz.

2505. A $\operatorname{tg} x$ $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $k \in \mathbf{Z}$-re nincs értelmezve, és $\operatorname{tg}^2 x = 1$, ha $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Ezért csak a *c)* igaz.

2506. $\cos x - 1 \leqq 0$, tehát $\cos(\pi x) = 1$, azaz $\pi x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ kell legyen. Így *c)* igaz, a többi nem.

2507. $\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 \leqq 0$, tehát $\sin^2 \frac{\pi x}{2} = 1$, vagyis $\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ és így $x = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ kell legyen. A *d)* igaz, a többi nem.

2508. $\frac{1}{4} - \sin^2 2x > 0$, ami csak akkor, ha $-\frac{1}{2} < \sin 2x < \frac{1}{2}$. Az $y = \sin 2x$ görbe képéről leolvasható, hogy *d)* igaz.

2509. $\cos^2 x \leqq 1$ és $\cos^2 x \neq 1$ miatt ÉT: $\emptyset$, azaz *c)* igaz.

2510. A tg függvény miatt $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. $1-\cos^2 x = \sin^2 x \geqq 0$, de $\sin x = 0$ nem lehet, azaz $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, így ÉT: $\left\{\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}\right\}\right\}$. A *b)* az igaz.

2511. $\sin \pi x \geqq 0$ kell legyen. Ez a $2\pi k \leqq \pi x \leqq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $2k \leqq x \leqq 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett teljesül. Az *a)* az igaz.

2512. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \geqq 0$ kell legyen. Ez a $\pi k \leqq \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $2k \leqq x < 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumokon (és csak ott) teljesül. A *b)* igaz.

2513. Mivel $|\sin x| \leqq 1$, $\lg |\sin x| \leqq 0$, vagyis csak $\sin x = 1$ lehet. Így ÉT: $\left\{\frac{\pi}{2}(4k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. A *d)* igaz.

2514. $1-\operatorname{tg}^2 x \geqq 0$, ha $-1 \leqq \operatorname{tg} x \leqq 1$. A *b)* igaz.

2515. Mivel $1-\cos^2 x \geqq 0$ és $\sqrt{1-\cos^2 x}$ nemnegatív számot jelöl, ezért csak a $\cos^2 x = 1$ lehetőséget kell kizárjuk. Ezért csak a *c)* állítás igaz.

2516. $\sin x - 1 \leqq 0$ miatt $\cos x < 0$ kell legyen. Ezért a *c)* az egyedül igaz állítás.

2517. A $\lg x$ miatt $x > 0$ kell legyen. A $\sin \lg x \geqq 0$ is követelmény, ami $2\pi k \leqq \lg x \leqq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $10^{2\pi k} \leqq x \leqq 10^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett (és csak akkor) teljesül. *c)* az igaz.

2518. $\lg x \geqq 0$ kell legyen, tehát az *e)* igaz.

2519. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - 1 > 0$ kell legyen és $x \neq \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - 1 = \frac{1}{\cos x} - 1 > 0$ pontosan akkor, ha $\cos x > 0$. Ez a $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < 2\pi k$, vagy $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumokon (és csak itt) teljesül. A *c)* az igaz.

2520. $\lg(1+\cos x) \geqq 0$ kell legyen, ami $\cos x \geqq 0$ mellett lehetséges. Így ÉT: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2521. $x > 0$ és $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \neq 0$, azaz $2x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$, vagyis $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$ kell legyen. ÉT: $\mathbf{R}^+ \setminus \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1) \,\middle|\, k \in \mathbf{N}\right\}$.

2522. Mivel $\sin x - 1 \leqq 0$, ezért ÉT: $\emptyset$.

2523. $x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ és $\operatorname{tg} x \neq 1$ kell legyen. Így ÉT: $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$ és $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{N}$.

2524. $\sin x \neq 0$ kell legyen, azaz $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2525. $\sin^6 x - \frac{1}{64} \geqq 0$, azaz $\left(\sin^3 x - \frac{1}{8}\right)\left(\sin^3 x + \frac{1}{8}\right) \geqq 0$ kell legyen. Ez $\sin x \geqq \frac{1}{2}$ vagy $\sin x \leqq -\frac{1}{2}$ mellett teljesül, tehát ÉT: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqq x \leqq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ vagy $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqq x \leqq \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2526. $\sin x > 0$ kell legyen. Mivel $\sin x \leqq 1$, $\lg \sin x \leqq 0$, ezért $1 - \lg \sin x > 0$. ÉT: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2527. $\sin^2 x > 0$ kell legyen. Ez $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett teljesül. $\sin^2 x \leqq 1$ miatt $\lg \sin^2 x \leqq 0$, tehát $1 - \lg \sin^2 x > 0$. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2528. $(\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1) = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Tehát $\sin 2x \geqq 0$, és ezért ÉT: $\pi k \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2529. $\sin x > 0$ kell legyen. ÉT: $2\pi k < x < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2530. $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, tehát $\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|$. Így ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, ÉK: $\{-1; 1\}$.

2531. $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\cos^2 - \sin^2 x}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ miatt

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} n \mid n \neq 4k \text{ és } n, k \in \mathbf{Z} \right\}$. ÉK: $[1, +\infty[$.

2532. $\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\cos 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$ miatt $\sin x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ kell legyen. ÉT: minden valós szám, ami nem a $\frac{\pi}{4}$-nek páratlan vagy 4-gyel osztható többszöröse.

2533. $\sin^6 x - 1 \leqq 0$, tehát $\sin^6 x = 1$ lehet csak. ÉT: $\left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$, ÉK: $\{0\}$.

2534. $\sin 2\pi x \geqq -1$ miatt csak a $\sin 2\pi x = -1$ nem lehet.

ÉT: $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} + k \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

2535. $1 - \cos^2 \pi x \geqq 0$ miatt csak a $\cos^2 \pi x = 1$ nem lehet. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

2536. $\cos^2 x \leqq 1$, tehát $\cos^2 x = 1$ lehet csak. ÉT: $\{\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$, ÉK: $\{0\}$.

2537. $1 - \operatorname{tg} x > 0$ és $\lg(1 - \operatorname{tg} x) \geqq 0$, azaz $1 - \operatorname{tg} x \geqq 1$, vagyis $0 \geqq \operatorname{tg} x$ kell legyen. ÉT: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2538. ÉT: $\mathbf{R}$, ÉK: $\{2\}$, mert $2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x} = 2^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 2^1 = 2$ minden $x \in \mathbf{R}$-re.

2539. $1 - \cos x > 0$ és $\lg(1 - \cos x) \geqq 0$, azaz $1 - \cos x \geqq 1$, tehát $\cos x \leqq 0$ kell legyen. ÉT: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2540. $\cos^2 x - 1 \leqq 0$ miatt $\cos^2 x = 1$ lehet csak, de a nevező miatt $\cos x = -1$ kizárt. Így ÉT: $\{2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2541. $0 < \operatorname{tg} x - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)$, ha a tényezők egyező előjelűek. Ez $|\cos x| \leqq 1$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ vagy $\pi(2k+1) < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. A $\operatorname{tg} x - \sin x$ kifejezés minden pozitív valós értéket felvesz, ezért ÉK: $[-1; 1]$.

2542. $\cos x \leqq 1$ miatt $\cos^3 x - 1 \leqq 0$, ezért csakis $\cos^3 x = 1$, azaz ÉT: $\{2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ lehet. ÉK: $\{0\}$.

2543. A $\lg x^2$ minden $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$-ra értelmezett és ezért ennek szinusza is. A $\sin^2 x^2 > 0$ kell legyen, ami pontosan akkor teljesül, ha $x^2 \neq \pi k$, $k \in \mathbf{N}$. ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{\pm \sqrt{\pi k} \mid k \in \mathbf{N}\}$.

2544. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2(\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}) \cos x = \pm 2 \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \cdot \frac{3}{5} = \pm \frac{24}{25}$.

2545. $\sin x \leqq 1$ és $2 \sin y \leqq 2$ miatt az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin x = \sin y = 1$, azaz $x = y = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ekkor $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y = 0$, tehát összegük is 0.

2546. $\cos 2r = \cos^2 r - \sin^2 r = 1 - 2\sin^2 r = 1 - 2 \cdot (0{,}72) = -0{,}44$.

2547. $\operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} = 0$.

2548. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$-ből $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$, azaz $\frac{25}{64} + 1 = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$, tehát $1 - \sin^2 x = \frac{64}{89}$, ebből $\sin x = \pm \frac{5}{\sqrt{89}}$.

2549. Mivel $\operatorname{tg} 2y \cdot \operatorname{ctg} 2y = 1$ minden $y \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} n \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$-re, tehát $\sqrt{\lg(\operatorname{tg} 2y \cdot \operatorname{ctg} 2y)} = 0$, ha az egyenletnek van $\frac{\pi}{4}$-től különböző gyöke. Mivel $\cos 54y - 1 = 1 - 2\sin^2 27y - 1 = -2\sin^2 27y = \sin 27y$, ezért $\frac{\pi}{4}$-től különböző gyököt a $\sin 27y = -\frac{1}{2}$ szolgáltat.

2550. $\sin x + 1 = 1$ kell legyen, vagyis $x = 2\pi$, vagy $x = \pi$. Így $\log_2 \frac{2\pi}{\pi} = 1$, vagy $\log_2 \frac{\pi}{\pi} = 0$.

2551. Mivel $\cos(x+y+\pi) = -\cos(x+y) = -\cos x\cos y+\sin x\sin y = \cos 0 = 1$ és $\cos(x-y) = \cos x\cos y+\sin x\sin y = 0{,}1234$, ezért összegükből $\sin x\sin y = \frac{1}{2}\cdot 1{,}1234 = 0{,}5617$.

2552. $\sin 5y = \sin 3y\cos 2y+\cos 3y\sin 2y = \sin y(3-4\sin^2 y)\cdot(1-2\sin^2 y)+$ $+\cos y(4\cos^2 y-3)2\sin y\cos y = 0{,}1(3-4\cdot 0{,}1^2)(1-2\cdot 0{,}01)+$ $+2\cdot 0{,}1(1-0{,}01)(4(1-0{,}01)-3)\cdot(1-0{,}01) = 0{,}4782592$.

feltéve, hogy a 0,1 pontos érték. Ellenkező esetben $\sin 5y = 0{,}4$.

2553. $\sin^2 y+\cos^2 y = 1$-ből $\operatorname{tg}^2 y+1 = \frac{1}{\cos^2 y}$, azaz $\cos^2 y = \frac{1}{10}$.

2554. $\sin^2 x-\cos^2 x = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{1-\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$.

2555. $\cos x = 4^{\log_2\cos x} = 2^{2\log_2\cos x} = 2^{\log_2\cos^2 x} = \cos^2 x$.
$\cos x \neq 0$ miatt $\cos x = 1$ és ezért $\sin x = 0$.

2556. $\frac{35}{12}\sin\alpha = 1+\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Ebből $\frac{35}{12}\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha+$ $+\cos\alpha$, azaz $\frac{35}{24}\sin 2\alpha = \sin\alpha+\cos\alpha$. Négyzetre emelve $\left(\frac{35}{24}\right)^2\sin^2 2\alpha =$ $= 1+\sin 2\alpha$. Ebből

$$\sin 2\alpha = \frac{\left(\frac{24}{35}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{24}{35}\right)^4+4\left(\frac{24}{35}\right)^2}}{2} = \frac{\left(\frac{24}{35}\right)^2\left(1\pm\sqrt{\frac{5476}{24^2}}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{24}{35}\right)^2\left(1\pm\frac{74}{24}\right)}{2} = \begin{cases} \left(\frac{24}{35}\right)^2\cdot\frac{98}{48} = \frac{24}{25}. \\ -\left(\frac{24}{35}\right)^2\frac{50}{48}. \end{cases}$$

A negatív értékű $\sin 2\alpha$ nem felel meg a feltételeknek.

2557. $\cos\alpha = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ebből $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$, mert $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Ám $\cos\alpha(1-2\sin\alpha) = 0$ is, tehát $\cos\alpha = 0$ vagy $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, amiből $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\operatorname{ctg}\alpha$ tehát $-\sqrt{3}$, 0 vagy $\sqrt{3}$.

2558. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -2\cos\alpha$ ($\cos 2\alpha \neq 0$, különben $\sin\alpha = 0$ is).
$\sin\alpha = -\cos 2\alpha = \sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha-1$, ebből

$$\sin\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4},$$

tehát $\sin\alpha = 1$ vagy $-\frac{1}{2}$. Így $\cos\alpha = 0$ vagy $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $\operatorname{tg} 2\alpha =$ $= -\sqrt{3}$, 0, vagy $\sqrt{3}$.

2559. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$ pontosan akkor, ha $\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) = \pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, vagyis ha $\alpha = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$. Így $\sin 3\alpha = \pm 1$ a k paritásától függően.

2560. $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \pm 2\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}\cos 2\alpha = \pm 1$.

2561. $\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

2562. $-\frac{24}{25} = \sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$.

Ebből $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{25}{12}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1 = 0$, azaz $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\frac{25}{12}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{12}\right)^2-4}}{2} =$

$$= \frac{-\frac{25}{12}\pm\frac{7}{12}}{2} = \frac{-25\pm 7}{24} = -\frac{3}{4}\text{ vagy } -\frac{4}{3}.$$

2563. $\sin x+\cos x=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=$

$=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\dfrac{6+1-9}{9+1}=\dfrac{-2}{10}=-\dfrac{1}{5}.$

2564. $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}=\dfrac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\dfrac{1}{2}.$

2565. $\dfrac{a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{a+2b\operatorname{tg}x+c\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+1}=$

$=\dfrac{a+\frac{4b^2}{a-c}+c\frac{4b^2}{(a-c)^2}}{\frac{4b^2}{(a-c)^2}+1}=\dfrac{a(a-c)^2+4b^2(a-c)+4b^2c}{4b^2+(a-c)^2}=a;$

$\dfrac{c\cos^2 x-2b\sin x\cos x+a\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{a\operatorname{tg}^2 x-2b\operatorname{tg}x+c}{\operatorname{tg}^2 x+1}=$

$=\dfrac{a\left(\frac{2b}{a-c}\right)^2-2b\frac{2b}{a-c}+c}{\left(\frac{2b}{a-c}\right)^2+1}=\dfrac{a4b^2-4b^2(a-c)+c(a-c)^2}{4b^2+(a-c)^2}=$

$=\dfrac{c[4b^2-(a-c)^2]}{4b^2+(a-c)^2}=c.$

2566. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}=\dfrac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\dfrac{\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}=$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}=-\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$, tehát az eredeti kifejezés a 0, és ez nem függ α-tól, β-tól.

2567. $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x=1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t+1)^2}{t^2}$, így $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ miatt $\sin x+\cos x=\left|\dfrac{t+1}{t}\right|$. Mivel $\dfrac{\sin x+\cos x}{2}\leqq\sqrt{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a számtani és a négyzetes közép viszonya miatt, ezért $1+\dfrac{1}{t}\leqq\sqrt{2}$, vagyis $\sqrt{2}+1\leqq t$ kell legyen $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\text{ feltétel mellett}\right)$!

2568. $\dfrac{3}{5}=\cos 4\alpha=\dfrac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$, ebből $\operatorname{tg}^2 2\alpha=\dfrac{1}{4}$, azaz $\operatorname{tg}2\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$.

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\pm\dfrac{1}{2}$-ből $\operatorname{tg}^2\alpha+4\operatorname{tg}\alpha-1=0$, azaz $\operatorname{tg}\alpha=-2\pm\pm\sqrt{5}$, vagy $\operatorname{tg}^2\alpha-4\operatorname{tg}\alpha-1=0$, azaz $\operatorname{tg}\alpha=2\pm\sqrt{5}$.

2569. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\mp 2}{\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{77}}{18}}}$.

$\dfrac{2}{9}=\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\pm 2\sin 2\alpha\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$, amiből

$\sin^4 2\alpha-\sin^2 2\alpha+\dfrac{1}{81}=0$, tehát $\sin^2 2\alpha=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{77}}{18}$.

2570. $3\cos\alpha=1+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$, vagyis $\dfrac{3}{2}\sin 2\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$, és így $\dfrac{9}{4}\sin^2 2\alpha=1+\sin 2\alpha$. Ebből $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{9}(1\pm\sqrt{10})$.

2571. $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}$, ha $2\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, vagy $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, azaz $\alpha=\dfrac{\pi}{12}+$ $+\pi k$, vagy $\alpha=\dfrac{5\pi}{12}+\pi k$. $0<\cos n\alpha$, ha $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l<n\alpha<\dfrac{\pi}{2}+$ $+2\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$.

Az $n = 24l+4$, vagy $n = 24l+20$ bármely $k \in \mathbf{Z}$ és mindkét α-ra teljesíti a feltételt. ($n = 24l$ és $n = 24l+2$, illetve $n = 24l+10$ és $n = 24l+14$ az egyik, illetve a másik α-ra ad megoldást.)

2572. A páros négyzetszámok 4-gyel oszthatók, a páratlanok 4-gyel osztva 1 maradékúak. Mivel $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pontosan akkor, ha $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$), $(n^2+1)\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi$, ha n^2 4-nek többszöröse és $(n^2+1)\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) = \pm\frac{\pi}{2} + \pi l$, ha n^2 páratlan. Így csakis páros n-re teljesülhet a $\operatorname{tg}(n^2+1)\alpha < 0$, ez is csak akkor, ha $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

2573. Ha $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, úgy $4\sin x = 3\cos x$, azaz $4\sin x\cos x = 3\cos^2 x = 3\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = 3\frac{1}{\frac{9}{16}+1} = \frac{48}{25}$, tehát $\sin x\cos x = \frac{12}{25}$.

2574. $\sin x\cos^2 x = \operatorname{tg} x\cos^3 x = \frac{1}{2}\cos^3 x$. Mivel $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x+1 = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$, így $\cos x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, azaz $\sin x\cos^2 x = \frac{1}{2}\cdot\left(\pm\frac{8}{5\sqrt{5}}\right) = \pm\frac{4}{5\sqrt{5}}$.

2575. $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = 0$, ha $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$. $\sin\frac{\pi}{2}n \neq \cos\frac{\pi}{2}n$.

2576. $\operatorname{tg} 2x = 0$ pontosan akkor, ha $2x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = \frac{\pi}{2}k$. Így $|\sin x+\cos x| = 1$, és $\sin x+\cos x = 1$ pontosan akkor, ha $k = 4l$ vagy $k = 4l+1$, $l \in \mathbf{Z}$.

2577. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg}^2 x = 1$ minden $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$-re. $x = \frac{\pi}{2}n$-re $\sin 4x + \cos 4x = 1$.

2578. $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ miatt $\operatorname{ctg}^2 x = 0$, ami akkor és csak akkor, ha $\cos x = 0$. Így $\frac{1}{\sin x} = \pm 1$.

2579. Mivel $\operatorname{tg}^2 x+1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, így $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

2580. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Két szög tangense pontosan akkor egyenlő, ha különbségük π egész többszöröse, azaz $2x-\frac{\pi}{2} = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, tehát $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Így $\sin 4x = \sin(\pi+2\pi k) = 0$.

2581. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát *c)* igaz, ha $\alpha \in \mathbf{R}$.

2582. $\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, azaz *c)* igaz, ha $\alpha \in \mathbf{R}$.

2583. $-\frac{1}{2} = \sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, tehát $\operatorname{tg}^2\alpha+4\operatorname{tg}\alpha+1 = 0$, amiből $\operatorname{tg} = \frac{-4\pm\sqrt{12}}{2} = -(2\pm\sqrt{3})$. A *c)* az igaz, ha $\alpha \in \mathbf{R}$.

2584. $-\frac{2}{3} = \cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, amiből $\operatorname{tg}^2\alpha = 5$, tehát *d)* az igaz, ha $\alpha \in \mathbf{R}$.

2585. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha$. Ha $\cos\alpha = 0$, úgy $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, és így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(2k+1) = \pm 1$. Ha $\cos\alpha \neq 0$,

Így $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, amiből $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$, tehát $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$. A *d)* állítás az igaz, ha $\alpha \in \mathbf{R}$.

2586. $\sin x + \cos x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} =$

$= \frac{1 + 1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{7}{5}$. A *b)* az igaz.

2587. $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{26}} = \pm\frac{5}{\sqrt{26}}$, tehát $\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{5}$. Így

$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \frac{\pm\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 \mp \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = 1$ vagy $\frac{7}{17}$; *e)* az igaz.

2588. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$-ből $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x = 1$, azaz

$1 = \cos\frac{\pi}{4}\sin 3x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 3x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, vagyis

$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(4k+1)$ és $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$. Tehát $\operatorname{tg} 2x =$

$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right)$, ami $k = 3n$-re $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $k = 3n+1$-re nincs értelmezve és

$k = 3n+2$-re $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. A *c)* az igaz.

2589. A másik befogó $20 \cdot \operatorname{tg} 70°$ cm $\approx 54{,}95$ cm, az átfogó $\frac{20}{\sin 20°}$ cm $\approx 58{,}48$ cm.

2590. $\cos\alpha = \frac{\frac{25{,}7}{2}}{17} \approx 0{,}7559$, tehát $\alpha \approx 40{,}9°$. A helyes válasz: lehet, ha a megadott hosszúságok közelítő értékek. A terület $\frac{1}{2}\cdot 17 \cdot 25{,}7 \sin\alpha =$ $= 143{,}02\ \text{cm}^2$.

2591. A szabályos háromszög ilyen. Ennek területe: $\frac{2\sqrt{3}}{2}m^2 = \sqrt{3}m^2$. (Más háromszögre nem teljesülnek a feltételek: $(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = \pi$-ből $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $(\alpha - d)(\alpha + d) = \alpha^2$-ből $d = 0$.)

2592. A b bármely választására a háromszögek hasonlók (megfelelő oldalaiknak aránya egyenlő). $b = 1$ választásra $2{,}5^2 = 2^2 + 1 - 2\cdot 2\cdot 1\cos\gamma$, vagyis $\cos\gamma = -0{,}3125$, ebből $\gamma \approx 108{,}21°$. $2^2 = 2{,}5^2 + 1^2 - 2\cdot 2{,}5\cdot 1\cos\alpha$, tehát $\cos\alpha = 0{,}6500$, és így $\alpha = 49{,}46°$ és $\beta = 22{,}33°$.

2593. Nincs ilyen háromszög, hiszen $a < b + c = \frac{1}{3}a + \frac{3}{7}a = \frac{16}{21}a$ kell legyen, ami lehetetlen.

2594. Van, az egyenlő szárú ($a = b$) háromszög ilyen. (A $\frac{\sin x}{x}$ a $]0; \pi]$-ben szigorúan csökkenő, így az arány csak az egyenlő szárú háromszögben áll fenn!)

2595. A szinusztétel miatt $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, tehát $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Ez akkor és csak akkor áll, ha $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta) = 0$, azaz $\alpha - \beta = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Mivel α, β π-nél kisebb, ezért csak $\alpha = \beta$ lehetséges, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

2596. $48^2 = 22^2 + 33^2 - 2\cdot 22\cdot 33\cos\gamma$. Mivel $22^2 + 33^2 - 48^2 < 0$, ezért $\cos\gamma < 0$, vagyis a háromszög tompaszögű.

2597. A tangenstétellel $\frac{b-a}{b+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}$ miatt $\frac{7}{37} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}77{,}5°}$, amiből

$\frac{\beta-\alpha}{2} = 40{,}48°$. Mivel $\beta = \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2} = 117{,}98°$, ezért a háromszög tompaszögű.

2598. A szinusztétel szerint $\sin\alpha = \frac{10}{17}\sin 20° = 0{,}2012$, amiből $\alpha = 11{,}60°$ (A „kisebb oldallal szemben kisebb szög van" tételre hivatkozva, a szinusztétel nélkül is célhoz juthatunk!), vagyis tompaszögű a háromszög.

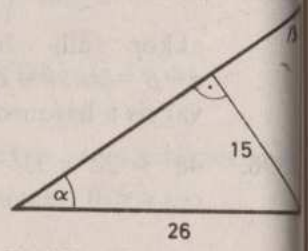
2599. A szinusztétellel $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{25}{12}\sin 30° = \frac{25}{24} > 1$. Ilyen háromszög nincs.

2600. $150 = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 24\sin\alpha$, vagyis $\alpha \approx 51{,}375°$ vagy $\alpha \approx 128{,}625°$. A tangenstétellel $\frac{c-b}{c+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2}}$, vagyis $\frac{8}{40} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{tg} 64{,}312°}$, illetve $\frac{8}{40} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{tg} 25{,}687°}$. Ezekből $\gamma = 86{,}89°$ és $\beta = 41{,}73°$, vagy $\gamma = 31{,}182°$ és $\beta = 20{,}193°$.

2601. $893 = \frac{1}{2}\cdot 38\cdot 47\cdot\sin\gamma$, vagyis $\sin\gamma = 1$, $\gamma = 90°$.

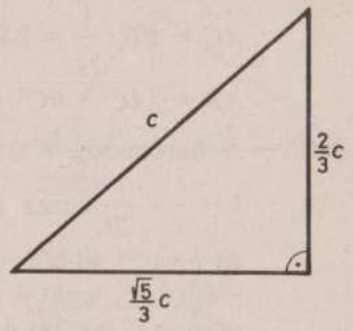
$\frac{38}{47} = \operatorname{tg}\alpha$, és így $\alpha = 38{,}96°$ és $\beta = 51{,}04°$.

2602. $\sin\alpha = \frac{15}{26}$-ből $\alpha = 35{,}23°$, $\beta = 54{,}77°$ (**2602.** ábra). $c = \frac{26}{\cos\alpha} = 31{,}83$ m, $a = 26\cdot\operatorname{tg}\alpha = 18{,}36$ m. $2s = 76{,}2$ m, $t = 238{,}7$ m^2.



2602

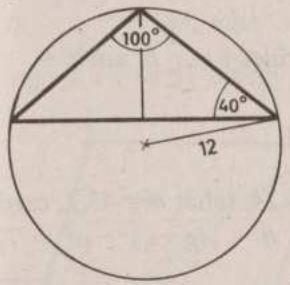
2603. Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{c^2 - \frac{4}{9}c^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}c$ a másik befogó (**2603.** ábra). $10 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}c\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}c$ miatt $c^2 = \frac{90}{\sqrt{5}} = 18\sqrt{5}$, tehát $c = 3\sqrt{2\sqrt{5}}$ cm, $2\sqrt{2\sqrt{5}}$, $\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}} = \sqrt{10\sqrt{5}}$ a két befogó; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$-ből $\alpha = 41{,}81°$ és $\beta = 48{,}19°$.



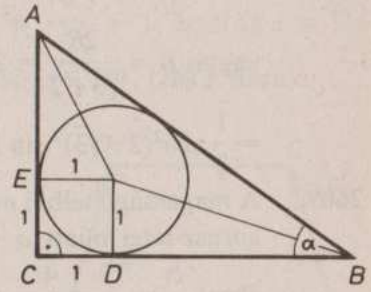
2603

2604. Ha a és b jelöli a befogók hosszát, akkor egyrészt $a^2 + b^2 = 64$, másrészt $a + b = \frac{5}{4}\cdot 8 = 10$, azaz $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 64 + 2ab = 100$, és így $ab = 18$, tehát $a(10-a) = 18$, vagyis $a^2 - 10a + 18 = 0$, és így $a = \frac{10 \pm \sqrt{100-72}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}$. Legyen $a = 5+\sqrt{7}$, akkor $b = 5-\sqrt{7}$ és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}+5}{5-\sqrt{7}} = 3{,}2476$, és ezért $\alpha = 72{,}89°$, $\beta = 17{,}11°$.

2605. A szárszög lehet csak 100°-os, így a háromszög alapján a szög 40°-os, tehát a szárak $24\sin 40°$ cm hosszúak és így a terület $\frac{1}{2}(24\sin 40°)^2\cdot\sin 100° = 117{,}19$ cm^2 (**2605.** ábra).



2605



2606

2606. $\sin\alpha : \sin(90°-\alpha) = \sin\alpha : \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz $\alpha = 35{,}26°$, $\beta = 90° - \alpha = 54{,}74°$. $BD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 3{,}146$ hosszúság egység, így $BC = 4{,}146$ h.e (**2606.** ábra). A szinusztételből $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz

$AC = BC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2{,}9332$ h.e, végül a Pitagorasz-tétel miatt $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5{,}078$ h.e.

2607. A háromszög t területével és s félkerületével a beírt kör sugara $3 = \frac{t}{s} = \frac{t}{20}$, azaz $t = 60\ \text{cm}^2$ (**2607.** ábra). Ezért $ab = 120\ \text{cm}^2$, és $a+b+c = 40$-ből $(a+b)^2 = (40-c)^2$, tehát $a^2+2ab+b^2 = 40^2 - 80c + c^2$, tehát a Pitagorasz-tételt is felhasználva $80c = 40^2 - 240$, azaz $c = 17$ cm. Így $a+b = 40-17 = 23$, $ab = 120$ és ezekből $a(23-a) = 120$, azaz $a^2 - 23a + 120 = 0$, tehát $a = 15$ és $b = 8$ cm.

2608. A szögek koszinuszainak arányából következik, hogy a szárszög tompaszög, tehát a **2608.** ábra jelöléseivel

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\cos(\pi - 2\beta)} = -\frac{\cos\beta}{\cos 2\beta} = -\frac{\cos\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta} =$$

$$= -\frac{\cos\beta}{2\cos^2\beta - 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ vagy } -\sqrt{3}.$$

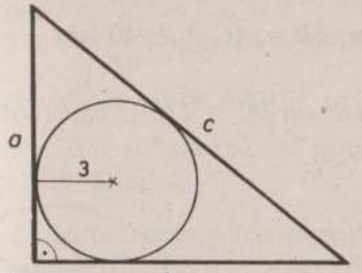
Az elsőből $2\cos^2\beta - \sqrt{3}\cos\beta - 1 = 0$, és így $0 < \beta < 90°$ miatt $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4} > 1$ nem ad megoldást, a másodikból viszont $2\sqrt{3}\cos^2\beta - \cos\beta - \sqrt{3} = 0$, tehát $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{1+8\cdot 3}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vagyis $\beta = 30°$.

Ezzel $\frac{a}{2b} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $a = \sqrt{3}b$, és $a + 2b = (\sqrt{3}+2)b = 26$, vagyis $b = \frac{26}{\sqrt{3}+2} = 26(2-\sqrt{3})$ és a terület $t = \frac{1}{2}b^2 \sin\alpha =$

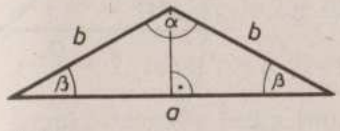
$$= \frac{1}{2} \cdot 26^2 (2-\sqrt{3})^2 \sin 120° = 21{,}02\ \text{cm}^2.$$

2609. A magasságtételből $m^2 = p \cdot q = 1866{,}24$, tehát $m = 43{,}2$, ezzel a Pitagorasz-tétel miatt $a = \sqrt{p^2+m^2} = 54$, $b = \sqrt{(p+q)^2 - a^2} = 72$ (**2609.** ábra). $\frac{b}{a} = \frac{72}{54} = \frac{4}{3} = \text{tg}\,\beta$-ból $\beta = 53{,}13°$ és $\alpha = 36{,}87°$. $c = \sqrt{54^2+72^2} = 90$ (cm).

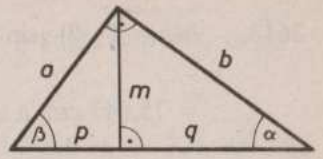
2610. A **2610.** ábra jelöléseivel, $BC = \sqrt{18^2+11^2-2\cdot 11\cdot 18\cos 77°45'} = 19$ cm, $BO = \sqrt{18^2+5{,}5^2-2\cdot 5{,}5\cdot 18\cdot\cos 77°45'} = 17{,}67$, tehát



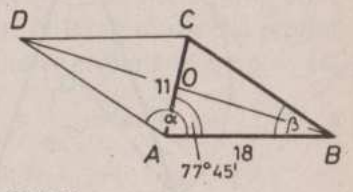
2607



2608



2609

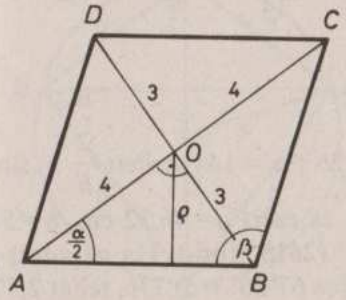


2610

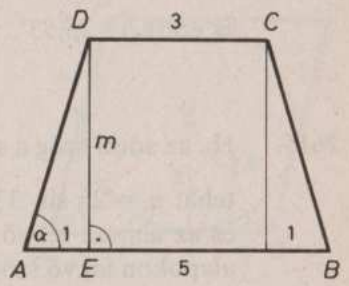
$BD = 35{,}34$ cm és $\cos\beta = \frac{19^2+18^2-11^2}{2\cdot 19\cdot 18} = 0{,}8246$, azaz $\beta = 34{,}45°$ és $\alpha = 145{,}55°$.

2611. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és felezik a rombusz szögeit is, így $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$, tehát $\frac{\alpha}{2} = 36{,}87°$, azaz $\alpha = 73{,}74°$, $\beta = 106{,}26°$ (**2611.** ábra). A beírt kör sugara az $ABO_\triangle$ magassága, amire $\varrho \cdot AB = 3 \cdot 4$, vagyis $\varrho = \frac{12}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$ cm.

2612. $m \cdot \frac{3+5}{2} = 144$, tehát $m = 36$ méter. $AE = \frac{5-3}{2} = 1$, ezzel $\text{tg}\,\alpha = 36$, vagyis $\alpha = 88{,}41°$ és így a trapéz másik szöge $91{,}59°$ (**2612.** ábra).

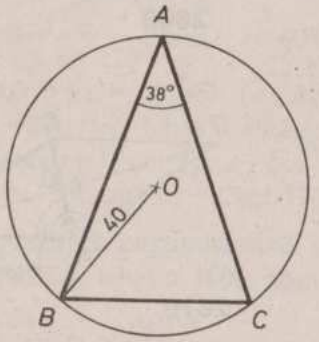


2611

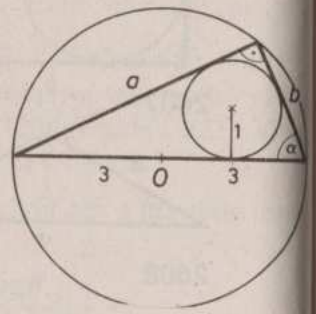


2612

2613. $BC = 2 \cdot 40 \cdot \sin 38° = 49{,}253$ cm, $AB = AC = 2 \cdot 40 \cdot \sin \frac{180° - 38°}{2} =$ $= 75{,}641$ cm, a terület pedig $\frac{1}{2} AB^2 \sin 38° = 1761{,}3$ cm^2 (**2613.** ábra).



2613



2614

2614. Thalesz tétele miatt az átfogó a köréírt kör átmérője, így $a^2 + b^2 = 36$ és a beírt kör sugara a terület és a félkerület hányadosa, tehát $1 = \frac{ab}{a+b+6}$ (**2614.** ábra). Eszerint $(a+b)^2 = (ab-6)^2$, azaz $a^2 + b^2 + 2ab = (ab)^2 - 12ab + 36$, tehát $ab(ab-14) = 0$. Ebből $ab \neq 0$ miatt $ab = 14$, vagyis a háromszög területe 7 cm^2, $a+b = 8$-ból $a(8-a) = 14$, azaz $a^2 - 8a + 14 = 0$, tehát $a = \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}$. Az a és b szerepe felcserélhető lévén, legyen $a = 4 + \sqrt{2}$ cm, így $b = 4 - \sqrt{2}$ cm, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{18+8\sqrt{2}}{14} = 2{,}094$, vagyis $\alpha = 64{,}47°$ és ezért $\beta = 25{,}53°$.

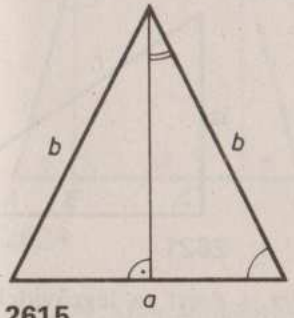
2615. Ha az adott szög a szárszög, úgy a $2b + a = 144$ mellett $\frac{\frac{a}{2}}{b} = \sin 33°40'$, tehát $a = 2b \sin 33°40' = 1{,}109b$, és ezért $a = 46{,}32$ cm, $b = 51{,}37$ cm és az alapon fekvő szögek: 56°20′ (**2615.** ábra). Ha az adott szög az alapokon fekvő szög, úgy $a = 2b \cos 67°20' = 0{,}77b$, tehát $2{,}77b = 144$ és ezért $b = \sqrt{2}$, $a \approx 40$, a szárszög pedig 45°20′.

2616. $\sin \alpha = \frac{6}{10}$, vagyis $\alpha = 36{,}87°$ és a beírt kör ϱ sugara: $\varrho = 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} =$ $= 1{,}\dot{6}$ cm (**2616.** ábra).

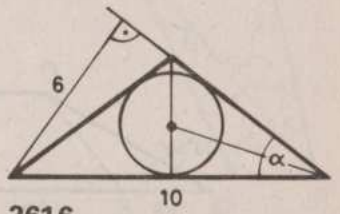
2617. $R = 35 \cdot 10^6 \sin 16'$, az átmérő $2R = 70 \cdot 10^6 \sin 16' = 326\,000$ km (**2617.** ábra).

2618. A deltoid szimmetriatengelye legyen az AC. Erre a köré írt kör is szimmetrikus lévén, $AC = 10$ cm (**2618.** ábra). A terület $ab = 48$ cm^2, mivel $B\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$ Thalesz tétele miatt. A Pitagorasz-tétel szerint $a^2 + b^2 = 100$, ehhez $2ab$ hozzáadásával, illetve elvételével $a + b = 14$, $a - b = 2$, tehát $a = 8$, $b = 6$ cm. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, és ezért $\alpha = 73{,}74°$, a szemköztes szög pedig 106,26°.

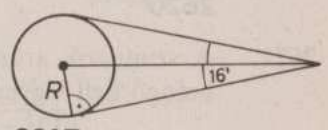
2619. Mivel a négyszög érintőnégyszög is és paralelogramma is, ezért a szemköztes oldalak összege egyenlőségéből a négyszög rombusz volta következik (**2619.** ábra). A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit,



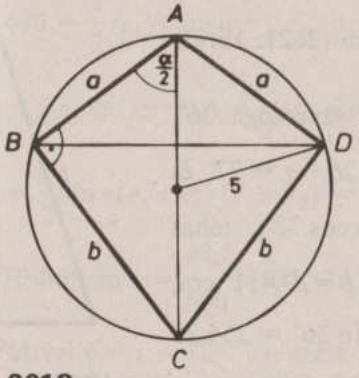
2615



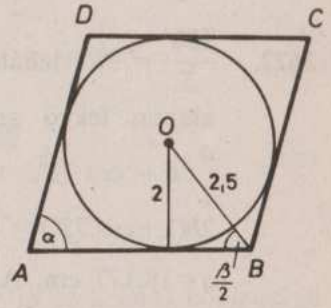
2616



2617



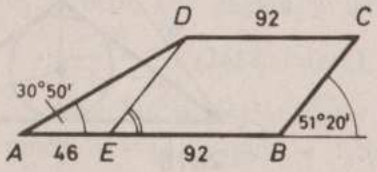
2618



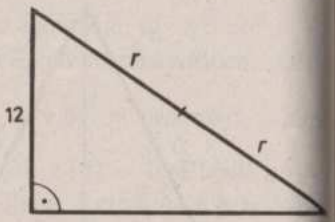
2619

tehát $\frac{2}{2{,}5} = \sin\frac{\beta}{2}$, azaz $\frac{\beta}{2} = 53{,}13°$, és így $\beta = 106{,}26°$, $\alpha = 73{,}74°$. $\frac{AO}{2{,}5} =$ $= \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ miatt $AO = 3{,}333$ cm, és ezzel a rombusz oldalai $\sqrt{AO^2 + 2{,}5^2} =$ $= 4{,}167$ cm, területe a kör sugarának és a négyszög kerülete szorzatának a fele, azaz 16,666 cm².

2620. A rövidebb $CD = 92$ cm alap D pontjából párhuzamost húzva BC-vel, ez az AB-t messe E-ben. $EB = CD = 92$ cm miatt $AE = 46$ cm, és ezért a trapéz területe az $AED_\triangle$ területének ötszöröse, mert magasságuk közös és a háromszög alapja fele akkora, mint a $BCDE$ paralelogramma EB alapja (**2620.** ábra). $t_{AED} = \frac{46^2 \sin 30°50' \sin 51°20'}{2 \sin 20°30'} = 1209$ cm², és a trapéz területe 6045 cm². Szinusztételekkel: $\frac{AD}{AE} = \frac{\sin 128°40'}{\sin 20°30'}$, amiből $AD = 102{,}56$ cm és $\frac{DE}{AE} = \frac{\sin 30°50'}{\sin 20°30'}$, tehát $BC = DE = 67{,}32$ cm.



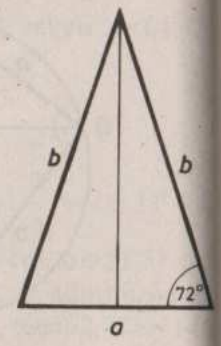
2620



2621

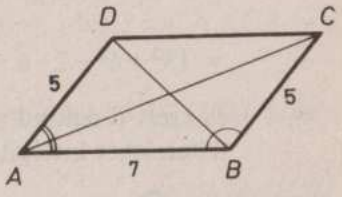
2621. A szinuszok aránya a befogók aránya, s ezért (a legrövidebb oldal befogó kell legyen) a befogók 12 és 18 cm. Az átfogó fele a keresett sugár, $r = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2}}{2} = 10{,}82$ cm (**2621.** ábra).

2622. $\frac{180°}{5} = 36°$, tehát a háromszög szárszöge 36°, alapon fekvő szögei 72°-ak. $2b + a = 77$ és $\frac{a}{2} : b = \cos 72°$, vagyis $a = 2b \cos 72°$, tehát $2b(1 + \cos 72°) = 77$, és ebből $b = 29{,}411$ cm, $a = 18{,}177$ cm. A terület $\frac{1}{2} b^2 \sin 36° = 254{,}23$ cm² (**2622.** ábra).



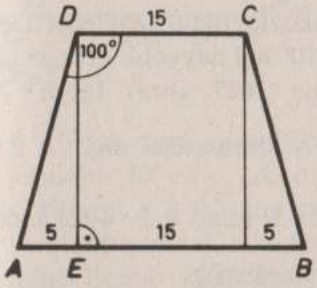
2622

2623. Az $ABC_\triangle$ és $ABD_\triangle$-ekben az AC, illetve BD oldalakra felírt koszinusztételekből $7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cos\varphi$ adja az egyik, illetve másik átlót aszerint, hogy $\varphi = 50°$, vagy $130°$ ($A\sphericalangle + B\sphericalangle = 180°$, (**2623.** ábra). Így $\sqrt{74 + 45} = \sqrt{119}$ cm hosszú az egyik, $\sqrt{74 - 45} = \sqrt{29}$ cm hosszú a másik átló.

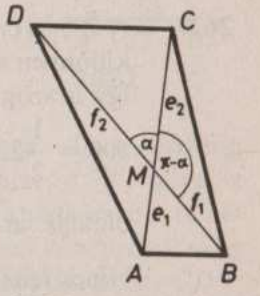


2623

2624. Az $ABCD$ trapéz rövidebb CD alapján nyugvó szög a 100°-os (**2624.** ábra). Az ADE derékszögű háromszögben $DE = AE \operatorname{ctg} 10° = 5 \cdot \operatorname{ctg} 10°$, és ezzel a trapéz területe $\frac{25 + 15}{2} DE = 100 \operatorname{ctg} 10° = 567{,}13$ cm².



2624



2625

2625. A **2625.** ábra jelöléseivel a négyszög területe

$$440 = \frac{1}{2}(e_1 f_1 \sin\alpha + f_1 e_2 \sin(\pi - \alpha) + e_2 f_2 \sin\alpha +$$

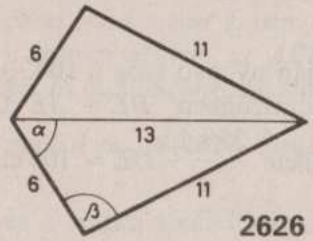
$$+ f_2 e_1 \sin(\pi - \alpha)) = \frac{1}{2} \sin\alpha (e_1 f_1 + f_1 e_2 + e_2 f_2 + f_2 e_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin\alpha (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 30 \cdot 40.$$

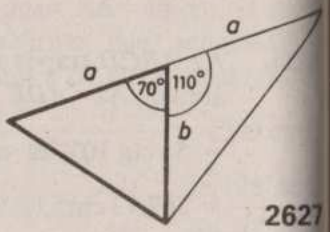
Ebből $\sin\alpha = \frac{440}{600} = 0{,}7333$, azaz $\alpha = 47{,}17°$.

2626. Mivel $6 + 6 = 12 < 13$, ezért a hosszabbik átló az azonos hosszúságú oldalak közös végpontjait köti össze, és ez felezi az itt levő szögeket,

mivel ez az átló szimmetriatengely (**2626.** ábra). $13^2 = 11^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 11 \cos\beta$, vagyis $\cos\beta = -\frac{1}{11}$ és így $\beta = 95{,}216°$. $11^2 = 13^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 13 \cos\alpha$, azaz $\cos\alpha = \frac{84}{12 \cdot 13} = \frac{7}{13}$, tehát $\alpha = 57{,}4$ és ezért a deltoid szögei 114,84°, 95,22°, 95,22°, 54,72°. Nincs tehát a feltételeket kielégítő deltoid.



2626



2627

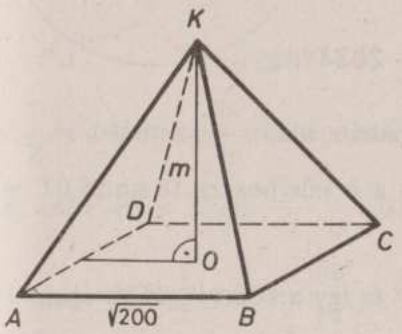
2627. A 70°-os (vagy 110°-os) szöggel szemköztes oldal nem lehet a legkisebb, különben a háromszög többi szöge 70°-nál nagyobb kellene legyen, de így a szögösszeg legalább 210° lenne (**2627.** ábra). Így $a = 22$ cm és $500 = \frac{1}{2} 22 \cdot b$ miatt $b = 45{,}45$ cm. A szinusztétel miatt a 2 : 3 : 4 az oldalak aránya, de $\frac{22}{45{,}45}$ mind a 2 : 3, mind a 2 : 4-től különbözik. Nincs tehát a feltételeket kielégítő háromszög.

2628. A **2625.** szerint $900 = \frac{1}{2} \sin 30° \cdot 60 \cdot 60$ kell legyen. Ez teljesül, hiszen $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Így van (végtelen sok) kívánt tulajdonságú konvex négyszög.

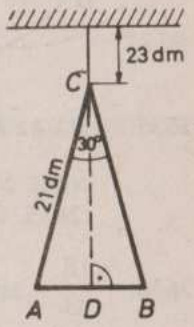
2629. Igen, van. Például: a 3, 4, 5 cm oldalú derékszögű háromszög ilyen, hiszen a befogókkal szemközti szögekre, ha egyikük α, akkor a másik $90° - \alpha$ és $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

2630. A négyzet területe $\frac{15^2}{2}\ \text{cm}^2 = 112{,}5\ \text{cm}^2$. A téglalap átlói egyenlő hosszúak és a téglalap területe **2625.** szerint $\frac{1}{2} \sin\alpha \cdot 27^2 = 112{,}5$, amiből $\sin\alpha = \frac{225}{729}$, azaz $\alpha = 17{,}98°$.

2631. A $\frac{4}{3} 12^3\pi = \frac{200\,m}{3}$-ból $m = 108{,}57$ cm, a $KDC_\triangle$-ben $KC = \sqrt{m^2 + DC^2} = \sqrt{11\,788{,}19 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{11\,788{,}19 + 100} = 109{,}03$ cm. A $KCB_\sphericalangle = \alpha$ szögre $\cos\alpha = \frac{BC}{2KC} = \frac{\sqrt{200}}{218{,}066} = 0{,}0649$, tehát $\alpha = 86{,}28°$ (**2631.** ábra).



2631

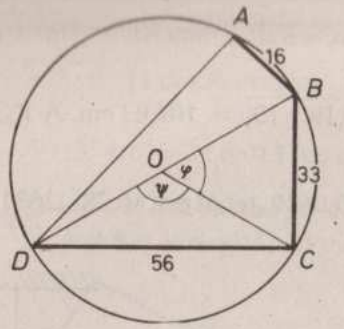


2632

2632. A 21 dm szárú egyenlő szárú háromszög magassága – ha a szárszög legalább 30°-os –, akkor a legnagyobb, ha a szárszög 30°, mivel a C közepű, $CA = 21$ dm sugarú körben egy AB húr annál kisebb, minél távolabb van a C középponttól, tehát a hozzátartozó középponti szög minél kisebb (**2632.** ábra). $CD = 21 \cos 15° = 20{,}284$ dm és így $CD + 23 = 43{,}284\ \text{dm} > 42\ \text{dm}$. A plafon tehát elérhető a létra tetejéről.

2633. A **2625.**-ben láttuk a t terület a két átló hosszának és szögük szinusza szorzatának a fele, azaz $t = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 \cdot \sin 22° = 40{,}46\ \text{cm}^2$.

2634. A $BOC_\sphericalangle = \varphi$ és $COD_\sphericalangle = \psi$ középponti szögekre, az őket tartalmazó O csúcsú egyenlő szárú háromszögekből $\frac{16{,}5}{32{,}5} = \sin\frac{\varphi}{2}$ és $\frac{28}{32{,}5} = \sin\frac{\psi}{2}$, tehát $\frac{\varphi}{2} = 30{,}51°$, illetve $\frac{\psi}{2} = 59{,}49°$ (**2634.** ábra). A kerületi és középponti szögek tételéből $BAD_\sphericalangle = \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2} = 90°$, és $BCD_\sphericalangle = 90°$. Az $AOB_\triangle$ szárszögének ϑ-nak felére $\frac{8}{32{,}5} = \sin\frac{\vartheta}{2}$, azaz $\frac{\vartheta}{2} = 14{,}25°$, és így



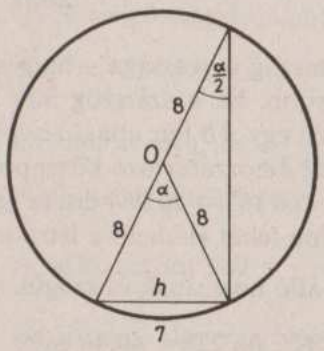
2634

az előbbiekhez hasonlóan $ADC_\sphericalangle = \frac{\varphi}{2} + \frac{\vartheta}{2} = 44{,}76°$, és $ABC_\sphericalangle = 135{,}24°$.

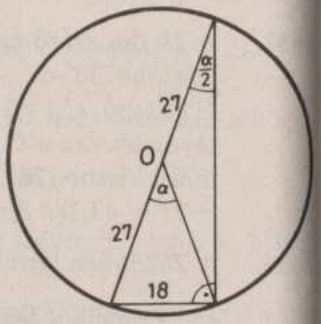
$AD = \sqrt{56^2 + 33^2 - 16^2} = 63$ (m).

2635. Ha az ívhez tartozó szög a radián, akkor $7 = 8a$-ból $a = \frac{7}{8}$, tehát az ívhez 50,13° szög tartozik és a h húr hossza $16 \sin 25{,}07° = 6{,}78$ m (**2635.** ábra).

2636. $\frac{18}{54} = \sin\frac{\alpha}{2}$, vagyis $\frac{\alpha}{2} = 19{,}47°$ és így $\alpha = 38{,}94°$ (**2636.** ábra).



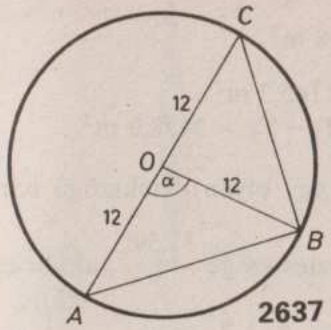
2635



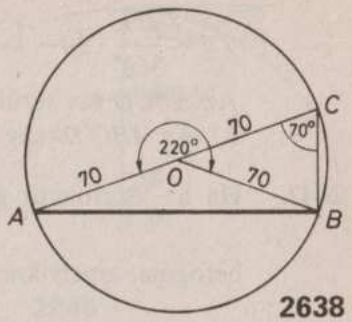
2636

2637. Mivel $\frac{12^2\pi}{2} > 120$, ezért a körcikk a félkörnél kisebb. Középponti szögét jelölje α (radián) (**2637.** ábra). Így $120 = \frac{1}{2}\alpha 12^2$, vagyis $\alpha = \frac{5}{3}$ radián, azaz 95,49°. Az AB húr pedig $24 \sin\frac{\alpha}{2} = 17{,}76$ cm.

2638. $AOB_\sphericalangle = 140°$, így az ACB derékszögű háromszögből $AB = 140 \sin 70° = 131{,}56$ cm (**2638.** ábra).



2637



2638

2639. Az AB oldalhoz $\frac{360°}{14}$ középponti szög, tehát $\frac{360°}{28}$ kerületi szög tartozik és ezért $AB = 36 \sin\frac{360°}{28} = 8{,}01$, és a terület

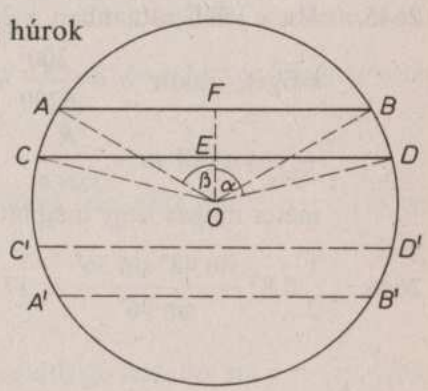
$14t_{AOB} = 14 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18^2 \sin\frac{360°}{14} = 984{,}05$ cm^2.

2640. Ha a tízszög egy oldala AB, a köré írt kör középpontja O, úgy $429 = 10 \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin 36° = 2{,}94r^2$ és így $r = 12{,}08$ cm. A szabályos tízszög centrálszimmetrikus, így leghosszabb átlója a köré írt kör átmérője, 24,16 cm. A tízszög beírt körének sugara az O-nak AB-től való távolsága $r \cos 18° = 11{,}49$ cm. $2\varrho \cdot \operatorname{tg} 18° = a$, $a = 7{,}47$ cm.

2641. Két lehetőség van: A párhuzamos húrok sávja

a) tartalmazza O-t;

b) nem tartalmazza O-t.



2641

a) $\cos\alpha = \frac{12}{48} \to \alpha = 75{,}5°$

$\cos\beta = \frac{25}{48} \to \beta = 58{,}6°$.

$OE = 12$ m

$OF = 25$ m

$r = 48$ m

A CD által lemetszett kisebb szelet területe

$T_1 = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot 2\alpha - \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2} = 2477{,}5$ m^2.

Az AB által lemetszett kisebb szelet területe

$T_2 = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot 2\beta - \frac{r^2 \sin 2\beta}{2} = 1331{,}8\ \text{m}^2$.

Az $ABCD$ sáv területe $T_1 - T_2 = 1145{,}7\ \text{m}^2$.

b) Az $ABC'D'$ sáv területe $T_{\text{kör}} - T_1 - T_2 = 3428{,}9\ \text{m}^2$.

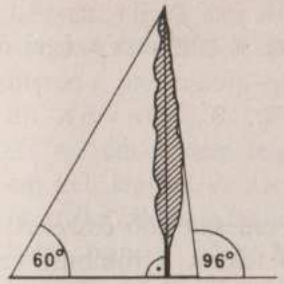
2642. Ha a $\frac{\pi}{6}$ térfogatú gömb r sugara egy olyan derékszögű háromszög befogója, amelyiknek ezzel szemköztes szöge $\frac{31'59''}{2}$, akkor ennek az átfogója a keresett távolságot adja. $\frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi r^3$-ből $r = \frac{1}{2}$ hosszúság egység. Az átfogó tehát $\frac{0{,}5}{\sin \frac{31'59''}{2}} = 108{,}7$ hosszúság egység.

2643. Az árnyék a fa hosszának $\operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$-szorosa, ha a nap 60°-os szögben süt. A 60° $\frac{8}{5}$-szöröse 96°, ekkor az árnyék a fa hosszának $\operatorname{ctg} 84° = 0{,}105$-szerese, így az árnyék a 0,182-szeresére változott (**2643.** ábra).

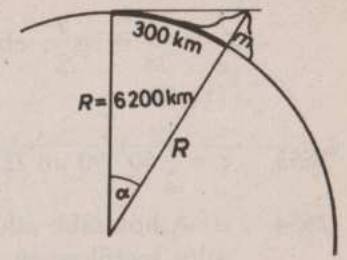
2644. $m = 2{,}5 \operatorname{ctg} 5°\ \text{km} = 28{,}58\ \text{km}$.

2645. Ha a jelöli radiánban a 300 km hosszú körívhez tartozó középponti szöget, akkor $a = \frac{300}{6200} = 0{,}048$ radián (**2645.** ábra). Az $\frac{R}{R+m} = \cos a$-ból $m = \frac{R}{\cos a} - R = \frac{6200}{0{,}9988} - 6200 = 7{,}25$ km, tehát 7250 méter magas hegy még látszik 300 km távolból.

2646. $\frac{1}{2} 8{,}8^2 \frac{\sin 48° \sin 36°}{\sin 96°} = 17\ \text{cm}^2$.



2643



2645

2647. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és felezik a rombusz szögeit, tehát $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{7}{17}$, vagy $\frac{\alpha}{2} = 22{,}38°$ és ezért a rombusz szögei: 44,76° és 135,24°.

2648. A rombusz területét a $77^2 \sin \alpha$ is adja, tehát $\sin \alpha = \frac{333}{77^2}$ és ezzel $\alpha = 3{,}22°$, a másik szög pedig 176,78°.

2649. A 12 cm hosszú magassághoz tartozó oldal: $\frac{2 \cdot 78}{12} = 13$ cm. Ha az egyenlő szárú háromszögnek ez alapja, akkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{6{,}5}$, tehát $\alpha = 61{,}56°$, és így ez a háromszög legnagyobb szöge. Ha a szárak 13 cm hosszúak, akkor $\sin \beta = \frac{12}{13}$, azaz $\beta = 67{,}38°$ és akkor ez a legnagyobb szög.

2650. A deltoid területe a két átló szorzatának fele, azaz $100 = \frac{60 \cdot f}{2}$, és így $f = \frac{10}{3}$ cm.

2651. A kör sugara (Thalész-tétel miatt) az átfogó fele. Így $\sin \alpha = \frac{3}{14}$, tehát $\alpha = 12{,}37°$ és $90° - \alpha = \beta = 77{,}63°$.

2652. Ha e és f jelöli az átlókat, úgy szorzatuk a rombusz területének 2-szerese, tehát $ef = 532$, és ehhez az $e + f = 47$. Ezek szerint $e = 28$, $f = 19$ cm.

$\frac{f}{e} = \frac{19}{28} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, ebből $\frac{\alpha}{2} = 34{,}16°$, azaz a rombusz szögei 68,32° és 111,68°.

2653. $t = \frac{1}{2} 60 \cdot 90 \sin 75° = 2608 \text{ cm}^2$.

2654. *a)* A hosszabb átló a kisebbik szögek csúcsait köti össze. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és felezik a rombusz szögeit is.

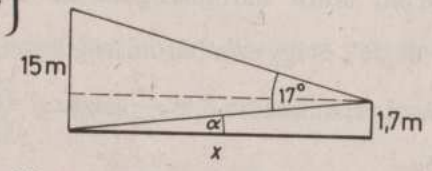
$$t = \frac{ef}{2} = \frac{5 \cdot 5 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{25}{2} \operatorname{tg} 25° = 5{,}83 \text{ m}^2.$$

b) $t = \frac{ef}{2} = \frac{5 \cdot 5 \operatorname{ctg} 25°}{2} = 26{,}8 \text{ m}^2$.

2655. $t = \frac{1}{2} 12^2 \frac{\sin^2 70°}{\sin 40°} = 98{,}9 \text{ cm}^2$.

2656. A háromszög szögei 90°, 60° és 30°. Thalesz tétele miatt az átfogó a köré írt kör átmérője, azaz 100 cm. A 30°-os szöggel szembeni oldal ennek fele, 50 cm, a másik befogó $50 \cdot \sqrt{3}$ cm.

2657. $\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{x}{1{,}7} \\ \operatorname{ctg}(17° - \alpha) &= \frac{x}{15 - 1{,}7} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = 1{,}99° \Rightarrow x = 48{,}86 \text{ m}$ (**2657.** ábra).



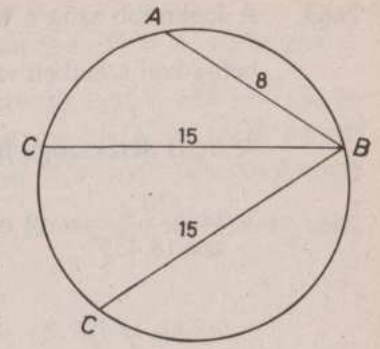
2657

2658. A két húr hossza egyenlő, mert a mellékszögek szinusza egyenlő, és $h = 2 \cdot 33 \cdot \sin 37° = 39{,}72$ cm.

2659. Az a, b, c oldalú t területű háromszög köré írt kör r sugara $\frac{abc}{4t}$.

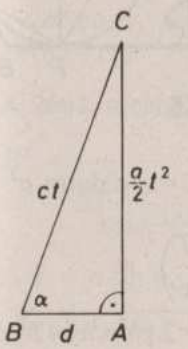
A trapéz köré írt kört a trapéz két szomszédos oldala és ezek szöge meghatározza. $x^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 36° = 44{,}1 \text{ cm}^2$, tehát $x = 6{,}64$ cm. $t = \frac{5 \cdot 10 \cdot \sin 36°}{2} = 14{,}69 \text{ cm}^2$, és így $r = 5{,}65$ cm. Az előbbi háromszöget csak a 10 cm-es oldal felező merőlegesére tükrözve nyerhetünk a feltételeket kielégítő szimmetrikus trapézt. Ennek rövidebb alapja $10 - 2 \cdot 5 \cdot \cos 36° = 10 - 8{,}09 = 1{,}91$ cm.

2660. Legyen $AB = 8$ cm, $BC = 15$ cm (**2660.** ábra). Az AC átló csak a 13 cm-es lehet, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt $AB + AC > BC$ kell legyen, és ez $AC = 7$ cm-re nem teljesül. Így $BD = 7$ cm kell legyen, ez azonban lehetetlen, mert D a (B-t nem tartalmazó) AB ívnek belső pontja, tehát BD ív hosszabb, mint az AB ív (és a félkörnél nem nagyobb), és ezért a hozzátartozó húr is hosszabb.



2660

2661. Az ABC derékszögű háromszögből $\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}t^2}{ct} = \frac{a}{2c}t = \frac{1}{5}t$,



$\cos\alpha = \frac{d}{ct} = \frac{2}{t}$, és így ezek szorzatából $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, azaz $2\alpha = 53{,}13°$ vagy $2\alpha = 126{,}87°$, tehát $\alpha = 26{,}56°$ vagy $\alpha = 63{,}43°$. Az első esetben 2,23 s, a másodikban 4,45 s alatt éri utol a villamost (**2661.** ábra).

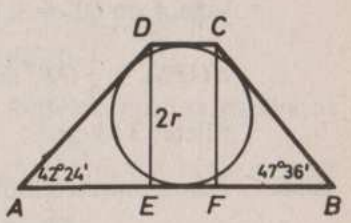
2661

2662. A trapéz $DE = CF$ magassága a beírt kör átmérője (**2662.** ábra), így az ADE illetve a BCF derékszögű háromszögekből $AD = \frac{2r}{\sin 42{,}4°}$, ill. $CB = \frac{2r}{\sin 47{,}6°}$. A négyszög érintőnégyszög, tehát $AB + CD =$

$= AD + CB = 2r\left(\frac{1}{\sin 42{,}4°} + \frac{1}{\sin 47{,}6°}\right)$

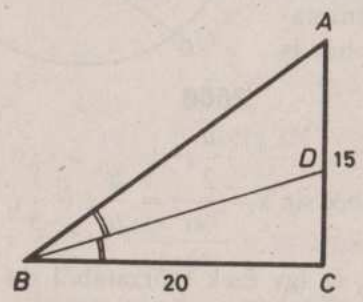
és területe $t = \frac{AB + DC}{2} \cdot 2r$, tehát $36{,}2 =$

$= 2r^2\left(\frac{1}{\sin 42{,}4°} + \frac{1}{\sin 47{,}6°}\right)$, és ebből $r^2 = 6{,}38$, és ezért $r = 2{,}53$ hosszúság egység.

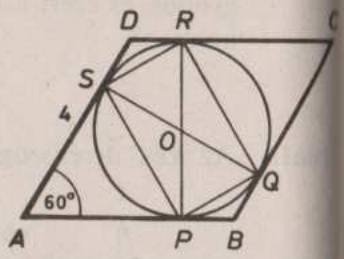


2662

2663. A legkisebb szög a legkisebb oldallal, vagyis a kisebbik $AC = 15$ cm befogóval szemben van (**2663.** ábra). $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} = \operatorname{tg}\beta$, azaz $\beta = 36{,}87°$. A BCD derékszögű háromszögből $\frac{CB}{BD} = \cos\frac{\beta}{2}$, vagyis $BD = \frac{20}{\cos 18{,}435°} = 21{,}08$ cm (**2663.** ábra).



2663



2665

2664. A T terület $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, azaz $\sin\alpha = \frac{2T}{bc}$. A $BC = a$ oldalra $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{1 - \left(\frac{2T}{bc}\right)^2} = b^2 + c^2 - 2\sqrt{b^2c^2 - 4T^2}$, tehát $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\sqrt{b^2c^2 - 4T^2}}$ és így $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{bc\sqrt{b^2 + c^2 - 2\sqrt{b^2c^2 - 4T^2}}}{4T}$.

2665. A $PQRS$ négyszög téglalap, mivel PR és SQ átlói egyenlő hosszúak (a rombusz magassága), és a rombusz O középpontjában felezik egymást. E téglalap területét az OPS egyenlő szárú (**2665.** ábra), 120°-os szárszögű háromszög területének négyszerese adja. Az $ABCD$ rombusz magassága $4\sin 60° = 2\sqrt{3}$ cm, ennek fele az $OP = OS$, tehát $t(OPS) = \frac{1}{2}OP^2\sin 120° = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm², és így a négyszög területe: $3\sqrt{3}$ cm².

2666. A koszinusztételből $15^2 = 365 - 2bc\cos\alpha$, azaz $bc\cos\alpha = 70$, a területe pedig $84 = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, és ezek hányadosából $\operatorname{tg}\alpha = \frac{168}{70} = 2{,}4$, és így

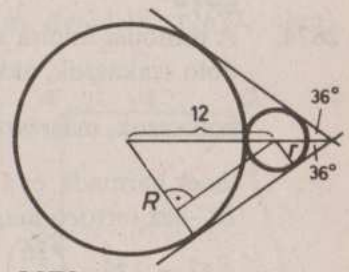
$\alpha = 67{,}38°$. Ezzel $bc = \frac{70}{\cos\alpha} = 182$, tehát $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 365 + 364 = 729$, azaz $b + c = 27$, illetve $(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 365 - 364 = 1$, azaz ($b > c$ feltétellel) $b - c = 1$ és ezért $b = 14$, $c = 13$ cm. A háromszög β szögére pedig $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ miatt $\cos\beta = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2\cdot 15\cdot 13} = \frac{198}{390} = 0{,}5077$, tehát $\beta = 59{,}49°$ és ezért $\gamma = 53{,}13°$.

2667. A szinusztétellel $5 : 9 = \sin\alpha : \sin\beta$ és $3\alpha = \beta$. Mivel $\sin 3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$, ezért $\frac{5}{9} = \frac{1}{3 - 4\sin^2\alpha}$, tehát $\sin^2\alpha = \frac{6}{20}$, és így $\alpha = 33{,}21°$ (ennek kiegészítő szöge nem jöhet szóba, hiszen háromszosa a β kell legyen), $\beta = 99{,}63°$ és $\gamma = 47{,}16°$. A c oldalra $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$, tehát $c^2 = 25 + 81 - 2\cdot 5\cdot 9\cos 47{,}16° = 44{,}8$, és ezért $c = 6{,}69$ cm.

2668. A **2662.** megoldásának mintájára $R^2 = \frac{12}{2\left(\frac{1}{\sin 30°} + \frac{1}{\sin 72°}\right)} = 1{,}97$ cm², tehát $R = 1{,}4$ cm.

2669. A $7 = a\sin\varphi$, $5 = b\sin\varphi$ miatt a paralelogramma területét $ab\sin\varphi$-vel számolva $42 = \frac{35}{\sin\varphi}$, vagyis $\sin\varphi = \frac{5}{6}$ és ezért $\varphi = 56{,}44°$, $180 - \varphi = 123{,}56°$.

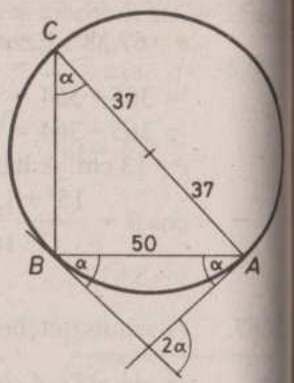
2670. A kívülről érintkezés miatt $R + r = 12$ cm (**2670.** ábra). A körök centrálisuk egyenesére szimmetrikusak, ezért a centrális felezi a külső érintők szögét, és így $R - r = 12\sin 36° = 7{,}05$ cm, ezért $R = 9{,}53$ cm és $r = 2{,}47$ cm.



2670

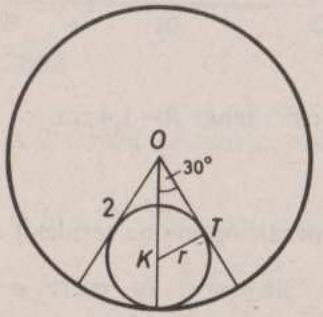
2671. $\varrho^2 = \frac{3}{\pi}$, azaz $\varrho = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$. A rombusz területe kétféleképpen számolható: $a^2\sin\alpha$, illetve $2a\varrho$. Ezért $4a^2\varrho^2 = 36$-ból. $a^2 = 3\pi$ és $6 = 3\pi\sin\alpha$, azaz $\sin\alpha = \frac{2}{\pi}$, tehát $\alpha = 39{,}54°$ és $180° - \alpha = 140{,}46°$.

2672. Az azonos ívhez (C-t nem tartalmazó $\overset{\frown}{AB}$) egyenlő kerületi szögek tartoznak, így $\sin\alpha = \frac{50}{74}$, azaz $\alpha = 42{,}51°$, és az érintők hajlásszöge $2\alpha = 85{,}02°$ (**2672.** ábra).

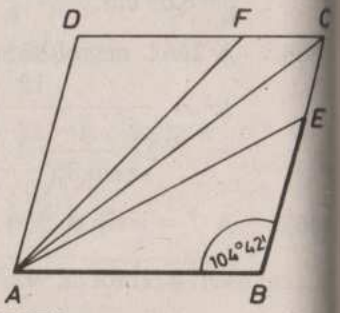


2672

2673. Az OKT derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szemköztes befogó fele az átfogónak, és mivel a két kör belülről érinti egymást, ezért $2 - r = OK = 2r$, vagyis $r = \frac{2}{3}$ cm (**2673.** ábra).



2673

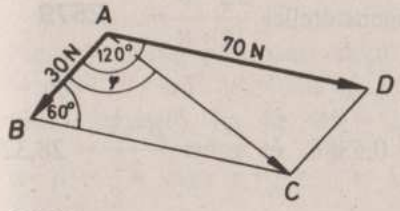


2674

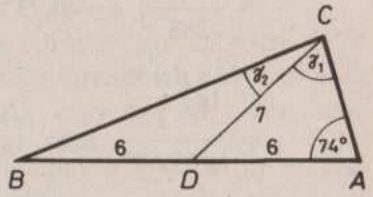
2674. A rombusz átlóira szimmetrikus, ezért ha AE és AF a területet harmadoló szakaszok, akkor egyrészt $AE = AF$, mert az AC-ra szimmetrikus szakaszok, másrészt $BE = \frac{2}{3}BC$, mert ABE területe a rombusz területének harmada, és a BE-hez tartozó magassága, ami egyúttal a rombusz BC-hez tartozó magassága is (**2674.** ábra). Az $ABE_\triangle$ AE oldalára $AE^2 = 13^2 + \left(\frac{26}{3}\right)^2 - 2 \cdot 13 \cdot \frac{26}{3} \cos 104°42' = 301{,}29$, vagyis $AE = AF = 17{,}36$ cm.

2675. Az $ABC_\triangle$-ből $AC^2 = 30^2 + 70^2 - 2 \cdot 30 \cdot 70 \cdot \cos 60° = 3700$, vagyis $\overrightarrow{AC} = 60{,}83$ N, és $30^2 + 3700 - 2 \cdot 30 \cdot \sqrt{3700} \cos\varphi = 70^2$, amiből $\cos\varphi = -\frac{5}{\sqrt{3700}}$, és így $\varphi = 94{,}72°$, $120° - \varphi = 25{,}28°$ (**2675.** ábra).

2676. A területből $4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin\alpha$, azaz $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, tehát $\alpha = 53{,}13°$ vagy $\alpha = 126{,}87°$. A tangenstételből $\frac{5-2}{5+2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{tg} 63{,}44°}$, vagy $\frac{3}{7} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}{\operatorname{tg} 26{,}57°}$. Az előbbivel $\frac{\gamma-\beta}{2} = 40{,}61°$, az utóbbiból $\frac{\gamma-\beta}{2} = 12{,}1°$, és így a háromszög szögei 53,13°, 104,05° és 22,82°, vagy pedig 126,87°, 37,67° és 14,47°.



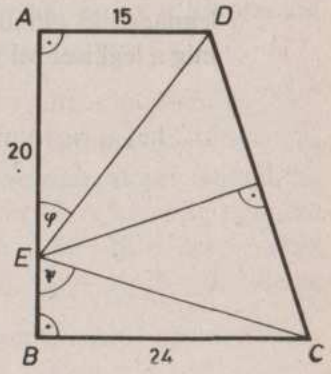
2675



2677

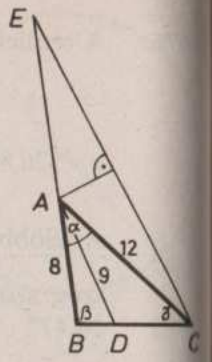
2677. Az $ACD_\triangle$-ben $6 : 7 = \sin\gamma_1 : \sin 74°$, azaz $\sin\gamma_1 = \frac{6 \sin 74°}{7} = 0{,}8239$, és így ($\gamma_1 < 74°$, mivel $AD = 6 < CD = 7$) $\gamma_1 = 55{,}48°$. A $BCD_\triangle$-ben tangenstétellel $\frac{7-6}{7+6} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\beta}{2}}{\operatorname{tg} 25{,}26°}$, tehát $\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\beta}{2} = 2{,}08°$, és ezért $\gamma_2 = 27{,}34°$, vagyis $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 82{,}82°$ és $\beta = 23{,}18°$ (**2677.** ábra). $BC = 11{,}76$ m; $AC = 5{,}6$.

2678. Az ADE derékszögű háromszögből egyrészt $ED^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, vagyis $ED = EC = 25$ cm, másrészt $\frac{AD}{ED} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \sin\varphi$, vagyis $\varphi = 36{,}87°$ (**2678.** ábra). Az EBC derékszögű háromszögben $\frac{BC}{EC} = \frac{24}{25} = \sin\psi$, vagyis $\psi = 73{,}74°$. Így a CDE szögei $180° - (\varphi + \psi) = 69{,}39°$ és 55,305°; 55,305°.



2678

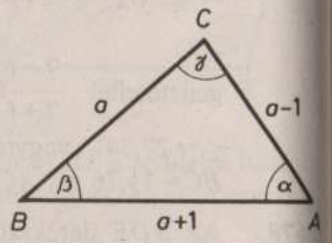
2679. A BA szakasz A-n túli meghosszabbítására mérjük fel az $AE = AC = 12$ cm-es szakaszt (**2679.** ábra). Az $AEC_\triangle$ egyenlő szárú, és EC alapja párhuzamos AD-vel, mert mindketten merőlegesek az $EAC\sphericalangle$ felezőjére. A párhuzamos szelők tételének következményeként így $EC : AD = EB : AB$, azaz $EC = \frac{9 \cdot 20}{8} = 22{,}5$ cm. Az $AEC_\triangle$-ből $22{,}5^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos(\pi - \alpha)$, vagyis $\cos\alpha = \frac{218{,}25}{288}$, $\alpha = 40{,}73°$. A tangenstétellel $\frac{12-8}{12+8} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} 69{,}64°}$, azaz $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = 0{,}5388$, és ezért $\frac{\beta-\gamma}{2} = 28{,}32°$, tehát $\beta = 97{,}95°$ és $\gamma = 41{,}32°$.



2679

2680. Az utóbbi két egyenletből $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, és így az aránypárból $c = 2$. Ez pitagoraszi számhármas, így a háromszög derékszögű. Mivel $c = 2b$, a két hegyesszöge 30° és 60°.

2681. A koszinusztételből $(a+1)^2 = (a-1)^2 - 2a(a-1)\cos\gamma$, vagyis $\cos\gamma = \frac{a-4}{2(a-1)}$. A szinusztételből $\frac{a+1}{a-1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, de mert a legnagyobb oldallal szemköztes szög a γ, míg a legkisebbel szemköztes a β, és $\gamma = 2\beta$ (**2681.** ábra), ezért $\frac{a+1}{a-1} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta$, és $\cos\gamma = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{a-4}{2(a-1)}$. Az első négyzetéből kivonva a második kétszeresét $2 = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 - \frac{a-4}{a-1} = \frac{7a-3}{(a-1)^2}$, és ebből $2a^2 - 11a + 5 = 0$, vagyis $a = 5$, vagy $a = \frac{1}{2}$. Ez utóbbi nem ad háromszöget, mert $a - 1 < 0$ lesz, tehát a háromszög oldalai 4, 5 és 6 egységnyiek.



2681

2682. Az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = \cos 4\beta$, és a két szög koszinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha $4\alpha - 4\beta = 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, vagy $4\alpha + 4\beta = 2\pi n$, azaz $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}n$ vagy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}n$. Feltehető, hogy $\alpha \geqq \beta$, és így az első esetben $n = 0$ vagy $n = 1$, míg az utóbbi esetben csak $n = 1$ lehetséges. Az $n = 0$-ra a háromszög egyenlő szárú, míg $n = 1$-re a háromszögnek β és $\frac{\pi}{2} + \beta$ szögei vagy β és $\frac{\pi}{2} - \beta$ szögei vannak, ez utóbbi esetben a háromszög derékszögű.

2683. Az aránypár akkor és csak akkor teljesül, ha $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$, azaz ha $\cos(\alpha+\beta) = 0$, ha tehát $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Mivel $0 < \alpha + \beta < \pi$, ezért $k = 0$ lehet csak, és így a háromszög derékszögű.

2684. Mivel $\alpha + \gamma = \pi - \beta$ és $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$, valamint $\beta + \gamma = \pi - \alpha$ és $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, ezért az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta$, ha tehát $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. A két szög szinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha $2\alpha - 2\beta = 2\pi n$, vagy $2\alpha + 2\beta = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha \geqq \beta$ feltehető, így $\alpha - \beta = 0$, illetve $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ lehet csak, vagyis a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

2685. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\gamma$ pontosan akkor, ha $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}=1$, azaz ha – a szinusztétel miatt – $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$, vagyis $a^2+b^2=c^2$. Ez pedig annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a, b és c derékszögű háromszög befogói, illetve átfogója legyen.

2686. $\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$ és $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, továbbá $\sin\beta\cdot\sin\gamma\neq 0$ (hiszen β és γ nem lehet π-nek többszöröse), ezért az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$, azaz ha $\sin\gamma\cos\gamma=\sin\beta\cos\beta$, vagyis $\sin 2\gamma=\sin 2\beta$. Lásd a **2684.** feladatot.

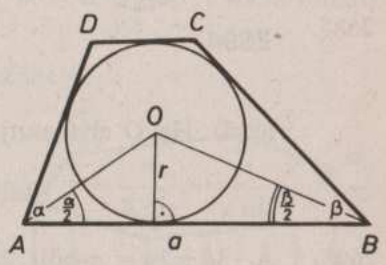
2687. A szinusztétel miatt $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}$ pontosan akkor, ha $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, azaz $\sin\alpha\cos\alpha=\sin\beta\cos\beta$, vagyis $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$. Mivel $\alpha\neq\beta$, ezért $2\alpha+2\beta=\pi(2n+1)$, és így $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ kell legyen. $0<\alpha+\beta<\pi$ miatt $n=0$ lehet csak, vagyis $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, tehát a háromszög derékszögű.

2688. A háromszög t területe $\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$-vel egyenlő. Ezért $2t=\frac{c^2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$. Ez pedig pontosan akkor áll, ha $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=$ $=\frac{\sin(\pi-\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$, vagyis ha $\cos\alpha\cos\beta=$ $=\sin\alpha\sin\beta$, ha tehát $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)=0$, azaz $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, és ezt kellett igazolni.

2689. $\operatorname{ctg}2\gamma=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\gamma\right)=\operatorname{tg}(2\alpha+3\beta)$ pontosan akkor, ha $2\alpha+3\beta-\left(\frac{\pi}{2}-2\gamma\right)=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, ha tehát $2\alpha+2\beta+2\gamma+\beta=\frac{\pi}{2}+\pi k$. $2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi$ miatt előbbi egyenlőségünk pontosan a $\beta=\frac{\pi}{2}$ esetén áll.

2690. Az egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\cos^2\beta=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=$ $=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, vagy $\cos\beta=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ legyen, vagyis $\beta\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\pi n$ vagy $\beta\pm\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ teljesüljön. Mivel $\alpha+\beta$ és $|\alpha-\beta|$ π-nél kisebbek, ezért $n=0$ lehet csak, vagyis $\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, illetve $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ kell legyen.

2691. Az $OAB_\triangle$ területe kétféleképpen is felírható (**2691.** ábra): $\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(AOB_\sphericalangle)}$ és $\frac{ar}{2}$ formulákkal. Ezért $AOB_\sphericalangle=\pi-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$ és $\sin\left(\pi-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$ miatt $r=a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$.



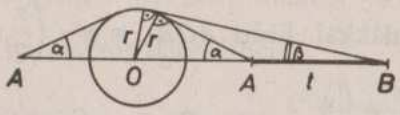
2691

2692. Szinusztételekből: $\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\frac{b_1}{a_1}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ és $\frac{c_1}{a_1}=$ $=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$, így $\frac{bb_1}{aa_1}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$ és $\frac{cc_1}{aa_1}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha}$.

Mivel $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta$, ezért $\frac{bb_1+cc_1}{aa_1} = \frac{\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\alpha} = \sin^2\beta+\cos^2\beta = 1$, és ezt kellett igazolnunk.

2693. $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c} = c^2$ pontosan akkor, ha $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2-ab+b^2 = c^2$. A cosinustétel miatt $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, amit előbbivel egybevetve $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, azaz $\gamma = 60°$ adódik. Ezzel $-\frac{1}{2} = \cos 120° = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \frac{3}{4}$, tehát $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{4}$, amiért $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$, tehát $\alpha-\beta = \pi n$, de $n=0$ lehet csak, hiszen α, β háromszög szögei, így $\alpha=\beta$. Ezt a $\gamma=60°$-kal összevetve: a háromszög szabályos.

2694. Ha O nem választja el az A és B pontokat, akkor $\frac{r}{\sin\alpha} = OA$ és $\frac{r}{\sin\beta} = OA+t$ (A az O és B között van) (**2694.** ábra). Így



2694

$r\left|\frac{1}{\sin\beta}-\frac{1}{\sin\alpha}\right| = t$, tehát $r = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{|\sin\alpha-\sin\beta|}t$ (az abszolútértékkel a B és A szerepe felcserélhető). Ha O elválasztja A és B pontokat, akkor $OA+OB = t$ miatt $\frac{r}{\sin\alpha}+\frac{r}{\sin\beta} = t$, vagyis $r = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}t$.

2695. A $3\beta+2\gamma = \pi$-ből $2\alpha+2\beta+2\gamma = 2\pi$ miatt $\beta = 2\alpha-\pi$, és ezzel $2\gamma = \pi-3\beta$ miatt $2\gamma = \pi-3(2\alpha-\pi)$, azaz $\gamma = 2\pi-3\alpha$. A színusztétel miatt $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin(2\alpha-\pi)}{b} = \frac{\sin(2\pi-3\alpha)}{c}$, amiből felhasználva, hogy $\sin(2\alpha-\pi) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha$ és $\sin(2\pi-3\alpha) = -\sin 3\alpha = \sin\alpha(4\sin^2\alpha-3)$, $\frac{b}{a} = -2\cos\alpha$, $\frac{c}{a} = 4\sin^2\alpha-3$ adódik. Ezekkel

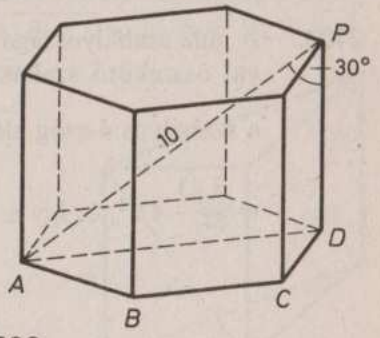
$1-\frac{c}{a} = 4-4\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}$, és ezt $a^2\left(1+\frac{c}{a}\right)$-val szorozva $a^2-c^2 = b^2\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

2696. A bal oldal azonos átalakításával, a színusztételt is alkalmazva:
$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2[\pi-(\alpha+\beta)]} =$
$= \frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$.

2697. $2\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin 2\gamma+\sin 2\beta}{2\cos\beta\cos\gamma} =$
$= \frac{2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)}{2\cos\beta\cos\gamma} = \frac{2\sin\alpha\cos(\beta-\gamma)}{2\cos\beta\cos\gamma}$ pontosan akkor, ha ($\sin\alpha\neq 0$ miatt) $2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta-\gamma) = \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$, azaz ha $0 = \cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta+\gamma)$, ha tehát $\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$, és így a háromszög derékszögű.

2698. A gúla térfogata $\frac{1}{3}\,\mathrm{dm}^3$. Az 1,5 dm alkotójú 25°-os félnyílásszögű kúp magassága $1{,}5\cos 25° = 1{,}36$ dm, alapkörének sugara pedig $1{,}5\sin 25° = 0{,}63$ dm. Egy ilyen kúp térfogata $\frac{1}{3}\pi r^2 m = 0{,}57\ \mathrm{dm}^3$, tehát a 100 db gúlából $\left[\frac{100}{3\cdot 0{,}57}\right] = 58$ darab kúp készíthető.

2699. Az APD derékszögű háromszögben $PD = 10\cos 30° = 5\sqrt{3}$ cm a hasáb magasságát, $AD = 10\cdot\sin 30° = 6$ cm az alapél kétszeresét adja. Így a térfogat $\frac{6\cdot 2{,}5^2\cdot\sin 60°}{2}\cdot 5\sqrt{3} = 140{,}6\ \mathrm{cm}^3$ (**2699.** ábra).

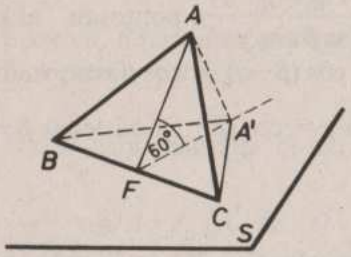


2699

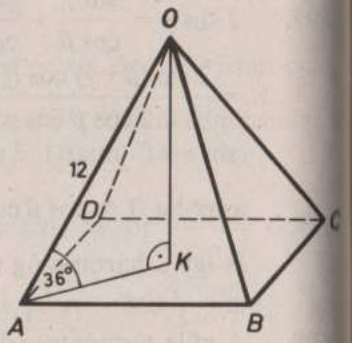
2700. A két sík hajlásszöge a rájuk merőleges gömbsugarak φ hajlásszögével egyenlő. $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{5}{20}$, azaz $\frac{\varphi}{2}=14{,}45°$, és ezért $\varphi=28{,}9°$.

2701. Az S sík illeszkedjék az ABC háromszög BC oldalára, és legyen az A csúcs vetülete A' e síkon. A BCA' egyenlő szárú (**2701.** ábra). Ha F a BC felezőpontja, akkor $AFA'_{\sphericalangle}=60°$ miatt $A'F=AF\cos 60°=\frac{AF}{2}$, és így $\frac{BF}{A'F}=\frac{2BF}{AF}=2\operatorname{tg}30°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}BA'F_{\sphericalangle}$, tehát $BA'F_{\sphericalangle}=49{,}11°$.

A vetületi háromszög szögei tehát 40,89°; 40,89°; 98,22°.



2701



2702

2702. Az OA oldalélnek az alapsíkkal való szöge, a gúla szabályossága miatt az $OAC_{\sphericalangle}$ 36°-kal egyenlő (**2702.** ábra). A gúla térfogata $\frac{1}{3}\frac{AC^2}{2}\cdot OK=$

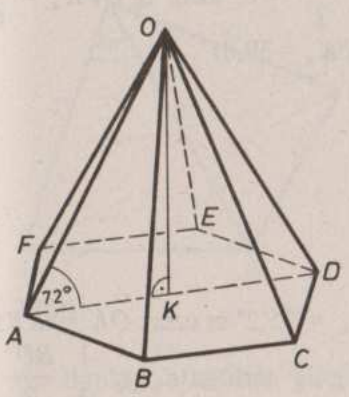
$=\frac{1}{6}(2AK)^2\cdot OK=\frac{2}{3}(12\cos 36°)^2\cdot 12\sin 36°=443{,}2\ \text{cm}^3$.

2703. A gúla szabályossága miatt a hatszög K középpontját a gúla O csúcsával összekötő szakasz a gúla magassága (**2703.** ábra), másrészt AK a szabályos 6-szög alapéle is, így az alaplap területe $6\cdot\frac{AK^2}{2}\sin 60°=$

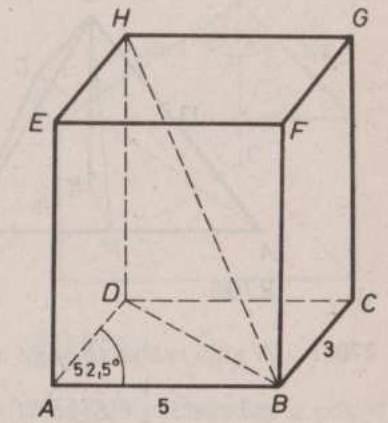
$=\frac{3\sqrt{3}}{2}AK^2$, és így a térfogatra

$$9=\frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{2}AK^2\cdot OK=\frac{\sqrt{3}}{2}(OA\cdot\cos 72°)^2(OA\cdot\sin 72°),$$

amiből $OA^3=\frac{18}{\sqrt{3}\cos^2 72°\sin 72°}=114{,}43\ \text{dm}^3$, tehát $OA=4{,}85$ dm.



2703

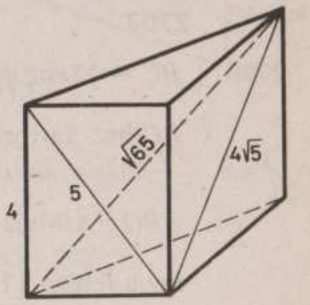


2704

2704. A hasáb alapterülete $3\cdot 5\cdot\sin 52{,}5°=11{,}9\ \text{cm}^2$. A $BH=AC$ miatt a hasáb magassága $HD=\sqrt{BH^2-BD^2}=\sqrt{AC^2-BD^2}$ (**2704.** ábra). Mivel $AC^2=5^2+3^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 127{,}5°$ és $BD^2=5^2+3^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 52{,}5°$, ezért $HD=\sqrt{60\cos 52{,}5°}=6{,}04$ cm, és így a térfogat $11{,}9\cdot 6{,}04=71{,}9\ \text{cm}^3$.

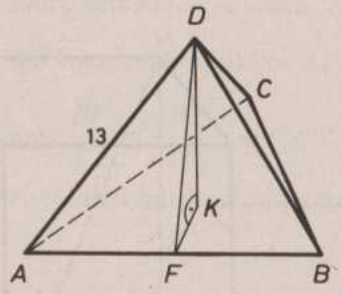
2705. A hasáb oldallapjai téglalapok, így az alapélek $\sqrt{25-16}=3$, $\sqrt{16\cdot 5-16}=8$ és $\sqrt{65-16}=7$ cm-esek (**2705.** ábra). Az alaplap területe tehát *Heron*-formulával $\sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}=\sqrt{108}=10{,}39\ \text{cm}^2$, és ezért a térfogat $4\sqrt{108}\ \text{cm}^3$, a felszín pedig $2\sqrt{108}+4(3+8+7)=2\sqrt{108}+72=$

$=92{,}78\ \text{cm}^2$.



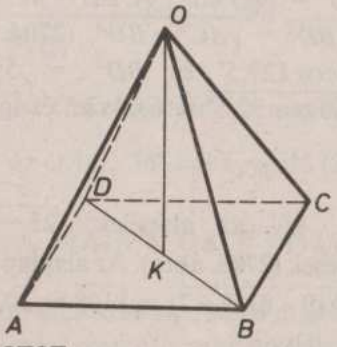
2705

2706. Az $OABC$ gúla AB alapélének felezőpontja F, az ABC szabályos háromszög középpontja K (**2706.** ábra). Az $OFK_\sphericalangle$ méri a keresett szöget, és $\frac{5}{FK} = \operatorname{tg} OFK_\sphericalangle$. Az OAK háromszögben $AK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm, és az $ABC_\triangle$ szabályossága miatt $FK = \frac{AK}{2} = 6$, azaz $\operatorname{tg} OFK_\sphericalangle = \frac{5}{6}$, tehát $OFK_\sphericalangle = 39{,}81°$.

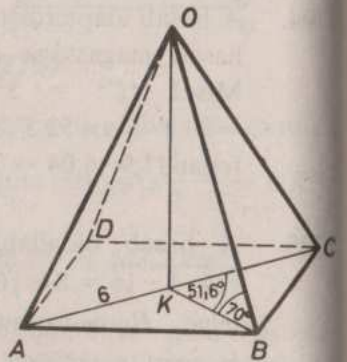


2706

2707. A gúla szabályossága miatt $OBK_\sphericalangle = 75{,}2°$ és ezért $OK = KB \operatorname{tg} 75{,}2°$, másrészt $\frac{1}{2} OK(2KB) = 144$. A gúla térfogata így $\frac{1}{3} \cdot \frac{BD^2}{2} \cdot OK = \frac{2KB^2 \cdot OK}{3} = \frac{288}{3} KB = 96 \cdot \frac{12}{\sqrt{\operatorname{tg} 75{,}2°}} = 592{,}15$ cm^3 (**2707.** ábra).



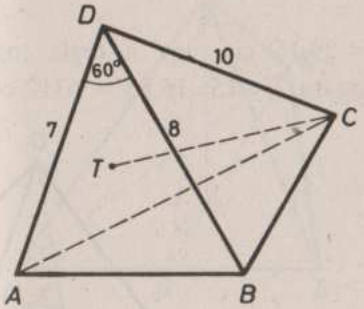
2707



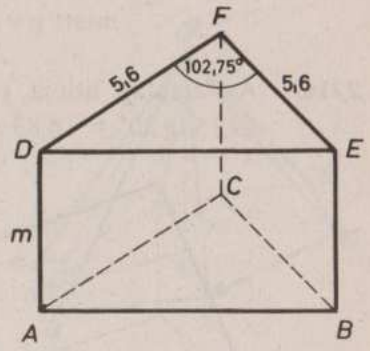
2708

2708. $BC = 12 \sin 26{,}8° = 5{,}41$ cm; $AB = 12 \sin 64{,}2° = 10{,}80$ cm. A $BCO_\triangle$ BC-hez tartozó m_1 magassága: $\sqrt{OK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17{,}34$ cm, az $ABO_\triangle$ AB-hoz tartozó m_2 magassága: $\sqrt{OK^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = 16{,}70$ cm, így a felszín $17{,}34 \cdot 5{,}41 + 16{,}7 \cdot 10{,}8 + 56{,}43 = 330{,}6$ cm^2.

2709. Jelölje a C talppontját az ABD síkon T, a keresett szöget φ (**2709.** ábra). Így $CT = 10 \sin \varphi$ és a térfogatra $112 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin 60° \cdot 10 \sin \varphi$ adódik, amiből $\sin \varphi > 1$ lenne. Ilyen tetraéder tehát nincs.



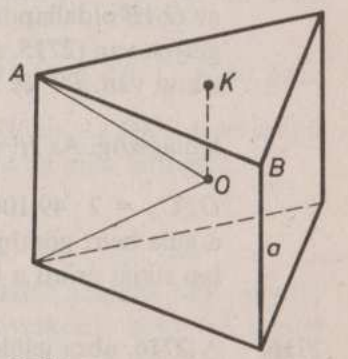
2709



2710

2710. Az alaplapok területe $\frac{1}{2} 5{,}6^2 \sin 102{,}75° = 15{,}29$ cm^2, és így a palást területe egyrészt 30,59 cm^2, másrészt $m(5{,}6 + 5{,}6 + AB)$ is (**2710.** ábra). Mivel $\frac{AB}{2} = 5{,}6 \sin 51{,}375°$, ezért $m = \frac{30{,}56}{5{,}6(2 + 2 \cdot \sin 51{,}375°)} = 1{,}53$ cm, és ezzel a térfogat 23,5 cm^3.

2711. A szabályos hasáb élei egyenlő hosszúak, és mivel oldallapjai téglalapok, ezért négyzetek is. A gömb O középpontjának a lapokon levő vetülete a lapok középpontja (**2711.** ábra). Ha a hasáb éleinek hossza a, a gömb sugara r, akkor az AKO háromszögben $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{7}{12} a^2$, tehát $a = \sqrt{\frac{12}{7}} r$. Ha az AB él O-ból φ szögben látszik, akkor $\frac{a}{2r} = \sin \frac{\varphi}{2}$, azaz $\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$, tehát $\frac{\varphi}{2} = 40{,}89°$, vagyis $\varphi = 81{,}79°$.

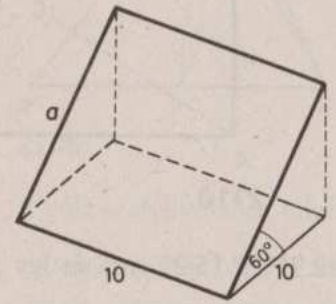


2711

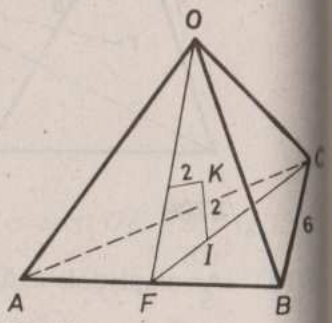
2712. Mivel $a \cdot \cos 60° = 10$, ezért $a = 20$ cm és a téglalap 200 cm² területű (**2712.** ábra).

2713. $2700 = \pi\varrho^2$-ből $\varrho = 29{,}32$ cm és a φ félnyílásszögre $\frac{\varrho}{100} = \sin\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ miatt $\varphi = 17{,}05°$, és a nyílásszög 34,09°.

2714. Az alaplap átlója $\sqrt{25^2 + 15^2} = 29{,}15$ cm, így a tégla magassága $29{,}15 \operatorname{tg} 30° = 16{,}83$ cm, és térfogata $25 \cdot 15 \cdot 16{,}83 = 6312$ cm³.



2712

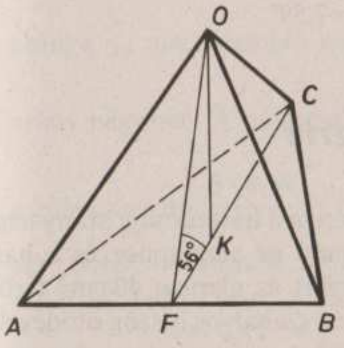


2715

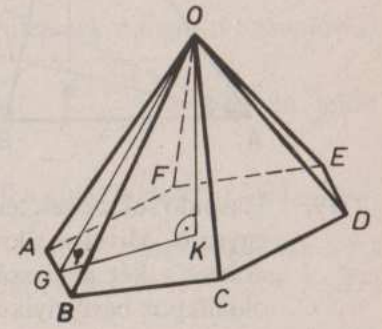
2715. A gúla szabályosságából adódik, hogy a beírt gömbnek az ABC alaplapon levő érintési pontja az ABC szabályos háromszög I középpontja, az OAB oldallapon levő érintési pontja pedig a lap OF szimmetriatengelyén van (**2715.** ábra). A gömb K középpontja az OCF (szimmetria-) síkon van. OF és FC az AB élre merőlegesek, ezért $OFC_\sphericalangle$ a kérdéses hajlásszög. Az $IF = \frac{1}{3}CF = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ miatt $\operatorname{tg} \frac{OFC_\sphericalangle}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, azaz $OFC_\sphericalangle = 2 \cdot 49{,}106° = 98{,}21°$. Ez azt jelenti, hogy a gömb nem lehet a gúla beírt gömbje, csak az ABC-laphoz írt gömb lehet, mely a többi lap síkját érinti a lapok külső pontjaiban.

2716. A **2716.** ábra jelöléseivel $136 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\frac{a}{2}OF$. A gúla szabályosságából következik, hogy O csúcsának az ABC lapon levő vetülete a szabályos $ABC_\triangle$ K középpontja, melynek az AB él F felezőpontjától való távolsága $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, és így $OF = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\cos 56°}$, $OK = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \operatorname{tg} 56°$.

Ezekkel $136 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 56°}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{\cos 56°}\right)$, azaz $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 48{,}78$ cm², $a = 10{,}61$ cm, tehát a térfogat $\frac{1}{3} \cdot 48{,}78 \cdot 4{,}54 = 73{,}83$ cm².



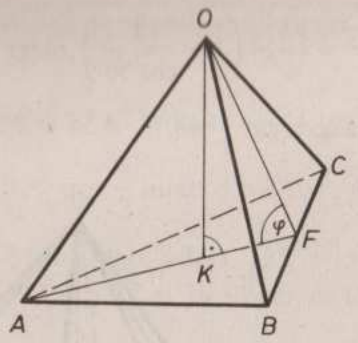
2716



2717

2717. Egy oldallap területe $\frac{240}{6} = 40$ cm², ennek vetületének területe a gúla szabályossága miatt az alaplap területének $\frac{1}{6}$-a, azaz 30 cm² (**2717.** ábra). Ha a két lap hajlásszöge φ, úgy $\cos\varphi = \frac{30}{40} = 0{,}75$, tehát $\varphi = 41{,}41°$. Az ABK háromszög szabályos, AB élére $AB^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 30$, azaz $AB = 8{,}32$ cm, és a háromszög magassága 7,21 cm. Az OKG derékszögű háromszögben $OK = 7{,}21 \cdot \operatorname{tg}\varphi = 6{,}36$, tehát a gúla térfogata $\frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 6{,}36 = 381{,}4$ cm³.

2718. Legyen F a BC oldal felezőpontja, az ABC alaplap középpontja K (**2718.** ábra). A gúla szabályosságából következik, hogy OK a gúla magassága és $OFK_\sphericalangle = \varphi$ a kérdezett hajlásszög. Mivel $\frac{OK \cdot AF}{2} = 15$ cm² és $\frac{OK \cdot t(ABC)}{3} = 150$, ezért $\frac{t(ABC)}{AF} = 15$. $t(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC$ miatt $BC = 30$ cm, így $AF = 15\sqrt{3}$, $OK = \frac{2}{\sqrt{3}}$, vagyis

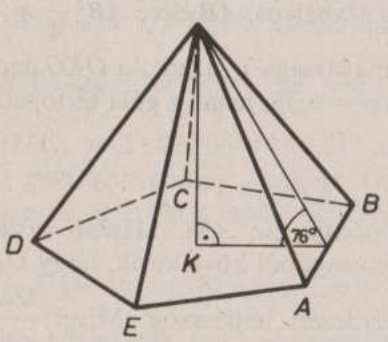


2718

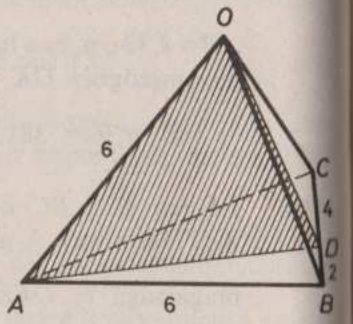
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{OK}{KF} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}AF} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{15}$, tehát

$\varphi = 7{,}59°$.

2719. Hasonló sokszögek területének aránya a hasonlósági arány négyzetével egyenlő. Mivel a síkmetszet hasonló az alaplaphoz és a hasonlóság aránya a két magasság aránya, ezért az alaplap 40 cm² területű. Az oldallapok bármelyikének vetülete a szabályos ötszög ötödével azonos, tehát 8 cm² területű (**2719.** ábra). Az oldallap tehát $\dfrac{8}{\cos 76°} = 33{,}7$ cm² területű, a gúla felszíne így $5 \cdot 33{,}7 + 40 = 205{,}3$ cm². A szabályos ötszög területéből a körülírt kör KA sugarára következtethetünk: $8 = \frac{1}{2} KA^2 \sin 72°$, tehát $KA = 4{,}10$ cm, és ebből a $KAB_\triangle$ AB alapjához tartozó magassága $KF = KA \cdot \cos 36° = 3{,}32$ cm. A gúla OK magassága $KF \operatorname{tg} 76° = 13{,}3$ cm, ezért a térfogat $\frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 13{,}3 = 177{,}5$ cm³.



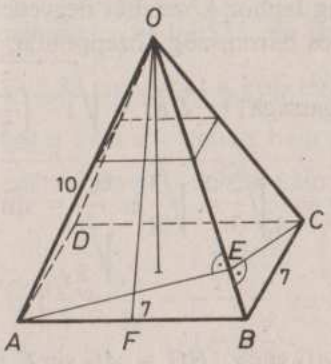
2719



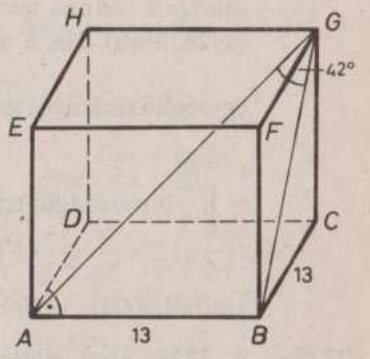
2720

2720. Legyen az $OABC$ szabályos tetraéder OA élére illeszkedő síknak a BC-vel való közös pontja D, és $BD = 2$ cm (**2720.** ábra). Az $ABD_\triangle$-ben a koszinusztétellel $AD^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cos 60° = 36 + 4 - 12 = 28$, tehát $AD = 5{,}29$ cm. $AD = OD$ és $\cos OAD_\measuredangle = \dfrac{3}{5{,}29}$, azaz $OAD_\measuredangle = 55{,}46°$. Az $AOD_\triangle$ szögei: 55,46°; 55,46° és 69,08°.

2721. A síkmetszet a 49 cm² területű alaplaphoz hasonló, és a hasonlóság aránya $\frac{5}{7}$, mert hasonló sokszögek területének aránya a hasonlósági arány négyzete. A gúla magassága $\sqrt{10^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 8{,}69$ cm, tehát a gúla csúcsától $\dfrac{5 \cdot 8{,}69}{7} = 6{,}2$ cm-re kell a gúlát metszeni (**2721.** ábra). Az OAB háromszög OB szárához tartozó magassága AE. Az $OAF_\triangle \sim AEB_\triangle$, mert 2-2 szögük egyenlő, ezért $10 : \sqrt{87{,}75} = 7 : AE$, vagyis $AE = \dfrac{7 \cdot 9{,}37}{10} = 6{,}56$ cm. Az $AEC_\measuredangle = \varphi$ a szomszédos oldallapok szöge, és erre az $AEC_\triangle$-ben $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2 \cdot AE \cdot EC \cdot \cos\varphi$, tehát $\cos\varphi = \dfrac{2 \cdot 6{,}56^2 - 98}{2 \cdot 6{,}56^2} = -\dfrac{12}{86}$, ezért $\varphi = 98{,}02°$.



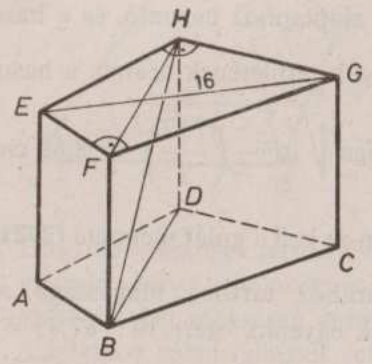
2721



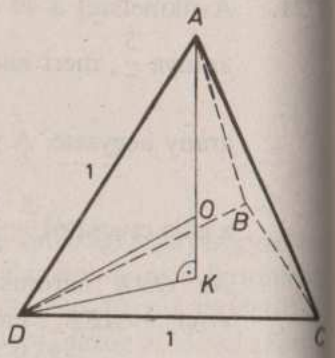
2722

2722. Az oldallappal való hajlásszög az AG-nek a $BCGF$ lapon levő vetületének, a BG-nek AG-vel való szöge (**2722.** ábra). Így $BG = 13 \operatorname{tg} 48° = 14{,}44$ cm, a hasáb magassága tehát $GC = \sqrt{14{,}44^2 - 13^2} = 6{,}29$, vagyis a térfogat $169 \cdot 6{,}29 = 1062{,}3$ cm³.

2723. A $BDHF$ téglalap területe $48 = BD \cdot BF$, a hasáb térfogata $\frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 16 = 384$ cm^2 (**2723.** ábra).



2723



2724

2724. Ha A, B, C és D az O-tól egyenlő távol van, akkor $ABCD$ egy szabályos tetraéder 4 csúcsa és O az ezeken átmenő gömb középpontja. O az A csúcshoz tartozó tetraéder magasság laphoz közelebbi negyedelő pontja (**2724.** ábra). Ha K a BCD szabályos háromszög középpontja, akkor az egységélű szabályos tetraéder AK magassága $\sqrt{1-DK^2} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{2}{3}}$ hosszúságú, tehát $DO = AO = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$ és $\frac{0{,}5}{\sqrt{\frac{3}{8}}} = \sin \frac{AOD_\sphericalangle}{2}$,

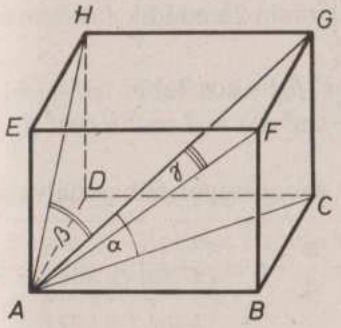
amiből $AOD_\sphericalangle = 109{,}47°$.

2725. A **2725.** ábra jelöléseivel $CG = AG \sin \alpha$, $HG = AG \sin \beta$ és $FG = AG \sin \gamma$. Mivel $CG^2 + HG^2 = HC^2 = DG^2 = AF^2$ és $AF^2 + FG^2 = AG^2$, ezért $CG^2 + HG^2 + FG^2 = AG^2$, és ugyanakkor $AG^2 = AG^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$ is, tehát $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $(x \in \mathbf{R})$ miatt $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ is fennáll.

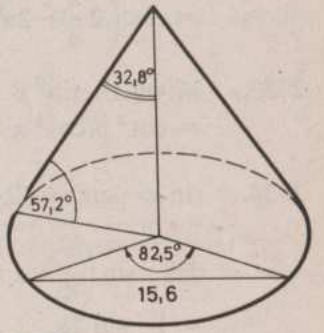
2726. Az oldallapok hajlásszöge a hasáb egyenes volta miatt az alaplap (rombusz) egyik szöge, így e lap területe $15^2 \sin 65{,}5° = 204{,}74$ cm^2, tehát a térfogat 3071,1 cm^3.

2727. Az alapkör sugara $17 \cos 72° = 5{,}25$ cm és magassága $17 \sin 72° = 16{,}17$ cm. Így a térfogat 467,3 cm^3.

2728. $15{,}6 = 2r \sin 41{,}25°$, azaz $r = 11{,}83$ cm, a kúp magassága pedig $r \cdot \operatorname{tg} 57{,}2° = 18{,}36$ cm. Így a térfogat 2690,7 cm^3 (**2728.** ábra).



2725



2728

2729. Az alaplap területe $152–82 = 70$ cm^2, tehát az alapkör sugara 4,72 cm. A palást 82 cm^2 felszíne $\pi \cdot r \cdot l$ is, tehát $l = 5{,}53$ cm. A félnyílásszög φ, szinusza $\frac{r}{l} = 0{,}8535$, és így $\varphi = 58{,}6°$. A kúp magassága $\sqrt{l^2 - r^2} =$ $= 2{,}88$ cm, tehát a kúp térfogata 67,23 cm^3.

2730. $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha.$

2731. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$. Ezért $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

2732. A jobb oldalt $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$-val bővítve $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} =$

$= \cos\left(2\frac{\pi}{4}-2\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) = \sin 2\alpha$ adódik.

2733. Mivel $1-\sin^2\beta = \cos^2\beta$, ezért $\cos^2\beta(1+\cos 2\alpha) =$
$= \cos^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)) = 2\cos^2\alpha\cos^2\beta.$

2734. $\sin x-\sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ azonosságot felhasználva a bal oldal: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}-\sin 2\alpha =$
$= 1-\sin 2\alpha.$

2735. $\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ azonossággal a bal oldal:

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{2}+\sin 2\alpha = 1+\sin 2\alpha.$

2736. $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha+$
$+\cos 2\alpha\sin\alpha$, tehát $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha-$
$-\sin^2\alpha$. $\sin(60°+\alpha) = \sin 60°\cos\alpha+\cos 60°\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)$
és $\cos(30°+\alpha) = \cos 30°\cos\alpha-\sin 30°\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)$, és ezért a bal oldalon $3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ áll.

2737. $\operatorname{tg}(2\alpha-\pi) = \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ és

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ miatt a bal oldalon

$\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}-1 = \dfrac{2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

áll.

2738. Mivel $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)$
és $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)$, ezért szorzatuk $\frac{1}{4}(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$. A $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$, tehát az egyenlőség bal oldalán $\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha = \frac{3}{4}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = \frac{3}{4}$ áll.

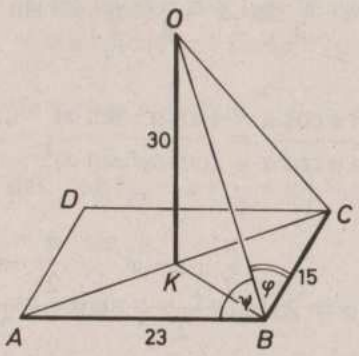
2739. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} =$
$= \left(\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^2.$

$\cos\alpha-\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha}{2} =$
$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\frac{\pi}{4}$ és $\cos\alpha+\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\alpha =$
$= 2\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\frac{\pi}{4}$, hányadosuk pedig $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

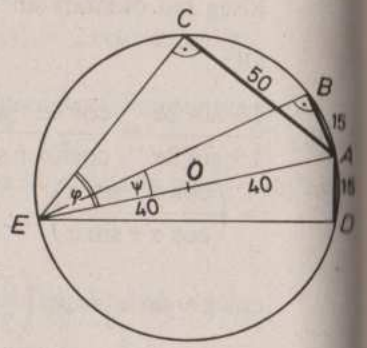
2740. A gúlaalkotó a gúla oldallapjából $\dfrac{4}{\sin 15°51'} = 14{,}65$ cm. Az alapkör sugara $\frac{1}{2}\sqrt{64+64} = 4\sqrt{2}$ cm, tehát a kúp felszíne $\pi(4\sqrt{2})^2+\pi 4\sqrt{2}\cdot 14{,}65 =$
$= \pi(32+82{,}87) = 360{,}9\ \text{cm}^2$, térfogata $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2})^2\sqrt{14{,}65^2-(4\sqrt{2})^2} =$
$= 452{,}9\ \text{cm}^3$

2741. $\pi r^2 = 1507$-ből $r = 21{,}9$ cm. A φ félnyílásszögre $\dfrac{21{,}9}{10} = \operatorname{tg}\varphi$, azaz $\varphi = 64{,}46°$, tehát a nyílásszög $130{,}9°$.

2742. A téglalap átlója $\sqrt{23^2-15^2} = 17{,}44$ cm, a gúla oldalélei pedig $\sqrt{30^2+\frac{23^2-15^2}{4}} = 31{,}24$ cm. Így az oldallapok kért szögeire $\frac{15}{2\cdot 31{,}24} = \cos\varphi$, azaz $\varphi = 76{,}11°$ és $\frac{23}{2\cdot 31{,}24} = \cos\psi$, tehát $\psi = 68{,}4°$ (**2742.** ábra).



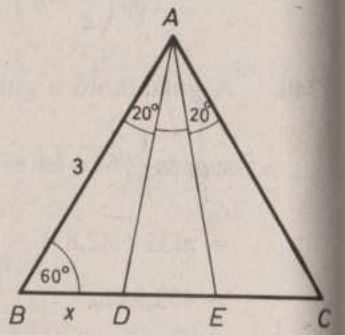
2742



2743

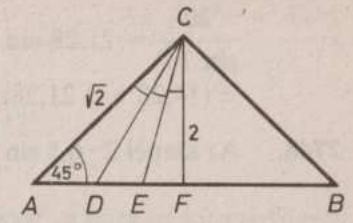
2743. Legyen az A-nak a kör O középpontjára vonatkozó tükörképe E. Az ABE és ACE derékszögű háromszögekből $\frac{50}{80} = \sin\varphi$ és $\frac{15}{80} = \sin\psi$, vagyis $\varphi = 38{,}68°$, $\psi = 10{,}81°$ (**2743.** ábra). A BC, illetve a BD (kisebbik) ívekhez tartozó középponti szög tehát $2(\varphi-\psi) = 55{,}74°$ vagy $2(\varphi+\psi) = 98{,}98°$.

2744. A szimmetria miatt (**2744.** ábra) $BD = EC$ és az $ABD\triangle$-ben a szinusztétellel $x : 3 = \sin 20° : \sin 100°$, azaz $x = \frac{3\cdot\sin 20°}{\sin 100°} = 1{,}04$ m $= BD = EC$ és $DE = 0{,}92$ m.



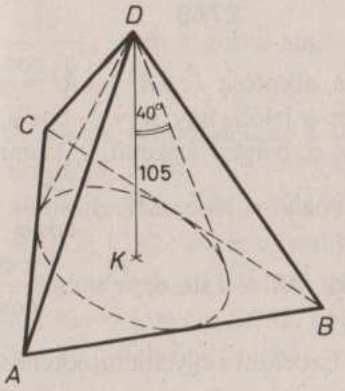
2744

2745. A szimmetria miatt elég a CD, CE és CF szakaszokat meghatározni. $CF = FA = \frac{1}{2}AB = 1$ m (**2745.** ábra). Szinusztételekkel – mivel $CA = \sqrt{2}$ m – $\sqrt{2} : CD = \sin 120° : \sin 45°$, vagyis $CD = \frac{\sqrt{2}\sin 45°}{\sin 120°} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ m, illetve $\sqrt{2} : CE = \sin 105° : \sin 45°$, tehát $CE = \frac{\sqrt{2}\sin 45°}{\sin 105°} = 1{,}04$ m.

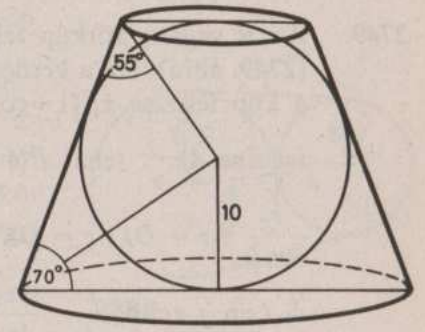


2745

2746. A kúp alapkörének sugara $105\cdot\operatorname{tg} 40° = 88{,}11$ cm, a kúp alkotója, ami a gúla oldalmagassága is, $\frac{105}{\cos 40°} = 137{,}07$ cm (**2746.** ábra). Az r sugarú kör köré írt szabályos háromszög oldala $\frac{3r}{\sin 60°} = 305{,}2$ cm. A gúla felszíne tehát $\frac{305{,}21^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\frac{305{,}21\cdot 137{,}07}{2} = 10{,}3$ m^2.



2746

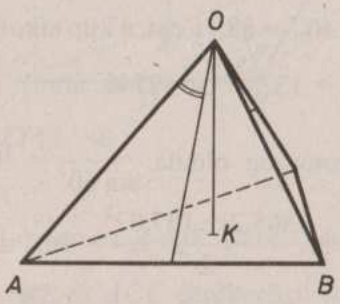


2747

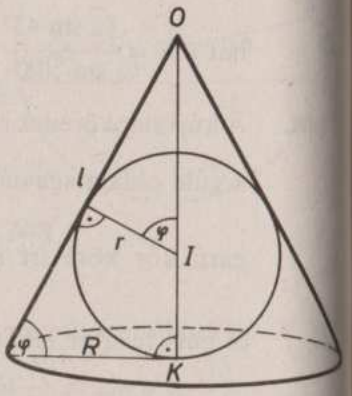
2747. A csonkakúp alapkörének sugara $10\operatorname{ctg} 35° = 10\operatorname{tg} 55° = 14{,}28$ cm, a fedőkör sugara $10\operatorname{ctg} 55° = 10\operatorname{tg} 35° = 7{,}00$ cm, és az alkotó

$\frac{20}{\sin 70°} = 21{,}28$ cm (**2747.** ábra). A felszín $\pi(14{,}28^2 + 7^2 + (14{,}28+7)\,21{,}28) = 2217{,}02$ cm^2.

2748. Az alapél $2 \cdot 6{,}5 \sin \frac{66°5'}{2} = 7{,}09$ cm, az ilyen élű szabályos háromszög beírt körének sugara $\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7{,}09 = 2{,}05$ cm, e kör területe 13,15 cm^2 (**2748.** ábra). A kúp magassága $\sqrt{6{,}5^2 - 4{,}1^2} = 5{,}04$ cm, és ezért térfogata $\frac{1}{3} \cdot 13{,}15 \cdot 5{,}04 = 22{,}1$ cm^3.



2748



2749

2749. Az R sugarú körkúp felszíne, ha alkotója l: $\pi R^2 + \pi Rl = \pi(R+l)R$ (**2749.** ábra). Ha a kérdéses szöget φ jelöli, úgy $R = l \cdot \cos\varphi$, és ezért a kúp felszíne $\pi l^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi$, a beírt I közepű, r sugarú gömb felszíne $4\pi r^2$, tehát $l^2(1+\cos\varphi)\cos\varphi = 16r^2$. Mivel $\frac{r}{\cos\varphi} = OI$ és $\frac{r}{\cos\varphi} + r = OI + r = OK$, továbbá $OK = l\sin\varphi$, tehát $\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} r = l\sin\varphi$, amiből $\frac{r}{l} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. Ezt előbbi egyenletünkkel összevetve

$$(1+\cos\varphi)\cos\varphi = \frac{16\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{16(1-\cos^2\varphi)\cos^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{16(1-\cos\varphi)\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Ebből $(1+\cos\varphi)^2 = 16(1-\cos\varphi)\cos\varphi$, tehát

$17\cos^2\varphi - 14\cos\varphi + 1 = 0$, amiből $\cos\varphi = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 17}}{34} = \frac{14 \pm 8\sqrt{2}}{34}$, tehát $\varphi = 41{,}88°$ vagy $\varphi = 85{,}47°$.

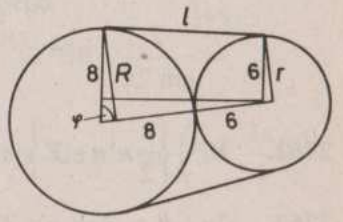
2750. A beírt r sugarú gömb 6-szoros térfogata $8\pi r^3$, a köré írt kúp térfogata $\frac{\pi R^2 \cdot OK}{3}$, tehát $8r^3 = \frac{R^2 \cdot OK}{3}$. Ha a félnyílásszög φ, úgy egyrészt $OI = \frac{r}{\sin\varphi}$ és $OK = r + OI = r\frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi}$, másrészt $R = OK \cdot \operatorname{tg}\varphi$, és ebből $\frac{R}{r} = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$, tehát a fenti egyenletből

$$24 = \left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{(1+\sin\varphi)^2}{1-\sin^2\varphi}\,\frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{(1+\sin\varphi)^2}{(1-\sin\varphi)\sin\varphi}.$$

Ennél fogva $25\sin^2\varphi - 22\sin\varphi + 1 = 0$, tehát $\sin\varphi = 0{,}8319$ vagy $\sin\varphi = 0{,}0437$. Így $\varphi = 56{,}3°$ vagy $\varphi = 2{,}5°$ lehet.

2751. A kúp tengelyére vonatkozó forgásszimmetria miatt a gömb és a palást közös része egy, az alapkörrel párhuzamos kör. A hasonló kúpok palástfelszínének aránya a hasonlósági arány négyzete, tehát az eredeti kúp alkotójának és a gömb sugarának aránya $\sqrt{2}$. A kúp alkotója $\frac{15}{\cos 36°}$, tehát a gömb sugara $\frac{15}{\sqrt{2}\cos 36°} = 13{,}11$ cm.

2752. A közös érintőszakasz a csonkakúp l alkotója $\sqrt{14^2 - 2^2} = 13{,}86$ cm^2, az alapkör R sugara a hasonlóság miatt $R : 8 = \sqrt{192} : 14$, és ugyanígy a fedőkör r sugara $r : 6 = \sqrt{192} : 14$, tehát $R = 7{,}92$ cm és $r = 5{,}94$ cm (**2752.** ábra). A csonkakúp felszíne tehát $\pi[R^2 + r^2 + (R+r)l] = 911{,}25$ cm^2. $\cos\varphi = \frac{2}{14}$, $\varphi = 81{,}79°$, és a nyílásszög $2(90° - 81{,}79) = 16{,}43°$.



2752

2753. Növekvő sorrendben: tg 2, cos $(\pi - 1)$, cos 1, sin 1, $-\cos 3$, sin 2, ctg 5°.

2754. A helyes értelmezési tartomány: $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ miatt mindkét oldalon az 1 áll.

2755. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ miatt $\operatorname{tg} x \cos x = \sin x$.

2756. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ és $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, tehát különbségük fele $\sin x \sin y$. Az azonosság érvényes az **R**-en.

2757. Nem. $2\pi k \leqq x \leqq \pi(2k+1)$ $k \in \mathbf{Z}$ feltétellel igaz.

2758. Nem. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett nincs értelme a kifejezésnek.

2759. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ azonosság az $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ halmazon.

2760. Nem. A $\frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$ az **R**-en, a $\sin x \cos x \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x =$

$= \sin x \cos x$ az $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$-en értelmezett.

2761. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} =$

$= \frac{2}{\sin 2x}$.

2762. $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ minden elemére.

2763. $2\alpha + \beta = 2\pi n$ $n \in \mathbf{Z}$ annak feltétele, hogy $\cos(2\alpha + \beta) = 1$ legyen. Így

$\alpha + \frac{\beta}{2} = \pi n$, tehát $0 = \operatorname{tg} \pi n = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$.

E tört pontosan akkor nulla, ha számlálója nulla.

2764. $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} =$

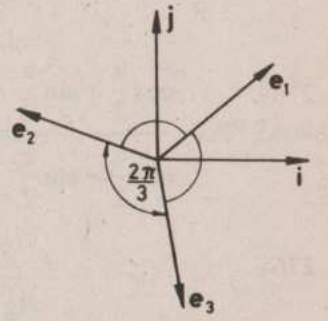
$= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{\sin^2 2\alpha}{4}}$ miatt igaz az állítás, de az

$\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ halmazon!

2765. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ miatt igaz az azonosság.

2766. Az **i** egységvektort forgassuk el az α előjeles mértékű szöggel. Az így keletkezett $\mathbf{e}_1$-et $\frac{2\pi}{3}$ és $-\frac{2\pi}{3}$ szöggel elforgatva nyerjük $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektorokat (**2766.** ábra). Az $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, hiszen $\frac{2\pi}{3} n$ $(n \in \mathbf{Z})$ elforgatás ezeket egymásba viszi, de eredőjüket ugyanakkor egymásba is kell vigye, meg $\frac{2\pi}{3}$ n-szöggel el is forgatja. A **0** mindkét koordinátája 0, ezért második koordinátája $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.



2766

2767. $\frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} =$

$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$.

2768. $$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

2769. $$\operatorname{tg}\frac{\pi+2\alpha}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

2770. $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

2771. $$\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2y-x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(2y-x)}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x+2y-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x-(2y-x)}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-(2y-x)}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x+2y-x}{2}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right).$$

2772. Mivel $1-\sin^2 x=\cos^2 x$, ezért $(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)=$ $=\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$, amit átalakítva $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)=$ $=(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^2$ adódik. A feltétel miatt a tényezők egyike sem 0, tehát a feltételi egyenlőséggel osztva a bizonyítandót kapjuk.

2773. $$\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin^3 2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{1}{2}\sin^3 2\alpha.$$

2774. $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ és $0\leqq\sin^2 x\leqq 1$ miatt igaz az állítás.

2775. $$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\sin(-2\alpha).$$

2776. $$\frac{2\sin x}{\cos^4 x-\sin^4 x}=\frac{2\sin x}{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{\sin 2x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}2x}{\cos x}.$$

2777. $$\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}=\frac{(\sqrt{1+\sin x})^2}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1+\sin x}{|\cos x|}.$$

2778. $\sin 6x \cdot \cos 6x + 1 = 0$ akkor, és csak akkor, ha $2 \sin 6x \cos 6x + 2 = 0$, azaz $\sin 12x + 2 = 0$. $-1 \leqq \sin \alpha \leqq 1$ miatt egyenletünknek nincs megoldása.

2779. $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \dfrac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \dfrac{4}{(\sin 2x)^2}$. Mivel $|\sin \alpha| \leqq 1$, ezért $\dfrac{4}{\sin^2 2x} \geqq 4$, és egyenlőség is csak akkor, ha $x = \dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2780. Legyen $a > 0$ valós szám. $(a-1)^2 \geqq 0$ miatt $a^2 - 2a + 1 \geqq 0$, azaz a-val osztva, és mindkét oldalt 2-vel növelve $a + \dfrac{1}{a} \geqq 2$, ahol az egyenlőség pontosan az $a = 1$ mellett teljesül. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} > 0$ a $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$-ben, így a reláció teljesül, s benne az egyenlőség csakis az $x = \dfrac{\pi}{4}$-re áll fenn.

2781. $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + 1 = (1 - \sin x)(1 - \cos x) \geqq 0$, mert $\sin x \leqq 1$ és $\cos x \leqq 1$.

2782. $1 + \cos^2 x \geqq 1$ és $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ miatt igaz az állítás. Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\cos^2 x = 0$, azaz $x = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2783. $\cos x \cdot \sin 6x + \sin x \cos 6x = \sin(6x - x) = \sin 5x \leqq 1$.

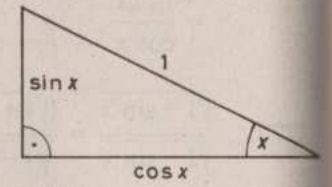
2784. $1 = \sin^2 x + \cos^2 x \geqq \sin 2x$; vagy másképp: $0 \leqq (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x - \sin 2x$.

2785. Lásd **2779!**

2786. $\sin x > 0$ és $\cos x > 0$ az adott intervallumon, tehát $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} \geqq \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ akkor, és csak akkor, ha $\sin x + \cos x \geqq 1$.

Az egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogói $\sin x$, $\cos x$, ha egyik hegyesszöge x (**2786.** ábra).

A háromszög-egyenlőtlenség miatt a két befogó összege mindig nagyobb az átfogónál.



2786

2787. $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$. A $\sin \alpha \leqq 1$ miatt tehát igaz az állítás, és az egyenlőség csak $x = \dfrac{\pi}{4}$-re áll.

2788. $\cos^2 x \sin^4 x + \cos^4 x \sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \dfrac{1}{4} \sin^2 2x$ miatt igaz az állítás. Egyenlőség csak akkor, ha $x = \dfrac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2789. $\cos^4 x - \cos^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x - 1) \leqq 0$, hiszen $1 \geqq \cos^2 x \geqq 0$.

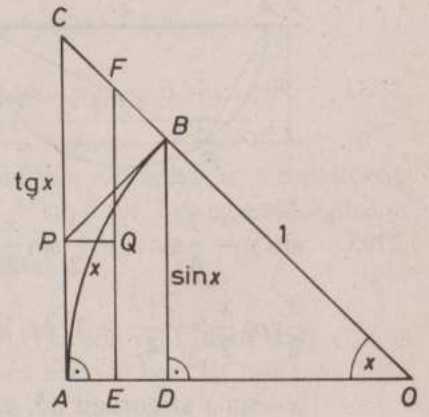
2790. Ha c jelöli a háromszög átfogóját és α egyik hegyesszögét, akkor kerülete $c + c \cdot \sin \alpha + c \cdot \cos \alpha = c(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) =$

$$= 2c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2}\right) \leqq 2c\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2}}\right) = 2c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$= (1 + \sqrt{2})c$, és az egyenlőség is csak akkor, ha $\sin \alpha = \cos \alpha$, azaz $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, tehát az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek legkisebb az átfogója.

2791. A **2791.** ábra jelöléseivel: $OA = OB = 1$, $BD = \sin x$, $AC = \operatorname{tg} x$, $\overset{\frown}{AB} = x = AOB\sphericalangle$, E és F az AD, illetve BC felezőpontja, a kör A, illetve B-beli érintőjének közös pontja P. Az $APB\triangle$ tartalmazza az AB húr és az x ív által határolt körszeletet, ezért a háromszög kerülete a nagyobb, vagyis (1.) $\overset{\frown}{AB} = x < AP + PB$.

P vetülete EF-en a Q. $AP = EQ$ és $PB < QF$, mert az FPQ, illetve az FPB közös átfogójú derékszögű

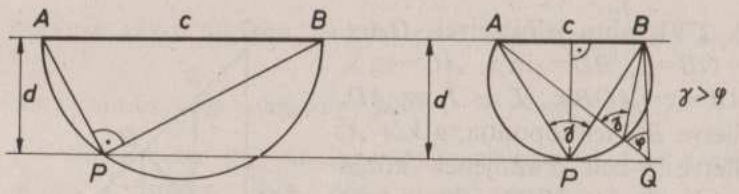


2791

háromszögekben a PQ, illetve a BF befogók közül ez utóbbi a nagyobb, mivel $PQ = AE = ED = < BF$. Így (1) miatt az $ACBD$ trapéz középvonalára

$$\overset{\frown}{AB} = x < AP + PB < EG + QF = EF = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}.$$

2792. Az $APB\triangle$ (**2792.** ábra) területe egyrészt $\frac{1}{2} \cdot cd$, másrészt $\frac{1}{2} PA \cdot PB \sin \gamma$. Így $PA \cdot PB = \frac{cd}{\sin \gamma}$, ami akkor minimális, ha $\sin \gamma$ maximális. Ha $\frac{c}{2} \geqq d$, úgy az AB Thalész-körének van közös P pontja az AB-vel párhuzamos egyenessel, s erre $\gamma = APB\sphericalangle = 90°$, azaz $\sin \gamma = 1$. Ha $\frac{c}{2} < d$, úgy az AB felezőmerőlegesének az AB-vel párhuzamos egyenesen lévő P pontja (**2792.** ábra) adja a keresett maximumot, mert ennek az egyenesnek bármely Q pontjára $AQB\sphericalangle < \frac{\pi}{2}$, és ugyanakkor az AB húr az egyenes P pontjából látszik a legnagyobb szögben, a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben pedig a $\gamma \mapsto \sin \gamma$ függvény szigorúan nő.



2792

2793. $\sin y = \frac{3}{4} \sin x = \frac{3}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. Mivel $\frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$, azaz $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{2} > \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$ és így $\sin y > \sin \frac{x}{2}$. Mivel a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben az $x \mapsto \sin x$ szigorúan nő, ezért $\frac{x}{2} < y$.

2794. A háromszög területe $\frac{1}{2} ab \sin \gamma$, vagyis $ab = \frac{2t}{\sin \gamma}$ állandó. A c oldalra felírt koszinusztételből $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$, amelyben a $2ab \cos \gamma$ állandó, ab és γ konstans volta miatt. Így c minimális, ha $a^2 + b^2$ minimális. Ismert, hogy a számtani közép sohasem kisebb a mértani középnél, tehát $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqq \sqrt{a^2 b^2} = ab$, és az egyenlőség csak $a = b$-re áll.

Ezek szerint az egyenlő szárú háromszögben minimális az adott feltételek mellett a c oldal.

2795. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, és $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ helyettesítésekkel

$12 \sin \alpha - 16 \sin^3 \alpha + 5 - 4 + 8 \sin^2 \alpha - 5 \sin \alpha = 1 + 7 \sin \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 16 \sin^3 \alpha = (1 - \sin \alpha)(16 \sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha + 1) =$

$= (1 - \sin \alpha)(4 \sin \alpha + 1)^2 \geqq 0$, mert $\sin \alpha \leqq 1$ és $(4 \sin \alpha + 1)^2 \geqq 0$.

2796. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) =$

$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$ és $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ miatt elegendő a $\sin^2 \alpha \leqq 1$ relációt igazolni. Ez viszont $|\sin \alpha| \leqq 1$ miatt teljesül.

Az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $|\sin \alpha| = 1$, azaz $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

2797. $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin(2\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$.

Mivel $2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$, ezért a számlálóban $\sin(2\alpha + \beta) - (\sin(2\alpha + \beta) + \sin(-\beta)) = \sin \beta$ áll. Így egyenlőségünk a $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$-val azonos, ami a szinusztétel.

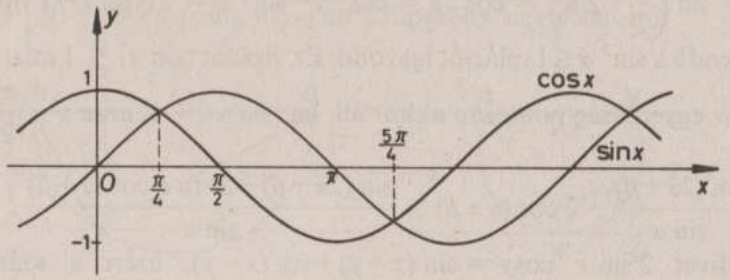
2798. Mivel $\cos x - \cos^4 x = \cos x(1 - \cos^3 x)$ és $\cos x \leqq 1$ miatt $\cos^3 x \leqq 1$ is teljesül, ezért $\cos x < \cos^4 x$ akkor és csak akkor, ha $\cos x < 0$, ha tehát $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2799. Az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény π-ben periodikus és a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$-ben szigorúan monoton növekedő, ezért $\operatorname{tg} x \leqq \frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha $-\frac{\pi}{2}+\pi k < x \leqq 0{,}464+k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.

2800. Mivel $|\sin x| \leqq 1$, így $\sin^4 x \leqq 1 < \frac{\pi}{2}$ minden $x \in \mathbf{R}$-re.

2801. $\cos^4 x > \frac{1}{4}$ pontosan akkor, ha $\cos^2 x > \frac{1}{2}$, ha tehát $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez akkor és csak akkor áll, ha $-\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{\pi}{4}+\pi k$ $k \in \mathbf{Z}$.

2802. Az $x \mapsto \sin x$ és $x \mapsto \cos x$ görbéinek ábrázolásával is választ adhatunk: $\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ feltételeknek eleget tevő valósakra teljesül (**2802.** ábra).



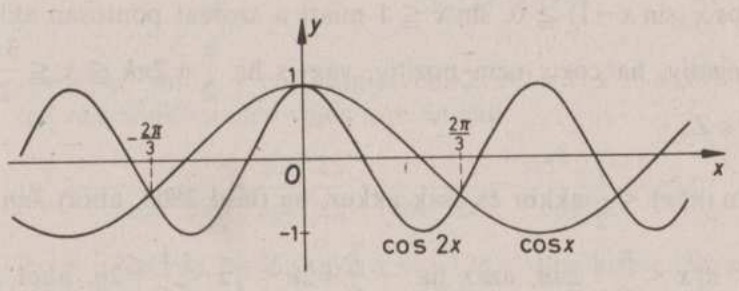
2802

2803. $\sin \frac{x}{\pi} \leqq \frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha $-\frac{7\pi}{6}+2\pi n \leqq \frac{x}{\pi} \leqq \frac{\pi}{6}+2\pi n$ $n \in \mathbf{Z}$, azaz ha $-\frac{7\pi^2}{6}+2\pi^2 n \leqq x \leqq \frac{\pi^2}{6}+2\pi^2 n$.

2804. $|\sin x| \leqq 1$ miatt $\lg \sin x \leqq 0$, tehát $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett teljesül.

2805. Mivel $1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} < \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$, hiszen $\frac{1}{\sin^2 x} > 0$. Így nincs olyan $x \in \mathbf{R}$, amelyre az egyenlőtlenség teljesülne.

2806. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x < \cos x$, ha $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, vagy $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n < x < 2\pi n$ (**2806.** ábra).



2806

2807. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \leqq \sin 2x$ pontosan akkor, ha $0 \leqq \sin 2x$, vagyis ha $2\pi n \leqq 2x \leqq \pi+2\pi n$, azaz $\pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2808. $\sin^2\left(\frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{4}$ akkor és csak akkor, ha $\sin\left(\frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(\frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \leqq -\frac{1}{2}$.

Ezek pontosan akkor állnak, ha $\varphi = \frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{4}$ jelöléssel $\frac{\pi}{6}+2\pi k \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{6}+2\pi k$ vagy $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \leqq \varphi \leqq -\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $k \in \mathbf{Z}$.

Így $\frac{5}{4}+6k \leqq x \leqq \frac{13}{4}+6k$ vagy $\frac{-7}{4}+6k \leqq x \leqq \frac{1}{4}+6k$.

2809. $\cos^2(\pi x) < \frac{1}{2}$ akkor és csak akkor, ha $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \pi x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz ha

$-3\frac{\pi}{4} + 2\pi k < \pi x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ vagy $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < \pi x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$, ha tehát $-\frac{3}{4} + 2k < x < -\frac{\pi}{4} + 2k$ vagy $\frac{1}{4} + 2k < x < \frac{3}{4} + 2k$.

2810. $\cos x\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \sin x - 1 < 0$ minden $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$ számra, hiszen $\sin x \leqq 1$ és az egyenlőség pontosan az $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$-re teljesül.

2811. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \geqq 2 \cos x$ akkor és csak akkor, ha $\cos x (\sin x - 1) \geqq 0$. $\sin x \leqq 1$ miatt a szorzat pontosan akkor nem negatív, ha $\cos x$ nem pozitív, vagyis ha $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2812. $\sin(\pi\sqrt{x}) < \frac{1}{2}$ akkor és csak akkor, ha (lásd **2803.** ábra) $2\pi n - \frac{7\pi}{6} < \pi\sqrt{x} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, azaz ha $-\frac{7}{6} + 2n < \sqrt{x} < \frac{1}{6} + 2n$, ahol n egész. $0 \leqq \sqrt{x}$ miatt csak $n \geqq 0$ lehetséges. Így $0 \leqq x < \frac{1}{36}$, vagy $\left(-\frac{7}{6} + 2n\right)^2 < x < \left(\frac{1}{6} + 2n\right)^2$ $n \geqq 1$, egész kell legyen.

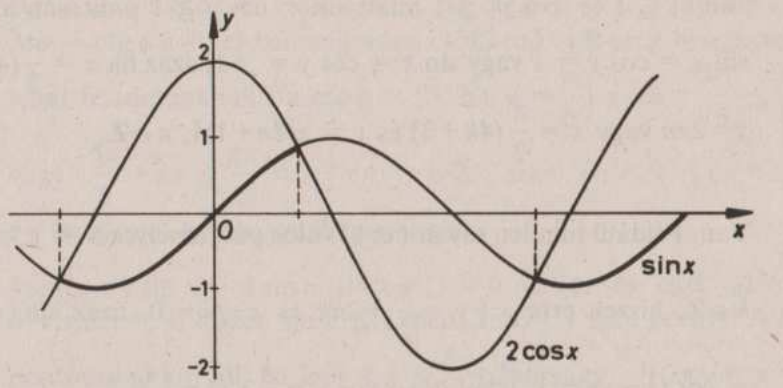
2813. $-1 \leqq \sin \varphi \leqq 1$ miatt egyrészt $\sin 6x - 2 \leqq -1$, másrészt $-1 \leqq \sin 3x$. A feladatbeli reláció tehát minden $x \in \mathbf{R}$-re teljesül.

2814. $2 \operatorname{tg} x \leqq 3 \operatorname{tg} x - 1$ akkor és csak akkor, ha $1 \leqq \operatorname{tg} x$, ami az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ π-ben való periodusossága és a $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$-ben való szigorúan növekvő volta miatt a

$\frac{\pi}{4} + \pi k \leqq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

mellett teljesül.

2815. A **2815.** ábráról is leolvashatóan a $\operatorname{tg} x = 2$, adta $x \approx 1{,}107$, illetve $x \approx -2{,}034$ értékekkel $-2{,}034 + 2\pi k < x < 1{,}107 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ adja a feladat megoldását.



2815

2816. A $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ miatt $\cos 2x + 2 \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$, tehát relációnk minden valós x-re fennáll.

2817. $\operatorname{tg}^2 2x - \frac{1}{\cos^2 2x} = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} - \frac{1}{\cos^2 2x} = \frac{\sin^2 2x - 1}{\cos^2 2x} \leqq 0$ minden $2x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ vagyis $x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$-re, hiszen $|\sin \varphi| \leqq 1$ minden valós φ-re. Így $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}(2n+1) \middle| n \in \mathbf{Z}\right\}$ a megoldás.

2818. $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 5x + \cos^2 5x = 1$ miatt relációnk a $\sin x + \sin 2x \leqq 2$ relációval azonos. A $|\sin \alpha| \leqq 1$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ miatt bármely $x \in \mathbf{R}$ kielégíti egyenlőtlenségünket. Mivel nincs oly $x \in \mathbf{Z}$, amelyre $\sin x = \sin 2x = 1$ teljesülne, mert $x = \frac{\pi}{2}(4k+3)$ és $x = \frac{\pi}{4}(4n+3)$ egyszerre nem állhat (különben két páratlan szám hányadosa 2 lenne), ezért az egyenlőség a relációban sohasem állhat.

2819. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, továbbá $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ miatt egyenlőtlenségünk a $\sin x + \sin 2x + \sin 3x \leqq 3$ relációval ekvivalens. A $|\sin \varphi| \leqq 1$ $(\varphi \in \mathbf{R})$ miatt fenti relációnk mindig fennáll, ha $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} n \middle| n \in \mathbf{Z}\right\}$ azaz, ha $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$.

2820. $(\cos 2x+\sin 2x)^2 = \cos^2 2x+2\sin 2x\cos 2x+\sin^2 2x = 1+\sin 4x$ minden $x\in\mathbf{R}$-re. Így nincs olyan valós x, melyre az egyenlőtlenség (sőt az egyenlőség) fenn ne állna.

2821. $|\sin x|\leqq 1$ és $|\cos y|\leqq 1$ miatt $\sin x\cdot\cos y\geqq 1$ pontosan akkor, ha $\sin x=\cos y=1$ vagy $\sin x=\cos y=-1$, azaz ha $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$ és $y=2\pi n$ vagy $x=\frac{\pi}{2}(4k+3)$ és $y=\pi(2n+1)k$, $n\in\mathbf{Z}$.

2822. Van. Például minden olyan $(x;y)$ valós pár, amelyre $x=y=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, hiszen erre $x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ és $x-y=0$, azaz $\sin(x+y)=\cos(x-y)=1$, tehát $\cos x\cos y=\frac{1}{2}<1+1=2$.

2823. Minden olyan $(x;y)$ valós számpár kielégíti az egyenlőtlenséget, amelyre $\sin^2 x=\cos^2 y=1$, azaz $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ és $y=\pi n$, $k,n\in\mathbf{Z}$, mivel $|\sin x|\leqq 1$ és $|\cos y|\leqq 1$ miatt $\sin^2 x\cos^2 y\leqq 1$ és az egyenlőség csakis a fenti $(x;y)$ párra áll fenn, de $\mathbf{Z}$-ben nincs megfelelő számpár.

2824. Mivel bármely $(k;n)$ egész számpárra $\sin 2n\pi=\sin 2k\pi=0$ és $\cos n\pi+\cos k\pi$ 2,0 vagy -2 aszerint, hogy n és k egyszerre páros, különböző parítású, illetve egyszerre páratlan, ezért a feladatbeli reláció (és abban csakis az egyenlőség) pontosan akkor teljesül, ha n és k mindeketten páros egészek.

2825. $2\sin^2 2x+2\sin 2x=2\sin 2x(\sin 2x+1)$ és $-1\leqq\sin\varphi\ \varphi\in\mathbf{R}$ miatt $\sin 2x+1\geqq 0$, tehát a feladatbeli reláció pontosan akkor áll, ha $\sin 2x\leqq 0$, ha tehát $\pi(2k-1)\leqq 2x\leqq 2\pi k$, azaz $\frac{\pi}{2}(2k-1)\leqq x\leqq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2826. A $\varphi\mapsto\operatorname{tg}\varphi$ a $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$-ben szigorúan nő, és $\mathbf{R}$-en π-ben periodikus. A $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$ a $\varphi=\frac{\pi}{3}$-ra teljesül az előbbi számközön, tehát

$-\frac{\pi}{2}+\pi k<\frac{\pi x}{3}<\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, vagyis $-\frac{3}{2}+3k<x<1+3k$, $k\in\mathbf{Z}$ adja a választ.

2827. $\operatorname{ctg}^2\varphi\geqq 3$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{ctg}\varphi\leqq-\sqrt{3}$ vagy $\operatorname{ctg}\varphi\geqq\sqrt{3}$. A $\varphi\mapsto\operatorname{ctg}\varphi$ a $]0;\pi[$-ben szigorúan csökkenő és $\mathbf{R}$-en π-ben periodikus, tehát feladatunknak $\left(\text{a }\operatorname{ctg}\varphi=\sqrt{3},\text{ ha }\varphi=\frac{\pi}{6}\right)$ a $\pi n<\frac{\pi x}{6}\leqq\frac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $\frac{5\pi}{6}+\pi n\leqq\frac{\pi x}{6}<\pi+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, azaz $6n<x\leqq 6n+1$ vagy $5+6n\leqq x<6+6n$, $n\in\mathbf{Z}$ tesz eleget.

2828. $4\sin^2 x-4\sin x=4\sin x(\sin x-1)<0$ akkor és csak akkor, ha $0<\sin x<1$, hiszen $\sin x\leqq 1$ miatt $\sin x-1$ nem pozitív. A feltétel pontosan akkor áll, ha $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ vagy $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

2829. $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ miatt a feladatbeli reláció azonos a $3^{-\sin^2 x}\leqq 3^{\sin^2 x}$ relációval. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\frac{1}{3^{\sin^2 x}}\leqq 3^{\sin^2 x}$, azaz $1\leqq(3^{\sin^2 x})^2$, aminek szükséges és elégséges feltétele az $1\leqq 3^{\sin^2 x}$ teljesülése. Mivel $0\leqq\sin^2 x\leqq 1$ és a $\varphi\mapsto 3^{\varphi}$ függvény $\varphi\in\mathbf{R}^+$-en 1-nél nem kisebb értékeket vesz fel (mert szigorúan növekedő és $\varphi=0$-ra $3^{\circ}=1$), ezért minden $x\in\mathbf{R}$ relációnkat kielégíti. Az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\cos^2 x=1$ (és így $\sin^2 x=0$), ha tehát $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2830. $0\leqq 3^{\sin^2 x}$ miatt egyenlőtlenségünk a $3^{\cos^2 x}\cdot 3^{\sin^2 x}=3^{\cos^2 x+\sin^2 x}=3^1=3$ miatt a $3\leqq x$ relációval azonos.

2831. $0<\sin 2x$ kell legyen a logaritmus értelmezhetősége miatt. A $\varphi\mapsto\log_2\varphi$ szigorúan növekedő, tehát $\log_2\sin 2x<-1$ akkor és csak akkor, ha $2^{-1}=\frac{1}{2}>\sin 2x>0$. A $0<\sin 2x<\frac{1}{2}$ feltételeknek eleget tevő $2\pi n<2x<\frac{\pi}{6}+2\pi n$ vagy $\frac{5\pi}{6}+2\pi n<2x<\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$, azaz $\pi n<x<\frac{\pi}{12}+\pi n$ vagy $\frac{5\pi}{12}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}(2n+1)$ adja feladatunk valamennyi megoldását.

2832. $0 < \operatorname{tg} x$ mellett lesz $\log_3 \operatorname{tg} x$ értelmezhető. A $\varphi \mapsto \log_3 \varphi$ szigorúan növekedő, ezért $0 < \operatorname{tg} x < 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy feladatunk követelménye teljesüljön. Az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ π-ben periodikus és szigorúan növekedő a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$-ben, ezért $\pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ adják a megoldásokat.

2833. $0 < \cos^2 2x$ kell teljesüljön, hogy a bal oldali kifejezés értelmezhető legyen. A $\varphi \mapsto \log_2 \varphi$ szigorúan növekedő, ezért $0 < \cos^2 2x < 2^1 = 2$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy relációnk teljesüljön. Ez $|\cos \alpha| \leqq 1$ miatt minden $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ mellett fennáll.

2834. $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x \geqq -1$ miatt az eredeti egyenlőtlenség pontosan akkor áll, ha $\cos 4x = -1$, azaz ha $4x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$, ha tehát $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.

2835. $|\sin^2 2x - 1| = |1 - \sin^2 2x| = |\cos^2 2x| = \cos^2 2x$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, tehát minden valós szám kielégíti (mégpedig az egyenlőséget).

2836. $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x \leqq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, ezért $\sqrt{\sin^2 x - 1}$ csak a $|\sin x| = 1$ mellett értelmezhető. Így $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ adja a bal oldali kifejezés értelmezési tartományát. Ennek bármely elemére a $3^{\sqrt{\sin^2 x - 1}} = 3^0 = 1$, tehát az igazsághalmaz a fenti.

2837. Mivel $|\sin \varphi| \leqq 1$ minden $\varphi \in \mathbf{R}$-re, ezért $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin^2 3x \geqq 1$ pontosan akkor, ha $|\sin x| = |\sin 2x| = |\sin 3x| = 1$. $|\sin \varphi| = 1$ akkor és csak akkor, ha $\varphi = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{R}$. Nincs tehát oly $x \in \mathbf{R}$, amely kielégítené egyenlőtlenségünket, hiszen $2\varphi = \pi(2k+1)$ színusza 0.

2838. $|\cos \varphi| \leqq 1$ és $a \leqq |a|$ $(\varphi, a \in \mathbf{R})$ miatt $\cos 2^x \cos 4^x \leqq$ $\leqq |\cos 2^x| \, |\cos 4^x| \leqq 1$ minden $x \in \mathbf{R}$-re.

2839. Lásd **2837.** feladatot.

2840. Minden $\varphi \in \mathbf{R}$-re $|\cos \varphi| \leqq 1$, tehát $|\cos x \cos 7x| \leqq 1$ és így $-1 \leqq \cos x \cos 7x$ valamennyi $x \in \mathbf{R}$-re. (Az egyenlőség csak $\cos x = 1$ és $\cos 7x = -1$, vagy $\cos x = -1$ és $\cos 7x = 1$ mellett állhatna, ám π páros többszöröseinek koszinusza 1, míg páratlan többszöröseire ugyanez -1, így az egyenlőség sohasem áll fenn.

2841. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, egyenlőségünk tehát rendezés után $\sin x (4 \cos^2 x + 1) > 0$ relációval azonos. A bal oldali szorzat második tényezője minden $x \in \mathbf{R}$-re pozitív, tehát $\sin x > 0$, vagyis $2\pi n < x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a feladatbeli egyenlőtlenség teljesüljön.

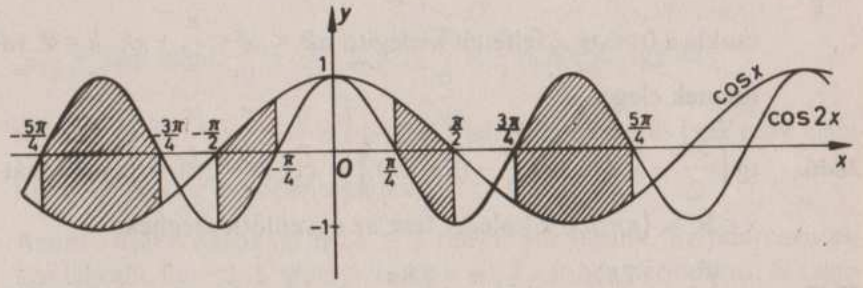
2842. Lásd **2802.** feladatot. Eszerint $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < \frac{\pi}{3} - x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, azaz $-\frac{11}{12}\pi + 2\pi n < x < \frac{\pi}{12} + 2\pi n$ adja a feladat megoldását.

2843. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x$, így $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\cos x =$ $= -\cos 2x \cos x > 0$ pontosan akkor, ha $\cos x \cos 2x < 0$. A **2843.** ábráról is leolvashatóan a bal oldal két tényezője különböző előjelű, ha

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \text{ vagy}$$

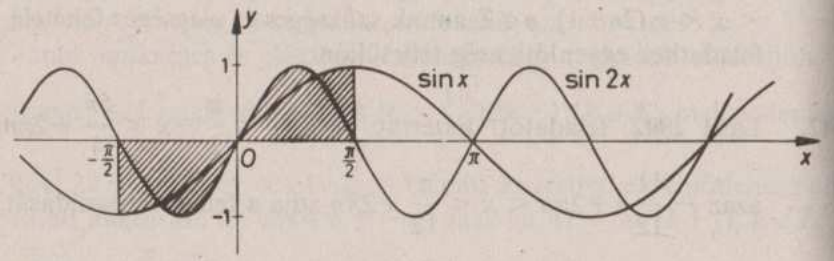
$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ vagy}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$



2843

2844. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(2x-\pi)\right)=\sin(2x-\pi)=-\sin 2x$. Így $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)}{\cos x}\operatorname{tg} x=\frac{-\sin 2x\cdot\sin x}{\cos^2 x}<0$ pontosan akkor, ha $\sin x\cdot\sin 2x>0$. A **2844.** ábráról is leolvashatóan ez akkor, és csak akkor, ha $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<2\pi k$ vagy $2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $\quad k\in\mathbf{Z}$.



2844

2845. $\operatorname{tg}(3\pi-x)=\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x=-\frac{\sin x}{\cos x}$, tehát egyenlőtlenségünk pontosan akkor áll fenn, ha $0<\frac{\sin x}{\cos x}+\sin 2x=$

$=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}+2\cos x\right)=\sin x\frac{1+2\cos^2 x}{\cos x}=\operatorname{tg} x(1+2\cos^2 x)$ és $x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Az $1+2\cos^2 x>0$ miatt egyenlőtlenségünknek csakis a $0<\operatorname{tg} x$ feltételt kielégítő $\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ valós x-ek tesznek eleget.

2846. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(x-2\pi)\right)=\operatorname{ctg}(x-2\pi)=\operatorname{ctg} x$, tehát minden $x\in\mathbf{R}\setminus\{\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$ eleget tesz az egyenlőtlenségnek.

2847. $\sin\left(3x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{8\pi}{2}-3x\right)\right)=\cos(4\pi-3x)=$

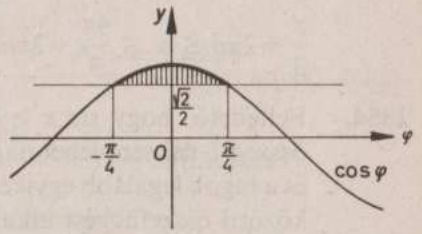
$=\cos(-(3x-4\pi))=\cos(3x-4\pi)=\cos 3x$ és

$\operatorname{ctg}(3x-\pi)=\operatorname{ctg} 3x=\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$. Így egyenlőtlenségünk azonos a $0<\frac{\cos 3x}{\sin 3x}-\cos 3x=\cos 3x\left(\frac{1}{\sin 3x}-1\right)=\operatorname{ctg} 3x(1-\sin 3x)$ relációval. $\sin 3x\leqq 1$ miatt az előbbi reláció akkor és csak akkor áll, ha $0<\operatorname{ctg} 3x$, azaz ha $\pi n<3x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ vagyis $\frac{\pi}{3}n<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2848. $\sin^2(3\pi-5x)=\sin^2(\pi-(5x-2\pi))=\sin^2(5x-2\pi)=\sin^2 5x$, $\cos^2(5x+\pi)=\cos^2 5x$. Egyenlőtlenségünknek tehát $\sin^2 5x+\cos^2 5x=$ $=1$ miatt minden $x\in\mathbf{R}$ eleget tesz (mégpedig az egyenlőség áll fenn).

2849. $\sin\varphi>0$, ha $2\pi n<\varphi<\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Így egyenlőtlenségünknek a $2\pi n<4x+\frac{2\pi}{3}<\pi+2\pi n$, azaz $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$ vagyis $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$ tesznek eleget.

2850. A $\varphi\mapsto\cos\varphi$ függvény görbéjének vizsgálatából adódik, hogy $\cos\varphi\geqq\frac{\sqrt{2}}{2}$, ha $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (**2850.** ábra).



2850

Következésképpen $\cos\left(6x-\frac{3\pi}{4}\right)\geqq\frac{\sqrt{2}}{2}$, ha $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leqq 6x-\frac{3\pi}{4}\leqq$ $\leqq\frac{\pi}{4}+2\pi n$, tehát $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$. Így az $\mathbf{R}\setminus\left\{\left[\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n;\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n\right]\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$ bármely eleme és csak ezek elégítik ki eredeti egyenlőtlenségünket.

2851. Azonos átalakításokkal $\operatorname{tg}^2 x\leqq 1$ relációhoz jutunk. Ez pontosan akkor teljesül, ha $-1\leqq\operatorname{tg} x\leqq 1$. Az $x\mapsto\operatorname{tg} x$ π-ben periodikus, és szigorúan növekedő a $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right[$, $n\in\mathbf{Z}$ intervallumokban, továb-

bá $|\operatorname{tg} x| = 1$, ha $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ennél fogva $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ adja a megoldásokat.

2852. $\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x = \cos(5x+2x) = \cos 7x$, így az egyenlőtlenség a $0 \leqq \cos 7x$ relációval azonos. Ennek pontosan azok az x valós számok tesznek eleget, amelyekre $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqq 7x \leqq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, azaz $-\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} n \leqq x \leqq \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2853. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, tehát $\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, tehát az egyenlőtlenség a $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \leqq 0$ relációval azonos. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqq \frac{\pi}{6} + x \leqq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, ha tehát $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqq x \leqq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$.

2854. Feltehető, hogy $\sin x > 0$ és $\cos x > 0$, hiszen ellenkező esetben az összeg 1-nél sem lehet nagyobb, mivel a tagok mindegyike legfeljebb 1 és a tagok legalább egyike nem pozitív. A számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést alkalmazva

$$\frac{\sin x + \cos x}{2} \leqq \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ahol az egyenlőség is pontosan akkor áll, ha $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezek szerint minden $x \in \mathbf{R}$ kielégíti az egyenlőtlenséget. *Második megoldás:* $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel szorozva egyenlőtlenségünket, továbbá felhasználva, hogy $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ adódik. A $\varphi \mapsto \sin\varphi$ értékkészlete a $[-1; 1]$ tehát minden $x \in \mathbf{R}$-re $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \leqq 1$.

2855. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ és $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ miatt egyenlőtlenségünk a $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqq 1$ relációval azonos. Mivel minden $\varphi \in \mathbf{R}$-re $\sin\varphi \leqq 1$, ezért egyenlőtlenségünk pontosan akkor áll, ha $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$, azaz $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, vagyis $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

2856. $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2\cos^2 2x - 1$, vagyis $\cos 2x + \cos 4x < \frac{3}{2}$ pontosan akkor, ha $2\cos^2 x + \cos 2x - \frac{5}{2} < 0$. A bal oldalon $\cos 2x$-ben másodfokú kifejezés áll, amely pontosan akkor negatív, ha $\cos 2x$ a kifejezés két zérushelye között van.

A kifejezés zérushelyeit a $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot \frac{5}{2}}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}$ adják, tehát $\frac{-1-\sqrt{21}}{4} < -1 \leqq \cos 2x < \frac{-1+\sqrt{21}}{4} \approx 0{,}8956$ kell legyen.

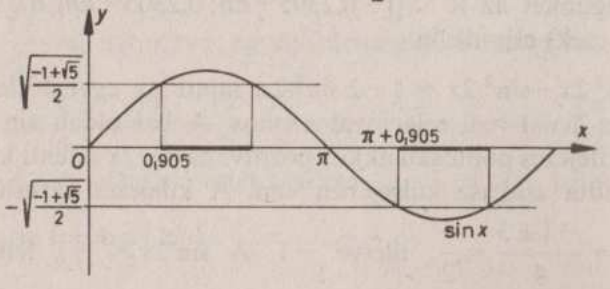
A $\varphi \mapsto \cos\varphi$ ismeretében a $\cos 2x \geqq \frac{-1+\sqrt{21}}{4}$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $-0{,}4609 + 2\pi n \leqq 2x \leqq 0{,}4609 + 2\pi n$ (pontosabban: $-\arccos\frac{-1+\sqrt{21}}{4} \leqq 2x \leqq \arccos\frac{-1+\sqrt{21}}{4}$) teljesül, ha tehát $-0{,}2305 + \pi n \leqq x \leqq 0{,}2305 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, következésképpen eredeti egyenlőtlenségünket az $\mathbf{R} \setminus \{[-0{,}2305 + \pi n; 0{,}2305 + \pi n] \mid n \in \mathbf{Z}\}$ elemei (és csak ezek) elégítik ki.

2857. $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x$ miatt az egyenlőtlenség a $2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 > 0$ relációval azonos. A bal oldali $\sin 2x$-ben másodfokú kifejezés pontosan akkor pozitív, ha $\sin 2x$ a fenti kifejezés zérushelyei adta szakasz külsejében van. A kifejezés zérushelyei a $\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}$, illetve -1. A $\sin 2x < -1$ feltételt a

$-1 \leqq \sin x$ miatt egyetlen valós x sem elégíti ki, míg az $\frac{1}{2} < \sin 2x$ feltételnek a $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, vagyis a $\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k$ tesznek eleget.

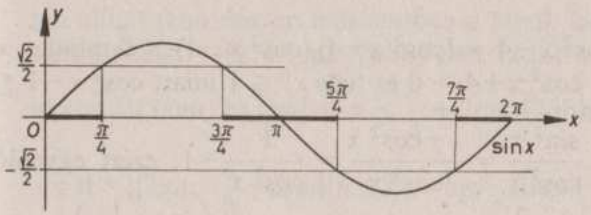
2858. $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x (1 - \cos^2 x) = \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$, tehát $1 < \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x$ akkor és csak akkor, ha $\cos^2 x < \sin^4 x$, ha tehát $0 < \sin^4 x + \sin^2 x - 1$. A jobb oldal $\sin^2 x$-ben másodfokú kifejezés, melynek zérushelyei $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Az előbbi relációt tehát a $\sin^2 x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ vagy a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \sin^2 x$ feltételeknek eleget tevők teszik igazzá. Az előbbit $-1 \leqq \sin x$ miatt egyetlen $x \in \mathbf{R}$ sem elégíti ki, míg az utóbbit a $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < \sin x$ vagy a $\sin x < -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ relációk egyikének eleget tevő valós x-ek teszik igazzá (**2858.** ábra). Ennélfogva a $0{,}905 + 2\pi n < x < \pi - 0{,}905 + 2\pi n$ vagy $\pi + 0{,}905 + 2\pi n < x < 2\pi - 0{,}905 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ és $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$-ből valók elégítik ki egyenlőtlenségünket.

2859. $\operatorname{ctg}^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \sin^2 x = \frac{1 - \sin^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 x} > \frac{1}{2}$ akkor és csak akkor, ha $0 > \sin^4 x + \frac{3}{2}\sin^2 x - 1$ fennáll. A jobb oldal a $\sin^2 x$-



2858

nek másodfokú kifejezése, melynek zérushelyei $\frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$, illetve -2. Így $-2 < \sin^2 x < \frac{1}{2}$ kell fennálljon, ám ez pontosan akkor teljesül, ha $\sin^2 x < \frac{1}{2}$, azaz $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, de $x \neq \pi k$, eredeti feladatunk értelmezési tartománya miatt (**2859.** ábra).



2859

2860. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ és $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, tehát $2\cos x - \cos 2x - \sin^2 x = 2\cos x - 2\cos^2 x + 1 - 1 + \cos^2 x = 2\cos x - \cos^2 x = \cos x (2 - \cos x) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\cos x > 0$, hiszen $\cos x \leqq 1$ miatt $2 - \cos x > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$-re fennáll. A $\cos x > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, és így ezek (és csak ezek) elégítik ki eredeti egyenlőtlenségünket.

2861. Az egyenlőtlenség azonos átalakításával nyerjük, hogy $2(\sin x + \cos x) > 1 + \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$. $0 > (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 2)$, az eredetivel ekvivalens adódik. Mivel $\sin x + \cos x < 2$, hiszen $|\sin x| \leqq 1$ és $|\cos x| \leqq 1$, ám egyszerre mindkettő nem lehet 1, ezért a $\sin x + \cos x - 2$ minden $x \in \mathbf{R}$-re negatív, tehát $\sin x + \cos x > 0$ annak

szükséges és elégséges feltétele, hogy eredeti egyenlőtlenségünk fennálljon. A $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ pontosan akkor pozitív, ha $2\pi n < x+\frac{\pi}{4} < \pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, azaz $-\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+2\pi n$.

2862. Rendezéssel és szorzattá alakítással a $\sin^4 x+3\sin^2 x-4 =$ $= (\sin^2 x+4)(\sin^2 x-1) > 0$ adódik. A $\sin^2 x+4 > 0$ minden $x\in\mathbf{R}$-re, míg $|\sin x| \leqq 1$ miatt $\sin^2 x-1 \leqq 0$ $x\in\mathbf{R}$-re. Így szorzatuk sohasem pozitív, nincs tehát oly valós szám, mely igazzá tenné egyenlőtlenségünket.

2863. A $\cos^4 x+3\cos^2 x-4 = (\cos^2 x+4)(\cos^2 x-1) \leqq 0$ minden $x\in\mathbf{R}$-re teljesül, hiszen $\cos^2 x+4 > 0$ és $|\cos x| \leqq 1$ miatt $\cos^2 x-1 \leqq 0$.

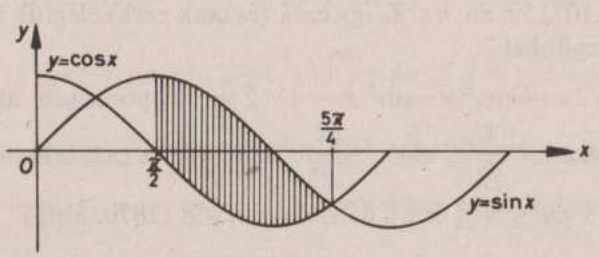
2864. Mivel $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}-1$, ezért egyenlőtlenségünk azonos a $-\frac{2}{\cos x}+1 \leqq -1$, vagyis a $2\left(1-\frac{1}{\cos x}\right) \leqq 0$ relációval. Ez pontosan akkor teljesül, ha $1 \leqq \frac{1}{\cos x}$, ha tehát $0 < \cos x \leqq 1$, azaz ha $-\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2865. $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}-1$, tehát az egyenlőtlenség $-\frac{2}{\sin x} < -2$, vagyis a $2\left(1-\frac{1}{\sin x}\right) < 0$ relációval azonos. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $1 < \frac{1}{\sin x}$, aminek szükséges és elégséges feltétele a $0 < \sin x < 1$, azaz $2\pi n < x < \pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$ és $x \neq \frac{\pi}{2}(4n+1)$.

2866. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2 = (\operatorname{tg} x+2)(\operatorname{tg} x-1) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg} x < -2$ vagy $1 < \operatorname{tg} x$. Az előbbi feltételnek a

$-\frac{\pi}{2} < x < -1{,}10715$, az utóbbinak pedig $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ tesz eleget a $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$-ban. Ebből következően $-\frac{\pi}{2}+\pi k < x < -1{,}10715+\pi k$ vagy $\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ elégítik ki egyenlőtlenségünket.

2867. $\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$, tehát $\sin x+\cos 2x \geqq \cos x$ akkor és csak akkor, ha $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1) \geqq 0$. Egy kétténytezős szorzat pontosan akkor nemnegatív, ha mindkét tényező azonos előjelű (megengedve a 0 tényezőt is). $\sin x+\cos x \geqq 1$ csak $2\pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ esetén állhat fenn, hiszen más esetben a tagok legalább egyike negatív, a másik pedig 1-nél nem nagyobb; ezek között a $\cos x \geqq \sin x$ pontosan akkor áll fenn, ha $2\pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}+2\pi n$. Előbbiek szerint, ha $x\in\mathbf{R}\setminus\{[2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n]\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$, úgy $\sin x+\cos x-1 \leqq 0$, tehát a $\cos x-\sin x \leqq 0$ feltételnek is eleget tevők a $\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqq x \leqq \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (**2867.** ábra).



2867

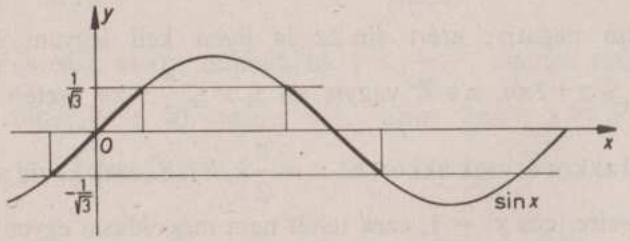
2868. $\cos^2 x$ nem negatív, ezért $\sin 2x$ is ilyen kell legyen, és ez a $2\pi n \leqq 2x \leqq \pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ vagyis $\pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}+\pi n$ esetén teljesül. $\sin 2x = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = \frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$, ezek közül a $\frac{\pi}{2}$ páros többszöröseire $|\cos x| = 1$, ezek tehát nem megoldásai egyenlőtlenségünknek, ugyanakkor a $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszörösei kielégítik azt. Legyen

most $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. Ezekre $0 < \sin 2x$, tehát eredeti egyenlőtlenségünk a $\frac{\cos^2 x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \leqq 1$, vagy az ezzel azonos $\operatorname{ctg} x \leqq 2$ alakot ölti. Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha $0{,}46365 + \pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, így ezek (és csak ezek) elégítik ki eredeti egyenlőtlenségünket.

2869. $\sin^2 x$ nem negatív, így $\sin 2x$ is ilyen kell legyen, és ez a $2\pi n \leqq 2x \leqq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ vagyis $\pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} + \pi n$ esetén teljesül. $\sin 2x = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = \frac{\pi}{2} k$, $k \in \mathbf{Z}$, de ezek közül $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröseire $|\sin x| = 1$, ezek tehát nem megoldásai egyenlőtlenségünknek, míg a $\frac{\pi}{2}$ páros többszöröseire mindkét oldalon a 0 áll.

Legyen most $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$. Ezekre $0 < \sin 2x$, vagyis eredeti egyenlőtlenségünk a $\frac{\sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \leqq 1$, vagy az ezzel azonos $\operatorname{tg} x \leqq 2$ alakot ölti. Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha $\pi n \leqq x \leqq 1{,}10715 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, így ezek (és csak ezek) elégítik ki eredeti egyenlőtlenségünket.

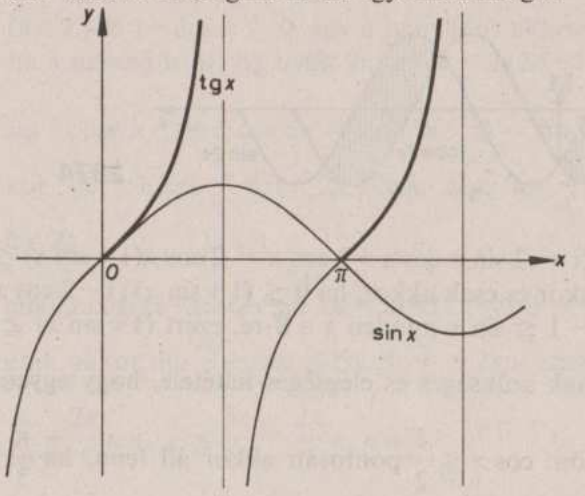
2870. $\sin^2 x \leqq \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ pontosan akkor, ha $\sin^2 x \leqq \frac{1}{3}$, azaz $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \sin x \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $-0{,}6155 + \pi n \leqq x \leqq \pi + 0{,}6155 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (**2870.** ábra).



2870

2871. $\cos^2 x \leqq \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ akkor és csak akkor, ha $0 \leqq -\sin^2 x$. Mivel $-\sin^2 x \leqq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, ezért egyenlőtlenségük pontosan akkor teljesül, ha $\sin^2 x = 0$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2872. Az $x \mapsto \sin x$ és $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvények görbéit egy koordináta-rendszerben ábrázolva (**2872.** ábra) leolvasható, hogy a $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ feltételű valós x-ek elégítik ki az egyenlőtlenséget.



2872

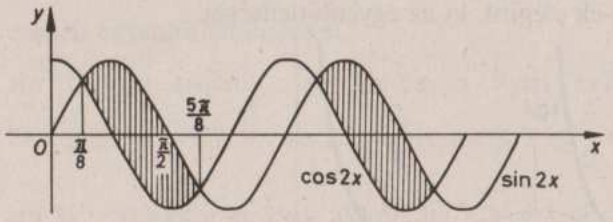
2873. Mivel $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, ezért ha $\operatorname{tg} x > 0$, úgy egyenlőtlenségünk a $\operatorname{tg}^2 x \geqq 1$, azaz $\operatorname{tg} x \geqq 1$, ami $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqq x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ mellett teljesül, míg $\operatorname{tg} x < 0$ esetén $\operatorname{tg}^2 x \leqq 1$, tehát $0 > \operatorname{tg} x \geqq -1$, és ezért $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqq x < \pi n$ elégíti ki az eredeti egyenlőtlenséget.

Megjegyzés: Összegezve $\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{\pi}{2} + l\frac{\pi}{2}$, $l \in \mathbf{Z}$.

2874. A két függvény grafikonjáról leolvasható, hogy $\sin 2x > \cos 2x$ pontosan akkor, ha $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{5\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (**2874.** ábra).

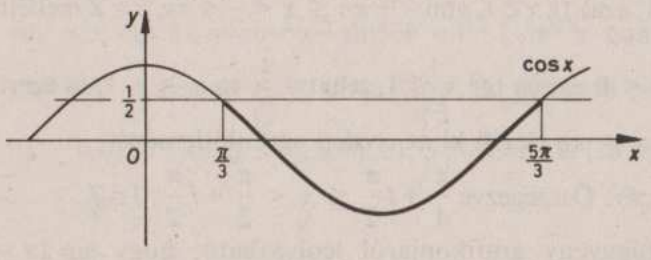
A $\sin 2x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ akkor és csak akkor, ha $2x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\pi k$ vagy $2x + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Az

utóbbira nincs megoldás, míg az előbbire $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$ adja a gyököket. A két görbe közös pontjait összekötő ívek közül tehát az eredeti feltételnek a $\left]\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right[$ -ba esők, és ezeknek π egész többszöröseivel eltoltjai felelnek meg.



2874

2875. $\sin 2x + 2\cos x = 2\sin x\cos x + 2\cos x = 2\cos x(1+\sin x) \leqq$ $\leqq 1+\sin x$ akkor és csak akkor, ha $0 \leqq (1+\sin x)(1-2\cos x)$ (**2875.** ábra). Mivel $-1 \leqq \sin x$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, ezért $(1+\sin x) \geqq 0$, tehát $\cos x \leqq \frac{1}{2}$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egyenlőtlenségünk teljesüljön. $\cos x \leqq \frac{1}{2}$ pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqq$ $\leqq x \leqq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.



2875

2876. $\frac{1}{\cos x} \leqq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ akkor és csak akkor, ha $0 \leqq \frac{1}{\cos x}(\sin x - 1)$. $\sin x \leqq 1$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, így $\sin x - 1 \leqq 0$, tehát $\frac{1}{\cos x} < 0$, azaz $\cos x < 0$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy eredeti egyenlőtlenségünk igaz legyen. A $\cos x < 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2877. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{\sin x}$ akkor és csak akkor, ha $0 < \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$. Az $x \in \mathbf{R}$-re $\cos x \leqq 1$, tehát $x \neq \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$)-re $1 - \cos x > 0$. Így a hányados akkor és csak akkor pozitív, ha a nevező is az, ha tehát $2\pi n < x < \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2878. $\sin 5x\cos x - \sin x\cos 5x = \sin(5x-x) = \sin 4x < 0$ pontosan akkor, ha $\pi + 2\pi k < 4x < 2\pi + 2\pi k$, azaz ha $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2879. $\cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x = \cos(2x+3x) = \cos 5x \leqq 0$ akkor és csak akkor, ha $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqq 5x \leqq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, azaz ha $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n \leqq x \leqq \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2880. Két valós szám hányadosa akkor és csak akkor pozitív, ha szorzatuk is pozitív, ezért $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x =$ $= \cos 2x > 0$ annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egyenlőtlenségünk teljesüljön. $\cos 2x > 0$, pontosan akkor áll fenn, ha $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, vagyis $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$.

2881. $$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin x}{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)} = \frac{\sin^2 x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{\sin^2 x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^6}{\cos^6 x} = \operatorname{tg}^6 x > 1$$ akkor és csak akkor, ha

$\operatorname{tg} x > 1$ vagy $\operatorname{tg} x < -1$. Ez pontosan akkor áll, ha $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ vagy $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2882. $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x \geqq \frac{1}{2}$ akkor és csak akkor, ha $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqq 2x \leqq \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ azaz $-\frac{\pi}{6} + \pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2883. $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geqq \frac{3}{4}$ pontosan akkor, ha $\frac{1}{2} \geqq \sin^2 2x$, vagyis $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin 2x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez akkor áll fenn, ha $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqq 2x \leqq \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ vagy $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqq 2x \leqq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, azaz ha $-\frac{\pi}{8} + \pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{8} + \pi n$ vagy $\frac{3\pi}{8} + \pi n \leqq x \leqq \frac{5\pi}{8} + \pi n$.

2884. $0 \leqq \cos^2 x \leqq 1$ miatt $2^{\cos^2 x} \geqq 1$, ugyanakkor $\sin x \leqq 1$, tehát egyenletünk csakis akkor elégíthető ki, ha $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ezekre $\cos^2 x = 0$ és $2^0 = 1$, tehát az egyenletnek ezek (és csak ezek) gyökei.

2885. $2 \sin x \cos x = \sin 2x = 2 \sin 35° > 1$, nincs tehát x valós, mely az egyenletet igazzá tenné.

2886. $\cos \pi x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$ akkor és csak akkor, ha $\frac{\pi}{2} - \pi x - \left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\pi n$ vagy $\frac{\pi}{2} - \pi x + \pi x - \frac{\pi}{3} = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Az előbbinél $2\pi x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, azaz $x = \frac{5}{12} + n$, $n \in \mathbf{Z}$ adódik. Az utóbbinak nincs megoldása.

2887. $4 \sin x \cos x \cos 2x = 2(2 \sin x \cos x) \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$. Az egyenlet tehát azonosság **R**-en.

2888. Ha $\cos x = 0$, akkor mindkét oldalon 0 áll, tehát $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ megoldás. Ha $\cos x \neq 0$, akkor egyenletünk az $\frac{1}{\sin x} = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$, illetve az ebből nyert $1 - \cos x = 2\sin^2 x = 2(1 - \cos^2 x)$ egyenlettel azonos. $1 - \cos^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$ és $1 - \cos x \neq 0$ (különben az egyenlet két oldalán levő kifejezéseknek nincs értelme) miatt az $1 = 2(1 + \cos x)$, azaz a $\cos x = -\frac{1}{2}$ gyökei adják az egyenlet további megoldásait: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2889. Nem, mert $x = \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$-re a bal oldali kifejezés nem értelmezhető. Viszont az $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ halmazon azonosság.

2890. Nem, mert $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$-re a bal oldal minden tagja 0, így összegük is, míg a jobb oldalon az 1 áll.

2891. Igaz, mivel minden $\varphi \in \mathbf{R}$-re $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

2892. Igaz, mert $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ azonosság az **R**-en.

2893. Nem, mert $x = \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$-re a kifejezéseknek nincs értelme, ám $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ halmazon azonosság.

2894. Lásd **2893.** feladatot.

2895. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ miatt az egyenlet azonosság a $\cos 2x = 0$ egyenletet kielégítő valós számoktól különböző valós számokon. $\cos 2x = 0$ pontosan akkor, ha $2x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, azaz $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. A $\frac{\pi}{4}$ páratlan többszörösei nem racionálisak, így az eredeti egyenlet **Q**-n azonosság.

2896. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin x = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}$; $\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x =$ $= 1+\cos x = \cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}$. Az egyenlet tehát azonosság a $\sin\frac{x}{2} = 0$-t ki nem elégítő valós számok halmazán, vagyis az $\frac{x}{2} = \pi n$, tehát $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$-től különbözők halmazán, az $\mathbf{R} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ halmazon.

2897. $\sin k = \sin 2k$ pontosan akkor, ha $2k-k = 2\pi n$ vagy $k+2k =$ $= \pi(2n+1)$, azaz $k = 2\pi n$ vagy $k = \frac{\pi}{3}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. A k egyetlen esetben egész szám, ha 0, minden más esetben a π-nek (0-tól különböző) racionális többszöröse. Tehát $k = 0$-ra igaz az egyenlőség.

2898. $\sin x = \sin(\pi - x)$ minden $x \in \mathbf{R}$-re igaz, tehát minden $x \in \mathbf{Q}$ is igazzá teszi.

2899. $2\frac{\cos x}{\sin x} = 2\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$ pontosan akkor, ha $\operatorname{ctg} x = 0$, azaz $\cos x =$ $= 0$, tehát $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. A $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszörösei nem racionálisak, így nincs racionális szám, mely egyenletünknek gyöke lenne.

2900. $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, az egyenlet jobb oldala tehát -2. A $|\sin x| \leqq 1$ miatt nincs oly valós szám, mely igazzá tenné.

2901. $\sin(\pi\sqrt{x}) = \pm\frac{1}{2}$, ha $\pi\sqrt{x} = \frac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $\pi\sqrt{x} = \frac{5\pi}{6}+\pi n$, azaz $\sqrt{x} =$ $= \frac{1}{6}+n$ vagy $\sqrt{x} = \frac{5}{6}+n$, $n \in \mathbf{N}$ ($\sqrt{x} \geqq 0$!). Ennélfogva $x = \left(\frac{1}{6}+n\right)^2$ vagy $\left(\frac{5}{6}+n\right)^2$ elégítik ki egyenletünket.

2902. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$, ha $\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}+\pi n$ vagy $\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}+\pi n$, azaz $x = -\frac{1}{3}+4n$ vagy $x = \frac{5}{3}+4n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2903. $\cos\left(\frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{5}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ha $\frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4}+\pi n$ vagy $\frac{\pi x}{3}-\frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{4}+\pi n$, ha tehát $x = \frac{27}{20}+3n$ vagy $x = \frac{57}{20}+3n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2904. $\sin\left(\frac{x}{2\pi}+1\right) = \cos\left(\frac{x}{\pi}-\frac{1}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{x}{\pi}-\frac{1}{3}\right)\right)$ akkor és csak akkor, ha $\frac{x}{2\pi}+1-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{\pi}+\frac{1}{3}\right) = 2\pi n$ vagy $\frac{x}{2\pi}+1+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{\pi}+\frac{1}{3} =$ $= \pi(2n+1)$, azaz $x = -\frac{4\pi}{9}+\frac{\pi^2}{3}(4n+1)$ vagy $x = \frac{8\pi}{3}+\pi^2(4n-1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2905. $\sin x = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pontosan akkor, ha $\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right) = 0$. E szorzat akkor és csak akkor 0, ha egyik tényezője 0, ha tehát $\sin x = 0$ vagy $\cos x = 1$. Az előbbi gyökei $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, és ezek közül a π páros többszörösei (és csak azok) az utóbbit is kielégítik.

2906. $2\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 2 = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ sohasem áll fenn, mivel $|\sin 2x| \leqq 1$ minden $x \in \mathbf{R}$-re.

2907. $\sin x = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ pontosan akkor, ha $\sin x(1-2\cos x) =$ $= 0$. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha legalább egyik tényezője 0, ha tehát $\sin x = 0$ vagy $\cos x = \frac{1}{2}$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, vagy $x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

2908. $\cos x = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ akkor és csak akkor, ha $\cos x\left(1-\frac{1}{\sin x}\right) = 0$, ha tehát $\cos x = 0$ vagy $\sin x = 1$. A $\cos x = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, és ezek között a $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ kielégítik (és csak ezek) a $\sin x = 1$ egyenletet is.

2909. $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$ miatt a két tag egyszerre 0 nem lehet, így egyenletünk a $\operatorname{tg}^2 x = 1$, azaz $\operatorname{tg} x = 1$ vagy $\operatorname{tg} x = -1$ egyenletekkel ekvivalens. Ezekből $x = \frac{\pi}{4}+\pi k$ vagy $x = \frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ adja az eredeti egyenlet igazsághalmazát.

2910. Mivel $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x = 1$, ha $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$, ugyanakkor $\sin^2 x = 1$ csak $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröseire teljesül, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

2911. $\sin x+\cos x = \sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cos\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2} =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$, ha $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{1}{3\sqrt{2}}$, azaz $x-\frac{\pi}{4} = \pm 1{,}3329+2\pi n$, ha tehát $x = \frac{\pi}{4}+1{,}3329+2\pi n$ vagy $x = \frac{\pi}{4}-1{,}3329+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2912. $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ha $2x = \frac{\pi}{3}+2\pi n$ vagy $2x = \frac{2\pi}{3}+2\pi n$, azaz $x = \frac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $x = \frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2913. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin x\cos x}$ és $\sin 2x =$ $= 2\sin x\cos x$, tehát az egyenlőséget egyetlen valós szám sem elégíti ki.

2914. $10^0 = 1 = \sin x$ pontosan akkor, ha $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2915. $\cos x(\sin x+\operatorname{tg} x) = \sin x\cos x+\sin x = \frac{\sin 2x}{2}+\sin x$.

$x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$, $n \in \mathbf{Z}$, tehát az egyenlet $\sin x = 1$. Ennek, és így

eredeti egyenletünknek sincs megoldása az előbbi halmazon, hiszen $\sin x = 1$ akkor és csak akkor, ha $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2916. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$ akkor és csak akkor, ha $2x-x = \pi n$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2917. $\cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$, tehát egyenletünk $-\sin^2 x = \frac{1}{4}$, aminek nincs megoldása, mivel a bal oldal nem pozitív.

2918. Lásd a **2917.** feladatot. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ akkor és csak akkor, ha $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, azaz ha $x = \frac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $x = \frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2919. $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 2\operatorname{tg} x$ akkor és csak akkor, ha $2\operatorname{tg} x\left(1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) = 0$, ami pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x = 0$ vagy $1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 0$. Mindkét egyenlet a $\operatorname{tg} x = 0$ egyenlettel azonos, és ez pontosan akkor áll fenn, ha $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2920. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, tehát egyenletünk $1 = \frac{\operatorname{ctg}^2 x-1+1}{2\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{2}$, azaz $\operatorname{ctg} x = 2$.

Ennek megoldásai: $\frac{\pi}{2}-1{,}1071+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2921. $\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x$, tehát egyenletünkkel azonos a $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, vagyis a $\sin x = \pm\frac{1}{2}$. Ennek gyökei: $\frac{\pi}{6}+\pi n$, illetve $\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2922. $1-\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x = \sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x = 0$ akkor és csak akkor, ha $\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x = 0$, mert két nemnegatív szám összege pontosan akkor 0, ha a tagok mindegyike 0. $\sin^2 x = 0 = \operatorname{tg}^2 x$ akkor és csak akkor, ha $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2923. $1+\operatorname{ctg}^2 x = 1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ akkor és csak akkor, ha $\cos^2 x = \sin^2 x$, azaz $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 0$, ami pontosan akkor áll, ha $2x = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, azaz $x = \dfrac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2924. $(\sin 5x+\cos 5x)^2 = \sin^2 5x+\cos^2 5x+2\sin 5x\cos 5x = 1+\sin 10x = 1$ pontosan akkor, ha $\sin 10x = 0$, azaz ha $10x = \pi n$, tehát $x = \dfrac{\pi}{10}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2925. $\sin^4 x = \sin^5 x$ akkor és csak akkor, ha $\sin^4 x\,(1-\sin x) = 0$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin x = 0$ vagy $\sin x = 1$, ha tehát $x = \pi n$ vagy $x = \dfrac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2926. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg} x} = 2$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x+1 = 0$, vagyis ha $(\operatorname{tg} x-1)^2 = 0$. Ennek szükséges és elégséges feltétele a $\operatorname{tg} x = 1$, azaz

$x = \dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2927. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ pontosan akkor, ha $\operatorname{tg}^2 x = 1$, azaz $x = \dfrac{\pi}{4}+\pi n$, vagy $x = \dfrac{3\pi}{4}+\pi n$ $\left(x = \dfrac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}\right)$.

2928. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, ha $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2} = 0{,}4636+\pi k$, ha tehát $x = \pi-0{,}9273+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2929. $|\sin x| \leqq 1$ miatt $\sin^2 x-1 \leqq 0$, tehát reciproka sohasem pozitív, így 1 sem lehet.

2930. $\sin \pi x = \cos \pi x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi x\right)$ akkor és csak akkor, ha $\pi x-\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi x\right) = 2\pi n$ vagy $\pi x+\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi x\right) = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, vagyis

ha $x = \dfrac{1}{4}+n$ vagy $\dfrac{1}{2} = 2n+1$, $n \in \mathbf{Z}$. Ez utóbbit egyetlen egész sem elégíti ki, tehát $x = \dfrac{1}{4}+n$, $n \in \mathbf{Z}$ a megoldás.

2931. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{\pi} = \pm\dfrac{1}{2}$, ha $\dfrac{x}{\pi} = 0{,}46365+\pi k$ vagy $\dfrac{x}{\pi} = \pi-0{,}46365+\pi k$, azaz $x = \pi(0{,}46365+\pi k)$ vagy $x = \pi(\pi-0{,}46365+\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2932. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$, $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\} = : H$ miatt az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $(\sin^2 x-\cos^2 x)^2 = \cos^2 x$, ha tehát $x \in H$ és $(-\cos 2x)^2 = (\cos 2x)^2 = \cos^2 x$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $\cos 2x = \cos x$ vagy $\cos 2x = -\cos x = \cos(\pi-x)$. Két valós szám (szög) koszinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha különbségük vagy összegük, a 2π egész többszöröse. Így $2x \pm x = 2\pi n$ vagy $2x \pm (\pi-x) = 2\pi n$, azaz $x = \dfrac{2\pi}{3}n$, $x = 2\pi n$, $x = \pi(2n-1)$ vagy $x = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}n = \dfrac{\pi}{3}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. A $\dfrac{\pi}{3}$ páros és páratlan többszörösei $\left(\dfrac{2\pi}{3}n$ és $\dfrac{\pi}{3}(2n+1)\right)$ előállítják a π valamennyi páros és páratlan többszörösét is ($2\pi n$ és $\pi(2n-1)$), ám π többszörösei H-nak nem elemei, ezért az $x = \dfrac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in \mathbf{Z}$ adják az egyenlet gyökeit!

2933. $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\cos 2x} = \dfrac{\cos 2x}{2\cos 2x} = \dfrac{1}{2} = \sin x$, ha $x = \dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ vagy $x = \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2934. Az egyenlet azonosság mindama valós x-ek halmazán, amelyekre $\sin\dfrac{\pi x}{2} \geqq 0$, hiszen a jobb oldal nem negatív. $\sin\dfrac{\pi x}{2} \geqq 0$ pontosan akkor, ha $2\pi n \leqq \dfrac{\pi x}{2} \leqq \pi(2n+1)$, azaz $4n \leqq x \leqq 4n+2$, $n \in \mathbf{Z}$.

2935. $\operatorname{ctg} x \cos x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = \dfrac{\cos^2 x}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$; $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$, és

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, így egyenletünk a $4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = (\sin x)^2 = \cos^2 x$ egyenlettel azonos, az $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}(4k+3)\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\} = H$ halmazon. $\cos^2 x = \sin^2 x$ pontosan akkor, ha $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 0$, azaz ha $2x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, vagyis ha $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Ezekre $x\in H$, tehát egyenletünknek megoldásai (és csak ezek).

2936. Ha x páratlan, azaz $x = 2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$, úgy $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = 0$, tehát az egyenlőség fennáll. Ha x páros, azaz $x=2k$, úgy a nevezők egyike mindig 0, hiszen $\cos\left(\frac{\pi}{2}2k\right) = \pm 1$ aszerint, hogy k páros vagy páratlan, ilyen x tehát nem jöhet szóba.

2937. $\operatorname{tg}\pi x = \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$ miatt $\sin\pi x = 0$, $\pi x = \pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, vagyis $x\in\mathbf{Z}$ kielégíti az egyenletet. Ha $\sin\pi x \neq 0$, akkor egyenletünk

$1 = \cos^2\pi x(1-\operatorname{tg}^2\pi x) = \cos^2\pi x\left(1-\frac{\sin^2\pi x}{\cos^2\pi x}\right) = \cos^2\pi x - \sin^2\pi x = \cos 2\pi x$ egyenlettel azonos, ha

$x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}k\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\text{ és }k\neq 4n\right\} = H$. $\cos 2\pi x = 0$ akkor és csak akkor, ha $2\pi x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$, ha tehát $x = \frac{1}{4}(2n+1)$, ám ez H-nak nem eleme.

2938. Ha x egész, úgy $\operatorname{ctg}\pi x$ nem értelmezhető, nincs tehát az egészek halmazán megoldás.

2939. Két szög szinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha különbségük a π páros, vagy összegük a π páratlan többszöröse, ha tehát $x^2+1+2x = \pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$ vagy $x^2+1-2x = \pi 2n$. Az utóbbiból $(x-1)^2 = 2\pi n$ az előbbiből $(x+1)^2 = \pi(2n+1)$, tehát $n\in\mathbf{N}$ kell legyen és $x = 1\pm\sqrt{2\pi n}$ vagy $x = -1\pm\sqrt{\pi(2n+1)}$.

2940. Két szög tangense pontosan akkor egyenlő, ha különbségük a π egész többszöröse, ha tehát $x^2+9-(4x+5) = x^2-4x+4 = (x-2)^2 = \pi n$, $n\in\mathbf{N}$. Így $x = 2\pm\sqrt{\pi n}$, n nem negatív egész.

2941. $|\cos\varphi| \leqq 1$ miatt $\cos^2 6x - 1 \leqq 0$, tehát $\sqrt{\cos^2 6x-1}$ csak a $\cos^2 6x = 1$ esetén értelmezhető. Ez a $6x = \pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ vagyis $x = \frac{\pi}{6}n$ esetén teljesül és akkor a jobb oldal 0. A bal oldal akkor 0, ha $\sin x = \frac{1}{2}$, ha tehát $x = \frac{\pi}{6}+2\pi k$ vagy $x = \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Az egyenletet tehát a $\frac{\pi}{6}(12k+1)$ és a $\frac{\pi}{6}(12k+5)$ elégítik ki.

2942. $2\cos^4\frac{x}{2} - 2\sin^4\frac{x}{2} = 2\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right) =$

$= 2\cos x = -1$ akkor és csak akkor, ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, azaz $x = \frac{2\pi}{3}+2\pi n$ vagy $x = \frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2943. Mivel $\sin 7x \geqq -1$ és $\cos 2x \geqq -1$, ezért az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin 7x = \cos 2x = -1$ vagyis $7x = \frac{\pi}{2}(4k+3)$ és $2x = \pi(2n+1)$, k és $n\in\mathbf{Z}$ kell legyen. $\frac{\pi}{14}(4k+3) = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ viszont pontosan akkor, ha $4k+3 = 14n+7$, azaz $k = 3n+1+\frac{2n}{4}$. Mivel $k\in\mathbf{Z}$ ezért n páros, vagyis $n=2m$ kell legyen. Erre $k = 7m+1$, és az egyenletet az $x = \frac{\pi}{14}(28m+7) = \frac{\pi}{2}(4m+1)$, $m\in\mathbf{Z}$ elégítik ki.

2944. Mivel $|\sin\varphi| \leqq 1$, ezért az egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 = -\sin 2x$ vagy $-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \sin 2x$. Az első esetben $x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2\pi n$ és $2x = \frac{\pi}{2}(4k+3)$, a másodikban $x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(4k+3)$ és $2x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, k és $n\in\mathbf{Z}$. Így $x = \frac{\pi}{4}+2\pi n =$

$= \frac{\pi}{4}(8n+1)$ és $x = \frac{\pi}{4}(4k+3)$ vagy $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4}(8k+5)$ és $x = \frac{\pi}{4}(4n+1)$ egyszerre kell teljesüljön.

$\frac{\pi}{4}(8n+1) = \frac{\pi}{4}(4k+3)$ pontosan akkor, ha $8n = 4k+2$, de ilyen n, k egészek nincsenek, hiszen a jobb oldal 4-gyel nem, míg a bal oldal 4-gyel osztható. $\frac{\pi}{4}(8k+5) = \frac{\pi}{4}(4n+1)$ akkor és csak akkor, ha $8k+4 = 4n$, azaz $n = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$. Következésképpen az egyenletet az $x = \frac{\pi}{4}(8k+5)$, $k \in \mathbf{Z}$ elégítik ki.

2945. $|\cos\varphi| \leqq 1$ miatt az egyenlőség csakis akkor állhat, ha $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ és $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = -1$, ha tehát $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ és $3x+\frac{\pi}{4} = \pi(2n+1)$ vagyis $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}n$. A kettő egyszerre csak úgy teljesülhet, ha $\frac{2}{3}n = 2k$, azaz $n = 3k$. Ennél fogva az egyenletet az $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (és csak ezek) elégítik ki.

2946. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ és $\cos 2x \leqq 1$ miatt a bal oldali kifejezésnek csak $\cos 2x = 1$ mellett, azaz $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén van értelme. $\operatorname{ctg} \pi n$ viszont nem értelmezhető, így nincs valós szám, mely kielégítené az egyenletet.

2947. A jobb oldali kifejezés $\sin^2 y \leqq 1$ miatt csak $\sin^2 y = 1$ esetén értelmezhető, erre viszont a bal oldali kifejezésben $3\cos^2 y - 4\sin^2 y = 3\cdot 0 - 4\cdot 1 = -4$, amire ennek az oldalnak nincs értelme.

2948. $\sin x \leqq 1$ miatt $\sin x - 1 \leqq 0$, és ennek logaritmusa nem értelmezhető.

2949. A bal oldal nemnegatív számot jelöl, így $\sin x \leqq 1$ miatt csakis $\sin x = 1$ lehetne. Ám erre $\cos x = 0$ és ennek logaritmusa nem értelmezett. Nincs valós szám, mely igazzá tenné az egyenletet.

2950. Az egyenletet 2-vel szorozva és $2\sin x\cos x = \sin 2x$, továbbá $\sin 2x \leqq 1$ miatt csakis a $\sin 2x = 1$ jöhet szóba, hiszen a bal oldal

$2\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$ nemnegatív számot jelöl. $\sin 2x = 1$ pontosan akkor, ha $2x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, azaz $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ez valóban gyök, hiszen erre mindkét oldal 0.

2951. $2\sin x\cos x = \sin 2x \leqq 1$ miatt a jobb oldalnak csak $\sin 2x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ esetén van értelme, és ekkor itt a 0 áll. A bal oldal viszont erre az x-re $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nincs tehát valós szám, ami kielégítené az egyenletet.

2952. $\sin x > 0$ és $\cos x > 0$ kell legyen, azaz $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Mivel $\lg 2 + \lg\sin x + \lg\cos x = \lg 2\sin x\cos x = \lg\sin 2x$ ezért egyenletünk a $\lg\sin 2x = \lg\frac{1}{10}$ egyenlettel, vagyis a $\sin 2x = \frac{1}{10}$ egyenlettel azonos. Ez pontosan akkor teljesül, ha $2x = 0{,}1002 + 2\pi k$ vagy $2x = \pi - 0{,}1002 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, ha tehát $x = 0{,}0501 + \pi k$ vagy $x = \frac{\pi}{2} - 0{,}0501 + \pi k$. Ha $k = 2n$, úgy mindkét x a fenti intervallumból való, és ki is elégíti egyenletünket.

2953. $\lg\cos 2x$ úgy értelmezhető, ha $0 < \cos 2x$. Mivel ugyanakkor $\cos 2x \leqq 1$ is, $\lg\cos 2x \leqq 0$, tehát $\lg\lg\cos 2x$ nem értelmezhető.

2954. $\operatorname{ctg} x \geqq 1$, azaz $0 < x \leqq \frac{\pi}{4}$ kell legyen. Ezekre a $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq 0$, $\sin x \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ miatt. Mivel $\sqrt{\operatorname{ctg} x - 1}$ nemnegatív számot jelöl, így $\operatorname{ctg} x = 1$ és $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kell legyen. A feltételeknek egyedül $x = \frac{\pi}{4}$ felel meg.

2955. $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = |\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg} x \leqq 0$, ha tehát $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2956. $\sqrt{1-\sin x} = -\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ akkor és csak akkor, ha $\sqrt{1-\sin x}\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = -\cos x$ és $-1 \leqq \cos x \leqq 0$, de

$x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, hiszen egyrészt a bal oldal nevezője 0 nem lehet, másrészt $|\cos x|$ nem negatív. A $-1 \leqq \cos x \leqq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqq x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2957. $\sin x \cos x \geqq 0$ kell legyen, ugyanakkor $\frac{1}{4} \geqq \cos^2 2x$, vagyis $-\frac{1}{2} \leqq \cos 2x \leqq \frac{1}{2}$. E feltételekkel egyenletünkből $4\sin^2 x \cos^2 x + 4\cos^2 2x = \sin^2 2x + 4\cos^2 2x = 1 + 3\cos^2 2x = 1$, vagyis $\cos^2 2x = 0$, ami $2x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, azaz $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ mellett teljesül. Ezek megoldásai egyenletünknek, mivel $\sin\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vagy $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, n páros vagy páratlan voltától függően, és így mindkét oldalon az $\frac{1}{2}$ áll.

2958. $\sin\left(x + \frac{\pi}{41}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{41} + \cos x \sin\frac{\pi}{41}$, tehát egyenletünk a $\cos\frac{\pi}{41}(\sin x - 1) = 0$ egyenlettel azonos. $\cos\frac{\pi}{41} \neq 0$, így $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2959. $\sin^2 x \cos^2 x$-szel egyenletünket szorozva a $\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x = 24\sin^2 x \cos^2 x$, vagyis $1 + \sin 2x = 6\sin^2 2x$, azaz $6\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$. Ennek gyökei a $\sin 2x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{3}$, azaz $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ vagy $2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, illetve $2x = \pi + 0{,}3398 + 2\pi n$ vagy $2x = 2\pi - 0{,}3398 + 2\pi n$, és így $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$ vagy $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$, illetve $x = \frac{\pi}{2} + 0{,}1699 + \pi n$ vagy $x = \pi - 0{,}1699 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2960. $\sin x > 0$ és $\operatorname{tg} x > 0$ kell legyen. E feltételekkel $\lg \sin x - \lg \operatorname{tg} x = \lg \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lg \cos x = 0$, ha $\cos x = 1$, ha tehát $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ám $\sin 2\pi n = 0$, és így nincs valós x, amely kielégítené az egyenletet.

2961. $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$, mivel az egyenlet bal oldalán nem negatívak összege áll, így a jobb oldal is nem negatív, azaz $\cos x \geqq 0$. Emiatt egyenletünk a $\sqrt{1+\sin x} = \cos x$ egyenlettel azonos. Ebből $1 + \sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, vagyis $\sin x(1 + \sin x) = 0$, és így $\sin x = 0$ vagy $\sin x = -1$ kell legyen. Az előbbi $x = \pi n$, az utóbbi $x = \frac{\pi}{2}(4n+3)$, $n \in \mathbf{Z}$-re teljesül. A $\cos x \geqq 0$ feltétel miatt $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ kell legyen. Az $x = 2\pi k$, illetve $x = \frac{\pi}{2}(4n+3)$ egyenletünket kielégítik.

2962. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{4\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4\sin^2 x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

Ebből $(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (2\sin x \cos x)^2$, tehát $(\cos 2x)^2 = (\sin 2x)^2$. $\cos 2x \neq 0$, különben $1 - \operatorname{tg}^2 x = 0$ lenne, így egyenletünk a $\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)^2 = (\operatorname{tg} 2x)^2 = 1$. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $2x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, azaz $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ezek ki is elégítik eredeti egyenletünket.

2963. $|\sin \varphi| \leqq 1$ miatt $\sin^2 x - 1 \leqq 0$, tehát a bal oldal csak $\sin^2 x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ mellett értelmezhető. A jobb oldal viszont pontosan ezeken a helyeken nem értelmezhető, így nincs valós szám, melyre az egyenlőség igaz lenne.

2964. $|\cos \varphi| \leqq 1$ miatt $\cos^2 x - 1 \leqq 0$, tehát a bal oldal a $\cos^2 x = 1$, azaz $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén értelmezhető. A $\operatorname{ctg} x$ viszont éppen ezeken a helyeken nincs értelmezve, így nincs az egyenletnek megoldása.

2965. $\sin x \cos x = \frac{2\sin x \cos x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} \leqq \frac{1}{2} < \sqrt{2}$, így a jobb oldal nem értelmezhető, nincs tehát valós szám, amely az egyenletet igazzá tenné.

2966. $\sqrt{\cos\left(2x-\frac{\pi}{15}\right)+2} \geqq 1 \geqq \sin\left(2x+\frac{\pi}{15}\right)$, hiszen $\cos\varphi \geqq -1$ és $\sin\psi \leqq 1$ minden valós φ-re és ψ-re. Így egyenletünk csak úgy teljesülhet, ha $\cos\left(2x-\frac{\pi}{15}\right) = -1$ és $\sin\left(2x+\frac{\pi}{15}\right) = 1$, azaz $2x-\frac{\pi}{15} = \pi(2n+1)$ és $2x+\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{2}(4k+1)$. Nincs olyan n, k egész, mely ugyanazt az x-et állítaná elő, hiszen $\left(2x+\frac{\pi}{15}\right)-\left(2x-\frac{\pi}{15}\right) = \frac{\pi}{2}(4k+1)-\pi(2n+1)$-ből $\frac{4}{15} = 4(k-n)-1$ és itt a jobb oldalon egész, míg a bal oldalon nem egész áll.

2967. $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$ akkor és csak akkor, ha $\sin x \geqq 0$, ha tehát $2\pi n \leqq x \leqq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2968. $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$ pontosan akkor, ha $\cos x \geqq 0$, ha tehát $-\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2969. $\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = -\sin x$ akkor és csak akkor, ha $\sin x \leqq 0$, azaz $\pi(2n-1) \leqq x \leqq 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2970. $|\sin\varphi| \leqq 1$ miatt $\sqrt{\sin^2 2x - 1}$ csak akkor értelmezhető, ha $\sin^2 2x = 1$, azaz $2x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, tehát $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. A bal oldali szorzat $1-\sin^2\frac{x}{3} = \cos^2\frac{x}{3}$ előbbi x-ekre nem 0, hiszen a $\frac{\pi}{12}$ páratlan többszörösei között nincs a $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszörösei közül egy sem. Nincs valós szám, mely igazzá tenné az egyenletet.

2971. $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = -\frac{1}{\cos x}$ akkor és csak akkor, ha $\cos x < 0$, ha tehát $\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2972. $\frac{1}{\operatorname{tg}(45°-x)} = \operatorname{ctg}(45°-x) = \operatorname{tg}(90°-(45°-x)) = \operatorname{tg}(45°+x) = \operatorname{tg} 54°$ akkor és csak akkor, ha $45°+x-54° = 180°k$, azaz $x = 9°+180°k = \frac{\pi}{20}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2973. $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} 45°\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}(45°-x) = \operatorname{tg}(x-30°)$ akkor és csak akkor, ha $(x-30°)-(45°-x) = 180°n$, $n \in \mathbf{Z}$, azaz ha $2x = 75°+180°n$, vagyis $x = 37{,}5°+90°n$.

2974. $\sin x \operatorname{tg} x = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ pontosan akkor, ha $\cos^2 x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cos x - 1 = 0$, azaz $\cos x = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{12}+4}}{2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}} \pm \frac{7}{2\sqrt{3}}}{2}$, vagyis $\cos x = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$, de ilyen valós x nincs. Így a megoldást az $x = \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ adja.

2975. Mivel $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 2x}$, ezért az $a = \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 2x$ helyettesítéssel egyenletünkből $a^2 - 2a - 1 = 0$, vagyis $a = 1+\sqrt{2}$, vagy $a = 1-\sqrt{2}$. Így $\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = 1 \pm \sqrt{2}$, amit megoldva: $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi$, illetve $x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ adódik.

2976. $1+\operatorname{tg}^2 4x = 1+\frac{\sin^2 4x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 4x + \sin^2 4x}{\cos^2 4x} = \frac{1}{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$, így egyenletünk $-1 = 2$, aminek nincs megoldása.

2977. $\operatorname{ctg}(x+30°) = \operatorname{tg}(90°-(x+30°)) = \operatorname{tg}(60°-x) = -\operatorname{tg}(x-60°)$, tehát egyenletünk azonos a $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(x-60°)$ egyenlettel. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $3x-(x-60°) = 180°n$, $n \in \mathbf{Z}$, ha tehát $x = -30°+90°n = 60°+90°k = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2978. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)$, tehát egyenletünk $\cos\left(\frac{2\pi}{5}-3x\right)=$ $=\sin\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}+2x\right)$. Két valós szám (szög) koszinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha összegük vagy különbségük a 2π (360°) egész többszöröse, ha tehát $\frac{2\pi}{5}-3x+$ $+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}+2x=2\pi n$ vagy $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}+2x-\left(\frac{2\pi}{5}-3x\right)=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, azaz $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+2\pi n=\frac{7\pi}{10}+2\pi n$ vagy $x=\frac{\pi}{50}+\frac{2\pi}{5}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2979. Két valós szám (szög) szinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha különbségük a π páros, vagy összegük a π páratlan többszöröse, azaz $\frac{\pi}{10}+$ $+\frac{3x}{2}-\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=2\pi n$, vagy $\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}+\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$, vagyis $x=\frac{\pi}{10}+\pi n$ vagy $x=\frac{3\pi}{5}+2\pi n$.

2980. $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$ és így $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+$ $+\cos\frac{\pi}{4}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenletünkkel azonos. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ vagy $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, azaz $x=2\pi n$ vagy $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2981. $\operatorname{ctg}x-\cos x=\cos x\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)=\frac{1-\sin x}{2\sin x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)$, ami akkor és csak akkor áll, ha $\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$, azaz $\sin x=1$ vagy $\cos x=\frac{1}{2}$, ha tehát $x=\frac{\pi}{2}(4n+1)$ vagy $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2982. $\operatorname{tg}3x=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x$ pontosan akkor, ha $(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x)\left(1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}\right)=0$, ha tehát $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=0$ vagy $1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}=0$. Az első pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(-2x)$, ha tehát $x-(-2x)=\pi n$, vagyis $x=\frac{\pi}{3}n$. A második akkor és csak akkor áll fenn, ha $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}=\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, és ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $x-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\pi n$, azaz $3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ legyen. Erre $\operatorname{tg}3x$ nem értelmezhető, így ez nem ad megoldást.

2983. $2\cos x+4\cdot 2\sin x\cos x=\cos x(2+8\sin x)=\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, akkor és csak akkor, ha $\cos x\left(2+8\sin x-\frac{1}{\sin x}\right)=0$, vagyis $\cos x=0$, avagy $2+8\sin x-\frac{1}{\sin x}=\frac{8\sin^2 x+2\sin x-1}{\sin x}=0$. Az elsőből $x=$ $=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$, a másodikból $\sin x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{16}=\frac{-2\pm 6}{16}=\frac{1}{4}$ vagy $-\frac{1}{2}$ és így $x=0{,}2527+2\pi n$ vagy $x=\pi-0{,}2527+2\pi n$, illetve $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ vagy $x=\frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2984. $\operatorname{tg}^3x-2\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x+2=\operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}x-2)-(\operatorname{tg}x-2)=$ $=(\operatorname{tg}x-2)\cdot(\operatorname{tg}^2x-1)=0$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg}x=2$, vagy $\operatorname{tg}x=1$ vagy $\operatorname{tg}x=-1$. Így $x=1{,}107+\pi n$ vagy $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ vagy $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2985. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$ akkor és csak akkor, ha $(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=0$, ha tehát $\sin x+\cos x=0$ vagy $\sin x\cos x=1$. Az első pontosan akkor teljesül, ha $\sin x=$ $=-\cos x=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. A két valós szám (szög) szinusza pontosan akkor egyenlő, ha különbségük a π páros, vagy összegük a π páratlan többszöröse, azaz $x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\pi(2n+1)$ vagy $x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi n$. Az előbbiből $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, az utóbbi nem ad megoldást. A $\sin x\cos x=1$ nem teljesülhet, hiszen $|\sin x|\leqq 1$ és $|\cos x|\leqq 1$ miatt a szorzat pontosan akkor 1, ha mindkét tényezője 1 vagy -1, ami lehetetlen, mert pl. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ kell legyen.

2986. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítéssel egyenletünk bal oldali kifejezése $2\sin^4 x+\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x-1=$ $=(\sin x+1)(2\sin x-1)(\sin^2 x+1)=0$, akkor és csak akkor, ha $\sin x=-1$ vagy $\sin x=\frac{1}{2}$ ($\sin^2 x+1>0$ minden $x\in\mathbf{R}$-re), ha tehát $x=\frac{\pi}{2}(4n+3)$, vagy $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2987. $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=$ $=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}+\sin 2x=\sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x+$ $+\cos x+1=\cos^2 x-\sin^2 x+\cos x+1=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+$ $+\cos x+1=2\cos^2 x+\cos x=\cos x(2\cos x+1)$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0$, azaz ha $\cos x=-\frac{1}{2}$ vagy $\sin 2x=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Az elsőből $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ vagy $x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, illetve $2x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\pi n$ vagy $2x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\pi(2n+1)$, azaz $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$ vagy $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

2988. Négyzetre emelések után, felhasználva, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ($\alpha\in\mathbf{R}$), egyenletünk $-8\sin x\cos x+5=3$, azaz $\sin 2x=\frac{1}{2}$ egyenlettel azonos. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $2x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ vagy $2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, azaz ha $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$ vagy $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2989. Lásd **2988.** feladatot. x helyébe $4x$-et írva $x=\frac{\pi}{48}+\frac{\pi}{4}n$ vagy $x=$ $=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi}{4}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

2990. Mivel $\sin x\geqq 0$ és $\cos x\geqq 0$ szükséges feltétel (különben négyzetgyökük nem értelmezhető) $2\pi n\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}+2\pi n$ fenn kell álljon. Elég tehát a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban keresni a gyököket. Mivel $\cos 6x\geqq 0$ is, így, ha van megoldás, az a $\left[0;\frac{\pi}{12}\right]$-ből való. Az ebből a számközből való x-ekre $\sqrt{\sin x}<\sqrt{\cos x}$ és $\sqrt{\sin 2x}\leqq\sqrt{\cos 3x}$, tehát az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\sqrt{\sin 3x}>\sqrt{\cos 6x}$, azaz $\sin 3x>\cos 6x=$ $=\cos^2 3x-\sin^2 3x=1-2\sin^2 3x$, vagyis $2\sin^2 3x+\sin 3x-1>0$, ami – az adott intervallumot tekintve – csak úgy lehet, ha a $\sin 3x$ a bal oldali kifejezés pozitív zérushelyénél az $\frac{1}{2}$-nél nagyobb, ha tehát $x>\frac{\pi}{18}$. Így – ha van – a gyök csak a $\left(\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{12}\right]$-ből való lehet. A szinuszfüggvény szigorúan növekedő a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben és ugyanilyen a négyzetgyökfüggvény is, mindkét függvény folytonos is, tehát a $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$ a $\left(\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{12}\right]$-ben szigorúan növekedő és folytonos, értékkészlete tehát itt az [1,7086; 2,0567]. A koszinuszfüggvény szigorúan csökken a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben, így a $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 6x}$ is

ilyen és folytonos, értékkészlete a $\left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{12}\right]$-ben tehát $[1{,}8237; 2{,}6301[$.

E tulajdonságokból következik, hogy van az egyenletnek megoldása. Ezt a két oldalon levő összegeknek helyettesítéssel való számítása adja:

	$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$	$\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 6x}$
$\frac{14\pi}{180}$	1,9950	2,1704
$\frac{14{,}5\pi}{180}$	2,0263	2,0644
$\frac{14{,}6\pi}{180}$	2,0325	2,0379
$\frac{14{,}62\pi}{180}$	2,0337	2,0323
$\frac{14{,}615\pi}{180}$	2,0334	2,0337

A megoldás tehát $x = \frac{14{,}615\pi}{180} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2991. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ felhasználásával egyenletünket a vele azonos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = \sin 3x\cos\frac{\pi}{4} + \cos 3x\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

alakra hozva, ennek megoldása: $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, azaz $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2992. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ és $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x$. Az egyenlet tehát akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin^2 2x = 0$, azaz $\sin 2x = 0$, ha tehát $2x = \pi n$, vagyis $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2993. $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x = \cos(\pi - 2x) = \cos 4x$ akkor és csak akkor, ha $4x \pm (\pi - 2x) = 2\pi n$, azaz ha $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, vagy $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2994. Az egyenlet $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin 3x = 1$ egyenlettel azonos. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, tehát $\sin 2x\cos\frac{\pi}{6} + \cos 2x\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. Két szög szinuszának szorzata pontosan akkor 1, ha mindkettő az 1 vagy a -1, hiszen $|\sin\varphi| \leqq 1$. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x = 1$ pontosan akkor, ha $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ és $3x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, azaz $x = \frac{\pi}{6}(6n+1)$ és $x = \frac{\pi}{6}(4k+1)$, n és $k \in \mathbf{Z}$. Mindkettő egyszerre páros n-re és 3-többszörös k-ra, vagyis $\frac{\pi}{6}(12m+1)$, $m \in \mathbf{Z}$-re áll fenn. A $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x = -1$ akkor és csak akkor, ha $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(4n+3)$ és $3x = \frac{\pi}{2}(4k+3)$, n és $k \in \mathbf{Z}$. Egyszerre tehát $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{6}(6n+4)$ és $x = \frac{\pi}{6}(4k+3)$ kellene teljesüljön. Ez lehetetlen, mivel a $\frac{\pi}{6}$ páros és páratlan többszöröse sohasem egyenlő.

2995. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{5}{12}\sin x$ pontosan akkor, ha $\sin^2 x + \frac{5}{12}\sin x - 1 = 0$, azaz $\sin x = \frac{-\frac{5}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 4}}{2} = 0{,}8131$ (a negatív gyök -1-nél kisebb!), és így $x = 0{,}9495 + 2\pi n$, vagy $x = \pi - 0{,}9495 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2996. $\sin 8x = 2\sin 4x\cos 4x = \operatorname{tg} 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x}$. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $\sin 4x\left(2\cos 4x - \frac{1}{\cos 4x}\right) = 0$, azaz $\sin 4x = 0$, tehát

$4x=\pi n$, vagyis $x=\frac{\pi}{4}n$, $n\in\mathbf{Z}$ vagy $2\cos 4x-\frac{1}{\cos 4x}=0$, azaz $\cos^2 4x=\frac{1}{2}$, tehát $\cos 4x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, és így $4x=\frac{\pi}{4}(2n\pm 1)$, vagyis $x=\frac{\pi}{16}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

2997. $|\cos\varphi|\leqq 1$ miatt az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\cos(\pi\sqrt{x})=\cos(\pi\sqrt{x-4})=1$ vagy $\cos(\pi\sqrt{x})=\cos(\pi\sqrt{x-4})=-1$, ha tehát $\pi\sqrt{x}=2\pi n$ és $\pi\sqrt{x-4}=2\pi k$ vagy $\pi\sqrt{x}=\pi(2n+1)$ és $\pi\sqrt{x-4}=\pi(2k+1)$ egyszerre teljesülnek. Ez előbbinek $x=4n^2$ és $x=4(k^2+1)$, az utóbbinak $x=(2n+1)^2$ és $x=(2k+1)^2+4$ a szükséges és elégséges feltétele. $4n^2=4(k^2+1)$ akkor és csak akkor, ha $n^2-k^2=(n+k)\cdot(n-k)=1$, ám n és k egészek, így $n+k=n-k=1$ vagy $n+k=n-k=-1$ lehetséges csak, azaz $n=1$ és $k=0$ vagy $n=-1$ és $k=0$. A $(2n+1)^2=(2k+1)^2+4$ semmilyen n, k egészre nem teljesül, hiszen $(2n+1)^2-(2k+1)^2=(2n-2k)(2n+2k+2)=4$ pontosan akkor, ha $n-k=n+k+1=1$, ám $n-k$ és $n+k+1$ különböző paritású, hiszen összegük $2n+1$ páratlan, így szorzatuk páros kell legyen. Összefoglalva: egyetlen megoldás van, $x=4$.

2998. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}7x=1$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg}2x=\frac{1}{\operatorname{tg}7x}=\operatorname{ctg}7x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2x-\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)=\pi n$, azaz $x=\frac{\pi}{18}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

2999. $\cos x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$ akkor és csak akkor, ha $\cos x\left(1-\frac{2\sin x}{1-2\sin^2 x}\right)$, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $\cos x=0$, azaz $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$ vagy $2\sin^2 x+2\sin x-1=0$, azaz $\sin x=\frac{-2\mp\sqrt{4+8}}{4}=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}=0{,}36603$ (a negatív gyök kisebb -1-nél), tehát $x=0{,}3747+2\pi n$ vagy $x=\pi-0{,}3747+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3000. $\cos 2x=\operatorname{tg}2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ akkor és csak akkor, ha $\sin 2x=\cos^2 2x=1-\sin^2 2x$, azaz $\sin^2 2x+\sin 2x-1=0$. Ebből $\sin 2x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=0{,}6180$ (a negatív gyök kisebb -1-nél), vagyis $2x=0{,}6662+2\pi n$ vagy $2x=\pi-0{,}6662+2\pi n$, tehát $x=0{,}3331+\pi n$ vagy $x=\frac{\pi}{2}-0{,}3331+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3001. $7\sin x=14\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=8\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=8\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ pontosan akkor, ha $\cos\frac{x}{2}\cdot\left(7\sin\frac{x}{2}-\frac{4}{\sin\frac{x}{2}}\right)=0$, ha tehát $\cos\frac{x}{2}=0$, azaz $x=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$, vagy $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{4}{7}$, vagyis $\sin\frac{x}{2}=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}$ és így $x=\pi-1{,}7141+\pi n$ vagy $x=1{,}7141+\pi n$.

3002. $11\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3\operatorname{tg}x=3\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, ami akkor és csak akkor áll, ha $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(11-\frac{6}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)=0$, azaz $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, tehát $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, vagy $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{5}{11}$, vagyis $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{11}}$, ezért $x=1{,}19+n2\pi$ vagy $x=-1{,}19+n2\pi$; $n\in\mathbf{Z}$.

3003. $\sin^2 x=2+2\cos^2 x\geqq 2$, nincs tehát az egyenletnek megoldása, hiszen $|\sin x|\leqq 1$, minden $x\in\mathbf{R}$-re.

3004. $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{ctg}x}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\operatorname{tg}x$, ha $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}n\cup\frac{\pi}{4}(4n+3)\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

A $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0$, $\sin x \neq 0$, hiszen $x \neq \frac{\pi}{2} n$, tehát $\cos x = \frac{1}{2}$, azaz $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

3005. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 = \sqrt{2 \sin x}$, ami akkor és csak akkor áll, ha $\sin x = \frac{1}{2}$, vagyis $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3006. $\frac{1}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ pontosan akkor, ha $\frac{1}{\cos 2x}(\sin 2x - 1) = 0$. Ez akkor és csak akkor áll, ha $\sin 2x = 1$, ám erre $\cos 2x = 0$. Nincs megoldás.

3007. $1 - (\cos x - \sin x)^2 = 1 - (\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x) =$
$= 1 - (1 - \sin 2x) = \sin 2x$, tehát az egyenlet azonosság $x \in \mathbf{R}$-en.

3008. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\left(x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}\right)$ miatt az egyenlet azonos a $2 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 1 = 0$ egyenlettel. Ebből $\operatorname{tg} x = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{4} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, vagyis $x = 1{,}1484 + \pi n$ vagy $x = -0{,}2211 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3009. $\sin 2x - \sin x = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x (2 \cos x - 1) = \frac{2}{9} \operatorname{tg} x =$
$= \frac{2}{9} \frac{\sin x}{\cos x}$ akkor és csak akkor, ha $\sin x \left(2 \cos x - 1 - \frac{2}{9 \cos x}\right) = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2n+1) \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}$. Ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\sin x = 0$, vagyis $x = \pi n$ vagy $18 \cos^2 x - 9 \cos x - 2 = 0$, tehát $\cos x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 8 \cdot 18}}{36} = \frac{9 \pm 15}{36} = \frac{2}{3}$ vagy $-\frac{1}{6}$, és így $x = \pm 0{,}8411 + 2\pi n$ vagy $x = \pm (\pi - 1{,}4033) + 2\pi n$.

3010. $\sin^2 (x + 15°) - \sin^2 (x - 15°) =$
$= (\sin (x + 15°) + \sin (x - 15°)) \cdot (\sin (x + 15°) - \sin (x - 15°)) =$
$= (2 \sin x \cos 15°)(2 \sin 15° \cos x) =$
$= 2 \sin 15° \cos 15° \cdot 2 \sin x \cos x = \sin 30° \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{4}$

akkor és csak akkor, ha $\sin 2x = \frac{1}{2}$, vagyis $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, azaz $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$ vagy $2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, tehát $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3011. $3 \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x = \frac{3 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = 5$ akkor és csak akkor, ha $2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 3 = 0$ $\left(\text{és } x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}\right)$. Ez pontosan akkor áll, ha $\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2}$ vagy 1, ha tehát $x = 0{,}9828 + \pi n$ vagy $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3012. $\frac{\sin (27° + x)}{\sin x} = \frac{\sin 27° \cos x + \cos 27° \sin x}{\sin x} = \sin 27° \operatorname{ctg} x + \cos 27° =$
$= \frac{6}{5}$, akkor és csak akkor, ha $\operatorname{ctg} x = \frac{\frac{6}{5} - \cos 27°}{\sin 27°} = \frac{0{,}3090}{0{,}4540} = 0{,}68062$, és így $x = \frac{\pi}{2} - 0{,}5976 + \pi n = 0{,}9732 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3013. $\sin x \cos x \neq 0$, mert $x = \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén a bal oldal két tagja 0, a harmadik nem. Ezért egyenletünket $\sin x \cos x$-szel osztva az $5 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - 3 = 5 \operatorname{tg} x - 2 \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0$, vagyis az $5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$ egyenlethez jutunk. Ez pontosan akkor áll, ha $\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \frac{3 \pm 7}{10} = 1$ vagy $-\frac{2}{5}$, azaz $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ vagy $x = -0{,}3805 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3014. $\frac{\pi \sin x}{4 \cos \alpha} + \frac{\pi \cos x}{4 \sin \alpha} = \frac{\pi}{4 \sin \alpha \cos \alpha} (\sin x \sin \alpha + \cos x \cos \alpha) =$
$= \frac{\pi}{2 \sin 2\alpha} \cos (x - \alpha) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\cos (x - \alpha) = 0$,

vagyis $x = \alpha + \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ és $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

3015. $\sin 4x = \sin\frac{x}{3}$ akkor és csak akkor, ha $4x - \frac{x}{3} = 2\pi n$ vagy $4x + \frac{x}{3} = \pi(2n+1)$, azaz $x = \frac{6\pi}{11}n$ vagy $x = \frac{3\pi}{13}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

3016. $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sin x - \cos x = 1 - \sin 2x = \sin^2 x +$
$+ \cos^2 x - 2\sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$ pontosan akkor, ha
$(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$, ha tehát $\sin x = \cos x$ vagy $\sin x - \cos x = 1$. Az első a $\operatorname{tg} x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ megoldásokat, míg a második $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ felhasználásával:
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, és ez az $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, tehát $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ vagy $x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ megoldásokat adja.

3017. $4\sin x \cos 2x = 4\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$
$4\sin x(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sin x - \cos x$ akkor és csak akkor, ha $(\cos x - \sin x)(4\sin x(\cos x + \sin x) + 1) = 0$, azaz ha $\sin x = \cos x$ vagy $4\sin x \cos x + 4\sin^2 x + 1 = 0$. Az első a $\operatorname{tg} x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ megoldásokat adja, a második a $4\sin x \cos x + 4\sin^2 x + 1 = (2\sin x + \cos x)^2 + 1 - \cos^2 x = (2\sin x + \cos x)^2 + \sin^2 x = 0$ egyenlethez vezet. Ez csak akkor állhat fenn, ha $\sin x = 0$ és $2\sin x + \cos x = 0$, hiszen két nemnegatív szám összege pontosan akkor 0, ha a tagok mindegyik 0-val egyenlő. A $\sin x = 0$ és $2\sin x + \cos x = 0$ azonban egyszerre nem teljesülhet, mivel $\sin x = 0$-ra $|\cos x| = 1$.

3018. Ha $2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\cos 2x - 3\cos x}$ teljesül, akkor $4\cos^2\frac{x}{2} = \cos^2 x -$
$-\sin^2 x - 3\cos x = 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x$ is. Mivel $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$ és $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, így ezek összegének kétszereséből $4\cos^2\frac{x}{2} = 2 + 2\cos x$, tehát előbbi egyenletünk rendezése után: $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$. Ebből $\cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = -\frac{1}{2}$ ($\cos x = 3$ lehetetlen), vagyis $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
$2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)\right) = 2\cos\left(\pm\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$ pozitív kell legyen és ez csak $n = 2k$-ra teljesül, tehát $x = \pm\frac{2\pi}{3}(6k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ megoldás, mert
$2\cos\frac{1}{2}\left(\pm\frac{2\pi}{3}(6k+1)\right) = 2\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}(6k+1)\right) = 2\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = 1$
és $\cos 2\left(\pm\frac{2\pi}{3}(6k+1)\right) - 3\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}(6k+1)\right) =$
$= \cos\left(\pm\frac{4\pi}{3}(6k+1)\right) - 3\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) =$
$= \cos\left(\pm\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$

3019. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} = \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = 1 + \sin 2x =$
$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$,
$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}(4n+1) \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}$, akkor és csak akkor, ha
$(\sin x + \cos x)\left(\sin x + \cos x - \frac{1}{\cos x - \sin x}\right) = 0$. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $\sin x = -\cos x$, azaz $\operatorname{tg} x = -1$, tehát $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$ vagy

$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x-\sin x}$, és így $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x=1$, amiből $x=\pi n$.

3020. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=$

$=\dfrac{(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}=16\cos 2x$,

$x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}n\;\middle|\;n\in\mathbf{Z}\right\}$, akkor és csak akkor, ha

$\cos 2x(1-16\sin^2 x\cos^2 x)=0$, azaz $\cos 2x=0$, vagyis $x=\dfrac{\pi}{4}(2n+1)$

vagy $1-4\sin^2 2x=0$, tehát $\sin 2x=\pm\dfrac{1}{2}$ és így $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$, vagy

$x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3021. $\cos x\neq 0$, különben $\sin x=\cos x=0$ lenne, ami lehetetlen. Így egyenletünket $\cos^2 x$-szel osztva $2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+1=0$ egyenlethez jutunk. Ebből $\operatorname{tg} x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=1$ vagy $\dfrac{1}{2}$, tehát $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ vagy $x=0{,}4636+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3022. $|\sin\varphi|\leqq 1$ és $|\cos\psi|\leqq 1$ miatt az egyenlet pontosan akkor áll fenn, ha $\sin 5x=\cos 15x=1$, vagy $\sin 5x=\cos 15x=-1$. Ez előbbinek $5x=\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$ és $15x=2\pi k$, míg az utóbbinak $5x=\dfrac{\pi}{2}(4n+3)$ és $15x=\pi(2k+1)$ a szükséges és elégséges feltétele, n és k egészek. $\dfrac{3\pi}{2}(4n+1)=2\pi k$ sohasem teljesül, hiszen $3(4n+1)$ mindig páratlan míg $4k$ páros, ugyanígy $\dfrac{3\pi}{2}(4n+3)=\pi(2k+1)$ sem lehetséges, mivel $3(4n+3)$ páratlan, de $2(2k+1)$ páros. Nincs tehát $x\in\mathbf{R}$, ami igazzá teszi az egyenletet!

3023. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=81^{\sin^2 x}+81^{1-\sin^2 x}=81^{\sin^2 x}+81\cdot\dfrac{1}{81^{\sin^2 x}}$. Egyenletünkből tehát $a=81^{\sin^2 x}$ helyettesítéssel $a^2-30a+81=0$, azaz $a=27$ vagy $a=3$, ezzel $a=81^{\sin^2 x}=3^{4\sin^2 x}=3^3$, vagyis $\sin^2 x=\dfrac{3}{4}$ vagy $a=3^{4\sin^2 x}=3$, azaz $\sin^2 x=\dfrac{1}{4}$ adódik. Az előbbi az $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi n$ vagy $x=\dfrac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, míg az utóbbi az $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $x=\dfrac{5\pi}{6}+\pi n$ megoldásokat adja.

3024. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|=\sin x\cos\dfrac{x}{2}$ pontosan akkor, ha $\cos\dfrac{x}{2}\left(\sin x\pm\dfrac{1}{2}\right)=0$, azaz $\cos\dfrac{x}{2}=0$, tehát $x=\pi(2n+1)$ vagy $\sin x=\pm\dfrac{1}{2}$. Az egyenlet bal oldalán nem negatív kifejezés áll, ha tehát $\sin x<0$, úgy $\cos\dfrac{x}{2}<0$ is, míg $\sin x>0$ mellett $\cos\dfrac{x}{2}>0$ kell teljesüljön. Ennek a $\sin x=-\dfrac{1}{2}$-ből adódó $x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n$ vagy $x=\dfrac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ valósak közül a páros $n=2k$-val képzett $\dfrac{7\pi}{6}+4\pi k$ vagy $\dfrac{11\pi}{6}+4\pi k$ tesz eleget, ugyanígy a $\sin x=\dfrac{1}{2}$-ből nyert $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ vagy $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$ valósak közül a páros $n=2k$-val adódó $x=\dfrac{\pi}{6}+4\pi k$ vagy $x=\dfrac{5\pi}{6}+4\pi k$ adnak megoldást.

3025. $\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}=2\dfrac{2\sin x+5}{2\cos x}$ a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a felsoroltak számtani sorozatot adjanak.

$\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{(1-\cos x)(1-\sin x)+(1+\cos x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=$

$= \frac{2+2\sin x\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2+\sin 2x}{\cos^2 x} = 2\frac{2\sin x+5}{2\cos x}$ pontosan akkor, ha

$2+\sin 2x = 2\sin x\cos x+5\cos x = \sin 2x+5\cos x$, azaz $\cos x = \frac{2}{5}$.

Ekkor $\sin x = \pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$ és $\frac{1-\frac{2}{5}}{1+\frac{\sqrt{21}}{5}} = 2\frac{2\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{5}\right)+5}{2\cdot\frac{2}{5}}$

valóban fennáll, tehát $x = \pm 1{,}1593+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3026. $\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} =$

$= \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} =$

$= \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)} =$

$= \frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$, és így egyenletünk $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{1}{2}$-hez vezet. Ebből $2x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2\pi n$ vagy $2x+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, azaz

$x = \pi n$ vagy $x = \frac{\pi}{3}+\pi n$. Ezek a megoldások.

3027. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, és lásd: a **3019.** feladatot.

3028. $\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) = \frac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}\frac{\sin(a-x)}{\cos(a-x)} = \frac{\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 2a)}{\frac{1}{2}(\cos 2a+\cos 2x)} =$

$= \frac{\cos 2x-\cos 2a}{\cos 2x+\cos 2a} = \frac{1-2\cos a}{1+2\cos a}$, és ebből $\cos 2x = \frac{\cos 2a}{2\cos a}$. ($\cos a = 0$

mellett $\cos 2a = 0$ is fenn kellene álljon, ám ez utóbbi csak ha $a = \frac{\pi}{4}$

páratlan többszöröse, míg az előbbi $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröseire teljesül.

A $\frac{\pi}{4}$ páratlan többszörösei között nincs $\frac{\pi}{2}$ többszörös!) Ha tehát $a \neq$

$\neq \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ (különben $1+2\cos a = 0$ lenne), akkor

$x = \frac{1}{2}\arccos\frac{\cos 2a}{2\cos a}$.

3029. $\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 5x}{\cos x-\cos 3x-\cos 5x} = \frac{\sin x+2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2}}{\cos x-\left(2\cos\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2}\right)} =$

$= \frac{\sin x(1-2\cos 4x)}{\cos x(1-2\cos 4x)} = \operatorname{tg} x,$

$x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\left\{\frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\right\}\right\}$, $n\in\mathbf{Z}$.

A $\operatorname{tg} x = 1$ pedig $x = \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ mellett (és csak akkor) teljesül.

3030. Feltéve, hogy $1-2\cos 2x \geqq 0$, egyenletünk csakis akkor teljesülhet, ha

$(\sqrt{1-2\cos 2x})^6 = (\sqrt[3]{1-2\cos 2x})^6$,

azaz $(1-2\cos 2x)^2(1-2\cos 2x-1) = 0$, vagyis

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos 2x = 0$, ha tehát $x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$,

$n\in\mathbf{Z}$. Ezek megoldások is, hiszen a bal oldali kifejezés tagjai így 0-val vagy 1-gyel egyenlőek.

3031. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ miatt

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ sohasem lehet, mivel $|\sin\varphi|\leqq 1$ minden $\gamma\in\mathbf{R}$-re.

3032. Egyenletünk azonos a

$4\sin^2 x-4\sin x\sin 3x+\sin^2 3x=(2\sin x-\sin 3x)^2=0$

egyenlettel. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$2\sin x=\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$,

ami pontosan akkor, ha $\sin x(\cos 2x+2\cos^2 x-2)=0$, ha tehát $\sin x=0$, vagyis $x=\pi n$, vagy

$\cos 2x+2\cos^2 x-2=\cos^2 x-\sin^2 x+2\cos^2 x-2=4\cos^2 x-3=0$,

azaz $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, és így $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3033. $\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\sin 2x\cos\frac{5}{2}\pi+$

$+\cos 2x\sin\frac{5}{2}\pi-3\left(\cos\frac{7\pi}{2}\cos x+\sin\frac{7\pi}{2}\sin x\right)=$

$=\cos 2x+3\sin x=1+2\sin x$ akkor és csak akkor, ha

$1+2\sin x=\cos 2x+3\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x+3\sin x=$

$=1-2\sin^2 x+3\sin x$, ha tehát $\sin x(1-2\sin x)=0$, azaz $\sin x=0$ és így $x=\pi n$, vagy $\sin x=\frac{1}{2}$ és ezzel $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3034. $\operatorname{tg}\frac{3\pi-4x}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\operatorname{ctg}2x=$

$=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}n\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$. Így a bal oldal

$\cos 2x\left(\frac{1}{\sin 2x}-1\right)=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}(1-\sin 2x)=\operatorname{ctg}2x(\cos x-\sin x)^2$.

Mivel $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$, ezért egyenletünk a $(\cos x-\sin x)^2(\operatorname{ctg}2x-\sqrt{3})=0$ egyenlettel azonos. Ez pontosan akkor, ha $\sin x=\cos x$, azaz $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, vagy $\operatorname{ctg}2x=\sqrt{3}$, tehát $2x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, vagyis $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3035. $x\in\left]\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$ mellett egyenletünk a $(\sqrt{\operatorname{ctg}x}-1)^2=(\sqrt{\operatorname{tg}x}-1)^2$ egyenlettel azonos. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$(\sqrt{\operatorname{ctg}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}-2)(\sqrt{\operatorname{ctg}x}-\sqrt{\operatorname{tg}x})=0$, azaz ha $\sqrt{\operatorname{ctg}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}-2=0$, vagy $\sqrt{\operatorname{ctg}x}=\sqrt{\operatorname{tg}x}$. Az előbbiből $\sqrt{\operatorname{ctg}x}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$ miatt a $(\sqrt{\operatorname{tg}x}-1)^2=0$, azaz $\operatorname{tg}x=1$, tehát $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, míg az utóbbiból $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x=$

$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, és így $x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\pi k$, vagyis $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$. Az elején tett megszorítás miatt k páros kell legyen.

3036. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=$

$=\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}=16\cos 2x$

pontosan akkor, ha $\cos 2x\left(4-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=0$, ha tehát $\cos 2x=0$, vagyis $x=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$, vagy $\sin^2 2x=\frac{1}{4}$, tehát $\sin 2x=\pm\frac{1}{2}$, és így $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$ vagy $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n$.

3037. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 2x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin^2 x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2\sin^2 x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}$ miatt egyenletünk

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{a}-a=\frac{1}{2}$-del azonos, ahol $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}$. Ebből $a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=0$,

tehát $a = \dfrac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$ ($a \leqq 0$ nem lehet!), és ezért

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$, azaz $\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, és így $x = \dfrac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

3038. $1-\cos 2x = \cos^2 x+\sin^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x) = 2\sin^2 x$,
tehát $\log_2(1-\cos 2x) = \log_2 2\sin^2 x = \log_2 2+\log_2 \sin^2 x =$
$= 1+2\log_2 \sin x$, és így egyenletünk $3a^2+1+2a = 2$, ha $a = \log_2 \sin x$.
Ebből $a = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \dfrac{1}{3}$ vagy -1, tehát $2^{\frac{1}{3}} = \sin x$ vagy $2^{-1} =$
$= \sin x$. Az előbbi $|\sin x| \leqq 1$ miatt nem ad megoldást, az utóbbiból
$\sin x = \dfrac{1}{2}$, tehát $x = \dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, vagy $x = \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, és ezek valóban megoldások.

3039. $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ miatt egyenletünk a $\cos x\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$,

azaz $\cos x = 0$ vagy $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Így $x = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$ vagy $x = \pm\dfrac{\pi}{6}+$
$+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ a megoldások.

3040. Ha $\operatorname{tg} x \leqq -1$, úgy $|1+\operatorname{tg} x| = -1-\operatorname{tg} x$ és $|1-\operatorname{tg} x| = 1-\operatorname{tg} x$,
egyenletünk tehát $-2\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$, azaz $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, vagyis $x = \dfrac{2\pi}{3}+\pi n$
ad megoldást. Ha $-1 \leqq \operatorname{tg} x \leqq 1$, úgy $|1+\operatorname{tg} x| = 1+\operatorname{tg} x$ és $|1-\operatorname{tg} x| =$
$= 1-\operatorname{tg} x$, egyenletünk tehát $2 = 2\sqrt{3}$, aminek nincs megoldása. Végül, ha $1 \leqq \operatorname{tg} x$, úgy $|1+\operatorname{tg} x| = 1+\operatorname{tg} x$ és $|1-\operatorname{tg} x| = -1+\operatorname{tg} x$, és
ekkor az egyenlet $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ egyenlettel azonos. Ebből $x = \dfrac{\pi}{3}+\pi n$.

3041. $2\sqrt{3}(\cos^4 x-\sin^4 x) = 2\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x) =$
$= 2\sqrt{3}\cos 2x = \operatorname{tg} 4x = \dfrac{\sin 4x}{\cos 4x} = \dfrac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 4x}$, ha

$2\cos 2x\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sin 2x}{\cos 4x}\right) = 0$, azaz ha $\cos 2x = 0$, tehát $x = \dfrac{\pi}{4}(2n+1)$,

$n \in \mathbf{Z}$, vagy $\sqrt{3} = \dfrac{\sin 2x}{\cos 4x} = \dfrac{\sin 2x}{1-2\sin^2 2x}$,
amiből $x = 17{,}6°+l\,180°$; $x = 72{,}4°+m\,180°$;
$x = -\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; $x = \dfrac{2\pi}{3}+s\pi$;
$l, m, k, s \in \mathbf{Z}$ adódik.

3042. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}+\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} =$

$= \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}-x\right)} =$

$= \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x+\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} = \dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} =$

$= 2\sin 2x$ pontosan akkor, ha

$\sin 2x\left(1-2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\right) = 0$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin 2x = 0$, tehát $x = \dfrac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$, vagy

$0 = 1-2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) =$

$= 1-2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos x+\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin x\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x\right) =$

$= 1-2\left(-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\Big) =$

$= 1-2\left(\dfrac{3}{4}\sin^2 x-\dfrac{1}{4}\cos^2 x\right) = 1-\dfrac{3}{2}\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x =$

$= \frac{3}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 x = 0$, ezért $\operatorname{tg}^2 x = 3$, vagyis $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ és $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3043. $\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)+\sin x\cos x} = \frac{\cos x+1}{\sin x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, ha $x \neq \frac{\pi}{2}n$ és $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$, vagyis $\cos x = -\cos 2x = \cos(\pi - 2x)$ és így $x \pm (\pi - 2x) = 2\pi n$, tehát $x = \pi(2n+1)$ vagy $x = \frac{\pi}{3}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Ezek közül az utóbbi adja eredeti egyenletünk megoldását.

3044. $0 < \cos 2x$ mellett egyenletünk a $\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos(x-2x) = \cos(-x) = \cos x = 0$ egyenlettel azonos. Ez a kiinduló feltétel mellett pontosan az $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ esetén áll fenn.

3045. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ pontosan akkor, ha $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$, és $\sin^2 x = \cos x - \cos^2 x$, azaz $\cos x = 1$, ez azonban kizárt. Nincs valós x, melyre igaz az egyenlet.

3046. $\frac{2\sin^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \frac{2\sin^2 x \cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 2\cos^2 x$ $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$, és $[\cos x - \sin(x-\pi)]^2 + 1 = [\cos x + \sin x]^2 + 1 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 1 = 2 + 2\sin x\cos x = 2 + \sin 2x$ miatt egyenletünk pontosan akkor teljesül, ha $x \neq \frac{\pi}{2}n$ mellett $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x = 1 + \sin 2x$, azaz ha $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Ebből $(\cos 2x - \sin 2x)^2 = \cos^2 2x + \sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x = 1 - \sin 4x = 1$, azaz $\sin 4x = 0$, tehát $x = \frac{\pi}{4}k$, $k \in \mathbf{Z}$, ami kizárt. Nincs megoldás.

3047. $0 \leqq \sqrt{1-\sin 2x} = \sin 2x - 1 \leqq 0$ miatt egyenletünk pontosan akkor teljesül, ha $\sin 2x = 1$, azaz ha $x = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

3048. $0 = \sin 6x + \cos 3x = \sin 6x - \cos(\pi - 3x) = \sin 6x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - 3x)\right) = \sin 6x - \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ akkor és csak akkor, ha $\sin 6x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$, azaz ha $6x - \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi n$ vagy $6x + 3x - \frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi n$, ha tehát $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$ vagy $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3049. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ miatt egyenletünk azonos a $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ egyenlettel, amiből $\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = -\frac{1}{2}$ (hiszen $|\sin\varphi| \leqq 1$, $\varphi \in \mathbf{R}$-re), és így $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ vagy $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3050. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}n \text{ és } x \neq \frac{2}{2n+1},\ n \in \mathbf{Z}\right)$ miatt egyenletünk pontosan akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{x} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, azaz ha $x^2 - \frac{\pi}{2}(2k+1)x + \pi = 0$. Ebből

$$x = \frac{\frac{\pi}{2}(2k+1) \pm \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (2k+1)^2 - 4\pi}}{2},$$

ami valós gyököt ad, ha $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0; -1\}$.

3051. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos 2x\right) = 1$ akkor és csak akkor, ha $\frac{\pi}{2}\cos 2x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, azaz $\cos 2x = 4k+1$. Mivel $|\cos\varphi| \leqq 1$ minden $\varphi \in \mathbf{R}$-re, ezért csak $k = 0$ lehet. Így $\cos 2x = 1$ és $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3052. Egyenletünk azonos a $\sin 4x = \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ egyenlettel, és ebből $4x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, tehát $x = \frac{\pi}{8}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

3053. Egyenletünk $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ miatt azonos a $\frac{\sqrt{3}}{2}=$ $=\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ egyenlettel. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, azaz $x=2\pi n$ vagy $x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, vagyis $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3054. $1-2\sin^2 x=\cos 2x$ miatt egyenletünk a $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=1$ egyenlettel azonos. Mivel $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$ és $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, így egyenletünk bal oldala $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$-tal azonos. Ez pontosan akkor 1, ha $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}(4n+1)$, vagyis $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3055. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$. Egyenletünk tehát pontosan akkor teljesül, ha $\sin^2 2x=1$, azaz $|\sin 2x|=1$, vagyis $x=\frac{\pi}{4}(2n+1)$.

3056. $1+\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2=$ $=4\cos^2 x$ akkor és csak akkor, ha $0=(\sin x+\cos x)^2-4\cos^2 x=$ $=(\sin x+3\cos x)(\sin x-\cos x)$, ha tehát $\sin x=\cos x$, vagyis $\operatorname{tg}x=1$, és így $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, vagy $\sin x=-3\cos x$, amiből $\operatorname{tg}x=-3$, azaz $x=-1{,}2491+\pi k$.

3057. Egyenletünk a $\cos x=2-2\sin^2 x=2(1-\sin^2 x)=2\cos^2 x$ miatt a $\cos x(1-2\cos x)=0$ egyenlettel azonos, ami akkor és csak akkor áll, ha $\cos x=0$, azaz $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ vagy $\cos x=\frac{1}{2}$, tehát $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3058. $$\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}.$$

A $\sin\frac{x}{2}\left(2+\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right)=0$ egyenletből $\frac{x}{2}=\pi n$, vagyis $x=2\pi n$, ám erre $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ nem értelmezhető, így $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$ lehet csak. Ez az $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ megoldásokat adja.

3059. $$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-1=\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos x}=$$
$$=\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)=0$, vagyis $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, tehát $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, vagy $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, és így $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

3060. $$\operatorname{ctg}x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=$$
$$=\frac{\cos x+1}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{\sin x}=2$$ akkor és csak akkor, ha $\sin x=\frac{1}{2}$, vagyis $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3061. $1-2\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$ miatt egyenletünk akkor és csak akkor teljesül, ha
$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-(1+\sin 2x))=0$, azaz $\sin x=\cos x$ vagy $\sin x+\cos x=1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ teljesül. Az előbbi a

$\operatorname{tg} x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ megoldást, az utóbbi a $(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$ miatt a $\sin x + \cos x = 0$-ból a $\operatorname{tg} x = -1$, tehát $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$ gyököt, illetve a $\sin x + \cos x = 1$-ből a **2980.** feladat szerinti $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ vagy $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ megoldásokat adja.

3062. $\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x} = \frac{1+\cos^2 x - \sin^2 x}{1+\sin x} = \frac{1+1-2\sin^2 x}{1+\sin x} = 2\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} =$
$= 2(1-\sin x)$; $\sqrt{2}\sin(45°+x) = \sqrt{2}(\sin 45° \cos x + \cos 45° \sin x) =$
$= \cos x + \sin x$. Ezekkel egyenletünk $1-\sin x = \cos x + \sin x$. Ebből az $1-2\sin x = \cos x$ egyenlet négyzetére $1-4\sin x+4\sin^2 x =$
$= \cos^2 x = 1-\sin^2 x$, vagyis $5\sin^2 x - 4\sin x =$
$= \sin x(5\sin x - 4) = 0$, tehát $\sin x = 0$, vagyis $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, vagy $\sin x = \frac{4}{5}$, és így $x = 0{,}9273 + 2\pi k$, vagy $x = 2{,}3713 + 2\pi k$. Ezek közül csak az $x = 2\pi k$, és $x = 2{,}3713 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ elégíti ki eredeti egyenletünket.

3063. $\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x}} =$

$= \frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x \cos x \cos 2x}{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x} = \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{\sin(2x-x)} = \sin 2x$, ha $x \neq \frac{\pi}{4}n$, $n \in \mathbf{Z}$. $2\sin(45°+x)\sin(45°-x) =$
$= 2\sin(45°+x)\cos(90°-(45°-x)) = 2\sin(45°+x)\cos(45°+x) =$
$= \sin(90°+2x) = \cos 2x$. Így egyenletünk csakis akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} 2x = 1$, vagyis $x = \frac{\pi}{8}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

3064. Mivel $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, ezért

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)},$$

vagyis egyenletünk jobb oldala $(-\operatorname{tg} x)$-szel egyenlő $\left(x \neq \frac{\pi}{4}k, k \neq 4n,\right.$

$\left. k, n \in \mathbf{Z}\right)$, és ugyanakkor a bal oldal felhasználva, hogy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) =$
$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x+x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) =$
$= \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x(1-(-1)) = \operatorname{tg} 2x$. Így egyenletünk a $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x =$
$= \operatorname{tg}(\pi - x)$ egyenlettel azonos, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}k \,\middle|\, k \neq 4n,\ k,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $2x - (\pi - x) = \pi m$, azaz $x = \frac{\pi}{3}p$, $p \in \mathbf{Z}$.

3065. $\frac{2}{\operatorname{tg} x} = \frac{2\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg}(x+\varphi) + \operatorname{tg}(x-\varphi) = \frac{\sin(x+\varphi)}{\cos(x+\varphi)} + \frac{\sin(x-\varphi)}{\cos(x-\varphi)} =$

$= \frac{\sin(x+\varphi)\cos(x-\varphi) + \cos(x+\varphi)\sin(x-\varphi)}{\cos(x+\varphi)\cos(x-\varphi)} =$

$= \frac{\sin(x+\varphi+x-\varphi)}{\cos(x+\varphi)\cos(x-\varphi)} = \frac{\sin 2x}{\cos(x+\varphi)\cos(x-\varphi)}$,

$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}$. Így egyenletünk a

$\sin^2 x = \cos(x+\varphi)\cos(x-\varphi)$ egyenlettel azonos. Ebből
$(\cos x \cos\varphi - \sin x \sin\varphi)(\cos x \cos\varphi + \sin x \sin\varphi) = \cos^2 x \cos^2\varphi -$
$-\sin^2 x \sin^2\varphi = (1-\sin^2 x)\cos^2\varphi - \sin^2 x \sin^2\varphi = \cos^2\varphi -$
$-\sin^2 x(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2 x$, vagyis $\sin^2 x = \frac{\cos^2\varphi}{2}$, amiből x kiszámítható.

3066. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1-\sin x=$

$$=\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x+\pi}{2}}=\frac{2}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\frac{\sin\frac{x+\pi}{2}}{\cos\frac{x+\pi}{2}}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x+\pi}{2}-\sin\frac{x+\pi}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x+\pi}{2}\right)}=\frac{-\sin x}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$=\sin x$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$. Ezzel egyenletünk a $\sin x=\frac{1}{2}$ egyenlettel azonos, tehát $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3067. $\frac{\sin 3x}{4\sin x}=\frac{\sin(2x+x)}{4\sin x}=\frac{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}{4\sin x}=$

$=\frac{2\sin x\cos^2 x+\cos 2x\sin x}{4\sin x}=\frac{2\cos^2 x+\cos 2x}{4}=\cos 2x$ pontosan akkor, ha $2\cos^2 x=3\cos 2x=3(\cos^2 x-\sin^2 x)=3(2\cos^2 x-1)$, vagyis $\cos^2 x=\frac{3}{4}$, tehát $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, és így $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, vagy $x=\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3068. $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)^2}=$

$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$, ha $x\neq\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Így egyenletünk a $(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{\cos x-\sin x}\right)=0$ egyenlettel azonos, vagyis $\sin x+\cos x=0$, vagy $\cos x-\sin x=1$, tehát $\operatorname{tg}x=-1$, és így $x=\frac{\pi}{4}(4n+3)$, illetve $1=(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$ miatt $\sin 2x=0$ kell legyen, azaz $x=\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ez utóbbiak közül eredeti egyenletünknek csak a $k=4n$, ill. $k=4n+3$, $n\in\mathbf{Z}$ tesz eleget.

3069. $\sin x=\sin y$ akkor és csak akkor, ha $x-y=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, vagy $x+y=\pi(2n+1)$.

3070. $0=\sin x+\sin y$ pontosan akkor, ha $\sin x=-\sin y=\sin(-y)$, azaz $x-(-y)=2\pi n$, vagy $x+(-y)=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Az $x+y=\pi$ miatt előbbiből nem, az utóbbiból $x=\pi k$, $y=\pi-\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3071. $\lg(xy)=10$ pontosan akkor, ha $10^{10}=xy$. $\operatorname{tg}x=2$, ha $x=1{,}1071+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, és így $y=\frac{10^{10}}{1{,}1071+\pi n}$.

3072. $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ miatt első egyenletünkből $\cos x\sin y=1$. Mivel a bal oldali tényezők mindegyike 1-nél nem nagyobb és -1-nél nem kisebb, ezért e szorzat akkor és csak akkor 1, ha $\cos x=\sin y=1$, vagy $\cos x=\sin y=-1$, azaz $x=2\pi n$ és $y=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, vagy $x=(2n+1)\pi$ és $y=\frac{\pi}{2}(4k+3)$, $n,k\in\mathbf{Z}$. Nincs olyan k és n egész, melyekre $x+y=\pi$ teljesülne, mivel fentiekben $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröseit nyerjük.

3073. $\sin x=\sin y$ akkor és csak akkor, ha $x-y=2\pi n$, vagy $x+y=\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. Az előbbi minden $n\in\mathbf{Z}$-re kielégíti az első egyenletet, mivel $\sin\frac{x-y}{2}=\sin\pi n=0$, a második csak akkor, ha $\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\sin\frac{x-y}{2}=0$, azaz $x-y=2\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$ is teljesül. Így bármely $x=\alpha\in\mathbf{R}$, $y=\alpha+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ megoldás, és más nincs.

3074. $x=-y$ miatt $\sin\pi x\cos\pi y=\sin\pi x\cos\pi(-x)=\sin\pi x\cos\pi x=$

$=\frac{1}{2}\sin 2\pi x=0$ pontosan akkor, ha $2\pi x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, vagyis $x=\frac{n}{2}$, $y=-\frac{n}{2}$.

3075. Ha $\cos x = -1$, úgy $\sin x = \operatorname{tg} x = 0$, tehát első egyenletünk minden $y \in H := \mathbf{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$-re teljesül. Így $x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ és $y \in H$ a megoldás.

3076. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} y$ $x, y \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z} \right\}$. Ugyanígy $\operatorname{tg} y \operatorname{ctg} x = 1$ pontosan akkor, ha $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$, vagyis a két egyenlet azonos a fenti halmazon. Így $x - y = \pi n$ megoldás, azaz $x = \alpha \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z} \right\}$ és $y = \alpha + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3077. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} 2x \dfrac{1}{\operatorname{tg} y} = 1$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} y$, azaz $2x - y = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, és $x \neq \dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, $y \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $\operatorname{tg}(2x - 3y) = \sqrt{3}$, ha $2x - 3y = \dfrac{\pi}{3} + \pi m$, és így a két egyenlet különbségéből $2y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi s$, azaz $y = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} s$, és ezzel $2x - y = 2x + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2} s = \pi n$, vagyis $x = -\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{4}(2n+s)$, $n, s \in \mathbf{Z}$.

3078. A két egyenlet összegéből $\sin^2 x - \cos y + \cos^2 x + \sin y = 1 + \sin y - \cos y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, ha $\sin y = \cos y$, azaz $y = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. A két egyenlet tehát $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$, és $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$. Mivel $\sin^2 x$ is, $\cos^2 x$ is 1-nél nem nagyobb, ezért ha $n = 2k$ páros, úgy $\dfrac{1}{2} + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1$, vagyis n csak páratlan lehet. Ezzel $y = \dfrac{\pi}{4} + \pi(2k+1) = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, ám $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} - \sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) > 1$, az egyenletrendszernek nincs tehát megoldása.

3079. Az első egyenlet csak akkor áll, ha $x + 2y = \dfrac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. A másodikból, mivel a bal oldali szorzat bármelyik tényezője (-1)-nél nem kisebb és 1-nél nem nagyobb, ezért $\cos 2x = 1$ és $\sin y = -1$, vagy $\cos 2x = -1$ és $\sin y = 1$ lehet csak. Így $2x = 2\pi k$ és $y = \dfrac{\pi}{2}(4m+3)$, vagy $2x = \pi(2k+1)$ és $y = \dfrac{\pi}{2}(4m+1)$. Ezek közül az első $x + 2y$-ra $\dfrac{\pi}{2}$ páros többszörösét adja, és ez nem tesz eleget az első egyenletnek, a második pedig $\dfrac{\pi}{2}$-nek $(4n+1)$-szeresét csak akkor adja, ha k páratlan. Így $x = \dfrac{\pi}{2}(4p+3)$ és $y = \dfrac{\pi}{2}(4m+1)$ kell legyen, $p, m \in \mathbf{Z}$. Ezek valóban megoldások.

3080. $\dfrac{3}{2} = \sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$ és $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$, tehát hányadosukból $\operatorname{tg} \dfrac{x-y}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, azaz $\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + \pi n$, és így $x - y = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ kell legyen. Ezzel $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos\left(\dfrac{5\pi}{6} + \pi n\right) = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{5\pi}{6} \cos \pi n = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(\pm 1) = \dfrac{3}{2}$-ből $\sin \dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ha $n = 2k$ és $\sin \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ha $n = 2k+1$. Az egyenletrendszer mindkét egyenletét tehát az $\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, továbbá az $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$, vagy $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$ egyikéből nyert egyenletrendszer gyökei:

$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m$, $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi p$ vagy $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi p$ (m és p egészek), illetve az $\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n$, továbbá az $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$,

vagy az $\frac{x+y}{2}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ egyikéből nyert egyenletrendszer gyökei elégítik ki. Ez utóbbiak az előzőkkel azonos gyököket adnak.

3081. Legyen $\operatorname{tg} x = a$ és $\operatorname{ctg} y = b$, így egyenletrendszerünk $a+b=30$ és $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=0{,}864$, vagyis $ab=\frac{30}{0{,}864}$. Így a $z^2-30z+\frac{30}{0{,}864}=0$ egyenlet gyökei a és b, tehát $z=\frac{30+\sqrt{30^2-\frac{4\cdot 30}{0{,}864}}}{2}=\frac{15\pm 13{,}79}{2}$, azaz $\operatorname{tg} x = 14{,}39$ és $\operatorname{ctg} y = 0{,}61$, vagy megfordítva $\operatorname{tg} x = 0{,}61$ és $\operatorname{ctg} y = 14{,}39$. Ezekből $x = 1{,}50+\pi k$ és $y=\frac{\pi}{2}-0{,}548+\pi k$, vagy $x=\frac{\pi}{2}-0{,}548+\pi k$ és $y=1{,}50+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3082. Az első egyenlet kétszeresét a másodikból levonva $\operatorname{ctg}^2 y = 1$, és ezzel $\operatorname{tg}^2 x = 3$, tehát $y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, és $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$ összesen négy megoldást ad ($k, n\in\mathbf{Z}$).

3083. $\frac{1}{3}=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\sqrt{2}}{8\cos x\cos y}$ miatt $\cos x\cos y=\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Ha ebből első egyenletünket levonjuk, illetve hozzáadjuk, akkor a $\cos(x+y)=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, illetve $\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenleteket kapjuk. Ezekből $x+y=\pm 1{,}209+2\pi k$, illetve $x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$, azaz $x=\frac{\pi}{8}+0{,}605+\pi k$, $y=0{,}605-\frac{\pi}{8}+\pi k$; $x=-0{,}605+\frac{\pi}{8}+\pi k$, $y=-0{,}605-\frac{\pi}{8}+\pi k$.

3084. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=0{,}82$ és $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1{,}66$-ból $\frac{0{,}82}{1{,}66}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$, azaz $\frac{x+y}{2}=0{,}4588+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. A két egyenlet négyzetének összegéből $0{,}82^2+1{,}66^2=3{,}4280=\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y+\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y=2+2\cos(x-y)$, tehát $\cos(x-y)=0{,}7140$, és ezzel $\frac{x-y}{2}=\pm 0{,}3878+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Így $x=0{,}8466+2\pi k$, $y=0{,}0710+2\pi k$, vagy $x=0{,}0710+2\pi k$, $y=0{,}8466+2\pi k$.

3085. $\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} y=\operatorname{tg} x\frac{1}{\operatorname{tg} y}=1$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y$, azaz $x-y=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, és $x, y\neq\frac{\pi}{2}n$. $\lg\sin x+\lg\cos y+\lg 2=\lg 2\sin x\cos y$, tehát első egyenletünkből $2\sin x\cos y=1$, vagyis $2\sin(y+\pi n)\cos y=2\sin y\cos\pi n\cos y=\sin 2y\cdot\cos\pi n=1$, amiből $n=2k$, $k\in\mathbf{Z}$ esetén $y=\frac{\pi}{4}(4m+1)$, és ezzel $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k,\ m\in\mathbf{Z}$, míg $n=2k+1$ mellett $y=\frac{\pi}{4}(4m+3)$, és ezzel $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$. Mivel mind a $\sin x$, mind a $\cos y$ pozitív kell legyen (a logaritmusuk miatt), ezért $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ ad csak megoldást.

3086. $\sin x$, $\sin y$ nem negatívok, mert egyrészt szorzatuk ilyen, különben nincs értelme négyzetgyökének, és összegük is nem negatív, hiszen az egyenlet jobb oldalán nem negatív mennyiség áll. Ezért első egyenletünk a $(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin y})^2=0$ egyenlettel azonos, ami pontosan akkor teljesül, ha $0\leqq\sin x=\sin y$, azaz $x-y=2\pi n$, vagy $x+y=\pi(2n+1)$ és $2\pi n\leqq x, y\leqq\pi(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. A $\cos(x+3y)=-\frac{1}{2}$ csak úgy állhat, ha $x+3y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ezt előbbivel egybevetve az $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $y=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $y=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$ megoldásokat kapjuk.

3087. $2=\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-y\right)}{\sin y}=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos y-\cos\frac{2\pi}{3}\sin y}{\sin y}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg} y+\frac{1}{2}$, vagyis $\operatorname{ctg} y=\sqrt{3}$, és ezért $y=\frac{\pi}{6}+\pi n$, és ehhez $x=\frac{\pi}{2}-$

$-\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3088. $\operatorname{tg}(x-y)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ pontosan akkor, ha $x-y=\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, ha tehát

$x-y=\frac{\pi}{3}(3k+2)$. Ezzel együtt $x-3y=\frac{\pi}{3}(3n-1)$ csak így teljesülhet:

$(x-y)-(x-3y)=2y=\frac{\pi}{3}(3k+2-(3n-1))=\frac{\pi}{3}(3k-3n+3)=\pi m$,

$m\in\mathbf{Z}$, azaz $y=\frac{\pi}{2}m$. Ehhez $x=\frac{\pi}{2}m+\pi k+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(m+2k)$, m,

$k\in\mathbf{Z}$.

3089. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}=-1$ pontosan akkor, ha $\frac{\pi x}{8}=\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, azaz ha $x=6+8k$

és ezzel $y=\frac{n}{6+8k}$ ($6+8k=0$, csak ha $k=-\frac{6}{8}$ lenne, ám k egész!).

3090. $\operatorname{tg}\frac{x}{y}=1$ pontosan akkor, ha $\frac{x}{y}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ és $\sin xy=-\frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha $xy=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$ vagy $xy=\frac{11\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ezek szorzatából, illetve hányadosából

$$x=\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(4n+1)(12k+7)}{6}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\frac{12k+7}{4n+1}}$$

vagy

$$x=\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(4n+1)(12k-1)}{6}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\frac{12k-1}{4n+1}}.$$

k és n oly egészek, melyekre $(4n+1)(12k-1)>0$ kell legyen, azaz $n\geqq 0$ és $k\geqq 1$ vagy $n\leqq -1$ és $k\leqq 0$.

3091. $2=\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\sin x\cos y}=$

$=\frac{\cos(x-y)}{\frac{1}{4}}$, tehát $\cos(x-y)=\frac{1}{2}$ és így $x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Így első egyenletünkből

$\operatorname{ctg}\left(\pm\frac{\pi}{3}+y\right)+\operatorname{tg} y=2$, azaz $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)+\operatorname{tg} y=2$, vagy

$\operatorname{ctg}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg} y=2$. Az előbbiből $\frac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} y}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} y}+\operatorname{tg} y=2$,

azaz $\operatorname{tg}^2 y-2\operatorname{tg} y-2\sqrt{3}+1=0$, amiből $\operatorname{tg} y=1\pm\sqrt{2\sqrt{3}}$, tehát

$y=1{,}23\,456+\pi k$ vagy $y=-0{,}71\,097+\pi k$. Az utóbbiból nyert

$\operatorname{tg}^2 y-2\operatorname{tg} y+2\sqrt{3}+1=0$ egyenletnek nincs valós gyöke. Ezért

$x=\frac{\pi}{3}+1{,}23\,456+\pi(2n+k)$, $y=1{,}23\,456+\pi k$,

vagy $x=\frac{\pi}{3}-0{,}71\,097+\pi(2n+k)$, $y=-0{,}71\,097+\pi k$, vagy

$x=1{,}23\,456-\frac{\pi}{3}+\pi(2n+k)$, $y=1{,}23\,456+\pi k$, vagy

$x=-0{,}71\,097-\frac{\pi}{3}+\pi(2n+k)$, $y=-0{,}71\,097+\pi(2n+k)$, n, $k\in\mathbf{Z}$.

3092. $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$ miatt egyenletrendszerünkből $1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=$

$=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$, azaz $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{4}$. Így a $z^2-z+\frac{1}{4}=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0$ gyökei

éppen a $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg} y$. Ezek szerint $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y=\frac{1}{2}$, tehát $x=0{,}4636+$

$+\pi n$, $y=0{,}4636+\pi k$, k, $n\in\mathbf{Z}$.

3093. $\sin(x-y)=\frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha $x-y=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ vagy $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, és $\cos(x+y)=\frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha $x+y=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, vagy $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$. Így $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $y=\frac{\pi}{12}+\pi s$, vagy $x=\frac{7\pi}{12}+\pi m$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi s$, vagy $x=-\frac{\pi}{6}+\pi m$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi s$, vagy $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $y=-\frac{7\pi}{6}+\pi s$, amelyekben m és s azonos paritású egészek.

3094. A két egyenlet különbségéből $0=\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 y-\sin^2 y=$ $=\cos 2x+\cos 2y$, ami pontosan akkor, ha $\cos 2x=-\cos 2y=$ $=\cos(\pi-2y)$, ha tehát $2x+(\pi-2y)=2\pi n$, azaz $x-y=\frac{\pi}{2}+\pi k$, vagy $x+y=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Így $x=y+\frac{\pi}{2}+\pi k$, vagy $x=-y+\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, tehát $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\pm y+\pi k\right)+\sin^2 y=\cos^2 y+\sin^2 y=$ $=1$ és $\cos^2 x+\cos^2 y=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\pm y+\pi k\right)+\cos^2 y=\sin^2 y+\cos^2 y=$ $=1$ miatt $x=\pm y+\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y\in\mathbf{R}$ és $k\in\mathbf{Z}$ megoldás.

3095. $\sin(2x+y)=0$ pontosan akkor, ha $2x+y=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. $\cos(2x-y)=$ $=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ akkor és csak akkor, ha $2x-y\mp\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Így $2x+y+2x-y\mp\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\pi(n+2k)$, azaz $4x\mp\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\pi(n+2k)$, tehát $x=\frac{\pi}{10}(2n+4k+1)$, $y=-\frac{\pi}{5}(4k-3n+1)$, vagy $x=\frac{\pi}{6}(2n+4k-1)$, $y=$ $=\frac{\pi}{3}(n-4k+1)$.

3096. Mivel $|\cos x|\geqq -1$ és $|\sin y|\geqq -1$, ezért $\cos x+\sin y=-2$ akkor és csak akkor, ha $\cos x=-1$ és $\sin y=-1$, azaz $x=\pi(2n+1)$ és $y=\frac{\pi}{2}(4n+3)$. Ezek az első egyenletet is kielégítik.

3097. $\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{3}=0$ pontosan akkor, ha $\sin\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x-y}{3}\right)$, ha tehát $\frac{x+y}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x-y}{3}\right)=2\pi n$, vagy $\frac{x+y}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x-y}{3}\right)=\pi(2n+1)$, azaz $5x+y=3\pi(4n+1)$, vagy $x+5y=3\pi(4n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

A $\operatorname{tg}(2x-y)=1$ akkor és csak akkor áll, ha $2x-y=\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Ezek szerint $7x=\frac{\pi}{4}(4k+1+48n+12)$, vagyis

$x=\frac{\pi}{28}(48n+4k+13)$, $y=2x-\frac{\pi}{4}(4k+1)=\frac{\pi}{28}(96n-20k+19)$

vagy $11y=6\pi(4n+1)-\frac{\pi}{4}(4k+1)=\frac{\pi}{4}(96n-4k+23)$,

tehát $y=\frac{6\pi}{44}(96n-4k+23)$, $x=3\pi(4n+1)-5y=$

$=\frac{132\pi}{44}(4n+1)-\frac{30\pi}{44}(96n-4k+23)=\frac{6\pi}{44}(-392n+2k-93)$, $k,n\in\mathbf{Z}$.

3098. A két egyenlet szorzatából $(2\sin x\cos x)(2\sin y\cos y)=-1$, azaz $\sin 2x\cdot\sin 2y=-1$. Mivel $|\sin\varphi|\leqq 1$, ezért előbbi egyenletünk csak úgy állhat, ha $\sin 2x=1$, $\sin 2y=-1$, vagy $\sin 2x=-1$ és $\sin 2y=1$, azaz $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $y=\frac{\pi}{4}(4n+3)$, vagy $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$, $y=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k,n\in\mathbf{Z}$. Ezek közül csak azok az (x,y) párok adnak megoldást, amelyben k és n különböző paritású.

3099. A két egyenlet összegéből $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y) = 0$, ami csak akkor teljesül, ha $x-y = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$, míg az egyenletek különbségéből $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vagyis $x+y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, vagy $x+y = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Az így nyerteket egybevetve $x+y+x-y = 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k + \frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{2\pi}{3} + \pi(n+2k)$, azaz $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n+2k)$, $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}(n+2k) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}(n-2k)$, vagy hasonlóan $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n+2k)$, $y = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}(n-2k)$.

3100. $|\sin 2x| \leqq 1$, $|\cos 3y| \leqq 1$ miatt az első egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $\sin 2x = \cos 3y = 1$, vagy $\sin 2x = \cos 3y = -1$, ha tehát $x = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $y = \frac{2\pi}{3}k$, vagy $x = \frac{\pi}{4}(4n+3)$, $y = \frac{\pi}{3}(2k+1)$. Ezek azonban nem elégítik ki a második egyenletet, mivel ezekre $\sin 4x = 0$ és $|\cos 3y| = 1$.

3101. $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{tg} y = b$ jelölésekkel második egyenletünkből

$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{-2\sqrt{3}}{ab} = -2\sqrt{3}$, azaz $ab = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$, tehát $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{ctg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ és így $x - \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \pi n$, azaz $x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n$ kell legyen. Ezért $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y + \pi n\right) + \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} y + \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}$, tehát

$\operatorname{tg}^2 y + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} y + 1 = 0$, amiért $\operatorname{tg} y = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-4}}{2} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

Ezekkel $y = -0{,}30\,774 + \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 0{,}30\,774 + \pi m$, vagy

$y = -1{,}2631 + \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 1{,}2631 + \pi m$, $k, m \in \mathbf{Z}$.

3102. Az eredeti egyenletrendszer első egyenletéből $\cos 2x + \cos 2y = 0$, másodikból $\cos 2x \cos 2y = \frac{1}{2}$ kell teljesüljön. Ez lehetetlen, hiszen ez utóbbi szerint a tényezők azonos előjelűek (nem nullák!), és ezért összegük 0 sem lehet!

3103. A második egyenletből $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = 2\frac{\sin x}{\cos x}$, és ez pontosan akkor teljesül, ha

$\sin(x+y)\cos x = 2 \sin x \cos(x+y)$, azaz ha

$\sin(x+y)\cos x + \cos(x+y)\sin x = 3 \sin x \cos(x+y)$,

és így $\sin(2x+y) = 3 \sin x \cos(x+y)$,

illetve $\sin(x+y)\cos x - \cos(x+y)\sin x = \sin x \cos(x+y)$,

vagyis $\sin y = \sin x \cos(x+y)$. Ezek szerint $\sin(2x+y) = 3 \sin y$, ami az első egyenlet. Ez azt jelenti, hogy minden olyan (x, y) számpár, amely eleget tesz a $\operatorname{tg}(x+y) = 2 \operatorname{tg} x$ egyenletnek, kielégitik az egyenletrendszert is. Ezért

$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 2 \operatorname{tg} x$-ből $\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x}$ és az ezt kielégítő $(x; y)$ számpárok kielégitik egyenletrendszerünket is:

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2n+1) \mid n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

3104. $\cos 2x + \cos 2y = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 y - \sin^2 y =$

$= 1 - 2\sin^2 x + 2\cos^2 y - 1 = 2(\cos^2 y - \sin^2 x) =$

$= 2(\cos y + \sin x)(\cos y - \sin x) = -\frac{3}{2}$-ből az első egyenletet is felhasználva $\cos y + \sin x = \frac{3}{2}$ adódik. Ezt az elsőhöz hozzáadva:

$2 \sin x = 2$, tehát $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ezzel $\cos y = \frac{1}{2}$, vagyis $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3105. Az $y = \pi - x$ helyettesítéssel

$\sin x + \sin y = \sin x + \sin(\pi - x) = 2 \sin x = 1$

akkor és csak akkor, ha $\sin x = \frac{1}{2}$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, vagy $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Az ezekhez tartozó $y_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi k$, illetve $y_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ adják az egyenletrendszert kielégítő $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ számpárokat.

3106. $x = \frac{\pi}{2} + y$ miatt $\cos x + \cos 2y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos 2y = -\sin y + \cos^2 y - \sin^2 y = -\sin y + 1 - 2\sin^2 y = 1$ akkor és csak akkor, ha $\sin y(1 + 2\sin y) = 0$, ha tehát $\sin y = 0$, vagyis $y = \pi n$ és így $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ vagy $\sin y = -\frac{1}{2}$, azaz $y_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, vagy $y_3 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ és ezekkel $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, illetve $x_3 = \frac{13\pi}{6} + 2\pi n$.

3107. Az első egyenletből $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(2x + y) = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} y}$, amit a másodikkal egybevetve $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} y = 0$, azaz $2x = \pi n$, vagy $y = \pi k$ kell legyen. Így $2x = \pi n$, azaz $x = \frac{\pi}{2} n$ és $y = \frac{\pi}{4} - \pi n$, vagy $y = \pi k$ és $x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} k$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

3108. A második egyenletből $\cos 2x = 1$, $\sin y = -1$ lehet csak, hiszen $\cos 2x \leqq 1$ és $\sin y \geqq -1$ miatt $\cos 2x - \sin y \leqq 2$ és az egyenlőség pontosan a fenti feltétellel teljesül. Így $x = \pi n$, $y = \frac{\pi}{2}(4k + 3)$, $n, k \in \mathbf{Z}$, és ezek az első egyenletet is kielégítik.

3109. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3y = 0$ akkor és csak akkor, ha $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3y$, ha tehát $x - 3y = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ezzel $3x = 9y + 3\pi n$, vagyis $\operatorname{ctg} 3x + \operatorname{tg} 9y = \operatorname{ctg}(9y + 3\pi n) + \operatorname{tg} 9y = \operatorname{ctg} 9y + \operatorname{tg} 9y = \frac{1}{\operatorname{tg} 9y} + \operatorname{tg} 9y = 2$, amiből $\operatorname{tg}^2 9y - 2\operatorname{tg} 9y + 1 = (\operatorname{tg} 9y - 1)^2 = 0$, tehát $\operatorname{tg} 9y = 1$, azaz $y = \frac{\pi}{36}(4k + 1)$. Ezzel $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}(3n + k)$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

3110. $\sin 3x + \cos y = 0$ pontosan akkor, ha $\sin 3x = -\cos y = \cos(\pi - y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - y)\right) = \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha $3x - \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi n$ vagy $3x + \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \pi(2n + 1)$, ha tehát $3x - y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, vagy $3x + y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \sqrt{3}$-ból $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3} + \pi k$, azaz $x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

Ezt előbbiekkel egybevetve $4x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, azaz $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} m$, $y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k - \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} m\right) = \frac{5\pi}{8} + \frac{\pi}{2}(4k - m)$, vagy $2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n - \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, tehát $x = \frac{5\pi}{12} + \pi m$ és $y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k - \left(\frac{5\pi}{12} + \pi m\right) = \frac{\pi}{4} + \pi(2k - m)$, $k, m \in \mathbf{Z}$.

3111. Az egyenletnek valós gyöke pontosan akkor van, ha diszkriminánsa: $D = 16 - 4(2\cos\alpha - 1)(4\cos\alpha + 2) = 16 - 32\cos^2 + 16 = 32(1 - \cos^2\alpha) \geqq 0$. Mivel $|\cos\alpha| \leqq 1$, ezért $D \geqq 0$ minden $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$-re is.

3112. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, így ha valamely α kielégíti a $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$ egyenletet, akkor kielégíti az ebből nyert $(2\cos x)^2 = (1 - 4\cos^2 x)^2$, azaz $2(\cos 2x + 1) = (-1 - 2\cos 2x)^2$ egyenletet is, ez pedig rendezés után a $4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0$, azaz a kívánt egyenlet.

3113. Valós gyöke pontosan akkor van az egyenletnek, ha a $D = (4\cos\alpha)^2 - 4 \cdot 4 = 16(\cos^2\alpha - 1)$ diszkrimináns nem negatív. $|\cos\alpha| \leqq 1$ miatt ez akkor és csak akkor teljesül, ha $|\cos\alpha| = 1$, azaz $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3114. Az egyenlet $\frac{\pi}{2}\cos x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett állhat fenn. Mivel $|\cos x| \leqq 1$, ezért csak $k=0$ vagy $k=-1$ lehetséges és ezekkel $x=2\pi n$, vagy $x = \pi(2n+1)$, tehát $x=\pi m$, n, $m \in \mathbf{Z}$ adja a megoldást.

3115. Az egyenlet $\frac{\pi}{2}\sin x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$ mellett teljesülhet. $|\sin x| \leqq 1$ miatt $k=0$ lehet csak, és ezért $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$ a megoldás.

3116. A két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha $\cos\alpha : \sin 2\alpha = \sin\alpha : \cos 2\alpha$, ha tehát $\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 3\alpha = 0$, azaz $3\alpha = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\alpha = \frac{\pi}{6}(2n+1)$, de $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, azaz $n \neq 3k+1$, hiszen ekkor első egyenletünk nem egyenes egyenlete! A két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha $\sin\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\alpha = 0$, azaz $\sin\alpha\cos\alpha(1+2\cos 2\alpha) = 0$.

Ebből $\sin\alpha = 0$, azaz $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ vagy $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$, tehát $2\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, vagyis $\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ ($\cos\alpha = 0$ mellett az első egyenlet nem egyenes egyenlete!).

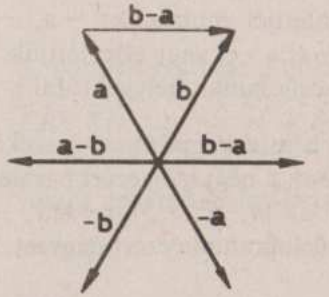
Vektorok. Koordinátageometriai feladatok

3117. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(1;10)$, $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})\,(-7;-5)$, $\left(\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{a}\right)\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$.

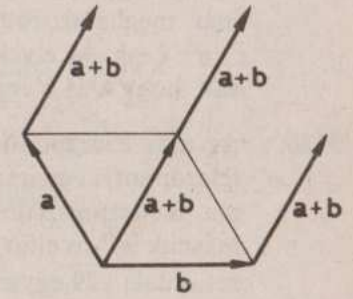
3118. A három pont akkor van egy egyenesen, ha az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$ vektorok párhuzamosak. Ez valóban teljesül, mert a $\mathbf{b}-\mathbf{a}(5;7)$ vektornak a $\mathbf{c}-\mathbf{b}(10;14)$ éppen a kétszerese.

3119. Ha a negyedik csúcs helyvektora $\mathbf{d}$, a két különböző átló felezőpontjai egybeesnek, ezért helyvektoraik is azonosak; $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}$; ebből $\mathbf{d} = \mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

3120. A **3120.** ábráról; a többi csúcs helyvektorai; $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.



3120

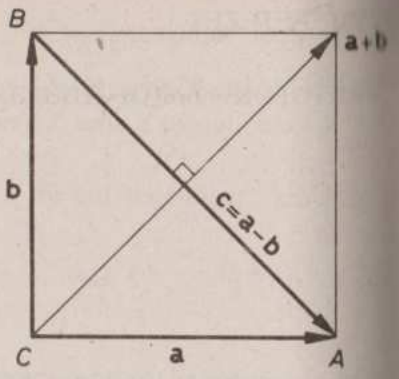


3121

3121. A **3121.** ábráról: $2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $2\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

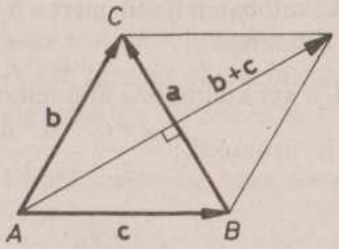
3122. a) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; b) $2\mathbf{b}-\mathbf{a}$; c) $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

3123. (**3123.** ábra) $\mathbf{ab}=0$,
$\mathbf{ac} = 1 \cdot \sqrt{2} \cos 45° = 1$,
$\mathbf{bc} = 1 \cdot \sqrt{2} \cos 135° = -1$,
$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{cc} = 2$,
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$;
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = 0$.



3123

3124. (**3124.** ábra) $\mathbf{ab} = 1 \cdot 1 \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\mathbf{ac} = 1 \cdot 1 \cos 120° = -\frac{1}{2}$;



$\mathbf{bc} = 1 \cdot 1 \cos 60° = \frac{1}{2}$; $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$; $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a} = 0$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a} = 0$.

3124

3125. A lap negyedik csúcsának helyvektora: $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$; a többi csúcshoz a már meghatározott vektorok ellentettjei mutatnak; $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}-\mathbf{c}+\mathbf{b}$. Az élvektorok: $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, vagy ellentettjük. (Feltettük, hogy **a** és **c** egy lap szemközti csúcsainak helyvektorai.)

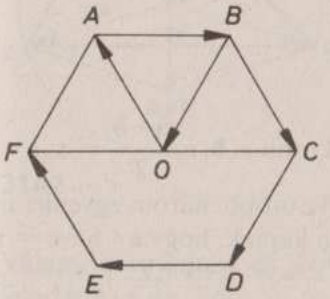
3126. Az **a** és **c** végpontjait, valamint a **b** és **d** végpontjait összekötő átló felezőpontja egyaránt a (4,5; 4,5) pont, a négyszög ezért paralelogramma. Két szomszédos oldal vektora: $\mathbf{a}-\mathbf{b}(-2; -5)$, $\mathbf{c}-\mathbf{b}(5; -2)$ egymásnak 90°-os elforgatottjai; a paralelogramma ezért négyzet. A négyzet oldala $\sqrt{29}$ egység.

3127. Legyenek a csúcsokhoz vezető vektorok: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$; az oldalfelező pontok helyvektorai ezért: $\frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}, \frac{\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3}{2}, \ldots, \frac{\mathbf{a}_{n-1}+\mathbf{a}_n}{2}, \frac{\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_1}{2}$.
Mindkét vektorhalmaz összege: $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n$.

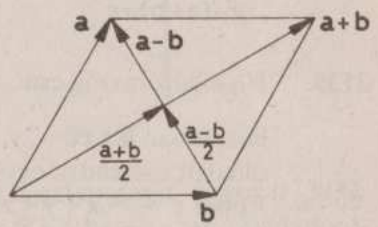
3128. Mint a **3128.** ábráról leolvasható: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$; a második összeg ennek az ellentettje.

3129. Az összeg nullvektor.

3130. Mivel $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \| \mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2} \| \mathbf{a}-\mathbf{b}$, elég $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ merőlegességét bizonyítani; ezek viszont azért merőlegesek, mert a paralelogramma-szabály szerint egy rombusz átlóvektorai (**3130.** ábra).



3128



3130

3131. $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$; ill. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}, \frac{-\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}, \frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$.

3132. Legyen az origó a háromszög súlypontja; a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; a súlypont helyvektora ebben az esetben nullvektor, tehát $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3} = \mathbf{0}$, ebből $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

3133. A paralelogramma átlóinak felezőpontjaiba K-ból a $\frac{\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}}{2}$, ill. $\frac{\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}}{2}$ vektorok mutatnak; a felezőpontok egybeesnek, ezért ez a két vektor egyenlő és így kétszeresük is egyenlő.

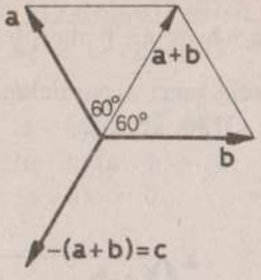
3134. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$.

3135. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$ (vagy ezek ellentettjei).

3136. $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

3137. Ha a négy pont nincs egy egyenesen, a feladat állítása a paralelogramma-szabállyal azonos.

3138. A feltételből következik, hogy $\mathbf{c} = -(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. A paralelogramma-szabály szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ olyan rombusz átlóvektora (**3138.** ábra), amelyben



3138

az egyik átló az oldalakkal egyenlő, azaz az átló két szabályos háromszögre vágja szét a rombuszt. **a** és **b** ezért 120°-os szöget zárnak be egymással és $\mathbf{c} = -(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ miatt a **c**-vel is.

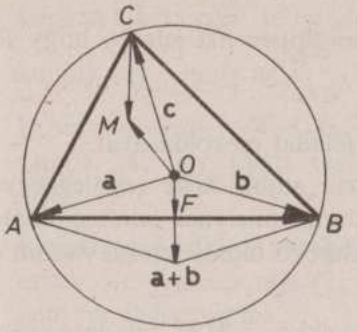
3139. Ha a háromszög csúcsainak helyvektorai **a**, **b**, **c**, $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \mathbf{x}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 2\mathbf{x}$; hasonlóan $\mathbf{b}+\mathbf{c} = 2\mathbf{y}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a} = 2\mathbf{z}$. Az utóbbi három egyenlet megfelelő oldalait összeadva egyszerűsítés után kapjuk, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$. Ebből $\mathbf{c} = -\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\mathbf{a} = \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

3140. Ha az ötszögcsúcsok helyvektorai $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_5$, az előző feladat megoldásának alapján $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{x}_1$, $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{x}_2$, $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{x}_3$, $\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{x}_4$, $\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{x}_5$. Ebből $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_4+\mathbf{x}_5 = \mathbf{a}_1+(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)+(\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5) = \mathbf{a}_1+2\mathbf{x}_2+2\mathbf{x}_4$; ebből $\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4+\mathbf{x}_5$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_5$, $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4+\mathbf{x}_5$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_5$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_4+\mathbf{x}_5$.

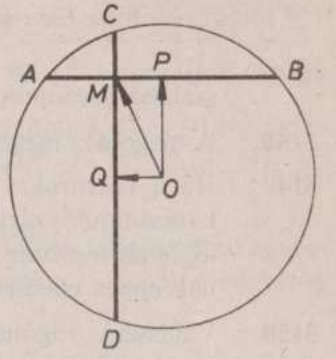
3141. Az $ABCD$ tetraéder csúcsainak helyvektorai legyenek **a**, **b**, **c**, **d**; AB felezőpontjáé $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, CD felezőpontjáé $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, a két felezőpontot összekötő szakasz felezőpontjához az $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$ vektor mutat. Ugyanezt kapjuk, bármely két szemközti élpárból indulunk is ki.

3142. A feltétel szerint $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$. Legyen az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ helyvektorú pont M (**3142.** ábra). Azt kell igazolnunk, hogy M magasságpont, azaz M-et bármely csúccsal összekötve a szemközti oldalra merőlegest kapunk. M-et pl. a **c** végpontjával a $\overrightarrow{CM} = \mathbf{m}-\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ köti össze, ez valóban merőleges az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ vektorra, mivel az egyenlő hosszúságú vektorok összege és különbsége merőleges egymásra.

3143. Legyen AB felezőpontja P, CD-é pedig Q, $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$; a paralelogramma-szabályt alkalmazva $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$, ebből $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ (**3143.** ábra).



3142



3143

3144. Válasszuk origónak az ABC háromszög S súlypontját, ekkor (l. **3132.** feladatot) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} = \mathbf{0}$; viszont az YXZ háromszög Q súlypontjának helyvektora:

$$\overrightarrow{SQ} = \frac{\overrightarrow{SX}+\overrightarrow{SY}+\overrightarrow{SZ}}{3} = \frac{(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AX})+(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BY})+(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CZ})}{3} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}}{3}, \text{ ebből } 3\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}.$$

3145. Jelöljük a pontok helyvektorait a megfelelő kisbetűkkel. Mivel pl. P az AB szakaszt 1 : 2 arányban osztja, $\mathbf{p} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$; hasonlóan $\mathbf{q} = \frac{2\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, $\mathbf{r} = \frac{2\mathbf{c}+\mathbf{a}}{3}$. Az ABC súlypontjának helyvektora $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, a PQR háromszög súlypontjáé: $\frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}}{3} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, tehát a két súlypont egybeesik.

3146. A **3142.** feladat megoldását felhasználva O távolsága az AB oldaltól, azaz az oldal F felezőpontjától $OF = \left|\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right|$; az M magasságpont távolsága a szemközti C csúcstól $CM = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|$, ez valóban kétszeres OF-nek.

3147. Jelöljük a pontok helyvektorait a megfelelő kisbetűkkel. $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}}{3}$, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{x}}{2}$, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{y}}{2}$, $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{z}}{2}$, $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}}{3} =$

$= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}}{6} = \frac{\mathbf{s}+\mathbf{q}}{2}$, ami éppen azt jelenti, hogy R az SQ szakasz felezőpontja.

3148. A megoldás megegyezik a **3141.** feladat megoldásával.

3149. Ha a vektorokat egymáshoz fűzve adjuk össze (esetleg egyenesszakasszá fajuló) zárt négyszöget kapunk, amelynek minden oldala egyenlő, tehát rombusz; a rombusz szemközti oldalvektorai viszont egymásnak éppen ellentettjei.

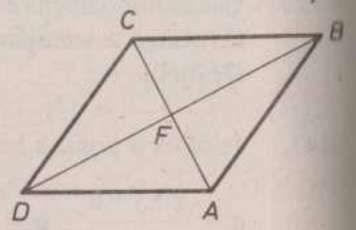
3150. Válasszuk origónak a súlypontot, ekkor a **3132.** feladat szerint a csúcsokba mutató **a**, **b**, **c** vektorok összege: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. A súlyvonalvektorok ezeknek a vektoroknak a $\frac{3}{2}$-szeresei, ezért összegük $\frac{3\mathbf{a}}{2} + \frac{3\mathbf{b}}{2} + \frac{3\mathbf{c}}{2} = \frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$.

3151. Legyen a súlypont az origó; a csúcsokhoz vezető vektorok **a**, **b**, **c**, a **3132.** feladat szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$. A súlypont körül írt R sugarú körnek legyen P egy tetszőleges pontja, ennek helyvektora **p** ($|\mathbf{p}| = R$). P-t a csúcsokkal az $\mathbf{a}-\mathbf{p}$, $\mathbf{b}-\mathbf{p}$, $\mathbf{c}-\mathbf{p}$ vektorok kötik össze, ezek összege $\mathbf{a}-\mathbf{p}+\mathbf{b}-\mathbf{p}+\mathbf{c}-\mathbf{p} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{p} = -3\mathbf{p}$; viszont $|-3\mathbf{p}| = 3R$ állandó.

3152. A **v**-t $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ alakban akarjuk előállítani, ehhez kell meghatározni α és β értékét. A megfelelő összefüggések a koordináták között: $-4\alpha+\beta = -8$, $2\alpha-8\beta = -18$. Az első egyenletből kifejezhetjük β-t, majd ezt a második egyenletbe helyettesítve α-ra egyismeretlenes egyenletet kapunk, ebből $\alpha = \frac{41}{15}$, $\beta = \frac{44}{15}$, $\mathbf{a}\left(-\frac{164}{15}; \frac{82}{15}\right)$, $\frac{44}{15}\mathbf{b}\left(\frac{44}{15}; -\frac{352}{15}\right)$.

3153. A **3139.** feladat jelöléseit és megoldását felhasználva az adott felezőpontok helyvektorai $\mathbf{x}(-2; 3)$, $\mathbf{y}(4; 6)$, $\mathbf{z}(5; 2)$. A csúcsok koordinátái: $\mathbf{a} = \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}\,(-1; -1)$; $\mathbf{b} = \mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}\,(-3; 7)$; $\mathbf{c} = -\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\,(11; 5)$.

3154. Az $A(-3; 7)$, $C(5; 11)$ csúcsokat összekötő átló felezőpontja $F(1; 9)$. Az $\overrightarrow{AC}(8; 4)$ vektort 90°-kal elforgatva a $(4; -8)$, ill. $(-4; 8)$ vektorokat kapjuk, ezeket F helyvektorához hozzáadva kapjuk a B és D helyvektorait, ezért koordinátáik $B(5; 1)$, $D(-3; 17)$ (**3154.** ábra).



3154

3155. Legyen a két csúcs $A(-2; 4)$, $B(7; 16)$; $\overrightarrow{AB}(9; 12)$; a többi csúcsot úgy kapjuk meg, hogy az $\frac{\overrightarrow{AB}}{3}$ $(3; 4)$ vektort $\pm 90°$-kal elforgatjuk (az így kapott vektorok $(-4; 3)$ és $(4; -3)$) és hozzáadjuk az A és B helyvektoraihoz. Az így nyert téglalap-csúcsok: $D_1(-6; 7)$; $C_1(3; 19)$, ill. $D_2(2; 1)$; $C_2(11; 13)$.

3156. Egy négyszög akkor paralelogramma, ha átlóinak felezőpontjai egybeesnek. AC felezőpontja $(2; 1)$, BD felezőpontja $(7; -5{,}5)$, a négyszög nem paralelogramma.

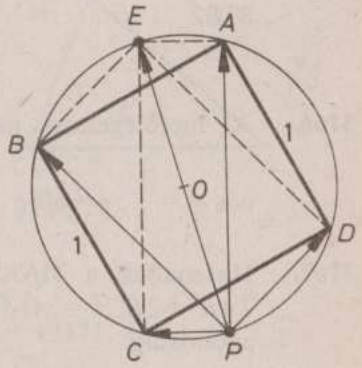
3157. A **3118.** feladat megoldásának gondolatmenetét követve $\overrightarrow{AB}(-3; 4)$; $\overrightarrow{BC}(6; 2)$, a két vektor nem párhuzamos, tehát a három pont nincs egy egyenesen.

3158. Legyen a negyedik csúcs D; ha a csúcsok sorrendje $ABCD$, a D pont a B pont tükörképe az AC átló $F(3; -1)$ felezőpontjára, ezért $D(9; -7)$. (A csúcsok más sorrendje esetén: $D'(1; -11)$ $D''(-7; 21)$ is lehet negyedik csúcs.)

3159. Az $A(7; -1)$, $B(0; 3)$ pontok tükörképei a $K(3; 6)$ pontra adják a paralelogramma másik két csúcsát (A és B szomszédos csúcsok); $C(-1; 13)$, $D(6; 9)$. Az oldalak hossza: $AB = CD = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$, $BC = DA = \sqrt{1^2+10^2} = \sqrt{101}$. Az átlók: $AC = \sqrt{8^2+14^2} = \sqrt{260}$, $BD = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72}$.

3160. Legyen a két vektor **a** és **b**; $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2 = 0$, ez akkor és csakis akkor teljesül, ha $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

3161. A négyzet köré írt kör átmérőjének hossza $\sqrt{2}$ (*) (**3161.** ábra). Mivel AC és BD a kör átmérői, Thalész tételéből következik, hogy $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PC}$, ill. $\overrightarrow{PB}$ és $\overrightarrow{PD}$ páronként merőleges vektorok és összegük a paralelogramma-szabály következtében mindkét esetben az a $\overrightarrow{PE}$, amely a P kezdőpontú átmérővektor, ennélfogva $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{PE}^2 = 2$, viszont $(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$, mivel a $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$ átlóvektorok merőlegesek egymásra.



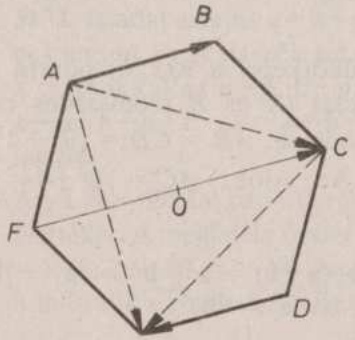
3161

3162. Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{ab} = \mathbf{bc} = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\mathbf{ac} = \cos 120° = -\frac{1}{2}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc} = 0$, $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}-\mathbf{bc} = -1$ (**3162.** ábra).

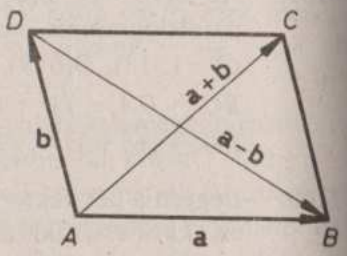
3163. A **3162.** ábra jelöléseit használva $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = 1\cdot 1\cdot\cos 180° = -1$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC} = 1\cdot 2\cdot\cos 0° = 2$. Mivel $AC = AE = CE = \sqrt{3}$ (*), $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos 60° = \frac{3}{2}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos 120° = -\frac{3}{2}$.

3164. A merőlegességnek az a feltétele, hogy a két vektor skaláris szorzata nulla legyen: $[(\mathbf{ab})\mathbf{c}-(\mathbf{ac})\mathbf{b}]\mathbf{a} = (\mathbf{ab})(\mathbf{ac})-(\mathbf{ac})(\mathbf{ab}) = 0$ valóban teljesül.

3165. A merőlegesség feltétele: $(\mathbf{a}+k\mathbf{b})\mathbf{b} = 0$, azaz $\mathbf{ab}+k\mathbf{b}^2 = 0$, $k = \frac{-\mathbf{ab}}{\mathbf{b}^2}$.



3162



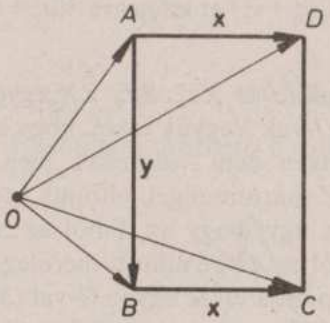
3167

3166. A merőlegesség miatt: $0 = (5\mathbf{a}-4\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b}) = 6\mathbf{ab}-3$, $\mathbf{ab} = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60°$

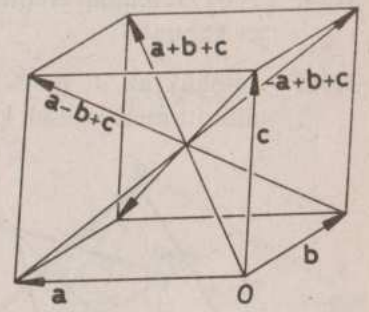
3167. Használjuk a **3167.** ábra jelöléseit; azt kell bizonyítanunk, hogy $2AB^2+2BC^2 = AC^2+BD^2$, azaz $2\mathbf{a}^2+2\mathbf{b}^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$, ami azonosság.

3168. A bizonyítandó egyenértékű azzal, hogy $\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OD}^2$, vagy a **3168.** ábra jelöléseit használva: $\mathbf{a}^2+(\mathbf{a}+\mathbf{x}+\mathbf{y})^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{y})^2+(\mathbf{a}+\mathbf{x})^2$, ami valóban azonosság, ha figyelembe vesszük, hogy a merőlegesség miatt $\mathbf{xy} = 0$.

3169. Válasszuk origónak az S súlypontot, ekkor $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} = \mathbf{0}$ (l. a **3132.** feladatot). Legyen P az S körüli R sugarú kör tetszőleges pontja, ekkor $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SP}$, ahol $|\overrightarrow{SP}| = R$.
$PA^2+PB^2+PC^2 = (\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SP})^2+(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SP})^2+(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SP})^2 =$
$= \overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SC}^2+3R^2-2\overrightarrow{SP}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}) =$
$= SA^2+SB^2+SC^2+3R^2$, ez pedig független P választásától a körön.



3168



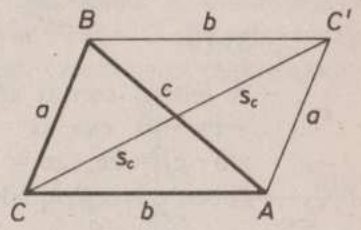
3170

3170. Az O csúcsból induló élvektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; a testátlóvektorok a **3170.** ábra alapján: $-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. A bizonyítandó: $4(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2) = (-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$, ami a négyzetreemelések elvégzésével igazolható.

3171. Tükrözzük a háromszöget az AB oldal felezőpontjára és a kapott paralelogrammára alkalmazzuk a **3167.** feladat tételét:

$2a^2+2b^2 = 4s_c^2+c^2$, ebből

$$s_c = \sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}.$$



3171

Hasonlóan kapjuk, hogy

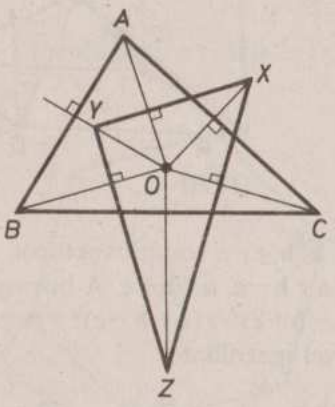
$$s_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}},\quad s_b = \sqrt{\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}}$$ (**3171.** ábra).

3172. Legyen az egyenessel párhuzamos vektor $\mathbf{v}$; a szabályos háromszög egy csúcsából induló két oldalvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, a feltétel szerint $\mathbf{va}=0$, $\mathbf{vb}=0$. Egy egyenes akkor merőleges a síkra, ha minden egyenesére merőleges. A sík tetszőleges egyenesének irányvektorát $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ alakban írhatjuk fel (α és β valós számok). $\mathbf{v}$ erre merőleges, mert $\mathbf{v}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{va}+\beta\mathbf{vb} = 0$.

3173. A kérdéses halmaz a C-ből az AB-re állított merőleges egyenes pontjaiból áll.

3174. A **3171.** feladat eredményéből $4(s_a^2+s_b^2+s_c^2)$-et kifejezve $3(a^2+b^2+c^2)$-et kapunk.

3175. Jelöljük az A, B, C csúcsokból rendre az XY, YZ, ZX egyenesekre állított merőlegesek közös pontját O-val. Vegyük észre, hogy a feladat feltételei nem változnak meg, ha az XYZ háromszöget eltoljuk, toljuk el ezért úgy, hogy az X-ből az AC-re és Y-ból az AB-re állított merőlegesek közös pontja essék egybe O-val (**3175.** ábra). Ebben az esetben csak azt kell bizonyítanunk, hogy Z-ből a BC-re állított merőleges is átmegy O-n, vagy (ami ezzel egyenértékű): az OZ egyenes merőleges BC-re. Válasszuk origónak az O pontot, a pontok helyvektorait jelöljük a megfelelő kisbetűkkel; a merőlegességeket a megfelelő vektorok skaláris szorzatának nulla-voltával fejezzük ki.



3175

A feltétel szerint $\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=0$, azaz $\mathbf{ax}-\mathbf{ay}=0$, $\mathbf{by}-\mathbf{bz}=0$, $\mathbf{cz}-\mathbf{cx}=0$, $\mathbf{cx}-\mathbf{ax}=0$, $\mathbf{ay}-\mathbf{by}=0$. Azt kell bizonyítanunk, hogy $\mathbf{z}(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{zb}-\mathbf{zc}=0$. Az első öt egyenlet megfelelő oldalait összeadva éppen a bizonyítandót kapjuk.

3176. Legyen a négy egységvektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$; a feltétel szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, és bármely kettő közülük φ szöget zár be egymással. Emeljük négyzetre a $-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$ egyenlőséget:

$$1=1+1+1+2\mathbf{bc}+2\mathbf{bd}+2\mathbf{cd}=3+6\cos\varphi, \quad \text{ebből} \quad \cos\varphi=-\frac{1}{3},$$

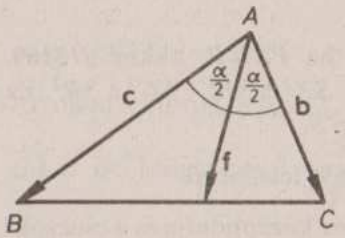
$\varphi=109{,}47°$.

3177. Az A csúcsból induló szögfelezővektor legyen $\mathbf{f}$, az oldalvektorok $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ és legyen $|\mathbf{f}|=f_a$, $|\mathbf{b}|=b$, $|\mathbf{c}|=c$ (**3177.** ábra). Mivel $\mathbf{f}$ a BC oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, $\mathbf{f}=\dfrac{b\mathbf{c}+c\mathbf{b}}{b+c}$. Emeljük négyzetre az egyenlőség mindkét oldalát: $f_a^2=\dfrac{b^2c^2+b^2c^2+2b^2c^2\cos\alpha}{(b+c)^2}$. Helyettesítsük ebbe a koszinusztételből kifejezett $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$ értéket, majd vezessük be a $2s=a+b+c$ jelölést: $f_a^2=$

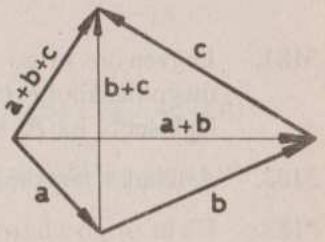
$$=\frac{2b^2c^2+bc(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{4bc}{(b+c)^2}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)=$$

$$=\frac{4bc}{(b+c)^2}s(s-a), \text{ ebből } f_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}.$$

Hasonlóan nyerhető a többi szögfelező is.



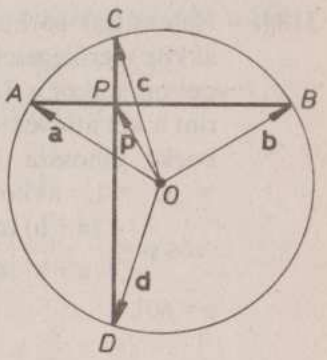
3177



3178

3178. Irányítsuk az oldal- és átlóvektorokat a **3178.** ábrán látható módon és képezzük a szemközti oldalak négyzetösszegének a különbségét: $[(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+\mathbf{b}^2]-(\mathbf{a}^2+\mathbf{c}^2)=2(\mathbf{b}^2+\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca})=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, ez a két átlóvektor szorzatának a kétszerese, ez akkor és csakis akkor nulla, ha az átlók merőlegesek.

3179. Legyenek a kör középpontjából a húrok végpontjaiba, ill. a P pontba mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{p}$, $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=|\mathbf{d}|=R$ (a kör sugara) (**3179.** ábra). A **3143.** feladat megoldása szerint $\mathbf{p}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, ennek megfelelően a húrok szeleteinek négyzetösszege: $(\mathbf{p}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{p}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{p}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{p}-\mathbf{d})^2=$

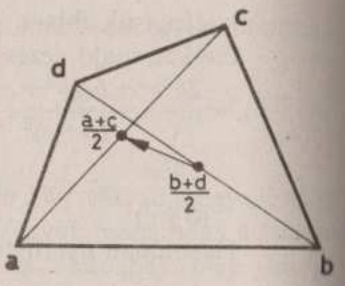


3179

$= \frac{1}{4}[(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})^2+(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d})^2+$

$+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d})^2] = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2 = 4R^2$, s ez valóban független P választásától.

3180. Legyenek a csúcsok helyvektorai tetszőleges origó mellett $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ (**3180.** ábra), ekkor a bizonyítandó egyenlőség: $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2+$ $+(\mathbf{d}-\mathbf{a})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})^2+$ $+4\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}-\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}\right)^2$, ami a négyzetre emelések elvégzésével közvetlenül következik.



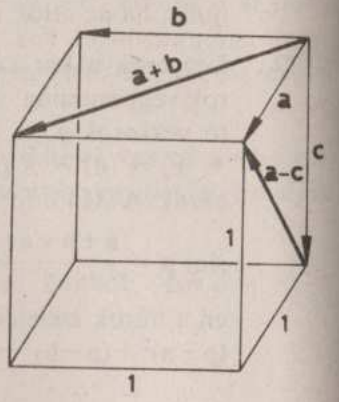
3180

3181. Legyen az origó az S súlypont; ha $PS=R$, akkor a **3169.** feladat megoldásából $PA^2+PB^2+PC^2 = SA^2+SB^2+SC^2+3R^2$. Ez akkor a legkisebb, ha $PS=R=0$, tehát $P=S$.

3182. A feladat tartalmilag azonos a **3169.** feladattal.

3183. Ha az origó a háromszög köré írt kör középpontja és a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = r$). A **3142.** feladat szerint a magasságpont $\mathbf{m}$ helyvektora ($m = |\mathbf{m}|$): $\mathbf{m} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Ebből négyzetre emeléssel $m^2 = 3r^2+2\mathbf{ab}+2\mathbf{bc}+2\mathbf{ca}$ következik. Mivel pl. az $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = c$ egyenlőség négyzetre emeléséből $\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab} = c^2$, $2\mathbf{ab} = 2r^2-c^2$ következik, s hasonlóan $2\mathbf{bc} = 2r^2-a^2$, $2\mathbf{ca} = 2r^2-b^2$, ezek helyettesítésével a bizonyítandót kapjuk.

3184. Ha az átlók párhuzamos lapon vannak, akkor merőlegesek. Ha szomszédos lapokon, akkor a **3184.** ábra jelölése szerint a két átlóvektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{c}$. Ha a kocka élhossza 1, azaz $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, akkor a φ hajlásszögre $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{c})}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}-\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{a}^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, $\varphi=60°$.



3184

3185. A merőlegesség miatt $0 = \mathbf{ab} = 2\cdot 7+(-1)\cdot(-4)+3z$, ebből $z=-6$.

3186. Valamennyi élvektor egyenlő, mert hosszuk $\sqrt{k^2+(k+1)^2+k^2(k+1)^2} = \sqrt{(k^2+k+1)^2} = |k^2+k+1| = k^2+k+1$; bármely két vektor merőleges egymásra, mert skaláris szorzatuk 0.

3187. Felírjuk kétféleképpen a vektorok skaláris szorzatát:

$|\mathbf{u}| = \sqrt{1+16+64} = 9$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+9+36} = 7$; $\cos\alpha = \frac{2+12-48}{7\cdot 9} =$

$= -\frac{34}{63} = -0{,}5397$, $\alpha = 122{,}65°$.

3188. $|\mathbf{v}| = \sqrt{16+9} = 5$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{144+25} = 13$; $\cos\alpha = \frac{-48+15}{5\cdot 13} =$

$= -0{,}5077$, $\alpha = 120{,}51°$.

3189. Az oldalvektorok $\overrightarrow{AB}(5;2;3)$, $\overrightarrow{BC}(-1;-3;-3)$ $\overrightarrow{CA}(-4;1;0)$.

$\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ szöge: $\cos\beta = \frac{5+6+9}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{19}} = \frac{20}{26{,}87} \approx 0{,}7443$; $\beta = 41{,}9°$.

$\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CA}$ szöge: $\cos\gamma = \frac{-4+3}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{17}} = \frac{-1}{17{,}97} \approx -0{,}0556$, $\gamma = 93{,}19°$.

$\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ szöge: $\cos\alpha = \frac{20-2}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{17}} = \frac{18}{25{,}42} \approx 0{,}7081$, $\alpha = 44{,}92°$.

3190. $\overrightarrow{AB}(2;-4)$, $\overrightarrow{BC}(1;3)$, $\overrightarrow{CA}(-3;1)$,
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{20}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{10}$, a háromszög egyenlő szárú.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} \text{ és } \overrightarrow{AC} \text{ szöge:}\\ \overrightarrow{BA} \text{ és } \overrightarrow{BC} \text{ szöge:}\end{array}\right\}\ \cos\alpha = \frac{6+4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}} = \frac{10}{(\sqrt{10})^2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\beta.$

$\alpha=\beta=45°$.

Ellenőrzésképpen kiszámíthatjuk $\cos\gamma$-t:

$\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ szöge: $\cos\gamma = \frac{(-3)\cdot(-1)+1\cdot(-3)}{10} = 0$.

3191. $\mathbf{e}_a\left(-\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$, $\mathbf{e}_b(1;0)$, $\mathbf{e}_c\left(-\frac{1}{9};\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)$, $\mathbf{e}_d\left(\frac{6}{\sqrt{41}};\frac{2}{\sqrt{41}};\frac{-1}{\sqrt{41}}\right)$.

3192. $\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{-3+4y}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{1+y^2}}$. Innen $y = 2{,}34$. A másik érték y-ra 0,12, de az (1; 0,12) vektorral **a** 120°-os szöget zár be.

3193. A **b** vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$. $|\mathbf{a}|$ a rombusz oldalának hossza (**3193.** ábra).

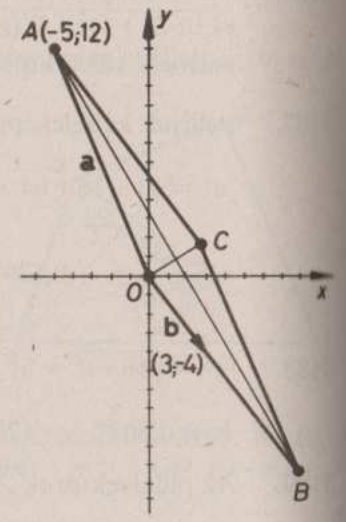
$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{144+25} = 13; |\mathbf{b}| = 5;$

$|\overrightarrow{OB}| = \lambda \cdot 5 = 13,\ \lambda = \frac{13}{5}$.

Ezért a B csúcs koordinátái:

$\left(\frac{13}{5}\cdot 3; \frac{13}{5}\cdot(-4)\right)$, azaz $B(7{,}8; -10{,}4)$.

A C csúcsot megkapjuk, ha az $\overrightarrow{OB}$-t eltoljuk úgy, hogy kezdőpontja az $A(-5; 12)$ pont legyen: $C(2{,}8; 1{,}6)$.



3193

3194. A szögfelező vektor koordinátái közti összefüggés kapható abból, hogy a szög két felének a cos-a ugyanaz. Legyen a szögfelező vektor $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, akkor igaz az, hogy

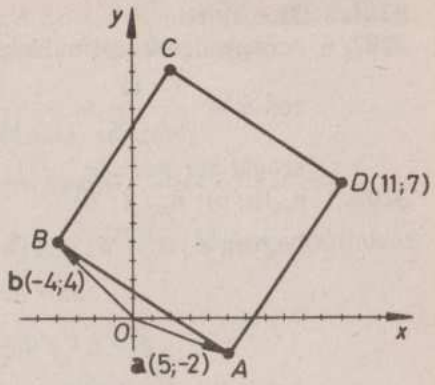
$$\frac{-3v_1+4v_2}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{5v_1+12v_2}{\sqrt{169}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Innen $-64v_1 = 8v_2$; $\frac{v_1}{v_2} = -\frac{1}{8}$. Minden olyan vektor, amelynek első és második koordinátája között fennáll ez az arány, párhuzamos ezzel a vektorral, pl.

$\mathbf{a}'(2; -16)$, $\mathbf{b}'\left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$ stb.

3195. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ha $-\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{x} = -1$, innen $x = 12$. $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 15$, 3-szorosa **a** hosszának.

3196. Ha a $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektort az $B(-4; 4)$ pont körül 90°-kal elforgatjuk, akkor a vektor a C csúcsba mutat. Ha $(-4; 4)$ az origó $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ $(9; -6)$, elforgatva $(6; 9)$, az eredeti koordináta-rendszerben $(2; 13)$ (**3196.** ábra). Ha pedig a $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ vektort az $(5; -2)$ pont körül $-90°$-kal elforgatjuk, az elforgatott vektor a D csúcsba mutat. Az $(5; -2)$ origójú koordináta-rendszerben $(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ $(-9; 6)$, elforgatva $(6; 9)$, az eredeti koordináta-rendszerben $(11; 7)$.



3196

Ha pedig $\mathbf{a}-\mathbf{b}$-t B körül $-90°$-kal, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$-t A körül $+90°$-kal forgatjuk el, a $C'(-10; -5)$, illetve $D(-1; -11)$ csúcsokhoz jutunk.

3197. Ha a négyzet középpontja az origó lenne, akkor az oldalfelezési pontokhoz $(2; -5)$ 90°-os körbeforgatásával jutnánk. Ezek: $(2; -5)$; $(5; 2)$; $(-2; 5)$; $(-5; -2)$. Ezek közül a szomszédosak összege mutatna a csúcsokba, így a négy csúcs: $(7; -3)$; $(3; 7)$; $(-7; 3)$; $(-3; -7)$ lenne. A középpont helyvektorával $(-4; 7)$ eltolva mind a négy pontot, kapjuk a valóságos csúcsokat: $(3; 4)$; $(-1; 14)$; $(-11; 10)$; $(-7; 0)$.

3198. Az egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(1; 2)$. Ezzel párhuzamos a **b** és a **d** vektor.

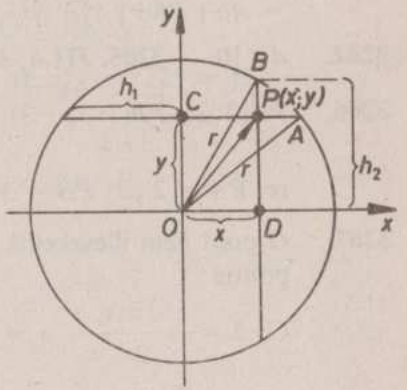
3199. M a háromszög magasságpontja, ezért $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{AB}$, skaláris szorzatuk 0.

3200. A **3200.** ábra jelöléseit használva:

az ACO derékszögű háromszögből $h_1^2 = r^2 - y^2$;

a BDO derékszögű háromszögből $h_2^2 = r^2 - x^2$, tehát

$h_1^2 + h_2^2 = 2r^2 - (x^2+y^2) =$
$= 2r^2 - OP^2$.



3200

3201. $2x-3y=-3$.

3202. Az egyenesek normálvektorai: $\mathbf{n}(3;9)$, $\mathbf{n}_2(1;-2)$. Ezek szögére:

$\cos\alpha=\dfrac{3-18}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{15}{15\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha=135°$. A két egyenes $45°$-os szöget zár be.

3203. $\mathbf{n}_{e1}(a;b)$; $\mathbf{n}_{e2}(A;B)$.

Legyen $a\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{a^2+b^2}=u$ és $b\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{a^2+b^2}=v$.

$\cos(e_1,d)=\dfrac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}}$; $\cos(e_2,d)=\dfrac{Au+Bv}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}}$.

Azt kell belátni, hogy $\dfrac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}}=\dfrac{Au+Bv}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}}$.

Az egyenlőség bal oldala:

$$\frac{a(a\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{a^2+b^2})+b(b\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{a^2+b^2})}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$=\frac{a^2\sqrt{A^2+B^2}+aA\sqrt{a^2+b^2}+b^2\sqrt{A^2+B^2}+bB\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$=aA+bB+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{A^2+B^2}.$$

A jobb oldal:

$$\frac{A(a\sqrt{A^2+B^2}+A\sqrt{a^2+b^2})+B(b\sqrt{A^2+B^2}+B\sqrt{a^2+b^2})}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$=Aa+Bb+\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

3204. $d=10$. **3205.** $F(1{,}4;\ 1{,}2)$

3206. $\overrightarrow{PA}(2;2)$; $\overrightarrow{PB}(-3;-3)$; $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}$, tehát P illeszkedik AB egyenesre. $PA=2\sqrt{2}$; $PB=3\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{2}{3}$.

3207. O pont nem illeszkedik AB-re, ezért O az AC, ill. BD szakasz felezőpontja:

C: $2=\dfrac{-3+x_c}{2}$ $\quad x_c=7$

$C(7;2)$.

$2=\dfrac{2+y_c}{2}$ $\quad y_c=2$

Hasonlóképpen számítható D. $D(3;5)$.

3208. Legyenek az új végpontok A', ill. B'. A az $A'B$, B pedig az AB' szakasz felezőpontja. Az ismert összefüggés felhasználásával: $B'(8;5)$. $A'(-7;-4)$.

3209. A négy oldal felezőpontjainak koordinátái rendre:

$F_{AB}(2{,}5;\ 1)$, $F_{BC}(0;3)$, $F_{CD}(-2{,}5;-1)$, $F_{DA}(0;-3)$.

A középvonalak egyenlete: $k_1: x=0$; $k_2: y=\dfrac{2}{5}x$. Metszéspontjuk az origó.

3210. $F_{AB}(1;4)$, $F_{CD}(-2;-2)$, felezőpontjuk $(-0{,}5;\ 1)$;

$F_{BC}(-4;1)$, $F_{DA}(3;1)$, felezőpontjuk $(-0{,}5;\ 1)$.

3211. $H_1(-3;4)$; $H_2(-5;6)$.

3212. $a=\sqrt{90}$; $b=\sqrt{34}$; $c=\sqrt{52}$. $k=\sqrt{90}+\sqrt{34}+\sqrt{52}\approx 22{,}5$.

3213. Az egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}(1{,}1;-0{,}9)$, egy normálvektora lehet: $\mathbf{n}(9;11)$. Egyenlete: $9x+11y=\dfrac{9}{2}-\dfrac{11}{2}=-1$.

3214.

$x=3-2t \quad |\cdot 3$

$y=2+3t \quad |\cdot 2$

$3x=9-6t$

$2y=4+6t$

$3x+2y=13$.

Ha $t=0$ $P_1(3;2)$; ha $t=1$ $P_2(1;5)$; $\mathbf{v}(-2;3)$.

3215. Ha $t=1$ $P(5;-5)$; ha $t=-2$ $Q(-7;4)$. $d_{PQ}=\sqrt{225}=15$.

3216. $y=-2$.

3217. $x=2$.

3218. $\mathbf{v}_{PQ}(3;1)$; $\mathbf{n}_{PQ}(1;-3)$; $x-3y=15$.

3219. $\mathbf{n}(3;1)$; $3x+y=15$.

3220. *a)* $\mathbf{v}(10;-6)$; *b)* $\mathbf{v}(3;0)$.

3221. *a)* $m=\operatorname{tg}30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $y+3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$; $\sqrt{3}x-3y=9+2\sqrt{3}$.

b) $m=\operatorname{tg}45°=1$; $x-y=5$.

c) az egyenes párhuzamos az y tengellyel: $x=2$.

d) $m = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$; $\sqrt{3}x+y = 2\sqrt{3}-3$.

3222. $\mathbf{n}(2;3)$; $2x+3y = -5$.

3223. $\mathbf{n}(1;-3)$; $x-3y = 0$.

3224. $x=-1$; $y=5$.

3225. A magasság normálvektora a BC oldal irányvektora:
$\mathbf{n}_m(6;3)$, egyenlete: $6x+3y = 0 \Rightarrow y = -2x$.

3226. $\mathbf{n}_{AC}(1;-1)$; AC egyenlete: $x-y = -1$;
$\mathbf{n}_{m_b}(1;1)$; m_b egyenlete: $x+y = 1$.
Metszéspontjuk: $(0;1)$.

3227. Meg kell nézni, hogy két csúcspont illeszkedik-e az egyenesre.
$2\cdot 3+7\cdot 1 \neq 4$; A nincs rajta,
$2\cdot 2+0 = 4$; B rajta van,
$2\cdot(-4)-7\cdot(-3) = 21-8 \neq 4$ C nincs rajta.
A válasz: nem.

3228. BC oldal felezőpontja: $F(1;4)$;
A súlyvonal normálvektora: $\mathbf{n}(3;-5)$;
A súlyvonal egyenlete: $3x-5y = -17$.

3229. $\frac{2}{k} = \frac{k}{4} \Rightarrow k^2 = 8$ $\quad k_1 = 2\sqrt{2}$; $k_2 = -2\sqrt{2}$; $\frac{15}{2\sqrt{2}} \neq \frac{7}{4}$, tehát a két egyenes párhuzamos, de nem esik egybe.

3230. $(-p)\cdot\frac{3}{8} = -1$, innen $p = \frac{8}{3}$.

3231. Az átló hossza: $3\sqrt{10}$. Az oldal hossza: $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{5}$.

3232. $\mathbf{v}_{AB}(4;1)$; $\mathbf{v}_{CD}(-4;-2)$. AB nem párhuzamos a szemközti CD oldallal, tehát nem alkotnak paralelogrammát.

3233. Az origóból az egyenesre állított merőleges egyenlete $2x-3y = 0$.
Metszéspontjuk: $(3;2)$. Az origótól mért távolság: $d = \sqrt{13}$.

3234. P-ből az adott egyenesre állított merőleges egyenlete: $3x+4y = 9$.
A két egyenes metszéspontja: $x=3$; $y=0$. A keresett távolság: $d=5$.

3235. A felezőpont: $F(2;6)$, $\mathbf{n}(8;2)$, az egyenlet:
$8x+2y = 28 \Rightarrow 4x+y = 14$.

3236. $F_c(1;0)$, $\mathbf{n}(8;0)$. c oldalfelező-merőlegesének egyenlete: $8x=8 \Rightarrow x=1$.
$F_b(0;3)$, $\mathbf{n}(6;6)$. b oldalfelező-merőlegesének egyenlete:
$6x+6y = 18 \Rightarrow x+y = 3$.
A két oldalfelező-merőleges metszéspontja: $O(1;2)$.

3237. Az egyik egyenes egy pontja $P(7;0)$. Ezen átmenő merőleges egyenlete: $\mathbf{n}(4;-3)$, $\Rightarrow 4x-3y = 28$. Ennek metszéspontja a másik párhuzamossal, jelöljük Q-val, a következő egyenletrendszerből számítható:

$$\left.\begin{aligned} 4x-3y &= 28 \\ 3x+4y &= -4 \end{aligned}\right\} \quad Q(4;-4);\ d_{PQ}=5.$$

3238. A téglalap átlójának hossza: $\sqrt{64+36} = 10$, az átló fele 5. A másik átló egyenlete: $P(1;-1)$; $\mathbf{n}(5;0)$ (mert az átlók felezőpontja, $O(1;4)$), $5x=5 \Rightarrow x=1$. Ezen van rajta a téglalap hiányzó két csúcsa, O-tól 5 egység távolságban, mindkét irányban. Koordinátái tehát: $(1;9)$, illetve $(1;-1)$.

3239. A négyzet másik átlójának egyenlete: $\mathbf{n}(-1;5)$ $A(12;7)$ adatokból: $-x+5y = 23$. A két átló metszéspontja: $M(4{,}5;5{,}5)$.
MA M körüli $+90°$-os elforgatásával kapjuk a B csúcsot:
$MB(-1{,}5;7{,}5)$, az eredeti koordináta-rendszerben:
$B(3;13)$. Az A, illetve B csúcsot tükrözve M-re, kapjuk a C, illetve D csúcsot: $C(-3;4)$, $D(6;-2)$.
A, B, C, D csúcsok ismeretében a 4 oldalegyenes egyenlete: $2x+3y = 6$; $2x+3y = 45$; $3x-2y = 22$; $3x-2y = -17$.

3240. A tengelyekre illeszkedő csúcsok koordinátái:

$$\left(\frac{d}{2};0\right), \left(0;\frac{d}{2}\right), \left(-\frac{d}{2};0\right), \left(0;-\frac{d}{2}\right).$$

A többi csúcspontra: $x^2+y^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, mert ezek az $y = \pm x$ egyenesekre illeszkednek. A csúcspontok tehát: $\left(\pm\frac{d}{2\sqrt{2}}; \pm\frac{d}{2\sqrt{2}}\right)$.

3241. Felhasználjuk a szögfelező azon tulajdonságát, hogy a szemközti oldalt a szöget alkotó oldalak arányában metszi.
$|AC| = 10$; $\quad |AB| = 5$.
A keresett pont tehát a BC oldal B-hez közelebb eső harmadolópontja:

$$x = \frac{16-3}{3} = \frac{13}{3};\ y = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3}.$$

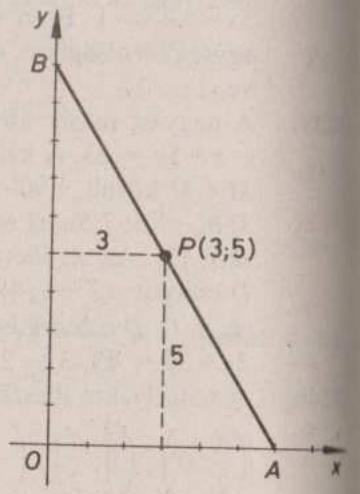
3242. A feladat az 1989. évi hetedik kiadásban is sajtóhibás. Az első pont koordinátái helyesen: $(-2; -3)$. Legyen $A(5; 4{,}5)$, $B(0; 2)$, $C(-2; -3)$, $D(3; -0{,}5)$.

$\mathbf{v}_{AB}(5; 2{,}5)$, $\mathbf{v}_{DC}(5; 2{,}5)$, $\Rightarrow AB \parallel DC$, $\quad \mathbf{v}_{AD}(-2; -5)$, $\mathbf{v}_{BC}(-2; -5)$, $\Rightarrow AD \parallel BC$,

3243. A-t tükrözzük az y tengelyre, $A'(-4; 6)$. $A'B$ egyenesnek keressük azt a pontját, amelyben az y tengelyt metszi: $\mathbf{n}_{A'B}(8; 10)$ és $B(6; -2)$ adatokból $8x+10y = 48-20 = 28$, azaz $4x+5y = 14$. Ha $x=0$, $y = \frac{14}{5}$.

3244. Legyen egy megfelelő pont $P(x; y)$.
$(x+4)^2+(y-3)^2-(x-6)^2-(y-6)^2 = c$. Ebből $20x+6y = c+47$ egyenes egyenlete. Más sorrendben véve a különbséget: a $20x+6y = 47-c$ egyenletű egyenest kapjuk.

3245. *a)* Három ilyen egyenes van. Az egyik normálvektora $\mathbf{n}(1; 1)$, egyenlete: $x+y = 3+5$, $x+y = 8$.
A másik normálvektora $\mathbf{n}(1; -1)$ egyenlete: $x-y = -2$.
Vagy: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a} = 1$ egyenletből $\frac{3}{a}+\frac{5}{a} = 1$, $a=8$, illetve $\frac{3}{a}+\frac{5}{-a} = 1$; $a=-2$.
A harmadik átmegy az origón. Egyenlete $y = \frac{5}{3}x$.



3245

b) 3, illetve 5 az $AOB\triangle$ középvonalai (**3245.** ábra), ezért $OA=6$, $OB=10$, az egyenes egyenlete: $\frac{x}{6}+\frac{y}{10} = 1 \Rightarrow 10x+6y = 60$.

3246. A súlypont és a csúcspontok koordinátái közötti összefüggést felhasználva:
$\frac{-5+3+x}{3} = -\frac{4}{3}$, innen $x = -2$; $\frac{-2+1+y}{3} = 2$, innen $y=7$. Tehát $C(-2; 7)$.

3247. Az A pont nem illeszkedik egyik magasságvonalra sem. AB merőleges az $y-x = 4$ egyenletű magasságvonalra, egyenlete:
$\mathbf{n}(1, 1)$; $A(6{,}5; -2)$: $x+y = 4{,}5$.
AC egyenlete: $\mathbf{n}(2; -7)$, $A(6{,}5; -2)$: $2x-7y = 27$.
A B csúcs koordinátáit a

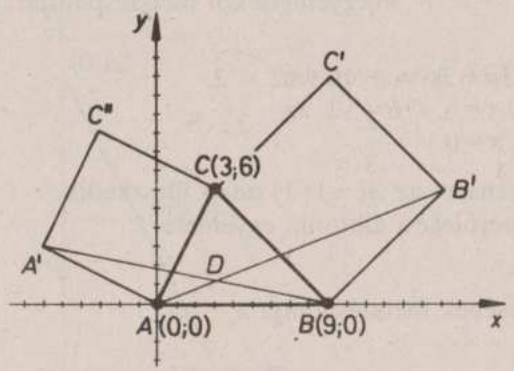
$$\left.\begin{aligned} 7x+2y &= 7 \\ x+y &= 4{,}5 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kapjuk: $B(-0{,}4; 4{,}9)$
A C csúcs koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} y-x &= 4 \\ 2x-7y &= 27 \end{aligned}\right\}$$

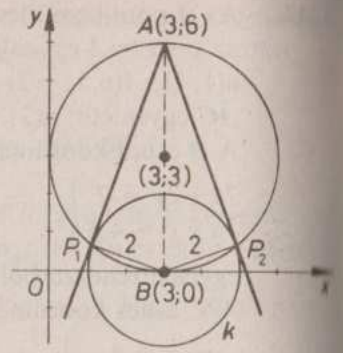
egyenletrendszerből számítva: $C(-11; -7)$.
B és C csúcsok koordinátáiból a BC oldal egyenlete:
$11{,}9x-10{,}6y = -56{,}7$.

3248. $\overrightarrow{BB'}$ a $\overrightarrow{BC}$ B körüli elforgatottja $-90°$-kal tehát B' koordinátái: $B'(15; 6)$ (**3248.** ábra).
$\overrightarrow{AA'}$ az $\overrightarrow{AC}$ origó körüli elforgatottja $+90°$-kal, ezért A' koordinátái: $A'(-6; 3)$.
$\overrightarrow{AB'}$ egyenlete: $\mathbf{n}(6; -15)$, ill. $(2; -5)$; $A(0; 0)$; $2x-5y = 0$.
$A'B$ egyenlete: $\mathbf{n}(3; 15)$, ill. $\mathbf{n}(1; 5)$; $B(9; 0)$: $x+5y = 9$.
A keresett D pont AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontja: $D\left(3; \frac{6}{5}\right)$.
Mivel a C csúcsból induló magasságvonal egyenlete: $x=3$, a D pont rajta van ezen a magasságvonalon.



3248

3249. A (3; 0) ponttól 2 egységnyi távolságban lévő pontok az $(x-3)^2+y^2=4$ egyenletű körön vannak (k) (**3249.** ábra). Az A-n átmenő egyenesek közül azokat keressük, amelyek az előző kör sugaraira merőlegesek. Két ilyen egyenes van, ezek átmennek az AB szakasz Thalész-körének és k-nak a metszéspontjain (P_1 és P_2).



3249

A Thalész-kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$.

A metszéspontok koordinátái: $x=3\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $y=\frac{2}{3}$. A metszéspontok és az A pont alapján a keresett egyenesek egyenlete:

$2\sqrt{2}x-y=6\sqrt{2}-6$, illetve $2\sqrt{2}x+y=6\sqrt{2}+6$.

3250. $M\left(0;\frac{4}{3}\right)$, $\mathbf{v}_{MS}\left(1;\frac{1}{3}\right)$, $S(-1;1)$, $O\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{6}\right)$, $\mathbf{v}_{SO}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)$:

Tehát $MS \parallel SO$, de S közös pontjuk, tehát egy egyenesbe esik a három pont.

3251. AB felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, oldalfelező-merőlegesének egyenlete $\mathbf{n}(3;3\sqrt{3})$ miatt $3x+3\sqrt{3}y=24$, azaz $x+\sqrt{3}y=8$. Ezen van rajta a lehetséges két háromszög harmadik csúcsa, A-tól és B-től is $AB=6$ egység távolságra. A keresett csúcsok tehát az $x+\sqrt{3}y=8$ egyenletű egyenes és az $(x+2)^2+y^2=36$ egyenletű kör metszéspontjai: $P_1(8;0)$ és $P_2(-1;3\sqrt{3})$.

3252. $\mathbf{n}_m(5;3)$, egyenlete: $5x+3y=-10+12=2$.

Ha $y=0$ $x=\frac{2}{5}$; ha $x=0$ $y=\frac{2}{3}$.

3253. Az adott befogó-egyenesre az $A(-1;1)$ csúcs illeszkedik.
Erre $B(7;-1)$-ből merőlegest állítunk, egyenlete:

$\mathbf{n}(2;1)$, $2x+y=13$.

A két befogó egyenesének metszéspontja a

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=13\\x-2y&=-3\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből: $C(4{,}6;3{,}8)$.

3254. $F_c(-2;1)$, tehát a C-ből induló súlyvonal párhuzamos az x tengellyel, egyenlete: $y=1$. Az y tengelyből 1 egységet vág le.

3255. Az oldalak felezőpontjai rendre: $F_1(0;0)$, $F_2(4;2)$, $F_3(0;4)$, $F_4(-4;2)$. A középvonalak merőlegesek egymásra, egyenletük $x=0$, ill. $y=2$. Ezek a kérdéses négyszög átlói. Ezek az átlók felezik egymást, a közös felezőpont $(0;2)$. Tehát a kérdéses négyszög valóban rombusz.

3256. A két egyenes metszéspontja a paraméterrel kifejezve:

$$x=\frac{5a+1}{a^2-1},\ y=\frac{3a^2+a+2}{a^2-1}\quad (a\neq\pm1).$$

Ez a pont rajta van az $y=2x$ egyenletű egyenesen, ha

$$\frac{3a^2+a+2}{a^2-1}=\frac{10a+2}{a^2-1},$$

$3a^2-9a=0$, innen $a_1=0$, $a_2=3$.

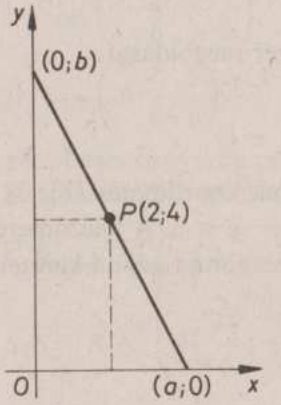
Ha $a=1$ vagy $a=-1$, az egyenletrendszer ellentmondó.

3257. A levágott háromszög területe minimális, ha P felezi a rajta átmenő egyenesnek a koordinátatengelyek közé eső szakaszát. A **3257.** ábráról leolvasható, hogy $a=4$, $b=8$.

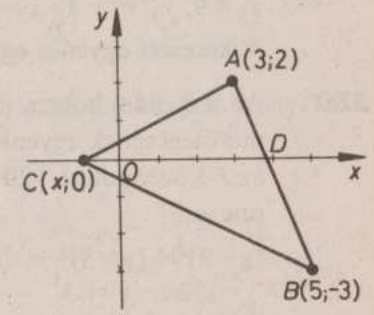
Az egyenes egyenlete: $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$.

A háromszög területe $\frac{4\cdot8}{2}=16$ t. e.

3258. AB oldal egyenlete: (**3258.** ábra). $\mathbf{n}(5;2)$, $A(3;2)$; $5x+2y=19$.



3257



3258

Az x tengelyen lévő pontja: $D(3{,}8; 0)$; CD szögfelező, tehát $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+4}}{\sqrt{(x-5)^2+9}} = \frac{\sqrt{0{,}8^2+4}}{\sqrt{1{,}2^2+9}} = \frac{\sqrt{4{,}64}}{\sqrt{10{,}44}}.$$

Innen x-re két értéket kapunk: $x_1 = -1$, $x_2 = 3{,}8$.
Az $x_2 = 3{,}8$ nem határoz meg háromszöget, hiszen D pont rajta van az AB oldalon.

3259. Az átfogó felezőpontja, $F(1; 1)$. A derékszögű csúcs AB felezőmerőlegesének és Thalész-körének metszéspontja. A felezőmerőleges egyenlete $(\mathbf{n}(2; 1))$ $2x+y = 3$. A Thalész-köré: $(x-1)^2+(y-1)^2 = FB^2 = 20$.
Két metszéspontot kapunk: $C_1(-1; 5)$ és $C_2(3; -3)$.

Az ABC_1 háromszög súlypontja: $S_1\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Az ABC_2 háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

3260. Messe a keresett egyenes az adott egyeneseket az $A(x_1; y_1)$, ill. a $B(x_2; y_2)$ pontban, akkor A koordinátái kielégítik az első egyenletet, B koordinátái pedig a másodikat:

$x_1+3y_1 = 6$, ill. $2x_2-y_2 = 3$.

$P(5; -1)$ az AB szakasz felezőpontja. Ebből a következő egyenletek adódnak:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 5; \frac{y_1+y_2}{2} = -1.$$

A négy egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai:

$x_1 = 9$, $y_1 = -1$; $x_2 = 1$, $y_2 = = -1$.

A keresett egyenes egyenlete tehát $y = -1$.

3261. Az AB oldal hossza $\sqrt{20}$, felezőpontjának koordinátái $F(3; 3)$. Felezőmerőlegesének egyenlete $(\mathbf{n}(2; -1))$: $2x-y = 3$. A felezőmerőleges és az F középpontú, $\sqrt{20}$ sugarú kör metszéspontja adja a keresett felezőpontot.

$$\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-3)^2 &= 20\\ 2x-y &= 3\end{aligned}\right\}$$

A megoldások: $P_1(1; -1)$ $P_2(5; 7)$.

3262. A felezőpontok koordinátái: $(-1; 3)$, $(3, 5; -0{,}5)$, $(-1{,}5; -1{,}5)$ és $(-6; 2)$. A felezőpontok által alkotott négyszög két-két szemközti oldalának irányvektora: $(4{,}5; -3{,}5)$, $(4{,}5; -3{,}5)$, ill. $(5; 1)$, $(5; 1)$, tehát ez a négy pont valóban egy paralelogramma négy csúcsa.

3263. Legyen $A(-3; 2)$, $B(6; 0)$ és $C(0; 8)$.
m_a egyenlete: $\mathbf{n}(3; -4)$, $A(-3; 2)$; $3x-4y = -17$.
m_b egyenlete: $\mathbf{n}(3; 6)$, $B(6; 0)$; $3x+6y = 18 \Rightarrow x+2y = 6$.
A két magasság metszéspontja: $M(-1; 3{,}5)$.

3264. A C csúcs koordinátái az adott magasságvonal és súlyvonal egyenletéből számíthatók: $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{1}{3}$.

Az AB oldal egyenlete: $\mathbf{n}(1; -2)$, $A(-3; -1)$; $x-2y = -1$. AB és s_c metszéspontja az AB oldal felezőpontja,

$$\left.\begin{aligned}x-2y &= -1\\ x-y &= 1\end{aligned}\right\} F(3; 2).$$

Ebből és A-ból kiszámíthatók a B csúcs koordinátái: $B(9; 5)$.

3265. $A(-5; -2)$, $B(3; -1)$, $C(2; 3)$, $D(-3; 1)$ adatokból az átlók egyenlete:

AC: $\mathbf{v}(7; 5)$; $C(3; 3)$; $5x-7y = -11$.
BD: $\mathbf{v}(6; -2)$; $B(3; -1)$; $x+3y = 0$.

Az átlók metszéspontja: $E\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

A négy kis háromszög súlypontjai:

1. $S_{ABE}\left(-\frac{7}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ 2. $S_{BCE}\left(\frac{7}{6}; \frac{5}{6}\right)$

3. $S_{CDE}\left(-\frac{5}{6}; \frac{9}{6}\right)$ 4. $S_{DAE}\left(-\frac{19}{6}; -\frac{1}{6}\right)$

a kérdéses négyszög csúcsai.
Kiszámítva 2-2 szemközti oldal irányvektorát, azt kapjuk, hogy

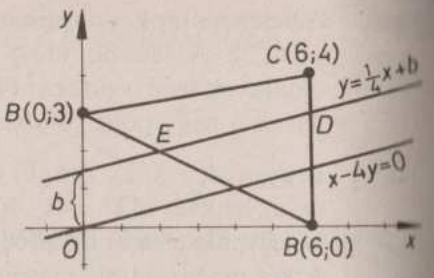
$$\overrightarrow{S_1S_4} \parallel \overrightarrow{S_2S_3}\left(\mathbf{v}\left(2; -\frac{2}{3}\right)\right),$$

$$\overrightarrow{S_1S_2} \parallel \overrightarrow{S_3S_4}\left(\mathbf{v}\left(\frac{14}{6}; \frac{10}{6}\right)\right).$$

3266. (Lásd **3266.** ábrát.)

A háromszög területe: $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

D rajta van a BC egyenesen (egyenlete $x=6$) és az $y = \frac{1}{4}x+b$ egyenesen. Koordinátái: $D\left(6; \frac{3}{2}+b\right)$.



3266

E rajta van az AB egyenesen (egyenlete $x+2y = 6$) és az $y = \frac{1}{4}x+b$ egyenesen. Koordinátái: $E\left(4-\frac{4}{3}b; 1+\frac{2}{3}b\right)$.

A $DBE\triangle$ területe 6.

$$6 = \frac{\left(\frac{3}{2}+b\right)\left[6-\left(4-\frac{4}{3}b\right)\right]}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2}+b\right)\left(2+\frac{4}{3}b\right)}{2}.$$

Ebből a következő másodfokú egyenletet kapjuk b-re:

$4b^2+12b-27 = 0$.

Ennek pozitív gyöke: $b = \frac{3}{2}$. A keresett egyenes egyenlete tehát:

$y = \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.

3267. $A(-3; 1)$, $B(3; -1)$, $C(2; 3)$,

Az oldalak felezőpontjai rendre: $(0; 0)$; $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

A súlyvonalak egyenlete két-két ismert pontból:

s_a: $y=1$; s_b: $6x+7y = 11$; s_c: $3x-2y = 0$.

s_a és s_c metszéspontja: $x = \frac{2}{3}$, $y=1$. Ez a pont kielégíti s_b egyenletét is.

Ez a háromszög súlypontja.

3268. A csúcspontok: $A(4; 0)$, $B(-3; -1)$, $C(-5; 6)$.

Az oldalak felezőpontjai: $F_a(-4; 2{,}5)$, $F_b\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, $F_c\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Az

oldalfelező-merőlegesek egyenlete:

f_a: $\mathbf{n}(-2; 7)$; $F_a(-4; 2{,}5)$; $-2x+7y = 25{,}5$.

f_b: $\mathbf{n}(3; -2)$; $F_b\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$; $3x-2y = -7{,}5$.

f_c: $\mathbf{n}(7; 1)$; $F_c\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $7x+y = 3$.

Két felezőmerőleges, pl. f_a és f_b metszéspontját a

$$\left.\begin{aligned} -2x+7y &= 25{,}5 \\ 3x-2y &= -7{,}5 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszer gyökei adják: $x = -\frac{3}{34}$, $y = \frac{123}{34}$.

Ezek az értékek kielégítik f_c egyenletét is.

3269. A keresett egyenes az x tengelyből a, az y tengelyből b hosszúságú szakaszt vág le, egyenlete tehát:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$.

Adataink felhasználásával a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{-4}{a}+\frac{3}{b} &= 1 \\ \frac{|a| \cdot |b|}{2} &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai:

$a_1=20$; $b_1=2{,}5$; $a_3=-10$; $b_3=5$;

$a_2=-\frac{10}{3}$; $b_2=-15$; $a_4=-\frac{20}{3}$; $b_4=7{,}5$.

A keresett egyenesek egyenlete:

$\frac{x}{20}+\frac{y}{2{,}5} = 1$; $-\frac{3x}{10}-\frac{y}{15} = 1$; $-\frac{x}{10}+\frac{y}{5} = 1$; $-\frac{3x}{20}+\frac{2y}{15} = 1$.

Az egyik háromszög az első, a másik a harmadik negyedben van, a 3. és 4. háromszög pedig a második negyedben.

3270. Az egyenletek így írhatók: $y = \frac{2}{a}x-\frac{1}{a}$; $y = 4x+b$ $(a \neq 0)$.

a) $\frac{2}{a} = 4$; $a = \frac{1}{2}$; $b \neq -\frac{1}{a} = -2$.

b) $\frac{2}{a} = -\frac{1}{4}$; $a = -8$; b tetszőleges.

c) $a = \frac{1}{2}$; $b = -2$.

Megjegyzés: ha $a = 0$, akkor a két egyenes: $x = \frac{1}{2}$ és $y = 2 + b$, $b \in \mathbb{R}$.

3271. Az egyenes meredeksége, $m = -1$, egyenlete

$y - 4 = -1(x - 3)$, rendezve: $x + y = 7$.

Vagy $m = 1$, $y - 4 = x - 3 \Rightarrow x - y = -1$.

Vagy átmegy az origón, s egyenlete: $4x - 3y = 0$.

3272. Három ilyen egyenes van, a három középvonal egyenese. Egyenleteik felírásához azt használjuk fel, hogy átmennek egy-egy oldalfelező ponton, és párhuzamosak egy-egy oldalegyenessel (**3272.** ábra).

$F_a(2{,}5; 1{,}5)$; $\mathbf{n}(5; -4)$; $5x - 4y = 6{,}5$.

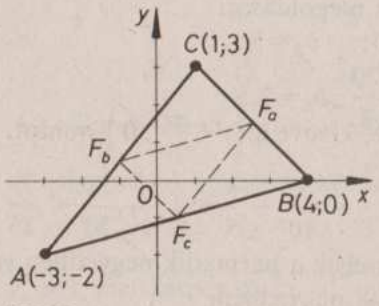
$F_b(-1; 0{,}5)$; $\mathbf{n}(2; -7)$; $2x - 7y = -5{,}5$.

$F_c(0{,}5; -1)$; $\mathbf{n}(1; 1)$; $x + y = -0{,}5$.

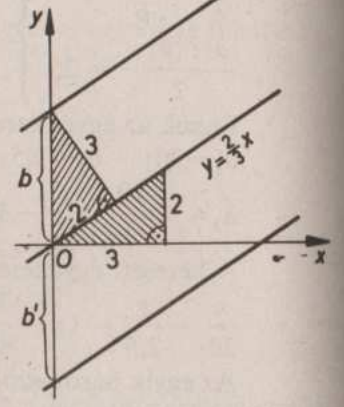
3273. $b = \sqrt{13}$; $b' = -\sqrt{13}$.

A két párhuzamos egyenes egyenlete:

$y = \frac{2}{3}x + \sqrt{13}$, ill. $y = \frac{2}{3}x - \sqrt{13}$ (**3273.** ábra).



3272



3273

3274. Legyen $P(x; y)$ egy megfelelő pont (**3274.** ábra).

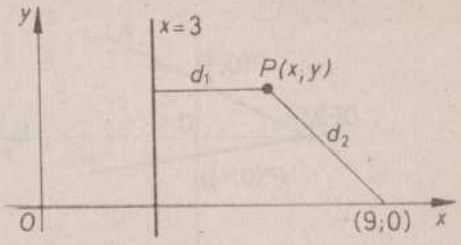
$\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $d_1 = x - 3$; $d_2 = \sqrt{(x-9)^2 + y^2}$;

$\frac{x-3}{\sqrt{(x-9)^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ebből négyzetre emelés és összevonás után:

$2x^2 - y^2 = 54$ vagy

$\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{54} = 1$,

ez hiperbola egyenlete.



3274

3275. A két egyenes egyenlete $y = \frac{3}{4}x + 3$, ill. $y = \frac{3}{4}x - 2$ alakba írható.

Középpárhuzamosuk egyenlete $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$. Ennek és az $y = -x + 6$ egyenletű egyenesnek a metszéspontja a keresett pont. Koordinátái: $x = \frac{22}{7}$, $y = \frac{20}{7}$.

3276. A harmadik csúcspont koordinátái, felhasználva hogy ez a pont a $2x - 5y + 25 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik: $C\left(x; \frac{2x+25}{5}\right)$.

A súlypont koordinátái a csúcspontok koordinátáival kifejezve:

$x_s = \frac{x}{3}$, $y_s = \frac{2x+25}{15}$;

$x = 3x_s$, $y_s = \frac{6x_s + 25}{15}$.

Rendezés után:

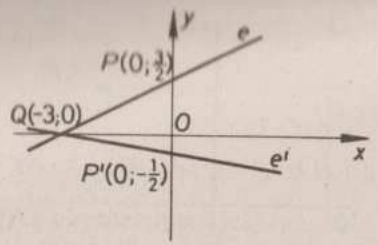
$y_s = \frac{2}{5}x_s + \frac{5}{3}$ egyenes egyenlete, kivéve a $\left(-\frac{25}{6}; 0\right)$ pontot.

3277. Az eredeti egyenes egyenlete: $y = \frac{3}{2}x - 3$. Affin képe: $y = 6x - 3$.

Vegyük az egyenesen pl. a $P(2; 0)$ pontot, ennek a képe az ugyancsak az x tengelyen lévő $P'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. A keresett arány: $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$.

3278. e egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Az x tengellyel való metszéspontja legyen $Q(-3; 0)$. e' meredeksége



$-\frac{1}{6}$, az y tengelyből $-\frac{1}{2}$-et vág le, tehát egyenlete: $y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$ (**3278.** ábra).

3278

3279. A szögfelezők egyenletét abból kapjuk, hogy pontjaik a két egyenestől, a szög két szárától egyenlő távolságra vannak. A $P(x_0; y_0)$ pontnak az egyenestől mért távolsága:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Az egyenes fölötti pontok távolsága az egyenestől pozitív, az egyenes alatti pontoké pedig negatív. Így a szögfelezők egyenlete rendezés után:

$$\frac{3x-4y-15}{5} = \frac{-4x-3y-5}{5} \quad \text{és}$$

$$\frac{3x-4y-15}{5} = \frac{4x+3y+5}{5}, \quad \text{azaz}$$

$7x - y = 10$ és $x + 7y = -20$.

Az x tengellyel való metszéspontok:

$x = \frac{10}{7}$; $y = 0$ és $x = -20$; $y = 0$.

3280. A két szár az AC és a BC oldal. Ezek szimmetrikusak az y tengelyre. Szögfelezőik egyenlete: az egyik az y tengely, a másik az $y = 6$ egyenletű egyenes.

3281. A merőleges egyenlete $\mathbf{n}(1; -1)$ és $P(2; 3)$ adatokból: $x - y = -1$.
A keresett pontban $y = 2x$,

$2x = x + 1$, innen $x = 1$, $y = 2$.

3282. A **3282.** ábrába beírtuk az oldalak harmadolópontjainak koordinátáit. Négy metszéspont koordinátáit kell kiszámítani.

e egyenlete: $\mathbf{n}(1; 4)$; $L(2; 6)$ adatokból $x + 4y = 26$;
f egyenlete: $\mathbf{n}(1; 10)$; $M(1; 3)$ adatokból $x + 10y = 31$;
g egyenlete: $\mathbf{n}(8; -1)$; $E(4; 0)$ adatokból $8x - y = 32$;
h egyenlete: $\mathbf{n}(7; 1)$; $F(8; 0)$ adatokból $7x + y = 56$.

P_1 az e és a g metszéspontja: $P_1\left(4\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$

P_2 az f és a g metszéspontja: $P_2\left(4\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$

ezek valóban EK harmadolópontjai

P_3 az e és a h metszéspontja: $P_3\left(7\frac{1}{3}; 4\frac{2}{3}\right)$

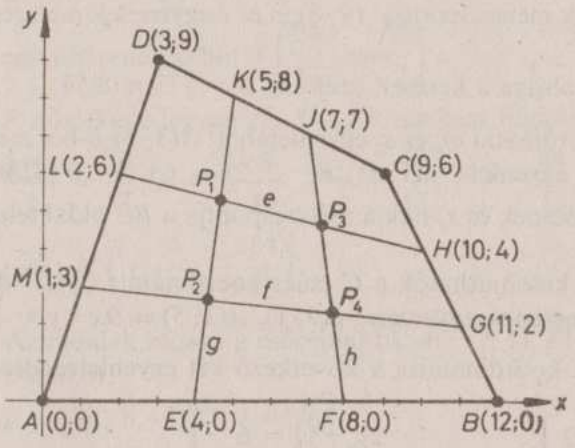
P_4 az f és a h metszéspontja: $P_4\left(7\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$

ezek FJ harmadolópontjai

P_1 és P_3 LH harmadolópontjai.

P_2 és P_4 MG harmadolópontjai.

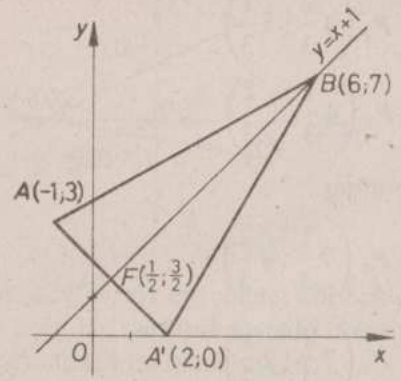
Más megoldás: először számítsuk ki a harmadolópontokat és győződjünk meg arról, hogy ezek rajta vannak a megfelelő egyeneseken.



3282

Megjegyzés: A feladat állítása *bármely* négyszög esetén teljesül!

3283. $A(-1; 3)$ pont tükörképe $A'(2; 0)$. Az $y = x + 1$ és az $y = -x + 2$ egyenletű egyenesek metszéspontja $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ és ez AA' felezőpontja (**3283.** ábra). A harmadik csúcspont $B(6; 7)$.



3283

$$AA' = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$FB = \sqrt{\frac{242}{4}} = \frac{11}{2}\sqrt{2};$$

$$t = \frac{3\sqrt{2}\cdot\frac{11}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{33}{2}.$$

3284. A szárak metszéspontja $C(5; -2{,}5)$. Az alap felezőpontja $F(5; 1{,}5)$, tehát az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel. Ezért az alapja párhuzamos az x tengellyel. Mivel átmegy az F ponton, egyenlete: $y = 1{,}5$.

3285. $a: y = \frac{8}{3}x - 16$; $b: y = \frac{2}{3}x + 2$; $c: y = \frac{2}{3}x - 4$.

a és b egyenesek metszéspontja: $(9; 8)$, a és c egyenesek metszéspontja: $(6; 0)$.

E két pont távolsága a keresett szakasz: $d = \sqrt{73} \approx 8{,}54$.

3286. Az A csúcs koordinátái m_a és s_a egyenletéből: $A(3; 5)$ B-ből merőlegest állítunk m_a-ra, egyenlete: $\mathbf{n}(1; 1)$; $B(-2; 2) \Rightarrow x + y = 0$ (**3286.** ábra).

Ennek az egyenesnek és s_a-nak a metszéspontja a BC oldal felezőpontja: $F(1; -1)$.

B-ből és F-ből kiszámíthatók a C csúcs koordinátái: $C(4; -4)$.

AC oldal egyenesének egyenlete: $\mathbf{n}(9; 1)$, $A(3; 5) \Rightarrow 9x + y = 32$.

3287. A csúcspontok koordinátáira a következő két egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 2x_a + x_b &= -12 \\ 2x_b + x_c &= 3 \\ 2x_c + x_a &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} 2y_a + y_b &= 6 \\ 2y_b + y_c &= 9 \\ 2y_c + y_a &= -6 \end{aligned}\right\}.$$

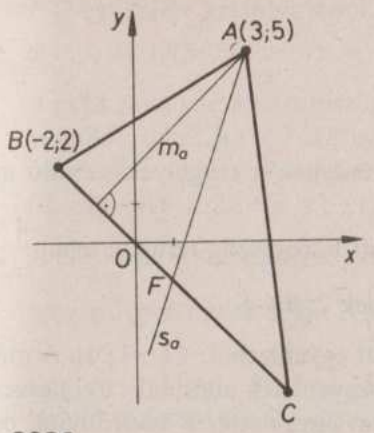
Ezekből $A(-6; 0)$, $B(0; 6)$, $C(3; -3)$.

Az ABC háromszög súlypontja: $S(-1; 1)$.

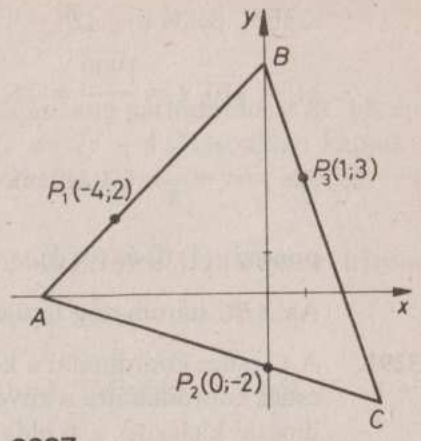
A $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja: $S'(-1; 1)$ (**3287.** ábra).

3288. P-ből az adott egyenesre állított merőleges egyenlete:

$\mathbf{n}(3; -2)$, $P(4; 0) \Rightarrow 3x - 2y = 12$.



3286



3287

Ennek és az adott egyenesnek a metszéspontja a P pont merőleges vetülete, T.

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 12 \\ 2x + 3y &= -6 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből $T\left(\frac{24}{13}; -\frac{42}{13}\right)$.

P tükörképe legyen P'. T a PP' szakasz felezőpontja:

$$\frac{4+x}{2} = \frac{24}{13},\ x = -\frac{4}{13};\quad \frac{y}{2} = -\frac{42}{13},\ y = -\frac{84}{13},$$

tehát $P'\left(-\frac{4}{13}; -\frac{84}{13}\right)$.

3289. Az oldalak hossza a csúcspontok $A(-3; 1)$, $B(4; 5)$, $C(6; -3)$ koordinátáiból:

$a = \sqrt{68}$; $b = \sqrt{97}$; $c = \sqrt{65}$.

A leghosszabb oldal b. Felezőpontja $F(1{,}5; -1)$. A súlyvonal normálvektora $\mathbf{n}(-12; 5)$. Egyenlete: $-12x + 5y = -23$.

3290. Az ABC háromszög területét kiszámíthatjuk közvetlenül a csúcspontok koordinátáiból:

$$t = \frac{1}{2}[5(6-7) + 14(7-3) + 7(3-6)] = 15,$$

de kiszámíthatjuk valamelyik oldal és a hozzá tartozó magasság hosz-

szából, például: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{90}$,

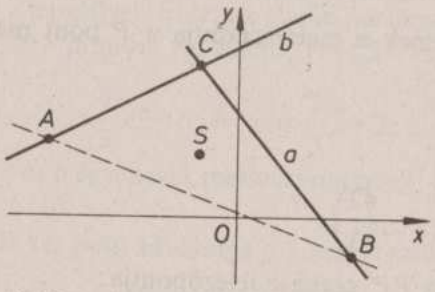
$m_c = \sqrt{10}$, $t = \dfrac{\sqrt{900}}{2} = 15$.

Az $y = -\dfrac{3}{4}x+3$ egyenletű egyenesnek a tengelyekkel való metszés-

pontjai: (4; 0) és (0; 3), a levágott háromszög területe tehát $\dfrac{4\cdot 3}{2} = 6$.

Az ABC háromszög területe ennek 250%-a.

3291. A C csúcs koordinátái a két adott egyenletből: $C(-1; 4)$. A másik két csúcs koordinátáira a következő egyenletek adódnak: az A csúcs koordinátái kielégítik a b oldalegyenes egyenletét, B koordinátái pedig az a oldalegyenes egyenletét. Ezenkívül fennáll a csúcsok és a súlypont koordinátái közötti ismert összefüggés (**3291.** ábra):



3291

$$\left.\begin{aligned} x_a - 2y_a + 9 &= 0\\ 5x_b + 4y_b - 11 &= 0\\ -1 + x_a + x_b &= -3\\ 4 + y_a + y_b &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Ebből az egyenletrendszerből $A(-5; 2)$, $B(3; -1)$.

3292. Három ilyen egyenes van, a három középvonal egyenese (**3292.** ábra). Egyenletükhöz kiszámítjuk az oldalak felezőpontjainak koordinátáit, és felhasználjuk azt, hogy egy-egy középvonal párhuzamos a háromszög egyik oldalával.

$F_a(1{,}5; 1)$, $\mathbf{v}_{AB}(6; 3)$, $\mathbf{n}(1; -2) \Rightarrow F_aF_b : x - 2y = -0{,}5$.
$F_a(1{,}5; 1)$, $\mathbf{v}_{AC}(1; 5)$, $\mathbf{n}(5; -1) \Rightarrow F_aF_c : 5x - y = 6{,}5$.
$F_b(-1{,}5; -0{,}5)$, $\mathbf{v}_{BC}(5; -2)$, $\mathbf{n}(2; 5) \Rightarrow F_bF_c : 2x + 5y = -5{,}5$.

3293. P-t tükrözve az adott egyenesre, a tükörkép P'. A visszavert fénysugár a $P'Q$ egyenesre illeszkedik. P-ből az egyenesre állított merőleges egyenlete:

$\mathbf{n}(-1; 2)$, $P(3; 4) \Rightarrow -x + 2y = 5$.

Ennek a $2x + y = 2$ egyenessel való metszéspontja a

$T(-0{,}2; 2{,}4)$. T a PP' szakasz felezőpontja, tehát $P'(-3{,}4; 0{,}8)$.

$P'Q$ egyenlete két pontjából:

$\mathbf{n}(1; -7)$, $Q(5; 2)$; $x - 7y = -9$.

3294. A pont rajta van a háromszög a oldalán, ami párhuzamos a BC középvonallal, tehát $\mathbf{n}_a(1; -2)$, egyenlete $x - 2y = 4$. Hasonlóan kapjuk a másik két oldal egyenletét: $\mathbf{n}_b(1; 1)$ $B(1; 0) \Rightarrow x + y = 1$; $\mathbf{n}_c(2; -1)$ $C(-1; -1) \Rightarrow 2x - y = -1$.

3295. A háromszög súlypontja egybeesik a középvonalak által bezárt háromszög súlypontjával, tehát $S\left(-\dfrac{11}{3}; 1\right)$.

3296. Legyen $A(3; y_a)$, $B(3; y_b)$ (**3296.** ábra). Felírjuk az A-ból, ill. B-ből induló magasságvonal egyenletét:

$$\mathbf{n}_{m_a}\left(\frac{16}{3}; y_b\right)\ M(0; 0) \Rightarrow \frac{16}{3}x + y_b y = 0\ y = -\frac{16}{3y_b}x,$$

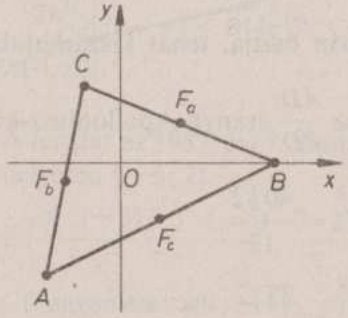
$$\mathbf{n}_{m_b}\left(\frac{16}{3}; y_a\right)\ M(0; 0) \Rightarrow \frac{16}{3}x + y_a y = 0\ y = -\frac{16}{3y_a}x.$$

Ha x helyébe 3-t teszünk, mindkét egyenletből azt kapjuk hogy

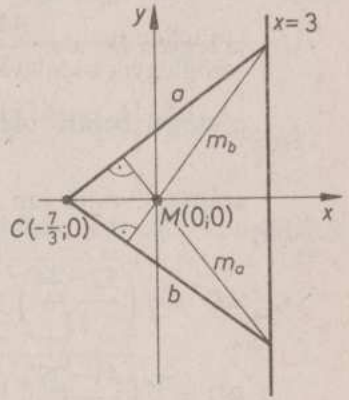
$y_a = -\dfrac{16}{y_b}$, ill. $y_b = -\dfrac{16}{y_a}$ vagyis $y_a \cdot y_b = -16$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva, az $|y_a|$ és $|y_b|$ értékekre

$$\frac{|y_a| + |y_b|}{2} \geqq \sqrt{16} = 4,\ |y_a| + |y_b| \geqq 8.$$



3292



3296

Ez legrövidebb, ha $|y_a| = |y_b| = 4$,
ekkor a csúcsok koordinátái: $A(3; -4)$, $B(3; 4)$,
és a háromszög területe $\left(8 \cdot 5\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{64}{3}$.

3297. $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$, $P(x; y)$.

$$\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \frac{2}{3}.$$

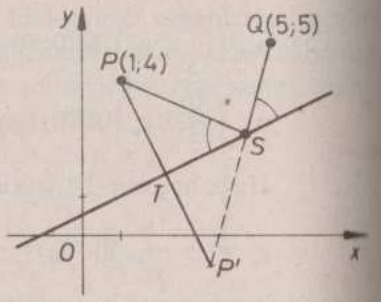
Négyzetre emelés és rendezés után a következő egyenletet kapjuk:
$5x^2+5y^2+78x+45 = 0$.
Ez kör egyenlete, amelynek középpontja $(-7{,}8; 0)$, sugara 7,2.

3298. Tükrözzük P-t az egyenesre, a tükörkép P'. $P'Q$ kimetszi az egyenesből a keresett S pontot (**3298.** ábra).

e: $2y-x = 1$.

P-ből merőlegest állítunk e-re: $\mathbf{n}(2; 1)$
$P(1; 4) \Rightarrow 2x+y = 6$.

Ennek e-vel való metszéspontja, $T(2{,}2; 1{,}6)$. Ez a PP' szakasz felezőpontja. Tehát $P'(3{,}4; -0{,}8)$.



3298

$P'Q$ egyenlete: $\mathbf{n}(2{,}9; -0{,}8)$ $Q(5; 5) \Rightarrow 29x-8y = 105$. S ennek az egyenesnek és e-nek a metszéspontja: $S(4{,}36; 2{,}68)$.

3299. AB oldal egyenlete: $7x-y = 22$. AB oldal és a szögfelező metszéspontja legyen D: $x = \frac{44}{13}$; $y = \frac{22}{13}$. A C-ből induló szögfelező az AB oldalt a szöget bezáró oldalak arányában osztja, tehát kiszámítjuk az $\frac{AD}{BD}$ arányt. C rajta van az AB szakasz $\frac{AD}{BD}$ arányú Apolloniusz-körén.

$$AD = \sqrt{\left(\frac{52-44}{13}\right)^2 + \left(\frac{78-22}{13}\right)^2} = \frac{40\sqrt{2}}{13}.$$

$$BD = \sqrt{\left(\frac{44-39}{13}\right)^2 + \left(\frac{22+13}{13}\right)^2} = \frac{25\sqrt{2}}{13}.$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} \quad \text{és} \quad y = \frac{1}{2}x, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{(2y-4)^2+(y-6)^2}{(2y-3)^2+(y+1)^2} = \frac{64}{25}.$$

Innen $y_1 = -2$, $x_1 = -4$;

$y_2 = \frac{44}{26}$, $x_2 = \frac{44}{13}$.

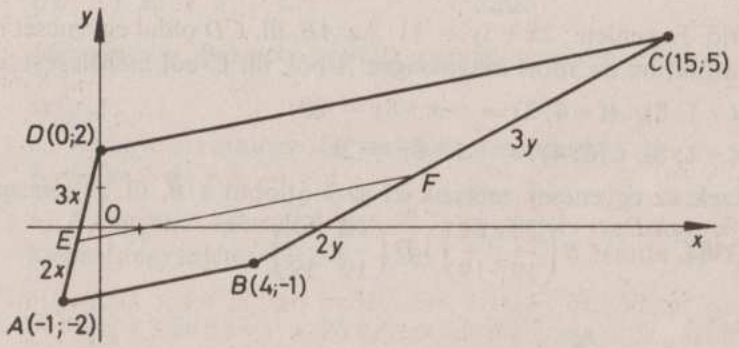
Tehát $C(-4; -2)$. Az $(x_2; y_2)$ pont az AB oldalon van.

3300. AB oldal felezőpontja $F(1; -1{,}5)$.
A, B és C az FA', FB', ill. FC' szakasz felezőpontja (A', B' és C' a nagyított háromszög csúcspontjai), tehát $A'(-3; -0{,}5)$, $B'(5; -2{,}5)$, $C'(9; 9{,}5)$.

3301. (**3301.** ábra.)

$$E\left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right), \quad F\left(\frac{42}{5}; \frac{7}{5}\right).$$

$$EF = \sqrt{\left(\frac{45}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2106}}{5} \approx \frac{45{,}89}{5}.$$



3301

3302. A feladat az 1989. évi 7. kiadásban is sajtóhibás. A D csúcs koordinátái helyesen $(-5; 2)$.

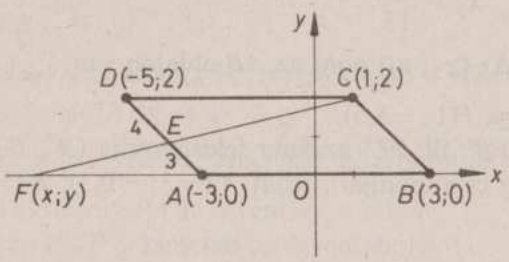
$$E\left(\frac{4\cdot(-3)+3\cdot(-5)}{7}; \frac{3\cdot 2}{7}\right), \quad E\left(-\frac{27}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

CE egyenlete: $\mathbf{n}(4; -17)$, $C(1; 2) \Rightarrow 4x-17y = -30$.
Ha $y=0$, $x=-7{,}5$.

Megjegyzés.
Egyszerűbb megoldás a párhuzamos szelők tételének megfordításával (**3302.** ábra).

$\frac{|x|+3}{|x|-3} = \frac{CB}{EA} = \frac{7}{3}$, innen $|x|=7{,}5$, $x=-7{,}5$.

Tehát $F(-7{,}5;0)$.



3302

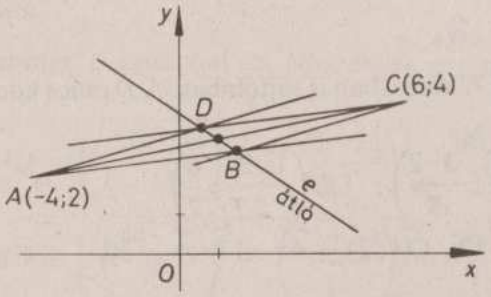
3303. C-t megkapjuk, ha az A csúcsot tükrözzük a G pontra: $C(5{,}5;8)$.
B csúcsot megkaphatjuk, ha a $\overrightarrow{GC}$-t elforgatjuk G körül $-90°$-kal: $B(11{,}75;4{,}25)$, és D-t, ha $\overrightarrow{GC}$-t elforgatjuk G körül $+90°$-kal: $D(1{,}75;1{,}75)$.

3304. Az AC átló felezőpontja $F(1;3)$. Ezen megy át a $-\frac{2}{3}$ meredekségű e átló. Egyenlete: $2x+3y=11$. Az AB, ill. CD oldal egyenesét megkaphatjuk, ha az adott magasságra A-ból, ill. C-ből merőlegest állítunk:

$\mathbf{n}(-1;8)$, $A(-4;2) \Rightarrow -x+8y=20$;

$\mathbf{n}(-1;8)$, $C(6;4) \Rightarrow -x+8y=26$.

Ezek az egyenesek metszik ki az e átlóból a B, ill. D csúcspontokat (**3304.** ábra): $B\left(\frac{28}{19};\frac{51}{19}\right)$, $D\left(\frac{10}{19};\frac{63}{19}\right)$.



3304

3305. Legyen $A(-2;2)$ és $C(3;0)$.
AB oldal egyenlete: $y=-3x-4$;
BC oldal egyenlete: $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$.

A két oldalegyenes metszéspontja $B(-1;-1)$.

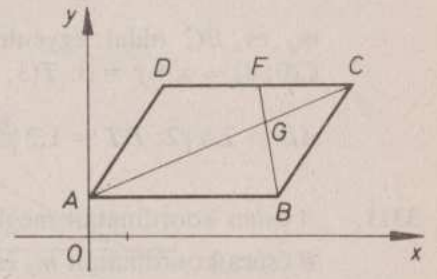
B-t tükrözzük AC átló felezőpontjára, $F\left(\frac{1}{2};1\right)$-re, kapjuk a D csúcsot.

$D(2;3)$.

3306. $F(4{,}5;4)$ (**3306.** ábra) BF egyenlete: $3x+0{,}5y=16{,}5$. AC egyenlete: $3x-7y=-7$.
AC és BF metszéspontja, G a kapott két egyenletből álló egyenletrendszerből: $G\left(\frac{14}{3}:3\right)$.

FG szakasz hossza: $\sqrt{\frac{37}{36}}$; GB szakasz hossza: $\sqrt{\frac{37}{9}}$.

$\frac{FG}{GB} = \sqrt{\frac{37}{36}} \cdot \sqrt{\frac{9}{37}} = \frac{1}{2}$.



3306

Megjegyzés: Bármely $ABCD$ paralelogramma esetén $\frac{1}{2}$ a keresett arány!

3307. *a)* Az egyenes átmegy AB szakasz felezőpontján $A(-4;-2)$, $B(2;4)$. Egyenlete: $6x+2y=-4$.

b) Az egyenes átmegy a $P(-3;7)$ ponton és párhuzamos az AB szakasszal; egyenlete: $x-y=-10$.

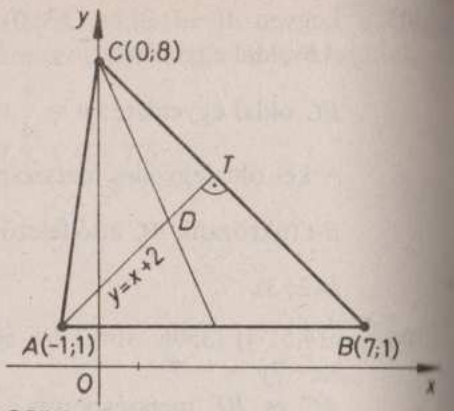
3308. $y=\frac{3}{4}x+3$ és $5x+y=26$ egyenesek metszéspontja: $M(4;6)$. A keresett egyenes normálvektora $\mathbf{n}(3;5)$, egyenlete $3x+5y=42$.

3309. s_a és AC egyenletéből kapjuk A koordinátáit: $A(-6;-1)$; s_c és AC egyenletéből kapjuk C koordinátáit: $C(4;2)$.
Az AC oldal felezőpontja: $F(-1;0{,}5)$.

A két súlyvonal metszéspontja: $S\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

A harmadik súlyvonalból tehát ismerünk két pontot (F és S), ezekből: $\mathbf{n}(11;-2)$, $F(-1;0{,}5)$, egyenlete: $11x-2y=-12$.

3310. m_a normálvektora B és C pont koordinátáiból:
$\mathbf{n}(1; -1)$, egyenlete: $x - y = -2$ (**3310.** ábra).
AB felezőpontja: $F(3; 1)$, s_c normálvektora C és F koordinátáiból: $\mathbf{n}(7; 3)$, egyenlete. $7x + 3y = 24$.
m_a és s_c metszéspontja a két egyenes egyenletéből:
$D(1{,}8; 3{,}8)$.
Az m_a magasság talppontja, T,



3310

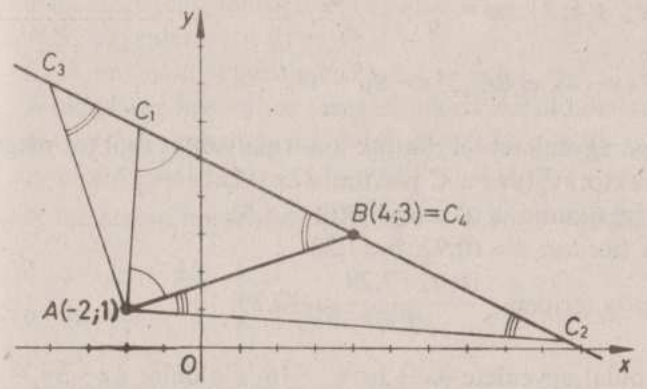
m_a és BC oldal egyenletéből számítható. BC egyenlete: $\mathbf{n}(1; 1)$, $C(0; 8) \Rightarrow x + y = 8$. $T(3; 5)$.

$AD = 2{,}8\sqrt{2}$; $DT = 1{,}2\sqrt{2}$. $\frac{AD}{DT} = \frac{2{,}8}{1{,}2} = \frac{7}{3}$.

3311. A csúcs koordinátáit megkapjuk AB és m_a egyenletéből: $A(3; 3)$.
B csúcs koordinátáit m_b és AB egyenletéből kapjuk: $B(-2; 4)$.
BC oldal egyenletét felírhatjuk egy pontból és egy normálvektorból (merőleges m_a-ra): $x = -2$.
AC egyenletét m_b irányvektorából és az A pontból írhatjuk fel:
$\mathbf{n}(3; -5)$, $A(3; 3) \Rightarrow 3x - 5y = -6$.
A C csúcs AC és BC oldalak metszéspontja, koordinátái: $C(-2; 0)$.
A három csúcs ismeretében a kerület:
$k = 4 + \sqrt{34} + \sqrt{26} \approx 14{,}93$.

3312. A B csúcs illeszkedik az adott egyenesre, az tehát a BC szár egyenese. Ha az egyenest elmetsszük egy B középpontú, AB sugarú körrel, megkapjuk a két lehetséges háromszög harmadik csúcsát a C_1, illetve a C_2 pontokat (**3312.** ábra).
$AB^2 = 36 + 4 = 40$.
A kör egyenlete:
$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 40$.
$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x - 6y - 15 &= 0 \\ x + 2y &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

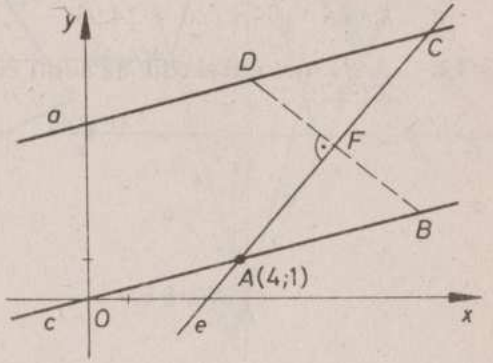
A metszéspontok koordinátái: $C_1(4 - 4\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2})$ és $(4 + 4\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2})$.
Ha az $x + 2y = 10$ az alap egyenesének egyenlete, akkor a lehetséges harmadik csúcsot az A középpontú, AB sugarú kör és az egyenes metszéspontja adja.
$$\left.\begin{aligned} (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 40 \\ x + 2y &= 10 \end{aligned}\right\}.$$
Ekkor a metszéspontok koordinátái:
$C_3(-4; 7)$, illetve $C_4(4; 3) = B$.



3312

3313. A C csúcs az AB szakasz felezőmerőlegesének és az adott egyenesnek a metszéspontja. A felezőmerőleges egyenlete:
$6x + 2y = 10$.
A keresett pont koordinátái a $3x - 2y = -10$ és $3x + y = 5$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása: $C(0; 5)$.

3314. Egy-egy adott oldalegyenes és az adott átlóegyenes metszéspontja megadja a rombusz két szemközti csúcsát (**3314.** ábra).
$$\left.\begin{aligned} x - 4y &= 0 \\ 6x - 5y &= 19 \end{aligned}\right\} A(4; 1),$$
$$\left.\begin{aligned} x - 4y &= -19 \\ 6x - 5y &= 19 \end{aligned}\right\} C(9; 7).$$
Az átlók felezőpontja A és B koordinátáiból:
$F\left(\frac{13}{2}; 4\right)$.



3314

A másik átló egyenlete (mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra) $\mathbf{n}(5; 6)$; $F\left(\frac{13}{2}; 4\right) \Rightarrow 5x+6y = 56{,}5$.

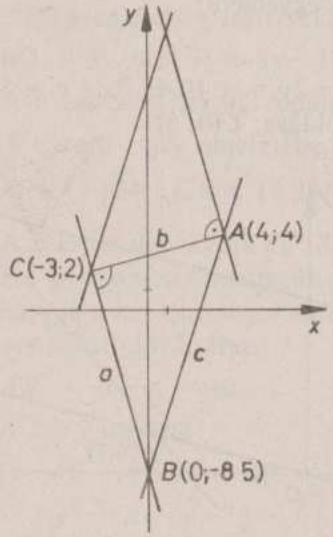
Ez az átló kimetszi a megadott két oldalegyenesből a hiányzó csúcsokat: $B\left(\frac{113}{13}; \frac{113}{52}\right)$; $D\left(\frac{56}{13}; \frac{303}{52}\right)$.

3315. Legyen $A(4; 4)$, $C(-3; 2)$. A terület szempontjából mindegy, hogy A vagy C-e a derékszög csúcs (**3315.** ábra). Legyen ez a C. Az átfogó, c egyenlete: $A(4; 4)$, $m = \frac{25}{8}$;

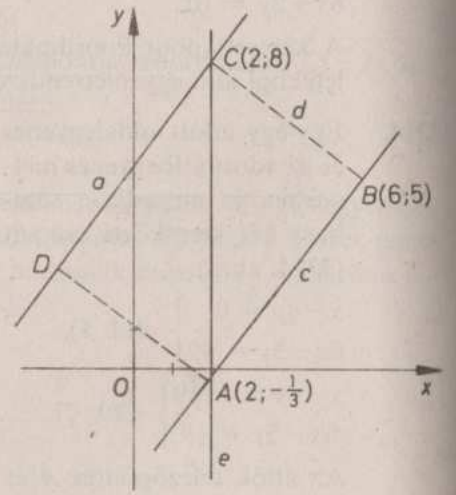
$y-4 = \frac{25}{8}(x-4)$, ebből $25x-8y = 68$.

Az a befogó egyenletét felírhatjuk a normálvektorából (ez megegyezik AC irányvektorával) és a C pontból: $7x+2y = -17$.
a és c metszéspontja, a B csúcs: $B(0; -8{,}5)$.
A befogók hossza: $a \approx 10{,}92$, $b \approx 7{,}28$.
A háromszög területe: $\frac{10{,}92 \cdot 7{,}28}{2} \approx 39{,}75$.

3316. Legyen a oldal egyenlete $4x-3y = -16$, c oldalé: $4x-3y = 9$ és az e átlóé: $x = 2$ (**3316.** ábra). a és e metszéspontja a C csúcs: $C(2; 8)$.



3315



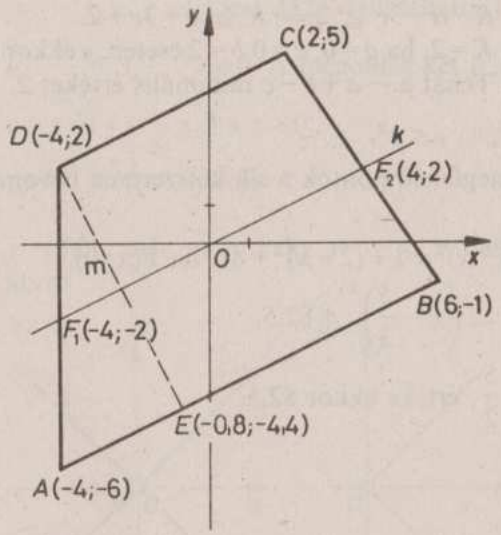
3316

c és e metszéspontja az A csúcs. $A\left(2; -\frac{1}{3}\right)$.

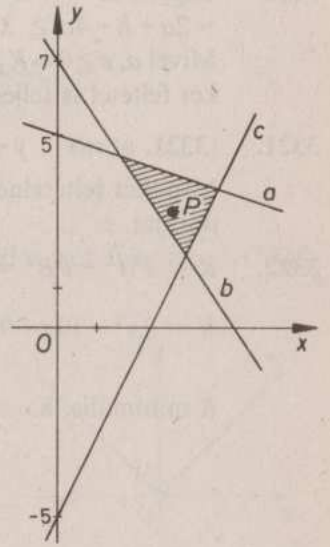
A d oldal egyenese a C csúcsból c-re bocsájtott merőleges:
$\mathbf{n}(3; 4)$, $C(2; 8) \Rightarrow 3x+4y = 38$.
A B csúcs c és d metszéspontja: $B(6; 5)$.
Az oldalak hossza: $AB = \frac{20}{3}$, $BC = 5$, a terület: $\frac{20}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3}$.

3317. *a)* Az AD szár felezőpontja: $F_1(-4; -2)$ (**3317.** ábra).
a BC szár felezőpontja: $F_2(4; 2)$.
F_1F_2 egyenlete: $x-2y = 0$.
b) A magasság egyenlete: $2x+y = -6$.
A magasság hosszához kiszámítjuk az AB oldallal való metszéspontját, E-t: AB egyenlete: $x-2y = 8$. $E(-0{,}8; -4{,}4)$.
A középvonal hossza: $k = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$.
A magasság hossza: $m = \sqrt{10{,}24+40{,}96} = 4\sqrt{3{,}2}$. $T = 16 \cdot \sqrt{16} = 64$.

3318. $\left.\begin{array}{l} a: x+3y < 15 \\ b: 3x+2y > 14 \\ c: 2x-y < 5 \end{array}\right\}$ (**3318.** ábra).
A megoldás egyetlen pont: $P(3; 3)$.



3317



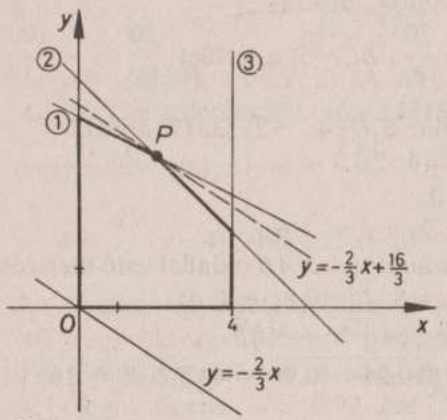
3318

3319. 1. $x+2y \leqq 10$, $y \leqq -\frac{1}{2}x+5$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

2. $x+y \leqq 6$, $y \leqq -x+6$,

3. $x-4 \leqq 0$, $x \leqq 4$

(**3319.** ábra).



3319

Valamennyi feltételnek a vastagon kihúzott ötszög pontjai felelnek meg, a határokat is beleértve.

A $2x+3y=c$ párhuzamos egyenesseregből (amit így is írhatunk: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{c}{3}$) azokat tekintjük, amelyeknek van közös pontjuk az ötszöggel. Ezek közül az vágja le a legnagyobb darabot az y tengelyből, vagyis annál lesz $\frac{c}{3}$ és ezzel együtt c is a legnagyobb, amelyik az ötszög P csúcsán megy át. P koordinátái: $(2; 4)$, tehát $c_{max} = 2 \cdot 2+3 \cdot 4 = 16$.

3320. Legyen $K = -a+b-c$ a vizsgált kifejezés!
$-2a+b-4c \geqq 2 \Rightarrow K-a-3c \geqq 2 \Rightarrow K \geqq a+3c+2$.
Mivel $a, c \geqq 0 \Rightarrow K \geqq 2$. $K=2$, ha $a=0$, $c=0$ $b=2$ esetén, s ekkor a másik két feltétel is teljesül. Tehát a $-a+b-c$ minimális értéke: 2.

3321. (**3321.** ábra) $y<x^2$, $x<y^2$.

Mindkét feltételnek megfelelő pontok a sík kétszeresen bevonalkázott pontjai.

3322. $K = PA^2+PB^2 = (3-x)^2+1+(2-x)^2+81$, ha $P(x; 0)$.

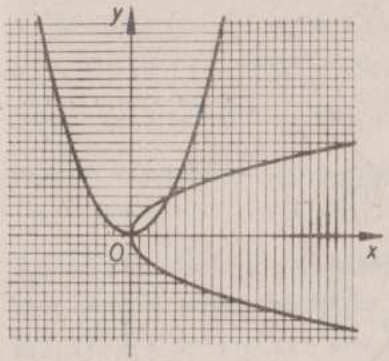
$K = 2x^2-10x+95 = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+82{,}5$.

K minimális, ha $x=\frac{5}{2}$, értéke ekkor 82,5.

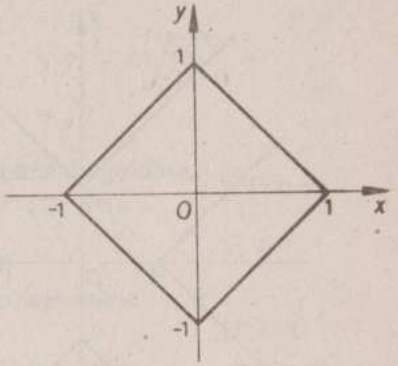
3323. *a)* $|x| = |y|$ azt jelenti, hogy $y=x$ vagy $y=-x$. Tehát e két egyenes pontjai felelnek meg a feltételnek.

b) $|x+y| = 1$ azt jelenti, hogy $x+y=1$, vagy $x+y=-1$. A megoldást az $y=-x+1$ és az $y=-x-1$ egyenesek pontjai adják.

3324. *a)* $|x|+|y| = 1$, egy négyzet oldalainak pontjai (**3324.** ábra).
b) $|x|+|y| = 0$, ezt az egyenletet csak az origó koordinátái elégítik ki.



3321



3324

3325. *a)* $\left|\frac{x}{y}\right| = 1$, $y \neq 0$,

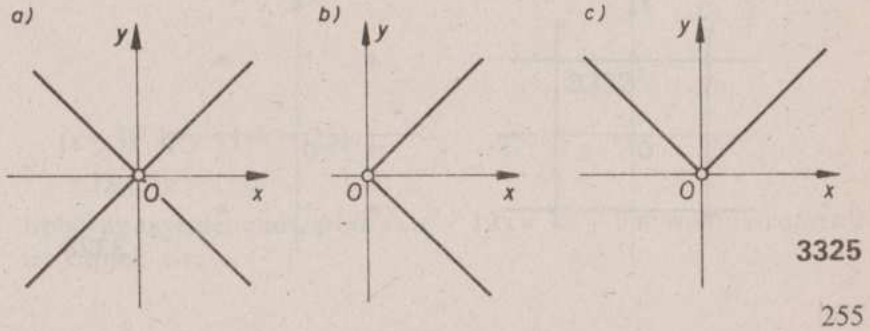
$|x| = |y|$. (Lásd **3323**/*a)* feladatot.)

b) $\frac{x}{|y|} = 1$, $y \neq 0$. A megoldás két félegyenes:

$y=x$ és $y=-x$, ha $x>0$.

c) $\frac{|x|}{y} = 1$, $y>0$.

$y = |x|$, azaz $y=x$ vagy $y=-x$. A megoldás két félegyenes (**3325.** ábra).



3325

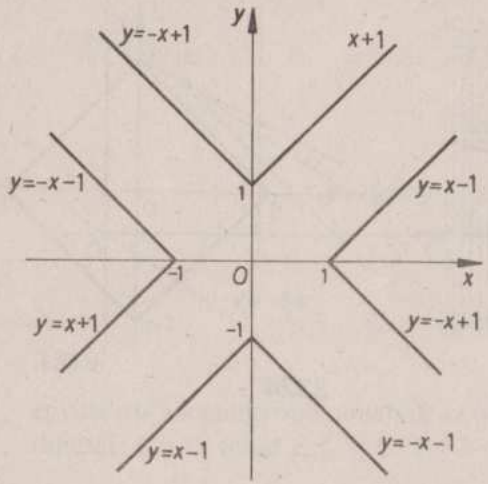
3326. $||x|-|y|| = 1$.

a) $|x|-|y| = 1$, ha $|x| > |y|$,

vagy

b) $|x|-|y| = -1$, ha $|x| < |y|$.

Ezeknek a feltételeknek az ábrán látható félegyenesek pontjai tesznek eleget (**3326.** ábra).



3326

3327. $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$.

Megoldás az $y = x$ egyenes első negyedbe eső félegyenese.

3328. *a)* $(|x|-1)(|y|-1) = 0$. Innen

$|x|-1 = 0$ vagy $|y|-1 = 0$;

$|x| = 1$, $|y| = 1$ (**3328.** ábra).



3328

b) $(|x|-1)^2+(|y|-1)^2 = 0$. Ebből

$|x|-1 = 0$ és $|y|-1 = 0$, mert két négyzet összege csak úgy lehet 0, ha mindegyik külön-külön 0.

A megoldás 4 pont: $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ és $(-1; -1)$.

3329. A kör középpontja: $(3; 2)$, sugarának négyzete:

$r^2 = 16+9 = 25$. Egyenlete: $(x-3)^2+(y-2)^2 = 25$.

3330. *a)* $(x-3)^2+(y+5)^2 = 36$, $C(3; -5)$, $r = 6$;

b) $(x+1{,}5)^2+(y-3{,}5)^2 = 29$, $C(-1{,}5; 3{,}5)$, $r = \sqrt{29}$;

c) $(x-6)^2+(y-6)^2 = -97$, $C(6; 6)$, $r = \sqrt{97}$.

3331. $\left.\begin{matrix}(x-1)^2+(y+2)^2 = 16 \\ y = x-7\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldása:

$P_1(5; -2)$, $P_2(1; -6)$.

3332. Az AB oldal hossza: $\sqrt{45}$ (**3332.** ábra).

A-n átmenő, AB-re merőleges egyenes egyenlete:

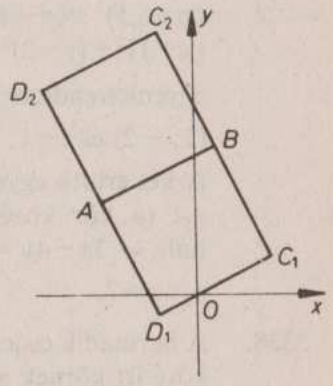
$\mathbf{n}(2; 1)$, $A(-5; 5) \Rightarrow 2x+y = -5$.

Ezt elmetsszük egy A középpontú, $\sqrt{45}$ egység sugarú körrel, megkapjuk a négyzet D csúcsának koordinátáit (két megoldás van):

$$\left.\begin{matrix}2x+y = -5 \\ (x+5)^2+(y-5)^2 = 45\end{matrix}\right\} D_1(-2; -1),\ D_2(-8; 11).$$

A B-n átmenő, AB-re merőleges egyenes egyenlete: $2x+y = 10$.

Ezt elmetszve egy B középpontú, $\sqrt{45}$ egység sugarú körrel, megkapjuk a két lehetséges C csúcs koordinátáit: $C_1(4; 2)$ $C_2(-2; 14)$.



3332

3333. *a)* $\left.\begin{matrix}(x-3)^2+(y-1)^2 = 25 \\ -3x+4y = -30\end{matrix}\right\}$.

Ebből az egyenletrendszerből az $x^2-12x+36 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk x-re.

Ez $(x-6)^2$, tehát az egyenletnek egy megoldása van, $x=6$. Az egyenes egyenletéből $y=-3$. Az egyenes tehát érinti a kört a $(6;-3)$ pontban.

b) $\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-1)^2 &= 25\\ x &= 9\end{aligned}\right\}$.

Innen a következő másodfokú egyenletet kapjuk y-ra: $(y-1)^2=-11$, ami azt jelenti, hogy a körnek és egyenesnek nincs közös pontja.

3334. $\left.\begin{aligned}x^2+4x+4+y^2+2y+1 &= 25\\ x^2-8x+16+y^2+2y+1 &= 25\end{aligned}\right\}$

$x=1$, $y=-5$; és $x=1$, $y=3$.

3335. Az $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ és $y=2x+1$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásai: $(1;3)$ és $(-3;-5)$, ezek a kör és egyenes metszéspontjai. Az általuk meghatározott húr hossza: $4\sqrt{5}$.

3336. A P pontba mutató sugár irányvektora $\mathbf{v}(5;12)$. Ez az érintő normálvektora: $\mathbf{n}(5;12)$, $P(10;24)$, az érintő egyenlete tehát: $5x+12y=338$.

3337. A számítással a szerkesztés menetét követjük. Legyen az adott kör középpontja O, OP felezőpontja: $F(6{,}5;4{,}5)$. $OF^2=62{,}5$. OP Thalész-körének egyenlete tehát: $(x-6{,}5)^2+(y-4{,}5)^2=62{,}5$. Ennek és az eredeti körnek a metszéspontjai az

$\left.\begin{aligned}(x-6{,}5)^2+(y-4{,}5)^2 &= 62{,}5\\ (x+1)^2+(y-2)^2 &= 25\end{aligned}\right\}$

egyenletrendszer megoldásából adódnak. Ezek az érintési pontok:

$(2;-2)$ és $(-1;7)$.

A két érintő egyenlete:

e_1: (a kör középpontjának és az érintési pontnak a koordinátáiból), $\Rightarrow 3x-4y=14$.

e_2: $y=7$.

3338. A harmadik csúcspont az AB oldalfelező-merőlegesének és háromszög köré írt körnek a metszéspontja, tehát két megoldás van.

A felezőmerőleges egyenlete: $F(0;2)$, $\mathbf{n}(1;-1)\Rightarrow$

$\left.\begin{aligned}x-y &= -2\\ x^2+y^2-4{,}5x-8{,}5y-5 &= 0.\end{aligned}\right\}$

Innen x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$2x^2-9x-18=0$.

A metszéspontok: $C_1(6;8)$, $C_2\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3339. Ha van a körnek megfelelő pontja, az rajta van a két adott pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegesén. Ennek egyenlete:

$F(-1;1)$ $\mathbf{n}(4;-2)\Rightarrow 4x-2y=-6$, egyszerűsítve:

$\left.\begin{aligned}2x-y &= -3\\ x^2-8x+16+y^2-6y+9 &= 16\end{aligned}\right\}$.

E két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai adják a metszéspontok koordinátáit: $P_1(0;3)$ és $P_2(1{,}6;6{,}2)$.

3340. Mivel a kör érinti az y tengelyt, $r=u$, a középpont első koordinátája. u és v között fennáll, hogy $v=u-2$.

A P pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, tehát:

$(2-u)^2+(-1-v)^2=u^2$, azaz

$(2-u)^2+(-1-u+2)^2=u^2$.

Innen $u_1=5$, $u_2=1$; $v_1=3$, $v_2=-1$.

Két kört kaptunk, egyenletük:

$(x-5)^2+(y-3)^2=25$, $(x-1)^2+(y+1)^2=1$.

3341. Az $x^2+y^2=9$ és az $y=x+3\sqrt{2}$ egyenletű kör, ill. egyenes közös pontja:

$$x=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ez a pont rajta van a keresett körön, tehát

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}-u\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-v\right)^2=r^2.$$

De a középpont $C(-6;6)$, tehát

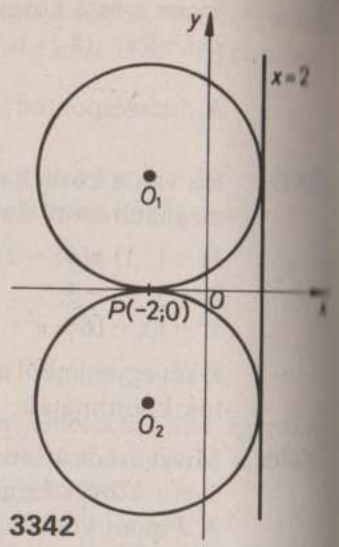
$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}+6\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-6\right)^2=r^2.$$

$r^2=81-36\sqrt{2}\approx 30$.

A kör egyenlete: $(x+6)^2+(y-6)^2=81-36\sqrt{2}$.

3342. Mivel a kör középpontjának első koordinátája, $u=-2$, és érinti az $x=2$ egyenletű egyenest, a középpont távolsága ettől az egyenestől 4 egység, és ez egyben a sugár hossza is. A kör érinti az x tengelyt, tehát $|v| = r = 4$. Két ilyen kör van (**3342.** ábra), egyenletük:

a) $(x+2)^2+(y-4)^2 = 16$; *b)* $(x+2)^2+$ $+(y+4)^2 = 16$.



3342

Ezek az ordinátatengelyt azokban a pontokban metszik, ahol $x=0$.

a) $4+(y-4)^2 = 16$, innen $y = 4\pm$ $\pm 2\sqrt{3}$.

b) $4+(y+4)^2 = 16$, innen $y = -4\pm$ $\pm 2\sqrt{3}$.

3343. A kör egyenlete: $(x+1)^2+(y-2)^2 = 16$, középpontja $C(-1;2)$.
C-t a P ponttal összekötő egyenes a keresett húr felezőmerőlegese, tehát a húr egyenlete: $2x+y = 5$.
A húr a kört két pontban metszi, ezek koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+2x-4y-11 &= 0 \\ 2x+y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják. Ezek:
$A(2{,}48;\ 0{,}04)$, $B(-0{,}48;\ 5{,}96)$.
A húr hossza: $\approx 6{,}62$.

3344. A két kör metszéspontja az

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+10x-2y+1 &= 0 \\ x^2+y^2-8x+4y-5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből:
$A(0;\ 1)$ és $B(-1;\ -2)$.
A háromszög harmadik csúcsa, $C(0;\ 0)$.
A kerület: $\approx 6{,}4$.

3345. $y = ax+4$. Az origóból erre az egyenesre állított merőleges egyenlete: $y = -\frac{1}{a}x$, ha $a\neq 0$. (Ha $a=0$, akkor $y=4$, s a ráállított merőleges egyenes egyenlete $x=0$.)

Metszéspontjuk koordinátái közötti összefüggést megkaphatjuk, ha például az első egyenletből kifejezzük a-t és ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$a = \frac{y-4}{x}\ (x\neq 0),$$

$$y = -\frac{x}{y-4}\cdot x, \quad (y\neq 4),\ (y\neq 0)$$

$y^2-4y = -x^2$, azaz $x^2+y^2-4y = 0$.
Átalakítva: $x^2+(y-2)^2 = 4$,
ez egy $(0;\ 2)$ középpontú, 2 egység sugarú kör egyenlete kivéve a $(0;\ 0)$ pontot.
Megjegyzés: Az $a=0$-nak megfelelő $(0;\ 4)$ pont is rajta van ezen a körön.

3346. A keresett pontok az AB szakasz Thalész-körének és az ordinátatengelynek a metszéspontjai.
A kör középpontja AB felezőpontja $C(2{,}5;\ 0{,}5)$, sugara az AB távolság fele.
$AB = \approx 11{,}4$, $r = 5{,}7$.
A kör egyenlete: $(x-2{,}5)^2+(y-0{,}5)^2 = 32{,}5$.
Ha $x=0$, $(y-0{,}5)^2 = 26{,}25$;

$$y < \pm 5{,}12+0{,}5 = \begin{cases} -4{,}62, \\ 5{,}62. \end{cases}$$

3347. A derékszögű csúcsból merőlegest állítunk az átfogó egyenesére. Messe ez az átfogó egyenesét egy D pontban. A D középpontú, CD sugarú kör kimetszi az átfogó egyeneséből az A és B csúcsokat.
CD egyenlete: $\mathbf{n}(3;\ -4)$, $C(7;\ 7) \Rightarrow 3x-4y = -7$.
D koordinátái a

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y &= -7 \\ 4x+3y &= 25 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből: $D(3;\ 4)$.
CD hossza: 5.
A kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-4)^2 = 25$.
A kör és az átfogó egyenesének metszéspontjai A és B, koordinátái a következő egyenletrendszerből:

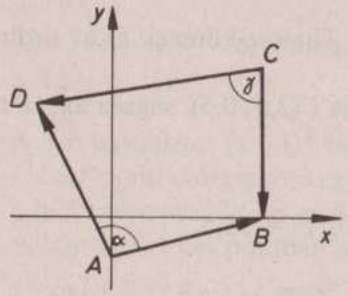
$$\left.\begin{aligned} (x-3)^2+(y-4)^2 &= 25 \\ 4x+3y &= 4 \end{aligned}\right\} A(0;\ 8)\ B(6;\ 0).$$

3348. Számítsuk ki a négyszög két szemközti szögét, például a DAB és a DCB szöget (illetve ezek cos-át)! $\overrightarrow{AB}(4;1)$, $\overrightarrow{AD}(-2;4)$, $\overrightarrow{CB}(0;-4)$, $\overrightarrow{CD}(-6;-1)$, $|\mathbf{v}_{AB}| = \sqrt{17}$, $|\mathbf{v}_{AD}| = \sqrt{20}$, $|\mathbf{v}_{CB}| = 4$, $|\mathbf{v}_{CD}| = \sqrt{37}$.

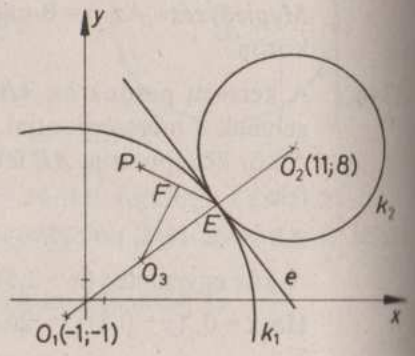
$$\cos DAB\sphericalangle = \frac{-8+4}{\sqrt{20}\sqrt{17}} \approx -0{,}2169,\ DAB\sphericalangle = 102{,}53°;$$

$$\cos DCB\sphericalangle = \frac{4}{4\sqrt{37}} \approx 0{,}1644,\ DCB\sphericalangle = 80{,}53°.$$

A két szög összege nem 180°, tehát a négy pont nem lehet egy húrnégyszög négy csúcsa (**3348.** ábra).



3348



3349

3349. A két kör érinti egymást, mert középpontjaik távolsága $O_1O_2 = 15 = r_1 + r_2$. A két kör egyenlete átalakítva:

k_1: $(x+1)^2+(y+1)^2 = 100$, $O_1(-1;-1)$.

k_2: $(x-11)^2+(y-8)^2 = 25$, $O_2(11;8)$.

O_1O_2 egyenlete: $\mathbf{n}(3;-4)$, $O_1(-1;-1) \Rightarrow 3x-4y = 1$.

A két kör közös belső érintőjének (e) egyenletét megkapjuk, ha a két kör egyenletét kivonjuk egymásból:

e: $x^2+y^2+2x+2y-98-(x^2+y^2-22x-16y+160) = 0$.

Összevonás után: $4x+3y-43 = 0$ (**3349.** ábra). e érinti a harmadik kört is, a három kör érintési pontja, E közös. Koordinátáit megkapjuk O_1O_2 és e egyenletéből álló egyenletrendszerből:

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y &= 1 \\ 4x+3y &= 43 \end{aligned}\right\} \quad E(7;5).$$

A harmadik kör középpontja rajta van O_1O_2 egyenesén és PE felezőmerőlegesén. $P(3;7)$ Ez utóbbi egyenlete: $\mathbf{n}(4;-2)$, $F(5;6)$, $4x-2y = 8$. Egyszerűsítve:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y &= 4 \\ 3x+4y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad O_3(3;2).$$

A harmadik kör sugara az O_3E szakasz:

$O_3E^2 = r_3^2 = 16+9 = 25$.

A keresett kör egyenlete tehát:

$(x-3)^2+(y-2)^2 = 25$.

3350. A két adott kör érinti egymást, mert középpontjaik távolsága $O_1O_2 = \sqrt{16^2+12^2} = 20 = r_1+r_2$. Az érintési pont, E az O_1O_2 egyenes és a közös belső érintő, e metszéspontja.

O_1O_2 egyenlete: $\mathbf{n}(3;4)$ $O_1(-4;2) \Rightarrow 3x+4y = -4$. e egyenlete: $x^2-24x+144+y^2+20y-(x^2+8x+16+y^2-4y+4-100) = 0$.

Rendezés után: $-4x+3y+28 = 0$.

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y &= -4 \\ -4x+3y &= -28 \end{aligned}\right\} \quad E(4;-4).$$

E pont rajta van a keresett körön, amiről azt is tudjuk, hogy $r = |u|$ és a középpontja az O_1O_2 egyenesen van, tehát $3u+4v = -4$. Ezeket figyelembe véve:

$$(4-u)^2+(-4-v)^2 = u^2 \text{ és } v = -\frac{3}{4}u-1,\ (4-u)^2+\left(\frac{3}{4}u-3\right)^2 = u^2.$$

Ebből $u_1 = 20$, $u_2 = \frac{20}{9}$. Az első érték nem felel meg, ezért a keresett kör középpontja $\left(\frac{20}{9};-\frac{8}{3}\right)$, sugara $\frac{20}{9}$, egyenlete: $\left(x-\frac{20}{9}\right)^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{400}{81}$.

3351. Az eredeti kör egyenlete:

$(x-3{,}5)^2+(y+5{,}5)^2 = 64$.

A vele koncentrikus, és fele akkora sugarú köré:

$(x-3{,}5)^2+(y+5{,}5)^2 = 16$.

3352. Az F középpontú, AF sugarú kör kimetszi a befogó egyeneséből a derékszögű csúcsot, hiszen ez a kör az átfogó Thalész-köre.

$AF = \sqrt{16+9} = 5$. A kör egyenlete:

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 25$$
$$x-2y = -5$$

Innen y-ra a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$y^2-6y+8 = 0$.

Ebből a két közös pont ordinátája: $y_1=4$, $y_2=2$;

$x_1=3$, $x_2=-1$.

$A(-1;2)$ pont az A csúcs, tehát $C(3;4)$.

3353. A C középpontú, AC sugarú kör kimetszi a háromszög köré írt körből a hiányzó B csúcsot:

$$AC^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25(2-\sqrt{2}).$$

$$\left(x-6-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y-3+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25(2-\sqrt{2}).$$

$(x-6)^2+(y-3)^2 = 25$.

Ennek az egyenletrendszernek az egyik $(x;y)$ megoldása a B pont, a másik megoldás természetesen az A pont koordinátáit jelenti.

Négyzetre emelés és összevonás után a két egyenlet különbségéből a következő elsőfokú egyenletet kapjuk:

$y = x-8$.

Ezt behelyettesítve az egyszerűbb második egyenletbe:

$x^2-17x+66 = 0$ egyenletből kapjuk a metszéspontok első koordinátáit:

$x_1=11$, $x_2=6$;

$y_1=3$, $y_2=-2$.

Tehát $B(11;3)$.

3354. A háromszög szimmetriatengelye az $x=3$ egyenletű egyenes (**3354.** ábra), tehát alapja párhuzamos az x tengellyel. Mivel ez érintője a 3 egység sugarú beírt körnek, egyenlete: $y=-3$.

AO Thalész-körének és a beírt körnek a metszéspontjai a háromszög szárainak egy-egy pontját jelentik (az ábrán E és F).

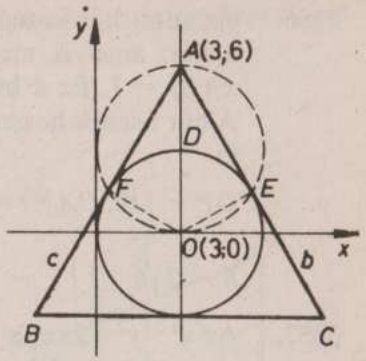
$OA=6$, a Thalész-kör sugara 3 egység, egyenlete: $(x-3)^2+(y-3)^2 = 9$.

A beírt kör egyenlete: $(x-3)^2+y^2 = 9$.

A két kör metszéspontja:

$$y_{1,2} = \frac{3}{2};\ x_1 = 3+\frac{3\sqrt{3}}{2},\ x_2 = 3-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát $E\left(3+\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$, $F\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$.



3354

AF szár egyenlete: $\mathbf{n}(3;-\sqrt{3})$, $A(3;6)$ adatokból:

$3x-\sqrt{3}y = 9-6\sqrt{3}$.

Ha $y=-3$, $x = 3-3\sqrt{3}$. Tehát $B[(3-3\sqrt{3});-3]$.

B-t tükrözve a $x=3$ egyenletű szimmetriatengelyre, $C[(3+3\sqrt{3});-3]$.

A háromszög BC alapjának hossza:

$3+3\sqrt{3}+|3-3\sqrt{3}| = 6\sqrt{3}$. Magassága 9 egység, területe:

$t = 6\sqrt{3}\cdot 4{,}5 = 27\sqrt{3}$.

3355. A keresett kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$, – az adott pont koordinátáit, és azt a tényt felhasználva, hogy érinti az x tengelyt – így alakul:

(*) $(4-u)^2+(3-v)^2 = v^2$.

Középpontja rajta van az origót (az adott kör középpontját) az érintési ponttal összekötő egyenesen. Ennek egyenlete: $-3x+4y = 0$, vagyis $-3u+4v = 0$. Innen u értékét behelyettesítve (*)-ba, egyszerűsítés és összevonás után a következő egyenlethez jutunk:

$16v^2-150v+225 = 0$. Innen

$$v_1 = \frac{5}{2},\ v_2 = \frac{15}{8}.$$

A belülről érintő körnek v_2 felel meg. A kör középpontja tehát $\left(\frac{5}{2};\frac{15}{8}\right)$.

Sugarát a középpont és a $(4;3)$ pont távolságából számíthatjuk: $r^2 = \frac{225}{64}$. A keresett kör egyenlete tehát:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}.$$

3356. Az adott kör középpontja $O(-3; -2)$, sugara: $r=4$. Legrövidebb az a húr, amelyik merőleges OP-re, és ezt P felezi. A húr egyenlete $x+3y = 1$. Ez a húr metszi a kört két pontban, legyen az egyik A. A húr felének hosszát az OPA derékszögű háromszögből számíthatjuk ki.

$OP = \sqrt{10}$, $OA = r = 4$. A Pitagorasz-tételből $AP = \frac{h}{2} = \sqrt{16-10} = \sqrt{6}$,

$h = 2\sqrt{6}$.

3357. Az $x^2+y^2+2x-2y = 14$ egyenletű kör és a $(\sqrt{15}+1)x+(\sqrt{15}-1)y = 14$ egyenletű egyenes metszéspontjai, azaz a két érintési pont koordinátái: $E(0; \sqrt{15}+1)$, $F(\sqrt{15}-1; 0)$.

A két érintő egyenlete:

e_1: $E(0; \sqrt{15}+1)$, $O(-1; 1)$, $\mathbf{n}(1; \sqrt{15}) \Rightarrow$

$x+\sqrt{15}y = \sqrt{15}(\sqrt{15}+1)$.

e_2: $F(\sqrt{15}-1; 0)$, $O(-1; 1)$, $\mathbf{n}(\sqrt{15}; -1) \Rightarrow$

$\sqrt{15}x-y = \sqrt{15}(\sqrt{15}-1)$.

e_1 és e_2 metszéspontja: $P(\sqrt{15}; \sqrt{15})$.

3358. A két érintési pont a kör egyenletéből: $A(0; 13)$ és $B(0; -3)$.

A két érintő egyenlete (normálvektoruk megegyezik az érintési pontba húzott sugár egyenesének irányvektorával):

e_1: $6x+8y = 104$;

e_2: $6x-8y = 24$.

A két érintő metszéspontja: $P\left(10\frac{2}{3}; 5\right)$.

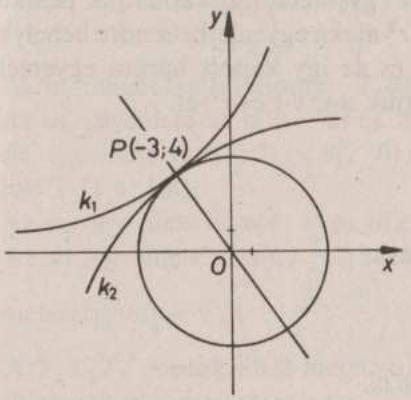
3359. Az egyik keresett kör középpontja az origótól 20 egység távolságra van (**3359.** ábra), tehát $u^2+v^2 = 400$. Másrészt a körön rajta van a $(-3; 4)$ pont, tehát $(-3-u)^2+(4-v)^2 = 225$.

A középpont koordinátái ebből a két egyenletből: $u=-12$, $v=16$, a kör egyenlete: $(x+12)^2+(y-16)^2 = 225$. Ez a kör (k_1) az adott kört kívülről érinti.

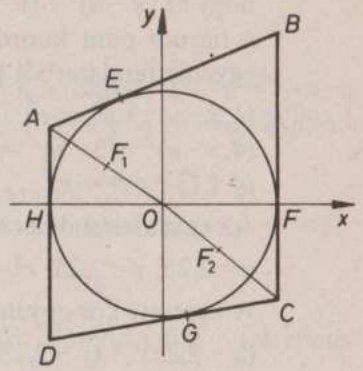
A másik kört az adott kör belülről érinti, középpontjaik távolsága 10 egység, tehát a középpontra a következő két egyenletet kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}(-3-u_1)^2+(4-v_1)^2 &= 225\\ u_1^2+v_1^2 &= 100\end{aligned}\right\} \quad u_1=6, \quad v_1=-8.$$

A kör egyenlete: $(x-6)^2+(y+8)^2 = 225$.



3359



3360

3360. Legyen a két adott csúcs: $A(-6; 4)$ és $C(6; -5)$ (**3360.** ábra). Az E és H érintési pontokat OA Thalész-köre metszi ki az adott körből. Ennek középpontja $F_1(-3; 2)$, sugarának négyzete 13. egyenlete:

$(x+3)^2+(y-2)^2 = 13$.

Ehhez hozzá véve az $x^2+y^2 = 36$ egyenletet, az egyenletrendszer megoldása: $E\left(-\frac{30}{13}; \frac{72}{13}\right)$, $H(-6; 0)$. Hasonlóan OC Thalész-köre kimetszi az eredeti körből az F és G érintési pontokat. A középpont $F_2(3; -2{,}5)$, a sugár négyzete 15,25 és egyenlete: $(x-3)^2+(y+2{,}5)^2 = 15{,}25$. Ennek a körnek a két metszéspontja az eredeti körrel az

$F(6; 0)$ és $G(1{,}08; -5{,}9)$.

A négy érintő egyenesének egyenlete:

a: $x=-6$;

b: $\mathbf{n}(0{,}9; -4{,}92)$ (G és C pontokból), $C(6; -5)$,

$0{,}9x-4{,}92y = 5{,}4+24{,}6$, azaz $9x-49{,}2y = 300$;

c: $x=6$;

d: $\mathbf{n}(1{,}54; -3{,}7)$ (A és E pontokból), $A(-6; 4)$,

$1{,}54x-3{,}7y = -9{,}24-14{,}8 = -24{,}04$.

c és d metszéspontja $B(6; 9)$;

a és b metszéspontja $D(-6; -7{,}2)$.

3361. Az oldalfelezőpontok koordinátái (**3361.** ábra):

$F_1(1{,}5; 0)$, $F_2(4{,}5; 3)$, $F_3(0; 3)$.

A három ponton átmenő kör egyenletét megkaphatjuk például úgy is, hogy az $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$ alakú egyenletbe rendre behelyettesítjük a három pont koordinátáit és az így kapott három egyenletből álló egyenletrendszerből kiszámítjuk u-t, v-t és r^2-et.

$$\left.\begin{aligned}(1{,}5-u)^2+v^2 &= r^2\\(4{,}5-u)^2+(3-v)^2 &= r^2\\u^2+(3-v)^2 &= r^2\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$u=2{,}25$, $v=2{,}25$, $r^2=5{,}625$.

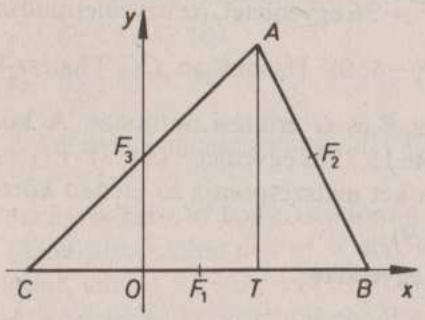
A keresett kör-egyenlet:

$(x-2{,}25)^2+(y-2{,}25)^2 = 5{,}625$.

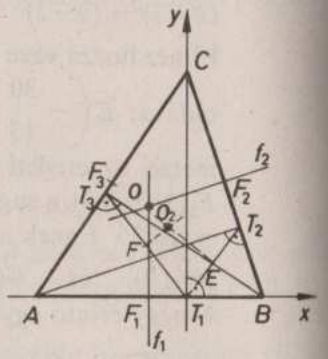
Az A csúcsból induló magasság talppontja, $T(3; 0)$. Behelyettesítve az előbbi egyenletbe:

$(3-2{,}25)^2+(-2{,}25)^2 = 0{,}75^2+2{,}25^2 = 5{,}625$,

tehát T valóban rajta van a körön.



3361



3362

3362. A háromszög köré írt kör sugarát megkaphatjuk, ha kiszámítjuk két oldal felezőmerőlegesének metszéspontját, és ennek a távolságát valamelyik csúcstól (**3362.** ábra).

AB felezőmerőlegese, f_1 egyenlete: $x=-1$.

BC felezőmerőlegese, f_2 egyenlete: $\mathbf{n}(1; -3)$; $F_2(1; 3)$ adatokból $x-3y = -8$.

f_1 és f_2 metszéspontja: $O_1\left(-1; \frac{7}{3}\right)$.

$$R^2 = (-4+1)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{130}{9}.$$

Az m_c magasság talppontja: $T_1(0; 0)$.

Az m_c egyenlete az $\mathbf{n}(2; -6)$ és $A(-4; 0)$ adatokból: $x-3y = -4$; a BC egyenlete az $\mathbf{n}(6; 2)$ és $B(2; 0)$ adatokból: $3x+y = 6$; metszéspontjuk $T_2(1{,}4; 1{,}8)$.

Az m_b egyenlete az $\mathbf{n}(4; 6)$ és $B(2; 0)$ adatokból: $2x+3y = 4$;

Az AC egyenlete az $\mathbf{n}(6; -4)$ és $A(-4; 0)$ adatokból: $3x-2y = -12$;

metszéspontjuk $T_3\left(-\frac{28}{13}; \frac{36}{13}\right)$.

A $T_1T_2T_3$ pontok által meghatározott kör középpontját a felezőmerőlegesek metszéspontja adja.

T_1T_2 felezőpontja $E(0{,}7; 0{,}9)$; a felezőmerőleges egyenlete $\mathbf{n}(1{,}4; 1{,}8)$ alapján: $7x+9y = 13$.

T_1T_3 felezőpontja $F\left(-\frac{14}{13}; \frac{18}{13}\right)$; a felezőmerőleges egyenlete az $\mathbf{n}(-7; 9)$ alapján: $-7x+9y = 20$.

A felezőmerőlegesek metszéspontja: $O_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{33}{18}\right)$; a sugár:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{33}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{130}{36}}.$$

$R^2=4r^2$, tehát $R=2r$.

Vegyük észre, hogy ugyanez igaz az $F_1F_2F_3$ pontok által meghatározott körre is!

A három oldalfelező pont: $F_1(-1; 0)$, $F_2(1; 3)$, $F_3(-2; 3)$. Az általuk meghatározott kör középpontját és sugarát a következő egyenletrendszerből számítjuk ki:

$$\left.\begin{aligned}(-1-u)^2+v^2 &= r^2\\(1-u)^2+(3-v)^2 &= r^2\\(-2-u)^2+(3-v)^2 &= r^2\end{aligned}\right\}.$$

Innen $u = -\frac{1}{2}$, $v = \frac{11}{6}$, $r^2 = \frac{130}{36}$.

$R^2 = 4r^2$, tehát $R = 2r$.

3363. A távolságok négyzetösszege:

$$(x+3)^2 + y^2 + x^2 + (y+1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{70}{3}.$$

A négyzetre emelések és összevonás után a következő egyenletet kapjuk:

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + 6 = \frac{70}{9};$$

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = 2$, ez egy $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú kör egyenlete.

3364. A keresett kör középpontja rajta van az adott egyenesre a P pontban állított merőlegesen, P-ből 5 egység távolságra.

A merőleges egyenlete $3x+4y = 9$. Ezt kell elmetszeni egy P középpontú, 5 egység sugarú körrel, hogy a keresett kör középpontját megkapjuk az

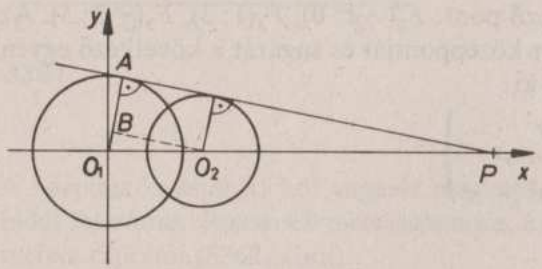
$$\left.\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-3)^2 &= 25\\ 3x+4y &= 9\end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszerből.

A két metszéspont: $(3; 0)$ és $(-5; 6)$.

A feltételeknek tehát két kör tesz eleget:

$(x-3)^2 + y^2 = 25$ és
$(x+5)^2 + (y-6)^2 = 25$.

3365. Az egyik kör középpontja az origó (**3365.** ábra), a másiké $(5; 0)$. Távolságuk 5 egység. Sugaruk 4, ill. 3.



3365

$O_1BO_2\triangle \sim O_1AP\triangle$, tehát

$\frac{1}{5} = \frac{4}{O_1P}$, innen $O_1P = 20$, $P(20; 0)$.

3366. A beírt háromszögek csúcspontjai:

$A(-3; -4)$, $B(3; -4)$, $C(x; y)$.

Súlypontjuk koordinátái:

$x_s = \frac{x}{3}$, $y_s = \frac{-8+y}{3}$. Innen $x = 3x_s$, $y = 3y_s + 8$.

A C pont rajta van a körön, tehát
$(3x_s)^2 + (3y_s+8)^2 = 25$. 9-cel végigosztva:

$$x_s^2 + \left(y_s + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}.$$

A súlypontok tehát egy $\left(0; -\frac{8}{3}\right)$ középpontú, $\frac{5}{3}$ egység sugarú körvonalon helyezkednek el.

3367. Az $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ és $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 20$ egyenletű körök metszéspontjai: $Q(5; 0)$ és $R(5; 4)$. Ezekhez hozzávéve a $P(13; 8)$ pontot, a három ponton átmenő kör egyenletét például meghatározhatjuk úgy, hogy az $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ egyenletbe rendre behelyettesítjük a három pont koordinátáit, és az így kapott három egyenletből álló egyenletrendszert megoldjuk:

$$\left.\begin{aligned}169 + 64 + 13A + 8B + C &= 0\\ 25 + 5A + C &= 0\\ 25 + 16 + 5A + 4B + C &= 0\end{aligned}\right\} A = -22,\ B = -4,\ C = 85.$$

A kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 85 = 0$,
$(x-11)^2 + (y-2)^2 = 40$.

3368. Mivel a kör átmegy a két ponton, fennáll az, hogy

$$\left.\begin{aligned}1 + 4 + a - 2b &= 0\\ 4 + 1 - 2a + b &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Ebből az egyenletrendszerből: $a = 5$, $b = 5$.

A kör egyenlete: $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$.

Középpontjának koordinátái: $(-2{,}5; -2{,}5)$.

A kérdéses egyenes meredeksége $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$,

egyenlete: $y + 2{,}5 = \sqrt{3}(x + 2{,}5)$. Innen $y = \sqrt{3}x + 2{,}5(\sqrt{3} - 1)$.

A koordinátatengelyekkel való metszéspontjai:

$(0;\ 2{,}5(\sqrt{3}-1))$, ill. $\left(2{,}5\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ 0\right)$.

A levágott háromszög területe:

$$t=\frac{1}{2}\cdot\left|2{,}5(\sqrt{3}-1)\cdot 2{,}5\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|=\frac{6{,}25(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\approx 0{,}97.$$

3369. Az érintési pontba mutató sugár egyenesének egyenlete: $x-2y=1$.
Az érintési pont koordinátái az

$$\left.\begin{aligned}x-2y&=1\\2x+y&=3\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből $E(1{,}4;\ 0{,}2)$.
A kör sugarának négyzete O és E koordinátáiból:
$r^2=(4{,}4)^2+(2{,}2)^2=24{,}2$ és a kör egyenlete
$(x+3)^2+(y+2)^2=24{,}2$.

3370. $u=r=4$ (mivel a kör átmegy egy első negyedbeli ponton és érinti az ordinátatengelyt, a középpont első koordinátája pozitív). A középpont második koordinátájára a következő egyenletet kapjuk:

$(6-4)^2+(2\sqrt{3}-v)^2=16$.

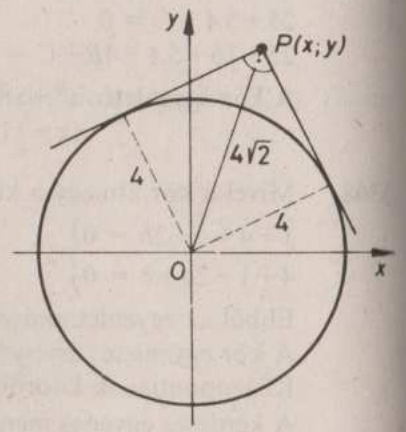
Innen $v_1=0$, $v_2=4\sqrt{3}$.

A feltételeknek eleget tevő két kör egyenlete

$(x-4)^2+y^2=16$ és
$(x-4)^2+(y-4\sqrt{3})^2=16$.

3371. Azokat a pontokat keressük, amelyekből a körhöz húzott érintők merőlegesek egymásra (**3371.** ábra). Ezek az adott körrel koncentrikus, $4\sqrt{2}$ sugarú körön vannak. Ennek a körnek az egyenlete:

$x^2+y^2=32$.



3371

3372. *a)* Húzzunk az adott egyenessel párhuzamost a kör középpontján át. Ez az egyenes kimetszi az adott egyenesre merőleges érintők érintési pontjait.

$\mathbf{n}(2;\ -3)$, $O(4;\ 3)\Rightarrow 2x-3y=-1$.

Az érintési pontokat a

$$\left.\begin{aligned}2x-3y&=-1\\(x-4)^2+(y-3)^2&=4\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják:

$$E_1\left(4+\frac{6}{13}\sqrt{13};\ 3+\frac{4}{13}\sqrt{13}\right)\text{ és}$$

$$E_2\left(4-\frac{6}{13}\sqrt{13};\ 3-\frac{4}{13}\sqrt{13}\right).$$

Az érintők egyenlete:

$$e_1\colon 3x+2y=3\left(4+\frac{6}{13}\sqrt{13}\right)+2\left(3+\frac{4}{13}\sqrt{13}\right);$$

$$e_2\colon 3x+2y=3\left(4-\frac{6}{13}\sqrt{13}\right)+2\left(3-\frac{4}{13}\sqrt{13}\right).$$

b) Az adott egyenessel párhuzamos érintők érintési pontjait az egyenesre merőleges átmérő egyenese metszi ki a körből. Ennek egyenlete: $3x+2y=18$. A körrel való metszéspontjai, azaz az érintési pontok koordinátái a

$$\left.\begin{aligned}3x+2y&=18\\(x-4)^2+(y-3)^2&=44\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből számíthatók:

$$E_3\left(4+\frac{4}{13}\sqrt{13};\ 3-\frac{6}{13}\sqrt{13}\right);$$

$$E_4\left(4-\frac{4}{13}\sqrt{13};\ 3+\frac{6}{13}\sqrt{13}\right).$$

Az érintők normálvektora: $\mathbf{n}(2;\ -3)$. Egyenletük:

$$e_3\colon 2x-3y=2\left(4+\frac{4}{13}\sqrt{13}\right)-3\left(3-\frac{6}{13}\sqrt{13}\right)\text{ és}$$

$$e_4\colon 2x-3y=2\left(4-\frac{4}{13}\sqrt{13}\right)-3\left(3+\frac{6}{13}\sqrt{13}\right).$$

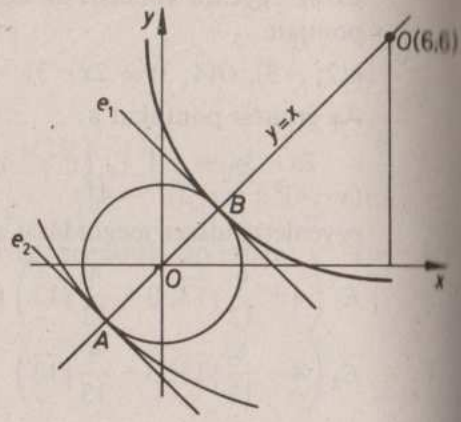
3373. A két kör középpontjának egymástól való távolsága a két sugár összege (**3373.** ábra):

$\sqrt{6^2+6^2} = r+2$, innen $r = 6\sqrt{2}-2$. Ennek a körnek az egyenlete: $(x-6)^2+(y-6)^2 = (6\sqrt{2}-2)^2$.

Ezt a kört az adott kör kívülről érinti.

A feladatnak megfelelő másik kört az adott kör belülről érinti, ennek sugara: $R = \sqrt{72}+2 = 6\sqrt{2}+2$, egyenlete:

$(x-6)^2+(y-6)^2 = (6\sqrt{2}+2)^2$.



3373

3374. A keresett kör sugarára és középpontjának koordinátáira a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} u-v &= 7 \\ (2-u)^2+(-1-v)^2 &= r^2 \\ (2-u)^2+(-7-v)^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

Innen: $u=3$, $v=-4$, $r^2=10$.

A körbe írt szabályos háromszög területének harmadrésze egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek két szára a kör egy-egy sugara, az általuk közbezárt szög 120°. A háromszög területe tehát:

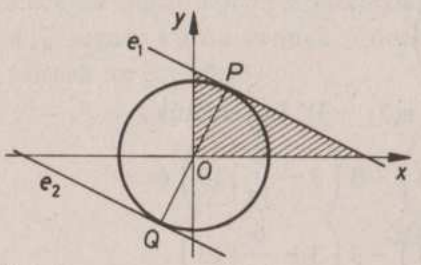
$$t = 3\cdot\frac{r^2 \sin 120^\circ}{2} = 15\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3375. Az érintési pontokat összekötő átmérő egyenese merőleges az $x+2y = c$ egyenletű egyenesre és átmegy az origón (**3375.** ábra), ezért normálvektora $\mathbf{n}(2;-1)$, egyenlete $2x-y = 0$. Az érintési pontok koordinátái az

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4 \\ 2x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből:

$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{4}\right)$ és $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}; \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$.



3375

Az $x+2y = c$ egyenletű érintőn rajta van az érintési pont, ezért egyenlete:

$x+2y = \frac{10\sqrt{5}}{5}$, azaz $x+2y = 2\sqrt{5}$, illetve

$x+2y = -2\sqrt{5}$. Ha $x=0$ $y = \pm\sqrt{5}$, ha $y=0$ $x = \pm 2\sqrt{5}$.

A két érintő a tengelyekből egyenlő területű háromszögeket vág le. Ezek területe:

$$t = \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5.$$

3376. A körön lévő két pont koordinátáit behelyettesítve a kör egyenletébe, kiszámítható a és b értéke:

$a = -7{,}5$; $b = -11{,}5$.

A kör egyenlete:

$x^2+y^2-7{,}5x-11{,}5y = 0$. Középpontja $C\left(\frac{15}{4}; \frac{23}{4}\right)$

Az A-val átellenes A' pont koordinátái kiszámíthatók onnan, hogy C felezi az AA' átmérőt, ezért $A'(9{,}5;\ 9{,}5)$. Az érintő normálvektora megegyezik AA' irányvektorával, $\mathbf{n}(11{,}5;\ 7{,}5)$, egyenlete:

$11{,}5x+7{,}5y = 11{,}5\cdot 9{,}5+7{,}5\cdot 9{,}5 = 180{,}5$.

3377. Legyen $P_0(x_0; y_0)$ egy, a feltételeknek megfelelő pont. Az érintőszakasz hosszát (ill. annak négyzetét) Pitagorasz tételével számíthatjuk a P_0 és a körközéppont távolságából és a kör sugarából:

$(e^2=)x_0^2+y_0^2-4 = (x_0-4)^2+(y_0-5)^2-9$.

Innen x_0 és y_0 között a következő összefüggés adódik: $4x_0+5y_0 = 18$, ez egy egyenes egyenlete.

3378. Az érintő normálvektora a kör középpontjának és az érintési pontnak a koordinátáiból: $\mathbf{n}(1;-1)$, egyenlete: $x-y = 3$.

Ha $x=0$ $y=-3$; ha $y=0$ $x=3$, tehát a levágott háromszög területe:

$$t = \frac{3\cdot 3}{2} = 4{,}5.$$

3379. A két kör egyenletéből álló egyenletrendszerből a közös pont első koordinátájára a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$13x^2+40x+64=0$. Ennek a diszkriminánsa: $D=1600-3328<0$, tehát a két körnek nincs közös pontja.

3380. Az adott kör és egyenes metszéspontjai az

$$\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2&=9\\ y&=\frac{4}{3}x+2\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből: (0; 2) és (2,16; 4,88).

A három ponton átmenő kör sugarára és középpontjának koordinátáira a következő három egyenletből álló egyenletrendszerünk van:

$$\left.\begin{aligned}u^2+v^2&=r^2\\ u^2+(2-v)^2&=r^2\\ (2{,}16-u)^2+(4{,}88-v)^2&=r^2\end{aligned}\right\}$$

Innen

$$u=4\frac{1}{3},\ v=1,\ r^2=\frac{178}{9}.$$

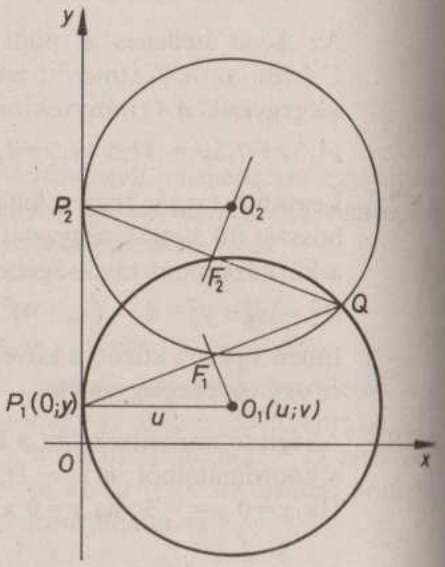
A keresett kör egyenlete:

$$\left(x-4\frac{1}{3}\right)^2+(y-1)^2=\frac{178}{9}.$$

3381. A PQ szakasz hosszának ismeretében kiszámíthatjuk a P pont második koordinátáját (**3381.** ábra):

$7^2+(1+\sqrt{7}-y)^2=56$. Ebből y-ra két értéket kapunk:

$y_1=1,\ y_2=1+2\sqrt{7}$.



3381

Az egyik keresett kör középpontja rajta van a PQ húr felezőmerőlegesén. Ennek egyenlete:

$F_1\left(\frac{7}{2};\ 1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $\mathbf{n}(7;\sqrt{7}) \Rightarrow 7x+\sqrt{7}y=28+\sqrt{7}$. Tehát (1) $7u+\sqrt{7}v=28+\sqrt{7}$. Mivel a kör érinti az y tengelyt és átmegy az első negyedben lévő Q ponton, $r=u$. A $P_1(0;\ 1)$ pont rajta van a körön, tehát:

(2) $u^2+(1-v)^2=u^2$.

(1)-ből és (2)-ből $u=4,\ v=1,\ r=4$, a kör egyenlete:

$(x-4)^2+(y-1)^2=16$.

Hasonlóan kaphatjuk a másik kör egyenletét:

P_2Q húr felezőmerőlegesének egyenlete: $7x-\sqrt{7}y=14-\sqrt{7}$.

A kör középpontjára és sugarára a következő egyenleteink vannak:

$$\left.\begin{aligned}&(3)\ 7u-\sqrt{7}v=14-\sqrt{7}\\ &(4)\ r=u\\ &(5)\ u^2+(1+2\sqrt{7}-v)^2=r^2\end{aligned}\right\}.$$

(5)-ben r helyébe u-t írva, v-re a következő értéket kapjuk: $v=1+2\sqrt{7}$.

Ezt (3)-ba helyettesítve $u=r=4$. A kör egyenlete:

$(x-4)^2+(y-1-2\sqrt{7})^2=16$.

3382. A kör középpontja $C(3;\ -1)$. Az érintési pontokat a PC szakasz Thalész-köre metszi ki a körből. Ennek középpontja: $F(2;\ -2)$, sugara $\frac{PC}{2}=\sqrt{2}$, egyenlete:

$(x-2)^2+(y+2)^2=2$.

Az érintési pontokat a következő egyenletrendszerből kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y+1)^2&=4\\ (x-2)^2+(y+2)^2&=2\end{aligned}\right\}\ E_1(1;\ -1),\ E_2(3;\ -3).$$

A két érintő egyenlete: $e_1: x=1$; $e_2: y=-3$.

Az $E_1(1;\ -1)$ és $E_2(3:\ -3)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete az $\mathbf{n}(2:2)$ alapján: $2x+2y=0$; távolsága a kör középpontjától: $\sqrt{2}$.

3383. A kör középpontja: $C(2{,}5;\ -1)$ (AB felezőpontja).

Sugara $=AC=r=\sqrt{11{,}25}$.

$CP=\sqrt{101{,}25}$.

Az érintőszakasz hossza a PEC derékszögű háromszögből: $\sqrt{90}$.

3384. A kör a koordinátarendszer negyedik negyedében van, ezért $u=-v=r$.

Az adott pont koordinátáit felhasználva:

$(5-u)^2+(-2+u)^2=u^2$. Innen u-ra két értéket kapunk:

$u_1=7+\sqrt{20},\ u_2=7-\sqrt{20}$.

A két kör egyenlete:

$(x-7-\sqrt{20})^2+(y+7+\sqrt{20})^2 = (7+\sqrt{20})^2$ és

$(x-7+\sqrt{20})^2+(y+7-\sqrt{20})^2 = (7-\sqrt{20})^2$.

3385. AB szakasz Thalész-körének az abszcisszatengellyel való metszéspontjait keressük. A kör középpontja: $F(3;1)$, sugarának négyzete: $AF^2 = 9+16 = 25$, egyenlete:

$(x-3)^2+(y-1)^2 = 25$.

Ha $y=0$ $\quad(x-3)^2 = 24$,

$x-3 = \pm 2\sqrt{6}$,

$x_1 = 3+2\sqrt{6}$, $x_2 = 3-2\sqrt{6}$.

A két pont tehát $(3+2\sqrt{6};0)$ és $(3-2\sqrt{6};0)$.

3386. A kérdést úgy is fogalmazhatjuk, hogy hol metszi a három ponton átmenő kör az ordinátatengely negatív felét.

A három pontból a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned}(6-u)^2+(2-v)^2 &= r^2\\(-1-u)^2+(3-v)^2 &= r^2\\(-2-u)^2+(2-v)^2 &= r^2\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u=2$, $v=-1$, $r^2=25$.

tehát a kör egyenlete:

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 25$.

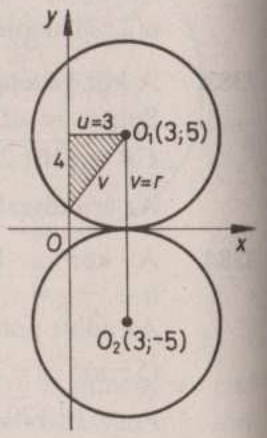
Ha $x=0$: $4+(y+1)^2 = 25$,

$y = -1\pm\sqrt{21}$. Az ordinátatengely negatív felére esik a $D(0;-1-\sqrt{21})$ pont.

3387. A kör érinti az abszcisszatengelyt, ezért $v=r$. A **3387.** ábráról leolvasható, hogy a bevonalkázott derékszögű háromszögből: $r^2 = v^2 = 9+16 = 25$. Tehát két körünk van (3; 5) középponttal, ill. (3; −5) középponttal. A két egyenlet:

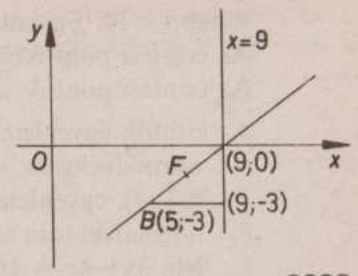
$(x-3)^2+(y-5)^2 = 25$ és

$(x-3)^2+(y+5)^2 = 25$.



3387

3388. Az átfogó átmegy a (5; −3) ponton és normálvektora a párhuzamos egyenes egyenletéből (**3388.** ábra): $\mathbf{n}(3;-4)$. Egyenlete: $3x-4y = 27$. Ha $x=9$, $y=0$, tehát az átfogó másik végpontja (9; 0). A derékszögű csúcs, $C(9;-3)$, mert ha az egyik befogó párhuzamos az y tengellyel, akkor a másik az x tengellyel párhuzamos, és átmegy az (5; −3) ponton. A háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja (7; −1,5), sugara az átfogó fele: $\frac{5}{2}$. Egyenlete: $(x-7)^2+(y+1,5)^2 = 6,25$.



3388

3389. Az a kérdés, hogy a két pont által meghatározott szakasz f felezőmerőlegese hol metszi a kört. A felezőpont: $F(-1;-6)$, f normálvektora: $\mathbf{n}(1;-1)$, egyenlete: $x-y = 5$.

A kör és egyenes metszéspontjai az

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+(y+1)^2 &= 9\\x-y &= 5\end{aligned}\right\}$$

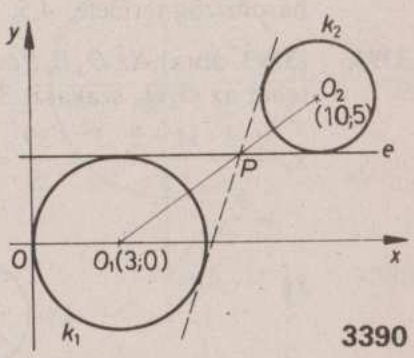
egyenletrendszerből számíthatók.

A megoldások: $P_1(1;-4)$, $P_2(4;-1)$.

3390. Az egyik közös belső érintő párhuzamos az x tengellyel (**3390.** ábra), egyenlete: $y=3$. A másik közös belső érintő ezt ott metszi, ahol a középpontokat összekötő egyenes, a centrális. Ennek egyenletét felírhatjuk a két középpont koordinátáiból:

$O_1(3;0)$, $O_2(10;5)$; $\mathbf{n}(5;-7)$,

$5x-7y = 15$.



3390

A két egyenes metszéspontja: $x=7,2$, $\quad y=3$.

3391. A kör középpontja $(2;v)$, sugara $r=v$. A körön rajta van a $(-4;2)$ pont, tehát

$(-4-u)^2+(2-v)^2 = v^2$;

$(-4-2)^2+(2-v)^2 = v^2$.

Innen $v=10$. Egyenlete: $(x-2)^2+(y-10)^2 = 100$.
Az érintési pontokban $x=8$; $y_1=18$, $y_2=2$.
Az érintési pontok tehát: $E_1(8; 18)$, $E_2(8; 2)$.

Az érintők egyenlete:

e_1: normálvektora a kör középpontjának és E_1-nek koordinátáiból $\mathbf{n}(3; 4)$, egyenlete $3x+4y = 96$;

e_2: normálvektora a középpont és E_2 koordinátáiból $\mathbf{n}(3; -4)$, egyenlete $3x-4y = 16$.

A két érintő metszéspontja $\left(\frac{56}{3}; 10\right)$.

3392. Mindkét körre $u=v=r$. A rajtuk lévő pont miatt $(1-u)^2+(2-u)^2 = u^2$, ahonnan $u_1=1$, $u_2=5$.
A két kör egyenlete:

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2 &= 1\\ (x-5)^2+(y-5)^2 &= 25\end{aligned}\right\}.$$

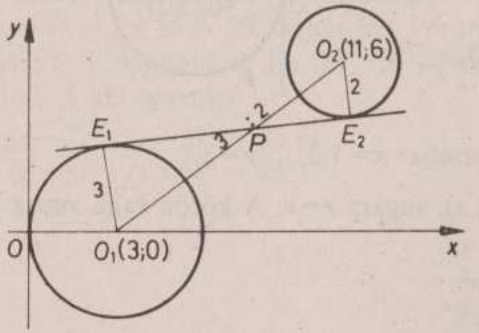
A metszéspontokon átmenő egyenes egyenlete a két kör egyenletének különbségéből adódik:

$$\left.\begin{aligned}x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 1\\ x^2-10x+25+y^2-10y+25 &= 25\end{aligned}\right\} \quad x+y = 3.$$

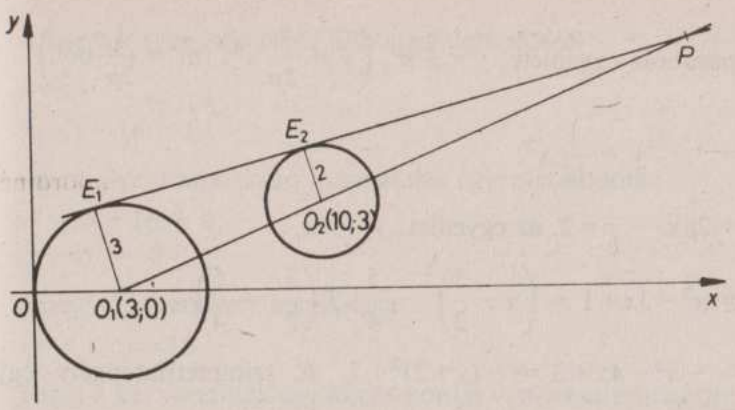
Az egyenes és a tengelyek metszéspontja: (0; 3) és (3; 0), a levágott háromszög területe: 4,5.

3393. (**3393.** ábra) Az $O_1E_1P\triangle \sim PE_2O_2\triangle$, oldalaik aránya 3 : 2. A P pont tehát az O_1O_2 szakaszt 3 : 2 arányban osztja:

$$x_P = \frac{3\cdot 11+2\cdot 3}{5} = \frac{39}{5} = 7{,}8;\ y_P = \frac{3\cdot 6}{5} = 3{,}6.$$



3393



3394

3394. (Lásd **3394.** ábra) A $PE_1O_1\triangle \sim PE_2O_2\triangle$, a hasonlóság aránya 3 : 2, vagyis O_2 az O_1P szakasz O_1-hez közelebb lévő harmadolópontja:

$$10 = \frac{2\cdot 3+x}{3}, \quad x=24;$$

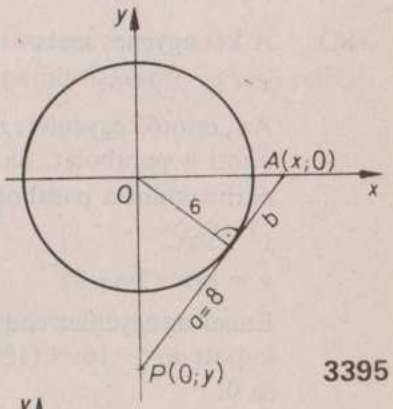
$$3 = \frac{2\cdot 0+y}{3}, \quad y=9.$$

3395. Az OEP derékszögű háromszögből (**3395.** ábra):

$|y| = 10$, $P(0; -10)$.

A magasságtételt alkalmazva a POA derékszögű háromszögre:

$b=4{,}5$, $x=7{,}5$.



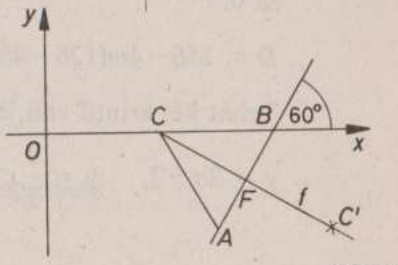
3395

3396. Az AB oldal irányvektora $(1; \sqrt{3})$, meredeksége $m = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$. Tehát a köréírt kör középpontja az x tengelyen van, ott, ahol AB felezőmerőlegese metszi, illetve ennek a pontnak az AB egyenesre való tükörképében (**3396.** ábra). A felezőmerőleges egyenlete:

$x+\sqrt{3}y = 2$.

A kör középpontjának koordinátái: (2; 0), illetve $(5; -\sqrt{3})$, sugara a BC szakasz = 2. Egyenlete:

$(x-2)^2+y^2 = 4$, illetve
$(x-5)^2+(y+\sqrt{3})^2 = 4$.



3396

3397. A parabola egyenlete: $y = \pm x^2$, $\left(y = \frac{1}{2p}x^2;\ |a| = \frac{1}{2p}\text{-ből}\right)$.

3398. $\frac{p}{2} = 3, \quad y = \frac{1}{12}x^2$.

3399. $y^2 = 2px, \quad p = 2$, az egyenlet: $y^2 = 4x$.

3400. $y = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$; $T\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

3401. $y = -x^2 - 4x + 3 = -(x+2)^2 + 7$. A szimmetriatengely egyenlete $x = -2$.

3402. *a)* $2x - 6 = x^2 - 2x - 2$ egyenlet megoldása adja a közös pontok első koordinátáját. Egy közös pont van: $(2; -2)$.

b) $x^2 - 2x - 2 = \frac{1}{2}x - 2$. Átalakítások után: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{2}$; $y_1 = -2$; $y_2 = -\frac{3}{4}$.

Két közös pont van.

3403. A két egyenes metszéspontja

$x = 3, \quad y = 8$.

Az „érintő" egyenlete így írható: $y - 8 = m(x-3)$. Ez az egyenes akkor érinti a parabolát, ha csak egy közös pontjuk van (az egyenes nem párhuzamos a parabola tengelyével).

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 16x \\ y &= mx - 3m + 8 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek az egyenletrendszernek csak egy megoldása van, ha ebből az y-ra kapott $my^2 - 16y + (128 - 48m) = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.

$D = 256 - 4m(128 - 48m) = 0$. Rendezés után $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{2}{3}$.

Tehát két érintő van, egyenletük:

$y = 2x + 2, \quad y = \frac{2}{3}x + 6$.

3404. A két vonal egyenletéből álló egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ 8x - y - 16 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Innen x-re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$x^2 - 8x + 16 = 0$,

$(x-4)^2 = 0$.

Az egyenletrendszer megoldása:

$x = 4, \quad y = 16$.

Tehát a két vonalnak egy közös pontja van, az egyenes érinti a parabolát.

3405. A $(-3; 2)$ ponton átmenő körök egyenlete így alakul:

$(-3-u)^2 + (2-v)^2 = r^2$, de $r = v$, tehát

$(-3-u)^2 + (2-v)^2 = v^2$.

Négyzetre emelés, összevonás után:

$v = \frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{13}{4}$, ez parabola egyenlete.

3406. $y = x^2$, itt $p = \frac{1}{2}$. Az érintő egyenlete a parabola adott $(x_1; y_1)$ pontjában: $xx_1 = \frac{1}{2}(y + y_1)$.

Ha $y = 0$ (x tengellyel való metszéspont)

$x = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{x_1} = \frac{1}{2}x_1$.

Ha $x = 0$ (y tengellyel való metszéspont)

$y = -y_1$.

A kapott két pont felezőpontja:

$x_F = \frac{1}{4}x_1$, $y_F = \frac{-y_1}{2} = \frac{-x_1^2}{2} = \frac{-16x_F^2}{2}$,

vagyis $x_1 = 4x_F$, $y_F = -8x_F^2$, parabola egyenlete.

3407. A parabola egyenlete ilyen alakú:

$y = ax^2 + bx + c$.

Behelyettesítve a három pont koordinátáit, a, b, c-re egy három egyenletből álló egyenletrendszert kapunk:

$$\left.\begin{aligned} -2 &= 16a+4b+c \\ -2 &= 49a+7b+c \\ 1 &= 64a+8b+c \end{aligned}\right\}$$

az egyenletrendszer megoldása:

$$a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{33}{4},\ c=19.$$

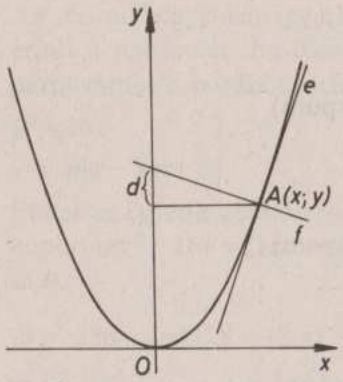
A parabola egyenlete: $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{33}{4}x+19$.

3408. A metsző egyenes egyenlete: $x=6$.
A parabolával való metszéspontjai: $A(6;\ 6)$, $B(6;\ -6)$.
$AP_0=4$, $BP_0=8$, $AP_0\cdot BP_0=32$.
Általánosan:
$y^2=ax$, $P_0(a;\ c)$, a metsző egyenes egyenlete: $x=a$.
$A(a;\ a)$, $B(a;\ -a)$.
$P_0A=a-c$, $P_0B=a+c$, $P_0A\cdot P_0B=a^2-c^2$.

3409. $x^2=2py$ egyenletű parabola érintője az $A(x_1;\ y_1)$ pontban: $(x_1\neq 0)$ $xx_1=p(y+y_1)$ (**3409.** ábra). Ennek meredeksége $\frac{x_1}{p}$, a rá merőleges egyenesé: $-\frac{p}{x_1}$. Ez átmegy az A ponton, tehát egyenlete: $y-y_1=$

$$=-\frac{p}{x_1}(x-x_1).$$

Az y tengellyel való metszéspontja $(0;\ y_1+p)$.
A vetület hossza: $d=y_1+p-y_1=p$.



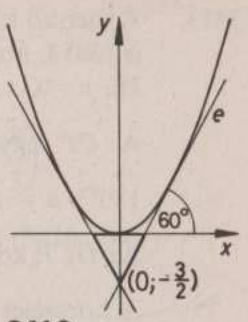
3410

3410. Az érintő 60°-os (ill. 120°-os) szöget zár be az x tengellyel (**3410.** ábra), tehát meredeksége $\sqrt{3}$ (ill. $-\sqrt{3}$). Elég az egyik érintőt felhasználni, hiszen az ábra szimmetrikus az y tengelyre.

Az érintő egyenlete: $y=\sqrt{3}x+b$, a paraboláé: $y=\frac{1}{2}x^2$, és mivel érintőről van szó, az

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{3}x+b \\ y &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása lehet, vagyis az



3410

$\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}x-b=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0 kell hogy legyen.

$D=3+2b=0$, innen $b=-\frac{3}{2}$.

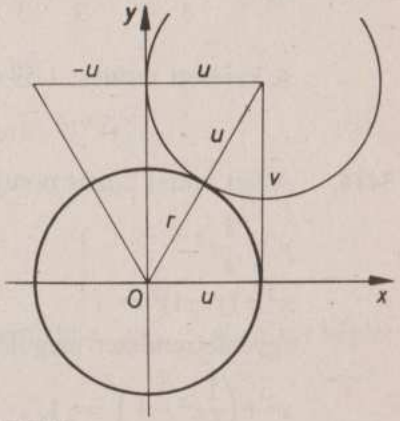
3411. A keresett körök középpontjai: $C(u;\ v)$; bármelyik középpontnak az origótól, azaz az adott kör középpontjától mért távolsága (**3411.** ábra):

$u+3=\sqrt{u^2+v^2}$, vagy
$3-u=\sqrt{u^2+v^2}$.

$$\left.\begin{aligned} (u+3)^2 &= u^2+v^2 \\ (-u+3)^2 &= u^2+v^2 \end{aligned}\right\}$$ és innen

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= 6u+9 \\ v^2 &= -6u+9 \end{aligned}\right\}$$

ezek parabola egyenletei.



3411

3412. Fejezzük ki a parabola tetszés szerinti A pontjának a $P(0;\ 5)$ ponttól mért távolságát:

$$PA^2=x^2+(5-y)^2=x^2+\left(5-\frac{1}{4}x^2\right)^2=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+25=$$

$$=\frac{1}{16}(x^4-24x^2+144)+16=\frac{1}{16}(x^2-12)^2+16.$$

PA^2 és ezzel együtt PA minimális, ha $x^2=12$. Ekkor:
$A_1(2\sqrt{3};\ 3)$, ill. $A_2(-2\sqrt{3};\ 3)$.

3413. A metsző kör középpontja rajta van az OP szakasz felezőmerőlegesén is (**3413.** ábra), egyenlete: $x+2y=5$.
Ha $y=0$, $x=5$, tehát a kör középpontja $C(5;0)$, sugara, $r=5$.

A CP egyenes meredeksége: $m=\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=\frac{4}{3}$,

$180°-\alpha=53{,}13°$.

Az OCP körcikk területe: $\frac{25\pi\cdot 53{,}13}{360}=3{,}69\pi\approx 11{,}59$.

A körszelet területe: $11{,}59-t_{OPC\triangle}=11{,}59-10=1{,}59$.

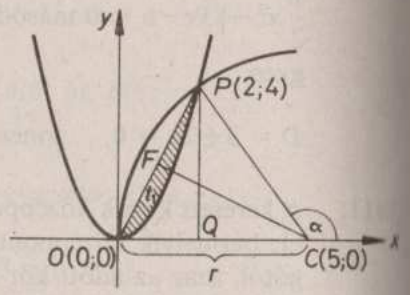
A parabola alatti terület $=$

$$=\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}.$$

A t_1-gyel jelölt terület:

$$t_{OQP\triangle}-\frac{8}{3}=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

A keresett terület: $1{,}59+\frac{4}{3}\approx 2{,}92$.



3413

3414. A két vonal közös pontjait az

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{4}x^2\\ x^2+(y-1)^2&=1\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják.

$$x^2+\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)^2=1,$$

$$x^2\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\right)=0,$$

mivel $\frac{4}{16}x^2+\frac{1}{2}\neq 0$ tehát $x=0$, csak egy közös pontjuk van, érintik egymást a $(0;0)$ pontban.

3415. A keresett parabola csúcspontja az $F(1;0)$ pont, fókusza $F'(-1;0)$. Félparamétere tehát 2. Egyenlete:

$y^2=-8(x-1)$.

A két parabola metszéspontjait az

$$\left.\begin{aligned} y^2&=-8(x-1)\\ y^2&=4x\end{aligned}\right\}$$

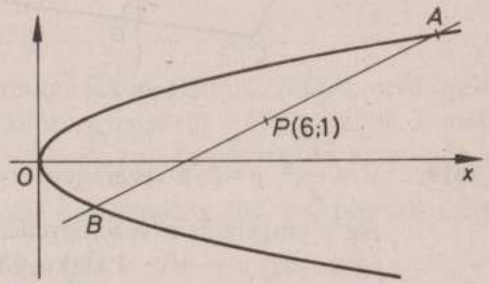
egyenletrendszerből kapjuk: $\left(\frac{2}{3};\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$ és $\left(\frac{2}{3};-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$.

3416. Legyen a húr két végpontja $A(x_1;y_1)$ és $B(x_2;y_2)$ (**3416.** ábra).

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=12\\ y_1+y_2&=2\end{aligned}\right\}$$

a felezőpont koordinátáira vonatkozó összefüggésből.
Az első egyenlet így is írható: $y_1^2+y_2^2=12$. Kaptunk tehát egy egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y_1^2+y_2^2&=12\\ y_1+y_2&=2\end{aligned}\right\}$$



3416

ahonnan $y_1=1+\sqrt{5}$, $y_2=1-\sqrt{5}$.
Az első koordináták: $x_1=6+2\sqrt{5}$, $x_2=6-2\sqrt{5}$.
A húr egyenlete két pontjából:

$\mathbf{n}(1;-2)$ $\quad P(6;1)\Rightarrow x-2y=4$.

3417. $y=x^2$, a paraméter, $p=\frac{1}{2}$.

A $P(2;4)$ pontban húzható érintő egyenlete az $xx_1=p(y+y_1)$ képlet alapján:

$$2x=\frac{1}{2}(y+4),$$

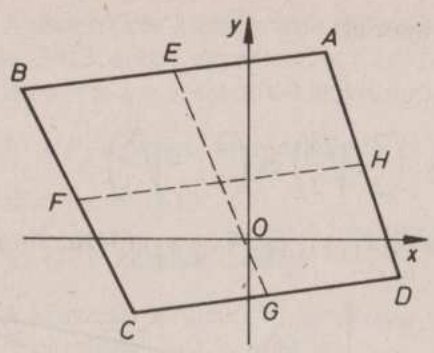
$$y=4x-4.$$

A keresett szög tg-e 4, a szög 75,96°.

3418. Az oldalfelezőpontok koordinátái (**3418.** ábra):
$E(-2;4{,}5)$, $F(-4{,}5;1)$, $G(0{,}5;-1{,}5)$, $H(3;2)$.

Az EG szakasz felezőpontjának koordinátái: $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Az FH szakasz felezőpontjának koordinátái: $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$.



Tehát a két szakasz felezi egymást.

3418

3419. $y = \frac{1}{4}x^2$, $p=2$, a vezéregyenes egyenlete: $y=-1$.

Az y tengely és a vezéregyenes metszéspontja: $P(0;-1)$. Az érintők egyenlete: $y = mx-1$ alakú. Mivel érintőkről van szó, az érintési pont rajta van a parabolán:

$y_1 = \frac{1}{4}x_1^2$, tehát

$\frac{1}{4}x_1^2 = mx_1 - 1.$

$x_1^2 - 4mx_1 + 4 = 0.$

Ha az egyenes érinti a parabolát, akkor ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa 0:

$16m^2 - 16 = 0, \quad m_1 = 1, m_2 = -1.$

Két érintőt kaptunk, amelyeknek a meredeksége 1 és -1, ezek tehát merőlegesek egymásra.

3420. A parabolának az a pontja van legközelebb az egyeneshez, amelyhez húzott érintő párhuzamos az egyenessel. Az érintő egyenlete

$y = \frac{2}{3}x + b.$

Ha ennek az egyenesnek csak egy közös pontja van a parabolával, akkor az

$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{2}{3}x + b \\ y &= (x-3)^2 - 2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből x-re adódó $x^2 - \frac{20}{3}x + (7-b) = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.

$D = \frac{400}{9} - 4(7-b) = 0$. Innen

$b = -\frac{37}{9}$.

Az érintő egyenlete: $y = \frac{2}{3}x - \frac{37}{9}$.

A két párhuzamos egyenes távolságának meghatározásához merőlegest állítunk az egyenesekre, pl. az adott egyenes $(0;-6)$ pontjában. Ennek egyenlete: $\mathbf{n}(3;2)$, $3x+2y = -12$. Ez az egyenes metszi az érintőt a $\left(-\frac{34}{39}; -\frac{61}{13}\right)$ pontban. Ennek a pontnak a $(0;-6)$ ponttól mért távolsága a keresett távolság: $d \approx 1{,}57$.

3421. Ha a $P(5;2)$ pont rajta van a parabolán, akkor a tengelyére – aminek egyenlete $x=3$ – szimmetrikus $P'(1;2)$ pont is rajta van. Így három adott pontból kell meghatározni az egyenletet ($y = ax^2 + bx + c$). Rendelkezésünkre áll három egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} 25a + 5b + c &= 2 \\ 9a + 3b + c &= -2 \\ a + b + c &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Innen $a=1$, $b=-6$, $c=7$.

A parabola egyenlete: $y = x^2 - 6x + 7$.

3422. Az érintő párhuzamos a húrral, amelynek két pontját ismerjük: $A(2;2)$ és $B(8;4)$. Irányvektora $\mathbf{v}(6;2)$, meredeksége $m = \frac{1}{3}$, egyenlete:

$y = \frac{1}{3}x + b$. Mivel ez az egyenes érintő, az

$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{3}x + b \\ y^2 &= 2x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása lehet, azaz

$y = \frac{y^2}{6} + b$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.

$y^2-6y+6b=0$,

$D=36-24b=0; \quad b=\frac{3}{2}$,

az érintő egyenlete:

$y=\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$.

3423. Azokat a pontokat keressük, amelyekben az AB szakasz felezőmerőlegese metszi a parabolát.

A felezőmerőleges egyenlete: $y=-x$. Ennek az egyenesnek a parabolával való metszéspontjai az

$$\left.\begin{aligned} y &= -x \\ y^2 &= 4x \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszerből adódnak: $P(0;0)$, $Q(4;-4)$.

3424. (**3424.** ábra) A kör és parabola közös pontjai az

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ x^2+(y-2)^2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből adódnak:

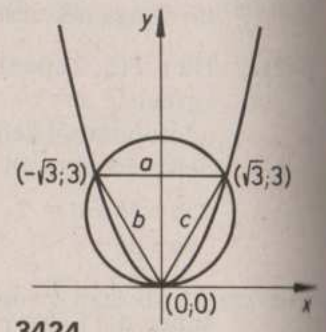
$y_1=0, \quad y_2=3;$

$x_1=0, \quad x_2=\pm\sqrt{3}.$

Tehát három közös pontjuk van. A háromszög oldalainak hossza:

$a=2\sqrt{3}; \quad b=c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$

A háromszög egyenlő oldalú. $k=6\sqrt{3}$.



3424

3425. A két kör metszéspontjain átmenő egyenes egyenletét a körök egyenleteinek különbségéből kaphatjuk:

$(x-14)^2+(y+2)^2-125-(x^2+y^2-25)=0,$

$$\left.\begin{aligned} 7x-y &= 25 \\ x^2 &= 2py \end{aligned}\right\}$$:

Ebből az egyenletrendszerből a következő másodfokú egyenletet kapjuk x-re:

$x^2-14px+50p=0.$

Mivel az egyenes érinti a parabolát ennek az egyenletnek a diszkriminánsa 0:

$D=196p^2-200p=0.$ Innen $p_1=0$, $p_2=\frac{50}{49}$, de p nem lehet 0,

tehát a parabola egyenlete:

$x^2=\frac{100}{49}y.$

3426. Ha $y=x$, akkor a kör egyenletéből a következő pontokat kapjuk: $R_1(2;2)$ és $R_2(-8;-8)$.

Tehát két parabola egyenletét kell meghatározni három-három pontból.

a) $P(3;1)$, $Q(6;2)$, $R(2;2)$.

A parabola egyenletében szereplő együtthatókra a következő egyenletrendszerünk van:

$$\left.\begin{aligned} 9a+3b+c &= -1 \\ 36a+6b+c &= 2 \\ 4a+2b+c &= 2 \end{aligned}\right\} \quad a=1,\ b=-8,\ c=14.$$

A parabola egyenlete: $y=x^2-8x+14$.

b) $P(3;-1)$, $Q(6;2)$, $R(-8;-8)$.

Az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 9a+3b+c &= -1 \\ 36a+6b+c &= 2 \\ 64a-8b+c &= -8 \end{aligned}\right\} \quad a=\frac{2}{77},\ b=\frac{59}{77},\ c=\frac{-272}{77}.$$

A parabola egyenlete: $77y=2x^2+59x-272$.

3427. Az (1) $y=x^2$

(2) $Ax+By+C=0$ egyenletekből álló egyenletrendszerből x-re, vagy y-ra nyerünk egy másodfokú egyenletet. Az érintés feltétele, hogy ennek a diszkriminánsa 0 legyen.

(2)-ből $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, ezt (1)-be helyettesítve:

$$x^2+\frac{A}{B}x+\frac{C}{B}=0,$$

$$D=\frac{A^2-4BC}{B^2}=0,\ B\neq 0,\ A^2-4BC=0$$

a feltétel.

3428. Legyen a vezéregyenes pontja $P(a; -2)$ (**3428.** ábra) az érintő egyenlete:

$y+2 = m(x-a)$

$y = \frac{1}{8}x^2$

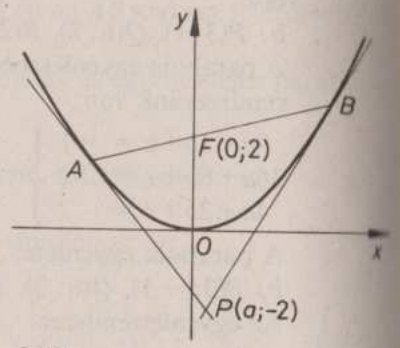
Innen a következő másodfokú egyenletet kapjuk x-re:

(*) $\frac{1}{8}x^2 - mx + (ma+2) = 0$. Ennek diszkriminánsa:

$D = m^2 - \frac{1}{2}(ma+2) = 0,$

ahonnan

$m = \frac{a \pm \sqrt{a^2+16}}{4}.$



3428

(*)-ból $x = \frac{m}{\frac{1}{4}} = 4m = a \pm \sqrt{a^2+16}$.

Tehát $A\left[a-\sqrt{a^2+16}; \frac{1}{8}(a-\sqrt{a^2+16})^2\right]$;

$B\left[a+\sqrt{a^2+16}; \frac{1}{8}(a+\sqrt{a^2+16})^2\right]$;

$F(0; 2)$.

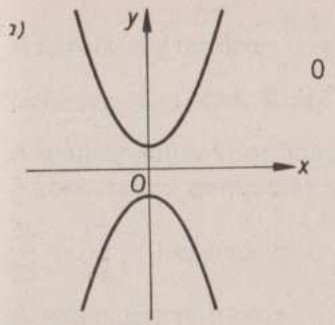
$m_{FB} = \frac{a^2+2a\sqrt{a^2+16}+a^2+16-16}{8(\sqrt{a^2+16}+a)} = \frac{a}{4};$

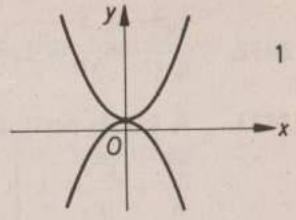
$m_{FA} = \frac{16-a^2+2a\sqrt{a^2+16}-a^2-16}{8(\sqrt{a^2+16}-a)} = \frac{a}{4}.$

Mivel FA egyenes meredeksége megegyezik FB meredekségével, és van egy közös pontjuk, F, ezért a három pont egy egyenesbe esik.

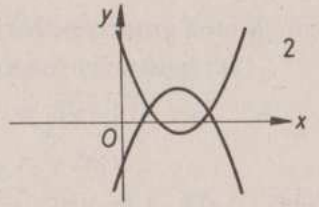
3429. A különböző eseteket a **3429.** ábra mutatja.

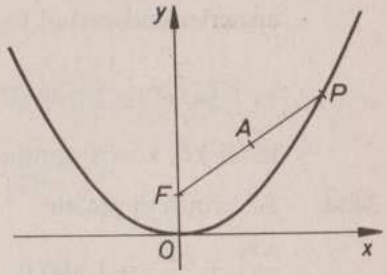
3430. (**3430.** ábra) A fókusz: $F(0; 1)$, $P\left(x; \frac{1}{4}x^2\right)$ a parabola tetszőleges pontja.





3429





3430

FP felezőpontja, $A\left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{x_a}; \underbrace{\frac{1+\frac{1}{4}x^2}{2}}_{y_a}\right)$.

Innen $x = 2x_a$;

$2y_a = 1 + \frac{1}{4}(2x_a)^2;$

$y_a = \frac{1}{2}x_a^2 + \frac{1}{2}$ parabola egyenlete.

3431. A keresett pontok a P középpontú, 6 egység sugarú körön vannak. Ennek egyenlete:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 36.$

a) $x=0$, $(y-1)^2 = 32$,

$y = 1 \pm 4\sqrt{2}.$

Az y tengelyen lévő két pont tehát: $(0; 1+4\sqrt{2})$ és $(0; 1-4\sqrt{2})$.

b) $y=0$, $(x-2)^2 = 35$,

$x = \pm\sqrt{35}+2.$

Az x tengelyen lévő két pont: $(2+\sqrt{35}; 0)$ és $(2-\sqrt{35}; 0)$.

3432. $\frac{x^2}{4{,}5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, azaz $\frac{x^2}{20{,}25}+\frac{y^2}{4}=1$.

3433. A közös pontok koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}&=1\\ y&=\frac{3\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kapjuk:

$$x_1=1,\ y_1=\frac{3\sqrt{3}}{2};\quad x_2=-1,\ y_2=-\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

tehát két közös pontjuk van.

3434. Az érintő egyenlete

$\frac{xx_1}{16}+\frac{yy_1}{9}=1$ alakú, ahol $(x_1; y_1)$

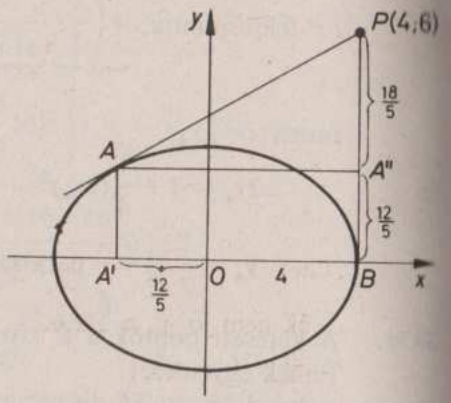
az érintési pont. Az érintőn rajta van a $P(4; 6)$ pont, tehát

$$\frac{x_1}{4}+\frac{2y_1}{3}=1.$$

Ehhez hozzávéve az ellipszis egyenletét, az

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}&=1\\ \frac{x_1}{4}+\frac{2y_1}{3}&=1\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből megkapjuk az érintési pontok koordinátáit:



3434

$$A\left(-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right),\qquad B(4;0).$$

A négyszög területe az $AA'BA''$ téglalap és az $AA''P$ háromszög területéből áll.

A téglalap területe: $6{,}4\cdot 2{,}4=15{,}36$.

A háromszög területe: $\frac{6{,}4\cdot 3{,}6}{2}=11{,}52$, tehát a négyszög területe 26,88 területegység (**3434.** ábra).

3435. A gyújtópontok koordinátái: $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$. Az ellipszis -3, ill. 3 abszcisszájú pontjainak ordinátája:

$\frac{9}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ egyenletből: $y=\pm 3{,}2$.

A vezérsugarak hossza:

$r_1=\sqrt{6^2+3{,}2^2}=6{,}8$ és $r_2=3{,}2$.

3436. A fókuszpontok koordinátái: $F_1(-\sqrt{7}; 0)$, $F_2(\sqrt{7}; 0)$. A $P(x; y)$ ponthoz tartozó vezértsugarak:

$r_1=\sqrt{(x+\sqrt{7})^2+y^2}$ és $r_2=\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}$.

a) $r_1=2r_2$.

$(x+\sqrt{7})^2+y^2=4[(x-\sqrt{7})^2+y^2]$.

Átalakítások után, és az ellipszis egyenletéből a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$3x^2+3y^2-10\sqrt{7}x+21=0$

$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$.

Ebből x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$21x^2-160\sqrt{7}x+768=0$.

Innen $x_1=\frac{32\sqrt{7}}{42}\approx 2$; $x_2=\frac{288\sqrt{7}}{42}>4$, és $-4\leqq x\leqq 4$, tehát ez az érték nem jó. $y_1\approx\pm 2{,}6$.

b) $2r_1=r_2$.

A számolás menete ugyanaz, mint az *a)* esetben. Az x-re kapott másodfokú egyenlet:

$21x^2+160\sqrt{7}x+768=0$.

Ennek is az a gyöke felel meg, amelynek abszolútértéke nem nagyobb 4-nél:

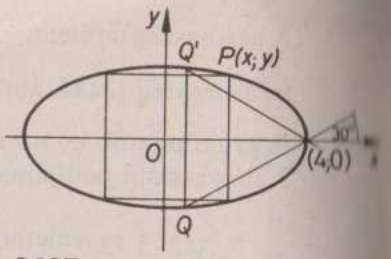
$x=-\frac{32\sqrt{7}}{42}\approx -2$;

$y=\pm 2{,}6$.

3437. *a)* A négyzet csúcspontjaiban $|x| = |y|$ (**3437.** ábra).

$$\frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1.$$

Innen $x = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$; $y = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



3437

b) Ha a háromszög e oldalegyenese átmegy a (4; 0) ponton és az x tengely pozitív irányával 30°-os szöget zár be. Egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-4).$$

Kimetszi az ellipszisből a háromszög Q csúcspontját:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$$

egyenletrendszer megoldása:

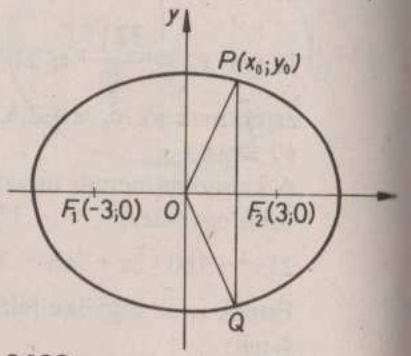
$$Q\left(\frac{4}{7}; -\frac{8\sqrt{3}}{7}\right) \text{ (a } -4<x<4 \text{ feltétel mellett).}$$

A szimmetria miatt háromszög harmadik csúcspontja: $Q'\left(\frac{4}{7}; \frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$.

Ha a háromszög egyik csúcsa a $(-4; 0)$, akkor y-ra vonatkozó tengelyes szimmetria miatt: $Q^*\left(-\frac{4}{7}; -\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$, illetve $Q^{*\prime}\left(-\frac{4}{7}; \frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$.

3438. A háromszög területe $x_0 \cdot y_0 = 9{,}6$, ahol $(x_0; y_0)$ annak a P pontnak a koordinátái, amelyben a szelő metszi az ellipszist (**3438.** ábra). Ez a pont rajta van az ellipszisen, tehát:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} &= 1 \\ x_0 y_0 &= 9{,}6 \end{aligned}\right\}.$$



3438

Ebből az egyenletrendszerből x^2-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$; $x_1^2 = 16$; $x_1 = \pm 4$;
$x_2^2 = 9$; $x_2 = \pm 3$; $y_1 = \pm 2{,}4$; $y_2 = \pm 3{,}2$.
A vezérsugarak $(x_1; y_1)$-ből számítva:
$r_1 = \sqrt{49 + 5{,}76} = 7{,}4$; $r_2 = \sqrt{1 + 5{,}76} = 2{,}6$.
$(x_2; y_2)$-ből számítva: $r_1 = 6{,}8$; $r_2 = 3{,}2$.

3439. Az ellipszis érintőjének egyenlete a $P\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban:

$$\frac{1 \cdot x}{a^2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}y}{b^2} = \underbrace{\frac{x}{4} + \frac{6y}{4\sqrt{3}}}_{\text{az adott egyenletből}} = 1$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{\frac{2b^2}{\sqrt{3}}} = \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = 1$$

$a^2 = 4$; $b^2 = 1$.

Az ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

3440. A fókuszpontok koordinátái: $F_1(-\sqrt{15}; 0)$; $F_2(\sqrt{15}; 0)$. Legyen a keresett pont $P(x; y)$; F_1P irányvektora $(x+\sqrt{15}; y)$; F_2P irányvektora $(x-\sqrt{15}; y)$.
Mivel $F_1P \perp F_2P$, meredekségük szorzata -1.

$$\frac{y}{x+\sqrt{15}} \cdot \frac{y}{x-\sqrt{15}} = -1.$$

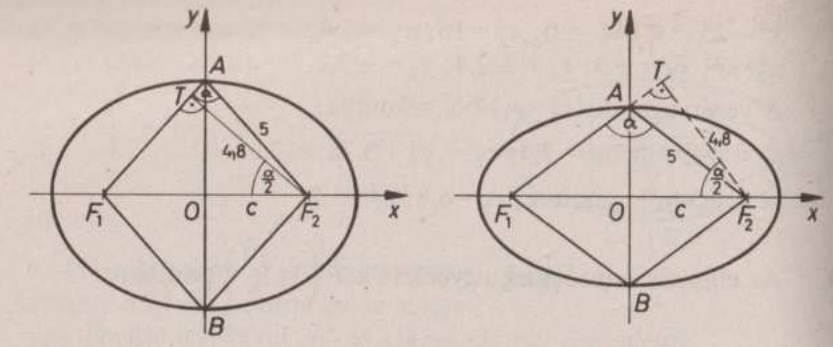
$y^2 = 15 - x^2$.

Tehát P koordinátáira:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{15-x^2}{10} = 1.$$

Innen $x^2 = \frac{25}{3}$,

$$x = \pm\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \text{és} \quad y = \pm\frac{2\sqrt{15}}{3}.$$



3441

3441. $\frac{\alpha}{2} = TF_2F_1\sphericalangle = OBF_2\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek (**3441.** ábra). $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4{,}8}{2c}$.

$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{c^2}{25} + \frac{4{,}8^2}{4c^2} = 1$. Innen c^2-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$c^4 - 25c^2 + 144 = 0$.

$c_1^2 = 16, \quad c_2^2 = 9,$

$c_1 = \pm 4, \quad c_2 - \pm 3,$

$b_1 = \pm 3, \quad b_2 = \pm 4.$

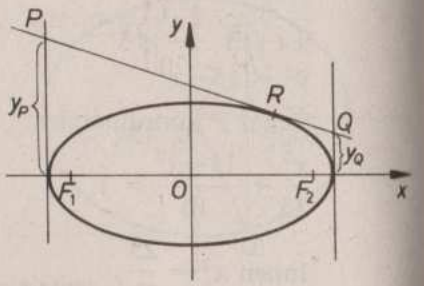
Az ellipszis egyenlete:

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, ill. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3442. Az $R(x_1; y_1)$ pontba húzott érintő egyenlete (**3242.** ábra):

$$\frac{x_1x}{4} + y_1y = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - \frac{x_1x}{4}}{y_1}.$$

P és Q pontok rajta vannak az érintőn.



3442

$$\left.\begin{array}{ll} x_P = -2 & y_P = \dfrac{1 + \frac{x_1}{2}}{y_1} \\ x_Q = 2 & y_Q = \dfrac{1 - \frac{x_1}{2}}{y_1} \end{array}\right\} y_P \cdot y_Q = \frac{1 - \frac{x_1^2}{4}}{y_1^2} = \frac{y_1^2}{y_1^2} = 1 = b^2.$$

3443. A fókuszok koordinátái: $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$.

A **3442.** ábráról és az előző feladatból:

$$P\left(-2; \frac{1 + \frac{x_1}{2}}{y_1}\right), \quad Q\left(2; \frac{1 - \frac{x_1}{2}}{y_1}\right).$$

PF_1 meredeksége: $\frac{-\frac{2+x_1}{2y_1}}{2-\sqrt{3}} = -\frac{2+x_1}{2y_1(2-\sqrt{3})}$;

F_1Q meredeksége: $\frac{\frac{2-x_1}{2y_1}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-x_1}{2y_1(2+\sqrt{3})}$.

A két meredekség szorzata: $-\frac{4-x_1^2}{4y_1^2(4-3)} = -\frac{4y_1^2}{4y_1^2} = -1$.

Ugyanígy látható be, hogy $PF_2 \perp F_2Q$.

3444. A fókuszok koordinátái: $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$.

$F_2(2\sqrt{5}; 0)$. $P(3; 2\sqrt{3})$ rajta van az ellipszisen, ezért:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{12}{b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = 20 \end{array}\right\} \text{és } a^2 - b^2 = c^2.$$

Ebből az egyenletrendszerből

$a^2 = 36, \quad b^2 = 16.$

Az ellipszis egyenlete: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3445. A gyújtópontok koordinátái: $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

A szelő egyenlete: $F(4; 0)$; $m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$;

$y = \sqrt{3}(x-4)$.

A szelő és az ellipszis metszéspontjainak koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{3}(x-4) \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kapjuk:

$$x_1 = \frac{65}{14}, \qquad x_2 = 2{,}5.$$

$$y_1 = \frac{9}{14}\sqrt{3}, \qquad y_2 = -1{,}5\sqrt{3}.$$

A húr hossza: $h = \frac{30}{7}$.

3446. Legyen egy ilyen kör középpontja $C(u; v)$ **3446.** ábra).

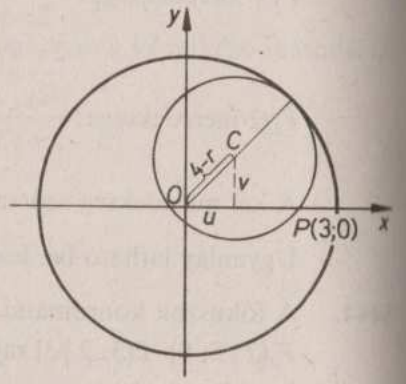
$$\left.\begin{aligned} (3-u)^2+v^2 &= r^2 \\ u^2+v^2 &= (4-r)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ mert a kör átmegy a $P(3;0)$ ponton. $\Rightarrow$ az érintés miatt.

A két egyenletből:

$$r = \frac{25-6u}{8}.$$

Ezt visszahelyettesítve:

$$(3-u)^2+v^2 = \left(\frac{25-6u}{8}\right)^2,$$ ez az egyenlet ad összefüggést a keresett körök középpontjának koordinátái között. Elvégezve a négyzetre emeléseket és rendezve:



3446

$$28(u-1{,}5)^2+64v^2 = 112,$$

$$\frac{(u-1{,}5)^2}{4}+\frac{v^2}{1{,}75} = 1$$ ellipszis egyenlete.

3447. A $P(2; 4)$ pontból húzható érintő egyenlete $y-4 = m(x-2)$ alakú. Az ellipszissel közös pontját az

$$\left.\begin{aligned} y-4 &= m(x-2) \\ 4x^2+9y^2 &= 36 \end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszerből kapjuk,

azzal a feltétellel, hogy az ebből adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. Pl. x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(4+9m^2)x^2+(72m-36m^2)x+36m^2-144m+108 = 0.$$

$$D = (72m-36m^2)^2-4(4+9m^2)(36m^2-144m+108) = 0,$$

ebből: $720m^2+2304m-1728 = 0$

$$5m^2+16m-12 = 0$$

$$m_1 = -1{,}6+0{,}4\sqrt{31}, \qquad m_2 = -1{,}6-0{,}4\sqrt{31}.$$

Az érintők egyenlete:

$$y-4 = -0{,}4(4\pm\sqrt{31})(x-2).$$

3448. A PQ szakasz felező merőlegesének és az ellipszisnek a közös pontjait keressük.

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y &= \frac{7}{2} \\ \frac{x^2}{4}+y^2 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Ebből az egyenletrendszerből:

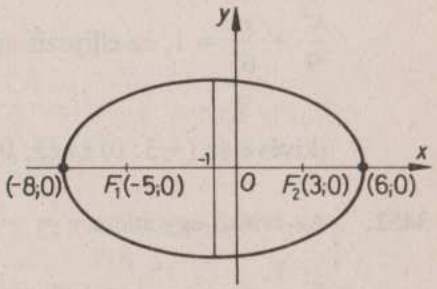
$$x_1 = \frac{21+\sqrt{111}}{20}, \qquad y_1 = \frac{-7+3\sqrt{111}}{40}$$

$$x_2 = \frac{21-\sqrt{111}}{20}, \qquad y_2 = \frac{-7-3\sqrt{111}}{40}.$$

3449. $a = 7, \qquad b^2 = 49-16 = 33$ (**3449.** ábra).

Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{(x+1)^2}{49}+\frac{y^2}{33} = 1.$$



3449

3450. $\left.\begin{aligned} x^2+4y^2 &= 16 \\ Ax+By+C &= 0 \end{aligned}\right\}$.

egyenletrendszerből x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk, bevezetve a következő jelölést: $-\frac{A}{B} = m, \; -\frac{C}{B} = d.$

$(1+4m^2)x^2+8mdx+(4d^2-16) = 0$. A diszkrimináns:

$D = 16 \cdot (16m^2 - d^2 + 4) = 0$, azaz:

$16\frac{A^2}{B^2} - \frac{C^2}{B^2} + 4 = 0,$

$16A^2 + 4B^2 - C^2 = 0$ a keresett feltétel.

3451. A **3451.** ábra alapján a C pontok ellipszisen vannak,

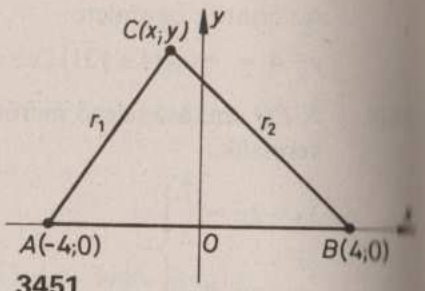
$r_1 + r_2 = 18$; így $2a = 18 \Rightarrow a = 9$.

Mivel A és B a két fókusz, $c = 4$;

$b = \sqrt{65}$.

Az ellipszis egyenlete:

(*) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{65} = 1.$



3451

A háromszög súlypontjának koordinátái

$x_s = \frac{x}{3}$; $y_s = \frac{y}{3}$,

$x = 3x_s$; $y = 3y_s$.

Ezeket az értékeket a *-ba helyettesítve megkapjuk az x_s és y_s közötti összefüggést:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{65}{9}} = 1$, ez ellipszis egyenlete

(kivéve az $(-3; 0)$ és $(3; 0)$ pontokat!).

3452. Az érintő egyenlete $y = -\frac{3}{4}x + k$ alakú.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} &= 1 \\ y &= -\frac{3}{4}x + k \end{aligned}\right\}.$$

egyenletrendszerből $\frac{17}{8}x^2 - 3kx + (2k^2 - 12)$ másodfokú egyenletet kapjuk x-re. Ennek diszkriminánsa:

$D = 9k^2 - \frac{17}{2}(2k^2 - 12) = 0.$

Innen

$k^2 = 12{,}75$, $k = \pm\sqrt{12{,}75}$,

és az érintők egyenlete:

$y = -\frac{3}{4}x \pm \sqrt{12{,}75}.$

3453. $$\left.\begin{aligned} 9x^2 + 25y^2 &= 225 \\ y - 6 &= m(x - 4) \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$(9 + 25m^2)x^2 + 100m(3 - 2m)x + 400m^2 - 1200m + 675 = 0.$

Ennek diszkriminánsa, egyszerűsítések után:

$D = 3m^2 + 16m - 9 = 0.$ Innen

$m = \frac{8 \pm \sqrt{37}}{3}$.

A két érintő egyenlete:

$y = \frac{-8 + \sqrt{91}}{3}x - \frac{50 - 4\sqrt{91}}{3}$ és

$y = \frac{-8 - \sqrt{91}}{3}x + \frac{50 + 4\sqrt{91}}{3}$.

Ha $y = 0$,

$x_1 = \frac{50 - 4\sqrt{91}}{8 - \sqrt{91}} = \frac{2\sqrt{91} + 4}{3}$,

$x_2 = \frac{50 + 4\sqrt{91}}{8 + \sqrt{91}} = \frac{-4 + 2\sqrt{91}}{3}$.

A kérdéses téglalap területe $|x_1| \cdot |x_2| = \frac{116}{3}$.

3454. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{6{,}25} = 1.$

3455. Legyen $C(x; y)$.

$|\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2}| = 5.$

a) $\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

Rendezve:

$$\frac{(x+2)^2}{6{,}25} - \frac{y^2}{2{,}75} = 1.$$

b) $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 5+\sqrt{(x+5)^2+y^2}$

Rendezve:

$$\frac{(x+2)^2}{6{,}25} - \frac{y^2}{2{,}75} = 1.$$ Kivéve a $(-4{,}5;\ 0)$, $(0{,}5;\ 0)$ pontokat.

3456. $P(1;\ 1)$. Legyen $C(x;\ y)$ egy megfelelő pont.

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 3|(x-3)|$.

$(x-1)^2+(y-1)^2 = 9(x-3)^2$.

Négyzetre emelés és rendezés után: $\frac{(x-3{,}25)^2}{0{,}5625} - \frac{(y-1)^2}{4{,}5} = 1$, ez hiperbola egyenlete.

3457. Az aszimptoták egyenletéből $\frac{b}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 4b$.

A hiperbola egyenlete:

$\frac{x^2}{16b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ az érintőé:

$3x-4y = 6$

Ebből az egyenletrendszerből x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$8x^2-36x+36+16b^2 = 0$.

Diszkriminánsa:

$D = 1296-32(36+16b^2) = 0$.

Innen $b = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ és $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

A hiperbola egyenlete:

$\frac{x^2}{4{,}5} - \frac{y^2}{0{,}28125} = 1$.

3458. $a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{5}$ (**3458.** ábra).

a) $|x| = |y|$ a négyzet csúcsainak koordinátáira. Tehát

$x^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, innen $|x| = |y| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) A háromszög g oldalegyenesének egyenlete:

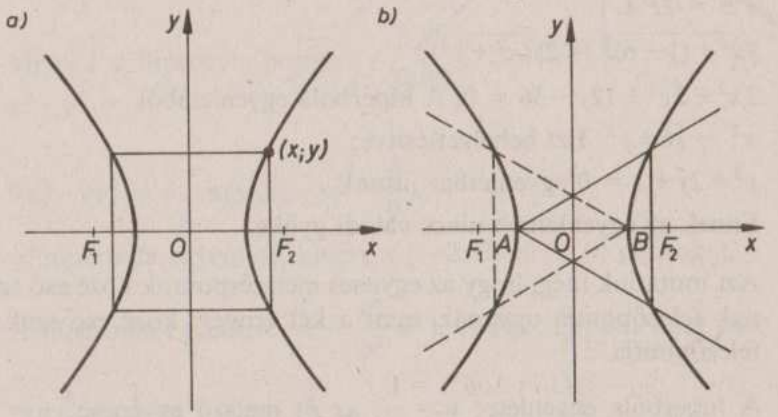
$m = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $A(-1;\ 0) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

Ezt beírva a hiperbola egyenletébe:

$x^2 - \frac{1}{12}(x+1)^2 = 1$. Innen

$x = \frac{13}{11}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{13}{11}+1\right) = \pm\frac{8\sqrt{3}}{11}$.

A szimmetria miatt a $B(1;\ 0)$ csúccsal $x = -\frac{13}{11}$, $y = \pm\frac{8\sqrt{3}}{11}$.



3458

3459. *a)* Az ellipszis állandói: $a=5$, $b=3$, $c=4$; $(a^2 = b^2+c^2)$.
A hiperbola állandói: $a=4$, $b=3$, $c=5$; $(c^2 = a^2+b^2)$.

A keresett egyenlet: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

b) A hiperbolánál $a=5$, $b=3$, $c=\sqrt{34}$.
Az ellipszisnél $a=\sqrt{34}$, $b=3$, $c=5$.

Az egyenlet: $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3460. *a)* Az érintő egyenlete $y = x+k$ alakú. Ezt beírva a hiperbola egyenletébe:

$x^2-2(x+k)^2 = 4$. Ebből x^2-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$x^2+4kx+4+2k^2 = 0$. Diszkriminánsa: $D = 8k^2-16 = 0$, ahonnan $k = \pm\sqrt{2}$ és az érintők egyenlete: $y = x\pm\sqrt{2}$.

b) Az érintő egyenlete $y = -x+k$ alakú. Hasonlóan, mint az *a)* pontban:

$x^2-2(-x+k)^2 = 4$,

$x^2-4kx+2k^2+4 = 0$.

$D = 8k^2-16 = 0$, $k = \pm\sqrt{2}$ és az érintők: $y = -x\pm\sqrt{2}$.

3461. A feladat szövege az 1989. évi 7. kiadásban is hibás. A feladat szövege *helyesen:* azt a pontot keressük a hiperbolán, amely a $B(0; 6)$ ponttól kétszer akkora távolságra van, mint az $A(0; 0)$ ponttól.

Ha $P(x; y)$ egy megfelelő pont, akkor

$PB = 2PA$.

$\sqrt{x^2+(y-6)^2} = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$;

$3x^2+3y^2+12y-36 = 0$. A hiperbola egyenletéből

$x^2 = 16+y^2$. Ezt behelyettesítve:

$y^2+2y+2 = 0$ egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek nincs valódi gyöke.

3462. Azt mutatjuk meg, hogy az egyenes metszéspontok közé eső szakaszának felezőpontja ugyanaz, mint a két tengely közé eső szakaszának felezőpontja.

A hiperbola egyenlete: $y = \frac{1}{x}$, az őt metsző egyenesé: $y = mx+b$.

A metszéspontokra:

$mx+b = \frac{1}{x}$, ahonnan

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4m}}{2m}.$$

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2m},$$

$$y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{2m}{-b+\sqrt{b^2+4m}}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{2m}{-b-\sqrt{b^2+4m}}.$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{b}{2}.$$

Ha az egyenes egyenletében $y_3 = 0$, $x_3 = -\frac{b}{m}$, ha $x_4 = 0$, $y_4 = b$.

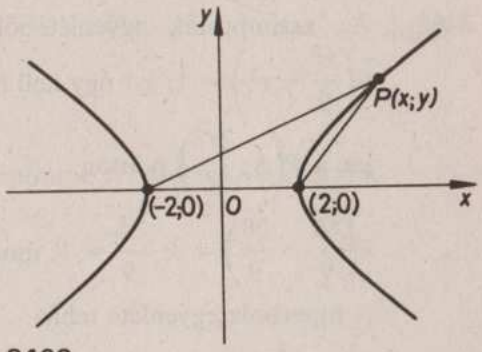
A felezőpont: $\frac{x_3+x_4}{2} = -\frac{b}{2m}$, $\frac{y_3+y_4}{2} = \frac{b}{2}$.

3463. Legyen a háromszög harmadik csúcsa $P(x; y)$ (**3463.** ábra).

A súlypont koordinátái:

$x_S = \frac{x}{3}$, innen $x = 3x_S$,

$y_S = \frac{y}{3}$, innen $y = 3y_S$.



3463

Mivel P a hiperbola pontja:

$x^2-y^2 = 4$,

$9x_S^2-9y_S^2 = 4$, vagy $x_S^2-y_S^2 = \frac{4}{9}$,

ez hiperbola egyenlete, kivéve a $(-2; 0)$ és $(2; 0)$ pontokat.

3464. A hiperbola egyenlete $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$. A $P(2; 1)$ pont rajta van, tehát:

(1) $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2} = 1$.

Másrészt az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ és $y = x-1$ egyenletrendszerből x-re (vagy y-ra) adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. x-re a következő egyenletet kapjuk:

$x^2(b^2-a^2)+2a^2x-a^2(1+b^2) = 0$.

(2) $D = 4a^4+4a^2(1+b^2)(b^2-a^2) = 0$.

(1)-ből és (2)-ből a következő egyenletet kapjuk b^2-re:

$b^4 - 2b^2 + 1 = 0$,

$b^2 = 1$.

(1)-ből $a^2 = \frac{4b^2}{1+b^2} = \frac{4}{2} = 2$.

Tehát a keresett egyenlet:

$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

3465. Az aszimptoták egyenletéből a hiperbola egyenlete így adódik: $k\left(\frac{x^2}{9} - y^2\right) = 1$. k-t úgy kell megválasztani, hogy a hiperbola átmenjen a $P\left(8; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$ ponton.

$k\left(\frac{64}{9} - \frac{28}{9}\right) = k \cdot \frac{36}{9} = 1$, innen $k = \frac{1}{4}$.

A hiperbola egyenlete tehát:

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$.

A $3x - 2y + b = 0$ egyenletű egyenes érinti a hiperbolát, ha a két vonal egyenletéből adódó egyenletrendszer megoldása során adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. Az érintő egyenletéből $y = \frac{3}{2}x + \frac{b}{2}$. Ezt behelyettesítve a hiperbola egyenletébe:

$x^2 - 9\left(\frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}bx + \frac{b^2}{4}\right) = 36$. Rendezés után:

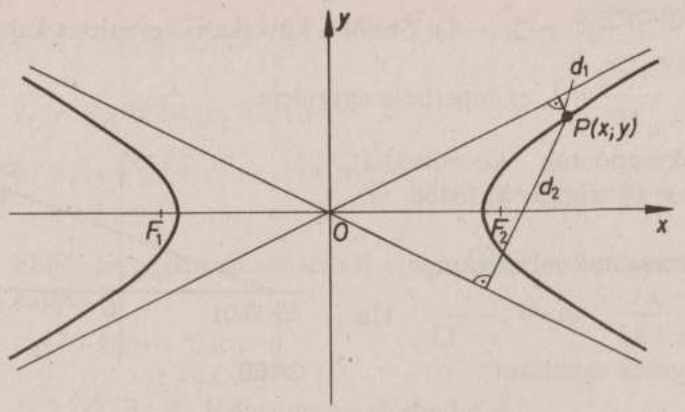
$77x^2 + 54bx + 9b^2 + 144 = 0$.

$D = 144b^2 - 44\,352 = 0$,

$b^2 = 308$, $\quad b = \pm 2\sqrt{77}$.

3466. Az aszimptoták egyenlete (**3466.** ábra):

$\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$, azaz $\frac{x}{2} + y = 0$ és $\frac{x}{2} - y = 0$.



3466

Legyen $P(x; y)$ a hiperbola egy pontja. Az aszimptotáktól való távolsága:

$$d_1 = \frac{y - \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, \quad \text{ill. } d_2 = \frac{y + \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

$$|d_1 \cdot d_2| = \left| \frac{y^2 - \frac{x^2}{4}}{\frac{5}{4}} \right| = \frac{4}{5}.$$

A távolság kiszámításához: Egy $(x_0; y_0)$ pont távolsága egy $y = mx + b$ egyenletű egyenestől

$$d = \left| \frac{y_0 - mx_0 - b}{\sqrt{m^2 + 1}} \right|.$$

3467. e: $x = 1$, $P(7; 0)$. Legyen egy megfelelő pont $Q(x; y)$.

a) $x - 1 = 2\sqrt{(x-7)^2 + y^2}$.

Négyzetre emelés és összevonás, rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$\frac{(x-9)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, ez ellipszis egyenlete.

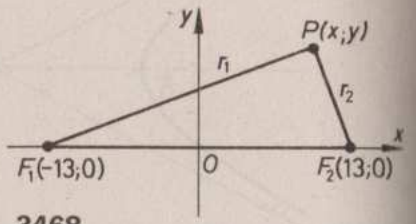
b) $\sqrt{(x-7)^2+y^2} = 2(x-1)$. Ebből a következő egyenletet kapjuk:

$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$, ez hiperbola egyenlete.

3468. A fókuszpontok koordinátái: $F_1(-13; 0)$, $F_2(13; 0)$ (**3468.** ábra).

A vezérsugarak meredeksége:

$m_1 = \frac{y}{x+13}$, $m_2 = \frac{y}{x-13}$. Ha merőlegesek egymásra:



3468

$\frac{y^2}{x^2-169} = -1$ a hiberbola egyenletéből:

$y^2 = 25\left(\frac{x^2}{144} - 1\right)$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai:

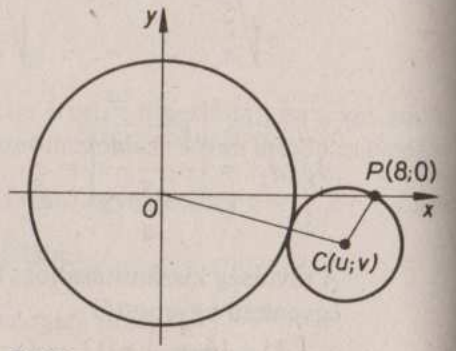
$x = \pm 12{,}86$, $y = \pm \frac{25}{13} \approx \pm 1{,}92$.

3469. A két érintkező kör középpontjának távolsága a sugarak összege (**3469.** ábra). Legyen egy keresett kör középpontja $C(u; v)$, akkor felírhatjuk, hogy $CO = CP + 5$.

$\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{(u-8)+v^2} + 5$.

Kétszeri négyzetre emelés és rendezés után a következő egyenlethez jutunk:

$156(u-4)^2 - 100v^2 = 975$. Ez hiperbola egyenlete.



3469

3470. A fókuszok koordinátái: $(-5; 0)$, $(5; 0)$.

Legyen $P(x; y)$ a hiperbola megfelelő pontja:

a) $\left.\begin{aligned}\sqrt{(x-5)^2+y^2} &= 2\sqrt{(x+5)^2+y^2}\\ 9x^2-16y^2 &= 144\end{aligned}\right\}$.

Négyzetre emelés és összevonás után:

$75x^2 + 800x + 768 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

$x_1 = -9{,}6$, $x_2 = -\frac{16}{15}$;

$y_1 = \pm\sqrt{42{,}84}$, y_2^2 negatív.

b) $\left.\begin{aligned}2\sqrt{(x-5)^2+y^2} &= \sqrt{(x+5)^2+y^2}\\ 9x^2-16y^2 &= 144\end{aligned}\right\}$ és a hiperbola egyenlete.

Ebből az egyenletrendszerből x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$75x^2 - 800x + 768 = 0$,

$x_1 = 9{,}6$; $x_2 = \frac{16}{15}$.

$y_1 = \pm\sqrt{42{,}84}$, y_2^2 negatív.

3471. $\left.\begin{aligned}\frac{25}{a^2} - \frac{27}{b^2} &= 1\\ a^2+b^2 &= 25\end{aligned}\right\}$

Ebből az egyenletrendszerből a^2-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$a^4 - 77a^2 + 625 = 0$,

$a_1^2 = 9{,}22$, $a_2^2 = 67{,}78 > 25$.

$b_1^2 = 15{,}78$, b_2^2 negatív.

3472. A hiperbola egyenlete: $25x^2 - 16y^2 = 400$

az egyenes egyenlete: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. } Közös pontjukra:

$x^2\left(25 - 16\frac{A^2}{B^2}\right) - 32\frac{AC}{B^2}x - \left(16\frac{C^2}{B^2} + 400\right) = 0$.

Az egyenlet diszkriminánsa az érintés miatt 0.

$D = 1024\frac{A^2C^2}{B^4} + \left(100 - 64\frac{A^2}{B^2}\right)\left(16\frac{C^2}{B^2} + 400\right) = 0$.

A műveletek elvégzése után:

$\frac{C^2}{B^2} - 16\frac{A^2}{B^2} + 25 = 0$ vagy $\frac{16A^2 - C^2}{25B^2} = 1$ a feltétel.

3473. $F_1(-10; 0)$, $P(0; 8)$ az egyenes két pontja, normálvektora: $\mathbf{n}(4; -5)$, egyenlete: $4x-5y = -40$.
A hiperbolával való metszéspontjaira a

$$\left.\begin{aligned} 4x-5y &= -40 \\ 64x^2-36y^2 &= 2304 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből (például x-re) a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$40{,}96x^2-460{,}8x-4608 = 0.$$

Innen

$$x_1 = 17{,}63, \quad x_2 = -6{,}38;$$
$$y_1 = 22{,}1, \quad y_2 = 2{,}9.$$

A két pont közti távolság: $d = 30{,}74$.
A távolság ugyanakkora, ha az egyenes a képzetes tengely másik végpontján, vagy a másik fókuszponton megy át.

3474. A hiperbola egyenlete: $9x^2-25y^2 = 225$. Az egyenesé: $y = \frac{3}{4}x - \frac{c}{4}$.
A két egyenletből álló egyenletrendszerből kapjuk: $81x^2-150cx+25c^2+3600 = 0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsát kell megvizsgálni:

$$D = 22\,500c^2-324(25c^2+3600) = 22\,500c^2-8100c^2-1\,166\,400 =$$
$$= 14\,400c^2-1\,16\,400 = 0.$$

$$c^2 = \frac{11\,664}{144}, \quad c_{12} = \pm 9.$$

b) Ha $-9 < c < 9$, akkor az egyenes elkerüli a hiperbolát.

XVIII. FEJEZET

Számtani és mértani sorozatok

3475. $a_8-a_{10} = a_1-a_3$, tehát $a_1 = 60$.

3476. $S_5 = 5 \cdot a_3 = 50$.

3477. Mindegyik tag egyenlő a sorszámával, $S_{243} = 29\,646$.

3478. (a_n), (d_n), (e_n), (f_n).

3479. $S_8 = \frac{35+63}{2} \cdot 8 = 392$.

3480. $a_5+5d = a_{10}$; $a_6+5d = a_{11}$; $a_7+5d = a_{12}$; ezért $15d = 15$;
$a_5+a_6+a_7 = 3a_1+15d$, tehát $a_1 = \frac{72-15}{3} = 19$.
Más módon: $a_5+a_6+a_7 = 3a_6$; $a_{10}+a_{11}+a_{12} = 3a_{11}$, tehát $a_6 = 24$, $a_{11} = 29$; $a_6 = \frac{a_1+a_{11}}{2}$, tehát $a_1 = 2a_6-a_{11} = 19$.

3481. $S_6 = 60$, $S_3 = 15$, $a_4+a_5+a_6 = 45$; $15+9d = 45$, $d = \frac{10}{3}$, $a_1 = \frac{5}{3}$.

3482. $(a_n) = (200+300n)$; $S_k = 350k+150k^2$. $S_k > 10^4$, ha $k \geqq 8$.

3483. 2430. *Megjegyzés:* **Z**-ben az összeg 0.

3484. $11-10 = 13-12 = \ldots = 99-98 = 1$, ezért $B-A = 45$. *Megjegyzés:* **Z**-ben $A = B$.

3485. $a_1 = 18$, $d = 4$, $S_n \geqq 200$. Ezért $a_n = 14+4n$; $S_n = 16n+2n^2 \geqq 200$, ha $n \geqq 7$. Tehát a 7. napon készül el a sál.

3486. $a_1+5d = d$, $d = -25$, $a_2 = 75$.

3487. $S_{15} = 15a_8$, ezért $a_8 = 0$. Lehet, hogy a sorozat állandó, ekkor nincs pozitív tagja, ha azonban szigorúan monoton fogyó, akkor $a_1, a_2, \ldots, a_7$ pozitív.

3488. $a_3 = \frac{65}{5}$, $a_8 = \frac{215}{5}$; $5d = a_8 - a_3$. Tehát $d = 6$, $a_1 = 1$.

3489. $S_{30} = S_{29} + a_{30} = 29 \cdot a_{15} + (a_{15} + 15d) = 30 \cdot 50 + 30 = 1530$.

3490. Legyen a középső szám k, ekkor $S_{17} = 17k$. 16 szám esetében nem igaz ez az állítás, például

$$1 + 2 + \ldots + 16 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8,$$

nem osztható 16-tal.

3491. $k + (k+2) + \ldots + (k + 2 \cdot 99) = \frac{2k + 2 \cdot 99}{2} \cdot 100 = (k+99) \cdot 100 = 100^3$, ha $k = 100^2 - 99 = 9901$.

3492. Nem lehet az összeg 1977, mert az adott összeg páros (2926) és minden előjel-változtatás páros számmal csökkenti az összeget. Ha ugyanis $+n$ helyett $(-n)$-et írunk, az összeg $(2n)$-nel csökken.

3493. Nem változtatható az összeg a kívánt módon, mert $1 + 2 + \ldots + 30 = 31 \cdot 15$, ez páratlan szám (l. **3492.**).

3494. A második kerékpáros indulásakor 81 km utat kell megtenni. Egy számtani sorozatban $S_n = 81$, $a_1 = 26$ (a közös mozgás első órájában megtett 16 km, ill. 10 km összege), $d = 1$ (mert az összeg 3-mal nő, miközben 2-vel csökken). Az összegképletből adódik, hogy $n = 3$, vagyis az első 5 órát, a második 3 órát kerékpározott; megtett útjuk 80 km, illetve 39 km.

3495. $101 + 103 + \ldots + [100 + (n-1) \cdot 2] = 100n + n^2$, tehát az utolsó két jegy megegyezik n^2 utolsó két jegyével.

3496. $11 + 13 + \ldots + (2n+1) = \frac{11 + (2n+1)}{2}(n-4) = (n+6)(n-4)$. A 19 primszám; ez a szorzat akkor a legkisebb 19-cel osztható pozitív szám, ha $n + 6 = 19$. Vagyis $n = 13$.

3497. Tegyük fel, hogy az a pozitív egész szám és

$$a + (a+1) + \ldots + (a+k) = 256.$$

Ekkor $256 = (k+1)a + \frac{1+k}{2}k = (k+1)\left(a + \frac{k}{2}\right)$.

Ha a k páros, akkor a $k+1$ páratlan és 1-nél nagyobb, az $a + \frac{k}{2}$ egész szám. Ha a k páratlan, akkor

$$(k+1)\left(a + \frac{k}{2}\right) = \frac{k+1}{2}(2a+k)$$

egész szám, de $2a + k$ páratlan, 1-nél nagyobb. – Mindkét eset lehetetlen, mert $256 = 2^8$, ennek nincs 1-nél nagyobb páratlan osztója.

3498. Az összeg 1320.

3499. Minden ötödik szám megfelel, 200 ilyen szám van 1004-től 1999-ig.

3500. Az összegképlettel megkapjuk a 24 950 eredményt.

3501. Minden ötödik szám ilyen. A legkisebb a 103, a legnagyobb a 498, számuk 80. Az összeg 24 040.

3502. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$, az $n^2 + n - a = 0$ egyenletet az $a = 10\,000$ és az $a = 10\,200$ esetben megoldva az adódik, hogy 100 tagot kell összeadnunk.

3503. Fogyó számtani sorozat nem lehet, mert az első tagnál kisebb négyzetszám csak véges számú van. – Növekedő sem lehet, mert a szomszédos négyzetszámok különbségsorozata a $(2n+1)$ sorozat, és bármely d esetében létezik nála nagyobb páratlan szám, vagyis néhány négyzetszám után már a szomszédos négyzetszámok különbsége is nagyobb a vizsgált d-nél.

3504. Átfogalmazva: ha egy számtani sorozat különböző természetes számokból áll, akkor van két olyan tagja, amelyek nem relatív primek. Ez igaz, ugyanis a feltétel szerint a sorozat szigorúan monoton növekedő, ezért $a_3 > 1$, és ekkor az a_3 és az $a_3 + a_3 d$ tagoknak közös osztója az a_3, ami 1-nél nagyobb pozitív egész.

3505. Ha lenne két racionális tag, például $a_n = a_1 + (n-1)d$ és $a_m = a_1 + (m-1)d$, akkor d is racionális lenne, mert $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ két racionális szám hányadosa. Ekkor azonban mindegyik tag racionális lenne.

3506. Ha a háromszög oldalhosszúságai $a<b<c$, akkor az $a^2+b^2=c^2$ és a $b=\frac{a+c}{2}$ egyenletekből azt kapjuk, hogy $\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$, vagyis $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\alpha=36°52'$; $\beta=53°8'$.

3507. Az x racionális szám, mert a sorozatnak van két racionális tagja (l. **3505.**). Minden, az $]1;2[$ intervallumba eső racionális számhoz van ilyen számtani sorozat. Ha $x=1+\frac{p}{q}$ (p és q egész, $0<p<q$), akkor például az $\frac{1}{q}$ lehet a sorozat differenciája.

3508. A szabályos háromszög megfelel a feltételeknek, más háromszög azonban nem. Bizonyítás: ha $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ és $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, akkor $\beta=60°$; $\alpha=60°-x$; $\gamma=60°+x$.
Az oldalakra igaz, hogy

$$b^2=\frac{a^2+c^2}{2} \quad \text{és} \quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60°.$$

Ebből adódik, hogy $a=c=b$.

3509. Ha nem lenne 15 egyenlő szám, akkor a 60 szám között legalább 5 különböző szám lenne: $a<b<c<d<e$. Ha a, b, c, d egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a, b, c, e biztosan nem lehetnek ilyen tulajdonságúak, mert $e-c>d-c=c-b$.

3510. Kitevőben adódik számtani sorozat. $n=55$.

3511. $N=10^1\cdot 10^2\ldots 10^5=10^{1+2+\ldots+50}=10^{1275}$, tehát az N szám 1276-jegyű.

3512. $a_1=13(\sqrt{2}+1)$, $a_{27}=13(3\sqrt{2}+1)$, $S_{27}=351(2\sqrt{2}+1)$.

3513. $N=3\cdot 3^2\ldots 3^{50}=3^{1275}$. Logaritmussal kiszámítható, hogy az N szám 609 jegyű.

3514. Legyen $a^2\leqq b^2\leqq c^2$ és $b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$. Ekkor $2b^2=a^2+c^2$.

Egyenletünkről leolvasható, hogy
a) 3-mal osztva a^2, b^2 és c^2 ugyanazt a maradékot adja. (Egy négyzetszám 0 vagy 1 maradékot adhat 3-mal osztva, ezért $2b^2$ maradéka 0 vagy 2. Ez két 0, illetve két 1 maradék összegeként jöhet létre.) – Ezért a differencia, b^2-a^2, osztható 3-mal.
b) $2b^2$ páros, ezért a^2+c^2 is páros, vagyis a^2 és c^2 azonos paritású. Ha mindkettő páratlan, akkor b^2 is páratlan, s ekkor $d=b^2-a^2$ páros. Ha a^2 és c^2 páros, akkor összegük osztható 4-gyel, tehát b^2 is páros. Ekkor szintén igaz, hogy $d=b^2-a^2$ páros.
d tehát 2-vel is és 3-mal is osztható, ebből következik, hogy 6-tal is osztható. – A feladatnak megfelelő legegyszerűbb számhármas: 1; 25; 49.

3515. $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{2}{31}$, ebből $n=\frac{31m}{2m-31}$.

$$2n=\frac{31\cdot 2m}{2m-31}=\frac{31(2m-31)+31^2}{2m-31}=31+\frac{31^2}{2m-31}.$$

m és n természetes számok, ezért kell, hogy $2m-31$ pozitív osztója legyen a 31^2-nek, vagyis 1-gyel, 31-gyel vagy 31^2-nel legyen egyenlő. Ennek megfelelően $m_1=16$, $m_2=31$, $m_3=496$, s a hozzájuk tartozó n értékek: $n_1=496$, $n_2=31$, $n_3=16$.

3516. A középső tag az összeg tizenegyedrészével egyenlő, ez nem egész szám, tehát nem lehet.

3517. *a)* Ha p_1 is és d is páratlan, akkor p_2 már nem primszám, ugyanis a 2-nél nagyobb és páros, tehát ekkor $n=1$.
b) Ha $p_1=2$ és $d=2$, akkor mindegyik tag páros, tehát p_1 az egyetlen primszám a sorozatban. Tehát $n=1$.
c) Ha $p_1=2$ és a d páratlan, akkor p_2 lehet primszám, de $p_3=2+2d=2(1+d)$ már összetett szám. Ekkor tehát az n legfeljebb 2. Például a $d=3$ esetben $p_2=5$.
d) Ha a p_1 páratlan és $d=2$, akkor az n legfeljebb 3 lehet. Ez egyetlen esetben adódik, amikor $p_1=3$. A 3; 5; 7 számokon kívül nincs három egymást követő páratlan primszám, mert ha $k>1$, akkor a $2k+1$, $2k+3$, $2k+5$ számok egyike osztható 3-mal, tehát nem primszám.

3518. A sokszög szögeinek az összege $S_n=(n-2)180°$, ez kifejezhető az első taggal és a differenciával is. Így az $n^2-17n+72=0$ egyenlethez jutunk. Ebből $n_1=8$, $n_2=9$, de ez utóbbi nem felel meg a feladatnak, mert $a_9=100°+8\cdot 10°=180°$ nem lehet sokszög szöge. A keresett sokszög tehát 8 oldalú.

3519. A feltételekből adódik, hogy az egyik szög 60°-os, a másik kettő összege 120°. Eszerint 60 ilyen háromszög van, szögeik: 1°, 60°, 119°; 2°, 60°, 118°; ...; 60°, 60°, 60°.

3520. Legyenek az oldalak $a-2$, a, $a+2$. Ekkor $a^2+(a-2)^2=(a+2)^2$, amiből $a=8$, $a+2=10$, tehát $\sin\alpha=\cos\beta=0{,}8$. A szögek nagysága: 53°8′; 36°52°; 90°. – Lásd még a **3506.** feladatot.

3521. Ha $S_n=2n^2-3n$, akkor $S_{n-1}=2(n-1)^2-3(n-1)$ és $a_n=S_n-S_{n-1}=4n-5$. Ez az n-nek elsőfokú kifejezése, tehát számtani sorozatról van szó: $a_1=-1$, $d=4$.

3522. Az $f\colon x\mapsto kx+l$ függvényt keressük.

$f(a_n)=k(a_0+nd_1)+l=b_0+nd_2=b_n$.

A két középső kifejezés egyenlőségéből

$kd_1n+(ka_0+l)=d_2n+b_0$ (minden n-re),

ez csak úgy lehet, ha $kd_1=d_2$ és $ka_0+l=b_0$. Ebből

$$k=\frac{d_2}{d_1}\text{ és }l=\frac{d_1b_0-d_2a_0}{d_1},\quad\text{tehát}\quad f(x)=\frac{d_2}{d_1}x+\frac{d_1b_0-d_2a_0}{d_1}.$$

3523. $$\frac{S_n}{n^2}=\frac{2a_1+(n-1)d}{2n}=\frac{a_1}{n}+\frac{d}{2}-\frac{d}{2n}.$$

$$\lim\left(\frac{S_n}{n^2}\right)=\frac{d}{2}=5,$$

tehát $d=10$.

3524. $d=\frac{1}{12}(a_{16}-a_4)=\frac{5}{3}$; $(8-a_4):\frac{5}{3}=\frac{12}{5}$ nem egész szám, tehát ennek a sorozatnak a 8 nem tagja.

3525. $a_{22}=a_1+21d$, ebből $d=\frac{4}{7}$;

$6=2+(n-1)\cdot\frac{4}{7}$, vagyis $n=8$.

3526. A sorozat tagjai $a-d$, a, $a+d$. Az $(a-d)^2+a^2=52$; $(a+d)^2+a^2=100$ egyenletrendszerből $a=\pm\sqrt{2}$, $d=\pm6\sqrt{2}$, illetve $a=\pm6$, $d=\pm2$. Négy sorozat adódik: $-5\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$; ..., illetve $5\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $-7\sqrt{2}$; ..., 4; 6; 8; ..., illetve -4; -6; -8; ...

3527. Tegyük fel, hogy van két közös tag: u és v. Ekkor $u-v$ a 2-nek is és a $\sqrt{2}$-nek is többszöröse: $u-v=2k=\sqrt{2}l$ (k, l egész szám). Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{2}=\frac{2k}{l}$, ami lehetetlen.

3528. $3=1+k\cdot d$ ($k>1$ egész), tehát $d=\frac{2}{k}$, $x=1+\frac{2}{k}$.

3529. $4=2+kd$, tehát $kd=2$. Ezért minden pozitív páros szám szerepel a sorozat tagjai között, például $2u=(kd)\cdot u=2+(ku-k)d$.

3530. $S_n=\frac{5n+1}{2}\cdot n$; $S_{20}=1010$ (négyjegyű), $S_{19}=912$ (háromjegyű).

3531. Ha van ilyen x és y, akkor $a_3=3$ és $a_4=4$ is kifejezhető a segítségükkel: $3=2x+y$ és $4=3x+2y$. Ebből $x=2$, $y=-1$. Igazolni kell, hogy valóban számtani sorozat adódik!

3532. $a_3=\frac{1}{5}\cdot S_5=5$, tehát $5-2d$, $5-d$ és $5+2d$ egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Az $(5-d)^2=(5-2d)(5+2d)$ egyenletből $d_1=0$, $d_2=2$. Két sorozat adódik: 5; 5; 5; ... és 1; 3; 5; ...

3533. $a_2=\frac{1}{3}\cdot12=4$, $a_4=\frac{1}{3}\cdot30=10$, ezért $d=3$, $a_1=1$.

3534. $a_1=3-d$; $a_{10}=3+8d$, ennek a felhasználásával adódik, hogy $S_{10}=5(6+7d)$; $S_{20}-S_{10}=S_{10}+100d=5(6+27d)$. Az

$$5(6+7d)=\frac{1}{3}\cdot5(6+27d)$$

egyenletből $d=2$. Tehát az $(a_n)=(1+(n-1)\cdot2)=(2n-1)$ sorozatról van szó.

3535. $a_8=\frac{1}{15}\cdot S_{15}=25$, tehát $a_1=25-7d$, $S_{10}=25(10-d)$. $S_{20}-S_{10}=S_{10}+100d=25(10+3d)$. A feltétel szerint

$$25(10-d)=\frac{1}{2}\cdot25(10+3d).$$

Ebből az egyenletből $d=2$, az első tag pedig 11.

3536. A feltétel szerint $S_5 = 5a_3$; $S_{10} - S_5 = 5a_8$, ezért a feltétel így írható: $a_3 = \frac{1}{3}a_8$, vagyis $(a_1 + 2d) \cdot 3 = a_1 + 7d$. Ez utóbbi egyenletből $d = 2a_1$. $S_{10} = 100a_1$; $S_{20} = 400a_1$, tehát a keresett arány 1 : 3.

3537. $a_{101} = a_1 + 100d$; $a_{102} = a_2 + 100d$; ..., ezért $B = A + 10^4 \cdot d$, $d = \frac{B - A}{10^4}$. Az összegképlet szerint $A = 100a_1 + 4950d$, ebből $a_1 = \frac{299A - 99B}{2 \cdot 10^4}$.

3538. A 30 páros indexű tag $2d$ differenciájú, a 20 hárommal osztható indexű tag $3d$ differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai. Felírjuk ezek összegét:

$$S_{30} = \frac{2(a_1 + d) + 29 \cdot 2d}{2} \cdot 30 = 30a_1 + 900d = -2640;$$

$$S^*_{20} = \frac{2(a_1 + 2d) + 19 \cdot 3d}{2} \cdot 20 = 20a_1 + 610d = -1790.$$

A kapott egyenletrendszerből $a_1 = 2$, $d = -3$ és $S_{60} = -5190$.

3539. Az egyes hengerek alapkör-kerületei olyan számtani sorozatot határoznak meg, amelynek az első tagja 50π, a differenciája 2π; $S_n = 20\,000$ (mm). Az összegképletet felírva az $n^2 + 49n - \frac{20\,000}{\pi} = 0$ egyenlethez jutunk, ennek pozitív gyöke közelítőleg 59. Tehát $n = 59$, $a_n = 166\pi$. Az a_n kerületű kör átmérőjének a hosszúsága 166 mm.

3540. Ha az oldalak hossza $x - d$, x, $x + d$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} \frac{x(x-d)}{2} &= 150 \\ (x-d)^2 + x^2 &= (x+d)^2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből adódik, hogy $x = 20$ és $d = 5$, vagyis a háromszög oldalhosszúságai cm-ben mérve 15; 20; 25.

3541. $a_9 - a_3 = a_8 - a_2$, tehát a_8 és a_2 összege 2, különbsége 24 $(a_8 > a_2)$. Ebből $a_8 = 13$ és $a_2 = -11$.

$d = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$; $a_1 = -15$; $S_{10} = 30$. – Másképp: $a_9 - a_3 = 6d$, tehát $d = 4$; $a_2 + a_8 = 2a_1 + 8d = 2$, tehát $a_1 = -15$.

3542. $a_5 = \frac{1}{9} \cdot S_9 = 33$; $a_7 + a_8 + a_9 = S_9 - S_6 = 36$; $a_8 = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$.

$d = \frac{1}{3}(a_8 - a_5) = -7$; $a_1 = 61$.

3543. $S_{n+4} - S_n = 4a_n + 10d$, ebből $a_n = 9{,}5$.

$a_1 = a_n - (n-1)d = 10 - \frac{1}{2}n$,

$S_n = \frac{39 - n}{2} \cdot n = 81$, $n^2 - 39n + 324 = 0$; $n_1 = 12$; $n_2 = 27$.

Az első esetben $a_1 = 4$, a második esetben $a_1 = -3{,}5$.

3544. Legyenek a számjegyek (fogyó helyi értékek szerint) a, b, c. Az a és a c kifejezhető b és a $c - b = d$ differencia segítségével: $a = b - d$, $c = b + d$. A

$\frac{100(b-d) + 10b + (b+d)}{3b} = 48$ egyenletből $b = -3d$. A

$100(b+d) + 10b + (b-d) + 396 = 100(b-d) + 10b + (b+d)$

egyenletből $d = -2$, tehát $b = 6$, $a = 8$ és $c = 4$. Eszerint a 864 számról van szó.

3545. Az összegképletből az $5n^2 - 3n - 470 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek egész gyöke a 10. Tehát $n = 10$.

3546. Az

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 689 \\ a_2^2 + a_3^2 &= 929 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből kivonással az

$a_3^2 - a_1^2 = (a_3 + a_1)(a_3 - a_1) = 2a_2 \cdot 2d = 929 - 689 = 240$

összefüggés adódik, amiből $a_2 d = 60$. Az

$a_2^2 + (a_2 + d)^2 = 929$

egyenletből, az előző eredmény felhasználásával a

$2a_2^2 + \frac{3600}{a_2^2} = 809$

egyenletet kapjuk, amelyből $a_2 = \pm 20$ vagy $a_2 = \pm 1{,}5\sqrt{2}$. Ennek megfelelően 4 sorozat adódik:

$a_1 = 17,\ d = 3$	$a_1 = -17;\ d = -3;$
$a_1 = -18{,}5\sqrt{2};\ d = 20\sqrt{2}$	$a_1 = 18{,}5\sqrt{2};\ d = -20\sqrt{2}.$

3547. Ha az $a^2, b^2, c^2, \ldots$ számtani sorozat állandó, akkor a vizsgált állításnak csak azonos előjelű a, b, c számok esetére van értelme, akkor viszont igaz, mert szintén állandó sorozat adódik.
Ha az $a^2, b^2, c^2, \ldots$ sorozat nem állandó, akkor azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}.$$

A nevezőkkel szorozva a $2b^2 = a^2 + c^2$ egyenlethez jutunk, ami feltételünknek megfelelően, igaz.

3548. $S_{10} = 110 + 45d$; a páros indexű tagok összege $55 + 25d$. Feltételünk szerint

$110 + 45d = 4(55 + 25d)$,
s ebből $d = -2$.
A sorozat első 10 tagja: 11; 9; 7; 5; 3; 1; -1; -3; -5; -7.

3549. Az összegképlettel kifejezve

$$\frac{S_k}{S_m} = \frac{2a_k - (k-1)d}{2a_m - (m-1)d} = \frac{k}{m}.$$

Ez $\frac{k^2}{m^2}$-tel egyenlő. A felírt egyenletet átrendezve $\frac{a_k}{a_m}$ kifejezhető:

$$\frac{2a_k + d - kd}{2a_m + d - md} = \frac{k}{m};$$
$$2a_k m - 2a_m k = d(k-m) = a_k - a_m;$$
$$2a_k m - a_k = 2a_m k - a_m;$$
$$a_k(2m-1) = a_m(2k-1);$$
$$\frac{a_k}{a_m} = \frac{2k-1}{2m-1}.$$

3550. Legyen a három szám $x-d$, x, $x+d$.

$$N = \frac{x-d}{x} + \frac{x+d}{x} + \frac{x}{x-d} + \frac{x+d}{x-d} + \frac{x-d}{x+d} + \frac{x}{x+d} =$$

$$= \left(1 - \frac{d}{x} + 1 + \frac{d}{x}\right) + \frac{2x+d}{x-d} + \frac{2x-d}{x+d} =$$
$$= 2 + \frac{2(x-d)+3d}{x-d} + \frac{2(x+d)-3d}{x+d} = 6 + \frac{3d}{x-d} - \frac{3d}{x+d} =$$
$$= 6 + \frac{6d^2}{x^2-d^2} = 6 + \frac{6}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 1}.$$

Az N egész szám, tehát $\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 1$ osztója a 6-nak. $\left(\frac{x}{d}\right)^2 \geqq 0$, ezért $\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 1 \geqq -1$. A 6-nak ilyen osztói: -1; 1; 2; 3; 6. Ezek közül a 3 felel meg a feladat feltételeinek:

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 = 4;\ \frac{x}{d} = 2 \quad \text{vagy} \quad \frac{x}{d} = -2.$$

Ha $x = 2d$, akkor a 3 szám: d; $2d$; $3d$, ha $x = -2d$, akkor a 3 szám $-3d$; $-2d$; $-$d. Természetesen akkor is megfelel a sorozat, ha az első és a harmadik tagot felcseréljük: $3d$; $2d$; d, illetve $-d$; $-2d$; $-3d$ (ezekben az esetekben a differencia $(-d)$-vel egyenlő.

3551. $k = 10$.

3552. Az egyik oldal hossza a kerület harmadrésze: 9. A másik két oldal hosszúságának összege 18, szorzata 65. E két szám 5, illetve 13. A terület a Heron-képlettel kiszámítható: $\frac{9}{4}\sqrt{51} \approx 16{,}068$ (cm^2).

3553. Az élek hossza $10-d$, 10, $10+d$. A térfogatból $d^2 = 16$, $d = \pm 4$. A felszín 568 (cm^2).

3554. A hányados $2+\sqrt{3}$, $a_3 = 5+3\sqrt{3}$, $a_4 = 19+11\sqrt{3}$; $S_4 = 24+16\sqrt{3}$.

3555. *a)* nincs, mert ha $a_{20} = 0$, akkor $a_7 = 0$;
b) van; $q > 0$, $a_1 < 0$;
c) nincs, mert $a_7 = a_1 q^6$, vagyis a_1 és a_7 azonos előjelű;
d) van, $q = 0$;
e) van, $q < 0$.

3556. a_1-gyel és q-val fejezünk ki minden előforduló tagot. Az

$$a_1 q(q-1) = 3$$
$$a_1(q^2-1) = -3$$

egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy

$$\frac{q}{q+1} = -1, \quad q = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = 4.$$

3557. $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}$.

3558. $q^{10} = \frac{4}{3} : 324 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$; $\quad q = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$a_1 = a_7 : q^6 = 2^2 \cdot 3^7 = 8748$, tehát két ilyen sorozat van:

$$\left(8748 \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right) = \left(\pm 4 \cdot 3^{7{,}5-\frac{n}{2}}\right).$$

3559. Az a két szám, amelynek a szorzata -243 és a különbsége 36, a 27 és a -9, illetve a 9 és a -27. Ha $a_2 = -9$ és $a_3 = 27$, akkor $q = -3$ és $a_1 = 3$; ha $a_2 = -27$ és $a_3 = 9$, akkor $q = -\frac{1}{3}$ és $a_1 = 81$.

3560. $q^2 = \frac{1}{4}$, $q = \pm\frac{1}{2}$; $a_4^2 = a_3 a_5 = 100$; $a_4 = \pm 20$. Négy ilyen sorozat van:

$a_1 = \pm 80$, $q = \frac{1}{2}$, illetve $a_1 = \pm 80$, $q = -\frac{1}{2}$.

3561. $S_n = 6(2^n - 1)$; $n = 18$. Legalább 18 tagot.

3562. $q = 1$ vagy $q = -1$. Ha $q = 1$, akkor $S_{10} = 10 \cdot (-12) = -120$, ha $q = -1$, akkor $S_{10} = 0$.

3563. $q = -1$, $S_{20} = 0$.

3564. Kétféleképpen is könnyen elvégezhető az összeadás:

	50
	45
	40
	35
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	30
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	25
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	20
⋮	15
5 5	10
5	5
6 1 7 2 8 3 9 5 0 0	6172839500

3565. Van, ha a_1 irracionális és $q \neq 0$ racionális. Például: $a_1 = \sqrt{3}$, $q = -2$.

3566. Azt kell igazolni, hogy

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{2}.$$

A nevezők gyöktelenítésével ez azonnal adódik:

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_3 = (3+2\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(9+5\sqrt{2}).$$

3567. Legyen $x = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ és $y = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$. A feltételek szerint

$x = qy$; $\quad x + y = 250$; $\quad x - y = 150$.

Ebből az egyenletrendszerből $x = 200$, $y = 50$, $q = 4$. Az összegképletből

$$a_1 = \frac{50}{4369}.$$

3568. $a_7 = a_3 q^4$, tehát $q^4 = 9$; $q = \pm\sqrt{3}$; $a_1 = 2$. $S_{10} = 242(1 \pm \sqrt{3})$.

3569. $S_3 = 8(1+q+q^2) = 78$, ebből $q_1 = 2{,}5$; $q_2 = -3{,}5$. $S_6 = S_3 + q^3 \cdot S_3 = 78(1+q^3)$.

Ha $q = 2{,}5$, akkor $S_6 = 1296{,}75$, ha $q = -3{,}5$, akkor $S_6 = -3266{,}25$.

3570. $q = \frac{30}{15} = 2$. Az $a_1(1+q+q^2+q^3) = 15$ egyenletből $a_1 = 1$.

3571. $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 = 400$, tehát $a_2 = \pm 20$.

Ha $a_2 = 20$, akkor a_1 és a_3 összege 85, szorzata 400, e két szám tehát 5 és 80. Itt két sorozat adódik: $a_1 = 5$, $q = 4$; illetve $a_1 = 80$, $q = \frac{1}{4}$.

Ha $a_2 = -20$, akkor a_1 és a_2 összege 125, szorzata 400, e két szám $62{,}5 \pm 2{,}5\sqrt{561}$. Itt ismét két sorozat adódik, aszerint, hogy e két szám közül melyiket választjuk első tagnak. Közelítő értékkel $a_1 = 121{,}7$, $q = -0{,}1643$, illetve $a_1 = 3{,}286$, $q = -6{,}0857$.

Tehát 4 ilyen sorozat van.

3572. $\frac{a_4-a_1}{a_3-a_2}=\frac{a_1(q^3-1)}{a_1q(q-1)}=\frac{q^2+q+1}{q}=\frac{13}{3}$, ebből $q_1=3$, $q_2=\frac{1}{3}$.

$S_4=a_1(1+q+q^2+q^3)$, ebbe behelyettesítve a q értékeit, azt kapjuk, hogy $a_1=\frac{81}{40}=2{,}025$, illetve $a_1=\frac{3^7}{40}=54\frac{27}{40}$.

3573. A feltétel szerint

$0{,}1(1+q+q^2+q^3)=1+q$.

A bal oldal átrendezhető:

$0{,}1(1+q)(1+q^2)=1+q$.

Ennek az egyenletnek három gyöke van: -1, ± 3, mindegyik egy-egy sorozathoz vezet:

0,1; −0,1; 0,1; −0,1; ...
0,1; 0,3; 0,9; 2,7; ...
0,1; −0,3; 0,9; −2,7; ...

3574. Legyen $x=a_2$, $y=a_1+a_3$, akkor $x+y=28$ és $xy=160$. Ebből $x=8$ és $y=20$, vagy $x=20$ és $y=8$.

Az első esetben $a_3=20-a_1$ és $a_2^2=a_1a_3$, vagyis $64=a_1(20-a_1)$, amiből $a_1=4$, vagy $a_1=16$. Ha $a_1=4$ és $a_2=8$, akkor $q=2$, ha $a_1=16$ és $a_2=8$, akkor $q=\frac{1}{2}$.

A második esetben hasonlóan adódik, hogy $400=a_1(8-a_1)$, ennek az egyenletnek azonban nincs valós gyöke.

Feladatunknak tehát két megoldása van:

$a_1=4$ és $q=2$, illetve $a_1=16$ és $q=\frac{1}{2}$.

Más módszer: sokkal bonyolultabb a feladat megoldása, ha azonnal a_1-gyel és q-val fejezzük ki az adott összefüggéseket:

$$\left.\begin{aligned}a_1(1+q+q^2)&=28\\a_1q(a_1+a_1q^2)&=160\end{aligned}\right\}.$$

Ha az első egyenletből kifejezzük az a_1-et és a kapott kifejezést behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor a

$10q^4-29q^3+30q^2-29q+10=0$

reciprok egyenlethez jutunk. q^2-tel osztva (ez nem 0, mert $a_2(a_1+a_3)\neq 0$) és átrendezve adódik a

$$10\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-29\left(q+\frac{1}{q}\right)+30=0$$

egyenlet. Ha $x=q+\frac{1}{q}$, akkor $q^2+\frac{1}{q^2}=x^2-2$, tehát x-re a

$10x^2-29x+10=0$

egyenletet kapjuk. Ennek egyik gyöke, a 2,5, megfelel feladatunknak, ebből adódik, hogy $q=2$ vagy $q=\frac{1}{2}$.

3575. $a_1(1+q^2+q^4)=63$ és $a_1q(1+q^2)=30$. Jelöljük az $(1+q^2)$-et x-szel. Ekkor $1+q^2+q^4=x^2-q^2$, $a_1=\frac{30}{xq}$. Így x-re és q-ra a

$10x^2-21xq-10q^2=0$

egyenletet kapjuk, amelyből $\frac{x}{q}=-\frac{5}{2}$ vagy $\frac{x}{q}=\frac{2}{5}$. Az első értékből adódik, hogy $q_1=2$, illetve $q_2=\frac{1}{2}$, a második érték nem ad megoldást, mert az

$$\frac{1+q^2}{q}=-\frac{2}{5}$$

egyenletnek nincs valós gyöke $\left(\left|\frac{1}{q}+q\right|\geqq 2\right)$.

Ha $q=2$, akkor $a_1=3$, ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a=48$.

Tehát két sorozat felel meg a feltételeknek.

3576. Legyenek a számtani sorozat vizsgált tagjai $a-d$; a; $a+d$; $a+2d$. Ekkor a mértani sorozat megfelelő tagjai: $a-d+5$; $a+6$; $a+d+9$; $a+2d+15$. A mértani közép tulajdonságnak megfelelően

$$\left.\begin{aligned}(a-d+5)(a+d+9)&=(a+6)^2\\(a+6)(a+2d+15)&=(a+d+9)^2\end{aligned}\right\}.$$

Ebből az egyenletrendszerből az $a=2d$, $d=\pm 3$ eredményhez jutunk.

Ha $d=3$, akkor $q=\frac{3}{2}$, ha $d=-3$, akkor a -3; -6; -9; -12 számokból a 2; 0; 0; 3 számok adódnak, amelyek nem mértani sorozat egymást követő tagjai.

3577. Legyen az 5 vizsgált szám x, y, z, u, v. A számtani sorozat tulajdonsága szerint

$y+v = z+u = 10$.

Az y és a v tehát két olyan szám, amelyek összege 10 és szorzata 16. E két szám a 2 és a 8.

Ha $y=2$ és $v=8$, akkor $8 = 2+3d$, tehát $d=2$, $z=4$, $u=6$. A mértani sorozatban $q=2$, tehát $x=1$.

Ha $y=8$ és $v=2$, akkor $d=-2$, $z=6$, $u=4$, $q = \frac{3}{4}$, $x = \frac{4}{3}\cdot 8 = 10\frac{2}{3}$.

A keresett számötös tehát kétféle lehet: 1; 2; 4; 6; 8, illetve $10\frac{2}{3}$; 8; 6; 4; 2.

3578. A számtani sorozat második tagja $\frac{24}{3} = 8$, a mértani sorozat tagjai: $(8-d)+1$; 10; $(8+d)+35$. A mértani közép tulajdonság szerint

$(9-d)(43+d) = 100$,

ebből $d=7$ vagy $d=-41$.

A számtani sorozat tagjai a $d=7$ esetben 1; 8; 15, a $d=-41$ esetben pedig 49; 8; -33.

3579. $14 = q^3 \cdot 112$, ezért $q = \frac{1}{2}$. Az $a_1(1+q+q^2) = 112$ egyenletből $a_1=64$. A keresett sorozat: $\left(64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = (2^{7-n})$.

3580. A két sorozat differenciája 4, illetve 11, ezek legkisebb közös többszöröse 44. Ezért, ha egy közös tag létezik, akkor mindkét sorozatban szerepel az ennél $k \cdot 44$-gyel nagyobb szám is, bármely pozitív egész szám is a k. – A legkisebb közös tag a $37 = a_9 = b_3$. Az összes közös tag: $37 + k \cdot 44$ ($k \in \mathbf{N}$). Más közös tag nem lehet, mert ha más pozitív egészet adunk meg, az vagy $1+4n$ vagy $4+11n$ alakban nem lenne felírható. – Az összes megfelelő szám azt a 44 differenciájú számtani sorozatot alkotja, amelynek az első tagja 37: $(37+(n-1)\cdot 44) = (44n-7)$.

3581. A számtani sorozat első három tagjának az összege $26+1+6+3 = 36$, tehát a második tag 12; az első, illetve a harmadik tag $12-d$, illetve $12+d$. – A mértani sorozat tagjai: $11-d$, 6, $9+d$. Ezekre igaz, hogy

$(11-d)(9+d) = 36$,

s ebből $d=9$ vagy $d=-7$.

A mértani sorozat tagjai a $d=9$ esetben 2; 6; 18, a $d=-7$ esetben pedig 18; 6; 2.

Más módon: ha már tudjuk, hogy a számtani sorozat második tagja 12, akkor a mértani sorozat tagjai $\frac{6}{q}$; 6; $6q$, s ennek megfelelően

$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 26$,

$\frac{1}{q} + q = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$.

Tehát $q=3$ vagy $q = \frac{1}{3}$, a sorozat tagjai pedig a fentiek.

3582. A *d)* feltételnek megfelelően a 4 vizsgált szám: x, $y-d$, y, $y+d$. Az x is kifejezhető y és d segítségével (l. *a)* feltétel): $x = 14-y-d$. A *b)* és a *c)* feltétel alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} 2y-d &= 12 \\ (y-d)^2 &= (14-y-d)y \end{aligned}\right\}.$$

Ezt megoldva az $y_1=8$; $d_1=4$, illetve $y_2=4{,}5$; $d_2=-3$ megoldáshoz jutunk. Ezek két számnégyest szolgáltatnak: 2; 4; 8; 12, illetve 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

3583. Ha $2a$, $2b$, $2c$ egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor ugyanez igaz az a, b, c számokra is, mégpedig ugyanazzal a kvócienssel. Ebből következik, hogy konstans sorozatról van szó, mert nem állandó mértani sorozat 3 egymást követő tagja esetében $c-b \neq b-a$ (a számtani sorozat lineárisan, a mértani exponenciálisan változik).

3584. $\frac{8}{9} : 3 = \frac{8}{27}$ és $\frac{32}{81} : \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$ is felírható a q egész kitevőjű hatványaként. Ezért a q lehet $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ vagy ennek valamely gyöke: $\sqrt[n]{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[n]{\frac{3}{2}}$, (esetleg ennek az ellentettje is). – Például

$3; 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \ldots \quad \left(q = \frac{2}{3}\right)$,

$-\frac{64}{243}\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{32}{81}; -\frac{32}{81}\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{16}{27}; -\frac{16}{27}\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{8}{9}; -\frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}};$

$2; -2\sqrt{\frac{3}{2}}; 3; \ldots \quad \left(q = -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3585. Ha (a_n) mértani sorozat, akkor minden $n>1$ egész számra igaz, hogy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Pozitív tagokról van szó, létezik a tagok 3 alapú logaritmusa. Két egyenlő szám logaritmusa is egyenlő:

$2 \log_3 a_n = \log_3 a_{n-1} + \log_3 a_{n+1}$,

ami éppen azt jelenti, hogy $\log_3 a_{n-1}$, $\log_3 a_n$ és $\log_3 a_{n+1}$ egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

3586. Ha az (a_n+b) mértani sorozat, akkor minden $k>1$ egész szám esetén igaz, hogy

$(a_k+b)^2 = (a_{k-1}+b)(a_{k+1}+b)$.

Ebből, átrendezve, az $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ összefüggést felhasználva, a $2b \neq 0$ számmal osztva azt kapjuk, hogy

$$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},$$

vagyis az (a_n) nemcsak mértani, hanem számtani sorozat is. Ez pedig csak konstans sorozat esetében lehetséges (l. **3583.**).

3587. Ha az (a_n), illetve a (b_n) tagjai a; aq; aq^2, illetve b; bp; bp^2, akkor az (a_n+b_n) tagjai $a+b$; $aq+bp$; aq^2+bp^2. Ha ez is mértani sorozat, akkor

$(aq+bp)^2 = (a+b)(aq^2+bp^2)$,

amiből a

$2ab \cdot pq = ab(p^2+q^2)$; $\quad ab(p^2-2pq+q^2) = 0$

egyenlethez jutunk. Ez akkor és csakis akkor áll fenn, ha $ab=0$ vagy ha $p=q$. – Ha $ab=0$, akkor (a_n) és (b_n) közül legalább az egyiknek minden tagja 0-val egyenlő, ezért természetesen (a_n-b_n) is mértani sorozat. – Ha $ab \neq 0$ és $p=q$, akkor az (a_n-b_n) tagjai $a-b$; $(a-b)q$; $(a-b)q^2$; ..., vagyis (a_n-b_n) is mértani sorozat, hányadosa éppen q.

3588. $a_n = 2q^{n-1}$;

$\log_2 a_n = 1+(n-1)\log_2 q = n \log_2 q + (1-\log_2 q)$,

tehát a $(\log_2 a_n)$ számtani sorozat, differenciája $\log_2 q$. – A feladatban adott (b_n) tagjai a $(\log_2 a_n)$ reciprokai. Egy számtani sorozat tagjainak reciprokai csak akkor alkotnak szintén számtani sorozatot, ha konstans sorozatról van szó (goldoljunk a grafikonokra!). Tehát

$\log_2 q = 0$; $\quad q=1$; $\quad S_n = na_1 = 2n$.

Más módon: $a_1=2$; $a_2=2q$; $a_3=2q^2$.

$b_1 = \log_2 2 = 1$; $b_2 = \log_{2q} 2 = \dfrac{1}{\log_2 (2q)}$; $b_3 = \log_{2q^2} 2 = \dfrac{1}{\log_2 (2q^2)}$.

A $2b_2 = b_1 + b_3$ egyenletből is megkapjuk, hogy $q=1$.

3589. Ha van ilyen sorozat, akkor legyen $a_k=1$, $a_l=2$, $a_m=3$ és a hányadost jelöljük q-val $(q>1)$. $2 = \dfrac{a_l}{a_k}$; $3 = \dfrac{a_m}{a_k}$, tehát a 2 is és a 3 is pozitív egész kitevőjű hatványa a q-nak:

$q = \sqrt[u]{3} = \sqrt[v]{2}$, $\quad 3^v = 2^u$ $\quad (u, v$ pozitív egész).

Ez lehetetlen, ellentmond az aritmetika alaptételének. – Tehát nincs ilyen mértani sorozat.

3590. Ha a 2 és a 4 is tagja egy növekedő mértani sorozatnak, akkor $\dfrac{4}{2} = 2$ a q-nak pozitív egész kitevőjű hatványa, például $q^k=2$. Kettőnek minden hatványa kifejezhető q hatványával, pl. $2^n = q^{nk}$, tehát ha $a_1=2$, akkor $a_{nk} = 2^n$.

3591. $a_1(1+q+q^2+q^3+q^4) = 155$;

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \frac{1}{a_1 q^3} + \frac{1}{a_1 q^4} =$$

$$= \frac{1+q+q^2+q^3+q^4}{a_1 q^4} = 0{,}3875 = \frac{31}{80}.$$

E két egyenletből, osztással az

$a_1^2 q^4 = 400$, $\quad a_1 q^2 = a_3 = 20$

értékhez jutunk. ($a_3>0$, mert $S_5>0$). A keresett szorzat $a_3^5 = 32 \cdot 10^5$.

3592. A feltételek alapján felírhatjuk a

$2(1+q+\ldots+q^{n-1}) = 62$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2q} + \ldots + \frac{1}{2q^{n-1}} = 0{,}62$$

egyenletrendszert. A második egyenletből

$$\frac{1+q+\ldots+q^{n-1}}{q^{n-1}} = 1{,}24; \quad q^{n-1} = 25.$$

Az első egyenletből

$$(1+q+\ldots+q^{n-2})+q^{n-1}=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+q^{n-1}=\frac{24}{q-1}+25=31,$$

amiből $q=5$.
A keresett sorozat tehát $(2\cdot 5^{n-1})$.

3593. A mértani sorozat tagjait $7-d$, $7+d$, illetve $7+6d$ alakba írva a mértani közép tulajdonságból a

$$(7+d)^2=(7-d)(7+6d)$$

egyenletet kapjuk. Ennek a gyökei 0 és 3. Ha $d=0$, akkor $q=1$, ha $d=3$, akkor $q=2{,}5$.

3594. $a_2=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=6$, ezért a mértani sorozat tagjai $\frac{6}{q}$, 6, $6q$ alakban is felírhatók. Ekkor a számtani sorozatra a számtani közép tulajdonság alapján azt kapjuk, hogy

$$\frac{6}{q}+(6q-3)=2\cdot 6,$$

amiből az

$$\frac{1}{q}+q=2{,}5=\frac{1}{2}+2$$

egyenlethez jutunk. Eszerint $q=2$ vagy $q=\frac{1}{2}$, tehát a 3; 6; 12; ... vagy a 12; 6; 3; ... mértani sorozatról van szó.

3595. A szögek nagyítás során nem változnak, ezért választhatjuk a legrövidebb oldalt egységnyinek, a másik két oldal hossza q, illetve q^2. Pitagorasz tétele szerint

$$1+q^2=q^4, \quad \text{ebből} \quad q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{q^2}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \alpha=38°10',\ \beta=51°50'.$$

3596. Legyen az oldalak hossza a, b, c, a megfelelő magasságoké m_a, m_b, m_c.

$$2T=am_a=bm_b=cm_c,$$

eszerint

$$\frac{a}{b}=\frac{m_b}{m_a}, \quad \frac{b}{c}=\frac{m_c}{m_b}.$$

Ha $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, akkor $\frac{m_b}{m_a}=\frac{m_c}{m_b}$, vagyis $m_b^2=m_am_c$, ami éppen azt jelenti, hogy m_a, m_b, m_c egy mértani sorozat egymást követő tagjai.

3597. A terület felhasználásával igazolható, hogy az oldalak is egy mértani sorozat egymást követő tagjai (l. **3596.**). Ha a, b, c egy számtani és egy mértani sorozatnak is egymást követő tagjai, akkor ezek egyenlők (gondoljunk a grafikonokra!).

3598. Van, legyen az első tag is és a kvóciens is négyzetszám!

3599. $\frac{a_3}{a_2}=3(\sqrt{5}+2)$; e számmal az első, illetve a harmadik tagot megszorozva a másodikat, illetve a negyediket kapjuk, tehát létezik ilyen mértani sorozat, $q=3(\sqrt{5}+2)$.

3600. Itt $q=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$. Kell, hogy

$$(a^2-b^2)q=(a^2-b^2)(a+b)=a^3-b^3+ab(a-b)$$

egyenlő legyen (a^3-b^3)-nel. Mivel $a\neq b$, ez csak úgy lehetséges, ha $a=0$ vagy $b=0$.

3601. A számtani sorozat 3 tagjának az összege 30, ezért a középső szám a 10.

$$\frac{10}{q}+10+10q=35;\ \frac{1}{q}+q=2{,}5=2+\frac{1}{2};\ q_1=2;\ q_2=\frac{1}{2}.$$

Két sorozatot kapunk: 5; 10; 20; ..., illetve 20; 10; 5; ...

3602. Legyenek a háromszög oldalai 1, q, q^2. A háromszög-egyenlőtlenségnek megfelelően

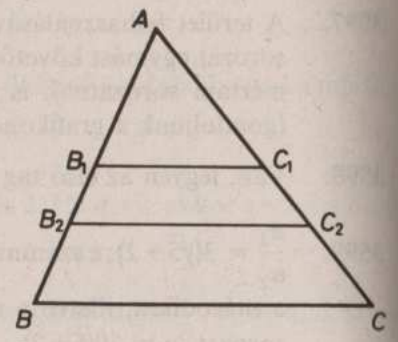
$$1+q>q^2.$$

E másodfokú egyenlőtlenség megoldása éppen a bizonyítandó állításhoz vezet.

3603. Mértani sorozat: a, b, c; tehát $b^2=ac$; számtani sorozat: a, b, $c-(a+b)$; tehát $2b=a+(c-a-b)$; számtani sorozat: a; $b+10$; c; tehát $2(b+10)=a+c$.
E három egyenletből $a_1=20$, $b_1=c_1=0$; $a_2=5$, $b_2=15$, $c_2=45$, vagyis a 20, 0, 0, ... vagy az 5, 15, 45, ... mértani sorozatról van szó.

3604. $12 \cdot q^2 = \frac{4}{3}$, tehát $q = \pm \frac{1}{3}$. Ha $q = \frac{1}{3}$, akkor $a_1 = 9$; ha $q = -\frac{1}{3}$, akkor $a_1 = 18$.

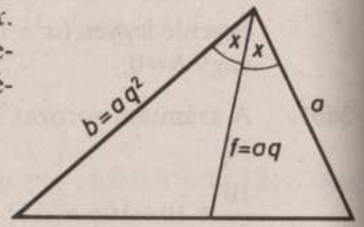
3605. A középvonal által levágott háromszög területe negyedrésze az eredetinek (**3605.** ábra), ezért a szóban forgó mértani sorozat kvóciense 2. A hasonlóság miatt a megfelelő szakaszok is egy mértani sorozat egymást követő tagjai, itt $q = \sqrt{2}$. Ha az AB szakasz hossza c, akkor AB_2-é $\frac{c}{2} \cdot \sqrt{2}$, BB_2-é pedig $c - \frac{c}{2}\sqrt{2}$. E két szám aránya



3605

$$\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right) : \left(c - \frac{c}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} : (2 - \sqrt{2}) = 1 : (\sqrt{2} - 1).$$

3606. Legyen $f = aq$, $b = aq^2$, a felezett szög $2x$. Ekkor felírható, hogy a háromszög területe egyenlő a két részének a területösszegével (**3606.** ábra).



3606

$$\frac{ab \sin 2x}{2} = \frac{af \sin x}{2} + \frac{bf \sin x}{2},$$

$$2a^2q^2 \sin x \cos x = a^2q \sin x + a^2q^3 \sin x.$$

Oszthatunk a nullától különböző $a^2q \sin x$ számmal, ekkor a

$$q^2 - 2q \cos x + 1 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek nincs megoldása, mert $0 < \cos x < 1$. Tehát nincs a kívánalmaknak megfelelő háromszög.

3607. $50 = 25q$, tehát $q = 2$. Az első feltételből adódik, hogy $a_1 = 5$.

3608. $a_2^3 = 2025$, ezért $a_2 = \sqrt[3]{2025}$.

$$\frac{a_2}{q} + a_2 q = 63 - a_2; \quad \frac{1}{q} + q = \frac{63}{\sqrt[3]{2025}} - 1.$$

Két jegyre kerekítve $\frac{63}{\sqrt[3]{2025}} = 5{,}0$; ebből

$$\frac{1}{q} + q = 4; \quad q_1 = 3{,}7; \quad q_2 = 0{,}3.$$

Az első esetben $(a_1)_1 = 3{,}4$, a másodikban $(a_1)_2 = 40$. Pontosabb értékeket használva

$$a_2 = \sqrt[3]{2025} = 12{,}6515; \quad q_1 = 3{,}7102; \quad q_2 = 0{,}26\,953;$$
$$(a_1)_1 = 3{,}4099; \quad (a_1)_2 = 46{,}940.$$

3609. A keresett összeg

$$a_1^2(q + q^3 + q^5 + \ldots + q^{2n-3}) = \frac{a_1^2 q(q^{2n-2} - 1)}{q^2 - 1},$$

mert olyan mértani sorozat első $n-1$ tagjára kell alkalmaznunk az összegképletet, amelynek első tagja q, hányadosa pedig q^2.

3610. $a_1 + a_2 = a_1(1 + q)$;
$a_1 + 2a_2 + a_3 = a_1(1 + q)^2$;
$a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 = a_1(1 + q)^3$,
tehát olyan mértani sorozatról van szó, amelynek a kvóciense $1 + q$.

3611. A beírt számok: $2 + 2^2$; $2^2 + 2^3$: …; $2^{99} + 2^{100}$. Ezek mindegyike az előző szám kétszerese, tehát $q = 2$.

3612. A beírt számok: $3^2 - 3$; $3^3 - 3^2$; …; $3^{100} - 3^{99}$. Az összeg $(3^{100} - 3)$-mal egyenlő, mert a többi hatvány összeadandóként és kivonandóként is szerepel. – Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha felírjuk az összegképletet annak a mértani sorozatnak az első 99 tagjára, amelyben $a_1 = 3^2 - 3 = 6$ és $q = 3$.

3613. Egy kétéves ciklus végén a faállomány a kezdetinek $(1{,}03^2 \cdot 0{,}98)$-szorosa lesz. 20 év alatt 10 ilyen ciklus követi egymást, ezért a végső állomány $3500(1{,}03^2 \cdot 0{,}98)^{10} = 5165$ (m³).

3614. Egy óra alatt $\frac{49}{50}$ részére csökken a tiszta alkohol mennyisége, n óra alatt $\left(\frac{49}{50}\right)^n$ részére. A

$$\left(\frac{49}{50}\right)^n = 0{,}4; \quad 0{,}98^n = 0{,}4$$

egyenletet logaritmussal oldjuk meg:
$n \lg 0{,}98 = \lg 0{,}4$; $n = 45{,}35$.

Tehát körülbelül 45 óra múlva lesz a hordóban 40%-os keverék (45 óra múlva 40,3%-os, 46 óra múlva 39,5%-os).

3615. A tizedik év végére

$A_{10} = 4000 \cdot (1{,}05^{10} + 1{,}05^9 + 1{,}05^8 + \ldots + 1{,}05) =$
$= 4000 \cdot 20 \cdot 1{,}05(1{,}05^{10} - 1) = 52\,827{,}15$ (Ft)

lesz a felnövekedett összeg. A 11. év elején kiveszünk 4000 Ft-ot; az év végén az összeg

$A_{11} = (A_{10} - 4000) \cdot 1{,}05,$

a 12., ..., 20. év végén pedig

$A_{12} = (A_{11} - 4000) \cdot 1{,}05 = A_{10} \cdot 1{,}05^2 - 4000 \cdot 1{,}05^2 - 4000 \cdot 1{,}05;$
$\vdots$
$A_{20} = A_{10} \cdot 1{,}05^{10} - 4000(1{,}05^{10} + 1{,}05^9 + \ldots + 1{,}05) =$
$= A_{10} \cdot 1{,}05^{10} - A_{10} = A_{10}(1{,}05^{10} - 1) = 33\,222{,}70$ (Ft).

3616. A_0 a kezdeti 10 000 Ft, évente x Ft-ot veszünk ki, A_i jelenti az i-edik év végén maradt összeget ($i = 1, 2, \ldots, 10$).

$A_1 = A_0 \cdot 1{,}04 - x;$
$A_2 = A_1 \cdot 1{,}04 - x = A_0 \cdot 1{,}04^2 - x(1{,}04 + 1);$
$\vdots$
$A_{10} = A_0 \cdot 1{,}04^{10} - x(1{,}04^9 + 1{,}04^8 + \ldots + 1{,}04 + 1) =$
$= A_0 \cdot 1{,}04^{10} - 25x(1{,}04^{10} - 1).$
$A_{10} = 0$, ebből $x = 1232{,}91$ (Ft).

3617. A kerületek olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek a kvóciense $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Eszerint $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4\left(2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12 + 6\sqrt{2}$ (cm).

A területek esetében $q = \frac{1}{2}$, ezért $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = 7{,}5$ (cm^2).

3618. Ha $|x| < 1$, akkor a szereplő mértani sor konvergens. Az összegképlettel és a $\sin^2 45° = \frac{1}{2}$ érték beírásával az

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{2}; \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelyből $x = \frac{1}{2}$.

3619. Az $a_1 + a_1q^2 = 12{,}5$; $a_1 - a_1q = 5$ egyenletrendszerből $q = \frac{1}{2}$, vagy $q = -3$. Ez utóbbi esetben a sor nem konvergens, nincs összege. Ha $q = \frac{1}{2}$, akkor $a_1 = 10$ és $S = 20$.

3620. Ha p %-os az évi népszaporulat, akkor évente $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$-szorosára nő a lakosság száma.

$$1{,}5 \cdot 10^7 = 10^7\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{100}; \quad p = 100(\sqrt[100]{1{,}5} - 1) = 0{,}406.$$

3621. $A_0 = 60\,000$;
$A_1 = A_0 \cdot 1{,}06 - x;$
$A_2 = A_1 \cdot 1{,}06 - x = A_0 \cdot 1{,}06^2 - x(1{,}06 + 1);$
$\vdots$
$A_6 = A_0 \cdot 1{,}06^6 - x(1{,}06^5 + 1{,}06^4 + \ldots + 1{,}06 + 1).$
A mértani sorozat összegképletét alkalmazva

$$x = \frac{60\,000 \cdot 1{,}06^6}{1{,}06^6 - 1} \cdot 0{,}06 = 12\,201{,}76 \text{ (Ft)}.$$

3622. A mértani sor összegképletét használjuk fel; itt az első tag 0,27 és $q = 0{,}01$, illetve 0,4 és 0,1.

$$0{,}\dot{2}\dot{7} = \frac{0{,}27}{1 - 0{,}01} = \frac{27}{99}; \quad 0{,}\dot{4} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} = \frac{4}{9}.$$

A teljes indukció módszerével megoldható feladatok

3623. $2^n > n^2$, ha $n > 4$ és n egész.
A bizonyítás a teljes indukció módszerével történik.
1. $n = 5$-re $2^5 > 5^2$; $32 > 25$ ez igaz.
2. Feltételezzük, hogy n-re igaz, vagyis
$2^n > n^2$.

Bizonyítandó, hogy $2^{n+1} > (n+1)^2$; $2 \cdot 2^n > n^2 + 2n + 1$.
A feltételből következik:
$2 \cdot 2^n > 2n^2$.

Azt kell tehát igazolni, hogy $2n^2 > n^2 + 2n + 1$; $n^2 > 2n + 1$.
Ha $n > 4$, akkor $n^2 > 4n > 2n + 1$, tehát az állítás igaz.

3624. $n = 2$ egyenes esetén, ha van közös pontjuk, akkor metszők, tehát egy síkban vannak.
$n = 3$ egyenes esetén a harmadik egyenes vagy áthalad az előző kettő metszéspontján, és akkor igaz az állítás; vagy nem halad át, és akkor az első kettővel egy-egy metszéspontot alkot (az első kettő metszéspontjától különbözőt), és a 3 különböző pont egy síkot határoz meg, ez tartalmazza mindhárom egyenest. Ha feltesszük, hogy n egyenesre igaz az állítás, akkor az $(n+1)$-edik vagy áthalad a közös pontjukon, vagy mindegyikkel alkot egy-egy metszéspontot, ezért a síkjukban van.

3625. $|\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)| \leqq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n$.
1. $n = 1$-re $|\sin\alpha_1| = \sin\alpha_1$, ha $0 \leqq \alpha_1 \leqq \pi$.
2. $n = 2$-re $|\sin(\alpha_1 + \alpha_2)| = |\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2| \leqq$
$\leqq |\sin\alpha_1|\,|\cos\alpha_2| + |\cos\alpha_1|\,|\sin\alpha_2| \leqq |\sin\alpha_1| + |\sin\alpha_2| =$
$= \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2$, mivel $|\cos\alpha_1| \leqq 1$, $|\cos\alpha_2| \leqq 1$, és
$0 \leqq \alpha_1 \leqq \pi$, $0 \leqq \alpha_2 \leqq \pi$.
Feltesszük, hogy n-re igaz:
$|\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)| \leqq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n$.

Bizonyítandó: $|\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1})| \leqq$
$\leqq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n + \sin\alpha_{n+1}$.
Legyen $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta$.
A bizonyítandó állításba helyettesítve:
$|\sin(\beta + \alpha_{n+1})| = |\sin\beta\cos\alpha_{n+1} + \cos\beta\sin\alpha_{n+1}| \leqq |\sin\beta|\,|\cos\alpha_{n+1}| +$
$+ |\cos\beta|\,|\sin\alpha_{n+1}| \leqq |\sin\beta| + |\sin\alpha_{n+1}| \leqq$
$\leqq \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n + \sin\alpha_{n+1}$.
Felhasználtuk a feltételt, és hogy $|\cos\beta \leqq 1$, valamint
$|\sin\alpha_{n+1}| = \sin\alpha_{n+1}$, ha $0 \leqq \alpha_{n+1} \leqq \pi$.

3626. A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n = 1$ egyenes a síkot két részre osztja,
$\frac{1^2 + 1 + 2}{2} = 2$ a képlet ebben az esetben helyes.
2. Feltesszük, hogy n egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ részre osztja;
bizonyítandó, hogy $n + 1$ egyenes
$\frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$ részre osztja.
Ha az $(n+1)$-edik egyenes az előző n egyenes mindegyikét metszi, akkor n metszéspont, és ezáltal $(n+1)$ új síkrész keletkezik. Felhasználva a feltételt, a részek száma:
$$\frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2},$$
tehát az állítás igaz.

3627. A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n = 1$ kör a síkot két részre osztja, $1^2 - 1 + 2 = 2$ a képlet ebben az esetben helyes.
2. Feltesszük, hogy n kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja.
Bizonyítandó, hogy $(n+1)$ kör $(n+1)^2 - (n+1) + 2$ részre osztja. Ha az $(n+1)$-edik kör az előző n kör mindegyikét két helyen metszi, akkor $2n$ metszéspontot, és ezáltal $2n$ új síkrészt hoz létre.
Felhasználva a feltételt, a részek száma:
$n^2 - n + 2 + 2n = (n+1)^2 - (n+1) + 2$,
tehát az állítás igaz.

3628. $n=3$ pont esetén meghúzva közéjük 3 szakaszt, zárt háromszögvonalat kapunk.
Tegyük fel, hogy bármely n pont és n szakasz esetén van a hálózatban kör (zárt vonal).
Bizonyítandó, hogy $(n+1)$ pont és $(n+1)$ szakasz esetén is van kör. Ha minden pontból legalább két szakasz indul, akkor nincs „vég", tehát van kör. Ha nem indul minden pontból legalább két szakasz, akkor van olyan pont, amelyből csak egy indul. Hagyjuk el ezt a szakaszt és pontot, akkor n pont és n szakasz marad, ebben a hálózatban viszont az indukciós feltétel miatt van kör, tehát az állítást igazoltuk.

3629. Tegyük fel, hogy $\left(a+\frac{1}{a}\right)$ egész. Ekkor $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{a}=$
$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ is egész. Tehát $n=1$-re és $n=2$-re igaz, hogy $a^n+\frac{1}{a^n}$ egész. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re és n-re igaz az állítás, és ezek segítségével bizonyítsuk $(n+1)$-re.
$a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}=\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)$. A feltételek szerint az első tag mindkét tényezője egész, a második tag is, tehát a különbség is.

3630. $a+b=2$ és $a^2+b^2=4$, ebből az következik, hogy $a^2+b^2+2ab=4$; $2ab=0$; $a=0$ vagy $b=0$.
A kiinduló feltételek szerint $n=1$-re és $n=2$-re igaz $a^n+b^n=2^n$.
Tegyük fel, hogy n-re igaz: $a^n+b^n=2^n$.
Bizonyítandó, hogy $a^{n+1}+b^{n+1}=2^{n+1}$.
$a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)(a^n+b^n)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})$.
A második tag $ab=0$ miatt 0, ezért
$a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)(a^n+b^n)=2\cdot 2^n=2^{n+1}$,
tehát igaz az állítás.

3631. $(2+1)(2^2+1)\ldots(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$ (n pozitív egész).
$n=1$-re $(2+1)(2^2+1)=2^{2^2}-1$; $3\cdot 5=2^4-1$ ez igaz.
Tegyük fel, hogy igaz n-re.
Bizonyítandó: $(2+1)(2^2+1)\ldots(2^{2^n}+1)(2^{2^{n+1}}+1)=2^{2^{n+2}}-1$.
Behelyettesítve a feltételt:
$(2^{2^{n+1}}-1)(2^{2^{n+1}}+1)=(2^{2^{n+1}})^2-1=2^{2\cdot 2^{n+1}}-1=2^{2^{n+2}}-1$,
tehát igaz az állítás (alkalmaztuk az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ azonosságot).

3632. $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots n(3n+1)=n(n+1)^2$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re: $1\cdot 4=1\cdot(1+1)^2$; $4=4$.
2. Feltételezzük, hogy n-re igaz; erről bizonyítjuk $(n+1)$-re
$1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.
Bizonyítandó:
$1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)+(n+1)(3n+4)=(n+1)(n+2)^2$.
Behelyettesítve a feltételt:
$n(n+1)^2+(n+1)(3n+4)=(n+1)(n+2)^2$,
$(n+1)(n^2+n+3n+4)=(n+1)(n^2+4n+4)$
ez igaz, tehát az állítást igazoltuk.

3633. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$
(n pozitív egész).
Teljes indukció:
1. $n=1$-re $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$; $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
2. Feltételezzük, hogy n-re igaz:
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.
Bizonyítandó:
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=$
$=\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$.
Behelyettesítve a feltételt:
$\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+$
$+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$.
Bizonyítandó: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$.
$\frac{2(2n+1)+1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{2n+2+2n+1}{(2n+1)(2n+2)}$,

$$\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}$$

ez igaz, tehát az állítás igaz.

3634. $6 \mid n(2n+1)(7n+1)$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $6 \mid 1 \cdot 3 \cdot 8$ $6 \mid 24$ ez igaz.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, tehát
(1) $n(2n+1)(7n+1) = 6A$ (A pozitív egész szám).
Bizonyítandó, hogy $(n+1)(2n+3)(7n+8)$ osztható hattal.
Átalakítjuk a kifejezést:

$(n+1)(2n+3)(7n+8) = 14n^3+51n^2+61n+24 =$
$= 14n^3+9n^2+n+42n^2+60n+24.$ (2)

A feltétel szerint: $14n^3+9n^2+n = 6A$, ezt behelyettesítve (2)-be kapjuk: $(n+1)(2n+3)(7n+8) = 6A+6(7n^2+10n+4)$. A kifejezés mindkét tagja osztható 6-tal, tehát az összeg is.

3635. $6 \mid (n^2+5) \cdot n$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $6 \mid (1^2+5) \cdot 1$ $6 \mid 6$ ez igaz.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, tehát

$n(n^2+5) = 6A$ (A pozitív egész szám).

Átalakítva: $n^3+5n = 6A$.
Bizonyítandó: $B = (n+1)[(n+1)^2+5]$ osztható 6-tal.
Átalakítva: $B = (n+1)(n^2+2n+6) = n^3+3n^2+8n+6 =$
$= \underbrace{n^3+5n}_{6A}+3n^2+3n+6 = 6A+3n(n+1)+6.$

A kifejezés első és utolsó tagja 6-tal osztható; a középső tagban az n és $(n+1)$ két szomszédos szám, ezért egyik biztosan páros, így az is osztható $3 \cdot 2 = 6$-tal. Tehát az állítás igaz.

3636. $5 \mid 2^{4n+1}+3$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $5 \mid 2^5+3$ $5 \mid 35$.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, vagyis $2^{4n+1}+3 = 5A$ (A pozitív egész).
Bizonyítandó: $B = 2^{4n+5}+3$ osztható 5-tel.
Átalakítva: $B = 2^{4n+1} \cdot 2^4+3 = 16 \cdot 2^{4n+1}+3$.
A feltételből: $2^{4n+1} = 5A-3$; ezt behelyettesítve:
$B = 16(5A-3)+3 = 80A-45$, ez valóban osztható 5-tel.

3637. $120 \mid n^5-5n^3+4n$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $120 \mid 1-5+4$ $120 \mid 0$.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, vagyis $n^5-5n^3+4n = 120A$.
Bizonyítandó:

$B = (n+1)^5-5(n+1)^3+4(n+1) = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+$
$+5n+1-5(n^3+3n^2+3n+1)+4(n+1) = n^5+5n^4+5n^3-5n^2-6n$

osztható 120-szal. Átalakítva és behelyettesítve a feltételt:

$B = \underbrace{n^5-5n^3+4n}_{120A}+5n^4+10n^3-5n^2-10n =$
$= 120A+5(n-1)(n+1)n(n+2).$

Itt a második kifejezésben négy szomszédos szám áll, közöttük biztosan van hárommal osztható, és van két páros szám, ezek egyike 2-vel, másik 4-gyel osztható, ezért a kifejezés osztható $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$-szal, így az egész kifejezés is.
Megjegyzés: a feladat egyszerűbben bizonyítható, ha az eredeti kifejezést szorzattá alakítjuk:

$n^5-5n^3+4n = n(n^2-1)(n^2-4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$

Ez öt egymást követő szám, van közte 2-vel, 4-gyel, 3-mal és 5-tel osztható, ezért szorzatuk osztható $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$-szal.

3638. $8 \mid 5^n+2 \cdot 3^{n-1}+1$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $8 \mid 5+2+1$ $8 \mid 8$, ez igaz.
2. feltesszük, hogy n-re igaz, vagyis $5^n+2 \cdot 3^{n-1}+1 = 8A$.
(A pozitív egész); ebből $5^n = 8A-2 \cdot 3^{n-1}-1$.
Bizonyítandó, hogy $B = 5^{n+1}+2 \cdot 3^n+1 = 5 \cdot 5^n+2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1}+1$.
Behelyettesítve a feltételt:

$B = 5(8A-2 \cdot 3^{n-1}-1)+2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1}+1 = 5 \cdot 8A-10 \cdot 3^{n-1}-5+$
$+6 \cdot 3^{n-1}+1 = 40A-4 \cdot 3^{n-1}-4 = 40A-4(3^{n-1}+1).$

A második kifejezésben 3^{n-1} mindig páratlan, ha n pozitív egész, ezért a zárójelben páros szám áll, ennek 4-szerese osztható 8-cal; az első tag is, tehát az egész kifejezés is.

3639. $6 \mid n^3-n$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $6 \mid 1-1$ $6 \mid 0$ ez igaz.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, vagyis $n^3-n = 6A$ (A pozitív egész).

Bizonyítandó: $B = (n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+2n$ osztható 6-tal.
Átalakítva és behelyettesítve a feltételt:

$$B = \underbrace{n^3-n}_{6A}+3n^2+3n = 6A+3n(n+1).$$

Itt a második kifejezésben két szomszédos szám szerepel, egyik biztosan páros, ezért a szorzat osztható $3 \cdot 2 = 6$-tal, így B is.
Megjegyzés: itt is egyszerűbb a szorzattá alakítás:

$n^3-n = n(n-1)(n+1)$.

Három egymást követő szám között van páros és hárommal osztható, szorzatuk osztható 6-tal.

3640. $3^n > n^3$, ha $n > 3$ és n egész.
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=4$-re $3^4 > 4^3$ $81 > 64$, ez igaz.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, vagyis

$3^n > n^3$.

Bizonyítandó, hogy $3^{n+1} > (n+1)^3$; $3 \cdot 3^n > n^3+3n^2+3n+1$.
A feltételt 3-mal szorozva kapjuk: $3 \cdot 3^n > 3n^3$; bizonyítandó tehát, hogy $3n^3 > n^3+3n^2+3n+1$; $2n^3 > 3n^2+3n+1$; $n^3+n^3 > 3n^2+3n+1$.
Figyelembe véve, hogy $n > 3$, ezért $n^3 > 3n^2$; $n^3 = n^2 \cdot n > 9n > 3n+1$, így $n^3+n^3 > 3n^2+3n+1$, tehát az állítás igaz.

3641. $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1}+1$.
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $a_1 = 2^1-1 = 1$, ez igaz.
2. Feltesszük, hogy igaz n-re

$a_n = 2^n-1$.

Bizonyítandó: $a_{n+1} = 2^{n+1}-1$.
A képzési szabályt és a feltételt felhasználva:

$a_{n+1} = 2(2^n-1)+1 = 2^{n+1}-1$,

tehát igaz az állítás.

3642. $18 \mid 2^{2n}+24n-10$ (n pozitív egész).
A bizonyítás teljes indukcióval történik:
1. $n=1$-re $18 \mid 2^2+24-10$ $18 \mid 18$.
2. Feltesszük, hogy n-re igaz, vagyis

$2^{2n}+24n-10 = 18A$ (A pozitív egész).
Ebből $2^{2n} = 18A-24n+10$.

Bizonyítandó, hogy $B = 2^{2n+2}+24(n+1)-10$ osztható 18-cal.
Átalakítva:

$B = 4 \cdot 2^{2n}+24n+24-10 = 4(18A-24n+10)+24n+14 =$
$= 4 \cdot 18A-72A+54$;

itt minden tag osztható 18-cal, tehát az összeg is, ezért az állítás igaz.

Sorozatok konvergenciája. Differenciálszámítás

3643. Egy sorban a szimmetrikusan elhelyezkedő számok összege állandó, a

$kn+1,\ kn+2,\ \ldots,\ kn+n-1,\ kn+n$

sorban $(2k+1)n+1$. Ezért az átlókra írt számok helyett összeadhatjuk az első és az utolsó oszlopban levő számokat:

$x = 1+(n+1)+(2n+1)+\ldots+[(n-1)n+1]+$
$+(n+2n+\ldots+n\cdot n) = n+n^3.$

Páros n esetén ez a keresett összeg. Ha az n páratlan, akkor ebből le kell vonni a középső számot, amelyet kétszer vettünk figyelembe:

$$y = n+n^3-\frac{n^2+1}{2}.$$

3644. Adjuk hozzá mindegyik páros sorszámú taghoz az utána következőt:

$-2\cdot 3+3\cdot 4 = 2\cdot 3;$
$-4\cdot 5+5\cdot 6 = 2\cdot 5;$
$\vdots$
$-98\cdot 99+99\cdot 100 = 2\cdot 99.$

Ezért az adott összeg $2(1+3+5+\ldots+99)$ alakban is felírható. A számtani sorozat összegképletével megkapjuk az összeg értékét: 5000.

3645. Megfelel két konstans sorozat is. – Másféle példa: $(2n^2)$ növekedő, $(-n)$ fogyó, az összegük növekedő.

3646. Nem igaz; ha például mindkét sorozat negatív tagokból áll és növekedő akkor a szorzatuk fogyó. Például $\left(-\frac{1}{n}\right)$ és $\left(-\frac{2}{n}\right)$ növekedő, a szorzatuk $\left(\frac{2}{n^2}\right)$ fogyó.

3647. Nem feltétlenül igaz. Például (n) és (n^2) növekedő, $\left(\frac{n}{n^2}\right)$ fogyó.

3648. Nem, például $\frac{1}{n}:\frac{1}{n^2} = n$ esetében a hányados nem korlátos.

3649. A konvergencia definíciója szerint minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $k\in\mathbf{N}^+$, hogy ha $n>k$, akkor $|a_n-A|<\varepsilon$. Ugyanez a k azt is biztosítja, hogy $|b_n-A|<\varepsilon$ legyen.

3650. Nem, például az

$(a_n) = \left(5n^2+\frac{2}{n}\right)$ és a $(b_n) = \left(5n^2+\frac{1}{n}\right)$ esetben

$\lim(a_n-b_n) = 0$, de sem (a_n) sem (b_n) nem konvergens.

3651. Nem, például legyen

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 5, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha páratlan.} \end{cases}$$

Most sem az (a_n), sem a (b_n) nem konvergens, a szorzatok viszont, az $(a_nb_n) = (0)$ konvergens és a határértéke 0.

3652. Nem, legyen például $(a_n) = (n+2)$ és $(b_n)=(n)$.

3653. Nem; lehet például az is, hogy mindkettőnek $(-\infty)$ a határértéke. Az is lehet, hogy egyiknek sincs végtelen határértéke, például legyen

$$(a_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ n, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \end{cases} \qquad (b_n) = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

3654. Nem; lásd a **3653.** feladatnál megadott (a_n) és (b_n) sorozatot!

3655. Adjunk meg egy $\varepsilon>0$ számot. Ehhez, a konvergencia definíciója szerint, tartozik egy olyan $k\in\mathbf{N}^+$ szám, hogy ha $n>k$, akkor $|a_n-5|<\varepsilon$. Ha most az $n>k+1$, akkor $|b_n-5|<\varepsilon$ is fennáll, vagyis a (b_n) konvergens és a határértéke szintén 5.

3656. Ha a (b_n) konvergens lenne, akkor az (a_n+b_n) és a (b_n) különbségének, az (a_n)-nek is konvergensnek kellene lennie, ez azonban ellentmond a feltételnek. – Például legyen

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ -3, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases} \quad \text{és} \quad b_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 4, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

vagy legyen $(a_n) = (n^2+3)$ és $(b_n) = (5-n^2)$.

3657. Ez a konvergencia definíciójából következik. A határérték (b_n) esetében is a 2.

3658. Legyen $(c_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$. Ekkor a $(b_n) = \left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ konvergens és $\lim (b_n) = \frac{\lim (a_n)}{\lim (c_n)} = \frac{0}{1} = 0$.

Például $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ és $(b_n) = \frac{1}{n+1}$.

Megjegyzés: ha a (c_n) sorozatban a 0 is szerepel, akkor a fenti vizsgálatot csak olyan $k \in \mathbf{N}^+$ indextől kezdve végezzük el, ahol a 0 már nem lép fel. Ezt megtehetjük, mert $\lim (c_n) = 1$.

3659. (q^n) konvergens, ha $-1 < q \leqq 1$, tehát a $-1 < \frac{t+4}{2t-3} \leqq 1$ egyenlőtlenség-rendszert kell megoldani. A megoldás: $t \geqq 7$ vagy $t < -\frac{1}{3}$.

3660. $a_n = [(2-t)(t-1)]^n = (-t^2+3t-2)^n$; $t \neq -1$. E sorozat konvergens, ha $-1 < -t^2+3t-2 \leqq 1$, vagyis ha $t \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

3661. (a_n+b_n) nem konvergens, határértéke $+\infty$. $a_n b_n = \frac{2n^3-n^2-2n+1}{n^3+n}$; $\lim (a_n b_n) = 2$, a legmagasabbfokú tagok hányadosa.

3662. $\left(\frac{1}{a_n}\right) = \left(\frac{1}{a_1+(n-1)d}\right) = \left(\frac{1}{nd+(a_1-d)}\right)$, tehát a nevező magasabbfokú, mint a számláló, ezért a határérték 0.

3663. $a_1 = 2$; $d = 5$; $S_n = \frac{1}{2}(5n^2-n)$.

3664. Ha $0 < q < 1$, akkor az $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ érték abszolútértéke nagyobb $|a_1|$-nél minden pozitív egész n esetén, tehát $|b_n| = |S_1+S_2+\ldots+S_n| > n|a_1|$. Ebből következik, hogy a (b_n) nem korlátos és így konvergens sem lehet, hacsak $a_1 \neq 0$.

3665. Legyen $a_n = a_1+(n-1)d$ és $b_n = b_1+(n-1)e$. Ekkor $a_n-b_n = (d-e)n+(a_1-b_1-d+e)$.

Ha $d \neq e$, akkor ez elsőfokú kifejezés, tehát az (a_n-b_n) nem konvergens. Ezért kell, hogy $d=e$ legyen. Ha a határérték 0, akkor kell, hogy $a_1 = b_1$ legyen, vagyis minden n-re egyenlő a_n és b_n.

3666. Kifejezzük a_1-gyel és d-vel az $\frac{S_n}{a_1^2}$ hányadost. Az n^2-et tartalmazó tagok hányadosa $\frac{1}{2d}$. Ez az adott határértékkel, 2-vel egyenlő. Tehát $d = \frac{1}{4}$.

3667. $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n = \frac{dn^2+(2a_1-d)n}{2}$, ezért az $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ csak akkor lehet konvergens, ha $d=0$. Az adott határértékből következik, hogy $a_1 = 2$.

3668. $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{d_a}{d_b}$, $\lim \left(\frac{S_n}{R_n}\right) = 3$.

3669. Ha a két sorozatban a differencia d, illetve e, akkor $\lim \left(\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}\right) = \frac{d-e}{d+e}$. Ha ez $\frac{1}{2}$-del egyenlő, akkor $d:e = 3$.

3670. $\frac{S_n}{a_n} = \frac{a_1(2^n-1)}{a_1 \cdot 2^{n-1}} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$. Ennek a határértéke 2.

3671. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; $\lim (a_n) = 0$.

3672. $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$; $\lim (a_n) = \frac{1}{2}$.

3673. $a_n = \frac{n^2-(n^2+4n)}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \frac{-4}{1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}$; $\lim (a_n) = -2$.

3674. $\lim (a_n) = 0$.

3675. $a_n = \sqrt[3]{n} - \frac{1}{n}$; nincs véges határértéke; $\lim (a_n) = +\infty$.

3676. $a_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} : \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$; $\lim (a_n) = 2$.

3677. Van a 3 helynek olyan környezete, például a [2,5; 3,5], ahol, a 3 helyet kivéve az f értelmezve van; és f kiterjeszthető úgy, hogy e kiterjesztés a 3 helyen folytonos legyen, mert polinomfüggvényről van szó.

3678. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_6 f = \frac{1}{6}$; $\lim_0 f$ nem létezik.

3679. $f(x) = x+1$; $\lim_{-3} f = -2$.

3680. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$; $\lim_1 f = \frac{1}{2}$.

3681. Az f a 4 helyen folytonos, ezért $\lim_4 f = f(4) = \frac{20}{3}$.

3682. $\lim_0 f = f(0) = -\frac{1}{8}$; a ± 2 hely környezetében az f nem korlátos, ezért itt nincs véges határértéke.

3683. Kell, hogy a számláló értéke 0 legyen az 1 helyen; $t=2$.

3684. Kell, hogy a tört egyszerűsíthető legyen a nevezővel, ezért $x^2-ax+2a-4 = x^2-4x+4$; $a=4$.

3685. Gyöktelenníteni kell a számlálót; $\lim_0 f = \frac{1}{2}$.

3686. Egyszerűsíteni kell a törtet $(x+1)$-gyel; $\lim_{-1} f = -\frac{3}{2}$.

3687. Egyszerűsíteni kell $(\sqrt{x}-1)$-gyel; $\lim_1 f = \frac{1}{2}$.

3688. $\lim_0 f = \frac{t}{2}$; $\lim_{\frac{t}{2}} f = \frac{3t}{4-t}$. Ezek egyenlők, ha $t=0$ vagy $t=-2$.

3689. Kell, hogy a számláló értéke a 2 helyen 0 legyen; $a=-3$; $\lim_2 f = 1$.

3690. $\lim_0 f = f(0) = \frac{t}{2} = -6$, tehát $t=-12$.

3691. $a=6$.

3692. Az f nem korlátos a 0 hely környezetében.

3693. A tört számlálója az 5 helyen 0, ezért $a=6$; $b=4$.

3694. $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$; $a=3$.

3695. Nem, például $f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x<1, \\ x+1, & \text{ha } x \geqq 1. \end{cases}$

3696. Nem, például $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

3697. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

3698. A függvényt $x \mapsto ax^2+bx+c$ alakban keressük. $a=2$, $b=-4$, $c=2$.

3699. Az inverz függvény grafikonjának az x tengely az érintője a 0 pontban, e függvényé az y tengely. Az y tengely irányszöge 90°, ennek nincs tangense.

3700. $a=2$.

3701. A 0 helyen nem deriválható!

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x>0, \\ -\cos x, & \text{ha } x<0. \end{cases}$$

3702. $f(x)=x^{\frac{7}{8}}$; $f'(x) = \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}}$; $x \in]0; +\infty[$.

3703. $f'(x) = \begin{cases} 4x^3-18x^2+26x-12, & \text{ha } x \notin [1;2], \\ 0, & \text{ha } x \in [1;2]. \end{cases}$

3704. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$; $f'(1) = 0$.

3705. $a = 1$.

3706. A 0 helyen a jobb oldali derivált 1, a bal oldali -1.

3707. Csak a -1 helyen lehetne probléma, de ott sincs, mert a jobb és a bal oldali derivált egyenlő (0).

3708. $(fg)(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x)$; $(fg)'(x) = x - \frac{3}{2}$.

3709. $\frac{f}{g}(x) = \frac{5x^2+5}{x^3+3x^2+2x}$; $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{-5x^4-5x^2-30x-10}{(x^3+3x^2+2x)^2}$.

3710. $\frac{f}{g}(x) = \frac{5x^3-3x}{x^2-1}$; $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{5x^4-12x^2+3}{x^4-2x^2+1}$.

3711. $]-5; 5[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto 6x^5 + 20x^3 - 6x$.

3712. Ez a függvény egyenlő a $]2; 15[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ függvénnyel, deriváltja: $]2; 15[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2$.

3713. $\left(\frac{x^5-x}{2x^2+2}\right)' = \left[\frac{1}{2}(x^3-x)\right]' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

3714. $\left(\frac{x^3-5x^2+1}{x-4}\right)' = \frac{2x^3-17x^2+40x-1}{x^2-8x+16}$.

3715. $f'(x) = -\frac{3x^2+6x+3}{(x^3+3x^2+3x)^2}$, $f'(1) = -\frac{12}{49}$.

3716. $f'(1) = 2$.

3717. $f' : D_f \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{-2x^2+6x-2}{x^4-2x^2+1}$.

3718. A szorzat elsőfokú tagjának a deriváltját kell meghatározni. $f'(0) = 10$!.

3719. Az $x \mapsto x^3 - 6x$ deriváltjának a zérushelyei: $\pm\sqrt{2}$, e helyeken adódik a keresett érintő. $E_1(\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$; $E_2(-\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.

3720. A keresett pontban az $x \mapsto 2x^2 - x^3$ függvény deriváltja 1-gyel egyenlő. $E_1(1; 1)$; $E_2\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{27}\right)$.

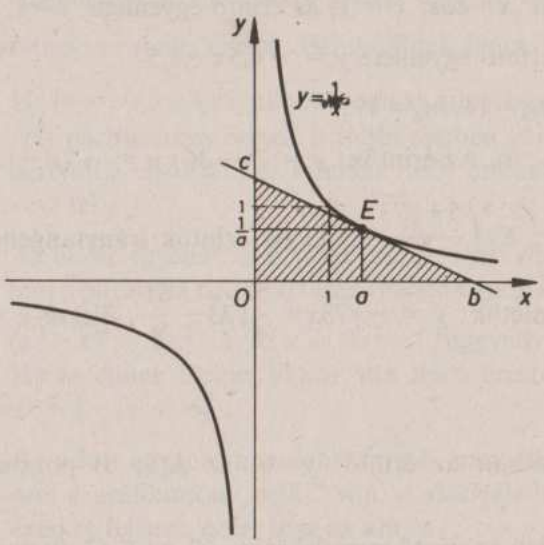
3721. A derivált 0, ha $x = 0$ vagy $x = 1$; az érintési pontok: $E_1(0; 2)$; $E_2(1; 1)$. – A derivált $-1{,}5$, ha $x = \frac{1}{2}$; az érintési pont: $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

3722. $y = 6 - 6x$.

3723. A derivált a 0 helyen egyenlő 1-gyel.

3724. Az érintő iránytangense 1 vagy -1. $P_1\left(\frac{1}{4}; 0\right)$; $P_2\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$.

3725. Elég a pozitív x-ek vizsgálata (**3725.** ábra). Egy $E\left(a; \frac{1}{a}\right)$ pontban az érintő egyenlete: $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$, a tengelyekből levágott szakaszok: $b = 2a$, $c = \frac{2}{a}$; a háromszög területe: $\frac{1}{2}bc = 2$ (állandó).



3725

3726. Az érintő: $y - 3 = m(x - 2)$, egy közös pontja van az $y = x^2$ egyenletű parabolával. Az m-et úgy kell megadnunk, hogy az $x^2 - 3 = m(x - 2)$ egyenlet diszkriminánsa 0 legyen. $m_1 = 2$, $m_2 = 6$. Az érintők: $y = 2x - 1$; $y = 6x - 9$.

3727. Az érintők egyenletét $y+\frac{1}{4}=m(x+1)$ alakban keressük. Feladatunknak olyan m felel meg, amely esetén az $x^2+\frac{1}{4}=m(x+1)$ egyenlet diszkriminánsa 0. $D=m^2+4m-1=0$, itt a két gyök szorzata -1, tehát az m_1 és az m_2 iránytangensű egyenes merőleges egymásra.

3728. Az érintők iránytangense $2+a$, egyenletük $y=(2+a)x$; átmennek az origón.

3729. *a)* Páratlan függvényről van szó, a $\pm a$ helyeken egyenlő a derivált, párhzamosak az érintők. *b)* Az origó.

3730. $P(0;\ 8)$; $y=-12x+8$.

3731. $y=0$.

3732. A π helyen vett érintő iránytangense $-\pi^2$, az egyenlet: $y=\pi^3-\pi^2 x$.

3733. $(f+g^2)(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, az érintő egyenlete: $y=1$.

3734. $E(-2;\ 3{,}5)$, az érintő egyenlete $y=-4{,}5x-5{,}5$.

3735. $m_1=1$, $m_2=7$, $m_3=13$, $m_4=19$.

3736. $E_1(6;\ 6)$; $E_2(-1;\ 6)$. Az érintők: $y=7x-36$; $y=-7x-1$.

3737. $E_1\left(\frac{5-\sqrt{73}}{4};\ 3\right)$; $E_2\left(\frac{5+\sqrt{73}}{4};\ 3\right)$. Az érintők iránytangense $-\sqrt{73}$, illetve $\sqrt{73}$, egyenletük: $y=-\sqrt{73}x+\frac{5}{4}\sqrt{73}-\frac{61}{4}$, illetve $y=\sqrt{73}x-\frac{5}{4}\sqrt{73}-\frac{61}{4}$.

3738. Az $O(0;\ 0)$ pontban az érintő: $y=0$, az $E(5;\ 0)$ pontban pedig $y=25x-125$.

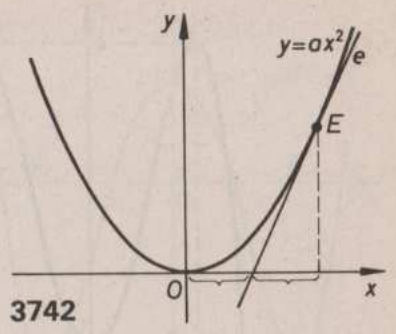
3739. Az $O(0;\ 0)$ pontban az érintő meredeksége -9, az $E_1(3;\ 0)$ pontban 18, az $E_2(-3;\ 0)$ pontban 18.

3740. A $O(0;\ 0)$ pontban: $y=0$, az $E(1;\ 0)$ pontban $y=x-1$.

3741. $P(0;\ 3)$; az érintő: $y=2x+3$.

3742. $E_1(0;\ \sqrt{2})$; $E_2(0;\ -\sqrt{2})$; az érintők: $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\sqrt{2}$.

A megoldás könnyű, ha tudjuk, hogy a parabola érintője a csúcsérintőből feleakkora szakaszt metsz le, mint az érintési ponttól induló merőleges (**3742.** ábra).



3742

3743. Azt a helyet keressük, ahol a derivált 9-cel egyenlő. Két ilyen pont van: $P(3;\ 1)$ és $Q(-1;\ -3)$, közülük P illeszkedik az egyenesre, Q nem. – Más módszer: a két görbe közös pontjait keressük, az egyenletrendszer megoldásával. Az

$x^3-3x^2-9x+27=(x+3)(x-3)^2=0$

egyenletnek a 3 kétszeres gyöke, tehát itt van érintkezés.

3744. Nincs; ez maga érintő. Parabolának nincs 2 párhuzamos érintője.

3745. Ha $m=-5\pm4\sqrt{5}$, akkor maga az adott egyenes az érintő, ekkor nincs vele párhuzamos érintő, a többi esetben van. (A másodfokú függvény deriváltja elsőfokú, ez minden valós értéket egyszer és csakis egyszer vesz fel.)

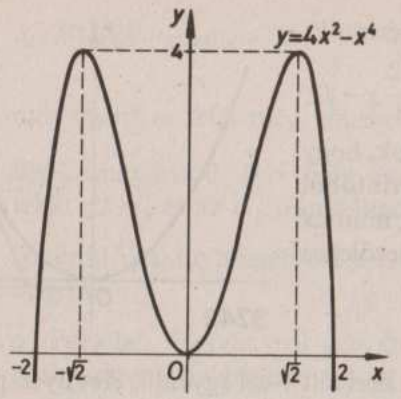
3746. Az adott egyenes nem lehet érintő, mert illeszkedik a $P(0;\ 3)$ pontra, ami a parabola belső tartományában van. Ezért az állítás igaz (l. **3745.**).

3747. $(x^3-x)'=3x^2-1$, az $x\mapsto 3x^2-1$ függvény értékkészlete: $[-1;\ +\infty[$. Ha m ennek eleme, akkor van ilyen érintő, egyébként nincs. Tehát $D=[-1;\ +\infty[$.

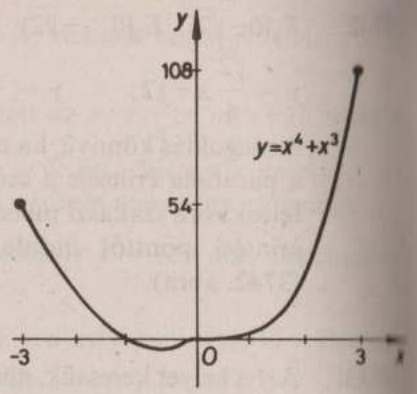
3748. Az adott egyenes nem lehet érintő, mert illeszkedik a $P(0;\ 2)$ pontra, ami a grafikonon „belül" van. A derivált harmadfokú, minden valós értéket felvesz, ezért igaz az állítás.

3749. Lásd a **3749.** ábrát.

3750. Abszolút minimum a $-\frac{3}{4}$ helyen $-\frac{27}{256}$, abszolút maximum a 3 helyen 108. A függvény fogyó a $\left[-3;\ -\frac{3}{4}\right]$-ban, növekedő a $\left[-\frac{3}{4};\ 3\right]$-ban. Az x tengely inflexiós érintő (**3750.** ábra).



3749



3750

3751. Az $y=x^3$ görbét kell eltolni a (0; 1), illetve a (2; 1) vektorral.

3752. $x \mapsto -x^3-5x$.

3753. Aszimptoták: $x=1$; $y=x+1$. Növekedő a $]-\infty; 0]$ és a $[2; +\infty[$, fogyó a $[0; 1[$ és az $]1; 2]$ intervallumon. Lokális minimum a 2 helyen 4, lokális maximum a 0 helyen 0. Értékkészlet: $\mathbf{R} \setminus]0; 4[$.

3754. Növekedő a $]-2; 0[$, fogyó a $]-\infty; -2]$ és a $]0; +\infty[$ intervallumon, értékkészlete $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ (**3754.** ábra). ÉT: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

3755. Növekedő a $]-\infty; -2]$ és a $[6; +\infty[$ intervallumon, fogyó a $[-2; 6]$ intervallum.

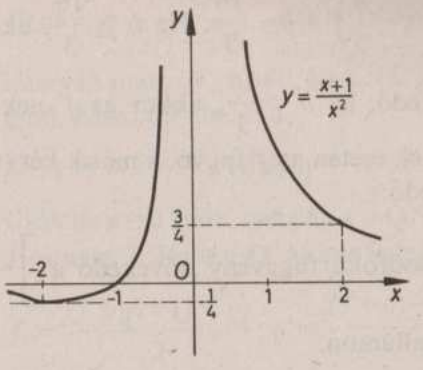
3756. Abszolút minimum a -10 helyen -1240, abszolút maximum a 10 és a -2 helyen 40.

3757. Abszolút minimum a -6 helyen -66, abszolút maximum a 6 helyen 66.

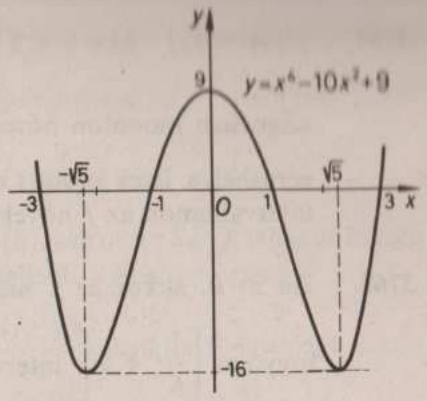
3758. Abszolút minimum a $\pm\sqrt{5}$ helyeken -16, lokális maximum a 0 helyen 9 (**3758.** ábra).

3759. A függvény szigorúan monoton fogyó, értékkészlete: $]-\infty; 12]$.

3760. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$. Nincs sem abszolút, sem lokális szélsőérték, mert $\mathbf{Z} \not\subset D_f$.



3754



3758

3761. Értékkészlet: $[-168{,}75; +\infty[$. Minimumhely: 7,5. Fogyó $]-\infty; 7{,}5]$ intervallumon, növekedő a $[7{,}5; +\infty[$ intervallumon.

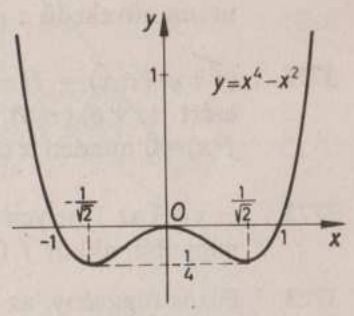
3762. Értékkészlet: $\left[-\frac{25}{96}; +\infty\right[$. Minimumhely: $\frac{5}{8}$. Zérushely a 0 és az $\frac{5}{4}$. Fogyó $\left]-\infty; -\frac{25}{96}\right]$, növekedő a $\left[-\frac{25}{96}; +\infty\right[$ intervallumon.

3763. f növekedő, ahol $f'(x) \geqq 0$, a $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ intervallumon, f fogyó, ahol $f'(x) \leqq 0$, a $]-\infty; 0]$ és az $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ intervallumon.

3764. f fogyó a $]-\infty; 2]$, növekedő a $[2; +\infty[$ intervallumon (l. **3763.**). A 2 helyen lokális minimum van.

3765. $f'(x)=(x^2-1)(x^2-2)$;
$f'(x) \leqq 0$, ha $|x| \in [1; \sqrt{2}]$, ekkor f fogyó; $f'(x) \geqq 0$, ha $|x| \notin]1; \sqrt{2}[$, ezért az f növekedő a $]-\infty; -\sqrt{2}]$, a $[-1; 1]$ és a $[\sqrt{2}; +\infty[$ intervallumon.

3766. Lásd a **3766.** ábrát.



3766

3767. $f'(x) = 3x^2-8x+b = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+b-\frac{16}{3}$. Ha $b \geqq \frac{16}{3}$, akkor az f szigorúan monoton növekedő, ha $b < \frac{16}{3}$, akkor az f'-nek van két zérushelye. Ezek közötti x-ek esetén az f fogyó, a másik két (végtelen) intervallumon az f növekedő.

3768. Ha $a=0$, akkor az f másodfokú függvény növekedő a $\left]-\infty; \frac{1}{6}\right]$, fogyó az $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right[$ intervallumon.

Ha $a>0$, akkor $f'(x) = 3ax^2-12x+2$, f' grafikonja „felfelé" nyitott parabola. Ha a $D = 24(6-a)$ diszkrimináns nem pozitív, vagyis ha $a \geqq 6$, akkor $f'(x) \geqq 0$ minden x-re, tehát f szigorúan monoton növekedő. Ha $D>0$, vagyis $a \in]0; 6[$, akkor az $f'(x) = 0$ egyenlet két gyöke $\frac{6 \pm \sqrt{36-6a}}{3a}$, f szigorúan monoton fogyó a $\left[\frac{6-\sqrt{36-6a}}{3a}; \frac{6+\sqrt{36-6a}}{3a}\right]$ intervallumban és szigorúan monoton növekedő a másik két (végtelen) intervallumban. – Hasonló a helyzet az $a<0$ esetben, ott „lefelé" nyitott paraboláról van szó.

3769. $f'(x) = 1+\cos x \geqq 0$ minden x-re, ezért az f szigorúan monoton növekedő.

3770. $g(x) := x^2+\frac{1}{4x}$, ekkor $g'(x) = 2x-\frac{1}{4x^2} = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$. Itt lokális minimum van: $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Ez abszolút minimum is, mert előtte fogyó, utána növekedő a g.

3771. $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)+g(x)$. Mivel $f+g$ páros, ezért $(f+g)(-x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Tehát $f(x) = -f(x)$; $f(x)=0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

3772. $-x+3$ az 1 helyen 2-vel egyenlő, ha $-3x+t$ az 1 helyen a 2-nél nem nagyobb, akkor f fogyó. Tehát $t-3 \leqq 2$; $t \leqq 5$.

3773. Páros függvény, az $\mathbf{R}^-$-on fogyó, az $\mathbf{R}^+$-on növekedő.

3774. $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$. $f'(x) \geqq 0$, ha $x \leqq 1$, tehát f növekedő a $]0; 1]$ intervallumon; $f'(x)<0$, ha $x>1$, tehát f fogyó az $[1; +\infty[$ intervallumon. Maximumhely: 1.

3775. $f'(x) = 3(x-1)^2$, tehát $a=-3$; $b=3$; $c=2$.

3776. Csak az $x=0$ gyök, mert ha $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, akkor $x\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, tehát az összeg 1 és nem 2. Ha $x \notin \mathbf{Q}$, akkor is legfeljebb 1 lehet az összeg.

3777. $f = \frac{(f+g)+(f-g)}{2}$; $g = \frac{(f+g)-(f-g)}{2}$, és páros függvények összege, különbsége, $\frac{1}{2}$-szerese is páros.

3778. A minimum $f(0)=3$.

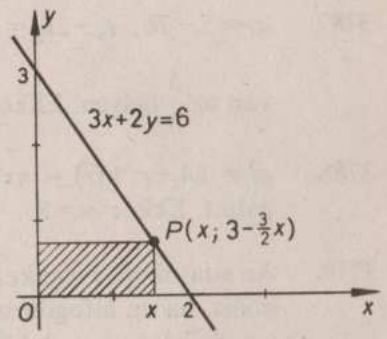
3779. Az értékkészlet: $\{0\}$, mert különben a tengelyes szimmetria miatt egy x-hez 2 függvényérték tartozna.

3780. $|x| = f(x)+g(x)$.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0, \\ x, & \text{ha } x>0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \leqq 0, \\ 0, & \text{ha } x>0. \end{cases}$$

3781. Egy egyenes körhenger sugara r, alkotója b, térfogata 2π. Ekkor $b = \frac{2}{r^2}$, a felszín pedig $A(r) = 2\pi\left(r^2+\frac{2}{r}\right)$. $A'(r)=0$, ha $r=1$. Ez minimumot szolgáltat, az alkotója 2.

3782. A téglalap területe $x\left(3-\frac{3}{2}x\right)$, ez maximális, ha $x=1$ (másodfokú függvény). A téglalap oldalai: 1, $\frac{3}{2}$ (**3782.** ábra).



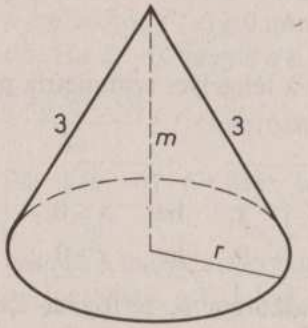
3782

3783. $r^2+m^2=0$, ezért $V(m)=\frac{\pi}{3}(9m-m^3)$. $V'(m)=0$, ha $m=\sqrt{3}$; ez maximumot szolgáltat (**3783.** ábra).

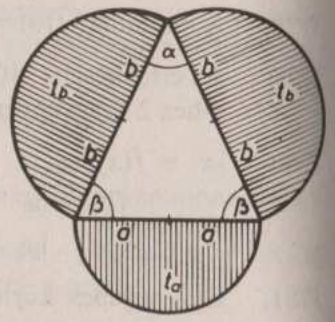
3784. $12=a+b$; $f(a)=a^3+(12-a)^3=36(48-12a+a^2)$. Minimum van, ha $a=6$; maximum nincs.

3785. $1=a+b$; $f(a)=a^3-(1-a)^3=2a^3-3a^2+3a-1$. Az $f'(a)$-nak nincs zérushelye, f-nek nincs szélsőértéke.

3786. $1=a+b$; $a\geqq 0$; $b\geqq 0$. $f(a)=4a^3-6a^2+4a-1$. Az $f'(a)$-nak nincs zérushelye, ezért csak a $[0;1]$ intervallum végpontjaiban lehet a szélsőérték (f szigorúan monoton növekedő). Minimum: $a=0$, $b=1$; maximum: $a=1$, $b=0$.



3783



3787

3787. $a=5-2b$; $t_a+2t_b=\frac{\pi}{2}(a^2+2b^2)$, $f(b)=6b^2-20b+25$, minimuma van az $\frac{5}{3}$ helyen. Ekkor $a=b$, tehát a szögek 60°-osak (**3787.** ábra).

3788. $m=24-r$; $V(r)=\pi r^2(24-r)$. $V'(r)=0$, ha $r=16$, ez maximumot szolgáltat. Ekkor $m=8$.

3789. Az adatokból következik, hogy az átfogó 5 cm. A terület akkor maximális, ha az átfogóhoz tartozó magasság maximális: $m_c=2{,}5$. Ekkor a befogók hossza $2{,}5\sqrt{2}$.

3790. A téglalap oldalai: $15+x$, $15-x$. Az átló négyzete $(15+x)^2+(15-x)^2=$ $=450+2x^2$ akkor a legkisebb, ha $x=0$. A kapott négyzet területe 225.

3791. Ha $P(x;y)$ illeszkedik a keresett görbére, akkor $\frac{y}{2}=\left(\frac{x}{2}\right)^2$; $y=\frac{1}{2}x^2$, tehát $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$.

3792. Ha $P(x;y)$ illeszkedik a keresett görbére, akkor $2y=(2x+1)^2+1$; $y=2x^2+2x+1$, tehát $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $x\mapsto 2x^2+2x+1$.

3793. Az $x\mapsto 2x+3$ inverzét kapjuk; $x\mapsto\frac{1}{2}(x-3)$. *Más módszer:* az adott görbe két pontját tükrözzük: $A(0;3)\mapsto A'(3;0)$; $B\left(-\frac{3}{2};0\right)\mapsto$ $\mapsto B'\left(0;-\frac{3}{2}\right)$, tehát az $A'B'$ egyenes a grafikon.

3794. $f(x)=x^2$.

3795. Legyen $f(x)=ax+b$. Ekkor $f(0)+f(1)=b+(a+b)=0$ és $f(-1)+f(0)=(-a+b)+b=-2$.

Az egyenletrendszerből: $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$.

3796. Az f lineáris törtfüggvény, minden értéket egyszer vesz fel, tehát van inverze. A grafikon szimmetrikus az $y=x$ egyenletű egyenesre, ezért az f önmagának az inverze.

3797. f grafikonja egy negyedkör, ezt tükrözzük az $y=x$ egyenletű egyenesre. Az inverz: $[0;1]\to\mathbf{R}$; $x\mapsto-\sqrt{1-x^2}$.

Integrálszámítás

3798. $t = \frac{2}{3}$.

3799. Külön vizsgálandó az [1; 2,5] és a [2,5; 3]; $t = 2{,}25 + 0{,}25 = 2{,}5$.

3800. $f(x) = 5x - 6$.

3801. $f(x) = 3x^2 - 7$.

3802. $F(x) = x^2 - 5x + 6$.

3803. $f' = g$.

3804. Az y tengely mentén való eltolással átvihetők egymásba.

3805. A primitívfüggvények harmadfokúak, mind felveszik a 2 értéket. Van közöttük olyan, amely éppen a -1 helyen:

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 7\frac{5}{6}.$$

3806. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - 2\frac{1}{6}$.

3807. $f(x) = 2(x+2)^{-3} = \left(-(x+2)^{-2} + c\right)'$, ezért a keresett primitívfüggvény: $(\mathbf{R} \setminus \{2\}) \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \frac{10}{9} - \frac{1}{(x+2)^2}$.

3808. $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 20\frac{14}{15}$.

3809. $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{12}$.

3810. $f' = g$.

3811. $f' = g$.

3812. $F(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 700\frac{5}{12}$.

3813. $f(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$; $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{11}{12}$.

3814. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$; $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x - 1$.

3815. $5\frac{1}{3}$.

3816. *a)* $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + C$; *b)* $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - x + C$.

3817. *a)* $x \mapsto 5x + C$; *b)* $x \mapsto -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$.

3818. 0.

3819. *a), b)* Páratlan függvényt integrálunk, az origóra szimemtrikus intervallumon, tehát az érték 0.

3820. *a)* Szorzás után integráljunk; elhagyhatjuk a páratlan kitevőjű tagokat, mert ezek integrálja a $[-1; 1]$-on 0. Az eredmény $6\frac{2}{3}$. *b)* $\frac{4\sqrt{2}+5}{3} \approx 3{,}55$.

3821. *a)* $-3\frac{2}{3}$; *b)* $-\frac{1}{2}$.

3822. Érdemes grafikont készíteni, erről leolvasható, hogy a $[0; 5]$-on 0 az integrál, ezért csak a $[-1; 0]$-hoz tartozó trapéz kerületét kell kiszámítani: 6.

3823. Az előző integrál ellentettje: -6.

3824. A keresett érték: -2.

3825. $\int_0^2 3\,dx = 6$ (téglalap területe).

3826. $\frac{32}{3}$.

3827. 49 (téglalap területe).

3828. *a)* $x \mapsto -x^5+x^3+x^2-5x+c$; *b)* $f(x) := \dfrac{-3x+2}{x^3} = -3x^{-2}+2x^{-3}$; tehát a határozatlan integrál: $x \mapsto 3x^{-1}-x^{-2}+C$ $(x \neq 0)$. – Más módon: ha egy primitívfüggvény F: $x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2}$ $(x \neq 0)$, akkor $f(x) = F'(x) = \dfrac{-ax-2b}{x^3}$, tehát $a=3$, $b=-1$.

3829. *a)* Integrálás előtt végezzük el a szorzást. – Ha ismerjük az összetett függvény deriválási szabályát, akkor észrevehetjük, hogy az integrandus az $x \mapsto \dfrac{1}{2}(x^2+x)^2+C$ deriváltja. *b)* Köbre emelés után polinomként integráljuk:

$x \mapsto \dfrac{1}{7}x^7+\dfrac{3}{5}x^5+x^3+x+C$.

3830. $f(x) = \sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; $F(x) = \sqrt[3]{2} \cdot \dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$.

3831. $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}+C$.

3832. Két egybevágó háromszög területének összege: 12,5.

3833. Két háromszög területének összege: 18,5 (l. **3822.**).

3834. Három síkidom területének összegét keressük:

$$t = \int_0^4 |f| = \int_2^2 f + \int_2^3 (-f) + \int_3^4 f = 4\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6} = 5\frac{2}{3}.$$

3835. $2\dfrac{2}{3}$.

3836. $4\sqrt{6}$.

3837. 72.

3838. A metszéspontok abszcisszája 1, illetve 5. A két függvény különbségét integráljuk 1-től 5-ig. $t = 10\dfrac{2}{3}$.

3839. $T = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} 5-2x^2\,dx + \int_{\sqrt{\frac{5}{2}}}^4 2x^2-5\,dx = 22\dfrac{2}{3}+\dfrac{10\sqrt{10}}{3} \approx 33{,}21.$

3840. $63\dfrac{3}{4}$.

3841. $5\dfrac{1}{3}$.

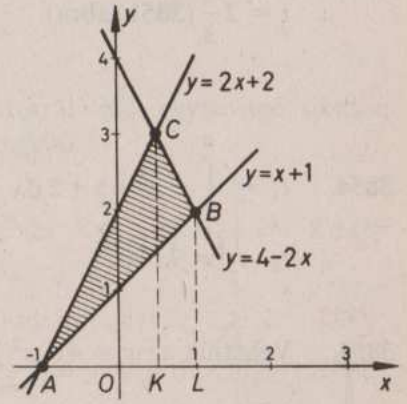
3842. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

3843. A csúcspontok: $A(-1;\,0)$, $B(1;\,2)$; $C\left(\dfrac{1}{2};\,3\right)$. A **3843.** ábra jelöléseivel:

$t = t_{AKC}+t_{KLBC}-t_{ALB} =$

$= 2\dfrac{1}{4}+1\dfrac{1}{4}-2 = 1\dfrac{1}{2}$.

(Természetesen integrállal is kiszámítható a részek területe.)



3843

3844. Egy csonkakúp térfogatát keressük; $r=1$, $R=7$, $m=3$, $V=57\pi$. Másképp: $V = \pi \int_{-1}^{2} (5-2x)^2\,dx$.

3845. Az $E(5;\,12)$ pontban az érintő egyenlete: $y = 6x-18$, a levágott háromszög területe: 27.

3846. $\dfrac{1}{6}$.

3847. A metszéspontok abszcisszája -1, illetve 2. A terület 4,5.

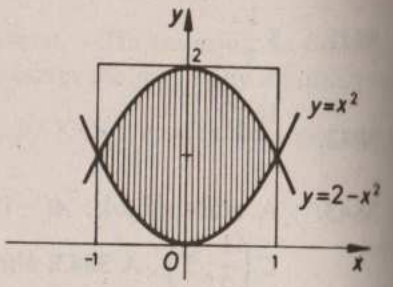
3848. A két függvény különbségét integráljuk (-1)-től 3-ig.

$$t = \int_{-1}^{3} -3x^2+6x+9\,dx = 32.$$

3849. Az 1 és 2 oldalú téglalap harmadrésze a vizsgált terület: $\frac{2}{3}$.

3850. A két függvény különbségét, az $x \mapsto -x^2+5x-6$ függvényt kell integrálni 2-től 3-ig; $t = \frac{1}{6}$.

3851., 3852., 3853. Egy 2 egység oldalú négyzet területének $\frac{2}{3}$ része adódik: $t = 2\frac{2}{3}$ (**3851.** ábra).



3851

3854. $t_1 = \int_{-1}^{0} -x^2+x+2\,dx = \frac{7}{6}$; $t_2 = \int_{0}^{2} -x^2+x+2\,dx = \frac{20}{6}$;

$t_1 : t_2 = 7 : 20$.

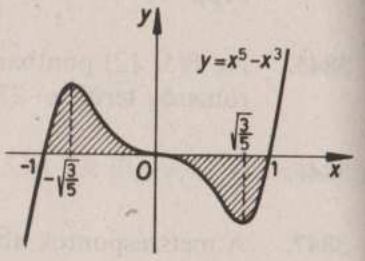
3855. Vehetjük az $y = 4-x^2$ parabolát is; $t = 10\frac{2}{3}$.

3856. A metszéspontok abszcisszái: -2; 0; 1. Két síkidom keletkezik,

$$t_1 = \int_{-2}^{0} x^3+x^2-2x\,dx = 2\frac{2}{3},\ t_2 = \int_{0}^{1} -x^3-x^2+2x\,dx = \frac{5}{12}.$$

3857. Két egybevágó síkidom keletkezik (**3857.** ábra), egyikük területe

$$t = \int_{0}^{1} x^3-x^5\,dx = \frac{1}{12}.$$

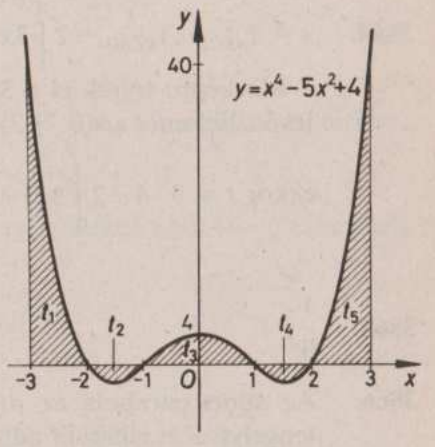


3857

3858. $t = \frac{1}{4}\cdot 5^4 = 156\frac{1}{4}$.

3859. Öt síkidom keletkezik (**3859.** ábra). $t_1 = t_5 = \int_{2}^{3} f = 14\frac{8}{15}$;

$t_2 = t_4 = \int_{1}^{2} |f| = 1\frac{7}{15}$, $t_3 = 5\frac{1}{15}$. A területek összege $37\frac{1}{15}$.



3859

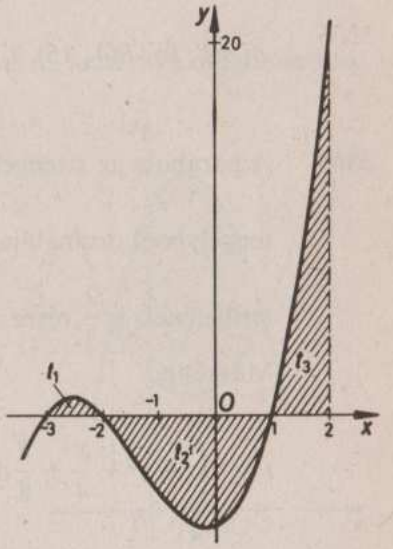
3860. Toljuk el a síkidomot a $\mathbf{v}(1; 0)$ vektorral! Két egybevágó síkidom szerepel, egyikük területe 4, a kettőé együtt 8.

3861. Két síkidom keletkezik: $t_1 = \int_{1}^{2} 8-x^3\,dx = 4\frac{1}{4}$; $t_2 = \int_{2}^{5} x^3-8\,dx = 128\frac{1}{4}$; $t_1+t_2 = 132\frac{1}{2}$.

3862. $f(x) = x^3+4x^2+x-6$. Három síkidom keletkezik (**3862.** ábra)

$t_1 = \int_{-3}^{-2} f = \frac{7}{12}$; $t_2 = \int_{-2}^{1} |f| = 11\frac{1}{4}$; $t_3 = \int_{1}^{2} f = 8\frac{7}{12}$.

$\sum_{i=1}^{3} t_i = 20\frac{5}{12}$.

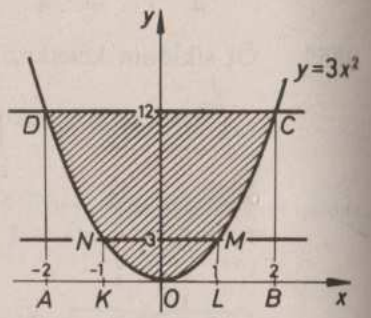


3862

3863. A két függvény különbségét, az $x \mapsto 5$ függvényt kell integrálni (-2)-től 5-ig; $t = 35$ (téglalap területe).

3864. $t = t_{ABCD} - t_{KLMN} - 2\int_1^2 3x^2\,dx = 28$.

– Másképp: toljuk el a **3864.** ábrán levő síkidomot a $\mathbf{v}(0; -3)$ vektorral; ekkor $t = 9 \cdot 4 - 2\int_1^2 3x^2 - 3\,dx$.



3864

3865. $\frac{1}{3}$.

3866. Az adott parabola az $A(-5; 0)$ és a $B(2; 0)$ pontban metszi az x tengelyt. Két síkidom adódik.

$$t_1 = \int_{-5}^{0} 10 - 3x - x^2\,dx = 45\frac{5}{6},\quad t_2 = \int_{0}^{2} 10 - 3x - x^2\,dx = 11\frac{1}{3}.$$

3867. $t = \int_{-3}^{0} -x^2 + x + 12\,dx = 22{,}5$.

3868. Az egyenes egyenlete: $y = 3x + 3$. A metszéspontok: $A(-1; 0)$, $B(4; 15)$. $t = \int_{-1}^{4} -x^2 + 3x + 4\,dx = 20\frac{5}{6}$.

3869. A parabola az x tengelyt a $-\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{2}$ abszcisszájú pontban metszi, a tengelypont ordinátája $\frac{9}{64}$. A parabolaszelet területe egy olyan téglalap területének a $\frac{2}{3}$ része, amelynek az oldalai $\frac{9}{64}$ és $\frac{3}{4}$ hosszúságúak. – Másképp:

$$t = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -x^2 + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\,dx = \frac{9}{128}.$$

3870. A szelő egyenlete: $y = 4x + 9$. A két függvény különbségét kell integrálni -1-től 3-ig. $t = \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\,dx = 21\frac{1}{3}$.

3871. A teljes terület $\int_{-2}^{5} -x^2 + 3x + 10\,dx = 57\frac{1}{6}$, az x tengely alatti terület: $\int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\,dx = 10\frac{2}{3}$, az x tengely feletti rész $46\frac{1}{2}$, a keresett arány: $10\frac{2}{3} : 46\frac{1}{2} = 64 : 279$ (**3871.** ábra).

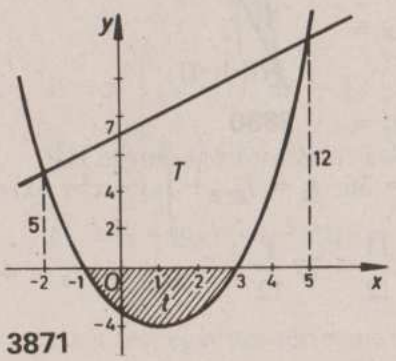
3872. Az érintő egyenlete: $y = 4x - 4$.

$t = \int_{0}^{2} x^2\,dx - 2 = \frac{2}{3}$. Itt egy derékszögű háromszög területét vontuk ki egy parabolikus háromszög területéből.

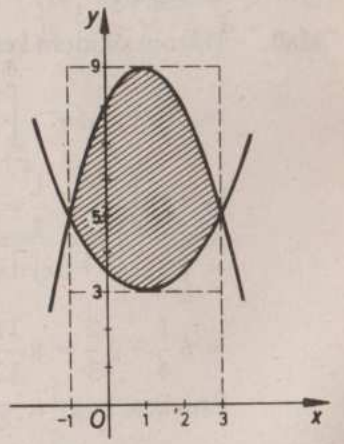
3873. $t = 10\frac{2}{3}$.

3874. $t = 2\frac{2}{3}$ (l. **3872.**).

3875. A vizsgált síkidom egy olyan téglalap $\frac{2}{3}$ része, amelynek oldalhosszúságai 6 és 4. $t = 16$ (**3875.** ábra).



3871

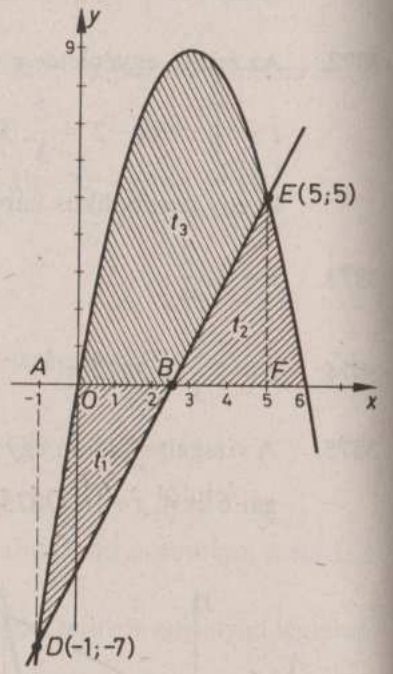


3876. A parabola az x tengelyt a kör átmérőjének a végpontjaiban metszi. Jelöljük t-vel az x tengely által lemetszett parabolaszelet területét. Ekkor a kör részeinek a területe: $t_1 = \frac{1}{2}r^2\pi - t$, $t_2 = \frac{1}{2}r^2\pi + t$. Most $t = \frac{50}{3}$, $r = 5$, tehát $t_1 = 25\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$, $t_2 = 25\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$.

3877. Az $y = x(4-x)$ egyenletű parabola, az $y = 4x$ és az $y = -4x+16$ egyenletű érintő $5\frac{1}{3}$ területű síkidomot határol (egy 4 alapú 8 magasságú egyenlő szárú háromszög területéből kell kivonni a 4 alapú 4 magasságú parabolaszelet területét). Vegyük észre, hogy a két terület aránya 3 : 2.

3878. Egy 10 és 7 oldalú téglalap $\frac{2}{3}$ része a parabolaszelet, $t = 46\frac{2}{3}$.

3879. A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban keressük. Az adott pontok koordinátáit rendre behelyettesítve a $2a+b = -8$, $a-b = 14$, $c = 10$ egyenletekhez jutunk, amelyekből az $y = 2x^2 - 12x + 10$ eredményt kapjuk. E parabola az $A(1; 0)$ és a $B(5; 0)$ pontban metszi az x tengelyt. A levágott parabolaszelet területe $21\frac{1}{3}$.



3880

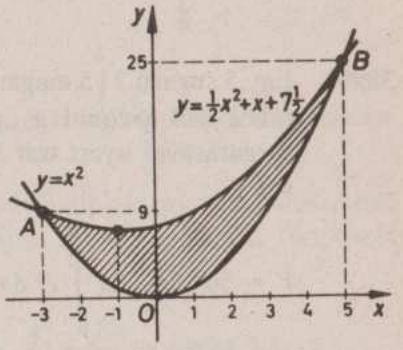
3880. Három síkidom keletkezik (**3880.** ábra). $t_1 = t_{ABD} - \int_{-1}^{0} |-x^2+6x|\,dx = 12\frac{1}{4} - 3\frac{1}{3} = 8\frac{11}{12}$; $t_2 + t_3 = \int_{0}^{6} (-x^2+6x)\,dx = 108 - 72 = 36$. $t_2 = t_{BFE} + \int_{5}^{6} (-x^2+6x)\,dx = 6\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3} = 8\frac{11}{12}$; $t_3 = 36 - 8\frac{11}{12} = 27\frac{1}{12}$. $t = t_1 + t_2 + t_3 = 44\frac{11}{12}$. Érdekes, hogy $t_1 = t_2$.

3881. Az érintő egyenlete: $y = -4x+1$, ez a koordinátatengelyeket az $A(0; 1)$, illetve a $B\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ pontban metszi. $t = \frac{1}{8}$.

3882. Az érintő egyenlete: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Egy olyan derékszögű háromszög területét keressük, amelyben a befogók hossza $\frac{29}{3}$, illetve $\frac{29}{4}$. Területe: $\frac{\frac{29}{3}\cdot\frac{29}{4}}{2} = 35\frac{1}{24}$.

3883. A két parabola az $A(-3; 9)$ és a $B(5; 25)$ pontban metszi egymást. Az általuk határolt síkidom területe: $t = \int_{-3}^{5} -\frac{1}{2}x^2 + x + 7{,}5\,dx = 42\frac{2}{3}$.

Az $y = x$ egyenletű egyenes ebből $\frac{1}{6}$ területű részt vág le (**3883.** ábra). A másik rész területe $42\frac{1}{2}$.



3883

3884. Lásd **3883.** $t = 42\frac{2}{3}$.

3885. A $P(3; 11)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete: $y = 6x-7$, ez az x tengelyt az $A\left(\frac{7}{6}; 0\right)$ pontban metszi. Az $y = -2x+20$ egyenletű egyenes az érintőt a $B\left(\frac{27}{8}; \frac{53}{4}\right)$, az x tengelyt a $C(10; 0)$ pontban metszi. $t = \frac{53}{6}\cdot\frac{53}{8} = 58\frac{25}{48}$.

3886. $V = \pi\int_{0}^{2} (x^3-1)^2\,dx = 12\frac{2}{7}\pi$.

3887. Két egybevágó forgástest keletkezik. Egy ilyen test térfogata:

$$V_1 = \pi\int_{0}^{3} (9x)^2 - (x^3)^2\,dx = 416\frac{4}{7}\pi,$$

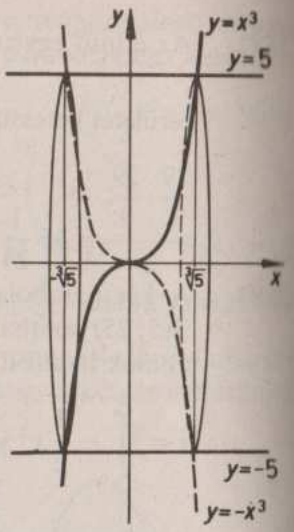
a két test együttes térfogata: $V = 2V_1 = 833\frac{1}{7}\pi$.

3888. $V = \pi \int_0^1 x^2 - x^4 \, dx = \frac{2\pi}{15}$.

3889. Toljuk el az adott síkidomot a $(-2,0)$ vektorral, a térfogat ezzel nem változik.

$$V = 2\pi \int_0^2 (4-x^2)^2 \, dx = 34\frac{2}{15}\pi \approx 107{,}2.$$

3890. Egy 5 sugarú $2\sqrt[3]{5}$ magasságú henger térfogatából kell kivonni a „görbe alatti terület" forgatásával nyert test térfogatát (**3890.** ábra).



3890

$$V = 50\sqrt[3]{5\pi} - 2\pi \int_0^5 x^6 \, dx = 42\frac{6}{7} \cdot \sqrt[3]{5\pi}; \qquad V \approx 230{,}2.$$

3891. $V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{4}} 5^2 - (x^3+1)^2 \, dx = 19\frac{5}{7} \cdot \sqrt[3]{4\pi} \approx 98{,}31.$

3892. Toljuk el az adott síkidomot a $(-2;0)$ vektorral, ekkor az $y = 3x^2 - 27$ egyenletű parabolából levágott szeletet kell megforgatnunk.

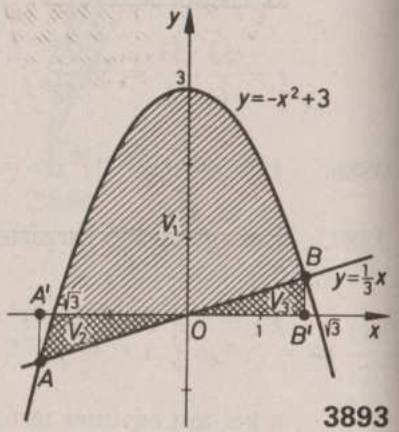
$$V = 2\pi \int_0^3 (3x^2-27)^2 \, dx = 18\pi \int_0^3 x^4 - 18x^2 + 81 \, dx = 2332\frac{4}{5}\pi \approx 7329.$$

3893. A parabola és az egyenes metszéspontjai:

$$A\left(-\frac{1+\sqrt{109}}{6}; -\frac{1+\sqrt{109}}{18}\right);$$

$$B\left(\frac{\sqrt{109}-1}{6}; \frac{\sqrt{109}-1}{18}\right);$$

közelítő értékkel: $A(-1{,}91; -0{,}64)$, $B(1{,}57; 0{,}52)$. Legyen A, illetve B vetülete az x tengelyen A', illetve B'; (**3893.** ábra). – Az adott görbék 3 síkidomot határoznak meg, mindháromból keletkezik forgástest. Legyen az OAA', illetve az OBB' háromszög megforgatásával létrejött kúp térfogata u, illetve v; $u = 0{,}81$, $v = 0{,}45$.



3893

$$V_1 = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{1{,}57} (3-x^2)^2 \, dx - v = 52;$$

$$V_2 = u - \pi \int_{\sqrt{3}}^{-1{,}91} (3-x^2)^2 \, dx = 0{,}7;$$

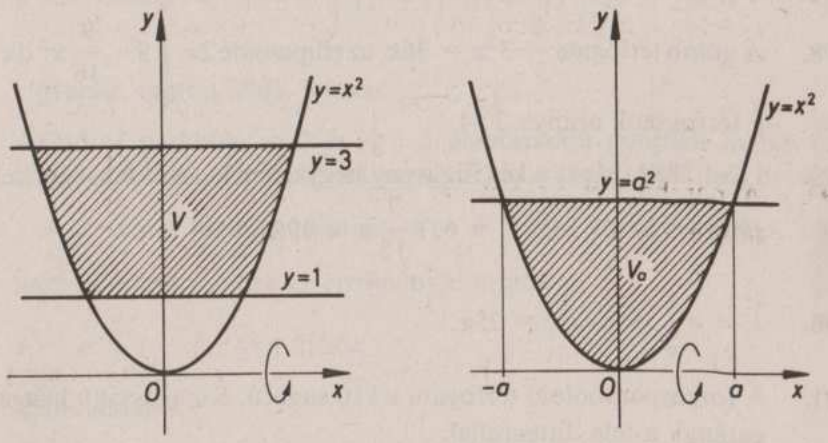
$$V_3 = v + \pi \int_{1{,}57}^{-\sqrt{3}} (3-x^2)^2 = 0{,}49.$$

E feladat megoldása (még kis pontossággal is) roppant sok számolást igényel.

3894. Ha az $y = a^2$ $(a \neq 0)$ egyenletű egyenessel vágunk le egy parabolaszeletet és ezt az x tengely körül megforgatjuk, akkor a kapott forgástest térfogata:

$$V_a = V_{\text{henger}} - 2\pi \int_0^a x^4 \, dx = 2\pi a^5 - 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{8\pi}{5} a^5$$ (**3894.** ábra).

Példánkban $V = V_{\sqrt{3}} - V_1 = \frac{8\pi}{5}(9\sqrt{3}-1) \approx 73{,}33$.



3894

3895. Az $ABB'A'$ trapéz megforgatásakor $v = 138\frac{2}{3}\pi$ térfogatú csonkakúp keletkezik (**3895.** ábra). A keresett térfogat:

$$V = v - \pi \int_1^3 (x^2+3)^2\,dx = 20\frac{4}{15}\pi \approx 63{,}67.$$

3896. Az érintő egyenlete: $y = 1-4x$.

$$V = \pi \int_{-2}^0 (x^2+5)^2 - (1-4x)^2\,dx = 22\frac{2}{5}\pi \approx 70{,}37.$$

3897. A $P(2;\ 8)$ pontbeli érintő egyenlete $y = 12x-16$, ez az x tengelyt a $Q\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$ pontban metszi. Ha P vetülete az x tengelyen P', akkor a PQP' háromszög forgatásával létrejött kúp térfogata $v = \frac{128\pi}{9}$, a keresett térfogat pedig:

$$V = \pi \int_0^2 x^6\,dx - v = \frac{2^8\pi}{63} \approx 12{,}77.$$

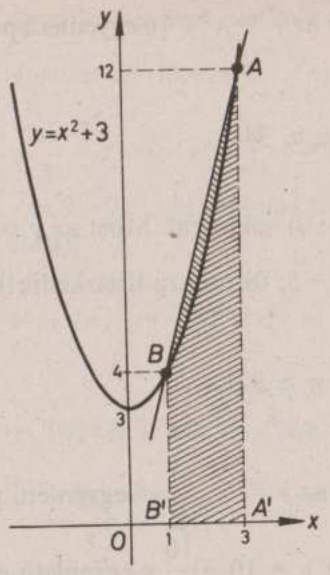
3898. A gömb térfogata $\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi = 36\pi$, az ellipszoidé $2\pi \int_0^4 9 - \frac{9}{16}x^2\,dx = 48\pi$, a térfogatok aránya $3:4$.

3899. Lásd **3884.** Most a két függvény négyzetének a különbségét kell integrálni (-3)-tól 5-ig. $V = 631\frac{7}{15}\pi \approx 1984$.

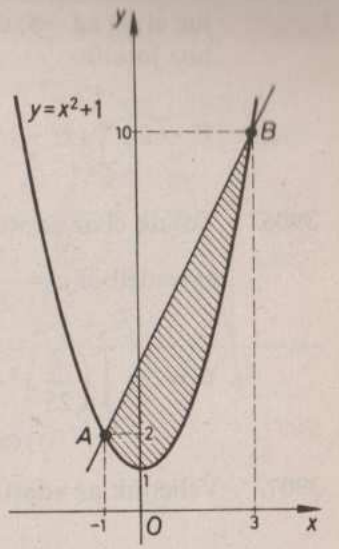
3900. $V = \pi \int_0^5 3x - x\,dx = 25\pi$.

3901. A forgásparaboloid térfogata a $\sqrt{10}$ sugarú, 5 magasságú henger térfogatának a fele. Integrállal:

$$V = \pi \int_0^5 2x\,dx = 25\pi.$$



3895



3902

3902. Egy csonkakúp térfogatából kell kivonni a „görbe alatti" síkidom megforgatásakor kapott test térfogatát (**3902.** ábra).

$$V = \frac{4+20+100}{3}\cdot 4\pi - \pi \int_{-1}^3 (x^2+1)^2\,dx = 93\frac{13}{15}\pi \approx 294{,}9.$$

3903. Ugyanaz, mint a **3902.** feladat.

3904. Az adott parabola az 1 és a -5 abszcisszájú pontban metszi az x tengelyt. Toljuk el a $(2;\ 0)$ vektorral, ekkor a kapott parabola egyenlete $y = 9-x^2$. A keresett térfogat: $V = \pi \int_{-3}^2 (9-x^2)^2\,dx = 250\pi$. – Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk a

$$V = \pi \int_{-5}^0 (-x^2-4x+5)^2\,dx$$

számítással is.

3905. A parabola egyenletét $y = ax^2+bx+c$ alakban keressük. Az adott pontok koordinátáinak a behelyettesítése után a $c=9$, $2a+b = -8$, $a-b = 11$ egyenletrendszert kapjuk. Ebből $a=1$, $b=-10$, tehát az $y = x^2-10x+9 = (x-1)(x-9)$ egyenletű paraboláról van szó. Tol-

juk el ezt a $(-5; 0)$ vektorral, ekkor az $y = x^2 - 16$ egyenletű parabolához jutunk.

$$V = 2\pi \int_0^4 (x^2-16)^2 \, dx = 1092\frac{4}{15}\pi \approx 3431.$$

3906. Toljuk el az adott parabolát a $(-5; 0)$ vektorral. Most az $y = ax^2 - 7$ egyenletből $a = \frac{7}{25}$ (a parabola a $(-5; 0)$ pontra illeszkedik!), tehát

$$V = 2\pi \int_0^5 \left(\frac{7}{25}x^2 - 7\right)^2 dx = 261\frac{1}{3}\pi \approx 821.$$

3907. Vehetjük az adott parabola helyett az $y = 5 - \frac{5}{9}x^2$ egyenletű parabolát. Ennek a $P(3; 0)$-beli érintője az $y = 10 - \frac{10}{3}x$ egyenletű egyenes. Ez a $Q(10; 0)$ pontban metszi az ordinátatengelyt. A POQ háromszög x tengely körüli megforgatásával egy $v = 100\pi$ térfogatú kúp keletkezik, ezért a keresett térfogat

$$V = 2v - 2\pi \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{9}x^2\right)^2 dx = 120\pi.$$

3908. Toljuk el a vizsgált síkidomot a $(-4; 0)$ vektorral!

$$V = 2\pi \int_0^2 (8-2x^2)^2 - (4-x^2)^2 \, dx = 6\pi \int_0^2 (4-x^2)^2 = \frac{512}{5}\pi \approx 321{,}7.$$

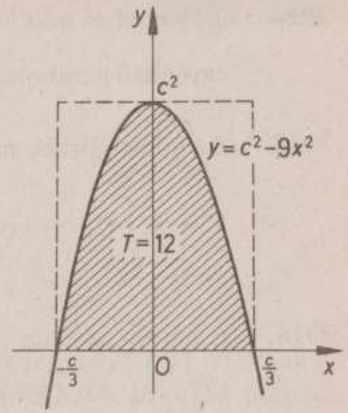
3909. A $P(2; 12)$-beli érintő a $Q(1; 0)$ pontban metszi az x tengelyt.

$$V = \pi \int_0^2 9x^4 \, dx - V_{\text{kúp}},$$

ahol a kúp sugara 12, magassága 1, tehát térfogata 48π. Így

$$V = \frac{6}{5} \cdot 48\pi - 48\pi = 9{,}6\pi \approx 30{,}16.$$

3910. A parabolaszelet területe a megfelelő téglalap területének $\frac{2}{3}$ része: $12 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} c \cdot c^2$, ebből $c = 3$, tehát az $y = 9 - 9x^2$ paraboláról van szó (**3910.** ábra).



3910

$$V = 2\pi \int_0^1 (9-9x^2)^2 \, dx =$$

$$= 162\pi \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 \, dx =$$

$$= 86\frac{2}{5}\pi \approx 271{,}4.$$

3911. A hiperbola egyenletéből $y^2 = \frac{4}{9}x^2 - 4$, ezért

$$V = \pi \int_3^{10} \frac{4}{9}x^2 - 4 \, dx = 116\frac{4}{27}\pi \approx 364{,}9.$$

3912. Toljuk el az adott görbét a $(-2; 0)$ vektorral, ekkor egyenlete $y = (x-1)x(x+1) = x^3 - x$.

A lokális szélsőértékhelyek: $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Két egybevágó síkidom adódik, közülük egynek a területe:

$$t = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x - x^3 \, dx = \frac{5}{36},$$

a két rész területének az összege $\frac{5}{18}$.

3913. $V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (x^3-2)^2 \, dx = 2\frac{4}{7}\sqrt[3]{2}\pi \approx 10{,}18.$

3914. Toljuk el az adott parabolát a $(-1; 0)$ vektorral, ekkor az $y = 4-x^2$ egyenletű parabolához jutunk. Lásd **3889.** feladat: $V = 34\frac{2}{15}\pi \approx 107{,}2$.

3915. Az adott görbék metszéspontjai: $A(1; -2)$, $B(2; -1)$.

$$V = \pi \int_1^2 (2x^2-5x+1)^2-(x-3)^2\,dx = 1\frac{2}{15}\pi \approx 3{,}560.$$

3916. A három egyenes páronkénti metszéspontjai: $A\left(3\frac{1}{2}; 6\right)$, $B(14; 6)$ és $C(7; 13)$. Az ABC háromszög megforgatásával létrejött test V térfogatát megkapjuk, ha két csonkakúp térfogtának az összegéből kivonjuk egy henger térfogatát. A csonkakúp sugarai: 6 és 13, magasságuk $3\frac{1}{2}$, illetve 7; a henger sugara 6, magassága $10\frac{1}{2}$.

$$V = 990\frac{1}{2}\pi-378\pi = 612{,}5\pi \approx 1924.$$

3917. $$V = \pi \int_0^1 x-x^6\,dx = \frac{5\pi}{14} \approx 1{,}122.$$

3918. Az adott egyenes az $A(-5; 0)$ és a $B(4; 3)$ pontokban metszi az adott kört. A kisebbik körszelet forgatásakor létrejött test térfogata:

$$V_1 = \pi \int_{-5}^4 25-x^2\,dx - V_{\text{kúp}} = 162\pi-27\pi = 135\pi \approx 424{,}1.$$

(Itt a kúp sugara 3, magassága 9.) – Ha a nagyobb körszeletet forgatjuk meg, akkor a teljes gömb áll elő:

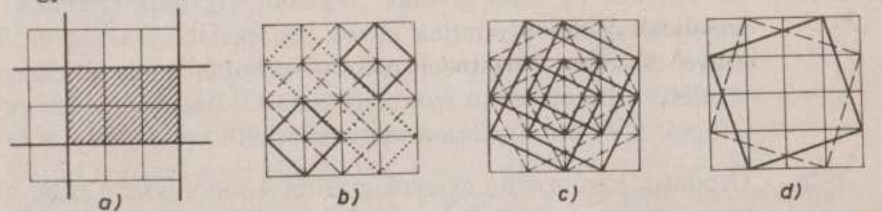
$$V_2 = 166\frac{2}{3}\pi \approx 523{,}6.$$

XXII. FEJEZET

Gráfok

3919. Az e, f és g egyeneseken kívül az e, f egyenespárról $3 \cdot 4 = 12$, az f, g egyenespárról $4 \cdot 5 = 20$ és az e, g párról $3 \cdot 5 = 15$ olyan pontpár választható, melyek 1-1 fel nem sorolt egyenest adnak. Összesen: $3+12+20+15 = 50$ egyenest nyerünk.

3920. Ha a téglalap oldala a sakktábla széleivel párhuzamos, akkor annyi ilyen téglalap van, ahányféleképpen kiválasztható 2 vízszintes és 2 függőleges egyenes a tábla mezőit határoló 5-5 egyenes közül. Ez $\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2} = 10^2 = 100$-féleképpen lehetséges. További téglalapok nyerhetők a **3920.** *b), c)* és *d)* ábra szerinti sarokpontokkal. Az előbbi módon 20, az utóbbival pedig további 8, illetve 2 téglalapot nyerhetünk. Az ábrákon összesen 130 téglalap látható, ezek közül 50 db a négyzet.



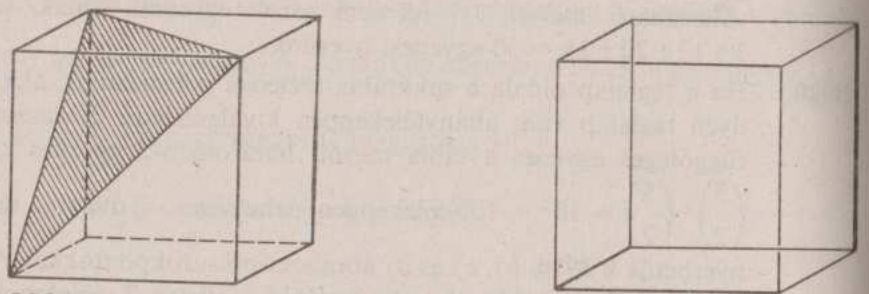
3920

3921. A szabályos n-szög a szögeit felező egyenesre tengelyszimmetrikus. Ezért a szabályos 143-szög egy csúcsából $143-3 = 140$ átló indul ki, melyek közül 70 különböző hosszú, hiszen különböző hosszú (félkörnél kisebb) ívekhez tartoznak. A sokszög n-ed rendű forgásszimmetriája miatt valamennyi csúcsból ilyen átlók indulnak ki. Így 70 halmaz mindegyikében 143 db átló lesz. (Minden csúcsból 2 egyenlő hosszú átló indul ki, de mindegyik átló 2 csúcshoz tartozik.)

3922. $\binom{8}{3} = 56$ kört és $\binom{8}{4} = 70$ gömböt.

3923. 8 ilyen sík van (a kocka egy csúcsából induló 3 élnek a csúcstól különböző végpontjai határozzák meg). (**3923.** ábra) Ha egy sík a kocka egy élét tartalmazza, akkor egy ezzel párhuzamos élt is, hiszen a kocka minden csúcsából indul ki bármely éllel párhuzamos él.

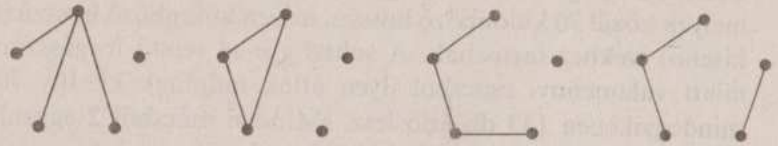
3924. A 12 él $\binom{12}{2} = 66$ élpárt ad, ennyi szakaszunk lesz. Ezek közül 6 élpár a kocka középpontjára szimmetrikus élekből áll, ennyi szakasz megy át a középponton. Minden élhez 4 hozzáképest kitérő él található (**3924.** ábra). Ez $4 \cdot 12 = 48$ szakaszt definiál, ám ezek között 2-2 ugyanahhoz a kitérő élpárhoz tartozik, vagyis 24 az ilyeneket összekötők száma.



3924

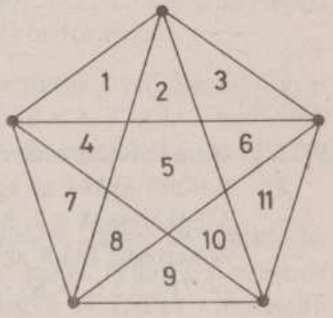
3925. Az ötpontú T_5 teljes gráfnak 10 éléből hagyjunk el kettőt. Ezeknek legfeljebb egyik végpontjuk közös, így legalább 2 szögpont fokszáma 1-gyel csökken. T_5 minden csúcsa 4-edfokú, így az él-elhagyás után legalább 2 harmadfokú szögpont marad. Minden ötpontú egyszerű, 8 élű gráf a T_5-ből ilymódon származtatható.

3926. Ötpontú, három élű egyszerű gráfból 4 különböző (**3926.** ábra) van (van 3-adfokú szögpontja vagy nincs, és ez esetben 2-odfokú szögpontból lehet 3, 2 vagy 1). Ezek mindegyikében van három pont, hogy semelyiküket sem köti össze út.



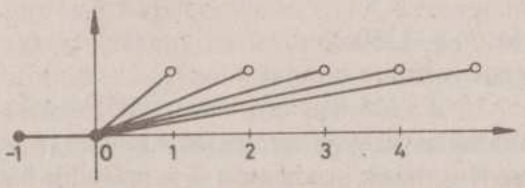
3927. Az ismeretségek száma $10 \cdot 2$. Ha x lány van és mindegyik pontosan 2 fiút ismer, úgy $2x$ is az ismeretségek száma. $2x = 20$, vagyis 10 lány van a társaságban.

3928. A **3928.** ábrától leolvasható: 11 ilyen rész keletkezik.



3928

3929. Legyenek a gráf szögpontjai a $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 1)$, ..., $(n; 1)$... (**3929.** ábra). A gráf élei: valamennyi él egyik végpontja az origó.



3929

3930. A fiúkat A, B, C és D, a lányokat a, b, c és d jelölje. Legyen d az a lány, akit A nem ismer. Így A és a, illetve D és d ismerősök. B és C ismerősei között van a és d-től különböző. B ilyen ismerőse legyen b. B és C nem ugyanazt a három lányt ismeri, különben a negyedik lánynak nincs három fiú ismerőse, így C-nek van a-tól, b-től és d-től különböző ismerőse a lányok között.

3931. Ha minden csapat legfeljebb 2 mérkőzést játszott volna, akkor legfeljebb a $10 \cdot 2 = 20$ mérkőzés fele (minden mérkőzést kétszer számolnánk különben), azaz 10 zajlott volna le.

3932. Ha volna P szögpont, amelyből 3 egyszínű (piros) szakasz indulna ki, akkor ezeknek P-től különböző végpontjait összekötő szakaszok között, ha van piros, akkor az a P végpontú piros szakaszokkal ad, ha pedig nincs piros, akkor ezek adnak egyszínű háromszöget.

Számelmélet

3933. Ha a keresett szám 7-tel osztva 6; 8-cal osztva 7; 9-cel osztva 8 maradékot ad, akkor az eggyel nagyobb szám osztható 7-tel, 8-cal és 9-cel is. Megkeressük a 7; 8 és 9 legkisebb közös többszörösét, ez $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. A keresett szám az 503. Ez megfelel a követelményeknek, mert $503 = 71 \cdot 7+6 = 62 \cdot 8+7 = 55 \cdot 9+8$.

3934. Ha a keresett szám 11-gyel osztva 10; 13-mal osztva 12 maradékot ad, akkor az eggyel nagyobb szám osztható 11-gyel és 13-mal is. A 11 és 13 legkisebb közös többszöröse $11 \cdot 13 = 143$. A keresett szám 142, ez megfelel, mert $142 = 11 \cdot 12+10 = 13 \cdot 10+12$.

3935. $(a; b) = 6$, és $[a; b] = 1260$.
Mindkét számot törzstényezőkre bontjuk:
$6 = 2 \cdot 3$; $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. A legnagyobb osztóból látszik, hogy az egyik számban a 2 az első hatványon szerepel, a 3 szintén. A legkisebb közös többszörös miatt a másik számban a 2 a második hatványon szerepel, a 3 szintén. Az 5 és a 7 csak az egyik számban szerepelhet, de abban feltétlenül. Így a következő számpárok adódnak:

$a_1 = 2 \cdot 3$, $b_1 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $b_5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$;
$a_2 = 2^2 \cdot 3$, $b_2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $a_6 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $b_6 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$;
$a_3 = 2 \cdot 3^2$, $b_3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $a_7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b_7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$;
$a_4 = 2^2 \cdot 3^2$, $b_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $a_8 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b_8 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Az a és b természetesen szerepet cserélhet. A kapott $(a; b)$ párok: (6; 1260); (12; 630); (18; 420); (36; 210); (30; 252); (60; 126); (90; 84); (180; 42) és fordítva.

3936. $(a; b) = 12$, $[a; b] = 5040$.
A feladat a **3935.** feladat módszerével oldható meg:
$12 = 2^2 \cdot 3$ $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

A lehetséges esetek:

$a_1 = 2^2 \cdot 3$, $b_1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $a_5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $b_5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$;
$a_2 = 2^2 \cdot 3^2$, $b_2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $a_6 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b_6 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$;
$a_3 = 2^4 \cdot 3$, $b_3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $a_7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $b_7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$;
$a_4 = 2^4 \cdot 3^2$, $b_4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $a_8 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b_8 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

A kapott $(a; b)$ párok: (12; 5040); (36; 1680); (48; 1260); (144; 420); (60; 1008); (180; 336); (240; 252); (720; 84) és fordítva.

3937. A keresett számnál eggyel nagyobb szám osztható 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel (**3933.**, ill. **3934.** feladat). Megkeressük a 2, 3, 4 és 5 legkisebb közös többszörösét, ez a $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. A keresett szám az 59, ez megfelel, mert $59 = 2 \cdot 29+1 = 3 \cdot 19+2 = 4 \cdot 14+3 = 5 \cdot 11+4$.

3938. Ha a számnál 7-tel kisebb szám 7-tel osztható, akkor az eredeti is. Ugyanígy 8-cal és 9-cel is osztható a keresett szám. Tehát 7, 8 és 9-nek olyan többszörösét keressük, amely háromjegyű. A 7, 8 és 9 legkisebb közös többszöröse $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, ez háromjegyű, tehát megfelel. A következő közös többszörös már négyjegyű (1008), ez nem felel meg.
$504-7 = 497 = 7 \cdot 71$; $504-8 = 496 = 8 \cdot 62$; $504-9 = 495 = 5 \cdot 99$.

3939. Egy szám akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel. Hárommal akkor osztható, ha jegyeinek összege 3-mal osztható; néggyel, ha az utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható 4-gyel. Az adott jegyek összege: $1+3+4+5 = 13$, ehhez a 2, 5 vagy 8 jöhet szóba ötödik jegyként, bármelyiket használjuk, a hárommal való oszthatóság biztosított. Az öt nem lehet a választott jegy, mert akkor az egyetlen páros számnak: 4-nek kell a végén állni, viszont a 14; 34; 54 egyike sem osztható 4-gyel. Ha a 2 a választott jegy, a szám végén a 24, 12, 32 vagy 52 állhat. Ha a 8 a választott jegy, a szám végén a 48 vagy a 84 állhat. A fenti esetekből úgy kapjuk a lehető legnagyobb számot, ha a fennmaradó 3 jegyet csökkenő sorrendben írjuk a két utolsó számjegy elé (a legnagyobb helyiértékű helyre a legnagyobbat stb.).
Így a következő számokat kapjuk:

53 124; 54 312; 54 132; 43 152; 53 148; 53 184, ezek közül a legnagyobb 54 312.

3940. $36 \mid \overline{32x45y}$. Egy szám akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel. 4-gyel akkor osztható, ha az utolsó két számjegyből álló kétjegyű szám osztható. Így y lehetséges értékei: 2; 6. Egy szám akkor osztható 9-cel, ha jegyeinek összege is osztható. Ha $y=2$, a meglévő jegyek összege: $3+2+4+5+2 = 16$, ekkor $x=2$ a megfelelő szám, mert 18

osztható 9-cel. Ha $y=6$, a jegyek összege: $3+2+4+5+6=20$, ekkor $x=7$ a jó számjegy. Tehát a két megoldás: 322 452 és 327 456.

3941. $45 \mid \overline{15x64y}$. Egy szám akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel osztható. Az öttel osztható számok 0-ra vagy 5-re végződnek: $y=0$ vagy $y=5$. Ha $y=0$; $x=2$; ha $y=5$; $x=6$, mert így biztosított a 9-cel oszthatóság (**3940.** feladat). Tehát a két megoldás: 152 640 és 156 645.

3942. Legyen a kétjegyű szám: $10a+b$.
Ha kettővel szorozzuk: $20a+2b$. Ha egy szám után írunk egy kétjegyű számot, ez az eredeti számot két helyiértékkel balra tolja (100-zal szorozza), majd hozzáadja a kétjegyű számot. Így a következő számot kapjuk: $100(20a+2b)+10a+b = 2000a+200b+10a+b = 2010a+201b = 201(10a+b) = 3\cdot 67(10a+b)$. Ez valóban osztható 67-tel, ha elosztjuk, a hányados az eredeti szám háromszorosa.

3943. Ha $(5a-4b)$ és $(9a+3b)$ mindegyike osztható 17-tel, akkor $5a-4b=17x$; $9a+3b=17y$ $(x; y\in \mathbf{Z})$.
Ha a második egyenletből kivonjuk az első kétszeresét, a következőket kapjuk: $9a+3b-2(5a-4b)=17y-34x$.
Elvégezve az összeadásokat:

$9a+3b-10a+8b=17(y-2x)$
$11b-a=17(y-2x)$,

vagyis $(11b-a)$ szintén osztható 17-tel.

3944. Az előző feladathoz hasonlóan: $2a+b=13x$; $5a-4b=13y$ $(x; y\in \mathbf{Z})$.
A második egyenletből kivonjuk az első egyenlet kétszeresét:

$5a-4b-2(2a+b)=13y-26x$; $5a-4b-4a-2b=13(y-2x)$;
$a-6b=13(y-2x)$,

tehát $(a-6b)$ osztható 13-mal.

3945. Legyen a háromjegyű szám: a, a maradék: b, a hányadosok x, ill. y.
Így felírhatjuk:

$11\,863=ay+b$
$10839=ax+b$

kivonva a két egyenletet, a következőt kapjuk: $1024=a(y-x)$, vagyis a osztója $1024=2^{10}$-nek, így a 2 valamelyik hatványa.
Mivel a háromjegyű, ezért $2^7=128$; $2^8=256$ vagy $2^9=512$ jöhet szóba.
Bármelyik osztó esetén a maradék ugyanaz.

$11\,863=128\cdot 92+87=256\cdot 46+87=512\cdot 23+87$;
$10\,839=128\cdot 84+87=256\cdot 42+87=512\cdot 21+87$,

tehát a keresett maradék a 87.

3946. Legyen a négyjegyű szám: a; így $25\,707=ax+32$; $37\,568=ay+43$.
Kivonva a második egyenletből az elsőt (rendezés után): $ay-x=11\,850$; így a 11 850 egy négyjegyű osztóját kell keresnünk. $11\,850=2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 79$, osztói: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 79, 150, 158, 237, 395, 474, 790, 1185, 1975, 2370, 3950, 5925 és 11 850.
A négyjegyű osztókkal elosztva a 25 707-et, egy esetben kapunk 32 maradékot, ha az osztó: 1975. Ekkor $25\,707=1975\cdot 13+32$, és $37\,568=1975\cdot 19+43$.
Tehát a négyjegyű szám az 1975.

3947. Egy szám osztóinak számát úgy kapjuk, hogy a primtényezős felbontásban szereplő kitevőket 1-gyel növeljük, és az így kapott számokat összeszorozzuk. Ha 12 osztót akarunk, akkor a 12-t felírhatjuk $1\cdot 12=2\cdot 6=3\cdot 4=2\cdot 2\cdot 3$ alakban, ezek a tényezők az 1-gyel növelt kitevők. Így a szám lehet p_1^{11}; $p_1\cdot p_2^5$; $p_1^2\cdot p_2^3$; $p_1\cdot p_2\cdot p_3^2$ alakú. Ha kisebb számot akarunk, akkor a legkisebb primszámokat kell választani, és a magasabb kitevőn szereplőt kisebbre, az alacsonyabb kitevőn szereplőt nagyobbra kell választani.
Így a következő számok jöhetnek szóba: 2^{11}; $2^5\cdot 3$; $2^3\cdot 3^2$; $2^2\cdot 3\cdot 5$, ezek közül a legkisebb a $2^2\cdot 3\cdot 5=60$.

3948. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg, de a 11 primszám, ezért a keresett szám csak p^{10} alakú lehet. A legkisebb ilyen szám a $2^{10}=1024$.

3949. Legyen a három egymást követő szám: $a-1$, a, $a+1$. Köbeik összege: $(a-1)^3+a^3+(a+1)^3=a^3-3a^2+3a-1+a^3+a^3+3a^2+3a+1=3a^3+6a=3a(a^2+2)$. A hárommal való oszthatóság szempontjából az a háromféle lehet: $a=3k$; $a=3k-1$; $a=3k+1$. Az első esetben a kifejezés: $3\cdot 3k(9k^2+2)=9k(9k^2+2)$, osztható 9-cel. A második esetben: $3\cdot(3k-1)(9k^2-6k+1+2)=3(3k-1)(9k^2-6k+3)=9(3k-1)(3k^2-2k+1)$, osztható 9-cel. A harmadik esetben: $3(3k+1)(9k^2+6k+1+2)=9(3k+1)(3k^2+2k+1)$, osztható 9-cel.

3950. Ha az ötjegyű szám osztható 7-tel, 8-cal és 9-cel, akkor többszöröse $7\cdot 8\cdot 9=504$-nek. Az első két számjegyből álló szám prímszám, ezért páratlannak kell lennie, eggyel nagyobb egy négyzetszámnál, ezért elég a páros kétjegyű négyzetszámokat nézni (16, 36, 64), a náluk eggyel nagyobb szám két esetben prímszám: 17; 37. Ebből csak a 37 felel meg annak, hogy a két számjegy összege kétjegyű. Tehát 504-nek olyan többszörösét kell keresni, amelyik 37-tel kezdődik, ilyen kettő van: 37 296 és 37 800.

3951. Ha egy számhoz hozzáadunk 4-et, akkor csökken a jegyek összege, ha tízes átlépés van, vagyis a számoknak 6-ra, 7-re, 8-ra vagy 9-re kell végződni. Ekkor a jegyek összege a következő módon változik: az egyesek értéke 4-gyel nő (a 4 hozzáadásával), ebből tízet átváltunk (10-zel csökken), a tízesek száma eggyel nő. Így a változás: $+4-10+1=-5$. Ha ezáltal felére kell csökkenni, akkor eredetileg a jegyek összege 10 volt. A megfelelő számok tehát: 46, 37, 28 és 19. A 4 hozzáadása után 50, 41, 32, 23. Az eredeti számok jegyeinek összege 10 volt, az új számoké 5.

3952. Legyen a kétjegyű szám: $10a+b$, a nála 7-tel nagyobb szám jegyei: a; $b+7$ (ha nincs tízes átlépés), $a+1$; $b+7-10$ (ha tízes átlépés van). Az első esetben a következő egyenlet írható fel: $10a+b=6(a+b+7)$; ezt rendezve: $4a=5b+42$. Ennek nincs megoldása, mert a számjegyeknek 9-nél kisebbnek kell lenni. A második esetben: $10a+b=6(a+1+b+7-10)$; $10a+b=6a+6b-12$; $4a+12=5b$. Itt a bal oldal 4-gyel osztható, ezért a jobb is, így $b=0$, 4, 8 lehet, ebből a két utóbbi jó, mert különben nincs tízes átlépés. Ha $b=4$, akkor $a=2$; ha $b=8$, akkor $a=7$. A két megfelelő szám: 24 és 78, a náluk 7-tel nagyobb számok: 31 és 85; $24=6\cdot(3+1)$ és $78=6\cdot(8+5)$, ezek tehát megfelelnek.

3953. Az első körbejárásnál a bekarikázott számok: 1, 16, 31 ...; ezek a számok számtani sorozatot alkotnak $d=15$; az utolsó 1000-nél kisebb szám: 991. Továbbhaladva az új kör első eleme: 6, utolsó eleme 996. A következő kör első eleme: 11, utolsó eleme 986. Az utána következő körben ismét az 1-gyel kell kezdenünk, tehát eddig tartott az eljárás. Egy kör elemeinek száma a következő módon számítható ki: $991=1+15(n-1)$; $n=67$. A három körben összesen $3\cdot 67=201$ elemet karikáztunk be, de így az 1-et kétszer számoltuk, tehát valóban 200 a karikázott, és 800 a nem karikázott számok száma.

3954. $\dfrac{2n+6}{n-3}=\dfrac{2n-6+12}{n-3}=\dfrac{2(n-3)+12}{n-3}=2+\dfrac{12}{n-3}$.

A fenti átalakítást elvégezve látható, hogy $(n-3)$-nak a 12 osztójának kell lennie. Így $n-3=1; 2; 3; 4; 6; 12; -1; -2; -3; -4; -6; -12$ a lehetséges értékek; n lehetséges értékei: 4; 5; 6; 7; 9; 15; 2; 1; 0; -1; -3; -9. Ezekben az esetekben a $\dfrac{2n+6}{n-3}$ kifejezés értéke: 14; 8; 6; 5; 4; 3; -10; -4 -2; -1; 0; 1.

3955. $\dfrac{5n-1}{n+1}=\dfrac{5n+5-6}{n+1}=\dfrac{5(n+1)-6}{n+1}=5-\dfrac{6}{n+1}$. A kifejezés akkor lesz egész, ha $n+1$ osztója a 6-nak. Így $(n+1)$ lehetséges értékei: 1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6; n lehetséges értékei: 0; 1; 2; 5; -2; -3; -4; -7; ezekben az esetekben az $\dfrac{5n-1}{n+1}$ kifejezés értéke: -1; 2; 3; 4; 11; 8; 7; 6.

3956. Az első n természetes szám négyzetének összege: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ez akkor osztható n-nel, ha $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ egész szám, vagyis $(n+1)(2n+1)$ osztható 6-tal. Mivel $(2n+1)$ páratlan, ezért $(n+1)$-nek kell párosnak lenni, tehát n-nek páratlannak. Nem lehet n hárommal osztható sem, mert ekkor $(n+1)$ és $(2n+1)$ egyike sem lenne 3-mal osztható. Tehát a $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$ alakú számok közül kiesik a $6k$, $6k+2$, $6k+4$, mert páros, és $6k+3$, mert 3-mal osztható. Így $n=6k+1$ vagy $n=6k+5$, ekkor $(n+1)(2n+1)=(6k+2)(12k+3)=2(3k+1)\cdot 3(4k+1)$, ez osztható 6-tal, illetve $(6k+6)(12k+11)=6(k+1)(12k+11)$ ez is osztható 6-tal.

3957. A villanyoszlopok 60 m-re vannak egymástól, a fák 35 m-re, egymással szemben akkor lesznek ismét, ha a köztük levő távolság a 60 és a 35 legkisebb közös többszöröse, tehát 420 m.

3958. Az előző feladathoz hasonlóan a 12 és 15 legkisebb közös többszörösét kell megkeresni, ez a 60, tehát 60 perc múlva, vagyis 13 órakor indul ismét egyszerre két busz.

3959. A **3935.** és **3936.** feladathoz hasonlóan oldjuk meg a feladatot. $15=3\cdot 5$, $4725=3^3\cdot 5^2\cdot 7$. A lehetséges számpárok $a_1=3\cdot 5$; $b_1=3^3\cdot 5^2\cdot 7$; $a_2=3\cdot 5\cdot 7$; $b_2=3^3\cdot 5^2$; $a_3=3\cdot 5^2\cdot 7$; $b_3=3^3\cdot 5$; $a_4=3^3\cdot 5\cdot 7$; $b_4=3\cdot 5^2$; ezek a következő számpárok (15; 4725); (105; 675); (525; 135); (945; 75).

3960. Ha n páratlan szám, akkor $(n-1)$ és $(n+1)$ is páros, ezek egyike 4-gyel is osztható. Átalakítva az (n^3+23n) kifejezést: $n^3+24n-n=24n+(n-1)n(n+1)$. Az első tag 24 többszöröse, a második tag három szomszédos szám szorzata, ezek egyike 3-mal osztható, a másik kettő pedig 2-vel, illetve 4-gyel, így szorzatuk $2\cdot 3\cdot 4=24$-gyel.

3961. $n^7-n = n(n^6-1) = n(n^3-1)(n^3+1) =$
$= n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$

Ha $n=7k$, akkor az első tényező, ha $n = 7k+1$, akkor a második tényező, ha $n = 7k+6$, akkor a negyedik tényező osztható 7-tel. Ha $n = 7k+2$, akkor
$n^2+n+1 = 49k^2+28k+4+7k+2+1 = 49k^2+35k+7$ osztható 7-tel. Ha $n = 7k+3$, akkor $n^2-n+1 = 49k^2+42k+9-7k-3+1 =$
$= 49k^2+35k+7$ osztható 7-tel. Ha $n = 7k-3$, akkor $n^2+n+1 =$
$= 49k^2-42k+9+7k-3+1 = 49k^2-35k+7$ osztható 7-tel. Ha $n = 7k-2$, akkor $n^2-n+1 = 49k^2-28k+4-7k+2+1 = 49k^2-$
$-35k+7$ osztható 7-tel.

3962. $n^2(n^4-1) = n^2(n^2-1)(n^2+1) = n^2(n+1)(n-1)(n^2+1)$.
Ha n páros, n^2 osztható 4-gyel, ha n páratlan, akkor $(n-1)$ és $(n+1)$ egymást követő páros számok, ezek egyike biztosan osztható 4-gyel. Az $n-1$, n és $n+1$ egymást követő számok, ezért egyik biztosan osztható 3-mal. Ha $n=5k$, akkor az első tényező, ha $n = 5k-1$, akkor a második tényező, ha $n = 5k+1$, akkor a harmadik tényező osztható 5-tel. Ha $n = 5k+2$, akkor $n^2+1 = 25k^2 \pm 20k+4+1 = 25k^2 \pm 20k+5$ osztható 5-tel. Így a szorzat mindig osztható $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$-nal.

3963. $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Ez a kifejezés akkor egész szám, ha $n(n+1)(2n+1)$ osztható 6-tal. Az n és $n+1$ egymást követő számok, egyik osztható 2-vel. Ha $n=3k$, akkor az első tényező, ha $n = 3k-1$, akkor a második tényező, ha $n = 3k+1$, akkor a harmadik tényező osztható 3-mal. Így a szorzat minden esetben osztható $2 \cdot 3 = 6$-tal. (A kifejezés az első n természetes szám négyzetének összegét adja.)

3964. $n^5-5n^3+4n = n(n^4-5n^2+4) = n(n^2-1)(n^2-4) =$
$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$.

A szorzat öt egymást követő szám szorzata, ezek egyike osztható 5-tel, van közöttük 3-mal osztható szám (ehhez három szomszédos szám is elég); legalább két tényező páros, ezek egyike 2-vel, a másik 4-gyel is osztható. Így a szorzat osztható $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$-szal.

3965. $1212_3+1313_4+1414_5+1515_6+1616_7 = 2\,000\,002_3$.
1. módszer: Helyiértékenként összegezve:
$1 \cdot (2+3+4+5+6)+1(3+4+5+6+7)+2 \cdot 3^2+3 \cdot 4^2+4 \cdot 5^2+$
$+5 \cdot 6^2+6 \cdot 7^2+1(3^3+4^3+5^3+6^3+7^3) = 20+25+640+775 = 1460.$

A jobb oldal: $2 \cdot 3^6+2 = 2 \cdot 729+2 = 1460$, a két oldal egyenlő.
2. módszer: észrevehető, hogy az összeadandók 11_3, 21_4, 31_5, 41_6, 51_7 hozzáadásával 2000_n-re egészíthetők ki.
Így a bal oldal:
$2000_3-11_3+2000_4-21_4+2000_5-31_5+2000_6-41_5+2000_7-51_7 =$
$= 2(3^3+4^3+5^3+6^3+7^3)-(1 \cdot 3+2 \cdot 4+3 \cdot 5+4 \cdot 6+5 \cdot 7)-5 \cdot 1 =$
$= 2(27+64+125+216+343)-(3+8+15+24+35)-5 =$
$= 2 \cdot 775-90 = 1460.$

3966. $\overline{abcabc} = 100\,100a+10\,010b+1001c = 1001(100a+10b+c) =$
$= 91 \cdot 11(100a+10b+c)$, ez osztható 91-gyel.

3967. Az életkorok nem lehetnek a 3 különböző hatványai, mert ezek páratlanok, és az eggyel kisebb számok párosak, tehát nem mind prímek. A 4 hatványainál eggyel kisebb számok 3-mal oszthatók, vagyis nem prímek. Nagyobb prímek nem jöhetnek szóba, ezért a 2 hatványairól lehet szó, ezek közül a $2^2=4$, $2^3=8$ és $2^5=32$ a megfelelő számok, a náluk eggyel kisebb számok prímek: 3, 7, 31.

3968. Legyen $p = 30k+m$, ahol m a 30-cal való osztáskor fellépő m maradék, ez az m nem lehet páros szám, mert akkor p páros lenne, tehát nem prím. Ugyanígy nem lehet a 3; 5 többszöröse, így a lehetséges m értékek: 1; 7; 11; 13 17; 19; 23; 29. Ezek a maradékok valóban prímek és az 1. Ha 30-nál kisebb prímet osztunk, maga a prím a maradék.

3969. Az irracionális számok tizedestört-alakja végtelen, nem szakaszos. Ha minden jegy véges sokszor fordulna elő, akkor a véges sok jegy (10 db) véges sokszor nem adhatna végtelen tizedestörtet, ezért legalább egy jegy végtelen sokszor kell, hogy ismétlődjék.

3970. Ha az irracionális szám tizedestört-alakjában csak egy jegy ismétlődne végtelen sokszor, akkor a véges sokszor előforduló jegyek elfogynának, és onnan csak az egy jegy ismétlődne, tehát a tizedestört szakaszossá válna, ez pedig nem lehet.
Legyen az irracionális szám: $a=0,\underbrace{\ldots A\ldots bbb\ldots}_{k \text{ db jegy}}$
(véges sok jegy véges sokszor)
Ekkor 10^k-val szorozva kapnánk: $10^k \cdot a = A, bbb\ldots$
$10^k \cdot a = A+\frac{b}{9}$; $a = \frac{9A+b}{9 \cdot 10^k}$, ez pedig racionális szám lenne, ellentmondásban avval, hogy a irracionális. Tehát nem lehet, hogy csak egy jegy ismétlődik végtelen sokszor, hanem legalább kettő.

3971. Legyen a három szám: a, b, c.

(1) $abc = a+b+c$ és $a = b+c$. (2)

Behelyettesítve (2)-t (1)-be: $abc = 2a$.

Ha 0-t elfogadjuk természetes számként, akkor $a=0$, $b=0$, $c=0$ is megoldás.

Ha $a \neq 0$, akkor $bc=2$, ebből $b=1$ és $c=2$, vagy $b=2$ és $c=1$.

Mindkét esetben $a=3$.

A megoldások tehát: $a_1=3; b_1=1; c_1=2; 3 = 1+2; 1\cdot 2\cdot 3 = 1+2+3$; $a_2=3; b_2=2; c_2=1; 3 = 2+1; 1\cdot 2\cdot 3 = 1+2+3$.

3972. Legyen a három prímszám: p, q, r.

$pqr = 5(p+q+r)$.

A jobb oldal 5-tel osztható, ezért a bal is, tehát egyik prímszám: 5. Legyen $p=5$, ekkor $qr = 5+q+r$. Ebből $qr-q = r+5$; $q(r-1) = r+5$; $q = \frac{r+5}{r-1} = \frac{r-1+6}{r-1}$; $q = 1 + \frac{6}{r-1}$. Ebben a kifejezésben $(r-1)$-nek a 6 osztójának kell lenni, hogy q egész legyen, így $r-1 = 1; 2; 3; 6; -1; -2; -3; -6$; $r=2; 3; 4; 7; 0; -1; -2; -5$. Itt csak a pozitív számokat tekintjük: $r=2; 3; 4; 7$; $q=7; 4; 3; 2$. A két középső eset kiesik, mert a 4 nem prímszám. A megoldásban a számok tetszőleges permutációja megfelel, mert a szorzás és összeadás is kommutatív. Így a három keresett prímszám: 2; 5; 7. $2\cdot 5\cdot 7 = 5(2+5+7)$; $70 = 5\cdot 14$; $70=70$.

3973. Legyen a tört: $\frac{a}{b}$. A feltétel szerint

$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$, $b>0$;

$ab+a < ab+b$

$a<b$.

Tehát akkor nő a tört értéke pozitív törtek esetén, ha számlálóját és nevezőjét 1-gyel növeljük, ha a számláló kisebb a nevezőnél, vagyis a tört értéke 1-nél kisebb. Például $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

3974.

$$\begin{array}{l} \overline{(5\ x\ x)}\cdot(5\ x\ x) \\ \overline{5\ x\ x} \\ \quad x\ x\ 5\ x \\ x\ x\ x\ 5 \\ \hline x\ x\ x\ 5\ x\ x \end{array}$$

Nevezzük el a hiányzó számjegyeket, különböző betűk nem feltételenül különböző számjegyeket jelölnek. (A szöveget úgy értjük, hogy az 5-ös számjegyet minden helyen jelöltük, tehát több 5-ös számjegy már nem szerepel, mert egyébként több megoldása is lenne.)

$$\begin{array}{l} \overline{5ab}\cdot 5cd \\ \overline{5ef} \\ \quad jh5g \\ klm5 \\ \hline srp5nf \end{array}$$

Az első részletszorzatból látszik, hogy $d=1$; $a=e$; $b=f$.

A harmadik részletszorzatból látszik, hogy b páratlan, $k=2$.

A jobbról második oszlopban $e+g<10$, mert különben az előző oszlopba 1 maradék kerülne. $c\geqq 2$, mert a második részletszorzat négyjegyű; $c\neq 5$, mert akkor $g=5$ lenne.

$b\neq 1$, mert akkor $g = b\cdot c = c$ nem adna maradékot, ezért $c\cdot a = \overline{x5}$ lenne, ez pedig csak $a=5$; c páratlan esetében lehet. Ha $b=3$, akkor $c\neq 2; 3$, mert akkor a cb nem ad maradékot, ezért $a=5$ kellene, de ez nem jó. $a\geqq 2$, mert egyébként a harmadik részletszorzatban $l=5$ lenne. Figyelembe véve azt, hogy $e+g<10$ legyen, és további helyen ne legyen 5-ös számjegy, a következő megoldások adódnak:

$\frac{563\cdot 541}{563}$	$\frac{527\cdot 521}{527}$	$\frac{539\cdot 591}{539}$	$\frac{539\cdot 541}{539}$
2252	1054	4851	2156
2815	2635	2695	2695
304583	274567	318549	291599

3975. $\overline{a0b}_{11} = \overline{b0a}_9$. A következő egyenlet írható fel:

$121a+b = 81b+a$; $120a=80b$; $3a=2b$; $a\leqq 8$; $b\leqq 8$.

b-nek 3-mal oszthatónak kell lenni, tehát $b=3; 6$; $a=2; 4$. A lehetséges számok $203_{11} = 302_9 = 245$ és $406_{11} = 604_9 = 490$.

3976. $740 = \overline{abc5}_t$; $740 = a\cdot t^3 + b\cdot t^2 + c\cdot t + 5$; $a<t$; $b<t$; $c<t$.

$0 = at^3+bt^2+ct-735$; $t(at^2+bt+c) = 735$.

A számrendszer alapszáma: t osztója 735-nek, $t>5$, mert különben nem lenne a t alapú számrendszerben 5-ös számjegy; $t<10$, mert a tízes számrendszerben háromjegyű szám itt négyjegyű. $735 = 3\cdot 5\cdot 7^2$; osztói közül a $t=7$ felel meg. Így $7(a\cdot 49 + b\cdot 7 + c) = 735$; $49a+7b+c = 105$; $a=2$; $b=1$; $c=0$.

A megoldás: $740 = 2105_7 = 2\cdot 343 + 1\cdot 49 + 5$.

3977. Legyen a számrendszer alapszáma: x. A következő egyenlet írható fel: $4x^3+6x^2+3x+4 = 5\cdot(5x^2+5x+5)+5x^2+3x$; $4x^3+6x^2+3x+4 = 30x^2+28x+25$; $4x^3-24x^2-25x-21 = 0$; $4x^3-24x^2-24x-20 = x+1$. A bal oldal 4-gyel osztható, ezért a jobb oldal is. A számrendszerben van 6-os számjegy, ezért $x \geqq 7$, de $x<10$ (a nagyságrendi viszonyokból látszik), így $x=7$ lehet.

Ellenőrizve: $4\cdot 7^3-24\cdot 7^2-24\cdot 7-20 = 7+1$,

$4\cdot 343-24\cdot 49-24\cdot 7-20 = 8$.

Ez megfelel, tehát az osztás a hetes számrendszerben történt.

3978.

$$\begin{array}{r} ABC\times ABC \\ \hline DEFG \end{array}$$

$$\begin{array}{r} HHCB \\ ADFD \\ \hline HDKGED \end{array}$$

A második részletszorzatból látszik, hogy $B\times C = B$; ez lehetne $C=1$ esetben, de ekkor a harmadik sorban $C\times C = 1\times 1 = 1$ kellene, de $D\neq 1$. $B\times C = B$ lehet még úgy, hogy $C=6$, B páros szám, de ekkor $C\times C = 6\times 6 = 6$ kellene, de $D\neq 6$. Lehet még $B=5$ és C páratlan, de $C\neq 5$ és $C\neq 1$, mert ekkor $D=5$ vagy $D=1$ lenne, de $D\neq C$.

Így lehet C: 3, 7, 9; D=9; 9; 1. Jobbról a harmadik oszlopban $G+C+D = G$, így $C+D = 10$, vagy $C+D = 9$ (ha az előző oszlopban tízes átlépés van). Ennek az előzőek alapján a $C=9$ és $D=1$ felel meg. Az eddigiek alapján

$$\begin{array}{r} A59\times A59 \\ \hline 1\ldots \\ \ldots 95 \\ \ldots 131 \\ \hline .1\ldots 1 \end{array}$$

Az utolsó sorból $F=3$, és $9A+5 = \overline{A1}$, ebből $A=4$.

A szorzás a következő:

$$\begin{array}{r} 459\times 459 \\ \hline 1836 \\ 2295 \\ 4131 \\ \hline 210681 \end{array}$$

$A=4$; $B=5$; $C=9$; $D=1$; $E=8$; $F=3$; $G=6$; $H=2$; $K=0$.

3979.

$$\begin{array}{r} ABC\times AC \\ \hline CAA \\ \hline CBBA \end{array}$$

A szorzásban az első részletszorzat maga a szorzandó, ez azt jelenti, hogy $A=1$. A hármas számrendszerben $C\times C = 1$, ha $C=2$. Így $B=0$, a szorzás

$$\begin{array}{r} 102\times 12 \\ \hline 211 \\ \hline 2001 \end{array}$$

3980. Legyen a számrendszer alapszáma: x; ekkor $c<x$.

$\underbrace{ccc\ldots c_x}_{n \text{ jegy}} = cx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+c = c(x^{n-1}+x^{n-2}\ldots+1) =$

$= c\cdot\dfrac{x^n-1}{x-1}$ (mértani sorozat összege).

Tegyük fel, hogy $c\cdot\dfrac{x^n-1}{x-1} = c^n$, $(c\neq 0)$, $(c>0)$;

$$\frac{x^n-1}{x-1} = c^{n-1};$$

$x^n-1 = c^{n-1}\cdot x-c^{n-1}$; $c^{n-1}-1 = (c^{n-1}-x^{n-1})x \qquad (n\geqq 2)$.

Itt a bal oldal pozitív, a jobb oldal negatív, tehát ellentmondásra jutottunk, vagyis nincs olyan számrendszer, amelyben

$\underbrace{cc\ldots c_x}_{n \text{ jegy}} = c^n \quad (n\geqq 2)$.

3981. Legyen a dobozok száma: x, a golyóké: y.

A következő egyenletet írhatjuk fel:

(1) $x\cdot 1+n = y$ és $(x-n)n = y$. (2)

Behelyettesítve (1)-t (2)-be, kapjuk:

$xn-n^2 = x+n$,

$$x(n-1) = n^2+n;\ x = \frac{n^2+n}{n-1} = \frac{(n+2)(n-1)+2}{n-1},$$

$$x = n+2+\frac{2}{n-1}\ (n\neq 1;\ n>0)\ (x \text{ egész szám, } y \text{ egész szám}).$$

Ahhoz, hogy x egész legyen, az $(n-1)$-nek a 2 pozitív osztójának kell lenni, tehát $n-1 = 1$ vagy $n-1 = 2$; $n=2$; $x=6$; $y=8$ vagy $n=3$; $x=6$; $y=9$.

A két megoldás: *a)* 6 doboz és 8 golyó ($n=2$); ha minden dobozba egy golyó kerül, akkor két golyó kimarad, vagy $6-2=4$ dobozba kerül 2–2 golyó.

b) 6 doboz és 9 golyó ($n=3$); ha minden dobozba egy golyó kerül, 3 golyó kimarad, vagy $6-3=3$ dobozba kerül 3–3 golyó.

3982. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

($n>1$ természetes szám).

A bizonyítás teljes indukcióval történhet:

1. $n=2$-re: $1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$; $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ az állítás igaz.

2. Feltesszük, hogy igaz n-re, és ebből bizonyítjuk $(n+1)$-re:

$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ (feltétel).

Bizonyítandó: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$

$=\frac{n+1+1}{2(n+1)}$;

a feltétel szerint: $\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1+1)(n+1-1)}{(n+1)^2}$;

a bal oldal: $\frac{n+2}{2(n+1)}$ (az egyszerűsítések után);

a jobb oldal: $\frac{n+2}{2(n+1)}$; ezek egyenlők, tehát az állítás igaz.

3983. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (n természetes szám).

A bizonyítás teljes indukcióval történik:

1. $n=1$-re: $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ ez igaz.

2. Feltesszük, hogy n-re igaz:

$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Bizonyítandó:

$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)+(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

Behelyettesítve a feltételt:

a bal oldal:

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}=$

$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ ez azonos a jobb oldallal, tehát az állítás igaz.

3984. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ($n>1$ természetes szám).

A bizonyítás teljes indukcióval történik:

1. $n=2$-re $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}>\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{3}{4}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ pozitív számokról lévén szó, ez igaz,

mert $\frac{9}{16}>\frac{1}{2}=\frac{8}{16}$.

2. Feltesszük, hogy n-re igaz az állítás, és ebből bizonyítjuk $(n+1)$-re:

Feltétel: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Bizonyítandó: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

Behelyettesítve a feltételt: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n+1}{2(n+1)}>\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}$.

Erről kell bizonyítani, hogy nagyobb a jobb oldalnál.

Bizonyítandó: $\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

(Mivel mindkét oldal pozitív, ezért lehet a négyzetüket vizsgálni.)

Egyszerűsítés és szorzás után:

$\frac{2n+1}{2\sqrt{n}(n+1)}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

$\frac{2n+1}{2\sqrt{n}}>\sqrt{n+1}$; $2n+1>2\sqrt{n(n+1)}$;

$4n^2+4n+1>4n^2+4n$, ez igaz, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti állítás is igaz.

3985. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ($n>1$ természetes szám).

A bizonyítás teljes indukcióval történik:

1. $n=2$-re $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}<\frac{1}{\sqrt{7}}$; $\frac{3}{8}<\frac{1}{\sqrt{7}}$. (Mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelhető.)

$\frac{9}{64}<\frac{1}{7}$; $\frac{63}{64\cdot 7}<\frac{64}{64\cdot 7}$,

ez igaz.

2. Feltesszük, hogy n-re igaz:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Bizonyítandó: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$.

Behelyettesítve a feltételt: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}$.

Bizonyítandó:

$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ (Mindkét oldal pozitív)

$(2n+1)\sqrt{3n+4}<2(n+1)\sqrt{3n+1}$,

$(4n^2+4n+1)(3n+4)<(4n^2+8n+4)(3n+1)$,

$12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4<12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4$,

$12n^3+28n^2+19n+4<12n^3+28n^2+20n+4$ ez igaz, tehát az eredeti állítás is igaz (ekvivalens átalakításokat végeztünk).

3986. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>1$ (n természetes szám).

A bizonyítás teljes indukcióval történik:

1. $n=1$-re $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}>1$ igaz.

2. Feltételezzük, hogy n-re igaz:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>1$.

Bizonyítandó:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1$.

A feltételt behelyettesítve:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1+$

$+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1$,

ez igaz, mert az 1-hez pozitív számokat adtunk hozzá.

3987. $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<n$, $n>1$.

A bizonyítás teljes indukcióval történik:

1. $n=2$-re $\frac{2}{2}<1+\frac{1}{2}<2$; $1<\frac{3}{2}<2$, ez igaz.

2. Feltételezzük, hogy n-re igaz:

$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<n$.

Bizonyítandó:

$\frac{n+1}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}<n+1$.

A bal oldali egyenlőtlenségbe helyettesítve a feltételt:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}>\frac{n}{2}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}>$

$>\frac{n}{2}+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ db}}=\frac{n}{2}+\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$.

a bal oldal igaz.

A jobb oldali egyenlőtlenségbe helyettesítve a feltételt:

$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}<n+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}<$

$<n+\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{2^{n-1}\text{ db}}=n+\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}=n+1$,

tehát a jobb oldal is igaz.

3988. Legyen a szám $x=2n$ (páros); $x=3k+2$ (hárommal osztva két maradékot ad) $n, k\in\mathbf{N}$.

$2n = 3k+2$, itt k-nak párosnak kell lennie, mert a másik két tag páros. $k = 2l$, így $x = 3 \cdot 2l + 2 = 6l + 2$, tehát a szám 6-tal osztva 2 maradékot ad.

3989. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$, $x; y \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$; $y \neq 0$.

$7y + 7x = xy$; $7x = y(x-7)$; $y = \frac{7x}{x-7} = \frac{7x-49+49}{x-7}$

$y = \frac{7(x-7)+49}{x-7} = 7 + \frac{49}{x-7}$ $x \neq 7$. A kifejezésben y akkor egész, ha $(x-7)$ osztója a 49-nek (pozitív).

Így $x-7 = 1; 7; 49$; $x = 8; 14; 56$; $y = 56; 14; 8$.

A megoldások tehát: $x_1 = 8$; $y_1 = 56$; $x_2 = 14$; $y_2 = 14$; $x_3 = 56$; $y_3 = 8$;

ezek megfelelnek: $\frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$; $\frac{1}{56} + \frac{1}{8} = \frac{1+7}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.

3990. Ha a kezdő állomást tekintjük 1.-nek, és a végállomást 12.-nek, akkor az 1. állomáson felszálló utas leszállhatott a 2., 3., ... 12. állomáson, ez 11 különböző utas lehetett. A 2. állomáson felszálló utas leszállhatott a 3., 4., ... 12. állomáson, ez 10 különböző utas lehetett. A 11. állomáson felszáló utas a 12. állomáson szállt be. Így $11 + 10 + 9 + \ldots + 1 = \frac{11+1}{2} \cdot 11 = 66$ különböző utas lehetett.

3991. Egy embernek $1 = 2^0$ apja van, $2 = 2^1$ nagyapja, $2^2 = 4$ dédapja, $2^3 = 8$ ükapja, ezek közül 4 az apának, 4 pedig az anyának dédapja. Az apa 4 dédapja közül 2 olyan van, aki egyben valamelyik dédapa apja is, mert a másik kettő valamelyik dédanyáé.

3992. Ha lenne két ilyen egész szám, akkor

$\frac{a}{b} = \underbrace{A,.B..999\ldots}_{k \text{ jegy}}$

Ezt 10^k-val szorozva azt kapnánk, hogy

$10^k \cdot \frac{a}{b} = 10^k \cdot A + B + 0{,}999\ldots = 10^k \cdot A + B + 1$; $\frac{a}{b} = A + \frac{B+1}{10^k}$,

ez viszont nem a kezdeti számot adná, hanem az $A,\underbrace{(B+1)}_{k \text{ jegy}}$ véges tizedestörtet, tehát nem lehet két ilyen egész számjegy.

3993. A feladat megoldásánál fordítva számolhatunk, az utolsó helyzetből indulva. A játékosok sorrendje nem lényeges, ezért úgy számolunk, hogy az utolsó játszmában az ötödik, előtte a negyedik, stb. játékos vesztett. A korábbi helyzet a későbbi helyzetből úgy számolható, hogy aki nyert, annak megduplázták a pénzét, tehát előtte fele volt, és az összes nyereményt a nyertes fedezte, annak tehát előtte több pénze volt.

	I.	II.	III.	IV.	V.
Utolsó játszma után:	128	128	128	128	128
(5.)					
4. játszma után:	64	64	64	64	384
3. játszma után:	32	32	32	352	192
2. játszma után:	16	16	336	176	96
1. játszma után:	8	328	168	88	48
1. játszma előtt:	324	164	84	44	24

Tehát 324; 164; 84; 44, illetve 24 Ft volt az egyes játékosoknál a játszmák előtt.

3994. $x + y = 10$; $xy = 4$.

$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - x^2y^2 =$

$= (10^2 - 2 \cdot 4)^2 - 2 \cdot 16 = 92^2 - 32 = 8464 - 32 = 8432$.

3995. Kovács nagyapának x gyermeke van, mindegyiknek $(x-1)$ gyermeke, így $x(x-1)$ unoka van.

Az életkor: $x + x^2 - x = x^2$; 50 és 70 közötti négyzetszám a $64 = 8^2$.

Tehát 8 gyerek, és $8 \cdot 7 = 56$ unoka van.

3996. Legyen A halmaz a matematikából ötös tanulók halmaza, B halmaz a fizikából ötös tanulók halmaza (**3996.** ábra).

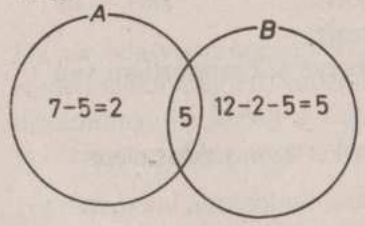
Fizikából $5 + 5 = 10$ tanulónak volt ötöse.

Számolással: $|A| = 7$; $|A \cup B| = 12$; $|A \cap B| = 5$; $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$; $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 7 - 5 = 2$; $12 = 2 + 5 + |B \setminus A|$; $|B \setminus A| = 5$; $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$; $|B| = 5 + 5 = 10$.

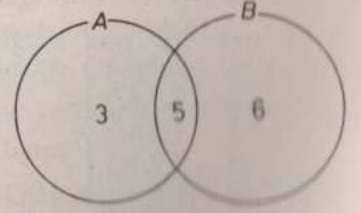
3997. A: matematikából ötös tanulók halmaza;

B: magyarból ötös tanulók halmaza (**3997.** ábra).

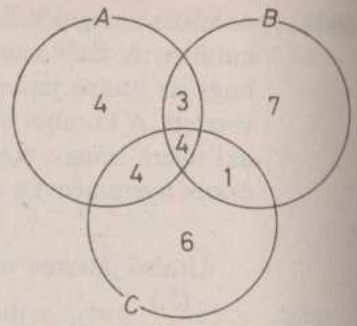
Magyarból $5 + 6 = 11$ ötös volt.



3996



3998. A: I. kirándulás résztvevői.
B: II. kirándulás résztvevői.
C: III. kirándulás résztvevői.
Legalább az egyik kiránduláson $4+7+6+3+4+1+4 = 29$ tanuló vett részt (**3998.** ábra).



3998

3999. A feladat a skatulya-elv alapján oldható meg. Mivel egy hónap maximum 31 napos, a 32. gyerek születésnapja már annyiadikára esik, mint egy másiké, tehát igaz az állítás.

4000. A számok utolsó két jegye 00-tól 99-ig változhat, ez 100 eset. Tehát a 101. szám végződése már megegyezik egy előzőével (skatulya-elv).

4001. Foglaljuk táblázatba az adatokat: x az esős délutánok száma, y a teljesen esőtlen napok száma.

	esős	esőtlen
délután	x	$7-x+y$
délelőtt	$7-x$	$x+y$

A következő egyenletek írhatók fel:

$7-x+y = 5$; $\quad x+y = 6$.

Összeadva a két egyenletet: $7+2y = 11$; $y=2$.
Az üdülési napok száma: $7+2 = 9$.

4002. 10 piros, 10 fehér, 10 zöld golyóból legrosszabb esetben 10 egyszínű + 10 egyszínű + 1 más = 21 darabot kell kivenni, hogy mindegyik színből legyen biztosan egy; 2 egyszínű + 2 egyszínű + 3 más = 7 darabot kell kivenni, hogy valamelyik színből három legyen.

4003. Ha a két csoport egyike nem tartalmaz egy elemet sem, akkor a másik csoportban van mind az öt szám, és ezek közül a szomszédosok különbsége 1, ezt is tartalmazza a csoport.
A többi csoportbontás a következő:

1 2,3,4,5 } az 5 és a 3 különbsége a 2 csoportban van
2 1,3,4,5 }
3 1,2,4,5 } mindegyikben van két szomszédos elem
4 1,2,3,5 }
5 1,2,3,4 }

ezek különbsége 1, szintén a csoportban van.

1,2 3,4,5 2 és 1 különbsége: 1 a csoportban van.
1,3 2,4,5 4 és 2 különbsége: 2 a csoportban van.
1,4 2,3,5 5 és 3 különbsége: 2 a csoportban van.
1,5 2,3,4 4 és 2 különbsége: 2 a csoportban van.
2,3 1,4,5 5 és 4 különbsége: 1 a csoportban van.
2,4 1,3,5 4 és 2 különbsége: 2 a csoportban van.
2,5 1,3,4 4 és 3 különbsége: 1 a csoportban van.
3,4 1,2,5 2 és 1 különbsége: 1 a csoportban van.
3,5 1,2,4 4 és 2 különbsége: 2 a csoportban van.
4,5 1,2,3 3 és 2 különbsége: 1 a csoportban van.

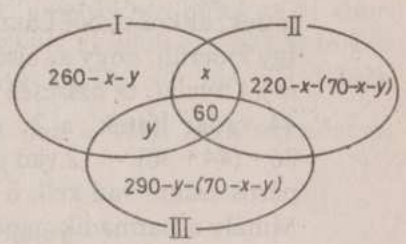
4004. $x^2+y^2-8x+3y = (x-4)^2-16+(y+1{,}5)^2-2{,}25 =$
$= (x-4)^2+(y+1{,}5)^2-18{,}25$.
A kifejezés akkor minimális, ha a zárójelben 0 áll, tehát $x=4$; $y=-1{,}5$; ekkor a minimális érték: $-18{,}25$.

4005. Legyen a kocka éle: x; a festetlen kockák száma: $(x-2)^3$. Azoknak a kockáknak a száma, amelyeknek egyetlen lapja piros: $6(x-2)^2$.
A következő egyenlet írható fel:

$(x-2)^3 = 6\cdot 6(x-2)^2$,
$x-2 = 36$; $\quad x=38$,

$x\neq 2$ (mert akkor nincs értelme a feladatnak).
A kocka éle: 38; festetlen kocka: 36^3; 1 piros lapu: $6\cdot 36^2$; $36^3 = 6\cdot 6\cdot 36^2$.

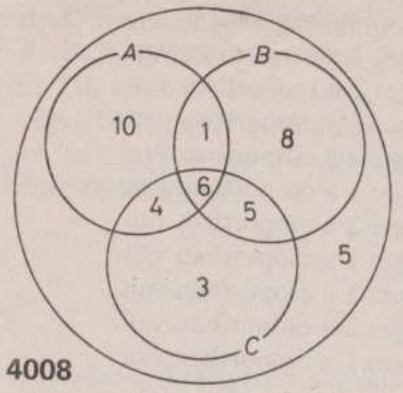
4006. Halmazokkal ábrázoljuk az egyes kirándulások résztvevőit (**4006.** ábra):
Legalább egy kiránduláson: $260-x-y+220-x-(70-x-y)+290-y-(70-x-y)+x+y+70-x-y+60 = 480-2x-y-70+x+y+290-y-70+x+y+x+y+70-x-y+60 = 410+220+130 = 760$.



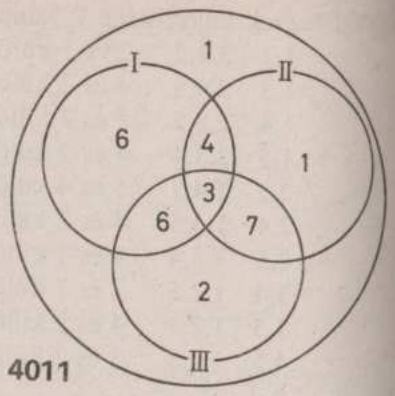
4006

4007. Ha az oda-visszaöntéseket elvégezzük, akkor mindkét edényben az eredeti mennyiségű folyadék lesz, tehát amennyi alkohol került a vízbe, ugyanannyi víz került a helyébe az alkoholba. Ezen nem változtat a keverés vagy nem keverés sem.

4008. Halmazokkal ábrázoljuk a tanulókat, akiknek A-ról, B-ről, C-ről képe van (**4008.** ábra).



4008



4011

Az osztály tanulói:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C| =$
$= 21 + 20 + 18 - (7 + 10 + 11) + 6 = 37.$

Az osztály létszámából kivonva ezt, kapjuk az eredményt: $42 - 37 = 5$.

4009. Készítsünk táblázatot:

	Károly			László			Mihály		
	róka	nyúl	fácán	róka	nyúl	fácán	róka	nyúl	fácán
1. nap			1			2			1
2. nap			1	5		2			1
3. nap	1	1	1	2	2	2	[1]	1	1

12 róka, 14 nyúl, 44 vad

A szöveg szerint László 2. napon 5 rókát lőtt, minden egyéb állatból mindegyik nap páros számút (de nem nullát). Ha összesen 12 fácánt lőttek, akkor ebből László 2-2-2-t, a többieknek minden napra 1-1 jut. Így kiderült, hogy az első napon 4 fácánt lőttek, tudjuk, hogy 12 rókát és 14 nyulat, ez összesen 30 állat az első napon. A másodikon összesen 44 vadat lőttek, a 3. napon együtt 86-ot, így a harmadik napra $86 - (44 + 30) = 12$ vad jutott. Figyelembe véve ismét, hogy Lászlónak páros számú vad kell, ő 2-2-t lőtt, a többi helyre 1-1-1-1 kerül. Tehát Mihály a harmadik napon 1 rókát lőtt.

4010. A kihúzott számok ekkor számtani sorozatot alkotnak. ha $a_1 = 1$, akkor a $d = 1, 2, \ldots 22$; a számok pl. $d = 22$ esetében 1; 23; 45; 67; 89.

A lehetséges legnagyobb differencia úgy kapható: $\left[\frac{90-1}{4}\right] = \left[\frac{89}{4}\right] =$
$= 22$. Az a_1 értéke 1-től 86-ig változhat, a differenciákra adódó értékek: $\left[\frac{89}{4}\right]; \left[\frac{88}{4}\right]; \ldots \left[\frac{4}{4}\right]$.

Ezek összege adja a lehetőségek számát:

$$\left[\frac{89}{4}\right] + \left[\frac{88}{4}\right] + \left[\frac{87}{4}\right] + \left[\frac{86}{4}\right] + \left[\frac{85}{4}\right] + \left[\frac{84}{4}\right] + \left[\frac{83}{4}\right] + \ldots +$$
$$+ \left[\frac{7}{4}\right] + \left[\frac{6}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] + \left[\frac{4}{4}\right] =$$
$$= 22 + 22 + \underbrace{21 + 21 + 21 + 21}_{4\text{ db}} + \underbrace{20 + \ldots + 20}_{4\text{ db}} + \ldots \underbrace{+ 1 + \ldots + 1}_{4\text{ db}} =$$
$$= 2 \cdot 22 + 4(21 + 20 + \ldots + 1) = 2 \cdot 22 + 4 \cdot \frac{21+1}{2} \cdot 21 =$$
$$= 2 \cdot 22 + 2 \cdot 22 \cdot 21 = 2 \cdot 22 \cdot 22 = 968.$$

A második kérdésre hasonlóan lehet számolni, hogy hány különböző 4 tagú számtani sorozat fér el 1-től 90-ig:

$$\left[\frac{89}{3}\right] + \left[\frac{88}{3}\right] + \left[\frac{87}{3}\right] + \left[\frac{86}{3}\right] + \left[\frac{85}{3}\right] + \left[\frac{84}{3}\right] + \ldots +$$
$$+ \left[\frac{5}{3}\right] + \left[\frac{4}{3}\right] + \left[\frac{3}{3}\right] = 3 \cdot 29 + 3 \cdot 28 + \ldots + 3 \cdot 1 =$$
$$= 3(29 + 28 + \ldots + 1) = 3 \cdot \frac{29+1}{2} \cdot 29 = 3 \cdot 15 \cdot 29 = 1305.$$

Ebben az esetben az ötödik szám a maradék 86 közül tetszőlegesen választható, tehát az előző eredmény 86-szorosa adja a lehetőségek számát: $86 \cdot 1305 = 112\,230$.

(Ezek között most olyanok is vannak, amelyekben mind az öt szám számtani sorozatot alkot; ha csak négynél akarjuk ezt, akkor le kell vonni a feladat első részének eredményét.) $(112\,230 - 968 = 111\,262)$.

4011. A feladatot a **4008.** feladathoz hasonlóan a **4011.** ábra segítségével oldhatjuk meg:

A legalább egy feladatot megoldók száma:
$19 + 15 + 18 - (7 + 9 + 10) + 3 = 29$

1 tanuló volt, aki egy feladatot sem oldott meg.

4012. Az 1827 tanuló a tagságnak $75 + 62{,}5 + 80 = 217{,}5\%$-át jelenti, ebből kiderül, hogy a tagság: $\frac{1827}{217{,}5} \cdot 100 = 840$ tanulóból áll. Mindhárom kiránduláson 17,5%, vagyis 147 tanuló vett részt. Az első és második kiránduláson 37,5%, vagyis 315 tanuló, az első és harmadik kirándulá-

son 55%, vagyis 462 tanuló, a második és harmadik kiránduláson 42,5%, vagyis 357 tanuló vett részt (**4012.** ábra).

a) 147 tanuló vett részt mindhárom kiránduláson.

b) 168-an vettek részt csak az első és második kiránduláson.

c) 315-en vettek részt csak az első és harmadik kiránduláson.

d) 210-en vettek részt csak a második és harmadik kiránduláson.

4013. Legyen az első órában játszott játszmák száma: x, a hátralévő játszmák száma: y.

Az első órában $0{,}9x$ játszmát nyert, 1-et veszített, később $0{,}2y$ játszmát nyert, 2-t veszített, 2 döntetlen volt.

A következő egyenlet írható fel:

$0{,}9x+1+0{,}2y+2+2 = x+y;$

$5 = 0{,}1x+0{,}8y;$

$50 = x+8y; \quad y = \dfrac{50-x}{8}.$

Ha azt akarjuk, hogy y egész legyen, akkor $50-x$-nek 8-cal oszthatónak kell lennie, tehát $x = 2, 10, 18, 26, 34, 42$ lehet (az 50 már értelmetlen). Ebből csak az jó, amelyiknek a 90%-a is egész szám, tehát $x = 10$; $y = 5$.

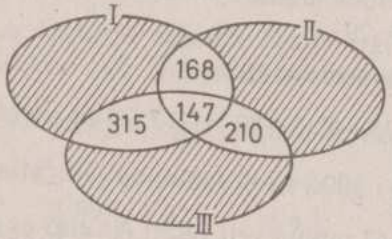
Az első órában nyert 9-szer, veszített 1-szer; későbbiekben nyert 1-szer, veszített 2-szer, döntetlen volt 2-szer. Összesen 15 játszmából 10-szer nyert, ez 66,63.

4014. Ábrázoljuk a halmazokat (**4014.** ábra). (Lásd **4008.** vagy **4001.** feladat.) Legyen a mindhárom versenyen induló tanulók száma: x. Összeadva:

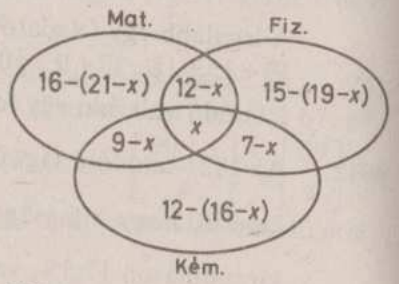
$(x-5)+(x-4)+(x-4)+(12-x)+(7-x)+(9-x)+x = 20;$

$x+15 = 20;$

$x = 5.$



4012



4014

a) csak matematikából: $x-5 = 0$ tanuló indult,

b) mindhárom versenyen 5 tanuló indult.

4015. Ha *f)* állítás igaz lenne, akkor *e)* is, de egyiknek hamisnak kell lennie, ezért *e)* igaz; *f)* hamis. ha *e)* igaz, akkor *c)* hamis, mert $\sqrt{13}$ irracionális; ezért *d)* igaz; vagyis b egész szám, osztható 7-tel, de nem osztható 14-gyel (mivel *f)* hamis), ezért nem lehet páros szám, vagyis *a)* nem igaz; *b)* igaz. Tehát 7-tel osztható páratlan számról van szó, amelyhez a kőbét hozzáadva 8000-nél kisebb pozitív számot kapunk, ennek csak a 7 felel meg (a 21 sok, a negatív és 0 nem jó).

4016. Legyen a négy egymást követő szám: $a-1$, a, $a+1$, $a+2$. Szorzatuk $(a-1)a(a+1)(a+2) = (a^3-a)(a+2) = a^4+2a^3-a^2-2a$. Ha ehhez hozzáadunk 1-et: $a^4+2a^3-a^2-2a+1 = (a^2+a-1)^2$, tehát valóban teljes négyzetet kapunk.

4017. A páratlan szám: $2k+1$, négyzete $4k^2+4k+1$, ha ebből 1-et elveszünk: $4k^2+4k = 4k(k+1)$; k és $k+1$ két szomszédos szám, ezért egyik páros, így a szorzat osztható $4 \cdot 2 = 8$-cal.

4018. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 1000 = 1000!$

Minden harmadik szám osztható 3 első hatványával, minden kilencedik 3 második hatványával stb. Így a hatványkitevőt a következő módon kapjuk:

$$\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{3^2}\right]+\left[\frac{1000}{3^3}\right]+\left[\frac{1000}{3^4}\right]+\left[\frac{1000}{3^5}\right]+\left[\frac{1000}{3^6}\right] =$$

$$= 333+111+37+12+4+1 = 498.$$

Tehát 1000! osztható 3^{498}-nal.

4019. A 3 hatványait kell vizsgálnunk: 3, 9, 27, 81, 243. Az utolsó jegyek periodikusan ismétlődnek: 3, 9, 7, 1, az utolsó előttiek az első négy hatványnál: 0; 0; 2; 8 (párosak). A további eseteknél a tízes helyen álló számjegyet úgy kapjuk, hogy az előző számbeli tízes helyiértékű jegyet 3-mal szorozzuk, és hozzáadjuk az egyesekből adódó maradékot. Mivel a tízes helyen páros szám áll, ennek a 3-szorosa is páros, az egyesek maradékai pedig a következők: a $3 \cdot 3$ és a $3 \cdot 1$ nem ad maradékot (0-t ad), a $3 \cdot 9 = 27$ és $3 \cdot 7 = 21$ 2 maradékot ad, tehát a maradék is minden esetben páros; a két páros szám összege is páros.

4020. $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$; $a = 2x$; $b = 5x$; $2x + 5x = A^2$ (kétjegyű) $7x = A^2$. 7-tel osztható kétjegyű négyzetszám a 49.

$7x = 49$; $x = 7$; $a = 14$; $b = 35$; a keresett tört $\frac{14}{35}$.

4021. Ha a kezdő játékos (A) a következő módon játszik, akkor nyerése biztosított: első húzásra 4-et húz, utána pedig a B által húzott golyók számát 6-ra egészíti ki, így 15 menet után $4 + 15 \cdot 6 = 94$ golyót húztak ki, és B következik a húzásban, ekkor akármennyit húz, A nyer; ugyanis ha B húzásai: 1; 2; 3; 4; 5, akkor A húzásai: 5; 4; 3; 2; 1, így övé az utolsó húzás.

4022. Ha a kezdő fél (A) az első forintost az asztal közepére helyezi, és utána B bárhová helyezi az ő forintosát, A a középpontra szimmetrikus helyre teszi, akkor ő nyer.

4023. Az 1-től 9-ig van 9 db egyjegyű szám, ez 9 jegy. A 10-től 99-ig van 90 db kétjegyű szám, ez 180 jegy. A maradék $1999 - 189 = 1810$ jegyet háromjegyű számok írására használjuk, 603 db háromjegyű szám szükséges és még marad 1, ez azt jelenti, hogy a 604. háromjegyű szám első jegye lesz a keresett szám. Az első háromjegyű szám a 100, a második a 101 stb., tehát a 604, a 703, így a keresett szám a 7.

4024. 1-től 9-ig 9 db egyjegyű szám: 9 jegy;
10-től 99-ig 90 db kétjegyű szám: 180 jegy;
100-tól 999-ig 900 db háromjegyű szám: 2700 jegy;
1 000-től 9999-ig 9000 db négyjegyű szám: 36 000 jegy;
10 000-től 98 762-ig 88 763 ötjegyű szám: 443 815 jegy;
ez összesen 482 704 jegy, leírásához $5246{,}78 \approx 5247$ perc, azaz 87,45 óra szükséges.

Kombinatorikai és valószínűségszámítási feladatok

4025. Ha mindenkinek páros számú ismerőse van, akkor senkinek sem lehet több ismerőse mint 6, és így legfeljebb $\frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ ismertség lehetséges.

Ilyen eset akkor és csak akkor jön létre, ha a 8 ember 4 olyan párba sorolható, ahol a párok nem ismerik egymást és mindenki minden más embert ismer.

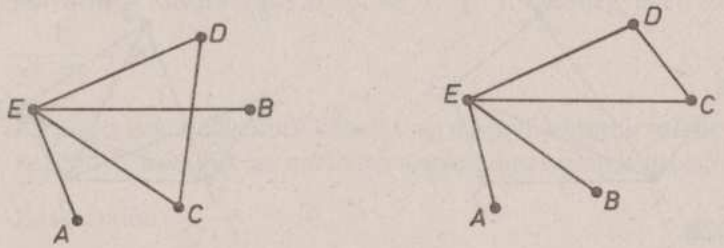
4026. Kell olyan pontnak lennie, amelyhez legalább 4 összekötő szakasz tartozik, mert különben legfeljebb $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ szakasz volna megrajzolva.

Tegyük fel, hogy az A_0 szakasz össze van kötve az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokkal. Az A_5 pontból legfeljebb 5 összekötő szakasz indul ki. Ezért van olyan berajzolt szakasz, amely az A_1, A_2, A_3, A_4 csúcsokat köti össze, és így találtunk egy ilyen berajzolt háromszöget, amelynek csúcsai az adott pontok.

Kilenc szakasz esetén nem igaz az állítás.

4027. Feltételezzük, hogy az adott pontokat összekötő szakaszok részlegesen sem esnek egybe, azaz az ötszög bármely három csúcsa nem illeszkedik egy egyenesre. Közömbös, hogy az A és B pontok szomszédosak-e. Például:

AECDEB útvonalban csupán annyi a változás, hogy egyes átlókból oldal, egyes oldalakból átló lesz (**4027.** ábra).



4027

Feltételezzük, hogy a feladat úgy értendő, hogy a bejárást az első olyan alkalommal befejezzük, amikor a B pontba érünk. Minden bejáráshoz tartozik egy gráf, amelyben az A és B pontok foka páratlan, a többi pont foka páros. (A P pont fokát $\varphi(P)$-vel jelöljük.) Meg kell konstruálni az összes lehetséges ilyen gráfot és meg kell számlálni, hogy ezeknek hány bejárása lehet. A következőkben a $\varphi(C)+\varphi(D)+\varphi(E) = a+b+c$ azt fogja jelenteni, hogy $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ és $\varphi(E)$ valamelyike a, b, illetve c.

Minden esetben egy példa van feltüntetve.

I. $\varphi(A)=\varphi(B)=1$ eset.

1. $\varphi(C)+\varphi(D)+\varphi(E) = 0+0+0$	pl. AB		1
2. $\varphi(C)+\varphi(D)+\varphi(E) = 2+0+0$	ACB		3
3. $\varphi(C)+\varphi(D)+\varphi(E) = 2+2+0$	$ACDB$		6
4. $\varphi(C)+\varphi(D)+\varphi(E) = 2+2+2$	$ACDEB$		6
5. $\varphi(C)+\varphi(D)+\varphi(E) = 4+2+2$	$ACDECB$		6
		összesen	22

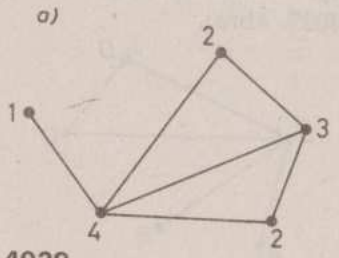
II. $\varphi(A)=3$ $\varphi(B)=1$. Ilyen eseteket kapunk, ha az I./3-as útba negyediknek betesszük az A pontot.

	$ACDAB$	6
I./4-es útvonalba negyedik vagy ötödik helyre betesszük az A-t.	pl. $ACDAEB$	$6 \cdot 2 = 12$
I./5-ös útvonalba negyediknek, ötödiknek vagy hatodiknak betesszük az A-t.	pl. $ACDEACB$	$6 \cdot 3 = 18$
	összesen	36

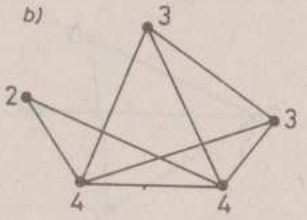
Nyilvánvaló, hogy ezek különböző utak. Belátható, hogy a II. feltételt kielégítő utak mindegyikét felsoroltuk. Azaz, ha egy jó útvonalból a belső A pontot kihagyjuk, akkor I. típusú utat kapunk.

Megjegyzés: A $\varphi(A)=1$, $\varphi(B)=3$ eset ezek után egyszerűen elintézhető. De hosszadalmas a $\varphi(A)=\varphi(B)=3$ eset.

4028.



4028. *a, b* ábra

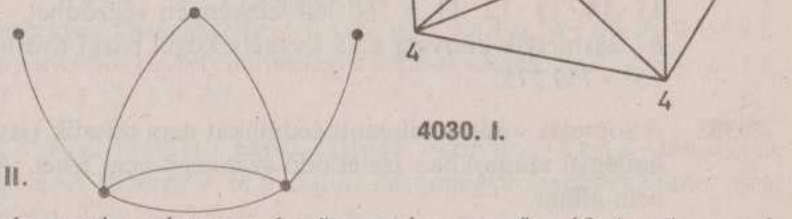


4028

4029. Minden élhez két gráfpont tartozik. Ezért az egyszerű gráfban az élek számának kétszerese a fokszámok összegével egyenlő. $1+1+2+3+4 = 11$ nem páros szám.

4030. Ha egyszerű a gráf, akkor két negyedfokú pont van, ezért minden pont legalább másodfokú **4030. I.** ábra).

Nem egyszerű gráf esetén a **4030. II.** ábrával megadott gráf kielégíti a feltételt.



4030. I.

4030. II.

4031. A feladat szerint adott egy 6 szögpontú egyszerű gráf. A szögpontok fokszámának összege $2 \cdot 11 = 22$. Ezért van olyan pont, amelynek foka legalább 4 ($6 \cdot 3 = 18 < 22$). Legyen az A_0 pont az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokkal összekötve. Ekkor az A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 pontok bármelyikéből bármelyikbe eljuthatunk. Az A_1, A_2, A_3, A_4 részgráfnak legfeljebb $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ éle van. Így A_5 össze van kötve az A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 pontok valamelyikével, így bármely pontból bármely pontba eljuthatunk az összekötő vonalak mentén.

4032. A kétjegyű páratlan szám végződhet 3-ra, 5-re, 7-re és 9-re. Mindegyikből annyit tudunk készíteni, ahányféleképpen a tízesek helyére a megmaradó 6 számjegyből egyet ki tudunk választani, azaz $6 \cdot 4 = 24$ féle készíthető.

4033. A szám csak 1-gyel kezdődhet és 0-ra végződhet. Így annyi nyolcjegyű páros szám képezhető, ahányféleképpen a közbeeső hat helyre el tudjuk helyezni a megmaradt 0, 0, 0, 1, 1, 1 számjegyeket. Ezek száma: $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

4034. Az adott számjegyekből képzett nyolcjegyű számok mindegyike 1-gyel kezdődik, közülük az osztható 4-gyel, amelyeknek utolsó két jegye 0. Ezek száma: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

4035. Az adott számjegyek összege 15. Így a belőlük készített hatjegyű páros számok mindegyike osztható 6-tal.
0-ra végződik: $5! = 120$, 2-re és 4-re: $4 \cdot 4! \cdot 2 = 192$. Ezek összege adja a megoldást: $120 + 192 = 312$.

4036. Az adott számjegyekből készíthető négyjegyű számok száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Közülük $3 \cdot 2 = 6$ kezdődik 13-mal. 1-gyel kezdődő 3-ra végződő szintén $3 \cdot 2 = 6$ van.

4037. *a)* Egy személy csak egy könyvet nyerhet. A sorsolás így $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360$ féleképpen végződhet.
b) Bármelyik könyvet a 15 személy közül bárki nyerheti: $15^5 = 759\,375$.

4038. A sorsolás során a kihúzott cédulákat nem tesszük vissza, így a kapott hatjegyű számokban ismétlődő számjegy nem lehet. Az első helyen 0 nem állhat.
a) $(8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)5 = 67\,200$.
b) Az 5-re vagy 0-ra végződők oszthatók 5-tel:
$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 28\,560$.
c) Csak 5-re végződhet: $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 13\,440$.

4039. A 20 pont annyi háromszöget határoz meg, ahányféleképpen hármat ki lehet választani közülük úgy, hogy a kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe: $\binom{20}{3} = 1140$.

4040. *a)* $11! = 39\,916\,800$ féleképpen ülhetnek le.
b) Ha lány lány mellett, fiú fiú mellett nem ülhet, akkor a sor két szélén lánynak kell ülni: $6! \cdot 5! = 86\,400$.

4041. $\binom{12}{2} = 66$.

4042. *a)* Kiss Éva a diákbizottságnak titkárként és bizottsági tagként egyaránt lehet a tagja:
$\binom{31}{4} + 31 \cdot \binom{30}{3} = 157\,325$.
b) Titkára a diákbizottságnak annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen a megmaradó 31 tanuló közül kiválaszthatjuk a bizottsági tagokat:
$\binom{31}{4} = 31\,465$.

c) Nem titkárként annyiféleképpen lehet tagja, ahányféleképpen a megmaradó 31 tanuló közül titkárt és további 3 bizottsági tagot választhatunk: $31 \cdot \binom{30}{3} = 125\,860$.

4043. $n^3 - n(n-1)(n-2) = 65$ egyenletből az $n = 5$.

4044. n csapat vesz részt a bajnokságon. A lejátszott mérkőzések száma: $n(n-1) = 240$. Az egyenlet pozitív egész gyöke adja a feladat megoldását. $n = 16$.

4045. A számjegyek összege lehet: $0+2+4$, $2+4+6$, $4+6+8$; $0+4+8$. E számjegyekből képzett háromjegyű számok száma: $2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 20$.

4046. 18-cal a 9-cel osztható páros számok oszthatók. Így a számjegyek összege lehet 18 vagy 9, és a kapott háromjegyű szám végződhet 6-ra, 4-re, illetve 2-re: $1+2+4+6 = 13$.

4047. A dobott pontok összege 10, ha a dobott számok 6, 3, 1; 6, 2, 2; 5, 4, 1; 5, 3, 2; 4, 4, 2; 4, 3, 3. Tehát a dobott pontok összege 10, $3! + \frac{3!}{2!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 27$ esetben lesz.

4048. 20!-ban az 5, 10, 15, 20 tényezők oszthatók 5-tel. Így 4 lesz 5-nek az a legnagyobb hatványa, amivel 20! osztható.

4049. 15! prímtényezős alakjában 2 magasabb hatványkitevővel szerepel, mint 3. Így elég 3 hatványkitevőjét megállapítani. Ez $\left[\frac{15}{3}\right] + \left[\frac{15}{9}\right] = 6$.

4050. 30! prímtényezős alakjában 2 magasabb hatványkitevővel szerepel, mint 5. Így elég 5 hatványkitevőjét megállapítani. Ez $\left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{25}\right] = 7$.
Így 30! 10^7-nel osztható, azaz 7 0-ra végződik.

4051. $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. 2700 osztói csak a 2, 3, 5 prímeket tartalmazhatják, s ezeket rendre 0, 1, 2; 0, 1, 2, 3; 0, 1, 2 kitevőkkel. Az egyes kitevők a megfelelő halmazból egymástól függetlenül választhatók. Így 2700 pozitív osztóinak a száma $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.

4052. Az adott számjegyekből képzett négyjegyű számok közül azok oszthatók 5-tel, amelyek 0-ra vagy 5-re végződnek. Ezek száma:
$3! + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 10$.
Ezek összege: $1350 + 1530 + 3150 + 3510 + 5130 + 5310 + 1035 + 1305 + 3015 + 3105 = 28\,440$.

4053. A képezhető ötjegyű számok száma: $4^5 = 1024$.
Ezek összege:
$10^4 \cdot 4^4(1+2+3+4) + 10^3 \cdot 4^4(1+2+3+4) + 10^2 \cdot 4^4(1+2+3+4) + 10 \cdot 4^4(1+2+3+4) + 4^4(1+2+3+4) = 28\,444\,160$.

4054. $10^3 \cdot 5^3(1+3+5+7+9) + 10^2 \cdot 5^3(1+3+5+7+9) + 10 \cdot 5^3(1+3+5+7+9) + 5^3(1+3+5+7+9) = 3\,471\,875$.

4055. Számjegyként 1, 2, 3, 4, 5, 6 szerepelhet. Közülük 4-gyel azok oszthatók, amelyek 12-re, 16-ra, 24-re, 32-re, 36-ra, 44-re, 52-re, 56-ra, illetve 64-re végződnek. Mindegyikből külön-külön $6 \cdot 6 = 36$ lehet. Így e négyjegyű szám $36 \cdot 9 = 324$ esetben lehet 4-gyel osztható.

4056. Azoknak az eseteknek a száma, amikor nincs hetes, nincs piros, illetve egyik sincs, rendre $\binom{28}{6}, \binom{24}{6}, \binom{21}{6}$. Így azoknak a száma, amelyekben mindkettő van:
$$\binom{32}{6} - \left[\binom{28}{6} + \binom{24}{6} - \binom{21}{6}\right] = 449\,120.$$

4057. A kívánt feltételek teljesülhetnek úgy, hogy a kihúzott lapok között ott van a piros hetes, illetve nincs köztük. A piros hetes és még egy piros, illetve még egy hetes $\binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{21}{5}$ féleképpen lehetséges. A piros hetes nincs a kihúzott lapok között $\binom{7}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{4}$ esetben. A kettő összege adja a megoldást: $427\,329 + 377\,055 = 804\,384$.

4058. Pontosan 2 tízes akkor van a kihúzott lapok között, ha 2 lapot a tízesek közül, 4 lapot pedig a többi 28 közül húzunk:
$\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{4} = 122\,850$.
Megjegyzés: A feladat szövege úgy is értelmezhető, hogy legalább 2 tízes. Ekkor:
$\binom{32}{6} - \binom{28}{6} - 4\binom{28}{5}$.

4059. Az 500 darab zár közül 4%, azaz 20 darab selejtes.
a) Mind a 10 selejtes, ha mindegyiket a 20 selejtes körül választjuk: $\binom{20}{10} = 184\,756$.
b) 5 selejtes akkor lesz, ha 5 darabot a 20 selejtesből és 5 darabot a 480 hibátlanból választunk ki: $\binom{20}{5} \cdot \binom{480}{5}$.

4060. A 3, 2, 1 számokat egy elemként tekintve 8 elem permutációjáról van szó: $8! = 40\,320$.

4061. *a)* A helyezések sorrendje: $10! = 3\,628\,800$.
b) A döntőbe 4 fiú került, s közülük bárki lehet első helyezett. Ezek mindegyike annyiféleképpen következhet be, ahányféleképpen a többi 9 tanuló végezhet a helyezés szempontjából. Tehát: $4 \cdot 9! = 1\,451\,520$.

4062. *a)* A nyolcas döntőbe 3 IV. osztályos jutott. Közülük bárki lehet első helyezett. Ez annyiféleképpen következhet be, ahányféleképpen a többi 7 végezhet: $3 \cdot 7! = 15\,120$.
b) $7! = 5040$.
c) Anna lehet I., II., illetve III. helyezett: $7! + 7! + 7! = 15\,120$.

4063. 6-tal a 3-mal osztható páros számok oszthatók. A 4-re végződő ötjegyű számok közül azok felelnek meg ennek a feltételnek, amelyekben a 4-es előtt álló „négyjegyű szám" 3-mal osztva 2-t ad maradékul. 9000 négyjegyű szám van, s közülük 3000 felel meg ezeknek a feltételeknek.

4064. Megoldása megegyezik a **4063.** feladat megoldásával.

4065. A kívánt feltételeknek azok az ötjegyű számok tesznek eleget, amelyek 04-, 24-, 44-, 64-, illetve 84-re végződnek. Ezek mindegyikéből $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ van. Tehát $900 \cdot 5 = 4500$ 4-gyel osztható 4-re végződő ötjegyű szám van.

4066. Az összes 4-re végződő ötjegyű számot megkapjuk, ha a négyjegyű számok végére rendre odaírjuk a 4-et. Így számuk 9000. Másképpen számolva: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

4067. A kívánt feltételeknek azok a háromjegyű számok felelnek meg, amelyek az 1, 3, 5 számjegyek felhasználásával írhatók fel az ismétlődést is megengedve: $3^3 = 27$.

4068. A megadott számjegyek összege 45. Így a belőlük készíthető tízjegyű számok mindegyike osztható 9-cel. Ezek száma: $9 \cdot 9! = 3\,265\,920$.

4069. A megadott számjegyek összege 45. Így a belőlük készíthető tízjegyű számok mindegyike osztható 3-mal. Ezek száma: $9 \cdot 9! = 3\,265\,920$.

4070. A megadott számjegyek összege 45. Így a belőlük készíthető tízjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, 6-tal pedig ezek közül a párosak oszthatók: $9! + (8 \cdot 8!)4 = 1\,653\,120$.

4071. Két páros, illetve két páratlan számjegyet $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}$ féleképpen lehet kiválasztani. Ezeket 4! féle sorrendben írhatjuk fel, $\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3!$ 0-val kezdődik. Így a kívánt négyjegyű számok száma: $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4! - \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 2160$.

4072. *a)* A lehetséges kiválasztások számából kivonjuk azoknak a kiválasztásoknak a számát, amelyekben 0 vagy 1 selejtes szerepel:

$$\binom{500}{20} - \left[\binom{460}{20} + \binom{460}{19} \cdot \binom{40}{1}\right].$$

b) A selejtesek száma lehet 0, 1 vagy 2:

$$\binom{460}{20} + \binom{460}{19} \cdot \binom{40}{1} + \binom{460}{18} \cdot \binom{40}{2}.$$

4073. Az 5 házaspár (a házaspárok egymás mellett) 4! féleképpen ülhet le egy kör alakú asztal mellé. Egy-egy házaspár esetén a házastársak helycseréje megkétszerezi ezeknek az elrendezéseknek a számát: $4! \cdot 2^5 = 768$.

4074. Egy házaspárt leültetve, a másik 4 házaspárt 4! féleképpen ültethetjük le. A férfiak és a nők sorrendjét az elsőként leült házaspár elhelyezkedése meghatározza. Az ő helycseréje új elrendezést ad. Így a kívánt feltételek szerint $4! \cdot 2 = 48$ féleképpen ülhetnek le a kör alakú asztal köré.

4075. Ha a házaspárok együtt ülnek le, elhelyezkedésük 5! féle lehet. A házaspárok lehetséges helycseréjét is figyelembe véve, az elhelyezkedések száma: $5! \cdot 2^5 = 3840$.

4076. Ültessük le először a férfiakat. Ezt 5! féleképpen tehetjük meg. A nők ezután ülhetnek a férjük jobb (mindenki a jobb) oldalára, vagy a bal (mindenki a bal) oldalára: $5! \cdot 2 = 240$.

4077. *a)* Minden könyvet más tanuló nyerhet, és a kihúzás sorrendje a könyvek különbözősége miatt számít. Így a sorsolás eredménye $35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ féle lehet.

b) A kiosztás sorrendje számít a könyvek különbözősége miatt, de egy tanuló több könyvet is nyerhet. Így a sorsolás eredménye 35^7 féle lehet.

4078. Minden egyes tárgy kisorsolása egy-egy tanuló kiválasztását jelenti.

a) 7 különböző nyertest kell kiválasztani, sorrendjük mindegy, mert a tárgyak nem különböztethetők meg: $\binom{35}{7} = 6\,724\,520$.

b) Bármelyik tanuló ismételten is kiválasztható, akár hétszer is. Sorrendjük közömbös: $\binom{35+7-1}{7} = 22\,481\,940$.

4079. *a)* Minden könyvet más tanuló nyerhet, de Kiss Annának a nyertesek között kell lennie. A könyvek különbözősége miatt a sorrend is számít: $7 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 6\,778\,316\,160$.

b) Kiss Anna pontosan 1 könyvet 7 féleképpen kaphat. A megmaradó 6 könyvet a 34 tanuló között 34^6 féleképpen sorsolhatjuk ki, ha egy tanuló több könyvet is kaphat. Így a kívánt feltételeknek $7 \cdot 34^6$ eset tesz eleget.

4080. Egy könyvet Tóth László kap. A megmaradó 6 könyvet kell kisorsolni 34 tanuló között: A sorsolás sorrendje a könyvek egyenlősége miatt nem számít.

a) $\binom{34}{6} = 1\,344\,904$.

b) $\binom{34+6-1}{6} = 3\,262\,623$.

4081. *a)* Nagy Éva a 7 könyv közül egyet 7 féleképpen kaphat. A megmaradó 6 könyvet a további 34 tanuló között a mondott feltételek mellett $34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ féleképpen lehet kisorsolni. Így $7 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ féle eset lehetséges.

b) A 35-ös létszámú osztályban 7 különböző könyvet 35^7 féleképpen lehet kisorsolni, ha egy tanuló több könyvet is kaphat. Nagy Éva 34^7 esetben nem szerepel a nyertesek között. Így a kívánt feltételeknek $35^7 - 34^7$ eset tesz eleget.

4082. *a)* Legalább 7 zöld lap van a kihúzott lapok között, ha 7 vagy 8 lap zöld: $\binom{8}{7}\cdot\binom{24}{3}+\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2}=16\,468.$

b) 32 lapból 10-et $\binom{32}{10}$ féleképpen választhatunk ki. A kihúzott lapok között nem lehet 8 zöld. Így a kívánt feltételek $\binom{32}{10}-\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2}$ esetben teljesülnek.

4083. Egy sakkozó hat játszmából 4,5 pontot 4 győzelem, 1 döntetlen és egy vereség vagy 3 győzelem és 3 döntetlen játszmával szerezhetett. Ha a sorrendet is figyelembe vesszük, akkor ezt $\frac{6!}{4!}+\frac{6!}{3!\cdot 3!}=50$ féleképpen érhette el.

4084. $\binom{17}{8}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=30\,630\,600.$

4085. $(17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10)\,(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)\,(5\cdot 4\cdot 3)\,(2\cdot 1)=17!.$

4086. Kiss Laci és Nagy Pista együtt lehet a 8 ágyas, a 4 ágyas, a 3 ágyas és a 2 ágyas szobában. Ennek megfelelően az elhelyezkedések száma:

$$\binom{15}{6}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}+\binom{15}{8}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}+$$
$$+\binom{15}{8}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}+\binom{15}{8}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{3}=8\,558\,550.$$

4087. A három tanuló együtt lehet a 8 ágyas, a 4 ágyas és a 3 ágyas szobában. Ennek megfelelően az elhelyezkedések száma:

$$\binom{14}{5}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}+\binom{14}{8}\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}+$$
$$+\binom{14}{8}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{2}=2\,747\,745.$$

4088. A díjakat $20\cdot\frac{19\cdot 18}{2!}\cdot\frac{17\cdot 16\cdot 15}{3!}=2\,325\,600$ féleképpen lehet kiosztani. Közülük $8\cdot\frac{19\cdot 18}{2!}\cdot\frac{17\cdot 16\cdot 15}{3!}=930\,240$ esetben lesz nő az első helyezett.

4089. *a)* $8\cdot 7\cdot 6=336.$

b) $\binom{8}{3}=56.$

4090. 4 pályaművet adott be lány. Két lánynak kell a jutalmazottak között lennie.

a) $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\cdot 3!=144.$

b) $\binom{4}{2}\binom{4}{1}=24.$

4091. A kapott számjegyek lehetnek: 0, 2, 4. Az ötjegyű szám 0-val nem kezdődhet és a 10-zel való oszthatóság miatt az egyesek helyén csak 0 állhat. A keresett ötjegyű számok száma: $2\cdot 3^3\cdot 1=54.$

4092. A kapott számjegyek lehetnek: 0, 2, 4. A szám 0-val nem kezdődhet. A 4-gyel való oszthatóság miatt a két utolsó jegy lehet: 00, 04, 20, 24, 40, 44. A kívánt feltételeknek eleget tevő számok száma: $(2\cdot 3\cdot 3)6=108.$

4093. A kapott számjegyek lehetnek: 0, 2, 4. A kapott ötjegyű számok mindegyike páros, így mind azok oszthatók 6-tal, amelyek 3-mal. Ennek megfelelően a számjegyek lehetnek 0, 0, 0, 2, 4; 0, 0, 2, 2, 2; (a számjegyek összege 6) 0, 2, 2, 4, 4; 0, 0, 4, 4, 4; 2, 2, 2, 2, 4; (a számjegyek összege 12) és 2, 4, 4,4 4, 4 (a számjegyek összege 18). Az ezekből felírható ötjegyű számok száma:

$$\frac{4!}{3!}\cdot 2+\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\frac{4!}{2!}\cdot 2+\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}=54.$$

4094. A kapott számjegyek lehetnek: 0, 2, 4. A szám osztható kell legyen 3-mal és 5-tel. Ennek megfelelően az utolsó számjegy csak 0 lehet, és a számjegyek összege pedig 6, 12 vagy 18. E feltételeket kielégítő számjegyek:

0, 0, 0, 2, 4; 0, 0, 2, 2, 2; 0, 2, 2, 4, 4; 0, 0, 4, 4, 4.

A kívánt feltételeket kielégítő ötjegyű számok száma:

$$2\cdot\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\frac{3!}{2!}=18.$$

4095. A dobott pontok összege lehet 0, 6, 12, 18. Így a dobott pontok lehetnek: 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 2, 4; 0, 0, 2, 2, 2; 0, 2, 2, 4, 4; 0, 0, 4, 4, 4; 2, 2, 2, 2, 4; 2, 4, 4, 4, 4.

A dobások sorrendjét is figyelembe véve:

$$1+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 2!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}=81$$

esetben lehet a dobott pontok összege osztható 3-mal.

4096. Öt dobásból a dobott pontok összege 10, ha a dobások: 4, 4, 2, 0, 0; 4, 2, 2, 2, 0; 2, 2, 2, 2, 2. A dobások sorrendjét is figyelembe véve: $\frac{5!}{2!\cdot 2!}+\frac{5!}{3!}+1=51$.

4097. A 7-es és a 13-as annyi számötösben fordul elő, ahányféleképpen a megmaradó 88 szám közű 3-at még kiválaszthatunk: $\binom{88}{3}=109\,736$.

4098. A lehetséges számötösök száma $\binom{90}{5}=43\,949\,268$. Két rögzített szám $\binom{88}{3}=109\,736$ esetben fordul elő. Ez a lehetséges esetek 0,2497%-a.

4099. *a)* $\binom{24}{6}=134\,596$ féle döntő lehetséges.

b) $24\cdot 23\cdot 22=12\,144$ féleképpen végződhet a verseny.

4100. *a)* $\binom{24}{4}=10\,626$ féle döntő lehetséges.

b) $24\cdot 23\cdot 22=12\,144$ féleképpen végződhet a verseny.

4101. Magyar versenyző végez az első helyen $2\cdot 7!$ esetben, a második helyen $6\cdot 2\cdot 6!$ esetben, illetve a harmadik helyen $6\cdot 5\cdot 2\cdot 5!$ esetben. Tehát az első három hely valamelyikén $2\cdot 7!+6\cdot 2\cdot 6!+6\cdot 5\cdot 2\cdot 5!=25\,920$ esetben végezhet magyar versenyző.

4102. Az ÉRETTSÉGI VIZSGA szó kiolvasásához a bal felső É betűtől indulva 8-at jobbra és 6-ot lefelé kell lépnünk, hogy eljussunk a jobb alsó sarokban lévő A betűhöz. Ezt $\frac{14!}{8!\cdot 6!}=3003$ féleképpen tehetjük meg.

4103. Az É-től az I-ig 8 lépésben juthatunk el úgy, hogy minden lépést lefelé vagy jobbra tehetünk. Két elem nyolcadosztályú ismétléses variációi adják a lehetséges leolvasások számát: $2^8=256$.

4104. x sakkozó játszott. Az $x(x-1)=156$ egyenlet pozitív egész megoldása adja a játékosok számát: $x=13$. A lehetséges sorrend: 13!

4105. x darab 10 filléres, y darab 50 filléres szükséges.
Teljesülni kell az $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ x, y egészek;

$$x+y\geqq 50,$$
$$19x+22y=1000$$

feltétel rendszernek.

$22x+22y\geqq 1100$ — $2\mid 22$ és $2\mid 1000$ $(2, 19)=1$
$19x+22y=1000$ — ezért $2\mid x$, azaz x páros

$3x\geqq 100$ — $19x\leqq 1000$
$x\geqq 34$; — $x\leqq 52$.

Csak $x=48$ esetén lesz $1000-19x$ osztható 22-vel. $x=48$, $y=4$ kielégíti a feltételeket. A sorrendet is figyelembe véve $\frac{52!}{48!\cdot 4!}=270\,725$ féleképpen végezhetjük el a lefedést.

4106. A 4 egy egyenesre illeszkedő pont 1 egyenest, s ezek mindegyike a másik 6 pont mindegyikével egyet-egyet, azaz $4\cdot 6=24$ egyenest, a másik 6 pont $\binom{6}{2}=15$ egyenest határoz meg. Így az egyenesek száma: $1+24+15=40$.

4107. A tiszta kockán bármely két szemközti lapra elhelyezhetjük az 1, 6 számpárt. A 2-es elhelyezése a forgásszimmetria miatt csak egyféleképpen történhet. A 4-es helye ezzel meghatározott. A maradék szemközti lappárra 3, 4 kétféle módon helyezhető el. A megszámozott kockát $6!=720$ módon színezhetjük be. Így $2\cdot 6!=1440$ képpen lehetséges.

4108. 9 ember között $\binom{9}{2}=36$ találkozás lehetséges. Egy alkalommal $\binom{3}{2}=3$ találkozó jön létre. Ezért legalább 12 alkalomnak kell lennie. Egy ember egy alkalommal két emberrel találkozik, ezért legalább 4-szer eleget kell tennie a meghívásnak. Kérdés, megszervezhető-e úgy 12 vacsora, hogy mindenki mindenkivel találkozzon és csak 4-szer vegyen részt a vacsorákon? Vegyünk fel egy 12 soros 9 oszlopos négyzethálót. A sorok mindegyike jelentsen egy-egy vacsora alkalmat, az oszlopok mindegyike jelöljön egy-egy embert.
Az i-ik vacsorára meghívottakat úgy adhatjuk meg, hogy az i-ik sor megfelelő oszlopaiba egy jelet (pl. x) teszünk. Minden sorba 3 x-et kell tennünk. A j-ik és k-ik ember akkor találkozik, ha van olyan sor,

amelyben a j-ik és k-ik helyen x van. Ha minden oszlopban 4 x szerepel, akkor megvalósítható, hogy mindenki csak 4 meghívásnak tegyen eleget. Megkönnyíti a meghívási terv elkészítését, ha azt is észrevesszük, hogy nem szabad 4 x-nek egy téglalap csúcsában szerepelni. Ekkor ugyanis lesz két ember, aki legalább kétszer találkozik. Ez összességében legalább 37 találkozást jelent és így több, mint 12 alkalmat kívánna. Rendszeres próbálgatással ilyen meghívási tervet össze lehet állítani, lásd a megadott megoldást.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	x	x						
x			x			x		
x				x			x	
x					x			x
	x		x				x	
	x			x				x
	x				x	x		
		x	x					x
		x		x		x		
		x			x		x	
			x	x	x			
						x	x	x

4109. A felhasznált számjegyek lehetnek: 1, 2, 3, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 1, 1, 1; 1, 2, 3, 2, 2, 2; 1, 2, 3, 3, 3, 3; 1, 2, 3, 1, 1, 2; 1, 2, 3, 1, 1, 3; 1, 2, 3, 2, 2, 1; 1, 2, 3, 2, 2, 3; 1, 2, 3, 3, 3, 1; 1, 2, 3, 3, 3, 2.
Az ezekből képezhető hatjegyű számok száma:

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}+\frac{6!}{4!}\cdot 3+\frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot 6=540.$$

4110. Az adott 6 számjegyből $5\cdot 6^4$ ötjegyű szám alkotható. A számjegyek különbözők $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ esetben. Legalább egy számjegy ismétlődik: $5\cdot 6^4-5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=5880$ esetben.

4111. Elhelyezzük a piros és kék golyókat.

a) A két piros egymás mellett van (5 eset). 7 helyből 3 helyre nem tehetünk fehéret, s a fennmaradó 4 helyre $\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=20$ · féleképpen tehetjük le a fehéreket.
Így $5\cdot 20=100$ eset lehet.

b) A két piros nincs egymás mellett (10 eset). Ebben az esetben a 7 helyből 4 helyre nem tehetünk fehéret, s a fennmaradó 3 helyre $\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$ féleképpen tehetjük le a fehéreket.
Így $10\cdot 10=100$ eset lehet.
A megoldást az *a)* és *b)* eset összege adja: $100+100=200$.

4112. $[10^5(1+2+3+4+5+6)+10^4(1+2+3+4+5+6)+$
$+10^3(1+2+3+4+5+6)+10^2(1+2+3+4+5+6)+$
$+10(1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5+6)]\cdot 5!=279\ 999\ 720.$

4113. A győzelmet jelölje g, a döntetlent d, a vereséget v. 8 forduló után 6 pont úgy jöhet létre, hogy van:
ggggggvv; gggggddv; ggggdddd. A sorrendet is figyelembe véve:

$$\frac{8!}{6!\cdot 2!}+\frac{8!}{5!\cdot 2!}+\frac{8!}{4!\cdot 4!}=266$$

féleképpen jöhet létre ez az eredmény.

4114. A következő kiosztási típusok lehetségesek, mellette feltüntetve, hogy az hányszor fordul elő.

3 gyerek kap azonos gyümölcsöt (a kezdőbetűkkel jelöljük):
kk bb ss ak 24

2 gyerek kap azonos gyümölcsöt:
kk bb ks as 24
kk ss kb ab 24

1 gyerek kap azonos gyümölcsöt:
kk ak bs bs 12
kk ab sk sb 24
kk as bk bs 24
bb ks ks ka 12
ss kb kb ka 12

senki nem kap azonos gyümölcsöt:

ks	kb	kb	as	12
ks	ks	kb	ab	12
kb	ks	ka	bs	24
				204 eset.

4115. *a)* Az $A+B$ esemény az 1, 2, 3, 5 dobását jelenti.
b) Az $A-B$ esemény az 5 dobását jelenti.
c) A $B-A$ esemény az 1 dobását jelenti.
d) Az $A \cdot B$ esemény a 2, 3 dobását jelenti.

4116. *a)* Az $A+B$ esemény az 1, 2, 3, 4, 5, 6 dobását jelenti. (Biztos esemény.)
b) Az $A-B$ esemény az 1, 2, 3 dobását jelenti.
c) A $B-A$ esemény az 5, 6 dobását jelenti.
d) Az $A \cdot B$ esemény a 4 dobását jelenti.

4117. *a)* Az $A+B$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott lap zöld vagy kilences.
b) Az $A-B$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott lap a zöld kilences kivételével valamelyik zöld.
c) A $B-A$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott lap a piros, tök vagy makk kilences valamelyike.
d) Az $A \cdot B$ esemény bekövetkezése a zöld kilences kihúzását jelenti.

4118. Az $(A-B)-C$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott lap makk, a makk nyolcas és a makk király kivételével.
b) Az $(A-B) \cdot C$ esemény a makk király kihúzását jelenti.

4119. *a)* Az $(A+B)+C$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kihúzott lap zöld, vagy makk, vagy piros, illetve tök alsó, felső, király, ász.
b) Az $(A \cdot B) \cdot C$ esemény egyetlen lap kihúzásával sem következhet be. (Lehetetlen esemény.)

4120. *a)* Az $A-B$ esemény azt jelenti, hogy a kihúzott lap ász.
b) Az $A-C$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kihúzott lap a zöld, makk vagy tök ász valamelyike.
c) $(B-A) \cdot C$ esemény bekövetkezése a piros király kihúzását jelenti.
d) Az $\bar{A} \cdot B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kihúzott lap király.

4121. *a)* Az $A+B$ esemény a csupa páros, illetve a csupa páratlan számból álló számötös kihúzását jelenti.
b) Az $A-B$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott öt szám mindegyike páros.

c) A $B-A$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott öt szám mindegyike páratlan.
d) Az $\bar{A} \cdot B$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott öt szám mindegyike páratlan.

4122. *a)* Az $(A+B) \cdot C$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott öt szám: 1, 7, 11, 49, 64.
b) Az $(A+B) \cdot \bar{C}$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott öt szám között szerepel a 7, 49 vagy az 1, 11, de nem az 1, 7, 11, 49, 64 számötöst húzzák ki.

4123. *a)* Az $A-B$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott számok között szerepel az 1, 2, 4, 5, 7, 8 valamelyike, de nem szerepel 3-mal osztható szám.
b) A $B \cdot C$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott öt szám mindegyike ötre végződik és közülük legalább egy 3-mal osztható.
c) A $D-A$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott számok mindegyike 20-nál kisebb kétjegyű szám.
d) Az $A \cdot D$ esemény akkor következik be, ha a kihúzott számok mindegyike 20-nál kisebb és legalább 1 egyjegyű.

4124. *a)* Az $A+B$ esemény akkor következik be, ha az egyik kockával páros számot, vagy mindkét kockával ugyanazt a számot dobjuk.
b) Az $A-B$ esemény akkor következik be, ha az egyik kockával páros számot, a másikkal pedig ettől különböző számot dobunk.
c) Az $A \cdot B$ esemény a (2; 2), (4; 4) és a (6; 6) számpárok dobását jelenti.
d) Az $(A+B) \cdot B$ esemény akkor következik be, ha mindkét kockával ugyanazt a számot dobjuk.

4125. *a)* Az $A+B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a dobott pontok összege 3, 5, 7, 11, 13, 17 vagy a kapott számok közül legalább az egyik kettes.
b) Az $A \cdot B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a dobott számok összege prím, s szerepel köztük legalább egy kettes. Ilyen számhármasok lehetnek: (1; 2; 2), (1; 2; 4), (2; 2; 3), (2; 3; 6), (2; 5; 6), (2; 1; 2) stb.

4126. *a)* Az $A-B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kiválasztott négy szám között nem szerepel a 0, és az 1-es ha szerepel, akkor nem egyszer.
b) A $B-A$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kiválasztott négy szám között pontosan egy 1-es van és szerepel köztük a 0.

c) Az $A \cdot B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kiválasztott négy szám között nem szerepel a 0 és pontosan egy 1-es van köztük.
d) Az $\bar{A} \cdot B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kiválasztott négy szám között szerepel a 0 és pontosan egy 1-es van.

4127. A 15 cédulát 15! féle sorrendben húzhatjuk ki. Az ÉRETTSÉGI VIZSGA szót $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ esetben kapjuk. A keresett valószínűség így: $\frac{2^5}{15!}$.

4128. Az 1400 darab kulcs közül 20 darabot $1400 \cdot 1399 \cdot 1398 \ldots 1381$ féleképpen választhatunk ki.
a) Nem lesz köztük selejtes, ha valamennyi az 1350 darab hibátlan közül választjuk: $1350 \cdot 1349 \cdot 1348 \cdot \ldots 1331$.
A keresett valószínűség: $\frac{1350 \cdot 1349 \cdot 1348 \cdot \ldots \cdot 1331}{1400 \cdot 1399 \cdot 1398 \cdot \ldots \cdot 1381}$.
b) A selejtesek száma lehet 0, 1, 2, 3. Ez

$$1350 \cdot 1349 \cdot 1348 \cdot \ldots \cdot 1331 + 1350 \cdot 1349 \cdot 1348 \cdot \ldots \cdot 1332 \cdot 50 \binom{20}{1} +$$

$$+ 1350 \cdot 1349 \cdot 1348 \cdot \ldots \cdot 1333 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \binom{20}{2} +$$

$$+ 1350 \cdot 1349 \cdot 1348 \cdot \ldots \cdot 1334 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \binom{20}{3}$$

-féleképpen következhet be.
A keresett valószínűség:

$$\frac{1350 \cdot 1349 \cdot \ldots \cdot 1331 + 1350 \cdot 1349 \cdot \ldots \cdot 1332 \cdot 50 \cdot 20 +}{1400 \cdot 1399 \cdot \ldots \cdot 1381}$$

$$+ \frac{1350 \cdot 1349 \cdot \ldots \cdot 1333 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 190 + 1350 \cdot 1349 \cdot \ldots \cdot 1334 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 1080}{1400 \cdot 1349 \cdot \ldots \cdot 1381}.$$

4129. A lehetséges esetek száma: $6^3 = 216$.
Kedvező, ha a dobott pontok $6+3+1$, $6+2+2$, $5+4+1$, $5+3+2$, $4+4+2$, $4+3+3$. Ezek rendre

$$3! + \frac{3!}{2!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 27$$

féleképpen adódhatnak.
A keresett valószínűség: $\frac{27}{216} = 0{,}125$.

4130. A lehetséges esetek száma: $6^2 = 36$.
A kedvező esetek: 12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66.
A keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

4131. A húzás során a kihúzott cédulákat nem tesszük vissza. Így a lehetséges esetek száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
a) 9-cel osztható, ha a kihúzott számok: 8, 6, 4. Ezeket $3! = 6$ féle sorrendben húzhatjuk ki.
A keresett valószínűség tehát: $\frac{6}{60} = 0{,}1$.
b) A kedvező esetek száma ugyanaz lesz, mint az *a)* esetben. Így a keresett valószínűség is 0,1.

4132. A sorsolás során a kihúzott cédulákat nem tesszük vissza. Így a lehetséges esetek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
6-tal osztható lesz a szám, ha a számjegyek összege osztható 3-mal, azaz a kihúzott számok lehetnek: $0+2+4$, $0+4+8$, $2+4+6$, $4+6+8$. Ezeket rendre 3! féle sorrenben húzhatjuk ki. (0-val is kezdődhet, mert a szövegben nem szerepel „háromjegyű szám".)
A keresett valószínűség: $\frac{4 \cdot 3!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0{,}4$.

4133. A lehetséges esetek száma: 10^6, a kedvezőké $\binom{10+6-1}{6} = 5005$.
A keresett valószínűség: $\frac{5005}{10^6} = 0{,}005\,005$.

4134. A lehetséges esetek száma: $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25$.
a) Kedvező, ha a kihúzott lapok között nincs 7, illetve 8 piros:
$32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25 - 8! - 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 24 \cdot 8$.
A keresett valószínűség:

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25 - 8! - 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 24 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25}.$$

b) A piros hetes $8 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25$ esetben lesz a kihúzott lapok között.
A keresett valószínűség: $\frac{8 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 25}{32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 25} = \frac{1}{4}$.
Másképpen: $\frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{4}$.

4135. A lehetséges esetek száma: 10!, a kedvezőké $2(5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1)$.

A keresett valószínűség: $\frac{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{10!} = \frac{1}{126}$.

4136. A lehetséges esetek száma 9^4, a kedvezőké 1. A keresett valószínűség: $\frac{1}{9^4} = 0{,}000\,152$.

4137. A dobott pontok összege 5 dobás esetén 5, 3, 1, -1, -3, -5 lehet, tehát mindig páratlan. Így a keresett valószínűség: 1.

4138. Kedvező, ha a dobott pontok:

$-1, -1, -1, -1, 0$; $-1, -1, -1, +1, 0$; $-1, -1, 0, 0, 0$;
$-1, -1, +1, +1, 0$; $-1, +1, 0, 0, 0$; $0, 0, 0, 0, 0$;
$+1, +1, 0, 0, 0$; $+1, +1, +1, -1, 0$; $+1, +1, +1, +1, 0$.

Ezeket rendre

$$\frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{3!} + 1 + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} = 121$$

féleképpen kaphatjuk.

A lehetséges esetek száma $3^5 = 243$. A keresett valószínűség: $\frac{121}{243} = 0{,}4979$.

4139. A keresett valószínűség: $\frac{6^4}{6^5} = \frac{1}{6}$.

4140. A kapott ötjegyű szám akkor osztható 4-gyel, ha 12-, 16-, 24-, 32-, 36-, 44-, 52-, 56- vagy 64-re végződik. Mindegyiket 6^3 féleképpen kaphatjuk. Így a kedvező esetek száma $9 \cdot 6^3$, a lehetségeseké 6^5. A keresett valószínűség $\frac{9 \cdot 6^3}{6^5} = 0{,}25$.

4141. A lehetséges esetek száma $6^3 = 216$.

Kedvező esetet kapunk, ha a dobott pontok: 1, 1, 1; 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2; 6, 1, 2; 5, 2, 2; 5, 1, 3; 4, 1, 4; 4, 2, 3; 3, 3, 3; 4, 4, 4; 6, 1, 5; 6, 2, 4; 6, 3, 3; 5, 2, 5; 5, 3, 4; 6, 6, 3; 6, 4, 5; 5, 5, 5; 6, 6, 6. Ezek $6 \cdot 1 + 8 \cdot 3! + 6 \cdot \frac{3!}{2!} = 72$ féle dobássorozattal adódhatnak. A keresett valószínűség: $\frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.

4142. Kedvező esetet a 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 61, 62 dobása jelent. Ez 25 eset.

A lehetséges esetek száma $6^2 = 36$. A keresett valószínűség: $\frac{26}{36}$.

4143. A lehetséges esetek száma: $6^2 = 36$.

Kedvező a dobás, ha 11, 12, 14, 16, 21, 23, 25, 32, 34, 41, 43, 52, 56, 61, 65 számpárokat kapjuk. Ez 15 eset. A keresett valószínűség: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

4144. A lehetséges esetek száma: $6^3 = 216$.

Kedvező a dobás, ha 111, 113, 115, 122, 124, 131, 133, 142, 146, 151, 155, 164, 166, 212, 214, 221, 223, 232, 236, 241, 245, 254, 256, 263, 265, 311, 313, 322, 326, 331, 335, 344, 346, 353, 355, 362, 364, 412, 416, 421, 425, 434, 436, 443, 445, 452, 454, 461, 463, 511, 515, 524, 526, 533, 535, 542, 544, 551, 553, 562, 566, 614, 616, 623, 625, 632, 634, 641, 643, 652, 656, 661, 665 számhármasokat kapjuk. Ez 73 eset. A keresett valószínűség: $\frac{73}{216}$.

4145. A dobókockán szereplő prímszámok: 2, 3, 5. Kedvező esetek száma $3^3 = 27$, a lehetségeseké $6^3 = 216$. A keresett valószínűség: $\frac{27}{216} = 0{,}125$.

4146. A kapott számok összege 15, ha a dobott számok 6, 6, 3; 6, 5, 4; 5, 5, 5. Ezeket rendre $\frac{3!}{2!} + 3! + 1 = 10$ féleképpen kaphatjuk. A lehetséges esetek száma: $6^3 = 216$. A keresett valószínűség: $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

4147. A lehetséges esetek száma: 2^{10}.

a) A számjegyek összegének 3-mal való oszthatóságát az dönti el, hogy hány 2-es szerepel a felírt számban.

A kettesek száma lehet 0, 3, 6, 9. Ezek rendre $1 + \frac{10!}{3! \cdot 7!} + \frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{10!}{9!} = 341$ féleképpen következhetnek be. A keresett valószínűség: $\frac{341}{1024} = 0{,}333$.

b) A számjegyek összege 20 és 30 közé esik, ebből következik, hogy csak 27 lehet. Kedvező tehát az az eset, amikor a számjegyek 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 lesznek. Ezekkel a számjegyekkel $\frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ különböző tízjegyű számot lehet felírni. A keresett valószínűség: $\frac{120}{1024} = \frac{15}{128}$.

4148. A lehetséges esetek száma: $9 \cdot 10^4$. A kedvező esetek száma 10^3. A keresett valószínűség: $\frac{1000}{90\,000} = \frac{1}{90}$.

4149. A lehetséges esetek száma 6^6, a kedvezőké pedig 6!. A keresett valószínűség: $\frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}$.

4150. A lehetséges esetek száma: $\binom{30}{15}$, a kedvezőké $\binom{15}{5} \cdot \binom{15}{10}$.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{15}{5} \cdot \binom{15}{10}}{\binom{30}{15}}$.

4151. A lehetséges esetek száma: $\binom{20}{10}$, a kedvezőké $\binom{18}{8}$. (A kiválasztás sorrendjétől eltekinthetünk, mert a hányados értéke ugyanaz lesz.)

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{18}{8}}{\binom{20}{10}} = \frac{9}{38}$.

4152. Az első húzás adja még azt, hogy másodszorra melyik lap érdekel bennünket. Mivel bármelyik lap húzása egyenlően valószínű, így a keresett valószínűség: $\frac{1}{32}$.

4153. Lehetséges esetek száma: 6^5. A kedvező esetek száma: 6. A keresett valószínűség: $\frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}$.

4154. A lehetséges esetek száma $\binom{32}{5}$, a kedvezőké $\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{2}$. (A hányados értéke nem változik, hogy a kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe.)

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{69}{899}$.

4155. A lehetséges esetek száma 32^5.

Az öt húzásból a nyolcasok helyét $\binom{5}{3}$ féleképpen választhatjuk ki.

Egy-egy kiválasztás mellett a lapokat $4^3 \cdot 28^2$ féleképpen húzhatjuk ki.

A kedvező esetek száma tehát: $\binom{5}{3} \cdot 4^3 \cdot 28^2$. A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{5}{3} \cdot 4^3 \cdot 28^2}{32^5} = \frac{490}{32\,768}.$$

4156. A lehetséges esetek száma: 32^5.

Kedvező a húzás, ha a kihúzott lapok között 3, 4 vagy 5 piros lap szerepel. Ezeknek az eseteknek a száma:

$$8^3 \cdot 24^2 \cdot \binom{5}{3} + 8^4 \cdot 24 \cdot \binom{5}{4} + 8^5 \cdot \binom{5}{5} = 3\,473\,408.$$

A keresett valószínűség: $\frac{3\,473\,408}{32^5} = 0{,}1035$.

4157. Kedvezőtlen a húzás eredménye, ha a kihúzott lapok között 4 vagy 5 piros lap szerepel. Ezek száma:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 24 \cdot \binom{5}{1} + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 208\,320.$$

A lehetséges esetek száma: $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,165\,120$.

A keresett valószínűség: $1 - \frac{208\,320}{24\,165\,120} = 0{,}99\,138$.

4158. A lehetséges esetek száma: $\binom{90}{5}$.

a) A kedvező esetek száma: $\binom{87}{2} + \binom{87}{2} - 1$.

Az $A + B$ esemény bekövetkezésének a valószínűsége:

$$\frac{\binom{87}{2} \cdot 2 - 1}{\binom{90}{5}} = 0{,}00\,017.$$

b) Az $A \cdot B$ esemény bekövetkezése a 4, 9, 16, 25, 36 számok kihúzását jelenti.

A keresett valószínűség: $\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268}$.

4159. A lehetséges esetek száma: $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

A 90 szám között 24 prímszám és 30 hárommal osztható szám van. E két halmaznak egy közös eleme van, a 3.

a) A kedvező esetek száma:

$$\binom{24}{2} \cdot \binom{66}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{60}{3} - \left[\binom{23}{1} \cdot \binom{29}{1} \cdot \binom{37}{2} + \right.$$
$$\left. + \binom{23}{2} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{37}{1}\right] = 23\,270\,672.$$

A keresett valószínűség: $\frac{23\,270\,672}{43\,949\,268} = 0{,}5295.$

b) A $A \cdot B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy a kihúzott öt szám közül kettő prímszám, kettő hárommal osztható. A kedvező esetek száma:

$$\binom{23}{1} \cdot \binom{29}{1} \cdot \binom{37}{2} + \binom{23}{2} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{37}{1} = 4\,244\,788.$$

A keresett valószínűség: $\frac{4\,244\,788}{43\,949\,268} = 0{,}0966.$

4160. A lehetséges esetek száma $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

a) $\bar{A}$ bekövetkezése azt jelenti, hogy a kihúzott számok között nincs páratlan. Ez $\binom{45}{5}$ féleképpen következhet be. A B esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy mind az öt szám osztható öttel. Ez $\binom{18}{5}$ féleképpen következhet be.

$\bar{A} + B$ esemény $\binom{45}{5} + \binom{18}{5} - \binom{9}{5}$ féleképpen következhet be. (Azokat az eseteket kétszer számoltuk, amikor mind az öt számot az öttel osztható páros számok közül húztuk.)

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{45}{5} + \binom{18}{5} - \binom{9}{5}}{\binom{90}{5}} = 0{,}028.$

b) $\bar{A} \cdot B$ bekövetkezése azt jelenti, hogy a kihúzott öt szám az öttel osztható páros számok közül kerül ki. Ez $\binom{9}{5}$ féleképpen történhet.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{9}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{126}{43\,949\,268}$.

4161. A sorsolás sorrendjét is figyelembe véve a lehetséges esetek száma: 12!.

A kedvező esetek száma $3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \binom{10}{2} \cdot 2 \cdot 8!$

A keresett valószínűség: $\frac{3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \binom{10}{2} \cdot 2 \cdot 8!}{12!} = \frac{3}{11}$.

4162. A lehetséges esetek száma: 14!

A kedvező esetek száma:

3 személyes szobába: $3! \cdot 11!$

4 személyes szobába: $\binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 11!$

5 személyes szobába: $\binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 11!$

Így a keresett valószínűség:

$$\frac{3! \cdot 11! + \binom{4}{3} \cdot 3! \cdot 11! + \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 11!}{14!} = \frac{15}{364}.$$

4163. Páros számot 0+0, 0+2, 1+1 formában kapunk. Mindegyik eset valószínűsége $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Ezek páronként kizáró események, így a keresett valószínűség: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

4164. A lehetséges esetek száma: $30 \cdot 29 \cdot 28$, a kedvező eseteké: $10 \cdot 10 \cdot 10$.

A keresett valószínűség: $\frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{30 \cdot 29 \cdot 28} = 0{,}041$.

4165. Egy-egy szín nem szerepel $\binom{20}{12}$ esetben. Így a kedvező esetek száma: $\binom{30}{12} - 3 \cdot \binom{20}{12}$, a lehetségeseké: $\binom{30}{12}$.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{30}{12} - 3 \cdot \binom{20}{12}}{\binom{30}{12}} = 0{,}9956$.

4166. A lehetséges esetek száma: $3^4 = 81$.

A kedvező esetek száma: $\binom{3}{1} \cdot \frac{4!}{2!} = 36$.

A keresett valószínűség: $\frac{36}{81} = 0{,}444$.

4167. A lehetséges esetek száma $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Kedvező a húzás eredménye, ha a kihúzott cédulán 7, 8, 9 vagy 10 áll. Ezek bekövetkezése 4! féleképpen történhet.

A keresett valószínűség: $\frac{4!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{5040}$.

4168. A lehetséges esetek száma: 10^4. Kedvező esetet akkor kapunk, ha a kihúzott cédulán minden esetben 7, 8, 9 vagy 10 áll. Ezek száma 4^4, hisz a kihúzott cédulákat a húzás után visszatesszük.

Így a keresett valószínűség: $\frac{4^4}{10^4} = 0{,}0256$.

4169. Egyetlen találatunk sincs, ha a kihúzott öt szám közül egy sem szerepel a szelvényen. Ez $\binom{85}{5}$ féle esetben következhet be. A lehetséges esetek száma: $\binom{90}{5}$.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} = 0{,}7463$.

4170. A lehetséges esetek száma: $(6 \cdot 6)^{10}$.

Két hatos dobása nem szerepel a dobások között $(6 \cdot 6 - 1)^{10}$.

Így a keresett valószínűség: $\frac{(6 \cdot 6)^{10} - (6 \cdot 6 - 1)^{10}}{(6 \cdot 6)^{10}} = 0{,}2455$.

4171. A lehetséges esetek száma: $\binom{100}{10}$.

A hibás barackok száma 0, 2, 4, 6, 8 vagy 10, ha ennyit rendre a 10 hibás barack közül választunk ki. A kedvező esetek száma ennek megfelelően:

$$\binom{10}{0} \cdot \binom{90}{10} + \binom{10}{2} \cdot \binom{90}{8} + \binom{10}{4} \cdot \binom{90}{6} + \binom{10}{6} \cdot \binom{90}{4} + \binom{10}{8} \cdot \binom{90}{2} + \binom{10}{10} \cdot \binom{90}{0}.$$

A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{90}{10} + \binom{10}{2} \cdot \binom{90}{8} + \binom{10}{4} \cdot \binom{90}{6} + \binom{10}{6} \cdot \binom{90}{4} + \binom{10}{8} \cdot \binom{90}{2} + \binom{10}{10} \cdot \binom{90}{0}}{\binom{100}{10}}$$

4172. A lehetséges esetek száma: $\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}$.

A kedvező esetek száma: $4\cdot\binom{28}{4}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{4\cdot\binom{28}{4}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}} = 0{,}007\,786.$

4173. A lehetséges esetek száma: $\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}$.

Kedvező esetek száma: $\binom{28}{4}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{28}{4}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}} = 0{,}0\,019\,466.$

4174. A lehetséges esetek száma: $9!$.

a) Csak az *fpfpfpfpf* elrendezés jó. Ezt $5!\cdot 4!$ esetben kapjuk. A keresett valószínűség: $\dfrac{5!\cdot 4!}{9!} = 0{,}007\,937.$

b) Bármely két piros golyó között legalább egy fehér golyó van. A *pfpfpfp* elrendezésből kiindulva úgy kapjuk meg az összes elrendezést, hogy a kimaradó két fehér golyót a pirosak elé, mögé, illetve két piros közé tesszük. Ez

$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$ módon lehetséges.

A 15 különböző szerkezetben az azonos színű golyókat egymásközt permutálva a kedvező esetek mindegyikét pontosan egyszer kapjuk meg. A kedvező esetek száma tehát: $15\cdot 4!\cdot 5!$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{15\cdot 4!\cdot 5!}{9!} = 0{,}119.$

4175. A verseny első helyezettje az 50 tanuló közül bárki lehet. Kedvező számunkra, ha a 7 IV. osztályos tanuló közül valaki végez az első helyen.

A keresett valószínűség: $\dfrac{7}{50} = 0{,}14.$

4176. A verseny első helyezettje a 16 tanuló közül bárki lehet. Kedvező számunkra, ha a 4 lány közül valaki végez az első helyen.

A keresett valószínűség: $\dfrac{4}{16} = 0{,}25.$

4177. Az első két hely szempontjából a lehetséges esetek száma: $16\cdot 15$, a kedvezőké pedig $1\cdot 2$.

Így a keresett valószínűség: $\dfrac{1\cdot 2}{16\cdot 15} = 0{,}00\,833.$

4178. A 6 óra mindegyikén 4 tanuló $35\cdot 34\cdot 33\cdot 32$ féleképpen kerülhet sorra a felelésben. Így a lehetséges esetek száma: $(35\cdot 34\cdot 33\cdot 32)^6$.

Szabó László a 6 tárgyból 2-n $\binom{6}{2}$ féleképpen kerülhet sorra. Egy-egy órán a felelete $4\cdot 34\cdot 33\cdot 32$ féleképpen következhet be. A másik 4 órán ő már nem felel. Így a kedvező esetek száma:

$\binom{6}{2}(4\cdot 34\cdot 33\cdot 32)^2(34\cdot 33\cdot 32\cdot 31)^4$.

A keresett valószínűség: $\dfrac{\binom{6}{2}(4\cdot 34\cdot 33\cdot 32)^2(34\cdot 33\cdot 32\cdot 31)^4}{(35\cdot 34\cdot 33\cdot 32)^6} = 0{,}1206.$

4179. A lehetséges esetek száma: $\binom{9}{2} = 36.$

Két egyforma színű golyót a pirosak és fehérek körül választhatunk.

A kedvező esetek száma: $\binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 13.$

A keresett valószínűség: $\dfrac{13}{36}$.

4180. Annak a valószínűsége, hogy az első dobozból piros golyót húzunk: $\dfrac{3}{8}$,

és annak, hogy a másodikból: $\dfrac{7}{10}$.

A két esemény egymástól független, így a keresett valószínűség:

$\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{7}{10} = \dfrac{21}{80}$.

4181. A lehetséges esetek száma: $6 \cdot 6 = 36$.
Kedvező a dobás, ha a dobott pontok összege 2, 3, 4. Ezek az 1, 1; 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 2 dobáseredményekkel következhetnek be, számuk 6.

Így a keresett valószínűség: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

4182. A lehetséges esetek száma $6^3 = 216$.
a) 15 pont $6+6+3$, $6+5+4$, $5+5+5$ bontásban 10 esetben adódik.

15 pont dobásának a valószínűsége $\frac{10}{216}$.

k kísérletből pontosan egyszer 15 pont dobásának a valószínűsége:

$$k \cdot \frac{10}{216} \cdot \left(\frac{206}{216}\right)^{k-1}.$$

Minden k pozitív egészre $\frac{1}{2}$-nél kisebb a helyettesítési érték, így nincs olyan kísérletszám, amire a keresett valószínűség nagyobb vagy egyenlő lenne 0,5-nél.
b) 16 pont $6+6+4$ bontásban 3 esetben,
$6+5+5$ bontásban 3 esetben,
17 pont $6+6+5$ bontásban 3 esetben,
18 pont $6+6+6$ bontásban 1 esetben adódik.
206 esetben lesz a dobott pontok összege 16-nál kisebb. Annak valószínűsége, hogy k kísérlet során egyszer sem lesz a dobott pontok összege 15-nél nagyobb $\left(\frac{206}{216}\right)^k$.
Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 15-nél nagyobb lesz a dobott pontok összege:

$$1 - \left(\frac{206}{216}\right)^k.$$

Az $1 - \left(\frac{206}{216}\right)^k \geqq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldása $k \geqq 15$.

4183. Annak a valószínűsége, hogy az első k dobás írás, a $k+1$-edik fej $\frac{1}{2^k}$ $(0 \leqq k \leqq 10)$, annak a valószínűsége, hogy mind a 10 dobás írás, $\frac{1}{2^{10}}$,

ezért a várható érték:

$$\frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \frac{5}{64} + \frac{6}{128} + \frac{7}{256} + \frac{8}{512} + \frac{9}{1024} + \frac{10}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

4184. A lehetséges esetek száma: $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$.
a) Minden húzásnál különböző színű lapot húzhatunk $32 \cdot 24 \cdot 16 \cdot 8$ esetben.

A keresett valószínűség: $\frac{32 \cdot 24 \cdot 16 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = 0{,}1139$.

b) Minden húzásnál különböző értékű lapot $32 \cdot 28 \cdot 24 \cdot 20$ esetben húzhatunk.

A keresett valószínűség: $\frac{32 \cdot 28 \cdot 24 \cdot 20}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = 0{,}498$.

c) Minden húzásnál különböző színű és különböző értékű lapot $32 \cdot 21 \cdot 12 \cdot 5$ esetben húzhatunk.

A keresett valószínűség: $\frac{32 \cdot 21 \cdot 12 \cdot 5}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = 0{,}0467$.

4185. A lehetséges esetek száma 9!, a kedvezőtleneké pedig 1.

Így a keresett valószínűség: $\frac{9!-1}{9!} = 0{,}99\,999\,72$.

4186. A lehetséges esetek száma a visszatevés miatt 9^9. Egyetlen számjegy sem kerül a maga helyére 8^9 esetben. Így a keresett valószínűség:

$$1 - \frac{8^9}{9^9}.$$

4187. A feladat szövege feltehetően úgy értendő, hogy:
A esemény: egy kiválasztott játékos nem kap ászt
B esemény: a kiválasztott játékossal szemközti játékos nem kap ászt.
Kérdés, mennyi a B esemény A eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége.
Ez közvetlenül is kiszámítható: a kívánt feltételek mellett a „szemközti" játékos $\binom{20}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}$ féleképpen kaphatja lapjait. Ugyanakkor most már a három játékost tekintve a lapokat $\binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}$ féleképpen oszthatjuk ki.

A keresett valószínűség: $\frac{\binom{20}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}}{\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}} = \frac{390}{2277} = 0{,}171\,278.$

4188. A lehetséges esetek száma: $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550$.

a) A kedvező esetek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

A keresett valószínűség: $\frac{720}{17\,550} = 0{,}041$.

b) A kedvező esetek száma az *a)* esetben szereplő kedvező esetek 3!-szorosa lesz, mert a három szín más sorrendje is jó.

A keresett valószínűség: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3!}{27 \cdot 26 \cdot 25} = 0{,}246$.

4189. Annak valószínűsége, hogy az

1. és 2. urnából kéket húzunk: $\frac{4}{9} \cdot \frac{8}{10}$,

1. urnából kéket, a másodikból fehéret: $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{10}$,

1. urnából fehéret, a 2.-ból kéket: $\frac{5}{9} \cdot \frac{8}{10}$.

A 3. urnából való húzást figyelembe véve, a keresett valószínűség:
$\frac{4}{9} \cdot \frac{8}{10} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}62$.

4190. A lehetséges esetek száma: 2^{10}.

Kedvezőek a dobások 2 esetben, ha mind fej, vagy mind írás.

A keresett valószínűség: $\frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{512}$.

4191. *a)* A lehetséges esetek száma: $21 \cdot 20 \cdot 19$, a kedvezőké pedig $6 \cdot 5 \cdot 4$.
Így a keresett valószínűség:

$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{21 \cdot 20 \cdot 19} = 0{,}01\,504$.

b) A lehetséges esetek száma visszatevés mellett 21^3, a kedvezőké 6^3.

Így a keresett valószínűség: $\frac{6^3}{21^3} = 0{,}02\,332$.

4192. *a)* Csak a fiókot kell eltalálni: $P = \frac{1}{2}$.

b) A jó fiókon belül $\frac{1}{2}$ a valószínűsége annak, hogy a jó dobozt választjuk.

A keresett valószínűség: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{3}$ a valószínűsége annak, hogy az érmés doboz egyedül van, s $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, hogy eltaláljuk azt a fiókot. Annak a valószínűsége, hogy az érmés doboz egyedül van egy fiókban, s azt eltaláljuk: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

$\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy az érmés doboz egy másikkal van együtt, s $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy ezt a fiókot választjuk és ezen belül az érmés dobozt. Ennek az esetnek a valószínűsége: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

A keresett valószínűség: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

4193. A feladat ekvivalens a következővel:
Egy urnában n számú 5 Ft-os és n számú 10 Ft-os van. Találomra kivesszük az érméket az urnából. Mennyi a valószínűsége, hogy a kivett 5 Ft-osok száma minden pillanatban nagyobb vagy egyenlő mint a 10 Ft-osok száma?
Jelöljük ezt a valószínűséget p-vel.
A komplementer esemény azt jelenti, hogy van olyan pillanat, amikor a kihúzott 10 Ft-osok száma nagyobb, mint az 5 Ft-osoké. Tegyünk minden ilyen sorozat elé egy 5 Ft-os érmét. Ekkor azt kell vizsgálni, mikor olyan a helyzet, amikor a 10 Ft-osok száma egyenlő az 5 Ft-osok számával. Tegyünk az urnába még egy 5 Ft-os érmét. ha 5 Ft-ossal kezdünk, akkor $1-p$ annak a valószínűsége, hogy bekövetkezik olyan helyzet, amikor egyenlő számú 5 és 10 Ft-os van. Vizsgáljuk a 10 Ft-osokkal kezdődő sorozatokat. Mivel 5 Ft-osból több van, ezért biztosan bekövetkezik olyan helyzet, amikor ugyanannyi kihúzott 5 Ft-os és 10 Ft-os van. Minden sorozatban keressük meg azt a pillanatot, amikor ez először bekövetkezik. Fordítsuk meg a sorozatnak ezt a részét, a

720, KÉT 020

többi érmét változatlanul hagyva tartsuk meg. Így olyan sorozatot kapunk, amely 5 Ft-ossal kezdődik, és lesz amikor ugyanannyi 5 és 10 Ft-os érme lesz kivéve.

Ezzel az eljárással egy egyértelmű megfeleltetés létesíthető az olyan az 5 Ft-os és 10 Ft-os érmével kezdődő sorozatok között, amelyekben van olyan helyzet, amikor az addig kivett érmék egyenlő számú 5 és 10 Ft-ost tartalmaznak.

A 10 Ft-ossal kezdődő sorozatok száma $\binom{2n}{n-1}$.

Az 5 Ft-ossal kezdődő összes sorozatok száma $\binom{2n}{n}$.

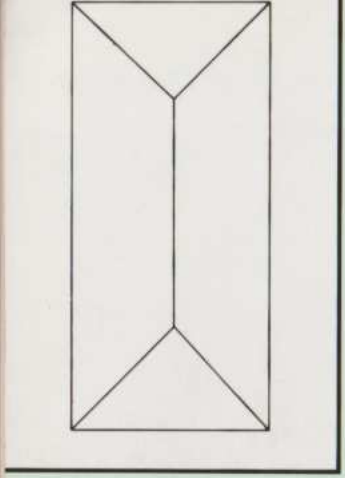
Ezért

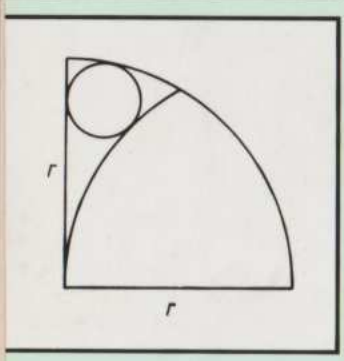
$$1-p=\frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}}=\frac{n}{n+1},$$

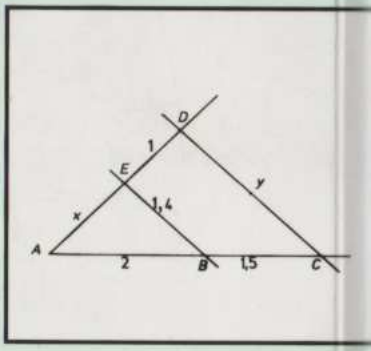
azaz

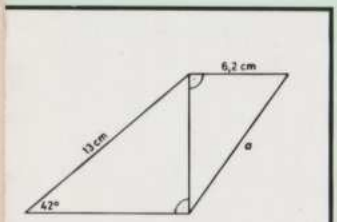
$$p=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. A kiadásért felel: dr. Ábrahám István vezérigazgató. Raktári szám: 81 367/II. Utánnyomásra előkészítette: Füleki Lászlóné. Műszaki vezető: Babicsné Vasvári Etelka igazgatóhelyettes. Műszaki szerkesztő: Wéber Andrea. Terjedelem: 32,73 (A/5) ív. 13. kiadás, 2001. Nyomtatta és kötötte a Kaposvári Nyomda Kft. – 201122. Felelős vezető: Pogány Zoltán igazgató









9 789631 913187